الأكاديمية العربية الدولية



الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
HIAST

إشارات ونظم

لطلاب الاتصالات والإلكترونيات وتكنولوجيا المعلومات



الأستاذ الدكتور
محي الدين مظهر واياخ

الدكتور
عبد الناصر العاسمي

الإصدار الأول

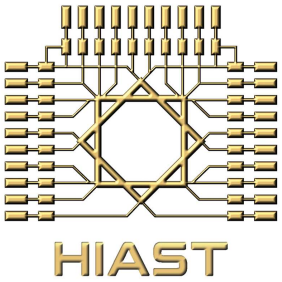
منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
٢٠٢٢ م - ١٤٤٣ هـ

إشارات ونظم

الإصدار الأول/ الطبعة الأولى

تأليف: الأستاذ الدكتور محي الدين مظهر واياخ

الدكتور عبد الناصر العاسمي



منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

2022

إشارات ونظم

الدكتور محي الدين وايناخ والدكتور عبد الناصر العاسمي

التقويم العلمي: الدكتور ميشيل السبع، الدكتور محي الدين قبيطري

التدقيق اللغوي: الدكتور محمد عطا موعد

تصميم الغلاف: م. أنس محمد وايناخ

الجمهورية العربية السورية

الطبعة الأولى 2022.

هذا الكتاب منشور تحت رخصة المشاع الإبداعي – النسب للمؤلف – حظر الاشتقاق - (CC-BY-ND 4.0)

يحق للمستخدم بموجب هذه الرخصة نسخ هذا الكتاب ومشاركته وإعادة نشره أو توزيعه بأية صيغة وبأية وسيلة للنشر ولأية غاية تجارية أو غير تجارية، وذلك شريطة عدم التعديل على الكتاب وعدم الاشتقاق منه على أن ينسب للمؤلف الأصلي على الشكل الآتي حصراً:

محي الدين وايناخ، عبد الناصر العاسمي، إشارات ونظم، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية الطبعة الأولى 2022.

متوفر للتحميل من : www.hiast.edu.sy

Signals and Systems

For Communication, Electronics and Information Technology

Mohieddin Mazhar Wainakh , Abdel Nasser Al- Assimi

Publications of the Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST) - Syrian Arab Republic

First Edition 2022

ISBN – **978-9933-9261-7-5**

Published under the license:

Creative Commons Attrribution-No Drivatives 4,0

International (CC-BY-ND 4.0)

https//creativecommons.org/license/by.nd/4.0/legalcde

available for download at: www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد كوادر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.

برامج المعهد العالي الأكاديمية ونشاطاته العلمية: يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاختصاصات التالية: الاتصالات، المعلوماتية، النظم الإلكترونية، الميكاترونيكس، علوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات، التحكم والروبوتيك، المعلوماتية باختصاصي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار، علوم وهندسة المواد وفي علوم وهندسة البصريات. أخيراً، يمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث العلمي والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد العالي بكوادره رفيعة التأهيل وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً، وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود كوادره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى نشر الإفادة لأوسع فئة من المهتمين بإمكانيات كوادره ومختبراته.

النشر في المعهد العالي: استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج كوادره، منها ما هو تدريسي يتوافق مع المناهج التدريسية في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

معلومات التواصل: للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983

هاتف: 963115123819+ - فاكس: 963115140761+

بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy

موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد " للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.

- التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.

- كيمياء المحاليل المائية للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الاولى 2011، الطبعة الثانية 2016، الطبعة الثالثة 2022.

- الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع " للدكتور علي طه 2011.

- ميكانيك النقطة المادية " للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الطبعة الاولى 2011، الطبعة الثانية 2016، الطبعة الثالثة 2022.

- " الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي "، للدكتور عمران قوبا 2017.

- التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا 2017.

- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث" للدكتور محمد بدر قويدر 2017.

-" مدخل الى كيمياء المياه – تلوث – معالجة – تحليل "، للدكتور نصر الحايك 2017.

- " الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم 2017.

- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف 2017.

- " التحليل، الجزء الثالث "، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.

- " التحليل، الجزء الرابع "، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.

- " التحليل، الجزء الخامس "، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.

- " تصميم عناصر الآلات، الجزء الأول"، للدكتور محمد زهير مسالخي 2021.

- " ميكانيك الجسم الصلب"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور مجسن علي، 2021.

سيصدر قريباً:

- " تصميم عناصر الآلات، الجزء الثاني"، للدكتور محمد زهير مسالخي.

- "طرائق عددية للمهندسين"، الجزء الأول – للدكتور نبيه عودة.

- "طرائق عددية للمهندسين"، الجزء الثاني – للدكتور نبيه عودة.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد العالي الالكتروني www.hiast.edu.sy .

تقديم

هناك خير واحد في الوجود هو المعرفة

وشر واحد هو الجهل

"أقرأ وربك الأكرم"

يعدّ مقرر الإشارات و النظم من المقررات الأساسية، لعدد من الاختصاصات الهندسية. وجهنا الانتباه في تأليف هذا الكتاب على الاختصاصات التالية: الاتصالات والالكترونيات وتقنية الاتصالات والمعلوماتية وذلك من خلال معظم الأمثلة والتمارين المذكورة في الكتاب. أما بالنسبة للأفكار والمفاهيم والأسس فهي عامة، وتخدم طيف واسع من الاختصاصات. منها على سبيل المثال التحكم وهندسة الحاسوب وهندسة المعلوماتية وغيرها.

الفلسفة التي اتبعناها في تأليف هذا الكتاب تتلخص في توضيح فكرة الموضوع المطروح ومن ثم التحليل الرياضي المناسب وبعد ذلك توضيح المفاهيم الفيزيائية للعلاقات الرياضية وتأويلها. أي حاولنا أن نجيب على السؤال، ماذا تعني هذه العلاقة ?What it means. وهذا من أجل أن يمتلك الطالب الرؤيا والفهم الواقع لمقرر الإشارات والنظم، الذي يؤهله من تحليل وتركيب analysis & synthesis الإشارات والنظم المختلفة ومنها إلى التصحيح والتنفيذ العملي.

ولدعم تلك الفلسفة، بسطنا قدر الإمكان التحليل الرياضي ومنهجية (طريقة) الوصول للعلاقات الأساسية. أما بالنسبة للأمثلة المذكورة في الكتاب، توخينا أن نعطي مثالاً أو أكثر في نهاية كل فقرة. ويحوي كل مثال على قيم عددية عملية للمعاملات parameters الفيزيائية مع رسم الأشكال اللازمة وذلك للتوضيح والتأويل. وإذا وجدنا بعض التعقيدات الرياضية عند حل الأمثلة، ثم الانتقال إلى مجال domain آخر، حيث يكون فيه الحل أسهل. مثل الانتقال من المجال الزمني إلى المجال الترددي أو العكس.

ناقشنا في الكتاب مفهومين أساسيين: مفهوم الاستمرارية ومفهوم التقطيع وذلك لكل من الإشارة (إشارة مستمرة ، إشارة متقطعة) والنظام (نظام مستمر ونظام متقطع). من وجهة النظر المنهجية يمكن دراسة المفهومين السابقين بشكل منفصل أو بشكل مندمج.

قدمنا في هذا الكتاب المفهومين السابقين بشكل منفصل وذلك لعدة أسباب منها:

أولا: تاريخياً، دُرِّس مفهوم الإشارة المستمرة والنظام المستمر ومن ثم تم الانتقال إلى الإشارة المتقطعة والنظم المتقطعة وذلك بعد ظهور طريقة التقطيع لنايكوست Nyquist ونظرية التقطيع لشانون Shannon وكاتيلنيكف Katelnicav

ثانياً: نعتقد من الأفضل الانتقال إلى مفهوم التقطيع بعد بلورة المفهوم المستمر يساعد الطالب لتركيز المفهومين.

ثالثاً: إعطاء المدرس الحرية أن يقوم بتدريس كلا المفهومين بشكل منفصل أو بشكل مندمج.

المعارف اللازمة لدراسة فصول الكتاب هي: مقدمة في التحليل الرياضي والفيزياء العامة بالإضافة لنظرية الدارات.

كل فصل يتألف من مقدمة ومن ثم فقرات متدرجة مترابطة. وكل فقرة تنتهي بمثال أو أكثر بهدف التوضيح والتأويل الوحيد. وفي نهاية كل فصل مجموعة من المسائل من أجل تركيز المبادئ الأساسية وليختبر الطالب مدى استيعابه للفصل المدروس. راعينا في أثناء تقديم النتائج التدرج في الصعوبة والتحدي والاقتراب من الواقع العملي (مسائل ذات صبغة عملية).

يتألف الكتاب من أربعة عشر فصلاً، بالإضافة إلى مجموعة من الملاحق. يحوي الفصل الأول مقدمة تتضمن رؤيا تاريخية للإشارات والنظم في إطار الاتصالات ومعالجة الإشارة. ومن ثم يتطرق لعناصر نظم الاتصالات مثل المرسل والمستقبل ومختلف أنواع أقنية الاتصالات السلكية واللاسلكية مع تصنيفها.

مفاهيم أساسية في الإشارات والنظم تقع في الفصل الثاني. الذي يشمل العمليات الأساسية على الإشارة، مثل الإزاحة الزمنية والقلب الزمني (إشارة المرآة) والتقييس. كما يتضمن تصنيف الإشارات حسب الشكل والقيمة.

ويتعرض هذا الفصل لبعض الإشارات المهمة مثل: الإشارة الجيبية والأسية والواحدية والنبضية. بالإضافة إلى ذلك تصنيف النظم: نظم مستمرة ومتقطعة والنظم الخطية واللاخطية والنظم المتغيرة مع الزمن ولغير المتغيرة مع الزمن والنظم السببية وغير السببية. وفي نهاية الفصل تمت دراسة تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن.

استخدمت سلاسل فورييه لتمثيل الإشارات الدورية في الفصل الرابع. ولتقديم سلاسل فورييه قمنا بالتمهيد، وذلك بدراسة مفاهيم فضاء الإشارة والتوابع المتعامدة مع إجراءات الحصول عليها. ومن ثم تمت دراسة سلاسل فورييه وخواصها بشيء من التفصيل. بعد ذلك استخدمنا سلاسل فورييه في دراسة استجابة النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن للإشارات الدورية. وفي نهاية الفصل برهنا علاقة بارسفال Parseval باستخدام سلاسل فورييه.

يتناول الفصل الرابع دراسة تحويلات فورييه وخصصنا الفقرة الأولى من هذا الفصل للانتقال السلس من سلاسل فورييه، التي تستخدم التمثيل الإشارات الدورية إلى تحويل فورييه لتمثيل الإشارات غير دورية والدورية. ومن ثم تمت دراسة

تحويلات فورييه بشكل موسع نسبياً مع العديد من الأمثلة التوضيحية. بعد ذلك تم استخدام تحويل فورييه لبرهان علاقتي بارسفال ورايلي. تلا ذلك مناقشة المجال الترددي وعلاقته بالمجال الزمني. قدمنا في الفقرة الأخيرة تحويل فورييه للإشارات الدورية.

دُرس في الفصل الخامس موضوعا الترابط والكثافة الطيفية. يعدّ هذان الموضوعان من الموضوعات الهامة في الاتصالات ومعالجة الإشارة.

بداية قُمنا بتعريف ودراسة تابع الترابط الذاتي للإشارة المستمرة والمتقطعة، وبعد ذلك ناقشنا تابع ترابط التقاطع ومن ثم انتقلنا لدراسة الكثافة الطيفية للقدرة والكثافة الطيفية للاستطاعة اعتماداً على تابع الترابط، وفي نهاية الفصل تم استخدام الكثافة الطيفية للقدرة والكثافة الطيفية للاستطاعة في تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن.

الموضوع الرئيسي في الفصل السادس هو نظرية أخذ العينات. ثم التقديم لهذا الموضوع بإجراءات أخذ عينات الإشارة المستمرة ووضع شروط اللازمة لمنع ظاهرة تداخل الطيوف الدورية. سمينا تلك الظاهرة بظاهرة الانتحال. أخذنا الاعتبارات العملية لأخذ العينات في نهاية الفصل.

يعدّ الفصل السابع مطلباً أساسياً بالنسبة للفصل اللاحق، مقدمة في التعديل. حيث يقدم مجموعة من المفاهيم الأساسية وسوف نعرضها بشكل مختصر.

الغلاف العقدي: له أهمية كبيرة في الاتصالات ومعالجة الإشارة والرادار كونه الحامل للمعلومات.

حزمة التمرير: لا بد منها في أي نظام اتصالات وخاصة الاتصالات اللاسلكية.

الإشارات التحليلية وتحويل هيلبرت مفاهيم رياضية تساعد بشكل كبير في تحليل وتصميم النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن. تمت مناقشة تأخير الطور لأهميته في تصميم نظم التزامن في أي نظام اتصالات ونظم معالجة الإشارة والنظم الالكترونية.

يعدّ الفصل الثامن، فصلاً تطبيقياً. حيث يعتمد في كثير من الأمور على الفصل السابع. خصصنا هذا الفصل لموضوع التعديل. حيث تناولنا فيه أسس أنواع التعديل الأساسية، مثل التعديل المطالي بكل تفرعاته والتعديل الزاوي

والتعديل الترددي، بالإضافة إلى موضوع تعديل مطال النبضة، الذي ناقشنا فيه موضوع التداخل. تم تمثيل أنواع التعديل المختلفة في المجال الترددي والمطواري. تلا ذلك التصميم لكونه متكاملاً مع عملية التعديل.

تناولنا في الفصل التاسع تحويلات لابلاس، التي هي عبارة عن أدوات رياضية تستخدم بشكل واسع في تحليل وتركيب Synthesis النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن.

درسنا في هذا الفصل تحويلات لابلاس أحادية الجانب وثنائية الجانب مع خواصهما، بالإضافة إلى خواص منطقة التقارب. وأنهينا الفصل ببعض التطبيقات لتحويلات لابلاس.

تعدّ المرشحات والمسويات مكونات أساسية في أي نظام اتصالات أو أي نظام لمعالجة الإشارة. لذلك خصصنا لهما فصلاً منفرداً. حيث يتناول في البداية المرشحات المثالية ومن ثم مقاربة مرشح حزمة تمرير منخفض مثالي وبعد ذلك وضحنا طريقة تصحيح مرشحات التمرير المنخفض، وشرحنا طريقة الانتقال من مرشح حزمة التمرير المنخفض إلى مرشح حزمة تمرير عالية. وفي النهاية سلطنا الضوء على المسويات.

الفصل الحادي عشر معنون الإشارات والنظم المتقطعة، وهو مشابه للفصل الثاني (مفاهيم أساسية في الإشارات والنظم)، الذي يعالج الإشارات والنظم المستمرة.

يحوي هذا الفصل تصنيف الإشارات المتقطعة والعمليات الأساسية عليها، بالإضافة إلى أهم الإشارات المتقطعة. وفي نهاية الفصل تمت دراسة النظم المتقطعة وخواصها.

الفصل الثاني عشر هو الصيغة المتقطعة لتحويل فوريه المستمر، الذي دُرس في الفصل الرابع.

حيث يحوي هذا الفصل تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT وخواصه، مثل: الدورية والخطية وعكس (قلب) الزمن والمرافق العقدي والانزياح الزمني والترددي. بالإضافة إلى جداء الغلاف (التلفيفي) وجداء إشارتين ونظرية بارسفال وفي نهاية الفصل استخدم تحويل فوريه المتقطع بالزمن لتحليل النظم الخطية المتقطعة غير المتغيرة مع الزمن.

في الفصل الثالث عشر تحليل الإشارات باستخدام فوريه المتقطع

ثم الانتقال من تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT إلى تحويل فوريه المتقطع DFT ومن ثم تمت دراسة تحليل الإشارات الجيبية باستخدام تحويل فوريه المتقطعDFT. وفي نهاية الفصل نُوقش تحويل فوريه المتعلق بالزمن ويسمى أيضا تحويل فوريه قصير الأمد.

درسنا في الفصل التاسع تحويل لابلاس، المستخدم في تحليل النظم والإشارات المستمرة. ما يماثل تحويل لابلاس في النظم والإشارات المتقطعة هو تحويل Z.

الذي يستخدم في تحليل النظم الخطية والإشارات المتقطعة. لذلك خصصنا الفصل الرابع عشر لدراسة تحويل Z وخواصه. وفي نهاية الفصل ناقشنا نظرية القيمة البدائية والقيمة النهائية.

وهكذا وجدنا أن الكتاب يتألف من أربعة عشر فصلاً. قام الأستاذ الدكتور محي الدين واياخ بتأليف الفصول الإحدى عشر الأولى، أي من الفصل الأول وحتى الفصل الحادي عشر ضمناً. كما قام الدكتور عبد الناصر العاسمي بتأليف الفصول الثلاثة الأخيرة، أي من الفصل الثاني عشر وحتى الفصل الرابع عشر ضمناً.

يشكر المؤلفان كل من ساهم وشجع في إخراج هذا العمل إلى النور. ويودان أن يقدما شكرهما لكل من المراجعين الأستاذ الدكتور محي الدين قبيطري والدكتور ميشيل السبع، لجهودهما في مراجعة الكتاب وتقييمه كما نشكر كل من المهندس وائل الرزوق لما قدمه من تنسيق الكتاب ومراجعة الأشكال وتدقيقها والمهندسة آية الخطيب لما قامت به في تنسيق الكتاب والمهندسة هناء وهب لما قامت به في رسم العديد من الأشكال.

نرجو الله تعالى أن يكون هذا الكتاب أساساً ومفيداً لمقررات أخرى لطلاب المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا وطلاب جامعات القطر وكل الجامعات العربية.

يعتذر المؤلفان من كل من قرأ هذا الكتاب، أساتذة ومحاضرين وطلاب، عن كل هفوة إذا وجدت. وسوف نكون من الشاكرين لكل من يبدي أي ملاحظة في تحسين هذا الكتاب، لتداركها لاحقاً

أ.د. محي الدين واياخ د. عبد الناصر العاسمي

الفهرس

1 المقدمة 23

1.1 رؤيا تاريخية 24

2.1 عناصر نظم الاتصالات 27

1.2.1 المرسل 27
2.2.1 القناة 28
3.2.1 المستقبل 29

3.1 نظم الاتصالات الرقمية 29

4.1 قنوات الاتصالات 31

1.4.1 قنوات الخطوط السلكية 32
2.4.1 قنوات الألياف البصرية 33
3.4.1 القنوات اللاسلكية الكهرومغناطيسية 34

2 مفاهيم أساسية في الإشارات والنظم 39

1.2 العمليات الأساسية على الإشارة 40

1.1.2 الإزاحة الزمنية 40
2.1.2 القلب الزمني 41
3.1.2 التقييس الزمني 41

2.2 تصنيف الإشارات 42

1.2.2 الإشارات المستمرة والمتقطعة بالزمن 42
2.2.2 الإشارات الحقيقية والإشارات العقدية 43
3.2.2 الإشارات الحتمية والإشارات العشوائية 45
4.2.2 الإشارات الدورية وغير الدورية 45
5.2.2 الإشارات السببية وغير السببية 47
6.2.2 الإشارات الزوجية والإشارة الفردية 48
7.2.2 التناظر الهرميتي للإشارات العقدية 49

3.2 بعض الإشارات الهامة وخواصها 52

1.3.2 الإشارة الجيبية 52
2.3.2 الإشارة الأسية العقدية 52
3.3.2 إشارة الخطوة الواحدية 53
4.3.2 النبضة المستطيلة 53
5.3.2 النبضة المثلثية 55
6.3.2 إشارة sinc 55
7.3.2 إشارة الشارة 56
8.3.2 إشارة النبضة أو إشارة الدلتا 57
9.3.2 نبضة غاوس 59

4.2 تصنيف النظم 60

1.4.2 النظم المستمرة بالزمن والمتقطعة بالزمن 61

2.4.2 النظم الخطية والنظم غير الخطية 61
3.4.2 النظم المتغيرة مع الزمن وغير المتغيرة مع الزمن 63
4.4.2 النظم السببية وغير السببية 64
5.4.2 النظام المستقر 64
5.2 تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI في المجال الزمني 64
مسائل الفصل الثاني 68
3 سلاسل فورييه 71
1.3 مفاهيم فضاء الإشارة 72
1.1.3 الأشعة وفضاء الأشعة 72
2.3 نشر الإشارة بالتوابع المتعامدة 75
1.2.3 إجرائية التعامدية غرام- شميت 79
2.2.3 تمثيل الإشارة هندسياً 85
3.3 سلاسل فورييه وخواصها 87
1.3.3 سلسلة فورييه لإشارة حقيقية 94
2.3.3 النشر بسلسلة فورييه للإشارات الفردية والزوجية 97
3.3.3 إشارات التوافقيات الفردية والزوجية 97
4.3 استجابة النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن للإشارات الدورية 99
5.3 علاقة بارسفال 103
مسائل الفصل الثالث 106
4 تحويلات فورييه 111
1.4 من سلاسل فورييه لتحويل فورييه 112
2.4 تحويل فورييه للإشارات الحقيقية والزوجية والفردية: 123
3.4 الخواص الأساسية لتحويل فورييه 125
1.3.4 خاصية الخطية 125
2.3.4 خاصية الازدواجية 126
3.3.4 خاصية الإزاحة الزمنية 128
4.3.4 خاصية التقييس 131
5.3.4 خاصية التلفيف (الطي) 134
6.3.4 خاصية التعديل أو انزياح التردد 138
7.3.4 خاصية الترابط الذاتي 140
8.3.4 الخاصية التفاضلية في المجال الزمني 142
9.3.4 خاصية التفاضل في المجال الترددي 143
10.3.4 خاصية التكامل 144
11.3.4 خاصية العزوم 145
4.4 علاقتي بارسفال ورايلي 147
5.4 المجال الترددي والعلاقة بين الزمن والتردد 150
1.5.4 المجال الترددي 151

2.5.4 جداء عرض النبضة بمجالها الترددي 152
6.4 تحويل فوريه للإشارات الدورية 152
مسائل الفصل الرابع 156
5 الترابط والكثافة الطيفية 159
1.5 تابع الترابط الذاتي 160
2.5 تابع الترابط الذاتي المتقطع 165
3.5 تابع ترابط التقاطع 167
4.5 إشارة القدرة والكثافة الطيفية للقدرة 171
5.5 إشارة الاستطاعة والكثافة الطيفية للاستطاعة 176
مسائل الفصل الخامس 181
6 أخذ العينات 183
1.6 أخذ العينات من الإشارة المستمرة 184
2.6 الانتحال 190
3.6 نظرية أخذ العينات 198
4.6 الاعتبارات العملية في أخذ العينات 202
1.4.6 أخذ العينات بالتبديل 202
2.4.6 أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر 205
مسائل الفصل السادس 207
7 إشارات ونظم حزمة التمرير والإشارة التحليلية وتحويل هيلبرت 209
1.7 مقدمة 210
2.7 الغلاف العقدي والنماذج الرياضية لإشارة حزمة التمرير 211
3.7 الاستثمار الهندسي لبعض النماذج الرياضية لإشارة حزمة التمرير 213
4.7 الإشارة التحليلية وتحويل هيلبرت 219
1.4.7 الإشارة التحليلية 219
2.4.7 تحويل هلبرت 225
5.7 خواص تحويل هيلبرت 227
6.7 تحويل هيلبرت لإشارة حزمة التمرير (إشارة ذات حزمة ضيقة) 230
7.7 الغلاف الفيزيائي والطور الكلي والتردد اللحظي 231
8.7 نظم حزمة التمرير 235
9.7 تأخير الطور والزمرة 241

10.7 أخذ العينات لإشارات حزمة التمرير 244
مسائل الفصل السابع 246
8 مقدمة في التعديل 251
1.8 مقدمة 252
2.8 أنواع التعديل والفوائد منه 252
1.2.8 تعديل الموجة المستمرة 252
2.2.8 تعديل النبضة 255
3.2.8 فوائد التعديل 257
3.8 أسس التعديل المطالي 259
1.3.8 الحامل 259
2.3.8 الإشارة المعدَّلة 260
3.3.8 تعديل AM لإشارة جيبية ومجموعة إشارات جيبية 263
4.8 التمثيل الطيفي والمطواري للتعديل المطالي 265
5.8 الكشف في التعديل المطالي 270
1.5.8 الكشف المتماسك 270
2.5.8 الكاشف غير المتماسك 271
3.5.8 التعديل ذو الحزمتين الجانبيتين مع كبت الحامل 274
4.5.8 التوصيف في المجال الترددي 275
5.5.8 كشف التعديل المتماسك 276
6.8 تعديل حزمة واحدة جانبية 278
1.6.8 توصيف التعديل SSB في المجال الزمني 279
2.6.8 توصيف التعديل SSB في المجال الترددي 280
7.8 تعديل مطال النبضة 282
1.7.8 التوصيف الرياضي لتعديل PAM- 282
2.7.8 التداخل في التعديل PAM 283
3.7.8 كشف تعديل إشارة PAM 286
8.8 التضميم 287
1.8.8 أسس التضميم 287
2.8.8 التضميم بالتقسيم الترددي FDM 290
3.8.8 التضميم بالتقسيم الزمني TDM 292
9.8 التعديل الزاوي 293
1.9.8 أسس التعديل الزاوي 293
2.9.8 التعديل الزاوي ذو الحزمة الضيقة باستخدام الإشارة الجيبية 297
3.9.8 التعديل الزاوي ذو الحزمة العريضة 299
4.9.8 التعديل الزاوي لأي اشارة رسالة 304
مسائل الفصل الثامن 308
9 تحويلات لابلاس 311

1.9 مفاهيم أولية في تحويلات لابلاس 312
1.1.9 مفهوم التردد العقدي 312
2.1.9 التابع الذاتي 314
3.1.9 تمثيل تحويل لابلاس 314
4.1.9 التقارب 315
5.1.9 الأقطاب والأصفار 316
2.9 تحويل لابلاس أحادي الجانب 318
3.9 خواص تحويل لابلاس أحادي الجانب 320
1.3.9 الخاصية الخطية 320
2.3.9 خاصية الإزاحة الزمنية: 321
3.3.9 خاصية الإزاحة في المجال s 322
4.3.9 خاصية التلفيف (التلاف): 322
5.3.9 خاصية التفاضل في المجال s 322
6.3.9 خاصية التفاضل في المجال الزمني 323
7.3.9 خاصية تحويل لابلاس للتكامل 324
8.3.9 خاصية التقييس 325
9.3.9 خاصية القيم الحدية 325
4.9 خواص منطقة التقارب 326
5.9 خواص تحويل لابلاس ثنائي الجانب 330
1.5.9 خاصية الإزاحة الزمنية 333
2.5.9 خاصية التفاضل في المجال الزمني 334
3.5.9 خاصية التكامل في المجال الزمني 335
4.5.9 خاصية القيمة الحدية الابتدائية والنهائية 335
6.9 تحويل لابلاس العكسي 336
7.9 تحويل لابلاس العكسي أحادي الجانب 336
8.9 تحويل لابلاس العكسي ثنائي الجانب 341
9.9 تطبيقات تحويلات لابلاس 345
1.9.9 تابع التحويل 345
2.9.9 حل المعادلات التفاضلية 349
3.9.9 حل الدارات الكهربائية 350
مسائل الفصل التاسع 352
10 المرشحات والمسويات 355
1.10 مقدمة 356
2.10 المرشحات المثالية 356
3.10 مقاربة مرشح حزمة تمرير منخفض مثالي 364
1.3.10 مرشحات بتورورث 366
2.3.10 مرشحات تشيبتشيف 369

4.10 تصميم مرشحات التمرير المنخفض 374
1.4.10 توابع من الدرجة الأولى 374
2.4.10 توابع من الدرجة الثانية 375
5.10 تحويلات التردد 378
1.5.10 الانتقال من مرشح تمرير منخفض LPF إلى مرشح تمرير عالي HPF 379
2.5.10 الانتقال من مرشح تمرير منخفض LPF إلى مرشح حزمة تمرير BPF 380
6.10 مُسوي خط التأخير المفرع 381
1.6.10 الإرسال الخالي من التشوه 381
2.6.10 التشوه الخطي 383
3.6.10 التسوية 384
4.6.10 استخدام دارات تماثلية في التصميم 385
5.6.10 استخدام دارات رقمية في التصميم 387
مسائل الفصل العاشر 389
11 الإشارات والنظم المتقطعة 391
1.11 مقدمة 392
2.11 تصنيف الإشارات المتقطعة 392
1.2.11 الإشارة الزوجية والإشارة الفردية 392
2.2.11 الإشارة الدورية والإشارة غير الدورية 393
3.2.11 الإشارة المحددة والإشارة العشوائية 394
4.2.11 إشارة القدرة وإشارة الاستطاعة 394
3.11 العمليات الاساسية على الإشارات 395
1.3.11 عملية التقييس المطالي 395
2.3.11 عملية الجمع 396
3.3.11 عملية الجداء 396
4.3.11 عملية التقييس الزمني 396
5.3.11 عملية قلب الإشارة 397
6.3.11 عملية الإزاحة الزمنية 397
4.11 بعض الإشارات الأساسية 398
1.4.11 الإشارات الأسية 398
2.4.11 الإشارة الجيبية 399
3.4.11 الإشارة الجيبية المتخامدة أسياً 403
4.4.11 تابع الخطوة يُعرف تابع الخطوة بالشكل التالي: 404
5.4.11 تابع النبضة الواحدية 404
6.4.11 تابع التصاعد الخطي 405
5.11 النظام 406
6.11 خواص النظم 409
1.6.11 الاستقرار 409
2.6.11 ذاكرة النظام 410
3.6.11 السببية 410
4.6.11 العكوسية 411

5.6.11 عدم التغيير مع الزمن 412
6.6.11 الخطية 413
7.6.11 الخاصية التراكبية 413
5.6.11 الخاصية التجانسية 413
مسائل الفصل الحادي عشر 416
12 تحويل فوريه المتقطع بالزمن 419
1.12 تحويل فوريه المتقطع بالزمن 420
2.12 خواص تحويل فوريه المتقطع بالزمن 422
1.2.12 الدورية 422
2.2.12 عكس الزمن 423
3.2.12 المرافق العقدي 423
4.2.12 الانزياح الزمني والانزياح الترددي 424
5.2.12 جداء التلاف المتقطع 424
6.2.12 جداء إشارتين 425
3.12 نظرية بارسفال 426
4.12 الاستجابة الترددية لنظام LTI 428
مسائل الفصل الثاني عشر 431
13 تحليل الإشارات باستخدام تحويل فوريه المتقطع 433
1.13 مقدمة 434
2.13 تحويل فوريه المتقطع DFT 434
3.13 تحليل الإشارات الجيبية باستخدام DFT 436
1.3.13 أثر تطبيق النافذة 436
2.3.13 أثر التقطيع الترددي 441
4.13 تحويل فوريه المتعلق بالزمن 448
5.13 التقطيع بالتردد والزمن 449
مسائل الفصل الثالث عشر 450
14 تحويل Z 453
1.14 مقدمة 454
2.14 تعريف تحويل Z 455
3.14 تحويل Z العكسي 459
4.14 السببية والاستقرار 460
5.14 خواص تحويلZ 463
1.5.14 الخطية 463
2.5.14 الانزياح الزمني 464

3.5.14 عكس الزمن 465
4.5.14 المرافق العقدي 465
5.5.14 الضرب بإشارة أسية 465
6.5.14 الاشتقاق في مجال Z 466
7.5.14 جداء التلاف 467
8.5.14 الترابط بين إشارتين 468
6.14 نظرية بارسفال 468
7.14 نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية 470
15 المراجع 474

قائمة الأشكال

الشكل 1-1 المخطط الوظيفي لنظام اتصالات. 27
الشكل 1-2 العناصر الأساسية في نظام اتصالات رقمي. 30
الشكل 1-3 المجال الترددي للأقنية المقادة. 33
الشكل 1-4 المجالات الترددية لطيف الأمواج الكهرومغناطيسية. 34
الشكل 1-5 توضيح انتشار الموجة الأرضية. 35
الشكل 1-6 توضيح انتشار الموجة السماوية. 36
الشكل 2-1 الإزاحة الزمنية بمقدار $t0$. 41
الشكل 2-2 توضيح قلب الإشارة. 41
الشكل 2-3 تقلص الإشارة الأصلية $a > 1$. 42
الشكل 2-4 إشارة مستمرة بالزمن وأخرى متقطعة بالزمن. 43
الشكل 2-5 تمثيل الإشارة العقدية $x(t)$. 44
الشكل 2-6 إشارة الخطوة الواحدية. 46
الشكل 2-7 مثال عن الإشارة السببية. 47
الشكل 2-8 مثال عن (A) إشارة زوجية و(B) إشارة فردية. 48
الشكل 2-9 حل المثال 2-11. 53
الشكل 2-10 شكل النبضة المستطيلة. 54
الشكل 2-11 حل المثال 2-12. 54
الشكل 2-12 توضيح شكل النبضة المثلثية. 55
الشكل 2-13 إشارة السنك SINC(T). 56
الشكل 2-14 تابع الإشارة كنهاية للتابع $xn(t)$. 57
الشكل 2-15 نبضة غاوس ذات امتدادات متغيرة. 60
الشكل 3-1 التمثيل الشعاعي للإشارة $si(t)$. 85
الشكل 3-2 إشارة دورية. 89
الشكل 3-3 الطيف المتقطع لقطار النبضات. 90
الشكل 3-4 إشارة دورية مربعة. 91
الشكل 3-5 توضيح عوامل فورييه للإشارة $x(t)$. 92

الشكل 3-6 قطار من النبضات. 93
الشكل 3-7 تمثيل إشارة جيبية بدوران شعاعين متعاكسين. 96
الشكل 3-8 (أ) العوامل العقدية و(ب) عوامل الشكل المثلثي لسلسلة فورييه. 97
الشكل 3-9 (أ) إشارة ذات توافقيات زوجية، (ب) وأخرى فردية. 98
الشكل 3-10 التابع $xt = 2tT$ الدوري. 104
الشكل 4-1 الإشارة $x(t)$ والصيغة المبتورة والدورية. 113
الشكل 4-2 (أ) نبضة مربعة (ب) طيف النبضة المربعة 116
الشكل 4-3 (أ) الخواص الطيفية للمطال (ب) الخواص الطيفية للطور 118
الشكل 4-4 (أ) نبضة غاوس (ب) طيف نبضة غاوس. 118
الشكل 4-5 تحويل فورييه لمثال 4-3. 120
الشكل 4-6 (أ) مطال تحويل فورييه للتابع $xt = e - at$. (ب) الاستجابةالطورية لتحويل فورييه 121
الشكل 4-7 إشارة النبضة وطيفها. 122
الشكل 4-8 توضيح طيف إشارة $sgnt$. 123
الشكل 4-9 طور كل من الإشارتين $x(f)$ و $y(f)$. 129
الشكل 4-10 قطار من النبضات الدورية. 130
الشكل 4-11 (أ) قطار نبضات (ب) تحويل فورييه لقطار النبضات. 132
الشكل 4-12 (أ) توضيح الإشارة في المجال الزمني (ب) في المجال الترددي. 137
الشكل 4-13 (أ) الإشارة في المجال الزمني (ب) في المجال الترددي. 139
الشكل 4-14إشارتين في المجال الزمني 156
الشكل 4-15 التمرين 4-4 156
الشكل 4-16 التمرين 5-9 157
الشكل 5-1 آلية إيجاد تابع الترابط الذاتي لنبضة مستطيلة. 161
الشكل 5-2 (أ) قطار من أربع نبضات مستطيلة (ب) تابع الترابط الذاتي. 162
الشكل 5-3 (أ) نبضات مربعة دورية (ب) تابع الترابط الذاتي. 164
الشكل 5-4 تابع الترابط الذاتي المتقطع لـ $x1$ و $x2$. 166
الشكل 5-5 إزاحة الإشارة $x2t$ بالنسبة للإشارة $x1t$. 169
الشكل 5-6 تابع ترابط التقاطع بين إشارة مربعة وإشارة مثلثية. 169
الشكل 5-7 تابع ترابط التقاطع المتقطع بين x و y. 171

الشكل 5-8 نبضة مثلثية. 181
الشكل 6-1 (أ) الإشارة الأصلية التماثلية (ب) مشط ديراك (جـ) عينات الإشارة..... 185
الشكل 6-2 (أ) طيف الإشارة الأساسية (ب) طيف الإشارة $x\delta(t)$ بوجود انتحال $fs < 2W$ (جـ) طيف الإشارة $x\delta(t)$ عند $fs > 2W$ (د) الاستجابة المطالية لمرشح استعادة الإشارة..... 188
الشكل 6-3 (أ) الإشارة الأصلية $x(t)$ وطيفها $X(jw)$ (ب) $x\delta(t)$ و $X\delta(jw)$ من أجل $Ts = 14$ (جـ) يبين $x\delta(t)$ و $X\delta(jw)$ عند $Ts = 1$ (د) يبين $X\delta(t)$ عند $Ts = 32$..... 194
الشكل 6-4 تمثيل الإشارة باستخدام نظرية أخذ العينات. 199
الشكل 6-5 أخذ العينات بالتبديل..... 203
الشكل 6-6 أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر. 205
الشكل 6-7 التمرين 6-8. 208
الشكل 7-1 إشارات حزمة التمرير. 210
الشكل 7-2 مطوار للإشارة xt والنموذج الرياضي لإشارة حزمة التمرير. 211
الشكل 7-3 الإشارة $x(t)$ وغلافها $e(t)$..... 214
الشكل 7-4 المعدل الترابعي. 215
الشكل 7-5 (أ) الحصول على $xI(t)$ (ب) كاشف التعديل الترابعي. 216
الشكل 7-6 (أ) طيف الإشارة $x(t)$ (ب) طيف الغلاف العقدي. 218
الشكل 7-7 الإشارة التحليلية في المستوى العقدي. 221
الشكل 7-8 رسم توضيحي للإشارتين $x(t)$ و$x(t)$..... 222
الشكل 7-9 طيف الإشارة التحليلية وطيف الإشارة الأصلية..... 223
الشكل 7-10 تحويل هيلبرت مضاعف للإشارة. 227
الشكل 7-11 الطيف الترددي لإشارة حزمة التمرير. 233
الشكل 7-12 العلاقة بين الاستجابة والإشارة ذات حزمة تمرير منخفض. 238
الشكل 7-13 الاستجابة المطالية $H(F)$ وتابع التحويل العقدي المرافق Hf..... 239
الشكل 7-14 استجابة مرشح حزمة التمرير المثالي لنبضة راديوية. 241
الشكل 7-15 التمرين 7-1..... 246
الشكل 7-16 التمرين 7-8..... 248
الشكل 8-1 (A) موجة الحامل (B) الإشارة المعدّلة (إشارة الرسالة) (C) الإشارة المعدّلة بالمطال (D) الإشارة المعدّلة بالزاوية..... 253

الشكل 8-2 (A) النبضات الدورية الحاملة (B) الإشارة المعدِّلة (C) الإشارة المعدَّلة. 256
الشكل 8-3 (A) إشارة الرسالة (B) النبضات الحاملة (C) تعديل PDM. 256
الشكل 8-4 (A) إشارة الرسالة وطيفها (B) إشارة الحامل وطيفها (C) الإشارة المعدلة وطيفها المزاح. 257
الشكل 8-5 (A) التجميع بالتقسيم الترددي (B) التجميع بالتقسيم الزمني. 258
الشكل 8-6 (A) إشارة الرسالة (B) موجة التعديل AM عند $ka\,mt < 1$ (C) موجة التعديل AM عند $ka\,mt > 1$. 261
الشكل 8-7 المخطط الوظيفي للمعدّل. 262
الشكل 8-8 (A) طيف الرسالة (B) طيف الإشارة الـ AM. 267
الشكل 8-9 الطرف الأيسر المجال الزمني والأيمن المجال الترددي (A) *إشارة الرسالة* (B) الحامل (C) الإشارة المعدّلة. 268
الشكل 8-10 (A) كافة المطاور في اللحظة $t = 0$ (B) كافة المطاور في اللحظة $t > 0$. 269
الشكل 8-11 المخطط الصندوقي للكاشف المتماسك. 271
الشكل 8-12 (A) كاشف الغلاف (B) إشارة الدخل AM (C) الخرج المثالي. 272
الشكل 8-13(A) دخل وخرج كاشف الغلاف عملياً (B) اختيار غير سليم لثابت التفريغ $R\ell c$. 272
الشكل 8-14 (A) إشارة الرسالة (B) الإشارة المعدّلة. 274
الشكل 8-15 (A) الطيف المطالي للرسالة (B) الطيف المطالي للتعديل *DSB-SC* 275
الشكل 8-16 (A) معدل الجداء لتوليد التعديل DSB-SC (B) كاشف التعديل المتماسك للموجة المعدلة بالتعديل DSB-SC. 276
الشكل 8-17 الطيف المطالي للإشارة $v(t)$. 277
الشكل 8-18 **(A)** معدل *SSB* عام **(B)** معدل *SSB* باستخدام مرشح تمرير 280
الشكل 8-19 (A) طيف الرسالة (B) تحويل هيلبرت لطيف الرسالة (C) مجموع طيفي $m(t)$ و $m(t)$ (D) الإزاحة بمقدار fc (E) الحصول على الحزمة الجانبية العليا. 281
الشكل 8-20 (A) إشارة PAM (B)النبضة المستطيلة (C) طيف وطور $H(T)$. 282
الشكل 8-21 (A) نبضات PAM- المرسلة (B) نبضات PAM المستقبلة. 284
الشكل 8-22 استخدام نبضة *SINC* لحذف التداخل. 285
الشكل 8-23 نبضة بتناظر فردي عند πT. 286
الشكل 8-24 كاشف تعديل إشارة PAM-. 286
الشكل 8-25 (A) المخطط الوظيفي للتعديل والتجميع (B) أطياف إشارات المعلومات والإشارات المعدلة بالإضافة إلى الطيف الكلي W(W). 291

الشكل 8-26 استخلاص الإشارة الأصلية (الحاملة للمعلومات) في FDM. 292
الشكل 8-27 تضميم TDM من أجل M=3. 293
الشكل 8-28 (A) إشارة الحزمة القاعدية المعدّلة (إشارة المعلومات) (B) إشارة الحامل (C) الإشارة المعدّلة والأسهم تدل على اتجاه الانزياح. 295
الشكل 8-29 توضيح العلاقة بين التعديل الترددي وتعديل الطور. 296
الشكل 8-30 (A) طيف إشارة التعديل الزاوي عند $\beta \gg 1$ (B) المخطط المطواري (الشعاعي) الكلي لإشارة التعديل الزاوي عند $\beta \gg 1$ المطوار (الشعاع) الكلي $X\Sigma$ حول المركز..... 299
الشكل 8-31 توابع بسل من أجل القيم N=0, 1, 2, ..., 7. 301
الشكل 8-32 طيف التعديل الزاوي من أجل $\beta = 2$ و $\beta = 5$. 302
الشكل 9-1 إشارات حقيقية موافقة لقيم مختلفة للتردد العقدي..... 313
الشكل 9-2 الجزء الحقيقي والتخيلي est عندما $\delta < 0$..... 313
الشكل 9-3 منطقه ROC (المنطقة المهشرة) وموقع القطب. 318
الشكل 9-4 (A) مجال تقارب إشارة الجانب الأيسر (B) مجال تقارب إشارة الجانب الأيمن (C) مجال تقارب إشارة الجانبين. 328
الشكل 9-5 (A) مجال تقارب الإشارة $x1(t)$ (B) المنطقة المظللة اليمنى هي مجال تقارب الحد $e - tu - 1(t)$ والمنطقة المظللة اليسرى هي مجال تقارب الحد $e - 2tu - 1(-t)$..... 329
الشكل 9-6 (A) مجال التقارب للإشارة X(T) (B) مجال التقارب للإشارة Y(T) (C) مجال التقارب للإشارة - X(T) Y(T)..... 333
الشكل 9-7 مجال التقارب للمثال السابق. 343
الشكل 9-8 يظهر الأقطاب ومجال التقارب ROC..... 344
الشكل 9-9 (A) التركيبة المتوازية (B) التركيبة التسلسلية (C) تحليل الإشارة في التركيبة المتوازية..... 347
الشكل 9-10 (A) نظام سببي ومستقر (B) سببي غير مستقر. 348
الشكل 9-11 نظام سببي ومستقر (B) نظام غير سببي ومستقر. 349
الشكل 10-1 الاستجابة الترددية للمرشحات LPF وHPF وBPF المثالية. 357
الشكل 10-2 الاستجابة المطالية والطورية لمرشح LPF مثالي..... 359
الشكل 10-3 الاستجابة النبضية لمرشح LPF مثالي. 359
الشكل 10-4 تكامل السينك siu..... 361
الشكل 10-5 استجابة مرشح LPF مثالي لنبضة مربعة $umax = \pi$. 362

الشكل 10-6 تابع تحويل الاستطاعة عند المرشح بتروورث عند N=1 و N=5..... 366
الشكل 10-7 توزع أقطاب $H(s)H(-s)$ في المستوي S من أجل N=3 و N=4 (الطرف الأيسر أقطاب $H(s)$ والطرف الأيمن أقطاب $H(-s)$). 368
الشكل 10-8 تابع تحويل الاستطاعة كتابع للتردد. 371
الشكل 10-9 أقطاب مرشح بتروورث ومرشح تشيبتشيف. 373
الشكل 10-10 تسلسل توابع التحويل وتوابع تحويل دارة العزل. 374
الشكل 10-11 دارة مرشح تمرير منخفض. 375
الشكل 10-12 (A) دارة من المرتبة الثانية (B) موقع الاقطاب..... 376
الشكل 10-13 مراحل (مقاطع) مرشح بتروورث ذو N=3. 376
الشكل 10-14 منحني الاستجابة لمرشح تمرير منخفض عملي. 378
الشكل 10-15 (A) الاستجابة المطالية (B) الاستجابة الطورية..... 382
الشكل 10-16 (A) الاستجابة الطورية (B) الاستجابة المطالية..... 384
الشكل 10-17 (A) تسلسل القناة مشوه $Hc(jw)$ مع المسوي $Hejw$ (B) الاستجابة المطالية للقناة المشوهة $Hc(jw)$ والمسوي jw والمجموع الكلي $Hoverall jw$..... 384
الشكل 10-18 مسوي تماثلي. 385
الشكل 10-19 (A) الاستجابة المشوهة للقناة (B) خرج الفرعات الخمسة (G) خرج المسوي. 386
الشكل 10-20 مسوي خط التأخير المفرع. 387
الشكل 11-1 (A) الإشارة $x[n]$ (B) الإشارة xen (C) الإشارة $x0[n]$. 393
الشكل 11-2 إشارة متقطعة دورية ذات $N0 = 3$. 394
الشكل 11-3 (A)الإشارة $X[N]$ (B) الإشارة $Y[N]$. 396
الشكل 11-4 (A) الإشارة xn (B) الإشارة المزاحة $xn + 3$..... 398
الشكل 11-5 (A) إشارة أسية متخامدة (B) إشارة أسية متصاعدة. 399
الشكل 11-6 إشارة جيبية متقطعة. 400
الشكل 11-7 توزع ثماني النقاط بشكل منتظم على محيط الدائرة. 403
الشكل 11-8 (A) إشارة متصاعدة (B) إشارة متخامدة. 403
الشكل 11-9 تابع الخطوة أو إشارة الخطوة بمطال يساوي الواحد. 404
الشكل 11-10 النبضة الواحدية. 405
الشكل 11-11 تابع التصاعد الخطي. 405

الشكل 11-12 نظام متقطع. 406
الشكل 11-13 نظام الوسطي المنزلق. 407
الشكل 11-14 (A) ربط تسلسلي (B) ربط تفرعي (C) ربط مختلط. 408
الشكل 11-15 نظام تغذية عكسية. 408
الشكل 11-16 نظام عكوس. 411
الشكل 12-1 التوابع الذاتية للنظم الخطية. 428
الشكل 13-1 مطال تحويل فورييه للنافذة المستطيلة وللإشارة بعد تطبيق النافذة. 437
الشكل 13-2 طيف الإشارة بعد تطبيق النافذة من أجل قيم مختلفة للترددين $\omega 0$ و $\omega 1$. 438
الشكل 13-3 تحويل فورييه لنافذة قيصر من أجل قيم مختلفة لطول النافذة L والمعامل β. 440
الشكل 13-4 الإشارة بعد تطبيق النافذة وتحويل فورييه المتقطع لهام مثلاً بالقسم الحقيقي والقسم التخيلي. 443
الشكل 13-5 تحويل فورييه المتقطع للإشارة بعد تطبيق النافذة ممثلاً بالمطال والصفحة مع مطال طيف الإشارة المستمر DTFT. 443
الشكل 13-6 تحليل فورييه لمجموع إشارتين جيبيتين بترددات متوافقة مع تحويل فورييه المتقطع. 445
الشكل 13-7 تحويل فورييه المتقطع لمجموع إشارتين جيبيتين مع مضاعفة عدد نقاط التقطيع. 446
الشكل 13-8 قطعتين من الإشارة المتغيرة التردد بالزمن. 447
الشكل 13-9 مطال تحويل فورييه المتعلق بالزمن للإشارة ذات التردد المتغير بالزمن بشكل خطي. 447
الشكل 13-10 الطيف قصير الأمد لإشارة ذات تردد متغير مع الزمن. 451
الشكل 14-1 منطقة تقارب تحويل Z لإشارة سببية وإشارة عكس سببية. 457
الشكل 14-2: قرص التكامل في تحويل Z العكسي 459
الشكل 14-3 حيز تقارب تابع التحويل في المثال 14-2. 462

قائمة الجداول

جدول 5-1 تتابعيات باركر. 167
جدول 8-1 قيم توابع بسل لقيم 16-0=N المفيدة. 301
جدول 8-2 جذور المعادلة (8-109). 304
جدول 9-1 خواص تحويل لابلاس. 332
جدول 12-1تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT لبعض الإشارات الشهيرة. 422
جدول 12-2 خواص تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT. 426
جدول 14-1 تحويل Z لبعض الإشارات الأساسية. 458

1 المقدمة

Introduction

1.1 رؤيا تاريخية

تعني الاتصالات عموماً إرسال رسالة من مصدرها (المرسل) إلى مقصدها (المستقبل)، سواء كان ذلك في فضاء إقليدي (ثلاث أبعاد) أو في فضاء زمني (بعد واحد) أم كليهما معاً. لتحقيق ذلك فإننا نحتاج إلى:

- المرسل (مصدر الرسالة).
- حامل الرسالة.
- القناة (وسط انتقال حامل الرسالة).
- المستقبل (مقصد الرسالة).

سوف نسمي تكامل المكونات السابقة "نظام الاتصالات". وسوف نورد عدداً من الأمثلة على نظم الاتصالات مثل:

- شخص يتحدث مع شخص آخر.
- نقل رسالة من مصدرها إلى مقصدها عن طريق الحمام الزاجل.
- من كاتب نص إلى قارئ النص (أو من كاتب الكتاب إلى القارئ).
- نقل الثقافة من جيل إلى جيل آخر.
- نقل المعلومات الوراثية عن طريق الكروموزوم.
- نقل رسائل الحواس إلى الدماغ عن طريق الجملة العصبية.

يمكن التعبير عن المعلومات information باستخدام رموز مختلفة (أحرف، كلمات، جمل، رسومات، رموز رياضية، ...) وذلك بهدف إرسال أو تخزين مجموعة الرموز التي تحوي (تعبر عن) معلومات محدودة نسميها الرسالة message . لنقل الرسالة لابد من حامل مادي للرسالة (أوراق، أشرطة مغناطيسية ...) أو عملية فيزيائية physical process (أمواج صوتية، أمواج كهربائية، تيار كهربائي، جهد كهربائي...). العملية الفيزيائية الحاملة للرسالة تسمى الإشارة (signal).

تستخدم الإشارة الكهربائية والأمواج الكهرطيسية في نظم الاتصالات الحديثة لنقل المعلومات ونذكر منها على سبيل المثال:

- نظام البث الإذاعي.
- نظام البث التلفزيوني.
- نظام الهاتف (الاتصال عن طريق الهاتف).

- الانترنت الإرسال من طرف لأخر.
- نظام اتصالات بالهاتف الجوال.

أهم النقاط العلّامة في تطور الاتصالات الكهربائية هي:

- التلغراف (S. Morse) عام 1837
- فاكس ميل (A. Bain) عام 1843
- معادلات ماكسويل (J. C. Maxwell) عام 1864
- كابل التلغراف عبر الأطلسي عام 1866
- الهاتف (A. Bell) عام 1876
- اكتشاف الموجة الراديوية (H. Hertz) عام 1877
- حساس للموجة الكهرطيسية وأول اتصال راديوي (O. Lodge) عام 1894
- اتصال راديوي عبر الأطلسي (G. Marconi) عام 1901
- أول صمام ثنائي (J. Fleming) عام 1903
- صمام ثلاثي (L. De forest) عام 1906
- تعديل مطالي AM (R. Fessenden) عام 1906
- إذاعة AM (KDKA. Pittsburgh) عام 1920
- مستقبل سوبرهيترودين AM خلال الحرب العالمية الأولى (E.Armstrong)
- إرسال تلفزيوني (V. Zworykin) عام 1923
- نظرية الاتصالات المحدودة (N. Nyquist) عام 1928
- التحليل التوافقي (N. Wiexner) عام 1930
- تعديل الترددي (E. Armstrong) عام 1933
- نظرية ترابط السيرورات العشوائية (A. Khintchine) عام 1934
- ترشيح السيرورات العشوائية (A. N. Kolmogorov) عام 1939
- ترشيح السيرورات العشوائية (N. Wiener) عام 1942
- مفهوم المرشح التوافقي (D. O. Narth) عام 1943
- نظرية الضجيج العشوائي (S. O. Rice) عام 1944
- نظرية أخذ العينات (V. A. Kotelnikov) عام 1947
- أول ترانزستور (W. Brattain, J. Bardeen) عام 1947

- النظرية الرياضية للاتصالات (C. Shannon) عام 1948
- ترميز هاميينك (R. Hamming) عام 1950
- الترميز التلفيفي (P. Elias) عام 1955
- الترميز الدوري (E. Prange) عام 1957
- استخدام نظرية السيروات العشوائية في الاتصالات (B. R. Levin) عام 1957
- أول اتصالات فضائية (القمر الصنعي sputnik) عام 1957
- أول دارة متكاملة (J. Kilby, R. Noyee) عام 1958
- سلاسل m الشبه عشوائية (N. Zierler) عام 1959
- مرشح عودي (R. E. Kalman) عام 1960
- ترميز LDPC (Low-Density Parity-Check) (R. G. Gallager) عام 1962
- خوارزمية فاتربي للترميز التلفيفي (A. J. Viterbi) عام 1971
- التعديل المرمز التشابكي TCM (Trellis Coded Modulation) (G. Ugerboeck) عام 1982
- ظهور ترميز التوربو (C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimgishima) عام 1993
- ترميز الفضاء والزمن (S. Alamouti) عام 1998

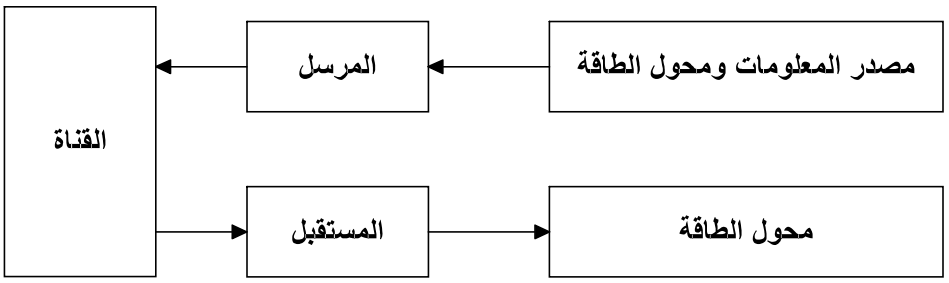
2.1 عناصر نظم الاتصالات

تُصمم نظم الاتصالات الكهربائية لإرسال رسائل (أو معلومات) من مصدر الرسالة إلى مقصدها. يبين الشكل 1-1 المخطط الوظيفي الصندوقي لنظام اتصالات، الذي يتألف من مصدر المعلومات ومحول الطاقة (transducer) والمرسل في طرف الإرسال. ومستقبل ومحول الطاقة في طرف الاستقبال بالإضافة إلى القناة. يقوم المصدر بتوليد المعلومات التي يمكن أن تكون كلام أو صورة أو نص لغة ما (بآلية عشوائية)، أي ليس بآلية مُحددة معروفة. ليقوم محول الطاقة بعدها بتحويل خرج المصدر إلى إشارة كهربائية مناسبة للإرسال. فعلى سبيل المثال يحول الميكرفون الإشارة الكلامية الصوتية إلى إشارة كهربائية، وتحول كاميرا الفيديو camera الصورة إلى إشارة كهربائية. وفي طرف المقصد، يقوم محول الطاقة بتحويل الإشارة الكهربائية إلى الإشارة الأصلية المناسبة للاستخدام، إشارة صوت أو غيرها.

الأجزاء الأساسية في أي نظام اتصالات هي المرسل والقناة والمستقبل. سوف نشرح الآن بشيء من التفصيل وظائف الأجزاء السابقة.

1.2.1 المرسل

يقوم المرسل بتحويل الإشارة الكهربائية على دخله إلى شكل موجي مناسب للإرسال عبر قناة فيزيائية أو وسط إرسال. فعلى سبيل المثال، يخصص في البث الإذاعي والتلفزيوني عرض مجال ترددي مُحدد لكل بث (لكل محطة). وهكذا فإن على كل مرسل أن يوافق طيف إشارة الدخل مع الطيف المخصص وذلك من أجل الإرسال عبر القناة، حتى لا يحدث أي تداخل بين إذاعات البث المختلفة. تُنجز وظائف مشابهة في نظم الاتصالات الهاتفية حيث ترسل إشارات الكلام الكهربائية على نفس الكابل لكل منها مجال ترددي مُحدد ومعين.



الشكل 1-1 المخطط الوظيفي لنظام اتصالات.

عموماً، يقوم المرسل بالموافقة بين طيف الرسالة وعرض المجال الترددي المخصص في القناة، تسمى هذه العملية التعديل modulation، التي تقوم بتغيير إحدى معاملات الإشارة (مطال، تردد، طور) بشكل يتوافق مع تغيّر إشارة الرسالة. فعلى سبيل المثال في التعديل المطالي Amplitude Modulation (AM) يقع تردد الإشارة الحاملة الجيبية في منتصف المجال الترددي المخصص حيث يتغير مطالها بما يتوافق مع إشارة الرسالة. وبنفس الطريقة في التعديل الترددي Frequency Modulation (FM) فإن تردد الإشارة الحاملة الجيبية يقع في منتصف المجال الترددي المخصص حيث يتغير تردد الإشارة الحاملة بما يتوافق مع إشارة الرسالة. تعديل الطور Phase Modulation (PM) هي أيضاً إحدى طرق التعديل حيث يتغير الطور بما يتوافق مع إشارة الرسالة.

يعتمد اختيار نوع التعديل على مجموعة من العوامل مثل: المجال الترددي المتاح، نوع الضجيج في القناة، نوع التداخل في القناة والوسائل الالكترونية المتوافرة لتضخيم الإشارة قبل إرسالها. يقوم المرسل، بالإضافة إلى عملية التعديل، بإنجاز مجموعة من العمليات مثل: ترشيح الإشارة الحاملة للمعلومات وتضخيم الإشارة المعدّلة، وفي حالة الاتصالات اللاسلكية يقوم الهوائي بإشعاع الإشارة المرسلة.

2.2.1 القناة

قناة الاتصالات هي عبارة عن وسط فيزيائي يستخدم لإرسال (تمرير) الرسالة من المرسل إلى المستقبل. في الاتصالات اللاسلكية القناة عادة تكون الجو أو الفضاء الحر. أما في الاتصالات السلكية، فقد تتألف من تركيبة من الأوساط الفيزيائية مثل كوابل معدنية وكوابل الألياف الضوئية. تتعرض الإشارة (الإشارة المعدّلة) في أثناء مرورها ضمن القناة إلى مجموعة من المنغصات مثل: الضجيج والتخميد والتداخل (تداخل إشارات غريبة من أقنية أخرى) وفي القنوات ذات المسارات المتعددة تتعرض الإشارة للخفوت (تتعاكس أطوار الإشارة المرسلة عند المستقبل).

عند تصميم نظم الاتصالات، يتعامل المصمم مع نماذج رياضية خاصة بالنظام المعني. تُوصِّف النماذج الرياضية تشوه الإشارة في القناة من وجهة النظر الإحصائية، ويتم الحصول على التوصيف الإحصائي اللازم للنموذج الرياضي عن طريق مجموع من التجارب العملية على القناة. ومن جهة أخرى، عندما تتغير المواصفات الإحصائية للقناة بشكل سريع، عند ذلك يقوم المصمم بتصميم النظام بحيث يكون متكيفاً مع التغيرات السريعة. مثال على ذلك نظم الاتصالات النقالة.

3.2.1 المستقبل

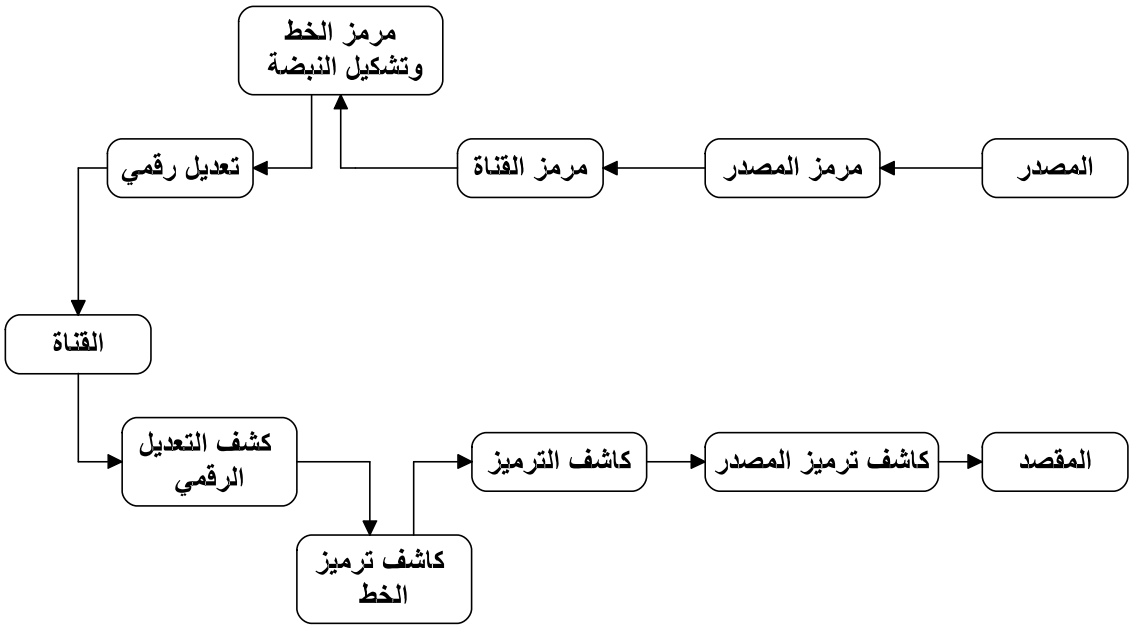
الوظيفة الأساسية للمستقبل هي استخلاص إشارة الرسالة من الإشارة المستقبلة. بعد عملية كشف التعديل demodulation تبقى إشارة الرسالة مشوهة بسبب وجود الضجيج. وجودة الاستقبال عادة تابعة لكل من نوع التعديل وشدة الضجيج. و تُحسن عمليات الترشيح في طرف الاستقبال نوعاً ما جودة إشارة الرسالة وذلك بالتقليل من أثر الضجيج.

3.1 نظم الاتصالات الرقمية

نظم الاتصالات التي نُوقشت في الفقرة السابقة تسمى بنظم الاتصالات التماثلية، حيث تعتمد على الإشارة التماثلية analog والمصدر التماثلي. هناك بديل آخر عن نظم الاتصالات التماثلية وهو نظم الاتصالات الرقمية digital حيث يتم تحويل خرج المصدر التماثلي إلى شكل رقمي (إشارة رقمية) ويطبق عليه تعديل رقمي. ومن أهم الأسباب في الانتقال إلى نظم الاتصالات الرقمية، هي الميزات التالية:

- نوعية الإشارة المستقبلة في نظم الاتصالات الرقمية أفضل من نوعية الإشارة المستقبلة في نفس الشروط، في نظم الاتصالات التماثلية.
- تسمح نظم الاتصالات الرقمية بإعادة توليد regeneration الإشارة وبهذا تتخلص الإشارة من الضجيج noise المرافق، وهذا لا يمكن (أي التخلص من الضجيج) في نظم الاتصالات التماثلية، حيث يقوم المضخم بتضخيم الإشارة والضجيج معاً.
- تتميز الإشارة التماثلية للرسالة بإطناب redundant عالٍ، وباستخدام معالجة رقمية يمكن إزالة أو التقليل من الإطناب وهذا بدوره يؤدي إلى الاقتصادية في المجال الترددي.
- تسمح نظم الاتصالات الرقمية بترميز القناة channel coding للوثوقية وكذلك بالتعمية ciphering.
- عموماً، نظم الاتصالات الرقمية غير مكلفة نسبياً في التنفيذ.

في كثير من التطبيقات، المعلومات أصلاً موجودة بشكل رقمي مثل: معطيات الحواسب أو النصوص في اللغة العربية وغيرها. في هذه الحالة نسمي المصدر بالمصدر الرقمي digital source أو المصدر المتقطع discrete source. نقوم في نظم الاتصالات الرقمية بتوسيع العمليات الوظيفية بحيث تشمل تقطيع إشارة الرسالة في طرف الإرسال واسترجاعها (تأويلها) في طرف الاستقبال. بالإضافة إلى ذلك هناك عملية إزالة الإطناب عن طريق ترميز المصدر. يوضح الشكل 1-2 العناصر الأساسية لنظام اتصالات رقمياً. خرج المصدر يمكن أن يكون تماثلياً مثل إشارة الصوت أو إشارة الفيديو، أو رقمي مثل خرج الحواسب أو أي نظم رقمية تتعامل مع عدد مُحدد من المحارف.



الشكل 1-2 العناصر الأساسية في نظام اتصالات رقمي.

تحوّل رسائل المصدر في نظم الاتصالات الرقمية إلى سلسلة من الرموز (الأرقام) الثنائية. ومن الطبيعي أن يكون التحويل اقتصادياً (فعالاً)، أي متوسط طول الرموز الثنائية لكل رمز مصدر يجب أن يكون أصغرياً، وبهذا نكون قد أزلنا أو قللنا الإطناب. تُسمى هذه العملية بضغط المعطيات أو ترميز المصدر ويقوم بها مرمز المصدر.

يُسمى خرج مرمز المصدر بتتابعية المعلومات التي تمرر إلى مرمز القناة. يقوم مرمز القناة بإدخال إطناب متحكم به من أجل ممانعة أو التقليل من أثر منغصات القناة، مثل الضجيج والتداخل interference، التي تتعرض لها الإشارة في أثناء مرورها بالقناة. وبهذا يتم رفع وثوقية المعلومات المرسلة.

تمرر التتابعية الثنائية من خرج مرمز القناة إلى مرمز الخط line encoder الذي يستخدم في الاتصالات السلكية. يقوم مرمز الخط بتحويل النبضات الثنائية إلى شكل موجي waveform مناسب للإرسال عبر الحزمة القاعدية للتردد. وهناك تنوع واسع في أنواع ترامیز الخط، والسبب في ذلك تلبية المتطلبات المختلفة مثل: تشكيل طيف مناسب للقناة والفعالية بالاستطاعة وسهولة التزامن وغيرها. نستخدم في الاتصالات اللاسلكية مُشكل النبضة لتشكيل طيف مناسب للإرسال.

يُمرر خرج مُرمز الخط أو خرج مشكل النبضة إلى المعدل الثنائي، حيث يقوم المعدّل الثنائي بالمطابقة بين بتات الدخل والأشكال الموجية. أي يتم تحويل البتات إلى أشكال موجية قابلة للمرور عبر القناة دون تشوه يذكر. فعلى

سبيل المثال، يمكن أن يُرسل الرقم الثنائي "0" عبر القناة باستخدام الشكل الموجي $S_0(t)$ والرقم الثنائي "1" باستخدام الشكل الموجي $S_1(t)$. ويمكن إرسال k بت سوية باستخدام شكل موجي واحد، عند ذلك يكون عدد الأشكال الموجية اللازمة $M = 2^k$ وكل شكل موجي يختلف عن الأشكال الموجية الأخرى أي يكون لدينا $S_i(t)$ حيث $i = 0,1,..,M-1$ من الأشكال الموجية. في طرف الاستقبال يقوم كاشف التعديل بمعالجة الشكل الموجي المستقبل، والمتعرض لمنغصات القناة، بهدف تقدير رموز المعطيات المرسلة. فعلى سبيل المثال عند استخدام التعديل الثنائي، يقوم كاشف التعديل بمعالجة الشكل الموجي المستقبل ويتخذ القرار حول الشكل الموجي ذي الحزمة القاعدية. يقوم كاشف ترميز الخط بتحويل الأشكال الموجية المرسلة إلى الشكل الثنائي المناسب للمعالجة اللاحقة في كاشف ترميز القناةchannel decoder الذي يقوم باستخلاص المعطيات المرسلة من السلسلة الثنائية المستقبلة باحتمال خطأ بت bit error probability أصغري وذلك بالاعتماد على خوارزميات مُحددة. يقوم كاشف ترميز المصدر بإرجاع تتابعية المعلومات إلى شكلها الأصلي سواء كانت إشارة صوت أم إشارة فيديو أم معطيات ثنائية وذلك بعد إزالة الضغط عنها.

4.1 قنوات الاتصالات

كما ذكرنا سابقاً، تؤمن قناة الاتصال الوصل بين المرسل والمستقبل. يمكن أن تكون القناة الفيزيائية زوجاً من الأسلاك التي تقوم بحمل الإشارة الكهربائية أو ليف ضوئي fiber optic يحمل المعلومات على حزمة ضوئية مُعدّلة أو فضاء حُرfree space حيث يستخدم الهوائي لإشعاع الإشارة الحاملة للمعلومات. يمكن أن تعدّ أيضاً أوساط أخرى كقنوات اتصال (حمل المعلومات) مثل وسائل تخزين المعلومات ومياه البحار والمحيطات حيث تحمل المعلومات على أمواج صوتية.

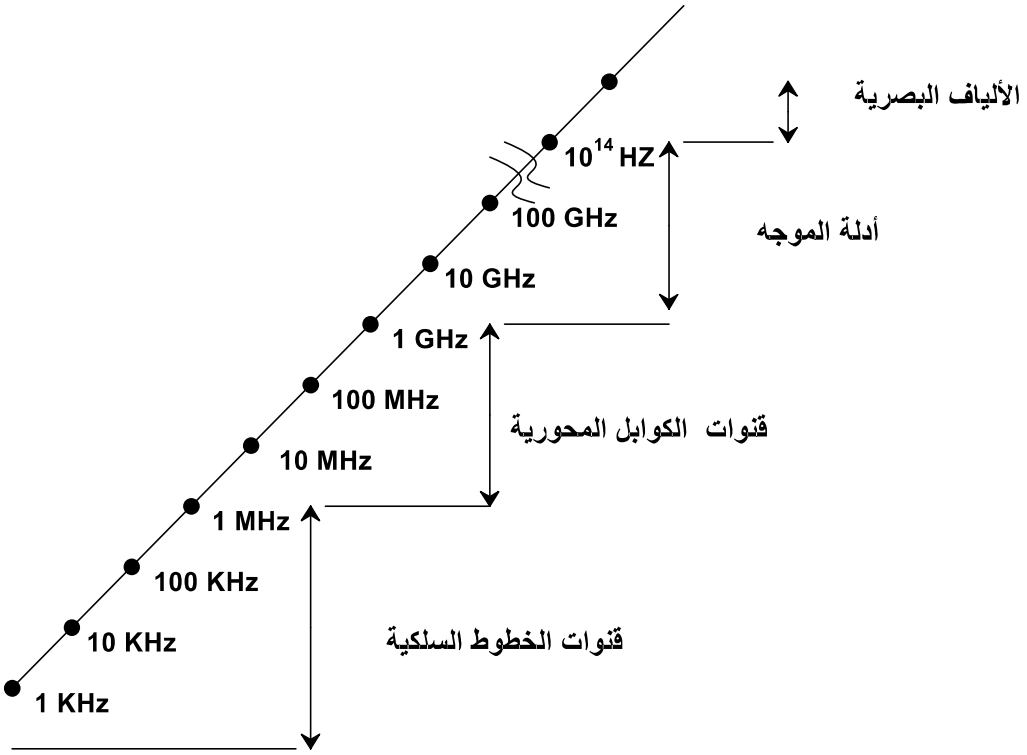
المسألة المشتركة في أي قناة، هي وجود الضجيج الجمعي additive noise. عموماً، يتولّد الضجيج الجمعي ضمن العناصر الكهربائية والإلكترونية التي تستخدم في إنجاز نظم اتصالات. بعض الأحيان يُسمى ذلك الضجيج بالضجيج الحراري. من منغصات القناة الخارجية، الضجيج الخارجي والتداخل من قنوات أخرى، وذلك عندما يقع طيفهما ضمن طيف الإشارة المرغوبة. من المنغصات الأخرى التي تؤدي إلى هبوط الأداء في نظم الاتصالات التخامد وتشوه المطال وتشوه الطور بالإضافة إلى التشوه بسبب المسارات المتعددة حيث تصل الإشارة المرسلة إلى طرف الاستقبال من عدة مسارات ذات أطوال مختلفة.

للتقليل من أثر الضجيج يمكن رفع استطاعة الإشارة المرسلة ولكن في الكثير من نظم الاتصالات لا يمكن رفع استطاعة الإرسال كما يريد المصمم وذلك بسبب قيود قانونية وقيود بسبب إمكانية التجهيزات. وهناك تحديد أساسي آخر لعرض المجال الترددي للقناة وهذا بسبب الحدود الفيزيائية للوسط وكذلك للحدود الفيزيائية للمكونات الإلكترونية المستخدمة في بناء المرسل والمستقبل بالإضافة لذلك وجود قيود قانونية. القيدان السابقان يؤثران بشكل فعال على كمية المعلومات التي يمكن أن ترسل عبر القناة بشكل موثوق.

1.4.1 قنوات الخطوط السلكية

تستخدم شبكة الهاتف الخطوط السلكية بشكل واسع، وذلك لإرسال الصوت والمعطيات والفيديو. تؤمن القنوات الكهرومغناطيسية المقادة guided مثل الأزواج المجدولة twisted pair من الخطوط السلكية والكوابل المحورية عرض مجال ترددي كبير نسبياً. خط الهاتف الذي يربط المشترك مع المقسم له عرض مجال ترددي عدة مئات من الكيلوهرتز (KHz)، أما المجال الترددي المستخدم في الكبل المحوري coaxial cable فهو بحدود عدة ميغات من الهرتز (MHz). يُبيّن الشكل 1-3 المجال الترددي للقنوات الكهرومغناطيسية المقادة بما فيها دليل الموجة waveguide والألياف البصرية.

تتعرض الإشارات المرسلة عبر القنوات السابقة للتشوه في المطال والطور بالإضافة إلى ضجيج جمعي. كما تتعرض الخطوط السلكية للأزواج المجدولة لتداخل الكلام crosstalk interference من القنوات الفيزيائية المجاورة.



الشكل 1-3 المجال الترددي للأقنية المقادة.

2.4.1 قنوات الألياف البصرية

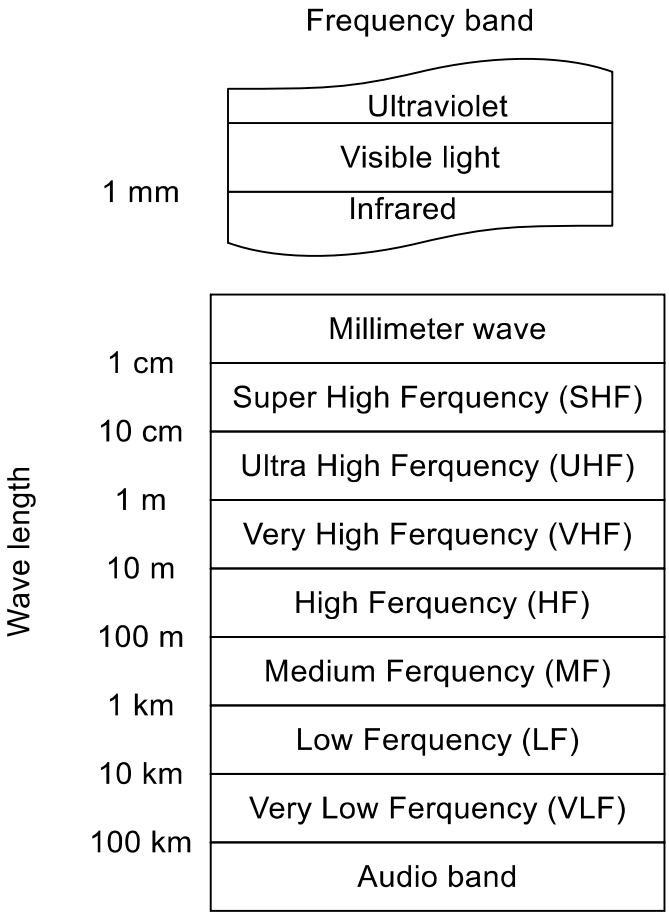
توفر الألياف البصرية لمصمم نظم الاتصالات قنوات ذات مجال ترددي واسع جداً بالمقارنة مع المجال الترددي للكوابل المحورية، كما أن تخامد الإشارة في الليف البصري ضعيف نسبياً. بالإضافة إلى ذلك تؤمن الوسائل الفوتونية photonic device وثوقية عالية في توليد وكشف الإشارة. دفعت مميزات الألياف البصرية الكثير من الشركات لاستخدامها في الشبكات الهاتفية لنقل كل من الصوت والصورة والمعطيات. وقد تم تمديد العديد من كوابل الألياف البصرية عبر البحار والمحيطات.

في نظم اتصالات الألياف الضوئية المرسل أو المعدل هو عبارة عن ثنائي باعث للضوء light-emitting diode LED أو الليزر. تُرسل المعلومات بتغيير (تعديل) شدة الضوء بما يتناسب مع إشارة الرسالة الحاملة للمعلومات. ينتشر الضوء عبر الليف كموجة ضوئية حيث يتم تضخيمها بشكل دوري (وفي حالة الإرسال الرقمي فإنه يتم كشف وإعادة التوليد بشكل دوري) على طول المسار وذلك من أجل تعويض التخامد. في طرف الاستقبال يتم

كشف شدة الضوء عن طريق ثنائي ضوئي photodiode حيث يتم تحويل الضوء لإشارة كهربائية تتغير بشكل مناسب مع استطاعة الضوء الداهم للثنائي الضوئي.

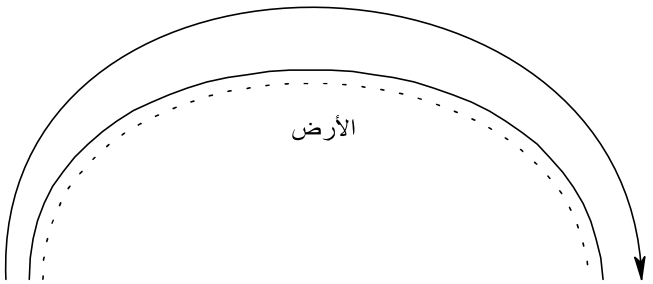
3.4.1 القنوات اللاسلكية الكهرومغناطيسية

في نظم الاتصالات الراديوية يقوم الهوائي antenna بإشعاع القدرة الكهرومغناطيسية إلى الوسط المحيط–وسط انتشار. حيث تعتمد تشكيلة الهوائي وأبعاده على تردد العمل. حتى يتم الحصول على الإشعاع الفعال نسبياً للقدرة الكهرومغناطيسية، يجب أن يكون طول الهوائي أطول من عُشر طول الموجة. فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا مُرسل AM بتردد حامل 1MHZ فإننا نحتاج إلى هوائي 30 متر بأقل تقدير. يبين الشكل 1-4 المجالات الترددية المختلفة لطيف الأمواج الكهرومغناطيسية.



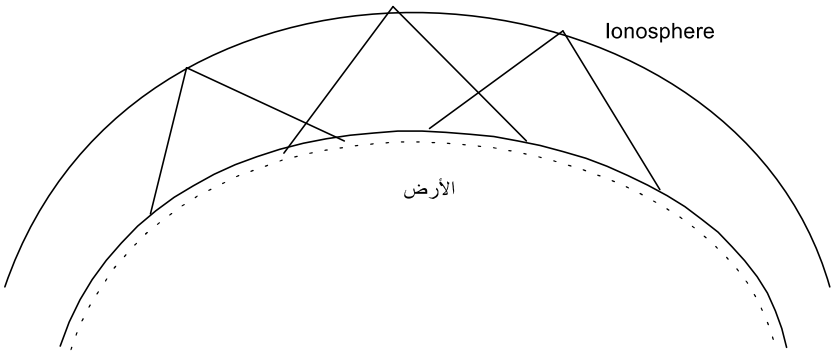
الشكل 1-4 المجالات الترددية لطيف الأمواج الكهرومغناطيسية.

يمكن تقسيم انتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في الجو والفضاء الحر إلى ثلاثة أصناف: انتشار الموجة الأرضية ground wave، انتشار الموجة السماوية sky wave، والانتشار على مدى خط النظر Line-Of-Sight (LOS). الأمواج التي يزيد طولها على 10KM مثل الترددات المنخفضة جداً Very Low Frequency (VLF) والترددات الفوق منخفضة Extra Low Frequency (ELF)، فإن سطح الأرض وطبقة الأينوسفير تشكلان دليل موجة لانتشار الأمواج الكهرومغناطيسية. والضجيج السائد في هذا المجال هو ضجيج العواصف الرعدية وبشكل خاص في المناطق المدارية. يوضح الشكل 1-5 انتشار الموجة الأرضية، حيث يحدث هذا النمط من الانتشار عندما يقع التردد ضمن المجال الترددي MHz (3 - 0.3). ويستخدم للبث الإذاعي AM، حيث يصل حتى 100 km.



الشكل 1-5 توضيح انتشار الموجة الأرضية.

أنواع الضجيج السائد في هذا المجال الترددي هو: الضجيج الجوي atmospheric noise والضجيج المصطنع عن طريق الإنسان man-made noise والضجيج الحراري بسبب المكونات الالكترونية في المستقبل. يوضح الشكل 1-6 انتشار الموجة السماوية التي تنعكس من الأينوسفير الذي يتألف من عدة طبقات(F, E, D) تبعد عن سطح الأرض بين 80-400 km. تُسمى الطبقة السفلى من الأينوسفير بالطبقة D وهي تتشكل نهاراً بسبب حرارة الشمس وتختفي ليلاً ولها أثر كبير في تخميد الترددات التي تقل عن (2 MHZ). تقع الطبقة E في المجال من 90- 130 km وهي هامة في الاتصالات باستخدام الـ HF حتى مسافة 2000 km. أما الطبقة F فهي أساسية في الانعكاس من الأينوسفير (استخدام الـ HF.)، وتبتعد عن سطح الأرض من 250-400 km.



الشكل 1-6 توضيح انتشار الموجة السماوية.

المسألة المهمة في انتشار الأمواج السماوية في مجال الترددات العالية HF هي حدوث المسارات المتعددة multipath أي أن الإشارة في طرف الاستقبال تتألف من عدة إشارات (يظهر الشكل 1-6 مسارين فقط) كل منها لها مسار مختلف وبالتالي تأخير مختلف. وهذا يؤدي إلى تداخل الرموز inter-symbol interference في طرف الاستقبال. بالإضافة إلى ذلك، الإشارات القادمة من مسارات متعددة قد تتفق بالطور في بعض اللحظات و قد تختلف (تتعاكس) في لحظات أخرى مما يسبب ظاهرة الخفوت fading. يلاحظ معظم الناس هذه الظاهرة عند الاستماع إلى المذياع (موجة قصيرة) في الليل. الضجيج الجمعي في مجال الترددات العالية هو عبارة عن مزيج من ضجيج الجو والضجيج الحراري.

بسبب تبعثر الإشارة في الأينوسفير المنخفض، فهذا يؤدي لانتشار الإشارة ضمن المجال الترددي 30-60 MHz الذي يُسمى انتشار بعثرة الأينوسفير، وبشكل مماثل تبعثر الإشارة في التروبوسفير بسبب وجود الجزيئات في الجو يؤدي إلى الانتشار في المجال الترددي 40-300MHz. وهذا يسمح بالاتصال عبر مئات الكيلومترات. عموماً، انتشار البعثرة يتصاحب بضياع كبير لذلك عند الاتصال باستخدام التبعثر سواء كان في الأينوسفير أم التروبوسفير فإننا نحتاج إلى استطاعة كبيرة نسبياً.

تنتشر الترددات التي تزيد عن 30 MHz (وهو سقف الترددات العالية HF) بضياع قليل نسبياً ولهذا تستخدم عموماً في الاتصالات الفضائية. هذا يعني أن نمط الانتشار الإلكترومغناطيسي السائد في المجالات الترددية العالية جداً VHF والتي تليها، هو الانتشار على مدى خط النظر (LOS). لذلك في نظم الاتصالات الأرضية فإن هوائي الإرسال وهوائي الاستقبال يجب أن يكونا على مدى خط النظر. بالأخذ ما سبق بالحسبان ، يستخدم في الإرسال

التلفزيوني المجالات الترددية العالية جداً VHF والمجالات الترددية الفوق عالية UHF. حيث توضع الهوائيات على أبراج عالية لتوسيع التغطية. وكذلك، في نظم الوصلات الميكروية الراديوية، التي تُستخدم بشكل واسع في الشبكات الهاتفية، توضع الهوائيات على أماكن عالية (أو أبراج عالية).

الضجيج السائد في نظم الاتصالات، التي تعمل في المجالات الترددية العالية جداً VHF والفوق عالية UHF هو الضجيج الحراري thermal noise، الذي يتولد في الواجهة الأمامية front end للمستقبل بالإضافة إلى الضجيج الكوني cosmic noise الذي يلتقط عن طريق هوائي النظام. أما عندما يكون تردد عمل النظام أكثر من 10 GHZ فإن حال الجو (مطر، ضباب، ....) له دور رئيسي في أداء النظام.

2 مفاهيم أساسية في الإشارات والنظم

Signals & Systems Basic Concepts

سنقوم في هذا الفصل بمراجعة سريعة لأساسيات الإشارة والنظم الخطية. لكونهما يلعبان دوراً هاماً في نمذجة نظم الاتصالات الرقمية، حيث تستخدم الإشارة لإرسال المعلومات عبر القناة. تسمى تلك الإشارة بالإشارة الحاملة للمعلومات. كأمثلة على تلك الإشارة: إشارة الصوت، إشارة الفيديو وخرج الحاسب.

عموماً، عند إرسال الإشارة الحاملة للمعلومات عبر قناة الاتصال فإنها تتشوه (يتغير شكلها) أي أن الإشارة المستقبلة على خرج القناة لا يطابق الإشارة المرسلة على مدخل القناة وذلك لأسباب عديدة. يمكن اعتبار قناة الاتصال كنظام، أي كيان قائم وحده، يعطي إشارة على خرجه عندما تتوضع إشارة على دخله. عملياً هناك عدد كبير من قنوات الاتصال التي يمكن نمذجتها كنظام خطي، وهذا ما سوف يؤخذ بالحسبان في هذا الكتاب.

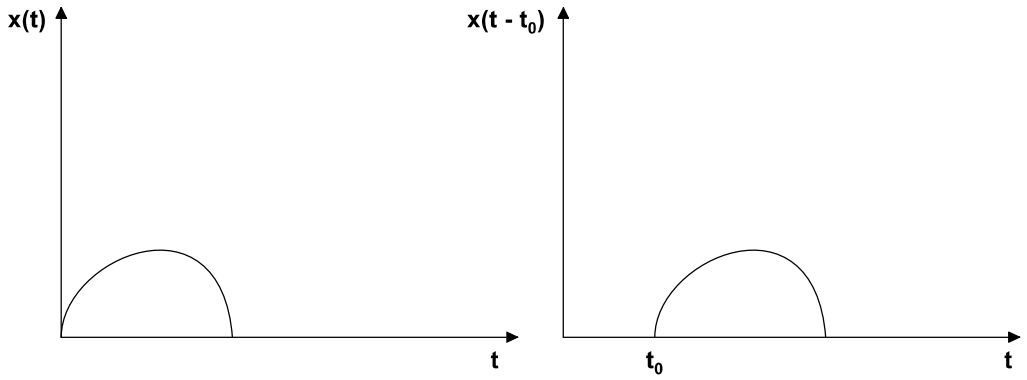
يمكن تعريف الإشارة كأي تابع حامل للمعلومات. وسوف نجعل متحول الإشارة (متحول التابع) هو الزمن. لذلك يمكن عدّ الإشارة كأي تابع للزمن له قيمة واحدة عند أي لحظة زمنية وسوف نرمز له $x(t)$ أو $f(t)$. إشارة الصوت، إشارة الفيديو وإشارة المعطيات هي أمثلة عن الإشارة.

1.2 العمليات الأساسية على الإشارة

أهم العمليات الأساسية على الإشارة هي: إزاحة الإشارة وقلب الإشارة وتقييس الإشارة. سوف نوصف أثر هذه العمليات على الإشارة في هذه الفقرة.

1.1.2 الإزاحة الزمنية

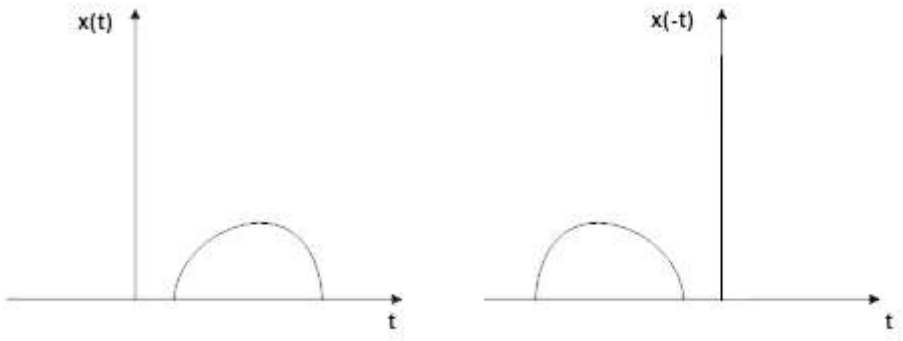
الإزاحة الزمنية أو التأخير الزمني للإشارة $x(t)$ بمقدار ثابت t_0 يُعبر عنه بالشكل $x(t-t_0)$ وإذا كان t_0 مقداراً موجباً فهذا يكافئ تأخير الإشارة بمقدار t_0 وإذا كان t_0 مقداراً سالباً فهذا يعني الإزاحة نحو اليسار بمقدار $|t_0|$. وهو يكافئ التنبؤ بالإشارة للفترة الزمنية t_0. يبين الشكل 2-1 الإزاحة بمقدار $t_0 > 0$.



الشكل 2-1 الإزاحة الزمنية بمقدار t_0.

2.1.2 القلب الزمني

القلب الزمني هو عبارة عن تدوير الإشارة بزاوية π حول المحور الشاقولي وبهذا نحصل على صورة الإشارة بالنسبة للمرآة الشاقولية وهذا يعني عملياً عكس إشارة الزمن، أي ضرب الزمن بـ (-1). وهكذا فإن قلب الإشارة $x(t)$ نحصل على $x(-t)$. ويوضح ذلك الشكل 2-2.

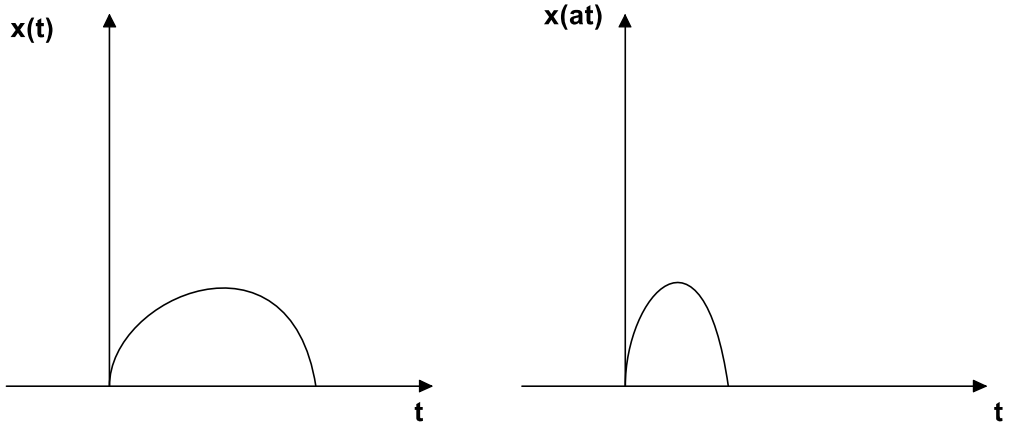


الشكل 2-2 توضيح قلب الإشارة.

3.1.2 التقييس الزمني

التقييس الزمني للإشارة يؤدي إلى تغير وحدة الزمن. وعلى أثر ذلك يمكن أن تتوسع الإشارة أو تتقلص. حيث يتم التوسع إذا كان الزمن الجديد هو جزء من الزمن الأصلي ويتم التقلص إذا كان الزمن الجديد هو من مضاريب الزمن الأصلي. ويمكن التعبير عن التقييس الزمني بالشكل التالي: $x(at)$ حيث $|a| > 0$. وبناءً على ما سبق نحصل

على التوسع إذا كانت $a < 1$ والتقلص إذا كانت $a > 1$. يبين الشكل 2-3 تقلص الإشارة الأصلية وذلك لأن $a > 1$.



الشكل 2-3 تقلص الإشارة الأصلية $a > 1$.

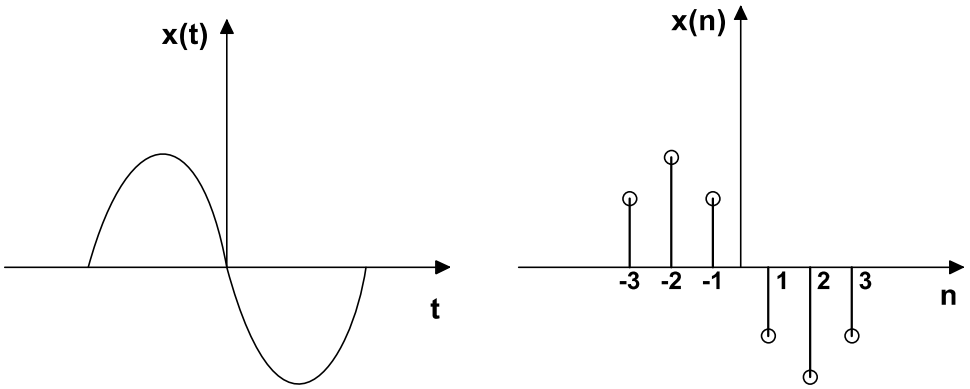
عموماً، يمكن أن نجد إشارات تحوي تركيبة من العمليات الثلاث السابقة فالإشارة التالية مثلاً: $x(2t-3)$ تتضمن التقلص حيث $a = 2 > 1$ والإزاحة لليمين بمقدار 3.

2.2 تصنيف الإشارات

عموماً، نصنف الإشارات بهدف تبسيط دراستها. ويعتمد تصنيف الإشارات بناءً على رؤى معينة (مستمرة– متقطعة، حقيقية– عقدية،...). سوف نقدم في هذه الفقرة تصنيفات الإشارة الأكثر استخداماً في الاتصالات.

1.2.2 الإشارات المستمرة والمتقطعة بالزمن

تقسم الإشارات إلى إشارات مستمرة بالزمن ومتقطعة بالزمن اعتماداً على ماهية المتحول المستقل. في الإشارة المستمرة بالزمن $x(t)$ يكون المتحول المستقل أرقاماً حقيقية وفي الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ يأخذ المتحول المستقل n قيمه من مجوعة الأعداد الصحيحة. يوضح الشكل 2-4 إشارة مستمرة بالزمن وإشارة متقطعة بالزمن. يمكن الحصول على إشارة متقطعة بالزمن من إشارة مستمرة بالزمن، وذلك بأخذ عينات منها بشكل دوري وبدور محدد.



الشكل 2-4 إشارة مستمرة بالزمن وأخرى متقطعة بالزمن.

مثال 2-1: ليكن لدينا الإشارتان الأتيتان:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$
$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n + \varphi)$$

الإشارة الأولى هي إشارة مستمرة بالزمن وتسمى الإشارة الجيبية والإشارة الثانية هي إشارة متقطعة بالزمن حيث $n \in \mathrm{Z}$ و Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

2.2.2 الإشارات الحقيقية والإشارات العقدية

كما ذكرنا سابقاً، الإشارات عبارة عن توابع وأي تابع عند إعطاء متحوله قيمة ما سيعطي قيمة عددية وهذه القيمة يمكن أن تكون حقيقية أو عقدية. قيم التوابع أو الإشارات الحقيقية هي أعداد حقيقية أي $x(t) \in R$. وقيم الإشارات العقدية هي أعداد عقدية أي $x(t) \in C$. تستخدم في نظم الاتصالات الصيغة العقدية لتمثيل الإشارة لكونها تحوي بشكل واضح كُلاً من المطال والطور (أي المعلومات التي يحتويها مطال الإشارة والمعلومات التي يحتويها طور الإشارة).

مثال 2-2: الإشارة التالية هي عبارة عن إشارة عقدية:

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$$

باستخدام علاقة أُويلر (Euler):

$$e^{j\varphi} = cos\varphi + jsin\varphi$$

الجزء الحقيقي للإشارة يكون:

$$x_r(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

والجزء التخيلي للإشارة هو:

$$x_i(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

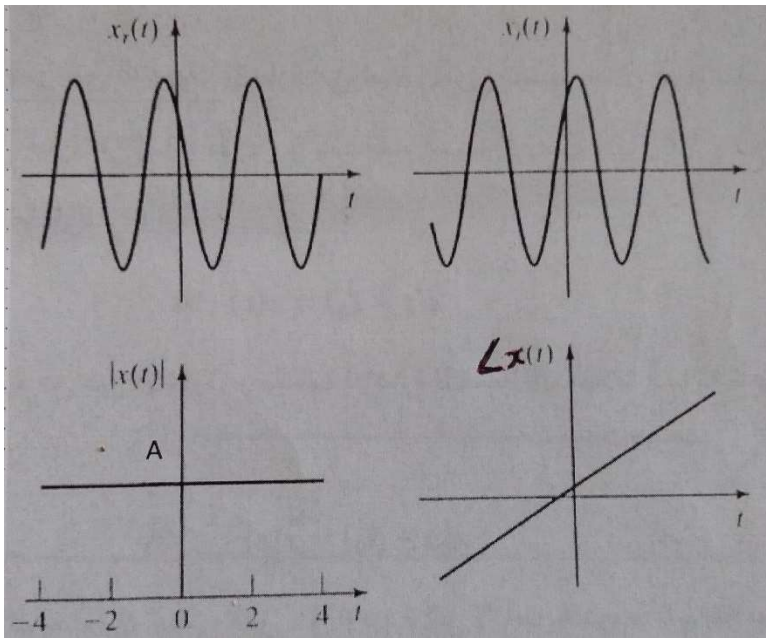
يمكن أيضاً أن تستخدم القيمة المطلقة للإشارة $|x(t)|$ وطور الإشارة لتمثيلها.

القيمة المطلقة للإشارة $x(t)$ هي:

$$|x(t)| = \sqrt{x_r^2(t) + x_i^2(t)} = |A|$$

وطور الإشارة هو: $\angle x(t) = 2\pi f_0 t + \varphi$

يوضح الشكل 2-5 الإشارات السابقة.



الشكل 2-5 تمثيل الإشارة العقدية $x(t)$.

وهكذا ببساطة نجد أنه يمكن تمثيل أي إشارة عقدية باستخدام العلاقات التالية:

$$x_r(t) = |x(t)|\cos\big(\angle x(t)\big) \tag{1-2}$$

$$x_i(t) = |x(t)|\sin\big(\angle x(t)\big) \tag{2-2}$$

$$|x(t)| = \sqrt{x_r^2(t) + x_i^2(t)} \tag{3-2}$$

$$\angle x(t) = arctan\frac{x_i(t)}{x_r(t)} \tag{4-2}$$

3.2.2 الإشارات الحتمية والإشارات العشوائية

تعطي الإشارة المحددة (الحتمية) عند أي لحظة زمنية t نفس القيمة $x(t)$ سواء كانت حقيقية أو عقدية. أما بالنسبة للإشارة العشوائية، فإن $x(t)$ عبارة عن متحول عشوائي عند اللحظة الزمنية t. وتُعرّف هذه الإشارة باستخدام تابع الكثافة الاحتمالي.

4.2.2 الإشارات الدورية وغير الدورية

الإشارة التي تعيد (تكرر) نفسها خلال فترة أساسية يُسمى الدور، هي عبارة عن إشارة دورية. وباستخدام الصيغة الرياضية، نقول أن الإشارة دورية إذا حققت ما يلي:

$$x(t + T_0) = x(t), \forall t$$

حيث T_0 هو دور الإشارة. وبالنسبة للإشارة المتقطعة فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$x[n + N_0] = x[n], \forall\, n - integer$$

و يُسمى العدد الصحيح الموجب N_0 بالدور. والإشارة التي لا تحقق الشروط السابقة فهي إشارة غير دورية.

مثال 2-3: الإشارة التالية هي عبارة عن إشارة دورية حقيقية ودورها هو $T_0 = 1/f_0$:

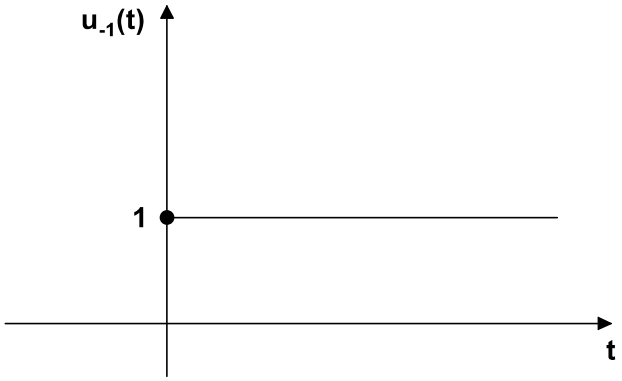
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

والإشارة التالية هي عبارة عن إشارة عقدية دورية ودورها أيضاً هو $T_0 = 1/f_0$:

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 + \varphi)}$$

أما الإشارة التالية فهي إشارة غير دورية، وتسمى بإشارة الخطوة الواحدية وهي موضحة في الشكل 2-6:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases} \tag{5-2}$$



الشكل 2-6 إشارة الخطوة الواحدية.

مثال 2-4: الإشارة المتقطعة التي نوقشت في مثال 2-1 ليست دورية بالنسبة لكل القيم f_0. وحتى تكون تلك الإشارة دورية فيجب أن تحقق:

$$2\pi f_0(n + N_0) + \varphi = 2\pi f_0 n + 2m\pi + \varphi \tag{6-2}$$

وذلك لكل قيم n حيث N_0 عدد صحيح موجب و m عدد صحيح. نجد من العلاقة السابقة:

$$2\pi f_0 N_0 = 2\pi m \ \Rightarrow \ f_0 = \frac{m}{N_0}$$

وهكذا فإن الإشارة الجيبية المتُقطعة تكون دورية فقط لقيم مُنتقاة لـ f_0. فعلى سبيل المثال، الإشارة

$$A\cos(3\pi n + \varphi)$$

هي إشارة دورية، بينما الإشارة

$$A\cos(\sqrt{2}\pi n + \varphi)$$

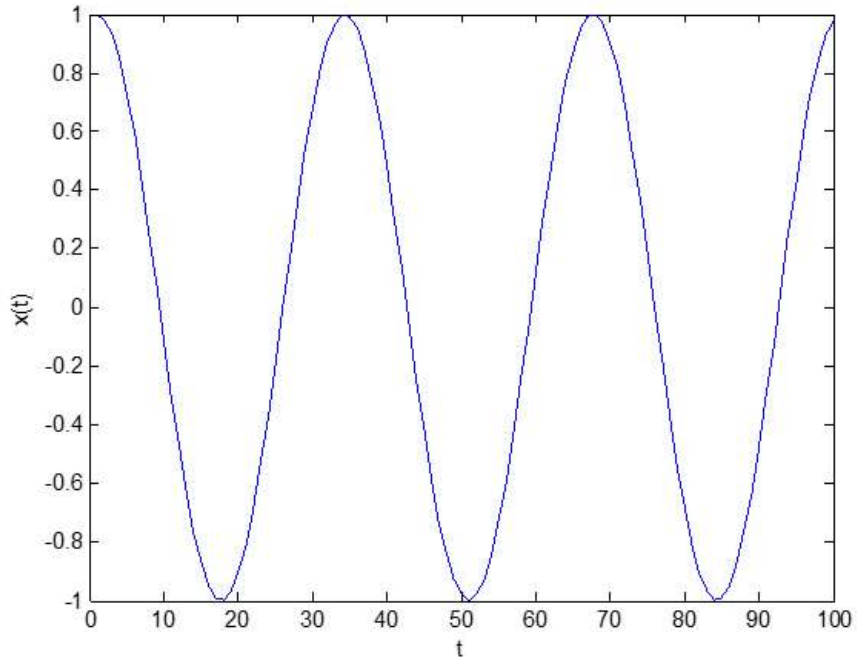
فهي إشارة غير دورية.

5.2.2 الإشارات السببية وغير السببية

نقول عن الإشارة $x(t)$ أنها سببية إذا كانت $x(t) = 0$ وذلك من أجل$t < 0$ ويمكن أن تأخذ أي قيمة من أجل $t \geq 0$. وبشكل مكافئ، الإشارة المتقطعة تكون سببية إذا كانت مطابقة للصفر من أجل $n < 0$. مفهوم السببية يلعب دوراً هاماً عند دراسة النظم.

مثال 2-5: الإشارة التالية هي إشارة سببية، وهي موضحة في الشكل 2-7.

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$



الشكل 2-7 مثال عن الإشارة السببية.

وبشكل مشابه فإن الإشارة غير السببية غير مطابقة للصفر عند $t < 0$.

6.2.2 الإشارات الزوجية والإشارة الفردية

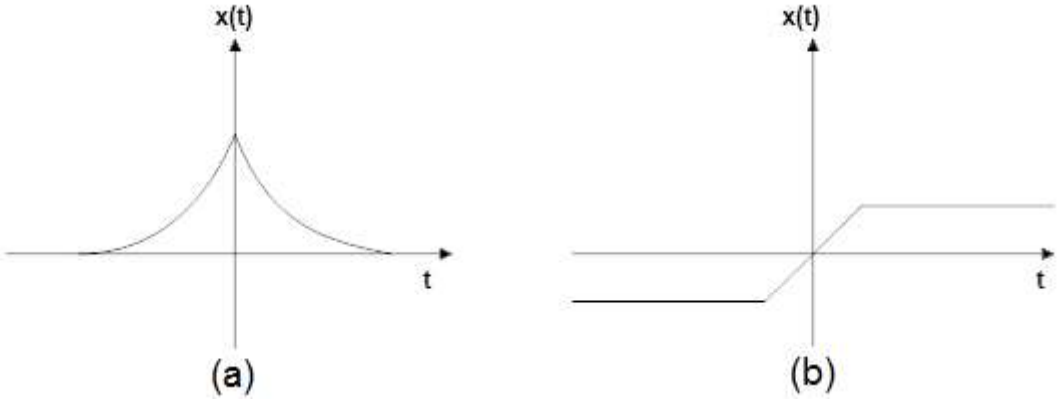
نقول إن الإشارة $x(t)$ أنها إشارة زوجية إذا كانت متناظرة بالنسبة للمحور الشاقولي محور y. أما إذا كانت الإشارة متناظرة بالنسبة للمبدأ (مبدأ الإحداثيات) نقول إنها إشارة فردية. يمكن صياغة مفهوم الزوجية والفردية بالشكل التالي: نقول إن الإشارة زوجية إذا وفقط إذا تحقق:

$$x(-t) = x(t) \quad ;\forall\, t$$

ونقول إنها فردية إذا وفقط إذا تحقق:

$$x(-t) = -x(t) \quad ;\forall\, t$$

يوضح الشكل 2-8 إشارة فردية وأخرى زوجية.



الشكل 2-8 مثال عن (a) إشارة زوجية و(b) إشارة فردية.

يمكن كتابة أي إشارة كمجموع الشكل الفردي والشكل الزوجي لها أي:

$$x(t) = x_e(t) + x_0(t) \tag{7-2}$$

حيث:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{8-2}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{9-2}$$

مثال 6-2: الإشارة $x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \varphi)$ يمكن أن تكون فردية أو زوجية وذلك تبعاً لقيمة φ إذا كانت $\varphi = 0$ فإن الإشارة زوجية وإن كان $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ فإن الإشارة فردية. العلاقة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$x(t) = A\cos(\varphi)\cos(2\pi f_0 t) - A\sin(\varphi)\sin(2\pi f_0 t)$$

وبما أن $\cos(2\pi f_0 t)$ تابع زوجي و $\sin(2\pi f_0 t)$ تابع فردي يمكن أن نكتب أن:

$$x_e(t) = A\cos(\varphi)\cos(2\pi f_0 t)$$
$$x_o(t) = A\sin(\varphi)\sin(2\pi f_0 t)$$

مثال 7-2: نلاحظ من مثال 2-2 عندما يكون $\varphi = 0$ يكون لدينا $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ وبالأخذ بالحسبان الشكل 2-5 فإن الجزء الحقيقي وطويلة الإشارة هما تابعان زوجيان أما الجزء التخيلي والطور فهما تابعان فرديان.

7.2.2 التناظر الهرميتي للإشارات العقدية

ثمة تناظر آخر للإشارات العقدية يُسمى بالتناظر الهرميتي. إذا كان الجزء الحقيقي زوجياً والجزء التخيلي فردياً بالنسبة للإشارة العقدية، عند ذلك نسميها بالهرميتية. من السهولة أن نبين أن لهذه الإشارة طويلة زوجية وطوراً فردياً. كمثال على تلك الإشارة:

7.2.2 – إشارات القدرة وإشارات الاستطاعة

يمكن تضيف الإشارة بناءً على ماتحويه من قدرة أو من استطاعة . من أجل الإشارة $x(t)$ فإن محتوى القدرة للإشارة يُعرف بالشكل التالي .

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \qquad (10\text{-}2)$$

وذلك بفرض $x(t)$ هو الجهد عبر مقاومة مقدارها واحد أوم (1Ω) فإن التيار المار بالمقاومة هو نفسه $x(t)$. عند ذلك تكون الاستطاعة اللحظية $x^2(t)$. وبالتالي فإن القدرة هي تكامل الاستطاعة. تُعرّف الاستطاعة للإشارة أيضاً بالشكل التالي:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \qquad (11\text{-}2)$$

عندما تكون الإشارة حقيقية فيمكن استبدال $|x(t)|^2$ بـ $x^2(t)$.

نقول إن الإشارة $x(t)$ هي إشارة قدرة إذا وفقط إذا كانت E_x منتهية ونقول إن الإشارة $x(t)$ هي إشارة استطاعة إذا وفقط إذا كانت P_x منتهية، أي:

$$0 < P_x < \infty$$

مثال 2-8: أوجد قدرة الإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} 3 & ; |x| < 3 \\ 0 & ; |x| \geq 3 \end{cases}$$

الحل: لدينا حسب العلاقة (2-10)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-3}^{+3} 9dt = 54$$

واضح أن وحدة القدرة بالجول Jules . النتيجة تبين أن الإشارة $x(t)$ هي إشارة قدرة.

مثال 2-9: بيّن ما نوع الإشارة التالية:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

باستخدام العلاقة (2-10) يكون لدينا:

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \infty$$

وبالتالي فإن الإشارة $x(t)$ ليست إشارة قدرة. وباستخدام العلاقة (2-11) يكون لدينا:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{A^2}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \{\frac{A^2 T}{2T} + \left[\frac{A^2}{8\pi f_0 T}\sin(4\pi f_0 t + 2\varphi)\right]_{-T/2}^{+T/2}\}$$

$$= \frac{A^2}{2} < \infty$$

وهكذا فإن الإشارة $x(t)$ هي إشارة استطاعة.

مثال 2-10: أوجد قدرة واستطاعة الإشارة الدورية $x(t)$ ذات الدور T_0.

الحل: حسب العلاقة (2-10) لدينا :

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-nT_0/2}^{+nT_0/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \infty$$

وهكذا، فإن الإشارات الدورية ليست إشارات قدرة. وباستخدام (2-11) يكون لدينا:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-nT_0/2}^{+nT_0/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nT_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

هذا يعني أن الاستطاعة المحتواة في الإشارة الدورية تساوي متوسط استطاعة دور واحد.

3.2 بعض الإشارات الهامة وخواصها

نستخدم في نظم الاتصالات مجموعة من الإشارات، يتواتر استخدام بعض من تلك الإشارات كثيراً، ولذلك سوف نسلط الضوء على تلك الإشارات ونقوم بتوصيفها بشكل موجز.

1.3.2 الإشارة الجيبية

تعرّف الإشارة الجيبية بالشكل التالي:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

حيث المعاملات A, f_0, φ هي المطال والتردد والطور. الإشارة الجيبية هي إشارة دورية دورها $T_0 = 1/f_0$.

2.3.2 الإشارة الأسية العقدية

تعرف الإشارة الأسية العقدية بالشكل التالي:

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$$

حيث A المطال و f_0 التردد و φ الطور وهي موضحة بالشكل 2-5.

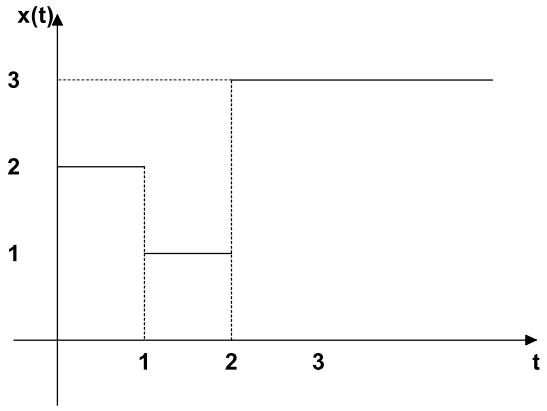
3.3.2 إشارة الخطوة الواحدية

تم تعريف إشارة الخطوة الواحدية في الفقرة (2-2) وهي موضحة في الشكل 2-6. ضرب أي إشارة بإشارة الخطوة الواحدية نحصل بالنتيجة على إشارة سببية. تجدر الملاحظة هنا من أجل $a > 0$ فإن $u_{-1}(at) = u_{-1}(t)$.

مثال 2-11: ارسم الإشارة التالية:

$$x(t) = 2u_{-1}(t) - u_{-1}(t-1) + 2u_{-1}(t-2)$$

الحل:



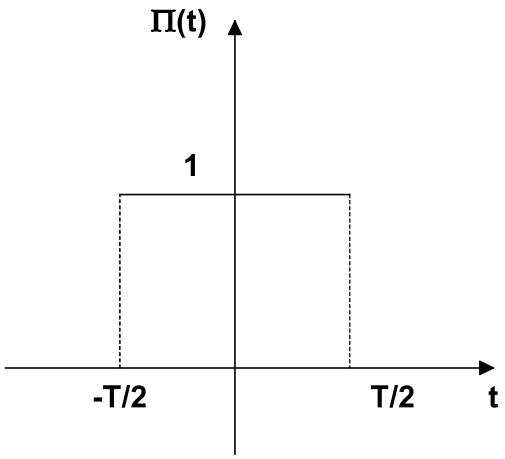
الشكل 2-9 حل المثال 2-11.

4.3.2 النبضة المستطيلة

نعرف النبضة المستطيلة الممركزة حول الصفر بعرض T بالشكل التالي:

$$\Pi(t/T) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \qquad (12\text{-}2)$$

يوضح الشكل 2-10 شكل النبضة المستطيلة.

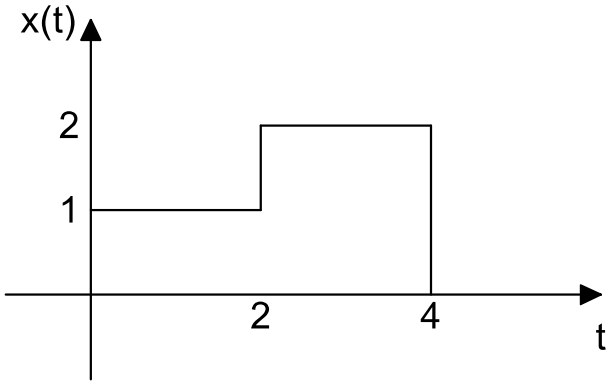


الشكل 2-10شكل النبضة المستطيلة.

مثال 2-12: ارسم الإشارة التالية:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) - \Pi(\frac{t-1}{2})$$

الحل: الإشارة $x(t)$ عبارة عن فرق بين نبضتين عرض الأولى 4 ومزاحة بمقدار 2 ومطالها 2، وعرض الأخرى 2 ومزاحة بمقدار 1 ومطالها 1.



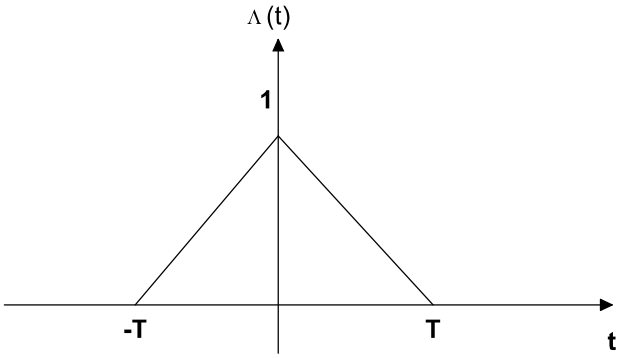
الشكل 2-11 حل المثال 2-12.

5.3.2 النبضة المثلثية

يمكن تعريف النبضة المثلثية بالشكل التالي:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & ;|t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \qquad (13\text{-}2)$$

واضح هنا أن عرض النبضة هو $2T$. يوضح الشكل 2-12 شكل النبضة المثلثية.



