

# الأكاديمية العربية الدولية



الأكاديمية العربية الدولية  
Arab International Academy

---

## الأكاديمية العربية الدولية المقررات الجامعية

---

# كتاب أساسيات المرونة واللدونة

## Fundamentals of Elasticity and Plasticity



تأليف

أسامة محمد المرضي سليمان

استاذ مساعد ، كلية الهندسة ، جامعة وادي النيل

Author

Osama Mohammed Elmardi Suleiman

Assistant Professor, Faculty of Engineering, Nile Valley  
University

الطبعة الأولى يناير 2000 م

الطبعة الثانية المنقحة أكتوبر 2016 م

# كتاب أساسيات المرونة واللدونة

## Fundamentals of Elasticity and Plasticity

تأليف

أسامة محمد المرضي سليمان

استاذ مساعد ، كلية الهندسة ، جامعة وادي النيل

Author

Osama Mohammed Elmardi Suleiman

Assistant Professor, Faculty of Engineering, Nile Valley  
University

الطبعة الأولى يناير 2000 م

الطبعة الثانية المنقحة أكتوبر 2016 م

بسم الله الرحمن الرحيم

## شكر و عرفان

الشكر والعرفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلى آله وصحبه وجميع من تبعه إلى يوم القيامة.

لذكرى كل من أمي الغالية خضرة درار طه، وأبي العزيز محمد المرضي سليمان، وخالتي الحبيبة زعفران درار طه الذين تعلمت منهم القيمة العظيمة للعمل واحترام الوقت وترتيبه وتدبيره.

إلى زوجتي الأولى نوال عباس عبد المجيد وبناتي الثلاث رؤى، روان وآية تقديرًا لحبهم وصبرهم ومثابرتهم في توفير الراحة والسكون خاصةً عندما تتعقد وتتشابك الأمور.

إلى زوجتي الثانية لمياء عبد الله علي فزاري التي مثل حبها وتضرعها إلى الله الزخم الذي دفعني للمسير في طريق البحث والمعرفة الشائك.

يودُّ الكاتب أن يتقدم بالشكر أجذه لكل من ساهم بجهده وفكره ووقته في إخراج هذا الكتاب بالصورة المطلوبة ويخص بذلك الزملاء الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل (عطبرة)، وأيضاً الأخوة الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة البحر الأحمر (بورتسودان) وقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا (الخرطوم).

الشكر والتقدير والعرفان للبروفيسور محمود يس عثمان بجامعة كسلا الذي ساهم بقدر كبير في مراجعة وإعادة مراجعة محتويات الكتاب.

أهدي هذا الكتاب بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبكالوريوس الهندسة في جميع التخصصات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية . حيث يستعرض هذا الكتاب الكثير من التطبيقات في عمليات التصنيع وعلم المواد الهندسية وخواص المواد الهندسية وميكانيكا المواد وأساسيات المرونة واللدونة.

أُعبر عن شكري وامتناني إلى المهندس أسامة محمود محمد علي بمركز دانية لخدمات الحاسوب والطباعة بمدينة عطبرة الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة، مراجعة وإعادة طباعة هذا الكتاب أكثر من مرة. أخيراً، أرجو من الله سبحانه وتعالى أن يتقبّل هذا العمل المتواضع والذي آمل أن يكون ذو فائدة للقارئ في جميع أنحاء العالم الذي أصبح كقرية صغيرة جداً بفضل التطور والتقدم التكنولوجي المتسارع الذي تشهده البشرية اليوم.

## مقدمة

إنَّ مؤلف هذا الكتاب وإيماناً منه بالدور العظيم والمقدّر الذي يقوم به الأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريب والترجمة للمراجع والكتب الهندسية القيمة يأمل أن يفي هذا الكتاب بمتطلبات برامج البكالوريوس ، الدبلوم العالي والدبلوم العام لطلاب الهندسة الميكانيكية ، الهندسة المدنية وهندسة الإنتاج أو التصنيع لما له من أهمية كبيرة في تغطية جزء من مقررات عمليات التصنيع وعلم المواد وخواص المواد الهندسية وميكانيكا ومتانة المواد .

يتفق هذا الكتاب لغوياً مع القاموس الهندسي الموحد السوداني ويُعدُّ مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث . معظم مادة هذا الكتاب مقتبسة من محاضرات ومذكرات مؤلفة في تدريسه لهذا المقرر لفترة تزيد قليلاً عن عشرون عاماً .

يهدف هذا الكتاب لتعريف طالب الهندسة ببعض عمليات التشكيل والتشغيل اللدن للمعادن ذات الطابع الكلاسيكي (i.e. التقليدي) أو الحديث .

يشتمل هذا الكتاب على ستة فصول. حيث يستعرض الفصل الأول أهمية المعادن في الصناعة ، الخواص الفيزيائية والميكانيكية للمعادن ، بعض الاختبارات الهامة التي تُجرى على المواد الهندسية مثل اختبار الشد ، اختبار مقاومة الصدمات واختبار الصلادة بالإضافة إلى طرق تحضير وتجهيز المعادن لعمليات التشكيل أو التشغيل اللدن . أما الفصل الثاني فيؤكد على أهمية عملية توليد الرائش في المعادن ذات اللدونة العالية أو المنخفضة وذلك من حيث أنواع الرائش ، الظروف المؤاتية لحدوثه ، تأثير الحرارة على الحد القاطع لأدوات وعدد القطع بالإضافة لبعض عمليات التشكيل بدون توليد رائش .

يناقش الفصل الثالث بشيء من التفصيل اختبارات الشد والانضغاط من وجهة نظر شكل مقطع العينة ، كيفية ربطها أو تثبيتها على ماكينة الاختبار ، تأثير معدل التحميل على العينة ، تفاوت الاستطالة مع الطول الاسمي

ومساحة المقطع العرضي ، الانفعال الزائد والتحميل التكراري . أما الفصل الرابع فيناقش أساليب طاقة الانفعال بتعريف طاقة الانفعال الداخلية المخزونة خلال جسم مسلط عليه حمل شد أو عزم التواء أو عزم إنحناء . يتم خلال هذا الفصل إيجاد تعريف مناسب لنظرية كاستيقليانو وإشتقاق صيغتها النهائية لإستخدامها في تحديد الإنحراف والميل ، ردود الأفعال والعزوم تحت نقطة تسليط الأحمال المختلفة .

يستعرض الفصل الخامس من هذا الكتاب الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة بمناقشة أساليب إيجاد الحمل الحدي قبل إنهيار المنشأة بطريقة مخطط عزم الإنحناء وبطريقة الشغل الافتراضي . أما الفصل السادس فيتناول بشيء من التفصيل نظرية اللدونة للإنحناء من وجهة نظر الإنحناء فيما بعد إجهاد الخضوع ، الافتراضات المأخوذة في نظرية اللدونة ، وعزم المقاومة عند المفصلة اللدنة .

خلال كل فصل من فصول هذا الكتاب هنالك العديد من الأمثلة والمسائل المحولة التي تبسّط للقارئ وطالب الهندسة في المقام الأول فهم وإستيعاب هذه المادة وبالتالي هضمها بسهولة ويسر وتقريب المفاهيم النظرية للمادة إلى مفاهيم أقرب للواقع العملي .

يأمل الكاتب أن يحقق هذا الكتاب الهدف الذي كُتب من أجله ألا وهو تبسيط الفهم والاستيعاب لهذه المادة وهضمها بسهولة حتى تصبح معيناً للطالب والمهندس والباحث وكل قارئ لهذا الكتاب .

في الختام أسأل الله التوفيق والسداد .

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً

وأنت تجعل الحزن إذا شئت سهلاً

والله الموفق

المؤلف

أسامة محمد المرضي سليمان خيال

Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

أكتوبر 2016 م

## المحتويات

الموضوع	الصفحة
شكر وعرفان	i
مقدمة	iii
المحتويات	v
<b>الفصل الأول : خواص المواد الهندسية</b>	
1.1 مدخل	1
1.2 أهمية المعادن في الصناعة	1
1.3 الخواص الفيزيائية والميكانيكية للمعادن	2
1.4 اختبارات المواد الهندسية	4
1.4.1 اختبار الشد	6
1.4.2 اختبار مقاومة الصدمات	9
1.4.3 اختبار الصلادة	10
1.5 طرق تحضير وتجهيز المعادن	11
1.5.1 تحضير الحديد الصلب	11
1.5.2 خام الحديد	12
1.5.3 تسلسل عمليات إنتاج الحديد والصلب	12
1.5.4 التشكيل اللدن للمعادن	16
<b>الفصل الثاني : عملية توليد الرائش</b>	
2.1 مدخل	25
2.2 أنواع الرائش	26
2.3 تأثير الحرارة على الحد القاطع	28
2.4 عمليات بدون توليد رائش	29
<b>الفصل الثالث : اختبار المواد والأساليب المختبرية</b>	
3.1 اختبارات الشد	33
3.2 ماكينات الاختبار	34
3.3 تأثير معدل التحميل	34



- 34 3.4 تفاوت الإستطالة مع الطول الإسمي ومساحة المقطع العرضي  
36 3.5 الإنفعال الزائد والتحميل التكراري  
37 3.6 إجهاد الصمود  
38 3.7 إختبارات الإنضغاط  
38 3.8 الإنهيار في المعادن القصفة

#### الفصل الرابع : أساليب طاقة الإنفعال

- 43 4.1 طاقة الإنفعال الداخلية  
44 4.2 الإشارات الجبرية التقليدية  
44 4.3 نظرية كاستقليانو  
44 4.4 التطبيق على مسائل محدّدة سكونياً  
45 4.5 التطبيق على مسائل غير محدّدة سكونياً  
45 4.6 إفتراضات ومحدّدات  
45 4.7 أمثلة محلولة في طاقة الإنفعال  
50 4.8 إشتقاق نظرية كاستقليانو  
52 4.9 أمثلة محلولة في نظرية كاستقليانو  
64 4.10 تدريبات في نظرية كاستقليانو

#### الفصل الخامس : الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة

- 69 5.1 مدخل  
70 5.2 أساليب إيجاد الحمل الحدي  
81 5.3 تدريبات في الإنهيار اللدن في العارضات البسيطة

#### الفصل السادس : نظرية اللدونة للإنحناء

- 85 6.1 الإنحناء فيما بعد إجهاد الخضوع  
86 6.2 إفتراضات في نظرية اللدونة  
86 6.3 عزم المقاومة عند مفصلة لدنة

#### الكتب والمراجع

- 94 الكتب والمراجع العربية  
95 الكتب والمراجع الإنجليزية

## الفصل الأول

### خواص المواد الهندسية

### Properties of Engineering Materials

#### 1.1 مدخل (Introduction) :

من الخطأ الاعتقاد بأن السبب الرئيسي في ارتفاع أسعار بعض المعادن مثل الذهب والبلاتين والألماس في الأسواق العالمية هو ندرتها في الطبيعة فقط بل أن هناك الكثير من العوامل الأخرى التي قد تكون وراء مثل هذا الارتفاع في الأسعار كصعوبة الاستخلاص وارتفاع كلفة التقنية المستخدمة.

( 1/ complexity of extraction 2/ higher cost of technology used )

تجدر الإشارة هنا إنّ أبحاث الفضاء التي تجرى في عصرنا هذا ربما يتمخض عنها وجود مصادر أخرى للمواد الهندسية غير الأرض . هذا بالإضافة للمواد المركبة المستخدمة في كثير من الصناعات الفضائية والطائرات والطائرات من دون طيار (unmanned drones) وسيارات السباق وغيرها .

#### 1.2 أهمية المعادن في الصناعة (Importance of Metals in Industry) :

كما ذكر سابقاً فإن المواد الهندسية تشكل الحجر الأساسي (i.e. حجر الزاوية) (corner stone) في التقدم الذي شهدته البشرية مؤخراً .

وقد لعبت المعادن الحديدية منها وغير الحديدية (ferrous and non-ferrous metals) دوراً رئيسياً في مثل هذا التقدم وبالرغم من أننا قد لا نلتفت أو لا نفكر كثيراً في المعادن ، فإنها موجودة فعلاً حولنا في معظم الآلات والمعدات والأدوات التي نستعملها في حياتنا اليومية ، فالسيارات والقاطرات والسفن والطائرات

والماكينات الانتاجية المختلفة ومحركات السيارات والآلات الزراعية والأدوات المنزلية وأدوات الورش ماهي إلا أمثلة نموذجية على الدور الذي تلعبه المعادن في حياتنا .

### 1.3 الخواص الفيزيائية والميكانيكية للمعادن :

#### ( Physical and Mechanical Properties of Metals )

#### أولاً : الخواص الفيزيائية (Physical Properties) :

تمتاز المعادن بلمعانها وعدم شفافيتها وتختلف المواد المعدنية عن المواد اللامعدنية في كثير من النقاط أهمها ما يلي :

1. الكثافة (Density) : المعادن عالية الكثافة مقارنة بالمواد اللامعدنية  $\left\{ \rho = \frac{m}{V} \right\}$  .

2. التوصيل الحراري والكهربائي (Thermal and Electrical Conductivity) :

المعادن مثل الفضة، النحاس والألمونيوم جيدة التوصيل للحرارة والكهرباء بعكس المواد غير المعدنية مثل الأخشاب، الفلين، المطاط وغيرها .

3. الحرارة النوعية (Specific Heat Capacity) :

المعادن حرارتها النوعية أقل من المواد اللامعدنية. حيث توضح المعادلة التالية العلاقة بين الحرارة النوعية والتغير في درجة الحرارة:

$Q = m^o C_p dT$  . حيث  $Q$  هي كمية الحرارة،  $m^o$  هو معدل سريان الكتلة،  $C_p$  الحرارة النوعية و  $dT$  التغير في درجة الحرارة .

4. الانعكاس الضوئي (Light Reflection) :

معظم المعادن تعكس الأشعة الضوئية لذا فإن لونها الطبيعي أبيض أو أقرب ما يكون إلى البياض ويشذ عن ذلك النحاس والذهب بينما كثير من المواد اللامعدنية لا تعكس الضوء.

#### 5. نفاذ الأشعة السينية (X-Ray Penetration):

المعادن صعبة الاختراق بواسطة الأشعة السينية بينما أغلب المواد اللامعدنية تسمح بنفاذ الأشعة السينية.

#### 6. القابلية للمغنطة (Magnetizability):

أكثرية المعادن قابلة للمغنطة بعكس أغلب المواد اللامعدنية.

#### 7. الميوعة (Fluidity):

وهي قابلية المعدن على السيولة والانسياب عند درجات الحرارة العالية . تمتاز أغلب المعادن بأنها ذات درجة انسياب عالية عند درجات الحرارة العالية ، ويمتاز الزئبق بأنه مائع عند درجة حرارة الغرفة. يستفاد من هذه الخاصية في تكنولوجيا أو تقنية السباكة .

#### 8. الانصهار الموضعي (Local Fusibility):

وهي قابلية المعدن على الانصهار عند نقاط محددة إذا سُلِّطت على هذه النقاط حرارة عالية ويُستفاد من هذه الخاصية في عمليات اللحام المختلفة .

#### ثانياً : الخواص الميكانيكية (Mechanical Properties):

يُقصد بهذه الخواص سلوك المعادن عند تعرضها للأنواع المختلفة من الاحمال والاجهادات مثل الشد ، الانضغاط ، الانحناء ، الالتواء . وأهم هذه الخواص هي :

#### 1. المطاطية أو المطيلية (Ductility):

وترمز إلى قدرة المعدن على تقبل التغيير في شكله تحت تأثير قوى الشد (tension) ، الانضغاط (compression)، الانحناء (bending)، الالتواء (torsion) والسحب (drawing) بدون حدوث الكسر كما يحدث في عمليات سحب الأسلاك وسحب المواسير (wire and tube drawing) .

## 2. الطروقية (Malleability) :

وترمز إلى قدرة المادة على قبول التغيير في شكلها تحت تأثير الانضغاط (compression) بدون حدوث الكسر ويُقال أنَّ المعدن لين (i.e. لدن) إذا كان من الممكن تشكيله دون كسر بعمليات الحدادة (forging) أو الدرفلة (rolling) .

## 3. العسو أو المتانة (Toughness or Strength) :

وترمز إلى قابلية المادة على مقاومة الانهيار تحت تأثير القوى الخارجية .

## 4. قابلية الانشطار أو الانقسام (Divisibility) :

وهي قابلية المعدن على نزع اجزاء منه عن طريق قوى القص تحت الاحمال العالية كما هو الحال في عمليات إزالة الرأش المختلفة (الخراطة ، التفريز ، الكشط ، الجلب ، التنعيم أو الصنفرة) .

## 5. الصلادة (Hardness) :

وهي مقاومة المعدن للخدش أو لاختراق الأجسام الأخرى فيه .

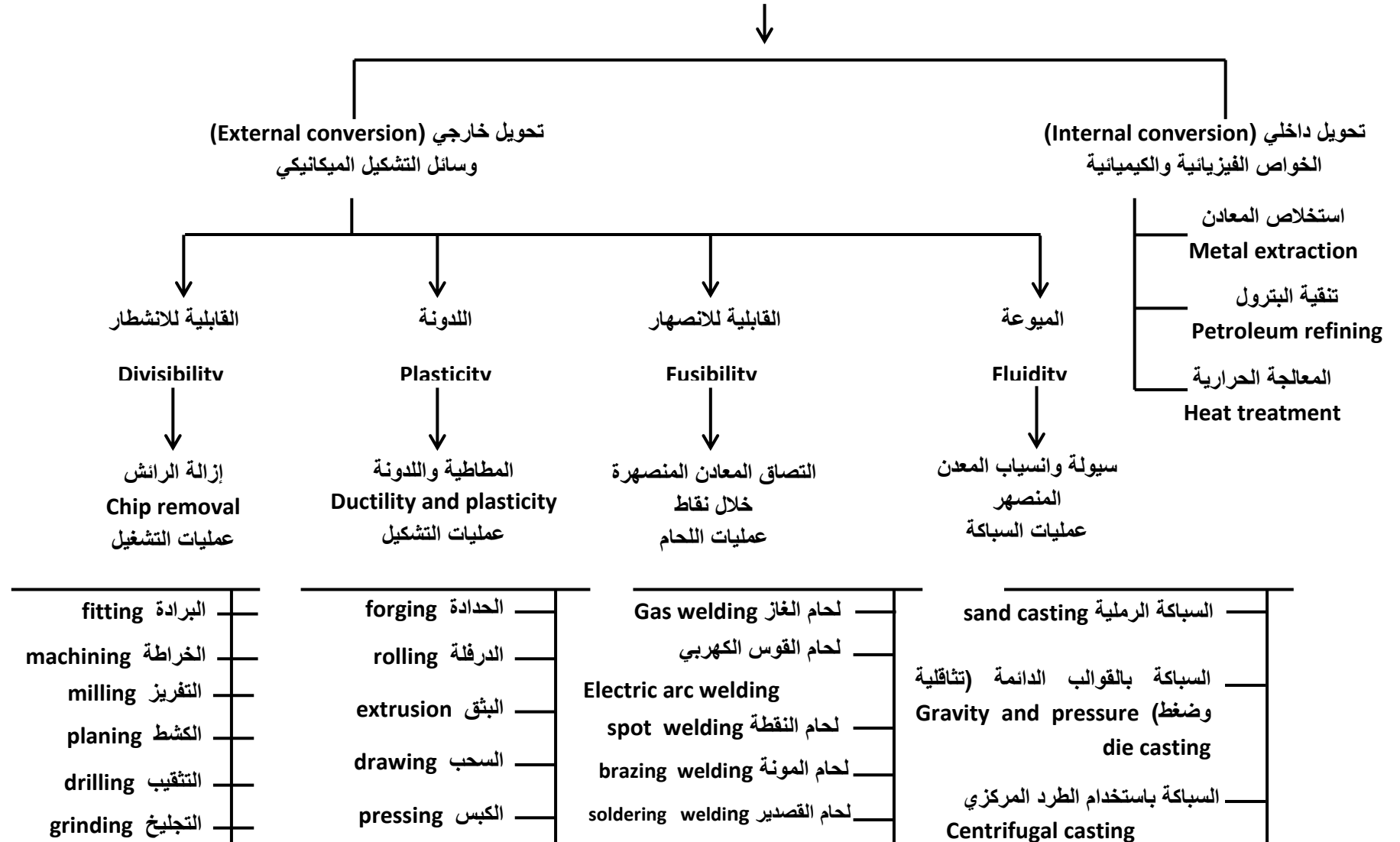
(Hardness: is the ability of a material to withstand scratching or indentation)

الشكل (1.1) أدناه يوضح طرق التصنيع المختلفة (i.e. تشكيل وتشغيل المعادن) وارتباطها بخواص المواد الهندسية .

## 1.4 اختبارات المواد الهندسية (Engineering Materials Testing) :

لتحديد قيمٍ عديدة تُعبر عن الخواص الميكانيكية الأساسية تُجرى اختبارات ميكانيكية على المواد المراد معرفة خواصها ... ومن أهم هذه الاختبارات اختبار الشد (tension)، اختبار الانضغاط (compression)، اختبار اللي (torsion)، اختبار التصادم (impact) واختبار الصلادة (hardness). سوف لا يتسع المجال هنا لشرح أسس كل هذه الاختبارات بالتفصيل وسنكتفي بشرح مبسّط لبعض الاختبارات فقط لإلقاء الضوء على طبيعتها وفائدتها.

طرق التصنيع ( تشكيل او تشغيل المعادن إلى الشكل المطلوب )  
(Metal forming and machining)



#### 1.4.1 اختبار الشد (Tension Test) :

يُجرى اختبار الشد لتحديد خواص المتانة والليونة والمرونة للمعادن ويعتبر اختباراً سكونياً من حيث طريقة التحميل وعلاقة الحمل بالزمن .

تُجهز لهذا الغرض عينات نمطية ذات شكل وأبعاد قياسية . وتوضع العينات بين فكي ماكينة الشد التي تؤثر عليها بقوى شد متزايدة وتقاس باستمرار الشد الكميات الآتية:

i. طول العينة .

ii. مساحة مقطع العينة .

iii. مقدار قوة الشد .

