الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الديناميكا الكلاسيكية

(مفاهيم وتطبيقات)

Classical Dynamics

(concepts and Application)

تأليف

أ.د/ عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

أستاذ الفيزياء (سابقا)

جامعة القدس / فلسطين

جامعة أم القرى/ مكة المكرمة

الطبعة ألأولى

2020م – 1441هـ

إهداء

الى زوجتي وابنتي العزيزتين

الفهرس

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله الكريم وبعد،

يتألف علم الميكانيكا من فرعين هما علم الأســـتاتيكا (static) وعلم الديناميكا Dynamics ، حيث يتناول علم الأستاتيكا دراسة حالة الأجسام تحت تأثير القوى الخارجية في حالة السكون وشروط اتزان هذه الأجسـام. بينما يتناول علم الديناميكا دراســة ووصــف معادلة حركة هذه الأجســام الصــلبة الأنتقالية والدورانية تحت تأثير هذه القوى.

نظرا لحاجة المكتبة العرية لمثل هذا المرجع العلمي والمطلوب لطلبة العلوم والرياضـيات في الجامعات العربية ، رأينا ان نقوم بتأليف هذا المرجع ليتســنى لهم فهم مفردات هذا العلم بلغة الأم المجيدة . اذ يقدم هذا الكتاب أسس ومفاهيم علم الديناميكا التي تطورت على يد علماء العرب والمسلمين في عهد النهضـة الإســلامية وكيفية تطورها في عهد النهضـــة الأوربية من قبل نيوتن في القرن الســـابع عشـــر الميلادي والمساهمات المتلاحقة للنظريات العامة في الديناميكا الكلاسيكية.

يبدأ عرض الكتاب لهذه النظريات بإستخدام مبادئ التفاضل والتكامل لوصف حركة الأجسام المادية (وصف السرعة والتعجيل في نظم الإحداثيات المختلفة) وكذلك إيجاد معادلات الحركة للجسم المادي في بعد واحد تحت تأثير قوى خارجية ثم الإنتقال إلى دراســة ديناميكا الأجســـام المتحركة في الأبعاد الثلاثة ودراسة قواعد الشغل ومفهوم الطاقة وعلاقاتها مع الحركة، كما نعرض وصفاً لحركة المقذوفات وحركة البندول كوصف للحركة التوافقية البسيطة. لدراسة حركة دوران الأرض وتأثيرها على الأجسام المتحركة خلال محيطهـا نتنـاول وصـــف الحركـة في أنظمـة المحـاور المرجعيـة لحـالات الحركـة الإنتقـاليـة والدورانية.كما يتناول هذا الكتاب وصف لحركة الكواكب السماوية بإستخدام قوانين كبلر الثلاثة ودراسة الحركة للأجســام المســتطاره تحت تأثير القوى (المجالات) ذات التنافر التربيعي العكســي، كما تم عرض مفاهيم وتطور نظريات ميكانيكا نيوتن النسبية وطريقة تطورها حتى الوصول إلى مفاهيم النظرية النسبية الخاصة التي وضعها إينشتاين في بداية القرن العشرين.

ومن ثم ننتقل لدراسة حركة منظومة من الجسيمات وقوانين حفظ الزخم الخطي والطاقة كوصف لحالة التصادمات بين الجسيمات المادية وكذلك دراسة حركة الأجسام المادية متغيرة الكتلة. أما ميكانيكا الأجسام الصلبة فقد تم عرضها من خلال دراسة حركة الأجسام الدورانية والمقيدة من خلال وصف مفاهيم عزوم

القصـــور الذاتية بطريقة المصــفوفات. وفي الباب الأخير من هذا الكتاب نعرض نظريات تم تطوريها من قبل لاكرانج وهاملتون لوصف حركة الأجسام وأنظمة الجسيمات كبديل لمعادلات الحركة لنيوتن. ويعتبر هذا الكتاب شـــاملاً لدراســـة حركة الأجســـام الصـــغيرة والكبيرة والتي يتعرض لها الطالب أثناء دراســـته لمقررات الفيزيـاء في المرحلـة المتقدمـة، وقـد زود الكتـاب بحلول كـافـة التمـارين إضـــــافـة إلى دليـل للمصطلحات المستخدمة.

سائلين الله تعالى أن يجعل أعمالنا خالصة له وأن يرحمنا ويرحم والدينا وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

أ.د/ عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

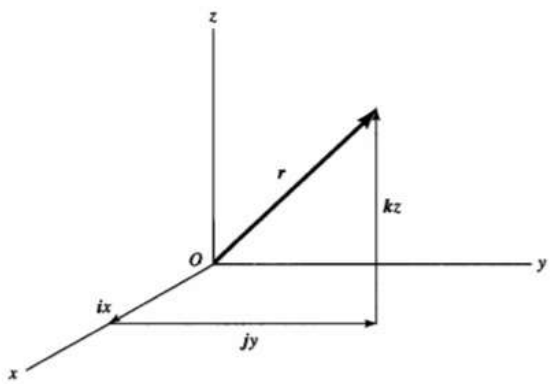
عابود – رام الله- فلسطين

نتناول في هذا الفصــل وصــف لحركة الأجســام بإســتخدام التفاضــل والتكامل وتطبيقاته على الكميات المتجهة.

(1.1) متجه موقع الجسيم: Position Vector of a Particle

يمكن تحديد موقع إي جسيم بصورة كاملة بإستخدام متجه (Vector) يبدأ من نقطة الأصل لمحاور مرجعية وينتهي بموقع الجســيم وهذا المتجه يســمى متجه الموقع (كما في الشــكل(1.1)). فمثلاً: عند استخدام المحاور الكارتيزية (x, y, z) فإن المتجه $\vec{r}$ يمثل متجه الموقع للجسيم وصورته الرياضية هي:

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (1)$$



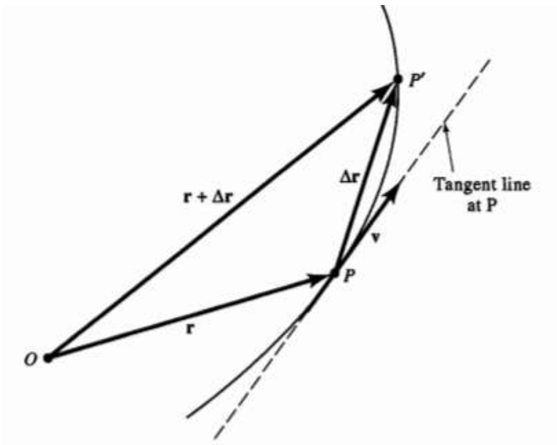
شكل (1.1) احداثيات متجه الموقع الكارتيزية

حيث $\hat{i}$، $\hat{j}$ ، $\hat{k}$ هي متجهات الوحدة وفي حالة حركة الجسيم فإن المركبات x ، y ، z لهذا المتجه تكون دوال زمنية أي $x = (x(t)\ ,\ y = y(t)\ , z = z(t)\ )$ ، وعليه فإن متجه الموقع

$\vec{r}$ يكون دالة زمنية وهو كمية متغيرة مع الزمن أثناء حركة الجسيم ووصف حركة الجسيم يعني تحديد مقدار واتجاه هذه الكمية في أي لحظة زمنية.

(1.2) متجه السرعة: Velocity Vector

نفرض أن متجه الموقع لجسيم ما في أي لحظة هو $\overrightarrow{op} = \vec{r}\,(t)$ ، وبعد فترة زمنية Δt أصبح موقع الجسيم عند p' وعليه فإن متجه موقع الجسيم يعطي كما في الشكل(1.2).



شكل (1.2) التغير الزمني لمتجه الموقع .

$$\overrightarrow{op}' = \vec{r}\,(t + \Delta t)$$

وعليه يكون التغير في متجه موقع الجسيم ($\Delta\vec{r}$) في هذه الفترة الزمنية هو:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

اذن ، السرعة المتوسطة = $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ تعطي بالعلاقة :

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} \qquad (1.1)$$

أما **السرعة اللحظية** للجسيم $\vec{v}$ فإنها تعرف بأنها مشتقة متجه موقع الجسيم بالنسبة للزمن،

أي: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$، من المعادلة (1) فإن السرعة اللحظية هي:

$$\vec{v}=\hat{i}\,\frac{dx}{dt}+\hat{j}\,\frac{dy}{dt}+\hat{k}\,\frac{dz}{dt}=\hat{i}\,\dot{x}+\hat{j}\,\dot{y}+\hat{k}\,\dot{z} \qquad (1.2)$$

حيث $\dot{x}$، $\dot{y}$، $\dot{z}$ تسمى مركبات السرعة في الإحداثيات الكارتيزية.

مثال(1):

جد مقدار واتجاه سرعة جسيم ($\vec{v}$) حيث متجه الموقع يعطي بالعلاقة

$$\vec{r}=\hat{i}\,(bt)+\hat{j}\,(ct-\frac{1}{2}gt^2)\ ; \quad b,c= \text{ثابت}$$

__الحل__: $$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\hat{i}\,b+\hat{j}\,(c-g)\ ,\ |\vec{v}|=\sqrt{b^2+(c-gt)^2}$$

(1.3) متجه التعجيل: Acceleration Vector

يعرف متجه التعجيل (التسارع) بأنه مشتقة السرعة بالنسبة للزمن ويرمز له ($\vec{a}$) ويعطي بالعلاقة:

$$\vec{a}=\frac{d\,\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\,\vec{r}}{dt^2}=\hat{i}\,\ddot{x}(t)+\hat{j}\,\ddot{y}(t)+\hat{k}\,\ddot{z} \qquad (1.3)$$

حيث تسمى الكميات $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ مركبات التعجيل في الإحداثيات الكارتيزية.

مثال(2):

جد متجه التعجيل لحركة الجسيم في المثال(1).

__الحل__: بما أن

$$.\vec{v}=\hat{i}\,b+\hat{j}\,(c-gt)$$

لذلك ،

$$\hat{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}(0) + \hat{j}(0-g) = -g\,\hat{j}$$

نلاحـــظ أن المتجـــه $\vec{a}$ فـــي إتجـــاه ســـالب محـــور y ، ومقـــداره g $|\vec{a}| = g$. أمـــا لإيجـــاد الزاوية بين متجهي السرعة والتعجيل نستخدم العلاقة $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|}$

فنجد أن

$$\cos\theta = \frac{-c+gt}{\sqrt{b^2+(c-gt)^2}}$$

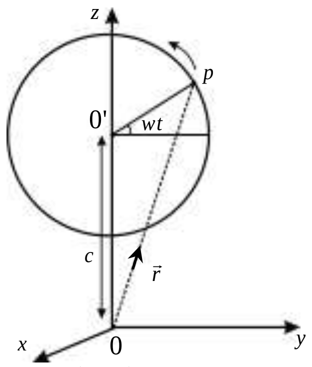
مثال(3)

جد متجه السرعة والتسارع لجسيم له متجه موقع كالآتي:

$$\vec{r} = \hat{i}\,(b\sin wt) + \hat{j}\,(b\cos wt) + \hat{k}\,c$$

حيث b ، c ثوابت.

<u>**الحل:**</u>



شكل(1−3)

يوضـــح الشـــكل (1.3) موقـــع الجســـيم فـــي لحظـــة مـــا أثنـــاء الحركـــة . تكـــون حركـــة الجســـيم حركـــة دائريـــة فـــي مســـتوى (xy) وعلـــى بعـــد ثابـــت مقـــداره (c) مـــن نقطـــة الأصـــل (0).

بإستخدام المشتقات لمتجه الموقع نجد أن:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \hat{i}\,(bw\cos wt) + \hat{j}\,(-bw\sin wt) + \hat{k}\,(0)$$

$$|\vec{v}| = \left[(bw\cos wt)^2 + (-bw\sin wt)^2\right]^{1/2}$$

$$= bw\left[\cos^2 wt + \sin^2 wt\right]^{1/2} = bw$$

ولحساب مقدار التعجيل (التسارع) $|\vec{a}|$، لاحظ أن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}\,(-bw^2\sin wt) + \hat{j}(-bw^2\cos wt)$$

إذاً

$$|\vec{a}| = \left[(-bw^2\sin wt)^2 + (-bw^2\cos wt)\right]^{1/2}$$

$$= bw^2\left[\sin^2 wt + \cos^2 wt\right]^{1/2} = bw^2$$

ولحساب الزاوية بين متجه السرعة والتسارع تستخدم العلاقة

$$\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{v} / |\vec{a}||\vec{v}|$$

لكن $\vec{a}\cdot\vec{v} = -b^2w^3\cos wt\sin wt + b^2w^3\cos wt\,\sin wt = 0$

إذاً $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$ وعليه فإن متجه التسارع عمودي مع متجه السرعة ($\vec{v}$) أي أنه في الحركة الدائرية يكون متجه السرعة متعامداً مع متجه التسارع.

(1.4) تكامل المتجهات Vectors Integration

يمكن تحديد موقع الجسيم إذا علمت سرعته وذلك بإستخدام تكامل متجه السرعة كالآتي:

حيث $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ، فإن

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r} = \int \vec{v}\,dt + \vec{r}_0} \qquad (4)$$

حيث $\vec{r}_0$ متجه الموقع الإبتدائي للجسيم (في اللحظة الصفرية).

مثال(4):

جد متجه الموقع لجسيم إذا علمت أن سرعته تعطي بالعلاقة:

$$\vec{v}=\hat{i}\,A+\hat{j}\,(Bt)+\hat{k}\,(c/t)$$

حيث A ، B ، C ثوابت.

الحل:

$$\vec{r}=\int[\hat{i}\,A+\hat{j}\,Bt+\hat{k}(c/t)]\,dt=\hat{i}\int A\,dt+\hat{j}\int Bt\,dt+\hat{k}\int\frac{c}{t}dt+\vec{r}_0$$

$$=\hat{i}\,(At)+\hat{j}\,B\frac{t^2}{2}+\hat{k}\,c\,\ell n\,t+\vec{r}_0$$

ويمكن تحديد $\vec{r}_0$ بمعرفة الموقع الإبتدائي للجسيم في لحظة $t=0$.

وبنفس الطريقة يمكن تحديد متجه موقع الجسيم إذا علمت متجه التعجيل $\vec{a}$ وذلك بإستخدام التكامل الأول ثم إجراء تكامل ثاني على النحو التالي:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{v}=\int\vec{a}\,dt+\vec{v}_0$$

$$\vec{r}=\int\vec{v}\,dt+\vec{v}_0$$

مثال(5)

إذا علمت أن متجه التسارع لجسيم ما يعطى بالعلاقة: $\vec{a}=-\hat{k}\,g$

جد موقع الجسيم في أي لحظة زمنية.

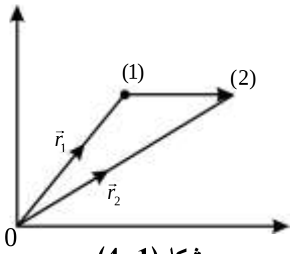
الحل:

$$\vec{v}=\int\hat{a}\,dt=-\hat{k}\int g\,dt+\vec{v}_0=-k\,gt+\vec{v}_0$$

$$\vec{r}=\int\vec{v}\,dt=-\hat{k}g\int t\,dt+\int\vec{v}_0\,dt+\vec{r}_0=-\hat{k}\,(-\frac{1}{2}gt^2)+\vec{v}_0+\vec{r}_0$$

(1.5) السرعة النسبية: Relative Velocity

لنفرض أن $\vec{r}_1$ تمثل متجه موقع لجسيم ما وأن $\vec{r}_2$ يمثل متجه موقع لجسيم ثاني في نفس إطار المرجع، لمعرفة إزاحة الجسيم الثاني بالنسبة للجسيم الأول فإن ذلك يحدد بمتجه يبدأ من الجسيم الأول نحو الثاني ويرمز له بالرمز $\vec{r}_{1\to2}$ أو $\vec{r}_{12}$.



شكل(1−4)

بالرجوع إلى الشكل (1.4) نجد أن

$$\boxed{\vec{r}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1}.$$

ومن هذه العلاقة نحدد سرعة الجسيم الثاني بالنسبة للأول أو ما يعرف بالسرعة النسبية أو أن

$$\vec{v}_{12}=\frac{d\,\vec{r}_{12}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}_1-\vec{r}_1)=\frac{d\,\vec{r}_2}{dt}-\frac{d\,\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_{12}=\vec{v}_2-\vec{v}_1} \qquad (5)$$

<u>ملاحظة</u>: هنا يكون المرجع الجسيم الأول.

ولمعرفة سرعة الجسيم الأول بالنسبة لسرعة الثاني ($\vec{v}_{21}$) فإن هذه السرعة تكون مساوية في المقدار للسرعة $\vec{v}_{12}$ ومعاكسة لها في الإتجاه، أي أن

$$\vec{v}_{12}=-\vec{v}_{21} \qquad (6)$$

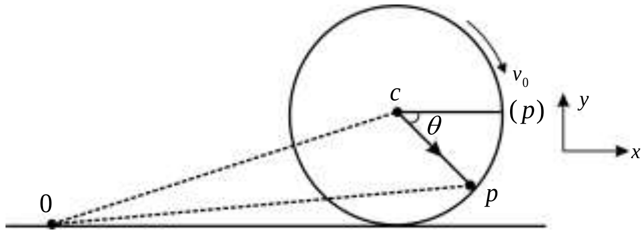
مثال(5)

تتدحرج عجلة نصف قطرها b على الأرض بسرعة أفقية v_0 جد سرعة أي نقطة على حافة العجلة مثل (p) بالنسبة: (1) لمركز العجلة

(2) للأرض.

الحل:

نفرض أن (p) في اللحظة الصفرية (عند $t=0$) كانت في الإتجاه الأفقي.



شكل(1-5)

\وعند أي لحظة أثناء تدحرج العجلة فإن متجه الموقع لـ p بالنسبة لمركز العجلة (c) هو $\overrightarrow{cp}$ ويرمز له:

$$\vec{r}_{cp} = \hat{i}\,(b\cos\theta) + \hat{j}\,(-b\sin\theta)$$

حيث θ زاوية دوران العجلة وتعطي بدلالة السرعة الزاوية w حيث $\theta = wt$ ،

في الحركة الدورانية (تدحرج دون إنزلاق

$$\dot{\theta} = w = (v_0 / b)$$

وعليه ، تكون سرعة النقطة (p) بالنسبة لمركز العجلة:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{d\,\vec{r}_{cp}}{dt} = -\hat{i}\,b\,w\sin\theta - \hat{j}\,b w\cos\theta$$
$$= -\hat{i}\,v_0\sin\theta - \hat{j}\,v_0\cos\theta$$

نلاحظ أن سـرعة p تعتمد على θ، وعليه عند ملامسـة (p) الأرض فإن $\theta=\frac{\pi}{2}$ حسـب شـكل(1.5)

وعليه فإن:

$$(\vec{v}_{cp})_{\theta=\pi/2}=-\hat{i}\,v_0\,(1)=\hat{j}\,v_0\,(0)=-\hat{i}\,v_0$$

<u>ثانياً</u>: لإيجاد سرعة p بالنسبة لشخص على الأرض:

نجد إزاحة p بالنسبة لـ 0 وهي: $\vec{r}_{0\,p}$ حيث $\vec{r}_{0\,p}=\vec{r}_{0\,c}+\vec{r}_{cp}$. إذاً

$\vec{v}_{0\,p}=\vec{v}_{0\,c}+\vec{v}_{cp}$، حيث أن العجلة تتدحرج أفقياً (إنطلاق أمامي) بمقدار v_0 فإن $\vec{v}_{0\,c}=\vec{v}_0$. إذاً

$$\vec{v}_{0p}=\hat{i}v_0+(-\hat{i}v_0\sin\theta)-\hat{j}\,v_0\cos\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_{0\,p}=\hat{i}v_0\,(1-\sin\theta)-\hat{j}\,v_0\,\cos\theta}$$

نلاحظ أن سرعة p بالنسبة للأرض عند ملامسة (p) الأرض $(\theta=\pi/2)$ هي

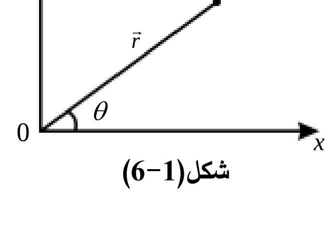
$$(\vec{v}_{0\,p})_{\theta=\pi/2}=\hat{i}\,`v_0\,(1-1)-\hat{j}\,v_0\,(0)=0$$

أي أن النقطة (p) تبدو سـاكنة بالنسـبة للشـخص على الأرض أثناء تتدحرج العجلة بإنطلاق أمامي (v_0).

(1.6) السرعة والتعجيل في الإحداثيات القطبية

Velocity and Acceleration in Polar Coordinates

عندما يتحرك جسيم ما في مستوى فإن موقع الجسيم يمكن وصفه بدلالة متغيرين فقط هما (r,θ) حيث $\vec{r}$ متجه موقع الجسيم (إزاحته بالنسبة لنقطة الأصل) و θ الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع محور السينات الموجب (كما



شكل(1-6)

في الشكل(1.6).

أما متجهات الوحدة في هذا النظام الأحداثي هي:

$$(\hat{r} \text{ ، } \hat{\theta}) \text{ حيث } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

ومعاملات التحويل بين الإحداثيات الديكارتية (x,y) والإحداثيات القطبية (r,θ) تعطي على النحو التالي:

$$x = r\cos\theta \,; \;\; y = r\sin\theta$$

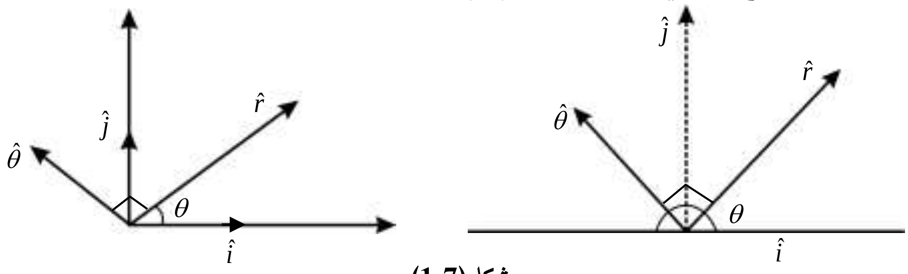
والتحويلات المعاكسة هي:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\;\; ; \;\;\; \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

أمـا الـعـلاقـات بـيـن مـتـجـهـات الـوحـدة $(\hat{r} \text{ ، } \hat{\theta})$ و $(\hat{i}\,,\,\hat{j})$ يـمـكـن تـحـديـدهـا مـن الشكل(1.7):

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

بينما $\hat{\theta}$ متجه الوحدة يكون متعامداً مع $\hat{r}$ في إتجاه زيادة (θ).



شكل(1.7)

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\cos(90-\theta) + \hat{j}\sin(90-\theta) = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

- سرعة الجسيم في الإحداثيات القطبية:

حيث أن متجه موقع الجسيم هو: $\vec{r} = r\,\hat{r}$ فإن مشتقة المتجه بالنسبة للزمن تعطي السرعة وهنا يجب ملاحظة أن متجه الوحدة $\hat{r}$ يتغير مع الزمن أثناء الحركة وكذلك $|r|$ دالة زمنية.

وعليه فإن

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) = \hat{r}\,\frac{d\,r}{dt} + r\,\frac{d\,\hat{r}}{dt}$$

$$= \hat{r}\,\dot{r} + r\,[\frac{d\,\hat{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\,\theta}{dt}] = \hat{r}\,\dot{r} + r\,[\,\hat{i}\,(-\sin\theta) + j\cos\theta\,]\dot{\theta}$$

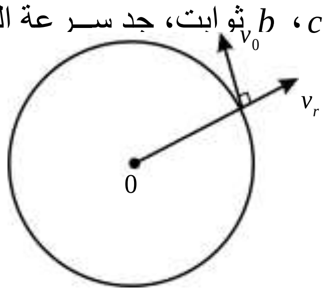
وعليه فإن:

$$\vec{v} = \hat{r}\,\dot{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

نلاحظ أن للسرعة في الإحداثيات القطبية مركبتان إحداهما في إتجاه الشعاع (r) وتسمى السرعة الشعاعية (Radial Velocity) ومقدارها $(\dot{r})$ ومركبة أخرى متعامدة عليه في إتجاه $(\hat{\theta})$ تسمى السرعة المماسية (Tangential Velocity) ومقدارها $(r\dot{\theta})$.

مثال(7):

يتحرك جسـيم في مسـار حلزوني (كما في الشـكل المرفق) يعطي بالعلاقة التالية: $\theta = ct$, $r = bt^2$ ، حيث c ، b ثوابت، جد سـرعة الجسـيم في الإحداثيات القطبية.



الشكل (1.8) حركة جسم في الأحداثيات القطبية

الحل:

$$v_r = \dot{r} = 2bt$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} = (bt^2)[c] = bct^2$$

إذاً

$$\vec{v} = (2bt)\hat{r} + (bct^2)\hat{\theta}$$

__ملاحظة__: في حالة الحركة الدائرية يكون r ثابت وعليه فإن $\dot{r}=0$ ، $v_r = 0$ وعليه لا يكون للجسيم سرعة شعاعية، بينما يكون للجسيم سرعة مماسية $v_\theta = r\dot{\theta}$ ، $v_\theta = bw$ ، حيث b نصف قطر المسار الدائري، w السرعة الزاوية

- تسارع الجسيم في الإحداثيات القطبية: حيث أن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}] = \frac{d}{dt}[\dot{r}\hat{r}] + \frac{d}{dt}[r\dot{\theta}\hat{\theta}]$$
$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$
$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\frac{d\hat{r}}{d\theta})\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

وحيث أن: $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$ ، $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$

إذاً

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}}$$

نلاحظ أن للتسارع في الإحداثيات القطبية مركبتان هما:

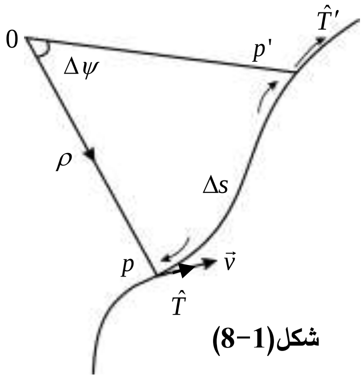
(1) **المركبة الشعاعية** (a_r) في إتجاه الشعاع ومقدارها $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

(2) **المركبة المماسية** (المستعرضة) (a_θ) وتكون متعامدة مع المركبة الشعاعية:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

ملاحظة: في حالةالحركة الدائرية حيث نصــف القطر ثابت فإن r تســاوي ثابت وعليه $\dot{r}=0$ ، $\ddot{r}=0$
وتكون $w=\dot{\theta}$ ، وعليه فإن
في حالة الزاوية w المنتظمة $\ddot{\theta}=0 \Leftarrow a_r=-bw^2$ ، $a_\theta=0$

(1.7)العلاقة بين التسارع والسرعة في الحركات المدارية:



شكل(1−8)

نفرض أن النقطة p تتحرك على مسار (مدار) ما مركزه النقطة 0 (ثابتة)، لنفرض أن سرعة النقطة p عند لحظة ما (t) هي $(\vec{v})$ (كما في الشكل1-8).

لنفرض أن $\hat{T}$ متجه الوحدة بإتجاه المماس (متجه الوحدة المماسية) Tangential unit Vector, إذاً

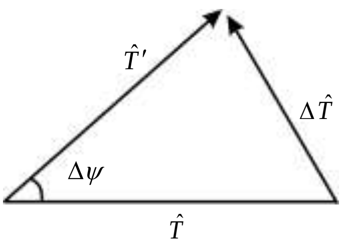
$$\vec{v} = v\hat{T} \qquad (1)$$

لإيجاد التسارع $(\vec{a})$ نشتق المعادلة (1) بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{T}) = \dot{v}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} \qquad (2)$$

مع ملاحظة أن $\hat{T}$ يعتمد على الزمن أثناء حركة النقطة (p) على المســـار (يتغير إتجاهه مع الزمن).

لنفرض أن $\hat{T}'$ متجه الوحدة المماسية عند p' بعد فترة زمنية (Δt). ومن الشكل(1-9) نلاحظ أن التغير في متجه



شكل(1−9)

الوحدة المماسية $(\Delta\hat{T})$ هو: $\Delta\hat{T} = \hat{T}' - \hat{T}$. إذاً

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d\hat{T}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}$$

وإذا كان $\Delta\psi \to 0$ فإن $\Delta\hat{T}$ يصبح متعامداً مع $\hat{T}$

وعليه فإن $\dfrac{d\hat{T}}{d\psi}$ يرمز إلى معدل التغير لوحدة

المتجه المماسية بالنسبة للزاوية المركزية ويسمى وحدة المتجه العمودي $\hat{n}$. إذاً

$$\frac{d\hat{T}}{d\psi} = \hat{n}\frac{d\psi}{dt}$$

يمكن إستخدام التغير في طول المسار (Δs):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\frac{ds}{dt}$$

حيث أن طول القوس = (نصف قطر المسار) × (الزاوية المركزية)ز إذاً $s = \rho\psi$ ، وعليه فإن

$$\frac{ds}{d\psi} = \rho \Rightarrow \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$. لكن $\dfrac{ds}{dt} = v$. إذاً

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \hat{n}\frac{1}{\rho}\cdot v = \hat{n}(v/\rho) \qquad (3)$$

بالتعويض في معادلة (2) نجد أن:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{T} + (\frac{v^2}{\rho})\hat{n} \qquad (4)$$

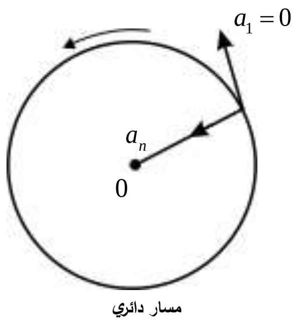
نلاحظ في معادلة (4) أن للتسارع مركبتان تعطي بدلالة السرعة المماسية وهما:

(1) المركبة المماسية للتسارع $\dot{v} = (a_T)$ "مشتقة السرعة بالنسبة للزمن".

(2) المركبة العمودية للتسارع $\dfrac{v^2}{\rho} = a_n$ وتسمى هذه المركبة بتعجيل الجذب المركزي لأنها تكون بإتجاه مركز التكوير للمسار.

ويمكن كتابة معادلة (4) بدلالة مركبات التسارع على الصورة:

$$\vec{a} = a_T\hat{T} + a_n\hat{n}$$



حالة خاصة: إذا تحرك جسيم على محيط دائرة نصف قطرها (b) بسرعة v_0 ثابتة فإن $a_T = 0$

بينما التعجيل المركزي يكون $a_n = v_0^2 / b$

أما في حالة الحركة في مسار مغلق بسرعة متغيرة (غير منتظمة) كما في الشكل المرفق ، فإن مقدار العجلة

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v}^2) + (v^2/\rho)^2}$$

تمـارين

(1.1) المعادلة التالية تمثل متجه موضع جسيم متحرك جد السرعة والإنطلاق والتعجيل كدوال للزمن.

(أ) $\vec{r} = \hat{i}(ct) + \hat{j}(A\sin wt)$

(ب) $\vec{r} = \hat{i}(A\sin wt) + \hat{j}B\cos wt$

(1.2) تمثل العلاقة التالية حركة جسيم $\vec{r} = \hat{i}\cos wt + 2\hat{j}\sin wt$ ، جد الزاوية بين متجه التعجيل ومتجه السرعة في الزمن $t = \dfrac{\pi}{4w}$.

(1.3) تمثل العلاقتان التاليتان موضع جسيمين يتحركان على مسار دائري مشترك

$$\vec{r}_1 = \hat{i}\, b\sin wt + \hat{j}\, b\cos wt \;,\; \vec{r}_2 = \hat{i}\, b\cos wt - \hat{j}\, b\sin wt$$

جد السرعة النسبية $\vec{v}_{12}$ ، ومقدار السرعة النسبة ومعدل التغير الزمني للمسافة بين الجسيمين كدوال للزمن.

(1.4) يتغير تعجيل جسيم مع الزمن حسب المعادلة $\vec{a} = \hat{j}(At) + \hat{j}\,Bt^2 + \hat{k}\,ct^3$ ، إذا كانت السرعة الإبتدائية $\vec{v}_0$ وكذلك الموقع الإبتدائي $\vec{r}_0$ جد متجه الموضع كدالة للزمن.

(1.5) يتحرك جسيم بإنطلاق ثابت ولكن يغير إتجاهه بإستمرار برهن أن متجه التعجيل يكون متعامداً مع متجه السرعة بإستخدام طريقتين:

(أ) المركبات المماسية والعمودية للعجلة والسرعة.

(ب) بإستخدام $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$ إذا أعطيت $\vec{v}$ ، $\vec{a}$ بالإحداثيات القطبية.

(1.6) برهن أن مقدار المركبة المماسية للتعجيل a_T تعطي بالعلاقة $a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ والمركبة العمودية $a_n = (a^2 - a_T^2)^{1/2}$.

(1.7) يتحرك جسيم في مسار دائري نصف قطره (b) ثابت فإذا كانت سرعته مع الزمن حسب العلاقة: $v = At^2$ حيث A ثابت. جد قيم t التي تجعل الزاوية بين متجه العجلة ومتجه السرعة 45°.

(1.8) إذا علمت أن الإحداثيات القطبية لجسيم هي: $\theta = wt$ ، $\vec{r} = be^{kt}$. جد متجهات السرعة والتعجيل وكذلك مقدار السرعة والتعجيل في اللحظة $t = 0$.

(1.9) يتحرك جسـيم في مسـار لولبي فـإذا كـانـت إحـداثيـاتـه الأسـطوانيـة تعطي كـدوال للزمن: $r = A; \theta = Bt^2 ; z = Ct^2$ ، حيث A ، B ، C ثوابت جد متجهات السـرعة والتعجيل كدوال للزمن.

(1.10) برهن أن $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$ " ملاحظة إستخدام العلاقة $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ (ثم أشتق بالنسبة للزمن).

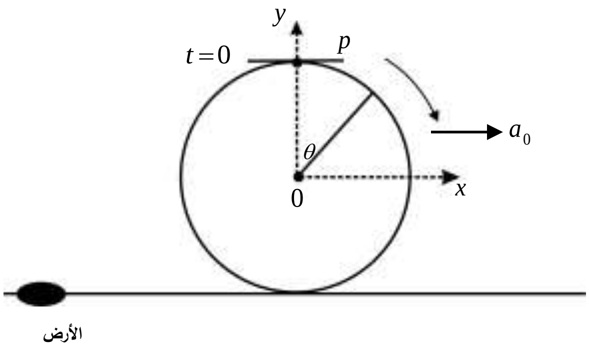
(1.11) برهن أن $\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(c\times\vec{a})] = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})$ حيث $\dot{\vec{a}} = \frac{d\,\vec{a}}{dt}$.

(1.12) تتدحرج عجلة على سـطح الأرض بتعجيل أمامي ثابت a_0 جد التعجيل في أي نقطة على حافة العجلة بالنسبة:

(أ) مركز العجلة (ب) للأرض

ثم جد عند أي نقطة على حافة العجلة يكون التعجيل أعظم ما يمكن.

ملاحظة: أعتبر الوضع الإبتدائي للحركة (كما في الشكل1.10).



شكل(1.10)

الفصل الثاني : ديناميكا الجسيم – الحركة على خط مستقيم

Dynamics of Particle – Rectilinear Motion

الديناميكا هو ذلك العلم الذي يدرس حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليها ويعتمد هذا العلم على قوانين الحركة المنسوبة إلى الإنجليزي نيوتن (1642-1727م) أحد العلماء في القرن السابع عشر الميلادي ثم تطور هذا العلم على يد الفرنسي لاجرانج (1736-1813م) والأيرلندي هاملتون (1805-1885م) في القرن التاسع عشر ليشمل قوانين الحركة التي تحكم وتدرس حركة منظومة من الجسيمات المادية في ظروف معينة.

(1.2) قوانين نيوتن في الحركة: Newton's Laws of Motion

في القرن السابع عشر وضع نيوتن ثلاثة قوانين نظرية لوصف حركة الجسيم تحت تأثير قوى خارجية مؤثرة عليه وهي:

القانون الأول (قانون ابن سينا): يسمى هذا القانون أحياناً بقانون القصور الذاتي وينص على ما يلي: " **كل جسم يستمر في حالة السكون أو في حالة الحركة المنتظمة في خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تعمل على تغيير تلك الحالة. أو بعبارة أخرى** " كل جسم قاصر من ذاته على تغير حالته والمقصودة بالحالة: السكون أو الحركة.

القانون الثاني: يتناسب التغير في حركة الجسيم مع القوة المسلطة عليه وتحدث الحركة بإتجاه تأثير القوة المؤثرة على الجسم.

القانون الثالث: لكل فعل رد فعل مساوٍ في المقدار ومعاكساً له في الإتجاه.

وضعت هذه القوانين بصورة نظرية وفيما بعد تم المبرهنة على صحتها بالطرق التجريبية.

يصف القانون الأول خاصة الإستمارية (Continuity) أو خاصية القصور الذاتي (Inertia) حيث الجسم المتحرك في خط مستقيم بإنطلاق ثابت يبقى في هذه الحالة من الحركة ما لم يكن عليه تأثير خارجي (القوة Force). وعليه يمكن تعريف القوة بأنها كل مؤثر خارجي يعمل على تغيير حالة الجسم.

لوصف حركة الجسيم يلزم تحديد محاور مرجعية (Reference Frame) تسمى بالمحاور المرجعية أو النيوتونية (Newtonian Frame) وتكون هذه المحاور ثابتة والسؤال: هل المحاور على سطح الأرض تعتبر محاور مرجعية نيوتنية؟

والجواب لا حيث أن الأرض متحركة دورانياً حول محورها وكذلك تدور حول الشمس. ثم جاءت النظرية النسبية لأينشتاين(1879-1955) لحل هذه المسألة (المحاور المرجعية) وذلك ما سندرسه في الفصل السادس.

(2.2) مفهوم الكتلة والقوة: Mass and Force Concepts

من الحقائق المعروفة أن لكل الأجسام المادية ميل أو نزعة (Tendency) لمقاومة التغير في حالتها وهذا ما يسمى بالقصور الذاتي وبناء على ذلك يمكن تعريف مفهوم الكتلة (mass) بأنها المقياس الكمي للقصور الذاتي ونرمز لها بالرمز (m) ومقدار جذب الأرض للجسم يسمى بالكتلة التثاقلية (الوزن).

أفترض نيوتن أن هناك تفاعل بين الجسم والبيئة المحيطة به وينتج من هذا التفاعل مؤثر يعمل على الجسم وعلى المحيط له. لنفرض وجود جسمين A ، B يربط بينهما زنبرك يعمل مؤثراً عليهما (كما في الشكل2-1).

من التجارب الفعلية يمكن ربط تسارع الجسمين معاً بالعلاقة:

شكل(2−1)

$$\vec{a}_n \ \alpha - \vec{a}_B \Rightarrow \vec{a}_A = -\mu_{BA}\,\vec{a}_B \qquad (1)$$

حيث μ_{BA} ثابت التناسب الذي يعتمد على الكتل القصورية للجسمين بمعنى

$$\mu_{BA} = m_B \,/\, m_A$$

الإشارة السالبة في معادلة (1) تعني أن تسارعي الجسمين متعاكسين في الإتجاه يمكن إعادة كتابة معادلة (1) على الصورة التفاضلية:

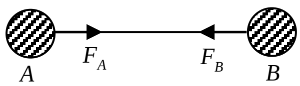
$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad (2)$$

نلاحظ أن حاصل ضرب الكتلة في التسارع في معادلة (2) مقدار يسمى بالتغير في الحركة (هذا ما قصده نيوتن). ويســـمى هذا المقدار بالقوة المؤثرة على الجســـيم ويرمز له بالرمز (F) وبناءً عليه فإن معادلة (2) تعطي:

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}_A}{dt}}$$

ويمكن كتابة معادلة (2) على النحو التالي: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$.

وهذه المعادلة تعبر عن مضمون قانون نيوتن الثالث:



القوى تأثير متبادل بين الجسمين وتحدث بمقادير متساوية ومتعاكسة في الإتجاه.

(2.3) مفهوم الزخم الخطي Linear Momentum

يعرّف الزخم الخطي بأنه كمية متجهه وهي حاصل ضرب الكتلة في السرعة ويرمز له بالرمز $\vec{P}$ حيث

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

يمكن كتابة النص الرياضي لقانون نيوتن الثاني بدلالة الزخم الخطي على النحو التالي:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

أي أن القوة المؤثرة على الجســـم تســـاوي التغير الزمني للزخم الخطي للجســـم وهذا ما يعرف بمعادلة الحركة للجسم (Equation of motion)

كذلك يعبر عن القانون الثالث في الحركة بدلالة الزخم الخطي على النحو:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_A}{dt} = -\frac{d\vec{P}_B}{dt}}$$

ومن هذه المعادلة يمكن أن نستنتج:

$$\frac{d\vec{P}_A}{dt}+\frac{d\vec{P}_B}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(P_A+P_B)=0$$

حيث المشتقة الأولى مؤثر خطي. إذاً

$$\vec{P}_A+\vec{P}_B = \text{ثابت}$$

أي أن الزخم الخطي الكلي لمجموعة جسـيمات معزولة يبقى ثابتاً أثناء الحركة ويسـمى هذا قانون حفظ الزخم الخطي (Linear Momentum Conservation) وهو أحد القوانين الفيزيائية الأساسية.

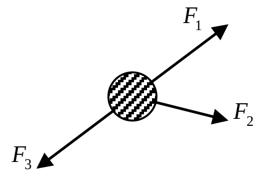
(2.4) معادلة حركة الجسيم : Equation of Motion for a Particle

لدراسة حركة الجسيم تحت تأثير قوة خارجية يلزم تحديد معادلة الحركة للجسيم أو ما يسمى بالقانون الثاني لنيوتن وهي:

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

وعندما يقع الجسـيم تحت تأثير عدة قوى خارجية فإن $\vec{F}$ تسـاوي محصـلة جميع القوى الخارجية أي

$$\vec{F}=\sum_i F_i$$



وتصبح معادلة حركة الجسيم

$$\sum_i \vec{F}_i = m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ هي تسارع (عجلة) الجسيم أي أن معادلة الحركة للجسيم تعطي تسارع الجسيم إذا علمت القوة المؤثرة عليه.

- في حالة المسائل الفيزيائية الخاصة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى الخارجية، تصبح معادلة حركة الجسيم على صورة:

$$\boxed{\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}}$$

حيث $\vec{r}$ هو متجه موقع الجسيم أثناء الحركة، وهذه معادلة متجه حيث يمكن فرزها إلى ثلاثة مكونات في حالة حركة الجسيم في الفضاء ثلاثي الأبعاد على النحو

$$F_x = m\ddot{x} \quad ; \quad F_y = m\ddot{y} \quad ; \quad F_2 = m\ddot{z}$$

حيث F_x هي محصلة القوى المؤثرة على الجسم في إتجاه محور x.

$\ddot{x}$ هو تسارع الجسيم في إتجاه محور x. وهكذا لباقي الكميات.

ولوصف حركة الجسيم يلزم إيجاد $x(t)$ أو $y(t)$ وهنا نعتمد على أجزاء التكامل لتحديد السرعة ثم إجراء تكامل ثاني لإيجاد $x(t)$ أو $y(t)$ سنتناول ذلك في البند التالي بالتفصيل. سندرس أولاً حركة الجسيم في خط مستقيم (بعد واحد فقط).

(2.5) الحركة في خط مستقيم: Rectilinear Motion

إذا تحرك الجسيم في خط مستقيم تسمى الحركة حركة مستقيمة، هنا يلزم تحديد متغير واحد لوصف حركة الجسيم، فمثلاً إذا كانت الحركة في إتجاه محور السينات الموجب فإن متجه موقع الجسيم هو:

$$\vec{r} = \hat{i}\, x$$

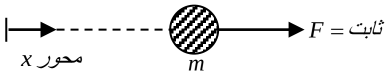
وتصبح معادلة حركة الجسيم في هذه الحالة: $F_x = m\,\ddot{x}$

حيث F_x محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم في إتجاه (x).

- قد تكون القوى المؤثرة على الجسيم دالة للموقع (x) أو دالة زمنية (t) أو ثابتة أي $F = F(x, \dot{x}, t)$ ولذلك نحتاج إلى طرق رياضية لحل معادلة حركة الجسيم وتوضح ذلك الأمثلة الآتية

<u>الحالة الأولى</u>: إذا كانت القوة الخارجية = مقدار ثابت (Constant)

نكتب معادلة الحركة للجسيم على النحو:



(التعجيل ثابت) ثابت $= \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. إذاً

(بالضرب التبادلي) $d\vec{v} = \vec{a}\,dt$

وعليه فإن $\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt$

على أعتبار أن سرعة الجسيم في اللحظة الصفرية $t=0$ هي v_0

أما v فهي سرعة الجسم في اللحظة (t). إذاً

$$v - v_0 = at \;\Rightarrow\; \boxed{v = v_0 + a\,t} \qquad (1)$$

أما لإيجاد موقع الجسيم (x) في أي لحظة زمنية، فإن

$$v = \frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; v_0 + at = \frac{dx}{dt}$$

وعليه فإن

$$\int_0^t (v_0 + at)\,dt = \int_{x_0}^{x} dx$$

حيث x_0 هي موقع الجسـيم الإبتدائي (عند $t=0$), وعند إجراء التكامل في الطرف الأيسـر حداً حداً نحصل على:

$$v_0 t + a\frac{t^2}{2} = x - x_0$$

ومنها نجد أن

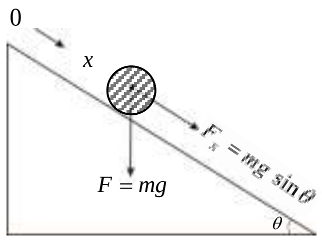
$$v = v_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

لاحظ أنه يمكن حذف المتغير (t) في المعادلتين (1)، (2) لنحصـل على قانون السـرعة مع المسـافة لحركة الجسيم بتسارع ثابت في خط مستقيم وهي:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \qquad (3)$$

ملاحظة: يمكن استخدام المعادلات الثلاثة السابقة لوصف حركة الجسيم في أي لحظة زمنية إذا علمنا مقدار التسارع (a) لحركة الجسيم وإليك الأمثلة التطبيقية التالية.

مثال(1): حركة الجسم الساقط على السطح المائل عند إنزلاق جسيم كتلته m على سطح أملس سائل بزاوية (θ) نعتبر إتجاه x بإتجاه السطح المائل.



الحل:

$$F_x = mg\sin\theta$$

إذاً $$a = \frac{F_x}{m} = g\sin\theta = \text{ثابت}$$

سرعة الجسيم في أي لحظة: $v = v_0 + at \ , \ v = v_0 + (g\sin\theta)t$

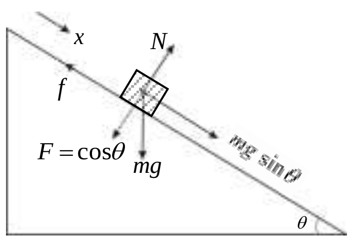
إذا بدء الجسيم الحركة من السكون $v_0 = 0$ ، أما المسافة المقطوعة على السطح المائل:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

وإذا بدأ الجسم الحركة من قمة السطح $(x_0 = 0)$ فإن

$$x = (t) = v_0 t + \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

ملاحظة: يمكن استخدام التكامل كما سبق شرحه لإيجاد $(x ، v)$ كدوال زمنية وذلك باستخدام معادلة الحركة للجسيم.



مثال(2): حركة الجسم على السطح المائل الخشن

لذلك تتولد قوة إحتكاك بين الجسم والسطح (f) حيث

$mg\cos\theta = \text{رد فعل السطح} = N$ ، $f = \mu(mg\cos\theta)$

الحل:

$$F_x = mg\sin\theta - f = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

إذاً

$$a = F_x / m = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

نلاحظ أن التسارع = مقدار ثابت لنفس السطح وعليه يمكن استخدام قوانين السرعة والإزاحة التي سبق شرحها لوصف حركة الجسيم في أي لحظة زمنية أو نعتمد على إجراء التكامل المباشر لإيجاد سرعة الجسيم وكذلك موقعة (x) كدوال للزمن.

تمرين: جد تسارع الجسيم في المثال السابق في حالة الحركة إلى أعلى السطح.

2.6) الحالة الثانية: القوة دالة الموضع: Force as Position Function

عندما تكون القوة الخارجية المؤثرة على الجسم معتمدة على موقع الجسيم أثناء الحركة مثل القوة الكهروستاتيكية بين الأجسام المشحونة $F = F(x)$ حيث (x) المسافة بين الجسمين، وكذلك القوة المستعيدة في الزنبرك حيث تتناسب هذه القوة مع سالب إزاحة الجسم عن موقع الإتزان (قانون هوك). في هذه الحالة تصبح معادلة الحركة على الصورة: $F(x) = m\ddot{x}$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية لا يمكن أن نكامل الطرفين مباشرة بل يجب وضع صورة التعجيل (التسارع) على النحو التالي:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

وعليه تصبح معادلة الحركة للجسيم على النحو التالي:

$$\boxed{F(x) = mv\frac{dv}{dx}}$$

ومنها نحصل على:

$$F(x)\,dx = mv\,dv$$

نكامل طرفي المعادلة لنحصل:

$$\int F(x)\,dx = m\int v\,dv \qquad (1)$$

تعريف: الطرف الأيسر $\int F(x)dx$ يساوي الشغل المسلط على الجسيم من تأثير القوة الخارجية ويمكن تعريف دالة تسمى دالة الوضع ويرمز لها $V(x)$ أو ما يسمى بالطاقة الكامنة (طاقة الوضع) على النحو التالي:

$$\boxed{V(x) = -\int F(x)\,dx}$$

بينما الطرف الأيمن للمعادلة (1) يعطي:

$$\frac{1}{2}mv^2 = T = \text{الطاقة الحركية}$$

$-V(x) = T + \text{ثابت}$، ومنها نحصل على

$$\boxed{T + V(x) = \text{ثابت}} \qquad (2)$$

الثابت هنا يساوي مجموع طاقة الوضع وطاقة الحركة للنظام ومعادلة (2) تسمى قانون حفظ الطاقة (Conservation Law of Energy) ويعني فيزيائياً أنه أثناء حركة جسيم تحت تأثير قوة خارجية فإن مجموع طاقتي الوضع والحركة يبقى ثابتاً وتسمى القوة الخارجية في هذه الحالة بالقوة المحافظة (نتناول ذلك بالتفصيل في الفصل الثالث) ويسمى الثابت بالطاقة الكلية الإبتدائية للنظام ويرمز له بالرمز E_0. إذاً $\boxed{T + V(x) = E_0}$

أما لوصف حركة الجسيم في هذه الحالة فإن معادلة حفظ الطاقة هذه يغطي سرعة الجسيم v حيث $\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E_0$. إذاً

$$\boxed{v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - V(x)]}} \qquad (3)$$

أما موضع الجسيم كدالة للزمن $x(t)$ يمكن تحديدها من العلاقة:

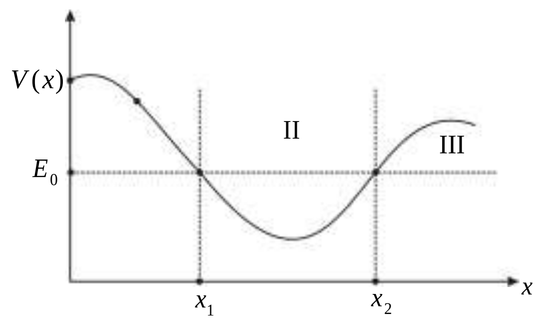
$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - V(x)]}} \qquad (4)$$

ترتيب معادلة (4) يعطي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}} = \int dt + c = t + c$$

فإذا علمنا دالة الوضع $V(x)$ يمكن إجراء هذا التكامل لإيجاد $x(t)$.

منحنى دالة الوضع: عند رسم الدالة $V(x)$ كدالة مع الموضع نحصل على منحنى دالة الوضع ولنفرض بشكل عام أن هذا المنحنى على صورة شكل(2-2):



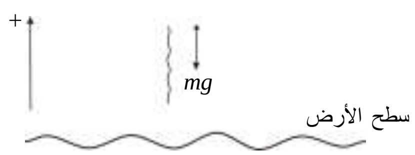
شكل(2-2)

(1) في المنطقة (I) تكون $V(x) > E_0$ هذا يجعل الكمية تحت الجزر التربيعي سالبة وتصبح قيمة v تخيلية والحركة غير مسموح بها في هذه المنطقة.

(2) وكذلك الأمر بالنسبة للمطقة (III) حيث $V(x) > E_0$، بينما نلاحظ أنه في المنطقة (II) حيث $x_1 \le x \le x_2$ فإن $E_0 > V(x)$ وعليه فإن للسرعة $v(x)$ قيم حقيقة والحركة مسموح بها في هذه المنطقة.

- أما حدود المنطقة $[x_1, x_2]$ تسمى نقاط الرجوع (Turning Points) يمكن تحديدها من مساواة $E_0 = V(x)$ وحل المعادلة لإيجاد (x).

<u>مثال(3):</u> دراسة حركة الجسم المقذوف إلى أعلى بسرعة إبتدائية v_0 عند النقطة التي ترتفع عن سطح الأرض مسافة (x) فإن طاقة الوضع:



$$V(x) = -\int_0^x F(x)\,dx$$

حيث $F(x) = -mg$. إذاً

$$V(x) = \int mg\,dx = +mg\,x$$

- إعتبار سطح الأرض خط مرجعي لدالة الموضع (أي طاقة الوضع = صفر) عند قذف الجسم إلى أعلى من سطح الأرض بسرعة v_0 فإن:

$$E_0 = T_0 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

قانون حفظ الطاقة يعطي $\quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,x$

من هذه المعادلة يمكن إيجاد أقصى أرتفاع يصل إلى الجسم المقذوف حيث عند هذه النقطة تصبح السرعة = صفراً ، وعليه

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + mg\,X_{max} = mg\,h$$

حيث $h =$ أقصى أرتفاع $= X_{max}$. إذاً $\quad h = \frac{v_0^2}{2g}$

أما لإيجاد وسرعة الجسيم عند أي نقطة أثناء الأرتفاع إلى أعلى فإن:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\,x$. إذاً $v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gx}$

أما موقع الجسم كدالة للزمن نجدها من معادلة السرعة:

$$v = \frac{dx}{dt} = [v_0^2 - 2gx]^{1/2}$$

أو $\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2gx}} = \int_0^t dt = t$

لإجراء التكامل: نفرض $u = v_0^2 - 2gx$. إذاً

$$du = -2g\,dx$$

$$-\frac{1}{2g}\int \frac{du}{u^{1/2}} = t \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{1}{g}\left[u^{1/2}\right] = t$$

إذاً

$$-\frac{1}{g}(v_0^2 - 2gx)^{1/2}\;\Big]_0^x = t \Rightarrow -\frac{1}{g}[(v_0^2 - 2gx)^{1/2} \;\; - v_0] = t$$

بترتيب المعادلة نحصل على: $v_0 - gt = \sqrt{v_0^2 - 2gx}$

للحصول على (x) كدالة للزمن نربع الطرفين ونحل المعادلة بالنسبة لـ x:

$$x = \frac{1}{2g}[v_0^2 - (v_0 - gt)^2]\;(v_0 - gt)^2 = v_0^2 - 2gx \Rightarrow$$

وهذه معادلة الحركة للجسيم $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

الذي يتحرك بتسارع ثابت قدره (g) التي سبق شرحها في الحالة الأولى.

(2.7) الحالة الثالثة: القوة دالة السرعة Force as Velocity Function

نلاحظ أنه في حالة حركة جسـيم في وسـط مائع (سـائل أو غاز) فإنه يتولد قوة إحتكاك بين سـطح الجسيم وطبقات المائع تعاكس إتجاه الحركة للجسم. وقد ثبت بالتجربة أنه في حالة حركة الجسيم بسرعة منخفضـة فإن مقاومة المائع تتناسب مع السرعة (v). بينما في حالة السرعة العالية للجسيم فإن مقاومة المائع تتناسب مع v^2 أو v^3 أي أن: $F = F(v)$

لدراسـة حركة الجسـيم تحت تأثير قوة خارجية دالة للسـرعة $F(v)$ نسـتخدم معادلة الحركة على الصورة:

$$\boxed{F(v) = m\frac{dv}{dt}}$$

ثم نفصل المتغيرات في الطرفين على النحو التالي:

$$m\,dv / F(v) = dt$$

$$t=\int dt=\int\frac{m\,dv}{F(v)}$$

وإذا علمنا الصورة الرياضية للقوة الخارجية نحصل على (t) كدالة (v) من ناتج التكامل:

$t=t(v)$

ولإيجاد الموقع $x(t)$ نستخدم العلاقة

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=v\,dt\;\Rightarrow\int dx=\int v(t)\,dt$$

- لإيجاد موقع الجسيم كدالة للسرعة $x(v)$: نستخدم العلاقة (معادلة الحركة) (صورة التسارع بدلالة السرعة والمسافة)

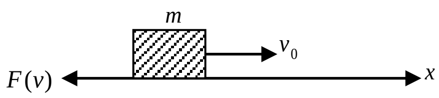
$$F(v)=m\frac{v\,dv}{dx}$$

وعليه فإن

$$\int dx=\int\frac{mv\,dv}{F(v)}\Rightarrow x=\int\frac{mv\,dv}{F(v)}$$

هنا نحصل على الموقع كدالة للسرعة.

مثال(4): قذف جسيم كتلته (m) بسرعة إبتدائية v_0 على سطح مستوٍ أملس، فإذا كانت مقاومة الهواء $F(v)=-cv$ حيث c ثابت. جد موقع الجسم x كدالة للزمن $x(t)$.

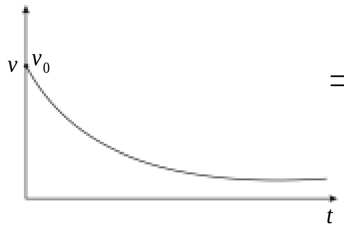


الحل: معادلة الحركة للجسم:

$$F(v)=m\frac{dv}{dt}$$

$$-cv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{m}{cv}dv \Rightarrow \int_0^t dt = -\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \Rightarrow t = -\frac{m}{c}\ell n(v)]_{v_0}^{v}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{m}{c}[\ell n(v) - \ell n(v_0)] = -\frac{m}{c}\ell n(v/v_0)$$



$$\Rightarrow \ell n(v/v_0) = \frac{m}{c}t \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{c}{m}t} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

لكن $v = \frac{dx}{dt}$. إذاً $\frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-\frac{c}{m}t}$ وعليه فإن

$\int_0^x dx = \int_0^t v_0\, e^{-\frac{c}{m}t}\, dt$. إذاً $x = v_0(-\frac{m}{c})[e^{-\frac{c}{m}t}]_0^t = \frac{mv_0}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$

طريقة أخرى: نكتب معادلة الحركة للجسيم على الصورة:

$$F(v) = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow -cv = m\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow -c\int_0^x dx = m\int_{v_0}^{v} dv$$

$$\Rightarrow [x] = m(v - v_0)$$

هنا السرعة دالة للموضع $\Rightarrow v = v_0 - \frac{c}{m}x$

ثم نستخدم علاقة السرعة (المعدل الزمني للإزاحة)

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{c}{m}x$$

نفصل المتغيرات (x,t) :

$$\int_0^x \frac{dx}{(c_0 - \frac{c}{m}x)} = \int_0^t dt$$

(نجري التكامل على فرض $u = v_0 - \frac{c}{m}x$) لنحصل على:

$$t = -\frac{m}{c}\ell n[\frac{v_0 - (c/m)x}{v_0}]$$

تمرين: من هذه العلاقة جد $x(t)$ لتحصل على نفس جواب الطريقة الأولى.

(2.8) الحالة الرابعة: القوة دالة للزمن Force is Function of time

عندما تكون القوة الخارجية المؤثرة على الجسيم معتمدة على الزمن أثناء حركة الجسم أي $F = F(t)$ ، نستخدم الصورة العامة لمعادلة الحركة على النحو:

$$\boxed{F(t) = \frac{m\,dv}{dt}}$$

ومنها نجد أن

$$F(t)\,dt = m\,dv \;\Rightarrow\; dv = \frac{F(t)}{m}dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt$$

إذا علمنا صـــورة دالة القوة يمكن إجراء التكامل لنحصـــل على $v(t)$ ثم نجد موقع الجســـم كدالة للزمن $x(t)$ بإجراء التكامل $\int dx = \int v\,dt$.

مثال(5): وضع جسيم كتلته m على سطح أفقي أملس، سلّط على الجسيم قوة أفقية متزايدة $F = ct$. جد سرعة وإزاحة الجسيم كدوال للزمن؟

الحل: $F = \dfrac{m\,dv}{dt} \Rightarrow ct = \dfrac{m\,dv}{dt} \Rightarrow dv = \dfrac{c}{m}t\,dt \Rightarrow \int_0^v dv = \dfrac{c}{m}\int_0^t t\,dt$

$$v = \frac{c}{m}\frac{t^2}{2} \Rightarrow v = \frac{c}{2m}t^2$$

لإيجاد الموقع كدالة للزمن:

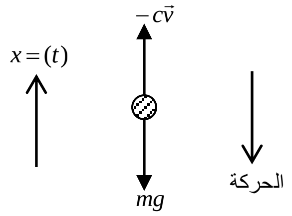
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{2m}t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{c}{2m}t^2\,dt$$

$$\int_0^x dx = \frac{c}{2m}\int_0^t t^2\,dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ct^3}{6m}$$

(2.9) الحركة الشاقولية في وسط مقاوم

عندما يسقط جسيم رأسياً في وسط مانع (مقاوم) بسرعة منخفضة فإنه يخضع لقوتين. وزن الجسم (mg) إلى أسفل بإتجاه الحركة ومقاومة المائع وتكون معاكسة للحركة وتساوي ($-c\vec{v}$) (كما في الشكل2-3).

حيث $c=$ ثابت، تصبح معادلة الحركة:



شكل(2−3)

$$\sum \vec{F}=\frac{m\,dv}{dt}$$

$$-mg+cv=\frac{m\,dv}{dt} \qquad (1)$$

ملاحظة: هنا متجه سرعة الجسيم إلى أسفل (مع الحركة) لذلك مقاومة المائع هي: $+c|v|$، حيث $|v|$ هي القيمة العددية للسرعة. تصبح معادلة (1) بدلالة متجه السرعة: (2)

$$-mg-c\vec{v}=\frac{m\,d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{m\,dv}{-(mg+cv)}=dt \;\Rightarrow \int_0^t dt=\int_{v_0}^{v}\frac{m\,dv}{-(mg+cv)}$$

$$\Rightarrow t=-\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{(\frac{m}{c}g+v)}=-\frac{m}{c}\ell n\,[\frac{m}{c}g+v]_{v_0}^{v} \;\Rightarrow t=-\frac{m}{c}\ell n\,[\frac{mg+v}{mg+v_0}]$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للسرعة نحصل على:

$$v=-\frac{m}{c}g+(\frac{mg}{c}+v_0)\,e^{-c/mt}$$

حالة خاصة: في حالة $t\to\infty$ أو $t>>m/c$، فإن:

$$\lim_{t\to\infty} v=-\frac{mg}{c}\Rightarrow v_{term}=-\frac{mg}{c}$$

تسمى هذه بسرعة المنتهى (Terminal Velocity)، أقصى سرعة يصل إليها الجسم الساقط في المائع، وعند هذه السرعة تصبح محصلة القوى الخارجية تساوي صفر. أي عندما يتساوى وزن الجسم مع معادلة المائع: $mg = -cv$

$$\boxed{v_{term} = -\frac{mg}{c}}$$ (نلاحظ إتجاه السرعة إلى أسفل).

لإيجاد موقع الجسم كدالة للزمن $x(t)$: نستخدم معادلة السرعة مع الزمن مع إجراء التكامل على النحو:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{mg}{c} + (\frac{mg}{c} + v_0)e^{-t\,c/m}$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = -\frac{mg}{c}\int_0^t dt + (\frac{mg}{c} + v_0)\int_0^t e^{-t\,c/m}$$

$$\Rightarrow x = \int_0^x dx = -\frac{mg}{c}t - \frac{m}{c}(\frac{mg}{c} + v_0)\cdot\left[e^{-t\,c/m}\right]_0^t$$

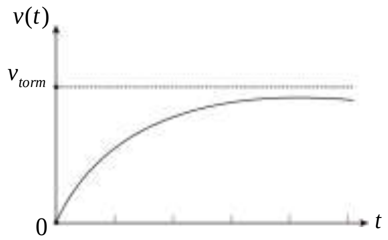
$$= -\frac{mg}{c}t + \frac{m^2 g}{c^2} + \frac{v_0 m}{c}(1 - e^{-t\,c/m})$$

<u>ملاحظة</u>: يسمى الزمن اللازم حتى يصل المقدار $e^{-t\,c/m}$ إلى e^{-1} بالزمن النوعي ويرمز له بالرمز (τ) وبمساواة الأسس في الطرفين نجد أن:

$$-1 = -\tau c/m \Rightarrow \boxed{\tau = m/c}$$

ويمثل شكل(2-4):

منحنى السرعة – الزمن: على إعتبار $v_0 = 0$

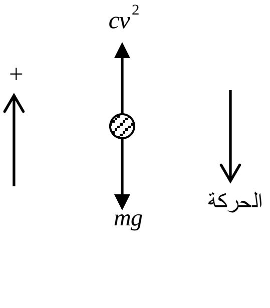


شكل(2-4)

<u>دراسة سقوط الجسيم شاقولياً في حالة السرع العالية:</u>

هنا مقاومة المائع تتناسب طردياً مع مربع السرعة.

أي أن $cv^2 = F(v)$ ، $c =$ ثابت



الحالة الأولى: سقوط الجسم إلى أسفل:

معادلة الحركة تصبح على الصورة:

$$-mg = cv^2 = \frac{m\,dv}{dt} \quad . \text{ إذاً } \quad \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{-mg+cv^2}$$

(حيث أن $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}(u/a)$) فإن تكامل الطرف الأيمن يعطي:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{gc}}\tanh^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{mg/c}}\right)$$

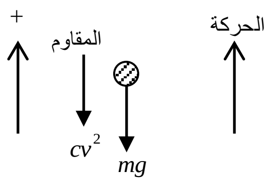
نلاحظ أن سرعة المنتهى $\quad v_{term} = \sqrt{\frac{mg}{c}}$

حيث تتساوى المقاومة مع الوزن عندما

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \Leftarrow mg = cv^2$$

الحالة الثانية: عند صعود الجسم شاقولياً في المائع: تصبح معادلة الحركة للجسم

$$-mg - cv^2 = \frac{m\,dv}{dt} \quad . \text{ إذاً}$$



$$dt = \frac{m\,dv}{-(mg+cv^2)} \Rightarrow t = \int_0^t dt = -\int_0^v \frac{m\,dv}{(mg+cv^2)}$$

نستخدم العلاقة

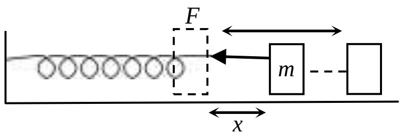
$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}(u/a)$$

لنحصل على نتيجة التكامل:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{cg}}\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{mg/c}}\right)$$

(2.10) الحركة التوافقية البسيطة: Simple harmonic Motion

تسمى الحركة التي تكرر نفسها في أزمنة متساوية بالحركة الدورية (Periodic Motion) وعند إزاحة جسم ما عن موقع الإتزان تم تركه يتذبذب حول هذا الموقع كما هو الحال في حركة زنبرك مشدود ومعلق به ثقل فإن هناك قوة خارجية تحاول إعادة الزنبرك (الجسم المتذبذب) إلى موقعه الأصلي وتعرف هذه القوة بالقوة الإسترجاعية (القوة المعيدة Restoring Force) وتكون هذه القوة بإتجاه معاكس للإزاحة (كما في الشكل2.5).



شكل (2.5) الحركة التوافقية البسيطة .

وجد هوك أن هذه القوة تتناسب مع سالب الإزاحة أي

$F\,\alpha - x$ حيث x هي الإزاحة عن موقع الإتزان أو $F = -kx$

حيث

k ثابت المرونة للنبرك.لذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط (حيث الحركة في بعد واحد) هي:

$$F = -kx = m\ddot{x} \qquad (1)$$

وتكتب على صورة

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ أو

$$\ddot{x} = -w_0^2\, x \qquad (2)$$

حيث $\sqrt{\frac{k}{m}}=w_0$ هو التردد الطبيعي الزاوي للمتذبذب، هذه المعادلة معادلة تفاضـــلية من الدرجة الثانية ويكون الحل العام لها على الصورة:

$$x(t)=A_1e^{iw_0t}+A_2e^{-iw_0t} \qquad (3)$$

حيث A_1, A_2 ثوابت نحددها من الشـــروط الإبتدائية لحركة المتذبذب وهي في اللحظة الإبتدائية عند $t=0$، تعطى مقدار x_0، $\dot{x}_0$ الموقع الإبتدائي والسرعة الإبتدائية للمذبذب. بإستخدام العلاقة الرياضية: $e^{\pm iu}=\cos u+i\sin u$ يمكن تحويل معادلة. المعادلة (3) إلى صورة دوال جيبية على النحو:

$$x(t)=a\sin w_0t+b\cos w_0t \qquad (4)$$

حيث a, b ثوابت تحدد قيمتها من الشروط الإبتدائية السابقة.

أما الصورة العامة لحل المعادلة التفاضلية التي تعطي سعة الإهتزاز وطور الذبذبة يمكن أن تعطي على صورة: $x(t)=A\cos(w_0t+\theta_0)$

حيث A =سعة الذبذبة، θ_0= زاوية الطور للذبذبة.

<u>تمرين:</u> جد العلاقة بين A ، θ_0 بدلالة x_0 ، $\dot{x}_0$؟

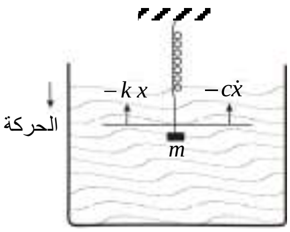
أما زمن الذبذبة T_0 يعطى بالعلاقة: $T_0=\frac{2\pi}{w_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- **<u>الحركة التوافقية المتضـــائلة:</u> Damped Harmonic Motion**: عندما يتحرك متذبذب توافقي في وسط مائع (له لزوجة) يتولد عليه قوة خارجية قوة معيقة للحركة (في الإتجاه المضاد للحركة) بالإضـــافة إلى القوة الإســـترجاعية (كما في الشـــكل2.6) مقدارها $(-c\dot{x})$ حيث $\dot{x}=$ سرعة المتذبذب اللحظية، و c ثابت والإشارة السالبة تعني في الإتجاه المضاد للسرعة.

أما القوة الإسترجاعية هي (كما سبق) : $-kx$

ولذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب هي:

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx \qquad (1)$$ ، أو بالصورة التالية



شكل(2.6)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (2)$$

هـــذه معادلـــة تفاضـــلية مـــن الدرجـــة الثانيـــة، يـــتم حلهـــا بإســـتخدام الحـــل التجريبـــي وهـــو: $x=Ae^{qt}$ ثـــم نعـــوض هـــذه الحـــل فـــي معادلـــة (2) لنحصـــل علـــى معادلـــة تربيعيـــة في (2) على النحو:

$$mq^2+cq+k=0 \qquad (3)$$

ويكون الحل لهذه المعادلة هو:

$$q_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \qquad (4)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$x(t)=A_1\,e^{q_1 t}+A_2\,e^{q_2 t} \qquad (5)$$

$q_1 \Leftarrow$ الإشارة $(+)$ للجذر، $q_2 \Leftarrow$الإشارة $(-)$ للجذر التربيعي.

هنـاك عـدة حـالات من الحركـة التوافقيـة تعتمـد على مقـدار الكميـة التي تحـت الجـذر التربيعي وهي c^2-4mk (مميز المعادلة (3)).

<u>الحالة الأولى</u>: إذا كان $c^2-4mk=0$ فإن $c^2=4mk$

تســـــمى الحركـــــة فـــــي هـــــذه الحالـــــة بإســـــم تذبـــــذب المتضـــــائل الحـــــرج (Critical damped) ويكـــون الحـــل العـــام لمعادلـــة الحركـــة للمتذبـــذب علـــى صورة:

$$\boxed{x=(A_1+A_2 t)e^{-\gamma t}} \qquad (5)$$

حيـــث $\gamma=\frac{c}{2m}$ ، A_1, A_2 ثوابـــت يـــتم تحديـــدها مـــن الشـــروط الإبتدائيـــة للحركـــة أي بمعرفة قيم (x_0 ، $\dot{x}_0$).

الحالة الثانية: إذا كانت $c^2 > 4mk$ أو $c^2 - 4mk > 0$ (الكمية تحت الجذر موجبة) تسمى الحركة في هذه الحالة تذبذب فوق التضاؤل (Over damped Oscillation) ويكون الحل العام لمعادلة الحركة الذي يعطي موقع المتذبذب في أي لحظة $x(t)$ هو:

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{q_1 t} + A_2 e^{q_2 t}} \qquad (6)$$

حيث

$$q_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ ،} \quad q_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

وهما جذري المعادلة التربيعية السابقة الذكر.

الحالة الثالثة: إذا كانت $c^2 < 4mk$ أو $c^2 - 4mk < 0$ (الكمية تحت الجذر سالبة) أو المميز للمعادلة (3) سالب القيمة.

تسمى الحركة في هذه الحالة: تذبذب دون التضاؤل (Under damped Oscillation) وللتخلص من الكمية التخليلية في الجذور للمعادلة التربيعية نعكس ترتيب الحدود في المميز أي يصبح على النحو: $4mk - c^2$ حتى تصبح الكمية موجبة وعليه تكون جذور المعادلة التربيعية:

$$q_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{-(4mk - c^2)}}{2m} = -\frac{1}{2m} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

$$= -\frac{1}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{c}{4m})^2} = -\gamma \pm i w_1 \qquad (7)$$

حيث $w_1^2 = w_0^2 - \gamma^2$ أو $w_1 = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$

ويصبح الحل العام لمعادلة الحركة للمتذبذب $x(t)$ هو:

$$x(t) = A_1 e^{(-\gamma + i w_1)t} + A_2 e^{(-\gamma + i w_2)t}$$

أو

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{i w_1 t} + A_2 e^{-i w_2 t}\right] \qquad (7)$$

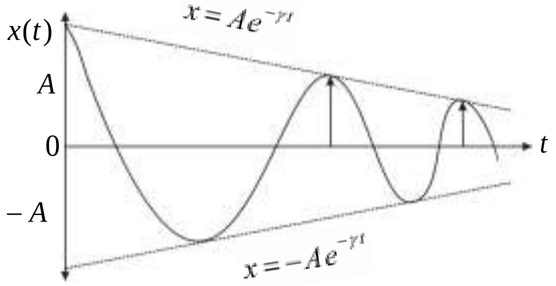
وكما سبق شرحه يمكن تحويل معادلة (7) إلى صورة رياضية:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(w_1 t + \theta_0)$$

حيث تسمى الكمية $Ae^{-\gamma t}$ سعة المتذبذب وهي دالة متناقصة مع الزمن ونلاحظ أن التردد الزاوي w_1 يكون أقل من التردد الزاوي الحر (w_0).

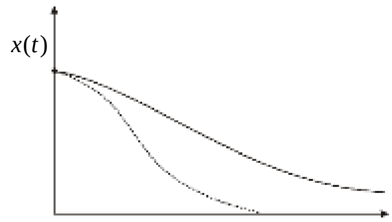
ويتم تحديد قيم (A، θ_0) بإستخدام الشروط الإبتدائية للحركة ($\dot{x}_0$، x_0) كما سبق شرحه.

يمكن تمثيل منحنى الإزاحة – الزمن للمتذبذب التوافقي دون الحرج (معادلة (8)) على صورة شكل(2.7).



شكل(2.7)

يسمى المنحنى $x = Ae^{-\gamma t}$ غلاف منحنى الحركة (Envelope). أما منحنى الإزاحة – الزمن للمتذبذب في الحالات السابقة يكون على صورة شكل(2.8)



شكل (2.8)

- **الحركة التوافقية الإضطرابية- الرنين**

Forced Harmonic Oscillation – Resonance

ندرس حركة متذبذب توافقي تحت تأثير قوة خارجية توافقية (أي على صورة دالة) جيبيه (تتغير على شكل دالة جيب أو جيب تمام مع الزمن). بالإضافة إلى القوة الأرجاعية والقوة المانعة (اللزوجة) في الوسط، هنا تصبح معادلة الحركة للمتذبذب:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext}$$

حيث القوة F_{ext} هي القوة الخارجية وهي على صـورة $F_{ext} = F_0\ (wt+\theta)$ ويمكن أن نعبر عن القوة الخارجية على صـــورة دالة أســـية $F_{ext} = F_0\ e^{i(wt+\theta)}$، حيث $w =$ تردد القوة الخارجية، θ زاوية طورها.

لذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي على الصورة:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i(wt+\theta)} \qquad (1)$$

معادلة (1) معادلة تفاضـلية من الدرجة الثانية وهي غير متجانسـة (Nonhomogeneous) ولذلك يكون الحل العام لهذه المعادلة على صورة ترابط (تركيب) خطي لحلين هما:

(1) حل المعادلة المتجانسـة (homogenous) $x_1(t)$ وهو الحل الذي سـبق دراسـته في البند السـابق (لحـالات الثلاثـة) ويســـمى هذا الحل بـالحل العابر (Transient Term) حيث $x(t) \to 0$ عندما $t \to 0$.

(2) الحـل المكمـل (Complementary): وهو الحـل الـذي يعتمـد على طبيعـة القوة الخـارجيـة من حيث كونها دالة زمنية، في هذه الحالة يكون الحل:

$$x_2(t) = Ae^{i(wt+\theta')} \qquad (2)$$

حيث $\theta' =$ زاويـة الطور وتختلف في المقدار عن θ، بينمـا $w =$ التردد الزاوي المســـاوي لتردد القوة الخارجية، A ثابت.

وعليه يكون الحل العام لمعادلة حركة المتذبذب الإضطرابية هو:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad (3)$$

حيث أن الحل المكمل ($x_2(t)$) يجب أن يحقق معـادلـة الحركـة (1) نعوض هذا الحل في هذه المعادلة لنحصل على:

$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_0 e^{i(wt+\theta')}$$

أو

$$-mw^2 Ae^{i(wt+\theta')} + iwcAe^{i(wt+\theta')} + kAe^{i(wt+\theta')} = F_0\ e^{i(wt+\theta')}$$

بالإختصار نحصل على:

$$-mw^2 A + iwcA + kA = F_0\, e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(4) = F_0 \left[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')\right]$$

في معادلة (4) نقارن الحدود الحقيقية في الطرفين لنحصل على:

$$A(k - mw^2) = F_0 \cos(\theta-\theta')$$

(مقارنة الأجزاء التخليلية) يعطي $\quad cwA = F_0 \sin(\theta-\theta')$

بقسمة المعادلتين نحصل على:

$$\tan(\theta-\theta') = \frac{wc}{k-mw^2} \Rightarrow \tan\phi = \frac{wc}{k-mw^2}$$

حيث $\phi = \theta-\theta'$ ، أما بتربيع المعادلتين ثم جمعهما نحصل:

$$A^2\left[k-mw^2\right]^2 + c^2 w^2 A^2 = F_0^2$$

ومنها

$$A = \frac{F_0}{\left[(k-mw^2)^2 + c^2 w^2\right]^{1/2}}$$

لتبسيط هذه النتائج: نفرض $\gamma = c/2m$ ، $w_0 = \sqrt{k/m}$ نحصل على:

$$\tan\phi = \frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2} \tag{5}$$

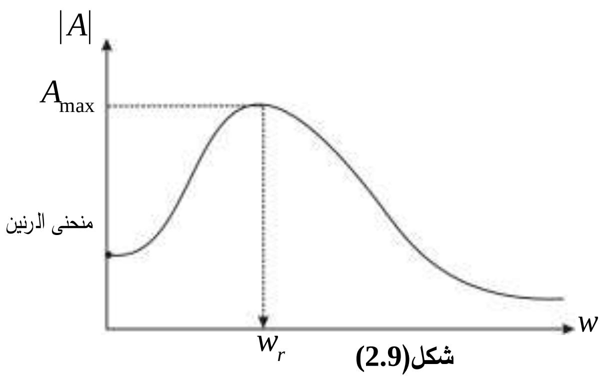
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}} \tag{6}$$

حيث w = التردد الزاوي للقوة الخارجية (القوة الدافعة).

والعلاقة البيانية لمعادلة (6) هي شكل (2.9)

نلاحظ أن A = ســعة الذبذبة ولها قيمة عظمى عند قيمة معينة (w تســمى w_r) وتســمى تردد الرنين

(Resonant Frequency)



شكل(2.9)

ويمكن إيجاد مقدار w_r عن طريقة المشتقة الأولى للدالة $A(w)$

وحيث أن: $\left.\frac{dA}{dw}\right|_{w_r} = 0$ عند القيمة العظمى لـ A .

<u>تمرين</u>: أستخدم معادلة (6) لإيجاد المقدار w_r:

$$\boxed{w_r = (w_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}} \qquad (7)$$

أما مقدار سـعة الاهتزازة العظمى (عند الرنين) نحصـل عليها بتعويض قيمة w_r في المعادلة (6) لنحصل على:

$$A_{\max} = \frac{F_0 / m}{2\gamma\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} \qquad (8)$$

(2.11) طاقة المتذبذب التوافقي: Energy of Harmonic Oscillator

حيث أن القوة المؤثرة في حالة المتذبذب التوافقي البسيط هي القوة الإسترجاعية $F(x) = -kx$ لذلك يكون الشغل المخزون في الزنبرك بفعل هذه القوة على صورة طاقة وضع للمتذبذب ولها مقدار

$$V(x) = -\int F(x)\,dx = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

فإذا فرضنا أن سرعة المتذبذب في أي لحظة هي $(\dot{x})$ فإن الطاقة الحركية للمتذبذب $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ وعليه فإن مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع للمتذبذب هي مقدار ثابت F_0. إذاً

$$E_0=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

عند أخذ المشتقة الأولى للطاقة بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{dE_0}{dt}=m\dot{x}\,\ddot{x}+kx\,\dot{x}=0$$

إذاً $\dot{x}(m\ddot{x}+kx)=0$ ، وعليه فإن

$$m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow m\ddot{x}=-kx$$

وهذه معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي كما مر شرحه.

أما لإيجاد موقع المتذبذب $x(t)$ يمكن استخدام معادلة الطاقة على النحو التالي:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=E_0$$

إذاً $\dot{x}^2=\frac{2E_0}{m}-\frac{k}{m}x^2$ ، ومنها نجد أن

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2E_0}{m}-\frac{k}{m}x^2}$$

وعليه فإن

$$\frac{dx}{\left[\frac{2E_0}{m}-\frac{k}{m}x^2\right]^{1/2}}=dt$$

إذاً

$$\int_0^t dt=t=\int\frac{dx}{\left(\frac{2E_0}{m}-\frac{k}{m}x^2\right)^{1/2}}=\sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{dx}{\left[\frac{2E_0}{k}-x^2\right]^{1/2}}$$

$$t=\sqrt{\frac{m}{k}}\cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)+\text{c ثابت}$$

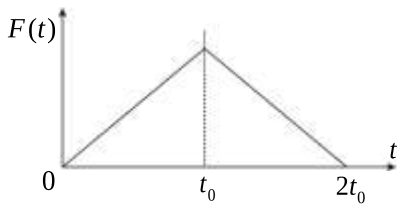
أو

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta_0\right)=A\cos(w_0 t+\theta)$$

تمارين

(2.1) جسيم كتلته m في حالة السكون، سلطت عليه فوة خارجية $F = ct^2$ حيث c ثابت جد $v(t)$، $x(t)$.

(2.2) كتلة جسيم m في حالة السكون عند $t = 0$ سلطت عيه قوة خارجية $F = ct$ لفترة زمنية قدرها t_0 ثم تناقصت هذه القوة خطياً مع الزمن حتى أصبحت صفراً عند $t = 2t_0$ شكل(2-10). جد المسافة التي يقطعها الجسم في هذا الزمن.



شكل(2−10)

(2.3) قذف قالب أعلى سطح مائل بزاوية θ بسرعة إبتدائية v_0 فإذا كان معامل إحتكاك الجسم مع السطح μ. جد الزمن الكلي اللازم حتى يعود القالب إلى أسفل السطح.

(2.4) ينزلق قالب على سطح مستوٍ مدهون بزيت ثقيل بحيث كانت مقاومة لزوجته $F(v)$ حسب العلاقة $F(v) = c\sqrt{v}$ حيث c ثابت. إذا كانت السرعة الإبتدائية للجسم v_0 جد قيم v، x كدوال للزمن.

(2.5) برهن أن القالب في التمرين السابق لا يمكنه السير أبعد من $x_{\max} = \dfrac{2m}{3c} v_0^{3/2}$.

(2.6) تتغير القوة المسلطة على جسيم كتلته m مع المسافة x حسب العلاقة $F(x) = -kx^n$: جد

(أ) دالة طاقة الوضع.

(ب) v كدالة للمسافة x إذا علمت أن $v = v_0$ ، $x = 0$ عند $t = 0$.

(ج) نقاط رجوع الحركة.

(2.7) تتغير سرعة جسيم كتلته m مع الإزاحة x حسب المعادلة $v = b/x$. جد القوة المؤثرة على الجسم كدالة لـ x.

(2.8) إذا كانت القوة التي تؤثر على جسيم كتلته m هي $F = kvx$ ، حيث k ثابت فإذا مرّ الجسم في نقطة الأصل بإنطلاق v_0 في الزمن $t = 0$ جد x كدالة للزمن t.

(2.9) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سعتها A ويمر بنقطة الإستقرار بإنطلاق v_0 ما هو زمن الذبذبة (Period).

(2.10) جسيمان كتلتاهما m_1, m_2 يتحركان بحركة توافقية بسيطة سعة الأولى A_1 والثانية A_2 ، فإذا كانت الطاقة الكلية للجسيم الأول تساوي ضعف طاقة الجسيم الثاني. جد نسبة زمن ذبذبة الأولى إلى الثانية (T_1/T_2).

(2.11) نابض مرونته k يحمل صندوقاً كتلته M موضوعاً فيه قالب كتلته m فإذا سحب الجهاز إلى أسفل من موضع استقراره مسافة d ثم ترك. جد قوة رد الفعل بين القالب وقعر الصندوق كدالة للزمن. ما هي قيمة d التي يبدأ فيها القالب على وشك أن يترك قعر الصندوق عندما يكون في أعلى التذبذب الشاقولي؟ أهمل مقاومة الهواء.