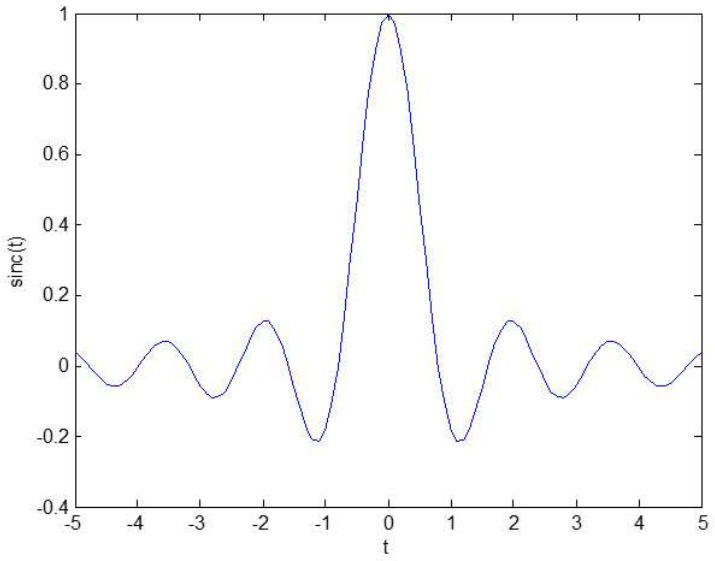
الشكل 2-12 توضيح شكل النبضة المثلثية.

6.3.2 إشارة sinc

نُعرف إشارة sinc بالشكل التالي:

$$sinc(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & ;t \neq 0 \\ 1 & ;t = 0 \end{cases} \qquad (14\text{-}2)$$

الشكل الموجي لإشارة السنك مُبين في الشكل 2-13. واضح من الشكل أن القيمة للإشارة هو 1 عند t=0 وأصفارها عند $t = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ وسرعة هبوطها تتناسب مع $1/t$.



الشكل 2-13 إشارة السنك sinc(t).

7.3.2 إشارة الشارة

إشارة الشارة تُحدد شارة المتحول المستقل t وتُعرف بالشكل التالي:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & ;t > 0 \\ -1 & ;t < 0 \\ 0 & ;t = 0 \end{cases} \tag{15-2}$$

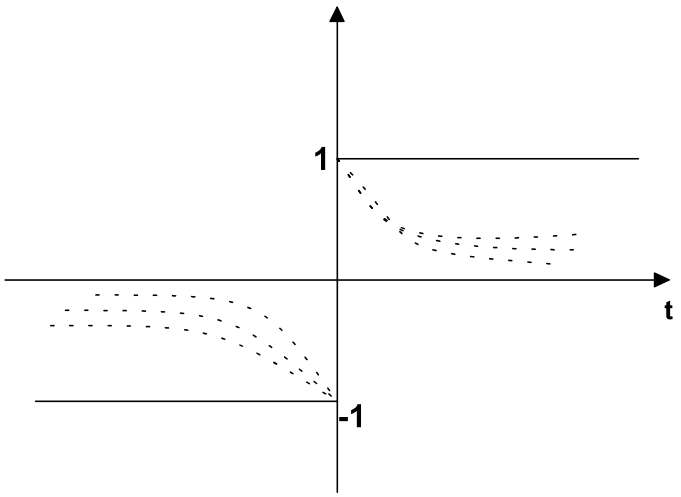
يمكن التعبير عن إشارة الشارة كنهاية للتابع التالي:

$$sgn(t) = \lim_{n \to +\infty} x_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \begin{cases} \exp(-t/n) & ;t > 0 \\ -\exp(+t/n) & ;t < 0 \\ 0 & ;t = 0 \end{cases} \tag{16-2}$$

يمكن ببساطة إيجاد العلاقة بين تابع الخطوة الواحدية وتابع الشارة كالتالي:

$$u_{-1}(t) = \frac{1}{2}[sgn(t) + 1] \tag{17-2}$$

يوضح الشكل 2-14 تابع الشارة كنهاية للتابع $x_n(t)$.



الشكل 2-14 تابع الإشارة كنهاية للتابع $x_n(t)$.

8.3.2 إشارة النبضة أو إشارة الدلتا

إشارة النبضة هي عبارة عن نموذج رياضي لتمثيل ظاهرة فيزيائية تحدث خلال فترة قصيرة جداً، ومضة برق مثلاً. من وجهة النظر الرياضية، إشارة النبضة $\delta(t)$ ليست تابعاً (أو إشارة) بل يمكن عدّها توزعاً أو تابعاً معمماً. ويُعرّف توزيع النبضة بالشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0) \tag{18-2}$$

حيث يفترض أن يكون التابع $\varphi(t)$ مستمراً عند المبدأ (مبدأ الإحداثيات). تسمى هذه الخاصة (العلاقة (43-2)) بخاصة التنخيل sifting لتابع النبضة. أي استخلاص قيمة التابع $\varphi(t)$ عند $t = 0$. يمكن استخدام عدة توابع لتعريف تابع النبضة، وذلك كما يلي:

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{19-2}$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{20-2}$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \tag{21-2}$$

سوف نستعرض الآن خواص تابع النبضة (تابع الدلتا):

$$\begin{cases} \delta(0) = \infty \\ \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)\,dt = \varphi(t_0) \tag{22-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+t_0)\delta(t)\,dt = \varphi(t_0) \tag{23-2}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)\ ;\ a \neq 0 \tag{24-2}$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau \tag{25-2}$$

تسمى العلاقة السابقة جداء التلاف (التلفيف) أو جداء الطي وسوف نتعرض لها في الفقرة (2-5).

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \tag{26-2}$$

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{27-2}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u_{-1}(t) \tag{28-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\Big|_{t=0} \tag{29-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)\varphi(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\Big|_{t=t_0} \tag{30-2}$$

باعتبار $\delta^{(n)}(t)$ هو المشتق من الدرجة n لـ $\delta(t)$

$$x(t) * \delta^{(n)}(t) = x^{(n)}(t) \tag{31-2}$$

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t) \tag{32-2}$$

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad (33\text{-}2)$$

$$(n)\ even \Rightarrow \delta^{(n)}(t)\ \ even, \qquad (n)\ odd \Rightarrow \delta^{(n)}(t)\ \ odd$$

حالة خاصة: $\delta\ (t)$ تابع زوجي و $\delta'(t)$ تابع فردي.

والآن سوف نبرهن الخاصة الهامة (العلاقة (2-25)).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t)dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)\varphi(t)dt$$

$$= \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)\varphi(t_0)dt \qquad = \varphi(t_0)\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)dt = \varphi(t_0)$$

9.3.2 نبضة غاوس

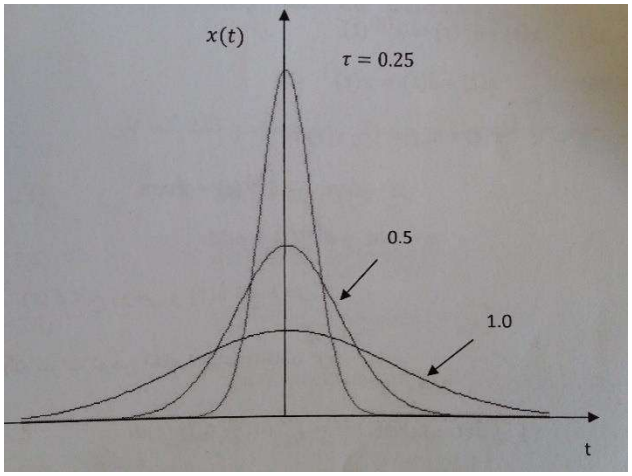
تعرف نبضة غاوس كما يلي:

$$x(t) = \frac{1}{\tau}\exp(-\frac{\pi t^2}{\tau^2})$$

مساحة هذه النبضة تساوي الواحد وτ عبارة عن معامل. وتتميز نبضة غاوس بما يلي:

- كافة مشتقات نبضة غاوس هي توابع مستمرة.
- سرعة الهبوط يتم التحكم بها عن طريق المعامل τ وهو أسرع من سرعة هبوط أي تابع كثيرات حدود لـ t.

يبين الشكل 2-15 شكل النبضة لقيم مختلفة لـ τ.



الشكل 2-15 نبضة غاوس ذات امتدادات متغيرة.

4.2 تصنيف النظم

النظام عبارة عن مجموعة من العناصر أو الوسائط مرتبطة بعضها مع بعض لتكوين وحدة متكاملة وذلك من أجل القيام بوظيفة محددة. من وجهة نظر الاتصالات، النظام عبارة عن كيان تطبق على دخله إشارة وبالنتيجة نحصل على خرجه إشارة الخرج بنتيجة مرور إشارة الدخل عبر النظام، حيث تطبق على إشارة الدخل عمليات (عملية) محددة في أثناء مرورها عبر النظام وبالتالي يكون لدينا خرج وحيد. بفرض إشارة الدخل $x(t)$ وإشارة الخرج $y(t)$ و $\mathcal{F}$ العملية التي أُجريت على إشارة الدخل وبالتالي يكون لدينا:

$$y(t) = \mathcal{T}(x(t)) \qquad (34\text{-}2)$$

سوف نوصف النظام بخاصيتين:

- العملية $(\mathcal{T})$ التي توصف النظام.
- مجموعة إشارات الدخل الشرعية x.

مثال 2-13: ليكن لدينا النظام الموصَّف بالعلاقة التالية:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \frac{d}{dt}x(t)$$

واضح أن $\mathcal{X}$ هو فضاء كل الإشارات القابلة للتفاضل. والعملية $\mathcal{T}$ هي عملية مفاضلة، ويُعرف هذا النظام بالمفاضل. يُعرَّف الفضاء $\mathcal{X}$ عادة عن طريق العملية التي يقوم بها النظام. وغالباً لا يُعطى بشكل صريح.

كما تم تصنيف الإشارة، فإنه يمكن توصيف النظام أيضاً من وجهات نظر مختلفة. سوف نبين الآن بعض أصناف الأنظمة:

1.4.2 النظم المستمرة بالزمن والمتقطعة بالزمن

دخل وخرج النظم المتقطعة بالزمن عبارة عن إشارات متقطعة بالزمن. والنظم المستمرة بالزمن لها دخل وخرج عبارة عن إشارات مستمرة بالزمن.

مثال 2-14: المثال 2-13 عبارة عن نظام مستمر بالزمن. أما النظام المتقطع بالزمن فيوصف بمعادلات الفروق، وكمثال على ذلك، النظام الموصوف بعلاقة الفروق التالية:

$$y[n] = x[n-1]$$

هذا النظام يقوم بعملية تأخير فقط.

2.4.2 النظم الخطية والنظم غير الخطية

في النظام الخطي سواء كان مستمر أم متقطع، إذا كان الدخل مجموع إشارات موزونة $(ax_1(t) + bx_2(t))$ فإن الخرج مجموع موزن للاستجابات $(ay_1(t) + by_2(t))$ أي:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[ax_1(t) + bx_2(t)] &= a\mathcal{T}[x_1(t)] + b\mathcal{T}[x_2(t)] \\ &= ay_1(t) + by_2(t)\end{aligned} \tag{35-2}$$

هذا يعني:

- الاستجابة لـ $x_1(t) + x_2(t)$ هو $y_1(t) + y_2(t)$
- الاستجابة لـ $ax_1(t)$ هي $ay_1(t)$ حيث a أي ثابت عقدي.

الخاصية الأولى تسمى التجميع، والخاصية الثانية تسمى بالتقييس أو التجانس.

تجدر الإشارة هنا، أن الخاصية الخطية ذات أهمية كبيرة في تحليل النظم. حيث يمكن تحليل إشارة الدخل المعقدة نسبياً إلى تركيبة من إشارات بسيطة، ومن ثم نوجد استجابة النظام لكل إشارة على حده وبعدها نقوم بالجمع الخطي لكافة الاستجابات. وهكذا نحصل على استجابة النظام للإشارة المعقدة نسبياً.

النظم التي لا تحقق العلاقة (2-35)، أي لا تحقق الخاصتين السابقتين تسمى بالنظم غير الخطية.

مثال 2-15: نظام التأخير الذي ذكر في **مثال 2-14** هو نظام خطي لأنه إذا كان

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

واضح بأنَّ الاستجابة تكون:

$$ax_1[n-1] + bx_2[n-1]$$

وبالتالي فإن النظام خطي.

مثال 2-16: ليكن لدينا النظام التالي:

$$y(t) = x^2(t)$$

لنفرض لدينا الدخلين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ حيث:

$$\mathcal{T}[x_1(t)] = \mathrm{x}_1^2(\mathrm{t}) = \mathrm{y}_1(\mathrm{t})$$

$$\mathcal{T}[x_2(t)] = \mathrm{x}_2^2(\mathrm{t}) = \mathrm{y}_2(\mathrm{t})$$

وليكن $x_3(t)$ تركيبة خطية من $x_1(t)$ و $x_2(t)$، أي

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\mathcal{F}[x_3(t)] = x_3^2(t) = y_3(t)$$

$$= (ax_1(t) + bx_2(t))^2$$

$$= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

وهكذا نجد أن النظام غير خطي.

3.4.2 النظم المتغيرة مع الزمن وغير المتغيرة مع الزمن

نقول إن النظام غير متغير إذا كانت العلاقة بين الدخل والخرج لا تتغير مع الزمن. هذا يعني أن أي صيغة مؤخرة للدخل تؤدي إلى صيغة مؤخرة للخرج، أي إذا كانت $y[n]$ الخرج عندما يكون الدخل $x[n]$ فإن $y[n-n_0]$ هو الخرج عندما يكون الدخل $x[n-n_0]$، وإذا كان غير ذلك فإن النظام متغير مع الزمن.

مثال 2-17: بين أن النظام المعرف بالعلاقة التالية هو نظام غير متغير مع الزمن

$$y(t) = \sin[x(t)]$$

إذا كان $x_1(t)$ الدخل فإن خرج النظام يكون:

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \qquad \text{(a)}$$

ليكن لدينا دخل آخر $x_2(t)$ والذي هو $x_1(t)$ مزاح بمقدار t_0 أي:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

وهكذا فإن الخرج الموافق لهذا الدخل يكون:

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)] \qquad \text{(b)}$$

ومن العلاقة (a) يمكن أن نكتب:

$$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] \qquad \text{(c)}$$

بمقارنة (b) مع (c) نجد أن:

$$y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

وهكذا فإن النظام غير متغير مع الزمن.

4.4.2 النظم السببية وغير السببية

نقول إن النظام سببي إذا كان الخرج في أية لحظة زمنية يعتمد على الدخل فقط عند الزمن الحاضر والماضي. أي النظام لا يستجيب قبل تطبيق الدخل. وهكذا حتى يكون النظام الخطي غير المتغير مع الزمن سببياً، يجب أن تكون الاستجابة $h(t)$ معدومة للزمن السالب. أي أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام سبباً هو تحقق:

$$h(t) = 0 \quad ; t < 0 \tag{36-2}$$

واضح مما سبق حتى نتمكن من تحقيق فيزيائي لنظام يعمل بالزمن الحقيقي يجب أن يكون النظام سببياً.

هناك كثير من التطبيقات، عندما تكون الإشارة المراد معالجتها مخزنة. في هذه الحالة يكون النظام غير سببي وقابل للتنفيذ. واضح هنا أن الإشارة لا تعالج بالزمن الحقيقي.

مثال 2-18: ليكن لدينا النظام التالي:

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

هذا النظام متغير مع الزمن، وذلك بسبب الحدّ $\cos(2\pi f_0 t)$، وسببي لأن الخرج عند اللحظة t يعتمد على الدخل عند t وليس على قيم لاحقة لـ $x(t)$.

نظام التأخير الموضح في **مثال 2-14** هو سببي أيضاً لأن $0 < 1$.

5.4.2 النظام المستقر

نقول إن النظام مستقر، إذا كانت إشارة الدخل للنظام ذات المطال المحدد تؤدي إلى إشارة خرج ذات مطال مُحدد أيضاً. النواس هو عبارة عن نظام مستقر. حيث دخل محدد (الإزاحة عن الوضع الشاقولي) يؤدي إلى خرج محدد (زاوية النواس (خيط النواس) مع المحور الشاقولي).

5.2 تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI في المجال الزمني

تعتبر النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI (Linear Time Invariant) من النظم الهامة في الاتصالات وفي نظرية النظم. يتميز هذا الصنف من النظم بكون العلاقة بين الدخل والخرج بسيطة نسبياً ويمكن التعبير عنها عن

طريق تكامل التلفيف convolution (الطي). لشرح ذلك لابد من توضيح مفهوم الاستجابة النبضية للنظام. الاستجابة النبضية هي استجابة النظام لنبضة $\delta(t)$، أي:

$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$$

تكامل التلفيف:

سوف نناقش إيجاد خرج النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن وذلك من أجل أي دخل. سوف نبين أن الخرج $y(t)$ يمكن التعبير عنه بدلالة الدخل $x(t)$ وكذلك الاستجابة النبضية $h(t)$.

من خواص تابع النبضة (الفقرة 2-3) نجد أنه من أجل أي تابع $x(t)$ تتحقق العلاقة التالية:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (37\text{-}2)$$

نعلم أن خرج النظام الخطي غير المتغير مع الزمن، هو عبارة عن استجابة النظام للدخل $x(t)$، وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= (\text{a}) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{L}[\delta(t-\tau)]d\tau \\ &= (\text{b}) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned} \qquad (38\text{-}2)$$

حيث $\mathcal{L}$ مؤثر نظام خطي لسببين (a) لأن النظام خطي (b) لكون النظام غير متغير مع الزمن. العلاقة (38-2) تبين أن استجابة النظام لأي دخل $x(t)$، هو عبارة تلفيف $x(t)$ مع الاستجابة النبضية $h(t)$. وهذا يعني في النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن أن الاستجابة النبضية $h(t)$ توصف النظام بشكل كامل، أي تحوي كل المعلومات اللازمة لتوصيف سلوك النظام.

تكامل التلفيف التالي:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (39\text{-}2)$$

يبين أن القيمة الحالية للاستجابة هي عبارة عن التكامل على القيم السابقة للإشارة الموزونة بالاستجابة النبضية. نلاحظ أيضاً من التكامل (العلاقة (2-39)) وجود ثلاثة أزمنة: زمن الاستجابة t ولحظة دخول الإشارة إلى النظام τ بالإضافة إلى ذاكرة النظام الزمنية $(t-\tau)$.

يمكن أن يكتب الشكل الرقمي لتكامل التلفيف بالشكل التالي:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n] \qquad (40\text{-}2)$$

وبما أن عملية التلفيف هي عملية تبادلية فإنه يمكن أن نكتب العلاقتين السابقتين بالشكل التالي:

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (41\text{-}2)$$

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-r]h[r] \qquad (42\text{-}2)$$

مثال 2-19: ليكن لدينا نظام خطي غير متغير مع الزمن استجابته النبضية $h(t)=u_{-1}(t)$، وليكن دخل النظام هو $x(t)=e^{-at}$ حيث $a>0$ أوجد الخرج $y(t)$.

الحل: واضح من أجل $\tau<0$ أن الجداء $x(\tau)h(t-\tau)$ يساوي الصفر. ومن أجل $t>\tau>0$ فإن

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases}e^{-a\tau} & ;0<\tau<t\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$$

وباستخدام العلاقة (2-39) يكون لدينا:

$$y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$$

ومن أجل كل t يكون لدينا:

$$y(t)=\tfrac{1}{a}(1-e^{-at})\,u_{-1}(t)$$

عدد كبير من المكونات الأساسية في نظم الاتصالات، مثل المرشحات والمضخات والمسويات equalizers وغيرها، يمكن نمذجتها باستخدام النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن (LTI). ولهذا السبب سوف نركز في الفقرات التالية لتطوير طرق وأدوات لابد منها لتحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن.

نقصد بتحليل النظم LTI، إيجاد الخرج عند دخل معطى وبالزمن الحقيقي (في نفس اللحظة). بالإضافة إلى معرفة سلوكية النظام بشكل دقيق نسبياً. رأينا في الفقرة السابقة يمكن إيجاد $y(t)$ بمعرفة الدخل $x(t)$ والاستجابة النبضية للنظام، وذلك باستخدام تكامل التلفيف، أي:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (43\text{-}2)$$

أهم مساوئ الطريقة السابقة هي: أولاً، إيجاد الاستجابة النبضية للنظام LTI ليست دوماً مسألة بسيطة. ثانياً، التكامل التلفيفي لا يُعطي معلومات عن سلوكية النظام. سوف نقدم في هذه الفقرة مُقاربة أخرى لتحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن. الفكرة الأساسية هنا هي: التعبير عن إشارة الدخل باستخدام تركيبة من الإشارات الأساسية البسيطة نسبياً، حيث يمكن إيجاد الخرج بسهولة لكل إشارة أساسية، ومن ثم تطبيق الخواص الخطية للحصول على الخرج الموافق لإشارة الدخل. تتميز هذه الطريقة بسهولة الحسابات بالإضافة إلى معرفة سلوكية النظام بشكل أفضل من الطريقة السابقة (تكامل التلفيف). تعتمد هذه الطريقة على نشر إشارة الدخل إلى إشارات أساسية، بشكل مشابه لتحليل الشعاع إلى مركباته الأساسية في الفضاء الإقليدي.

مسائل الفصل الثاني

2-1 لدينا الإشارة المثلثية التالية:

$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 0 \\ -t+1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب ارسم الإشارات التالية:

$$x(3t),\ x(3t+2),\ x(3t) + x(3t+2),\ x(2(t-2))$$

2-2 بيّن إن كانت الإشارة التالية زوجية أو فردية:

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T \le t \le T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2-3 أوجد الجزء الزوجي والجزء الفردي من الإشارة التالية:

$$x(t) = e^{-2t}\cos t$$

2-4 لدينا الإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & ;\quad t < 0 \\ \sin(t) & ;\quad t \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: رسم الإشارة وبين إن كانت دورية أم غير دورية.

2-5 بيّن من الإشارات التالية، أي منها دورية وأي منها غير دورية وأوجد الدور للإشارات الدورية.

$$x(t) = cos^2(2\pi t);\quad x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t);\quad x(t) = \cos(2n)$$

2-6 لدينا الإشارة الجيبية التالية: $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ المطلوب رسم الإشارة عندما تكون كل المعاملات (A, f_0, φ_0) ثوابت. ومن ثم ارسم الإشارة عندما يكون معامل المطال A متحولاً عشوائياً منتظماً في المجال (O, A_{max}) وباقي المعاملات ثابتة.

2-7 لدينا إشارة مستطيلة ذات المطال A في المجال $-T/2 \le t \le T/2$ المطلوب أوجد الجزء التخيلي للإشارة السابقة بفرض الجزء الحقيقي . للحصول على إشارة ذات تناظر هرميتي.

2-8 صنّف الإشارات التالية بين إشارة قدرة وإشارة استطاعة، ومن ثم أوجد كل من القدرة والاستطاعة المتوسطة.

$$x(t) = 5\cos(\pi t) + \sin(5\pi t)\ , -\infty < t < \infty$$

$$x(t) = \begin{cases} 5\cos(\pi t)\,; & -1 \le t \le 1 \\ 0 \quad\quad ; & otherwise \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 5\cos(\pi t)\,; & -0.5 \le t \le 0.5 \\ 0 \quad\quad ; & otherwise \end{cases}$$

2-9 لدينا الإشارة العقدية الأسية التالية:

$$x(t)\ A\ e^{\alpha t + jwt} \qquad \alpha > 0$$

أوجد القيمة الحقيقية والتخيلية للإشارة $x(t)$ في الحالات التالية:

$$\alpha \text{ حقيقية } \alpha = \alpha_1 \qquad \alpha \text{ تخيلية } \alpha = jw_1 \qquad \alpha \text{ عقدية } \alpha = \alpha_1 + jw_1$$

2-3 تم تطبيق إشارة تابع الخطوة $A_0 u_{-1}(t)$ في اللحظة $t = 0$ على طرفي مكثفة غير مشحونة ذات السعة C. أوجد التيار المار بالمكثفة عند $t \ge 0$.

2-4 وضح ظاهرة التنخيل sifting باستخدام $\delta^{(2)}(t)$؟

2-5 ليكن لدينا النظام المستمر ذو الدخل$x(t)$ والخرج $y(t)$، التالي:

$$y(t) = tx(t)$$

المطلوب: (1) ما هو النظام المتقطع بالزمن الموافق. (2) بين أن النظام (جواب (1)) هو نظام خطي

2-6 ليكن لدينا النظام المستمر مع الزمن الموصف بالعلاقة التالية:

$$y(t) = x(t)x(t-1)$$

2-7 بين أن هذا النظام نظام غير خطي.

2-8 بين أن النظام الموصف بالعلاقة التالي:

$$y(t) = \cos[x(t)]$$

هو نظام غير متغير مع الزمن.

2-9 ليكن لدينا نظام يتألف من مقاومة ومكثفة (مكامل). بيِّن إن كان هذا النظام سبباً أو غير سببي.

2-10 لدينا قناة متعددة المسارات، حيث توصف العلاقة بين الدخل والخرج بالشكل التالي:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

بفرض أن الاستجابة النبضية هي $h[n]$:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ \frac{1}{2} & ,n = 1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

أوجد خرج النظام من أجل الدخل التالي:

$$x[n] = \begin{cases} 2 & ,n = 0 \\ 4 & ,n = 1 \\ -2 & ,n = 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3 سلاسل فورييه

Fourier Series

1.3 مفاهيم فضاء الإشارة

هناك تشابه كبير بين العمليات التي تجري على الشعاع والعمليات التي تجري على الإشارة. يمكن جمع أو طرح إشارتين، كما هو الحال في الأشعة والناتج إشارة جديدة، كما يمكن ضرب الإشارات بعامل سلمي لنحصل على إشارات جديدة، بالإضافة لذلك التركيبة الخطية لمجموعة إشارات تعطي إشارات جديدة كما في الأشعة. بالإضافة لما ذُكر يُعرف في فضاء الإشارة الجداء الداخلي والنظيم والتحويلات الخطية بشكل مشابه للأشعة في الفضاء الشعاعي.

1.1.3 الأشعة وفضاء الأشعة

يمكن التعبير عن أي شعاع في أي فضاء بثلاثة أبعاد عن طريق مساقط الشعاع على الأشعة الواحدية القاعدية في ذلك الفضاء. فعلى سبيل المثال الشعاع $\boldsymbol{x}$ يمكن التعبير عنه بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 \qquad (1\text{-}3)$$

حيث $\boldsymbol{e}_1$ و $\boldsymbol{e}_2$ و $\boldsymbol{e}_3$ عبارة عن الأشعة القاعدية في الفضاء ثلاثي الأبعاد و c_1 و c_2 و c_3 عوامل تقييس خاصة بفضاء الأشعة. وعندما يكون أبعاد الفضاء الشعاعي n فإن الشعاع x يمكن تمثيله بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{e}_i \qquad (2\text{-}3)$$

حيث n هو عدد الأشعة القاعدية اللازمة والكافية لتمثيل أي شعاع في الفضاء الشعاعي ذو البعد n.

نقول إن الأشعة $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ مستقلة خطياً إن لم يكن بالإمكان تمثيل أي شعاع عن طريق تركيبة خطية من الأشعة الأخرى باستخدام عوامل تقييس c_i خاصة بالفضاء الشعاعي.

نقول إن مجموعة الأشعة $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ غير مستقلة خطياً إذا تحققت العلاقة التالية:

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \dots\dots + c_n\boldsymbol{x}_n = 0$$

حيث ليس كل معاملات التقييس c_i تساوي الصفر.

مثال 3-1: الأشعة التالية:

$$\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - 12\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$$

هي عبارة عن أشعة غير مستقلة خطياً لأن:

$$4\boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = 0$$

مثال 3-2: التابعات $x_1(t) = t$ و $x_2(t) = 1 + t$ مستقلان خطياً.

نعرف الجداء الداخلي للشعاعين:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \boldsymbol{e}_i$$

بالشكل التالي:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \tag{3-3}$$

ونقول أن الشعاعين متعامدان إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \tag{4-3}$$

ونعرف نظيم الشعاع x بالشكل التالي:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i^2} \tag{5-3}$$

وهو عبارة عن عدد غير سالب.

من أهم خواص النظيم هي:

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ من أجل أي شعاع في الفضاء الشعاعي.

- $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$ حيث α عامل تقييس اختياري.
- المتراجحة المثلثية $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. وتحدث والمساواة إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y} \tag{6-3}$$

حيث k عامل تقييس حقيقي موجب. العلاقة (6-3) تبين أن كلاً من $\boldsymbol{x}$ و$\boldsymbol{y}$ لهما نفس الاتجاه. وباستخدام المتراجحة المثلثية نجد ببساطة أن:

$$|\langle \boldsymbol{x}. \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|. \|\boldsymbol{y}\| \tag{7-3}$$

ونحصل على المساواة إذا تحقق $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$. العلاقة السابقة تُسمى متراجحة كوشي–شوارتز Cauchy-Schwartz من أجل شعاعين حقيقيين لدينا

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \tag{8-3}$$

وإذا كان الشعاعان $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ في فضاء بـ n بُعد، نقول أن $\mathcal{L}$ هو تحويل خطي إذا تحقق

$$\mathcal{L}[\alpha \boldsymbol{x}] = \alpha \mathcal{L}[\boldsymbol{x}] \tag{9-3}$$

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}] = \mathcal{L}[\boldsymbol{x}] + \mathcal{L}[\boldsymbol{y}]$$

حيث α عامل تقييس. وبما أن الشعاع $\boldsymbol{x}$ يمكن تمثيله بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \boldsymbol{e}_i$$

فإن

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathcal{L}[\boldsymbol{e}_i] \tag{10-3}$$

الأشعة الذاتية eigen vectors للتحويل الخطي $\mathcal{L}$، هي الأشعة التي لا تغير اتجاهها عندما يؤثر عليها التحويل الخطي $\mathcal{L}$. أي أنه بنتيجة تأثير التحويل الخطي يتغير فقط مطال الأشعة، أي أنها تَضرب بعامل تقييس λ. والشكل الرياضي لذلك هو:

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \lambda \, \boldsymbol{x}$$

إذا تحققت العلاقة السابقة فإن $\boldsymbol{x}$ الشعاع الذاتي للتحويل الخطي $\mathcal{L}$ و λ القيمة الذاتية eigen value الموافقة للشعاع الذاتي $\boldsymbol{x}$. في النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI تسمى الإشارة الجيبية بالتابع الذاتي بسبب بقاء (عدم تغيير) تردد الدخل دون تغيير بتأثير النظام LTI، أي تردد الدخل يساوي تردد الخرج، بينما يتغير كل من المطال والطور.

2.3 نشر الإشارة بالتوابع المتعامدة

يلعب نشر الإشارة باستخدام التوابع المتعامدة دوراً كبير في معالجة الإشارة وكشف التعديل. في البداية سوف نوصّف مجموعة الإشارات المتعامدة. نقول عن المجموعة اللانهائية التالية من الإشارات الحقيقية:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \dots. \tag{11-3}$$

بأنها متعامدة في المجال $[a, b]$ إذا تحقق

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad m \neq n \tag{12-3}$$

في هذه الحالة، يُفترض أن يكون

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx \neq 0 \tag{13-3}$$

هذا يعني أنه ليس ثمة تابع من التوابع السابقة مساوياً للصفر. العلاقة (12-3) تُعبر عن التعامدية المتبادلة mutual orthogonality للتوابع الموضحة في (11-3).

نسمي العلاقة التالية:

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} \tag{14-3}$$

بنظيم norm التابع $\varphi_n(x)$. ونسمي التابع $\varphi_n(x)$ بأنه ممعير normalized إذا تحقق الشرط التالي:

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \qquad (15\text{-}3)$$

ونسمي أيضاً التوابع الممعيرة $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ و... بالمجموعة الممعيرة.

سوف نبين الآن، أنه إذا كانت التوابع $\varphi_n(x)$ مستمرة وأن التابع المستمر $f(x)$ يحقق مايلي:

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty \qquad (16\text{-}3)$$

في مجال تعريفه فإن يمكن تمثيل التابع $f(x)$ بالسلسلة التالية:

$$f(x) = x_0\varphi_0(x) + x_1\varphi_1(x) + \cdots + x_n\varphi_n(x) + \cdots \qquad (17\text{-}3)$$

بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\varphi_n(x)$ ومن ثم المكاملة. نجد أن كل حد من الشكل $\int_a^b x_m\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx$ يساوي الصفر طالما $n \neq m$ وذلك بسبب التعامدية حسب العلاقة (12-3)، وأن الحد الباقي في الطرف الأيمن فهو:

$$\int_a^b x_n\varphi_n(x)\varphi_n(x)dx = x_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = x_n\|\varphi_n\|^2$$

والآن بالأخذ بالحسبان الطرف الايسر يكون لدينا

$$\int f(x)\,\varphi_n(x)dx = x_n\|\varphi_n\|^2 \qquad (18\text{-}3)$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة (17-3)، فإنه يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)dx = \int_a^b [\sum_n x_n\varphi_n(x)]\varphi_m(x)dx$$

$$= \sum_n x_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$$

$$= x_m\|\varphi_m\|^2$$

وهذا يؤكد صحة العلاقة (17-3). بالأخذ بالحسبان العلاقة (18-3) يكون لدينا

$$x_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x) dx$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقة (3-15) نحصل على x_n، أي

$$x_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x) dx \qquad (19\text{-}3)$$

تتميز المعاملات x_n بأنها تعطي أقل خطأ عند عدد محدد من $\varphi_n(x)$ وليكن N. وذلك من وجهة نظر متوسط مربع الخطأ Mean Square Error (MSE). هذا يعني أن قيمة MSE التالية:

$$MSE = \int_a^b [f(x) - \sum_n^N a_n\, \varphi_n(x)]^2 dx \qquad (20\text{-}3)$$

تكون صغرى عندما يكون $a_n = x_n$. لتوضيح ذلك لنفرض أن $a_n = x_n + b_n$ وبالتعويض في العلاقة (3-20) واستخدام (3-12) و (3-14) و (3-19) نحصل على:

$$MSE = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_n^N x_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \sum_n^N {b_n}^2 \|\varphi_n\|^2 \qquad (21\text{-}3)$$

من العلاقة السابقة نجد، أنه يمكن الحصول على القيمة الصغرى لـ MSE عندما يكون $b_n = 0$، أي

$$MSE_{min} = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_n^N x_n^2 \|\varphi_n\|^2 \qquad (22\text{-}3)$$

وبما أن $\int_a^b f^2(x) dx = \|f\|^2$

وكذلك $MSE_{min} \geq 0$، فإننا نحصل من العلاقة (3-22) على المتراجحة التالية:

$$\sum_n^N x_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \qquad (23\text{-}3)$$

تسمى العلاقة السابقة بمتراجحة بيسل Bessel وهي محققة من أجل أي مجموعة توابع متعامدة. نقول عن مجموعة التوابع المتعامدة بأنها كاملة complete إذا تحقق الشرط التالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2 \tag{24-3}$$

إذا تحقق هذا الشرط، فهذا يضمن تقارب السلسلة بالمتوسط، أي

$$\lim_{N-\infty} \int [f(x) - \sum_{n=0}^{N} x_n \varphi_n(x)]^2 dx = 0 \tag{25-3}$$

وهذا لا يعني أن:

$$max \left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varphi_n(x) \right| = 0$$

من أجل أي قيمة لـ x.

يمكن تعميم العلاقات السابقة لتشمل التوابع العقدية complex functions بالشكل التالي:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m^*(x) dx = 0 \ , \quad n \neq m \|$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n^*(x) = \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx$$

$$x_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n^*(x) dx$$

النجمة (*) تعني التابع العقدي المرافق complex conjugate. لاحقاً عند استخدام الإشارة الكهربائية، نعوض $s(t)$ بدلاً من $f(x)$، أي:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \varphi_n(t) \tag{26-3}$$

$$\|s\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \, dt = E \tag{27-3}$$

حيث E قدرة الإشارة ضمن الفترة $t_2 - t_1$ ، بالاعتماد على العلاقة (24-3) يكون لدينا:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} {x_n}^2 \|\varphi_n\|^2 \tag{28-3}$$

وبسبب استخدام التوابع الممعيرة، يكون لدينا:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} {x_n}^2 \tag{29-3}$$

عموماً، عند الحاجة لنشر الإشارة نتطرق لثلاث مسائل: المسألة الأولى هي أن يكون ناتج النشر مساوياً بالضبط للتابع المراد نشره. المسألة الثانية، إذا تطلب نشر الإشارة بأقل عدد ممكن من التوابع المتعامدة (تعقيد قليل) فيجب اختبار التوابع المتعامدة المناسبة. المسألة الثالثة، في بعض الأحيان نحتاج أن تكون معاملات النشر x_n مستقلة. حل المسألة الأولى يتم باستخدام توابع جيبية، حيث تتميز هذه التوابع ببعض المميزات الهامة، أهمها: (1) عند مرور التابع الجيبي بدارة خطية فإن التردد لا يتأثر بينما يطرأ التغيير على المطال والطور، (2) استخدام التوابع الجيبية يُسهل التحليل الرياضي، (3) تُشكل التوابع الجيبية مجموعة كاملة. لحل المسألة الثانية نستخدم عدداً من المجموعات المتعامدة المختلفة ومن ثم نختار المجموعة التي أعطت نفس الدقة بأقل عدد من التوابع. أما المسألة الثالثة فيمكن حلها باستخدام نشر كارهنن–لويف Karhunen –Loeve. للحصول على التوابع المتعامدة عملياً، تستخدم إجرائية غرام –شميت Gram-Schmidth التي تعطي أقل عدد ممكن من التوابع المتعامدة الممعيرة. غير أنها ليست وحيدة.

1.2.3 إجرائية التعامدية غرام– شميت

ليكن لدينا مجموعة من التوابع (الإشارات) ذات القدرة المحدودة $\{x_i(t);\ i = 1{:}M\}$ والمعرفة على المجال الزمني $[0, T]$.عند ذلك فإنه ثمة توابع متعامدة ممعيرة $\{\varphi_j(t);\ j = 1{:}N\}$ التي تحقق ما يلي:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\, \varphi_j(t) \tag{30-3}$$

$$x_{ij} = \int_0^T x_i\,(t)\varphi_j(t)dt$$

حيث $\int_0^T \varphi_i(t)\varphi_j\,(t)dt = \delta_{ij}$. وأكثر من ذلك فإن $N = M$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{x_i(t)\}$ مستقلة خطياً. نقول عن المجموعة $\{\varphi_j(t)\}$ أنها توابع قاعدية للفضاء المولَّد عن طريق التوابع $\{x_i(t)\}$.

واضح أن قدرة أي إشارة من الإشارات السابقة هي من الشكل:

$$E_i = \int_0^T x_i^2\,(t)dt$$

سوف نعرّف الآن أول تابع قاعدي ممعير بالشكل التالي:

$$\varphi_1(t) \triangleq x_1(t)/\sqrt{E_1} \tag{31-3}$$

أو

$$x_1(t) = \sqrt{E_1}\varphi_1(t) = x_{11}\varphi_1(t) \tag{32-3}$$

حيث $x_{11} = \sqrt{E_1}$ و$\varphi_1(t)$ تابع بقدرة قدرها الواحد كما هو مطلوب. ونعرف أيضاً x_{21} وهي قيمة مسقط الإشارة $x_2(t)$ على التابع القاعدي $\varphi_1(t)$ بالشكل التالي:

$$x_{21} = \int_0^T x_2(t)\varphi_1(t)dt \tag{33-3}$$

والآن يمكن أن نعرف التابع القاعدي $\varphi_2(t)$ بالشكل التالي:

$$\varphi_2(t) \triangleq \frac{x_2(t) - x_{21}\varphi_1(t)}{x_{22}} \tag{34-3}$$

حيث:

$$x_{22} \triangleq \sqrt{\int_0^T x_2^2(t)dt - x_{21}^2} = \sqrt{E_2 - x_{21}^2} \tag{35-3}$$

نجد ببساطة من (3-33) و (3-34) أن:

$$\int_0^T \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)dt = 0 \tag{36-3}$$

ومن (3-34) و (3-35)نجد أن:

$$\int_0^T \varphi_2^2(t)\,dt = \frac{E_2 - x_{21}^2}{x_{22}^2} = 1 \tag{37-3}$$

ويمكن بأن تكتب العلاقة (3-34) بالشكل التالي:

$$x_2(t) = x_{21}\varphi_1(t) + x_{22}\varphi_2(t) \tag{38-3}$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة (3-36) و (3-38) يكون لدينا:

$$x_{22} = \int_0^T x_2\,(t)\varphi_2(t)dt$$

سوف نقوم الآن بتعميم العلاقة (3-32) و (3-38) باستخدام الاستقراء. لنفرض أنه من أجل كل k $(k < i)$ أن

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{k} x_{kj}\,\varphi_j(t) \quad ; k = 1, 2, 3\,, \dots, i-1 \tag{39-3}$$

حيث:

$$x_{kj} = \int_0^T x_k\,(t)\varphi_j(t)dt \tag{40-3}$$

وأن $\{\varphi_j(t); j = 1, 2, \dots, k\}$ عبارة عن توابع متعامدة ممعيرة. وبالتالي بتعريف

$$x_{ij} \triangleq \int_0^T x_i\,(t)\varphi_j(t)dt \quad ; j = 1,2, \dots, i-1 \tag{41-3}$$

و

$$\varphi_i(t) = \frac{x_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}\varphi_j(t)}{x_{ij}} \tag{42-3}$$

حيث:

$$x_{ij} = \sqrt{E_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2} \tag{43-3}$$

من (3-41) و (3-42) نجد أن:

$$\int_0^T \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)dt = 0 \tag{44-3}$$

لكل j أصغر من i. من العلاقة (3-42) والعلاقة (3-43) نجد أن قدرة $\varphi_i(t)$ تساوي الواحد. وبإعادة ترتيب العلاقة (3-42) يكون لدينا:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{i} x_{ij}\, \varphi_j(t) \qquad (45\text{-}3)$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقة (44-3) يكون لدينا:

$$x_{ij} = \int_0^T x_i(t)\, \varphi_j(t) dt \qquad (46\text{-}3)$$

وهكذا من أجل توابع قدرة محددة $\{x_i(t)\}$ فإن التمثيل (30-3) ممكن من أجل $N \leq M$.

لنفرض الآن أن مجموعة جزئية من تلك التوابع غير مستقلة خطياً، أي هناك مجموعة من الأعداد الحقيقية $c_1, c_2, \dots, c_n$ لا تساوي الصفر بحيث يكون:

$$c_1 x_{i1}(t) + c_2 x_{i2}(t) + \dots + c_n x_{in}(t) = 0$$

حيث:

$$i1 < i2 < i3 < \cdots < in$$

تعني هذه الحالة أن $x_{in}(t)$ يمكن التعبير عنها باستخدام تركيبة خطية من $x_{\mathrm{i1}}(\mathrm{t}), \dots, x_{\mathrm{i}(n-1)}(\mathrm{t})$، أي باستخدام تركيبة خطية من التوابع القاعدية المولدة للتوابع السابقة. وبالنتيجة ليس من الضروري توليد التابع القاعدي $\varphi_{in}(t)$ من أجل إضافة $x_{in}(t)$ للمجموعة من أجل تمثيل التوابع. في هذه الحالة عموماً يمكن حذف تابع قاعدي أو أكثر، وبالتالي يكون لدينا $N < M$.

مثال 3-3: المطلوب إيجاد التوابع القاعدية للإشارات التالية

$$s_1(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}/3 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

$$s_2(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\,\mathrm{T}/3 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

$$s_3(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & ; \mathrm{T}/3 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

$$s_4(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

الحل: نوجد قدرة الإشارة $s_1(t)$، أي

$$E_1 = \int_0^T s_1^2\,(t)dt$$

$$= \int_0^{T/3} (1)^2\, dt = T/3$$

وهكذا يكون لدينا التابع القاعدي (متعامد وممعير) الأول من الشكل:

$$\varphi_1(\mathrm{t}) = \frac{s_1(\mathrm{t})}{\sqrt{\mathrm{E}_1}}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{3/T} & ; 0 \le t \le T/3 \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

لتحديد المعامل s_{21} نسقط $s_2(\mathrm{t})$ على $\varphi_1(\mathrm{t})$ (جداء داخلي) أي:

$$s_{21} = \int_0^T s_2(\mathrm{t})\varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^{T/3} (1)\left(\sqrt{\frac{3}{T}}\right) dt = \sqrt{\frac{T}{3}}$$

قدرة الإشارة $s_2(\mathrm{t})$ لها الشكل التالي:

$$E_2 = \int_0^T s_2^2(t)dt$$

$$E_2 = \int_0^{2T/3} (1)^2 dt\ = \frac{2T}{3}$$

وهكذا فإن التابع القاعدي الثاني حسب (3-34) يكون:

$$\varphi_2(\mathrm{t}) = \frac{s_2(\mathrm{t}) - \mathrm{s}_{21}\varphi_1(\mathrm{t})}{\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{s}_{21}^2}}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{3}{T}} & ;\ T/3 \le t \le 2T/3 \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

وباتباع نفس الطريقة الموضحة في إجرائية غرام- شميت نحصل على:

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{T}} & ;\ 2T/3 \le t \le T \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

$$\varphi_4(t) = 0 \qquad \forall t$$

وهكذا تنتهي إجرائية غرام– شميت لإيجاد التوابع القاعدية. أي يمكن تشكيل كل الإشارات الأربعة من التوابع القاعدية $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ وهكذا يكون لدينا $M = 4$ ، $N = 3$ أي $N < M$. وبالتالي فإن التوابع (الإشارات) $s_1(t),\ s_2(t),\ s_3(t),\ s_4(t)$ لا تشكل مجموعة مستقلة خطياً بدليل أن:

$$s_4(t) = s_1(t) + s_3(t)$$

وهكذا فإن أي شعاع من فضاء شعاعي يمكن تمثيله عن طريق تركيبة خطية من الأشعة القاعدية في ذلك الفضاء. وبشكل مشابه أي إشارة من فضاء الإشارة يمكن تمثيلها عن طريق تركيبة خطية من التوابع (الإشارات) القاعدية، وهي توابع متعامدة وممعيرة. وهكذا فإن فضاء الإشارة هو فضاء شعاعي أو فضاء خطي من وجهة النظر الرياضية.

عملية نشر الإشارة $x(t)$ باستخدام التوابع القاعدية حسب العلاقة (3-30) تُسهل بشكل كبير تحليل النظم غير المتغيرة مع الزمن LTI. فعلى سبيل المثال ليكن لدينا الإشارة التالية على دخل النظام:

$$x(t) = \sum_n x_n\, \varphi_n(t)$$

فإن الخرج $y(t)$ يمكن التعبير عنه بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_n x_n \varphi_n(t)\right] \\ &= \sum_n x_n\, \mathcal{L}[\varphi_n(t)] \end{aligned} \qquad (3\text{-}47)$$

إذا تم اختيار المجموعة $\{\varphi_n(t)\}$ بشكل مناسب، فإن هذا سوف يسهل بشكل كبير حساب استجابة النظام LTI للإشارة $\varphi_n(t)$ وهذا بدوره يؤدي إلى تسهيل عملية إيجاد استجابة النظام للدخل $x(t)$. واضح أن أفضل اختيار للمجموعة $\{\varphi_n(t)\}$ هو اختيار الإشارات الأسية العقدية.

2.2.3 تمثيل الإشارة هندسياً

بيّنا في الفقرة السابقة كيفية ايجاد توابع الأساس المتعامدة والممعيرة $\{\varphi_j(t), j = 1,2, \dots, N\}$ من اجل نشر مجموعة الإشارات $\{x_i(t), i = 1,2, \dots, M\}$ حسب العلاقة التالية:

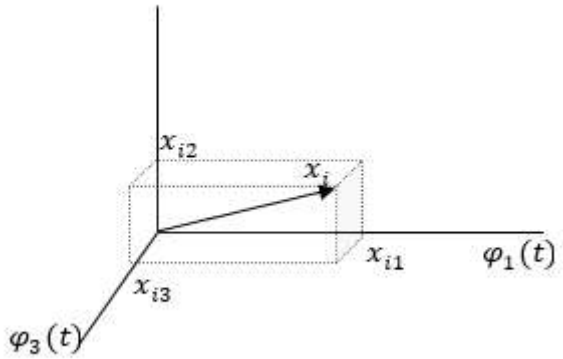
$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\varphi_j(t); \quad 0 \le t \le T$$

$$x_{ij} = \int_0^T x_i(t)\varphi_j(t)dt \ ; \text{ حيث} \tag{48-3}$$

هذا يعني انه يمكننا تمثيل كافة الإشارات $\{x_i(t)\}$ بشكل كامل عن طريق المعاملات التالية (أو الشعاع التالي):

$$\boldsymbol{x_i} = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}]^T \tag{49-3}$$

يُسمى الشعاع $\boldsymbol{x_i}$ بشعاع الإشارة Signal Vector. هذا الشعاع عبارة عن نقطة في فضاء إقليدي بـ N بُعد. وهكذا يمكننا تمثيل أي إشارة في $\{x_i(t)\}$ بنقطة في فضاء بـ N بُعد. ومحاور هذا الفضاء عبارة عن توابع الأساس المتعامدة والممعيرة $\{\varphi_j(t), j = 1,2, \dots, N\}$. يُسمى هذا الفضاء الإقليدي ذو N بُعد بفضاء الإشارة Signal Space. يوضح الشكل 3-1 الشعاع $\boldsymbol{x_i}$ في فضاء الإشارة، يمثل هذا الشعاع الإشارة $x_i(t)$ في فضاء بثلاثة أبعاد N=3.



الشكل 3-1 التمثيل الشعاعي للإشارة $s_i(t)$.

يمكننا أن نحدد طول الأشعة والزاوية بين أي شعاعين، ضمن فضاء إقليدي بـ N بُعد. جرت العادة أن نرمز لطول الشعاع (يسمى أيضاً بالقيمة المطلقة أو النظيم) $\boldsymbol{x}_i$ بالرمز $\|\boldsymbol{x}_i\|$. سوف نبين الآن أن الجداء الداخلي للإشارتين $x_j(t)$ و $x_k(t)$ يساوي (يطابق) الجداء الداخلي للشعاعين المرافقين $\boldsymbol{x}_j$ و $\boldsymbol{x}_k$.

$$< x_j(t)x_k(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x_j\,(t)x_k(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\varphi_i(t)][\sum_{m=1}^{N} x_{km}\varphi_m(t)]\ dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \sum_{m=1}^{N} x_{km} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t)\varphi_m(t)dt$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_{ji} \sum_{m=1}^{N} x_{km}\delta_{im}$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_{ji}\, x_{ki}$$

$$=< \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k >= \boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k^T \qquad (50\text{-}3)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $j = k$ نحصل على

$$\|x_k(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x_k(t)|^2\, dt = \sum_{i=1}^{N} |x_{ki}|^2$$

$$= \|\boldsymbol{x}_k\|^2 = E \qquad (51\text{-}3)$$

أي أن قدرة الإشارة تطابق (تساوي) مربع طويلة الشعاع الموافق. وإذا طبقنا النتيجة السابقة على الفرق بين الإشارتين $x_j(t)$ و $x_k(t)$، نجد:

$$\left\|x_j(t) - x_k(t)\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_j(t) - x_k(t)\right|^2 dt$$

$$= \left\|x_j - x_k\right\|^2 \qquad (52\text{-}3)$$

أي أن القدرة الموجودة في الخطأ بين الإشارتين تساوي مربع المسافة بين الشعاعين الموافقين، أي

$$d_{jk}^2 = \sum_m (x_{Jm} - x_{km})^2$$

تستخدم العلاقة السابقة في الاتصالات الرقمية، وذلك في عملية الكشف detection (كشف الإشارة المستقبلة).

نعلم أن الجداء الداخلي بين الشعاعين $\boldsymbol{x}_i$ و $\boldsymbol{x}_j$ يُحدد بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j = \|\boldsymbol{x}_i\| \|\boldsymbol{x}_j\| \, cos\theta_{ij}$$

حيث θ_{ij} هي الزاوية بين الشعاعين $\boldsymbol{x}_i$ و $\boldsymbol{x}_j$. يمكن إيجاد $cos\theta_{ij}$ من العلاقة السابقة حسب:

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j}{\|\boldsymbol{x}_i\| \|\boldsymbol{x}_j\|} \tag{53-3}$$

ويكون الشعاعان متعامدين عند $\theta_{ij} = 90°$.

3.3 سلاسل فوريه وخواصها

نأخذ بالحسبان العلاقة (30-3) وبالنسبة لإشارة ما $x(t)$، أي

$$x(t) = \sum_{j=1}^{M} x_j \, \varphi_j(t)$$

$$x_j = \int_0^T x(t)\varphi_j(t)\, dt \tag{54-3}$$

كما ذكرنا سابقاً، لتبسيط تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI يفضل استخدام الإشارات الأسية العقدية التالية:

$$\ldots, e^{-j4\pi f_0 t},\ e^{-j2\pi f_0 t}, 1,\ e^{+j2\pi f_0 t},\ e^{+j4\pi f_0 t}, \ldots$$

وبما أن هذه الإشارات متعامدة ضمن الدور T_0 فيمكن استخدامها في (54-3) في حال كانت الإشارة $x(t)$ إشارة دورية بدور T_0. وهكذا نحصل على

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{55-3}$$

بضرب طرفي العلاقة (55-3) بـ $(e^{j2\pi n f_0 t})$ والمكاملة على الدور T_0 وبالأخذ بالحسبان التعامدية، فإننا نحصل على

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt \qquad (56\text{-}3)$$

حيث α أي قيمة حقيقية مختارة.

حتى نتمكن من نشر أي تابع دوري $x(t)$ حسب العلاقة (55-3) يجب أن تتحقق الشروط التالية (شروط "ديريخلي" (Dirichlet) التالية:

- الإشارة يجب أن تكون إشارة قدرة أي:

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\,dt < \infty$$

- عدد القيم العظمى والصغرى ضمن الدور يجب أن تكون محددة. مثال التابع

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right);\ 0 < t \le 1$$

يحقق الشرط الأول ولا يحقق الشرط الثاني.

- عدد الانقطاعات في الدور مُحدد، وكل انقطاع له قيمة محددة، أي:

$$[x(t^+) + x(t^-)]/2$$

مثال التابع:

$$x(t) = \frac{1}{3-t}$$

لا يحقق الشرط الأخير لأن الانقطاع لانهائي عند $t = 3$.

عند ذلك نقول إن العلاقة (55-3) هي سلسلة فوريه العقدية والعلاقة (56-3) تحدد عوامل فوريه $\{x_n\}$ وفي الحالة العامة هي عقدية.

تجدر الملاحظة هنا إلى ما يلي:

شروط "ديريخلي" هي شروط كفاية للتأكد من وجود سلسلة فوريه للتابع $x(t)$.

التردد $f_0 = 1/\mathrm{T_0}$ هو تردد أساسي والترددات الأخرى هي من مضاعفاته.

في الحالة العامة، يمكن أن نكتب عوامل فوريه بالشكل التالي:

$$x_n = |x_n|\exp[j\angle x_n]$$

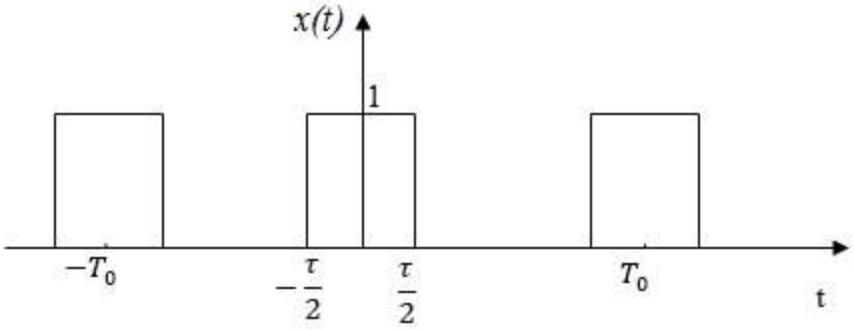
حيث $|x_n|$ قيمة (مقدار) المطال للتوافقية n و $\angle x_n$ طور التوافقية n. حيث $|x_n|$ هو عبارة عن الطيف المتقطع للمطال و $\angle x_n$ الطيف المتقطع للطور وكلا الطيفين يسميان بالطيف المتقطع للإشارة الدورية $x(t)$.

يمكن التوضيح ببساطة أن سرعة تقارب الإشارة (تقارب سلسلة فوريه لـ $x(t)$ من $x(t)$) تتناسب مع نعومتها smooth. كمثال على ذلك عوامل فوريه لإشارة سن المنشار تتناقص بسرعة $1/n$، بينما عوامل فوريه لإشارة شبه المنحرف تتناقص بسرعة $1/n^2$.

مثال 3-4: لدينا الإشارة الدورية الموضحة في الشكل 3-2 وذات الصيغة التحليلية التالية:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sqcap \left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right)$$

المطلوب إيجاد نشر فوريه لهذه الإشارة مع رسم لطيفها المتقطع.



الشكل 3-2 إشارة دورية.

الحل: يتضح من الشكل أن دور الإشارة هو T_0 وباستخدام العلاقة (3-56) يكون لدينا:

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} (1)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{-j2\pi n}\left[e^{-j\pi\frac{\tau}{T_0}n} - e^{+j\pi\frac{\tau}{T_0}n}\right] \quad n \neq 0$$

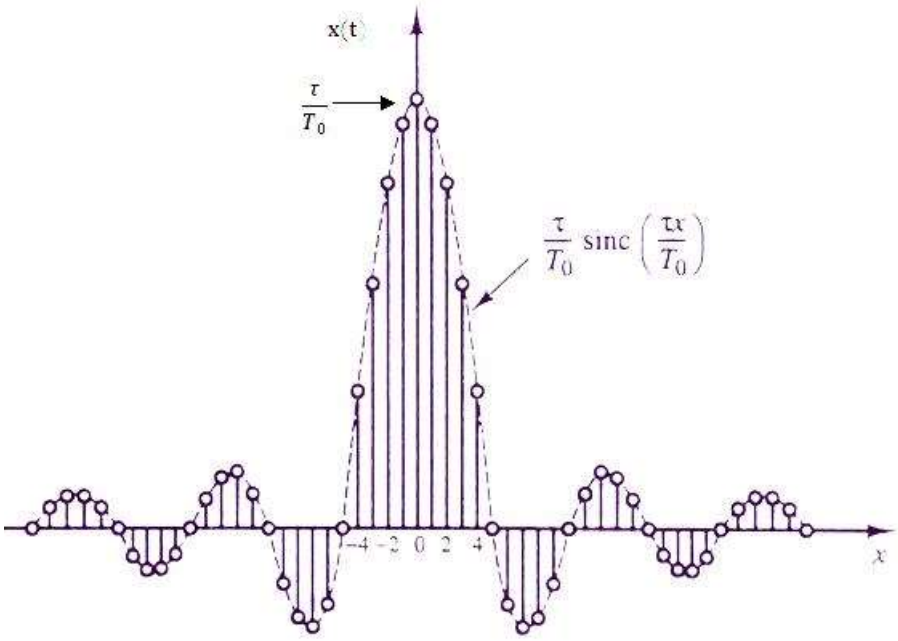
$$= \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$$

$$= \frac{\tau}{T_0}sinc\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \tag{57-3}$$

وبالتعويض في العلاقة (3-30) نحصل على $x(t)$، أي

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T_0}sinc\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)e^{j2\pi\frac{t}{T_0}n} \tag{58-3}$$

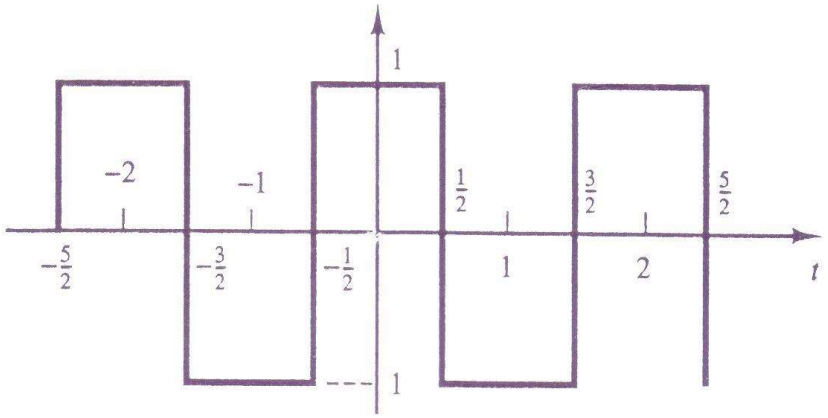
باستخدام العلاقة (3-57) نحصل على الشكل 3-3 الذي يبين الطيف المتقطع لقطار من النبضات المربعة. يتضح من الشكل أن الغلاف عبارة عن إشارة $sinc$.



الشكل 3-3 الطيف المتقطع لقطار النبضات.

مثال 3-5: أوجد سلسلة فوريه للإشارة الموضحة في الشكل 3-4 ذات الشكل التحليلي التالي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \sqcap (t-n)$$



الشكل 3-4 إشارة دورية مربعة.

الحل: من الشكل السابق واضح أن الدور الأساسي $T_0 = 2$ وهكذا يكون من المناسب اختيار $\alpha = -1/2$ في العلاقة (3-56) وهكذا يكون لدينا عوامل فوريه التالية:

$$x_n = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{+3/2} x(t)e^{-j/\pi nt}dt$$

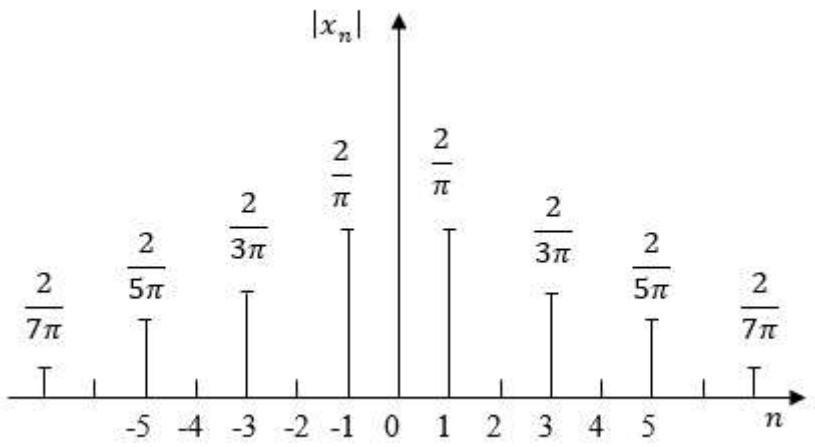
$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi nt}\,dt - \frac{1}{2}\int_{+1/2}^{3/2} e^{-j\pi nt}\,dt$$

$$x_n = -\frac{1}{j2\pi n}\left[e^{-j\pi n/2} - e^{j\pi n/2}\right] - \frac{1}{-j2\pi n}\left[e^{-j\frac{\pi 3}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi} e^{-j\pi n} sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(1 - cos(n\pi)\right) sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & ; n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n\pi} & ; n = 4k+3 \\ 0 & ; n\ is\ even \end{cases} \qquad (3\text{-}59)$$



الشكل 3-5 توضيح عوامل فوريه للإشارة $x(t)$.

يبين الشكل السابق عوامل فوريه للإشارة $x(t)$ الموضحة في العلاقة (3-59). بتعويض القيم السابقة (عوامل فوريه) في العلاقة (3-55) نحصل على سلسلة فوريه للإشارة $x(t)$.

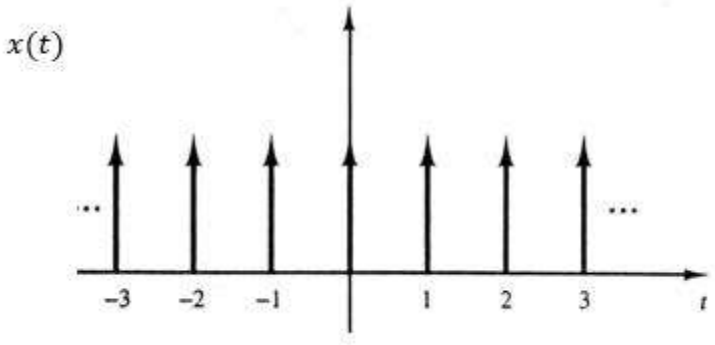
$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\right) - \frac{2}{3\pi}\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right) + \frac{2}{5\pi}\left(e^{j5\pi t} + e^{-j5\pi t}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}cos(\pi t) - \frac{4}{3\pi}cos(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}cos(5\pi t) + \cdots$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}cos\big((2k+1)\pi t\big) \qquad (60\text{-}3)$$

مثال 3-6: أوجد سلسلة فوريه لقطار النبضات المعرف تحليلياً بالشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_0) \qquad (61\text{-}3)$$



الشكل 3-6 قطار من النبضات.

الحل: باستخدام العلاقة (3-56) يكون لدينا

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \delta(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt = \frac{1}{T_0}$$

وباستخدام العلاقة (3-56) يكون لدينا:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (62\text{-}3)$$

تُعد العلاقة السابقة من العلاقات الهامة في دراسة الإشارات والنظم.

1.3.3 سلسلة فورييه لإشارة حقيقية

إذا حققت الإشارة الحقيقية $x(t)$ شروط سلسلة فورييه عند ذلك يمكن استخدام التوابع الجيبية لنشر الإشارة $x(t)$. كما نعلم أن x_n عبارة عن عوامل عقدية وبالتالي بوضع

$$e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} = cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) - j\,sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)$$

في العلاقة (3-56) نحصل على ما يلي:

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt - j\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt = x_{nc} - jx_{ns} \quad (63\text{-}3)$$

$$x_{nc} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt \quad (64\text{-}3)$$

$$x_{ns} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt$$

وهكذا بناءً على العلاقات السابقة يمكن توصيف x_n بالشكل التالي:

$$x_n = |x_n|e^{j\angle x_n} \quad (65\text{-}3)$$

$$|x_n| = \sqrt{{x_{nc}}^2 + {x_{ns}}^2} \quad (66\text{-}3)$$

$$\theta_n = \angle x_n = -arctan\frac{x_{ns}}{x_{nc}} \quad (67\text{-}3)$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة (3-64) يكون التابع $|x_n|$ تابعاً زوجياً والتابع θ_n تابعاً فردياً بالنسبة لـ n.

باستخدام العلاقات (3-65) و (3-66) و (3-67) يمكن أن تكتب العلاقة (3-55) بالشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|e^{j(2\pi\frac{n}{T_0}t+\theta_n)} \quad (68\text{-}3)$$

هذا يسمح لنا الانتقال إلى الشكل المثلثي لسلسلة فورييه. لنأخذ زوجاً متناظراً من حدود العلاقة (3-68) وذلك لقيم محدودة لـ n. ولتكن على سبيل المثال $|n| = 2$، وبما أن

$$\theta_{-2} = -\theta_2 \quad , \quad |x_{-2}| = |x_2|$$

فإن $|x_{-2}|e^{j(-2w_0t+\theta_{-2})} + |x_2|e^{j(2w_0t+\theta_2)}$

$$= |x_2|\left[e^{-j(2w_0t+\theta_2)} + e^{j(2w_0t+\theta_2)}\right] \tag{69-3}$$

$$= 2|x_2|\cos(2w_0t + \theta_2)$$

حيث للتبسيط تم اعتبار $w_0 = 2\pi\frac{1}{T_0}$. وهكذا يمكن كتابة العلاقة (3-68) بالشكل التالي:

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|x_n|\cos(nw_0t + \theta_n) \tag{70-3}$$

فكرة مضاعفة x_2 في العلاقة الأخيرة لـ $n \geq 1$ من وجهة النظر الفيزيائية موضحة في الشكل 3-4. التابع $2|x_2|\cos(nw_0t + \theta_n)$ ناتج من إسقاط شعاعين كل منهما بطول $|x_n|$ وبدور بسرعة $|n|w_0$ وكلا الشعاعين يدوران باتجاهين متعاكسين. الشعاع الذي يدور بعكس عقارب الساعة يوافق التردد الموجب والشعاع الذي يدور مع عقارب الساعة يوافق التردد السالب. عند الانتقال في سلسلة فورييه للشكل المثلثي العلاقة (3-70) فإن مفهوم التردد السالب يفقد معناه. العامل x_0 لا يتضاعف بسبب التردد الصفري.

في المراجع الرياضية والهندسية عادة يستخدم الشكل التالي من سلسلة فورييه المثلثية بدلاً من (3-70):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_0t) - b_n\sin(nw_0t)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(nw_0t + \theta_n) \tag{71-3}$$

بالأخذ بالحسبان العلاقات (3-68) و (3-70) و (3-71) نجد:

$$An = 2|x_n| \; ; \quad a_n = 2x_{nc} \; ; \quad b_n = 2x_{ns}$$

وباستخدام العلاقة (3-64) يكون لدينا:

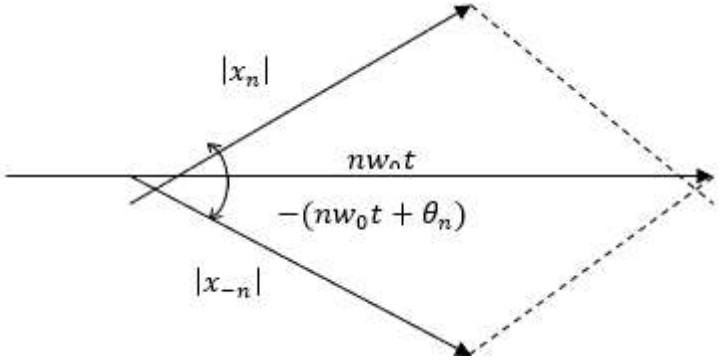
$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\cos(nw_0 t)\,dt \qquad (72\text{-}3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(nw_0 t)\,dt \qquad (73\text{-}3)$$

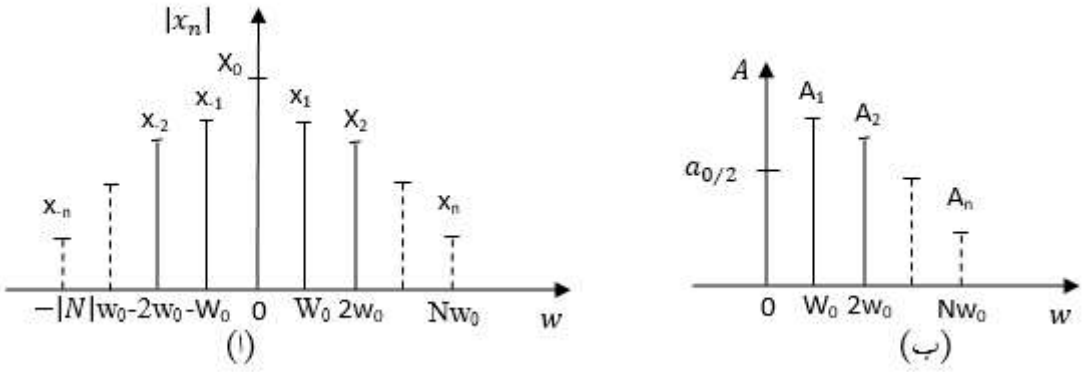
$$|x_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (74\text{-}3)$$

$$\theta_n = \angle x_n = -arctan\frac{b_n}{a_n} \qquad (75\text{-}3)$$

يبين الشكل(3–8) تمثيل كل من $|x_n|$ و A_n للإشارة $x(t)$ وذلك للمقارنة.



الشكل 3-7 تمثيل إشارة جيبية بدوران شعاعين متعاكسين.



الشكل 3-8 (أ) العوامل العقدية و(ب) عوامل الشكل المثلثي لسلسلة فوريه.

2.3.3 النشر بسلسلة فورييه للإشارات الفردية والزوجية

يمكن تبسيط سلسلة فورييه للإشارة الحقيقية بمعرفة أكانت زوجية أو فردية. لنفرض لدينا الإشارة الزوجية $x(t)$، عند ذلك يكون

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, sin(nw_0 t)\, dt = 0 \qquad (76\text{-}3)$$

حيث: $\mathrm{w_0} = 2\pi\frac{1}{\mathrm{T_0}}$. وذلك لأن الجداء $x(t)sin(\mathrm{nw_0 t})$ هو فردي لأن $x(t)$ زوجية و $sin(\mathrm{nw_0 t})$ فردية. وبما أن الجداء فردي فإن تكامله خلال دور واحد يساوي الصفر. وهكذا نستنتج أن سلسلة فورييه للإشارات الزوجية تحوي فقط حدود الـ $\cos(.)$، أي

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t) \qquad (77\text{-}3)$$

إذا كانت الإشارة فردية، وباتباع نفس المناقشة بكون لدينا

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, cos(nw_0 t)\, dt = 0$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sin(nw_0 t) \qquad (78\text{-}3)$$

3.3.3 إشارات التوافقيات الفردية والزوجية

نقول إن الإشارة $x(t)$ ذات توافقيات فردية إذا كان منشور فورييه (سلسلة فورييه) يحوي فقط توافقيات فردية. ونقول إن الإشارة $x(t)$ ذات توافقيات زوجية إذا كانت سلسلة فورييه تحوي فقط توافقيات زوجية. واضح أن إزاحة الإشارة $x(t)$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات لا يؤثر على فردية أو زوجية التوافقيات لأن ذلك تابع للتردد فقط، وذلك بخلاف تغير فردية وزوجية الإشارات بإزاحة مبدأ الإحداثيات كون ذلك تابعاً للطور.

ليكن لدينا الإشارات ذات التوافقيات الفردية $e^{j(2n+1)w_0t}$ أي

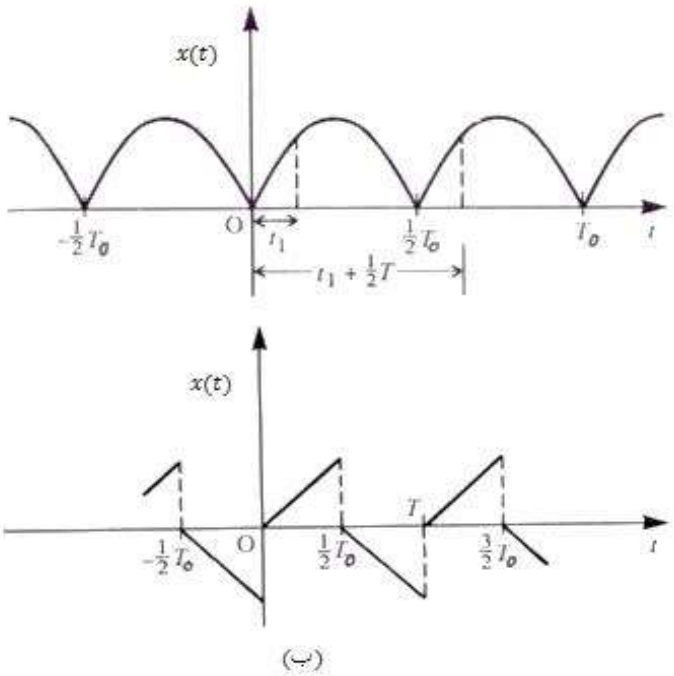
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1}\, e^{\,j(2n+1)w_0t}$$

لذلك

$$x\left(t+\frac{T_0}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1}\, e^{\,j(2n+1)w_0(t+\frac{T_0}{2})}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1}\, e^{\,j(2n+1)w_0t}.\, e^{j\pi(2n+1)}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1}\, e^{\,j(2n+1)w_0t} = -x(t)$$



الشكل 3-9 (أ) إشارة ذات توافقيات زوجية، (ب) وأخرى فردية.

ومنه الشرط اللازم والكافي حتى تكون الإشارة ذات توافقيات فردية هو:

$$x\left(t+\frac{T_0}{2}\right)=-x(t) \tag{79-3}$$

وبنفس الطريقة حتى تكون الإشارة ذات توافقيات زوجية هو

$$x\left(t+\frac{T_0}{2}\right)=x(t) \tag{80-3}$$

الشكل 3-9(أ) يوضح إشارة ذات توافقيات زوجية والشكل 3-9(ب) يوضح إشارة ذات توافقيات فردية. سلسلة فوريه للإشارة الأولى، بفرض $T_0=2\pi$ هي:

$$x(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt) \tag{81-3}$$

وسلسلة فوريه للإشارة الثانية بفرض $T_0=2$ هي:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2\mathrm{n}+1)\pi\mathrm{t}-\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}\cos(2n+1)\,\pi t\right] \tag{82-3}$$

4.3 استجابة النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن للإشارات الدورية

ليكن لدينا نظام خطي غير متغير مع الزمن LTI ذي الاستجابة النبضية $h(t)$. نطبق على دخل النظام إشارة أسية عقدية ذات شكل:

$$x(t)=Ae^{j(w_0t+\theta)}$$

حيث: $w_0=2\pi f_0$. ولكون النظام خطاً غير متغير مع الزمن LTI فإنه للحصول على الخرج (الاستجابة) $y(t)$ يمكن استخدام جداء الطي، أي

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)Ae^{j[w_0(t-\tau)+\theta]}d\tau$$

$$= Ae^{j\theta}e^{jw_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-jw_0\tau}d\tau$$

$$= A\left|H(f_0)\right|e^{j[2\pi f_0 t+\theta+\angle H(f_0)]}\Big| \quad (83\text{-}3)$$

حيث

$$H(f_0) = |H(f_0)|e^{j\angle H(f_0)} \quad (84\text{-}3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}d\tau$$

نلاحظ من التحليل السابق ما يلي:

- استجابة النظام LTI لإشارة دخل أسية عقدية، هي أيضاً أسية عقدية.
- تردد الخرج هو نفس تردد الدخل، أي أن النظام LTI لم يؤثر على تردد إشارة الدخل.
- مطال الخرج هو عبارة عن مطال الدخل مضروباً بالقيمة المطلقة لتابع التحويل $|H(f_0)|$.
- طور إشارة الخرج تساوي طور إشارة الدخل مضافاً إليها الطور $\angle H(f_0)$.
- تابع التحويل $|H(f_0)|$ هو تابع لكل من الاستجابة النبضية وكذلك لتردد الدخل.

بسبب الخواص السابقة نسمي الإشارات الأسية العقدية بالتوابع الذاتية eigen function لصنف النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI. كما نعلم التوابع الذاتية للنظام هي مجموعة من إشارات الدخل، حيث نحصل على إشارات الخرج بتقييس إشارات الدخل. وهذا يبسط بشكل كبير تحليل نظم الـ LTI.

والآن ليكن لدينا الإشارة $x(t)$، إشارة دخل دورية ذات دور T_0. من العلاقة (3-55) يكون لدينا (سلسلة فورييه)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\, e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

عند ذلك يكون لدينا الخرج التالي:

$$y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$y(t) = \mathcal{L}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \mathcal{L}\left[e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (85\text{-}3)$$

حيث: $\mathcal{L}$ عامل factor خطي و $H(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f_0 t}dt$.

بالأخذ بالحسبان التحليل السابق نلاحظ ما يلي:

إذا كان دخل النظام LTI إشارة دورية بدور T_0 فإن إشارة الخرج أيضاً إشارة دورية، ولكن ما هو هذا الدور. نعلم أن سلسلة فوريه لإشارة الخرج هي:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

حيث: $y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$.

وهذا يكافئ

$$|y_n| = |x_n|.\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right| \qquad (86\text{-}3)$$

$$\angle y_n = \angle x_n + \angle H\left(\frac{n}{T_0}\right) \qquad (87\text{-}3)$$

نظم الـ LTI لا تؤثر على تردد إشارة الدخل بينما تؤثر فقط على المطال والطور. والنظم التي تؤثر على التردد هي النظم غير الخطية والنظم المتغيرة مع الزمن.

كما ذكرنا سابقاً مطال إشارة الخرج عبارة عن مطال إشارة الدخل مقيس بالعامل $\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$ وطور إشارة الخرج عبارة عن طور إشارة الدخل مضافاً إليها الطور $\angle H\left(\frac{n}{T_0}\right)$. تجدر الإشارة أن القيمة $H\left(\frac{n}{T_0}\right)$ تابعة لكل من n والاستجابة النبضية $h(t)$ حيث:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

التابع $H(f)$ يسمى بالاستجابة الترددية أو الخواص الترددية للنظام LTI. التابع $H(f)$ عموماً هو عبارة عن تابع عقدي ويمكن توصيفه بشكل كامل عن طريق $|H(f)|$ و $\angle H(f)$. ويمكن تحديد خرج نظام LTI لإشارة دخل دورية بمعرفة $H(f)$ أو $h(t)$.

مثال 3-7: ليكن لدينا الإشارة الدورية $x(t)$ ، والتي هي دخل النظام الخطي غير المتغير مع الزمن LTI ذو الاستجابة النبضة التالية:

$$h(t) = e^{-t}u_{-1}(t)$$

بفرض أن:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

المطلوب إيجاد الخرج $y(t)$.

الحل: نوجد تابع التحويل $H(f)$، أي

$$H(f) = \int_0^{\infty} e^{-\tau}e^{-j2\pi f_0\tau}d\tau$$

$$= -\frac{1}{1+j2\pi f_0}e^{-\tau}e^{-j2\pi f_0\tau}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1+j2\pi f_0}$$

نعلم أن إشارة الخرج هي من الشكل التالي:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi f_0.nt} \qquad (88\text{-}3)$$

من الإشارة $x(t)$ واضح أن التردد الأساسي هو $f_0 = 1$ وبوضع الإشارة $x(t)$ بشكلها الأسي يكون لدينا:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة السابقة $x(t)$ ووضع $f_0 = 1$ في (88-3) يكون لدينا:

$$y(t) = \sum_{n=-3}^{3} y_n e^{j2\pi nt} \tag{89-3}$$

وباستخدام (86-3) و (87-3) نحصل على $y_0 = 1$:

$$y_{1=} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+j2\pi}\right) \quad ; \quad y_{-1=} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-j2\pi}\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j4\pi}\right) ; \; y_{-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-j4\pi}\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+j6\pi}\right) ; \; y_{-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-j6\pi}\right) \tag{90-3}$$

بتعويض القيم $y_0, y_{\pm1}, y_{\pm2}, y_{\pm3}$ في العلاقة (89-3) نحصل على إشارة الخرج المطلوبة. تجدر الملاحظة هنا أن إشارة الخرج يجب أن تكون إشارة ذات قيم حقيقية، وذلك لأنها ناتجة من تلفيف $x(t)$ مع $h(t)$ وكلاهما تابعين بقيم حقيقية. ويمكن التأكد من ذلك من العلاقات (90-3) التي تبين أن $y^*_{-n} = y_n$.

5.3 علاقة بارسفال

تُبين علاقة بارسفال Parseval أن الاستطاعة المحتواة في الإشارة الدورية تساوي مجموع الاستطاعة المحتواة في كل مركبات سلسلة فورييه التي تمثل تلك الإشارة، أي

$$\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \tag{91-3}$$

للبرهان على العلاقة السابقة، لنفرض لدينا الإشارة الدورية $x(t)$ وسلسلة فورييه لها هي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

يكون المرافق العقدي للإشارة السابقة هو:

$$x^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*_m e^{-j2\pi\frac{m}{T_0}t}$$

بضرب الإشارتين السابقتين نحصل على

$$x(t).x^*(t) = |x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* \, e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0} t}$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة على دور واحد T_0، نحصل على

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* T_0 \, \delta_{m,n}$$

$$= T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

أو

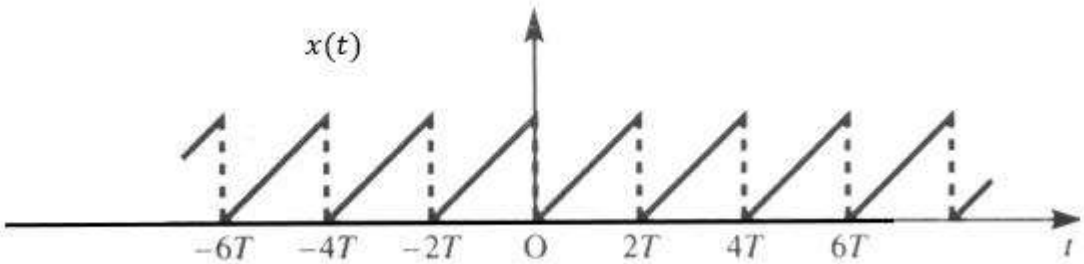
$$\frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

لاحظ أن الطرف الأيسر في العلاقة السابقة هو عبارة عن استطاعة الإشارة $x(t)$، أو الاستطاعة المحتواة في الإشارة $x(t)$. والقيمة $|x_n|^2$ هي عبارة عن الاستطاعة المحتواة في $x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$ أي الاستطاعة المحتواة في التوافقية رقم n. وهكذا فإن الاستطاعة المحتواة في الإشارة الجيبية $x(t)$ تساوي مجموعة الاستطاعات المحتواة في توافقياتها.

مثال 3-8: طبق علاقة بارسفال على التابع التالي:

$$x(t) = 2t/T \ , \quad 0 \le t \le 2T$$

$$x(t + 2T) = x(t)$$



الشكل 3-10 التابع $x(t) = \frac{2t}{T}$ الدوري.

الحل: واضح من الشكل أن دور الإشارة هو $2T$ أي $w_0 = \pi/T$ وباستخدام العلاقة (3-56) نوجد العوامل x_n (العوامل العقدية).

$$x_n = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t)e^{-j\pi\frac{n}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \frac{2}{T}te^{-j\pi\frac{n}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[\frac{Tt}{-jn\pi}e^{-j\pi\frac{n}{T}t} - \frac{T^2}{(jn\pi)^2}e^{-j\pi\frac{n}{T}t}\right]_0^{2T} \quad ; n \neq 0$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[\frac{2T^2}{-jn\pi} + \frac{T^2}{(n\pi)^2} - \frac{T^2}{(n\pi)^2}\right] = \frac{j2}{n\pi} \quad ; n \neq 0$$

في الحالة الخاصة $n = 0$ يكون لدينا:

$$x_0 = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t)dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \frac{2t}{T}dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2T} = 2$$

والآن باستخدام علاقة بارسفال يكون لدينا:

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T}|x(t)|^2dt = x_0^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1}|x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2T}\int_0^{2T}\frac{4t^2}{T^2}dt = 4 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2$$

مسائل الفصل الثالث

3-1 بين أن مجموعة التوابع التالية:

$$1,\ t, t^2, \dots, t^m$$

مستقلة خطياً.

3-2 لدينا الإشارات التالية:

$$x_3(t) = \begin{cases} 1, (0 \le t \le 2) \\ -1, (2 \le t \le 3) \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1\ ; (0 \le t \le 1) \\ -1\ (1 \le t \le 2) \end{cases}$$

$$x_1(t) = 1; (0 \le t \le 2) \qquad x_4(t) = -1; (0 \le t \le 3)$$

المطلوب:

1- إيجاد التوابع المتعامدة الممعيرة الموافقة، باستخدام إجرائية غرام—شميت.

2- أوجد المخطط الوظيفي لتوليد الإشارات $x_i(t)$ باستخدام التوابع المتعامدة الممعيرة ومعاملاتها.

3-3 لدينا مجموعة التوابع التالية:

$$1,\ t, t^2, \dots,\ t^m$$

على المجال $[-1, +1]$ المطلوب تشكيل مجموعة توابع مستقلة خطياً باستخدام إجرائية غرام—شميت.

4-3 لدينا النبضتان الأسيتان التاليتان:

$$S_1(t) = S \exp(-10^5 t)\, u_{-1}(t)$$

$$S_2(t) = S \exp[-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})] u_{-1}(t - 2 \cdot 10^{-6})$$

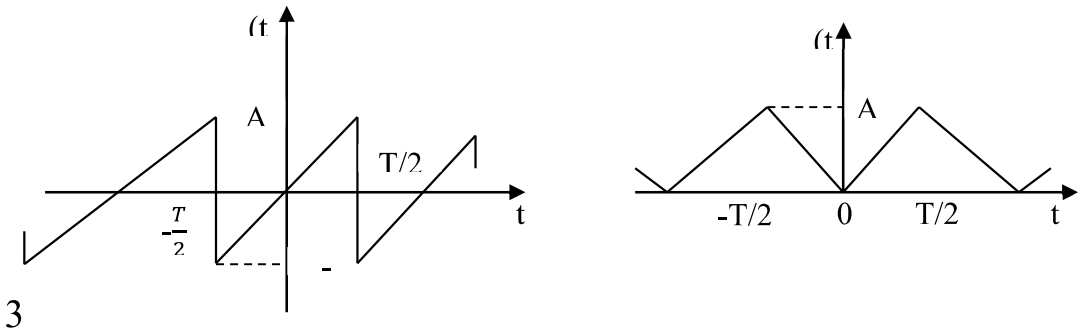
حيث وحدة S بالفولت(ثابت) ووحدة t بالثانية.

المطلوب:

1- إيجاد الجداء السلمي Product Scalar بين الإشارتين .

2- ايجاد الزاوية بين الإشارتين.

5-3 أوجد سلسلة فوريه للإشارتين الدورتين التاليتين:



3

6-3 أوجد معاملات سلسلة فوريه x_n للإشارة التالية:

$$x(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4\ell)$$

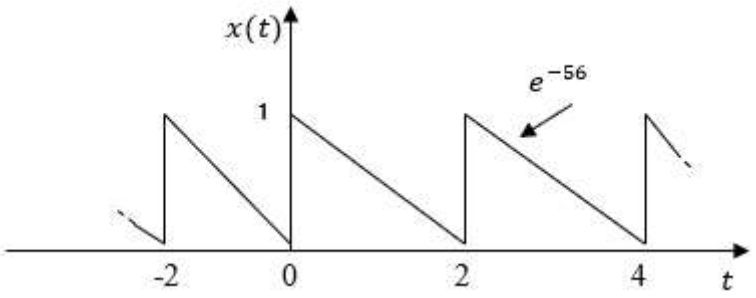
حيث $\delta(.)$ نبضة ديراك.

7-3 لدينا الإشارة الدورية الموضحة في الشكل (7-3p)

المطلوب:

1- أوجد معاملات سلسلة فوريه لتلك الإشارة.

2- ارسم خطوط طيف الطويلة spectrum magnitude وطيف الطور في المجال $n = \pm 20$.



الشكل (3p-7)

3-8 أوجد الإشارة $x(t)$ الموافقة لمعاملات سلسلة فورييه التالية:

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{jn\pi/20}$$

بفرض التردد الأساسي $T = 2$.

3-9 يمكن نمذجة القناة بين المرسل والمستقبل بنظام LTI. بفرض دخل القناة هو

$$x(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-1)$$

واستجابة القناة هي

$$h(t) = -\delta(t-0.5) + 1.5\delta(t-1) + 0.75\delta(t-1.75)$$

أوجد خرج القناة:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

3-10 لدينا نظام LTI عبارة عن قناة تحوي مسارين، المسار المباشر ربحه واحد والمسار غير المباشر ربحه ½ وذو تأخير بمقدار واحد. أي بفرض دخل القناة x_n وخرج القناة y_n، يكون لدينا:

$$y_n = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}$$

المطلوب: إيجاد خرج القناة y_n بفرض لدينا الدخل التالي:

$$x_n = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

11-3 يمكن تمثيل مجموعة من التوابع ذات الدور $(0,2\pi)$ بالسلسلة التالية:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{Jnt}$$

المطلوب:

1- بيّن أن التوابع القاعدية basic functions هي توابع متعامدة وممعيرة.

2- تحقق من علاقة بارسفال على التابع $x(t)$.

4 تحويلات فوريه

Fourier transforms

1.4 من سلاسل فورييه لتحويل فورييه

سمح تمثيل الإشارة الدورية بسلسلة فورييه العقدية بمعرفة مكونات الإشارة وتوافقياتها. بالإضافة إلى ذلك، بسبب استخدام سلسلة فورييه العقدية إشارات أسية عقدية فهذا يُسهل تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI، وذلك لأن تلك الإشارات هي عبارة عن توابع ذاتية للنظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI.

في هذه الفقرة سوف نوسع فكرة تمثيل الإشارة الدورية بسلسلة فورييه العقدية لتشمل الإشارات غير الدورية. حيث سنبين إمكانية تمثيل الإشارات غير الدورية باستخدام الإشارات الأسية العقدية.

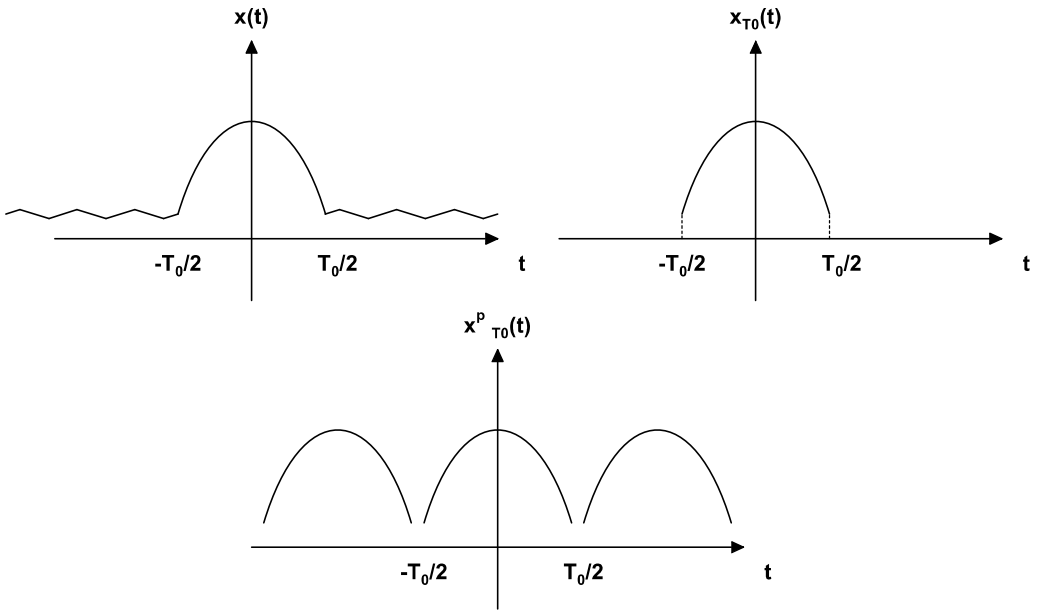
لتكن لدينا الإشارة غير الدورية $x(t)$ حيث $-\frac{T_0}{2} < t \leq +\frac{T_0}{2}$ (T_0 قيمة اختيارية) ولنفرض أننا نود نشر الإشارة باستخدام توابع أسية عقدية. لأجل ذلك سوف ندخل الإشارة المبتورة Truncated التالية:

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t)\,; & -T_0/2 < t \leq T_0/2 \\ 0\,; & else \end{cases}$$

هذه الإشارة تتطابق مع الإشارة $x(t)$ ضمن المجال المذكور وتساوي الصفر خارج ذلك المجال. والآن باستخدام الإشارة السابقة سوف نعرف الإشارة الدورية التالية:

$$x_{T_0}^P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

تتطابق هذه الإشارة أيضاً مع للإشارة $x(t)$ ضمن المجال المذكور $(-T_0/2 < t \leq +T_0/2)$. يوضح الشكل 4-1 كل من الإشارات $x(t)$ و $x_{T_0}(t)$ و $x_{T_0}^P(t)$.



الشكل 4-1 الإشارة $x(t)$ والصيغة المبتورة والدورية.

إذا تم نشر الإشارة $x_{T_0}^P(t)$، فإن هذا النشر يصلح كنشر للإشارة $x(t)$ وذلك ضمن المجال المرغوب وهذا لأنه ضمن ذلك المجال فإن الإشارتين متطابقتان. وبما أن الإشارة $x_{T_0}^P(t)$ هي إشارة دورية بدور T_0 فإنه يمكن تمثيلها بسلسلة فوريه، أي:

$$x_n^P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_{T_0}^P(\tau)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}\tau}d\tau = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}\tau}d\tau \qquad (1\text{-}4)$$

عند ذلك فإن $x(t)$ لها الشكل التالي:

$$x(t) = x_{T_0}^P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^P e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (2\text{-}4)$$

بتعويض (1-4) في (2-4) نحصل على:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}\tau}d\tau\right)e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (3\text{-}4)$$

لجعل النشر صالح لكل قيم t نجعل $T_0 \to \infty$. لتحقيق ذلك ندخل بعض المتحولات الجديدة:

$$f = \frac{n}{T_0} = nf_0$$

$$\Delta f = (n+1)f_0 - nf_0 = f_0 = \frac{1}{T_0}$$

وبالتعويض في (3-4) نحصل على:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta f \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} \qquad (4\text{-}4)$$

بجعل $T_0 \to \infty$ و $\Delta f \to 0$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df \qquad (5\text{-}4)$$

بتعريف $X(f)$ حسب العلاقة التالية:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (6\text{-}4)$$

نحصل على:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \qquad (7\text{-}4)$$

يؤدي $X(f)$ دور $\{x_n\}$ في سلسلة فوريه العقدية، حيث يعطي مقدار المطال والطور لمختلف المكونات الترددية الموجودة في الإشارة $x(t)$. تجدر الملاحظة هنا أن طيف الإشارة غير الدورية، هو طيف مستمر بخلاف طيف الإشارة الدورية ذي الطابع المتقطع. وهكذا يمكن أن نصيغ تحويلات فوريه إذا حققت الإشارة $x(t)$ شروط "ديريخلي" Dirichlet التالية:

- تكامل القيمة المطلقة للإشارة يُحقق ما يلي: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.
- عدد القيم الصغرى والعظمى ضمن أي مجال محدد تكون محددة.
- عدد الانقطاعات ضمن أي مجال محدد تكون محددة، إضافةً إلى أنّ أي انقطاع يجب أن يكون مُحدد.

فإنه يوجد تحويل فوريه المعرف بالشكل التالي:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (8\text{-}4)$$

وأن الإشارة الأصلية يمكن الحصول عليها من العلاقة:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \qquad (9\text{-}4)$$

وبكلمة أخرى فإن شروط "ديرخلي" تضمن تقارب $x(t)$, حسب العلاقة (5-4) المحسوبة من $x(t)$ الأصلية، في كل نقاط استمرارية التابع $x(t)$ ومن القيمة الوسطى عند الانقطاعات. وتجدر الملاحظة هنا أنه يجب استخدام إشارة المساواة (=) في كل من سلسلة فورييه وتحويل فورييه بحذر، وذلك بسبب عدم التقارب في نقاط الانقطاع.

والآن سوف نقدم بعض النقاط التي تخص تحويلات فورييه:

في الحالة العامة، التابع $X(f)$ هو تابع عقدي وهو تحويل فورييه للتابع $x(t)$ أي يمثل التابع $x(t)$ في المجال الترددي. حيث $|X(f)|$ يمثل المطال (الطويلة) كتابع للتردد و $\angle X(f)$ يمثل الطور كتابع للتردد. عادة يسمى التابع $X(f)$ بطيف الإشارة $x(t)$.

نرمز لتحويل فورييه $X(f)$ بالشكل التالي:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

ونرمز لـ $x(t)$ بتحويل فورييه المعاكس لـ $X(f)$ بالشكل:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$$

عند استخدام ω $(\omega = 2\pi f)$ كمتحول أو عند المقاربة مع تحويلات لابلاس، عند ذلك يكون من الأفضل استخدام الصيغة التالية لتحويلات فورييه:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

عامل التقييس $1/2\pi$ يمكن أن يوضع في أي علاقة من العلاقتين السابقتين أو في كلا العلاقتين بالقيمة $(2\pi)^{-1/2}$.

يمكن أن تكتب العلاقة بين تحويل فورييه وتحويل فورييه المعاكس بالشكل التالي:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right]e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}df\right]x(\tau)d\tau \quad (10\text{-}4)$$

ومن جهة أخرى نعلم أن:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (11\text{-}4)$$

بمقارنة (10-4) مع (11-4) نحصل على:

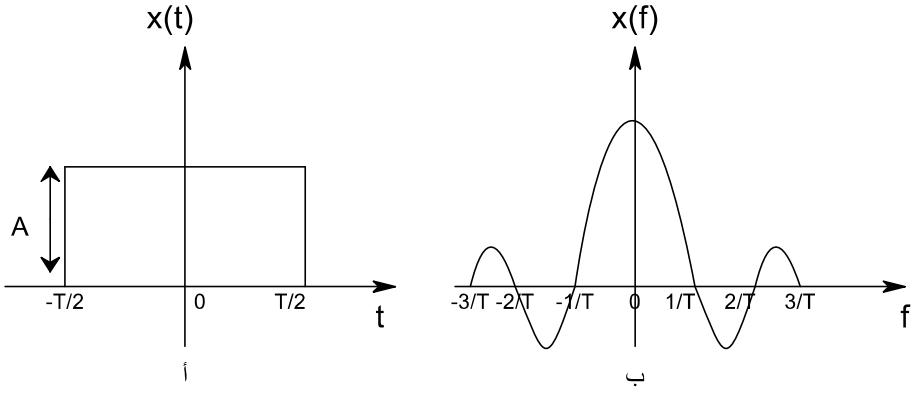
$$\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}df \quad (12\text{-}4)$$

وفي الحالة العامة يكون لدينا:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}df \quad (13\text{-}4)$$

مثال 4-1: أوجد تحويل فوريه للإشارة التالية والموضحة في الشكل 4-2:

$$x(t) = \begin{cases} A & ; -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & ; \quad else \end{cases}$$



الشكل 4-2 (أ) نبضة مربعة (ب) طيف النبضة المربعة

الحل: باستخدام العلاقة (4-6) يكون لدينا:

$$X(f) = A\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}\right)$$

$$= \frac{2A}{2\pi f}sin\frac{2\pi fT}{2} = \frac{A}{\pi f}sin(\pi fT) \; = AT\left[\frac{sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]$$

$$= ATsinc(\pi fT) or = ATsinc(fT) \qquad (14\text{-}4)$$

لاحظ أن AT هي قدرة الإشارة $x(t)$ وأنه عندما يكون $f = 0$ فإن $X(0) = AT$. حسب ما يلي:

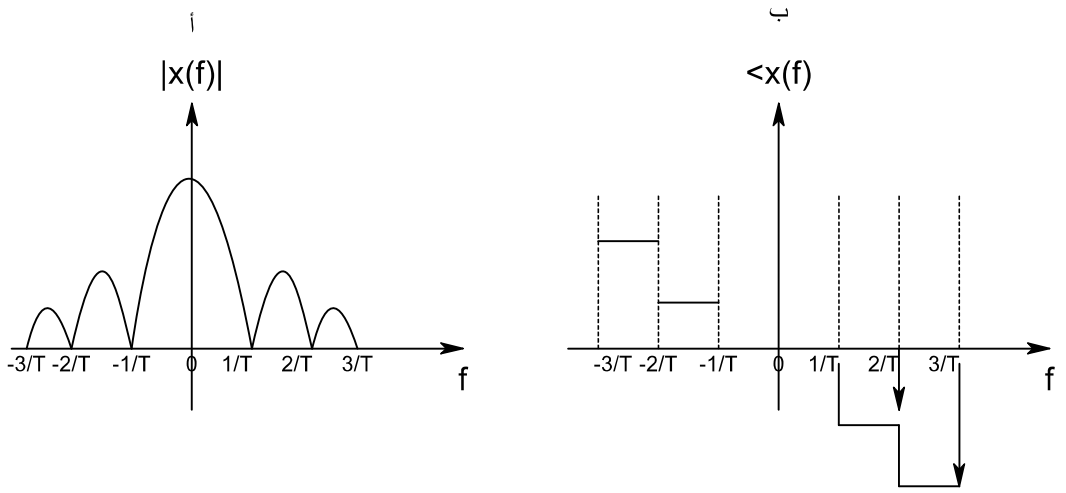
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j.2\pi.0.t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = AT \qquad (15\text{-}4)$$

واضح أن الطرف الأيمن هو عبارة عن مساحة النبضة $x(t)$. وهكذا فإن العلاقة (14-4) يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$X(f) = X(0)\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right] = X(0)sinc(fT) \qquad (16\text{-}4)$$

نلاحظ من الشكل 4-2(ب) أنه كلما استطال عرض النبضة T كلما تقاربت نقاط انعدام الطيف، أي ضاق الطيف الترددي (عرض المجال) وفي هذه الحالة فإن القيمة $X(0)$ تزداد. وبالمقابل كلما قصُر عرض النبضة T كلما تباعدت الأصفار أي عرُضّ مجال الطيف الترددي، وفي هذه الحالة فإن القيمة $X(0)$ تقل. عندما تنتهي $T \to 0$ (A ثابت) فإن النقطتين $\pm\frac{1}{T}$ (الشكل 4-2(ب)) تقتربا من اللانهاية، وهكذا فإن الطيف يُصبح لا نهائي وذو مطال متناهي في الصغر.

يوضح الشكل 4-3(أ) الخواص الطيفية للمطال وذلك بالاعتماد على العلاقة (4-15) والعلاقة (4-16). أما الشكل 4-3(ب) فإنه يُوضح الخواص الطيفية للطور، حيث كل تغير في إشارة التابع $X(f)$ يزداد الطور بمقدار π.

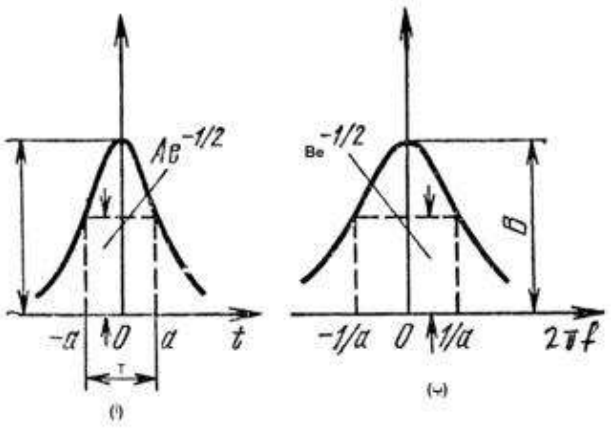


الشكل 4-3 (أ) الخواص الطيفية للمطال (ب) الخواص الطيفية للطور.

مثال 4-2: أوجد تحويل فورييه لنبضة غاوس:

$$x(t) = Ae^{-t^2/2a^2}\,, \qquad -\infty < t < \infty$$

حيث a معامل يساوي نصف عرض النبضة ذات المطال $e^{-1/2} = 0.606$، والعرض T (أي عرض كامل النبضة) يساوي $2a$.



الشكل 4-4 (أ) نبضة غاوس (ب) طيف نبضة غاوس.

الحل: باستخدام تحويل فورييه الموضح بالعلاقة (4-6) نجد:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-t^2/2a^2} e^{-j2\pi ft} dt \qquad (17\text{-}4)$$

عادة تتم مكاملة هذا النوع من التكاملات عن طريق إرجاع الأس إلى مربع كامل، أي:

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + j2\pi ft\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + j2\pi ft + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{a\sqrt{2}} + d\right)^2 - d^2\right]$$

حيث: $j2\pi ft = 2\left(t/a\sqrt{2}\right)d \implies d = j2\pi fa/\sqrt{2}$

وبالتعويض في العلاقة (4-17) يكون لدينا:

$$X(f) = Ae^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/a\sqrt{2}+d)^2}\, dt$$

بفرض $x = (t/a\sqrt{2}) + d$ وبالتعويض بالعلاقة السابقة نجد:

$$X(f) = Ae^{d^2} a\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

بمعرفة أن التكامل في العلاقة السابقة يساوي $\sqrt{\pi}$ فإننا نحصل على

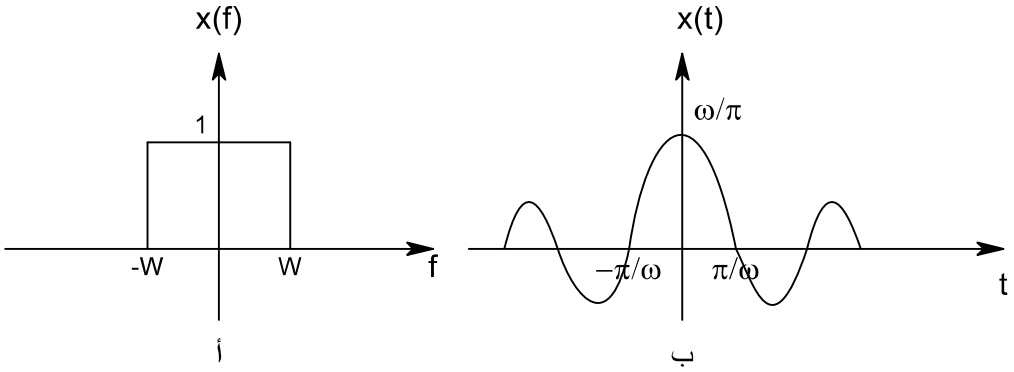
$$X(f) = A\sqrt{2\pi}ae^{-a^2(2\pi f)^2/2} = Be^{-(2\pi f)^2/2b^2} \qquad (18\text{-}4)$$

حيث $b = 1/a$ و $B = aA\sqrt{2\pi}$. منحني التابع (4-18) مبين في الشكل 4-4(ب).

يعطي المثال السابق **نتيجة هامة** وهي إذا كان التابع $x(t)$ تابع غاوسي فإن تحويل فورييه له (أي طيفه) أيضاً تابع غاوس. عادة المجال الترددي يُحدد عند المستوى $e^{-1/2}$ من القيمة العظمى، ويساوي: $2b = \frac{2}{a} = \frac{4}{T}$. وهكذا كلما كان عرض النبضة T أضيق كلما كان طيفها أوسع.

مثال 4-3: أوجد تحويل فورييه المعاكس للتابع التالي:

$$X(f) = \begin{cases} 1: & |f| < W \\ 0: & |f| > W \end{cases}$$



الشكل 4-5 تحويل فوريه لمثال 4-3.

الحل: باستخدام العلاقة (4-7) نجد:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-W}^{W} 1.\, e^{j2\pi ft}df$$
$$= \frac{\sin 2\pi Wt}{\pi t} = \frac{2W}{\pi} sinc\ 2Wt \qquad (19\text{-}4)$$

مثال 4-4: ليكن لدينا الإشارة التالية:

$$x(t) = e^{-at}u_{-1}(t) \quad , \quad a > 0$$

وبما أن $X(f)$ عموماً عقدية فيمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$X(f) = Y(f) + JZ(f)$$

المطلوب إيجاد كل من $X(f)$ و$Y(f)$ و $Z(f)$ و $|X(f)|$ و $\theta(f) = \angle X(f)$ مع رسم $|X(f)|$ و$\theta(f)$.

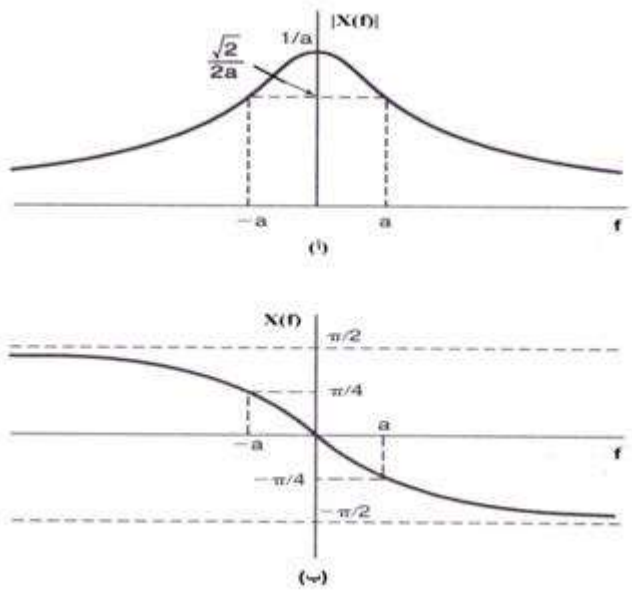
الحل: باستخدام العلاقة (4-7) نحصل على

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{-1}{a + j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{a + j2\pi f} \qquad (20\text{-}4)$$

ومنه:

$$Y(f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad ; \quad Z(f) = \frac{-2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$|X(f)| = \sqrt{\frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}} \quad ; \quad \theta(f) = -tan^{-1}(\frac{2\pi f}{a}) \tag{21-4}$$



الشكل 4-6 (أ) مطال تحويل فوريه للتابع $x(t) = e^{-at}$. (ب) الاستجابةالطورية لتحويل فوريه

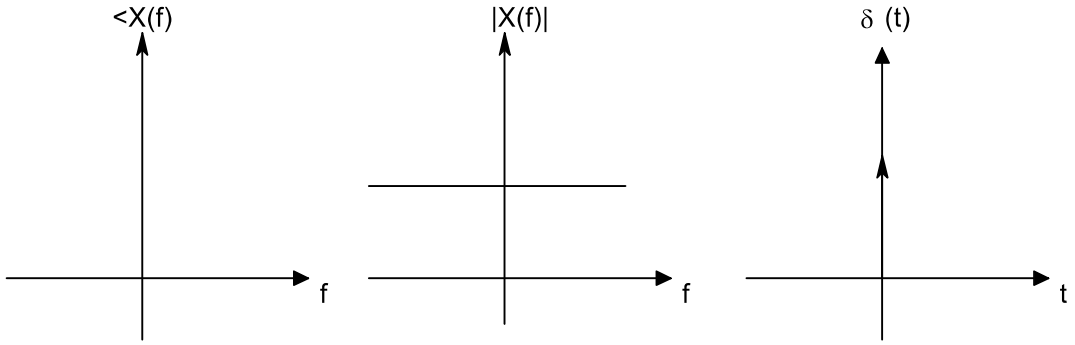
مثال 4-5: أوجد تحويل فوريه لإشارة نبضة ديراك $x(t) = \delta(t - \tau)$.

الحل: $\mathcal{F}[\delta(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt$

وباستخدام خاصية الترشيح لنبضة ديراك (العلاقة(2-25)) يكون لدينا:

$$\mathcal{F}[\delta(t-\tau)] = e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = e^{-j2\pi f\tau} \tag{22-4}$$

واضح هنا أن $|X(f)| = 1$ والطور $\angle X(f) = 2\pi f\tau$. وعندما $\tau = 0$ نحصل على $|X(f)| = 1$ و $\angle X(f) = 0$ وذلك واضح في الشكل 4-7.



الشكل 4-7 إشارة النبضة وطيفها.

وبشكل مماثل يمكن أن نبين أن: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)e^{j2\pi f\tau}df=1$.

من المفيد هنا أن قدرة الإشارة تساوي اللانهاية وهذا واضح في المجال الترددي من الشكل (4-7)، وأيضاً في المجال الزمني لكون نبضة ديراك هي نهاية لنبضة مربعة بعرض زمني $\frac{1}{T}$ ومطال T وذلك عندما تتناهى قيمة T للصفر. أي النبضة $1/T$ وعرضها T، أي:

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}.T^2$$

مثال 4-6: أوجد تحويل فوريه لإشارة الشارة $sgn(t)$.

الحل: سوف نعرف التابع $x_n(t)$ بالشكل التالي:

$$x_n(t)=\begin{cases}e^{-\frac{t}{n}} & t>0\\ -e^{\frac{t}{n}} & t<0\\ 0 & t=0\end{cases} \qquad (23\text{-}4)$$

حيث عندما ننهي $n\to\infty$ نحصل على التابع المطلوب $sgn(t)$

تحويل فوريه للإشارة $x_n(t)$ يكون من الشكل:

$$\mathcal{F}[x_n(t)]=X_n(f)=\int_{-\infty}^{0}\left(-e^{\frac{t}{n}}\right)e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t}{n}}e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{t(\frac{1}{n} - j2\pi f)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(\frac{1}{n} + j2\pi f)} dt$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{n} - j2\pi f} + \frac{1}{\frac{1}{n} + j2\pi f} = \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 f^2}$$

للحصول على $sgn(t)$ ننهي$n \to \infty$، أي:

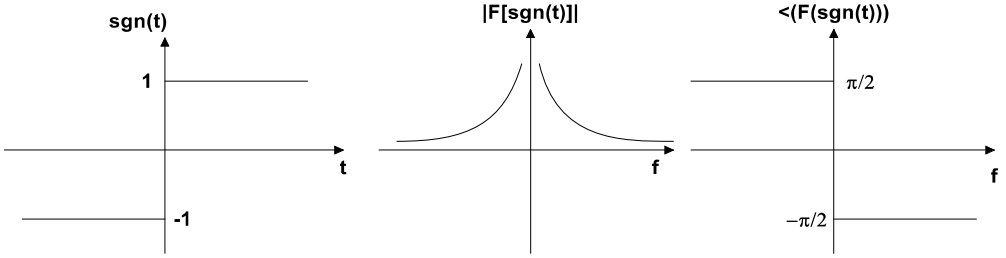
$$\mathcal{F}[sgn(t)] = \lim_{n\to\infty} X_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{j\pi f} \qquad (24\text{-}4)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$|\mathcal{F}[sgn(t)]| = \left|\frac{1}{\pi f}\right|, \quad \angle\mathcal{F}[sgn(t)] = \begin{cases} \pi/2 & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ -\pi/2 & f > 0 \end{cases} \qquad (25\text{-}4)$$

يوضح

الشكل 4-8 طيف إشارة $sgn(t)$.



الشكل 4-8 توضيح طيف إشارة $sgn(t)$.

2.4 تحويل فوريه للإشارات الحقيقية والزوجية والفردية:

يمكن أن يكتب تحويل فوريه بالشكل التالي:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

$$= X_c(f) - jX_s(f) \tag{26-4}$$

حيث:

$$X_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt$$
$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt \tag{27-4}$$

من العلاقة السابقة نوجد القيمة المطلقة $|X(f)|$ والطور $\theta(f) = \angle H(f)$، أي:

$$|X(f)| = \sqrt{|X_c(f)|^2 + |X_s(f)|^2}$$
$$\theta(f) = -arctan(X_s(f)/X_c(f)) \tag{28-4}$$

واضح أن $|X(f)|$ هو عبارة عن تابع زوجي و$\theta(f)$ عبارة عن تابع فردي. إذا كانت الإشارة $x(t)$ حقيقية فإن $X_c(f)$ هو تابع زوجي و$X_s(f)$ هو تابع فردي.

عموماً إذا كانت الإشارة $x(t)$ حقيقية فإن تحويل فورييه لها هو تابع هرميتي، أي $X(-f) = X^*(f$. وهذا يكافئ العلاقات التالية:

$$Re[X(-f)] = Re[X(f)]$$
$$Im[X(-f)] = -Im[X(f)]$$
$$|X(-f)| = |X(f)|$$
$$\angle X(-f) = -\angle X(f)$$

إذا كان التابع $x(t)$ تابع حقيقي وزوجي فإن التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

يساوي الصفر لأن القيمة المكاملة فردية كونها جداء تابع فردي مع تابع زوجي. وبطريقة مماثلة إذا كان التابع $x(t)$ حقيقي وفردي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt = 0$$

عموماً, في أثناء التحليل يُفضل استخدام الصيغة العقدية لتحويل فوريه وفي نهاية التحليل يُفضل استخدام الصيغة المثلثاتية.

3.4 الخواص الأساسية لتحويل فوريه

1.3.4 خاصية الخطية

عملية تحويل فوريه هي عبارة عن عملية خطية وهذا يعني أن تحويل فوريه للإشارة $ax_1(t) + bx_2(t)$ هو $aX_1(f) + bX_2(f)$ والبرهان واضح من خطية التكامل.

