الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

ميكانيكا المواد

الجزء الأول

Mechanics of Materials
Part One

تأليف

بروفيسور/ محمود يس عثمان

دكتور/ أسامة محمد المرضي سليمان خيال

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة – السودان

إبريل 2019م

شكر وعرفان

الشكر والعرفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلى آله وصحابته وجميع من تبعه وتَقَفّى أثره إلى يوم القيامة.

يود الكاتب ان يتقدم بالشكر أجذله لكل من ساهم بجهده وفكره ووقته في إخراج هذا الكتاب بالصورة المطلوبة ، ويخُص بذلك الزملاء/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل . عطبرة ، وأيضاً الإخوة/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة البحر الأحمر . بورتسودان.

الشكر والتقدير والعرفان للبروفيسور/ محمود يس عثمان الذي ساهم بقدر كبير في مراجعة وإعادة مراجعة محتويات الكتاب.

اهدي هذا الكتاب بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبكالوريوس الهندسة في جميع التخصصات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية ، حيث يستعرض هذا الكتاب الكثير من التطبيقات في مجال الهندسة الميكانيكية وبالأخص في مجال ميكانيكا المواد.

وأُعبر عن شُكري وامتناني إلى المهندس/ أسامة محمود محمد علي بمركز دانية لخدمات الحاسوب والطباعة بمدينة عطبرة، الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة ، مراجعة وتعديل وإعادة طباعة هذا الكتاب أكثر من مرة. والشكر موصول أيضاً للمهندس/ عوض علي بكري الذي شارك في تنسيق هذا العمل.

أخيراً ، أرجو من الله سبحانه وتعالي أن يتقبل هذا العمل المتواضع والذي آمل أن يكون ذا فائدة للقارئ.

مقدمة

إنَّ مؤِّلف هذا الكتاب وإيماناً منه بالدور العظيم والمُقدَّر للأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريب والترجمة للمراجع والكتب الهندسية يأمل أن يفي هذا الكتاب بمتطلبات برامج البكالوريوس والدبلوم لطلاب الهندسة الميكانيكية ، هندسة الإنتاج او التصنيع ، الهندسة الكهربائية والهندسة المدنية حيث يُغطِّى مناهج نظرية ومختبرية في مجال ميكانيكا المواد. يتفق هذا الكتاب لغوياً مع القاموس الهندسي الموحَّد السوداني ، ويعد الكتاب مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث. هذا الكتاب مقتبس من مُذكرات مؤلفه في تدريسه لهذا المُقرر لفترة لا تقل عن أربعون عاماً.

يهدف هذا الكتاب لتأكيد أهمية دراسة ميكانيكا المصمتات أو المواد. فقد اشتمل هذا الكتاب على صياغة بعض النماذج الرياضية المستخدمة في ميكانيكا المواد واشتقاقها حتى الوصول إلى الصيَّغ النهائية المستخدمة في حل المسائل بالإضافة لإيراده بعض الأمثلة لنظم مستخدمة في التطبيقات العملية والمُختبرية.

يشتمل هذا الكتاب على اربعة عشر فصلا. يتناول الفصل الأول تعريفاً لبعض المصطلحات الأساسية في ميكانيكا المواد.

أما الفصل الثاني فيتضمن دراسة تفصيلية لقوة القص وعزم الإنحناء في العارضات مشمولاً ببعض الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

يناقش الفصل الثالث دراسة لعزم المساحة من وجهة نظر العزم الأول للمساحة، والعزم الثاني للمساحة نظرية المحاور المتوازنة ونظرية المحاور المتعامدة بالإضافة لبعض الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

يتناول الفصل الرابع دراسة إجهاد الإنحناء من حيث تعريفه، فرضياته واشتقاق معادلاته إضافة لبعض الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

يستعرض الفصل الخامس إجهاد القص في العارضات ذات المقطع المستطيل ويدرس كيفية تحديد مركز القص في العارضات. في نهاية هذا الفصل يوجد العديد من الأمثلة والمسائل.

أما الفصل السادس فيتناول دراسة الإلتواء في الأعمدة الدوَّارة من خلال الأمثلة المحلولة والمسائل.

يناقش الفصل السابع تحليل الإجهادات والإنفعالات المركَّبة من خلال العديد من الأمثلة المحلولة والمسائل.

يستعرض الفصل الثامن القضبان أو الأنابيب المركبة من خلال مجموعة من الأمثلة والمسائل.

يتناول الفصل التاسع دراسة لنظريات الإنهيار أو الفشل من وجهة نظر الإجهاد الرئيس الأقصى ، إجهاد القص الأقصى ، طاقة الإنفعال ، طاقة إنفعال القص ، والإنفعال الرئيس الأقصى . هنالك أمثلة محلولة ومسائل إضافية في نهاية هذا الفصل.

يناقش الفصل العاشر إنحراف العارضات من خلال العديد من المسائل والأمثلة.

يتناول الفصل الحادي عشر دراسة للعارضات الغير محدّدة إستاتيكياً التي يزيد فيها عدد ردود الأفعال المجهولة عن عدد معادلات الإتزان ويتضمن الفصل العديد من الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية المتنوعة.

أما الفصل الثاني عشر فيدرس الإنحناء في المقاطع غير المتماثلة مشفوعاً بعديد الأمثلة النموذجية المحلولة وبعض التدريبات.

يتناول الفصل الثالث عشر الإنبعاج في الأعمدة الذي يحدث نتيجة لتعرض الأعمدة الطويلة لأحمال إنضغاط محورية تؤدي إلى تقوسها وإنهيارها نتيجة لعدم الإتزان. يستعرض هذا الفصل نظرية أويلر لتحليل عدد من الأعمدة بحالات طرفية مختلفة: عمود مسماري من الطرفين، عمود مبني من الطرفين، عمود مبني من طرف وحر من الطرف الآخر، عمود مبني من طرف

ومسماري من الطرف الآخر، وعمود مسلَّط عليه حمل لا تمركزي. أيضاً يوضّح هذا الفصل مناحي القصور في نظرية أويلر بالإضافة للعديد من الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

أما الفصل الرابع عشر والأخير فيتناول بالدراسة الإسطوانات الرفيعة والسميكة مشفوعاً بالعديد من الأمثلة والتدريبات.

إنَّ الكاتب يأمل أن يساهم هذا الكتاب في إثراء المكتبة الجامعية داخل السودان وخارجه في هذا المجال من المعرفة ويأمل من القارئ ضرورة إرسال تغذية راجعة إن كانت هنالك ثَمَّة أخطاء حتى يستطيع الكاتب تصويبها في الطبعة التالية للكتاب.

والله الموفق

المؤلف

إبريل 2019م

المحتويـات

الفصل الأول

الإجهادات والإنفعالات

(Stresses and Strains)

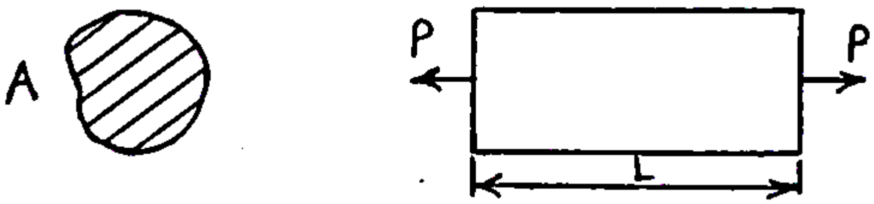
1.1 مدخل:

يتناول هذا المقرر سلوك الإنشاءات وأعضاء الآلات عندما تتعرض إلي أحمال خارجية. وباختصار شديد يتناول القوانين التي تسمح بحساب الاجهادات والانفعالات بغرض عدم تجاوزها حد معين.

1.2 الإجهاد:

الرسم (1.1) يوضِّح عضو معرَّض لحمل محوري مركز P. مساحة مقطع العضو A. يتعرَّض العضو في هذه الحالة لإجهاد شد σ يحسب بالقانون التالي:

$$\sigma = P / A \quad (N/mm^2)$$



الرسم (1.1)

1.3 الانفعال:

العضو في الرسم (1.1) حتماً سيستطيل تحت تأثير حمل الشد P. فإذا كان طول العضو L والاستطالة ΔL، فإنَّ الانفعال يحسب من القانون:

$$\in = \Delta L / L$$

بالطبع إذا كان الحمل حمل ضغط سيكون الإجهاد إجهاد ضغط و بدلاً من الاستطالة فإن العضو يتقلص في هذه الحالة.

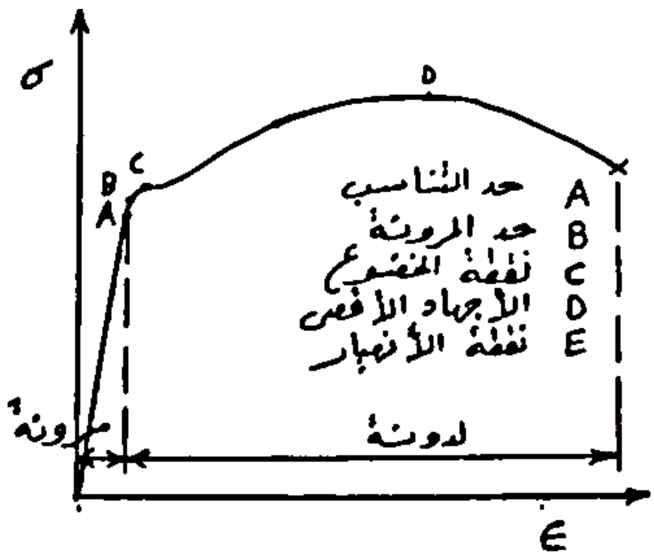
1.4 قانون هوك:

هذا القانون يبين أنَّ الانفعال يتناسب مع الإجهاد الذي ينتجه (هذا يحدث فعلياً إذا كان الإجهاد صغير نسبياً)، ويمكن صياغة هذا القانون هكذا:

$$E = \sigma / \in$$

E تسمي معاير المرونة ووحدات قياسها N/mm^2.

إختبار الشد: بتسليط حمل متدرج على قضيب وتسجيل الاستطالة يمكن رسم منحني الحمل – الاستطالة أو الإجهاد – الانفعال. ويختلف هذا المنحني من مادة لأخرى وأشهر هذه المواد وأكثرها استخداماً هي الصلب الطري ومنحناه كما في الرسم (1.2) أدناه:



الرسم (1.2)

واضح أنَّ إمتداد اللدونة كبير جداً مقارنة بامتداد المرونة. والفرق بين المرونة واللدونة هو أنَّ المادة التي تتشوه في حدود المرونة قابلة للعودة إلي شكلها الأصلي بزوال المؤثر. وكلما أظهرت المادة قدرة على التشوه اللدن فإنَّها توصف بإنَّها مادة مطيلة وإلا فإنها تعتبر قصفة.

1.5 عامل السلامة:

نسبة لأنَّ الإجهاد إذا زاد عن حد معين سيؤدي حتماً إلي تشوهات لدنة وكسر العضو، فإنَّ من الضروري التأكد من أنَّ الإجهاد في حدود مقبولة. ولأنَّ الأحمال أحياناً تكون غير معلومة بالضبط

في مقدارها أو طريقة تسليطها فإنَّه يتم استخدام عامل سلامة لضمان عدم تجاوز الإجهاد المسموح به. وبالطبع فإنَّ عامل السلامة يكون دائماً أكبر من 1 وعامل السلامة يحسب من القانون التالي:

$$FS = \hat{\sigma} / \sigma_w$$

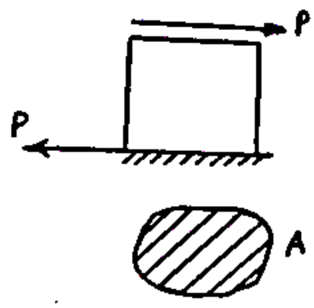
حيث أنَّ: $\hat{\sigma}$ هي الإجهاد الأقصى σ_w هي إجهاد التشغيل. وبدلاً من الإجهاد الأقصى يستخدم إجهاد الخضوع أحياناً.

1.6 إجهاد القص:

في حالة العضو آنف الذكر نجد أنَّ الحمل محوري ولكن أحياناً يتعرض العضو لحملين متساويين في المقدار ولكن متضادين في الاتجاه في الرسم (1.3). في هذه الحالة ينشأ إجهاد يسمي إجهاد قص ويحسب من القانون:

$$\tau = P / A$$

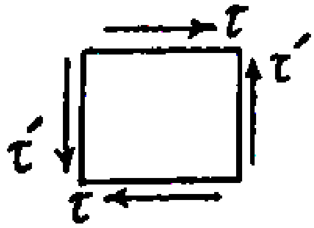
لاحظ أنَّ P و A متوازيتين.



الرسم (1.3)

1.7 إجهاد القص التكميلي:

إذا أخذت عينة من عضو معرَّض لأحمال ولنفرض أنها تؤدي إلي نشوء إجهاد قص τ كما موضَّح في الرسم (1.4).



الرسم (1.4)

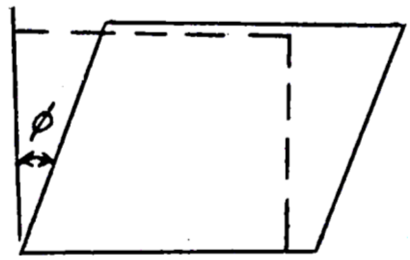
نجد أنَّ هنالك إجهاد قص ينشأ في المادة لدواعي إتزان العينة. وهذا الإجهاد يسمي إجهاد القص التكميلي 'τ حيث أنَّ τ ='τ .

1.8 إنفعال القص:

تحت تأثير إجهاد القص تتشوه العينة بانزلاق طبقات المادة بعضها على بعض وبالتالي فإنَّ الزوايا القائمة لا تعود قائمة. ويعرف التغير في الزاوية القائمة بانفعال القص ϕ ويحسب من القانون:

$$\phi = \tau / G$$

وانفعال القص هو نسبة ولا وحدات قياس له وبالطبع يمكن أن يُقاس بالـ radians أو degrees. الرسم (1.5) أدناه.



الرسم (1.5)

1.9 معاير الجساءة:

في حدود منخفضة لإجهاد القص، نجد أنَّ الإجهاد والانفعال متناسبين، ويمكن التعبير عن ذلك بالقانون:

$$G = \tau / \theta \qquad \left(N / mm^2\right)$$

حيث أنَّ G هي معاير الجساءة.

الفصل الثاني

قوة القص وعزم الانحناء

(Shearing Force and Bending Moment)

2.1 قوة القص:

قوة القص عند أي مقطع في عارضة هي مجموع القوى على أحد جانبي المقطع، وتمثل ميل أحد الجزئين للانزلاق بالنسبة للطرف الآخر. الرسم البياني الذي يوضِّح تغيير في قوة القص على طول العارضة يعرف بمخطَّط قوة القص (سنأخذ القوة على يسار المقطع إلي أعلى موجبة).

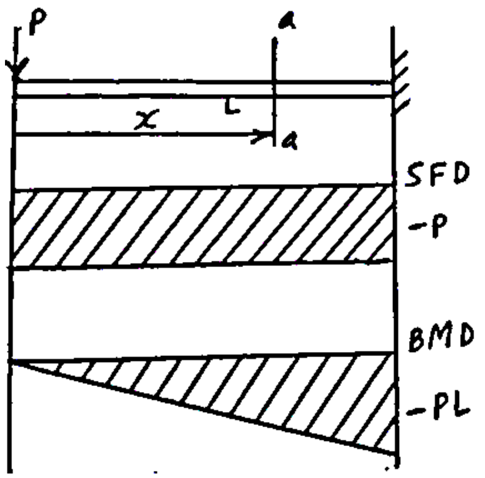
2.2 عزم الانحناء:

عزم الانحناء عند أي مقطع في عارضة هو مجموع عزوم القوى على أحد جانبي المقطع. الرسم البياني الذي يوضِّح تغيير عزم الانحناء على طول العارضة يعرف بمخطَّط عزم الانحناء (سنأخذ العزم في اتجاه عقارب الساعة موجب).

2.3 أمثلة محلولة:

مثال (1):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم (2.1).



الرسم (2.1)

(أ) قوة القص عند المقطع a – a،

$$F = -P$$

إذن قوة القص ثابتة على طول العارضة.

(ب) عزم الانحناء عند المقطع a – a،

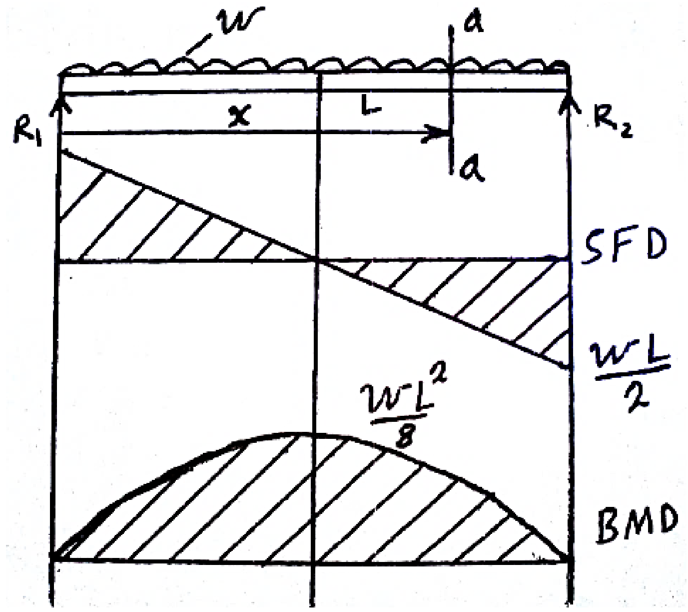
$$M = -Px$$

$$x = 0,\ M = 0$$

$$x = L,\ M = -PL$$

مثال (2):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء لعارضة مسنودة إسناد بسيط وعليها حمل موزع بانتظام معدَّله w كما موضَّح في الرسم (2.2).



الرسم (2.2)

نسبة لتماثل الحمل فإنَّ ردى الفعل $R_1 = R_2 = wL/2$.

(أ) قوة القص عند المقطع a – a:

$$F = R_1 - wx = \frac{wL}{2} - wx$$

$$x = 0,\ \ F = \frac{wL}{2}$$

$$x = \frac{L}{2}, \quad F = 0$$

$$x = L, \quad F = -\frac{wL}{2}$$

(ب) عزم الانحناء عند المقطع a – a،

$$M = R_1 x - \frac{wx^2}{2} = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$x = 0, \quad M = 0$$

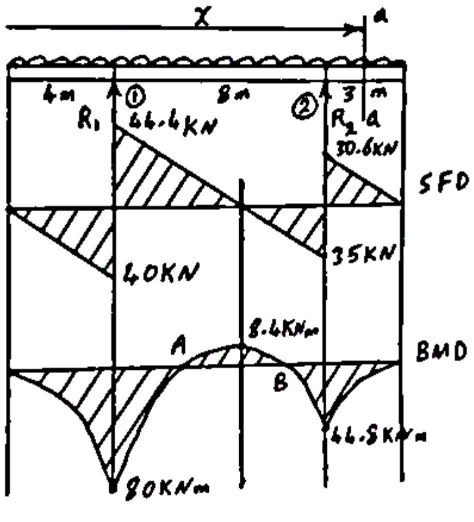
$$x = \frac{L}{2}, \quad M = \frac{wL^2}{8}$$

$$x = L, \quad M = 0$$

لاحظ في حالة الحمل الموزع أنَّ عزم الانحناء الأقصى يحدث عند المقطع الذي لا يتعرض لقوة قص. حاول الاستفادة من هذه المعلومة مستقبلاً.

مثال (3):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم (2.3).



الرسم (2.3)

أولاً: أحسب ردي الفعل R_1 وR_2،

خذ العزوم حول النقطة (2)،

$$\curvearrowleft \; +M = 0$$

$$8R_1 + \frac{10 \times 3^2}{2} - \frac{10 \times 12^2}{2} = 0$$

$$R_1 = 84.4\,kN$$

$$\uparrow + \sum F = 0$$

$$84.4 + R_2 - 10 \times 15 = 0$$

$$R_2 = 65.6\,kN$$

(أ) قوة القص عند المقطع a - a (في أقصى قسم للعارضة لليمين).

$$F = 84.4[x-4]^0 - 10x + 65.6[x-12]^0$$

$$x = 0, \quad F = 0$$

$$x = 4m-, \quad F = -40kN$$

$$x = 4m+, \quad F = 44.4kN$$

$$x = 12m-, \quad F = 84.4 - 10 \times 12 = -35.6kN$$

$$x = 12m+, \quad F = 30kN$$

$$x = 15m, \quad F = 84.4 - 10 \times 15 + 65.6 = 0$$

لاحظ أن استخدام القوس المربع هو نوع من الخداع والالتفاف حول الحل لإنجازه بطريقة سريعة. يجب عدم فك القوس المربع، كما يجب تجاهله إذا كانت القيمة بداخله أقل من صفر. يمكن بالطبع حساب قوة القص لأي مقطع متحرك. جرِّب ذلك بنفسك.

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = 84.4[x-4] - \frac{10x^2}{2} + 65.6[x-12]$$

القوس المربع هنا له نفس المعني الذي ورد سابقاً.

$$x = 0, \quad M = 0$$

$$x = 4m, \quad M = -5 \times 4^2 = -80kNm$$

$$x = 12m, \quad M = 84.4 \times 8 - 5 \times 12^2 = -44.8kNm$$

$$x = 15m, \quad F = 84.4 \times 11 - 5 \times 15^2 + 65.6 \times 3 = 0$$

من الواضح أنَّ هنالك قيمة قصوى لعزم الانحناء عند $4 < x < 12$ لإيجاد المقطع الذي يتعرض لعزم انحناء أو قوة قص = صفر، نأخذ قوة القص عند $4 < x < 12$ من المعادلة واستبدال الأقواس المربعة بأقواس عادية:

$$F = 84.4 - 10x = 0$$

$$\therefore x = 8.4m$$

عوَّض في معادلة الانحناء،

$$M = 84.4(8.4 - 4) - 5 \times 8.4^2 = 18.6 \ kNm$$

وهكذا يمكن رسم مخطَّطي قوة القص وعزم الانحناء. النقطة A وB في مخطَّط عزم الانحناء تسمي نقطة الانقلاب وعندها يتغير العزم من موجب إلي سالب أو العكس. يمكن تحديد موضع نقطة الإنقلاب بجعل عزم الانحناء صفراً.

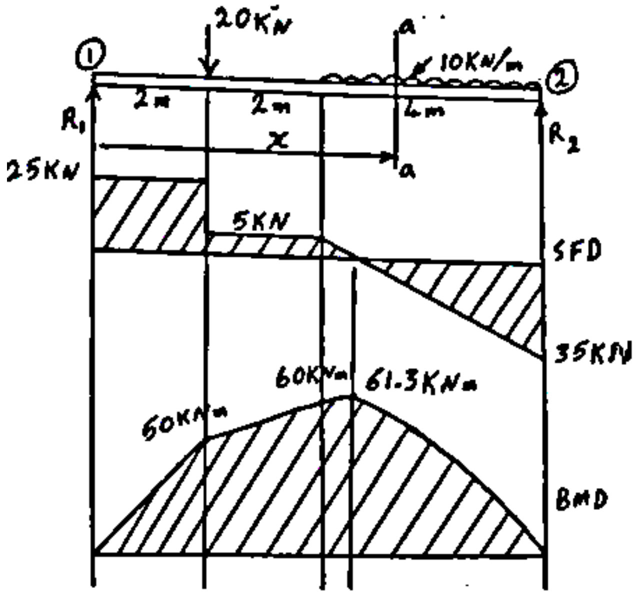
$$M = 84.4(x - 4) - 5 \times x^2 = 0$$

$$x^2 - 16.8x + 67.2 = 0$$

$$x = 6.6m \ (A), \ or \ \ x = 10.2m (B)$$

مثال (4):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم (2.4) أدناه.



الرسم (2.4)

$$\curvearrowleft + \sum M_{(1)} = 0$$

$$8R_1 + 20 \times 6 - 10 \times 4 \times 2 = 0$$

$$R_1 = 25kN$$

$$\uparrow + F = 0$$

$$25 + R_2 = 20 + 40$$

$$R_2 = 35\,kN$$

(أ) قوة القص عند المقطع a - a (في أقصى قسم للعارضة لليمين).

$$F = 25 - 20[x-2]^0 - 10[x-4]$$

$$x = 0, \quad F = -25kN$$

$$x = 2m+, \quad F = 25 - 20 = 5kN$$

$$x = 4m, \quad F = 5kN$$

$$x = 8m+, \quad F = 25 + 20 - 10 \times 4 = -35kN$$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = 25x - 20[x-2] - 5[x-4]^2$$

$$x = 0, \quad M = 0$$

$$x = 2m, \quad M = 25\times 2 = 50kNm$$

$$x = 4m, \quad M = 25\times 4 - 20\times 2 = 60kNm$$

$$x = 8m, \quad F = 0$$

هنالك قيمة قصوى في القسم 8 > x > 4،

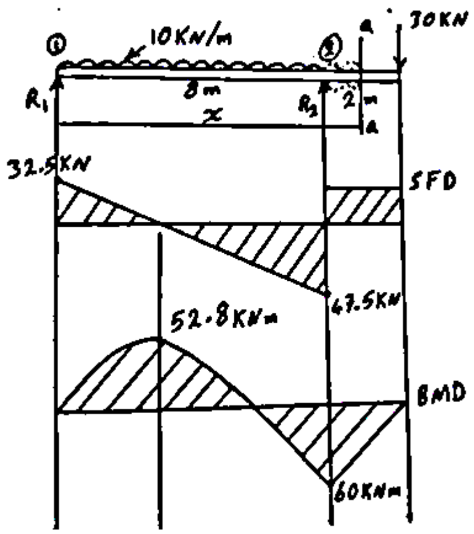
$$F = 25 - 20 - 10(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4.5m$$

$$\hat{M} = 25\times 4.5 - 20(4.5-2) - 5(4.5-4)^2 = 61.3kNm$$

مثال (5):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم (2.5) أدناه.



الرسم (2.5)

خذ $\curvearrowleft + \sum M_{(2)} = 0$

$$8R_1 + 30\times 2 - 10\times 8\times 4 = 0$$

$$R_1 = 32.5kN$$

$$\uparrow + F = 0$$

$$32.5 + R_2 = 10 \times 8 + 30$$

$$R_2 = 77.5\,kN$$

خذ المقطع a – a كالعادة في أقصى قسم لليمين وصل الحمل الموزع من أعلا حتى المقطع وأضف حمل مناسب من الأسفل (هذه خدعة من أجل الحل).

(أ) قوة القص عند المقطع a – a :

$$F = 32.5 - 10x + 10[x-8] + 77.5[x-8]^0$$

$$x = 0, \quad F = 32.5kN$$

$$x = 8m-, \quad F = 32.5 - 10 \times 8 = -47.5kN$$

$$x = 8m+, \quad F = 32.5 - 10 \times 8 + 77.6 = 30kN$$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = 32.5x - 5x^2 - 5[x-8]^2 - 77.5[x-8]$$

$$x = 0, \quad M = 0$$

$$x = 8m, \quad M = -60kNm$$

$$x = 10m, \quad M = 0$$

هنالك قيمة قصوى لعزم الإنحناء في القسم 8 > x > 0،

$$F = 32.5 - 10x = 0$$

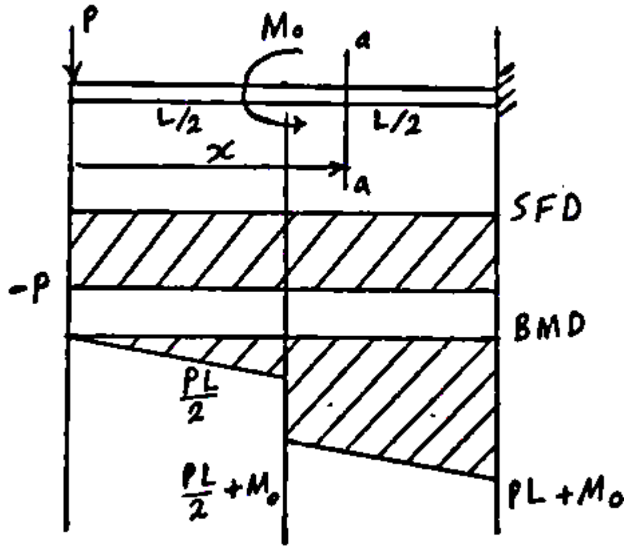
$$\therefore x = 3.25m$$

$$\therefore \hat{M} = 32.5 \times 3.25 - 5 \times 3.25^2 = 52.8kNm$$

حاول لوحدك إيجاد نقطة الانقلاب.

مثال (6):

أرسم مخطّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم (2.6) أدناه.



الرسم (2.6)

(أ) قوة القص عند المقطع a – a :

$$F = -P$$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = -Px - M_0[x - L/2]^0$$

$$x = 0,\ \ M = 0$$

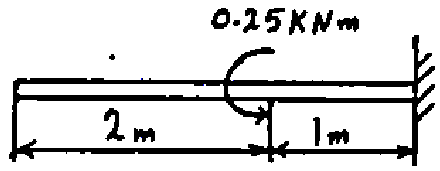
$$x = \frac{L}{2}-,\ \ M = -\frac{PL}{2}$$

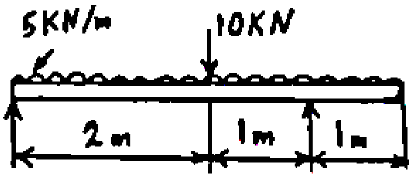
$$x = \frac{L}{2}+,\ \ M = -\frac{PL}{2} - M_o$$

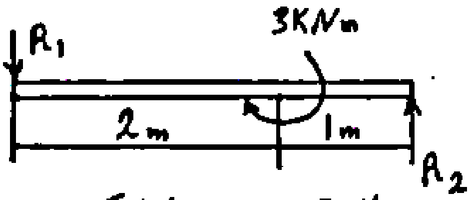
$$x = L,\ \ \ M = -PL - M_o$$

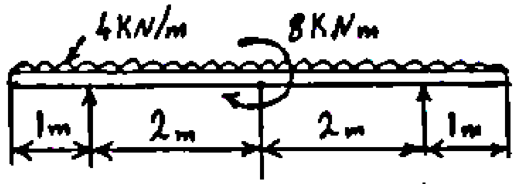
2.4 تمرين:

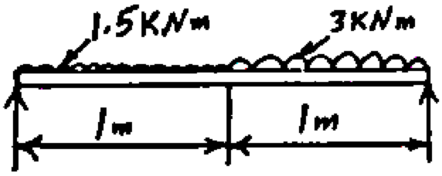
أرسم مخطّطات قوى القص وعزم الانحناء للعارضات في الرسوم التالية. أوجد القيم القصوى لقوى القص وعزم الانحناء في كل حالة. أوجد أيضاً مواضع نقاط الانقلاب إن وُجِدت.

