

الأكاديمية العربية الدولية

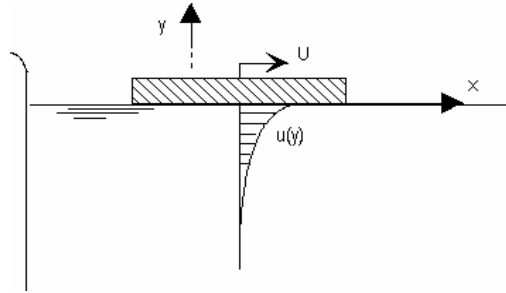


الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية المقررات الجامعية

1 تعريفات أساسية

1.1 تُطلق كلمة **مائع** بشكل عام على السوائل والغازات. وميكانيكا الموائع تُعنى باستنباط العلاقات الأساسية التي تحكم حركة و سكون الموائع. وتضم وسائل هذا الاستنباط النماذج الرياضية التي تُبنى على ما يعرف بقوانين الحفظ الأساسية، إضافة إلى التجربة حين تقصر الوسائل النظرية عن الاستنباط. يُعرّف المائع بأنه المادة التي يتغير شكلها باستمرار عند تعرضها لإجهاد قصي، مهما صغر هذا الإجهاد.



الشكل 1.1

يتضح معنى هذا التعريف من التجربة البسيطة الموضحة في الشكل (1.1) حيث نرى جسماً صلباً يتعرض لقوة أفقية صغيرة تعمل على تحريكه في اتجاه x الموجب. طبقة السائل المتاخمة للجسم تتحرك بسرعة تساوي تماماً سرعة الجسم. ويلاحظ في التجربة

تحرك طبقات السائل الأبعد فالأبعد بسرعات تقل تدريجياً في اتجاه y السالب حتى تختفي تماماً. وهذه هي السمة المميزة للموائع، ولا تُعرف في غيرها إذا ضُغِف الإجهاد القصي المبدول.

1.2 نظام الوحدات المستخدم في هذا الكتاب هو النظام العالمي للوحدات (SI). القائمة أدناه تبين وحداته الأساسية.

الطول	الكتلة	الزمن	درجة الحرارة	القوة	الطاقة	القدرة	الضغط
m	kg	s	K	N	J	W	Pa
متر	كيلو غرام	ثانية	كلفن	نيوتن	جول	وات	باسكال

ويمكن اشتقاق وحدات المتغيرات الأخرى من الوحدات أعلاه. كما يمكن استخدام المعامل $E3$ أو 10^3 ومشتقاته إذا صغرت أو كبرت قيمة المتغير كما يلي:

10^{-6}	10^{-3}	10^6	10^3
E-6	E-3	E6	E3
μ	m	M	k
مايكرو	ملي	ميغا	كيلو

1.3 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر كثيراً من متوسط المسار الحر للجزيئات. ويصدق هذا الاعتبار على كل التحليلات الواردة في هذا الكتاب.

1.4 الكثافة

باعتبار أن الحجم V_0 هو مكعب أصغر مسافة ترد في التحليل وتستوفي شرط الكمية المتصلة فإن الكثافة ρ تعرف كما يلي:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow V_0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$$

حيث m الكتلة بالكيلوغرام و V الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة kg/m^3 .

1.5 الكثافة النسبية s

هي كثافة المادة منسوبة إلى الكثافة المعيارية للماء ، وهي 1000 kg/m^3 .

$$s = \rho / \rho_w$$

1.6 قانون الغاز الكامل

$$p = R\rho T \dots\dots\dots (1.1)$$

يربط القانون الضغط المطلق للغاز p بالدرجة المطلقة للحرارة T و الكثافة ρ . R ثابت الغاز و قيمته للهواء $287 \text{ J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$.

1.7 السريان الانضغاطي و السريان اللانضغاطي

يوصف السريان بأنه انضغاطي إذا كانت تغيرات الكثافة فيه معتبرة. أما إذا كانت تغيرات الكثافة صغيرة نسبياً فعندئذ يوصف السريان بأنه لانضغاطي.

1.8 السريان الرتيب

هو السريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن عند أي موضع محدد.

1.9 السريان المنتظم

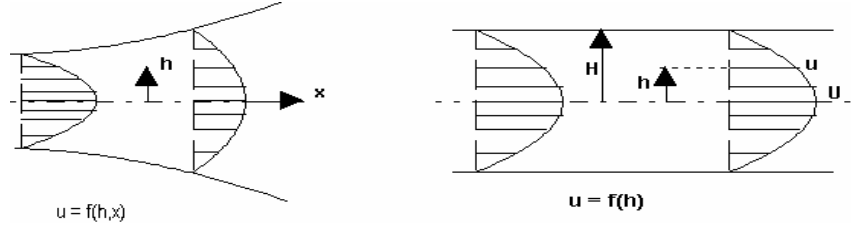
يوصف السريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل من خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع .

1.10 خط الانسياب

يُعرف خط الانسياب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

1.11 أبعاد السريان

يوصف السريان بأنه أحادي، ثنائي أو ثلاثي البعد بُناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن أن يوصف بها. الشكل (1.2) يعطي مثالاً لسريان أحادي البعد وآخر ثنائي البعد، حيث تعتمد السرعة على الإحداثي h في المثال الأول وتعتمد على الإحداثيين x و h في الثاني.



الشكل 1.2

1.12 السريان الصفائحي والسريان المائل

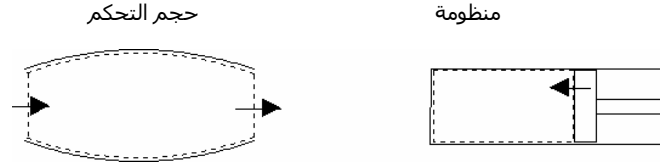
يتصف السريان الصفائحي بثبات الشكل والانسائية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها البعض في شكل صفائح أو رقائق، بينما يتصف السريان المائل بالعنف والاضطراب.

يمكن استنباط الأسس التي تحكم تحول السريان من إحدى الحالتين إلى الأخرى بتأمل سريان الماء من صنوبر. عند فتح الصنوبر قليلاً نلاحظ انتظاماً في سريان الماء وثباتاً في شكله دون اضطراب كأنه مكون من صفائح أسطوانية تنزلق على بعضها البعض. يوصف هذا السريان بأنه صفائحي. بزيادة معدل السريان يُمور الماء و يضطرب ويفقد انتظامه ويوصف حينئذ بأنه مائل.

ويمكن إثبات أن التحول من الحالة الصفائحية إلى الحالة المائلة عند معدل سريان ثابت يحدث بزيادة السرعة أو زيادة القطر أو إنقاص اللزوجة. ويجمع المتغيرات الثلاثة مقدار لا بُدّي يعرف بعدد رينولز Re يحكم التحول المذكور. و يحدث هذا التحول للسريان في الأنابيب في المدى $2000 \leq Re \leq 4000$. و يسمى عدد رينولز الذي يحدث عنده التحول **عدد رينولز الحرج** Re_c .

يتسم توزيع السرعة للسريان الصفائحي داخل الأنابيب بشكل المقطع المكافئ بينما يكون هذا التوزيع معقداً نسبياً في حالة السريان المائل.

1.13 المنظومة وحجم التحكم



الشكل 1.3

المنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدّها عن بقية المائع جدار تخيلي أو حقيقي ويمكن أن يتغير موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن أن تتغير المادة داخل حجم التحكم مع الزمن. الشكل (1.3) يبين أمثلة للمفهومين.

1.14 القوة الجسمية والقوة السطحية

القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة الكهرومغناطيسية. والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتنحصر في الضغط والقص.

1.15 الإجهاد

الإجهاد هو القوة السطحية العاملة على وحدة مساحة

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

و للإجهاد مركبتين إحداها عمودية و الأخرى مماسة

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_t$$

ويُفضل في ميكانيكا الموائع استخدام تعبير الضغط p في الاتجاه المتعامد حيث

$$\underline{\sigma}_n = -p\underline{n}$$

ويستخدم تعبير الإجهاد القصي τ في الاتجاه المماس حيث

$$\underline{\sigma}_t = \underline{\tau}$$

وبذلك

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n} + \underline{\tau} \dots\dots\dots(1.2)$$

1.16 الضغط المقياسي والضغط الفراغي

الضغط المقياسي = الضغط المطلق - الضغط الجوي

الضغط الفراغي = - الضغط المقياسي

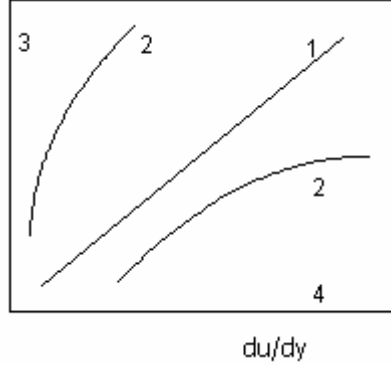
1.17 الإجهاد القصي

تُنسب إلى نيوتن العلاقة النظرية بين الإجهاد القصي τ وممال السرعة في الاتجاه

المتعامد $\frac{\partial u}{\partial y}$ للسريان الصفائحي وهي:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots(1.3)$$

1 نيوتوني
2 غير نيوتوني
3 صلب
4 مثالي



الشكل (1.4)

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلِم أنها صحيحة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية مثل الماء والهواء و الوقود النفطي. و سُمي ثابت المعادلة μ باللزوجة أو اللزوجة المطلقة أو اللزوجة الحركية، ووحدتها Pa.s . وتعرف الموائع التي تستجيب لهذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع **النيوتونية** - الشكل (1.4).

تُسمى فصيلة الموائع التي لا

تُعطي علاقة خطية بين القص وممال السرعة موائع **لاننيوتونية**. أمثلة لها البوية و النفط الشمعي.

تؤثر درجة الحرارة في قيمة اللزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل وتزيد مع ازدياد الحرارة للغازات .

تُعرف اللزوجة الكينماتية ν كما يلي:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

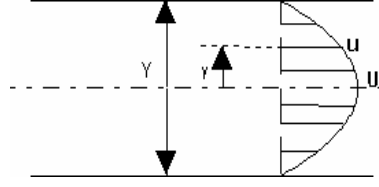
ووحدتها m^2/s .

1.18 السريان اللزجي و السريان اللالزجي

يُعرف السريان بأنه لزجي إذا نشأت فيه قوة قص ذات مقدار معتبر مقارنةً بالقوى الأخرى و إلا فيعتبر السريان لالزجي. و بمراجعة المعادلة (1.3) نرى أن مقدار القص يتعلق بحاصل ضرب اللزوجة وممال السرعة. فإذا عظم إحداهما أو كلاهما عظمَت القوة اللزجية و سُمي السريان لزجياً .

مثال

يسري ماء سرياناً صفائحياً رتيباً في مجرى متوازي الجدران عرضه 20mm . السرعة في خط النصف 0.1m/s . درجة حرارة الماء 25°C . قدر الإجهاد على الجدران.



الشكل 1.5

توزيع السرعة في مقطع المجرى للسريان الصفائحي

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{2y}{Y} \right)^2$$

المعادلة (1.3) تربط الإجهاد القصي بالسرعة عند الجدار

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$$

$$\frac{du}{dy} = U \left[-\frac{8y}{Y^2} \right] = -8 \frac{yU}{Y^2}$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_w = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\pm \frac{Y}{2}} = 4 \frac{U}{Y} = 20 s^{-1}$$

قائمة خواص الماء عند 25°C (الملحق أ)

$$\rho = 997.1 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.897 \text{E-6 m}^2/\text{s}$$

$$\mu = \rho \nu = 8.94 \text{E-4 Pa.s}$$

$$\tau_w = 0.018 \text{ Pa}$$

اتجاه القوة اتجاه x الموجب.

مثال

يتحرك مكبس قطره 50.0mm داخل اسطوانة قطرها الداخلي 50.1mm. أحسب النقصان في المائبة في القوة المقاومة عندما ترتفع درجة حرارة المزلق بفعل الحركة من 20°C إلى 120°C .
استخدم الخواص المدرجة أدناه لزيت التزليق وافترض ثبات سرعة المكبس وثبات أبعاده.

$T^{\circ}\text{C}$	$\nu \times 10^6, \text{ m}^2/\text{s}$	$\mu \times 10^{-3}, \text{ Pa.s}$
20	9.2	8.2
30	7.5	6.6
40	6.5	5.5
60	4.7	4.0
80	3.7	3.2
100	3.2	2.46
120	2.8	2.10

القوة المقاومة F

$$F = \tau A_w = A_w \mu \frac{du}{dr}$$

بافتراض ثبات السرعة والأبعاد

$$F = \text{const. } \mu$$

$$\frac{\Delta F}{F} 100 = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} 100$$

خواص الزيت

$$\mu_{20} = 8.2\text{E-3 Pa.s} , \mu_{120} = 2.1\text{E-3 Pa.s}$$

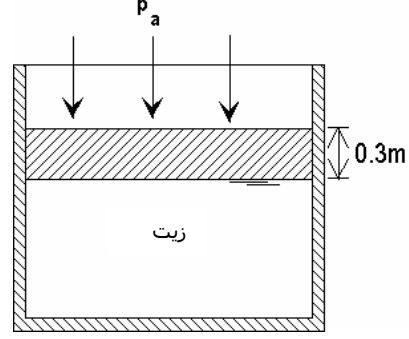
$$\Delta \mu = 6.1\text{E-3}$$

$$\frac{\Delta F}{F} (100) = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} (100) = \mathbf{74\%}$$

مسائل

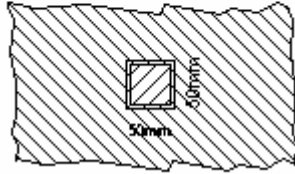
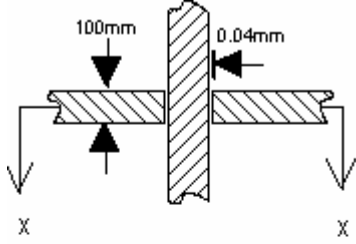
- 1.1** اللزوجة المطلقة للهواء عند درجة الحرارة 35°C تساوي $2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. أحسب اللزوجة الكينماتية عندما يكون الضغط 0.1 MPa .
[$17.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$]

- 1.2** يوضح الشكل (1.6) مقطع اسطوانة ومكبس مستو تماماً على سطح زيت. سمك المكبس 0.3 m . بافتراض أن الضغط الجوي 0.101 MPa و أن الكثافة النسبية للمكبس المصنوع من الصلب 7.8 أحسب الضغط على سطح الزيت.
[0.124 MPa]



الشكل 1.6

- 1.3** جسم يزن 500 N ومساحة سطحه السفلي 0.2 m^2 ينزلق على سطح مائل بزاوية 30° مع الأفقي . لزوجة المزلق $0.2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.
وسرعة الجسم المتحرك 1.0 m/s . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المزلق خطي أحسب سمك طبقة المزلق.
[0.16 mm]



المقطع XX

الشكل 1.7

- 1.4** يوضح الشكل (1.7) قضيب ذا مقطع مربع، ضلعه 50 mm يتحرك في مجرى معدني مغلف بمزلق لزوجته الكينماتية $5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. وكثافته النسبية 0.86 . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المزلق خطي أحسب قوة الإعاقة اللزجية على القضيب عندما تكون سرعته 20 m/s .
[43 N]

1.5 القائمة أدناه توضح نتيجة تجربة لسريان ماء درجة حرارته 20°C في قناة عرضها 100mm:

y (mm)	40	30	20	10	5	0	-5
u (m/s)	5.0	8.0	11.0	12.5	13.0	13.2	13.0

حُسبت y من الخط المركزي للقناة . أرسم توزيع السرعة وأثبت إمكانية تقريبها للعلاقة الرياضية:

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

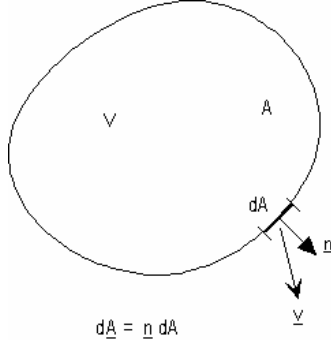
حيث a_0 و a_1 و a_2 ثوابت.

أحسب الإجهاد القصي عند الجدارين مستخدماً العلاقة أعلاه . [0.5Pa]

2 المعادلات الأساسية في ميكانيكا الموائع

تُرسى في هذا الفصل القواعد الأساسية لميكانيكا الموائع. وهي معادلات الحفظ الثلاث: حفظ الكتلة وحفظ الطاقة وحفظ كمية التحرك. ويُقدّم لذلك بتعريف متجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ .

2.1 متجه السريان



الشكل 2.1

الحجم التحكمي الموضح في الشكل (2.1) حجمه V ومساحة سطحه A . بالتركيز على المساحة التفاضلية dA فان الكتلة الخارجة عبرها هي dm في الوقت dt ليصبح معدل السريان $\dot{m}$. سرعة السريان في الموضع هي المتجه $\underline{v}$ بزاوية α مع المتجه أحادي الطول $\underline{n}$ والمتعامد على المساحة dA حيث

$$d\underline{A} = \underline{n} dA$$

$$d\dot{m} = \rho d\dot{V} = \rho \underline{v} \cos \alpha dA = \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

معدل سريان الكتلة عبر كل السطح

$$\dot{m} = \oint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} \dots\dots\dots(2.1)$$

نُعرّف متجه سريان الكتلة كما يلي:

متجه سريان الكتلة = (متجه السرعة) (الكتلة في وحدة حجمية) $\rho \underline{v}$
وبالمثل:

متجه سريان الطاقة = (متجه السرعة) (الطاقة في وحدة حجمية)

$$= \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v}$$

وبالمثل:

متجه سريان كمية التحرك = (متجه السرعة) (كمية التحرك في وحدة حجمية)

$$= \rho u \underline{i}, \rho v \underline{j}, \rho w \underline{k}$$

في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وبذلك فان معدل سريان الطاقة عبر السطح A

$$\iint \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{n} \cdot d\underline{A} \dots \dots \dots (2.2)$$

ومعدل سريان كمية التحرك عبر السطح A

$$\iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) \dots \dots \dots (2.3)$$

2.2 حفظ الكتلة

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:
 "معدل تراكم الكتلة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي يساوي صفر"

$$\iiint_V \rho dV = \text{الكتلة الكلية داخل الحجم التحكمي}$$

معدل ازدياد الكتلة داخل الحجم التحكمي

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

من المعادلة (2.1) خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي

$$= \oiint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

و بذلك

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \dots\dots\dots(2.4)$$

المعادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية.

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد (الشكل 2.2):

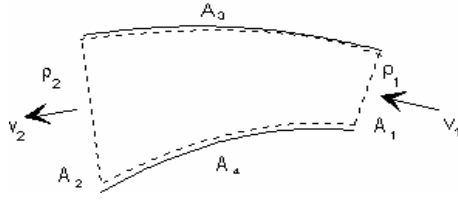
الحد الأول في المعادلة (2.4) يساوي

صفر نسبة لرتابة السريان.

السطحان (3) و (4) لا تعبرهما كتلة

ولذلك يصير فيهما تكامل الحد الثاني

من معادلة الكتلة صفراً .



الشكل 2.2

تختزل معادلة الكتلة بذلك إلى الصورة :

$$\iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2 = 0$$

و بملاحظة أن المتجه $\underline{A}$ يتجه إلى خارج الحجم التحكمي

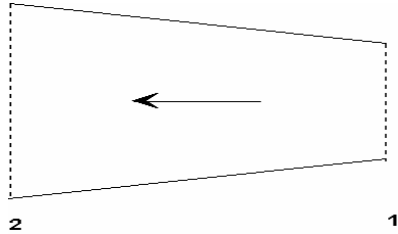
$$- \iint_{A1} \rho_1 v_1 dA_1 + \iint_{A2} \rho_2 v_2 dA_2 = 0$$

$$- \rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0$$

$$\rho v A = \text{ثابت} \dots \dots \dots (2.5)$$

مثال

سريان لانيضاغي في مجرى ناشر



A_1	A_2	v_1	ρ
0.2 m ²	0.3m ²	2.0m/s	1000kg/m ³

أحسب السرعة المتوسطة في المقطع (2) ومعدل سريان الكتلة.

السرعتان v_1 و v_2 هما السرعتان المتوسطتان في المقطعين (1) و (2) . بذلك يمكن

استخدام معادلة الكتلة في صورتها أحادية البعد (2.5)

$$\rho vA = \text{ثابت}$$

بما أن السريان لا انضغاطي $\rho = \text{ثابت}$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_2 = v_1 (A_1 / A_2) = 2.0 (0.2 / 0.3) = \mathbf{1.33 \text{ m/s}}$$

$$\dot{m} = \rho vA = \rho v_1 A_1 = 1000(2.0)0.2 = \mathbf{400 \text{ kg/s.}}$$

معادلة الاستمرارية:

يطلق هذا الاسم عامةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية. بدءاً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي إلى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد - أنظر المعادلة (3) في الملحق (ب).

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V (\nabla \cdot \rho \underline{v}) dV = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} \right) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل تكون قيمة المُكامل صفراً إذا كانت قيمة التكامل صفراً و كانت حدود التكامل اختيارية.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \dots \dots \dots (2.6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \dots \dots \dots (2.6b)$$

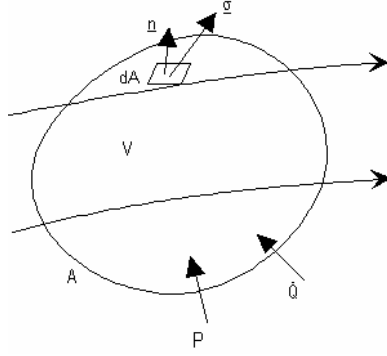
حيث u, v, w هي مركبات السرعة في الاتجاهات x, y, z . وفي حال أن السريان لا إنضغاطي

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (2.7)$$

2.3 حفظ الطاقة

تُستمد معادلة حفظ الطاقة من القانون الأول للحركية الحرارية مطبقاً على حجم تحكمي :

"معدل تراكم الطاقة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الطاقة إلى خارج الحجم التحكمي بانتقال الكتلة يعادل القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي مضافاً إليها معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي".



الشكل 2.4

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_A (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) dA + P + \dot{Q}$$

الحدان الأوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبذولة على المائع داخل

الحجم التحكمي، و $\dot{Q}$ معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي.

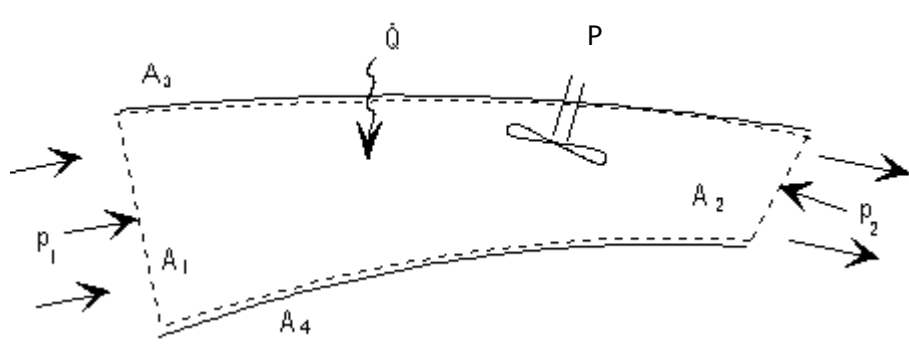
بتجاهل اللزج يصبح الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right] dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = - \iint_A p \underline{v} \cdot d\underline{A} + P + \dot{Q}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right] dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = P + \dot{Q} \dots \dots (2.8)$$

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد:

رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي صفر، و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4). وبذلك تُختزل المعادلة إلى الصورة



الشكل 2.5

$$-\rho_1 \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) v_1 A_1 + \rho_2 \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) v_2 A_2 = P + \dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتيب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

$$\dot{m} \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) + P + \dot{Q} = \dot{m} \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right)$$

$$\frac{e_1}{g} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m} g} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} g} = \frac{e_2}{g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots \dots \dots (2.9)$$

$\dot{Q} = 0$ في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة

$T_1 = T_2, \quad e_1 = e_2$ و تجاهل التغير في درجة الحرارة

$\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ويمكن اعتبار السريان لا انضغاطي

فتصبح المعادلة (2.9)

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots\dots\dots(2.10)$$

في حال أن القدرة P موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عَنفة.
في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{السمت الكلي} \dots\dots\dots(2.11)$$

أي: السمت الكلي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

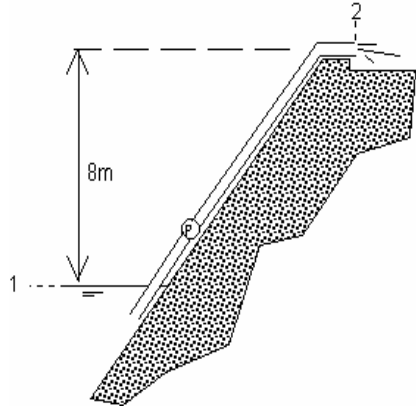
مثال

يُعرف الآتي عن وحدة ضخ ترفع الماء من
النيل إلى أعلى الجرف:

الرفع: 8m
معدل السريان الحجمي 15 l/s
قطر الأنبوب صعيد المضخة: 154mm
قطر الأنبوب سافل المضخة: 102mm
كثافة الماء: 1000kg/m³

المطلوب حساب:

- (أ) السرعة صعيد وسافل المضخة
- (ب) القدرة الخارجة من المضخة إذا اعتبرنا السريان لا لزجي.



الشكل (2.6)

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان اللاإنضغاطي تُعطي

$$v_u \cdot A_u = v_d \cdot A_d = \dot{V} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_u = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.154)^2} = 0.81 \text{ m/s}$$

$$v_d = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.102)^2} = 1.84 \text{ m/s}$$

حيث اللاحقة u تعني صعيد المضخة و اللاحقة d تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m} g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$P = \dot{m} g \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \right]$$

المقطعان (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

$$z_2 - z_1 = 8 \quad \text{كما أن}$$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر !

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v_d$$

معدل سريان الكتلة $\dot{m}$

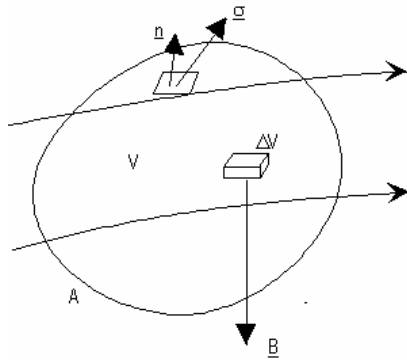
$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 1000(0.015) = 15.0 \text{ kg/s}$$

وتصبح المعادلة

$$P = (15.0)(9.81) \left[\frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8 \right] = 1203 \text{ W}$$

القدرة الخارجة = **1.2 kW**

2.4 حفظ كمية التحرك



الشكل (2.7)

يُستمد هذا القانون من قانون نيوتن الثاني للحركة مطبقاً على حجم تحكمي:

" معدل تراكم كمية التحرك داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان كمية التحرك إلى خارج الحجم التحكمي بانتقال الكتلة يعادل مجموع القوى المؤثرة على المائع".

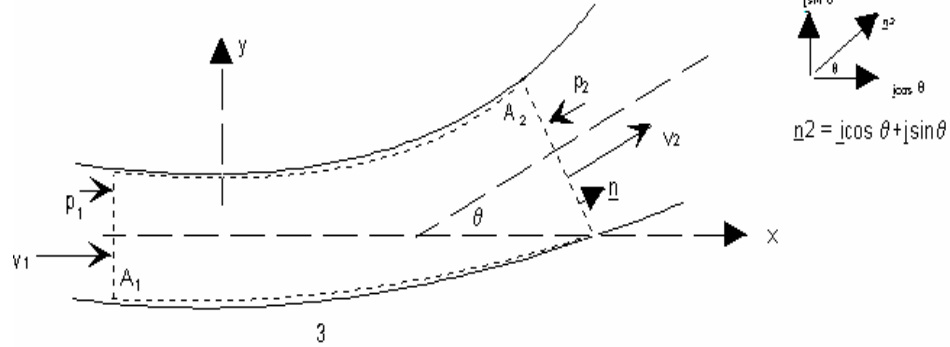
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \dots\dots\dots(2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد $\underline{\sigma}$ يساوي مجموع المتجهين $\underline{p}$ و $\underline{\tau}$. كما أن $\underline{B}$ هي القوة الجسمية على وحدة حجمية و تتمثل في الأحوال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمية أي $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$.