مثال 4-7: أوجد تحويل فوريه لإشارة الخطوة الواحدية $u_{-1}(t)$.

الحل: بالأخذ بالحسبان العلاقة (2-17) نجد أن:

$$u_{-1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

$$u_{-1}(t) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}sgn(t) \qquad (29\text{-}4)$$

وباستخدام الخاصية الخطية نحصل على:

$$\mathcal{F}[u_{-1}(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}sgn(t)\right]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \begin{cases} \frac{1}{2\pi f} e^{-j\frac{\pi}{2}} & ; f > 0 \\ \frac{1}{|2\pi f|} e^{+j\frac{\pi}{2}} & ; f < 0 \end{cases} \quad (30\text{-}4)$$

2.3.4 خاصية الازدواجية

تنص خاصية الازدواجية (أو التبادلية بين t و f) على ما يلي:

إذا كان $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ فإن: $x(f) = \mathcal{F}[X(-t)]$ وكذلك $x(-f) = \mathcal{F}[X(t)]$.

يمكن البرهان على هذه الخاصية بالطريقة التالية: نعلم أن تحويل فوريه المعاكس له الشكل التالي:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{j2\pi f t} df$$

بوضع $u = -f$ نحصل على:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(-u) e^{-j2\pi u t} du$$

وباستبدال t بـ f ($t = f$) يكون لدينا:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(-u) e^{-j2\pi u f} du$$

وأخيراً باستبدال u بـ t نحصل على

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(-t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(f) = \mathcal{F}[x(-t)] \quad (31\text{-}4)$$

وباستخدام نفس الطريقة نحصل على

$$x(-f) = \mathcal{F}[x(t)] \quad (32\text{-}4)$$

مثال 4-8: أوجد تحويل فوريه للإشارة $sinc(t)$.

الحل: من العلاقة (4-14) وبوضع $T = 1$ و$A = 1$ نجد:

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = sinc(f) = X(f)$$

وباستخدام العلاقة (4-32) نجد:

$$\Pi(-f) = \mathcal{F}[sinc(t)]$$

وبما أن التابع $\Pi(t)$ تابع زوجي فإن $\Pi(f) = \Pi(-f)$ ومنه:

$$\Pi(f) = \mathcal{F}[sinc(t)] \qquad (4\text{-}33)$$

قارن مع نتائج مثال 4-3.

مثال 4-9: أوجد تحويل فوريه للتابع $x(t) = 1/t$.

الحل: سوف نستخدم في الحل الخاصة التبديلية. نعلم من العلاقة (4-24) أن:

$$\mathcal{F}[sgn(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

وباستخدام العلاقة (4-32) يكون لدينا

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{j\pi t}\right] = sgn(-f) = -sgn(f)$$

وذلك لكون تابع $sgn(.)$ تابع فردي. والآن باستخدام الخاصية الخطية

$$\mathcal{F}[ax(t)] = aX(f)$$

نحصل على

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi sgn(f) \qquad (4\text{-}34)$$

3.3.4 خاصية الإزاحة الزمنية

تبين هذه الخاصية أن إزاحة التابع $x(t)$ بمقدار t_0 في المجال الزمني يؤدي إلى إزاحة بالطور بمقدار $-2\pi f t_0$ في المجال الترددي، وبكلمة أخرى:

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \mathcal{F}[x(t)]e^{-2J\pi f t_0}$$

نبرهن على هذه الخاصية بالشكل التالي: نوجد تحويل فوريه لـ $x(t-t_0)$:

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi f t}dt$$

بتغيير المتحولات بالشكل $u = t - t_0$ نحصل على

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f t_0}e^{-j2\pi f u}du$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f u}du$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}\mathcal{F}[x(t)] \qquad (35\text{-}4)$$

وهذا يعني أن إزاحة التابع بمقدار t_0 باتجاه زيادة t هذا يؤدي إلى ضرب التابع $X(f)$ بمقدار $e^{-j2\pi f t_0}$. وهذا يعني أن المطال لن يتغير بالإزاحة الزمنية ولكن الطور سوف يتغير بعامل خطي مقداره $-2\pi f t_0$.

مثال 4-10: أوجد تحويل فوريه للإشارة التالية:

$$y(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{غيرذلك} \end{cases}$$

الحل: بالعودة إلى

مثال **4-1** نعلم أن تحويل فوريه للإشارة

$$x(t) = \begin{cases} A & ;T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{غيرذلك} \end{cases}$$

هو $X(f) = ATsinc(fT)$. وبالأخذ بالحسبان خاصية الإزاحة الزمنية فإن تحويل فوريه لـ $y(t)$ يكون

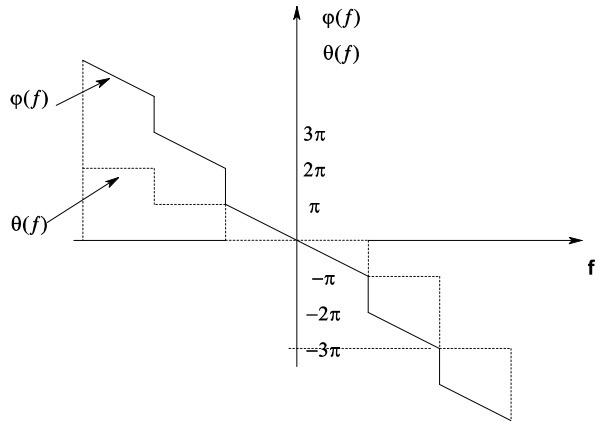
$$y(t) = x(t - \frac{T}{2})$$

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi fT/2}$$

$$Y(f) = ATsinc(fT)e^{-j2\pi fT/2} \qquad (36\text{-}4)$$

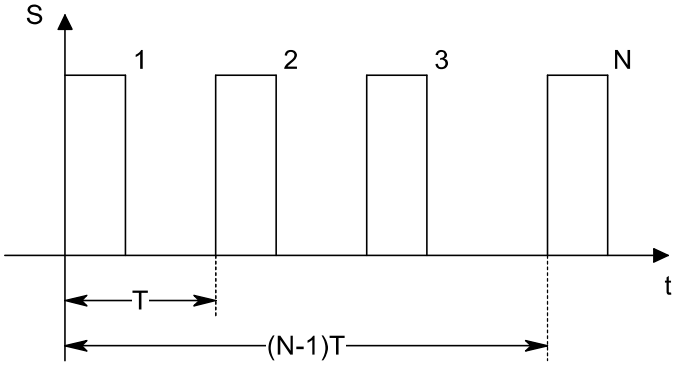
أي ليس ثمة تغيير في خواص المطال، أما الطور فيضاف الية الطور$-2\pi fT/2$. وبكلمة أخرى إذا كانت خواص الطور لـ $X(f)$ هي $\theta(f) = \angle X(f)$ فإن خواص الطور لـ $Y(f)$ هي:

$$\varphi(f) = \theta(f) - 2\pi f\, T/2 \qquad (37\text{-}4)$$



الشكل 4-9 طور كل من الإشارتين $x(f)$ و $y(f)$.

مثال 4-11: أوجد تحويل فوريه لقطار من النبضات المبين في الشكل 4-10 بفرض طيف النبضة الأولى هو $X(f)$.



الشكل 4-10 قطار من النبضات الدورية.

الحل: طيف النبضة الأولى هو $X(f)$ وطيف النبضة الثانية هو $X(f)e^{-j2\pi fT}$ وطيف النبضة الثالثة هو $X(f)e^{-j2\pi f(2T)}$ وبالأخذ بالحسبان الخاصية الخطية فإن طيف قطار النبضات يكون:

$$X(f)[1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT} + \cdots + e^{-j(N-1)2\pi fT}]$$

مثال 4-12: أوجد تحويل فوريه لقطار النبضات التالي (مشط ديراك)

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

الحل: باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta(t - nT_0)] &= e^{-j2\pi fnT_0}\,\mathcal{F}[\delta(t)] \\ &= e^{-j2\pi fnT_0}\end{aligned}$$

وبذلك يكون لدينا:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fnT_0} \qquad (38\text{-}4)$$

وباستخدام العلاقة (22-4):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi fnT_0}$$

وباستبدال f بـ t و $1/T_0$ بـ T_0 نحصل على

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi f n T_0} = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T_0}$$

ومنه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

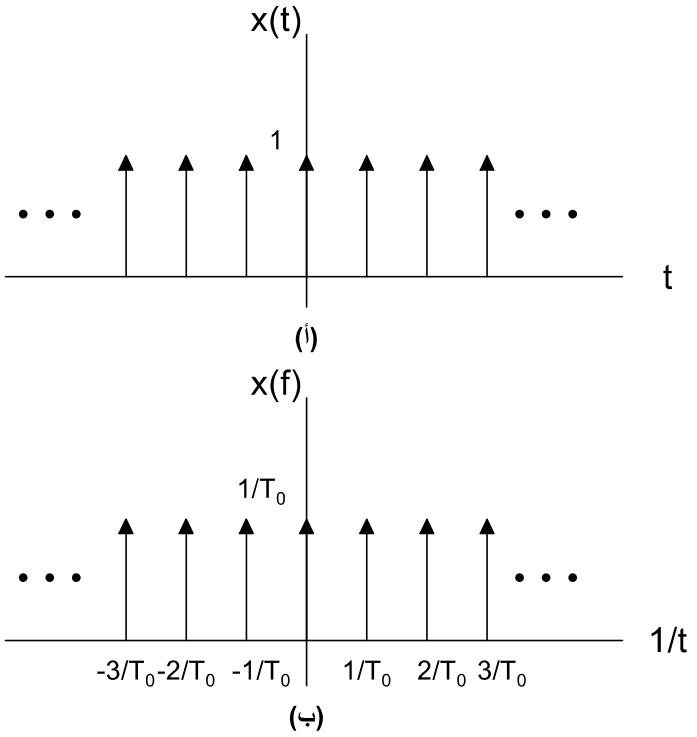
وباستخدام العلاقة (4-38) يكون لدينا:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0)\right] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \qquad (4\text{-}39)$$

وهكذا نلاحظ أن تحويل فوريه لـ $x_T(t)$ (قطار من نبضات ديراك) هو أيضاً قطار من نبضات ديراك. وإذا كانت المسافة بين النبضات في المجال الزمني هي T_0 فإن المسافة بين النبضات في المجال الترددي هي $1/T_0$. بالإضافة أن النبضات في المجال الترددي موزنة بالعامل $1/T_0$ $(f_0 = 1/T_0)$.

4.3.4 خاصية التقييس

لنفرض لدينا الإشارة $x(t)$ الموضحة بالشكل (2–3) – الفصل الثاني (سلاسل فوريه).



الشكل 4-11 (أ) قطار نبضات (ب) تحويل فورييه لقطار النبضات.

تتعرض الإشارة السابقة لتغيير التقييس في أثناء إرسالها، أي لدينا متحول مستقل at (حيث a عدد حقيقي). إذا كانت $a > 1$ فإن الإشارة الأصلية ستنضغط بالنسبة للزمن وإذا كانت $0 < a < 1$ فإن الإشارة الأصلية سوف تتمدد. سوف نبرهن أن تحويل فورييه لـ $x(at)$ هو :

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a}) \qquad (40\text{-}4)$$

باستخدام تحويل فورييه يكون لدينا:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

وبتغيير المتحول $u = at$ يكون لدينا:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f\frac{u}{a}}\, du = \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

واضح من العلاقة السابقة عند ضغط الإشارة في المجال الزمني فإن طيفها يتوسع في المجال الترددي والعكس صحيح مع الأخذ بالحسبان ربح المطال في المجال الترددي. عندما اختيار $a = -1$ فإن العلاقة (40-4) تأخذ الشكل التالي:

$$\mathcal{F}[x(-1t)] = -X(-f) \qquad (41\text{-}4)$$

واضح هنا أن المطال لم يتغير ولكن تم التبادل بين منطقة التردد الموجب ومنطقة التردد السالب وأن الطور الأولي لكل التوافقيات أُزيح بمقدار π.

مثال 4-13: أوجد تحويل فوريه للإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} 5 & 0 \le t \le 6 \\ 0 & else \end{cases}$$

الحل: لاحظ أن الإشارة $x(t)$ عبارة عن إشارة مستطيلة مطالها مضروب بالعامل 5 وعرضها مضروب بالعامل 6 وبعد ذلك تم إزاحتها بمقدار 3، أي لدينا الإشارة التالية:

$$x(t) = 5 \sqcap (\frac{t-3}{6})$$

باستخدام الخاصية الخطية يكون لدينا:

$$X(f) = \mathcal{F}\left[5 \sqcap \left(\frac{t-3}{6}\right)\right] = 5\,\mathcal{F}\left[\sqcap \left(\frac{t-3}{6}\right)\right]$$

وباستخدام خاصية الإزاحة الزمنية يكون لدينا:

$$X(f) = 5\, e^{-j2\pi f 3}\ \mathcal{F}\left[\sqcap \left(\frac{t}{6}\right)\right]$$

$$= 5\, e^{-j6\pi f}\ \mathcal{F}\left[\sqcap \left(\frac{t}{6}\right)\right]$$

وبالأخذ بالحسبان خاصية التقييس نحصل على:

$$X(f) = 30e^{-j6\pi f} sinc(6f)$$

5.3.4 خاصية التلفيف (الطي)

درسنا في الفقرة (2-5) استجابة النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن للإشارات الدورية. والآن سوف نوسع تلك الدراسة لتشمل الإشارات غير الدورية. سوف نعتمد بشكل أساسي هنا على خاصية التلفيف في المجال الزمني.

تُبين خاصية التلفيف أنه إذا كان $z(t)$ عبارة عن تلفيف $x(t)$ بـ $y(t)$ فإن تحويل فورييه لـ $z(t)$ هو جداء $X(f)$ بـ $Y(f)$ أي:

$$Z(f) = \mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \mathcal{F}[x(t)].\mathcal{F}[y(t)] = X(f).Y(f) \qquad (42\text{-}4)$$

يمكن البرهان على العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}dt\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

والآن بتغير المتحول حسب $u = t - \tau$ نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-j2\pi fu}du$$

$$= \mathcal{F}[y(t)]$$

$$= Y(f)$$

هكذا يكون لدينا:

$$Z(f) = \mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(f)\,e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= X(f).Y(f)$$

تعدّ هذه الخاصة من الخواص الهامة في تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن LTI. حيث تحويل فورييه لتلفيف إشارتين $x(t) * y(t)$ يساوي جداء طيفي الإشارتين $X(f).Y(f)$.

مثال 4-14: لدينا نظام LTI استجابته النبضية $h(t)$ وإشارة دخله $x(t)$ حيث:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi t)\,;\;\; x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t)$$

المطلوب إيجاد إشارة الخرج $y(t)$.

الحل: حسب خاصية التلفيف نعلم أن:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

نلاحظ وجود ثلاثة أزمنة في العلاقة السابقة: زمن تأثير الإشارة على النظام τ (لحظة تطبيق الإشارة) وزمن استجابة النظام t وزمن (فترة) ذاكرة النظام $t-\tau$، أي الزمن الذي استغرقه النظام حتى الاستجابة من لحظة تطبيق إشارة الدخل. حل هذه المسألة في المجال الزمني على درجة عالية من التعقيد. بينما حلها في المجال الترددي بسيط باستخدام خاصية التلفيف. نعلم من أمثلة سابقة أن:

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1/2 \\ 0 & |f| > 1/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1 \\ 0 & |f| > 1 \end{cases}$$

ومنه

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1/2 \\ 0 & |f| > 1/2 \end{cases}$$

ومنه فإن

$$y(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t)$$

من أهم خواص التلفيف، بسبب صفة التراكمية للنظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن هي عملية (قاعدة) التبديل:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \qquad (43\text{-}4)$$

وكذلك عملية التجميع:

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \qquad (44\text{-}4)$$

وعملية التوزيع:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (45\text{-}4)$$

عادة، في عملية التجميع تزال الأقواس المربعة، وتعطى العملية بالعلاقة التالية:

$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)h_1(\tau_1-\tau_2)\,h_2(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (46\text{-}4)$$

مثال 4-15: أوجد تحويل فورييه للعلاقة التالية:

$$[\delta(t-T_0) + \delta(t+T_0)] * x(t)$$

الحل: حسب خاصة التوزيع في العلاقة (45-4) يكون لدينا:

$$\delta(t-T_0) * x(t) + \delta(t+T_0) * x(t)$$

نعلم أن تحويل فورييه لـ $\delta(t-T_0)$ هو

$$\mathcal{F}[\delta(t-T_0)] = e^{-j2\pi fT_0}$$

وتحويل فورييه لـ $\delta(t+T_0)$ هو

$$\mathcal{F}[\delta(t+T_0)] = e^{+j2\pi fT_0}$$

وتحويل فورييه لـ $x(t)$ هو $X(f)$ ومنه:

$$\mathcal{F}[\delta(t-T_0) * x(t)] = e^{-j2\pi fT_0}.X(f)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t+T_0) * x(t)] = e^{j2\pi fT_0}.X(f)$$

وبجمع العلاقتين السابقتين يكون لدينا:

$$\mathcal{F}[\delta(t-T_0) + \delta(t+T_0)] * x(t) = X(f)\left(e^{-j2\pi fT_0} + e^{+j2\pi fT_0}\right) = 2X(f)\cos(2\pi fT_0) \quad (47\text{-}4)$$

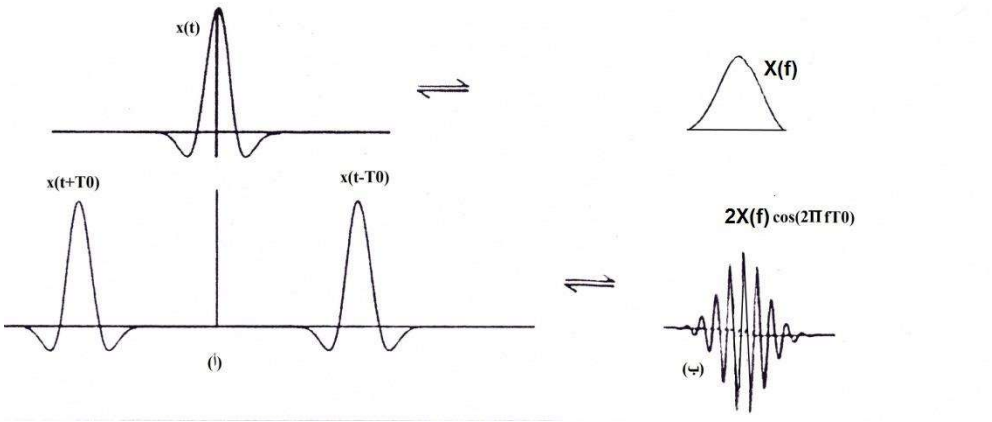
تجدر الملاحظة أن:

$$\mathcal{F}[x(t-T_0)] = X(f)e^{-j2\pi fT_0}$$

$$\mathcal{F}[x(t+T_0)] = X(f)e^{+j2\pi fT_0}$$

يبين

الشكل 4-12 تمثيل العلاقات السابقة:



الشكل 4-12 (أ) توضيح الإشارة في المجال الزمني (ب) في المجال الترددي.

مثال 4-16: أوجد تحويل فوريه للإشارة $A \wedge \left(\frac{t}{T}\right)$.

الحل: بما أن الإشارة المثلثية هي عبارة عن تلفيف إشارتين مستطيلتين

$$A \wedge \left(\frac{t}{T}\right) = A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right) * A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)$$

من تمرين سابق العلاقة (4-14) نعلم أن:

$$\mathcal{F}\left[A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)\right] = ATsinc(\pi fT)$$

فإن

$$\mathcal{F}\left[A \wedge \left(\frac{t}{T}\right)\right] = \mathcal{F}\left[A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)\right]\mathcal{F}\left[A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)\right] = \mathrm{A^2T^2sinc^2(\pi fT)} \qquad (48\text{-}4)$$

6.3.4 خاصية التعديل أو انزياح التردد

تحويل فوريه لإشارة $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ هو $X(f-f_0)$، أي

$$\mathcal{F}\left[x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = X(f-f_0) \qquad (49\text{-}4)$$

يمكن ببساطة البرهان على العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}\left[x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f_0 t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi(f-f_0)t}\,dt$$

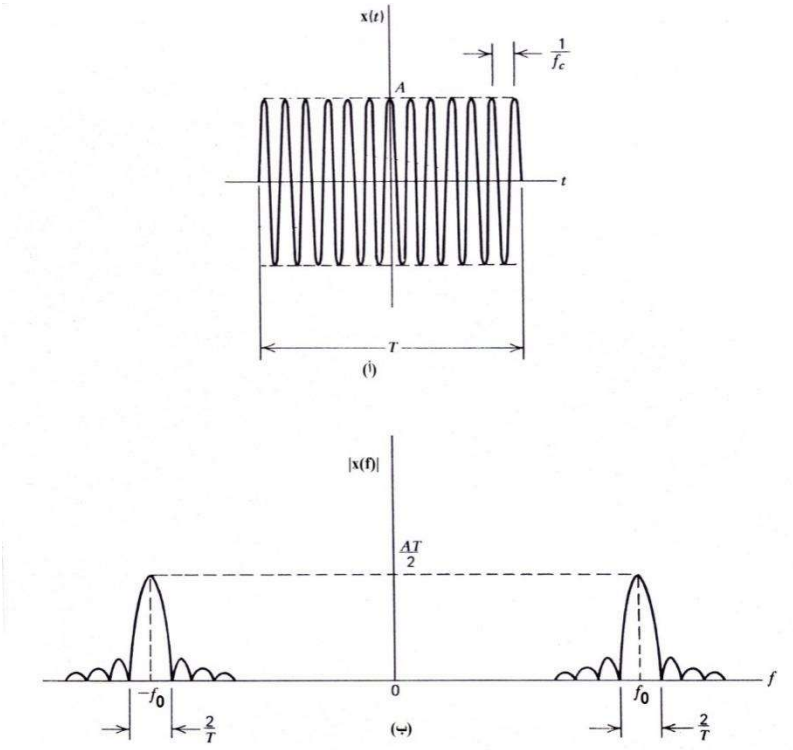
$$= X(f-f_0)$$

وهذا يعني أن تحويل فوريه لجداء الإشارة $x(t)$ بالعامل (الشعاع) $e^{j2\pi f_0 t}$ يكافئ (يساوي) إزاحة تحويل فوريه $X(f)$ في المجال الترددي بالمقدار f_0 في الاتجاه الموجب.

تسمى الخاصية بخاصية التعديل لأنه في عملية التعديل يتم أيضاً إزاحة الطيف. وبكلمة أخرى جداء $x(t)$ بالأس العقدي يؤدي إلى إزاحة $X(f)$ في المجال الترددي. هذه الخاصية مشابهة للإزاحة في المجال الزمني. التي تبين أن الإزاحة في المجال الزمني للإشارة $x(t)$ مكافئة لجداء $X(f)$ بالأس العقدي في المجال الترددي.

مثال 4-17: أوجد تحويل فوريه للإشارة المبينة الشكل 4-13، أ والمعبر عنها تحليلياً كما يلي:

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)cos(2\pi f_0 t)$$



الشكل 4-13 (أ) الإشارة في المجال الزمني (ب) في المجال الترددي.

الحل: نعلم أن:

$$co\,s(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

أي

$$x(t) = A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)\left[\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2}A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}A \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f_0 t}$$

باستخدام خاصية الإزاحة الترددية (خاصية التعديل) نحصل على:

$$X(f) = \frac{AT}{2}\{sinc[T(f - f_0)] + sinc[T(f + f_0)]\} \qquad (50\text{-}4)$$

وفي حالة خاصة عندما يكون $f_0 \gg 1/T$ فإنه يمكن أن يكتب العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{AT}{2} sinc[T(f - f_0)] & ; f > 0 \\ 0 & ; f = 0 \\ \frac{AT}{2} sinc[T(f + f_0)] & ; f < 0 \end{cases} \quad (51\text{-}4)$$

توضح العلاقة السابقة الطيف المطالي المبينة بالشكل 4-13(ب).

مثال 4-18: أوجد تحويل فورييه للإشارة التالية:

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

الحل: الإشارة السابقة هي إشارة تعديل مطالي بحذف الحامل. للحل سوف نضع الإشارة بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}\left[x(t)cos(2\pi f_0 t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right] \quad (52\text{-}4)$$
$$= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$

وذلك باستخدام الإزاحة الترددية.

7.3.4 خاصية الترابط الذاتي

يُعرف تابع الترابط الذاتي للتابع $x(t)$ بالشكل التالي:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t + \tau)dt \quad (53\text{-}4)$$

سوف نبرهن الآن أن تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي يساوي مربع القيمة المطلقة للطيف، أي:

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2 \quad (54\text{-}4)$$

برهان هذه العلاقة يتم بالطريقة التالية: العلاقة (53-4) يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

وعلاقة التلفيف يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

ومنه ببساطة نجد أن:

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

وبأخذ تحويل فورييه للطرفين

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = \mathcal{F}[x(\tau) * x^*(-\tau)]$$
$$= \mathcal{F}[x(\tau)].\mathcal{F}[x^*(-\tau)]$$
$$= X(f).X^*(f) = |X(f)|^2$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي للإشارة هو عبارة عن تابع موجب ذو قيم حقيقية. تجدر الملاحظة هنا إذا وجدت إشارة ذات تابع ترابط ذاتي بشكل إشارة مستطيلة فإنه عند ذلك تحويل فورييه لتلك الإشارة ستكون إشارة $sinc$ وهذا يعني أن العلاقة السابقة غير محققة. مثال على ما سبق ليكن لدينا تابع الترابط الذاتي التالي:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < T_0 \\ A & -T_0 < \tau < T_0 \\ 0 & \tau > T_0 \end{cases}$$

بأخذ تحويل فورييه للعلاقة السابقة نجد

$$|X(f)|^2 = 2A \int_0^{T_0} \cos(2\pi f\tau)\, d\tau$$
$$= \frac{2A}{2\pi f} \sin(2\pi f T_0)$$

وهذا التابع متناوب لا يمكن أن يمثل مربع طيف الإشارة!.

مثال 4-19: لدينا الإشارة التالية

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد الترابط الذاتي $R_x(\tau)$ للإشارة السابقة ومن ثم أوجد تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي $R_x(\tau)$.

الحل: تابع الترابط الذاتي للإشارة $x(t)$ هو

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

$$= \begin{cases} A^2T\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) ; & |\tau| < T \\ 0 ; & |\tau| > T \end{cases}$$

وباستخدام العلاقة (4-54) والعلاقة (4-48) نحصل على:

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = A^2T^2 sinc^2(\pi fT) \quad (55\text{-}4)$$

8.3.4 الخاصية التفاضلية في المجال الزمني

تحويل فورييه لمشتق إشارة يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية:

$$\mathcal{F}[(d/dt)\ x(t)] = j2\pi fX(f) \quad (56\text{-}4)$$

هذا يعني أن تحويل فورييه لمشتق التابع $x(t)$ بالنسبة للزمن يكافئ (يساوي) جداء تحويل فورييه لـ $x(t)$ مضروباً بمعامل تخيلي مقداره $j2\pi f$. سوف نبرهن على العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi fX(f)e^{j2\pi ft}df \quad (57\text{-}4)$$

هذا يعني أن فورييه المعاكس

$$\mathcal{F}^{-1}[j2\pi fX(f)] = \frac{dx(t)}{dt}$$

أو

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi fX(f) \quad (58\text{-}4)$$

يمكن تعميم العلاقة السابقة من أجل درجات اشتقاق أعلى، أي:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = (j2\pi f)^n X(f) \quad (59\text{-}4)$$

بفرض وجود تحويل فوريه للمشتقات $x(t)$ ذات الدرجات العالية.

مثال 4-20: أوجد تحويل فوريه لتفاضل الإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} t & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

الحل:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sqcap\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \frac{2sin2\pi f}{2\pi f} - e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}$$

9.3.4 خاصية التفاضل في المجال الترددي

تحويل فوريه للتابع $x(t)$ موزناً بـ t. يكافئ تفاضل $X(f)$ وبالنسبة لـ f موزناً بالعامل $j/2\pi$ أي:

$$\mathcal{F}[tx(t)] = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) \qquad (60\text{-}4)$$

يمكن برهان هذه الخاصية بنفس الطريقة التي برهن فيها على خاصية التفاضل في المجال الزمني. وتعمم العلاقة بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}[t^n x(t)] = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n}X(f) \qquad (61\text{-}4)$$

مثال 4-21: أوجد تحويل فوريه للإشارة $x(t) = t$.

الحل: باستخدام الخاصية السابقة يكون لدينا

$$\mathcal{F}[t] = \mathcal{F}[t \times 1]$$

$$= \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\mathcal{F}[1]$$

$$= \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\delta(f)$$

10.3.4 خاصية التكامل

تحويل فورييه لتكامل إشارة يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) \qquad (62\text{-}4)$$

أي إن تحويل فورييه لتكامل الإشارة $x(t)$ في المجال الزمني يساوي تقسيم $X(f)$ على $jw = j2\pi f$ أما الحدَ الثاني في الطرف الأيمن فيمثل المركبة المستمرة DC أو القيمة الوسطى الناتجة من التكامل.

يمكن برهان العلاقة السابقة بالشكل التالي:

بالأخذ بالحسبان أن $x(t) * \delta(t) = \mathrm{x(t)}$ وأن $\delta(t) = \frac{d}{dt}u_{-1}(t)$ فإن

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u_{-1}(t)$$

وباستخدام خاصية التلفيف والعلاقة (30-4) نحصل على

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = X(f)\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right]$$

$$= \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

مثال 4-22: أوجد تحويل فورييه لإشارة الخطوة $u_{-1}(t)$ باستخدام العلاقة (62-4).

الحل: بوضع $x(t) = \delta(t)$ ونعلم أن $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ هذا يعني أن $X(f) = 1$ وباستخدام العلاقة (62-4)

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

يكون لدينا

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\right]=\mathcal{F}[\mathrm{u}_{-1}(\mathrm{t})]$$

$$=\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$$

وهذه النتيجة مطابقة لنتيجة سابقة نجدها في العلاقة (4-30).

11.3.4 خاصية العزوم

العزم النوني n للإشارة $x(t)$ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{n}x(t)dt=\left(\frac{j}{2\pi}\right)^{n}\frac{d^{n}}{df^{n}}X(f)|_{f=0} \qquad (63\text{-}4)$$

حيث $X(f)=\mathcal{F}[x(t)]$. للبرهان على العلاقة السابقة سوف نعتمد على العلاقة العامة (4-61) لخاصية التفاضل التالية:

$$\mathcal{F}[t^{n}x(t)]=\left(\frac{j}{2\pi}\right)^{n}\frac{d^{n}}{df^{n}}X(f)$$

أو

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{n}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\left(\frac{j}{2\pi}\right)^{n}\frac{d^{n}}{df^{n}}X(f)$$

بوضع $f=0$ في كلا طرفي العلاقة السابقة نحصل على المطلوب، أي العلاقة (4-63).

بوضع $n=0$ في العلاقة (4-63) نحصل على العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=X(0) \qquad (64\text{-}4)$$

أي أن المساحة أسفل التابع $x(t)$ تساوي قيمة تحويل فورييه $X(f)$ عند $f=0$. يمكن الحصول على العلاقة السابقة أيضاً بوضع $f=0$ في تحويل فورييه وبشكل مشابه يمكن الحصول على العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(f)df=x(0) \qquad (65\text{-}4)$$

بوضع $t=0$ في تحويل فورييه المعاكس. العلاقة السابقة تبين أن قيمة التابع $x(t)$ عند $t=0$ تساوي كل المساحة أسفل منحني تحويل فورييه للإشارة (التابع) $x(t)$.

مثال 4-23: أوجد العزم النوني للتابع $x(t) = e^{-\alpha t}\mathrm{u}_{-1}(t)$ حيث$\alpha > 0$.

الحل: العزم النوني للتابع $x(t)$ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-\alpha t} u_{-1}(t) dt$$

حساب التابع السابق على درجة من التعقيد لذلك سوف نستخدم خاصة العزوم، أي العلاقة (4-63) ولذلك سوف نوجد $X(f)$ ومن ثم نشتقه n مرة، أي

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u_{-1}(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha + j2\pi f)} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + j2\pi f}[0 - 1] \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \end{aligned} \tag{66-4}$$

بالاشتقاق n مرة نحصل على:

$$\frac{d^n}{df^n} X(f) = \frac{(-j2\pi)^n . n!}{(\alpha + j2\pi f)^{n+1}}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-\alpha t} u_{-1}(t) dt &= \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n (-j2\pi)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \end{aligned} \tag{67-4}$$

بفرض $x(t)$ الكثافة الاحتمالية، فإن التوقع الرياضي يكون $\frac{1}{\alpha^2}$.

4.4 علاقتي بارسفال ورايلي

سوف نبدأ بعلاقة بارسفال والتي هي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \qquad (68\text{-}4)$$

حيث $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, $Y(f) = \mathcal{F}[y(t)]$. يمكن ببساطةبرهان هذه العلاقة بالشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(v)e^{j2\pi vt}dv\right]^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(v)e^{-j2\pi vt}dv\right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(f-v)}dt\right]dv\right]df$$

نعلم أن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(f-v)}dt = \delta(f-v)$ وذلك لكون تحويل فوريه لتابع ديراك يساوي الواحد، وبالتعويض نجد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(v)\delta(f-v)dv\right]df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df$$

حيث تم استخدام خاصة الترشيح في الخطوة الأخيرة. العلاقة السابقة تسمى علاقة بارسفال. بوضع $x(t) = y(t)$ في العلاقة (68-4)نحصل على علاقة رايلي، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \qquad (69\text{-}4)$$

للمقارنة سنورد علاقة بارسفال بالنسبة للإشارة الدورية (انظر الفقرة (3-5)) والتي هي:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

تبين العلاقة (69-4) أن القدرة الكلية للإشارة $x(t)$ والقابلة لتحويل فوريه تساوي كل المساحة أسفل المنحي $|X(f)|^2$. أما في العلاقة السابقة فإن x_n هي مطال التوافقيات و T_0 دور الإشارة.

الطرف الأيمن من العلاقة (4-69) مفيد في حساب القدرة ولكن الطرف الأيسر عموماً أسهل في حساب القدرة. الطرف الأيمن يبين توزع القدرة في المجال الترددي (الطيفي) وعادة تسمى $|X(f)|^2$ بالكثافة الطيفية للقدرة *Energy Spectral Density* ويرمز لها *ESD*. ولكون $|X(f)|^2$ مستقلة عن الطور فلا يمكن الحصول على معلومات عن الطور من العلاقة (4-69).

مثال 4-24: أوجد القدرة الموجودة في المجال الترددي من $-f_1$ وحتى f_1 بالنسبة لنبضة مستطيلة وذات تحويل فورييه التالي:

$$X(f) = ATsinc(\pi fT)$$

الحل: للتبسيط سوف نفرض $2\pi f = w$ وبالتالي العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$X(w) = ATsinc\left(\frac{wT}{2}\right)$$

وباستخدام العلاقة (4-69) نجد أن قدرة الإشارة تساوي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(w)|^2 dw = E$$

حيث

$$|X(w)|^2 = A^2T^2\left[sinc\left(\frac{wT}{2}\right)\right]^2$$

فإن القدرة الموجودة ضمن المجال من $-w_1$ إلى $+w_1$ هي

$$E_\Delta = \frac{1}{\pi}\int_0^{w_1} X^2(w)dw$$

$$= \frac{A^2T^2}{\pi}\int_0^{w_1}\frac{sin^2\left(\frac{wT}{2}\right)}{\left(\frac{wT}{2}\right)^2}dw$$

$$= A^2T^2\frac{1}{\pi}\frac{2}{T}\int_0^{w_1T/2}\frac{sin^2(x)}{x^2}dx$$

وباستخدام تكامل التجزئة نحصل على:

$$\int_0^{w_1 T/2} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = si(w_1 T) - \frac{2sin^2(w_1 T/2)}{w_1 T}$$

حيث $si(y) = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx$ وبالتعويض في علاقة حساب القدرة نجد

$$E_\Delta = \frac{2A^2 T}{\pi}\left[si(w_1 T) - \frac{2sin^2(w_1 T/2)}{w_1 T}\right]$$

وبتعويض $w_1 = 2\pi f_1$ يكون لدينا

$$E_\Delta = \frac{2A^2 T}{\pi}\left[si(2\pi f_1 T) - \frac{2sin^2(\pi f_1 T)}{2\pi f_1 T}\right] \qquad (70\text{-}4)$$

من العلاقة السابقة وباستخدام جداول تكامل السينك $si(\cdot)$ سوف نجد أن الفص الأول من $|X(f)|^2$ يحوي 90.2% من القدرة الكلية (A^2T^2) والفص الأول والثاني يحويان 95% والفص الأول والثاني والثالث تحوي 96.7% من القدرة الكلية للنبضة المستطيلة ذات المطال A والعرض T. تجدر الملاحظة عند زيادة عرض المجال الترددي (أكبر من الفص الأول) يجب الأخذ بالحسبان الكثافة الطيفية للضجيج ونسبة الإشارة للضجيج.

مثال 4-25: أوجد قدرة الإشارة التالية:

$$x(t) = A.sinc(2Wt)$$

حيث W عرض المجال الترددي للإشارة.

الحل: باستخدام نظرية رايلي، نجد أن:

$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(2Wt)dt$$

نلاحظ أن التكامل السابق على درجة من التعقيد، لذلك يمكن استخدام نظرية رايلي أي:

$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(2Wt)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

وجدنا حسب أمثلة سابقة أن:

$$X(f) = \frac{A}{2W} \sqcap \left(\frac{f}{2W}\right)$$

وبالتعويض يكون لدينا:

$$E = \left(\frac{A}{2W}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap^2 \left(\frac{f}{2W}\right) df$$

$$= \left(\frac{A}{2W}\right)^2 \int_{-W}^{+W} df$$

$$= \frac{A^2}{2W} \qquad (71\text{-}4)$$

تجدر الملاحظة هنا عندما يكون $W = 1/2$ و $A = 1$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(t)dt = 1 \qquad (72\text{-}4)$$

5.4 المجال الترددي والعلاقة بين الزمن والتردد

نستخلص من دراسة الفقرة السابقة (خواص تحويل فوريه) نقطتين أساسيتين:

النقطة الأولى: التغير في المواصفات الزمنية للإشارة يرافقه تغير معاكس في المواصفات الترددية والعكس صحيح. وهذا يعني يجب توصيف التابع (الإشارة) إما في المجال الزمني أو في المجال الترددي ولا يمكن أن نوصف التابع بشكل اختياري (كما نشاء) في كل من المجال الزمني والمجال الترددي.

النقطة الثانية: إذا كانت الإشارة محددة بالمطلق في المجال الترددي، أي:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = 0\,; \quad |f| \geq W \qquad (73\text{-}4)$$

فإنها في المجال الزمني تكون ذات ذيول ممتدة حتى اللانهاية، مثال على ذلك نبضة $sinc(.)$ في الشكل 2-13.

وبشكل معاكس إذا كانت الإشارة محددة بالمطلق في المجال الزمني، أي:

$$x(t) = 0 \;\; ; \;\; |t| > T \qquad (74\text{-}4)$$

فإن مجالها الترددي يمتد حتى اللانهاية، مثال على ذلك طيف النبضة المستطيلة في الشكل 4-2. وهكذا نستنتج أنه لا يمكن للإشارة أن تكون محددة بالمطلق في المجال الترددي وكذلك محددة بالمطلق في المجال الزمني بنفس الوقت.

1.5.4 المجال الترددي

نعرف المجال الترددي للإشارة بأنه المجال المستمر الذي تكون فيه مركبات ترددية معتبرة للإشارة وذلك بالنسبة للترددات الموجبة. يمكن أن نعرف المجال الترددي للإشارة $x(t)$ بشكل دقيق إذا كانت تحقق العلاقة (4-73). وإن تعذر ذلك فهناك صعوبة في تحديد عرض المجال الترددي، وهذه حالة عامة. وسبب الصعوبة هي: ماذا تعني المركبات الترددية المعتبرة؟ ولهذا السبب هناك عدد من التعاريف المختلفة لعرض المجال الترددي سنورد أهمها، والتي هي:

- **المجال الترددي المطلق**: هو المجال الترددي المستمر بعرض $f_2 - f_1$ وكافة مركبات الترددات خارج ذلك المجال تساوي الصفر وذلك على طول محور الترددات الموجبة.
- **المجال الترددي عند $-3dB$ (المجال الترددي عند منتصف الاستطاعة العظمى):** هو $f_2 - f_1$ حيث كافة المركبات الترددية تحقق العلاقة

$$\frac{|H(f)|^2}{peak\ value\ |H(f)|^2} = \frac{1}{2}$$

أو

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} Peak\ value |H(f)| \qquad (75\text{-}4)$$

- **المجال الترددي حتى الصفر الأول**: عندما يكون طيف الإشارة متناظر والفص الأساسي مُحدد الصفرين (تقاطع $H(X)$ مع محور التردد) فإن المجال الترددي يمتد من $f = 0$ وحتى الصفرالأول باتجاه محور الترددات الموجبة.
- **المجال الترددي للجذر المتوسط التربيعي rms (القيمة الفعالة)**: لنفرض لدينا الإشارة $x(t)$ ذات تحويل فوريه $X(f)$ فإن المجال الترددي للجذر المتوسط التربيعي يُعرف بالشكل التالي:

$$W_{rms} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} \right)^{1/2} \qquad (76\text{-}4)$$

2.5.4 جداء عرض النبضة بمجالها الترددي

أوضحنا سابقاً وجود تناسب عكسي بين عرض النبضة ومجالها الترددي (انظر خاصية التقييس في العلاقة (40-4)). لأي عائلة من الإشارات التي تختلف بعامل التقييس الزمني فإن جداء عرض الإشارة بمجالها الترددي دوماً ثابت، أي:

(عرض النبضة) × (المجال الترددي) = ثابت (77-4)

وبما أنه ليس هناك تعريف وحيد لعرض المجال، لذلك سوف نورد بعض الحالات.

ليكن لدينا إشارة نبضة عرضها T والمجال الترددي المأخوذ حتى الصفر الأول، أي $W = 1/T$ عند ذلك يكون لدينا:

$$T.W = 1 \tag{78-4}$$

وعند أخذ المجال الترددي الفعال W_{rms} (العلاقة (76-4)) فإننا بحاجة لتعريف عرض النبضة الفعّال T_{rms} (الجذر المتوسط التربيعي) بالشكل التالي:

$$T_{rms} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right)^{1/2} \tag{79-4}$$

يفترض هنا أن تكون الإشارة $x(t)$ متناظرة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات . باستخدام (76-4) و(79-4) نجد أن:

$$T_{rms} W_{rms} \geq 1/4\pi \tag{80-4}$$

والمساواة تتحقق عند استخدام إشارة غاوسية، أي $x(t) = e^{-\pi t^2}$.

6.4 تحويل فوريه للإشارات الدورية

في الأمثلة السابقة وبشكل خاص بالفقرة (4–1) تم إيجاد تحويل فوريه لعدد من الإشارات الدورية مثل $e^{j2\pi f_0 t}$ و $cos(2\pi f_0 t)$ و $sin(2\pi f_0 t)$ و $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$. وكانت السمة المشتركة لكل تحويلات فوريه للإشارات السابقة هي وجود توابع نبضية في المجال الترددي. سوف نقدم في هذه الفقرة تحويل فوريه للإشارات

النبضية بشكل عام وسوف نبين وجود نفس السمة السابقة بالإضافة إلى وجود علاقة وطيدة بين تحويل فورييه للإشارة الدورية وسلاسل فورييه الممثلة للإشارة.

لتكن لدينا الإشارة الدورية ذات الدور T_0 والتي تُحقق شروط ديريخلي. وليكن $\{x_n\}$ معاملات سلسلة فورييه الموافقة للإشارة، أي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi f_0 nt}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

حيث:

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}$$

بأخذ تحويل فورييه لطرفي العلاقة ومع الأخذ بالحسبان أن:

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}\right] = \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

نحصل على:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \qquad (81\text{-}4)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن تحويل فورييه للإشارة الدورية هو عبارة عن سلسلة من النبضات في المجال الترددي متباعدة بمقدار التردد الأساسي $f_0 = 1/T_0$ للإشارة الدورية وموزنة بعوامل سلسلة فورييه العقدية. هذه العلاقة تعطي طريقة مختصرة لحساب عوامل فورييه كما سوف نرى لاحقاً.

سوف نعرف التابع المبتور Truncated التالي:

$$x_{T0}(t) = \begin{cases} x(t); & -\frac{T_0}{2} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases} \qquad (82\text{-}4)$$

وهكذا يكون لدينا:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0) \tag{83-4}$$

والأخذ بالحسبان أن:

$$x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0) \tag{84-4}$$

نحصل على:

$$x(t) = x_{T_0}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{85-4}$$

وباستخدام خاصية التلفيف والعلاقة (39-4) نحصل على العلاقة التالية:

$$X(f) = X_{T_0}(f)\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)\right] \tag{86-4}$$

أو

$$X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{87-4}$$

بأخذ تحويل فورييه للعلاقة (83-4) نجد:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)\right] = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}(nf_0)\delta(f - nf_0)$$

توضح العلاقة السابقة أن تحويل فورييه لإشارة دورية يتألف من سلسلة من توابع دلتا (ديراك)، حيث يفصل التردد f_0 بين تابع وأخر مجاور، موزنة بالعامل $X_{T_0}(nf_0)$. تجدر الملاحظة هنا أن التابع $x_{T_0}(t)$ (دور واحد من $x(t)$) له طيف مستمر $X_{T_0}(f)$ بينما التابع الدوري $x(t)$ له طيف متقطع.

والآن سوف نوجد عوامل سلسلة فورييه العقدية. بمقارنة العلاقة (81-4) مع العلاقة (82-4) نجد أن:

$$x_n = \frac{1}{T_0}X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \tag{88-4}$$

تعطي العلاقة السابقة طريقة بديلة لحساب عوامل فورييه. وذلك بإتباع الخطوات التالية:

- أوجد الإشارة المبتورة $x_{T_0}(t)$ من الإشارة $x(t)$.

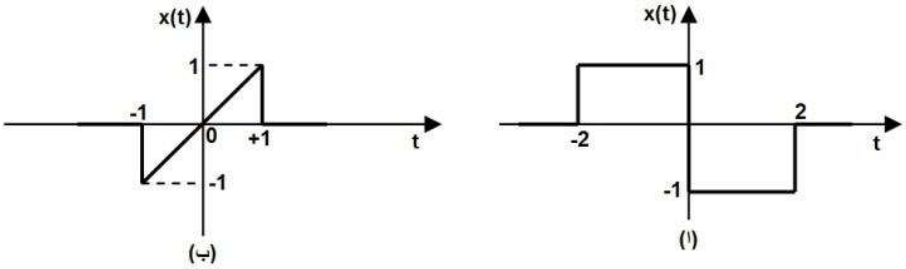
- أوجد تحويل فوريه للإشارة المبتورة.
- أوجد قيم تحويل فوريه عند $f = \frac{n}{T_0}$, وقيسها بـ $\frac{1}{T_0}$.

مسائل الفصل الرابع

4-1- أوجد تحويل فوريه للإشارات التالية:

$$x(t) = e^{3t}u_{-1}(-t)\ ;\ \ x(t) = e^{-|t|}$$

4-2- أوجد تحويل فوريه للأشكال التالية:



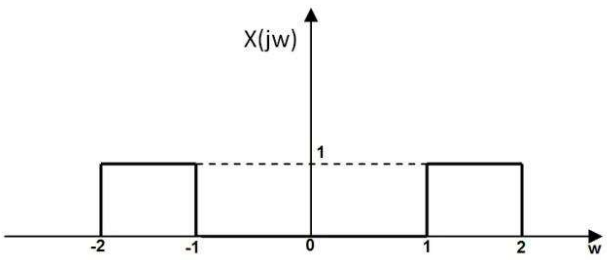
الشكل 4-14إشارتين في المجال الزمني

4-3- بفرض $w = 2\pi f$. أوجد تحويل فوريه المعاكس للطيوف التالية:

$$x(jw) = 3\delta(w-4)\ ;\ \ X(jw) = \pi e^{-|w|}$$

$$x(jw) = \begin{cases} 2\cos w & ;\ \ |w| < \pi \\ 0 & ;\ \ |w| > \pi \end{cases}$$

4-4- أوجد تحويل فوريه المعاكس للشكل التالي:



الشكل 4-15 التمرين 4-4.

4-5- أوجد تحويل فوريه للإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} (A/2)[1+\cos(2\pi t/T_0)] & ;\ \ |t| < T_0/2 \\ 0 & ;\ \ |t| > T_0/2 \end{cases}$$

تُسمى النبضة السابقة نبضة التجيب المرتفع raised-cosine وتستخدم بشكل واسع في الاتصالات لمانعة التداخل بين النبضات (تداخل في المجال الزمني).

5-6- باستخدام الخاصية الخطية لتحويل فوريه . أوجد تحويل فوريه للإشارتين التاليتين:

$$x(t) = 2e^{-t}u_{-1}(t) - 3e^{-2t}u_{-1}(t); \qquad x(t) = 2\cos(\pi t) + 3\sin(3\pi t)$$

5-7- لدينا نظام LTI ذو الاستجابة الترددية $H(jw) = |H(jw)|e^{j\angle H(jw)}$.المطلوب:

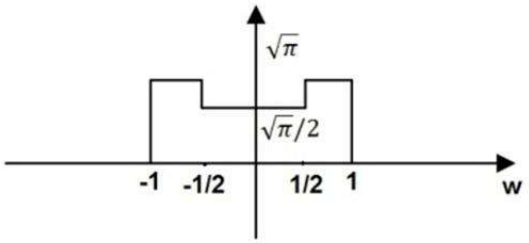
1- أوجد إشارة الخرج $y(t)$ بفرض إشارة الدخل $x(t) = Acos(wt - \varphi)$.

2-ارسم إشارتي الدخل والخرج

3-قارن بين إشارتي الدخل والخرج.

5-8- يعبر التمثيل $X(jw) = w^{-2} + jw^{-3}$ عن الإشارة في المجال الترددي، والمطلوب: بيّن إن كان تمثيل الإشارة في المجال الزمني هو عقدي أو حقيقي (زوجي أو فردي).

5-9- أوجد تحويل فوريه للإشارة المبينة في الشكل 4-16 وذلك باستخدام الخاصية الخطية وخاصية الإزاحة الزمنية لتحويل فوريه.



الشكل 4-16 التمرين 5-9.

5-10- لدينا نظام LTI استجابته النبضية هي $h(t) = 2e^{-2t}u_{-1}(t)$. أوجد تحويل فوريه لإشارة الخرج، بفرض أن إشارة الدخل هي $x(t) = 3e^{-t}u_{-1}(t)$ وذلك باستخدام خاصية التلفيف (الطي).

5-11- باستخدام خاصية انزياح التردد أوجد تحويل فوريه المعاكس للطيف التالي:

$$X(jw) = \frac{1}{2 + j(w-3)} + \frac{1}{2 + j(w+3)}$$

5-12- تحقق من أن تحويل فوريه للتفاضل $\frac{d}{dt}[e^{-at}u_{-1}(t)]$ هو $\frac{jf}{\frac{a}{2\pi}+jf}$ وذلك باستخدام المفاضلة أولاً ومن ثم إيجاد تحويل فوريه.

5-13- استخدام خاصية التفاضل في المجال الزمني وخاصية التفاضل في المجال الترددي لإيجاد تحويل فوريه لنبضة غاوس $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2T}}e^{-t^2/2}$.

5-14-أوجد قدرة الطيف المبين بالشكل 4-16 باستخدام علاقة بارسفال.

5 الترابط والكثافة الطيفية

Correlation and spectral density

1.5 تابع الترابط الذاتي

نستمر في هذه الفصل أيضاً في توصيف الإشارة والنظام. عند توصيف الإشارة ,كثيراً ما يلزمنا فكرة عن مُعدل تغير الإشارة وطولها. ولهذا سوف ندخل مفهوم تابع الترابط الذاتي. وعند التعامل مع أكثر من إشارة نحتاج إلى تابع ما يوصف لنا مقدار الترابط أي التشابه أو الاختلاف بين إشارتين أو أكثر. وسوف نتعامل هنا مع نوعين من الإشارات إشارة القدرة وإشارة الاستطاعة.

يُعرف تابع الترابط الذاتي من أجل إشارة محددة (حتمية) وذات طول مُحدد (إشارة قدرة) بالشكل التالي:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t+\tau)dt \qquad (1\text{-}5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u-\tau)x^*(u)du$$

بعد تبديل المتحول $t + \tau = u$ حيث τ إزاحة زمنية.

تبين العلاقة السابقة أن الإزاحة إلى اليمين أو إلى اليسار بالنسبة للإشارة $x(t)$ لا يؤثر على قيمة تابع الترابط الذاتي، وهذا يعني أن تابع الترابط الذاتي هو عبارة عن تابع زوجي. بفرض $\tau = 0$ في العلاقة السابقة نحصل على العلاقة التالية:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \qquad (2\text{-}5)$$

غالباً تستخدم عملياً الإشارات الحقيقية كتوابع للزمن، عند ذلك العلاقة (1-5) تأخذ الشكل التالي:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \qquad (3\text{-}5)$$

أو

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)x(t)dt$$

يتضح من العلاقة السابقة أن تابع الترابط الذاتي يوصف التشابه أو الاختلاف بين الإشارة $x(t)$ وصيغتها المزاحة بمقدار τ سواء كان الإنزياح إلى اليمين أم إلى اليسار، بالإضافة إلى ذلك فإن القيمة العظمى لتابع الترابط الذاتي تكون عند $\tau = 0$ وذلك لأن أعظم ترابط للإشارة هو مع نفسها وهكذا يكون لدينا:

$$E_x = R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \tag{4-5}$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقة (5-2) نجد أن القيمة العظمى لتابع الترابط الذاتي تساوي قدرة الإشارة.

بزيادة τ تضعف قيمة التابع $R_x(\tau)$ (ولكن ليس بالضرورة بشكل رتيب) وتساوي الصفر بمجرد ازدياد انزياح عن طول الإشارة. سوف نورد الآن بعض الأمثلة لحساب تابع الترابط الذاتي.

مثال 5-1: أوجد تابع الترابط الذاتي للإشارة التالية

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{5-5}$$

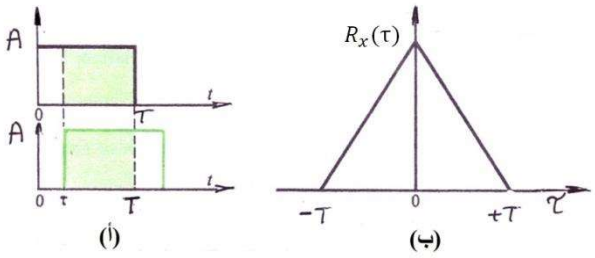
الحل:

يوضح

الشكل 5-1(أ) آلية حساب تابع الترابط حيث الجداء التالي $x(t)x(t-\tau)$ يساوي الصفر فقط عندما لا يوجد تقاطع بين الإشارة $x(t)$ والإشارة $x(t-\tau)$، أما

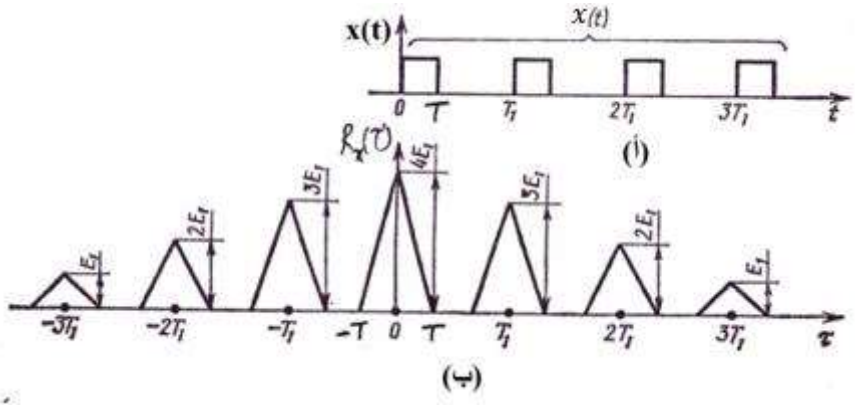
الشكل 5-1(ب) فيوضح تابع الترابط الذاتي $R_x(\tau)$ حيث تساوي قيمته العظمى $R_x(0) = E_x$ قدرة الإشارة $x(t)$، وهو على شكل مثلث قاعدته تساوي $2T$ (حيث T عرض النبضة $x(t)$). بالأخذ بالحسبان خاصية التناظر (تابع زوجي) يمكن ببساطة حساب تابع الترابط الذاتي من (5-3)، أي

$$R_x(\tau) = \begin{cases} A^2T\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right) & ; \quad |\tau| < T \\ 0 & ; \quad |\tau| > T \end{cases} \tag{6-5}$$



الشكل 5-1 آلية إيجاد تابع الترابط الذاتي لنبضة مستطيلة.

مثال 5-2: أوجد تابع الترابط الذاتي لأربع نبضات المسافة بين نبضتين متحاورتين $\boldsymbol{T_1}$ وعرض كل منها $\boldsymbol{T}$.



الشكل 5-2 (أ) قطار من أربع نبضات مستطيلة (ب) تابع الترابط الذاتي.

الحل: الإجراءات الحسابية مشابهة للمثال 5-1، أما شكل تابع الترابط الذاتي فهو موضح في الشكل 5-2(ب) حيث القيمة العظمى لتابع الترابط الذاتي هي عند $\tau = 0$ وتساوي $4E_1$ حيث E_1 قدرة نبضة واحدة منفردة.

مثال 5-3: أوجد تابع الترابط الذاتي للإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ;t < -T/2 \\ Acos(2\pi ft) & ;-T/2 \le t < T/2 \\ 0 & ;t \ge T/2 \end{cases} \tag{7-5}$$

الحل: بالأخذ بالحسبان الخاصة التناظرية لتابع الترابط الذاتي واستخدام العلاقة (5-3) وبفرض $0 \le \tau < T$ نجد:

$$R_x(\tau) = A^2 \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi ft)\, cos[2\pi f(t-\tau)]dt$$

$$= \frac{A^2}{2}(T-\tau)cos(2\pi f\tau) + \frac{A^2}{2}\int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}} cos[4\pi ft + 2\pi f\tau]dt \tag{8-5}$$

$$= \frac{A^2}{2}(T-|\tau|)\left\{cos(2\pi f\tau) + \frac{2sin[2\pi f(T-|\tau|)]}{4\pi f(T-|\tau|)}\right\}$$

وبوضع $\tau = 0$ في العلاقة السابقة (5-8) نحصل على قدرة الإشارة.

$$R_x(0) = \frac{A^2}{2}T = E_x$$

العلاقة السابقة هي عبارة عن تابع الترابط الذاتي للإشارة $x(t)$ لكل الإزاحة $(-T \le \tau < T)$ وواضح أيضاً أن $R_x(\tau)$ تساوي الصفر عندما تزداد τ عن T.

إذا كانت الإشارة إشارة استطاعة، فإن قدرتها تكون لا نهائية، هذا يعني أن التعريف السابق (العلاقة (5-3)) غير مقبول. لذلك لابد من تعريف جديد لتابع الترابط الذاتي للإشارة الدورية بحيث نأخذ القيمة الوسطى بالحسبان. أي

$$R_{x,p}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-\tau)x(t)dt \qquad (9\text{-}5)$$

وعندما يكون $\tau = 0$ يكون لدينا:

$$R_{x,p}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = P_x$$

هذا يعني وحدة التابع $R_{x,p}(\tau)$ هي وحدة الاستطاعة (متوسط استطاعة الإشارة الدورية) وبما أن الإشارة دورية فإن متوسط الجداء $x(t)x(t+\tau)$ أو الجداء $x(t)x(t-\tau)$ على طول لانهائي (فترة لانهائية) يتوافق مع المتوسط على دور واحد. وبالتالي فإن العلاقة (5-9) تأخذ الشكل التالي:

$$R_{x,p}(\tau) = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} x(t)x(t-\tau)dt \qquad (10\text{-}5)$$

حيث T_x دور الإشارة x.

مثال 5-4: أوجد تابع الترابط الذاتي للإشارة الدورية التالية:

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi) \quad ; -\infty \le t < \infty$$

الحل: باستخدام العلاقة **Error! Reference source not found.** يكون لدينا:

$$R_{x,p}(\tau) = \frac{A^2}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} cos(2\pi f t + \varphi)cos[2\pi f(t+\tau) + \varphi]dt$$

$$= \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi f\tau) \qquad (11\text{-}5)$$

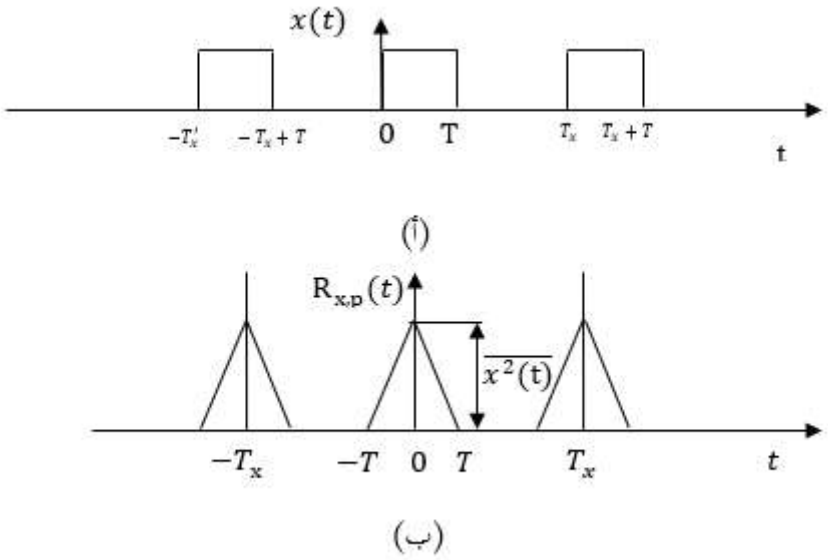
واضح من العلاقة السابقة أن تابع الترابط الذاتي للإشارة الدورية هو أيضاً دوري بنفس دور الإشارة. بوضع $\tau = 0$ في العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$R_{x,p}(0) = P_x = \frac{1}{2}A^2$$

والتي هي متوسط الاستطاعة لإشارة دورية (لتوافقية) ذات مطال A. ويجب الملاحظة هنا أن تابع الترابط الذاتي لإشارة دورية مستقل عن الطور φ.

مثال 5-5: أوجد تابع الترابط الذاتي لقطار النبضات المربعة الدورية المبينة في الشكل 5-3(أ).

الحل: باستخدام العلاقة **Error! Reference source not found.** نحصل على $R_{x,p}(\tau)$ والمبينة في الشكل 5-3(ب).



الشكل 5-3 (أ) نبضات مربعة دورية (ب) تابع الترابط الذاتي.

واضح أن القيمة العظمى هنا تساوي متوسط الاستطاعة.

2.5 تابع الترابط الذاتي المتقطع

يمكن الحصول على الصيغة المتقطعة لتابع الترابط الذاتي باستخدام العلاقة (5-1) وذلك باستبدال التكامل بالجمع والمتحول τ بالعدد الصحيح n (موجب أو سالب) الذي يبين إزاحة الإشارة بوحدة الخانة (عدد الخانات) بالنسبة للإشارة الأصلية.

$$R_x(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j x_{j-n}^* \qquad (12\text{-}5)$$

حيث (*) تبين القيمة العقدية المرافقة. وبوضع $n = 0$ أي الإزاحة تساوي الصفر فإن تابع الترابط الذاتي المتقطع بأخذ الشكل التالي:

$$R_x(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_j|^2 = E_x \qquad (13\text{-}5)$$

غالباً ما نستخدم عملياً إشارات متقطعة (تتابعية) حقيقية عند ذلك العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$R_x(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j x_{j-n} \qquad (14\text{-}5)$$

هنا أيضاً نجد ببساطة أن تابع الترابط الذاتي المتقطع، هو عبارة عن تابع زوجي، أي

$$R_x(n) = R_x(-n) \qquad (15\text{-}5)$$

مثال 5-6: أوجد تابع الترابط الذاتي المتقطع للإشارات المتقطعة التالية:

$$x_1 = \{1,1,1\} \quad ; \quad x_2 = \{1,1,-1\}$$

الحل: في البداية سوف نزيح الإشارة السابقة x_1 لثلاثة مواقع، أي:

... 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...

... 0 0 0 0 1 1 1 0 0 ...

... 0 0 0 0 0 1 1 1 0 ...

... 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ...

باستخدام العلاقة (5-14) نجد أن

$$R_{x_1}(0) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$R_{x_1}(1) = 1 + 1 = 2$$

$$R_{x_1}(2) = 1$$

$$R_{x_1}(3) = 0$$

من الإزاحات السابقة والحسابات حسب العلاقة (5-14) نجد أن قيمة $R_x(n)$ يساوي الصفر من أجل $n \geq 3$.

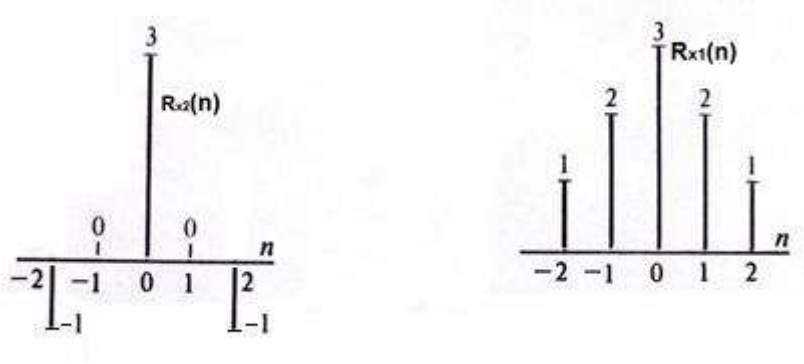
بالنسبة للإشارة المتقطعة x_2 نجد:

$$R_{x_2}(0) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$R_{x_2}(1) = 1 - 1 = 0$$

$$R_{x_2}(2) = -1$$

$$R_{x_2}(3) = 0$$



الشكل 5-4 تابع الترابط الذاتي المتقطع لـ x_1 و x_2.

من المثال السابق نلاحظ أن التتابعية (الإشارة المتقطعة) x_2 ذات خواص ترابط أفضل من التتابعية x_1 وذلك لكون المركبات الجانبية ذات قيم أقل. والتتابعية x_2 هي عبارة عن التتابعية الأولى في تتابعيات باركر $Barker$ والتي تتميز بأفضل خواص لتابع الترابط وجدول 5-1 يبين تتابعيات باركر بالإضافة إلى تابع الترابط الذاتي المتقطع. تستخدم تتابعيات باركر بشكل واسع في الرادار.

جدول 5-1 تتابعيات باركر.

n	التتابعيات	تابع الترابط الذاتي
3	1, 1, -1	0, -1
4	1, 1, 1, -1	1, 0, -1
4	1, 1, -1, 1	-1,0,1
5	1, 1, 1, -1, 1	0,1,0,1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	0, -1,0, -1,0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1	0, -1,0, -1,0, -1, 0, -1,0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1	0,1,0,1,0,1,0, 1,0,1,0,1

إذا كانت التتابعية دورية بدور n فإن تابع الترابط الذاتي المتقطع يكون له الشكل التالي:

$$R_{x,p}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j x_{j-n}^{*} \qquad (16\text{-}5)$$

وذلك وبنفس الطريقة التي اتبعت عند الحصول على (12-5) هنا أيضاً نجد ببساطة أن

$$R_{x,p}(j) = R_{x,p}(j+n) \qquad (17\text{-}5)$$

كما هو الحال في حالة الإشارة المستمرة (مثال 5-4).

3.5 تابع ترابط التقاطع

لتقدير درجة التشابه (الترابط) بين إشارتين مختلفتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تم إدخال مفهوم تابع ترابط التقاطع، والذي يُعرف بالشكل التالي:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t+\tau)dt \qquad (18\text{-}5)$$

وبالنسبة لإشارتين حقيقيتين يكون لدينا:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dt \qquad (19\text{-}5)$$

أو

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_1(t-\tau)dt$$

وذلك لكون قيمة تابع الترابط التقاطع لن تتغير سواء كان هناك تقديم أو تأخير الإشارة بالنسبة للإشارة الأصلية. هذا يعني أن

$$R_{x_1x_2}(\tau) = R_{x_2x_1}(-\tau) \qquad (20\text{-}5)$$

يستخدم تابع ترابط التقاطع لتحديد التعامدية (orthogonality) بين إشارتين. نقول إن الإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متعامدتان إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) = 0 \qquad (21\text{-}5)$$

هذا يعني أنه يمكن استخدام تابع ترابط التقاطع لقياس مدى استقرار حالة التعامدية عند إزاحة زمنية نسبية بين الإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$.ونقول إن الاشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ أنهما متعامدتين ومعيرتين orthonormal إذا تحقق ما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t)dt = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,x_2(t)dt = 0$$

مثال 5-7: أوجد تابع ترابط التقاطع بين الإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ التاليتين:

$$x_1(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} A\ t/T & 0 \le t < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الحل: من أجل $\tau > 0$ حيث الإشارة $x_2(t)$ نتأخر عن الإشارة $x_1(t)$ باستخدام العلاقة (5-20) يكون لدينا:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = (A^2/T)\int_{\tau}^{T}(t-\tau)dt$$

بإدخال المعامل $\zeta = \tau/T$ نجد

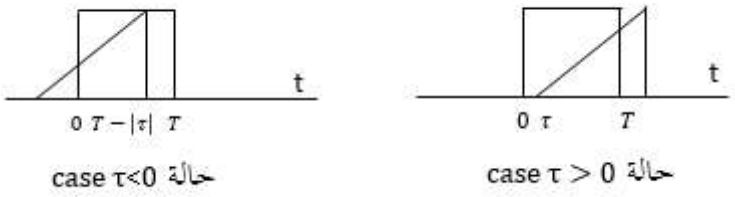
$$R_{x_1x_2}(\zeta) = A^2T\left(\frac{1}{2} - \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2\right) \ ; \ \zeta > 0 \qquad (22\text{-}5)$$

وعند $\tau < 0$ حيث الإشارة المثلثية تسبق الإشارة المربعة، يكون لدينا:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \left(\frac{A^2}{T}\right)\int_{0}^{T-|\tau|}(t-\tau)dt$$

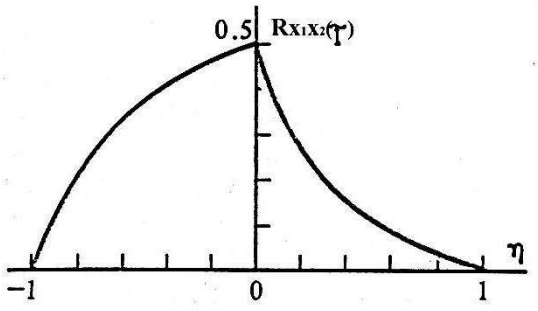
$$= A^2T/2\left(1-\zeta^2\right) \qquad (23\text{-}5)$$

يبين في الشكل 5-5 إزاحة الإشارة المثلثية عند $\tau > 0$ وعند $\tau < 0$.



الشكل 5-5 إزاحة الإشارة $x_2(t)$ بالنسبة للإشارة $x_1(t)$.

العلاقة (5-22) والعلاقة (5-23) مرسومة بالشكل التالي.



الشكل 5-6 تابع ترابط التقاطع بين إشارة مربعة وإشارة مثلثية.

إن تابع ترابط التقاطع ليس تابعاً متناظراً (زوجياً)، بالإضافة إلى ذلك فإن قيمته العظمى ليست بالضرورة عند $\tau = 0$ ويمكن التأكد من ذلك بإيجاد تابع ترابط التقاطع للإشارتين التاليتين:

$$x_1(t) = \begin{cases} A(-\frac{t}{T} + 1) & ; 0 \le t < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} At/T & ; 0 \le t < T \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (24\text{-}5)$$

لتكن لدينا الإشارتين $x(t)$ و $y(t)$، بأخذ عينات من الإشارتين نحصل على الصيغة المتقطعة للإشارتين، أي:

$$x = \{\dots x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

$$y = \{\dots y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

وبإتباع طريقة مشابهة للتي استخدمت للحصول على تابع الترابط الذاتي المتقطع يمكننا تعريف تابع ترابط التقاطع المتقطع بالشكل التالي:

$$R_{xy}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{j-n} \qquad (25\text{-}5)$$

حيثn عدد صحيح (موجب أو سالب أو صفر).

مثال 5-8: أوجد تابع ترابط التقاطع المتقطع لكل من التتابعين التاليين

$$x = \{1, 1, 1, -1\}$$

$$y = \{1, 1, -1, 1\}$$

الحل: من أجل $n > 0$ تتم إزاحة التتابعية y بالنسبة لـ x بالشكل التالي:

..	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	0..
..	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0..
..	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0..
..	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0..
..	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0..

وباستخدام العلاقة (25-5) نجد:

$$R_{xy}(0) = 0$$

$$R_{xy}(1) = 3$$

$$R_{xy}(2) = 0$$

$$R_{xy}(3) = -1$$

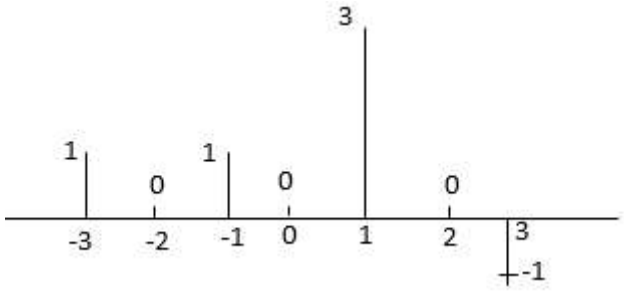
ومن أجل $n < 0$ إزاحة y نحو اليسار (تقديم) وباستخدام العلاقة (5-25) نحصل على

$$R_{xy}(-1) = 1$$

$$R_{xy}(-2) = 0$$

$$R_{xy}(-3) = 1$$

من الحسابات السابقة نرسم تابع ترابط التقاطع المتقطع، بالشكل التالي:



الشكل 5-7 تابع ترابط التقاطع المتقطع بين x و y.

واضح من الشكل السابق أن تابع ترابط التقاطع المتقطع تابع غير متناظر وبالإضافة إلى ذلك، القيمة العظمى ليست عند $n = 0$ $(\tau = 0)$.

4.5 إشارة القدرة والكثافة الطيفية للقدرة

ذكرنا سابقاً أن الإشارة $x(t)$ يمكن أن تكون إشارة قدرة أو إشارة استطاعة. ولا يمكن أن تكون الإشارة في نفس الوقت إشارة قدرة وإشارة استطاعة لأن استطاعة إشارة القدرة تساوي الصفر $p_x = 0$ وقدرة إشارة الاستطاعة تساوي اللانهائية $E_x = \infty$. عملياً، كل الإشارات الدورية هي إشارات استطاعة استطاعتها تساوي:

$$P_x = \frac{1}{T_x}\int_{\alpha}^{\alpha+T_x} |x(t)|^2 dt$$

حيث T_x دور الإشارة و α عدد حقيقي اختياري.

نعلم أن قدرة الإشارة تُعطى بالعلاقة التالية:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

وذلك حسب نظرية رايلي. بتمرير الإشارة $x(t)$ عبر مرشح غير متغير مع الزمن (بالحالة العامة عقدي) ذي الاستجابة النبضية $h(t)$ والترددية $H(f)$ فإن الخرج سوف يكون من الشكل التالي:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

أو

$$Y(f) = X(f)H(f) \qquad (26\text{-}5)$$

وذلك حسب خواص فوريه، قدرة إشارة الخرج تكون

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

أو

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

وباستخدام العلاقة (23-5) يكون لدينا:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

$$= R_y(0) \qquad (27\text{-}5)$$

وبما أن:

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

حسب نظرية الترابط، لذلك يمكن أن نكتب

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[|Y(f)|^2]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[|X(f)|^2|H(f)|^2] \tag{28-5}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[|X(f)|^2] * \mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2]$$

وذلك حسب خاصية التلفيف. وباستخدام خاصية الترابط يمكن أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \tag{29-5}$$

بفرض

$$H(f) = \begin{cases} 1 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

فإن

$$|Y(f)|^2 = \begin{cases} |X(f)|^2 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

و

$$E_y = \int_W^{W+\Delta W} |Y(f)|^2 df$$

وبفرض Δw صغيرة فإن:

$$\cong |X(W)|^2 \Delta W$$

أو

$$|X(W)|^2 = \frac{E_y}{\Delta W} \tag{30-5}$$

يمرر هذا المرشح المركبات الترددية الواقعة ضمن المجال الترددي الضيق حول التردد $f = W$ ويمنع المركبات الأخرى. هذا يعني أن قدرة الخرج هي عبارة عن القدرة المتوضعة حول التردد $f = W$ من إشارة الدخل، أي أن $|X(W)|^2 \Delta W$ هي كمية القدرة من الإشارة $x(t)$ الواقعة ضمن المجال $[W, W + \Delta W]$. وبالتالي

$$|X(W)|^2 = \frac{\text{القدرة ضمن المجال}[W, W + \Delta W]}{\Delta W} \tag{31-5}$$

ولهذا السبب فإن الكمية $|X(f)|^2$ تسمى بالكثافة الطيفية للقدرة للإشارة $x(t)$ ويُعبر عنها بالشكل التالي:

$$E_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}[R_x(\tau)] \qquad (32\text{-}5)$$

تكامل الكثافة الطيفية للقدرة يساوي قدرة الإشارة (القدرة المحتواة في الإشارة). وهذا يتوافق مع نظرية رايلي.

لتوصيف سلوكية ترابط التقاطع لإشارات القدرة في المجال الترددي سوف ندخل مفهوم تقاطع الكثافة الطيفية.
نُعرّف تقاطع الكثافة الطيفية بالشكل التالي:

$$E_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

أو

$$E_{yx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad (33\text{-}5)$$

الكثافة الطيفية للقدرة energy spectral density، وبأخذ بالحسبان نظرية الترابط يكون لدينا:

$$E_{xy}(f) = X(f)Y^*(f), \quad E_{yx}(f) = Y(f)X^*(f) \qquad (34\text{-}5)$$

من العلاقة السابقة نلاحظ نقطتين: الأولى أن تقاطع الكثافة الطيفية هي عموماً قيمة عقدية بخلاف الكثافة الطيفية للقدرة (العلاقة (32-5))، والتي هي قيمة حقيقية. والنقطة الثانية، نلاحظ من العلاقة (34-5) أن $E_{xy}(f) = E_{yx}^*(f)$ وهذا يعني بشكل عام أن $E_{xy}(f) \neq E_{yx}(f)$.

مثال 5-9: بفرض لدينا الإشارة التالية:

$$x(t) = e^{-\alpha t} u_{-1}(t) \quad , \alpha > 0$$

المطلوب إيجاد تابع الترابط الذاتي والكثافة الطيفية للقدرة وقدرة الإشارة $x(t)$.

الحل: باستخدام جدول تحويلات فوريه نجد

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

وباستخدام العلاقة (32-5) نوجد الكثافة الطيفية للقدرة:

$$E_x(f) = |X(f)|^2$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

وباستخدام جداول تحويل فوريه، نوجد تابع الترابط الذاتي:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[|X(f)|^2]$$
$$= \frac{1}{2\alpha} e^{-a|\tau|}$$

ومن أجل إيجاد قدرة الإشارة نستخدم العلاقة (5-27)

$$E_x = R_x(0)$$
$$= \frac{1}{2\alpha}$$

مثال 5-10: لدينا الإشارة التالية

$$x(t) = e^{-\alpha t} u_{-1}(t) \quad , \qquad \alpha > 0$$

والاستجابة النبضية التالية:

$$h(t) = e^{-\beta t} u_{-1}(t) \quad , \qquad \beta > 0 \, , \beta \neq \alpha$$

المطلوب إيجاد تابع الترابط الذاتي والكثافة الطيفية للقدرة لإشارة خرج المرشح بالإضافة إلى قدرة إشارة الخرج.

الحل: من المثال السابق نجد أن الاستجابة الترددية للمرشح لها الشكل التالي:

$$H(f) = \frac{1}{\beta + j2\pi f}$$

وبالاستفادة من العلاقة (5-28) نجد أن:

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$
$$= \frac{1}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(\beta^2 + 4\pi^2 f^2)}$$

أو

$$|Y(f)|^2 = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{1}{\beta^2 + (2\pi f)^2} \right]$$

وباستخدام جداول تحويل فوريه، نحصل على:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|} - \frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}\right]$$

ومن العلاقة (5-27) نوجد قدرة إشارة الخرج، أي

$$E_y = R_y(0)$$
$$= \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

5.5 إشارة الاستطاعة والكثافة الطيفية للاستطاعة

نعرف إشارة الاستطاعة بأنها الإشارة ذات الاستطاعة المتوسطة المحدودة، أي الإشارة التي تحقق العلاقة (2-11) أو

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|x(t)|^2dt < \infty$$

الإشارة الدورية وعينة الضجيج هي أمثلة على إشارة الاستطاعة.

لدراسة توزع الاستطاعة في المجال الترددي لابد من معرفة تحويل فوريه للإشارة $x(t)$. وهنا نواجه مشكلة لأن إشارة الاستطاعة ذات قدرة لانهائية وبالتالي من غير الممكن وجود تحويل فوريه لها، للتغلب على هذه المسألة (المشكلة) سوف نأخذ بالحسبان الصيغة المبتورة $x_T(t)$ للإشارة $x(t)$. عملياً نعرف الصيغة المبتورة بالشكل التالي:

$$x_T(t) = x(t)\sqcap\left(\frac{t}{2T}\right)$$
$$= \begin{cases} x(t) ; -T \le t \le T \\ 0 \quad ; \quad otherwise \end{cases}$$

وهكذا فإن الإشارة $x_T(t)$ هي إشارة قدرة وبالتالي لها تحويل فوريه، أي:

$$X_T(f) = \mathcal{F}[x_T(t)]$$

وباستخدام الإشارة المبتورة فإن متوسط الاستطاعة تكون:

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}|x_T(t)|^2dt \qquad (5\text{-}35)$$

وبما أن الإشارة $x_T(t)$ لها قدرة محددة فإنه يمكن استخدام نظرية رايلي، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x_T(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(f)|^2df$$

حيث $X_T(f)$ هو تحويل فوريه للإشارة المبتورة $x_T(t)$. وبتعويض العلاقة السابقة بالعلاقة (5-35) يكون لدينا:

$$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(f)|^2df \tag{36-5}$$

بزيادة T تزداد قدرة الإشارة $x_T(t)$ وبالتالي تزداد الكثافة الطيفية للقدرة $|X_T(f)|^2$. وهذا يعني باقتراب T من اللانهاية تقترب أيضاً $|X_T(f)|^2$. ولكن حتى تكون متوسط الاستطاعة مُحددة فإن $|X_T(f)|^2$ يجب أن تقترب من اللانهاية بنفس مُعدل اقترابT من اللانهاية. وهذا يؤكد تقارب التكامل (العلاقة (5-27))، وبالتالي فإن العلاقة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل التالي (تبادل أماكن النهاية والتكامل):

$$P_x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\right)df \tag{37-5}$$

القيمة المكاملة في العلاقة السابقة تُعرف بالكثافة الطيفية للاستطاعة power spectral Density PSD أي

$$S_x(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_T(f)|^2 \tag{38-5}$$

والقيمة $|X_T(f)|^2/2T$ تسمى بالرسم الدوري Periodogram من العلاقة السابقة، واضح أن الكثافة الطيفية للاستطاعة PSD هي قيمة غير سالبة وحقيقية وذلك من أجل كل الترددات. يتضح أيضاً من العلاقة (5-38) أن الاستطاعة تساوي تكامل لتابع الكثافة الطيفية للاستطاعة على كل المجال الترددي، أي

$$P_x=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df \tag{39-5}$$

بالأخذ بالحسبان خاصية الترابط الذاتي يمكن أن نكتب

$$S_x(f)=\mathcal{F}\left[R_{xp}(\tau)\right] \tag{40-5}$$

والآن سوف نبرر العلاقة السابقة بالشكل التالي: نعلم أن

$$P_x=R_{xp}(0) \tag{41-5}$$

ومن العلاقة (5-39) والعلاقة (5-41) نجد أن

$$R_{xp}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df \tag{42-5}$$

بإمرار إشارة القدرة خلال مُرشح ذي الاستجابة النبضية $h(t)$، هنا أيضاً سوف نمرر إشارة الاستطاعة $x(t)$ من خلال مُرشح استجابته النبضية $h(t)$ لنحصل على الخرج التالي:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

المتوسط الزمني لتابع الترابط الذاتي لإشارة الخرج يكون

$$R_{yp}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)y^*(t-\tau)dt \tag{43-5}$$

وبتعويض $y(t)$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$R_{yp}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)x^*(t-\tau-v)dv\right]dt$$

بتغير المتحول $\omega = t-u$ وبتبديل التكامل نحصل على

$$R_{yp}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)[x(\omega)x^*(u+\omega-\tau-v)d\omega]du\,dv$$

وبالأخذ بالحسبان تعريف الترابط (العلاقة (43-5)) تأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي:

$$R_{yp}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xp}(\tau+v-u)h(u)h^*(v)du\,dv$$

وبالأخذ بالحسبان تعريف التلفيف نحصل على

$$R_{yp}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[R_{xp}(\tau+v) * h(\tau+v)\right]h^*(v)dv$$

$$= R_{xp}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \tag{44-5}$$

وبأخذ تحويل فورييه لطرفي العلاقة السابقة نحصل على

$$S_y(f) = S_x(f)H(f)H^*(f)$$

$$= S_x(f)|H(f)|^2 \tag{45-5}$$

هذه العلاقة تربط بين الكثافة الطيفية لاستطاعة إشارة الدخل $x(t)$ مع الكثافة الطيفية لاستطاعة إشارة الخرج $y(t)$، وهي مشابهة للعلاقة بين الكثافة الطيفية للقدرة على دخل وخرج المرشح (مثال 5-10).

سوف نوجد الآن الكثافة الطيفية لاستطاعة الإشارة الدورية ومن ثم نوجد الكثافة الطيفية لاستطاعة إشارة خرج نظام خطي غير متغير مع الزمن.

ذكرنا سابقاً، أن الإشارة الدورية هي عبارة عن إشارة استطاعة. ليكن لدينا الإشارة الدورية $x(t)$ ذات الدور T_0 ومعاملات سلسلة فورييه العقدية لها هي $\{x_n\}$. لإيجاد المتوسط الزمني لتابع الترابط الذاتي، نكتب حسب التعريف

$$R_{xp}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$R_{xp}(\tau) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{kT_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt \qquad (46\text{-}5)$$

وهذه العلاقة مشابهة للعلاقة **Error! Reference source not found.** التي تم الحصول عليها بمناقشة فيزيائية تعويض العلاقة (5-35) (سلسلة فورييه) في العلاقة السابقة نحصل على

$$R_{xp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi\frac{m}{T_0}\tau} e^{j2\pi\frac{n-m}{T_0}t}\, dt \qquad (47\text{-}5)$$

وبالأخذ بالحسبان أن

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi\frac{n-m}{T_0}} dt = \delta_{m,n}$$

وبالتعويض في (5-47) نحصل على

$$R_{xp}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 e^{j2\pi\frac{n}{T_0}\tau} \qquad (48\text{-}5)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن المتوسط الزمني لتابع الترابط هو عبارة عن تابع دوري، ودوره يساوي دور الإشارة الأصلية.

من أجل إيجاد الكثافة الطيفية لاستطاعة الإشارة الدورية، يكفي إيجاد تحويل فوريه للتابع $R_{xp}(\tau)$ وذلك حسب العلاقة (5-40)، أي

$$\mathcal{F}[R_{xp}(\tau)] = S_{xp}(f)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (5\text{-}49)$$

وذلك لأن التابع $R_{xp}(\tau)$ هو تابع دوري، ويتألف كل تابع دوري من مجموعة توابع جيبية (سلسلة فوريه) يكون تحويل فوريه لها مركبات ترددية منفردة $\delta(.)$.

عند تمرير الإشارة السابقة (الإشارة الدورية $x(t)$) عبر نظام خطي غير متغير مع الزمن ذي استجابة ترددية $H(f)$. فإن الخرج $y(t)$ أيضاً إشارة دورية والكثافة الطيفية لاستطاعة إشارة الخرج $S_y(f)$ حسب العلاقة (5-45) تكون:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

$$= |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (5\text{-}50)$$

وبمكاملة العلاقة (5-49) نحصل على استطاعة الدخل P_x:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \quad (5\text{-}51)$$

وبمكاملة العلاقة (5-50) نحصل على استطاعة إشارة الخرج، أي:

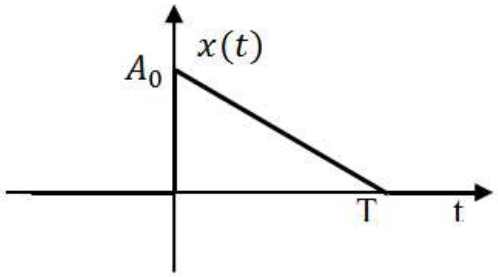
$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2$$

مسائل الفصل الخامس

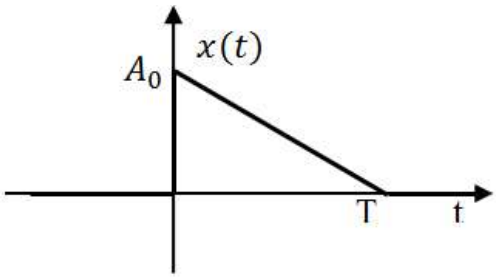
5-1- برهن أن تابع الترابط الذاتي $R_x(\tau)$ للإشارة $x(t) = A_0 e^{-\propto t} u_{-1}(t)$ هو

$$R_x(\tau) = \frac{A_0^2}{\propto} \exp(-\propto |t|)$$



5-2- أوجد تابع الترابط الذاتي للنبضة المثلثية (

الشكل 5-8))



الشكل 5-8 نبضة مثلثية.

5-3- أوجد تابع الترابط الذاتي للتتابعية التالية:

$$(1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)$$

ومن ثم قارن الترابط الذاتي السابق مع تابع الترابط الذاتي لتتابعية باركر Barker ذات السبع خانات

5-4- أوجد تابع ترابط التقاطع لتتابعيتين من تتابعيات باركر $N = 5$ و $N = 7$:

5.5- أوجد تابع ترابط النقاط للإشارتين التاليتين :

$$x(t) = \exp(-\alpha_1 t)\, u_{-1}(t)$$
$$y(t) = \exp(-\alpha_2 t)\, u_{-1}(t)$$

حيث $\alpha_1 \neq \alpha_2$. ومن ثم علّق على النتائج.

5-6- برهن أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)y^*(w)dw$$

بين كيف تتحقق العلاقة السابقة عملياً. تجدر الملاحظة هنا أن الجداء $X(w)y'(w)$ يسمى بطيف تقاطع الاستطاعة cross-power spectrum في بعض المراجع.

5-7- أوجد طيف تقاطع الاستطاعة للإشارتين التاليتين:

$$x(t) = \exp(-\alpha t)\, u_{-1}(t) \quad \text{و} \quad y(t) = \exp[-\alpha(t-t_0)]u_{-1}(t-t_0)$$

5-8- لدينا نبضة غاوس التالية: $x(t) = A_0 e^{-6\times 10^{17} t^2}$. أوجد القدرة الموجودة ضمن المجال من *0* وحتى *1.5MHZ*.

5-9- لدينا الإشارة الدورية $x(t)$ ذات الدور T_0 $\left(f_0 = \frac{1}{T_0}\right)$. المطلوب: برهن العلاقة التالية:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(nf_0)|^2$$

5-10-لدينا الإشارة المعدّلة التالية (سوف نشرح التعديل في الفصل الثامن).

$$x(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

حيث $s(t)$ إشارة استطاعة و f_0 تردد الحامل *carrier*. بفرض المجال الترددي $s(t)$ هو w، أوجد الكثافة الطيفية للاستطاعة للإشارة $x(t)$ بدلالة الإشارة $s(t)$.

6 أخذ العينات

Sampling

1.6 أخذ العينات من الإشارة المستمرة

تقوم عملية أخذ العينات بتحويل الإشارة التماثلية إلى تتابعية من العينات الموافقة للإشارة، وعادة تؤخذ المسافة الزمنية بين العينات بشكل متساوٍ، ويجب أن تمكّن من استرجاع الإشارة الأصلية (التماثلية). وهكذا فإن الهدف من نظرية أخذ العينات هو تحديد المسافة بين العينات، والتي هي دور أخذ العينة T_s، بحيث نتمكن من استرجاع الإشارة الأصلية بالاعتماد على العينات المأخوذة.

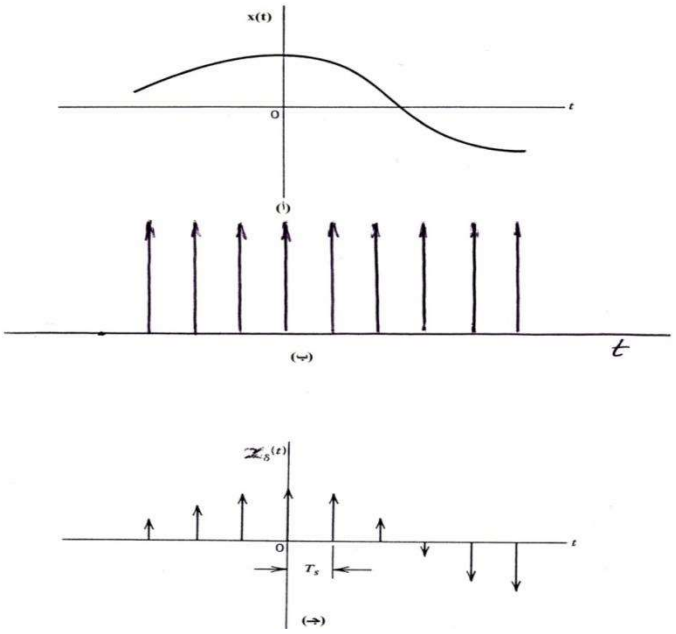
وهكذا يمكن اعتبار عملية أخذ العينات عبارة عن جداء الإشارة $x(t)$ (إشارة قدرة) بتتابعية من نبضات دورية. في الحالة المثالية، تستخدم نبضات ديراك أي التابع التالي ويسمى مشط ديراك:

$$y_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \tag{1-6}$$

عند ذلك فإن إشارة العينات تكون من الشكل التالي:

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x(t)y_\delta(t) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \end{aligned} \tag{2-6}$$

حيث $x_k = x(kT_s)\delta(t - kT_s)$ و T_s دور أخذ العينات Sampling period.



الشكل 6-1 (أ) الإشارة الأصلية التماثلية (ب) مشط ديراك (جـ) عينات الإشارة.

يبين

الشكل 6-1 عملية أخذ العينات بحيث الجزء (أ) منه يبين الإشارة الأصلية وهي إشارة تماثلية ذات مجال ترددي محدد. بينما الجزء (ب) يبين مشط ديراك وهو تتابعية دورية لنبضة ديراك $\delta(t)$، والجزء (ج) يبين عينات الإشارة $x_\delta(t)$.

من أجل إيجاد المجال الترددي لإشارة العينات $x_\delta(t)$ نوجد تحويل فورييه لها، أي:

$$X_\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y_\delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (3\text{-}6)$$

يمكن تمثيل تتابعية نبضات ديراك (العلاقة (1-6)) باستخدام سلاسل فورييه، أي:

$$y_\delta(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_s t} \qquad (4\text{-}6)$$

بتعويض (4-6) في (3-6) نحصل على:

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_s t} e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f-nf_s)t}\, dt$$

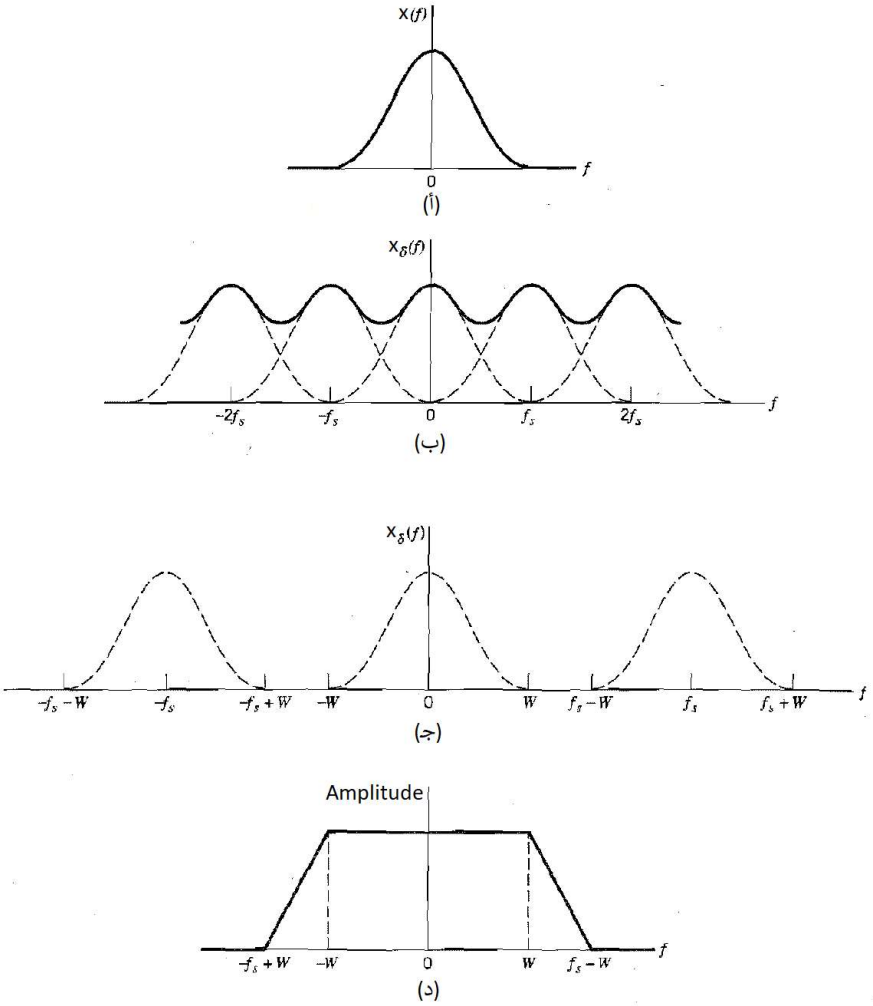
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \tag{5-6}$$

أو

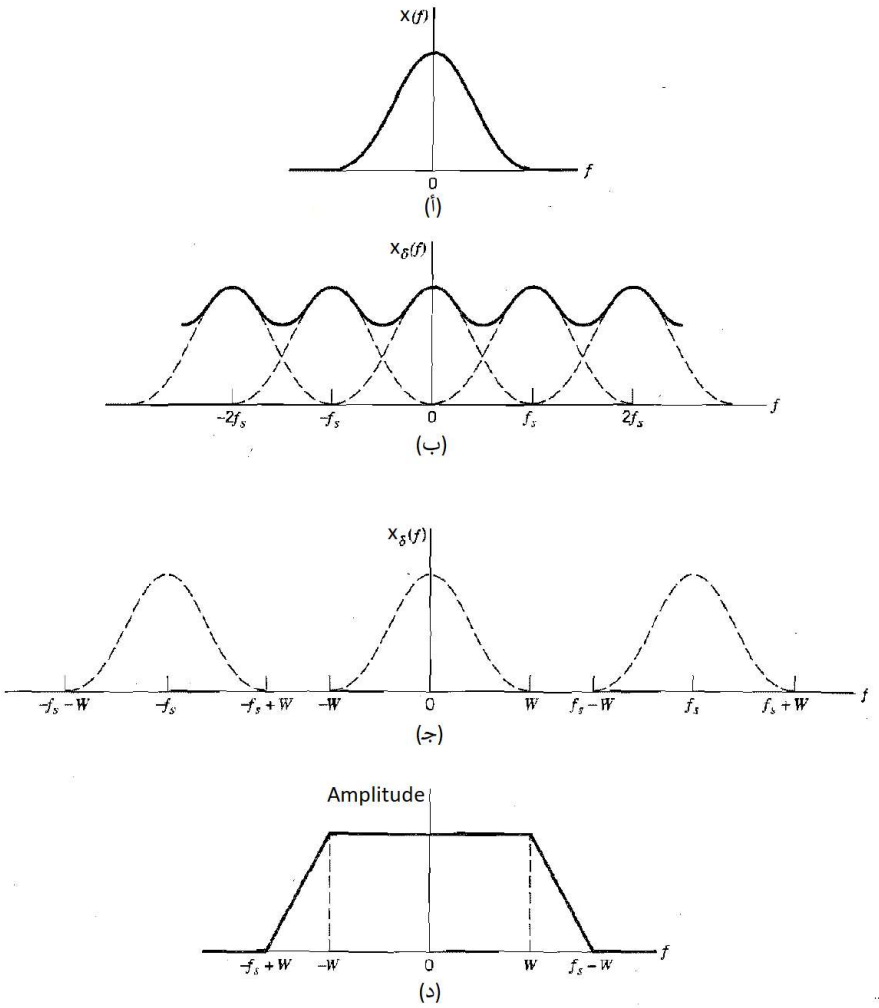
$$X_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \tag{6-6}$$

حيث: $f_s = 1/T_s$. نلاحظ من العلاقة السابقة أو العلاقة (5-6) أن طيف الإشارة$x_\delta(t)$، $(X_\delta(f))$، هو تكرار دوري لطيف الإشارة الأصلية $X(f)$ وبدور f_s.

عندما يكون التردد f_s أقل من ضعف عرض المجال الترددي للإشارة $(2W)$، أي $f_s < 2W$ فإن الطيوف المتجاورة تتداخل وتسمى هذه الظاهرة بظاهرة الانتحال aliasing وهي مبينة ب

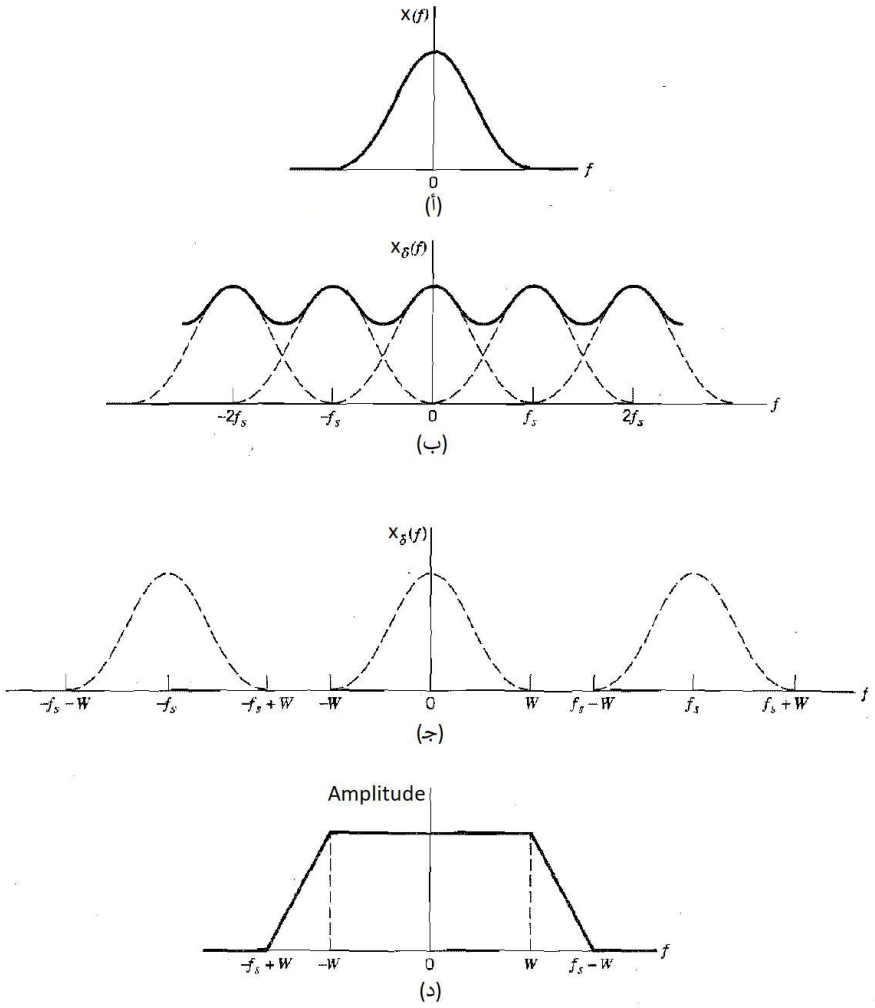


الشكل 6-2ب) وسوف توضح الفقرة (6-2) أنه في هذه الحالة لا توجد إمكانية توصيف للإشارة واستعادتها.



الشكل 2-6 (أ) طيف الإشارة الأساسية (ب) طيف الإشارة $x_\delta(t)$ بوجود انتحال $f_s < 2W$ (جـ) طيف الإشارة $x_\delta(t)$ عند $f_s > 2W$ (د) الاستجابة المطالية لمرشح استعادة الإشارة.

نلاحظ في الجزء (ج) من الشكل السابق أن $f_s > 2W$، في هذه الحالة يمكن توصيف الإشارة الأصلية واستعادتها. تجدر الملاحظة هنا عند اختيار f_s يجب مراعاة نقطتين: الأولى إمكانية استخلاص (استرجاع) الإشارة بسهولة عن



الشكل 6-2). والثانية هي الاقتصاد بالطيف قدر الإمكان.

واضح مما سبق أن الحالة المثالية هي $f_s = 2W$، في هذه الحالة يجب أن يكون المرشح مثالي، أي غير سببي non-causal ويُسمى معدل أخذ العينات $f_s = 2W$ بمعدل نايكوست Nyquist rate أي أن عدد العينات المأخوذة في الثانية هو $2W$ حيث W هو أعلى تردد في الإشارة، هذا يعني لا وجود لأي مركبات ترددية خارج المجال الترددي $[0, W]$.

مثال 6-1: أوجد عينات الإشارة الجيبية $\cos(2\pi f_0 t)$ بفرض $f_s = 2W$.

الحل: واضح هنا أن $W = f_0$ و $t = kT_s$ و $T_s = \frac{1}{2W}$ وبالتعويض نجد

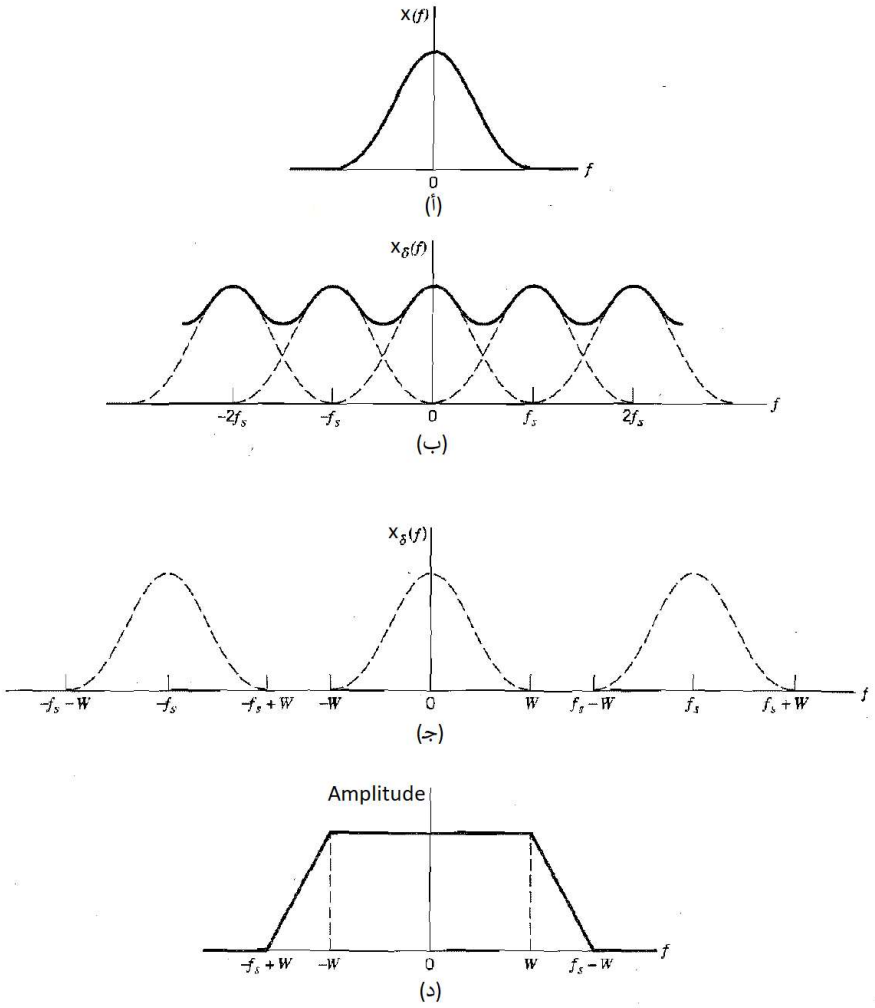
$$\cos(2\pi WkT_s) = \cos(2\pi Wk/2W)$$
$$= \cos(k\pi) = (-1)^k$$

وهذا يعني أن لدينا عينتين في كل دور. أي يكفي عينتان من كل دور لاستعادة الإشارة الأصلية. وبما أن الإشارات الدورية يمكن تمثيلها بسلسلة فوريه (مجموعة إشارات جيبية) فإنه يكفي لاستعادة الإشارات الدورية أن نأخذ عينتين من كل دور من أدوار الإشارات الجيبية الممثلة للإشارة الدورية. أو للتبسيط $T_s = \frac{1}{2f_{max}}$ حيث f_{max} أعلى تردد في الإشارة الدورية.

2.6 الانتحال

كما ذكرنا سابقاً، تنشأ ظاهرة الانتحال (التراكب) *aliasing* عندما يكون $f_s < 2w$ أو $f_s < 2f_{max}$ (f_{max} هو أعلى تردد في المجال الترددي W).في هذه الحالة يتراكب الجزء الأدنى من الطيف السابق $X_\delta(f - (1+k)f_s)$ مع الجزء الأعلى من الطيف اللاحق $X_\delta(f - kf_s)$ وهذا يؤدي إلى تشوه في طيف الإشارة المقطعة

وعدم إمكانية استعادة الإشارة الأصلية باستخدام المرشح المناسب كما هو واضح في



الشكل 6-2. وذلك بسبب أن الطيف الناتج لا يتطابق مع طيف الإشارة الأصلية. سوف نوضح في المثال التالي ظاهرة الانتحال للمركبات الترددية المتقطعة.

مثال 6-2: ليكن لدينا الإشارة الجيبية التالية:

$$x(t) = \cos(\pi t)$$

أوجد تحويل فوريه للإشارة المتقطعة (المقطعة) $X_\delta(jw)$. وذلك من أجل الأدوار (دور أخذ العينات) التالية:

$T_s = \frac{1}{4}$ و $T_s = 1$ و $T_s = \frac{3}{2}$.

الحل:

للتبسيط سوف نستخدم w بدلاً من f ، عند ذلك فإن العلاقة (6-6) تأخذ الشكل التالي:

$$X_\delta(jw) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X\,[j(w - kw_s)] \qquad (7\text{-}6)$$

حيث $w_s = \frac{2\pi}{T_s}$. في البداية نوجد تحويل فوريه للإشارة $x(t)$، أي:

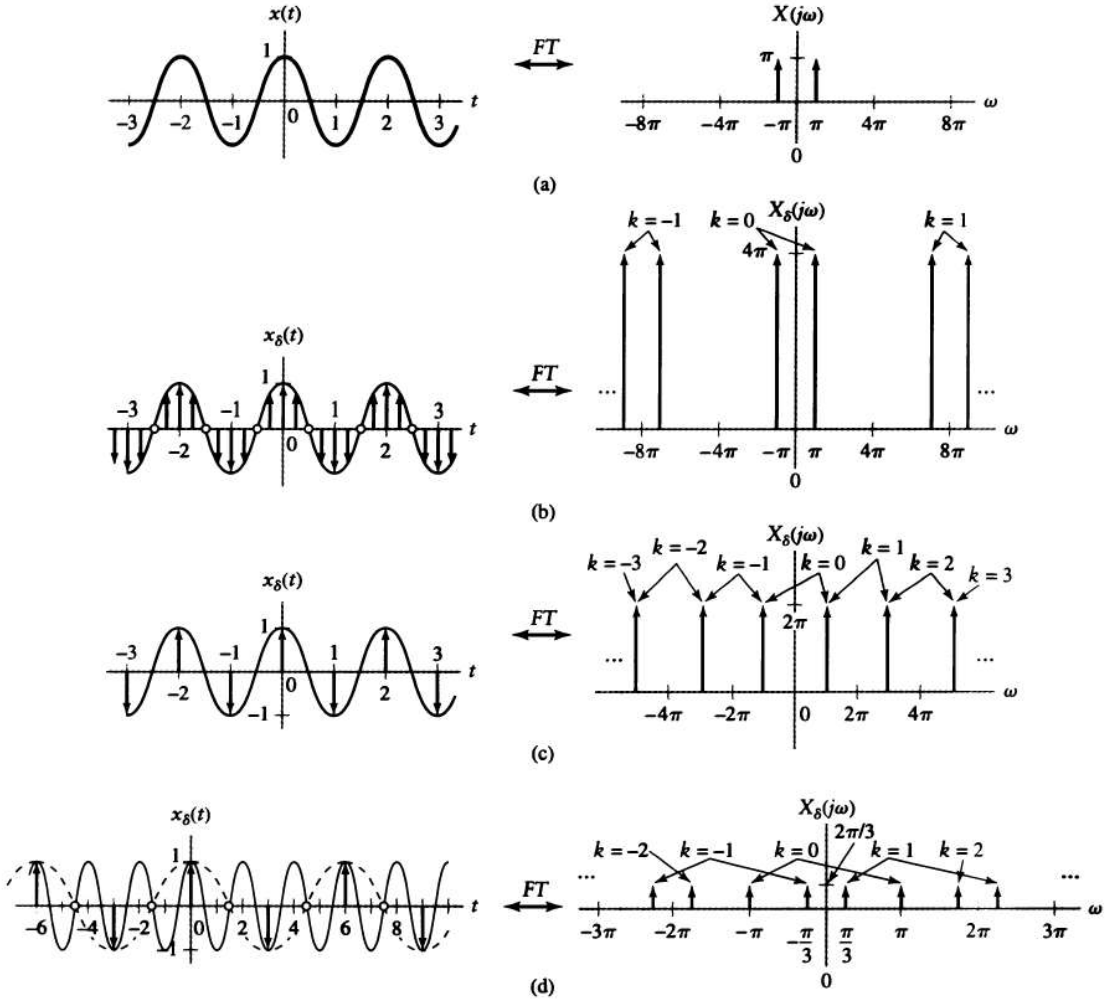
$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\cos \pi t] = \pi[\delta(w + \pi) + \pi\delta(w - \pi)]$$

وباستخدام العلاقة (6-7)يكون لدينا تحويل فوريه لـ $x_\delta(t)$ من الشكل:

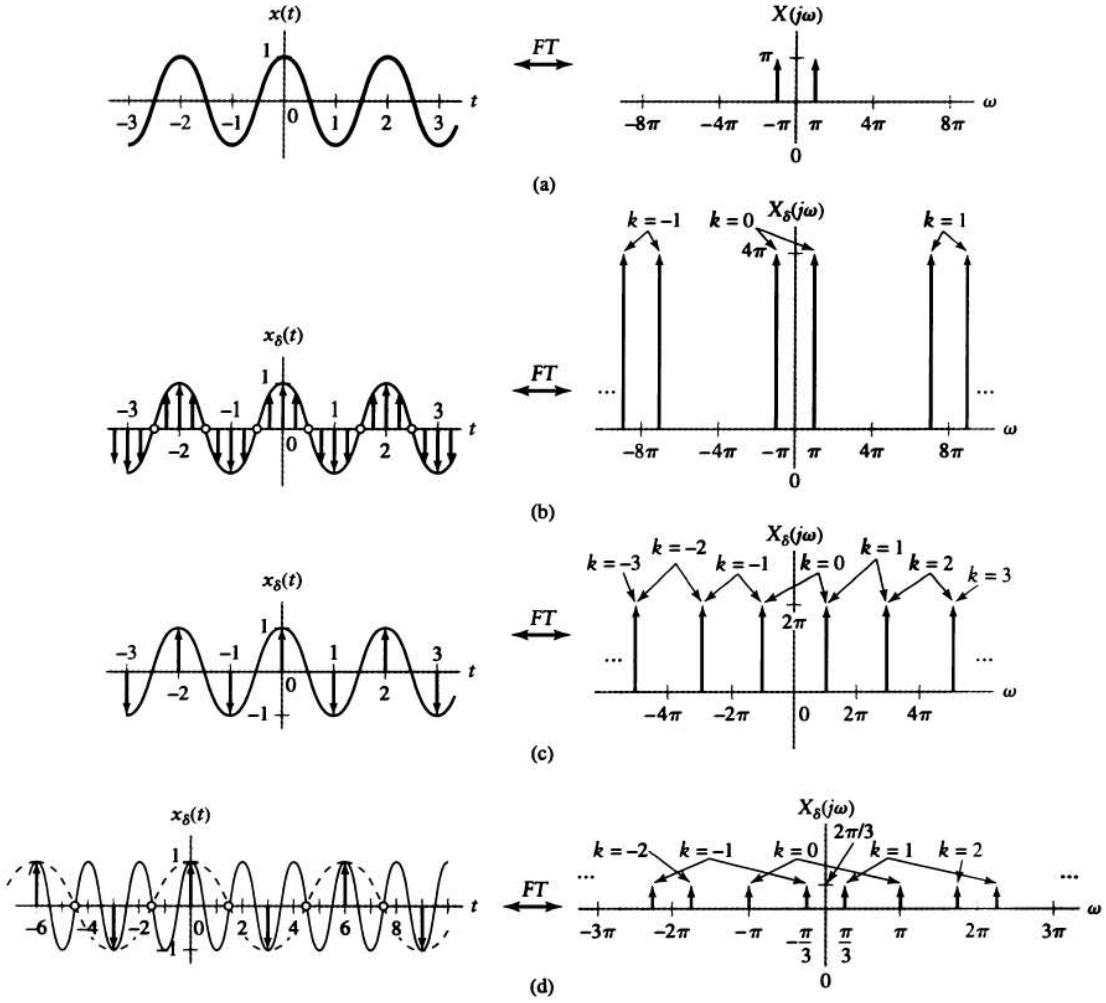
$$X_\delta(jw) = \frac{\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\,\delta(w + \pi - kw_s) + \delta(w - \pi - kw_s)]$$

من العلاقة السابقة نجد أن الطيف $X_\delta(jw)$ يتألف من أزواج نبضتي ديراك المسافة بين المركبتين في اي زوج هي 2π، والمسافة بين الأزواج هي مضاريب w_s.

