الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

بحوث العمليات

م. سنا بي أوغلو

الأكاديمية العربية الدولية – منصة أعد

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

محاور المحاضرة

- المفاهيم الأساسية
- البرمجة الخطية- الصياغة الرياضية
- البرمجة الخطية – الحل البياني

المفاهيم الأساسية

يمكن تعريف مصطلح بحوث العمليات Research Operationsبأنه مصطلح يطلق على عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الإداري ة بهدف الوصول إلى البديل الأمثل Optimumفي حدود الإمكانيات المتاحة وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير المخاطر لكل البدائل المتاحة، وبلغة أخرى هو علم التمثيل الرياضي لمشاكل عملية اتخاذ القرار وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية .

أما التعريف الذي قدمته جمعية بحوث العمليات الأمريكية فهو "تهتم بحوث العمليات بالاختيار العلمي لأفضل تصميم وتشغيل لأنظمة الإنسان – الآلة – وفي ظروف تتطلب تخصيصاً للموارد المحدودة

المفاهيم الأساسية

- علم بحوث العمليات يعتمد على استخدام النماذج الرياضية كقالب تصاغ فيه المشكلة الإدارية، إلا أن نجاح تكوين النموذج وتطبيقه يعتمد على قدرة متخذ القرار الخلاقة، حيث يتوقف نجاح عملية جمع البيانات للنموذج والتحقق من صحة تمثيله للواقع وتطبيقه على القدرة على إيجاد خطوط اتصال جيدة بين هؤلاء الذين لديهم المعلومات وبين من سيقوم بالتطبيق وفريق بحوث العمليات.
- نوع المنظمة ليس له أي علاقة بمجال التطبيق، حيث إن أساليب بحوث العمليات تطبق في مختلف المجالات، مثل إدارة التجارة، والصناعة، والمستشفيات، والقطاع العام ...الخ. وتعتمد بحوث العمليات على استخدام المنهج العلمي وذلك بهدف إيجاد الحل الأمثل Optimalللمشكلة محل الدراسة. ومن أجل الوصول للهدف لابد من تحديد مقياس كفاية يضع في اعتباره أهداف المنظمة ككل. حيث يستخدم المقياس لمقارنة البدائل المتاحة

المفاهيم الأساسية

- وتعتمد بحوث العمليات على استخدام الحاسب الآلي نتيجة تعقد النماذج الرياضية، وكثرة البيانات، وتعدد العمليات الحسابية المطلوبة أداؤها قبل الوصول إلى حل . كما أدى تطور الحاسب إلى وجود شركات متخصصة في إعداد البرمجيات Softwareالمتعلقة بأساليب بحوث العمليات.

المفاهيم الأساسية

كما ذكرنا أن بحوث العمليات (Operations Research)هي مجال يهتم باستخدام النماذج الرياضية والتحليل الكمي لاتخاذ القرارات المثلى وتحسين العمليات. فيمكن في الهندسة المعماريةتطبيق بحوث العمليات لتحسين العديد من الجوانب المتعلقة بالتصميم والبناء.فمثلا نذكر بعض المجالات التي يمكن أن تستفيد من بحوث العمليات :

تحسين تصميم المباني: بحوث العمليات يمكن أن تُستخدم لتحليل وتقييم تصاميم مختلفة لمبنى معين من حيث الكفاءة الطاقية، تدفق الهواء، الإضاءة الطبيعية، وغيرها من العوامل التي تؤثر على جودة التصميم.

التخطيط الحضري: يمكن استخدام نماذج بحوث العمليات لتوزيع الموارد بشكل مثالي، مثل تحديد أماكن المدارس، المستشفيات، والحدائق العامة بما يتناسب مع احتياجات السكان.

المفاهيم الأساسية

إدارة المشاريع: تساعد بحوث العمليات في تحسين جدولة المشاريع وتقليل التكلفة الزمنية والمادية. يمكن تطبيق تقنيات مثل البرمجة الخطية لتحديد الجدول الزمني الأمثل للبناء.

تحسين توزيع المساحات: يمكن استخدام بحوث العمليات لتحسين توزيع المساحات داخل المباني بناءً على متطلبات الاستخدام.

إدارة سلسلة التوريد: في مراحل البناء، يمكن استخدام بحوث العمليات لتحسين سلسلة التوريد والتأكد من توفر المواد في الوقت المناسب لتقليل التأخير.

المفاهيم الأساسية

عملية صنع القرار وبحوث العمليات

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات الآتية :

- ١- تعريف المشكلة .
- ٢- تحديد البدائل.
- ٣- اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل.
- ٤- تقييم البدائل.
- ٥- اختيار أحد البدائل

بناء المشكلة

تحليل المشكلة

المفاهيم الأساسية

وبفحص الخطوة الرابعة (تقييم البدائل) نجد أن عملية التقييم قد تأخذ اتجاهين أساسيين: تحليل نوعي Qualitativeأو تحليل كمي Quantitative، ويقوم الاتجاه الأ ول على خبرة المدير، ويتضمن ذلك قدرته البديهية أو ما نعرفه بالعامي "بالحاسة السادسة "، فإذا كانت المشكلة سبق وأن حدثت، أو كانت سهلة نسبياً، فكثيراً ما يستخدم المدير فطنته وخبرته في معالجتها . ولكن إذا لم يكن لديه الخبرة اللازمة وكانت المشكلة صعبة ومعقدة، فلا بد إذاً من الاتجاه الكمي في تحليل المشكلة ومن ثم اختيار البديل الأفضل .