القوة الناشئة عن السريان داخل أنبوب منحنى:

نسعى هنا للاستفادة من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) لتقدير القوة المؤثرة على الأنبوب المنحني نتيجة لسريان رتيب لا انضغاطي أحادي البعد.



الشكل (2.8)

نفترض كذلك استواء الخط المركزي للأنبوب على المستوى $x-y$. بتطبيق هذه الافتراضات على المعادلة (2.12) تجوز رتبة السريان إلغاء الحد الأول. و يعطي الحد الثاني:

$$\begin{aligned} \oint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) &= -\rho \underline{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 \underline{n}_2 \\ &= -\rho \underline{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}) \end{aligned}$$

و الحد الثالث:

$$\iiint_V \underline{B} dV = \iiint_V -\rho g \underline{k} dV = -\rho g V \underline{k}$$

عند تطبيق الحد الرابع على السطحين (1) و (2) نراعي أن مركبة القص عليهما تساوي الصفر و يُمثّل الحد الرابع بالضغط وحده. أما على السطح المنحني (3) فكلّا من القص والضغط ذوا قيم غير صفرية، إلا أن توزيعهما على السطح غير منتظم. ويمكن استخلاص تأثيرهما سوياً كرد فعل $\underline{R}$ من السطح (3) على الحجم التحكمي.

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$\begin{aligned} \oint_A \underline{\sigma} dA &= \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 dA_3 \\ &= \iint_{A_1} p_1 dA_1 \underline{i} + \iint_{A_2} -p_2 dA_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}) + \underline{R} \\ &= p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \end{aligned}$$

و تصبح معادلة حفظ كمية التحرك

$$\begin{aligned} -\rho \underline{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 \cos \theta \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 \sin \theta \underline{j} \\ = -\rho g \underline{k} + p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \end{aligned}$$

تعطي المعادلة المتجهة أعلاه ثلاث معادلات مقدارية للحركة في الاتجاهات x, y, z

$$R_x = \dot{m} (\underline{v}_2 \cos \theta - \underline{v}_1) + p_2 A_2 \cos \theta - p_1 A_1$$

$$R_y = \dot{m} \underline{v}_2 \sin \theta + p_2 A_2 \sin \theta$$

$$R_z = \rho g V$$

وبالرمز لقوى المائع على الأنبوب في الاتجاهات الثلاث F_x, F_y, F_z

$$F_x = \dot{m} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \cos \theta) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta \dots\dots\dots(2.13a)$$

$$F_y = -\dot{m} \underline{v}_2 \sin \theta - p_2 A_2 \sin \theta \dots\dots\dots(2.13b)$$

$$F_z = -\rho g V \dots\dots\dots(2.13c)$$

مثال

أحسب القوى في الاتجاهات x, y, z على كوع قائم الزاوية حجمه الداخلي 2 لتر و قطر مقطعه 100mm نتيجة لسريان زيت كثافته 850kg/m^3 بمعدل 30 l/s إذا عُلِم أن الضغط في المقطع الدخولي 0.20MPa والضغط في المقطع الخرجي 0.19MPa . أعتبر أن محور الكوع يطابق المستوى $x-y$.

تُطابق الافتراضات في هذا المثال افتراضات المعادلات (2.13)

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 = 7.85E-3 \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (850)30E-3 = 25.5\text{kg/s}$$

$$v_1 = v_2 = \dot{V} / A = 30E-3 / 7.85 E-3 = 3.82 \text{ m/s}$$

و الزاوية θ لهذه الحالة تساوي 90°

$$\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

و بذلك تعطي المعادلات (2.13)

$$F_x = 1668\text{N}, \quad F_y = -1590\text{N}, \quad F_z = -17\text{N}.$$

مسائل

2.1 أنبوب دائري المقطع نصف قطره R_1 موصل على التوالي بأنبوب أصغر نصف قطره R_2 . توزيع سرعة السريان في الأنبوب (1) يرتبط بالمسافة نصف القطرية r حسب العلاقة

$$v = b \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]$$

حيث b ثابت . أحسب :

(أ) معدل السريان الحجمي

(ب) السرعة القصوى في الأنبوب (1)

(ج) متوسط السرعة في الأنبوب (2) .

$$[\frac{1}{2} \pi b R_1^2, b, \frac{1}{2} b (R_1/R_2)^2]$$

2.2 يُعبر عن مُركبات السرعة u و v في الاتجاهين x و y لسريان لا انضغاطي بالمعادلتين:

$$u = b(x^2 + xy - y^2)$$

$$v = b(-2xy - 2yz + 2z^2)$$

حيث b ثابت. بتحقيق حفظ الكتلة استخلص مركبة السرعة في الاتجاه z , علماً بأن محصلة السرعة عند نقطة الأصل تساوي صفر.

$$[b(z^2 - yz)]$$

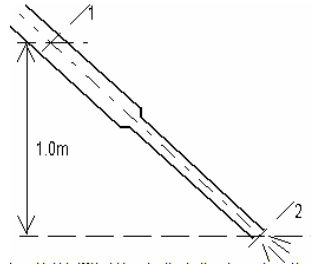
2.3 سريان غير رتيب أحادي البعد سرعة التيار فيه u حيث $u = u(x, t)$ ، يعبر فيه عن الكثافة ρ بالمعادلة

$$\rho = \rho_0 (2 - \cos \omega t)$$

حيث ρ_0 و ω ثوابت.

حدد العلاقة $u = u(x, t)$ إذا كانت $u(0, t) = U$

$$[U - \frac{\omega x \sin \omega t}{2 - \cos \omega t}]$$



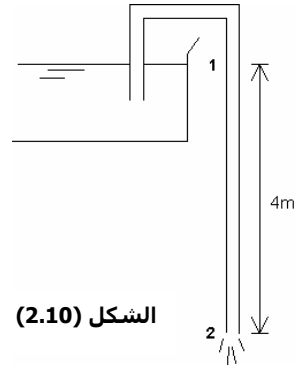
الشكل (2.9)

2.4 يوضح الشكل (2.9) أنبوب يستخدم لنقل سائل كثافته 917 kg/m^3 . الضغط القياسي عند المقطع (1) 1.8 kPa و عند المقطع (2) ضغطاً جويّاً. مساحة المقطع العرضي (1) 0.012 m^2 و المقطع (2) 0.01 m^2 أحسب السرعة عند المقطعين (1) و (2) ومعدل السريان الحجمي متجاهلاً الاحتكاك و الفواقد الأخرى.

[7.32m/s, 8.78m/s, 88 l/s]

2.5 يوضح الشكل (2.10) مستودع لسائل يجري إفراغه بخرطوم قطره 50 mm . متجاهلاً اللزج وغيره من الفواقد أحسب معدل السريان الحجمي. بين إمكانية زيادة معدل السريان بزيادة المسافة الرأسية (1—2) .

[17 l/s]

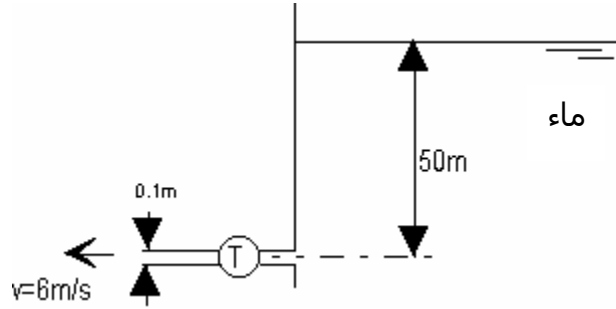


الشكل (2.10)

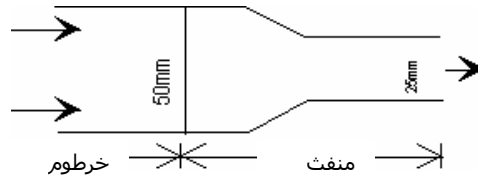
2.6 تستخدم مضخة لضخ منتج نفطي كثافته النسبية 0.86 بمعدل 1.5 l/s . القطر الصعيدي للأنبوب 20 mm والقطر السافلي 15 mm . سمت الضغط الفراغي صعيد المضخة 1.35 m وسمت الضغط القياسي سافل المضخة يساوي 7 m . أحسب (أ) السمت الناتج من المضخة (ب) القدرة المنتقلة من المضخة للمنتج النفطي .

[10.9m, 137W]

2.7 أحسب القدرة الداخلة للنفثة **T** المبينة في الشكل (2.11) متجاهلاً الفواقد.
[22.3kW]



الشكل 2.11



الشكل (2.12)

2.8 يوضح الشكل (2.12) مقدمة خرطوم إطفاء. باعتبار أن السمت الكلي القياسي المستخدم يساوي 100m أحسب مقدار واتجاه القوة الناتجة عن المنفذ على أيدي رجل الإطفاء .

[1.1kN]

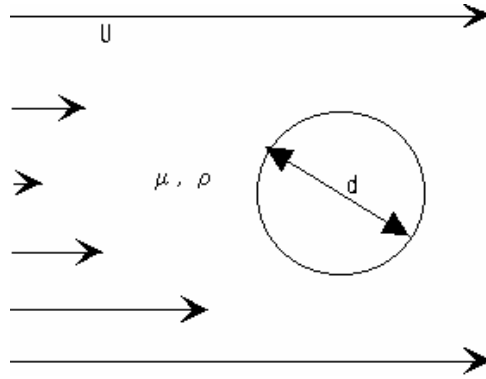
2.9 يسري ماء عبر كوع صافي إنحناءه 180° إلى الجو . مساحة المقطع الدخولي 0.0025m^2 و مساحة المقطع الخرجي 0.0005m^2 . السرعة في المقطع الدخولي 30m/s . متجاهلاً الفواقد وأثر الجاذبية أحسب مقدار القوة اللازمة لتثبيت الكوع و حدد اتجاهها .

[40.5kN, 0]

3 التحليل البعدي والنمذجة

3.1 أسس التحليل البعدي

يبدأ عادةً تحليل المسألة الهندسية بوضع النموذج الرياضي المبني على المعادلات الحاكمة والتي تشمل قوانين الحفظ و العلاقات الثانوية. و من ثم السعي لحل هذا النموذج والحصول على فهم كامل للحالة الهندسية المدروسة. إلا أن هناك قطاع كبير من المسائل الهندسية لا يمكن بلوغ الفهم الوافي لدوالها بالنمط النظري الخالص. و يتطلب بالتالي إجراء تجارب معملية لإدراك ما لم يدرك بالطرق النظرية. في ميكانيكا الموائع يتمثل ذلك في كل ما يتعلق بقوة الإعاقة و حركة السريان المائع. التجربة إذن تشكل جانباً رئيسياً من التحليل الهندسي. و نهدف من هذا الباب إلى التبصير بالأسس التي تنظم التجربة. على وجه التحديد أسس تسمية العدد الأدنى من المتغيرات التي ينبغي إجراء التجارب فيها. و سنتخذ مثلاً تصويرياً نوضح من خلاله الأسس المذكورة و هو مسألة الإعاقة الناتجة عن سريان المائع عبر كرة .



الشكل 3.1

معلومٌ عن هذه الحالة أن قوة الإعاقة D على كرة مستقرة في تيار رتيب تتأثر بسرعة التيار U ولزوجة المائع μ و كثافته ρ و قطر الكرة d ، وبذلك

$$f(D, d, U, \rho, \mu) = 0$$

للحصول على العلاقة بين الإعاقة D والمتغيرات الأربع الأخرى معملياً فإن الأسلوب المباشر هو تثبيت قيم ثلاثة من العناصر الأربعة و إجراء تجربة لتحديد تغيّر D مع العنصر الرابع. ثم تكرار التجربة لعلاقة D مع العناصر الثلاثة الأخرى كل على حدة. و نلاحظ صعوبة هذا الأسلوب المباشر في العمل التجريبي للآتي :

- (1) يحتاج لجهد كبير و وقت طويل إذا كثرت عدد العناصر
 - (2) صعوبة أو استحالة تثبيت بعض العناصر وترك عناصر أخرى متعلقة بها متغيرة. في المثال المطروح - مثلاً - يتم التغير في اللزوجة عادةً بتغيير المائع. إلا أن تغيير المائع يغير في الكثافة أيضاً!
- وبالبدل لهذا الأسلوب المباشر في التجريب هو إجراء التجارب بين مقادير لابعدية مكونة من هذه العناصر بدلاً من إجراءها على العناصر نفسها.

نحصل على المقدار اللابعدي بأن نضرب أو نقسم العناصر على بعضها البعض بحيث يصبح المقدار الناتج بغير أبعاد. عدد رينولز - على سبيل المثال - يساوي $\frac{\rho U d}{\mu}$. و تعطي

$$\text{مكوناته الوحدات} \frac{(kg\ m^{-3})(ms^{-1})(m)}{(kg\ m^{-1}s^{-1})} \text{ وتصبح بذلك وحدته } 1 \text{ ، فهو إذن مقدار}$$

لابعدي.

كيف يمكننا إذن تحويل العناصر الحاكمة للسريان إلى مقادير لا بعدية؟ نتبع في ذلك ما يعرف بنظرية بكنغهام.

نظرية بكنغهام (نظرية Π)

" إذا شملت مسألة ما العناصر: $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، حيث $f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ وشملت العناصر مجتمعة m بُعداً فإن عدد المقادير اللابعدية المستقلة تكون $(n - m)$ "

عند تطبيق النظرية على مثال الإعاقة على الكرة فإن: $n = 5$ و $m = 3$. والأخيرة هي الطول و الكتلة و الوقت (L,M,T) ، ولا نجد في العناصر الخمسة بُعداً آخر .
يصبح بذلك عدد المقادير اللابعدية المستقلة لهذه الحالة $n - m = 2$. أي انه يمكن اختصار المتغيرات إلى اثنين بحيث $f(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ وحيث Π_1 و Π_2 مقادير لا بعدية مكونة من عناصر المسألة الخمسة.

كيف يمكننا تحديد المقادير اللابعدية ؟

(1) نبدأ باختيار m عنصراً أساسياً من العناصر n . تستوفي العناصر الأساسية المختارة الشروط التالية :

- (أ) يستثنى العنصر الأول p_1 .
 - (ب) تشمل أبعاد العناصر المختارة مجتمعة كل الأبعاد الأساسية للسريان.
 - (ج) لا يكون أي من العناصر الأساسية المختارة أحد مضاعفات عنصر أساسي آخر .
- بالعودة إلى مثال الإعاقة على الكرة يمكن أن نختار d, U, ρ كعناصر أساسية.

(2) تُكوّن $(n - m)$ معادلة بُعدية تربط العناصر الأساسية بكل من العناصر الأخرى.

في مثال الإعاقة على الكرة :

$$\Pi_2 = d^{\rho_4} U^{\rho_5} \rho^{\rho_6} \mu \quad \text{و} \quad \Pi_1 = d^{\rho_1} U^{\rho_2} \rho^{\rho_3} D$$

توازن الأبعاد في المعادلة الأولى يعني

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_1} \left(\frac{L}{T} \right)^{a_2} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{a_3} \left(\frac{ML}{T^2} \right)^1$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{a_3+1} L^{a_1+a_2-3a_3+1} T^{-a_2-2}$$

$$a_1 + a_2 - 3a_3 + 1 = 0$$

$$a_3 + 1 = 0$$

$$-a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -1$$

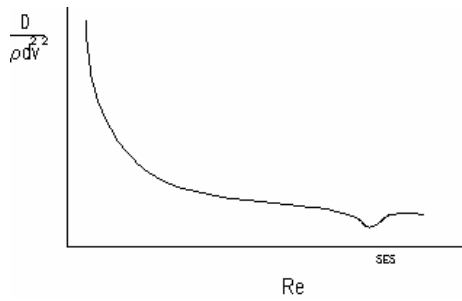
$$\Pi_1 = d^2 U^2 \rho^{-1} D = \frac{D}{\rho d^2 U^2}$$

و للمعادلة الثانية

$$\Pi_2 = d^{a_4} U^{a_5} \rho^{a_6} \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_4} \left(\frac{L}{T} \right)^{a_5} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{a_6} \left(\frac{M}{LT} \right)^1$$

$$a_4 = -1, \quad a_5 = -1, \quad a_6 = -1$$



$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

و تحدد العلاقة النهائية بتجربة يرصد فيها

تغير Π_1 مع Π_2 :

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

الشكل 3.2

3.2 بعض المقادير الالاعدية المهمة في ميكانيكا الموائع

(1) عدد رينولز Re

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

يبرز عدد رينولز كمقدار مهم حيثما يكون التأثير اللزحي مهماً مقارنةً بالتأثيرات الأخرى.

(2) عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث c سرعة الصوت. ويكون عدد ماخ مهماً في دراسة السريان إذا أعتبر السريان انضغاطياً.

(3) عدد فرود Fr

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

حيث g تسارع الجاذبية. و يكون عدد فرود مهماً حيث تكون قوة الجاذبية ذات قيمة مقدرة مقارنةً بالقوى الأخرى.

3.3 النمذجة

تعني النمذجة إجراء تجارب معملية على **أنموذج** للجسم الذي يراد استخدامه في الواقع. تتبع الحاجة للنمذجة من صعوبة أو استحالة إجراء التجارب على الجسم الأصل. و تنشأ الصعوبة المذكورة لكبر حجم الجسم مثلاً أو صغره في أحوال أخرى أو صعوبة إعداد الأحوال التشغيلية الملائمة. تتطلب النمذجة إذن إعداد أحوال معملية لإجراء التجارب على الأنموذج ثم التكهّن بالأحوال الفعلية للحركة عند استخدام الجسم الكامل في بيئته. ويسمى هذا الجسم الكامل في مرحلة التجريب **الطراز البدائي**. تتطلب النمذجة استيفاء ما يُعرف بالتشابه الفيزيائي بين الأنموذج و الطراز البدائي. ويعني هذا في ميكانيكا الموائع:

- (أ) وجود تشابه هندسي بين الأنموذج و الطراز البدائي
(ب) وجود تشابه حركي بين الأنموذج و الطراز البدائي. و يؤدي التشابه الحركي إلى تساوي القُوى اللابعديّة في الجسمين.

مثال

أنموذج كرة يساوي قطره نصف قطر الطراز البدائي. يُراد استخدام الطراز البدائي في الهواء عند سرعة نسبية تساوي 15m/s و يراد استخدام الماء في المعمل.
(أ) كم يجب أن تكون سرعة الماء لاستيفاء التشابه الحركي؟
(ب) إذا كانت قوة الإعاقة في المعمل 5N كم تكون قيمتها في حالة الطراز البدائي؟

$$\rho_a = 1.15 \text{ kg/m}^3 \quad \mu_a = 1.6\text{E-}5 \text{ Pa.s}$$

$$\rho_w = 1\text{E}3 \text{ kg/m}^3 \quad \mu_w = 8\text{E-}4 \text{ Pa.s}$$

(أ) المعادلة اللابعديّة الخاصة بهذه الحالة

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2} = f\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)$$

استيفاء التشابه الحركي يعني

$$\left. \frac{\rho v d}{\mu} \right|_p = \left. \frac{\rho v d}{\mu} \right|_m$$

$$v_m = v_p \frac{d_p}{d_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} \frac{\rho_p}{\rho_m} = 15(2) \frac{8E-4}{1.6E-7} = 1.7 \text{m/s}$$

(ب) لإيجاد الإعاقة على الطراز البدائي

$$\left. \frac{D}{\rho v^2 d^2} \right|_m = \left. \frac{D}{\rho v^2 d^2} \right|_p$$

$$D_p = D_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{v_p}{v_m} \right)^2 \left(\frac{d_p}{d_m} \right)^2 = 5 \frac{1.15}{1E3} \left(\frac{15}{1.7} \right)^2 2^2 = \mathbf{1.8N}$$

مسائل

3.1 كرة من الفولاذ قطرها d وكثافة مادتها ρ_s وضعت في مائع لزج كثافته ρ ولزوجته المطلقة μ . عقب التسارع الأولي بفعل الجاذبية g ثبتت السرعة الى أسفل عند v . استخلص تعبيراً رياضياً يربط المقادير اللابعدية الحاكمة للسريان، مستخدماً التحليل البعدي.

$$f\left(\frac{\rho v d}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{gd}}, \frac{\rho_s}{\rho}\right) = 0$$

3.2 الفقد في الضغط Δp لسريان لاإنضغاطي في أنبوب مستقيم يعتمد على كثافة المائع ρ ، متوسط السرعة v ، قطر الأنبوب d ، طول الأنبوب L ، اللزوجة الحركية μ وارتفاع الخشونة k استخلص تعبيراً عن Δp مستخدماً التحليل البعدي.

3.3 أنبوب قطره 15mm يستخدم لنقل الماء. لوحظ أن السريان يمرور عندما ترتفع السرعة إلى 0.15m/s . كم تكون السرعة الصفائحية القصوى لسريان هواء في أنبوب قطره 50mm و ذي خشونة مماثلة لأنبوب الماء. أعتبر $\nu_a = 1.7E-5 \text{ m}^2/\text{s}$ و $\nu_w = 1E-6 \text{ m}^2/\text{s}$

[0.77 m/s]

3.4 أنموذج لقاع سفينة مصغر إلى خُمس حجمها أختبر في نفق هوائي بسريان كثافته 25kg/m^3 ولزوجته $1.85E-5\text{Pa.s}$ وبسرعة تساوي 35m/s . قيست قوة الإعاقة على الأنموذج فكانت 65kN . قدر السرعة و الإعاقة على السفينة الكاملة في ماء البحر بكثافة تساوي 1025kg/m^3 ولزوجة $1.65E-3\text{Pa.s}$. [15.2 m/s , 12.6MN]

3.5 تطير طائرة فوق سطح البحر بسرعة 450m/s . على أي سرعة تطير لتحقيق تشابه القوى الانضغاطية على ارتفاع:

(أ) 800m (ب) 1600m ؟

تتغير درجة الحرارة مع الارتفاع على النحو :

الارتفاع (m)	0	800	1600
درجة الحرارة (K)	288	236	217

و تتغير سرعة الصوت مع درجة الحرارة على النحو: $c = \text{const} \cdot \sqrt{T}$.

4 السريان اللاإنضغاطي في الأنابيب

4.1 أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب

عند استخلاص معادلة الطاقة (2.10) تجاهلنا الأثر اللزجي للسريان باعتبار أن الإجهاد القصي في المعادلة الأساسية للطاقة يساوي الصفر. على الرغم من وجود أحوال تطبيقية تُخول هذا التبسيط إلا أن معظم التطبيقات الهندسية للسريان في الأنابيب تستدعي الاهتمام بالآثار اللزجية. وبذلك نحتاج إلى تعديل المعادلة (2.10) التي تخص السريان الرتيب أحادي البعد الللزجي لتشمل السريان اللزجي. و نُقدم هنا بالقول أن الإضافة المطلوبة تعتمد على علاقات تجريبية في حالة السريان المائل بينما يمكن في حالة السريان الصفائحي استخلاصها بعلاقات نظرية بحتة.

بدءً من المعادلة (2.10)، وهي القاصرة عن معالجة الاحتكاك

$$\frac{P}{m g} = \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \right]$$

فهي بذلك تنص على أنه إذا أُريد نقل مائع من الموضع (1) إلى الموضع (2) لمقابلة رفع يساوي $z_2 - z_1$ متر و زيادة في الضغط من p_1 إلى p_2 و زيادة في السرعة من v_1 إلى v_2 فاننا نحتاج إلى سمت ضخ يعادل $\frac{P}{m g}$ متراً. و يبدو قصور المعادلة وعدم توافقها

مع الواقع إذا نظرنا في حالة سريان في أنبوب طويل وأفقي لا نحتاج فيه لرفع ولا زيادة في الضغط أو السرعة فتشير المعادلة أعلاه إلى عدم الحاجة إلى مضخة ($P=0$)! يدل التحليل أعلاه إلى الحاجة إلى إضافة حد رابع إلى المعادلة لمقابلة الأثر الاحتكاكي. ولأن وحدات كل الحدود طولية (m) فإن الحد المضاف يكون أيضاً ذا وحدة طولية ويسمى سمت الاحتكاك h_f .

وبذلك نصح كتابة المعادلة إلى الصورة

$$\frac{P}{\rho g} = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \dots\dots\dots(4.1)$$

للوصول إلى العلاقة بين h_f ومتغيرات السريان الأخرى نطبق المعادلة (4.1) على سريان في أنبوب ثابت المقطع و أفقي بين موضعين (1) و (2) لا تتخللهما مضخة. فتصبح المعادلة

$$h_f = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{\Delta p_f}{\rho g} \dots\dots\dots(4.2)$$

النقصان في الضغط هنا ناتج كلياً عن الاحتكاك .
للتمهيد لإيجاد العلاقة التجريبية المطلوبة بين Δp_f وعناصر السريان نستخدم التحليل البعدي - الباب III - و نبدأ بتحديد العناصر المؤثرة :

$$\Delta p_f = f_1(\rho, \nu, d, L, \mu, k) \dots\dots\dots(1)$$

حيث k متوسط ارتفاع خشونة في باطن الأنبوب.

القائمة أدناه تبين قيم k بالملمتر لأنواع الأنابيب الأكثر استخداماً

مادة الأنبوب	k(mm)	مادة الأنبوب	k(mm)
أنابيب مسحوقة	0.0015	حديد مخرص	0.15
فولاذ تجاري	0.045	حديد زهرة	0.25
حديد مطاوع	0.045	خرسانة	0.3 - 3.0
حديد زهرة مسفلت	0.12	فولاذ ميرشم	1.0 - 10.0

العلاقة (1) تدل إلى عدد العناصر $n = 7$ وعدد الأبعاد الأساسية $m = 3$ ، وهي الكتلة والطول والوقت . بذلك تكون عدد المقادير اللابعدية المستقلة الحاكمة للسريان أربعة.

نتيجة التحليل البعدي لهذه الحالة - المسألة (3.2) - هي :

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = f_2\left(\text{Re}, \frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right)$$

تدل التجربة إلى أن $\frac{\Delta p_f}{\rho v^2}$ تتغير خطياً مع $\frac{L}{d}$

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = \frac{L}{d} f_3(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

و يقتضى العرف اعتبار مقام المقدار يسار المعادلة $\frac{1}{2} \rho v^2$

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{L}{d} f(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

و بالرجوع إلى المعادلة (4.2)

$$h_f = \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} f(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(4.3)$$

تعرف هذه بمعادلة **دارسي** .

معامل الاحتكاك f دالة ل Re و k/d أستخلصت تجريباً و بينت في أوجه مختلفة.
ينبغي الانتباه الى أن بعض المراجع تضع المعامل **4** في الجانب الأيمن للمعادلة (4.3).
يتبع ذلك أن قيمة f في تلك المراجع تعادل ربع قيمتها هنا.
الملحق (ج) به قائمة عددية تعطي معامل الاحتكاك f بدلالة Re و k/d . كما يمكن
استخدام العلاقات الرياضية الآتية لحساب قيمة f :

(أ) للسريان الصفائحي

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \dots\dots\dots(4.4)$$

وهذه المعادلة مستخلصة نظرياً ومثبتة بالتجربة .

(ب) للسريان المائل

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left(\frac{k/d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(4.5)$$

تعرف العلاقة (4.5) بعلاقة **كولبروك - وايت**. ويمكن ملاحظة التعقيد الناشئ عن أن f
تظهر في كل من جانبي العلاقة.

(ج) معادلة سوامي للسريان المائى

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(\frac{0.27k}{d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \dots\dots\dots(4.6)$$

معادلة سوامي أسهل استخداماً من معادلة كولبروك - وايت ونسبة الخطأ فيها لا تتجاوز 2% إذا كانت قيم k/d و Re في الحدود

$$10^{-6} \leq k/d \leq 10^{-2}$$

$$5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$$

مثال

أنبوب من الفولاذ التجاري قطره 250mm به سريان ماء بمعدل $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ و بدرجة حرارة 35°C .
(أ) قدر الفقد في السميت والنقصان في الضغط لمسافة أفقية 100m .
(ب) كم يكون معدل السريان الأقصى إذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m ؟

(أ) معادلة دارسي (4.3)

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} 0.25^2} = 2.04 \text{ m/s}$$

من قائمة خواص الماء عند 35°C :

$$\nu = 0.727 \text{E-6 m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 994.1 \text{ kg/m}^3$$

$$Re = vd/\nu = 7 \text{E}5$$

و هذا يعني أن السريان مائى

$$k/d = 0.045 \text{E-3} / 0.25 = 0.00018$$

باستخدام معادلة سوامي (4.6)

$$f = 0.015$$

$$h_f = 0.015 \frac{100}{0.25} \frac{2.04^2}{2(9.81)} = \mathbf{1.3m}$$

النقصان فى الضغط Δp_f

$$\Delta p_f = \rho g h_f = 994.1(9.81)1.3 = \mathbf{12.3kPa}$$

(ب) إذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m فان معادلة دارسي تتخذ الصورة:

$$1.0 = f \frac{100}{0.25} \frac{v^2}{2(9.81)} = 20.39 f v^2$$

$$f v^2 = 0.049 \dots\dots\dots (1)$$

نسبة لاعتماد f على السرعة v فان المعادلة أعلاه تحتاج لأسلوب تكرري. و يمكن البدء بافتراض سريان مفرط التمرور لاتعتمد f فيه على عدد رينولز، و من ثم السرعة. و يمكن من قوائم السريان الاحتكاكي الحصول على f لهذه الحالة بمعرفة الخشونة اللابعدية فقط.