عند $T_s = \frac{1}{4}$ فإن $w_s = 8\pi$ وعند $T_s = 1$ فإن $w_s = 2\pi$ وعند $T_s = \frac{3}{2}$ فإن $w_s = \frac{4\pi}{3}$. يوضح

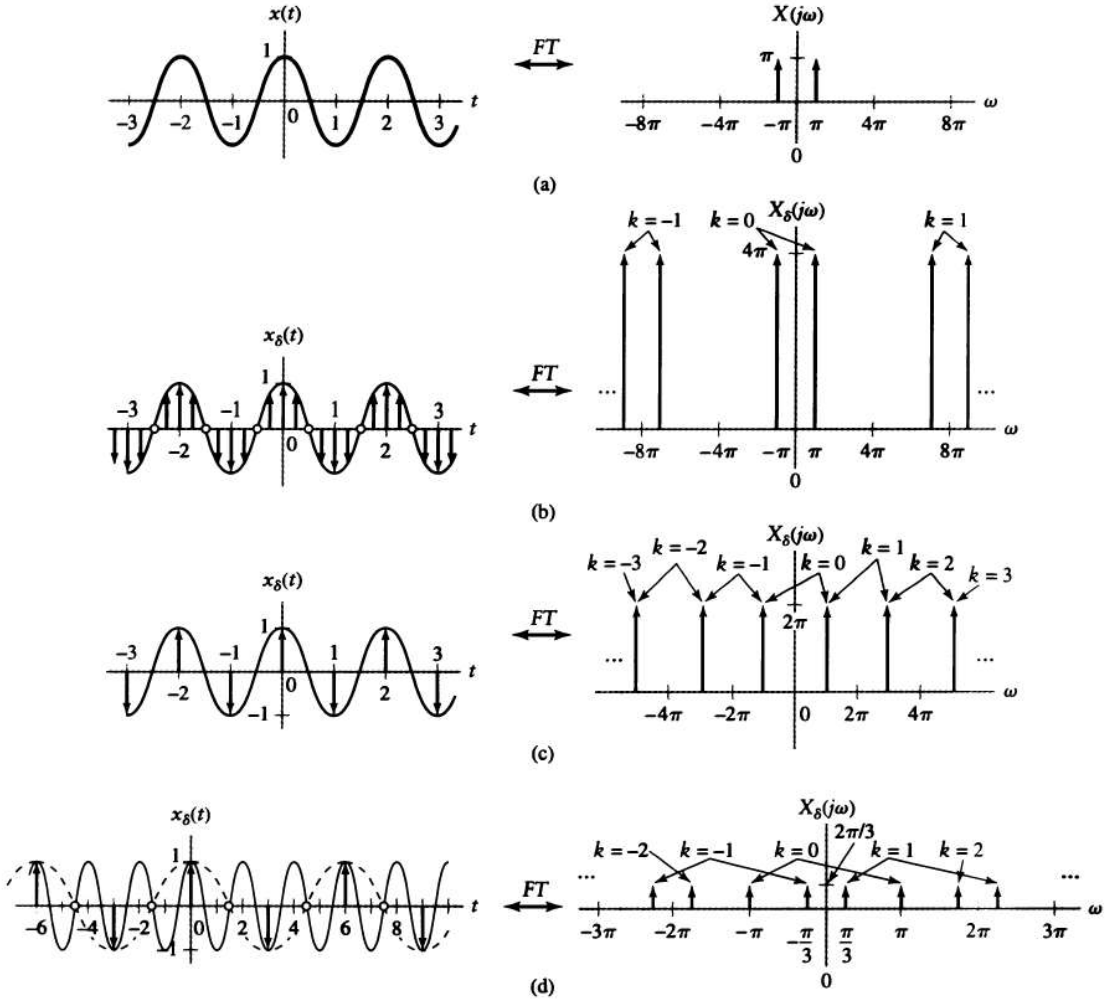


الشكل 3-6 $x_\delta(t)$ و $X_s(jw)$ من أجل القيم السابقة.

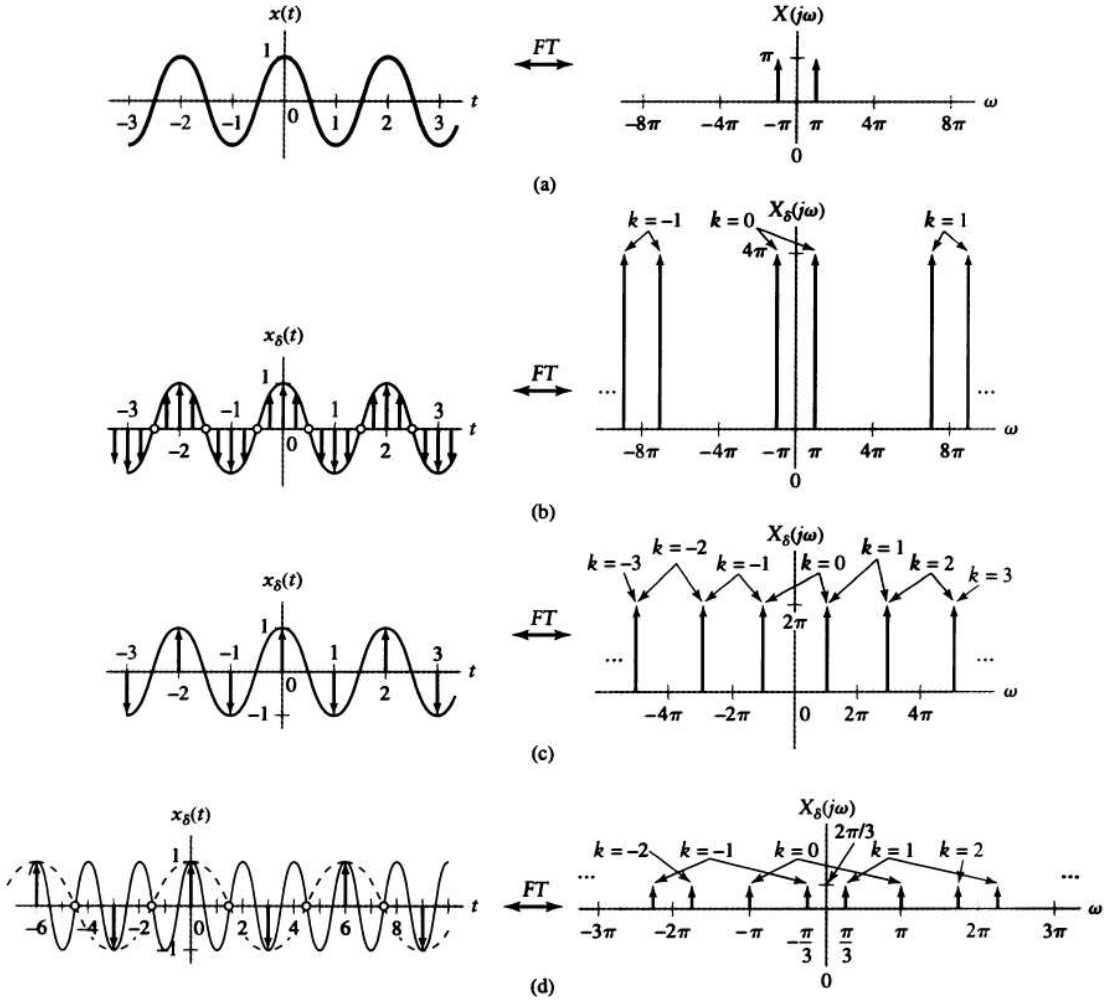


الشكل 3-6 (أ) الإشارة الأصلية $x(t)$ وطيفها $X(jw)$ (ب) $x_\delta(t)$ و $X_\delta(jw)$ من أجل $T_s = \frac{1}{4}$ (جـ) يبين $x_\delta(t)$ و $X_\delta(jw)$ عند $T_s = 1$ (د) يبين $X_\delta(t)$ عند $T_s = 3/2$.

لاحظ

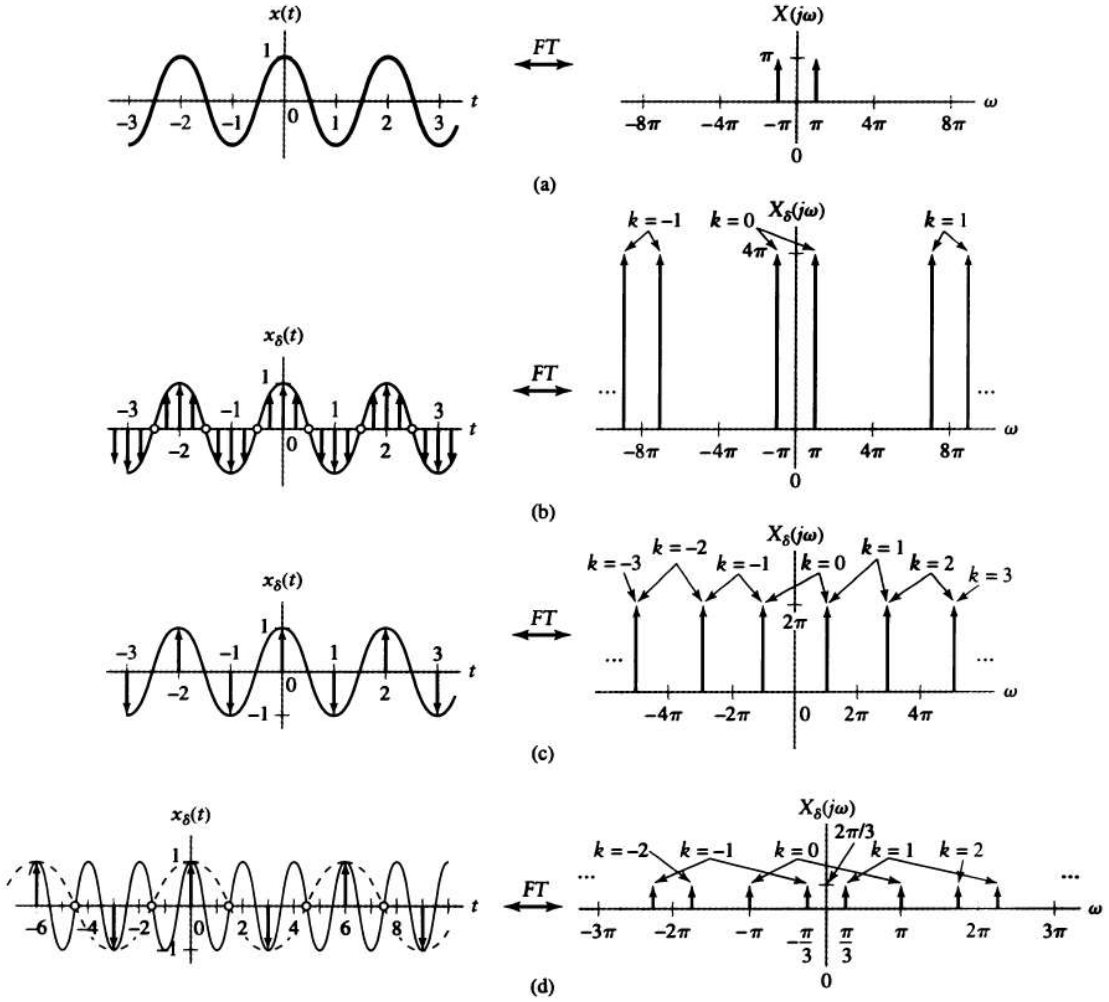

x(t)
X(jω)
FT
(a)
$x_\delta(t)$
$X_\delta(j\omega)$
FT
(b)
$x_\delta(t)$
$X_\delta(j\omega)$
FT
(c)
$x_\delta(t)$
$X_\delta(j\omega)$
FT
(d)

الشكل 6-3(ب) حيث عدد العينات في دور واحد $x_\delta(t)$ هي 8 والمسافة بين مراكز أي زوجين هي 8π. في



الشكل 6-3(ج) عدد العينات في الدور تساوي2 والمسافة بين أي زوجين متجاورين 2π. لاحظ الغموض هنا، حيث المركبة الترددية اليمنى لـ k متطابقة مع المركبة اليسرى لـ $k+1$ عند $k>0$، لاحظ التوزع (الترتيب) أيضاً

عند $k < 0$.في



الشكل 6-3(د) توجد عينة واحدة في كل دور ونصف، أي أن تردد أخذ العينات أقل من معدل نايكوست، وهذا ما سبب الانتحال (التداخل).في هذه الحالة لا يمكن استعادة الإشارة الأصلية.

تبين لنا حتى الآن، عند أخذ عينات الإشارة $x(t)$ بمعدل نايكوست $f_s \geq 2W$ أو أكبر فإنه يمكن توصيف الإشارة بشكل كامل عن طريق العينات المأخوذة. تم الحصول على ما سبق بنتيجة التحليل في المجال الترددي (العلاقة(6-6)). ما نود إجراؤه الآن هو ايجاد العلاقة بين الإشارة $x(t)$ وعيناتها x_k في المجال الزمني.

3.6 نظرية أخذ العينات

لتكن لدينا الإشارة العقدية التالية $e^{-j2\pi ft}$ بأخذ عينات كل T_s ثانية يكون لدينا $e^{-j2\pi fkT_s}$ (حيث $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ وبما أن $T_s = \frac{1}{2W}$ نحصل على التوابع القاعدية المتعامدة التالية:

$$\emptyset_k(f) = e^{-j\pi k\frac{f}{W}} \quad ; k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{8-6}$$

وبسبب وجود توافق واحد إلى واحد (الإزومورفية) بين المجال الزمني والترددي (تحويلات فوريه) فإنه يمكن الحصول على مجموعة كاملة من الإشارات القاعدية المتعامدة باستخدام تحويل فوريه العكسي، أي

$$\varphi_k(t) = \int_{-W}^{W} e^{-j\pi k\frac{f}{W}} e^{j2\pi ft}\, df$$

$$= \int_{-W}^{W} cos[2\pi f(t - kT_s)]\, df + j\int_{-W}^{W} sin[2\pi f(t - kT_s)]\, df \tag{9-6}$$

التكامل الثاني يساوي الصفر، أما التكامل الأول فيساوي:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi W(t - kT_s)}{\pi(t - kT_s)} \quad , k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{10-6}$$

لا تتأثر تعامدية التوابع القاعدية المتعامدة الكاملة complete orthogonal bases function إذا تم تقسيم كل تابع فيها على $2W$. وهكذا يمكن كتابة العلاقة بالشكل التالي:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi W(t - kT_s)}{2\pi W(t - kT_s)} \tag{11-6}$$

حيث $T_s = 1/2W$. يُسمى التابع السابق بتابع العينة. باستخدام (3-54) مع الأخذ بالحسبان أن التوابع $\varphi_k(t)$ هي توابع قاعدية متعامدة كاملة يكون لدينا:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{\sin 2\pi W(t - kT_s)}{2\pi W(t - kT_s)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, \varphi_k(t) \tag{12-6}$$

لإيجاد قيمة C_k نعتمد على خاصية التعامد، حيث عند $t = nT_s$ فإن كل حدود السلسلة السابقة تساوي الصفر عدا الحد $C_n\varphi_n$ وبما أن $\varphi_n = 1$ فإن $C_n = x(nT_s)$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على ما يلي:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin 2\pi W_0(t - kT_s)}{2\pi W_0(t - kT_s)} \tag{13-6}$$

وهكذا نكون قد برهنا النظرية الهامة التالية (نظرية أخذ العينات):

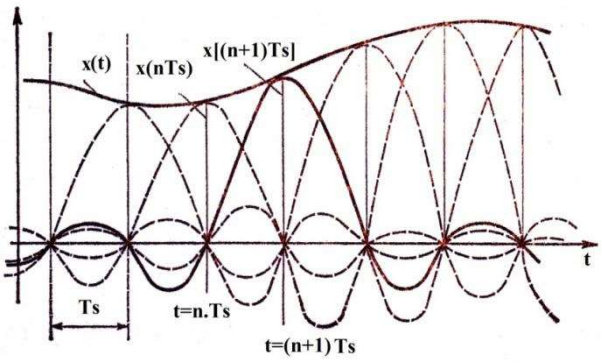
"يمكن استرجاع الإشارة $x(t)$ ذات المجال الترددي المحدد $(|X(f)| \equiv 0, |f| \geq W)$ بالاعتماد على عيناتها المأخوذة بدور $T_s \leq 1/2W$ حيث W أعلى مركبة ترددية في طيف الإشارة و $W_0 = \frac{1}{2T_s} \geq W$"

نورد بعض النقاط الهامة:

- تؤمن التوابع القاعدية المتعامدة الكاملة خطأ يصل إلى الصفر بين الإشارة الأصلية والمنشورة حسب العلاقة (13-6).
- النظرية السابقة هي عبارة عن جسر يربط بين الإشارة المستمرة $x(t)$ والإشارة المتقطعة $x(kT_s)$، وتستخدم هذه النظرية بشكل واسع في الاتصالات ومعالجة الإشارة.

يبين

الشكل 6-4 تمثيل للإشارة $x(t)$ عن طريق السلسلة (13-6).



الشكل 6-4 تمثيل الإشارة باستخدام نظرية أخذ العينات.

نلاحظ من

الشكل 6-4 أنه عندما يكون $t = nT_s$ فإن $\varphi_n(nT_s) = 1$ وأن $\varphi_n(kT_s) = 0$ حيث $k \neq n$.

مثال 6-3: لدينا نبضة مستطيلة بطول يساوي T وارتفاع يساوي الواحد. المطلوب إيجاد القيمة التقريبية للنبضة وذلك باستخدام السلسلة (13-6) وذلك بأخذ العينات:

(1) $t = 0, t = T$.

$.t = T\ , t = T/2, t = 0$ (2)

الحل:

(1) في هذه الحالة يتألف الطيف من كل المركبات الترددية حتى التردد $W = 1/2T$ وباستخدام العلاقة (13-6) نجد:

$$x(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} + \frac{\sin(\pi/T)(t-T)}{(\pi/T)(t-T)}$$

(2) في هذه الحالة فإن الطيف يحوي على كل المركبات الترددية حتى التردد $W = 1/T$ وباستخدام العلاقة (13-6) نجد:

$$x(t) = \frac{\sin(2\pi t/T)}{2\pi t/T} + \frac{\sin(2\pi/T)(t-T/2)}{(2\pi/T)(t-T/2)} + \frac{\sin(2\pi X/T)(t-T)}{(2\pi X/T)(t-T)}$$

من الطبيعي أنه كلما كانت عدد العينات أكثر كلما كان التقريب أفضل.

يمكن التعبير عن أي إشارة اختيارية $x(t)$ بالشكل التالي:

$$x(t) = x(t, W_0) + x_e(t) \qquad (14\text{-}6)$$

حيث $x(t, W_0)$ إشارة ذات مجال ترددي مُحدد W_0 التي يمكن استرجاعها بشكل وحيد من العينات $x(kT_s)$ و$x_e(t)$ إشارة الخطأ ذات المجال الترددي غير المحدود $f > W_0$. وبما أن طيفي الإشارتين $x(t, W_0)$ و $x_e(t)$ غير متقاطعين، فإن الإشارتين متعامدتان وبالتالي فإن:

$$\|x\|^2 = \left\|x_{W_0}\right\|^2 + \|x_e\|^2 \qquad (15\text{-}6)$$

وباستخدام نظرية رايلي للقدرة يكون لدينا:

$$\|x_e\| = \sqrt{2\int_{W_0}^{\infty} E_x(f)df} \qquad (16\text{-}6)$$

حيث $E_x(f)$ الكثافة الطيفية لاستطاعة الإشارة $x(t)$.

سوف نناقش الآن الحالة التالية: طول الإشارة T وعرض المجال الترددي للإشارة W_0. هذه الحالة غير ممكنة نظرياً وذلك لأن التابع ذا الطول المحدد يكون طيفه غير مُحدد. ولكن عملياً في كثير من الأحيان نهمل الذيول الطيفية

ذات القدرة المهملة بالنسبة لقدرة الإشارة الكلية. لذلك سوف نفرض الآن أنه لدينا إشارة $x(t)$ بطول T وعرض مجالها الترددي W_0. في هذه الحالة عدد المعاملات المستقلة (أي العينات $x(kT_s)$) اللازمة لتوصيف الإشارة يكون:

$$N = \frac{T}{T_s} = 2W_0T \tag{17-6}$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة السابقة واعتبار أن أول عينة في مبدأ الإحداثيات الزمنية، فإن العلاقة (13-6) تأخذ الشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{2W_0T} x(kT_s)\frac{\sin 2\pi W_0(t-kT_s)}{2\pi W_0(t-kT_s)} \tag{18-6}$$

تُسمى القيمة $N = 2W_0T$ درجة الحرية degree of freedom أو أساس الإشارة signal base.

نوجد الآن قدرة الإشارة $x(t)$ ومتوسط الاستطاعة. بما أن $\varphi_k(t)$ إشارات (توابع) متعامدة فيمكن التعبير عن قدرة الإشارة $x(t)$ بالشكل التالي:

$$E = \sum_{k=0}^{2W_0T} [x(kT_s)]^2 \left\|\varphi_k\right\|^2 \tag{19-6}$$

حيث

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_k\right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 2\pi W_0(t-kT_s)}{(2\pi W_0)^2(t-kT_s)^2}\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi W_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2\pi W_0} = T_s \end{aligned} \tag{20-6}$$

بتعويض (20-6) في (19-6) نحصل على:

$$E = T_s \sum_{k=0}^{2W_0T} [x(kT_s)]^2 \tag{21-6}$$

وبالتالي يمكن الحصول على متوسط الاستطاعة من العلاقة التالية:

$$P_{av} = \frac{E}{T} = \frac{T_s}{T}\sum_{k=0}^{2W_0T}[x(kT_s)]^2 = \frac{1}{2W_0T}\sum_{k=0}^{2W_0T}[x(kT_s)]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2W_0T}[x(kT_s)]^2 \quad (22\text{-}6)$$

4.6 الاعتبارات العملية في أخذ العينات

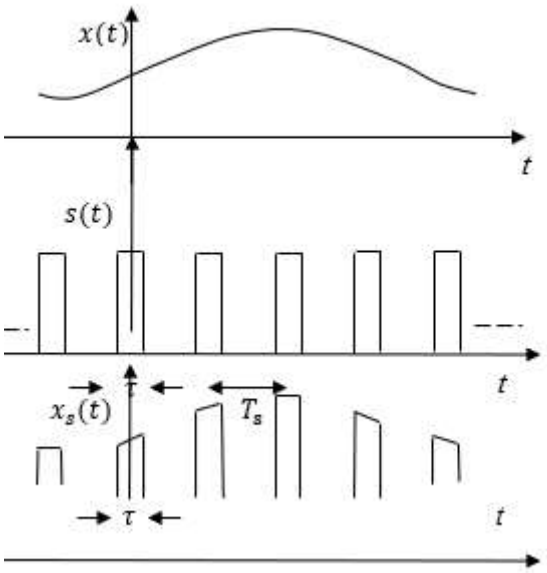
ناقشنا في نظرية أخذ العينات موضوعين: الأول إمكانية تمثيل الإشارة بالاعتماد على العينات المأخوذة، والموضع الثاني إمكانية استرجاع الإشارة بالاعتماد على العينات المأخوذة أيضاً، وذلك دون أي تشوه.

عملياً، تؤخذ العينات باستخدام نبضات ذات عرض τ وليس نبضات ديراك، كما هو الحال في نظرية أخذ العينات. لتوضيح ذلك سوف نستخدم تقنيتين، تسمى التقنية الأولى أخذ العينات بالتبديل switched sampling و تُسمى التقنية الثانية أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر zero order-hold sampling.

1.4.6 أخذ العينات بالتبديل

يوضح الشكل 6-5 أخذ العينات بالتبديل حيث يتم الاحتفاظ بالعينة لفترة عرض النبضة τ، وذلك باستخدام تابع أخذ العينات التالي:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right) \quad (23\text{-}6)$$



الشكل 6-5 أخذ العينات بالتبديل.

وهكذا فإننا نحصل على الإشارة المتقطعة التالية:

$$x_s(t) = x(t)s(t) \tag{24-6}$$

بأخذ تحويل فورييه لطرفي العلاقة السابقة نحصل على:

$$X_s(f) = X(f) * S(f) \tag{25-6}$$

كون الإشارة $s(t)$ دورية نستخدم سلسلة فورييه للحصول على $S(f)$، أي:

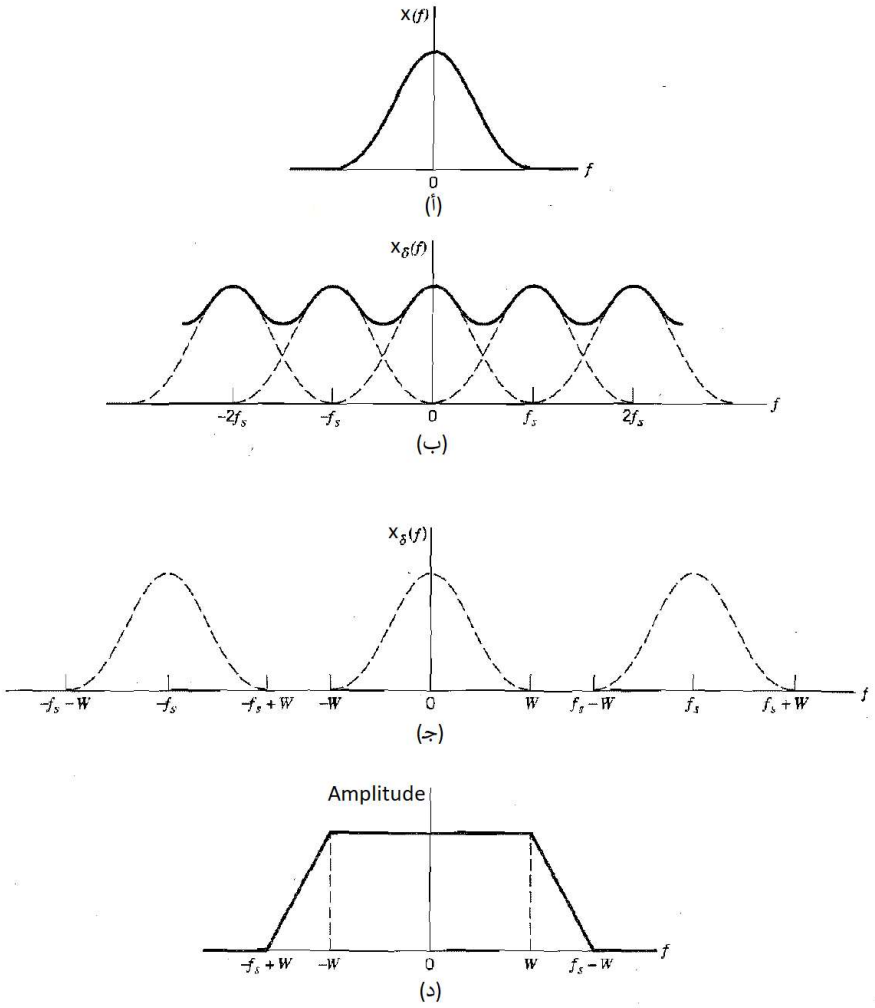
$$S(f) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \tag{26-6}$$

وبتعويض العلاقة السابقة (6-26) في (6-25) نحصل على $X_s(f)$، أي:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_s} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right) X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \tag{27-6}$$

نلاحظ من العلاقة السابقة تكرار لطيف الإشارة $x(t)$ بتردد $f_s = 1/T_s$ (انظر العلاقة(6-6)) ولكن بتقييس مختلف. هنا أيضاً يمكن استعادة الإشارة الأصلية $x(t)$ عندما يكون لدينا $1/T_s$ أكبر من ضعف المجال الترددي

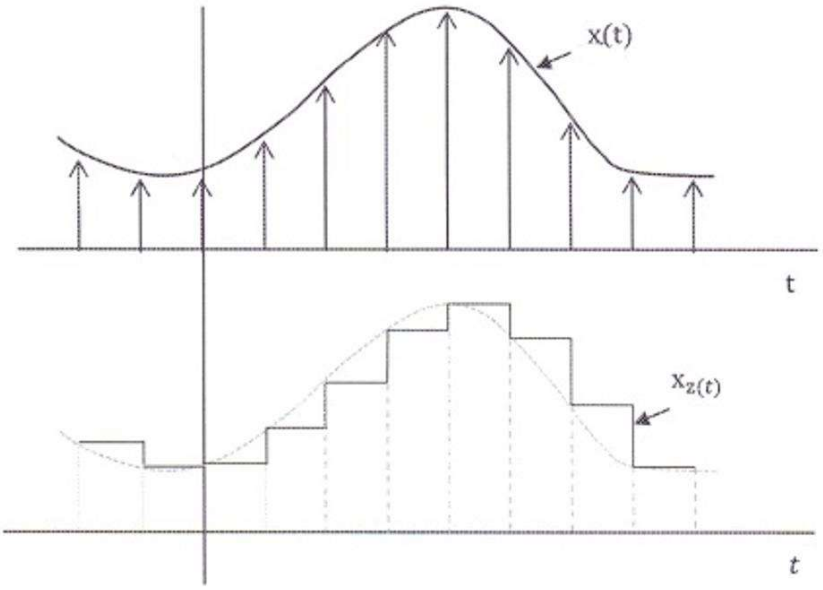
للإشارة $x(t)$، وذلك عن طريق مرشح، كما هو الحال في (



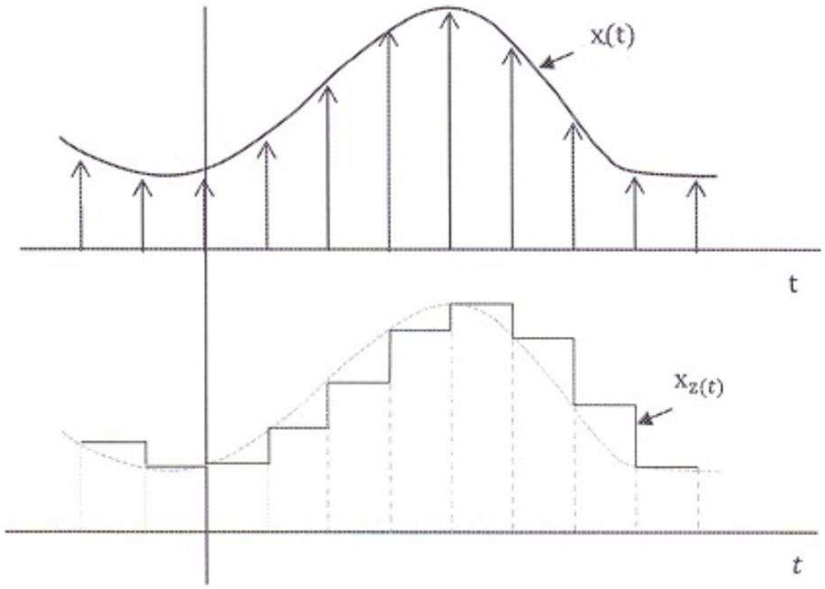
الشكل 6-2، د) (أي عند $n = 0$ في العلاقة (6-27).

2.4.6 أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر

تتلخص أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر (أي العينات ذات سطح ثابت)، بأخذ عينة باللحظة nT_s والإمساك بها (الاحتفاظ بها) حتى لحظة أخذ العينة التالية $(n+1)T_s$. يوضح



الشكل 6-6 تلك العملية:



الشكل 6-6 أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر.

حيث تأخذ العينات باستخدام نبضات ديراك مع مرشح ماسك من الرتبة صفر، أي المرشح ذو الاستجابة النبضية التالية:

$$h(t) = h_0(t) = \sqcap\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right) \tag{28-6}$$

بأخذ فوريه للعلاقة السابقة نحصل على الاستجابة الترددية التالية:

$$H_0(f) = T_s e^{-j\pi T_s f} sinc(T_s f) \tag{29-6}$$

نعلم أن خرج آخذ العينات في المجال الترددي . باستخدام نبضات ديراك هو (انظر العلاقة (6-6)):

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \tag{30-6}$$

بتمرير تلك الإشارة من خلال مرشح ذي الاستجابة الترددية $H_0(f)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} X_z(f) &= X_\delta(f)H_0(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi T_s f} sinc(T_s f) X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \end{aligned} \tag{31-6}$$

من أجل استعادة الإشارة الأصلية $X(.)$ يمكن استخدام مرشح ذي الاستجابة الترددية التالية:

$$H(f) = \frac{e^{j\pi T_s f}}{sinc(T_s f)} \sqcap \left(\frac{f}{2W}\right)$$

وعندما يكون $fT_s \ll 1$ فإن $sinc(fT_s) \cong 1$ ومن ثم فإنه يمكن استعادة الإشارة بدقة جيدة باستخدام مرشح قريب من مرشح مثالي.

في كلا التقنيتين السابقتين، يمكن التقليل من تشوه الإشارة المسترجعة بزيادة تردد أخذ العينات أو باستخدام مرشح معوض.

مسائل الفصل السادس

6-1- لدينا نبضة مستطيلة بطول $T = 2ms$ ومطال يساوي الواحد. تم تقطيعها بدور ثابت والحصول على عشرة نبضات كل منها بعرض $5\mu s$ المطلوب إيجاد طيف الإشارة المقطعة.

6-2- أوجد العلاقة التي توصّف الإشارة $x(t)$ المستعادة من التتابعية $\{x_k\} = \{1\ ,0, -1\ ,0\}$

6-3- بفرض معدل نايكوست للإشارة $x(t)$ هو w_0. المطلوب إيجاد تردد تقطيع نايكوست للإشارات التالية:

$$x(t) + x(t-1);\ \frac{dx(t)}{dt};\ \ x^2(t);\ x(t)cosw_0t$$

6-4- لدينا الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n}$$

المطلوب إيجاد تحويل فورييه $X_\delta(jw)$ بفرض دور أخذ العينات $T_s = 2$ و $T_s = \frac{1}{4}$.

6-5- لدينا الإشارتين التاليتين:

$$x(t) = \frac{1}{t}\sin(3\pi t) + cos(2\pi t)$$

$$\mathrm{x(t)} = \cos(12\pi\mathrm{t})\frac{\sin \pi\mathrm{t}}{2\mathrm{t}}$$

تم تقطيع الإشارتين السابقتين بدور T_s. المطلوب إيجاد حدود T_s التي تضمن عدم حدوث الانتحال (التداخل).

6-6- لدينا الإشارة التالية:

$$y(t) = x(t)w(t)$$

حيث $|X(jw)| = 0$ في المجال $|w| > w_m$، و $w(t)$ موجة مربعة بدور T.

المطلوب: أوجد القيمة العظمى لـ T بحيث يمكن استعادة $x(t)$ من $y(t)$ وارسم المخطط الوظيفي لنظام الاستعادة.

6-7- لدينا التابع (الإشارة)التالي:

$$y(t) = x(t)[\cos(3\pi t) + \sin(10\pi t)]$$

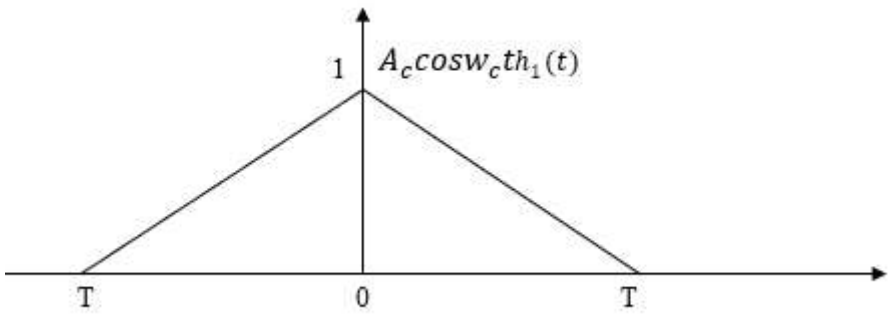
حيث $|X(jw)| = 0$ في المجال $|w| > w_m$:

المطلوب: أوجد القيمة العظمى لـ w_m بحيث يمكن استعادة $x(t)$ من $y(t)$ وارسم المخطط الوظيفي لنظام الاستعادة.

6-8- تستخدم تقنية أخذ العينات بالماسك من الرتبة صفر مع دور أخذ العينات T_s لتوليد الإشارة $x_0(t)$ من الإشارة $x(t)$ بالإضافة لذلك لدينا الإشارة $x_1(t)$ الناتجة من العلاقة التالية:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\,(nT)h_1(t - nT)$$

حيث $h_1(t)$ مبينة بالشكل 6-7. وصّف الاستجابة الترددية للمرشح الذي يُعطي على خرجه $x_1(t)$ بفرض الدخل هو $x_0(t)$.



الشكل 6-7 التمرين 6-8.

7 إشارات ونظم حزمة التمرير والإشارة التحليلية وتحويل هيلبرت

Pass band signal and system, analytic signal and Hilbert transform

1.7 مقدمة

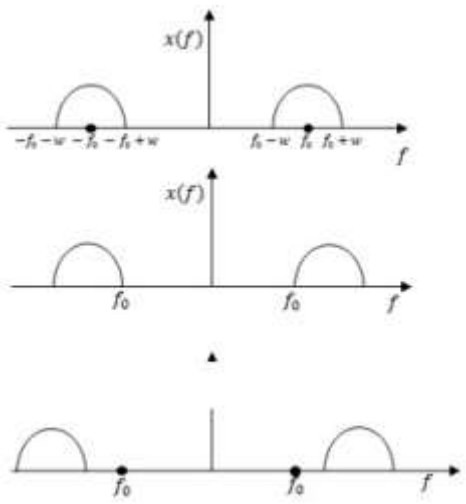
إشارة حزمة التمرير أو الإشارة ذات الحزمة الضيقة $x(t)$، هي عبارة عن إشارة طيفها $X(f)$ لايساوي الصفر بالقرب أو حول تردد مرتفع f_0 أي $X(f) \equiv 0$ عند $|f \pm f_0| \geq W$ حيث $f_0 > W$، W عرض المجال الترددي للإشارة $x(t)$. يبين الشكل 7-1 أمثلة عن إشارات حزمة التمرير. والصنف الأكبر من إشارة حزمة التمرير هي الإشارات المعدّلة. سوف نركز هنا نسبياً على إشارات حزمة التمرير ذات القيم الحقيقية. لتكن لدينا الإشارة:

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

للتبسيط في عملية التحليل سوف ندخل مفهوم المطوار phasor الذي يُعرف بالشكل التالي:

$$X = Ae^{j\varphi}$$

من العلاقة السابقة نلاحظ أن المطوار يحوي معلومات عن مطال وطور الإشارة $x(t)$ ولا يحوي أي معلومة عن تردد الإشارة $x(t)$.



الشكل 7-1 إشارات حزمة التمرير.

لإيجاد مِطوار الخرج لنظام خطي غير متغير مع الزمن، نُؤثر على دخله إشارة جيبية، يكفي ضرب مطوار إشارة الدخل بالاستجابة الترددية للنظام محسوبة عند تردد الدخل. ومن مطوار الخرج يمكن بسهولة ايجاد إشارة الخرج. وذلك كما هو واضح في المثال التالي.

مثال 7-1: لدينا نظام متغير مع الزمن استجابته الترددية $H(f)$، وتُؤثر عليه الإشارة الجيبية التالية:

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

المطلوب إيجاد إشارة الخرج للنظام المذكور.

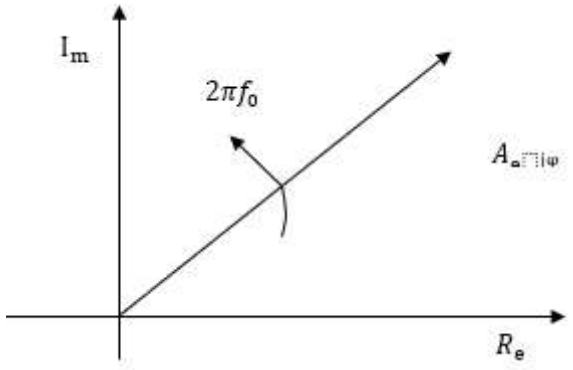
الحل: نوجد مطوار الخرج

$$Ae^{j\varphi}|H(f_0)|e^{j\angle H(f_0)} = A|H(f_0)|e^{j(\varphi+\angle H(f_0))}$$

ومنه فإن إشارة الخرج عند التردد f_0 تكون:

$$y_0(t) = A|H(f_0)|cos[2\pi f_0 t + \varphi + \angle H(f_0)]$$

يوضح الشكل 7-2 مطوار للإشارة $x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \varphi)$.



الشكل 7-2 مطوار للإشارة $x(t)$ والنموذج الرياضي لإشارة حزمة التمرير.

2.7 الغلاف العقدي والنماذج الرياضية لإشارة حزمة التمرير

تعلم أن أي إشارة فيزيائية يمكن تمثيلها باستخدام التوابع المتعامدة المعيرة $\emptyset_{n(t)}$ أي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \emptyset_{n(t)} \qquad (1\text{-}7)$$

وباستخدام التوابع المتعامدة المعيرة الأسية (أي سلسلة فورية العقدية)، تصبح العلاقة السابقة من الشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0 t} \ , w_0 = 2\pi/T_0 \tag{2-7}$$

وبما أن الإشارة الفيزيائية هي إشارة حقيقية فإن $c_n = c_n^*$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$x(t) = Re\{C_o + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t}\} \tag{3-7}$$

بإدخال تردد اختياري f_c (w_c) في العلاقة السابقة يكون لدينا:

$$\begin{aligned} x(t) &= Re\{(C_0 e^{-jw_c t} + 2\sum_{n-1}^{\infty} C_n e^{j(nw_0 - w_c)t}) e^{jw_c t}\} \\ &= Re\{\tilde{x}(t) e^{jw_c t}\} \end{aligned} \tag{4-7}$$

تعرف $\tilde{x}(t)$ بأنها الغلاف العقدي complex envelop لإشارة حزمة التمرير $x(t)$. من العلاقة السابقة يكون لدينا:

$$\tilde{x}(t) = C_0 e^{-jw_c t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j(nw_0 - w_c)t} \tag{5-7}$$

بما أن الإشارة $x(t)$ هي إشارة حزمة التمرير لها مركبات غير صغرية حول $f = f_c$ فإن معاملات فورييه C_n لا تساوي الصفر فقط من أجل n في المجال $\pm nf_0 \cong f_c$. هذا يعني أن $\tilde{x}(t)$ لها مركبات غير صفرية مركزة عند $f = 0$ أي أن $\tilde{x}(t)$ هي إشارة حزمة قاعدية base band.

يتضح من العلاقة (5-7) أن $\tilde{x}(t)$ في الحالة العامة هي إشارة عقدية. وبالتالي يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \tag{6-7}$$

حيث $x_I(t)$ المركبة المتوافقة مع الطور in-phase و $x_Q(t)$ المركبة المتعامدة مع الطور quadrature phase بتعويض (6-7) في (4-7) نحصل على العلاقة التالية:

$$x(t) = Re\left\{\left(x_I(t) + jx_Q(t)\right) e^{j2\pi f_c t}\right\};\ w_c = 2\pi f_c \tag{7-7}$$

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{8-7}$$

الشكل العام لإشارة حزمة التمرير ذات التردد f_c والطور $\theta(t)$ والغلاف $e(t)$، هو التالي:

$$x(t) = e(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \\ = e(t)\cos(\theta(t))\cos(2\pi f_c t) \\ - e(t)\sin(\theta(t))\sin(2\pi f_c t) \quad (9\text{-}7)$$

حيث $e(t)$ الغلاف الفيزيائي physical envelop. والآن سوف نوجد العلاقات بين المكونات المختلفة $x(t),\ e(t),\ \theta(t),\ \tilde{x}(t),\ x_I(t),\ x_Q(t)$، بمقارنة العلاقة (8-7) مع العلاقة (9-7) نحصل على:

$$x_I(t) = e(t)\cos(\theta(t)) \\ x_Q(t) = e(t)\sin(\theta(t)) \quad (10\text{-}7)$$

من العلاقة السابقة والعلاقة (6-7) نجد:

$$e(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} = |\tilde{x}(t)| \quad (11\text{-}7)$$

$$\theta(t) = arctan\frac{x_Q(t)}{x_I(t)} = \angle\tilde{x}(t) \quad (12\text{-}7)$$

من العلاقة (6-7) والعلاقة (10-7) نحصل على العلاقة التالية:

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \\ = e(t)\cos(\theta(t)) + je(t)\sin(\theta(t)) = e(t)e^{J\theta(t)} \quad (13\text{-}7)$$

وبالتعويض في (7–7) نجد :

$$x(t) = Re\{[e(t)e^{j\theta(t)}]e^{j2\pi f_c t}\} \quad (14\text{-}7)$$

3.7 الاستثمار الهندسي لبعض النماذج الرياضية لإشارة حزمة التمرير

نعود الآن لاستثمار بعض النماذج الرياضية في التطبيقات الهندسية.الإشارة $e(t)$ كما رأينا سابقاً تسمى الغلاف الفيزيائي (أو اختصاراً الغلاف)، وهي عبارة عن تابع غير سالب للزمن t. الطور $\theta(t)$ ذو تغيير بطيء نسبياً مع الزمن لإشارة حزمة التمرير. إشارة حزمة التمرير غالباً ضيقة نسبياً، بمعنى أن التردد الحامل f_c أكبر من عرض المجال بعشرة مرات تقريباً. الكميتان السابقتان مرتبطتان مع بعض في عدد من العلاقات، لنأخذ على سبيل المثال العلاقة (10-7).

تجدر الملاحظة هنا أن المعلومات عملياً تُحمل على إحدى معاملات الإشارة الجيبية: المطال أو الطور أو التردد أو تركيبة مختلطة من المعاملات السابقة.

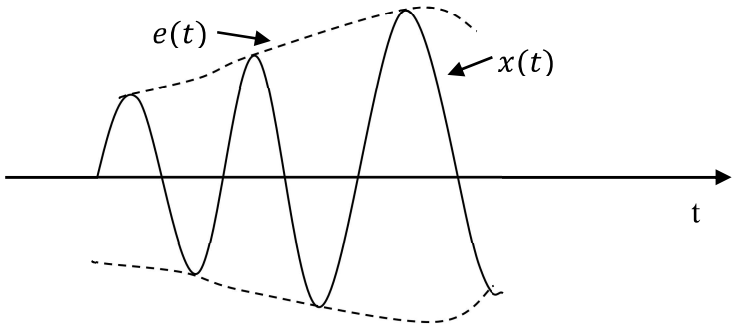
بالعودة للعلاقة (10-7) نلاحظ أن المعلومات يمكن أن تُحمل على المطال $e(t)$ أو الطور $\theta(t)$ أو كليهما. هذا يعني أن كلا الإشارتين $x_I(t)$ أو $x_Q(t)$ هي إشارات حاملة للمعلومات. نلاحظ من العلاقة (9-7) أن:

$$|x(t)| \leq e(t) \tag{15-7}$$

أي أن الغلاف أكبر من أو يساوي طويلة magnitude الإشارة في أي لحظة والمساواة تتحقق عندما يكون $\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] = 1$. وتجدر الملاحظة هنا أنه في تلك اللحظة فإن مشتق الإشارة $\acute{x}(t)$ يساوي مشتق الغلاف $\acute{e}(t)$ وذلك حسب العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \acute{x}(t) &= \acute{e}(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \\ &-\left[2\pi f_c + \acute{\theta}(t)\right]e(t)\sin[2\pi f_c t + \theta(t)] \end{aligned} \tag{16-7}$$

يوضح الشكل 7-3 كل من الإشارة $x(t)$ والغلاف $e(t)$. لاحظ تحقق العلاقتين (15-7)، (16-7).



الشكل 7-3 الإشارة $x(t)$ وغلافها $e(t)$.

وهو عبارة عن تعديل مطالي amplitude modulation حيث إشارة المعلومات مُحمَّلة على مطال الإشارة $x(t)$.

تبين العلاقة (9-7) أن الطور الكلي للإشارة $x(t)$ هو:

$$\psi(t) = 2\pi f_c t + \theta(t) = w_c t + \theta(t) \tag{17-7}$$

في التعديل الطوري phase modulation تُحمَّل الإشارة الحاملة للمعلومات $m(t)$ على الطور، أي:

$$\theta(t) = k_P m(t)$$
$$\psi(t) = 2\pi f_c t + k_P m(t) \quad (18\text{-}7)$$

حيث k_P معامل التعديل الطوري.

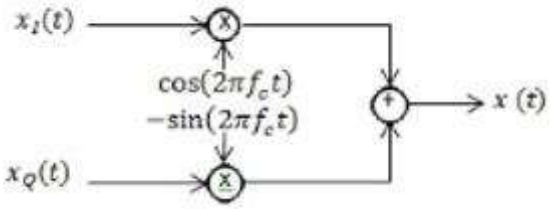
وفي التعديل الترددي frequency modulation، تُحمل الإشارة الحاملة للمعلومات $w(t)$ على التردد الخطي أي:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = w_c + \frac{d\theta(t)}{dt} = w(t)$$
$$w(t) = w_c + \frac{d}{dt} arctan \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \quad (19\text{-}7)$$

باستخدام العلاقة (8-7) يمكن أن نقوم بما يُسمى بالتعديل الترابعي quadrature modulation للحصول على الإشارة $x(t)$ (الإشارة المعدلة)

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

واضح أن المعلومات مُحملة على كل من الإشارتين $x_I(t)$ و $x_Q(t)$ (إشارات الحزمة القاعدية). بالاعتماد على العلاقة السابقة يمكن تكوين المخطط الوظيفي للمعدل، وذلك كما هو واضح في الشكل 7-4.

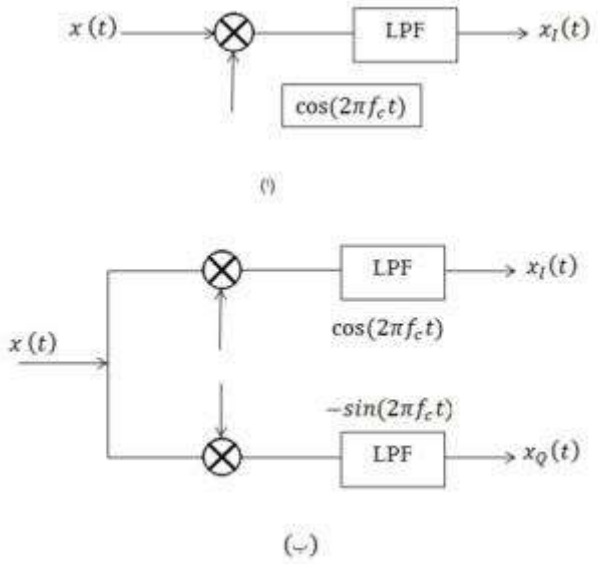


الشكل 7-4 المعدل الترابعي.

في طرف الاستقبال نحن بحاجة لاستعادة المعلومات، أي استعادة الإشارتين $x_I(t)$ و$x_Q(t)$ وهذا يعني كشف التعديل الترابعي. لإجراء ذلك نقوم في البداية بضرب العلاقة (8-7) بـ $cos(2\pi f_c t)$ لنحصل على العبارة التالية:

$$x_I(t)cos^2(2\pi f_c t) - \frac{1}{2}x_Q(t)\sin(4\pi f_c t)$$
$$= \frac{x_I(t)}{2} + \frac{x_I(t)}{2}\cos(4\pi f_c t) - \frac{x_Q(t)}{2}\sin(4\pi f_c t)$$

يمكن التخلص من الحد الثاني والحد الثالث باستخدام مرشح تمرير منخفض (LPF)، وهكذا نحصل على $x_I(t)$ كما هو واضح في الشكل 7-5، (أ).وللحصول على $x_Q(t)$ نقوم بنفس الإجرائية السابقة وذلك بضرب العلاقة (7-8) بـ $-\sin(2\pi f_c t)$ بدلا من $\cos(2\pi f_c t)$. وهكذا نحصل على كاشف التعديل المبين بالشكل 7-5، (ب).



الشكل 7-5 (أ) الحصول على $x_I(t)$ (ب) كاشف التعديل الترابعي.

في أي وصلة link اتصالات (مرسل وقناة ومستقبل) بسبب عدم ثبات تردد المهز oscillator في طرف الارسال وكذلك تردد المهتز في طرف الاستقبال فإن تردد الحامل سوف يتغير بالمقدار $\pm\Delta f_c$ أي يُصبح التردد (تردد الحامل) في طرف الاستقبال $f_c \mp \Delta f_c$. وهذا يمنع المستقبل من استقبال الإشارة ذات الشكل التالي:

$$x(t) = Re[\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t \mp J2\pi\Delta f_c t}]$$

وحتى يتمكن المستقبل من استقبال الإشارة، تقوم دارة التزامن synchronization بتصحيح التردد. وذلك بضرب الغلاف العقدي المستقبل $\tilde{x}(t)e^{\mp j2\pi\Delta f_c t}$ بـ $e^{\pm j2\pi\Delta f_c t}$ وذلك بعد تقدير estimation الانزياح الترددي $\mp\Delta f_c$.

سوف نوجد العلاقة بين طيف إشارة حزمة التمرير (تمرير الحزمة) $x(f)$ وطيف إشارة الغلاف العقدي $\tilde{x}(f)$، بالأخذ بالحسبان العلاقة (7-13) و (7-14) نوجد تحويل فوريه لـ $x(t)$ أي $X(f)$. للتبسيط سوف نتعامل مع $w = 2\pi ft$. وهكذا يكون لدينا:

$$
\begin{aligned}
X(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} Re[\tilde{x}(t)\exp(jw_0t)]\exp(-jwt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\exp[-j(w-w_0)t]\,dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\exp[-j(w+w_0)t]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\tilde{X}(w-w_0) + \frac{1}{2}\tilde{X}(w+w_0)
\end{aligned}
\qquad (20\text{-}7)
$$

من العلاقة السابقة يمكن ببساطة أن نجد طيف إشارة حزمة التمرير $X(w)$.وكذلك يمكننا إيجاد $\tilde{X}(w)$ بمعرفة $X(w)$ ومن ثم يمكن إيجاد الغلاف الفيزيائي والتردد اللحظي أي إيجاد الإشارة $x(t)$.وذلك كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 7-2: المطلوب تحليل إشارة حزمة التمرير ذات الطيف الموجب التالي:

$$
X(w)|w>0 = \begin{cases} \frac{X_0}{2}\exp[-b(w-w_0)] & ; \quad w > w_0 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}
$$

الحل: باستخدام العلاقة (20-7) نوجد طيف الغلاف العقدي، أي:

$$
\tilde{X}(w) = \begin{cases} X_0\exp(-bw) & w > 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}
$$

وباستخدام تحويل فوريه العكسي نوجد الغلاف العقدي $\tilde{x}(t)$، أي:

$$
\tilde{x}(t) = \frac{X_0}{2\pi}\int_0^{\infty} \exp[(-b+jt)\,w]\,dw = \frac{X_0}{2\pi}[\frac{1}{b-jt}]
$$

وببساطة نجد المركبة المتفقة مع الطور والمركبة المتعامدة معه، أي:

$$
x_I(t) = \frac{X_0}{2\pi}\frac{b}{b^2+t^2}
$$

$$
x_Q(t) = \frac{X_0}{2\pi}\frac{t}{b^2+t^2}
$$

من الغلاف العقدي نوجد الغلاف الفيزيائي:

$$
e(t) = |\tilde{x}(t)| = \frac{X_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}}
$$

والتردد اللحظي يكون:

$$w(t) = w_0 + \frac{d}{dt} arctan \frac{t}{b}$$

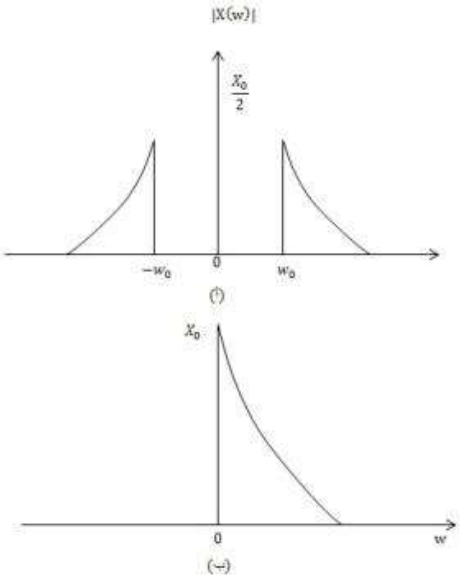
$$= w_0 + \frac{b}{b^2 + t^2}$$

نحصل على التردد اللحظي الأعظمي عند $t = 0$ أي: $w_0 + \frac{1}{b}$.

من الغلاف الفيزيائي والتردد اللحظي نحصل على الإشارة $x(t)$. يوضح الشكل 7-6، (أ) طيف الإشارة $x(t)$

و

الشكل 7-6، (ب) ويوضح طيف الغلاف العقدي للإشارة $x(t)$.



الشكل 7-6 (أ) طيف الإشارة $x(t)$ (ب) طيف الغلاف العقدي.

سوف نتطرق الآن لإشارة حزمة التمرير العقدية complex pass band signal، والتي يمكن التعبير عنها باستخدام العلاقة (7-4) وذلك بأخذ كل من الجزء الحقيقي والتخيلي، أي:

$$x_A(t) = \tilde{x}(t) e^{J2\pi f_0 t}$$

$$= [x_I(t) + jx_Q(t)](cos2\pi f_0 t + jsin2\pi f_0 t)$$
$$= x_I(t)cos2\pi f_0 t - x_Q(t)sin2\pi f_0 t)] +$$
$$+j[x_I(t)sin2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t)]$$
$$= x(t) + j\hat{x}(t)$$

حيث $\hat{x}(t)$ تحويل هيلبرت Hilbert للإشارة $x(t)$ وسوف نسمي الإشارة $x_A(t)$ بالإشارة التحليلية العقدية complex analytic signal، وللاختصار سوف نسميها بالإشارة التحليلية analytic signal.في الفقرة القادمة سوف نقوم بدراسة كل من الإشارة التحليلية وتحويل هيلبرت.

4.7 الإشارة التحليلية وتحويل هيلبرت

1.4.7 الإشارة التحليلية

يمكننا التعبير عن إشارة جيبية باستخدام علاقة أويلر Euler، أي:

$$coswt = [\exp(jw) + \exp(-jw)]/2$$

هذا يعني أن الموجة الجيبية يمكن تمثيلها، باستخدام تابعين عقديين أحداهما مرافق للآخر. وبالتالي أي إشارة اختيارية $x(t)$ ذات طيف ترددي معلوم $X(w)$ يمكن تحديدها بشكل وحيد عن طريق مجموع مركبتين إحداهما تحوي تردداً موجباً والأخرى تحوي تردداً سالباً. وحسب فوريه يكون لدينا:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\exp(jwt)\,dw$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} X(w)\exp(jwt)\,dw + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} X(w)\exp(jwt)\,dw \qquad (21\text{-}7)$$

والآن ليكن لدينا التابع التالي:

$$x_A(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(w)\exp(jwt)\,dw \qquad (22\text{-}7)$$

نسمي التابع السابق بالإشارة التحليلية الموافقة للإشارة الحقيقية $x(t)$.

سوف نقوم الآن بتغيير المتحول أي $\Omega = -w$ عند ذلك فإن التكامل الأول في العلاقة (7-22) يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} X(w)\exp(jwt)\,dw = -\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} X(-\Omega)\exp(-j\Omega t)\,d\Omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} X(-\Omega)\exp(-j\Omega t)\,d\Omega = \frac{1}{2}x_A^*(t) \qquad (23\text{-}7)$$

من العلاقة (7-22) و(7-22) والعلاقة (7-23) يمكننا الحصول على:

$$x(t) = [x_A(t) + x_A^*(t)]/2$$

أو بشكل مكافئ:

$$x(t) = R_e[x_A(t)] \qquad (24\text{-}7)$$

أما الجزء التخيلي للإشارة التحليلية فيساوي:

$$\hat{x}(t) = I_m[x_A(t)] \qquad (25\text{-}7)$$

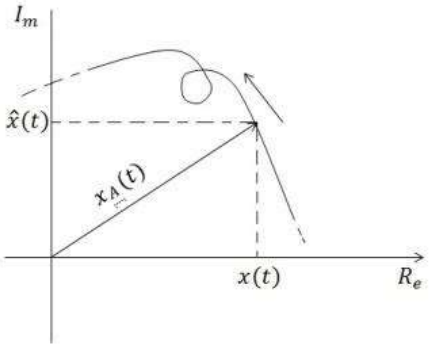
وهي الإشارة الموافقة للإشارة الأصلية $x(t)$. وهكذا نحصل على الإشارة التحليلية.

$$x_A(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \qquad (26\text{-}7)$$

يوضح

الشكل 7-7 الإشارة التحليلية في المستوى العقدي، عبارة عن مطوار يدور بعكس عقارب الساعة مسقطة على المحور الحقيقي يمثل الإشارة $x(t)$ ومسقطة على المحور التخيلي يمثل الإشارة $\hat{x}(t)$. طويلة وطور المطوار يتغيران مع الزمن.

لا يُعطي إدخال مفهوم الإشارة التحليلية أي معلومات إضافية زيادة عن الإشارة الأصلية $x(t)$، أي المعلومات الموجودة في النموذج الرياضي للإشارة الأصلية $x(t)$. غير أن استخدام الإشارة التحليلية يسهل عملية التحليل الرياضية في كثير من الأحوال. وسوف نبين في المثال التالي، كيف يمكن الحصول على الإشارة التحليلية من معرفة طيف الإشارة الأصلية.



الشكل 7-7 الإشارة التحليلية في المستوى العقدي.

مثال 7-3: لدينا إشارة $\boldsymbol{x(t)}$ ذات الطيف التالي:

$$X(w) = \begin{cases} 0 & w < -w_H \\ X_0 & -w_H \leq w \leq w_H \\ 0 & w > w_H \end{cases}$$

المطلوب إيجاد الإشارة التحليلية $x_A(t)$.

الحل: نعلم أن الإشارة التحليلية تُعطي بالعلاقة التالية:

$$x_A(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} X(w)\exp(jwt)\,dw$$

وبالتعويض بـ $X(w)$ يكون لدينا:

$$x_A(t) = \frac{X_0}{\pi}\int_0^{w_H} \exp(jwt)\,dw$$

$$= \frac{X_0}{j\pi t}[\exp(jw_H t) - 1]$$

وهكذا فإن الجزء الحقيقي $x(t)$ يكون :

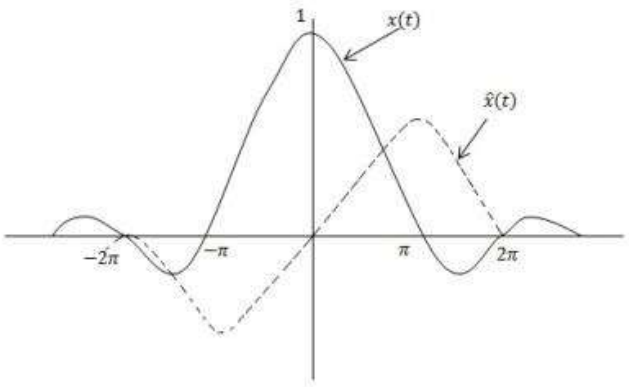
$$x(t) = \frac{X_0 w_H}{\pi}\frac{sinw_H t}{w_H t}$$

والجزء التخيلي، والذي هو $\hat{x}(t)$ يكون من الشكل:

$$\hat{x}(t) = \frac{X_0 w_H}{\pi} sin^2 \frac{w_H t/2}{w_H t/2}$$

يوضح

الشكل 7-8 كل من $x(t)$ و $\hat{x}(t)$. لاحظ تعامد الإشارتين أي $\hat{x}(t)$ متعامدة مع $x(t)$.



الشكل 7-8 رسم توضيحي للإشارتين $x(t)$ و$\hat{x}(t)$.

سوف نعرض الآن أهم خواص (خصائص) الإشارة التحليلية.

- جداء الإشارة التحليلية $x_A(t)$ مع الإشارة المرافقة conjugate لها $x_A^*(t)$ يساوي مربع غلاف (الفيزيائي) للإشارة الأصلية $x(t)$.

$$x_A(t)x_A^*(t) = [x(t) + j\hat{x}(t)][x(t) - j\hat{x}(t)] \\ = x^2(t) + \hat{x}^2(t) = e^2(t) \quad (27\text{-}7)$$

هذا يعني أن القيمة المطلقة للإشارة التحليلية تساوي الغلاف الفيزيائي:

$$|x_A(t)| = e(t) \quad (28\text{-}7)$$

- يحوي طيف الإشارة التحليلية ترددات موجبة فقط. من العلاقة (7-26) نعلم أن:

$$x_A(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

ومن مثال 7-3 نعلم أن الإشارتين $x(t)$ و $\hat{x}(t)$ متعامدتان وبأخذ تحويل فوريه للإشارة في العلاقة (7-26) نجد أن:

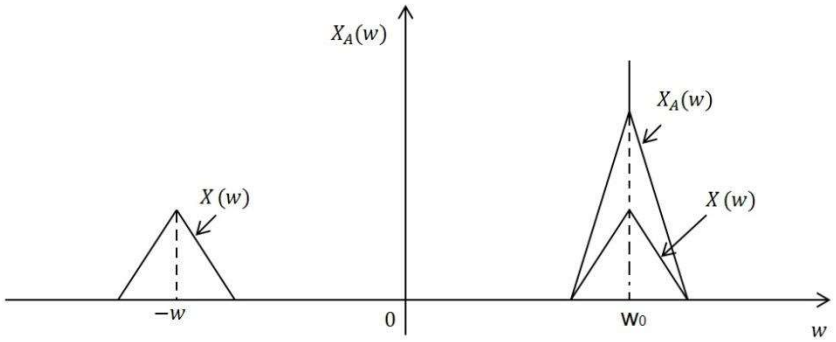
$$x_A(w) = X(w) + j[-jsgn(w)]X(w) \quad (29\text{-}7)$$

ومنه نجد:

$$X_A(w) = \begin{cases} 2X(w) ; & w > 0 \\ 0 ; & w < 0 \end{cases} \quad (30\text{-}7)$$

يوضح

الشكل 7-9 كل من طيف الإشارة التحليلية $X_A(w)$ وطيف الإشارة الأصلية:



الشكل 7-9 طيف الإشارة التحليلية وطيف الإشارة الأصلية.

ملاحظة: رُسم الطيف بشكل مثلثي للتبسيط.

بتحويل فوريه العكسي نحصل على الإشارة التحليلية $x_A(t)$ أي:

$$x_A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} X_A(w)e^{jwt}dw \quad (31\text{-}7)$$

وبأخذ العلاقة (7-30) بالحسبان نحصل على:

$$x_A(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} X(w)e^{jwt}dw \quad (32\text{-}7)$$

وهذه العلاقة متطابقة مع العلاقة (7-22).

- يتطابق طيف الغلاف العقدي $\tilde{x}(t)$ مع طيف الإشارة التحليلية $x_A(t)$، المزاح بمقدار w_0 نحو اليسار.

لتأكيد ذلك، نعلم أن تحويل فوريه للإشارة التحليلية يُعطي بالعلاقة التالية:

$$X_A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t)e^{-jwt}dt$$

بيّنا سابقاً أن $x_A(t) = \tilde{x}(t)e^{jw_0t}$ بالتعويض في العلاقة السابقة، نجد:

$$X_A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{-j(w-w_0)t}dt = \tilde{X}(w-w_0), w > 0 \qquad (33\text{-}7)$$

- يُعرف تابع الترابط الذاتي للإشارة التحليلية بالشكل التالي:

$$R_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t)x_A^*(t+\tau)d\tau \qquad (34\text{-}7)$$

ويتعلق بتابع الترابط الذاتي للإشارة الأصلية $x(t)$، حسب العلاقة التالية:

$$R(\tau) = \frac{1}{2}R_e[R_A(\tau)] \qquad (35\text{-}7)$$

حيث $R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$.

لنبين ذلك سوف نعوض العلاقة التالية:

$$x_A(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

بالعلاقة (34-7) للحصول على:

$$R_A(\tau) = \int [x(t) + j\hat{x}(t)][x(t+\tau) - j\hat{x}(t+\tau)]dt$$

$$= \int x(t)x(t+\tau)dt = \int \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)dt$$

$$+j[\int \hat{x}(t)x(t+\tau)dt - \int x(t)\hat{x}(t+\tau)dt$$

$$\Longrightarrow R_e[R_A(\tau)] = 2R(\tau)$$

تجدر الملاحظة أنه في بعض المراجع تُسمى الإشارة التحليلية بالغلاف الأولي pre-envelope.

ننتقل الآن لتسليط الضوء على تحويل هلبرت Hilbert.

2.4.7 تحويل هلبرت

يعني تحقق العلاقة (30-7) أن العلاقة بين طيف الإشارة الأصلية $X(w)$ وطيف الإشارة المرافقة $\hat{X}(w)$ هي من الشكل التالي:

$$\hat{X}(w) = -jsgn(w)X(w) = \begin{cases} -jX(w) \; ; & w > 0 \\ jX(w) \; ; & w < 0 \end{cases} \qquad (36\text{-}7)$$

أي الحصول على الإشارة المرافقة $\hat{x}(t)$ فيزيائيا يتطلب تطبيق الإشارة الأصلية $x(t)$ على مدخل نظام، يقوم بتدوير كافة المركبات ذات التردد الموجب بمقدار -90° وكافة المركبات ذات التردد السالب 90°. وذلك دون أي تغير في المطال. يسمى هذا النظام بالمرشح الترابعيquadratic filter أو مرشح هيلبرت Hilbert filter.

تبين العلاقة (36-7) من وجهة النظر الرياضية أن طيف الإشارة المرافقة $\hat{X}(w)$ هو عبارة عن جداء طيف الإشارة الأصلية $X(w)$ والتابع $-jsgn(w)$. لذلك فإن الإشارة المرافقة $\hat{x}(t)$ هي عبارة عن تلفيف convolution الإشارتين (أو التابعين) $x(t)$ و $f(t)$. رياضياً، يمكن تمثيل الإشارة $-jsgn(w)$ بالشكل:

$$-jsgn(w) = \lim_{\varepsilon \to 0}[-jsgn(w)\exp(-\varepsilon|w|)$$

وبالتالي:

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} exp\,[(\varepsilon + jt)w]dw\right.$$

$$\left. -\frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\infty} exp\,[(-\varepsilon + jt)w]dw\right.$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi t}$$

والآن بأخذ عملية التلفيف بالحسبان يكون لدينا:

$$\hat{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \qquad (37\text{-}7)$$

يمكن إيجاد $x(t)$ بدلالة $\hat{x}(t)$. لإجراء ذلك يكفي أن نعلم من العلاقة (36-7) أن $X(w) = jsgn(w)\hat{X}(w)$، ومنه فإن خلاف العلاقة المطلوبة، عن العلاقة (37-7) هو الإشارة والاستبدال، أي:

$$x(t) = -\hat{x}(t) * \left(\frac{1}{\pi t}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(t)}{\tau - t}d\tau \qquad (38\text{-}7)$$

تسمى العلاقتين (37-7) و (38-7) من وجهة النظر الرياضية بزوج تحويل هيلبرت Hilbert transform pair ويرمز لها بالشكل التالي:

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t - \tau}d\tau$$
$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{\tau - t}d\tau \qquad (39\text{-}7)$$

ولهذا السبب نسمي التابع $\frac{1}{t-\tau}$ بالنواة kernel (نواة الفرق) لتحويل هيلبرت، ذو الانقطاع discontinuity عند $\tau = t$ لـ (39-7) ولكن هذا يجب أن يفهم بمعنى القيمة الأساسية principle value. وكمثال على ذلك:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\zeta \to 0}\left[\int_{-\infty}^{t-\zeta}\frac{x(\tau)}{t - \tau}d\tau + \int_{t+\zeta}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t - \tau}d\tau\right] \qquad (40\text{-}7)$$

مثال 7-4: أوجد تحويل هيلبرت للإشارة التالية:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t)$$

الحل: بأخذ تحويل فورييه للإشارة السابقة نحصل على:

$$X(f) = \frac{-j}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

وباستخدام العلاقة (36-7) يكون لدينا:

$$\hat{X}(f) = -jsgn(f)X(f)$$
$$= \frac{-j}{2}[S(f - f_c) + S(f + f_c)]sgn(f)$$
$$= \frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$$

نعلم أن العلاقة السابقة هي تحويل فورييه لتابع (الإشارة) الجيب $\sin(2\pi f_c t)$، أي

$$H[\cos(2\pi f_c t)] = \sin(2\pi f_c t)$$

وسوف نبين لاحقا أن:

$$H[\sin(2\pi f_c t)] = -\cos(2\pi f_c t)$$

5.7 خواص تحويل هيلبرت

يختلف تحويل هيلبرت عن تحويل فورييه باقتصار العمل على المجال الزمني فقط. وسوف نذكر هنا أهم خواص تحويل هيلبرت.

الخاصية الأولى: للإشارة $x(t)$ وتحويل هيلبرت لها نفس الطيف المطالي.

لبرهان ذلك يكفي أن نعلم أن $\hat{X}(f) = -jsgn(f)X(f)$ (العلاقة (7-36)). وهذا يعني أن $\hat{X}(f)$ مختلف عن $X(f)$ بـ $-jsgn(f)$ مرة. وبما أن طويلة $-jsgn(f)$ تساوي الواحد من أجل كل الترددات، فإن الطيف المطالي لـ $x(t)$ يساوي الطيف المطالي $\hat{x}(t)$ وهو المطلوب.

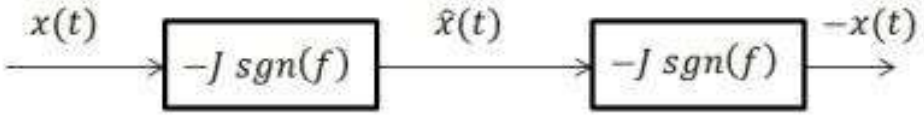
الخاصية الثانية: إذا كانت $\hat{x}(t)$ هي تحويل هيلبرت لـ $x(t)$ ،فإن تحويل هيلبرت لـ $\hat{x}(t)$ هو $-x(t)$.

سوف نبرهن على ذلك بإجراء تحويل هيلبرت مرتين متتاليتين، وذلك كما هو واضح في

الشكل 7-10، لنحصل على:

$$[-j\,sgn(f)]^2 = -1 \quad ;\forall f \;\&\; X(0) = 0$$

هذا يعني أن تحويل هيلبرت لـ $\hat{x}(t)$ هو $-x(t)$. تجدر الإشارة هنا أن الإشارة $x(t)$ حقيقية.



الشكل 7-10 تحويل هيلبرت مضاعف للإشارة.

مثال 7-5: أعط مثالاً عملياً يوافق

الشكل 7-10.

الحل: تحويل فوريه المعاكس للطيف $X(f)$ هو:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,[\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)]df \qquad (41\text{-}7)$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقة (7-36)، يكون تحويل فوريه المعاكس للطيف $\hat{X}(f)$ الموافقة من الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} -jsgn(f)\,X(f)[\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)]df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} sgn(f)\,X(f)[\sin(2\pi ft) - j\cos(2\pi ft)]df\end{aligned} \qquad (42\text{-}7)$$

وبمقارنة العلاقة (7-41) مع العلاقة (7-42) نحصل على:

$$\begin{aligned}H[\cos(2\pi ft)] &= sgn(f)\sin(2\pi ft) \\ H[\sin(2\pi ft)] &= -sgn(f)\cos(2\pi ft)\end{aligned} \qquad (43\text{-}7)$$

الخاصية الثالثة: الإشارة الأصلية $x(t)$ وإشارة تحويل هيلبرت لها $\hat{x}(t)$ تمثلان إشارتين متعامدتين.

سوف نعتمد على خاصية الضرب للبرهان على الخاصية الثالثة، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)\hat{x}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X\,(f)\hat{X}(-f)df$$

وباستخدام العلاقة (7-36) يكون لدينا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)\hat{x}(t)dt &= j\int_{-\infty}^{\infty} sgn\,(f)X(f)X(-f)df \\ &= j\int_{-\infty}^{\infty} sgn\,(f)X(f)X^*(f)df\end{aligned} \qquad (44\text{-}7)$$

$$= j \int_{-\infty}^{\infty} sgn(f) |X(f)|^2 df$$

بسبب $X(-f) = X^*(f)$. بما أن التابع $sgn(f)$ هو تابع فردي والتابع $|X(f)|^2$ هو تابع زوجي فإن نتيجة العلاقة (7-44) تساوي الصفر، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \hat{x}(t) dt = 0 \qquad (7\text{-}45)$$

حيث $x(t)$ إشارة قدرة. ويمكن التأكد ببساطة أن:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, \hat{x}(t) dt = 0 \qquad (7\text{-}46)$$

حيث $x(t)$ إشارة استطاعة. يمكن التأكد من صحة العلاقة السابقة من نتائج مثال **7-4**.

الخاصية الرابعة: تحويل هيلبرت هو تحويل خطي أي:

$$H[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 H[x_1(t)] + a_2 H[x_2(t)] \qquad (7\text{-}47)$$

يمكن البرهان ببساطة على العلاقة السابقة، حيث a_i قيم ثابتة.

الخاصية الخامسة: تحويل هيلبرت لقيمة الثابت constant يساوي الصفر، أي:

$$H[const] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{const}{t-\tau} d\tau = 0 \qquad (7\text{-}48)$$

البرهان: لكون نواة تحويل هيلبرت $\frac{1}{t-\tau}$ تابع فردي حول $t = \tau$ ومرافق الإشارة للثابت يساوي الصفر.

6.7 تحويل هيلبرت لإشارة حزمة التمرير (إشارة ذات حزمة ضيقة)

ليكن لدينا إشارة حزمة التمرير $x(t)$ التي يمكن كتابتها بحسب العلاقة (6-8) بالشكل التالي:

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_0 t) \qquad (49\text{-}7)$$

سوف نقوم بدراسة خواص الإشارة المرافقة $\hat{x}(t)$ (والتي هي تحويل هيلبرت). نعلم أن:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

بتعويض (49-7) في العلاقة السابقة نجد:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\tau}[x_I(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) - x_Q(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)]d\tau$$

سوف نقوم بنشر $x_I(t)$ و $x_Q(t)$ ،التوابع ذات التغير البطيء، باستخدام سلسلة تايلور Taylor ومن ثم سوف نعوض النشر في العلاقة السابقة، أي:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{t-\tau}[x_I(t) + x_I'(t)(t-\tau) + \cdots]\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{t-\tau}[x_Q(t) + x_Q'(t)(t-\tau) + \cdots]\sin(2\pi f_0\tau)$$

واضح أن النشر هو بجوار $\tau = t$. يمكن إهمال المشتقات $x_I'(t)$ و $x_Q'(t)$ و $x_I''(t)$ و $x_Q''(t)$ بسبب قيمهم الصغيرة. وبحساب العلاقة السابقة نحصل على التقريب التالي:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x_I(t)H[\cos(2\pi f_0 t] - x_Q(t)H[\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= x_I(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\end{aligned} \qquad (50\text{-}7)$$

أي أن تحويل هيلبرت لإشارة حزمة التمرير، هي أيضاً إشارة حزمة التمرير. يتضح من العلاقة السابقة أن الغلاف العقدي للإشارة الأصلية له الشكل التالي:

$$\hat{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$$

وبالتالي فإن الغلاف العقدي لتحويل هيلبرت هو التالي:

$$\hat{\tilde{x}}(t) = x_Q(t) - jx_I(t) = -j\tilde{x}(t) \qquad (51\text{-}7)$$

وهذا يعني أن الغلاف العقدي لتحويل هيلبرت يختلف عن الغلاف العقدي للإشارة الأصلية بإزاحة زاوية مقدارها 90°.

7.7 الغلاف الفيزيائي والطور الكلي والتردد اللحظي

من العلاقة (7-27) والعلاقة (7-28) نوجد ببساطة الغلاف الفيزيائي $e(t)$:

$$e(t) = |x_A(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \qquad (52\text{-}7)$$

يمكن التأكد من صحة العلاقة السابقة بأخذ $x(t) = Acos(2\pi ft)$. تجدر الإشارة هنا أنه تم الحصول على الغلاف الفيزيائي من العلاقة (7-11) وذلك بالاعتماد على اعتبارات أخرى.

نُعرف الطور الكلي total phase من العلاقة (7-26)، أي:

$$\psi(t) = \arg x_A(t) = arctan\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \qquad (53\text{-}7)$$

عند ذلك يكون التردد اللحظي من الشكل التالي:

$$w(t) = w_0 + \frac{d}{dt}\arctan\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \qquad (54\text{-}7)$$

وبإهمال w_0 يكون لدينا:

$$w(t) = \frac{d}{dt}arctan\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = \frac{\hat{x}'(t)x(t) - x'(t)\hat{x}(t)}{\hat{x}^2(t) + x^2(t)} \qquad (55\text{-}7)$$

لتوضيح ما سبق سنورد بعض الأمثلة.

مثال 7-6: لدينا الإشارة الجيبية التالية:

$$x(t) = Acos\, w_0 t\,; \quad w_0 = 2\pi f_0$$

المطلوب إيجاد تحويل هيلبرت $\hat{x}(t)$ للإشارة الأصلية $x(t)$ وكذلك كل من الغلاف الفيزيائي والطور الكلي والتردد اللحظي.

الحل: تحويل هيلبرت للإشارة الأصلية $x(t)$ هو:

$$\hat{x}(t) = A\sin w_0 t$$

الغلاف الفيزيائي (انظر العلاقة (7-52)) له الشكل التالي:

$$e(t) = \sqrt{A^2(cos^2 w_0 t + sin\,^2 w_0 t)} = A$$

الطور الكلي يساوي $\psi(t) = w_0 t$، ويساوي التردد اللحظي $w(t) = w_0$.

مثال 7-7: لدينا الإشارة $\boldsymbol{x(t)}$ التي تتألف من مجموع إشارتين جيبيتين، ذات الشكل التالي:

$$x(t) = A_1 cos w_1 t + A_2 cos w_2 t$$

حيث A_i قيم ثابتة. المطلوب تمثيل الإشارة السابقة بحيث تطابق الشكل التالي:

$$x(t) = e(t)\cos[w_0 t + \theta(t)]$$

بفرض $|\Delta w| = |w_2 - w_1|$ ذات قيمة صغيرة بالمقارنة مع $(w_2 + w_1)/2$. وهذا يعني أن الإشارة ذات حزمة ضيقة.

الحل: باستخدام العلاقة (7-52) نوجد الغلاف الفيزيائي، وهكذا يكون لدينا:

$$e(t) = [(A_1 cos w_1 t + A_2 cos w_2 t)^2 + (A_1 sin w_1 t + A_2 sin w_2 t)^2]^{1/2}$$
$$= A_1\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\Delta w t}$$

حيث $\Delta w = w_2 - w_1$ و $k = A_2/A_1$ وسوف نفترض هنا لغرض التحديد definiteness أن:

$$\Delta w > 0 \text{ و } k < 1$$

وباستخدام العلاقة (7-53) نوجد قيمة الطور $\psi(t)$، أي:

$$\psi(t) = arctan\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = arctan\frac{sin w_1 t + k sin w_2 t}{cos w_1 t + k cos w_2 t}$$

وباستخدام العلاقة (7-54) نحصل على التردد اللحظي، أي:

$$w(t) = w_1 + \Delta wk\frac{k + cos\Delta wt}{1 + k^2 + 2kcos\Delta wt}$$

$$= w_1 + \Delta w\eta(t)$$

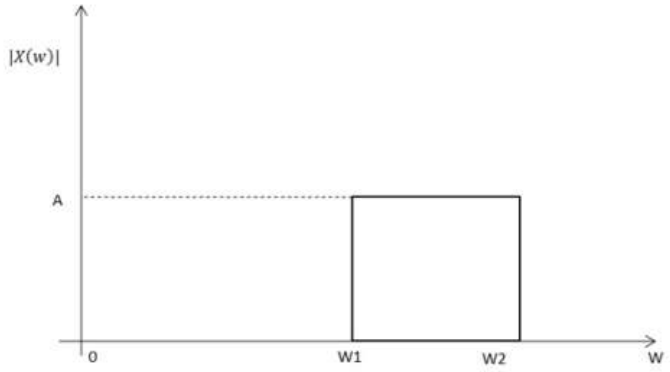
حيث: $\eta(t) = k\frac{k+cos\Delta wt}{1+k^2+2kcos\Delta wt}$.

واضح عدم وجود مركبة ثابتة DC في التابع $\eta(t)$. وأن التردد الوسطي $w_0 = w_1$ و $\theta(t) = \Delta w\int_0^t \eta(t)dt$ وبتعويض $e(t)$ و w_0 و $\theta(t)$ في $x(t)$ نجد:

$$x(t) = e(t)\cos[w_0 t + \forall(t)]$$

$$= A_1\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\Delta wt}\cos[w_1 t + \Delta w\int_0^t \eta(t)dt]$$

مثال 7-8: لدينا الإشارة $x(t)$ ذات الطيف الترددي المطالي المبين في الشكل 7-11. المطلوب إيجاد الغلاف الفيزيائي والتردد اللحظي.



الشكل 7-11 الطيف الترددي لإشارة حزمة التمرير.

الحل: لكون الطيف ذا تردد موجب فقط فإن الإشارة، عبارة عن إشارة تحليلية وباستخدام العلاقة (7-31) يكون لدينا:

$$x_A(t) = \frac{A}{\pi}\int_{w1}^{w2} \exp(jwt)\,dw = \frac{A}{\pi t}[(sinw_2 t - sinw_1 t)$$

$$+j(cosw_2t - cosw_1t)]$$
$$= x(t) + j\hat{x}(t)$$

وذلك حسب العلاقة (7-26).

باستخدام العلاقة (7-52) نوجد الغلاف الفيزيائي، أي:

$$e(t) = \frac{A}{\pi t}\sqrt{(sinw_2t - sinw_1t)^2 + (cosw_2t - cosw_1t)^2}$$
$$= \frac{A(w_2 - w_1)}{\pi}\left|\frac{sin\frac{w_2 - w_1}{2}t}{\frac{w_2 - w_1}{2}t}\right|$$

فنحصل على التردد اللحظي:

$$w(t) = \frac{d}{dt}[arctan\frac{-(cosw_2t - cosw_1t}{sinw_2t - sinw_1t}]$$
$$= (w_1 + w_2)/2$$

واضح عدم علاقته بالزمن ووقوعه في منتصف المجال الترددي.

يمكن تلخيص الخلاف بين التردد العادي والتردد اللحظي بالنقاط التالية:

التردد اللحظي	**الترددي العادي**
• تابع للزمن بشكل عام	• غير تابع للزمن
• إشارة معطاة والزمن معطى له قيمة واحدة	• إشارة معطاة وفي أي لحظة زمنية توجد مجموعة من المركبات الترددية
• عند مرور الإشارة خلال نظام خطي يمكن أن يتغير	• عند مرور الإشارة خلال نظام خطي لا يتغير بل يتغير فقط المطال والطور الابتدائي
• لا يُعتمد عليه في حساب توابع التحويل	• يعتمد عليه في حساب توابع التحويل
• يُقاس (بخطأ ما) باستخدام كواشف التردد Discriminator	• يقاس باستخدام مقياس التردد أو محلل الطيف

8.7 نظم حزمة التمرير

في الفقرة السابقة تمت معالجة إشارة حزمة التمرير. ومن المنطقي الآن أن نعالج نظم حزمة التمرير. هذه المعالجة مشابهة لحدٍ كبير معالجة إشارة حزمة التمرير.

ليكن لدينا إشارة حزمة التمرير $x(t)$ ذات تحويل فورييه $X(f)$ والمجال الطيفي $\pm w$ حول تردد الحامل f_c و $f_c > w$. يمكن أن نعبر عن الإشارة $x(t)$، حسب العلاقة (7-8) بالشكل التالي:

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \qquad (7\text{-}56)$$

وحسب العلاقة (7-6) يكون الغلاف العقدي للإشارة $x(t)$ بالشكل التالي:

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \qquad (7\text{-}57)$$

سوف نطبق الآن الإشارة $x(t)$ على مدخل نظام حزمة تمرير، ذي الاستجابة النبضية $h(t)$ والترددية $H(f)$ (تابع التحويل) والمجال الترددي حول f_c هو $\pm B$. يمكن أن نكتب $h(t)$ بشكل مشابه للإشارة $x(t)$، أي:

$$h(t) = h_I(t)\cos(2\pi f_c t) - h_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \qquad (7\text{-}58)$$

والغلاف العقدي بشكل مشابه للعلاقة (7-57)، أي:

$$\tilde{h}(t) = h_I(t) + jh_Q(t) \qquad (7\text{-}59)$$

من (7-58) و (7-59) يمكن التعبير عن $h(t)$ بالشكل التالي:

$$h(t) = R_e[\tilde{h}(t)\exp(j2\pi f_c t)] \qquad (7\text{-}60)$$

حيث $h_I(t)$ المركبة المتفقة بالطور و $h_Q(t)$ المركبة المترابعة مع الطور، وكل منها ذات حزمة تمرير منخفضة و $-B \le f \le B$.

نعلم أنه إذا كان لدينا نظام خطي غير متغير مع الزمن ودخل النظام الإشارة $x(t)$ فإن إشارة الخرج تُعطى بالعلاقة التالية:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (7\text{-}61)$$

إذاً لحساب $y(t)$ نحن بحاجة لإيجاد الغلاف العقدي للاستجابة النبضية $\tilde{h}(t)$، وذلك كما هو واضح من العلاقة (7-60). يمكن إيجاد الغلاف العقدي للاستجابة النبضية، بالاعتماد على العلاقة (7-59).

ومن أجل توضيح الموضوع المطروح (إيجاد $h(t)$) سوف نعتمد على تابع التحويل لحزمة التمرير $H(f)$. للتبسيط سوف نقدم الآن بعض العلاقات المفيدة.

إذا كان $g(t)$ أي تابع عقدي، فإن:

$$g(t) = R_e[g(t)] + jI_m[g(t)]$$
$$g^*(t) = R_e[g(t)] - jI_m[g(t)]$$

حيث $R_e[.]$ الجزء الحقيقي و $I_m[.]$ الجزء التخيلي بجمع العلاقتين السابقتين نحصل على:

$$2R_e[g(t)] = g(t) + g^*(t) \qquad (7\text{-}62)$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقتين (7-60) و(7-62) نجد ببساطة أن:

$$2h(t) = \tilde{h}(t)\exp(j2\pi f_c t) + \tilde{h}^*(t)\exp(-j2\pi f_c t) \qquad (7\text{-}63)$$

حيث $\tilde{h}^*(t)$ هو المرافق العقدي لـ $\tilde{h}(t)$. وباستخدام تحليل فورييه للعلاقة (7-63) نحصل على:

$$2H(f) = \tilde{H}(f - f_c) + \tilde{H}^*(f + f_c) \qquad (7\text{-}64)$$

حيث $H(f)$ هو تحويل فورييه $h(t)$ و $\tilde{H}(f)$ هوتحويل فورييه لـ $\tilde{h}(t)$.

وبما أن التابع $\tilde{H}(f)$ هو ذو تمرير منخفض مع $|f| \le B$ و $B < f_c$ وبالأخذ بالحسبان العلاقة (7-64) من أجل الترددات الموجبة، نحصل على العلاقة التالية (نعلم أن: $H(f) = H(-f)$):

$$\tilde{H}(f - f_c) = 2H(f) \qquad (7\text{-}65)$$

من العلاقة السابقة، يمكن الحصول على $\tilde{H}(f)$ من $H(f)$ وذلك بأخذ الجزء ذو التردد الموجب من $H(f)$ والإزاحة نحو المبدأ بمقدار f_c ومن ثم الجداء بالمعامل 2. من أجل الحصول على الغلاف العقدي للاستجابة النبضية (الاستجابة النبضية العقدية) $\tilde{h}(t)$، فوجد تحويل فورييه المعاكس، أي:

$$\tilde{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(f)\exp(j2\pi f t)\, df \qquad (7\text{-}66)$$

للتبسيط سوف نفرض أن كلاً من $X(f)$ و $H(f)$ متمركزان حول f_c. من العلاقة (7-21) نجد ببساطة أن:

$$h(t) = R_e[h_A(t)], x(t) = R_e[x_A(t)] \tag{67-7}$$

وبتعويض (7-67) في (7-61) نجد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_e[h_A(\tau)]R_e[x_A(t-\tau)]d\tau \tag{68-7}$$

وبإجراء بعض الحسابات، يمكن أن نستنتج أن:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}R_e\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_A(\tau)x_A^*(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{1}{2}R_e\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)e^{j2\pi f_c\tau}\tilde{x}(t-\tau)e^{j2\pi f_c(t-\tau)}d\tau\right] = \\ &\frac{1}{2}R_e[\exp(j2\pi f_c t)\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)d\tau] \end{aligned} \tag{69-7}$$

بمقارنة العلاقة السابقة مع العلاقة التالية (انظر العلاقة (7-4)):

$$y(t) = R_e[\tilde{y}(t)\exp(j2\pi f_c t)] \tag{70-7}$$

يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)] \end{aligned} \tag{71-7}$$

أي أنه يمكن الحصول على الغلاف العقدي لخرج نظام حزمة التمرير. وذلك بتلفيف كل من الغلاف العقدي لإشارة دخل نظام حزمة تمرير مع الغلاف العقدي للاستجابة النبضية لنظام حزمة التمرير ومن ثم الضرب بالثابت 1/2. النتيجة السابقة تسمح لنا بمعالجة إشارة حزمة التمرير في المجال الترددي المنخفض. حيث كل من $\tilde{x}(t)$ و $\tilde{h}(t)$ هي عبارة عن توابع تمرير منخفض. وهذا يسمح للتخلص من الصعوبات المرافقة للعامل وذلك في أثناء التحليل.

في كثير من الحالات العملية، فإننا نتعامل مع الحزمة المنخفضة المتفقة مع الطور اي $y_I(t)$ والحزمة المنخفضة المترابعة مع الطور،أي $y_Q(t)$. من أجل ذلك سوف نعوض كل من $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{x}(t)$ في العلاقة (7-71):

$$\tilde{h}(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$$

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$$

وهكذا نحصل على:

$$2\tilde{y}(t) = \left[h_I(t) + jh_Q(t)\right] * \left[x_I(t) + jx_Q(t)\right] \quad (72\text{-}7)$$

وبما أن عملية التلفيف هي عملية توزيعية، فإن العلاقة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} 2\tilde{y}(t) = &\left[h_I(t) * x_I(t) - h_Q(t) * x_Q(t)\right] \\ &+j\left[h_Q(t) * x_I(t) + h_I(t) * x_Q(t)\right] \end{aligned} \quad (73\text{-}7)$$

سوف نمثل $\tilde{y}(t)$ باستخدام المركبات المتعامدة كما فعلنا ذلك من أجل $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{x}(t)$، أي:

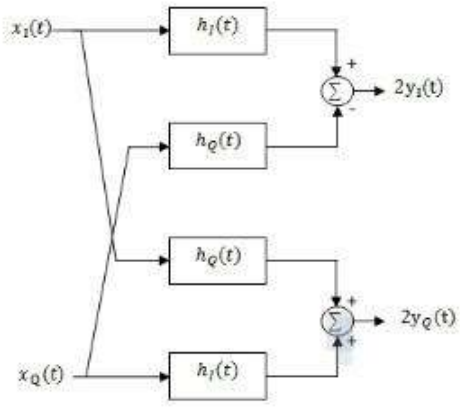
$$[\tilde{y}(t)] = \left[y_I(t) + jy_Q(t)\right] \quad (74\text{-}7)$$

بالمقابلة بين (7-73) و (7-74) نحصل على المركبة المتوافقة مع الطور $y_I(t)$ والمركبة **المتعامدة مع** الطور، أي:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{y_I(t)} &= \mathrm{h_I}(t) * x_I(t) - h_Q(t) * x_Q(t) \\ 2y_Q(t) &= h_Q(t) * x_I(t) + h_I(t) * x_Q(t) \end{aligned} \quad (75\text{-}7)$$

التوابع $x_I(t)$ و $x_Q(t)$ و $h_I(t)$ و $h_Q(t)$ و $y_I(t)$ و $y_Q(t)$ هي توابع ذات تمرير منخفض. النموذج (7-75) عبارة عن نموذج أساسي في عملية محاكاة مرشحات حزمة التمرير وكذلك قنوات الاتصالات. وبناءً على النموذج السابق (7-75) نوجد المخطط الوظيفي المبين في

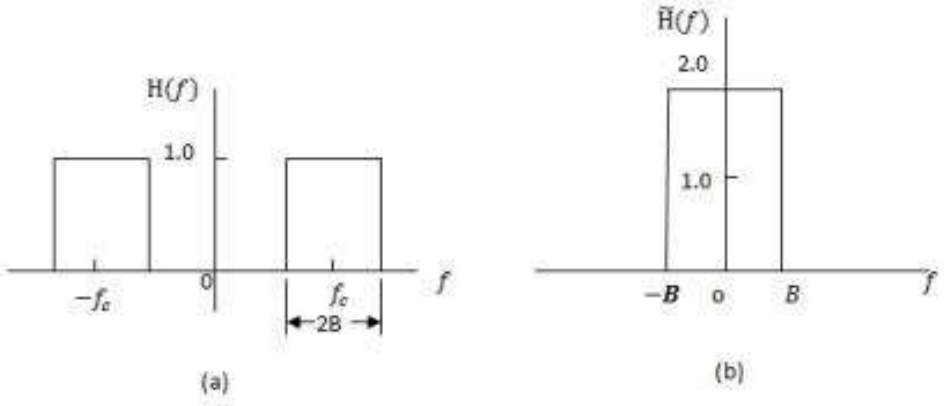
الشكل 7-12.



الشكل 7-12 العلاقة بين الاستجابة والإشارة ذات حزمة تمرير منخفض.

مثال 7-9: ليكن لدينا مُرشح حزمة تمرير مثالي ذو تردد مركزي f_c والاستجابة المطالية المبينة في الشكل 7-13. بفرض إهمال التأخير لكونه لا يؤثر على شكل الإشارة كما سنرى لاحقاً. المطلوب: إيجاد إشارة الخرج $y(t)$ بفرض إشارة الدخل هي:

$$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$



الشكل 7-13 الاستجابة المطالية $H(f)$ وتابع التحويل العقدي المرافق $\tilde{H}(f)$.

حيث $rect(.)$ يرمز للإشارة المستطيلة و $f_c T \gg 1$.

الحل: نعلم حسب العلاقة (7-70) أن:

$$y(t) = Re[\tilde{y}(t)\exp(j2\pi f_c t)]$$

ومن أجل حساب $\tilde{y}(t)$ نستخدم العلاقة (7-71)، أي:

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)d\tau$$

والآن نوجد كل من $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{x}(t)$. من أجل إيجاد $\tilde{h}(t)$ حسب العلاقة (7-66) نحن بحاجة لإيجاد $\tilde{H}(f)$. بالاعتماد على العلاقة (7-30) و (7-33) والشكل 7-13 يكون لدينا:

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} 2 & ; \ -B < f < B \\ 0 & ; \ |f| > B \end{cases}$$

وبتعويض $\tilde{H}(f)$ نحصل على:

$$\tilde{h}(t) = \int_{-B}^{B} \exp(j2\pi ft)\, df$$
$$= 4B\ sinc(2Bt)$$

من $x(t)$ نجد أن:

$$\tilde{x}(t) = A\ rect\ (\frac{t}{T})$$

وباستخدام (7-71) نجد أن:

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)d\tau$$
$$= \frac{A}{\pi}\left\{si\left[2B\pi(t+\frac{T}{2})\right] - si\left[2\pi B(t-\frac{T}{2})\right]\right\} \quad (7\text{-}76)$$

وباستخدام (7-70) نجد أن:

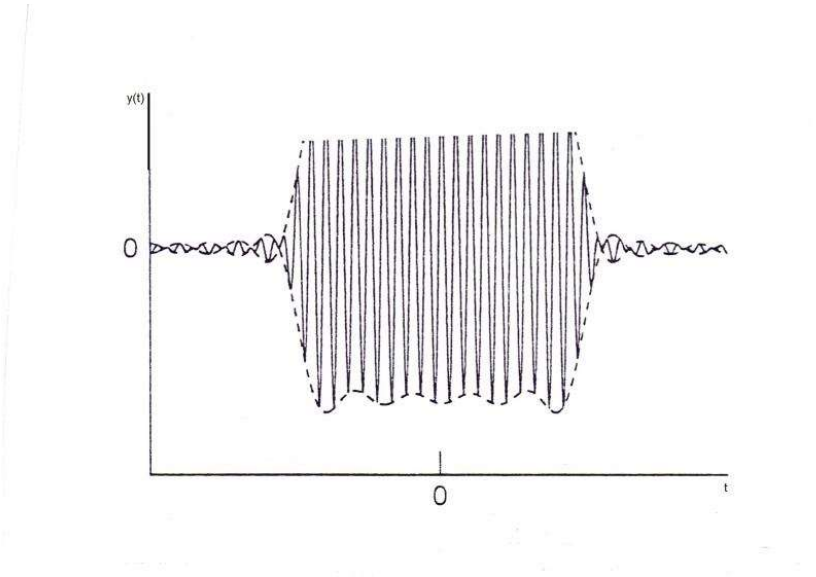
$$y(t) = \frac{A}{\pi}\left\{si\left[2\pi B(t+\frac{T}{2})\right] - si\left[2\pi B(t-\frac{T}{2})\right]\right\}\cos(2\pi f_c t) \quad (7\text{-}77)$$

حيث يسمى $si(.)$ بتكامل السينك sinc integral ويعرف بالشكل التالي:

$$S_i(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x}\, dx \quad (7\text{-}78)$$

وباستخدام الطرق العددية يمكن رسم التابع $y(t)$ كما هو موضح في

الشكل 7-14.



الشكل 7-14 استجابة مرشح حزمة التمرير المثالي لنبضة راديوية.

في نظم الاتصالات الرقمية، عند مُرور الإشارة خلال دارات إلكترونية أو قناة اتصال، فإنها تتعرض لكل من تأخير الطور وتأخير الزمرة group (تأخير الغلاف). لذلك لا بد من تسليط الضوء على كلا التأخيرين.

9.7 تأخير الطور والزمرة

عند مرور الإشارة خلال دارات الكترونية (مرشحات و غيرها) أو خلال قناة اتصال فإنها تتعرض لكل من تأخير الطور و تأخير الزمرة، والذي هو التأخير الحقيقي للإشارة. بالنسبة للمرشحات المثالية، مرشح حزمة تمرير أو مرشح تمرير منخفض، فإن الاستجابة الطورية تتغير خطيا مع التردد وذلك ضمن المجال الترددي. في هذه الحالة فإن المرشح يسبب تأخيراً مقداره t_0 والذي يتحكم بميل الاستجابة الطورية الخطية. في الحالة العملية الاستجابة الطورية للمرشح هي لا خطية. وسوف نناقش ذلك في هذه الفقرة.

عند مرور إشارة جيبية ذات تردد f_c (غير معدلة) من خلال قناة عملية (غير مثالية) أو مرشح عملي، فإنها تتعرض لإزاحة كلية في الطور ولتكن مقدارها $\beta(f_c)$ راديان، عند ذلك التردد (f_c). عند تمثيل الإشارة بمطوارها وبالمقارنة بين مطوار إشارة الدخل ومطوار إشارة الخرج. نلاحظ أن مطوار إشارة الخرج يتأخر بمقدار $\beta(f_c)$ راديان عن مطوار إشارة الدخل، أي $\beta(f_c)/2\pi f_c$ ثانية. يسمى هذا التأخير بتأخير الطور phase delay للقناة أو المرشح.

تجدر الإشارة إلى أن تأخير الطور ليس بالضرورة أن يكون هو التأخير الحقيقي للإشارة. وذلك لأن الإشارة الجيبية لا تحمل المعلومات، ما لم تكن معدلة في إحدى معاملاتها الذي يتغير بتوافق مع تغير المعلومات. لنفرض لدينا إشارة ذات تغير بطئ مع الزمن، تم ضربها بإشارة الجيب، ذات التغير السريع مع الزمن. عند ذلك سوف نحصل على إشارة معدّلة (

الشكل 7-14) ذات طيف ضيق نسبياً من الترددات ومتمركز عند تردد الحامل f_c. لدى إرسال الإشارة المعدّلة عبر قناة اتصال عملية، نجد هناك تأخير بين غلاف الإشارة المرسلة وغلاف الإشارة المستقبلة. نسمي هذا التأخير بتأخير الغلاف أو الزمرة *group*، وهو يمثل التأخير الحقيقي للإشارة.

لنفرض لدينا قناة توصّف بتابع التحويل التالي:

$$C(f) = K\ exp[j\beta(f)] \tag{79-7}$$

حيث k ثابت والتابع $\beta(f)$ تابع غير خطي بالنسبة للتردد. إشارة الدخل كما ذكرنا سابقاً تتألف من إشارة الرسالة مضروبة بتابع جيبي، أي:

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \tag{80-7}$$

الإشارة الحاملة للمعلومات $m(t)$ ذات تغيير بطيء وبالتالي $x(t)$ ذات حزمة تمرير ضيقة $|f| \le W$. نفترض هنا أن $f_c \gg W$. بنشر التابع $\beta(f)$ بسلسلة تايلور Taylor عند النقطة $f = f_c$ وبالاكتفاء بالحدين الأوليين، يكون لدينا:

$$\beta(f) \cong \beta(f_c) + (f - f_c)\left.\frac{\partial\beta(f)}{\partial f}\right|_{f=f_c} \tag{81-7}$$

بالأخذ بالحسبان العلاقة السابقة (7-81)، نُعرف الإزاحة الطورية بالشكل التالي:

$$\tau_P = -\frac{\beta(f_c)}{2\pi f_c} \tag{82-7}$$

والإزاحة الزمرية (إزاحة الغلاف) بالشكل التالي:

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\partial\beta(f)}{\partial f}\right|_{f=f_c} \tag{83-7}$$

بتعويض(7-82) و (7-83)في العلاقة (7-81)، نحصل على الشكل التالي:

$$\beta(f) \cong -2\pi f_c \tau_P - 2\pi(f - f_c)\tau_g \qquad (84\text{-}7)$$

وبتعويض العلاقة السابقة في (79-7) نحصل على تابع تحويل القناة، أي:

$$C(f) \cong K exp\left[-j2\pi f_c \tau_P - j2\pi(f - f_c)\tau_g\right] \qquad (85\text{-}7)$$

وللحصول على الغلاف العقدي لـ $C(f)$ سوف نعتمد على العلاقة (65-7) وهكذا نحصل على:

$$\tilde{C}(f) \cong 2K exp\left[-j2\pi f_c \tau_P - j2\pi f \tau_g\right] \qquad (86\text{-}7)$$

واضح من العلاقة (80-7) أن الغلاف العقدي لـ $x(t)$ هو:

$$\tilde{x}(t) = m(t)$$

وتحويل فورييه للعلاقة السابقة هو:

$$\tilde{X}(f) = M(f)$$

وبأخذ تحويل فورييه للعلاقة (71-7) نحصل على الغلاف العقدي للإشارة المستقبلية، أي:

$$\tilde{Y}(f) = \frac{1}{2}\tilde{C}(f)\tilde{X}(f)$$

$$= K\ exp\left[-j2\pi f_c \tau_P - j2\pi f \tau_g\right].\mathrm{M(F)}$$

$$= K \exp(-j2\pi f_c \tau_P) \exp\left(-j2\pi f \tau_g\right).M(F)$$

من أجل قيم ثابتة لكل من f_c و τ_P فإن المضروب $\mathrm{K}\, exp(-j2\pi f_c \tau_P)$ يصبح ثابتاً وأن تحويل فورييه المعاكس للمضروب $exp\left(-j2\pi f \tau_g\right) M(f)$ هو $m(t - \tau_g)$.

وهكذا نحصل على الغلاف العقدي لإشارة الخرج في المجال الزمني، أي:

$$\tilde{y}(t) \cong K exp(-j2\pi f_c \tau_P).m(t - \tau_g)$$

وبما أن $y(t) = Re\left[\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$ فإن:

$$y(t) = Km\left(t - \tau_g\right)cos[2\pi f_c(t - \tau_P)] \qquad (87\text{-}7)$$

نلاحظ من إشارة الخرج $y(t)$ مايلي:

- إشارة الحامل $\cos(2\pi f_c t)$ تأخرت بمقدار τ_P ثانية.
- إشارة الرسالة الحاملة للمعلومات (الغلاف$m(t)$) تأخرت بمقدار τ_g.

10.7 أخذ العينات لإشارات حزمة التمرير

في كثير من التطبيقات العملية (المحاكاة مثلا) نحتاج إلى أخذ عينات (تقطيع) إشارات حزمة التمرير، ذات تردد مركزي أكبر بكثير من المجال الترددي للإشارة. حسب نظرية أخذ العينات نظرية نايكوست، التي نوقشت في الفصل السادس، يجب أن يساوي تردد التقطيع أو أن يكون أكبر من ضعف أعلى تردد في الإشارة وذلك من أجل استعادة الإشارة (استعادة كافة المعلومات في الإشارة). يؤدي رفع تردد التقطيع إلى مجموعة من المشاكل منها:

(1) صعوبة الحصول على المبدل A/D المناسب، (2) زيادة حجم التخزين، (3) الحاجة لمعدل إرسال عالٍ.

عملياً يمكن تخفيض تردد التقطيع لإشارة حزمة التمرير بالاعتماد على النظرية التالية:

يمكن استرجاع إشارة حزمة التمرير، التي لا تحوي مركبات ترددية أقل من f_{L} ولا أكبر من f_{H}، بشرط أن يحقق تردد التقطيع المتراجحة التالية:

$$2W\left(\frac{Q}{n} \le f_s \le \left(\frac{Q-1}{n-1}\right)\right) \qquad (88\text{-}7)$$

حيث $W = f_H - f_L$ و $Q = f_H/W$ و $n \le \lfloor Q \rfloor$.

سوف نوضح الآن كيفية استخدام النظرية السابقة وعلاقة تردد تقطيع إشارة حزمة التمرير بتردد نايكوست.

إذا كانت Q عدد صحيح فهذا يسمح باختيار $n=Q$، وفي هذه الحالة $f_s = 2W$ أي أن تردد التقطيع يساوي ضعف عرض المجال.

إذا كانت Q ليست عدداً صحيحاً، فإن أخفض تردد تقطيع مسموح يتم باختيار $n = \lfloor Q \rfloor$.

إذا كانت $Q < 2$ فإن $n \le Q$ تعني أن $n = 1$ وفي هذه الحالة $2f_H \le f_s \le \infty$ وتتطابق النظرية السابقة مع نظرية أخذ العينات لنايكوست.

مثال 7-10: 1- أوجد تردد التقطيع لإشارة حزمة التمرير التالية:

التردد المركزي $f_c = 9.5\ KHz$ والمجال الترددي $W = 1.0\ KHz$

2- أعد الطلب السابق بفرض $n = 9$.

3- أعد الطلب الأول من أجل $W = 1.0\ KHz,\ f_c = 10\ KHz$.

الحل:1- واضح أن التردد الأعلى $f_H = 10\ KHz$ والتردد الاخفض $f_L = 9\ KHz$ وبالتالي:

$$Q = \frac{f_H}{W} = \frac{10KHZ}{1KHZ} = 10.0$$

وباستخدام متراجحة النظرية نجد:

$$2 \times 10^3 \left(\frac{10}{\mathrm{n}}\right) \leq \mathrm{f_s} \leq 2 \times 10^3 \left(\frac{10-1}{\mathrm{n}-1}\right)$$

وبما أن Q عدد صحيح فإن $n = Q = 10.0$ وباستخدام (7-88) نجد $2.0 \leq f_s \leq 2.0$

واضح عدم وجود أي سماحية tolerance في f_s وبالتالي أي خطأ سوف يسبب التشوه.

2-عند اختيار $n = 9$ فإن تردد التقطيع يحدد في المجال التالي:

$$(2.222 \leq f_s \leq 2.250)\ KHz$$

في هذه الحالة سوف نختار تردد التقطيع $f_s = 2.236 \pm 0.014\ KHz$.

3-في هذه الحالة لدينا $Q = 10.5$ وبالتالي $n = \lfloor Q \rfloor = 10.0$ ومجال تردد التقطيع يكون:

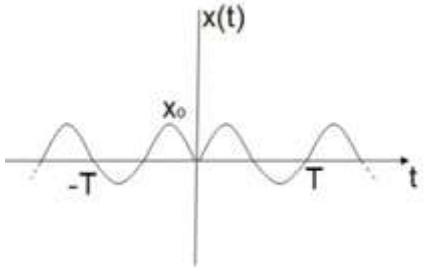
$$2.100 \leq f_s \leq 2.111\ KHz$$

وتردد التقطيع يكون:

$$f_s = 2.106 \pm 0.006\ KHz$$

مسائل الفصل السابع

7-1- أوجد الغلاف العقدي للإشارة التالية:



الشكل 7-15 التمرين 7-1.

7-2-أوجد الغلاف العقدي للإشارة $x(t)$ التالية:

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_c t + m sin 2\pi f_m t)$$

حيث m قيمة ثابتة موجبة و $f_c \gg f_{\mathrm{m}}$ (ملاحظة الإشارة السابقة هي إشارة تعديل الطور).

7-3- لدينا طيف غاوس التالي:

$$X(W) = \frac{X_0}{2} exp[-b(w - w_0)^2]$$

حيث: w_0 و b و X_0 ثوابت. المطلوب:

(1) أوجد طيف الغلاف العقدي للإشارة.

(*2*) أوجد الغلاف الفيزيائي كتابع للزمن.

(3) أوجد التردد اللحظي.

7-4- أوجد الإشارة التحليلية الموافقة للإشارات التالية:

- $sinw_0t$
- $\cos w_0t$
- $x(t) = X_0[1(t) - 1(t-\tau)]cosw_0t$

حيث $1(.)$ هو تابع الخطوة.

7-5- أوجد تحويل هيلبرت لكل من الإشارات (التوابع) التالية:

$$x(t) = cosw_0t$$

$$x(t) = \frac{sinw_0t}{w_0t}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kw_0t + Q_k)$$

7-6- بيّن أن كل من المركبة المتوافقة مع الطور $x_I(t)$ والمركبة المترابعة $x_Q(t)$ مرتبطة بمركبتي الإشارة التحليلية حسب العلاقتين التاليتين:

$$x_I(t) = x(t)cosw_0t + \hat{x}(t)sinw_0t$$

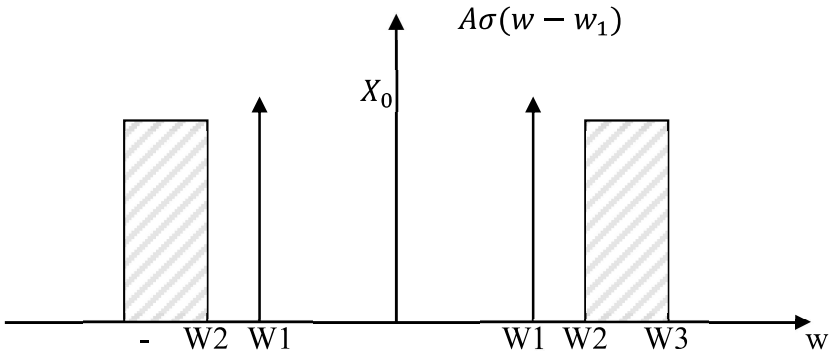
$$x_Q(t) = \hat{x}(t)cosw_0t - x(t)sinw_0t$$

7-7- لدينا إشارة حزمة التمرير التالية:

$$x(t) = x_I(t)cosw_0t - x_Q(t)sinw_0t$$

هل هناك شروط إذا طبقت على $x_I(t)$ و $x_Q(t)$ نحصل على تردد لحظي ثابت مع الزمن؟ وإن وجدت تلك الشروط فما هي؟

7-8- أوجد الإشارة التحليلية للطيف المبين بالشكل التالي:



الشكل 7-16 التمرين 7-8.

7-9- برهن أنه لكل من الإشارتين $x(t)$ و $\hat{x}(t)$ نفس القدرة ونفس تابع الترابط الذاتي.

7-10- بين أن تحويل هيلبيرت للإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

هو التابع التالي:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \ell_n \left| \frac{T+2t}{T-2t} \right|$$

7-11- تم تطبيق الإشارة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} Acos(2\pi f_c t) & ; \quad 0 \le t \le T \\ 0 & ; \quad otherwize \end{cases}$$

على دخل مرشح ذي الاستجابة النبضية التالية.

$$h(t) = x(T-t)$$

المطلوب: إيجاد استجابة المرشح مع الرسم علماً بأن $f_c \gg 1/T$.

12-7- طُبقت الإشارة التالية:

$$x(t) = Acos(w_c t)\cos(w_m t)\ ;\ w_c \gg w_m$$

على مدخل قناة حزمة تمرير ذات الاستجابة الطورية التالية:

$$\beta(w) = -tan^{-1}\left(\frac{w^2 - w_c^2}{ww_c}\right)$$

المطلوب: إيجاد (1) تأخير الطور (2) تأخير الزمرة.

8 مقدمة في التعديل

Introduction to Modulation

1.8 مقدمة

الهدف من نظم الاتصالات هو نقل الإشارة الحاملة للمعلومات (إشارة الرسالة) من طرف المرسل إلى طرف المستقبل عبر القناة الواصلة بين المرسل والمستقبل يمكن أن تكون القناة سلكية أو لاسلكية. تَستخدم القنوات السلكية الأسلاك النحاسية المزدوجة أو الكوابل النحاسية أو الكوابل الضوئية. أما القنوات اللاسلكية فتستخدم هوائياً لإرسال الأمواج الكهرطيسية في طرف الإرسال وهوائياً في طرف الاستقبال من أجل استقبال الأمواج الكهرطيسية الحاملة للمعلومات. من الأمثلة عن القنوات اللاسلكية: الهاتف الجوال والقنوات الفضائية والإذاعات وغيرها. يمكن أن تكون إشارة الرسالة إشارة كلامية أو إشارة فيديو أو إشارة قياس عن بُعد وغيرها.

تتألف عملية التعديل modulation من مرحلتين: مرحلة التعديل ومرحلة كشف التعديل. تتم في مرحلة التعديل تحميل إشارة الرسالة (الإشارة المعدِّلة modulating) على إحدى معاملات إشارة الحامل carrier حيث نحصل على الإشارة المعدَّلة modulated signal. أما مرحلة كشف التعديل demodulation، فهي معاكسة لمرحلة التعديل، أي استخلاص إشارة الرسالة (المعلومات) من الإشارة المعدَّلة.

سوف نهتم في هذا الفصل بالتعديل التماثلي analog modulation الذي يحوي كلاً التعديل المطالي amplitude modulation والتعديل الزاوي angle modulation الذي يحوي بدوره التعديل الترددي frequency modulation والتعديل الطوري phase modulation. بالإضافة إلى ذلك سوف نهتم بتعديل النبضة amplitude pulse modulation. ونظراً للقيمة العملية سوف نركز اهتمامنا على التعديل المطالي والترددي بالإضافة إلى تعديل مطال النبضة.