وترسم علاقة بين قوة الشد  $F$  مقاسة بالنيوتن والتغير في الطول (الاستطالة) مقدراً بالمليمترات على النحو المبين في الأشكال (1.2) و (1.3) ويمكن استنتاج خصائص متعددة من هذا الاختبار أهمها ما يلي :

#### 1. معايير المرونة للإجهادات المباشرة (معايير يونق) :

#### (Modulus of Elasticity or Young Modulus)

يتم تحديد معايير المرونة للإجهادات المباشرة (i.e. شد أو انضغاط) حسب قانون هوك الذي يقول أن الانفعال يتناسب طردياً مع الاجهاد المسبب له حتى حد التناسب .

$$E = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \frac{\sigma}{\epsilon} \text{ N/mm}^2 \text{ ، معايير المرونة i.e.}$$

حيث يعرف الاجهاد (stress) بأنه خارج قسمة الحمل على مساحة مقطع العينة ، أي أن :

$$\sigma = \frac{\text{الحمل}}{\text{مساحة المقطع العرضي}} = \frac{F}{A} \text{ N/mm}^2 \text{ ، الاجهاد}$$

كذلك يعرف الانفعال (strain) بأنه خارج القسمة للزيادة في الطول (i.e. الاستطالة) بالنسبة للطول الأصلي، وهو عبارة عن كمية لا بعدية .

$$\varepsilon = \frac{\text{الزيادة في الطول}}{\text{الطول الأصلي}} = \frac{\Delta L}{L} \text{ mm/mm}$$

## 2. اجهاد الخضوع (Yield Stress) :

هو الاجهاد الذي يبدأ عنده الانفعال او التشوه المستدام للمادة ، ويعطى بالمعادلة :

$$\sigma_y = \frac{\text{الحمل عند نقطة الخضوع}}{\text{مساحة المقطع العرضي}} = \frac{F_y}{A} \text{ N/mm}^2$$

## 3. الاجهاد الأقصى (Ultimate Stress) :

هو أقصى قيمة للإجهاد يمكن أن تتحمله المادة قبل فشلها ، ويعطى بالمعادلة :

$$\sigma_u = \frac{\text{الحمل الاقصى}}{\text{مساحة المقطع العرضي}} = \frac{F_u}{A} \text{ N/mm}^2$$

## 4. معامل المرونة أو الرجوعية (Resilience) :

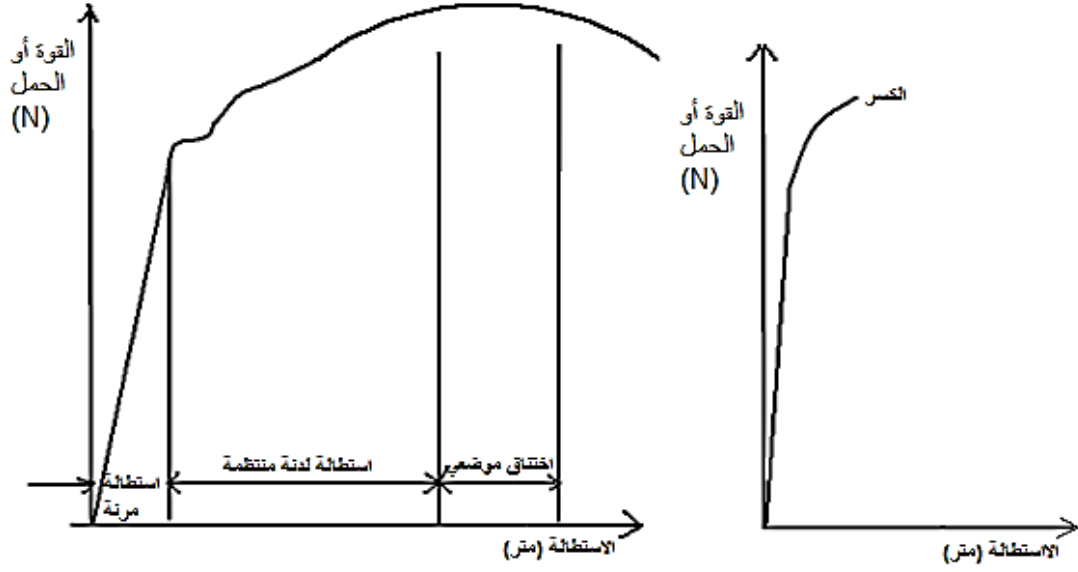
يساوي مقدار الطاقة المخزونة في وحدة الحجم الناتجة من انفعال المعدن حتى حد المرونة .

$$\text{معامل المرونة أو الرجوعية} = \frac{\text{مربع اجهاد الخضوع}}{\text{ضعف معايير المرونة}} = \frac{(\sigma_y)^2}{2E}$$

أي هو المساحة تحت منحنى الاجهاد والانفعال حتى حد المرونة . بالتالي يمكن التعبير عن معامل المرونة بالمعادلة :

$$\text{معامل المرونة} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

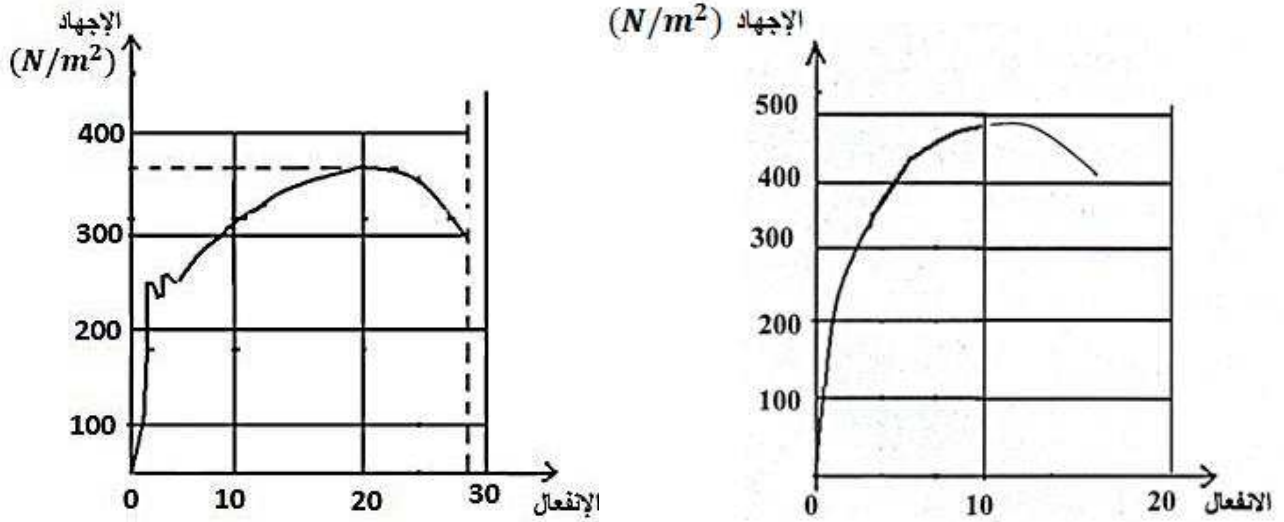




(أ) صلب ناشف أو قصف

(ب) صلب طري

شكل (1.2) القوة أو الحمل ضد الاستطالة لمادة مطيلية وأخرى قصفة



(ج) صلب ناشف أو قصف

(د) صلب طري

شكل (1.3) الاجهاد ضد الانفعال لمادة مطيلية وأخرى قصفة

## 5. معامل المتانة :

ويساوي الشغل المبذول في وحدة الحجوم من المعدن اللازم حتى نقطة كسر المعدن تحت الحمل الساكن .  
أي يساوي المساحة الكلية تحت منحنى الاجهاد والانفعال .

### 1.4.2 اختبار مقاومة الصدمات ( Impact Test ) :

يعتبر هذا الاختبار من الاختبارات الهامة لمعرفة سلوك المعادن تحت تأثير الاحمال الديناميكية السريعة (الصدمات) ويتحدد نتيجة لهذا الاختبار خصائص المعدن الديناميكية وأهمها مدى تحمله للصدمات التي يتعرض لها أثناء استخدامه ويجرى هذا الاختبار على عينات ذات شكل خاص تحتوى على (حز) (recess) في منتصف أحد جوانبها وتوضع العينة بين فكي الجهاز الموضح أدناه في الشكل (1.4) ويرفع الحمل إلى ارتفاع معين (H) ويترك ليسقط على العينة ليرتفع بعد ذلك إلى ارتفاع آخر (h) ويكون الفرق في طاقة الوضع بين الارتفاعين معياراً لمقاومة المعدن للصدمات . فإذا كان وزن كتلة البندول (w) فإن :

مقاومة المعدن للصدمات ( $\alpha_k$ ) يمكن إعطاؤها كالاتي :

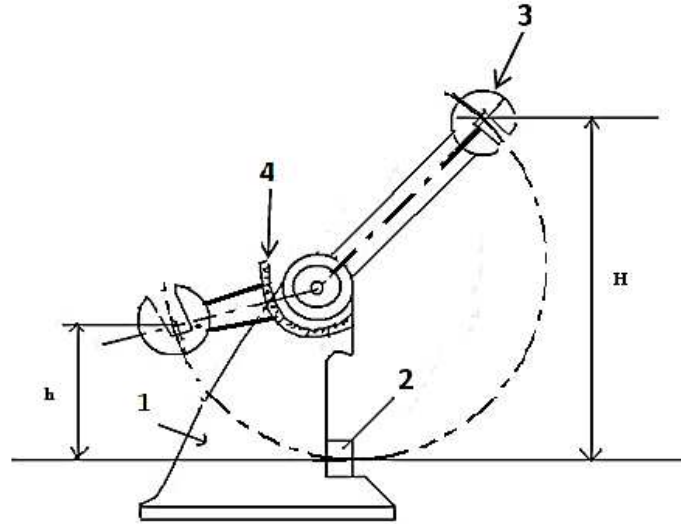
$$\alpha_k = \frac{w(H - h)}{A} \quad kg / cm^2$$

حيث A = مساحة مقطع العينة عند الحز بالسنتيمتر المربع .

وتختلف مقاومة المعدن للصدمات باختلاف قساوته (Brittleness) ولذلك فإن قيمة هذه المقاومة للمواد

الهشة ( كالحديد الزهر) منخفضة جداً ( $0.1 - 0.2 \text{ kg/cm}^2$ ) بينما تتراوح قيمتها للصلب بين 2 و 12

$\text{kg/cm}^2$  .



شكل (1.4) جهاز اختبار الصدمات (Charpy impact test)

1/ الجسم 2/ العينة 3/ الدقاقة 4/ التدرج

### 1.4.3 اختبار الصلادة (Hardness Test) :

#### 1. اختبار صلادة برينيل (Brinell Hardness Test) :

ويتم فيه ضغط كرة صلادة جداً بقوة في سطح المعدن المراد اختباره وتحسب الصلادة بمعامل برينيل الذي يعتمد على مقدار الحمل المستخدم في الضغط ومساحة الاثر الذي تتركه الكرة في المعدن على النحو التالي:

$$\text{Brinell hardness number} = \frac{2W}{\pi (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

رقم صلادة برينيل

حيث  $W$  ، هو الحمل المستخدم بالـ kg .

$D$  ، هو قطر الكرة المستخدمة بالـ mm .

$d$  ، هو قطر اثر الكرة في المعدن بالـ mm .

#### 2. اختبار صلادة روكويل (Rockwell Hardness Test) :

وفيه يُضغط مخروط من الماس زاوية قمته 120 درجة في المعدن المراد اختباره وتحسب الصلادة عن

طريق العمق الذي يخترقه المخروط من المعدن تحت تأثير حمل يتوقف على مدى صلادة المعدن المختبر، ويمكن بصفة عامة تقسيم هذا الحمل والطريقة المتبعة في الاختبار إلى الأقسام الآتية :

شكل أداة الاختبار	الحمل الكلي	الحمل الأولي	نوع الاختبار
مخروط زاويته 120 درجة	60 kg	10 kg	RHA
كرة قطرها 2.5mm	100 kg	10 kg	RHB
مخروط زاويته 120 درجة	150 kg	10 kg	RHC

#### 1.4.4 اختبار صلادة فيكرز (Vickers Hardness Test) :

وتستخدم هذه الطريقة خصوصاً لاختبار صلادة الطبقة السطحية الرقيقة من المعدن والنتيجة عن بعض المعالجات الحرارية الخاصة . كما يمكن استخدامها لاختبار صلادة المواد الشديدة الصلادة والأجزاء ذات المقاطع الصغيرة . تُعَيَّن الصلادة عن طريق ضغط هرم رباعي من الماس زاوية قمته 136 درجة في المادة المراد اختبارها بواسطة أحمال تتراوح بين ( 5 kg و 140kg ) ثم تقاس مساحة الأثر الناتج بواسطة المجهر وتحسب الصلادة بالمعادلة الآتية :

$$H_v = \frac{\text{الحمل (W)}}{\text{مساحة الأثر}} , \text{رقم صلادة فيكرز}$$

ويجب ملاحظة أن يبقى الضغط على العينة المراد اختبارها مدة من الزمن لا تقل عن 15 ثانية .

#### 1.5 طرق تحضير وتجهيز المعادن (Metals Preparation Methods) :

##### 1.5.1 تحضير الحديد الصلب :

المعادن الحديدية ( ferrous metals ) هي سبائك الحديد مع الكربون وعناصر أخرى مثل السيليكون والمنجنيز والفوسفات والكبريت وغيرها .

ويمكن تقسيم المعادن الحديدية بصفة عامة إلى نوعين رئيسيين هما الصلب أو الفولاذ (steel) والزر (cast-iron) . والصلب هو سبائك الحديد التي تحتوي على أقل من 2% كربون بينما الزر هو السبائك التي تحتوي على نسبة أعلى من ذلك (2%-6%) .

### 1.5.2 خام الحديد (Iron Ore) :

يعتبر عنصر الحديد من أكثر العناصر انتشاراً في الكرة الأرضية إذ يحتل المركز الرابع بعد الاوكسجين والسيليكون والألمونيوم وتحتوي الكرة الأرضية على 4.2% من وزنها حديد . ويوجد الحديد داخل القشرة الأرضية متحداً مع عناصر أخرى على شكل أكاسيد أو كربونات أو كبريتات مختلط بها مواد أخرى تسمى المواد العاطلة في الخام . ويستخرج الخام من باطن الأرض بواسطة الصناعات التعدينية ( mining industries ) بطرق الانتاج المعدني (metallurgical processes).

ومن أمثلة الخامات الحديدية الموجودة في الطبيعة الهيماتايت (hematite) والماجنتايت (magnetite) ومن أمثلة المواد العاطلة في الخام السيليك (الرمل) والألومينا (أحدى مكونات الطين) والجير ( أكسيد الكالسيوم) .

### 1.5.3 تسلسل عمليات انتاج الحديد والصلب :

إذا تأملنا أي منتج مصنوع من المعادن الحديدية مثل محرك السيارة المسبوك من الزر أو هيكلها المصنوع من ألواح الفولاذ (i.e. الصلب) وتحرينا طريقة انتاجه والخطوات التي مرّ بها منذ أن كان خاماً في باطن الأرض إلى أن صار بالصورة الموجود عليها لوجدنا أنه مرّ بسلسلة طويلة ومعقدة ومتراطة من العمليات لها تسلسل ثابت ويحدث نتيجة لذلك تغير في شكل وخواص المعدن حتى يلائم متطلبات الاستخدام النهائي.

وعموماً يمكن تقسيم الصور المختلفة التي تنتج بها المعادن الحديدية بعد استخراج المعدن من خاماته إلى مواد نصف مصنعة ومنتجات نهائية .

### I. المواد نصف المصنعة (Semi-Finished Products):

وهي أكثر المواد المعدنية انتشاراً ويقصد بالمواد نصف المصنعة المواد التي أُجريت عليها بعض العمليات التصنيعية ولا تزال تنتظر إجراء عمليات تصنيعية تالية لتعديل خواصها وشكلها ويمكن تقسيم المواد نصف المصنعة المأخوذة من صناعة الحديد إلى :

#### 1. المعدن الخام (Raw Metal) :

وهو المعدن الناتج من عملية الاستخلاص الميثلورجية الأولية من الخام المعدني الأصلي . والتركيب الكيميائي للمعدن الخام لا يزال يحتاج إلى تعديل بواسطة عمليات تالية للحصول على التركيب المطلوب ويدخل المعدن الخام في العمليات التالية على صورتين هما :

#### أ. معدن منصهر (Molten Metal) :

ينقل مباشرة بدون تخزين من عملية الاستخلاص إلى عملية التحويل والتعديل ومثال ذلك الزهر الخام الذي يُحوّل إلى صلب .

#### ب. تماسيح المعدن الخام (Pigs) :

وهي تُصب من المعدن في قوالب معدنية تسمى التماسيح وبهذه الصورة يمكن تخزينها لمدة طويلة .

#### 2. معدن مُجهز (Prepared Metal) :

بعد إعادة صهر المعدن الخام وضبط تركيبه الكيميائي يكون المعدن جاهزاً للصب على الصورة المطلوبة

ومثال ذلك الزهر الخام الناتج من الفرن العالي يُعاد صهره في فرن الدست (Cupola furnace) ويُصب في قوالب السباكة أو يُحوّل إلى صلب ويُصب على شكل كتل التشكيل .

### 3. المسبوكات (Castings) :

هي الأشكال التي تنتج عن صب المعدن المنصهر في قوالب الرمل أو القوالب المعدنية التي بها تجويف له نفس شكل الجزء المراد إنتاجه ويُبرّد المعدن بعد ذلك في هذا التجويف ويُجمّد على الشكل المطلوب .

### 4. كتل التشكيل (Forming Lugs) :

تصب المعادن التي سوف تشكل بعد ذلك بطرق التشكيل اللدن (plastic forming) أو بالطرق (hammering) على شكل كتل تشكيل يتراوح وزنها بين 100 kg وواحد طن.

### 5. كتل التشكيل النصف مدلفنة أو مدرفلة (Semi-Rolled Lugs) :

جميع كتل التشكيل تجرى عليها دلفنة أو درفلة أولية (initial rolling) لتغيير التركيب البلوري للمعدن المصبوب لأنه غير متجانس ولا يلائم عمليات التشكيل التي يتعرض لها فيما بعد.

### 6. بلاطة التشكيل :

لدلفنة المعدن على شكل ألواح تدلفن كتلة التشكيل مبدئياً على شكل ذو مقطع مستطيل يُسمّى البلاطة .

### 7. كتلة مربعة (Square Block) :

إذا كان المنتج النهائي من عمليات التشكيل سيكون على هيئة قضبان مربعة المقطع فإن الشكل الذي تُحول إليه كتلة التشكيل النصف مدلفنة يكون له مقطع مربع حاد الأركان أو مستدير الأركان لا تزيد مساحته عن  $160 \text{ cm}^2$  .

### 8. القضبان (Rods) :

هي منتجات ناتجة من عمليات الدلفنة (rolling) أو البثق (extrusion) أو السحب (drawing) وتكون على شكل أطوال كبيرة ومقطع صغير مستدير أو مربع أو سداسي .

### 9. المطروقات (Forgings) :

وهي المنتجات الناتجة عن عمليات الطرق بتوجيه ضربات متتالية على المعدن وهو في الحالة اللينة أو اللدنة.

### 10. القطاعات الانشائية (Structural Sections) :

وهي من أهم المنتجات الحديدية النصف مصنعة وهي ذات أطوال كبيرة وذات مقاطع مختلفة على هيئة حرف T أو I أو زاوية (angle) في شكل حرف L أو مجرى (channel) في شكل حرف U وتنتج عادة بالدلفنة وتستخدم في الأعمال الانشائية .

### 11. السلك (Wire) :

وهو ناتج عن عمليات السحب (drawing) من القضبان وأطوالها كبيرة جداً ومقطعها صغير (i.e. حوالي 2mm) ومستدير .

### 12. الألواح (Sheet Metals) :

وهي منتجات مدلفنة ذات مساحات كبيرة وذات سمك متباين يتراوح بين 2mm فما فوق . وكل المنتجات السابق ذكرها تستخدم كمادة أولية لصناعات أخرى . فمثلاً يستخدم السلك لصناعة المسامير (bolts) أو لصناعة اليايات (springs) كما تستخدم الألواح في عمل هياكل السيارات والثلاجات ومنتجات المكابس (press work) وتستخدم الكتل المربعة كمادة أولية في عمليات الحدادة والبثق . والقضبان المستديرة والسداسية المقطع تستخدم كمادة أولية في عمليات القطع (metal cutting) المختلفة في الخراطة مثلاً لإنتاج القلاووظات (i.e. اللوالب) والصواميل والمسامير وغيرها.



**II. المنتجات النهائية (Finished Products):**

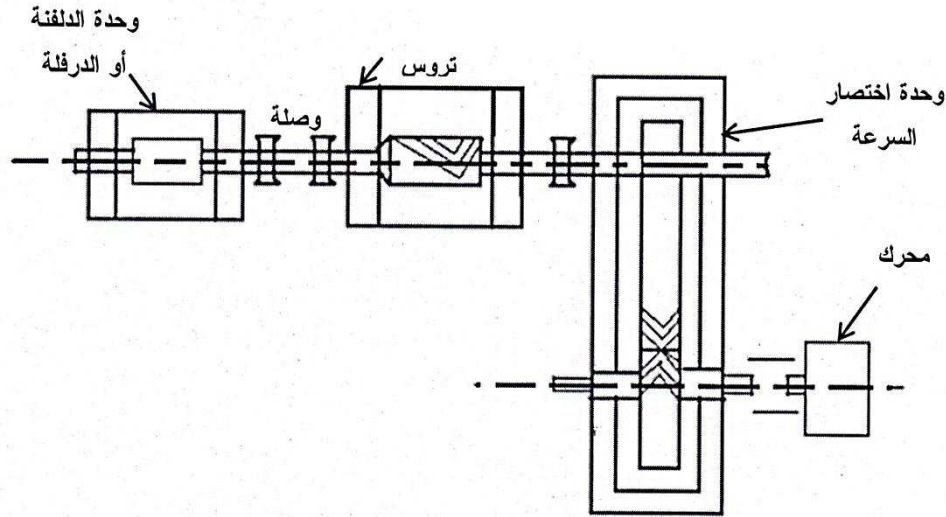
وهي عبارة عن المعادن التي تكون قد مرّت على جميع مراحل التشكيل والتشغيل حتى أصبحت جاهزة للاستخدام بمفردها أو بتجميعها مع منتجات أخرى لتكوين أجزاء الماكينات . مثلاً يُوجد عدد كبير من المنتجات النهائية التي نقابلها في حياتنا اليومية مثل ألواح الفولاذ الطري التي تستخدم في هياكل السيارات ومبردات المياه ومبردات الهواء وغيرها .

**1.5.4 التشكيل اللدن للمعادن (Plastic Forming of Metals) :****1. دلفنة أو درفلة المعادن (Metal Rolling) :**

عملية الدلفنة أو الدرفلة هي عملية تشكيل للمعدن وتتم بعصره بين جزئين اسطوانيين يسميان دولفينين يدوران عكس بعضهما ، ويتم في هذه العملية تقليل سمك المعدن مع زيادة طوله وعرضه . ويمكن أن تتم هذه العملية على الساخن أو على البارد وينتج عن عملية الدلفنة العديد من المنتجات نصف المصنّعة كألواح الصلب الحديدية المستخدمة في الإنشاءات المعدنية كالعتبات أو العارضات ذات الأشكال المختلفة (beams) والزوايا (angles) والحديد المبروم المستخدم في الإنشاءات الخرسانية (i.e. السبخ) .

**2. ماكينات الدلفنة أو الدرفلة (Rolling Machines) :**

يبين الشكل (1.5) أدناه رسماً تخطيطياً لماكينة الدلفنة أو الدرفلة التي تُدار بمحرك كهربائي يُقلّل سرعته صندوق تروس مخفض للسرعات (gear box) وتصل السرعة الدورانية بعد ذلك إلى وحدة الدلافين عن طريق وصلة خاصة لنقل الحركة . وتتكون وحدة الدلفنة من دولفينين على الأقلّ مركبّان في جسم الماكينة على كراسي خاصة تسمح لهما بالدوران كما يمكن ضبط وضعهما حسب سمك المعدن المطلوب . وتصنع الدلافين من الحديد الزهر أو من الصلب السبائكي (alloy steel) ويُقسّ سطحها الخارجي لكي يستطيع مقاومة التآكل الناتج من الاحتكاك أثناء عملية الدلفنة .



شكل (1.5) رسم مُبسَّط لماكينة الدفلة أو الدرفلة

### 3. حساب زاوية التلامس (Calculation of Angle of Contact) :

يوضح الشكل (1.6) التالي منطقة التغير في الشكل اثناء عملية الدفلة وفيها يظهر قوس التلامس على سطحي الدولفينين وتسمى الزاوية المركزية ( $\alpha$ ) المناظرة لكل قوس بزاوية التلامس (angle of contact) ويمكن حساب قيمة زاوية التلامس هذه من العلاقة الآتية :

$$\cos \alpha = 1 - \left\{ \frac{t_1 - t_2}{d} \right\}$$

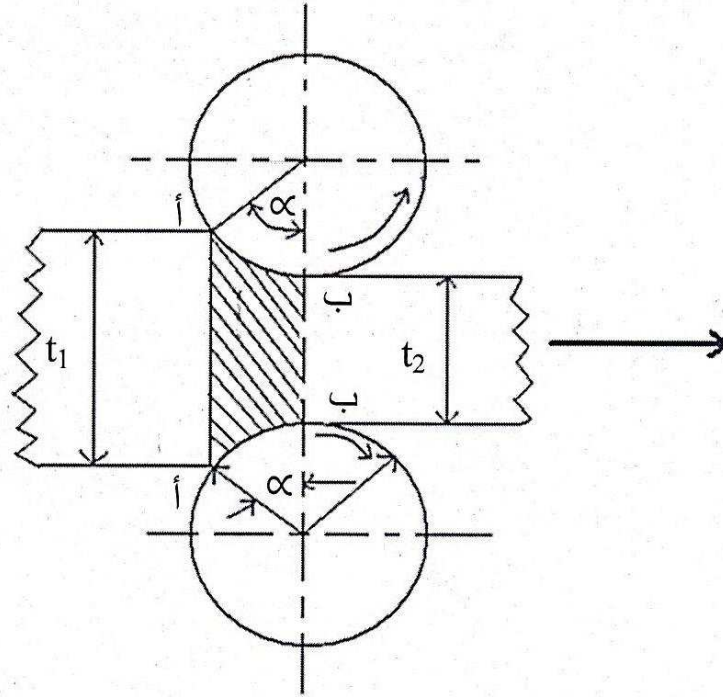
$$\therefore \alpha = \cos^{-1} \left\{ 1 - \left\{ \frac{t_1 - t_2}{d} \right\} \right\}$$

حيث :

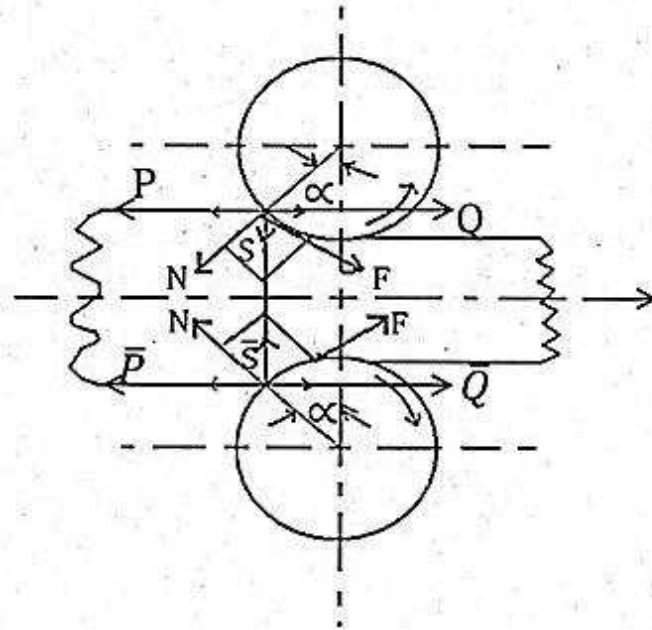
$d$  = قطر كل من الدولفينين أو الدرفيلين.