عند هذا الافتراض الابتدائي $f = 0.0134$

باستخدام المعادلة (1) نحصل على $v = 1.91 \text{ m/s}$

و يمكن الآن الدخول للتقريب الثاني بحساب عدد رينولز ثم المعامل f

$$Re = 6.6E5, f = 0.015$$

و باستخدام المعادلة (1) نحصل على $v = 1.81 \text{ m/s}$

في التقريب الثالث نحصل على نفس النتيجة عند التقريب لمنزلتين عشريتين. و يعني هذا أن السرعة الصحيحة هي 1.81 m/s . و بالتالي معدل السريان الأقصى الممكن هو $0.089 \text{ m}^3/\text{s}$

مثال

أنبوب من الفولاذ المخرصن قطره الداخلي 78mm وطوله 200m ينقل الماء عند درجة الحرارة 25°C بمعدل 7 l/s من الموضع (1) إلى الموضع (2) حيث يرتفع الموضع الثاني عن الأول بمقدار 2m . سمت الضغط عند الموضع (1) يساوي 1.0m (فراغي) و الضغط جوي عند الموضع (2) .
المطلوب حساب القدرة الخارجة من المضخة.

عند 25°C

$$\nu = 0.897E-6 \text{ m}^2/\text{s}, \rho = 997.1 \text{ kg/m}^3$$

معادلة الطاقة (4.1) تعطي

$$P = \dot{m} g \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \right]$$

تساوي المساحات A_1 و A_2 يعنى $v_1 = v_2$

$$\dot{m} = \rho q = (997.1)(7E-3) = 6.98 \text{ kg/s}$$

$$v = q/A = 7E-3 / 4.78E-3 = 1.46 \text{ m/s}$$

$$Re = vd/\nu = 1.27E5$$

$$k/d = 0.15 / 78 = 0.0019$$

$$f = 0.025$$

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} = 6.88 \text{ m}$$

$$P = 6.98(9.81)[2.0 + 1.0 + 6.88] = \mathbf{0.68kW}$$

4.2 الفواقد الموضعية في الأنابيب

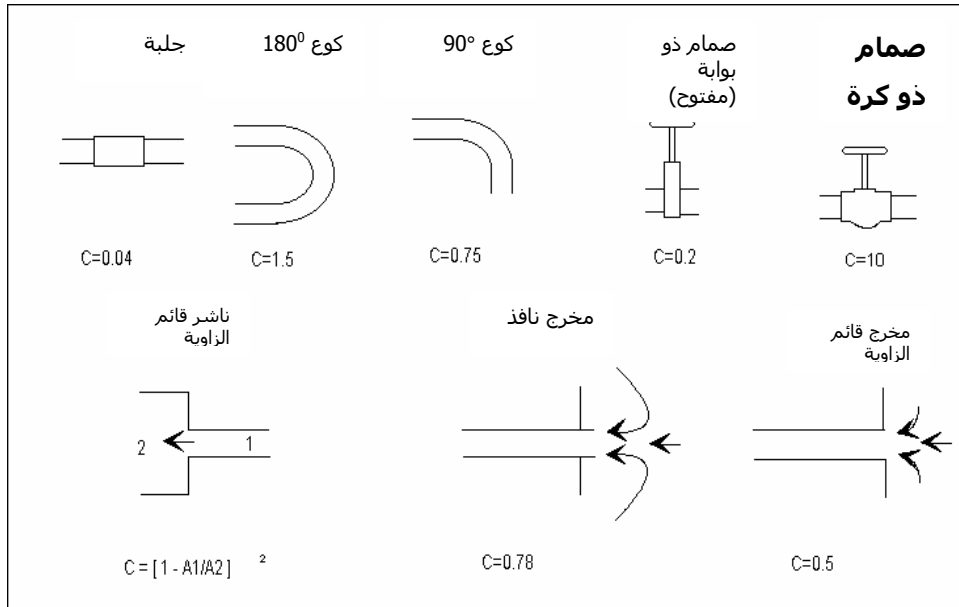
نُعيّ هنا بالفواقد في الطاقة الناشئة عن الانحناءات والعوائق في مسار المائع. على نحو ما فعلنا للفقد الاحتكاكي نعدل هنا المعادلة (4.1) بإضافة سمت للفقد الموضعي h_l

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_l \dots\dots\dots(4.7)$$

تدل التجارب على أن الفقد الموضعي h_l يمكن تقديره بالعلاقة العامة:

$$h_l = C_l \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(4.8)$$

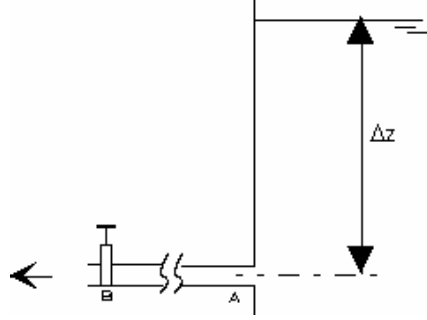
تحدد C لكل نوع من أنواع العوائق بالتجربة . الشكل(4.1) يوضح قيم C لبعض العوائق المألوفة.



الشكل 4.1

مثال

في الشكل (4.2) أذناه الأنبوب A-B من الفولاذ التجاري قطره 150mm وطوله 10m .
الصمام المستخدم صمام ذو بوابة مفتوح تماماً. معدل السريان 50 l/s واللزوجة الكينماتية
8E-7m²/s



الشكل 4.2

المطلوب :

- (أ) الفقد الكلي في السميت
(ب) ارتفاع الماء فوق الخط المركزي
للأنبوب .

باتخاذ المقطع (1) على سطح
السائل في المستودع والمقطع (2)
عند مخرج الأنبوب

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_a$$

$$v_1 = 0$$

بالرجوع لمعادلة الطاقة (4.7)

$$P = 0, \quad z_1 - z_2 = \Delta z$$

$$\Delta z = \frac{v_2^2}{2g} + h_f + h_l \dots \dots \dots (1)$$

$h_f + h_l$ = الفقد الكلي في السميت

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.05}{0.0177} = 2.83 \text{ m/s}$$

$$Re = vd/\nu = 0.53E6$$

(سريان مائى)

$$k/d = 0.045 / 150 = 0.0003$$

$$f = 0.016$$

$$h_f = 0.016 \frac{10}{0.15} \frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.44\text{m}$$

$$h_l = \left(\sum C \right) \frac{v^2}{2g} = [0.5 + 0.2] \frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.29\text{m}$$

$$\begin{aligned} h_f + h_l &= \text{الفقد الكلي في السميت (أ)} \\ &= 0.44 + 0.29 = \mathbf{0.73\text{m}} \end{aligned}$$

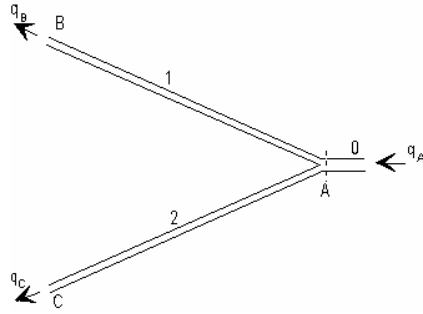
(ب) Δz ، المعادلة (1)

$$\Delta z = \frac{2.83^2}{2(9.81)} + 0.73 = 0.41 + 0.73 = \mathbf{1.14\text{m}}$$

4.3 الأنابيب المتفرعة

مثال

يوضح الشكل (4.3) منظومة أنابيب متفرعة. الأنبوب 0 يتفرع إلى الأنبوبين 1 و 2. أقطارهما d_1 و d_2 وأطوالهما L_1 و L_2 وارتفاعي الخشونة فيهما k_1 و k_2 . نقطة التفرع هي A ونقاط الخروج B و C. الضغط عند النقطتين B و C جوي - أي صفر مقياسياً. المراد في هذا المثال التوضيحي معرفة معدل السريان في الفرعين 1 و 2 إذا كان معدل السريان عند الموضع A يساوي Q_A .



الشكل 4.3

معادلة الطاقة بين الموضعين A و B

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + h_{f1} + \frac{p_B}{\rho g} \dots\dots\dots(1)$$

و بين الموضعين A , C

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h_{f2} + \frac{p_C}{\rho g} \dots\dots\dots(2)$$

بخصم (2) من (1)

$$h_{f1} - h_{f2} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \dots\dots\dots(3)$$

و باستخدام علاقة دارسي

$$f_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} - f_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{f_1 \frac{L_1}{d_1} + 1}{f_2 \frac{L_2}{d_2} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(4)$$

حفظ الكتلة :

$$q_A = q_B + q_C = \frac{\pi}{4} (d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2)$$

$$d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2 = \frac{4}{\pi} q_A \dots\dots\dots(5)$$

لأن المتغيرين f_1 و f_2 دوال للسرعتين v_1 و v_2 فأن المعادلتين (4) و (5) كافيتان للحل. و لأن f_1 و f_2 دوال غير بسيطة يفضل اجراء الحل تكررياً.

مُعْطيات عددية :

d_1	d_2	k_1	k_2	L_1	L_2	q_A	v
0.1m	0.2m	0.04mm	0.04mm	100m	100m	0.1m ³	8E-7m ² /s

المعادلة (4) تعطي

$$v_2 = v_1 \left(\frac{1000f_1 + 1}{500f_2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(6)$$

المعادلة (5)

$$v_1 = 12.73 - 4v_2 \dots\dots\dots(7)$$

المعادلتان (6) و (7) تعطيان

$$v_2 = \frac{12.73 \sqrt{\frac{1000f_1 + 1}{500f_2 + 1}}}{1 + 4 \sqrt{\frac{1000f_1 + 1}{500f_2 + 1}}} \dots\dots\dots(8)$$

التقريب الأول : سريان مفرط التمرور (قيمة f لا تعتمد هنا على Re)

$$k_1/d_1 = 0.0004 , \quad f_1 = 0.016$$

$$k_2/d_2 = 0.0002 , \quad f_2 = 0.014$$

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

$$v_1 = 1.86 \text{ m/s} , \quad v_2 = 2.72 \text{ m/s}$$

التقريب الثاني:

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{1.86(0.1)}{8E-7} = 2.3E5$$

$$Re_2 = 6.8E5$$

$$f_1 = 0.018$$

$$f_2 = 0.015$$

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

$$v_1 = 1.83 \text{ m/s} , \quad v_2 = 2.73 \text{ m/s}$$

التقريب الثالث :

$$Re_1 = 2.3E5$$

$$Re_2 = 6.8E5$$

وهي مطابقة لقيم Re فى التقريب الثاني. ويعنى ذلك

$$v_1 = 1.83 \text{ m/s} , \quad v_2 = 2.73 \text{ m/s}$$

وبذلك

$$q_B = 0.014 \text{ m}^3/\text{s}, \quad q_C = 0.086 \text{ m}^3/\text{s} .$$

سؤال للطالب: أحسب السمات المطلوب عند الموضع A ؟

مسائل

4.1 خط أنابيب أفقي من الحديد الزهرة قطره الداخلي 250mm ينقل نفطاً خاماً درجة حرارته 30°C بمعدل 50 l/s . قدر الفقد في السميت بسبب الاحتكاك للكيلومتر الواحد.

(عند درجة الحرارة 30°C خذ كثافة النفط 880kg/m^3 و لزوجته $7.5\text{E}-6\text{m}^2/\text{s}$)

[5.1m]

4.2 أنبوب أفقي من الحديد المخرصن قطره 50mm و طوله 100m ينقل نفطاً خاماً عند درجة الحرارة 20°C بمعدل 1.0 l/s .

(أ) وضح أن السريان في المدى الحرج لعدد رينولز.

(ب) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان صفائحيًا.

(ج) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان مائراً .

(عند درجة الحرارة 20°C خذ كثافة النفط 890kg/m^3 و لزوجته $9.2\text{E}-6\text{m}^2/\text{s}$)

[0.6m, 1.3m]

4.3 يراد ضخ كيروسين درجة حرارته 30°C عبر أنبوب قطره 300 mm وخشونته 0.25mm لمسافة 1500m بمعدل $0.1\text{m}^3/\text{s}$. يمكن اعتبار الضغط متساوي عند مدخل ومخرج الأنبوب. قدر القدرة المطلوبة من المضخة. (عند 30°C خذ كثافة الكيروسين 800kg/m^3 ولزوجته $2\text{E}-6\text{m}^2/\text{s}$).

[8.2 kW]

4.4 يسري الماء في أنبوب أفقي ناعم قطره 15mm . قيس الضغط في صعيد قطاع من الأنبوب طوله 50m و وجد مكافئاً ل 12m من الماء و عند المخرج مساوياً للضغط الجوي. باعتبار اللزوجة الكينماتية تساوي $1\text{E}-6\text{m}^2/\text{s}$. أحسب معدل السريان الحجمي.

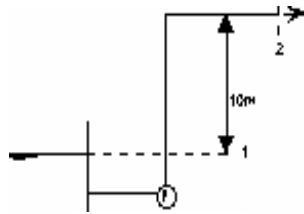
[0.3 l/s]

4.5 يصل بلدتي هجليج و صمت الجزء الرئيسي من الخط الناقل للنفط الخام. تقع هجليج على ارتفاع 400m فوق سطح البحر و صمت على ارتفاع 930m . المسافة بين الموقعين 1400km تقريباً. القطر الداخلي للأنبوب 0.7m . بافتراض أن السريان نيوتوني و أن معدلته $0.35\text{m}^3/\text{s}$ و كثافته 860kg/m^3 و لزوجته $2\text{E}-5\text{m}^2/\text{s}$ و متوسط ارتفاع خشونة الأنبوب 4.5E-5m أحسب:

- (أ) سمت الفقد الاحتكاكي
 (ب) السمت الكلي المطلوب
 (ج) قدرة الضخ الكلية المطلوبة.
 يمكن تجاهل ألفوا قد الثانوية.

[1960m, 2490m, 7.4MW]

4.6 أنبوب ناشر قائم الزاوية قصير الطول قطره الصعيدي 0.35m وقطره السافلي 0.7m يسري فيه الماء بمعدل $0.3\text{m}^3/\text{s}$. ضغط الماء في الجانب الصعيدي 5.0kPa . أحسب الفقد في السمت بسبب الناشر و أحسب الضغط في الجانب السافلي منه.
 [0.28m, 6.8 kPa]



الشكل 4.4

4.7 يوضح الشكل (4.4) منظومة ضخ تستخدم لرفع زيت عبر أنبوب قطره 50mm وطوله 100m وخشونته 0.1mm بمعدل 5 l/s . كثافة الزيت 870 kg/m^3 ولزوجته الحركية 0.008 Pa.s . أحسب القدرة المطلوبة من المضخة.
 أحسب النسبة المئوية للخطأ في إجابتك عند تجاهل الفواقد الموضعية.
 [1.36kw, 1.3%]

4.8 يعرف ما يلي عن منظومة أنابيب بفرعين (1) و (2):

$$d_1 = 200\text{mm} , \quad d_2 = 100\text{mm}$$

$$k_1 = k_2 = 0.2\text{mm}$$

$$L_1 = L_2 = 15\text{m}$$

عند مخرج الأنبوب (2) صمام ذو كرة مفتوح كلياً. المعدل الكلي للسريان عند نقطة التفرع 100 l/s وتساوي اللزوجة الكينماتية للسائل $8.5\text{ E-7m}^2/\text{s}$

(أ) أحسب معدل السريان في الأنبوبين.

(ب) أحسب معدل السريان إذا أستبعد الصمام.

[92.4 l/s ; 7.6 l/s ; 86.1 l/s ; 13.8 l/s]

5 ميكانيكا الموائع عند الاتزان النسبي

5.1 المعادلة الأساسية

يغطي هذا الباب ميكانيكا الموائع عند ما لا تكون لعناصر المائع حركة بالنسبة لبعضها البعض. ويشمل ذلك ما يعرف بسكون الموائع كما يشمل حركة المائع كوحدة واحدة بتسارع ثابت.

وبالنظر إلى معادلة كمية التحرك (2.12) فإن الاتزان النسبي يعني أن المقدار المعبر عن سريان التحرك عبر السطح التحكمي يساوي صفر أي:

$$\oint_A \rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = 0$$

كما أن الإجهاد القصي يساوي صفر ، فيصبح الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$ ونضيف الفرض الخاص بلامنضغاطية السريان فتصبح المعادلة (2.12)

$$\oint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) dV = \oint_V \rho g \underline{k} dV - \oint_A p \underline{n} dA$$

وبالرمز لمتجه التسارع $\underline{a}$ حيث $\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$

$$\oint_V \rho \underline{a} dV + \oint_V \rho g \underline{k} dV + \oint_A p \underline{n} dA = 0$$

و باستخدام نظرية التباعد - الملحق ب :

$$\oint_A p \underline{n} dA = \oint_V \nabla p dV$$

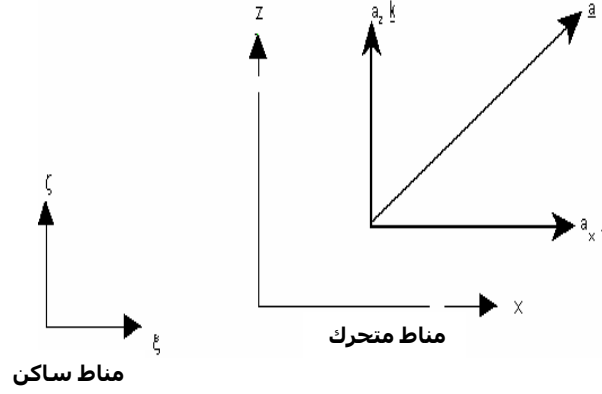
فتصبح معادلة كمية التحرك

$$\oint_V [\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p] dV = 0$$

وبما أن الحجم التحكمي V اختياري ونتيجة التكامل صفر :

$$\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p = 0 \dots\dots\dots(5.1)$$

5.2 توزيع الضغط في مجال ثنائي الأبعاد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت



الشكل 5.1

ندرس هنا حركة حاوية تتحرك بتسارع ثابت $\underline{a}$ بالنسبة للمناط الساكن $\zeta - \xi$. بالمقابل المناط $x-z$ مثبت على الحاوية المتحركة.

بما أن التسارع ثابت

المقدار $\ddot{\xi} = a_x = \text{ثابت}$ ، المقدار $\ddot{\zeta} = a_z = \text{ثابت}$

بالتعويض في المعادلة (5.1)

$$\rho(a_x \underline{i} + a_z \underline{k} + g \underline{k}) + \frac{\partial p}{\partial \xi} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \underline{k} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(a_z + g), \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x$$

استخلصت المعادلتان أعلاه بالنسبة للمناط الثابت $\zeta - \xi$. لتحويلهما للمناط المتحرك $x-z$ لاحظ الآتي :

$$\dot{\xi} = a_x t + c_1$$

باعتبار السرعة = 0 عند $t = 0$ $c_1 = 0$

$$\xi = \frac{1}{2} a_x t^2 + c_2$$

باعتبار أن المنطيين يتطابقان عند بدء الحركة $c_2 = x$

$$\xi = x + \frac{1}{2} a_x t^2$$

وبالمقابل

$$\zeta = z + \frac{1}{2} a_z t^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x \dots\dots\dots(5.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(g + a_z) \dots\dots\dots(5.2b)$$

وبمكاملة (5.2a)

$$p = -\rho a_x x + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$$

(5.2b) تعطى

$$f'(z) = -\rho(g + a_z)$$

$$f = -\rho(g + a_z)z + c$$

$$p = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z + c \dots\dots\dots(5.3)$$

وهي معادلة توزيع الضغط . ويحدد الثابت c من القيم الحدودية .

معادلة سطح السائل

تدل التجربة على أن سطح السائل يكون مستوياً مستقيماً ومائلاً في حال تعرض الحاوية لتسارع ثابت، لتقصي ما يدل عليه التحليل النظري في المعادلة (5.3)

$$p = p_a , \quad z = z_s$$

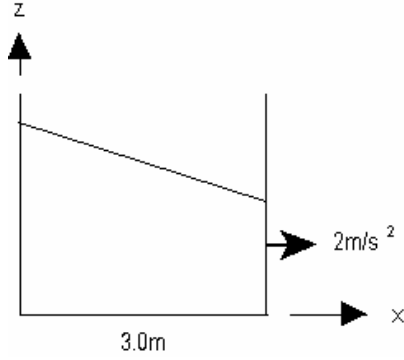
حيث p_a الضغط الجوي و z_s قيمة z عند سطح السائل .

$$p_a = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z_s + c$$

$$z_s = c' - \frac{a_x}{g + a_z} x \quad (5.4)$$

وهو خط مستقيم ميله $-\frac{a_x}{g + a_z}$.

مثال



الشكل 5.2

حاوية تحوي زيتاً كثافته 850 kg/m^3 وتتحرك بتسارع ثابت 2.0 m/s^2 في اتجاه x الموجب (الشكل 5.2). طول الحاوية 3.0 m . لوحظ أن أدنى مستوى للزيت 2.0 m فوق القاع. استخلص

- (أ) معادلة توزيع الضغط .
(ب) مقدار وموضع أقصى ضغط على الحاوية
(ج) معادلة سطح السائل وزاوية ميله .

(أ)

$$a_x = 2.0 \text{ m/s}^2, a_z = 0, \rho = 850 \text{ kg/m}^3$$

المعادلة (5.3) تعطي

$$p = -850(2.0)x - 850(9.81)z + c_1 = -1.7E3 x - 8.34E3 z + c_1$$

القيمة الحدودية $x = 3, z_s = 2, p = 0$

$$c_1 = 27.8E3$$

معادلة توزيع الضغط :

$$p = (27.8 - 1.7x - 8.34 z) E3$$

(ب) معادلة توزيع الضغط تعطي موضع الضغط الأقصى : $x = 0, z = 0$

$$\text{مقدار الضغط الأقصى} = 27.8 \text{ k Pa}$$

(ج) المعادلة (5.4) تعطي سطح السائل z_s .

لحساب قيمة ثابت المعادلة

$$z_s = -\frac{2}{9.81}x + c_2 = -0.2x + c_2$$

عند $z_s = 2$ ، $x = 3$

$$c_2 = 2.6$$

$$z_s = 2.6 - 0.2x$$

ميل السطح - 0.2

$$\tan\theta = -0.2$$

$$\theta = -11.3^\circ$$

5.3 توزيع الضغط في سائل ساكن

سكون السائل يعني أن التسارع $\underline{a}$ في المعادلة (5.1) يساوي صفر . فتصبح المعادلة

$$\rho g \underline{k} + \nabla p = 0$$

$$\rho g \underline{k} + \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = 0$$

وهذا يعني أن p لا تعتمد على x, y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

z هو المحور الرأسى ويكون موجباً في عكس اتجاه الجاذبية .

ونعرف البعد h في الاتجاه المعاكس لـ z ونقطة الأصل فيه عند سطح السائل. وبذلك فإن قيمة h هي العمق . و بالتالي

$$dh = -dz$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = \rho gh + c$$

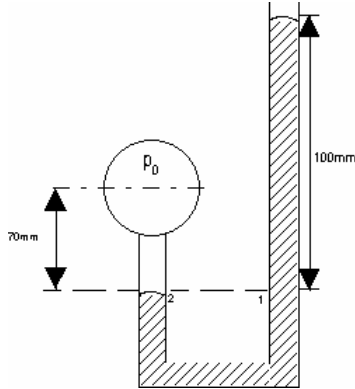
وباعتبار الضغط جوي عند السطح $c = p_a$

$$p = \rho gh + p_a \dots \dots \dots (5.5)$$

مثال

يستخدم مانومتر زئبقي لقياس ضغط زيت يسري في أنبوب . الكثافة النسبية للزيت والزئبق 0.85 و 13.6 .

(أ) قدر الضغط القياسي في الخط المركزي للأنبوب .



الشكل 5.3

- (ب) قدر الضغط المطلق في الخط المركزي للأنبوب إذا كانت قراءة البارومتر 0.75m
 (ج) إذا استخدم مانومتر مائي كم يكون الفرق في ارتفاعات السائل المانومتري ؟

الضغط عند الموضع (1) = الضغط عند الموضع (2)

باستخدام المعادلة (5.5) عند الموضعين

$$p_0 + 0.07 \rho_0 g = p_a + 0.1 \rho_m g$$

$$p_0 + 0.07(0.85E3)9.81 = p_a + 0.1(13.6E3)9.81$$

$$p_0 = 12.8E3 + p_a$$

(أ) الضغط القياسي في مركز الأنبوب = **12.8 kPa**

(ب) الضغط البارومتري = $h_b \rho_m g = 0.75 (13.6E3)9.81 = 0.1MPa$

الضغط المطلق = $12.8E3 + 100E3 = \mathbf{112.8 kPa}$

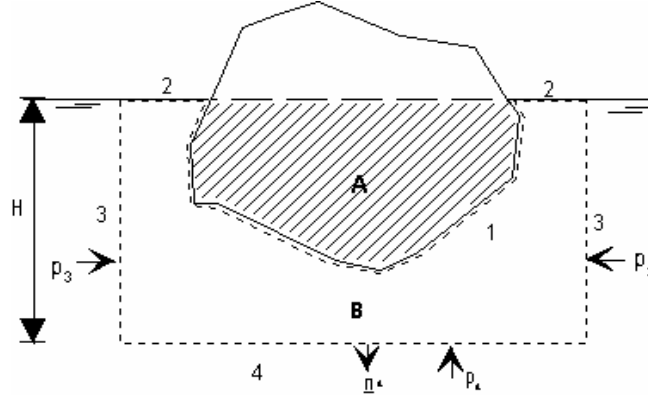
(ج) عند استخدام مانومتر مائي

$$h_w \rho_w g = h_m \rho_m g$$

$$1E3(9.81)h_w = 13.6E3(9.81)0.1$$

$$h_w = \mathbf{1.36m}$$

5.4 الطفو



الشكل 5.4

تعرف قوة الطفو بأنها القوة التي تعمل إلى أعلى على الأجسام المغمورة جزئياً أو كلياً في مائع . لاستخلاص تعبير عن هذه القوة نبدأ من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) مطبقة على الحجم التحكمي المبين في الشكل (5.4).

الحدين الأول و الثاني من المعادلة يساويان الصفر.

الحد الثالث:

$$\iiint_{V_B} \underline{B} \, dV = - \rho g V_B \underline{k}$$

الحد الرابع :

$$\oiint_A \underline{\sigma} \, dA = \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 \, dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 \, dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 \, dA_3 + \iint_{A_4} \underline{\sigma}_4 \, dA_4$$

على السطح (1): يساوي التكامل $\underline{R}$ وهي القوة التي يؤثر بها السطح الصلب على الحجم التحكمي .

على السطح (2) : قياسياً - $p_2 = p_a = 0$

على السطح (3) : تعمل الضغوط إشعاعياً إلى الداخل فتلغى بعضها البعض .

على السطح (4) :

$$\underline{\sigma}_4 = -p_4 \underline{n}_4 = p_4 \underline{k} = \rho g H \underline{k}$$

$$\iint_{A_4} \underline{\sigma}_4 dA_4 = \rho g H A_4 \underline{k} = \rho g (V_A + V_B) \underline{k}$$

بالتعويض في معادلة كمية التحرك :

$$0 = -\rho g V_B \underline{k} + \underline{R} + \rho g (V_A + V_B) \underline{k}$$

$$\underline{R} = -\rho g V_A \underline{k}$$

القوة على الجسم الطافي $\underline{F}_B$

$$\underline{F}_B = -\underline{R} = \rho g V_A \underline{k}$$

V_A يساوي حجم الجزء المغمور V_i

وبذلك تكون قوة الطفو

$$\underline{F}_B = \rho g V_i \underline{k} \dots\dots\dots(5.6)$$

مثال

برميل من الصلب قطره 0.6m وارتفاعه 0.9m ووزنه فارغاً 300N . ملأ بزيت كثافته 800 kg/m^3 ووضع في ماء كثافته 1000 kg/m^3 .