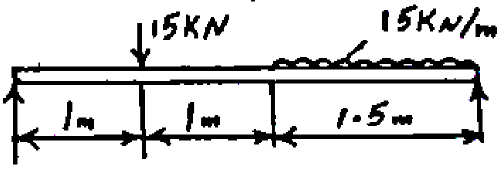

0.25KNm
2m
1m

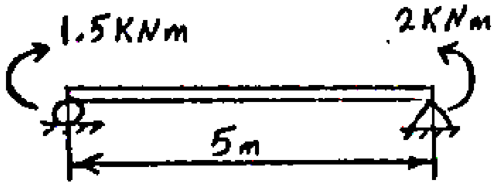

5KN/m
10KN
2m
1m
1m

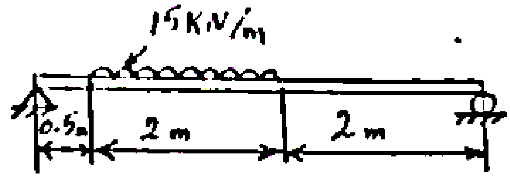

R1
3KNm
2m
1m
R2

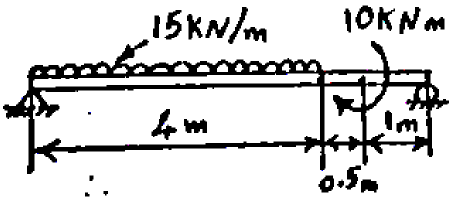

4KN/m
8KNm
1m
2m
2m
1m

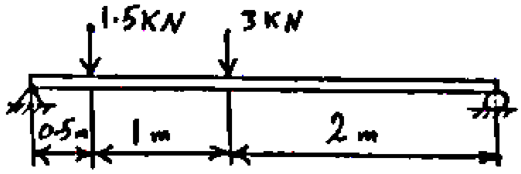

1.5KNm
3KNm
1m
1m


15KN
15KN/m
1m
1m
1.5m

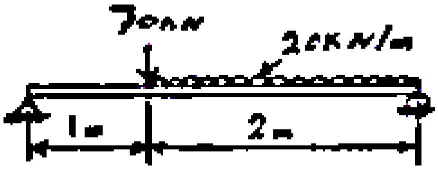

1.5KNm
2KNm
5m

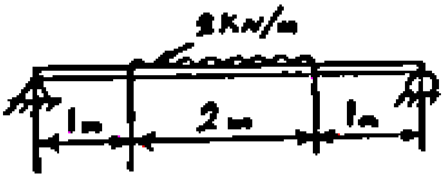

15KN/m
0.5m
2m
2m

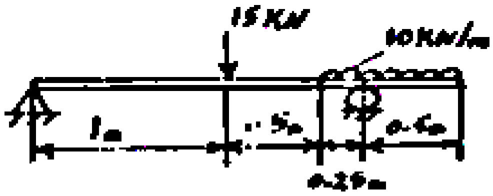

15KN/m
10KNm
4m
1m
0.5m


1.5KN
3KN
0.5m
1m
2m


5KN
3KN
1m
1m
0.5m


7000N
20KN/m
1m
2m


2KN/m
1m
2m
1m


15KN
10KN/m
1m
1.5m
0.5m
0.25m


1KN/m
0.5KN/m
5m
5m
3m

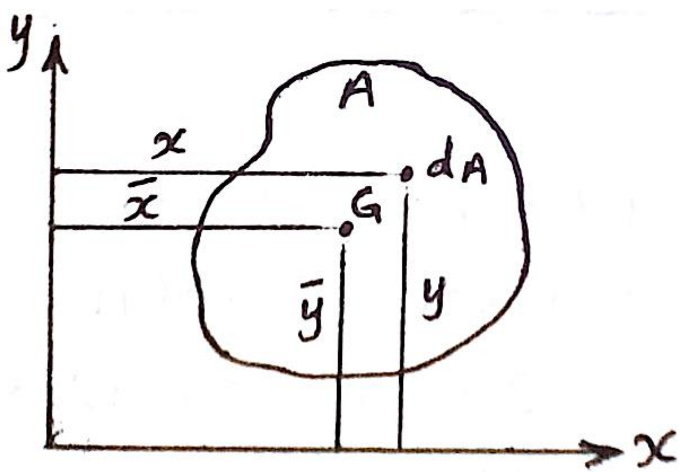
الفصل الثالث

عزم المساحة

(Moment of Area)

3.1 العزم الأول للمساحة:

من الرسم (3.1) أدناه.



الرسم (3.1)

العزم الأول للمساحة A حول المحور y، Q_y

$$Q_y = \int_A x \ dA$$

العزم الأول للمساحة A حول المحور x، Q_x

$$Q_x = \int_A y \ dA$$

يُستفاد من العزم الأول في تحديد مركز المساحة $(\bar{x}, \bar{y})$،

$$\bar{x} = Q_y / A, \qquad \bar{y} = Q_x / A$$

3.2 العزم الثاني للمساحة:

العزم الثاني للمساحة A حول المحور y، I_y،

$$I_y = \int x^2 \; dA$$

العزم الأول للمساحة A حول المحور x، I_x،

$$I_x = \int y^2 \; dA$$

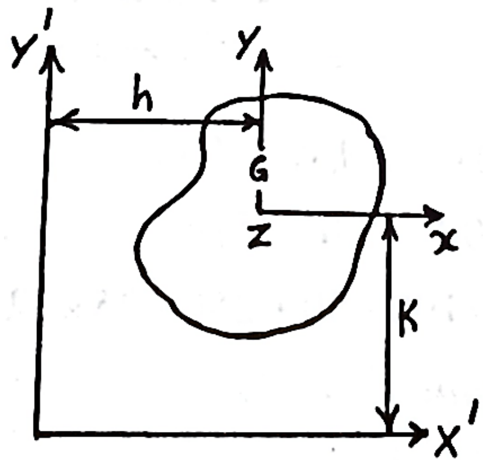
3.3 نظرية المحاور المتوازية:

هذه النظرية يمكن التعبير عنها رياضياً هكذا:

$$I_{x'} = I_x + Ak^2$$

$$I_{y'} = I_y + Ak^2$$

لاحظ أنَّ x، y يمران بمركز المساحة G. أنظر الرسم (3.2) أدناه.



الرسم (3.2)

3.4 نظرية المحاور المتعامدة:

هذه النظرية يمكن التعبير عنها كما يلي:

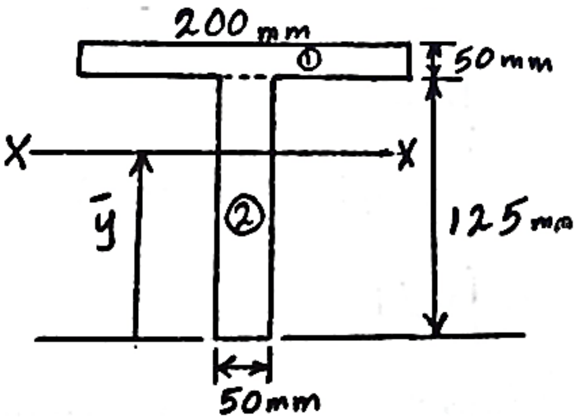
$$I_z = I_x + I_y$$

و I_z يسمي العزم القطبي ويُرمز له عادة بالحرف J.

3.5 أمثلة محلولة:

مثال(1):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع الموضَّح في الرسم (3.3) أدناه حول محور يمر بمركز المساحة.



الرسم (3.3)

أولاً أوجد مركز المساحة $\bar{y}$. خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع. لاحظ أننا قسمنا المقطع إلي مستطيلين (1) و(2).

$$(A_1 + A_2)\bar{y} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_1$$

$$(200\times 50 + 125\times 50)\bar{y}$$

$$= 200\times 50\times 150 + 125\times 50\times 62.5$$

$$\bar{y} = 116.3mm$$

ثانياً باستخدام نظرية المحاور المتوازية أوجد العزم الثاني للمساحة،

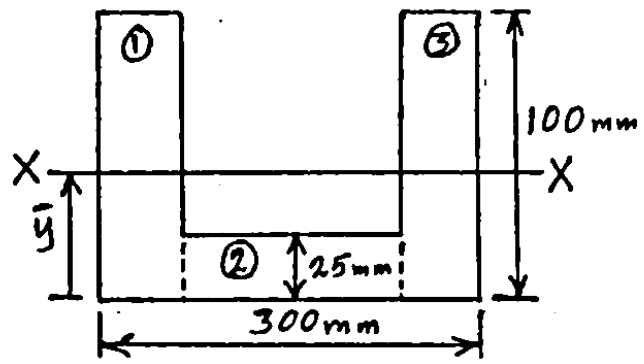
$$I_x = \frac{200\times 50^3}{12} + 200\times 50(150 - 116.3)^2$$

$$+ \frac{50\times 125^3}{12} + 50\times 125(116.3 - 62.5)^2$$

$$I_x = 40.10^6\, mm^4$$

مثال(2):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع الموضَّح في الرسم (3.4) أدناه حول محور يمر بمركز المساحة.



الرسم (3.4)

أولاً أوجد مركز المساحة $\bar{y}$. خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع.

$$(2A_1 + A_2)\bar{y} = 2A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2$$

$$(2\times 25\times 100 + 250\times 25)\bar{y}$$

$$= 2\times 25\times 100\times 50 + 250\times 25\times 12.5$$

$$\bar{y} = 37.5mm$$

ثانياً العزم الثاني للمساحة حول المحور x - x،

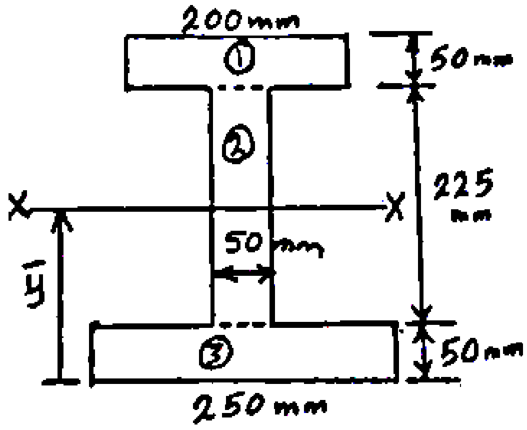
$$I_x = 2\left[\frac{25\times 100^3}{12} + 25\times 100(50-37.5)^2\right]$$

$$+\frac{250\times 25^3}{12} + 250\times 25(37.5-12.5)^2$$

$$I_x = 16.5.10^6\, mm^4$$

مثال(3):

أوجد العزم الثاني للمساحة حول محور أفقي يمر بمركز المساحة للرسم (3.5) أدناه.



الرسم (3.5)

خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع.

$$(A_1 + A_2 + A_3)\bar{y} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

$$(200\times 50 + 225\times 50 + 250\times 50)\bar{y}$$

$$= 200\times 50\times 300 + 225\times 50\times 162.5 + 250\times 50\times 25$$

$$\bar{y} = 152.3mm$$

$$I_x = \frac{200\times 50^3}{12} + 200\times 50(300-152.3)^2$$

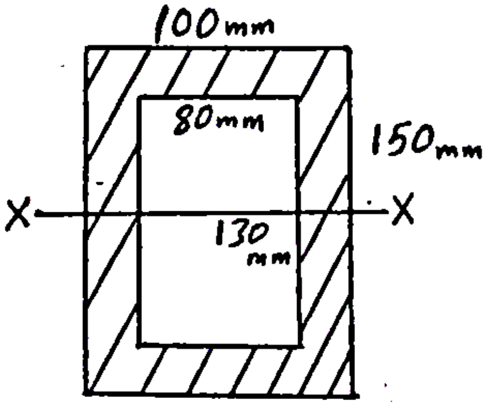
$$+\frac{50\times 225^3}{12} + 50\times 225(162.3-152.3)^2$$

$$+\frac{250\times 50^3}{12} + 250\times 50(152.3-25)^2$$

$$I_x = 4.8.10^6 mm^4$$

مثال(4):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع المجوف الموضَّح في الرسم (3.6) أدناه حول محور أفقي يمر بمركز المساحة.



الرسم (3.6)

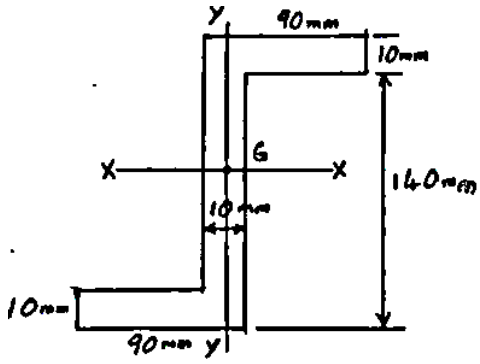
لأن المقطع متماثل فإنَّ المحور سيكون في الوسط تماماً، يمكن حساب العزم الثاني للمساحة بطريقة الطرح هكذا،

$$I_x = \frac{100 \times 150^3}{12} - \frac{80 \times 130^3}{12}$$

$$I_x = 13.5.10^6 mm^4$$

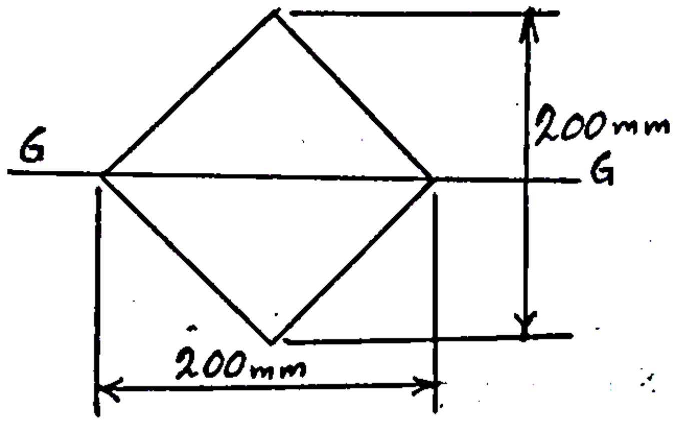
3.6 تمرين:

1. أوجد I_x و I_y للمقطع في الرسم أدناه.



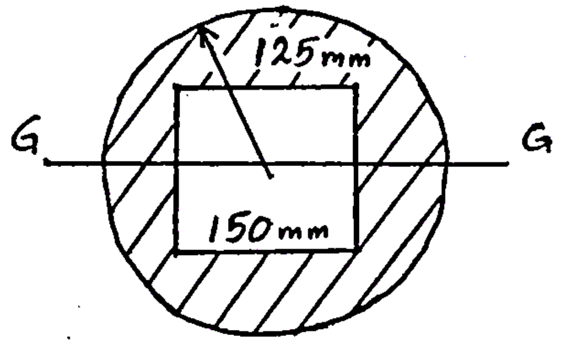
Ans. ($4.1.10^6 mm^4$, $10.7.10^6 mm^4$)

2. أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع أدناه حول المحور G – G.



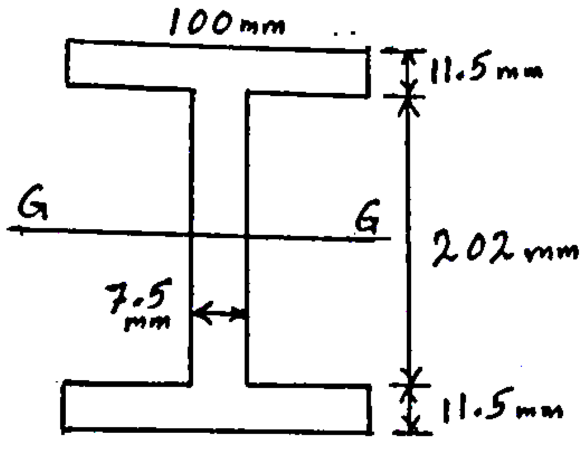
Ans. ($33.33.10^6 mm^4$)

3. أوجد العزم الثاني للمساحة في المقطع أدناه حول المحور G – G (المقطع عبارة عن مربع داخل دائرة).



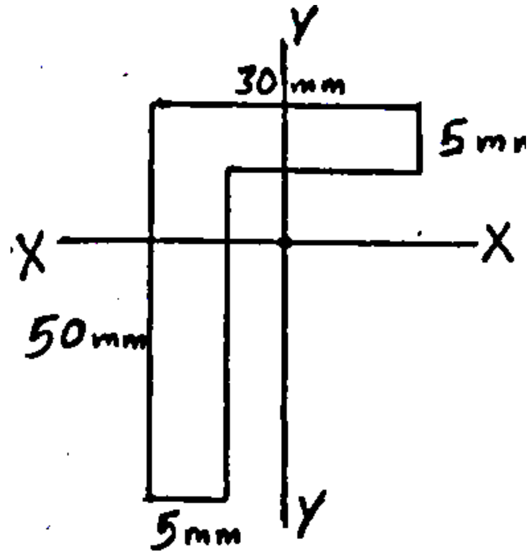
Ans. ($150.10^6 mm^4$)

4. أوجد العزم الثاني للمساحة حول المحور G – G.



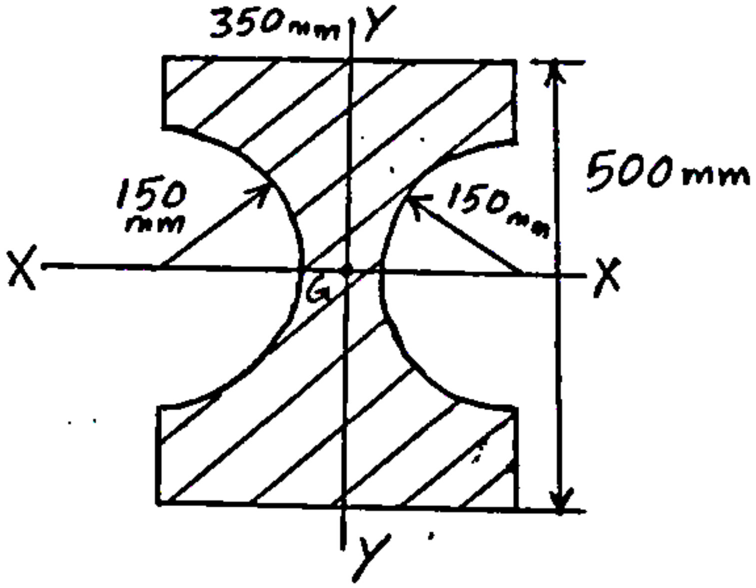
Ans. ($31.10^6 mm^4$)

5. أحسب العزم الثاني للمساحة I_x وI_y للمقطع .



Ans. ($2.58.10^4 mm^4$, $9.44.10^4 mm^4$)

6. أحسب العزم الثاني للمساحة حول x – x و y – y.



Ans. ($32.5.10^4 mm^4$, $8.10^4 mm^4$)

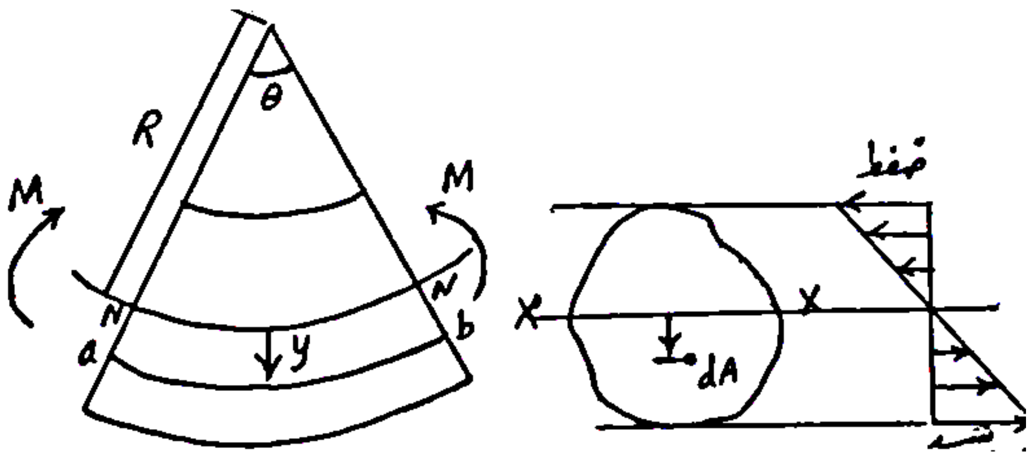
الفصل الرابع

إجهاد الانحناء

(Bending Stress)

4.1 مدخل:

إذا تعرَّض قسم من عارضة إلي عزم انحناء ثابت (بمعني أنَّ قوة القص تساوي صفراً) فإنَّ شرائح من العارضة ستكون في حالة ضغط بينما أخرى في حالة شد. وهذا يعني أنَّ هنالك شريحة في الوسط تكون خالية من الإجهادات. وهذه الشريحة تكون عند سطح التعادل.



الرسم (4.1)

4.2 فرضيات:

1. المادة متجانسة ومتشابهة الخواص، ولها نفس معاير المرونة في حالة الشد والضغط.
2. العارضة مستقيمة أصلاً، وكل شرائحها الطولية تنحني في شكل أقواس لها نفس المركز.
3. المقاطع العرضية تظل مستوية وقائمة على سطح التعادل بعد الانحناء.
4. نصف قطر التقويسة كبير مقارنة بأبعاد المقطع.
5. الإجهاد الناشئ إجهاد طولي مع تجاهل تأثير الأحمال المركزة.

من الرسم (4.1) أعلاه نحصل على:

$$\frac{\sigma}{E} = \in = \frac{ab - NN}{NN}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{(R + y)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

لاحظ أنَّ القوة العمودية على المقطع تساوي صفراً وبالتالي،

$$\int_A \sigma \, dA = 0$$

$$\frac{E}{R}\int_A y \; dA = 0$$

عليه فإنَّ المحور x – x يمر عبر مركز مساحة المقطع.

ثانياً إنَّ عزم الانحناء في حالة اتزان مع القوى العمودية.

$$M = \int_A \sigma \; y \, dA$$

$$= \frac{E}{R}\int_A \; y^2 \, dA = \frac{EI}{R}$$

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

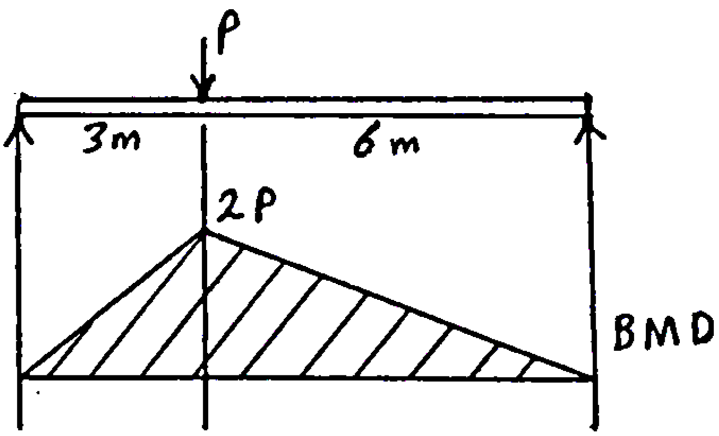
وهكذا يمكن صياغة القانون التالي:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

4.3 أمثلة محلولة:

مثال (1):

عارضة لها مقطع على شكل I مسنودة إسناد بسيط على بحر 9m كما موضح في الرسم (4.2) أدناه. إذا كان الإجهاد المسموح به $75 N/mm^2$، ما هو الحمل المركز الذي يمكن تسليطه على مسافة 3m من أحد المسندين. عمق العارضة 225mm و $I=31.10^6 mm^4$.



الرسم (4.2)

الحل:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{75}{112.5} = \frac{2P \times 10^6}{31.10^6}$$

$$P = 10.3\ kN$$

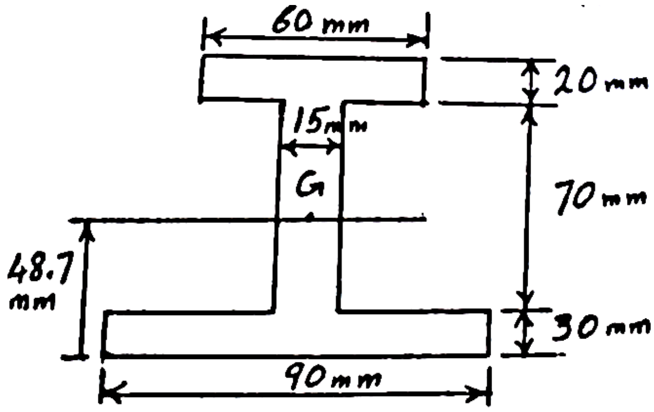
مثال(2):

مقطع عارضة مصنوعة من الحديد الزهر كما موضَّح في الرسم (4.3) أدناه. الحمل يقع في مستوي الوترة. القسم العلوي من المقطع في حالة ضغط. إذا كانت الإجهادات المسموح بها في الشد $200N/mm^2$ والضغط $300N/mm^2$. أوجد العزم المناسب. خذ $I=8.53.10^6 mm^4$.

الحل:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

(أ) في حالة الشد $\hat{y} = 48.7mm$ و $\hat{\sigma} = 200N/mm^2$:



الرسم (4.3)

$$\frac{200}{48.7}=\frac{\hat{M}.10^6}{8.53.10^6}$$

$$\hat{M}=35.0\,kNm$$

(ب) في حالة الضغط $\hat{y}=71.3mm$ و $\hat{\sigma}=300N/mm^2$:

$$\frac{300}{71.3}=\frac{\hat{M}.10^6}{8.53.10^6}$$

$$\hat{M}=35.9\,kNm$$

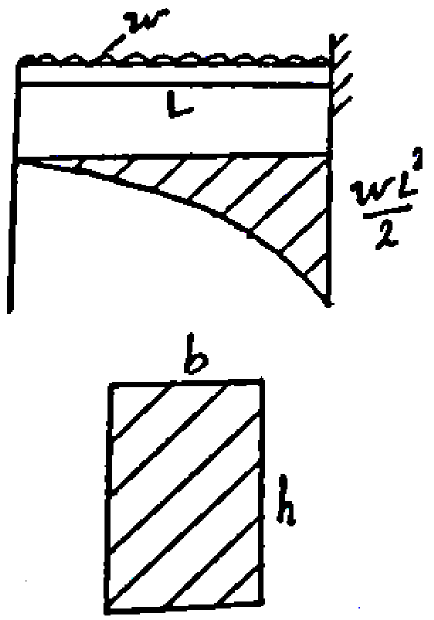
إذن عزم الانحناء المناسب 35kNm.

مثال(3):

عارضة وتدية طولها 3m مسلَّط عليها حمل موَّزع بانتظام معدَّله 30kN/m. الإجهاد المسموح به في الشد والضغط $150N/mm^2$. إذا كان المقطع مستطيل، أوجد أبعاده بحيث يكون الارتفاع ضعف العرض.

الحل:

الرسم (4.4) أدناه يوضح العارضة الوتدية ومقطعها العرضي.



الرسم (4.4)

$$\hat{M} = \frac{wL^2}{2} = \frac{30 \times 3^2}{2} = 135kNm$$

$$I = \frac{bh^2}{12} = \frac{b}{12}(2b)^3 = \frac{2b^4}{3}$$

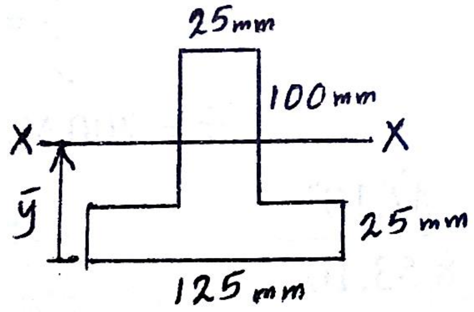
$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{150}{b} = \frac{135.10^6}{2b^4/3}$$

$$b = 110mm, \quad h = 220mm$$

مثال (4):

عارضة مقطعها على شكل T مقلوب كما موضَّح في الرسم (4.5) أدناه. عند مقطع معين سُلط عزم إنحناء 5kNm بحيث تكون الشفة مشدودة. أوجد إجهاد الشد الأقصى وموضعه وإجهاد الضغط الأقصى وموضعه.



الرسم (4.5)

الحل:

أولاً: أوجد مركز المساحة وتأكد من أنَّ $\bar{y} = 40.3mm$.

ثانياً: أوجد العزم الثاني للمساحة حول المحور $x - x$.

$$I = 7.7.10^6 mm^4$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

في حالة الشد $\bar{y} = 40.3mm$ ،

$$\frac{\hat{\sigma}}{40.3} = \frac{5.10^6}{7.7.10^6}$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 26.2N/mm^2$$

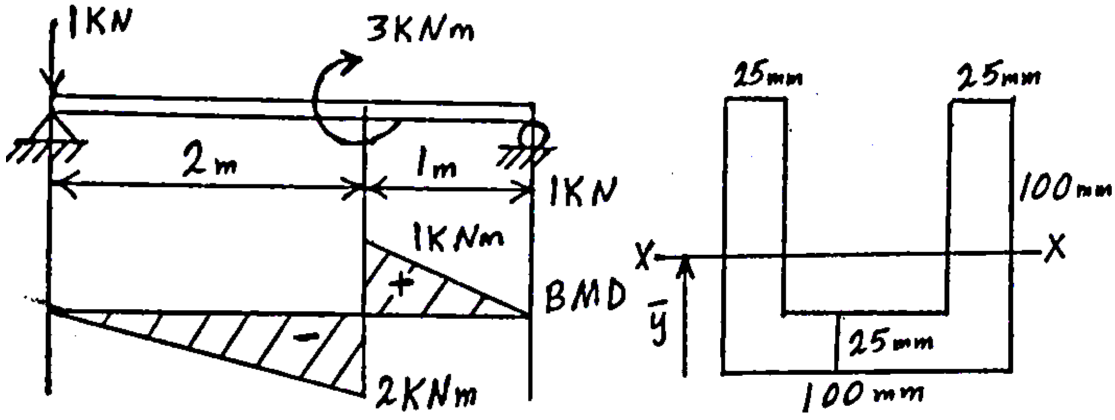
في حالة الضغط $\bar{y} = 84.7mm$ ،

$$\frac{\hat{\sigma}}{84.7} = \frac{5.10^6}{7.7.10^6}$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 55N/mm^2$$

مثال(5):

عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلَّط عليها عزم مركز 3kNm كما موضَّح في الرسم (4.6) أدناه. العارضة مقطعها على شكل مجرى. أوجد إجهاد الشد والضغط الأقصيين في العارضة.



الرسم (4.6)

الحل:

أولاً: أرسم مخطَّط عزم الانحناء.

ثانياً: أوجد مركز مساحة المقطع $\bar{y} = 37.5mm$.

ثالثاً: أحسب العزم الثاني للمسحة حول x – x، $I=165.10^6mm^4$.

(أ) عند −x = 2m، M=2kNm.

في هذه الحالة الحافة العليا مشدودة والسفلي مضغوطة، وعليه في الحافة العليا،

(شد) $$\sigma = \frac{M}{I}y = \frac{2.10^6 \times 87.5}{165.10^6} = 10.6N/mm^2$$

وفي الحافة السفلي،

(ضغط) $$\sigma = \frac{2.10^6 \times 37.5}{165.10^6} = 4.5N/mm^2$$

(ب) عند +x = 2m ، M=1kNm.

في هذه الحالة الحافة العليا مضغوطة والسفلي مشدودة، وعليه في الحافة العليا،

(ضغط) $$\sigma = \frac{1.10^6 \times 87.5}{165.10^6} = 5.3N/mm^2$$

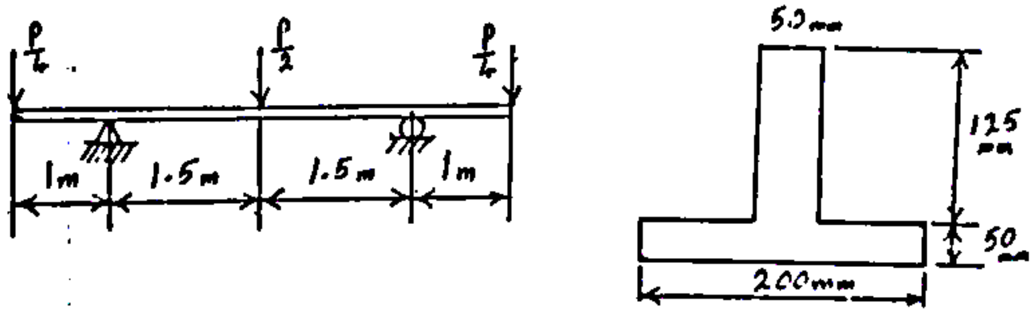
وفي الحافة السفلي،

(شد) $$\sigma = \frac{1.10^6 \times 37.5}{165.10^6} = 2.25N/mm^2$$

∴ أقصى إجهاد شد $10.6\ N/mm^2$ ، وأقصى إجهاد ضغط $5.3\ N/mm^2$

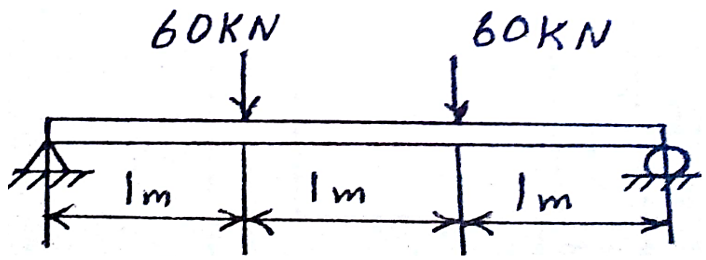
4.4 تمرين:

1. عارضة مسنودة إسناد بسيط مقطعها على شكل T مقلوب (أنظر الرسم). إذا كانت العارضة مصنوعة من الحديد الزهر له إجهاد في الشد $35N/mm^2$ وفي الضغط $150N/mm^2$، أوجد أقصى قيمة للحمل P.