(2.12) إذا علمت أن سعة متذبذب توافقي متضائل يهبط إلى قيمة e^{-1} من قيمتها الإبتدائية بعد مرور n من الإهتزازات الكاملة. أثبت أن نسبة زمن ذبذبته إلى زمن ذبذبته بدون تضاؤل هي:

$$\frac{T}{T_0} = (1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2})^{1/2}$$

الفصل الثالث :ديناميكا الجسيم – الحركة على بصورة عامة

Dynamics of a Particle – General Motion

ندرس في هذا الفصل حركة الأجسام في الفضاء ثلاثي الأبعاد حيث أن معادلة الحركة للجسيم هي على صورة

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \leftrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ويمكن فرز هذه المعادلة إلى ثلاثة مكونات هي:

$$F_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \ ; F_y = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) \ ; Fz = \frac{d}{dt}(m\dot{z})$$

حيث مركبات القوى F_x ، F_y ، F_z تتضمن الإحداثيات ومشتقاتها الزمنية وكذلك الزمن ولا توجد طريقة عامة لإيجاد حلول تحليلية لجميع الحالات ولكن هناك أنواع خاصة من دوال القوى التي يمكن إيجاد حل لها بطرق بسيطة

(3.1) قاعدة الشغل: The Work Principle

حيث أن المعادلة العامة لحركة الجسم هي:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

بضرب طرفي المعادلة بمتجه السرعة (ضرب عددي) نحصل على:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

وحيث أن $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

إذاً $\frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = m\vec{v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

وعليه فإن $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v})\cdot\vec{v}$. إذاً

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{d}{dt}(T) \qquad (1)$$

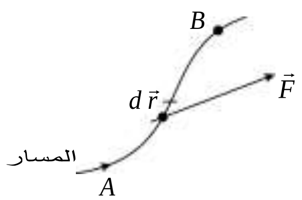
حيث T الطاقة الحركية للجسم ، ومن معادلة (1) نحصل على ما يلي: $dT = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$

لكن $d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. إذاً $dT = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ، وعليه فإن

$$T = \int dT = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

تسمى الكمية $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ بالشغل المنجز على الجسم بفعل القوة المؤثرة أثناء الحركة بينما $\int dt = \Delta T =$ التغير في الطاقة الحركية للجسم. ومعادلة (2) تعرف بقاعدة الشغل وتنص على" **أن التغير في الطاقة الحركية يساوي الشغل المنجز على الجسم**" .

$$\Delta T = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (3)$$



شكل(3.1)

(3.2) القوى المحافظة ومجالات القوى

Conservative Forces and force fields

من قاعدة الشغل نجد أن مقدار التكامل الخطي (الشغل) يعتمد على مسار التكامل (أو الطريق الخاص الذي يسلكه الجسم أثناء انتقاله من نقطة لأخرى على المسار).

$$w = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ولكن هنـاك قوى في الطبيعيـة حيـث تكون القوة دالـة للموقع فقط أي $\vec{F}=\vec{F}(r)$ وعليـه تكون قيمـة التكامل $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لا تعتمد على المسـار الذي يسـلكه الجسـم وتسـمى هذه القوة بالقوة المحافظة أو المجال المحافظ مثل قوة المجال الكهروســتاتيكي (electrostatic field)، لذلك يمكن إجراء التكامل الخطي في معادلة (3) دون الحاجة إلى تحديد المسار.وسنتناول لاحقاً الشروط اللازمة حتى تكون القوة محافظة

(3.3) دالة الطاقة الكامنة: Potential Energy

لنفرض أن مركبات القوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$\vec{F}=\hat{i}F_x+\hat{j}F_y+\hat{k}F_z$$

وعنصر متجه الموقع:

$$d\vec{r}=\hat{i}\,dx+\hat{j}\,dy+\hat{k}\,dz$$

إذاً

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int (F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz)=\int F_x dx+\int F_y dy+\int F_z dz$$

<u>تعريف</u>: يمكن أن نعبر عن مركبة القوة في اتجاه معين بدلالة المشـتقة الأولى الجزئية لدالة عددية تسـمى دالة الطاقة الكامنة (طاقة الوضع) ويرمز لها $V(r)$ وهي دالة تعتمد على إحداثيات متجه الموقع أي

$$\boxed{F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\ ;\ F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\ ;\ F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}}$$

إذاً

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int [\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz]=-\int dV \qquad (4)$$

بإستخدام قاعدة الشغل تصبح معادلة (4) على الصورة

$$\int dT=-\int dV$$

على فرض أن الطاقة الحركية في الوضـع (1) هي T_1 وفي الوضـع (2) T_2 وطاقتي الوضع هما V_1 ، V_2 على الترتيب فإن

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\int_{V_1}^{V_2} dV$$

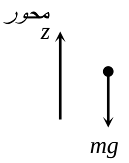
$$T_2 - T_1 = -[V_2 - V_2\ ] \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E$$

حيث $E =$ الطاقة الكلية للنظام وهذا ما يعرف بقانون حفظ الطاقة.

<u>مثال(1):</u> الطاقة الكامنة لمجال الجاذبية الأرضية المنتظم.

عند دراسة حركة جسم تحت تأثير الجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض نفرض أن محور z شاقولياً بإتجاه مركز الأرض، وعليه يكون وزن الجسم

$$\vec{W} = -mg\,\hat{k}$$



شكل(3−2)

بإهمال مقاومة الهواء فإن مركبات القوة الخارجية المؤثرة على الجسم هي:

$$F_x = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ;\ F_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ;\ F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

إذاً

$$V = \int dV = +mg\int dz = mg\,z + c$$

حيث c ثابت.

نلاحظ أن دالة الوضــع تعتمد على مســتوى المرجع الذي نختاره لتحديد مقياس الطاقة الكامنة وعادة تعتبر ســطح الأرض $(z = 0)$ هو المســتوى المرجعي للمســتوى الصــفري للطـاقـة الكـامنـة وعليـه $V(z=0) = 0$ أي أن $c = 0$ ، وعليه تصبح دالة طاقة الوضع (الكامنة):

$$V(z) = mg\,z$$

وعليه فإن قانون حفظ الطاقة يصبح على صورة ما يلي:

$$\frac{1}{z}mv^2 + mg\,z = E_0$$

حيث $E_0 =$ الطاقة الإبتدائية الكلية (عند لحظة بداية الحركة) $t = 0$.

لنفرض أن الجسم بدأ الحركة من الموقع الإبتدائي:

$$\vec{r}_0 = \hat{i} x_0 + \hat{j} y_0 + \hat{k} z_0 \quad ; \vec{v}_0 = \hat{i} \dot{x}_0 + \hat{j} \dot{y}_0 + \hat{k} \dot{z}_0$$

إذاً

$$\frac{1}{2} m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + mg\, z = E_0$$

حيث

$$E_0 = \frac{1}{2} m[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2] + V(x_0, y_0, z_0)$$

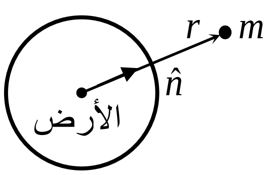
هذه معادلة الطاقة لحركة جسيم في ثلاثة أبعاد.

<u>مثال(2):</u> جهد قوة التربيع العكسي.

يسمى قانون الجذب العام وكذلك القوة الكهروستاتيكية بقانون التربيع العكسي حيث أن القوة تتناسب عكسياً مع مربع البعد بين الجسيمين أو الشحنتين. لنفرض أن جسماً كتلته m موضوع على بعد r من مركز الأرض، لذا فإن القوة المؤثرة على الجسم يفعل الجاذبية للأرض هي: $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{n}$

حيث $\hat{n} =$ متجه الوحدة من مركز الأرض نحو الجسم (شكل3.3)

تساوي $\frac{\vec{r}}{|r|}$



شكل(3.3)

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

الإشارة السالبة تعني أن القوة تجاذبية.

أو

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{r}$$

لإيجاد دالة الجهد $V(r)$:

$$V(r) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = k \int \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = k \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b \to \infty} \int_{b}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$= k \lim_{b \to \infty} [-\frac{1}{r}]_b^r = -k[\frac{1}{r} - 0] = -\frac{k}{r}$$

إذاً

$$\boxed{V(r) = -\frac{k}{r}}$$

ملاحظة: دالة الجهد في المالانهاية تساوي صفراً حيث تنعدم قوة الجاذبية على بعد لا نهائي من سطح الأرض.

(3.4) شروط وجود دالة الجهد

نبحث عن الشروط اللازم توفرها في صيغة القوة (F) حتى تكون هذه القوة قوة محافظة. نفرض أن مركبات القوة في الإحداثيات الديكارتية هي دالة للموقع على النحو:

$$F_x = F_x(x, y, z) \ ; \ F_y = F_y(x, y, z) \ ; \ F_z = F_z(x, y, z)$$

من التعريف الأساسي لدالة الجهد:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ ; \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

وكذلك:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

حيث أن V دالة مستمرة (Continuous) فإن ترتيب الإشتقاق بالنسبة للإحداثيات غير مهم ، وعليه فإن: $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ولذا فإن:

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

وبنفس الطريقة الرياضية نجد:

$$\boxed{\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial z}}$$

ومن التعريف الرياضي لألتفاف أي متجه مثل $\vec{F}$ $\Leftarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ نجد أن

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right]$$

$$= \hat{i}\,(0) + \hat{j}\,(0) + \hat{k}\,(0) = 0$$

إذاً الشرط اللازم حتى تكون القوة $\vec{F}$ قوة محافظة هو أن يكون إلتفاف $\vec{F}$ = صفر أي أن $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$

- **المؤثر دلتا: Delta Operator**

يعرف المؤثر دلتا على الصورة:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

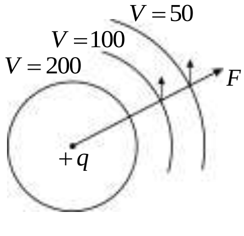
حيث من تعريف القوة بدلالة دالة الجهد وجدنا أن:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_y = \hat{i}\,(-\frac{\partial V}{\partial x}) + \hat{j}\,(\frac{\partial V}{\partial y}) + \hat{k}\,(\frac{\partial V}{\partial z})$$

هذه المعادلة تكتب على صورة: $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V}$

وعادة تقرأ أن القوة هي سالب تحدر دالة الجهد.

والمعنى الفيزيائي للمعادلة هو أن القوة المؤثرة على الجسم أثناء الحركة تكون في إتجاه سالب التحدر لدالة الجهد.



شكل(3.4)

فممثلاً في حالة وجود شـــحنه كهربائية في نقطة ما فإن خطوط تســـاوي الجهد عبارة عن سـطوح الشـحنة كروية تحيط الشـحنة(كما في الشـكل3.4)، تكون القوة (قوة المجال الكهربي) عمودياً على المماس للمنحنى الممثل لسطح الجهد الكهربي. أما اتجاهها يكون بإتجاه تناقص الجهد.

مثال(1): إذا كانت دالة الجهد على صورة

$$V(x,y,z) = x^2 + yx + xz$$

جد قوة المجال المصاحبة لهذه الدالة.

الحل:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow F_x = -(2x + y + z)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -x \;;\quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -x$$

إذاً

$$\vec{F} = -\hat{i}\,(2x + y + z) - \hat{j}\,x - \hat{k}\,x$$

ملاحظة: حيث أن دالة الجهد موجودة، لذلك فإن القوة محافظة.

مثـــال(2): جـد مقـدار الثوابـت a ، b ، c التي تجعـل القوة $\vec{F}$ المعطـاه قوة محـافظـة حيـث

$$\vec{F} = \hat{i}\,(ax + by^2) + \hat{j}\,c\,x\,y$$

الحل: نجد إلتفاف القوة $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & c\,x\,y & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(cy - 2by)$$

حتى يساوي الإلتفاف صفراً يجب أن تكون جميع مركبات $\nabla\times F$ تساوي صفراً وعليه

$$cy-2by=0 \Rightarrow \qquad \boxed{c=2b}$$

ولا توجد أهمية لمقدار a حتى يكون الإلتفاف صفراً.

(3.5) تغير الجاذبية الأرضية مع الإرتفاع عن سطح الأرض

حيث أن قوة جذب الأرض لجسم كتلته m موضوع على أرتفاع (r) من مركز الأرض تعطي بالعلاقة: $F=-\dfrac{GmM}{r^2}$

حيث $G=$ ثابت الجذب العام، $M=$ كتلة الأرض، ومن هذه العلاقة نجد أن قوة جذب الأرض للأجسام تتغير مع الإرتفاع.

معادلة الحركة للجسم في مجال الجاذبية الأرضية هي:

$$m\ddot{r}=-\frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \ddot{r}=-\frac{GM}{r^2} \qquad (1)$$

حيث $\ddot{r}=\dot{r}\dfrac{d\dot{r}}{dr}$ تصبح معادلة الحركة على الصورة:

$$m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}=-\frac{GM}{r^2}m \Rightarrow m\dot{r}\,d\dot{r}=-GMm\frac{dr}{r^2}$$

بإجراء التكامل على الطرفين نحصل على:

$$m\int\dot{r}\,d\dot{r}=-GM\,m\int\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^{\,2}=-GM\,m[-\frac{1}{r}]+c$$

حيث c ثابت. أو

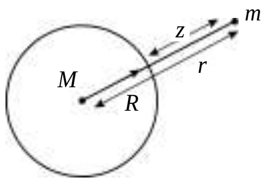
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+[\frac{-GMm}{r}]=c \qquad (2)$$

معادلة (2) هي معادلة الطاقة حيث $T=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$ ، $\dot{V}=-\dfrac{GMm}{r}$، $c=$ ثابت الطاقة الكلية الإبتدائية.

في حالة قذف جسم من سطح الأرض حيث $r = R$ (نصف قطر الأرض) بسرعة إبتدائية v_0 فإن معادلة الطاقة تكون كالآتي:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = E_0 \qquad (3)$$

أما معادلة الطاقة عندما يكون الجسم على إرتفاع (z) وحيث $r = z + R$ ومن سطح الأرض تصبح كالآتي:



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

إذاً

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left[\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R}\right] \qquad (4)$$

عندما يكون الجسم على سطح الأرض فإن قوة جذب الأرض له تساوي وزنه وتعطي $-\frac{GMm}{R^2} = -mg_0$، حيث $g_0 =$ عجلة (تسارع) الجاذبية الأرضية عند السطح. إذاً

$$\boxed{g_0 = \frac{GM}{R^2}} \qquad (5)$$

ومن المعادلتين (4)، (5) نجد أن:

$$v^2 = v_0^2 + 2g_0\left(\frac{R^2}{R+z} - R\right) = v_0^2 - 2g_0 z \Big/ \left(1 + \frac{z}{R}\right)$$

حيث $R >> x$ إذاً يمكن تقريب المقدار $(1+\frac{z}{R})^{-1}$ بإستخدام نظرية ذات الحدين

$$(1+\frac{z}{R})^{-1} \approx 1 - \frac{z}{R} + \text{حدود مهملة}$$

وعليه فإن

$$v^2 = v_0^2 - 2g_0 z\left(1 - \frac{z}{g}\right) \qquad (6)$$

حيث وجدنا في الفصل الثاني أن العلاقة بين السرعة والمسافة في قوانين الحركة تعطي $v^2 = v_0^2 - 2az$، حيث $a =$ التسارع (التعجيل) وعند مقارنة هذه المعادلة مع معادلة (6) نجد أن عجلة الجاذبية الأرضية عند الإرتفاع z عن سطح الأرض هي: $g(z)$ حيث $g(z)$ تتناقص مع الإرتفاع ونجد أن:

$$g(z)|_{z=0} = g_0$$

إذاً $$\boxed{g(z) = g_0\,(1 - z/R)}$$

نلاحظ أن وزن الجسم على بعد z من سطح الأرض هو

$$w = mg = m g_0\,(1 - z/R)$$

3.6) حركة قذيفة في مجال تثاقلي منتظم

Motion of a projectile in a uniform gravitational field

ندرس حركة جسم مقذوف في مجال الجاذبية الأرضية في حالتين:

(أ) بإهمال مقاومة الهواء: تصبح معادلة الحركة للجسم المقذوف بسرعة إبتدائية $\vec{v}_0$ حيث مركبات السرعة هي $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ هي:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{k} \qquad (1)$$

حيث $\hat{k} =$ متجه الوحدة في إتجاه الشاقول (محور z)، يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -g\hat{k}$$

بإجراء التكامل للطرفين نحصل على:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\int g\,dt\,\hat{k} = -gt\hat{k} + c_0$$ حيث c_0 ثابت

بإستخدام الشروط الإبتدائية فإن: $\vec{v}_0 = c_0$. إذاً

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -gt\hat{k} + \vec{v}_0 \qquad (2)$$

نجري التكامل مرة أخرى على طرفي معادلة (2) لنحصل على:

$$\vec{r}=-\frac{1}{2}gt^{2}\hat{k}+\vec{v}_{0}t+c_{1}$$

عندما $t=0$، نفرض أن $\vec{r}=0$ (الجسم قذف من نقطة الأصل). إذاً

$$\vec{r}=\hat{k}\,(-\frac{1}{2}gt^{2})+\vec{v}_{0}t \qquad (3)$$

هذه معادلة متجه يمكن فرزها إلى ثلاثة مركبات في الإحداثيات الديكارتية على الصورة:

$$\boxed{x=\dot{x}_{0}t \quad ; \quad y=\dot{y}_{0}t \quad ; \quad z=\dot{z}_{0}t-\frac{1}{2}gt^{2}} \qquad (4)$$

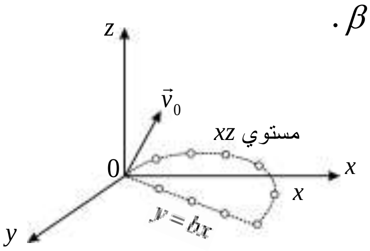
معادلة (4) تعطي موقع الجسم المقذوف في أي لحظة، ويمكن إيجاد معادلة المسار للقذيفة بحذف المتغير (t)من معادلة (4) على النحو التالي:

$$t=x/\dot{x}_{0} \Rightarrow y=(\frac{\dot{y}_{0}}{\dot{x}_{0}})\,x=bx$$

هذه معادلة المسار للقذيفة في مستوى xy وهي معادلة خط مستقيم ميله $\frac{\dot{y}_{0}}{\dot{x}_{0}}$ إذا كانت $\dot{y}_{0}=$ صفر (مركبة السرعة في إتجاه y صفراً في ابتداء الحركة)، فإن المسار يقع في مستوى xz ، وتكون معادلة المسار بعد أن نعوض بدل $x/\dot{x}_{0}$ بـ t في المعادلة الثالثة من المعادلة الرابعة على الصورة:

$$z=z_{0}\,(x/\dot{x}_{0})-\frac{1}{2}g\,(x/\dot{x}_{0})^{2}=\alpha x-\beta x^{2}$$

حيث $\alpha=\dot{z}_{0}/\dot{x}_{0}$ ، $\beta=\frac{g}{2\dot{x}_{0}}$.



شكل(3.5)

ويمكن تحديد قيم α ، β من معرفة زاوية قذف الجسم وسرعة القذف الإبتدائية أما شكل المسار للقذيفة يكون على كما في الشكل(3.5):

(ب) بإعتبار مقاومة الهواء

في حالة دراســـة حركة مقذوف في الهواء مع إعتبار مقاومة الهواء للحركة، نفرض أن مقاومة الهواء للحركة تتناسب مع سرعة المقذوف $\vec{v}$ حيث:

$$F = -m\gamma\vec{v}$$

حيث m = كتلة المقذوف، γ ثابت التناسب، الإشارة سالبة لأن المقاومة تعاكس الحركة. تصبح معادلة الحركة للمقذوف على النحو:

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\gamma\vec{v} - mg\hat{k} \qquad (1)$$

أو

$$\ddot{\vec{r}} = -\gamma\vec{v} - g\hat{k}$$

هذه معادلة متجه يمكن فرزها إلى ثلاثة مكونات في الإحداثيات الديكارتية على النحو:

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x}\,;\ \ddot{y} = -\gamma\dot{y}\,;\ \ddot{z} = -\gamma\dot{z} - g \qquad (2)$$

أما حلول المعادلات (2) كالآتي:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\gamma\dot{x} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\gamma\,dt \Rightarrow \int\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\gamma\int dt$$
$$\Rightarrow \ell n\,\dot{x} = -\gamma t + c_1$$

عند $t = 0$ ، $\dot{x}_0 = \dot{x}$. إذاً $c_1 = \ell n\,\dot{x}_0$ ، وعليه فإن

$$\ell n(\dot{x}/\dot{x}_0) = -\gamma t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \dot{x}_0\, e^{-\gamma t}}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\boxed{\dot{y} = \dot{y}_0\, e^{-\gamma t}}$$

أما حل المعادلة الثالثة من معادلات (2) فكالآتي:

$$\ddot{z}=\frac{d\,\dot{z}}{dt}=-\gamma\,\dot{z}-g\Rightarrow\frac{d\,\dot{z}}{(\gamma\,\dot{z}+g)}=-dt\Rightarrow\int\frac{d\,\dot{z}}{(\gamma\,\dot{z}+g)}=-\int dt=-t$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\gamma}\ell n(\gamma\,\dot{z}+g)=-t+c_2\Rightarrow\ell n(\gamma\,\dot{z}+g)=-\gamma\,t+c_2\,\gamma$$

عند $t=0$ ، $\dot{z}_0=\dot{z}$. إذاً $c_2=\frac{1}{\gamma}\ell n(\gamma\,\dot{z}_0+g)$

بالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$\ell n(\gamma\,\dot{z}+g)=-\gamma\,t+\ell n(\gamma\,\dot{z}_0+g)$$

ومنها

$$\ell n[\frac{\gamma\,\dot{z}+g}{\gamma\,\dot{z}_0+g}]=-\gamma\,t\Rightarrow\frac{\gamma\,\dot{z}+g}{\gamma\,\dot{z}_0+g}=e^{-\gamma t}$$

بحل هذه المعادلة في $(\dot{z})$ نحصل على ما يلي:

$$\boxed{\dot{z}=\dot{z}_0\,e^{-\gamma t}-\frac{g}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})}$$

أما متجه موقع الجسـم كدالة للزمن نحصـل عليه بإجراء التكامل على معادلات السـرعة كلاً على حدى لنحصل على:

(بإعتبار نقطة القذف تساوي نقطة الأصل) $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}_0\,e^{-\gamma t}$. إذاً

$$\int_0^x dx=\dot{x}_0\int_0^t e^{-\gamma t}\Rightarrow\;x=\dot{x}_0\left[1-e^{-\gamma t}\right]$$

وبنفس الطريقة الجبرية نحل على الإحداثي y للموقع على الصورة

$$y=\dot{y}_0\,(1-e^{-\gamma t})$$

أما الأحداثي (z) للموقع:

$$z=\int_0^z dz=\int_0^t \dot{z}_0 e^{-\gamma t}dt-\frac{g}{\gamma}\int_0^t (1-e^{-\gamma t})\,dt$$

$$=(\frac{\dot{z}_0}{\gamma}+\frac{g}{\gamma^2})(1-e^{-\gamma t})-\frac{g}{\gamma}t$$

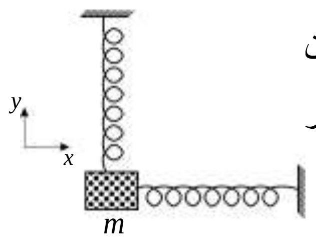
يكون متجه الموقع للجسم المقذوف في أي لحظة $\vec{r}$ على صورة:

$$\vec{r}=(\frac{\vec{v}_0}{\gamma}+\hat{k}\frac{g}{\gamma^2})(1-e^{-\gamma t})-\hat{k}(\frac{g\,t}{\gamma})$$

3.7) المتذبذب التوافقي في بعدين وثلاثة أبعاد:

Harmonic Oscillator Motion in two and three dimension

أولاً: حركة المتذبذب في بعدين:



شكل(3−6)

هنا المتذبذب عبارة عن جسم كتلة (m) مربوط بزمبركين متعامدين الشكل(3-6) إذا كانت الزنبركات متماثلة أي لها نفس معامل المر $k=k_x=k_y$

تكون معادلات الحركة في البعدين (x,y):

$$m\ddot{x}=-k\,x\ \ ,\ \ m\ddot{y}=-k\,y \qquad (1)$$

وحل المعادلات (1) هو:

$$x=A\cos(wt+\alpha)\ \ ,\ \ y=B\cos(wt+\beta) \qquad (2)$$

حيث $w=\sqrt{k/m}$ ، α ، β زوايا الطور للحركة التوافقية، A ، B سعة الذبذبة في الإتجاهين x ، y على الترتيب.

لتحديد هذه الثوابت نستخدم الشروط الإبتدائية للحركة عند $t=0$ ومعرفة $\dot{x}_0$ ، $\dot{y}_0$ ، وكذلك x_0 ، y_0.

أما لتحديد شكل المسار الذي يتخذه المتذبذب في أي لحظة زمنية نجد العلاقة بين y,x أو $y(x)$ كالآتي: نفرض أن $\Delta=\beta-\alpha$ ، إذاً:

$$y = B\cos(wt + \Delta + \alpha)$$

$$= B\{\cos(wt+\alpha)\cos\Delta - \sin(wt+\alpha)\sin\Delta\} \quad (3)$$

وعليه فإن

$$\frac{y}{B} = \cos(wt+\alpha)\cos\Delta - \sqrt{1-\cos^2(wt+\alpha)}\ \sin\Delta\}$$

حيث نعوض في المعادلة: $\cos(wt+\alpha) = x/A$ من معادلة (2) لنحصل على:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \sqrt{1-(x/A)^2}\ \sin\Delta \quad (4)$$

نقل الحدود في معادلة (4) ليبقى الجذر فقط في أحد الأطراف ثم نربع المقدار لنحصل على:

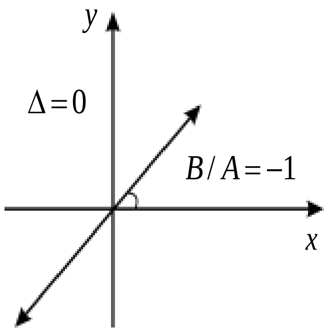
$$(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\Delta)^2 = [1-(x/A)^2]\ \sin\Delta$$

مع مراعاة أن $\cos^2\Delta + \sin^2\Delta = 1$ نجد أن

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \quad (5)$$

هذه معادلة تربيعية في (x, y) وقد تمثل قطع ناقص أو مكافئ أو زائد وذلك حسب مميز هذه المعادلة التربيعية، أما شكل المسار للمتذبذب يعتمد على زاوية فرق الطور Δ، وهناك الحالات التالية:

(أ) إذا كانت $\Delta = 0$ فإن معادلة (5) تؤول إلى الشكل (3.7)



شكل(3.7)

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

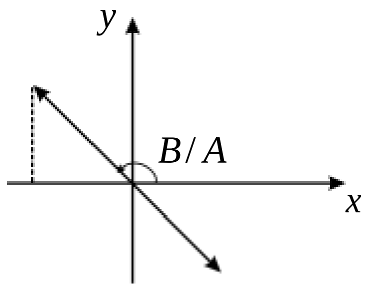
$$\boxed{y = +\frac{B}{A}x} \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

هذه معادلة خط مستقيم ميله (B/A). شكل(3.7)

وكذلك في حالة كون

(ب) $\Delta=\pi$: فإن معادلة (5) تؤول إلى

$$\boxed{y=-\frac{B}{A}x} \qquad \text{شكل(3-8)}$$

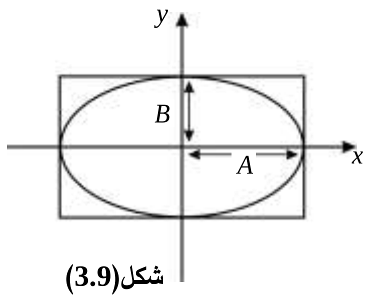


شكل(3.8)

(ج) إذا كانت $\Delta=\frac{\pi}{2}$ ، فإن معادلة (5) تؤول إلى:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1}$$

وهذه معادلة قطع ناقص محاوره A ، B منطبقة على المحاور x ، y على الترتيب كما في الشكل(9.3).



شكل(3.9)

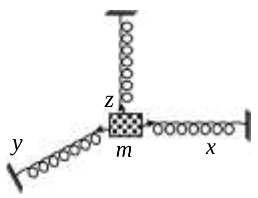
<u>ثانياً</u>: حركة المتذبذب التوافقي في ثلاثة أبعاد.

عند ربط جسم كتلته (m) مع ثلاثة زنبركات (متماثلة) لها نفس معامل المرونة فإن معادلات الحركة للمتذبذب في الأبعاد x ، y ، z على الترتيب تعطى كالآتي:

$$m\ddot{x}=-kx \;;\; m\ddot{y}=-ky \;;\; m\ddot{z}=-kz \qquad (1)$$

وحلول هذه المعادلات "معادلة الحركة التوافقية البسيطة" هي

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=A\cos(wt+\alpha)\\ y(t)&=B\cos(wt+\beta)\\ z(t)&=C\cos(wt+\gamma)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



شكل(3.10)

يسمى هذه المتذبذب بالتوافقي المتجانس

(Isotropic Harmonic Oscillator)

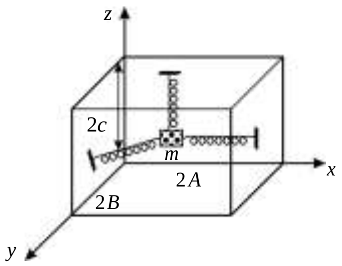
حيث $w=\sqrt{k/m}$ في الأبعاد الثلاثة.

أما إذا كانت $k_x\neq k_y\neq k_z$ يسمى بالمتذبذب التوافقي غير المتجانس (Non Isotropic) وتكون حلول معادلات الحركة في الأبعاد الثلاثة هي:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(w_1 t+\alpha) \\ y(t) &= B\cos(w_2 t+\beta) \\ z(t) &= C\cos(w_3 t+\gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

حيث $w_1 = \sqrt{k/m}$ وهكذا.

وحركة المتذبذب تقع في فراغ صندوق متوازي المستطيلات الذي أضـلاعه $(2A, 2B, 2C)$ (كما في الشكل 3.11).



شكل (3.11) تذبذب في ثلاثة ابعاد .

<u>حالة خاصة</u>: إذا كانت قيم w_1 ، w_2 ، w_3 متناسبة أي

$$\frac{w_1}{n_1} = \frac{w_2}{n_2} = \frac{w_3}{n_3}$$

بمعنى أن $w_1 : w_2 : w_3 = n_1 : n_2 : n_3$ ، n_1, n_2, n_3 أعداد صـــحيحة يكون مســـار المتذبذب مغلقاً ويعود المتذبذب إلى موقعه الإبتدائي بعد زمن يعطى بالعلاقة:

$$\frac{2\pi}{(w_1/n_1)} = \frac{2\pi}{(w_2/n_2)} = \frac{2\pi}{(w_3/n_3)}$$

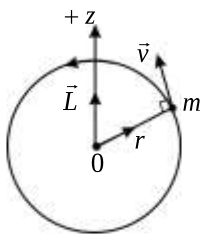
3.8) كمية الحركة الزاوية: Angular Momentum

إذا تحرك الجسم في حركة خطية بسـرعة $\vec{v}$ فإنه يملك كمية حركة خطية $(\vec{p})$ وقدرها $m\vec{v}$. أما إذا أجبر الجســم على أن يتحرك في مســـار دائري بفعل قوة خارجية متعامدة مع إتجاه ســـرعته (كما في

الشـكل3-12) فإنه يصـبح لديه كمية فيزيائية جديدة تسـمى كمية الحركة الزاوية ويرمز لها بالرمز ($\vec{L}$) وهي كمية متجه وتعرف رياضياً كالآتي:

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad (1)$$

ويكن إتجـاه $\vec{L}$ متعـامـداً مع كـل من $\vec{r},\vec{v}$، حيـث $\vec{V}$ هي كميـة المركبة المماسية للسرعة



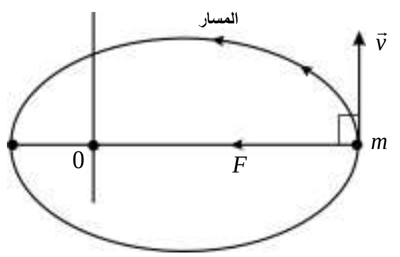
شكل(3.12)

(كما مرّ في الفصـــل الأول $v_0 = r\dot{\theta}$) فإن إتجاه $\vec{L}$ يكون ($\pm z$)، فإذا كان الجســم يدور عند عقارب السـاعة فإن $\vec{L}//+z$ وإذا كان الدوران مع عقارب السـاعة فإن $\vec{L}//-z$، ونلاحظ أن $\vec{L}$ تقع في الإتجاه العمودي على مستوى الحركة.

معادلة الحركة الدورانية:

لنفرض أن جسماً كتلته m وسرعته $\vec{v}$ تؤثر عليه قوة خارجية $\vec{F}$ متعامدة مع متجه سرعته (كما في الشــكل3.13) بحيث تجعله يدور وعليه كمية حركة زاوية مقدارها $\vec{L}$. وكان الجســم مقيد الحركة حول نقطة (0). لوصف الحركة نستخدم معادلة الحركة الدورانية:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{N}_0} \qquad (2)$$



شكل(3.13)

حيث $\vec{N}_0$ = عزم الدوران للقوة $\vec{F}$ حول المحور المار في النقطة o.

لإشتقاق معادلة الحركة الدورانية:

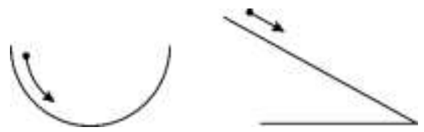
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v} + \vec{r}\times(m\frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$= \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}_0$$

حيث $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ التسارع:

3.9) حركة الجسيم المقيدة : **Constrained Motion of a Particle**

نقول أن الجسيم مقيد الحركة عندما يتحرك على منحنى أو سطح معين ويبقى ملامساً له طيلة الحركة مثل حركة جسم داخل إناء كروي أو إنزلاق خرزة على سلك أو حركة جسم على سطح مائل. سنتناول دراسة وصف حركة الأجسام عندما تكون المقيدات ثابتة.



3.10) معادلة الطاقة للمقيدات الملساء:

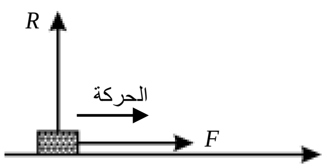
Energy Equation of smooth constraints

لنفرض أن $\vec{R}$ = رد فعل سطح المقيد على الجسم أثناء الحركة، ولنفرض أن القوة الخارجية المؤثرة على الجسم $\vec{F}$ ، شكل(3.14) لذلك تصبح معادلة الحركة للجسيم:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \quad (1)$$

حيث $\vec{v} \perp \vec{R}$ في حالة السطح الأملس

وعليه فإن $\vec{v}\cdot\vec{R} = 0$



شكل (3.14) الحركة على سطح أملس.

بضرب طرفي المعادلة (1) بمتجه $\vec{v}$

نحصل على ما يلي:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

في حالة $\vec{F}$ قوة محافظة فإن

$$m\,d\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

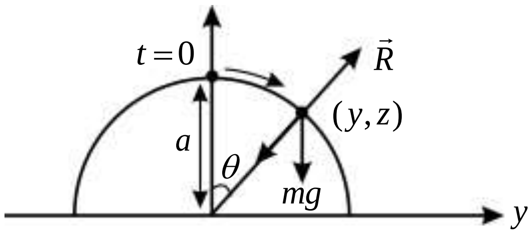
$$\int m\cdot\vec{v}\,dt=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=-V(r)+c\ \ (\text{ثابت } c) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2+V(r)=c=E_0$$

وهذه معادلة الطاقة في حالة المقيدات الملساء.

<u>مثال</u>: وضع جسم كتلته m على قمة نصف كرة ملساء نصف قطرها a فإذا أزيح الجسم قليلاً عن موقع الإتزان جد عند أي نقطة يترك الجسم السطح؟

<u>الحل</u>: معادلة الطاقة الكلية للجسيم: $\frac{1}{2}mv^2+mg\,z=E_0$ (أنظر شكل3.15)



شكل(3.15)

حيث $t=0$ كان الجسم في حالة سكون $(v_0=0)$ وعلى إرتفاع $z=a$ عند القمة وعليه فإن طاقة الوضع الإبتدائية للجسم $=mga$ ، إذاً

$$E_0=0+mg\,a=m\,ga$$

معادلة الطاقة الكلية للجسم هي:

$$\frac{1}{2}mv^2+mg\,z=mg\,a \qquad (1)$$

حيث أن الجسم يتحرك في مسار دائري على السطح فإن معادلة الحركة للجسم هي

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = R - mg\cos\theta \qquad (2)$$

هنا $r = a \Leftarrow \dot{r} = 0$ ، $\ddot{r} = 0$ ، $\dot{\theta} = w = v/a$

تصبح معادلة (2) على الصورة:

$$-m\frac{v^2}{a} = R - mg\cos\theta \qquad (3)$$

وحيث أن $\cos\theta = z/a$ إذاً معادلة (2) تصبح كالآتي:

$$m\frac{v^2}{a} = mg(z/a) - R \qquad (4)$$

نحل معادلتين (1)، (2) بالحذف أو التعويض لنحصل على قيمة R:

$$R = \frac{mg}{a}(3z - 2a) \qquad (5)$$

نلاحظ أن قيمة رد الفعل تتوقف على مقدار z وعليه فإن $R = 0$ عندما

$\frac{a}{z} = \frac{2}{3}$ أو $3z - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}a}$ ، $\cos\theta = 2/3 \Rightarrow \theta = 48^\circ$

أي يترك الجسم السطح $(R = 0)$ عندما يكون على إرتفاع $z = \frac{2}{3}a$.

3.11) الحركة المقيدة على منحنى: Motion on a Curve

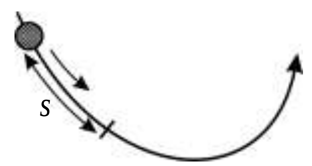
عندما يتحرك جسم على منحنى معين فإن موقع الجسم يعبر عنه بدلالة وسيط مثل $(s) =$ المسافة على طول المنحنى (القوس) الشكل(3-16) أي

$$x = x(s) \;\; ; \;\; y = y(s) \;\; ; \;\; z = z(s)$$

وتكون الطاقة الحركية للجسم معطاه بدلالة $(\dot{s})$ سرعة الجسم $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$

معادلة الطاقة للجسم هي:

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = F_0 \qquad (1)$$



شكل(3.16)

عند إشتقاق معادلة (1) بالنسبة للزمن (t) نحصل على:

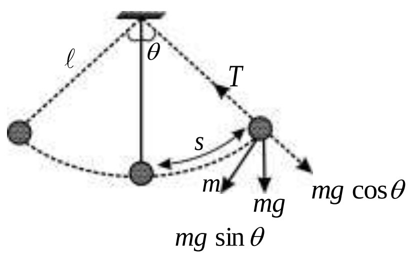
$$2(\frac{1}{2})m\dot{s}\,\ddot{s}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}=0 \Rightarrow m\dot{s}\,\ddot{s}+\frac{\partial v}{\partial s}\dot{s}=0$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{\ddot{s}}=\frac{\partial v}{\partial s}=\vec{F}_s$$

وهذا يؤول إلى معادلة الحركة التفاضلية للجسم (قانون نيوتن الثاني في الحركة).

3.12) البندول البسيط: Simple Pendulum

البندول جسم كتلته (m) مربوط مع خيط طوله (ℓ) ومثبت الخيط بنقطة تعليق (كما في الشكل3-17) إذا ما أزيح الجسم جانباً قليلاً عن موقع الإتزان فإن حركة البندول تكون في مستوى شاقولي.



شكل(3.17)

أما معادلة الحركة للبندول فهي:

$$m\ddot{s}=-mg\sin\theta \qquad (1)$$

حيث $s=\ell\theta$ فإن $\ddot{s}=-\ell\ddot{\theta}$

بالتعويض في معادلة (1) نجد أن:

$$\ell\ddot{\theta}=-g\sin\theta \qquad (2)$$

وتسمى θ سعة ذبذبة البندول، وعندما تكون هذه السعة صغيرة فإنه يمكن استخدام التقريب الأولى: $\sin\theta\approx\theta$ وعليه تصبح معادلة الحركة:

$$\boxed{\ddot{\theta}\approx-\frac{g}{\ell}\theta} \qquad (3)$$

نفرض أن $\frac{g}{\ell}=w_0^2$ ، إذاً تصبح معادلة (3) معادلة حركة توافقية بسيطة (كما مرّ وسبق شرحه في الفصل الثاني) ويصبح حل المعادلة (3) كالآتي:

$$\theta = A\cos(w_0 t + \alpha) \qquad (4)$$

حيث A = سـعة ذبذبة البندول وهي أقصــى إزاحة زاوية يصـل إليها البندول أثناء الحركة و $\alpha =$ زاوية الطور. أما زمن ذبذبة البندول البسيط T_0 هو:

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\ell}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

<u>ملاحظة</u>: نرى أن زمن ذبذبة البندول لا يعتمد على كتلته.

<u>3.13)</u> الحل الدقيق لمسألة البندول:

Accurate sudation of a Simple Pendulum

وجدنا أن معادلة الحركة للبندول هي:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

إذاً أعتبرنا مفكوك الجيب بدلالة متسلسلة القوى (Power Series) على الصورة:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \qquad (2)$$

عند اسـتخدام الحد الأول والثاني في المفكوك في معادلة (2) يسـمى التقريب من الدرجة الثالثة. نعوض ذلك في معادلة (1) لنحصل على:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}(\theta - \frac{\theta^3}{3!}) = 0 \qquad (3)$$

لإيجاد حل لمعادلة (3) نستخدم الحل التقريبي الأول للحركة التوافقية البسيطة:

$$\theta = A\cos wt$$

ثم نعوض ذلك في معادلة (3) لنحصل على:

$$-Aw^2\cos wt + \frac{g}{\ell}A\cos wt - \frac{g}{6\ell}A^3\cos^2 wt = 0 \qquad (4)$$

بإستخدام المتطابقة المثلثية ($\cos^3 u = \frac{1}{4}(3\cos u + \cos 3u)$ نجد أن معادلة (4) تؤول إلى:

$$(-Aw^2 + \frac{g}{\ell}A - \frac{gA^3}{8\ell})\cos wt - \frac{gA^3}{24\ell}\cos 3wt = 0 \qquad (5)$$

بإستثناء الحالة الإعتيادية $A=0$ فإن معادلة (5) لا تكون صحيحة لجميع قيم (t) وعليه نفرض أن الحل الإختباري على صورة.

$$\theta = A\cos wt + B\cos 3wt \qquad (6)$$

ونعوض ذلك مرة أخرى في معادلة (3) لنحصل على:

$$(7)\,(-Aw^2 + \frac{g}{\ell}A - \frac{gA^3}{8\ell})\cos wt + (-Bw^2 + \frac{g}{\ell}B\frac{gA^3}{24\ell})\cos 3wt = 0$$

نساوي معاملات $\cos wt$ ، $\cos 3wt$ بالصفر لنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} -Aw^2 + \frac{g}{\ell}A - \frac{gA^3}{8\ell} &= 0 \\ -9Bw^2 + \frac{g}{\ell}B - \frac{gA^3}{24\ell} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

المعادلة الأولى في (8) تعطي:

$$w^2 = \frac{g}{\ell}(1 - \frac{A^2}{8})$$

ونعوض هذه المقدار في المعادلة الثانية من (8) لنحصل على علاقة بين B ، A:

مع إهمال مقدار A^2 بالنسبة لمقدار 192

$$B = \frac{-A^3}{3(64 + 27A^2)} \approx \frac{A^3}{192}$$

وعليه يصبح الحل الدقيق لمعادلة الحركة للبندول البسيط:

$$\boxed{\theta = A\cos wt - \frac{A^3}{192}\cos 3wt}$$

أما السرعة الزاوية:

$$w^2 \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}}(1 - \frac{A^2}{8})^{1/2}$$

أما زمن الذبذبة

$$T = \frac{2\pi}{w} \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1-\frac{1}{8}A^2)^{-1/2} \quad \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}(1+\frac{1}{16}A^2)$$

$$\boxed{T = T_0\;(1+\frac{1}{16}A^2\;)}$$

تمارين

(1) بين أياً من القوى التالية محافظة:

(أ) $\vec{F} = k\vec{r}/r^4$ ، (ب) $\vec{F} = \hat{i}\,e^{a(x+y)} + \hat{j}\,e^{b(x+y)} + \hat{k}\,e^{cz}$

حيث $a \neq b$.

(2) جد دالة القوة المرافقة لكل من دوال الطاقة الكامنة التالية:

(أ) $V = k\,x\,y/z^2$ ، (ب) $V = k\,e^{a(x^2+y^2+z^2)}$

(3) يتحرك جسـيم كتلته m في مجال قوة دالة جهده $V = ax + by^2 + cz^3$. إذا مرّ الجسـيم من نقطة الأصل بسرعة v_0 فما انطلاقه عندما يمر بالنقطة $(1,1,1)$.

(4) بين أن تغير الجاذبية مع الإرتفاع يمكن حسابه مقرباً من دالة الطاقة الكامنة

$$V = mg\,z(1 - z/R)$$

حيث R = نصف قطر الأرض، جد القوة من دالة الجهد المذكورة أعلاه ومنها جد مركبات المعادلات التفاضلية للحركة تحت تأثير هذه القوة.

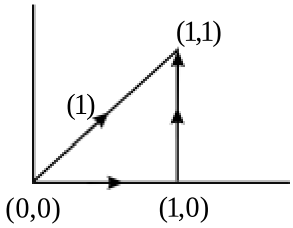
(5) أفرض دالتي القوة التاليتين هما:

$$(a)\ \vec{F} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y \qquad , \qquad (b)\ \vec{F} = \hat{i}\,x - \hat{j}\,y$$

بيّن بطريقتين مختلفتين أن (a) قوة محافظة

وأن (b) غير محافظة.

ملاحظة: الطريقة الأولى $\nabla \times \vec{F}$، الطريقة الثانية بأخذ مساريين الأول من (0,0) إلى (1,1) والمسار الثاني من (0,0) ← (1,0) ← (1,1) كما في الشكل(3.18).



شكل(3.18)

(6) أنقذفت جسيمات من الطين من الحافة العليا لعجلة متدحرجة بإنطلاق أمامي v_0 فإذا كان نصف قطر العجلة b، برهن أن أقصى إرتفاع يصل إليه الطين فوق سطح الأرض هو: $b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{g\,b^2}{2v_0^2}$

(7) أكتب مركبات المعادلة التفاضلية لحركة قذيفة، إذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع الإنطلاق. هل المعادلات قابلة للفرز؟ بين أن مركبة x للسرعة هي $\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma s}$ حيث s = المسافة التي قطعتها القذيفة على طول مسار الحركة.

(8) إذا علمت أن $w = 2/\sec$ لمتذبذب توافقي معين موحد الخواص يتحرك في بعدين إذا كانت الشروط الإبتدائية:

$$x_0 = 2cm \qquad \dot{x}_0 = 0$$
$$y_0 = 2cm \qquad \dot{y}_0 = 4cm/s$$

جد معادلة الحركة وسعة الذبذبة

(9) جسم كتلته 1 وحدة يتحرك في جهد متذبذب توافقي ثلاثي الأبعاد وغير موحد الخواص $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$.

فإذا مرّ الجسم في نقطة الأصل بسرعة تساوي 1 وحدة وبإتجاه $(1,1,1)$ في الزمن $t = 0$. جد x, y, z كدوال للزمن.

(10) وضع جسيم كتلته m على جانب كرة ملساء نصف قطرها b وعلى مسافة $(b/2)$ من مستواها المركزي، عند إنزلاق الجسيم أسفل جانب الكرة عند أي نقطة سوف تتركها.

(11) تنزلق خرزة على سلك دائري أملس نصف قطرها b فإذا كان مستوى الحد شاقولياً وبدأت الخرزة من السكون من نقطة عند مستوى مركز الحلقة. جد سرعة الخرزة ورد فعل السلك على الخرزة عند أسفل نقطة للسلك.

(12) استخدم بندول بسيط في تجربة لإيجاد قيمة (g)، إذا كانت سعة ذبذبة البندول 30°، جد الخطأ النسبي عند استخدام العلاقة

الفصل الرابع :حركة المحاور المرجعية

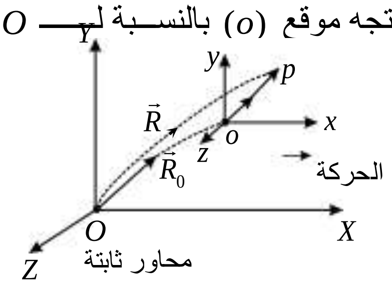
Moving Reference Systems

حيث أنه يلزم لوصف حركة الجسم اختبار محاور (أطر) لتحديد موقع الجسم في أي لحظة زمنية وقد تكون أحياناً نقطة أصل هذه المحاور متحركة بالنسبة لشخص ثابت وعليه يلزم وصف الحركة بالنسبة للمحاور الثابتة فمثلاً عند دراسة حركة قذيفة على سطح الأرض نحدد متجه موقع القذيفة في أي لحظة بالنسبة لنقطة أصل لمحاور تقع على سطح الأرض وحيث أن الأرض تدور حول محورها فإن هذه المحاور تعتبر محاور متحركة بالنسبة لمركز الأرض وسنركز أهتمامنا في هذا الفصل على تحديد موقع وسرعة وعجلة الجسم بالنسبة لمحاور الثابتة.

4.1) حركة المحاور الإنتقالية: Translation of Coordinate System

لنفرض أن النقطة (p) تمثل موقع جسيم يتحرك في نظام المحاور $(o\,x\,y\,z)$ بحيث أن $\vec{r}=$ متجه الموقع للجسم في أي لحظة (كما في الشكل4.1). ولنفرض أن النقطة الثابتة في نظام المحاور الثابتة $(O\,X\,Y\,Z)$ هي 0 نقطة الأصل وأن متجه الموقع للجسم بالنسبة للمحاور الثابتة $\vec{R}$ ، لنفرض أن للمحاور المتحركة حركة إنتقالية بحيث $OX\,//\,ox$. وأن متجه موقع (o) بالنسبة لـ O هو $\vec{R}_0$ من الشكل نرى أن العلاقة بين هذه المتجهات هي:

$$\vec{R}=\vec{r}+\vec{R}_0 \qquad (1)$$



شكل(4.1)

عند اشتقاق معادلة (1) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_0 \qquad (2)$$

حيث $\vec{V} =$ سرعة الجسم بالنسبة للمحاور الثابتة (الأساسية)

$\vec{V}_0 =$ سرعته النقطة (o) بالنسبة O (مركز أصل المحاور الثابتة)

$\vec{v} =$ سرعة الجسيم في المحاور المتحركة.

عند أخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن لمعادلة (1) نحصل على متجه التسارع.

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_0 \qquad (3)$$

حيث $\vec{A} =$ تسارع الجسم في المحاور الثابتة، $\vec{A}_0 =$ تسارع المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور، $\vec{a}_0 =$ تسارع الجسيم في المحاور المتحركة الثابتة.

ملاحظة: إذا كانت المحاور المتحركة تنتقل بسرعة ثابتة (V_0) بالنسبة للمحاور الأساسية الثابتة، فإن معادلة (3) تصبح (حيث $O = \vec{A}_0$)

$$\boxed{\vec{A} = \vec{a}}$$

ونقول أن المحاور المتحركة غير معجلة (متسارعة) أو محاور خاملة (Inertial Frame).

- **القوى الزائفة: Inertial Forces**

نطبق معادلة حركة الجسيم في المحاور المتحركة كالآتي: في معادلة (3) نضرب كل الحدود بكتلة الجسم m

$$m\vec{A} = m\vec{a} + m\vec{A}_0 \qquad (4)$$

لنفرض أن $\vec{F} = m\vec{A}$ هي محصلة القوى الحقيقية المؤثرة على الجسم والموجودة في المحاور الثابتة (الأساسية) وتسمى القوى الحقيقية. $\vec{F} = m\vec{a} + m\vec{A}_0$. إذاً

$$m\vec{a} = \vec{F} + (-m\vec{A}_0) \qquad (5)$$

حيث الطرف الأيسر = الكتلة × تسارع الجسم في المحاور المتحركة (معادلة الحركة). والحد $(-m\vec{A}_0)$ هو صورة رياضية للقوة (كتلة × التسارع) وهذه القوى غير حقيقية (لا وجود لها عملياً) وتظهر بسبب حركة المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور الأساسية ولذلك تسمى قوة زائفة ولذلك تصبح معادلة (5):

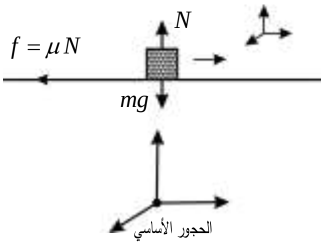
$$m\vec{a} = "\vec{F}"$$

حيث $"\vec{F}"$ تعني محصلة القوى الزائفة والقوى الحقيقية.

ملاحظة: تظهر القوى الزائفة عند إختبار محاور معجلة (متسارعة) لوصف حركة الجسم.

مثال: وضع قالب خشبي على طاولة أفقية خشنة لها معامل إحتكاك μ شكل(4.2) جد الشروط اللازمة حتى ينزلق القالب على الطاولة.

الحل:



شكل(4.2)

حيث قيمة قوى الإحتكاك $f = \mu N = \mu mg$. إذاً يكون القالب على وشك الإنزلاق إذا كانت محصلة القوى المؤثرة = صفر.

$$\vec{F} + (-m\vec{A}_0) \geq 0 \;\Rightarrow\; \mu mg < \left|-m\vec{A}_0\right|$$

وهذا هو الشرط $\mu mg < \left|-\vec{A}_0\right|$

وهذا يعني أن القيمة العددية لتسارع المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة أكبر من قوة الإحتكاك. أي

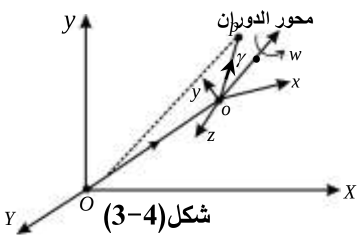
$$|A_0| = A_0 > \mu g$$

4.2) الحركة العامة للمحاور:

General Motion of Coordinate System

لنفرض أن المحاور المتحركة لها حركة دورانية حول محور ما بالإضافة إلى حركتها الإنتقالية.

نحدد متجهات المواقع في المحاور المتحركة والأساسية على النحو التالي شكل(3-4).



شكل(3-4)

$\vec{r} = \hat{i}\, x + \hat{j}\, y + \hat{k}\, z$ ، وعليه فإن

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \hat{i}\, x + \hat{j}\, y + \hat{k}\, z \qquad (1)$$

عند اشتقاق (1) بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \left[(\hat{i}\,\dot{x} + \hat{j}\,\dot{y} + \hat{k}\,\dot{z}) + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \right] \qquad (2)$$

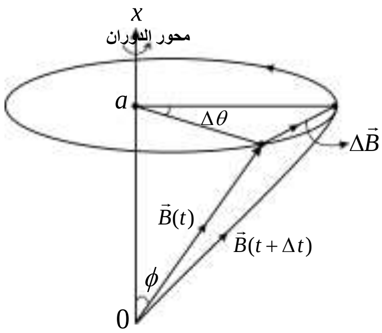
$$V = V_0 + \vec{v} + \left[x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \right] \qquad (3)$$

نحاول إيجاد الكمية [ ] في معادلة (3) بدلالة السرعة الزاوية $\vec{w}$ أي نريد تحديد قيم $\frac{d\hat{i}}{dt}, \frac{d\hat{j}}{dt}, \frac{d\hat{k}}{dt}$ حيث أنها تتغير مع الزمن.

لنفرض أن متجهاً مثل $\vec{B}$ يدور حول محور بسرعة زاوية (w) ، أثناء الدوران فإن المتجه يمسح مخروطاً دائرياً قائماً راسمه $|B|$ وزاوية رأسه ϕ شكل(4-4).

لنفرض أن بعد Δt من الزمن فإن المتجه يصبح $\vec{B}(t+\Delta t)$ ، وعليه

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}(t+\Delta t) - B(t)$$



شكل(4.4)

نلاحظ من الشكل(4.4): $ab=|B|\sin\phi$ ، وكذلك $|\Delta\vec{B}|=|B|\sin\phi\,\Delta\theta$. إذاً

$$\frac{|\Delta\vec{B}|}{\Delta t}=|B|\sin\phi(\frac{\Delta\theta}{\Delta t})=|B|\sin\phi\, w$$

حيث $\underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{\Delta\theta}{\Delta z}=w$. إذاً $\frac{d|B|}{dt}=w|B|\sin\phi$

وحيث أن $w\hat{k}=\vec{w}$ فإن المعادلة تكتب على صورة الضرب الإتجاهي لـ $\vec{B}$ مع $\vec{w}$ كالآتي.

وهذه **قاعدة المتجه الدّوار**: $\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt}=\vec{w}\times\vec{B}}$

أي أن معدل التغير الزمني لمتجه ما يساوي الضرب الإتجاهي له مع السرعة الزاوية في حالة دوران المتجه حول محور.

بالقياس على هذه القاعدة فإن:

$$\frac{d\hat{i}}{dt}=\vec{w}\times\hat{i}\ ;\ \frac{d\hat{j}}{dt}=\vec{w}\times\hat{j}\ ;\ \frac{d\hat{k}}{dt}=\vec{w}\times\hat{k}$$

إذاً

$$x\frac{d\hat{i}}{dt}+y\frac{d\hat{j}}{dt}+z\frac{d\hat{k}}{dt}=x(\vec{w}\times\hat{i}+w\times\hat{j}+w\times\hat{k})$$
$$=\vec{w}\times(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=\vec{w}\times\vec{r}$$

وعليه فإن $\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d\vec{R}_0}{dt}+\dot{\vec{r}}+\vec{w}\times\vec{r}$ أو

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_0 + \vec{r} + \vec{w} \times \vec{r} \qquad (6)$$

أي السـرعة فـي المحـاور الأساسـية = سـرعة إنتقـال المحـاور المتحركـة بالنسـبة للمحـاور الأساسـية + سـرعة الجسـيم فـي المحـاور المتحركـة + الضـرب الإتجـاهي لـ $\vec{w}$ مع متجه الموقع للجسم.

لأشـتقاق تسـارع الجسـم بالنسـبة للمحـاور الأساسـية $\frac{d^2\vec{R}}{dt}$ نسـتخدم مـا يلـي مـن

من معادلة (6): $$\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_0 = \left[\vec{r} + \vec{w} \times \vec{r}\right]$$

نفرض أن $\vec{Q} = \vec{r} + \vec{w} \times \vec{r}$. إذاً $$\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_0 = Q$$

بأخذ المشتقة الأولى بالنسبة للزمن لكل طرف من المعادلة نحصل على:

$$\frac{d}{dt}[\frac{d\vec{R}}{dt} - V_0] = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

حسب قاعة المتجه الدوار فإن

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \vec{A}_0 &= \dot{Q} + w \times Q = \vec{r} + \vec{w} \times \vec{r} + \vec{\dot{w}} \times \vec{r} + w \times (\vec{r} + \vec{w} \times \vec{r}) \\ &= \vec{r} + \vec{w} \times \vec{r} + \vec{\dot{w}} \times \vec{r} + \vec{w} \times \vec{r} + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} \\ &= \vec{r} + 2(\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{\dot{w}} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})\end{aligned}$$

إذاً

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{r} + 2(\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{\dot{w}} \times \vec{r} + w \times (\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{A}_0 \qquad (7)$$

معادلة (7) تعني: التسارع في المحاور الثابتة = التسارع في المحاور المتحركة + تعجيل كوريولوس + التعجيل المستعرض + التعجيل المركزي + تعجيل المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة.

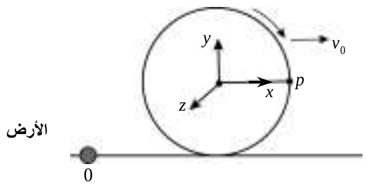
أما رياضياً: تعجيل كوريولوس (Coriolis acceleration) فهو $2(\vec{w}\times\dot{\vec{r}})$

التعجيل المستعرض $\dot{w}\times\vec{r}$ (Transverse acceleration) =

التعجيل المركزي $w\times(\vec{w}\times\vec{r})$ (acceleration Centripetal) =

ملاحظة: إذا كانت السرعة الزاوية w ثابتة فإن $\dot{w} =$ صفر وعليه لا يوجد تسارع مستعرض.

مثال(1): تتدحرج عجلة نصف قطرها b على الأرض بإنطلاق أمامي ثابت قدره v_0 جد تعجيل (تسارع) أي نقطة على مسافة العجلة بالنسبة للأرض.



شكل(4.5)

الحل: نختار نقطة أصل المحاور المتحركة عند مركز العجلة والنقطة p على المحيط بحيث كون محور x يمر بنقطة p التي نريد حساب التعجيل لها شكل(4-5)، وعليه يكون متجه موقع p هو: $\vec{r} = \hat{i}\, b$ ، إذاً

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}\,(0) = 0\ ,\ \ddot{\vec{r}} = 0$$

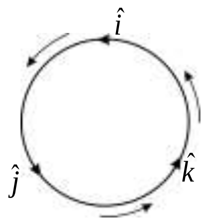
حيث الدروان حول محور z ، عليه تكون

$$\vec{w} = \hat{k}\, w = \hat{k}(v_0/b) = \text{ثابت}$$

إذاً التعجيل المستعرض $\dot{w}\times\vec{r} =$ صفر، وكذلك تعجيل كوريولوس $2(\vec{w}\times\dot{r}) =$ صفر. أما التعجيل المركزي

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = \hat{k}\, w\times \hat{j} b) = w^2 b + \hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{i})$$

حيث من قاعدة ضرب المتجهات الدوارة:



$$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}\ ,\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

إذاً التعجيل المركزي : $-\dfrac{v_0^2}{b}\hat{i} = -w^2 b\hat{i}$

أما $\vec{A}_0 =$ تعجيل مركز العجلة (بالنسبة للأرض) حيث تتحرك العجلة بسرعة منتظمة $V_0 \Leftarrow$ $\boxed{\vec{A}_0 = 0}$

. إذاً

$$\vec{A} = \ddot{\vec{r}} + 2w \times \dot{r} + \dot{w} \times \vec{r} + (-\frac{v_0^2}{b})\hat{i} + 0$$

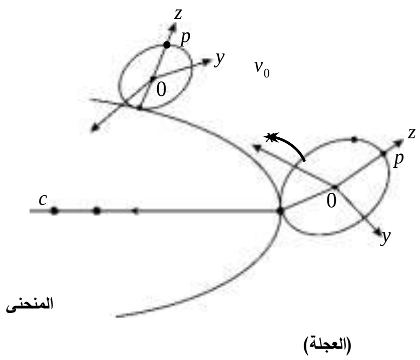
$$\boxed{\vec{A} = -\frac{v_0^2}{b}\hat{i}}$$

وهذا يعني أن كل نقطة على محيط العجلة تتسارع نحو مركز العجلة بمقدار $\frac{v_0^2}{b}$

<u>مثال(2):</u> تسير دراجة هوائية نصف قطرها b بإنطلاق أمامي ثابت v_0 على منحنى نصف قطره تكون (P) جد تعجيل أعلى نقطة في العجلة بالنسبة لمركز المنحنى.

<u>الحل</u>:

(أنظر الشـــكل (4.6) نختار المحاور المتحركة $oxyz$ بحيث يكون محور x يشـــير دائماً نحو مركز تكور المنحنى أثناء دوران العجلة (c) ونختار محورر (z) ماراً بأعلى نقطة على العجلة وعليه فإن: $\vec{r} = b\vec{k}$ (كما في المثال السابق). إذاً



شكل(4.6)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = b\,\hat{k} + b\frac{d\hat{k}}{dt} = 0\hat{k} + b[\vec{w} \times \hat{k}] = b[\hat{i}(\frac{v_0}{b}) \times \hat{k}]$$

$$\dot{\vec{r}} = v_0(\hat{i} \times \hat{k}) = v_0(-\hat{j})$$

حيث $\dot{\vec{r}}$ سرعة النقطة P بالنسبة للإحداثيات المتحركة هي $\frac{v_0}{b} = w$

إذاً السرعة الدورانية للنقطة $(P) = w\,\hat{i}$. وعليه فإن

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}(-\hat{j}_0)=-v_0\frac{d\,\hat{j}}{dt}=-v_0(\vec{w}\times\hat{j})=-v_0(\frac{v_0}{b}\hat{i}\times\hat{j})$$

$$\vec{\ddot{r}}=(-\frac{v_0^2}{b})\hat{k} \qquad (1)$$

ملاحظة: هذا تســارع النقطة (P) في المحاور المتحركة بالنســبة لمركز العجلة وهو بإتجاه نحو المركز. كما مرّ في المثال الأول.

حيث أن ســـرعـة دوران المحـاور المتحركـة حول مركز التكور $(c)=\hat{k}(\frac{v_0}{\rho})$ لـذلـك يكون تعجيـل كوريولوس

$$2(\vec{w}\times\vec{\dot{r}})=2\hat{k}(\frac{v_0}{\rho})\times(-\hat{j}\,v_0)=-2\frac{v_0^2}{\rho}(\hat{k}\times\hat{j})=-\frac{2v_0^2}{\rho}(-\hat{i})$$

إذاً

$2\frac{v_0^2}{\rho}(\hat{i})$ هو تعجيل كوريولوس في إتجاه (c).

حيث $\vec{w}$ = ثابتة $\Leftarrow$ $\dot{\vec{w}}$ = صفر $\Leftarrow$ التعجيل المستعرض = صفر.

أما التعجيل المركزي

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})=\frac{v_0^2}{\rho}\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{k}\,b)=\frac{v_0^2}{\rho}\hat{k}(0)=0$$

و يكون تسارع النقطة P بالنسبة للنقطة c هز $\vec{A}$ ويعطى بتجميع الحدود على النحو التالي:

$$\vec{A}=\vec{\ddot{r}}+2w\times\dot{r}+\dot{w}\times\vec{r}+w\times(\vec{w}\times\vec{r})+A_0$$
$$=-\frac{v_0^2}{\rho}\hat{k}+2\frac{v_0^2}{\rho}\hat{i}+0+0+\frac{v_0^2}{\rho}\hat{i}$$
$$\vec{A}=(3\frac{v_0^2}{\rho})\hat{i}-\frac{v_0^2}{\rho}k$$

4.3) ديناميكا جسيم في محاور دائرة (دوّارة):

Dynamics of a Particle in Rotating Coordinate System

حيث أن معادلة حركة الجسم في المحاور الأساسية (الثابتة) هي:

$$\vec{F}=m\frac{d^2\vec{R}}{dt} \qquad (1)$$

حيث $\vec{R}$ متجه موقع الجسم بالنسبة للمحاور الثابتة، $\vec{F}=$ محصلة القوى الحقيقية. لذلك يمكن كتابة معادلة (1) على الصورة التالية في المحاور المتحركة:

$$"\vec{F}"=m\ddot{r}=\vec{F}-m\vec{A}_0-2m\vec{w}\times\vec{\dot{r}}-m\dot{w}\times\vec{r}-m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) \qquad (2)$$

حدود المعادلة (2) هي ممثلة للقوى المؤثرة على الجسيم (الحقيقية والزائفة) وتعرف بما يلي:

(1) القوة الكوريولية (coriolis force) $= -2mw\times\vec{\dot{r}}$

(2) القوة المستعرضة (Transverse Force) $= -m\dot{w}\times\vec{r}$

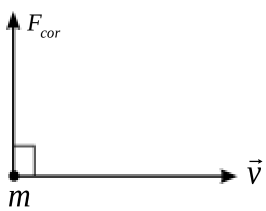
(3) القوة النابذة (قوة الطرد المركزية(Centripetal Force= $-m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$

أي أن معادلة (2) تعطي محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسيم:

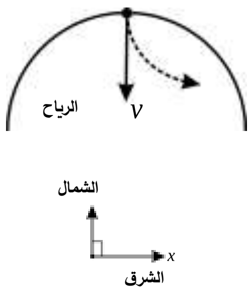
$$"F"=\vec{F}+\vec{F}_{cor}+\vec{F}_{trans}+\vec{F}_{cent}-m\vec{A}_0$$

المعنى الفيزيائي للقوى الزائفة:

(1) **القوة الكوريولية** $(-2m\vec{w}\times\vec{v})$ حيث $\vec{v}=$ سـرعة الجسـيم في المحاور المتحركة تكون هذه القوة متعامدة على إتجاه السرعة



(إتجاه الحركة). عملياً تظهر هذه القوة عندما تهب الرياح في نصف الكرة الأرضية الشمالي والجنوبي وبسبب دوران الأرض حول محورها حيث تؤدي إلى إنحراف الكتل الهوائية فمثلاً الرياح الشمالية التي تهب من جهة الشمال الجغرافي في نصف الكرة الشمالي تنحرف بفعل قوة كوريولوس نحو اليمين للمشاهد شكل(4-7).



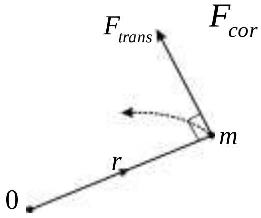
شكل(4.7)

<u>توضيح</u>: إذا كانت $\vec{v} = -\hat{j}\,v$

$\vec{w} = \hat{k}w$ (بسبب دوران الأرض)

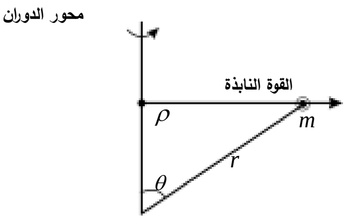
$$F_{cor} = -2m\hat{k}w \times (-\hat{j}\,v) = 2mwv(\hat{k} \times \hat{j}) = 2mwv(-\hat{i})$$

أي نحو إتجاه محور (x) إلى الغرب.



(2) القوة المستعرضة: تكون هذه القوة عمودية على إتجاه نصف القطر $\vec{r}$ تعمل على إكساب الجسيم تعجيل زاوي شكل(4.8).

شكل(4.8)



(3) **القوة النابذة**: تنشئ من الدوران حول محور معين وتكون متجه نحو الخارج شكل(4.9).

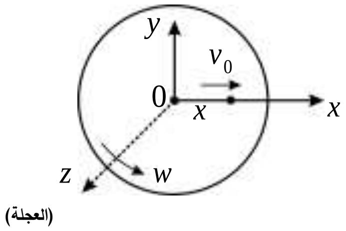
(بدلالة الإحداثيات الكروية)

$$\rho = r\sin\theta$$

$$F_{cent} = mw^2\rho = mw^2 r\sin\theta$$

شكل(4.9)

<u>مثال(1):</u> تزحف حشرة إلى الخارج على شعاع (نصف قطر) عجلة تدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور عمودي على مستواها. إذا كانت سرعة الحشرة إلى الخارج ثابتة v_0. جد جميع القوى المؤثرة على الحشرة.



شكل(4.10)

<u>الحل</u>: نختار محاور ثابتة على العجلة بحيث يكون محور x متجه على طول شعاع العجلة، شكل(4.10) لذلك

$$\vec{r} = \hat{i}x = \hat{i}(v_0 t) \qquad (1)$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}v_0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \qquad (2)$$

حيث $\vec{w} = \hat{k}w$. إذاً محصلة القوى المؤثرة على الحشرة:

$$"F" = \vec{F} - m\vec{A}_0 - 2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{w}}\times\vec{r} - m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

حيث $\vec{F}$ = قوة الإحتكاك بين أرجل الحشرة وسطح العجلة

$\vec{A}_0$ = صفر. إذاً حيث سرعة الحشرة ثابتة.

أما قوة كوريولوس

$$-2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} = -2mwv_0(\hat{k}\times\hat{i}) = -2mwv_0\,\hat{j} = -2mwv_0\,\hat{j}$$

حيث w = ثابتة، $\dot{w}$ = صفر القوة المستعرضة = صفر.

أما القوة النابذة:

$$-m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = -mw^2\times[\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{i})] = +mw^2 x\hat{i}$$

أي في إتجاه محور (x). لذلك معادلة الحركة للحشرة هي:

$$m\ddot{r} = "F" = 0 = \vec{F} - 2mwv\,\hat{j} + mw^2\times\hat{i} \qquad (3)$$

<u>مثال(2)</u>: في المثال السابق جد أقصى مسافة تتحركها الحشرة على الشعاع قبل أن تبدأ بالإنزلاق إذا كان معامل الإحتكاك (μ).

<u>الحل</u>: أعظم قيمة للاحتكاك $\mu(mg)$ أثناء الحركة تكون قوة الإحتكاك تساوي محصلة قوة كوريولوس + القوة النابذة

من معادلة (3) تنزلق الحشرة إذا تحقق الشرط:

$|F| \le [(2mwv_0)^2 + mw^2 x]^{1/2}$، وعليه

$$\mu mg = \sqrt{(2mwv_0)^2 + mw^2 x}$$

نحل المعادلة لإيجاد مقدار x حيث

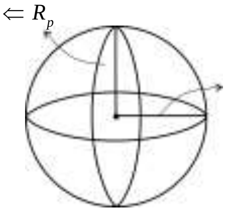
$$x = \frac{(\mu^2 g^2 - 4w^2 v_0^2)^{1/2}}{w^2}$$

4.4) تأثير دوران الأرض: Effects of Earth Rotation

نتنـاول تطبيق النتـائج الســـابقة على محاور متحركة على ســـطح الأرض. حيث الأرض تدور حول محورها مرة كل 24 ساعة فإن سرعتها الزاوية (w). نجدها

بقسمة (2π) زاوية نصف قطريه على هذا الزمن أي:

$$w = \frac{2\pi}{(24)(60)(60)s} = 7.3 \times 10^{-5}\, rad/\sec.$$



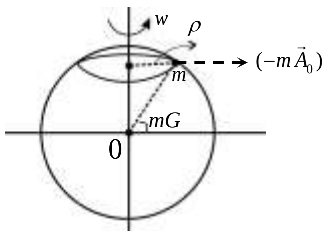
شكل(4.11)

بـالرغم من كون (w) صـــغيرة إلا أن لهـا تـأثير على حركـة الأجسام في محيط الأرض. كما أن الإنبعاج في سطح الكرة الأرضية عند خط الاستواء يعزى إلى دوران

الأرض حول نفسها أثناء تكوينها مما سبب الاختلاف بين نصف قطر الاستواء و قطر دائرة القطب وقد وجد حديثاً أن $R_e > R_p$ بمقدار 13 ميل.

ندرس معادلة الحركة للأجسام على سطح الأرض في حالة كون الجسم ساكناً.

(أ) التأثيرات الاستاتيكية الشاقول:



شكل(4.12)

نفرض أن جسماً كتلته m موضوع ساكناً على سطح الأرض (كما في الشكل4.12) يكون متجه الموقع له بالنسبة للمحاور المتحركة $\vec{r}=0$. حيث $w=$ ثابتة $\dot{w}=$ صفر. لذلك باستخدام معادلة الحركة للجسم:

$$m\ddot{r}=\vec{F}-m\vec{A}_0=0 \qquad (1)$$

" جميع التعجيلات، كوريولوس، المستعرض، الجذب المركزي تساوي صفر ".

$\vec{F}$ في معادلة (1) في حالة تعليق الجسم بخيط كما في حالة شاقول البناء

$\vec{F}=$ المجموعة الإتجاهي لقوة جذب الأرض للجسم بالنسبة للمحاور الأساسية والشد العمودي لخيط الشاقول $(-mg)$. إذاً

$$\vec{F}=(m\vec{G}-m\vec{g})$$

وعليه فإن معادلة (1) تؤول إلى:

$$m\vec{G}-m\vec{g}-m\vec{A}_0=0 \qquad (3)$$

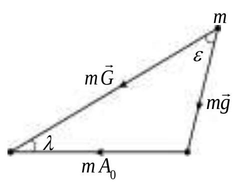
حيث $\vec{G}=$ عجلة الجاذبية الأرضية بالنسبة لمركز الأرض (المحاور الثابتة).

$\vec{g}=$ عجلة الجاذبية الأرضية بالنسبة للمحاور المتحركة على سطح الأرض.

$\vec{A}_0=$ تعجيل الجذب المركزي لنقطة أصل المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور الأساسية.

مركز الأرضنفرض $\lambda=$ درجة خط دائرة العرض عند موقع الجسم ($\lambda=0$ عند خط الإستواء $\lambda=90^\circ$ عند القطب). إذاً يكون نصف قطر دائرة العرض: $\rho=R_e\cos\lambda$ ، $R_e=$ نصف قطر الأرض. إذاً $A_0=\rho w^2=(R_e\cos\lambda)w^2$

وعليه فإن القوة النابذة $=-mA_0=-mR_e\cos\lambda\, w^2$



شكل(4.13)

حيث أن معادلة (3) تمثل معادلة متجه يمكن رسمها شكل(4.13) كالآتي: نستخدم قانون الجيوب في مثلث القوى:

$$\frac{\sin\varepsilon}{mR_e w^2\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{mg} \qquad (4)$$

حيث ε زاوية صغيرة، يمكن التقريب $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ ، وعليه فإن معادلة (4) تصبح:

$$\varepsilon \approx \frac{R_e w^2}{g}(\sin\lambda\cos\lambda)$$

إذاً

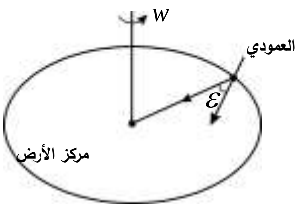
$$\boxed{\varepsilon \approx \frac{R_e w^2}{2g}\sin 2\lambda} \qquad (5)$$

$\varepsilon =$ زاوية إنحراف خيط الشاقول (ميزان البناء) عن الرأسي (العمودي على سطح الأرض).

كذلك عند تعليق الجسيم بخيط فإن هذا الخيط لا يكون متجهاً نحو مركز الأرض

بل ينحرف عنه بمقدار (ε°) بسبب دوران الأرض عند خط الإستواء $\lambda = 0$. إذاً

$\varepsilon = 0$ لا يوجد إنحراف لخيط الشاقول.



عند الأقطاب $\lambda = 90^\circ \Leftarrow 0 = \sin 180$

لا يوجد إنحراف للخيط حيث $\varepsilon = 0$.

يكون أعظم إنحراف لخيط الشاقول عندما تكون

$$\sin 2\lambda = 1 \Rightarrow 2\lambda = 90^\circ \Rightarrow \lambda = 45^\circ$$

ويكون مقداره:

$$\varepsilon \approx \frac{R_e w^2}{2g} \approx 1.7\times10^{-3}\, rad/\sec \approx 0.1\deg.$$

(ب) التأثيرات الديناميكية – حركة القذيفة:

Dynamic Effects – Motion of a Projectile

ندرس تأثير دوران الأرض على حركة قذيفة في مجال سطح الأرض. تكون معادلة الحركة للقذيفة:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + (m\vec{G} - m\vec{A}_0) - 2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} - m\vec{w}\times\vec{w}\times\vec{r} \qquad (1)$$

حيث $\vec{F} =$ مقاومة الهواء، w ثابتة، $\dot{w}=0$ ، بينما.

$m\vec{g} = (m\vec{G} - m\vec{A}_0)$ وزن الجسم بالنسبة للمحاور المتحركة.

بإهمال مقومة الهواء $(\vec{F}=0)$ تصبح معادلة (1):

$$m\ddot{r} = m\vec{g} - 2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} - m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) \qquad (2)$$

حيث الحد الثالث في معادلة (2) يحتوي على w^2 وهي كمية $\approx (10^{-5})^2 = 10^{-10}$ كمية صغيرة بالنسبة لحدود المعادلة مما يسمح بإهمالها في المعادلة دون خطأ يذكر وعليه فإن:

$$m\ddot{r} = m\vec{g} - 2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} \qquad (3)$$

هذه معادلة الحركة لقذيفة تتحرك في مجال سطح الأرض بسرعة $(\dot{\vec{r}})$ بالنسبة للمحاور المتحركة. نختار محاور متحركة على سطح الأرض $(oxyz)$ حيث محور x يشير إلى جهة الشرق، محور y نحو الشمال ، محور z رأسياً بإتجاه خط الشاقول شكل(4.14).

شكل(4.14)

لذلك فإن

$$\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}\ ;\ \ \vec{g} = -\hat{k}g$$

إذاً . $w_x = 0\ ;\ w_y = w\cos\lambda\ ;\ w_z = w\sin\lambda$

$$\vec{w}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & w_y & w_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(w\dot{z}\cos\lambda - w\,\dot{y}\sin\lambda) + \hat{j}\,(w\,\dot{x}\sin\lambda) + \hat{k}\,(-w\,\dot{x}\cos\lambda) \qquad (4)$$

بفرز مكونات معادلة (3) بالإحداثيات الديكارتية نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -2w(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ \ddot{y} &= -2w(\dot{x}\sin\lambda) \\ \ddot{z} &= -g + 2w\dot{x}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

معادلة (5) تمثل المعادلات التفاضـــلية لمعادلة حركة الجســـم في الإحداثيات الكارتيزية، نكامل معادلات (5) بالنسبة للزمن لنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2w(z\cos\lambda - y\sin\lambda) + \dot{x}_0 \\ \dot{y} &= -2wx\sin\lambda + \dot{y}_0 \\ \dot{z} &= -gt + 2wx\cos\lambda + \dot{z}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

حيث $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ مركبات السرعة الإبتدائية في الإحداثيات الكارتيزية.

نعوض معادلة (6) في معادلة (5) لنحصل على:

$$\ddot{x} = -2wgt\cos\lambda + 2w(\dot{z}_0\cos\lambda - \dot{y}_0\sin\lambda) + \cdots \text{ حدود مهملة} \qquad (7)$$

ثم نكامل معادلة (7) لنحصل على:

$$\dot{x} = -wgt^2\cos\lambda - 2w(\dot{z}_0\cos\lambda - \dot{y}_0\sin\lambda) + \dot{x}_0$$

(مركبة السرعة في إتجاه x)، ثم نكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن لنحصل:

$$x(t) = -\frac{1}{2}mg\cos\lambda\, t^3 - w(\dot{z}_0\cos\lambda - \dot{y}_0\sin\lambda)t^2 + \dot{x}_0\, t \qquad (8a)$$

نجري نفس الخطوات الجبرية لنحصل على $\dot{y}$، وكذلك y لنحصل على:

$$y = \dot{y}_0 t - w\dot{x}_0 t^2 \sin\lambda \qquad (8b)$$

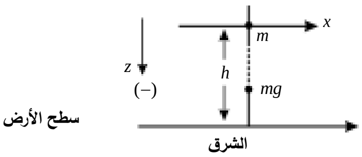
وكذلك $\dot{z}$ ، $z(t)$ تكون على الصورة:

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t + w \dot{x}_0 t^2 \cos\lambda \qquad (8c)$$

" في معـادلـة الموقع x ، y ، z أهملـت جميع الحـدود التي تحتوي على قوى w التربيعيـة والأكبر من ذلك. "

مثال: لنفرض أن قذيفة سقطت من علو h عن سطح الأرض حيث $\dot{x}_0 = 0$ ، $\dot{y}_0 = 0$ ، $\dot{z}_0 = 0$ جد مقدار إنحراف القذيفة عن الرأس.

الحل: نستخدم معادلات (8):



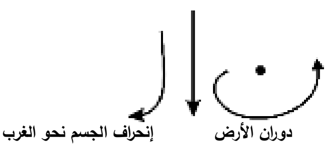
$$x = -\frac{1}{3} w g \cos\lambda\, t^3 \;\; ; \; y = 0 \;\; ; \; z = -\frac{1}{2} g t^2$$

حيث: $-h = z = -\frac{1}{2} g t^2$. إذاً

$$-h = -\frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

وعليه فإن $x(t) = -\frac{1}{3} w g \cos\lambda (\frac{2h}{g})^{3/2}$

مقدار الإنحراف عن الشـــاقولي. أمـا إتجـاه الإنحراف نحو الغرب لأن الأرض تدور نحو الشرق بالنسبة للمشاهد شكل(4-15).

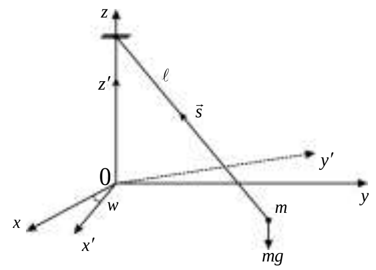


شكل(4−15)

4.5) بندول فوكو: Foucault Pendulum

في عـام 1851م أجرى العـالم الفرنســـي جـان فوكو تجربـة لإثبـات حركـة الأرض الـدورانيـة وذلك بإســتخدام بندول حيث علق كرة بحبل طويل في ســقف كنيس في فرنســا (كما في الشــكل4-16). معادلة حركة البندول هي:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{s} - 2m\vec{w}\times\dot{\vec{r}} \qquad (1)$$



حيث $\vec{s}=$ الشدة في الخيط، (مع إهمال قوة الجذب المركزي) نفرض أن

$\ell=$طول الخيط. نحلل القوة في الشد على النحو:

شكل(4.16)

$$s_x = -\frac{x}{\ell}s \; ; \; s_y = -\frac{y}{\ell}s \qquad (2)$$

بينما

$$\vec{w}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

حيث: $\vec{w}=(w\cos\lambda)\hat{j}+(w\sin\lambda)\hat{k}$ ، بفرز مكونات معادلة (1) بالإحداثيات الكارتيزية:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{\ell}s - 2mw(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{\ell}s - 2mw\dot{x}\sin\lambda \qquad (3)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{z}{\ell} - mg + 2mw\dot{x}\cos\lambda$$

عندما تكون إزاحة الشاقول صغيرة فإن قيمة الشد $(\vec{s}) = mg$ تقريباً.

ويمكن أيضاً إهمال $\dot{z}$ بالنسبة $\dot{y}$ لتصبح معادلة الحركة:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x + 2w'\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{\ell}y + 2w'\dot{x} \qquad (4)$$

حيث $w' = w\sin\lambda$.

بفعل دوران الأرض يمكن تصور أن الحركة عبارة عن تدوير للمحاور $oxyz \leftarrow ox'y'z'$ بزاوية قدرها $(w't)$ وعليه فإن الإحداثيات الجديدة x', y' تعطى على النحو:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w't & \sin w't \\ -\sin w't & \cos w't \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{5}$$

وعليه فإن:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos w't + y'\sin w't \\ y &= y'\cos w't - x'\sin w't \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

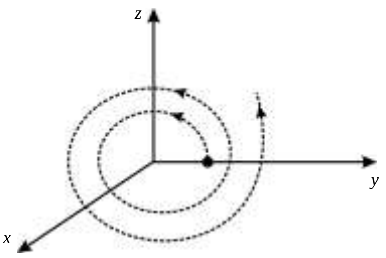
نجد $\dot{x},\dot{y}$ من معادلة (6) ثم نعوضها في معادلة (4) لنحصل على (مع إهمال الحدود المحتوية على w'^2 وأكثر):

$$(\ddot{x}' + \frac{g}{\ell}x')\cos w't + (\ddot{y}' + \frac{g}{\ell}y')\sin w't = 0 \tag{7}$$

وحيث أن هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (t) فإن معاملات الجيب وجيب التمام يجب أن تكون صفراً وعليه:

$$\ddot{x}' + \frac{g}{\ell}x' = 0 \quad ; \quad \ddot{y}' + \frac{g}{\ell}y' = 0 \tag{8}$$

تمثل هذه معادلات حركة لمتذبذب توافقي في بعدين ويكون المسار على شكل قطع ناقص ويكون لف أو غزل (Precession) قطر القطع الناقص باتجاه ضد عقارب الساعة في نصف الكرة الشمالي وبسرعة زاوية $w' = w\sin\lambda$ بالنسبة للمحاور الثابتة $oxyz$.



إذا سحب البندول جانباً ثم ترك ليتذبذب فإنه يعمل طوافاً (Precession) في اليوم بسرعة زاوية (w') ويكون زمن الدورة يساوي:

$$\frac{2\pi}{w'} = \frac{2\pi}{w\sin\lambda} = \frac{2y(hours)}{\sin\lambda}$$

فإذا كانت زاوية خط العرض $\lambda = 45^\circ$ فإن زمن الطواف $= 34hrs$ وبذلك أثبت فوكو أن الأرض تدور بسرعة w من طواف البندول.