2.8 أنواع التعديل والفوائد منه

تتحدد أنواع التعديل عن طريق شكل الموجة الحاملة المستخدمة في التعديل والحوامل الأكثر شيوعاً في التعديل هي: الموجة الجيبية وقطار من النبضات الدورية. وبناءً على ذلك يكون لدينا نوعان من التعديل، تعديل الموجة المستمرة continuous wave (CW) والتعديل النبضي pulse. في البداية سوف نسلط الضوء على تعديل الموجة المستمرة ومن ثم التعديل النبضي.

1.2.8 تعديل الموجة المستمرة

ليكن لدينا موجة الحامل الجيبية التالية:

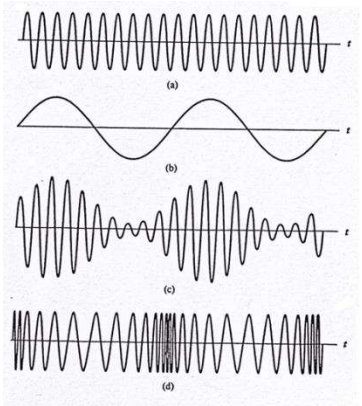
$$c(t) = \mathrm{A}_c \cos(\psi(t)) \qquad (1\text{-}8)$$

هذا يعني أن الموجة الجيبية تُحدَّد بشكل جيد عن طريق تحديد كل من العاملين، المطال A_c والطور الكلي (total phase) $\psi(t)$. وبناءً على اختيار أي من العاملين الذي يجب تعديله، ينقسم التعديل إلى تعديل مطالي وتعديل زاوي angle. في التعديل المطالي، يتغير مطال الحامل بما يتوافق مع تغير إشارة الرسالة. وفي التعديل الزاوي تتغير الزاوية $\psi(t)$ بحيث يتوافق تغيرها مع تغير إشارة الرسالة. يوضح الشكل 8-1 كل من التعديل المطالي والتعديل الزاوي وذلك عندما تكون الإشارة المعدّلة إشارة جيبية التي تستخدم عادة عند دراسة أنواع التعديل المختلفة.

هناك أربعة أشكال معروفة في التعديل المطالي وهي:

- التعديل المطالي الكلي كما في الشكل 8-1(c).
- تعديل الحزمتين الجانبيتين مع حذف الحامل double sideband-suppressed carrier (DSB-SC).
- تعديل الحزمة الجانبية الواحدة single sideband (SSB).
- تعديل الحزمة الجانبية الأثري (مكيف) vestigial sideband.

تختلف تلك الأشكال فيما بينها تبعاً للطيف الترددي المحتواة في الإشارة المعدّلة. ويمكن اعتبار كل من الأنواع الثلاثة الأخيرة تعديلاً خطياً liner modulation وذلك لأنه إذا ضُرب مطال إشارة الرسالة بعامل سلمي مُحدد فإنّ الإشارة المعدّلة تُضرب أيضاً بنفس العامل السلمي. وهذه الخاصية غير متوافرة في التعديل المطالي الكلي. وسوف نبين ذلك لاحقاً.



الشكل 8-1 (a) موجة الحامل (b) الإشارة المعدّلة (إشارة الرسالة) (c) الإشارة المعدّلة بالمطال (d) الإشارة المعدّلة بالزاوية.

بخلاف التعديل المطالي، يعتبر التعديل الزاوي تعديلاًاكتب المعادلة هنا. غير خطي non linear ولتوضيح ذلك سوف ندخل مفهوم تردد الراديان اللحظي (instantaneous radian frequency) $w_i(t)$ والذي يُعطى بالعلاقة التالية:

$$w_i(t) = \frac{d\psi_i(t)}{dt} \tag{2-8}$$

$$\psi_i(t) = \int_o^t w_i(\tau)d\tau \tag{3-8}$$

وذلك بفرض أن القيمة الابتدائية:

$$\psi_i(o) = \int_{-\infty}^{0} w_i(t)dt = 0$$

لتكن لدينا الإشارة الجيبية التالية:

$$c(t) = A_c\cos(w_c t + \varphi)$$

حيث A_c المطال و w_c تردد الراديان و φ الطور.

من العلاقة السابقة فإن الطور الكلي

$$\psi(t) = w_c t + \varphi$$

حيث $w_i(t) = w_c$.

لجعل التردد اللحظي يتغير بشكل يتفق مع تغير إشارة الرسالة $m(t)$، يمكننا كتابة:

$$w_i(t) = w_c + k_f m(t) \tag{4-8}$$

حيث k_f عامل لتوحيد الواحدة الفيزيائية، ويسمى تحسس التردد (عامل تحسس التردد) frequency sensitivity factor للمعدّل. بتعويض (4-8) في (3-8) نحصل على ما يلي:

$$\psi(t) = w_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau \tag{5-8}$$

وبتعويض (5-8) في (1-8) نحصل على التعديل الترددي frequency modulation (FM) ذي النموذج التالي:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau] \quad (6\text{-}8)$$

وعندما يتغير الطور بما يتفق مع تغير إشارة الرسالة، عند ذلك نحصل على:

$$\psi(t) = w_c t + k_P m(t) \quad (7\text{-}8)$$

حيث k_P هو عامل لتوحيد الواحدة الفيزيائية، ويُسمى عامل حساسية الطور. وبتعويض (8-7) في (8-1) نحصل على نموذج تعديل الطور phase modulation (PM)

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_P m(t)] \quad (8\text{-}8)$$

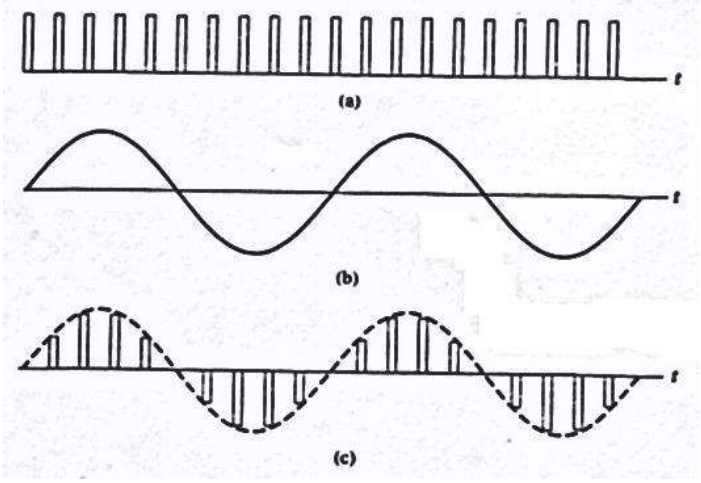
واضح أن كل من نموذج الـ FM والـ PM هو تابع غير خطي لإشارة الرسالة وبالتالي فإن كلا التعديلين FM و PM غير خطين. والآن سوف ننتقل لتسليط الضوء على تعديل النبضة.

2.2.8 تعديل النبضة

ليكن لدينا الحامل للتعديل النبضي ذو الشكل التالي:

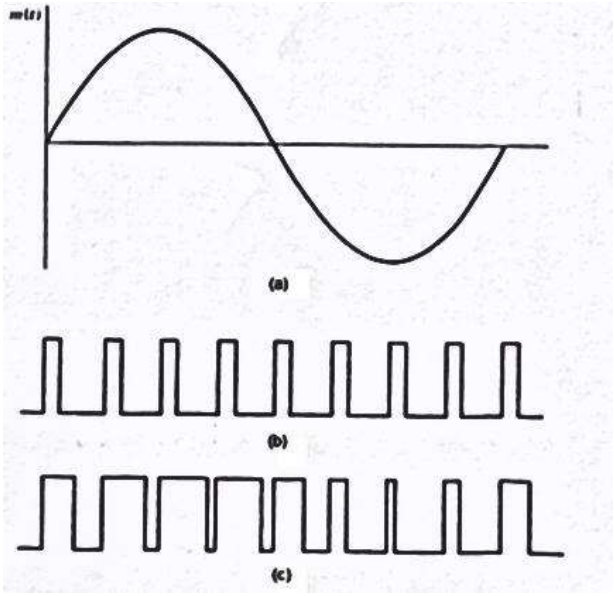
$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(t - nT) \quad (9\text{-}8)$$

حيث $P(.)$ نبضة بدور T، والذي هو كبير بالمقارنة مع عرض النبضة. وكما ذكرنا سابقاً في التعديل التماثلي، تتغير في التعديل النبضي أيضاً إحدى معاملات النبضة (المطال، العرض، والموقع) بما يتناسب مع إشارة الرسالة. يوضح الشكل 8-2 تعديل مطال النبضة pulse amplitude modulation (PAM). سوف نناقش هذا التعديل بشيْ من التفصيل لاحقاً بالاعتماد على أسلوب تحميل المعلومات على النبضة. نميز صنفين من تعديل النبضة: تعديل النبضة التماثلي analog pulse modulation وتعديل النبضة الرقمي digital pulse modulation.



الشكل 8-2 (a) النبضات الدورية الحاملة (b) الإشارة المعدِّلة (c) الإشارة المعدَّلة.

يحوي تعديل النبضة التماثلي الأشكال التالية: التعديل PAM وتعديل عرض النبضة pulse duration modulation (PDM) وتعديل موضع النبضة pulse position modulation (PPM). يوضح الشكل 8-3 التعديلين PDM و PPM.



الشكل 8-3 (a) إشارة الرسالة (b) النبضات الحاملة (c) تعديل PDM.

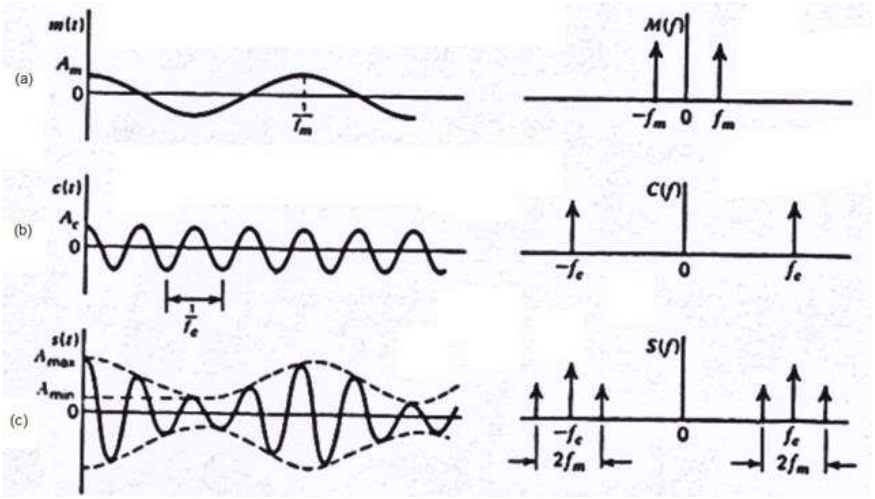
تُمثَّل الإشارة المعدَّلة في تعديل النبضة الرقمي بشكل مرمز. ومن أجل تحقيق ذلك التمثيل نقوم بإجراء عمليتين: العملية الاولى تُسمى التكميم quantization حيث يتم تقريب القيمة التماثلية للنبضة بعدد صحيح مناسب من البتات. و تُسمى العملية الثانية الترميز coding حيث يتم تحويل كل نبضة مكممة إلى الشكل الرقمي (بتات). الشكل العملي لتعديل النبضة الرقمي هو تعديل النبضي المرمز pulse code modulation (PCM). تجدر الملاحظة هنا أن عملية التكميم عملية غير خطية، تؤدي إلى ضياع جزء من المعلومات. ويمكن التحكم بكمية الضياع بعدد البتات المستخدمة لتمثيل النبضة المكممة أي بزيادة دقة التمثيل، وذلك على حساب التعقيد. ننتقل الآن إلى ذكر فوائد التعديل بشكل عام.

3.2.8 فوائد التعديل

يستخدم التعديل لإزاحة طيف إشارة الرسالة (الحزمة القاعدية baseband) إلى المكان المناسب للإرسال، ضمن طيف قناة الاتصال، وذلك في أثناء عملية التعديل. وفي كشف التعديل يُعاد الطيف المزاح إلى مكانه الأصلي (الحزمة القاعدية). يبين

الشكل 8-4 عملية إزاحة الطيف للتعديل المطالي، والذي سوف يدرس لاحقاً. حيث تم إزاحة طيف الإشارة (إشارة الرسالة) $M(f)$ ذا المجال الترددي $2f_m$ والمتمركز عند $f = 0$ لمسافة $\pm f_c$ كما في

الشكل 8-4(c).



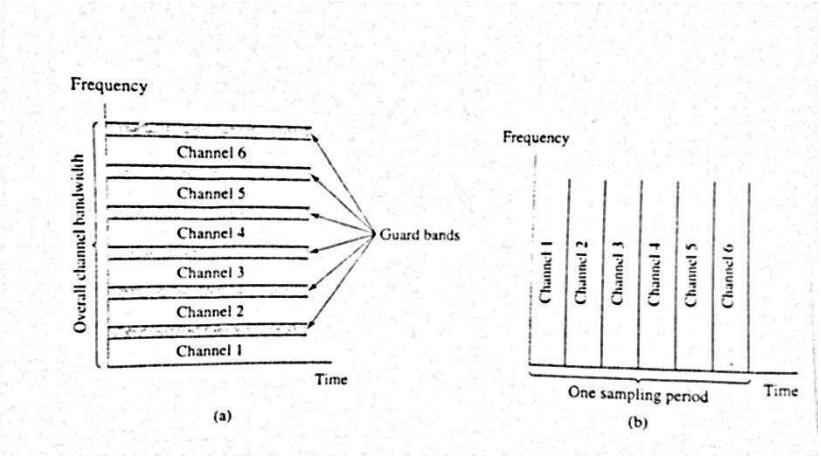
الشكل 8-4 (a) إشارة الرسالة وطيفها (b) إشارة الحامل وطيفها (c) الإشارة المعدلة وطيفها المزاح.

يسمح التعديل باختيار شكل التعديل المناسب AM أو FM أو PM الممانع للضجيج والتداخل. لأن الضجيج ذو تأثير مباشر على الإشارة المعدَّلة وذلك لأنه يُجمع مباشرة مع مطال الإشارة المعدلة. بينما إذا تم استخدام التعديل FM أو PM فإنه ممانع للضجيج والتداخل نسبياً وذلك لأن المعلومات تحمل على التردد اللحظي أو الطور اللحظي. وسوف نوضح ذلك بالتفصيل عند التطرق لدراسة أنواع التعديل (FM و AM).

يسمح التعديل بالاستخدام الفعّال لفضاء الإرسال لقناة الاتصال. وذلك بإعطاء كل قناة فضاء خاص بها للإرسال وغير متقاطع مع فضاءات القنوات الأخرى. يمكن أن يكون الفضاء في المجال الترددي أو في المجال الزمني أو غير ذلك. وذلك كما هو موضح في الشكل 8-5. الذي يسمح بتجميع ست قنوات في المجال الترددي كما في الشكل 8-5(a) وست قنوات في المجال الزمني كما في الشكل 8-5(b). حيث يتم أخذ العينات من القنوات الزمنية الستة بشكل دوري. وهكذا تم استثمار كامل المجال الترددي الكلي، مع وضع مجالات ضيقة للحماية من التداخل (تداخل الإشارات)، وكذلك تم استثمار كامل للزمن الكلي.

يسمى تجميع القنوات في المجال الترددي التجميع بالتقسيم الترددي frequency division multiplexing (FDM) و يسمى التجميع في المجال الزمني التجميع بالتقسيم الزمني time division multiplexing (TDM). سوف نناقش التجميع في المجال الترددي والتجميع في المجال الزمني في الفقرة (8-8).

تسمح عملية التعديل باستخدام هوائيات (إرسال واستقبال) بالأطوال العملية. نعلم من فيزياء الأمواج الكهرطيسية، أن طول الهوائي اللازم لإشعاع radiation الإشارة المعدّلة هو نصف طول الموجة للإشارة المشعّة. وبما أن طول الموجة يتناسب عكساً مع التردد (تردد الحامل)، فإنه يمكن تكييف تردد الحامل حيث يكون طول الهوائي مناسباً للتطبيقات العملية.



الشكل 8-5 (a) التجميع بالتقسيم الترددي (b) التجميع بالتقسيم الزمني.

3.8 أسس التعديل المطالي

المكونات الأساسية في عملية تعديل، هي إشارة الحامل وإشارة الرسالة. في البداية سوف نتعرض لإشارة الحامل ومن ثم للإشارة المعدّلة.

1.3.8 الحامل

من أهم مكونات التعديل هي الموجة الحاملة *carrier*، التي تقوم بنقل (إزاحة) طيف الرسالة إلى المكان المطلوب في طيف قناة النقل. في الحالة العامة يمكن اقتراح النموذج التالي للحامل، أي:

$$x_c(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (10\text{-}8)$$

حيث التابع $f(\cdot)$ يمكن أن يكون خطياً أو غير خطي، بذاكرة أو دون ذاكرة. و $(a_1, \dots, a_n)$ معاملات الحامل، التي تحدده بشكل وحيد.

لتكن الإشارة $x(t)$ إشارة الرسالة (إشارة الحزمة القاعدية)، المطلوب إرسالها عبر قناة الاتصال. إذا تغيرت إحدى معاملات $(a_1, \dots, a_n)$ إشارة الحامل $x_c(t)$ بما يتفق مع تغير إشارة الرسالة فإن هذه العملية الفيزيائية تسمى التعديل. أي تم تعديل إحدى معاملات الحامل، بأقل تقدير، بما يتوافق مع إشارة الرسالة (إشارة المعلومات).

الإشارة الفيزيائية تحوي غالباً ثلاثة معالم مستقلة. فمثلاً الإشارة الجيبية:

$$x_c(t) = A_c \cos(wt + \varphi) \qquad (11\text{-}8)$$

تحوي المعالم المستقلة التالية: المطال A والتردد (التردد الزاوي) W والطور φ، والإشارة المربعة تحوي ثلاثة معالم المطال وعرض النبضة وطور النبضة (الموضح ضمن الدور). لذلك يكون من المناسب استخدام الإشارة الجيبية في التعديل المستمر والإشارة المربعة في التعديل النبضي. تجدر الإشارة هنا، أن تردد إشارة الحامل يجب أن تكون أكبر بكثير من عرض طيف الإشارة الأصلية (إشارة الرسالة) وذلك من أجل الأداء الأفضل.

2.3.8 الإشارة المعدَّلة

عند تغيير مطال الحامل، بما يتوافق مع إشارة الرسالة وبإبقاء المعاملات w وφ دون تغير، فإننا نسمي هذه العملية بالتعديل المطالي amplitude modulation (AM) وبناءً على ذلك، فإن نموذج الإشارة المعدّلة تأخذ الشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = A(t)\cos(w_0 t + \varphi) \qquad (12\text{-}8)$$

حيث $A(t)$ غلاف الإشارة أي $A(t) = e(t)$. وهكذا فإن التعديل المطالي هو عبارة عن جداء الغلاف $A(t)$ مع إشارة جيبية. والغلاف يتغير ببطئ بالمقارنة مع تغير إشارة الحامل، وكلما كان تغير الغلاف أبطأ بكثير من تغير إشارة الحامل كلما كان الأداء أفضل.

في التعديل المطالي الكلي (اختصاراً التعديل المطالي، كما ذكرنا سابقاً) العلاقة بين الغلاف $e(t)$ وإشارة الرسالة $m(t)$، هي من الشكل التالي:

$$e(t) = A_c[1 + k_a m(t)] \qquad (13\text{-}8)$$

حيث A_c مطال الحامل قبل التعديل وهو ثابت، k_a عامل حساسية المطال amplitude sensitivity factor للمعدّل وهو ثابت أيضاً. وفي بعض المراجع يُسمى عُمق التعديل modulation depth. إن سرعة تغير الغلاف تابعة لعامل حساسية المطال k_a حيث كلما كان صغيراً كان تغير الغلاف بطيئاً وكلما كان كبيراً (القيمة العظمى لجداء k_a مع $m(t)$ يساوي الواحد) كان تغير الغلاف أسرع.

يشترط وجود التعديل دون تشوه أن تتحقق المتراجحة التالية:

$$|k_a m(t)| \leq 1 \qquad (14\text{-}8)$$

ففي هذه الحالة فإن الحدّ $(1 + k_a m(t))$ يكون غير سالب. وعندما يكون:

$$|k_a m(t)| > 1 \qquad (15\text{-}8)$$

تحدث لدينا ظاهرة طفح التعديل over-modulation ويوضح الشكل 8-6 الحالتين السابقتين. حيث يوضح الشكل 8-6(a) إشارة الرسالة (إشارة الحزمة القاعدية) و يبين الشكل 8-6(b) إشارة التعديل المطالي AM

عندما يتحقق شرط وجود تعديل مطالي دون تشوه، أي عند $|k_a\, m(t)| < 1$. يوضح الشكل 8-6(c) التعديل بوجود تشوه والذي ليس بالضرورة أن يستمر لكل الزمن، أي عند $|k_a\, m(t)| > 1$ لاحظ في هذا الشكل نقطتي إنعكاس الطور. وعندما يتحقق التقريب التالي:

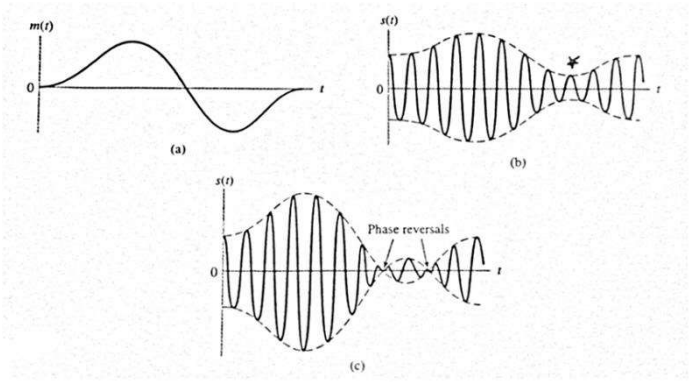
$$k_a m_{max}(t) \cong 1 \quad or \quad k_a m_{min}(t) \cong -1$$

نسمي هاتين الحالتين، حالة التعديل العميق (البطن والقعر). في كثير من الأحيان، يمكن التعبير عن عمق التعديل باستخدام النسبة المئوية percentage modulation. هذه النسبة المئوية يمكن أن تكون النسبة المئوية العليا upward:

$$k_{a,u} = \frac{A_{max}(t) - A_c}{A_c} \times 100\% \qquad (16\text{-}8)$$

أو النسبة المئوية الدُنيا downward:

$$k_{a,d} = \frac{A_c - A_{min}(t)}{A_c} \times 100\% \qquad (17\text{-}8)$$



الشكل 8-6 (a) إشارة الرسالة (b) موجة التعديل AM عند $|k_a\, m(t)| < 1$ (c) موجة التعديل AM عند $|k_a\, m(t)| > 1$.

من غير المسوغ استخدام عمق التعديل منخفض في قنوات الاتصال، وذلك لأن ذلك بسبب عدم استثمار استطاعة خرج المرسل بشكل فعّال. وبالمقابل عندما تكون نسبة التعديل المئوية العليا تساوي 100% سوف يتضاعف مطال موجة الخرج عند قيم القمة للإشارة المعدلة، ويجب ألا يزيد المطال عن ذلك تجنباً لحدوث التشوه بسبب زيادة (طفح) التحميل overload.

عند زيادة نسبة التعديل، تسمى بطفح التعديل أو التعديل الزائد over-modulation. وذلك كما هو واضح في الشكل 8-6(c) في هذه الحالة، يتوقف الغلاف عن متابعة (ملاحقة) الإشارة المعدّلة.

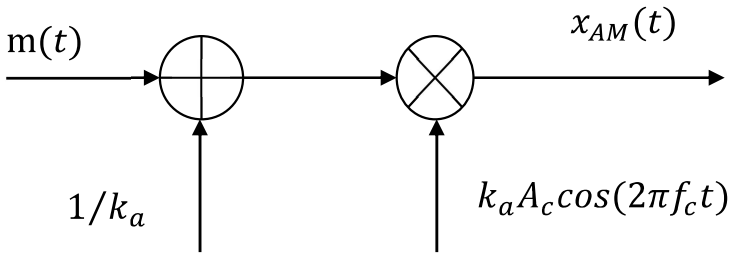
بتعويض العلاقة (8-13) في العلاقة (8-12) نحصل على إشارة AM التالية (الإشارة المعدّلة).

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{18-8}$$

يمكن وضع الإشارة السابقة بالشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = k_a\left[m(t) + \frac{1}{k_a}\right]A_c\cos(2\pi f_c t) \tag{19-8}$$

بالاعتماد على العلاقة السابقة، نحصل ببساطة على المخطط الوظيفي لنظام توليد الإشارة المعدّلة – المعدّل modulator، وذلك كما هو واضح في الشكل 8-7.



الشكل 8-7 المخطط الوظيفي للمعدّل.

قد يكون من المناسب طرح السؤال التالي: هل التعديل المطالي الموصف في العلاقة (8-18) هو تعديل خطي. نعلم أنه حتى يكون النظام خطياً، يجب أن يحقق شرط التراكم superposition وشرط التقييس scaling. وإن لم يحقق إحدى الشرطين فإن النظام غير خطي. سوف نختبر شرط التراكم. بفرض $AM(\cdot)$ معامل operator التعديل المطالي يكون لدينا:

$$AM[m_1(t) + m_2(t)] = AM[m_1(t)] + AM[m_2(t)] \tag{20-8}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\begin{aligned} &A_c\{1 + k_a[m_1(t) + m_2(t)]\}\cos(2\pi f_c t) \\ &\neq A_c[1 + k_a m_1(t)]\cos(2\pi f_c t) + A_c[1 + k_a m_2(t)]\cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{21-8}$$

وهكذا فإن التعديل المطالي يخرق شرط التراكم.

3.3.8 تعديل AM لإشارة جيبية ومجموعة إشارات جيبية

في البداية، للتبسيط سوف نستخدم الإشارة الجيبية، كإشارة معدِّلة ذات التردد f_m والطور φ_m والمطال $A_m = 1$. وهكذا نحصل على الإشارة التالية:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + k_a \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)]\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \tag{22-8}$$

نجد ببساطة في هذه الحالة (تعديل الإشارة الجيبية) أن التعديل المطالي لإشارة جيبية هو تعديل متناظر symmetric بالنسبة لمحور الزمن. باستخدام المتطابقات المثلثية يمكن أن نُعبر عن العلاقة (22-8) بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} x_{AM}(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ &+ \frac{A_c k_a}{2}\cos[(2\pi f_c + 2\pi f_m)t + \varphi_c + \varphi_m] \\ &+ \frac{A_c k_a}{2}\cos[(2\pi f_c - 2\pi f_m)t + \varphi_c - \varphi_m] \end{aligned} \tag{23-8}$$

نلاحظ من العلاقة السابقة (23-8) أن إشارة الـ AM. تتألف من إشارة الحامل $x_c(t)$ بتردد f_c وإشارتين جيبيتين في حزمة التمرير، لاحظ أن مطاليهما متساويان. ولاحظ أيضاً أن طور المركبة العليا هو $\varphi_c + \varphi_m$ وترددها هو $f_c + f_m$، بينما طور المركبة الدنيا هو $\varphi_c - \varphi_m$ وترددها هو $f_c - f_m$. وهكذا لدينا ثلاث إشارات حزمة التمرير التالية:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ x_{us}(t) &= \frac{A_c k_a}{2}\cos[(2\pi f_c + 2\pi f_m)t + \varphi_c + \varphi_m] \\ x_{\ell s}(t) &= \frac{A_c k_a}{2}\cos[(2\pi f_c - 2\pi f_m)t + \varphi_c + \varphi_m] \end{aligned} \tag{24-8}$$

والاستطاعة اللحظية للإشارة السابقة هي:

$$\begin{aligned} P_{AM}(t) &= x_{AM}^2(t) \\ &= x_c^2 + x_{us}^2 + x_{\ell s}^2 + +2x_c x_{us} + 2x_c x_{\ell s} \\ &+ 2x_{us} x_{\ell s} \end{aligned} \tag{25-8}$$

أما القيمة الوسطى لاستطاعة إشارة الـ AM.، فهي:

$$P_a = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_{AM}(t)dt \tag{26-8}$$

واضح أن الحدود، المؤلفة من جداء، في العلاقة (25-8) تساوي الصفر بسبب عملية الوسيط (حساب المتوسط).وهكذا فإن الاستطاعة الوسطى الكلية تكون:

$$P_a = P_{a,c} + P_{a,us} + P_{a,\ell s} \tag{27-8}$$

وهي مجموع المتوسطات لكل من استطاعة الحامل $P_{a,c}$ واستطاعة الحزمة الجانبية العليا $P_{a,us}$ واستطاعة الحزمة الجانبية الدنيا $P_{a,\ell s}$. وبحساب (27-8) مع الأخذ بالحسبان العلاقة (24-8) نحصل على:

$$P_a = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 k_a^2}{8} + \frac{A_c^2 k_a^2}{8} \tag{28-8}$$

نجد من العلاقة السابقة أن نسبة استطاعة الحزمتين الجانبيتين (الحاملين للمعلومات) إلى استطاعة الحامل هي:

$$\frac{P_{a,us} + P_{a,\ell s}}{P_{a,c}} = \frac{k_a^2}{2} \tag{29-8}$$

أي حتى إذا كان عمق التعديل 100% $(k_a = 1)$ فإن نصف الاستطاعة تكون من نصيب الحامل والنصف الآخر من نصيب الحزمة الجانبية العليا مع الحزمة الجانبية الدنيا. وهذا يدل على إسراف التعديل AM باستخدام الاستطاعة. ننتقل الآن إلى مناقشة التعديل المطالي AM لمجموعة إشارات جيبية.

عملياً، نادراً ما تكون الإشارة المعدِّلة موجة جيبية واحدة، وإنما تكون طيفاً مستمراً أو متقطعاً من الترددات. سوف نناقش هنا الطيف المتقطع لذلك يكون من المناسب استخدام إشارة الرسالة (الإشارة المعدِّلة) التالية:

$$m(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(w_i t + \varphi_i) \tag{30-8}$$

حيث $w_i = 2\pi f_i$ و A_i مجموعة المطالات و φ_i مجموعة الأطوار. سوف نفترض علاقة الترددات مع بعضها البعض من الشكل:

$$w_n > w_{n-1} > \cdots > w_2 > w_1$$

بتعويض العلاقة (30-8) في (18-8) نحصل على:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + \sum_{i=1}^{N} k_a A_i \cos(w_i t + \varphi_i)]\cos(w_c t + \varphi_c) \quad (31\text{-}8)$$

لندخل مفهوم جديد، والذي هو عامل التعديل modulation factor (أو عمق التعديل الجزئي partial) والذي هو عبارة عن جداء k_a بـ A_i، أي:

$$\mu_i = k_a A_i \quad (32\text{-}8)$$

وبتعويض (8-32) في (8-31) يكون لدينا:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \cos(w_i t + \varphi_i)]\cos(w_c t + \varphi_c) \quad (33\text{-}8)$$

باستخدام المتطابقات المثلثية يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} x_{AM}(t) &= A_c \cos(w_c t + \varphi_c) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \frac{A_c \mu_i}{2} \cos[(w_c + w_i)t + \varphi_c + \varphi_i] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \frac{A_c \mu_i}{2} \cos[(w_c - w_i)t + \varphi_c - \varphi_i] \end{aligned} \quad (34\text{-}8)$$

الحدّ الأول عبارة عن إشارة الحامل والحدّ الثاني عبارة عن الحزمة الجانبية العليا للترددات والحدّ الثالث الحزمة الجانبية الدنيا للترددات. الحزمة الجانبية (مجموعة من المركبات الترددية) العليا هي عبارة عن الحزمة الترددية للإشارة المعدّلة المقيّسة ومزاحة بمقدار w_c. والحزمة الجانبية السفلى هي عبارة عن الحزمة الترددية للإشارة المعدّلة المقيّسة والمزاحة بمقدار w_c حيث تكون خيال الحزمة الجانبية العليا بالنسبة للتردد الحامل w_c وسوف نوضح ذلك بالرسم في الفقرة التالية.

4.8 التمثيل الطيفي والمطواري للتعديل المطالي

لتمثيل إشارة التعديل في المجال الترددي نوجد تحويل فوريه لإشارة التعديل AM، $x_{AM}(t)$ ، في المجال الزمني. سوف نرمز بـ $X_{AM}(jw)$. لتحويل فوريه للإشارة $x_{AM}(t)$ ونرمز بـ $M(jw)$ لتحويل فوريه للإشارة المعدّلة $m(t)$.

نسمي $M(jw)$ بطيف الرسالة message spectrum. بالعودة إلى الفصل الرابع نجد أن تحويل فوريه للإشارة $A_c\cos(w_c t)$ هو:

$$\mathcal{F}[A_c\cos(w_c t)] = \pi A_c[\delta(w-w_c)+\delta(w+w_c)]$$

وتحويل فوريه للإشارة $m(t)\cos(w_c t)$ هو:

$$\mathcal{F}[m(t)\cos(w_c t)] = \frac{1}{2}[M(jw-jw_c)+M(jw+jw_c)]$$

باستخدام النتائج السابقة والأخذ بالحسبان خاصية التقييس والخاصية الخطية لتحويل فوريه يمكن التعبير عن إشارة AM في المجال الترددي بالشكل التالي:

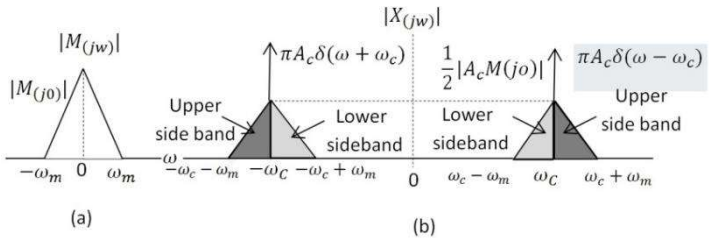
$$\begin{aligned} X_{AM}(jw) &= \pi A_c[\delta(w-w_c)+\delta(w+w_c)] \\ &+\frac{1}{2}k_a A_c\big[M\big(j(w-w_c)\big)\big]+\frac{1}{2}k_a A_c\big[M\big(j(w+w_c)\big)\big] \end{aligned} \qquad (35\text{-}8)$$

يوضح الشكل 8-8a) طيف الرسالة حيث $-w_m \le w \le w_c$.

تجدر الإشارة أن الطيف في الشكل 8-8 ليس لإشارة عملية وإنما رُسم للتوضيح. بالاعتماد على العلاقة (35-8) يمكن رسم طيف إشارة الـ $X_{AM}(f), AM$ بفرض $w_c > w_m$ (تجنباً لتداخل الطيفين حدوث تشوه ترددي)الذي يتألف من نبضتي ديراك مقيستين بـ πA_c عند التردد $\pm w_c$ بالإضافة إلى صيغتين من طيف إشارة الرسالة مقيستين بـ $\frac{1}{2}k_a A_c$ ومزاحتين بمقدار $\pm w_c$. سوف نوصف طيف إشارة الـ AM بتفصيل أكثر كما يلي:

تُسمى المركبات الترددية الموجبة الواقعة بعد w_cبالحزمة الجانبية العليا upper sideband والجزء المتناظر معها بالنسبة للتردد w_c يسمى بالحزمة الجانبية الدنيا lower. وبشكل مماثل، المركبات الترددية السالبة ، وهي أيضاً جزء من الطيف، والمبينة بلون أفتح هي الجانبية الدنيا. من الشكل 8-8(b) نوجد المجال الترددي للإرسال transmission bandwidth والذي يُعطى بالعلاقة التالية:

$$w_T = (w_c+w_m)-(w_c-w_m) = 2w_m \qquad (36\text{-}8)$$



الشكل 8-8 (a) طيف الرسالة (b) طيف الإشارة الـ AM.

مثال 8-1: لدينا نظام اتصالات يستخدم التعديل المطالي AM وذلك لإرسال الرسالة $m(t) = A_m\cos(w_m t)$ باستخدام الحامل $x_c(t) = A_c\cos(w_c t)$. بفرض $k_a m(t) < 1$ و $w_c \gg w_m$. المطلوب: (1) ارسم الشكل الموجي من الإشارات التالية $m(t),\ x_c(t),\ x_{AM}(t)$ بشكل متزامن، (2) أوجد طيف الإشارة المعدّلة، (3) ارسم الأطياف (المركبات الترددية) الموافقة للطلب (1) بشكل متزامن.

الحل: نعلم أن إشارة التعديل المطالي (الإشارة المعدّلة) لها الشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + k_a A_m \cos(w_m t)]\cos(w_c t)$$

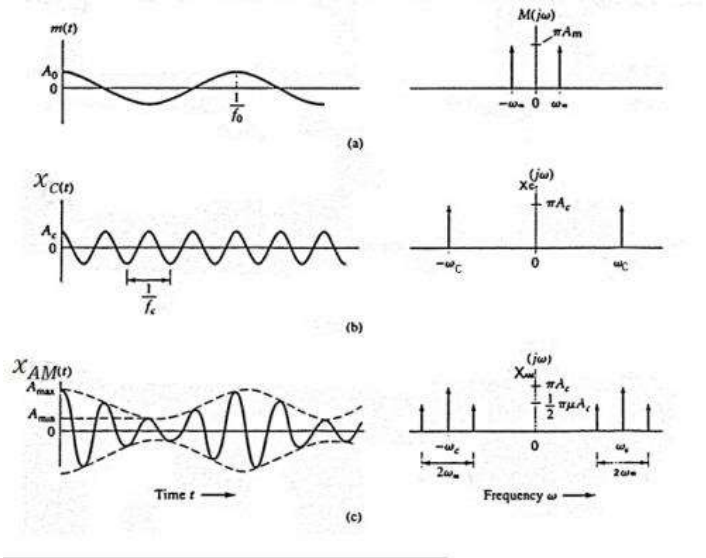
بفرض $\mu = k_a A_m$ الذي يسمى كما رأينا سابقاً بمعامل التعديل، عند ذلك الإشارة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + \mu\cos(w_m t)]\cos(w_c t) \qquad (37\text{-}8)$$

في الشكل 8-9 يبين الطرف الأيسر رسم الأشكال الموجبة المطلوبة. و يبين الطرف الأيمن رسم الأطياف الموافقة.

الإشارة المعدّلة في العلاقة (37-8) يمكن وضعها بالشكل التالي:

$$X_{AT}(t) = A_c\cos(w_c t) + \frac{1}{2}\mu A_c cos[(w_c + w_m)t] + \frac{1}{2}\mu A_c\cos[(w_c - w_m)t] \qquad (38\text{-}8)$$



الشكل 8-9 الطرف الأيسر المجال الزمني والأيمن المجال الترددي (a) *إشارة الرسالة* (b) الحامل (c) الإشارة المعدّلة.

بأخذ تحويل فوريه للعلاقة السابقة نحصل على:

$$X_{AM}(jw) = \pi A_c[\delta(w - w_c) + \delta(w + w_c)] + \frac{1}{2}\pi\mu A_c[\delta(w - w_c - w_m) + \delta(w + w_c + w_m)] + \frac{1}{2}\pi\mu A_c[\delta(w - w_c + w_m) + \delta(w + w_c - w_m)] \quad (39\text{-}8)$$

بناءً على العلاقة السابقة يمكن رسم الطيوف المطلوبة في الطلب (1). وهي مبينة في الشكل 8-9 الطرف الأيمن.

سوف ننتقل الآن لتوضيح إشارة الـ AM باستخدام التمثيل الهندسي، لإعطاء صور واضحة لإشارة الـ AM سوف نستخدم التمثيل الهندسي، وذلك عن طريق المطاور (جمع مطاورphasors) التي تدور في المستوى العقدي. من أجل التبسيط سوف نفترض أن إشارة المعلومات، هي عبارة عن إشارة جيبية ذات الشكل التالي:

$$x_m(t) = A_m\cos(w_m t + \varphi_m)$$

وأن إشارة الحامل من الشكل:

$$x_c(t) = A_c\cos(w_c t + \varphi_c)$$

واضح أن القيمة اللحظية للحامل هي مسقط المطوار X_c على المحور الزاوي الذي يدور حول مركز الإحداثيات بسرعة زاوية w_c وذلك عكس اتجاه عقارب الساعة، حيث :

$$X_c = A_c\exp(j\varphi_c) \quad (40\text{-}8)$$

بفرض $\mu = k_a A_m$ فإن العلاقات (24-8) يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
&(a)\ x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \varphi_c) \\
&(b)\ x_{us}(t) = \frac{A_c \mu}{2} \cos[(w_c + w_m)t + \varphi_c + \varphi_m] \\
&(c)\ x_{\rho s}(t) = \frac{A_c \mu}{2} \cos[(w_c - w_m)t + \varphi_c - \varphi_m]
\end{aligned}
\tag{41-8}
$$

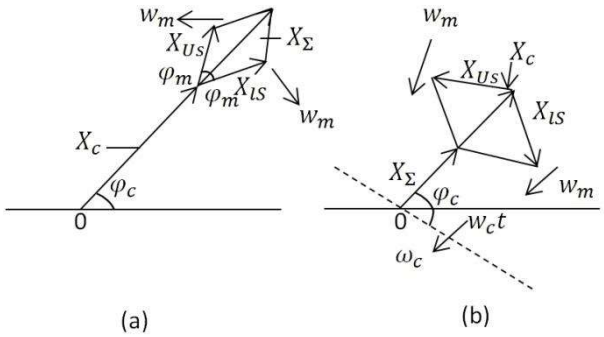
الحزمة الجانبية العليا أي الموجة الجانبية العليا العلاقة (41-8)(b) هي ذات مطال $\frac{A_c \mu}{2}$ والطور $\varphi_c + \varphi_m$ وذلك عند $t = 0$ والحزمة الجانبية الدنيا ذات مطال $\frac{A_c \mu}{2}$ والطور $\varphi_c - \varphi_m$ عند $t = 0$. وهكذا نجد المطاور التالية:

$$
\begin{aligned}
X_c &= A_c\, exp(j\varphi_c) \\
X_{us} &= \frac{A_c \mu}{2} \exp[j(\varphi_c + \varphi_m)] \\
X_{\rho s} &= \frac{A_c \mu}{2} exp[j(\varphi_c - \varphi_m)]
\end{aligned}
\tag{42-8}
$$

واضح أن مطوار المجموع X_Σ هو باتجاه مطوار الحامل لكون مجموع X_{us} و $X_{\ell s}$ هو دوماً باتجاه الحامل. يوضح الشكل 8-10 العلاقة التالية:

$$X_\Sigma = X_c + X_{Us} + X_{\rho s} \tag{43-8}$$

القيمة اللحظية لإشارة الـ AM عند اللحظة $t = 0$ هي عبارة عن مسقط الشعاع X_Σ على المحور الأفقي. سوف نناقش الآن دوران المطاور المختلفة عند الزمن $t > 0$.



الشكل 8-10 (a) كافة المطاور في اللحظة $t = 0$ (b) كافة المطاور في اللحظة $t > 0$.

بإضافة دوران المحور الزاوي بسرعة w_c فإن المطوار X_{us} يدور بسرعة w_m بخلاف دوران عقارب الساعة. وبما أن الطور الكلي هو: $(w_c + w_m)t + \varphi_c + \varphi_m$ العلاقة (8-41)b وبالتالي فإنه يزداد بسرعة أكبر من سرعة طور الحامل. أما بالنسبة للمطوار $X_{\ell s}$ فإنه يدور مع عقارب الساعة بسرعة w_m وطوره الكلي هو: $(w_c - w_m)t + \varphi_c - \varphi_m$، انظر العلاقة (8-41)(c).

القيمة اللحظية لإشارة الـ AM.(عند $t > 0$) هي عبارة عن مسقط المطوار X_Σ على المحور الزاوي. والقيمة اللحظية للغلاف (الغلاف الأعلى) هي مسقط X_Σ على المحور الأفقي.

5.8 الكشف في التعديل المطالي

عملية كشف التعديل هي عملية استخلاص إشارة الرسالة من الإشارة المعدّلة. عموماً تقسم تقنيات كشف التعديل إلى نوعين: كشف التعديل المتماسك coherent وكشف التعديل غير المتماسك non coherent. يتطلب كشف التعديل المتماسك معرفة التردد والطور للإشارة المستقبلة وهذا يتم باستخدام نظام تزامن (وهذا خارج إطار الكتاب). بينما الكشف غير المتماسك لا يلزمه معرفة الطور للإشارة المستقبلة.

1.5.8 الكشف المتماسك

في الكشف المتماسك يتم ضرب الإشارة المستقبلة ذات التردد f_c والطور φ_c بإشارة مولدة محلياً (عن طريق نظام التزامن) ذات نفس التردد f_c ونفس الطور φ_c وهذه هي الحالة المثالية. أما عملياً قد يحدث خلاف بين الطور المستقبل والطور المحلي φ_ℓ بفرض تطابق تردد الإشارة المستقبلة وتردد الإشارة المحلية.

في عملية ضرب الإشارتين سوف نعتمد على نموذج إشارة الـ AM الموضحة في العلاقة (8-12). أما الإشارة المحلية سوف نفرضها من الشكل التالي:

$$A_\ell \cos(2\pi f_c t + \varphi_\rho)$$

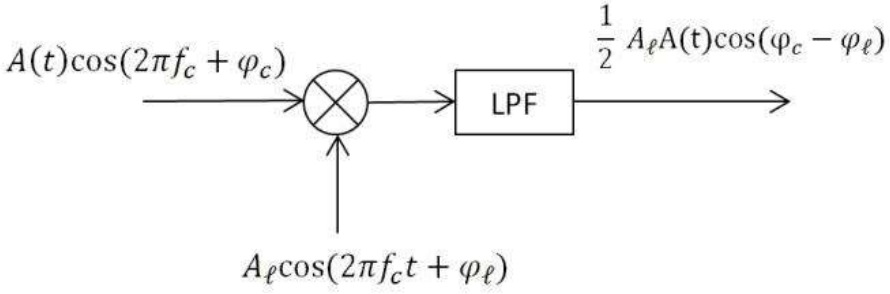
وهكذا يكون لدينا:

$$a_1(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c).A_\ell \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_\rho\right) \qquad (8\text{-}44)$$

باستخدام المتطابقات المثلثية يمكن إعادة كتابة العلاقة السابقة لتصبح من الشكل التالي:

$$a_1(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}A_\ell A(t)\cos(\varphi_c - \varphi_\ell) + \frac{1}{2}A_\ell A(t)\cos[4\pi f_c t + \varphi_c + \varphi_\rho] \tag{45-8}$$

هدفنا الآن الحصول على $kA(t)$ (حيث k ثابت). من أجل ذلك علينا التخلص من الحدّ الثاني ولإنجاز ذلك يمكن استخدام مرشح تمرير منخفض LPF بعد الضارب. وهكذا نحصل على المخطط الوظيفي (المخطط الصندوقي) للكاشف المتماسك المبين في الشكل 8-11.



الشكل 8-11 المخطط الصندوقي للكاشف المتماسك.

وهكذا نجد ببساطة أن خرج الكاشف هو:

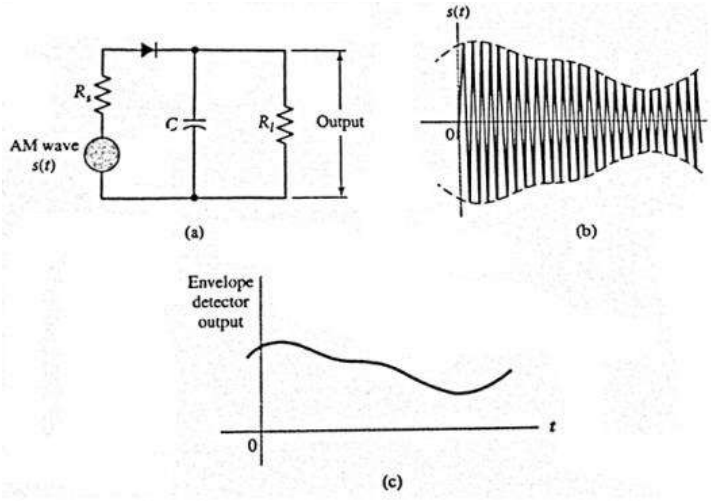
$$a_{out}(t) = \frac{1}{2}A_\ell A(t)\cos(\varphi_c - \varphi_\ell) = KA(t) \tag{46-8}$$

توضح العلاقة السابقة كلما كان الفرق $\varphi_c - \varphi_\ell$ صغيراً كلما أقترب الكاشف من الكشف المثالي أي عند $\varphi_c - \varphi_\ell = 0$.

2.5.8 الكاشف غير المتماسك

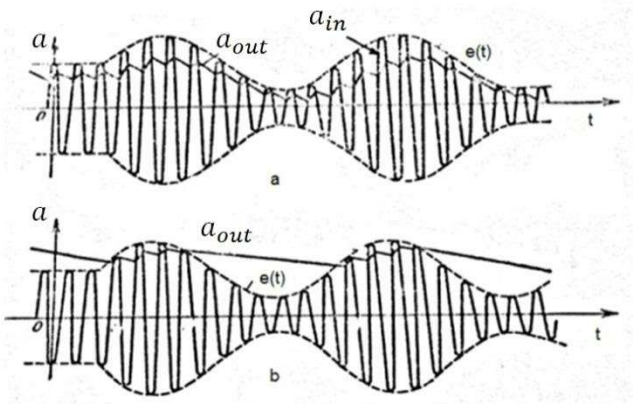
من أكثر كواشف التعديل غير المتماسكة انتشاراً هو كاشف الغلافenvelope detector الذي يستخدم من أجل إشارات تمرير ذات الحزمة الضيقة أي تردد الحامل أكبر بكثير من عرض المجال الترددي لإشارة الرسالة وذات نسبة التعديل المئوية أقل 100%. في الحالة المثالية كاشف الغلاف هو عبارة عن دارة ذات خرج يتناسب مع غلاف إشارة الدخل. إذا فرضنا أن الإشارة ذات الشكل $A(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$ فإن الخرج في الحالة المثالية يكون:

$$a_{out}(t) = K|A(t)| \tag{47-8}$$



الشكل 8-12 (a) كاشف الغلاف (b) إشارة الدخل AM (c) الخرج المثالي.

يوضح الشكل 8-12 دارة كاشف الغلاف مع الدخل والخرج المثالي. تتألف دارة الكاشف من ثنائي diode ومرشح RC. طريقة عمل الدارة كما يلي: لنفرض لدينا ثنائي diode مثالي أي مقاومة الانحياز الأمامي صفر ومقاومة الانحياز العكسي لانهاية. خلال نصف الدور الموجب لإشارة الدخل يكون الثنائي بانحياز أمامي. حيث يتم شحن المكثفة حتى القيمة العظمى لإشارة الدخل. وعندما تنخفض قيمة إشارة الدخل يصبح الثنائي في انحياز عكسي حيث تقوم المكثفة بالتفريغ من خلال مقاومة الحمل R_ℓ. تستمر عملية التفريغ حتى يتم التقاطع بين إشارة التفريغ ونصف الدور الموجب. وعندما تصبح إشارة الدخل أكبر من الجهد عبر المكثفة ينتقل الديود إلى الانحياز الأمامي من جديد. وهكذا تتكرر عملية الشحن والتفريغ.



الشكل 8-13(a) دخل وخرج كاشف الغلاف عملياً (b) اختيار غير سليم لثابت التفريغ $R_{\ell c}$.

عملياً، حتى يتم شحن المكثفة أفضل ما يمكن يجب أن يكون الثابت الزمني R_sC (حيث R_s المقاومة الداخلية لمولد إشارة الـ AM) أقل بكثير من دور الحامل أي:

$$R_sC \ll \frac{2\pi}{w_c} \tag{48-8}$$

وعندما يكون المكثف في حالة التفريغ (الانحياز عكسي) فإن الثابت الزمني للتفريغ $R_\ell C$ يجب أن يكون كبير بالمقارنة مع دور الحامل وصغير بالمقارنة مع دور الإشارة المعدّلة أي:

$$\frac{2\pi}{w_c} \ll R_\ell C \ll \frac{2\pi}{w_m} \tag{49-8}$$

وذلك خوفاً من حدوث انقطاع في أزمنة الشحن والتفريغ (أي تشوه إشارة الخرج) كما هو مبين في الشكل 8-13(b). الشكل العملي لإشارة خرج كاشف التعديل مبين في الشكل 8-13، a. عملياً نسعى أن تكون إشارة الخرج a_{out} قريبة جداً من إشارة الغلاف $e(t)$ (أنظر الشكل 8-13(a)) وذلك بالتخلص من التموج ripple عن طريق استخدام مرشح تمرير منخفض.

مثال 8-2: لدينا كاشف غلاف ذو حمل مقداره $R_\ell = 10\ k\Omega$ ومرتبط بمصدر توليد AM مقاومته $R_s = 75\ \Omega$. بفرض $w_c = 2\pi.10^5\ rad/s$ و $w_m = 2\pi.10^3\ rad/s$. المطلوب أوجد قيمة المكثفة C المناسبة.

الحل: باستخدام العلاقة (8-48) والعلاقة (8-49) نجد أن السعة المناسبة هي: $C = 0.01\ \mu F$.

بالمقارنة بين الكشف المتماسك والكشف غير المتماسك نلاحظ أن الكشف المتماسك ذو أداء أفضل غير أنه ذو تعقيد أكبر، وذلك بسبب استخلاص الطور والتردد للإشارة المستقبلة. أما الكشف غير المتماسك فإنه ذو أداء أقل من الكشف المتماسك غير أن تعقيده قليل بالمقارنة مع الكشف المتماسك، ولذلك فهو يستخدم بشكل واسع في المستقبلات التجارية.

لاحظنا في التعديل AM (العلاقة (8-28) والعلاقة (8-29)) أن حصة الحامل من الاستطاعة كبيرة نسبياً بالمقارنة مع حصة الحزمتين الجانبيتين الحاملتين للمعلومات. لذلك سوف نقدم في الفقرة التالية تعديل يحذف الحامل من الإشارة المرسلة.

3.5.8 التعديل ذو الحزمتين الجانبيتين مع كبت الحامل

إشارة التعديل AM (العلاقة (8-18)) يمكن أن تكتب بالحالة العامة بالشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = A_c[K + m(t)]\cos(2\pi f_c t) \qquad (50\text{-}8)$$

يتم اختيار الثابت K بحيث يكون المجموع $K + m(t)$ غير سالب تجنباً للتشوه أي:

$$K \geq \min m(t) \qquad (51\text{-}8)$$

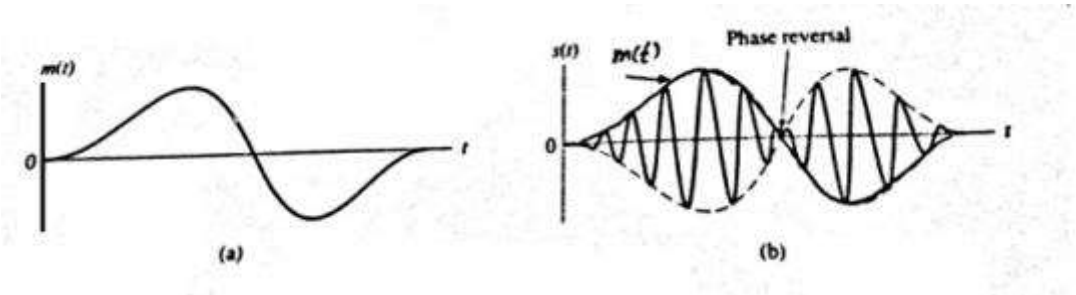
يمكن إعادة كتابة العلاقة (8-50) بالشكل التالي:

$$x_{AM}(t) = KA_c\cos(2\pi f_c t) + A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \qquad (52\text{-}8)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن إشارة المعلومات $m(t)$ موجودة فقط في الحد الثاني بجعل $K = 0$ يتم حذف الحامل والحصول على التعديل ذي الحزمتين الجانبيتين مع كبت الحامل DSB-SC، أي:

$$x_{DSB-SC}(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \qquad (53\text{-}8)$$

يتضح من العلاقة السابقة (الإشارة المعدّلة)حدوث انعكاس بالطور phase reversal عندما تغير إشارة الرسالة إشارتها (من الموجب إلى السالب مثلاً) وذلك كما هو واضح في الشكل 8-14. يوضح الشكل 8-14(a) إشارة الرسالة (إشارة المعلومات) ويوضح الشكل 8-14(b) إشارة التعديل الموافقة لإشارة الرسالة.



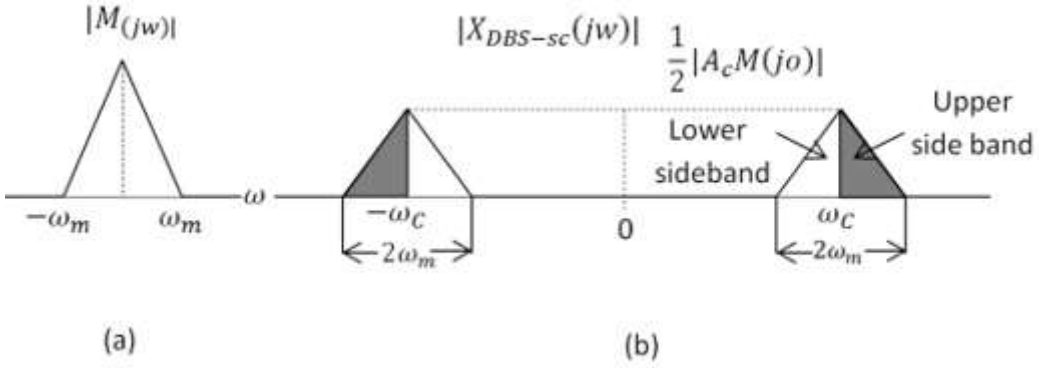
الشكل 8-14 (a) إشارة الرسالة (b) الإشارة المعدّلة.

4.5.8 التوصيف في المجال الترددي

سوف يوضح التوصيف الطيفي بشكل أفضل موضوع كبت الحامل. بأخذ تحويل فورييه للعلاقة (8-53) نحصل على:

$$X_{DSB-SC}(f) = \frac{1}{2}A_c[M(j(w-w_c)) + M(j(w+w_c))] \qquad (8\text{-}54)$$

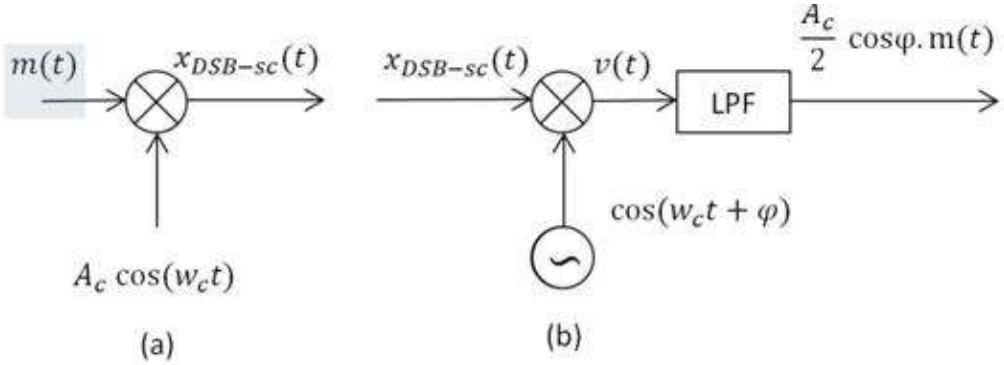
حيث $X_{DSB-SC}(f)$ هو تحويل فورييه للإشارة $x_{DSB-Sc}(t)$ أي إشارة الرسالة $m(t)$ معدلة مطالياً على التردد الحامل. توضح العلاقة السابقة أن طيف إشارة التعديل DSB-SC يتألف من طيفين، المجال الترددي لكل منها $2w_m$ وكلاهما مقيس بـ $A_c/2$. أحد الطيفين مزاح بمقدار w_c، أي $M(j(w-w_c))$ والطيف الآخر مزاح بمقدار $-w_c$ أي $M(j(w+w_c))$.



الشكل 8-15 (a) الطيف المطالي للرسالة (b) الطيف المطالي للتعديل *DSB-SC*.

يتضح من العلاقة (8-53) والعلاقة (8-54) أن التعديل DSB-SC هو عبارة عن تعديل خطي. وبالتالي فإن عملية التعديل تقوم فقط بإزاحة طيف الرسالة ذي العرض $2w_m$ وتغيير التقييس. وذلك كما هو واضح في الشكل 8-15 بمقارنة الشكل 8-8 الذي يمثل طيف الـ AM والشكل 8-15 الذي يمثل طيف DSB-SC، نلاحظ وجود الحامل ذي التردد $\pm w_c$ في تعديل الـ AM وعدم وجوده (كبته) في التعديل DSB-SC.

يمكن توليد إشارة التعديل DSB-SC باستخدام العلاقة (8-53). حيث يقوم المعدّل بإجراء عملية جداء بين إشارة الرسالة $m(t)$ والحامل $A_c\cos(w_ct)$. ومن هنا يسمى المعدّل بمعدّل الجداء product modulator وهو موضح في الشكل 8-16.



الشكل 8-16 (a) معدل الجداء لتوليد التعديل DSB-SC (b) كاشف التعديل المتماسك للموجة المعدلة بالتعديل DSB-SC.

5.5.8 كشف التعديل المتماسك

تتم عملية كشف التعديل في طرف الاستقبال. كشف التعديل يعني استخلاص إشارة الرسالة أو صورة مقيسة عنها من الإشارة المعدّلة $x_{DSB-SC}(t)$. في الكشف المتماسك (المتزامن) الإشارة المحلية (المولدة في طرف الاستقبال) يجب أن تكون متزامنة (متماسكة) بالتردد والطور مع الإشارة المستقبلة.

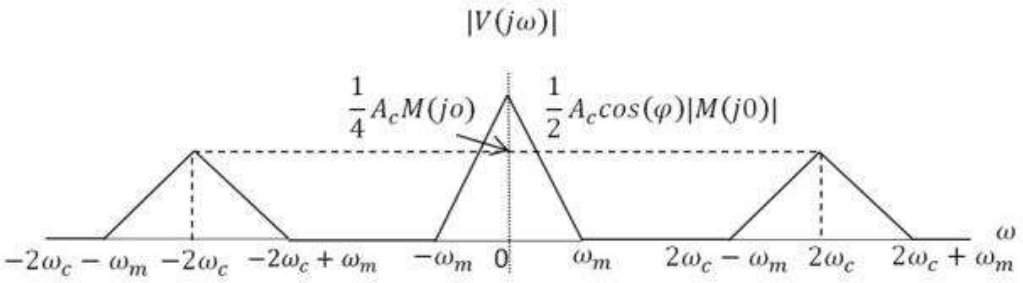
يبين الشكل 8-16(b) الكاشف المتماسك. الذي يتألف من مهتز محلي وضارب بالإضافة إلى مرشح حزمة تمرير منخفضة LPF. ولإظهار أثر عدم التزامن في الطور على عملية الكشف تم إدخال خطأ الطور φ في الإشارة المحلية بالمقارنة مع الإشارة المستقبلة.

وللتبسيط أيضاً نأخذ مطال الإشارة المحلية مساوياً للواحد. بفرض $v(t)$ إشارة خرج الضارب كما في الشكل 8-16(b) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} v(t) &= \cos(w_c t + \varphi)\,.\,x_{DSB-SC}(t) \\ &= A_c \cos(w_c t)\cos(w_c t + \varphi)\,m(t) \\ &= \frac{1}{2}A_c\cos(\varphi)m(t) + \frac{1}{2}A_c\cos(2w_c t + \varphi)\,m(t) \end{aligned} \qquad (55\text{-}8)$$

يعطي الحدّ الأول إلى اليمين إشارة الرسالة $m(t)$ مقيسة بـ $\frac{1}{2}A_c\cos(\varphi)$ والحدّ الثاني إلى اليمين عبارة عن تعديل DSB-SC بحامل تردده $2w_c$.حتى تكون الصورة واضحة لعملية الكشف لابد من معرفة طيف الإشارة $v(t)$ المعطى بالعلاقة (8-55) لأجل ذلك نوجد تحويل فوريه لإشارة $v(t)$ ومن ثم رسمه الموضح في

الشكل 8-17.أُخذ بعين الإعتبار في أثناء الرسم أن تكون الأطياف منفصلة.



الشكل 8-17 الطيف المطالي للإشارة $v(t)$.

نلاحظ من

الشكل 8-17 ما يلي:

(1) إذا تحققت المتراجحة التالية:

$$w_m > 2w_c - w_m$$

حيث w_m المجال الترددي للرسالة فإن الأطياف سوف تتداخل. وفي هذه الحالة لا يمكننا القيام بعملية كشف التعديل المتماسك.

(2) حتى نتمكن من فصل طيف إشارة الرسالة لابد من تحقق المتراجحة التالية:

$$w_m < 2w_c - w_m \qquad (8\text{-}56)$$

(3) يمكننا كشف التعديل (التخلص من الاطياف الجانبية) واستخلاص طيف إشارة الرسالة. وذلك عن طريق استخدام مرشح تمرير منخفض ذي تردد قطع w_m ومجال عبورtransition band $w_m \leq \mathrm{w} \leq 2w_c - w_m$.
والنتيجة نحصل على الخرج التالي:

$$\frac{1}{2}A_c\cos(\varphi).m(t) \qquad (57\text{-}8)$$

لاحظ من العلاقة السابقة حساسية الخرج لخطأ الطور بين الإشارة المستقبلة والإشارة المحلية. لذلك عند استخدام الكاشف المتماسك يجب علينا جعلها قريبة جداً من الصفر عن طريق دارة تزامن (الدارة غير موضحة في الشكل 16-8) وإذا كانت $\varphi = \pm\pi/2$ فسوف نحصل على خرج صغري ويسمى أثر الصفر الترابعي quadrature null effect أي $\cos(\varphi) = 0$ و $\sin(\varphi) = 1$.

يمكن استخدام أثر الصفر الترابعي لإرسال رسالتين مستقلتين على نفس المجال الترددي. حيث يتم استخدام الحامل $A_c\cos(w_c t)$ لإشارة الرسالة الأولى،والحامل $sin(w_c t)$ لإشارة الرسالة الثانية.

عملياً معظم قنوات الاتصال وخاصة اللاسلكية منها تتغير بشكل عشوائي مع الزمن. وهذا بدوره يؤدي إلى تغيير خطأ الطور بين الإشارة المحلية والإشارة المستقبلة. مما ينعكس على أداء كاشف التعديل. لحل هذه المسألة يجب أن يكون المهتز المحلي متزامناً تماماً بالتردد والطور مع الإشارة المستقبلة. وهذا يتم عن طريق دارة تزامن كما ذكرنا سابقاً. غير أن إضافة دارة تزامن يزيد من تعقيد كاشف التعديل وهذا الثمن لابد من دفعه للحصول على أداء جيد لكاشف التعديل المتماسك.

في تعديل الـ AM هناك إسراف في استهلاك الاستطاعة (العلاقة (8-29)) وإسراف في استخدام الطيف الترددي (العلاقة (8-34)). في تعديل الـ DBS-SC هناك أيضاً إسراف في استخدام الطيف الترددي (العلاقة (8-54)). سوف نبحث في الفقرة القادمة عن تعديل اقتصادي في المجال الترددي والاستطاعة.

6.8 تعديل حزمة واحدة جانبية

رأينا سابقاً أن إشارة التعديل AM تحوي الحامل والحزمتين الجانبيتين العليا والدنيا (العلاقة (8-23)).وبما أن كلا الحزمتين متناظرتين وتحويان نفس إشارة الرسالة (المعلومات) وبالتالي يمكن استخلاص إشارة الرسالة باستخدام إحدى الحزمتين.

في تعديل DSB-SC تم حذف الحامل فقط من تعديل الAM. وذلك من أجل توفير (الاقتصاد) في الاستطاعة المرسلة. هنا أيضاً بقي لدينا حزمتان جانبيتان متناظرتان تحويان نفس المعلومات (العلاقة (8-54)) ولهذا يمكننا استخدام إحدى الحزمتين الجانبيتين. وهذا يوفر (يقتصد) في مصادر الاتصالات التردد والاستطاعة بمقدار 50%

تقريباً. يُسمى التعديل الناتج بتعديل حزمة جانبية واحدة SSB. تجدر الملاحظة هنا أن التحسين الذي طرأ على التعديل SSB سوف يكون على حساب تعقيد الدارات وسنوضح ذلك لاحقاً.

1.6.8 توصيف التعديل SSB في المجال الزمني

لتوصيف التعديل SSB في المجال الزمني نحن بحاجة لأداة رياضية والأداة الأنسب هنا هي تحويل هيلبرت الموصّف في العلاقة (7-39) و(7-26). والأداة الفيزيائية التي تحقق تحويل هيلبرت تسمى محول هيلبرت أو مرشح هيلبرت. يتميز مرشح هيلبرت برمج مقداره واحد من أجل الترددات الموجبة والسالبة، والاستجابة الطورية مقدارها $-\pi/2$ للترددات الموجبة و $+\pi/2$ للترددات السالبة. لإجراء التحليل سوف نستثمر هنا العلاقات التي تم الحصول عليها في الفصل السابع.

بالأخذ بالحسبان العلاقة (8-26) نجد أن إشارة الرسالة التحليلية للإشارة $m(t)$ هي:

$$m_A(t) = m(t) + j\hat{m}(t) \tag{58-8}$$

وباعتبار العلاقة (8-30) نجد أن طيف $m_A(t)$ ذو حزمة جانبية واحدة عليا. وبإزاحة $m_A(t)$ بمقدار f_c نحصل على الإشارة التحليلية في حزمة التمرير أي:

$$x_{AssB-UB}(t) = [m(t) + j\hat{m}(t)]e^{j2\pi f_c t} \tag{59-8}$$

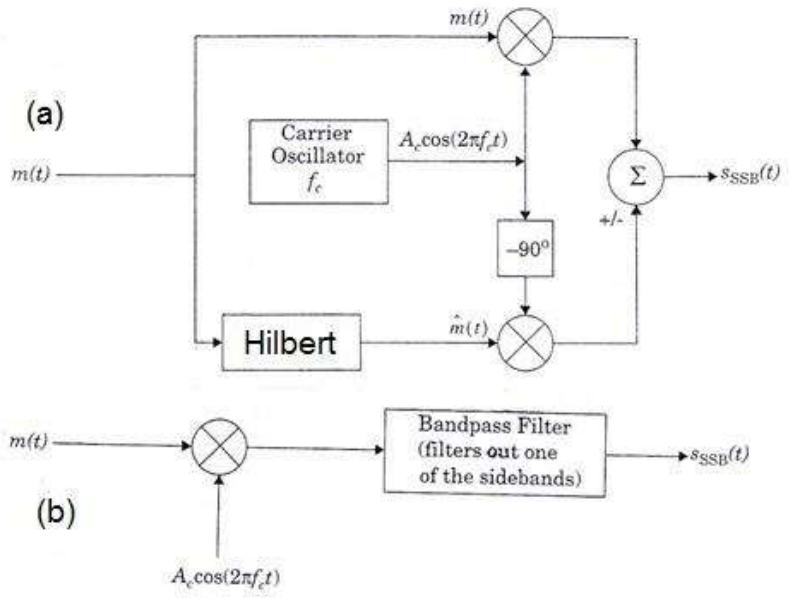
وبأخذ القيمة الحقيقية للإشارة السابقة نحصل على الحزمة الجانبية العليا في حزمة التمرير أي:

$$x_{ssB-UB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{60-8}$$

باستبدال إشارة الزائد (+) في (8-58) بإشارة الناقص (−) نحصل على الحزمة الجانبية الدنيا ،أي:

$$x_{ssB-LB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{61-8}$$

باستخدام (8-60) و (8-61) يمكننا الحصول على معدل الـ *SSB* الموضح الشكل 8-18(a)، يمكن استخدام هذا المعدل لكافة أنواع الرسائل.



الشكل 8-18 ***(a)***معدل *SSB* عام **(b)** معدل *SSB* باستخدام مرشح تمرير.

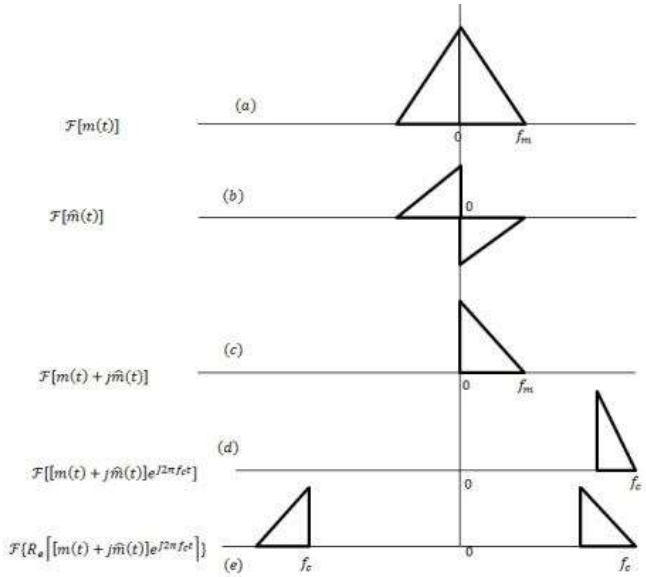
إذا أمكن الفصل بين الحزمة الجانبية العليا والدنيا باستخدام مرشح تمرير فإنه يمكن توليد إشارة التعديل SSB باستخدام ضارب ومرشح تمرير. وذلك كما هو واضح في الشكل 8-18(b).

عملياً لتحقيق الفصل بين الحزمة الجانبية العليا والدنيا يجب أن يكون بينهما فجوة gape ترددية بعرض مناسب للتحقيق العملي للمرشح. وذلك كما هو واضح في الإشارة الكلامية ذات العرض من 300 Hz إلى 20 KHz.

2.6.8 توصيف التعديل SSB في المجال الترددي

يوضح الشكل 8-19 توصيف التعديل SSB في المجال الترددي. الجزء a من الشكل يمثل طيف إشارة الرسالة والذي يمتد من $(-f_m)$ وحتى $(+f_m)$ حيث f_m أكبر تردد في الرسالة. والجزء b عبارة عن طيف تحويل هيلبرت للرسالة $m(t)$. حيث:

$$\mathcal{F}[\hat{m}(t)] = \hat{M}(f) = -jsgn(f)M(f) \qquad (62\text{-}8)$$



الشكل 8-19 (a) طيف الرسالة (b) تحويل هيلبرت لطيف الرسالة (c) مجموع طيفي $m(t)$ و $\hat{m}(t)$ (d) الإزاحة بمقدار f_c (e) الحصول على الحزمة الجانبية العليا.

لاحظ انعكاس الطور عند $f = 0$. الجزء (c) يمثل طيف الإشارة التحليلية $M_A(f)$ أي:

$$M_A(f) = M(f) + j[-jsgn(t)]M(f)$$
$$= \begin{cases} 2M(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (63\text{-}8)$$

لاحظ وجود الحزمة الجانبية العليا فقط. الجزء (d) عبارة عن طيف الإشارة التحليلية مزاحة بمقدار f_c نحو اليمين. الجزء e يمثل الإشارة الحقيقية المطلوبة أي الحزمة الجانبية العليا ذات المجال الترددي من f_c وحتى $f_c + f_m$. من أجل الحصول على الحزمة الجانبية الدنيا يكفي استبدال إشارة (+) في العلاقة (63-8) بإشارة (−).

من عائلة التعديل المطالي، هناك تعديل آخر يُسمى تعديل الحزمة الجانبية الأثرية VSB. وهو مشابه للتعديل SSB مع الاختلاف التالي: في الـ SSB يستخدم تابع التحويل $jsgn(f)$ بينما في التعديل VSB يستخدم تابع التحويل التالي:

$$\begin{cases} -jsgn(f) & ; \quad |f| > \alpha \\ smooth\ rollof & ; \quad |f| < \alpha \end{cases} \quad (64\text{-}8)$$

يستخدم التعديل VSB في البث التلفزيوني.

سوف ننتقل الآن إلى التعديل المطالي النبضي، وبشكل خاص إلى تعديل مطال النبضة PAM (pulse—amplitude modulation) المستخدم بشكل واسع في الاتصالات الرقمية.

7.8 تعديل مطال النبضة

بعد الاطلاع على التعديل المطالي AM بأشكاله المختلفة، حيث كان الدور الأساسي هو لإزاحة التردد. سوف نسلط الضوء الآن على تعديل مطال النبضة حيث الدور الأساسي هي عملية أخذ العينات.

1.7.8 التوصيف الرياضي لتعديل PAM.

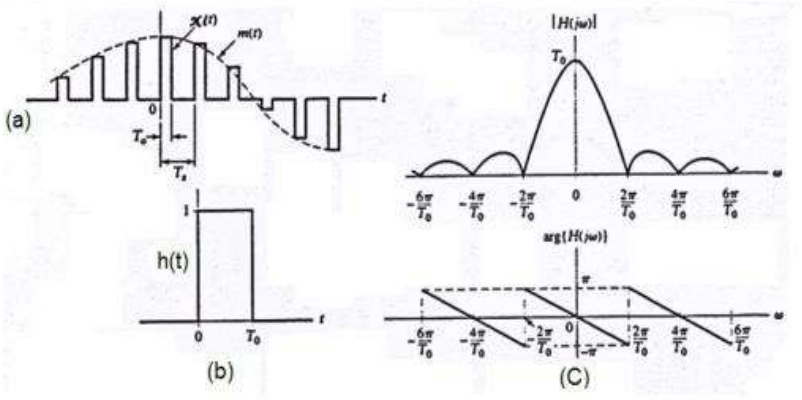
تتألف الموجة الحاملة للمعلومات من تتابعية من نبضات قصيرة وذات عرض ثابت وقمة مسطحة وذلك كما هو في الشكل 8-20(a) لاحظ أن التردد الأساسي للموجة الحاملة للمعلومات لها نفس مُعدل أخذ العينات. يمكن تمثيل إشارة التعديل PAM بالشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m\,[n]h(t - nT_s) \qquad (65\text{-}8)$$

حيث $m[n]$ قيمة إشارة الرسالة عند اللحظة $t = nT_s$ و T_s دور أخذ العينة و $h(t)$ نبضة مستطيلة بمطال يساوي الواحد وعرض يساوي T_0، أي:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < T_0 \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases} \qquad (66\text{-}8)$$

لاحظ التشابه بين العلاقة (8-65) وأخذ العينات بالماسك من المرتبة صفر.



الشكل 8-20 (a) إشارة PAM (b)النبضة المستطيلة (c) طيف وطور $h(t)$.

يمكن تمثيل الشكل النبضي لعينات إشارة الرسالة، حسب العلاقة التالي:

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n]\delta\,(t - nT_s) \tag{67-8}$$

وبأخذ العلاقة السابقة بالحسبان يمكن التعبير عن إشارة PAM. بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n]h\,(t - nT_s) \\ &= m_\delta(t) * h(t) \end{aligned} \tag{68-8}$$

تبين العلاقة السابقة بأن إشارة PAM. هي عبارة عن عملية تلفيف بين $m_\delta(t)$ والنبضة $h(t)$. وبما أن التلفيف بالزمن يقابله جداء في المجال الترددي يكون لدينا:

$$X(jw) = M_\delta(jw)H(jw) \tag{69-8}$$

حيث $X(jw)$ هو تحويل فورييه لـ $x(t)$ و M_δ هو تحويل فورييه لـ $m_\delta(t)$. فيمكن أن نكتب:

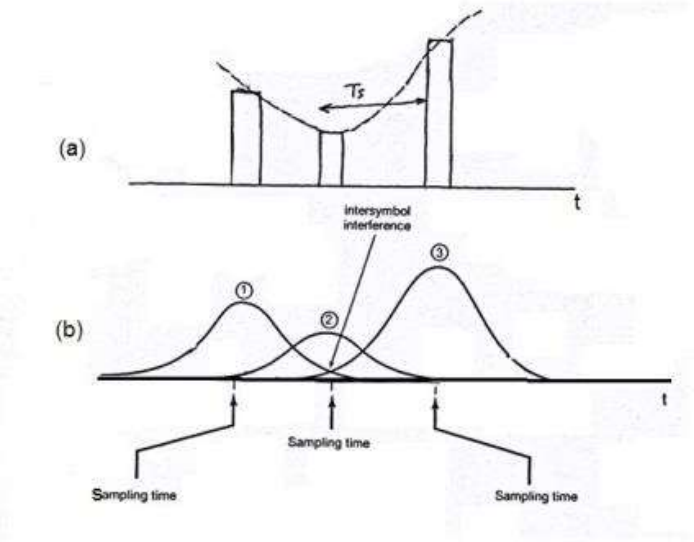
$$M_\delta(jw) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} M\,(j(w - kw_s)) \tag{70-8}$$

حيث $1/T_s$ معدل أخذ العينات و $w_s = \frac{2\pi}{T_s}\ rad/s$ وبتعويض (70-8) في العلاقة (66-8) نحصل على:

$$X(jw) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} M\,(j(w - kw_s))H(jw) \tag{71-8}$$

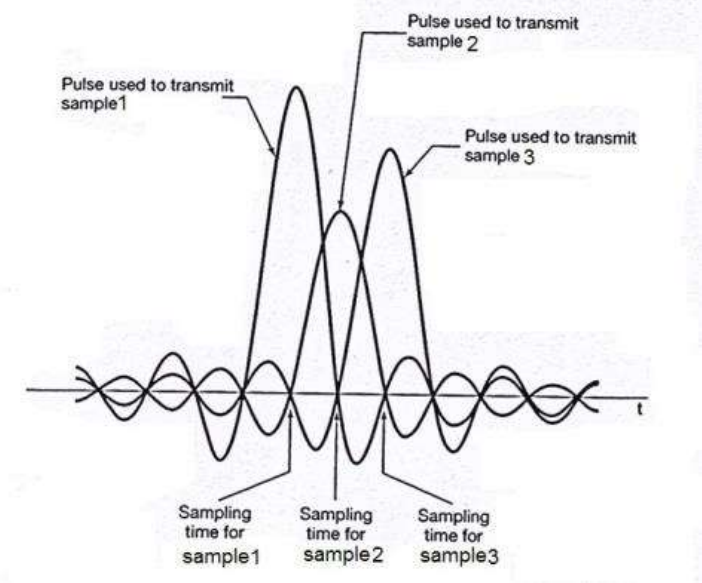
2.7.8 التداخل في التعديل PAM

عند إرسال نبضة PAM خلال قناة حقيقية فإنها تتعرض للتشوه بسبب الضجيج الجمعي والترشيح. يسبب الضجيج الجمعي (ضجيج يجمع مع مطال النبضة) خطأ في المطال. وعملية الترشيح في القناة بسبب عدم الاستجابة المثالية تسبب تبعثر (تمدد) النبضة المرسلة. مما يسبب تراكم النبضات المرسلة فوق بعضها البعض. هذا التراكم يسبب تداخل في الرموز ويُسمى تداخل الرموز البيني inter-symbol interference (ISI) واختصاراً سوف نسميه تداخل الرموز.



الشكل 8-21 (a) نبضات PAM المرسلة (b) نبضات PAM المستقبلة.

يبين الشكل 8-21 تداخل الرموز حيث يتم إظهار تداخل الرموز ولحظات أخذ العينات. سبب حدوث التداخل الناتج عن الترشيح في القناة هو العرض المحدود للمجال الترددي للقناة. إذا كان التداخل بسبب محدودية عرض المجال الترددي، عند ذلك للتقليل من أثر التداخل يجب تشكيل نبضة قبل إرسالها بحيث نقترب من الحصول على نبضة ذات مجال ترددي محدود. لاحظ الشكل 8-21 لو تم استخدام نبضات شبيهة بالنبضات الموجودة في الشكل 8-21(b) فإن أثر الترشيح سوف يكون ضعيفاً. عملياً إذا تم استخدام نبضة الـ $sinc(\cdot)$ بدلاً من النبضة المستطيلة ذات المجال الترددي المحدود فإنه في لحظات أخذ العينات. فإن مطال كافة النبضات تساوي الصفر عدا النبضة المراد كشفها وذلك كما هو واضح في الشكل 8-22.



الشكل 8-22 استخدام نبضة *sinc* لحذف التداخل.

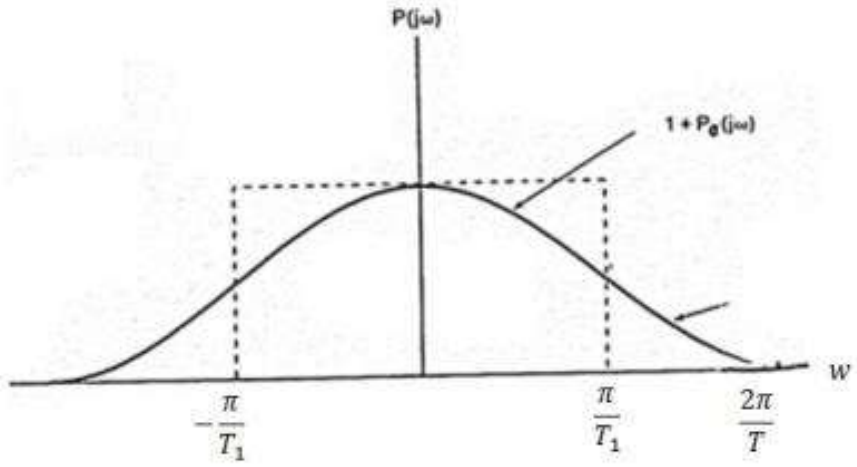
تجدر الملاحظة هنا أن زمن أخذ العينة (التزامن) يجب أن يكون على درجة عالية من الدقة. وأي خطأ في زمن أخذ العينات سوف يسبب التداخل. هناك الكثير من النبضات (التوابع) التي تؤمن التقاطع الصفري عند $\pm T, \pm 2T, \ldots$. ونبضة *sinc* هي إحدى تلك النبضات. ومن أجل التعميم، ليكن لدينا النبضة $p(t)$ ذات الطيف التالي:

$$P(jw) = \begin{cases} 1 - P_0(jw) & |w| \le \frac{\pi}{T} \\ P_0(jw) & \frac{\pi}{T} < |w| \le \frac{2\pi}{T} \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (72\text{-}8)$$

والتي تحقق العلاقة التالية (التناظر الفردي من أجل π/T):

$$P_0\left(-jw + j\frac{\pi}{T}\right) = -P_0\left(jw + j\frac{\pi}{T}\right) \qquad 0 \le w \le \frac{\pi}{T} \qquad (73\text{-}8)$$

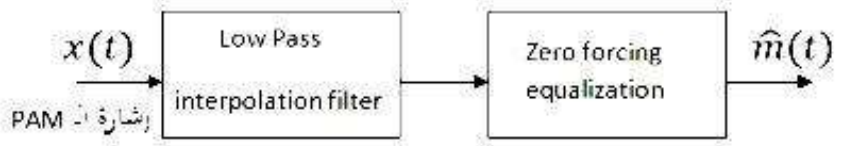
وذلك كما هو واضح في الشكل 8-23. لاحظ من أجل $P_0(jw) = 0$ فإن $p(t)$ نبضة *sinc* وأي نبضة تحقق العلاقة (72-8) والعلاقة (73-8) فإنها ذات تقاطع صغري عند $\pm T, \pm 2T \ldots$ وذلك بشكل مشابه لنبضة *sinc*.



الشكل 8-23 نبضة بتناظر فردي عند $\frac{\pi}{T}$.

3.7.8 كشف تعديل إشارة PAM

بالأخذ بالحسبان العلاقة (8-69) وضرب الطيف $M_\delta(jw)H(jw)$ بـ $1/H(jw)$ نحصل على الطيف المتكرر للإشارة $m(t)$، أي $M_\delta(jw)$. تسمى العملية السابقة بالتسوية الدافعة للصفر zero-forcing equalization، والتي سوف تدرس فيما بعد، وباستخدام مرشح تمرير منخفض (مرشح استيفاء داخلي interpolation) نحصل على الإشارة $\hat{m}(t)$ وذلك بما يتوافق في الشكل 8-24.



الشكل 8-24 كاشف تعديل إشارة PAM.

مثال 8-3: بفرض $H(jw) = Tsinc\left(\frac{wT}{2}\right)e^{-j\frac{wT}{2}}$. أوجد تابع التحويل للمسوي الدافع للصفر.

الحل: تابع التحويل المسوي الدافع للصفر هو من الشكل $1/H(jw)$. ما يهمنا هو الاستجابة الترددية المطالية وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{1}{|H(jw)|} = \frac{1}{T|sinc\frac{wT}{2\pi}|} = \frac{1}{2\pi T}\frac{\omega T}{|sin(wT/2\pi)|}$$

8.8 التضميم

ما يعقّد مسألة الاتصالات هي محدودية المصادر مثل الزمن والتردد والترميز والفضاء والاستقطاب polarity وطلبات اتصال لا حدود لها، أي استهلاك كبير للمصادر. ولهذا علينا الاقتصاد بالمصادر قدر الإمكان. إحدى طرق الاقتصاد بالمصادر هي التضميم. مصطلح التضميم يعني تقاسم المصادر بين المستخدمين، أي كل مستخدم يأخذ نصيب من المصدر. سوف نوضح في البداية أسس التضميم.

1.8.8 أسس التضميم

تتلخص عملية التضميم في ضم الإشارات (جمع الإشارات) في طرف الإرسال والقيام بفك الضم (فصل الإشارات) في طرف الاستقبال. في البداية سوف نتعامل في المجال الزمني. عملياً، يخصص كل مستخدم بإشارة ولتكن:

$$x_i(t) = a_i\varphi_i\,(\mathrm{t}) \qquad ;\ i \in [1, M] \tag{74-8}$$

حيث M عدد المستخدمين، $\varphi_i(t)$ الإشارة الحاملة للمعلومات، و a_i المعلومات المرسلة. عملية ضم الإشارات في طرف الإرسال، هي عبارة عن عملية جمع خطي لكافة إشارات المستخدمين، أي:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_M\varphi_M(t) \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{M} x_i\,(t) \end{aligned} \tag{75-8}$$

أما عملية فك الضم في طرف الاستقبال، فإنها تعتمد على المعامل الخطي Φ_i الذي يحقق العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \Phi_m[x(t)] &= \Phi_m[\sum_{i=1}^{M} a_i\varphi_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i\Phi_m[\varphi_i(t)] = a_m \end{aligned} \tag{76-8}$$

حيث:

$$\Phi_m[\varphi_i(t)] = \begin{cases} 1 & ; \quad m = i \\ 0 & ; \quad m \neq i \end{cases}$$

الشرط اللازم والكافي لفك التضميم، هو أن تكون الإشارات مستقلة خطياً. سوف نوضح ذلك في مثال لاحق. أي لا يمكن التعبير عن أي إشارة من مجموعة الإشارات باستخدام أي تركيبة جمعية من الإشارات الأخرى. كمثال على ذلك الإشارات التالية:

$$a_0 \text{ و } a_1 t \text{ و} a_2 t^2 \text{ و } \dots \text{ و } a_M t^M$$

حيث a_0 و a_1 و ... و a_M هي المعلومات المرسلة. واضح أن الإشارات السابقة هي إشارات مستقلة خطياً. لاحظ أن الإشارات السابقة متقاطعة في المجال الزمني والمجال الترددي.

مثال 8-4: لنفرض لدينا الإشارتين التاليتين a_0 و $a_1 t$. بضم الإشارتين السابقتين نحصل على الإشارة التالية:

$$x(t) = a_0 + a_1 t$$

عملية فك الضم demultiplexing ببساطة يمكن أن تتم بالشكل التالي: مفاضلة $x(t)$ نحصل على a_1 ومن ثم بمكاملة المفاضلة نحصل على الإشارة الثانية، وبطرحها من الإشارة $x(t)$.نحصل على a_0.

لاحظ أن العمليات التي تم استخدامها هي عمليات خطية. وباستخدام مشابه يمكن الحصول على كافة الإشارات المكونة للإشارة التالية:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_M t^M \qquad (77\text{-}8)$$

أي فك الضم في الإشارة السابقة.

من المعلوم أن نظم الاتصالات تستخدم بشكل واسع الإشارات المتعامدة الممعيرة $\varphi_i(t)$ والتي توصف بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_j(t)\varphi_i(t)dt &= 0 \quad , i \neq j \\ \int_0^T \varphi_i^2(t)dt &= 1 \quad , i = j \end{aligned} \qquad (78\text{-}8)$$

يمكن البرهان بسهولة أن الإشارات المتعامدة والممعيرة هي إشارات مستقلة خطياً. هذا يعني أنه بإمكاننا استخدام الإشارات المتعامدة في عملية التضميم *وذلك كما هو واضح* في المثال التالي.

مثال 8-5: لدينا الإشارة $x(t)$ التي تضم الإشارات التالية:

$$\varphi_i(t): i \in [1, M]$$

$$x(t) = a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_m\varphi_m(t) + \cdots + a_M\varphi_M(t)$$

المطلوب استخلاص المعلومة a_m من الإشارة السابقة $x(t)$.

الحل: سوف نستخدم المعامل الخطي التالي:

$$\Phi_m[x(t)] = \int_0^T x(t)\,\varphi_m(t)dt$$

وهكذا يكون لدينا:

$$\int_0^T x(t)\,\varphi_m(t)dt = \int_0^T \varphi_m(t)\sum_{i=1}^{M} a_i\,\varphi_i(t)dt$$

$$= a_m\int_0^T \varphi_m^2(t)\,dt = a_m$$

يمكن تلخيص ما سبق كما يلي: من أجل إتمام عملية التضميم (ضم وفك الضم) فإننا بحاجة إلى إشارات متعامدة. والتعامد يمكن أن يكون في المجال الزمني كما رأينا سابقاً، أو في المجال الترددي أو في المجال الترميزي أو غيرها. الإشارات المتعامدة في المجال الزمني يجب أن يحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t)\,x_j(t)dt = \begin{cases} const & ;\ i = j \\ 0 & ;\ i \neq j \end{cases} \qquad (79\text{-}8)$$

والإشارات المتعامدة في المجال الترددي يجب أن تحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_k(f)\,X_\ell(f)df = \begin{cases} const & ;\ k = \ell \\ 0 & ;\ k \neq \ell \end{cases} \qquad (80\text{-}8)$$

حيث $X_k(f)$ و $X_\ell(f)$ تحويل فورييه لـ $x_k(t)$ و $x_\ell(t)$. الإشارات أو الأشعة المتعامدة في المجال الترميزي يجب أن تحقق:

$$X_\ell^T X_j = 0 \qquad (81\text{-}8)$$

على سبيل المثال:

$$X_\ell^T = (-1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 1);\; X_j^T = (-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1)$$

بأخذ ما سبق بعين الاعتبار يكون لدينا تقنيات التضميم التالية:

التقسيم الترددي: يخصص لكل مستخدم مجال ترددي جزئي متعامد مع المجالات الترددية الأخرى، وذلك لكل الوقت.

التقسيم الزمني: يخصص لكل مستخدم وبشكل دوري مجالاً زمنياً (حيزاً زمنياً) مُحدداً ومتعامداً مع كل المجالات الأُخرى ولكل المجال.

التقسيم الترميزي: يخصص لكل مستخدم ترميزاً خاصاً به ومتعامداً مع الترامیز المخصصة للمستخدمين الآخرين وذلك لكل وقت وكل المجال الترددي. سوف نتوسع الآن بالتضميم الترددي والتضميم بالتقسيم الزمني.

2.8.8 التضميم بالتقسيم الترددي FDM

فكرة التضميم بالتقسيم الترددي FDM يعتمد على المطابقة التالية:

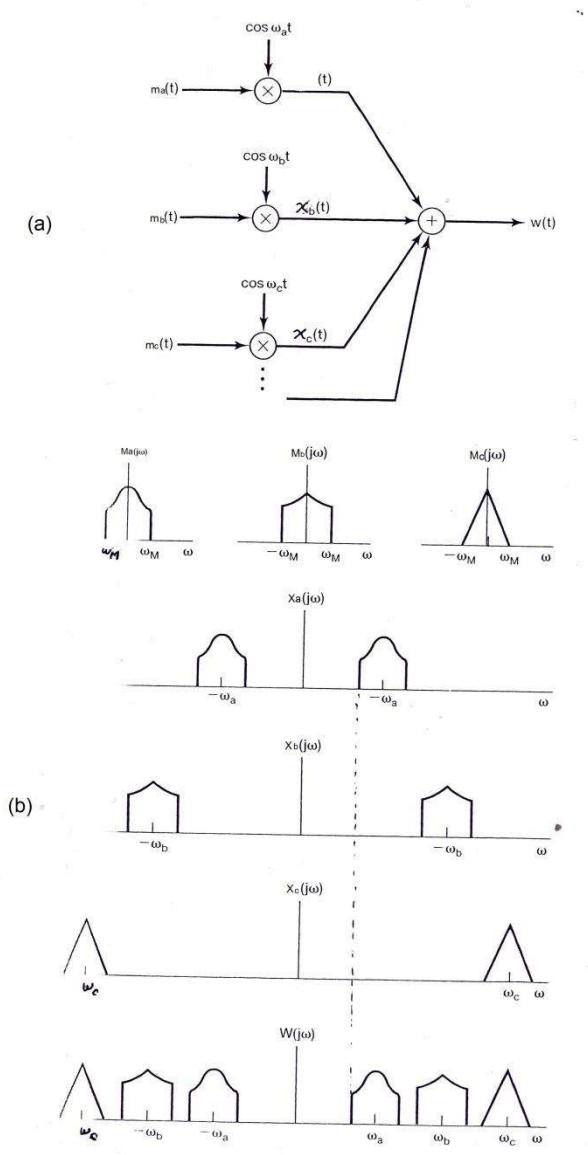
$$cosAcosB = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \qquad (82\text{-}8)$$

الدارة التي تقوم بالعملية السابقة (جداء) تسمى بالمازج mixer. عملياً إذا كان دخل المازج إشارتين بترددين f_A و f_B فإن المازج يعطي الترددين $f_A + f_B$ و $f_A - f_B$ (انظر للعلاقة (82-8)). وهكذا يمكن نقل أي إشارة إلى أي مجال ترددي مطلوب.

يوضح الشكل 8-25(a) المخطط الوظيفي لعملية التعديل (انظر العلاقة (53-8)) وعملية التجميع (تجميع القنوات)، اللتين تجريان في طرف الإرسال، حيث $m_a(t)$ و $m_b(t)$و $m_c(t)$. عبارة عن الرسائل (الإشارات الحاملة للمعلومات)، w_a و w_b وw_c عبارة عن الترددات الحاملة لإشارات المعلومات، و $x_a(t)$ و $x_b(t)$ و $x_c(t)$ هي عبارة عن الإشارات المعدّلة. في العلاقة (82-8) يمكن اعتبار إحدى الإشارتين $cosA$ أو $cosB$

إشارة معلومات والأخرى إشارة الحامل، أما الناتج فهو الإشارة المعدّلة.يقوم المجمع بجمع كافة الإشارات المعدّلة والحصول على الإشارة الكلية $w(t)$ التي ترسل عبر القناة (الوسط الفيزيائي).

يُوضح الشكل 8-25(b) أطياف إشارات المعلومات $M_a(w)$ و$M_b(w)$ و$M_c(w)$ وأطياف الإشارات المعدلة (إشارات حزمة التمرير) $X_a(w)$ و $X_b(w)$ و $X_c(w)$ بالإضافة إلى جمع كافة الأطياف $W(w)$.



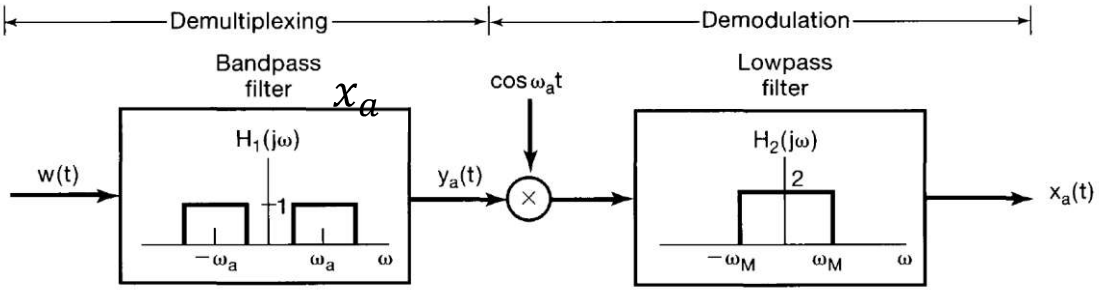
الشكل 8-25 (a) المخطط الوظيفي للتعديل والتجميع (b) أطياف إشارات المعلومات والإشارات المعدلة بالإضافة إلى الطيف الكلي W(w).

يسمى المجال الترددي غير المستخدم الموجود بين القنوات بمجال الحماية guard band والهدف منه لحماية القنوات من التداخل بعضها مع بعض. تسمح لنا عملية FDM. باستخدام كل المجال الترددي بشكل فعّال. أي استثمار كل المجال الترددي لأوساط النقل الفيزيائية مثل الزوج المجدول والكوابل النحاسية والوصلات الراديوية وغيرها.

بهدف استعادة إشارة كل قناة على حدة في طرف الاستقبال، لابد من القيام بالإجرائين التاليين:

(1) الترشيح (الاستخلاص) للإشارة المعدّلة لكل قناة وذلك باستخدام مرشح التمرير.

(2)كشف التعديل لاستخلاص الإشارة الأصلية من الإشارة المعدّلة. يوضح الشكل 8-26 استخلاص الإشارة الأصلية للقناة (a) باستخدام الكشف المتماسك.



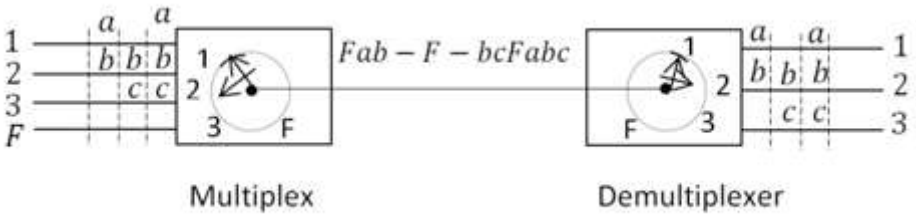
الشكل 8-26 استخلاص الإشارة الأصلية (الحاملة للمعلومات) في FDM.

3.8.8 التضميم بالتقسيم الزمني TDM

تسمح هذه التقنية لعدد من المستخدمين باستخدام المصدر الزمني بدلاً من المصدر الترددي الذي ذكر آنفاً. في هذه التقنية يخصص كل مستخدم بحيز زمني time slot خاص به يمكنه إرسال المعلومات خلاله. عموماً تقسم تقنية TDM الى متزامنة وإحصائية. سوف نهتم الآن فقط بالمتزامنة.

في تقنية TDM المتزامنة إذا كان طول الحيز الزمني المخصص للمستخدمين هو T فإن الحيز الزمني الموافق على خرج المضمم هو T/M. حيث M عدد المستخدمين على دخل المضمم. يبين الشكل 8-27 تقنية التضميم TDM حيث يتم الضم (التجميع) بشكل تسلسلي دوار 1،2،3،F،1،2 خرج المضمم عبارة عن أطر، وكل إطار يحوي إشارات المستخدمين إن وجدت، وطول كل إطار مقداره T. في بداية كل إطار توضع العديد من البتات أو الرموز ذات الطول F بهدف مزامنة الإطار في طرف الاستقبال. الرمز (–) في الشكل 8-27 يدل على وجود معطيات

للإرسال. معدل الإرسال في كل القنوات 3,2,1 متساوٍ والرموز a, b, c يمكن أن تكون رموز أو بايتات أو غير ذلك. في بعض الأحيان عندما تكون معدلات الإرسال في طرف الإرسال (مدخل المضمم) غير متساوية، نقوم بإضافة معطيات حشو stuffing على بعض المداخل حتى نحصل على معدلات إرسال متساوية على كافة المداخل.



الشكل 8-27 تضميم TDM من أجل M=3.

9.8 التعديل الزاوي

ليكن لدينا إشارة الحامل التالية:

$$x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \varphi)$$

من العلاقة السابقة نلاحظ أن الطور الكلي total phase هو:

$$\psi(t) = w_c t + \varphi$$

عملية تغير الطور الكلي بما يتوافق مع الإشارة المعدلة تسمى بالتعديل الزاوي.

1.9.8 أسس التعديل الزاوي

يمكن تغيير الطور الكلي $\psi(t)$ بما يتوافق مع الإشارة المعدّلة (إشارة المعلومات) حسب إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: تتم بجعل الطور الابتدائي φ يتغير بما يوافق الإشارة المعدّلة، أي $\varphi(t) = k_P m(t)$ وبالتالي:

$$\psi(t) = w_c t + k_P m(t)$$

(انظر للعلاقة (8-7)). التعديل الذي يوافق العلاقة السابقة يسمى بتعديل الطور.

الطريقة الثانية: تتم بجعل التردد اللحظي $w_i(t)$ يتغير بشكل يتناسب مع تغير الرسالة، أي:

$$w_i(t) = w_c + k_f m(t) \qquad (83\text{-}8)$$

(انظر للعلاقة (8-4)). التعديل الموافق للعلاقة السابقة يسمى بالتعديل الترددي FM .إشارة التعديل الطوري لها الشكل التالي:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_P n(t)] \qquad (84\text{-}8)$$

(انظر للعلاقة (8-8)). عند $m(t)$ تساوي الصفر فإن طور الإشارة $x_{PM}(t)$ تساوي طور الحامل $x_c(t) = A_c \cos w_c t$. توضح العلاقة السابقة $x_{PM}(t)$ أنه عند زيادة مطال الإشارة $m(t)$ فإن $\psi(t)$ تزداد، وعند نقصان مطال إشارة الرسالة $m(t)$ فإن الطور $\psi(t)$ يتناقص لكون k_P ثابتاً. وعندما تكون الإشارة $m(t)$ في قيمتها العظمى فإن انزياح الطور يكون أعظمياً. وحتى لا تتعرض الإشارة المعدّلة $x_{PM}(t)$ للتشوه بسبب عدم التعيين يجب أن تتحقق المتراجحة التالية:

$$-\pi < k_P m(t) \leq \pi \qquad (85\text{-}8)$$

أي أن التغير يجب أن يكون ضمن المجال 2π راديان فقط. وذلك لأنه لايمكن التمييز بين 2.5 راديان و0.5 راديان.

مثال 8-6: يُراد استخدام التعديل الطوري لإرسال الإشارة $m(t) = 4\cos 2000\pi t$ عبر قناة حزمة التمرير. المطلوب:

(1) إيجاد الانزياح الأعظمي. (2) ما هو حدّ k_P.

الحل:

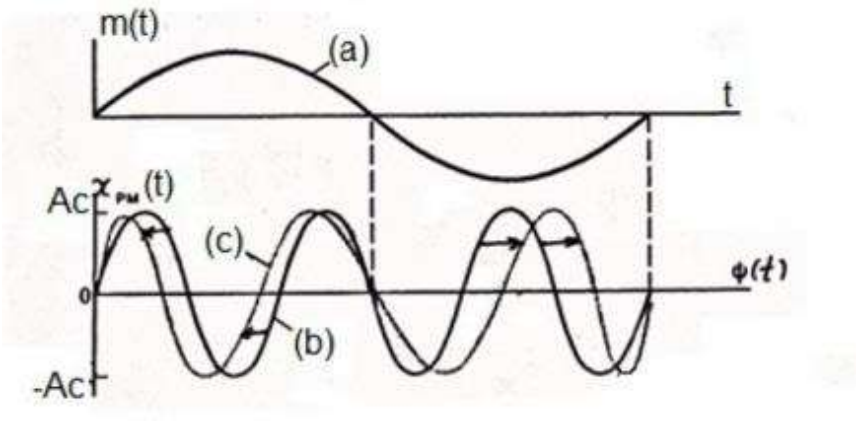
(1) واضح أن إشارة الإرسال لها الشكل التالي:

$$x_{PM}(t) = A_c cos(2\pi f_c T + 4k_P \cos 2000\pi t)$$

وهكذا فإن الانزياح الاعظمي يكون:

$$\max|4k_P\cos 2000\pi t| = 4k_P$$

(2) حسب (8-83) فإن الانزياح الأعظمي يجب أن يكون أقل من π , أو $|k_P| < \frac{\pi}{4}$.



الشكل 8-28 (a) إشارة الحزمة القاعدية المعدّلة (إشارة المعلومات) (b) إشارة الحامل (c) الإشارة المعدّلة والأسهم تدل على اتجاه الانزياح.

يبين الشكل 8-28 كلاً من الإشارة الحاملة للمعلومات $m(t)$ وإشارة الحامل $x_c(t)$ بالإضافة إلى إشارة التعديل الطوري$x_{PM}(t)$، أما الأسهم فتدل على اتجاه الانزياح. يمكن تمثيل إشارة الحامل وإشارة التعديل الطوري باستخدام المطوار ذو الطول الثابت والذي يدور حول نقطة ثابتة بسرعة $w(t)$ (السرعة الزاوية) إذا كانت سرعة دوران المطوار ثابتة أي $w(t) = w_c$ يولد رأس المطوار مع الزمن إشارة الحامل $x_c(t) = A_c\cos(w_c t)$، وإذا كانت سرعة دوران المطوار متناسبة مع إشارة الرسالة $m(t)$،أي $w(t)\sim m(t)$ فإن رأس المطوار مع الزمن يولد إشارة التعديل الطوري $x_{PM}(t) = A_c\cos[w_c t + k_P m(t)]$. كما ذكرنا سابقاً في العلاقة (8-2) والعلاقة (8-3) أن التردد اللحظي $w(t)$ للتعديل الزاوي يُعرف بالشكل التالي:

$$w(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} w(\tau)d\tau + const$$

كما ذكرنا سابقاً، فإن الطريقة الثانية في تغيير الطور الكلي $\psi(t)$ هو عن طريق تغيير التردد الأعظمي اللحظي $w_i(t)$ بشكل يتناسب مع تغيير إشارة الرسالة هو يُبين في العلاقة (8-5) أي:

$$\psi(t) = w_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau$$

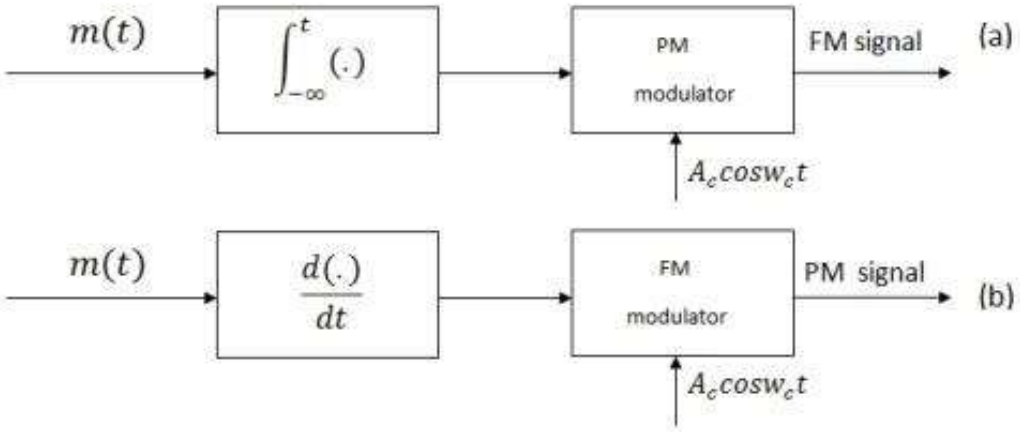
وبتعويض $\psi(t)$ في العلاقة التالية:

$$x(t) = A_c \cos \psi(t) \qquad (86\text{-}8)$$

نحصل على إشارة التعديل الترددي، أي:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau] \qquad (87\text{-}8)$$

بمقارنة العلاقة (84-8) مع العلاقة (87-8) نستنتج ما يلي: يمكن اعتبار التعديل FM بأنه تعديل PM حيث الإشارة المعدّلة (إشارة الرسالة) هي $\int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau$ بدلاً من $m(t)$. وهذا يعني أنه يمكن توليد إشارة FM بعد مكاملة $m(t)$. وتطبيق الناتج على المعدل PM وذلك كما هو موضح في الشكل 8-29(a). وبشكل مشابه يمكن توليد إشارة PM. في البداية بمفاضلة $m(t)$ وتطبيق الناتج على المعدل FM كما هو موضح في الشكل 8-29(b).



الشكل 8-29 توضيح العلاقة بين التعديل الترددي وتعديل الطور.

الانزياح الأعظمي لتردد إشارة FM هو $\Delta w_{max} = \max|k_f m(t)|$ والانزياح الأصغري لتردد إشارة FM هو $\Delta w_{min} = \min|k_f m(t)|$ ولتجنب التشوه في إشارة FM، نحن بحاجة لتحقيق:

$$w_c > k_f m(t) \tag{88-8}$$

لكون كل من التعديل الترددي والتعديل الطوري تعديلين غير خطيين. فهناك صعوبة في التحليل الرياضي بالمقارنة مع التعديل المطالي. ولهذا السبب سوف نختار الإشارة المعدّلة إشارة بسيطة، ولتكن إشارة جيبية.

2.9.8 التعديل الزاوي ذو الحزمة الضيقة باستخدام الإشارة الجيبية

لتكن لدينا الإشارة المعدّلة التالية

$$m(t) = A_m cos w_m t \tag{89-8}$$

بتعويض العلاقة السابقة في (83-8) التعديل الترددي نحصل على:

$$\begin{aligned} w(t) &= w_c + k_f A_m \cos w_m t \\ &= w_c + \Delta w cos w_m t \end{aligned} \tag{90-8}$$

حيث:

$$\Delta w = k_f A_m \tag{91-8}$$

حيث Δw الانزياح الترددي frequency deviation. بالاعتماد على العلاقة (3-8) نحصل على الطور الكلي، أي:

$$\psi(t) = w_c t + \frac{\Delta w}{w_m} \sin w_m t \tag{92-8}$$

حيث $\frac{\Delta w}{w_m}$ دليل التعديل الزاوي angle modulation index لإشارة FM. ويرمز له بـ β، أي:

$$\beta_f = \frac{\Delta w}{w_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \tag{93-8}$$

بتعويض (92-8) و (93-8) في (86-8) نحصل على إشارة FM.

$$x_{FM} = A_c \cos[w_c t + \beta_f \sin w_m t] \tag{94-8}$$

والآن نوجد إشارة التعديل الطوري PM. بتعويض الإشارة $m(t)$ إشارة الرسالة (العلاقة (89-8)) في العلاقة (7-8) علاقة الطور الكلي $\psi(t)$ نجد

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_P A_m \cos w_m t] \tag{95-8}$$

نعرف دليل التعديل الطوري بالشكل التالي:

$$\beta_P = k_P A_m \tag{96-8}$$

وبتعويض (96-8) في (95-8) نحصل على:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[w_c t + \beta_P \cos w_m t] \tag{97-8}$$

بالنظر في العلاقة (94-8) والعلاقة (97-8)، يمكن تمثيل إشارة التعديل الزاوي بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_c \cos[w_c t + \beta \sin(w_m t)] \\ &= A_c \cos[\beta \sin(w_m t)]\, cos w_c t \\ &\quad -A_c \sin[\beta \sin(w_m t)]\, sin w_c t \end{aligned} \tag{98-8}$$

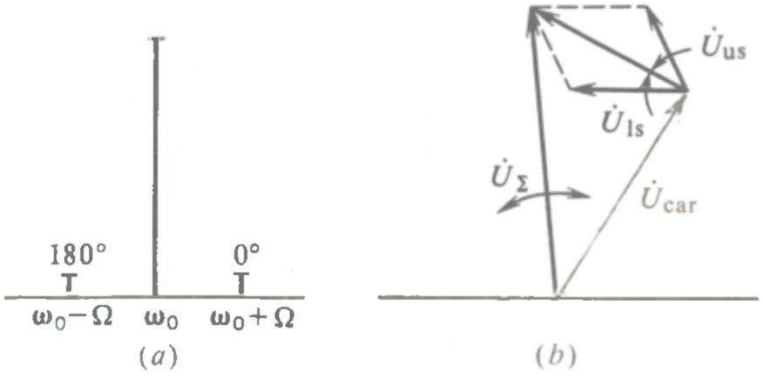
حيث β يمكن أن يكون دليل التعديل الطوري β_p أو دليل التعديل الترددي β_f . إذا تم اختيار دليل التعديل في العلاقة (98-8)أصغر بكثير من الواحد ($\beta \ll 1$)

$$\begin{aligned} \cos(\beta sin w_m t) &\cong 1 \\ \sin(\beta \sin(w_m t)) &\cong \beta sin\, w_m t \end{aligned} \tag{99-8}$$

بتعويض (99-8) في (98-8) نحصل على:

$$\begin{aligned} x(t) &\cong A_c \cos w_c t + \beta \frac{A_c}{2} \cos(w_c + w_m)\, t \\ &-\beta \frac{A_c}{2} \cos(w_c - w_m)\, t \end{aligned} \tag{100-8}$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أنه عند اختيار $\beta \ll 1$ فإن إشارة التعديل الزاوي، تتألف من إشارة الحامل ومركبتين جانبين. المركبة العليا ذات تردد $w_c + w_m$ والمركبة الدنيا ذات التردد $w_c - w_m$. ودليل التعديل في العلاقة (100-8) يقوم دور عامل التعديل في إشارة AM (أنظر العلاقة (37-8)). يوضح الشكل 8-30(a) طيف إشارة التعديل الزاوي بالاعتماد على العلاقة (100-8) لاحظ إزاحة الطور في الحزمة (المركبة) الدنيا بمقدار 180°.



الشكل 8-30 (a) طيف إشارة التعديل الزاوي عند $\beta \ll 1$ (b) المخطط المطواري (الشعاعي) الكلي لإشارة التعديل الزاوي عند $\beta \ll 1$ المطوار (الشعاع) الكلي X_Σ حول المركز.

$$\beta \ll 1$$

يمكن أن تكتب العلاقة (8-100) بالشكل الشعاعي المطواري، أي:

$$X_\Sigma = X_c + X_{us} - X_{\ell s} \qquad (101\text{-}8)$$

بمقارنة العلاقة (8-101)مع العلاقة (8-43) نلاحظ انعكاس طور المركبة الدنيا $X_{\ell s}$ بمقدار 180° وذلك كما هو موضح في الشكل 8-30(b).