$t_1$  = سمك المعدن قبل الدفلة أو الدرفلة.

$t_2$  = سمك المعدن بعد الدفلة أو الدرفلة.



شكل (1.6) هندسة عملية الدفنة أو الدرفلة



شكل (1.7) القوى المؤثرة أثناء عملية الدفنة

4. شرط أداء عملية الدفنة أو الدرفلة :

يتم امرار المعدن بين الدولفينين بواسطة الاحتكاك الذي ينشأ بين سطحي الدولفينين والمعدن المراد دلفنته .

عند بداية قوس التلامس أ يضغط الدولفينين على المعدن كل بقوة قيمتها (N) وينتج عن ذلك قوة احتكاك بين المعدن وكل من الدولفينين قيمتها (F) وتحليل القوتين N و F كما مبين في الشكل (1.7) أعلاه نجد أن :

أ. القوتين S و  $\bar{S}$  تقومان بعصر المعدن .

ب. القوتين  $\bar{Q}$  و Q تقومان بسحب المعدن إلى الأمام بين الدولفينين .

ج. القوتين  $\bar{P}$  و P تقومان بمقاومة عملية السحب .

حيث  $N =$  قوة ضغط الدرفيل على المعدن .

$F =$  قوة الاحتكاك بين المعدن والدرفيل.

$S =$  قوة عصر المعدن.

$Q =$  قوة سحب المعدن إلى الأمام بين الدرفيلين.

من تحليل القوى ينتج الآتي :

$$S = N \cos \alpha + F \sin \alpha \quad (1)$$

$$Q = F \cos \alpha \quad (2)$$

$$P = N \sin \alpha \quad (3)$$

ولكي تتم عملية الدلفنة أو الدرفلة يجب ان تتغلب قوة السحب Q على قوة المقاومة P أي أن يكون :

$$\left. \begin{array}{l} 2Q > 2P \\ Q > P \end{array} \right\} \quad (4)$$

وبالتعويض عن قيم كل من Q , P من المعادلتين (2) و (3) في المعادلة (4) عاليه نحصل على :

$$F \cos \alpha > N \sin \alpha \quad (5)$$

ولكن القيمة الحرجة للقوة  $F$  عند وشك منع الحركة ( وشك انزلاق المعدن بين الدولفينين أي دوران الدولفينين دون سحب المعدن ) يمكن ان تعطي بالمعادلة الآتية :

$$F = \mu N \quad (6)$$

حيث  $\mu$  هو معامل الاحتكاك بين الدولفينين والمعدن المراد دلفنته وتتوقف قيمته على نوع كل من مادة الدلافين والمعدن المراد دلفنته وعلى درجة خشونة سطح كل منهما وكذلك على درجة حرارة كل منهما وسرعة الدلفنة ، ويرتبط معامل الاحتكاك ( $\mu$ ) بزاوية الاحتكاك  $\phi$  بالعلاقة التالية :

$$\mu = \tan \phi \quad (7)$$

ومن المعادلات (5) ، (6) ، (7) يمكن استنتاج شرط أداء عملية الدلفنة على النحو الآتي :

$$\begin{aligned} F \cos \alpha &> N \sin \alpha \\ \mu N \cos \alpha &> N \sin \alpha \\ \tan \phi N \cos \alpha &> N \sin \alpha \\ \therefore \tan \phi &> \tan \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

أي أنه لكي تحدث عملية الدلفنة أو الدرفلة يجب أن تكون زاوية التلامس  $\alpha$  أصغر من زاوية الاحتكاك ( $\phi$ ) (angle of friction).

تتراوح قيمة زاوية التلامس (angle of contact) بين  $24^\circ$  و  $30^\circ$  في عمليات دلفنة كتل الخام ، وبين  $15^\circ$  و  $20^\circ$  في عمليات دلفنة الشرائط والألواح المعدنية على الساخن وبين درجتين وعشر درجات في عمليات دلفنة الألواح على البارد.

#### 5. انواع ماكينات الدلفنة (Types of Rolling Machines) :

يمكن تقسيم ماكينات الدلفنة من ناحية نوعية المنتج الذي تنتجه إلى الانواع الآتية :

### 1. ماكينات الخصر الأولي (Primary Reduction Mills):

وتشمل ماكينات انتاج الكتل النصف مدلفنة والكتل المربعة والألواح السمكية.

### 2. ماكينات دلفنة المقاطع الانشائية (Structural Sections Mills):

التي تقوم بتحويل الكتل النصف مدلفنة والمربعة إلى مقاطع انشائية مختلفة كالعُتَبَات (beams) ، القضبان (rods) والزوايا (angles) .

### 3. ماكينات الدلفنة النهائية (Finishing Mills):

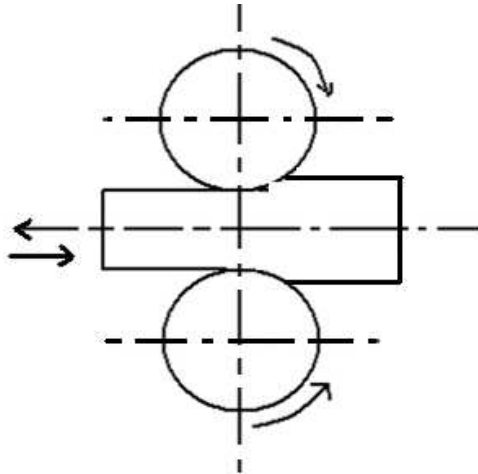
ويشمل هذا النوع ماكينات دلفنة الألواح الرقيقة والشرائط (sheets). كما تُقسَّم ماكينات الدلفنة من ناحية عدد الدلافين المستخدمة إلى :

#### i. ماكينات دلفنة ثنائية (Two High Rolls):

وتتكون من دولفينين يدوران في اتجاهين متضادين وتختصر المعدن عند مروره بين الدولفينين في اتجاه التغذية الذي يحدده اتجاه الدوران .

#### ii. ماكينات دلفنة ثنائية عاكسة (Reversing Rolls):

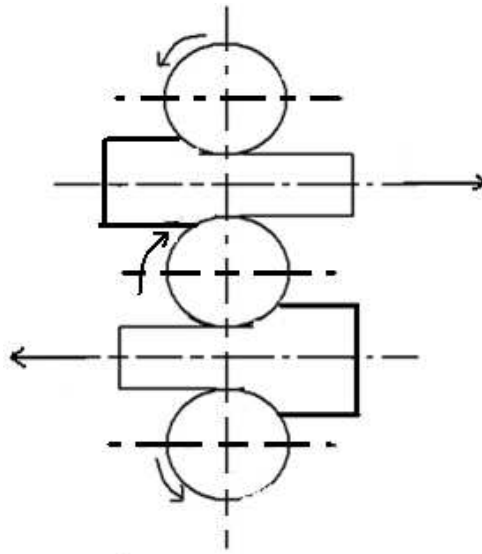
وفيها يمكن عكس اتجاه دوران الدولفينين وبذلك يمكن تغذية كتلة المعدن من كلا الاتجاهين ومن ناحية التركيب فهي مماثلة للشكل (1.8) أدناه :



شكل (1.8) ماكينة دلفنة ثنائية

### iii. ماكينات دلفنة ثلاثية (Three High Rolls):

وفي هذا النوع تركَّب ثلاثة دلافين في جسم الماكينة وبذلك يمكن تغذية المعدن من خلال الدولفينين الأعلى والأوسط في أحد الاتجاهات ثم يعاد تغذية المعدن من خلال الدولفينين الأوسط والسفلي في الاتجاه المضاد وبذلك يمكن الاستغناء عن ضرورة عكس حركة الدوران كما في النوع السابق . الشكل (1.9) أدناه يوضِّح ماكينة دلفنة ثلاثية .

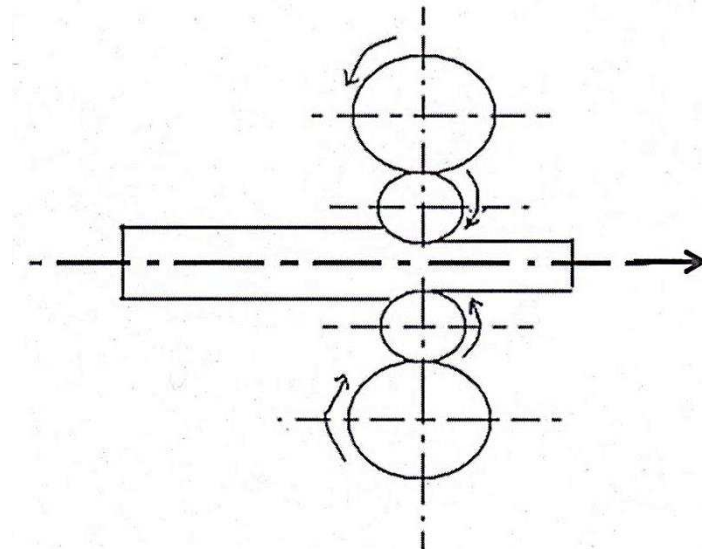


شكل (1.9) ماكينة دلفنة ثلاثية

### iv. ماكينات دلفنة رباعية (Four High Rolls):

تتكون الماكينات في هذا النوع من دولفيني تشكيل صغيري القطر ( forming rolls ) يسندهما دولفيني إسناد كبيري القطر ( supporting rolls ) .

والغرض من هذه العملية هو استخدام الدولفينين الصغيرين للحصول على نسبة اختصار كبيرة في سمك المعدن مع الاحتفاظ بقوة تحمل عالية للقوى بمساعدة الدلافين الكبيرة . الشكل (1.10) أدناه يوضح ماكينة دلفنة رباعية .



شكل (1.10) ماكينة دلفنة رباعية

#### v. ماكينات الدلفنة متعددة الدلافين (Multi High Rolls) :

ويستخدم هذا النوع بكثرة في عمليات الدلفنة وتتراوح أقطار دلافين التشكيل المستخدمة بين 10mm و 30mm ، وتُرتَّب الدلافين الساندة حول دولفيني التشكيل مما يؤدي إلى زيادة قوة الماكينات على دلفنة المقاطع الصغيرة بمقاسات دقيقة وكذلك زيادة قدرة تحملها لقوى الضغط الكبيرة الناتجة عن زيادة معدلات الاختصار.

#### vi. ماكينات الدلفنة الشاملة (Universal Rolling Mills) :

وتتكون من دولفينين أفقيين وآخرين رئيسيين وتستخدم معاً في إنتاج المقاطع الانشائية الكبيرة الحجم بعمق يصل إلى 1000mm .

#### 6. عمليات الدلفنة على البارد (Cold Rolling Processes) :

تتميز عمليات الدلفنة على البارد بالخصائص الآتية :

1. دقة عالية في إنتاج المقاطع الصغيرة .
2. جودة عالية في تشطيب الأسطح المدلفنة .



3. صلابة عالية للمعدن المدلفن .

وتحتاج عملية الدلفنة على البارد إلى قوة أكبر للتشكيل نتيجة لارتفاع مقاومة المعدن للتشكيل لذلك تستخدم لهذا الغرض ماكينات الدلفنة متعددة الدلافين حيث تُدخل المادة الأولية على هيئة الواح أو شرائط مدلفنة على الساخن بعد إزالة الصدأ من عليها بغسلها في احماض مُخففة .

ويلاحظ أنه ينتج من عملية الدلفنة على البارد ومثلها كافة عمليات التشكيل على البارد اجهادات داخلية (internal stresses) في المنتجات مما يترتب عنه زيادة هشاشة المعدن وكذلك زيادة صلابته ، ولذا يجب معالجة المنتجات المدلفنة على البارد حرارياً ( i.e. باستخدام المعالجات الحرارية المناسبة ) لازالة الخواص غير المرغوب فيها .

#### **7. عمليات الدلفنة على الساخن (Hot Rolling Processes) :**

تتم عملية الدلفنة على الساخن بواسطة تسخين المعدن إلى درجة حرارة عالية بعد تنظيفه وإزالة أي شوائب من على سطحه . بعد التأكد من وصول المعدن إلى درجة الحرارة المطلوبة تزال ايضاً طبقة الصدأ المتكونة نتيجة التسخين ثم تُجرى عملية الدلفنة على الساخن التي تتميز بقلّة مقاومة المعدن للدلفنة على عكس عملية الدلفنة على البارد .

## الفصل الثاني

### عملية توليد الرائش

### Chip Generation

#### 2.1 مدخل (Introduction) :

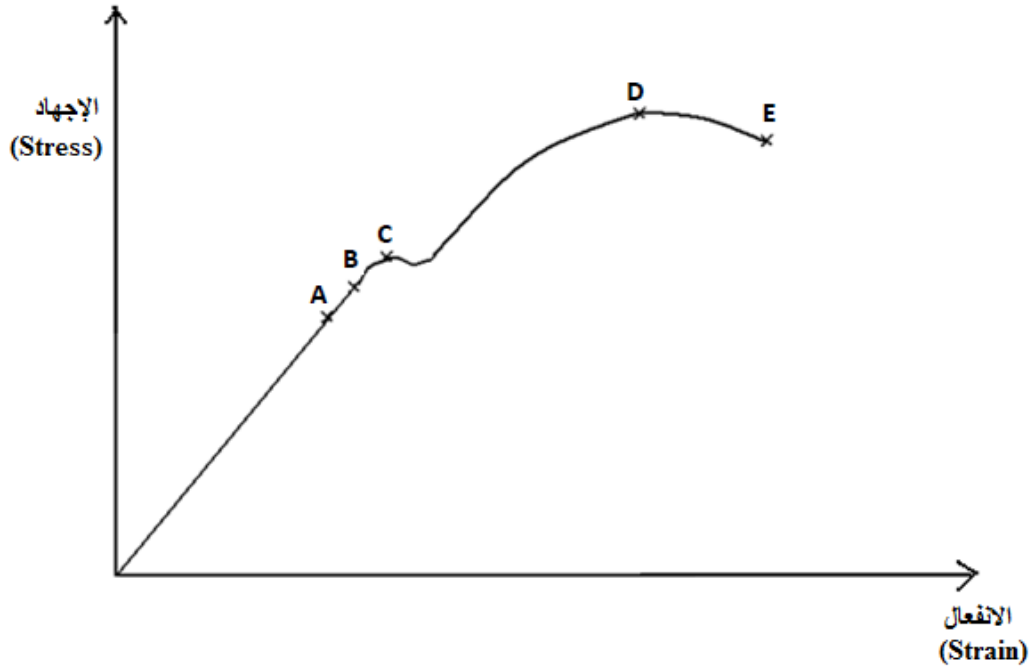
عملية توليد الرائش من العمليات الفيزيائية والميكانيكية المعقدة لأنها تشتمل على كل من التشوه المرن (elastic deformation) والتشوه اللدن المستدام (permanent plastic deformation) للمعدن المراد تشغيله على ماكينات الإنتاج المختلفة ( i.e. مثل المخرطة ، الفريزة ، المكشطة ، المدقاب ، الجلخ وغيرها ) وعادة ما يصاحب هذه العملية احتكاك شديد بين عدة القطع والمعدن المراد تشغيله ينتج عنها توليد حرارة عالية والتفاف للرأش وانكماشه وتصلد سطح الشغلة وبلي الحد القاطع .

الشكل (2.1) ادناه يوضح منحنى الاجهاد - الانفعال للفلولاذ الطري (mild steel) والذي يتكون من النقاط التالية :

- i. النقطة A تمثل حد التناسب (Limit of Proportionality) حيث يتناسب الانفعال مع الاجهاد المسبب له حتى هذا الحد فيما يعرف بقانون هوك (Hook's law) .
- ii. النقطة B تمثل حد المرونة (Elastic Limit) وهو الحد الذي يمكن ان ترجع فيه المادة إلى حالتها الأولى بعد زوال القوة المؤثرة .
- iii. النقطة C وهي النقطة التي يبدأ عندها التشوه اللدن ( i.e. المستديم) وتسمى بنقطة الخضوع (Yield Point) ولها قيمتان عليا ودنيا حيث يزيد فيها الانفعال بثبات الاجهاد ثم يستمر الانفعال في الزيادة بنقصان واضح في الاجهاد .
- iv. النقطة D وتمثل الحد الأقصى للتشوه اللدن حيث يصل الاجهاد عندها إلى أقصى قيمة له وتسمى

بنقطة الاجهاد الاقصى (Maximum or Ultimate Stress Point).

v. النقطة E وتمثل الاجهاد الذي ينكسر عنده المعدن وتسمى بنقطة الكسر (Fracture Point) والتي يزيد عندها الانفعال بانخفاض واضح في الاجهاد .



شكل (2.1) منحنى الاجهاد ضد الانفعال للفلولاذ الطري

في الانفعال اللدن تتحرك بعض طبقات المعدن في اتجاه مستويات الانزلاق (slip planes) التي تنطبق اساساً مع أقصى اجهاد قص ، ويتم هذا الانزلاق بين جزئيات الحبيبات البلورية وبين الحبيبات نفسها ونتيجة لذلك يتغير شكل الحبيبات وحجمها ووضعها النسبي ويصاحب الانفعال اللدن درجة حرارة شديدة وتغير في خواص المعدن واهمها زيادة صلابته .

## 2.2 أنواع الرائش (Types of Chips) :

هنالك أربعة أنواع رئيسية للرئش هي :

### 2.2.1 الرائش غير المتصل (Discontinuous Chips) :

يتكون هذا الرائش نتيجة لتشغيل معادن قاسية ذات مطيلية منخفضة بسرعة منخفضة . وهو عبارة عن قطع صغيرة عندما يتم إزالة احداها تضغط عدة قطع طبقة المعدن التالية لإزالتها وهكذا .

### 2.2.2 الرائش المتصل (Continuous Chips) :

ينتج هذا النوع من الرائش نتيجة لتشغيل الصلب (أو الفولاذ الطري) عند سرعات قطع عالية ( أكبر من

60m/min) حيث تتطلب زاوية قص كبيرة .

الظروف المؤاتية لحدوث هذا النوع من الرائش :

1. معدن طري .
2. سمك رائش صغير .
3. سرعات قطع عالية .
4. زاوية جرف كبيرة .
5. احتكاك قليل بين عدة القطع والرئش نتيجة لـ :
  - i. سطح عدة القطع لامع وناعم .
  - ii. معدن عدة القطع ذو معامل احتكاك منخفض .
  - iii. استخدام التزييت .
6. تحقيق درجة حرارة قطع مناسبة .

### 2.2.3 الرائش غير المتجانس: (Inhomogeneous Chips or Heterogeneous Chips)

يتكون هذا الرائش نتيجة لتشغيل الصلب بسرعة قطع متوسطة حيث يكون وجه الرائش الملامس لوجه العدة

ناعماً في حين يحتوى الوجه الآخر للرئش عُقْداً تدل على مراكز فصل أجزاء الرائش عن المعدن الأصلي بزاوية  $\emptyset$  .

الظروف المؤاتية لتكوين الرائش غير المتجانس هي :

1. حدوث ارتفاع في درجة الحرارة نتيجة احتكاك شديد بين عدة القطع والرئش.
2. يتأثر المعدن المقطوع في نقطة خضوعه تأثيراً ملحوظاً بارتفاع درجة الحرارة.

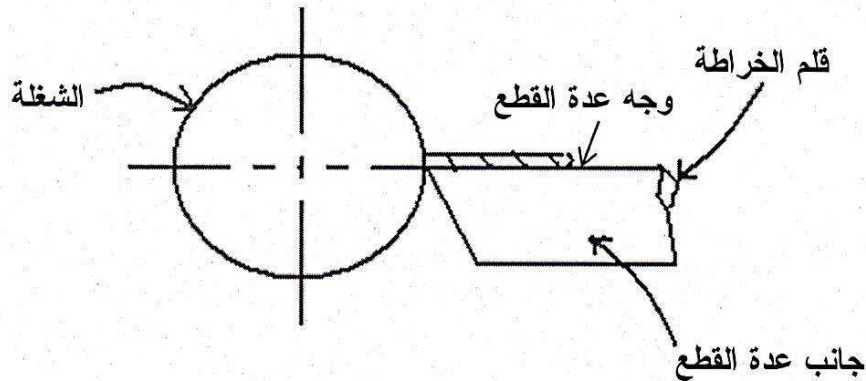
#### 2.2.4 الرائش المتكسر (المفتت) (Fractured Chips) :

يتكون هذا الرائش نتيجة لتشغيل المعادن ذات اللدونة المنخفضة مثل الحديد الزهر القاسي والبرونز القاسي . وهو عبارة عن قطع متكسرة ومفتتة ومختلفة في الشكل عن بعضها البعض . وفي تشكيل الرائش المتكسر تتكون الشقوق (cracks) فجأة على طول مستوى القص الذي تتفصل عنده جزيئات الرائش .

#### 2.3 تأثير الحرارة على الحد القاطع :

يتعرض الحد القاطع لقلم الخراطة للإجهادات المترتبة على قوى القطع كما يتعرض القلم باستمرار لعملية القطع للتآكل نتيجة للحرارة العالية المتولدة من الاحتكاك. هذه الحرارة تنتقل من عدة القطع حيث تقلل من صلابتها وتجعلها أقل قدرة على مقاومة البلى وتؤثر مباشرة على عمر عدة القطع . فالبنية المارتنزيتية (Martensitic Structure) والتي نحصل عليها من المعالجة الحرارية تتحلل عند درجة حرارة مقدارها 600 درجة مئوية فما فوق إلى بنية أخرى أقل مقاومة للبلى والاحتكاك .

عند قطع المعادن توجد أقصى درجة حرارة في منطقة الرائش المجاورة لعدة القطع وتقل تدريجياً كلما ابتعدنا عنها . وتزيد درجة الحرارة على سطح عدة القطع (Tool face) عن جوانبها بما أن وجه عدة القطع تنتقل إليه درجة الحرارة نتيجة للاحتكاك والتشوه اللدن معاً بينما يتعرض جانب عدة القطع للاحتكاك فقط .



شكل (2.2) تشغيل السطح الخارجي لشغلة

يمكن تقليل الحرارة الناشئة عن الاحتكاك باستخدام نظام تبريد مناسب يُرش من خلاله مائع التبريد على الشغلة والقلم لامتصاص بعض الحرارة من العدة عن طريق التبخر . كما تفيد الزيوت الموجودة في مائع التبريد في تزليق العدة مما يُقلل من الاحتكاك بينها وبين الشغلة .

## **2.4 عمليات بدون توليد رائش (Forming Operations without Chip Formation) :**

### **2.4.1 عمليات تشكيل بالاسطمبات (Press Work) :**

المقصود بالتشكيل بالاسطمبات هو كبس المادة المراد تشكيلها بين جزئي الضبعة (السنك والاسطمبة) (punch and die) . تعتبر هذه الطريقة أكثر طرق التشكيل استخداماً وخصوصاً في حالة انتاج اعداد كبيرة من المنتجات . هنالك نوعان من عمليات التشكيل بالاسطمبات :

#### **النوع الأول (The First Type) :**

يعتمد عل تشكيل المادة بواسطة قصها حسب الشكل المطلوب مثل عملية التخريم (Piercing) والتفريغ (Blanking) . يُلاحظ في هذا النوع من التشكيل أنّ القوة المستخدمة تكون مساوية أو أكبر من القوة اللازمة لقص المعدن.

#### **النوع الثاني (The Second Type) :**

يعتمد على تشكيل المادة بواسطة ثنيها أو سحبها ولا يحدث قص للمعدن مثل عمليات الثني (Bending)، والسحب العميق (Deep Drawing). يُلاحظ أنّ القوة في هذا النوع تكون مساوية لقوة التشكيل اللازمة وتكون أقلّ كثيراً من قوة قص المادة.

سيتم فيما يلي شرح النوعين المذكورين عاليه بالتفصيل :

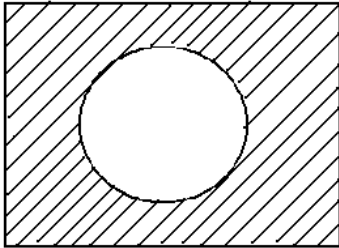
### **1. عمليات قص (Shear Processes) :**

#### **التفريغ أو التخريم (Piercing and Blanking) :**

توضع المادة المراد تشكيلها بين الاسطمة والسنبك ويتحرك السنبك إلى أسفل بالقوة اللازمة لقص المادة (i.e. قطعها).

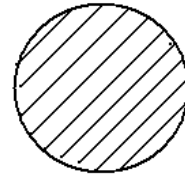
تعتبر العملية عملية تفريغ إذا كان المنتج هو الجزء المقطوع من المعدن ( له نفس شكل السنبك) وفي هذه الحالة تكون أبعاد السنبك أقل من الأبعاد المطلوبة للمنتج بقيمة سماح للتمدد الخاص بالمعدن المستخدم بعد عملية القص .