تمارين

(1) نقل شاقول بناء في قطار متحرك، فإذا كانت m تمثل كتلة كرة الشاقول جد الشد في الخيط وإنحرافه عن العمود الموضعي إذا كان:

(أ) يتحرك القطار بتعجيل ثابت $\vec{a}_0$ وبإتجاه معلوم.

(ب) القطار يتحرك على منحنى نصف قطره ρ بإنطلاق ثابت V_0.

<u>ملاحظة</u>: أهمل التأثيرات الناتجة عن دوران الأرض.

(2) تزحف حشرة بإنطلاق v في مسار دائري نصف قطره b على قرص يدور بسرعة زاوية (w) ثابتة. صف الحركة بالنسبة لمحاور مثبتة على القرص الدائر. ثم جد التعجيل $\vec{A}$ للحشرة بالنسبة إلى الخارج وقوة الإحتكاك المؤثرة على الحشرة في الحالتين: (أ) $v = bw$ ، (ب) $v = -bw$

(3) جد مقدار إتجاه القوة الكوريولية المؤثرة على سيارة سباق كتلتها $1800kg$ وتسير نحو الشمال بإنطلاق $560 km/hr$ وفي خط عرض 45° شمالاً.

(4) سقط جسم من إرتفاع $100m$ أين سيضرب الأرض؟ أفرض أن $\lambda = 45^\circ$ شمالاً.

(5) نقل شاقول بناء في طائرة متحركة متجه نحو الشرق بسرعة v. جد الإنحراف الزاوي لخيط الشاقول عن العمود الموضعي. ما يجب أن تكون سرعة الطائرة حتى يكون الإنحراف مساوياً لدرجة واحدة. على فرض أن $\lambda = 45^\circ$ شمالاً.

(6) بيّن أن المعدل الزمني لتغير متجه $\vec{w}$ يكون متساوي في المحاور الثابتة أو الدائرة.

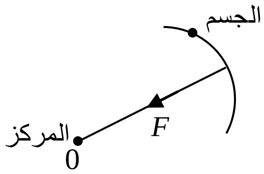
(7) أطلقت قذيفة شاقولياً بإنطلاق v_0 فإذا أهملت مقاومة الهواء وكانت g ثابتة. أين تسقط القذيفة عندما تضرب الأرض.

الفصل الخامس :القوى المركزية وميكانيكا الأجرام السماوية

Central Forces & Celestial Mechanics

تعرف القوة المركزية بأنها كل قوة يمر خط تأثيرها (عملها) في نقطة ثابتة تسـمى مركز القوة مثل قوة جذب الأرض، القوة الكهروستاتيكية.

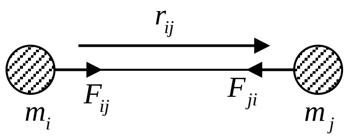
القوة بين الأقطاب المغناطيسية, وعادة تكون هذه القوى قوى محافظة.



شكل(5.1)

5.1) قانون الجذب العام: Law of gravity

وضع نيوتن عام 1666م قانون الجذب بين كتلتين ماديتين على الصورة الرياضية:



شكل(5.2)

$$\vec{F}_{ij} = G\frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^2}\,\hat{r}_{ij}^2 \qquad (1)$$

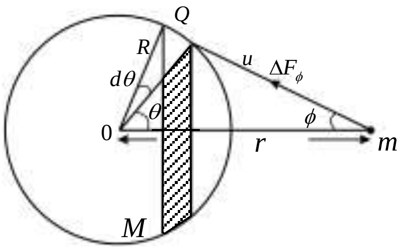
حيث $G =$ ثابت الجذب العام $\approx 96.673 \pm 0.003) \times 10^{-11} = N \cdot m^2 / kg^2$

<u>مع ملاحظة</u>: أن قوة الجذب العام متبادلة بين الجسمين بمعنى $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

5.2) قوة الجذب بين جسيم وكرة مادية منتظمة:

نريد إثبات أن التجاذب بين جســم (نقطة مادية) وكرة مادية منتظمة تكون كما لو كانت كتلة الكرة متجمعة أو متمركزة في مركزها الهندسي (مركز ثقل الكرة).

البرهان: نفرض أن جسيم كتلته (m) موضع على بعد (r) من مركز قشرة كروية كتلتها (M) ونصف قطرها (R).



شكل(5.3)

شكل(5.3)، نقسم القشرة إلى حلقات دائرية عرضها $R(\Delta\theta)$ ويكون محيط الحلقة $(2\pi R\sin\theta)$.

إذاً مساحة الحلقة $= 2\pi R^2 \sin\theta\Delta\theta$

نفرض أن ΔM كتلة الحلقة، $\rho =$ كثافة مادة القشرة، لذلك:

$$\nabla M = \rho 2\pi R^2 \sin\theta\Delta\theta \qquad (1)$$

نطبق قانون الجذب العام بين الحلقة والجسيم على أفتراض أن $u =$ المسافة بينهما، ولنفرض أن هذه القوة $= \Delta F_Q =$ حيث:

$$\Delta F_Q = \frac{G(m)\Delta M}{u^2} \qquad (2)$$

نحلل هذه القوة إلى مركبتين أفقية $(\Delta F_Q)\cos\phi$ وعمودية $(\Delta F_Q)\sin\phi$. بسبب وجود التماثل للقشرة الكروية فإن المجموع الجبري لمركبات القوة العمودية يساوي صفر ولا يبقى إلا المركبات الأفقية. إذاً

$$\Delta F = \frac{Gm\Delta M}{u^2}\cos\phi \qquad (3)$$

بالتعويض بدل ΔM من معادلة (2) نحصل:

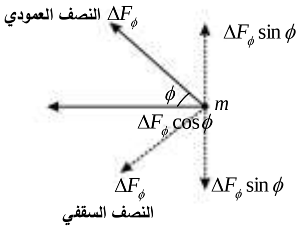
$$\Delta F = \frac{Gm 2\pi\rho R^2 \sin\theta\cos\phi}{u^2}\Delta Q \qquad (4)$$

إذاً

$$F = \int dF = Gm 2\pi\rho R^2 \int_0^\pi \sin\theta\cos\phi\, d\theta \qquad (5)$$

حيث μ ، ϕ، θ ثلاثة متغيرات، يلزم التعويض بالعلاقات التالية لحذفها:

من المثلث: قانون جيوب التمام يعطي:

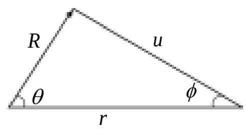


شكل(5.4)

$$u^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta$$

بإشتقاق المعادلة بالنسبة لـ θ:

$$\frac{2u\,du}{d\theta} = 0 + 0 + 2Rr\sin\theta$$



شكل(5.5)

$$u\,du = r\,R\sin\theta\,d\theta \Rightarrow \sin\theta\,d\theta = \frac{u\,du}{Rr} \quad (6)$$

وكذلك في المثلث نفسه فإن قانون جيوب التمام يعطي:

$$R^2 + u^2 + r^2 - 2u\,r\cos\phi$$

إذاً

$$\cos\phi = \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2ur} \quad (7)$$

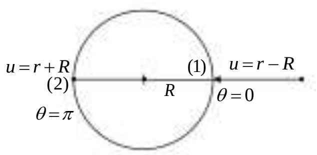
نستخدم المعادلات (6،7) مع معادلة (5) لنحصل على:

$$F = \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi;u=r+R} [1 + (\frac{r^2 - R^2}{u^2})]du$$

لاحظ حدود التكامل على (u): بين النقطتين (1)، (2) $\Leftarrow u = r + R$

وكذلك $M = 4\pi R^2 \rho$ استخدمت في المعادلة.

من نتيجة التكامل نحصل:



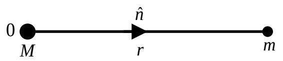
شكل (5.6)

$$F = \frac{GmM}{4Rr^2}[u - (\frac{r^2 - R^2}{u})]_{r-R}^{r+R}$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2}[r + R - (\frac{r^2 - R^2}{r + R}) - (r - R - (\frac{r^2 - R^2}{r - R})]$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2}(4R) = \frac{GmM}{r^2}$$

أما إتجاه القوة يكون بإتجاه $\hat{n} =$ وحدة متجه من المركز (0) نحو الخارج إلى الجسيم (m)



$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. إذاً $\vec{F} = \frac{GmM}{r^2}\hat{n}$

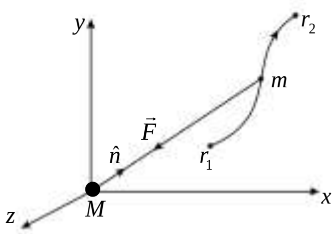
هذا يبرهن أن القشرة الكروية (أو الكرة المصمته) عندما تتجاذب مع جسيم خارجها فإن المسافة بينهما تقاس من مركز القشرة (الكرة) وكأن كل مادة القشرة متواجدة في المركز الهندسي للقشرة.

5.3) الطاقة الكامنة في مجال الجاذبية – جهد الجاذبية:

Potential Energy in Gravitational Field

عند تحريك جسـيم كتلة (m) في مجال الجاذبية الأرضـية فإنه يلزم بذل شـغل قدره (w) لتحريك هذا الجسيم ضد قوة الجاذبية الناتجة عن وجود جسيم آخر كتلته (M) (كما في الشكل5.7):

حيث قوة الجاذبية بين الجسمين:



شكل(5.7)

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{n} \qquad (1)$$

الإشارة $(-)$ لأن القوة تجاذب. وعليه يلزم بذل قوة مضادة قدرها $(-\vec{F})$ وهذه القوة تعمل شغل قدره عند نقل الجسيم (m) من r_1 إلى r_2

$$dW = (-\vec{F})\cdot d\vec{r} = \frac{GmM}{r^2}\hat{n}\cdot d\vec{r} = \frac{GmM}{r^2}dr \qquad (2)$$

$dr =$ مسقط $d\vec{r}$ في إتجاه $(\hat{n})$. إذاً

$$W = mM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -GmM[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}] \qquad (3)$$

تعريف: الطاقة الكامنة لجسيم عند نقطة معينة في مجال جاذبية جسيم آخر هي الشغل المبذول لتحريك هذا الجسيم من موضع إختباري (مرجعي) وعادة يكون في المالانهاية إلى تلك النقطة. أي تكون $r_2 = r$ ، $r_1 = \infty$

من معادلة (3):

$$W = V(r) = -GmM[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}] = -\frac{GmM}{r} \qquad (4)$$

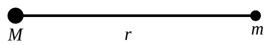
نفرض أن مقدار $GmM = k$ عند تناول المسائل بين الشمس (M) والأرض (m) لتسهيل كتابة المعادلات في حالة حركة الأجرام السماوية.

تصبح الطاقة الكامنة: $V = -k/r$

تعريف: جهد الجاذبية: Gravitation Potential

مقدار الطاقة الكامنة عند نقطة ما لكل وحدة جسيم موضوعة عندها تسمى بجهد الجاذبية. فمثلاً جهد الجاذبية عند نقطة تبعد (r) عن جسيم كتلته (m) هي:

$$\Phi = \frac{V(r)}{m} = -\frac{GM}{r} \qquad (1)$$



حيث $\Phi =$ جهد الجاذبية.

تعريف: شدة مجال الجاذبية هو مقدار القوة المؤثرة على جسيم كتلته الوحدة موضوع في مجال جاذبية جسيم آخر ويرمز له بالرمز $(\vec{g})$ حيث

$$\vec{g} = \vec{F}/m = -\frac{GM}{r^2}\hat{n} \qquad (2)$$

من مقارنة المعادلتين (1) مع (2) نلاحظ أن $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ أو $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ كما مرّ شرحه في الفصل الثالث للعلاقة بين القوة وتحدر دالة الجهد.

5.4) الطاقة الكامنة في مجال مركزي عام:

Potential Energy in a general Central Field

حيث أن القوة المركزيـة هي دالـة فقط لمتجـه الموقع (r) أي أن: $\vec{F} = f(r)\hat{n}$ وليس للقوة المركزيـة أي مركبة مماسية . إذاً $f(\theta) \neq F$ وعليه فإن كل قوة مركزية تكون قوة محافظة بمعنى أن: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ ، وعليه يصـاحب هذه القوة دالة عددية هي دالة الطاقة الكامنة $V(r)$ والعلاقة بينهما رياضـياً على النحو التالي:

$$V = -\int \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = -\int f(r)\,dr$$

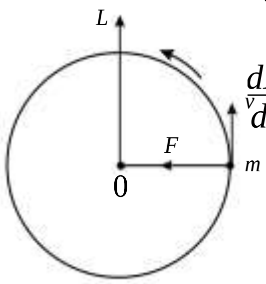
أو

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) \;\Rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial r} = -f(r)$$

5.5) الزخم الزاوي في المجالات المركزية:

Angular Momentum in Central Fields

كما مرّ وسبق شرحه في الفصل الثالث وجدنا أن كمية الحركة الزاوية لجسيم تعرف على الصورة: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$ ، وأن معادلة الحركة للجسم في الحركة الدورانية $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$ في حالة المجالات المركزية فإن $\vec{F}\,//\,\vec{r}$ ، وعليه فإن $\vec{r}\times\vec{F}=0$ ، وعليه فإن $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ ت



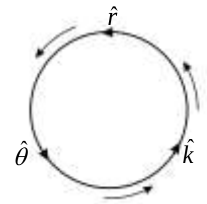
شكل(5.8)

أن الزخم الزاوي لجسـيم يتحرك في مجال مركزي دائماً يبقى ثابتاً أثناء الحركة (قانون حفظ الزخم الزاوي).

والصورة الرياضية للزخم الزاوي بدلالة الإحداثيات القطبية (r,θ) هي:

$$\left|\vec{L}\right| = |\vec{r}\times m\vec{v}| \;;\; \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \;;\; \vec{r} = |r|\hat{r}$$

عند الضرب الإتجاهي نحصل على ما يلي: $(\hat{r}\times\hat{r}=0)$ ، $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{k}$



شكل(5-9)

(العمودي) على المستوى الذي يتحرك فيه الجسيم

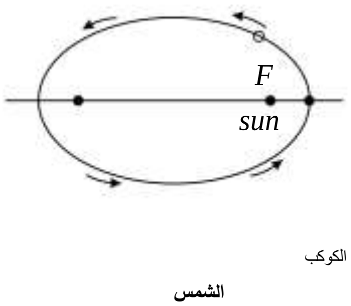
$$\boxed{\vec{L} = mr^2\,\dot{\theta}\,\hat{k}}\ \left|\vec{L}\right| = mr^2\hat{\theta} \Rightarrow$$

حيث $\dot{\theta}$ تمثل السرعة الزاوية (الدورانية) للجسم في المسار $= (w)$ ولذلك يمكن التعبير عن الزخم الزاوي $\left|\vec{L}\right| = mr^2 w$.

<u>تطبيق</u>: نلاحظ أن الأرض تدور (تتحرك) في مجال الجاذبية للشمس وعليه فإن مقدار الزخم الزاوي للأرض يظل ثابتاً أثناء الحركة. وهذا المقدار له نفس القيمة منذ بدء الخليقة حتى يومنا هذا. $\vec{L}$ له نفس المقدار والإتجاه. وحتى يتغير $\vec{L}$ لابد من وجود قوة خارجية تؤثر على الأرض !!

5.6) قوانين كبلر : Keplar Laws

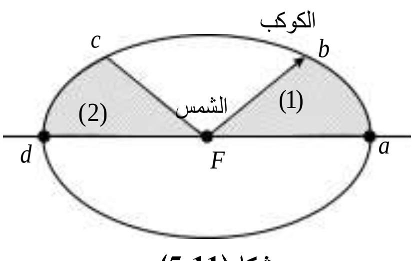
في عام 1609م وضع الألماني كبلر(1571-1630م) ثلاثة قوانين لوصف حركة الكواكب حول الشمس وعرفت بأسمه



شكل(5.10)

<u>القانون الأول</u>: يتحرك كوكب حول الشمس في مدار فعلق على شكل قطع ناقص بحيث تكون الشمس في بؤرته (Focus) (كما في الشكل5.10).

<u>القانون الثاني</u>: يمسح متجه نصف القطر (المتجه الواصل من الشمس نحو موقع الكوكب) مساحات متساوية في أزمنة متساوية. بمعنى مساحة أستغرقه الكوكب في الإنتقال من الموقع (a) إلى الموقع



شكل(5.11)

(b) هـــو نفـــس الـــزمن لإنتقالـــه مـــن (c) إلـــى   d

. او بعبارة اخرى ،

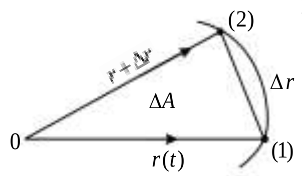
مســـــــــاحة القطـــــــــاع $(1) =$ مســـــــــاحة القطـــــــــاع (2) .

وعليـــــه ، يمكـــــن تعريـــــف الســـــرعة المســـــاحية كمـــــا يلي:

السرعة المساحية: Areal Velocity

لنفـــرض أن كوكبـــاً مـــا انتقـــل مـــن الموقـــع (1) إلـــى الموقـــع (2) فـــي زمـــن قـــدره (Δt) فـــــإن متجـــــه الموقـــــع يتغيـــــر مـــــن $\vec{r}$ إلـــــى $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ وتكـــــون مســـــاحة القطاع $\approx$ مساحة المثلث $(012) = \Delta A$ شكل(5.12)

شكل(5.12)



حيث $\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$ وبأخذ المعدل الزمني للتغير في المساحة نحصل على:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times\dot{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| \qquad (1)$$

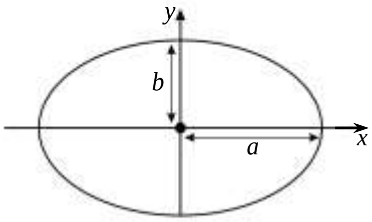
بضرب وقسمة معادلة (1) على m نحصل على:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r}\times m\vec{v}| = \frac{1}{2m}|\vec{r}\times\vec{p}| = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

وحيث أن $|\vec{L}| =$ مقدار ثابت، إذاً السرعة المساحية $\frac{dA}{dt} =$ ثابت في المجال المركزي. وهذا يبرهن صحة القانون الثاني لكبلر وهو أن المعدل الزمني لتغير المساحة يساوي ثابت.

القانون الثالث: مربع زمن دورة أي كوكب حول الشـــمس يتنـاســـب طردياً مع مكعب طول المحور الرئيســي للمدار (سـيأتي برهان ذلك). لنفرض أن τ = زمن دورة الكوكب حول الشـمس، a نصـف قطر المحور الرئيسي للمدار شكل(5.13)

$$\boxed{\tau^2 \propto a^3}$$



شكل(5.13)

ملاحظة: معادلة القطع الناقص في الإحداثيات

الديكارتية: $(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1)$

ثم جاء بعد كبلر العالم نيوتن الذي أوضح أن **قوانين كبلر** هي من نتاج قانون الجذب العام المعروف بأسمه.

5.7) معادلة مدار الكوكب في مجال مركزي:

Orbital Equation of a Planet in a Central Field

حيث أن معادلة أي جسيم كتلته (m) تحت تأثير قوة مركزية $f(r)$ هي:

$$m\vec{a}_r = f(r)\hat{r} \qquad (1)$$

حيث أن المجال مركزي فإن $f(\theta) = 0$ (لا يوجد اعتماد على θ) وعليه فإن مركبة التعجيل الزاوية (المماسية) $a_\theta = 0$ ومعادلة الحركة في هذا الإتجاه هي:

$$ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (3)$$

ومن قوانين المشتقات نجد أن:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})r$$

لذا تصبح معادلة(3) بعد ضرب طرفيها في (r) وقسمة الطرفين على (m) كالآتي:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta}=\boxed{\text{ثابت}}}$$

نفرض أن ثابت $= h = r^2\dot{\theta}$ ، مع ملاحظة أن $L = mr^2\dot{\theta}$ في الإحداثيات القطبية فإن $h = \frac{L}{m}$ هي كمية الزخم الزاوي لكل وحدة كتل.

<u>لإيجاد متجه الموقع</u> $r(t)$: نستخدم معادلة (2) مع استبدال (r) بمتغير جديد هو u حيث $u = \frac{1}{r}$ وعليه فإن:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} \qquad (4)$$

حيث $h = \frac{\dot{\theta}}{u^2}$. إذاً

$$\boxed{\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}} \qquad (5)$$

أما $\dot{\theta} = hu^2$ ، ثم نشتق معادلة (5) بالنسبة للزمن مرة أخرى للحصول على المشتقة الثانية:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -h\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta}) = -h\frac{d}{d\theta}(\frac{du}{d\theta})\frac{d\theta}{dt} = -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

إذاً

$$\boxed{\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}}$$

نعوض بدل $\ddot{r}$ ، $\dot{r}$ ، $\dot{\theta}$ في معادلة الحركة للجسيم لنحصل بعد ترتيب الحدود والأختصار على

$$m[-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}(hu^2)^2] = f(1/u)$$

وعليه فإن :

$$-mh^2u^2[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u] = f(1/u)$$

إذاً

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{f(1/u)}{mh^2u^2}} \qquad (5)$$

هذه معادلة المدار التفاضلية لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية بدلالة u، θ.

<u>مثال(1):</u> يتحرك جسيم كتلته m في مجال مركزي بشكل لولبي (حلزوني) معادلته هي $r=c\theta^2$، حيث c ثابت. جد قانون القوة المركزية المؤثرة على الجسم.

<u>الحل:</u>

$r=\frac{1}{u}=c\theta^2 \Rightarrow u=\frac{1}{c}\theta^2$. إذاً

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{c}(-2\theta^{-3})\ ;\ \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{6}{c}\theta^{-4}$$

نكتب المشتقة الثانية بدلالة u: حيث $u=\frac{1}{c\theta^2}$ فإن: $\frac{d^2u}{d\theta^2}=6cu^2$ نعوض في معادلة المدار التفاضلية:

$6cu^2+u=-\frac{1}{mh^2u^2}f(1/u)$. فنجد أن

$$f(1/u)=-mh^2u^2(6cu^2+u)=-mh^2(6cu^4+u^3)$$

وعليه فإن

$$f(r)=-mh^2(\frac{6c}{r^4}+\frac{1}{r^3})$$

<u>مثال(2):</u> جد $\theta(t)$ في المثال السابق.

<u>الحل:</u> $h=\dot{\theta}r^2 \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{h}{r^2}=hu^2$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{c^2\theta^4} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{c^2}\theta^{-4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{\theta^{-4}} = \frac{h}{c^2}\int dt \Rightarrow \int \theta^4 d\theta = \frac{h}{c^2}\int dt$$

$$\Rightarrow [\frac{\theta^5}{5}] = \frac{h}{c^2}t \Rightarrow \theta^5 = \frac{5h}{c^2}t \Rightarrow \theta = (\frac{5h}{c^2}t)^{1/5}$$

5.8) معادلة الطاقة للمدار: Energy Equation of the orbit

حيث أن السرعة في الإحداثيات القطبية تعطي بالعلاقة:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + (r\hat{\theta})^2 \qquad (1)$$

لنفرض أن دالة طاقة الوضع عند موقع ما على المدار هي $V(r)$. إذاً قانون حفظ الطاقة هو:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E_0 = \text{ثابت}$$

$$\frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] + V(r) = E_0 \qquad (2)$$

بالتعويض $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ، $\dot{\theta} = hu^2$ في المعادلة (2) نحصل على:

$$\boxed{\frac{1}{2}mh^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] + V(1/u) = E_0} \qquad (3)$$

معادلة (3) هي معادلة طاقة المدار وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى للمتغير u مع θ ، (لاحظ الفرق بين معادلة المدار ومعادلة طاقة المدار).

__مثال(3):__ في المثال (1) أكتب معادلة طاقة المدار ثم جد دالة القوة من المعادلة.

__الحل:__ حيث

$$r = c\theta^2 \Rightarrow u = \frac{1}{c}\theta^{-2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{c}\theta^{-3}$$

نكتب المشتقة بدل (u): حيث $\theta=(\frac{1}{cu})^{1/2}$. إذاً

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{2}{c}[\frac{1}{\sqrt{1/cu}}]^{+3}=\frac{-2}{c}c^{3/2}u^{3/2}=-2c^{1/2}u^{3/2}$$

معادلة الطاقة هي:
$$\frac{1}{2}mh^2[4cu^3+u]+V(1/u)=E_0$$

من هذه المعادلة نجد دالة الطاقة الكامنة:

$$V(1/u)=E_0-\frac{1}{2}mh^2[4cu^3+u^2]\ \ ;\ \ V(r)=E_0-\frac{1}{2}[\frac{4c}{r^3}+\frac{1}{r^2}]$$

إذاً

$$f(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}=0-\frac{1}{2}mh^2[-\frac{12c}{r^4}-\frac{2}{r^3}]=mh^2(\frac{6c}{r^4}-\frac{1}{r^3})$$

5.9) المدارات في مجال التربيع العكسي:

Orbit in Inverse Square Law

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على إشتاق معادلة المدار بدلالة الإحداثيات القطبية (r,θ) و الجسيم يتحرك في مجال تربيع عكسي تجاذبي حيث أن القوة تعطي بالعلاقة:

$$F(r)=-k/r^2 \qquad (1)$$

حيث في مجال الجاذبية الأرضية $k=GMm$، المعادلة التفاضلية للمدار بدلالة (θ,u) هي:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=+u=-\frac{1}{mh^2u^2}\cdot(-ku^2)=\frac{k}{mh^2} \qquad (2)$$

معادلة (2): معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية غير متجانسة لها حل عام يعطى بالعلاقة:

$$u=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{k}{mh^2} \qquad (3)$$

وبدلالة (r):

$$\boxed{r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0)+k/mh^2}} \qquad (4)$$

حيث الثوابت A ، θ_0 تحدد من الشروط الإبتدائية للحركة(عند $t=0$) كما ورد في الفصل الثالث في حركة المتذبذب التوافقي. لنفرض $\theta_0 = 0$ إذاً معادلة المدار القطبية هي:

$$r = \frac{1}{A\cos\theta+k/mh^2} \qquad (5)$$

هذه معادلة قطع مخروطي (Conic Section) (ناقص، مكافئ، زائد) مع وجود نقطة الأصل في البؤرة. ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة القياسية (Standard) على النحو التالي:

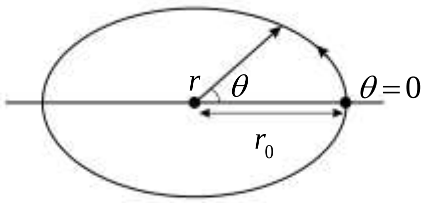
$$r = \frac{1}{(k/h^2m)[1+\frac{Ah^2m}{k}\cos\theta]}$$

لنفرض أن: الإختلاف المركزي $e = Amh^2/m$. إذاً

$$r = \frac{mh^2/k}{[1+e\cos\theta]} \qquad (6)$$

عند $\theta=0$ ، فإن $r_0 = r = \frac{mh^2/k}{[1+e]}$ تصبح معادلة (6) بالصورة القياسية هي:

$$r = r_0(\frac{1+e}{1+e\cos\theta}) \qquad (7)$$



شكل(5.14)

حيث في حالة القطع الناقص يضعف المدار حسب مقدار الإختلاف المركزي (e)

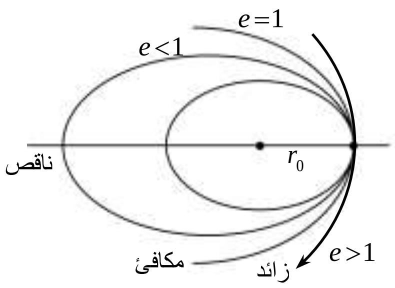
وهناك الحالات التالية:

1) يكون المدار دائري عندما $e=0$ حيث تصبح معادلة (7) على صورة ثابت $r=r_0$ وهذه معادلة الدائرة.

2) يكون المدار قطع مكافئ (Parabola) إذا كانت قيمة $e=1$ وعليه فإن

$$r = \frac{2r_0}{1+\cos\theta}$$

3) يكون المدار قطع ناقص (بيضاوي) مغلق إذا كانت $e<1$ ويكون المدار قطع زائد (Hyperbola) إذا كانت $e>1$.
ويمكن بالرسم شكل(5.15) توضيح ذلك:

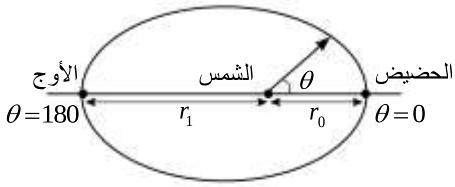


شكل(5.15)

- في حالة الكواكب (حسب قوانين كبلر) فإن المدار يكون قطع ناقص. عندما يكون الكوكب في أقرب موقع من الشمس $(r=r_0)$ يسمى هذا الموقع بالحضيض الشمسي (Perihelion). أما عندما يكون الكوكب في أبعد نقطة عن الشمس فإن هذا الموقع يسمى الأوج الشمسي (Aphelion) شكل(5.16) ويكون البعد $(r=r_1)$ حيث $\theta=180^\circ$ ، إذاً $\cos180=-1$ وعليه من معادلة (7) نجد:

$$r_1 = R_0\frac{(1+e)}{1-e} \tag{8}$$

- **<u>مدار الكوكب حول الشمس:</u>**



شكل(5.16)

القياسات لمدار الأرض حول الشمس هي: $e=0.017$. وأن

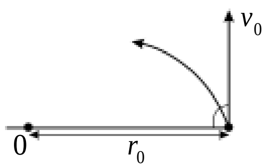
$$r_0 = 91\times10^6\,miles\ ,\ r_1 = 95\times10^6\,miles$$

<u>معادلة المدار بدلالة السرعة</u>: (البراميترات المدارية Orbital Parameter)

وجدنا أن $r_0 = \dfrac{mh^2}{k(1+e)}$ ، وحل هذه المعادلة في (e) يعطي:

$$e = \frac{mh^2}{kr_0} - 1$$

لنفرض أن جسـماً أنطلق بسـرعة إبتدائية v_0 عند $\theta=0$ (كما في الشـكل5.17)، فإن قانون حفظ الزخم الزاوي يؤول إلى:



شكل(5.17)

ثابت $= h=r^2\dot{\theta}=r_0^2\dot{\theta}_0$ ، حيث $\dot{\theta}_0=w=v_0/r_0$. إذاً

$h=r_0\,v_0=$ ثابت

<u>ملاحظة</u>: أي أن عند الأوج وعند الحضيض فإن $h=$ثابت

وعليه $\boxed{r_1v_1=r_0v_0}$.

إذاً

$$e=\frac{mr_0v_0^2}{k}-1 \tag{1}$$

وإذا فرضنا أن المدار دائري فإن: $e=0$ ،

$$k=mr_0v_0^2 \;\Rightarrow\; \frac{k}{r_0}=mv_0^2 \tag{2}$$

إذاً "القوة المركزية" $\dfrac{k}{r_0^2}=\dfrac{mv_0^2}{r_0}$

لنفرض أن $v_c=$ السـرعة اللازمة ليكون المدار دائري " تكون السـرعة ثابتة أثناء الحركة = السـرعة الإبتدائية" . إذاً

$$v_c^2=\frac{k}{mr_0} \tag{3}$$

بالتعويض في معادلة (1): يصبح مقدار الإختلاف المركزي بدلالة v_0 ، v_c على النحو:

$$r=(\frac{v_0}{v_c})^2-1 \tag{4}$$

إذاً تصبح معادلة المدار القياسي على الصورة:

$$r=\frac{r_0(v_0/v_c)^2}{1+[(v_0/v_c)^2-1]\cos\theta} \tag{5}$$

حيث $v_0=$ السرعة الإبتدائية، $v_c=$ السرعة للمدار الدائري.

إما في حالة الأوج $(\theta = 180^\circ)$، فإن $r = r_1$ وتعطى كالآتي:

$$r_1 = \frac{r_0 (v_0/v_c)^2}{2-(v_0/v_c)^2} \qquad (6)$$

مثال: تابع صاروخي يدور حول الأرض في مسار دائري نصف قطره r_0، وقد تسبب إنفجار محرك الصاروخ المفاجئ زيادة في سرعته بنسبة 10% جد معادلة المدار الجديد للتابع وأحسب مسافة الأوج.

الحل: نفرض أن $v_c =$ سرعة التابع في المدار الدائري قبل الانفجار. بعد الانفجار تصبح سرعة الإنطلاق للتابع هي v_0 حيث هي السرعة الإبتدائية للتابع في المدار الجديد. وعليه فإن:

$$v_0 = 100\,\% v_c + 10\,\% v_c = 110\,\% v_c = 1.1 v_c \ . \text{ إذاً } \ \frac{v_0}{v_c} = 1.1$$

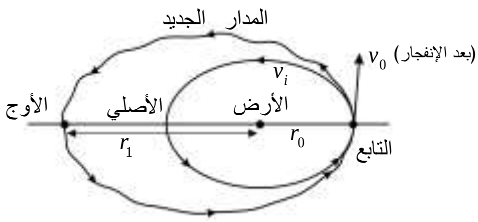
نعوض في معادلة (5) لنحصل على:

$$r = r_0 \frac{(1.1)^2}{1+[(1.1)^2-1]\cos\theta} = \frac{1.21 r_0}{1+0.21\cos\theta}$$

لإيجاد مسافة الأوج نعوض بدل $\cos\theta = -1$ في معادلة (6):

$$r_1 = \frac{r_0(1.21)}{2-1.21} = 1.53 r_0$$

والشكل (5.18) يوضح العملية:



شكل(5.18)

5.10) الطاقات المدارية في مجال التربيع العكسي:

سـنركز اهتمامنا على إيجاد معادلة المدار بدلالة الطاقة الكلية للكوكب المتحرك في مجال التربيع العكسي حيث:

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku \qquad (1)$$

وعليه تصبح معادلة طاقة المدار:

$$\frac{1}{2}mh^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] - ku = E \qquad (2)$$

عند فرز (فصل) المتغيرات في معادلة (2) على النحو:

$$d\theta = [\frac{2E}{mh^2} + \frac{2ku}{mh^2} - u^2]^{-1/2} du \qquad (3)$$

بإجراء التكامل على طرفي معادلة (3) مع استخدام العلاقة الرياضية:

$$[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}]$$

نحصل على:

$$\theta = \sin^{-1}(\frac{mh^2u - k}{\sqrt{k^2 + 2Emh^2)}} + \theta_0 \qquad (4)$$

حيث $\theta_0 =$ ثابت التكامل. نفرض أن $\theta_0 = -\pi/2$ إذاً:

$$\sin\ (\theta + \pi/2) = \frac{mh^2u - k}{\sqrt{k^2 + 2Emh^2}}$$

وعليه فإن

$$\cos\theta = \frac{mh^2u - k}{[k^2 + 2mEh^2]^{1/2}} \qquad (5)$$

بحل معادلة (5) في u نحصل على:

$$u=\frac{k}{mh^2}[(1+2mEh^2k^{-2})]^{1/2}\cos\theta] \qquad (6)$$

أو بدلالة (r) حيث $u=\frac{1}{r}$ فإن:

$$r=\frac{mh^2/k}{1+(2Emh\ k^{-2})^{1/2}\cos\theta} \qquad (7)$$

معادلة (7) هي معادلة الطاقة المدارية في مجال التربيع العكسي حيث بالمقارنة مع معادلة المدار القياسية: $r=\frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\theta}$

نجد أن

$$\boxed{e=\sqrt{1+2Emh^2/k^2}} \qquad (8)$$

حيث أن مقدار (e) الإختلاف المركزي يحدد نوع المدار فإن من معادلة (8) نجد أن مقدار (E) الطاقة الكلية هي أيضاً تحدد نوع المدار وعليه نصف المدارات وفقاً لهذا المقدار على النحو:

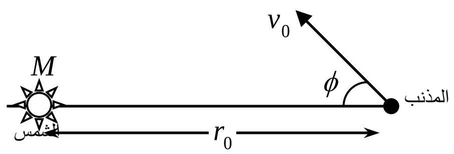
(1) إذا كانت $E<0$ (كمية سالبة) فإن $e<1$ $\Leftarrow$ مدار مغلق (ناقص).

(2) إذا كانت $E=0$ فإن $e=1$ $\Leftarrow$ قطع مكافئ.

(3) إذا كانت $E>0$ (كمية موجبة) فإن $e>1$ $\Leftarrow$ قطع زائد.

<u>النتيجة</u>: تكون مدارات الكوكب (الجسم) في مجال التربيع العكسي مدارات مغلقة إذا كانت $T<|V|$ وتكون المدارات مفتوحة إذا كانت $T\geq|V|$ حيث $T+V=E$.

<u>مثال(1):</u> لوحظ أن إنطلاق نجم مذنب يساوي V_0 عندما يكون على مسافة r_0 من الشمس وأن إتجاه حركته يصنع ϕ مع متجه نصف قطر الشمس. جد الإختلاف المركزي e.



شكل(5.19)

الحل: معادلة حفظ الطاقة:

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GM\,m}{r}=E_0$$

$$k=GM\,m \text{ ،} E_0=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GM\,m}{r_0}= \text{ ثابت}$$

وحيث أن $$h=|\vec{r}\times\vec{v}|=|\vec{r}_0\times\vec{v}_0|=r_0v_0\sin\phi$$

بالتعويض في معادلة (8):

$$e=[1+(v_0^2-\frac{2GM}{r_0})\,\frac{(r_0v_0\sin\phi)^2}{(GM)^2}]^{1/2}$$

هذا يعطي مقدار الإختلاف المركزي لمدار المذنب.

إيجاد طول المحور الرئيسي للمدار بدلالة الطاقة الكلية:

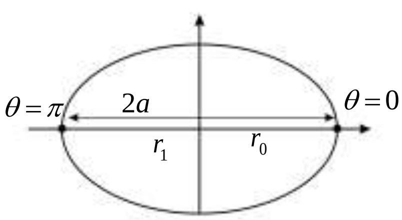
حيث $$r=\frac{mh^2/k}{1+[(1+2mEh^2/k^2)\cos\theta]^{1/2}}$$

فإن مقدار r_0 ، r_1 نجدهما من هذه المعادلة بالتعويض بدل $\theta=$ صفر، $\theta=\pi$ على الترتيب لنحصل على:

$$r_0=\frac{mh^2/k}{1+[(1+2mEh^2/k^2)]^{1/2}}\ ;\ r_1=\frac{mh^2/k}{1-[(1+2mEh^2/k^2)]^{1/2}} \qquad (9)$$

من خصائص المدار على شكل قطع ناقص فإن:

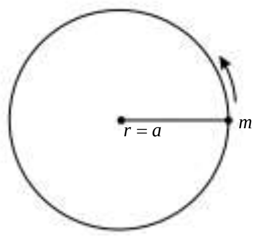
$$2a=\frac{k}{|E|} \qquad (10)$$



شكل(5−20)

ملاحظة: استخدمنا $|E|$ لأن شرط المدار يكون قطع ناقص أن تكون $E<0$ وحيث k موجبة، فإن a موجبة.

مثال(2): برهن أن في المدار الدائري الذي نصـــف قطره يســـاوي (a) تعطى الطاقة الحركية T بدلالة $.T=\dfrac{k}{2a}$



شكل(5.21)

البرهان: دالة الطاقة الكامنة (الوضع) $V=-\dfrac{k}{r}=-\dfrac{k}{a}$

وكذلك من معادلة (10) فإن $E=-\dfrac{k}{2a}$ ،

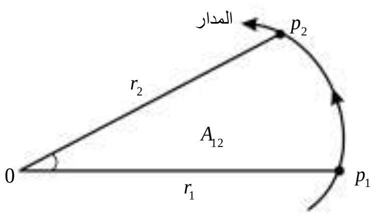
حيث ($E<0$ سالبة). إذاً

$$T=E-V(r)=-\frac{k}{2a}+\frac{k}{a}=k(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a})=\frac{k}{2a}$$

5.11) زمن الدورة في الحركة المدارية:

Periodic Time for Orbital Motion

لنفرض أن كوكباً إنتقل من الموقع p_1 إلى p_2 في زمن قدره t_{12} (كما في الشـــكل5.22) ماســـحاً قطاع مقداره A_{12} وعليه فإن:



شكل(5.22)

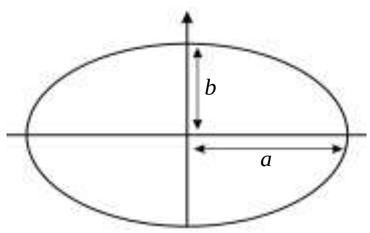
$$\text{الزمن}=\frac{\text{المساحة}}{\text{السرعة المساحية}}$$

إذاً $t_{12}=\dfrac{A_{12}}{A^{\bullet}}$ ، حيث أن $A^{\bullet}=\dfrac{L}{2m}$ ، $A^{\bullet}=h/2$

بالتعويض نجد أن

$$t_{12}=A_{12}(\frac{2}{h}) \qquad (1)$$

حيث أن مساحة القطع الناقص الذي أطوال محاوره الرئيسية والثانوية $(2b,2a)$ تكون: $=\pi ab$ (برهن ذلك)



لنفرض أن $\tau=$ زمن الدورة للكوكب

فإن معادلة (1) تؤول إلى:

شكل(5−23)

$$\tau = \pi a b(\frac{2}{h}) \qquad (2)$$

من العلاقة بين أطوال المحاور للقطع الناقص: $b = a\sqrt{1-e^2}$ معادلة (2) تؤول إلى:

$$\tau = \frac{2\pi a^2}{h}\sqrt{1-e^2} \qquad (3)$$

في معادلة (3) نريد إيجاد قيمة (e): بدلالة (a) على النحو:

$$2a = r_0 + r_1 = \frac{mh^2}{k}[\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}] = \frac{mh^2}{k}[\frac{2}{1-e^2}]$$

إذاً

$$1-e^2 = mh^2/ka$$

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{mh^2/ka} \qquad (4)$$

من المعادلتين (3)، (4) ينتج أن

$$\tau = \frac{2\pi a^2}{h}(\frac{mh^2}{ka})^{1/2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,a^{3/2}$$

إذاً

$$c = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{حيث} \quad \tau = c\,a^{3/2} \qquad (5)$$

معادلة (5) هي الصورة الرياضية لقانون كبلر الثالث: أي أن بتربيع طرفي المعادلة نحصل على $\tau^2 \propto a^3$. أما

$$c = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{GmM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$$

إذاً c يعتمد على $G =$ ثابت الجذب العام، M كتلة الشمس في حالة دوران الأرض حولها. في حالة مدار الأرض حول الشمس فإن القياسيات الفلكية لـ a هي:

(أعتبرت هذه الكمية وحدة فلكية) $a = 93\times10^6\ mile$ ، تقدر مسافات باقي الكواكب عن الشمس بدلالة هذه الوحدة الفلكية فمثلاً نقول أن كوكب عطارد له مدار حيث $a = 0.387$ وحدة فلكية، وكذلك كوكب

المريخ لـه مـدار حيث بعده عن الشــــمس بـدلالـة الوحـدة الفلكيـة $a=1.524$ وهكذا، كمـا أن زمن دورة الأرض حول الشـمس أعتبرت في القياسـات الفلكية هي السـنـة المعيارية فمثلاً نقول أن سـنـة عطارد تعادل 0.241 من سنة الأرض.

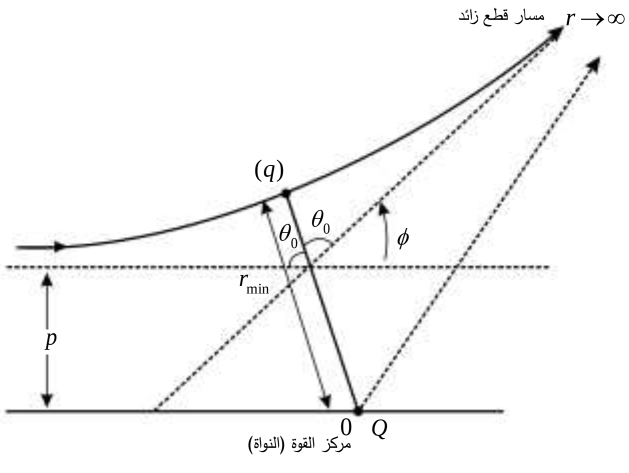
كـمـا يـمـكـن الـحـصــــول مـن قـانـون كـبـلـر الـثـالـث عـلـى عـلاقـة مـقـارنـة بـيـن (a,τ) للكواكب السماوية على النحو:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{a_1^{3/2}}{a_2^{3/2}}$$

5.12) الحركة في مجال التربيع العكسي التنافري – تشتت الجسيمات الذرية

Motion in an inverse – square repulsive field – Scattering of atomic particles

حيث أن القوة بين الشــحنات المتشـــابة تكون تنافرية وتتبع قانون التربيع العكســـي فمثلاً عند قذف جسـيمات ألفا (α) " ذات الشـحنة الموجبة " نواة الذرة للذهب الموجبة الشـحنة كما في تجربة رذرفورد في عام 1911. فإن الملاحظ أن مســـار α ينحرف عند الإقتراب من مجال النواة. نريد حســـاب معادلة مسـار حالة الحركة في مجال التربيع العكسـي التنافري"تجارب التشـتت (Scattering)" الشـكل (5.24) يوضح مسار المقذوف:



شكل(5.24)

نفرض أن جسـيم شـحنته (q) وكتلته (m) إنطلق (0). تكون القوة في وحدات (cgs) $(k=1)$ هي :

$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$ (قانون كولوم)

أما في وحدات Mks فإن $k = \frac{1}{4\pi E_0} = 9\times 10^9$ وتصبح معادلة المدار على النحو:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-kQq}{mh^2} \qquad (1)$$

ويكون حل معادلة (1) على:

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) - kQq/mh^2} \qquad (2)$$

ويمكن كتابة معادلة (2) على صورة معادلة الطاقة (بدلالة E) على النحو:

$$r = \frac{mh^2/kQq}{[1+2mh^2/(kQq)^2]^{1/2}\cos(\theta-\theta_0)-1} \qquad (3)$$

حيث أن الطاقة الكلية E تعطى بدلالة الطاقة الحركية ودالة الجهد:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + (\frac{kQq}{r}) > 0$$ (كمية موجبة)

وعليه يكون المدار قطع زائد (Hyperbola) ويقترب الجسيم (q) من خطوط المقاربة (كما في الشكل(5.24). نلاحظ من الشكل أن $r = r_{min}$ (أصغر قيمة) عندما تكون $\cos(\theta-\theta_0)=1$ أو $\theta-\theta_0=0$ وعليه فإن $\theta=\theta_0$.

أما عند $r=\infty$ فإن θ تأخذ القيم $(0 \text{،} 2\theta_0)$

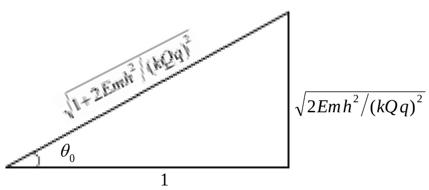
لنفرض أن زاوية انحراف مسار الجسيم = ϕ " الزاوية بين خط الاقتراب وخطوط الابتعاد عن النواة " .

فإن من الشكل $\phi = \pi - 2\theta_0$

بإستخدام الشرط: $r\to\infty$ إذا كان المقام في المعادلة(3) يساوي الصفر, نحصل على:

$$[1+2Emh^2/(kQq)^2]^{1/2}\cos\theta_0 = 1 \text{،} \qquad (4)$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{1+2Emh^2/(kQq)^2} = 1$$



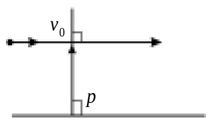
من العلاقات المثلثية لـ θ_0 نجد أن:

$$\tan\theta_0 = \sqrt{2Emh^2/(kQq)^2}$$

وحيث أن $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$ ، إذاً $\tan\theta_0 = \cot(\phi/2)$. وعليه فإن

$$\cot(\phi/2) = \sqrt{2mEh/(kQq)^2} \qquad (5)$$

معادلة (5) تعطي مقدار إنحراف أو تشـــتت الجســـيم مثل (α) عن النواة وهذا ما نهتم به عند دراســـة تجارب التشتت. ولكن يجب تحديد مقدار h بدلالة كمية يمكن قياســـها في المعمل وهي ما يعرف ســـمة التصـــادم " براميتر التصـــادم " Impact Parameter ويرمز له بالرمز (p) ويقاس بمقدار المسافة العمودية بين نقطة الأصل "مركز التشتت" والخط الإبتدائي لحركة الجسيم الساقط.



حيث $h = |\vec{r}\times\vec{v}| = pv_0$

إذا كانت الطاقة الكلية للجسم الساقط (المقذوف) $E =$

فإن $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ وتصبح معادلة (5) على النحو:

$$\cot(\phi/2) = \frac{pmv_0^2}{kQq} = \frac{2pE}{kQq} \qquad (6)$$

مثال(1): أكتب $r_{\min}$ بدلالة زاوية الإنحراف ϕ.

الحل: نستخدم معادلة (3) مع التعويض $1 = \cos(\theta - \theta_0)$، وعليه فإن:

$$r_{\min} = \frac{mh^2/kQq}{(1+\frac{2Emh^2}{(kQq)^2})^{1/2} - 1}$$

من معادلة (6) نجد أن

$$\frac{1}{kQq} = \frac{\cot(\phi/2)}{2pE}$$

$$h^2 = p^2 v_0^2 \Rightarrow mh^2 = (mv_0^2)\,p^2 = 2E\,p^2$$

نعوض في معادلة $r_{\min}$ بهذه الكميات. إذاً

$$r_{\min} = \frac{2E\,p\cot(\phi/2)/2pE}{[1+\frac{2E\cdot 2p^2E\cot^2\phi/2}{(2pE)^2}]^{1/2} - 1}$$

بالإختصار نحصل على:

$$r_{\min} = \frac{p\cot(\phi/2)}{(1+\cot^2\phi/2)^{1/2} - 1}$$

نعوض $\cot\phi/2 = \dfrac{\cos\phi/2}{\sin\phi/2}$ في المعادلة الأخيرة لنحصل:

$$r_{\min} = \frac{p\cos(\phi/2)/\sin(\phi/2)}{[1/\sin(\phi/2)]-1}$$

إذاً
$$r_{\min} = \frac{p\cos(\phi/2)}{1-\sin(\phi/2)}$$

يمكن الإعتماد على هذه النتيجة لحل المســائل حيث إذا علمت زاوية الأنحراف، ومقدار معامل التصـــادم (سمة التصادم).

مثال(2): ينبعث جسيم α من العنصر المشع الراديوم بطاقة $5mev$ فإذا وجد أنه إذا قذف جسيم α مع نواة الذهب $(Z=79)$ فإنه ينحرف بزاوية 90° جد قيمة براميتر (سمة) التصادم وكذلك أدنى أقتراب نحو النواة $r_{\min}$.

الحل:

$$Q = 79\times1.6\times10^{-19}c\;;\; q = 2\times1.6\times10^{-19}cou1\,; k = 9\times10^9$$

$$E = 5\times10^6\times1.6\times10^{-19}\,Joule.$$

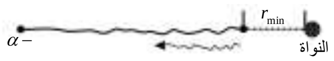
إذاً

$$p=\frac{kQq}{2E}=\frac{9\times10^{9}\times79\times2\times1.6\times(10^{-19})^{2}}{(2)(5)\times1.6\times10^{-19}\times10^{6}}=2.1\times10^{-14}m$$

$$r_{\min}=\frac{p\cos(Q/2)}{1-\sin(Q/2)}=\frac{(2.1\times10^{-14}m)\cos45}{1-\sin45^{\circ}}=5.1\times10^{-14}m=2.41p$$

"قارن هذه الكميات مع نصف قطر النواه" !! نصف القطر للنواه $2\times10^{-14}m$ "

- إذا صَـــوب الجســـم الســـــاقط نحو النواه مباشـــره أي نجعل $p=0$ ، فـإن $h=0$ وعليه فإن الجسم يصل إلى مسافة $r_{\min}$ لتصبح سرعته عند تلك النقطة=صفر ثم يعود أدراجه بفعل قوة التنافر مع النواه. يمكن حساب $r_{\min}$ من معادلة الطاقة:



$$E=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{kQq}{r_{\min}}=\frac{1}{2}mv_0^2+0$$

لأن الطاقة الكامنة =صفر عند $r=\infty$ وعليه فإن

$$\frac{kQq}{r_{\min}}=\frac{1}{2}mv_0^2\Rightarrow r_{\min}=\frac{kQq}{\frac{1}{2}mv_0^2}=\frac{kQq}{E_0}$$

تمـارين

(1) أثبت أن قوة الجاذبية على جسم داخل قشرة كروية رقيقة = صفر بطريقة:

أ. إيجاد القوة مباشرة ب. البرهنة على أن جهد الجاذبية ثابت.

(2) جد قانون القوة على كوكب إذا كانت المجموعة الشمسية مغمورة في غبار سحابي منتظم كثافة ρ .

(3) جد جهد الجاذبية والقوة على جسيم أحادى الكتلة موضوع على محور حلقة نصف قطرها a وكتلتها m إذا كان جسيم الاختبار على مسافة (r) من مركز الحلقة؟

(4) تحرك جسيم في مجال مركزي بالمدار الحلزوني $r = a e^{k\theta}$ جد قانون القوة ثم جد كيف تتغير θ مع الزمن t؟

(5) إذا كان مدار جسيم دائري ويقع مركز القوة على محيط الدائرة. فما هو قانون القوة $F(r)$؟

(6) إذا تحرك جسيم في المدار الحلزوني $r = a\theta^3$ ، وكانت $\theta = ct^3$ هل يكون مجال القوة مركزياً؟

(7) يتحرك قمر صاروخي من الأرض مبتدئاً بمدار دائري، إذا أردنا وضع القمر في مدار جديد له مسافة أوج تساوي نصف قطر القمر حول الأرض $(240;000\ mile)$

أ. أحسب نسبة الانطلاق الجديد إلى انطلاقة في المدار الدائري علماً بأن نصف قطر المدار الدائري $4000\,mile$.

ب. أحسب بعد نقطة الأوج الجديدة إذا كانت نسبة الانطلاق 0.99 من القيمة المحسوبة أعلاه.

(8) إذا كان المحور الرئيسي لمدار مذنب بيضاوي $= 100$ وحده فلكية

أ. ما هو زمن الدورة؟

ب. إذا كان بعده عن الشمس $= 0.5$ وحدة فلكية في الحضيض الشمسي فما مقدار الاختلاف المركزي للمدار؟

ج. ما هو انطلاق المذنب في الحضيض الشمسي والأوج؟

(9) يســير مذنب في مدار على شــكل قطع مكافئ واقع في مســتوى مدار الأرض فإذا فرضــنا أن مدار الأرض دائري الشــكل نصــف قطره a أثبت أن النقاط التي يقطع فيها المذنب مدار الأرض هي $\cos = -1 + \frac{2p}{a}$ حيث $p =$ مسافة الحضيض الشمسي للمذنب عند $\theta = 0$.

(10) يتحرك جسيم بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقوة. برهن أن حاصل ضرب انطلاقي النهاية العظمى والصغرى يساوي $(\frac{2\pi a}{\tau})^2$ حيث a هي نصف المحور الرئيسي , $\tau =$ زمن الدورة.

(11) برهن أن المعادلة التفاضلية القطبية لحركة جسيم في مجال مركزي (معادلة الطاقة لمدار) هي نفس معادلة حركة جسيم يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير جهد فعلي $u(r)$ حيث $u(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$

. أرسم خطاً بيانياً للجهد $u(r)$ عندما تكون $V(r) = \frac{-k}{r}$ وبرهن أن حالة المدار الدائري مستقرة في مثل هذه الحالة من الجهد.

الفصل السادس :النظرية النسبية الخاصة

Special Theory of Relativity

نشـــر الألمـــاني ألبـــرت أينشـــتاين النظريـــة النســـبية الخاصـــة فـــي أوائـــل القـــرن العشـــرين والتـــي ســـاهمت فـــي تفســـير بعـــض الظـــواهر الفيزيائيـــة الذريـــة والنوويـــة التـــي لا يمكـــن تفســـيرها مـــــن خـــــلال الفيزيـــــاء الكلاســـيكية، وقـــــد تناولـــــت هـــــذه النظريـــــة مفـــــاهيم الفضاء – الزمان (Space – Time) والمادة والطاقة والعلاقة بينهما.

ولقد عُرفت النسـبية من زمن جاليلي ونيوتن وعرفت بإسـم النسـبية الكلاسـيكية وهي تتعلق بمعادلات تحويل جاليلي أو معادلات تحويل نيوتن. وقد حدث تعارض بين هذه النظرية والنظرية الكهرومغناطيسـية التي وضعت من قبل ماكسويل عام 1864م حتى تمكن أينشتاين من إزالة هذا التناقض عندما وضع أسس النظرية النسبية الخاصة عام 1905م.

6.1) تحويل جاليلي: The Galilean Transformation

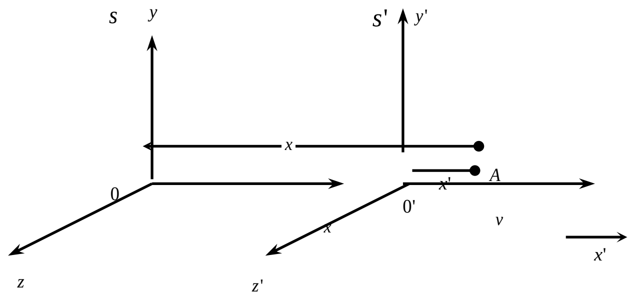
لتحديد موضـــع جســـم متحرك في أي لحظة يســـتخدم عادة نظام أو جملة إحداثيات (Coordinate System) وفي حالة الحركة في الفضـــاء نســـتخدم الإحداثيات الثلاثة المتعامدة (x, y, z) وعند الاهتمام بالحركة لابد من تحديد الزمان وعليه يوصف موضع الجسم المتحرك بالإحداثيات الرباعية (x, y, z, t) . ويسمى هذا النظام بنظام أو جملة الإسناد (frame of reference).

<u>تعريف</u>:

إذا كـــان نظـــام الإســـناد متحـــرك بســـرعة منتظمـــة (ثابتـــة) أوغيـــر متســـارعة فإنهـــا تعـــرف بنظـــــــــام الإســـــــــناد القصـــــــــوري (إســـــــــناد العطالـــــــــه أو الخمالـــــــــة، Inertial frame of reference). يمكـــن اعتبـــار الأرض (إهمـــال التســـارع

النـــاتج مـــن دورنهـــا) كنظـــام إســـناد قصـــوري، وتكـــون جميـــع قـــوانين نيـــوتن فـــي الحركـــة صحيحة في هذا النظام.

<u>معدلات تحويـل جـاليلي</u>: نفرض أن النظـام (s) التي يمكن وصـــف الإحداث فيهـا خلال الإحـداثيـات (x,y,z,t) ونظـام الإســـنـاد (s') والتي يمكن وصـــف الإحداث فيه بـالإحداثيات (x',y',z',t') متحرك بسرعة ثابتة (v) بالإتجاه الموجب لمحور x شكل(6.1)



شكل(6.1)

لنفرض أن المراقبين الموجودين في النظامين قد ضبطا ساعتيهما بحيث أنهما بدأ بقياس الزمن عندما b كانت نقطة الأصـــل o' منطبقة على (o). ولنفرض حدث إنفجار عند A عند الزمن (t)، لذلك فإن الإحداثي السـيني الذي يقيســه المراقب في (s') هو x' والإحداثي السـيني الذي يقيســه المراقب في (s) هو x والعلاقة بينهما هي:

$$x'=x-vt \quad \text{أو} \quad x=x'+vt \qquad (1)$$

بينما باقي الإحداثيات تبقى على نفس الصــورة: $y'=y\ ;\ z'=z$ وذلك لعدم وجود حركة نسـبية في إتجاه المحورين.

وإذا قاس المراقبان زمن الإنفجار في آن واحد، أفترض جاليلي أنهما يحصـــلان على نفس الزمن (لأنه أفترض أن الزمن مطلق ولا يعتمد على الحركة النسبية بين المراقبين) ولذلك $t=t'$.

والمعادلات الســابقة تعرف بإسـم تحويلات جاليلي وتعرف أحياناً بتحويلات العالم الإنجليزي (نيوتن)، وهي تعطي تحويل القياسات في النظامين (s',s).

أما تحويلات مركبات السرعة في نظامي الإسناد نحصل عليها بالإشتقاق المباشر للمعادلات كالآتي:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$v'_x = v_x - v\ ;\ v'_y = v_y\ ,\ v'_x = v_x \qquad (2)$$

تعتبر في هذه المعادلات أساس النظرية النسبية الكلاسيكية وتكون جميع قوانين الميكانيكا لها نفس الصيغة في نظم الإسناد القصورية. ولتوضيح ذلك نورد ما يلي.

<u>مثال(1):</u> جسيمان كتلتهما $m_2\,, m_1$ وسرعة الأول $v_2\,, v_1$ في نظام الإسناد (s) استخدم تحويل جاليلي لبيان أن كمية حركتهما ثابتة في نظام الإسناد (s') إذا كان s' متحرك بسرعة v ثابتة بالنسبة للنظام s؟

<u>الحل</u>: كمية الحركة في النظام s هي

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = A\,(\text{ثابت}) \qquad (1)$$

لنفرض سرعتي الجسمين في النظام (s') هما v'_1 ، v'_2. بإستخدام تحويل جاليلي:

$$v'_1 = v_1 - v\ ;\ \ v'_2 = v_2 - v$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$m_1(v'_1 + v) + m_2(v'_2 + v) = A$. وعليه فإن

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = A - v(m_1 + m_2)$$

وحيث v كمية ثابتة، $v(m_2 + m_1)$ كمية ثابتة، A ثابت فإن

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = \text{ثابت}$$

إما إذا كانت v غير ثابتة يكون النظام (s') متسارع (وليس نظام إسنا قصوري) ولا تصبح هذه العلاقة صحيحة. (كمية الحركة في النظام s' $\neq$ ثابت).

<u>مثال(2):</u> برهن أن قانون حفظ الطاقة يحقق تحويل جاليلي وله نفس الصـــورة الرياضـــية في جميع نظم الإسناد القصورية (العطالة).

البرهان: نفرض أن

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = B = \text{ثابت}$$

وبالتعويض بتحويل جاليلي: $\frac{1}{2}m_1(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - v)^2 = B$

وبالإختصار نجد أن:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = B - \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2) + v(m_1 v_1 + m_2 v_2)$$

لكن كلاً من $m_1 + m_2$ ، $m_1 v_1 + m_2 v_2$ ثابت. إذاً

إذا كانت v ثابتة، فإن الطرف الأيمن يكون مقدار ثابت (c). وعليه فإن

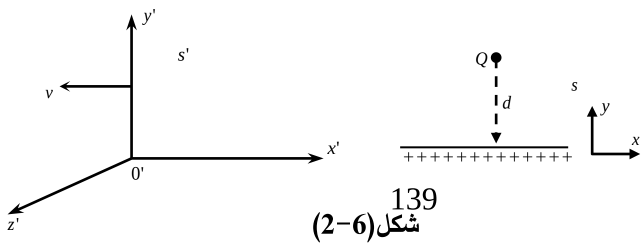
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = c \quad \text{ثابت}$$

وهي نفس الصورة لطاقة الحركة في نظام الإسناد s' (مع تغير قيمة الثابت).

إن تحويل جاليلي يتعلق مع ما نشـــاهده في حياتنا اليومية وبقيت مقبولة لأكثر من قرنين من الزمان ولكن تعارضت هذه المعادلات مع النظرية الكهرومغناطيسية للضوء التي وضعها ماكسويل عام 1864م، حيث وجد عند قياس القوة المؤثرة على شـــحنة كهربية من قبل مراقب موجود في النظام (s) فإن هذه القوة تختلف عن ما يقيسه مراقب في نظام (s') على عكس قوانين الميكانيكا.

مثال(3): برهن أن نسبية جاليلي نيوتن الكلاسيكية تتعارض مع النظرية الكهرومغناطيسية.

البرهان: نفرض أن شحنة $+Q$ موضوعة على بعد (d) من توزيع خطي لانهائي من الشحنات الموجبة ذات كثافة طولية λ في نظام الإسناد (s). وتكون ساكنة في هذا النظام (شكل6-2)



شكل(6−2)

تكون شدة المجال الكهربائي عند مكان الشحنة الناتج من الشحنات الخطية هي

$$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 d}\ \hat{j}$$

وتكون القوة المؤثرة على الشـــحنة Q حســـب معادلة لورنتز مع ملاحظة عدم وجود مجال مغناطيســـي (حيث الشحنات ساكنة)

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{Q\lambda}{2\varepsilon_0 d}\ \hat{j}$$

أما بالنسبة لمراقب في نظام الإحداثيات (s') فإن الشحنة Q والتوزيع الخطي يتحركان بسرعة v نحو اليمين (أي في إتجاه $+x'$) وينتج عن ذلك مجال مغناطيســي عند النقطة الموجودة فيها Q حســب قانون بايوت – سافار

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{k} = \frac{\mu_0 (\lambda v)}{2\pi d}\hat{k}$$

(أي في إتجاه $+z'$)، حيث شدة التيار $= \lambda v =$ (الكثافة × السرعة).

وتكون مقدار القوة المؤثرة على الشحنة $\vec{F}'$ كما يقيسها المراقب في النظام s'

$$\vec{F} = Q(\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}')$$

أما شدة المجال الكهربائي E' لا تتغير لعدم وجود حركة نسبية

$$\vec{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{j}$$

$$F' = Q(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{j}' + \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d}\vec{v} \times \hat{k}')$$

ونـلاحـظ أن هـذه الـقـوة تـخـتـلـف تـمـامـاً عـن الـقـوة الـتـي يـقـيسـهـا الـمـراقـب فـي نـظـام الإسناد s.

لقد بيّنت نظرية ماكسويل أن الضوء عبارة عن أمواج كهرمغناطيسية ذات سرعة ثابتة $(c = 3\times10^{8} m/s)$ ولقد أدى ذلك للتساؤل عن نظام الإسناد الذي قيست سرعة الضوء بالنسبة له وبما أن الحركة الموجية تحتاج إلى وسط تنتشر خلاله، بدأ التساؤل عن طبيعة الوسط الذي تنتشر خلاله الأمواج الكهرومغناطيسية.

وقد أفترض في القرن التاسع عشر وجود وسط شفاف ثابت يملأ الفضاء وتنتشر خلاله أمواج الضوء بسرعة ثابتة سمي بالأثير (Ether) وأعتبر هذا الوسط نظام إسنادي ساكن ومطلق وحتى تفسر نتائج النظرية الكهرومغناطيسية أفترض خصائص غريبة لهذا الوسط (ذو كثافة صغيرة وشفاف ويهتز بسرعة كبيرة جداً) ومن الصعب أن تتحرك النجوم والكواكب خلال هذا الوسط دون مقاومة أو دون أن تتأثر به. ولما كانت سرعة الصوت خلال الهواء تختلف بإختلاف سرعة وإتجاه حركة الهواء فلابد أن تختلف سرعة الضوء بإختلاف سرعة وحالة الأثير وحتى لو فرض الأثير ساكن فإنه بالنسبة لمراقب على الأرض يتحرك بسرعة دوران تقارب سرعة دوران الأرض حول الشمس لذلك أجرى مايكلسون ومورلي تجربة لدراسة تأثير حركة الأرض خلال الأثير على سرعة الضوء. وكانت نتيجة التجربة سلبية (راجع تجربة مايكلسون – مورلي في مقرر الفيزياء الحديثة) .

6.2) فروض آينشتاين Einstein’s' Postulates

وضع أينشتاين هذه الفروض لإزالة التعارض بين نسبية جاليلي والنظرية الكهرومغناطيسية وهي:

(1) سرعة الضوء في الفضاء مطلقة وثابتة ولا تعتمد على حالة حركة المراقب الذي يقيسها ولا تعتمد على حالة مصدر الضوء.

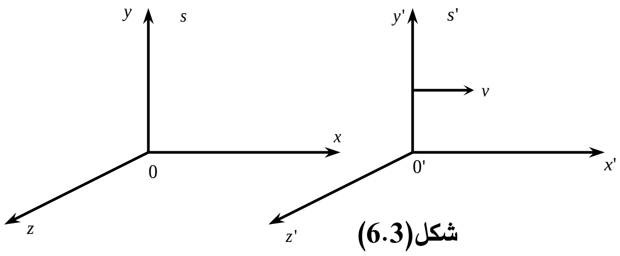
(2) أن قوانين أو علاقات الفيزياء تأخذ نفس الصورة في جميع نظم الإسناد القصورية (التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لبعضها البعض) ويعتبر هذا تعميم لمبدأ نسبية جاليلي (الذي أختصر على قوانين الميكانيكا فقط).

والفرض الأول يفسر النتيجة السلبية لتجربة مايكلسون – يورلي حيث أن سرعة الضوء عند حركة الضوء بإتجاه حركة الأثير أو بإتجاه عكس هذه الحركة هي c ثابتة وليست $(\vec{c}+\vec{v})$ أو $(\vec{c}-\vec{v})$.

6.3) تحويل لورنتز Lorentz Transformation

استخدم فروض آينشتاين للحصول على معادلات التحويل لمتغيرات الفضاء والزمان في نظام الإسناد s مع نظام (s') الذي يتحرك بسرعة ثابتة v نحو $x+$ ونفرض أن المراقبين (s)، (s') قد ضبطا ساعتهما عندما كانت o منطبقة على o' بحيث كانت $t=t'=0$. إذا أصدر المراقب الموجود في (s') وميضاً في تلك اللحظة بواسطة مصباح ومضي كالمستخدم في التصوير الفوتوغرافي (Plash) فإنه بعد زمن معين (t') يجد المراقب في (s') نفسه في مركز كرة ضوئية نصف قطرها $r'=ct'$ ومعادلة هذه الكرة هي:

$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2=(ct')^2 \qquad (1)$$



شكل(6.3)

وبالمثل وبعد زمن قدره (t) يجد المراقب في (s) نفسه في مركز كرة ضوئية معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2=r^2=(ct)^2 \qquad (2)$$

نلاحظ أن سرعة الضوء لم يتغير في كل من النظامين (حسب فرضية آينشتاين) ومعادلة الكرة لها نفس الصورة في كلاً النظامين (الفرضية الثانية).

ويمكن استخدام معادلة (1) و (2) للحصول على صورة جديدة على النحو

$$x^2+y^2+z^2-(ct)^2=x'^2+y'^2+z'^2=r'^2-(ct')^2 \qquad (3)$$

التحويل المطلوب هو عبارة عن المعادلات التي تربط المتغيرات (x,y,z,t) مع (x',y',z',t') والتي يمكن اســتخدامها لتحويل أي من المعادلتين إلى الأخرى، ويمكن كتجربة اســتخدام تحويل جاليلي, حيث تصبح المعادلة:

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$$

$$(x-vt)^2+y^2+z^2=(ct)^2 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2-(2vt)\,x=(c^2-v^2)t^2 \qquad (3)$$

ونلاحظ لو كانت تحويلات جاليلي صــحيحة لوجب أن تكون معادلة رقم (3) مطابقة مع معادلة رقم (2). ونلاحظ أن ســبب الإختلاف ناتج عن معادلة التحويل بين (x,t) و (x',t') وليس معادلات التحويل (y,z) , (z',y').

وبسبب تجانس الفضاء وتماثل وانتظام قوانين الطبيعة يمكن افتراض أن معادلات التحويل بين (x',t')، (x,t) هي علاقات خطية.

$$x'=a_1x+a_2t \qquad (4)$$

$$t'=b_1x+b_2t \qquad (5)$$

حيث a_1، a_2، b_1، b_2 ثوابت يجب تحديدها.

وحيث أنه عند $x'=0$ أي في مركز نظام الإســناد (s') يكون $x=vt$، وباســتخدام هذه القيمة في معادلات (4) نجد أن $o=a_1(vt)+a_2t$ وعليه فإن $a_2=(-v)\,a_1$

وبالتعويض عن a_2 في المعادلة (4) نجد أن:

$$x'=a_1x+(-vt)\,a_1=a_1(x-vt) \qquad (6)$$

وتشبه معادلة (6) تحويل جاليلي ولكن مع وجود العامل الثابت a_1 وعلى أعتبار $y'=y$ ، $z'=z$ نجد أن التعويض في معادلة (1): $x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$ يعطي

$$a_1^2(x-vt)^2+y^2+z^2=c^2(b_1x+b_2t)^2$$

ومنها نحصل على:

$$(a_1^2 - c^2 b_1^2)x^2 + y^2 + z^2 = (c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2)t^2 + 2xt(c\,a_1^2 + b_1 b_2 c^2) \quad (7)$$

بمقارنة المعاملات في معادلة (7) ومعادلة رقم (2) نجد أن التطابق يحصل بينهما في حالة

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 - c^2 b_1^2 &= 1 \\ c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2 &= c^2 \\ v a_1^2 + b_1 b_2 c^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_2 = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \\ b_1 &= -\frac{v}{c^2} a_1 = -\frac{v}{c^2}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

بالتعويض بقيم الثوابت في معادلة رقم (6) نحصل على:

$$= \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = k\,(x - vt)\ x' = a_1\,(x - vt) \qquad (10)$$

حيث $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

أما بالتعويض بدل b_1 ، b_2 في معادلة رقم (5) نحصل على:

$$t' = k\,(t - \frac{vx}{c^2}) \qquad (11)$$

وعليه تصبح معادلات تحويل لورنتز كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= k(t - \frac{vx}{c^2}) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

تعرف هذه المعادلات بإسم تحويل لورنتز نسبة للهولندي (1853-1925) الذي حصل عليها في عام1903 أي قبل نشر آينشتاين النظرية النسبية الخاصة(1905).

وقد عدّل آينشـتاين هذه المعادلات بحيث يكون مفهوم السـرعة (v) هي سـرعة نظام الإسـناد (s') بالنسـبة لنظام الإسـناد (s) بينما كان لورنتز يعتبرها سـرعة الجسم بالنسـبة للأثير الافتراضـي (لا وجود له).

ثم عرفت هذه المعادلات بتحويل لورنتز – آينشتاين وهي أساس صياغة النظرية النسبية الخاصة.

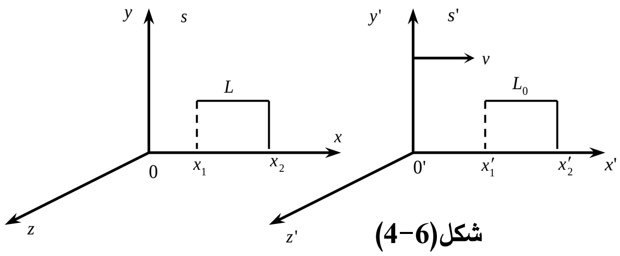
في حالة السرعة v الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء $(v << c)$ فإن $k \to 1$ وكذلك $\frac{vx}{c^2} \to 0$ وعندها تؤول معادلات لورنتز إلى معادلات تحويل جاليلي.

أما تحويل لورنتز آينشتاين العكسي: يمكن الحصول عليه بافتراض أن نظام الإسناد (s)يتحرك بسرعة $(-v)$ بالنسبة لنظام الإسناد (s') وبالتعويض عن v بـــ $-v$ في معادلة التحويل رقم (12) نحصل على معادلات التحويل العكسي:

$$\left.\begin{aligned} x &= k(x'+vt) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= k\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

6.4) تقلص الطول Length Contraction

يمكن استخدام تحويل لورنتز – آينشتاين للحصول على نتائج تبدو غريبة ويصعب تصديقها في حياتنا اليومية حيث السرعة صغيرة جداً بالنسبة لسرعة الضوء أما في حالة سرعة بعض الجسيمات الأولية كالفوتونات والإلكترونات حيث السرعة قريبة من سرعة الضوء $(\frac{v}{c}=0.1)$.



شكل(6−4)

ويعتبر ظاهرة تقلص الطول (أو بعد الجسم المتحرك بإتجاه المركز أحدى هذه النتائج). نفرض أن قضيباً موازياً لمحور x'، شكل(6.4)

عند القياس المتزامن (في آن واحد) للإحداثيات السينية لطرفي القضيب من قبل المراقب الموجود في نظام الإسناد s' فوجد أنهما x'_1 , x'_2 ويكون طول القضيب بالنسبة لهذا المراقب

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \qquad (14)$$

ويعرف L_0 بالطول الحقيقي للقضيب.

نفرض أن المراقب الموجود في نظام الإسناد (s) قام بقياس الإحداثيات السينية لطرفي القضيب وكانت x_1 , x_2 وبإستخدام تحويل لورنتز – آينشتاين نجد

$$x'_1 = k(x_1 - vt_1) \qquad (15)$$

$$x'_2 = k(x_2 - vt_2) \qquad (16)$$

وبالتعويض نجد أن $L_0 = x'_2 - x'_1 = k[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$

ولكن من تعريف طول القضـــيب بالقياس المتزامن للإحداثي الســـيني لطرفي القضـــيب يلزم أن يكون $t_1 = t_2$ وعليه تصـبح المعادلة $L_0 = k(x_2 - x_1)$ ، علماً بأن طول القضـيب في نظام الإسـناد (s) هو $L = x_2 - x_1$. إذاً

$$L_0 = k\,L = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17)$$

أو

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

نلاحظ أن الطول L_0 أكبر من الطول L.

النتيجة: أن القضـيب الذي يتحرك بالنسـبة لمراقب بسـرعة ثابتة قدرها v يبدو وكأنه أقصـر من طوله الحقيقي بمقدار المعامل $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ وتسـمى هذه الظاهرة تقليص لورنتز ولا يظهر إلا في حالة السرعة $\frac{v}{c} \approx 0.1$ (سرعة عالية).

ولقد تبين ثريل (Therrell) عام 1959 أن المراقب يرى (وبسـبب طبيعة عملية الرؤية) الطول الحقيقي للقضـيب وليس الطول الظاهري المتقلص. فعملية الرؤية تتم بفعل إسـتقبال الفوتونات (المتزامن) الصادر من نقاط الجسم المختلفة، وحتى تتم هذه العملية يجب أن تنطلق الفوتونات من نقاط الجسم البعيده عن العين مثل تلك الفوتونات القريبة من العين وهذا لا يتفق مع الشرط المستخدم لإشتقاق معادلة التقلص (17) حيث $t_1 = t_2$.

الحقيقة: أن الجسم يبدو للعين وبسبب إختلاف زمن صدور الفوتونات وكأنه أُزيح نحو الأمام وهذا يؤدي إلى زيادة طوله بمقدار يعادل النقصان المعطي في المعادلة، أما في حالة الأجسام المجسمة فإن البعد الموازي للحركة هو الذي يخضع للتقلص في الطول، أما الأبعاد الأخرى فلا تتأثر بالحركة ولهذا تبدو للعين الأجسام هذه مشـوهة وذلك لأن صـورتها المتكونة على قرنية العين تكون ناتجة عن أشـعة صادرة من النقاط المختلفة في أزمنة مختلفة.

مثال(1): سلك معدني مثبت في سقف طائرة كما يقيسه مهندس الصيانة في المطار يساوي $(50m)$ فإذا كانت سرعة الطائرة $= 1000\,km/hr$ أحسب طول السلك كما يقيسه:

(أ) شخص داخل الطائرة (مسافر).

(ب) شخص في المطار، ثم جرى التغير في طوله بسبب الحركة.

الحل: (أ) بالنسبة للمسافر فإن السلك في حالة سكون (الطائرة عبارة عن نظام إسناد قصوري) يوجد فيه المسافر والسلك، ولذلك فإن طوله $= L_0 = 50\,m$

(ب)

$$L_0 = 50m \quad ; \quad L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$1000\,km/hr = \frac{10^6\,m/s}{60\times 605} \approx 278\ m/s$$

$$(\frac{v}{c})^2 = (\frac{278}{3\times 10^3})^2 = 8.6\times 10^{-13}$$

$$L = L_0(1-8.6\times 10^{-13})^{1/2} \approx L_0[1-\frac{1}{2}(8-6\times 10^{-13}]$$

$$= L_0(1-4.3\times 10^{-13})$$

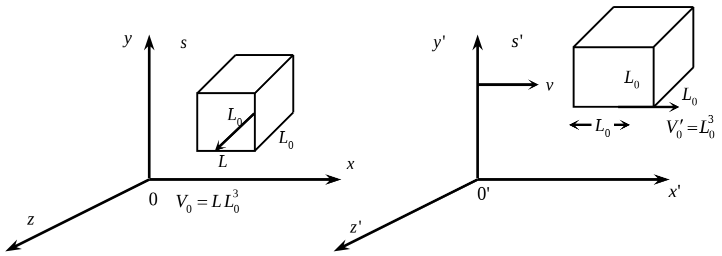
$$\Delta L = (L-L_0) \approx -4.3\times 10^{-13}L_0 = -2.15\times 10^{-11}m = -0.215\,A^{\circ}$$

أي النقصان في طول السلك يعادل تقريباً $\frac{1}{4}$ انجزوم ولا يمكن قياسيه بهذه الدقة في أي حال من الأحوال، وهذا يدل أن الظواهر النسبية لا يمكن قياسها إلا في الحالات الخاصة .

مثال(2): مكعب طول ضلعه أثناء السكون L_0 فإذا تحرك هذا المكعب بسرعة v بالنسبة للمراقب وبإتجاه موازٍ لأحد أضلاعه أوجد حجم المكعب كما يقيسه المراقب ثم قارن بحجمه الحقيقي.

الحل: نفرض أن إتجاه المكعب هو بإتجاه محور x الموجب ويكون طول ضـــلعه في هذا الإتجاه L شكل(6-5) حيث

$$L_0 = k\,L \qquad (1)$$



شكل(6.5)

أبعاد المكعب في إتجاه y ، z لا تتغير لعدم وجود حركة نسـبية في هذه الإتجاهات لنفرض $v_0 =$ حجمه كما يقيسه المراقب في (0)

$$v_0 = L\,L_0^2 = \frac{L_0^3}{k} = \frac{V_0'}{k}$$

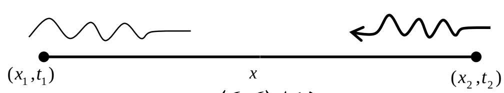
حيث $V_0 =$ حجم المكعب الحقيقي أثناء السكون. إذاً $k = \dfrac{V_0'}{v_0}$

وبما أن $k > 1$ فإن $V_0' > V_0$ أي حجمه الحقيقي أكبر من حجمه الذي يقيسه المراقب o .

6.5) التزامنية (الآنية): Simultaneity

عرّف آينشتاين التزامنية (الآنية) في النظرية النسبية الخاصة على النحو:

" يقال أن الحدث الذي وقع في النقطة x_1 عند الزمن t_1 متزامن مع الحدث الذي وقع في النقطة x_2 عند الزمن t_2 إذا وصلت الإشارات الضوئية الصادرة من الحدثين للنقطة x الواقعة في منتصف المسافة بين x_1 ، x_2 في نفس الوقت (شكل6.6).



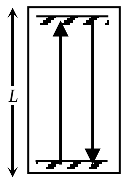
شكل(6.6)

وقد بين أينشتاين أن تزامن حدثين في نظام إسناد معين ليس بالضرورة أن يكونا متزامنين في نظام إسناد يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة للنظام الأول.

6.6) تمدد الزمن: Time – Dilation

تبيّن معادلات تحويل لورنتز أن الزمن نسبي وليس مطلقاً، أي أن الفترة الزمنية التي تفصل بين حدثين تعتمد على حالة المراقب الذي يقيسها. ولتوضيح ذلك.

نفرض أننا نستطيع قياس الزمن بطريقة سهله بإستخدام نوع من الساعات وهي عبارة عن مرآتين متوازيتين تفصل بينهما مسافة (L) معروفة بدقة تامة وأن أحدى المرآتين ذات سطح حساس للضوء يكشف عن وصول الإشارة الضوئية.



شكل(6.7أ)

إذا أرسلت نبضه ضوئية من سطح المرآه الأولى فإن الشعاع العمودي ينعكس على نفسه عائداً للمرآة الأولى وعند وصوله لسطحها يكون الزمن الذي مضى منذ إرسال الإشارة الضوئية وحتى الإستقبال هو:

$$t = \frac{2L}{c} \qquad (1)$$

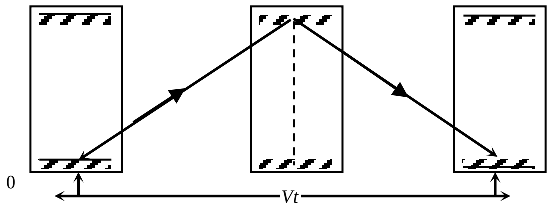
ولنفرض أن الساعة مثبتة داخل عربة حيث المرآه الأولى على أرضية العربة والأخرى مقابلة لها عند سقف العربة، نفرض وجود مراقبين الأول داخل العربة التي تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة V والمراقب على الأرض (0).

بالنسبة للمراقب الذي في العربة تكون المرآة بالنسبة له ساكنة ولذلك يرى أن الإشارة الضوئية تتحرك من وإلى المرآة بصورة عمودية وتكون المسافة التي تتحركها ذهاباً وأياباً $= 2L$ ، وبالنسبة لهذا المراقب الموجود في النظام (s') تكون الفترة الزمنية

$$t_0 = \frac{2L}{c} \qquad (2)$$

أما بالنسبة للمراقب الموجود في النظام (s) عند o:

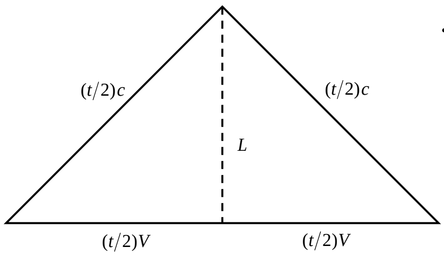
فإن الشعاع الصادر من النبضة بصورة عمودية نحو الأعلى وبعد قطعة مسافة L (عند وصوله إلى سقف العربة) تكون المرآه قد إنزاحت من مكانها نحو الأمام وعليه لا ينعكس هذا الشعاع ولا يراه المراقب على الأرض ولا يمكن استخدامه لقياس الزمن. كما في الشكل(6.7 ب):



شكل(6.7ب)

أي أن الشـــعاع ينطلق بزاوية معينة مع الأفقي، لنفرض أن (t) هي الفترة الزمنية التي يقيســـها المراقب الموجود في نظام (s) على الأرض، تكون المسافة الأفقية التي تتحركها المرآه إلى الأمام هي $(V)(\frac{t}{2})$

أما المسافة التي قطعها الشعاع في نفس الفترة الزمنية $= (\frac{t}{2}c)$.



شكل(6.7ج)

نلاحظ من الشكل(6-7ج) أن

$$[(\frac{t}{2}c)]^2 = (\frac{t}{2}v)^2 + L^2$$

أو

$$\frac{t^2}{4}(c^2 - v^2) + L^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2}$$

ومنها نجد أن

$$\boxed{t^2 = \frac{4L^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow t = \frac{2(L/c)}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}} = k\,t_0} \quad (2)$$

وحيث $k > 1$ فإن $t > t_0$. يعرف t_0 بالزمن الحقيقي ونلاحظ أن أرتفاع العربة لا يتأثر بتقلص الطول حيث أن هذا الطول عمودياً على إتجاه الحركة.

- **الأدلة التجريبية على حقيقة تمدد الزمن.**

معادلة رقم (2) تعني أن الزمن في حركة فضائية وكما يقيسه المراقب على سطح الأرض يمضي أبطأ من المعهود أي أن المراقب الأرضي يشاهد عقارب ساعة رائد الفضاء وكأنها تتحرك ببطء مقارنة مع عقارب ساعته. أي أن الزمن تمدد وتزداد هذه الظاهرة بزيادة سرعة المركبة واقترابها من سرعة الضوء.