3.9.8 التعديل الزاوي ذو الحزمة العريضة

للتبسيط سوف نستخدم الإشارة الجيبية كإشارة معدّلة (إشارة المعلومات)، وذلك من أجل أي قيمة لدليل التعديل β . لاحظ من العلاقة (8-98) أن إشارة التعديل الزاوي في الحالة العامة تابع لكل من:

$$\cos(\beta \sin w_m t) \quad ; \quad \sin(\beta \sin w_m t)$$

لذلك يكون من المفيد نشر التابع الأسي التالي:

$$exp(-ja \sin x) = \cos(a \sin x) - jsin(a \sin x)$$

حسب سلسلة فوريه، أي:

$$exp(-ja \sin x) = \cos(a \sin x) - jsin(a \sin x) \qquad (102\text{-}8)$$

$$= J_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(a)\cos 2nx$$
$$- j2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(a)\sin(2n-1)x$$

حيث $J_n(a)$ هو تابع بسل للمتحول a وذو الرتب n. بمقارنة العلاقة (98-8) مع العلاقة (102-8) يمكن إعادة صياغة العلاقة (98-8) بالشكل التالي:

$$x(t) = A_c \cos w_c t \left[J_0(\beta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta)\cos 2nw_m t\right] -$$
$$A_c \sin w_c t\,[2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\beta)\sin(2n-1)w_m t] \quad (103\text{-}8)$$

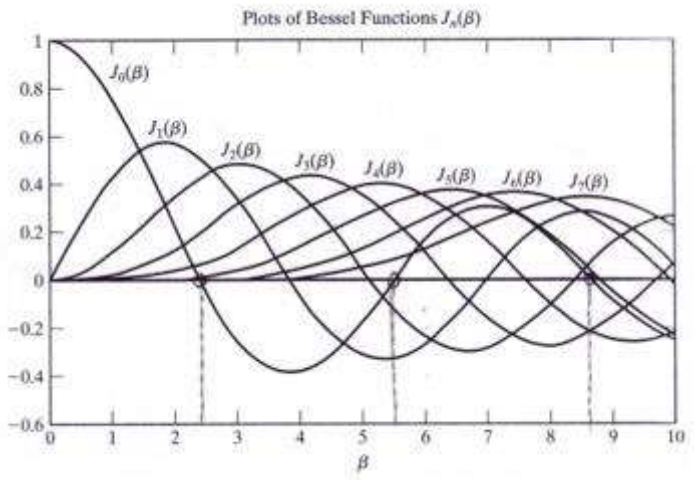
وبما أن:

$$\cos w_c t\ \cos 2nw_m t = \frac{1}{2}\cos(w_c - 2nw_m)\,t +$$
$$+\frac{1}{2}\cos(w_c + 2nw_m)\,t$$
$$\sin w_c t \sin(2n-1)\,w_m t = \frac{1}{2}\cos[w_c - (2n-1)w_m]\,t$$
$$-\frac{1}{2}\cos[w_c + (2n-1)w_m]\,t$$

فيمكن إعادة كتابة العلاقة (103-8) بالشكل التالي:

$$x(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(w_c + nw_m)\,t$$
أو (104-8)
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta)\cos(2\pi(f_c + nf_m)\,t)$$

تبين العلاقة السابقة أن إشارة التعديل الزاوي تحوي الترددات $f_c + nf_m$ حيث: $n = \pm1, \pm2, \ldots$ وبالتالي فإن المجال الترددي لانهائي ولكن نقتصر على المركبات الترددية التي تتوافق مع $J_n(\beta) > 0.01$ وذلك من وجهة النظر العملية.



الشكل 8-31 توابع بسل من أجل القيم n=0, 1, 2, …, 7.

جدول 8-1 قيم توابع بسل لقيم n=0-16 المفيدة.

n	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$
0	0.997	0.990	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246
1	0.050	0.100	0.242	0.440	0.577	-0.328	0.235	0.043
2	0.001	0.005	0.031	0.115	0.353	0.047	-0.113	0.255
3				0.020	0.129	0.365	-0.291	0.058
4				0.002	0.034	0.391	-0.105	-0.22
5					0.007	0.261	0.186	-0.234
6					0.001	0.131	0.338	-0.014
7						0.053	0.321	0.217
8						0.018	0.223	0.318
9						0.006	0.126	0.292
10						0.001	0.061	0.207
11							0.026	0.123
12							0.010	0.063

13							0.003	0.029
14							0.001	0.012
15								0.004
16								0.001

من أجل β صغيرة، عند ذلك يمكن استخدام التقريب التالي:

$$J_n(\beta) \cong \frac{\beta^n}{2^n.n!} \qquad (105\text{-}8)$$

وبالتالي يمكن تقريب المجال الترددي من أجل n=1 بحيث يشمل فقط أول مركبة ترددية. يمكن التأكد من الخاصية المتناظرة لتابع بسل، أي:

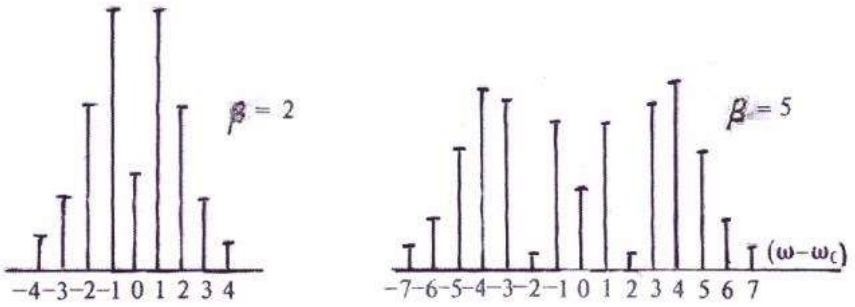
$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & ; \quad n\ even \\ -J_n(\beta) & ; \quad n\ odd \end{cases} \qquad (106\text{-}8)$$

يوضح الشكل 8-31 توابع بسل من أجل n=0..7 بينما يبين ال

جدول 8-1القيم العملية لتوابع بسل.

يبين الشكل 8-32 رسم الطيف المطالي لإشارة التعديل الزاوي من أجل $\beta = 2$ و $\beta = 5$ وذلك باستخدام العلاقة (8-104) وال

جدول 8-1. لاحظ توسع الطيف بزيادة دليل التعديل β. المطالات في الشكل 8-32 نسبية.



الشكل 8-32 طيف التعديل الزاوي من أجل $\beta = 2$ و $\beta = 5$.

عملياً نقتصر على المجال الترددي BW، الذي يحوي ما يقارب 98% من استطاعة إشارة التعديل الزاوي (وهو يقارب الحد الذي ذكر سابقاً). وهذا الحدّ يوافق نتائج العلاقة العملية التالية:

$$BW = 2(\beta + 1)f_m \qquad (107\text{-}8)$$

حيث β دليل التعديل الزاوي و f_m تردد الإشارة المعدّلة، والتي هي إشارة جيبية. بفرض لدينا الإشارة المعدّلة التالية:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m)$$

وباستخدام (8-91) و (8-93) و (8-96) نحصل على العلاقة التالية:

$$BM = 2(\beta + 1)f_m = \begin{cases} 2\left(k_\rho A_m + 1\right)f_m & ;PM \\ 2\left(\dfrac{k_f A_m}{f_m} + 1\right)f_m & ;FM \end{cases} \qquad (108\text{-}8)$$

أو

$$BM = \begin{cases} 2\left(k_\rho A_m + 1\right)f_m & ;PM \\ 2\left(k_f A_m + f_m\right) & ;FM \end{cases}$$

نلاحظ من العلاقة السابقة ما يلي (1) أثر زيادة المطال A_m (مطال الإشارة المعدّلة) على المجال الترددي متماثل بالنسبة لكلا التعديلين PM و FM (2) أثر زيادة التردد f_m (تردد الإشارة المعدّلة) على المجال الترددي هو طردي في التعديل PM وجمعي في التعديل FM.

بسبب عرض المجال الترددي للتعديل الزاوي الكبير نسبياً، وذلك بخلاف التعديل المطالي AM، فإن استخدامه يكون في المجال VHFوUHF. يتميز التعديل الزاوي بمناعته للضجيج. وذلك لكون المعلومات محمولة على تقاطع الصفر (تقاطع الإشارة المعدّلة مع محور الزمن).

يظهر الشكل 8-32 أن زيادة دليل التعديل يؤدي إلى: (1) زيادة عرض المجال الترددي. (2) لإعادة توزع المركبات الترددية. وإذا تم اختيار β بحيث تحقق العلاقة التالية:

$$J_0(+\beta) = 0 \qquad (109\text{-}8)$$

هذا يعني غياب المركبة الترددية للحامل، من طيف الإشارة المعدّلة (انظر العلاقة (8-109)). يبين الجدول 8-2 سبعة جذور للمعادلة (8-109). ويبين الشكل 8-31 مكان أول ثلاثة جذور للمعادلة السابقة.

جدول 8-2 جذور المعادلة (8-109).

i	1	2	3	4	5	6	7
β_i	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931	18.07	21.212

مثال 8-7: يستخدم التعديل الترددي FM لإرسال إشارة جيبية. بفرض أن قيمة الانزياح الترددي هي $\Delta f = 240\ KHz$. أوجد ترددات الإشارة المعدّلة بحيث تغيب مركبة الحامل من طيف الإشارة المعدّلة.

الحل: نعلم من العلاقة (8-93) أن:

$$\beta_f = \frac{\Delta w}{w_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

وباستخدام ال

جدول 8-1 نجد:

$$f_m = \Delta f / \beta_\rho$$
$$= 240/2.405 = 99.792\ KHz$$
$$= 240/5.520 = 43.478\ KHz$$
$$= 240/8.654 = 27.732\ KHz$$
. .
. .
. .

4.9.8 التعديل الزاوي لأي اشارة رسالة

ليكن لدينا إشارتين جيبيتين تمثلان إشارة الرسالة. عند ذلك إشارة التعديل الزاوي يكون لها الشكل التالي:

$$x(t) = A_c \cos(w_c t + \beta_1 sin w_{m1} t + \beta_2 sin w_{m2} t) \qquad (8\text{-}110)$$

$$=A_c \cos w_c t \cos(\beta_1 sinw_{m1} t + \beta_2 sinw_{m2} t)$$
$$-A_c \sin w_c t \sin(\beta_1 sinw_{m1} t + \beta_2 sinw_{m2} t)$$

للتبسيط سوف نفرض أن دليلي التعديل β_1 و β_2 صغيرتان بما فيه الكفاية لتحقق:

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \sin x \cong x$$

وبإجراء بعض الحسابات نحصل:

$$x(t) = A_c \left(1 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{4}\right) \cos w_c t +$$
$$+ \frac{\beta_1 A_c}{2} [\cos(w_c + w_{m1})\, t - \cos(w_c - w_{m1})\, t]$$
$$+ \frac{\beta_2 A_c}{2} [\cos(w_c + w_{m2})\, t - \cos(w_c - w_{m2})\, t]$$
$$+ \frac{\beta_1^2 A_c}{8} [\cos(w_c + 2w_{m1})\, t + \cos(w_c - 2w_{m1})\, t] \qquad (111\text{-}8)$$
$$+ \frac{\beta_2^2 A_c}{8} [\cos(w_c + 2w_{m2})\, t + \cos(w_c - 2w_{m2})\, t]$$
$$+ \frac{\beta_1 \beta_2 A_c}{2} [\cos(w_c + w_{m1} + w_{m2})\, t + \cos(w_c - w_{m1} - w_{m2})\, t$$
$$-\cos(w_c + w_{m1} - w_{m2})\, t - \cos(w_c - w_{m1} + w_{m2}) t]$$

نلاحظ من الإشارة السابقة ما يلي: يحوي طيف الإشارة $x(t)$ الترددات التالية:

$$w_c \pm 2w_{m2} \text{ و } w_c \pm 2w_{m1} \text{ و } w_c \pm w_{m2} \text{ و } w_c \pm w_{m1}$$

بالإضافة إلى مجموعة الترددات التالية: $w_c \pm w_{m1} \pm w_{m2}$ التي تشكل ترددات التعديل البيني intermodulation.

في حال إهمال كون β صغيرة ولدينا مجموعة من ترددات الحزمة القاعدية w_{m1} و w_{m2} و ... و w_{mn} فإن طيف إشارتي التعديل FM و PM سوف يحوي المركبات التالية:

$$w_c \pm n_1 w_{m1} \pm n_2 w_{m2} \pm \cdots \pm n_n w_{mn}$$

حيث n_i أعداد صحيحة بما فيها الصفر.

يتضح مما سبق وجود صعوبة في تحديد المجال الترددي للتعديل الزاوي، وذلك بسبب كونه تعديلاً غير خطي. غير أنه هناك علاقة تقريبية لتحديد المجال الترددي للتعديل الزاوي تسمى علاقة كارسون carson أو قاعدة كارسون والتي تُعطى بالشكل التالي:

$$BW = 2(\beta + 1)W \qquad (112\text{-}8)$$

حيث β دليل التعديل وتُعرف بالشكل التالي:

$$\beta = \begin{cases} k_P \max[|m(t)|] & ; \quad PM \\ \dfrac{k_f \max[|m(t)|]}{w} & ; \quad FM \end{cases} \qquad (113\text{-}8)$$

وW عرض المجال الترددي للإشارة m(t) (إشارة الرسالة).

مثال 8-8: استخدام التعديل الترددي FM لإرسال الرسالة التالية:

$$m(t) = 10\ sinc(10^4 t)$$

المطلوب: إيجاد المجال الترددي BW للإشارة المعدّلة علماً بأن $k_f = 4000$.

الحل: من العلاقة (112-8) نعلم أن

$$BW = 2(\beta + 1)W$$

لإيجاد W طيف الإشارة $m(t)$ نوجد تحويل فوريه لـ $m(t)$، أي

$$\mathcal{F}[m(t)] = M(f) = 10^{-3}\Pi(10^{-4}f)$$

أي أن المجال الترددي للرسالة $m(t)$ هو 5000 Hz.

وباستخدام العلاقة (113-8) نجد:

$$\beta = \frac{k_\ell \max[|m(t)|]}{W} = \frac{4000.10}{5000} = 8$$

وبالتعويض في العلاقة (112-8) نجد:

$$BW = 2(8 + 1).5000 = 90.000\text{HZ}$$

مسائل الفصل الثامن

8-1- تم تطبيق التعديل المطالي AM على الرسائل التالية:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi.10^3 t)\ ;\ \ m(t) = A_m cos^2(2\pi.10^3 t)$$
$$m(t) = A_m cos^3(2\pi.10^3 t)$$

المطلوب إيجاد المركبات الترددية للإشارة المعدّلة x(t) بفرض تردد الحامل $f_c = 100\ KHz$

8-2- استخدام التعديل المطالي AM لإرسال إشارة مربعة، ترددها الأساسي هو 500 Hz ومطالها له حالتان وهما: (1) 0، (2)1 1±. المطلوب: إيجاد المركبات الترددية لإشارة المعدّلة في كلا الحالتين (1) و (2).

8-3- لدينا تعديل مطالي AM يستخدم إشارة الرسالة $m(t) = A_m \cos(w_m t)$ والحامل $A_c \cos(w_c t)$. بفرض القيمة العظمى والصغرى لغلاف الإشارة المعدّلة $A_{max} = 9.75\ V$ و $A_{min} = 0.25\ V$. أوجد توزع متوسط الاستطاعة بين الحامل والحزمتين الجانبيتين العليا والدنيا كنسبة مئوية.

8-4- يستخدم التعديل DSB-SC لإرسال الرسائل الموضحة في المسألة (8-1) المطلوب: إيجاد المركبات الترددية للإشارة المعدّلة، حيث تردد الحامل $f_c = 100\ KHz$

8-5- أعد المسألة السابقة من أجل إشارة المعدّلة $m(t)$.والتي هي عبارة عن إشارة مربعة ترددها الأساسي 500HZ ومطالها 1±.

8-6- أعد المسألة (8-1) من أجل نوع التعديل SSB.

8-7- لدينا التعديل المطالي AM ذو المواصفات التالية: الإشارة المعدّلة جيبية، تردد التعديل 4KHz، تردد الحامل 2KHz. المطلوب: (1)أوجد المحتوى الترددي للإشارة المعدّلة (2) بيّن أن المعدل لا يقوم بوظيفته بشكل سليم.

8-8- لدينا تعديل مطال النبضة PAM ذو المواصفات التالية:

عملية أخذ العينات– أخذ العينات والمسك بها، عرض النبضة– $10\ \mu s$، الإشارة المعدّلة– إشارة جيبية، تردد التعديل 1 KHz.

المطلوب: إيجاد طيف الإشارة المعدّلة مع توصيف أجزائه.

8-9- في الاتصالات المستخدمة لتعديل مطال النبضة PAM، عادة يتم تشكيل النبضة باستخدام التجيب المرتفع raised cosine، أي

$$X(jW) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{wT}{2}\right) ; 0 \le |w| \le \frac{2\pi}{T} \\ 0 \qquad\qquad ; otherwise \end{cases}$$

حيث T المسافة بين الرموز (الدور). المطلوب: أوجد $x(0)$ و $x(kT)$ حيث $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

8-10- قارن بين التعديل AM والتعديل PM من وجهة نظر نقاط التشابه ونقاط الاختلاف.

8-11- لدينا الرسائل التالية $m_i(t)$ $(i = 1 \ldots 12)$ المراد إرسالها باستخدام التعديل والتجميع. بفرض المجال الترددي لكل رسالة هو10 KHz، أوجد المجال الترددي الأصغري في كلا الحالتين التاليتين:

(1) FDM مع SSB.

(2) TDM مع PAM.

8-12- في تعديل DSB-SC يستخدم الكاشف المتماسك في كشف التعديل. بفرض الخطأ بين التردد المحلي والتردد المستقبل هو Δw .المطلوب ماهو أثر الخطأ Δw على عمل الكاشف المتماسك.

8-13- لدينا إشارة التعديل FM ذات المطال 2.7 V وتردد لحظي قيمته:

$$w(t) = 10^9(1 + 10^{-4}\cos 2.10^3 t)$$

المطلوب: (1) دليل التعديل. (2) النموذج الرياضي للإشارة.

8-14- أوجد دليل التعديل لإشارة FM بفرض تردد الإشارة المعدّلة $f_m = 7\ KHz$ وتردد الحامل $f_c = 180\ MHz$ والتردد الاعظمي هو $f_{max} = 182.5\ MHz$.

8-15- لدينا إشارة تعديل زاوي ذات المواصفات التالية: تردد الحامل $f_c = 45\ MHz$ والانزياح الترددي بمقدار 0.3 KHz وتردد الإشارة المعدّلة $f_m = 4.5\ KHz$. المطلوب: (1) ارسم الشكل المطواري (2) ارسم شكل الطيف.

8-16- لدينا إشارة PM معدّلة بإشارة جيبية ترددها $w_m = 10^4\ s^{-1}$ ماهي قيمة الانزياح الترددي الذي يؤدي إلى غياب التردد $w_c + w_m$ من طيف الإشارة المعدّلة.

8-17- لدينا محطة إرسال راديوية، تعمل بالتعديل الطوري PM بدليل تعديل أعظمي 30 (عند القيمة العظمى للإشارة المرسلة). بفرض الحدّ الأقصى للإشارة المعدّلة 16 KHz. المطلوب: إيجاد عدد القنوات الممكن توسيعها في المجال VHF دون تداخل.

9 تحويلات لابلاس

LaplaceTransform

درسنا في الفصل الرابع تحويلات فوريه، ذات الاستخدامات الواسعة في الاتصالات ومعالجة الإشارة. بالإضافة إلى تحويلات فوريه، هناك تحويلات أخرى ذات استخدام واسع نسبياً في الاتصالات ومعالجة الإشارة والتحكم، والتي هي تحويلات لابلاس المشابهة لتحويلات فوريه في خواصها والتي تعتمد على التردد العقدي complex بدلاً من التردد الفيزيائي.

عملياً يمكن تقسيم تحويلات لابلاس إلى تحويلات أحادية الجانب unilateral وتحويلات ثنائية الجانب bilateral. النوع الأول مناسب لحل المعادلات التفاضلية ذات الشروط الأولية. والنوع الثاني يستخدم لدراسة النظم مثل الاستقرار والسببية والاستجابة الترددية وغيرها.

1.9 مفاهيم أولية في تحويلات لابلاس

سوف ندرس في هذه الفقرة بعض المفاهيم الأولية في تحويلات لابلاس مثل مفهوم التردد العقدي والتابع الذاتي eigen function وتمثيل تحويل لابلاس والتقارب convergence والأصفار والأقطاب.

1.1.9 مفهوم التردد العقدي

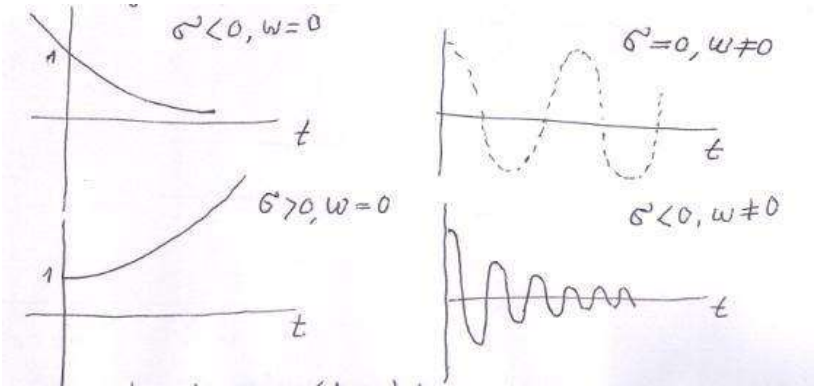
رأينا سابقاً في تحليل الإشارة باستخدام الطرق الطيفية أن الإشارة المعنية تمثل عن طريق مجموعة لانهائية من المركبات الأساسية والتي تتغير مع الزمن وفق $\exp(jwt)$. من أجل التعميم سوف نضيف العدد الحقيقي δ إلى أُس $\exp(jwt)$، أي $s = \delta + jw$. وهكذا نحصل على الإشارة التالية $\exp(st)$ حيث s عدد عقدي ويسمى التردد العقدي. بجمع $\exp(st)$ مع مرافقها العقدي، نحصل على الإشارة الحقيقية التالية:

$$x(t) = \frac{1}{2}[\exp(st) + \exp(s^*t)] \qquad (1\text{-}9)$$

حيث $s^* = \delta - jw$ هو مرافق s العقدي. يمكن وضع العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$x(t) = \exp(\delta t)\frac{\exp(jwt) + \exp(-jwt)}{2} = \exp(\delta t)\cos(wt) \qquad (2\text{-}9)$$

باستخدام العلاقة (2-9) يمكننا الحصول على طيف واسع من الإشارات الحقيقية وذلك باختيار كل من الجزء الحقيقي لـ s والذي هو δ وكذلك الجزء التخيلي لـ s والذي هو jw. عندما $\delta = 0\ ,\ w \neq 0$ نحصل على الإشارة $\cos(wt)$.



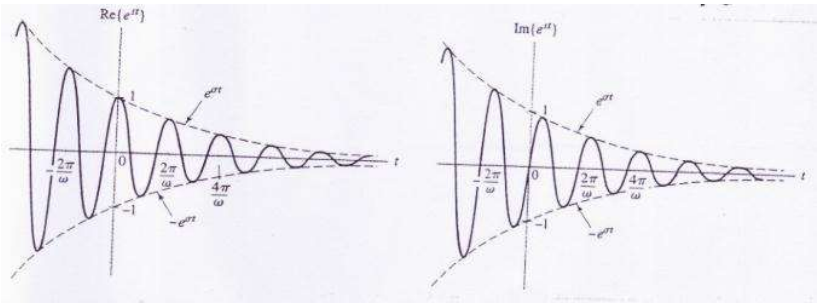
الشكل 9-1 إشارات حقيقية موافقة لقيم مختلفة للتردد العقدي.

اذا كانت $w = 0$ و $\delta \neq 0$ نحصل على إشارة أسية متخامدة عندما $\delta < 0$ أو متزايدة عندما $\delta > 0$ وذلك كما هو موضح في الشكل 9-1. إذا كانت $\delta < 0$ و $w \neq 0$ فإننا نحصل على إشارة ذات تعقيد أكبر (أنظر الشكل 9-1). واضح مما سبق أن $e^{\delta t}$ هو عبارة عن غلاف الإشارة المتغير مع الزمن. وأنه يمكن تمثيل التردد العقدي بالمستوي s ذي المحور الافقي δ والمحور الشاقولي jw . بإضافة الجزء التخيلي $je^{st}\sin(wt)$ للعلاقة (2-9) نحصل على:

$$e^{st} = e^{st}\cos(wt) + je^{st}\sin(wt) \qquad (3\text{-}9)$$

يبين

الشكل 9-2 كل من الجزء الحقيقي والتخيلي للعلاقة السابقة، وذلك في حالة $\delta < 0$.



الشكل 9-2 الجزء الحقيقي والتخيلي e^{st} عندما $\delta < 0$.

2.1.9 التابع الذاتي

ليكن لدينا النظام الخطي LTI ذو الاستجابة النبضية $h(t)$ والدخل العقدي $x(t) = e^{st}$. من أجل إيجاد أثر النظام الخطي LTI على الدخل $x(t) = e^{st}$، نوجد الخرج $y(t)$ بتلفيف $h(t)$ (جداء التلاف) مع الدخل $x(t) = e^{st}$، أي:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

بتعويض $x(t) = e^{st}$، نحصل على:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s) \qquad (4\text{-}9)$$

حيث $H(s)$ هو تابع التحويل:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad (5\text{-}9)$$

نلاحظ من العلاقة (4-9) أن الخرج عبارة عن الدخل مضروب بتابع التحويل $H(s)$. نعرف التابع الذاتي بالشكل التالي: الإشارة التي تعبر النظام دون أي تعديل عليها سوى ضربها بمقدار سلمي. وبالتالي e^{st} عبارة عن التابع الذاتي للنظام LTI و $H(s)$ عبارة عن القيمة الذاتية eigen value للنظام الخطي LTI.

3.1.9 تمثيل تحويل لابلاس

سوف نوجد الآن تحويل لابلاس $X(s)$ للإشارة $x(t)$ ($x(t)$ هي أي إشارة اختيارية) كذلك تحويل لابلاس المعاكس.

بتعويض $s = \delta + jw$ في العلاقة (5-9) نجد:

$$H(\delta + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(\delta+jw)t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)e^{-\delta t}]e^{-jwt}dt$$

تعني العلاقة السابقة أن $H(\delta + jw)$ هو عبارة عن تحويل فورييه لـ $h(t)e^{-\delta st}$ وبالتالي يجب أن يكون تحويل فورييه المعاكس لـ $H(\delta + jw)$ هو $h(t)e^{-\delta t}$، أي

$$h(t)e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H\,(\delta + jw)e^{jwt}dw$$

بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $e^{+\delta t}$ نحصل على $h(t)$، أي

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H\,(\delta + jw)e^{(\delta+jw)t}dw \qquad (6\text{-}9)$$

والآن بتعويض $s = \delta + jw$ والاخذ بالحسبان أن $dw = \frac{ds}{j}$ في العلاقة (6-9) يكون لدينا:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} H\,(s)e^{st}ds \qquad (7\text{-}9)$$

من العلاقة (5-9) نوجد $H(s)$ بمعرفة $h(t)$ ومن العلاقة (7-9) نوجد $h(t)$ بمعرفة $H(s)$. نقول أن $H(s)$ هو تحويل لابلاس لـ $h(t)$ ونقول أن $h(t)$ هو تحويل لابلاس المعاكس لـ $H(s)$. ولعدم وجود (وضع) شروط مسبقة على $h(t)$ و $H(s)$ فإن العلاقة (5-9) يمكن استخدامها لإيجاد تحويل لابلاس لأي إشارة $x(t)$، أي:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)e^{-st}dt \qquad (8\text{-}9)$$

والتحويل المعاكس (تحويل لابلاس المعاكس) يكون من الشكل التالي (انظر العلاقة (7-9)):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+J\infty} X\,(s)e^{st}ds \qquad (9\text{-}9)$$

ويمكن التعبير شكلياً عن العلاقتين الأخيرتين بالشكل التالي:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$$

التعقيد في حساب (8-9) أقل من التعقيد في حساب (9-9) ، حيث يمكن استخدام نظرية الرواسب residues في كثير من التطبيقات العملية تستخدم تقنية سهلة لحساب تحويل لابلاس المعاكس والتي تعتمد على فكرة التطابق واحد إلى واحد بين $x(t)$ و X(s). وسوف نشرح تلك الطريقة لاحقاً.

4.1.9 التقارب

نعلم سابقاً أن الشرط اللازم لوجود تحويل فورييه (تقارب تحويل فورييه) لـ $x(t)$ هو أن يكون $x(t)$ قابلاً للتكامل بالقيمة المطلقة، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \qquad (10\text{-}9)$$

عند ذلك يمكن أيضاً الحصول على تحويل فورييه من تحويل لابلاس وذلك بوضع $\delta = 0$، أي:

$$X(jw) = X(s)|_{\delta=0} \qquad (11\text{-}9)$$

رأينا في الفقرة السابقة أن تحويل لابلاس هو تحويل فورييه لـ $x(t)e^{-\delta t}$ وهكذا فإن الشرط اللازم لوجود التقارب في تحويل لابلاس هو أن تكون القيمة المطلقة للتابع $x(t)e^{-\delta t}$ قابلة للتكامل، أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\delta t}|dt < \infty \qquad (12\text{-}9)$$

سوف نبين أن تحويل لابلاس أكثر عمومية من تحويل فورييه.

مثال 9-1: التابع $x(t) = e^{at}u_{-1}(t)$ ليس له تحويل فورييه عندما $a \geq 1$ بسبب عدم تحقق (9-10)، بينما التابع $x(t)e^{-\delta t}$ يحقق (9-12) عندما $\delta > a$ وبالتالي له تحويل لابلاس.

يسمى مجال δ في (9-12) التي تؤمن تقارب تحويلات لابلاس بمجال التقارب region of convergence (ROC).

5.1.9 الأقطاب والأصفار

معظم تحويلات لابلاس التي تواجهنا في مختلف فروع الهندسة هي عبارة عن نسبة بين كثيري حدود في المستوى s، مثال على ذلك:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0} \qquad (13\text{-}9)$$

بعد إيجاد جذور العلاقة السابقة، يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي:

$$X(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M}(s - 3_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - P_k)} \qquad (14\text{-}9)$$

حيث 3_k تسمى أصفار $X(s)$ و P_k تسمى أقطاب $X(s)$. يرمز لموقع الأصفار في المستوي s بـ "O" ولموقع الأقطاب بـ "X".

مثال 9-2: أوجد تحويل لابلاس للتابع:

$$x(t) = e^{at}u_{-1}(t)$$

مع توضيح المجال ROC ومكان الأقطاب والأصفار علماً بأن a قيمة حقيقية.

الحل: باستخدام العلاقة (9-11) نحصل على ما يلي:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u_{-1}(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}dt$$

$$X(s) = \frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)}\Big|_0^{\infty}$$

وبوضع $s = \delta + jw$ نحصل على:

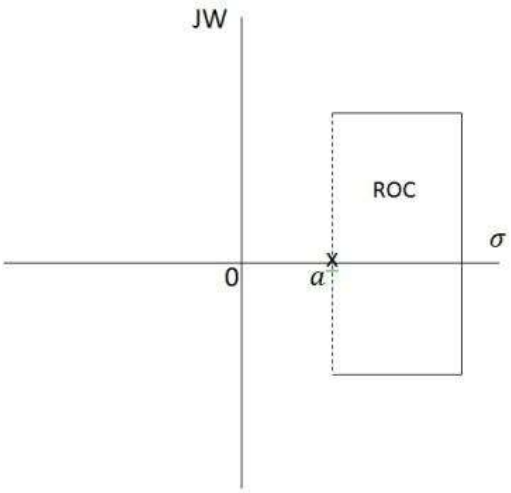
$$X(s) = \frac{-1}{\delta + jw - a}e^{-(\delta-a)t}e^{-jwt}\Big|_0^{\infty}$$

عندما $\delta > a$ نجد أن التكامل متقارب، أي

$$X(s) = \frac{-1}{\delta + jw - a}(0-1) \quad ;\delta > a$$

$$= \frac{1}{s-a}\ ;\ \delta > a\ \ or\ \ R_e(s) > a$$

عندما $\delta \leq a$ التكامل غير متقارب. واضح أنه لدينا قطب واحد عند $\delta = a$ ولايوجد أصفار حسب العلاقة السابقة. يوضح الشكل 9-3 منطقه ROC.



الشكل 9-3 منطقه ROC (المنطقة المهشرة) وموقع القطب.

عندما $a = 0$، نحصل على تحويل لابلاس لتابع الخطوة الواحدية $u_{-1}(t)$، أي $X(s) = 1/s$ وذلك عندما $\delta > 0$. وعندما $a \to -a$، يكون لدينا:

$$e^{-at}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a} \; ; \; \delta > -a$$

يشير الرمز $\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}$ إلى تحويل لابلاس وتحويل لابلاس المعاكس.

2.9 تحويل لابلاس أحادي الجانب

التكامل في العلاقة (9-8) هو عبارة عن تحويل لابلاس ثنائي الجانب. تجدر الإشارة أن النظم الفيزيائية هي نظم سببية، أي عندما $t < 0$ فإن قيمة الإشارة تساوي الصفر (حيث يتم تطبيق الإشارة على دخل النظم الفيزيائية عند $t = 0$)، لذلك يمكننا تبسيط العلاقة (9-8) لتصبح بالشكل التالي:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x\,(t)e^{-st}dt \qquad (15\text{-}9)$$

حيث تعني 0^- أن التكامل السابق يحوي الانقطاعات والنبضات التي تحدث عند $t = 0$. يسمى التكامل السابق بتحويل لابلاس أحادي الجانب.

بمقارنة (8-9) و(15-9)، نلاحظ أن تحويل لابلاس ثنائي الجانب يعتمد على الإشارة من $t = -\infty$ إلى $t = +\infty$ بينما تحويل لابلاس أحادي الجانب يعتمد على الإشارة من $t = 0^-$ إلى $t = +\infty$. هذا يعني إن كان لدينا إشارتين مختلفتين في المجال $t < 0$ ومتطابقتان في $t \geq 0$ سوف يكون لهما تحويل لابلاس ثنائي الجانب مختلف وتحويل لابلاس أحادي الجانب متطابق.

باستخدام الإشارات السببية، أي أننا في التكامل أحادي الجانب، نتخلص من اللبس ambiguity المتأصل في تحويل لابلاس ثنائي الجانب. وبالتالي لسنا بحاجة لنأخذ ROC بالحسبان.

مثال 9-3: أوجد تحويل لابلاس وحيد الجانب للنبضة التالية:

$$X(t) = \exp(s_0 t)u_{-1}(t) \quad : s_0 = \delta_0 + jw_0$$

ومن ثم ناقش النتيجة.

الحل: باستخدام العلاقة (15-9) نحصل على:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \exp[-(s - s_0)t]dt \tag{16-9}$$

$$= -\frac{\exp[-(s - s_0)t]}{s - s_0}|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s - s_0}$$

وذلك عند $\delta > \delta_0$.

عندما $s_0 = -\alpha$ عدد حقيقي يكون لدينا:

$$\mathcal{L}_u[\exp(-\alpha t)\, u_{-1}(t)] = \frac{1}{s + \alpha} \tag{17-9}$$

وعند $s_0 = jw_0$ يكون لدينا:

$$\mathcal{L}_u[\exp(jw_0 t)\, u_{-1}(t)] = \frac{1}{s - jw_0} \tag{18-9}$$

وبوضع $\alpha = 0$ يكون لدينا:

$$\mathcal{L}_u[u_{-1}(t)] = 1/s \tag{19-9}$$

حيث $\mathcal{L}_u[.]$ هو رمز تحويل لابلاس وحيد الجانب.

مثال 4-9: أوجد تحويل لابلاس أحادي الجانب لتابع ديراك $\delta(t - t_0)$ عند $t_0 > 0$ و $t_0 = 0$.

الحل:

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta\,(t - t_0)\exp(-st)\,dt\ = \exp(-st_0)$$

أي:

$$\mathcal{L}_u[\delta(t - t_0)] = \exp(-st_0) \tag{20-9}$$

واضح أن تحويل لابلاس السابق معرف على كل النقاط في المستوي العقدي s. تجدر الملاحظة هنا أن تابع ديراك $\delta(.)$ متمركز عند مركز الإحداثيات $t = 0$ وهذا لا يتوافق مع تحويل لابلاس أحادي الجانب لأنه عند ذلك سوف نحصل على نصف التكامل. لتجنب ذلك سوف نعرف تحويل لابلاس بالشكل التالي :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0-\varepsilon}^{\infty} \delta\,(t)\exp(-st)\,dt \tag{21-9}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}_u[\delta(t)] = 1$$

3.9 خواص تحويل لابلاس أحادي الجانب

معظم خواص تحويل لابلاس مشابهة لخواص تحويل فورييه. لذلك سوف نبرهن بعض الخواص، عندما نجد ذلك مفيداً.

1.3.9 الخاصية الخطية

تحويل لابلاس هو عبارة عن تحويل تكامل خطي، حيث التكامل هو عملية خطية، لذلك:

$$\mathcal{L}_u\left[\sum_i a_i\, x_i(t)\right] = \sum_i a_i X_i(s) \tag{22-9}$$

أو

$$\sum_i a_i\, x_i(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\leftrightarrow} \sum a_i\, X_i(s)$$

فعلى سبيل المثال، بما أن:

$$\cos(w_0 t)\, u_{-1}(t) = \frac{\exp(jw_0 t) + \exp(-jw_0 t)}{2} u_{-1}(t)$$

وبالأخذ بالحسبان (18-9) و (22-9) يكون لدينا:

$$\cos(w_0 t)\, u_{-1}(t) = \frac{s}{s^2 + w_0^2} \tag{23-9}$$

وذلك لأن

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_u[\exp(\mathrm{j}w_0 t)\, u_{-1}(t) + exp(-jw_0 t)u_{-1}(t)]$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - jw_0} + \frac{1}{s + jw_0}\right) = \frac{s}{s^2 + w_2^2}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$\sin(w_0 t)u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\leftrightarrow} \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} \tag{24-9}$$

2.3.9 خاصية الإزاحة الزمنية:

$$\mathcal{L}_u[x(t - t_0)] = \exp(-st_0)\, X(s) \tag{25-9}$$

عند تطبيق هذه الخاصية، يجب التعامل فقط مع الإشارات عند $t \geq 0$. من أجل إيجاد تحويل لابلاس لنبضة مستطيلة بعرض τ ومطال يساوي الواحد فإننا نستخدم كلاً من خاصية الإزاحة (25-9) والخاصية الخطية (22-9) والعلاقة (19-9) للحصول على:

$$\mathcal{L}_u x(t) = \mathcal{L}_u[u_{-1}(t) - u_{-1}(t-\tau)]$$
$$= \frac{1}{s}[1 - \exp(-s\tau)] \qquad (26\text{-}9)$$

3.3.9 خاصية الإزاحة في المجال s

$$\mathcal{L}_u[x(t)\exp(-at)] = X(s+a) \qquad (27\text{-}9)$$

هذا يعني إذا كان $\mathcal{L}_u x(t) = X(s)$ فإن تحويل لابلاس لإشارة مضروبة بتابع أسي بالزمن يكون بإزاحة متحول لابلاس. يمكن برهان العلاقة السابقة وذلك بتعويض التابع $x(t)e^{-at}$ مباشرة بالعلاقة (15-9) بالاعتماد على الخاصية السابقة والعلاقتين (23-9) و (24-9) نحصل على:

$$\mathcal{L}_u[exp(-at)\cos w_0 t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + w_0^2}$$
$$\mathcal{L}_u[exp(-at)\sin w_0 t] = \frac{w_0}{(s+a)^2 + w_0^2} \qquad (28\text{-}9)$$

4.3.9 خاصية التلفيف (التلاف):

إذا كان لدينا التابعان $x(t)$ و $y(t)$ يساويان الصفر عند $t < 0$ فإن:

$$\mathcal{L}_u[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s) \qquad (29\text{-}9)$$

أي أن التلفيف في المجال الزمني يوافق الجداء في المجال s (أي جداء تحويلي لابلاس $X(s)$ و $Y(s)$) وهذا يتوافق مع تحويلات فوريه.

5.3.9 خاصية التفاضل في المجال s

إذا كان التابع $x(t)$ يوافق تحويل لابلاس $X(s)$ فإن:

$$\mathcal{L}_u[-tx(t)] = \frac{d}{ds}X(s) \qquad (30\text{-}9)$$

أي التفاضل في المجال s يوافق جداء التابع $x(t)$ بـ t- في المجال الزمني.

مثال 9-5 : أوجد تحويل لابلاس أحادي الجانب للتابع التالي:

$$x(t) = [e^{-at}u_{-1}(t)] * [tu_{-1}(t)]$$

حيث a عدد صحيح موجب.

الحل: بالأخذ بالحسبان العلاقة (9-17) نحصل على

$$\mathcal{L}_u[e^{-at}u_{-1}(t)] = \frac{-1}{s-a}$$

ومن العلاقة (9-19) نجد:

$$\mathcal{L}_u[u_{-1}(t)] = 1/s$$

وباستخدام خاصية التفاضل في المجال s (العلاقة (9-30)) نحصل على:

$$\mathcal{L}_u[tu_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2}$$

وباستخدام خاصية التلفيف في المجال الزمني، أي العلاقة (9-29) نجد:

$$\mathcal{L}_n[x(t)] = \mathcal{L}_n\left[e^{-at}u_{-1}(t) * \left(tu_{-1}(t)\right)\right]$$

$$= X(s) = \frac{-1}{s^2(s-a)}$$

6.3.9 خاصية التفاضل في المجال الزمني

نعلم أن

$$X(s) = \mathcal{L}_u[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

بأخذ تفاضل الطرفين، يكون لدينا:

$$\mathcal{L}_u\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة، يكون لدينا:

$$\mathcal{L}_u\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = x(t)e^{-st}|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}_u\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0^-) \quad (31\text{-}9)$$

يمكن تعميم العلاقة السابقة (31-9) من أجل تفاضل من مراتب عليا، أي:

$$\mathcal{L}_u\left[\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^{(n)}}\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \cdots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-) \quad (32\text{-}9)$$

وبما أن تحويل لابلاس يحوي الحالة الابتدائية للإشارة عند $t = 0$ حسب (31-9) و (32-9)، فإنه يمكن استخدام تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الخطية. وسوف نوضح ذلك في الفقرة (7-9).

7.3.9 خاصية تحويل لابلاس للتكامل

$$\mathcal{L}_u\left[\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(s)}{s} \quad (33\text{-}9)$$

لتطبق القاعدة السابقة (العلاقة (33-9))، سوف نوجد تحويل لابلاس للإشارة التالية:

$$x(t) = t\,u_{-1}(t)$$

من شكل الإشارة السابقة، نلاحظ أنها تكامل $u_{-1}(t)$ أي:

$$t\,u_{-1}(t) = \int_{0^-}^{t} u_{-1}(\tau)d\tau$$

وبما أن $\mathcal{L}_u[u_{-1}(t)] = {}^1/_s$ (أنظر العلاقة (19-9)) وباستخدام العلاقة (33-9) نحصل على:

$$\mathcal{L}_u[tu_{-1}(t)] = {}^1/_{s^2}$$

8.3.9 خاصية التقييس

التقييس بالزمن يوافق معكوس التقييس في s، أي

$$\mathcal{L}_u[x(at)] = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a}) \qquad (34\text{-}9)$$

9.3.9 خاصية القيم الحدية

نعني بالقيم الحدية، القيمة الابتدائية والقيمة النهائية، أي $\lim_{t\to\infty}x(t)$ و $\lim_{t\to 0}x(t)$. ويمكن إيجاد القيم الحدية من تحويل لابلاس $X(s)$ للإشارة $x(t)$. القيمة الحدية الابتدائية تعطى بالشكل التالي:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = x(o^+) \qquad (35\text{-}9)$$

حيث $X(s)$ تابع عدد الاصفار فيه أقل من عدد الأقطاب، أي درجة الصورة (البسط) أقل من درجة المخرج (المقام).من أجل إيجاد القيمة النهائية نستخدم العلاقة التالية:

$$\lim_{s\to 0} s\,X(s) = \lim_{t\to\infty} x\,(t) \qquad (36\text{-}9)$$

وشرط استخدام العلاقة السابقة هو أن تكون كل أقطاب $X(s)$ في الطرف (النصف) الأيسر من المستوي s مع قطب واحد فقط عند s=0 بعد تقدير .

مثال 9-6: أوجد القيمة الابتدائية والنهاية للإشارة $x(t)$ علماً بأن تحويل لابلاس لها هو

$$\mathcal{L}_u x(t) = X(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

الحل: باستخدام العلاقة (9-35) نجد:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty}\frac{s(7s+10)}{s(s+2)} = 7$$

وباستخدام العلاقة (9-36) نحصل على القيمة النهائية أي

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{7s+10}{s(s+2)} = 5$$

4.9 خواص منطقة التقارب

بينا في الفقرة (9-1)، أن تحويل لابلاس ثنائي الجانب ليس وحيدا unique ما لم تحدد منطقة التقارب ROC مثال:

$$e^{-at}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a};\ \delta > -a$$

$$-e^{-at}u_{-1}(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a};\ \delta < -a$$

بمعرفتنا بخواص منطقة التقارب، يمكننا التعرف على ROC لتابع ما، وذلك اعتماداً على $X(s)$ وبعض خواص الإشارة (التابع) $x(t)$. لذلك سوف نبين الآن خواص منطقة التقارب ROC.

منطقة التقارب لا يمكن أن تحوي أي قطب: إذا كان تحويل لابلاس متقارب فإن $X(s)$ محددة في كل منطقة التقارب ROC. ليكن P قطب $X(s)$ هذا يعني أن $X(P) = \pm\infty$ ، أي تحويل لابلاس غير متقارب عند P. وبالتالي $s=P$ لا يمكن أن يقع في منطقة التقارب ROC.

تتألف منطقة التقارب ROC من أشرطة strips موازية للمحور التخيلي jw في المستوي s ، حتى يكون تحويل لابلاس ثنائي الجانب للإشارة $x(t)$ متقارباً، يجب تحقق المتراجحة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\delta t}dt < \infty$$

مجموعة قيم δ التي تحقق المتراجحة السابقة (الحصول على تكامل محدد) تحدد منطقة التقارب ROC. و بما أن δ هي الجزء الحقيقي في s، فإن منطقة التقارب لا تعتمد على σ، أي أن المركبة التخيلية jw ليس لها أثر على التقارب. وهذا يعني أن ROC تتألف من أشرطة موازية لمحور jw في المستوى s.

إذا كانت الإشارة $x(t)$ ذات عرض محدد وقابلة للتكامل بشكل مطلق، فإن منطقة التقارب تشمل كل المستوي s. لتكن لدينا الإشارة $x(t)$ حيث $x(t) = 0$ من أجل $t > a$ و $t < b$. وإذا وجدنا الثابت A حيث $|x(t)| \le A$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\delta t}dt$$

$$\leq \int_a^b A\, e^{-\delta t} dt$$

$$= \begin{cases} \frac{-A}{\delta} e^{-\delta t}\Big|_a^b ; & \delta \neq 0 \\ A(b-a) \; ; & \delta = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيمة السابقة محدودة من أجل كل قيم δ المحدودة (المحددة). ومن ذلك نستخلص أن منطقة التقارب ROC لإشارة ذات عرض محدد، تحوي كل المستوي s.

من أجل الحصول على الخواص الأخرى لمنطقة التقارب ROC سوف نقوم بالتحليل التالي: ليكن

$$\mathrm{I}(\delta) = \mathrm{I}_-(\delta) + \mathrm{I}_+(\delta) \qquad (37\text{-}9)$$

حيث جزء الإشارة السالب، وجزء الإشارة الموجب هما:

$$\mathrm{I}_-(\delta) = \int_{-\infty}^{0} |x(t)| e^{-\delta t} dt$$

$$\mathrm{I}_+(\delta) = \int_{0}^{\infty} |x(t)| e^{-\delta t} dt$$

حتى تكون القيمة $\mathrm{I}(\delta)$ محدودة finite يجب أن تكون كلا القيمتين $\mathrm{I}_-(\delta)$ و $\mathrm{I}_+(\delta)$ محدودتين.وهذا يقتضي أن تكون القيمة المطلقة للإشارة $|x(t)|$ مقيدة bounded بطريقة ما، ولتكن بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq A e^{\delta_p t} \quad ; \quad t > 0 \\ |x(t)| &\leq A e^{\delta_n t} \quad ; \quad t < 0 \end{aligned} \qquad (38\text{-}9)$$

حيث $A > 0$ و δ_p أصغر ثابتين و δ_n أكبر ثابت.تسمى الإشارة التي تحقق المتراجحتين السابقتين بالرتبة الأسية exponential order . واضح أن الإشارة $x(t)$ لا يمكن أن تصعد أسرع من $e^{\delta_p t}$ عند $t > 0$ وأسرع من $e^{\delta_n t}$ عند $t < 0$. بتعويض (38-9) في (37-9)نحصل على:

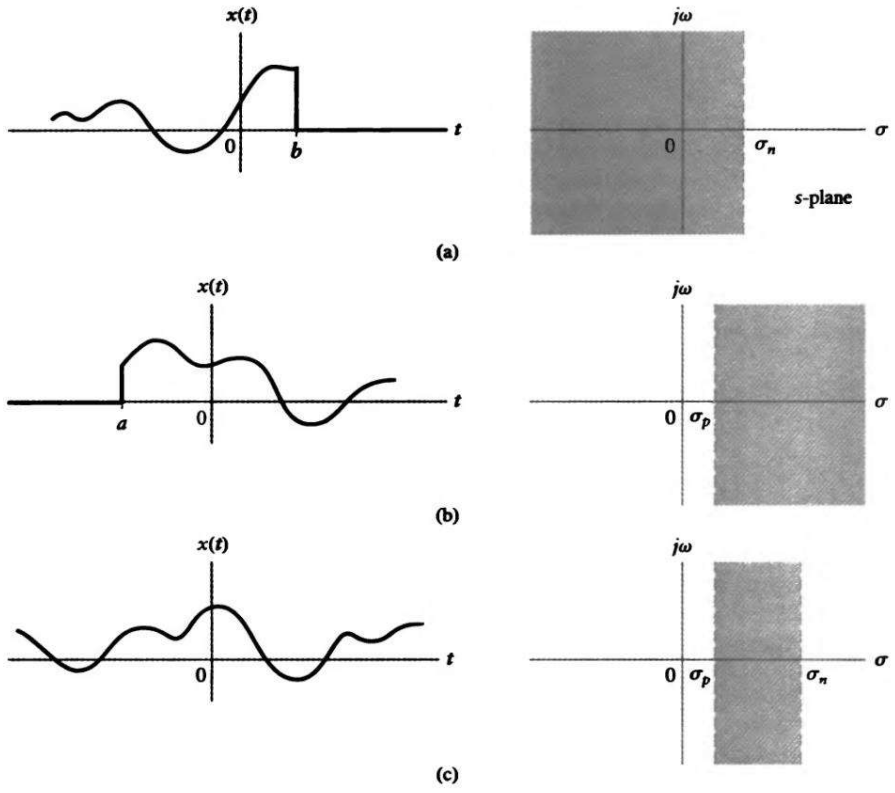
$$\begin{aligned} \mathrm{I}_-(\delta) &\leq A \int_{-\infty}^{0} e^{(\delta_n - \delta)t}\, dt \\ &= \frac{A}{\delta_n - \delta} \left[e^{(\delta_n - \delta)t} \right]\Big|_{-\infty}^{0} \quad ; \; \delta < \delta_n \end{aligned} \qquad (39\text{-}9)$$

$$I_+(\delta) \le A\int_0^{\infty} e^{(\delta_n-\delta)t}\,dt$$

$$= \frac{A}{\delta_p-\delta}\left[e^{(\delta_p-\delta)t}\right]\Big|_0^{\infty} \quad ;\ \delta > \delta_p \tag{40-9}$$

من العلاقة (39-9)نلاحظ أن قيم $I_-(\delta)$ تكون محدودة في المجال $\delta < \delta_n$ وأن قيم $I_+(\delta)$ تكون محدودة في المجال $\delta > \delta_n$ (العلاقة (40-9)). وبالتالي فإن $I(\delta)$ محدودة عند قيم δ التي تحقق محدودية كل من $I_-(\delta)$ و $I_+(\delta)$. هذا يعني أن تحويل لابلاس متقارب في المجال $\delta_p < \delta < \delta_n$. تجدر الملاحظة هنا إذا كان $\delta_p > \delta_n$، فإنه لاتوجد أي قيم لـ δ تؤدي لتقارب تحويل لابلاس ثنائي الجانب طبعاً. بأخذ ما سبق بالحسبان يكون لدينا:

- مجال التقارب ROC لإشارة الجانب الأيسر المبينة في الشكل 4-9(a) يكون في المجال $\delta < \delta_n$.
- يكون مجال التقارب ROC لإشارة الجانب الأيمن المبينة في الشكل 4-9(b) في المجال $\delta > \delta_p$.
- يكون مجال التقارب ROC للإشارة بجانبين المبينة في الشكل 4-9(c) في المجال$\delta_p < \delta < \delta_n$.



الشكل 4-9 (a) مجال تقارب إشارة الجانب الأيسر (b) مجال تقارب إشارة الجانب الأيمن (c) مجال تقارب إشارة الجانبين.

مثال 9-7: ليكن لدينا الإشارتان التاليتان:

$$x_1(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) + e^{-t}u_{-1}(-t)$$
$$x_2(t) = e^{-t}u_{-1}(t) + e^{-2t}u_{-1}(-t)$$

المطلوب: إيجاد مجال التقارب ROC لتحويل لابلاس ثنائي الجانب لكلا الإشارتين

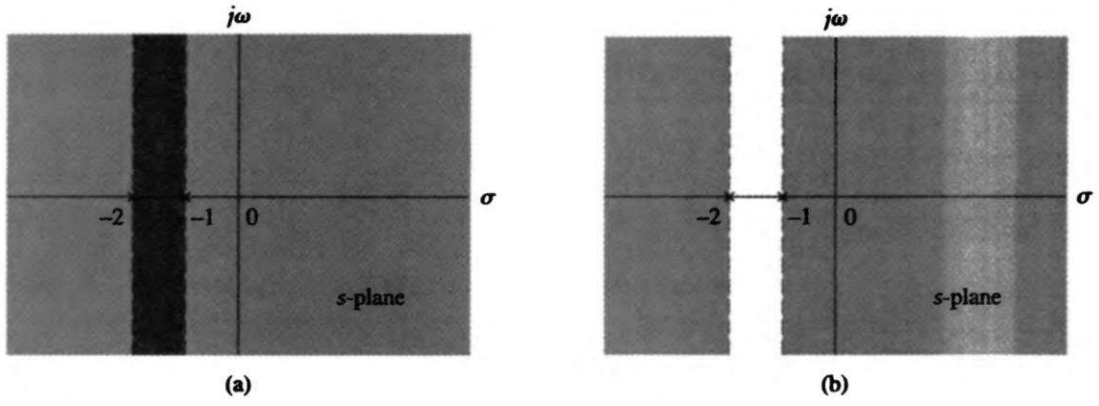
الحل: نعلم سابقاً أن شرط وجود تحويل لابلاس ثنائي الجانب للإشارة $x_1(t)$ هو تحقق المتراجحة التالية:

$$\mathrm{I}_1(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)| e^{-\delta t} dt \ < \infty$$

يمكن أن تكتب العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\mathrm{I}_1(\delta) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(1+\delta)t}\ dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+\delta)t}\, dt$$
$$= \frac{-1}{1+\delta}\left[e^{-(1+\delta)t}\right]\Big|_{-\infty}^{0}$$
$$+ \frac{-1}{2+\delta}\left[e^{-(2+\delta)t}\right]\Big|_{0}^{\infty}$$

واضح من العلاقة السابقة أن الحد الأول يتقارب من أجل $\delta > -1$، والحد الثاني يتقارب من أجل $\delta < -2$، وبالتالي مجال تقارب كلا الحدين هو $-1 > \delta > -2$. وهذا ناتج عن تقاطع مجال التقارب لكلا الحدين كما هو واضح في الشكل 9-5(a).



الشكل 9-5 (a) مجال تقارب الإشارة $x_1(t)$ (b) المنطقة المظللة اليمنى هي مجال تقارب الحد $e^{-t}u_{-1}(t)$ والمنطقة المظللة اليسرى هي مجال تقارب الحد $e^{-2t}u_{-1}(-t)$.

ببساطة، نجد تحويل لابلاس للإشارة $x_1(t)$، أي:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+1}$$
$$= \frac{-1}{(s+1)(s+2)}$$

نجد من العلاقة السابقة أن الأقطاب هي عند $s = -1$ و $s = -2$ وأن مجال التقارب هو الشريط الغامق المتوضع بين القطبين.

والآن نتبع نفس الإجراءات بالنسبة للإشارة الثانية، أي:

$$\mathrm{I}_2(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)| e^{-\delta t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(2+\delta)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+\delta)t}\, dt$$
$$= \frac{-1}{2+\delta}\left[e^{-(2+\delta)t}\right]\Big|_{-\infty}^{0} +$$
$$+ \frac{-1}{1+\delta}\left[e^{-(1+\delta)t}\right]\Big|_{0}^{\infty}$$

منطقة تقارب الحد الأول $\delta < -2$ ومنطقة تقارب الحد الثاني هي عند $\delta > -1$. لاحظ هنا عدم وجود قيم δ بحيث يكون كلا الطرفين متقاربين، وبالتالي منطقة التقاطع فارغة كما هو واضح في الشكل 9-5، b لذلك لا وجود لتحويل لابلاس للإشارة $x_2(t)$ بسبب عدم وجود مجال تقارب لـ $x_2(t)$.

5.9 خواص تحويل لابلاس ثنائي الجانب

يشمل تحويل لابلاس ثنائي الجانب المجال الزمني $\{t \to \pm\infty\}$ كما هو واضح في العلاقة (9-8)، لهذا فهو مناسب لتحليل الإشارات والنظم غير السببية non-causal.

يحوي الجدول (9-1) في العمود الأول على خواص لابلاس أحادي الجانب (الفقرة (9-3)) وثنائي الجانب وذلك في المجال الزمني. ويحوي العمود الثاني خواص تحويل لابلاس أحادي الجانب في المجال s حيث تم الحصول عليه في الفقرة (9-3).

وبشكل مشابه يمكن الحصول على خواص تحويل لابلاس ثنائي الجانب في المجال s، وهذا واضح في العمود الثالث. ويحوي العمود الرابع على مجال التقارب ROC لتحويل لابلاس ثنائي الجانب للخواص. ويمكن الحصول على هذا العمود باستخدام خواص التقارب المذكورة في الفقرة (9-4).

نلاحظ وجود تطابق، في المجال s بين تحويل لابلاس أحادي الجانب وثنائي الجانب، في الخواص التالية: الخطية والتقييس والإزاحة في المجال s والتلفيف (جداء التلاف) وتفاضل $X(s)$ بالنسبة s وتباين في الخواص التالية: الإزاحة في المجال الزمني والتفاضل في المجال الزمني بالإضافة إلى التكامل في المجال الزمني. سوف نناقش تلك الخواص بعد مناقشة مجال التقارب للخاصة الخطية.

أوجدنا في مثال 9-7 مجال التقارب للخاصية الخطية في حال وجود النقاط بين مجالي ROC الشكل 9-5(a) أي وجود تحويل لابلاس وفي حالة عدم وجود التقاطع بين مجالي ROC الشكل 9-5(b) أي عدم وجود تحويل لابلاس. هناك حالة أخرى عندما يكون التابع $X(s)$ كسري، وبعض الأصفار تتطابق مع بعض الأقطاب.سوف نوضح هذه الحالة بالمثال التالي.

جدول 9-1 خواص تحويل لابلاس.

signal	Unilateral Transform $x(t) \overset{L_u}{\leftrightarrow} X(s)$ $y(t) \overset{L_u}{\leftrightarrow} Y(s)$	Bilateral Transform $x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s)$ $y(t) \overset{L}{\leftrightarrow} Y(s)$	ROC $s \in R_x$ $s \in R_y$
$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$	$aX(s) + bY(s)$	$At\ least\ R_x \cap R_y$
$x(t-T)$	$e^{-sT}X(s)$ $if\ x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-sT}X(s)$	R_x
$e^{s_0 t}\, x(t)$	$X(s-s_0)$	$X(s-s_0)$	$R_x + Re\{s_0\}$
$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right); a>0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{s}{a})$	$\frac{R_x}{\lvert a\rvert}$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$ $if\ x(t) = y(t) = 0\ ; for\ t<0$	$X(s)Y(s)$	$At\ least\ R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\, X(s)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt}\, x(t)$	$sX(s) - x(0^-)$	$sX(s)$	$At\ least\ R_x$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	$At\ least$ $R_x \cap \{Re\{s\} > 0\}$

مثال 9-8: ليكن لدينا:

$$x(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+2}, ROC\ \ \delta > -2$$

$$y(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) - e^{-3t}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)};\ ROC\ \delta > -2$$

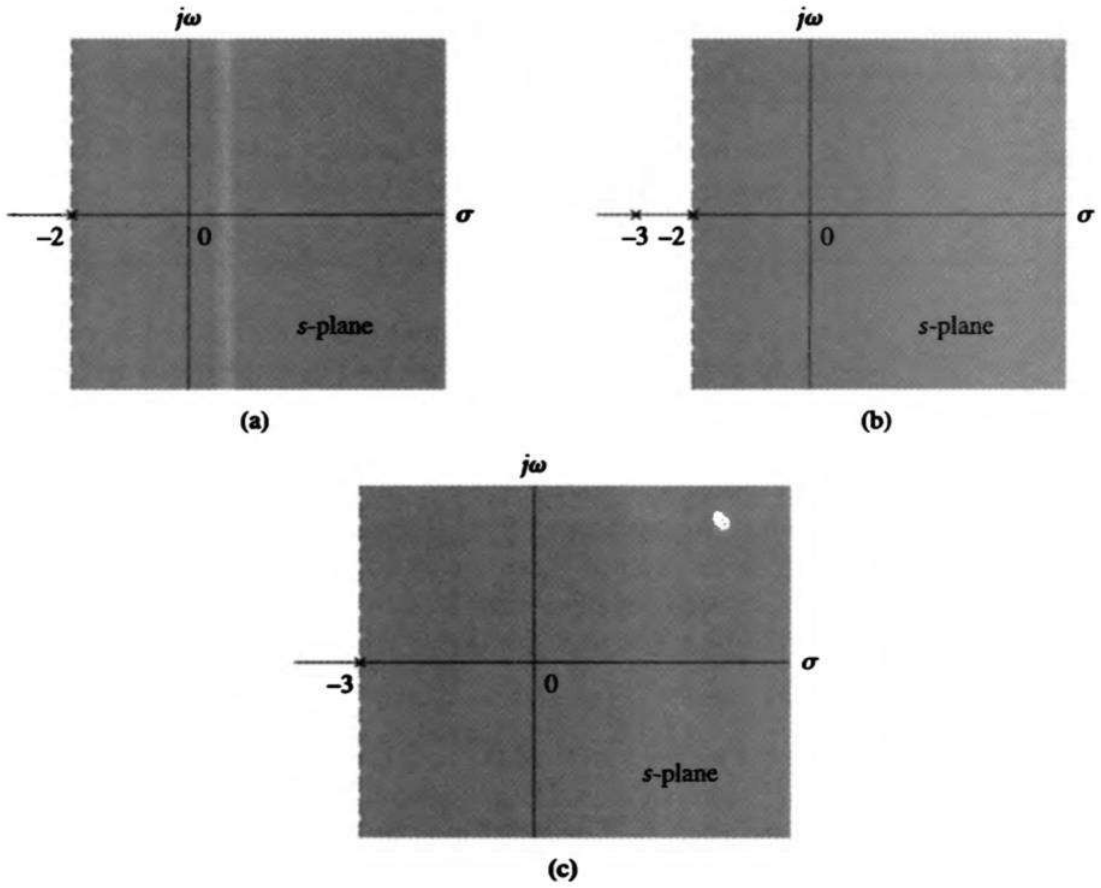
يبين الشكل (9-6) مجالات التقارب ROC في المستوي s والشكل 9-6، aيوضح مجال تقارب الإشارة $x(t) = e^{-2t}u_{-1}(t)$، الشكل 9-6(b) يوضح مجال تقارب الإشارة $y(t)$ والذي هو مجال تقاطع الحد $e^{-2t}u_{-1}$ والحد $e^{-3t}u_{-1}$ من الإشارة $y(t)$. والشكل 9-6(c) يوضح مجال تقارب ROC الإشارة $x(t) - y(t)$، لاحظ حذف الحدّ e^{-2t} لأنه تم اختيار $a = 1,\ b = -1$ في $ax(t) + by(t)$ وبسبب طرح الإشارة $y(t)$ من الإشارة $x(t)$، أدى إلى زيادة مجال التقارب ROC. يمكن تفسير ذلك في المجال s بالشكل التالي:

$$X(s) - y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{1}{s+3}$$

أي أن مجال التقارب ROC هو $\delta > -3$.



الشكل 9-6 (a) مجال التقارب للإشارة x(t) (b) مجال التقارب للإشارة y(t) (c) مجال التقارب للإشارة x(t) - y(t).

1.5.9 خاصية الإزاحة الزمنية

$$x(t-\tau) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-s\tau}X(s) \qquad (41\text{-}9)$$

لاحظ عدم وجود قيود على الإزاحة الزمنية في تحويل لابلاس ثنائي الجانب كما كان الحال في تحويل لابلاس أحادي الجانب، وذلك لأن تغير الزمن يكون في المجال $t \to \pm\infty$.

2.5.9 خاصية التفاضل في المجال الزمني

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s)\ ;ROC\ at\ least\ R_x \tag{42-9}$$

حيث R_x مجال التقارب الموافق لـ $X(s)$. يمكن الحصول على العلاقة السابقة بمفاضلة طرفي العلاقة (9-9)، أي

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} s\,X(s)ds$$

حيث $dx(t)/dt$ هو تحويل لابلاس المعاكس لـ $sX(s)$. مجال التقارب ROC لـ $sX(s)$ يحوي مجال التقارب ROC لـ $X(s)$، وقد يكون أكبر من ذلك، إذا احتوت $sX(s)$ القطب $s = 0$ لأنه يتم حذف المضروب s. على سبيل المثال عند $x(t) = u_{-1}(t)$ فإن $X(s) = 1/s$ مع مجال التقارب $\delta > 0$. تفاضل $x(t)$ هو عبارة عن نبضة ديراك، ذات تحويل لابلاس يساوي الواحد. هذا يعني أن مجال التقارب يشمل كل المستوي s.

مثال 9-9: أوجد تحويل لابلاس ثنائي الجانب للإشارة التالية:

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}[e^{-a(t-2)}u_{-1}(t-2)] \quad ; a-3$$

الحل: نوجد تحويل لابلاس للإشارة $e^{-at}u_{-1}(t)$، أي:

$$e^{-at}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+3}\ ;ROC\ \ \sigma > -a$$

باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية (41-9) نجد:

$$e^{-a(t-2)}u_{-1}(t-2) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{e^{-2s}}{s+a}\ ;ROC\ \sigma > -a$$

والآن باستخدام خاصية التفاضل في المجال الزمني (42-9) نحصل على:

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[e^{-a(t-2)}u_{-1}(t-2)\right] \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{s^2}{s+a}e^{-2s}\ ;ROC\ \delta > -a$$

3.5.9 خاصية التكامل في المجال الزمني

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{X(s)}{s} \quad ; ROC\ R_x \cap (\delta > 0) \tag{43-9}$$

انظر للعلاقة (41-9) والعلاقة (33-9). واضح أن مجال التقارب هو عبارة عن تقاطع مجال التقارب التابع $X(s)$، أي R_x مع المجال التقارب $1/s$ والذي هو $\delta > 0$ ROC. تجدر الإشارة هنا أن $R_e(s) = \delta$.

4.5.9 خاصية القيمة الحدية الابتدائية والنهائية

القيمة الحدية الابتدائية تعطى بالعلاقة:

$$\lim_{t \to o^+} x(t^+) = x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,X(s) \tag{44-9}$$

حيث $x(t)$ تابع مستمر و $x(t) = 0$ عند $t < 0$ والقيمة الحدية النهائية تعطى بالعلاقة التالية:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\,X(s) \tag{45-9}$$

حيث $x(t) = 0$ عند $t < 0$ ونهاية $x(t)$ محددة عند $t \to \infty$.

مثال 9-10: بين أن تحويل لابلاس للإشارة $x(t)$:

$$x(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) + e^{-t}.\cos(3t)u_{-1}(t)$$

هو:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}$$

باستخدام العلاقة (44-9) نحصل على:

$$x(0^+) = 2 = \lim_{s \to \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} = 2$$

6.9 تحويل لابلاس العكسي

للانتقال من المجال -s إلى المجال الزمني، لا بد من إجراء تحويل لابلاس العكسي. يمكن الانتقال مباشرة من المجال -s إلى المجال الزمني، وذلك بحل العلاقة (9-8) مباشرة. غير أن ذلك يستدعي معرفة الرواسب residues، والتي هي خارج روح الموضوع. لذلك سوف نلجأ إلى طرق عملية بسيطة مناسبة للتطبيقات الهندسية.

7.9 تحويل لابلاس العكسي أحادي الجانب

لإيجاد تحويل لابلاس العكسي أحادي الجانب سوف نعتمد على وجود علاقة "واحد – إلى –واحد" بين الإشارة وتحويل لابلاس أحادي الجانب لها. معظم توابع التحويل $X(s)$ في التطبيقات الهندسية تتكون من نسبة كثيري حدود أي:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots b_1 s + b_0}{s^N + a_{m1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

إذا كانت $M \geq N$ نقوم بعملية التقسيم، وبالتالي نحصل على:

$$X(s) = \sum_{i=0}^{M-N} C_i \, s^i + \check{X}(s)$$

$$\check{X}(s) = \frac{\check{B}(s)}{A(s)} \text{ حيث}$$

واضح أن درجة البسط (الصورة) $\check{B}(s)$ في العلاقة السابقة، أقل من درجة المقام (المخرج) بواحد. تستخدم طريقة تفريق لكسور جزئية Partial fraction لإيجاد التحويل العكسي لـ $\check{X}(s)$. والآن بمعرفة أن النبضة ومشتقاتها تساوي الصفر عند $t = 0^-$ وباستخدام $\delta(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} 1$ وخاصية التفاضل (9-32) نوجد تحويل لابلاس العكسي لـ $\sum_{i=0}^{M-N} C_i \, s^i$، أي

$$\sum_{k=0}^{M-N} C_k \, \delta^{(k)}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{M-N} C_k \, s^k$$

حيث $\delta^{(k)}(t)$ المشتق ذو الرتبة k للنبضة $\delta(t)$.

بفرض جذور (أقطاب $A(s)$) $(X(s)$ مختلفة هي P_k فإن العلاقة $\check{X}(s) = \frac{\check{B}(s)}{A(s)}$ يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\check{X}(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - P_k}$$

حيث يمكن حساب قيم A_k بحل مجموعة معادلات خطية. ويمكن إيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل حدّ من حدود العلاقة السابقة باستخدام المثال 9-3 أي:

$$A_k e^{P_k t} u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \frac{A_k}{s - P_k} \tag{46-9}$$

إذا كانت الجذور (الأقطاب) تتكرر r أكثر من مرة عند ذلك فإن حدود التفريق إلى كسور جزئية يكون لها الشكل التالي:

$$\frac{A_{j1}}{s - P_i}, \frac{A_{j2}}{(s - P_i)^2}, \cdots, \frac{A_{jr}}{(s - P_i)^r}$$

وباستخدام العلاقة (9-43) وخاصية التفاضل في المجال -s (العلاقة (9-30)) نحصل على

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{P_k t} u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \frac{A}{(s - P_k)^n} \tag{47-9}$$

مثال 9-11: أوجد تحويل لابلاس العكسي لـ $X(s)$.

$$X(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

الحل: باستخدام التفريق لكسور جزئية، يكون لدينا:

$$X(s) = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 2} + \frac{C_3}{(s + 2)^2}$$

وبحل العلاقة السابقة بالنسبة لـ C_i $(i = 1, 2, 3)$، وذلك باستخدام حل مجموعة معادلات خطية نحصل على:

$$X(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} + \frac{2}{(s + 2)^2}$$

الحدّ الأول يحوي القطب $s = 1$ وباستخدام العلاقة (9-17) نحصل على:

$$\mathcal{L}_u^{-1} = \left[\frac{1}{s + 1}\right] = e^{-t} u_{-1}(t)$$

أو

$$e^{-t}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}$$

الحدّ الثاني يحوي القطب $s = -2$ وبنفس الطريقة السابقة نحصل على:

$$e^{-2t}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \frac{-1}{s+2}$$

الحدّ الثالث يحوي قطبين عند $s = -2$ وباستخدام العلاقة (47-9) نحصل على:

$$2\mathrm{t}\, e^{-2t}u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} \frac{2}{(s+2)^2}$$

وبجمع الحدود الثلاثة نجد:

$$x(t) = e^{-t}u_{-1}(t) - e^{-2t}u_{-1}(t) + 2te^{-2t}u_{-1}(t)$$

مثال 9-12: أوجد تحويل لابلاس العكسي وحيد الجانب للتابع:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

الحل: بتقسيم البسط على المقام نحصل على:

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{3s - 2}{s^2 - 3s - 4}$$

وباستخدام تفريق الكسور الجزئية نحصل على:

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-4}$$

وبحساب تحويل لابلاس العكسي لكل حد على حدة، وجمع الناتج نحصل على:

$$x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) + e^{-t}u_{-1}(t) + 2e^{4t}u_{-1}(t)$$

يمكن استخدام إجرائية التفريق لكسور جزئية، لكل من الأقطاب الحقيقية والأقطاب العقدية. سنناقش الموضوع عندما تكون الأقطاب عبارة عن قيم عقدية مرافقة. ليكن لدينا الزوج المرافق التالي: $\alpha + jw_0$ و $\alpha - jw_0$. باستخدام تفريق الكسور الجزئية يكون لدينا:

$$\frac{A_1}{s-(\alpha+jw_0)}+\frac{A_2}{s-(\alpha-jw_0)}$$

حيث A_1 و A_2 زوج عقدي مرافق، وذلك لتمثيل العلاقة السابقة بإشارة حقيقية. وبالتالي يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\frac{B_1s+B_2}{(s-\alpha-jw_0)(s-\alpha+jw_0)}$$

أو

$$\frac{B_1s+B_2}{(s-\alpha)^{2+}w_0^2}$$

حيث B_1 و B_2 قيم حقيقية. سنفرق العلاقة السابقة الى مجموع حدين، حيث كل حدّ له تحويل لابلاس العكسي المعروف، أي:

$$\frac{B_1s+B_2}{(s-\alpha)^2+w_0^2}=\frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+w_0^2}+\frac{C_2w_0}{(s-\alpha)^2+w_0^2}$$

حيث $C_1 = B_1$، $C_2=\frac{B_1\alpha+B_2}{w_0}$ وهكذا فإن تحويل لابلاس العكسي للحدّ الأول يكون:

$$C_1e^{\alpha t}\cos(w_0t)u_{-1}(t)\overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow}\frac{C_1(s-\propto)}{(s-\alpha)^2+w_0^2} \qquad (48\text{-}9)$$

وللحدّ الثاني يكون:

$$C_2e^{\alpha t}\sin(w_0t)u_{-1}(t)\overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow}\frac{C_2w_0}{(s-\alpha)^2+w_0^2} \qquad (49\text{-}9)$$

يوضح المثال التالي المناقشة السابقة.

مثال 9-13: أوجد تحويل لابلاس العكسي للكسر التالي:

$$X(s)=\frac{4s^2+6}{s^3+s^2-2}$$

واضح من المقام (المخرج) وجود ثلاثة أقطاب. بالتجربة نلاحظ أن أحد الأقطاب هو s=1. وبتقسيم المقام على (s-1) نحصل على $s^2+2s+2=0$ وبحل المعادلة السابقة نوجد القطبين الأخرين: أي $s=-1+j$ و $s=-1-j$.

وباستخدام التفريق الى كسور جزئية نجد:

$$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1 s + B_2}{(s+1)^2 + 1} \tag{50-9}$$

حيث مقام الحد الثاني هو عبارة عن مربع كامل perfect square لـ $(s^2 + 2s + 1)$. والآن نوجد قيم كل من A و B_1 وB_2. بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $(s-1)$ وإجراء الحساب عند $s=1$ يكون لدينا:

$$A = X(s)(s-1)|_{s=1}$$

$$= \frac{4s^2 + 6}{(s+1)^2 + 1}\bigg|_{s=1} = 2$$

ولإيجادB_1 و B_2 نقوم بتوحيد المقامات في (50-9) ومن ثم إجراء المساواة بين بسط الناتج وبسط $X(s)$ والذي هو $(4s^2 + 6)$، وهكذا يكون لدينا:

$$4s^2 + 6 = 2((s+1)^2 + 1) + (B_1 s + B_2)(s-1)$$

$$= (2 + B_1)s^2 + (4 - B_1 + B_2)s + (4 - B_2)$$

$$\Longrightarrow 6 = 4 - B_2 \Rightarrow B_2 = -2$$

$$4 = 2 + \mathrm{B}_1 \Rightarrow \mathrm{B}_1 = 2$$

وبالتعويض في (50-9) نحصل على:

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{2s-2}{(s+1)^2 + 1}$$

بوضع $2s - 2 = 2(s+1) - 4$ يمكن اعادة كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + 2\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - 4\frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

يكون لدينا تحويل لابلاس العكسي ذو الشكل التالي:

$$x(t) = 2e^t u_{-1}(t) + 2e^{-t}\cos(t)\, u_{-1}(t) - 4e^{-t}\sin(t) u_{-1}(t)$$

8.9 تحويل لابلاس العكسي ثنائي الجانب

سوف نناقش تحويل لابلاس ثنائي الجانب، من أجل إيجاد التحويل العكسي نفترض أن $X(s)$ عبارة عن نسبة كثيري الحدود كما هو الحال في المناقشة السابقة يجب أن نستخدم مجال التقارب ROC للتحويل العكسي وذلك من أجل تحديد وحدانية (انفرادية) unique التحويل العكسي.

لنفرض إننا بحاجة لإيجاد تحويل لابلاس ثنائي الجانب كنسبة كثيري الحدود B(s) و A(s) أي

$$\mathrm{X(s)} = \frac{\mathrm{B(s)}}{\mathrm{A(s)}}$$

$$= \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + .. b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

كما هو الحال في تحويل لابلاس العكسي وحيد الجانب إذا كان $M \geq N$ فإن ناتج التقسيم يكون

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k s^k + \check{X}(s)$$

حيث $\check{X}(s) = \frac{\check{B}(s)}{A(s)}$.

بفرض عدم وجود أقطاب متكررة، وباستخدام التفريق لكسور جزئية، فإن العلاقة السابقة تكتب بالشكل التالي:

$$\check{X}(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - P_k}$$

بمعرفة أن النبضة ومشتقاتها تساوي الصفر عند $t = 0$، باستخدام $\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1$ وخاصية التفاضل، نحصل على

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k \delta^{(k)}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k$$

حيث $\delta^k(t)$ المشتق ذو الرتبة k للنبضة $\delta(t)$. تجدر الملاحظة هنا أن مجال التقارب ROC لـ $\check{X}(s)$ هو نفس مجال التقارب ROC لـ $X(s)$، وذلك لأن تحويل لابلاس للنبضة ومشتقاتها يتقارب في أي مكان في المستوي s.

تجدر الملاحظة عند حساب تحويل لابلاس العكسي ثنائي الجانب أن كل حدّ ناتج عن عملية التفريق لكسور جزئية لـ $X(s)$ له إمكانية التحويل على الجانب الأيمن أو الجانب الأيسر تبعاً لمجال التقارب ROC. يكون لدينا على الجانب الأيمن الشكل التالي:

$$A_k e^{P_k t} u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{A_k}{s - P_k};\ with\ ROC\ \mathrm{Re}(s) > P_k \tag{51-9}$$

وعلى الجانب الأيسر

$$-A_k e^{P_k t} u_{-1}(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{A_k}{s - P_k};\ with\ ROC\ \mathrm{Re}(s) < P_k \tag{52-9}$$

واضح في العلاقتين السابقتين وجود تقاطع بين مجالات التقارب. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 9-14: أوجد تحليل لابلاس العكسي ثنائي الجانب لـ $X(s)$، حيث:

$$X(s) = \frac{-5s - 7}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

الحل: باستخدام التفريق لكسور جزئية نحصل على:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

قطب الحدّ الأول هو $s = -1$ ومجال التقارب ROC يقع على يمين القطب.

ولذلك فإننا نختار العلاقة (9-51)، أي:

$$e^{-t} u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}$$

وقطب الحدّ الثاني هو $s = 1$ ومجال التقارب ROC يقع على يسار القطب ولذلك فإننا نختار العلاقة (9-52)

$$2e^{t} u_{-1}(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{-2}{s-1}$$

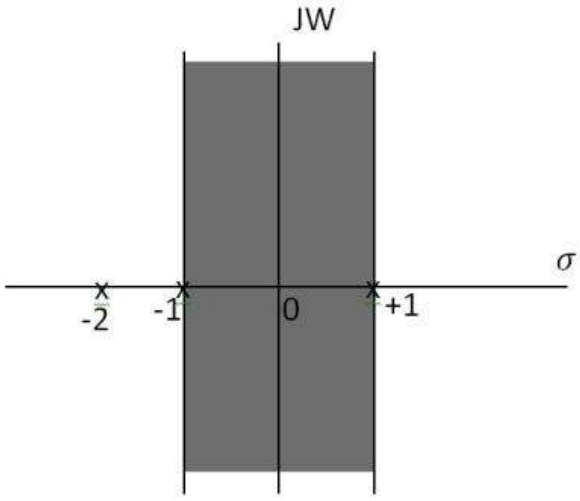
وقطب الحدّ الثالث هو $s = -2$ ومجال التقارب ROC يقع على يمين القطب كما هو في الحدّ الأول، وبالتالي فإننا نختار العلاقة (9-51)أي:

$$e^{-2t} u_{-1}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}$$

وبجمع النتائج السابقة نحصل على $x(t)$:

$$x(t) = e^{-t} u_{-1}(t) + 2e^{t} u_{-1}(-t) + e^{-2t} u_{-1}(t)$$

يوضح الشكل 9-7 مجال التقارب والذي هو تقاطع الحدود الثلاثة السابقة.



الشكل 9-7 مجال التقارب للمثال السابق.

مثال 9-15: أوجد تحويل لابلاس العكسي لـ $X(s)$ حيث:

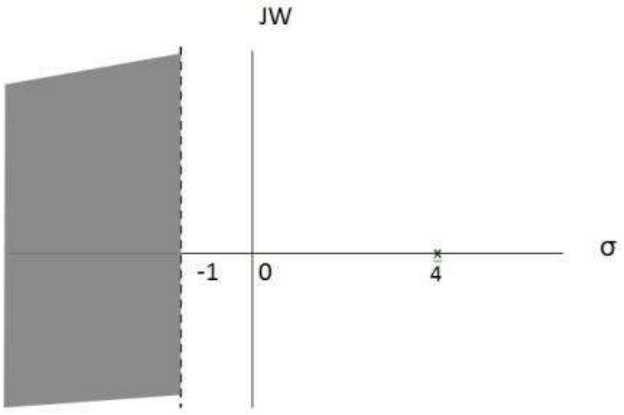
$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4} \; ; ROC\ Re(s) < -1$$

الحل: واضح أن أحد الأقطاب هو $s = -1$. باستخدام التفريق لكسور جزئية (انظر مثال 9-12) نحصل على:

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-4} \; ; \; Re(s) < -1$$

أي أن الأقطاب هي عند: $s = 4$ و $s = -1$. وأن مجال التقارب ROC يقع على يسار كلا القطبين وذلك كما هو واضح في الشكل 9-8. وباستخدام العلاقة (9-51) نحصل على $x(t)$ أي:

$$x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) - e^{-t}u_{-1}(-t) - 2e^{4t}u_{-1}(-t)$$



الشكل 9-8 يظهر الأقطاب ومجال التقارب ROC.

وهكذا يمكن أن نجد تحويل لابلاس العكسي لكل حدّ في $X(s)$ بعد استخدام التفريق لكسور جزئية وذلك باستخدام العلاقة بين مواضع الأقطاب ومجال التقارب ROC.

مثال 9-16: أوجد تحويل لابلاس العكسي ذو الجانبين لكل مما يلي:

$$X(s) = \frac{A}{(s - P_k)^n}$$

$$X(s) = \frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + w_0^2}$$

الحل:

إذا كان مجال التقارب ROC يقع على يمين الأقطاب فإن $x(t)$ لها الشكل التالي (انظر العلاقة (9-47))

$$x(t) = \frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{P_k t} u_{-1}(t)$$

وإذا كان مجال التقارب يقع على يسار الاقطاب فإن $x(t)$ لها الشكل التالي:

$$x(t) = \frac{-At^{n-1}}{(n-1)!} e^{P_k t} u_{-1}(-t)$$

إذا كان مجال التقارب يقع على يمين الأقطاب فإن $x(t)$ لها الشكل التالي:(انظر العلاقة (9-48))

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(w_0 t) u_{-1}(t)$$

وإذا كان مجال التقارب ROC يقع على يسار الأقطاب فإن $x(t)$ لها الشكل التالي:

$$x(t) = -C_1 e^{\alpha t}\cos(w_0 t)u_{-1}(-t)$$

9.9 تطبيقات تحويلات لابلاس

سوف نناقش في هذه الفقرة المواضع الجزئية التالية (I) تابع التحويل: سوف نعطي هنا مفهوم تابع التحويل مع تمثيل المخطط الوظيفي (الصندوقي)، (II) حل المعادلات التفاضلية: سوف تستخدم هنا تحويل لابلاس وحيد الجانب، (III) تحليل الدارات الكهربائية.

1.9.9 تابع التحويل

لنأخذ بالحسبان معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابته أي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \qquad (53\text{-}9)$$

باستخدام تحويل لابلاس ثنائي الجانب لطرفي المعادلة السابقة والأخذ بالحسبان الخاصية الخطية والخاصية التفاضلية بشكل متكرر نحصل على:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\, s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k\, s^k\right) X(s) \qquad (54\text{-}9)$$

أو

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, s^k} \qquad (55\text{-}9)$$

وهكذا يمكن إيجاد تابع التحويل انطلاقاً من المعادلة التفاضلية التي توصف النظام.

مثال 9-17: أوجد تابع التحويل لنظام خطي غير متغير مع الزمن LTI للمعادلة التفاضلية التالية ، التي تصف النظام:

I. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} - 3x(t)$

وذلك بالاعتماد على العلاقة (9-55).

الحل: باستخدام (9-55) يكون لدينا

II. $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s-3}{s^2+3s+2}$

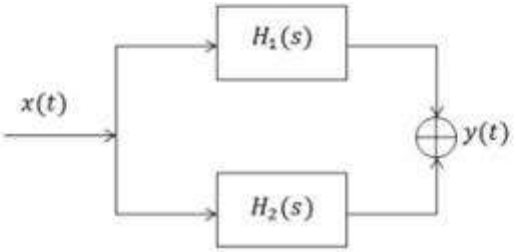
بالأخذ بالحسبان العلاقتين (9-54) و (9-55)، يمكن إيجاد المعادلة التفاضلية (I) انطلاقاً من تابع التحويل $H(s)$. خرج تابع التحويل $H(s)$ (العلاقة (II)) يسمى بالمعادلة المميزة والتي هي:

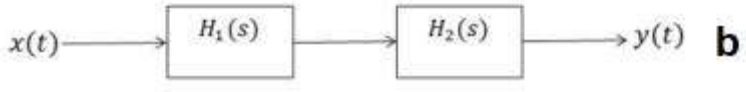
$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

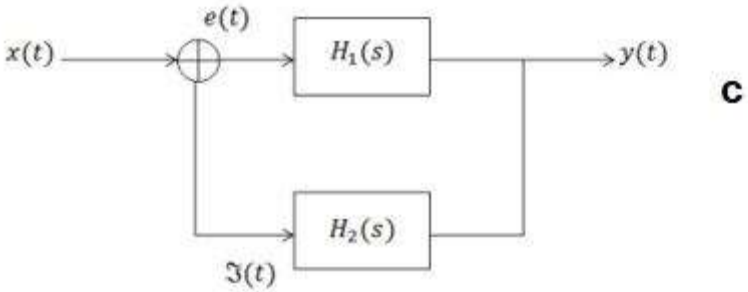
يمكن إيجاد تابع التحويل الكلي لتركيبة من توابع التحويل مثل: تركيبة متوازية وتركيبة تسلسلية وتركيبة بتغذية عكسية.

يوضح الشكل 9-9(a) التركيبة المتوازية ذات الاستجابة النبضية الكلية

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad (9\text{-}56)$$







الشكل 9-9 (a) التركيبة المتوازية (b) التركيبة التسلسلية (c) تحليل الإشارة في التركيبة المتوازية.

وباستخدام الخاصية الخطية لتحويل لابلاس نحصل على:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

وبالأخذ بالحسبان الخاصية التلفيفية يكون لدينا:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \qquad (57\text{-}9)$$

تحليل الشكل 9-9(c) في المجال الزمني على درجة من التعقيد لذلك سوف نلجأ إلى المستوي –s. من الشكل السابق نجد

$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$
$$E(s) = X(s) - Z(s)$$
$$Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

ومنه نجد

$$Y(s) = H_1(s)[\mathrm{X(s)} - H_2(s)Y(s)]$$

وبالتالي فإن تابع التحويل الكلي يكون:

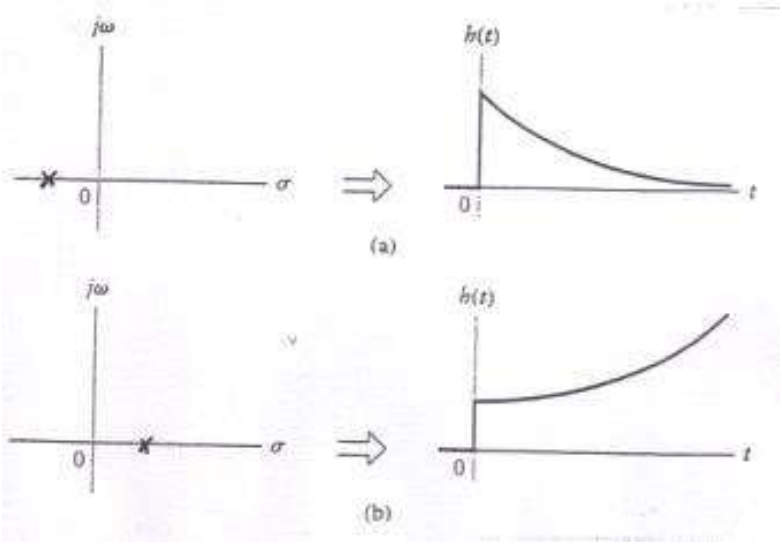
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \tag{58-9}$$

بفرض $H_1(s) = \frac{1}{s}$ و $H_2(s) = 3$ يكون لدينا

$$H(s) = \frac{1/s}{1 + 3/s} = \frac{1}{s+3}$$

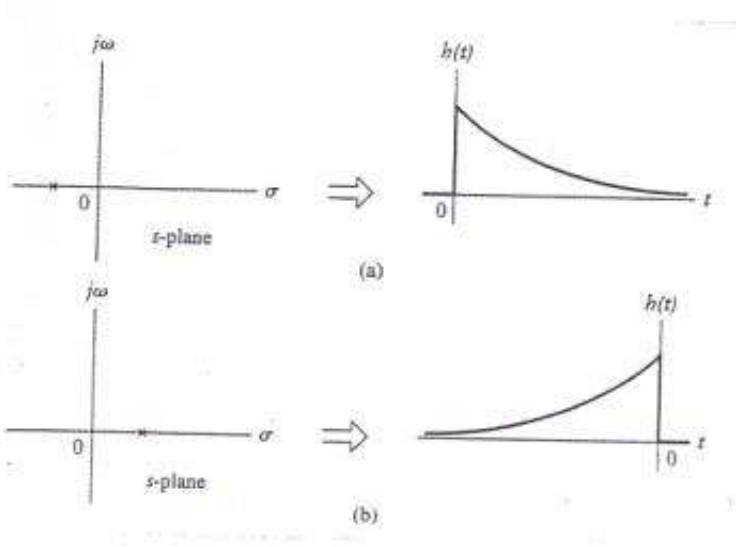
والآن سوف نقوم بإعطاء فكرة عن السببية والاستقرار. عموماً نقول إن النظام سببي إذا كان $h(t) = 0$ عند $t < 0$. ونعلم أيضاً يكون النظام مستقراً إذا كان أي دخل محدود يعطي خرجاً محدوداً، أي الاستجابة النبضية قابلة للتكامل بشكل مطلق.

معرفة الاستجابة النبضية تعطي كافة المعلومات اللازمة لتحديد إن كان النظام سبباً أو مستقراً. فعلى سبيل المثال النظام في الشكل 9-10(a) هو عبارة عن نظام سببي ($h(t) = 0$ عند $t < 0$) ومستقر (الاستجابة النبضية قابلة للتكامل بشكل مطلق). لاحظ هنا أن القطب في المستوي s- يقع على الطرف الأيسر. أما في الشكل 9-10(b) فإن $h(t)$ غير قابل للتكامل بشكل مطلق. وبالتالي النظام غير مستقر وسببي لكون $h(t) = 0$ عند $t < 0$. لاحظ أن القطب يقع في الطرف الأيمن من المستوي s-.



الشكل 9-10 (a) نظام سببي ومستقر (b) سببي غير مستقر.

النظام في الشكل 9-11(a) هو مستقر وسببي، والنظام في الشكل 9-11(b) مستقر وغير سببي. مما تقدم يمكن أن نستنتج أن النظام يكون سببي ومستقر إذا كانت الأقطاب واقعة في الطرف الأيسر من المستوي s.



الشكل 9-11 نظام سببي ومستقر (b) نظام غير سببي ومستقر.

2.9.9 حل المعادلات التفاضلية

من أهم التطبيقات تحويل لابلاس وحيد الجانب هو حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الحالات الابتدائية غير الصفرية. وذلك لأن تابع الخطوة عند $t = 0$ غير مستمر ومطال أي نبضات في الحل تكون غير معرفة.

مثال 9-18: لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

التي تصف نظاماً خطياً غير متغير مع الزمن مع حالة الضبط reset الابتدائية. المطلوب حل المعادلة السابقة وإيجاد قيمة $y(t)$ علماً بأن الدخل هو $x(t) = \alpha u_{-1}(t)$.

الحل: باستخدام (9-53) و (9-55) نحصل على:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

وبما أن $\mathcal{L}_u[\alpha u_{-1}(t)] = \frac{\alpha}{s}$ فإن:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

وباستخدام التفريق إلى كسور جزئية نحصل على

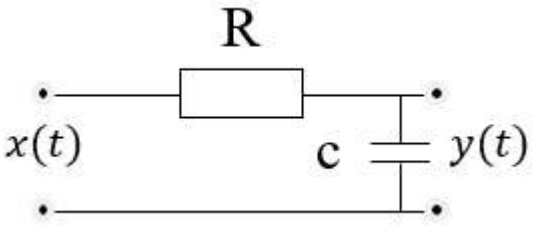
$$Y(s) = \frac{\alpha/2}{s} - \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\alpha/2}{s+2}$$

وباستخدام خواص تحويل لابلاس وحيد الجانب يكون لدينا:

$$y(t) = \alpha(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t})u_{-1}(t)$$

3.9.9 حل الدارات الكهربائية

سوف نوضح حل الدارات الكهربائية خلال المثال التالي:



باستخدام قانون كيرشوف Kirchoff يكون لدينا:

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

وبأخذ تحويل لابلاس وحيد الجانب لكلا الطرفين بحيث:

$R = 1000\ \Omega,\ C = 200\ \mu f,\ y(o^-) = -2$ نحصل على:

$$sY(s) - y(o^-) + 5Y(s) = 5X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+5}[5X(s) + y(o^-)]$$

وبما أن $x(t) \overset{\mathcal{L}u}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{3/5}{s+2}$ و $y(\bar{o}) = -2$، فإننا نحصل على:

$$y(s) = \frac{3}{(s+2)(s+5)} + \frac{-2}{s+5}$$

وبالتفريق إلى كسور جزئية يكون لدينا:

$$y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نحصل على

$$y(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) - 3e^{-5t}u_{-1}(t)$$

وكما ذكرنا سابقاً (في فقرة حل المعادلات التفاضلية)، يجب حساب $y(t)$ عند $t = 0$ للتأكد من الشرط الابتدائي.

مسائل الفصل التاسع

9-1- لدينا التكاملات التالية:

$$\int_0^{\infty} e^{-5t}e^{-(\sigma+jw)t}dt \quad ; \quad \int_{-5}^{+5} e^{-5t}e^{-(\sigma+jw)t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|}e^{-(\sigma+jw)t}dt \; ; \; \int_{-\infty}^{0} e^{-5|t|}e^{-(\sigma+jw)t}dt$$

حدد قيم σ للتأكد من تقارب كل تكامل.

9-2- أوجد تحويل لابلاس ثنائي الجانب وكذلك مجال التقارب ROC للإشارات التالية:

$$x(t) = u_{-1}(-t+3)$$

$$x(t) = \delta(t+1)$$

$$x(t) = e^{-t}u_{-1}(t+2)$$

9-3- أوجد تحويل لابلاس أحادي الجانب للإشارات التالية:

$$x(t) = \frac{d}{dt}[te^{-1}u_{-1}(t)]$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,d\tau$$

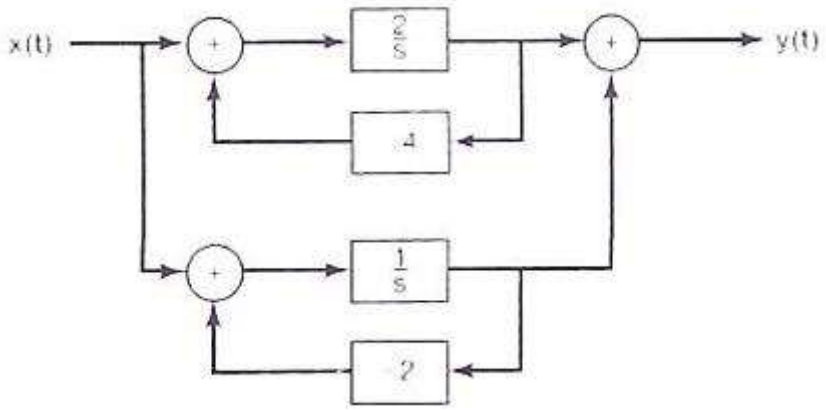
$$x(t) = t^3u_{-1}(t)$$

وذلك بالاستعانة بخواص تحويل لابلاس.

9-4- بالاستعانة بخواص تحويل لابلاس أحادي الجانب، أوجد الإشارتين الموافقتين للتحويلين التاليين:

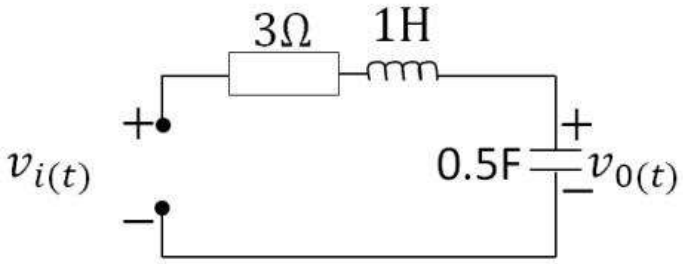
$$X(s) = \left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right) \; ; \; X(s) = s\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+9}\right) + \left(\frac{1}{s+3}\right)$$

9-5- لدينا النظام السببي الخطي غير المتغير مع الزمن LTI المبين بالشكل التالي:



المطلوب إيجاد العلاقة التفاضلية التي تربط الدخل $x(t)$ مع الخرج $y(t)$.

9-6- لدينا الدارة الكهربائية RLC الموضحة بالشكل التالي:



أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط الدخل $v_i(t)$ مع الخرج $v_0(t)$ علماً بأن:

$$\frac{dv_0(t)}{dt}|_{t=0^+} = 2 \quad ; \quad v_0(0^+) = 1$$

9-7- أوجد تحويل لابلاس ثنائي الجانب ومجال التقارب ROC الموافق للإشارات التالية:

$$x(t) = e^{3t+6}u_{-1}(t+3)$$

$$x(t) = e^{t}\sin(2t+4)u_{-1}(t+2)$$

$$x(t) = e^{t}\frac{d}{dt}[e^{-2t}u_{-1}(-t)]$$

9-8- أوجد الإشارات الموافقة لتحويلات لابلاس ثنائية الجانب التالية:

$$X(s) = e^{5s}\frac{1}{s+2},\ \ ROC\ , Re(s) < -2$$

$$X(s) = s\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}\right),\ \ ROC\ \ Re(s) < 0$$

$$X(s) = s^{-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right),\ \ ROC\ Re(s) > 0$$

9-9- لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

التي تربط بين دخل $x(t)$ وخرج نظام LTI سببي. المطلوب إيجاد تابع التحويل والاستجابة النبضية للنظام.

10 المرشحات والمسويات

Filters and Equalizers

1.10 مقدمة

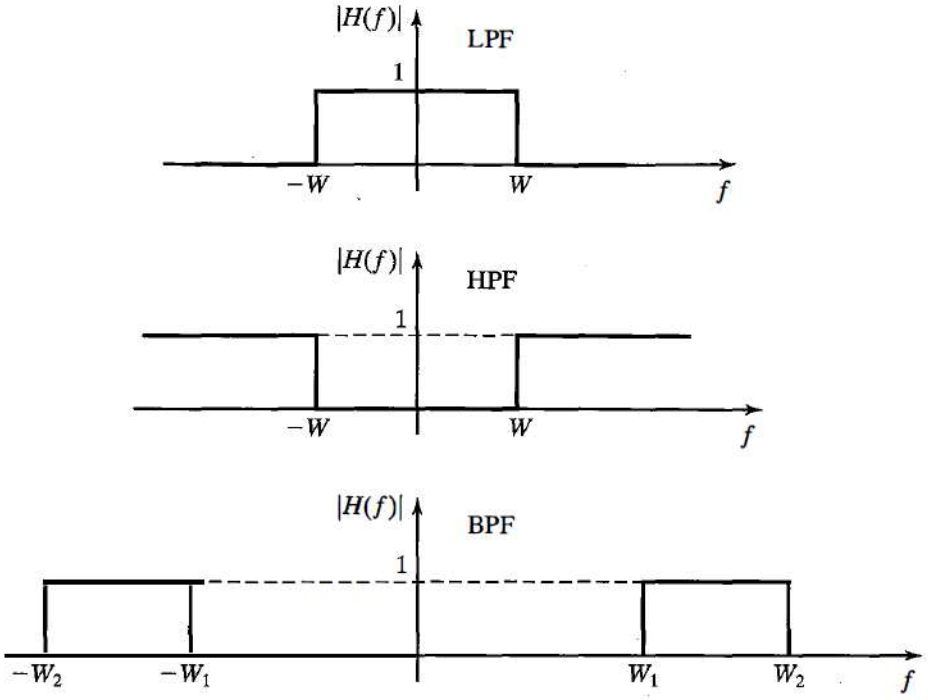
المرشحات والمسويات ذات أهمية كبيرة في الاتصالات. حيث لا يخلو أي نظام اتصالات من عدد من المرشحات والمسويات. المرشح عبارة عن نظام خطي غير متغير مع الزمن، يسمح بتمرير طيف محدد من الترددات ويمنع باقي الطيف وذلك حسب الطلب.

في الفقرة التالية نقدم المرشحات المثالية، مثل مرشح تمرير منخفض الحزمة lowpass filter LPF ومرشح حزمة التمرير العالية high pass filter HPF ومرشح حزمة التمرير bandpass filter BPF. وفي الفقرة التي تليها، سوف نقدم مقاربة approximation مرشح حزمة تمرير منخفضة مثالي. ونركز هنا على أهم مرشحين وهما بتروورث Butterworth ومرشح تشيبتشيف Tchebyshev. ثم ننتقل إلى فقرة عملية وهي الفقرة الرابعة، سوف نشرح فيها طرق عملية لتصميم المرشحات ذات حزمة تمرير منخفضة. وفي الفقرة الخامسة، نعطي طريقة عملية للانتقال من مرشح حزمة تمرير منخفضة إلى مرشح تمرير حزمة عالية، وكذلك من مرشح تمرير حزمة منخفضة إلى مرشح حزمة التمرير (تمرير حزمة). وفي الفقرة الأخيرة نسلط الضوء على مسوي خط التأخير المفرع tapped delay-line equalizer وقبل ذلك سوف نقدم الإرسال الخالي من التشوه distortion less transmission والتشوه الخطي. وظيفة المسوي هي تعويض (إزالة) التشوه الذي طرأ على الإشارة عند مرورها بالقناة.

2.10 المرشحات المثالية

المرشح عبارة عن نظام خطي غير متغير مع الزمن يسمح بتمرير طيف محدد من الترددات ويمنع باقي الطيف. وتوصف الاستجابة الترددية للمرشح عن طريق مجالين: مجال التمرير pass-band ومجال المنع stop-band. يُرسل طيف الترددات ضمن مجال التمرير بتشوه قليل عملياً أو دون تشوه نظرياً، ويمنع طيف الترددات الذي يقع في مجال المنع. يبين الشكل 10-1 المرشحات المثالية LPF وHPF وBPF.

سوف ندرس في هذه الفقرة مرشح تمرير منخفض مثالي حيث يرسل كل طيف الترددات الواقعة ضمن مجال التمرير دون أي تشوه، ويمنع كل طيف الترددات التي تقع ضمن مجال المنع. وذلك كما هو واضح في الشكل 10-1. سوف نوجد الآن تابع التحويل للمرشح LPF.



الشكل 10-1 الاستجابة الترددية للمرشحات LPF وHPF وBPF المثالية.

بفرض إشارة الدخل $x(t)$ وإشارة خرج المرشح $y(t)$ والتأخير ضمن المرشح t_0 وربح المرشح هو A يكون لدينا:

$$y(t) = Ax(t - t_0) \tag{1-10}$$

وبأخذ تحويل فورييه لطرفي العلاقة السابقة يكون لدينا

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

وذلك بعد أخذ خاصية التأخير في تحويل فورييه بالحسبان. ومن ثم فإن تابع التحويل يكون:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ae^{-j2\pi f t_0}$$

وبفرض $A = 1$ يكون لدينا

$$H(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f t_0} ; & -w \le f \le w \\ 0 ; & |f| > w \end{cases} \tag{2-10}$$

من العلاقة السابقة نلاحظ ما يلي:

- الاستجابة المطالية للمرشح ثابتة على كل مجال التمرير $-w \le f \le w$.

- الاستجابة الطورية خطية في كل مجال التمرير (ويمكن اعتبارها اختيارية خارج مجال التمرير)، أي:

$$\theta(f) = \angle H(f) = -2\pi f t_0 \tag{3-10}$$

باستخدام تحويل فوريه المعاكس نحصل على

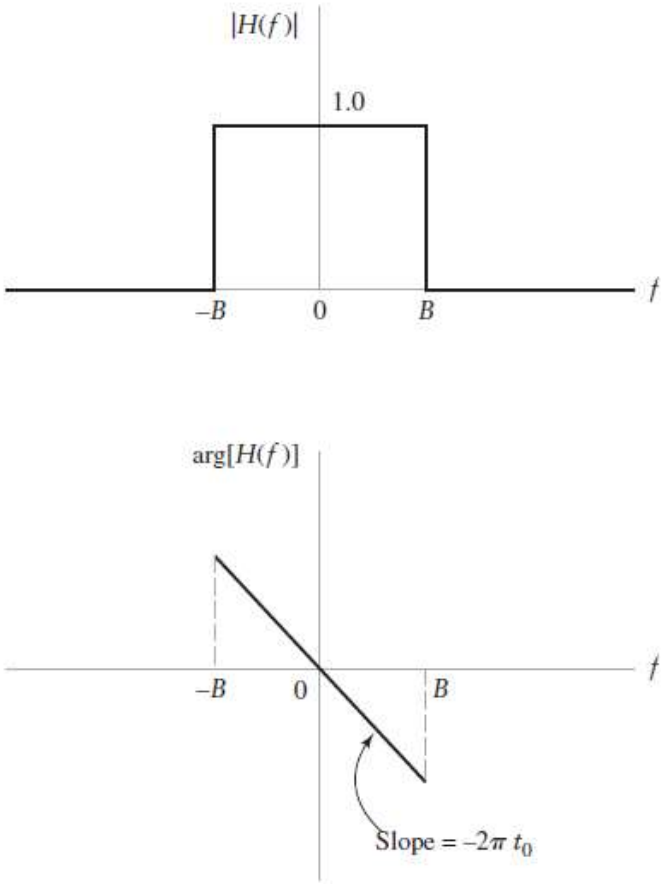
$$h(t) = \int_{-W}^{+W} e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df$$

أو

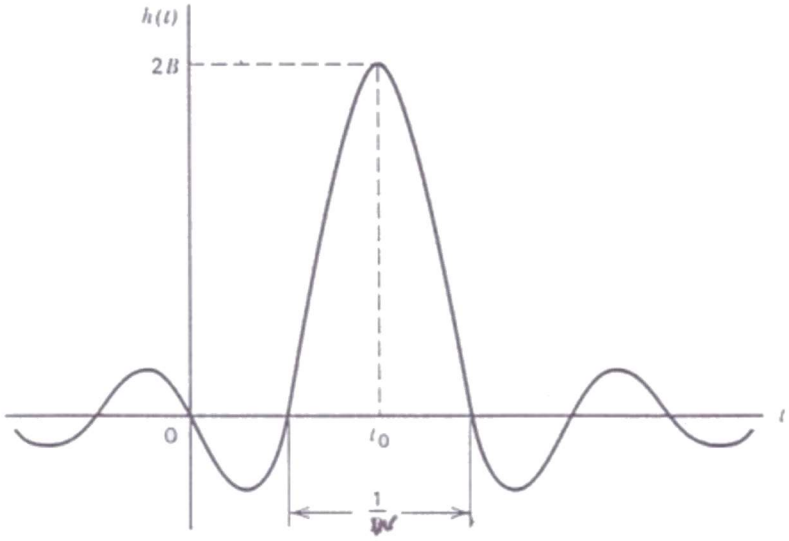
$$h(t) = \int_{-W}^{W} e^{j2\pi f (t-t_0)} df$$

$$= \frac{\sin[2\pi w(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)} = 2W sinc[2W(t-t_0)] \tag{4-10}$$

يوضح الشكل 10-2 الاستجابة المطالية والطورية للمرشح المثاليLPF بينما يوضح الشكل 10-3 الاستجابة النبضية، الذي نلاحظ فيه وجود استجابة قبل $t = 0$ وهذا يؤكد أن مرشح التمرير المنخفض (LPF) ا لمثالي هو عبارة عن نظام غير سببي، أي لا يمكن تحقيقه عملياً.



الشكل 10-2 الاستجابة المطالية والطورية لمرشح LPF مثالي.



الشكل 10-3 الاستجابة النبضية لمرشح LPF مثالي.

للتغلب على هذه المسألة نزيد من عرض النبضة t_0 بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$|sinc[2w(t-t_0)]| \ll 1; \quad t<0$$

في هذه الحالة يمكن التحقيق العملي لمرشح التمرير المنخفض القريب من المثالي.

استجابة LPF المثالي لنبضة مربعة $x(t)$:

سوف نطبق الآن نبضة مستطيلة بمطال يساوي الواحد وعرض T على دخل مرشح تمرير منخفض مثالي ذو عرض مجال يساوي W.والمطلوب هنا إيجاد استجابة المرشح المثالي$y(t)$ للدخل $x(t)$.

تحدد العلاقة (4-10) الاستجابة النبضية $h(t)$. نعلم سابقاً من خاصية الإزاحة أن الإزاحة (التأخير) لايؤثر على شكل استجابة المرشح $y(t)$. ولذلك ومن أجل التبسيط سوف نفرض $t_0 = 0$ في العلاقة (4-10) وبالتالي نحصل على:

$$h(t) = 2W\ sinc(2Wt) \tag{5-10}$$

وبما أن:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ;\ -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فإن استجابة المرشح تكون:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= 2w \int_{-T/2}^{+T/2} sinc\,[2w(t-\tau)]d\tau$$

$$= 2w \int_{-T/2}^{T/2} \left\{\frac{\sin[2\pi w(t-\tau)]}{2\pi w(t-\tau)}\right\} d\tau \tag{6-10}$$

بفرض $\lambda = 2\pi w(t-\tau)$ وهو عبارة عن متحول بلا بُعد. وتبديل τ و λ نكتب العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi w(t-T/2)}^{2\pi w(t+T/2)} \frac{sin\lambda}{\lambda} d\lambda$$

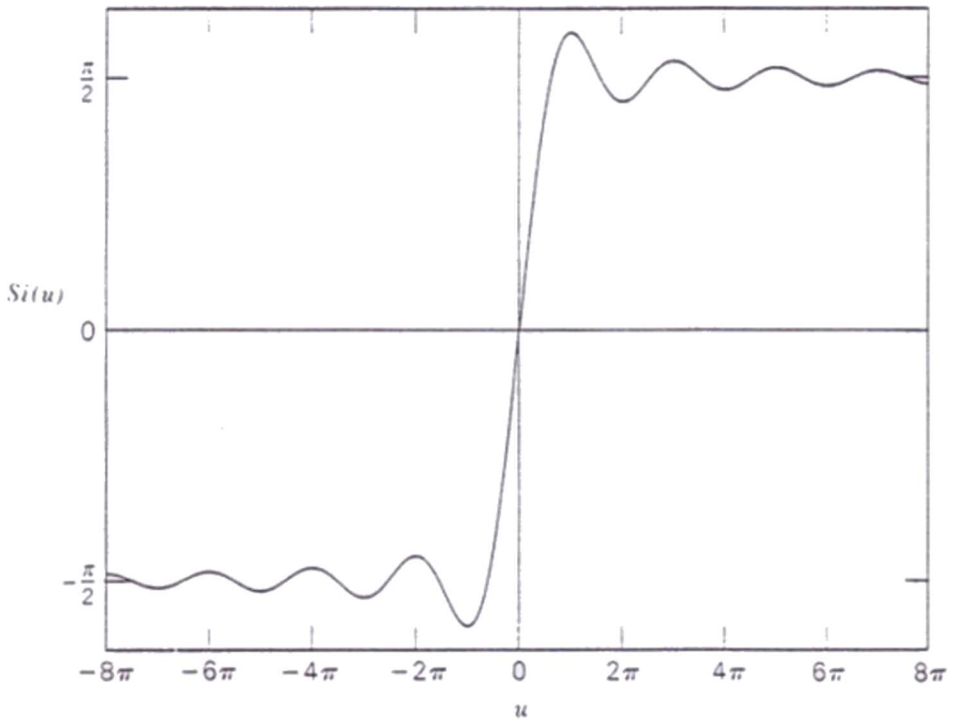
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi w(t+T/2)} \frac{sin\lambda}{\lambda} d\lambda - \int_0^{2\pi w(t-T/2)} \frac{sin\lambda}{\lambda} d\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\{si[2\pi w(t+T/2)] - si[2\pi w(t-T/2)\} \quad (7\text{-}10)$$

حيث

$$si(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx$$

ويسمى تكامل السينك sinc integral وهو غير قابل للتكامل بشكل مباشر، بل يمكن مكاملته بعد نشره بسلسلة. يوضح الشكل 10-4 التكامل السابق كتابع لـ u.

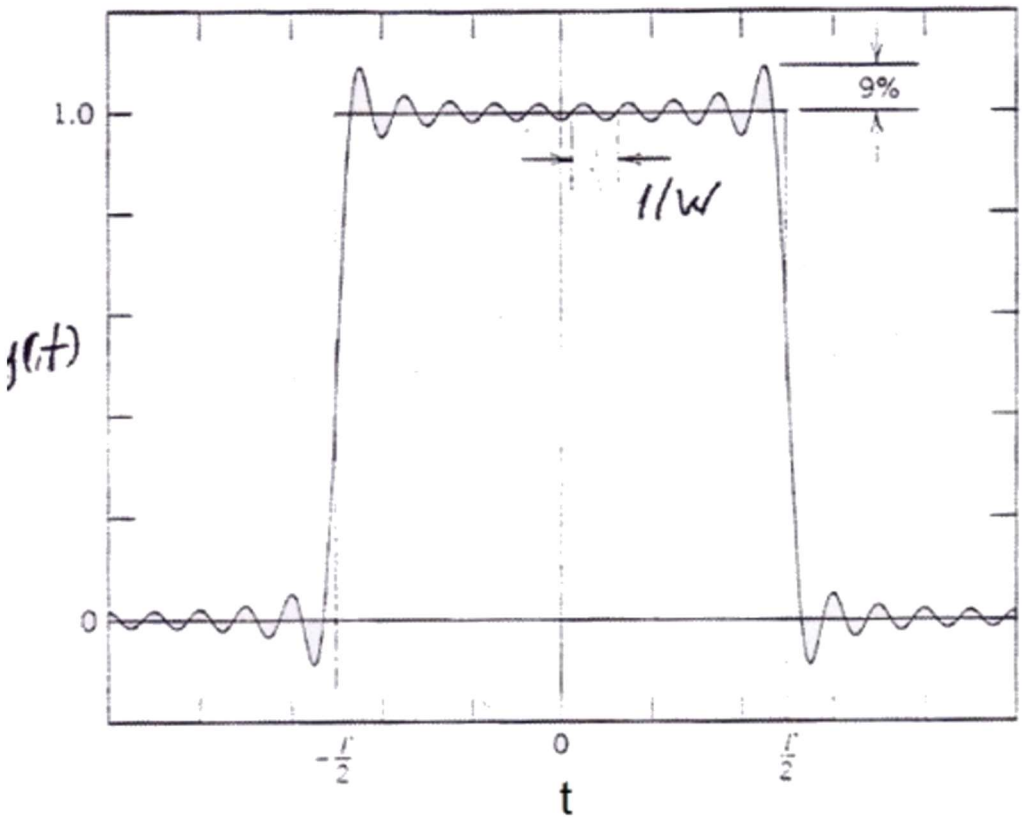


الشكل 10-4 تكامل السينك $si(u)$.

من هذا الشكل يمكن أن نلاحظ ما يلي:

- تكامل السينك هو عبارة عن تابع مهتز وذي تناظر فردي حول مبدأ الاحداثيات $u = 0$.
- القيم الصغرى والعظمى تقع عند مضاريب π.
- عند قيم كبيرة موجبة لـ u يصل إلى القيمة $\pi/2$.

نلاحظ أن تكامل السينك يهتز بتردد $1/2\pi$. وهذا يوافق اهتزاز الاستجابة $y(t)$ بتردد يساوي تردد القطع (أي المجال الترددي W) وذلك كما هو واضح في الشكل 10-5. القيمة العظمى لـ$s_i(u)$ هي عند $u_{max} = \pi$.