وتعتبر العملية عملية تخريم إذا كان المنتج هو الجزء المتبقي من المعدن بعد كبسه وفي هذه الحالة تكون أبعاد السنبك أكبر من الابعاد المطلوبة للفراغ المتكوّن بقيمة سماح للتمدد الخاص بالمعدن المستخدم .  
الشكل (2.3) أدناه يبين منتج عملية التفريغ والشكل (2.4) يوضح منتج عملية التخريم بينما يوضح الرسم في الشكل (2.5) الأداة المستخدمة في عمليتي التفريغ والتخريم .



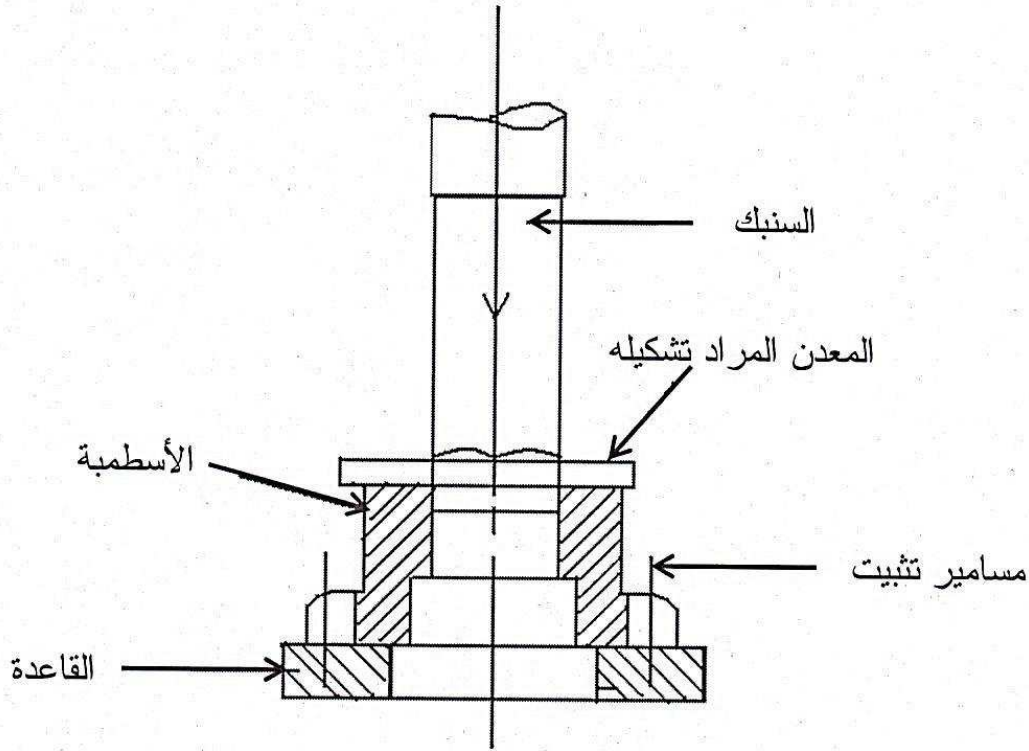
عملية التخريم

شكل (2.4) منتج عملية التخريم



عملية التفريغ

شكل (2.3) منتج عملية التفريغ



شكل (2.5) الأداة المستخدمة في التفريغ أو التخريم

## 2. عمليات تشكيل (Forming Processes) :

### i. الثني (Bending) :

في هذه العملية يتم ثني المعدن وذلك بضغطه بين الأسطوانة والسنك بالقوة اللازمة لعملية تشكيله . هنالك نوعان من عمليات الثني وهي ثني مفرد وثنى مزدوج .

### ii. السحب العميق (Deep Drawing) :

هي عملية تغيير قطعة من الألواح المعدنية فيتغير شكلها من قطعة مسطحة إلى قطعة ذات شكل مقعر حسب العمق المطلوب . تقوم آلية سحب مكونة من سنك واسطوانة بكبس المعدن وسحبه بين سطحها ، ويلاحظ أن سمك المادة يقل أثناء سحبها من السمك الأصلي . تستخدم هذه الطريقة لتشكيل المعادن ذات اللدونة العالية وإلا تمزقت أثناء السحب. الشكل (2.6) أدناه يوضح الآلية المستخدمة في السحب العميق .

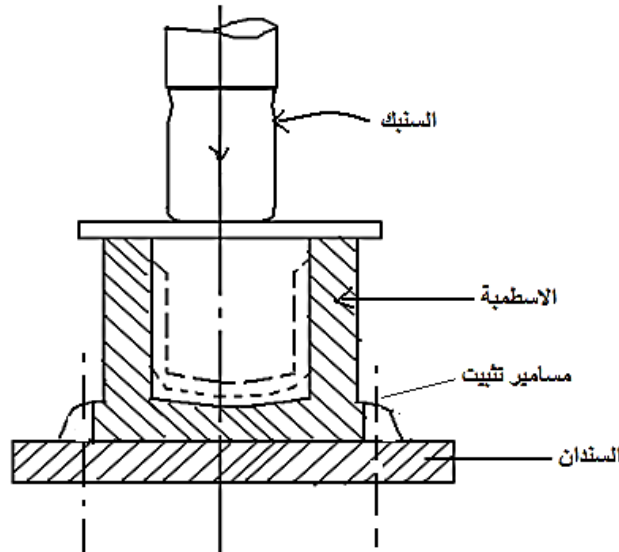


### iii. التشكيل بالسك والختم (Stamping Processes) :

عملية السك عبارة عن تشكيل الكتل والأقراص المعدنية الصغيرة نسبياً بكبسها بين مكبسين يحتوي سطحهما على الهيئة أو الشكل المراد اعطاؤه لوجهي الكتلة أو القرص المعدني .

يُصمَّم القالب الذي يتكون من المكبسين بشكل لا يسمح بانسياب المعدن إلى الخارج. تستعمل هذه الطريقة بصورة خاصة لتشكيل قطع النقود المعدنية والميداليات وأجزاء الآلات الكاتبة وما شابه .

أما عملية الختم فتستعمل عادة كمرحلة نهائية لإعطاء شكل نهائي لقطعة سبق وأن شُكِّلَتْ بطرق التشكيل الأخرى . ليس الغرض من التشكيل بالختم إحداث تغيير كبير في شكل أو هيئة القطعة بل تقتصر فقط على أحداث تغييرات طفيفة في الشكل وضبط دقيق لأبعاد ومقاسات القطعة المشكَّلة .



شكل (2.6) آلية السحب العميق

## الفصل الثالث

### اختبار المواد والأساليب المختبرية

## Materials Testing and Experimental Methods

### 3.1 اختبارات الشد (Tensile Tests) :

سلوك المادة المطيلية (ductile material) مثل الفولاذ الطري (mild steel) عندما يتم تعريضها إلى اجهاد شد بسيط أوضحت أنه وحتى قيمة معينة للاجهاد فإن الانفعال يكون متناسباً مع الاجهاد المسبب له ، وعندما يتم إزالة الحمل خلال هذا المدى فسوف لا يكون هنالك انفعال مستدام ( i.e. يتم اجهاد المادة في المدى المرن) إذا زيد الحمل فإن المادة ستخضع مؤديّة انفعالاً لدناً عند قيمة الاجهاد الثابت . إذا تمت زيادة الحمل إضافياً فسيكون هنالك انفعالاً واضحاً ( i.e. في الغالب لدن ) يمتد حتى قيمة الاجهاد الأقصى . عند هذه المرحلة تبدأ العينة بالتعقُّق أو التخصُّر في بعض المواضع على امتداد طولها (i.e. تقريباً في منتصف العينة) وينخفض الحمل حتى حدوث الكسر . تعرض معظم المواد الهندسية هذه الملامح بدرجات متفاوتة .

#### 3.1.1 جزء التشغيل للعينة (The Working Portion of the Specimen) :

إما أن يكون مستديراً أو مستطيلاً في مقطعه العرضي ، وتتم توسعته عند كل طرف لطول مناسب للمساكات . يمكن قطع قلاووظ (لولب) في أطراف العينة لربطها في المساكات ، أو يمكن عمل كتفة للعينة يتم من خلالها نقل الحمل أو يمكن مسكها بماسكة اسفينية بأوجه داخلية مخشنة (wedge) . الأسلوب الأخير هو الأبسط والأرخص للاستخدام ودائماً ما يستخدم لعَيِّنات مسطّحة ، ولكنه يكون قاصراً على الفولاذ الناعم ومواد أخرى . يجب أن تكون الماسكات متمركزة ذاتياً لكي يتم تسليط الحمل محورياً وبانتظام على العينة (i.e. لمقطع عرضي دائري فإنّ لا تتركزيه بمقدار  $0.01d$  ( 1 % من القطر ) في الحمل تزيد الاجهاد الأقصى بمقدار 8% ) .

**3.2 ماكينات الاختبار (Testing Machines) :**

يمكن تصنيفها إلى قسمين : القسم الأول يتم فيه تسليط الحمل يدوياً ، والآخر يتم فيه الاستفادة من الضغط الهيدروليكي ، حيث يعتمد الاختيار بصورة أكبر على السعة المطلوبة . في كلا الحالتين يتم قياس الحمل بأوزان موازنة خلال منظومة من الروافع . الأنواع الحديثة لماكينات الاختبار المشغلة هيدروليكياً تكون ذاتية البيان ، حيث يتم تفعيل آلية الموازنة بمكبس يعمل في اسطوانة يتم امدادها بنفس ضغط وحدة الاختبار .

في المدى المرن (in the elastic range) يتم قياس الانفعال بجهاز قياس استطالة (extensometer) مُثبت على الطول القياسي. وهو جهاز يقوم بتحري التغيرات الصغيرة جداً في الطول ، أيضاً يمكن استخدام مقياس انفعال (strain gauge) . أما بالنسبة للانفعالات اللدنة فيتم قياسها بواسطة زوج من المقسمات ومسطرة مدرجة (pair of dividers and graduated rule) .

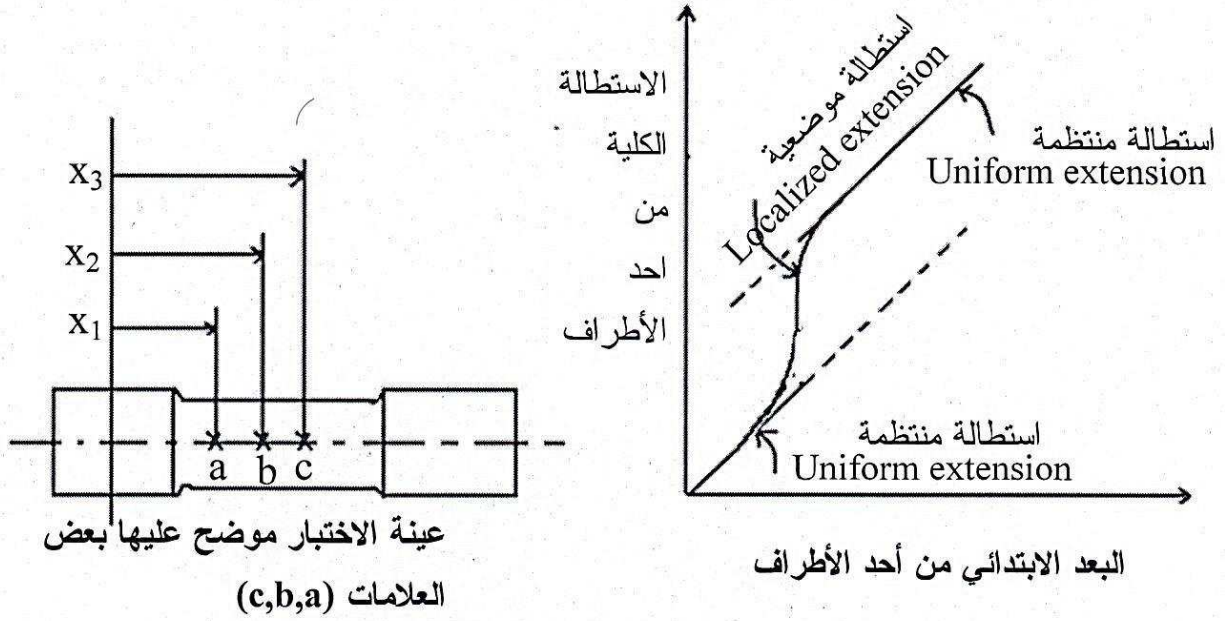
**3.3 تأثير معدل التحميل (Effect of Rate of Loading) :**

وُجِدَ أنه وباستثناء الفولاذ المصلد (hardened steel) كلما زادت سرعة الاختبار كلما تمَّ الحصول على قيم أكبر لإجهاد الخضوع والإجهاد الأقصى وبالتالي الاستطالة .

**3.4 تفاوت الاستطالة مع الطول الاسمي ومساحة المقطع العرضي:****(Variation of Elongation with Gauge Length and Cross – Sectional Area)**

إذا تمَّ وضع علامات على العينة لعدد كبير من التقسيمات على امتداد طولها وتمَّ اختبارها حتى الكسر، فإن القطعتان يمكن وصلهما مع بعضهما البعض ويتم قياس بعد كل علامة من احد الاطراف . بطرح الأبعاد المأخوذة ابتدائياً من تلك المأخوذة بعد الكسر نحصل على الاستطالة الكلية من احد الأطراف . وعندما يتم رسم الاستطالة الكلية ضد البعد من ذلك الطرف فنحصل على المخطط الموضح في الشكل (3.1) أدناه :

يتكون هذا المخطط من خطين مستقيمين متوازيين . الزيادة الفجائية للاستطالة تحدث في منطقة العنق عند الكسر . في هذه الحالة يقال أن هنالك استطالة موضعية عند العنق (منطقة الكسر) واستطالة منتظمة بطول المتبقي من العينة.



شكل (3.1) تفاوت الاستطالة مع الطول الأصلي للعينة

اجعل  $e$  هي الاستطالة على طول قياسي  $l$  ، باعتبار أن الكسر يكون تقريباً عند منتصف الطول الاسمي للعينة ، بالتالي  $e = a + bl$  تُعبّر عن شكل المخطط .

$$100e/l = 100a/l + 100b$$

وجد العالم Unwin أنه ولمادة معطاة يكون المقدار الثابت  $a$  متناسباً مع الجذر التربيعي لمساحة المقطع العرضي الأصلية للعينة  $A$  ، وبكتابتها  $100a = C\sqrt{A}$  و  $100b = B$  ، بالتالي يصبح القانون :

$$100\frac{e}{l} = \frac{C\sqrt{A}}{l} + B$$

يتم اعطاء القيم التالية للثوابت B و C للفولاذ الطري : B=20 و C=70 . لكي يتم تفادي أي خطأ في مقارنة أرقام الاستطالة فإنه يُنصح حسب توصية المؤسسة البريطانية للمعايير والقياسات B. S. 18 بأنَّ الطول الأسمى يجب أن يكون مساوياً لـ  $(l = 4\sqrt{A})$  .

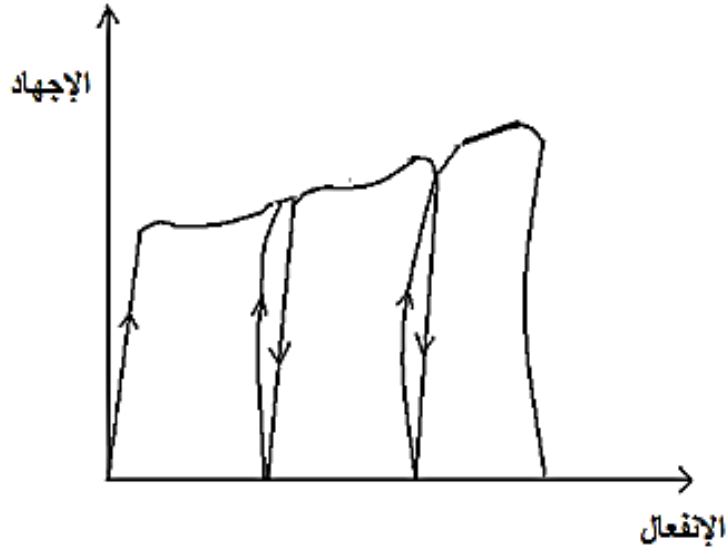
### 3.5 الانفعال الزائد و التحميل التكراري (Overstrain and Repeated Loading):

في اختبار الشد لعينة من الفولاذ الطري ، إذا ما تمَّ حمل الحمل إلى ما بعد نقطة الخضوع ومن بعد اعتاقه تدريجياً ، سيكون هنالك تشوهاً مستداماً في العينة .

عند اعادة التحميل وجد أنه وبالمراقبة الدقيقة أنَّ الفولاذ يبدو وكأنَّه فقد مرونته ، (i.e. لا يطيع بعد الآن قانون هوك (Hook's law)). حقيقة أنَّ منحنيات الاعتاق وإعادة التحميل تُشكِّل حلقة هستيرية والتي تُمثِّل الطاقة الضائعة في الاحتكاك الداخلي لجزيئات المادة . الشكل (3.2) أدناه يُوضِّح منحنى الاجهاد ضد الانفعال لمادة مطيلية معرضةً لتحميل تكراري . سترتفع نقطة الخضوع كثيراً حتى تصل تقريباً إلى قيمة مساوية لقيمة الاجهاد عند نهاية اختبار الشد ، ويُقال أنَّ المادة تم تصليدها بالشغل كما في عمليات السحب على البارد والدرفلة .

التحميل التكراري سيرفع نقطة الخضوع إلى قيمة تُقارب الاجهاد الأقصى. وإذا استمرت العينة حتى الكسر فإنها ستعرض نفس خصائص الفولاذ الصلب بانخفاض صغير في مساحة المقطع العرضي واستطالة منخفضة جداً .

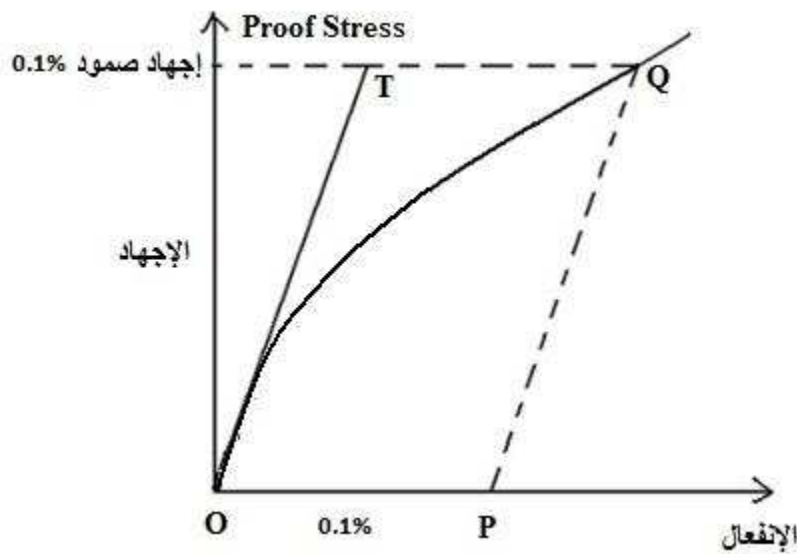
يمكن استرجاع المرونة بفترة راحة طويلة او بالغليان في الماء لدقائق معدودة. سيعيد التلدين الفولاذ إلى حالته الاصلية قبل الانفعال الزائد وبنفس نقطة الخضوع .



شكل (3.2) منحنى الاجهاد - الانفعال لمادة مطيلية مسطّ عليها أحمال تكرارية

### 3.6 إجهاد الصمود (Proof Stress) :

العديد من المواد الهندسية ، من بينها سبائك الفولاذ وسبائك الألومنيوم والماغنسيوم الخفيفة لا تملك أي حد معين للتناسب أو نقطة للخضوع في اختبار الشد ، عليه فإن مخطط الاجهاد - الانفعال سيكون محنياً تقريباً من نقطة الأصل. الشكل (3.3) أدناه يوضح منحنى الاجهاد ضد الانفعال لمادة قصفة .



شكل (3.3) منحنى الاجهاد - الانفعال لمادة قصفة

إذا تم رسم مماس (OT) على المنحنى عند الأصل ورسم خط PQ موازٍ لـ OT قاطعاً المنحنى عند Q ، بحيث أن  $OP = 0.1\%$  ، بالتالي فإن الاجهاد عند Q يسمى باجهاد صمود  $0.1\%$  . عليه ، فإن اجهاد الصمود هو الاجهاد الذي يتفاوت فيه الانفعال بمقدار  $0.1\%$  عن الطول الاسمي من خط التناسب OT .

### 3.7 اختبارات الانضغاط (Compression Tests) :

عادة ما تكون عينات اختبارات الانضغاط للمعادن دائرية ، وللصبة الاسمنتية مربعة المقطع . لمنع الفشل بالانبعاج (Buckling) يجب أن يكون الطول تقريباً مساوياً للعرض الأدنى (  $Length = minimum \text{ breadth}$  ). لمادة مطيلية مثل الفولاذ الطري أو النحاس ينشأ هنالك تشوهاً عرضياً ونتيجة لتأثير تقييد الاحتكاك عند وجهي الحمل فإن المقطع العرضي سيصبح كبيراً عند المنتصف ويصبح شكل قطعة الاختبار مشابهاً لبرميل . أخيراً يحدث الفشل بالشقوق التي تظهر على الأنسجة الخارجية للمادة وتنتشر إلى الداخل .

عادة ما تفشل المواد القصفة مثل الحديد الزهر والأسمنت بالقص على مستويات مائلة بزاوية بين 50 و 70 درجة بالنسبة للمحور الطولي.

### 3.8 الانهيار في المعادن القصفة (Failure in Brittle Materials):

زاوية ميل الكسر للعينات القصفة أكبر من 45 درجة .

$$\theta = 45 + \phi/2$$

، زاوية ميل الكسر .

حيث  $\phi$  عبارة عن زاوية الاحتكاك الداخلي للمعدن المختبر .

تكون زاوية الاحتكاك الداخلي  $\phi$  كبيرة كلما كبرت جزيئات المعدن المختبر .

زاوية ميل الكسر للأسمنت ،  $\theta = 70$  .

زاوية ميل الكسر للحديد الزهر  $\theta = 60^\circ$  .

زاوية ميل الكسر للنحاس الأصفر  $\theta = 50^\circ$  .

الحديد الزهر كمادة قصبة زاوية احتكاكه الداخلية كبيرة إذا ما قورنت بزاوية الاحتكاك الداخلي للنحاس الأصفر كمادة نصف مطيلية بما أن جزيئاته أدق من جزيئات الحديد الزهر .