مثال: الميزونات وهي جسيمات غير مستقرة لها شحنة (e) ولها كتلة أكبر من كتلة الإلكترون وتعادل $m_{\mu} = 207\,me$ وفي طبقات الجو العليا على علو $10\,km$ تتولد نتيجة لتصادم الأشعة الكونية بالغلاف الجوي، فإذا كانت سرعة هذه الجسيمات $v = 0.998c$ وكانت فترة الحياة لها في نظام إسنادي ساكن بالنسبة لها $\approx 2.2\times10^{-6}s$ استخدم الميكانيكا الكلاسيكية والميكانيكا النسبية لحساب المسافة التي تتحركها الجسيمات قبل أن تتفكك.

الحل: **أولاً: بإستخدام ميكانيكا نيوتن:** المسافة d_0

$$d_0 = vt = (0.998c)\times 2.2\times10^{-6} = 660\,m$$

وهذه المسافة أصغر من الإرتفاع عند إنتاج هذه الجسيمات وعليه لا تصل إلى سطح الأرض وفي الحقيقة فإن معظم الميزونات تصل سطح الأرض مما يدل على خطأ في الحسابات السابقة حسب قوانين نيوتن.

ثانياً: بالنسبة للميكانيكا النسبية:

لنفرض أن T فترة الحياة كما تقاس في المعمل، وتتحرك الميزونات بسرعة $0.998c$ بالنسبة للمعمل وعليه فإن

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-(0.998)^2}} \approx 25\times10^{-6}\sec$$

أي هذه الفترة أطول بحوالي 16 مرة من الفترة الزمنية لحياتها كما يقيسها مراقب متحرك معها وتكون المسافة d التي قطعها الميزونات

$$d = vT = (0.998)(3\times10^{8})\times 35\times10^{-6}\sec \approx 10500m = 105km$$

وبالتالي فإن الميزونات تصل سطح الأرض وكما تؤيد التجارب العملية.

وقد أجرى هافيلي وكيتنج (Keeting) عام 1972م تجربة أيدت صحة المعادلة (2) وذلك بإستخدام مجموعة من الساعات الذرية (سيزيوم) حيث وضعها أربع ساعات على متن طائرة تجارية طافت حول الكرة الأرضية مع الأخذ بعين الإعتبار التصحيحات قبل مقارنة الساعات المتحركة مع الساعة المماثلة الموجودة في مرصد البحرية الأميركية، وهي إعتبارات تأثير دوران الأرض على الساعة الموجودة في المرصد (هذا يؤدي إلى تسارع صغير حيث أن الأرض ليست نظام إسناد قصوري حقيقي بسبب الدوران حول نفسها). وكذلك إعتبار التأثير التسارع والتباطؤ وتغيير الإتجاه والمجال الجذبي (Gravitational Field) على الساعات المتحركة، وعند مقارنة الأزمنة المقاسة بالساعات المتحركة بتلك المقاسة بالساعات الأرضية الساكنة وجدناها تحقق معادلة رقم (2) (تمدد الزمن).

- **تحدد الزمن وعمر الإنسان:**

إذا كانت الحركة تؤدي إلى تمدد الزمن فإنها قد تؤدي أيضاً للتأثير على عمر الإنسان، وإليك التوضيح الثاني بالتجربة الإفتراضية.

سافر رائد فضاء بسرعة ثابتة قدرها $v = 0.99c$ نحو أحد النجوم البعيدة وكان عمره 20 سنة ثم عاد إلى الأرض بعد أن أمضى في سفره حسب تقويمه الخاص (5) سنوات ويعتقد هو عند عودته للأرض أن عمره أصبح (25) سنة، ولكن أهله يرو غير ذلك إذا أنهم انتظروه طويلاً فقد تمدد زمنه بالنسبة لأهل الأرض حسب علاقة تمدد الزمن أي

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(0.99)^2}} \approx 35.4 \text{ سنة}$$

أي أن زمن غيابه عن الأرض وكما يقيسه أهل الأرض 35.4 عاماً وعليه يكون عمره بالنسبة لأهل الأرض حوالي 55 عاماً!! ونتسائل الآن ما هو عمره الحقيقي؟ هل هذه المعالجة صحيحة؟ للإجابة على هذا السؤال نلاحظ:

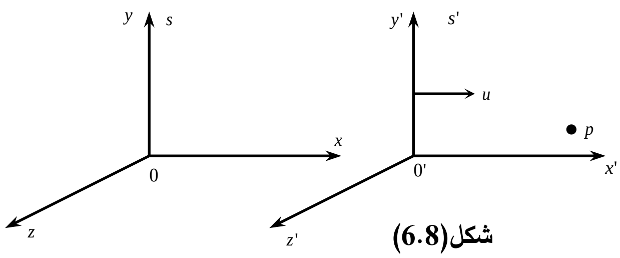
(1) هل الساعات البيولوجية (خلايا الجسم) تخضع لظاهرة تمدد الزمن لا أحد يستطيع تقديم إجابة قاطعة لهذا السؤال. ومع ذلك يؤيد كثيراً أن خلايا الجسم تخضع لظاهرة تمدد الزمن كما في حالة الساعات الذرية والجسيمات الأولية.

(2) تعالج النظرية النسبية نظم إسناد قصورية (غير متسارعة), ولكن مركبة الفضاء تسارعت عند إنطلاقها وعند الدوران ثم يتباطؤ عند الهبوط ولا يمكن تطبيق قوانين النظرية النسبية أثناء هذه الفترات.

(3) التجربة هذه خيالية لأنه عند هذه السرعة العالية فقط ولكن لا يمكن للكتل الكبيرة أن تصل إلى هذه السرعة لأسباب تقنية واقتصادية. ولهذا التجربة غير عملية.

6.7) معادلات تحويل السرعة النسبية:

لنفرض نظامي s' ، s حيث يتحرك (s') بسرعة u بالنسبة لـ (s) وعليه إذا كانت سرعة جسيم p بالنسبة للنظام (s) شكل(6.8) هي v والمطلوب إيجاد سرعة الجسيم بالنسبة للنظام (s').



شكل(6.8)

تكون مركبات السرعة في النظام (s) هي:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \;;\; v_y = \frac{dy}{dt} \;;\; v_z = \frac{dz}{dt}$$

أما مركبات السرعة بالنسبة للنظام (s') فهي:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \;;\; v'_y = \frac{dy'}{dt'} \;;\; v'_z = \frac{dz'}{dt'} \qquad (1)$$

بتفاضل معادلات تحويل لورنتز آينشتاين نجد

$$dx' = k(dx - u\,dt) \;;\quad dy' = dy \;;\; dz' = dz \;;\; dt' = k(dt - \frac{u}{c^2}dx)$$

بالتعويض في معادلة رقم (1) نجد

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - u\,dt)}{d\,t - (u/c^2)\,dx} = \frac{v_x - u}{1 - (u/c^2)v_x} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{k[dt - (u/c^2)dx]} = \frac{v_y}{k(1 - (u/c^2)v_x)} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{k[dt - (u/c^2)dx]} = \frac{v_z}{k[1 - (u/c^2)v_x]} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ويمكن الحصول على المعادلات العكسية لتحويل السرعة (مركبات السرعة) بوضع $(-u)$ بدلاً من u:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + (u/c^2)v'_x} \;;\; v_y = \frac{v'_y}{k[1 + (u/c^2)v'_x]} \;;\; v_z = \frac{v'_z}{k[1 + (u/c^2)v_x]} \quad (4)$$

ونلاحظ أن هذه المعادلات تؤول إلى المعادلات المناظرة في النظرية النسبية القديمة (جاليلي) عندما $\frac{u}{c^2} \to 0$ أي عندما $u << c$.

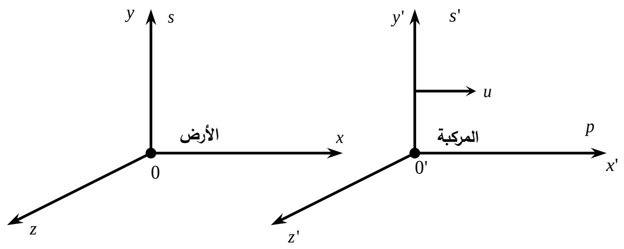
<u>مثال:</u>

(أ) انطلقت مركبة فضاء من الأرض بسرعة ثابتة (v) نحو نجم ثابت (بعيد) فإذا أطلقت هذه المركبة إشارة ضوئية نحو النجم، جد سرعة هذه الإشارة كما تقيسها المحطة الأرضية.

(ب) يتحرك جسيم بسرعة $0.8c$ بالإتجاه الموجب لمحور السينات بينما يتحرك جسيم آخر بسرعة $0.7c$ بالإتجاه السالب لنفس المحور أحسب سرعة الجسم الأول بالنسبة للجسم الثاني.

__الحل__: (أ) نعتبر المركبة نظام إسناد (s') بينما الأرض نظام إسناد قصوري (s) وعليه فإن $u=V$ بينما $(v'_x=c)$ حيث سرعة الضوء بالنسبة للمركبة هي c. والمطلوب حساب v_x؟

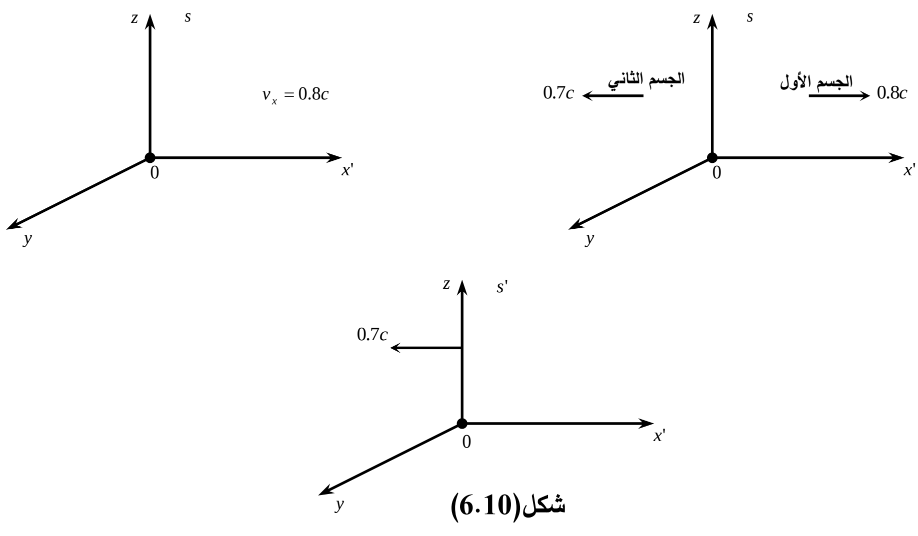
$$v_x=\frac{v'_x+u}{1+(u/c^2)v'_x}=\frac{c+v}{1+vc/c^2}=c$$



أي أن سرعة الإشارة الضوئية بالنسبة للأرض تساوي (c) وهذا يتفق مع الفرض الأول لأينشتاين.

شكل(6.9)

(ب) يمكن حل السؤال بإعتبار نظام الإسناد (s) التي قيست سرعتا الجسيمين بالنسبة لها ويكون بالنسبة للأول $v_x=0.8c$



شكل(6.10)

أما الجسم الثاني فيعتبر نظام الإسناد (s') وبالتالي فإن $u = 0.7c$ والمطلوب تحويل سرعة الأول v_x من النظام s إلى النظام s' أي v'_x؟

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c} = \frac{0.8c - (-0.7c)}{1 - (-0.7c)(0.8c)/c^2}$$
$$= 1.5c/(1 + 0.564) = 0.962c$$

أما عند استخدام معادلات تحويل جاليلي تكون السرعة

$$v'_x = v_x - u = 0.8c - (-0.7c) = 1.5c > c$$

وهذا يتعارض مع النظرية النسبية (سرعة الجسم أكبر من سرعة الضوء).

أما لإيجاد سرعة الثاني بالنسبة للأول

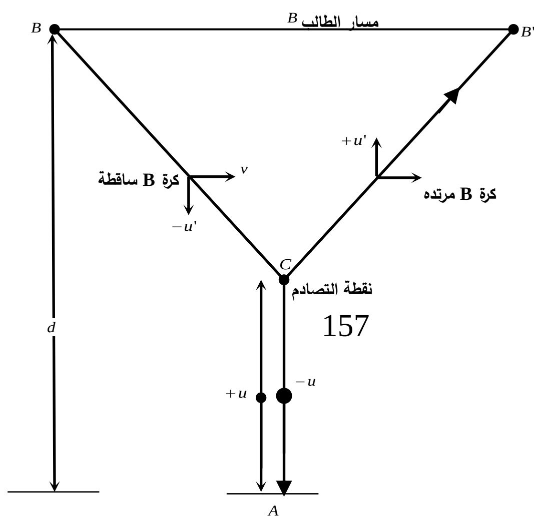
$$v'_x = -\frac{0.7c - 0.8c}{1 - (-0.7)(0.8)} = \frac{-1.5c}{1.56} = -0.962c$$

6.8) الكتلة النسبية (تغير الكتلة مع السرعة)

تطبيق معادلات تحويل لورنتز آينشتاين على حركة الأجسام يسمى بالميكانيكا النسبية. عند استخدام قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (1)$$

يمكن اعتبار أن الكتلة m تعتمد على سرعة الجسم $m = m(v)$ عند المعالجة النسبية ولتحديد طبيعة العلاقة $m = m(v)$ يمكن أجراء التجربة الإفتراضية الخيالية التالية:



شكل(6-11)

نفرض أن الطالب A في نقطة معينة ولديه كرة كتلتها m_0 أثناء السـكون وهو يمثل نظام الإسـناد s بينما يتحرك الطالب B نحو الشـرق وعلى بعد عمودي من الطالب A مقداره d وبسـرعة ثابتة بالنسبة للطالب A هي (v) ولدية كرة مماثلة لكرة الطالب A وكتلتها أثناء السـكون m_0 وسـوف نعتبر أن الطالب B يمثل نظام الإسناد (s').

نفرض أن الطالبين أتفقا على أن يقذفا كرتيها كل منهما نحو الآخر بنفس اللحظة بسـرعة u أي يقذف الطالب A الكرة بسـرعة u أعلى $+u$ (إتجاه محور y الموجب) بينما يقذف الطالب B بكرته إلى أسفل بسرعة $-u$ (الإتجاه السالب لمحور y').

لنفرض أن التصـادم حصـل عند النقطة (C) على بعد $(\frac{d}{2})$ من الطالب A (أي منتصـف المسـافة) والشكل(6.11) يمثل عملية التصادم كما يراها الطالب A حيث

ترتد إليه كرته بعد التصادم المرن عند C بسرعة $-u$ (الإتجاه السالب لمحور y).

لنفرض $T_0 =$ الزمن الذي أسـتفرقته الكرة منذ لحظة قذفها حتى عودتها لنقطة القذف (زمن الطيران) فيكون

$$T_0 = \frac{d}{u} \qquad (2)$$

أما بالنسبة لكرة الطالب B الذي يتحرك في النظام (s') بسرعة (v) بالنسبة للطالب A (s) فإن A لا يرى الكرة تتحرك بإتجاه المحور y في نظامه ويكون إتجاه حركتها مائلاً بالنسـبة للطالب A أي في

الإتجاه BC وتكون مركبة ســـرعتها بإتجاه محور y هي $(-u')$ وعند التصـــادم عند C مع الكرة الأخرى ترتد في الإتجاه CB' ومركبة سرعتها $= (+u')$ بالنسبة للمحور (y).

أما بالنسبة للطالب B يرى نفس الصورة مع تبديل مسارات الكرتين، حيث يرى أن كرته ساقطة بالإتجاه الســالب لمحور y' وترتد بالإتجاه الموجب لنفس المحور وبنفس الســرعة u' ويكون زمن طيران الكرة الثانية (B) كما يقيسها A هي:

$$T = \frac{d}{u'} \tag{3}$$

ويلاحظ أن d لا تخضـع لتقلص الطول لأنها عمودية على إتجاه السـرعة (v) أي $y = y'$. أما الطالب B يقيس زمن كرته ولأنها سـاكنة بالنسـبة له فسـوف يجد أنه يسـاوي T_0، وحيث أن s' تتحرك بسـرعة (v) بالنسبة (s) فإن

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = kT_0 \tag{4}$$

بالتعويض في معادلة (3) نجد أن:

$$u' = \frac{d}{T} = \frac{d}{kT_0} = u\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{5}$$

أي أن الطالب A يجد أن مركبة سرعة كره B بإتجاه محور y أقل من u بسبب تمدد الزمن.

عند تطبيق قانون حفظ كمية الحركة من قبل الطالب A بإتجاه محور y يجب أن

(1) كميـة الحركة قبل التصـــادم $m_0u + m(-u')$ حيث كتلة الكرة B متحركة بســـرعة v ولذلك غير ساكنة.

(2) كمية الحركة بعد التصادم (بإتجاه محور y) هي $m_0(-u) + mu'$

قانون حفظ كمية الحركة:

$$m_0u - mu' = -m_0u + mu' \tag{6}$$

وباستخدام معادلة (5) نجد أن $m_0u = mu'$ وعليه فإن

$$m_0u = mu\sqrt{1-v^2/c^2} \text{ . ومنها نجد أن} \tag{7}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k\,m_0 \qquad (8)$$

حيث $m_0 =$ الكتلة السكونية (rest mass) ، $m =$ كتلة الجسم كما يقيسها مراقب يتحرك الجسم بالنسبة له بسرعة (v) وتسمى بالكتلة النسبية. ونلاحظ أن $m > m_0$ أي تزداد كتلة الجسم مع زيادة سرعته.

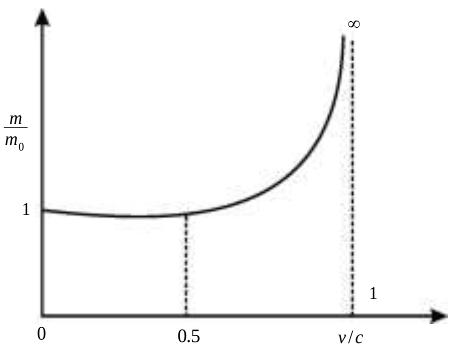
وتصبح معادلة الحركة في الميكانيكا النسبية:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad (9)$$

وتعرف كمية الحركة النسبية:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (10)$$

للعلاقة بين m مع v كما في الشكل(6-12) في حالة السرعة المنخفضة $v << c$ فإن $m \approx m_0$ وعند $v \to \infty$ فإن $m \to \infty$ وهذا يتناقض مع التجربة العملية حيث أن الجسم الذي تكون كتلته لا نهائية لا يمكن تحريكه فيكف تكون سرعته تعادل سرعة الضوء.



شكل(6.12)

ويمكن الإستنتاج مع ذلك أن النظرية النسبية تفترض أن سرعة الضوء هي الحد الأقصى للسرعات ولا يمكن لأي جسم عادي أن تكون سرعته تساوي أو تزيد عن سرعة الضوء c .

في عام 1908م حاول بوشيرر (Bucheerer) التحقق من صحة معادلة الكتلة النسبية $m = k\,m_0$ بإستخدام طريقة طومسون في قياس $(\frac{c}{m})$ لإثبات أن هذه النسبة تكون في حالة الإلكترونات السريعة أصغر منها في حالة الإلكترونات البطيئة وقد نجحت التجارب في تحقيق صحة الكتلة النسبية. أي لهذه المعادلة أهمية في حالة حركة الجسيمات الأولية (شبه الذرية)، (إلكترونات بروتونات – ميزونات) أما في حالة الجسيمات العيانية (Macroscopic) فإن السرعة صغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ولا تظهر أهمية لتغير الكتلة مع هذه السرعة.

6.9) طاقة الحركة النسبية:

تعرف طاقة الحركة النسـبية بأنه الشـغل اللازم بذله لزيادة سـرعة الجسـم من صـغر وحتى السـرعة النهائية v، فإذا أثرت قوة F على جسم كتلة m يكون الشغل اللازم لتحريك الجسم (إزاحته) ds بإتجاه خط عمل القوة هو:

$$dw = F\,ds = \frac{dp}{dt}ds = (dp)(\frac{ds}{dt}) = v\,d\,(mv) \qquad (11)$$

وحيث $m = \dfrac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$. إذاً

$$\frac{dm}{dv} = (-\frac{1}{2})[\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}](-\frac{2v}{c^2}) = \frac{mv}{c^2-v^2}$$

إذاً

$$(mv)\,dv = (c^2 - v^2)\,dm$$

بالإشتقاق لمعادلة الشغل:

$$dw = mv\,dv + v^2\,dm = (c^2 - v^2)\,dm + v^2\,dm = c^2\,dm$$

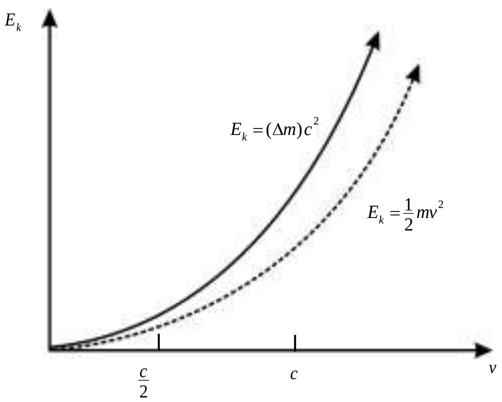
$$E_k = w = \int dw = \int_{m_0}^{m} c^2\,dm = c^2(m - m_0)$$

إذاً

$$E_k = (\Delta m)c^2 \qquad (12)$$

ونلاحظ أن طاقة الحركة النسبية تساوي صفر عند $v =$ صفر.

وللمقارنة بين طاقة الحركة النسبية E_k مع طاقة الحركة الكلاسيكية $\frac{1}{2}mv^2$ كما في الشكل(6.13):



شكل(6.13)

تكون القيمان متقاربين عند $v << c$ ولكن الفرق يصبح ملاحظاً بشكل كبير عندما تقترب v من c.

6.10) الطاقة الكلية وكمية الحركة:

يمكن كتابة معادلة (12) على الصورة

$$mc^2 = m_0c^2 + E_k$$ أو

$$E = E_0 + E_k \qquad (13)$$

حيث E = الطاقة النسبية العكسية للجسم المتحرك ، E_0 هي طاقة الجسم في حالة السكون (rest Energy) أو طاقة الكتلة السكونية (Rest mass energy) والتي تساوي (m_0c^2).

وهذه المعادلة تبين مبدأ التكافؤ بين الطاقة والكتلة وإمكانية تحويل أحداهما للآخر وهذا المبدأ استخدم في تفسير كثير من الظواهر النووية. حيث نلاحظ أنه إذا $e^+ + e^- \to \gamma$ (بوزترون + إلكترون) يتحدان ليكونا أشعة جاما ($\gamma - ray$) وهذا يعرف بفناء الكتلة (تحول المادة إلى طاقة).

ويمكن الربط بين الطاقة الكلية مع كمية الحركة للجسم:

حيث $p = mv$ ، $E = mc^2$ ، $m = \dfrac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

بتربيع هذه المعادلة وترتيب الحدود ينتج أن:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{(1 - v^2/c^2)} \Rightarrow m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

وبضرب كل الحدود في (c^2) نجد أن:

$$m^2c^4 - c^2(m^2v^2) = m_0^2 c^4$$

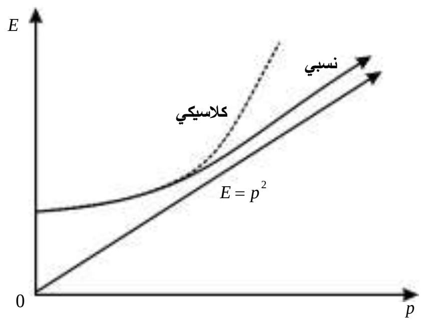
وعليه فإن

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \qquad (14)$$

ويمكن كتابة (14) كالآتي:

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$

وعند رسم العلاقة (معادلة (14)) شكل(6-14):



شكل(6.14)

في حالة الميكانيكا الكلاسيكية الطاقة الكلية: $E = E_0 + \frac{1}{2}mv^2$

ونلاحظ عندما تكون $m_0 =$ صفر فإن $E_0 =$ صفر (كتلة الفوتون) وتكون طاقة الفوتون هي $E = pc$.

__مثال(1):__ برهن أن سرعة الجسم يمكن أن تكتب على الصورة:

(أ) $v = c\sqrt{1-(E_0/E)^2}$

(ب) وكذلك على الصورة: $v = cp\Big/\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$

البرهان: (أ) بما أن

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$. إذاً

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow (\frac{E}{E_0})^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2}$$. وعليه فإن

$$1-(v/c)^2 = (\frac{E}{E_0})^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-(E_0/E)^2} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-(E_0/E)^2}$$

(ب) يمكن كتابة الطاقة الكلية للجسم على الصورة:

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

بالقسمة على $m^2 c^2$ ينتج أن:

$$c^2 = \frac{m_0^2 c^2 + p^2}{m^2}$$

وبالقسمة على مربع سرعة الجسم ينتج:

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{m_0^2 c^2 + p^2}{m^2 v^2} = \frac{m_0^2 c^2 + p^2}{p^2}$$

مقلوب الطرفين يؤدي إلى:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$. ومنه نجد أن $$v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}$$

مثال(2): إلكترون طاقة حركته النسبية يساوي ضعف طاقته السكونية أحسب:

(أ) طاقته السكونية، (ب) طاقته الكلية ، (ج) سرعته ، (د) كتلته النسبية

الحل:

(أ) $E_0 = m_0c^2 = 9.1\times10^{-31}kg\times9\times10^{16} = 81.9\times10^{-15}J = 0.511Mev$

حيث $1ev = 1.6\times10^{-19}J$

(ب) $E = m_0c^2 + E_k = m_0c^2 + 2m_0c^2 = 3m_0c^2 = 1.533Mev$

(ج) بما أن $\frac{E_0}{E} = \frac{1}{3}$. إذاً

$$v = c\sqrt{1-(E_0/E)^2} = c\sqrt{1-1/9} = \frac{2\sqrt{2}\,c}{3} = 2.83\times10^8 m/s$$

(د) بما أن $E = m_0c^2 = 3m_0c^2$. إذاً

$$m = 3m_0 = 3\times9.1\times10^{-31}kg = 2.73\times10^{-30}kg$$

6.11) ظاهرة دوبلر: Doppler Effect

وجد دوبلر أن طول الموجه التي يرصـــدها المراقب (موجه ضـــوئية أو صـــوتية) تعتمد على ســـرعة المصدر بالنسبة للمراقب. والعلاقة الرياضية هي:

(1) في حالة الموجة الصوتية:

$$\boxed{\lambda_{\text{المراقب}} = \lambda_{\text{المصدر}}(1\pm v_s/u)} \qquad (1)$$

حيث $v_s =$ سرعة المصدر بالنسبة للمراقب، $u =$ سرعة الموجة الصوتية، الإشارة الموجة في العلاقة في حالة إبتعاد المصدر عن المراقب:

والإشـارة تكون سـالبة في حالة: إقتراب المصـدر من المراقب. أما v_s تكون مقدار عددي (بدون إشارة) عند إستخدام العلاقة (1).

(2) في حالة الموجة الضوئية:

حيث: $c =$ سرعة الضوء وهي ثابتة حسب فرضية أينشتاين فقد وجد دوبلر أن العلاقة بين طول الموجه التي يرصدها المراقب من مصدر ضوئي تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\lambda_{\text{المراقب}} = \lambda_{\text{المصدر}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \qquad (2)$$

حيث $\beta = \dfrac{v}{c}$ ، $v =$ سرعة المصدر بالنسبة للمراقب.

ملاحظة: في العلاقة (2) إذا كان المصدر يقترب من المراقب فإن إشارة $(\beta = \dfrac{v}{c})$ تكون $(+)$. وإذا كان المصدر يبتعد عن المراقب فإن إشارة β تكون سالبة $(-)$

فمثلاً عند رصد الضوء القادم من النجوم المتبعدة عن الأرض فإنه لوحظ ازدياد طول موجة الضوء كما يقيسه المراقب وهذه تعني إنزياح اللون نحو الأحمر. كما لوحظ أن الضوء القادم من النجوم المقتربة من الأرض إنزياح اللون نحو الأزرق أي يقصر طول الموجة وهذا يدعم نظرية دوبلر بشكل عملي.

مثال(1): عند رصد نجم متحرك بالنسبة للأرض وجد أن خط الطيف الأزرق من طيف الهيدروجين $\lambda_0 = 4340 A^\circ$ أصبح عند طول موجة $6000 A^\circ$. جد سرعة النجم بالنسبة للأرض.

الحل: بما أن

$$\lambda_{\text{المراقب}} = \lambda_{\text{المصدر}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

إذاً

$$6000 = 4340\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow (1.3825) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

بتربيع الطرفين نحصل على:

$$(1.3825)^2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

بحل المعادلة نجد $\beta = -0.313$. إذاً

$$v = \beta c = -9.39 \times 10^7 \ m/s$$

الإشارة (–) تعني أن النجم يبتعد عن المصدر (ظاهرة الإنزياح نحو الأحمر).

مثـــال(2): يـدعـى أحـد الـفـيـزيـائـيـن فـي مـحـكـمـة الـمـرور أن ســـبـب قـطـع الإشـــارة الحمراء $\lambda = 6000 A^{\circ}$ هو سـبب ظاهرة دوبلر حيث رأى لون الإشـارة خضـراء $(\lambda = 5500 A^{\circ})$ عندما كان متجهاً نحو الإشارة هل هذا صحيح؟

الحل:

$$\lambda_{\text{المراقب}} = \lambda_{\text{المصدر}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\frac{5500}{6000} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow 0.84027 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

تربيع الطرفين وحل المعادلة بالنسبة لـ β نجد أن

$\beta = 0.08979$. إذاً $v = \beta c = 2.6 \times 10^{7}\, m = 2.6 \times 10^{4}\, km/s$

وهذا غير معقول أن يملك هذه السـرعة الهائلة حتى تتحول الإشـارة من اللون الأخضـر (كما يبدو له) إلى اللون الأحمر.

تمارين

(1) إذا عملت أن الزمن الحقيقي لبقاء جسيم هو $100\mu s$:

(أ) كم يبدو زمن بقائه إذا كان متحركاً بسرعة $0.96c$ في المعمل.

(ب) كم تبلغ المسافة التي يقطعها الجسيم في المعمل خلال فترة بقائه.

(ج) كم تبلغ المسافة التي يقطعها الجسيم بالنسبة لمراقب ثابت في نظام الإسناد للجسيم s'.

(2) إذا عملت أنه يمكن مشاهدة مسارات الجسيمات النووية غير المستقرة ذات الطاقات العالية عن طريق الآثار التي تخلفها هذه الجسيمات عند مرورها في أوساك معينة. جد زمن البقاء الحقيقي لجسيم سرعته $0.995c$ وطول مساره $1.25mm$.

(3) يقف مراقب على رصيف محطة قطار، فإذا مرّ قطار بسرعة $v = 0.8c$ ووجد المراقب أن طول الرصيف $60m$ علماً بأنه لاحظ مقدمة ومؤخرة القطار منطبقتان على الرصيف، جد:

(أ) الزمن الذي يستغرقه مرور القطار بنقطة ثابتة على الرصيف بالنسبة للمراقب.

(ب) الطول الحقيقي للقطار كما يقيسه أحد ركاب القطار.

(ج) طول الرصيف كما يقيسه أحد ركاب القطار.

(د) الزمن الذي يستغرقه مرور القطار بالنسبة لنقطة ثابتة على الرصيف كما يقيسه أحد ركاب القطار.

(هـ) جد الفارق الزمني بين لحظة إنطباق مقدمة القطار على أول الرصيف وإنطباق مؤخرته على آخر الرصيف.

(4) المراقب $(0')$ في عربة تسـير بسـرعة $2.4\times10^8 m/s$ بالنسـبة لمراقب ثابت (0) على سـطح الأرض. إذا كان الحدث (1) صدرو فوتون من مؤخرة العربة والحدث (2) وصول الفوتون إلى مرآة عند مقدمة العربة وإنعكاسها عنها والحدث (3) وصول الفوتون مرة أخرى مؤخرة العربة، فإذا وجد المراقب $(0')$ طول العربة $30m$ استخدم معادلات لورنتز لإيجاد ما يلي:

(أ) طول العربة كما يقيسه المراقب (0).

(ب) الفرق في الإحداثيات بين الحدثين $(2,1)$، $(3,2)$ ، $(3,1)$ في مجموعة الإسناد $(0')$.

(ج) جد الفرق في الإحداثيات بين الحدثين $(2,1)$، $(3,2)$، $(3,1)$ في مجموعة الإسناد 0.

(د) جد الفارق الزمني في كل من حدثين $(2,1)$، $(3,2)$، $(3,1)$ في مجموعة الإسـناد $(0')$ وكذلك في مجموعة الإسناد (0).

(5) جد كلاً من الطاقة الكلية والطاقة الحركية وكمية الحركة الخطية بوحدة Mev/c لبروتون طاقة سكونه $E_0 = 938 Mev$ وسرعته $v = 0.8c$.

(6) أوجد سـرعة وكمية الحركة الخطية (بوحدة Mev/c) للإلكترون الذي طاقته الحركية تساوي $10 Mev$ علماً بأن طاقة السكون له هي $0.511 Mev$.

(7) في أحد المعجلات الذرية يتم تعجيل الإلكترونات على مرحلتين: الأولى تزيد من سـرعته من صـفر إلى $0.99c$ والثانية من سـرعته من $0.99c$ إلى $0.999c$. جد مقدار الطاقة الحركية المكتسـبة من قبل الإلكترونات في المرحلتين. علماً بأن طاقة السكون (طاقة التكوين) للإلكترون هي $E_0 = 0.511 Mev$.

الفصل السابع :ديناميكا منظومة الجسيمات

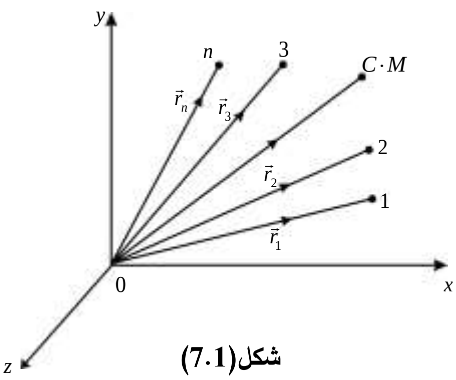
Dynamics of a System of Particles

يضــــم هذا الفصــــل تســـعة بنود ندرس فيها معادلة الحركة لمجموعة من الجســـيمات تحت تأثير قوة خارجية حيث تتناول المظهر العام لهذه الحركة وذلك عن طريق تحديد حركة مركز كتلته المجموعة وكذلك تحديد الزخم الخطي وكمية الزخم الزاوي لها. كما ندرس التصــــادمات بين الجســـيمات بنوعيها التصـــــادم المرن وغير المرن، بالإضــــافة إلى معادلة الحركة لمنظومة من الجســـيمات عندما تكون كتلة الجسيم دالة للزمن كما هو الحال في دراسة حركة الصواريخ الفضائية.

7.1) مفهوم مركز الكتل والزخم الخطي:

Center of Mass & Linear Momentum

لنفرض وجود منظومة من الجســـيمات كتلها كالتالي $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ ومتجهات مواقعها معرفة كالتالي $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \ldots \vec{r}_n$ (شكل 7.1)



شكل(7.1)

عند دراسة حركة هذه المنظومة يلزم تحديد (n) معادلة للحركة وبدلاً من ذلك تمكن تسهيل دراسة حركة المجموعة باختيار ممثل عن هذه المجموعة يقع في نقطة لها متجه موقع يرمز له بالرمز $\vec{r}_{cm}$ ويســـمى

مركز الكتل (center of Mass) حيث نتصـــور المســـألة كأنها جســـيم واحد متمركز عند هذه النقطة.
ويعرّف متجه مركز الكتلة $(\vec{r}_{cm})$ على النحو:

$$\vec{r}_{cm}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \qquad (1)$$

لنفرض أن: $m_1+m_2+m_3+...+m_n=\sum_{i=1}^{n}m_i=M$ لذلك تصبح معادلة(1) على الصورة التالية:

$$\vec{r}_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\,\vec{r}_i}{M} \qquad (2)$$

وحيث أن متجه الموقع بدلالة الإحداثيات الكارتيزية هو:

$$\vec{r}_{cm}=\hat{i}\ x_{cm}+\hat{j}\ y_{cm}=\hat{k}\ z_{cm}$$

فإن معادلة (2) معادلة متجهه لها ثلاث مكونات هي:

$$x_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\,x_i}{M}\ ;\quad y_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\,y_i}{M}\ ;\quad z_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i z_i}{M} \qquad (3)$$

<u>مثال (1):</u> منظومة من الجسيمات معرفه كالتالي: $m_1=2kg\ ,\ m_2=3kg$

$$\vec{r}_1=3\hat{i}+4\hat{j}\ ;\ \vec{r}_2=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}\ ;\ \vec{r}_3=2\hat{j}+4\hat{k}\ ,\ m_1=5kg$$

جد متجه موقع مركز الكتل.

<u>الحل</u>: $M=2+3+5=10\,KG$ ، نستخدم معادلة (3):

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{M}=\frac{(2)(3)+(3)(-2)+5(0)}{10}=\frac{0}{10}=0$$

$$y_{cm}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{M}=\frac{(2)(4)+(3)(5)+(5)(4)}{10}=\frac{43}{10}=4.3$$

$$z_{cm} = \frac{(2)(0)+(3)(3)+5(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9$$

إذاً
$$\vec{r}_{cm} = 0\hat{i} + 4.3\,\hat{j} + 2.9\,\hat{k}$$

- **الزخم الخطي لمنظومة جسيمات:**

إذا كانت مواقع الجسيمات دالة للزمن بمعني $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ فإن سرعة الجسيم $(\vec{v}_i)$. وعليه نعرّف كمية فيزيائية جديدة هي الزخم الخطي (Linear Momentum) وهي كمية متجهه على النحو التالي: $\vec{P}_i = m_i\vec{v}_i$

وعليه يكون الزخم الخطي الكلي للمنظومة كالتالي:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \tag{4}$$

ويمكن كتابة الزخم الخطي للمنظومة بدلالة سرعة مركز الكتلة $(\vec{v}_{cm})$ على النحو التالي: نستخدم معادلة (2) لنحصل على $M\,\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$ باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن (باعتبار الكتل ثابتة مع الزمن) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}(M\,\vec{r}_{cm}) = \frac{d}{dt}(\sum m_i\,\vec{r}_i) \Rightarrow M\,\dot{\vec{r}}_{cm} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i \Rightarrow M\,\vec{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i$$

من تعريف كمية الحركة نجد أن $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i$ حيث $\vec{P} = M\,\vec{v}_{cm}$ هو الزخم الكلي للمنظومة بدلالة سرعة مركز الكتل. أما لدراسة حركة المنظومة يمكن تحديد معادلة الحركة للمنظومة على النحو التالي:

نفرض أن القوى الخارجية المؤثرة على كل جسيم من المنظومة هي $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ حيث $\vec{F}_1$ تؤثر على m_1 وهكذا...

وفقاً لقانون نيوتن الثالث (قانون الجذب المتبادل بين الأجسام) فإن القوة الداخلية المؤثرة على جسيم (i) من الجسيم المجاور له (j) هي $\vec{F}_{ij}$ ولذلك تصبح معادلة الحركة (قانون نيوتن الثاني) للجسيم (i) هي:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \ \vec{F} \qquad (5)$$

المؤشر $(')$ يعني $(j \neq i)$ ويكون التجميع لكل قيم (j) ماعدا المساوية للرقم (i) وتكون معادلة الحركة للمنظومة

$$\sum_{i=1}^{n} m \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \ \vec{F}_{ij} \qquad (6)$$

نلاحظ في معادلة (6) أن الحد الثاني من الطرف الأيسر يتلاشى حيث أن $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ فعند التجميع يوجد لكل حد حداً مناظر له ومخالف له في الإشارة. وعليه تصبح معادلة (6)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (7)$$

بالرجوع إلى معادلة (2) وأخذ المشتقة الثانية للطرفين بالنسبة للزمن نحصل على:

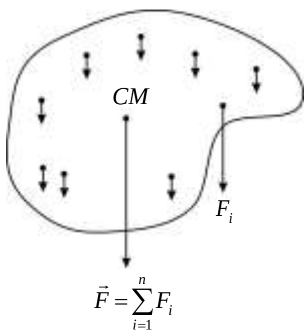
$$M \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{P}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{أو} \qquad M \ddot{\vec{r}}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

إذاً

$$\boxed{M \vec{a}_{cm} = \dot{\vec{P}} = \vec{F}_{ext}} \qquad (8)$$

تعتبر معادلة (8) معادلة الحركة للمنظومة وهي تعطي صورة أخرى للمعادلة (7).

تطبيق: عند سقوط جسم صلب تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية فإن كل جزئ في الجسم الساقط يتأثر بقوة جاذبية $\vec{F}_i$ حيث $\vec{F}_i = m_i g$ ،



$g =$ عجلة الجاذبية الأرضية

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

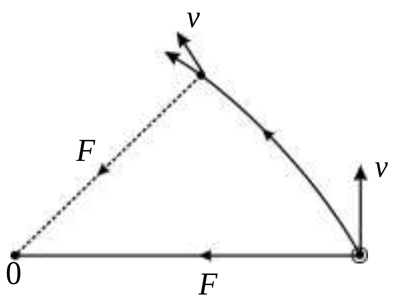
$$w = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g\left(\sum_i m_i\right) = gM$$

أي أن وزن الجسم (w) = كتلة الجسم × عجلة الجاذبية الأرضية، لذلك نعتبر الجسم الساقط كنقطة مادية عند مركز الثقل وتتسارع بمقدار عجلة الجاذبية الأرضية وهذا بديل عن دراسة حركة كل جسيم في الجسم الصلب.

7.2) الزخم الزاوي لمنظومة الجسيمات

Angular Momentum of a System of Particles

عندما يتحرك جسـيم كتلة (m) بسـرعة خطية $(\vec{v})$ فإنه يملك كمية حركة خطية $(\vec{P})$ ولكن إذا أثرت قوة $(\vec{F})$ متعامدة على اتجاه حركته [كما في الشكل (7.2)]



شكل(7.2)

فإن الجسـيم يُجبر على أن يغير في اتجاه حركته ليسـير في مسـار قد يكون دائرياً إذا بقيت القوة عمودية على اتجاه السـرعة وكانت السـرعة ثابتة أثناء الحركة نقول أن الجسـم يملك كمية من الزخم الزاوي يرمز له $\vec{L}_0$ الذي يعطي بالعلاقة الرياضية

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (1)$$

والزخم الزاوي كمية متجهة ، $\vec{r}$ = متجهة موقع الجسم من مركز القوة. ويمكن تعميم معادلة (1) في حالة منظومة من الجسيمات على الصورة:

$$\vec{L} = \sum_{i-1}^{n} L_i = \sum_{i-1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad (2)$$

- **معادلة الحركة الدورانية لمنظومة من الجسيمات:**

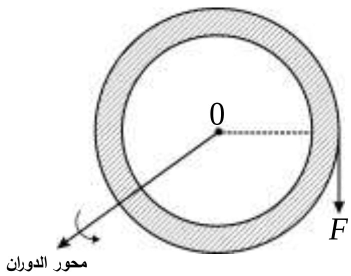
وجدنا أن معادلة الحركة لجسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة $\vec{v}$ ويملك زخم خطي $\vec{P}$ هي:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad (3)$$

حيث $\vec{F}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم.

أما في حالة دوران جســيم صــلب حول محور مثبت في نقطة ما تحت تأثير قوة خارجية $\vec{F}$ مثل حركة دوران بكرة حول محورها عندما نشدها بحبل ملفوف حول محيطها شكل(7.3) فإن معادلة الحركة لجسم (البكرة) تكون كالتالي:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_0 \qquad (4)$$



شكل(7.3)

حيث $\vec{N}_0 =$ العزم الدوراني للقوة الخارجية المؤثرة على الجسم.

ولبرهان معادلة (4) نســتخدم معادلة (2) ونأخذ المشــتقة الأولي لها بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times m\vec{v}_i + \sum_{i-1} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i$$

حيث $m_i(\dot{\vec{r}} \times \vec{v}_i) = \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$ لأن $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ ، وعليه فإن

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times [\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' F_{ij}] = \sum_{i-1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

حيث $\vec{a}_i$ تعجيل الجسيم (i)، $\vec{F}_i =$ محطة القوة المؤثرة على الجسيم (i)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times [\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}{}' F_i] = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \qquad (5)$$

عند نشر الحد الثاني في معادلة (5) نحصل على التالي:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= r_1 \times [F_{12} + F_{13} + F_{14} + \ldots + F_{1n}] + r_2 \\ &\times [F_{21} + F_{23} + F_{24} + \ldots + F_{2n}] \\ &+ \vec{r}_3 \times [\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{33} + \ldots + \vec{F}_{3n}] \end{aligned}$$

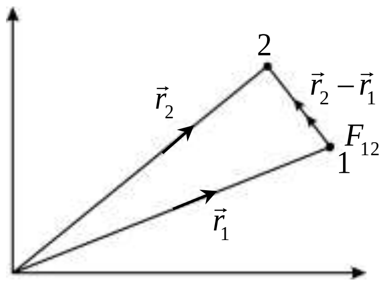
حيث أن القوى الداخلية (التجاذبية) متبادلة بمعني $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ وهكذا.

لذلك لو أخذنا الحد الأول في السلسلة لوجدنا أن:

$$\vec{r}_1 \times F_{12} + \vec{r}_2 \times F_{21} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_{21}) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_{21}) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21}$$

نلاحظ من الشكل(7.4) أن $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{21} // \vec{F}_{12}$

لكـــن الضـــرب الإتجـــاهي لمتجهـــين متـــوازيين = صـــفر وهكـــذا لجميـــع الحـــدود فـــي المفكـــوك وعليـــه فـــإن الحـــد الثـــاني فـــي معادلـــة (5) = صـــفر. وتصـــبح معادلة (5) على النحو التالي:



شكل(7.4)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = \vec{N}_0 \qquad (6)$$

حيث $\vec{N}_0$ = محصلة العزوم الدورانية للقوى حول محور الدوران (0).

<u>**حالـــة خاصـــة**</u>: إذا كـــان $\vec{N}_0$ (محصـــلة العـــزوم الدورانيـــة للقـــوى) = صـــفر فـــإن $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ أي أن $\vec{L}$ ثابت بالنسبة الزمن وهذا يعرف باسم قانون حفظ الزخم الزاوي أي أنه:

إذا كـــان الـــدوران للجســـم حـــراً (Free Rotation) فـــإن مقـــدار الـــزخم الـــزاوي فـــي أي لحظـــة يساوي مقدار الزخم الزاوي عند بداية الحركة $(t = 0)$.

7.3) الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات

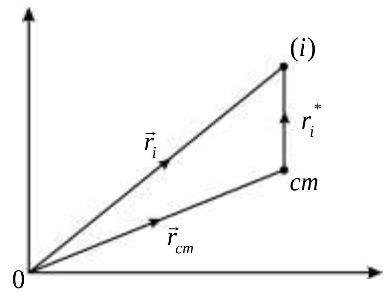
Kinetic Energy of a System of Particles

لنفرض أن منظومة من الجسـيمات حيث كتلته الجسـيم هي (m_i) وسـرعة هي $\vec{v}_i$ فإن الطاقة الحركية للمنظومة = المجموع الكلي لطاقة حركة كل جسيم أي:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \qquad (1)$$

<u>**المطلوب**</u>: تحويل معادلة (1) بدلالة سرعة مركز الكتلة $(\vec{v}_{cm})$:

نفرض أن متجه موقع الجسيم (i) بالنسبة لمركز كتله هو r_i^* حيث من الشكل (7.5):



شكل(7.5)

$$\vec{r}_i = r_i^* + \vec{r}_{cm} \qquad (2)$$

بأشتقاق معادلة (2) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_{cm} \qquad (3)$$

حيث $\vec{v}_i =$ سرعة الجسيم (i) بالنسبة لمركز إحداثيات المحاور (0).

$\vec{v}_{cm} =$ سرعة مركز الكتلة (cm) بالنسبة لمركز إحداثيات المحاور (0).

$\vec{v}_i^* =$ سرعة الجسيم (i) بالنسبة لمركز الكتلة (cm).

من المعادلتين (1)،(2) نجد أن

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i [(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*)]$$

بضرب الحدود وترتيبها نحصل على:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i^*) + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{2} v_{cm}^2 (\sum_i m_i) + \sum_i m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i^*) + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$$

$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} + \sum_i m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i^*) \qquad (4)$$

الحـــد الأول فـــي معادلـــة (4) يعطـــي الطاقـــة الحركيـــة لكتلـــة M موضـــوعة عنـــد مركـــز الكتـــل. والحـــد الثـــاني فـــي معادلـــة (4) يعطـــي الطاقـــة الحركيـــة للمنظومـــة بالنســـبة لإحـــداثيات مركـــز الكتـــل. أمـــا الحـــد الثالـــث فـــي هـــذه المعادلـــة = صـــفر ويمكـــن برهنـــة ذلك كالتالي: حيث من معادلة (2):

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm} \tag{5}$$

إذاً

$$\sum_i m_i(\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_i^{\,*}) = \vec{v}_{cm}\cdot(\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{v}_i^{\,*}) \tag{6}$$

بضرب حدود المعادلة (5) في m_i والتجميع على (i) نحصل على:

$$\sum_i m_i\vec{r}_i^{\,*} = \sum_i m_i\vec{r}_i - \sum_i m_i\vec{r}_{cm}$$

$$= \sum_i m_i\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}(\sum_i m_i) = \sum_i m_i\,\vec{r}_i - r_{cm}\,M \tag{7}$$

لكن: $\vec{r}_{im} = \dfrac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}$ ، إذاً $M\ r_{cm} = \sum \vec{m}_i\vec{r}_i$

وعليه فإن: $\sum_i m_i\vec{r}_i^{\,*} = 0$

معادلة (6) يمكن تبسيطها على النحو التالي:

$$\vec{v}_{cm}\cdot\sum_i m_i\,(\frac{d\vec{r}_i^{\,*}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\sum_i m_i\,r_i^{*}) = 0$$

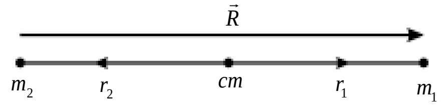
لكن m_i ثابت بالنسبة للزمن إذاً الحد الثالث في المعادلة =(4) صـفر لهذا تصـبح معادلة الطاقة الحركية بدلالة سرعة مركز الكتلة هي:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}M\,v_{cm}^{2} + \sum_{i-1}^{n}\frac{1}{2}m_i\,v_i^{*2}} \tag{8}$$

تستخدم معادلة (8) عند دراسة حالة الفيزياء الجزئية (Molecular Physics) حيث تشمل الطاقة الكلية لمنظومة الجزئيات والطاقة الحركية الانتقالية للجزئيات والتي يمثلها الطاقة الحركية لمركز الكتل ويضاف إليها الطاقة التذبذبية للجزئيات وكذلك الطاقة الدورانية لها.

7.4) مسألة منظومة ثنائية الجسيمات Two- body Problem

نفرض وجود منظومة مكونة من جسيمين كما هو الحال في منظومة ذرة الهيدروجين (نواة + إلكترون) حيث توجد قوة ترابط كهروستاتيكية بين الجسمين، عند دراسة حركة هذه المنظومة نتبع ما يلي:



شكل(7.6)

نفرض أن كتلة كل من الجسميين m_1 ، m_2 ، $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ هما متجه موقع m_1 ، m_2 بالنسبة لمركز الكتل

نفرض أن $\vec{R}$ = متجه موقع m_1 بالنسبة لـ m_2 ، من الشكل(7.6) نلاحظ أن $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ حيث

$\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$ عند اعتبار نقطة أصل المحاور هي مركز الكتل، لذلك $\vec{r}_{cm}$ = صفر وعليه فإن

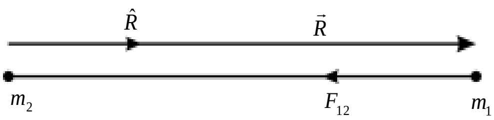
$$\Rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 \quad 0 = \frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{M} \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \qquad (1)$$

إذاً

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 = \vec{r}_1(1 + \frac{m_1}{m_2}) \qquad (2)$$

بالرجوع إلى قانون الجذب العام بين جسمين فإن:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{R^2}\hat{R} = -f(R)\hat{R}$$



حيث $\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \hat{R}$ ، إذاً تكون معادلة الحركة للجسيم (1) هي:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} = -f(R)\hat{R} \qquad (3)$$

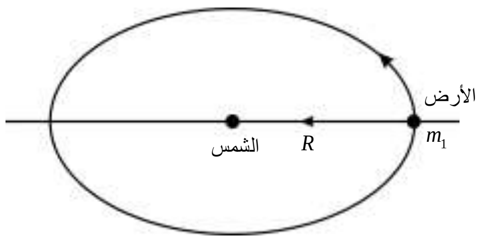
حيث من معادلة (2): $\ddot{\vec{r}}_1 = (\frac{m_2}{m_1+m_2})\ddot{\vec{R}}$ وتصبح معادلة (3) على النحو التالي:

$$m_1[\frac{m_2}{m_1+m_2})\ddot{\vec{R}} = -f(R)\hat{R} \Leftrightarrow (\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2})\ddot{\vec{R}} = -f(R)\hat{R} \qquad (4)$$

نفرض أن $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ وتسمى μ = الكتلية المصغرة (Reduced Mass) وتصبح معادلة (4) على الصورة

$$\mu \ddot{\vec{R}} = -f(R)\hat{R} \qquad (5)$$

المعنـــي الفيزيـــائي: معادلـــة(5) تمثـــل معادلـــة حركـــة جســـيم (m_1) يبعـــد مســـافة $(\vec{R})$ عـــن موقـــع الجســـم الثـــاني (m_2) وهنـــا نســـتبدل عنـــد دراســـة حركـــة المنظومـــة بمعادلـــة الجســـيم الواحـــد ونـــدرس تغيـــر موقـــع أحـــد الجســـمين بالنســـبة للآخـــر وهـــذا يســـهل دراســـة حركـــة المنظومـــة. فمـــثلاً عنـــد دراســـة حـــرك الكواكـــب حـــول الشـــمس(كمـــا فـــي الشـــكل ادنـــاه) فإننـــا نعتبر الأرض لها كتله مصغرة (μ) وتبعد عن الشمس مسافة (R).



<u>حالات خاصة:</u>

(1) إذا كانت $m_1 = m_2 = m$ فإن: $\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m$

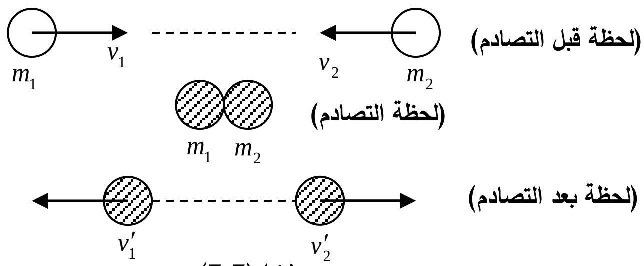
(2) أما في حالة $m_2 >> m_1$ فإن:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \;\; = \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$$

(وذلك بإهمال المقدار m_1 في المقام فقط) وهذا عند دراسة حركة الأرض حول الشمس نعتبر أن الكتلة المصغرة للمنظومة $= m_1$ وهي كتلة الأرض حيث $m_{sun} >> m_{earth}$.

7.5) التصادم: Collision

نفرض أن جسمين كتلتاهما m_1 ، m_2 يتحركان في خط مستقيم باتجاهين متعاكسين (كما هو في الشكل7.7) وأثناء الحركة لا تكون هناك قوة خارجية مؤثرة عليهما (فقط قوة التجاذب).



شكل(7.7)

حيث معادلة الحركة هي: $\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. إذاً $\vec{P}$ ثابت مع الزمن أي أن كمية الحركة للمنظومة (الزخم الخطي) قبل التصادم = كمية الحركة للمنظومة بعد التصادم. وهذا يعني رياضياً ما يلي:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \qquad (1)$$

(الكميات المؤشرة ($'$) خاصة بالحالة بعد التصادم). ومن تعريف كمية الحركة فإن معادلة (1) تصبح

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (2)$$

أما أشارة السرعة عند استخدام العلاقة (2) فتعتمد على اتجاه الحركة للجسم "موجبة في الاتجاه x الموجب والعكس صحيح). تسمى معادلة (1) ومعادلة (2) معادلة التوازن للزخم الخطي في عملية التصادم. وحيث أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث في أي تفاعل (تصادم) وهذا ما يسمى قانون حفظ الطاقة (مبدأ أتزان الطاقة) فإن هذا المبدأ يفسر رياضياً كالتالي:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1{v'_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v'_2}^2+Q \qquad (3)$$

حيث Q = التغير في الطاقة نتيجة التصـــادم أي يتحول جزء من الطاقة الحركية للمنظومة إلى طاقة حرارية.

حالات خاصة:

(1) إذا كانت $Q=0$ يسمى التصادم بالمرن Elastic Collision

(2) إذا كانت $Q>0$ أي كمية الطاقة الحركية قبل التصـــادم تكون أكبر منها بعد التصـــادم وهذا يعرف بالتصادم الطارد للحرارة

(3) إذا كانت $Q<0$ (كمية سالبة) يسمى تصادم ماص للحرارة.

نتناول في هذا الجزء دراسة التصادم المباشر (الرأسي Head on Collision) بين جسمين في حالة حركة مستقيمة.

تعريف: لنفرض أن ε تمثل متغير جديد (براميتر أو وسيط Parameter) ويسمى معامل الارتداد ويعرف كالتالي:

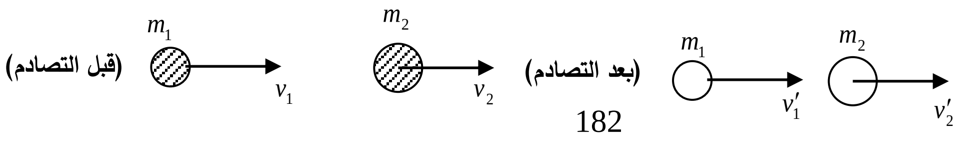
$$\varepsilon=\frac{\text{الانطلاق النسبي للابتعاد (بعد التصادم)}}{\text{الانطلاق النسبي للاقتراب (قبل التصادم)}}$$

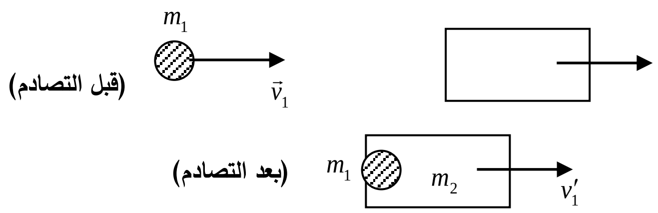
$$=\frac{|\vec{v}'_2-\vec{v}'_1|}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|} \qquad (4)$$

وتكون قيمة ε محصورة بين 1,0 أي أن $0<\varepsilon<1$ في جميع حالات التصادم.

تمرين(1): أستخدم قانون حفظ الزخم وحفظ الطاقة وتعريف ε لبرهان أنه في حالة التصادم المرن يكون $\varepsilon=1$؟

أما في حالة التصـادم غير المرن (Inelastic Collision) حيث $Q\neq 0$ إذاً قد يلتصق الجسمان معاً بعد التصادم (كما في الشكل7.8)





شكل(7.8)

أو قد يتحرك كل جسم بعد التصادم بسرعة مختلفة وفي خط مستقيم.

يمكن إيجاد علاقة رياضية بين سرعة كل من الجسمين بعد التصادم v_1' ، v_2' بدلالة v_1 ، v_2 ومعامل المرونة (ε) كالتالي:

قانون حفظ الزخم الخطي: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

تعريف معامل المرونة. $\varepsilon = \dfrac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}$

إذاً $\vec{v}_2' = \vec{v}_1' + \varepsilon|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \vec{v}_1' + \varepsilon(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

بالتعويض في معادلة حفظ الزخم الخطي نحصل على مايلي:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2(\vec{v}_1' + \varepsilon(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)) \qquad (5)$$

هنا إشارة $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_1$ موجبه (إلى اليمين) وعليه فإن: $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

نحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ v_1' لنحصل على:

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\vec{v}_1 + m_2(1+\varepsilon)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (6a)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1(1+\varepsilon)\vec{v}_1 + (m_2 - \varepsilon m_1)\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \qquad (6b)$$

<u>حالة خاصة:</u>

(1) عند التحام الجسمين بعد التصادم فإن $\vec{v}_2' = \vec{v}_1'$ وعليه فإن $\boxed{\varepsilon = 0}$

(2) إذا كـانـت $m_2 = m_1$ وكـان التصـــــادم تـام المرونـة $(\varepsilon = 1)$ فـإن معـادلـة (6) تؤدي إلى:
$\vec{v}_1' = \vec{v}_2 \;;\; v_2' = \vec{v}_1$ ، أي أن الجسمين يتبادلان سرعاتهما بعد التصادم.

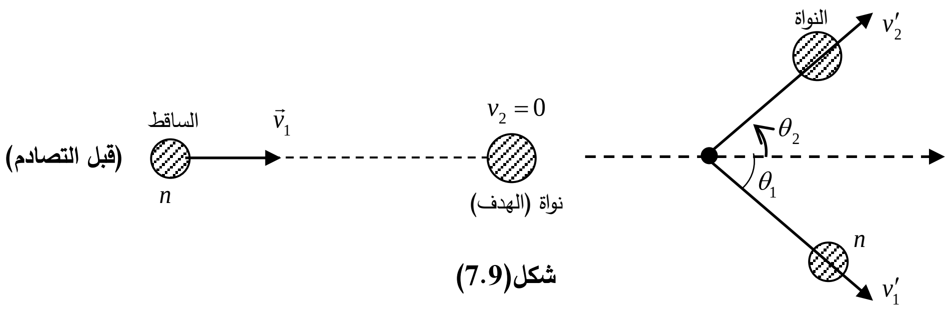
تمرين(2): برهن أنه في حالة التصادم غير المرن $(Q \neq 0)$ فإن

$$Q = \frac{1}{2}\mu v^2 (1-\varepsilon^2)$$

حيث $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ و $v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$ الانطلاق النسبي قبل التصادم.

7.6) التصادم المائل والتشتت Oblique Collision & Scattering

من الأمثلة العملية لهذا التصادم ما يحدث في تفاعلات في الفيزياء النووية حيث يتم ضرب بروتون مع بروتون (P-P Scattering) أو قذف جسيم (α)
مع نواة عنصر آخر (كما في الشكل7.9)



شكل(7.9)

لاحظ هنا أن الجسمين (الساقط والهدف) يتحركان بعد التصـــادم في خطوط مسـتقيمة ولكن في اتجاهين مختلفين ويصنعان زوايا مع الخط الأفقي وهذا ما يعرف بالتشتت (Scattering). وإذا كان الهدف ساكناً فإن $v_2 = 0$ صفر وعليه فإن $\vec{P}_2 = 0$ وتصبح معادلة الزخم الخطي: كالأتي: $\vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$
أو

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\,\vec{v}_1' + m_2\,\vec{v}_2' \qquad (1)$$

أما معادلة توازن الطاقة هي:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q \qquad (2)$$

ويمكن تحويل معادلة (2) بدلالة الزخم الخطي حيث: $v = \frac{p}{m}$ إلى الآتي

إذاً $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\frac{p}{m}]^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_1'^2}{2m_1} + Q \qquad (3)$$

ملاحظة: معادلة (1) هي معادلة متجهة بمعني أن لها مركبان (الأفقية والعمودية):

حيث $\vec{v}_1' = \hat{i}\, v_1' \cos\theta_1 + (-\hat{j}\, v_1' \sin\theta_1)$ وكذلك $\vec{v}_1'$: وعليه تصـــبح معادلة حفظ الزخم الخطي في الاتجاه الأفقي $x - a(1)$ هي:

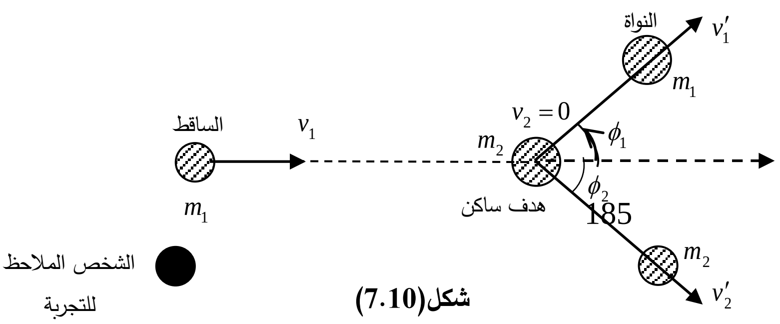
$$m_1 v_1 = m_1 (v_1' \cos\theta_1) + m_2 v_2' \cos\theta_2$$

وفي الاتحاه العمودي $y - axis$ هي: $- m_1 v_1' \sin\theta_1 + m_2 v_2' \sin\theta_2 = 0$

7.7) محاور مركز الكتلة: Center of mass coordinates

في تجارب الفيزياء النووية تجري الحسابات النظرية للكميات الفيزيائية بدلالة إحداثيات تمر في مركز الكتلة (الإطار المرجعي هو محاور متعامدة في نقطة الأصــل لها مركز الكتلة) ويســمى هذا الإطار نظام مركز الكتلة. بينما عملياً عند إجراء التجربة في المعمل نعتبر القياســـات كما يعطيها الشـــخص الثابت أو المواقب في نظـام مرجعي هو نظام المعمل (المختبر) ولكن ما هي العلاقة بين النظامين وكيف يتم تحويل القياس من أحداهما للآخر.

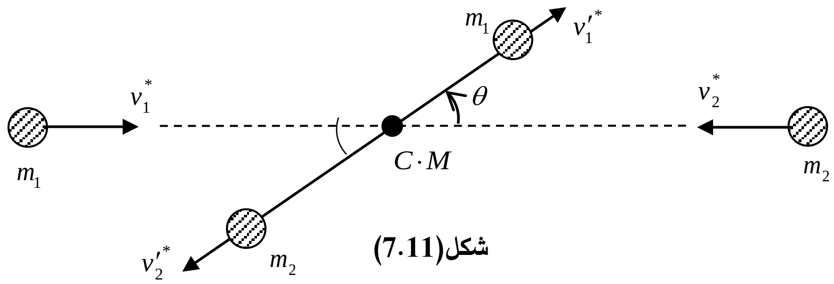
(أ) نظام المعمل:



شكل(7.10)

يلاحظ المراقب الثابت أن الجســمين ينحرفان في اتجاهي ϕ_1 ، ϕ_2 مع المحور الأفقي (كما في الشكل7.10) بعد التصادم.

(ب) نظام مركز الكتلة:



شكل(7.11)

هنا نقطة أصل المحاور عند $(c.m)$ وعليه فإن الجسيم (m_2) ليس ثابتاً وإنما يتحرك نحو $c.m$ بسرعة v_2^* (حركة ظاهرية) أو حركة نسبية وفي الواقع أن موقع مركز الكتلة يتغير مع اقتراب m_1 من الجسم m_2 أما زاوية انحراف m_1 بعد التصادم هي θ وتكون نفس زاوية انحراف m_2 ولكن في الاتجاه المعاكس (شكل7.11) وذلك حتى يبقي مركز الكتلة ثابت في هذا النظام.

<u>المطلوب</u>: إيجاد علاقة رياضية بين زاوية انحراف الجسم m_1 في نظام المعمل (ϕ_1) وزاوية انحرافه في نظام مركز الكتلة (θ).

حيث أن سرعة مركز الكتلة في نظام مركز الكتلة= صفر إذاً يكون الزخم الخطي الكلي في هذا النظام صفر قبل وبعد التصادم، وعليه فإن

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{2} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = M\, v_{cm} = 0$$

أي قبل التصادم $P_1^* + P_2^* = 0$ وبعد التصادم يكون

$$P_1^{*\prime} + P_2^{*\prime} = 0 \qquad (1)$$

أما قانون حفظ الطاقة في نظام مركز الكتلة هو:

$$\frac{P_1^{*2}}{2m_1}+\frac{P_2^{*2}}{2m_2}=\frac{P_1^{*\prime 2}}{2m_1}+\frac{P_1^{*\prime 2}}{2m_1}+Q \qquad (2)$$

تستخدم معادلة (1) لتبسيط معادلة (2) فنحصل على:

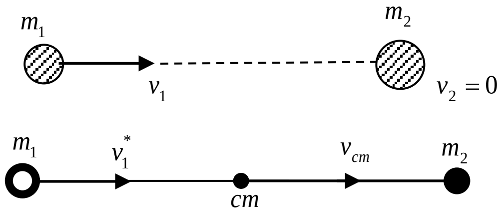
$$\frac{P_1^{*2}}{2\mu}=\frac{P_1^{*\prime 2}}{2\mu}+Q \qquad (3)$$

حيث $\mu=\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

أما ســـرعة مركز الكتلة في نظام المعمل (الهدف ســـاكن) هي v_{cm} نجدها من معادلة حفظ الزخم لخطي كالتالي: $m_1 v_1 + 0 = (m_1+m_2)v_{cm}$

$$\vec{v}_{cm}=m_1\vec{v}_1/(m_1+m_2) \qquad (4)$$

نريد إيجاد علاقة بين v_1^* ، v_1 ، v_{cm} (قبل التصادم).



شكل(7.12) (بالنسبة لشخص مراقب في العمل)

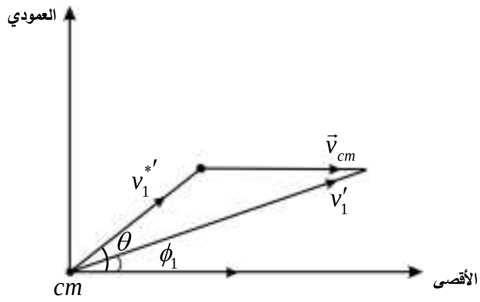
حيث في المعمل من الشكل(7.12) نجد أن (بالنسبة لشخص مراقب في المعمل)

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1^{\,*}+\vec{v}_{cm} \qquad (5)$$

$$\vec{v}_1^{\,*}=\vec{v}_1-\vec{v}_{cm}=\vec{v}_1\,\frac{m_1\,\vec{v}_1}{(m_1+m_2)}=\frac{m_2\,\vec{v}_1}{m_1+m_2} \qquad (6)$$

هذه معادلة سرعة الجسم الأول في نظام مركز الكتلة بدلالة سرعته في نظام المعمل قبل التصادم.

أما بعد عملية التصادم: نجد العلاقة بين بطريقة رسم المتجهات شكل(7.13)



شكل(7.13)

$$\boxed{\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1{}^{*\prime} + \vec{v}_{cm}} \qquad (7)$$

عند تحليل السرعة في الاتجاهين (x ، y) نحصل على المعادلات التالية:

المركبات الأفقية (x) : $\vec{v}_1{}' \cos\phi_1 = \vec{v}_1{}^{*\prime} \cos\theta + \vec{v}_{cm}$

المركبات العمودية (y) : $\vec{v}_1{}' \sin\phi_1 = \vec{v}_1{}^{*\prime} \sin\theta + 0$

بقسمة المركبات العمودية على المركبات الأفقية نحصل على:

$$\tan\phi_1 = v_1^{*\prime} \sin\theta \Big/ (v_1^{*\prime} \cos\theta + v_{cm}) = \frac{\sin\theta}{[\cos\theta + v_{cm} / v_1^{*\prime}]} \qquad (8)$$

نفرض أن $\gamma = v_{cm} / v_1^{*\prime}$ تصبح معادلة (8) على الصورة التالية:

$$\boxed{\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \gamma}} \qquad (9)$$

معادلة (9) تربط بين زاوية انحراف الجسم الساقط في نظام المعمل مع زاوية انحرافه في نظام مركز الكتلة. عند التعويض بدل v_{cm} من معادلة (4) نجد أن γ لها الصورة:

$$\gamma = \frac{m_1 v_2}{v_1^{*\prime}(m_1 + m_2)}$$

ولتحديد $v_1^{*\prime}$ (سـرعة الجسـم السـاقط بعد التصـادم في نظام مركز الكتلة) نسـتخدم معادلة حفظ الطاقة

$\frac{P_1^{*2}}{2\mu} = \frac{P_1^{*\prime 2}}{2\mu} + Q$ حيث من معادلة (6) نجد أن:

$$P_1^* = m_1 v_1^* = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}) v_1 \quad ; \qquad P_1^{*\prime} = m_1 v_1^*$$

حالة خاصة: في حالة التصادم المرن فإن $Q = 0$ وعليه يكون

$$p_1^* = p_1^{*\prime} \Rightarrow v_1^* = v_1^{*\prime}$$

وتصبح قيمة γ كالتالي:

$$\gamma = \frac{m_1 v_1}{(\frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2})(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (9)$$

أي أن $\gamma =$ نسبة كتلة الجسم الساقط إلى كتله الهدف.

إذا كانت $m_2 >> m_1$:(عند ضـرب نواة الذهب Au مع نيوترون (n) فإنه $m_{Au} >> m_n$ وعليه فإن $\gamma << 1$ وتصبح معادلة (9) على الصورة:

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \ \phi_1 = \theta$$

وهذا صحيح تحت شرطي كون $Q = 0$ ، $m_2 > m_1$. وعند تصادم جسم ساقط كتلته (m_1) تساوي كتلة الهدف (m_2) كما هو الحال في تصـادم $p \to p$ أو $n \to p$ فإن $\gamma = 1$ وتصبح معادلة (9):

$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

باستخدام العلاقات المثلية

$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ ، $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ ، نجد أن

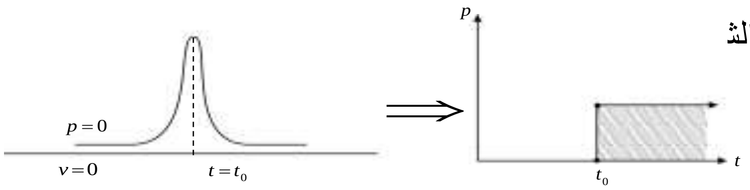
$$\tan\phi_1 = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{1+[2\cos^2(\theta/2)-1]} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

إذاً $\boxed{\phi_1 = \theta/2}$

وهذا يعني إن زاوية انحراف الجسم الساقط في نظام المعمل = نصف زاوية إنحرافه في نظام مركز الكتلة إذا كانت كتلة الجسم الساقط تساوي كتلة الهدف بالإضافة إلى كون $Q = 0$.

7.8) الدفع Impulse

إذا أثرت قوة على جسيم لحظياً تسمى هذه القوة بالقوة الدافعة Impulsive Force، وتكون استجابة (Response) الجسم لهذه القوة على صورة التغير في كمية الزخم الخطي كما في الش



الشكل (7.14)

وعند اصطدام جسمان معاً فإنه في لحظة التصادم تكون القوة قوة دافعة ويظهر تأثيرها عند دراسة حالة التصادم بين الجسيمات.

<u>رياضياً</u>: معادلة الحركة الجسيم:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \vec{F} \Rightarrow d(mv) = \vec{F}dt$$

$$\Rightarrow \int_1^2 d(mv) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \quad \Rightarrow \Delta(mv)]_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

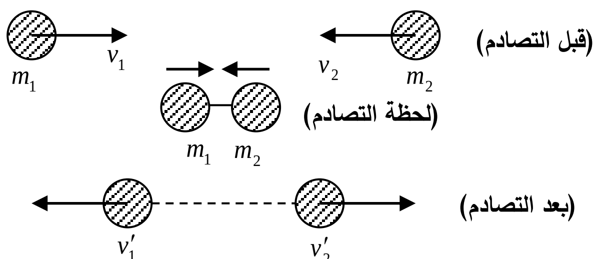
$$\Rightarrow (mv)_2 - (mv)_1 = \Delta(mv) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \qquad (1)$$

الطرف الأيمن في معادلة (1) يسمى الدفع (Impulse)، أي أن معادلة (1) تعطي التغير في كمية الحركة للجسم بدلالة الدفع. ويرمز للدفع $(\hat{P})$. إذاً

$$\hat{P} = \Delta(mv) \qquad (2)$$

- **العلاقة بين الدفع $(\hat{P})$ ومعامل الارتداد (ε) :**

عند دراسة التصادم المباشر بين جسمين (كما في الشكل7.15):



شكل(7.15)

يمكن تصنيف الدفع إلى نوعين:

(1) الدفع الضاغط (Compressive Impulse) ويرمز بالرمز $\hat{P}_c$

(2) الدفع الارتدادي (Restitution Impulse) ويرمز له بالرمز $\hat{P}_r$

بالرجوع إلى معادلة (2) يمكن إيجاد الدفع الضاغط على الصورة:

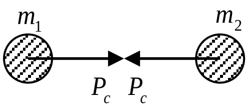
الجسم الأول:

الجسم الثاني:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{v}_0 - m_1\vec{v}_1 &= \hat{P}_c \\ m_2\vec{v}_0 - m_2\vec{v}_2 &= \hat{P}_c \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

حيث $v_0 =$ السرعة المشتركة للجسمين لحظة التصادم التي

يكون فيها الانطلاق النسبي للجسمين $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 =$صفر



أما بالنسبة للدفع الارتدادي: فإنه بعد التصادم تصبح معادلة (2) على صورة:

الجسم الأول:

الجسم الثاني:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_0 &= \hat{P}_r \\ m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_0 &= -\hat{P}_r \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

نحذف v_0 من المعادلتين (3)، (4) لنحصل على:

الجسم الأول:

$$\left.\begin{aligned} m_1 m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_1) &= \hat{P}_c(m_1 + m_2) \\ m_1 m_2(\vec{v}_1' - \vec{v}_2') &= \hat{P}_r(m_1 + m_2) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

الجسم الثاني:

ومنها نحصل على

$$\frac{\vec{v}_1'-\vec{v}_2'}{\vec{v}_2-\vec{v}_1}=\frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c} \qquad (6)$$

من تعريف معامل الارتداد (ε) فإن معادلة (6) تصبح

$$\frac{|\vec{v}_2'-\vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|}=\varepsilon=\frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c}$$

أي أن معامل الارتداد عند تصادم جسمان رأسياً يساوي النسبة بين الدفع الارتدادي إلى الدفع الإنضغاطي (الدفع الضاغط).

7.9) حركة جسيم متغير الكتلة

Motion of a body With Variable Mass

نفرض أن كتلة جسم هي $m(t)$ في اللحظة t، فإذا أثرت عليه قوة F_{ext} لفترة زمنية محدودة (Δt) حيث تغيرت كتلته خلال هذه الفترة بمقدار (Δm). إذاً تصبح معادلة الحركة للجسيم كالتالي:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{ext} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v})=F_{ext} \qquad (1)$$

إذاً $d\vec{p}=\vec{F}_{ext}dt$ وعليه فإن

$$\int_t^{t+\Delta t} d\vec{p}=\int_t^{t+\Delta t} F_{ext}\, dt$$

إذا كانت F_{ext} ثابتة مع الزمن فإن $[\Delta\vec{p}]_t^{\Delta t+t}=F_{ext}(\Delta t)$ أو

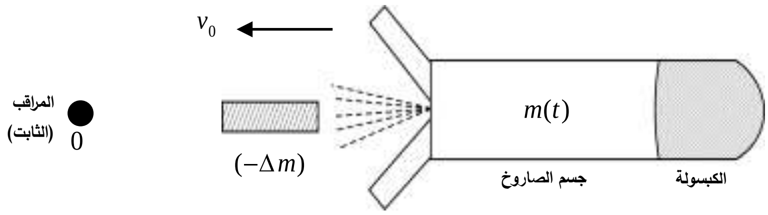
$$(\vec{P}_{t+\Delta t})-\vec{P}_t = \text{قوة الدفع} \qquad (2)$$

عند تطبيق هذه المعادلة على حركة الصواريخ نفرض أن وقود الصواريخ المحترق ينقص من كتلة الصاروخ أثناء الحركة حيث تنطلق الغازات الناتجة عن المحترف إلى الخلف مسببة اندفاع الصاروخ إلى الأمام لنفرض أن كتلة الصاروخ في لحظة t هي $m(t)$ وبعد زمن قدره (Δt) فإن كتلته تصبح $(m+\Delta m)$

حيث أشارة (Δm) سالبة!!. لنفرض أن (v) هي سرعة انطلاق الصاروخ بالنسبة لشخص ثابت (0) في اللحظة (t) بعد انطلاق الغازات إلى الخلف بسرعة $(-v_0)$ بالنسبة للصاروخ، وعليه فإن سرعة الغازات بالنسبة للشخص المراقب شكل(7.16) هي

$$v-(-v_0)=v+v_0$$

أما سرعة الصاروخ بعد فترة زمنية (Δt) تصبح $v+\Delta v$ حيث تزداد سرعة الصاروخ بعد انطلاق الغازات منه إلى الخلف.



شكل(7.16)

نستخدم معادلة (2) كالتالي: زخم الصاروخ + زخم الغازات = $(P)_{t+\Delta t}$

إذاً $$(P)_{t+\Delta t}=(m+\Delta m)(v+\Delta v)+(-\Delta m)(v+v_0)$$

معادلة(3) تصبح على الصورة: $(P)_t=mv$

$$F_{ext}(\Delta t)=(m+\Delta m)v+(m+\Delta m)\Delta v-(\Delta m)v-(\Delta m)v_0-mv$$

بعد فك الأقواس والاختصار نحصل علي:

$$F_{ext}(\Delta t)=(m+\Delta m)(\Delta v)-v_0(\Delta m) \qquad (3)$$

بقسمة حدود معادلة (3) على Δt نحصل على:

$$F_{ext}=m(t)\frac{\Delta v}{\Delta t}-v_0(\frac{\Delta m}{\Delta t}) \qquad (4)$$

حيث $m(t)=$ كتلة الصاروخ اللحظية $=m+\Delta m$ وإذا أخذنا نهاية المعادلة (4) عندما $\Delta t\leftarrow$ صفر نحصل على

$$F_{ext}=m(t)\frac{dv}{dt}-v_0(\frac{dm}{dt})$$

$$\boxed{F_{ext} = m(t)\,\dot{v} - v_0\,\dot{m}} \qquad (5)$$

المعني الفيزيائي لمعادلة (5): هي معادلة الحركة للصاروخ (أو أي جسيم لتغير الكتلة) بمعدل dm/dt.

الطرف الأيسر = محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم أما الحد الأول في الطرف الأيمن = الكتلة × التسارع "وحدة قوة" قانون نيوتن الثاني، بينما الحد الثاني في الطرف الأيمن = سرعة انطلاق الغازات أو الجزء المنفصل من الجسم بالنسبة للصاروخ أو الجسم مضروباً في المعدل الزمني لتغير الكتلة $(-v_0\dot{m})$

.

يسمى المقدار $(v_0\,\dot{m})$ الدفع المضاد (Thrust) في حالة حركة الصاروخ.

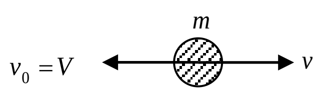
أما محصلة القوى الخارجية تكون في حالة الصواريخ الأفقية (أرض – أرض) هي مقاومة الهواء للحركة.

أما في حالة الصورايخ الرأسية (أرض- جو) تكون محصلة القوى الخارجية تساوي قوة جذب الأرض للصواريخ + مقاومة الهواء.

سنتناول دراسة حركة الصورايخ بنوعها كالتالي:

(أ) حركة الصاروخ الأفقية:

هنا نعتبر مقاومة الهواء صغيرة وسرعة انطلاق الغاز بالنسبة للصاروخ $v_0 = V$ وعليه تصبح معادلة (5) على صورة:



$$m\dot{v} - \vec{V}\dot{m} = 0$$

$$m\dot{v} = \vec{V}\,\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\vec{V}}{m}\,\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow dv = \vec{V}\,\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \vec{V}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

<u>**ملاحظة**</u>: حيث أن اتجاه سرعة الغازات بالنسبة للصاروخ إلى اليسار تكون (سالبة) بينما سرعة الصاروخ إلى اليمين $(+)$.

وعليه تصبح المعادلة التكاملية على الصورة

$$[v]_{v_0}^{v} = -|\vec{V}|[\ell n\, m]_{m_0}^{m} = -|\vec{V}|[\ell n(m) - \ell n(m_0)]$$
$$v - v_0 = -|\vec{V}|\ell n(m/m_0) \quad ; \quad v - v_0 = +|V|\ell n(m_0/m)$$

ومنها نجد أن

$$\boxed{v - v_0 = +|V|\ \ell n(m_0/m)} \qquad (6)$$

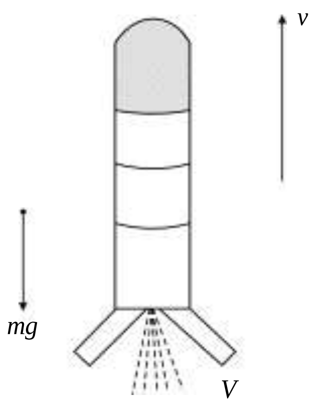
مع ملاحظة أن: $m < m_0$ ، v_0 = سرعة انطلاق الصاروخ الابتدائية

v = سرعة الصاروخ في أي لحظة زمنية

$|\vec{V}|$ = القيمة العددية لانطلاق سرعة الغازات بالنسبة للصاروخ

m_0 = كتلة الصـاروخ في اللحظة الصفرية (لحظة الانطلاق) = كتلة الصاروخ فارغاً + الوقود،

m = كتلة الصاروخ أثناء الحركة



شكل(7.17)

(ب) حركة الصواريخ الرأسية (أرض- جو)

مع إهمال مقاومة الهواء لحركة الصاروخ

المنطلق لأعلى فإن $F_{ext} = -mg$

وعليه تصبح معادلة الحركة

$$-mg = m\dot{v} + V\dot{m}$$

حيث V = سرعة انطلاق الغازات

(كما مّر شرحه في فرع أ) وهي: $|-\vec{V}|$

إذاً $$-mg = m\frac{dv}{dt} + V\frac{dm}{dt} \Rightarrow -mg\, dt = mdv + V\, dm$$

لكن $dt = \frac{dm}{\dot{m}} \Leftarrow \dot{m} = \frac{dm}{dt}$ ، إذاً عند التعويض في هذه المعادلة تصبح:

$$(-mg)(\frac{dm}{\dot{m}}) = mdv + Vdm \qquad (1)$$

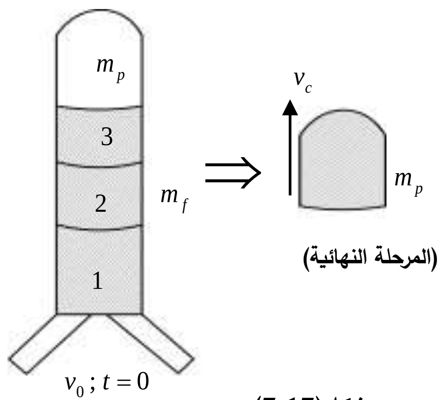
حيث $\dot{m}$ = المعدل الزمني لتغير كتلة الصاروخ وعادة يكون معدل احتراق الوقود ثابت ونعتبرها عند التطبيق في الحل مقدار سالب.

نحل المعادلة (1) لإيجاد كالتالي:

$$dv = -[\frac{g}{\dot{m}} + \frac{V}{m}]dm$$

تكامل المعادلة نحصل على:

$$\int_{v_0}^{v_2} dv = -\frac{g}{\dot{m}}\int_{m_0}^{m_p} dm - V\int_{m_0}^{m_p}\frac{dm}{m} \qquad (2)$$



(اللحظة الابتدائية)

(المرحلة النهائية)

شكل(7.17)

حيث $\dot{m}$ = كتلة الصاروخ الابتدائية =

كتلة جسم الصاروخ المعدني + كتلة الوقود

mp =كتلة رأس الصاروخ (الكبسولة)

بعد احتراق الوقود وانفصـــال مراحل الصــــاروخ عن الرأس الذي يحمل القمر الصناعي.