(أ) أثبت أن البرميل لا يغرس بكامله في الماء .

(ب) إذا بقى البرميل قائماً أحسب ارتفاع الجزء البارز منه .

(أ) في حالة التوازن :

$$F_B = W_d + W_o$$

حيث W_d وزن البرميل الفارغ و W_o وزن الزيت .

$$W_d = 300$$

$$W_o = (AH)\rho_o g = (\pi/4)(0.6)^2 0.9 (0.8 \times 10^3) 9.81 = 1997 \text{ N}$$

$$F_b = 300 + 1997 = 2297 \text{ N}$$

وبقانون الطفو

$$F_b = \rho_w g V_i = 1000(9.81)V_i = 2297 \text{ N}$$

$$V_i = 0.234 \text{ m}^3$$

$$V = AH = 0.254 \text{ m}^3$$

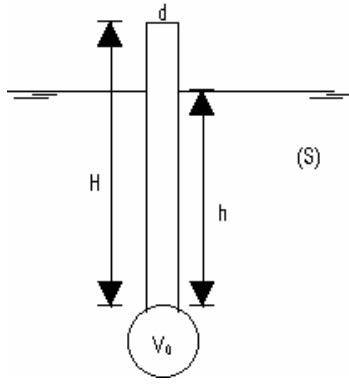
$$V > V_i$$

إذن البرميل لا يغطس تماماً .

$$\frac{V - V_i}{A} = \text{ارتفاع الجزء البارز (ب)}$$

$$\frac{0.254 - 0.234}{\frac{\pi}{4} 0.6^2} = \mathbf{71mm}$$

5.5 الهيدرومتر



الشكل 5.5

الهيدرومتر جهاز يستخدم لقياس الكثافة النسبية للسوائل ويعتمد تصميمه على نظرية الطفو.

الشكل (5.5) يوضح هيدرومتر قطر ساقه d وطوله H ووزنه W . حجم الثقل المثبت في قاعدته V_0 . الهيدرومتر مغمور جزئياً في سائل كثافته النسبية s . طول الجزء المغمور من الساق h

$$F_B = W$$

$$W = \rho g V_T = \rho_w s g (V_0 + \frac{\pi}{4} d^2 h)$$

$$h = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2 s} - \frac{4V_0}{\pi d^2} \dots\dots\dots(5.7)$$

إذا غمس الهيدرومتر في الماء المقطر

$$s = 1, \rho = \rho_w, h = h_0$$

$$h_0 = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} - \frac{4V_0}{\pi d^2}$$

حيث h_0 الارتفاع الذي يشير إلى $s = 1$.

وتصبح بذلك العلاقة العامة

$$h = h_0 + \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \dots\dots\dots(5.8)$$

مثال

يراد تصميم هايدرومتر لقياس الكثافة النسبية في المدى $0.5 \leq s \leq 1.5$. قطر ساق الهايدرومتر 10mm وطول الساق 200mm المطلوب تحديد W و V_0 (وزن الهايدرومتر و حجم الثقل).

عند $s = 1.5$ الحد الأدنى للساق $h = 0$

و عند $s = 0.5$ الحد الأقصى للساق $h = H = 0.2$

بالتعويض للقيم أعلاه في المعادلة (5.7) و الطرح تعطي

$$h_{0.5} - h_{1.5} = \frac{4W}{g\rho_w \pi d^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$0.2 - 0 = \frac{4W}{9.81(1000)\pi(0.01)^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$W = \mathbf{0.115 \text{ N} .}$$

و بالتعويض ثانيةً في (5.7) عند $s = 1.5$ و $h = 0$ و $W = 0.116 \text{ N}$

$$V_0 = \mathbf{7.85E-6 \text{ m}^3}$$

أي بقطر $\mathbf{24.6mm}$ إذا كان شكل الثقل كروي ($V = 4\pi R^3 / 3$).

5.6 إستقرار الأجسام الطافية

تعريفات :

1 مركز الطفو B : هو

مركز الكتلة للجزء المغمور من الجسم الطافي.

2 مركز التآرجح M : نقطة

تقاطع الخط المركزي الرأسي

للجسم في حال سكونه مع الخط

الرأسي المار بمركز الطفو في

حالة إمالة الجسم الطافي قليلاً.

3 نصف القطر التآرجحي MB :

هي المسافة بين مركز الطفو B ومركز

التآرجح M.

يمكن استخلاص العلاقة أدناه التي تربط

نصف القطر التآرجحي بحجم السائل

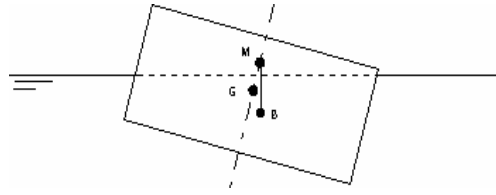
المزاج :

$$MB = \frac{I}{V_i} \dots\dots\dots (5.9)$$

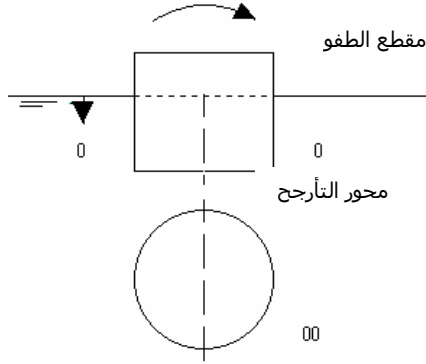
حيث I العزم الثاني لمساحة مقطع الطفو

حول محور التآرجح .

V_i : حجم السائل المزاج .

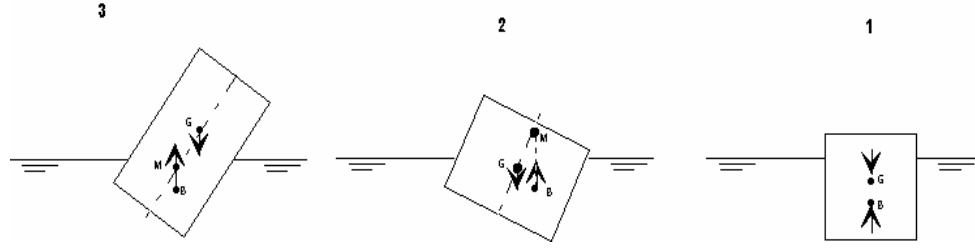


الشكل 5.6



الشكل 5.7

استقرار الأجسام الطافية



الشكل 5.8

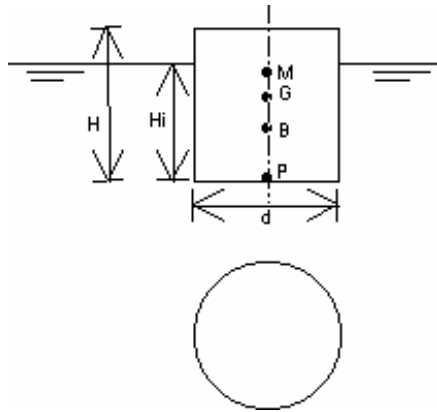
الأوضاع الممكنة للجسم الطافي ثلاثة :

- 1 **جسم متوازن** . قوة الطفو F_B تعادل الوزن W ويعملان في خط واحد في الاتجاهين المتعاكسين .
 - 2 **جسم مستقر** . قوة الطفو والوزن متساويتان ومتوازيتان في خطوط عملها و يشكلان مزدوجاً يعمل لإعادة الجسم لحالة التوازن . يسمى هذا المزدوج **مزدوج مصحح** . نلاحظ هنا أن النقطة M فوق النقطة G .
 - 3 **جسم غير مستقر** . قوة الطفو والوزن يتساويان ومتوازيتان في خطوط عملهما . المزدوج الناتج يعمل على زيادة الميل ويسمى لذلك **المزدوج القالب** . نلاحظ هنا أن النقطة M تحت النقطة G .
- نستنتج مما سبق ما يعرف بقاعدة الاستقرار:

$$MB > GB \dots \dots \dots (5.10)$$

مثال

جسم أسطوانى صلب قطر مقطعه d ، ارتفاعه H وكثافته النسبية s . استخلص القاعدة التي تحكم طفوه قائماً على وضع مستقر في الماء .



الشكل 5.9

قاعدة الاستقرار: $MB > GB$

$$MB = \frac{I}{V_i} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 H_i / 4} = \frac{d^2}{16 H_i}$$

$$GB = PG - PB = \frac{H}{2} - \frac{H_i}{2} = \frac{1}{2}(H - H_i)$$

قاعدة الطفو: $W = F_B = \rho g V_i$

وباعتبار الكثافة النسبية s

$$s \rho_w g V = \rho_w g V_i$$

$$sH = H_i$$

$$MB = \frac{d^2}{16 H_i} = \frac{d^2}{16 s H}$$

$$GB = \frac{1}{2}H(1-s)$$

إذن قاعدة الاستقرار:

$$\frac{d^2}{16 s H} > \frac{1}{2}H(1-s)$$

أو

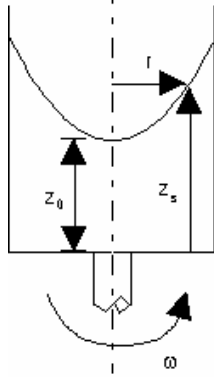
$$\frac{H}{d} < \frac{1}{2\sqrt{2s(1-s)}}$$

مسائل

5.1 حاوية طولها 1.0m، عرضها 0.5m وارتفاعها 0.3m. صب فيها الماء إلى عمق 0.25m. إذا حركت الحاوية بتسارع أفقي مقداره 2.0 m/s^2 أحسب :

- (أ) زاوية ميل سطح الماء مع الأفقى .
 (ب) كمية الماء المنقلب .
 (ج) القوى التي يؤثر بها الماء على السطحين الأمامي والخلفي.

[11.5°, 25L, 22.7 N, 221N]



الشكل 5.10

5.2 حاوية أسطوانية المقطع تحوي سائل وتدور حول

محورها بسرعة $\omega \text{ rad/s}$ - الشكل (5.10). توزيع الضغط

لمثل هذه الحالة يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g(z - z_0)$$

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

ومعادلة سطح السائل

في حالة محددة قطر الحاوية 0.5m وعمق الماء قبل بدء الدوران 0.1m.

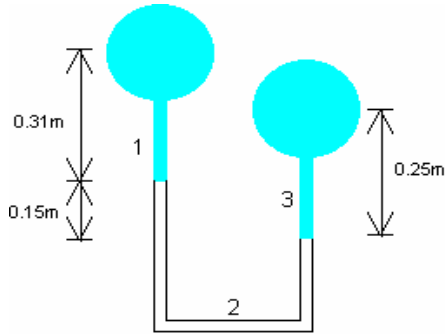
(أ) أحسب السرعة الزاوية المطلوبة التي تجعل

سطح الماء يلامس قاع الحاوية .

(ب) أحسب الارتفاع الأدنى للحاوية لمنع الماء

من الاندلاق عند دوران الحاوية بالسرعة أعلاه .

[7.9 rad/s, 0.2m]



الشكل 5.11

5.3 الشكل (5.11) يوضح مانومتر تفاضلي

يصل أنبوبين (أ) و (ب) . أحسب فرق الضغط

بين الأنبوبين . إذا كان :

(أ) المائع (1) زيت ذو كثافة نسبية

0.8، المائع (2) زئبق ذو كثافة نسبية

13.6 والمائع (3) ماء .

(ب) الموائع (1) و (3) ماء والمائع (2)

زئبق .

[20kPa , 20.6 kPa]

5.4 شيدت مقصورة على مجموعة من تسعة براميل تطفو رأسياً على ماء البحر ذي الكثافة 1030 kg/m^3 . تزن المقصورة وحدها 10 kN . يزن البرميل الواحد 150 N وارتفاعه 1.5 m وقطره 0.7 m . باعتبار أن متوسط وزن الشخص 600 N أحسب :
(أ) العمق الذي تغطسه البراميل إذا كان في المقصورة 30 شخص .
(ب) العدد الأقصى الذي يسمح بدخوله للمقصورة إذا كان عمق الغطس الأقصى المسموح به يساوي 80% من ارتفاع البرميل .

[0.84m , 51]

5.5 هايدرومتر قطر أنبوه 10 mm يقرأ العدد 1.0 عند غمسه في الماء المقطر ويكون حجم الماء المزاح $15 \text{ E-}6 \text{ m}^3$. أحسب المسافة بين القراءة 1.0 وسطح السائل إذا غمس الهايدرومتر في:

(أ) زيت كثافته النسبية 0.85

(ب) حامض نتركب كثافته النسبية 1.5 .

[+34mm , - 64 mm]

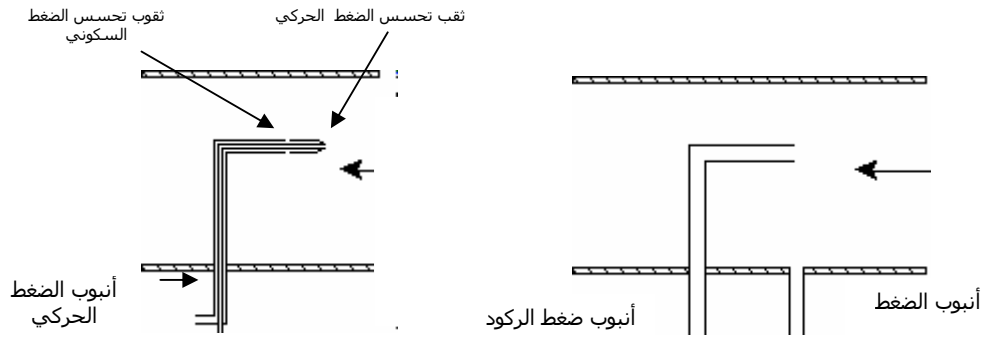
5.6 كتلة خشبية بمقطع أفقي مربع مساحته 0.1 m^2 وكثافة نسبية 0.6 . جد المدى المستقر لارتفاع الكتلة عند وضعها في سائل كثافته النسبية 0.9 .

[<0.3m]

6 طرق القياس

6.1 مقدمة

يمكن تحسس مستوى الضغط عند أي مقطع متعامد على اتجاه السريان بواسطة أنبوب رفيع تتعامد مقدمته على اتجاه السريان. ويعرف من التجربة أن الضغط يكون ثابت المستوى عند النقاط المتعامدة على السريان وفي مقطع واحد إذا كان المجرى مستقيماً أو ذا انحناء صغير مقارنةً بعرض المجرى. ويوضح الشكل (6.1) أنبوب الضغط الذي يتحسس الضغط p عند المقطع المراد قياس الضغط عنده.



الشكل 6.1

الشكل 6.2

يعرف بالمقابل الضغط الركودي بأنه مستوى الضغط إذا هبطت سرعة السريان اللالزجي إلى الصفر. وبذلك يمكن تحسس الضغط الركودي p_0 بأنبوب تستقيم مقدمته في اتجاه السريان - الشكل (6.2) .

يمكن إدراك علاقة الضغط p بضغط الركود p_0 للسريان المثالي اللالانضغاطي من علاقة برنولي المبسطة

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{p_0}{\rho}$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{الضغط الحركي} \quad \dots\dots\dots(6.1)$$

الشكل (6.2) يبين إمكانية جمع أنبوبي الضغط والضغط الركودي في أنبوب مركب واحد يعرف بأنبوب الضغط الحركي.

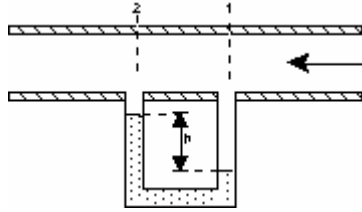
6.2 أجهزة قياس الضغط

6.2.1 المِضْطاط السائلي

المِضْطاط السائلي أنبوب يستخدم أعمدة السوائل لتحديد الفروق في الضغط. و تنبني قاعدة قياس الضغط بالمِضْطاط السائلي على المعادلة (5.5) حيث نرى أن معرفة ارتفاع سائل المِضْطاط وكثافته تُمكن من تحديد الضغط. و يستخدم المِضْطاط السائلي عادةً في مدى الضغط 20 Pa إلى 0.14E6 Pa .

اختيار سائل المِضْطاط يعتمد على فرق الضغط المتوقع. فيستخدم الزئبق ذو الكثافة العالية لفروق الضغط العالية و يستخدم الماء عادةً لفروق الضغط المنخفضة.

6.2.1.1 المِضْطاط السائلي البسيط

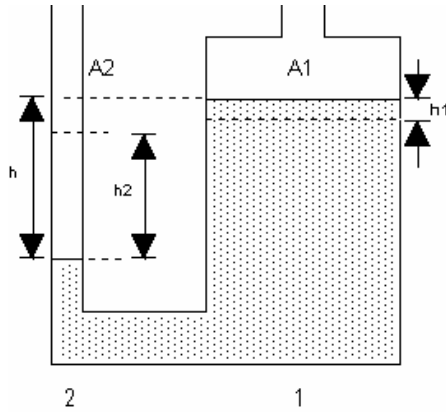


الشكل 6.3

المِضْطاط السائلي البسيط أنبوب زجاجي رفيع في شكل U ، يوصل طرفيه إلى نقطتي تحسس الضغط (1) و (2) كما في الشكل (6.3). ينشأ عن التوصل فرق مضغاطي h وتستخدم المعادلة (5.5) لتعطي

$$p_1 - p_2 = \rho gh \dots \dots \dots (6.2)$$

6.2.1.2 مضطاط الصناعة



الشكل 6.4

لتحديد المقدار h في المِضْطاط البسيط نحتاج لقراءة ارتفاع سائل المِضْطاط في كل من فرعي المِضْطاط ومن ثم حساب الفرق. وقد صُمم مضطاط الصناعة - الشكل (6.4) - للتمكن من القراءة من فرع واحد مما يبسط استخدام المِضْطاط السائلي.

فرعي مضغط الصناعة لهما أقطار متباينة $A_1 \gg A_2$. عند توصيل الفرعين بنقاط ضغط مختلفة ينشأ فرق الارتفاع h حيث

$$p_2 - p_1 = \rho gh \dots \dots \dots (1)$$

$$h = h_1 + h_2$$

حيث h_1 الزيادة في عمود سائل المضغط في الفرع (1) و h_2 النقصان في عمود السائل في الفرع (2). و نسبة لعدم تساوي المساحات فإن h_2 تكون أكبر من h_1 مرتبطتين بالعلاقة الحجمية

$$h_2 A_2 = h_1 A_1$$

$$h_1 = h_2 \frac{A_2}{A_1}$$

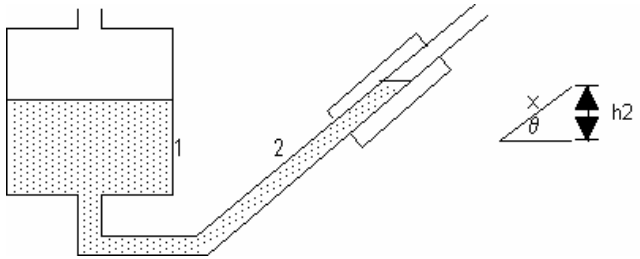
وبذلك تصبح المعادلة (1)

$$p_2 - p_1 = \rho gh_2 \left(\frac{A_2}{A_1} + 1 \right)$$

بما أن A_2/A_1 صغيرة مقارنةً بالواحد الصحيح يمكن أن نكتب:

$$p_2 - p_1 = \rho gh_2 \dots \dots \dots (6.3)$$

يُمكن هذا التصميم إذن من قراءة h_2 فقط لحساب $p_2 - p_1$ بدون فقدانٍ يذكر في الدقة. إذا كانت $d_2/d_1 = 0.1$ ، مثلاً، فإن الخطأ في المعادلة (6.3) 1% فقط .



الشكل 6.5

6.2.1.3 المضغط

السائل المائل

الشكل (6.5) يوضح مضغط صناعة مائل. نسبةً لأن المساحة A_2

تقل كثيراً عن A_I فإن القراءة تؤخذ فقط من الفرع (2) كما سبق الشرح. بالرجوع إلى المعادلة (5.5) نرى أن إمالة الفرع (2) لا تؤثر في الارتفاع الرأسى لعمود السائل، أي h_2 . إلا أنها تؤدي إلى زيادة الطول المائل للعمود x حيث

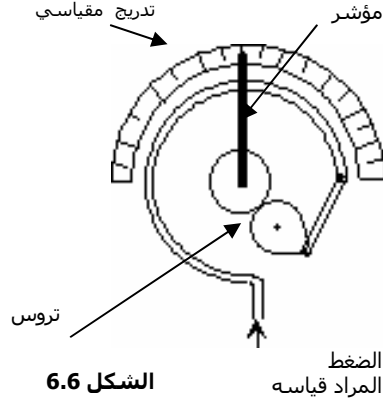
$$x = \frac{h_2}{\sin \theta}$$

وتصبح المعادلة (6.3)

$$p_2 - p_1 = (\rho g \sin \theta)x \dots \dots \dots (6.4)$$

و لأن $\sin \theta > 1.0$ فإن $h_2 < x$ مما يوفر "حساسية" أفضل للمِصْغاط.

6.2.2 مِضْغَاط بوردون



مِضْغَاط بوردون للضغط واسع الاستخدام في الصناعة لصغر حجمه وسهولة استخدامه و للمدى الواسع للضغط مقارنةً بالمِضْغَاط السائلي. حيث تتوفر مقاييس بوردون في المدى kPa حتى 100MPa ضغط مقياسي. إلا أنه أقل دقة من المِضْغَاط السائلي .

ويعتمد القياس بمِضْغَاط بوردون على ما يعرف بأنبوب بوردون. وهو أنبوب ذو مقطع إهليلجي من معدن رفيع ولدن. يكون الأنبوب حرّاً في

شكل شبه دائري كما هو موضح في الشكل (6.6). عند تحسس ضغط أعلى من الضغط الجوي عند مدخله يعمل الضغط على تمديد الأنبوب وينشأ عن ذلك شد للمسنن المثلث الذي بدوره يدير المسنن الدائري فيحرك المؤشر.

ينبغي مراعاة اختبار مِضْغَاط بوردون دورياً للتأكد من عمله داخل مستوى الدقة المطلوب.

6.3 أجهزة قياس معدل السريان

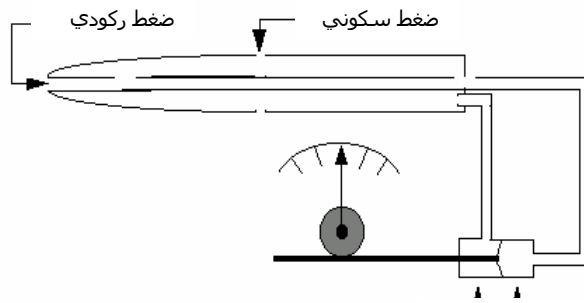
6.3.1 أنبوب الضغط الحركي

بتوصيل طرفي أنبوب الضغط الحركي- الشكل (6.2) - إلى مضغط بواسطة أنبوبين مطاطيين يمكن قراءة فرق ارتفاعي أعمدة سائل المضغط ومن ثم حساب الضغط الحركي الذي يساوي $\frac{1}{2}\rho v^2$ ، حسب المعادلة (6.1) . ونستنتج السرعة الموضعية بالتالي من المعادلة :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \dots\dots\dots (6.5)$$

لمعرفة معدل السريان تقاس السرعة في مواضع متعددة عند مقطع عرضي واحد ويستخلص معدل السريان بمكاملة السرعة مع المساحة.

يتميز هذا الجهاز ببساطته و كلفته المنخفضة و دقته. و يمكن استخدامه لكل من

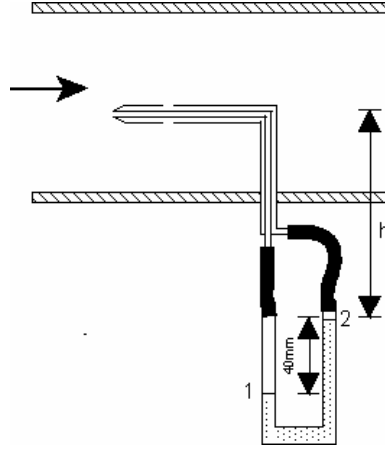


الشكل 6.7

السوائل و الغازات. يجب إدراك أن صلاحية المعادلة (6.5) قاصرة على السريان اللا انضغاطي. في حالة السريان الانضغاطي تتطلب المعادلة الحاكمة تعديلاً يراعى الانضغاطية، كما هو موضح في القسم (11.7) .

مثال

أستخدم أنبوب ضغط حركي لقياس السرعة في موضع بسرّيان ماء كثافته 1000 kg/m^3 مستخدمين الزئبق كسائل مضغاطي. الفرق في مستويي الزئبق 40mm و الكثافة النسبية للزئبق 13.6. أحسب السرعة الموضعية للسريان.



بمعادلة الضغط عند المستوى الأفقي (1)

$$p_0 + \rho_w g(0.04) + \rho_w g h = p + \rho_m g(0.04) + \rho_w g h$$

$$p_0 - p = 4.94\text{E}3 \text{ Pa}$$

المعادلة (6.5)

$$v = 3.1\text{m/s}$$

الشكل 6.7

6.3.2 مقاييس السريان الزامة

تعتمد نظرية المقاييس الزامة على أن انخفاض الضغط الناشئ عن تقلص

مساحة المجرى (الزم) له صلة مباشرة بازدياد السرعة حسب معادلتى الطاقة و الكتلة. عند التفكير في أنبوب مساحة مقطعه الابتدائي A ومساحة مقطعه عند موضع الزم a ، فإن معادلتى الطاقة و الكتلة تعطيان معدل السريان الحجمي q حيث

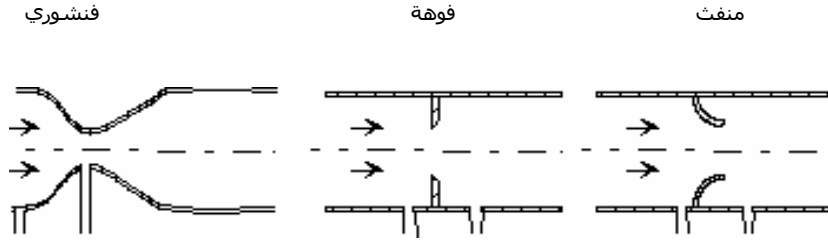
$$q = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$$

و حيث Δp الانخفاض في الضغط.

بأخذ الاعتبار للفواقد في الطاقة يكون معدل السريان أقل مما توضحه المعادلة أعلاه. و يعرف لذلك معامل السريان C_d و قيمته أقل من 1.0

$$q = C_d \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \dots\dots\dots(6.6)$$

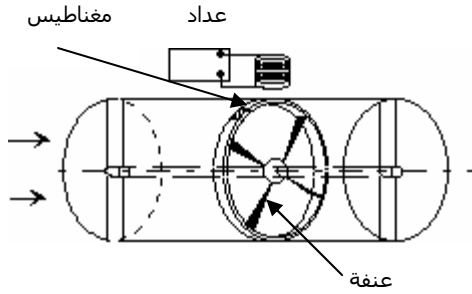
يوضح الشكل (6.8) الأنواع الأكثر شيوعاً لمقاييس السريان الزامة. و هي المقياس الفوهي و المقياس المنفث و المقياس الفنشوري. أبسطها وأقلها تكلفة المقياس الفوهي. إلا أن معامل سريانه C_d هو الأقل قيمة، مما يعني فقداً أكبر في الطاقة. المقياس الفنشوري يميزه الفقد الضئيل في القدرة ألا أنه عالي التكلفة نسبياً. ويتوسط المقياس المنفث المقاييس الآخرين أداءً وتكلفة. تتصف المقاييس الزامة عامةً بالبساطة و عدم الحاجة للصيانة و العمر الطويل و تناسب كلاً من السوائل و الغازات.



الشكل 6.8

6.3.3 مقياس السريان العنفي

تدور العنفة بتأثير السريان وتعتمد سرعة دورانها على سرعة تيار المائع. وبذلك يمكن جعل سرعة دوران العنفة مقياساً لمعدل السريان. يتسبب المغناطيس الدائر مع العنفة في حث قوة كهربية دافعة في الملف ويولد بذلك نبضات جهد كهربي. عد هذه النبضات يُمكن من معرفة سرعة العنفة ومن ثم تقدير معدل سريان المائع.