عليه ، يمكن اثبات العلاقة  $\theta = 45^\circ + \phi/2$  بالطريقة التحليلية التالية :

العينة المبينة في الشكل (3.4) أدناه مساحة مقطعها  $A$  ، تم كسرها بتأثير حمل الانضغاط  $P$  الذي أحدث بها اجهاداً قيمته  $\sigma$  على مستوى يعمل زاوية مقدارها  $\theta$  مع خط المرجعية الأفقي . الزاوية  $\phi$  تمثل زاوية الاحتكاك الداخلي للمعدن المراد اختباره وهي رقم ثابت للمعدن الواحد .

$$\sigma = P / A \quad , \quad \text{اجهاد الانضغاط الرأسى}$$

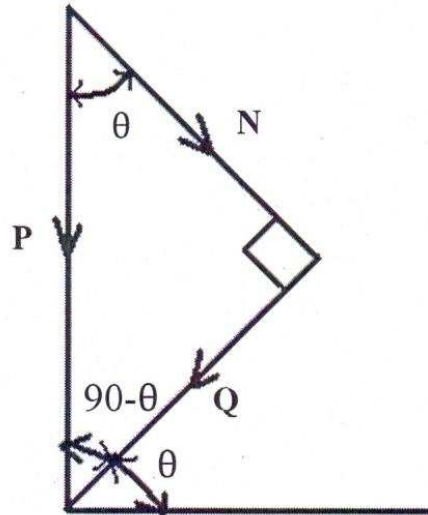
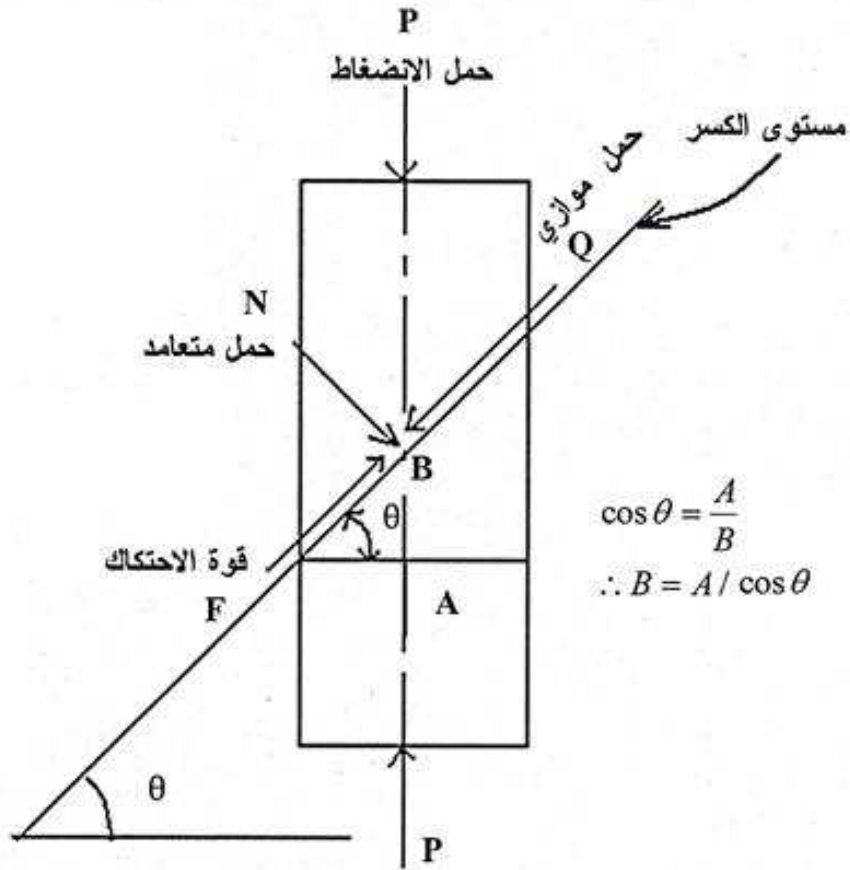
$$B = A / \cos \theta \quad , \quad \text{مساحة مقطع العينة على مستوى الكسر (B)}$$

القوة  $P$  المسببة للكسر في الانضغاط لها مركبتين احدهما عمودية على مستوى الكسر ( $N$ ) والأخرى موازية لمستوى الكسر ( $Q$ ) وقيمة كل منهما :

$$N = P \cos \theta$$

$$Q = P \sin \theta$$





شكل (3.4) عينة تم كسرها بتأثير حمل الانضغاط  $P$

$$\sigma_N = \frac{\text{الاجهاد المتعامد مع مستوى الكسر}}{\text{مساحة مستوى الكسر}} = \frac{N}{B}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{B} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

$$\tau_Q = \frac{\text{الحمل الموازي لمستوى الكسر}}{\text{مساحة مستوى الكسر}} = \frac{Q}{B}$$

$$\tau_Q = \frac{Q}{B} = \frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta$$

كما أنَّ الاجهاد المتعامد على مستوى الكسر يُسبَّب اجهاد احتكاك عكس اتجاه الحركة على مستوى الكسر ايضاً .

$$\tan \phi = \frac{\text{القوة المماسية}}{\text{القوة المتعامدة}} = \frac{F}{N}$$

$$F = N \tan \phi$$

$$\begin{aligned} \sigma_f = \frac{\text{قوة الاحتكاك}}{\text{مساحة مستوى الكسر}} &= \frac{F}{B} = \frac{N \tan \phi}{A / \cos \theta} = \frac{P \cos^2 \theta \cdot \tan \phi}{A} \\ &= \frac{P \cos^2 \theta \tan \phi}{A} = \sigma \cos^2 \theta \tan \phi \end{aligned}$$

يتضح مما سبق أنَّ الاجهادات المسببة للكسر على المستوى الذي يعمل زاوية  $\theta$  مع المستوى الأفقي ( $\sigma_r$ )

هي ناتج فرق تأثير الاجهاد الموازي لمستوى الكسر الناتج من القوة الرأسية  $P$  وتأثير إجهاد الاحتكاك الناتج

عن مقاومة تماسك جزيئات المعدن للإنزلاق فوق بعضها البعض ، أي أن :

الاجهاد المسبب للكسر = اجهاد القص - اجهاد الاحتكاك

$$\sigma_r = \tau_Q - \sigma_f = \sigma \sin \theta \cos \theta - \sigma \cos^2 \theta \tan \phi \quad (*)$$

يحدث الكسر عندما يكون الاجهاد المسبب للكسر ،  $\sigma_r$  عند قيمته القصوى. بالتالي بمفاضلة الاجهاد المسبب للكسر بالنسبة لزاوية ميل الكسر ومساواته بالصفر يتم الحصول على أقصى قيمة لزاوية ميل الكسر  $\theta$  .

$$\frac{d\sigma_r}{d\theta} = 0$$

بتفاضل المعادلة (\*) يتم الحصول على التعبير التالي :

$$\frac{d\sigma_r}{d\theta} = (\sigma \sin \theta \times -\sin \theta) + (\cos \theta \times \sigma \cos \theta) - \{(\sigma \cos^2 \theta \times zero) + \tan \phi \times 2\sigma \cos \theta \times -\sin \theta\} = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{d\theta} = -\sigma \sin^2 \theta + \sigma \cos^2 \theta + 2\sigma \sin \theta \cos \theta \tan \phi = 0$$

$$\therefore \sigma(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -2\sigma \sin \theta \cos \theta \tan \phi$$

$$\therefore \tan \phi = -\frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = -\cot 2\theta$$

$$\therefore \tan \phi = -\tan(90^\circ - 2\theta) = \tan(2\theta - 90^\circ)$$

$$\therefore \phi = 2\theta - 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ + \phi$$

$$\therefore \theta = 45^\circ + \phi / 2 \quad \#$$

## الفصل الرابع

## أساليب طاقة الإنفعال

## (Strain Energy Methods)

## 4.1 طاقة الإنفعال الداخلية (Internal Strain Energy) :

عندما تعمل قوة خارجية على جسم مرّن وتغيّر من شكله (تشوّهه)، فإنّ الشغل المبذول بواسطة القوة يتم تخزينه خلال أو في حدود الجسم في شكل طاقة إنفعال . طاقة الإنفعال دائماً كمية قياسية (بمعنى أنها لا متجهة). لقضيب مستقيم معرّض لقوة شد  $P$  ، يتم إعطاء طاقة الإنفعال الداخلية  $U$  بـ :-

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

حيث  $L$  تمثّل طول القضيب،  $A$  مساحة المقطع العرضي للقضيب، و  $E$  هو معيار يونق أو معيار المرونة للإجهادات المباشرة . هذا التعبير يتم اشتقاقه في المثال (1).

لقضيب مستدير (دائري) بطول  $L$  معرّض لعزم لي أو إلتواء  $T$  ، يتم إعطاء طاقة الإنفعال الداخلية  $U$  بـ:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

حيث  $G$  هو معيار المرونة في القص أو معيار الجساءة و  $J$  هو العزم الثاني للمساحة القطبي للمقطع العرضي يتم اشتقاق هذا التعبير في المثال (2).

لقضيب بطول  $L$  معرّض لعزم إنحناء  $M$  ، يتم إعطاء طاقة الإنفعال الداخلية  $U$  بـ :

$$U = \frac{M^2 L}{2EI}$$

حيث  $I$  هو العزم الثاني للمساحة للمقطع العرضي حول المحور المحايد.

يتم اشتقاق هذا التعبير في المثال (3) .

ملحوظة:

في كل من هذه التعبيرات يُلاحظ أنَّ الحمل الخارجي دائماً يحدث في شكل مقدار مربع، بالتالي فإنَّ كلَّ من تعبيرات الطاقة هذه تكون دائماً كمية قياسية موجبة (Positive scalar quantity) .

#### 4.2 الإشارات الجبرية التقليدية (Sign Conventions) :

يكون أسلوب طاقة الإنفعال مناسب خصيصاً لمسائل تتضمن أعضاء إنشائية عديدة بزوايا متباينة من واحدة إلى الأخرى. حقيقة أنَّ الأعضاء التي يمكن أن تكون مقوَّسة في مستوياتها لا تمثل أيَّ صعوبات إضافية. إحدى المميزات العظيمة لأساليب طاقة الإنفعال هي إمكانية تأسيس أنظمة إحداثية مستقلة لكل عضو بدون اعتبار لإتساق الإتجاهات الموجبة للأنظمة الإحداثية المتغيرة. تكون هذه الميزة أساسية نتيجة لحقيقة أنَّ طاقة الإنفعال هي دائماً كمية قياسية موجبة، بالتالي فإنَّ الإشارات الجبرية للقوى الخارجية تحتاج لأن تكون متسقة فقط في حدود كل عضو إنشائي.

#### 4.3 نظرية كاستيغليانو (Castigliano's Theorem) :

هذه النظرية مفيدة جداً لإيجاد إزاحات الأجسام المرنة المعرضة لأحمال محورية، أحمال إلتواء، إنحناء، أو أيَّ اتحاد لهذه الأحمال. تنص النظرية على الآتي: (تنتج المشتقة التفاضلية الجزئية لطاقة الإنفعال الداخلية الكلية بالنسبة لأيَّ قوة مسلطة خارجياً إزاحة تحت نقطة تسليط تلك القوة في إتجاه تلك القوة). يتم استخدام المصطلحات قوة وإزاحة بمعناها العام ويمكن أن تُشير لقوة معتادة وإزاحتها الخطية، أو لإزدواج وإزاحته الزاوية المناظرة. تُعطي الإزاحة تحت نقطة تسليط القوة  $P_n$  طبقاً لهذه النظرية بـ :

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$$

#### 4.4 التطبيق على مسائل محدَّدة سكونياً (إستاتيكية):

#### (Application to Statically Determinate Problems)

في مثل هذه المسائل يمكن إيجاد جميع ردود الأفعال الخارجية بتطبيق معادلات الإستاتيكا. بعد عمل ذلك، يمكن إيجاد الانحراف تحت نقطة تسليط أي قوة مسلطة خارجياً مباشرة باستخدام نظرية كاستيقليانو. إذا كان الانحراف مطلوباً عند نقطة لا يوجد عندها حمل مسلط، بالتالي من الضروري إدخال قوة مساعدة (قوة وهمية) (fictitious force) عند تلك النقطة، ومعاملة تلك القوة بالضبط كواحدة من القوى الحقيقية، وإستخدام نظرية كاستيقليانو لتحديد الانحراف عند تلك النقطة. عند نهاية المسألة يتم وضع القوة المساعدة أو الوهمية مساوية لصفر.

#### **4.5 التطبيق على مسائل غير محدّدة سكونياً (إستاتيكية):**

##### **(Application to Statically Indeterminate Problems)**

تكون نظرية كاستيقليانو مفيدة جداً لتحديد ردود الأفعال غير المحدّدة في مثل هذه المسائل. هذا بسبب أن النظرية يمكن تطبيقها لكل رد فعل، وتكون الإزاحة المناظرة لكل رد فعل معروفة سلفاً وتكون عادة صفر. بهذا السلوك من الممكن تأسيس أكبر عدد ممكن من المعادلات بما أن هنالك ردود أفعال فائضة، وهذه المعادلات مجتمعة مع تلك التي يتم إيجادها من الإستاتيكا (السكونية) تنتج حلاً لجميع ردود الأفعال. بعد إيجاد جميع قيم ردود الأفعال، يمكن إيجاد الانحراف عند أي نقطة مطلوبة بالإستخدام المباشر لنظرية كاستيقليانو.

#### **4.6 إفتراضات ومحددات (Assumption and Limitations) :**

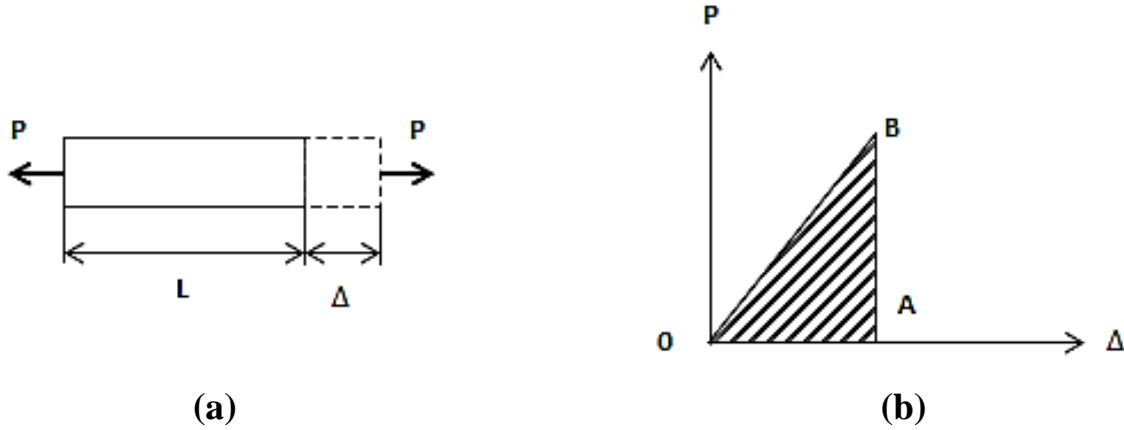
من خلال هذا الفصل يتم إفتراض أن المادة تكون خطية مرنة مطيعة لقانون هوك. أبعد من ذلك، من الضروري أن يطيع النظام جميعه قانون التراكب (law of Superposition).

#### **4.7 أمثلة محلولة في طاقة الإنفعال (Solved Examples in Strain Energy) :**

##### **مثال (1) :**

حدّد طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة خلال قضيب مرّن معرّض لقوة شد محورية  $P$ .

الحل :



شكل (4.1) طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة في قضيب مرن معرض لحمل شد

لمثل هذا القضيب يتم إيجاد الاستطالة  $\Delta$  في المسألة باستخدام قانون هوك شكل (4.1 a)، حيث  $\Delta = PL/AE$ ، و  $A$  تمثل مساحة المقطع العرضي،  $L$  الطول، و  $E$  معاير يونق للمرونة. سيكون مخطط القوة - الإستطالة نتيجة لذلك خطياً (Linear) كما موضح في الشكل (4.1 b). لأي قيمة نوعية للقوة  $P$ ، مثل تلك المناظرة للنقطة  $B$  في مخطط القوى - الإستطالة، ستؤدي القوة شغلاً موجباً يُشار إليه بالمساحة المظللة  $OBA$  وتعطى هذه المساحة المثلثية بـ  $\frac{1}{2}P\Delta$ . باستبدال  $\Delta$  بالقيمة المعطاة عاليه، تصبح المعادلة  $P^2L/2AE$ . هذا هو الشغل المبذول بالقوة الخارجية ويتم تخزين الشغل خلال القضيب في شكل طاقة إنفعال داخلية، يتم ترميزها بـ  $U$ . بالتالي:

$$U = \frac{P^2L}{2AE}$$

أساسياً، يعمل القضيب المرن كياي لتخزين هذه الطاقة. يسري نفس التعبير لطاقة الإنفعال الداخلية إذا كان الحمل إنضغاطياً، بما أن القوة المحورية تظهر ككمية مربعة وبالتالي تكون النتيجة النهائية هي نفسها لقوة موجبة أو سالبة.

إذا كان هنالك تفاوت للقوة المحورية  $P$  على طول القضيب، بالتالي تكون طاقة الإنفعال لعنصر صغير بطول  $dx$  كالآتي:

$$dU = \frac{P^2 dx}{2AE}$$

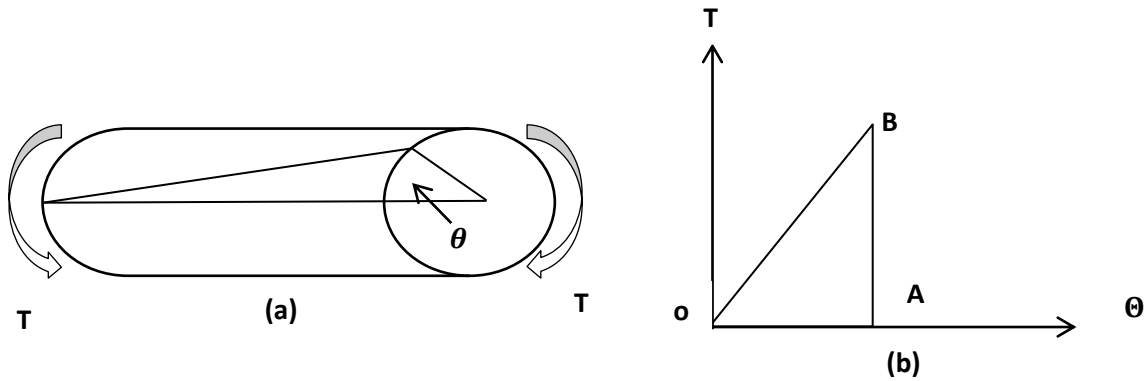
ويتم إيجاد الطاقة في القضيب جميعه بالتكامل على الطول (أي على طول القضيب):

$$U = \int_0^L \frac{P^2 dx}{2AE}$$

مثال (2) :

حدّد طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة خلال قضيب مرّن معرّض لعزم لي أو إلتواء  $T$  (torque).

الحل :



شكل (4.2) طاقة الانفعال المخزونة في قضيب مرّن معرّض لعزم إلتواء

من نظرية الإلتواء وُجِدَ أنَّ زاوية الإلتواء  $\theta$  مساوية لـ  $\theta = TL/GJ$  ، حيث  $G$  هو معير المرونة في القص،  $L$  هو الطول، و  $J$  هو العزم الثاني للمساحة القطبي للمقطع العرضي. طبقاً لهذا التعبير، فإنّ العلاقة بين عزم اللي وزاوية الإلتواء هي علاقة خطية، كما موضّح في الشكل (b) (4.2). عندما يصل عزم اللي لقيمة محدّدة مثل تلك المشار إليها بالنقطة  $B$  ، ستؤدي لشغل موجب يشار إليه بالمساحة المظلّلة  $OBA$  .



هذا الشغل المبذول بعزم اللي الخارجي يتم تخزينه خلال القضيب كطاقة إنفعال داخلية، يتم ترميزها بـ  $U$  .  
بالتالي:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

إذا كان هنالك تفاوت لعزم اللي على طول القضيب، بالتالي تكون طاقة الإنفعال لعنصر صغير بطول  $dx$   
كما يلي:

$$dU = \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

وتكون في القضيب جميعه كالآتي:

$$U = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

مثال (3) :

حدّد طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة خلال قضيب مرّن معرّض لعزم إنحناء  $M$  .

الحل :

في نظرية الإنحناء يتم عرض قضيب مستقيم ابتدائياً معرّض لعزم إنحناء خالص  $M$  يقوم بتغيير شكله إلى قوس دائري بنصف قطر تقوس  $r$  .

في هذه النظرية نجد أن  $M = EI/r$  ، حيث  $I$  ترمز للعزم الثاني للمساحة للمقطع العرضي، حول المحور المحايد. لكن طول القضيب  $L$  يكون مساوياً لحاصل ضرب الزاوية المركزية  $\theta$  المحصورة بالقوس الدائري ونصف القطر  $r$  . بالتالي:

$$\frac{M}{EI} = \frac{I}{r} = \frac{\theta}{L} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{ML}{EI}$$

طبقاً لهذه المعادلة، تكون العلاقة خطية بين العزم والزاوية المحصورة، وهذه يتم توضيحها في الشكل (4.3). عندما يصل العزم لقيمة محدّدة،  $M$ ، مثل تلك المشار إليها بالنقطة B، سيؤدي شغلاً يُشار إليه بالمساحة المظللة OAB. تُعطى هذه المساحة بـ  $\frac{1}{2} M \theta$ ، أو  $M^2 L / 2EI$ . يتم تخزين هذا الشغل المبذول بالعزم الخارجي خلال القضيب كطاقة إنفعال داخلية، يرمز لها بـ  $U$ . بالتالي:

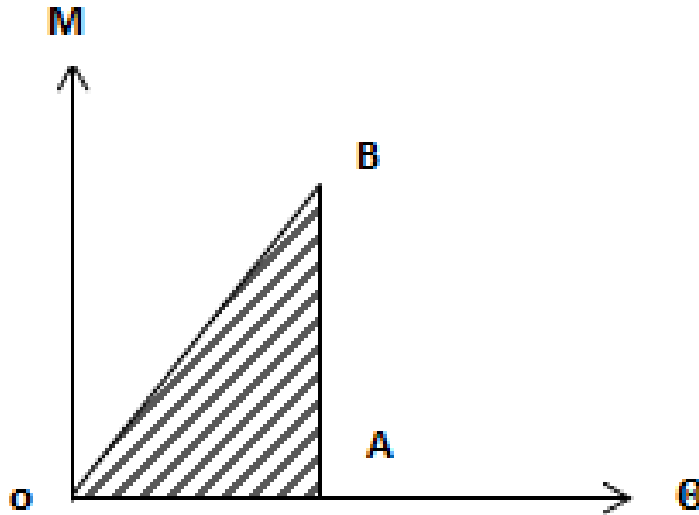
$$U = \frac{M^2 L}{2EI}$$

إذا كان عزم الإنحناء يتفاوت على طول القضيب، بالتالي تكون طاقة الإنفعال لعنصر صغير بطول  $dx$  كالآتي:

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI}$$

وتكون طاقة الإنفعال للقضيب كله كالآتي:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$



شكل (4.3) طاقة الانفعال الداخلية المخزونة في قضيب مرن معرّض لعزم إنحناء

#### 4.8 اشتقاق نظرية كاستيغليانو: (Derivation of Castigliano Theorem)

اعتبر جسماً مرناً عاماً ذو ثلاث أبعاد يتم تحميله بالقوى  $P_1$  ،  $P_2$  ، ... الخ. (أنظر للشكل (4.4) أدناه). هذه ستتضمن قوى مسلطة على الجسم بإسنادات متعددة. سنرمز للإزاحة تحت  $P_1$  في اتجاه  $P_1$  بـ  $\Delta_1$  ، وتلك تحت  $P_2$  في اتجاه  $P_2$  بـ  $\Delta_2$  ، ... الخ. إذا تمَّ افتراض أنَّ جميع القوى يتم تسليطها في نفس الوقت وبزيادة تدريجية من صفر إلى قيمتها النهائية المعطاة بـ  $P_1$  ،  $P_2$  ، ... الخ، بالتالي سيكون الشغل المبذول بمجموع هذه القوى كالاتي:

$$U = \frac{P_1}{2} \Delta_1 + \frac{P_2}{2} \Delta_2 + \frac{P_3}{2} \Delta_3 + \dots + \frac{P_n}{2} \Delta_n \quad (1)$$

(حيث  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

هذا الشغل يتم تخزينه في الجسم كطاقة إنفعال مرنة.

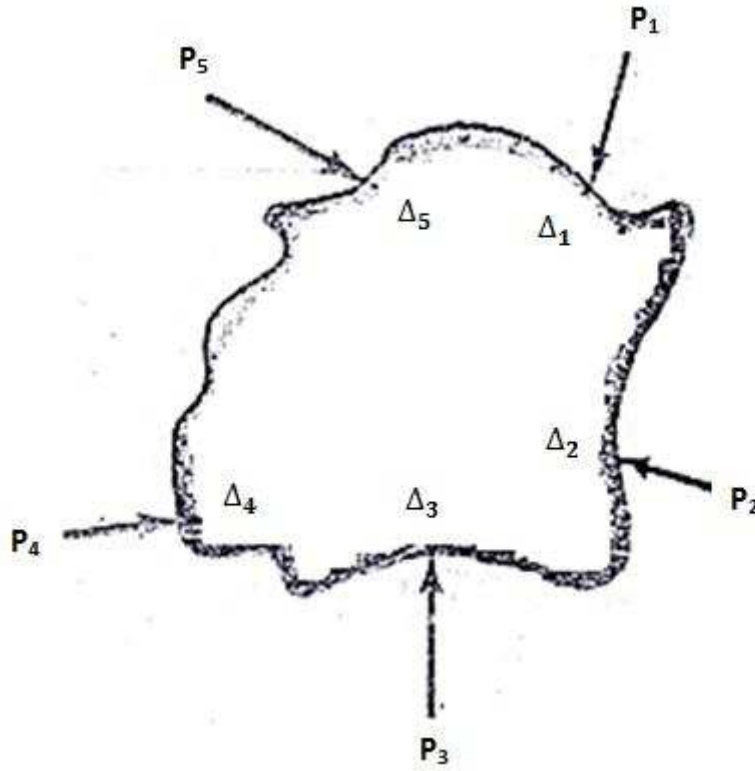
دعنا الآن نزيد القوة  $n$  بمقدار يساوي  $dP_n$  . هذا يُغيّر قليلاً كل من حالة التشوه (التغير في الشكل) وأيضاً طاقة الإنفعال الداخلية . تُعطي الزيادة في طاقة الإنفعال الداخلية بـ :

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \quad (2)$$

بالتالي، تكون طاقة الإنفعال الكلية بعد الزيادة في القوة  $n$  كالاتي:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \quad (3)$$

دعنا نعيد النظر في هذه المسألة أولاً بتسليط قوة صغيرة جداً  $dP_n$  لوحدها على الجسم المرن. من بعد، يتم تسليط القوى كما في السابق،  $P_1$  ،  $P_2$  ،  $P_3$  ، ... الخ. نتيجة لتسليط هذه القوة الصغيرة تكون هنالك إزاحة في اتجاه  $dP_n$  التي هي صغيرة جداً ويمكن ترميزها كـ  $d\Delta_n$  . الآن، عندما يتم تسليط  $P_1$  ،  $P_2$  ،  $P_3$  ، ... الخ، فإنَّ تأثيرها على الجسم سوف لن يتغير بوجود  $dP_n$  وستكون طاقة الإنفعال الداخلية الناشئة من



شكل (4.4) جسم مرن ذو ثلاث أبعاد يتم تحميله بالقوى  $P_1$  ،  $P_2$  ، ... الخ

$P_1$  ،  $P_2$  ،  $P_3$  ، ... الخ كما تلك الموضحة في المعادلة (1). لكن بما أن هذه القوى يتم تسليطها فستمر القوة الصغيرة  $dP_n$  خلال الإزاحة الإضافية  $\Delta_n$  المسببة بواسطة القوى  $P_1$  ،  $P_2$  ،  $P_3$  ، ... الخ. بالتالي، سينشأ عن ذلك شغلاً إضافياً  $(dP_n)\Delta_n$  يتم تخزينه كطاقة إنفعال داخلية وبالتالي تكون هنالك طاقة إنفعال كلية في هذه الحالة مساوية لـ:

$$U + (dP_n) \Delta_n \quad (4)$$

بما أن طاقة الإنفعال النهائية يجب أن تكون مستقلة عن ترتيب القوى التي يتم تسليطها، بالتالي يمكننا مساواة المعادلتين (3) و (4) :

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n = U + (dP_n) \Delta_n$$

أو

$$\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$$

هذه هي نظرية كاستيغليانو. تقول هذه النظرية أنَّ الإزاحة لجسم مرن تحت نقطة تسليط أيِّ قوة، في إتجاه تلك القوة تُعطي بالمشتقة التفاضلية الجزئية لطاقة الإنفعال الداخلية الكلية بالنسبة لتلك القوة.