المفاهيم الأساسية

وباستخدام التحليل الكمي يكون تركيز المحلل على فهم الحقائق الكمية والبيانـات المتعلقة بالمشكلة، ثم يكون نموذجاً رياضياً من واقع فهمـه وإلمامـه بالمشـكلة . ويجب أن يمثل النموذج الهدف، والقيود ، والعلاقات المتداخلة في المشكلة أفضـل تمثيل. وباستخدام الأساليب الكمية يستطيع المحلل أن يحلل النموذج ويقترح الحـل الأمثل للمشكلة .

المفاهيم الأساسية

أسباب الحاجة إلى أساليب بحوث العمليات

هناك حاجة لأساليب بحوث العمليات حينما نلاحظ أي من العلامات الآتية على المنظمة، مما يجعل من المفيد الاستعانة بأخصائي بحوث العمليات، ولعل أهمها :

١- وجود مشكلة معقدة جداً، حيث تتداخل عوامل عدة وتعجز النظم المتوفرة عن إيجاد حل مناسب .

٢ حينما يتطلب القرار تبرير كمياً.

٣- الحاجة إلى تقييم أو تقليل المخاطرة كما هو الحال عند البدء في مشروع جديد حيث لا توجد خبرة مسبقة عن كيفية اتخاذ قرار منطقي.

٤- تكرار المشكلة، وعدم قدرة المنشأة على الاستفادة من البيانات لحل المشكلة.

٥- لتحسين مستوى الأداء وتقليل المخاطرة وتحقيق الميزة التنافسية للمنظمة.

المفاهيم الأساسية

استخدام النماذج في بحوث العمليات

أهم النماذج المستخدمة هي النماذج الرياضية Models Mathematicalوالمحاكاة الآلية Simulation Computer .

يتم بناء النماذج الرياضية في بحوث العمليات من خلال كتابة المشكلة الإدارية في شكل معادلات تضم في تكوينها مجموعة من المتغيرات التي يمكن التحكم فيها، ومجموعة أخرى من المتغيرات التي لا تستطيع المنظمة ال تحكم فيها . فمثلاً نجد أن القرار الإداري الخاص بتغيير أسعار منتجات الشركة لا يقف عند حد تغيير الأسعار بل لابد من دراسة تأثير هذا القرار على الإنتاج، والمبيعات، والطلب...الخ. وعلى هذا فإن النماذج الرياضية لا تقف عند حد استعراض هذه المتغيرات، ولكن أيضاً تحليل العلاقة والتفاعل بينها، وذلك من خلال سلسلة من المعادلات الرياضية.

المفاهيم الأساسية

يمكننا القول بأن النماذج الرياضية تساعد :

١- في التعامل مع المشكلة ككل (أي بصفة شاملة).

٢- المحلل على رؤية المشكلة بوضوح وتحديد ما هي البيانات ذات العلاقة.

٣- في توضيح العلاقة بين السبب والأثر والتي قد لا تكون واضحة بدون تجسيم رياضي.

وبالرغم من هذه المزايا إلا أن التمثيل الرياضي لا يخلو من العيوب، فالنموذج تمثيل بسيط لموقف واقعي، وكثيراً ما نضطر لعمل فرضيات وتقديرات وتخمينات ونحن في مرحلة تمثيل المشكلة رياضيا.

المفاهيم الأساسية

خطوات التحليل الكمي

١ **تحديد المشكلة** تعتبر خطوة تحديد المشكلة من أهم الخطوات، ويتوقف عليها نجاح أو فشل المنهج الكمي في اتخاذ القرار . حيث يتطلب الأمر الكثير من الخيال، والإبداع، والعمل الجماعي من أجل صياغة المشكلة ووضعها في إطار يمكن تناوله كمياً . وغالباً ما تكون المشكلة :

١- وضع جديد لم يتخذ بشأنه قرار من قبل .

٢- مجال لم يحقق نجاحاً كما هو متوقع له.

٣- في حالة إعادة تقييم للسياسة الحالية لمعرفة إمكانية تحسينها.

المفاهيم الأساسية

٢ **تكوين النموذج الرياضي** صياغة المشكلة Formulation Problemفي نموذج رياضي هي أهم ما يميز علم بحوث العمليات عن غيره من العلوم القائمة على استخد ام الأساليب الكمية، ويتم تكوين النموذج الرياضي عن طريق ترجمة التعبيرات اللغوية إلى علاقة رياضية .

-أ المدخلات التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل سعر السلعة أو تكلفة الإنتاج، وكذلك المدخلات التي تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل عدد الوحدات المنتجة، أو كمية البضاعة، ونعرفها بالمجاهيل والتي يجب تحديدها لحل النموذج .

ب- المحددات Constraintsوهذه تمثل القيود الفنية والاقتصادية وغيرها والتي تحد من قيمة الحلول الممكنة.

المفاهيم الأساسية

ج- دالة الهدف Function Objectiveوتحدد مقياس الكفاية للإدارة، ونمثله بدالة رياضية للمتغيرات المتحكم في . ها ونحصل على الحل الأمثل حينما تحقق قيمة المتغيرات المتحكم فيها أحسن قيمة للدالة في حدود القيود المفروضة.