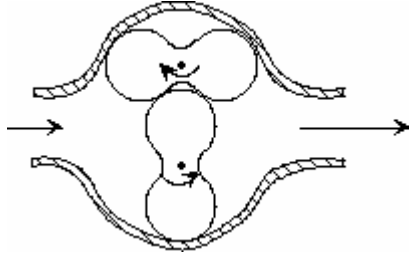


الشكل 6.9

6.3.4 مقياس السريان الازاحي

الدوار المستخدم في هذا المقياس موجب الإزاحة. في كل دورة كاملة يسري حجم محدد من السائل من أحد جانبي الأنبوب إلى الآخر. عدد دورات الدوار يُمكن من تقدير السريان الكلي. عدد الدورات والوقت المناظر يمكن من تقدير معدل السريان.

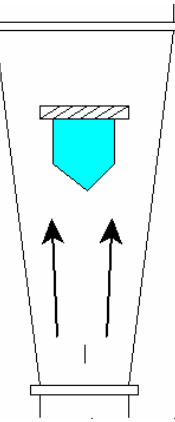
يمتاز المقياس الدوار بالدقة ويستخدم عادةً في محطات الخدمة النفطية.



الشكل 6.10

6.3.5 مقياس السريان الطفوي

يتكون هذا المقياس من أنبوب شفاف مخروطي الشكل يثبت رأسياً في مسار المائع و جسم صغير الحجم ضئيل الكثافة دوراني المقطع يوضع حراً داخل الأنبوب. عند مرور المائع في الأنبوب يتعرض الجسم إلى قوة إعاقة تعمل إلى أعلى تعادلها محصلة وزن الجسم و قوة طفوه. الشكل المخروطي للأنبوب يجعل السرعة المتوسطة للسريان تتناقص مع ارتفاع موضع الجسم. و بسبب الصلة المباشرة بين قوة الإعاقة و سرعة المائع فان ارتفاع الجسم يعتمد على معدل السريان. و يمكن بذلك تعيير الأنبوب رأسياً ليدل موضع الجسم المغمور إلى



الشكل 6.11

معدل السريان. القرص المثبت أعلى الجسم الحر به أخاديد مائلة وظيفتها إحداث حركة دورانية في الجسم حول المحور الرأسي مما يؤدي لتوسط الجسم في الأنبوب.

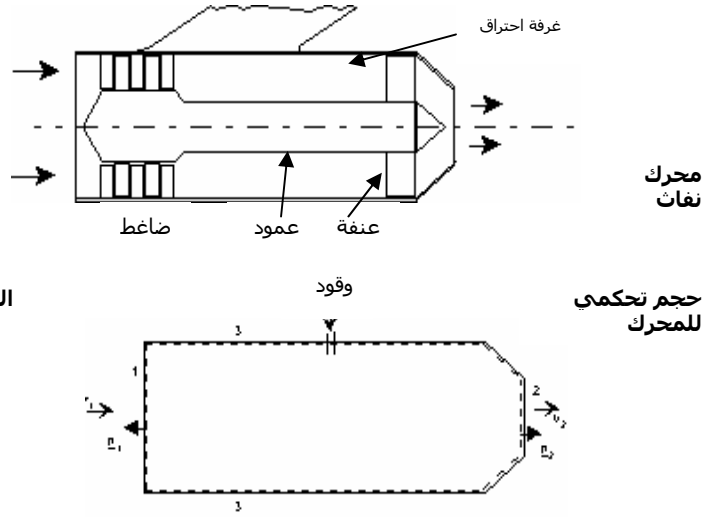
7 الدفع

تم استخلاص معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية في الباب (2) وهي

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \underline{v} dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \dots\dots\dots (2.12)$$

حيث V حجم التحكم و A مساحة السطح التحكمي. تمثل الحدود الأربعة على التوالي: القوة الناشئة عن التسارع و القوة الناشئة عن متجه السريان و القوة الجسمية ثم القوة السطحية.

7.1 الدفع النفاث



الشكل 7.1

يتم الدفع النفاث بهروب الغازات الناتجة عن احتراق الوقود بسرعة عالية من مؤخرة المحرك. يوفر الضغط المطلوب للهواء الداخل إلى غرفة الاحتراق بواسطة ضاغط يستمد قدرته من عنفة تدور بفضل اندفاع نواتج الاحتراق. بتطبيق المعادلة (2.12) على حجم التحكم الموضح مع افتراض أن السريان رتيب و أحادي البعد نحصل على الصورة الأقل تعقيداً :

$$\iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\rho v_1(-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2(v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + \underline{R}_3$$

حيث $\underline{R}_3$ هي القوة المؤثرة على حجم التحكم عند السطح (3).

وبذلك يكون الدفع على جسم المحرك

$$\underline{F}_t = -\underline{R}_3 = [\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1](-\underline{i})$$

اتجاه القوة هو الاتجاه السالب لـ x .

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots\dots\dots(1)$$

وباعتبار معدل السريان الكتلي للهواء عند المدخل $\dot{m}_1$

معدل السريان الكتلي عند المخرج $\dot{m}_2$

معدل السريان الكتلي للوقود $\dot{m}_f$

فإن

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_f$$

نسبة الوقود إلى الهواء بالوزن φ

$$\varphi = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_1}$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 (1 + \varphi)$$

وتصبح المعادلة (1) :

$$F_t = \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_1 v_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots\dots\dots(7.1a)$$

$$F_t = \dot{m}_1 [(1 + \varphi) v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots\dots\dots(7.1b)$$

مثال

يختبر محرك نفث وهو ساكن على منصة اختبار. سرعة دخول الهواء إلى المحرك 150m/s وسرعة النفث 1000m/s . يمكن افتراض أن ضغط الهواء الداخل وضغط النفث يعادلان الضغط الجوي. نسبة وزن الوقود إلى الهواء تساوي 0.02 . مساحة المقطع الدخولي والخروجي 0.2m² كثافة الهواء الداخل 1.15 kg/m³ . أحسب القوة اللازمة لمنع المحرك من الحركة.

باستخدام المعادلة (7.1b)

$$F_t = \dot{m}_1 [(1 + \varphi) v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1$$

v_1	v_2	φ	p_2	p_1
150	1000	0.02	0	0

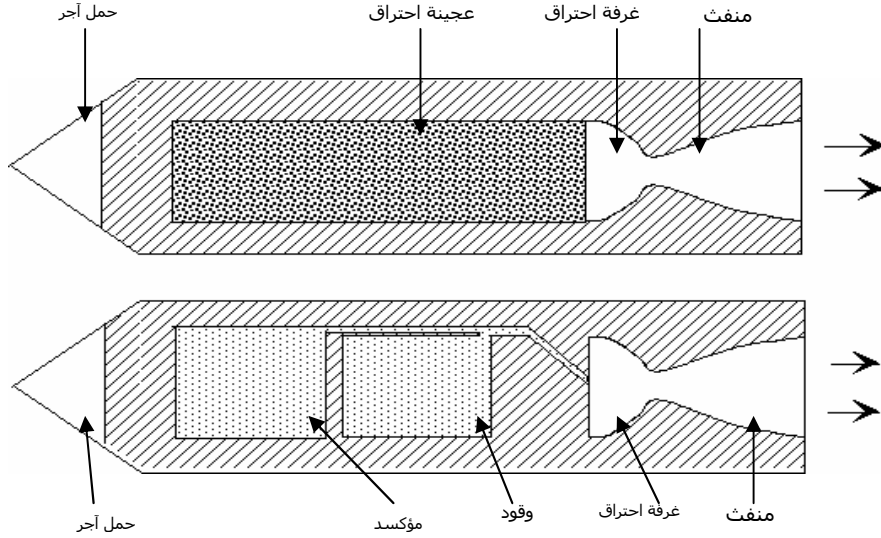
$$\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1 = 1.15(150)0.2 = 34.5 \text{ kg/s}$$

$$F_t = 34.5 [(1 + 0.02)1000 - 150] = \mathbf{30.0 \text{ kN}}$$

7.2 الدفع الصاروخي

السمة الرئيسية للصاروخ هي حملة لكل من الوقود والمؤكسد بداخله بينما يأخذ المحرك النفاث المؤكسد (الهواء) من الجو المحيط. السمة المشتركة في المحرك النفاث والمحرك الصاروخي هي إحداث تسارع للغازات المحترقة ومن ثم خلق قوة الدفع. يبين الشكل (7.2) الأجزاء الرئيسية للصاروخ بنوعيه: ذي الوقود الصلب وذي الوقود السائل. يحمل الصاروخ ذو الوقود الصلب خليط (عجينة) من الوقود والمؤكسد بينما

صاروخ ذو وقود صلب



صاروخ ذو وقود سائل

الشكل 7.2

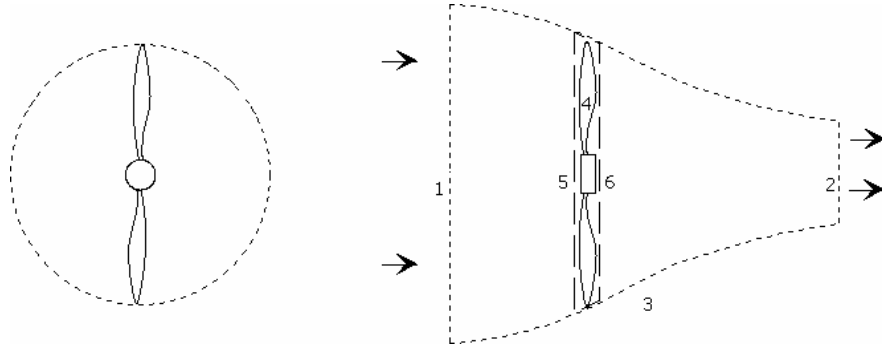
يحمل الثاني كلاً من الوقود والمؤكسد في صور سائلة. باعتبار منفث الصاروخ هو حجم التحكم وبالنظر إلى أنه ليس ثمة هواء داخل إلى حجم التحكم عبر السطح (1) فإن المعادلة (1) تعطي

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2$$

$$F_t = \rho_2 v_2^2 A_2 + p_2 A_2 = \dot{m}_2 v_2 + p_2 A_2 \dots\dots\dots (7.2)$$

حيث p_2 هو الضغط فوق الضغط الجوي المحيط بالصاروخ.

7.3 الدّفاع



الشكل 7.3

الدّفاع دوّار مبرّوجي يُستخدم في الطائرات والسفن حيث تُحوّل عبره القدرة الميكانيكية إلى قدرة حركية في السريان. ويؤثر رد الفعل على الجسم المراد دفعه ليحركه في الاتجاه المعاكس للسريان.

بتطبيق معادلة كمية التحرك (2.12) على حجم التحكم 1-2-3-4 :

$$\iiint_A \rho \underline{v} (v \cdot d\underline{A}) = \iiint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\rho v_1 (-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + \underline{R}_4$$

$$\underline{R}_4 = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - p_1 A_1 + p_2 A_2) \underline{i} \dots \dots \dots (1)$$

الضغطان p_1 و p_2 جويان (يساويان الصفر مقياسياً).

نُعرف q معدل السريان الحجمي لتيّار المائع:

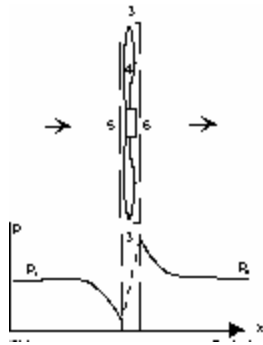
$$q = vA = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

حيث v متوسط السرعة عبر الدفاع و A المساحة التي يدور فيها الدفاع.

قوة الدفع F_t هي القوة المؤثرة على الدفاع بينما R_4 هي القوة على المائع في حجم التحكم، وبذلك

$$\underline{F}_t = -\underline{R}_4$$

$$\underline{F}_t = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) (-\underline{i})$$



الشكل 7.4

$$F_t = \rho q(v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.3a)$$

$$F_t = \rho v A(v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.3b)$$

بتطبيق المعادلة (1) على حجم التحكم الأصغر 5-6-3-4

$$\underline{R}_4 = [\rho v A(v_6 - v_5) + p_6 A_6 - p_5 A_5] \underline{i}$$

السطحان (5) و (6) متقاربان ويمكن اعتبار

$$A_5 \sim A_6 = A$$

$$v_5 \sim v_6 = v$$

ويتبع ذلك

$$\underline{R}_4 = (p_6 - p_5) A \underline{i}$$

$$F_t = (p_6 - p_5) A (-\underline{i})$$

$$F_t = (p_6 - p_5) A \dots\dots\dots(2)$$

في الاتجاه السالب لـ x.

المعادلتان (2) و (7.3b) تعطيان

$$p_6 - p_5 = \rho v(v_2 - v_1) \dots\dots\dots(3)$$

وبتطبيق معادلة الطاقة على القطاعين 5-1 و 6-2

$$\frac{p_5}{\rho} + \frac{v_5^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{p_6}{\rho} + \frac{v_6^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \dots\dots\dots(5)$$

تعطي المعادلتان (4) و (5)

$$p_6 - p_5 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \dots\dots\dots(6)$$

والمعادلتان (6) و (3)

$$v(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \dots\dots\dots(7.4)$$

وتعرف هذه المعادلة **بنظرية فرود**.

القدرة الخارجة من الدفاع P_o

$$P_o = F_t v_1 = \rho A v_1 (v_2 - v_1) \dots \dots \dots (7.5)$$

القدرة الداخلة إلى الدفاع P_i

$$P_i = F_t v = \rho A v^2 (v_2 - v_1) \dots \dots \dots (7.6)$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{P_o}{P_i} = \eta = \text{الكفاءة النظرية للدفاع}$$

$$\eta = \frac{v_1}{v} \dots \dots \dots (7.7)$$

مثال

القدرة الخارجة من محرك طائرة إلى دفاعها تساوي 1MW . تطير الطائرة بسرعة 90m/s في هواء ساكن كثافته 1.1 kg/m^3 قطر الدفاع 3m . أحسب:

- (أ) سرعة تيار الهواء في الجانب السفلي.
- (ب) سرعة تيار الهواء عبر الدفاع.
- (ج) قطر مسار تيار الهواء صعيد وسافل الدفاع.
- (د) قوة الدفع على المحرك.
- (هـ) الكفاءة النظرية للدفاع.

(أ) القدرة الداخلة إلى الدفاع ، المعادلة (7.6)

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1)$$

و باستخدام نظرية فروود

$$P_i = \frac{1}{4} \rho A (v_1 + v_2)^2 (v_2 - v_1)$$

$$1E6 = \frac{1.2}{4} \left(\frac{\pi}{4} \right) (9)(90 + v_2)^2 (v_2 - 90)$$

$$v_2 = 103.7 \text{ m/s}$$

(ب) المعادلة (7.4) - نظرية فرود

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 96.9 \text{ m/s}$$

(ج) معدل السريان الحجمي q

$$q = v A = 684.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A_1 = \frac{q}{v_1} = 7.61 \text{ m}^2, \quad d_1 = 3.11 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{q}{v_2} = 6.63 \text{ m}^2, \quad d_2 = 2.90 \text{ m}$$

(د) الدفع F_t ، المعادلة (7.3a)

$$F_t = \rho q (v_2 - v_1) = 10.3 \text{ kN}$$

(هـ) كفاءة الدفاع η ، المعادلة (7.7)

$$\eta = \frac{v_1}{v} = 0.93$$

الدفاع الرئيسي للطائرة الحوامة:

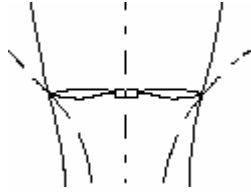


الشكل 7.5

تعتمد حركة الطائرة الحوامة اعتماداً كاملاً على الدفاع الرأسي المحور - الشكل (7.5). بينما يقتصر دور الدفاع الصغير الأفقي المحور على حفظ الاتزان بمقابلة الأثر الجانبي الناشئ عن دوران الدفاع الرأسي المحور .

(أ) التحليق

صعود



الشكل 7.6

تحليق

سرعة الطائرة الحوامة في الاتجاه العمودي صفر في هذه الحالة .

$$v_1 = 0$$

وبالرجوع لمعادلة الدفع (7.3b)

$$F_t = \rho v v_2 A$$

كما أن معادلة فرود تُختصر إلى

$$v = \frac{1}{2} v_2$$

$$F_t = \frac{1}{2} \rho A v_2^2$$

أو

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \dots\dots\dots (1)$$

القدرة الداخلة P_i

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1) = \frac{1}{4} \rho A v_2^3 \dots\dots\dots (2)$$

المعادلتان (1) و (2) تعطيان

$$P_i = \frac{\rho A}{4} \left(\sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \right)^3 = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}}$$

$$P_i = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}} \dots\dots\dots (3)$$

كما أنه عند التحليق يتساوى الدفع و وزن الطائرة

$$P_i = \sqrt{\frac{Wt^3}{2\rho A}} \dots\dots\dots (7.8)$$

(ب) الصعود العمودي

القدرة المطلوبة هنا تزيد عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق. والدفع يفوق

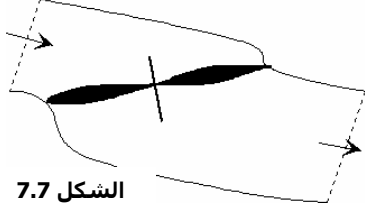
وزن الطائرة

$$F_t > Wt$$

(ج) الهبوط العمودي

القدرة المطلوبة في هذه الحالة تقل عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق والدفع المطلوب يقل عن وزن الطائرة

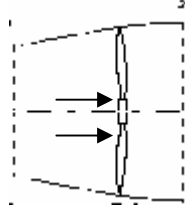
$$F_t < W/t$$



الشكل 7.7

(د) الحالة العامة

الدفع المطلوب هنا له مركبة عمودية ومركبة أفقية. يعدل مستوى دوران الدفاع بزاوية ليعطي المركبات المطلوبة وتعديل القدرة الداخلة لتفي بمحصلة القوتين والسرعة الانتقالية المطلوبة.



الشكل 7.8

عنفة الرياح:

عنفة الرياح تُحوّل قدرة الرياح إلى قدرة ميكانيكية؛ وهي بذلك عاكسة لعمل الدّفاع. القدرة الداخلة P_i هنا هي القدرة المتاحة للتيار عند مقطع عنفة ذات المساحة A . وتعتمد هذه القدرة على السرعة v_1 وهي سرعة التيار في غياب جسم العنفة.

$$P_i = \frac{1}{2} \dot{m} v_1^2 = \frac{1}{2} \rho A v_1^3 \dots\dots\dots (7.9)$$

والقدرة الخارجة P_o

$$P_o = \frac{1}{2} \rho A v (v_1^2 - v_2^2) \dots\dots\dots (7.10)$$

الكفاءة النظرية للعنفة η

$$\eta = \frac{v(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^3}$$

وباستخدام نظرية فرود و اعتبار $r = \frac{v_2}{v_1}$

$$\eta = \frac{1}{2}(1 + r - r^2 - r^3) \dots\dots\dots (1)$$

لتحديد أعلى قيمة نظرية ممكنة للكفاءة η

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{2}(1 - 2r - 3r^2) = 0$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ وتعطي}$$

أي، عند الكفاءة العُليا

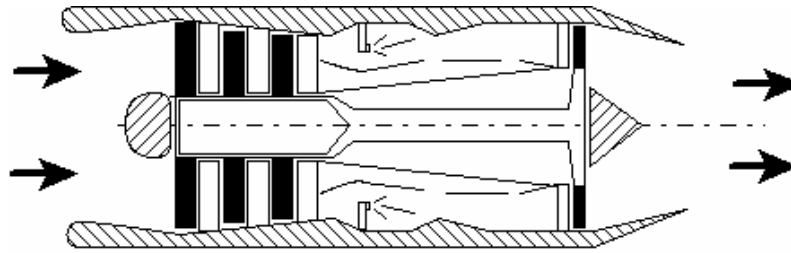
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

وبالتعويض في المعادلة (1)

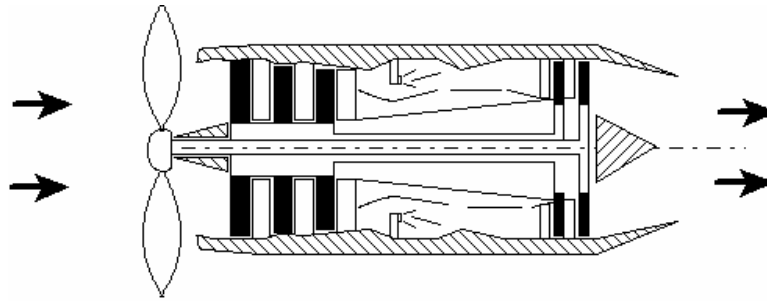
$$\eta_M = \frac{16}{27} = 0.593 \dots \dots \dots (7.11)$$

وهذا هو السقف النظري للكفاءة.

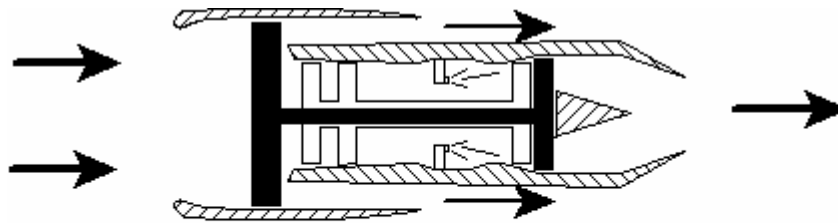
7.4 طرق الدفع النفاث



Turbojet engine محرك عنفي-نفاث



Turboprop engine محرك عنفي-دفعي



turbofan engine محرك عنفي-مروحي

مسائل

7.1 الأحوال التشغيلية لمحرك نفث :

0.8m	القطر الدخولي
0.5m	القطر الخرجي
65kg/s	معدل سريان الهواء
1.39kg/s	معدل سريان الوقود
49kPa	الضغط الجوي
51kPa	الضغط الدخولي
70kPa	الضغط الخرجي
293K	درجة الحرارة الدخولية
700K	درجة الحرارة الخرجية

بافتراض أن الهواء الداخل والغازات الخارجة غازات مثالية وباعتبار قيمة R في الحالتين
287J/kg-K

(أ) أحسب الدفع

(ب) أحسب القدرة إذا كانت سرعة الطائرة 300km/h

[53.7 kN, 4.5MW]

7.2 معدل سريان خليط الوقود والمؤكسد لمحرك صاروخي 2.5kg/s . تترك الغازات الساخنة منفث الصاروخ بسرعة 600m/s بالنسبة لجسم الصاروخ. الضغط في الغازات الخارجة يساوي الضغط الجوي. سرعة الصاروخ 300m/s . أحسب دفع المحرك والقدرة. [1.5 kN, 450 kW]

7.3 دفاع طائرة يعطي دفعاً يساوي 4kN عندما تكون سرعة الطائرة 120m/s عند ارتفاع تساوي كثافة الهواء فيه 1.0kg/m^3 . قطر الدفاع 2.5m . أحسب القدرة الدنيا المطلوبة و السرعة النظرية لتيار الهواء سافل الدفاع.

[480 kW, 127m/s]

7.4 يتحرك زورق بسرعة 10m/s في ماء ساكن كثافته 1000kg/m^3 . قطر دفاع الزورق 0.5m . يمر الماء عبر مستوى الدفاع بمعدل $4\text{m}^3/\text{s}$. أحسب الدفع على الزورق والكفاءة النظرية والقدرة الداخلة للدفاع. تجاهل الفواقد الناشئة عن بدن الزورق وعن سرة الدفاع.

[83kN , 49% , 1.7MW]

7.5 إذا افترض أن عنفه ربحية تعمل بكفاءتها المثالية عند سرعة الرياح 6m/s أحسب سرعة التيار عبر العنفة وعلى مسافة منها في الجانب السافلي. إذا كان قطر العنفة 5m وكثافة الهواء 1.2kg/m^3 أحسب الدفع على العنفة. ما هي قيم الضغط صعيد وسافل العنفة مباشرة؟

[4.0m/s, 2.0m/s, 377 N, 12 Pa , - 7.2 Pa]

8 حفظ كمية التحرك في الصورة التفاضلية

8.1 الصورة العامة للمعادلات

بدءً من المعادلة (2.12)، وهي معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

تُستخدم نظرية التباعد الرياضية - الملحق (ب) - لتحويل التكاملات السطحية في المعادلة إلى تكاملات حجمية، ثم تشكل الحدود المكاملة حدود المعادلات التفاضلية المطلوبة.

بما أن نظرية التباعد تفترض الاستمرارية في كل المجال فإن المعادلات التفاضلية تستدعي الاستمرارية كذلك. و هذا يجعل الصورة التكاملية للمعادلات أعم من الصورة التفاضلية لأن الأولى لا تستدعي استمرارية المجال.

خلال التحويل يُعرّف المتجه $\underline{s}$ ليحل محل $\nabla \tau$ حيث τ مركبة الإجهاد القصي. و يمكن تحليل المتجه $\underline{s}$ في الاتجاهات الثلاث x, y, z كما يلي

$$\underline{s} = s_x \underline{i} + s_y \underline{j} + s_z \underline{k}$$

يقود ذلك للمعادلات الثلاث الآتية و التي تعرف بمعادلات نافير-ستوكس :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + s_x \dots \dots \dots (8.1a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + s_y \dots \dots \dots (8.1b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + s_z \dots \dots \dots (8.1c)$$

حيث u, v, w مركبات السرعة $\underline{v}$ في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وقد استخلص ستوكس قيم s_x, s_y, s_z كما يلي :

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\}$$

.....(8.2a)

$$s_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\}$$

..... (8.2b)

$$s_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\}$$

..... (8.2c)

معادلات نافير - ستوكس أعلاه عامة بحيث تشمل السريان ثلاثي البعد، غير الرتيب، الانضغاطي واللزجي. ولا يشترط أن تكون اللزوجة منتظمة القيمة في المجال. إلا أن هذه المعادلات لا تغطي السريان اللانيوتوني.

8.2 حالات خاصة

8.2.1 السريان اللالزجي

عند اعتبار السريان لا لزجي تصبح المقادير s_x, s_y, s_z في المعادلات (8.1) صفراً. وتعرف المعادلات الثلاث الناتجة بمعادلات أويلر.

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(8.3a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(8.3b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(8.3c)$$

8.2.2 السريان اللانضغاطي مُنتظم اللزوجة

معادلة حفظ الكتلة للسريان اللانضغاطي التي سبق استخلاصها في القسم (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(8.4)$$

بتعويض هذا المقدار في المعادلات (8.2) وملاحظة ثبات قيمة اللزوجة μ تصبح معادلات نافير-ستوكس:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \dots\dots(8.5a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \dots\dots(8.5b)$$

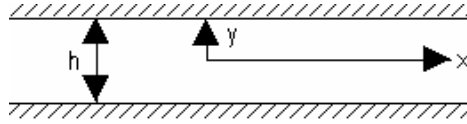
$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \dots\dots(8.5c)$$

8.3 حل معادلات نافير - ستوكس

يتعذر حل معادلات نافير- ستوكس في صورتها العامة (8.2) حلاً مضبوطاً. وتكمن الصعوبة في أن الحدود الحملية في الجانب الأيسر للمعادلة غير خطية. إلا أن بعض الحالات الخاصة تسمح بتبسيط المعادلات بحيث يمكن حلها حلاً مضبوطاً. و سنمثل لذلك بالحالة في القسم (8.3.1) أدناه . أما في الحالات التي يتعذر فيها الحل المضبوط تُحل المعادلات حلاً تقريبياً حيثما يكون ذلك ممكناً أو تستخدم الطرق العددية.