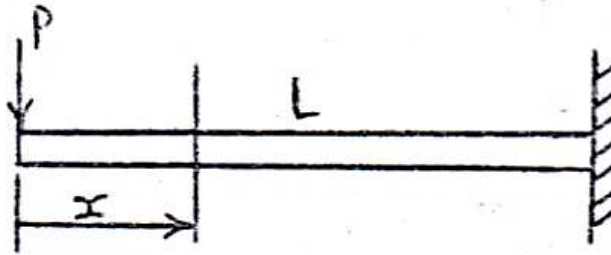
يُستخدم مصطلح قوة هنا بمفهومه العام فيعني إما قوة حقيقية أو إزدواجاً. في حالة كون أن هنالك إزدواجاً، تُعطي نظرية كاستيغليانو دوراناً زاوياً تحت نقطة تسليط الإزدواج في إتجاه دوران الإزدواج.

من المهم ملاحظة أنَّ الإشتقاق عاليه يتطلب تغيير القوة  $n$  ،  $P_n$  باستقلال عن بقية القوى. بالتالي، يجب أن تكون  $P_n$  مستقلة إستاتيكيّاً (سكونياً) عن بقية القوى الخارجية الأخرى، بتضمن أن الطاقة  $U$  يجب دائماً التعبير عنها بدلالات القوى المستقلة سكونياً للنظام.

#### 4.9 أمثلة محلولة في نظرية كاستيغليانو (Solved Examples in Castigliano Theorem):

مثال (4):

عارضة وندية لها مقطع منتظم مسلط عليها حمل مركز في الطرف الحر. أوجد الإنحراف تحت الحمل المسلط بإستخدام نظرية كاستيغليانو .



الحل :

طاقة الإنفعال المخزونة في العنصر نتيجة لعزم الإنحناء:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

الإزاحة أو الإنحراف تحت نقطة تسليط الحمل:

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

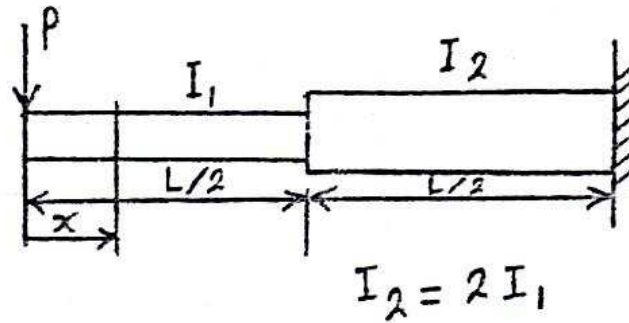
$$M = -Px \quad \therefore \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px)(-x)dx = \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\therefore v = \frac{PL^3}{3EI}$$

مثال (5):

عارضة وتدّية لها مقطع متدرج كما في الرسم أدناه سلّط عليها حمل مركز في الطرف. أوجد الإنحراف تحت الحمل باستخدام نظرية كاستغليانو.



الحل :

$$U = \int_0^{L/2} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{L/2}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx$$

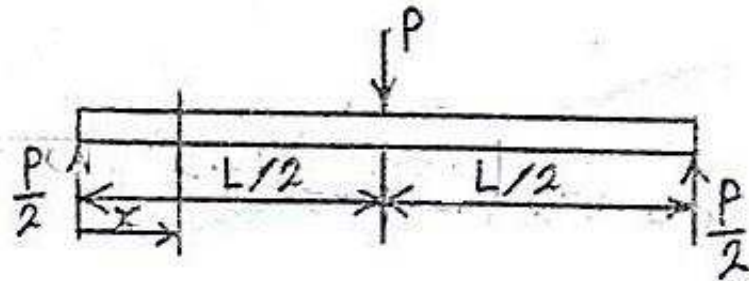
$$M_1 = M_2 = -Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{\partial M_2}{\partial P} = -x$$

$$v = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L/2} (-Px)(-x)dx + \frac{1}{EI_2} \int_{L/2}^L (-Px)(-x)dx$$

$$\therefore v = \frac{9PL^3}{48EI_1}$$

مثال (6):

إستخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الإنحراف الأقصى في عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها حمل مركز في الوسط.



الحل :

$$U = \int_0^{L/2} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

نتيجة للتماثل

$$U = 2 \int_0^{L/2} \frac{M_1^2}{2EI} dx$$

$$\therefore v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx$$

$$M_1 = \frac{P}{2}x, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore v = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{P}{2EI} \int_0^{L/2} x^2 dx$$

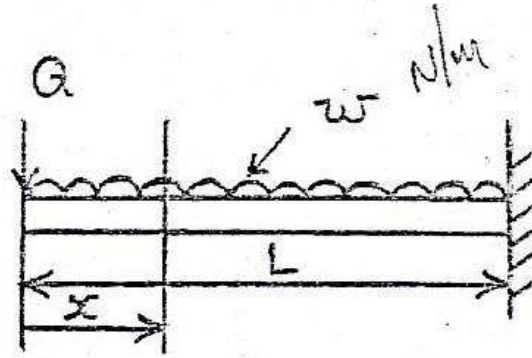
$$v = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال (7):

إستخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الانحراف عند طرف عارضة وتدئة مسلط عليها حمل موزع بانتظام.

نسبة لعدم وجود حمل مركز عند طرف العارضة حيث الانحراف مطلوب، فإننا نسلط حمل وهمي أو تخيلي

$$Q = 0$$



الحل :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$M = -Qx - \frac{wx^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -x$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial Q} dx$$

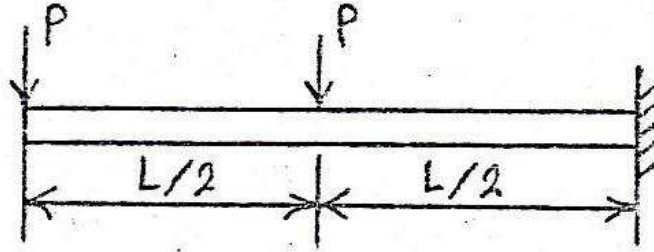
$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{wx^2}{2} \right) (-x) dx$$

$$\therefore v = \frac{w}{2EI} \int_0^L x^3 dx = \frac{wL^4}{8EI}$$



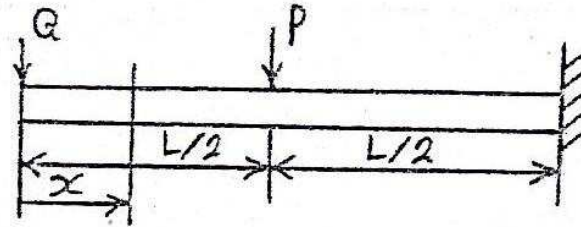
مثال (8):

أوجد الإنحراف في الطرف الحر للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه.



الحل :

يجب الانتباه للمسائل التي تحتوي على أكثر من حمل واحد له نفس الرمز، وذلك لأن استخدام نظرية كاستقليانو سيؤدي إلى حساب مجموع الانحراف عند هذه النقاط . لعلاج هذا الوضع يجب تغيير رمز أحد الحملين في المسألة التي أمامنا مثلاً  $Q = P$  .



$$U = \int_0^{L/2} \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2^2}{2EI} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dx$$

$$M_1 = -Qx, \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = -x ; \quad M_2 = -Qx - P \left( x - \frac{L}{2} \right), \quad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = -x$$

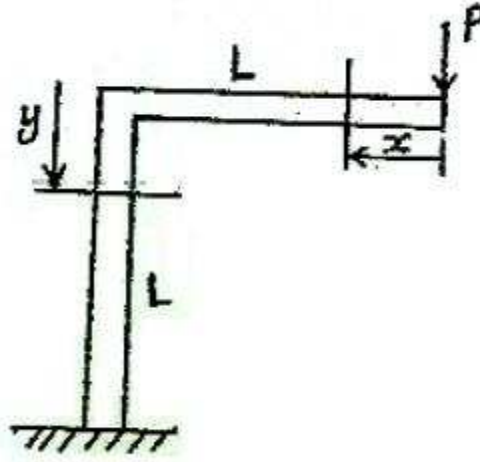
$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px)(-x) dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( -2Px + \frac{PL}{2} \right) (-x) dx$$

$$v = \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} x^2 dx + \frac{P}{EI} \int_{L/2}^L \left( 2x^2 - \frac{L}{2}x \right) dx$$

$$v = \frac{21PL^3}{48EI} = \frac{7PL^3}{16EI}$$

مثال (9):

أوجد الانحراف الرأسي تحت الحمل P في الهيكل الموضح في الرسم أدناه :



الحل :

طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة في العنصر نتيجة لعزم الإنحناء:

$$U = \int_0^L \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{M_2^2}{2EI} dy$$

الانحراف الرأسي تحت نقطة تسليط الحمل P :

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dy$$

$$M_1 = Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = x$$

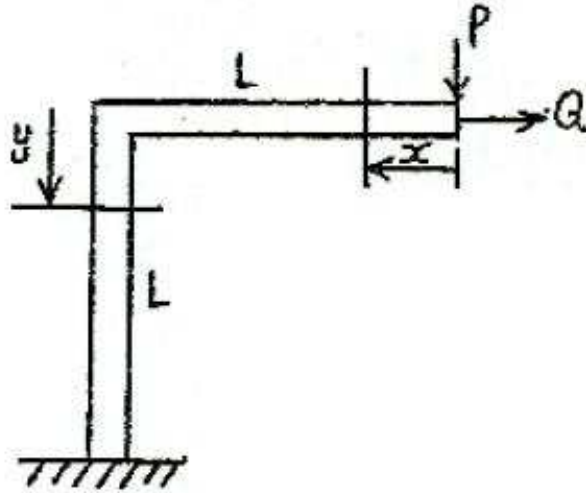
$$M_2 = PL \quad , \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = L$$

$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L (Px)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (PL)(L) dy$$

$$\therefore v = \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx + \frac{PL^2}{EI} \int_0^L dy = \frac{4PL^3}{3EI}$$

مثال (10):

أوجد الانحراف الأفقي للهيكل الموضَّح في المثال (9):



الحل :

لعدم وجود حمل أفقي عند الطرف الحر حيث الإزاحة المطلوبة فإننا نسلط حمل وهمي أو تخيلي  $Q = 0$

طاقة الإنفعال الداخلية المخزونة في العنصر نتيجة لعزم الإنحناء :

$$U = \int_0^L \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_0^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dy$$

الانحراف الأفقي تحت نقطة تسليط الحمل  $Q$  :

$$u = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dy$$

$$M_1 = Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = 0$$

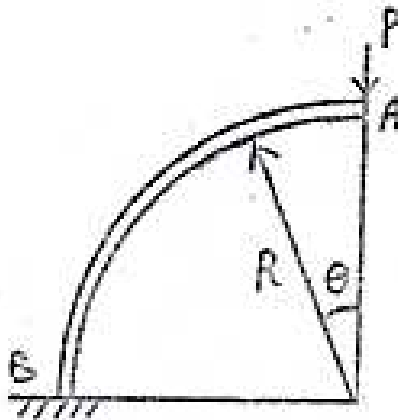
$$M_2 = PL + Qy, \quad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = y$$

$$u = \frac{1}{EI} \int_0^L (Px)(0) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (PL)(y) dy$$

$$u = \frac{PL}{EI} \int_0^L y dy = \frac{PL^3}{2EI}$$

مثال (11):

قضيب نحيف مقوس على شكل ربع دائرة نصف قطرها  $R$  مثبت عند الطرف  $B$  بينما الطرف  $A$  يخضع لحمل رأسي  $P$ . استخدم نظرية كاستليانو لإيجاد الإزاحة الرأسية للطرف  $A$ .



الحل :

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial P} ds$$

$$M = PR \sin \theta, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \theta, \quad ds = R d\theta$$

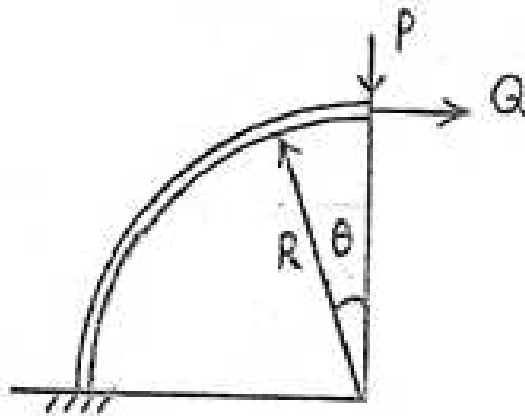
$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta)(R \sin \theta) R d\theta$$

$$v = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$v = \frac{PR^3}{2EI} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi PR^3}{4EI}$$

مثال (12):

أوجد الإزاحة عند الطرف A للقضيب المقوس في المثال (11):



الحل :

نسبة لعدم وجود حمل أفقي عند الطرف A ، نسلط حمل وهمي  $Q = 0$  .

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$u = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial Q} ds$$

$$M = PR \sin \theta + QR(1 - \cos \theta), \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = R(1 - \cos \theta), \quad ds = R d\theta$$

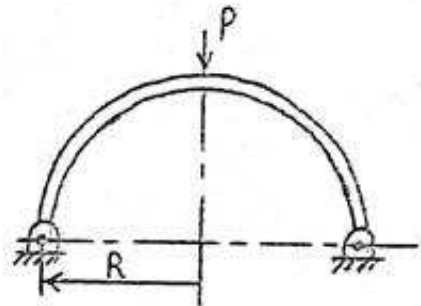
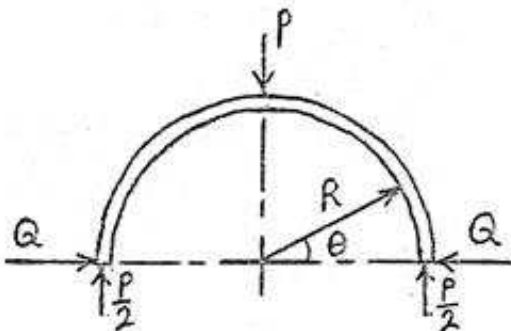
$$u = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta) R(1 - \cos \theta) R d\theta$$

$$u = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left( \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$u = \frac{PR^3}{EI} \left[ -\cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{2EI}$$

مثال (13):

حلقة على شكل نصف دائرة مثبتة بمسمار عند كل طرف كما موضح في الرسم أدناه. أحسب رد الفعل الأفقي عند كل طرف.



الحل :

مخطط الجسم الحر موضح في الرسم حيث أن Q تمثل رد الفعل الأفقي المطلوب. نتيجة للتماثل فإن:

$$U = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$v = 2 \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial Q} ds = 0$$

$$M = \frac{PR}{2} (1 - \cos\theta) - QR \sin\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -R \sin\theta, \quad ds = R d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{PR}{2} (1 - \cos\theta) - QR \sin\theta \right] (-R \sin\theta) R d\theta = 0$$

نتخلص من  $-R^2$  وبالتالي نحصل على المعادلة التالية:

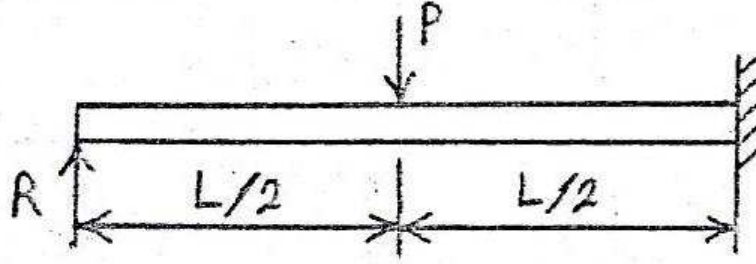
$$\therefore \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{PR}{2} \left( \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - \frac{QR}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta = 0$$

وهذه تقود إلى قيمة Q المجهولة:

$$Q = \frac{P}{\pi}$$

مثال (14):

أوجد رد الفعل لدى الدعامة في العارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه.



الحل :

$$U = \int_0^{L/2} \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2^2}{2EI} dx$$

لإيجاد الانحراف الرأسي عند الدعامة

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R} dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx$$

$$M_1 = Rx, \quad \frac{\partial M_1}{\partial R} = x$$

$$M_2 = Rx - P\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad \frac{\partial M_2}{\partial R} = x$$

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (Rx)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(Rx - P\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)(x) dx$$

$$v = \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} x^2 dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[(R - P)x^2 + \frac{PL}{2}x\right] dx$$

بوضع الانحراف الرأسي عند الدعامة،  $v = 0$ 

$$\therefore \frac{R}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + \frac{1}{EI} \left[ (R - P) \frac{x^3}{3} + \frac{PL}{4} x^2 \right]_{L/2}^L = 0$$



وهذه المعادلة تقود إلى الإجابة المطلوبة:

$$R = \frac{5P}{16}$$

#### 4.10 تدريبات في نظرية كاستigliانو (Exercises in Castigliano Theorem):

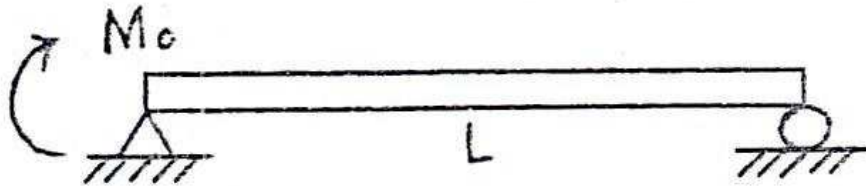
##### مسألة (1):

في المثال (13) أوجد الإزاحة الرأسية تحت نقطة تسليط الحمل المركز  $P$ .

$$\text{Ans. } \left\{ \frac{PR^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2\pi} - 1 \right) \right\}$$

##### مسألة (2):

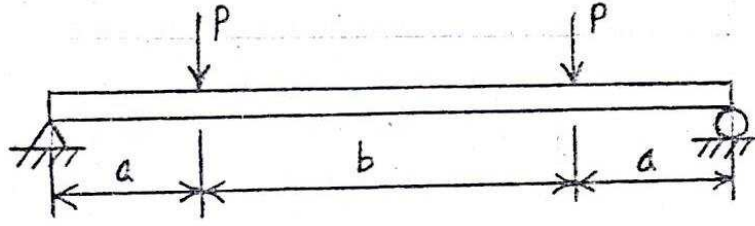
عارضة مسنودة إسناد بسيط ومسلط عليها عزم  $M_0$  على الطرف اليسار كما في الرسم أدناه. استخدم نظرية كاستigliانو لإيجاد الانحراف عند منتصف العارضة.



$$\text{Ans. } \left\{ \frac{M_0 L^2}{16EI} \right\}$$

##### مسألة (3):

عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها حملان متماثلان في الوضع. استخدم نظرية كاستigliانو لإيجاد الانحراف عند منتصف العارضة.



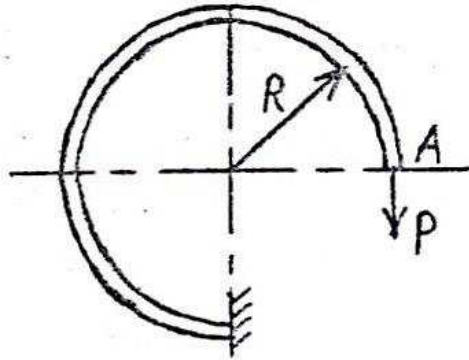
حيث ،

$$L = 2a + b$$

$$Ans. \left\{ -\frac{2Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2L}{2EI} \right\}$$

مسألة (4):

إنشاء موضوع في مستوى رأسي على شكل ثلاث أرباع حلقة (أنظر الرسم أدناه). أحد الطرفين مثبت والآخر مسلط عليه حمل  $P$ . أوجد الإزاحة الرأسية للطرف  $A$ . خذ في الاعتبار طاقة الانحناء فقط.



$$Ans. \left\{ \frac{PR^3}{2EI} \right\}$$

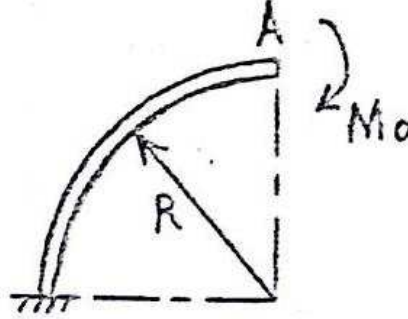
مسألة (5):

أوجد زاوية الدوران عند النقطة  $A$  في المثال (11).

$$Ans. \left\{ \frac{PR^3}{EI} \right\}$$

مسألة (6):

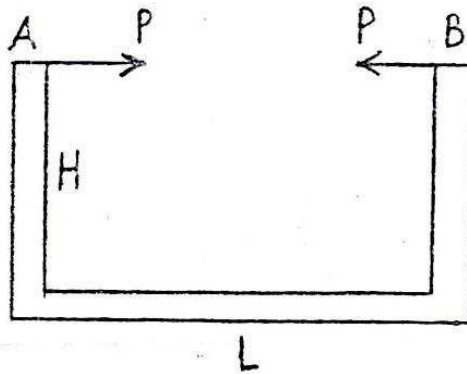
أوجد زاوية الوران بالإضافة إلى الإنحراف الرأسي والأفقي عند النقطة A في الشكل أدناه.



Ans.  $\left\{ 0.571 \frac{M_o R^2}{EI}, \frac{M_o R^2}{EI}, \frac{M_o \pi R}{2EI} \right\}$

مسألة (7):

أوجد المسافة التي تقترب بها النقطتان A و B من بعضهما البعض نتيجة لتسليط حمل P.



Ans.  $\left\{ \frac{PH^2(2H + 3L)}{3EI} \right\}$

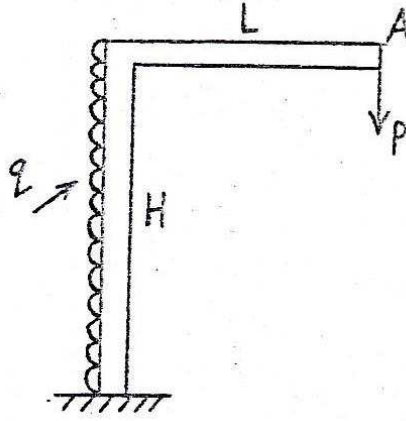
مسألة (8):

حل المسألة (7) إذا تم استبدال الحمل P بعزم مركز  $M_o$ .

Ans.  $\left\{ \frac{M_o H(H + L)}{EI} \right\}$

مسألة (9):

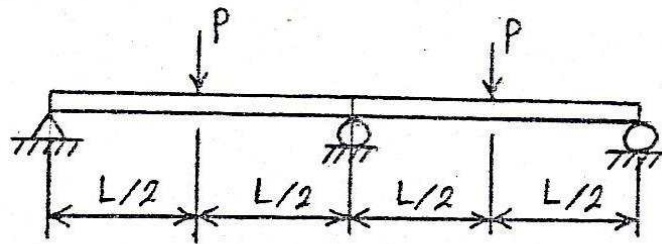
أوجد الإزاحة الرأسية عند النقطة A في الشكل الموضح في الرسم أدناه.



Ans.  $\left\{ \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2H}{EI} + \frac{qLH^3}{6EI} \right\}$

مسألة (10):

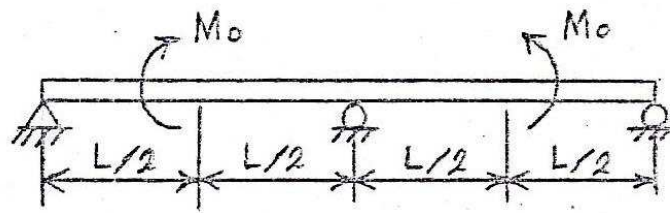
العارضة المستمرة الموضحة في الرسم أدناه تخضع لحملان متساويان كما في الرسم أدناه. استخدم نظرية كاستغليانو لإيجاد رد الفعل في الوسط.