(لاحظ الشكل7.17)

$$m_0 = m_f + m_p \Rightarrow m_f = m_0 - m_p$$

حيث m_f = كتلة الوقود (Fuel).

لنفرض أن الصاروخ أنطلق في اللحظة الصفرية بسرعة v_0 فإن معادلة (2) تصبح:

$$v_c - v_0 = (\frac{-g}{\dot{m}})[m_p - m_0] - VLn(\frac{m_p}{m_0})$$

$$v_c = v_0 = \frac{g}{\dot{m}}[m_p - m_0] - VLn(\frac{m_p}{m_0})$$

$$v_c = v_0 + (\frac{g}{\dot{m}})m_f + VLn[\frac{m_f + m_p}{m_p}]$$

$$v_c = v_0 + (\frac{g}{\dot{m}})m_f + VLn[1 + m_f / m_p] \qquad (3)$$

يسمى المقدار (m_f/m_p) نسبة الكتلة (Mass Ratio).

مثال(1): جد نسبة الكتلة اللازمة لإعطاء صاروخ سرعة نهائية $7\,km/s$ علماً بأن معدل احتراق الوقود في الصاروخ 1% من كتلة الابتدائية وكانت سرعة انطلاق الغازات من الصاروخ $2\,km/s$ وكان الصاروخ في اللحظة الابتدائية ساكناً.

الحل:

$$v_2 = \frac{g}{\dot{m}} m_f + VLn(1+m_f/m_p)$$

نفرض أن $x=m_f/m_p$ ، نحل المعادلة: $Ln(1+x)=\frac{v_c}{V}-\frac{g}{V\dot{m}}m_f$

إذا اعتبرنا m_p صغيرة فإن : $m_0 = m_f + m_p \approx m_f$

وعليه فإن:

$Ln(1+x)=(v_c - g\,m_0/\dot{m})/V$ ، ومنها نجد أن $1+x=e^{[(v_c/V)-(g/V)(\frac{m_0}{\dot{m}})]}$

إذاً $$x=e^{[(v_c/V)-(g/V)(\frac{m_0}{\dot{m}})]}-1$$

بالتعويض بالمقادير المعطاة في السؤال: حيث: $-0.01\,m_0=\dot{m}$

$$x=e^{\frac{[7-9.8\times10^{-3}(-1/0.01)]}{2}}-1$$

$$m_f/m_p=e^{4.2}-1\approx 65$$

أي أنه يلزم وجود وقود كتلته 65 مره قدر كتله الكبسولة أو الصاروخ الفارغ.

مثال(2): جد نسبة الكتلة (m_0/m) للصاروخ اللازم لوضع قمر صناعي في مدار حول الأرض وجعله يدور حول الأرض بسرعة $8\ km/s$ علماً بأن سرعة انطلاق الغازات من الصاروخ هي $2.5\,km/s$ علماً بأن السرعة الابتدائية $0.5\,km/s$.

الحل: هنا نعتبر أن الصاروخ الذي يجعل القمر يدور في مسار حول الأرض ينطبق في المدار وليس من الأرض. لذلك نستخدم معادلة الحركة الأفقية للصاروخ. $v = v_0 + V\,Ln(m_0/m)$

وعليه فإن $Ln(m_0/m) = \dfrac{v - v_0}{V}$. إذاً

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v - v_0}{V}} = e^{\frac{8 - 0.5}{2.5}} = e^3 = 20$$

أي يلزم انطلاق صاروخ في المدار المطلوب أن يوضع فيه القمر الصناعي بحيث تكون كتلة الصاروخ الابتدائية تعادل 20 كتلته فارغاً.

تمارين

(1) منظومة مكونة من ثلاثة جسيمات كتلة كل واحد منها وحدة كتل. فإذا كانت قوتها وسرعتها على النحو التالي:

$$\hat{r}_1 = \hat{i} + \hat{j} \;;\; \vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k} \;;\; \vec{r}_3 = \hat{k} \;;\; \vec{v}_1 = 2\hat{i} \;;\; \vec{v}_2 = \hat{j} \;;\; \vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

(أ) جد موضع ومركز كتلة المنظومة وكذلك الزخم الخطي.

(ب) الطاقة الحركية للمنظومة

(ج) الزخم الزاوي حول المركز الأحداثي.

(2) أطلقت قذيفة كتلتها m وانطلاقها v_0 مباشرة نحو قالب خشبي كتلته m موضوع علي طاولة أفقية خشنة لها معامل احتكاك انزلاقي (μ). جد المسافة التي ينزلقها القالب قبل أن يتوقف عن الحركة.

(3) قذفت شظية بزاوية 45° بانطلاق ابتدائي v_0 عند أعلى نقطة في المسار انفجرت القذيفة إلى قسمين متساويين، أحداهما يتحرك مباشرة نحو الأرض إلي أسفل وبسرعة $2v_0$. جد انطلاق القسم الآخر مباشرة بعد الانفجار.

(4) سقطت كره من ارتفاع h على رصيف أفقي، فإذا كان معامل الارتداد ε، برهن أن المسافة العمودية التي تقطعها الكره قبل أن تتوقف عن الارتداد هي: $h(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$

(5) أثبت أن الطاقة الحركية لمنظومة مكونة من جسمين هي: $\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu V^2$ حيث $m = m_1 + m_2$ ، $V =$ الانطلاق النسبي، $\mu =$الكتلة المصغرة.

(6) إذا حدث تصادم مباشر بين جسمين برهن أن الخسارة في الطاقة الحركية هي $\frac{1}{2}\mu V^2 (1-\varepsilon^2)$ حيث $\mu =$ الكتلة المصغرة، $V =$ الانطلاق النسبي $\varepsilon =$ معامل الارتداد.

(7) اصطدام جسم متحرك كتلته m_1 اصطداما مرناً بجسم هدف كتله m_2 في حالة سكون فإذا كان التصادم رأسياً برهن أن الجسم الساقط يخسر $(4\mu/m)$ من طاقته الحركية حيث $m = m_1 + m_2$ ، $\mu =$ الكتلة المصغرة.

(8) يصطدم بروتون كتلته (m_p) وسرعته الابتدائية $\vec{v}_0$ بذرة هيليوم كتلتها $(4m_p)$ في حالة سكون فإذا كان البروتون يترك نقطة التصادم بزاوية 45° مع خط الحركة الأصلي. جد السرعة النهائية لكل جسم على فرض أن التصادم تام المرونة.

(9) في السؤال (8) جد زاوية التشتت للبروتون في نظام مركز كتلته المنظومة.

(10) حل السؤال (8) عندما يكون التصادم غير المرن، $Q = \frac{1}{4}$ الطاقة الابتدائية للبروتون.

(11) جسيم كتلته وزخمه الابتدائي P_1 يصطدم مع جسم آخر له نفس الكتلة وفي حالة سكون. فإذا كان الزخم النهائي للجسمين هو P_1' ، P_2' على الترتيب برهن أن الخسارة في الطاقة للتصادم (Q) هي:

$$Q = \frac{P_1' P_2'}{m} \cos\psi$$

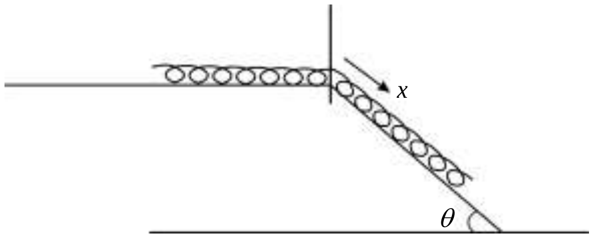
حيث $\psi =$ الزاوية بين مساري لجسمين بعد التصادم.

(12) أطلق صاروخ عمودياً إلي الأعلى، على فرض أن g ثابتة، أكتب معادلة الحركة للصاروخ ثم جد نسبة الكتلة للحصول على انطلاق نهائي يساوي انطلاق إنفلات الأرض (7 ميل بالثانية) إذا كان انطلاق الغاز يساوي $2\,\text{mile/sec}$ علي فرض أن معدل احتراق الوقود ثابت $= 0.01$ من الكتلة الابتدائية للوقود.

(13) سلسلة منتظمة ثقيلة طولها a علقت ابتدائيا بحيث كان جزء من طولها مقداره b يتدلى من حافة الطاولة والجزء الباقي الذي طوله $(a-b)$ ملفوف بالقرب من الحافة فإذا تركت السلسلة تتحرك برهن أن انطلاقها عندما تترك آخر حلقة نهاية الطاولة هي $[2g\,(a^3 - b^3)/3a^2]^{1/2}$

(14) في الشكل(7.18). إذا كان طول السلسلة (L) وكان السرعة الابتدائية $v_0 = 0$ عند $x = 0$ برهن أن سرعة السلسلة في أي لحظة هي:

$$v = \sqrt{\frac{gx^2 \sin\theta}{L}}$$



شكل(7.18)

الفصل الثامن : ميكانيكا الأجسام الصلبة: الحركة المستوية
Mechanics of Rigid Bodies: Planar Motion

مقدمة

يمكن أعتبار ان الجسم الصلب كنظام من الجسيمات التي مواقعها النسبية ثابتة ، او بعبارة اخرى تكون المسافة بين اي جسيمين ثابتة. اي ان اي قوة خارجية(مثل المط او الضغط الخارجي) مؤثرة على تلك الجسام لا تغير من شكلها. نتناول في الفصل دراسة حركة الأجسام الصلبة حيث لا يتغير محور الدوران .

(8.1) مركز الكتلة لجسم صلب Center of Mass of a Rigid Body

في الفصل السابع تم تعيين احداثيات مركز الكتلة كالتالي

$$x_{cm} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad (8.1.1)$$

وعليه ، يمكن ان نستبدل التجميع في المعادلة السابقة بصيغة التكامل لعنصر الحجم المعتبر في حالة الجسم الصلب ، وتكون احداثيات مركز الكتلة كالتالي

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho x\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad y_{cm} = \frac{\int_v \rho y\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad z_{cm} = \frac{\int_v \rho z\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad (8.1.2)$$

حيث ρ كثافةالعنصر الحجمي و dv حجم العنصر.

اما في حالة العنصر السطحي (في حالة الصفائح الصلبة) فأن معادلات احداثيات مركز الكتلة تكون كالتالي

$$x_{cm} = \frac{\int_s \rho x\, ds}{\int_s \rho\, ds} \qquad y_{cm} = \frac{\int_s \rho y\, ds}{\int_s \rho\, ds} \qquad z_{cm} = \frac{\int_s \rho z\, ds}{\int_s \rho\, ds} \tag{8.1.3}$$

اما في حالة كون الجسم الصلب مكونا من بعد احادي مثل القضيب ، فان احداثيات مركز الكتلة تكون كالتالي

$$x_{cm} = \frac{\int_l \rho x\, dl}{\int_l \rho\, dl} \qquad y_{cm} = \frac{\int_l \rho y\, dl}{\int_l \rho\, dl} \qquad z_{cm} = \frac{\int_l \rho z\, dl}{\int_l \rho\, dl} \tag{8.1.4}$$

ρ الكثافة الطولية لعنصر الطول ، و $d\ell$ عنصر الطول.

في حالة الأجسم الصلبة المكونة من تركيب عدة اجسام صلبة وكل منها له مركز كتلة معروفة ، يكون مركز الكتل للجسم الصلب كالتالي :

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \tag{8.1.5}$$

$m_1, m_2, ...$ هي كتل المكونات ، بينما x_1،$x_2....$ هي الأحداثيات السينية للمكونات .

بينما تعطي باقى الأحداثيات لمركز كتلة الجسم المركب (y_{cm}, z_{cm}) بنفس الصيغة الرياضية .

❖ **خاصية التماثل**

عنما يكون للجسم الصلب مستوى تماثلي بمعنى ان المستوى يقسمه الى قسمين متماثلين اي، يكون لكل جسيم في احد القسمين نظيرا له في القسم الأخر ، فأن مركز الكتل يقع في تلك المستوى .على فرض ان مستوى التماثل هو xy ، يكون

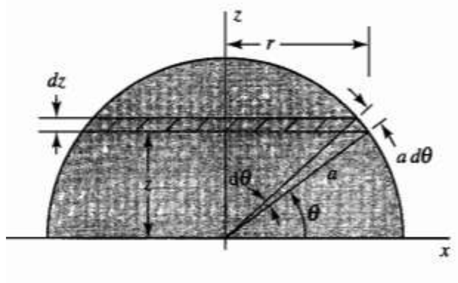
$$z_{cm} = \frac{\sum_i (z_i m_i + z'_i m'_i)}{\sum_i (m_i + m'_i)} \qquad (8.1.6)$$

بما انه لكل لجسيم m_i يوجد صورة له هي m'_i بحيث $z_i = -z'_i$ ، وعليه تتلاشى الحدود في البسط في المعادلة السابقة ويصبح $z_{cm} = 0$ ، اي ان مركز الكتل يقع في مستوى التماثل xy . وبالمثل يمكن اثبات انه **عندما يكون في الجسم خط تماثلي فأن مركز الكتلة يقع على تلك الخط .**

سنورد بعض الأمثلة لآيجاد مركز كتل اجسام صلبة هندسية ومنتظمة كنصف الكرة ، نصف صفيحة مستوية ، نصف قشرة كروية.

- **نصف كرة صلبة**

لايجاد مركز كتلة على شكل نصف كرة صلبة منتظمة ومتجانسة ونصف قطرها **a** نستخدم خاصية التماثل ، بمعنى ان مركز الكتلة يجب ان يقع على نصف القطر المتعامد على الوجه المستوي للقاعدة (الشكل (8,1)



شكل (8.1) نصف كرة صلبة.

من الشكل (8,1) ، نلاحظ ان مركز الكتل يقع على محور -z . لحساب z_{cm} نقسم نصف الكرة الى عناصر حجمية دائرية بسمك قدره dz ونصف قطر يساوي $\sqrt{a^2 - z^2}$. وعليه ، يكون مركز الكتلة كما يلي :

$$dv = \pi(a^2 - z^2)dz \qquad (8.1.7)$$

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho\pi z(a^2 - z^2)dz}{\int_0^a \rho\pi(a^2 - z^2)dz} = \frac{3}{8}a \qquad (8.1.8)$$

❖ نصف قشرة كروية

لنفرض ان نصف قطر القشرة هو **a** (كما في الشكل 8.1) ، نعتبر ان العنصر السطحي على شكل اشرطة دائرية ds عرضها $d\ell = ad\theta$. وعليه يكون

$$ds = 2\pi r\, dl = 2\pi(a^2 - z^2)^{1/2} a\, d\theta$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right) \qquad d\theta = (a^2 - z^2)^{-1/2} dz \qquad (8.1.9)$$

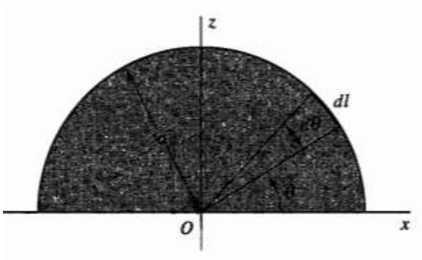
$$\therefore ds = 2\pi a\, dz$$

اذن ، يكون موقع مركز الكتلة على محور z عند

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho 2\pi a z\, dz}{\int_0^a \rho 2\pi a\, dz} = \frac{1}{2}a \qquad (8.1.10)$$

❖ نصف دائرة semicircle

لأيجاد مركز كتلة لسلك على شكل نصف دائرة صلبة ومنتظمة وذات نصف قطر a (الشكل 8.2)



شكل(8.2) سلك نصف دائري

عنصر طولي على السلك بمقدار $d\ell$ ، من الشكل (8.2) نجد ان

$$dl = a\,d\theta \qquad (8.1.11)$$

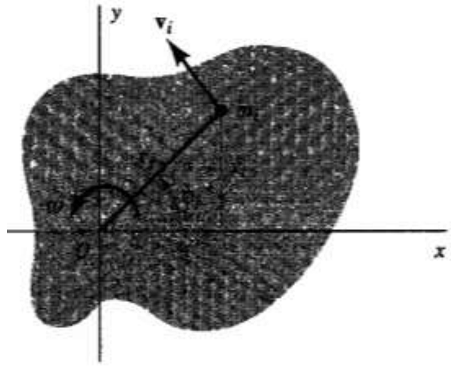
$$z = a \sin\theta \qquad (8.1.12)$$

$$z_{cm} = \frac{\int_0^\pi \rho(a \sin\theta) a\, d\theta}{\int_0^\pi \rho a\, d\theta} = \frac{2a}{\pi} \qquad (8.1.13)$$

(8.2) دوران جسم صلب حول محور ثابت.

Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis

نتناول في هذا البند الحركة الدورانية (بدون الحركة الأنتقالية) لجسم صلب حول محور ثابت تحت تأثير قوة خارجية والتي تجبره على هذه الحركة (شكل 8.3). لنفرض ان محور -z هو محور الدوران .



شكل (8.3) مقطع عرضي لجسم صلب يدور حول محور -z.

اثناء الدوران ، يكون مسار موقع الجسيم m_i الموضوعة عند النقطة (x_i, y_i, z_i) عبارة عن دائرة نسف قطرها $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = r_i$ وتتمركز حول محور- z . كما تكون سرعة هذا الجسيم كالتالي

$$v_i = r_i\omega = \left(x_i^2 + y_i^2\right)^{1/2}\omega \qquad (8.2.1)$$

حيث ω السرعة الزاوية والتي لها مركبات كما يلي

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -v_i \sin\phi_i = -\omega y_i \\ \dot{y}_i &= v_i \cos\phi_i = \omega x_i \\ \dot{z}_i &= 0 \end{aligned} \qquad (8.2.2)$$

حيث ϕ_i الزاوية المحصورة بين المتجه $\boldsymbol{r}_i$ ومحور -x . ونحصل على المعادلة (8.2.2) من اعتبار الضرب الأتجاهي للعلاقة :

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \qquad \textbf{(8.2.3)}$$

حيث $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{k}$.

لحساب الطاقة الحركية لجسم يتحرك دورانيا ، نستخدم العلاقة التالية

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (8.2.4)$$

حيث

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \qquad (8.2.5)$$

تسمى الكمية الفيزيائية المعرفة في معادلة (8.2.5) **عزم القصور الذاتي حول محور-z** . كما تستخدم هذه الكمية في **تعريف الزخم الزاوي** ***Angular Momentum*** **للجسم الصلب الدوراني حول محور -z** . ويمكن توضيح ذلك كما يلي :

حيث ان الزخم الزاوي لجسيم ما يعرف بالعلاقة : $\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$ ، **لذلك بأستخدام مركبات سرعة الجسيم المعطاة في معادلة (8.2.2) تكون مركبة الزخم الزاوي في اتجاه محور - z *كما يلي***

$$m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\omega = m_i r_i^2 \omega \qquad (8.2.6)$$

وتعطى مركبة الزخم الزاوي الكلي لهذا الجسم بأستخدام التجميع لكل الجسيمات ، L_z ، اي

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I_z \omega \qquad (8.2.7)$$

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I_z \omega \qquad (8.2.7)$$

اما معادلة الحركة الدورانية (كما في قانون نيوتن الثاني) فهي تنص على ان المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوي للنظام يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام . وبعبارة رياضية ، تكون هذه المعادلة لجسم يدور حول محور ثابت في اتجاه محور -z كالتالي

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} \qquad (8.2.8)$$

حيث N_z هو مجموع العزوم الكلي للجميع القوى المؤثرة حول محور z- . اذا كان الجسم صلبا فأن I_z يكون ثابتا ، وعليه

$$N_z = I_z \frac{d\omega}{dt} \tag{8.2.9}$$

وملخص المقارنة بين قوانين الحركة الأنتقالية والحركة الدورانية حول محور ثابت يكون كالتالي

Translation along x-axis		***Rotation about z-axis***	
Linear momentum	$p_x = mv_x$	Angular momentum	$L_z = I_z\omega$
Force	$F_x = m\dot{v}_x$	Torque	$N_z = I_z\dot{\omega}$
Kinetic energy	$T = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$T_{rot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$

من هذه المقارنة نلاحظ ان : عزم القصور الذاتي يقابل كتلة الجسم في هذه القوانين .

(8.3) حساب عزم القصور الذاتي calculation of the moment of Inertia

في الحسابات الفعلية لعزم القصور الذاتي للجسم الصلب نستبدل التجيع ب التكامل على جميع اجزاء الجسم ، اي ان

$\sum m_i\ r_i^2$ تتحول الى الصيغة التكاملية على النحو التالي

$$I = \int r^2 dm \tag{8.3.1}$$

حيث dm كتلة العنصر والتي تعطى بحاصل ضرب الكثافة بحجم او مساحة هذا العنصر .

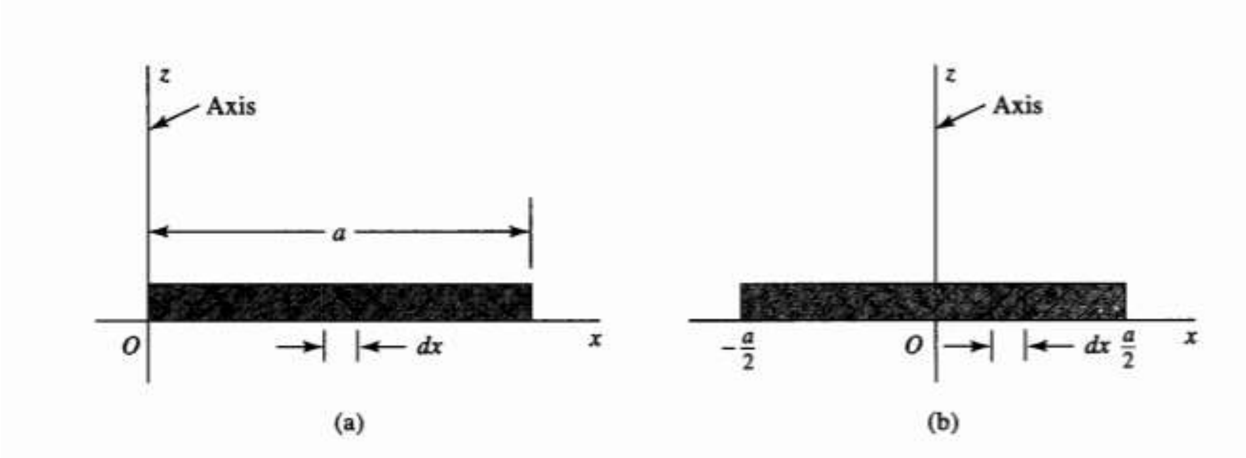
مع ملاحظة ان r تمثل المسافة العمودية بين العنصر وحور الدوران . وفي حالة الجسم المكون من عدة اجزاء يكون عزم القصور الذاتي لهذا الجسم مساويا لمجموع عزوم القصور الذاتية لهذه الأجزاء . او

$$I = I_1 + I_2 + \cdots \tag{8.3.2}$$

فيما يلي نقدم امثلة لأيجاد عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام الصلبة التي تدور حول محور معين .

❖ **قضيب رقيق السمك Thin Rod**

لنفرض ان لدينا قضيب رفيع ومنتظم طوله a وكتلته m يدور حول محور ثابت والمطلوب ايجاد عزم القصور الذاتي للقضيب اذا كان المحور مثبت عند طرف هذا القضيب ومتعامدا عليه (الشكل 8.4 a) .



شكل (8.4) قضيب رفيع منتظم . (a) حالة محور الدوران عند اطرف القضيب. (b) حالة محور الدوران عند المنتصف .

من تعريف عزم القصور الذاتي نحصل على التالي

(a) المحور عند طرف القضيب:

$$I_z = \int_0^a x^2 \rho dx = \frac{1}{3}\rho a^3 = \frac{1}{3} m a^2 \qquad (8.3.3)$$

حيث $m = \rho a$

(b) المحور عند المنتصف

$$I_z = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \rho\, dx = \frac{1}{12}\rho a^3 = \frac{1}{12} m a^2 \qquad (8.3.4)$$

❖ **الطوق او القشرة الأسطوانية** hoop or cylindrical shell

في حالة الطوق (الحلقة) او القشرة الأسطوانية التي يكون لها محور تماثل مركزي ، فأن جميع الجسيمات تكون على بعد متساو من هذا المركز . اذا اعتبرنا عنصر الكتلة dm على محيط الحلقة ، يكون البعد عن المحور يساوي

a، ويكون عزم القصور الذاتي كالتالي

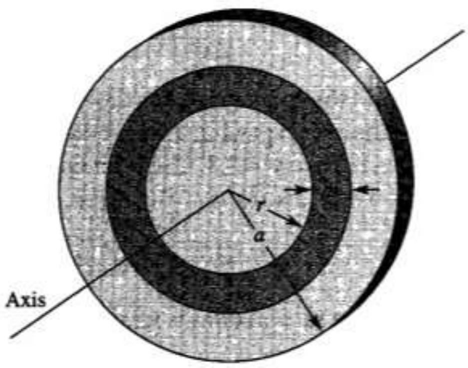
$$I_{axis} = ma^2 \qquad (8.3.5)$$

❖ القرص الدائري او الأسطوانة Circular Disc or Cylinder

لأيجاد عزم القصور الذاتي لقرص منتظم دائري نستخدم الأحداثيات القطبية ، ويكون عنصر الكتلة عبارة عن حلقة رقيقة نصف قطرها r وسمكها dr . اذن

$$dm = \rho 2\pi r\, dr \qquad (8.3.6)$$

وعليه ،يكون عزم القصور الذاتي حول محورثابت في مركز القرص وعموديا على مستوى وجه القرص(الشكل 8.5) كما يلي



شكل(8.5) قرص دائري منتظم

$$I_{axis} = \int_0^a r^2 \rho \, 2\pi r \, dr = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} m a^2 \qquad (8.3.7)$$

حيث $m = \rho\pi a^2$ وهي كتلة القرص.

❖ **كرة صلبة متجانسة**

لأيجاد عزم القصور الذاتي لكرة صلبة ومتجانسة نصف قطره a حول محور مار بمركزها (محور-z) كما في الشكل (8.6)، نقسم الكرة الى اقراص رقيقة. حيث يكون عزم القصور الذاتي للقرص كما في المعادلة (8.3.7) ، او $(\frac{1}{2}) y^2 dm$ ، حيث $dm = \rho\pi y^2 \, dz$. وعليه

$$I_z = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho y^4 \, dz = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \qquad (8.3.8)$$

حيث كتلة الكرة

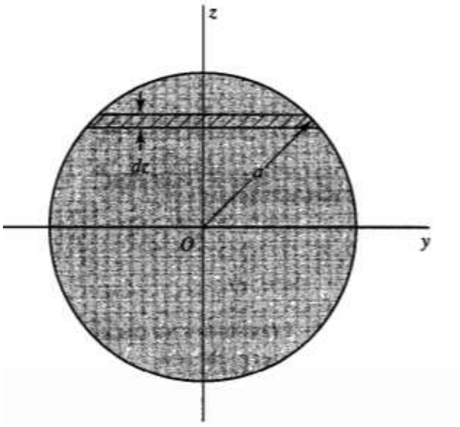
$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \qquad (8.3.9)$$

اذن ، يكون عزم القصور الذاتي للكرة كالتالي

$$I_z = \frac{2}{5} m a^2 \qquad (8.3.10)$$

ملاحظة : في حالة الكرة الصلبة والمنتظمة تكون عزوم القصور الذاتية حول كل المحاور المارة بالمركز متساوية ، اي

$$I_x = I_y = I_z$$



شكل (8.6) كرة صلبة ومنتظمة

❖ قشرة كروية **Spherical shell**

لأيجاد عزم القصور الذاتي لقشرة كروية منتظمة نعتبر القشرة عنصا من العناصر الكونة للكرة الصلبة ، ولذلك نقوم بأشتقاق معدلة عزم الكرة (معادلة 8.3.8) بالنسبة لنصف القطر . أي ،

$$dI_z = \frac{8}{3}\pi\rho a^4\, da \qquad (8.3.11)$$

وتعبر هذه النتيجة عن عزم القصور الذاتي لقشرة سمكها da ونصف قطرها a . وحيث ان كتلة هذه القشرة هي $m = 4\pi\rho a^2\, da$ ، لذلك يمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي للقشرة المنتظمة كالتالي

$$I_z = \frac{2}{3}ma^2 \qquad (8.3.12)$$

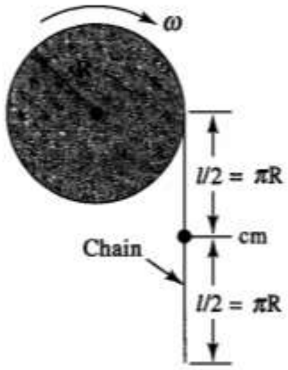
مثال (8.1)

في الشكل (8.7) لفت سلسلة منتظمة طولها $l = 2\pi R$ وكتلتها $m = M/2$ حول قرص نصف قطره R وكتلته M (كما في الشكل 8.7) . في بداية الحركة كان احد طرفي السلسلة عند

مستوى القرص وتحت تأثير الجاذبية بدأت السلسلة بالنزول الى اسفل اوجعلت القرص يدور حول محور ثابت (محور -z) وبدون احتكاك .

(a) جد السرعة الزاوية للقرص عند اللحظة التي تفلت السلسلة نهائيا من القرص,

(b) حل المثال في حالة كون كتلة السلسلة الملفوفة حول القرص تساوي كتلة القرص.



شكل (8.7) سقوط سلسلة مربوطة بحافة قرص .

الحل

(a) نفرض ان السرعة الزاوية للقرص عندما تصبح السلسلة غير ملفوفة كليا على القرص تساوي ω . نستخدم قانون حفظ الطاقة اثناء نزول السلسلة .في اللحظة الأبتدائية ، يكون مركز كتلة السلسلة على مستوى مركز كتلة القرص ، لذلك عند نزول السلسلة مسافة راسية قدرها $l/2 = \pi R$ نطبق قانون حفظ الطاقة ، اي

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{l}{2} = \pi R \qquad v = \omega R \qquad I = \frac{1}{2}MR^2$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة ω^2 نجد ان

$$\omega^2 = \frac{mg(l/2)}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)(M/2) + \left(\frac{1}{2}\right)(m)\right]R^2} = \frac{mg\pi R}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)m + \left(\frac{1}{2}\right)m\right]R^2}$$
$$= \pi \frac{g}{R}$$

(b) حيث ان عزم القصور الذاتي للقرص (العجلة) هو $I = MR^2$ ، بالتعويض في هذه النتيجة نحصل على

$$\omega^2 = \pi \frac{2g}{3R}$$

<u>نظريات عزم القصور الذاتي</u>

❖ **نظرية المحاور المتعامدة لصفيحة مستوية Perpendicular – Axis Theorem for a Plane Lamina**

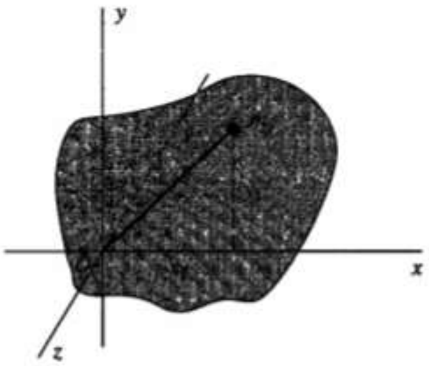
لنفرض ان جسما صلبا على شكل صفيحة مستوية عشوائية الشكل ، وكان مستوى الصفيحة هوالمستوى $- \ xy$. يكون عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور $- \ z$ (شكل8.8) كما يلي

$$I_z = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 \qquad (8.3.13)$$

لكن الحد الأول في هذه المعادلة يعبر عن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور $x-$ ، بينما يعبر الحد الثاني فيها عن عزم القصور الذاتي حول محور $y-$. اذن
تصبح معادلة (8.3.13) على الصورة التالية

$$I_z = I_x + I_y \tag{8.3.14}$$

وهذه المعادلة تعرف بأسم **نظرية المحاور المتعامدة** ، وبالكلمات تنص هذه النظرية على ما يلي:
يكون عزم القصور الذاتي لأي صفيحة مستوية حول اي محور متعامدا مع مستواها **مساويا لمجموع عزوم القصور الذاتية لمحورين متعامدين يقعان في مستوى هذه الصفيحة ومشتركان معا في نفس نقطة الأصل .**



شكل (8.8) نظرية المحاور المتعامدة لصفيحة مستوية .

تطبيق:

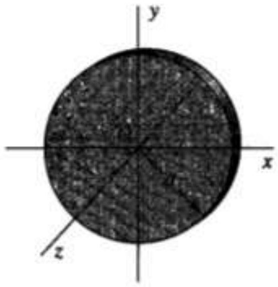
لنعتبر قرص دائري رقيق (الشكل (8.9) ، جد عزم القصور الذاتي للقرص حول محور يمر بمركزه ويقع في مستوى سطحه.
من معادلة (8.3.14) نجد ان

$$I_z = \frac{1}{2} ma^2 = I_x + I_y \tag{8.3.15}$$

من خاصية التماثل للقرص ، نجد ان $I_x = I_y$ ،لذلك نحصل على التالي

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} ma^2 \tag{8.3.16}$$

كما يمكن الحصول على هذه النتيجة بأستخدام عملية التكامل المباشر



شكل(8.9) قرص دائري منتظم ومتجانس .

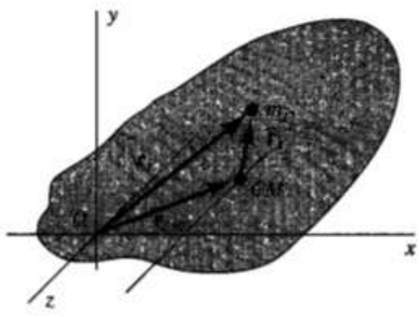
❖ نظرية المحاور المتوازية لأي جسم صلب Parallel Axis Theorem for any Rigid Body

لنعتبر معادلة عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور مثل محور Z ،

$$I_z = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \tag{8.3.17}$$

يمكن ان نعبر عن الأحداثيات x_i, y_i بدلالة احداثيات مركز الكتلة (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) واحداثيات بالنسبة لمركز الكتلة $(\overline{x_l}, \overline{y_l}, \overline{z_l})$ (الشكل 8.10) على النحو التالي

$$x_i = x_{cm} + \bar{x}_i \qquad y_i = y_{cm} + \bar{y}_i \tag{8.3.18}$$



شكل (8.10) نظرية المحاور المتوازية لجسم صلب .

وبعد العمليات الجبرية والترتيب ، نحصل على التالي

$$I_z = \sum_i m_i\left(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2\right) + \sum_i m_i\left(x_{cm}^2 + y_{cm}^2\right) + 2x_{cm}\sum_i m_i\bar{x}_i + 2y_{cm}\sum_i m_i\bar{y}_i \quad (8.3.19)$$

يمثل الحد الأول في هذه المعادلة عزم القصور الذاتي للجسم حول محور مواز لمحور z- ويمر بمركز الكتلة ، ويرمز لهذا العزم I_{cm} . اما المجموع في الحد الثاني يمثل كتلة الجسم مضروبة بمربع البعد بين مركز الكتلة ومحور z- ، لنفرض ان عذا البعد (المسافة) هو l . اي ان $l^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2.$

من تعريف مركز الكتلة ، نجد ان

$$\sum_i m_i\bar{x}_i = \sum_i m_i\bar{y}_i = 0 \quad (8.3.20)$$

وعليه ، تصبح معادلة (8.3.19) على النحو

$$I = I_{cm} + ml^2 \quad (8.3.21)$$

وهذه المعادلة تعرف بنظرية المحاور المتوازية ، وتنطبق هذه النظرية على جميع الأجسام الصلبة والصفائح . وتنص هذه النظرية على التالي

يكون عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول اي محور مساويا لعزم القصور الذاتي حول اي محور موازي ومارا بمركز الكتلة مضافا اليه حاصل الضرب لكتلة الجسم بمربع البعد بين هذين المحورين .

تطبيق:

❖ **القرص الدائري**

لنفرض ان قرص دائري نصف قطره **a** والمطلوب ايجاد عزم القصور الذاتي عند محور **يوازي** لمحور ويمر بمركزه باستخدام نظرية المحاور المتوازية .

يكون البعد بين الحافة ومكز كتلة القرص يساوي نصف قطره ، وعليه ، تؤول معادلة (8.3.21) الى التالي

$$I = \frac{1}{2}ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2 \qquad (8.3.22)$$

اما عزم القصور الذاتي للقرص حول محور يمس الحافة ويقع في **مستوى** ذلك القرص فيعطى كما يلي

$$I = \frac{1}{4}ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4}ma^2 \qquad (8.3.23)$$

❖ **الأسطوانة الدائرية**

لأيجاد عزم القصور الذاتي لأسطوانة منتظمة نصف قطرها a وطولها b حول محور يمر بالمركزومتعامدا على المحور المركزي (الشكل 8.11) . نستخدم عنص التكامل على هيئة قرص رقيق

سمكه dz وعلى بعد قدره z من المستوى $xy-$. من معادلة عزم القصور الذاتي لعنصر القرص ونظرية المحاور المتوازية نحصل على التالي

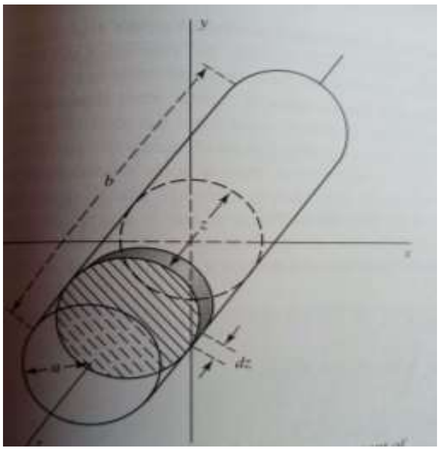
$$dI_x = \tfrac{1}{4}a^2dm + z^2dm \tag{8.3.24}$$

حيث $dm = \rho\pi a^2 dz$. وهكذا بالتكامل نجد ان

$$I_x = \rho\pi a^2 \int_{-b/2}^{b/2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 + z^2\right)dz = \rho\pi a^2\left(\tfrac{1}{4}a^2b + \tfrac{1}{12}b^3\right) \tag{8.3.25}$$

وحيث ان كتلة الأسطوانة تساوي $m = \rho\pi a^2 \mathrm{b}$ ، لذلك يكون عزم القصور الذاتي كما يلي

$$I_x = I_y = m\left(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{12}b^2\right) \tag{8.3.26}$$



شكل (8.11) احداثيات ايجاد عزم القصور الذاتي لأسطوانة منتظمة .

❖ نصف قطر التدوير (التدويم) Radius of Gyration

من مفهوم عزم القصور الذاتي لجسم صلب يمكن ان نعرف كمية فيزيائية تسمى بنصف قطر التدوير (ألتدويم) ويكون ذلك بخارج قسمة عزم القصور الذاتي على كتلة هذا الجسم ويرمز لها بالرمز k . وعبارة رياضية ،

$$k^2 = \frac{I}{m} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{8.3.27}$$

كمثال ، يكون نصف قطر التدوير لقضيب رقيق منتظم حول محور يمر بأحد طرفيه وعموديا على ذلك الطرف كما يلي:

$$k = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad (8.3.28)$$

الجدول التالي يعطي مربع نصف قطر التدوير لبعض اشكال هندسية من الأجسام الصلبة والمنتظمة:

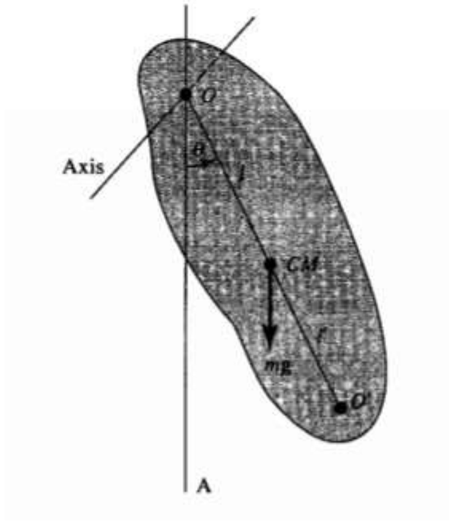
الجسم	المحور	k^2
قضيب رفيع طوله a	عمودى على القضيب يمر من مركزه	$\frac{a^2}{12}$
	عمودى على القضيب يمر من احد طرفيه	$\frac{a^2}{3}$
صفيحه رقيقه متوازية الاضلاع ، ضلعاها a و b	يمر من المركز ومواز للضلع b	$\frac{a^2}{12}$
	يمر من المركز وعمودى على الصفيحه	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
قرص دائرى رقيق نصف قطره a	يمر من المركز وواقع في مستوى القرص	$\frac{a^2}{4}$
	يمر من المركز وعمودى على القرص	$\frac{a^2}{2}$
حلقة رقيقه نصف قطرها a	يمر من المركز وواقع في مستوى الحلقة	$\frac{a^2}{2}$
	يمر من المركز وعمودى على سطحها	a^2
قشرة اسطوانية رقيقه نصف قطرها a وطولها b	محورها الطولي المركزى	a^2

اسطوانه دائريه قائمه صلده نصف قطرها a وطولها b	محورها الطولي المركزى	$\frac{a^2}{2}$
	يمر من مركزها وعمودى على محورها الطولي المركزى	$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$
قشرة كروية نصف قطرها a	اى قطر	$\frac{2}{3} a^2$
كرة صلده منتظمة نصف قطرها a	اى قطر	$\frac{2}{5} a^2$
متوازى المستطيلات منتظم صلد ، اضلاعه a ، b ، c	يمر من المركز وعمودى على الوجه ab ، وهو موازٍ للحافه c	$\frac{a^2 + b^2}{12}$

(8.4) البندول الفيزيائي (البندول المركب)

The Physical Pendulum Compound Pendulum)

يتألف البندول المركب من جسم صلب يتأرجح تحت تأثير وزنه حول محور ثابت افقي (الشكل 8.12) . تمثل النقطة CM مركز الكتلة و O تقع على محور الدوران الذي يقع على محور الدوران في المستوى العمودي للمسار الدائري الذي يرسمه مركز الكتلة اثناء التذبذب .



شكل (8.12) البندول الفيزيائي (البندول المركب).

لنفرض ان الزاوية بين الخط OCM والخط العمودي OA هي θ . يكون عزم وزن الجسم حول محور الدوران يساوي $mgl\sin\theta$. وعليه تكون معادلة الحركة الدورانية = N $\mathbf{I}\dot{\omega}$وهذه المعادلة تؤول الى الصورة $-mgl\sin\theta = l\ddot{\theta}$ او

$$\ddot{\theta}+\frac{mgl}{I}\sin\theta=0 \qquad (8.4.1)$$

في حالة سعة الذبذبة الصغيرة (البندول البسيط) يمكن استخدام التقريب الأولي لجيب الزاوية $\sin\theta \approx \theta$ ، لتصبح هذه المعادلة على الصورة التالية :

$$\ddot{\theta}+\frac{mgl}{I}\theta=0 \qquad (8.4.2)$$

كما يكون حل هذه المعادلة على النحو

$$\theta=\theta_0\cos(2\pi f_0 t-\delta) \qquad (8.4.3)$$

حيث θ_o سعة الذبذبة ، ϵ زاوية الطور. اما التردد فيعطى بالعلاقة التالية

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (8.4.4)$$

كما يكون زمن الدورة period كالتالي

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (8.4.5)$$

ويمكن التعبير عن الدور بدلالة محور التدوير كما يلي

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}} \quad (8.4.6)$$

مثال

جد زمن الدورة لبندول فيزيائي مكون من قضيب رقيق عندما يكون محور الدوران بالطرف اذا كان طول **هذا القضيب a ؟**

الحل

$$k^2 = a^2/3 \quad , \quad l = a/2$$

اذن

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a^2/3}{ga/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}} \quad (8.4.7)$$

وهذه المعادلة تكافئ زمن الدورة لبندول بسيط طوله $2a/3$.

مركز التذبذب center of oscillation

يمكن استعمال نظرية المحاور المتوازية للتعبير عن نصف قطرالتدوير بدلالة نصف قطر التدوير حول مركز الكتلة كالتالي:

$$I = I_{cm} + ml^2 \tag{8.4.8}$$

او

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + ml^2 \tag{8.4.9a}$$

$$k^2 = k_{cm}^2 + l^2 \tag{8.4.9b}$$

وعليه ، يكون زمن الدورة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l^2}{gl}} \tag{8.4.10}$$

لنفرض ان محور الدوران للبندول ازيح الى موقع جديد o' على بعد l' من مركز الكتلة (الشكل 8.12) ، يكون زمن الدورة الجديد T_o' كالتالي

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l'^2}{gl'}} \tag{8.4.11}$$

على شرط تساوي زمن الدورة متساو في الحالتين ، يتبع ذلك ما يلي

$$\frac{k_{cm}^2 + l^2}{l} = \frac{k_{cm}^2 + l'^2}{l'} \tag{8.4.12}$$

بحل هذه المعادلة جبريا ، نجد ان

$$ll' = k_{cm}^2 \qquad (8.4.13)$$

تسمى النقطة O' مركز التذبذب بالنسبة للنقطة O ، والعكس صحيح.

مثال

جد مركز التذبذب في حالة القضيب الرقيق الذي طوله a والمثبت حول احد طرفيه ؟

الحل

$k_{cm}^2 = \frac{a^2}{12}$ ، $l = a/2$ ، من معادلة (8.4.13) نجد ان $l' = a/6$

وهذا يعني ان البندول يمكن ان يتذبذب حول المحور المار بأحد طرفيه بنفس الدور لذبذبته حول نقطة تبعد عن مركز كتلته مسافة $a/6$

(8.5) النظرية العامة المتعلقة بالزخم الزاوي A General Theorem concerning Angular Momentum

لدراسة الحالة العامة لحركة الجسم الصلب الدورانية ، يلزمنا تطوير نظرية اساسية حول الزخم الزاوي .

في الفصل السابع وجدنا ان المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوي في اي نظام يساوي الأزدواج المسلط عليه :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

وعليه ،فأن المعدل الزمني للزخم الزاوي يكون

$$\frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

..............(8.5.1)

حيث كل الكميات في هذه المعادلة تشير الى نظام الأحداثيات القاصرة . يمكن التعبير عن متجه موقع الجسيم بدلالة متجه موقع مركز الكتلة و متجه موقع الجسيم بالنسبة لمركز الكتلة (كما في الشكل (8.10)) . اي ان،

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \bar{\mathbf{r}}_i$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \bar{\mathbf{v}}_i$$

بالتعويض في معادلة (8.5.1) نحصل على التالي

$$\frac{d}{dt}\sum_i [(\mathbf{r}_{cm} + \bar{\mathbf{r}}_i) \times m_i(\mathbf{v}_{cm} + \bar{\mathbf{v}}_i)] = \sum_i (\mathbf{r}_{cm} + \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{F}_i$$

........(8.5.2)

بترتيب هذه المعادلة مع ملاحظة ان :

$$\sum m_i \bar{\boldsymbol{r}}_i = 0, \quad \sum m_i \bar{\boldsymbol{V}}_i = 0$$

تصبح هذه المعادلة على النحو

$$\mathbf{r}_{cm} \times \sum_i m_i \mathbf{a}_{cm} + \frac{d}{dt}\sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{r}_{cm} \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i$$

............(8.5.3)

حيث $a_{cm} = \dot{V}_{cm}$.

كما وجدنا في الفصل السابع ان معادلة الحركة الأنتقالية لمركز كتلة الجسم تعطى كما يلي

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = m\mathbf{a}_{cm}$$

وعليه ، تصبح معادلة (8.5.3) كما يلي

$$\frac{d}{dt}\sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i$$

........(8.5.4)

يمثل التجميع في الطرف ألأيسر في هذه المعادلة الزخم الزاوي للنظام حول مركز الكتلة ، بينما يمثل التجميع في الطرف الأيمن مجموع عزوم القوى الخارجية حول مركز الكتلة ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كالتالي

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \bar{\mathbf{N}}$$

........................(8.5.5)

وهذه النتيجة الهامة تنص على ان المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوي حول مركز الكتلة للنظام يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المسلطة عليه حول مركز كتلة هذا النظام . وتبقى هذه النتيجة صحيحة حتى لو كان هناك **تسارع لمركز الكتلة .** سنتناول استخدام هذه المعادلة في البند التالي

(8.6) الحركة الصفائحية لجسم صلب Laminar Motion of a Rigid Body

تسمى حركة الجسم بالصفائحية اذا تحركت كل جسيماته في مستى مواز لمستوى ثابت . وفي هذه الحركة يغير محور الدوران موقعه بدون ان يغير من اتجاهه . ومن الأمثلة على هذه الحركة تدحرج اسطوانة على سطح مستو.

اذا عمل الجسم ازاحة صفائحية ، فأن المعادلة الأساسية التي تصف هذه الحركة الأنتقالية هي

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = m\dot{\mathbf{v}}_{cm} = m\mathbf{a}_{cm}$$

.................(8.6.1)

اما اذا كانت الحركة دورانية حول محور C ما يمر بمركز الكتلة وبسرعة زاوية ω ،تكون مركبة الزخم الزاوي حول هذا المحور كما يلي

$$\bar{L}_C = I_{cm}\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (8.6.2)$$

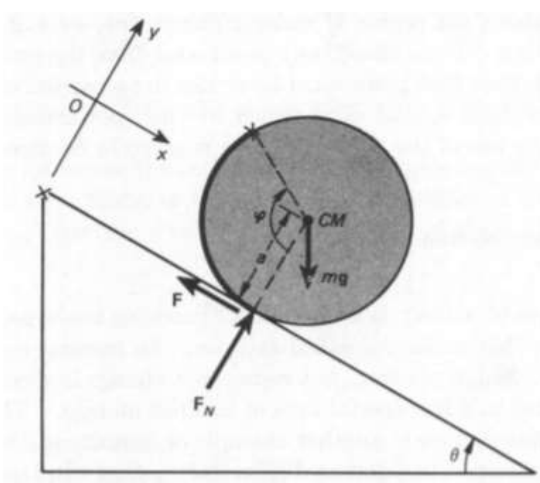
وتكون معادلة الحركة الدورانية على النحو التالي

$$\boldsymbol{\frac{d\bar{L}_C}{dt} = I_{cm}\dot{\omega} = \bar{N}_C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(8.6.2)}$$

حيث $\bar{N}_C$ مجموع العزوم للقوى المسلطة الخارجية حول محور C .

❖ تدحرج جسم على سطح مائل

ندرس حردة اسطوانة تتدحرج على سطح مائل كمثال على الحركة الصفائحية (كما في الشكل (8.13



شكل (8.13) تدحرج اسطوانة على سطح مائل .

نلاحظ وجود ثلاثة قوى خارجية تؤثر على الجسم وهي

(1)وزن الاسطوانة الى اسفل. (2) رد فعل السطح العمودي F_N .(3) قوة الأحتكاك الموازية للمستوى $\boldsymbol{F}$ وتعاكس اتجاه الحركة (الى اعلى).

تكون معادلات الحركة الأنتقالية لمركز الكتلة في اتجاهي محور $-\ x, y$ كما يلي

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - F$$
$$m\ddot{y}_{cm} = -mg\cos\theta + F_N$$

................................(8.6.3)

حيث θ زاوية ميل السطح . عند تقييد الحركة على السطح فقط فأن

$$y_{cm} = \text{constant}$$

$$\ddot{y}_{cm} = 0$$

من المعادلة الثانية في (8.6.3) نجد ان

$$F_N = mg\cos\theta$$

....................(8.6.4)

وتكون القوة الوحيدة التي لها عزم حول مركز الكتلة هي قوة الأحتكاك ، اذا كان نصف قطر الأسطوانة a فأن مقدار هذا العزم يساوي Fa ، وعليه تكون معادلة الحركة كما يلي

$$I_{cm}\dot{\omega} = Fa$$

ولمزيد من الدراسة نعتبر حالتين لهذه الحركة وهما الحركة بدون انزلاق والحركة مع الأنزلاق.

❖ **الحركة بدون انزلاق**

اذا كان السطح المائل خشنا الى درجة لا يكون عندها اي انزلاق ، اي ، $F \leq \mu_s F_N$ حيث μ_s معامل الأحتكاك الساكن . لنفرض ان φ زاوية الدوران ، يمكن التعبير عن المسافة ألأنتقالية على السطح كما يلي

$$\begin{aligned} x_{cm} &= a\varphi \\ \dot{x}_{cm} &= a\dot{\varphi} = a\omega \\ \ddot{x}_{cm} &= a\ddot{\varphi} = a\dot{\omega} \end{aligned}$$

................................(8.6.5)

وعليه تصبح معادلة (8.6.4) على النحو التالي

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} = F$$

.....................(8.6.6)

بالتعويض في معادلة (8.6.3) نحصل على التالي

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm}$$

بترتيب وحل هذه المعادلة نحصل على ما يلي

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg\sin\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g\sin\theta}{1 + (k_{cm}{}^2/a^2)}$$

............(8.6.7)

حيث k_{cm} نصف قطر التدوير حول مركز الكتلة .

نلاحظ ان الجسم يتدحرج الى اسفل السطح بتسارع خطي ثابت و ايضا بتسارع زاوي ثابت .

مثال

جد تسارع اسطوانة منتظمة تتحدرج على سطح مائل ؟

الحل

نصف قطر تدوير الأسطوانة يساوي $k_{cm}^2 = a^2/2$ ، بالتعويض في معادلة (8.6.7) نحصل على

$$\frac{g\sin\theta}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

مثال

جد تسارع كرة منتظمة تتدحرج على سطح خشن مائل ؟

الحل :

في حالة الكرة :

$k_{cm}^2 = 2\ a^2/5$ ، بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$\frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

❖ **طريقة أخرى**

يمكن التوصل الى النتائج السابقة بأستخدام مبدأ حفظ الطاقة الكلية للنظام ، لنفرض ان مجال الجاذبية الأرضية منتظم ، تكون طاقة الجهد للنظام كما يلي

$$V = \Sigma(m_i g z_i) = mgz_{cm}$$

حيث z_{cm} المسافة الرأسية لمركز الكتلة من سطح مرجعي وهو سطح الأرض . وعليه يكون مبدأ حفظ الطاقة الكلية كما يلي

$$T + V = T + mgz_{cm} = E = \text{constant}$$

حيث T ***الط***اقة الحركية للجسم المتدحرج و تساوي مجموع الطاقة الأنتقالية والطا قة الدورانية لمركز الكتلة . وعليه يصبح قانون حفظ الطاقة كما يلي

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz_{cm} = E$$

حيث ان $\omega = \dot{x_{cm}}/a$ ، $z_{cm} = -x_{cm}\ \sin\theta$. بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$\frac{1}{2}\,m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\,mk_{cm}{}^2\,\frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - mgx_{cm}\sin\theta = E$$

نلاحظ ان في حالة التدحرج النقي لا تظهر قوة الأحتكاك في معادلة الطاقة لأن الطاقة الميكانيكية تتحول الى حرارة. لذلك تبقى الطاقة الكلية ثابتة . بأشتقاق هذه المعادلة السابقة بالنسبة للزمن وبتجميع الحدود في الناتج ، نحصل على التالي

$$m\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}{}^2}{a^2}\right) - mg\dot{x}_{cm}\sin\theta = 0$$

بأختصار $\dot{x_{cm}}$ من الحدود وحل الناتج بالنسبة للتسارع الخطي نحصل على المعادلة (8.6.7) السابقة .

❖ حالة الأنزلاق Occurrence of Slipping

ندرس في هذا البند حركة تدحرج الجسم الصلب على سطح مائل عندما يكون السطح ليس خشنا تاما لدرجة انه يمنع انزلاق الجسم ، لنفرض ان معامل ألاحتكاك الحركي μ . تكون قوة الأحتكاك على النحو

$$F = F_{\max} = \mu F_N = \mu mg \cos\theta$$

.....................(8.6.8)

بالتعويض في معادلة (8.6.3) الحركة الأنتقالية للجسم المتدحرج ، نجد ان

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin\theta - \mu mg \cos\theta$$

.......................(8.6.9)

بينما تصبح معادلة الحركة الدورانية على النحوالتالي

$$I_{cm}\dot{\omega} = \mu mga \cos\theta$$

...........(8.6.10)

معادلة (8.6.9) تعطي التسارع الخطي بالصورة التالية

$$\ddot{x}_{cm} = g(\sin\theta - \mu \cos\theta)$$

....................(8.6.11)

بينما تعطي معادلة (8.6.10) التسارع الزاوي على النحو

$$\dot{\omega} = \frac{\mu mga \cos\theta}{I_{cm}} = \frac{\mu ga \cos\theta}{k_{cm}{}^2}$$

...........(8.6.12)

للحصول على السرعة الخطية والدوراتية للجسم ، نكامل هاتين المعادلتين بالنسبة للزمن   t مع اعتبار الشروط الأبتدائية للحركة وهي $0 = \dot{\varphi}, 0 = \dot{x}_{cm} = ,\quad 0 = t$. لنحصل على التالي

$$\dot{x}_{cm} = g(\sin\theta - \mu \cos\theta)t$$
$$\omega = \dot{\varphi} = g(\mu a \cos\theta / k_{cm}{}^2)t$$

.......................(8.6.13)

لأيجاد القيمة الحرجة لمعامل الأحتكاك التي تجعل الجسم يتدحرج بدون انزلاق ، نتبع ما يلي

لنفرض ان النسبة بين السرعة الخطية والدورانية هي ثابتة وبالصورة التالية

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a\omega$$

حيث

$$\gamma = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\mu a^2 \cos\theta / k_{cm}^2} = \frac{k_{cm}^2}{a^2}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - 1\right)$$

...........(8.6.14)

حيث ان $a\omega > \dot{x_{cm}}$ ، $\boldsymbol{\gamma}$ لا يمكن ان تكون اقل من الواحد . والحالة النهائية ، في حالة الدوران النقي ، تكون $\dot{x_{cm}} = a\omega$ ، اي ان $\gamma = 1$.

بحل معادلة (8.6.14) لقيمة μ عند $\gamma = 1$ ، نجد ان

$$\mu_{crit} = \frac{\tan\theta}{1 + (a/k_{cm})^2}$$

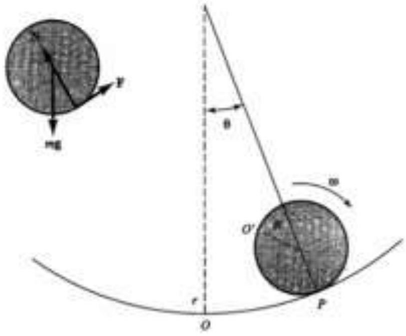
.................(8.6.15)

اي ان ، اذا كانت قيمة μ اكبر من هذه القيمة فأن الجسم يتدحرج دون انزلاق .

مثلا ، اذا وضعت كرة منتظمة على سطح مائل بزاوية 45^0 ، فأن شرط التدحرج بدون انزلاق هو ان يكون مقدار معامل احتكاك السطح كالتالي : $\mu_{crit} > \tan 45/\left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2/7$

مثال

وضعت اسطوانة نصف قطره R ***بداخل سطح اسطواني كبير نصف قطره r حيث $r \gg R$ كما في الشكل (8.6.14) . اذا ازيحت الأسطوانة الصغيرة ثم تركت لتتحرك بشكل حركة توافقية بسيطة ، بين ان تردد هذه الحركة يعادل تردد بندول بسيط طوله $l = 3(r - R)/2$.***



شكل (8.6.14) حركة اسطوانة صغيرة بداخل اسطوانة كبيرة .

الحل

بأستخدام معادلة حفظ الطاقة للنظام (مع اهمال الأحتكاك) ، نحصل على التالي

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + mgh$$

حيث h *يمثل ارتفاع مركز الكتلة للأسطوانة الصغيرة عن النقطة* O ، في حالة الذبذبات الصغيرة يمكن استعمال التقريبات التالية: $\sin\theta \approx \theta \ \ , \ \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2 \ ,$ وعليه .

$$h = (r - R)(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}(r - R)\theta^2$$

بما ان الحركة بدون انزلاق ، فأن

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{(r - R)}{R}\dot{\theta}$$

وتصبح معادلة الطاقة الكلية على النحو التالي

$$E = \frac{I_{cm}}{2R^2}(r - R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(r - R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}g(r - R)\theta^2$$

بأخذ مشتقة هذه المعادلة بالنسبة للزمن واعتبار ان الطاقة الكلية ثابتة ، نحصل على

$$\dot{E} = \frac{I_{cm}}{R^2}(r-R)^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + m(r-R)^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg(r-R)\theta\dot{\theta} = 0$$

ترتيب هذه المعادلة لأيجاد التالي

$$\left(\frac{I_{cm}}{R^2} + m\right)(r-R)\ddot{\theta} + mg\theta = 0$$

وعليه ،

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\left(\frac{3}{2}\right)(r-R)}\theta = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة الحركة لبندول بسيط طوله : $3(r-R)/2$

(8.7) الدفع والتصادم بين الأجسام الصلبة Impulse and Collisions involving Rigid Bodies

في هذا البند نتناول تأثير قوة الدفع على الحركة الصفائحية للأجسام الصلبة .نعلم ان المعادلة العامة للحركة الأنتقالية تعطى بقانون نيوتن الثاني الذي صيغته الرياضية كالتالي: $F = m\frac{dV_{cm}}{dt}$ ، اذا كانت القوة دفعية فأن التغير في الزخم الخطي للجسم تحت تأثير هذه القوة يعطى على النحو

$$\int \mathbf{F}\,dt = \boldsymbol{P} = m\Delta\mathbf{v}_{cm} \qquad (8.7.1)$$

هكذا، يكون نتيجة الدفع $\boldsymbol{P}$ انتاج تغير مفاجئ في سرعة مركز الكتلة بمقدار

$$\Delta\mathbf{v}_{cm} = \frac{\boldsymbol{P}}{m} \qquad (8.7.2)$$

اما الجزء الدوراني لحركة الجسم فيتبع المعادلة : $N = \dot{L} = I\frac{d\omega}{dt}$ ، وعليه يكون التغير في الزخم الزاوي بالصورة التالية

$$\int N dt = I\Delta\omega \qquad (8.7.3)$$

يسمى التكامل في هذه المعادلة **الدفع الدوراني** ***rotational impulse.***

لنفرض ان دفعا ابتدائيا سلط على الجسم بحيث ان خط عمل هذا الدفع يبعد مسافة l عن المحور مرجعي المطلوب حساب الزخم الزاوي حوله . لذا يكون $N = Fl$ ، ونجد ان

$$\int N dt = Pl \qquad (8.7.4)$$

وتبع ذلك ان تكون التغير في السرعة الزاوية كما يلي

$$\Delta\omega = \frac{Pl}{I} \qquad (8.7.5)$$

في الحالة العامة للحركة الصفائحية الحرة ، عند اعتبار ان المحور المرجعي مارا بمركز الكتلة ويكون عزم القصور الذاتي : $I = I_{cm}$. أما اذا اجبر الجسم بالدوران حول محور ثابت ، فأن المعادلة الدورانية هي فقط تحدد الحركة ، ويكون عزم القصور الذاتي هو ذلك العزم القصوري حول المحور الثابت.

اما في حالة التصادم بين الأجسام الصلبة ، تكون القوى والدفع المؤثرة على هذه الأجسام خلال التصادم متساوية وفي اتجاه مضاد . وعليه ، ينطبق قانون حفظ الزخم الخطي والزاوي في عمليات التصادم هذه .

تطبيق: مركز الصدم : نظرية مضرب البيسبول

Center of Percussion: The Baseball Bat Theorem

كمثال على هذه النظرية ، نتناول التصادم بين كرة كتاتها m وجسم صلب كتلته M . ولتسهيل الدراسة نفترض ان الجسم كان ساكنا في البداية على سطح افقي وكان حرا ليتحرك بحركة صفائحية(الشكل 8.16) . لنفرض ان $\boldsymbol{P}$

يمثل مقدار الدفع الواصل الى الجسم بواسطة الكرة ، وعليه ، تكون معادلة الحركة الأنتقالية كالتالي

$$\boldsymbol{P} = M\mathbf{v}_{cm} \tag{8.7.6}$$

$$-\boldsymbol{P} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 \tag{8.7.7}$$

حيث ، V_0, V_i تعبر عن السرعة الخطية للكرة الأبتدائية والنهائية (بعد التصادم) ، من الواضح ان المعادلتين تتضمنان قانون حفظ الزخم الخطي في العملية .

الشكل (8.16) تصادم كرة البيسبول مع المضرب .

بما ان الجسم يكون ساكنا في اللحظة الأبتدائية ، لذلك يعطى دوران مركز الكتلة للجسم ، نتيجة الدفع ، بالعلاقة التالية

$$\omega = \frac{Pl'}{I_{cm}} \tag{8.7.8}$$

حيث l تمثل المسافة OC وهي مقدار بعد مركز الكتلة عن خط عمل قوة الدفع .لنفرض ان النقطة o' التي تبعد مسافة l' عن مركز الكتلة من الجهة الأخرى على امتداد OC (كما في الشكل 8.16).

نحصل على سرعة النقطة (عدديا) O بدمج السرعتين الأنتقالية والدورانية كما يلي

$$v_O = v_{cm} - \omega l = \frac{P}{M} - \frac{Pl'}{I_{cm}} l = P\left(\frac{1}{M} - \frac{ll'}{I_{cm}}\right) \qquad (8.7.9)$$

تنعدم هذه السرعة اذا تلاشى القوس في معادلة (8.7.9) ، او

$$ll' = \frac{I_{cm}}{M} = k_{cm}^2 \qquad (8.7.10)$$

في هذه الحالة ، تكون النقطة o' هي المركز الأني لدوران الجسم بعد الدفع ، تسمى النقطة O مركز الصدمة *center of percussion* حول o' . وهاتين النقطتان تضاهي مراكز التذبذب في حالة البندول البسيط .

تمارين

(8.1) جد مركز الكتلة للأجسام التالية

(a) سلك مثني على شكل حرف **U** ومتساوي الأضلاع وطول ضلعه b ؟

(b) صفيحة منتظمة على شكل ربع دائرة بنصف قطر b ؟

(c) المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y = x^2/b$ والخط المستقيم $y = b$؟

(d) الحجم المحصور بين مجسم القطع الدوراني المكافئ $z = (x^2 + y^2)/b$ والمستوى $z = b$ ؟

(e) مخروط صلب دائري ومنتظم ارتفاعه b. ؟

(8.2) اذا كانت الكثافة الطولية لقضيب هي $\rho = cx$ ، حيث c ثابت ، وطول القضيب b ، x البعد عن الطرف ، جد مرطز كتلة القضيب ؟

(8.3)كرة صلبة منتظمة نصف قطرها a وفيها تجويف كروي نصف قطره $a/2$ ويقع مركزه على بعد $a/2$ من مركز الكرة . جد مركز الكرة ؟

(8.4)جد عزوم القصور الذاتية للأشكال المذكورة في (8.1) حول محور التماثل لكل منها ؟

(8.5)جد عزم القصور الذاتي للكرة في (8.3) حول محور يمر في مركزها وكذلك حول محور يمر بمركز التجويف ؟

(8.6)برهن ان عزم القصور الذاتي لثمن كرة منتظمة نصف قطرها a يساوي $(2/5)ma^2$ حول محور يمر بحافتها المستقيمة ؟

(8.7) برهن ان عزم القصور الذاتي لمتوازي مستطيلات، اسطوانة بيضاوية ، مجسم قطع ناقص هي على التوالي:

$(m/5)\,(a^2 + b^2)$، $(m/4)(a^2 + b^2)$، $(m/3)(a^2 + b^2)$. حيث m كتلة الجسم و $2a$،$2b$ هما الأقطار الرئيسية للأجسام والمتعامدة مع محور الدوران . افترض ان محور الدوران يمر بالمركز ؟.

(8.8) برهن ان زمن الدور لبندول فيزيائي يساوي $2\pi(d/g)^{1/2}$ ، حيث d المسافة بين نقطة التعليق O ومركز التذبذب O' ؟

(8.9) طوق دائري نصف قطره a يتأرجح بشكل بندول فيزيائي حول نقطة على محيطه . جد زمن الذبذبة ذات السعة الصغيرة اذا كان محور الدوران

(1)عموديا على مستوى الطوق . (2) في مستوى الطوق .؟

(8.10) جد تسارع مركز كتلة كرة منتظمة ملفوفا حولها خيط ، اذا امسك بطرف الخيط وتركت الكرة تنزل لأسفل تحت تأثير وزنها ؟

(8.11) يحمل رجلان لوح خشبي على كتفيهما طوله l وكتلته m ، فاذا في لحظم ما ترك احدهما طرف اللوح وبقي الآخر . برهن ان الثقل على كتف هذا الرجل يتغير من $mg/2$ الى $mg/4$ ، ثم بين ان تسارع الطرف الحر للوح يعادل $3g/2$ ؟

(8.12) علقت كتلتان m_1, m_2 بحبل خفيف يمر حول بكرة خشنة نصف قطرها a وعزم القصور الذاتي لها I . جد تسارع الكتلتان على فرض ان $m_1 > m_2$.؟

(8.13) وضعت اسطوانة دائرية نصف قطرها a على قمة اسطوانة ثابتة خشنة ونصف قطرها b حيث $b > a$ ، اذا ازيحت الأسطوانة الصغيرة قليلا لتدحرج على سطح الأسطوانة الثابتة ، برهن ان هذه الأسطوانة تترك السطح عند ما يصنع الخط الواصل بين مركزيهما مع الرأسي زاوية $\cos^{-1}(\frac{4}{7})$. ؟

(8.14) يستند سلم على حائط رأسي املس وعلى ارض ملساء ، اذا كان الطرف السفلي للسلم يصنع زاوية θ_0 ، برهن ان السلم يبدأ بألأنزلاق ويترك الحائط عنما تكون الزاوية مع الأرض هي $\sin^{-1}(2\sin\theta_0/3)$.؟

(8.15) قذفت كرة الى اعلى ، بدون دوران، من اسفل سطح مائل بسرعة v_0 . اذا كان معامل السطح الحركي μ_k وزاوية ميل السطح θ ، جد المسافة التي تقطعها الكرة كدالة للزمن ثم موقع الكرة عند بدأ الدوران النقي .

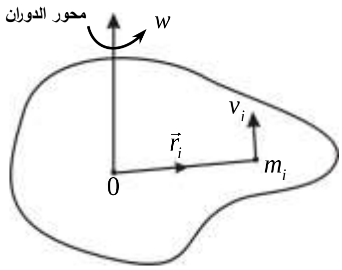
الفصل التاسع : حركة الأجسام الصلبة الدورانية

Rotational Motion of Rigid Bodies

يضـــم هـــذا الفصـــل تســـعة بنـــود هـــدفنا فيهـــا اشـــتقاق صـــيغة رياضـــية للـــزخم الـــزاوي وعـــزوم القصـــور الـــذاتي للجســـم الصـــلب بطريقـــه جديـــدة تســـمى الممتـــدات (Tensors). ثـــم يتنـــاول دراســـة حركـــة الأجســـام الصـــلبة المقيـــدة باســـتخدام معـــادلات إويلـــر Euler's Equation.

9.1) ضرب القصورات الذاتية: Products of Inertia

لنفرض أن جسماً صلباً يدور حول محور بسرعة زاوية $(\vec{w})$ مثبت في النقطة (كما في الشكل9.1).
من تعريف الزخم الزاوي $\vec{L}$ حيث



شكل(9.1)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \, \vec{v}_i$$

حيث وجدنا في الفصل الثامن أن $\vec{v}_i = \vec{w} \times \vec{r}_i$

فإن الزخم الزاوي يصبح

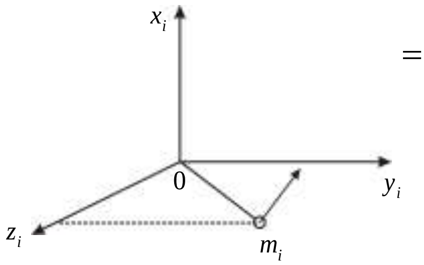
$$\vec{L} = \sum_i m_i \, [\vec{r}_i \times (\vec{w} \times \vec{r}_i)] \qquad (1)$$

حيث $\vec{r}_i = \hat{i}\, x_i + \hat{j}\, y_i + \hat{k} z_i$ ، $\vec{w} = \hat{i}\, w_x + \hat{j}\, wy + \hat{k} w_z$

فإن الضرب الاتجاهي في معادلة (1) تعطي مركبات $\vec{L}$ وتكون على الصورة التالية:

$$L_x = w_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - w_y \sum_i m_i \, x_i \, y_i - w_z \sum_i m_i \, x_i \, z_i$$

$$L_y = w_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - w_x \sum_i m_i \, x_i \, y_i - w_z \sum_i m_i \, y_i \, z_i$$



$$= w_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - w_x \sum_i m_i \, z_i \, x_i - w_y \sum_i m_i \, y_i \, z_i \qquad (2)$$

تمرين: حاول برهنة معالجة (2) باستخدام الضرب الاتجاهي.

تعريفات: تسمى الكمية $L_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$ ،

عزم القصور الذاتي حول محور x حيث $z_i^2 + y_i^2$

مربع البعد العمودي عن محور (x).

في حالة الجسم الصلب (التوزيع المادي متصل)

يكون $\boxed{I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm}$

أما الكمية $= -\sum_i m_i \, x_i \, y_i$ ضرب عزم القصور الذاتي ويرمز له بالرمز I_{xy}

أو في حالة الجسم الصلب:

$$I_{xz} = -\int xz \, dm \; ; \; I_{xy} = -\int xy \, dm$$

لذلك يمكن كتابة مركبة $\vec{L}$ في اتجاه محور (x) على الصورة:

$$\boxed{L_x = I_{xx} \, w_x + I_{xy} \, w_y + I_{xz} \, w_z}$$

وبنفس الطريقة نجد أن $I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$

$$I_{yy} = \int x^2 + z^2) \, dm$$

وكذلك $I_{zz} = \int x^2 + y^2) \, dm$

وعليه فإن مركبة $\vec{L}$ في اتجاه محور (y) هي:

$$\boxed{L_y = I_{yx}\, w_x + I_{yy}\, w_y + I_{yz}\, w_z}$$

ومركبة $\vec{L}$ في اتجاه محور z :

$$\boxed{L_z = I_{zx}\, w_x + I_{zy}\, w_y + I_{zz}\, w_z}$$

ممتد عزم القصور الذاتي (I) :

هو كمية فيزيائية مكونة من (9) عناصر وتكتب على صورة مصفوفة رتبتها (3×3) كما يلي:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

__**ملاحظة**__: في مصفوفة ممتد عزم القصور الذاتي نجد أن

$$I_{xy} = I_{yx} \quad ; \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int zx\, dm \quad ; \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\, dm$$

- **الزخم الزاوي بدلالة المصفوفات:**

حيث أن متجه الزخم الزاوي $\vec{L} = \hat{i}\, L_x + \hat{j}\, L_y + \hat{k}\, L_z$ ، يمكن كتابة L على صورة مصفوفة رتبتها (3×1) أي

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

أما مصفوفة السرعة $\vec{w}$ الزاوية هي:

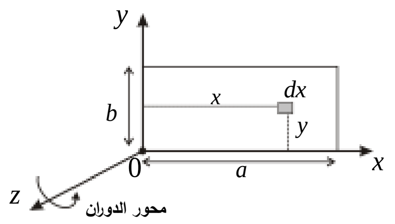
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

وكما مّر معنا في الفصـل الثامن فإن المعادلة المتجه للزخم الزاوي هي $\vec{L} = I\vec{w}$ هذه المعادلة تكتب على صورة مصفوفات كالتالي:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \qquad (4)$$

تعتبر هذه المعادلة أساسية لإيجاد مركبات $\vec{L}$ بدلاً من المعادلات السابقة وهي المستخدمة في حل تمارين هذا الفصل.

مثال(1): جد ممتد عزم القصور الذاتي (الصورة المصفوفة) لصفيحة مستوية منتظمة أبعادها a ، b إذا كانت تدور حول محور يمر بأحد زواياها كما في الشكل(9.2):



شكل(9.2)

الحل: حيث مستوى الصفيحة هو (xy).

فإن التعريفات الرياضية تعطي

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

حيث عنصر المساحة في مستوى xy فإن $z = 0$ ، $dm = \sigma\, ds = \sigma\, dx\, dy$ إذاً

$$I_{xx} = \iint y^2 \sigma\, dx\, dy = \sigma \int_0^a y^2\, dy \int_0^a dx = \sigma [\frac{y^3}{3}]_0^b [x]_0^a = \sigma \frac{b^3}{3} a$$

حيث $m = \sigma (ab)$ إذاً $\sigma = \frac{m}{ab}$ ، وعليه :

$$I_{xx} = \frac{m}{ab} \cdot \frac{b^3}{3} a = \boxed{\frac{1}{3} m b^2}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \sigma\, dx\, dy = \sigma \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy$$

$$= 6 [\frac{x^3}{3}]_0^a [y]_0^b = (\frac{m}{ab})(\frac{a^3}{3})(b) = \boxed{\frac{1}{3} m a^2}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int \sigma\, xz\, dxdy = 0 \quad ; \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int zy \sigma\, dx\, dy$$

$$I_{zz} = I_{zx} = -\int (x^2 + y^2)\sigma\, dx\, dy = \sigma \int_0^a x^2\, dx \int_0^b dy + \sigma \int_0^b y^2 dy \int_0^a dx$$

$$= \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$$

ملاحظة: يمكن باستخدام نظرية المحاور المتعامدة في حالة الصفيحة المستوية إيجاد

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{3} m a^2 + \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$

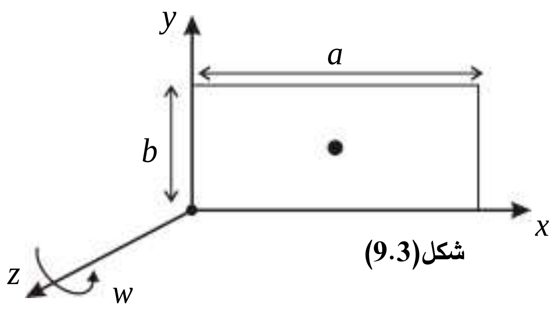
أما

$$\boxed{\frac{-1}{4} ma\, b} = -(\frac{m}{ab})\ [\frac{x^2}{2}]_0^a\ [\frac{y^2}{2}]_0^b = I_{xy} = -\int xy\sigma\, dx\, dy = -\sigma \int_0^a x dx \int_0^b y\, dy$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} mb^2 & -\frac{1}{4} mab & 0 \\ -\frac{1}{4} mab & \frac{1}{3} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m(b^2 + a^2) \end{pmatrix}$$

مثال(2): بالرجوع إلى مثال (1) لنفرض أن الصفيحة تدور حول محور يمر بإحدى زواياها بسرعة جد مقدار الزخم الزاوي للصفيحة؟

الحل: حيث أن مركبات $\vec{w}$ هي: $w_x = 0\ ;\ w_y = 0\ ;\ w_z = w$ نستخدم المعادلة المصفوفية للزخم الزاوي



شكل(9.3)

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}mb^2 & -\frac{1}{4}mab & 0 \\ -\frac{1}{4}mab & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(b^2+a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

نتيجة ضرب المصفوفات هي:

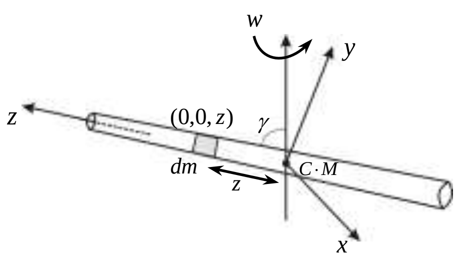
$$L_x = (\tfrac{1}{3}mb^2)(0) + (-\tfrac{1}{4}mab)(0) + 0(w) = 0$$

$$L_y = (-\tfrac{1}{4}mab)(0) + \tfrac{1}{3}ma^2(0) + 0(w) = 0$$

$$L_z = 0 + 0 + \tfrac{1}{3}m(a^2+b^2)w$$

إذاً $L = k[\frac{1}{3}m(a^2+b^2)w$ أي أن $\vec{w} \,//\, \vec{L}$.

<u>مثال(3)</u>: قضيب رفيع منتظم طوله ℓ وكتلته m مقيد الحركة ليدور بسرعة w حول محور مار بمركزه (المنتصف) ويصنع مع اتجاه طول القضيب زاوية α الشكل(9.4) . جد $\vec{L}$ ؟



شكل(9.4)

<u>الحل</u>: نعتبر عنصر طول مقداره (dz) وعلى بعد (z) من المنتصف حيث: $dm = \lambda\, dz$ مركبات $\vec{w}$:

$$w_x 0 \;;\; w_y = w\sin\gamma \;;\; w_z = w\cos\gamma$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (0 + z^2)\lambda\, dz = \lambda [\frac{z^3}{3}]_{-\ell/2}^{\ell/2}$$

$$= \lambda[\frac{2\ell^3}{24}] = \frac{m}{\ell} \cdot \frac{2\ell^2}{24} = \frac{1}{12} m\,\ell^2$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm = \lambda \int (0 + z^2)\, dz = \lambda [\frac{z^3}{3}]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{1}{12} m\,\ell^2$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + z^2)\, dm = \int (0 + 0)\, dm = 0$$

<u>ملحوظة</u>: لماذا لا يكون في هذه الحالة:

$$!! \quad I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int x\, y\, dm = 0$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int zx\;\, dm = 0 \qquad ; \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\int zx\;\, dm = 0$$

المعادلة المصفوفة للزخم الزاوي هي

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w\sin\gamma \\ w\cos\gamma \end{pmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$L_x = (\frac{1}{12} m\,\ell^2)(0) + (0)\,(w\sin\gamma) + (0)\,(w\cos\gamma) = 0$$

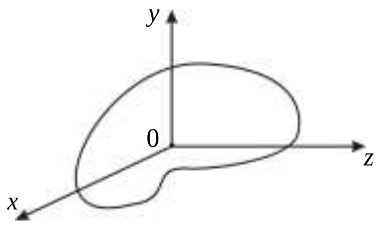
$$L_y = 0 + (\frac{1}{12} m\,\ell^2)\,(w\sin\gamma) + (0)\,(w\cos\gamma) = \frac{1}{12} m\,\ell^2\; w\sin\gamma$$

$$L_z = 0 + (0)\,(w\sin\gamma) + (0)\,(w\cos\gamma) = 0$$

9.2) المحاور الرئيسية للجسم الصلب

The Principal axis of a Rigid Body

تعريف: إذا كانت جميع ضروب عزوم القصور الذاتية حول محاور ما مارّه بالجسم تساوي صفراً فإن هذه المحاور تسمى بالمحاور الرئيسية.



رياضياً: $I_{xy} = 0 \; ; \; I_{zy} = 0 \; ; \; I_{zx} = 0$

المحاور x ، y ، z تسمى محاور رئيسية.

تصبح صورة ممتد عزم القصور الذاتي للجسم كالآتي:

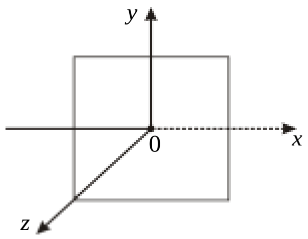
$$I = I_p = \begin{pmatrix} I_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ويرمز له بالرمز (I_p).

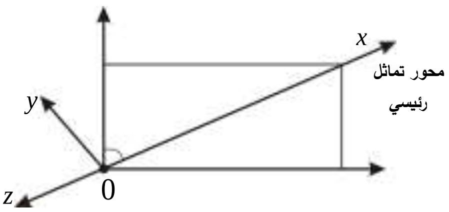
- **إيجاد موقع وإتجاه المحاور الرئيسية:**

(1) طريقة الملاحظة العامة للجسم الصلب: إذا كان الجسم الصلب متناظراً (متماثل) حول خط مار فيه فإن هذا الخط يمثل احد المحاور الرئيسية بينما يكون المحوران الآخران متعامدين عليه.

مثال: الصفيحة المربعة المستوية المنظمة (الشكل9.5): حيث خط المنتصف (خط تماثل) نعتبره محور رئيسي (محور x) وعليه يكون المحور الآخر الرئيسي هو محور (y) (محور رئيسي) والثالث هو محور (z) هو محور رئيسي أيضاً.



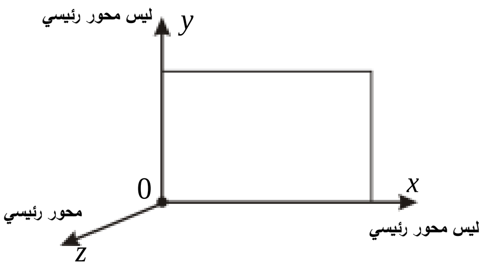
شكل(9.5)



شكل(9.6)

ملاحظة: كل المحـاور (z، y ، x) تعتبر خطوط تمـاثل.

وهي محاور رئيسية بينما لو اعتبرنا صفيحة مستطيلة الشـــكل(9.6)، وكـان أحدى أقطارها محور تماثل (محور رئيســــي) فإن المحاور الأخرى تكون متعامدة عليـه: القطر هو محور x (رئيســــي) ومحور y يكون متعامداً معه، وكذلك محور z وهي ليست رئيسية.



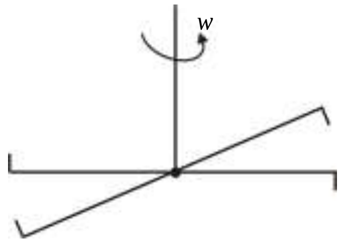
شكل(9.7)

في الشكل(9.7) لا تكون أياً من المحاور x ، أو y محاور رئيسية

لأنها ليست محاور تماثل.

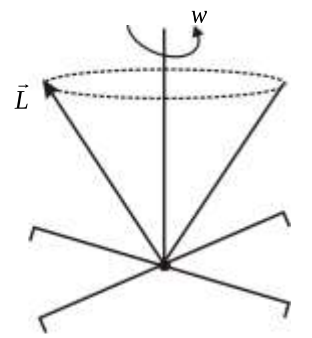
أما محور z يكون محوراً رئيسياً (لماذا).

قاعدة: إذا كان الجســم الصـــلب مقيد الحركة حول محور رئيســـي فيه (حركة دورانية) فإن إتجاه الزخم الزاوي يكون اتجاهه باتجاه المحور الرئيسي (محور الدوران) ومنطبقاً عليه أي $\vec{L} // \vec{w}$ ويبقي اتجاه



$\vec{L}$ ثابت أثناء الدوران وتصبح معادلة الحركة الدورانية: $\vec{N} = 0 = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ ويكون الجسم متزناً ديناميكياً.

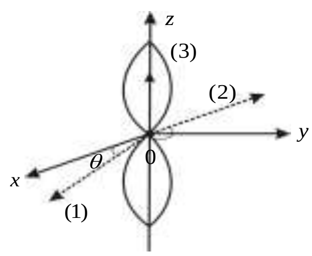
<u>مثال(1)</u>: المروحة المعلقة بالسـقف والتي تدور حول محور متماثل تبقي متزنة أثناء الدوران حيث $\vec{L} \,//\, w$ ولا يسـمع لها صـوت أثنـاء الحركـة ولكن بعد فترة زمنيـة يلاحظ رجّـه في الحركـة (ارتجـاج) بسـبب اختلاف أو انحراف محور الـدوران عن المحور التماثل أي $\vec{L} \not\parallel \vec{w}$ ويضـع $\vec{L}$ مع اتجاه محور الدوران زاوية ويغير اتجاهه أثناء الحركة على هيئة مخروط دائري قائم ولذلك تحدث الفرقعة للدوران.