3. **جمع البيانات** وهي مرحلة تجميع البيانات عن المتغيرات غير المتحكم فيه.
4. **حل النموذج:** يعني ذلك محاولة معرفة قيم المتغيرات المتحكم فيها والتي تعطي أفضل حل ممكن بدون تجاوز القيود المفروضة على المشكلة.
5. **كتابة التقرير:** يجب أن يكتب بلغة بسيطة، موضحا فيه الحل وطريقة تنفيذه.

المفاهيم الأساسية

استخدام التمثيل الكمي في حل المشاكل الإدارية

مثال رقم 1 : شركة ترغب في تحقيق أقصى ربح ممكن من إنتاج حقائب جلدية، ومعدل ربـح الحقيبة الواحدة 12 ريال. ويلزم لإنتاج الحقيبة الواحدة أربع ساعات عمل . ويتوفر لدى الشركة 40 ساعة عمل فقط في الأسبوع الواحد . فما هو عدد الحقائب الممكن إنتاجها في الأسبوع من أجل تحقيق هدف الشركة (أقصى ربح)؟

تعريف المتغيرات :

د: دالة الهدف

س: عدد الوحدات الممكن إنتاجها من الحقائب

المفاهيم الأساسية

صياغة المشكلة رياضيا:

يمكن صياغة المشكلة على مرحلتين :

المرحلة الأولى: تمثيل الهدف حقق أقصى ربح د : = 12 س

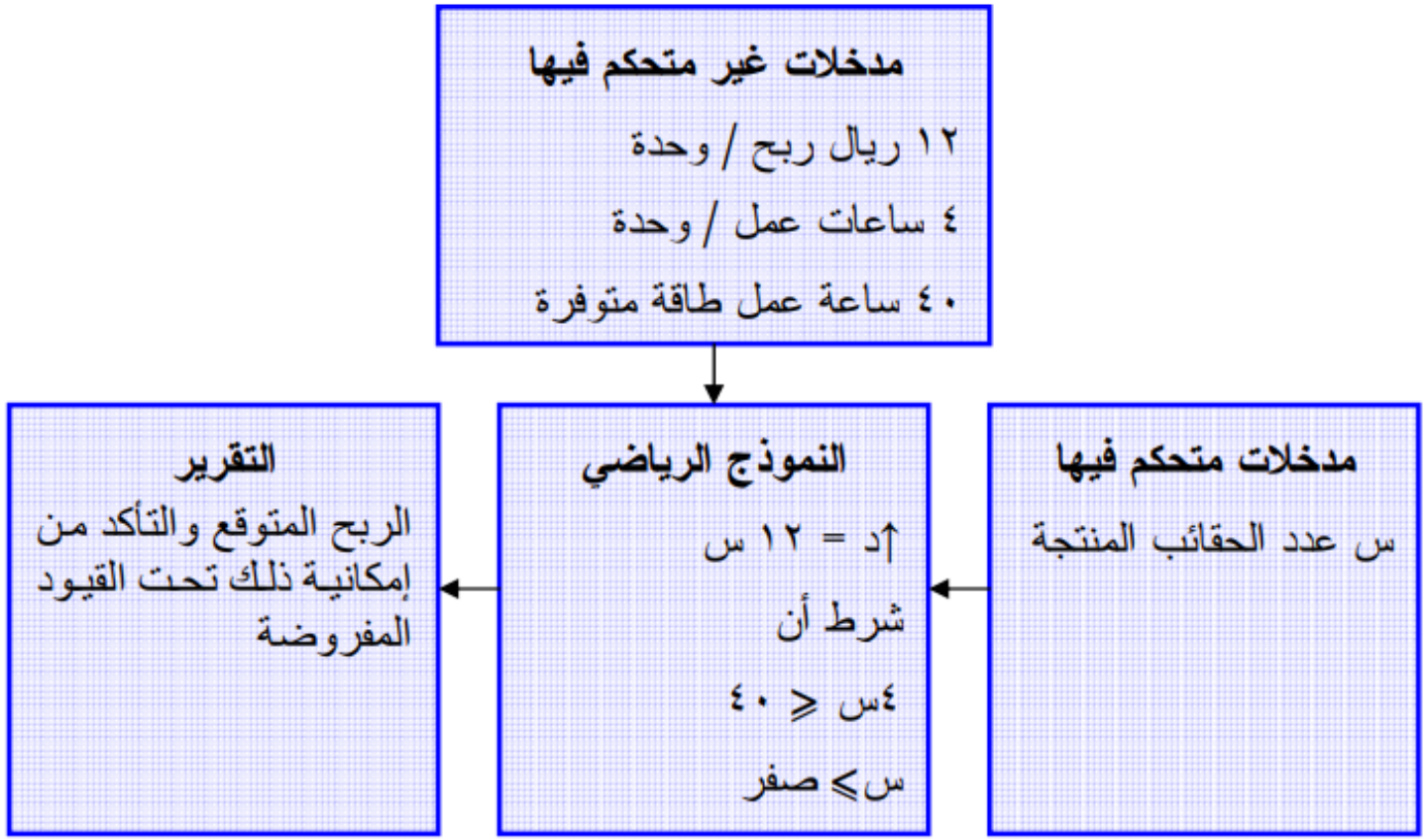
المرحلة الثانية: القيود المفروضة على الإنتاج

4 س ≥ 40 1

س ≤ 0 2

الشرط الثاني يكاد يكون بديهياً ويعني أنه يجب أن يكون العدد المنتج من الحقائب إيجابياً، ويعرف بشرط عدم السالبية.