8.3.1 السريان المتوازي في مجرى مستقيم (حل مضبوط)

افتراضات هذه الحالة: السريان لا انضغاطي، منتظم اللزوجة، خطوط انسيابه متوازية، رتيب ولا تؤثر عليه قوى جسمية. عند إعمال هذه الافتراضات في معادلات نافير- ستوكس (8.1) تختزل إلى المعادلة التفاضلية



الشكل 8.1

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(8.6)$$

وباستخدام القيمة الحدودية

$$u = 0 \text{ عند } y = \pm \frac{1}{2} h$$

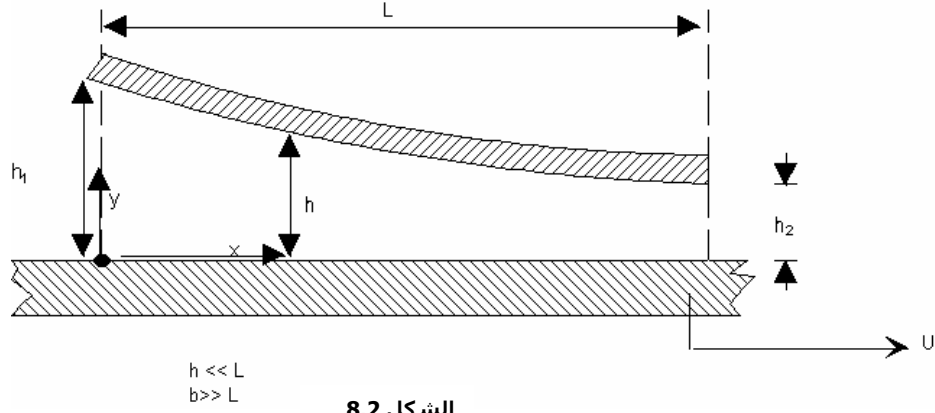
يعطى تكامل المعادلة (8.6)

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \dots\dots\dots(8.7)$$

8.3.2 النظرية الحركية للتزليق (حل تقريبي)

نميز بدءاً بين التزليق الحركي والتزليق السكوني. يُوقَر الضغط المطلوب لفصل الأجزاء ذات الحركة النسبية في الحالة الأولى من الحركة النسبية نفسها. بينما يُوقَر في الحالة الثانية بوسائل خارجية. ويعالج في هذا القسم الأنموذج الرياضي الحاكم للحالة الأولى.

8.3.2.1 المحامل ذات النسبة الباعية الكبيرة



تشمل الافتراضات هنا:

- ثنائية أبعاد السريان
- رتابة الحركة
- لانضغاطية السريان
- انتظام اللزوجة
- صغر القوى الجسمية
- صغر عدد رينولز.

لا انضغاطية السريان وانتظام لزوجته يختزلان معادلات نافير-ستوكس إلى الصورة (8.5).
رتابة الحركة وثنائية البعد وتجاهل القوى الجسمية تختزل الصورة (8.5) إلى الصورة:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1a)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1b)$$

لإعمال أسلوب **الموازنة الحدية** نضع المعادلات (1) في صورة لا بعدية ونتخذ لذلك القيم المرجعية الآتية: L للأطوال و U للسرعات و ρU^2 للضغط ؛ حيث L طول المحمل في اتجاه الحركة و U سرعته الثابتة.

وبذلك نُعرّف المتغيرات اللا بعدية الآتية :

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

باعتبار القيمة **1** للمقدار اللا بعدى قيمة كبيرة ومقدرة و القيمة ϵ صغيرة ويمكن تجاهلها فإن أوزان المقادير اللا بعدية أعلاه تصبح

$$x' \sim 1, \quad y' \sim \epsilon, \quad u' \sim 1, \quad v' \sim \epsilon, \quad Re \sim \epsilon$$

الصورة اللا بعدية للمعادلات (1a) و (1b)

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right] \dots\dots\dots(2a)$$

$$\sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-2}$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{dp'}{dy'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right] \dots\dots\dots(2b)$$

$$\sim \epsilon \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1}$$

وبذلك تُختزل المعادلات (1) الى الصورة أدناه نتيجة للتقريب بالموازنة الحدية:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \dots\dots\dots(8.8)$$

القيم الحدودية للسريان:

$$y = 0, \quad u = U \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$y = h, \quad u = 0 \quad \dots\dots\dots (3b)$$

$$x = 0, \quad p = 0 \text{ (قياسي)} \quad \dots\dots\dots (3c)$$

$$x = L, \quad p = 0 \text{ (قياسي)} \quad \dots\dots\dots (3d)$$

مع ملاحظة أن h دالة في x .

بمكاملة المعادلة (8.8) مرتين واستخدام القيم الحدودية (3a, 3b)

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} hy - U \frac{y}{h} + U \quad \dots\dots\dots (8.9)$$

ويعطي حفظ الكتلة

$$q = b \int_0^h u dy = \frac{1}{2} b U h - \frac{1}{12} \frac{b h^3}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

مع ملاحظة ثبات قيمة q لكل المقاطع x .

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{q}{bh^3} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

بمكاملة (4) بين الحدود $x = 0$ و x العامة و $h = h_1$ و h العامة (

$$p = 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu \frac{q}{b} \int_0^x \frac{dx}{h^3}$$

$$p = 6\mu U \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-2} dh - 12\mu \frac{q}{b} \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-3} dh \quad \dots\dots\dots (8.10)$$

باستخدام القيمة الحدودية (3d) : $p = 0$ ، $h = h_2$ ، $x = L$ ، تصبح المعادلة (8.10)

$$q = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-2} dh}{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-3} dh} \dots\dots\dots(8.11)$$

بتحديد علاقة h بـ x يمكن استخلاص علاقة الضغط p بالاحداثي x . مثال لذلك إذا كان الجانب الأعلى الساكن من المحمل ذا مستوياً مستقيماً يمكن أن نستخلص العلاقة $h(x)$ من الشكل (8.3)

$$h = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{x}{L}$$

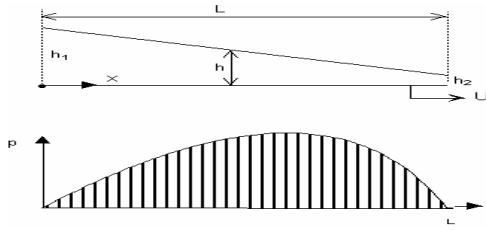
$$\frac{dh}{dx} = - \frac{h_1 - h_2}{L}$$

تعطي المعادلة (8.11)

$$q = bU \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \dots\dots\dots(8.12)$$

وتعطي المعادلة (8.10) :

$$p = 6\mu UL \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2 (h_1^2 - h_2^2)} \dots\dots\dots(8.13)$$



الشكل 8.3

يمكن استنتاج **الجمل** لهذه الحالة من

$$W = b \int_0^L p dx$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (8.13) وإجراء التكامل وبتعريف النسبة $r = \frac{h_1}{h_2}$

$$W = 6 \frac{\mu b L^2 U H_w}{h_2^2} \dots\dots\dots(8.14a)$$

حيث

$$H_w = \frac{\ln r}{[r-1]^2} - \frac{2}{r^2-1} \dots\dots\dots(8.14b)$$

يمكن الوصول، من النظرية والتجربة، إلى أن أقصى حمل يكون عند $r = 2.2$ ويعطي ذلك $H_{WM} = 0.0267$.

وتعطي المعادلة (8.14a) عندها السعة الحملية W_M :

$$W_M = 0.16 \frac{\mu b L^2 U}{h_2^2} \dots\dots\dots(8.15)$$

لاستنتاج قوة الإعاقة D على حركة المحمل

$$D = b \int_0^L \tau_w dx \dots\dots\dots(5)$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

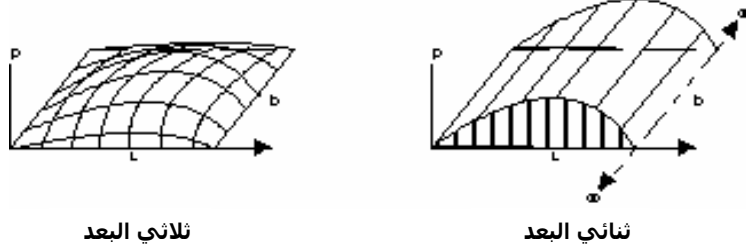
بالتعويض من المعادلات (8.9) ، (8.12) و (4) في المعادلة (5)

$$D = \frac{2\mu b L U}{h_1 - h_2} H_D \dots\dots\dots(8.16)$$

حيث

$$H_D = 2 \ln r - 3 \frac{r-1}{r+1}$$

8.3.2.2 المحامل ذات النسبة الباعية الصغيرة



الشكل 8.4

الافتراضات لهذه الحالة مطابقة للحالة السابقة بإستثناء أن أبعاد السريان ثلاثة وليست اثنين. ويمكن ملاحظة أن ممال الضغط في الاتجاه العرضي ليس صغيراً مما يقلل من المستوى العام للضغط. نبدأ ثانيةً من معادلات نافير-ستوكس ونطبق بدءاً الاختزال **المضبوط** للمعادلات ثم نعقب **بالتقريب**. وتكون النتيجة لهذه الحالة :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(8.17a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots(8.17b)$$

عند دمج المعادلات (8.17) بمعادلة حفظ الكتلة تعطي ما يعرف ب **معادلة رينولز للتزليق** :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{dh}{dx} \dots\dots\dots(8.18)$$

عند حل المعادلة (8.18) بالطرق العددية ثبت، كما هو متوقع، أن النتيجة تقارب تلك التي حصلنا عليها من السريان ثنائي البعد إذا كانت النسبة الباعية b/L كبيرة. تبعاً لذلك يمكن تحويل المعادلة (8.14) للصورة أدناه لتعبر عن السريان ثلاثي البعد:

$$W = K.6 \frac{\mu b L^2 U H_w}{h_2^2} \dots\dots\dots (8.19)$$

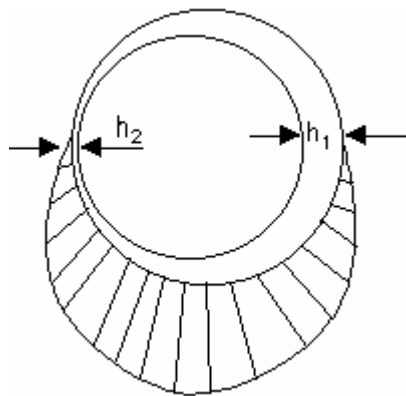
حيث يعتمد معامل التصحيح K على b/L كما يلي :

b/L	0.25	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0	1.5	2.0
K	0.06	0.085	0.140	0.185	0.34	0.44	0.61	0.68

3.0	4.0	5.0	6.0	∞
0.775	0.835	0.885	0.94	1.0

8.3.2.3 المحمل الحلقي

التحليل في الأقسام (8.3.2.1) و (8.3.2.2) يختص بمحامل مستقيمة القاعدة. يمكن اتباع نفس التحليل للحالة الخاصة بالمحمل الحلقي بفرد أحد جوانب المحمل الحلقي طولياً على استقامته، مع إبقاء المسافة h كما هي في المحمل الحلقي الأصل. و من ثم تحديد $h(x)$ وإجراء التحليل كما سبق.



مثال

الطول الأفقى لمحمل مستقيم في اتجاه الحركة 60mm . عرض المحمل 300mm .
الارتفاعات الأعلى و الأدنى للفجوة 100E-6m و 50E-6m، على التوالي. كثافة زيت
التزليق 900kg/m³ ولزوجته 0.1Pa.s . إذا كانت سرعة المحمل ثابتة عند 0.5m/s
أحسب:

- (أ) الحمل
- (ب) الإعاقة
- (ج) القدرة المفقودة في المحمل
- (د) الزيادة في درجة الحرارة لزيت التزليق إذا كانت قيمة الحرارة النوعية c_p 1000J/kg-k .

$$5 = 300/60 = b/L \quad (أ)$$

قيمة K المستخدمة في المعادلة (8.19) تساوي 0.885

$$H_w = \frac{\ln(2)}{[2-1]^2} - \frac{2}{(2)^2 - 1} = 0.0265$$

$$W = (0.885)6 \frac{(0.1)(0.3)(0.06)^2 0.5(0.0265)}{(50E-6)^2} = 3.04E3$$

الحمل = 3.04 kN

(ب) المعادلة (8.16)

$$D = \frac{2(0.1)0.3(0.06)0.5}{(100-50)E-6} \left[2\ln(2) - 3 \frac{50E-6}{150E-6} \right] = 13.9$$

الإعاقة = 13.9N

(ج) الفقد في القدرة الناشئ عن الإعاقة D.U =

$$D.U = (13.9)(0.5) = 7W$$

(د) بإدراك أن الفقد في القدرة P الذي حسب أعلاه يتحول إلى حرارة

$$P = c_p \dot{m} \Delta T = c_p \rho q \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{P}{c_p \rho q}$$

المعادلة (8.12) تعطي معدل السريان الحجمي

$$q = 5E-6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta T = \frac{7}{1000(900)5E-6} = 1.6\text{K} = \mathbf{1.6^{\circ}\text{C}}$$

8.4 تحسب حركة الموائع (طرق عددية)

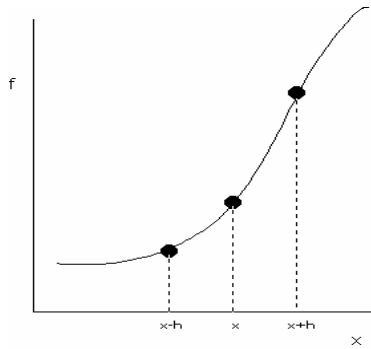
هذا الأسلوب يعتمد استبدال التكامل المباشر لمعادلات الحفظ بحل مجموعة مكافئة من المعادلات الجبرية الخطية. و يمكن استخدام أي من ثلاث طرق عددية:

1. طريقة الفروق المحددة

2. طريقة الأحجام المحددة

3. طريقة العناصر المحددة

سنكتفي هنا باعطاء شرح موجز لطريقة الفروق المحددة.



الشكل 8.6

تستبدل حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة بنسب الفروق و تستنبط منها المعادلة الجبرية. يسمى هذا التبدل **التفريز العددي**. ينبنى التفريز العددي على السلسلة الرياضية المعروفة بـ **سلسلة تيلور**.

و يمكن تصوير ذلك بتأمل الدالة $f(x)$ الموضحة في الشكل (8.6).

مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x+h)$ ، حيث h إزاحة صغيرة، هو:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (8.21)$$

و مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x-h)$ هو:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (8.22)$$

ب طرح أو جمع المعادلتين نحصل على المشتقة $\frac{df}{dx}$ أو المشتقة $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ، على التوالي:

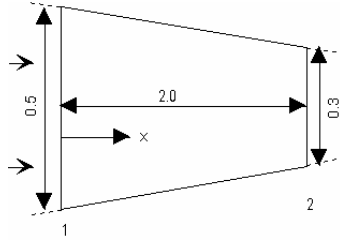
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^2) \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + O(h^2) \dots\dots\dots(8.24)$$

حيث تعني $O(h^n)$ حدود من الدرجة n ، أو ما بعدها. و معلوم أن هذه الحدود تكون صغيرة إذا كانت h صغيرة.

المعادلات أعلاه توضح كيف يمكن أن تقرب حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة إلى حدود مفروزة تحسب عددياً عند مواضع موزعة في مجال السريان.

مسائل



الشكل 8.6

8.1 يوضح الشكل (8.6) جزءاً من مجرى لام مستوي ينقل سائلاً بالمعدل الثابت $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

بافتراض انتظام السريان في كل المقاطع استنتج تعبيراً عن التسارع "الكامل" عند المقطع العام x ثم استنتج قيمته العددية عند المقطعين (1) و (2) إذا زيد معدل السريان زيادة مطردة تساوي $0.1 \text{ m}^3/\text{s}^2$ لكل متر عرضي أحسب التسارع الكامل في المقطعين (1) و (2) عندما يصبح معدل السريان $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

$$[0.20 \text{ m/s}^2, 0.93 \text{ m/s}^2, 0.71 \text{ m/s}^2, 2.70 \text{ m/s}^2]$$

8.2 سريان رتيب لا لزجي ولا انضغاطي يمكن تعريف مجالي السرعة والقوة الجسمية فيه بالمعادلتين :

$$\underline{v} = ax \underline{i} - ay \underline{j}$$

$$\underline{B} = -\rho g \underline{k}$$

إذا كان الضغط عند نقطة الأصل p_0 أثبت أن توزيع الضغط في المجال يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho a^2 (x^2 + y^2) - \rho g z .$$

8.3 سريان صفائحي رتيب ولا انضغاطي بين لوحين متوازيين المسافة بينهما h . يتحرك اللوح الأعلى في مستواه بالسرعة $U \underline{i}$ - بينما يظل اللوح الآخر ساكناً .
(أ) أثبت أن المعادلة أدناه تعطي حلاً مضبوطاً لمعادلات نافير-ستوكس:

$$\frac{u}{U} = \left[-\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \right] \underline{i}$$

خذ نقطة الأصل للمنظومة على اللوح الساكن .

(ب) فى حالة خاصة لهذا السريان ، الذي يعرف بسريان **كوييت** ، الفجوة بين اللوحين 10 mm وسرعة اللوح المتحرك $0.1 \underline{i} \text{ m/s}$. باعتبار أن اللزوجة

الحركية للمائع تساوي 0.05 Pa.s أرسم التغير المتوقع لـ $\frac{u}{U}$ مع $\frac{y}{h}$

للحالات الآتية:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (i)$$

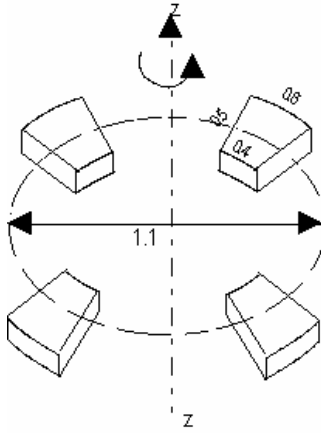
$$\frac{dp}{dx} = 1 \text{ Pa/m} \quad (ii)$$

$$\frac{dp}{dx} = -1 \text{ Pa/m} \quad (iii)$$

وحدد اتجاه القوة المؤثرة على اللوح المتحرك في كل حالة .

8.4 يوضح ا لشكل (8.7) محمل دفعي مكون

من أربع قطع متطابقة صمم لحمل مولد كهربائي يدور حول المحور zz . يمكن اعتبار كل من القطع الأربع حذاءً مستوي ومائل واعتبار أن المولد يسبب حملاً حركياً يساوي 3MN . باعتبار اللزوجة الحركية للمزلق 0.04Pa.s ونسبة سمكي طبقة الزيت الأعلى إلى الأدنى 2.0 قدر السرعة الدورانية للمولد بحيث لا يقل السمك الأدنى لطبقة الزيت عن 50E-6m . ملحوظة : قَرِّب شكل الحذاء إلى مستطيل. [93 rpm]



الشكل 8.7

8.5 ارتفاع الفجوة في محمل حذائي يتغير مع

اتجاه الحركة x حسب المعادلة

$$h = a e^{-bx}$$

حيث a و b ثوابت .

(أ) استخلص علاقة للضغط p بدلالة h, h_2, h_1, L, U, μ

(ب) كون تعبيراً عن المقدار اللابعدي $\frac{P}{\rho UL/h_2^2}$ وأرسم منحناه بدلالة

h/h_2 عند $h_1/h_2 = 2.0$

(ج) أرسم على نفس المناط المنحنى المقابل للحذاء المستقيم للمقارنة.

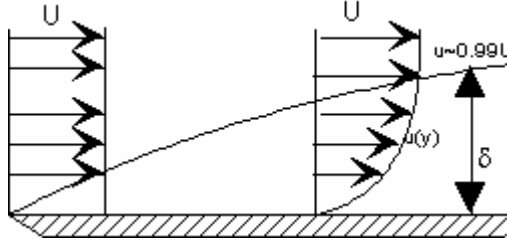
9 الإعاقه

9.1 مقدمة

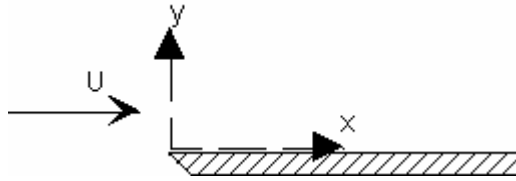
صعوبة التحليل الرياضي العام للسريان الكامل دفع إلى تقسيم مجال السريان لقسمين: أولهما السريان ضئيل التأثير بالجدران الحاوية، مما يضعف فيه ممالات السرعة ويجعل اللزج ضئيل الأثر، ويعرف هذا القسم بالسريان اللالزجي أو السريان الكَمُون. والقسم الثاني هو السريان المتأثر بممالات السرعة ويغلب فيه الأثر اللزجي، ويسمى سريان الطبقة الجدارية. ونحن في هذا الباب معنيون بدراسة هذا الأخير بينما نؤخر دراسة السريان اللالزجي للباب العاشر.

9.2 معادلات الطبقة الجدارية

يوضح الشكل (9.1) تكوّن الطبقة الجدارية على لوح رفيع السمك على استقامة السريان. ويلاحظ تغير السرعة مع المسافة y ، حتى تبلغ موضعاً لا يلاحظ فيه تغيراً يذكر. ويعرف هذا الموضع بحد الطبقة الجدارية. ويؤخذ عادةً على أنه الموضع الذي تساوي فيه السرعة $0.99U$ ، حيث U السرعة المنتظمة عند المقطع x بعيداً عن اللوح. أول من قدم هذه الصورة للطبقة الجدارية وشفّعها بالتحليل هو **لودفيك برانتل**.



الشكل 9.1



الشكل 9.2

يمكن أن نرى هنا ما ذكر في المقدمة عن الممال $\frac{du}{dy}$ وقيمته داخل وخارج الطبقة

الجدارية، و من ثم التفكير في المعادلة (1.3):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

حيث يكون القص τ ذا قيمة مقدرة داخل الطبقة الجدارية، بينما يمكن تجاهله خارجها. ويمكن أن نرى أيضاً أن الطبقة الجدارية أوضح وأكثر تحديداً في السريان ذي القيمة العالية لعدد رينولز.

في التحليل الآتي لسريان الطبقة الجدارية نفترض:

- السريان رتيب، لانهضاطي وثنائي البعد.
- القوى اللزجية ذوات وزن حدي مشابه للقصور الذاتي.
- الجدار الصلب الذي يتاخم السريان هو لوح مستقيم حاد الحافة وموازي للتيار الرئيسي. ويعني ذلك أن زاوية الهجوم تساوي صفر .

القيم الحدودية للسريان في الطبقة الجدارية:

$$\begin{array}{lll} y = 0 & u = 0 & v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u = U & du/dy = 0 \end{array}$$

بإعمال الافتراضات الأولى على معادلات نافير- ستوكس تختزل المعادلات إلى الصورة :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

المعادلة (1) في الصورة اللابعدية:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

يتم وزن الحدود في المعادلة (4) كما يلي: الحد الأخير في الجانب الأيمن (داخل القوس) وزنه $1/\epsilon^2$. عند ضربه في $1/Re$ ينبغي أن يعطي الوزن 1 ليزن الجانب الأيسر للمعادلة، حسب الافتراض الثاني، وهذا يجعل وزن عدد رينولز $1/\epsilon^2$.

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

الموازنة الحدية اذن تختزل المعادلة الى الصورة

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

و بالرجوع للصورة البعدية

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (9.1)$$

عند اعمال الموازنة الحدية على المعادلة (2) مستعينين بمعرفتنا الآن لوزن عدد رينولز يمكننا موازنة المعادلة الثانية.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

نجد أن أكبر الحدود بوزن ϵ . بذلك يمكن اغفال هذه المركبة من معادلات نافير - ستوكس.

معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(9.2)$$

وتعرف المعادلة (9.1) ب معادلة برانتل للطبقة الجدارية .

أما خارج حدود الطبقة الجدارية فإن القيم الحدودية تصبح:

$$y \geq \delta, \quad u = U, \quad du/dy = 0, \quad d^2u/dy^2 = 0$$

وتصير المعادلة (9.1)

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots(9.3)$$

قدّم **فون كارمن** حلاً للمعادلة (9.1) للسريان في الطبقة الجدارية في الصورة:

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(U-u)dy + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U-u)dy \dots\dots\dots(9.4)$$

و يُرى الآتى في حل فون كارمن:

- (1) إذا لم يتغير الضغط في المجال فإن الحد الأخير يختفي.
- (2) لحساب الإجهاد القصي على الجدار τ_w نحتاج لمعرفة توزيع السرعة $u(y)$.
- (3) تصلح المعادلة (9.4) لكل من السريان الصفائحي والسريان المائع، بشرط استخدام دالة السرعة المناسبة.

9.3 حل فون كارمن عند ممال الضغط صفر

عند $dp/dx = 0$ تأخذ المعادلة (9.4) الصورة :

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u(U-u) dy$$

وصورتها اللابعدية

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d \frac{y}{\delta} \right]$$

وبتعريف القيم اللابعدية η و ϕ

$$\phi = \frac{u}{U}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

نحصل على

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \phi(1-\phi) d\eta \right] \dots\dots\dots (9.5)$$

9.3.1 الطبقة الجدارية الصفائحية

بالاستفادة من معادلة السريان النيوتوني (1.3) التي تربط الإجهاد القصي بممال السرعة

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{d\phi}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho U \delta} \frac{d\phi}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$$

يمكن حساب $\left. \frac{d\phi}{d\eta} \right|_{\eta=0}$ عددياً إذا عرفت الدالة $\phi(\eta)$. وتعرّف هنا α كقيمة عددية لهذا المماس اللابعدى.

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu \alpha}{\rho U \delta} \dots \dots \dots (1)$$

تُحدد المعادلة (1) بذلك الجانب الأيسر من معادلة فون كارمن. أما الجانب الأيمن للمعادلة فيتحدد بمعرفة $\phi(\eta)$ و نرسم لهذا المقدار التكامل بالخط β

$$\beta = \int_0^1 \phi(1-\phi) d\eta \dots \dots \dots (2)$$

بالنعويض من (1) و (2) في (9.5) :

$$\delta d\delta \frac{\mu \alpha}{\rho U \beta} dx$$

وتُعطي المُكاملة

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{2\mu \alpha}{\rho U \beta} \right) x} \dots \dots \dots (9.6)$$

المعادلتان (1) و (9.6) تعطينان

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{\mu \alpha \beta}{2\rho U}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \dots \dots \dots (9.7)$$

وبإجراء التكامل ل τ_w على مساحة لوح عرضه b وطوله L

$$D = b \sqrt{2\alpha \beta \rho \mu L U^3} \dots \dots \dots (9.8)$$

نعرف هنا C_f ، معامل الإعاقة الجلدية

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

$$c_f = \sqrt{8\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \dots\dots\dots(9.9)$$

النتائج التجريبية التي حصل عليها بلازيوس

$$\left. \frac{\delta}{x} \right|_{\phi=0.99} = \frac{5.0}{\sqrt{\text{Re}_x}} \dots\dots\dots(9.10a)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0.332}{\sqrt{\text{Re}_x}} \dots\dots\dots(9.10b)$$

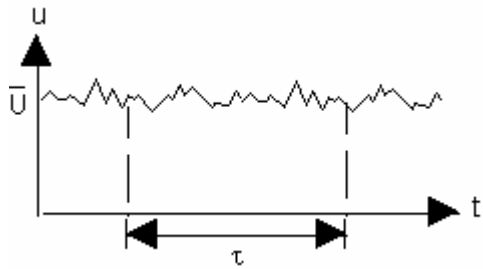
$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \dots\dots\dots(9.10c)$$

9.3.2 الطبقة الجدارية المائية

خصائص عامة للسريان المائل :

(1) جزيئات السريان المائل لا تنزلق في صورة صفائح كما هو الحال للسريان الصفائحي ولكنها تتحد في كتيلات وتتفصل باستمرار وتتحرك في كل الاتجاهات - مع محصلة سرعة في اتجاه السريان الرئيسي.

إذا اهتممنا مثلاً بالسرعة في الاتجاه x ، وسميناها u ، فإن u ترتبط عند أي وقت t بالسرعة المتوسطة $\bar{u}$ و الاضطراب u' ، حيث



الشكل 9.3

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u dt$$

و حيث τ هنا فترة الرصد .

وتعرف **حدة التمور** T كما يلي:

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_{\infty}} \dots\dots\dots(9.11)$$

ويمكن اختزال المعادلة (9.11) إلى الصورة أدناه إذا كانت خصائص التمور لاتجاهية:

$$T = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_{\infty}}$$

(2) من خصائص السريان المائل انه بجانب الفقد اللزجي تنشأ فيه فقود إضافية بسبب "عشوائية" حركة الكتيلات، وهي:

(أ) فقد بسبب الحركة في الاتجاه العرضي.

(ب) فقد بسبب الصدم المتواصل.

وينشأ عن ذلك ما يعرف ب **إجهادات رينولز** .

(3) يتحول السريان من صفائحي إلى مائل عند عدد رينولز الحرج، Re_c . مدى هذا العدد الحرج للسريان في الأنابيب

$$2\,000 < Re_c < 10\,000$$

وللسريان على الألواح المستوية ($T \sim 0.5\%$)

$$0.35E6 < Re_c < 1E6$$

الإجهاد القصي الكلي في الطبقة الجدارية المائلة يشمل الإجهاد اللزحي البسيط المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي و إجهاد قصي إضافي ناشئ عن التمرور. الإجهاد المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي:

$$\tau_t = \mu \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{du}{dy}$$

ويعبر عن الإجهاد القصي الإضافي الناشئ عن التمرور بمعادلة **بوسينسك**

$$\tau_t = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \dots\dots\dots(9.12)$$

وتسمى τ_t **الإجهاد الموري الظاهري** و ε **اللزوجة الظاهرية**.