شكل(9.8)

<u>مثال(2):</u> دوران عجلات السيارة (تحتاج الكفرات إلى موازنة (Balance) بعد فترة من الزمن لماذا؟

<u>حالة خاصـــة</u>: إيجاد اتجاه المحاور الرئيســة عندما يكون إحداها معلوم الاتجاه: في حالة تماثل الجســم الصـــلب حول خط معين فإن هذا الخط يمثل احد المحاور الرئيســية ولإيجاد المحورين الآخرين المتعامدين عليه يمكن اشتقاق علاقة رياضية كالآتي:



شكل(9−9)

على فرض أن شكل الجسم الصلب (كما في الشكل9.9) حيث محور

(z) محور تماثل (ويكون محور رئيسي).

وعليه $I_{xz}=0$ ، $I_{yz}=0$

ويكون المحوران الرئيسيان متعامدين على محور z أي في مستوى xy . نفرض أن المحاور الرئيسية لها رموز (1,2,3) تميزاً لها عن المحاور الاعتيادية $(x$ ، y ، $z)$ حيث هنا المحور (3) نطبق على محور (z) . بينما المحور(1) يصنع زاوية (θ) مع محور (x) والمحور (2) يصنع مع (1) زاوية 90°.

المطلوب: تحديد مقدار (θ) في الشكل(9-9)

لنفرض أن الجسم يدور حول محور (1) الرئيسي بسرعة زاوية (w) لذلك مركبات $(\vec{w})$ هي:

$w_x = w\cos\theta$; $w_y = w\sin\theta$; $w_z = 0$.

بما أن الجسم يدور حول المحور الرئيسي (1) فإنه حسب القاعدة السابقة $\vec{L} // \vec{w}$ العلاقة الاتجاهية $\vec{L}$ ، I ، $\vec{w}$ هي $\vec{L} = I_p\,\vec{w}$

حيث $I_p =$ عزم القصور الذاتي للجسم حول المحور الرئيسي (1) وعليه:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = I_p \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$L_x = I_p\, w_x ;\quad L_y = I_p\, w_y ;\quad L_z = 0 \qquad (1)$$

أما $\vec{L}$ للجسم حول المحاور الاعتيادية x, y, z (I ممتد عزم القصور الذاتي) يكون: $\vec{L} = I\,\vec{w}$ أو بلغة المصفوفات

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومن العلاقة نجد أن:

$$L_x = I_{xx}\, w_x + I_{xy}\, w_y + 0 \;\; ; \;\; L_y = I_{yx}\, w_x + I_{yy}\, w_y + 0 \; ; \; L_z = 0 \qquad (2)$$

حيث $\vec{L}$ هو نفسه في نظام المحاور الاعتيادية والرئيسية لذلك تتساوى مركباته في معادلتي (2،1) أي:

$$I_p\, w_x = I_{xx}\, w_x + I_{xy}\, w_y \;\; ; \;\; I_p\, w_y = I_{yx}\, w_x + I_{yy}\, w_y \qquad (3)$$

بقسمة معادلات (3) نحصل على:

$$\frac{w_y}{w_x} = \frac{I_{xy}\, w_x + I_{yy}\, w_y}{I_{xx}\, w_x + I_{xy}\, w_y}$$

بقسمة حدود البسط والمقام على w_x نجد:

$$\frac{w_y}{w_x} = \frac{I_{xy} + I_{yy}\,(w_y / w_x)}{I_{xx} + I_{xy}\,(w_y / w_x)}$$

حيث $\frac{w_y}{w_x} = \tan\theta$ (لاحظ الشكل 9-9)، فإن

$$\tan\theta = \frac{I_{yx} + I_{yy}\tan\theta}{I_{xx} + I_{xy}\tan\theta} \qquad (4)$$

بالضرب التبادلي في معادلة (4) وترتيب الحدود الناتجة نحصل على:

$$(I_{xx} - I_{xy})\tan\theta = I_{yx}(1 - \tan^2\theta)$$

أو

$$\frac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{I_{yx}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

من العلاقات المثلية لضعف الزاوية نجد أن

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

إذاً

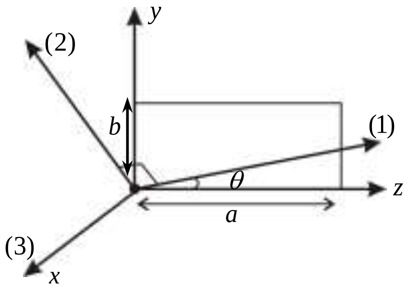
$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{I_{yx}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

وعليه فإن

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{yx}}{I_{xx} - I_{yy}} \qquad (5)$$

معادلة (5) تعطي الزاوية (θ) المحصـــورة بين المحور الرئيســـي (1) مع المحور x وبذلك نجد واتجاه المحور الرئيسي(1) ثم نرسم المحور الرئيسي (2) متعامداً عليه.

مثال(3): جد اتجاهات المحاور الرئيسية لصفيحة مستطيلة الشكل ومنتظمة حيث أبعادها $a\ ,b$ (كما في الشكل9.10)



شكل(9.10)

الحل: حيث أن

$$I_{xz} = 0 \ ; \quad I_{yz} = 0$$

لذلك يكون محور (z) محوراً رئيســـيـاً وعليـه نرمز لـه بـالرمز (3)،

نفرض أن

المحور الرئيســـي (1) يصـــنـع (θ) مع محور x وكذلك المحور الرئيســـي (2) θ مع محور y (الشكل9-10) نستخدم العلاقة (5) حيث

$$I_{xx} = \frac{1}{3} mb^2 \ ; \quad I_{yy} = \frac{1}{3} ma^2 \ ; \quad I_{xy} = -\frac{1}{4} mab$$

إذاً

$$\tan 2\theta = \frac{2(-\frac{1}{4} mab)}{\frac{1}{3} mb^2 - \frac{1}{3} ma^2} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}$$

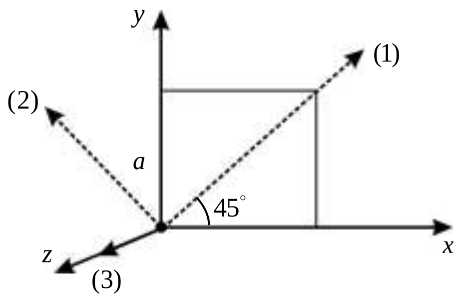
ومنها نجد أن $$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{3ab}{2(a^2-b^2)}\right]$$

إذا علمت مقادير a ، b نجد مقدار θ. [الجواب الصحيح تكون فيه $\theta < 90^\circ$ أي زاوية حادة] .

ملاحظة: في حالة الصفيحة المربعة الشكل المنتظمة: $a = b$ وبالتالي فإن

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\infty) = \frac{1}{2}[\pi/2] = \pi/4 \Rightarrow (45^\circ)$$

أي المحور الرئيسي (1) يصنع 45° مع محور (x) أي يقع باتجاه قطر المربع (كما مر وسبق شرحه) حيث قطر المربع هو محور تماثل للصفيحة.



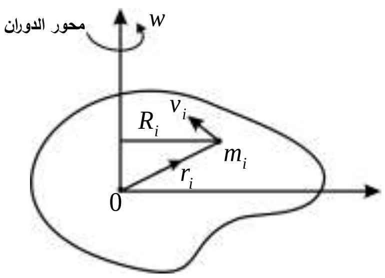
شكل(9.11)

9.3) الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب: Rotational Kinetic Energy

وجدنا سابقاً أن السرعة الخطية

$$\vec{v}_i = \vec{w}_i \times \vec{r}_i \qquad (1)$$

من تعريف الطاقة الحركية للجسم المكون من عدة جسيمات (m_i) نجد أن



شكل(9.12)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} \vec{v}_i \cdot (m_i \cdot \vec{v}_i) \quad (2)$$

(تبديل مكان m_i) وبالتعويض في معادلة (2) بدلالة (1) نجد أن:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} (\vec{w} \times \vec{r}_i) \cdot m_i \, \vec{v}_i \qquad (3)$$

نستخدم قاعدة الضرب الاتجاهي الثلاثي: $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

تصبح معادلة (3) على الصورة

$$T = \sum_i \frac{1}{2} \vec{w} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \quad = \sum_i \frac{1}{2} \vec{w} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \frac{1}{2} w \cdot \sum_i \vec{L}_i$$

$$= \frac{1}{2} \, \vec{w} \cdot \vec{L} \qquad (4)$$

كتابة معادلة (4) بدلالة المصفوفات: حيث $\vec{L}$ مصفوفة (3×1)، إذاً.

$$L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

حتى يتم ضـــرب المصـــفوفات في معادلة (4) يجب أن يكون w على هيئة مصـــفوف رتبها (1×3) لذلك تكون الصورة المصفوفة لمعادلة (4) هي

$$T = \frac{1}{2} (w_x \;\; w_y \;\; w_z) \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \qquad (5)$$

تســـمى المصـــفوفة $(w_x \;\; w_y \;\; w_z)$ معكوس المصـــفوفة $\vec{w} \Leftarrow \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ ويرمز لها بالرمز $\tilde{w}$ وعليه فإن الصـورة الرياضـية لمعادلة (4) صـورتها الرياضـية $T = \frac{1}{2} \tilde{w} \cdot \vec{L}$ وضـرب المصـفوفات في معادلة (5) يعطي:

$$T = \frac{1}{2} (w_x L_x + w_y L_y + w_z L_z) \qquad (6)$$

كما أنه يمكن كتابة معادلة (4) بدلالة ممتد عزم القصور الذاتي للجسم (I) كالآتي:

$$T = \frac{1}{2}\tilde{w}\cdot I\,\vec{w} \qquad (7)$$

أو بصورة المصفوفات

$$T = \frac{1}{2}(w_x \;\; w_y \;\; w_z)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

ملاحظة: جواب ضــرب المصــفوفات في معادلة (8) يعطى مصــفوفة (1×1) أو مصــفوفة مكونة من عنصر واحد حيث الطاقة الحركية كمية عددية!!

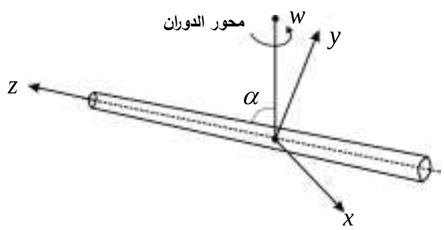
حالة خاصة: إذا كانت المحاور $x\,y\,z$ هي نفس اتجاه المحاور الرئيسية (3 2 1) فإن $I = I_p$ وتصبح معادلة (8)

$$T = \frac{1}{2}(w_x \;\; w_y \;\; w_z)\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$T = \frac{1}{2}[w_x^2 I_1 + \frac{1}{2}w_y^2 I_2 + w_z^2 I_3$$

مثال: جد الطاقة الحركية الدورانية لقضـيب منتظم طوله (ℓ) يدور حول محور مار في منتصـفه بسـرعة $\vec{w}$ حيث يصنع محور الدوران زاوية (γ) مع اتجاه طوله. (المثال السابق في بند 9.2) .



شكل(9.13)

الحل: وجدنا في المثال أن ممتد عزم القصور الذاتي للقضيب هو:

$$I=\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \vec{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ w\sin\gamma \\ w\cos\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L}=I\,\vec{w}$$

بالضرب للمصفوفات نجد أن

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12}m\ell^2 w\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

إذاً

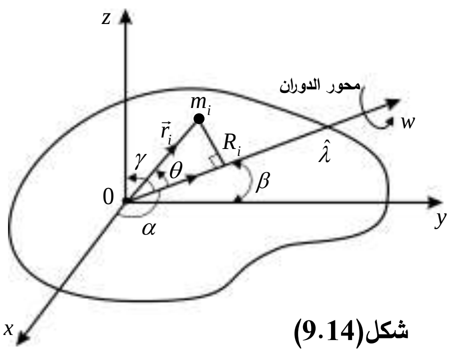
$$T=\frac{1}{2}\tilde{w}\cdot L=\frac{1}{2}(0 \quad w\sin\gamma \quad w\cos\gamma)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12}m\ell^2 w\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[0+(w\sin\gamma)(\frac{1}{12}m\ell^2 w\sin\gamma)+0]=\frac{1}{24}m\ell^2 w^2 \sin^2\gamma$$

(9.4) عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور عشوائي (اعتباطي)

Moment of Inertia for a Rigid Body about an Arbitrary Axis

نفرض أن الجسم يدور حول المحور العشوائي الذي يقع في اتجاه متجه وحده $(\hat{\lambda})$ (unit Vector) والذي يصنع زاوية (α) مع محور x وزاوية (β) مع محور y، ويصنع زاوية (γ) مع محور z (انظر الشكل9.14).



شكل(9.14)

لذلك يمكن كتابة هذا المتجه $(\hat{\lambda})$ على الصورة:

$$\hat{\lambda} = \hat{i}\,(\cos\alpha) + \hat{j}\,(\cos\beta) + \hat{k}\,(\cos\gamma) \tag{1}$$

بما أن $\hat{\lambda}\cdot\hat{\lambda} = 1$ فإن معادلة (1) تعطي

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \tag{2}$$

تسمى الكميات (مركبات $\hat{\lambda}$) جيوب التمام الاتجاهية (Direction Cosines).

المطلوب إيجاد عزم القصور الذاتي للجسم حول هذا المحور؟

نفرض أن الجسيم m_i يبعد مسافة عمودية R_i عن محور الدوران وأن

$\theta =$ الزاوية المحصورة بين $\vec{r}_i$ ومحور الدوران $(\hat{\lambda})$

من الشكل(9.14) ، نجد أن $R_i = r_i \sin\theta$ أو بدلالة المتجهات $\vec{r}_i$ ، $\hat{\lambda}$ يمكن أن نعبر عن هذا المقدار كالتالي:

$$R_i = \left|\vec{r}_i \times \hat{\lambda}\right| \Rightarrow R_i^2 = \left|\vec{r}_i \times \hat{\lambda}\right|^2$$

باستخدام الضرب الاتجاهي لمركبات المتجهتين نحصل على:

$$\vec{r}_i \times \hat{\lambda} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \cos\gamma & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \hat{i}\,[y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta] \\ &\quad - \hat{j}\,[x_i\cos\gamma - z_i\cos\alpha] \\ &\quad + \hat{k}\,[x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha] \end{aligned} \tag{3}$$

إذاً

$$R_i^2 = \left|\vec{r}_i \times \hat{\lambda}\right|^2 = (y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta)^2 + (z_i\cos\alpha - x_i\cos\gamma)^2$$
$$+ (x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha)^2 \tag{4}$$

نرتب حدود المعادلة (4) بعد فك الأقواس على النحو التالي:

$$R_i^2 = (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma$$
$$-2y_i\,z_i\cos\gamma\cos\beta - 2z_i\,x_i\cos\gamma\cos\alpha - 2x_i\,y_i\cos\alpha\,\cos\beta \tag{5}$$

باستخدام تعريفات عزوم القصور الذاتية للجسم حول محور الدوران

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \qquad (6)$$

بالتعويض من معادلة (5) في معادلة (6) نجد أن:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta \\
&\quad + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma - 2\sum_i m_i\, z_i\, x_i\, \cos\gamma \\
&\quad - 2\sum_i m_i\, z_i\, x_i\, \cos\gamma\,\cos\alpha - 2\sum_i m_i\, x_i\, y_i\, \cos\alpha\,\cos\beta \\
&= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \\
&\quad + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \qquad (7)
\end{aligned}$$

<u>ملاحظات حول معادلة(7)</u>

(1) ترافق جيب تمام الزاوية مع محورها $\cos^2\alpha \leftrightarrow I_{xx}$ وهكذا

(2) يجب أن يمر محور الدوران بنقطة أصل المحاور $x\,y\,z$ حتى نستخدم هذه المعادلة.

<u>حالة خاصة</u>: إذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم فإن معادلة(7) تؤول إلى:

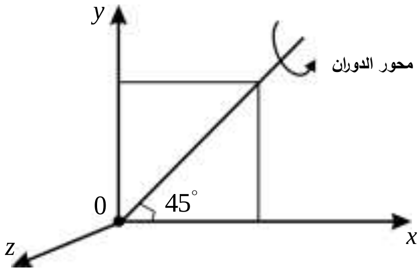
$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \qquad (8)$$

<u>مثال</u>: جد عزم القصور الذاتي لصفيحة مربعة الشكل ومنتظمة وطول ضلعها a حول محور باتجاه أحد قطريها (الشكل9-15)

(أ) إذا كانت نقطة أصل المحاور عند أحدى زواياها.

(ب) إذا كانت نقطة الأصل عند مركزها الهندسي.

الحل (أ): وجدنا إن $I_{xx} = \frac{1}{3}ma^2 = I_{yy}$



شكل(9.15)

$$I_{zz}=\frac{1}{3}ma^2+\frac{1}{3}ma^2=\frac{2}{3}ma^2$$

$$I_{xz}=0=I_{zy}\quad ;\qquad I_{xy}=-\frac{1}{4}ma^2$$

أما جيوب التمام الاتجاهية للمحور الدوراني هي

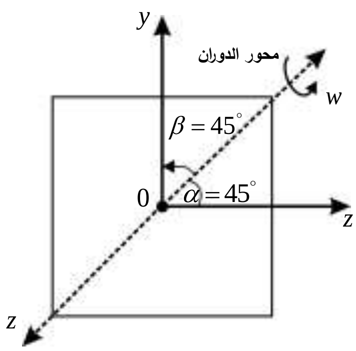
$$\alpha=45^\circ:\cos\alpha=1/\sqrt{2}\ ;\quad \beta=45^\circ\Rightarrow\cos\beta=1/\sqrt{2}$$

$$\gamma=90^\circ\ ;\ \cos\gamma=0$$

نستخدم معدلة (7) لنحصل على:

$$I=\frac{1}{3}ma^2(\frac{1}{2})+I\,(\frac{1}{3}ma^2)(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}ma^2(0)+2(-\frac{1}{4}ma^2)(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})+0+0$$

$$=\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{6}ma^2+(-\frac{1}{4}ma^2)=\frac{1}{12}ma^2$$



شكل(9−16)

(ب) إذا كانت المحاور عند المنتصف

(الشكل9.16) هنا المحاور $x\,y\,z$ محاور رئيسية وعليه نستخدم معادلة(8) مع ملاحظة أن

$$I_{yy}=\frac{1}{12}ma^2=I_{yy}\quad ;\quad I_{zz}=\frac{1}{6}ma^2$$

$$I=(\frac{1}{12}ma^2)\,(\frac{1}{2})+(\frac{1}{12}ma^2)(\frac{1}{2})$$

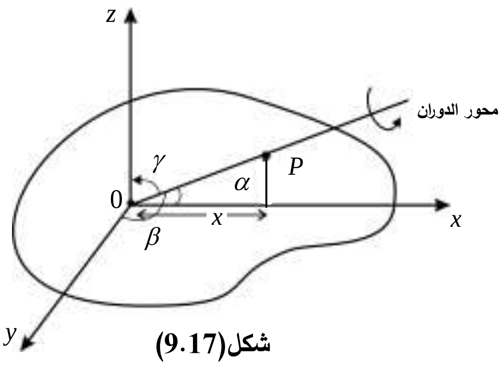
$$+\frac{1}{6}ma^2(0)+0+0+0=\frac{1}{12}ma^2$$

9−5) المجسم الناقص لعزوم القصور الذاتية: **Momental Ellipsoid**

لإيضاح المعني الهندسي لمعادلة رقم (7) الواردة في البند السابق: نفرض أن جسماً صلباً يدور حول محور ما (أعتباطي)، وأن النقطة (p) تقع على هذا المحور بحيث يكون بعدها عن نقطة الأصل $\overline{0\,p}=\frac{1}{\sqrt{I}}$ حيث I = عزم القصور الذاتي للجسم حول المحور المذكور. (كما في الشكل9.17)

نرفض أن إحداثيات تلك النقطة (x,y,z) ، لذا $\cos\alpha = \dfrac{x}{0p} = x\sqrt{I}$

$$\cos\beta = y\sqrt{I} \;\; ; \;\; \cos\gamma = z\sqrt{I} \qquad (1)$$



شكل(9.17)

بالتعويض في معادلة (7) نجد أن:

$$I = I_{xx}(I\,x^2) + I_{yy}\,(I\,y^2) + I_{zz}\,(I\,z^2)$$
$$+ 2\,I_{xy}\,(x\sqrt{I})(y\sqrt{I}) + 2\,I_{yz}(y\sqrt{I})(z\sqrt{I}) + 2\,I_{xz}(z\sqrt{I})(x\sqrt{I})$$

بالإختصار نحصل على:

$$(2)1 = (I_{xx})x^2 + (I_{yy})\,y^2 + (I_{zz})z^2 + 2\,I_{xy}\,(xy) + 2(I_{yz})\,yz + 2\,I_{xz}(xz)$$

المعنى الهندسي لمعادلة (2):

هي معادلة مجسم ثلاثي الأبعاد وهذا المجسم يتولد في الفراغ بفعل دوران النقطة (p) حول المحور. أي هذه المعادلة تمثل المحل الهندسي لدوران (p) في الفراغ وتسمى معادلة الجسم الناقص (البيضاوي) أو معادلة الجسم الناقص للعزوم (Momental Ellipsoid).

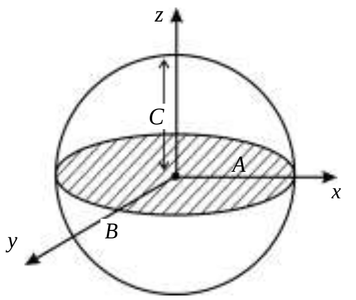
حالة خاصة: إذا كانت المحاور $x\,y\,z$ هي محاور رئيسية فإن معادلة (2) تؤول إلى:

$$1 = (I_{xx})x^2 + (I_{yy})y^2 + (I_{zz})z^2 \qquad (3)$$

ويمكن كتابتها رياضياً على صورة:

$$1=\frac{x^2}{(1/I_{xx})}+\frac{y^2}{(1/I_{yy})}+\frac{z^2}{(1/I_{zz})} \qquad (4)$$

مقارنة (4) مع المعادلة المعيارية لمجسم القطع الناقص والتي على صورة:



شكل(9−18)

$$1=\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}$$

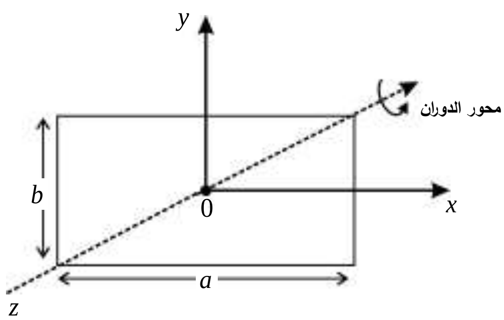
نجد أن

$$A^2=\frac{1}{I_{xx}}\ ;\ B^2=\frac{1}{I_{yy}}\ ;\ C^2=\frac{z^2}{I_{zz}}$$

تسمى A، B،C أنصاف أقطار الجسم الناقص الرئيسية.

<u>مثال</u>: جد أنصاف أقطار الجسم الناقص الرئيسية عند دوران صفيحة حول أحد أقطارها إذا كانت الصفيحة مستطيلة الشكل ومنتظمة وإبعادها a ، b . عندما تكون نقطة أصل المحاور في المركز للصفيحة.

<u>الحل</u>:



شكل (9.19)

بما أن نقطة الأصل عند المركز فإن المحاور $x\ y\ z$ محاور رئيسية وعليه فإن

$$I_{xx} = \frac{1}{12} ma^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m(b^2 + a^2)$$

$$A^2 = \frac{1}{I_{xx}} = \frac{12}{mb^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{12}{mb^2}}$$

$$B^2 = \frac{1}{I_{yy}} = \frac{12}{mb^2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{12}{mb^2}}$$

$$C^2 = \frac{1}{I_{zz}} = \frac{12}{m(a^2 + b^2)} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{12}{m(a^2 + b^2)}}$$

<u>حالة خاصة</u>: إذا كانت العزوم حول المحاور الرئيسية متساوية بمعنى $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$ فإن معادلة الجسم الناقص للعزوم هي:

$$Ix^2 + Iy^2 + Iz^2 = 1$$

$$or \quad x^2 + y^2 + z^2 = (1/I) = \text{ثابت} = R^2$$

هذه معادلة كرة نصف قطرها $\sqrt{1/I}$ حيث تتحرك النقطة (P) على سطح مجسم كروي أثناء دوران الجسم حول المحور.

9.6) أستخدم المصفوفات لإيجاد اتجاهات المحاور الرئيسية لجسم صلب

في حالة عم وجود محور تماثل للجسم الصلب تستخدم المصفوفات لإيجاد اتجاهات المحاور الرئيسية وهذه الطريقة الرياضية (الطريقة العامة) يمكن استخدامها في حالة وجود محور تماثل للجسم أيضاً أي بدلاً من استخدم العلاقة الرياضية $\tan 2\theta = \dfrac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$

وتتخلص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

(1) تحـــول مصـــفوفة العـــزوم للقصـــور الذاتيـــة (I) إلـــي مصـــفوفة قطريـــة (مصـــفوفة متنـــــــاظرة) وتســــــمي العمليـــــــة الرياضـــــــية بتقطيـــــــر المصـــــــفوفة (Diagonalization of Matrix) ، أو

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

ويتم ذلك رياضياً باستخدام مصفوفة الوحدة I (Unitary Matrix) وضربها في عدد (λ) : حتى نحافظ على التحويل أي:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

بضرب عدد في مصفوفة نحصل على مصفوفة

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

ترتيب المعادلة (2) على الصورة الصفرية كالآتي:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

تسـمى معادلة (3) بالمعادلة المحددة (Secular Eq.) ويكون محدد هذه المعادلة صـفراً ويسـتخدم لإيجاد λ كالآتي:

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-\lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

نفك المحدد للمعادلة (4) لنحصل على:

$$(I_{xx}-\lambda)[(I_{yy}-\lambda)(I_{zz}-\lambda)-I_{yz}\ I_{zy}]-I_{xy}[(I_{yx})(I_{zz}-\lambda)-I_{yz}\ I_{zx}]$$

$$+I_{xz}[(I_{yx}I_{zy}-I_{zx}(I_{yy}-\lambda)]=0 \qquad (5)$$

المعادلة (5) معادلة من الدرجة التكعيبية في المتغير (λ) ولذلك حلها يعطي ثلاثة جذور وهي قيم المتغير (λ). لنفرض أن هذه الحلول هي: $\{\lambda_1\ ,\ \lambda_2\ ,\lambda_3\}$

حيث $\lambda_1 =$ عزم المقصور الذاتي حول المحور الرئيسي (1) وهكذا ...

أما الخطوة الثانية هي تحديد اتجاهات المحاور الرئيسة "جيوب التمام الاتجاهية"

$[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma]$

عند دوران الجسم بسرعة زاوية (w) حول أحد المحاور الرئيسية (محور 1) فإن:

$$\vec{L}=\lambda_1\,\vec{w} \qquad (6)$$

بينما يكون الزخم الزاوي للجسم في المحاور الاعتيادية $\vec{L}=I\,\vec{w}$ بمساواة المعادلتين معاً نحصل على:

$$I\,\vec{w}=\lambda_1\,\vec{w} \qquad (7)$$

معادلة (7) لدلالة المصفوفات هي:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w\cos\alpha \\ w\cos\beta \\ w\cos\gamma \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} w\cos\alpha \\ w\cos\beta \\ w\cos\gamma \end{pmatrix} \qquad (8)$$

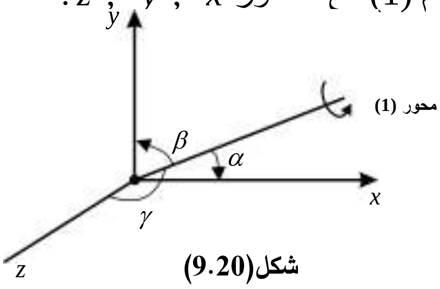
عند ضرب المصفوفات نحصل على علي ما يلي:

$$(I_{xx}\,w\cos\alpha+I_{xy}\,w\cos\beta+I_{xz}\,w\cos\gamma=\lambda_1\,w\cos\alpha$$

أو عند إختصار (w) ونقل الحدود نحصل:

$$(I_{xx}-\lambda_1)\cos\alpha+I_{xy}+\cos\beta+I_{xz}w\cos\gamma=0$$
$$(I_{yx}\cos\alpha+(I_{yy}-\lambda_1)\cos\beta+I_{yz}\cos\gamma=0 \qquad (9)$$
$$I_{zx}\cos\alpha+I_{zy}\cos\beta+(I_{zz}-\lambda_1)\cos\gamma=0$$

نحل معادلات (9) بالنسبة $\cos\gamma$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\alpha$ مع الاستعانة بالمعادلة العامة $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ وهكذا يتم تحديد زوايا المحور رقم (1) مع المحور x , y , z.

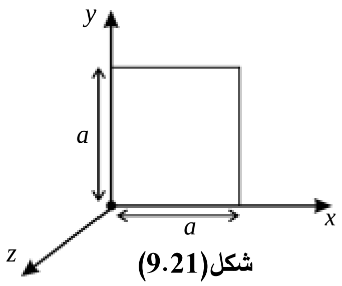


شكل(9.20)

ونكرر نفس الخطوات السابقة باعتبار المحور رقم(2) واستخدام λ_2 بدلاً من λ_1 في معادلات (9) لإيجاد اتجاه هذا المحور، وكذلك بالنسبة للمحور(3) لإيجاد زواياه مع x , y , z. وسنورد المثال الثاني لتوضيح الطريقة:

مثال: حد اتجاهات المحاور الرئيسية لصفيحة مربعة الشكل منتظمة طول ضلعها a وكتلتها m حيث نقطة أصل المحاور $x\,y\,z$ عند أحد زواياها.

الحل: نجد ممتد عزوم القصور الذاتية



شكل(9.21)

$$I_{xx}=\frac{1}{3}ma^2 \;;\; I_{yy}=\frac{1}{3}ma^2$$
$$I_{zz}=\frac{2}{3}ma^2 \;;\; I_{xy}=-\frac{1}{4}ma^2$$
$$I_{zx}=0 \;;\; I_{yz}=0$$

نكتب محدد المعادلة المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}ma^2-\lambda & -\frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{3}ma^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

أو

$$(\frac{1}{3}ma^2-\lambda)[(\frac{1}{3}ma^2-\lambda)(\frac{2}{3}ma^2-\lambda)-0]$$

$$+\frac{1}{4}ma^2[(-\frac{1}{4}ma^2)(\frac{2}{3}ma^2-\lambda)-0]+0=0$$

بإخراج عامل مشترك من الحدود وذلك لتسهيل حل المعادلة التكعيبية:

$$(\frac{2}{3}ma^2-\lambda)[(\frac{1}{3}ma^2-\lambda)^2-[(\frac{1}{4}ma^2-)^2]=0$$

تحليل فرق بين مربعين يعطي

$$(\frac{2}{3}ma^2-\lambda)(\frac{1}{12}ma^2-\lambda)(\frac{7}{12}ma^2-\lambda)=0 \qquad (1)$$

إذاً جذور المعادلة (1) هي: $\left\{\frac{2}{3}ma^2;\ \frac{1}{12}ma^2\ ;\ \frac{7}{12}ma^2\right\}$

كيف نختار λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ؟نلاحظ أن أحد الجذور يساوي مجموع الجذرين الآخرين

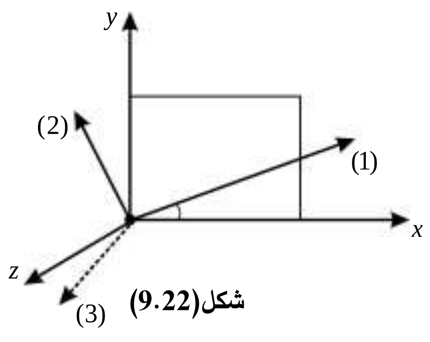
$$\begin{array}{ccccccc}\frac{2}{3}ma^2 & = & \frac{1}{12}ma^2 & + & \frac{7}{12}ma^2 & = \frac{8}{12}ma^2 = & \frac{2}{3}ma^2\\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \lambda_3 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \end{array}$$

لماذا ؟ لأن محور $z\ \perp$ على مستوى الصفيحة (xy) [نظرية المحاور المتعامدة]

وعليه فإن $\lambda_1=\frac{1}{12}ma^2;\ \lambda_2=\frac{7}{12}ma^2;\ \lambda_3=\frac{2}{3}ma^2$

إذاً

$$I_p=\begin{pmatrix}\frac{1}{12}ma^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{7}{12}ma^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2\end{pmatrix}$$



شكل(9.22)

أما لتحديد جيوب التمام الاتجاهية لكل محور رئيسي:

أولاً: نعوض مقدار λ_1 في معادلة (9) لنحصل علي:

$$(\frac{1}{3}ma^2-\frac{1}{12}ma^2)\cos\alpha+(-\frac{1}{4}ma^2)\cos\beta+\cos\gamma=0$$

$$(\frac{1}{4}ma^2)\cos\alpha-(\frac{1}{4}ma^2)+\cos\beta=0\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta \qquad (1)$$

حيث $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. إذاً

$$2\cos^2\alpha+\cos^2\gamma=1 \qquad (2)$$

من معادلة (9) نجد أن

$$(0)\cos\alpha+(0)\cos\beta+[\frac{1}{3}ma^2-\frac{1}{12}ma^2]\cos\gamma=0$$

$$(\frac{7}{12}ma^2)\cos\gamma=0 \;\Rightarrow\; \cos\gamma=0 \quad \boxed{\Rightarrow \gamma=\pi/2}$$

من معادلة (2)، نجد أن $2\cos^2\alpha=1$ ، ومنها نجد أن

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha=45^\circ\ ,135^\circ$$

إذاً محور (1) يصنع 45° مع محو x ويصنع $45^\circ=90-45^\circ$ مع محور y.

هذه اتجاهات المحور الرئيسي رقم (1) $\quad \alpha=45^\circ\ ;\ \beta=45^\circ;\ \ \gamma=45^\circ$

أما المحور الرئيسي رقم (2) فإنه يصنع مع محور x زاوية $\alpha=135^\circ$

ويصنع مع محور y زاوية $\beta=45^\circ$

ويصنع مع محور z زاوية $\gamma=90^\circ$

أما عند التعويض بـ$\lambda_3=\frac{2}{3}ma^2$ في معادلات (9) نحصل على المعادلات التالية:

$$(\frac{1}{3}ma^2 - \frac{2}{3}ma^2)\cos\alpha - (\frac{1}{4}ma^2)\cos\beta + (0)(\cos\ \gamma) = 0$$

$$-\frac{1}{3}ma^2\cos\ \alpha - \frac{1}{4}ma^2\cos\beta = 0$$

$$-4ma^2\cos\alpha = 3\cos\ \beta \qquad (3)$$

وكذلك المعادلة التالية نحصل على:

$$-\frac{1}{4}ma^2\cos\alpha + (\frac{1}{3}ma^2 - \frac{2}{3}ma^2)\cos\ \beta + (0)\cos\ \gamma = 0$$

$$-3\cos\ \gamma = 4\cos\beta \qquad (4)$$

من (3) ، (4) نجد أن:

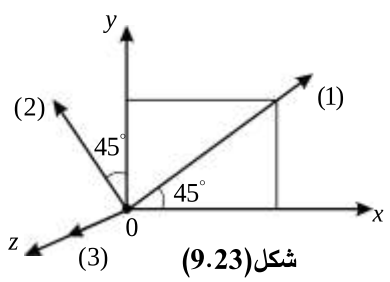
$$\cos\ \alpha = \frac{-3}{4}\cos\beta = \frac{-4}{3}\cos\beta$$

نلاحظ وجود جوابين للزاوية (α) التي يصنعها محور (3) وهذا غير ممكن إلا إذا كانت $\beta = \frac{\pi}{2}$ إذاً $\alpha = \pi/2$. من المعادلة الأساسية نجد

$$\cos^2\ \alpha + \cos^2\ \beta + \cos^2\ \gamma = 1 \Rightarrow 0 + 0 + \cos^2\ \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

أي أن المحور الرئيسي الثالث ينطبق على محور (z) الشكل (9.23)يوضح اتجاهات المحاور الرئيسية.



شكل(9.23)

(9.7) معادلات أويلر لحركة الجسم الصلب

Euler's' sudations for rigid body motion.

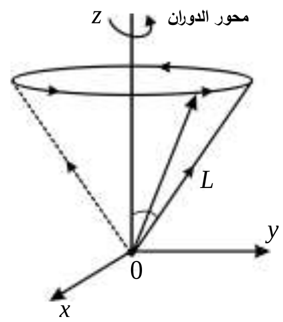
وجدنا في الفصول السابقة أن المعادلة للحركة الدورانية للجسم الصلب هي:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_0 \qquad (1)$$

حيث عند اعتبار المحاور الأساسية في الجسم يكون مقدار الزخم الزاوي كالآتي:

$$\vec{L} = (I_{xx} w_x)\hat{i} + (I_{yy} wy)\hat{j} + (I_{zz} w_z)\hat{k}$$

ويكون $|\vec{L}|$ = ثابت الزمن ولكن كما مرّ معنا في الفصـــل الخامس أنه عند دوران متجه حول محور فإنه يرســـم في الفراغ مخروط (كما في الشـــكل9.24) حيث $|\vec{L}|$ ثابت ويكن يتغير اتجاه $\vec{L}$ مع الزمن وحســـب القاعدة:



شكل(9.24)

$$(\frac{d\vec{L}}{dt}) = (\frac{d\vec{L}}{dt}) + \vec{w} \times \vec{L} \qquad (2)$$

ثابت متحرك

وعليه تصبح معادلة (1) على الصورة

$$\Leftrightarrow \vec{N}_0 = (\dot{\vec{L}}) + \vec{w} \times \vec{L}$$

$$\vec{N}_0 = (\frac{d\vec{L}}{dt}) + \vec{w} \times \vec{L}$$

(3)

حيث $\vec{N}_0$ =محصلة العزوم الدورانية المؤثرة على الجسم أثناء الدوران.

وهذه المعادلة تكتب على هيئة مصفوفات على الصورة:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \\ \dot{L}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{w} \times \vec{L})_x \\ (\vec{w} \times \vec{L})_y \\ (\vec{w} \times \vec{L})_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

أو عند أخذ مركبات الضرب الاتجاهي $\vec{w} \times \vec{L}$ نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \dot{L}_x + (w_y L_z - w_z L_y) = \dot{L}_x + w_z\, w_y\, (I_{zz} - I_{yy}) \\ N_y &= \dot{L}_y + (w_z L_x - w_x L_z) = \dot{L}_y + w_x\, w_z\, (I_{xx} - I_{zz}) \\ N_z &= \dot{L}_z + (w_x L_y - w_y L_x) = \dot{L}_z + w_x\, w_y\, (I_{yy} - I_{xx}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

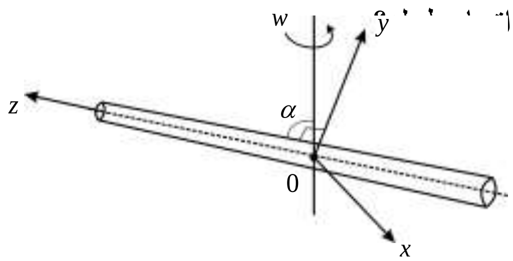
تسمى المعادلات (5) بمعادلات أويلر للحركة الدورانية للجسم الصلب، وهي صالحة عندما تكون المحاور $(z,\ x,\ y)$ محاور أساسية، وتكون عزوم القصور الذاتي العزوم الرئيسية.

<u>حالة خاصة</u>: إذا كانت السرعة الزاوية $w =$ ثابت فإن $\dot{w}_x = 0 = \dot{w}_y = \dot{w}_z$

وعليه فإن $\dot{L}_x + I_{xx}\dot{w}_x = 0$ ، وكذلك $\dot{L}_y =$ صفر، $\dot{L}_z =$ صفر وتصبح معادلة (5) على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= w_y\, w_z\, (I_{zz} - I_{yy}) \\ N_y &= w_z w_x\, (I_{xx} - I_{zz}) \\ N_z &= w_x w_y\, (I_{yy} - I_{xx}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

<u>مثال</u>: جد مقدار واتجاه العزم الدوراني اللازم لجعل قضيب رفيع منتظم طول (ℓ) ويدور بسرعة زاوية ثابتة $\vec{w}$ طول محور يمر بمركزه ويصنع زاوية α مع ا



شكل(9.25)

<u>الحل</u>: مركبات $\vec{w}$ هي

$$w_x = 0$$
$$w_y = w\sin\alpha$$
$$w_z = w\cos\alpha$$

$$I_{xx}=\frac{1}{12}m\ell^2\ ;\ I_{yy}=\frac{1}{12}m\ell^2\ ;\ I_{zz}=0\ ;\ L_x=I_{xx}w_x=0$$

$$L_y=I_{yy}w_y=\frac{1}{12}m\ell^2\,w\sin\alpha;\ L_z=I_{zz}w_z=0$$

معادلة (6) تصبح على الصورة:

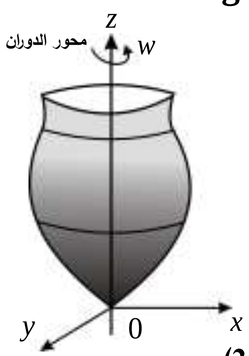
$$N_x=0+(w^2\sin\alpha\cos\alpha)(-\frac{1}{12}m\ell^2)=-\frac{1}{12}m\ell^2w^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$N_y=0\ ;\quad N_z=0$$

إذاً
$$\vec{N}_0=\hat{i}\,(-\frac{1}{12}m\ell^2w^2\sin\alpha\ \cos\alpha)$$

9.8) دراسة حركة دوران جسم صلب بشكل حر حول محور تناظر

Free Rotation of a rigid body anent a Symmetrical axis



شكل(9-26)

المقصود بالدوران الحر للجسم الصلب هو الدواران بدون أي مؤثر خارجي عليه (قوة أو عزم درواني خارجي) أي أن $\vec{N}=0$ حول محور الدوران.

لنفرض أن محور التناظر للجسم هو محور z ونفرض أن $I_{zz}=I_s$ بينما $I=I_{yy}I_{xx}$ (بالفرض) وعليه تصبح معادلة (5):

$$N_x=0=I\,\dot{w}_x+w_yw_z\,(I_s-I)$$
$$N_y=0=I\,\dot{w}_y+w_zw_x\,(I-I_s)$$
$$N_z=0=I_s\,\dot{w}_x+w_xw_y\,(I-I)$$

من المعادلة الثالثة في (1) نجد أن $0=I_s\,\dot{w}_z$

بما أن $I_s\neq$صفر، $\dot{w}_z=$صفر $\Leftarrow$ ثابت $=w_z$

عند ترتيب المعادلتين الأوليتين في معادلة (1) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}_x + w_y w_z \left(\frac{I_s - I}{I}\right) = 0 \\ \dot{w}_y + w_z w_x \left(\frac{I - I_s}{I}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

نفرض الكمية $\Omega = w_z \left(\frac{I_s - I}{I}\right)$، تصبح معاداة (2) على الصور:

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}_x + \Omega w_y = 0 \\ \dot{w}_y - \Omega w_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

لحل معادلة (3) نأخذ المشتقة الزمنية للمعادلة الأولى في (3) فنحصل علي

$$\ddot{w}_x + \Omega \dot{w}_y = 0 \qquad (4)$$

ثم نعوض من المعادلة الثانية لنحصل على: $\ddot{w}_x + \Omega[+\Omega w_x] = 0$

$$\ddot{w}_x + \Omega^2 w_x = 0$$

هذه صورة المعادلة التوافقية البسيطة للمتغير $\boxed{\ddot{w}_x = -\Omega^2 w_x}$

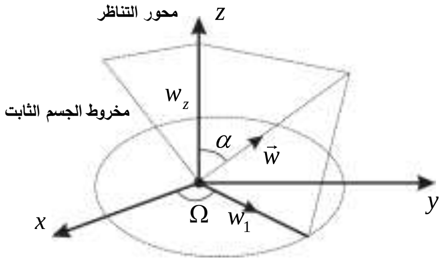
(w_x) وعليه يكون الحل للمعادلة هو $w_x = (\text{ثابت}) \cos(\Omega t)$

$$w_x = w_1 \cos(\Omega t) \qquad (5)$$

حيث $w_1 =$ثابت، لإيجاد معادلة حركة توافقية بسيطة في w_y تفاضل المعادلة الثانية في (2) بالنسبة للزمن ثم نعوض بدل $\dot{w}_x$ ويكون حلّها:

$$w_y = w_1 \sin(\Omega t) \qquad (7)$$

نلاحظ أن w_x ، $w_y \Leftarrow$ يتغيران توافقياً مع الزمن بتردد زاوي (Ω) وتختلف في الطور بمقدار $\pi/2$، لذلك يرسم مسقط $\vec{w}$ على المستوى xy دائرة نصف قطرها $w_1 \Leftarrow w_x^2 + w_y^2 = w_1^2$.



شكل(9.27)

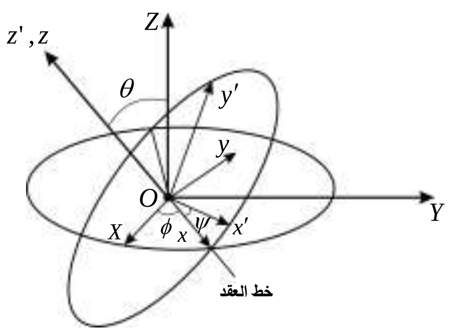
<u>النتيجة:</u> في الدوران الحر لجسم صلب له محور تناظر يرسم متجه السـرعة الزاوية $\vec{w}$ حركة مخروطية (طواف) حول محور التناظر ويكون التردد الزاوي لهذا الطواف هو الثابت (Ω). لنفرض $\alpha =$ الزاوية بين محور z ومحور الدوران $(\vec{w})$ لذلك $w_2 = w\cos\alpha$ ، وعليه فإن

$$\Omega = (\frac{I_s}{I} - I)w\cos\alpha \quad w_2 = w\cos\alpha$$

Ω هي المعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر.

- **وصف دوران جسم صلب بالنسبة لمحاور ثابتة – زوايا أويلر:**

سابقاً درسنا حركة الجسم الصلب (حركة الطواف) بالنسبة لمحاور مثبتة في الجسم وتدور معه، ولوصف حركة الجسم بالنسبة لمشاهد خارج الجسم يجب أن نستعمل محاور ثابتة في الشكل(9.28):



شكل(9.28)

المحاور $O\ X\ Y\ Z$ في الفضاء ذات توجيه ثابت.

تعرف المحاور $o\ x'\ y'\ z'$ مثبتة في الجسم (محاور رئيسية) وتدور معه، كما نعرف محاور ثالثة $o\ x\ y\ z$ كما يلي:

ينطبق محور z على محور z' (محور تناظر الجسم) والمحور x هو خط تقاطع المستوى XY مع المستوى $x'y'$ وزاوية $\phi \Leftarrow$ الزاوية بين محور X ، x

والزاوية بين Z ، z هي θ

ويحدد دوران الجسم حول محور التناظر من الزاوية ψ المحصورة بين محوري x ، x'

وعليه تكون الزوايا $(\Psi، \theta، \phi)$ هي زوايا أويلر إذا كانت العزوم المؤثرة على الجسم صفراً ، يكون متجه الزاوية $\vec{L}$ ثابت في المقدار والاتجاه بالنسبة للمحاور الثابتة $OXYZ$ صفراً ، (في الشكل9.29) $\vec{L}$ يقع في اتجاه محور Z ويعرف هذا الخط غير المتقلب (invariable) وتكون مركبات $\vec{L}$ في المحاور $o\ x\ y\ z$ كما:

$$L_z = L\cos\theta \quad (1) \qquad L_y = L\sin\theta \ ; \quad L_x = 0 \ ;$$

في حالة الجسم الذي محور تناظره (محور z) بحيث يكون المجسم الناقص للعزم الدوراني، ووفقاً لذلك تكون المحاور $o\ x\ y\ z$ محاور رئيسية كالمحاور $o x' y' z'$.

من معادلة (1) نجد أن $w_x = 0$ ، إذاً تقع $\vec{w}$ في المستوى yz ، لنفرض α تمثل الزاوي بين المحور z والسرعة الزاوية $\vec{w}$ وتكون مركبات $\vec{w}$ على النحو:

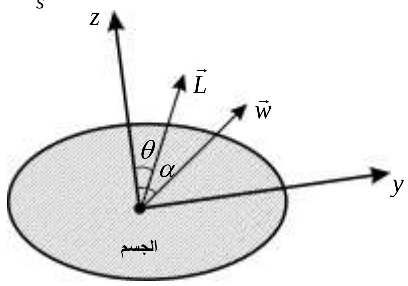
$$w_x = 0 \quad ; \quad w_y = w\sin\alpha \quad ; \quad w_z = w\cos\alpha \qquad (2)$$

وعليه

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx} w_x = 0 \\ L_y &= I_{yy} w_y = I_y\, w\sin\alpha \\ L_z &= I_{zz} w_z = I_s\, w\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ونلاحظ أن

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan\theta = \frac{I_y}{I_s} = \tan\alpha \qquad (4)$$

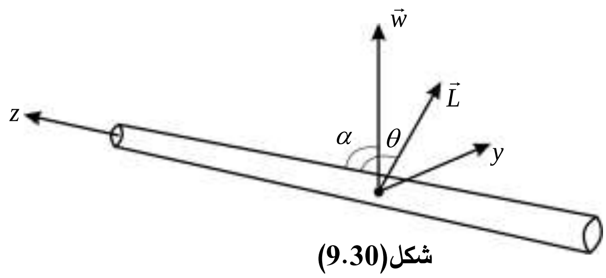


شكل(9.29)

ووفقاً لهذه النتيجة نجد أن العلاقة بين θ ، α تعتمد على كون I_s

وعليه تكون θ أصـــغر أو اكبر من α وعليـه يقع متجـه $\vec{L}$ بين محـاور التنـاظر ومحور الـدوران في حـالـة الجســم المنبســط $(I < I_s) \Leftarrow \theta < \alpha$ (كما في الشكل9.29).

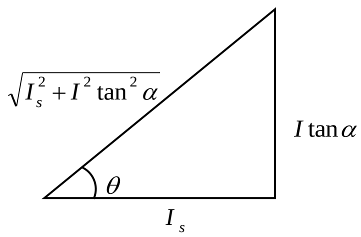
بينما في الجسـم المسـتطيل (القضـيب) حيث $(I > I_s) \Leftarrow \theta > \alpha$ يقع محور الدوران $(\vec{w})$ بين محور التناظر (z) ومتجه الزخم الزاوي $\vec{L}$ كما في الشكل(9.30).



شكل(9.30)

في كلتا الحالتين يرسم محور التناظر (المحور z) عند دوران الجسم حركة مخروطية (طواف) حول متجه الزخم الزاوي الثابت $\vec{L}$ وفي نفس الوقت يطوف محور الدوران $(\vec{w})$ حول $\vec{L}$ بنفس التردد.

نفرض أن $\dot{\phi}$ الانطلاق الزاوي لدروان المستوى yz حول المحور Z وهي تمثـل المعـدل الزمنـي لطـواف محـور التنـاظر (والمتجـه $\vec{w}$) حـول الخـط غيـر المتقلـب (المتجه $\vec{L}$) كما يري من الخارج.



من الشكل(9.28) نرى أن مركبات w هي:

$$w_x = \dot{\theta} \;;\; w_y = \dot{\phi} \sin\theta \;;\quad w_z = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\Psi} \tag{4}$$

من معادلة (2) ومعادلة (3) نجد أن

$$\dot{\phi}\sin\theta = w\sin x \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{w\sin\alpha}{\sin\theta} \tag{5}$$

ويمكن وضع المعادلة (5) كدالة للزاوية α باستخدام حيث $\tan\theta = \frac{I}{I_s}\tan\alpha$

من المثلث أعلاه نجد أن:

$$\sin\theta = \frac{I\tan\alpha}{[I_s^2 + I^2\tan^2\alpha]^{1/2}}$$

إذاً

$$\sin\theta = \frac{\tan\alpha}{[(I_s/I)^2 + \tan^2\alpha]^{1/2}}$$

$$(6) = w[1+(\frac{I_s}{I})^2 - 1)\cos^2\alpha]^{1/2} \ \dot{\phi} = w\sin\alpha\frac{[(I_s/I)^2 + \tan^2\alpha)]^{1/2}}{\tan\alpha\ \sin\alpha/\cos\alpha}$$

هذه تعطي المعدل الزمني لطواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب.

مثال(1): الطواف الحر للقرص Free Precession of a Disc

نفرض حالة قرص رقيق أو جسم صفائحي متناظر، من نظرية المحاور المتعامدة $L_{xx} + I_{yy} = w_{zz}$ ،
ومنها $2I = I_s$

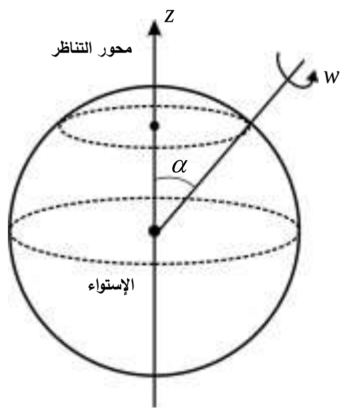
$$\Omega = (\frac{2I}{I} - 1)w\cos\alpha = w\cos\alpha$$

المعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حلو محور التناظر كما يرى في المحاور المثبتة في القرص والدائرة معه أما إذا كان القرص سميكاً فإن $2I \neq I_s$ أما في حالة القرص الرقيق $\dot{\phi} = w(1+3\cos^2\alpha)^{1/2}$ في حالة $\alpha \approx 0 \Leftarrow \cos\alpha \approx 1$ فإن $\Omega \approx w$ فإن $\dot{\phi} \approx 2w$ أي يطوف محور التناظر في الفضاء تماماً بمقدار ضعف الانطلاق الزاوي للدوران ويظهر الطواف كحركة ذبذبية.

مثال(2): طواف الحر Free Precision of the earth

في حركة دوران الأرض، يكون محور الدوران مائلاً قليلاً عن القطب الجغرافي (محور التناظر)

بزاوية $\alpha = 0.2'$



وكذلك $\frac{I_s}{I} = 2.00327$ بسبب تفلطح الأرض

إذاً $\Omega = 0.00327w$

ولما كانت الزاوية $w = \frac{2\pi}{day}$

فإن زمن ذبذبة الطواف بحسب:

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{0.00327} day = 305 day$$

شكل(9.31)

أما زمن الذبذبة الملاحظة للطواف محور دوران الأرض حول القطب هو 440 يوماً ويعود الفرق بين القيم الملاحظة والقيم المحسوبة إلى كون الأرض ليست تامة الصلادة . أما السرعة الزاوية لطواف محور تناظر الأرض كما يرى في الفضاء

$$\dot{\phi} = 1.00327\, w$$

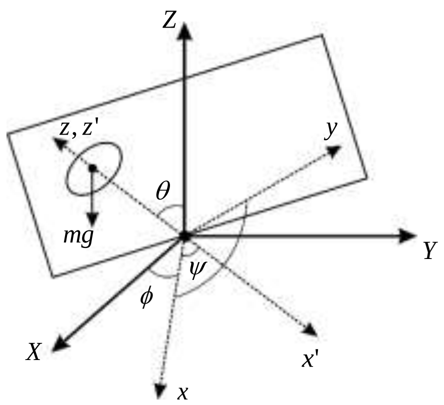
وعليه زمن الذبذبة المرافقة

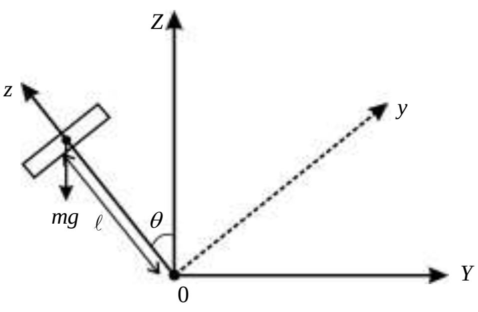
$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{1.00327\, w} = 0.997 day$$

9.9) الطواف الجيروسكوبي – حركة الخذروف

Gyroscopic Precession. motion of a Top

ندرس حركة جسم صغير يدور بحرية حول نقطة ثابتة ومؤثر عليه عزم قبل دراسة حركة الجبر سكوب، والخذروف (الممثلة في الأشكال ادناه)





حيث المحور x عمودي على سطح الورقة، ونقطة الأصل 0 هي النقطة التي يدور حولها الجسم.
مقدار العزم حول 0 الناتج من الثقل هو $mg\ell\sin\theta$ ، $\ell =$ المسافة بين 0 ، ومركز الكتلة، العزم حول المحور x $\Leftarrow$

$$N_x = mg\,\ell\sin\theta \;\; ; \;\; N_y = 0 \;\; ; \;\; N_z = 0 \qquad (1)$$

وتمثل السرعة الزاوية للمحاور $o\,x\,g\,z$ بالرمز $\vec{w}$ ومركباتها بدلالة زاويا أويلر هي:

$$w_x = \dot{\theta} \; ; \; w_y = \dot{\phi}\sin\theta \;\; ; \;\; w_z = \dot{\phi}\cos\theta \qquad (2)$$

أما مركبات الزخم للخذروف (الجيرسكوب)

$$L_x = I_{xx} w_x = I\,\dot{\theta} \qquad ; \qquad L_y = I_{yy} w_y = I\dot{\theta}\sin\theta$$
$$L_z = I_{zz}(w_z + \dot{\Psi}) = I_s(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\Psi}) = I_s S$$

حيث $S =$ يسمي بالتدويم (Spin).

معادلة الحركة الأساسية المنسوبة إلى المحاور الدائرة: $\vec{N} = \dot{L} + \vec{w}\times\vec{L}$ وتكون بدلالة المركبات هي:

$$mg\,\ell\sin\theta = I\ddot{\theta} + I_s S\dot{\phi}\sin\theta - I\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta \qquad (3a)$$

$$0 = I\,\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin\theta) - I_s\;S\,\dot{\phi} = I\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta \qquad (3b)$$

$$0 = I_s\,\dot{S} \qquad (3c)$$

من المعادلة الأخيرة نجد أن الجسـم له تدويم (S) ثابت حول محور التناظر، وعليه تكون مركبات الزخم الـزاوي عـلـى طـول نـفـس الـمـحـور ثـابـتـة أيضـاً $L_z = I_s S =$ ثابت أما المعادلة $(3b)$ تكافئ $0 = \frac{d}{dt}(I\dot{\phi}\sin^2\theta\, I_s\,S\;\cos\theta)$

وهذا يؤدي إلى

$$I\,\dot{\phi}\sin^2\theta + I_s S\cos\theta = \beta = \text{ثابت} \qquad (4)$$

الطواف المستقر: Steady Precession

هي حالة خاصـة حيث يرسـم الجبر سـكوب أو الخذروف مخروطاً دائرياً قائماً حول المحور الشـاقولي (z) في هذه الحالة $\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0 \Leftrightarrow$ وعليه تصبح المعادلة $(3a)$

$$mg\,\ell = I_s S\dot{\phi} - I\dot{\phi}^2 \cos\theta$$

عند الحل بالنسبة لـ S :

$$S = \frac{mg\,\ell}{I_s \dot{\phi}} + \frac{I}{I_s}\dot{\phi}\cos\theta$$

وهذا شرط الطواف المستقر.

حيث $\dot{\phi}$ = التردد الزاوي للطواف أي التردد الزاوي للحركة المتناظرة أو التدويم حول الشـاقول حيث $\dot{\phi} < s$ لذلك يهمل الحد الثاني في المعادلة الأخيرة نجد أن المعادلة وتصبح

$$s = \frac{mg\,\ell}{I_s \dot{\phi}} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{mg\,\ell}{I_s S}$$

معادلات الطاقة أو الترنج The Energy Eq. And Nutation

إذا لم يكن هناك قوى احتكاكية تؤثر على الجير سكوب فإن الطاقة الكلية هي

$$T + V = E = \text{ثابتة} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}[Iw_x^2 + Iw_y^2 + I_z S^2] + mg\,\ell\cos\theta = E \qquad (1)$$

وبدلالة زوايا أويلر

$$\frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2 \sin\theta + I_s S^2] + mg\,\ell\cos\theta = E \qquad (2)$$

باستخدام معادلة (4) نعوض بدل قيمة $\dot{\phi}$ لنحصل على

$$\dot{\phi}=\frac{\beta-I_s S\sin\theta}{I\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+(\frac{\beta-I_s S\sin\theta}{I\sin^2\theta})^2+\frac{1}{2}I_s S^2+mg\,\ell\cos\theta=E \qquad (3)$$

المعادلة كدالة θ يمكن حلها وإيجاد $\theta(t)$ حيث نفرض $u=\cos\theta$

$$\dot{u}=-\sin\theta\dot{\theta}=-[1-\cos^2\theta]^{1/2}\dot{\theta}=-(1-4u^2)^{1/2}\dot{\theta}$$

بالتعويض في معادلة (3)

$$\dot{u}^2=(1-u^2)(2E-I_s S^2-2mg\,\ell u)I^{-1}-(\beta-I_s su)^{+2}I^2 \qquad (2)$$

أو

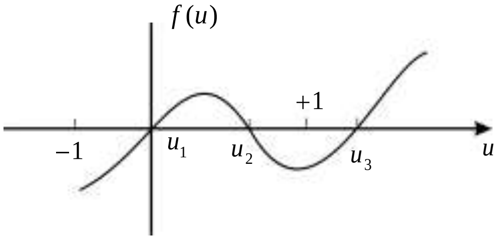
$$\dot{u}^2=f(u)\Rightarrow(\frac{du}{dt})^2=f(u)$$

بالتكامل نجد أن

$$t=\int\frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (5)$$

حيث $f(u)$ متعدد الحدود Polynomial من الدرجة الثالثة، ويمكن إيجاد قيمة التكامل بدلالة الدوال الإهليجية Elliptic Function، وحتى تكون $t>0$ يجب أن يكون $f(u)>0$ ونحسب جذور المعادلة $f(u)>0$ ، لما كانت $0<\theta<90^\circ$

فإن $0<u<+1$ هناك جذران متميزان للدالة $f(u)$ هما u_1 ، u_2 بين (0 ،1) كما في الشكل المرفق ادناه

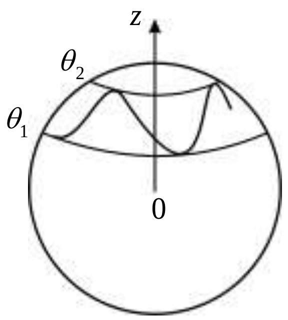


حيث قيم $\theta \Leftarrow \theta_1$ ، θ_2 هما نهايات الحركة الشـــاقولية وتذبذب محور الخذروف إلى الأمام والخلف بين هاتين القيمتين للزاوية θ عند طواف الخذروف حول الشاقول ويسمي التذبذب بالترنج Nutation.

أما أذا كانت $u_2 = u_1$ فإنه لا يحصل ترنج ويطوف الخذروف بصورة مستقرة.

الخذروف النائم: Sleeping Top

إذا كان الخذروف بدأ بالحركة بالموضــع الشــاقولي بســرعة تدويم كافية يكون محوره ثابتاً في الاتجاه الشاقولي ، وهذا هو الشرط



لما يســمي بالنائم Sleeping ، وبدلالة التحليل الســابق، نرى أن الشــرط للنوم هو أن يكون الجذر المزدوج $u = +1$، لما كانت $\theta = \dot{\theta} = 0$ فإن $E = mgh + \frac{1}{2} I_s S^2$ ، $\beta = I_s S$ فإن $f(u) = 0$. عندئذ نعوض في معادلة(4)، حيث

$\dot{u} = 0$ ، $h = \ell \cos\theta = \ell$ (ارتفاع مركز ثقل الخذروف) لنحصل على

$$(1-u^2)[\frac{2mgh}{I}(1+u) - \frac{I_s S^2}{I^2}] = 0 \qquad (6)$$

إذا كان المقدار [ ] = صفر عند $u = +1$، نحصل على جذر ثالث للمعادلة(6) هو u_3 ، حيث

$$u_3 = \frac{I_s S^2}{2\,\text{Im}\,gh} - 1$$

ويكون الشرط لأستقرار الخذروف النائم هو $u_3 > 1$، أو

$$S^2 > \frac{4I\,ngh}{I_s^2}$$

وبسبب الاحتكاك يعاني الخذروف ترنحاً ثم ينقلب.

تمـارين

(9.1) صفيحة رقيقة ومتجانسة كتلتها m وطول اضلاعها $2a$, a . بأعتبار نظام احداثي $Oxyz$ حيث *يقع مستوى الصفيحة في* المستوى xy وتقع نقطة اصل المحاور عند زاوية الصفيحة ، و يكون المحور الطويل للصفيحة على امتداد محور x . جد ما يلي

(a) ضرب عزوم القصور الذاتي للصفيحة.

(b) عزم القصور الذاتي حول القطر المار بنقطة الأصل

(c) الزخم الزاوي حول نقطة الأصل اذا كان محور دوران الصفيحة بسرعة زاوية ω حول القطر المار بنقطة الأصل ؟

(d) الطاقة الحركية في الفرع (c).؟

(9.2) يتكون جسم صلب من ثلاثة قضبان رفيعة ، كتلة وطول كل منهما m, 2a مثبتة عند منتصفاتها بشكل متعامد .بأختيار نظام احداثي محاوره بأتجاه هذه القضبان ، جد

(a) الزخم الخطي والطاقة الحركية للجسم اذا كان يدور بسرعة زاوية ω حول محور يمر بنقطة الأصل والنقطة (1,1,1).؟

(b) بين ان عزم القصور الذاتي هو نفس العزم حول محور مار بالمركز ؟

(9.3) جد مجموعة المحاور الرئيسية للصفيحة المعطاة في المسألة 9.1 حيث نقطة الأصل

(a) عند زاوية الصفيحة

(b) عند مركز الصفيحة

(9.4) مكعب منتظم كتلتة m وأبعاده a، 2a، 3a يدور حول قطره الكبير بسرعة زاوية ω . استخدم نظام احداثي نقطة الأصل له في مركز المكعب. جد (a) الطاقة الحركية (b) الزاوية بين متجه السرعة الزاوية و متجه الزخم الزاوي حول نقطة الأصل.

(9.5) قضيب خفيف منتظم طوله l وكتلته m أجبر على الدوران بسرعة الزاوية ω حول محور يمر بمركزه o ويصنع زاوية α مع القضيب.

(9.6) جد قيمة عزم الإزدواج المؤثر على المكعب في مسألة 9.4 إذا كانت السرعة الزاوية ω ثابته في المقدار والإتجاه.

(9.7)جسم صلب ذو شكل عشوائييدور بحرية تحت ازدواج يساوي صفر. برهن ان كلا من الطاقة الحركية والزخم الزاوي هي كميات ثابتة وذلك بأستخدام معادلات اويلر .

(9.8) صفيحة عشوائية الشكل تدور بحرية بدون اي ازدواج خارجي ، بأستخدام معادلات اويللر برهن ان $\omega_1^2 + \omega_2^2 = c$

حيث c ثابت .؟

(9.9) قذفت صفيحة مربعة كتلتها m *وطول ضلعها* a *في الهواء لتدور بحرية بدون ازدواج. اذا كان زمن الدور الدوراني* $2\pi/\omega = 1$ *.اذا كان محور الدوران يصنع زاوية 45 معمحور تماثل الصفيحة* ، جد *زمن غزل (لف) محور الدوران حول محور التماثل في حالة*

(a) الصفيحة الرقيقة

(b) الصفيحة ذات السمك $a/4$.؟

(9.10) يدور جسم صلب حور محور تماثل بحرية ،اذا كانت α الزاوية بين محور التماثل ومحور الدوران اللحظي ، بين ان الزاوية بين محور الدوران وخط اللاتغيري (متجه **L**) تعطى كالتالي

$$\tan^{-1}\left\{\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I + I\tan^2\alpha}\right\}$$

حيث I_s التماثل محور حول الذاتي حول محور التماثل ، I عزم القصور حول محور متعامد مع محور التماثل بحيث $I_s > I$

(9.11) حيث ان القيمة القصوى للنسبة $I_s/I = 2$ للصفيحة المتماثلة ، بأستخدام النتيجة في مسألة (9.10) ، بين ان الزاوية بيم متجهات السرعة الزاوية والزخم الخطي لا تتعدى زاوية قدرها $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = 19.5^0$ ،وان مقدار الزاوية المقابلة هي

$$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{2} = 54.7^0$$

(9.12) جد الزاوية بين $\boldsymbol{\omega}$ ، $\mathbf{L}$ في المسألة (9 .9)

(9.13) جد الزاوية بين $\boldsymbol{\omega}$ ، $\mathbf{L}$ في حالة دوران الأرض **.؟**

(9.14) يدور قلم رصاص في وضع رأسي قائم ، جد سرعة اللف لهذا القلم حتي يبقى يدور بشكل رأسي قائم . اعتبر ان القلم على شكل اسطوانة منتظمة طولها a وقطرها b . جد عدد الدورات لكل ثانية اذا كانت a=20 cm, b=1cm

الفصل العاشر: ميكانيكا لاجرنج وهاملتون

Lagrangian and Hamiltonian Mechanics

قدّم لاجرانج 1788م معالجة جديدة للميكانيكا الكلاسيكية باستخدام ما يسمي الإحداثيات المعممة وتعريفه لدالة تمثل الفرق بين الطاقة الحركية وطاقة الجهد (الطاقة الكامنة) وربط معادلات الحركة بمجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية تعرف الآن بمعادلات لاجرانج أو معادلات أويلر لاجرانج وقدم هاملتون سنة 1833م اتجاه أخر لمعالجة الميكانيكا الكلاسيكية استبدل فيه السرعة المعممة في إحداثيات لاجرانج بكمية الحركة المعممة مما يسمح لنا بتكون مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى وهدفنا في هذا الفصل هو دارسة المفاهيم الأساسية التي تؤدي إلى إيجاد تلك المعادلات وبعض تطبيقاتها.

10.1) الإحداثيات المعممة: Generalized Coordinate

يمكن تحديد الجسم في الفضـاء الثلاثي الأبعاد بثلاثة إحداثيات قد تكون ديكارتية (كارتزية) أو استوائية ونحتاج إلى أثنين من الإحداثيات إذا كان الجســم مقيد الحركة في مســتوى أو ســطح ثابت بينما أذا تحرك الجسم في خط مستقيم أو منحنى نحتاج إلى إحداثي واحد فقط.

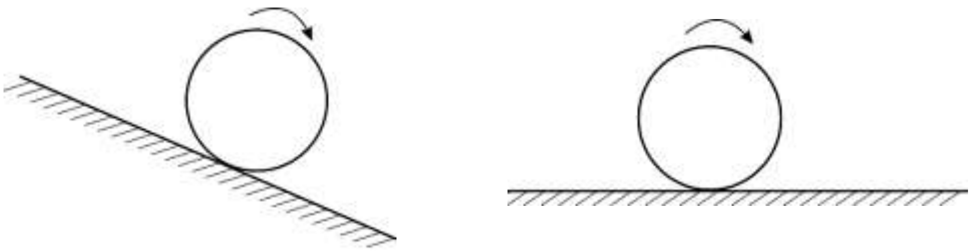
ولصـورة عامة إذا كان لدينا منظومة تحتوي على N جسـمياً فأننا نحتاج إلى $3N$ من الإحداثيات تعين مواقع الجســيمات في وقت واحد بصــورة كاملة الشــكل العام للمنظومة Configuration. أما أذا كانت المنظومة مقيدة الحركة فأننا نحتاج إلى عدد من الإحداثيات اقل من $3N$ لتعيين الشكل العام للمنظومة.

في حالة حركة الجســم الصــلب نحتاج إلى نقطة مرجعية (مركز الكتلة) في الجســم وميلان الجســم في الفضــــاء أي نحتاج إلى ســــتة إحداثيات فقط ثلاثة إحداثيات للنقطة المرجعية وثلاثة أخرى للميلان (زوايا أويلر).

<u>تعريف</u>: أصــغر عدد معين (n) من الإحداثيات اللازم لتعيين الشــكل العام للمنظومة يســمى بالإحداثيات المعممـة generalized Coordinates ويرمز لهـا بـالرمز an ، $q_1\ , q_2\,, q_3\,, \cdots, q_n$ وقد يكون الإحداثي q_k زاوية أو مسافة.

إذا كـان أي أحـداثي يتغير بصـــــورة مســــتقلـة عن الإحـداثيـات الأخرى يقـال أن المنظومـة هولونوميـة Holonomic ويكون عـدد الإحـداثيـات (n) مســــاويـاً لعـدد درجـات الحريـة للمنظومـة (Degree of Freedom) أمـا في منظومـة ليســـت هولونوميـة (Non Holonomic) لا تتغير الإحـداثيـات بصـــــورة مســتقلة عن بعضـــها البعض ويكون عدد درجات الحرية أقل من عدد درجات الإحداثيات اللازمة لتحديد الشكل العام للمنظومة.

مثال: الكرة التي تتدحرج على مستوى تام الخشونة هي منظومة ليست هولونوميه حيث يلزم خمس إحداثيات لتغيير الشكل العام (أثنان لتحديد مركز الكرة وثلاثة لميلان الكرة على السطح). لأن معادلة قيد السطح تنقص عدد درجات الحرية.



شكل(1-10)

حيث لا تتغير جميع الإحداثيات بصورة مستقلة. إذا تدحرجت الكرة فعلي الأقل يتغير أحد الإحداثيات بصورة غير مستقلة وسنتناول في هذا الجزء منظومات هولونوميه فقط .

إذا كانت المنظومة مكونة من جسيم واحد، يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية كدوال الإحداثيات المعممة على النحو التالي:

1- درجة حرية واحدة – الحركة على منحني $x = x(q)$

2- درجتا حرية – الحركة على سطح $x = x(q_1, q_2)\ ;\ y = y(q_1, q_2)$

3- ثلاث درجات حرية – الحركة في الفضاء

$$x = x(q_1, q_2, q_3)\ ;\ y = y(q_1, q_2, q_3)\ ;\ z = z(q_1, q_2, q_3)$$

لنفرض أن الإحداثيات q'_s تتغير من القيم الابتدائية (q_1, q_2, q_3) إلى القيم المجاورة $(q_1 + \delta q_1, \delta q_2 + \delta q_3, ...)$ تكون التغيرات المقابلة في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots \quad ; \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots$$

حيث المشتقات الجزئية $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ هي دالة للإحداثيات المعممة (q'_s)

مثال: حركة جسيم في مستوى: نأخذ المحاور القطبية $q_1 = r\ ;\ q_2 = \theta$

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta \Rightarrow \delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta\,\delta r - r\sin\theta$$

$$y = y(r,\theta) = r\sin\theta \Rightarrow \delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta\,\delta r - r\sin\theta\,\delta\theta$$

لنفرض أن المنظومـة مكونـة من عدد كبير من الجســـيمات ولـها n درجات حرية وإحداثيات المعممة $q_1, q_2 ... q_n$ ، عندئذٍ تتغير من الشـــكل $(q_1, q_2 ... q_n)$ إلى الشـــكل المجاور $q_1 + \delta q_1 , q_2 + \delta q_2$. يتحرك جسيم (i) من نقطة (x_i , y_i , z_i) إلى $(x_i + dx_i , y_i + dy_i \;,\; z_i + \delta z_i)$ حيث:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad ; \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad ; \quad \delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

<u>اصطلاح</u>: الرمز i يشـير غلي المحاور الديكارتية ، k يرمز للإحداثيات المعممة والرمز x_i يشـير إلى محور ديكارتي، المنظومة المكونة N جسيماً i سنأخذ القيم من $1 \rightarrow 3N$.

10.2) القوى المعممة: Generalized Forces

إذا عاني جسيم إزاحة $\delta \vec{r}$ تحت تأثير قوة $\vec{F}$ نعلم أن الشغل المنجر من هذه القوة (δw) هو

$$\delta w = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z$$

وبعبارة الرموز المعتمدة سابقاً فإن :

$$\delta w = \sum_{i=1}^{3} F_i \delta x_i$$

هذا في حالة الجسيم الواحد، أما في حالة المنظومة مكونة من N جسيماً فإن قيمة i تمتد من 1 إلى $3N$ ، فإن.

$$\delta w = \sum_i (F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k})\delta q_k = \sum_i (\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k})\delta q_k$$

ويمكن عكس الترتيب على النحو:

$$\delta w = \sum_k (\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k})\delta q_k$$

الكمية داخل القوس نرمز لها بالرمز Q_k أي أن

$$\delta w = \sum_k Q_k \delta q_k \quad ، \quad Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (1)$$

وتسمى الكمية Q_k القوة المعممة المرافقة للإحداثي q_k وتكون وحدات Q_k هي وحدات القوة. حيث q_k لها وحدة مسافة ولها وحدات عزم إذا كانت q_k تمثل زاوية.

<u>ملاحظة:</u> ليس من الضروري وغير عملي استخدام المعادلة (1) لحساب قيم Q_k الحقيقية، بدلاً من ذلك يمكن إيجاد كل قوة معممة Q_k مباشرة من الشغل المنجز علي المنظمة من القوى الخارجية حيث تتغير q_k إلى $q_k + \delta q_k$ بينما تبقى الإحداثيات المعممة الأخرى ثابتة.

<u>مثال</u>:إذا كانت المنظومة جسم صلب، فإن الشغل المنجز من القوى الخارجية عندما يدور الجسم خلال زاوية $\delta\theta$ حول محور معلوم $\leftarrow L_\theta \, \delta\theta$ حيث $L_\theta =$ العزم الكلي لجميع القوى حول المحور وعليه تكون $L_\theta =$ القوى المعممة المرافقة للإحداثي θ.

- **القوى المعممة للمنظومات المحافظة**

حيث القوة المؤثرة على جسم في مجال محافظ تعطى بالعلاقة $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ حيث V دالة طاقة الجهد. بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$Q_k = -\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

مثال في حالة المحاور القطبية $q_1 \to r$ ، $q_2 \to 0$ فإن

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}; \; Q_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

حيث $V = V(r)$ فإن $Q_\theta = 0$ (القوة مركزية).

10.3) معادلات لاكرانج Lagange's Equations

لإيجاد المعادلات التفاضـــلية للحركة بدلالة الإحداثيات المعممة يمكن أن نبدأ بالمعادلة $\vec{F}_1 = m_i \ddot{x}_i$ ويمكن كتابتها مباشرة بدلالة q'_s ولكن هناك طريقة أسهل تعتمد على فرضيات الطاقة:

الطاقة الحركية T لمنظومة مكونة من N جسيم هي

$$T = \sum_{i=1}^{N}[\frac{1}{2} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

حيث $x_i =$ نرمز للإحداثيات الديكارتية وهي دوال للإحداثيات المعممة q_k، وهناك أمكانية لاحتواء العلاقة الدالية من x_i^2 ، q_s على الزمن t صـــراحة. وهذه في حالة وجود مقيدات متحركة كجســيم يتحرك على سطح متحرك بطريقة ما لذا:

$$x_i = x_i(q_1, q_2 ... q_N, t) \quad ; \; \dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

هنا نفرض في كل المعادلات الســـابقة واللاحقة أن مدى i: هو $\{1,2,3,\cdots,3N\}$، ومدى k هو $\{1,2...n\}$ حيث $n =$ عدد الإحداثيات المعممة (درجات الحرية للمنظومة) ويمكن اعتبار T كدالة للإحداثيات المعممة.

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\dot{x}_i$ وتفاضل بالنسبة للزمن t لنحصل على:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}) = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

أو

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\frac{\dot{x}_i^2}{2})] = \ddot{x}_i^2 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{\dot{x}_i^2}{2}) \qquad (2)$$

(حيث في الحد الأخير عكسنا ترتيب التفاضل بالنسبة للزمن t , q_k)

نضرب المعادلة (2) في m_i مع ملاحظة أن $m_i\,\ddot{x}_i = F_i$ وعليه تصبح المعادلة (2) على النحو

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(m_i\,\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)\right] = \vec{F}_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(m_i\,\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

و بدلالة $T_i = m_i\,x_i^2 \big/ 2$ ويأخذ المجموع على i نحصل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_i F_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial\,T}{\partial q_k}$$

أو بدلالة القوي المعممة.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,T}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q_k + \frac{\partial x}{\partial q_k}} \qquad (3)$$

هذه معادلة لاكرانج للحركة وهي معادلة تفاضـــلية من الدرجة الثانية بالإحداثيات المعممة وفي حالة الحركة المحافظة فإن $Q_k = -\dfrac{d\,V}{\partial \dot{q}_k}$ لذا تكتب معادلة لاكرانج بالصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d\,T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (4)$$

<u>تعريف</u>: تسمى الدالة دالة لاكرانج وهي $\boxed{L = T - V}$

حيث T ، V دوال الإحداثيات المعممة أي $V = V(q)$ بينما ليســت دالة $\dot{q}$ أي $\dfrac{\partial V}{\partial q_k} = 0$ بينما $T = T(q,\dot{q})$ لذلك يمكن كتابة معادلة (4):

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial\,T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial\,T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

وعليه تصبح معادلة لاكرانج على الصورة النهائية كالتالي:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad (5)$$

ملاحظة: إذا كان قسـم من القوى الخارجية غير محافظة (Q'_k) مثل قوى الاحتكاك، والقسـم الآخر يمكن اشتقاقة من دالة الجهد فإن

$$Q_k = Q'_k + (-\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k})$$

لذلك يمكن كتابة معادلة لاكرانج على الصورة:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (6)$$

هذه الصورة العامة لمعادلة لاكرانج في حالة القوى غير المحافظة.

10.4) تطبيقات معدلات لاكرانج Application of Lagrange's Eqs.

لإيجاد المعادلات التفاضلية لمنظومة ما نتبع الخطوات التالية:

(1) نختار محاور مناسبة لتمثيل شكل المنظومة العام.

(2) جد الطاقة الحركية T كدالة لهذه المحاور ومشتقاتها بالنسبة للزمن.

(3) إذا كانت المنظومة محافظة, نجد أن دالة الجهد (الطاقة الكافية) V كدالة للإحداثيات أما إذا كانت غير محافظة جد القوى Q'_k المعممة.

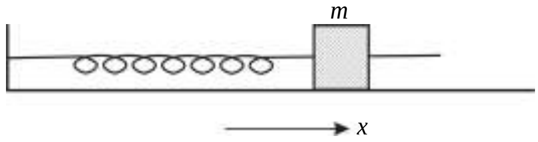
(4) أستخدم المعادلة (4) لإيجاد المعادلات التفاضلية.

وفي الأمثلة التالية تطبيق لهذه الخطوات

مثال(1): التذبذب التوافقي: Harmonic Oscillator

نتناول حالة المتذبذب التوافقي ذو البعد الواحد(كما في الشكل ادناه) ،

نفرض أن x = أحداثي الإزاحة فإن $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;\; ; \;\; V(x)=\frac{1}{2}kx^2$



وعليه تكون

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}^2 \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial x}=-k\,x$$

في حالة عدم وجود قوة تضاءل، فإن معادلة لاكرانج تصبح

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})=-kx \Rightarrow m\ddot{x}=-k\,x$$

معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي.

أما في حالة وجود قوة غير محافظة، نفرض أنها تتناسب مع السرعة فإن $Q'=-c\dot{x}$ لذلك تصبح الحركة

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})=-c\dot{x}+k\,x=0 \quad ; \;\; m\ddot{x}+c\dot{x}+k\,x=0$$

هذه معادلة التذبذب التوافقي المتضائل.

<u>مثال(2):</u> حركة جسم في مجال مركزي

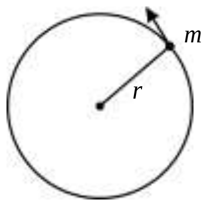
في حالة جسيم يتحرك في مستوى تحت تأثير القوة المركزية (كما في الشكل ادناه) نختار الإحداثيات القطبية $q_1 \rightarrow r$ ، $q_2 \rightarrow \theta$ وعليه فإن:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2]$$

إذاً

$$V=V(r)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$$



(شكل 10.2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial V}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+F_r$$

معادلة الحركة في اتجاه (r) (r – Equation)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x'}\Rightarrow\ ;\ \frac{d}{dt}(m\dot{r})=mr\dot{\theta}^2+F_r c\Rightarrow m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2+F_r \qquad (1)$$

أما معادلة الحركة في اتجاه θ (Equation)$\theta-$

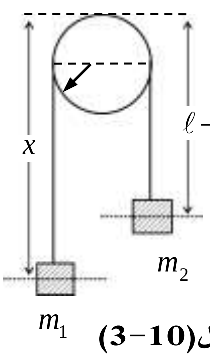
$$\frac{d}{dt}=mr^2\dot{\theta}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta}\quad\leftrightarrow\quad\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \qquad (2)$$

وهذه معادلات الحركة لجسم يتحرك في مجال مركزي(كما مرّ في الفصل السادس).

<u>مثال(3)</u>: ماكنة أتوود (Atwood's Machine)

هي منظومة ميكانيكية مكون من ثقلين m_1 ، m_2 على التتالي مربوطتين بحبل خفيف غير قابل للخط طوله ℓ ويمر حول بكره ملساء، المطلوب إيجاد معدلات الحركة.



شكل(3−10)

<u>الحل</u>: للمنظومة درجة حرية واحدة تمثل بالمتغير x ⇐ المســـافة العمودية بين البكرة والجسم m_1 السرعة الزاوية للبكرة ⇐ $\dot{\theta}=\dot{x}/a$ وعليه تكون الطاقة الحركية للمنظومة ⇐ الطاقة الحركية + الطاقة الدورانية للبكرة

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I (\dot{x}/a)^2$$

حيث سرعة الكتلة الأولي هي التغيير في x بالنسبة للزمن $(\dot{x})$

سرعة الكتلة الثانية هي $\frac{d}{dt}(\ell - x) = -\dot{x}$ (إلى أسفل)،

السرعة الزاوية للبكرة: $w = \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{a}$

الطاقة الكامنة للمنظومة هي $V = -m_1 g x - m_2 g(\ell - x)$

دالة لاكرانج لها صورة بعد التبسيط هي

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2})\dot{x}^2 + gx(m_1 - m_2) + m_2 g$$

من معادلة لاكرانج $\frac{d}{dt}(\frac{dL}{\partial \dot{x}}) = \frac{dL}{\partial x}$ نحصل على

$$(m_1 + m_2 + I/a^2)\ddot{x} = g(m_1 + m_2)$$

وتعجيل المنظومة بالعلاقة

$$\ddot{x} = g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + I/a^2}$$

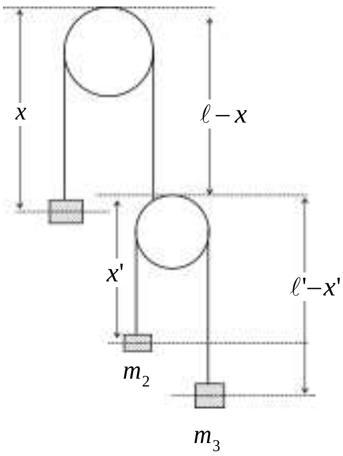
ويعتمد إشـــارة التعميم على العلاقة بين m_1 ، m_2 فمثلاً $m_1 > m_2 \Rightarrow \ddot{x}$ موجه الحركة أي أسـفل والمنظومة تهبط أي أسفل بعجلة ثابتة ديما $m_1 < m_2$ تصعد المنظومة بتعجيل ثابت.