المفاهيم الأساسية



خطوات حل مشكلة الإنتاج

المفاهيم الأساسية

ومن ثم يكون النموذج الكامل لمشكلة الإنتاج :

حقق أقصى ربح د = 12س

بشرط أن :

4 س ≥ 40 1

س ≤ 0 2

المفاهيم الأساسية

أساليب بحوث العمليات

تعتبر أساليب البرمجة الخطية والبرمجة العديد ة وتحليل الشبكات والمحاكاة ونموذج سلاسل ماركوف هي الأكثر استخداماً في الواقع العملي

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

مفهوم البرمجة الخطية

هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين عل اتخاذ قرارات إدارية تتعلق باستخدام الموارد المتاحة بهد ف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة . ولكن لا يعتبر هذا الاستخدام الوحيد لها فلا يكاد يخلو مجال من مجالات استخدام بحوث العمليات إلا ونجد البرمجة الخطية تمثل جزءاً مباشراً أو غير مباشر من أسلوب الحل.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

مجالات تطبيق البرمجة الخطية

- **الصناعة:** مسائل تخطيط الإنتاج والطاقة، ومسائل المزيج ذو الكلفة الأقل للإنتاج.
- **توزيع ونقل البضائع:** مسائل النقل والتخصيص وتوزيع المنتجات.
- **التسويق:** مسائل التوظيف وتنظيم المزيج التسويقي الأفضل.
- **لقياس الوحدة النسبية الإدارية المتماثلة الأهداف (قياس أداء فروع الشركات).**

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

خواص البرمجة الخطية

يتكون نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر :

- **1. دالة الهدف:** الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية يكون إما تحقيق "أقصى" "أو أقل" كمية ما.

مثال رقم 2: إذا كان لديك نوعين من المنتجات، المنتج الأول سعر بيعه 15 ريال، وتكلفة إنتاجه 10 ريال، والنوع الثاني سعر بيعه 10 ريال وتكلفة إنتاجه 7 ريال، المطلوب إيجاد دالة الهدف؟

الحل: ربح السلعة الأولى = 15-10 = 5 ريال .

ربح السلعة الثانية = 10-7= 3 ريال .

إذن دالة الهدف د↑ = 5 $س_1$ +3 $س_2$

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

- **2. القيود :** وجود قيود أو محددات أو متباينات على إمكانية تحقيق الهدف.

ملاحظة:

- - إذا كان المتاح أو المتوفر مشروط بأحد الكلمات التالية : لا يقل عن أو الحد الأدنى أو على الأقل أو أكثر من أو يزيد عن، جميع هذه الكلمات تعني أكبر من أو يساوي (≤).
- - إذا كان المتوفر أو المتاح مشروط بأحد الكلمات التالية : لا يزيد عن أو الحد الأقصى أو على ا لأكثر أو أقل من أو لا يزيد عن، جميع هذه الكلمات تعني أصغر من أو يساوي (≥).
- ويمكن وضع هذه القيود في جدول بحيث يسهل علينا استنتاج القيود منها

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

مثال رقم 3: إذا كان لديك نوعين من المنتجات يحتاج المنتج الأول إلى ساعة عمل وساعتين تجميع، ويحتاج المنتج الثاني إلى ساعة عمل وساعة تجميع علماً بأن المتاح من ساعات العمل هو 6 ساعات والمتاح من ساعات التجميع هو 10 ساعات وأن ربح الوحدة الأولى 3 ريال، وربح الوحدة الثانية 4 ريال، وأن السوق لا يستوعب أكثر من 4 وحدات من المنتج الثاني. والمطلوب صياغة نمذو ج البرمجة الخطية الذي يحقق أعظم ربح؟

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

الحل: نقوم أولا بعمل الجدول التالي:

المنتجات / القيود	المنتج الأول $س_1$	المنتج الثاني $س_2$	المتاح (المتوفر)
عمل	1	1	$\leq$ 6
تجميع	2	1	$\leq$ 10
طلب السوق	—	ص	$\leq$ 4
الربح	3	4	

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

ملاحظة:

- إذا كان القرار تعظيم ربح وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أقل من أو يساوس $\geq$ **0**
- إذا كان القرار تقليل تكلفة وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أكبر من أو يساوي $\leq$ **0**

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

ثانياً:

يكون نموذج البرمجة الخطية كالآتي

1. دالة الهدف ر↑ = 3س$_1$+4س$_2$
2. القيود

- قيد العمل 1س$_1$+1س$_2$ ≤ 6
- قيد التجميع 2س$_1$+1س$_2$ ≤ 10
- قيد السوق 1س$_2$ ≤ 4

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

- **3. قيد عدم السالبية:** ويعني الحل يجب أن يكون دائماً في الربع الأول الموجب .