Ans. (48.3kN)

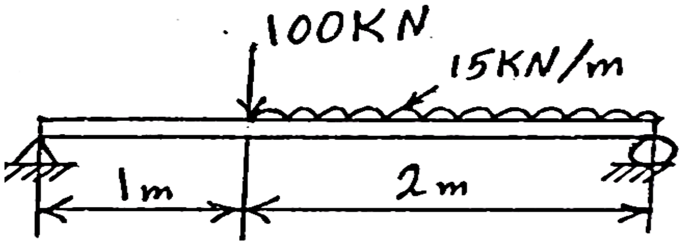
2. العارضة الموضَّحة في الرسم أدناه مسنودة إسناد بسيط عند طرفيها وعليها حملان متماثلان كل منهما 60kN. إذا كان إجهاد التشغيل في الشد والضغط $125N/mm^2$، كم يكون العزم الثاني للمساحة لمقطع عمقه 250mm.



Ans. $(60.10^6 mm^4)$

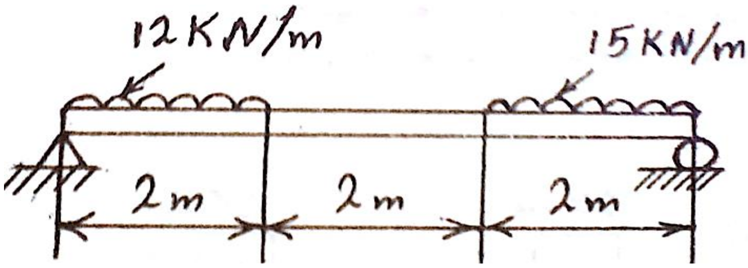
3. عارضة مسنودة إسناد بسيط عليها حمل مركز وآخر موزَّع بانتظام كما في الرسم. إذا كان إجهاد التشغيل والضغط $150N/mm^2$، أوجد معاير المقطع. إذا كان هنالك مقطعان متوفران

أحدهما عمقه 250mm والآخر 300mm وكلاهما له نفس المعاير، فأيهما تختار لهذه العارضة.



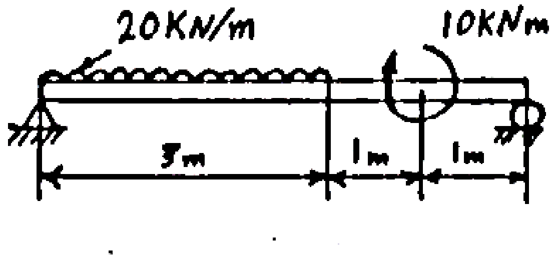
Ans. (300mm, $0.51.10^6 mm^4$)

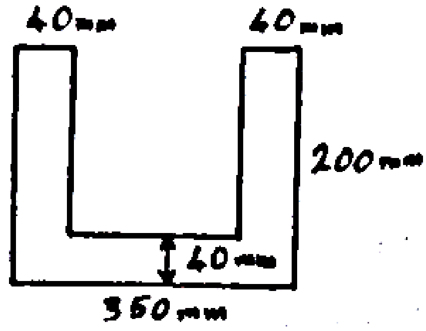
4. عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلَّط عليها حملان موزعان بانتظام (الرسم). عمق المقطع 200mm، والعزم الثاني للمساحة حول محور الانحناء $38.2.10^6 mm^4$. أوجد قيمة وموضع إجهاد الانحناء الأقصى.



Ans.(على بعد 1.733m من المسند اليمين $59N/mm^2$)

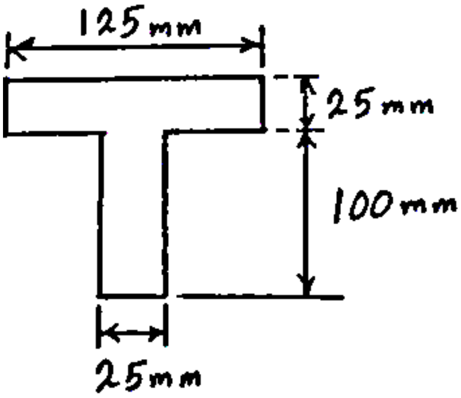
5. عارضة مسنودة إسناد بسيط لها مقطع على شكل مجرى مسلَّط عليها حمل موزَّع بانتظام بالإضافة إلي عزم مركز (أنظر الرسم). أوجد إجهادي الشد والضغط الأقصيين.





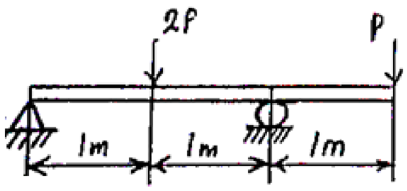
Ans. ($56.8N/mm^2$, $31.2N/mm^2$)

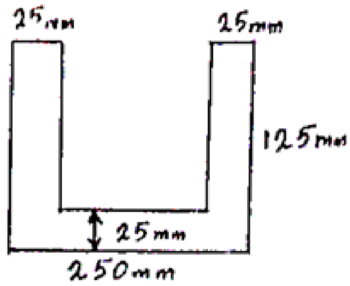
6. عارضة وتدية مقطعها على شكل T (أنظر الرسم) طولها 2m مسلط عليها حمل موزَّع بانتظام معدَّله 8kN/m. أوجد إجهادي الشد والضغط الأقصيين.



Ans. (81N/mm^2, 38.2N/mm^2)

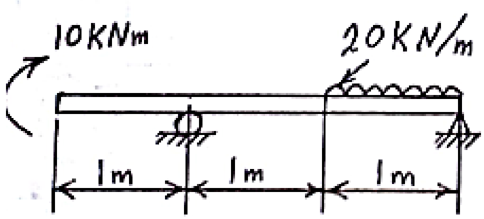
7. عارضة لها مقطع على شكل مجرى محمَّلة كما في الرسم. المادة حديد زهر لها إجهاد شد 35N/mm^2 وإجهاد ضغط 150N/mm^2. أوجد القيمة القصوى للحمل P.

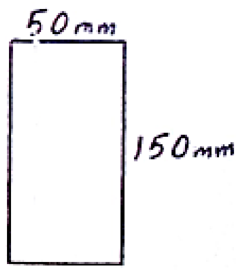




Ans. (6.3kN)

8. أوجد إجهاد الإنحناء الأقصى للعارضة الموضَّحة في الرسم.





Ans. (30N/mm^2)

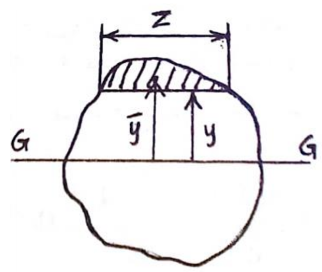
الفصل الخامس

إجهاد القص في العارضات

(Shear Stress in Beams)

5.1 مدخل:

قوة القص عند أي مقطع على العارضة تؤدي إلي نشوء إجهاد قص على المقاطع العرضية يتغير عادة من نقطة لأخرى، وعلى سبيل المثال المقطع في الرسم (5.1) أدناه معرَّض لقوة قص F.



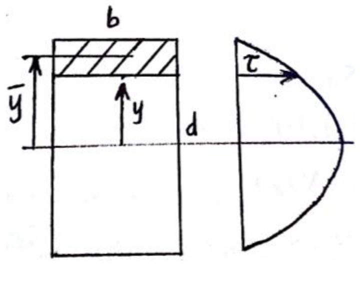
الرسم (5.1)

إجهاد القص على بعد y من المحور G – G الذي يمر بمركز المساحة يحسب من القانون (حاول استنتاجه بنفسك).

$$\tau = F\frac{A\bar{y}}{ZI}$$

حيث أنَّ F قوة القص، $A\bar{y}$ العزم الأول للمساحة المظللة التي تلى المقطع وعرضه Z، I العزم الثاني للمساحة حول محور يمر بمركز المساحة.

5.2 مقطع مستطيل:



الرسم (5.2)

$$A = b\left(\frac{d}{2} - y\right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} - y\right) + y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

$$A\bar{y} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y\right]$$

$$I = \frac{bd^3}{12}, \quad z = b$$

وبالتعويض نحصل على،

$$\tau = \frac{6F}{bd^3}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

وبالتالي توزيع الإجهادات كما موضَّح في الرسم (5.2) أعلاه.

وإجهاد القص الأقصى $\hat{\tau} = 1.5F / bd$.

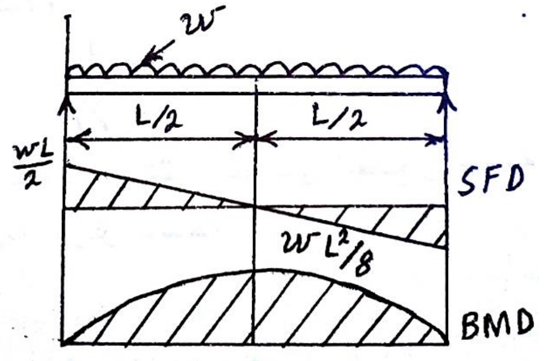
إذن $\hat{\tau} = 1.5\tau_{av}$.

مثال (1):

عارضة خشبية طولها 2m مسلَّط عليها حمل موزع بانتظام. مقطع العارضة مستطيل عرضه 10mm وعمقه 150mm. إذا كان الإجهاد الطولي المسموح به $28N/mm^2$ وإجهاد القص العرضي $2N/mm^2$، أحسب أقصى حمل يمكن تسليطه.

الحل:

يتم رسم العارضة كما في الرسم (5.3) أدناه.



الرسم (5.3)

$$\hat{M} = \frac{wL^2}{8} = \frac{w \times 4}{8} = 0.5w\,kNm$$

$$\hat{F} = \frac{wL}{2} = \frac{w \times 2}{2} = w\,kNm$$

(أ) الإجهاد الطولي:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{28}{75} = \frac{0.5w \times 10^6}{28.1.10^6}$$

$$\therefore w = 21kN/m$$

(ب) إجهاد القص العرضي:

$$\hat{\tau} = 1.5\frac{F}{bd}$$

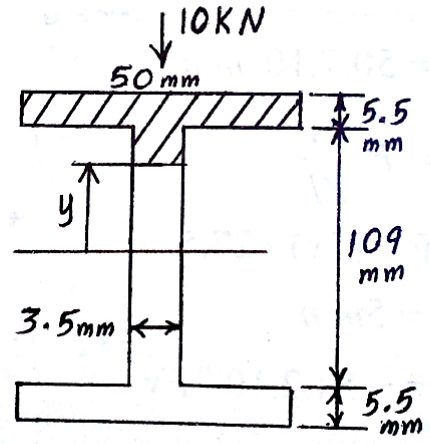
$$2 = \frac{1.5w.10^3}{100 \times 150}$$

$$\therefore w = 20kN/m$$

إذن أقصى حمل يمكن تسليطه 20kN/m.

مثال (2):

أحسب قيمة إجهاد القص العرضي عند محور التعادل وعند أعلى الوترة، وقارن معهما متوسط إجهاد القص على افتراض توزيع منتظم للإجهادات على الوترة. ما هي النسبة المئوية من قوة القص محمولة بواسطة الوترة. العارضة في شكل حرف I موضحة في الرسم (5.4) أدناه.



الرسم (5.4)

الحل:

$$I = 220.10^4 mm^4, \qquad A = 9.4.10^2 mm^2$$

$$A\bar{y} = 50 \times 5.5 \times 57.25 + (54.5 - y) \times \frac{3.5}{2}(54.5 + y)$$

$$A\bar{y} = 209.5 - 1.75y^2$$

$$\tau = \frac{FA\bar{y}}{ZI}$$

$$\tau = \frac{10.10^3(209.5 - 1.75y^2)}{3.5 \times 220.10^4}$$

$$y = 0, \qquad \tau = 27.2N/mm^2$$

$$y = 54.5mm, \qquad \tau = 20.1N/mm^2$$

على افتراض أنَّ إجهاد القص على الوترة منتظم،

$$\tau_{av} = \frac{10.10^3}{3.5 \times 109} = 26.2N/mm^2$$

إذن إجهاد القص الأقصى يزيد عن متوسط إجهاد القص بنسبة Pr_1، حيث أنَّ،

$$\Pr_1 = \frac{27.2 - 20.1}{20.1} \times 100 = 3.7\%$$

بينما إجهاد القص في أعلى الوترة يقل عن متوسط إجهاد الأقصى بنسبة Pr_2، حيث أنَّ،

$$\Pr_2 = \frac{26.2 - 20.1}{20.1} \times 100 = 30.3\%$$

قوة القص المحمولة بواسطة الوترة،

$$F_w = \int_{-d/2}^{d/2} \tau \ bd \ dy = \int_{-54.5}^{54.5} \frac{3.5 \times 10^3 (209.5 - 1.75 y^2) dy}{3.5 \times 220.10^4}$$

$$F_w = 9.5 kN$$

إذن قوة القص المحمولة بواسطة الوترة تساوي 95% من قوة القص الكلية.

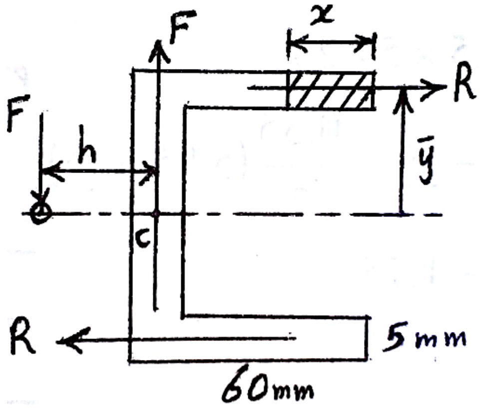
5.3 مركز القص:

هذا المركز له علاقة بالمقاطع غير المتماثلة مثل الزاوية والمجرى. ومثل هذه المقاطع إذا استخدمت كعارضة فإنها بالإضافة للانحناء فإنها تلتوى إلا إذا سلط الحمل عند مركز القص.

مثال(3):

أوجد مركز القص للمقطع المجرى الموضَّح في الرسم (5.5) أدناه.

الحل:



الرسم (5.5)

$$I = 50.7.10^4 mm^4$$

$$\tau = F\frac{A\bar{y}}{ZI}$$

$$A\bar{y} = (5x) \times 27.5$$

$$Z = 5mm$$

$$\therefore \tau = 54.2.10^{-6} Fx$$

$$R = \int_0^{57.5} \tau(5dx) = 54.2.10^{-6} F\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{57.5} = 0.448F$$

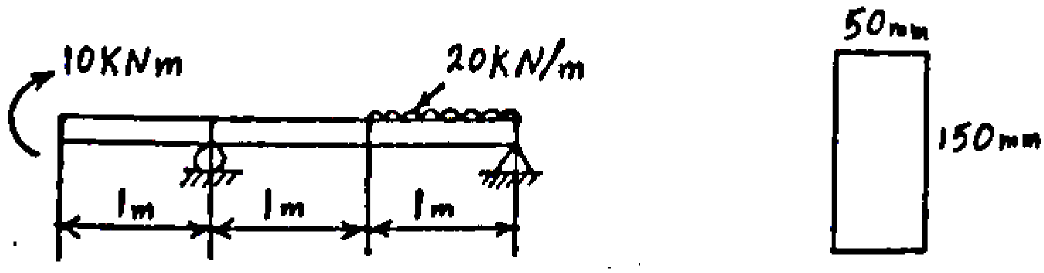
خذ العزوم حول النقطة c،

$$Fh = 55R$$

$$\therefore h = 24.7mm$$

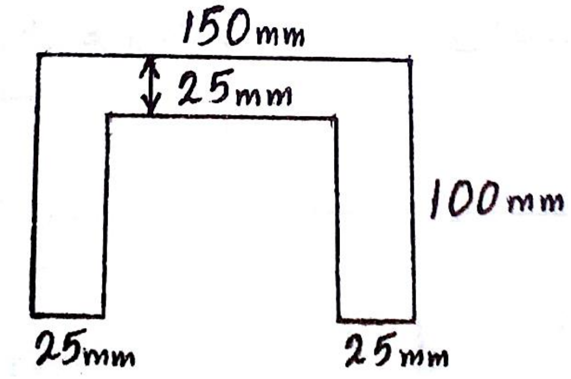
5.4 تمرين:

1. أوجد إجهاد القص الأقصى في العارضة أدناه.



Ans. (3N/mm^2)

2. عارضة مقطعها على شكل مجرى كما موضَّح في الرسم. إذا كان أقصى قوة قص على طول العارضة 25kN، أوجد إجهاد القص الأقصى في العارضة.



Ans. (7.35N/mm^2)

3. عارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 3m سلط عليها حمل مركز 100kN على مسافة 1m من أحد المسندين. مقطع العارضة مربع مجوف أبعاده الخارجية 150mm وسمك الجدار 37.5mm. أوجد إجهاد القص الأقصى على مسافة 37.5mm من محور التعادل.

Ans. (60N/mm^2)

4. عارضة مقطعها على شكل T شفته 120mm×10mm ووترته 100mm×10mm. ما هي النسبة المئوية لقوة القص عند أي مقطع محمول بواسطة الوترة.

Ans. (93.5%)

5. عارضتان أبعادهما كما في الجدول أدناه مسنودتان عند طرفيهما ومسلط على كل منهما حمل في الوسط بحيث يكون إجهاد الانحناء في كليهما واحد. أوجد نسبة إجهاد القص الأقصى في الوترة.

المقطع	سمك الوترة	سمك الشفة	عرض الشفة	العمق الكلي	مسافة محور التعادل من الحافة الخارجية للشفة
I	5.0	8.75	62.5	125	62.5
T	12.5	12.5	125	100	26.2

الأبعاد بالـ (mm)

Ans. (3.38)

6. مقطع على شكل مجرى له وترة عمقها 192mm وسمكها 6mm وشفتين عرض كل منهما 84mm وسمكها 12mm. هذا المقطع استخدم كعارضة وتدية بحيث تكون الوترة في المستوى الرأسي ومُسلط عليها حمل في الطرف W. أوجد موضع W بالنسبة للوترة بحيث لا تتعرض العارضة إلي إلتواء.

Ans.(31mm من ظهر الوترة)

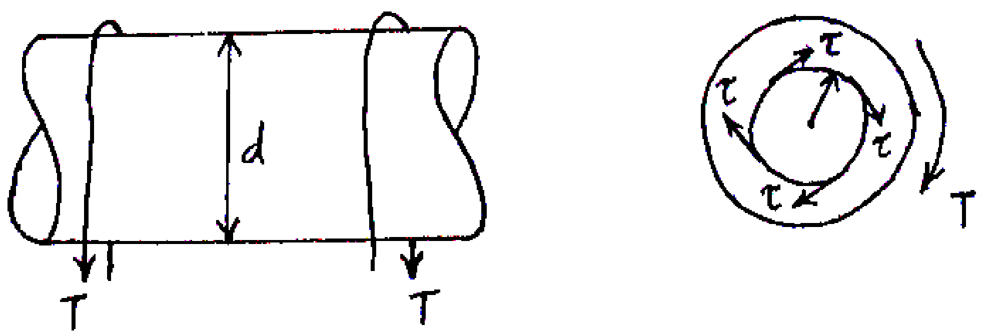
الفصل السادس

الإلتواء

(Torsion)

6.1 مخل:

ينشأ الإلتواء عندما يتعرَّض عمود إلي عزم إلتواء يتسبب في خلق إجهادات قص في اتجاه قائم على نصف القطر كما في الرسم (6.1) أدناه.



الرسم (6.1)

حاول استنتاج القانون التالي:

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{L}$$

حيث أنَّ: T عزم الإلتواء، J العزم القطبي، τ إجهاد القص، r نصف القطر حيث يُراد الإجهاد، G معاير الجساءة، θ زاوية الإلتواء، L طول العمود.

6.2 أمثلة محلولة:

مثال(1):

المطلوب تصميم عمود قطره d بحيث يحقق شرطين: الأول زاوية الإلتواء يجب ألاّ تتجاوز 1° عندما يكون L = 1.5d. الثاني: إجهاد القص يجب ألاّ يتجاوز $55N/mm^2$. ما هو قطر العمود

الـــذي يحقــق الشـــرطين معـــاً عنـــد نقـــل قـــدرة 1MW بســـرعة 240 لفـــة فـــي الدقيقـــة. خـــذ $G=80kN/mm^2$.

الحل:

العزم المنقول نحصل عليه من الآتي:

$$P=\frac{2\pi NT}{60}$$

$$10^6=\frac{2\pi\times 240T}{60}$$

$$T=38.3Nm$$

(أ) زاوية الإلتواء:

$$\theta=\frac{1\times\pi}{180}=0.0175rad$$

$$J=\frac{\pi d^4}{32}=0.0982d^4\left(mm^4\right)$$

$$\frac{T}{J}=\frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{38.8.10^6}{0.0982d^4}=\frac{80.10^3\times 0.0175}{15d}$$

$$\therefore d=163mm$$

(ب) إجهاد القص الأقصى:

$$\frac{\tau}{r}=\frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{55}{0.5d}=\frac{38.8.10^6}{0.0982d^4}$$

$$\therefore d=154mm$$

إذن قطر العمود المناسب 163mm.

مثال (2):

عمود مجوف طوله 3m مطلوب منه نقل عزم 25kNm. زاوية الإلتواء يجب ألاّ تتجاوز 2.5°

وإجهاد القص $90N/mm^2$. أوجد القطرين الداخلي والخارجي للعمود إذا كانت $G=85N/mm^2$.

الحل:

دع القطر الداخلي d_1 والقطر الخارجي d_2،

$$L = 3m, \quad \theta = 2.5° = 0.0436 rad$$

$$J = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) = 0.0982\left(d_2^4 - d_1^4\right)$$

$$\frac{\tau}{J} = \frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{25.10^6}{0.0982\left(d_2^4 - d_1^4\right)} = \frac{85.10^3 \times 0.0436}{3.10^3}$$

$$d_2^4 - d_1^4 = 2.06.10^8 \qquad (1)$$

إجهاد القص الأقصى يحدث في السطح $r = \frac{d_2}{2}$،

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{r}$$

$$\frac{90}{0.5d_2} = \frac{25.10^6}{0.0982\left(d_2^4 - d_1^4\right)}$$

$$d_2^4 - d_1^4 = 1.1414.10^6 d_2 \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و(2) نحصل على ، $d_1 = 125mm$، $d_2 = 145mm$

مثال (3):

عمود دائري مصمت قطره 50mm وطوله 3mm. قدرة 50kW تم توصيلها إلي عمود في وسطه بواسطة سير يمر على بكرة. هذه القدرة تستخدم لإدارة آليتين إحداهما على الطرف اليسار للعمود وتستهلك 20kW، والأخرى على الطرف اليمين وتستهلك 30kW. أوجد إجهاد القص الأقصى

في العمود وكذلك زاوية الإلتواء النسبية بين قسمي العمود. يدور العمود بسرعة 200 لفة في الدقيقة وهو مصنوع من الصلب $G=85N/mm^2$.

الحل:

على الطرف اليسار للعمود العزم المنقول T_1 والقدرة 20kW،

$$P_o = \frac{2\pi N T_1}{60}$$

$$20.10^6 = \frac{2\pi \times 200 T_1}{60}$$

$$T_1 = 952 Nm$$

وعلى الطرف اليمين، العزم المنقول T_2 والقدرة 30kW،

$$30.10^6 = \frac{2\pi \times 200 T_2}{60}$$

$$T_2 = 1.43 kNm$$

إذن إجهاد القص الأقصى يحدث في سطح العمود على اليمين،

$$J = \frac{\pi \times 50^4}{32} = 614.10^3 mm^4$$

$$\frac{\tau}{r} = \frac{T}{J}$$

$$\frac{\tau}{25} = \frac{1.43.10^6}{614.10^3}$$

$$\tau = 58.3 N/mm^2$$

زاوية الإلتواء لليسار،

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{95.2.10^3}{614.10^3} = \frac{85.10^3 \theta_1}{1.5.10^3}$$

$$\theta_1 = 0.027 rad$$

زاوية الإلتواء لليمين،

$$\frac{1.43.10^3}{614.10^3} = \frac{85.10^3\theta_2}{1.5.10^3}$$

$$\theta_2 = 0.014rad$$

وما دامت θ_1 و θ_2 في نفس الاتجاه فإنَّ الزاوية المطلوبة هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

6.3 تمرين:

1. أوجد أقصى قدرة يمكن نقلها بواسطة عمود صلب قطره 50mm بسرعة 240 لفة/الدقيقة إذا كان إجهاد التشغيل $90N/mm^2$.

Ans. (55.3kW)

2. عمود دفع سفينة قطره 350mm. إجهاد التشغيل في حالة القص $50N/mm^2$ وزاوية الإلتواء المسموح بها 1° في طول 5.25m. إذا كانت $G=85N/mm^2$، أوجد العزم الأقصى الذي يستطيع العمود نقله.

Ans. (416kNm)

3. خذ العمود المذكور في المسألة السابقة، وهب أنَّ العمود مجوف وقطره الداخلي 175mm. ما هي نسبة الانخفاض في القدرة المنقولة إذا كان إجهاد القص وزاوية الإلتواء تظلان كما كانتا، ما هي نسبة التخفيض في وزن العمود.

Ans. (25%, 6%)

4. أوجد قطر عمود صلب يمكن استخدامه لنقل 150kW بسرعة 180 لفة/دقيقة إذا كان إجهاد القص المسموح به $85N/mm^2$. أوجد أيضاً أبعاد عمود مجوف من الصلب يكون قطره الداخلي 3/4 قطره الخارجي وبنفس الشروط. ما هي نسبة زاويتي الإلتواء لوحدة طولية واحدة للعمودين.

Ans. (0.88, 88mm, 78mm)

5. خذ عمود دائري مصمت ينقل 1.5MW بسرعة 300 لفة/دقيقة. أوجد قطر العمود بحيث:

(أ) لا يلتوى العمود أكثر من 1° في طول يساوى 20 قطره و

(ب) إجهاد القص لا يتجاوز $65N/mm^2$.

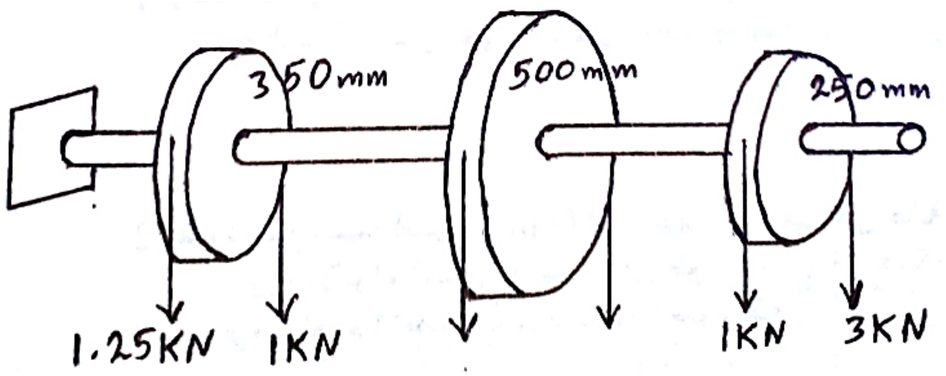
العمود مصنوع من الصلب $G=85N/mm^2$.

Ans. (188mm)

6. عمود مرَّكب من عمود نحاس طوله 0.5m وقطره 100mm يتصل بعمود صلب طوله 1m وقطره 125mm. تم تسليط عزم إلتواء 15kN على كل طرف. أوجد إجهاد القص الأقصى وزاوية الإلتواء للعمود الكامل. للنحاس $G=40N/mm^2$، للصلب $G=85N/mm^2$.

Ans. (0.026rad, $39N/mm^2$, $76N/mm^2$)

7. الرسم أدناه يوضِّح عمود رأسي والبكرات المثبتة عليه يمكن تجاهل كتلتها. العمود يدور بسرعة منتظمة وقوى الشد في السير مبينة في الرسم. إذا كان إجهاد القص المسموح به $50N/mm^2$، أوجد قطر العمود المصمت المطلوب. تجاهل إنحناء العمود لوجود محامل قريبة من بعضها.



Ans. (29mm)

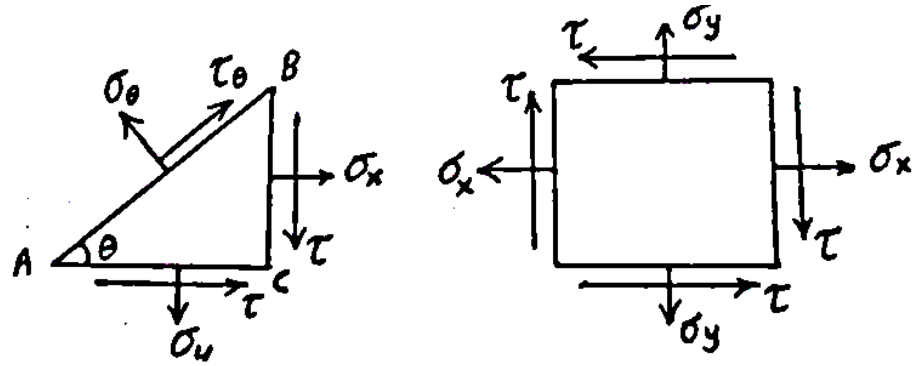
الفصل السابع

الإجهادات والانفعالات المرَّكبة

(Complex Stresses and Strains)

7.1 تحليل الإجهادات:

عادة لا يتعرض العضو الهندسي لنوع واحد من الإجهادات وإنما لإجهادات متعدِّدة في آن واحد. عادة يتغير الإجهاد من نقطة لآخري وبالتالي فإنَّ الانهيار – إذا حدث – لا يحدث في الجسم كله في لحظة واحدة بل يبدأ في النقطة الأضعف أو التي تكون معرَّضة لإجهادات أكثر من غيرها. لهذا نركز الدراسة على الإجهاد عند نقطة في الجسم، ولدواعي الإبانة يتم تكبيرها فمثلاً نمثِّل عنصراً في حالة إجهادات مستوية كما في الرسم (7.1) أدناه.



الرسم (7.1)

على المستوي AB يمكن تحليل الإجهاد إلي مركبتين، إجهاد عمودي σ_θ وإجهاد قص τ_θ. عادة ينصب الاهتمام على هذين الإجهادين لدورهما في انهيار العضو. سنأخذ الوتر $AB = 1$ وسمك العنصر 1. وبالتالي فإنَّ المساحة الواقعة على AB تساوي واحد، والمساحة AC وBC تساوي $\cos\theta$ و $\sin\theta$ على التوالي. نسبة لأنَّ العضو في حالة اتزان فإن مجموع القوى في أي اتجاه تساوي صفراً. أي أنَّ مجموع القوى في اتجاه σ_θ تساوي صفراً وكذلك مجموع القوى في اتجاه τ_θ.

وبسهولة يمكن الحصول على الآتي:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau \cos 2\theta$$

1. الإجهادات الرئيسة:

عند أي نقطة هنالك مستويان متعامدان يعرفان بالمستويين الرئيسيين. و الذي يميز المستوي الرئيس هو أنّه خال من إجهادات القص. والإجهاد العمودي الموجود على المستوي الرئيس يسمي الإجهاد الرئيس. والإجهادان الرئيسان يمثلان القيم القصوى والدنيا للإجهادات العمودية في نقطة معينة.