ترتبط اللزوجة الظاهرية بمتغيرات السريان:

$$\varepsilon = \varepsilon(u', v', w', \text{مמالات السرعة})$$

وتستخلص هذه الدالة بالتجربة.

تمكننا التعريفات المذكورة من **نمذجة التمرور** بإعادة صياغة المعادلات (9.1) و (9.2) لتشمل السريان المائل:

$$-u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \dots\dots\dots(9.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(9.14)$$

تقود المعادلات (9.13) و (9.14) إلى حلول فون كارمن (9.4) و (9.5). وتحتاج المعادلة (9.5) لتحديد دالة السرعة وطبيعة الإجهاد القصي الجداري. يمكن اعتماد الدالة أدناه للسريان المائع:

$$\varphi = \eta^{1/7} \dots\dots\dots(9.15)$$

للإجهاد القصي الجداري المائع على الأسطح الناعمة دلت تجارب بلازيوس إلى الصيغة التجريبية:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 Re_\delta^{-1/4} \dots\dots\dots(9.16)$$

تصلح المعادلة (9.16) للسريان المائع على الألواح المستوية في المدى $5E5 < Re_x < 1E7$

نمضى الآن في تحليل سريان الطبقة الجدارية المائعة بالتركيز على اللوح المستوي ذي السطح الناعم.

باستخدام نتيجة بلازيوس

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 Re_\delta^{-1/4} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4}$$

و استخدام القانون الأسّي لتوزيع السرعة

$$\varphi = \frac{u}{U} = \eta^{1/7}$$

تعطي المعادلة (9.5) :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \varphi(1-\varphi) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \eta^{1/2} (1 - \eta^{1/2}) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} \delta \right)$$

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.0225 \frac{72}{7} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/4} dx$$

ويعطي التكامل

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} dx \dots\dots\dots (9.17)$$

بمقارنة المقدار $x^{4/5}$ للسريان المائل مع المقدار $x^{1/2}$ للسريان الصفائحي نرى أن الطبقة الجدارية المائلة تنمو أسرع من الطبقة الجدارية الصفائحية.

بوضع المعادلة (9.17) في صورة لابعدية

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 Re_x^{-1/5} \dots\dots\dots (9.18)$$

ونلاحظ ضعف اعتماد سمك الطبقة الجدارية على عدد رينولز مقارنةً بالسريان الصفائحي.

من المعادلتين (9.16) و (9.18) نحصل على تعبير عن القص الجداري اللابعدي:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0288 Re_x^{-1/5} \dots\dots\dots (9.19)$$

بمكاملة (9.19) على اللوح نحصل على الإعاقة الجلدية D

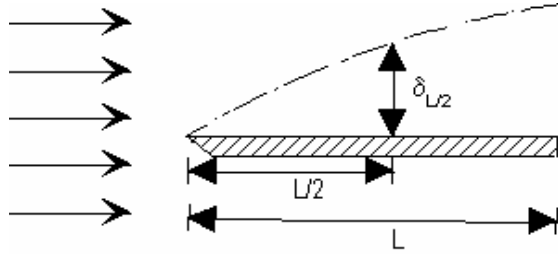
$$D = b \int_0^L \tau_w dx = 0.036 b \rho \nu^{1/5} L^{4/5} U^{9/5}$$

وتدل التجربة إلى أن المعامل الأدق هو **0.037**

$$D = 0.037 b \rho v^{1/5} L^{4/5} U^{9/5} \dots\dots\dots(9.20)$$

ثم نحصل على معامل الإعاقة الجلدية

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = 0.074 Re_L^{-1/5} \dots\dots\dots(9.21)$$



الشكل 9.4

مثال

سريان على لوح ناعم بممال
ضغط صفري. طول اللوح متر
واحد وعرضه 0.3 متر.
للزوجة الكينماتية للمائع
 $1E-6 \text{ m}^2/\text{s}$ وكثافته
 1000 kg/m^3 . السرعة
الخارجية للتيار 0.7m/s

(أ) إذا أمكن إبقاء

السريان صفائحيًا على كل اللوح أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف
طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية على كل اللوح.

(ب) إذا رُجَّ السريان صعيد اللوح بحيث أصبحت الطبقة الجدارية مائرة تمامًا
أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية
على كل اللوح.

(أ) في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية تُعطي نتائج بلازيوس :

$$\delta_x = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$Re_{L/2} = 0.35E6, \delta_{L/2} = 4.2E-3 \approx 4\text{mm}$$

$$Re_L = Re_{1,0} = 0.7E6$$

قوة الإعاقة D :

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 b L C_f$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} = 0.0016$$

$$D = \frac{1}{2} (1000) (0.7)^2 (0.3) (1.0) (0.0016) = \mathbf{0.12N}$$

(ب) في حالة الطبقة الجدارية المائية

$$Re_{L/2} = 0.35E6$$

و تعطي المعادلة (9.18)

$$\delta_{0.5} = 0.014 = 14\text{mm}$$

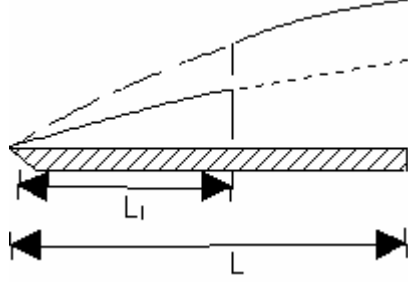
و من المعادلات (9.20) و (9.21)

$$Re_L = 0.7E6, C_f = 0.005$$

$$D = \frac{1}{2} (1000) (0.7)^2 (0.3) (1.0) (0.005) = \mathbf{0.37N}$$

9.3.3 الطبقة الجدارية الهجين

في القسمين السابقين (9.3.1) و (9.3.2) تم تحليل سريان الطبقة الجدارية الصفائحية والطبقة الجدارية المائية على حدة لتبسيط التحليل. ما يحدث عادةً في الطبيعة أن تكون الطبقة الجدارية صفائحية في البدء (مقدمة اللوح) ثم تتحول عند قيمة رينولز الحرجة إلى طبقة جدارية مائنة. يجاور اللوح في هذه الحالة ما يعرف بالطبقة الجدارية الهجين.



الشكل 9.5

نود هنا حساب قوة الإعاقة الجلدية الناشئة عن الطبقة الجدارية الهجين بافتراض أن التحول من الحالة الصفائحية إلى المائية يتم في مسافة قصيرة يمكن تجاهلها واعتبار التحول موضعي. نعتمد في هذا التحليل على الاستنباط المنسوب إلى برانتل و القائل: **عقب مقطع التحول يمكن اعتبار شكل الطبقة الجدارية إمتداداً لطبقة جدارية مائنة وهمية تبدأ عند مقدمة اللوح .**

إذن القيمة الكلية للإعاقة D تساوي :

الإعاقة المورية على الطول L - الإعاقة المورية على الطول L_l + الإعاقة الصفائحية على الطول L_l .

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 b \left[\frac{0.074L}{Re_L^{1/5}} - \frac{0.074L_l}{Re_{L_l}^{1/5}} + \frac{1.328L_l}{Re_{L_l}^{1/2}} \right] \dots\dots\dots(9.22)$$

مثال

المعطيات مماثلة لمعطيات المثال (9.1) باستثناء أن الطبقة الجدارية هنا هجين، حيث تتحول من صفائحية إلى مائرة عند عدد رينولز الحرج $0.4E6$. المطلوب حساب قوة الإعاقة الجلدية.

$$\frac{UL_l}{\nu} = \text{عدد رينولز الحرج}$$

$$Re_c = \frac{UL_l}{\nu} = 0.4E6$$

$$L_l = \frac{Re_c \nu}{U} = 0.57m$$

$$Re_L = 0.7(1.0)/1E-6 = 0.7E6, \quad Re_{L_l} = 0.4E6$$

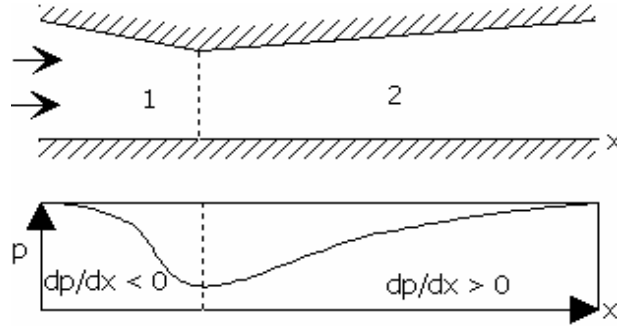
المعادلة (9.22) تعطي

$$D =$$

$$\frac{1}{2} (1E3)(0.7)^2 (0.3)(1.0) \left[\frac{0.074}{(0.7E6)^{1/5}} - \frac{0.57}{1.0} \frac{0.074}{(0.4E6)^{1/5}} + \frac{0.57}{1.0} \frac{1.328}{(0.4E6)^{1/2}} \right] = \mathbf{0.22N}$$

نذكر أن الإعاقة تساوي 0.12N لهذه المعطيات في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية، و 0.37N لحالة الطبقة الجدارية المائرة.

9.4 الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفري



الشكل

مما سبقت دراسته عن الطبقات الجدارية التي يساوي ممال الضغط فيها صفر نرى أن الإجهاد القصي الجداري τ_w و ممال السرعة

الجداري $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$ يتناقضان

مع زيادة x - المعادلتان

(9.7) و (9.19). إلا أن قيمهما لا تهبط إلى الصفر مهما كبرت قيمة x . وعند تأمل ممال السرعة نرى أن اتجاه السرعة u لا ينعكس أبداً في هذه الحالة. لدراسة ما يمكن أن يحدث لممال السرعة قرب الجدار في حالة ممال ضغط لا يساوي صفر نتفكر في السريان اللاإنضغاطي داخل المجرى اللام- الناشر الموضح في الشكل (9.6).

معادلة الاستمرارية، ثابت $vA =$ ، تدل إلى أن السرعة المتوسطة v تتزايد في الجانب اللام لتبلغ مداها عند الحلق ثم تتناقص في الجانب الناشر. و بالتعويض لذلك في معادلة حفظ الطاقة في صورتها المثالية:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{ثابت}$$

نحصل على توزيع الضغط الموضح في الشكل (9.6) و نرى فيه أن ممال الضغط سالب في الجانب الصعيدي و موجب في الجانب السافلي. ماذا يحدث إذن للطبقة الجدارية النامية على الجدار السفلي؟

(أ) في الجانب الصعيدي، حيث $\frac{dp}{dx} < 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيئ قرب

الجدار أعلى من الضغط أمام الجزيئ. وهذا يؤدي إلى أن لا تهبط سرعة الجزيئ إلى الصفر قط.

(ب) في الجانب السافلي، حيث $\frac{dp}{dx} > 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيئ يقل عن الضغط

أمامه. وهذا يؤدي إلى احتمال هبوط السرعة هناك إلى الصفر. ونعرف من التجربة أن

الحالة $\frac{dp}{dx} > 0$ حالة ضرورية لهبوط السرعة إلى الصفر ولكنها ليست كافية. و بافتراض

زاوية تباعد كبيرة نسبياً يهبط ممال السرعة $\frac{du}{dy}$ عند الجدار إلى الصفر و يصبح توزيع

السرعة كالمُبين في المقطع (2) في الشكل (9.7).

ما يلي ذلك في اتجاه

السريان x هو انعكاس اتجاه

السرعة، $\frac{du}{dy} < 0$ ، و يتكون

مجال سريان يدور فيه المائع

موضعيّاً. ويسمى السريان

في هذه الحالة سريان

منفصل .

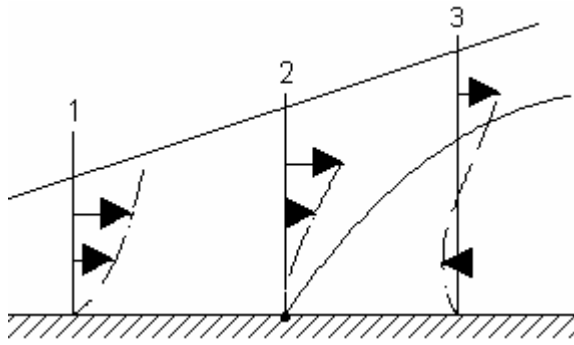
ظاهرة الفصل تصاحبها مضار

عديدة في التطبيقات

الهندسية وينبغي التيقن من

غياب مسبباتها عند التصميم

أو استخدام أحد الوسائل المتبعة لإزالة الفصل.



الشكل 9.7

9.5 الفصل و الإعاقة الضغطية في السريان الخارجي

9.5.1 السريان عبر أسطوانة

نبدأ بدراسة سريان مثالي ثنائي البعد محكوم بمعادلة برنولي في الصورة :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ثابت}$$

ونرى أن خضوع السريان لهذا الغرض يؤدي الى تماثل خطوط السريان حول الأسطوانة، و أن الضغط p والمقدار $\frac{1}{2} \rho v^2$ متماثلان حول المحور الرأسي - الشكل (9.8).

بمتابعة مستوى الضغط في خط السريان 3-2-1 فإن مثالية السريان تعني

$$p_3 = p_1$$

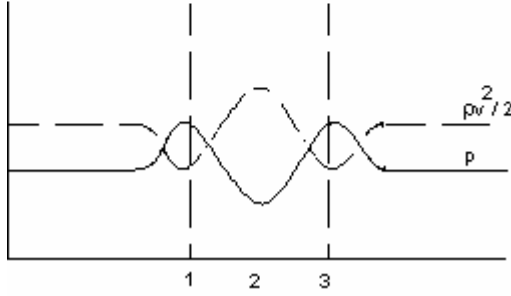
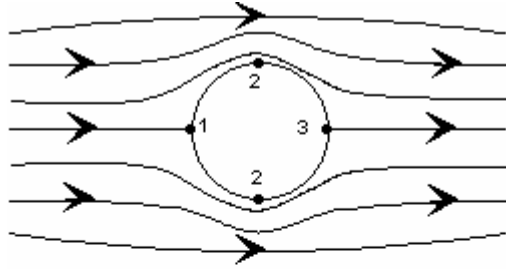
أي أن الضغط يُستردّ تماماً عند الموضع (3) .

هذه الصورة المثالية للسريان عبر الأسطوانة. ما هي الصورة الفعلية؟

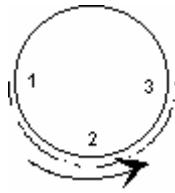
يبطئ السريان قرب السطح 3-2-1 بسبب قيد اللانزلاق - الشكل (9.9). وهو القيد الذي يؤدي لتكوين طبقة جدارية على السطح. ويعني

تكون الطبقة الجدارية وجود ممالات سرعة و من ثم احتكاك لزجي و فقد في الطاقة.

في المسار 2-1 تتزايد السرعة و ينخفض الضغط و يؤدي الاحتكاك اللزجي إلى فقد في الطاقة الحركية. و هذا



الشكل 9.8

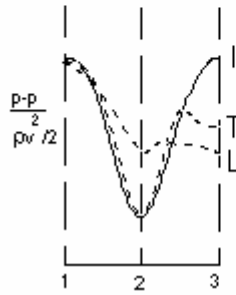
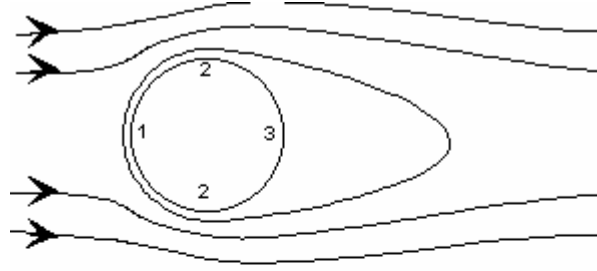


الشكل 9.9

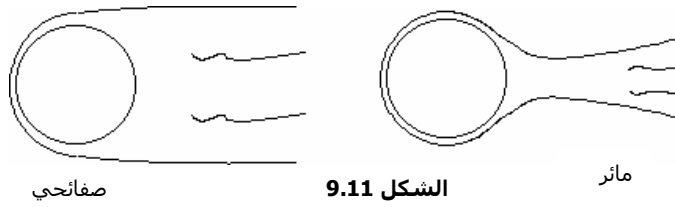
يعني أن محتوى الطاقة المفيد أقل من محتوى الطاقة في حالة السريان المثالي. و يتبع ذلك في المسار 3-2 إستحالة استرداد كل قيمة الضغط p_1 عند الموضع 3 بسبب الفقد المذكور و أن ينخفض الضغط سافل الأسطوانة عن نظيره صعيد الأسطوانة، أي

$$p_1 - p_3 > 0$$

و تنشأ بذلك قوة إعاقه على الاسطوانة في الاتجاه 3-1. و تؤدي dp/ds الموجبة في المسار 3-2 إلى انفصال الطبقة الجدارية.



الشكل 9.10



الشكل 9.11

عند مقارنة السريان المائل عبر الأسطوانة بالسريان الصفائحي نرى أن توزيع الضغط في حالة السريان المائل أقرب إلى التوزيع المثالي - الشكلين (9.10) و (9.11). و نرى

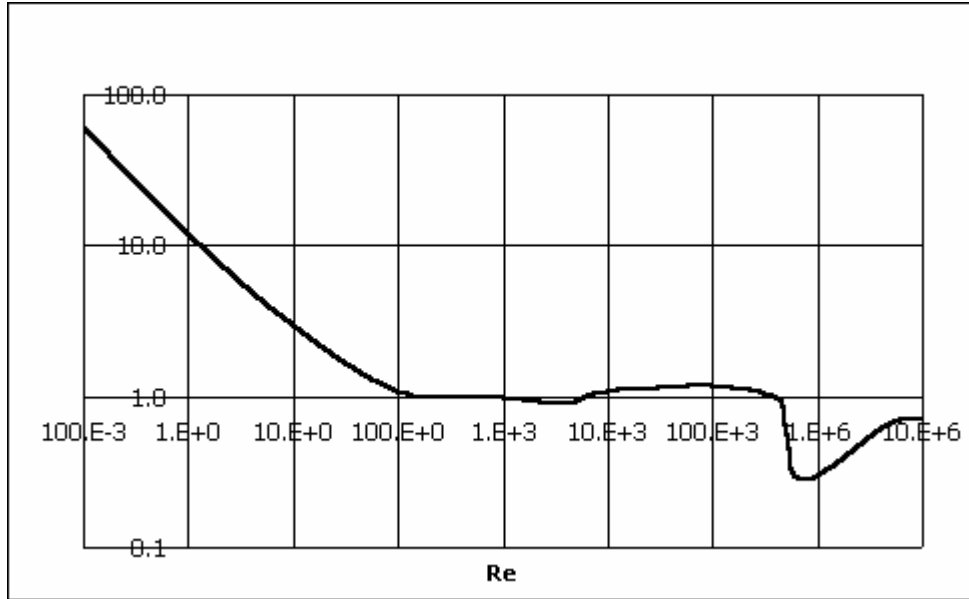
الطبقة الجدارية الصفائحية أسرع في الانفصال من الطبقة الجدارية المائية. ويُعزى ذلك إلى أن **الخلط الموري** في حالة السريان المائري يُغذي الطبقة الجدارية بطاقة حركية مستمدة من التيار الرئيسي مما يؤدي إلى تنشيط الطبقة الجدارية وتأخير انفصالها. يعرف المقدار $(p_1 - p_3)A$ بـ **الإعاقة الضغطية**، حيث A هي المساحة المواجهة للسريان. و يسبب هذه الإعاقة انفصال الطبقة الجدارية. **الإعاقة الجلدية**، من الجانب الآخر، يسببها السريان غير المنفصل.

يُعرف **المعامل الكلي للإعاقة** C_D كما يلي :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \dots\dots\dots (9.23)$$

حيث D قوة الإعاقة.

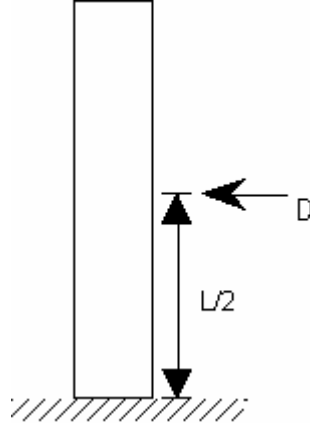
يعتمد هذا المعامل على عدد رينولز، و يوضح الشكل (9.12) هذه الصلة لأسطوانة ذات نسبة باعية عالية.



الشكل (9.12)

مثال

قَدِّر عزم الثني على قاعدة مدخنة أسطوانية ارتفاعها 20m معرّضة لرياح سرعتها 15m/s قطر المدخنة 1.5m . الضغط الجوي ودرجة الحرارة 0.1MPa و 30°C على التوالي. اللزوجة الكينماتية 2.5E-6m²/s.



الشكل 9.13

$$Re = vd/\nu = 9E6$$

يُعطي المنحنى في الشكل (9.12) عند هذه القيمة لعدد رينولز $C_D = 0.7$. وتُعطي معادلة الغاز الكامل كثافة الهواء بمعرفة الضغط والحرارة

$$\rho = p / RT = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

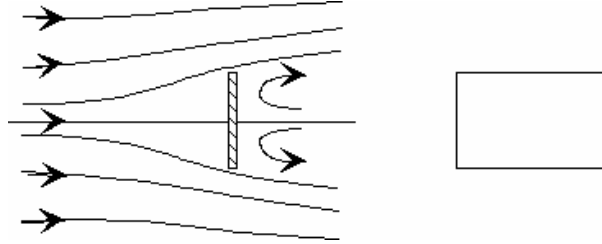
المساحة المواجهة للتيار $25\text{m}^2 = Ld$

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho A v^2 = 2717 \text{ N}$$

العزم M

$$M = \frac{1}{2} LD = 27167 \text{ Nm}$$

9.5.2 الإعاقة على ألواح رقيقة متعامدة على السريان



الشكل 9.14

(أ) لوح مسطح مستطيل:

معامل الإعاقة C_D للوح مستطيل ومواجه تماماً للتيار:

$$C_D = 1.17 + 0.012 (b/h) \dots\dots\dots (9.24)$$

في الحدود: $Re_h > 1000$ و $1 < b/h < 20$

(ب) قرص :

$$C_D = 1.17 \dots\dots\dots (9.25)$$

في الحدود: $Re > 1000$

(ج) نصف كرة مفرغة :

في الحدود: $Re > 1000$

$$C_D = 1.42 \dots\dots\dots (9.26a)$$

التيار يواجه الجانب المقعر

$$C_D = 0.38 \dots\dots\dots (9.26b)$$

التيار يواجه الجانب المحدب

مثال

الدوّار الموضح في الشكل (9.15) يراد استخدامه عند سرعة هواء 3m/s . كثافة الهواء 1.1kg/m^3 . العزم المطلوب حول نقطة الدوران 0.1Nm . أحسب نصف قطر شبه الكرة.



عزم الدوران =

$$= F_1 R - F_2 R = (F_1 - F_2)R$$

حيث F_1 و F_2 القوى على نصفي الكرة و R نصف قطر الكرة .

$$(F_1 - F_2)R = \frac{1}{2} \rho A v^2 (C_{D1} - C_{D2}) R = \frac{1}{2} \pi R^3 v^2 (C_{D1} - C_{D2})$$

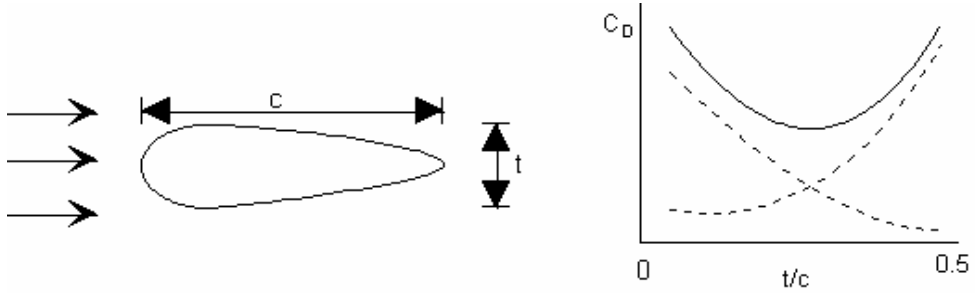
$$0.1 = \frac{1}{2} \pi (1.1) R^3 (9)(1.42 - 0.38)$$

$$R = 0.18\text{m}$$

نصف القطر المطلوب $0.18\text{m} \leq$

الشكل 9.15

9.5.3 الجنيحات



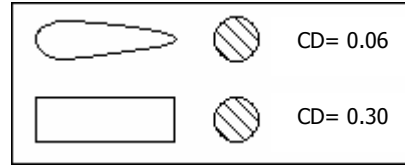
الشكل 9.16

الجنيح هو المقطع التجريبي للجناح أو ريش آلات الموائع. ويصمم ليقلل من تأثير الضغط الموجب سافل القطاع الأكثر سمكاً عند استخدامه في الحالة التصميمية . كما يراعى في تصميمه الموائمة بين الإعاقة الضغطية والإعاقة الجلدية لتعطيان إعاقة كلىة دنيا كما هو موضح في الشكل (9.16).

9.6 التحكم في الطبقة الجدارية

9.6.1 الانسيابية

تعني الانسيابية أن الشكل الخارجي للجسم يُشكل خطوط الانسياب الطرفية للسريان بحيث تُعطي الحجم الأدنى للدوامات، و من ثم القدر الأدنى من الإعاقة. المثال أدناه في الشكل (9.17) يوضح أن الشكل المعروف بالقطرة، مثلاً، يعطي معامل إعاقة 0.06 بينما يعطي الشكل الأسطوانى لنفس القطر معامل إعاقة 0.3 .

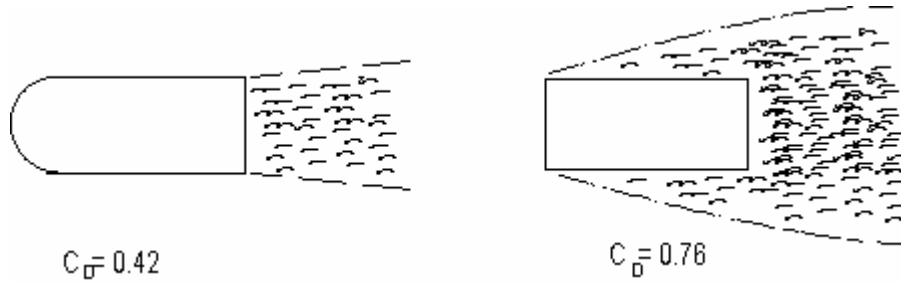


الشكل 9.17

ونرى شكل الأجسام الهندسية المعرضة للإعاقة الحركية - مثل: بدن الطائرة، محركات الطائرة النفاثة، الغواصة و الصاروخ - يُقرب الى القطرة.

يستخدم مُصنعو السيارات الأنفاق الهوائية للوصول إلى تصميمات تعطي إعاقة حركية دنيا. الشكل (9.18) يبين أثر

الانسيابية في خفض الإعاقة و هو مستمد من تقرير تجريبي عن حافلة فولكسفاغن.



الشكل 9.18

عند تقدير الإعاقة الكلية على حركة السيارة نراعي أنه بالإضافة إلى الإعاقة الحركية هنالك إعاقة الطريق الناتجة عن حركة الإطارات على الطريق. فالإعاقة الكلية R تساوي الإعاقة الحركية R_A مضافاً إليها إعاقة الطريق R_R

$$R = R_A + R_R = C_D \frac{1}{2} \rho A U^2 + C_R W t \dots\dots\dots(9.27)$$

حيث W/t وزن السيارة و C_R معامل الطريق.