مثال رقم 4 : نفرض أن شركة ملابس تنتج ثلاثة أنواع من الثياب وتمر بمراحل كما في الجدول التالي : والمطلوب إيجاد النموذج الخطي؟

العمليات / النوع	القص	الحياكة	الكي	الربح
كبير	2	3	2	60
وسط	2	4	3	90
صغير	1	2	1	55
الزمن	120	180	150	

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

الحل:

نفرض أن المنتج الكبير $س_1$ ، والمنتج الوسط $س_2$ ، والمنتج الصغير $س_3$

إذن دالة الهدف هـ (س↑) = $60\ س_1 + 90\ س_2 + 55 س_3$

وحيث أن المتاح من الزمن غير مشروط ونحن نريد تعظيم ربح، لذلك نستخدم أصغر من أو يساوي ≤

القيود :

$2\ س_1 + 2\ س_2 + س_3 \leq 120$ قيد القص

$3\ س_1 + 4\ س_2 + 2 س_3 \leq 180$ قيد الحياكة

$2\ س_1 + 3\ س_2 + س_3 \leq 150$ قيد الكي

قيد عد السالبية: $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3 \geq 0$

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بلغة بحوث العمليات كالتالي :

البرنامج الخطي هو نموذج رياضي يهدف إلى تحقيق أقصى Maximumأو أدنى Minimumقيمة لدالة خطية تعرف باسم دالة الهدف Objective Function.
هذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيوداً Constraintsبحيث تأخذ دالة الهدف وجميع القيود صيغة العلاقة الرياضية، أي معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى.

طرق البرمجة الخطية :

1. طرق عامة (الطريقة البيانية، وطريقة السيمبلكس).
2. طرائق خاصة (طريقة النقل، طريقة التخصيص).

البرمجة الخطية (الحل البياني)

حل البرمجة الخطية بيانيا

تعد الطريقة البيانية من أبسط طرق البرمجة الخطية التي تهدف إلى إيجاد الحلول المناسبة للمسائ ل الإدارية المختلفة (مسائل الإنتاج، مسائل التسويق، مسائل الأفراد...)، وبخاصة تلك المتعلقة باتخاذ القرارات ذات الموضوعات الفنية والمعايير الكمية. ويعيب هذه الطريقة أنه لا يمكن استخدامها لحل مشاكل تتضمن أكثر من مجهولين، وتقوم طريقة الحل بيانياً على تحديد منط قة نقاط الحلول الممكنة بيانياً، ثم اختيار النقطة التي تحقق أحسن قيمة لدالة الهدف

البرمجة الخطية (الحل البياني)

خطوات الحل البياني

1. يتم تحديد دالة الهدف على شكل معادلة رياضية تمثل المتغيرين للمشكلة المراد حلها .
2. يتم تحديد قيود المسألة على شكل متباينات.
3. يرسم محورين متعامدين، المحور الأفق ي يمثل المتغير (س) والمحور العمودي يمثل المتغير (ص).
4. نرسم المستقيمات التي تحددها المتباينات ونحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة (تحديد منطقة الحل)
5. تحديد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

البرمجة الخطية (الحل البياني)

- تعني علامة > أن منطقة الحل على يمين أو أعلى الخط المستقيم.
- تعني علامة < أن منقطة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم.
- إذا كانت جميع علامات المتباينات أو إشارات المتباينات أقل من أو يساوي ⩽ تكون منطقة الحل محصورة بين تقاطع المستقيمات ونقطة الأصل.
- إذا كانت إشارات المتباينات تحتوي على أكبر من أو أقل من فإن منطقة الحل تكون أبعد من منطقة الأصل (0 ، 0).

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

مثال

أوجد أكبر ربح ممكن إذا كانت الدالة الهدف هـ ↑ = 15 $س_1$ + 20 $س_2$

طبقا للآتي:

3 $س_1$ + 2$س_2$ ≤ 240 1

$س_1$ + 2$س_2$ ≤ 160 2

$س_1$ ≤ 60 3

$س_1$ ، $س_2$ ≤ 0

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

الحل:

١- نهمل دالة الهدف مؤقتاً.

٢- نحول المتراجحات إلى معادلات.

القيد الأول $٣س_١ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

نفرض أن $س_١$ = صفر $٣ \times ٠ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

$٢س_٢ = ٢٤٠$

$س_٢ = \frac{٢٤٠}{٢} = ١٢٠$

$س_٢ = ١٢٠$

$٣س_١ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

المحور الصادي
$س_١$ ، $س_٢$
(١٢٠ ، ٠)

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

نفرض أن $س_{٢}$ = صفر

$٣س_{١} + ٢ \times ٠ = ٢٤٠$

$٣س_{١} = ٢٤٠$

$\frac{٣}{٣} س_{١} = \frac{٢٤٠}{٣} = ٨٠$

$س_{١} = ٨٠$

المحور السيني

$س_{١}$ ، $س_{٢}$

(٨٠ ، ٠)

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

القيد الثاني

$س_1 + 2س_2 = 160$

نفرض أن $س_1$ = صفر

$0 + 2س_2 = 160$

$2س_2 = 160$

$س_2 = \frac{160}{2} = 80$

$س_2 = 80$

المحور الصادي

$س_1$ ، $س_2$

(0 ، 80)