حاول أن تستنتج الصيغة التالية للإجهادين الرئيسين:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}$$

وكذلك ميل المستويين الرئيسين:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

2. إجهاد القص الأقصى:

يمكن حساب إجهاد القص الأقصى عند أي نقطة في المادة من الصيغة التالية (حاول أن تبرهنها):

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

والمستويان اللذان يعمل عليهما إجهاد القص الأقصى بميلان 45° للمستويين الرئيسين.

7.2 أمثلة محلولة:

مثال(1):

عند مقطع في عارضة كان إجهاد الشد الناجم عن الإنحناء $50N/mm^2$ وإجهاد القص $20N/mm^2$. أوجد الإجهادين الرئيسين. أحسب أيضاً إجهاد القص الأقصى.

الحل:

$$\sigma_x = 50N/mm^2,\ \sigma_y = 0,\ \tau = 20N/mm^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(0+50) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0-50)^2 + 4\times 20^2}$$

$$\sigma_1 = 57N/mm^2, \quad \sigma_2 = -7N/mm^2$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2\times 20}{0-50} = -0.8$$

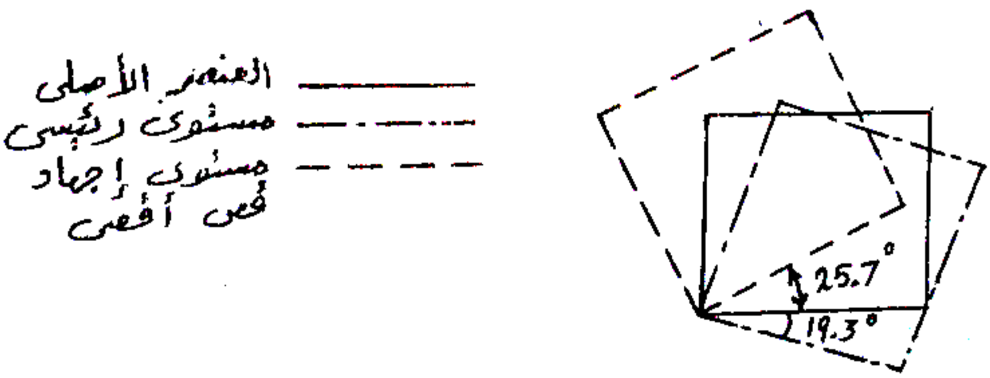
$$2\theta = -38.7^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = -19.3^\circ, \quad \theta_2 = 70.7^\circ$$

إجهاد القص الأقصى،

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(57+7) = 32N/mm^2$$

المستويات الرئيسة والمستويات المعرَّضة لإجهاد قص موضَّحة في الرسم (7.2) التالي:



الرسم (7.2)

معني هذا إذا أدرت العنصر $19.3°$ في اتجاه دوران عقارب الساعة تحصل على المستويات الرئيسة. أما إذا أدرتها $25.7°$ في عكس دوران عقارب الساعة تحصل على المستويات التي تتعرض لأقصى إجهاد قص. (ضع القيم المحسوبة بنفسك).

مثال(2):

عند تعرَّض أسطوانة رقيقة إلي ضغط داخلي وعزم إلتواء، كانت الإجهادات في جدار الأسطوانة:

أ- $60 N/mm^2$ شد.

ب- $30 N/mm^2$ شد في اتجاه قائم على (أ).

ج- إجهاد القص وإجهادات قص تكميلية $45 N/mm^2$ في اتجاه (أ) و(ب).

أحسب الإجهادات الرئيسة.

الحل:

$$\sigma_x = 60 N/mm^2,\ \sigma_y = 30 N/mm^2,\ \tau = 45 N/mm^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_y - \sigma_x\right)^2 + 4\tau^2}$$

$$= \frac{1}{2}(30 + 60) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(30 - 60)^2 + 4 \times 45^2}$$

$$\sigma_1 = 92.4 N/mm^2, \quad \sigma_2 = -2.4 N/mm^2$$

مثال(3):

عمود مصمت قطره $125mm$ ينقل قدرة $600kW$ بسرعة 300 لفة/الدقيقة، كما يتعرَّض لعزم إنحناء $9\ kNm$ وقوة ضغط محورية. إذا كان الإجهاد الرئيس الأقصى يجب ألاّ يتجاوز $80 N/mm^2$، أوجد قوة الضغط المحورية المسموح بها. حدِّد موضع المستوي الذي يعمل عليه الإجهاد الرئيس ثم أرسم مخطَّط يوضِّح المستويات المختلفة.

الحل:

$$P = 600kW, \quad N = 300rev/\min$$

$$J = \frac{\pi}{32} \times 125^4 = 24.10^6 mm^4,\ I = 12.10^6 mm^4$$

$$A = 12.3.10^3 mm^2$$

$$P_o = \frac{2\pi NT}{60}$$

$$600.10^3 = \frac{2\pi 300T}{60}$$

$$T = 19.1\ kNm$$

إجهاد القص الأقصى الناجم من عزم الإلتواء،

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{r}$$

$$\frac{19.1.10^6}{24.10^6} = \frac{\tau}{62.5}$$

$$\tau = 49.8N/mm^2$$

الإجهاد العرضي $\sigma_y = 0$.

الإجهاد الطولي (إجهاد ضغط)،

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y + \frac{P}{A}$$

$$= \frac{-9.10^6 \times 62.5}{12.10^6} - \frac{P.10^3}{12.3.10^3}$$

$$\sigma_x = -64.9 - 0.081P$$

وبالطبع يمكن حساب σ_x من الإجهاد الرئيس والصيغة التالية:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}$$

$$80=\frac{1}{2}(0+\sigma_x)+\frac{1}{2}\sqrt{(0-\sigma_x)^2+4\times 49.8^2}$$

$$160=+\sigma_x+\sqrt{\sigma_x^2+9920}$$

$$(160-\sigma_x)^2=\sigma_x^2+9920$$

$$25600-320\sigma_x+\sigma_x^2=\sigma_x^2+9920$$

$$\sigma_x=+49N/mm^2$$

$$-446.9-0.081P=-49$$

$$P=25.9\ kN$$

اتجاه المستويين الرئيسين،

$$\tan 2\theta=\frac{2\tau}{\sigma_y-\sigma_x}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\times 49.8}{0+49}=2.033$$

$$2\theta=6.3.8^\circ$$

$$\therefore \theta_1=31.9^\circ,\quad \theta_2=121.9^\circ$$

(حاول أن ترسم المخطَّط التوضيحي بنفسك).

7.3 تمرين:

1. عمود دائري مصمت ينقل 2240kW بسرعة 400 لفة/الدقيقة ومُسلَّط عليه أيضاً عند مقطع معين عزم إنحناء 30kNm. أحسب أقل قطر للعمود إذا كان إجهاد القص الأقصى يجب أن يكون $60N/mm^2$.

Ans. (173mm)

2. عمود دفع مجوف قطره الداخلي 150mm والخارجي 250mm ينقل 1200kW بقوة ضغط محورية 400kN. أوجد سرعة العمود إذا كان الإجهاد الرئيس يجب ألاّ يتجاوز $60N/mm^2$. ما قيمة قوة القص القصوى عند تلك النقطة.

Ans. ($53.63N/mm^2$, 80.2 لفة/الدقيقة)

3. برهِّن أنَّه عند تسليط عزم إنحناء M وعزم إلتواء T على عمود دائري فإنَّ الإجهاد الرئيس الأقصى يساوى إجهاد الإنحناء الناجم من عزم إنحناء بسيط M_E حيث أنَّ:

$$M_E = \frac{1}{2}\left[M + \sqrt{M^2 + T^2}\right]$$

عمود مجوف يتعرَّض لعزم إنحناء 2.5kNm وعزم إلتواء 3kNm. أحسب الإجهاد الرئيس الأقصى. القطر الداخلي 75mm والخارجي 100mm.

لاحظ أنَّ M_E تسمي عزم الإنحناء المتكافئ.

Ans. ($47.7N/mm^2$)

4. عمود دائري مصمت ينقل 900kW بسرعة 500 لفة/الدقيقة وهو مسنود على محملين المسافة بينهما 1.8m ويحمل حدَّاف في الوسط وزنه 20kN. أوجد أصغر قطر للعمود إذا كان إجهاد القص المسموح به $75N/mm^2$.

Ans. (109.6mm)

5. عند نقطة في وترة عارضة كان هنالك إجهاد قص 37.5N/mm وإجهاد شد $90N/mm^2$. أوجد مركبتي الإجهاد العمودية والمماسية على مستوي يميل 30° لاتجاه إجهاد الشد.

Ans. ($20.2 N/mm^2$, $100 N/mm^2$)

6. البيانات التالية تنطبق على موتور كهربائي يقوم بإدارة عمود: القدرة المنتجة 7.5kW، السرعة 950 لفة/الدقيقة، قطر بكرة الموتور 38mm، السافة بين خط عمل قوة الشد في سير البكرة القائدة ومركز المحمل 125mm، ونسبة الشد في البكرة 2.5 لنقطة على سطح العمود وفي وسط المحمل، أوجد الإجهادات الرئيسة وإجهاد القص الأقصى.

Ans. ($34.7 N/mm^2$, $-0.72 N/mm^2$, $68.6 N/mm^2$)

7. عند نقطة في وترة كمرة كان إجهاد الإنحناء $80 N/mm^2$ (شد) وإجهاد القص في نفس النقطة $30 N/mm^2$، أحسب: (أ) الإجهادين الرئيسين (ب) إجهاد القص الأقصى

(ج) إجهاد الشد والذي إذا عمل لوحده يؤدي إلي نفس إجهاد القص الأقصى.

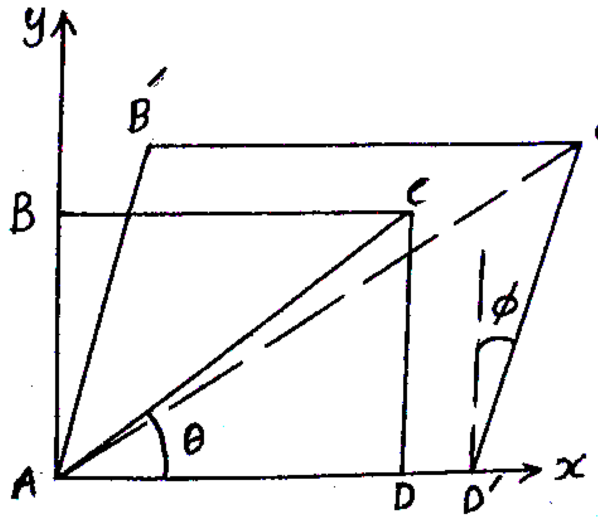
(د) إجهاد القص والذي إذا عمل لوحده يؤدي إلي نفس الإجهاد الرئيس الأقصى.

أرسم مخطَّط يوضِّح العلاقة بين المستويين الرئيسين ومستوى إجهاد القص الأقصى.

Ans. ($90 N/mm^2$, $100 N/mm^2$, $50 N/mm^2$, $10 N/mm^2$, $\theta_2=108.4^\circ$, $\theta_1=18.4^\circ$)

7.4 تحليل الانفعالات:

افترض أنَّ عنصراً ABCD تشوه ليصبح A'B'C'D' كما في الرسم (7.3) أدناه.



الرسم (7.3)

إذا كان الانفعال الخطى في اتجاه x، $\in_x$، وفي اتجاه y، $\in_y$، وانفعال القص ϕ. يمكن إيجاد الانفعال في أي اتجاه يميل بزاوية θ لمحور x هكذا:

$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

كما يمكن ايجاد الانفعالين الرئيسين من الصيغة،

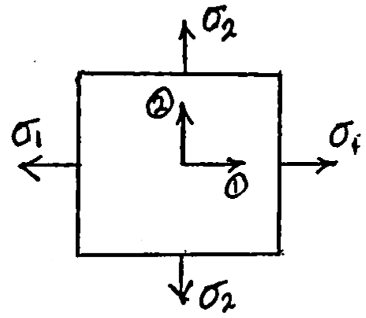
$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

وهما يمثلان أقصى وأدني قيمة للانفعال في تلك النقطة، واتجاه الانفعالين هو،

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\in_x - \in_y}$$

معادلات الانفعال – الإجهاد:

في حالة الإجهادات المستوية ومن الرسم (7.4) أدناه نجد أن:



الرسم (7.4)

$$\in_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

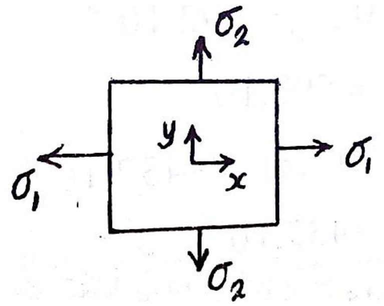
$$\in_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

ويمكن التعبير عن الإجهادات بدلالة الانفعالات هكذا،

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\in_1 + \nu \in_2\right), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \in_1 + \in_2\right)$$

مثال(4):

عند نقطة في لوح كانت الإجهادات كما موضَّح في الرسم (7.5) أدناه. وكانت الانفعالات كما يلي $\in_x = 118.5.10^{-6}$ و $\in_y = 94.7.10^{-6}$. أوجد الإجهادين σ_1 و σ_2. أوجد الإجهاد العمودي وإجهاد القص على مستوي يميل 30° للمحور x. خذ $E=207kN/mm^2$ و $\nu = 0.28$.



الرسم (7.5)

الحل:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\in_1 + \nu \in_2\right)$$

$$=\frac{207.10^3}{1-0.28^2}(118.5+0.28\times 94.7).10^{-6}$$

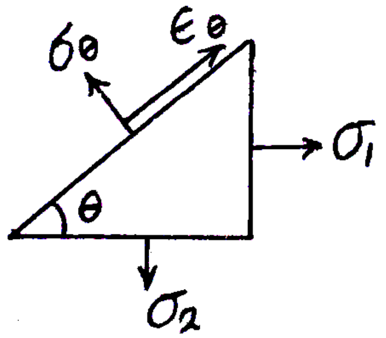
$$\sigma_1 = 20.7 N/mm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu \in_1 + \in_2)$$

$$=\frac{207.10^3}{1-0.28^2}(0.28\times 118.5+94.7).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -13.8 N/mm^2$$

الاجهاد على مستوي يميل 30° لمحور x، يتم توضيحه في الرسم (7.6) أدناه.



الرسم (7.6)

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(20.7-13.8)+\frac{1}{2}(20.7+13.8)\cos 60^\circ$$

$$\sigma_\theta = 12.0 N/mm^2$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(20.7+13.8)\sin 60^\circ = 14.9 N/mm^2$$

مثال(5):

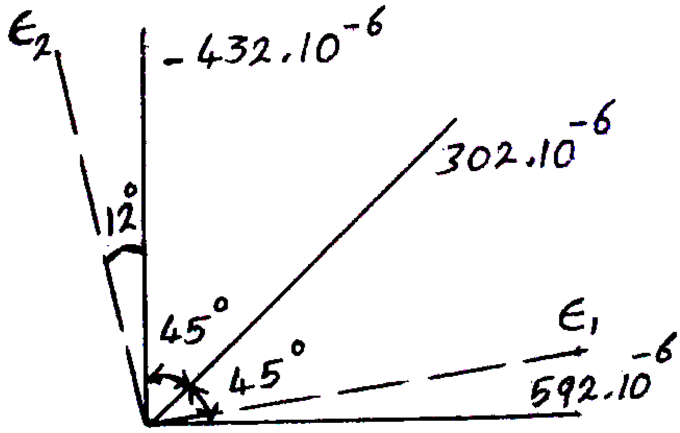
مقياس انفعال يتكون من 3 أذرع على سطح لوح معدني في حالة إجهاد أعطي القراءات التالية:

الأول بزاوية صفر 592.10^{-6}، الثاني بزاوية 45° 308.10^{-6}، والثالث بزاوية 90° -432.10^{-6}.

الزوايا تم قياسها في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة بدءاً من الذراع الأول. أوجد مقدار الانفعالين الرئيسين واتجاههما بالنسبة للذراع الأول. أوجد الإجهادين الرئيسين إذا كانت $E=203kN/mm^2$ و $\nu = 0.33$.

الحل:

الرسم (7.7) أدناه يوضح الترتيبية.



الرسم (7.7)

$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

$$\theta = 0, \ \in_\theta = 592.10^{-6}$$

$$\therefore \in_x = 592.10^{-6}$$

$$\theta = 90°, \ \in_\theta = -432.10^{-6}$$

$$\therefore \in_y = -432.10^{-6}$$

$$\theta = 45°, \ \in_\theta = 308.10^{-6}$$

$$308.10^{-6} = \frac{10^{-6}}{2}(592 - 432) + \frac{10^{-6}}{2}(592 + 432)\cos 90° + \frac{\phi}{2}\sin 90°$$

$$308.10^{-6} = 80.10^{-6} + 0.5\phi$$

$$\therefore \phi = 456.10^{-6}$$

$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

$$= \frac{10^{-6}}{2}\left(592 - 432\right) \pm \frac{10^{-6}}{2}\sqrt{\left(592 + 432\right)^2 + 456^2}$$

$$\in_{1,2} = 80.10^{-6} \pm 560.5.10^{-6}$$

$$\in_1 = 460.10^{-6}, \quad \in_2 = -480.10^{-6}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\in_x - \in_y} = \frac{456}{592 + 432} = 0.445$$

$$2\theta = 24°$$

$$\therefore \theta_1 = 12°, \quad \theta_2 = 102°$$

اتجاه الانفعالين موضَّحان في الرسم السابق.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\in_1 + \nu \in_2\right) = \frac{203.10^3}{1-0.33^2}\left(460 - 0.33 \times 480\right).10^{-6}$$

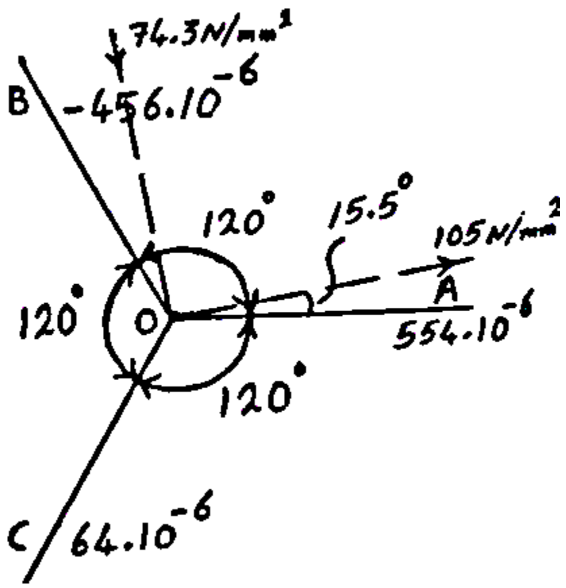
$$\sigma_1 = 109.7\, N/mm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \in_1 + \in_2\right) = \frac{203.10^3}{1-0.33^2}\left(0.33 \times 460 - 480\right).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -61.2\, N/mm^2$$

مثال(6):

مقياس إنفعال له 3 أذرع تميل $120°$ على بعضها. وكانت قراءة كل ذراع كما موضَّح في الرسم (7.8) أدناه. أوجد ميل المستويين الرئيسين عند O بالنسبة للذراع OA، ومقدار الإجهادين الرئيسين. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.3$.



الرسم (7.8)

الحل:

$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

$$\theta = 0,\ \ \in_\theta = 554.10^{-6}$$

$$\therefore \in_x = 554.10^{-6}\ (1)$$

$$\theta = 120°,\ \ \in_\theta = -456.10^{-6}$$

$$-456.10^{-6} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 240° + \frac{\phi}{2}\sin 240°$$

$$-456.10^{-6} = 0.25 \in_x + 0.75 \in_y - 0.433\phi\ (2)$$

$$\theta = 240°,\ \ \in_\theta = 64.10^{-6}$$

$$64.10^{-6} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 480° + \frac{\phi}{2}\sin 480°$$

$$64.10^{-6} = 0.25 \in_x + 0.75 \in_y + 0.433\phi \qquad (3)$$

من المعادلتين (2) و(3)،

$$-392.10^{-6} = 0.5 \in_x + 1.5 \in_y$$

عوِّض في (1)،

$$-392.10^{-6} = 0.5 \times 554 + 1.5 \in_y$$

$$\in_y = -446.10^{-6}$$

عوِّض في (2)،

$$-456.10^{-6} = 0.25 \times 554.10^{-6} + 0.75\left(-446.10^{-6}\right) - 0.433\phi$$

$$\therefore \phi = 600.10^{-6}$$

$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

$$= \frac{10^{-6}}{2}(554 - 446) \pm \frac{10^{-6}}{2}\sqrt{(554 + 446)^2 + 600^2}$$

$$\in_{1,2} = 54.10^{-6} \pm 583.3.10^{-6}$$

$$\therefore \in_1 = 637.10^{-6}, \quad \in_2 = -529.10^{-6}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\in_1 + \nu \in_2\right) = \frac{200.10^3}{1-0.3^2}(637 + 0.3 \times 529).10^{-6}$$

$$\sigma_1 = 105 N/mm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \in_1 + \in_2\right) = \frac{200.10^3}{1-0.3^2}(0.3 \times 637 - 529).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -74.3 N/mm^2$$

اتجاه المستويين الرئيسين هو نفس اتجاه الانفعالين الرئيسين. (أنظر الرسم (7.8)).

$$\tan 2\theta = \frac{\phi}{\in_x - \in_y} = \frac{600}{554 + 446} = 0.445$$

$$2\theta = 31^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = 15.5°, \quad \theta_2 = 105.5°$$

7.5 تمرين:

1. ثلاثة أذرع لمقياس انفعال، كانت القراءات كما يلي:

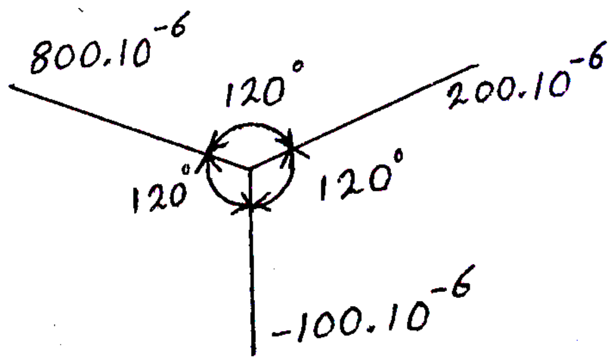
$\in_{90} = 200.10^{-6}, \in_{45} = 200.10^{-6}, \in_0 = 1500.10^{-6}$ أحسب الانفعالين الرئيسين.

Ans. (-321.10^{-6}, 1612.10^{-6})

2. أحسب الإجهادين الرئيسين في المسألة السابقة. خذ $E=80kN/mm^2$ و $\nu = 0.3$.

Ans. ($15.1N/mm^2$, $133.5N/mm^2$)

3. الانفعالات عند نقطة في مادة تم قياسها بواسطة مقياس انفعال له ثلاثة أذرع تميل $120°$ على بعضها البعض كما في الرسم أدناه. أوجد مقدار واتجاه الانفعالين الرئيسين عند تلك النقطة.



Ans.

($8.29.10^{-6}$، -229.10^{-6}). تميل $69.6°$ و $159.6°$ على التوالي في اتجاه دوران عقارب الساعة من الانفعال -100.10^{-6})

4. في تجربة لمعرفة الإجهادات عند نقطة في مادة مجهدة تم تثبيت مقياس انفعال له ثلاثة أذرع. وكانت قراءة كل ذراع كما يلي: $\in_0 = 1000.10^{-6}$ و $\in_{45} = 150.10^{-6}$ و $\in_{90} = -200.10^{-6}$.

أوجد الانفعالين الرئيسين والإجهادين الرئيسين. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.33$. أرسم مخطَّط يوضِّح اتجاه الانفعالين بالنسبة للأذرع الثلاث لمقياس الانفعال.

Ans. ($225N/mm^2$, $217.6N/mm^2$, -250.10^{-6}, 1050.10^{-6})

5. عمود دائري مصمت قطره 50mm مُسلَّط عليه حمل محوري P وعزم إلتواء T. على سطحه تم تثبيت مقياس انفعال وكانت قراءاته كما يلي: $\in_0 = 750.10^{-6}$ و $\in_{60} = -414.10^{-6}$ و $\in_{120} = 452.10^{-6}$. الذراع الأول $\in_0$ في اتجاه محور العمود. أوجد قيمة كل من P و T. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.3$.

Ans. (1887Nm, 295kN)

7.6 دائرة مور للإجهادات:

يمكن متابعة رسم دائرة مور من المثال التالي:

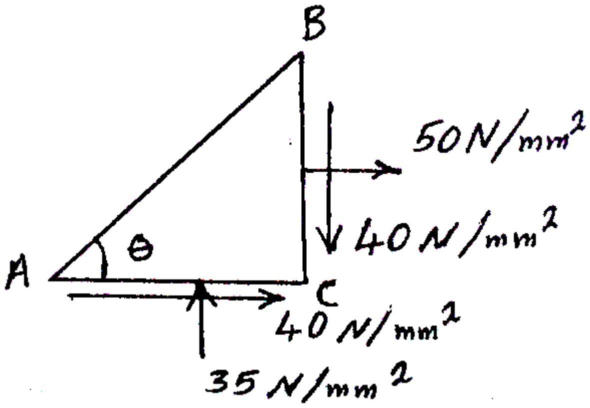
مثال (8):

عند نقطة من مادة مرنة كانت الإجهادات على مستويين متعامدين كما يلي: الرسم (7.9).

إجهاد شد $50N/mm^2$ وإجهاد قص $40N/mm^2$ على أحد المستويين، وعلى المستوى الآخر إجهاد ضغط $35N/mm^2$ وإجهاد قص تكميلي $40N/mm^2$. أوجد:

(أ) الإجهادين الرئيسين وموضع المستويين الرئيسين.

(ب) موضع المستويين الخاليين من الاجهادات العمودية.



الرسم (7.9)

الحل:

يبدأ الرسم من النقطة P دائماً ومن مكان مناسب في الورقة وبمقياس رسم مناسب كذلك بحيث لا تتخطي الدائرة المكان المخصَّص لها.

في هذه الحالة خذ مقياس رسم $1cm=10N/mm^2$.خذ أولاً المستوي BC. أرسم $PN=50N/mm^2$ (إجهاد الشد إلي اليمين من P وإجهاد الضغط لليسار من P). أرسم $NR=40N/mm^2$. خذ المستوي AC أرسم $PN=40N/mm^2$ أرسم $N'R'=40N/mm^2$. (وهو إجهاد يحاول إدارة العنصر في عكس دوران عقارب الساعة وبالتالي فهو سالب ويرسم إلي أسفل). صِل 'RR أرسم نقطة تقاطع 'RR و 'NN O. أرسم الدائرة. لاحظ OR يمثل المستوى BC و 'OR يمثل المستوى AC. لاحظ أنَّ الزاوية بين BC وAC قائمة بينما الزاوية بين OR و'OR تساوي 180°. ومن ذلك نستنتج أنَّ كل زاوية حقيقية تتضاعف في دائرة مور. إذن كل أنصاف الأقطار في دائرة مور تمثل مستويات.

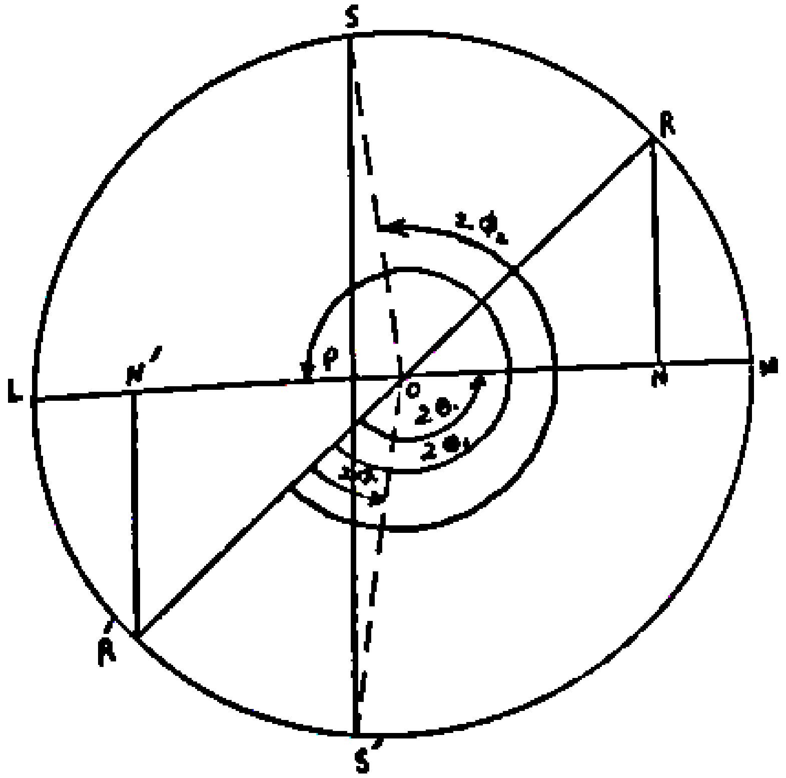
(أ) لإيجاد الإجهادين نبحث عن المستوى الخالي من إجهاد القص. واضح أنَّ المستويين OM وOL والإجهادين الرئيسين هما PM وPL. إذن

$$\sigma_1 = PM = 65.9N/mm^2,\ \sigma_2 = PL = -50.9N/mm^2$$

$$2\theta = 43.4° \quad \therefore \theta_1 = 21.7°, \quad \theta_2 = 111.7°$$

هذا يعني أنَّ المستوي المعرَّض لإجهاد شد $50N/mm^2$ يجب أن يدور 21.7^o في اتجاه دوران عقارب الساعة لكي ينطبق مع المحور.

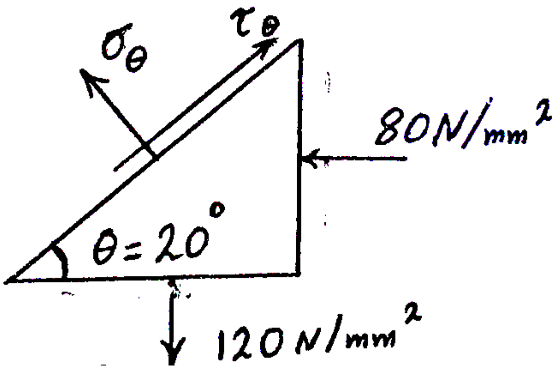
(ب) المستوي الخالي من الإجهادات العمودية نحصل عليه عندما تنطبق P و N والمستوى المطلوب هو OS و 'OS والزاوية المطلوبة $\phi_1 = 18.5°$ و $\phi_2 = 117°$. الرسم (7.10).



الرسم (7.10)

مثال(9):

في نظام إجهادات مستوية وفي نقطة محدَّدة الرسم (7.11) كان الإجهادان الرئيسيان $120N/mm^2$ (شد) و $80N/mm^2$ (ضغط). أحسب الإجهادين العمودي والمماسي على مستوى يميل $20°$ للمستوي الرئيس الأول.

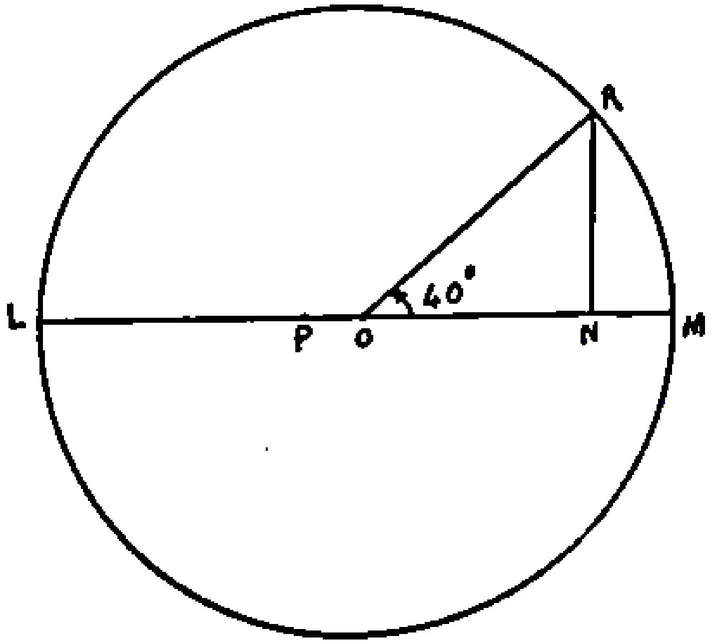


الرسم (7.11)

الحل:

من النقطة P أقطع $PM=120N/mm^2$ ثم أقطع $PL=80N/mm^2$ ، نصّف LM لتحديد مركز دائرة مور. أرسم الدائرة التي نصف قطرها OM. أرسم المستوى OR بحيث تكون الزاوية $MOR=40^\circ$. أسقط عمود من RN على الخط OM. الرسم (7.12).