مثال(4): ماكينة أتوود المزدوجة (Double Atwood's Machine)

الشكل (10.4) المرفق يبين ترتيب الكتل اثناء حركة المنظومة.

حيث يوجد الآن لهذه المنظومة درجتي حرية هما $x\ ,\ x'$

مع إهمال كتلته البكرات للتسهيل، جد معادلات الحركة للمنظومة؟



الشكل (10.4) ماكنة آتوود المزدوجة.

الحل:

سرعة الكتلة $m_1 = \dot{x}$ ، سرعة الكتلة $m_2 = \dot{x}' -$

بالنسبة للبكرة الثانية: سرعة الكتلة $m_3 = \dot{x}' -$

أما السرعة بالنسبة للبكرة الأولى: تكون سرعة

الكتلة الثانية m_2 هي $\dot{x}' - \dot{x}$ وسرعة الكتلة الثالثة (m_3) هي $-\dot{x}' - \dot{x}$

وعليه $$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} + \dot{x}')^2$$

أما الطاقة الكامنة :

$$V = -m_1\, g\, x - m_2 g(\ell - x + x') - m_2 g(\ell - x + \ell' - x')$$

إذاً

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} + \dot{x}^1)^2$$

$$+ g(m_1 - m_2 - m_3)x + g(m_2 - m_3)x' + \quad \text{ثابت}$$

وتكون معادلات الحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

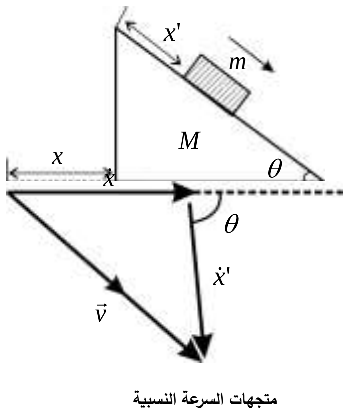
$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ddot{x}') + m_3 (\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_1 - m_2 - m_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x'} \Rightarrow ;\ m_2 (-\ddot{x} + \ddot{x}') + m_3 (\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_2 - m_3)$$

<u>مثال(5):</u> جسم يتزلق على سطح متحرك

ندرس حركة جسيم ينزلق على سطح أملس مائل الذي ينزلق بحرية على سطح أفقي أملس أيضاً.

(كما في الشـــكل 10.5) . نختار إحداثيتين هما x ، x' كنقاط مرجيه على السطح المائل والسطح والأفقي من دراسة مخطط السرعة نجد أن



الشكل (10.5) حركة جسم على سطح مائل متحرك⟸ .

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta \qquad (1)$$

الطاقة الحركية للمنظومة (T) هي

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

أما الطاقة الكامنة للمنظومة لا تحوي على (x) حيث الحركة على مستوى أفقي فقط تكون دالة لـــ x'

وهي: $V = -mg\,x'\sin\theta + c$

حيث c ثابت، وعليه تكون دالة لاكرانج (L) هي

معادلات الحركة هي $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}' + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mg\,x'\sin\theta + c$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}'\cos\theta) + M\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}) - \frac{\partial L}{\partial x'} \Rightarrow m(\ddot{x}' + \ddot{x}\cos\theta) = mg\sin\theta \qquad (2)$$

عند حلها للتعجلتين $\ddot{x}$ ، $\ddot{x}'$ نجد أن:

$$\ddot{x}\frac{-g\sin\theta\cos\theta}{(\frac{m+M}{m}) - \cos^2\theta} \;\; ; \;\; \ddot{x}' = \frac{g\sin\theta}{1-(\frac{m\cos^2\theta}{m+M})} \qquad (3)$$

<u>مثال(6):</u> (اشتقاق معادلات إويلر لجسم صلب حر الدوران)

في حالة دوران جسم صدر بدون تأثير عزوم، تكون الطاقة الحركية للجسم الصلب= $T = \frac{1}{2}(I_{xx}w_x{}^2 + I_{yy}w_y{}^2 + I_{zz}w_z{}^2$ من الشكل(10.7) الذي بين زوايا أويلر θ, ψ, ϕ نجد أن العلاقة بين السرعة $w's$ ومشتقاتها الزمنية:

$$w_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \; ; \; w_y = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$$
$$w_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\phi \qquad (1)$$

عند اعتبار زوايا أويلر كإحداثيات معممة تصبح معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}) = \frac{\partial T}{\partial \theta} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}) = \frac{\partial T}{\partial \phi} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}) = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

حيث جميع القوى المعممة $Q's$ = صفر، وحيث

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial w_z} \frac{\partial w_z}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} w_z \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}) = I_{zz} \dot{w}_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = I_{xx} w_x \frac{\partial w_x}{\partial \psi} + I_{yy} w_y \frac{\partial w_y}{\partial \psi}$$

$$= I_{xx} w_x (-\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi) + I_{yy} w_y (-\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)$$

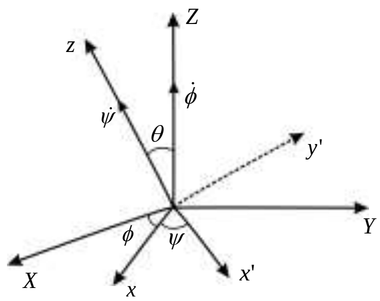
$$= I_{xx} w_x w_y - I_{yy} w_y w_x$$

من معادلات الكرانج نجد

$$I_{zz}\dot{w}_z = (I_{xx} - I_{yy}) w_x w_y$$

أو

$$I_{zz}\dot{w}_z + w_x w_y (I_{yy} - I_{xx}) = 0$$



شكل (10.7) زوايا أويلر

10.5) الزخم المعممة الإحداثيات المهملة

Generalized Momentum F Ignorable Coordinate

لنفرض أن جسيما يتحرك في خط مستقيم (حركة خطية) ، وتكون الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$. إذاً

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = P \Rightarrow$$ زخم الجسم

في حالة منظومة توصف بالإحداثيات المعممة $q_1 , q_2 ... q_n$ تصبح الكمية ويسمي P_k الزخوم المعممة

$$\boxed{P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}$$

وعندما تكون دالة الجهد $V \neq V(\dot{q}_s)$ فإن:

$$\frac{\partial T - \partial L}{\partial \dot{q}_k \, \partial \dot{q}_k}$$

إذاً،

بالرجوع إلى معادلة لاكرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}(P_k) = \dot{P}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

وبصورة خاصة ، أفرض أن أحد الإحداثيات إذاً. مثل q_k لا تحتويه دالة لاكرانج أو $L \neq L(q_\lambda)$ فإن

$$\dot{P}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{P_\lambda = c_\lambda} \Leftarrow$$ ثابت

يسمي بالإحداثيات q_k المهمل (Ignorable Coordinate).

<u>النتيجة</u>: الزخم المعمم المرافق للإحداثيات المعمل يكون ثابت حركة المنظومة

مثال(1): الجسم المنزلق على سطح مائل: وجدنا أن $L \neq L(x)$ وعليه فإن

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{x}'\cos\theta$$

حيث P_x يمثل المركبة الأفقية للزخم الخطي للمنظومة، وحيث لا توجد قوة أفقية خارجة على المنظوم فالمركبة الأفقية للزخم الخطي يجب أن تكون ثابتة.

مثال(2): في حالة حركة جسيم في مجال مركزي:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

يكون هي الاحداثي الممهل حيث $L \neq L(\theta)$ وعليه فإن

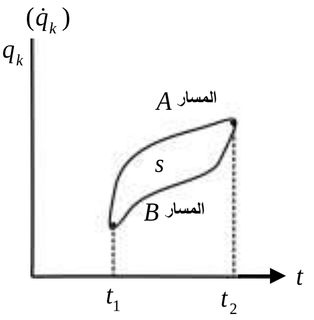
$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

وهذا مقدار الزخم الزاوي للجسيم.

10.6) مبدأ التغير(الإختلاف) لهاملتون: Hamilton Variational Principle

مركز اهتمامنا في هذا الجزء على كيفية استنتاج معدلات لاجرانج باستخدام قاعدة تعرف بقاعدة التغير التي وضعها الرياضي الأيرلندي هاملتون سنة 1834م والتي تنص على أن: حركة أي منظومة تحدث بطريقة بحيث أن التكامل $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ يأخذ دائماً أعظم أو أصغر قيمة، وبعبارة أخرى باستثناء جميع الطرق الممكنة التي يمكن أن تتغير فيها منظومة في فترة زمنية معينة $t_2 - t_1$ فهناك حركة خاصة تحدث بحيث يكون التكامل المذكور أعلاه نهاية عظمى أو صغرى، ورياضياً

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$



حيث δ تمثل التغيير الصغير، ونمثله كما في الشكل(10.8).

لاشتقاق معادلة لاكرانج باستخدام هذه القاعدة:

شكل (10.8)مبدأ التغير في المسارالحركي لجسم.

نفرض أن $L = L(\dot{q}_k , q_k)$. إذاً

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k\right)dt \qquad (1)$$

وحيث $\delta q_k =$ الفرق بين دالتين للزمن t مختلفة قليلاً. إذاً $\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}(\delta q_k)$

عند تكامل الحد الأدنى في معادلة بالتجزئة

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\, dt \left[\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\, dt\right.\right.$$

يتلاشى الحد الأول عند إقتراب $dt \to 0$ أي يكون $\delta q_k = 0$ عندما $t_1 \leftarrow t_2$ وعليه

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\, dt = 0$$

إذا كانت جميع الإحداثيات المعممة مســتقلة، عندها تكون δq_k مســتقلة أيضــاً، لذلك تتلاش الكمية داخل القوس لنجد أن

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0} \quad , \qquad k = 1,2..n$$

وينطبق هذا الاشتقاق أيضاً على المنظومات غير المحافظة.

10.7) دالة هاملتون – معادلات هاملتون

لنفرض أن الدالة H للإحداثيات المعممة معرفة على النحو

$$H = \sum_k \dot{q}_k P_k - L$$

حيث أن الطاقة الحركية T لمنظومة ديناميكية بسيطة هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية في المتغير $\dot{q}_k$ ، بينما الطاقة الكامنة هي دالة في $q's$

وعليه فإن $L = T(\dot{q}_k , q_k) - V(q_k)$

باستخدام مبرهنة أويلر للدوال المتجانسة نجد أن

$$\sum_k \dot{q}_k P_k = L \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

[للتوضيح أعتبر الحركة الخطية لمتذبذب توافقي بسيط

$$[\ T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \Rightarrow 2T = m\dot{x}^2 \quad ; \quad \dot{x}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}^2$$

إذاً $H = \sum \dot{q}_k q_k - L = 2T - (T - V) = T + V$

أي أن الدالة $H =$ الطاقة الكلية للمنظومة وتعرف باسم دالة هاملتون Hamilton Function.

لو أخذنا بعين الاعتبار حلول المعادلات (n معادلة)

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ ; \ (k = 1,2 \dots n)$$

بالنسبة للمتغير $\dot{q}_k$ بدلالة q'_s ، p'_s أي نريد كتابة $\dot{q}_k(p_k , q_k)$ ، $\dot{q}_k$ باستخدام هذه المعادلات يمكن أن نعبر عن H كدالة لـ p'_s ، q'_s أي

$$H(p_k , q_k) = \sum_k p_k \dot{q}_k (p_k , q_k) - L \tag{2}$$

لنحسب تغير الدالة في (2) الذي يقابل التغير في p_k , q_k ؟

$$\delta H = \sum_k [P_k \, \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta \, p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \, \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta \, q_k \,]$$

وحيث معادلة لاكرانج $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$. إذاً

$$\delta H = \sum_k [\dot{q}_k \, \delta P_k - \dot{P}_k \delta q_k \,] \qquad (3)$$

ولما كانت δH تكتب على صورة حيث

$$\delta H \; = \sum_k [\frac{\partial H}{\partial P_k} \, \delta P_k \, + \frac{\partial H}{\partial P_k} \, \delta q_k \,] \qquad (4)$$

مقارنة معادلة (3) مع معادلة (4) نستنتج ما يلي:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \; ; \; \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k}$$

وهذه المعادلات تسمى بمعادلات هاملتون القانوية للحركة

Hamilton's Canonical equation of motion

وهي تتكون من $(2n)$ من المعادلات التفاضـــلية من الدرجة الأولي فيما تكون معادلة لاكرانج من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية.

وتنطبق هذه المعادلات في حالة المنظومات غير الحافظة, وللمنظومات التي يكون فيها دالة للزمن t حيث H ليس من الضـروري أن تكون مســاوية للطاقة الكلية. لهذه المعادلات تطبيقات هامة في الفيزياء الذرية, وميكانيكا السماوي.

والآن إلى الأمثلة الآتية:

مثال(1): أشتق معادلات هاملتون لحركة متذبذب توافقي أحادي البعد:

الحل: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \;\; ; \;\; V = \frac{1}{2} kx^2$

$$P=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\Rightarrow \dot{x}=P/m \; ; H=T+V=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{1}{2}k\,x^{2}\Rightarrow H(P,x)$$

معدلات الحركة:

$$\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{P}{m}=\dot{x} \;\; ; \;\; \frac{\partial H}{\partial x}=-\dot{P}=k\,x\Rightarrow -\frac{d}{dt}(m\dot{x})=k$$

إذاً $\boxed{m\ddot{x}+kx=0}$

<u>مثال(2):</u> جد معادلات هاملتون لحركة جسيم في مجال مركزي.

<u>الحل</u>:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^{2}+(r\dot{\theta})^{2}] \;\; ; \;\; V=V(r)$$

$$P_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\Rightarrow \dot{r}=p_r/m \;\; ; \;\; P_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^{2}\dot{\theta}\Rightarrow \dot{\theta}=p_\theta/mr^{2}$$

<u>تمرين</u>: جد الدالة H ثم جد معادلات هاملتون للحركة.

تمارين

(10.1) جد المعادلة التفاضلية لحركة مقذوف في مجال الجاذبية الأرضية المنتظم مع اهمال مقاومة الهواء .؟

(10.2)جد تسارع كرة صلبة منتظمة تتدحرج على سطح خشن مائل .؟

(10.3)ربطت كتلتين متساويتين m بحبل خفيف ، بحيث وضعت احداهما على سطح طاولة افقية والأخرى تتدلى من الطرف الأخر عند حافة الطاولة . جد تسارع النظام في حالة اهمال كتلة الحبل ، ثانيا ، بإعتبار الحبل سميك وكتلته .؟

(10.4) اكتب معادلة الحركة لألة أتوود الرباعية المكونة : بكرة اولى معلق بها كتلتان مربطتان بحبل يمر حول هذه بكرة وربطت آلة أتوود أخرى معلق بها كتلتنان . مع اهمال كتل البكرتين ، جد تسارع النظام اذا كانت الكتل كما يلي

(10.5) تتحرج كرة كتلتها m الى اسفل على سطح إسفين كتلته M ، اذا كانت زاوية ميل ألأسفين ويتحرك على سطح افقي أملس . اذا كان التلمس بين الكرة ولأسفين تام الخشونة ، جدتسارع الأسفين .؟

(10.6) ينزلق جسيم على سطح املس يزداد ميلانه بمعدل ثابت . اذا كان زاوية الميل: وبدأ الجسيم الحركة من السكون ، جد معادلة الحركة لهذا الجسيم .؟

(10.7) بين ان طريقة لاكرانج تعطي معادلة الحركة لجسيم يتحرك في مستوى نظام احداثي دوار بسرعة زاوية .؟

(10.8) اعد حل مسألة (10.7) اذا كانت الحركة في ثلاثة ابعاد .؟

(10.9) جد معادلة الحركة التفاضلية لبندول مطاط ،حيث كتلته m ومعامل صلابته k وطوله الأصلي (الطبيعي) ، افرض ان الحركة تقع في المستوى الرأسي .؟

(10.10)اذا كانت تتحرك نقطة تعليق بندول بسيط الى اعلى بتسارع ثابت a بحيث يكون علوه يعطى بالعلاقة

وسرعته الراسية في أي لحظة هي ، استخدم طريقة لاكرانج لأيجاد معادلة الحركة لهذا البندول في حالة الذبذبات الصغيرة .

ثم جد زمن الدور اذا كان طول البندول .؟

(10.11) جد معادلة الحركة التفاضلية في ثلاثة ابعاد لجسيم يتحرك في مجال مركزي بإستخدام الأحداثيات الكروية .؟

(10.12) يتحرك جسيم كتلته m على السطح الداخلي الأملس لمخروط قائم موضوع بشكل رأسي مقلوب حيث زاوية رأسه حيث ،

بإستخدام الأحداثيات الكروية جد معادلة الحركة التفاضلية لحركة الجسيم .؟

(10.13)جد دالة هاملتون والعادلات القانونية لحركة مقذوف في مجال التثاقل الأرضي في الأبعاد الثلاثة وبدون مقاومة الهواء .؟

(10.14) جد معادلات هاملتون القانونية للأنظمة التالية:

(a) البندول البسيط ((b)ماكنة آتوود (c) انزلاق جسيم على سطح مائل.

(10.15) بإستخدام دالة هاملتون اشتق معادلة الحركة التوافقية البسيطة لمتذبذب يتحرك في اتجاه محور x.؟

المراجع

(1) H. C. Corben and P. Stahle, Classical Mechanics, R. E. Krieger Pub. Co., 2nd Edit., (1974).

(2) J. P. Den Hartog, Mechanics, Dover Publications, (1961).

(3) J. M. Finn, Classical Mechanics, Jones and Bartlett Learning (2009).

(4) G. R. Fowles, Analytical Mechanics, 2nd Edit., Holt Rinehart and Winston, Inc., New York, (1970).

(5) G. R. Fowles and G. Cassiday Classical Analytical Mechanics, 6th Edit., Hartcourt College Publisher, (2004).

(6) H. Goldstein, C. P. Poole, and J, L. Safke, Classical Mechanics, 3rd Edit., Addison Wesley, (1980).

(7) A. P. French, Newtonian Mechanics, W. W. Norton Company, (1971).

(8) T. W. Kibble and F. H. Berkshire, Classical Mechanics, World Scientific Publishing Company, (2004).

(9) D. Kleppner and R. J. Kolenkow, Introduction to Mechanics, Cambridge University Press, Inc., US, (1973).

(10) L. D. Landue and E. M. Lifshitz, Mechanics, 3rd Edit., Heinemann, Amisterdam, (1976).

(11) M. W. McCall, Classical Mechanics: From Newton to Einstein, 2nd Edit., Wiley, (2010).

(12) M. R. Spiegel, Theoretical Mechanics, Schaum' Outline Series in Science, McGraw- Hill Book Company, New York, (1967).

(13) K. R. Symon, Mechanics, 3rd Edit., Addison Wesley, (1971).

(14) J. R. Taylor, Classical Mechanics, University Science Books, Sausalite, California, USA, (2005).

(15) S. T. Thornton and J. B, Marion Classical Dynamics of Particles and Systems, 4th Edit., Brooks Cole, (2003).

حلول تمارين الفصول

حل تمارين الفصل الأول

(1) (أ)

$$\vec{r} = \vec{i}\,(ct) + \hat{j}\,A\sin wt$$

$$\hat{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\,c + \hat{j}(Aw\cos wt) \quad ; \quad |\hat{v}| = [c^2 + (Aw\cos wt)^2]^{1/2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + \hat{j}(-Aw^2 \sin wt) \;\; ; \;\; |\vec{a}| = w^2 A\sin wt$$

(ب)

$$\vec{r} = \hat{i}A\sin wt + \hat{j}B\cos wt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\,(+wA\cos wt) + \hat{j}\,(-Bw\sin wt)$$

$$|\vec{v}| = (w^2 A^2 \cos^2 wt + B^2 w^2 \sin^2 wt)^{1/2}$$

$$= \omega(A^2 \cos^2 wt + B^2 \sin^2 wt)^{1/2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}\,(-w^2 A\sin wt) + \hat{j}\,(-\beta w^2 cowt)$$

$$|\vec{a}| = w^2\,(A^2 \sin^2 wt + B^2 \cos^2 wt)^{1/2}$$

(2)

$$\vec{r} = \hat{i}(\cos wt) + 2\hat{j}\sin wt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{at} = \hat{i}(-w\sin wt) + 2\hat{j}(w\cos wt)$$

$$\vec{v}|_{(t=\pi/4w)} = \hat{i}(-w\sin\frac{\pi}{4}) + 2\hat{j}(w\cos\pi/4) = w[\frac{-1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{j}]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}(-w^2\cos wt) + 2\hat{j}(-w^2\sin wt)$$

$$\vec{a}|_{t=\pi/4w} = \hat{i}[-w^2\cos\pi/4] + 2w^2\hat{j}(-\sin\pi/4) = -w^2[\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{j}]$$

$$|\vec{a}| = w^2[\frac{1}{2}+\frac{4}{2}]^{1/2} = \sqrt{2.5}w^2$$

$$|\vec{v}| = w[\frac{1}{2}+\frac{4}{2}]^{1/2} = \sqrt{2.5}w$$

$$\vec{a}.\vec{v} = w^3(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}) = -1.5w^3$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|a||v|} = \frac{-1.5w^3}{2.5w^3} = -0.6 \Rightarrow \theta = 126.8^\circ$$

(3)

$$\vec{r}_1 = \hat{i}(b\sin wt) + \hat{j}(b\cos wt)\ ;\ \vec{r}_2 = \hat{i}(b\cos wt) - \hat{j}(b\sin wt)$$

إذاً

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \hat{i}(bw\cos wt) + \hat{j}(-bw\sin wt)$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \hat{i}(-bw\sin wt) - \hat{j}(bw\cos wt)$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -\hat{i}\, bw(\sin wt + \cos wt) - \hat{j}\, bw(\cos wt - \sin wt)$$

$$|\vec{v}_{12}| = bw[(\sin wt + \cos wt)^2 + (\cos wt - \sin wt)^2]^{1/2} = bw[2]^{1/2} = \sqrt{2}bw$$

$$s = [(x_2 - x_1{}^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

$$= \{b^2(cowt - \sin wt)^2 + b^2(\sin wt + \cos wt)^2\}^{1/2}$$

حيث $S =$ المسافة بين الجسمين = البعد بين النقطتين:

بما أن $s = b\sqrt{2} =$ ثابت

إذاً المعدل الزمني للبعد بين الجسمين هو المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

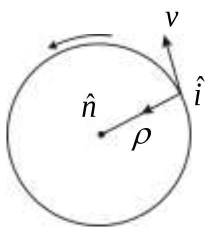
(4)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}(At) + \hat{j}(\beta t^2) + kct^3$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt = \hat{i}A\int tdt + \hat{j}\beta\int t^2dt = kc\int t^3dt + \vec{v}_0$$

$$=\hat{i}A(\frac{t^2}{2})+\hat{j}\frac{Bt^3}{3}+kc\frac{t^4}{4}+\hat{v}_0$$

$$\vec{r}=\int\vec{v}dt+\vec{r}_0=\frac{At^3}{6}\hat{i}+\frac{Bt^4}{12}\hat{j}+c\frac{t^5}{20}\hat{k}+\vec{v}_0t+\vec{r}_0$$



(5) (أ)

$v_0 =$ ثابت $\quad \vec{v}=v_0\hat{\tau} \quad ;\ \vec{\tau}=\hat{\tau}(t)$

حيث $v_0 =$ ثابت

$$\vec{a}=\dot{v}\hat{\tau}+\frac{v_0^2}{s}\hat{n}=\frac{v_0^2n^*}{\rho}$$

إذاً

$$\vec{a}.\vec{v}=(\dot{v}_0\hat{\tau}+\frac{v_0^2}{\rho}\hat{n}).(v_0\hat{\tau})=\frac{v_0^3}{3}\hat{n}.\hat{\tau}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{v}$$

(ب) بدلات الإحداثيات القطبية $\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+(r\dot{\theta})\hat{\theta}$

لكن (ثابت) $r=b$ إذاً $\dot{r}=0$، وعليه فإن $\quad \vec{v}=r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=(-r\dot{\theta}^2)\hat{r}$$

حيث $\ddot{r}=0$ ، $\ddot{\theta}=0$ ، ثابت $=\dot{\theta}=w$

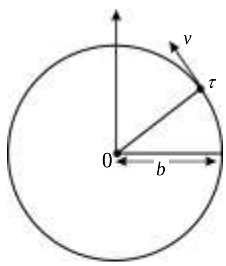
$$\vec{a}.\vec{v}=(-r\dot{\theta}^2)\hat{r}\cdot(r\dot{\theta})\hat{\theta}=-r^2\dot{\theta}^3(\hat{r}\cdot\hat{\theta})=0$$

إذاً $\vec{a}\perp\vec{v}$

(6) $\vec{a}=a_\tau\hat{\tau}+a_n\hat{n}\ ;\ \vec{v}=v\hat{t}$. إذاً $\vec{v}.\vec{a}=va_\tau\hat{\tau}\vec{\tau}+a_\tau|v|$ ، وعليه فإن $\alpha_\tau=\frac{\vec{a}.\vec{v}}{|v|}$

$$|a|^2=a_\tau{}^2+a_n^2\Rightarrow a_n=\sqrt{a^2-a_\tau{}^2}=(a^2-a_\tau^2)^{1/2}$$

(7) $\quad \vec{v}=At^2\Rightarrow\dot{v}=(2At)$



$$\vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} = (2At)\hat{\tau} + \frac{a^2t^4}{b}\hat{n}$$

إذاً $\vec{a}.\vec{v} = |a||v|\cos 45 = |a||v|/\sqrt{2}$

من نتيجة تمرين (6) $|v|a_\tau = \vec{a}.\vec{v}$

$$(2At)(At^2) = (\frac{At^2}{\sqrt{2}})[(2At)^2 + (\frac{A^2t^4}{b})^2]^{1/2}$$

$$2A^2t^3 = \frac{A^2t^2}{\sqrt{2}}[(2t)^2 + \frac{A^2t^8}{b^2}]^{1/2} = \frac{A^2t^3}{\sqrt{2}}(4 + \frac{A^2t^6}{b^2})^{1/2}$$

$$(2\sqrt{2})^2 = 4 + \frac{A^2t^6}{b^2} \Rightarrow 8 = 4 + \frac{A^2t^6}{b^2}$$

$$4 = \frac{A^2t^6}{b^2} \Rightarrow t^6 = \frac{4b^2}{A^2} \Rightarrow t = (\frac{4b^2}{A^2})^{1/6} = (\frac{2b}{a})^{1/3}$$

(8) $r = be^{kt}; \theta = wt$

$$\dot{r} = bke^{kt} \quad ; \quad \ddot{r} = bk^2e^{kt} \quad ; \quad \dot{\theta} = w, \ddot{\theta} = 0$$

إذاً $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = (bke^{kt})\hat{r} + (wbe^{kt})\hat{\theta}$

$$|\vec{v}|_{t=0} = [(bk)^2 + (wb)^2]^{1/2}$$

نستخدم مباشرة علامات مركبات العجلة $a_0 - a_r$:

$$\vec{a} = (bk^2 - bw^2)e^{kt}\hat{r} + (2bxwe^{kt})\theta'$$

$$\vec{a}|_{t=0} = [b(k^2 - w^2)]^2 + (2bkw)^2]^{1/2} = b[(k^2 - w^2)^2 + (2kw)^2]^{1/2}$$

(9)

$$R = A\,;\ \phi = \beta t^2\,;\ z = ct^2$$
$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + (R\dot{\phi})\hat{\theta} + \dot{2}\hat{k}$$
$$\vec{v} = 0 + (2A\beta t)\hat{\phi} + (2ct)\hat{k} = (2A\beta t)\phi + (2ct)\hat{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^{\cdot 2})\hat{r} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

بالاشتقاق تم التعويض نحصل على: $\ddot{R} = 0\ ,\ \ddot{\phi} = 2\beta\ ,\ \ \ddot{z} = 2c$

$$\vec{a} = (-4A\beta^2 t^2)\hat{r} + (2A\beta)\hat{\phi} + (2c)\hat{k}$$

(10)

$$A^2 = \vec{A}.\vec{A} \Rightarrow \frac{d}{dt}(A^2) = \frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{A})$$

$$2A\frac{dA}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{A} + \vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt} \Rightarrow$$ (الترتيب غير مهم في الضرب العددي)

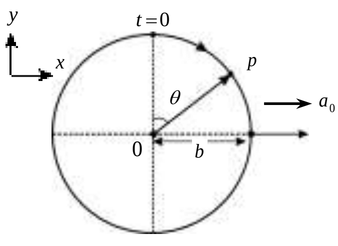
$$\boxed{\frac{AdA}{at} = \vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt}}\, 2A\frac{dA}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} \Rightarrow$$

هنا المتجه والمشتقة الزمنية له في نفس الاتجاه.

(11) بالاشتقاق الاعتيادي لحاصل ضرب الكميات نحصل على:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot(\vec{v}\times\vec{a} + \vec{r}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{a})$$
$$= \vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{a} + \vec{r}\cdot[\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{a} + \vec{v} + \vec{v}\times\frac{d\vec{a}}{dt}]$$
$$= (\vec{v}\times\vec{v})\cdot\vec{a} + \vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{a}) + \vec{r}.\vec{v}\times\dot{\vec{a}} = \vec{r}\cdot\vec{v}\times\dot{\vec{a}}$$

(12) (أ)



$$\vec{r}_{0p} = \hat{i}(b\sin\theta) + \hat{j}(b\cos\theta)$$
$$\vec{v}_{0p} = \frac{d\vec{r}_{0p}}{dt} = \hat{i}(b\cos\theta)\dot{\theta} - \hat{j}(b\sin\theta)\dot{\theta}$$
$$\vec{a}_{0p} = \frac{d\vec{v}_{0p}}{dt} = +\hat{i}[-(b\sin\theta)\dot{\theta}^2 + b\cos\theta\ddot{\theta}]$$
$$-\hat{j}[(b\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (b)\sin\theta\ddot{\theta}]\quad (1)$$

تعجيل أي نقطة مثل (p) على حافة العجلة بالنسبة لمركز العجلة (0) عند النقطة الأفقية $\theta = \pi/2$

$$\vec{v}_{0p}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \hat{i}(0) - \hat{j}(b)\dot{\theta} \Rightarrow |\vec{v}_{0p}| = v = b\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{b}$$

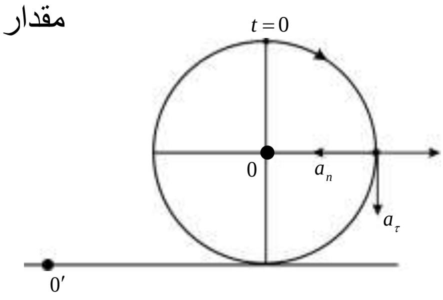
$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{b}\right) = \frac{1}{b}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{a_0}{b}$$ حيث $a_0 =$ التعجيل الأمامي

بالتعويض في معدلة (1) مع ملاحظة $\theta = \pi/2$ نجد أن

$$\vec{a}_{0p} = \hat{i}[-b\sin(\frac{\pi}{2})(v/b) + b\cos(\frac{\pi}{2})\ddot{\theta}] - \hat{j}[b\cos\frac{\pi}{2}\dot{\theta}^2 + b(1)\frac{a_0}{b}]$$

$$= \hat{i}[-b\frac{v^2}{b^2}] - \hat{j}(a_0) = -[\hat{i}(\frac{v^2}{b}) + \hat{j}(a_0)] \qquad (2)$$

$$|a_{0\bar{p}}| = \sqrt{(\frac{v^2}{b})^2 + a_0^{\ 2}}$$ مقدار العجلة بالنسبة للمركز



(ب) العجلة بالنسبة للمشاهد على الأرض $(0')$ الثابت

من متجه الموقع : $\vec{a}_{0'p} = \vec{a}_{00'} + \vec{a}_{0p} \Rightarrow \vec{r}_{0'b} = \vec{r}_{00'} + \vec{r}_{0p}$

ثم نشتق مرتان بالنسبة للزمن:

$$(3)\ \vec{a}_{0'p} = \hat{i}(a_0) + \hat{i}[-(b\sin\theta)\dot{\theta}^2 + b\cos\theta\ddot{\theta}] - \hat{j}[-(b\sin\theta)\dot{\theta}^2 + b\cos\theta\ddot{\theta}]$$

نعوض بدل $\dot{\theta} = \frac{v}{b}$ ، $\frac{a_0}{b} = \ddot{\theta}$ في معادلة (3) لنحصل على:

$$a_{0'p} = \hat{i}[a_0 + (a_0\cos\theta - \frac{v^2}{b}\sin\theta)] - \hat{j}[\frac{v^2}{b}\cos\theta + a_0\sin\theta] \qquad (4)$$

نلاحظ أن $a_{0'p}$ تعتمد على θ لذلك لإيجاد القيمة العظمى للعجلة بالنسبة لـ'0:

نجد مشتقة العجلة بالنسبة إلى θ

$$\left.\frac{d/a_{0'p}}{d\theta}\right|_{\theta_m} = 0$$

$$\left|\vec{a}_{0'p}\right| = \{[a_0(1+\cos\theta)' - \frac{v^2}{b}\sin\theta]^2 + [\frac{v^2}{b}\cos\theta + a_0\sin\theta]^2\}^{1/2}$$

ترتيب الحدود مع أخراج a_0 مشترك مع ملاحظة $\sin^2\theta + \cos^2 = 1$ يجعل

$$\left|\vec{a}_{0'p}\right| = a_0\{2 + 2\cos\theta + \frac{v^4}{(a_0 b)^2} - \frac{2v^2}{a_0 b}\sin\theta]^{1/2}$$

إذاً

$$\frac{d\left|a_{0'p}\right|}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2\sin\theta_m - \frac{2v^2}{a_0 b}\cos\theta_m = 0$$

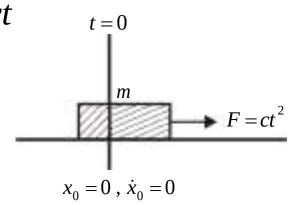
وعليه فإن:

$$\boxed{\tan\theta_m = -\frac{v^2}{a_0 b}}$$

حل تمارين الفصل الثاني

(1) معادلة الحركة

$m\dfrac{dv}{dt} = ct^2$. إذاً

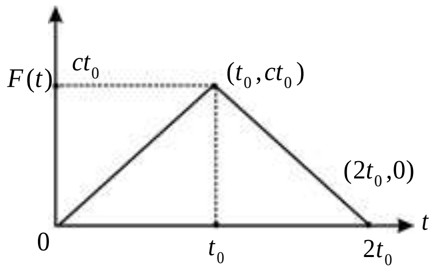


$$dv = \frac{c}{m}t^2 dt \Rightarrow \int_0^v dv = \frac{c}{m}\int_0^t t^2 dt$$

إذاً

$$v = \frac{c}{3m}t^3$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{c}{3m}t^3 \Rightarrow \int_0^x dx=\frac{c}{3m}\int_0^x t^3 dt \quad \boxed{x=\frac{c}{12m}t^4} \Rightarrow$$



(2) تعريف دالة القوة في الفترة الأولي:

$$F_1(t)=ct \qquad 0<t<t_0$$

في الفترة الثانية: $t_0<t<2t_0$

الدالة خطية متناقصة ميلها $(-)$

ميل الدالة $= \frac{0-ct_0}{2t_0-t_0} = m \quad -c$

بما أن معادلة الخط المستقيم $(y=mx+b)$ ، إذاً $\quad F_2(t)=-ct+b$

لتحديد قيمة (b): نعوض بإحدى النقطتين على الخط في الدالة

$$ct_0=-ct_0+b \Rightarrow b=2ct_0$$

إذاً $F_2(t)=-ct+2ct_0=c(2t_0-t)$

نستخدم معادلة الحركة في كل فترة على انفراد:

الفترة الأولى $\frac{dv}{dt}=\frac{ct}{m} \Leftarrow m\frac{dv}{dt}=f_1(t)$. إذاً

$$\int_0^v dv=\frac{c}{m}\int_0^t t\,dt \Rightarrow \quad \boxed{v=\frac{c}{2m}t^2}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{2m}t^2 \Rightarrow \int_0^x dx=\frac{c}{2m}\int_0^t t^2 dt \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{c}{6m}t^3}$$

في الفترة الثانية: $t_0<t<t_2$ الجسم يبدأ الحركة بسرعة:

$$x_1=\frac{c}{6m}t_0^3 \quad v_1=x_0=\frac{c}{2m}t_0^2,$$

معادلة الحركة:

$$m\frac{dv}{dt}=F_2(t)=c(2t_0-t)$$. إذاً

$$\int_{v_1}^v dv=\frac{c}{m}\int_{t_0}^t (2t_0-t)dt \Rightarrow v-v_1=\frac{c}{m}[2t_0t-\frac{t^2}{2}]_{t_0}^t$$

$$v = v_1 + \frac{2}{m}[2t_0 t - \frac{t^2}{2} - 2t_0^{\ 2} + \frac{t_0}{2}]$$
$$= \frac{2}{2m}t_0^{\ 2} + [2t_0 t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}t_0^{\ 2}]\frac{c}{m}$$

بالاختصار نجد أن : السرعة في أي لحظة خلال هذه الفترة

$$\boxed{v = \frac{c}{m}[2t_0 t - \frac{t^2}{2} - t_0^{\ 2}]}$$

(في نهاية هذه الفترة تكون سرعة الجسم (v_2)، تعوض بدل $t = 2t_0$ لنحصل على:

$$v_2 = \frac{c}{m}[4t_0^{\ 2} - 2t_0^{\ 2} - t_0^{\ 2}] = \frac{c}{m}t_0^{\ 2}$$

أما لإيجاد المسافة المقطوعة في الفترة الثانية نلاحظ أن:

$$v = \frac{dx}{dx} = \frac{c}{m}[2t_0 t - \frac{t^2}{2} - t_0^{\ 2}]$$

إذاً
$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{c}{m}\int_{t_0}^{2t_0}[2t_0 t - \frac{t^2}{2} - t_0^{\ 2}]dt$$

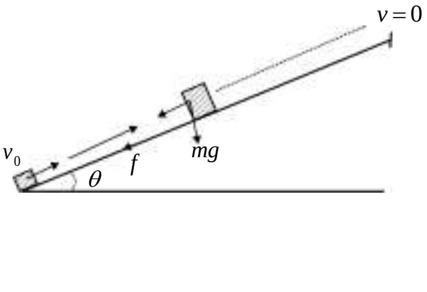
$$x_2 - x_1 = \frac{c}{m}[t_0 t^2 - \frac{t^3}{6} - t_0^{\ 2} t]_{t_0}^{2t_0}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{c}{m}[(4t_0 t^3 - \frac{8}{6}t_0^3 - 2t_0^3) - (t_0^3 - \frac{t_0^3}{6} - t_0^3)]$$

$$x_2 = \frac{c}{6m}t_0^3 + \frac{5c}{6m}(t_0^3) = \boxed{\frac{c}{m}t_0^3}$$

(3) معادلة الحركة أثناء الصعود إلى أعلى السطح هي:

إذاً . $m\frac{dv}{dt} = \sum F = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$



$$\frac{dv}{dt} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \text{ثابت}$$

هنا التباطؤ أثناء الحركة يكون ثابت.

نطبق قانون الحركة في خط مستقيم حيث

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$
$$v = v_0 + at \Rightarrow v(t) = v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t$$

لإيجاد زمن الصعود (t_1) نعوض $v = 0$ عند نهاية السطح. لنحصل على

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} \qquad (1)$$

أما المسافة التي يقطعها الجسم في أي خطة ابتداء من أسفل السطح هي:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

عندما تكون المسافة = طول السطح (h) فإن $t = t_1$ وعليه

$$h = v_0 t_1 + \frac{1}{2}a{t_1}^2 = v_0\left(\frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta}\right) - \frac{v_0^2 g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{2g^2(\sin\theta + \mu\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} \qquad (2)$$

أثناء هبوط الجسم إلى أسفل السطح بمعادلة الحركة:

$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$. إذاً

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = \text{ثابت أيضاً}$$

يبدأ الجسم الحركة بسرعة $v_0 = 0$ أثناء وهبوط وعليه نفرض أن الزمن اللازم هو t_2 ، إذاً

$$h = v_0 t_2 + \frac{1}{2}a t_2^2 = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cdot t_2^2$$

$$\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t_2^2$$

$$t_2^2=\frac{v_0^2}{g^2(\sin\theta+\mu\cos\theta)(\sin\theta-\mu\cos\theta)}=\frac{v_0^2}{g^2(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)}$$

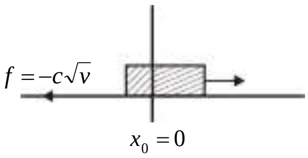
وعليه فإن

$$t_2=\frac{v_0}{g}(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)^{1/2}$$

وحيث أن الزمن الكلي اللازم للصعود والهبوط هو $t=t_1+t_2$ ، إذاً

$$t=t_1+t_2=\frac{v_0^2}{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}+\frac{v_0^2}{g^2(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)^{1/2}}$$

$$t=\frac{v_0}{g}\left[\frac{1}{(\sin\theta-\mu\cos\theta)}+\frac{1}{g^2(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)}\right]$$



(4) معادلة الحركة:

$F=m\frac{dv}{dt}\Rightarrow$ $-cv^{1/2}=m\frac{dv}{dt}$. إذاً

$$\frac{dv}{v^{1/2}}=-\frac{c}{m}dt\Rightarrow\int\frac{dv}{v^{1/2}}=-\frac{c}{m}dt\ \Rightarrow\int_{V_0}^{V}V^{-1/2}dv=-\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

$$[2v^{+1/2}]_{v_0}^{v}=-\frac{c}{m}t\Rightarrow 2(\sqrt{v}-\sqrt{v_0})=-\frac{c}{m}t$$

إذاً $$\sqrt{v}=\sqrt{v_0}-\frac{c}{2m}t$$

وبتربيع الطرفين ينتج أن

$$v=(\sqrt{v_0}-\frac{c}{2m})^2 \qquad (1)$$

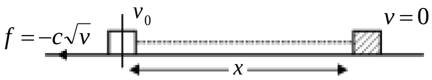
إذاً $$v=\frac{dx}{dt}=(\sqrt{v_0}-\frac{c}{2m}t)^2\Rightarrow$$

$$dx = (\sqrt{v_0} - \frac{c}{2m}t)^2\, dt \Rightarrow \int_0^x dx = (\sqrt{v_0} - \frac{c}{2m}t)^2\, dt \Rightarrow$$

$$x = \frac{(\sqrt{v_0} - \frac{c}{2m}t)^3}{3} \cdot -(\frac{2m}{c})\Big]_0^t$$

$$= -\frac{2m}{3c}\{[\sqrt{v_0} - \frac{c}{mt}]^3 - (\sqrt{v_0})^3\} \qquad (2)$$

هذه معادلة الإزاحة بدلالة الزمن.



(5) معادلة الحركة $\quad m\dfrac{dv}{dt} = F$

نعوض بالتسارع (تباطؤ) بدلالة مشتقة المسافة مع السرعة

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{vdv}{dx} = -c\sqrt{v} \Rightarrow v^{1/2}\,\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} \Rightarrow \int dx = -\frac{m}{c}\int v^{1/2} dv$$

$$\int_0^x dx = -\frac{c}{m}\int_{v_0}^0 v^{1/2} dv \Rightarrow x = -\frac{m}{c}[\frac{v^{3/2}}{3/2}]_{v_0}^0 \Rightarrow x = \frac{2m}{3c}v_0^{3/2}$$

(6) (أ)

$$V(x) = -\int F(x)dx = k\int x^n dx = k(\frac{x^{n+1}}{n+1}) + c \quad F = -k\,x^n \Rightarrow$$ ثابت

(1) إذاً $\quad V(x) = (\dfrac{k}{n+1})x^{n+1} + 2$

(ب) لإيجاد v (x): لاحظ أن $\quad m\dfrac{vdv}{dx} = -k\,x^n$. إذاً

$$\int_{v_0}^v vdv = \frac{-k}{m}\int_0^x x^n dx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - {v_0}^2) = -\frac{kx^n}{m(n+1)}$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2k\,x^{n+1}}{m(n+1)} \qquad (2)$$

(ج) لإيجاد نقاط الرجوع: نساوي الوضع بالطاقة الكلية (حيث $v =$ صفر)

$$E_0 = v(x) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = k\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$x^{n+1} = \frac{1}{2}\frac{m}{k}(n+1)v_0^2$$ (تعتبر $c =$ صفر)

$$x = [\frac{(n+1)m}{2k} {v_0}^2]^{1/(n+1)}$$

(7) حيث $v = \dfrac{b}{x}$ ، نجد التسارع حيث

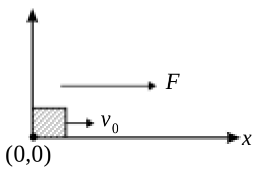
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{x^2}v$$

$$a = (-\frac{b}{x^2})(\frac{b}{x}) = -\frac{b^2}{x^3}$$

إذاً قانون نيوتن التالي:

$$F = ma = -\frac{mb^2}{x^3}$$

(8) $F = kvx$



معادلة الحركة: $mv\dfrac{dv}{dx} = kvx$

$$dv = \frac{k}{m}xdx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \frac{k}{m}\int_0^x xd \;\Rightarrow\; v - v_0 = \frac{k\,x^2}{2m}$$

إذاً $v = v_0 + \dfrac{k}{2m}x^2$ ، وعليه فإن

$$\frac{dx}{dx} = v_0 + \frac{k}{2m}x^2 \Rightarrow \frac{dx}{(v_0 + \frac{k}{2m}x^2)} = dt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{(v_0 + \frac{k}{2m}x^2)} = \int_0^x dt$$

وحيث أن $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(u/a)$. إذاً

$$t = \int \frac{dx}{\frac{k}{2m}\cdot(\frac{2m}{k}v_0 + x^2)} = \sqrt{\frac{2m}{v_0 k}}\tan^{-1}(x\cdot\sqrt{\frac{k}{2mv_0}})$$

وعليه فإن

$$x = \sqrt{\frac{2m}{v_0 k}}\tan(z\sqrt{\frac{k}{2mv_0}})$$

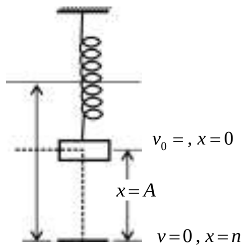
(9) نفرض أن المتذبذب التوافقي على صورة زنبرك له ثابت k:

معادلة حفظ الطاقة: عند الاستقرار الطاقة الكلية = طاقة الحركة

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

عند أقصي إزاحة (السعة) كل الطاقة = طاقة وضع = $\frac{1}{2}kA^2$

إذاً



$$v_0{}^2 = A^2\frac{k}{m} = A^2 w_0{}^2 \Rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

$$v_0{}^2 = A^2(\frac{2\pi}{\mathrm{T}})^2 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 A^2}{v_0{}^2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\ A/v_0$$

(10) نفرض أن طاقة المتذبذب الأول = E_1 ، وطاقة المتذبذب الثاني = E_2 حيث (عند أقصي سعة A_1 $\Leftarrow$ (

$E_1 = \frac{1}{2}k_1 A_1{}^2\ ;\ E_2 = \frac{1}{2}k_2 A_2{}^2$. إذاً

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 = \frac{k_1 A_1{}^2}{k_2 A_2{}^2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{2A_2{}^2}{A_1{}^2} \qquad (1)$$

حيث زمن ذبذبة الأول T_1، والثاني T_2 حيث

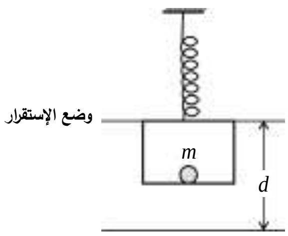
$$T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = 2\pi/\sqrt{k_1 m_1} \quad ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = 2\pi/\sqrt{k_2 m_2}$$

إذاً

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2/m_2}{k_1/m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{A_1^2}{2A_2^2}} = \frac{A_1}{A_2}(\frac{m_1}{2m_2})^{1/2}$$

(11) معادلة الحركة للنظام (الصندوق والقالب) هي:

$$F_s = M_s \ddot{X}$$



حيث $x =$ إزاحة الصندوق عن موقع الاستقرار

أثناء التذبذب $M_s = M + m$

القوة الأسترجاعية $F_s = -kx$

إذاً $-kx = (M - m)\ddot{x}$

(1) $$\ddot{x} = -\frac{kx}{M + m}$$

حيث الثابت ملاحق للصندوق عند القعر فإن تسارع الثابت = تسارع النظام. إذاً

(2) $$x_m = -\frac{kx}{M + m}$$

حيث $\ddot{x}_m =$ تسارع القالب، $x_m =$ إزاحة القالب. يكون حل المعادلة التفاضلية (2) كمتذبذب توافقي بسيط

$$x_m(t) = A\cos(wt + \theta)$$

حيث $\theta =$ زاوية الطور نفرضها = صفر.

$$w_0 = \sqrt{k/(M + m)}$$

نفرض أن رد فعل قعر الصندوق على الثابت = f_r . نطبق قانون نيوتن الثاني على القالب:

إذاً . $\sum F = m\ddot{x}_m \Rightarrow Mg^{-Fr} = m\ddot{x}_m$

$$f_r = mg - m\ddot{x}_m = mg + \frac{mk}{M+m} x_m \qquad (3)$$

$$f_r = mg - \frac{md}{M+m} \qquad (4)$$

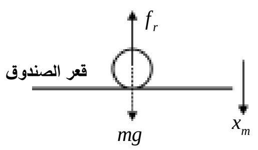
عندما يكون المتذبذب في أعلي تذبذب شاقولي فإن $x_m = -d$ ، وحتى يترك القالب قعر الصندوق يجب أن $f_r = 0$ وعليه فأن معادلة (4) تعطي

$$0 = m(g - \frac{dk}{M+m}) \Rightarrow \boxed{d = g\,\frac{(M+m)}{k}}$$

(12) وجدنا أن سعة المتذبذب المتضائل = $Ae^{-\gamma t}$

لنفرض أن زمن الذبذبة الواحدة T_d ، وعليه تكون سعة الذبذبة الابتدائية عند

$t = 0$ هي A ، وبعد زمن قدره $2T_d$ تصبح هذه السعة $Ae^{-2\gamma T_d}$ وهذه تتناقص السعة كما مر من زمن ذبذبة



$A\bar{e}^{3\gamma T_d}$

بعد زمن قرب $t = nT_d$ تصبح السعة $Ae^{-n\gamma T_d}$.

وحسب الفرض هذه السعة تعادل Ae^{-1} . إذاً

$$A\bar{e}^{n\gamma T_d} = Ae^{-1} \Rightarrow n\gamma T_d = 1$$

لكن $\mathrm{T}_d = 2\pi / w_d$. إذاً

$$\gamma = \frac{1}{T_d n} \Rightarrow \gamma = \frac{w_d}{2\pi n} \Rightarrow w_d = 2\pi n\gamma$$

حيث وجدنا في الشرح للحركة المتضائلة دون الحرج أن

$$w_1 = w_d = (w_0^{\,2} - \gamma^2)^{1/2}$$

أو

$$w_0^{\,2} = w_d^{\,2} + \gamma^2 = w_d^{\,2} + \frac{w_d^{\,2}}{4\pi^2 n^2} = w_d^{\,2}[1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}]$$

إذاً $$\frac{w_0}{w_d}=[1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}]^{1/2}$$

حيث $(w=2\pi/T)$

$$\frac{2\pi/T_0}{2\pi/T_d}=[1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}]^{1/2}$$

إذاً $$\frac{T_d}{T_0}=[1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}]^{1/2}$$

وهو المطلوب (هنا $T_d=T$ زمن ذبذب المتضائل دون الحرج)

حل تمارين الفصل الثالث

(1) (أ) $$\vec{F}=\frac{k\vec{r}}{r^4}=K=\frac{[\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z]}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\hat{i}F_x+\hat{j}F_y+\hat{k}F_z$$

$$F_x=\frac{kx}{r^4}=\frac{kx}{[x^2+y^2+z^2]^2};\ F_y=\frac{ky}{[x^2+y^2+z^2]^2}$$
$$F_z=kz/[x^2+y^2+z^2]^2$$

إذاً

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{i}[\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_x}{\partial z}+-\hat{j}[\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}]+\hat{k}[\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}]$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = kz(-2)[x^2 + y^2 + z^2]^{-3}(2y) = -4kzy/r^6$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = ky(-2)[x^2 + y^2 + z^2]^{-3}(2z) = -4kzy/r^6$$

إذاً $$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow \hat{i}(0) = 0$$

وهكذا بالنسبة لجميع مركبات الالتفاف الأخرى حيث يحصل على

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}; \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

إذاً القوة $\vec{F}$ قوة محافظة.

(ب) $\vec{F} = \hat{i} e^{a(x+y)} + \hat{j} e^{b(x+y)} + \hat{k} e^{cz}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{a(x+y)} & e^{b(x+y)} & e^{cz} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}^{(ecz)} - \frac{\partial}{\partial z} e^{b(x+y)}] - \hat{j}[\frac{\partial}{\partial x}^{(ecz)} - \frac{\partial}{\partial z} e^{a(x+y)}]$$

$$+ \hat{k}[\frac{\partial}{\partial x} e^{(b(x+y)} - \frac{\partial}{\partial y} e^{a(x+y)}]$$

$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}[(0)-0] + \hat{k}[be^{b(x+y)} - ae^{a(x+y)}] \neq 0$$

$\vec{F}$ ليست قوة محافظة ما لم تكن مركبة (z) للالتفاف = صفر وذلك عند الشرط

$$be^{b(x=y)} = ae^{a(x+y)} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{e^{a(x+y)}}{e^{b(x+y)}} = e^{x(a-b)+y(a-b)}$$

عند $a = b$ تصبح مركبه (z) للالتفاف = صفر.

(2) (أ) $V = kxy/z^2$

$$F=-\vec{\nabla}v=-[\hat{i}(\frac{\partial v}{\partial x})+\hat{j}\frac{\partial v}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial v}{\partial z}]$$

$$=-[\hat{i}(ky/z^2)+\hat{j}(\frac{kx}{z^2})+\hat{k}(-2kxy/z^3)]$$

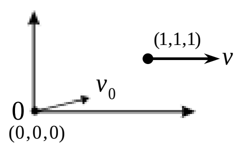
(ب) $$V=ke^{a(x^2+y^2+z^2)}$$

إذاً

$$F=-\vec{\nabla}V=-[\hat{i}Ke^{a(x^2+y^2+z^2)}(2ax)+\hat{j}Ke^{a(x^2+y^2+z^2)}(2ay)+\hat{K}[ke^{a(x^2+y^2+z^2)}2a_z]$$

$$=-2kae^{a(x^2+y^2+z^2)}[\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z]=-2kae^{ar^2}(\vec{r})$$

(3) تستخدم قانون حفظ الطاقة:



$$(T+V)_0=(T+V)_A$$

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+V(0,0,0)=\frac{1}{2}mv^2+V(1,1,1)$$

إذاً

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+[a(0)+b(0)^2+c(0)^3]=\frac{1}{2}mv^2+[a(1)+b(1)+c(1)]$$

إذاً $$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2-(a+b+c)$$

ومنها $$v=\sqrt{v_0{}^2-\frac{2}{m}(a+b+c)}$$

(4) $$\boxed{g(z)=g_0(1-z/R)}\,V=mg_0z(1-z/R)=mg(z)z\Rightarrow$$

حيث $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$ ، هنا v دالة لـ (z) فقط

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial z}=mg[1-\frac{2z}{R}]$$

إذاً

$$F_x = 0\ ;\ F_y = 0\ ;\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg_0(1-2z/R)$$

معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = 0\ ;\ \ m\ddot{y} = 0\ \ ;\ m\ddot{z} = -mg_0\ \ (1-2z/R)$$

(5) (أ) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$

(ب) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$

<u>الطريقة الأولى (أ)</u>: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ في حالة القوة المحافظة

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

(أ) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$

(ب)

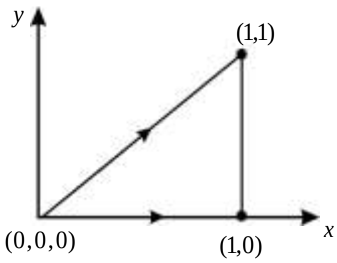
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-x)\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)$$

$$= \hat{i}\,(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(-z) \neq 0 = -2\hat{k} \neq 0$$

إذاً القوة غير محافظة.

<u>الطريقة الثانية</u>: استخدام الشغل عبر المسارات المختلفة:



(أ)

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (F_x d_x + F_y d_y)$$

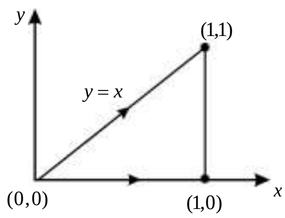
$$= \int_{(0,0)}^{(1,1)} xdx + ydy = [\frac{x^2}{2}]_0^1 + [\frac{y^2}{2}]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot dr = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x\,dx + y\,dy) + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (x\,dx + y\,dy)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

إذاً الشغل لا يعتمد على المسار الذي نتخذه، وعليه القوة محافظة.



(ب) هنا $F_y = -x \; ; \; F_x = y$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int (F_x d_z + F_y d_y)$$

الخط المباشر:

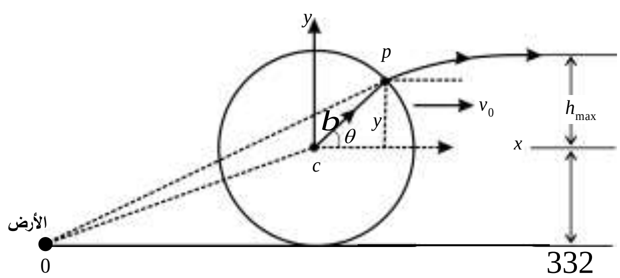
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx - \int_{(1,0)}^{(1,1)} x\,dy = \int_{(0,0)}^{(1,0)} xdx - \int_0^1 (x\,dx) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

الطريق غير المباشر:

$$[\int_{(0,0)}^{(1,0)} y\,dx - \int_{(1,0)}^{(1,0)} xdy] + [\int_{(1,0)}^{(1,1)} y\,dx - \int_{(1,0)}^{(1,1)} x\,dx = \int_0^1 dx - 0 + \int_0^1 (-(1)dy = (-y)_0^1 = -1$$

إذاً الشغل غير متساوي في الحالتين وعليه فإن القوة $\vec{F}$ في حالة (b) غير محافظة

(6)



كما مر سابقاً في الفصل الأول: تكون سرعة النقطة (أ) بالنسبة لشخص (0) على الأرض هي

$$\vec{v}_{0p} = \hat{i} v_0 (1 - \sin\theta) + \hat{j} v_0 \cos\theta \quad (1)$$

نفرض أن كتلته الطين انطلقت في اللحظة عند $t = 0$ ، $y = y_0$ حيث (مركبة سرعة الانطلاق في اتجاه y) هي $v_{0y} = v_0 \cos\theta$; $y_0 = b\sin\theta$. تعامل جسيم الطين كمقذوف يتحرك في مجال الجاذبية الأرضية (تسارع منتظم). إذاً

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \cos\theta - gt \quad (2)$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= b\sin\theta + (v_0 \cos\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

عند وصل المقذوف لأقصى إرتفاع تصبح مركبة السرعة الصادية = صفر، من معادلة (1) نحدد زمن الوصول إلى أقصي ارتفاع (t_m).

$$0 = v_0 \cos\theta - g t_m \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \cos\theta}{g} \quad (4)$$

نعوض في معادلة (3) لحساب أفقي ارتفاع $h_{\max}$

$$h_{\max} = y]_{t_m} = b\sin\theta + \frac{(v_0 \cos\theta)(v_0 \cos\theta)}{g} - \frac{1}{2} g (\frac{(v_0 \cos\theta)}{g})^2$$

$$= b\sin\theta + \frac{v_0^{\ 2} \cos^2\theta}{2g} \quad (5)$$

نلاحظ أن الدالة h هي دالة للزاوية (θ) وعليه يكون لها قيمة عظمى عند:

$$\frac{dh_{max}}{d\theta}=0\Rightarrow b\cos\theta+\frac{{v_0}^2}{2g}(2\cos\theta)(-\sin\theta)=0\Rightarrow$$

$$\sin\theta=bg/{v_0}^2 \qquad (6)$$

نعوض في معادلة h_{max} مع اختيار $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ، فنجد أن

$$h_{max}=b(\frac{gb}{v_0^2})+\frac{v_0^2}{2g}[1-(\frac{gb}{v_0^2})^2]=\frac{1}{2}[\frac{gb}{v_0^2}^2+\frac{v_0^2}{g}]$$

هذا أقصى ارتفاع عن مركز العجلة تصل إليه الطيف.

بالنسبة لسطح الأرض تكون $$h'_{max}=b+h_{max}+\frac{1}{2}[\frac{v_0^2}{g}+\frac{gb}{v_0^2}]$$

(7) نفرض مقاومة الهواء = $m\gamma v^2$ وعليه تصبح مقاومة الحركة بعد فرز المتغيرات:

$$m\ddot{x}=-m\gamma\,\dot{x}^2\Rightarrow\ddot{x}=-\gamma\,\dot{x}^2$$

وكذلك $$\ddot{z}=-\gamma\,\dot{z}^2-g \quad ، \quad \ddot{y}=-\gamma\,\dot{y}^2$$

حيث $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=-\gamma\,\dot{x}^2$. إذاً

$$\frac{d\dot{x}}{dx}=\gamma\,\dot{x}\Rightarrow\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=-\int_0^s dx$$

$$\ell n\,\dot{x}]_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}=-\gamma\,s\Rightarrow\ell n(\dot{x}/\dot{x}_0)=-\gamma\,s$$

ومنها نجد أن $$\dot{x}=\dot{x}_0\bar{e}^{\gamma s}$$

(8) من معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي المتجانس في بعدين نجد أن

$$x(t)=A\cos(wt+\alpha) \qquad (1)$$

$$y(t)=B\cos(wt+\beta)$$

نعوض بالشروط الابتدائية في كل معادلة مع أن $w=2$ بالفرض، فنجد أن

$x(0) = 2 = A\cos(0+\gamma) = A\cos\gamma$

$\boxed{\alpha=0}\ \dot{x}(0) = -A\sin[(wt_0)+\alpha]w \Rightarrow 0 = -A\sin\alpha \Rightarrow$

إذاً

$\boxed{A=2}\ 2 = A\cos 0 \Rightarrow$

$x(t) = 2\cos(2t+0) = 2\cos(2t)$

وكذلك بنفس الطريقة نجد $\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{2}}$ ، وعليه فإن $\beta = 135^\circ$

$$v = x^2 + 2y^2 + 4z^2 \tag{9}$$

إذاً

$$F_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x \ \ ; F_y = -\frac{\partial v}{\partial y} z = -4y$$

$F_x = -k_x x = -2x \Rightarrow \boxed{k_x = 2}\ ;\ w_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} = \sqrt{2}$

$F_y = -k_y y = -4y \Rightarrow \boxed{k_y = 4} \Rightarrow w_y = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$

$F_z = -8z = -k_z z = k_2 = 8 \Rightarrow w_z = \sqrt{8/1} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1\cos(w_x t+\alpha_1) = A_1\cos(\sqrt{2}t+\alpha_1) \\ y(t) &= A_2\cos(2t+\alpha_2) \\ z(t) &= A_3\cos(2\sqrt{2}t+\alpha_3) \end{aligned}\right\}$$

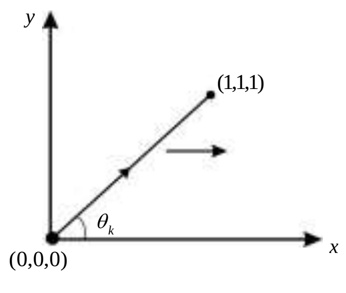
نستخدم الشروط الابتدائية لتحديد الثوابت في معادلة (1) على النحو:

$x(0)=0$ ، $y(0)=0$ ، $z(0)=0$

أما سرعة الجسم الابتدائية v_0 حيث $\vec{v}_0 = \hat{i}\dot{x}_0 + \hat{j}\dot{y}_0 + \hat{k}\dot{z}_0$

حيث المقدار للسرعة $=1$ والاتجاه $(1,1,1)$

$\dot{x}_0 = v_0\cos\theta_x$



$$\cos\theta_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\dot{x}_0 = \frac{v_0}{\sqrt{3}} = \boxed{1/\sqrt{3}}$$

وكذلك مربعات السرعة في اتجاه y واتجاه z عند $t=0$ هي $\dot{y}_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}}$ ، $\dot{z}_0 = 1/\sqrt{3}$

نعوض في معادلة (1)

$$0 = A_1\cos(\sqrt{2}x0+\alpha_1) \Rightarrow 0 = A_1\cos\alpha_1 \Rightarrow \ \alpha_1 = \pi/2$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = -A_1 w_x \sin(w_x t+\alpha_1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = -A_1(\sqrt{2})\sin(0+\pi/2) = -\sqrt{2}A_1\sin(\frac{\pi}{2})$$

إذاً

$$A_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

وعليه فإن $|A_1| = \sqrt{1/6}$

أكمل حل السؤال $y(t)$ ، $z(t)$ كما سبق نجد أن

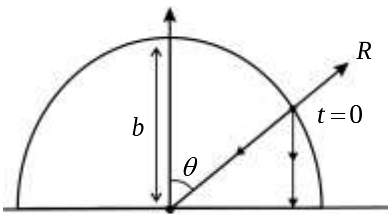
$$A_2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} : \ A_3 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,z = mg(b/2) \quad (10)$$

$$v^2 = g(b-2z)$$

$$f_r = -m\frac{v^2}{b} = -mg\cos\theta + R$$

حيث $\cos\theta = z/b$



إذاً

$$-m\frac{g}{b}(b-2z) = -mg(z/b) + R$$

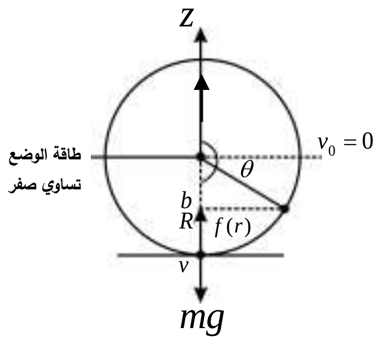
وعليه فإن $R = \frac{2mg}{b} - \frac{mv^2}{b}$

$$R = \frac{mg}{b}[z-(b-az)] = \frac{mg}{b}(3z-b)$$

تترك السطح عندما $R=0$ أي عندما $\boxed{z = b/3}$

(1) $$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = 0$$

نفرض أن الطاقة الوضع عند مستوى المركز = صفر



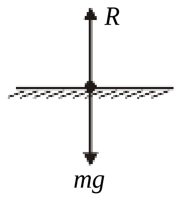
عند أسفل نقطة $z=-b$. إذاً

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgz = mgb$$

$$V = \sqrt{2gb}$$

لإيجاد رد الفعل عند أسفل نقطة

$$f_r = \frac{mv^2}{b} = -mg + R$$



إذاً $R = mg + m\frac{v^2}{b} = mg + 2mg = \boxed{3mg}$

(12) زمن الذبذبة في حالة السعة الكبيرة $\theta_0 \approx 30^\circ$ هو:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0(1+\frac{1}{16}A^2) \quad ; \quad \Delta T = T - T_0 = \frac{T_0}{16}A^2$$

الخطأ النسبي في زمن الذبذبة هو:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{16}A^2$$

$A=$سعة الذبذبة $=\theta_0$. نحول الزاوية إلى التقدير الدائري:

$$A = \frac{30}{180}\pi = \frac{\pi}{6} = 0.524$$

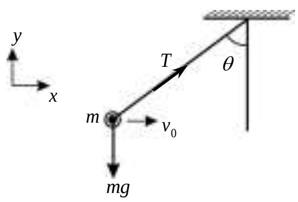
إذاً

$\Delta T/T_0 \quad \boxed{0.0327}$

أما الخطأ المئوي هو

$$\frac{\Delta T}{T_0} \times 100\% = 3.27\%$$

حل تمارين الفصل الرابع



(1) معادلة الحركة: (إهمال دوران الأرض):

$$"F" = m\ddot{r} = 0 \ ; \ F - m\vec{A}_0 = 0$$

$$m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_0 = 0 \qquad (1)$$

$$T - mg\ \hat{j} + (T\cos\theta)\ \hat{j} + (T\sin\theta)\hat{i} - m\, a_0\ \hat{i}$$

نساوي المركبات العادية بالصفر فنجد أن

$$T\cos\theta = mg \qquad (2)$$

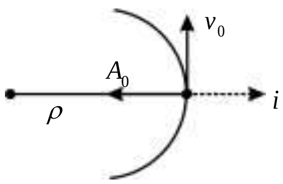
$$T\cos\theta = ma \qquad (3)$$

قسمة المعادلتين نحصل على:

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(a_0/g)$$

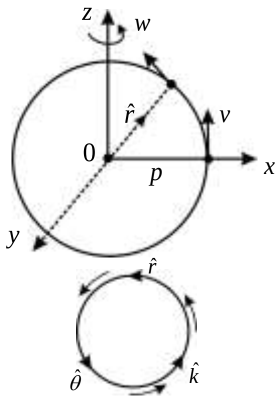
هنا يتسارع الجسم (القطار) نحو مركز المنحنى:

$$\vec{A}_0 = -(v_0{}^2/\rho)\hat{i} \quad \text{(نحو المركز)}$$



إذاً $\tan\theta = v_0^{\;2} / \rho g$

(2) معادلة الحركة للحشرة هي:



$$m\ddot{r} = F - 2mw\times\dot{r} - m(\dot{r}\times\dot{r})$$
$$-2mwx(w\times r) - mA$$

حيث $F =$ القوة الحقيقية $= m\vec{A}$ ،

$\vec{A}$ هو التسارع بالنسبة للمحاور المتحركة.

$$\vec{r} = b\vec{r} \Rightarrow \dot{r} = b\frac{d\hat{r}}{dt} = (b\dot{\theta})\hat{\theta} = v\hat{\theta}$$

حيث سرعة الحشرة في الاتجاه المماسي (v) ثابتة.

إذاً $\ddot{r} = 0$

$$\vec{w}\times\dot{r} = w\hat{k}\times(v\hat{\theta}) = wv(\hat{k}\times\hat{\theta}) = -wv\,\hat{r}$$

$$\vec{A}_0 = -v^2/b\,\hat{r} \qquad \text{(نحو مركز القرص)}$$

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = w\hat{k}\times(w\hat{k}\times b\hat{r}) = w^2 b\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{r}) = -w^2 b\hat{r}$$

وتصبح معادلة الحركة للحشرة كالآتي:

$$m\vec{A} + 2mvw\hat{r} + mw^2 b\hat{r} + \frac{mv^2}{b}\hat{r} = 0$$

إذاً

$$\vec{A} = -(\frac{v^2}{b} + 2wv + bw^2)\hat{r} \qquad (1)$$

حتى لا تنزلق الحشرة يجب أن يكون: $|F| \le \mu m \Rightarrow |\vec{A}| \le \mu g$

باعتبار الحركة على وشك الانزلاق: $\dfrac{v^2}{b} + 2wv + bw^2 = \mu\, g$

بحل هذه المعادلة بالنسبة v نحصل على:

$$v = -wb + \sqrt{b\mu g} \qquad (2)$$

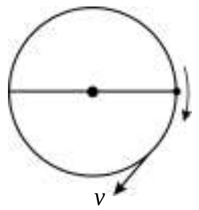
(الإشارة للجذر اعتبرت الموجبة لأن تعريف السرعة في الاتجاه الموجب)

أما في حالة الدوران مع عقارب الساعة : $\vec{v} = \hat{\theta}$

وتصبح قوة كوريولس

$$\vec{F}_{cm} = -2m\,\vec{w}\times\vec{v}$$

$$= -2m\,w\vec{k}\times(-v\cdot\hat{\theta}) = 2mv(\hat{k}\times\hat{\theta}) = 2m\,w\,v\,\hat{r}$$



وعليه تصبح معادلة(1)

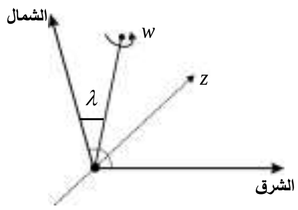
$$\vec{A} = -(\frac{v^2}{b} - 2wv + bw^2)\hat{r}$$

وحتى تكون الحشرة على وشك الانزلاق:

$$|A| = \mu g \Rightarrow \frac{v^2}{b} - 2wv + bw^2 = \mu g$$

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ v لنحصل على: $v =$ نهمل $wb + \sqrt{b\mu g}$

(3)



$$\vec{w} = \hat{j}(w\cos\lambda) + \hat{k}(w\sin\lambda)$$

$$\vec{v} = \hat{j}v_0 = (560\times10^3\,m/hr)\,\hat{j}$$

إذاً

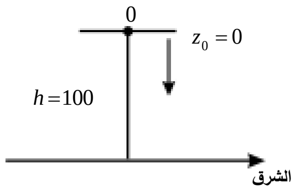
$$w_2 = w\sin\lambda = 7.3\times10^{-5}\sin 45 = 7.3\times10^{-5}(0.707) = 5.162\times10^{-5}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{w}\times\vec{v} = -2m\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{i} & \hat{i} \\ w_x & w_y & w_z \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix} = +2mw_z v\hat{i}$$

$$= (2)(1800kg)(5.162\times10^{-5})\frac{(560\times10^3)}{60\times60\sec} = 28.907\,kg/vewts$$

وتكون نحو الشرق.

(4)



$$x = \frac{1}{3} wg \cos \lambda t^3; \quad z = h = \frac{1}{2} gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

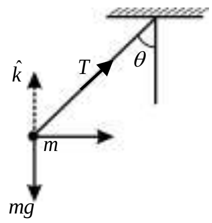
إذاً

$$x = \frac{1}{3} wg \cos \lambda (\frac{2h}{g})^{3/2} = (\frac{1}{3})(7.3 \times 10^{-5})(9.8)(0.707)(\frac{200}{9.8})^{3/2}$$

$$= 0.1554m$$ (الانحراف نحو المغرب)

(5) نفرض أن سرعة الطائرة $= \vec{v} = \hat{i} v$

معادلة الحركة للشاقول هي:



$$m\ddot{r} = 0 = \vec{F} - 2m\vec{w} \times \vec{v}$$

$$= (-mg\vec{k}) + \vec{T} - 2m\vec{w} \times \vec{v} \qquad (1)$$

حيث $T =$ الشد في الحبل

لإيجاد قوة كوريولس لاحظ أن

$$\vec{w} = \vec{j} w_y + \hat{k} w_z \Rightarrow \vec{w} \times \vec{v} = \hat{j}(vw_z) - \hat{k}(vw_y)$$

إذاً

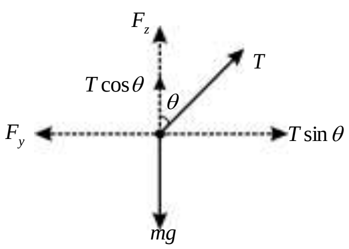
$$F_{cor} = -2m[\hat{j}(vw_z) - \hat{k}(vw_y)] = -\hat{j} F_y + \hat{k} F_z$$

حيث

$$F_y = 2mvw_z \quad ; \ F_z = 2mvw_y$$

$$w_z = w \cos \lambda \ ; \ w_x = 0 \quad ; \quad w_z = w \sin \lambda$$

الشاقول في وضع الاتزان منحرفاً عن العمود زاوية (θ): نحلل القوى المؤثرة على الشاقول. معادلات الإتزان:



$$T \sin \theta = F_y$$

$$T \cos \theta = mg - F_z$$

بالقسمة نحصل على:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{mg - F_z} = \frac{2mvw_2}{mg - 2mvw} = \frac{2vw_z}{g - 2vw_y} \qquad (2)$$

نحل المعادلة (2) بالنسبة لـ v:

$$g\tan\theta - 2v\tan\theta\, w_y = 2vw_2 \Rightarrow 2v[w_2 + w_y \tan\theta] = g\tan\theta$$

إذاً

$$v = \frac{g\tan\theta}{2(w_z + w_y \tan\theta)} \qquad (3)$$

$$v = \frac{g\tan\theta}{2(\cos\lambda + \sin\lambda + \tan\theta)} \qquad (4)$$

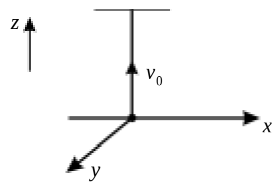
لكن $\theta = 0.1^\circ$ ، $45^\circ = \lambda$ ، $w = 7.3\times 10^{-5}$. إذاً

$$v = \frac{(9.8)\tan 0.1}{(2)(7.3\times 10^{-5})(\cos 45 + (\tan 0.1)\sin 45^\circ)} = 165.4$$

(6)

$$\Big(\underset{\text{ثابت}}{\frac{d\vec{w}}{dt}}\Big) = \Big(\underset{\text{متحرك}}{\frac{d\vec{w}}{dt}}\Big) + \Big(\frac{\vec{w}\times\vec{w}}{dt}\Big) = \Big(\underset{\text{المتحركة}}{\frac{d\vec{w}}{dt}}\Big)$$

(7)



$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$
$$\dot{x}_0 = 0 \ , \ \dot{y}_0 = 0 \ , \ \dot{z}_0 = v_0$$

من معادلات الحركة للمقذوف باعتبار تأثير دوران الأرض

$$x(t)=\frac{1}{3}wgt^{3}\cos\lambda-wt^{2}\dot{z}_{0}\cos\lambda$$

لإيجاد زمن التحليق (الصعود والهبوط) تستخدم قوانين الحركة تحت تأثير التسارع الثابت (g) وحيث أن

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^{2}+\dot{z}_{0}-w(\dot{x}_{0})\cos\lambda t$$

وعند وصول القذيفة إلى أقصي ارتفاع ثم العودة إلى نقطة القذف تكون $z(t)=0$

إذاً

$$0=-\frac{1}{2}gt^{2}+v_{0}t\Rightarrow \boxed{t=\frac{2v_{0}}{g}}$$

وعليه فإن

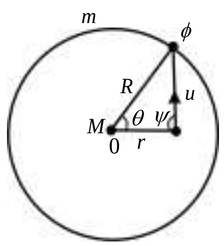
$$x(t)=\frac{1}{3}wg(\frac{2v_{0}}{g})^{2}\cos\lambda-w(\frac{2v_{0}}{g})^{2}v_{0}\cos\lambda=-\frac{4wv_{0}^{3}}{3g^{2}}\cos\lambda$$

حيث $\hat{i}$ يشير إلى اتجاه الشرق فإن القذيفة تسقط منحرفة نحو الغرفة مسافة

$$\frac{4wv_{0}^{3}}{3g^{2}}\cos\lambda$$

حل تمارين الفصل الخامس

(1) (أ)



$$F = \frac{GmM}{4Rr^2}\int_{R-r}^{R+r}\left(1+\frac{r^2-R^2}{u^2}\right)du$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2}\left\{[u]_{R-r}^{R+r} - \left[\frac{r^2-R^2}{u}\right]_{R-r}^{R+r}\right\}$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2}\left[(R+r)-(R-r)+\left[\frac{(r^2-R^2)}{R-r}-\frac{r^2-R^2}{R-r}\right]\right]$$

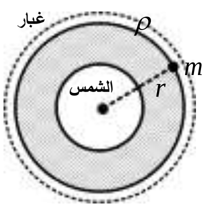
$$= \frac{GmM}{4Rr^2}[2r+[(R-r)-(R+r)]=0$$

(ب) باستخدام جهد الجاذبية الأرضية:

حيث c ثابت $\Phi = +\frac{Gm}{R} = c$. إذاً

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

(2) القوة المؤثرة على جسيم كتلة m على بعد (r) من مركز



الشمس هي: $\vec{F} = \vec{F}_s + F_d$

حيث $F_s =$ قوة جذب الشمس للجسم

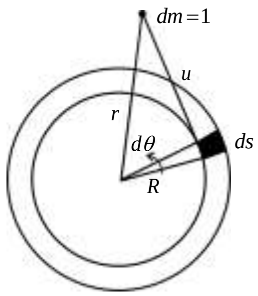
$F_d =$ قوة جذب الغبار للجسم ،

$$F_s = -\frac{GM_m}{r^2} \quad ; \quad F_d = -\frac{GM_d m}{r^2}$$

حيث $m_d = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ إذاً

$$\mathrm{F} = -\frac{GM_2 m}{r^2} - \frac{4}{3}\pi\rho r\, Gm$$

(3) نفرض أن كثافة الحلقة منتظمة وتساوي $\rho = m/2\pi R$



نعتبر عنصر (ds) على الحلقة حيث $ds = Rd\theta$

وكتلة العنصر $= dm$. إذاً

$$d\phi = \frac{Gdm(1)}{\mu} \qquad (1)$$

حيث $dm = \rho\, ds = \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{M}{2\pi} d\theta$

وكذلك $u = \sqrt{r^2 + R^2}$

$$\Phi = \int d\Phi = \int \frac{GMd\theta}{2\pi\sqrt{r^2+R^2}} = \frac{GM}{2\pi}\frac{(2\pi)}{[r^2+R^2]^{1/2}} = \frac{GM}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}e^{-k\theta} \qquad (4)$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{k}{a}e^{-k\theta} \;\; ; \;\; \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{k^2}{a}e^{-k\theta} = k^2 u$$

نعوض في معادلة المدار

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2\mu^2}$$

$$k^2u + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2} \Rightarrow f(1/u) = -mh^2(k^2+1)u^3$$

إذاً

$$f(r) = -\frac{mh^2(k^2+1)}{r^3}$$ (هذا قانون القوة المركزية)

لإيجاد $\theta(t)$: $h = r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{h}{a^2}e^{-2k\theta} \Rightarrow -\frac{d\theta}{e^{-2k\theta}} = -\frac{h}{a^2}dt$$

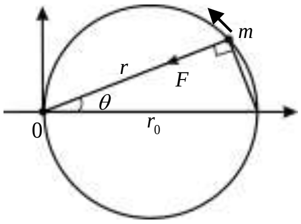
$$\frac{1}{2k}[e^{2k\theta}] = \frac{ht}{a^2} + c \;\; \int e^{2k\theta}\, d\theta = -\frac{h}{a^2}t + c \Rightarrow$$

أو $e^{2k\theta} = \frac{2kh}{a^2}t + 2kc$

بأخذ لوغاريتم كلا الطرفين نحصل:
$$2k\theta = \ell n[\frac{2kh}{a^2}t + 2kc]$$

إذاً
$$\theta = \frac{1}{2k}\ell n[\frac{2kh}{a^2}t + 2kc]$$

(5) نفرض أن قطر الدائرة (r_0)، كتلة الجسم (m)



يتحرك على محيط الدائرة وعلى بعد (r)

من مركز القوة F المتجه نحو (0).

إذاً $r = r_0 \cos\theta$

$$u = \frac{1}{r_0}\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{r_0 \cos\theta} \qquad (1)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{r_0}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{r_0}\cos^{-2}\theta\sin\theta$$

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = \frac{1}{r_0}[\cos^{-2}\theta(\cos\theta) + (+2)\cos^{-3}\sin^2\theta]$$

$$= \frac{1}{r_0}[\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}] = \frac{1}{r_0}[\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^3\theta}]$$

(بفك الأقواس والاختصار)
$$\frac{du^2}{d\theta^2} = \frac{1}{r_0\cos\theta}[1 + \frac{2}{\cos^2\theta} - 2]$$

$$= \frac{1}{r_0\cos\theta}[\frac{2}{\cos^2\theta} - 1] = u[2r_0{}^2u^2 - 1]$$

بالتعويض في معادلة المدار:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-f(1/u)}{mh^2u^2}$$

$$2r_0{}^2u^3 - u + u = \frac{-f(1/u)}{mh^2u^2}$$

إذاً

$$f(u^{-1}) = 2r_0^{\ 2}mh^2u^5 \Rightarrow f(r) = -\frac{-2r_0^{\ 2}mh^2}{r^5}$$

(5) حتى تكون القوة مجال مركزي يجب أن يكون ثابت $h = r^2\theta =$ أي أن

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{a^2\theta^6} = \frac{h}{a^2}\theta^{-6} \qquad (1)$$

بينما في السؤال المعطى $\theta = ct^2$. إذاً

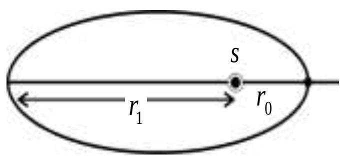
$$\frac{d\theta}{dt} = 3ct^2$$

حيث $t = (\frac{\theta}{c})^{1/3}$

$$\frac{d\theta}{dt} = 3c \cdot (\frac{\theta}{c})^{2/3} = 3c^{1/3}\theta^{2/3} \qquad (2)$$

معادلة (1) لا تساوي معادلة (2) وعليه القوة غير مركزية.

(6) $\frac{r_1}{r_0} = \frac{240.000}{4000} = 60$. إذاً



$$r_0 = \frac{1}{60}r_1 \qquad (1)$$

أستخدم المعادلة $r_1 = \frac{r_0(v_0/v_c)}{2-(v_0/v_c)^2}$ نجد أن

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{(v_0/v_c)^2}{2-(v_0/v_c)^2} = 60$$

نفر ض أن $(\frac{v_0}{v_c})^2 = x$. إذاً

$$60=\frac{x^2}{2-x^2}\Rightarrow x^2=120-60x^2\Rightarrow x^2=\frac{120}{61}$$

$$(\frac{v_0}{v_c})=\sqrt{\frac{120}{61}}=1.4026 \qquad (2)$$

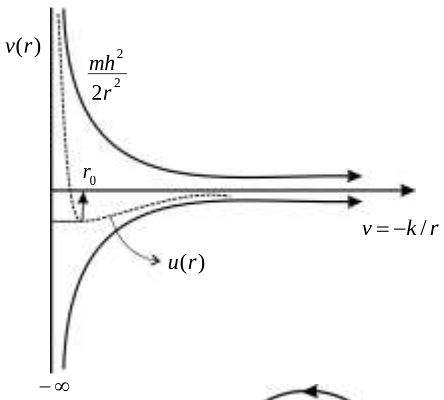
(ب) إذا أصبحت $(\frac{v_0}{v_c})=(0.99)(1.4026)=1.389$

فإن

$$r_1=\frac{(4000)[1.389]^2}{2-(1.389)^2}=1.09188\times 10^5\, mil$$

حيث الطاقة الحركية $= T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ ، $\dot{r}=$السرعة الشعاعية.

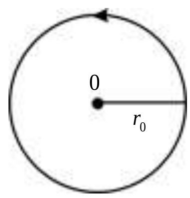
إذاً $T+u(r)=E$ لكن $u(r)=v(r)+\frac{mh^2}{2r^2}=$طاقة الجهد الفعال.



إذاً $u(r)$ نهاية صغرى عند $r=r_0$ ، وضع الاستقرار

ويكون المدار دائري.

ونجد r_0 من $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_0}=0$



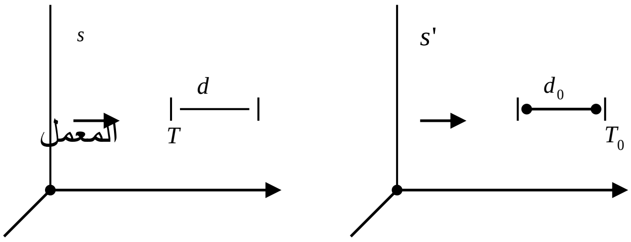
$$\frac{du}{dr}=+[\frac{k}{r^2}-\frac{2mh^2}{2r^3}]_{r=r_0}=0$$

إذاً $\frac{k}{r_0^2}=\frac{mh^2}{r_0^3}$ وعليه فإن

نصف قطر المدار الدائري= ثابت $= r_0=\frac{mh^2}{k}$ ويكون المدار مستقر.