$س_1 + 2س_2 = 160$

نفرض أن $س_2$ = صفر

$س_1 + 2 \times 0 = 160$

$س_1 = 160$

المحور السيني

$س_1$ ، $س_2$

(160 ، 0)

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

القيد الثاني

$س_1 + 2س_2 = 160$

نفرض أن $س_1$ = صفر

$0 + 2س_2 = 160$

$2س_2 = 160$

$س_2 = \frac{160}{2} = 80$

$س_2 = 80$

المحور الصادي

$س_1$ ، $س_2$

(0 ، 80)

$س_1 + 2س_2 = 160$

نفرض أن $س_2$ = صفر

$س_1 + 2 \times 0 = 160$

$س_1 = 160$

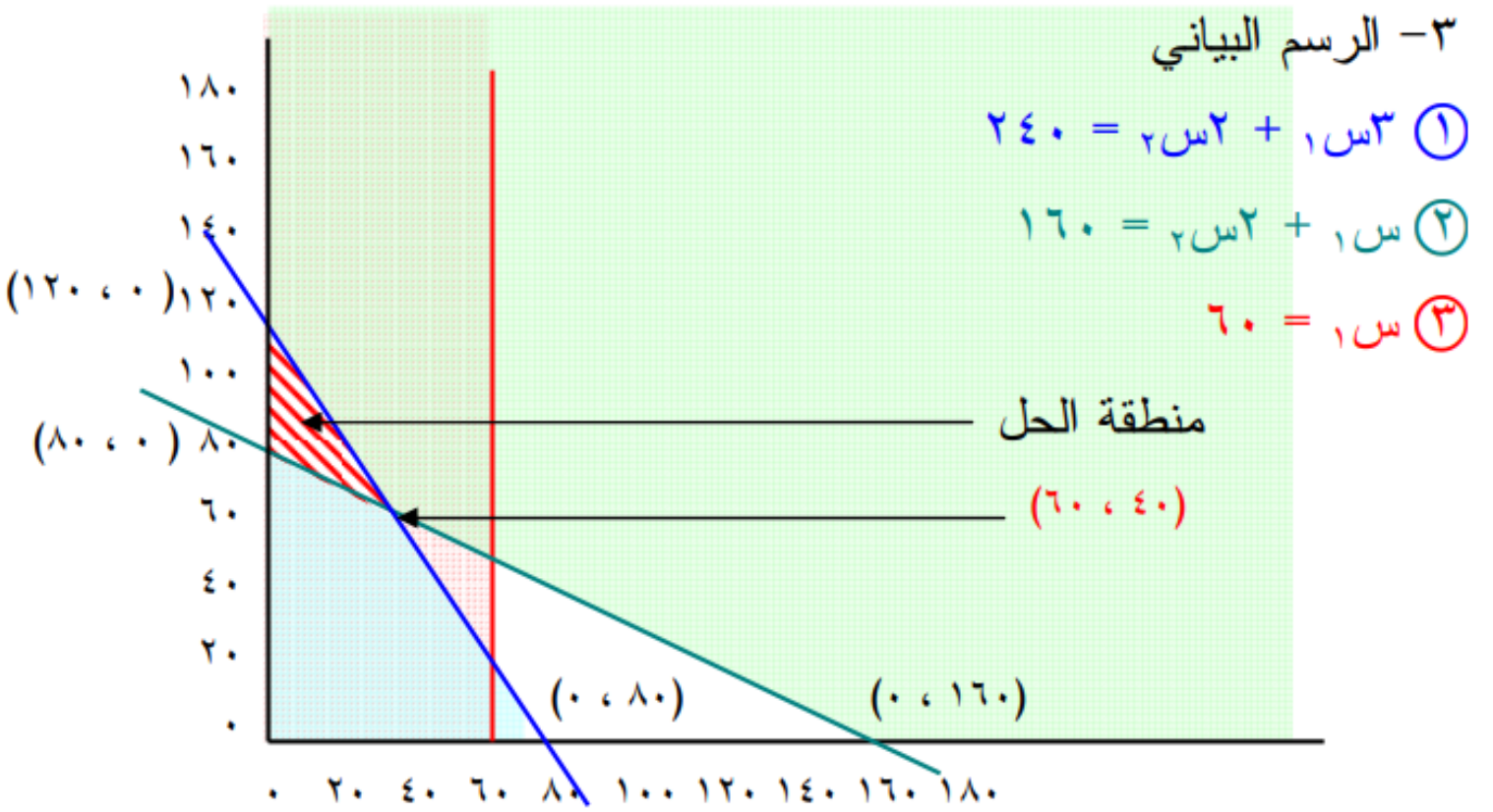
المحور السيني

$س_1$ ، $س_2$

(160 ، 0)

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

القيد الثالث $س_1 = ٦٠$ (٦٠ ، صفر)



البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

لإيجاد نقطة الحل حسابياً نوجد تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني باستخدام المحددات، كما يمكن إيجادها بطريقة الحذف والتعويض

$$٣س_١ + ٢س_٢ = ٢٤٠$$

$$س_١ + ٢س_٢ = ١٦٠$$

باستخدام طريقة المحددات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ - ٢ = ٤$$

$$\Delta س_١ = \begin{vmatrix} ٢٤٠ & ٢ \\ ١٦٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٤٨٠ - ٣٢٠ = ١٦٠$$

$$\Delta س_٢ = \begin{vmatrix} ٣ & ٢٤٠ \\ ١ & ١٦٠ \end{vmatrix} = ٤٨٠ - ٢٤٠ = ٢٤٠$$