إذن الإجهادين المطلوبين هما $\tau_\theta=64.3N/mm^2$، $\sigma_\theta=96.6N/mm^2$.



الرسم (7.12)

7.7 تمرين:

1. عند نقطة كانت الإجهادات على مستويين متعامدين $60N/mm^2$ شد و$30N/mm^2$ شد. إجهاد القص على هذين المستويين $15N/mm^2$. باستخدام دائرة مور، أوجد الإجهادين الرئيسين وإجهاد القص الأقصى.

Ans. ($21.2N/mm^2$, $23.8N/mm^2$, $66.2N/mm^2$)

2. أرسم دائرة مور للحالات الثلاث التالية، ومن ثم أوجد بالقياس الإجهادين الرئيسين وإجهاد القص الأقصى:

(أ) $\tau = 45N/mm^2,\ \sigma_y = 45N/mm^2,\ \sigma_x = 120N/mm^2$.

(ب) $\tau = 15N/mm^2,\ \sigma_y = -75N/mm^2,\ \sigma_x = 30N/mm^2$.

(ج) $\tau = 75N/mm^2,\ \sigma_y = -45N/mm^2,\ \sigma_x = 0$.

Ans.

(أ) 58.6N/mm, $23.9N/mm^2$, $141.1N/mm^2$

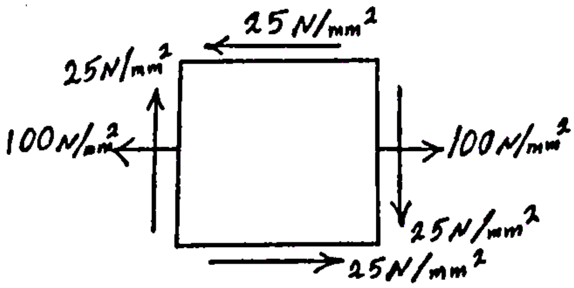
(ب) 54.6N/mm, $-77.1N/mm^2$, $32.1N/mm^2$

(ج) (78.3N/mm, $-100.8N/mm^2$, $55.8N/mm^2$

3. عنصر معرَّض للإجهادات الموضَّحة في الرسم. استخدم دائرة مور لإيجاد:

(أ) الإجهادين الرئيسين واتجاههما.

(ب) إجهاد القص الأقصى واتجاه مستواه.

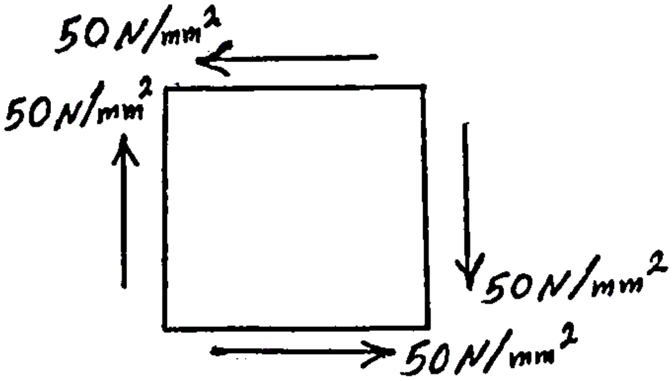


Ans.

-6N/mm, 106N/mm^2, 166.7°, 76.7° (أ)

121.7°, 31.7°, 65N/mm^2 (ب)

4. عنصر مستوى كما موضَّح في الرسم. أوجد الإجهادين الرئيسين في هذا العنصر واتجاه المستويين الرئيسين. استخدم دائرة مور.



Ans. (45°, 50N/mm^2)

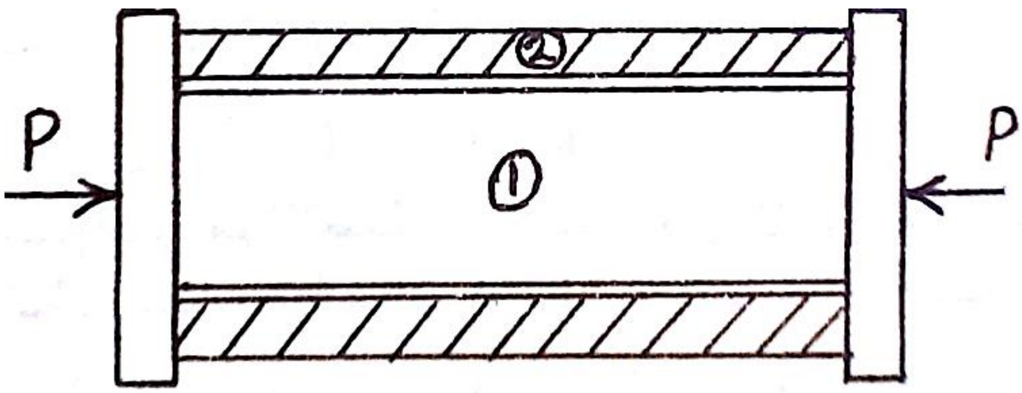
الفصل الثامن

القضبان المركبة

(Composite Bars)

8.1 مدخل:

أي عنصر يتكون من قضيبين أو أنبوبين متوازيين، عادة من مادتين مختلفتين، يسمي قضيباً مركباً. أنظر الرسم (8.1) أدناه.



الرسم (8.1)

معادلة التوافق:

$$\in_1 = \in_2$$

$$\frac{P_1}{A_1E_1} = \frac{P_2}{A_2E_2}$$

معادلة الاتزان: $P_1 + P_2 = P$

A تشير إلي مساحة المقطع وبحل المعادلتين السابقتين آنياً نحصل على،

$$P_1 = \frac{PA_1E_1}{A_1E_1 + A_2E_2}, \quad P_2 = \frac{PA_2E_2}{A_1E_1 + A_2E_2}$$

مثال(1):

قضيب من الصلب قطره 18mm يمر عبر جلبة نحاس قطرها الداخلي 24mm والخارجي 39mm ومجهز بصامولة ووردة عند كل طرف. وقد تم إحكام الصامولتين حتى نشأ إجهاد $10N/mm^2$ في الصلب. أحسب الإجهاد في النحاس والصلب.

الحل:

عند ربط الصامولتين على الأنبوب يؤدي ذلك إلي جعل قضيب الصلب في حالة شد (σ_S) وأنبوب النحاس في حالة ضغط (σ_C).

معادلة الاتزان:

قوة الشد على القضيب = قوة الضغط على الأنبوب.

$$\sigma_s\left(\frac{\pi}{4}\times 18^2\right)=\sigma_c\,\frac{\pi}{4}\left(39^2-24^2\right)$$

$$10\times 324=\sigma_c\times 945$$

$$\sigma_c=3.43N/mm^2$$

8.2 الإجهادات الحرارية:

إذا كان هنالك قضيب مركب يتكون من عدة مواد تعرَّض لتغير في درجة الحرارة سيكون هنالك ميل للأجزاء المكونة للقضيب المركب لتتمدَّد بمقادير مختلفة بسبب اختلاف معامل التمدَّد لهذه المواد. إذا كانت الأجزاء محكومة للبقاء مع بعضها فسيكون التغيير في الطول الحقيقي متساوياً فيها جميعاً.

مثال(2):

أنبوب صلب قطره الخارجي 24mm والداخلي 18mm يحتوى على قضيب من النحاس قطره 15mm ويتصلان بجساءة عند طرفيهما. إذا لم تكن هنالك إجهادات طولية عند درجة حرارة 20℃، أحسب الإجهادات في القضيب والأنبوب عندما ترتفع درجة الحرارة إلي 200℃.

$$E_S = 240N/mm^2, \quad E_C = 100kN/mm^2$$

$$\alpha_S = 11.10^{-6}/°C, \quad \alpha_C = 18.10^{-6}/°C$$

الحل:

الواضح من معامل التمدد أنَّ النحاس يتمدَّد أكثر من الصلب. ولكن لأنَّ الاثنان محكومان فسيتمدَّد كل منهما بنفس المقدار وذلك بالطبع سيضع النحاس في حالة ضغط والصلب في حالة شد. هب أنَّ إجهاد الضغط في النحاس σ_C وإجهاد الشد في الصلب σ_S .

معادلة الاتزان:

$$\sigma_C \frac{\pi}{4} \times 115^2 = \sigma_S \frac{\pi}{4}\left(24^2 - 18^2\right)$$

$$\sigma_C = 1.12\sigma_S \qquad (1)$$

معادلة التوافق:

الانفعال الحراري في القضيب – انفعال الضغط = الانفعال الحراري في الأنبوب + انفعال الشد

$$\alpha_C \Delta T - \frac{\sigma_C}{E_C} = \alpha_S \Delta T + \frac{\sigma_S}{E_S}$$

$$18.10^{-6} \times 180 - \frac{\sigma_C}{100.10^3} = 11.10^{-6} \times 180 + \frac{\sigma_S}{210.10^3}$$

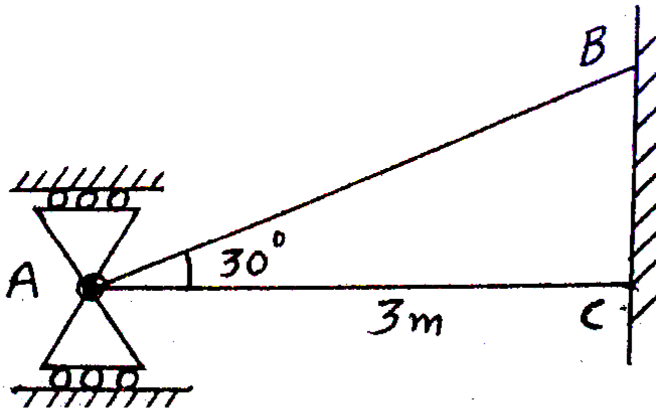
$$4.76\sigma_S + 10\sigma_C = 1330 \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) $\sigma_S = 83.3N/mm^2, \quad \sigma_C = 93.3N/mm^2$

مثال(3):

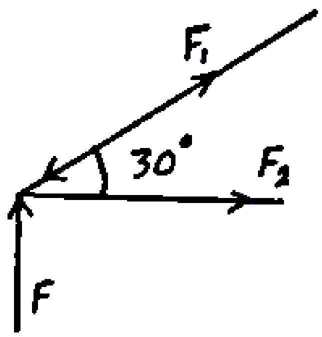
الهيكل في الرسم (8.2) أدناه تتصل أعضاؤه بمفصلات مسمارية ويستند عند A بحيث لا يسمح بالحركة الرأسية ولكن الحركة الأفقية ممكنة. كلا القضيبين من الصلب ومساحة مقطع كل منهما $1000mm^2$. تم تسخين العضو AB بزيادة درجة حرارته 30°C فوق الدرجة المرجعية عندما يكون

الجهاز خالٍ من الإجهاد، بينما العضو AC ظل في درجة الحرارة المرجعية. على افتراض أن العضوين يظلان مستقيمين، أوجد الإجهاد في كلٍ. خذ $E=200kN/mm^2$, $\alpha = 12.10^{-6}/^{\circ}C$.



الرسم (8.2)

نتيجة لارتفاع درجة حرارة AB ستنشأ قوى كما موضَّح في الرسم (8.3) أدناه وهي القوى عند المفصلة A.



الرسم (8.3)

من دواعي الاتزان:

$$F_2 = F_1 \cos 30^{\circ}$$

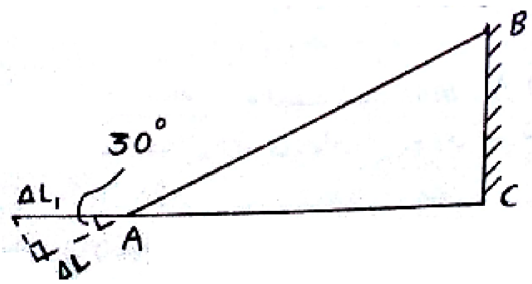
استطالة القضيب AB:

$$\Delta L_1 = \alpha \Delta T L$$

$$= 12.10^{-6} \times 30 \times \frac{3 \times 10^3}{\cos 30^{\circ}}$$

$\Delta L_1 = 1.25mm$

العضو AB سيصبح في حالة ضغط والعضو AC في حالة شد كما موضح في الرسم (8.4) أدناه.



الرسم (8.4)

التقلص في العضو AB:

$$\Delta L_2 = \frac{F_1 L}{AE}$$

$$\Delta L_2 = \frac{F_1 \times 3.10^3}{AE \cos 30°} mm$$

$$\Delta L = \Delta L_1 - \Delta L_2$$

$$= 1.25 - \frac{F_1 \times 3.10^3}{AE \cos 30°}$$

الاستطالة في AC:

$$\Delta L' = \frac{F_2 \times 3.10^2}{AE} = \frac{F_1 \times 3.10^3 \cos 30°}{AE}$$

$$\Delta L = \Delta L' \cos 30°$$

$$1.25 - \frac{F_1 \times 3.10^2}{AE \cos 30°} = \frac{F_1 \times 3.10^2 \cos 30°}{AE}$$

$$\therefore F_1 = 43.8A, \quad F_2 = 38A$$

$$\therefore \sigma_{AB} = 43.8N / mm^2, \quad \sigma_{AC} = 38N / mm^2$$

8.3 تمرين:

1. قضيب صلب قطره 25mm وضع متمركزاً داخل أنبوب سمكه 3mm وقطره الوسيط 40mm. تم تجهيز القضيب بصامولتين ووردتين بحيث تضم الوردتان الأنبوب. تم إحكام الصامولتين لخلق إجهاد ضغط $30N/mm^2$ في الأنبوب ثم سلط حمل شد 45kN على القضيب. أوجد ناتج الإجهادات في القضيب والأنبوب:

(أ) بدون تغيير في درجة الحرارة.

(ب) عندما ترتفع درجة الحرارة 60℃.

$$E_S = 205kN/mm^2, \quad E_b = 80kN/mm^2$$

$$\alpha_S = 11.10^{-6}/°C, \quad \alpha_b = 18.9.10^{-6}/°C$$

Ans. ($31.6N/mm^2$, $116N/mm^2$, $2.5N/mm^2$, $93.7N/mm^2$)

2. سلك ألمونيوم مستقيم طوله 30m سلط عليه إجهاد شد $70N/mm^2$. أوجد استطالة السلك. ما هو التغير في درجة الحرارة الذي يمكن أن يؤدي إلي نفس الاستطالة؟.

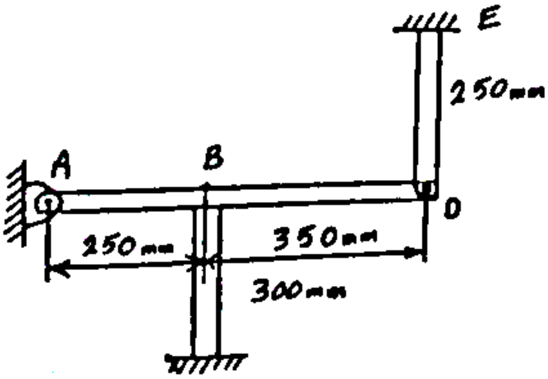
$E = 70kN/mm^2$، $\alpha = 25.10^{-6}/℃$.

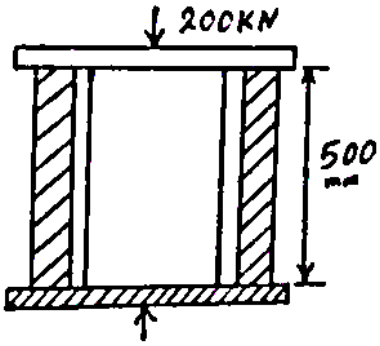
Ans. (40℃, 30mm)

3. أسطوانة من الصلب تحتوى على أسطوانة نحاس مصمتة والكل مسلط عليه حمل محوري 200kN كما في الرسم. مساحة مقطع الصلب $2000mm^2$ بينما مساحة النحاس $5000mm^2$. كل من الأسطوانتين لها نفس الطول قبل تسليط الحمل. أحسب الارتفاع في درجة الحرارة للنظام بأجمعه المطلوب بحيث يصبح الحمل مسلط على أسطوانة النحاس. لوح الغطاء جاسئ.

$$E_C = 120kN/mm^2, \quad E_S = 200kN/mm^2$$

$$\alpha_C = 20.10^{-6}/°C, \quad \alpha_S = 12.10^{-6}/°C$$





Ans. (41.6℃)

4. القضيب الجاسئ AD مثبت بمسمار عند A ويتصل بالقضيب BC وED كما في الرسم أدناه. الجهاز بأكمله كان خالياً من الإجهادات في البداية كما يمكن تجاهل كتل الأعضاء. تم تخفيض درجة حرارة القضيب BC 25℃ ورُفعت درجة حرارة القضيب ED 25℃. إذا افترضنا عدم حدوث انبعاج، أوجد الإجهادات العمودية في القضيبين BC وED. القضيب BC مصنوع من نحاس $E=90kN/mm^2$ و $\alpha=20.10^{-6}/℃$ والقضيب ED مصنوع من صلب $E=200kN/mm^2$ و $\alpha=12.10^{-6}/℃$. مساحة مقطع كل من BC وED $500mm^2$ و$250mm^2$ على التوالي.

Ans. ($58N/mm^2$, $48.4N/mm^2$)

5. قضيبان للسكة الحديد تم تركيبهما بحيث تكون المسافة بين أي طرفين متجاورين 3mm وذلك عندما كانت درجة الحرارة 20℃. طول كل قضيب 15m. المادة صلب $E=200kN/mm^2$ و $\alpha=12.10^{-6}/℃$:

(أ) أحسب الفجوة بين كل طرفين متجاورين عندما تكون درجة الحرارة 5℃ تحت الصفر.

(ب) عند أي درجة حرارة يكون الطرفان في حالة تلامس.

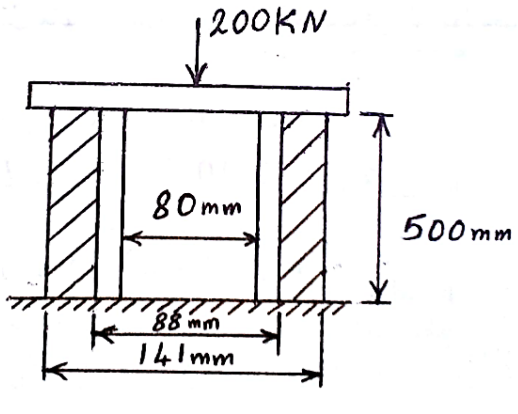
(ج) أوجد إجهاد الضغط في القضيب عندما تكون درجة الحرارة 40℃. تجاهل انبعاج القضيب.

Ans. (18.5N/mm^2, 31℃, 7.5mm)

6. أسطوانة المونيوم تحتوى على أسطوانة صلب كما في الرسم. الحمل 200kN تم تسليطه عبر غطاء متناهي الجساءة. إذا كانت أسطوانة الالمونيوم في الأصل أطول من أسطوانة الصلب بـ 0.25mm وذلك قبل تسليط الحمل، أوجد الإجهاد العمودي في كلٍ عندما تهبط درجة الحرارة إلي 20℃ مع وجود الحمل.

$$E_a = 70kN/mm^2, \quad E_s = 200kN/mm^2$$

$$\alpha_S = 12.10^{-6}/°C, \quad \alpha_a = 25.10^{-6}/°C$$



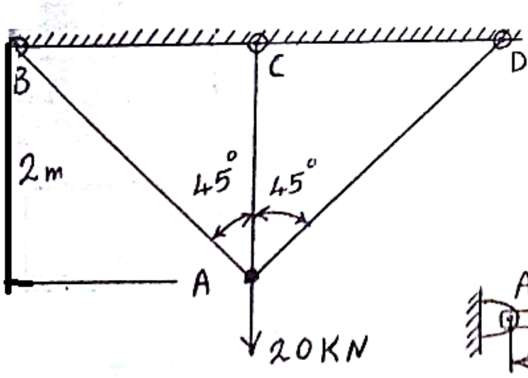
Ans. (15.5N/mm^2, 9N/mm^2)

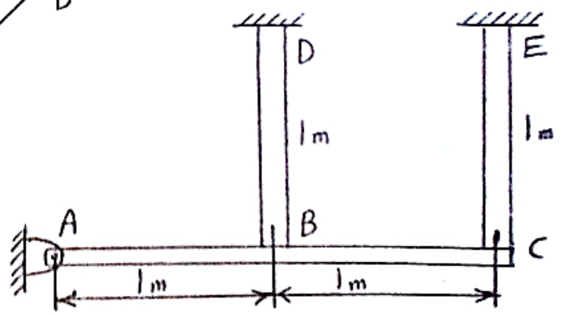
7. القضيب AC جاسئ مطلق الجساءة وله مفصلة مسمارية عند A ويتصل بكل من القضيبين DB و CE كما موضَّح في الرسم. ثقل 50kN AC ولكن يمكن تجاهل ثقل كل من DB و CE. إذا ارتفعت درجة حرارة كل من DB و 35℃ CE، أوجد الإجهادات

العمودية التي تنشأ في كل من القضيبين. BD مصنوع من النحاس و CE مصنوع من الصلب.

$$A_C = 1000mm^2, \alpha_C = 18.10^{-6} / °C, \quad E_C = 90N / mm^2$$

$$A_S = 500mm^2, \alpha_S = 12.10^{-6} / °C, \quad E_S = 200N / mm^2$$





Ans. (-21.7N/mm^2, 72N/mm^2)

8. القضبان الثلاثة في الرسم أعلاه تسند الحمل 20kN. كل الأعضاء كانت خالية من الإجهادات وتتصل بمفصلات مسمارية. تم تسليط حمل بالتدريج وفي نفس الوقت انخفضت درجة حرارة القضبان الثلاثة 10°C. أحسب الإجهاد في كل عضو. القضيبان الخارجيان مصنوعان من النحاس ومساحة كل منهما 250mm^2 والقضيب في الوسط مصنوع من الصلب ومساحة مقطعه 200mm^2.

$$\alpha_C = 20.10^{-6} / °C, \quad E_C = 90N / mm^2$$

$$\alpha_S = 12.10^{-6} / °C, \quad E_S = 200N / mm^2$$

Ans. (43.2N/mm^2, 32N/mm^2)

الفصل التاسع

نظريات الانـهيار

(Theories of Failure)

9.1 مدخل:

الانهيار لا يعني بالضرورة الكسر وإنما إذا حدثت تشوهات لدنة في العضو يمكن اعتباره قد انهار. إذن إذا كان العضو في حالة شد أو ضغط فمن السهل معرفة متى ينهار العضو وهو بالطبع عندما يتجاوز الإجهاد الناشئ إجهاد الخضوع للمادة. المشكلة إذا كان العضو معرَّض لإجهادات مركبة، كيف يمكن استنتاج إذا ما كان العضو يمكن أن ينهار أم لا تحت نظام معين من الإجهادات. لهذا السبب ظهرت نظريات كثيرة للتنبؤ بانهيار الأعضاء التي تكون معرَّضة لنظام إجهادات مركَّبة. ومن هذه النظريات:

9.2 نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى:

هذه النظرية تقول أنَّ العضو الذي يتعرَّض لنظام إجهادات مركَّبة ينهار عندما تصل قيمة الإجهاد الرئيس الأقصى قيمة إجهاد الخضوع للمادة في حالة الشد البسيط. فإذا كان إجهاد الخضوع σ_y فإن الانهيار يحدث إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 = \sigma_y$$

9.3 نظرية إجهاد القص الأقصى:

تقول أن الانهيار يحدث عندما تصل قيمة إجهاد القص الأقصى في نظام الإجهادات المركبة إجهاد القص عند الخضوع في حالة الشد البسيط في حالة الإجهادات المركبة، إجهاد القص الأقصى،

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

في نظام الشد البسيط عند الخضوع،

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}\sigma_y$$

إذن يحدث الانهيار إذا تحقَّق الشرط التالي،

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma_y$$

9.4 نظرية طاقة الانفعال:

طاقة الانفعال في نظام الإجهادات المرَّكبة،

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

طاقة الانفعال عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

إذن الانهيار يحدث إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) = \sigma_y^2$$

9.5 نظرية طاقة انفعال القص:

طاقة انفعال القص في نظام الإجهادات المركبة،

$$U_S = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

طاقة انفعال القص عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y^2}{6G}$$

إذن يحدث الانهيار في نظام الإجهادات المركبة إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$$

9.6 نظرية الانفعال الرئيس الأقصى:

الانفعال الرئيس الأقصى في نظام الإجهادات المرَّكبة،

$$\in_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right)$$

الانفعال عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y}{E}$$

إذن يحدث الانهيار في نظام الإجهادات المركبة إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 \geq \sigma_y$$

9.7 أمثلة محلولة:

مثال(1):

إذا كانت الإجهادات الرئيسة عند نقطة في مرنة كما يلي: 2σ شد، σشد، $\sigma/2$ ضغط. أحسب قيمة σعند الانهيار وفق كل نظرية من النظريات الخمسة. خذ إجهاد الخضوع في حالة الشد البسيط $200 N/mm^2$ ونسبة بواسون 0.3.

الحل:

1. الإجهاد الرئيس الأقصى:

في نظام الإجهادات المركبة ، $\sigma_1 = 2\sigma$

في حالة الشد البسيط ، $\sigma_1 = 200 N/mm^2$

في حالة الانهيار ،

$$2\sigma = 200 N/mm^2 \qquad \therefore \sigma = 100 N/mm^2$$

2. إجهاد القص الأقصى:

في نظام الإجهادات المركبة ، $\hat{\tau} = (2\sigma + 0.5\sigma) = 1.25\sigma$

في نظام الشد البسيط ، $\hat{\tau} = \frac{1}{2} \times 200 = 100 N / mm^2$

في حالة الانهيار ، $1.25\sigma = 100$

$$\therefore \sigma = 80 N / mm^2$$

3. طاقة الانفعال:

في نظام الإجهادات المرَّكبة:

$$U = \frac{1}{2E}\left[(2\sigma)^2 + \sigma^2 + (0.5\sigma^2) - 2 \times 0.3\left(2\sigma.\sigma - \sigma.\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}.\sigma\right)\right]$$

$$U = 4.95\frac{\sigma^2}{2E}$$

في حالة الشد البسيط عند الخضوع ، $U = \frac{200^2}{2E}$

في حالة الانهيار ، $\frac{4.95\sigma^2}{2E} = \frac{200^2}{2E}$

$$\therefore \sigma = 89.8 N / mm^2$$

4. الانفعال الأقصى:

في نظام الإجهادات المركَّبة:

$$\in_1 = \frac{1}{E}\left(2\sigma - 0.3\sigma - 0.3\frac{\sigma}{2}\right)$$

في حالة الشد البسيط عند الخضوع ، $\sigma = \frac{200}{E}$

في حالة الانهيار ،

$$\frac{1.85\sigma}{E} = \frac{200}{E}$$

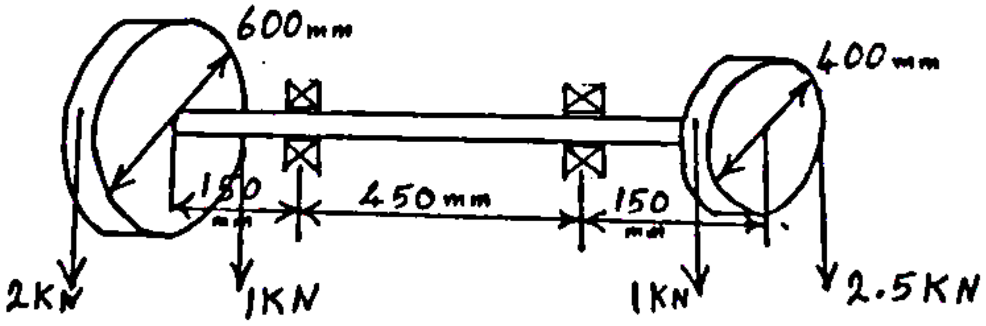
$$\therefore \sigma = 108 N / mm^2$$

5. طاقة انفعال القص الأقصى:

تحصل لوحدك على ، $\sigma = 91.7 N/mm^2$

مثال (2):

عمود دائري يتعرَّض لشد سير عند كل طرف ومسنود إسناد بسيط على المحملين الموضَّحين في الرسم (9.1) أدناه. المادة لها إجهاد خضوع $250 N/mm^2$. أوجد قطر العمود المناسب باستخدام نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى وعامل سلامة 3.



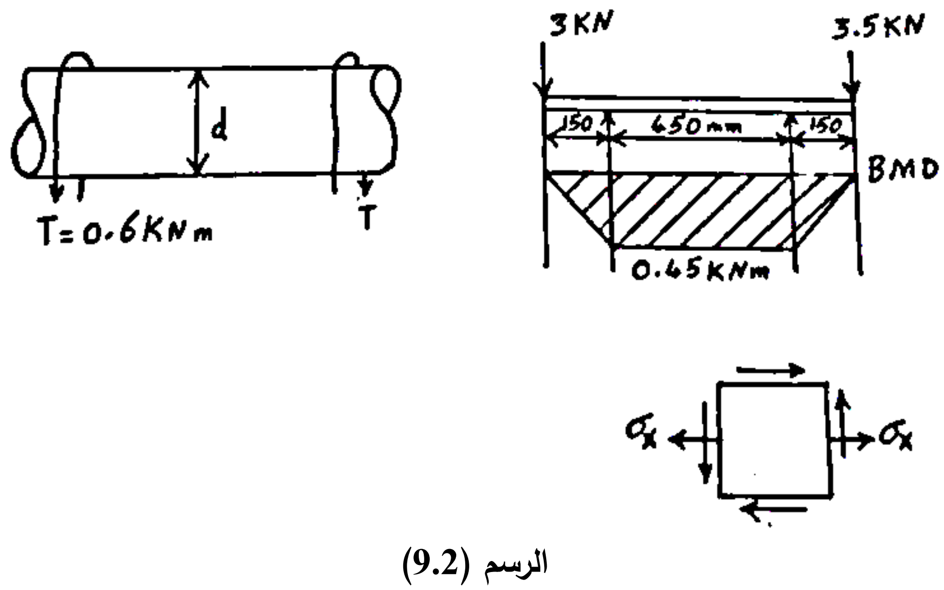
الرسم (9.1)

الحل:

بالرجوع للرسم (9.2) أدناه.

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 0.049 d^4 \qquad (mm^4)$$

$$J = 0.098 d^4 \qquad (mm^4)$$



الرسم (9.2)

$$\sigma_x = \frac{M\hat{y}}{I} = \frac{0.45.10^6 \times 0.5d}{0.049d^4} = \frac{5.4.10^6}{d^3}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau = \frac{T}{J} r = \frac{0.6.10^6 \times 0.5d}{0.098d^3} = \frac{3.06.10^6}{d^3}$$

وفق نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى يحدث الانهيار عندما يحقّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 = \sigma_w = \frac{\sigma_y}{3}$$

$$\sigma_1 = \left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}$$

$$= \left(5.4 + 0\right)\frac{10^6}{d^3} + \frac{10^6}{2d^3}\sqrt{\left(4.5 - 0\right)^2 + 4 \times 3.06^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{2.7.10^6}{d^3} + \frac{4.08.10^6}{d^3} = \frac{6.78.10^6}{d^3}$$

$$\therefore \frac{6.78.10^6}{d^3} = \frac{250}{3}$$

$$\therefore d = 43.2mm$$

مثال(3):

نوع معين من الصلب له إجهاد خضوع $270 N/mm^2$ في حالة الشد البسيط. في وضع معين لإجهادات مستوية كان الإجهادان الرئيسان $105 N/mm^2$ (شد) و $30 N/mm^2$ (ضغط). أحسب عامل السلامة وفق كل من:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى.