Ans.  $\{1.375 P\}$

مسألة (11):

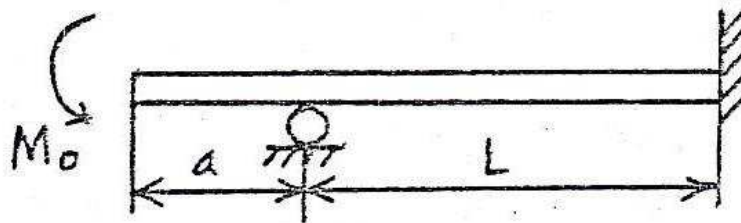
إذا تم استبدال الحمل P في العارضة المذكورة في المسألة (10) بعزم مركز كما موضح في الرسم أدناه، أوجد رد الفعل في الوسط.



Ans.  $\left\{ 2.25 \frac{M_o}{L} \right\}$

مسألة (12):

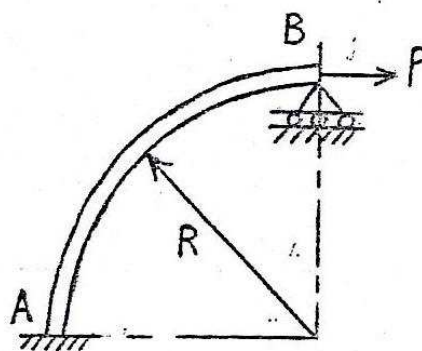
أوجد رد الفعل لدى الدعامة في العارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه.



Ans.  $\left\{ \frac{3M_o}{2L} \right\}$

مسألة (13):

قضيب نحيف مقوس على شكل ربع دائرة نصف قطرها R . الطرف A مثبت والطرف B حر في الحركة الأفقية نتيجة لتسليط الحمل P . أوجد رد الفعل الرأسى عند B .



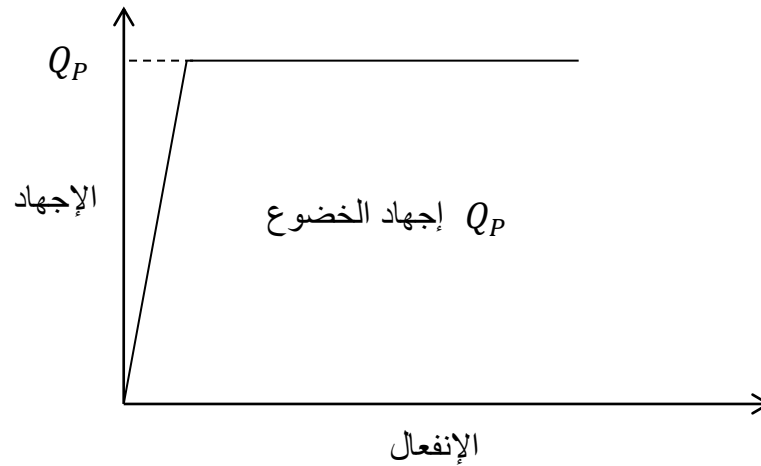
Ans.  $\left\{ \frac{2P}{\pi} \right\}$

## الفصل الخامس

### الانهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة

#### 5.1 مدخل (Introduction):

في حالات تصميم إنشائي معين يمكن السماح بقدر محدد من التشوهات اللدنة في العناصر الإنشائية، وبالتالي يمكن السماح بأحمال أكبر من تلك التي تقدرها نظرية المرونة والتي لا تقبل أي إجهاد أكبر من إجهاد الخضوع. هذا التجاوز يعني استخدام أفضل للمواد الإنشائية ويسمى التصميم اللدن. وفي الحقيقة هذا الاستخدام الأفضل يعود لبعض المواد والتي لديها قابلية كبيرة في التشوه اللدن قبل أن تنهار. وأهم هذه المواد وأكثرها استخداماً هو صلب الإنشاءات. ولدواعي التبسيط فإننا نمثل منحنى الإجهاد - الإنفعال لهذه المواد كما في الرسم أدناه ( شكل (5.1) ) وتسميتها مواد مرنة مثالية اللدنة.



شكل (5.1) مادة مرنة مثالية اللدنة

وفيما يخص العارضات فإنه كلما زادت الأحمال العرضية زادت عزوم الإنحناء وبالتالي الإجهادات. ويبدأ الخضوع في الشرائح الخارجية عند المقطع الذي يتعرض لعزم إنحناء أقصى، ثم تنتقل هذه التشوهات اللدنة

سريعاً إلى الداخل. وعندما تعم التشوهات اللدنة المقطع بأكمله فإننا نسمي ذلك المقطع مفصلة لدنة. وعندما يصبح مقطع ما مفصلة لدنة فإن العزم عنده يسمى بالعزم اللدن أو عزم اللدونة الكاملة. ولن يتجاوز العزم عند المفصلة اللدنة عزم اللدونة الكاملة مهما زادت الأحمال العرضية على العارضة. وفيما يلي سنمثل المفصلة اللدنة بدائرة صغيرة.

كما ذكر فإن المفصلة اللدنة تحدث عند المقطع الذي يتعرض لأقصى عزم إنحناء. وإذا كانت الأحمال مركزة فإن أقصى عزم إنحناء يحدث تحت أحد الأحمال أو ردود الأفعال. أما إذا كان الحمل موزعاً بانتظام فإن الأمر يتطلب عناية خاصة. وعندما تتكون مفصلات لدنة كافية في أي إنشاء، فإن أجزاء من الإنشاء بين المفصلات قد تتحرك بدون أي زيادة في الحمل. وهذا يعني أن هذه الأجزاء القابلة للتحرك والإزاحة تسلك سلوك الآليات. ولهذا يمكن تمثيل الإنشاء بين مفصلتين بخط مستقيم.

الحمل الذي يؤدي إلى نشوء عدد كاف من المفصلات اللدنة والتي تقود إلى الانهيار يسمى الحمل الحدي.

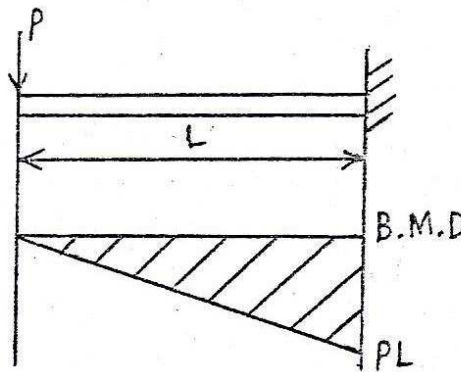
## 5.2 أساليب إيجاد الحمل الحدي (Method of Determining Critical Load) :

هنالك عدة طرق لإيجاد الحمل الحدي:

### 1. طريقة مخطط عزم الإنحناء (Bending Moment Diagram Methods) :

مثال (1):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه:



الحل :

يكون عزم الانحناء الأقصى عند الطرف المقيّد. ولهذا عندما تنشأ مفصلة لدنة فإنها ستنشأ عند الطرف المقيّد وهي كافية لإنهيار العارضة.

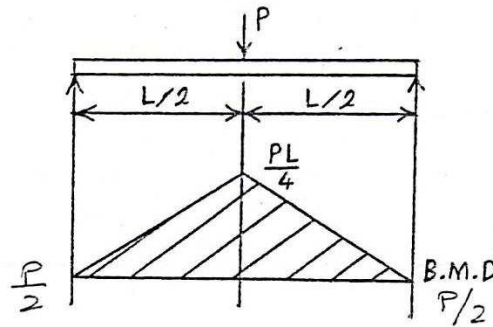
إذا رمزنا للعزم اللدن بـ  $M_P$  وللحمل الحدي بـ  $P_o$  نجد أن:

$$M_P = P_o L$$

$$P_o = \frac{M_P}{L}$$

مثال (2):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الموضحة أدناه:



الحل :

$$M_P = \frac{P_o L}{4}$$

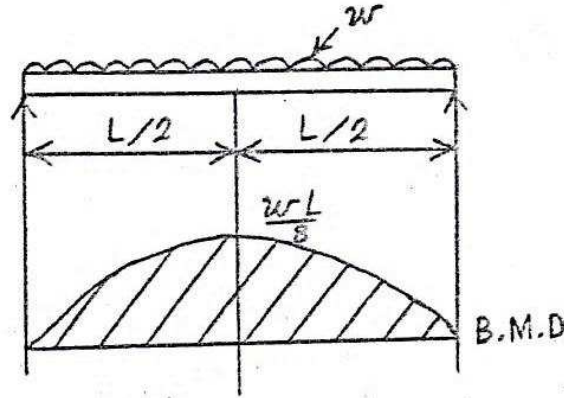
أي أن الحمل الحدي:

$$\therefore P_o = \frac{4M_P}{L}$$

مثال (3):

أوجد معدّل الحمل للعارضة الموضّحة في الرسم أدناه:





الحل :

$$M_P = \frac{w_o L^2}{8}$$

∴ معدل الحمل الحدي:

$$w_o = \frac{8M_P}{L^2}$$

## 2. طريقة الشغل الافتراضي (Virtual Work Method):

هذه الطريقة أسهل بكثير من طريقة مخطط عزم الإنحناء ولتطبيقها يجب إتباع الخطوات التالية:

i. حدّد عدد المفصلات اللدنة المطلوبة لإنهيار العارضة (حسب الأحمال المسلطة أو ردود الأفعال أو شروط الإسناد).

ii. حدّد مواضع المفصلات اللدنة.

iii. أعط العارضة إزاحة صغيرة ثم أرسم العارضة المنهارة.

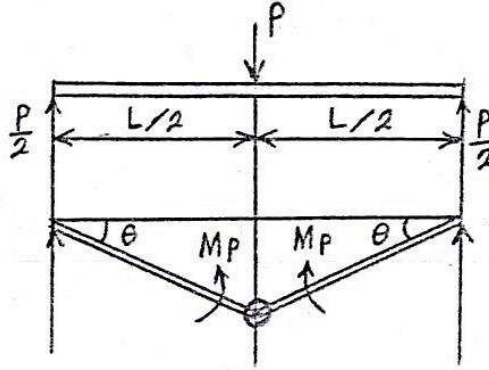
iv. أحسب الشغل الافتراضي وأجعل مجموعه صفراً.

**ملحوظة:**

لاحظ أن الشغل = القوة × الإزاحة . وهذه الإزاحة يجب أن تكون في اتجاه القوة . وإذا كانت القوة والإزاحة لهما نفس ناحية الاتجاه فإن الشغل يكون موجباً وإلا سيكون سالباً. نفس الملاحظة تنسحب على العزم والإزاحة الزاوية.

مثال (4):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم أدناه باستخدام طريقة الشغل الافتراضي.



الحل :

لكي تنهار العارضة نحتاج إلى مفصلة لدنة واحدة في وسط العارضة تحت الحمل حيث يصل العزم قيمته القصوى.

الشغل الناتج من الحمل P :

$$WD_1 = P \left( \frac{L}{2} \theta \right)$$

حيث  $\theta$  زاوية صغيرة

الشغل الناتج من العزم  $M_P$  :

$$WD_2 = -M_P \theta - M_P \theta = -2M_P \theta$$

∴ معادلة الشغل الافتراضي تصبح:

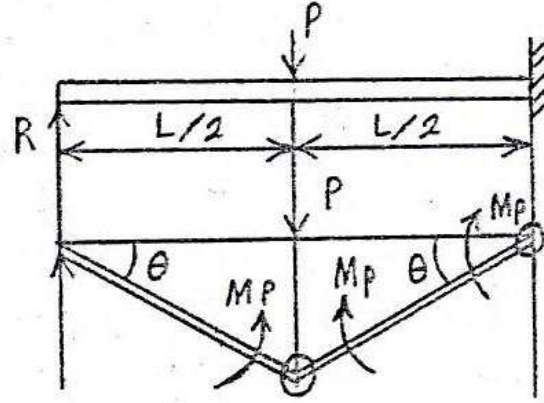
$$WD_1 + WD_2 = 0$$

$$\frac{P_o L}{2} \theta - 2M_P \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{4M_P}{L}$$

مثال (5):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الوتدية المدعومة الموضحة في الرسم أدناه:



الحل :

المطلوب مفصلتين لإنهيار العارضة إحداها عند الطرف المبني والأخرى تحت الحمل المركز.

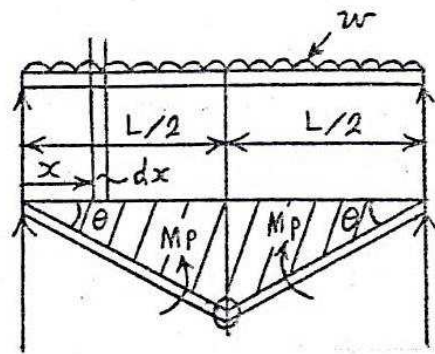
معادلة الشغل الافتراضي:

$$\frac{P_o L}{2} \theta - 3M_p \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{6M_p}{L}$$

مثال (6):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم أدناه:



الحل :

نحتاج إلى مفصلة واحدة في الوسط لإنهيار العارضة .

لإيجاد الشغل الافتراضي الناجم من الحمل الموزع:

$$WD = 2 \int_0^{1/2} w dx (x\theta)$$

$$WD = \left[ \frac{1}{2} L \left( \frac{L}{2} \theta \right) \right] w = Aw$$

لاحظ أن الكمية بين القوسين المربعين تمثل مساحة المثلث المظلل أو بصفة عامة المساحة الواقعة تحت

الحمل الموزع. فإذا أشرنا إلى هذه المساحة بـ  $A$  فإن الشغل الافتراضي يكون:

$$WD = Aw$$

وتلك الصيغة أفضل في الإستخدام.

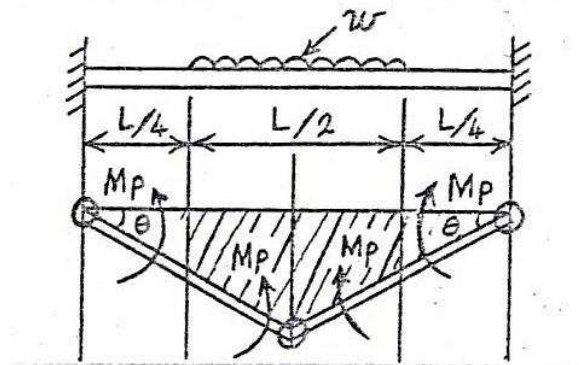
∴ معادلة الشغل الافتراضي:

$$\frac{L^2}{2} w_o \theta - 2M_P \theta = 0$$

$$\therefore w_o = \frac{4M_P}{L^2}$$

مثال (7):

أوجد معدل الحمل الحدي في العارضة الموضحة :



الحل :

المساحة المظللة (A) :

$$A = \frac{1}{2}L \left( \frac{L}{2} \theta \right) - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{L}{4} \theta \right)$$

$$\therefore A = \frac{3L^2}{16} \theta$$

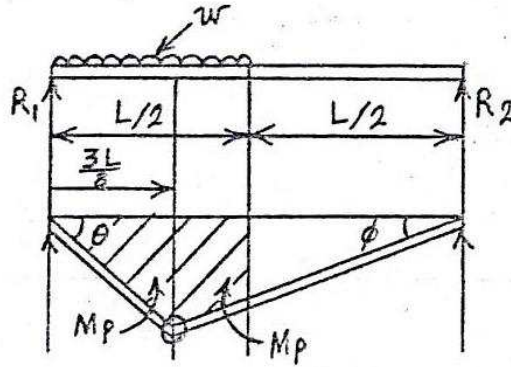
معادلة الشغل الافتراضي:

$$\frac{3L^2}{16} w_o \theta - 4M_P \theta = 0$$

$$\therefore w_o = \frac{64M_P}{3L^2}$$

مثال (8):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة أدناه :



الحل :

المطلوب مفصلة واحدة وتكون حيث القيمة القصوى للعزم، أو حيث تكون قوة القص = صفر

بأخذ العزوم حول  $R_2$  ،

أوجد أولاً رد الفعل  $R_1$  :

$$R_1 L = \frac{wL}{2} \times \frac{3L}{4}$$

$$R_1 = \frac{3wL}{8}$$

$$\frac{3wL}{8} - wx = 0$$

$$\therefore x = \frac{3L}{8}$$

المساحة المظللة :

$$A = \frac{1}{2} L \left( \frac{5L}{8} \phi \right) - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} \phi \right) = \frac{3L^2}{16} \phi$$

معادلة الشغل الافتراضي :

$$\frac{3L^2}{16} w_o \phi - M_P \theta - M_P \phi = 0$$

ولكن ، بما أن :

$$\frac{3L}{8} \theta = \frac{5L}{8} \phi$$

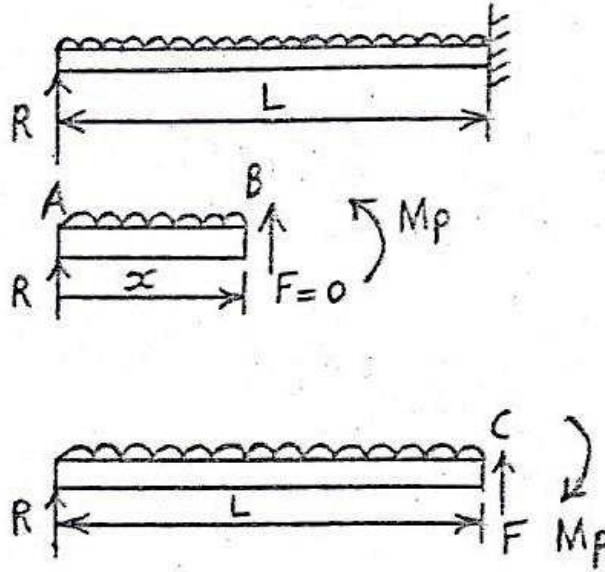
$$\therefore \theta = \frac{5}{3} \phi$$

$$\therefore \frac{3L^2}{16} w_o \phi - \frac{5}{3} M_P \phi - M_P \phi = 0$$

$$w_o = \frac{128M_P}{9L^2}$$

مثال (9) :

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الوتدية المدعومة الموضحة في الرسم أدناه.



الحل :

المطلوب مفصلتين لإنهيار العارضة، إحداهما عند الطرف المبني والأخرى عند المقطع الذي يتعرض لأقصى عزم إنحناء ولنفتراض أنه يبعد  $x$  من الطرف الحر.

قوة القص عند المقطع B = صفر

$$R - wx = 0 \quad (1)$$

خذ العزوم حول B :

$$Rx - M_p - \frac{wx^2}{2} = 0 \quad (2)$$

خذ العزوم حول C :

$$RL + M_p - \frac{wL^2}{2} = 0 \quad (3)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نحصل على:

$$x^2 + 2xL - L^2 = 0$$

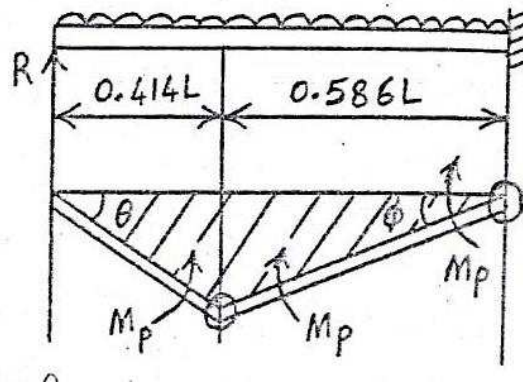
وقيمة  $x$  المطلوبة:

$$x = 0.414 L$$

المساحة المظللة :

$$A = \frac{1}{2} L (0.414 \theta)$$

$$A = 0.207 L^2 \theta$$



### معادلة الشغل الافتراضي:

$$0.207 L^2 w_o \theta - M_P \theta - 2M_P \phi = 0$$

و بما أنَّ :

$$0.414 L\theta = 0.586 L\phi$$

$$\therefore \phi = 0.706 \theta$$

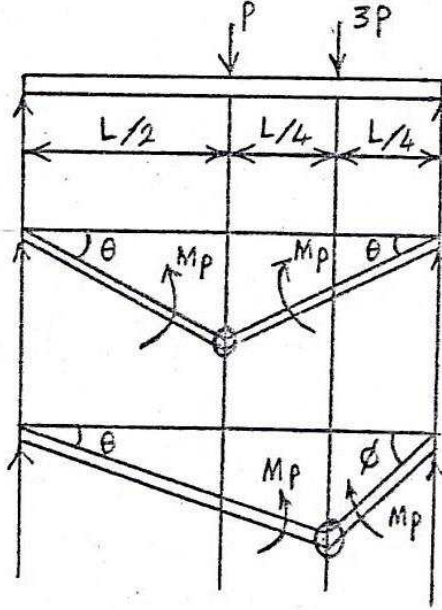
$$\therefore 0.207 L^2 w_o \theta - M_p \theta - 1.413 M_p \theta = 0$$

$$w_o = \frac{11.7 M_P}{L^2}$$

**مثال (10):**

أوجد الحمل الحدي في العارضة الموضّحة في الرسم أدناه:





الحل :

هذه العارضة تحتاج لمفصلة واحدة لكي تنهار. وهذه المفصلة إما أن تكون تحت الحمل  $P$  أو الحمل  $3P$ . إذن هنالك احتمالان وبالتالي حلان أحدهما يكون مقبولاً والآخر مرفوضاً.

الاحتمال الأول: المفصلة تحت الحمل  $P$ .

معادلة الشغل الافتراضي:

$$\frac{P_o L}{2} \theta + 3P_o \left( \frac{L}{4} \theta \right) - 2M_P \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{8M_P}{5L}$$

الاحتمال الثاني: المفصلة تحت الحمل  $3P$ .

$$P \left( \frac{L}{2} \theta \right) + 3P \left( \frac{L}{4} \phi \right) - M_P \theta - M_P \phi = 0$$

$$\frac{3L}{4} \theta = \frac{L}{4} \phi$$

$$\therefore \phi = 3\theta$$

$$\frac{PL}{2}\theta + \frac{3PL}{4L}(3\theta) - M_P\theta - 3M_P\theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{16 M_P}{11 L}$$

إذن الحمل الحدي:

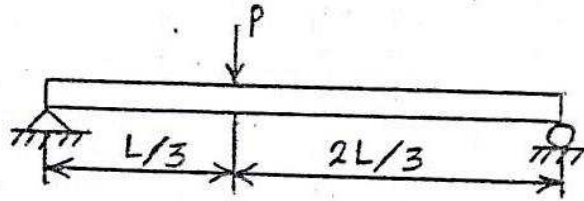
$$P_o = \frac{16 M_P}{11 L}$$

5.3 تدريبات في الانهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة:

(Exercises in Plastic Collapse of Beams and Simple Frames)

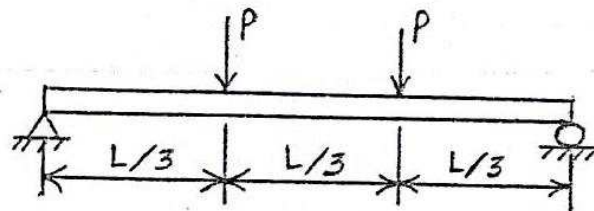
أوجد الحمل الحدي للعارضات الموضحة في الرسومات أدناه :

المسألة (1) :



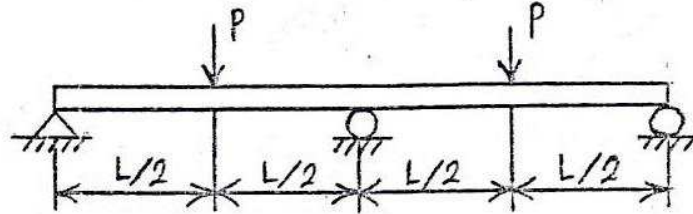
$$Ans. \left\{ \frac{4.5 M_P}{L} \right\}$$

المسألة (2) :



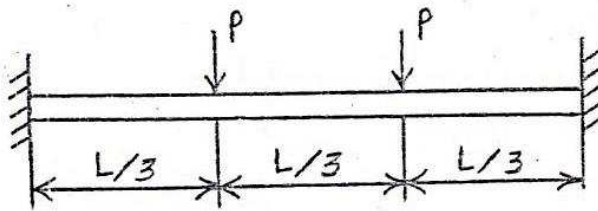
$$Ans. \left\{ \frac{3 M_P}{L} \right\}$$

المسألة (3) :



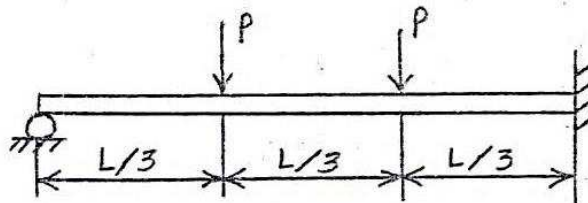
Ans.  $\left\{ \frac{6 M_P}{L} \right\}$

المسألة (4) :



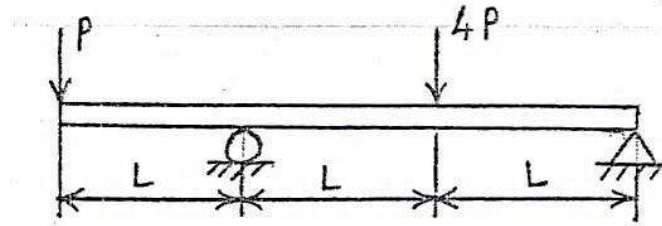
Ans.  $\left\{ \frac{6 M_P}{L} \right\}$

المسألة (5) :



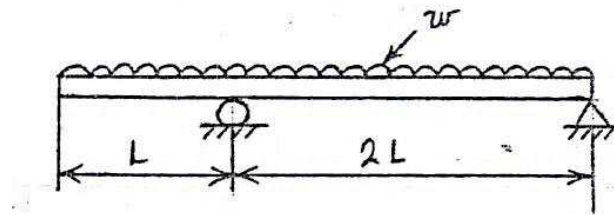
Ans.  $\left\{ \frac{4 M_P}{L} \right\}$

المسألة (6) :



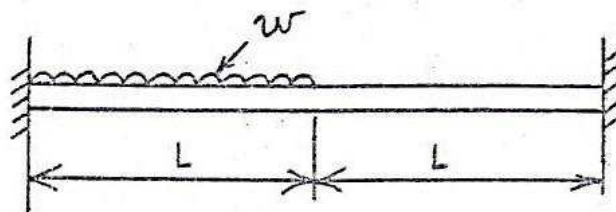
Ans.  $\left\{ \frac{2 M_P}{3 L} \right\}$

المسألة (7) :



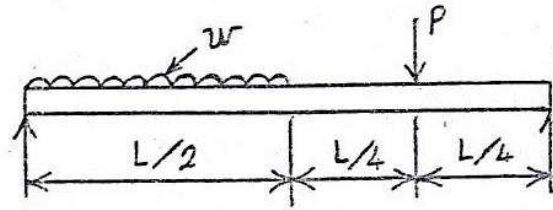
Ans.  $\left\{ \frac{4 M_P}{3 L^2} \right\}$

المسألة (8) :



Ans.  $\left\{ \frac{356 M_P}{9 L^2} \right\}$

المسألة (9) :



Ans.  $\left\{ \frac{32 M_P}{L^2} - \frac{6 P}{L} \right\}$

ملحوظة :

في المسألة (9) أوجد معدل الحمل الحدي. افترض أن المفصلة تحت الحمل المركز.