الشكل 10-5 استجابة مرشح LPF مثالي لنبضة مربعة $u_{max} = \pi$.

وبالتالي فإن القيمة العظمى لـ $y(t)$ تحدث عند:

$$t_{max} = \pm\frac{T}{2} + \frac{1}{2w}$$

$$2\pi w(t_{max} - T/2) = \pi$$

وبالتعويض t_{max} في العلاقة (10-7) نحصل على:

$$y(t_{max}) = \frac{1}{\pi}[si(\pi) - si(\pi - 2\pi WT)]$$

$$= \frac{1}{\pi}[si(\pi) + si(2\pi WT - \pi)$$

وذلك لكون تكامل السينك تابعاً فردياً، ليكن:

$$si(2\pi WT - \pi) = \frac{\pi}{2}(1 \pm \Delta) = \frac{\pi}{2} \pm \Delta.\frac{\pi}{2} \qquad (8\text{-}10)$$

واضح ان Δ انحراف عن $\pi/2$ ومقيسة بـ $\pi/2$. كما ذكرنا سابقاً أن القيمة العظمى لـ $si(u)$ هي عند $u_{max} = \pi$ وتساوي 1.852 والتي يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$1.852 = (1.179)(\frac{\pi}{2})$$

أو

$$si(\pi) = (1.179)(\frac{\pi}{2})$$

وبالتعويض في علاقة $y(t_{max})$ يكون لدينا

$$y(t_{max}) = \frac{1}{2}(1.179 + 1 \pm \Delta) = 1.09 \pm \frac{1}{2}\Delta \qquad (9\text{-}10)$$

من الشكل 10-4 والعلاقة (10-8)نلاحظ كلما كان الجداء WT كبيراً كلما كانت Δ صغيرة جداً، وبالتالي حسب العلاقة (10-9) يكون لدينا:

$$y(t_{max}) \cong 1.09 \ , \qquad WT \gg 1$$

من العلاقة السابقة نلاحظ ما يلي:

- تتجاوز استجابة المرشح القيمة الطبيعية بنسبة 9%.
- تجاوز القيمة الطبيعية عملياً مُستقل عن المجال الترددي W.

تسمى الظاهرة المسببة للملاحظتين السابقتين بظاهرة جيبس Gibbs phenomenon. يبين الشكل 10-5 الطبيعة الاهتزازية لاستجابة المرشح، استجابة مرشح التمرير المنخفض المثالي لنبضة مربعة بمطال يساوي الواحد وبعرض يساوي T.

3.10 مقاربة مرشح حزمة تمرير منخفض مثالي

عند تصميم المرشحات عادة يتم الحساب في المجال الترددي ويتضمن التصميم خطوتين أساسيتين:

- تقريب الاستجابة الترددية المطلوبة (استجابة مطالية أو استجابة طورية أو كليهما) من تابع تحويل قابل للتنفيذ العملي.
- التحقيق العملي لتابع التحويل المقرب باستخدام وسائل فيزيائية.
- يجب أن يكون تابع التحويل المقرّب عبارة عن نظام مستقر. كما ذكرنا سابقاً، يكون النظام مستقراً إذا كان الدخل المحدد يؤدي إلى خرج مُحدد. ورياضياً يمكن توصيف ذلك بالشكل التالي: ليكن لدينا الدخل $x(t)$ والمحدد بـ:

$$|x(t)| < C \quad \forall t$$

حيث C رقم حقيقي موجب محدد. نعلم أن الخرج يساوي:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

وبأخذ القيمة المطلقة لكلا الجانبين نجد:

$$|y(t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\, x(t-\tau)d\tau|$$

$$\leq C\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

وهكذا فإن الشرط اللازم والكافي لاستقرار نظام خطي غير متغير مع الزمن هو تحقيق العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \qquad (10\text{-}10)$$

عادة تتم دراسة الاستقرار في المستوي العقدي s (تحويلات لابلاس المذكورة في الفصل السابق) وهو متحول عقدي يساوي $s = \sigma + j2\pi f$ ويُسمى بالتردد العقدي. حيث يتم الانتقال إليه بتعويض $j2\pi f = s$ في تابع التحويل $H(f)$ وهكذا نحصل بشكل عام على التابع

$$H(s) = H(f)|_{j2\pi f=s} = K\frac{(s-3_1)(s-3_2)\dots(s-3_m)}{(s-P_1)(s-P_2)\dots(s-P_n)} \qquad (11\text{-}10)$$

حيث K عامل تقييس و 3_1 و 3_2 ... 3_m أصفار تابع التحويل وP_1 و P_2 ... P_n الأقطاب.

نقول أن النظام السببي ذا تابع التحويل $H(s)$ أنه مستقر إذا وفقط إذا كانت أقطاب $H(s)$ تقع في النصف الأيسر من المستوي s أي أن كل الأقطاب لها جزء حقيقي سالب.

$$\mathrm{Re}([P_i]) < 0 \ , \forall i$$

وهذا يكافئ العلاقة (10-10) في المجال الزمني. تجدر الملاحظة هنا أن الأصفار يمكن أن تقع في أي مكان من المستوي s، وهي لا تؤثر على الاستقرار.

يمكن التمييز بين نوعين من النظم، وذلك بناءً على موقع الأصفار في المستوي s.

نظم الطور الأصغري minimum phase system: تتميز هذه النظم بكون الأقطاب والأصفار تقع في النصف الأيسر من المستوي s.

نظم الطور غير الأصغري non minimum phase system: تتميز هذه النظم بكون الأصفار تقع على المحور التخيلي وكذلك في الطرف الأيمن من المستوي s.

بإعطاء نفس عدد الأصفار والأقطاب فإنه في نظم الطور غير الأصغري سوف يتغير الطور بشكل أكبر منها في نظم الطور الأصغري. وذلك تبعاً للعلاقة التالية:

$$\Delta argH(f)|_{f=-\infty}^{+\infty} = \Delta\, arg(number.) - \Delta\mathrm{arg}(denomin) \qquad (12\text{-}10)$$

أما بالنسبة للاستجابة المطالية والطورية فإنه في نظم الطور الأصغري العلاقة بين الاستجابة المطالية والاستجابة الطورية هي علاقة وحيدة أي عند تحديد إحداهما فإنه يتم تحديد الأخرى. بينما في نظم الطور غير الأصغري فإن الاستجابة المطالية مستقلة عن الاستجابة الطورية والعكس صحيح.

في تصميم المرشحات كما ذكرنا سابقاً يتم التقريب من المرشح المثالي شرط إمكانية التنفيذ العملي للمرشح. بالنسبة لمرشح حزمة تمرير منخفض، هناك شكلان من التقريب. الأول يهتم بالحصول على تسطح أعظمي لمنحني استجابة المطال – مرشحات بترورث Butterworth. والشكل الآخر يهتم بأن يكون التعرج متساوياً على طول منحى الاستجابة (مجال التمرير) – مرشحات تشيبتشيف Chebyshev.

1.3.10 مرشحات بتروورث

تابع تحويل الاستطاعة لمرشح بتروورث له الشكل التالي:

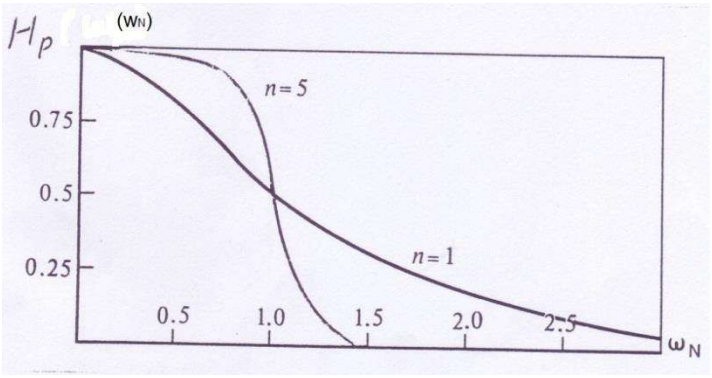
$$H_P(f) = H(f)H^*(f) = \frac{1}{1 + (f/f_0)^{2n}} \qquad (13\text{-}10)$$

حيث f_0 تردد القطع. للتبسيط سوف نتعامل مع $w = 2\pi f$ عند ذلك فإن العلاقة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$H_P(w_N) = \frac{1}{1 + w_N^{2n}} \qquad (14\text{-}10)$$

حيث $w_N = \frac{w}{w_0}$ عبارة عن تردد ممعير وبدون بُعد. و $n = 1,2,3, \ldots$ تُسمى بدرجة المرشح وتتحكم بقرب التقريب من مرشح تمرير منخفض مثالي، وكلما كانت n أكبر كلما كان التقريب أفضل. ويتم اختيار n حسب درجة (قيمة) التخامد المطلوبة عند الترددات $w > w_0$.يوضح الشكل 6-10 تابع تحويل الاستطاعة $H_P(w_N)$ من أجل $n = 1$ و $n = 5$. لاحظ درجة التخامد عند $n = 5$ بالمقارنة مع $n = 1$. من العلاقة (14-10) نجد أن تردد القطع (عرض المجال الترددي) يقع عند $w_N = 1$، أي:

$$10\ log\frac{1}{2} \cong -3dB$$



الشكل 6-10 تابع تحويل الاستطاعة عند المرشح بتروورث عند n=1 و n=5.

مثال 10-1: أوجد درجة مرشح بتروورث n ذي تردد قطع $f_0 = 10^5\ Hz$ بحيث نحصل على تخامد مقداره بأقل تقدير 26- dB بالنسبة للتردد $f = 0$، وذلك عند التردد $3 \times 10^5\ Hz$.

الحل: بوضع العلاقة (14-10) بصيغة الـ dB يكون لدينا:

$$10\ log\frac{1}{1+(\frac{3\times10^5}{10^5})^{2n}} = -26$$

$$\Longrightarrow 10\ log\frac{1}{1+3^{2n}} = -26$$

$$\Longrightarrow 1+3^{2n} = 10^{2.6} = 398$$

$$\Longrightarrow 2n = \frac{log397}{log3} = 5.45$$

$$\Longrightarrow n = 3$$

من أجل تصميم أو تشكيل المرشح فإننا بحاجة لتابع التحويل $H(s)$ (تحويل لابلاس) أي علينا إيجاد تابع التحويل من تابع تحويل الاستطاعة لذلك سوف نفترض التردد العقدي الممعير التالي:

$$s_N = \sigma_N + jw_N$$

وبإعادة كتابة العلاقة (14-10) يكون لدينا:

$$H_P(s_N) = H(s_N)H(-s_N) = \frac{1}{1+(-1)^n s_N^{2n}} \qquad (15\text{-}10)$$

مثال 10-2: أوجد تابع التحويل لمرشح بتروورث ذي حزمة تمرير منخفضة والرتبة n=3 بفرض تردد القطع عند $-3dB$ هو $w_c = 1\ rad/sec$.

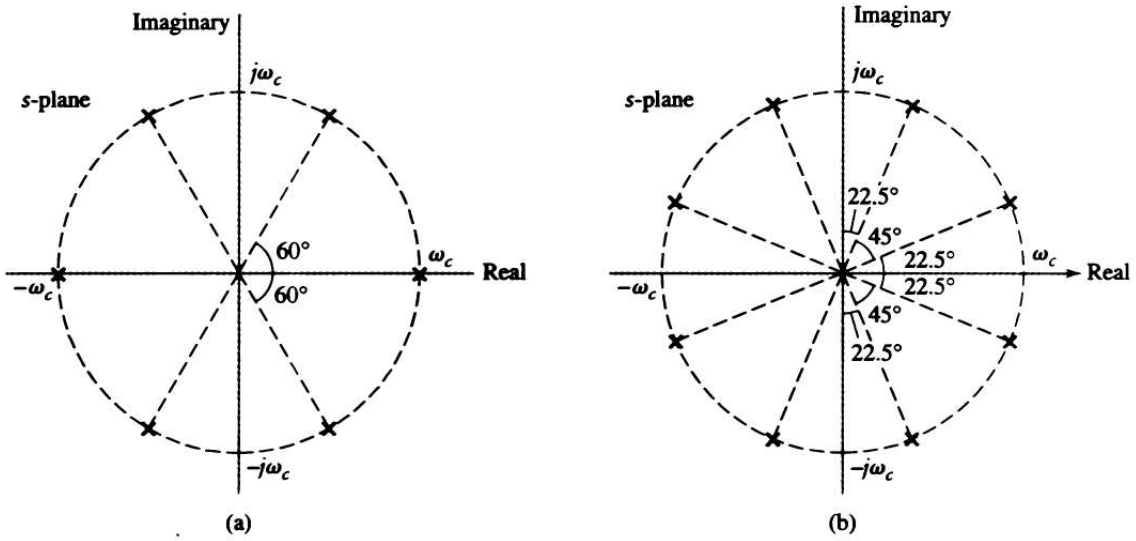
الحل: واضح أن عدد الأقطاب لـ $H(s)H(-s)$ هو $2n = 6$ وكافة الأقطاب تقع على محيط دائرة نصف قطرها يساوي الواحد والمسافة بين قطب وآخر هو $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. وذلك كما هو واضح في الشكل 10-7. وبالتالي الأقطاب التي تقع على يسار المستوي، أي أقطاب كثير الحدود $H(s)$ هي:

$$s = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,s = -1\ ,s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وهكذا فإن تابع التحويل لمرشح بتروورث ذي التمرير المنخفض هو:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$



الشكل 10-7 توزع أقطاب $H(s)H(-s)$ في المستوي s من أجل n=3 و n=4 (الطرف الأيسر أقطاب $H(s)$ والطرف الأيمن أقطاب $H(-s)$).

أي أن مرشح بتروورث ذا الدرجة $n = 2$عبارة عن نظام ديناميكي من الدرجة الثانية. وهذا يعني أن مُرشح بتروورث ذا الدرجة n له $2n$ قُطب، والتي هي جذور المعادلة التالية:

$$1 + (-1)^n S_N^{2n} = 0 \qquad (16\text{-}10)$$

واضح من المعادلة السابقة أن كل الجذور تقع على محيط دائرة واحدة والتي مركزها في المبدأ ونصف قطرها واحد. من أجل $n = 1$ يكون لدينا حسب العلاقة السابقة مايلي: $S_N^2 = 1$ وبالتالي فإن الجذور تكون $S_{N1} = 1$ و$S_{N2} = -1$. ومن أجل $n = 2$ يكون $S_N^4 = 1$

وبالتالي فإن الجذور هي:

$$S_{N1} = e^{J\pi/4}\ , S_{N2} = e^{J3\pi/4}\ ;\ S_{N3} = e^{J5\pi/4}\ ,\ S_{N4} = e^{J7\pi/4} \qquad (17\text{-}10)$$

ومن أجل $n = 3$ يكون لدينا المعادلة $S_N^6 = 1$. أي لدينا الجذور التالية:

$$S_{N1} = 1\ ;\ S_{N2} = e^{j\pi/3}\ ;\ S_{N3} = e^{j2\pi/3}$$
$$S_{N4} = -1\ ;\ S_{N5} = e^{j4\pi/3}\ ;\ S_{N6} = e^{j5\pi/3} \qquad (18\text{-}10)$$

واضح مما سبق أن المسافة الطورية بين جذرين متجاورين هي π/n وإذا كانت n عدداً فردياً فإن الجذر الأول هو $S_{N1} = 1$ وإذا كانت n زوجية فإن الجذر الأول هو $S_{N1} = e^{j\pi/2n}$.

ما يهمنا هنا هي الجذور التي تقع على يسار المستوي العقدي أي جذور تابع التحويل $H(s)$ أما جذور التابع $H(-s)$ فهي مناظرة لجذور التابع $H(s)$ وتقع على يمين المستوي العقدي S_N.

مثال 10-3: أوجد تابع التحويل لمرشح بتروورث ذي التمرير المنخفض والدرجة $n = 2$.

الحل: عند $n = 2$ فإن الجذور التي تقع على يسار المستوي العقدي هي

$$S_{N2} = e^{j3\pi/4} = (-1 + j)/\sqrt{2}$$
$$S_{N3} = e^{j5\pi/4} = (-1 - j)/\sqrt{2}$$

وهي جذور تابع التحويل $H(s_N)$ أي:

$$H(s_N) = \frac{1}{(S_N - S_{N2})(S_N - S_{N3})}$$
$$= \frac{1}{S_N^2 + \sqrt{2}S_N + 1}$$

2.3.10 مرشحات تشيبتشيف

يعرف أيضاً بمرشح التعرج المتساوي في مجال التمرير. تابع تحويل الاستطاعة لهذا المرشح له الشكل التالي:

$$H_\rho(W_N) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(w_N)} \qquad (19\text{-}10)$$

حيث $\varepsilon < 1$ وهو ثابت ويسمى عامل التعرج و $T_n(W_N)$ كثير حدود تشيبتشيف من الرتبة n ويُعرف بالشكل التالي:

$$T_n(x) = \cos(n.arccos(x)) \;;\; n = 0,1,2,.. \tag{20-10}$$

يمكن الحصول على كثيرات حدود تشيبتشيف ذات المراتب العليا باستخدام العلاقة العودية التالية:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,; n = 2,3,4,.. \tag{21-10}$$

باستخدام (20-10) نجد أن:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

وباستخدام (21-10) نجد أن:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \tag{22-10}$$

من أجل $|x| \gg 1$، نأخذ العلاقة (20-10) الشكل التقريبي التالي:

$$T_n(x) \cong 2^{n-1}x^n \;;|x| \gg 1 \tag{23-10}$$

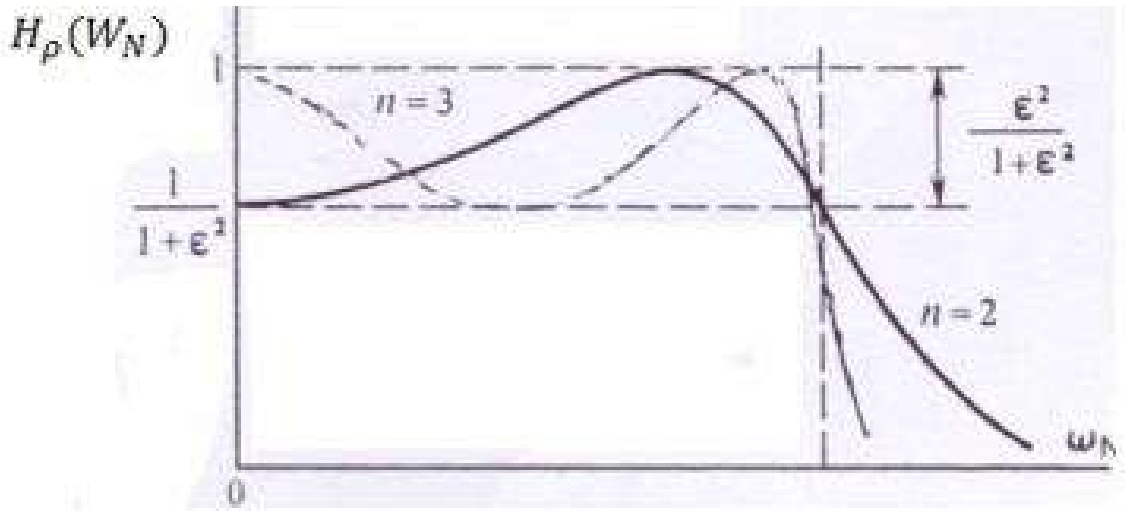
واضح من (19-10) أنه في مجال التمرير لدينا المتراجحة التالية:

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \le H_\rho(w_N) \le 1\,; \quad 0 \le w_N \le 1 \tag{24-10}$$

أي أن مجال التعرج ضمن مجال التمرير هو:

$$\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \tag{25-10}$$

أما بالنسبة لخارج مجال التمرير $]1,\infty[$ فإن تابع $H_\rho(w_N)$ يهبط بسرعة كبيرة، أي يقوم بتخميد الإشارة بسرعة كبيرة خارج مجال التمرير. وكلما كانت الرتبة n أكبر كلما كان الهبوط أسرع. وذلك كما هو واضح من الشكل 8-10 حيث تم رسم منحني تابع تحويل الاستطاعة للمرشح من أجل $n = 2$.و $n = 3$.



الشكل 10-8 تابع تحويل الاستطاعة كتابع للتردد.

عند اختيار عامل التعرج ε صغير نسبياً يؤدي إلى تصغير مجال التعرج وهذا بدوره يسبب تشوهاً قليلاً للإشارة ضمن مجال التمرير. أما بالنسبة لسرعة الهبوط فإن اختيار عامل تعرج ε صغير نسبياً يؤدي إلى هبوط بطيء خارج مجال التمرير هذا يعني أن تخميد الإشارة خارج مجال التمرير سوف يكون ضعيفاً. ومن جهة أُخرى اختيار عامل التعرج ε أكبر من الاختيار السابق يؤدي إلى تكبير مجال التعرج وهذا بدوره يؤدي إلى تشوه كبير نسبياً للإشارة ضمن مجال التمرير، ولكن التخامد خارج مجال التمرير يكون كبير نسبياً. بناءً على ما سبق يجب الأخذ بالحسبان عند تصميم مرشح تشيبتشيف التوفيق بين اختيار ε و n.

مثال 10-4: قارن بين تخميد مرشح تشيبتشيف وتخميد مرشح بتروث عن التردد $w = 3w_0$ (w_0- تردد القطع أو عرض المجال) و $n = 3$ علماً بأن التخميد هو نفسه في كلا المرشحين عند $w = w_0$.

الحل: بفرض $\varepsilon = 1$ (للتبسيط) وبما أن $T_n(1) = 1$ (حسب العلاقة (22-10)) من أجل أي n فإن $H_\rho(1) = 1/2$ كثير حدود تشيبتشيف من المرتبة $n = 3$ هو:

$$T_3(w_N) = 4w_N^3 - 3w_N$$

$$T_3(3) = 4(3)^3 - 3 \times 3 = 99$$

وهكذا فإن تخميد مرشح تشيبتشيف عند $w = 3w_0$ يكون:

$$A_{Tch} = 10\ log\frac{1}{1+T_3^2(3)} = -39.91dB$$

وتخميد مرشح بتورورث عند $n = 3$ و $w = 3w_0$ يكون:

$$A_{But} = 10\ log\frac{1}{1+w_N^{2n}}$$

$$= 10\ log\frac{1}{1+(3)^6} = -28.36dB$$

يتضح من النتائج الفرق في الأداء (التخميد) بين المرشح تشيبتشيف ومرشح بتورورث وذلك لصالح مرشح تشيبتشيف.

تابع تحويل لمرشح تشيبتشيف:

بالأخذ بالحسبان العلاقة (19-10) نجد أن أقطاب تابع تحويل الاستطاعة لمرشح تشيبتشيف هي عبارة عن جذور المعادلة التالية:

$$1 + \varepsilon^2 T_n^2(S_N) = 0 \qquad (26\text{-}10)$$

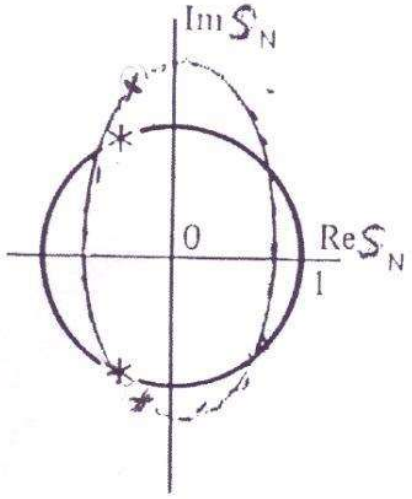
حيث $S_N = \sigma_N + jw_N$.(قارن مع العلاقة (7-10)).

بدلاً من حل المعادلة (26-10)، سوف نشتق أقطاب مرشح تشيبتشيف من أقطاب مرشح بتورورث. وذلك بالاعتماد على العلاقة بينهما، حيث تقع أقطاب مُرشح بتورورث على محيط دائرة واحدية بينما تقع أقطاب مُرشح تشيبتشيف على محيط قطع ناقص، ولكل من الدائرة والقطع الناقص نفس المركز وذلك كما هو واضح من الشكل 9-10. بالأخذ بالحسبان ما سبق نحصل على:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(S_N)_{Tch} &= \mathrm{Re}(S_N)_{But} sinh(a) \\ \mathrm{Im}(S_N)_{Tch} &= \mathrm{Im}(S_N)_{But} cosh(a) \end{aligned} \qquad (27\text{-}10)$$

حيث:

$$a = \frac{1}{n} sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n}\ell n(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}) \qquad (28\text{-}10)$$



الشكل 10-9 أقطاب مرشح بتورث ومرشح تشيبتشيف.

باستخدام العلاقة (10-27)، يمكن الحصول على أقطاب مرشح تشيبتشيف وبالتالي تحديد تابع التحويل لمرشح تشيبتشيف حسب العلاقة التالية:

$$H(S_N) = \frac{1}{(S_N - S_{N1})(S_N - S_{N2}) \dots (S_N - S_{Nn})} \qquad (10\text{-}29)$$

مثال 10-5: أوجد تابع التحويل لمرشح تشيبتشيف بفرض $n = 2$ و $\varepsilon = 1$.

الحل: من ال

مثال **10-2** تم حساب أقطاب مرشح بتورث من أجل $n = 2$ وهي

$$S_{N1} = 0.707(-1 + j)$$
$$S_{N2} = 0.707(-1 - j)$$

باستخدام العلاقة (10-28) نوجد قيمة المعامل a أي:

$$a = \frac{1}{2}\ell n\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0.4407$$

وباستخدام العلاقة (10-27) نحصل على:

$$\sigma_{N_{1Tch}} = \sigma_{N_{2Tch}} = -0.707 \sinh a = -0.322$$

$$W_{N_{1Tch}} = 0.707 \cosh a = 0.777$$

$$W_{N_{2Tch}} = -0.707 \cosh a = -0.777$$

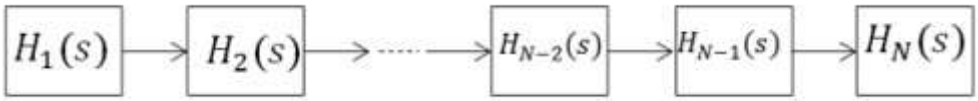
$$\Longrightarrow S_{N_{1Tch}} = \sigma_{N_{1Tch}} + JW_{N_{1Tch}} = -0.322 + j\ 0.777$$

$$S_{N_{2Tch}} = \sigma_{N_{2Tch}} + jW_{N_{2Tch}} = -0.322 - j\ 0.777$$

بتعويض $S_{N_{1Tch}}$ و $S_{N_{2Tch}}$ في العلاقة (10-29) نحصل على المطلوب.

4.10 تصميم مرشحات التمرير المنخفض

تكون الخطوة الأولى في إيجاد المرشحات هي تكوين synthesis دارة الشحن كما قمنا بذلك سابقاً. المرشح أو الدارة المكونة ممكن أن تتألف من عدة مقاطع وحتى لا تتأثر بعضها مع بعض تضع دارات عزل بين المقاطع. وذلك كما هو واضح في الشكل 10-10.



الشكل 10-10 تسلسل توابع التحويل وتوابع تحويل دارة العزل.

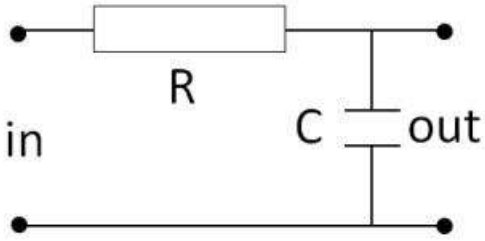
حيث $H_2(s) \ldots H_{N-1}(s)$ توابع تحويل دارات العزل والباقي توابع التحويل الوظيفية.أي دارة عزل بين كل تابعي تحويل الخطوة الثانية في إيجاد المرشحات هي خطوة التصميم أي تحديد قيم العناصر كافة لتوابع التحويل، والتي هي موضوعنا. وبما أنه في معظم المرشحات نستخدم توابع تحويل من الدرجة الأولى والدرجة الثانية، لذلك سوف نهتم بتلك الدرجتين.

1.4.10 توابع من الدرجة الأولى

أبسط مثال على تلك التوابع هي تابع التحويل لمرشح تمرير منخفض، أي:

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs} \qquad (10\text{-}30)$$

الدارة المحققة للعلاقة السابقة مبينة بالشكل 10-11.



الشكل 10-11 دارة مرشح تمرير منخفض.

تابع التحويل (30-10) يحوي قطباً واحداً على يسار المستوي s، وهو $S_1 = -1/RC$. بتحديد s_1 يتحدد الجداء RC، وباختيار أحد العناصر R أو C يمكن تحديد العنصر الآخر، وهكذا نكون قد صممنا الدارة.

2.4.10 توابع من الدرجة الثانية

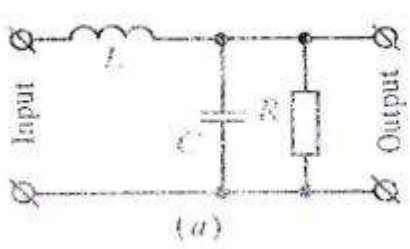
يبين الشكل 10-12(a) دارة ذات تابع التحويل التالي:

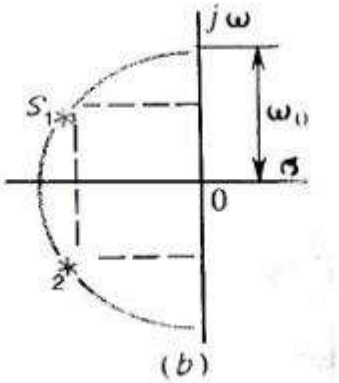
$$H(s) = \frac{w_0^2}{s^2 + \alpha s + w_0^2} \tag{31-10}$$

حيث $w_0 = 1/\sqrt{LC}$ و $\alpha = 1/2RC$. يبين الشكل 10-12(b) أقطاب الدارة وهي قطبان مترافقان على يسار المستوي s وقيمتها هي:

$$S_1, S_2 = -\alpha \pm j\sqrt{w_0^2 - \alpha^2} \tag{32-10}$$

واضح أن تلك الأقطاب يمكن أن تكون أقطاباً عقدية مترافقة أو حقيقية حسب قيم w_0 و α. سوف نشرح الآن تصميم مرشح بتروورث وتشيبتشيف من خلال المثالين التاليين.





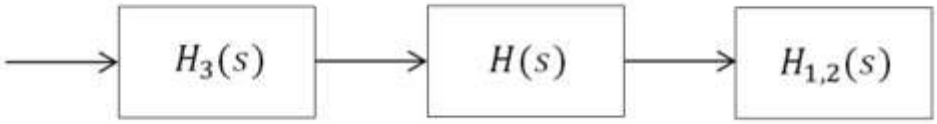
الشكل 10-12 (a) دارة من المرتبة الثانية (b) موقع الاقطاب.

مثال 10-6: صممّ مرشح بتروورث ذا الدرجة $n = 3$ وتردد القطع $w_c = 10^5\, rad/\sec$ والحمل $\mathrm{R_L} = 0.5\ \mathrm{K\Omega}$.

الحل: بتحويل التردد الممعير (المتحول العقدي الممعير) إلى التردد العقدي يكون لدينا: $s = w_c s_N$ وبالأخذ بالحسبان الشكل 10-7(a) نحصل على الأقطاب التالية والتي هي على يسار المستوي s:

$$S_1, S_2 = 10^5(-cos60^\circ \pm jsin60^\circ)$$
$$= -0.5 \times 10^5 \pm j0.866 \times 10^5 s^{-1}(rad/sec)$$
$$S_3 = -10^5 s^{-1}$$

مكن أن تكون مراحل هذا المرشح كما هو مبين بالشكل التالي:



الشكل 10-13 مراحل (مقاطع) مرشح بتروورث ذو n=3.

حيث$H_3(s)$ توافق القطب s_3 و $H(s)$ توافق دارة العزل ويمكن أن تكون باعث لاحق emitter followcrs $H_{1,2}(s)$ دارة من الرتبة الثانية. وهكذا فإن الثابت الزمني time constant يكون لـ $H_3(s)$.

$$RC = 1/W_c = 10^{-5}\, sec$$

وباختيار $C = 10\, nF$:

$$\Rightarrow R = \frac{10^{-5}}{C} = 1\ K\Omega$$

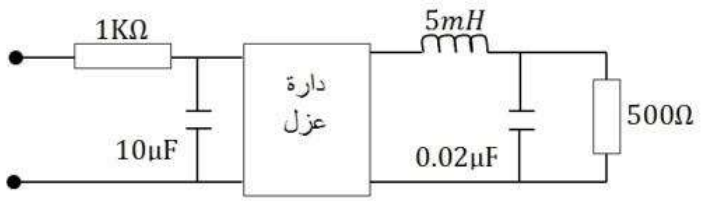
أما بالنسبة للمرحلة الثالثة $H_{1,2}(s)$ والتي هي دارة من المرتبة الثانية، سوف نختار المقاومة المستخدمة مقاومة الحمل R_L بالأخذ بالحسبان العلاقة (10-32) يكون لدينا:

$$-\mathrm{Re}S_{1,2} = \frac{1}{2R_L C} = 0.5 \times 10^5$$

$$\Rightarrow C = 1/10^5 . R_L = 0.02\mu F$$

$$L = \frac{1}{w_c^2 C} = 5mH$$

وباستخدام القيم السابقة نحصل على مرشح بتروورث المطلوب:



مثال 10-7: صمم مرشح تشيبتشيف ذا المعاملات التالية:$w_c = 10^5 sec^{-1},\ R_L = 1k\Omega, n = 2$ ومعامل التعرج $\varepsilon = 1$.

الحل: سوف نستخدم نفس الدارة المبينة الشكل 10-12(a) في ال

مثال **10-5** تم الحصول على أقطاب تابع التحويل لمرشح تشيبتشيف عند $n = 2$ و $\varepsilon = 1$ والتي هي:

$$S_{N1}, S_{N2} = -0.322 \pm j0.777$$

وللتحويل إلى أقطاب غير ممعيرة، أي الحصول على S_1 و S_2 نقوم بمايلي:

$$S_1, S_2 = (-0.322 \pm j0.777)w_c$$
$$= (-0.322 \pm j0.777) \times 10^5$$

في البداية سوف نقوم بإيجاد قيمة المكثفة C. بالأخذ بالحسبان الأقطاب السابقة والعلاقة (10-32) نحصل على قيمة α، أي:

$$\alpha = 1/2\, R_L C = 0.322 \times 10^5$$

ومنه

$$C = 15.53\ nF$$

ومن العلاقة (10-32) نجد:

$$\sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = 0.777 \times 10^5$$

$$\Longrightarrow w_0^2 = \frac{1}{LC} = 0.708 \times 10^{10}$$

$$\Longrightarrow L = 1/w_0^2 C = 9.09\, mH$$

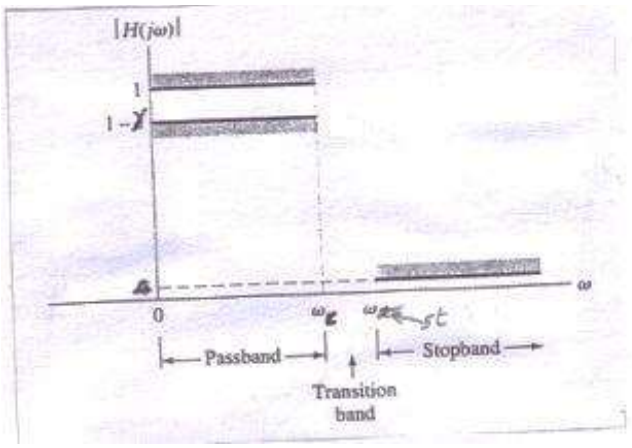
بالنظر إلى الشكل 10-6 والشكل 10-8 نلاحظ أنه في الإطار العام يمكن تمثيل الاستجابة الترددية لمرشح تمرير منخفض بالشكل 10-14. الذي يتألف من ثلاثة مجالات: مجال المرور ومجال العبور transition ومجال المنع stop-band. يوصف مجال المرور بالشكل التالي:

$$1 - \varepsilon \leq |H(jw)| \leq 1\,; \quad 0 \leq |w| \leq w_P$$

ومجال العبور له المجال الترددي $w_s - w_P$. أما مجال المنع فيمكن توصيفه بالشكل التالي:

$$|H(jw)| \leq \delta \quad ; \quad |w| \geq w_s$$

حيث كل من w_P و δ عبارة عن معاملي التسامح tolerance.



الشكل 10-14 منحني الاستجابة لمرشح تمرير منخفض عملي.

5.10 تحويلات التردد

تم تسليط الضوء في الفقرتين السابقتين على مرشح التمرير المنخفض مرشح بتروورث ومرشح تشيبتشيف سوف نسلط الضوء على تكوين مرشح تمرير الترددات العالية high-pass filter (HPF) ومرشح تمرير حزمة الترددات band-pass filter (BPF) الذين يمكن استخلاصهما من مرشح تمرير منخفض كما سوف نرى في هذ الفقرة.

1.5.10 الانتقال من مرشح تمرير منخفض LPF إلى مرشح تمرير عالي HPF

ما يهمنا هنا النقطتين $s = 0$ و $s = \infty$ في المستوي s. فعندما يكون $s = 0$ فإنه تتحدد النقطة المركزية (الوسطى) في المجال الترددي للحزمة القاعدية من أجل $|f|$. ومن أجل $s = \infty$ فإنه يحدد سلوك المرشح بعيداً عن الحزمة القاعدية حيث يكون لتابع التحويل للمرشح سلوك متقارب. لتلك النقطتين دور متبادل في كل من مرشح التمرير المنخفض ومرشح التمرير العالي. وبناءً على ما سبق يتم الانتقال من تابع التحويل لمرشح تمرير منخفض إلى تابع التحويل لمرشح تمرير عالٍ حسب العلاقة:

$$s \to \frac{w_{cH}}{s} w_{cL} \tag{33-10}$$

حيث w_{cL} تردد القطع لمرشح تمرير منخفض و w_{cH} تردد القطع لمرشح تمرير عالٍ. عند $w_{cL} = 1$ فإن العلاقة السابقة تصبح من الشكل:

$$s \to \frac{w_{cH}}{s} \tag{34-10}$$

وإذا كان $w_{cH} = w_{cL} = w_c$ فإن العلاقة (33-10) تصبح من الشكل التالي:

$$s \to \frac{w_c^2}{s} \tag{35-10}$$

مثال 10-8: لدينا تابع التحويل التالي:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

لمرشح بتورث منخفض التمرير ذي تردد قطع يساوي الواحد. أوجد تابع التحويل لمرشح تمرير عالٍ موافق ذي تردد القطع w_c.

الحل: باستخدام العلاقة (34-10) يكون لدينا:

$$\frac{1}{(\frac{w_c}{s})^2 + \sqrt{2}\frac{w_c}{s} + 1}$$

$$= \frac{s^2}{w_c^2 + \sqrt{2}w_c s + s^2}$$

في حال وجود معامل القطب $(s - P_i)$ في مرشح التمرير المنخفض $H(s)$ وبفرض $w_{cL} = 1$ فإننا نحصل على علاقة الانتقال باستخدام (34-10)، أي:

$$\frac{1}{s - P_i} = \frac{-s/P_i}{s - P} \tag{36-10}$$

لتوضيح ذلك لدينا:

$$\frac{1}{s - P_i} \rightarrow \frac{1}{\frac{w_c}{s} - P_i} \rightarrow \frac{s}{w_c - sP_i}$$

$$\rightarrow \frac{-s}{sP_i - w_c} \rightarrow \frac{-s/P_i}{s - w_c/P_i} = \frac{-s/P_i}{s - P};\ P = \frac{w_c}{P_i}$$

وبشكل مماثل إذا كان معامل الصفر $(s - z_i)$، فإن الانتقال يكون حسب العلاقة التالية:

$$\frac{s - w_c/z_i}{-s/z_i}$$

2.5.10 الانتقال من مرشح تمرير منخفض LPF إلى مرشح حزمة تمرير BPF

مرشح حزمة التمرير BPF يمرر حزمة الترددات حول تردد مركزي $w_0 \neq 0$ ويمنع كافة الترددات العالية $w = w_0 + \frac{1}{2}W$ والمنخفضة $w = w_0 - \frac{1}{2}W$ حيث W حزمة تمرير المرشح BPF بوحدة w أو w_0. بالاعتماد على ذلك التعريف فإن تابع تحويل مرشح التمرير $H(jw)$ يتميز بما يلي:

- $H(jw) = 0$ عند $w = 0$ و $w = \infty$.
- $H(jw) \cong 1$ ضمن حزمة التمرير W.

وبلغة المستوي s، فإن أصفار تابع التحويل تكون عند $s = 0$ و $s = \infty$ والأقطاب قرب $s = \pm w_0$ على محور jw في المستوي s. وبناءً على ذلك فإن الانتقال من مُرشح تمرير منخفض إلى مرشح حزمة تمرير BPF يتم حسب العلاقة:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + w_0^2}{ws} \tag{37-10}$$

مثال 10-9: لدينا مرشح التمرير المنخفض ذو تابع التحويل:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

المطلوب إيجاد تابع التحويل لمرشح حزمة تمرير ذو التردد المركزي $w_0 = 1$ والحزمة الترددية $W = 0.1$.

الحل: باستخدام العلاقة (10-37) نحصل على:

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{1}{\frac{s^2+w_0^2}{ws}+1} = \frac{ws}{s^2+ws+w_0^2} = \frac{0.1s}{s^2+0.1s+1}$$

6.10 مُسوي خط التأخير المفرع

سوف نركز الضوء في هذه الفقرة على الإرسال الخالي من التشوه distortion في نظم الـ LTI والتشوه الخطي، حيث هذين الموضوعين لابد من توضيحها قبل البدء في توضيح مبدأ مسوي خط التأخير المفرع.

1.6.10 الإرسال الخالي من التشوه

نعني بالإرسال الخالي من التشوه أن إشارة الخرج $y(t)$ صورة طبق الأصل عن إشارة الدخل في نظام LTI. باستثناء تقييس المطال وزمن التأخير الثابت. وهذا يعني رياضياً أن:

$$y(t) = Cx(t-t_0) \qquad (10\text{-}38)$$

حيث C ثابت و t_0 زمن التأخير في نظام LTI. بأخذ تحويل فوريه للعلاقة السابقة نحصل على:

$$Y(jw) = CX(jw)e^{-jwt_0} \qquad (10\text{-}39)$$

وبالتالي فإن الاستجابة الترددية لها الشكل التالي:

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = Ce^{-jwt_0} \qquad (10\text{-}40)$$

والاستجابة النبضية لها الشكل التالي:

$$h(t) = C\delta(t-t_0) \qquad (10\text{-}41)$$

أي نظام LTI يحقق (40-10) فهو نظام خالي من التشوه. من العلاقة (40-10) نجد:

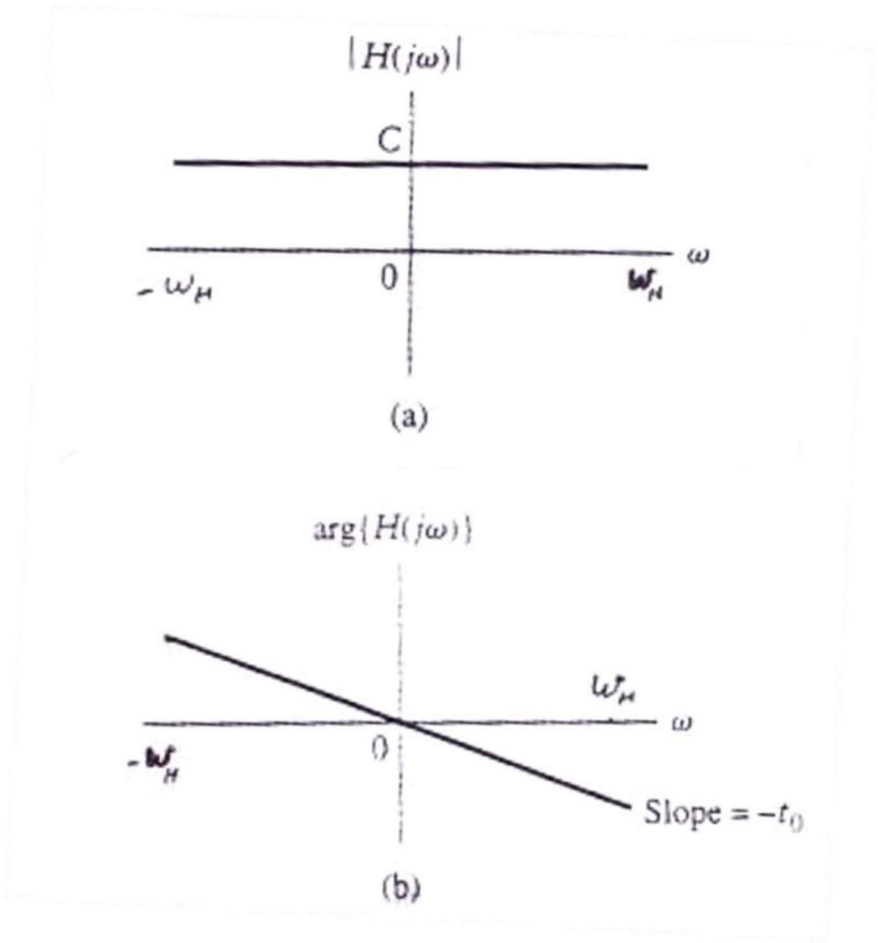
مقدار الاستجابة ثابت ضمن التردد المحدد، أي:

$$|H(jw)| = C \qquad (42\text{-}10)$$

الاستجابة الطورية $\angle H(jw)$خطية ضمن التردد المحدد مع ميل مقداره $-wt_0$ ويتقاطع في المنتصف مع إحداثيات الصفر، أي:

$$\angle H(jw) = -\mathrm{w}t_0 = arg\{H(jw)\} \qquad (43\text{-}10)$$

يوضح الشكل 10-15(a) العلاقة (42-10) والشكل 10-15(b) يوضح العلاقة (43-10) والمجال الترددي المحدد هو ضمن $\pm w_H$.



الشكل 10-15 (a) الاستجابة المطالية (b) الاستجابة الطورية.

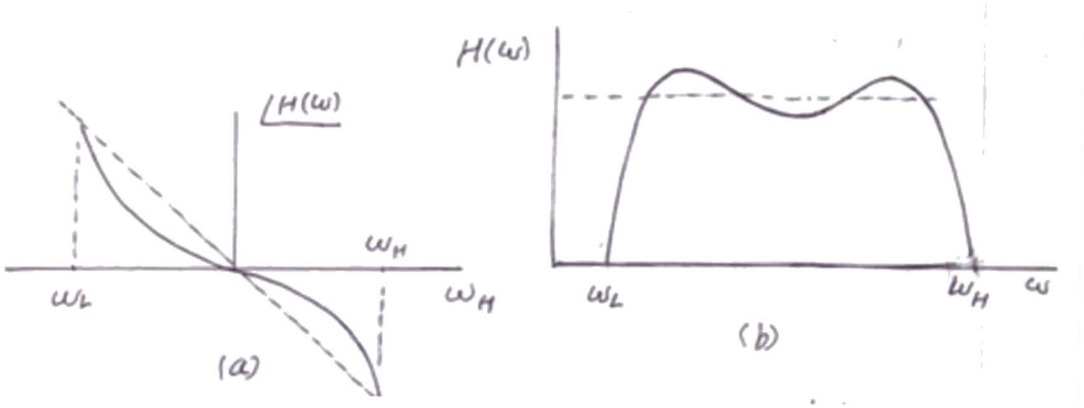
2.6.10 التشوه الخطي

نظام الإرسال الخالي من التشوه الذي نوقش في الفقرة الجزئية السابقة هو عبارة عن نظام إرسال مثالي غير قابل للتحقيق العملي، وهذا واضح من الشكل 10-15. نحاول عند تصميم النظم القابلة للتحقيق العملي أن نقترب قدر الإمكان من الحالة المثالية. عملياً، يمكن أن نلاحظ نوعين من التشوه الخطي: التشوه المطالي والتشوه الطوري.

التشوه المطالي: يحدث التشوه المطالي عندما تكون الاستجابة المطالية للنظام غير ثابتة ضمن المجال الترددي المرغوب. عند ذلك مركبات إشارة الدخل للنظام (نظام الإرسال) سوف تتعرض للاختلاف في التضخيم والتخميد، وذلك حسب موقعها ضمن المجال الترددي المرغوب. نسمي ذلك الأثر على الإشارة بالتشوه المطالي amplitude distortion.

التشوه الطوري:

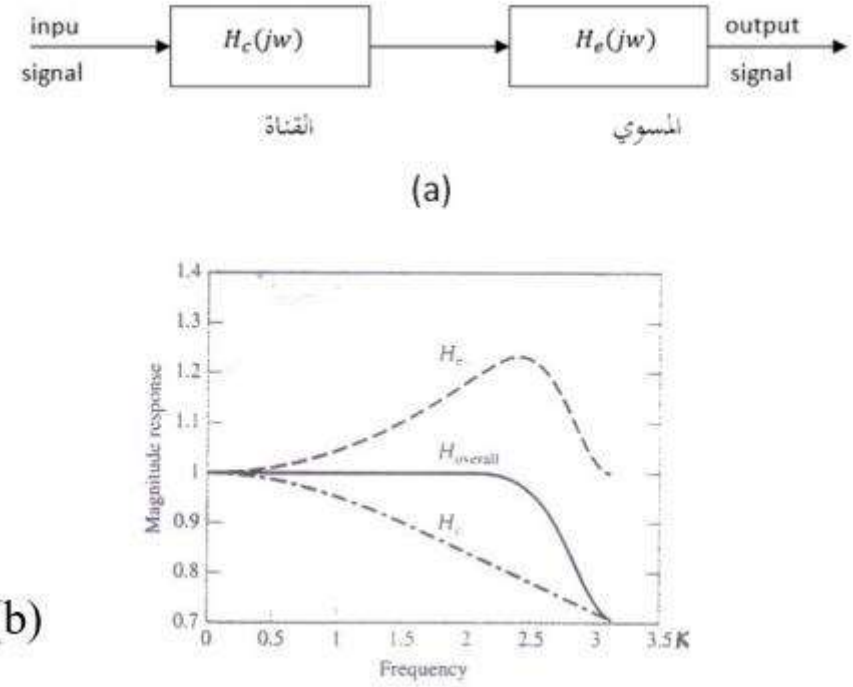
يحدث هذا التشوه عندما تكون الاستجابة الطورية للنظام غير خطية ضمن المجال الترددي المرغوب. وهذا يناقش كما يلي: إذا قُسم المجال الترددي لإشارة الدخل إلى مجالات ترددية ضيقة، فإننا نلاحظ تعرضها (أي تعرض كل مجال ترددي ضيق) إلى تأخير مختلف، وذلك بسبب عدم خطية الاستجابة الطورية مما يسبب اختلاف إشارة الخرج عن إشارة الدخل. هذا التشوه الخطي يُسمى بتشوه التأخير أو تشوه الطور phase distortion. يوضح الشكل 10-16 الاستجابة المطالية والطورية لنظام عملي (القناة). لاحظ عدم ثبات الاستجابة المطالية وعدم خطية الاستجابة الطورية.



الشكل 10-16 (a) الاستجابة الطورية (b) الاستجابة المطالية.

3.6.10 التسوية

من أجل تعويض التشوه الخطي في القناة (النظام) يستخدم مرشح يُسمى بالمسوي equalizer وذلك بالتسلسل مع القناة، وذلك كما هو واضح في الشكل 10-17(a) ويتم تصميم المسوي بحيث نحصل على مواصفات قريبة من القناة المثالية الشكل 10-17(b).



الشكل 10-17 (a) تسلسل القناة مشوه $H_c(jw)$ مع المسوي $H_e(jw)$ (b) الاستجابة المطالية للقناة المشوهة $H_c(jw)$ والمسوي (jw) والمجموع الكلي $H_{overall}(jw)$.

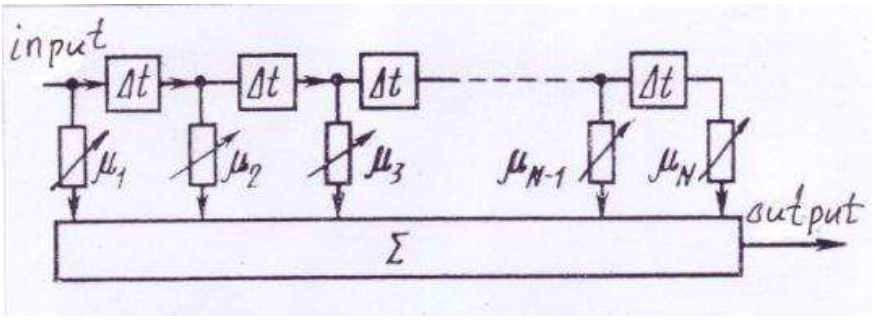
ليكن لدينا قناة اتصالات ذات استجابة ترددية $H_c(jw)$ والاستجابة الترددية للمسوي $H_e(jw)$ وهكذا فإن الاستجابة الكلية في الشكل 10-17(a) تكون:

$$H_c(jw)H_e(jw) = e^{-j\omega t_0}$$
$$H_e(jw) = \frac{1}{H_c(jw)} e^{-j\omega t_0} \quad (44\text{-}10)$$

حيث t_0 تأخير زمني لضرورة التحقيق العملي. لاحظ العلاقة العكسية بين المسوي والقناة. من أجل تصميم المسوي يمكن استخدام دارات تماثلية والأفضل هو استخدام دارات رقمية (متقطعة discrete).

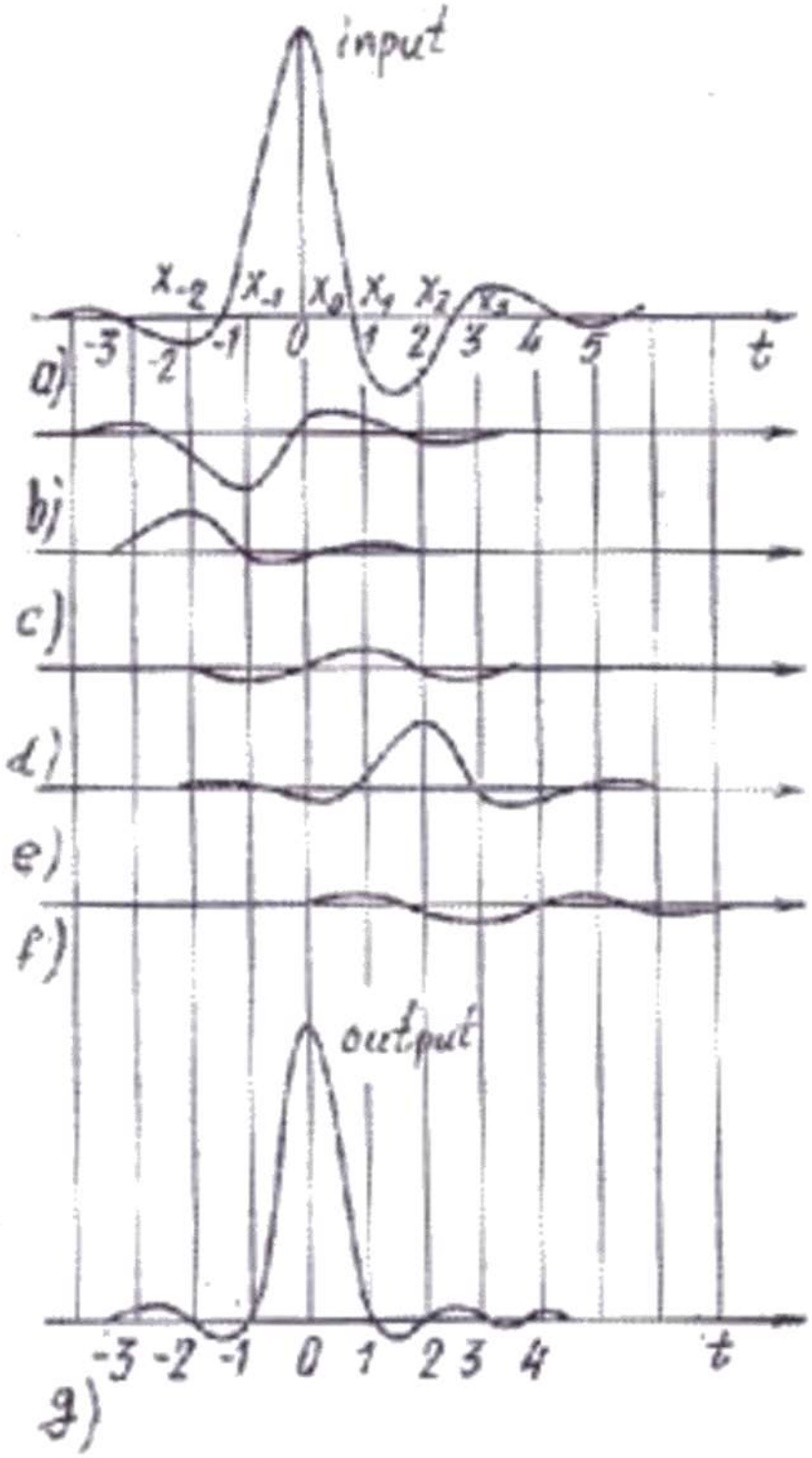
4.6.10 استخدام دارات تماثلية في التصميم

كون الاستجابة النبضية المشوهة على خرج القناة ذات انتشار طويل نسبياً كما هو واضح في الشكل 10-19(a) فإنه من المناسب استخدام الدارة المبينة بالشكل 10-18، التي تتألف من خط تأخير مع مقاومات متغيرة متفرعة من خط التأخير بالإضافة إلى جامع تماثلي. وظيفة تلك الدارة أن نحصل على إشارة الاستجابة النبضية الشكل 10-17(a) خالية تقريباً من التشوه وذلك كما هو واضح في الشكل 10-19(g). نظرياً حتى نتخلص من التشوه، والذي ينتج من تداخل الإشارات، يجب أن يكون طول خط النقل لانهائي وهذا لا يمكن تحقيقه عملياً. ولكن عملياً تؤخذ عدد من التفرعات كحل وسط بين الأداء والتعقيد.



الشكل 10-18 مسوي تماثلي.

في الشكل 10-19 عدد التفرعات هو خمسة. حيث يمثل الشكل 10-19(a) الاستجابة النبضية المشوهة للقناة وتمثل الأشكال (b) و(c) و(d) و(e) و(f) خرج التفرعات الخمسة.

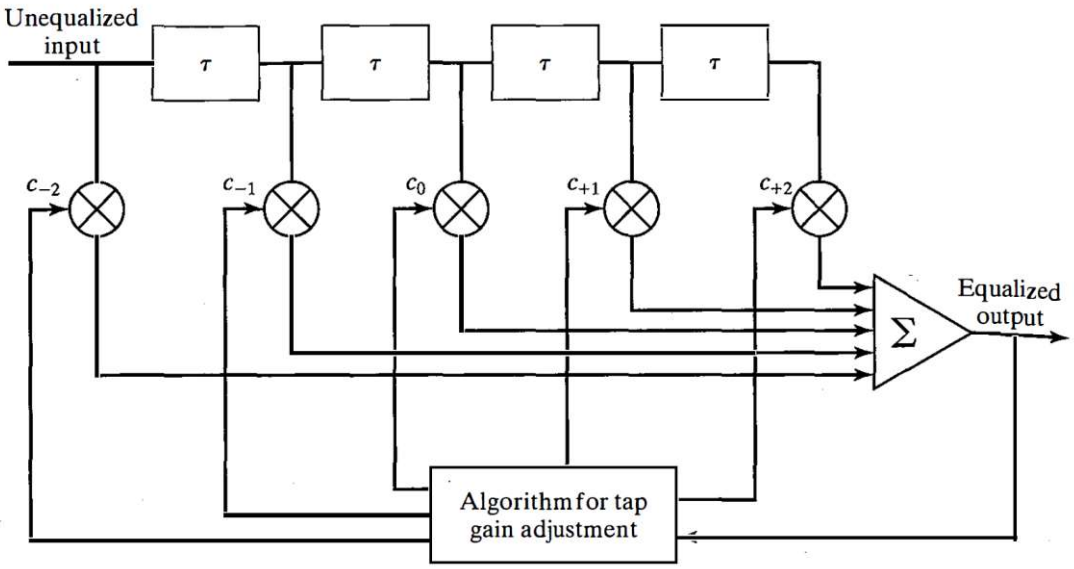


الشكل 10-19 (a) الاستجابة المشوهة للقناة (b) خرج الفرعات الخمسة (g) خرج المسوي.

أما الشكل 10-19(g) فيمثل خرج المسوي وهي استجابة خالية تقريباً من التشوه وهي عبارة عن مجموع كافة الأشكال في الشكل 10-19.

5.6.10 استخدام دارات رقمية في التصميم

يمكن اقتراح الشكل 10-20 كشكل رقمي موافق لما في الشكل 10-18 الذي يسمى مسوي خط التأخير المفرع tapped-delay-line-equalizer الذي يتألف من وحدات تأخير متسلسلة وتأخير كل منها τ. بالإضافة لضوارب وجامع ووحدة إضافية للتحكم (خوارزمية حساب المعاملات c_i)، وذلك لضبط الربح أو التخميد في كل فرعة، للحصول على استجابة نبضية غير مشوهة على الخرج. أنظر الشكل 10-19(g).



الشكل 10-20 مسوي خط التأخير المفرع.

الاستجابة النبضية للمسوي، هي:

$$h_e(t) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, \delta(t - n\tau) \qquad (45\text{-}10)$$

حيث τ زمن التأخير، وعادة يؤخذ بطول نصف عرض الرمز T وتؤخذ N كحل وسط بين الأداء الجيد (زيادة N) والتعقيد (خفض N). بزيادة N نُوسع من مجال إزالة التشوه، وهكذا نقترب من الحل الأفضل. الاستجابة الترددية للمسوي هي عبارة عن تحويل فورييه للعلاقة (45-10) أي:

$$H_e(f) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, e^{-j2\pi f n\tau} \tag{46-10}$$

حيث C_n معاملات المسوي والتي عددها $2N+1$ (في الشكل 10-20 أُخذت $N=2$) بفرض $x(t)$ الإشارة النبضية على خرج القناة فإن خرج المسوي يكون:

$$q(t) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, x(t - n\tau) \tag{47-10}$$

حيث $x(t)$ الاستجابة النبضية لمل من مرشح الارسال والقناة ومرشح الاستقبال والشكل النبضي المتقطع للعلاقة السابقة هو:

$$q(mt) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, x(mt - n\tau), \; m = 0, \pm 1, \dots, \pm N \tag{48-10}$$

وبما أنه لدينا $2N+1$ معامل للمسوي، لذلك يمكننا التحكم بـ $q(mt)$ فقط من أجل $2N+1$ قيمة. ومن أجل الحصول على استجابة نبضية خالية من التشوه (انظر الشكل 10-19(g)) يجب أن تتحقق العلاقة التالية:

$$q(mt) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, x(mt - n\tau) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m = \pm 1, \pm, .., \pm N \end{cases} \tag{49-10}$$

بحل المعادلات السابقة والتي عددها $2N+1$ أي نفس عدد المعاملات، فإنه يمكن الحصول على قيم المعاملات اللازمة (المطلوبة). والتي تجعل الاستجابة النبضية على خرج المسوي خالية تقريباً من التشوه وذلك ضمن الفترة الزمنية الموافقة للمجال (الطول) $2N+1$.

مسائل الفصل العاشر

10-1- أوجد استجابة مرشح حزمة تمرير منخفض LPF وذلك للنبضة التالي:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases}$$

10-2- لدينا مرشح بتروورث بتردد قطع 10 KHz. عند الانتقال من 80 KHz إلى 160 KHz يزداد التخامد بمقدار 36dB-. المطلوب إيجاد درجة المرشح.

10-3- أوجد تابع التحويل لمرشح بتروورث ذي الدرجة 4.

10-4- لدينا مرشح تشيبتشيف ذي معامل تعرج 0.3 ما هو معامل التعرج لنفس المرشح عند $w_N < 1$.

10-5- أوجد تابع التحويل لمرشح تشيبتشيف من أجل الدرجة 2 ومعامل تعرج 0.5.

10-6- أوجد أقطاب تابع التحويل لمرشح تشيبتشيف ذو الدرجة n=3 وتردد قطع $w_c = 4 \times 10^4 sec^{-1}$ ومعامل تعرج 0.5.

10-7- أوجد الاستجابة النبضية لكلا مرشحي بتروورث وتشيبتشيف من الدرجة الثانية n=2.

10-8- لدينا مسوي خط التأخير المفرغ ذو الاستجابة الترددية الموضحة في العلاقة التالية:

$$H_e(jw) = \sum_{-N}^{+N} C_n \, e^{-j2\pi f n \tau}$$

نعلم أن هذا المسوي يمكنه تعويض التشوه الخطي وذلك بجعل N كبير بشكل كافٍ. ماهي الكلفة المدفوعة بزيادة 2N+1 ؟ مع تعليل الإجابة.

11 الإشارات والنظم المتقطعة

Discrete signals and systems

1.11 مقدمة

تُعرف الإشارة المتقطعة في أماكن زمنية محددة، وموزعة بشكل منتظم زمنياً. وبالتالي المتحول المستقل له قيم متقطعة فقط في الأماكن الموزعة بشكل منتظم. من الأمثلة على ذلك: التعداد السكاني المنتظم (خلال عدد محدود من السنوات) أو قراءة عداد الكهرباء أو المياه بشكل شهري منتظم أو كمية المحصول السنوي لمنتج ما أو عدد خريجي الجامعة سنوياً أو قياس قيمة فيزيائية عند أزمنة معينة أو أخذ العينات بشكل منتظم من إشارة مستمرة $x(t)$ بدور T_s، أي $x(t = nT_s)$ حيث n عدد صحيح. وللتبسيط سوف نعبر عن ذلك بالشكل التالي:

$$x[n] = x[nT_s]; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وهكذا فإن الإشارة المتقطعة يمكن التعبير عنها بـ $x[n]$.

سوف نتعرض في هذا الفصل لتصنيف الإشارات المتقطعة والعمليات الاساسية على الإشارات والإشارات الأولية ومن ثم النظم وخواص النظم.

2.11 تصنيف الإشارات المتقطعة

هناك معايير كثيرة لتصنيف الإشارات المتقطعة. وتبعاً لتلك المعايير فإن أهم الأصناف المستخدمة عملياً هي: إشارات زوجية أم فردية، إشارات دورية أم غير دورية، إشارات محددة أم عشوائية، إشارة قدرة أم إشارة استطاعة. وفيما يلي سوف نسلط الضوء بشيء من التفصيل على تلك الأصناف.

1.2.11 الإشارة الزوجية والإشارة الفردية

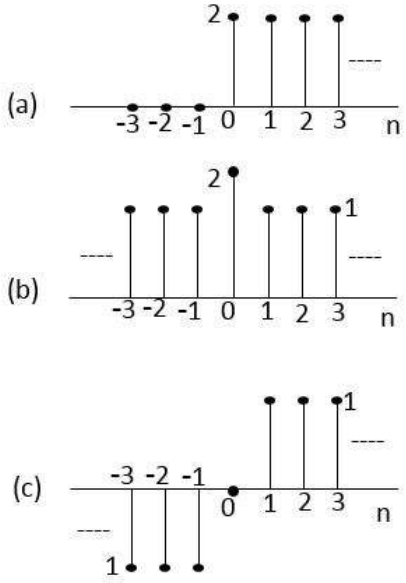
تتميز الإشارة الزوجية even بكونها ذات تناظر زوجي، أي:

$$x[-n] = x[n] \qquad (1\text{-}11)$$

وذلك كما هو واضح في الشكل 11-1(b). وتتميز الإشارة الفردية بكونها ذات تناظر فردي odd، أي:

$$x[-n] = -x[n] \qquad (2\text{-}11)$$

وذلك كما هو واضح في الشكل 11-1(c). تجدر الإشارة هنا أن الإشارة الفردية تساوي الصفر عند $n = 0$.



الشكل 11-1 (a) الإشارة $x[n]$ (b) الإشارة $x_e[n]$ (c) الإشارة $x_0[n]$.

وبشكل مشابه للإشارات التماثلية (الفصل الثاني)، يمكن أن تكتب بالشكل المتقطع:

$$x[n] = x_e[n] + x_0[n] \tag{3-11}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}([x[n] + x[-n]) \tag{4-11}$$

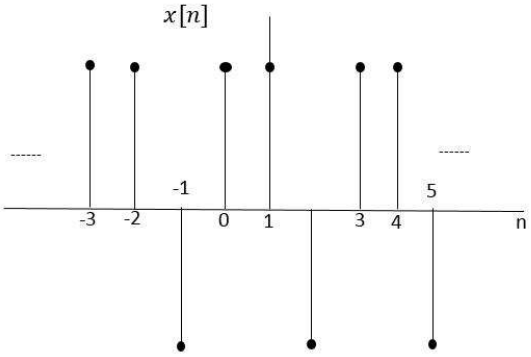
$$x_0[n] = \frac{1}{2}([x[n] - x[-n]) \tag{5-11}$$

2.2.11 الإشارة الدورية والإشارة غير الدورية

ذكرنا في فقرة سابقة أن الإشارة المتقطعة تكون دورية إذا تحققت العلاقة التالية:

$$x[n + N_0] = x[n]\ ;\ \forall n \tag{6-11}$$

حيث N_0 عدد صحيح موجب ويسمى الدور أو الدور الاساسي، والإشارة التي لا تحقق العلاقة السابقة تسمى إشارة متقطعة غير دورية. يبين الشكل 11-2 إشارة دورية متقطعة بدور يساوي $N_0 = 3$، ويبين الشكل 11-1 إشارات غير دورية.



الشكل 11-2 إشارة متقطعة دورية ذات $N_0 = 3$.

3.2.11 الإشارة المحددة والإشارة العشوائية

في أي لحظة زمنية n توجد قيمة محددة للإشارة المحددة، مثال على ذلك الإشارات المبينة في الشكل 11-1 والشكل 11-2، بالمقابل لا يمكن تحديد قيمة الإشارة العشوائية في أي لحظة زمنية، وإنما يمكن تحديد قيمتها الوسطى. وهذا النوع من الإشارات خارج موضوع هذا الكتاب.

4.2.11 إشارة القدرة وإشارة الاستطاعة

بتحويل التكامل في علاقة القدرة إلى مجموع نحصل على قدرة الإشارة المتقطعة $x[n]$ والتي هي:

$$E = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad (7\text{-}11)$$

وبشكل مشابه بتحويل التكامل في العلاقة الاستطاعة إلى مجموع نحصل على متوسط استطاعة الإشارة المتقطعة $x[n]$، أي:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \qquad (8\text{-}11)$$

وبالنسبة لإشارة دورية متقطعة ذات دور N فإن متوسط الاستطاعة تكون:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \tag{9-11}$$

نقول إن الإشارة هي إشارة قدرة، إذا وفقط كانت القدرة الكلية للإشارة المتقطعة منتهية، أي:

$$0 < E < \infty \tag{10-11}$$

ونقول إن الإشارة هي إشارة استطاعة، إذا وفقط إذا كانت متوسط الاستطاعة للإشارة المتقطعة منتهية، أي:

$$0 < P < \infty \tag{11-11}$$

يتضح من التصنيف السابق (وهو الأكثر انتشاراً)، أن الإشارة قد تكون إشارة قدرة أو إشارة استطاعة. متوسط الاستطاعة لإشارة القدرة تساوي الصفر. مثال على ذلك الإشارة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

واضح أن $E = 2$ و $P = 0$. إن قدرة إشارة الاستطاعة تساوي لانهاية، مثال على ذلك الإشارة المعرفة بالعلاقة $x[n] = 3, \forall n$. وتجدر الملاحظة هنا أن الإشارة الدورية والإشارة العشوائية هي إشارات استطاعة بينما الإشارة المحددة وغير الدورية فهي إشارة قدرة.

3.11 العمليات الاساسية على الإشارات

يمكن تصنيف العمليات operations التي تجرى على الإشارة إلى صنفين: الصنف الأول العمليات على متحولات غير مستقلة مثل عملية التقييس المطالي وعملية الجمع وعملية الجداء. والتصنيف الآخر، عمليات تجرى على متحولات مستقلة مثل عملية التقييس الزمني وعملية قلب الإشارة reflection بالإضافة إلى عملية الإزاحة الزمنية.

1.3.11 عملية التقييس المطالي

هي عبارة عن ضرب ثابت c بالإشارة المتقطعة $x[n]$، أي:

$$y[n] = C\, x[n] \tag{12-11}$$

2.3.11 عملية الجمع

هي عبارة عن جمع إشارتين متقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ للحصول على الإشارة $y[n]$، أي:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (13\text{-}11)$$

3.3.11 عملية الجداء

عبارة عن جداء $x_1[n]$ بـ $x_2[n]$، أي:

$$y[n] = x_1[n]x_2[n] \quad (14\text{-}11)$$

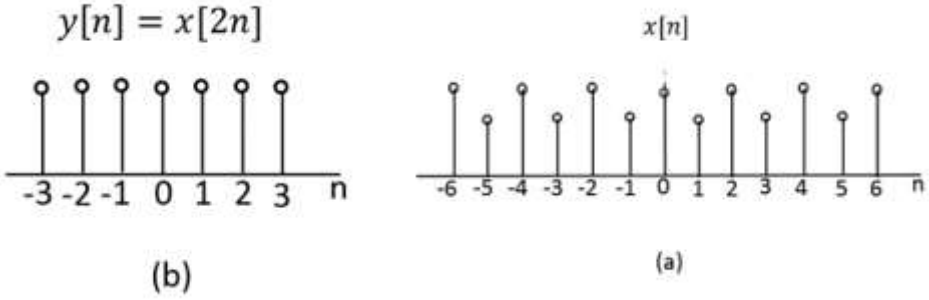
والآن ننتقل لتعريف العمليات التي تجرى على متحولات مستقلة.

4.3.11 عملية التقييس الزمني

في هذه العملية نستبدل المتحول الزمني n بمتحول آخر هو kn حيث $k > 0$. وبهذا يتم ضغط الإشارة $x[n]$ إلى الإشارة

$$y[n] = x[kn] \quad (15\text{-}11)$$

لكون $k > 0$. يبين الشكل 11-3 الإشارة المتقطعة $x[n]$ والصيغة المضغوطة بمقدار العامل $k = 2$، أي $y[n] = x[2n]$ وبسبب عملية الضغط هناك ضياع في بعض قيم $x[n]$.



الشكل 11-3 (a)الإشارة $x[n]$ (b) الإشارة $y[n]$.

5.3.11 عملية قلب الإشارة

عملية قلب الإشارة تتم باستبدال n بـ $-n$ ، أي:

$$y[n] = x[-n] \qquad (16\text{-}11)$$

تجدر الإشارة هنا، أنه عندما يتحقق $x[n] = x[-n]$ فهذا يعني أن الإشارة $x[n]$ هي عبارة عن إشارة زوجية. وإذا تحقق $x[-n] = -x[n]$ فهذا يعني أن الإشارة $x[n]$ هي عبارة عن إشارة فردية.

مثال 11-1: أوجد قيم الإشارة $y[n] = x[n] + x[-n]$ علماً بأن:

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -1, & n = -1 \\ 0, & n = 0, \text{ or } |n| > 1 \end{cases}$$

الحل: عند $n = -1$ يكون لدينا:

$$y[-1] = x[-1] + x[1] = -1 + 1 = 0$$

وعند $n = 1$ يكون لدينا:

$$y[1] = x[1] + x[-1] = 1 - 1 = 0$$

وعند $n = 0$ أو $|n| > 1$ فإن $y[n = 0, |n| > 1] = 0$ ومنه يكون لدينا $y[n] = 0$ من أجل جميع قيم n.

6.3.11 عملية الإزاحة الزمنية

العلاقة التي تحقق الإزاحة الزمنية لها الشكل التالي:

$$y[n] = x[n - m]; \qquad m: integer \qquad (17\text{-}11)$$

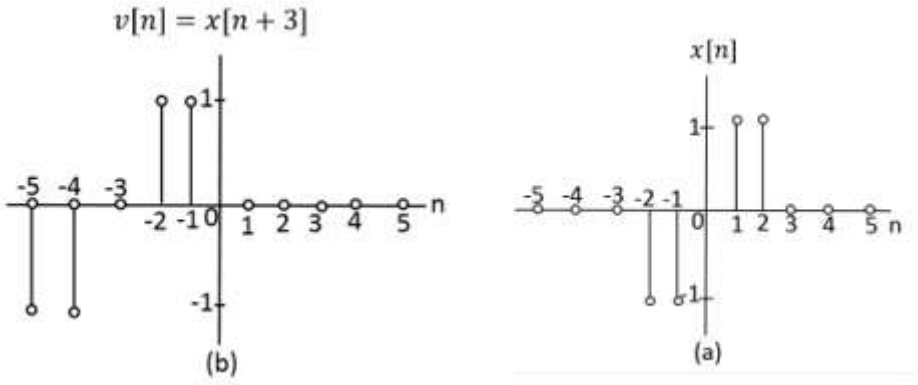
أي إزاحة $x[n]$ بمقدار $|m|$ نحو اليمين بفرض $m > 0$ أو نحو اليسار بفرض $m < 0$

مثال 11-2: لدينا الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 1,2 \\ -1 & n = -1,-2 \\ 0 & n = 0 \wedge |n| > 2 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد $y[n] = x[n+3]$.

الحل: يوضح الشكل 11-4(a) الإشارة المتقطعة $x[n]$. ويوضح الشكل 11-4(b) إزاحة $x[n]$ بمقدار 3 نحو اليسار.



الشكل 11-4 (a) الإشارة $x[n]$ (b) الإشارة المزاحة $x[n+3]$.

4.11 بعض الإشارات الأساسية

سوف نسلط الضوء على الإشارات الأولية، والتي هي بحد ذاتها يمكن أن تكون نموذجاً لإشارات فيزيائية متأصلة في الطبيعة. ومن أهم تلك الإشارات هي: الإشارات الأسية exponential والإشارات الجيبية المتخامدة damped وتابع الخطوة وتابع النبضة وتابع التصاعد الخطي ramp.

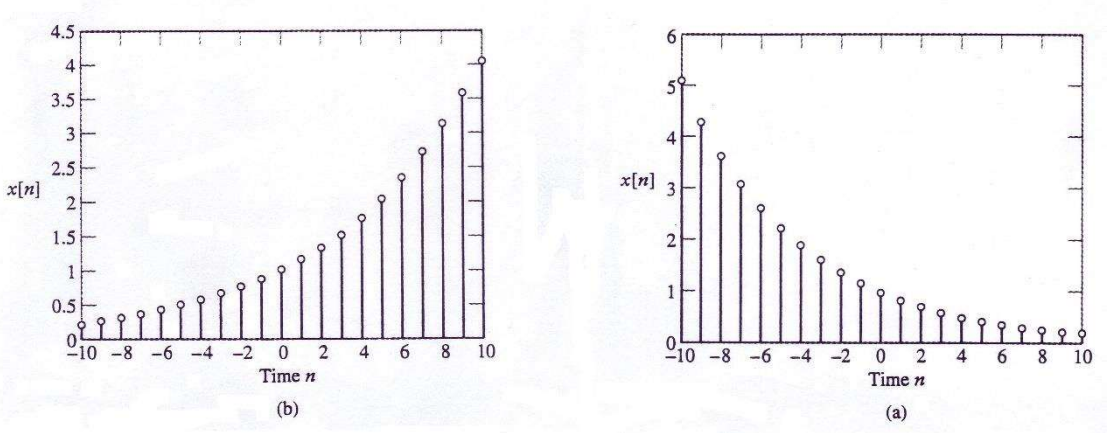
1.4.11 الإشارات الأسية

عادة تعطى الإشارة الأسية بالشكل التالي:

$$x[n] = Br^n \qquad (18\text{-}11)$$

حيث B و $r = e^{\alpha}$ عبارة عن معاملات الإشارة. إذا كانت $0 < r < 1$ نحصل على إشارة ذات تخامد أسي الشكل 11-5(a)، وإذا كانت $r > 1$ نحصل على إشارة بتصاعد أسي كما في الشكل 11-5(b). أما إذا كانت $r < 0$ فإن قيمة r^n تتبدل بين قيمة موجبة عند n زوجية وقيمة سالبة عند n فردية.

يمكن الحصول على إشارة أُسية عقدية إذا كان أحد المعاملين B أو r أو كلاهما ذات قيم عقدية. والإشارة الأسية العقدية الاكثر شيوعاً هي $e^{j\Omega n}$ حيث Ω التردد الزاوي الأساسي fundamental angular frequency أو التردد الأساسي.



الشكل 11-5 (a) إشارة أسية متخامدة (b) إشارة أسية متصاعدة.

2.4.11 الإشارة الجيبية

الصيغة المتقطعة للإشارة الجيبية لها الشكل التالي:

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \varphi) \qquad (19\text{-}11)$$

حيث A المطال وφ الطور وΩ التردد الزاوي أو التردد الأساسي. الإشارة المتقطعة يمكن أن تكون دورية أو غير دورية. حتى تكون الإشارة دورية يجب أن تحقق العلاقة (11-6) من أجل كل قيم n بتعويض $n + N_0$ بدلاً من n في العلاقة (11-19) نحصل على:

$$x[n + N_0] = Acos(\Omega n + \Omega N_0 + \varphi)$$

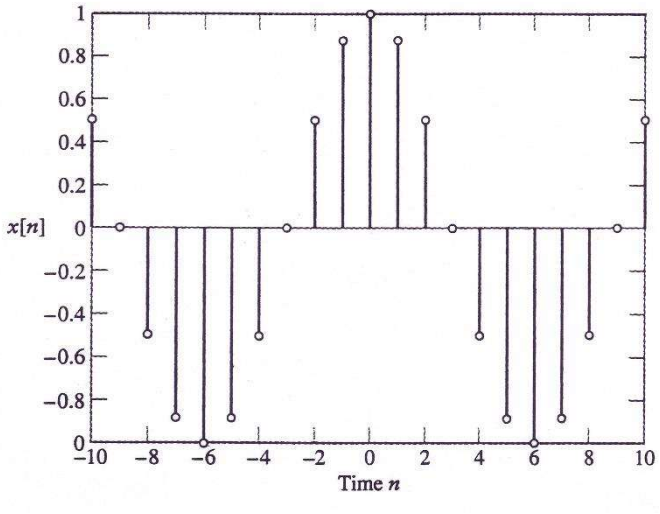
حتى تتحقق العلاقة (11-6) تتطلب أن يكون:

$$\Omega N_0 = 2\pi m$$

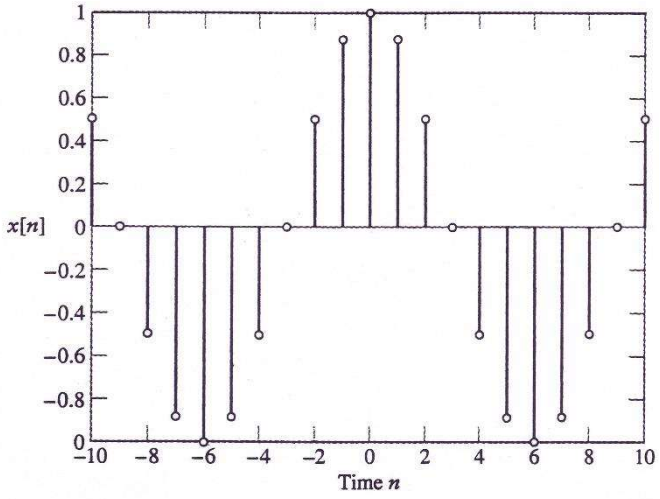
أو

$$\Omega = \frac{2\pi m}{N_0}\ rad/cycle \qquad (20\text{-}11)$$

حيث m و N_0 أعداد صحيحة. لاحظ أن وحدة المقدار ΩN_0 هي راديان وذلك لكونها زاوية. وبما أن N_0 عدد العينات المحتواة في دور واحد، فإن المقدار Ω يقاس بالراديان في الدور (العلاقة (20-11)). يوضح



الشكل 11-6 شكل الإشارة (19-11) من أجل قيم المعاملات التالية $A = 1$ و$\varphi = 0$ و $N_0 = 12$.



الشكل 11-6 إشارة جيبية متقطعة.

مثال 11-3: لدينا الإشارتان الجيبيتان المتقطعتان التاليتان:

$$x_1[n] = \sin(3\pi n)$$

$$x_2[n] = \sqrt{3}\cos(3\pi n)$$

المطلوب: إيجاد (a) الدور الأساسي(b) وضع الإشارة:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

حسب الشكل التالي:

$$y[n] = A\cos(\Omega n + \varphi)$$

مع حساب كل من المطال A والطور φ.

الحل:(a) التردد الزاوي لكلا الإشارتين هو:

$$\Omega = 3\pi \ \ radian/cycle$$

وباستخدام العلاقة (11-20) يكون لدينا:

$$N_0 = \frac{2\pi m}{\Omega} = \frac{2\pi m}{3\pi} = \frac{2m}{3}$$

حتى تكون الإشارتان $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دوريتين، N_0 يجب أن تكون عدداً صحيحاً موجباً. وهذا يتحقق عندما تكون $m = 3,6,9, \ldots$ وبالنتيجة نحصل على $N_0 = 2,4,6, \ldots$.

(b) من المتطابقات الهندسية نعلم أن:

$$A\cos(\Omega n + \varphi) = A\cos(\Omega n)\cos(\varphi) - A\sin(\Omega n)\sin(\varphi)$$

أي يجب تحقيق ما يلي:

$$A\cos(3\pi n)\cos(\varphi) - A\sin(3\pi n)\sin(\varphi) =$$

$$= \sin(3\pi n) + \sqrt{3}\cos(3\pi n)$$

بالمطابقة نجد أن:

$$A\sin(\varphi) = -1, \qquad A\cos(\varphi) = \sqrt{3}$$

ومنه $$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

أي أن $\varphi = -\pi/6$ راديان.

بالتعويض في $A\sin(\varphi) = -1$ نجد

$$A = -\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2$$

وهكذا يكون لدينا:

$$y[n] = 2\cos(3\pi n - \frac{\pi}{6})$$

والآن نوجد العلاقة بين الإشارة الجيبية والإشارة الأسية العقدية $Be^{j\Omega n}$ حيث $B = Ae^{j\varphi}$. من متطابقة أويلر Euler نعلم أن:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \qquad (21\text{-}11)$$

وهذا يعني أن:

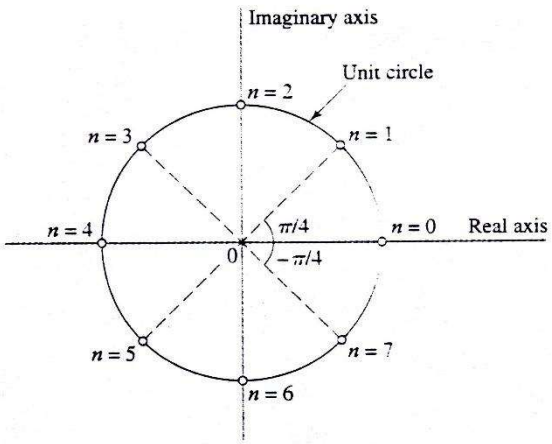
$$Ae^{j(\Omega n+\varphi)} = A\cos(\Omega n + \varphi) + jA\sin(\Omega n + \varphi)$$

ومنه:

$$A\cos(\Omega n + \varphi) = R_e\{Be^{j\Omega n}\} \qquad (22\text{-}11)$$

$$A\sin(\Omega n + \varphi) = I_m\{Be^{j\Omega n}\} \qquad (23\text{-}11)$$

يمثل الشكل 11-7 التابع الأسي العقدي $e^{j\Omega n}$ من أجل $\Omega = \pi/4$ و $n = 0 \dots 7$. القيمة $\cos(\Omega n)$ عبارة عن مسقط كل نقطة (n) على المحور الحقيقي والقيمة $\sin(\Omega n)$ عبارة عن مسقط كل نقطة (n) على المحور التخيلي.



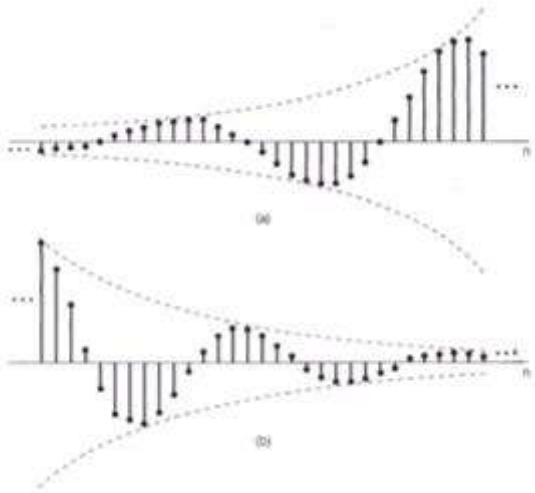
الشكل 11-7 توزع ثماني النقاط بشكل منتظم على محيط الدائرة.

3.4.11 الإشارة الجيبية المتخامدة أسياً

الإشارة الجيبية المتخامدة أسياً، هي عبارة عن جداء الإشارة الجيبية $\cos(\Omega n + \varphi)$ والإشارة الأسية Br^n، أي:

$$x[n] = Br^n \cos[\Omega n + \varphi] \qquad (24\text{-}11)$$

عندما يكون $0 < |r| < 1$ فإن الإشارة $x[n]$ تتخامد. وعندما يكون $|r| > 1$ فإن الإشارة $x[n]$ تكون متصاعدة وذلك كما هو واضح في الشكل 11-8.

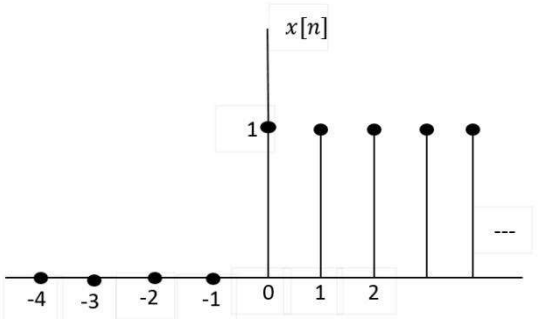


الشكل 11-8 (a) إشارة متصاعدة (b) إشارة متخامدة.

4.4.11 تابع الخطوة يُعرف تابع الخطوة بالشكل التالي:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (25\text{-}11)$$

ويوضح الشكل 11-9 تابع الخطوة، حيث المطال يساوي الواحد.



الشكل 11-9 تابع الخطوة أو إشارة الخطوة بمطال يساوي الواحد.

5.4.11 تابع النبضة الواحدية

يُعرف تابع النبضة الواحدية unit impulse بالشكل التالي:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (26\text{-}11)$$

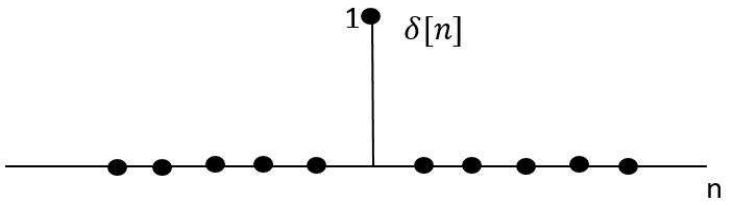
ويمكن الحصول عليه من تابع الخطوة، حسب العلاقة التالية:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (27\text{-}11)$$

ويمكن الحصول على تابع الخطوة، وذلك بجمع تابع النبضة الواحدية مع الإزاحة، أي:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\,[n-k] \quad (28\text{-}11)$$

واضح أن $u[n]$ تساوي الصفر "0" من أجل $n < 0$ وتساوي الواحد "1" من أجل $n \geq 0$. يوضح الشكل 11-10 تابع النبضة الواحدية.



الشكل 11-10 النبضة الواحدية.

يمكن استخدام النبضة الواحدية من أجل أخذ العينات للإشارة $x[n]$.

6.4.11 تابع التصاعد الخطي

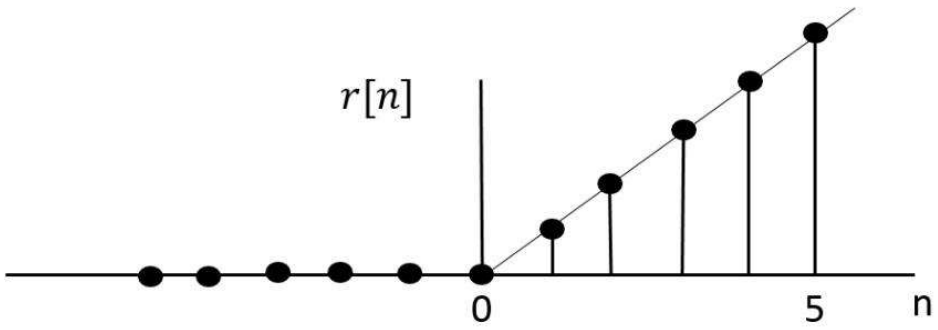
يعرف تابع التصاعد الخطي بالشكل التالي:

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (29\text{-}11)$$

أو

$$r[n] = n.u[n] \quad (30\text{-}11)$$

يوضح الشكل 11-11 تابع التصاعد الخطي.



الشكل 11-11 تابع التصاعد الخطي.

5.11 النظام

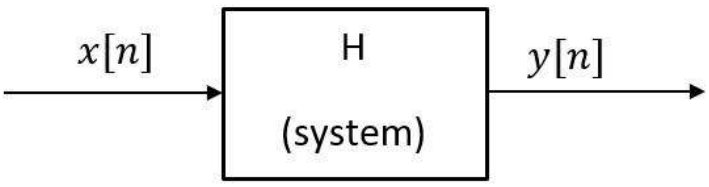
النظام الفيزيائي، هو عبارة عن مجموعة مكونات متصلة (مترابطة) مع بعضها البعض، تستجيب لإشارة الدخل. وبالنتيجة نحصل على إشارة خرج النظام، التي تختلف عن إشارة الدخل. فعلى سبيل المثال، المذياع عبارة عن نظام يلتقط الأمواج الكهرطيسية (إشارة الدخل) ويحولها إلى أمواج (إشارة) صوتية والتي هي إشارة الخرج.

باستخدام المصطلح الرياضي، النظام هو ترابط مجموعة عمليات، يمكن التعبير عنها بالعامل H operator . بتطبيق الإشارة المتقطعة $x[n]$ على دخل النظام نحصل على خرج النظام $y[n]$ ، أي:

$$y[n] = H\{x[n]\} \qquad (31\text{-}11)$$

يوضح الشكل 11-12 المخطط الوظيفي (الصندوقي) لنظام ذي العامل H والدخل $x[n]$ والخرج $y[n]$. بفرض العامل H يقوم بإزاحة إشارة الدخل $x[n]$ بمقدار k إزاحة نحو اليمين نحصل على إشارة الخرج

$y[n] = x[n-k]$. هذا يعني أن $H = S^k$ أي $S^{(1)}$ عبارة عن إزاحة واحد و $S^{(2)}$ عبارة عن إزاحتين.



الشكل 11-12 نظام متقطع.

مثال 11-4: ليكن لدينا النظام التالي:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

الذي يسمى نظام الوسطي المنزلق moving average system، وذلك لأن $y[n]$ هي القيمة الوسطى لقيم العينات $x[n]$ و $x[n-1]$ و $x[n-2]$. وأن قيمة $y[n]$ تتغير بتحرك (إنزلاق) n. المطلوب:

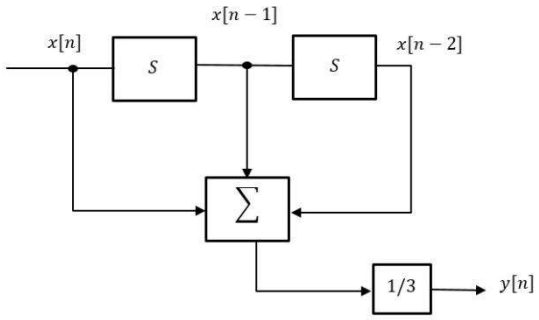
(1) إيجاد قيمة العمل H.

(2) رسم المخطط الوظيفي للنظام.

الحل:(1) كما ذكرنا سابقاً، بما أن $S^{(1)} = S$ تعبر عن إزاحة واحدة أي $x[n-1]$ و$S^{(2)}$ تعبر عن إزاحتين متتاليتين، أي $S^{(2)} = x[n-2]$ والواحد يعبر عن الحالة الحالية فإن:

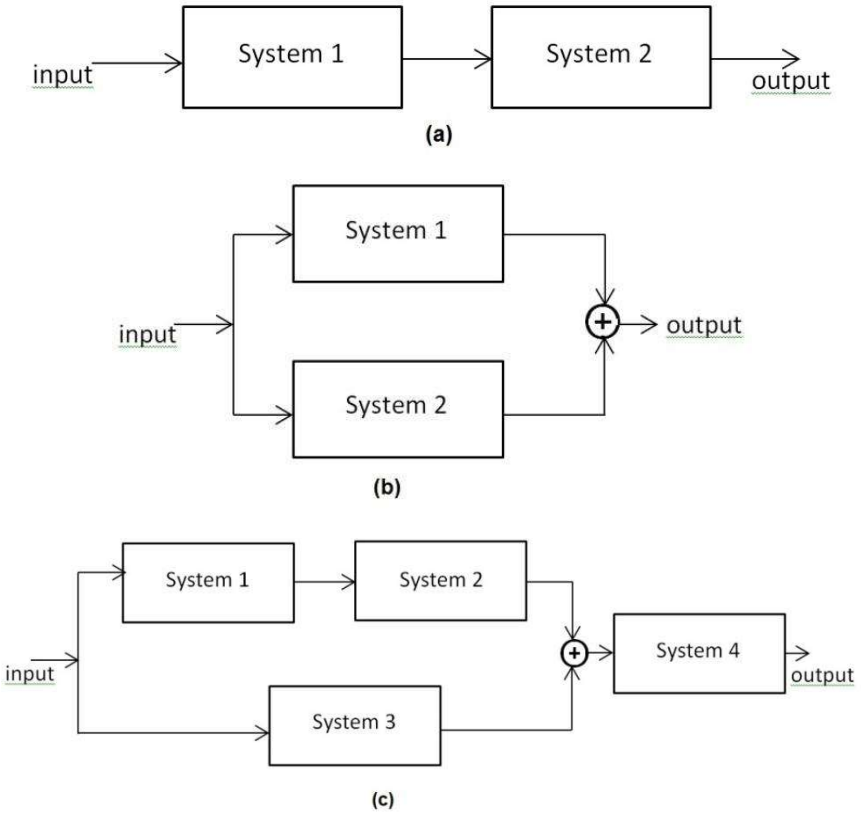
$$H = \frac{1}{3}(1 + s^{(1)} + s^{(2)})$$

(2) يبين الشكل 11-13 المخطط الوظيفي للنظام، الذي يتألف من وحدتي إزاحة S وجامع بالإضافة لضارب بالمعامل 1/3.



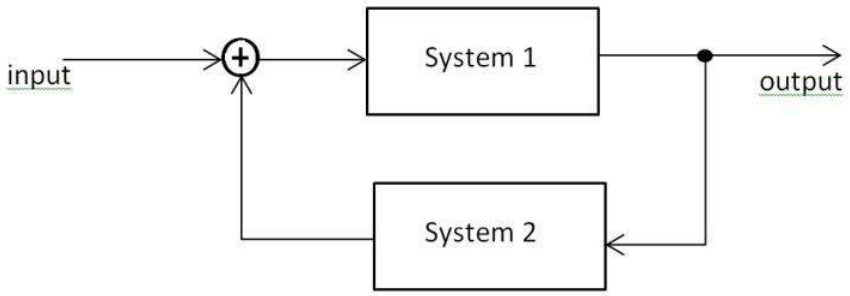
الشكل 11-13 نظام الوسطي المنزلق.

النظم المعقدة نسبياً تتكون من مجموعة أنظمة مترابطة، بشكل تسلسلي كما هو الحال في الشكل 11-14(a) أو بشكل تفرعي كما في الشكل 11-14(b) أو بشكل مختلط كما هو الحال في الشكل 11-14(c). الإشارة + تعني الجمع.



الشكل 11-14 (a) ربط تسلسلي (b) ربط تفرعي (c) ربط مختلط.

من النظم الهامة أيضاً النظم ذات الوصلة العكسية (أو التغذية العكسية) وذلك كما واضح في الشكل 11-15 حيث خرج النظام الأول يربط مع دخل النظام الثاني، وخرج النظام الثاني يجمع (أو يُطرح حسب الوظيفة) بتغذية عكسية مع دخل النظام الكلي. ونظم التغذية العكسية منتشرة بشكل واسع في نظم التحكم.



الشكل 11-15 نظام تغذية عكسية.

6.11 خواص النظم

سوف نقدم في هذه الفقرة خواص النظم المتقطعة، التي تتميز بتأويلات فيزيائية هامة، وتوصف رياضياً بعلاقات بسيطة.

1.6.11 الاستقرار

نقول إن النظام مستقر، إذا وفقط إذا كان أي دخل محدود يؤدي إلى خرج محدود. ويمكن أن نصيغ ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \quad \forall\, n \tag{32-11}$$

$$|y[n]| \leq M_y < \infty \quad \forall\, n \tag{33-11}$$

حيث $|x[n]|$ مطال الدخل، $|y[n]|$ مطال الخرج، M_x و M_y القيم المطلقة العظمى للدخل والخرج. ما يهمنا في النظم الهندسية أن تكون مستقرة في كل حالات العمل الممكنة.

مثال 11-5: بيّن أن نظام الوسطي المنزلق المذكور في مثال 11-4 هو نظام مستقر.

الحل: نعلم أن العلاقة بين الدخل $x[n]$ والخرج $y[n]$ هي من الشكل التالي:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

وبأخذ القيمة المطلقة لكلا الطرفين نجد:

$$|y[n]| = \frac{1}{3}|x[n] + x[n-1] + x[n-2]|$$

$$\leq \frac{1}{3}(|x[n]| + |x[n-1]| + |x[n-2]|)$$

$$\leq \frac{1}{3}(M_x + M_x + M_x) \; = M_x$$

أي أن القيمة المطلقة لإشارة الخرج $y[n]$ دوماً أصغر من القيمة المطلقة العظمى لإشارة الدخل. وبالتالي فإن النظام مستقر.

2.6.11 ذاكرة النظام

نقول أن النظام بذاكرة، إذا كانت إشارة الخرج تابعة لقيم سابقة أو لاحقة لإشارة الدخل. نظام الوسطي المنزلق:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

الذي ذكر في مثال 11-4 هو عبارة عن نظام بذاكرة. وذلك لكون إشارة الخرج في اللحظة n تابعة لقيمتين سابقتين لإشارة الدخل $x[n-1]$ و $x[n-2]$.

نقول أن النظام دون ذاكرة، إذا كانت إشارة الخرج تابعة فقط للقيمة الحالية لإشارة الدخل. مثال على ذلك النظام التالي:

$$y[n] = n^3[n]$$

3.6.11 السببية

نقول إن النظام سببي causal إذا كانت قيمة الخرج الحالية تابعة لقيمة الدخل الحالية والقيم السابقة. مثال على ذلك النظام الوسطي المنزلق والموصف بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

ونقول أن النظام غير سببي non-causal إذا كانت قيمة الخرج الحالية تابعة لقيمة أو اكثر من قيم إشارة الدخل المستقبلية. مثال على ذلك النظام الوسطي المنزلق والموصف بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

هو نظام غير سببي وذلك لأن الخرج تابع لقيمة مستقبلية لإشارة الدخل والتي هي $x[n+1]$.

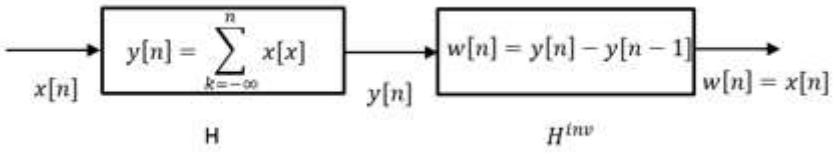
مثال 11-6: بين متى يكون النظام المثالي سبباً ومتى يكون غير سببي.

$$y[n] = x[-n]$$

الحل: نلاحظ أن النظام سببي عند $n \geq 0$ مثل $y[3] = x[-3]$، أي أن الخرج تابع لقيمة سابقة لإشارة الدخل $x[-3]$. ويكون النظام غير سببي عند $n < 0$ مثل $y[-3] = x[3]$، أي أن الخرج تابع لقيمة مستقبلية لإشارة الدخل $x[3]$.

4.6.11 العكوسية

نقول أن النظام عكوس invertible إذا أمكن استخلاص إشارة الدخل من إشارة خرجه. لنفرض مجموعة العمليات اللازمة لاستخلاص إشارة الدخل، يقوم بها نظام آخر متصل مع النظام الأول بالتسلسل بحيث يكون خرجه عبارة عن دخل النظام الأول، وذلك كما هو واضح في الشكل 11-16.



الشكل 11-16 نظام عكوس.

بفرض عامل operator النظام الأول هو H، وعامل النظام الثاني هو H^{inv} كما هو واضح في الشكل 11-16، عند ذلك يكون لدينا:

$$y[n] = H\{x[n]\}$$
$$H^{inv}\{y[n]\} = H^{inv}\{H\{x[n]\}\}$$
$$= H^{inv}H\{x[n]\}$$

واضح من العلاقة السابقة، حيث يكون خرج النظام الثاني مطابق لدخل النظام الأول، يجب أن يتحقق:

$$H^{inv}H = I \qquad (34\text{-}11)$$

حيث I عامل الواحدية identity operator و H^{inv} يسمى العامل العكسي inverse والنظام الموافق يسمى النظام العكسي. حتى يكون النظام عكوساً يجب أن يكون لكل إشارة دخل مختلفة إشارة خرج مختلفة وبتطابق واحد إلى واحد.

مثال 11-7: بيّن أن النظام التالي غير عكوس

$$y[n] = x^2[n]$$

الحل: واضح أن النظام غير عكوس، لأن دخلين مختلفين $x[n]$ و $-x[n]$ يؤديان إلى نفس الخرج.

خواص العكوسية على درجة من الأهمية في تصميم نظم الاتصالات. من الأمثلة على النظم العكوسة، المرمز والمعدل والقناة. حيث النظام العكسي للمرمز هو نظام كاشف الترميز، والنظام العكسي للمعدل هو نظام كاشف التعديل، والنظام العكسي للقناة هو المسوي. الذي يقوم بتسوية التشوهات التي سببتها خواص القناة على الاستجابة الترددية للقناة.

5.6.11 عدم التغيير مع الزمن

نقول أن النظام غير متغير مع الزمن إذا كان سلوك النظام وخواصه غير متغيرة مع الزمن، أي ثابتة مع الزمن. وبكلمة أخرى، إجراء نفس التجربة على النظام في أزمنة مختلفة، سوف تعطي نفس النتائج. وخلاف ذلك فإن النظام متغير مع الزمن.

وبلغة الإشارة والنظام، أي إزاحة في دخل النظام تسبب نفس الإزاحة بخرج النظام. وهذا يعني أن النظام غير متغير مع الزمن. إذا كان دخل النظام هو $x[n]$ فإن خرج النظام هو $y[n]$ وإذا كان دخل النظام $x[n-n_0]$ فإن خرج النظام هو $y[n-n_0]$.

مثال 11-8: ليكن لدينا النظام التالي:

$$y[n] = \sin(x[n])$$

بين أن النظام غير متغير مع الزمن.

الحل: ليكن دخل النظام $x_1[n]$ وليكن خرج النظام

$$y_1[n] = \sin(x_1[n]) \qquad (35\text{-}11)$$

وليكن الدخل $x_2[n]$ من الشكل:

$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \qquad (36\text{-}11)$$

عند ذلك فإن الخرج الموافق يكون

$$y_2[n] = \sin(x_2[n]) = \sin(x_1[n-n_0]) \qquad (37\text{-}11)$$

وبشكل مشابه للعلاقة (11-35)، يكون لدينا:

$$y_1[n-n_0] = \sin(x_1[n-n_0])$$

وهكذا فإن $y_2[n] = y_1[n-n_0]$ وبالتالي فإن النظام غير متغير مع الزمن.

6.6.11 الخطية

نقول أن النظام خطي إذا حقق كلا الخاصيتين التاليتين:

الخاصية التراكبية superposition والتجانسية homogeneity.

7.6.11 الخاصية التراكبية

ليكن دخل النظام $x[n] = x_1[n]$، والخرج الموافق $y[n] = y_1[n]$. وكذلك الدخل $x[n] = x_2[n]$، والخرج الموافق $y[n] = y_2[n]$. نقول أن النظام يحقق خاصية التراكبية إذا كان الدخل $x_1[n] + x_2[n]$ يؤدي إلى الخرج $y_1[n] + y_2[n]$.

5.6.11 الخاصية التجانسية

لنفرض أن إشارة الدخل $x[n]$ تؤدي إلى إشارة الخرج $y[n]$، وليكن لدينا عامل التقييس scaling factor الثابت a (يمكن ان يكون عقدياً). نقول أن النظام يحقق خاصية التجانسية إذا كان الدخل $ax[n]$ يؤدي إلى الخرج $ay[n]$.

يمكن أن نجمع الخاصيتين السابقتين بعلاقة واحدة، أي:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \qquad (38\text{-}11)$$

حيث a و b ثوابت. في الحالة العامة فإن الدخل:

$$x[n] = \sum_k^N a_k\, x_k[n] \qquad (39\text{-}11)$$

يؤدي إلى الخرج:

$$y[n] = \sum_k^N a_k\, y_k[n] \qquad (40\text{-}11)$$

تجدر الملاحظة أنه يمكن أن يكون النظام خطياً دون أن يكون غير متغير مع الزمن، ويمكن أن يكون النظام غير متغير مع الزمن دون أن يكون خطياً.

مثال 11-9: ليكن لدينا النظام التالي:

$$y[n] = nx[n]$$

بين أن النظام خطي.

الحل: بفرض إشارة الدخل العلاقة (11-39)، أي

$$x[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i\, x_i[n]$$

عند ذلك يكون الخرج

$$y[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y_i[n]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i\, nx_i[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y_i[n]$$

حيث: $y_i[n] = nx_i[n]$. واضح من الخرج أن النظام خطي.

مثال 11-10: بين أن النظام التالي:

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

هو نظام غير خطي.

الحل: بفرض $x_1[n] = 2$ و $x_2[n] = 3$ يكون لدينا:

$$x_1[n] \to y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9$$

$$\Longrightarrow y_1[n] + y_2[n] = 16$$

الاستجابة لـ $x_1[n]+x_2[n]$ هي $2[x_1[n]+x_2[n]]+3=13$ ومنه فإن النظام غير خطي لأن $13 \neq 16$ علماً بأن $y[n]=2x[n]+3$ هي علاقة خطية.

مسائل الفصل الحادي عشر

11-1 بيّن فيما إذا كانت الإشارات التالية دورية أم لا. وإن كانت دورية فما هو الدور الأساسي.

$$x[n] = (-1)^n \qquad x[n] = (-1)^{n^2}$$

$$x[n] = cos(2n) \qquad x[n] = cos(2\pi n)$$

11-2 صنّف الإشارات التالية، بيّن إشارة قدرة وإشارة استطاعة. ومن ثم أوجد قدرة الإشارة أو متوسط الاستطاعة.

$$x[n] = \begin{cases} n & ; \ 0 \le n \le 5 \\ 10 - n & ; \ 5 \le n \le 10 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} \sin(\pi n) & ; \ 0 \le n \le 4 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n) & ; \ -4 \le n \le 4 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n) & ; \ n \ge 0 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases}$$

11-3 لدينا الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & ; \ n = 1 \\ -1 & ; \ n = -1 \\ 0 & ; \ n = 0 \wedge |n| > 1 \end{cases}$$

أوجد الإشارة المركبة التالية: $y[n] = x[n] + x[-n]$.

11-4 لدينا الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & ; \ n = 1,2 \\ -1 & ; \ n = -1,-2 \\ 0 & ; \ n = 0 \wedge |n| > 2 \end{cases}$$

أوجد الإشارة المزاحة التالية: $y[n] = x[\,n + 3]$.

11-5 أوجد التركيبة $y[n] = x[2n + 3]$ للإشارة المتقطعة في المسألة السابقة.

6-11 باستخدام تابعي خطوة $u[n]$ وصّف الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases}$$

7-11 ليكن لدينا النظام المتقطع التالي:

$$y[n] = r^n x[n]$$

حيث $x[n]$ هي الدخل، و$y[n]$ هي الخرج، و $r > 1$. بين أن هذا النظام غير مستقر.

8-11 لدينا النظام التالي:

$$y[n] = x[n]x[n-2]$$

هل هذا النظام عديم الذاكرة؟ هل هذا النظام عكوس؟

9-11 لدينا النظام التالي:

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

حيث n_0 عدد صحيح موجب.

هل هذا النظام خطي؟ هل هذا النظام غير متغير مع الزمن؟

12 تحويل فوريه المتقطع بالزمن

Discrete-Time Fourier Transform

تعرفنا في الفصل الرابع على تحويل فورييه للإشارات المستمرة بالزمن وغير الدورية، وقمنا بدراسة العديد من خواص هذا التحويل، مما جعله ذا قيمة هامة في تحليل وفهم خواص الإشارة المستمرة، والنظم الخطية المستمرة وغير المتغيرة مع الزمن LTI. في هذا الفصل سوف نستكمل الأدوات الأساسية في تحليل فورييه وذلك بتقديم تحويل فورييه المتقطع بالزمن Discrete-Time Fourier Transform (DTFT). الذي يستخدم الإشارات المتقطعة بالزمن وغير الدورية. وذلك من أجل تحليل أثر الإشارة المتقطعة بالزمن على النظم الخطية المتقطعة بالزمن وغير المتغيرة مع الزمن LTI. حيث ينقل هذا التحليل الإشارات والنظم من المجال الزمني إلى المجال الترددي، الأكثر ملائمة لتوصيف النظم في العديد من التطبيقات.

1.12 تحويل فورييه المتقطع بالزمن

نعرف تحويل فورييه المتقطع بالزمن DTFT (Discrete-Time Fourier Transform) من أجل إشارة متقطعة $x[n]$ بالعلاقة:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \qquad (1\text{-}12)$$

وهو تابع للتردد الزاوي ω وهو دوري بدور أساسي قدره 2π. يرتبط التردد الزاوي ω بالتردد الرقمي المقيس ν بالعلاقة $\omega = 2\pi\nu$. ومن الجدير بالذكر أن ν بلا وحدة لأنه تردد مقيس بالنسبة لتردد التقطيع كما رأينا في فصل التقطيع والتكمية ويكون ω بوحدة الراديان (rad).

وبشكل مكافئ، يمكن التعبير عن تحويل فورييه للإشارة المتقطعة بدلالة التردد الرقمي المقيس ويشار إليه بالرمز $\tilde{x}(\nu)$ ويعطى بالعلاقة:

$$\tilde{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi jn\nu} \qquad (2\text{-}12)$$

وكلا التعريفين السابقين متكافئان، حيث من السهل الانتقال بين أحدهما إلى الآخر باستخدام إحدى العلاقتين:

$$\tilde{x}(\nu) = \tilde{X}(2\pi\nu)$$

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{x}(\frac{\omega}{2\pi})$$

إن التابع $\tilde{x}(\nu)$ هو تابع مستمر (غير متقطع) ودوري للمتحول ν أي قابل للنشر بسلسلة فورييه. ويمكن النظر إلى علاقة تحويل فورييه لهذا التابع على أنها النشر بسلسلة فورييه حيث تكون أمثال النشر هي قيم الإشارة المتقطعة $x[n]$، أي أن تحويل فورييه العكسي هو العلاقة التي تعطي أمثال نشر فورييه:

$$x[n] = IDTFT[\tilde{x}(\nu)] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}(\nu) e^{+2\pi jn\nu}\, d\nu \qquad (3\text{-}12)$$

يمكن أخذ التكامل السابق على دور ترددي آخر طوله 1 مثلاً $[0,1]$.

أو انطلاقاً من تحويل فورييه بدلالة التردد الزاوي يكون التحويل العكسي هو:

$$x[n] = IDTFT[\tilde{X}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{X}(\omega) e^{+jn\omega}\, d\omega \qquad (4\text{-}12)$$

يمكن أيضاً أخذ التكامل السابق على دور تردد زاوي آخر طوله 2π مثلاً $[0,2\pi]$.

مثال 12-1: لتكن لدينا الإشارة المتقطعة التالية

$$y[n] = a^n u[n]$$

حيث a ثابت ذو مطال أصغر من الواحد أي $|a| < 1$.

لنحسب تحويل فورييه لهذه الإشارة. حسب التعريف نجد:

$$\tilde{Y}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

وهي سلسلة متقاربة لأن $|a| < 1$ ويكون مجموعها معطى بالعلاقة:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

جدول 12-1تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT لبعض الإشارات الشهيرة.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-jn_0\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{jn\omega_0}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$a^n u[n]\,;\ \ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1]\,;\ \ \lvert a\rvert>1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$(n+1)a^n u[n];\lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$\cos n\omega_0$	$\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

2.12 خواص تحويل فوريه المتقطع بالزمن

سنعرض فيما يلي أهم الخواص التي يتمتع بها تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT.

1.2.12 الدورية

إن تحويل فوريه لإشارة متقطعة$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi jn\nu}$ هو تابع دوري ودوره يساوي 1 ومن ثم يكفي تعريفه على مجال من الترددات ν طوله 1 $\left(\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right[\right.$ أو $[0,1[$ مثلاً). أما إذا اعتبرنا التعريف $\widetilde{X}(\omega)=$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jn\omega}$ لتحويل فوريه، وقد رأينا سابقاً العلاقة بين $\tilde{x}(\nu)$ و $\widetilde{X}(\omega)$، فإننا نعلم أن التابع $\widetilde{X}(\omega)$ دوري ودوره 2π ويمكن لتمثيله الاكتفاء بدور واحد، أي تعريفه على مجال من الترددات الزاوية ω طوله 2π $([-\pi,+\pi[$ أو $[0,2\pi[$ مثلاً).

الخطية

إذا كان لدينا الإشارتان المتقطعتان $x_1[n]$ و $x_2[n]$ وكان $\tilde{X}_1(\omega)$ و $\tilde{X}_2(\omega)$ تحويلا فورييه لهما على الترتيب، أي:

$$x_1[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{X}_1(\omega)$$
$$x_2[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{X}_2(\omega)$$

وإذا كانت λ_1 وλ_2 ثوابت عقدية فإن:

$$\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n] \xrightarrow{DTFT} \lambda_1 \tilde{X}_1(\omega) + \lambda_2 \tilde{X}_2(\omega) \qquad (5\text{-}12)$$

أي أن تحويل فورييه لأي تركيب خطي من الإشارات المتقطعة يعطي نفس التركيب الخطي لتحويلات فورييه لهذه الإشارات المتقطعة.