(ب) نظرية طاقة انفعال القص الأقصى.

الحل:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى:

يحدث الانهيار عندما يتحقّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_w$$

$$105 + 30 = \sigma_w$$

$$\therefore \sigma_w = 135 N / mm^2$$

عامل السلامة،

$$f = \frac{\sigma_y}{\sigma_w} = \frac{270}{135} = 2$$

(ب) نظرية طاقة انفعال القص:

$$2\sigma_w^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$= (105 - 0)^2 + (0 + 30)^2 + (-30 - 105)^2$$

$$= 30150$$

$$\sigma_w = 122.8 N / mm^2$$

عامل السلامة،

$$f = \frac{270}{122.8} = 2.2$$

9.8 تمرين:

1. عمود من الصلب قطره 50mm ويبدأ في التشوهات اللدنة عند عزم إلتواء 4.2kNm. عمود مماثل سُلط عليه عزم إلتواء 2.5kNm وعزم إنحناء M (kNm)، أوجد قيمة M باستخدام نظرية طاقة الانفعال. $\nu = 0.28$.

Ans. (27kNm)

2. عمود دائري قطره 100mm مُسلط عليه عزم إلتواء وعزم إنحناء. عزم الإنحناء ثلاثة أضعاف عزم الإلتواء. إذا كان إجهاد الخضوع في حالة الشد البسيط $360 N/mm^2$

وعامل السلامة 4، أحسب عزم الإلتواء المسموح به بواسطة النظريات الثلاث التالية:

(أ) نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى.

(ب) نظرية طاقة انفعال القص.

(ج) نظرية إجهاد القص الأقصى.

Ans. (2.79kNm, 2.83kNm, 2.86kNm)

3. عينة من الصلب تم اختبارها (أ) بشد قضيب مصمت (ب) بتسليط حمل على طرف عارضة وتدية أدي إلي إلتواء وانحناء. وُجد أنَّه في حالة (أ) أنَّ حد التناسب $262 N/mm^2$، وفي حالة (ب) وُجد أنَّه يحدث عندما يكون إجهاد الإنحناء $124 N/mm^2$ وإجهاد القص $117 N/mm^2$. أدرس هذه النتائج ووضِّح إذا ما كانت تتفق مع أي من نظريات الانهيار التالية:

(i) الإجهاد الرئيس الأقصى (ii) إجهاد القص الأقصى (iii) طاقة الانفعال

أفرض قيم مناسبة لأية ثوابت غير معطاة.

Ans. (تتفق مع (ii))

4. عمود قطره 50mm مصنوع من مادة عندما تمَّ شدها أبدت انهياراً مرناً عند $340 N/mm^2$ ونسبة بواسون 0.3. أوجد العزم الذي يؤدي إلي انهيار العمود عند تسليطه بالإضافة إلي عزم إنحناء 3.5kNm باستخدام النظريتين التاليتين:

(i) الإجهاد الرئيس الأقصى.

(ii) طاقة الانفعال.

Ans. (2.78kNm, 3.35kNm)

5. الحمل على مسمار قطره 18mm يتكون من حمل شد 10kN بالإضافة إلي قوة قص 6kN. معامل الجساءة للعمود $80kN/mm^3$ ونسبة بواسون 0.283. أحسب طاقة الانفعال في المسمار.

إذا كان حد التناسب للمادة $320N/mm^2$ وعامل السلامة 4. أحسب أقل قطر للمسمار حسب: (i) نظرية إجهاد القص الأقصى.

(ii) نظرية طاقة الانفعال.

Ans. (47.9mm, 70.5mm, $724kJ/m^3$)

6. الإجهادات الرئيسة في مادة، والتي تنهار عند $300N/mm^2$، كانت كما يلي: $\sigma_1 = 2\sigma_2$، $\sigma_3 = 0$. نسبة بواسون للمادة 0.3. أوجد قيمة σ_1 باستخدام نظرية طاقة الانفعال.

Ans. ($308N/mm^2$)

7. عمود في وضع أفقي قطره 80mm يبرز من المحمل وبالإضافة إلي العزم المنقول هنالك حمل رأسي 8kN على مسافة 300mm من المحمل. إذا كان الإجهاد المسموح به $150N/mm^2$، أوجد عزم الإلتواء المناسب الذي يمكن تسليطه على العمود باستخدام:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى (ب) طاقة الانفعال

خذ $\nu = 0.28$.

Ans. (8.9kNm, 7.15kNm)

الفصل العاشر

إنحراف العارضات

(Deflection of Beams)

10.1 مدخل:

معرفة الانحراف أحياناً يكون مفيداً ولكن ليس عاملاً من عوامل الانهيار (أنظر معايير الانهيار).

عرفنا آنفاً قانون الانحناء الآتي:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \qquad (1)$$

كما يمكن التحقق من أنَّ،

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2v}{dx^2} \Big/ \left[1 + \frac{dv}{dx}\right]^{1.5} \qquad (2)$$

حيث v تمثل الانحراف عند أي مقطع على بعد x من نقطة الأصل عادة في أقصى يسار العارضة. وإذا كان الانحراف صغيراً يمكن كتابة المعادلة (2) كما يلي:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad (3)$$

ومن المعادلة (1) و(3) نحصل على،

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

10.2 أمثلة محلولة:

مثال(1):

أوجد الانحراف والميل عند طرف العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم (10.1) أدناه.

الرسم (10.1)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = \frac{PL^2}{2}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2}$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x + B$$

$$x = L, \; v = 0, \quad B = -\frac{PL^3}{3}$$

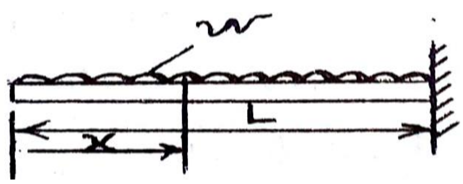
$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{3}$$

$$x = 0, \; \frac{dv}{dx} = \frac{PL^2}{2EI}, \quad v = -\frac{PL^3}{3EI}$$

علامة السالب تعني أنَّ الانحراف إلي أسفل.

مثال(2):

أوجد الميل والانحراف عند طرف العارضة الآتية الموضحة في الرسم (10.2) أدناه.



الرسم (10.2)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx}=-\frac{wx^3}{6}+A$$

$$x=L,\quad \frac{dv}{dx}=0,\quad \therefore A=\frac{wL^3}{6}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx}=-\frac{wx^3}{6}+\frac{wL^3}{6}$$

$$EIv=-\frac{wx^4}{24}+\frac{wL^3}{6}x+B$$

$$x=L,\ v=0,\quad \therefore B=\frac{wL^4}{8}$$

$$EIv=-\frac{wx^4}{24}+\frac{wL^3}{6}x+\frac{wL^4}{8}$$

$$x=0,\ \frac{dv}{dx}=\frac{wL^3}{6EI},\quad v=-\frac{wL^4}{8EI}$$

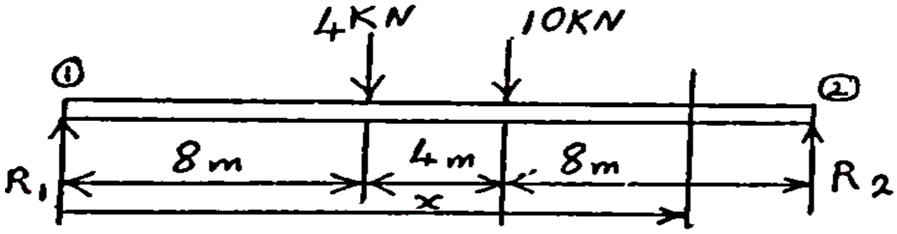
مثال(3):

عارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 20m مُسلط عليها ملان مركزان 10kN و4kN (الرسم (10.3) أدناه). أحسب:

(أ) الانحراف تحت كل حمل.

(ب) الانحراف الأقصى.

خذ ، $E = 200kN/mm^2$، $I = 10^9mm^4$.



الرسم (10.3)

الحل:

$$+\sum M_{(2)} = 0$$

$$20R_1 - 4\times 12 - 10\times 8 = 0$$

$$R_1 = 6.4kN$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 6.4x - 4[x-8] - 10[x-12]$$

الأقواس المربعة يجب عدم فكها كما يُشترط إهمالها إذا ما كان بداخلها سالباً.

$$EI\frac{dv}{dx} = 3.2x^2 - 2[x-8]^2 - 5[x-12]^2 + A$$

$$EIv = 1.07x^3 - 0.67[x-8]^3 - 1.67[x-12]^3 + Ax + B$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = 20mm, \quad v = 0, \quad \therefore A = -326.5kNm^2$$

(أ) الانحراف تحت الحمل 4kN، x = 8m،

$$EIv = -2066kNm^3$$

$$v = -\frac{2066.10^{12}}{200.10^3 \times 10^9} = -10.3mm$$

(ب) الانحراف تحت الحمل 12kN، x = 12m،

$$EIv = -2118kNm^3$$

$$v = -\frac{2118.10^{12}}{200.10^{3} \times 10^{9}} = -10.6mm$$

عن طريق الحدس القيمة القصوى للانحراف تقع في القسم 12 > x > 8، وعندها يكون الميل صفراً. وبالتالي يتم تجاهل [x – 12]، كما يمكن استبدال الأقواس المربعة بأقواس عادية.

$$EI\frac{dv}{dx} = 3.2x^2 - 2(x-8)^2 - 3526.5 = 0$$

$$x = 10.3mm$$

وفي هذه الحالة،

$$\hat{v} = \frac{2203.10^{12}}{200.10^{3} \times 10^{9}} = 11mm$$

مثال(4):

أوجد الانحراف في طرف العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم (10.4) أدناه والتي تتعرَّض لعزم إنحناء مرَّكز M_o.

الرسم (10.4)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_o$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_o x + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = M_o L$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_o x + M_o L$$

$$EIv = -\frac{M_o x^2}{2} + M_o Lx + B$$

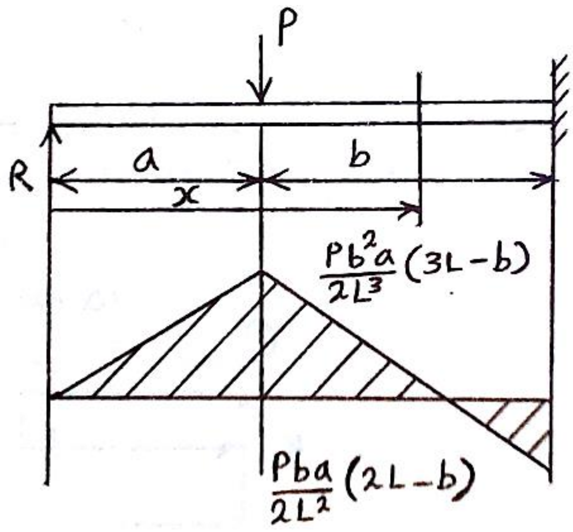
$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore B = \frac{M_o L^2}{2}$$

$$EIv = -\frac{M_o x^2}{2} + M_o Lx - \frac{M_o L^2}{2}$$

$$x = 0, \quad v = \frac{M_o L^2}{2EI}$$

مثال(5):

عارضة وتدية مدعومة مُسلط عليها حما مركَّز كما موضَّح في الرسم (10.5) أدناه، أوجد رد الفعل عند الدعامة ثم أرسم مخطَّط عزم الانحناء.



الرسم (10.5)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = Rx + P[x-a]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P}{2}[x-a]^2 + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = \frac{Pb^2}{2} - \frac{RL^2}{2}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P}{2}[x-a]^2 + \frac{Pb^2}{2} - \frac{RL^2}{2}$$

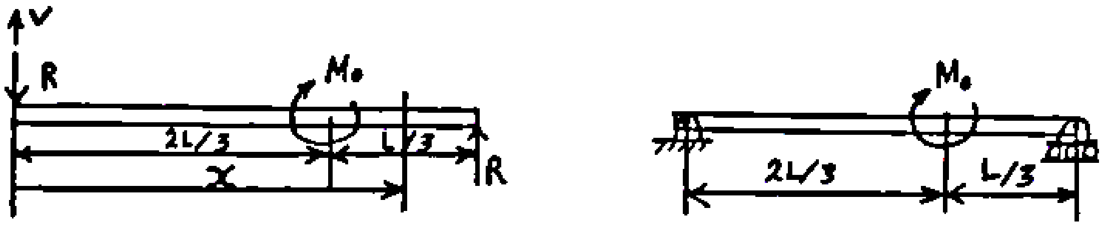
$$EIv = \frac{Rx^3}{6} + \frac{P^2}{2}\left[x-a\right]^3 + \frac{Pb^2}{2} - \frac{RL^2}{2}x + B$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore R = \frac{Pb^2}{2L^3}(2L - b)$$

مثال(6):

عارضة مثبتة بواسطة مفصلات مسمارية عند طرفيها كما في الرسم (10.6) أدناه ومُسلط عليها عزم إنحناء مركَّز M_o. أوجد الميل والانحراف.



الرسم (10.6)

الحل:

ردا الفعل متساويان ، $R = \frac{M}{L}$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Rx - M_o\left[x - \frac{2L}{3}\right]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} - M_o\left[x - \frac{2L}{2}\right] + A$$

$$EIv = -\frac{Rx^3}{6} + \frac{M_o}{2}\left[x - \frac{2L}{2}\right]^2 + Ax + B$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

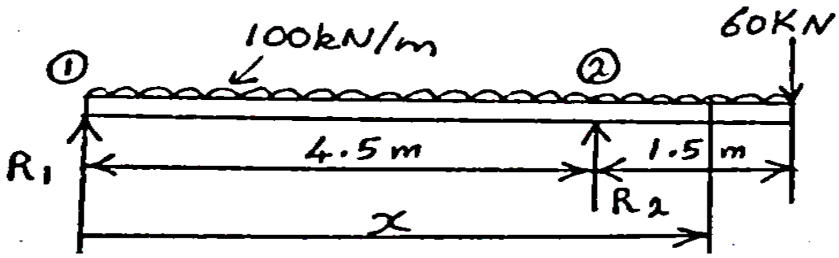
$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore A = \frac{M_o L}{9}$$

$$x = \frac{2L}{3}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{M_o L^2}{9EI}, \quad v = \frac{2M_o L}{81EI}$$

مثال(7):

عارضة طولها 6m عليها حمل موزَّع بانتظام وآخر مركَّز كما موضَّح في الرسم (10.7) أدناه.

أحسب الانحراف الأقصى وحدِّد موضعه. $EI = 16.7.10^{12} Nmm^2$.



الرسم (10.7)

الحل:

$$+\sum M_{(1)} = 0$$

$$4.5R_2 - 60\times 6 - 100\times 6\times 3 = 0$$

$$R_2 = 480kN$$

$$R_1 = 180kN$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 180x - 50x^2 + 480[x-4.5]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 90x^2 - 16.7x^3 + 240[x-4.5]^2 + A$$

$$EIv = 30x^3 - 4.2x^4 + 80[x-4.5]^3 + Ax + B$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = 4.5m, \quad v = 0, \quad \therefore A = -225kNm^2$$

$$EIv = 30x^3 - 4.2x^4 + 80[x-4.5]^3 - 225x$$

الانحراف الأقصى إما أن يكون عند الطرف الحر أي عند x = 6m أو عند 4.5 > x > 0، عند x = 6m.

$$EIv = -43kNm$$

$$\therefore v = -\frac{43.10^{12}}{16.7.10^{12}} = -2.6mm$$

إذا كان الانحراف الأقصى عند 4.5 > x > 0، فإنَّ الميل هنالك يساوى صفراً.

$$\therefore 90x^2 - 16.7x^3 - 225 = 0$$

بالمحاولة والخطأ ، x = 2m

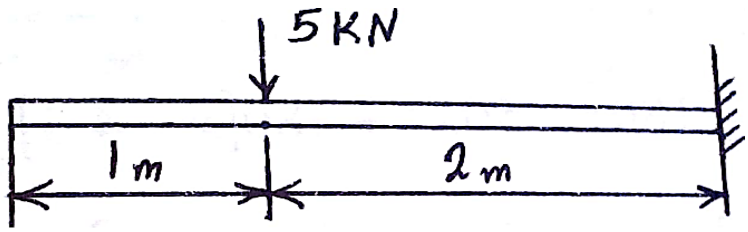
والانحراف ، v = 16.8mm

إذن الانحراف الأقصى ، $\hat{\tau} = 16.8mm$

وموضعه ، x = 2m.

10.3 تمرين:

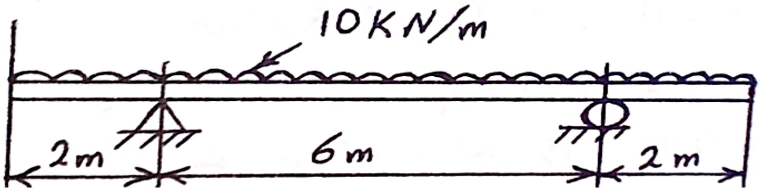
1. أوجد الانحراف الأقصى للعارضة الموضَّحة في الرسم أدناه مقطع العارضة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 150mm ومحور التماثل رأسي. خذ $E = 200kN/mm^2$.



Ans. (- 12.8mm)

2. أوجد الانحراف في وسط العارضة الموضحة أدناه.

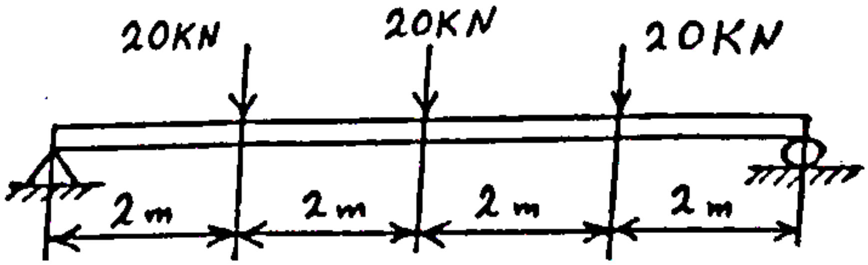
خذ $I=150.10^6mm^4$, $E = 200kN/mm^2$.



Ans. (- 2.6mm)

3. أوجد الانحراف الأقصى وإجهاد الانحناء الأقصى للعارضة الموضَّحة في الرسم أدناه.

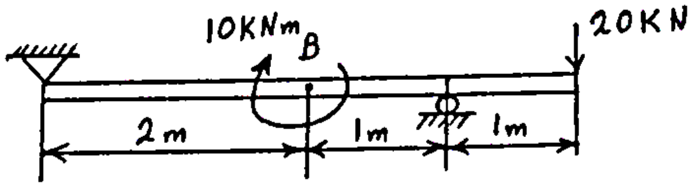
مقطع العارضة 150mm×100mm، $E = 15kN/mm^2$.



Ans. ($35.3N/mm^2$, 100mm)

4. أحسب الانحراف عند النقطة B حيث يتم تسليط العزم. $I = 20.10^6mm^4$،

$E=200kN/mm^2$.



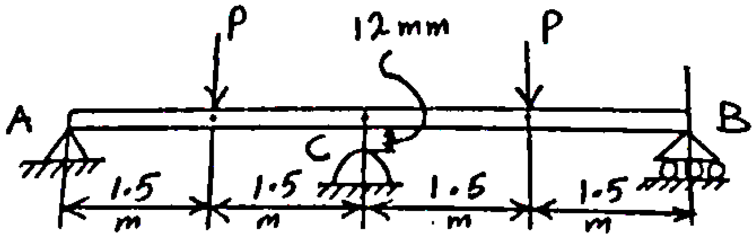
Ans. (3.3mm)

5. عارضة AB مسنودة إسناد بسيط مُسلط عليها حملان مركَّزان P كما في الرسم أدناه.

مسند C موضوع في الوسط على مسافة 12mm أسفل العارضة قبل تسليط الحملين.

أحسب مقدار الحمل P والذي يؤدي إلي ملامسة العارضة للمسند. $E=200kN/mm^2$،

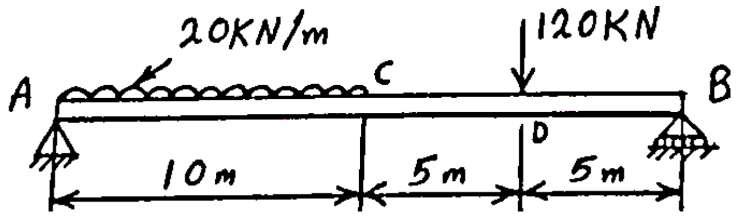
$I=165.10^6mm^4$.



Ans. (64kN)

6. أوجد الميل عند الطرف اليمين والانحراف عند النقطة D للعارضة أدناه.

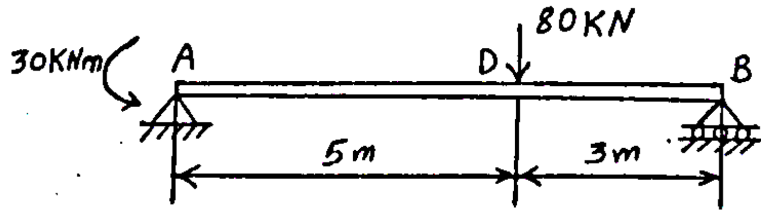
$E=200kN/mm^2$، $I=250.10^6mm^4$.



Ans. (49.6mm, 0.0111)

7. أوجد الميل والإنحراف عند الطرف اليسار والانحراف عند النقطة D للعارضة أدناه.

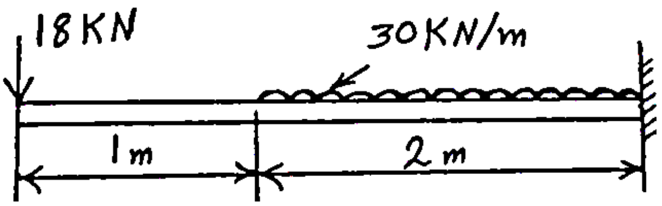
$E=210kN/mm^2$، $I=305.10^6mm^4$.



Ans. (10.1mm,   0.00304)

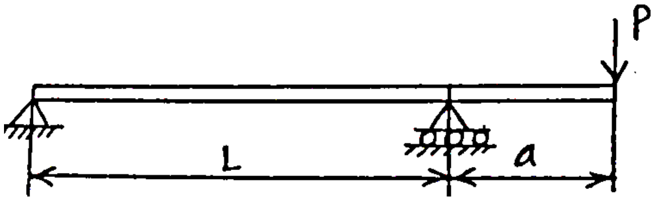
8. أوجد الميل والانحراف عند الطرف الحر للعارضة أدناه $E=70kN/mm^2$،

$I=200.10^6mm^4$.



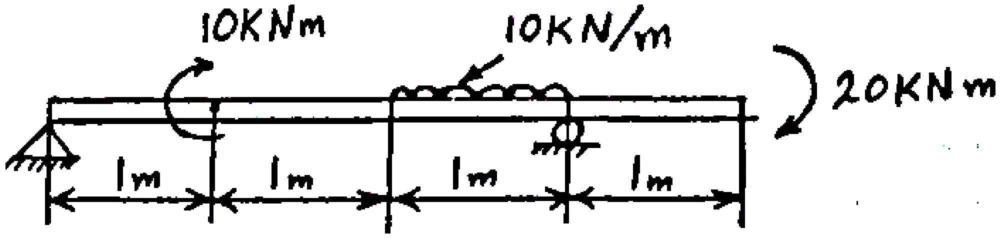
Ans. (18.7mm, 0.0086)

9. أوجد الانحراف عند الطرف C للعارضة أدناه.



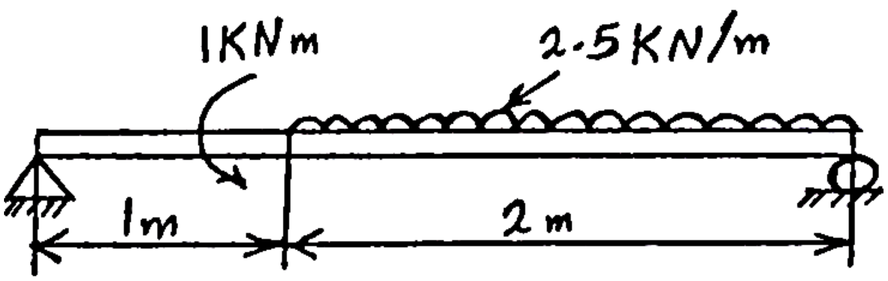
Ans. $\left(\frac{Pa^2}{3EI}(L+a)\right)$

10. أحسب الانحراف على بعد 1m من الطرف اليسار $E=12.10^{12}N/mm^2$.



Ans. (+4.5mm)

11. أوجد الانحراف على بعد 1m الطرف اليسار.



Ans. (7.23mm)

الفصل الحادي عشر

العارضات غير المحدَّدة إستاتيكياً

(Statically Indeterminate Beams)

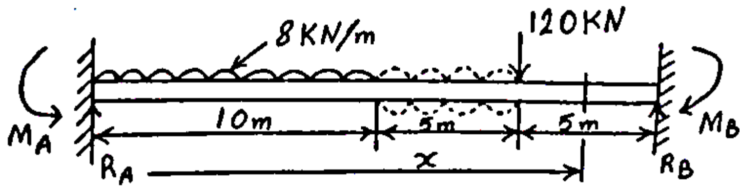
11.1 مدخل:

العارضة الغير محددة إستاتيكياً هي العارضة التي يزيد عدد ردود الأفعال المجهولة عن عدد معدلات الاتزان. العارضات الغير محددة إستاتيكياً ثلاثة أنواع وهي العارضة الوتدية المدعومة، العارضة المبنية من الطرفين، العارضة المستمرة المسنودة على أكثر من مسندين. سنركِّز الحديث على النوعين الأولين فقط.

11.2 أمثلة محلولة:

مثال(1):

عارضة لها مقطع منتظم مبنية من الطرفين بحرها 20m مُسلط عليها حمل موزَّع بانتظام 8kN/m وحمل مركَّز 120kN كما موضَّح في الرسم(11.1) أدناه. أوجد ردود الأفعال (القوى وعزوم التثبيت) ومقدار موضع الانحراف الأقصى $E = 200kN/mm^2$، $I = 500.10^6mm^4$.



الرسم(11.1)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_A + R_A x - 4x^2 + 4[x-10]^2 + 120[x-15]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_A x + R_A\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}[x-10]^3 + 60[x-15]^2 + A$$

$$EIv = -M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}[x-10]^4 + 20[x-15]^3 + Ax + B$$

$x = 0, \ v = 0 \qquad\qquad \therefore B = 0$

$x = 0, \ \frac{dv}{dx} = 0 \qquad\qquad \therefore A = 0$

$x = 20m, \qquad\qquad v = \frac{dv}{dx} = 0$

$$-20M_A + 200R_A - 10667 + 1333 - 2500 = 0$$

$$-M_A + 10R_A - 514.7 = 0 \qquad (1)$$

$$-200M_A + 1333R_A - 53333 + 3333 - 2500 = 0$$

$$-M_A + 6.665R_A - 262.5 = 0 \qquad (2)$$

حل المعادلتين (1) و(2) يُعطي،

$$R_A = 83.7kN, \quad M_A = 295.3kNm$$

الآن،

$$\therefore R_B = 116.3kN$$

عزم الإنحناء عند الطرف اليمين،

$$\circlearrowleft \sum M = 0$$

$$M_B - M_A + 20R_A - 8 \times 10 \times 15 - 120 \times 5 = 0$$

بعد التعويض نحصل على،

$$M_B = 421.3kNm$$

دعنا نفترض أنَّ القيمة القصوى للإنحراف في مقطع حيث 15 > x > 10 والميل = صفراً

$$EI\frac{dv}{dx} = -295.3x + R_A \frac{83.7}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}(x-10)^3 = 0$$

بعد التبسيط تصبح المعادلة،

$$1.9x^2 + 104.7x - 1333 = 0$$

والحل المطلوب $x = 10.7m$

نعوِّض في معادلة الانحراف،

$$EI\hat{v} = -295.3 \times \frac{10.7^2}{2} + \frac{83.7 \times 10.7^3}{6} - \frac{10.7^4}{3} + \frac{1}{3} \times 0.7^4 = -4184kNm$$

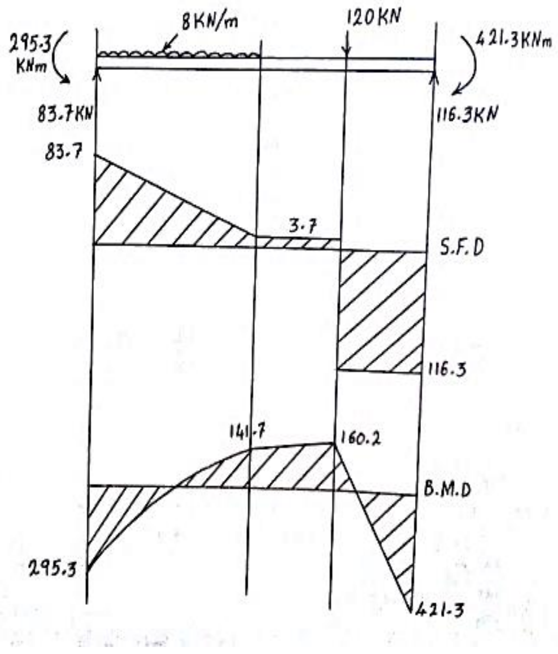
إذن الانحراف الأقصى،

$$\hat{v} = -\frac{4184.10^{12}}{200.10^3 \times 500.10^6} = -41.8mm$$

مثال(2):

أرسم مخطَّطي قوة القص وعزم الإنحناء للعرضة في المثال (1).

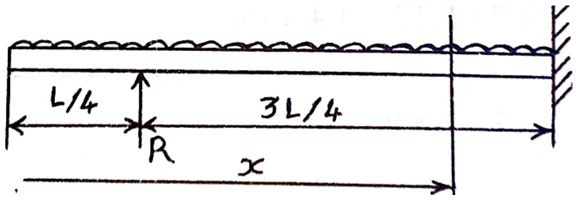
الحل:



الرسم (11.2)

مثال(3):

أوجد رد الفعل لدي الدعامة في العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم (11.3) أدناه.



الرسم (11.3)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{wx^2}{2}+R\left[x-\frac{L}{4}\right]$$

$$EI\frac{dv}{dx}=-\frac{wx^3}{6}+\frac{R}{2}\left[x-\frac{L}{4}\right]^2+A$$

$$x=L,\quad \frac{dv}{dx}=0,\quad \therefore A=-\frac{9RL^2}{32}$$

$$EI\frac{dv}{dx}=-\frac{wx^3}{6}+\frac{R}{2}\left[x-\frac{L}{4}\right]^2+\frac{wL^3}{6}x-\frac{9RL^2}{32}$$

$$EIv=-\frac{wx^4}{24}+\frac{R}{6}\left[x-\frac{L}{4}\right]^3+\frac{wL^3}{6}-\frac{9RL^2}{32}x+B$$

$$x=L,\ v=0,\quad B=\frac{wL^4}{8}-\frac{27RL^3}{32}$$

$$EIv=-\frac{wx^4}{24}+\frac{R}{6}\left[x-\frac{L}{4}\right]^3+\frac{wL^3}{6}x-\frac{9RL^2}{32}x+\frac{wL^4}{8}-\frac{27RL^3}{32}$$

$$x=\frac{L}{4},\ v=0$$

$$\therefore R=\frac{341}{576}wL$$

مثال(4):

إذا كان معدَّل الحمل في العارضة في المثال (3) 10kN/m وطول العارضة 4m. أرسم

مخطَّطي قوة القص وعزم الإنحناء.