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

$$س_1 = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{١٦٠}{٤} = ٤٠$$

$$س_2 = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٢٤٠}{٤} = ٦٠$$

∴ النقطة هي (٤٠ ، ٦٠)

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

للوصول إلى الحل الأصل نقوم بالتعويض بأركان أو نقاط منطقة الحل في دالة الهدف

نقاط الحل	دالة الهدف ١٥س١ + ٢٠س٢	قيمة الدالة
(٤٠ ، ٦٠)	١٥ × ٤٠ + ٢٠ × ٦٠	١٨٠٠
(٠ ، ١٢٠)	١٥ × ٠ + ٢٠ × ١٢٠	٢٤٠٠
(٠ ، ٨٠)	١٥ × ٠ + ٢٠ × ٨٠	١٦٠٠

∴ نجد أن أعظم ربح هو ٢٤٠٠ عند النقطة (٠ ، ١٢٠)

وبذلك يمكن إنتاج س١ = ٠ ، س٢ = ١٢٠

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

مثال: **تحسين توزيع المساحات في مبنى سكني**

لنفترض أنك تريد تصميم مبنى سكني يتألف من شقق بمساحات مختلفة (مثلاً شقق بغرفة واحدة، وشقق بغرفتين). الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن من تأجير هذه الشقق، مع احترام بعض القيود مثل المساحة الإجمالية المتاحة للمبنى وعدد الشقق المطلوب.

المعطيات:

المساحة الكلية المتاحة للبناء هي 10,000 متر مربع.

الشقة بغرفة واحدة تحتاج إلى 50 متر مربع، والشقة بغرفتين تحتاج إلى 80 متر مربع.

يجب ألا يقل عدد الشقق بغرفة واحدة عن 30.

يجب ألا يقل عدد الشقق بغرفتين عن 20.

إيجار الشقة بغرفة واحدة هو 3000 دولار، وإيجار الشقة بغرفتين هو 5000 دولار.

الهدف هو تعظيم الربح

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

المطلوب: كم عدد الشقق من كل نوع الذي يجب تصميمه لتحقيق أقصى ربح ممكن مع مراعاة القيود؟

صياغة البرمجة الخطية:

لنرمز إلى:

- x_1 = عدد الشقق بغرفة واحدة.
- x_2 = عدد الشقق بغرفتين.

الدالة الهدف: نريد تعظيم الربح، والذي يعطى بالدالة التالية:

$$5000x_2 + 3000x_1 = \text{Maximize } Z$$

حيث Z هو إجمالي الربح.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

القيود:

1. المساحة الكلية المتاحة:

$$10000 \geq {}_{2}80x + {}_{1}50x$$

2. عدد الشقق بغرفة واحدة يجب أن يكون 30 على الأقل:

$$30 \leq {}_{1}x$$

3. عدد الشقق بغرفتين يجب أن يكون 20 على الأقل:

$$20 \leq {}_{2}x$$

4. عدم وجود أعداد سالبة للشقق:

$$0 \leq {}_{1}x \quad ,0 \leq {}_{2}x$$

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

الحل:

1. رسم القيود:

سنمثل القيود على المستوى الإحداثي (حيث x_1 على المحور الأفقي و x_2 على المحور الرأسي).

- القيد الأول:

$$10000 \geq 80x_2 + 50x_1$$

لنحصل على نقطتين لرسم الخط:

- عندما $x_1 = 0$ ، نجد $x_2 = \frac{10000}{80} = 125$.
- عندما $x_2 = 0$ ، نجد $x_1 = \frac{10000}{50} = 200$.

لذلك، الخط الذي يمثل هذا القيد يمر بالنقطتين $(0, 125)$ و $(200, 0)$.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

- القيد الثاني:

$$30 \leq {}_1x$$

يمثل خطًا عموديًا عند $30 = {}_1x$.

- القيد الثالث:

$$20 \leq {}_2x$$

يمثل خطًا أفقيًا عند $20 = {}_2x$.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

2. تحديد المنطقة الممكنة:

المنطقة الممكنة هي الجزء الذي يتقاطع فيه جميع هذه القيود. ستكون في الرباع الأول من المستوى الإحداثي (حيث $0 \leq {}_1x$ و $0 \leq {}_2x$) ومحصورة بين الخطوط التي تمثل القيود.

3. إيجاد النقاط الرأسية:

النقاط التي تحدد حدود المنطقة الممكنة هي تقاطعات الخطوط:

- تقاطع ${}_1x50 + {}_2x80 = 10000$ مع ${}_1x = 30$ يعطينا:

$$106.25 = {}_2x \implies 8500 = {}_2x80 \implies 10000 = {}_2x80 + 1500 \implies 10000 = {}_2x80 + (30)50$$

النقطة هي $(30, 106.25)$.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

- تقاطع $80x_2 + 50x_1 = 10000$ مع $x_2 = 20$ يعطينا:

$$168 = x_1 \implies 8400 = 50x_1 \implies 10000 = 1600 + 50x_1 \implies 10000 = (20)80 + 50x_1$$

النقطة هي $(168, 20)$.