2.2.12 عكس الزمن

إذا قمنا بعكس الإشارة المتقطعة $x[n]$ حسب المحور الزمني، أي إذا كان:

$$y[n] = x[-n] \qquad (6\text{-}12)$$

فإن تحويل فورييه لها هو معكوس تحويل فورييه للإشارة الأصلية وفق محور التردد، أي أن:

$$\tilde{Y}(\omega) = \tilde{X}(-\omega) \qquad (7\text{-}12)$$

وبالتالي، إذا كانت الإشارة زوجية فإن تحويل فورييه لها يكون زوجياً، وإذا كانت الإشارة فردية فإن تحويل فورييه لها يكون فردياً.

3.2.12 المرافق العقدي

إذا أخذنا المرافق العقدي لإشارة ما، أي:

$$y[n] = x^*[n] \qquad (8\text{-}12)$$

فإن تحويل فورييه للإشارة الجديدة هو:

$$\tilde{Y}(\omega) = \tilde{X}^*(-\omega) \qquad (9\text{-}12)$$

ومنه نلاحظ أنه إذا كانت الإشارة المتقطعة حقيقية فإن تحويل فورييه لها يحقق خاصة التناظر الترافقي أو الهرميتي (Hermitian symmetry)، وهذا يعني أن المطال زوجي والطور فردي أو أن القسم الحقيقي لتحويل فورييه لها يكون زوجياً بينما يكون القسم التخيلي فردياً.

4.2.12 الانزياح الزمني والانزياح الترددي

إذا قمنا بتطبيق إزاحة زمنية للإشارة $x[n]$ بمقدار n_0 ، أي إذا كان:

$$y[n] = x[n - n_0] \tag{10-12}$$

حيث n_0 هو مقدار الإزاحة الزمنية وهو عدد صحيح، فإن:

$$\tilde{Y}(\omega) = e^{-j\omega n_0}\tilde{X}(\omega) \tag{11-12}$$

وبالمقابل إذا قمنا بضرب الإشارة بالزمن بإشارة أسية عقدية بتردد قدره ω_0، أي إذا كان:

$$y[n] = e^{jn\omega_0}x[n] \tag{12-12}$$

حيث ω_0 مقدار الإزاحة الترددية وهو ثابت حقيقي ويكفي اختياره في المجال $[-\pi, +\pi]$ فإن:

$$\tilde{Y}(\omega) = \tilde{X}(\omega - \omega_0) \tag{13-12}$$

وتسمى هذه الخاصة الأخيرة بخاصة التعديل (modulation). ومن ذلك نستنتج أن الضرب بإشارة أسية عقدية في مجال الزمني أو الترددي يقابل انزياح في المجال الآخر، والعكس صحيح.

5.2.12 جداء التلاف المتقطع

إذا أخذنا جداء التلاف في المستوي الزمني لإشارتين متقطعتين $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$، فإن تحويل فورييه للإشارة الناتجة $x[n]$ هو ناتج الجداء الداخلي بين تحويلي فورييه لكل من الإشارتين في المجال الترددي. أي إذا كان:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k] \tag{14-12}$$

فإن:

$$\tilde{X}(\nu) = \tilde{X}_1(\omega).\tilde{X}_2(\omega) \qquad (15\text{-}12)$$

وهي خاصة مفيدة جداً في تسهيل معالجة الإشارة. فبدلاً من إجراء جداء التلاف في المستوي الزمني (والتي هي عملية معقدة حسابياً) فيمكن إجراء تحويل فورييه للإشارتين للانتقال إلى المجال الترددي ومن ثم إجراء الجداء العادي (وهي عملية أبسط بكثير من عملية جداء التلاف) ومن ثم العودة إلى المجال الزمني باستخدام تحويل فورييه المعاكس. وبالتالي يتم إنجاز عملية جداء التلاف باستخدام عملية تحويل فورييه وجداء عادي، ثم تحويل فورييه العكسي وفي كثير من الأحيان يكون التعقيد الحسابي لكل هذه العمليات أقل من التعقيد الحسابي لعملية جداء التلاف.

6.2.12 جداء إشارتين

إن تحويل فورييه لجداء إشارتين هو جداء تلاف لتحويلي فورييه. إذا كان:

$$y[n] = x_1[n].x_2[n] \qquad (16\text{-}12)$$

فإنَّ:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}_1(\nu) * \tilde{x}_2(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(u).\tilde{x}_2(\nu - u)du \qquad (17\text{-}12)$$

ويمكن أخذ التكامل السابق على أي مجال طوله 1.

أما جداء التلاف للتوابع $\tilde{X}(\omega)$ فيكتب كما يلي:

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{X}_1(\omega) * \tilde{X}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{X}_1(\theta).\tilde{X}_2(\omega - \theta)d\theta \qquad (18\text{-}12)$$

ويمكن أخذ التكامل السابق على أي مجال طوله 2π. ويسمى جداء التلاف الدوري. وبالنتيجة نلاحظ أن جداء التلاف في المجال الزمني أو الترددي يوافق الجداء العادي في المجال الآخر، والعكس صحيح.

جدول 12-2 خواص تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT.

Property	Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
Linearity	$ax[n] + by[n]$	$a\tilde{X}(\omega) + b\tilde{Y}(\omega)$
Shift	$x[n - n_0]$	$e^{-jn_0\omega}\tilde{X}(\omega)$
Time-reversal	$x[-n]$	$\tilde{X}(-\omega)$
Modulation	$e^{jn\omega_0}x[n]$	$\tilde{X}(\omega - \omega_0)$
Convolution	$x[n] * y[n]$	$\tilde{X}(\omega)\tilde{Y}(\omega)$
Conjugation	$x^*[n]$	$\tilde{X}^*(-\omega)$
Derivative	$nx[n]$	$j\frac{d\tilde{X}(\omega)}{d\omega}$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{X}(\theta)\tilde{Y}(\omega - \theta)\,d\theta$

3.12 نظرية بارسفال

تبين نظرية بارسفال (Parseval theorem) خاصية انحفاظ الجداء الداخلي للإشارات بين المجالين الزمني والترددي، أو بالأخص مبدأ انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي كنتيجة مباشرة لنظرية بارسفال. إن تابع الترابط (correlation أو cross-correlation) بين إشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ من أجل انزياح زمني k يعطى بالعلاقة التالية:

$$r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n-k] = \langle x_1[n], x_2[n-k]\rangle \qquad (19\text{-}12)$$

وهو عبارة عن جداء داخلي (سلمي) للإشارة $x_1[n]$ مع مرافق الإشارة المزاحة $x_2^*[n-k]$.

بالنظر إلى العلاقة السابقة نجد أنه يمكن أن ننظر إليها كجداء تلاف للإشارة $x_1[k]$ مع $x_2^*[-k]$ كالتالي:

$$r_{x_1x_2}[k] = x_1[k] * x_2^*[-k] \qquad (20\text{-}12)$$

ومنه نجد بأخذ تحويل فوريه للطرفين واستخدام خاصة جداء التلاف:

$$\tilde{r}_{x_1x_2}(\nu) = DTFT\left[r_{x_1x_2}(k)\right](\nu) = \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu) \qquad (21\text{-}12)$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة تابع الترابط $r_{x_1x_2}[k]$ بأنه تحويل فورييه العكسي للتابع $\tilde{r}_{x_1x_2}(\nu)$، أي أن:

$$r_{x_1x_2}[k] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)e^{2\pi j\nu k}d\nu \qquad (22\text{-}12)$$

وفي الحالة الخاصة، من أجل انزياح معدوم $k = 0$ نجد:

$$r_{x_1x_2}[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)d\nu = \langle \tilde{x}_1(\nu), \tilde{x}_2(\nu)\rangle \qquad (23\text{-}12)$$

أي:

$$r_{x_1x_2}[0] = \langle \tilde{x}_1(\nu), \tilde{x}_2(\nu)\rangle = \langle x_1[n], x_2[n]\rangle \qquad (24\text{-}12)$$

أو:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)d\nu \qquad (25\text{-}12)$$

وهذا يعبر عن انحفاظ الجداء الداخلي بتحويل فورييه وهي نظرية بارسفال (Parseval).

نتيجة: مبدأ انحفاظ الطاقة

في الحالة الخاصة لنظرية بارسفال عندما يكون $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ نجد:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\tilde{x}(\nu)|^2 d\nu \qquad (26\text{-}12)$$

تُظهر العلاقة الأخيرة أن طاقة الإشارة E_x والتي هي تجميع للاستطاعة اللحظية $|x[n]|^2$ في المجال الزمني، تكون نفسها طاقة الإشارة في المجال الترددي. وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من أجل الإشارات المستمرة. نسمي المقدار $|\tilde{x}(\nu)|^2$ بتابع الكثافة الطيفية للطاقة (energy spectrum density) وهو يعبر عن توزع طاقة الإشارة

على مختلف الترددات للإشارة المتقطعة ويستخدم بشكل واسع في التحليل الترددي للإشارات كما في أجهزة التحليل الطيفي (Spectrum Analyzer).

4.12 الاستجابة الترددية لنظام LTI

إذا كان لدينا نظام LTI ذو استجابة نبضية $h[n]$، وكانت إشارة الدخل هي الإشارة الأسية العقدية:

$$x[n] = e^{jn\omega}$$

حيث ω قيمة حقيقية. تكون إشارة الخرج هي:

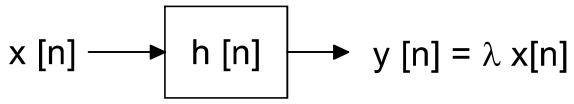
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j(n-k)\omega}$$

$$y[n] = e^{jn\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega} = \widetilde{H}(\omega)e^{jn\omega}$$

حيث

$$\widetilde{H}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega}$$

من ذلك نستنتج أن إشارة الدخل خرجت من النظام كما هي مع ضرب للمطال بالقيمة العقدية $\widetilde{H}(\omega)$. لذلك تكون الإشارات الأسية العقدية هي توابع ذاتية للنظم LTI وتكون القيمة الذاتية الموافقة هي $\widetilde{H}(\omega)$ والذي هو تحويل فوريه بالزمن المتقطع للاستجابة النبضية $h[n]$ والذي هو تابع للتردد الزاوي ω. يبين الشكل 12-1 تأثير النظم الخطية على التوابع الذاتية لها.



الشكل 12-1 التوابع الذاتية للنظم الخطية.

تُوصّف الاستجابة الترددية لنظام LTI كيف يغير النظام مطال كل إشارة أسية عقدية عندما تدخل النظام. فإذا كان بإمكاننا تحليل إشارة الدخل إلى مجموعة إشارات أسية عقدية، صار من السهل تحديد إشارة الخرج وذلك بفضل خاصية الخطية للنظام بمعرفة الاستجابة الترددية له. فمثلاً إذا كان:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{j\omega_k}$$

تكون إشارة الخرج هي:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \widetilde{H}(\omega_k) e^{j\omega_k}$$

مثال 12-2: لتكن لدينا الإشارة الجيبية $x[n] = \cos(n\omega_0)$ التي تدخل إلى نظام LTI ذو استجابة نبضية $h[n]$ والذي نفرض أنه ذو قيم حقيقية. يمكن تحليل إشارة الدخل بالشكل التالي:

$$x[n] = \cos(n\omega_0) = \frac{1}{2}e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-jn\omega_0}$$

فتكون إشارة الخرج:

$$y[n] = \frac{1}{2}\widetilde{H}(\omega_0)e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}\widetilde{H}(-\omega_0)e^{-jn\omega_0}$$

وبما أن $h[n]$ ذو قيم حقيقية فإن $\widetilde{H}(\omega)$ متناظر ترافقياً (يمكن التأكد من ذلك انطلاقا من عبارة $\widetilde{H}(\omega)$)، أي:

$$\widetilde{H}(-\omega_0) = \widetilde{H}^*(\omega_0)$$

وبالتالي يمكن تبسيط عبارة إشارة الخرج بالشكل:

$$y[n] = \frac{1}{2}\widetilde{H}(\omega_0)e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}\widetilde{H}^*(\omega_0)e^{-jn\omega_0}$$

$$y[n] = \mathrm{Re}\{\widetilde{H}(\omega_0)e^{jn\omega_0}\} = \left|\widetilde{H}(\omega_0)\right|\cos(n\omega_0 + \phi_h(\omega_0))$$

حيث $\phi_h(\omega_0) = Arg\left(\widetilde{H}(\omega_0)\right)$.

سوف نقدم في الفصل القادم تحويل فورييه المتقطع Discrete Fourier Transform (DFT). تحويل فورييه المتقطع هو الصيغة المتقطعة لتحويل فورييه المتقطع بالزمن DTFT. حيث DTFT هو تابع مستمر للتردد بينما DFT هو تابع متقطع بالنسبة للتردد. لذلك فإن DFT مناسب للتطبيقات الرقمية.

مسائل الفصل الثاني عشر

12-1 ليكن لدينا الإشارة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

المطلوب:

إيجاد تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT.

ارسم تحويل فوريه للإشارة $\check{X}(\omega)$.

ماهي نهاية $\check{X}(\omega)$ عند: $\omega = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi, \ldots$.

12-2 أوجد تحويل فوريه المتقطع بالزمن المعاكس للتابع $\check{X}(\omega)$، حيث:

$$\check{X}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

ومن ثم ارسم الإشارة $x[n]$.

12-3 أوجد تحويل فوريه المتقطع بالزمن لنبضة ديراك $x[n] = \delta[n]$، ثم ارسم التابع $\check{X}(\omega)$.

12-4 أوجد تحويل فوريه المتقطع بالزمن المعاكس لـ $\check{X}(\omega) = \delta(\omega)$ حيث $-\pi < \omega \le \pi$ ومن ثم ارسم $\check{X}(\omega)$ من أجل $-\infty < \omega < \infty$ وكذلك $x[n]$.

12-5 أوجد تحويل فوريه المتقطع بالزمن لكل من الإشارات التالية:

(a

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

(b

$$x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1$$

$$x[n] = \delta[6 - 2n] + \delta[6 + 2n]$$ **(c**

12–6 أوجد تحويل فورييه المتقطع بالزمن المعاكس لكل من الإشارات التالية:

$$\check{X}(\omega) = 2\cos(2\omega)$$ **(a**

$$\check{X}(\omega) = \begin{cases} e^{-4j\omega}, & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi \; or - \pi < \omega \leq \pi \\ 0, & otherwise \end{cases}$$ **(b**

12–7 أوجد تحويل فورييه المتقطع بالزمن لكل من الإشارات التالية:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{N}\, n\right), & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$ **(a**

$$x[n] = 2\delta[4 - 2n]$$ **(b**

$$x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n - 4]$$ **(c**

12–8 أوجد الإشارات بالزمن الموافقة لتحويل فورييه المتقطع بالزمن وذلك بالنسبة لما يلي:

$$\check{X}(\omega) = \cos(2\omega) + j\sin(2\omega)$$ **(a**

$$\check{X}(\omega) = \sin(\omega) + \cos(\frac{\omega}{2})$$ **(b**

$$\left|\check{X}(\omega)\right| = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$
$$\arg\{\check{X}(\omega)\} = -4\omega$$ **(c**

12–9 ليكن $\check{X}(\omega)$ تحويل فورييه المتقطع بالزمن للإشارة التالية:

$$x[n] = (\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n})^2; \quad 0 < w_c < \pi$$

أوجد قيمة ω_c التي تضمن أن $\check{X}(\omega) = \frac{1}{2}$.

13 تحليل الإشارات باستخدام تحويل فوربيه المتقطع

Analysis of signals using discrete Fourier transform

يهدف هذا الفصل إلى التذكير بتحويل فوريه المتقطع ومن ثم استخدام هذا التحويل في تحليل الإشارات الجيبية، ودلالة النتائج التي نحصل عليها بتطبيق هذا التحويل. ويأتي ذلك بهدف توضيح أثر عدد العينات المنتهية أو النافذة المستخدمة على النتائج لفهم المقايضة الناتجة بين التمييزية الترددية والتمييزية المطالية لطيف الإشارة. كما سنبين أثر التقطيع الترددي المتعلق بعدد العينات المستخدمة في التحويل. وأخيراً نعرف تحويل فوريه المتعلق بالزمن ونبين استخدامه في تحليل الإشارات ذات الطبيعة الطيفية المتغيرة مع الزمن.

1.13 مقدمة

درسنا في الفصل السابق الإشارات والنظم المتقطعة باستخدام تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT، المعرف من أجل إشارات ذات امتداد زمني لانهائي. مما يجعل من هذا التحويل أداة نظرية مفيدة جداً في تحليل الإشارات والنظم المتقطعة بفضل الخواص الهامة التي يتمتع بها هذا التحويل، ولاسيما خاصة تحويل جداء التلاف في المجال الزمني إلى جداء عادي في المجال الترددي. ولكن من الناحية العملية، فإن نظم معالجة الإشارة الرقمية تتعامل مع إشارات محدودة بالزمن وذلك لمحدودية ذاكرة التخزين في النظم الرقمية. وبالإضافة إلى ذلك فإن تحويل DTFT لإشارة متقطعة هو تابع مستمر بالنسبة للتردد ω. لذلك يتم استخدام تحويل فوريه المتقطع DFT والذي يكافئ تقطيعاً للتحويل DTFT في التردد لإشارة ذات طول منتهٍ. وهذا يعطي بعض الخصوصية للتحويل DFT مقارنة مع DTFT ناتج عن الطول المنتهي للإشارة الرقمية وتقطيع التردد. الأمر الذي يؤدي إلى بعض الاختلاف في بعض الخواص، فمثلاً يكون الجداء في المجال الترددي لتحويل DFT لإشارتين موافقاً إلى جداء التلاف الدائري (Circular Convolution) للإشارتين في المجال الزمني.

ندرس في هذا الفصل استخدام التحويل DFT في دراسة الإشارات الرقمية والأمور التي يجب فهمها ومراعاتها عند استخدام هذا التحويل.

2.13 تحويل فوريه المتقطع DFT

ليكن لدينا الإشارة المتقطعة $x[n]$ ذات الامتداد الزمني اللانهائي. نعلم أن تحويل فوريه المتقطع بالزمن DTFT لهذه الإشارة يعطى بالعلاقة:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

إذا قمنا بأخذ N عينة من الإشارة $x[n]$ من اللحظة $n = 0$ وحتى اللحظة n=N-1 وسمينا الإشارة الناتجة $v[n]$ أي:

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وهذا يكافئ ضرب الإشارة $x[n]$ بنافذة مستطيلة $\omega[n]$ بطول N عينة، أي:

$$v[n] = \omega[n]x[n]$$

حيث:

$$\omega[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

يكون تحويل فورييه DTFT للإشارة $x[n]$ معطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{V}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jn\omega}$$

وكما نعلم فإن $\tilde{V}(\omega)$ هو تابع مستمر للتردد ω ودوري بدور قدره 2π. فلو قمنا بتقطيع هذا التابع ضمن دور واحد على N نقطة موزعة بانتظام فإننا نحصل على N قيمة معرّفة كالتالي:

$$V[k] = \tilde{V}(\omega)\Big|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}}$$

أي:

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-2\pi j\frac{k}{N}}, \qquad k = 0, \dots, N-1$$

بالتعريف تمثل هذه القيم $V[k]$ تحويل فورييه المتقطع DTFT للإشارة المحدودة بالزمن $v[n]$.

إن عملية الحصول على $v[n]$ انطلاقاً من $x[n]$ تدعى عملية تطبيق النافذة (windowing). وهنا استخدمنا لذلك النافذة المستطيلة. إلا أنه يمكن استخدام أي نافذة أخرى مثل نافذة هامينغ (Hamming) أو نافذة قيصر (Kaiser). كما تسمى عملية تقطيع التابع $\tilde{V}(\omega)$ للحصول على السلسلة $V[k]$ بعملية تقطيع التردد (frequency sampling) على N نقطة.

يتم اللجوء إلى هاتين العمليتين من تطبيق النافذة وتقطيع التردد في نظم المعالجة الرقمية مثل نظم التحليل الطيفي للإشارات أو نظم الاتصالات الصوتية بسبب محدودية الذاكرة المتوفرة وعدم القدرة على التعامل مع التوابع المستمرة بالزمن.

3.13 تحليل الإشارات الجيبية باستخدام DFT

لفهم أثر تطبيق النافذة على الإشارة المتقطعة وأثر تقطيع التردد، سوف ندرس ذلك على إشارات جيبية بسيطة إلّا أنها كافية لتوضيح أثر تطبيق العمليتين السابقتين على الإشارات بشكل عام.

1.3.13 أثر تطبيق النافذة

لنعتبر الإشارة المتقطعة $x[n]$ المكونة من مجموع إشارتين جيبيتين والمعرفة كما يلي:

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n) + A_1 \cos(\omega_1 n)$$

وكما نعلم، يكون تحويل DTFT لهذه الإشارة مكون من أربع نبضات: نبضتين بمطال $\frac{A_0}{2}$ عند الترددين $\mp\omega_0$ ونبضتين بمطال $\frac{A_1}{2}$ عند الترددين $\mp\omega_1$. وتكون هذه النبضات الأربعة مكررة بشكل دوري كل 2π على محور التردد. فلو نظرنا إلى دور واحد من هذا التحويل نجد:

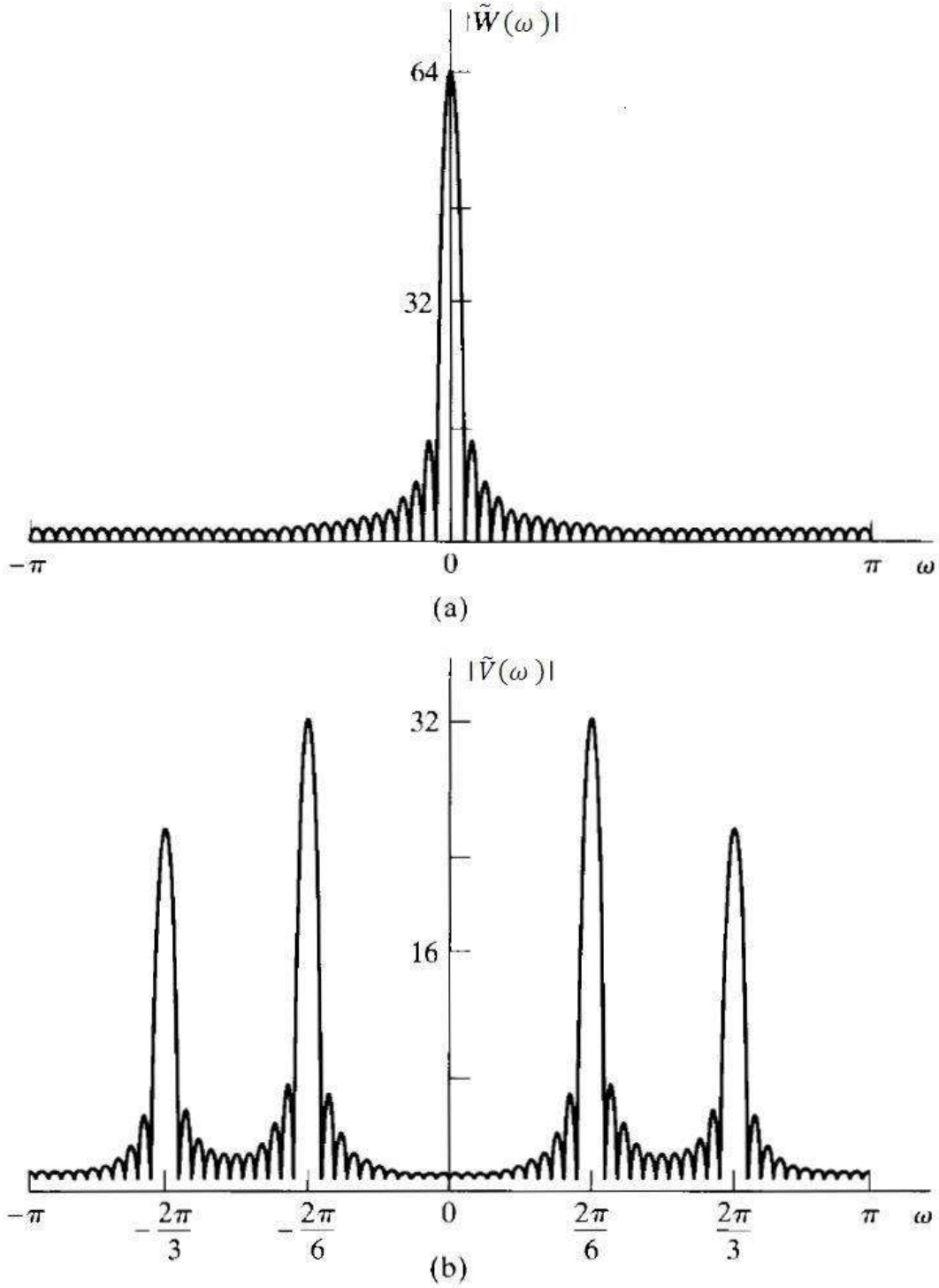
$$\tilde{X}(\omega) = \frac{A_0}{2}\big(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\big) + \frac{A_1}{2}\big(\delta(\omega+\omega_1) + \delta(\omega-\omega_1)\big)$$

وبحسب خاصية جداء إشارتين للتحويل DTFT يكون:

$$\tilde{V}(\omega) = \tilde{W}(\omega) * \tilde{X}(\omega)$$

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{A_0}{2}\Big(\tilde{W}(\omega+\omega_0) + \tilde{W}(\omega-\omega_0)\Big) + \frac{A_1}{2}\Big(\tilde{W}(\omega+\omega_1) + \tilde{W}(\omega-\omega_1)\Big)$$

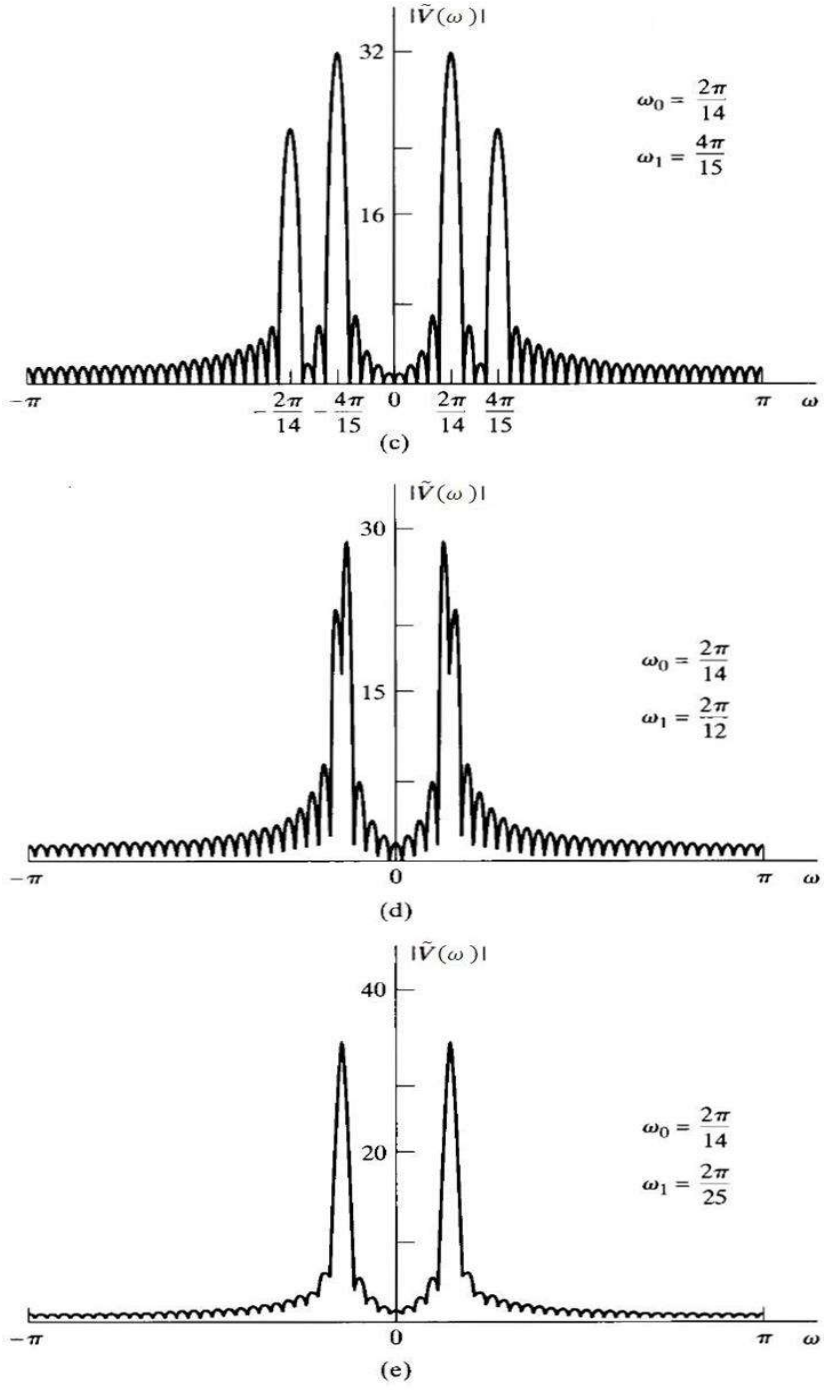
حيث $\tilde{W}(\omega)$ هو تحويل *DTFT* للنافذة المستخدمة $\omega[n]$. يبين الشكل 13-1 مطال هذا التحويل $\left|\tilde{W}(\omega)\right|$ في حالة النافذة المستطيلة من أجل $N = 64$، كما يبين المطال $\left|\tilde{V}(\omega)\right|$ من أجل $\omega_0 = \frac{2\pi}{6}$ و $\omega_1 = \frac{2\pi}{3}$ و $A_0 = 1$ و $A_1 = 0.75$.



الشكل 13-1 مطال تحويل فوريه للنافذة المستطيلة وللإشارة بعد تطبيق النافذة.

نلاحظ في الشكل 13-3 أن طيف الإشارة بعد تطبيق النافذة يتكون من تكرار لطيف النافذة المستخدمة عند مواقع النبضات في طيف الإشارة الأصلية $x[n]$. وهذا ناتج عن جداء التلاف بين تحويل فوريه للإشارة الأصلية

مع تحويل فوريه للنافذة. كما نلاحظ أن مطال الفص الأساسي عند الترددات $\mp\omega_1$ هو $0.75\frac{N}{2}$. يبين الشكل 4–13 طيف الإشارة بعد تطبيق النافذة من أجل قيم مختلفة للترددات ω_0 و ω_1 حيث نقوم بتقليص الفرق بينهما من شكل لآخر.



الشكل 13-2 طيف الإشارة بعد تطبيق النافذة من أجل قيم مختلفة للترددين ω_0 و ω_1.

نلاحظ أنه كلما اقترب ω_1 من ω_0 فإن مطال القمة لطيف الإشارة عند ω_0 يتغير بسبب تأثير الفصوص الجانبية لطيف النافذة عند ω_1 على ω_0. يسمى هذا التأثير المتبادل بين الترددين بالتسريب (leakage). يمكن أن يؤدي هذا التسريب إلى زيادة بمستوى القمة عند التردد الآخر أو يؤدي إلى نقصانه بحسب كون هذا التسريب متوافقاً أو متعاكساً في الإشارة على الترتيب. كما أنه عند اقتراب ω_1 من ω_0 بشكل كبير فإنه لا يمكن تمييز وجود قمتين منفصلتين وإنما قمة واحدة فقط. وتعرّف التمييزية الترددية (frequency resolution) بأنه أقل فارق بين الترددين بحيث نستطيع تمييز وجود قمتين منفصلتين في طيف الإشارة.

من ذلك نستنتج بأن التسريب وانخفاض الدقة الترددية هما الأثران الأساسيان لعملية تطبيق نافذة على الإشارة من الناحية الطيفية. حيث يتأثر مستوى التسريب بالمطال النسبي للفص الأساسي والفصوص الجانبية لطيف النافذة، أما التمييزية الترددية فتتأثر بعرض الفص الأساسي. وكما نعلم فإن هذين الأمرين يتبعان لطول النافذة وشكلها.

فعلى سبيل المثال، تعطي النافذة المستطيلة بعرض L عينة أقل عرض فص أساسي من بين كل النوافذ المستخدمة حيث يعطى طيفها بالعلاقة:

$$\widetilde{W}_r(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-jn\omega} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin \omega/2}$$

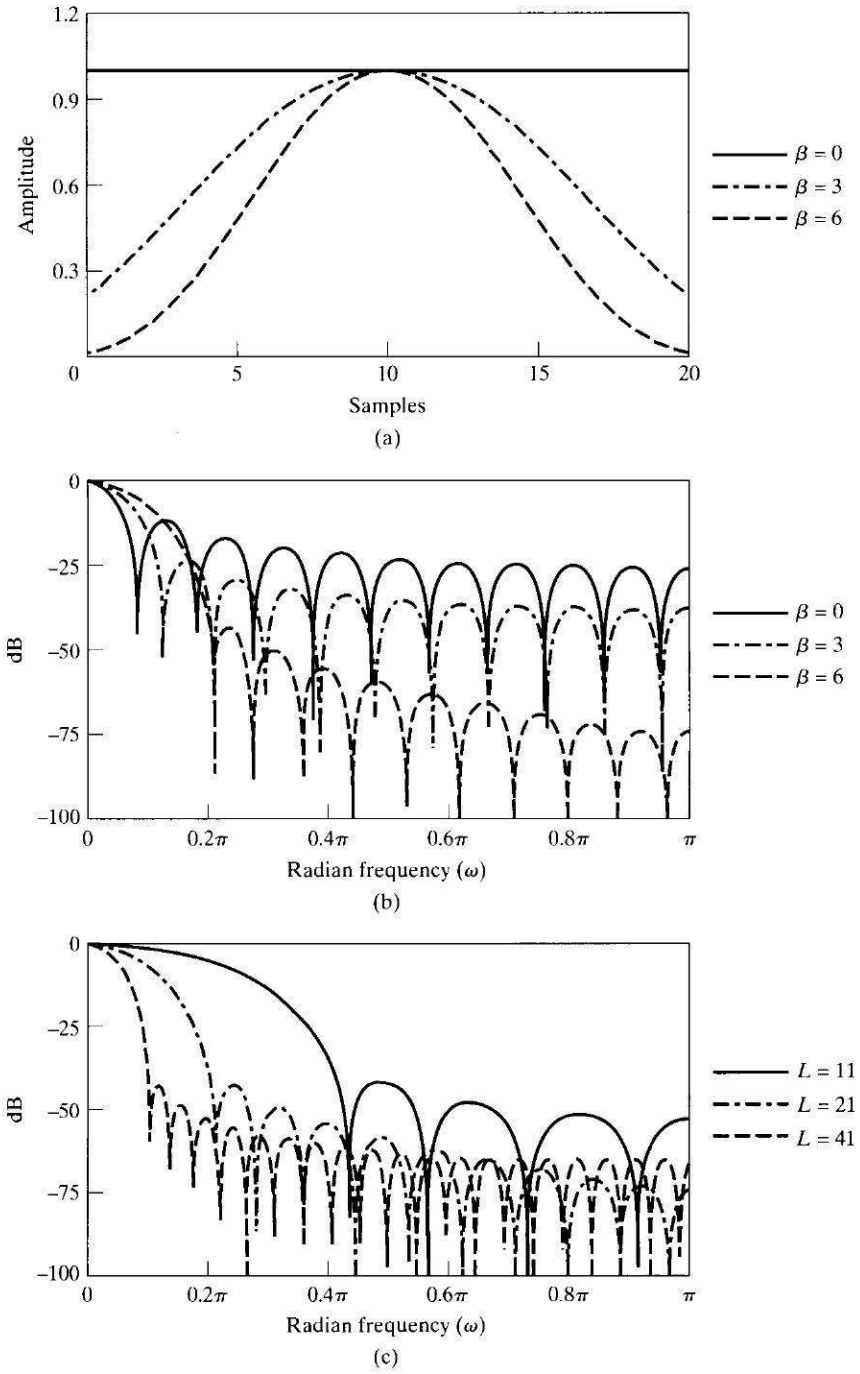
ولكن في المقابل، تعطي هذه النافذة أكبر مستوى للفصوص الجانبية مقارنةً بمستوى الفص الأساسي.

أما في نافذة قيصر المعرفة بالعلاقة التالية:

$$W_k[n] = \begin{cases} I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{L}-1\right)^2}\right) \Big/ I_0(\beta) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حيث يرمز $I_0(.)$ إلى تابع بيسل (Bessel) المُعدَّل من الدرجة صفر والنوع الأول وβ معامل حقيقي موجب يتحكم بشكل النافذة. نستطيع التحكم بالمعامل β بحيث نحصل على المقايضة المطلوبة بين عرض الفص الأساسي ومستوى الفصوص الجانبية من أجل طول معين للنافذة (من الجدير بالذكر هنا أن نافذة قيصر تؤول إلى النافذة المستطيلة من أجل $\beta = 0$).

نعرّف عرض الفص الأساسي Δ_{ml} بأنه المسافة بين أول صفرين متناظرين في طيف النافذة. ونعرّف السوية النسبية للفصوص الجانبية A_{sl} بأنها النسبة مقدرة بالـ dB بين مطال الفص الأساسي ومطال أكبر فص جانبي. يبين الشكل 13-6 تحويل فوريه لنافذة قيصر من أجل قيم مختلفة للمعامل β .



الشكل 13-3 تحويل فوريه لنافذة قيصر من أجل قيم مختلفة لطول النافذة L والمعامل β.

من الشكل نلاحظ أن السوية النسبية للفصوص الجانبية لا تتأثر بطول النافذة وإنما تتعلق فقط بالمعامل β. فمن أجل قيم معطاة للسوية النسبية للفصوص الجانبية A_{sl}، تعطى قيمة المعامل β بالعلاقة التقريبية التالية (مرجع [6]، صفحة 701):

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} \le 13.26 \\ 0.7669(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26) & 13.26 \le A_{sl} \le 60 \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3) & 60 \le A_{sl} \le 120 \end{cases}$$

وننوه بأن القيمة $A_{sl} = 13.26$ هي القيمة الموافقة للنافذة المستطيلة. كما يبين الشكل 13-8 أيضاً بأن عرض الفص الأساسي يتناسب عكساً مع طول النافذة. وتعطى العلاقة التقريبية لطول النافذة بدلالة A_{sl} و Δ_{ml} بالعلاقة التالية (مرجع [6]، صفحة 703):

$$L \cong \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

باستخدام المعادلات السابقة، نستطيع تصميم نافذة قيصر حسب المقايضة المطلوبة بين التمييزية الترددية وبين الدقة المطالية الناتجة عن ظاهرة التسريب والتي تتعلق بدورها بالسوية النسبية للفصوص الجانبية في طيف النافذة.

2.3.13 أثر التقطيع الترددي

كما ذكرنا سابقاً، فإن تحويل فوريه المتقطع DFT للإشارة المحددة بنافذة $v[n]$ يعطي N عينة موزعة بانتظام من طيف الإشارة المستمر $V(\omega)$ عند الترددات $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$. تؤدي عملية التقطيع هذه أحياناً إلى تفاسير خاطئة لطيف الإشارة، ولتوضيح ذلك سوف نأخذ المثال التالي.

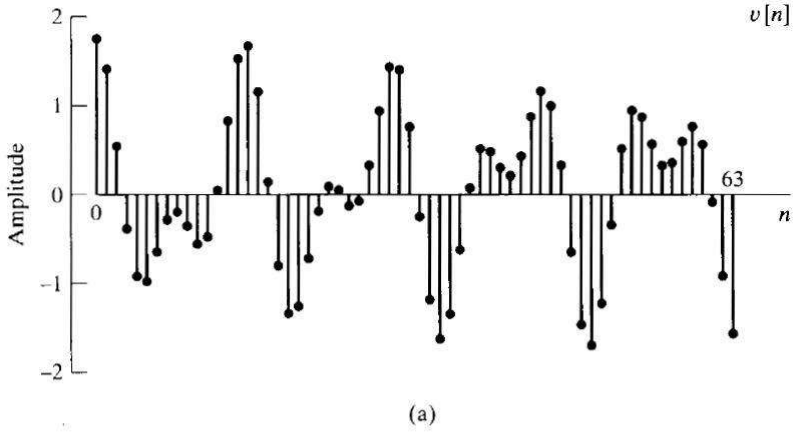
مثال 13-1: لنأخذ المثال السابق عن إشارة مكونة من ترددين مع المعطيات التالية

$$\omega_1 = \frac{4\pi}{15}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{14}, \quad A_1 = 0.75, \quad A_0 = 1$$

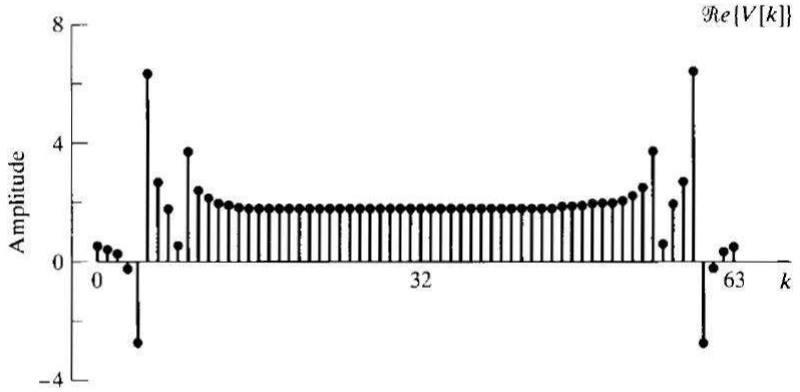
فإذا كانت $w[n]$ هي النافذة المستطيلة بطول $N = 64$ فإن الإشارة $v[n]$ هي:

$$v[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), \qquad 0 \le n \le 63$$

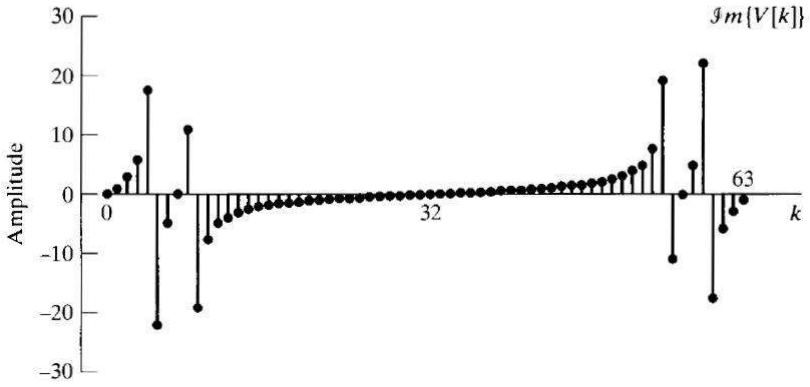
يبين الشكل 13–9 هذه الإشارة مع تحويل فورييه المتقطع لها والممثل على الشكل على الترتيب بالقسم الحقيقي والقسم التخيلي وكذلك المطال والصفحة. وقمنا أيضاً برسم طيف الإشارة المستمر $V(\omega)$ للمقارنة.



(a)

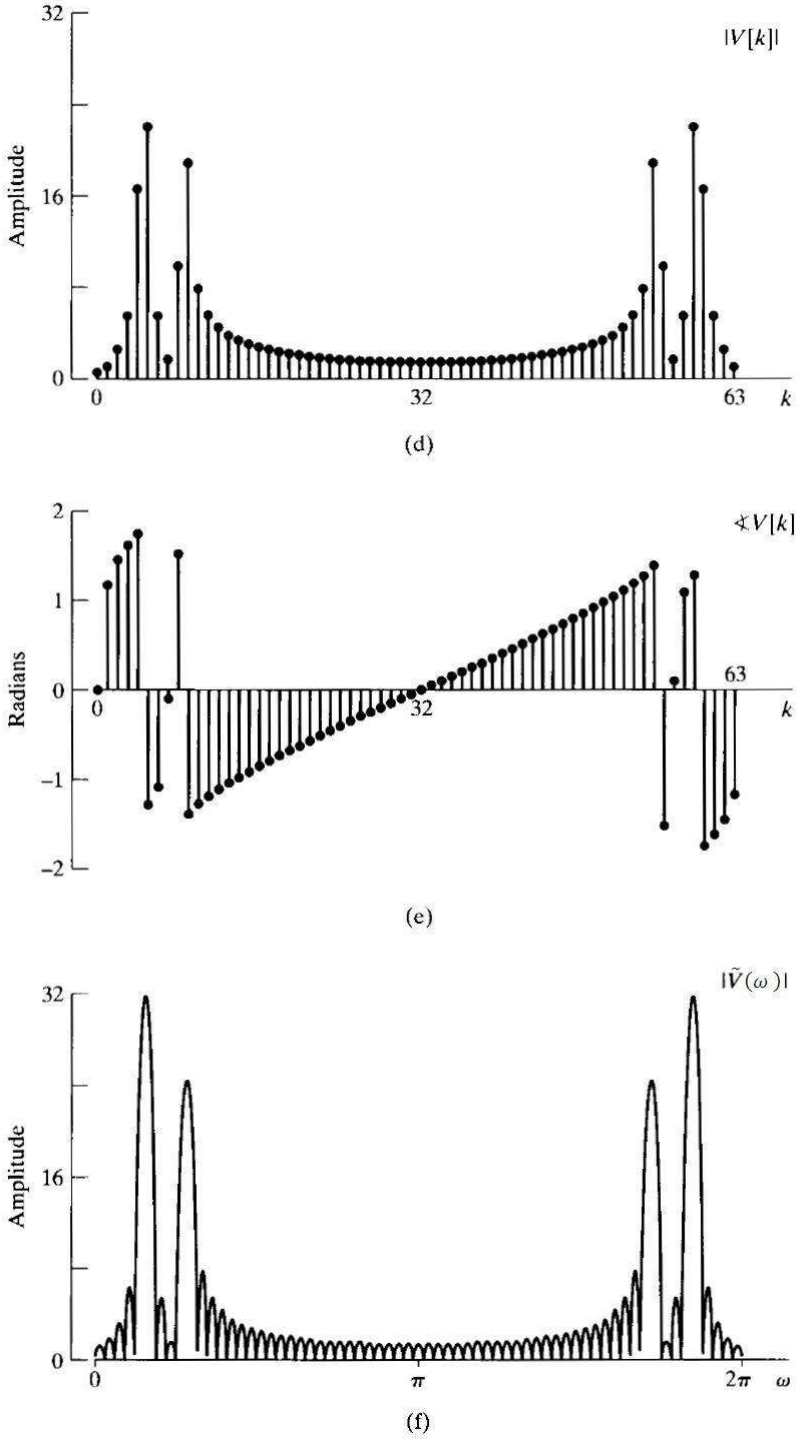


(b)



(c)

الشكل 13-4 الإشارة بعد تطبيق النافذة وتحويل فوريه المتقطع لهام مثلاً بالقسم الحقيقي والقسم التخيلي.



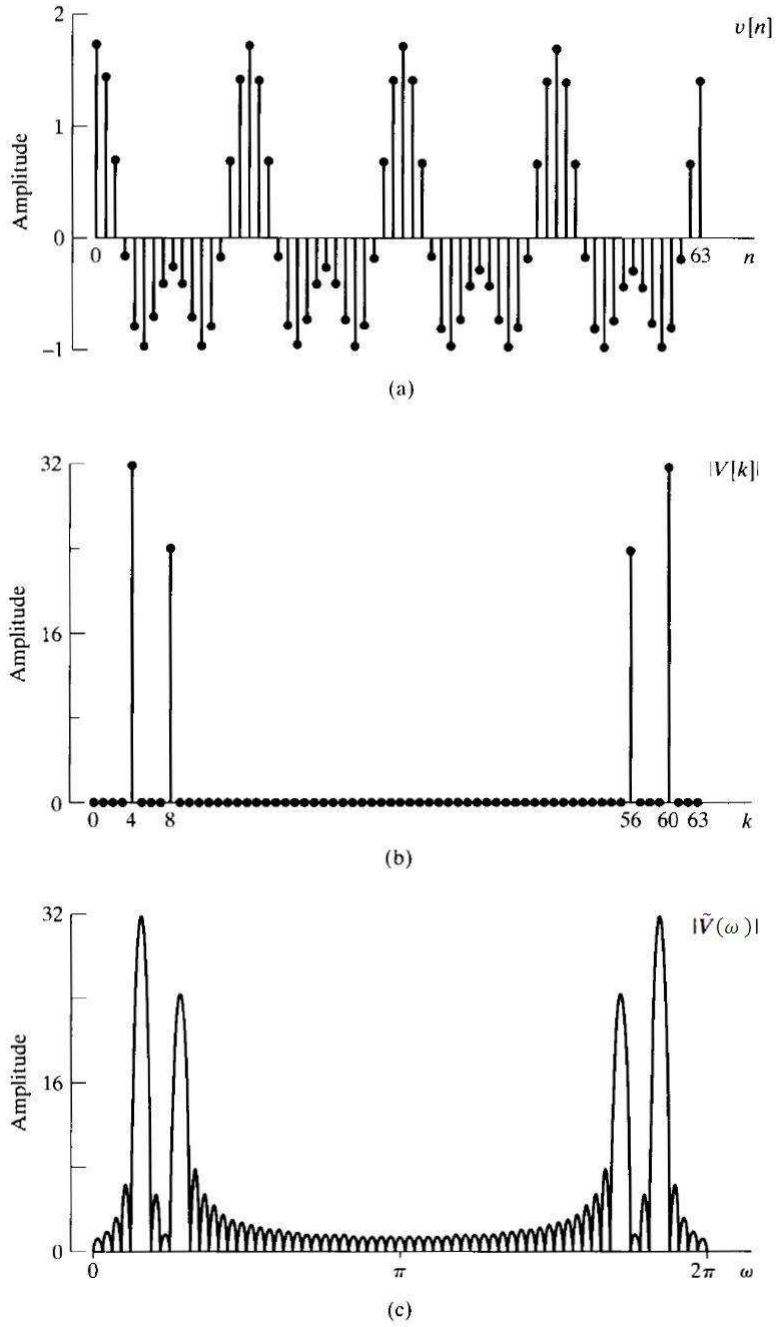
الشكل 13-5 تحويل فوريه المتقطع للإشارة بعد تطبيق النافذة ممثلاً بالمطال والصفحة مع مطال طيف الإشارة المستمر DTFT.

نلاحظ من الأشكال السابقة أن قيم التحويل DFT لا تتطابق بالضرورة مع مواقع القمم الحقيقية في طيف الإشارة وذلك بسبب التقطيع.

مثال 13-2: لنأخذ الآن الإشارة التالية:

$$v[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), \qquad 0 \le n \le 63$$

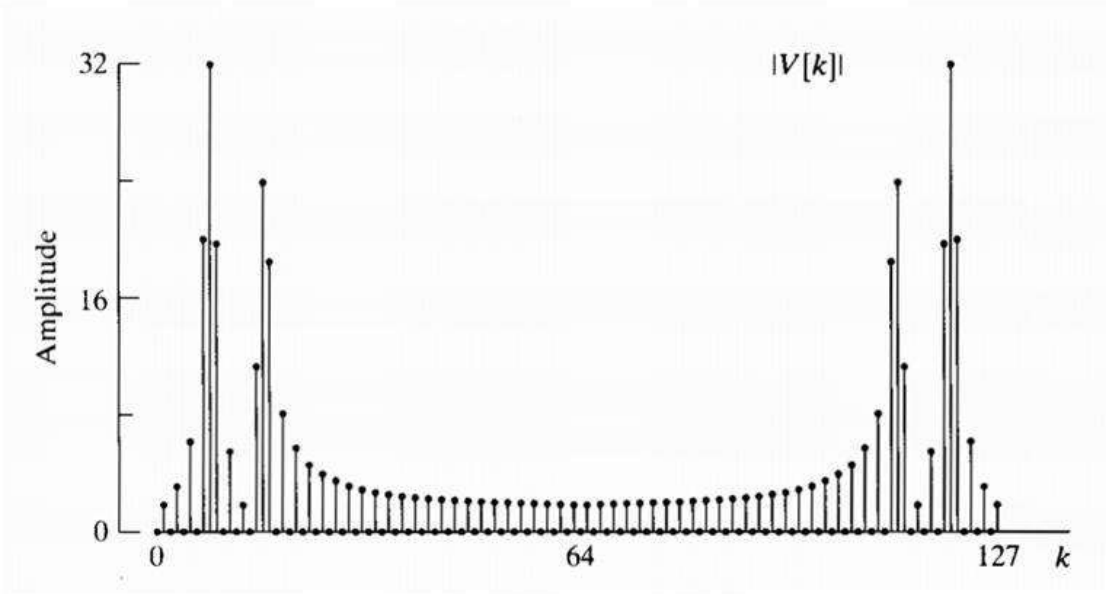
يبين الشكل 13-12 هذه الإشارة ومطال تحويل فورييه المتقطع لها ومطال تحويل فورييه المتقطع بالزمن الموافق.



الشكل 13-6 تحليل فورييه لمجموع إشارتين جيبيتين بترددات متوافقة مع تحويل فورييه المتقطع.

نلاحظ في الشكل 13-14 بأن شكل تحويل فورييه المتقطع مختلف بشكل لافت حيث نلاحظ وجود نبضتين خالصتين عند ترددات الإشارة ومعدوم عند بقية الترددات. ويأتي هذا بسبب القيم الخاصة للترددات المختارة، حيث وقعت نقاط التقطيع بالصدفة في نقاط انعدام طيف الإشارة. فإذا ضاعفنا عدد نقاط التقطيع بأخذ تحويل

فوريه المتقطع على $N = 128$ نقطة بدل 64 وذلك لنفس الإشارة بإضافة 64 صفراً في نهاية الإشارة الأصلية، فإننا نحصل على الشكل 13-15.



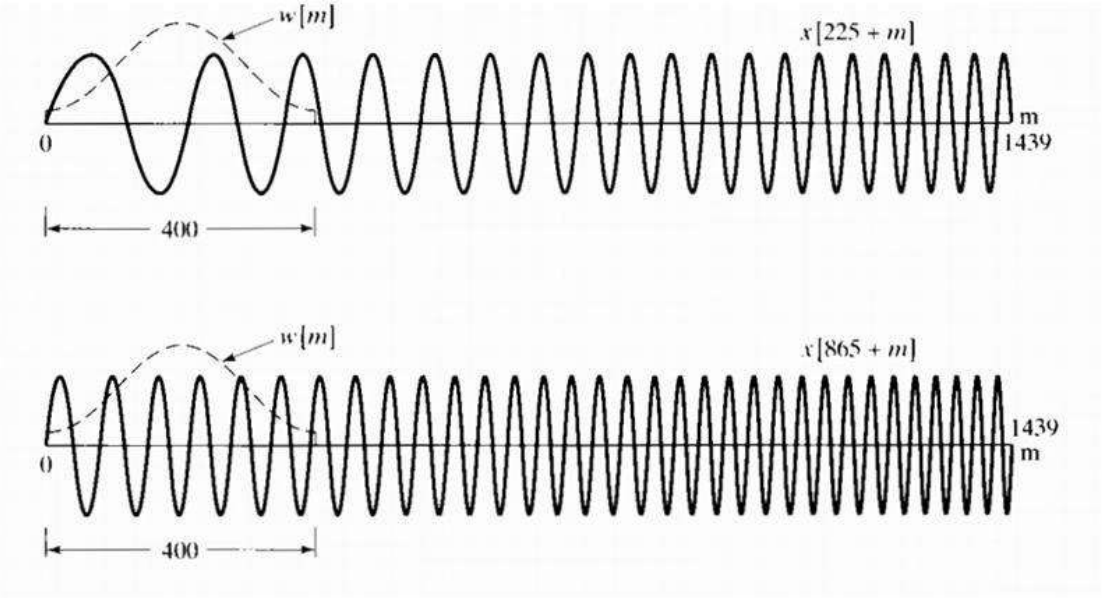
الشكل 13-7 تحويل فوريه المتقطع لمجموع إشارتين جيبيتين مع مضاعفة عدد نقاط التقطيع.

نلاحظ هنا ظهور الكثير من المركبات الترددية، حيث نحصل على ثلاث نقاط في كل فص أساسي ونقطة عند قمة كل فص جانبي. وهكذا إذا قمنا بزيادة نقاط التقطيع أكثر، فإننا نحصل على شكل يشبه أكثر طيف الإشارة المستمر. لذلك يجب اختيار عدد نقاط حساب تحويل فوريه المتقطع بعناية قبل تحليل طيف الإشارة لكي يكون هذا التحليل أقرب للصحة.

مثال 13-3: ليكن لدينا الإشارة التالية:

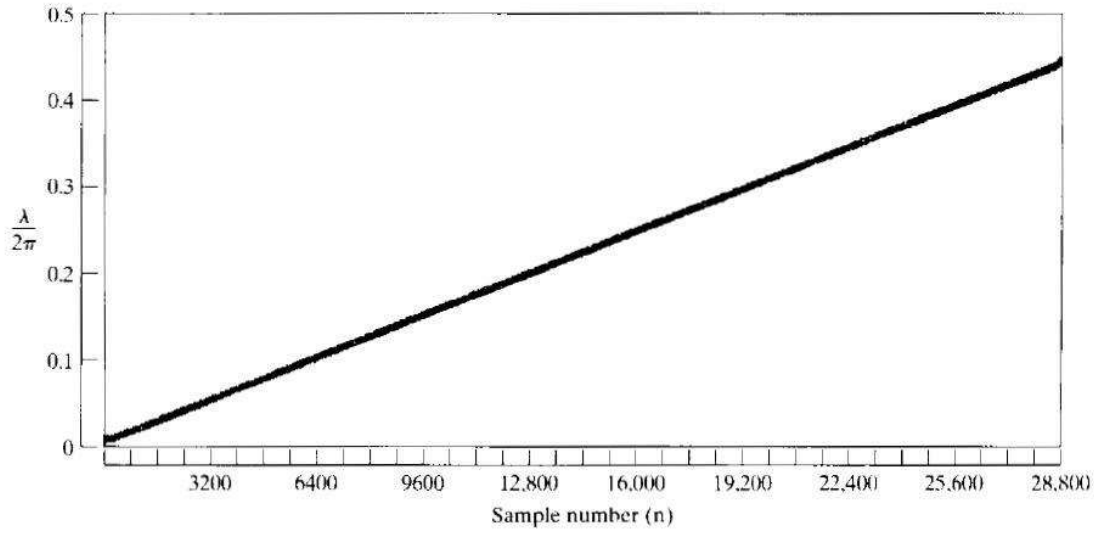
$$x[n] = \cos(\omega_0 n^2)\ \omega_0 = 2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}$$

والتي توافق إشارة بتردد متغير بشكل خطي مع الزمن، حيث يكون التردد اللحظي لها هو $2\omega_0 n$. يبين الشكل 13-17 قطعتين من الإشارة كل منها بطول 1439 عينة، الأولى تبدأ من اللحظة $n = 225$، والثانية تبدأ من اللحظة $n = 865$.



الشكل 13-8 قطعتين من الإشارة المتغيرة التردد بالزمن.

يبين الشكل 13-19 تحويل فوريه المتعلق بالزمن من أجل كل لحظة (المحور الأفقي) باستخدام نافذة هامينغ بطول 400 نقطة، حيث يمثل المحور العمودي المحور الترددي المقيس $\frac{\lambda}{2\pi}$، أما مطال الطيف فتم التعبير عنه بدرجة عتامة اللون، فالأسود يدل على قمة والأبيض يدل على قيمة معدومة.



الشكل 13-9 مطال تحويل فوريه المتعلق بالزمن للإشارة ذات التردد المتغير بالزمن بشكل خطي.

4.13 تحويل فوريه المتعلق بالزمن

في تحليلنا السابق للإشارات الجيبية باستخدام التحويل DFT افترضنا أن الترددات ثابتة وكذلك المطالات على كامل طول النافذة. ولكن في التطبيقات العملية قد تكون معاملات الإشارة (المطال والتردد والصفحة) متغيرة مع الزمن، وفي هذه الحالة لا يكون DFT كافياً لوصف وتحليل هذا النوع من الإشارات. لذلك تم إدخال مفهوم تحويل فوريه المتعلق بالزمن (time-dependent Fourier transform) أو بما يعرف أحياناً بتحويل فوريه قصير الأمد (short-time Fourier transform).

نعرف تحويل فوريه المتعلق بالزمن للإشارة $x[n]$ بالعلاقة:

$$X[n,\lambda] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}$$

وهو تابع ثنائي البعد لمتحولين: الأول n وهو متحول متقطع يعبر عن الزمن، والثاني λ وهو متحول مستمر ويعبر عن التردد، حيث نأخذ التردد على دور واحد، أي $\lambda \in [0, 2\pi]$. فإذا كان طول النافذة L فردي ومتناظرة حول الصفر، فإن $X[n,\lambda]$ يعبر من أجل كل لحظة n عن تحويل فوريه لجزء من الإشارة $x[n]$ والممتد من اللحظة $n - \frac{L-1}{2}$ وحتى اللحظة $n + \frac{L-1}{2}$.

أثر النافذة

يمكننا إعادة كتابة تعريف تحويل فوريه المتعلق بالزمن بإجراء تغيير المتحول $m' = n + m$ لنحصل على

$$X[n,\lambda] = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} x[m']w[-(n-m')]e^{j\lambda(n-m')}$$

والتي يمكن النظر إليها بأنها جداء تلاف

$$X[n,\lambda] = x[n] * h_\lambda[n]$$

حيث $h_\lambda[n] = w[-n]e^{j\lambda n}$.

وهكذا نرى أنه من أجل قيمة λ ثابتة، فإنه يمكن النظر إلى تحويل فوريه المتعلق بالزمن بأنه خرج مرشح غير متغير مع الزمن باستجابة نبضية $h_\lambda[n]$ واستجابة ترددية

$$\widetilde{H}(\omega) = \widetilde{W}(\lambda - \omega)$$

أي مرشح تمرير حزمة متمركز عند التردد λ وله شكل طيف النافذة المستخدمة.

5.13 التقطيع بالتردد والزمن

لا يمكن الحساب الفعلي للتابع $X[n,\lambda]$ إلا عند قيم محددة للتردد λ. فإذا قمنا بتقطيع التابع على N نقطة موزعة بانتظام على محور التردد، فإننا نحصل على

$$X[n,k]=\sum_{m=0}^{L-1}x[n+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}$$

وذلك بفرض أن النافذة تقع في المجال $[0,L-1]$. وبالتالي فإن $X[n,k]$ هو تحويل DFT للإشارة المنتهية $x[n+m]w[m]$. وبالتالي إذا عرفنا قيمة $X[n_0,k]$ من أجل لحظة n_0 معينة، فإننا نستطيع باستخدام التحويل DFT العكسي استرجاع قيم الإشارة في المجال $n_0\le n\le n_0+L-1$. أي أننا نستطيع استعادة الإشارة الأصلية على كامل المجال الزمني إذا عرفنا قيم التابع $X[n,k]$ من أجل قيم n متباعدة بأقل من طول النافذة L. لذلك لا يتم عادةً حساب $X[n,k]$ من أجل جميع قيم n ولكن من أجل لحظات متباعدة فيما بينها بمقدار R، أي

$$X_r[k]=X[rR,k]$$

بحيث يكون $R\le L$.

عملياً، يتم اختيار نوع النافذة وطولها بحسب المقايضة المطلوبة بين التمييزية الترددية والتمييزية المطالية لطيف الإشارة، أما مقدار القفزة بالزمن R فيتم اختياره تبعاً لسرعة تغير الإشارة مع الزمن.

مسائل الفصل الثالث عشر

13-1- احسب تحويل فوريه المتقطع على N قيمة من الإشارة التالية:

$$x[n] = e^{2\pi jn\nu_0}$$

كيف تصبح النتيجة عندما يكون التردد الرقمي ν_0 من الشكل $\nu_0 = \frac{m}{N}$ حيث m عدد صحيح أصغر من N.

13-2- لتكن لدينا الإشارة المستمرة $x(t)$ ذات طيف ترددي محدود في الترددات الأقل من 5KHz. تم تقطيع هذه الإشارة بتردد تقطيع قدره 10000 عينة بالثانية. لتكن $X(k)$ تحويل فوريه المتقطع لهذه الإشارة على نقطة. والمطلوب:

1) ما هو التردد الحقيقي المقابل للعينة ذات الدليل $k = 150$.
2) ما هو التردد الحقيقي المقابل للعينة ذات الدليل $k = 800$.

13-3- ليكن لدينا الإشارات المتقطعة الثلاث التالية:

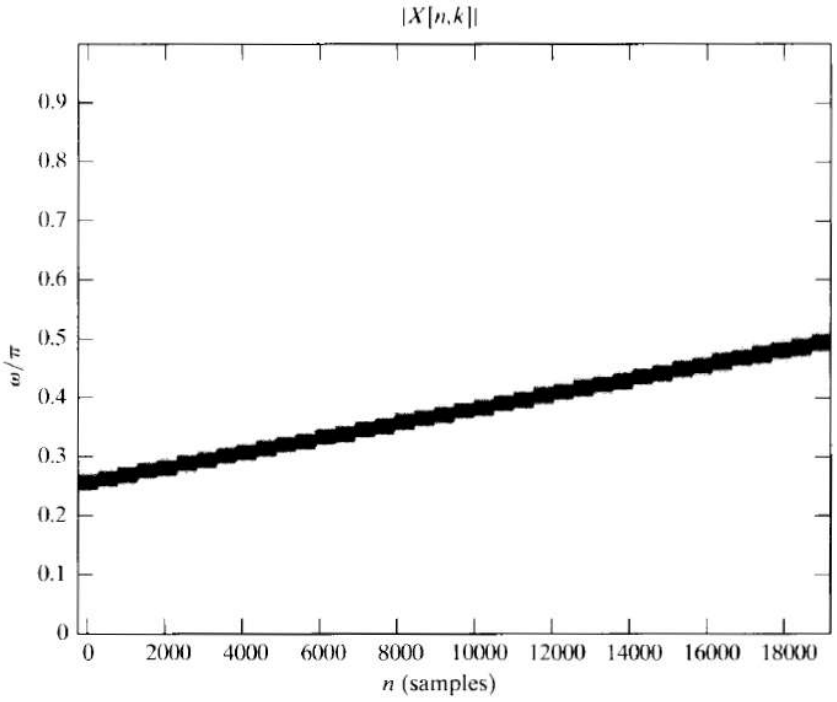
$$x_1[n] = \cos(\pi n/4) + \cos(17\pi n/64)$$
$$x_2[n] = \cos(\pi n/4) + 0.8\cos(21\pi n/64)$$
$$x_3[n] = \cos(\pi n/4) + 0.001\cos(21\pi n/64)$$

13-4- نريد تقدير المحتوى الطيفي لهذه الإشارات باستخدام تحويل فوريه المتقطع على 64 نقطة باستخدام النافذة المستطيلة. بين أي من هذه الإشارات سوف تعطي قمتين منفصلتين؟

يبين الشكل التالي الطيف قصير الأمد لإشارة ذات تردد متغير مع الزمن معطاة بالعلاقة التالية:

$$x[n] = \sin(\omega_0 n + 0.5\lambda n^2)$$

قدر قيمة كلاً من ω_0 و λ.



الشكل 13-10 الطيف قصير الأمد لإشارة ذات تردد متغير مع الزمن.

13-5- نرغب في تقدير طيف إشارة متقطعة $x[n]$ بتطبيق نافذة قيصر بطول 512 نقطة.

1) إذا كانت التمييزية الترددية المرغوبة تتحقق باستخدام عرض فص أساسي بمقدار $\pi/100$. ما هو أفضل سوية للفصوص الجانبية الممكن الحصول عليها؟
2) بفرض أننا نعلم أن الإشارة تحتوي على إشارتين جيبيتين بفاصل ترددي مقداره $\pi/50$. وبفرض أن مطال أكبر مركبة بينهما هو واحد. بالاعتماد على جواب الطلب الأول، أعطي العتبة على أقل قيمة لمطال المركبة الثانية حتى تكون أكبر من أعلى فص جانبي.

14 تحويل Z

Z transform

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل Z المستخدم في تمثيل الإشارات والنظم المتقطعة. حيث نقوم في هذا الفصل بدراسة الأسس النظرية لهذا التحويل وخواصه المختلفة. يسمح هذا التحويل بدراسة الإشارات النظم المتقطعة في مجال آخر غير المجال الزمني مما يسهل الكثير من عمليات معالجة الإشارة وتحديد مواصفات النظم وخواصها حيث يُستخدم هذا التحويل في حل معادلات الفروق للنظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن وتحديد استجابتها وتصميم المرشحات الخطية. كما سنرى انعكاس كل من خاصة السببية والاستقرار للنظم مع هذا التحويل. وسنختم هذا الفصل بعرض نظريتي القيمة البدائية والقيمة النهائية للإشارات السببية.

1.14 مقدمة

يعدّ تحويل Z (Z-transform) في النظم المتقطعة من الأدوات الرياضية الضرورية في تصميم وتحليل عمل النظم المتقطعة. حيث يعتمد هذا التحويل على كون الإشارات الأسية من الشكل $x[n] = z^n$، حيث z عدد عقدي، هي توابع ذاتية (eigen functions) للمرشحات الخطية غير المتغيرة مع الزمن، أي أنها تخرج من هذه النظم كما هي ولكن مضروبة بثابت عقدي تابع لقيمة الأساس z.

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

أي

$$y[n] = H(z)z^n$$

حيث

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

يُعدّ تحويل Z للإشارات تمثيلاً لها، أي أنه يمكننا الانتقال بالإشارة $x[n]$ من المجال الزمني ذي المتحول المستقل n إلى الإشارة في المجال العقدي $X(z)$ ذي المتحول المستقل z، وبالعكس. بكلمة أخرى، يُمكِّن تحويل Z من النظر إلى الإشارة نفسها بشكل مختلف بحيث يمكننا تحليل الإشارات والنظم المتقطعة بشكل أبسط من تحليلها مباشرةً في المجال الزمني.

2.14 تعريف تحويل Z

نعرف تحويل Z لإشارة متقطعة ما $x[n]$ بالمجموع التالي:

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \qquad (1\text{-}14)$$

حيث $X(z)$ هو تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$، وهو تابع للمتحول العقدي $z = re^{j\omega}$ حيث r وω مطال وطور المتحول z على الترتيب. ولكي يكون هذا التحويل موجوداً لا بد من أن تكون الإشارة قابلة للجمع بالقيمة المطلقة.

نقول إن تحويل Z ينقل الإشارة من التمثيل في المجال الزمني $x[n]$ إلى التمثيل في المستوي العقدي $X(z)$، ونسمي هذا المستوي العقدي بالمستوي Z.

من الضروري لتعريف تحويل Z بشكل كامل أن نحدد منطقة التقارب ROC (Region Of Convergence) أو حيز التقارب، وهي المنطقة من المستوي العقدي المكونة من النقاط z والتي يكون عندها المجموع $X(z)$ متقارباً. تمثل منطقة التقارب جزءاً من تعريف تحويل Z، لأن التابع $X(z)$ نفسه قد ينتج عن تحويل Z لإشارتين مختلفتين ولكن تختلف منطقة التقارب لهما.

مثال 14-1:الإشارات نصف الأسية

لتكن الإشارة المتقطعة $x[n] = a^n u(n)$ حيث a عدد عقدي و$u[n]$ هي إشارة الخطوة المتقطعة. نلاحظ أن هذه الإشارة هي إشارة سببية أي معدومة في اللحظات السالبة $n < 0$. لنحسب تحويل Z لها:

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad (2\text{-}14)$$

وذلك في حالة $|az^{-1}| < 1$ أو $|z| > |a|$. حيث استخدمنا العلاقة الرياضية التي تعطي مجموع السلسلة الهندسية التالية:

$$\sum_{n=a}^{b} (x)^n = \frac{x^a - x^{b+1}}{1 - x} \qquad (3\text{-}14)$$

أي أن منطقة التقارب لهذه الإشارة هي الجزء من المستوي Z الذي يقع خارج الدائرة التي نصف قطرها $|a|$ أي $D(|a|,+\infty)$.

نلاحظ أن a هو قطب لتحويل Z للإشارة، ولما كان تحويل Z غير متقارب عند هذه النقطة فهو غير متقارب على الدائرة التي يقع عليها القطب، والمتمركزة أيضاً حول المبدأ، وهذه الدائرة هي التي تحد منطقة التقارب من الداخل، ذلك أن الإشارة سببية ومنطقة التقارب تقع خارج دائرة ما.

لنأخذ الآن الإشارة $x_2[n] = -a^n u(-n-1)$. نلاحظ أن هذه الإشارة عكس سببية أي أنها معدومة في اللحظات الموجبة $n \geq 0$. يُعطى تحويل Z لهذه الإشارة بالعلاقة التالية:

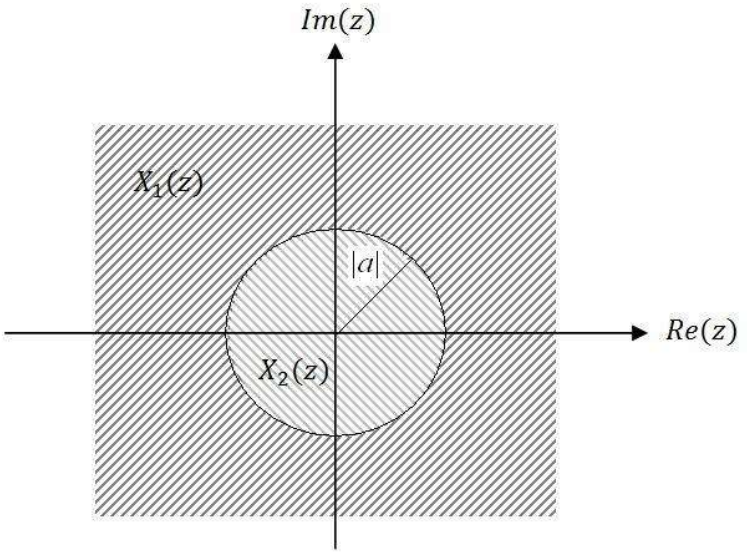
$$\begin{aligned} X_2(z) = ZT[x_2(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} \end{aligned} \tag{4-14}$$

وذلك من أجل $|z| < |a|$، أي أن منطقة التقارب هو القرص $D(0,|a|)$ وهو الجزء من مستوي Z المحدود من الخارج بالدائرة التي نصف قطرها $|a|$، والتي تمر بالنقطة a وهي قطب التابع $X_2(z)$.

نلاحظ أن تحويل Z لكل من الإشارتين السابقتين يعطي التابع نفسه:

$$X(z) = X_2(z) = \frac{z}{z-a} \tag{5-14}$$

ولكن في منطقتي تقارب مختلفين، حيث تقع منطقة التقارب لتحويل Z للإشارة الأولى السببية خارج الدائرة التي تمر بالقطب a، في حين أنها تقع داخل هذه الدائرة من أجل الإشارة الثانية عكس السببية، كما في الشكل 14-1.



الشكل 14-1 منطقة تقارب تحويل Z لإشارة سببية وإشارة عكس سببية.

من ذلك نستنتج أنه إذا كانت الإشارة سببية، فإن ما يحد حيز التقارب من الداخل هو الدائرة التي يقع عليها القطب ذو المطال الأكبر. أما في حالة إشارة عكس سببية، فيكون حيز التقارب هو داخل دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها هو مطال أصغر قطب لتحويل Z للإشارة (إن وجدت أقطاب).

وبشكل عام، يمكن أن نذكر الخواص التالية لمنطقة التقارب:

●من أجل إشارة سببية تكون منطقة التقارب معرفة خارج دائرة متمركزة حول المبدأ نصف قطرها هو أكبر مطال قطب لتابع تحويل Z. وتكون منطقة التقارب من الشكل:

$$ROC: |z| > \alpha$$

●من أجل إشارة عكس سببية تكون منطقة التقارب معرفة داخل دائرة متمركزة حول المبدأ نصف قطرها هو أصغر مطال قطب لتابع تحويل Z. وتكون منطقة التقارب من الشكل:

$$ROC: |z| < \beta$$

● من أجل إشارة غير سببية (لها قيم غير معدومة في الجزء السالب والموجب من محور الزمن) تكون منطقة التقارب معرفة بين دائرتين تقعان على قطبين لتابع تحويل Z. وتكون منطقة التقارب من الشكل:

$$ROC: \alpha < |z| < \beta$$

حيث أن α و β قيم حقيقية موجبة وقد تكون غير منتهية.

نجد فيما يلي تحويلات Z لبعض الإشارات الأساسية.

جدول 14-1 تحويل Z لبعض الإشارات الأساسية.

ROC	$\mathbf{X}[z]$	$\mathbf{x}[n]$
مستوي Z كله	1	$\delta[n]$
$1 < \|z\|$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\mathrm{u}[n]$
$1 > \|z\|$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$-\mathrm{u}[-n-1]$
$\|a\| < \|z\|$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u[n]$
$\|a\| < \|z\|$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$na^n u[n]$
$\|a\| > \|z\|$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$-na^n \mathrm{u}[-n-1]$
$\|a\| > \|z\|$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$-a^n u[-n-1]$
$1 < \|z\|$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\cos(n\omega_0).u[n]$
$1 < \|z\|$	$\frac{\mathrm{z}^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\sin(n\omega_0).u[n]$
$\|a\| < \|z\|$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2\mathrm{z}^{-2}}$	$a^n\cos(n\omega_0).u[n]$
$\|a\| < \|z\|$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$a^n\sin(n\omega_0).u[n]$
$0 < \|z\|$	$\frac{1-a^N\mathrm{z}^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\begin{cases} a^n, 0 \le n \le \mathrm{N}-1 \\ 0, \quad \text{therwise} \end{cases}$

3.14 تحويل Z العكسي

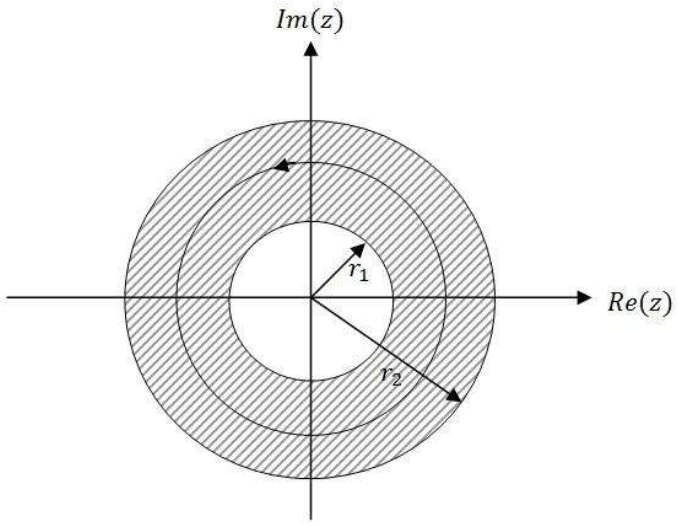
يُعرّف تحويل Z العكسي بأنه العملية المعاكسة التي تسمح بالانتقال من تحويل Z إلى الإشارة المتقطعة $x[n]$. كما يعني وجود التحويل العكسي أن تحويل Z هو تمثيل للإشارة، حيث يمكن الانتقال من المجال الزمني إلى مستوي Z وبالعكس. يمكن التعبير عن إمكانية الانتقال بالاتجاهين بالعلاقة:

$$x[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \left[X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}, D \right] \tag{6-14}$$

ويعطى تحويل Z العكسي بالعلاقة التالية:

$$x[n] = ZT^{-1}(X(z), D) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C^+} X(z) z^{n-1} dz \tag{8-14}$$

يؤخذ التكامل العقدي المعتبر في العلاقة السابقة على إطار مغلق C^+ ضمن منطقة التقارب، وموجه بالاتجاه الموجب (أي بعكس دوران عقارب الساعة)، كما يمكن اختيار أي منحنٍ مغلق ضمن منطقة التقارب ليكون إطاراً للتكامل، حيث يمكن أن يكون دائرة مركزها المبدأ كما في الشكل 14-3.



الشكل 14-2: قرص التكامل في تحويل Z العكسي

يمكن حسب هذا التكامل من أجل الإشارات السببية فقط باستخدام نظرية كوشي التي تعتمد على حساب الرواسب المعطاة بالعلاقة التالية:

$$n \geq 0, \;\; x[n] = \sum_{z_i} Res_{z_i}[X(z)z^{n-1}] \tag{8-14}$$

حيث z_i هي أقطاب التابع $X(z)$ التي تقع داخل منحني التكامل C^+ (وهي جميع أقطاب التابع $X(z)$ من أجل الإشارات السببية) و $Res_{z_i}[f(z)]$ هو راسب التابع العقدي $f(z)$ عند القطب z_i.

أما من أجل القسم العكس سببي، أي من أجل $n < 0$، فيمكن البرهان على أنها تعطى بالعلاقة التالية:

$$n < 0, \;\; x[n] = -\sum_{z_i} Res_{z_i}[X(z)z^{n-1}] \tag{9-14}$$

حيث z_i هي أقطاب التابع $X(z)$ التي تقع خارج منحني التكامل C^+.

4.14 السببية والاستقرار

كما رأينا، تكون الإشارة $x[n]$ سببية عندما تكون منطقة التقارب لها خارج دائرة ما، متمركزة حول المبدأ وحتى اللانهاية ضمناً. إن ذكر منطقة التقارب بغية تعريف تحويل Z غير ضروري في حال كانت الإشارة سببية، إذ يكون خارج الدائرة التي تمر بالقطب ذي المطال الأكبر. وفي حال إعطاء التابع $X(z)$ دون تحديد منطقة التقارب، فإننا سنفترض أن الإشارة سببية (يجب في هذه الحالة أن تكون الأقطاب محدودة ولا يوجد قطب في اللانهاية).

رأينا أن الإشارة $x[n]$ تكون مستقرة إذا كانت قابلة للجمع بالإطلاق أي:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \tag{10-14}$$

وبهذا يمكن البرهان على أن الإشارة تكون مستقرة إذا كانت منطقة التقارب لتحويل Z لها تحوي الدائرة الواحدية. بالتالي إذا كانت الإشارة مستقرة فإنه من الممكن الحصول على قيم تحويل Z على نقاط الدائرة الواحدية من أجل $z = e^{j\omega}$. وفي هذه الحالة نحصل على قيم تحويل فورييه للإشارة عند التردد الزاوي ω، أي يمكن أن نكتب في هذه الحالة أن:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{jn\omega} = \tilde{X}(\omega) \tag{11-14}$$

وتستخدم هذه العلاقة للحصول على تحويل فوريه للإشارة المتقطعة $x[n]$ إذا كانت مستقرة فقط انطلاقاً من تحويل Z لها باستبدال المتحول Z بالقيمة $e^{j\omega}$ في تابع تحويل Z.

استقرار إشارة سببية

إذا كانت الإشارة $x[n]$ سببية فإنها تكون مستقرة عندما تكون منطقة التقارب لتحويل Z لها خارج دائرة نصف قطرها أصغر من الواحد، وذلك حتى تكون الدائرة الواحدية ضمن منطقة التقارب.

نتيجة: تكون الإشارة السببية مستقرة إذا كانت جميع أقطابها داخل الدائرة الواحدية تماماً، أي أن مطالات الأقطاب أصغر تماماً من الواحد.

مثال 14-2:

بفرض لدينا إشارة متقطعة بحيث يتضمن تحويل Z لها قطبين مختلفين (الأمر الذي يسمح بتعريف ثلاث إمكانيات لحيز التقارب، بالتالي ثلاث إشارات مختلفة) ومعطى بالعلاقة التالية:

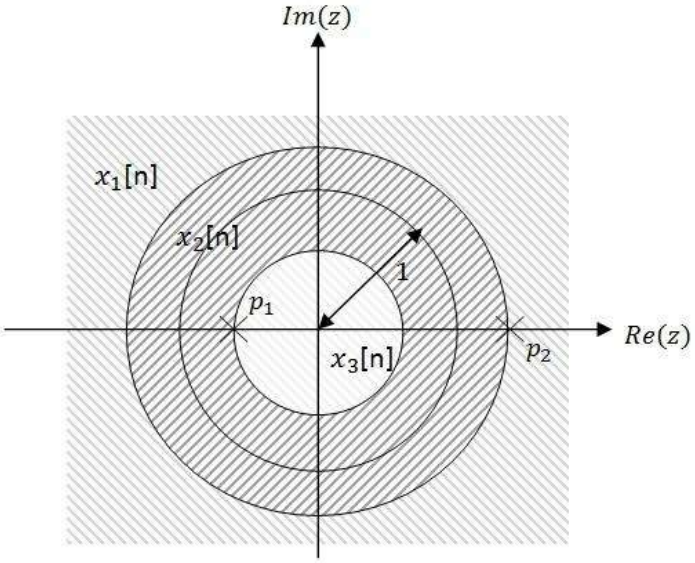
$$X(z) = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} \qquad (12\text{-}14)$$

نفترض هنا أن $|p_2| > 1 > |p_1|$.

بتحليل الكسر، يمكن إعادة كتابة $X(z)$ بالشكل التالي:

$$X(z) = \frac{1}{p_1 - p_2}\left[\frac{z}{z-p_1} - \frac{z}{z-p_2}\right] \qquad (13\text{-}14)$$

يوضح الشكل 14-5 حيز التقارب لهذا التابع:



الشكل 14-3 حيز تقارب تابع التحويل في المثال 14-2.

يمكن التمييز بين ثلاث حالات:

إذا كان حيز التقارب خارج الدائرة التي تمر بالقطب p_2 أي $D(|p_2|,+\infty)$ فإن ذلك يقابل أن الإشارة $x_1[n]$ سببية. أي أن القطبين p_1 وp_2 سببيان، لأن حيز التقارب يقع خارجهما. كما أنها إشارة غير مستقرة لأن حيز التقارب لا يحوي الدائرة الواحدية. نعبر عن الإشارة $x_1[n]$ بالعلاقة التالية:

$$x_1[n] = \frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n - p_2^n]u[n] \qquad (14\text{-}14)$$

إذا كان حيز التقارب هو الحلقة التي تقع بين الدائرتين اللتين تمران بالقطبين p_1 وp_2 أي $D(|p_1|,|p_2|)$ فإن ذلك يقابل الإشارة $x_2[n]$ غير السببية (ليست سببية وليست عكس سببية). أي أن القطب p_1 قطب سببي والقطب p_2 قطب عكس. كما أنها إشارة مستقرة لأن حيز التقارب يحوي الدائرة الواحدية. في هذه الحالة تكون الإشارة $x_2[n]$ معطاة بالعلاقة التالية:

$$x_2[n] = \frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n u[n] + p_2^n u[-n-1]] \qquad (15\text{-}14)$$

إذا كان حيز التقارب هو القرص المحدود بالدائرة التي تمر بالقطب p_1 أي $D(0,|p_1|)$ فإن ذلك يقابل الإشارة $x_3[n]$ عكس السببية ونقول إن القطبين p_1 و p_2 هما قطبان عكس سببيان لأنهما يقعان خارج حيز التقارب في

هذه الحالة. كما أنها إشارة غير مستقرة لأن حيز التقارب لا يحوي الدائرة الواحدية. نعبر عن الإشارة $x_3[n]$ بالعلاقة التالية:

$$x_3[n] = -\frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n u[-n-1] - p_2^n u[-n-1]] \qquad (16\text{-}14)$$

وهكذا نرى أنه باختلاف حيز التقارب لنفس تابع التحويل، يمكن أن يعطي ثلاث إشارات مختلفة وذات خواص سببية واستقرار مختلفة أيضاً.

نستنتج من المثال السابق ما يلي:

1- يمكن غالباً حساب تحويل Z العكسي دون المرور بحسابات الرواسب، فإذا كان التابع $X(z)$ تابعاً كسرياً، عندها نقوم بتحليله إلى كسور بسيطة نَعرف تحويل Z العكسي لها، وننظر في حيز التقارب لنحدد إذا كان كل من أقطابه سببياً أم عكس سببي، ونستنتج الإشارات الموافقة ثم نجمع هذه الإشارات بفضل خاصة الخطية التي سنراها لاحقاً ضمن خواص تحويل Z.

2- إن حداً من الشكل $\frac{z}{z-p_k}$ يقابل إشارة سببية من الشكل $p_k^n u(n)$ إذا كان القطب p_k داخل حيز التقارب (أي أنه قطب سببي)، كما أن هذا الحد نفسه يقابل إشارة عكس سببية من الشكل $-p_k^n u(-n-1)$ إذا كان القطب p_k خارج حيز التقارب (قطب عكس سببي).

5.14 خواص تحويلZ

بما أن تحويل Z هو الحالة العامة من تحويل فوريه للإشارات المتقطعة فإن له خواص مشابهة لخواص تحويل فوريه سندرجها فيما يلي. سنعبر عن حيز التقارب بالاختصار ROC وسنرمز له بالرمز R_{x1} لحيز تقارب الإشارة المتقطعة $x_1[n]$.

1.5.14 الخطية

تعني خاصية الخطية أن تحويل Z لتركيب خطي من عدة إشارات يعطي التركيب الخطي نفسه من تحويلات Z لهذه الإشارات. فإذا كان $X_1(z)$, $X_2(z)$ هما تحويلا Z للإشارتين $x_1[n]$, $x_2[n]$ على الترتيب فإن:

$$\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \lambda_1 X_1(z) + \lambda_1 X_2(z), \quad ROC = R_{x1} \cap R_{x2} \qquad (17\text{-}14)$$

حيث λ_1, λ_2 ثوابت عقدية، ونلاحظ أن حيز التقارب للتركيب الخطي هو تقاطع منطقتي التقارب للإشارتين $x_1[n],\ x_2[n]$.

فإذا كانت أقطاب $\lambda_1 X_1(z) + \lambda_1 X_2(z)$ هي جميع أقطاب $x_1[n]$ و $x_2[n]$، أي إذا لم يحصل حذف لأقطاب مع أصفار، فإن منطقة التقارب للتركيب الخطي هو تقاطع منطقتي التقارب. كما يمكن أن تكون منطقة التقارب أكبر من التقاطع كما في المثال التالي:

مثال 3-14: لتحويلي Z للإشارتين $x_1[n] = a^2u[n]$ و $x_2[n] = a^2u[n-1]$ منطقة التقارب نفسها وهو المجال خارج الدائرة التي نصف قطرها $|a|$. أما منطقة التقارب لتحويل Z للفرق بين الإشارتين $a^2u[n] - a^2u[n-1] = a^2\delta[n]$ فهي مستوي Z كله.

2.5.14 الانزياح الزمني

تُظهر خاصية الانزياح الزمني في تحويل Z أن الإزاحة في الزمن تكافئ إزاحة طور خطية في التردد نظراً لأن المحتوى الترددي للإشارة يعتمد على شكل الإشارة فقط وهذا الشكل لا يتغير بوجود إزاحة زمنية. وينتج عن التأخير إزاحة سالبة في الطور بينما ينتج عن التسبيق إزاحة موجبة (وذلك عند الترددات الموجبة).

فإذا كان لدينا الإشارتان المتقطعتان في الزمن $x[n]$ و $y[n]$ حيث: $y[n] = x[n-k]$ وحسب خاصية الانزياح الزمني لتحويل Z:

$$x[n-k] \overset{ZT}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z)\ , \qquad ROC = R_x \tag{18-14}$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = z^{-k}X(z) \tag{19-14}$$

ونلاحظ أن للتابعين $Y(z)$ و $X(z)$حيز التقارب نفسه، إلا إذا جرى إدخال أقطاب عند الصفر أو عند اللانهاية (القطب عند اللانهاية يعني صفراً عند $z = 0$) وذلك حسب قيمة k موجبة أو سالبة. ويؤدي إدخال أقطاب إلى حد حيز التقارب من ناحية المبدأ أو عند اللانهاية.

3.5.14 عكس الزمن

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها، وحسب خاصية عكس الزمن:

$$x[-n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right) \ , \qquad ROC = \frac{1}{R_x} \tag{20-14}$$

فإن تحويل Z للإشارة المتقطعة $y[n] = x[-n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X(\frac{1}{z}) \tag{21-14}$$

أما حيز تقارب $Y(z)$ فهو مقلوب حيز تقارب $X(z)$، فإذا كان حيز تقارب $X(z)$ هو القرص $D(r_1, r_2)$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ هو القرص $D\left(\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1}\right)$ ، أي إذا كانت النقطة z_0 تنتمي إلى حيز تقارب $X(z)$ فإن النقطة $\frac{1}{z_0}$ تنتمي إلى حيز تقارب $Y(z)$.

4.5.14 المرافق العقدي

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها، وحسب خاصية المرافق العقدي لتحويل Z:

$$x^*[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X^*(z^*) \ , \qquad ROC = R_x \tag{22-14}$$

فإن تحويل Z لمرافق العقدي للإشارة $y[n] = x^*[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X^*(z^*) \tag{23-14}$$

ويكون للتحويلين $Y(z)$ و $X(z)$ حيز التقارب نفسه. فإذا كانت الإشارة $x[n]$ حقيقية فإن $X(z) = X^*(z^*)$.

5.5.14 الضرب بإشارة أسية

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها، وحسب خاصية الضرب بإشارة أسية في تحويل Z:

$$a^n x[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{a}\right) \ , \qquad ROC = |a| R_x \tag{24-14}$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n] = a^n x[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{25-14}$$

وإذا كان حيز تقارب $X(z)$ هو القرص $D(r_1, r_2)$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ هو القرص $D(|a|r_1, |a|r_2)$ ، أي إذا كان حيز تقارب$X(z)$ ممتداً على قيم z التي تحقق العلاقة $r_1 < |z| < r_2$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ يكون ممتداً على قيم z التي تحقق العلاقة التالية: $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$.

6.5.14 الاشتقاق في مجال Z

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها، وحسب خاصية الاشتقاق لتحويل Z:

$$nx[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad ROC = R_x \tag{26-14}$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n] = nx[n]$يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{27-14}$$

ويكون للتحويل $Y(z)$ حيز تقارب نفس $X(z)$ ما عدا إمكانية إدخال أقطاب عند الصفر أو عند اللانهاية.

مثال 14-4: حساب تحويل Z للإشارة $y[n] = na^n u[n]$.

رأينا سابقاً أن تحويل Z للإشارة الأسية المتقطعة $a^n u[n]$ في حال $|z| > |a|$ هو:

$$a^n u[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \tag{28-14}$$

يمكن باستخدام خاصية الاشتقاق في مجال Z لحساب $Y(z)$ فنجد:

$$Y(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a| \tag{30-14}$$

مثال 14-5: حساب $x[n]$ بفرض لدينا تابع التحويل $X(z) = \log(1 + az^{-1})$ في حال $|z| > |a|$.

باشتقاق $X(z)$ نحصل على التابع الكسري التالي:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\frac{az^{-2}}{1+az^{-1}} \tag{30-14}$$

وقد رأينا سابقاً أن تحويل Z للإشارة الأسية المتقطعة $a^n u[n]$ في حال $|z| > |a|$ هو:

$$a^n u[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} |z| > |a| \tag{31-14}$$

باستخدام خاصية الاشتقاق في مجال Z:

$$nx[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} |z| > |a| \tag{32-14}$$

وباستخدام خاصية الانزياح الزمني نجد:

$$nx[n] = a(-a)^{n-1}u[n-1] \tag{33-14}$$

ومنه نجد الإشارة المتقطعة $x[n]$ التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$x[n] = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u[n-1] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \log(1+az^{-1}) \quad |z| > |a| \tag{34-14}$$

7.5.14 جداء التلاف

إذا كان لدينا الإشارتان المتقطعتان في الزمن $x_1[n]$ و $x_2[n]$و كان $X_1(z)$ و $X_2(z)$ هما تحويلا Z لهما على الترتيب، وحسب خاصية جداء التلاف لتحويل Z:

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad ROC \supseteq R_{x1} \cap R_{x2} \tag{35-14}$$

فإذا كان:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k] \tag{37-14}$$

فإن تحويل Z للإشارة الناتجة هو:

$$X(z) = X_1(z).X_2(z) \tag{37-14}$$

حيث يحتوي حيز تقارب $X(z)$ تقاطع حيزي التقارب للتحويلين $X_1(z)$ و $X_2(z)$.

هذه الخاصية مهمة عند التعامل مع المرشحات الخطية التي تُعطى كما نعلم بجداء تلاف، حيث يحول تحويل Z جداء التلاف إلى جداء عادي. بالتالي، فإن تحويل Z لإشارة الخرج لمرشح خطي ينتج عن ضرب تحويل Z لإشارة الدخل بتحويل Z للاستجابة النبضية وهو ما نسميه تابع التحويل للمرشح.

8.5.14 الترابط بين إشارتين

ليكن تابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بين الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$:

$$r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n-k] \tag{38-14}$$

يمكن كتابة العلاقة السابقة كجداء تلاف للإشارة $x_1[k]$ مع الإشارة $x_2^*[-k]$، أي:

$$r_{x_1x_2}[k] = x_1[k] * x_2^*[-k] \tag{39-14}$$

بتطبيق خاصية جداء التلاف السابقة، يمكن كتابة تحويل Z لتابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بالشكل التالي:

$$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right) ROC \supseteq R_{x1} \cap R_{x2} \tag{40-14}$$

حيث يحتوي حيز تقارب $R_{x_1x_2}(z)$ على تقاطع حيزي التقارب للتحويلين $X_1(z)$ و $X_2(z)$.

6.14 نظرية بارسفال

إذا اعتبرنا قيمة تابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بين الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ في حالة التأخير الزمني $k = 0$، سنحصل على العلاقة التالية:

$$r_{x_1x_2}[0] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n] \tag{41-14}$$

يمكن حساب $r_{x_1x_2}[n]$ بأخذ تحويل Z العكسي للتابع $R_{x_1x_2}(z)$:

$$r_{x_1x_2}[k] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C^+} X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right) z^{k-1}dz \tag{42-14}$$

عندما $k = 0$، نحصل على علاقة بارسفال مكتوبة باستخدام تحويل Z:

$$r_{x_1x_2}[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m].x_2^*[m] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C^+} X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}dz \qquad (43\text{-}14)$$

تعني علاقة بارسفال انحفاظ الجداء الداخلي بالانتقال من المجال الزمني إلى مستوي Z.

حيث يمثل المجموع المبين في العلاقة (43-14) الجداء الداخلي للإشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ في المجال الزمني، أما التكامل في المستوي العقدي فيمثل الجداء الداخلي في مستوي Z.

فإذا كان حيز تقارب $R_{x_1x_2}(z)$ يحتوي على الدائرة الواحدية واخترنا هذه الدائرة لتكون إطار التكامل C^+، وبتعويض $z = e^{j\omega}$، فإن العلاقة السابقة ستصبح علاقة انحفاظ الجداء الداخلي بتحويل فوريه.

جداء إشارتين

إذا كانت الإشارة $x[n]$ ناتجة عن ضرب الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$:

$$x[n] = x_1[n].x_2[n] \qquad (44\text{-}14)$$

فإن تحويل Z لها يعطى بالعلاقة التالية:

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C^+} X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad (45\text{-}14)$$

وهو ما يدعى بجداء التلاف العقدي.

فإذا كان حيز تقارب $X_1(z)$ هو القرص المعرف بالعلاقة $r_1 < |z| < R_1$، وحيز تقارب $X_2(z)$ هو القرص المعرف بالعلاقة $r_2 < |z| < R_2$، فيكون حيز تقارب $X(z)$ هو، على الأقل، القرص المعرف بالعلاقة $r_1r_2 < |z| < R_1R_2$.

وإذا كان حيز تقارب $X(z)$ يحتوي الدائرة الواحدية واخترنا هذه الدائرة لتكون إطار التكامل C^+، فإن العلاقة السابقة تصبح علاقة جداء التلاف الدوري لتحويلي فوريه:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_1(\theta).\tilde{X}_2(\omega-\theta)d\theta \qquad (46\text{-}14)$$

حيث نجعل $z = e^{j\omega}$ و $v = e^{j\theta}$ في علاقة جداء التلاف العقدي.

الجمع

نعبر عن الإشارة $y[n]$ الناتجة عن تجميع قيم الإشارة $x[n]$ من $-\infty$ وحتى اللحظة الحالية n بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{47-14}$$

نسمي هذا النظام مجمعّاً، وهو ما يقابل نظاماً مكاملاً في الحالة المستمرة.

بحساب تحويل Z لإشارة خرج المجمّع اعتماداً على الخواص المذكورة سابقاً نجد أن:

$$Y(z) = ZT\left[\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right] = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) \tag{48-14}$$

نستنتج مما سبق أن تابع التحويل لنظام المجمّع يعطى بالعلاقة التالية:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{49-14}$$

وهو كما رأينا سابقاً عبارة عن تحويل Z لإشارة الخطوة المتقطعة، أي أن الاستجابة النبضية لنظام المجمّع هي إشارة الخطوة المتقطعة $u[n]$.

كما نستنتج أنه يمكن باستخدام تحويل Z إيجاد مجموع قيم إشارة متقطعة $x[n]$ (إذا كان هذا المجموع موجوداً) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(z)|_{z=1} \tag{50-14}$$

7.14 نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية

تنص نظرية القيمة البدائية لتحويل Z على ما يلي:

إذا كانت الإشارة المتقطعة $x[n]$ **سببية** (أي $x[n] = 0$ من أجل $n < 0$) فإن القيمة الابتدائية للإشارة $x[0]$ تساوي نهاية تحويل Z لها عندما تنتهي z إلى اللانهاية أي:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}[X(z)] \tag{51-14}$$

مثال 14-6: لإيجاد القيمة البدائية للإشارة المتقطعة السببية $x[n] = a^n u[n]$، نوجد أولاً تحويل Z للإشارة وحيز تقاربه باستخدام خواص التحويل الواردة سابقاً.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} |z| > |a| \tag{52-14}$$

بتطبيق نظرية القيمة البدائية نوجد $x[0]$ للإشارة $x[n]$:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}[X(z)] = \lim_{z\to\infty}[\frac{1}{1-az^{-1}}] = a^0 = 1 \tag{53-14}$$

تنص نظرية القيمة النهائية لتحويل Z على ما يلي:

إذا كان للإشارة المتقطعة السببية $x[n]$ نهاية محددة عندما تنتهي n إلى اللانهاية فإن قيمة هذه النهاية تعطى بالعلاقة التالية:

$$x[+\infty] = \lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{54-14}$$

وتكون هذه النهاية **موجودة فقط** إذا كان حيز تقارب $(1-z^{-1})X(z)$ يحتوي الدائرة الواحدية.

مثال 14-7: لإيجاد القيمة النهائية للإشارة المتقطعة السببية $x[n] = a^n u[n]$، نوجد أولاً تحويل Z للإشارة وحيز تقاربه باستخدام خواص التحويل الواردة سابقاً وبفرض $|a| < 1$:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} |z| > |a| \tag{55-14}$$

بتطبيق نظرية القيمة النهائية نوجد $x[+\infty]$ للإشارة $x[n]$:

$$\begin{aligned} x[+\infty] = \lim_{n\to\infty} x[n] &= \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)] \\ &= \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\frac{1}{1-az^{-1}}] = 0 \end{aligned} \tag{56-14}$$

مسائل الفصل الرابع عشر

14-1- احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

14-2- احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$$

14-3- باستخدام خواص تحويل Z، احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $y[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

وذلك من أجل $x[n] = u[n]$

14-4- باستخدام تحويل Z التالي:

$$a^n u[n] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \qquad ROC =]|a|, +\infty[$$

احسب تحويل Z العكسي للتابع

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}, \qquad |z| > 2$$

14-5- ليكن المرشح الرقمي السببي المعطى بتابع التحويل التالي:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

1) ما هو حيز لتقارب للتابع $H(z)$.
2) ادرس استقرار النظام.
3) اكتب معادلة الفروق للمرشح.

15 المراجع

[1] L.E. Franks "Signal Theory", Prentice-Hall, 1969.

[2] I.S. Granarovsky "Radio Circuits and Signals", MIR, 1981.

[3] S.I. Baskakov "Signal and Circuits" MIR, 1986.

[4] A. V. Oppenheim, A.S. Willsky & S.H. Nawab "Signal and Systems", Second Edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

[5] Monson H. Hayes, "Digital Signal Processing", McGrow Hill, 1999.

[6] Alan V. Oppenheim, Ronald W Schafer, "Discrete-Time Signal Processing", Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999.

[7] S. Haykin & B. VanVeen "Signal and Systems", second edition , John-Willy, 2003,.

[8] S.M.M. Yang "Modern Digital Radio Communications Signals and Systems", Springer, 2019.

الاختصارات

AM – Amplitude Modulation	25 -	المطال التعديل
FM – Frequency Modulation	25 -	التعديل الترددي
PM – Phase Modulation	25 -	التعديل الطوري
LED – Light Emitting Diode	30 -	ثنائي باعث الطور
LOS – Line – of – Sight	32 -	مدى خط النظر
VLF – Very Low Frequency	32 -	الترددات المنخفضة جداً
ELF – Extra Low Frequency	32 -	الترددات المنخفضة جداً
LTI – Linear Time Invariant	60 -	المتغير مع الزمن
CW – Continuous Wave	237 -	الموجة المستمرة
DSB – SC – Double Sideband suppressed carrier	238 -	تعديل الحزمتين الجانبيتين مع حذف الحامل
SSB – Single Sideband	238 -	الواحد تعديل الحزمة الجانبية
PAM – Pulse Amplitude Modulation		تعديل مطال النبضة
PCM – Pulse code Modulation		التعديل النبضي المرمز
FDM – Frequency Division Multiplexing		التجميع بالتقييم الترددي
TDM – Time division Multiplexing		بالتقييم الزمني التجميع
ISI – Inter-Symbol Interference		تداخل الرموز البيني
ROC – Region Of Convergence		مجال التقارب
LPF – Low Pass Filter		مرشح تمرير منخفض الحزمة
HPF - High Pass Filter		مرشح تمرير عالي الحزم
BPF – Band pass Filter		مرشح حزمة التمرير

الرموز

$-\ s(t)$	الشكل الموجي	
$-\ x(t)$	الإشارة	36 -
$-x[n]$	الإشارة المتقطعة	39-
$-\ Z$	مجموعة الأرقام الصحيحة	39-
$-\ R$	مجموعة الارقام الحقيقية	39-
$-\ C$	مجموعة الاعداد العقدية	39-
$-\ x_r(t)$	اشارة حقيقية	41 –
$-\ x_i(t)$	اشارة تخيلية	41 –
$-\ u_{-1}(t)$	الإشارة الواحدية	42 –
$-\ x_e(t)$	اشارة زوجية	44 –
$-\ x_0(t)$	اشارة فردية	44 –
$-\ E_x$	قدرة الإشارة $x(t)$	45 -
$-\ P_x$	استطاعة الإشارة $x(t)$	46 -
$-\ \prod(\cdot)$	النبضة المستطيلة	49 –
$-\ \Lambda(\cdot)$	النبضة المثلثية	50 –
$-\ sinc(\cdot)$	اشارة السينك sinc	51 -
$*$	اشارة التلفيف (التلاف)	54 –
$\triangleq$	التعريف	76 -

$< >$	جداء داخلي	
$\lvert\cdot\rvert$ قيمة	$(\cdot)$ - الطويلة	85 -
$X_C(\cdot)$	اشارة مع الطور	119 -
$X_s(\cdot)$	اشارة مترابعة	119-
$R_X(\cdot)$	تابع الترابط الذاتي	135 -

دليل الكلمات

Information	22 -	المعلومات
Massage	22 -	الرسالة
Signal	22 -	الاشارة
Transducer	24 -	محول الطاقة
Modulation	25 -	التعديل
Demodulation	26 -	كشف التعديل
Analog signal	27 -	الاشارة التماثلية
Regeneration	27 -	اعادة توليد
Noise	27 -	الضجيج
Redundant	27 -	الاطناب
Channel coding	27 -	ترميز القناة
Ciphering	27 -	التعمية
Digital source	27 -	المصدر الرقمي
Discrete source	27 -	المصدر المتقطع
Interference	28 -	التداخل
Wave form	28 -	الشكل الموجي
Line encoder	28 -	مرمز الخط
Channel decider	28 -	كاشف مرمز القناة
Bit error probability	28 -	احتمال خطأ الميت
Fiber optic	29 -	الليف الضوئي
Twisted pair	29 -	الأزواج المجدولة
Coaxial cable	29 -	الكوابل المحورية
Waveguide	29 -	دليل الموجة
Crosstalk interference	30 -	تداخل الكلام
Photonic device	30 -	الوسائل الفوتونية
Photodiode	31 -	ثنائي ضوئي
Antenna	31 -	الهوائي

Ground wave	32 -	الموجة الأرضية
Sky wave	32 -	الموجة السماوية
Atmospheric noise	32 -	الضجيج الجوي
Man mode noise	32 -	ضجيج الإنسان
Multipath	33 -	المسارات المتعددة
Inter symbol interference	33 -	تداخل الرموز
Fading	33 -	الخفوت
Front end	34 -	الواجهة الأمامية
Cosmic noise	34 -	الضجيج الكوني
Convolution	60 -	التلفيف (الطي)
Equalizer	62 -	مسويّ
Basis vectors	68 -	الأشعة القاعدية أو (الأشعة الأساس)
Eigen vectors	70 -	الأشعة الذاتية
Eigen value	71 -	القيمة الذاتية
Mutual orthogonality	71 -	تعامد متبادل
Norm	71 -	النظيم
Normalized	71 -	معير
Complete	73 -	كامل
Complex conjugate	74 -	العقدي المرافق
Karhunen-loeve expansion	75 -	نشر كارهونن– لويف
Gram-schmidth procedure	75 -	إجرائية غرام – شميدث
Signal vector	81 -	شعاع الإشارة
Signal space	81 -	فضاء الإشارة
Eigen unction	96 -	التابع الذاتي
Factor	96 -	عامل
Frequency response	97 -	الاستجابة الترددية
Truncated signal	107 -	إشارة مبتورة
Orthogonality	161 -	التعامدية

Orthonormal	161 -	متعامدتين ممعيرتين
Cross correlation function	160 -	تابع ترابط التقاطع
basis function Complete orthogonal	184 -	التوابع القاعدي المتعامدة الكاملة
Degree of freedom	187 -	درجة الحرية
Signal base	187 -	اساس الاشارة
Switched sampling	188 -	أخذ العينات بالتبديل
sampling Zero order – hold	188 -	أخذ العينات بالماسك من المرتبة الصفر
Pass band signal	196 -	إشارة حزمة التمرير
Phasor	196 -	مطوار
Complex envelop	198 -	الغلاف العقدي
In-phase	198 -	مع الطور
Quadrature phase	198 -	متعامدة مع الطور
amplitude modulation	200 -	التعديل المطالي
modulation phase	201 -	تعديل الطور
quadrature modulation	201 -	التعديل الترابعي
Link	202 -	وصلة
Synchronization	202 -	التزامن
Estimation	202 -	تقدير
Complex pass band signal	205 -	إشارة حزمة التمرير العقدية
Complex analytic signal	205 -	إشارة التحليلية العقدية
Analytic signal	205 -	الاشارة التحليلية
transform Helbert	205 -	تحويل هيلب
pre-envelope	210 -	الغلاف الاولي
helbert transform pair	212 -	زوج تحويل هيلبيرت
total phase	217 -	الطور الكلي
taylor series	228 -	سلسلة تايلور
Carrier	237 -	الحامل
Modulation	237 -	التحويل

Modulating signal	237 -	الاشارة المحولة
Modulated signal	237 -	الاشارة المعدلة
Demodulation	237 -	كشف التعديل
Analog modulation	237 -	التعديل التماثلي
Amplitudr modulation	237 -	التعديل المطالي
Anglo modulation	237 -	التعديل الزاوي
Frequency modulation	237 -	التعديل التردد
Phase modulation	237 -	التعديل الطوري
modulation Amplitude pulse	237 -	تعديل مطال النبضة
Total phase	238 -	الطور الكلي
Double side band-suppressed carrier	238 -	تعديل الحزمتين الجانبين مع حذف الحامل
Single side band	238 -	تعديل حزمة جانبية واحدة
Vestigial side band	238 -	تعديل الحزمة الجانبية الأشري
Linear modulation	238 -	التعديل الخطي
Non linear	239 -	غير خطي
Instantaneous radian frequency	239 -	تردد الراديان اللحظي
sensitivity factor Frequency	239 -	عامل تحسس التردد
Analog pulse modulation	240 -	تعديل النبضة التماثلي
Digital pulse modulation	240 -	تعديل النبضة الرقمي
Radiation	243 -	الاشعاع
Amplitude sensitivity fact	245 -	عامل حاسية المطال
Modulation depth	245 -	عمق التعديل
Over modulation	246 -	طفح التعديل
Percentage modulation	246 -	النسبة المئوية
Upward	246 -	العليا
Downward	246 -	الدنيا
Overload	246 -	زيادة التحميل (الطفح)
Operator	246 -	معامل

Message spectrum	250 -	طيف الرسالة
bandwidth Transmission	251 -	المجال الترددي للأرسال
Phasor	255 -	المطاور
Coherent	255 -	متماسك
Non coherent	255 -	غير متماسك
Envelope detector	256 -	كاشف الغلاف
Diode	257 -	ثنائي
Ripple	258 -	تموج
Phase reversal	263 -	انعكاس بالسطور
Quadrature null effect	263 -	الاثر الصفري الترابعي
Polarity	272 -	الاستقطاب
DE multiplexing	273 -	فك التضميم
Guard band	277 -	مجال الحماية
Time slot	277 -	حيز زمني
Stuffing	278 -	حشو
Intermodulation	290 -	التعديل البيني
filter Raised cosine	293 -	مرشح المستجيب المرتفع
Unilateral	296 -	احادي الجانب
Bilateral	296 -	ثنائي الجانب
Eigen function	296 -	التابع الذاتي
Convergence	296 -	التقارب
Eigen value	298 -	القيمة الذاتية
Residues	299 -	الرواسب
Perfect square	323 -	مربع كامل
Unique	324 -	وحدانية
Tapped delay –line equalizer	340 -	مسوي خط التأخير المفرع
transmission Distortion less	340 -	ارسال خالي من التشوه
Pass-band	340 -	مجال التحرير

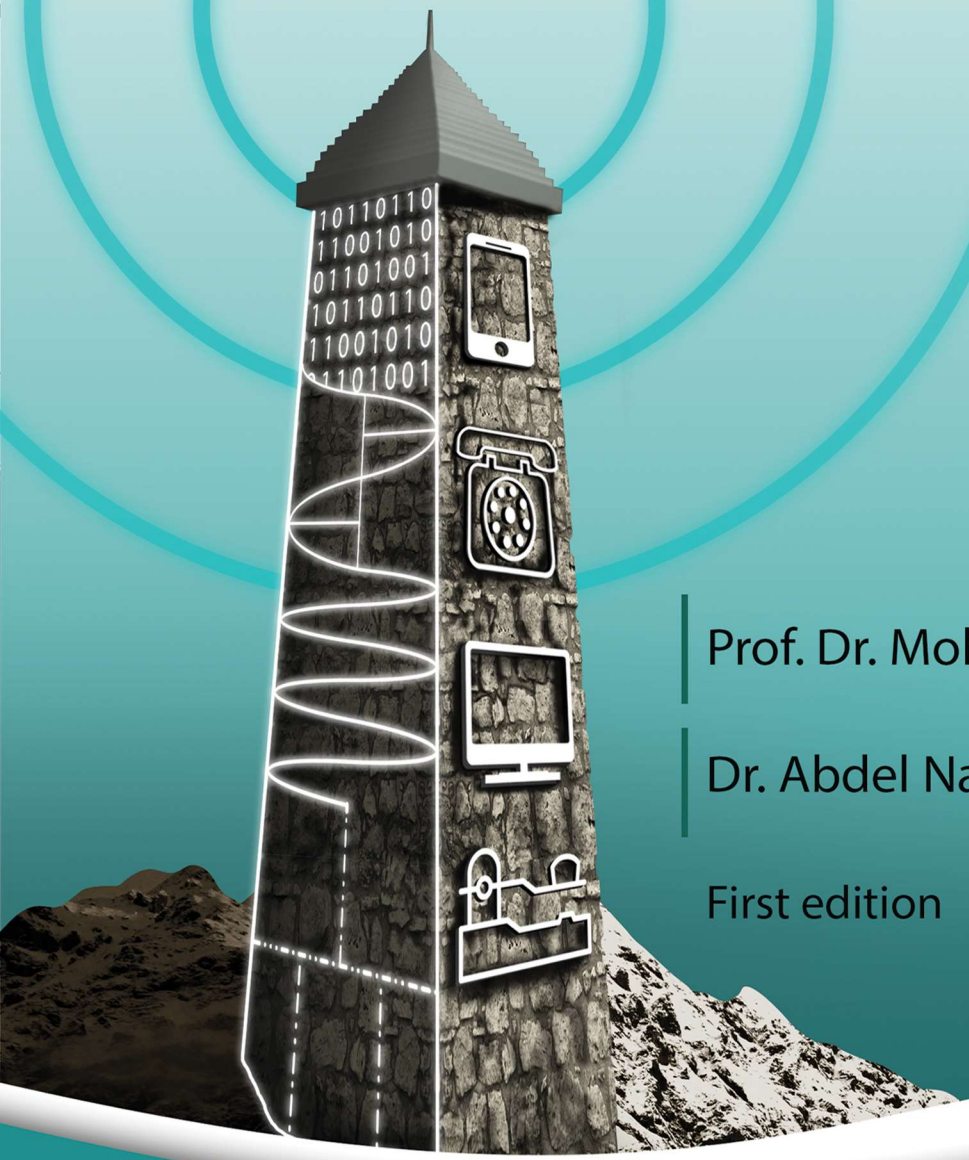
Stop-band	340 - مجال المنع
Sine interval	344 - تكامل الجيب
Gibbs phenomenon	346 - ظاهرة جيبس
system Minimum phase	347 - نظم الطور الأصغري
Non-minimum phase system	348 - نظم الطور غير الأصغري
Emitter followers	360 - باعث لاحق
Transition band	360 - مجال العبور مجال العبور
Stop band	360 - مجال المنع
Tolerance	360 - التسامح
Amplitude distortion	365 - التشوه المطالي
Phase distortion	365 - تشوه الطور
Tapped-delay -line equalizer	368 - مسوي خط التأخير المفرع
Even	373 - زوجي
Odd	373 - فردي
Operation	376 - عمليات
Exponential	379 - اسي
Damped	379 - متخامد
Ramp	379 - تصاعد خطي
angular frequency Fundamental	380 - التردد الزاوي الاساسي
Operator	387 - العامل
Moving average system	387 - النظام الوسطي المنزلق
Invertible	392 - عكوس
Operator	392 - عامل
Identity operator	392 - عامل الواحدية
Inverse	392 - العكسي

Higher Institute for Applied Sciences and Technology

HIAST

Signals & Systems

For Communication, Electronics, and Information Technology



Prof. Dr. Mohieddin Mazhar Wainakh

Dr. Abdel Nasser Al-Assimi

First edition

ISBN 978-9933-9261-7-5

9 789933 926175

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

Higher Institute for Applied Sciences and Technology

www.hiast.edu.sy

HIAST