الحل:

$$w = 10kN/m, \quad L = 4m$$

$$\therefore R = \frac{341}{576} \times 10 \times 4 = 23.7kN$$

قوة القص = صفر عند 4 > x > 1،

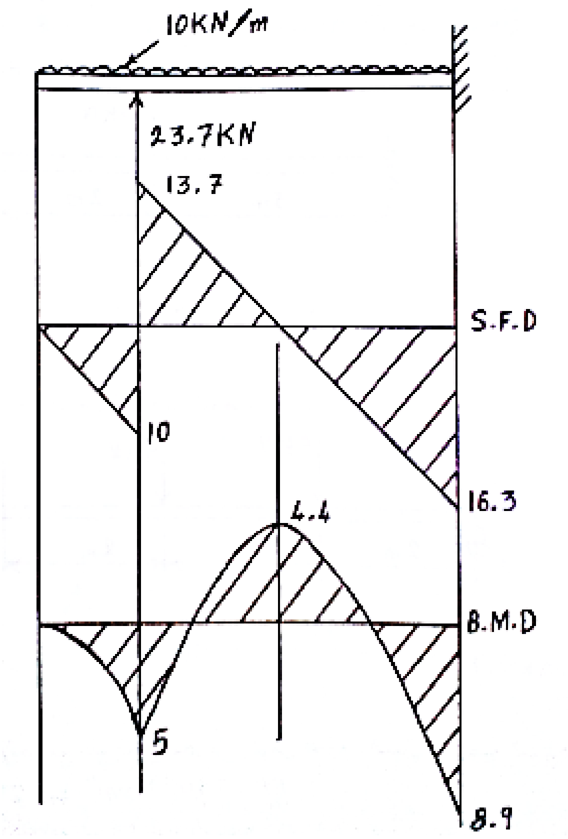
$$F = -10x + 23.7 = 0$$

$$\therefore x = 2.37m$$

$$\hat{M} = -5 \times 2.37^2 + 23.7 \times 2.37 = 4.4kNm$$

عزم الإنحناء عند الطرف المبني،

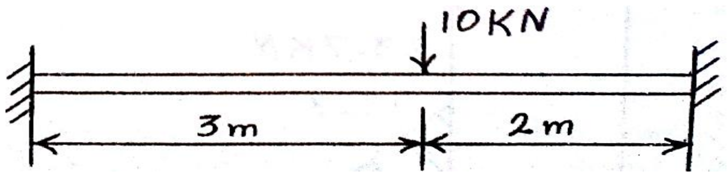
$$M = -5 \times 4^2 + 23.7 \times 3 = -8.9kNm$$



الرسم (11.4)

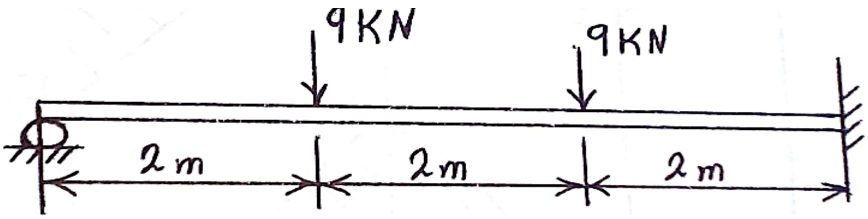
11.3 تمرين:

1. أحسب ردود الأفعال في العارضة الموضَّحة في الرسم.



Ans. (7.2kNm, 4.8kNm, 6.48kN, 3.52kN)

2. أحسب ردود الأفعال للعارضة الموضَّحة أدناه.

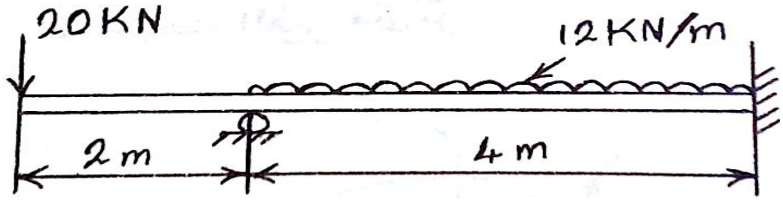


Ans. (18kN, 6kN, 12kN)

3. أوجد الانحراف عند مقطع على بعد 2m من الطرف الشمال للعارضة المذكورة في المسألة 2. خذ $EI = 7.10^{12}Nmm^2$.

Ans. (4mm)

4. أحسب ردود الأفعال للعارضة الموضَّحة في الرسم أدناه.



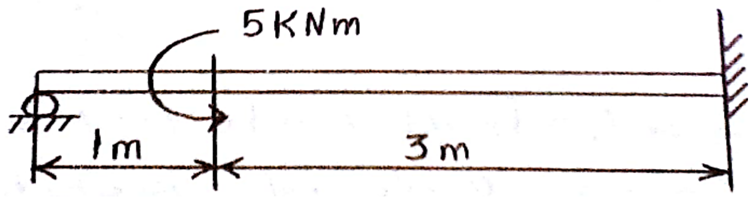
Ans. (4kNm, 53kN, 15kN)

5. أوجد الانحراف عند الطرف الحر للعارضة المذكورة في المسألة 4. خذ $EI=25MNmm^2$.

Ans. (4.1mm)

6. أحسب الانحراف عند نقطة تسليط العزم المركَّز في العارضة الموضَّحة أدناه.

خذ $EI=2MNmm^2$.



Ans. (4.1mm)

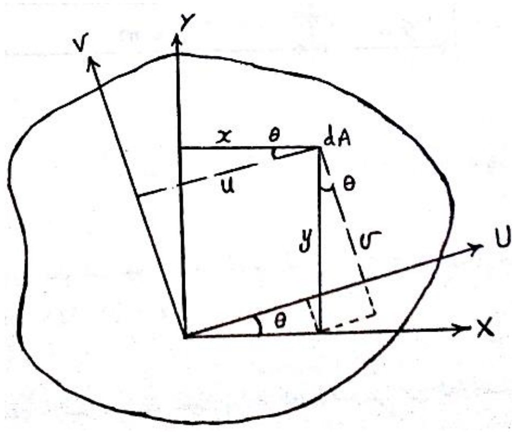
الفصل الثاني عشر

إنحناء المقاطع الغير متماثلة

(Bending of Unsymmetrical Sections)

12.1 عزم المساحة:

من الرسم (12.1) **ادناه.**



الرسم (12.1)

معلوم أنَّ $I_{xy} = \int x\,y\ \,dA$,$I_y = \int x^2\,dA$,$I_x = \int y^2\,dA$. هب إننا نريد أن نعبر عن I_u و I_v و I_{uv} بدلالة I_x و I_y و I_{xy} و θ.

$$I_u = \int v^2\,dA$$

$$u = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$u^2 = y^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$u^2 = \frac{1}{2}y^2(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2}x^2(1-\cos\theta) - xy\sin 2\theta$$

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(y^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right)\cos 2\theta - xy\sin 2\theta$$

$$\therefore I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (1)$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (2)$$

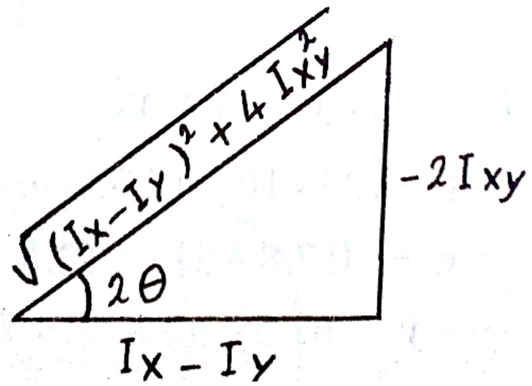
$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) + \sin 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

إذا كانت $I_{uv} = 0$ فإنَّ المحورين U و V يكونان محورين رئيسين.

وفي هذه الحالة،

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

من المثلث في الرسم(12.2) أدناه نجد أنَّ:



الرسم(12.2)

$$\sin 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

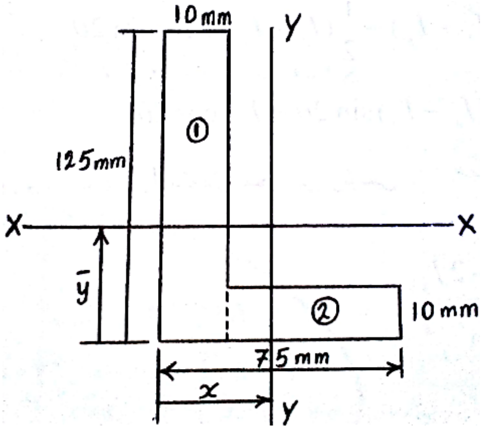
عوِّض في المعادلتين (1) و(2) لتحصل على عزوم المساحة الرئيسة وهي تمثل أقصى وأدني عزم للمساحة.

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

مثال(1):

المحورين x و y يمران بمركز المساحة لمقطع على شكل زاوية الموضَّح في الرسم (12.3) أدناه.

أوجد I_x و I_y و I_{xy} و I_1 و I_2 حدِّد موضع المحورين الرئيسين.



الرسم (12.3)

الحل:

أولاً أوجد $\bar{x}$,$\bar{y}$ ، تحقق من أنها كما يلي:

$$\bar{x} = 17.8mm$$

$$\bar{y} = 42.8mm$$

ثانياً أوجد I_x و I_y ، تحقق من أنهما كما يلي:

$$I_x = 3.05.10^6 mm^2$$

$$I_y = 0.84.10^6 mm^2$$

أما مضروب عزم المساحة فإننا نحسبه من الصيغة التالية:

$$I_{xy} = A_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2$$

$$A_1 = 125 \times 10 = 1250mm^2$$

$$\bar{x}_1 = -(17.8 - 5) = -12.8mm$$

$$\bar{y}_1 = 62.5 - 42.8 = 19.7mm$$

$$A_1\bar{x}_1\,\bar{y}_1 = -315.2.10^3\,mm^3$$

$$A_2 = 65\times 10 = 650mm^2$$

$$\bar{x}_2 = 42.5 - 17.8 = 24.7mm$$

$$\bar{y}_2 = -(42.8 - 5) = -37.8mm$$

$$A_2\bar{x}_2\,\bar{y}_2 = -6.6.9.10^3\,mm^3$$

$$\therefore I_{xy} = -1.27.10^6\,mm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{10^6}{2}(3.05 + 0.84) \pm \frac{10^6}{2}\sqrt{(3.05 - 0.84)^2 + 4\times 0.92^2}$$

$$I_{1,2} = 1.95.10^6 \pm 1.44.10^6$$

$$I_1 = 3.39.10^6\,mm^4, \quad I_2 = 0.51.10^6\,mm^4$$

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2\times 0.92.10^3}{(3.05 - 0.84).10^6} = 0.8326$$

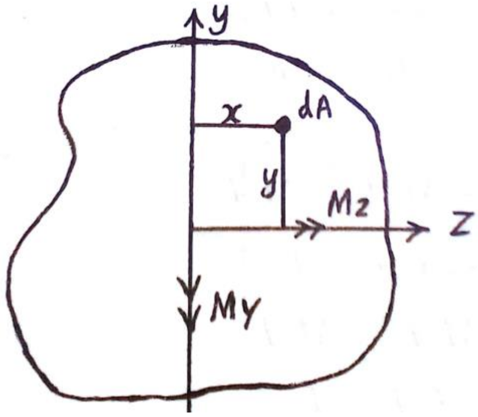
$$\tan 2\theta = 39.8°$$

$$\tan\theta = 19.9°$$

12.2 الإنحناء الغير متماثل:

خذ عارضة ذات مقطع عشوائي غير متماثل مُسلط عليها عزم محض كما هو موضَّح في الرسم (12.4) أدناه. المطلوب استنتاج صيغة لإجهاد الإنحناء لأي نقطة على هذا المقطع.

أولاً وبصفة عامة مهما يكن العزم المُسلط فإنه يمكن تحليله إلي مركبتين أحدهما حول المحور z والآخر حول محور y. للتسهيل سنمثل العزم بمتجه عبارة عن سهم مزدوج الرأس،



الرسم (12.4)

لشريحة طولية مساحتها dA فإنَّ الانفعال العمودي يكون كما يلي:

$$\in=\frac{y}{R_z}+\frac{z}{R_y}$$

حيث أنَّ R_y وR_z هما نصف قطر التقويسة حول المحورين y و z على التوالي وعليه يُصبح الإجهاد كما يلي:

$$\sigma=\frac{Ey}{R_z}+\frac{Ez}{R_y}$$

لاحظ أنَّ ناتج القوى على المقطع = صفر.

$$\therefore \int \sigma \; dA$$

$$\frac{E}{R_z}\int y \; dA+\frac{E}{R_y}\int z \; dA=0$$

وهذا لا يتحقق إلاّ إذا كان،

$$\int y \; dA+\int z \; dA=0$$

وهذا بدوره يعني أنَّ المحورين z و y لا يمران بمركز المساحة.

أما العزم المُسلَّط فيمكن حسابه من،

$$M_z=\int \sigma_y \; dA=\frac{E}{R_z}\int y^2 \; dA+\frac{E}{R_y}\int y\,z \; dA$$

ولكن،

$$\int y^2 \ dA = I_z , \ \int y\, z \ dA = I_{yz}$$

$$\therefore M_z = \frac{EI_z}{R_z} + \frac{EI_{yz}}{R_y} \qquad (1)$$

وبالمثل،

$$-M_y = \int \sigma_y z \ dA$$

وبعد التعويض نحصل على،

$$-M_y = \frac{EI_{yz}}{R_z} + \frac{EI_y}{R_y} \qquad (2)$$

ويمكن حل المعادلتين (1) و(2) لنحصل على،

$$\frac{E}{R_y} = \frac{-M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I^2{}_{yz}}$$

$$\frac{E}{R_z} = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I^2{}_{yz}}$$

والآن عوِّض في المعادلة،

$$\sigma = \frac{E}{R_z} y + \frac{E}{R_y} z$$

لنحصل علي،

$$\sigma = \frac{\left(M_z I_z + M_y I_{yz}\right) y - \left(M_y I_z + M_z I_{yz}\right) z}{I_y I_z - I^2{}_{yz}} \qquad (3)$$

في المعادلة (3) إذا كان المقطع متماثل حول المحور الرأسي $I_{yz}=0$ وبالتالي،

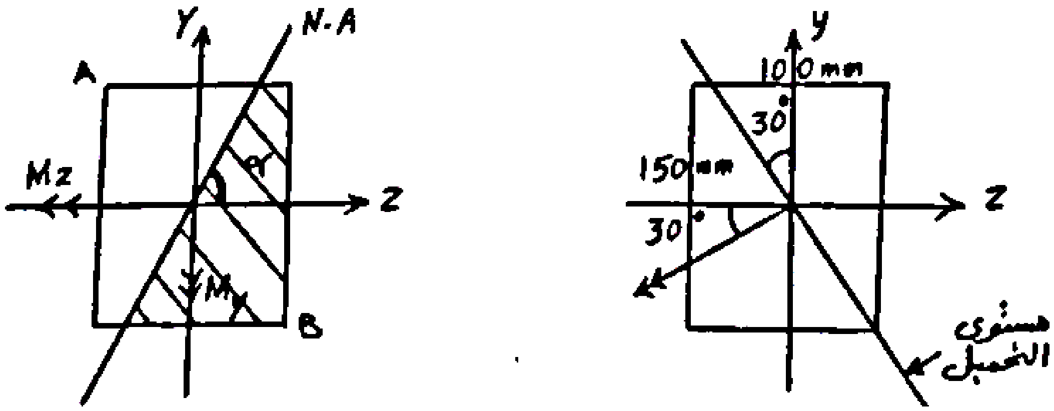
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

إذا كان العزم مُسلَّط حول المحور z لوحده بمعني أنَّ $M_y = 0$، فإنَّ صيغة الإجهاد تصبح ما هو معروف لدينا سلفاً،

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

مثال(2):

عارضة مقطعها مستطيل مُسلط عليها حمل يؤدي إلي عزم إنحناء 3kNm في مستوى يميل 30° لمحور z. أوجد القيمة القصوى لإجهاد الشد وإجهاد الضغط في العارضة كما هو موضَّح في الرسم (12.5) أدناه (أنظر المقطع).



الرسم (12.5)

الحل:

$$M_y = -3\sin 30° = -1.5kNm$$

$$M_z = -3\cos 30° = -2.6kNm$$

$$I_y = \frac{150 \times 100^3}{12} = 12.5.10^6 mm^4$$

$$I_z = \frac{100 \times 150^3}{12} = 28.1.10^6 mm^4$$

نتيجة التماثل،

$$I_{yz} = 0$$

الإجهاد،

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

أولاً أوجد حول محور التعادل σ = 0

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}$$

$$\tan 2\alpha = \left(\frac{-1.5}{-2.6}\right) \times \frac{28.1.10^6}{12.51.10^6} = 1.2969$$

$$\alpha = 52.4°$$

الجزء المظلَّل في حالة شد والآخر في حالة ضغط. إذن النقطة A تتعرَّض لأقصى إجهاد ضغط بينما النقطة B تتعرَّض لأقصى إجهاد شد.

عند النقطة A،

$$y = 75mm, \quad z = -50mm$$

$$\therefore \sigma = \frac{-2.6.10^6 \times 75}{28.1.10^6} + \frac{1.5.10^6 \times (-50)}{12.5.10^6}$$

$$\sigma_A = -12.9N/mm^2$$

عند النقطة B،

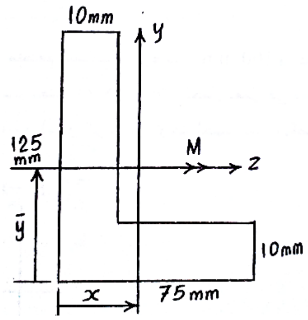
$$y = -75mm, \quad z = 50mm$$

$$\therefore \sigma = \frac{-2.6.10^6 \times (-75)}{28.1.10^6} + \frac{1.5.10^6 \times (50)}{12.5.10^6}$$

$$\sigma_B = 12.9N/mm^2$$

مثال(3):

أوجد الإجهاد الأقصى وإجهاد الضغط الأقصى للمقطع الموضَّح في الرسم (12.6) أدناه عندما يتعرَّض لزم إنحناء M =2kNm.



الرسم(12.6)

الحل:

هذا المقطع مرَّ علينا في المثال (1) حيث وجدنا أنَّ،

$$\bar{z} = 17.8mm, \bar{y}42.8mm,\ I_y = 0.84.10^6,\ I_z = 3.05.10^6, I_{yz} = -0.92.10^6$$

من معطيات المسألة نجد أنَّ،

$$M_y = 0, \quad M_z = 2kNm$$

$$\sigma = \frac{M_z\left(I_y y - I_z z\right)}{I_y I_z - I^2{}_{yx}}$$

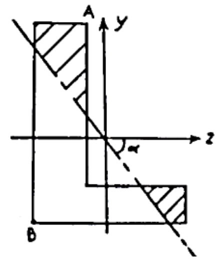
لتحديد محور التعادل نضع σ = 0،

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{y}{z} = \frac{I_{yz}}{I_y}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-0.92}{0.84} = -1.09529$$

$$\therefore \alpha == -47.6°$$

الجزء المظلَّل مشدود والآخر مضغوط ، كما هو موضَّح في الرسم (12.7) أدناه



الرسم (12.7)

عند النقطة A،

$$y = 82.2mm, \quad z = -17.8mm$$

$$\sigma_A = \frac{-2.10^6(0.84 \times 82.2 - 0.92 \times 17.8)10^6}{0.84.10^6 \times 3.05.10^6 - 0.92^2 \times 10^2}$$

$$\sigma_A = 71.1N / mm^2$$

عند النقطة B،

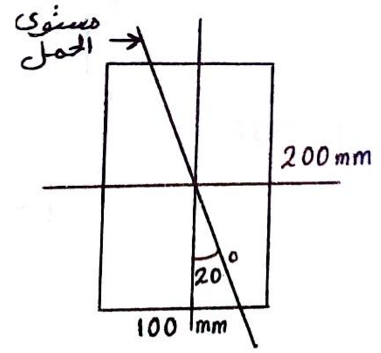
$$y = -42.8mm, \quad z = 17.8mm$$

$$\sigma_B = \frac{2.10^6(-0.84 \times 42.8 - 0.92 \times 17.8)10^6}{0.84.10^6 \times 3.05.10^6 - 0.92^2 \times 10^2}$$

$$\sigma_B = -61.0N / mm^2$$

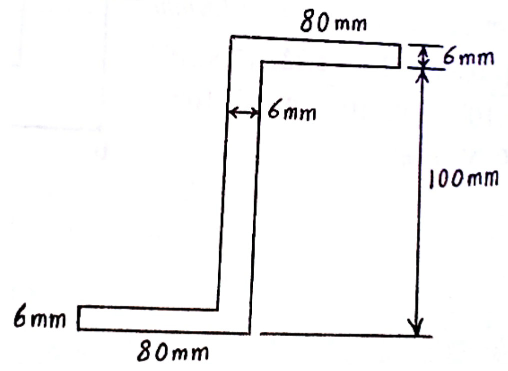
12.3 تمرين:

1. عارضة وتدية خشبية طولها 4m ومقطعها مستطيل 100mm وعمقه 200mm خضعت لحمل موزَّع بانتظام معدَّله 400N/m. الحمل الذي يعمل على مستوى يميل 20^o لمحور التماثل الرأسي للمقطع (أنظر الرسم). أوجد إجهاد الشد الأقصى في العارضة.



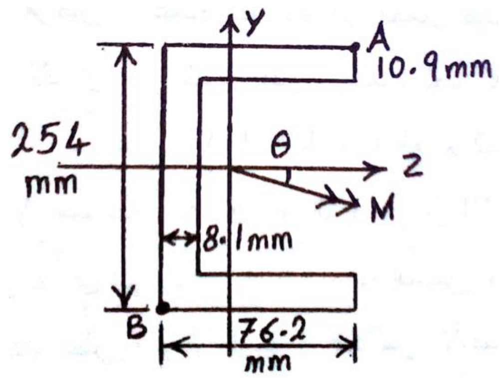
Ans. (7.8N/mm^2)

2. مقطع صلب إنشاءات له الأبعاد الموضَّحة في الرسم أدناه يستخدم كعارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 5m تخضع لحمل موزَّع بانتظام في المستوي الرأسي معدَّله 750N/m بالإضافة إلي حمل مركَّز في الوسط مقداره 500N. أوجد إجهاد الشد الأقصى في العارضة .



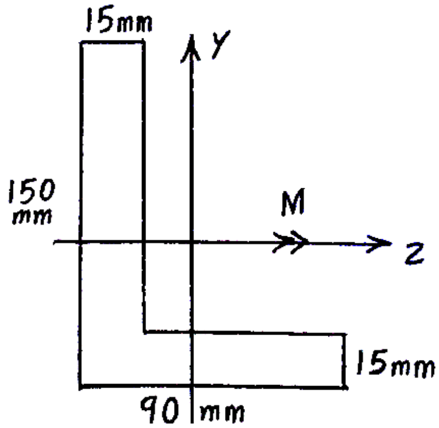
Ans. (213N/mm^2)

3. مقطع على شكل مجرى يتعرَّض لعزم إنحناء M = 1.7kNm له متجه يميل $\theta = 10^{o}$ لمحور z (أنظر الرسم أدناه). أحسب الإجهاد عند النقطتين A وB.



Ans. (9.7N/mm^2, 16.7N/mm^2)

4. مقطع على شكل زاوية (أنظر الرسم) يخضع لعزم إنحناء M = 1kNm له متجه على طول المحور z. أحسب إجهاد الشد الأقصى وإجهاد الضغط الأقصى.



Ans. (14.8N/mm^2, 14.3N/mm^2)

الفصل الثالث عشر

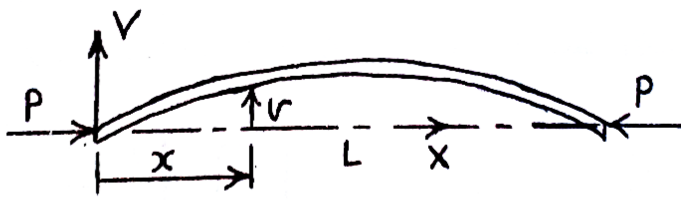
انبعاج الأعمدة

(Buckling of Column)

13.1 مدخل:

يحدث الانبعاج عندما تتعرض الأعمدة الطويلة إلي أحمال ضغط محورية تؤدي إلي تقويسها وإنهيارها نتيجة لعدم الإتزان. وللتميز بين الأعمدة الطويلة والقصيرة نستخدم نسبة النحافة r حيث أنَّ $r = L/k$ حيث أنَّ $k = I/A$ و I العزم الثاني للمساحة وهو أصغر عزم مساحة للمقطع و A مساحة المقطع. والواضح أنَّ الأعمدة الطويلة تنهار تحت أحمال أصغر من الأحمال التي تؤدي إلي انهيارها في حالة السحق، وهي طريقة انهيار الأعمدة القصيرة. يمكن استخدام نظرية اويلر لتحليل عدد من الأعمدة بحالات طرفية مختلفة.

1. عمود مسماري من الطرفين:



الرسم(13.1)

على افتراض أنَّ العمود مستقيم والحمل محوري. من الرسم (13.1) أعلاه نحصل على،

$$EI = \frac{d^2v}{dx^2} = M = -Pv$$

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

الحل هو:

$$v = A\sin \alpha x + B\cos \alpha x$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore A = \sin \alpha L = 0$$

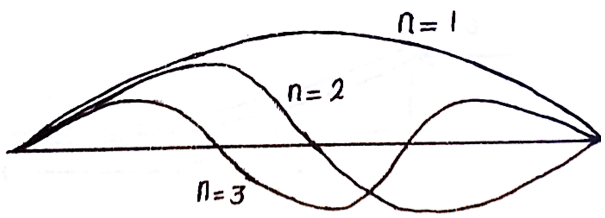
$$A \neq 0 \quad \therefore \sin \alpha L = 0 \;\;, \alpha L = n\pi \qquad\qquad (n = 1,2,...)$$

بعد التعويض عن α نحصل على،

$$P_c = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

n تشير إلي شكل العارضة المنهارة كما موضَّح في الرسم (13.2) أدناه. بالطبع لن يتجاوز العمود حالة n=1 لأنَّه سيكون قد انهار قبلاً، وعليه فإنَّ حمل الانهيار أو الحمل الحرج أو حمل أويلر سيكون،

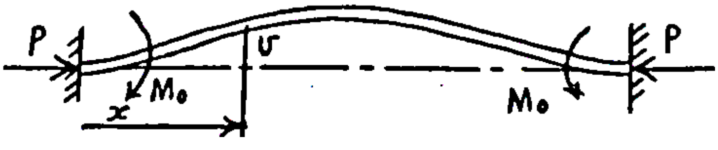
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



الرسم (13.2)

هذا الكلام يعني أنَّ العمود سيظل مستقيماً وسالماً ما دام الحمل أقل من P_c. وعندما يُصبح الحمل $P = P_c$، فإنَّ العمود سينحرف ويتسارع الانحراف حتي يتم الانهيار.

2. عمود مبني من الطرفين:



الرسم (13.3)

$$EI = \frac{d^2 v}{dx^2} = -Pv + M_o$$

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=\frac{M_o}{EI}, \qquad \alpha^2=\frac{P}{EI}$$

$$v=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x+\frac{M_o}{EI\alpha^2}$$

$$x=0,\quad v=0,\qquad \therefore B=\frac{M_o}{EI\alpha^2}=-\frac{M}{P}$$

$$x=0 \qquad \frac{dv}{dx}=0\ ,\ A=0$$

$$v=\frac{M}{P}\left(1-\cos\alpha x\right)$$

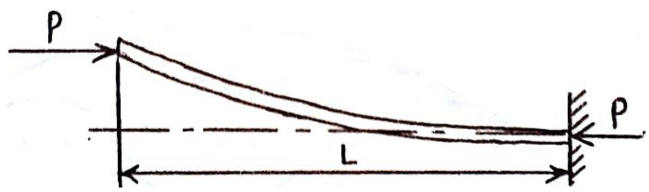
$$x=L \qquad v=0 \qquad \therefore \cos\alpha L=1$$

$$\therefore \alpha L=2\pi$$

وبتعويض عن قيمة α نحصل على،

$$P_c=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

3. عمود مبني من طرف وحر من الطرف الآخر:

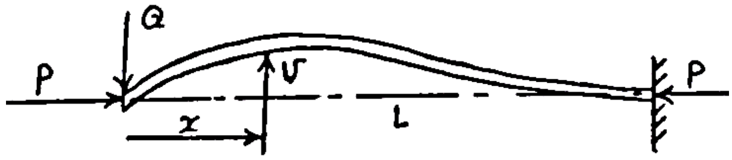


الرسم (13.4)

حاول أن تستنتج لوحدك القانون التالي:

$$P_c=\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

4. عمود مبني من طرف ومسماري من الطرف الآخر:



الرسم (13.5)

$$EI=\frac{d^2v}{dx^2}=-Pv+Qx$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=\frac{Qx}{EI}, \qquad \alpha^2=\frac{P}{EI}$$

$$v=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x-\frac{Qx}{EI\alpha^2}$$

$$x=0, \quad v=0, \quad \therefore B=0$$

$$x=L \qquad v=0 \therefore A\sin\alpha L=\frac{QL}{P} \tag{1}$$

$$x=L \qquad \frac{dv}{dx}=0 \therefore A\cos\alpha L=\frac{QL}{P} \tag{2}$$

(1)/(2)

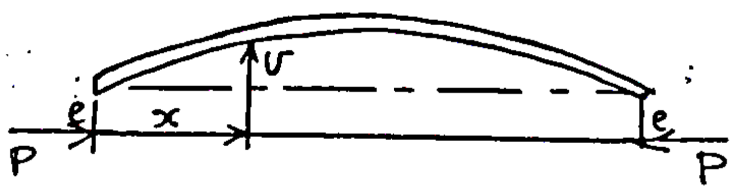
$$\tan\alpha L=\alpha L$$

$$\alpha L=4.49$$

$$P_c=\frac{20.1EI}{L^2}=\frac{2.05\pi^2 EI}{L^2}$$

في كل الأمثلة السابقة تم تحليل عمدان مستقيمة ومُسلط عليها أحمال محورية. في الواقع تلك حالات مثالية فالعمود قل ما يكون كامل الاستقامة كما أنَّ الحمل نادراً ما يكون محورياً. ولهذا سنقوم بتحليل أعمدة مُسلط عليها أحمال لا تمركزية وسنقوم بتضمين التقوس الأولي في التحليل.

5. عمود مُسلط عليه حمل لا تمركزي:



الرسم (13.6)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-Pv$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=0$$

$$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = e$$

$$x = L/2, \quad v = \frac{dv}{dx}, \quad \therefore A = e\tan\frac{\alpha L}{2}$$

$$\therefore v = e\left[\tan\frac{\alpha L}{2}\sin\alpha x + \cos\alpha x\right]$$

لاحظ أنَّ الحمل اللاتمركزي يسبب انحرافاً في كل الأحوال لا في حالة الحمل الحرج فقط. إن الانحراف يُصبح لا نهائياً عندما يكون،

$$\tan\frac{\alpha L}{2} = \infty, \qquad \therefore \alpha L = \pi$$

أي أنَّ حمل الانهيار،

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

ولكن في هذه الحالة ولوجود إجهادات ضغط فإنَّ العمود لا ينهار نتيجة الانبعاج.