- تقاطع الخطوط عند النقاط الأخرى: النقاط الرأسية الأخرى هي $(30, 20)$ و $(200, 0)$.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

4. حساب قيمة دالة الهدف في النقاط الرأسية:

الآن نحسب قيمة دالة الهدف $Z = {}_1 3000x + {}_2 5000x$ عند كل نقطة رأسية:

- عند $(30, 106.25)$:

$$Z = (30)3000 + (106.25)5000 = 90000 + 531250 = 621250$$

- عند $(168, 20)$:

$$Z = (168)3000 + (20)5000 = 504000 + 100000 = 604000$$

- عند $(30, 20)$:

$$Z = (30)3000 + (20)5000 = 90000 + 100000 = 190000$$

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

- عند $(0 ,200)$:

$$600000 = (0)5000 + (200)3000 = Z$$

5. النتيجة:

القيمة القصوى لـ Z هي عند النقطة $(106.25 ,30)$، حيث $Z = 621250$.

الحل الأمثل:

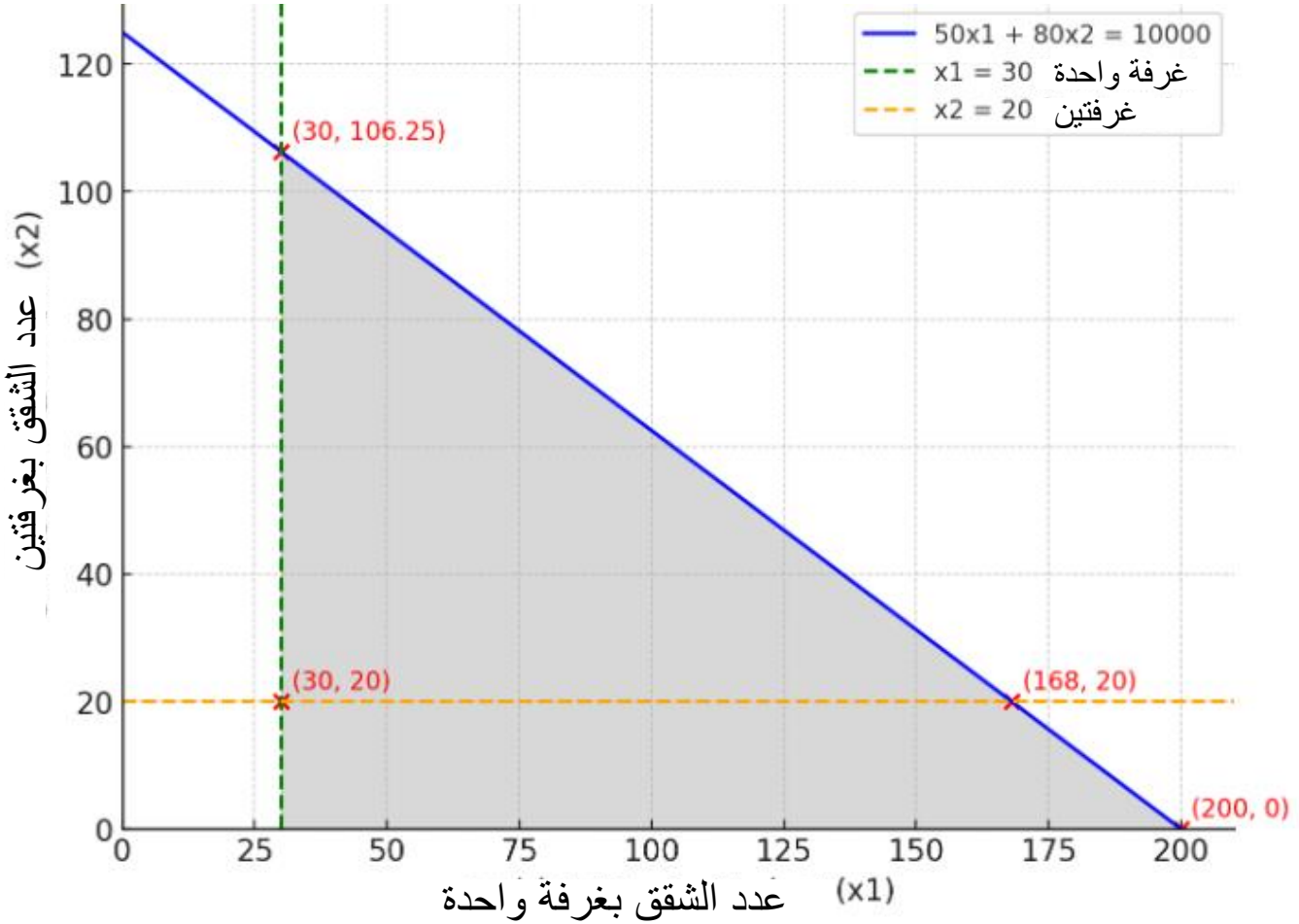
عدد الشقق بغرفة واحدة = 30

عدد الشقق بغرفتين = 106.25 (يمكن تقريبها إلى 106 أو 107 وفق الحاجة).

الربح الأقصى = 621,250 دولار.

هذا هو الحل الأمثل بناءً على التمثيل البياني.

البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)



الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

شكرا لكم على الاستماع