حل تمارين الفصل السادس

(1)



(أ) الزمن الحقيقي لبناء الجسيم هو الزمن الذي يقاس في نظامه أي في (s') الذي يتحرك بسرعة $v = 0.96c$ وعليه فإن

$$T = kT_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} T_0$$

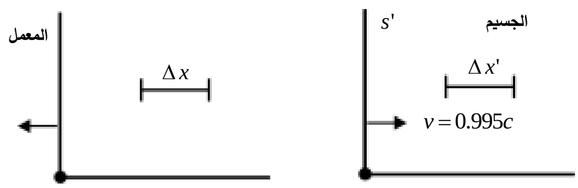
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0.96)^2}} (100 \times 10^{-6} s) = 3.57 \times 10^{-4} s$$

(ب) المسافة في العمل هي المسافة في النظام (s)

$$d = vT = (0.96c)(3.57 \times 10^4) = (0.96 \times 3 \times 10^8)(8.57 \times 10^4) = 10.28 \times 10^4 m$$

نلاحظ أن المسافة الظاهرية أكبر من المسافة الحقيقية أي أن $(d > d_0)$.

(2)



هنا طول المسار 1.25 كما بقية المراتب في $(s) \Leftarrow \Delta x = 1.25$ من معادلة تقليص الطول: (تحويل لورنتز)

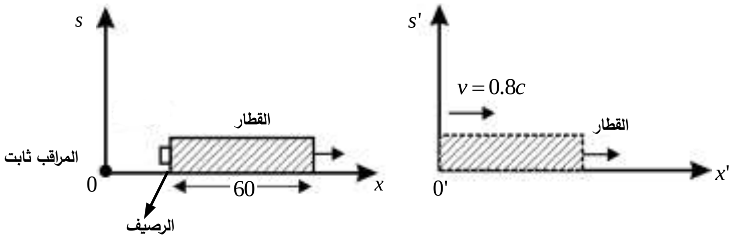
$$\Delta x = (x_2 - x_1) = k[(x_2' - x_1') + v(\Delta t')]$$

$$1.25 = k[0 + vt'] = \frac{vt'}{\sqrt{1 - v^2 c^2}}$$

إذاً

$$T_0 = t' = \frac{1.25\sqrt{1-(0.995)^2}}{0.995 \times 3 \times 10^8} = 4.2 \times 10^{-13}\sec$$

(3)



(أ) الزمن الذي يستغرق مرور القطار بنقطة ثابتة على الرصيف (في النظام s) هو

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{60}{0.8c} = \frac{60}{(0.8)(3 \times 10^8)} = 1.5 \times 10^{-7}\, s$$

(ب) الطول الحقيقي للقطار كما يقيسه أحد الركاب (في النظام s') هو $(\Delta x')$. إذاً

$$\Delta x' = k\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\Delta x) = \frac{60}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{60}{0.6} = 100$$

(ج) طول الرصيف كما يقيسه أحد ركاب القطار $(\Delta x')$

$$\Delta x = k(\Delta x') \Rightarrow 60 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\Delta x') \Rightarrow$$

$$\Delta x' = 60\sqrt{1-(0.8)^2} = (60)(0.6) = 36m$$

(تقلص طول الرصيف بالنسبة للمراقب في s' (الراكب)

(د) الزمن الذي يستغرقه مرور القطار كما يقيسه أحد الركاب $(\Delta t')$

$$\Delta t' = k(\Delta t) \Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1-(0.8)^2}}(2.5)$$

$$= \frac{2.3\times10^{-7}}{0.6s} = 4.1\times10^{-7}\ \text{sec.}$$

لاحظ تمدد الزمن بالنسبة للراكب في (s').

(هـ) الفارق الزمني بين مقدمة ومؤخرة القطار كما يراها المراقب في (s'):

هو $\Delta t'$. إذاً

$$\Delta t' = k(\Delta t - v\frac{\Delta x}{c^2})$$

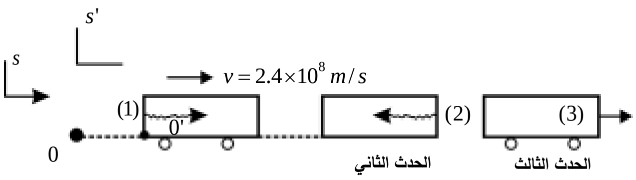
حيث بالنسبة للمراقب في (s') الثابت تنطبق المقدمة والمؤخرة في نفس اللحظة $\Delta t =$ صفر والمراكب في (s') يرى الرصيف منحرفاً إلى الوراء (اليسار) بسرعة $v = 0.8c$.

إذاً

$$\Delta t' = \frac{1}{1-(0.8)^2}.[0-(-\frac{0.8c)(60)}{c^2}]$$

$$= (\frac{1}{0.6})[+\frac{(0.8\times3\times10^8)(60)}{(3\times10^8)^2}] \quad = 2.7\times10^{-7}\ \text{sec.}$$

(4)



(أ)

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2.4\times10^8}{3\times10^8})^2}} = 1.66$$

طول العربة بالنسبة ل (0) في نظام (s) هو $\Delta x' = k(\Delta x)$. إذاً

$$30 = (1.66)(\Delta x) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{30}{1.66} = \boxed{18m}$$

لاحظ تقلص الطول كما يراه المراقب الثابت (s').

(ب) الفرق بين الحدثين (2،1) في الإحداثيات $(\Delta x')$ هو المســـار الذي يسـلكه الفوتون في العربة

$$\Delta x' = k\Delta x \Rightarrow \Delta x' = (1.66)\times(18) = 30m$$

بينما الفرق في الإحداثيات بين الحدثين (3،2) هو طول العربة في الاتجاه المعاكس إذاً

$$\Delta x' = -30m$$

والفرق في الإحداثيات بين الحدثين (3،1) هو $0 \quad \Delta x' = (30) + (-30) = 0$

(ج) في النظام (s): الفرق في الإحداثيات بين الحدثين (2،1) هو $\Delta x_{1,2}$. إذاً

$$\Delta x_{12} = k[\Delta x'_{1,2} + v\Delta t'] \quad ; \qquad \Delta t' = \frac{\Delta x'}{c}$$

$$= (1.66)[30 + 2.4\times10^8 \times \frac{30}{3\times10^8}]$$

$$= (1.66)[30 + 24] = 90m$$

أما الفرق في الإحداثيات (3،2) فهو

$$\Delta x_{23} = k[\Delta x'_{2,3} + v\Delta t']$$

$$= (1.66)[(-30) + \frac{2-4\times10^8\times30}{3\times10^8}] = (1.66)(-6) \approx -10$$

الفرق في الإحداثيات بالنسبة للحدثين (1،3)

$$\Delta x_{13} = \Delta x_{(1,3)} + \Delta x_{(2,3)} = 90 + (-10) = 80m$$

(د) الفارق الزمني في النظام (s')

$$\Delta t'_{1,2}=\frac{\Delta x'_{1,2}}{c}=\frac{30}{3\times10^{8}}=10^{-7}\,s$$

$$\Delta t'_{2,3}=\frac{30}{3\times10^{8}}=10^{-7}\,s$$

إذاً
$$\Delta t'_{2,3}=\Delta t'_{1,2}+\Delta t'_{2,3}=2\times10^{-7}\,s$$

في النظام S:

$$\Delta t_{1,2}=\frac{\Delta x_{1,2}}{v}=\frac{90}{2.4\times10^{8}}=3.75\times10^{-7}\,s$$

$$\Delta t_{2,3}=\frac{\left|\Delta x_{2,3}\right|}{v}=\frac{10}{2.4\times10^{8}}=0.41\times10^{-7}\,s$$

$$\Delta t_{1,3}=\Delta t_{1,2}+\Delta t_{2,3}=3.75\times10^{-7}+0.41\times10^{-7}=4.16\times10^{-7}$$

(5) الطاقة الكلية E:

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{938Mev}{\sqrt{1-(0,8)^2}}=1563.3Mev$$

$$E_k=E-E_0=1563.3-938=625.3Mev$$

$$p=\frac{\sqrt{E^2-E_0{}^2}}{c}=\frac{25Mev}{3\times10^{8}}$$

(6)

$$E=E_k-E_o=10+0.511=10.511mev$$

$$E=E_0\Big/\sqrt{1-(v/c)^2}\Rightarrow\frac{v}{c}=\sqrt{1-(E_0/E)^2}$$

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-(\frac{0.511}{10.511})^2}=0.998$$

إذاً
$$\boxed{v=0.998c}$$

$$P=\frac{\sqrt{E^2-E_0{}^2}}{c}=\frac{10.498Mev}{c}=\frac{10.498Mev}{3\times10^{8}\,m/s}$$

(7) المرحلة الأولي تتغير السرعة من صفر إلى $0.99c$. إذاً

$$E_{k_1}=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-m_0c^2=m_0c^2[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1]$$

$$=0.511[\frac{1}{\sqrt{1-(0.99)^2}}-1]=3.11Mev$$

في المرحلة الثانية تتغير السرعة من $0.99c$ إلى $0.999c$. إذاً

$$E_{k_2}=m_0c^2[\frac{1}{\sqrt{1-(0.999)^2}}-1]=0.511Mev\ [21.366]=10.918Mev$$

حل تمارين الفصل السابع

(1) (أ)

$$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{M}\Sigma m_i\vec{r}_i=\frac{1}{3}[1+\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3]=\frac{1}{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{j}+\hat{k}+\hat{k})$$

$$=\frac{1}{3}(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}) \qquad (1)$$

$$\vec{v}_{cm}=\frac{1}{M}\Sigma m_i\vec{r}=\frac{1}{3}[m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3]=\frac{1}{3}(2\hat{i}+z\hat{j}+2\hat{k})$$

$$\vec{P}=M\,\vec{v}_{am}=(3)[\frac{1}{3}(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})]=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

(ب)
$$T=\frac{1}{2}\Sigma m_iv_i^2=\frac{1}{2}[v_1^2+v_2^2+v_3^2]$$

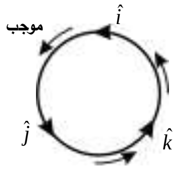
$$v_1^2=\vec{v}_1.\vec{v}_1=4 \quad , \quad v_2^2=\vec{v}_2.\vec{v}_2=1 \quad , \quad v_3^2=\vec{v}_3.\vec{v}_3=3$$

$$T = \frac{1}{2}[4+1+3] = 2$$

(ج) $$L = \sum_{1}^{3} \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

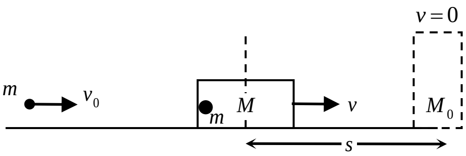
$$= [(\hat{i} + \hat{j}) \times 2\hat{i}] + [(\hat{j} + \hat{k}) \times \hat{j}] + [\hat{k} \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})]$$

$$= -2\hat{k} + (-\hat{i}) + (\hat{j} - \hat{i}) = -2\hat{i} + \hat{j} - 2k$$



القاعدة للضرب: $\begin{pmatrix} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{i} = -k \end{pmatrix}$

(2)



قانون حفظ الزخم الخطي

$$mv_0 = (M + m)V \qquad (1)$$

$$V = \frac{mv_0}{M+m}$$

الطاقة الابتدائية للجسمين بعد الالتحام

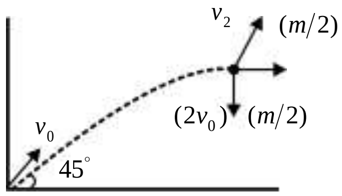
$$T = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)(\frac{m}{M+m}v_0)^2 = \frac{m_0{}^2 v_0{}^2}{2(M+m)} \qquad (2)$$

الشغل المبذول ضد قوة الاحتكاك=التغير في الطاقة الحركية. عند التوقف

$$w = T_0 - T_f \quad T_f = 0 \text{ ،} v = 0$$

الشغل = القوة × المسافة = قوة الاحتكاك × المسافة حتى يقف

$$\mu(M+m)gs = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0{}^2}{(M+m)} \Rightarrow s = \frac{m^2 v_0{}^2}{2\mu g(M+m)^2}$$



(3) عند قمة المسار تكون السرعة الأفقية

للقذيفة مثل الانشطار =

$$\vec{v} = v_0 \cos 45^\circ \hat{i} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{i} = 0.757 v_0$$

بعد الانشطار نطبق قانون حفظ الزخم (بصورة المتجهات)

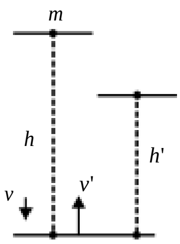
$$\hat{i}\, m v_0 (\cos 45^\circ) = -\hat{j}(\frac{m}{2})(2v_0) + (\frac{m}{2}\vec{v}_2)$$

بالاختصار والترتيب نجد

$$\boxed{\vec{v}_2 = v_0\sqrt{2}\hat{i} + 2v_0\hat{j}}$$

$$|v_2| = \sqrt{(v_0 v_2)^2 + (2v_0)^2} = \boxed{2.54 v_0}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2v_0}{\sqrt{2v_0}} = \sqrt{2} = 1.4 \Rightarrow \theta = 54^\circ 74$$



(4) نستخدم قانون حفظ الطاقة لتحديد سرعة ارتداد الكرة بعد كل ضربة مع الأرض.

$mgh = \frac{1}{2}mv^2$. إذاً

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

وبعد الارتداد: قانون حفظ الطاقة:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh'$$

$$v = \sqrt{2gh'} \qquad (2)$$

إذاً معامل الارتداد: (الأرض ساكنة $v_2 = 0\ ,\ v_2' = 0$)

$$\varepsilon = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2gh'}{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \Rightarrow \boxed{h' = \varepsilon^2 h}$$

وهكذا بعد كل ارتداد. إذاً $h'' = \varepsilon^2 h' = \varepsilon^2 . \varepsilon^2 h = \varepsilon^4 h$

مجموع المسافة المقطوعة إلى أعلى: $h''' = \varepsilon^2 h'' = \varepsilon^6 h$

$$H = h + 2h' + 2h'' + \cdots = h[1 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 + \cdots] \qquad (3)$$

يمكن كتابة المقدار دخل القوس على صورة مجموع متسلسلة

$$1 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 + \cdots = (-1) + 2 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4$$

$$= (-1) + 2\varepsilon^0 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 \cdots = (-1) + \sum_{n=0}^{\infty} 2\varepsilon^{2n} \qquad (4)$$

إذاً

$$H = h[(-1) + \sum_{n=0}^{\infty} 2\varepsilon^{2n}]$$

من العلاقة للمتسلسلة الهندسية

$$\sum ar^n = \frac{a}{1-r}\ , \ |r| < 1$$

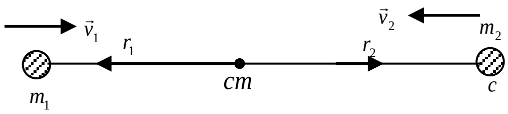
إذاً

$$\sum 2\varepsilon^{2n} = \frac{2}{1-\varepsilon^2} \ \cdots$$

وعليه فإن

$$H = h[(-1) + \frac{2}{1-\varepsilon^2}] = h[\frac{-1+\varepsilon^2+2}{1-\varepsilon^2}] = h(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2})$$

(5)



الطاقة الحركية للمنظومة

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (1)$$

نبدأ من المطلوب أثباته:

$$T = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

نعوض بدل $m = m_1 + m_2$ ، $V = v_2 - v_1$ ، $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$T = \frac{1}{2} m[\frac{m_1 v_1 + m_1 v_2}{m_1 + m_2}]^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2m}(m_1{}^2 v_2{}^2 + m_2{}^2 v_2{}^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + m_1 \cdot m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)]$$

$$= \frac{1}{2m}[(m_1{}^2 v_1{}^2 + m_1 m_2 v_1{}^2) + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2$$
$$= \frac{1}{2m}(m_1 v_1{}^2 (m) + m_2 v_2{}^2 m] = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2$$

(6)

$$Q = (\frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2) - (\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2)$$
$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1{}^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2{}^2 - v_2'^2)$$

$$= \frac{1}{2} m(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v_2')(v_2 + v_2') \quad (1)$$

من قانون حفظ الزخم الخطي

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

إذاً $m_1 (v_1 - v_1') + m_2 (v_2' - v_2')$

وعليه فإن

$$v_1 - v_1' = \frac{m_2}{m_1}(v_2' - v_2) \quad (2)$$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1) نجد أن

$$Q = \frac{1}{2} m_2 (v_2' - v_2)[(v_2 + v_2') - (v_1 - v_1')]$$

نعوض بدل v_1' , v_2' بدلالة ε , $v_1 - v_1$ فنجد أن

$$v_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2) v_1 + m_2 (1 + \varepsilon) v_2}{(m_1 + m_2)} \quad (3)$$

$$v_2{}^1 = [m_1 (1 + \varepsilon) v_1 + (m_2 - \varepsilon m_1) v_2] / m_1 + m_2)$$

بالتعويض بدل v_2 من هذه العلاقة نجد أن

$$v_2 - v_2' = \frac{m_1 (v_1 - v_2)(1 + \varepsilon)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V (1 + \varepsilon)}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

وكذلك نجد مقدار

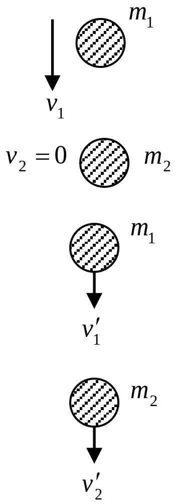
$$(v_2+v_2')-(v_1+v_1')=(v_2-v_1)(1+\varepsilon)=V(1+\varepsilon) \qquad (5)$$

نعوض في معادلة (2) بدلالة معادلتي (4) ، (5) لنحصل على

$$Q=\frac{m_2 m_1 V(1+\varepsilon)}{2(m_1 m_2)}\cdot V(1+\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{2}\mu V(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)=\frac{1}{2}\mu V^2(1-\varepsilon^2)$$

حيث $V=v_2-v_1$ السرعة النسبية للجسمين.



(7) قانون حفظ الزخم الخطي

إذاً . $m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2'$

$$v_1'=v_1-\frac{m_2}{m_1}v_2' \qquad (1)$$

بتربيع الطرفين ينتج

$$v_1'^2=v_1^2-2\frac{m_2}{m_1}v_1v_2'+(\frac{m_2}{m_1}v_2')^2 \qquad (2)$$

قانون حفظ الطاقة $(1=\varepsilon)$ تصادم مرن

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_1'^2 \qquad (3)$$

نعوض من معادلة (2) لحذف v_1' لنحصل على:

$$\frac{1}{2}m_1v_1{}^2=\frac{1}{2}m_1[v_1{}^2-\frac{2m_2}{m_1}v_2'v_1+(\frac{m_2}{m_1})^2v_2'{}^2]+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

مع الاختصار نجد أن:

$$v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{2m_1v_1}{m} \qquad (4)$$

الخسارة في الطاقة للجسم الأول $\Delta T=T_1-T_1'$ = الطاقة التي أكتسبها الثاني بعد التصادم

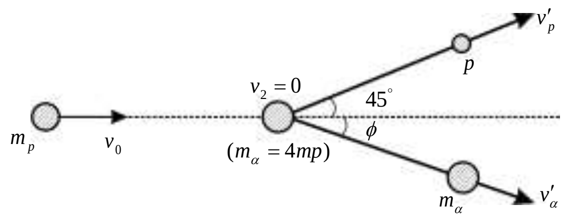
$$\Delta T = T_1 - T_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^{\,2}$$

$$= \frac{2m_1\, m_1 m_2\, v_1^2}{(m_1 + m_2)(m)} = \frac{2m_1\, \mu\, v_1^2}{m} = \frac{1}{2} m_2 \cdot \left(\frac{2m_1 v_1}{m}\right)^2 = \frac{2m_1 m_2}{m_2} v_1^2 \qquad (5)$$

إذاً

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{(2m_1\, \mu v_1^2)/m}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \boxed{4\mu/m}$$

(8)



قانون حفظ الزخم الخطي في الاتجاهات الأفقية والرأسية:

$$m_p v_0 = m_p v_p \cos 45 + (4mp) v_\alpha' \cos\phi$$

$$v_0 = (v_p^2 / \sqrt{2}) + 4v_\alpha' \cos\phi \qquad (1)$$

$$4v_\alpha' \cos\phi = v_0 - (v_p' / \sqrt{2}) \qquad (2)$$

إذاً

$$0 = m_p\, v_p' \sin 45 - 4m_p v_\alpha' \sin\phi$$

$$4v_\alpha' \sin\phi = v_p' / \sqrt{2} \qquad (3)$$

تربيع المعادلتين (2) , (3) ثم الجمع نحصل على:

$$16v_\alpha'^{\,2} = v_0^{\,2} - \sqrt{2} v_0 v_p' + v_p'^2 \qquad (4)$$

معادلة حفظ الطاقة تعطي:

$$\frac{1}{2} m_p v_p^{\,2} = \frac{1}{2} m_p v_p'^{\,2} + \frac{1}{2}(4m_p) v_p'^{\,2} \qquad (5)$$

$$4v_x'^{\,2} = v_0^{\,2} - v_p'^{\,2} \qquad (6)$$

نحل معادلة (4) ، مع معادلة (6)

$$0 = -3v_0{}^2 - \sqrt{2}v_0 v'_p + 5v'_p{}^2 \qquad (7)$$

$$v'_p = \frac{\sqrt{2}v_0 \pm \sqrt{(2v_0{}^2) + 60v_0{}^2}}{10} = \frac{v_0}{10}(\sqrt{2+}\sqrt{62}) = 0.929v_0$$

أما الاتجاه لانحراف جسيم البروتون فهو $\tan 45 = 1$

$$(v'_p)_x = 0.929v_0 \cos 45 = \frac{0.929v_0}{\sqrt{2}} = 0.65v_0 \quad ; \ (v'_p)_y = 0.65v_0$$

ثم نجد v'_α من معادلة (6) حيث

$$v'_\alpha = \frac{1}{2}(v_0{}^2 - v'^2_0)^{1/2} \ = \frac{v_0}{2}[(1-(0.929)^2] = \boxed{0.185v_0}$$

أما اتجاه الانحراف لجسيم (α) نجده بقسمة معادلة (3) على معادلة (2)

$$\tan\phi = \frac{v'_p/\sqrt{2}}{v_0 - v'_p/\sqrt{2})} = \frac{0.9288}{\sqrt{2}-0.928} = 1.91 \Rightarrow \phi = 62.41$$

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta} \qquad (9)$$

لكن $\gamma = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$ ، $\phi_1 = 45$ إذاً

$$\tan 45 = \frac{\sin\theta}{(1/4) + \cos\theta}$$

$$1 = \frac{4\sin\theta}{1+4\cos\theta} \Rightarrow 1 + 4\cos\theta = 4\sin\theta$$

وحيث أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ فإذا فرضنا أن $x = \cos\theta$ ، نجد أن

$$1 + 4x = 4\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

وبتربيع طرفي معادلة (1) $\quad 1 + 16x^2 + 8x = 16(1-x^2)$

$$32x^2 + 8x - 15 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8 \pm \sqrt{(8)^2 32(15)(1)}}{64} == -0.125 \pm 0.696 = 0.571$$

الجذر الموجب هو الذي يحقق كون θ زاوية حادة

$$\cos\theta = 0.571 \qquad \Rightarrow \boxed{\theta = 55.2^\circ}$$

(10) في حالة التصادم غير المرن $(Q \neq 0)$ نجد أن

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}[1 - \frac{Q}{T}(1 + m_1/m_2]^{-\frac{1}{2}} \quad = \frac{1}{4}[1 - \frac{5}{16}]^{-1/2} = 0.3015$$

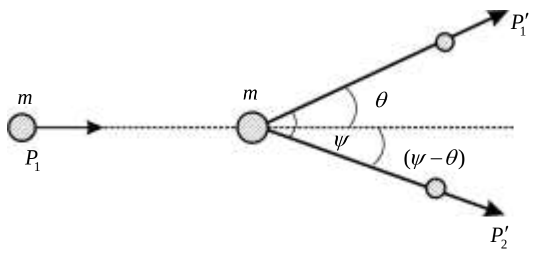
ثم تستخدم العلامة:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta}$$

$$1 = \frac{\sin\theta}{0.3 + \cos\theta} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{0.3 + x} + \ 0.3 + x = \sqrt{1 - x^2}$$

التربيع وحل المعادلة يعطي $\boxed{\theta = 57.3^\circ}$

(11)



زاوية انحراف الأول $= \theta$

زاوية انحراف الثاني $= (\psi - \theta)$

قانون حفظ الزخم الخطي

في الاتجاهين الأفقي والرأسي:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_1'\cos\theta + P_2'\cos(\psi - \theta) \\ 0 &= P_1'\sin\theta - P_2'\sin(\psi - \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

أستخدم قانون الزاوية المركبة معادلة (1) تؤول إلى:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_1'\cos\theta + P_2'(\cos\psi\ \cos\theta + \sin\psi\ \sin\theta) \\ 0 &= P_1'\sin\theta - P_2'(\sin\psi\ \cos\theta - \cos\psi\ \sin\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

تربيع معادلتي (2) مع ملاحظة $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ تم جمع المعادلتين معاً:

$$P_1^2 = P_1'^2 + P_2'^2 + 2P_1'P_2'\cos\psi \qquad (3)$$

ومن قانون حفظ الطاقة

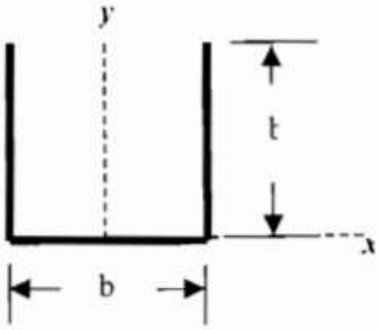
$$\frac{P_1^2}{2m}=\frac{P_1'^{\,2}}{2m}+\frac{P_1'^{\,2}}{2m}+Q$$ ،

$$Q=\frac{1}{2m}[P_1^{\,2}-(P_1'^{\,2}+P_2'^{\,2})] \qquad (4)$$

نعوض في معادلة (4) من معادلة (3) نجد أن:

$$Q=\frac{1}{2m}[2P_1'P_2'\cos\psi]=\frac{P_2'P_1'}{m}\cos\psi$$

(a) اذا كانت m كتلة السلك الكلية ، فأن كل تكون كتلة كل ضلع تساوي $m/3$ وتكون احداثيات مركز كتلة كل ضلع:

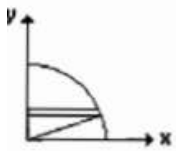


$$\left(-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right),\ (0,0).\ \text{and}\ \left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)\ \ldots$$

$$x_{cm}=\frac{1}{m}\left[-\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{m}{3}\right)+0+\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{m}{3}\right)\right]=0$$

$$y_{cm}=\frac{1}{m}\left[\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{m}{3}\right)+0+\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{m}{3}\right)\right]=\frac{b}{3}$$

(b)



$$ds=xdy=\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}dy$$

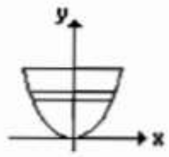
$$y_{cm}=\frac{1}{m}\int_0^b \rho y\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}dy$$

$$y_{cm}=\frac{-\frac{\rho}{2}\int_{y=0}^{y=b}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(b^2-y^2\right)}{\frac{1}{4}\pi b^2\rho}$$

$$y_{cm}=\frac{4b}{3\pi}$$

From symmetry, $x_{cm}=\frac{4b}{3\pi}$

(c)



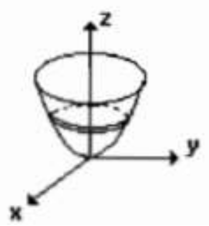
The center of mass is on the y-axis.

$$ds = 2xdy = 2(by)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$y_{cm} = \frac{\int_0^b 2\rho y (by)^{\frac{1}{2}}\,dy}{\int_0^b 2\rho (by)^{\frac{1}{2}}\,dy} = \frac{\int_0^b y^{\frac{3}{2}} dy}{\int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy}$$

$$y_{cm} = \frac{3b}{5}$$

(d) بسبب التماثل فأن مركز الكتلة يقع على محور- z



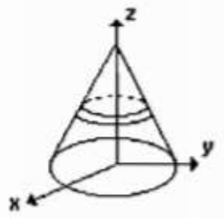
The center of mass is on the z-axis.

$$dv = \pi r^2 dz = \pi\left(x^2 + y^2\right)dz = \pi bzdz$$

$$z_{cm} = \frac{\int_0^b \rho z \pi bzdz}{\int_0^b \rho \pi bzdz} = \frac{\int_0^b z^2 dz}{\int_0^b zdz}$$

$$z_{cm} = \frac{2}{3}b$$

(e)



The center of mass is on the z-axis.

α is the half-angle of the apex of the cone. $r_\circ$ is the radius of the base at $z = 0$ and r is radius of a circle at some arbitrary z in a plane parallel to the base.

$$\tan\alpha = \frac{r_\circ}{b} = \frac{r}{b-z}\text{, a constant}$$

$$dv = \pi r^2 dz = \pi(b-z)^2 \tan^2\alpha\, dz$$

$$m = \rho\frac{1}{3}\pi r_\circ^2 b = \frac{1}{3}\pi\rho b^3 \tan^2\alpha$$

$$z_{cm} = \frac{\int_0^b \rho z\pi(b-z)^2 \tan^2\alpha\, dz}{\frac{1}{3}\pi\rho b^3 \tan^2\alpha} = \frac{3}{b^3}\int_0^b \left(b^2 z - 2bz^2 + z^3\right)dz$$

$$z_{cm} = \frac{b}{4}$$

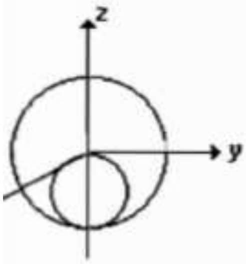
(8.2) حيث يبعد عنصر الطول dxعن الطرف مسافة x ، لذلك يكون مركز الكتلة :

$$x_{cm} = \frac{\int \rho x dx}{\int \rho dx} = \frac{\int_0^b cx^2 dx}{\int_0^b cx dx}$$

$$x_{cm} = \frac{2b}{3}$$

(8.3)

The center of mass is on the z-axis. Consider the sphere with the cavity to be made



of a (i) solid sphere of radius a and mass M_s, with its center of mass at $z=0$, and (ii) a solid sphere the size of the cavity, with mass $-M_c$ and center of mass at $z=-\frac{a}{2}$. The actual sphere with the cavity has a mass $m=M_s-M_c$ and center of mass z_{cm}.

$$0=\frac{1}{M_s}\left[M_c\left(-\frac{a}{2}\right)+m\,z_{cm}\right]$$

$$M_s=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\,,\ M_c=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\rho$$

$$0=\frac{1}{a^3}\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^3\left(-\frac{a}{2}\right)+\left[a^3-\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]z_{cm}\right\}$$

وبحل المعادلة نحصل على مركز الكتلة $z_{cm}=a/14$.

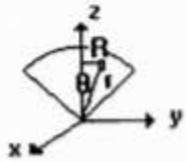
(8.4)

(a)

$$\text{(a) } I_z=\sum_i m_i R_i^2=\frac{m}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+0+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$I_z=\frac{mb^2}{6}$$

(b)



$$ds = rd\theta dr\ ,\ R = r\sin\theta$$

$$I_z = \int R^2 \rho ds$$

$$I_z = \rho \int_{r=0}^{r=b} r^2\, rdr \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$I_z = \frac{\rho b^4}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta$$

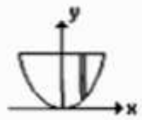
$$\left[\int \sin^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]$$

$$I_z = \frac{\rho b^4}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$m = \frac{1}{4}\rho\pi b^2$$

$$I_z = \frac{mb^2}{4\pi}(\pi - 2)$$

(c)



$$ds = hdx = \left(b - \frac{x^2}{b}\right)dx$$

Where the parabola intersects the line $y = b$.

$$x = (by)^{\frac{1}{2}} = \pm b$$

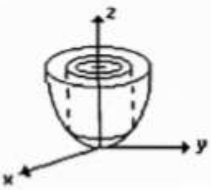
$$I_y = \int_b^b x^2 \rho \left(b - \frac{x^2}{b}\right)dx = \rho \int_b^b \left(bx^2 - \frac{x^4}{b}\right)dx$$

$$I_y = \frac{4}{15}\rho b^4$$

$$m = \int_b^b \rho \left(b - \frac{x^2}{b}\right)dx = \frac{4}{3}\rho b^2$$

$$I_y = \frac{1}{5}mb^2$$

(d)



$$dv = 2\pi R h dR$$
$$h = b - z$$

$$R = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(bz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dR = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz$$

$$I_z = \int R^2 \rho dv = \int_0^b bz\rho 2\pi \left(bz\right)^{\frac{1}{2}} \left(b - z\right) \frac{1}{2}\left(\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz$$

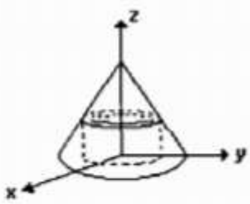
$$I_z = \pi\rho b^2 \int_0^b \left(bz - z^2\right) dz = \frac{1}{6}\pi\rho b^5$$

$$m = \int \rho dv = \int_0^b \rho 2\pi \left(bz\right)^{\frac{1}{2}} \left(b - z\right) \frac{1}{2}\left(\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz$$

$$m = \pi\rho b \int_0^b \left(b - z\right) dz = \frac{1}{2}\pi\rho b^3$$

$$I_z = \frac{1}{3} m b^2$$

(e)



α is the half-angle of the apex of the cone. r_0 is the radius of the base at $z = 0$ and r is radius of a circle at some arbitrary z in a plane parallel to the base.

$$\tan\alpha = \frac{R_0}{b} = \frac{R}{b-z}\text{, a constant}$$

$$dv = 2\pi RhdR = 2\pi\frac{(b-z)R_0}{b}zdR$$

Since $R = \frac{(b-z)R_0}{b}$, $dR = -\frac{R_0}{b}dz$. and the limits of integration for $R = 0 \to R_0$ correspond to $z = b \to 0$

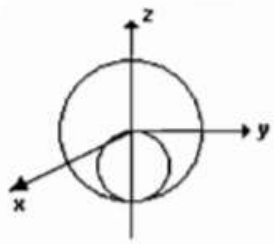
$$I_z = \int R^2\rho dv = \int_b^0 \frac{(b-z)^2 R_0^2}{b^2}\rho 2\pi\frac{(b-z)R_0}{b}z\left(-\frac{R_0}{b}\right)dz$$

$$I_z = +2\pi\rho\frac{R_0^4}{b^4}\int_0^b\left(b^3z - 3b^2z^2 + 3bz^3 - z^4\right)dz = \frac{1}{10}\pi\rho R_0^4 b$$

$$m = \rho\frac{1}{3}\pi R_0^2 b$$

$$I_z = \frac{3}{10}mR_0^2$$

(8.5) لنفرض ان m, m_c, m_s هي كتل الجسم المجوف ، كتلة الجسم بدون تجويف ، وكتلة التجويف على الترتيب. وعليه يكون



$$m = M_s - M_c = \frac{4}{3}\pi a^3\rho - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\rho = \frac{7}{8}\frac{4}{3}\pi a^3\rho$$

$$M_s = \frac{8}{7}m \text{ and } M_c = \frac{1}{7}m$$

$$I_s = I_c + I$$

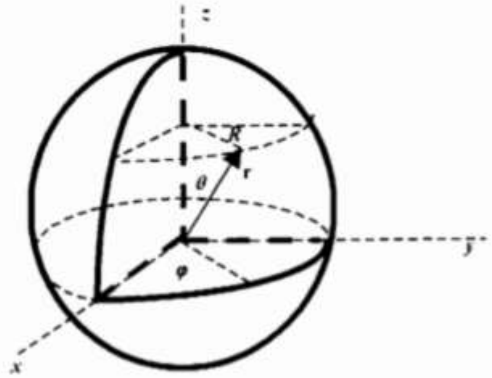
$$\frac{2}{5}M_s a^2 = \frac{2}{5}M_c\left(\frac{a}{2}\right)^2 + I$$

$$I = \frac{2}{5}\left(\frac{8}{7}m\right)a^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{7}m\right)\frac{a^2}{4} = \frac{31}{70}ma^2$$

(8.6)

يكون عزم القصور الذاتي للمثمن حول الحافة المستوية كما يلي

$$I_z = \int R^2 \rho dv \text{ where } R^2 = x^2 + y^2$$



$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$R^2 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta$$

Let a = radius of sphere

$$I_z = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\theta \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$I_z = \rho \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^3\theta d r d\theta$$

$$I_z = \frac{1}{10} \rho \pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta$$

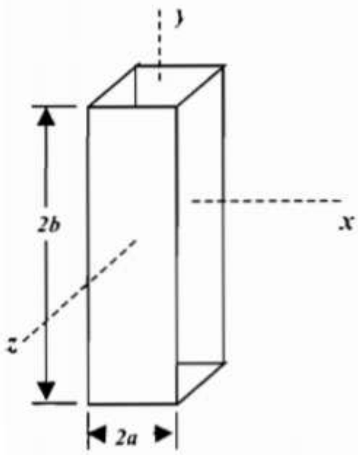
$$\left[\int \sin^3\theta d\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]$$

$$I_z = \frac{2}{30} \rho \pi a^5$$

$$m = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi a^3 \rho = \frac{1}{6}\pi a^3 \rho$$

$$I_z = \frac{2}{5} m a^2$$

(8.7) في حالة متوازي المستطيلات



$dv = h dx dy$ $\quad h$ is the length of the box in the z-direction

$$R = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

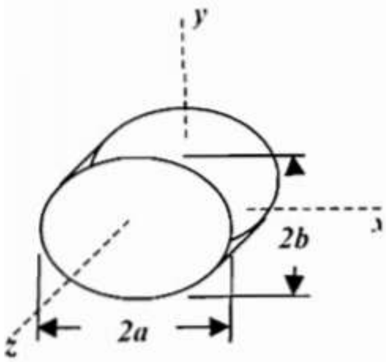
$$I_z = \int R^2 \rho dv = \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=-b}^{y=b} \left(x^2 + y^2\right) \rho h dx dy$$

$$I_z = \rho h \int_{-a}^{a} \left(2bx^2 + \frac{2b^3}{3} \right) dx = \frac{4}{3} \rho hab\left(a^2 + b^2\right)$$

$$m = \rho(2a)(2b)h = 4\rho abh$$

$$I_z = \frac{m}{3}\left(a^2 + b^2\right)$$

في حالة الأسطوانة البيضاوية



Again $dv = h\,dx\,dy$, and $R = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

On the surface, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x = \pm a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_z = \int R^2 dv = \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{x=a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(x^2 + y^2\right) \rho h\,dx\,dy$$

$$I_z = \rho h \int_{-b}^{b} \left[\frac{2}{3}a^3\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} y^2\right] dy$$

$$= 2\rho h \frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{3b^2} \int_{-b}^{b}\left(b^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy + \int_{-b}^{b}\left(b^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} y^2 dy\right]$$

بأستخدام جدوال التكاملات نحصل على التالي

$$\int\left(b^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{y}{4}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}b^2y\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}b^4\sin^{-1}\frac{y}{b}$$

$$\int\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}y^2dy=-\frac{y}{4}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{b^2y}{8}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{b^4}{8}\sin^{-1}\frac{y}{b}$$

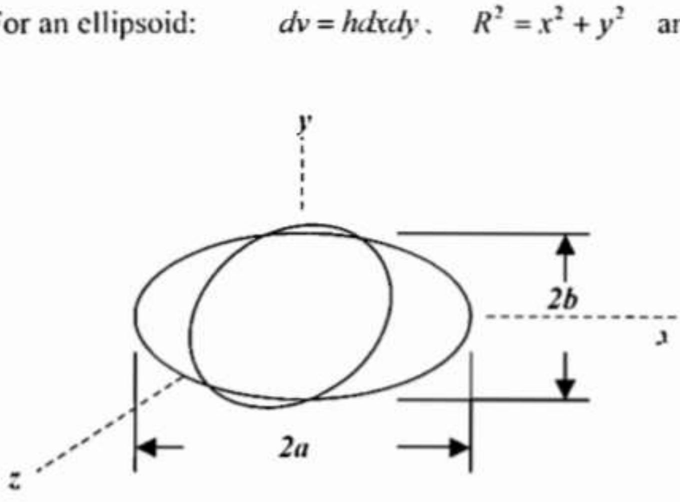
$$I_z=2\rho h\frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{3b^2}\left(\frac{3}{8}b^4\pi\right)+\frac{b^4}{8}\pi\right]=\frac{1}{4}\rho h\pi ab\left(a^2+b^2\right)$$

$$m=\rho h(\pi ab)$$

$$I_z=\frac{m}{4}\left(a^2+b^2\right)$$

في حالة مجسم القطع الناقص ellipsoid

For an ellipsoid: $dv = h\,dx\,dy$, $R^2 = x^2 + y^2$ and on the surface, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



$$z = \pm c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$h = 2|z| = 2c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

In the xy plane $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$x = \pm a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_z = R^2 \rho dv = \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{x=a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(x^2 + y^2\right) \rho 2c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx\,dy$$

$$I_z = R^2 \rho dv = \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{x=a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(x^2+y^2\right) \rho 2c \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dxdy$$

$$I_z = \frac{2\rho c}{a} \int_{y=-b}^{y=b} \left\{ \int \left[\left(a^2-\frac{a^2y^2}{b^2}\right)-x^2\right]^{\frac{1}{2}} x^2 dx + y^2 \int \left[\left(a^2-\frac{a^2y^2}{b^2}\right)-x^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \right\}$$

From a table of integrals:

$$\int \left(k^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} x^2 dx = -\frac{x}{4}\left(k^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{k^2x}{8}\left(k^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{k}$$

$$\int \left(k^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x}{2}\left(k^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{k}$$

$$I_z = \frac{2\rho c}{a} \int_{-b}^{b} \left[\frac{a^4}{8}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \pi + y^2 \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\pi\right] dy$$

$$I_z = \rho \pi ac \int_{-b}^{b} \left[\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{2y^2}{b^2}+\frac{y^4}{b^4}\right) + y^2 - \frac{y^4}{b^2}\right] dy$$

$$I_z = \frac{4}{15}\rho \pi abc\left(a^2+b^2\right)$$

For an ellipsoid, $m = \rho \frac{4}{3}\pi abc$, so $I_z = \frac{m}{5}\left(a^2+b^2\right)$

(8.8)

$$k_{cm}^2 + l^2 = ll' + l^2 = l\left(l'+l\right)$$
$$k_{cm}^2 + l^2 = ld$$

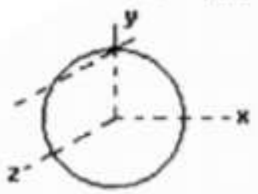
$$k^2 = k_{cm}^2 + l^2$$

$$T_{s} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}}$$

$$T_{s} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

(8.9) في حالة الطوق المتذبذب ، نعتبر ان كل الكتلة للطوق عند الحافة . وعليه

(a) $I_{\perp cm} = ma^2$ (all mass in rim)



$$I_{\perp rim} = ma^2 + ma^2 = 2ma^2$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\perp rim}}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

(b) $I_z = I_x + I_y = 2I_{\parallel cm} = ma^2 \qquad (= I_{\perp cm})$

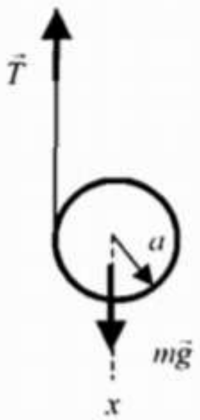
$$\therefore I_{\parallel cm} = \frac{ma^2}{2}$$

hence $I_{\parallel rim} = \dfrac{ma^2}{2} + ma^2 = \dfrac{3}{2}ma^2$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\parallel rim}}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2g}}$$

(8.10)

8.12



$$m\ddot{x}_{cm} = mg - T$$
$$I_{cm}\dot{\omega} = aT$$
$$\ddot{x}_{cm} = a\dot{\omega}$$
$$I_{cm} = \frac{2}{5}ma^2$$
$$m\ddot{x}_{cm} = mg - \frac{I_{cm}\dot{\omega}}{a} = mg - \frac{1}{a}\left(\frac{2}{5}ma^2\,\frac{\ddot{x}_{cm}}{a}\right) = mg - \frac{2}{5}m\ddot{x}_{cm}$$
$$\ddot{x}_{cm} = \frac{5}{7}g$$

(8.11) عندما يحمل الرجلان اللوح ، يتوزع الحمل على كل منهما بالتساوي ويكون الثقل على الكتف $mg/2$

بينما عندما يترك احدهما اللوح ، يصبح رد الفعل على الكتف $\boldsymbol{R}$ كما يلي

معادلة الحركة:

$$mg - R = m\ddot{x}_{cm} \quad \text{and} \quad R\frac{l}{2} = I_{cm}\dot{\omega}$$
$$I_{cm} = \frac{ml^2}{12}$$
$$\dot{\omega} = \frac{Rl}{2}\cdot\frac{12}{ml^2} = \frac{6R}{ml}$$

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{l}{2}\dot{\omega} = \frac{3R}{m}$$

$$mg - R = m\left(\frac{3R}{m}\right) = 3R$$

$$R = \frac{mg}{4}$$

$$\ddot{x}_{end} = l\dot{\omega} = l\frac{6R}{ml} = \frac{6}{m}\left(\frac{mg}{4}\right)$$

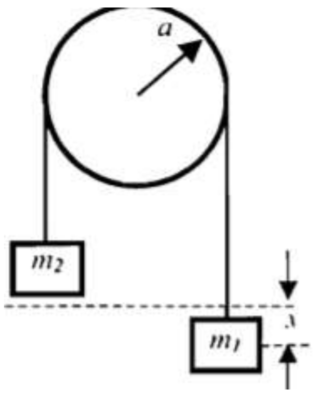
$$\ddot{x}_{end} = \frac{3}{2}g$$

(8.12) بأستخدام   قانون حفظ الطاقة ، نجد ان

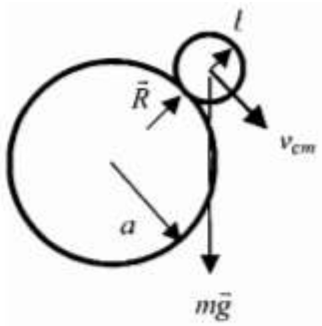
$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + m_2gx - m_1gx = E$$

$$m_1\dot{x}\ddot{x} + m_2\dot{x}\ddot{x} + \frac{I}{a^2}\dot{x}\ddot{x} + m_2g\dot{x} - m_1g\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}}$$



(8.13) عندما تكون ألسطوانة العلوية ملامسة لسطح الأسطوانة السفلية ، تكون معادلة الحركة كما يلي



$$f_r = \frac{mv_{cm}^2}{r} = mg\cos\theta - R$$

$$r = a+b \text{, so } \frac{mv_{cm}^2}{a+b} = mg\cos\theta - R$$

From conservation of energy:

$$mg(a+b) = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(a+b)\cos\theta$$

From table 8.3.1, $I = \frac{1}{2}ma^2$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{a}$$

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\left(\frac{v_{cm}^2}{a^2}\right) = mg(a+b)(1-\cos\theta)$$

$$\frac{mv_{cm}^2}{a+b} = \frac{4}{3}mg(1-\cos\theta)$$

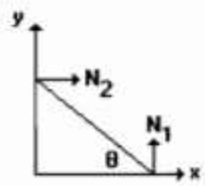
When the rolling cylinder leaves, $R = 0$:

$$mg\cos\theta = \frac{4}{3}mg(1-\cos\theta)$$

$$\frac{7}{3}\cos\theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{7}$$

(8.14) معادلة الحركة لطرفي السلم كما يلي



$$m\ddot{x} = N_2$$

$$m\ddot{y} = N_1 - mg$$

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mgy=mgy_0$$

$$x=\frac{l}{2}\cos\theta,\qquad \dot{x}=-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta,\qquad \ddot{x}=\frac{l}{2}\left(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$y=\frac{l}{2}\sin\theta,\qquad \dot{y}=\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta,\qquad \ddot{y}=\frac{l}{2}\left(-\dot{\theta}^2\sin\theta+\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$v_{cm}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2=\frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}$$

$$I=\frac{ml^2}{12},\ \text{and}\ \omega=\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2+mg\frac{l}{2}\sin\theta=mg\frac{l}{2}\sin\theta_0$$

$$\frac{l}{3}\dot{\theta}^2=g\left(\sin\theta_0-\sin\theta\right)$$

$$\dot{\theta}=\left[\frac{3g}{l}\left(\sin\theta_0-\sin\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{3g}{l}\left(\sin\theta_0-\sin\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3g}{l}\right)\left(-\cos\theta\right)\dot{\theta}=-\frac{3g}{2l}\cos\theta$$

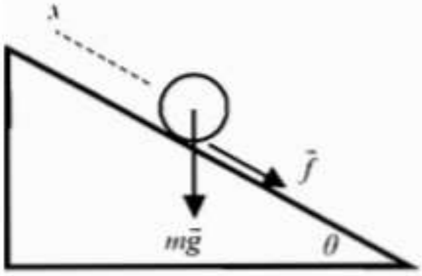
$$N_2=m\ddot{x}=-\frac{ml}{2}\left[\cos\theta\left(\frac{3g}{l}\right)\left(\sin\theta_0-\sin\theta\right)+\sin\theta\left(-\frac{3g}{2l}\right)\cos\theta\right]$$

يحدث الأنزلاق اذا كان $N_2=0$ وعليه ،

$$\sin\theta_0-\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0,\qquad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$$

(8.15) في حالة تدحرج الكرة الى اعلى بدون دوران ، يكون

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$



$$\ddot{x} = -g\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)$$

Since acceleration is constant, $x = \dot{x}_o t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$:

$$x = v_o t - \frac{gt^2}{2}(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

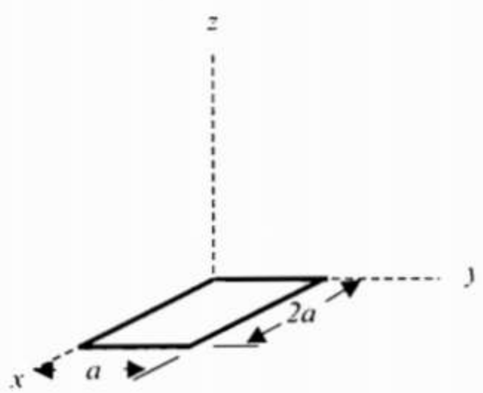
Meanwhile $(\mu mg\cos\theta)a = I\dot{\omega} = \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}$

$$\dot{\omega} = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\theta}{a}$$

$$\omega = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\theta}{a}t$$

تمارين الفصل التاسع

9.1 (a) $I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$



$dm = \rho\, dx\, dy$ and $m = 2a^2 \rho$

$$I_{xx} = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=2a} (y^2 + 0)\, \rho\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a 2a\rho y^2\, dy$$

$$I_{xx} = \frac{2}{3} \rho a^4 = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=2a} x^2 \rho\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \frac{8a^3 \rho}{3}\, dy$$

$$I_{yy} = \frac{8a^4 \rho}{3} = \frac{4ma^2}{3}$$

من نظرية المحاور المتعامدة نحصل على التالي

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} + \frac{5ma^2}{3}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm = -\int_{y=0}^{y=a}\int_{x=0}^{x=2a} xy\rho dxdy$$

$$= -\int_0^a \frac{4a^2\rho}{2} ydy$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\rho a^4 = -\frac{ma^2}{2}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int xzdm = 0 = I_{yz} = I_{zy}$$

(b) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = 0$

$$I = \frac{ma^2}{3}\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{4ma^2}{3}\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{ma^2}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{2}{15}ma^2$$

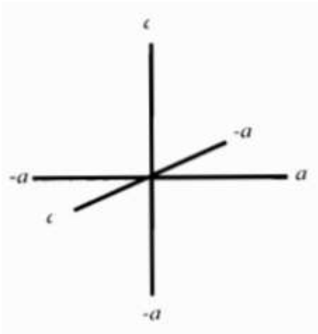
(c) $\vec{\omega} = \omega\left(\hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta\right) = \frac{\omega}{\sqrt{5}}\left(2\hat{i} + \hat{j}\right)$

$$\vec{L} = \hat{i}\left[\frac{2\omega}{\sqrt{5}}\cdot\frac{ma^2}{3} + \frac{\omega}{\sqrt{5}}\left(-\frac{ma^2}{2}\right)\right] + \hat{j}\left[\frac{2\omega}{\sqrt{5}}\left(-\frac{ma^2}{2}\right) + \frac{\omega}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4ma^2}{3}\right]$$

$$\vec{L} = \frac{\omega ma^2}{6\sqrt{5}}\left(\hat{i} + 2\hat{j}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{\omega}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\omega ma^2}{6\sqrt{5}}(2+2) = \frac{1}{15}ma^2\omega^2$$

(d)



(9.2)

(a) $\vec{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$

$$I_{xx} = 2I_{rod} = 2\frac{m(2a)^2}{12} = \frac{2}{3}ma^2 = I_{yy} = I_{zz}$$

بما أن لكل قضيب يكون x أوy يساوي صفر، لذلك Ixy = -0= xydm .

كما يكون الزخم الخطي :

$$\vec{L} = \frac{2}{3}ma^2 \cdot \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

الطاقة الحركية :

$$T = \frac{1}{2}\frac{\omega}{\sqrt{3}}\frac{2ma^2\omega}{3\sqrt{3}}\left(1^2 + 1^2 + 1^2\right) = \frac{ma^2\omega^2}{3}$$

(b) تكون عزوم القصور الذاتية :3/2ma2 وباقي ضرب عزوم القصور = 0 .

لذلك

$$I = \frac{2ma^2}{3}\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) = \frac{2}{3}ma^2$$

حيث ان مستوى الصفيحة يقع في المستوى xy ، لذلك بسبب تماثل الصفيحة حول هذين المحورين يكون Iyy=Ixx

بأستخدام نظرية المحاور المتعامدة ، نحصل على ما يلي :

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$
$$I_{zz} = 2I_{xx}$$

من جدول العزوم نجد أن

$$I_{zz} = \frac{ma^2}{6}$$
$$I_{xx} = \frac{ma^2}{12}$$

(9.3)

$$, \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

$$. I_{xx} = \frac{ma^2}{3}, \ I_{yy} = \frac{4ma^2}{3}, \ I_{xy} = -\frac{ma^2}{2}$$

$$\tan 2\theta = 1$$

$$2\theta = 45^\circ \qquad \theta = 22.5^\circ$$

أي أن المحور- 1 الرئيسي ، يصنع زاوية مقدارها 22.5 درجة مع محور x

(b)

من التماثل تكون المحاور الرئيسة موازية لأضلاع الصفيحة عند زاوية الرأس ويكون المحور الرئيسي الثالث متعامدا على هذه الصفيحة عند نقطة الأصل .

(9.4) (a)

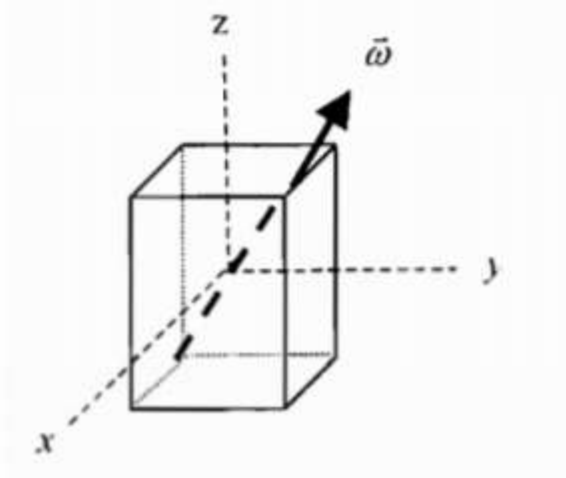
بسبب التماثل تكون المحاور الرئيسية منطبقة على المحاور الكارتيزية كما في الشكل

$$I_1 = \frac{m}{12}\left[(2a)^2 + (3a)^2\right] = \frac{13}{12}ma^2$$

$$I_2 = \frac{m}{12}\left[a^2 + (3a)^2\right] = \frac{10}{12}ma^2$$

$$I_3 = \frac{m}{12}\left[a^2 + (2a)^2\right] = \frac{5}{12}ma^2$$

$$\vec{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{14}}(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3)$$



وعليه ـ تكون الطاقة الحركية :

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{13}{12}ma^2 \cdot \frac{\omega^2}{14} + \frac{10}{12}ma^2 \cdot \frac{4\omega^2}{14} + \frac{5}{12}ma^2 \cdot \frac{9\omega^2}{14}\right]$$
$$= \frac{7}{24}ma^2\omega^2$$

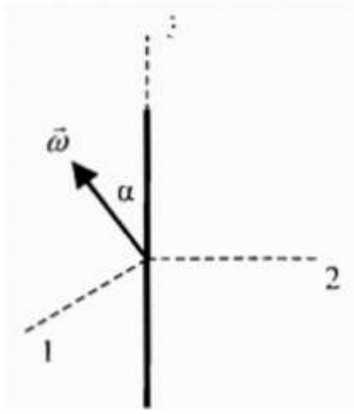
(

b)

$$\vec{L} = \hat{e}_1\left(\frac{13}{12}ma^2 \cdot \frac{\omega}{\sqrt{14}}\right) + \hat{e}_2\left(\frac{10}{12}ma^2 \cdot \frac{2\omega}{\sqrt{14}}\right) + \hat{e}_3\left(\frac{5}{12}ma^2 \cdot \frac{3\omega}{\sqrt{14}}\right)$$
$$\vec{L} = \frac{ma^2\omega}{12\sqrt{14}}\left(13\hat{e}_1 + 20\hat{e}_2 + 15\hat{e}_3\right)$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{L}}{|\omega||L|} = \frac{\left[(1)(13)+(2)(20)+(3)(15)\right]}{\left(1^2+2^2+3^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(13^2+20^2+15^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{98}{(11.116)^{\frac{1}{2}}} = 0.9295$$
$$\theta = 21.6^\circ$$

(9.5)

نختار المحاور الرئيسية بحيث نقطة الأصل تقع عند منتصف القضيب ، والمحور 3 ينطبق على طول القضيب (كما في الشكل



من الشكل ، تكون   في مستوى المحاور الرئيسية :(1،3) وعليه

$$I_1 = I_2 = \frac{ml^2}{12},\ I_3 = 0$$

$$\vec{\omega} = \omega\left(\hat{e}_1 \sin\alpha + \hat{e}_3 \cos\alpha\right)$$

$$\vec{L} = \frac{ml^2}{12}\omega\left(\hat{e}_1 \sin\alpha + 0 + 0\right) = \hat{e}_1 \frac{ml^2\omega}{12}\sin\alpha$$

أي ان متجه الزخم الزاوي يقع في اتجاه المحور الرئيسي (1)

(b)

بما أن السرعة الزاوية ثابتة ، فأن

$$N_1 = 0 + 0$$

$$N_2 = 0 + (\omega\cos\alpha)(\omega\sin\alpha)\left(\frac{ml^2}{12}\right)$$

$$N_3 = 0 + 0$$

$$\vec{N} = \hat{e}_2 \frac{ml^2\omega^2}{12}\sin\alpha\cos\alpha$$

اي أن متجه الأزدواج يقع في اتجاه ألمحوألرئيسي (2) ، وعليه

$$\left|\bar{N}\right| = \frac{ml^2\omega^2}{12}\sin\alpha\cos\alpha$$

: (9.6)

من مسألة (9.4) ، نجد ان

$$\vec{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{14}}\left(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3\right)$$

$$I_1 = \frac{13}{12}ma^2 .\ I_2 = \frac{10}{12}ma^2 \text{, and } I_3 = \frac{5}{12}ma^2$$

$$N_1 = 0 + \frac{\omega^2}{14}(2)(3)\frac{ma^2}{12}(5-10) = -\frac{ma^2\omega^2}{28}(5)$$
$$N_2 = 0 + \frac{\omega^2}{14}(3)(1)\frac{ma^2}{12}(13-5) = \frac{ma^2\omega^2}{28}(4)$$
$$N_3 = 0 + \frac{\omega^2}{14}(1)(2)\frac{ma^2}{12}(10-13) = -\frac{ma^2\omega^2}{28}$$
$$\left|\bar{N}\right| = \frac{ma^2\omega^2}{28}\left(5^2 + 4^2 + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ma^2\omega^2}{28}\sqrt{42}$$

(9.7) بضرب معادلات اويلر ب ω_1 ، ω_2 ، ω_3 على الترتيب نجد ان

$$0 = I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + \omega_1\omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right)$$
$$0 = I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + \omega_1\omega_2\omega_3\left(I_1 - I_3\right)$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_3\left(I_2 - I_1\right)$$

وبإضافة

$$0 = I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3\omega_3$$

نجد ان

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)\right]$$

اي ان ،

$$0 = \frac{d}{dt}\left[T_{rot}\right]$$

$$T_{rot} = constant$$

لإثبات ان مربع الزخم الزاوي ثابت ، نتبع التالي

نضرب معادلات اويلر على الترتيب بكل من :

$$I_1\omega_1,\ I_2\omega_2,\ \text{and}\ I_3\omega_3.$$

$$0 = I_1^2\dot{\omega}_1\omega_1 + I_1\omega_1\omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right)$$
$$0 = I_2^2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_2\omega_1\omega_2\omega_3\left(I_1 - I_3\right)$$
$$0 = I_3^2\dot{\omega}_3\omega_3 + I_3\omega_1\omega_2\omega_3\left(I_2 - I_1\right)$$

بإضافة

$$,\ 0 = I_1^2\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2^2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3^2\dot{\omega}_3\omega_3$$

نجد ان

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2\right)$$

او

$$0=\frac{d}{dt}\left(L^2\right)$$

$$L^2=constant$$

(9.8)

في حالة الدوران الحر ، تصبح معادلات أويلر كما يل

$$0=I_1\dot{\omega}_1+\omega_2\omega_3\left(I_3-I_2\right)$$
$$0=I_2\dot{\omega}_2+\omega_1\omega_3\left(I_1-I_3\right)$$

بإستخدام نظرية المحاور المتعامدة

$$I_3=I_1+I_2$$

وعليه ، تؤول معادلات أويلر الى

$$0=I_1\dot{\omega}_1+\omega_2\omega_3 I_1$$
$$0=I_2\dot{\omega}_2-\omega_1\omega_3 I_2$$

بضرب المعادلة الأولى ب ω_1/I_1 وكذلك ضرب المعادلة الثانية بالمقدار ω_2/I_2 ، نحصل على

$$0=\omega_1\dot{\omega}_1+\omega_1\omega_2\omega_3$$
$$0=\omega_2\dot{\omega}_2-\omega_1\omega_2\omega_3$$

وبإضافة كلتا المعادلتين ، نجد ان

$$0=\omega_1\dot{\omega}_1+\omega_2\dot{\omega}_2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)$$

وهذا يعني ان

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = constant$$

اذا كان

$$I_1 = I_2$$

فإن معادلة أويلر الثالثة تعطي ما يلي

$$\left(I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \right)$$

اي ان

$$\omega_3 = constant$$

(9.9)

من التماثل ، نجد ان $I_1 = I_2 = I$ ، $I_s = I_3,$ ومن نظرية التعامد نحصل على :

$$I_3 = I_1 + I_2 \rightarrow I_s = 2I$$

كما تكون سرعة اللف كما يلي

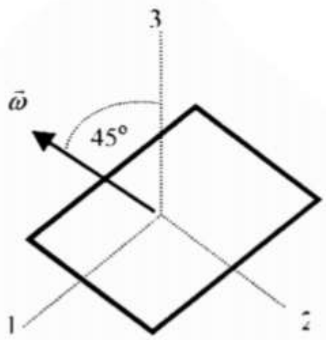
$$\Omega = (2-1)\omega\cos\alpha$$

وعليه ،

$$\alpha = 45^\circ . \ \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

حيث T_1 يمثل دور اللف للسرعة الزاوية$\boldsymbol{\omega}$ حول $\hat{e}_3$.

تكون السرعة الزاوية للف كما يلي:



$$\dot{\phi} = \omega\left[1+\left(\frac{I_s^2}{I^2}-1\right)\cos^2\alpha\right]^{\frac{1}{2}} = \omega\left[1+\left(\frac{2^2}{1^2}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\phi} = \omega\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \sqrt{0.4}\,s = 0.632\,\mathrm{s}$$

حيث T_2 يمثل دور $\hat{e}_3$ حول محور الزخم الزاوي $\vec{L}$.

(b)

$$I_1 = I_2 = I = \frac{m}{12}\left(a^2+\frac{a^2}{16}\right) = \frac{17}{16}\cdot\frac{ma^2}{12}$$

$$I_3 = I_s = \frac{m}{12}\left(a^2+a^2\right) = 2\cdot\frac{ma^2}{12}$$

$$,\ \Omega = \left(\frac{2}{\frac{17}{16}}-1\right)\omega\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{15}{17}\frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{17}{15}\sqrt{2}\,s = 1.603\,\mathrm{s}$$

$$.\ \dot{\phi} = \omega\left[1+\left(\frac{2^2\cdot 16^2}{17^2}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\phi} = 1.5072\,\omega$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{1}{1.5072}s = 0.663\,\mathrm{s}$$

(9.10)

حيث $\tan\theta = \frac{I\ \tan\alpha}{I_s}$ ، بما أن $\theta < \alpha$ $I_s > I \rightarrow$. لنفرض ان الزاوية بين متجه الزخم الزاوي ومحور الدوران هي $\alpha - \theta$ ، من العلاقات المثلثية نجد ان

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \tan\theta}$$

وعليه ،

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\left(1 - \frac{I}{I_s}\right)\tan\alpha}{1 + \frac{I}{I_s}\tan^2\alpha}$$

$$\alpha - \theta = \tan^{-1}\left[\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I_s + I\tan^2\alpha}\right]$$

(9.11)

$\alpha - \theta$ is a maximum for $\frac{I_s}{I}$ a maximum.

For $\frac{I_s}{I} = 2$. $\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha}{2 + \tan^2\alpha}$

$$\frac{d\tan(\alpha-\theta)}{d\tan\alpha} = \frac{1}{2+\tan^2\alpha} - \frac{2\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^2} = \frac{2-\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^2}$$

At the maximum, $\frac{d\tan(\alpha-\theta)}{d\tan\alpha} = 0 = 2 - \tan^2\alpha$

$$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{2} = 54.7^\circ$$

$$\tan(\alpha-\theta) \le \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha - \theta \le \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 19.5^\circ$$

(9.12)

(a) From Problem 9.10. for $I_s > I$, the angle between $\vec{\omega}$ and $\vec{L}$ is ...

$$\alpha - \theta = \tan^{-1}\left[\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I_s + I\tan^2\alpha}\right]$$

From Problem 9.9(a), $I_s = 2I$ and $\tan\alpha = \tan 45^\circ = 1$

$$\alpha - \theta = \tan^{-1}\frac{1}{(2+1)} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18.4^\circ$$

(b) From Prob. 9.9(b), $I_s = 2\cdot\frac{ma^2}{12}$ and $I = \frac{17}{16}\cdot\frac{ma^2}{12}$

$$\alpha - \theta = \tan^{-1}\left[\frac{\left(2 - \frac{17}{16}\right)}{2 + \frac{17}{16}}\right] = \tan^{-1}\frac{15}{49} = 17.0^\circ$$

(9.13) بالنسبة لمحاور الأرض ، وكما ورد في الفصل التاسع ، نجد ان

$$\alpha = 0.2'' \text{ and } \frac{I_s}{I} = 1.00327$$

$\therefore I_s > I$, the angle between $\vec{\omega}$ and $\vec{L}$ is:

$$\alpha - \theta = \alpha - \tan^{-1}\left(\frac{I}{I_s}\tan\alpha\right)$$

For α so small,

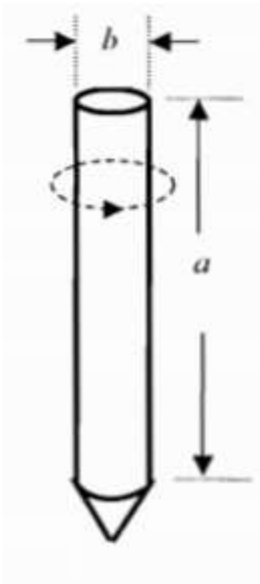
$$\tan\alpha \approx \alpha \text{, and } \tan^{-1}\left(\frac{I}{I_s}\tan\alpha\right) \approx \frac{I}{I_s}\tan\alpha \approx \frac{I\alpha}{I_s}$$

$$\alpha - \theta \approx \alpha - \frac{I\alpha}{I_s} = \frac{I_s - I}{I_s}\alpha$$

$$\alpha - \theta \approx \frac{.00327}{1.00327}0.2 = 0.00065 \text{ arcsec}$$

(9.14) بإعتبار ان القلم اسطواني الشكل قطره b ، يكون عزم القصور حول محور التماثل يساوي

$$I_s = \frac{m\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{mb^2}{8}$$



كما يكون عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز الكتلة وعموديا على محور التماثل كما يلي

$$I_c = m\left[\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{4} + \frac{a^2}{12}\right] = m\left(\frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{12}\right)$$

بإستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد ان

$$I = I_c + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m\left(\frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{3}\right)$$

وعليه يكون

$$S^2 \geq \frac{4Mgll}{I_s^2}$$

$$S^2 \geq \frac{4mg\left(\frac{a}{2}\right)m\left(\frac{b^2}{16}+\frac{a^2}{3}\right)}{\frac{m^2b^4}{64}}$$

$$S \geq \frac{16}{b^2}\left[\frac{ga}{2}\left(\frac{b^2}{16}+\frac{a^2}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{16}{(1)^2}\left[\frac{(980)(20)}{2}\left(\frac{1^2}{16}+\frac{20^2}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} rad \cdot s^{-1}$$

$$S \geq 18.294\, rad \cdot s^{-1} = 2910\, rps$$

حلول تمارين الفصل العاشر

(10.1)

$$V = mgz$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,. \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}\,. \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg$$

$$.\ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

$$m\ddot{x} = 0\,. \qquad m\dot{x} = const$$

$$m\ddot{y} = 0\,, \qquad m\dot{y} = const$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

(10.2)

في حالة تدحرج الكرة اسفل السطح المائل (راجع الشرح)

$$\omega = \frac{\dot{x}}{a}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}ma^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 = \frac{7}{10}m\dot{x}^2$$

في حالة طاقة الوضع تساوي صفر ، اي $V = 0$

$$V = -mgx\sin\theta$$

$$L = T - V = \frac{7}{10}m\dot{x}^2 + mgx\sin\theta$$

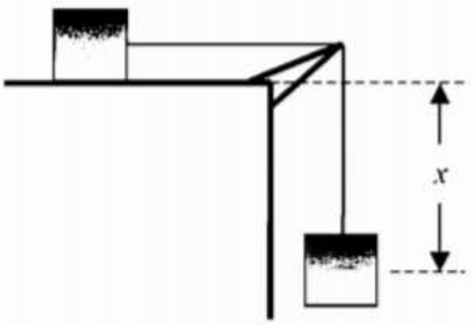
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{5}m\dot{x}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{7}{5}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg\sin\theta$$

$$\frac{7}{5}m\ddot{x} = mg\sin\theta$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

(a) (10.3)



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = m\dot{x}^2 \quad \text{and} \quad V = -mgx$$

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + mgx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg$$

$$2m\ddot{x} = mg$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}$$

$$T = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\dot{x}^2 = \left(m + \frac{m'}{2}\right)\dot{x}^2 \quad \text{and} \quad V = -mgx - \left(\frac{x}{l}m'\right)g\frac{x}{2} = -mgx - \frac{m'g}{2l}x^2$$

$$L = T - V = \left(m + \frac{m'}{2}\right)\dot{x}^2 + mgx + \frac{m'g}{2l}x^2$$

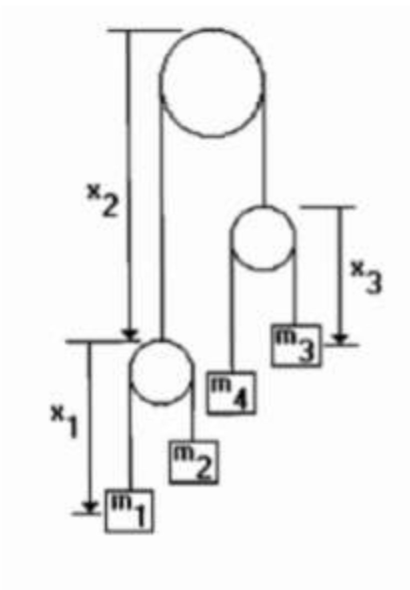
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (2m + m')\dot{x}. \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (2m + m')\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg + \frac{m'g}{l}x$$

$$(2m + m')\ddot{x} = mg + \frac{m'g}{l}x$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{l}\left(\frac{ml + m'x}{2m + m'}\right)$$

(10.4)



يكون موقع الكتل المعلقة رأسيا على النحو التالي

$$
\begin{aligned}
&m_1: \quad x_1 + x_2 \\
&m_2: \quad l_1 - x_1 + x_2 \\
&m_3: \quad l_2 - x_2 + x_3 \\
&m_4: \quad l_2 - x_2 + l_3 - x_3 \\
&V = -g\left[m_1\left(x_1 + x_2\right) + m_2\left(l_1 - x_1 + x_2\right)\right. \\
&\left.+ m_3\left(l_2 - x_2 + x_3\right) + m_4\left(l_2 - x_2 + l_3 - x_3\right)\right] \\
&T = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2 + m_2\left(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2\right. \\
&\left.+ m_3\left(-\dot{x}_2 + \dot{x}_3\right)^2 + m_4\left(-\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

وتكون دالة لاكرانج على النحو

$$
\begin{aligned}
&L = T - V = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(-\dot{x}_2 + \dot{x}_3\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_4\left(-\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right)^2 + gx_1\left(m_1 - m_2\right) + gx_2\left(m_1 + m_2 - m_3 - m_4\right) + gx_3\left(m_3 - m_4\right) + con \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right) - m_2\left(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right) \\
&\qquad = \left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1 + \left(m_1 - m_2\right)\dot{x}_2 \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 + \left(m_1 - m_2\right)\ddot{x}_2 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = g\left(m_1 - m_2\right) \\
&\left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 + \left(m_1 - m_2\right)\ddot{x}_2 = g\left(m_1 - m_2\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + m_2(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - m_3(-\dot{x}_2 + \dot{x}_3) - m_4(-\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = g(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)$$

$$(m_1 - m_2)\ddot{x}_1 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\ddot{x}_2 + (m_4 - m_3)\ddot{x}_3 = g(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3(-\dot{x}_2 + \dot{x}_3) - m_4(-\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = g(m_3 - m_4)$$

$$(m_4 - m_3)\ddot{x}_2 + (m_3 + m_4)\ddot{x}_3 = g(m_3 - m_4)$$

For $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$, and $m_4 = m$:

$$5m\ddot{x}_1 - 3m\ddot{x}_2 = -3mg. \qquad \ddot{x}_1 = \frac{3}{5}(\ddot{x}_2 - g)$$

$$-3m\ddot{x}_1 + 8m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_3 = 2mg$$

$$-m\ddot{x}_2 + 3m\ddot{x}_3 = mg. \qquad \ddot{x}_3 = \frac{1}{3}(\ddot{x}_2 + g)$$

$$-\frac{9}{5}\ddot{x}_2 + \frac{9}{5}g + 8\ddot{x}_2 - \frac{1}{3}\ddot{x}_2 - \frac{1}{3}g = 2g$$

$$\frac{88}{15}\ddot{x}_2 = \frac{8}{15}g. \qquad \ddot{x}_2 = \frac{g}{11}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{3}{5}\left(-\frac{10}{11}g\right) = -\frac{6}{11}g$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{12}{11}g\right) = \frac{4}{11}g$$

وعليه ، بالتعويض وترتيب الحدود نجد ان

$$m_1: \quad \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{5}{11}g$$

$$m_2: \quad -\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{7}{11}g$$

$$m_3: \quad -\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = \frac{3}{11}g$$

$$m_4: \quad -\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 = -\frac{5}{11}g$$

(10.5)

تكون سرعة الكرة الخطية على النحو التالي

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta$$

لنفرض انسرعة الكرة الزاوية تساوي ω ، وعليه

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

في حالة التدحرج بدون انزلاق ، نجد ان

$$, \ \omega = \frac{\dot{x}'}{a}, \quad I = \frac{2}{5}ma^2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{x}'^2+2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta\right)+\frac{1}{5}m\dot{x}'^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$V=-mgx'\sin\theta$. for $V=0$ at the initial position of the ball.

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\frac{7}{5}\dot{x}'^2+2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta\right)+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+mgx'\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'}=\frac{7}{5}m\dot{x}'+m\dot{x}\cos\theta,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right)=\frac{7}{5}m\ddot{x}'+m\ddot{x}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'}=mg\sin\theta$$

$$\frac{7}{5}m\ddot{x}'+m\ddot{x}\cos\theta=mg\sin\theta$$

$$\ddot{x}'=\frac{5}{7}\left(g\sin\theta-\ddot{x}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+m\dot{x}'\cos\theta+M\dot{x},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\left(m+M\right)\ddot{x}+m\ddot{x}'\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

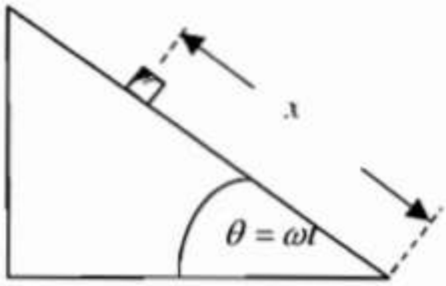
$$\left(m+M\right)\ddot{x}+m\ddot{x}'\cos\theta=0$$

$$\left(m+M\right)\ddot{x}+\frac{5}{7}mg\sin\theta\cos\theta-\frac{5}{7}m\ddot{x}\cos^2\theta=0$$

$$\ddot{x}=\frac{5mg\sin\theta\cos\theta}{5m\cos^2\theta-7\left(m+M\right)}$$

(10.6)

في الشكل المرفق ، نفرض ان موقع الجسيم بالنسبة لقاعدة السطح تساوي x ، وعليه تكون سرعة الجسيم كما يلي



$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2\omega^2$$
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right)$$
$$V = mgx\sin\theta = mgx\sin\omega t$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + x^2\omega^2\right) - mgx\sin\omega t$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = mx\omega^2 - mg\sin\omega t$$
$$m\ddot{x} = mx\omega^2 - mg\sin\omega t$$
$$\ddot{x} - \omega^2 x = -g\sin\omega t$$

(10.7)

حتى تبقى حركة الجسيم في مستوى نظام احداثي دوار ، يجب ان يكون محور الدوران متعامدا مع مستوى هذه الحركة .

لنفرض ان هذه الحركة في مستوى xy ، السرعة الزاوية هي $\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{k}}\omega$ ، اذا"

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \left(\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y}\right) + \hat{k}\omega\times\left(\hat{i}x + \hat{j}y\right)$$

$$\vec{v} = \hat{i}\left(\dot{x} - \omega y\right) + \hat{j}\left(\dot{y} + \omega x\right)$$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\omega y + \omega^2 y^2 + y^2 + 2\dot{y}\omega x + \omega^2 x^2\right)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(\dot{x} - \omega y\right). \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\left(\ddot{x} - \omega\dot{y}\right).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\left(\dot{y}\omega + \omega^2 x\right) - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\left(\ddot{x} - \omega\dot{y}\right) = m\left(\dot{y}\omega + \omega^2 x\right) - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_x = m\left(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\left(\dot{y} + \omega x\right). \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\left(\ddot{y} + \omega\dot{x}\right).$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\left(-\dot{x}\omega + \omega^2 y\right) - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$m\left(\ddot{y} + \omega\dot{x}\right) = m\left(-\dot{x}\omega + \omega^2 y\right) - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_y = m\left(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y\right)$$

بالمقارنة مع معادلات الفصل الخامس (مع اعتبار ان $A_0 = 0$ ،$\dot{\omega} = 0$) ، نجد ان

$$\vec{F} = m\vec{a}' + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

$$\vec{F} = m\left(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y}\right) + 2m\,\omega\hat{k}\times\left(\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y}\right) + m\,\omega\hat{k}\times\left[\omega\hat{k}\times\left(\hat{i}x + \hat{j}y\right)\right]$$

$$F_x = m\left(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x\right)$$

$$F_y = m\left(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y\right)$$

(10.8)

بإعتبار محور -z محور الدوران ، وعليه يكون

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\left(\hat{i}\dot{x}+\hat{j}\dot{y}+\hat{k}\dot{z}\right)+\omega\hat{k}\times\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z\right)$$

$$\vec{v}=\hat{i}\left(\dot{x}-\omega y\right)+\hat{j}\left(\dot{y}+\omega x\right)+\hat{k}\dot{z}$$

$$T=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2-2\dot{x}\omega y+\omega^2y^2+\dot{y}^2+2\dot{y}\omega x+\omega^2x^2+\dot{z}^2\right)$$

$$L=T-V$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\left(\dot{x}-\omega y\right)\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=m\left(\ddot{x}-\omega\dot{y}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=m\left(\dot{y}\omega+\omega^2x\right)-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\left(\ddot{x}-\omega\dot{y}\right)=m\left(\dot{y}\omega+\omega^2x\right)-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_x=m\left(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\left(\dot{y}+\omega x\right),\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)=m\left(\ddot{y}+\omega\dot{x}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=m\left(-\dot{x}\omega+\omega^2y\right)-\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$m\left(\ddot{y}+\omega\dot{x}\right)=m\left(-\dot{x}\omega+\omega^2y\right)-\frac{\partial V}{\partial y}$$

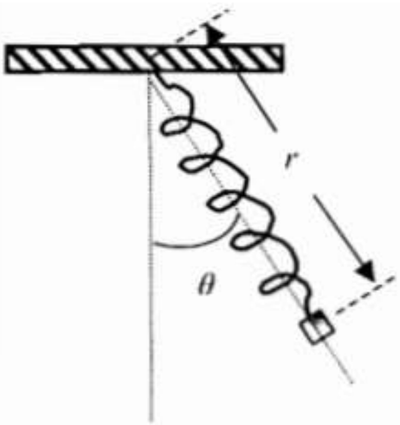
$$F_y=m\left(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}\,.\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)=m\ddot{z}\,,\qquad\frac{\partial L}{\partial z}=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$m\ddot{z}=-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= m\vec{a}' + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\\
\vec{F} &= m\left(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}\right) + 2m\omega\hat{k}\times\left(\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}\right) + m\omega\hat{k}\times\left[\omega\hat{k}\times\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z\right)\right]\\
F_x &= m\left(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x\right)\\
F_y &= m\left(\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y\right)\\
F_z &= m\ddot{z}
\end{aligned}
$$

(10.9)



$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(r - l_o\right)^2 - mgr\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(r^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}\left(r - l_o\right)^2 + mgr\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,. \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - k\left(r - l_o\right) + mg\cos\theta$$

$$m\ddot{r} = m\dot{r}^2 - k\left(r - l_o\right) + mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -mgr\sin\theta$$

(10.10)

$$\vec{v} = \hat{j}at + l\dot{\theta}\left(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta\right)$$

$$= \hat{i}l\theta\cos\theta + \hat{j}\left(at + l\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + a^2t^2 + 2atl\dot{\theta}\sin\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$

$$V = mg\left(\frac{1}{2}at^2 - l\cos\theta\right)$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + a^2t^2 + 2atl\dot{\theta}\sin\theta\right) - mg\left(\frac{at^2}{2} - l\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + matl\sin\theta. \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + mal\sin\theta + matl\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = matl\dot{\theta}\cos\theta - mgl\sin\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mal\sin\theta + matl\dot{\theta}\cos\theta = matl\dot{\theta}\cos\theta - mgl\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{a+g}{l}\sin\theta = 0$$

في حالة الذبذبات الصغيرة يمكن استخدام التقريب $\sin\theta \approx \theta$ ، وعليه

$$\ddot{\theta} + \frac{a+g}{l}\theta = 0$$

$$T_{\circ} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}}$$

(10.11)

في حالة المجال المركزي ، تكون

$$. V=V(r), \text{ so } \frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial \phi}=0 \text{ and } \frac{\partial V}{\partial r}=-F .$$

بإستخدام الأحداثيات الكوية ، نحصل على التالي

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\theta}^2$$

$$L=T-V=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta+mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m\ddot{r}-mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta-mr\dot{\theta}^2=F_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta}=mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}-mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)=mr^2\ddot{\phi}\sin^2\theta+2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta+2mr^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=0$$

$$mr^2\ddot{\phi}\sin^2\theta+2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta+2mr^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta=0$$

(10.12)

Since $\theta = \alpha =$ constant, there are two degrees of freedom, r and θ.

$$v_r = \dot{r}\ ,\ v_\phi = r\dot{\phi}\sin\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\right)$$

$$V = mgr\cos\alpha$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha\right) - mgr\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\sin\alpha\right) = 0$$

$$mr^2\dot{\phi}\sin\alpha = \ell = \text{constant}$$

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - mg\cos\alpha$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\dot{r}^2$$

$$\frac{m}{2}d\left(\dot{r}^2\right) = \frac{\ell^2}{m}\frac{dr}{r^3} - mg\cos\alpha dr$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = -\frac{\ell^2}{2mr^2} - mgr\cos\alpha + C$$

حيث C ثابت يمثل الطاقة الكلية للنظام .

(10.13)

$$V = mgz \qquad T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad \text{similarly, } \dot{y} = \frac{p_y}{m} \text{ and } \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 = -\dot{p}_x, \qquad p_x = constant$$

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) = m\ddot{x} = 0 \qquad \text{similarly. } p_y = constant \text{, or } m\ddot{y} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} = \dot{y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = mg = -\dot{p}_z, \qquad \dot{p}_z = \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right) = m\ddot{z} = -mg$$

(10.14) (a) البندول البسيط

$$V = -mgl\cos\theta \qquad T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$H = T + V = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} = \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = mgl\sin\theta = -\dot{p}_\theta$$

(b)

في حالة ماكنة آتوود

$$V = -m_1 gx - m_2 g(l - x) \qquad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}. \qquad \dot{x} = \frac{p}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)}$$

$$H = T + V = \frac{p^2}{2\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)} - (m_1 - m_2)gx - m_2 gl$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)} = \dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -(m_1 - m_2)g = -\dot{p}. \qquad \dot{p} = (m_1 - m_2)g$$

c) حركة الجسيم على السطح المائل

$$V = -mgx\sin\theta \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,. \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} - mgx\sin\theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -mg\sin\theta = -\dot{p}\,, \qquad \dot{p} = mg\sin\theta$$

(10.15)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$0 = \delta\int_1^2 L dt = \int_1^2 \delta L dt = \int_1^2 \delta\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)dt$$

$$0 = \int_1^2 \left(m\dot{x}\delta\dot{x} - kx\delta x\right)dt$$

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x$$

$$\int_1^2 m\dot{x}\delta\dot{x}dt = \int_1^2 m\dot{x}\frac{d}{dt}(\delta x)dt = \int_1^2 m\dot{x}d(\delta x)$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة ، نحصل على التالي

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}dt = m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta x\, d\left(m\dot{x}\right)$$

$$\delta x = 0 \text{ at } t_1 \text{ and } t_2$$

$$d\left(m\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right)dt = m\ddot{x}\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}\,dx = -\int_{t_1}^{t_2}\delta x\, m\ddot{x}\,dt$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\left(-m\ddot{x}\delta x - kx\delta x\right)dt$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$