الانحراف الأقصى في الوسط $x = \frac{L}{2}$،

$$\hat{v} = e\left[\tan\frac{\alpha L}{2}\sin\frac{\alpha L}{2} + \cos\frac{\alpha L}{2}\right] = e\sec\frac{\alpha L}{2}$$

عزم الانحناء الأقصى،

$$\hat{M} = P\hat{v} = P_c\sec\frac{\alpha L}{2}$$

والإجهاد الأقصى يتم الحصول عليه بجمع إجهادي الانحناء والإجهاد المباشر،

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{z} = \frac{P}{A} + \frac{P\hat{v}}{z}$$

من النادر أن يخلو عمود من درجة ما من التقوس. إذا أخذنا نصف قطر التقويسة الأولي،

$$R_o = 1 \Big/ \frac{d^2v}{dx^2}$$

وإذا استخدمنا الصيغة التالية،

$$EI = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o}\right) = M$$

نحصل على،

$$\frac{d^2v}{dx^2} = M + EI\,\frac{d^2v_o}{dx^2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{d^2v_o}{dx^2}$$

سنفترض أنَّ التقوس الأولي $v_o = c\sin\frac{\pi x}{L}$ وهي تعنى بالحالات الطرفية، وتجعل القيمة القصوى للانحراف c وعليه تُصبح المعادلة،

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\frac{c\pi^2}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$$

والحل الكامل،

$$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{c\pi^2/L^2}{-\frac{\pi^2}{L^2} - \alpha^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = \frac{L}{2}, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = 0$$

$$\therefore v = \frac{c\pi^2/L^2}{\pi^2/L^2 - \alpha^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$v = \frac{c\,P_e}{P_e - P}\sin\frac{\pi x}{L}, \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\hat{M} = P\hat{v} = \frac{c\,P\,P_e}{P_e - P}$$

13.2 نواحي القصور في نظرية اويلر:

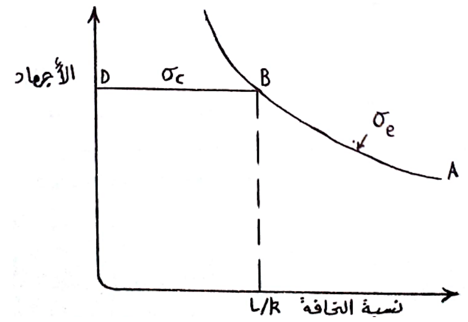
في الواقع لا يوجد عمود مستقيم كامل الاستقامة أصلاً ثم أنَّ الحمل المحوري هو حالة مثالية. فالحمل عادة يكون لا تمركزياً ولكن قيمة اللاتمركز تكون مجهولة. كما أنَّه إذا سلمنا بأنَّ العمود

مقوس فإنَّ التقوس يكون مجهولاً. وبالتالي فإنَّ نظرية اويلر تبدو وكأنها عديمة الفائدة. أضف إلي ذلك هنالك منطقة يتداخل فيها العمود الطويل والعمود القصير ويصعُب فيها التحقق من إذا كان عمود معين سينهار نتيجة السحق أو الانبعاج.

لنأخذ المعادلة التالية:

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/k)^2}$$

منحني σ_e ضد (L/k) هو كما موضَّح في الرسم(13.7).



الرسم (13.7)

بالنسبة للصلب $\sigma_c = 230N/mm^2$ ،$E = 205kN/mm^2$،

$$\frac{L}{k} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} = \pi\sqrt{\frac{205.10^3}{320}} \approx 80$$

بسبب نواحي القصور التي أوردناها في صيغة اويلر، نستخدم صيغ تجريبية تأخذ في الاعتبار تقوس العمود واللاتمركز في الحمل. ومن الصيغ:

1. صيغة رانكين:

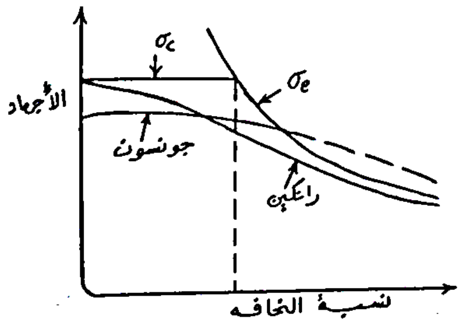
$$P = \frac{\sigma_c A}{1 + a(L/k)^2}$$

حيث a ثابت يعتمد على المادة المصنوع منها العمود والحالة الطرفية، وهذا الثابت متوفر في جدول.

2. صيغة جونسون:

$$P = \sigma_c A\left[1 - b(L/k)^2\right]$$

حيث b ثابت.



الرسم (13.8)

13.3 أمثلة محلولة:

مثال(1):

عمود طوله 1m ومقطعه 12.5mm×4.8mm سُلط عليه حمل ضغط محوري أدي إلي انبعاجه. باستخدام صيغة اويلر، أوجد الانحراف الأقصى قبل أن يصل الإجهاد إجهاد الخضوع $280N/mm^2$، $E = 72kN/mm^2$.

الحل:

أصغر عزم ثاني للمقطع،

$$I = \frac{12.5 \times 4.8^3}{12} = 115.2mm^4$$

مساحة المقطع،

$$A = 12.5 \times 4.8 = 60mm^2$$

الحمل الحرج،

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 72.10^3 \times 115.3}{10^6} = 82N$$

عزم الانحناء الأقصى في الوسط،

$$\hat{M} = P_c\hat{v} = 82\hat{v}$$

حيث $\hat{v}$ هي الانحراف الأقصى.

الإجهاد الأقصى هو مجموع الإجهاد المباشر وإجهاد الإنحناء،

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{I}$$

$$\therefore 280 = \frac{82}{60} + \frac{82\hat{v} \times 2.4}{115.2}$$

$$\therefore \hat{v} = 163mm$$

مثال(2):

عمود من الصلب على شكل ماسورة قطرها الخارجي 60mm والداخلي 48mm طول العمود 2.2m وطرفاه مسماريان، والحمل موازي لمحور العمود. أوجد أقصى لا تمركز لكي يصبح حمل الاعاقة 0.75 من حمل اويلر. إجهاد الخضوع $310N/mm^2$، $E = 207kN/mm^2$.

الحل:

$$I = \frac{\pi}{64}\left(60^4 - 48^4\right) = 37.6.10^4\,mm^4$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(60^2 - 48^2\right) = 1018mm^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 207.10^3 \times 37.6.10^4}{2200^2}N = 158kN$$

إذن حمل الاعاقة $P = 0.75P_c = 118.5kN$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{118.5.10^3}{207.10^3 \times 37.6.10^4}} = 12.3.10^{-4}$$

$$\sec\frac{\alpha L}{2} = \sec\left(\frac{12.3.10^{-4} \times 2200}{2}\right) = \sec 1.36$$

$$= 4.779$$

$$\hat{M} = P\,h \sec\frac{\alpha L}{2} = 118.5.10^3 h \times 4.77 = 566.10^3 h$$

(h هي اللاتمركز).

الاجهاد المباشر،

$$\sigma_d = \frac{P}{A} = \frac{118.5.10^3}{1018} = 116.4 N/mm^2$$

إجهاد الإنحناء،

$$\sigma_b = \frac{\hat{M}}{I}\hat{y} = \frac{655.10^3 h}{37.6.10^4} \times 30 = 45.2h\left(N/mm^2\right)$$

الإجهاد الكلي،

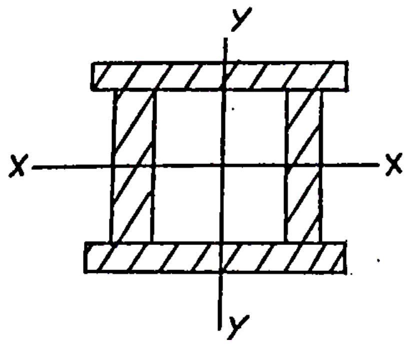
$$\sigma = \sigma_d + \sigma_b$$

$$310 = 116.4 + 45.2h$$

$$\therefore h = 4.28mm$$

مثال(3):

عمود طوله 6m مقيَّد الطرفين ومقطعه كما موضَّح في الرسم(13.9) أدناه. استخدم صيغة رانكين لإيجاد حمل الضغط المسموح به إذا كان عامل السلامة 3.5. خذ إجهاد الخضوع في حالة الضغط $\sigma_c = 320\,N/mm^2$ و الثابت a = 1/30000.



الرسم(13.9)

الحل:

المعطيات:

$$I_x = 108.5.10^6 mm^4$$

$$I_y = 65.7.10^6 mm^4$$

$$A = 122.5.10^2 mm^2$$

$$\sigma_w = 320/3.5 = 91.4N/mm^2$$

أقل قيمة لـ k نحصل عليها من الآتي:

$$Ak = Iy$$

$$122.5.10^2 k = 65.7.10^6$$

$$\therefore k = 73.2mm$$

$$\left(\frac{L}{k}\right)^2 = \left(\frac{6.10^3}{73.2}\right)^2 = 6712$$

صيغة رانكين،

$$P = \frac{\sigma_c A}{1 + a(L/k)^2}$$

$$P = \frac{91.4 \times 122.5.10^2}{1 + 6712/30.10} N = 915kN$$

مثال(4):

عمود مجوف مقيَّد الطرفين مُسلَّط عليه حمل 1MN. إذا كان طول العمود 5m وقطره الخارجي 250mm، أوجد القطر الداخلي باستخدام صيغة رانكين. الثابت a = 1/6400 إجهاد التشغيل $80N/mm^2$.

الحل:

إذا كان القطر الداخلي d mm،

$$A = \frac{\pi}{4}\left(250^2 - d^2\right)$$

$$I = \frac{\pi}{64}\left(250^4 - d^4\right)$$

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi}{64}\left(250^4 - d^4\right) \times \frac{4}{\left(250^2 - d^2\right)}$$

$$\therefore k^2 = \frac{1}{16}\left(250^2 + d^2\right)$$

$$\left(\frac{L}{k}\right)^2 = \frac{25.10^3 \times 16}{250^2 + d^2} = \frac{62.5.10^3}{250^2 + d^2}$$

$$\mathrm{P} = \frac{\sigma_c \mathrm{A}}{1 + \mathrm{a}(\mathrm{L}/\mathrm{k})^2}$$

$$P = \frac{80 \times \pi / 4\left(250^2 - d^2\right)}{1 + 62.5.10^3\left(250^2 - d^2\right)}$$

والتي يمكن تبسيطها كما يلي،

$$P = \frac{20\left(250^4 - d^4\right)}{125.10^3 + d^2} = 10^6$$

وبعد قليل من المعالجة نحصل على،

$$d^4 + 15.9.10^3 d^2 - 1916 = 0$$

$$d^2 = 36.6.10^3 mm^2$$

$$d = 191 mm$$

13.4 تمرين:

1. عمود طوله L وطرفاه مبنيان في مادة توفر عزم تثبيت $M_o = k\theta$ حيث k ثابت و θ زاوية الدوران في الطرف. برهن أنَّ حمل الانبعاج يمكن الحصول عليه من الآتي:

$\tan\frac{\alpha L}{2} = -\frac{P}{\alpha k}$ و $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$.

إذا كان العمود مسماري من الطرفين وطوله 3.05m فإنَّ حمل الانبعاج يكون 10kN. برهن أنَّ حمل الانبعاج سيتضاعف تقريباً إذا كان الطرفان مقيدان وتوفر المادة عزم التثبيت 180Nm/rad.

2. عمود رأسي كان مستقيماً عندما سُلِّط عليه حمل لا تمركزي P واللاتمركز e. إذا كان الانبعاج في الوسط مُنع بواسطة قوة أفقية F، برهن الآتي:

$$F = \frac{2P_e\left(1 - \sec\alpha \dfrac{\alpha L}{2}\right)}{\dfrac{L}{2} - \dfrac{1}{a}\tan\dfrac{\alpha L}{2}}$$

3. عمود طويل منتظم المقطع كان مستقيماً في البدء عندما سُلِّط عليه حمل ضغط من الطرفين وعلى نفس الجانب من خط الوسط ولكن كان اللاتمركز على أحد الطرفين ضعف اللاتمركز في الطرف الآخر.

إذا كان طول العمود L والحمل P، برهن أنَّ أقصى إجهاد إنحناء يحدث عند مقطع يبعد x من الطرف ذي اللاتمركز الأصغر حيث أنَّ:

$$\tan mx = \frac{2 - \cos mL}{\sin mL}, \quad m = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

إذا كان L = 0.76m وقطر العمود 25mm، أحسب اللاتمركز والذي ينتج إجهاد أقصى $310N/mm^2$ حيث أنَّ P = 35kN، $E = 200kN/mm^2$.

Ans. (6mm, 3mm)

4. عمود طويل كان مستقيماً في بادئ الأمر بينما أحد طرفيه مثبت بقوة والطرف الآخر حر. تم تسليط حمل لا تمركزي على الطرف الحر، وكان خط عمل الحمل موازى لمحور العمود. استنتج صيغة لانحراف الطرف الحر من الوضع الأصلي.

أوجد الانحراف وإجهاد القص الأقصى لعمود صلب تحت هذه الظروف: الطول

25mm والقطر الخارجي 50mm والداخلي 25mm، الحمل 3500N واللاتمركز 75mm. $E=206kN/mm^2$.

Ans. ($31N/mm^2$, 25mm, $e(\sec\alpha L-1)$)

5. عمود دائري مجوف طرفاه مسماريان وطوله 2.44m وقطره الخارجي 101mm والداخلي 89mm. قبل التحميل كان العمود مقوساً وأقصى انحراف له 4.5mm. على افتراض أنَّ خط الوسط جيبي، أوجد الإجهاد الأقصى الذي ينتج منه حمل ضغط محوري مقداره 10kN. $E = 205kN/mm^2$.

Ans. ($6.3N/mm^2$)

6. برهن أنَّه إذا كان هنالك عمود مُقوس وطرفاه مسماريان حيث أنَّ الانحراف الأولي وفق الصيغة التالية:

$$v_o = \frac{4\,c\,x}{L^2}(1-x)$$

برهن أنَّ إجهاد الضغط الأقصى الذي ينجم من حمل P:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left[1+\frac{c\,h}{k^2}\,\frac{8\,P_c}{\pi^2 P}\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}-1\right)\right]$$

حيث أنَّ A مساحة المقطع، c الانحراف الأولي في الوسط، P_c حمل اويلر، k=I/A ذات المعروف، و h مسافة أكثر الشرائح بعداً عن محور التعادل.

7. قارن حمل الاعاقة حسب صيغتي اويلر ورانكين لأنبوب طوله 2.3m وقطره الخارجي والداخلي 38mm و 33mm على التوالي، وذلك عندما يكون طرفاه مسماريان. خذ إجهاد الخضوع $320N/mm^2$ وثابت رانكين 1/7500، $E = 200kN/mm^2$. ما هو الطول الذي تمتنع فيه صيغة رانكين عن التطبيق.

Ans. (1m, 17.1kN, 17kN)

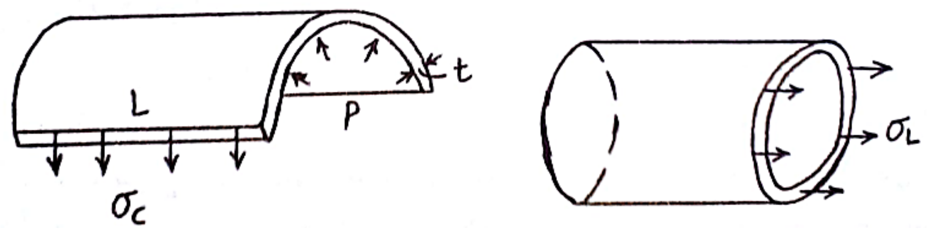
الفصل الرابع عشر

الأسطوانات

(Cylinders)

14.1 الأسطوانات الرقيقة:

من أمثلة الأسطوانات الرقيقة صهاريج المياه والوقود وأنابيب الغلايات. هنالك نوعان من الإجهادات تنتج من تأثير الضغط الداخلي كما يوضّح الرسم (14.1) أدناه.



الرسم(14.1)

والإجهادان المعنيان هما الإجهاد المحيطي σ_c والإجهاد الطولي σ_L في حالة تكون الأسطوانة مغلقة من الجانبين.

استنتج لوحدك الآتي:

$$\sigma_c = \frac{\mathrm{Pr}}{t}, \qquad \sigma_L = \frac{\mathrm{Pr}}{2t}$$

حيث أنَّ r نصف قطر الأسطوانة، و t السمك.

مثال(1):

أسطوانة هواء مضغوط قطرها 600mm والضغط الداخلي 3.5N/mm^2. إذا كانت الأسطوانة مصنوعة من صلب له إجهاد خضوع 250N/mm^2 بينما عامل السلامة 2.5، أحسب سمك الجدار. تجاهل التأثيرات المحلية عند نقاط اتصال الأسطوانة بالغطاء.

الحل:

لأنَّ الأسطوانة مغلقة من الطرفين، هنالك إجهاد محيطي وإجهاد طولي. ونسبة لأنَّ الإجهاد المحيطي ضعف الإجهاد الطولي، فإنَّ الإجهاد المحيطي سيكون العامل الحاسم لانهيار الأسطوانة، وعليه إذن يتم التصميم.

إجهاد التشغيل،

$$\sigma_w = \frac{250}{2.5} = 100 N/mm^2$$

$$\sigma_w = \frac{\Pr}{t}$$

$$100 = \frac{3.5 \times 300}{t}, \quad \therefore t = 14.7mm$$

14.2 الأسطوانات السميكة:

إذا كان سمك الأسطوانة $t < d < d/20$ حيث أنَّ d قطر الأسطوانة، فإنَّ الأسطوانة يمكن أن تصف بأنها سميكة، وفي هذه الحالة فإن الإجهادات الرئيسة هي الإجهاد المحيطي σ_h والإجهاد الطولي σ_L كما في الأسطوانات الرقيقة بالإضافة إلي الإجهاد القطري σ_r. في هذه الحالة نجد أنَّ الإجهادين المحيطي والقطري يتغيران عبر السمك.

حاول أن تستنتج لوحدك الصيغ التالية:

$$\sigma_v = a - \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_L = \frac{\Pr_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

حيث أنَّ r_1 و r_2 هما نصفا القطران الخارجي والداخلي على التوالي. a و b ثابتان.

مثال(2):

أسطوانة هيدروليك قطرها الداخلي 60mm. أوجد السمك المطلوب لتتحمل الأسطوانة ضغط داخلي $40N/mm^2$ بحيث لا يتجاوز إجهاد الشد الأقصى $60N/mm^2$ وإجهاد القص الأقصى $45N/mm^2$.

الحل:

(أ) إجهاد الشد الأقصى،

$$\sigma_v = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 30mm,\ \sigma_v = -40N/mm^2$$

$$r = r_1, \qquad \sigma_r = 0$$

$$-40 = a - \frac{b}{30^2} \qquad (1)$$

$$0 = a - \frac{b}{r_1^2} \qquad (2)$$

$$r = 30mm, \qquad \sigma_h = 60N/mm^2$$

$$\therefore 60 = a + \frac{b}{30^2} \qquad (3)$$

$$(1)+(2) \therefore a = 10$$

عوِّض في (1) لتحصل على $b = 45.10^3$.

وأخيراً عوِّض في المعادلة (2) لتحصل على r = 67.1mm.

السمك المطلوب t،

$$t = 67.1 - 30 = 37.1mm$$

(ب) إجهاد القص الأقصى:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_h - \sigma_r)$$

$$45 = \frac{1}{2}(\sigma_h + 40)$$

$$\therefore \sigma_h = 50N/mm^2$$

واضح أنَّ التصميم يتم على إجهاد الشد الأقصى لا على إجهاد القص الأقصى لأنَّ الأول هو العامل الحاسم إذ يؤدي إلي إجهاد محيطي أكبر.

مثال(3):

الإجهاد الأقصى المسموح به في أسطوانة نصف قطرها الداخلي 80mm والخارجي 120mm إذا كان $20N/mm^2$ بينما الضغط الخارجي $6N/mm^2$. ما هو الضغط الداخلي الذي يمكن تسليطه. أرسم مخطَّط توزيع الإجهاد المحيطي والإجهاد القطري عبر سمك الأسطوانة.

الحل:

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 80mm, \quad \sigma_r = -P$$

$$r = 120mm, \quad \sigma_r = -6N/mm^2$$

$$\therefore -P = a - \frac{b}{80^2} \qquad (1)$$

$$\therefore -6 = a - \frac{b}{120^2} \qquad (2)$$

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

$$r = 80mm, \quad \sigma_h = 20N/mm^2$$

$$\therefore 20 = a + \frac{b}{80^2} \qquad (2)$$

$$(2)-(3) \qquad \therefore b = 115.2.10^3$$

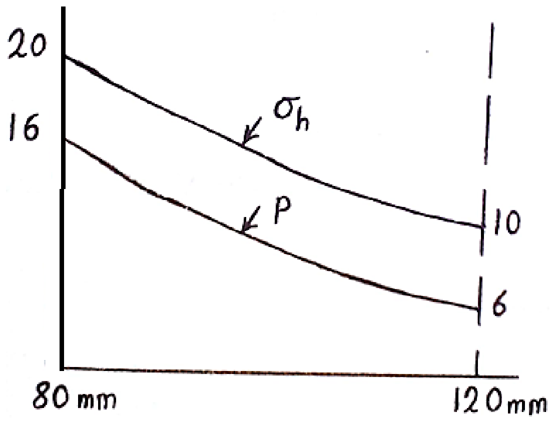
عوِّض في المعادلة (2)، $\therefore a = 2$

عوِّض في المعادلة (1)، $P = 16N/mm^2$

الإجهاد المحيطي على السطح الخارجي،

$$\sigma_h = 2 + \frac{115.2.10^3}{120^2}$$

$$\therefore \sigma_h = 10N/mm^2$$



الرسم(14.2)

مثال(4):

مقياسا إنفعال تم تثبيتهما على السطح الخارجي لأسطوانة وذلك لقياس الانفعالين الطولي والمحيطي. الأسطوانة مغلقة الطرفين وقطرها الداخلي والخارجي 150mm و200mm على التوالي. تحت تأثير ضغط داخلي معين كانت القراءات تشير إلي أنَّ الإجهاد الطولي والمحيطي $36N/mm^2$ و$72N/mm^2$ على التوالي وكلاهما إجهاد شد. أوجد (أ) الضغط الداخلي (ب)الإجهاد المحيطي على السطح الداخلي (ج) التغير في السطح الداخلي نتيجة الضغط. $E=206kN/mm^2$، $\nu = 0.28$.

الحل:

(أ) إذا كان الضغط الداخلي P والإجهاد الطولي σ_L والقطرين الداخلي والخارجي d_1 و d_2 فإنَّ،

$$\sigma_L\left(d_2^2 - d_1^2\right) = Pd_1^2$$

$$36\left(200^2 - 150^2\right) = P \times 150^2$$

$$\therefore P = 28N/mm^2$$

(ب) الإجهاد المحيطي على السطح الداخلي،

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_r - \sigma_h = 2a$$

عند السطح الخارجي، $\sigma_r = 0, \quad \sigma_h = 72N/mm$

إذن، $\sigma_r + \sigma_h = 72$

عند السطح الداخلي، $\sigma_r = -28N/mm^2$

$$\therefore -28 + \sigma_h = 72$$

$$\sigma_h = 100N/mm^2$$

(ج) الانفعال المحيطي:

$$\in_h = \frac{\sigma_h}{E} - \nu\frac{\sigma_r}{E} - \nu\frac{\sigma_L}{E}$$

$$\in_h = \frac{1}{206.10^3}\left[100 - 0.28(-28 + 36)\right] = 475.10^{-6}$$

الزيادة في القطر الداخلي = والزيادة في المحيط الداخلي

$$\Delta d_1 = \in_h d_1$$

$$= 475.10^{-6} \times 150 = 0.0712mm$$

مثال(5):

أنبوب مركَّب يتكون من أنبوبين أحدهما فوق الآخر. القطر الوسيط 60mm. سماح الانكماش

(محسوب القطر) 0.01mm، كل أنبوب سمكه 10mm. إذا كان كلا الأنبوبين مصنوع من الصلب ($E = 200kN/mm^2$)، أحسب الإجهاد بين الأنبوبين. أحسب مخطَّط توزيع الإجهاد المحيطي عبر الجدار الناجم من:

(أ) الإنكماش (ب) ضغط داخلي $60N/mm^2$

وضِّح أيضاً ناتج توزيع الإجهاد المحيطي.

الحل:

أولاً: الإجهادات الناجمة من الانكماش: الأنبوب الداخلي،

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$\therefore 0 = a - \frac{b}{20^2} \qquad (1)$$

$$\therefore -P_o = a - \frac{b}{30^2} \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على،

$$a = -1.9P_o, \qquad b = -720P_o$$

الأنبوب الخارجي،

$$r = 30mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$\therefore -P_o = a' - \frac{b'}{30^2} \qquad (3)$$

$$0 = a' - \frac{b'}{30^2} \qquad (4)$$

$$a' = 1.286P_o, \qquad b' = 2057P_o$$

الإجهاد المحيطي، $$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

الأنبوبة الداخلي،

$$\sigma_h = -1.8P_o + \frac{720P_o}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = -2.6P_o$$

الأنبوب الخارجي،

$$\sigma_h = -1.286P_o + \frac{2057P_o}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 3.572P_o$$

يمكن استنتاج سماح الانكماش هكذا،

$$\Delta = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \sigma'_1)d$$

حيث أن σ_1 إجهاد الضغط على السطح الخارجي للأنبوب الداخلي σ'_1 إجهاد الشد على السطح الداخلي للأنبوب الخارجي و d القطر الوسيط.

$$\therefore \Delta = \frac{1}{200.10^3}(206P_o - 3.572P_o) \times 60 = 0.01$$

$$\therefore P_o = 5.4N/mm^2$$

ثانياً الإجهادات الناجمة من الضغط الداخلي:

الأنبوب المركب،

$$r = 20mm, \quad \sigma_r = -60N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$\sigma_r = a'' - \frac{b''}{r^2}$$

$$-60 = a'' - \frac{b''}{20^2} \qquad (5)$$

$$0 = a'' - \frac{b''}{40^2} \qquad (6)$$

من المعادلتين (5) و (5) نحصل على،

$$a'' = 20, \qquad b'' = 32000$$

$$\sigma_h = a'' + \frac{b''}{r^2} = 20 + \frac{32000}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = 100N/mm^2$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 55.6N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 40N/mm^2$$

وإجهاد الانكماش كما يلي:

الأنبوب الداخلي،

$$\sigma_h = -9.72 - \frac{3888}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = -19.4N/mm^2$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = -14.0N/mm^2$$

الأنبوب الخارجي،

$$\sigma_h = 6.94 + \frac{11108}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 19.3N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 13.9N/mm^2$$

ثالثاً: ناتج الإجهادات،

الأنبوب الداخلي،

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = 80.6N/mm^2$$

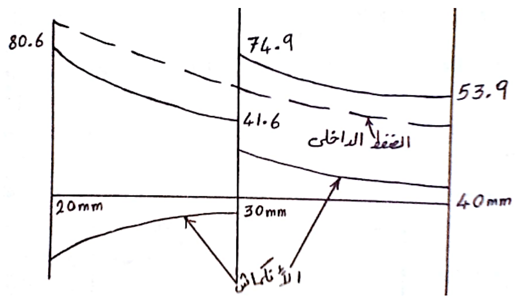
$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 41.6N/mm^2$$

الأنبوب الخارجي،

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 74.9N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 53.9N/mm^2$$

توزيع الإجهادات في المخطَّط الرسم (14.3) أدناه. حاول أن تُبيِّن القيم الرئيسة في المخطَّط والتي لم تظهر.



الرسم(14.3)

مثال(6):

قميص من الصلب طوله 120mm وقطره الخارجي 120mm تم كبسه على عمود من الصلب قطره 80mm بحيث كان الإجهاد المحيطي الأقصى في القميص $130N/mm^2$. أوجد الضغط الناجم على السطح المشترك. أرسم مخطَّط توزيع الإجهادات القطرية والمحيطية في جدار القميص.

الحل:

(أ) العمود:

$$\sigma_h = -\sigma_r = P_o$$

(ب) القميص:

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$r = 60mm, \quad \sigma_h = 0$$

$$\therefore -P_o = a - \frac{b}{40^2} \qquad (1)$$

$$0 = a - \frac{b}{60^2} \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على،

$$a = 0.8P_o, \quad b = 2880P_o$$

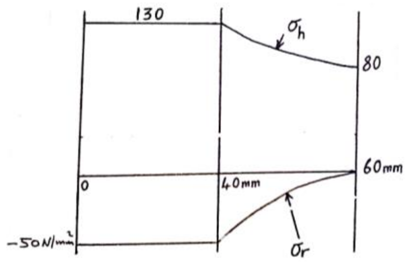
$$\sigma_h = a - \frac{b}{r^2} = 0.8P_o + \frac{2880P_2}{r^2}$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 130N/mm^2$$

$$\therefore 130 = 0.8P_o + \frac{2880P_o}{40^2}$$

$$\therefore P_o = 50N/mm^2$$

$$r = 60mm, \quad \sigma_h = 80N/mm^2$$



الرسم(14.4)

14.3 تمرين:

1. أسطوانة سميكة معرَّضة لضغط داخلي $60N/mm^2$ وإجهاد شد محيطي على السطح الداخلي $150N/mm^2$، أحسب الإجهاد المحيطي على السطح الخارجي وكذلك الطولي، قطرا الأسطوانة 120mm و80mm.

Ans. ($48N/mm^2$, $96N/mm^2$)

2. أحسب الضغط الداخلي المناسب في أسطوانة هيدروليك قطرها الداخلي 450mm وسمكها 250mm إذا كان الإجهاد المسموح به $15N/mm^2$.

Ans. ($9.5N/mm^2$)

3. أسطوانة قطرها الداخلي 150mm والخارجي 200mm مفتوحة من الجانبين ومعرَّضة لضغط خارجي $14N/mm^2$. أحسب إجهاد الضغط المحيطي الأقصى وتقلص قطري الأسطوانة الخارجي والداخلي $E = 200kN/mm^2$ ، $\nu = 0.28$.

Ans. (0.046mm, 0.048mm, $64N/mm^2$)

4. أنبوب مركَّب قطره الداخلي 150mm والخارجي 250mm، تم عمله بكبس أنبوب على الآخر من نفس المادة وكان القطر الوسيط 200mm. إذا كان سماح الانكماش 0.05mm أحسب الضغط القطري بين الأنبوبين عند القطر المشترك. $E= 200N/mm^2$ أوجد أيضاً الإجهاد المحيطي الأقصى والأدنى في كلا الأنبوبين الناجم من الانكماش. إذا تعرَّض الأنبوب إلي ضغط داخلي $70N/mm^2$، فكم تكون الإجهادات على السطحين الداخلي والخارجي لكل أنبوب؟ أرسم مخطَّط يوضِّح توزيع الإجهادات المحيطية قبل تسليط الحمل الداخلي وبعده.

الإجابة: الإجهاد N/mm^2

	الأنبوب الداخلي		الأنبوب الخارجي	
	75mm	100mm	100mm	125mm
الانكماش	−28.1	−22	28	21.9
الضغط	148.8	100.9	100.9	78.8
الناتج	120.7	78.9	128.9	100.7

5. أحسب التغير في قطر عمود مصمت قطره 100mm معرَّض لضغط $80N/mm^2$. خذ $E = 200kN/mm^2$ ، $\nu = 0.28$.

Ans. (0.0288)

6. قميص نحاس قطره الخارجي 60mm تم كبسه على عمود صلب قطره 40mm قطر القميص الداخلي كان أصغر من قطر العمود قبل كبسه وكان الفرق بينهما 0.05mm.

أوجد:

(أ) الضغط بين العمود والقميص.

(ب) الإجهاد المحيطي الأقصى في القميص.

(ج) التغير في القطر الخارجي للقميص.

للصلب $E = 200kN/mm^2$ ، $\nu = 0.29$.

للنحاس $E = 120kN/mm^2$ ، $\nu = 0.34$.

Ans. ($+0.0214mm$, $115.8N/mm^2$, $44.6N/mm^2$)

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الأول " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1978م).

2. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثاني " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1982م).

3. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثالث " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1990م).

4. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في متانة المواد " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1995م).

5. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في أساسيات المرونة واللدونة " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1998م).

6. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في ميكانيكا المواد الأجزاء 1 ، 2 ، 3 " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1995م).

الكتب والمراجع الإنجليزية:

1. William A. Nash and C.E.N Sturgess, "Strength of Materials", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Company, New York, 1997.
2. Urry S. A. and Turner P.J., "Solving Problems in Solid Mechanics", Vol2, Longman Scientific & Technical, UK, 1986.
3. James M. Gere and Stephen P. Timoshenko, "Mechanics of Materials", Van Nostrand Rienholds, UK, 1987.
4. Ryder, "Strength of Materials" , 1969.