## الفصل السادس

## نظرية اللدونة للإحناء (Plastic Theory of Bending)

## 6.1 الإحناء فيما بعد إجهاد الخضوع: (Bending Beyond the Yield Stress)

في نظرية المرونة للإحناء يتم حساب الإجهادات القصوى في العنصر وحفظها في حدود إجهادات التشغيل في الشد والإنضغاط. يتم حساب إجهادات التشغيل بقسمة إجهاد الخضوع أو الإجهاد الأقصى على عامل سلامة أو أمان مناسب. على أي حال، فإن منشآت الفولاذ الطري لا تفشل في حال وصول الإجهاد الطرفي (edge stress) عند أي مقطع إلى قيمة إجهاد نقطة الخضوع وهي بالتالي ستستمر في تحمل الحمل طالما ظل الجزء المركزي للعضو في الحالة المرنة.

في أي عارضة يتم تحميلها، إذا تم زيادة نظام الحمل تدريجياً فإن الخضوع سيحدث أولاً عند الشرائح الخارجية للمقطع الأضعف (إذا أظهرت المادة إنخفاضاً في الإجهاد عند الخضوع، سيتم اعتبار إجهاد الخضوع الأدنى).

سنتكون هذه الشرائح الخارجية في الحالة اللدنة، وأي زيادة إضافية في التحميل ستعطي زيادة في الإنفعال وبالتالي الإنحراف عند ذلك المقطع للعارضة مع إعادة توزيع للإجهاد. للفولاذ الطري (mild steel) تحدث هذه الزيادة في الإنفعال دون أن يرتفع الإجهاد إلى ما فوق نقطة الخضوع (i.e. يمكن تجاهل تأثيرات التصليد الإنفعالي، وبالتالي يكون الإنفعال اللدن من 10 إلى 20 مرة ضعف الإنفعال المرن)، بحيث يمكن افتراض أن الإجهاد في المنطقة اللدنة يكون منتظماً.

عندما يصبح جميع المقطع العرضي عند أي نقطة في أي منشأة هندسية لدناً يكون من المستحيل إضافة أي زيادة في عزم المقاومة دون أن يكون هنالك إنفعالاً زائداً (مكافئاً للزيادة في التقوس عند ذلك المقطع) وبالتالي تنمو المفصلة اللدنة. اعتماداً على نوع المنشأة الهندسية (كمثال عارضة مسندة إسناداً بسيطاً،

عارضة مبنية في الأطراف، هيكل جاسئ وغيرها) فإنّ واحدة أو أكثر من المفصلات اللدنة ستكون مطلوبة لإحداث إنهيار كامل. يُسمى الحمل الذي ينتج في هذه الحالة بحمل الإنهيار، ونسبة حمل الإنهيار إلى حمل التشغيل تُسمّى بعامل الحمل.

يتم استخدام هذا العامل في التصميم للندن ليحل محل عامل السلامة.

## 6.2 إفتراضات في نظرية اللدونة: (Assumptions in the Plastic Theory)

الهدف الأساسي هو حساب عزم الإنحناء المطلوب لتشكيل مفصلة لدنة لأي مقطع عرضي، وتحديد توزيع عزم الإنحناء على طول العارضة عند حمل الإنهيار.

يتم تلخيص هذه الافتراضات في الآتي :

1. تظهر المادة خضوعاً واضحاً ويمكنها تحمّل إنفعالاً كبيراً عند نقطة الخضوع بدون زيادة إضافية في الإجهاد.

2. يكون إجهاد الخضوع هو نفسه في الشد والإنضغاط.

3. تظل المقاطع المستعرضة مستوية، بحيث يكون الإنفعال متناسباً مع البعد من المحور المحايد، بالرغم من أن الإجهاد في المنطقة اللدنة سيكون ثابتاً، وليس متناسباً مع الإنفعال.

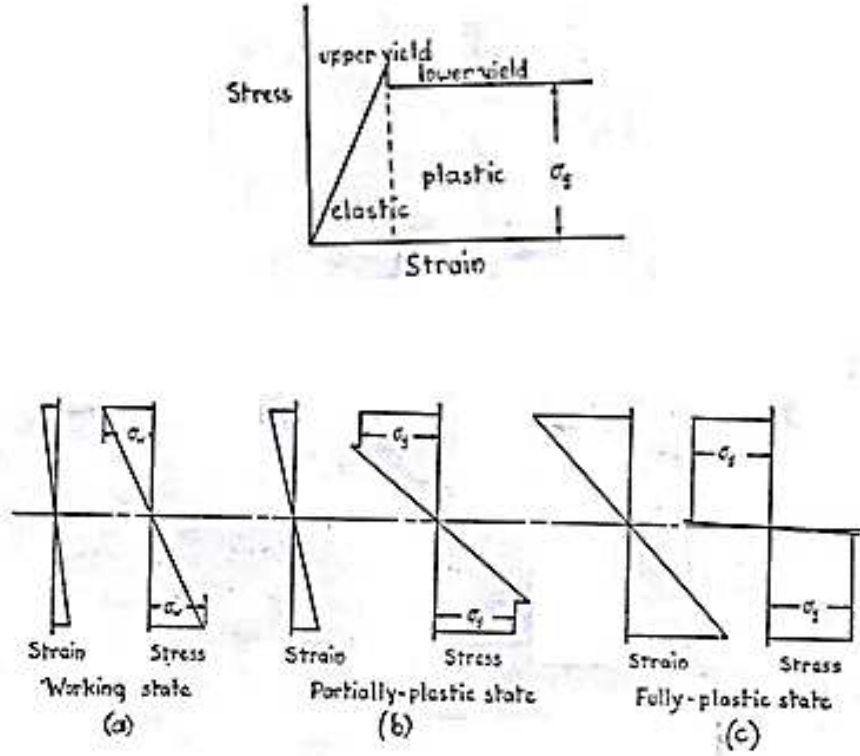
4. عندما تنشأ مفصلة لدنة عند أيّ مقطع عرضي يبقى عزم المقاومة عند تلك النقطة ثابتاً حتى يحدث إنهيار لجميع المنشأة نتيجة لتكوّن العدد المطلوب لمفصلات لدنة إضافية عند نقاط أخرى.

## 6.3 عزم المقاومة عند مفصلة لدنة: (Moment of Resistance at a Plastic Hinge)

الشكل (a) (6.1) يوضّح تفاوت الإجهاد والإنفعال في مقطع عرضي متماثل تحت حمل التشغيل بنظرية المرونة البسيطة. إذا تمّ زيادة الحمل حتى حدوث الخضوع في الشرائح الخارجية سيتم الحصول على حالة لدنة جزئياً كما موضح في الشكل (b) (6.1)، حيث  $\sigma_y$  هو إجهاد الخضوع الأدنى. أي زيادة إضافية في الحمل ينتج عنها حالة لدنة كاملة في الشكل (c) التي يتم فيها إفتراض إجهاد منتظم ومساوٍ لـ  $\sigma_y$ . سيكون

ما يزال هنالك منطقة مرنة صغيرة جداً حول المحور المحايد كما يشار إليها في المخطط، لكن تأثير هذه المنطقة الصغيرة المرنة على قيمة عزم المقاومة يكون صغيراً جداً وسيتم تجاهله.

(a) مقطع مستطيلي (Rectangular Section) :



شكل (6.1)

إذا كان  $b$  هو العرض و  $d$  هو العمق، فإنَّ الأحمال الكلية فوق وتحت المحور المحايد هي  $(\frac{bd}{2})\sigma_y$  وتعمل عند  $\frac{d}{4}$  من المحور المحايد؛ بالتالي فإنَّ عزم اللدونة الكامل يتم اعطاؤه كالآتي:

$$M_p = (bd/2) \sigma_y \times d/2$$

$$= (bd^2/4) \sigma_y \quad (1)$$

هذه المعادلة يتم مقارنتها بعزم التشغيل :

$$M_w = z \sigma_w = (bd^2/6) \sigma_w \quad (2)$$

من نظرية المرونة ( $Z$  هو معايير المقطع)، والعزم بداية ينتج :



$$M_y = (bd^2/6) \sigma_y \quad (3)$$

النسبة  $M_p/M_y$  تُسمَّى بعامل الشكل  $S$  ، بما أنها تعتمد فقط على شكل المقطع العرضي ، i.e. لمقطع مستطيلي، من (1) و (3) يتم الحصول على :

$$S = 1.5 \quad (4)$$

من (2) و (3) يتم الحصول على :

$$\frac{M_y}{M_w} = \frac{\sigma_y}{\sigma_w} = \text{عامل السلامة المؤسس على الخضوع الابتدائي} \quad (5)$$

من (1) و (2) يتم الحصول على :

$$M_p = S \times (\sigma_y/\sigma_w) \times M_w = SZ\sigma_y \quad (6)$$

ملحوظة :

المعادلات (5) و (6) سيتم تطبيقها لأيّ مقطع.

مثال (1) :

قضيب من الفولاذ بمقطع مستطيلي  $30\text{mm} \times 72\text{mm}$  يتم استخدامه كعارضة مسندة إسناداً بسيطاً على نطاق  $1.2\text{ m}$  ويتم تحميله عند منتصفه. إذا كان إجهاد الخضوع مساوياً لـ  $280\text{ N/mm}^2$  والأطراف الطويلة للمقطع رأسية. أوجد الحمل عند بداية حدوث الخضوع.

بافتراض أنّ هنالك زيادة إضافية في الحمل تُسبب خضوعاً ينتشر إلى الداخل في إتجاه المحور المحايد، بالإجهاد في الجزء المعرض للخضوع يظل عند  $280\text{ N/mm}^2$  ، أوجد الحمل المطلوب لإحداث الخضوع لعمق  $12\text{ mm}$  عند أعلى وأسفل المقطع عند منتصف النطاق، وأوجد طول العارضة الذي يحدث عنده الخضوع.

الحل :

إذا كان  $W_y$  هو الحمل عند الخضوع الابتدائي، بالتالي :

من المعادلة (3) :

$$M_y = (bd^2/6) \sigma_y$$

$$i.e. \quad W_y \times 300 = (30 \times 72^2/6) 280$$

معطياً ،

$$W_y = 24.2 \text{ kN} \quad (i)$$

تحت حمل أعلى من  $W$  ، يكون المقطع الوسطي للعارضة في حالة لدنة جزئياً، يكون توزيع الإجهاد مشابهاً للشكل (b) (6.1) ، يكون العمق الذي يكافئ  $12 \text{ mm}$  على كل جانب للمحور المحايد تحت إجهاد منتظم مقداره  $280 \text{ N/mm}^2$  بدون هبوط للإجهاد عند الخضوع. يكون عزم المقاومة الذي يتم حسابه من مخطط الإجهاد كالاتي :

$$M = (280 \times 12 \times 30)60 + \left(\frac{1}{2} \times 280 \times 24 \times 30\right) 32$$

$$= 928 \times 10^4 \text{ N.mm}$$

بما أن ردود الأفعال الطرفية هي  $W/2$  ،

$$= W \times 300$$

معطياً :

$$W = 31 \text{ kN} \quad (ii)$$

عند الخضوع الابتدائي يكون عزم المقاومة  $W_y \times 0.3$  ،  $i.e. \quad 7.26 \text{ kN.m}$  من (i)، وإذا حدث هذا

عند بعد  $x$  من أي طرف تحت حمل مركزي  $W$  ، بالتالي :

$$\frac{1}{2} Wx = 7.26$$

من (ii) :

$$\therefore x = 0.468 \text{ m}$$

طول العارضة التي يحدث فوقها الخضوع ،

$$L = 1.2 - 2x = 0.264 \text{ m}$$

(b) مقطع في شكل حرف I (I – Section) :

سيتفاوت عامل الشكل قليلاً حسب تناسبات أو أبعاد الفلنشة (flange) مع الوتر (web)، هنالك قيمة متوسطة مقدارها 1.15 كما موضحة في المثال (2) أدناه.

مثال (2) :

عارضة في شكل حرف I أبعادها  $300 \text{ mm} \times 125 \text{ mm}$  لها فلنشة سمكها  $13 \text{ mm}$  ووتر سمكها  $8.5 \text{ mm}$  . أحسب عامل الشكل وعزم المقاومة في حالة اللدونة الكاملة. خذ  $\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2$  و  $I_x = 85 \times 10^6 \text{ mm}^4$

الحل :

عند الخضوع الابتدائي ،

$$M_y = (I/y) \sigma_y$$

$$M_y = (85 \times 10^6 / 150) 250 = 141 \times 10^6 \text{ N.mm} \quad (i)$$

في الحالة كاملة اللدونة يكون الإجهاد مساوياً لـ  $250 \text{ N/mm}^2$  في كل مكان، بحيث يكون شداً على أحد الجوانب وإنضغاطاً على الجانب الآخر للمحور المحايد. بعزم الإجهاد مضروباً في حاصل ضرب المساحة وبتقسيم الوتر إلى جزئين.

$$M_P = (250 \times 125 \times 13) 287 \quad \text{للفلنشات}$$

$$+ (250 \times 8.5 \times 137) 137 \quad \text{للوتر}$$

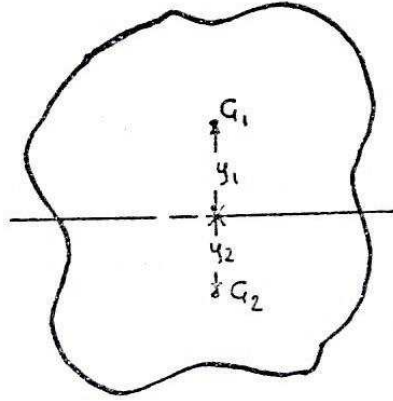
$$= 156 \times 10^6 N.mm = 156 kN.m \quad (ii)$$

من (i) و (ii) :

$$s = M_P / M_y = 1.11, \text{ عامل الشكل}$$

### (c) مقطع لا متمثل (Unsymmetrical Section) :

إذا كانت  $A$  هي المساحة الكلية للمقطع العرضي، بالتالي من الواضح أنه ولانحناء خالص في الحالة اللدنة الكاملة فإن المحور المحايد يجب أن يقسم المساحة لنصفين متساويين. إذا كانت مراكز المساحات لهذين النصفين هما  $G_1$  و  $G_2$  كما في الشكل (6.2) أدناه عند مسافة  $y_1 + y_2$  من بعضهما البعض، بالتالي :



شكل (6.2)

$$M_P = \left(\frac{1}{2} \sigma_y A\right) (y_1 + y_2) \quad (7)$$

لكن عند الخضوع الابتدائي

$$M_y = Z \sigma_y$$

حيث  $Z$  هو معايير المقطع

بالتالي :

$$\frac{M_P}{M_y} = A(y_1 + y_2) / 2Z \quad (8)$$

$$= S \quad (\text{حسب التعريف})$$

مثال (3):

أوجد عامل الشكل لقناة أبعادها  $150\text{ mm} \times 75\text{ mm}$  في الإنحناء الخالص بمستوى الإنحناء متعامداً مع وتر القناة، يتم توضيح الأبعاد في الشكل (6.3) أدناه،  $A = 2300\text{ mm}^2$  و  $Z = 21,000\text{ mm}^3$ .

الحل :

أجعل  $PP$  يكون المحور المحايد تحت شروط اللدونة الكاملة، بالتالي فإنه يُقسَّم المساحة الكلية بالتساوي. مفترضاً جميع الأركان مربعة، بالتالي :

$$2 \times 9.5 \times h = 150 \times 6.25 + 2 \times 9.5(75 - h - 6.25)$$

معطياً :

$$h = 59\text{ mm}$$

مراكز المساحة للمساحتين على كل من جانبي  $PP$  هما  $G_1$  و  $G_2$  عند مسافات  $y_1$  و  $y_2$  ، حيث :

$$y_1 = h/2 = 29.5\text{ mm}$$

$$y_2 = \frac{(150 \times 6.25)(16 - 3.125) + (2 \times 9.5 \times 9.75)4.875}{150 \times 6.25 + 2 \times 9.5 \times 9.75}$$

$$= 11.8\text{ mm}$$

من المعادلة (8) :

$$s = A(y_1 + y_2)/Z$$

$$= 2300 \times 41.3/21,000$$

$$= 2.26$$



## الكتب والمراجع

### الكتب والمراجع العربية :

1. جلال الحاج عبد، "التصنيع والأتمتة والتجميع في الهندسة الميكانيكية" ، [www.jalalalhajabed.com](http://www.jalalalhajabed.com) .
2. عثمان محمد عثمان ، علي الصويغي البوزيدي ، محمد خليفة التليبي ، "مبادئ تقنيات المواد وعمليات التصنيع" ، منشورات مكتب البحوث والاستشارات الهندسية" ، (2005م) .
3. سوسن صبيح عبد الله ، زهير حسن عبد الله ، "تحليل تتابع عمليات التصنيع للمنتجات الصناعية " ،  
The Iraqi Journal for Mechanical and Material Engineering .
4. الأمين عبد الجليل محمود ، "كتاب أساسيات عمليات التصنيع" ، دار نشر جامعة الخرطوم ، (2009م) .
5. عبد الجليل يوسف العطا ، "مذكرة محاضرات عمليات التصنيع (1) و (2) و (3)" ، جامعة وادي النيل ،  
كلية الهندسة والتقنية ، (1990م) .
6. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات عمليات التصنيع (1) و (2)" ، جامعة البحر الأحمر ،  
كلية الهندسة ، (2000م) .
7. الأمين عبد الجليل محمود ، "عمليات تصنيع المواد (قطع المعادن)" ، مطبعة البجراوية ، الخرطوم ،  
(2009م) .
8. الأمين عبد الجليل محمود ، "علوم الاحتكاك والتآكل والتزليق (ترايبولوجي)" ، مطبعة جامعة الخرطوم ،  
(2007م) .
9. الأمين عبد الجليل محمود ، "عمليات تشكيل المعادن" ، مطبعة جامعة الخرطوم ، مايو (2007م) .
10. محمد نصر الدين دمير ، "تكنولوجيا هندسة الإنتاج" ، دار الراتب الجامعية ، بيروت ، (1988م) .

11. براون ل. ج. (مؤلف) ، محمد حسن سويلم (مترجم) ، "نظرية الصناعة" ، دار ماكروهيل للنشر ، المملكة المتحدة ، (1970م) .
12. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات ميكانيكا المواد (1) و (2) و (3)" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، (1995م) .
13. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات أساسيات المرونة واللدونة" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، (2002م) .
14. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات ميكانيكا المواد الأجزاء (1) و (2) و (3)" ، جامعة البحر الأحمر ، كلية الهندسة ، (2005م) .

**الكتب والمراجع الإنجليزية :**

1. Mikell P. Groover, "Fundamentals of Modern Manufacturing", John Wiley and Sons Inc., (2007).
2. Ismaila S. O., "Manufacturing Science and Technology", Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Agriculture, Abeokuta, (2012).
3. Schmidt R. S. and Kalpakjian S., "Manufacturing Engineering and Technology", 5<sup>th</sup> edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, (2006).
4. Sharma P. C. , "A textbook of Production Technology (Manufacturing Processes)" , 5<sup>th</sup> edition , S. Chand and Company Ltd , Ram Nagar , New Delhi , India , (2004).
5. Dieter G. E. , "Mechanical Metallurgy" , 3<sup>rd</sup> edition , McGraw Hill Publishing Company , New York .



6. Ibhadowe A. O. A. , "Introduction to Manufacturing Technology" , Ambik Press , No. 4 , Otiye Odibi Avenue , Isiohor via Ugbowo , Old Lagos Road , Benin City , Edo State , Nigeria , (1997) .
7. Ahmet Aran, "Manufacturing Properties of Engineering Materials", Lecture Notes, ITU, Department of Mechanical Engineering, (2007).
8. Alaa A. Ateia, "Manufacturing Processes II", Materials Engineering Department, University of Technology, (2009).
9. Raj ender Singh, "Introduction to Basic Manufacturing Processes and Workshop Technology", New Age International (P) Limited Publishers, New Delhi, India, (2006).
10. Lee J. and et. al., "Modern Manufacturing", Mechanical Engineering Handbook, Boca Raton: CRC Press LLC, (1999).
11. Velayudham A., "Modern Manufacturing Processes", Journal of Design and Manufacturing Technologies, Vol. 1, No. 1, November (2007).
12. G. Boothroyd and W. A. Knight, "Fundamentals of Machining and Machine Tools", Taylor and Francis, (2006).
13. Mills B., and Redford A. H., "Machinability of Engineering Materials", Applied Science Publishers, London, (1983).
14. Berg R. T., "Fundamentals of Turning", Metal Cutting: by the editors of American Machinist, McGraw Hill, New York, (1979).
15. Trent E. M., "Metal Cutting", 2<sup>nd</sup> edition, Butterworth Company, London, (1984).
16. Kalpakjian, Serope, "Manufacturing Engineering and Technology", 2<sup>nd</sup> edition, Addison – Wesley Publishers Company, USA, (1992).
17. DeGarmo, Black, Kolser, "Materials and Processes in Manufacturing", 7<sup>th</sup> edition, Macmillan Publishers Company, N. Y. and London, (1988).

18. Schley J. A., "Introduction to Manufacturing Processes", 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill, Inc., USA, (2000).
19. W. A. Nash, "Strength of Materials", 4<sup>th</sup> edition, (2011).
20. R. S. Khurmi, "Strength of Materials (Mechanics of Solids) (S.I. Units)", (2014).
21. Timoshenko, "History of Strength of Materials", Dover, New York, (1983).
22. Gere J. , and Timoshenko S. P., "Mechanics of Materials", 3<sup>rd</sup> edition, PWS – Kent, Boston, (1990).
23. Boresi A. P., and Chong K. P., "Elasticity in Engineering Mechanics", 2<sup>nd</sup> edition, Wiley, Hoboken, N. J., (2000).
24. Ansel C. Ugural and Saul K. Fenster, "Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity: Analysis of Stress", The Trusted Technology Learning Source, July 20 (2011).
25. G. H. Ryder, "Strength of Materials", A. M. I. Mech. I., (1969).
26. William A. Nash, "Schaum's Outline of Strength of Materials", Fifth Edition, McGraw Hill, August 12 (2010).

## نبذة عن المؤلف



أسامة محمد المرضي سليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسودان في العام 1966م. حاز على دبلوم هندسة ميكانيكية من كلية الهندسة الميكانيكية - عطبرة في العام 1990م. تحصل أيضاً على درجة البكالوريوس في الهندسة الميكانيكية من جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا - الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجستير في تخصص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل - عطبرة في العام 2003م . قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل السودان، بالإضافة لتأليفه لثمانية كتب هندسية باللغة العربية وثمانية كتب هندسية باللغة الإنجليزية وخمسة عشر ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشرافه على أكثر من مائتي بحث تخرج لكل من طلاب الماجستير ، الدبلوم العالي ، البكالوريوس ، والدبلوم العام . يشغل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية - جامعة وادي النيل. بالإضافة لعمله كاستشاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندسية لخرائطة أعمدة المرافق واسطوانات السيارات.