القدرة المقابلة للإعاقة P

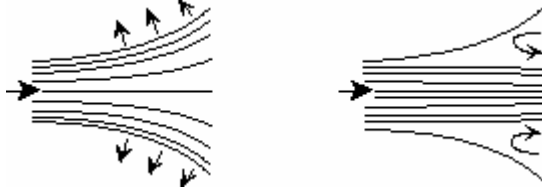
$$P = R U \dots\dots\dots(9.28)$$

تُعطى القائمتان أدناه قيمًا تقريبية للمعاملات C_D و C_R

C_R	نوع الطريق
0.1 - 0.3	رمل
0.08	تربة (نصف صلبة)
0.04	حصى
0.02	أسفلت قديم
0.01	أسفلت جديد
0.0027	قضبان حديدية

C_D	نوع العربة
0.8 - 1.0	شاحنة
0.6 - 0.8	حافلة
0.6 - 0.7	شاحنة صغيرة
0.2 - 0.5	صالون

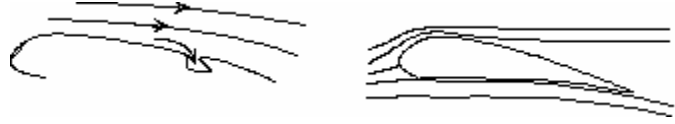
9.6.2 الامتصاص



الشكل 9.19

يمكن التحكم في الطبقة الجدارية بامتصاص المائع من منطقة الانفصال بوسائل خارجية. ويبدو في الشكل (9.19) تطبيق لهذه الوسيلة في سريان داخلي (ناشر). و تدل التجربة الى أن الفصل لا يحدث في الناشر إذا كانت زاوية النشر تقل عن 7° .

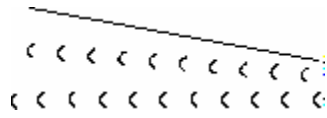
في الشكل (9.20) تطبيق لأسلوب الامتصاص على سريان خارجي (جنح).



الشكل 9.20

9.6.3 تنشيط الطبقة الجدارية

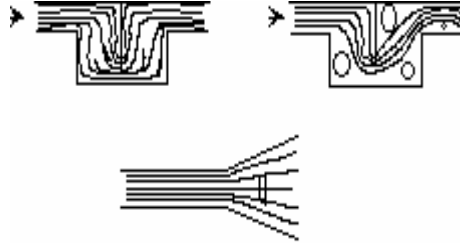
يحدث انفصال الطبقة الجدارية، كما سبق الذكر، بسبب فقدان السريان لجزء من طاقته بسبب الاحتكاك اللزجي في الطبقة الجدارية. وتعتمد طريقة التنشيط على إضافة طاقة من التيار الرئيسي بخلق دوامات مورية بواسطة ريش صغيرة تعرف بمولدات الدوامات. وهذه من أكثر الطرق استخداماً في تصميم أجنحة الطائرات. الشكل (9.21).



الشكل 9.21

9.6.4 الريش الساكنة

تستخدم الريش الساكنة في السريان الداخلي للتحكم في خطوط الانسياب و الحد من انفصال الطبقة الجدارية . يوضح الشكل (9.22) تطبيقان لهذه الوسيلة في مجرى لسريان غير منتظم الاتجاه و مجرى ناشر.



الشكل 9.22

مسائل

[حيث تحتاج لكثافة الهواء أعتبرها 1.2 kg/m^3]

9.1 سريان صفائحي عبر لوح مسطح بزاوية هجوم صفر وبممال ضغط صفر. بافتراض

أن توزيع السرعة في الطبقة الجدارية من الدرجة الثانية استخلص تعبيراً عن $\frac{\tau_w}{\rho U^2}$ و

C_f بدلالة Re . قارن نتائجك بنتائج بلازيوس التجريبية.

$$[0.365 Re_x^{-1/2}, 1.461 Re_x^{-1/2}]$$

9.2 يسري هواء بسرعة 2.2 m/s على استقامة لوح مسطح طوله 0.5 m وعرضه

0.3 m اللزوجة الكينماتية $20 \text{ E-6 m}^2/\text{s}$ والكثافة 1.2 kg/m^3 . أحسب سمك الطبقة

الجدارية عند ذيل اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية .

$$[11 \text{ mm}, 2.47 \text{ E-3 N}]$$

9.3 عدد رينولز لسريان على استقامة لوح مسطح 5 E6 . يتحول السريان من

صفائحي إلى مائل عند البعد $0.4L$ من مقدمة اللوح، حيث L طول اللوح.

(أ) أحسب معامل الإعاقة الجلدية، C_f

(ب) أحسب القدرة اللازمة لتثبيت اللوح في سريان سرعته الرئيسية 2 m/s

وكثافته 1000 kg/m^3 إذا كان طول اللوح 1.0 m وعرضه 0.4 m .

$$[0.00213, 3.4 \text{ N}, 6.8 \text{ W}]$$

9.4 يمكن اعتبار جناح الطائرة لوح مسطح باستقامة السريان لحساب التقديرات

الأولى للتصميم. في حالة محددة باع 1 لجناح 7.5 m ووتره 2.0 m وسرعة الطيران 320

m/h . اللزوجة الكينماتية للهواء $20 \text{ E-6 m}^2/\text{s}$ و الكثافة 0.95 kg/m^3 .

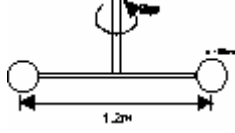
(أ) بافتراض أن السريان مائل على كل الجناح قدر الإعاقة على الجناح .

(ب) بأي مقدار تقل القدرة المطلوبة إذا أمكن التحكم في الطبقة الجدارية

لتصبح صفائحية على كل الجناح. $[340 \text{ N}, 25.8 \text{ kW}]$

9.5 يهبط مظلي عمودياً بمظلة بسرعة 5 m/s . وزن المظلي والمظلة 1 kN . باعتبار

أن المظلة نصف كرة مفرغة قدر قطرها. $[7.7 \text{ m}]$



الشكل 9.23

9.6 يوضح الشكل (9.23) خلاط دوار يستخدم لخلط محلول كثافته 1100g/m^3 . في طرفي الدوار قرصان معدنيان مثبتان في المستوى الرأسي. قطر أذرع الخلاط صغير ويمكن تجاهل أثره الحركي. أحسب عزم اللي والقدرة اللازمين لتشغيل الخلاط .
[86 Nm, 541W]

9.7 المساحة الأمامية لسيارة 2.2m^2 ووزنها الكلي 20kN . معامل الإعاقة الحركي 0.5 . إذا استخدمت السيارة على طريق مسفلت متوسط الحال ($C_R = 0.015$) أحسب السرعة التي تتجاوز عندها الإعاقة الحركية إعاقة الطريق. أحسب أيضاً القدرات اللازمة عند سرعتين 100 km/h و 120 km/h .
[77km/h ; 34.4kW, 22.5kW]

10 الرفع

10.1 مقدمة

يُعنى هذا الفصل بدراسة الأنموذج الرياضي للسريان اللالزجي اللانضغاطى. تجعل هذه الافتراضات معادلات الحفظ بسيطة إلا أنها تظل حاكمة لطائفة من التطبيقات الهندسية الهامة. و نهتم هنا بصفة أساسية بالتطبيق ذي الصلة بقوة الرفع. سيقصر التحليل على السريان الرتيب ثنائي البعد.

نحتاج في هذا الفصل للتعريفات الآتية :

(أ) دالة السريان ψ

المركبات u و v مركبات لمتجه السرعة $\underline{V}$ في الاتجاهين x و y لسريان ثنائي البعد

$$\underline{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \dots\dots\dots(10.1)$$

يمكن استبدال المتغيرات المُعتمدة u و v بمتغير مُعتمد واحد هو ψ باستخدام علاقات التحويل:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(10.2)$$

بهذا التعريف تحقق الدالة ψ معادلة الاستمرارية :

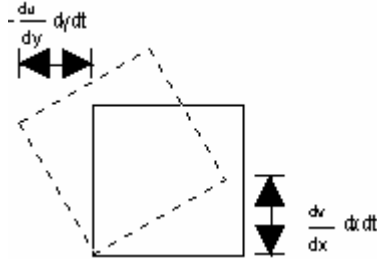
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.3)$$

(ب) السريان اللادوراني

يعرف السريان بأنه لا دوراني إذا لم يكن لأي من أجزاءه حركة دورانية خالصة.

يمكن من الشكل (10.1) استنتاج أن السرعة الزاوية المتوسطة تساوي:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



الشكل 10.1

ونرى من ذلك أن مقدار دوران أي من أجزاء المائع تتناسب مع المقدار داخل القوسين. وبذلك يمكن تعريف السريان اللادوراني بأنه الذي يحقق المعادلة

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.4)$$

يمكن أيضاً إثبات أن الدوران يرتبط فقط بالسريان اللزجي. وبظل السريان لا دورانياً إذا كان لا لزجياً وبدأ لا دورانياً .

(ج) دالة الكمون ϕ

يوصف السريان بأنه ذو كمون إذا وجدت دالة ϕ تعرف متجه السرعة

$$\underline{V} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \underline{j}$$

حيث

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots(10.5)$$

ويمكن ملاحظة أن المعادلة (10.5) تحقق المعادلة (10.4).

(د) معادلتى لابلاس لـ ψ و ϕ

بقرن المعادلتين (10.2) و (10.4) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(10.6)$$

وبقرن المعادلتين (10.3) و (10.5) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(10.7)$$

(هـ) المناط القطبي

نعيد هنا صياغة المعادلات (10.1) إلى (10.7) بدلالة الإحداثيات القطبية θ و r .

متجه السرعة $\underline{v}$:

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta \dots\dots\dots(10.8)$$

دالة السريان ψ :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \dots\dots\dots(10.9)$$

دالة الكمون ϕ :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(10.10)$$

معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(10.11)$$

السريان اللادوراني:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(10.12)$$

معادلتني لابلاس:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots(10.13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots(10.14)$$

(و) السريان المنتظم

يعرّف متجه السرعة للسريان المنتظم بالمعادلة: $\underline{V} = U\hat{i}$

فتكون $u = U$ و $v = 0$

ويتبع ذلك

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \dots\dots(1)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \dots\dots(4)$$

مكاملة (1) تعطي

$$\psi = Uy + f(x)$$

وبالمفاضلة والمقارنة مع (2)

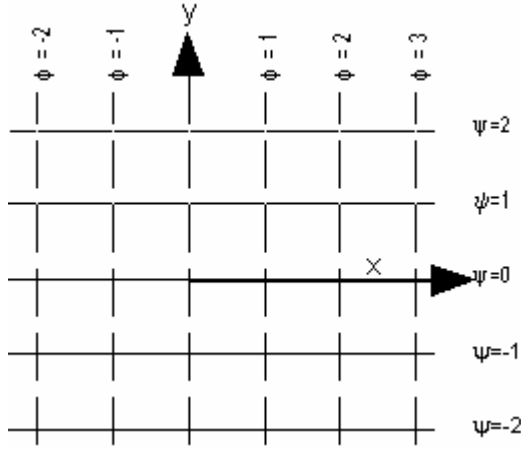
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) = 0$$

$$\psi = Uy + c_1 \dots\dots\dots(5)$$

مكاملة (3) تعطي

$$\phi = Ux + g(y)$$

وبالمفاضلة والمقارنة مع (4)



$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = g'(y) = 0$$

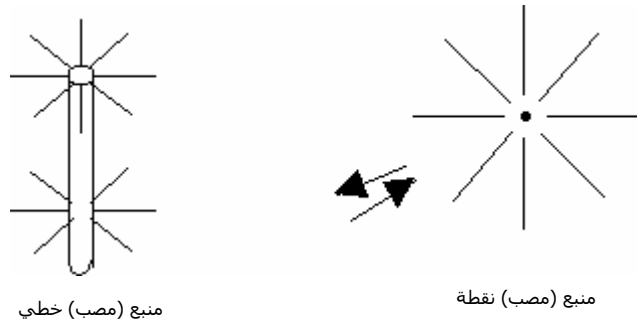
$$\phi = Ux + c_2 \dots\dots\dots(6)$$

الشكل (10.2) يـصور السريان المنتظم عند
 $U = 1 \text{ m/s}$, $c_1 = c_2 = 0$

الشكل 10.2

(ز) المنبع والمصب

يُعرف المنبع في هذا التحليل بأنه
 الموضع الذي ينبع منه المائع إشعاعياً والمصب هو الموضع الذي يختفي عنده المائع
 الداخل إشعاعياً. يوضح الشكل (10.3) ما يعرف بالمنبع النقطة و المصب النقطة و المنبع
 الخطي و المصب الخطي .



الشكل 10.3

يستخلص من التعريف أعلاه أن السرعة الزاوية للسريان في المنبع والمصب v_0 تساوي
 صفر. بذلك يكون معدل السريان الحجمي q لوحدة طول واحدة في المنبع الخطي

$$q = 2\pi r v_r$$

باستخدام المعادلة (10.9):

$$q = 2\pi r v_r = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + f(r)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = f'(r) = -v_\theta = 0$$

$$f(r) = \text{ثابت} = c_1$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + c_1 \dots\dots\dots(1)$$

فتعطي المعادلة (10.10)

$$q = 2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + g(\theta)$$

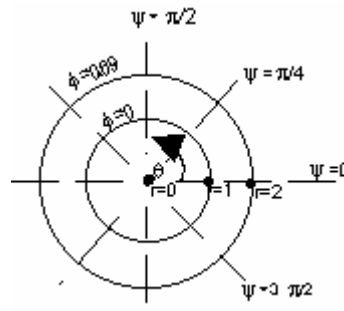
$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} g'(\theta) = v_\theta = 0$$

$$g(\theta) = \text{ثابت} = c_2$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + c_2 \dots\dots\dots(2)$$

يبين الشكل (10.4) سريان منبع (مصب) عند

$$\frac{q}{2\pi} = 1, \quad c_1 = c_2 = 0$$



الشكل 10.4

مثال

يعرف سريان لا انضغاطي بالمعادلة $\psi = xy$

- (أ) أرسم لهذا السريان بعض خطوط الانسياب على المستوى الموجب لـ $x-y$.
 (ب) أكتب معادلة متجه السرعة.
 (ج) بين أن السريان لا دوراني وأكتب التعبير الدال على دالة الكمون.

(أ) خطوط الانسياب :

عند خط الانسياب

$\psi = 0$: لكل قيم y ، $x = 0$

لكل قيم x ، $y = 0$

عند خط الانسياب

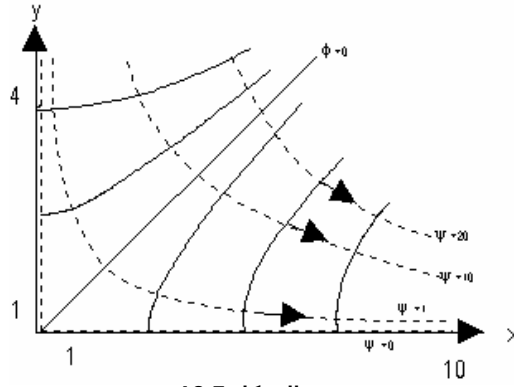
$y = 1/x$: $\psi = 1$

عند خط الانسياب

$y = 10/x$: $\psi = 10$

عند خط الانسياب

$y = 20/x$: $\psi = 20$



الشكل 10.5

(ب) متجه السرعة $\underline{V}$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$

$$\underline{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$$

ويمكن استنتاج اتجاهات خطوط الانسياب من توزيع السرعة أعلاه.

(ج) ليكون السريان لا دوراني ينبغي تحقيق المعادلة (10.4) .

ومن (ب) أعلاه

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ويحقق ذلك المعادلة (10.4)

لتحديد دالة الكمون

$$u = x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi = \frac{1}{2} x^2 + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = -y$$

$$f(y) = -\frac{1}{2} y^2 + c$$

$$\phi = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$$

10.2 اختزال معادلات نافير-ستوكس لحالة السريان اللالزجي

10.2.1 الصورة العامة للمعادلات

عند افتراض أن السريان لالزجي ولانضغاطي يمكن تبسيط معادلات نافير-ستوكس من الصورة (8.1) باعتبار المتجه اللزجي $\underline{\zeta}$ يساوي صفر فتأخذ المعادلات الثلاث الصورة التالية في مناط ديكارتي:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(10.15a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(10.15b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(10.15c)$$

و قد سبقت كتابة هذه المعادلات، المعروفة بمعادلات أولير، بالترقيم (8.3).

و في المناط الأسطوانى :

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = B_r - \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots(10.16a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \dots\dots\dots(10.16b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(10.16c)$$

مثال

المعادلة أدناه تمثل توزيع السرعة في مجال ثلاثي البعد لسريان رتيب:

$$\underline{V} = cx\hat{i} + cy\hat{j} - 2cz\hat{k}$$

(أ) أثبت أن السريان لالانضغاطي.

(ب) باعتبار المحور z رأسي و أن الكثافة تساوي 1000 kg/m^3 و الثابت c يساوي 1.0 s^{-1} أحسب ممال الضغط عند النقطة (1,1,5).

(i) معادلة الاستمرارية للسريان اللانضغاطي ثلاثي البعد (المعادلة 2.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

وفي هذا المثال: $u = cx$, $v = cy$, $w = -2cz$ و هى تحقق المعادلة أعلاه و تحقق بالتالي الاستمرارية اللانضغاطية.

(ب) بالتعويض لقيم u , v , w فى معادلات أولر (10.15) و بملاحظة أن :

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k} = 0 + 0 - \rho g \underline{k}$$

تعطي (10.15a)

$$\rho [c^2 x] = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - 1000(1)^2(1) = - 1000 \text{ Pa/m}$$

و تعطي (10.15b)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - 1000 \text{ Pa/m}$$

و تعطي (10.15c)

$$\rho [-2 cz(-2c)] = - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g - 4c^2 z \rho = -1000(9.81+60) = - 29810 \text{ Pa/m}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = - 0.001 \underline{i} - 0.001 \underline{j} - 29810 \underline{k}$$

10.2.2 معادلة برنولي

باعتبار السريان ثنائي البعد لا دوراني و لا انضغاطي مع تجاهل القوى الجسمية تختزل المعادلات (10.15) إلى الصور:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(2)$$

المعادلة (10.4) - شرط حالة اللادوران:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.4)$$

من المعادلتين (1) و (10.4)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(y) \dots\dots\dots(3)$$

وبالمثل تعطي المعادلتان (2) و (10.4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = g(x) \dots\dots\dots(4)$$

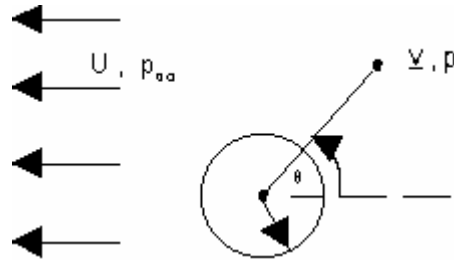
وتعطي المعادلتان (3) و (4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{ثابت} \dots\dots\dots(10.17)$$

وتعرف (10.17) بـ **معادلة برنولي**.

يمكن ملاحظة أن المعادلة تشابه معادلة الطاقة التي سبق استخلاصها في الباب الثاني، ألا أنه ينبغي الانتباه إلى أن السرعة و الضغط في معادلة برنولي قيم محددة عند مواقع محددة في خطوط السريان بينما القيم المقابلة في معادلة الطاقة هي متوسطات لهذه المتغيرات عند المقاطع المشار إليها.

10.3 السريان اللادوراني عبر اسطوانة



الشكل 10.6

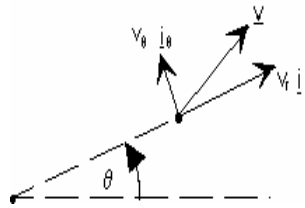
نبدأ هذا التحليل بالعلاقة التفاضلية للكُمون ϕ كعلاقة مُحَاكِيَة للسريان :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots (10.14)$$

مع القيم الحدودية :

$$r = a, \quad v_r = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (ق ح 1)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad v_r = -U \cos \theta \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = -U \cos \theta \dots\dots\dots (ق ح 2)$$



$$r \rightarrow \infty, \quad v_\theta = U \sin \theta \quad \rightarrow$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} = U \sin \theta \dots\dots\dots (ق ح 3)$$

الشكل 10.7

لحل المعادلة (10.14) باستخدام طريقة الضرب

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R' \Theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R'' \Theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = R \Theta', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R \Theta''$$

وبالتعويض في المعادلة (10.14)

$$R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} = k$$

وتعطي المعادلة الأخيرة المعادلتين :

$$r^2 R'' + r R' - k R = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Theta'' + k \Theta = 0 \dots\dots\dots(3)$$

توجد ثلاثة احتمالات لقيمة k :

$$k = \lambda^2 \Leftarrow k \text{ موجبة} \quad (\text{أ})$$

$$k = -\lambda^2 \Leftarrow k \text{ سالبة} \quad (\text{ب})$$

$$k = 0 \quad (\text{ج})$$

حيث λ عدد حقيقي .

ويكون الحل العام للمعادلة (10.14) هو مجموع حواصل ضرب الحلول R و Θ عند كل من

حالات k الثلاث :

$$\varphi = R \Theta \Big|_{k=\lambda^2} + R \Theta \Big|_{k=-\lambda^2} + R \Theta \Big|_{k=0}$$

يمكن الاستنتاج أن الحل العام $\varphi(r, \theta)$ يأخذ الصورة :

$$\begin{aligned} \varphi = & [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] \\ & + [c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r] [c_9 \theta^\lambda + c_{10} \theta^{-\lambda}] \\ & + [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}] \end{aligned}$$

بملاحظة أن φ ليست دالة دورية في r فإن السطر الثاني في الحل أعلاه يختفي

$$\varphi = [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] + [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}] \dots (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \lambda [c_1 r^{\lambda-1} - c_2 r^{-\lambda-1}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots (5)$$

يمكن تحقيق القيمة الحدودية (ق ح 2) بالآتي :

$$\lambda = 1, \quad c_1 c_7 = -U, \quad c_8 = 0$$

وتصبح المعادلة (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{r^2}\right) + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots (6)$$

وتعطي القيمة الحدودية (ق ح 1) $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$

$$c_6 = 0, \quad \frac{c_2}{c_1} = a^2 \quad \text{أي}$$

فتصبح المعادلة (6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \dots (10.16)$$

وتصبح المعادلة (4)

$$\varphi = -U \cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + c_5 c_{11}\theta + c_5 c_{12}$$

الثابت $c_5 c_{12}$ اختياري في السريان الكمون ويمكن اعتباره صفر .

ويمكن إحلال الرمز c محل الثابت $c_5 c_{11}$:

$$\varphi = - \left[r + \frac{a^2}{r}\right] U \cos\theta + c\theta \dots\dots\dots(10.17)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \left[r + \frac{a^2}{r}\right] U \sin\theta + c$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] U \sin\theta + \frac{c}{r} \dots\dots\dots(10.18)$$

لاحظ أن المعادلة (10.18) تحقق القيمة الحدودية (قح 3) .

توزيع السرعة :

التعبير عن متجه السرعة عند أي نقطة (r,θ) في مجال السريان قرب سطح الاسطوانة هو:

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \underline{i}_\theta$$

وبالتعويض لممالات الكمون من المعادلات (10.16) و (10.18)

$$\underline{v} = - \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) U \cos \theta \right] \underline{i}_r + \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) U \sin \theta + \frac{c}{r} \right] \underline{i}_\theta \dots\dots\dots(10.19)$$

على سطح الاسطوانة $r = a$

$$\underline{v}_a = \left[2 U \sin \theta + \frac{c}{a} \right] \underline{i}_\theta$$

وبذلك تكون سرعة المائع عند سطح الاسطوانة ناتجة عن إسهامين:

(1) مقدار يعتمد على U والزاوية θ.

(2) مقدار ثابت يساوي c/a .

و يمكن تصور الإسهام الأخير بافتراض الآتي:

- (أ) تدور الأسطوانة حول محورها بسرعة زاوية ثابتة تنتج عنها سرعة طرفية تساوي c/a متر في الثانية.
- (ب) يضيف دوران الاسطوانة حول محورها مقدار ثابت للسرعة يساوي c/a والتي يمكن أن تكتب ωa حيث ω السرعة الزاوية (rad/s) في الاتجاه i_θ الموجب لتصبح المعادلة:

$$\underline{v}_a = \left[2 U \sin \theta + \omega a \right] \underline{i}_\theta \dots\dots\dots(10.20)$$

يمكن تحديد نقاط الركود على سطح الاسطوانة بتعويض $\underline{v}_a = 0$ في المعادلة (10.20) لتعطي:

$$\theta_o = \sin^{-1} \left(-\frac{\omega a}{2U} \right)$$

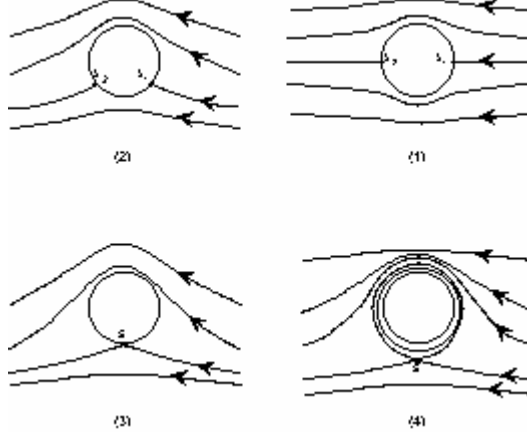
ويمكن ملاحظة ما يلي عند وضع قيم مختلفة للسرعة الدورانية ω:

$$\theta_0 = 0, 180^\circ \text{ يعني } \omega = 0 \quad (1)$$

$$\theta_0 = 210^\circ, 330^\circ \quad \omega = U/a \quad (2)$$

$$\theta_0 = 270^\circ \quad \omega = 2U/a \quad (3)$$

$$\omega > 2U/a \quad \text{نقطة الركود تبتعد عن السطح عند } \theta = 270^\circ \quad (4)$$



الشكل 10.8

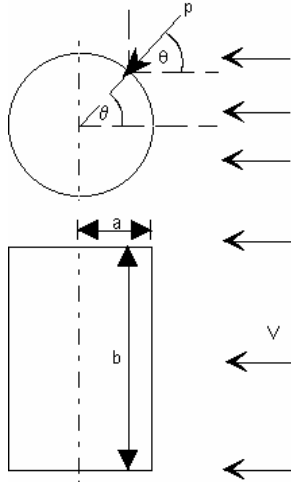
الضغط على سطح الاسطوانة

باستخدام معادلة برنولي

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)$$

ولإيجاد الضغط على سطح الاسطوانة نعوض للمقدار V^2 من المعادلة (10.20)

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - 4 \sin^2 \theta - 4 \frac{\omega a}{U} \sin \theta - \left(\frac{\omega a}{U} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (10.21)$$



الشكل 10.9

القوة على سطح الاسطوانة

باعتبار F_x , F_y مركبتي القوة F على سطح الاسطوانة في الاتجاهين x و y

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

$$F_x = \oint_A -p \cos\theta dA$$

$$dA = (a d\theta) b$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos\theta ab d\theta$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (10.21)

$$F_x = -ab \int_0^{2\pi} p_{\infty} \cos\theta d\theta - ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \left[\int_0^{2\pi} (\cos\theta - 4\cos\theta \sin^2\theta - 4 \frac{\omega a}{U} \cos\theta \sin\theta - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \cos\theta) d\theta \right] = 0$$

وهذا يعني أن لا قوة تعمل في الاتجاه x

$$\begin{aligned} F_y &= \oint_A -p \sin\theta dA = -ab \int_0^{2\pi} p \sin\theta d\theta \\ &= ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \int_0^{2\pi} (\sin\theta - 4\sin^3\theta - 4 \frac{\omega a}{U} \sin^2\theta - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \sin\theta) d\theta \\ &= 2 a^2 b \rho U \omega [\pi] = 2\pi a^2 b \rho U \omega \end{aligned}$$

$$\underline{F} = 2\pi a^2 b \rho U \omega \underline{j} .$$

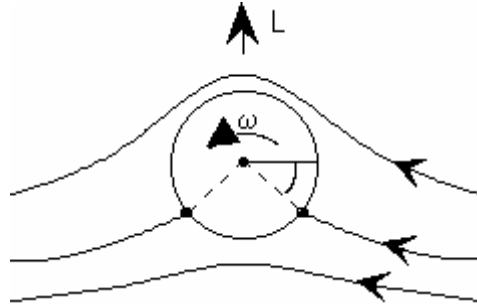
تعمل هذه القوة في الاتجاه y الموجب متعامدة على اتجاه السريان الرئيسي وتسمى **الرفع** ويرمز لها بـ F_L .

$$F_L = 2\pi a^2 b \rho U \omega \dots\dots\dots(10.22)$$

نرى ظاهرة الرفع هذه، على سبيل المثال، حين تُدفع كرة بضربة جانبية بحيث تتخذ سرعة انتقالية U وسرعة زاوية ω تدوير الكرة. ونلاحظ حينئذ أن الكرة تتحرك في مسار منحني مما يدل على نشوء قوة الدفع F_L . وقد طُبقت النظرية في سفينة استخدمت أسطوانات عمودية معرضة للرياح وتدار حول محورها. ويمكن ذلك من الحصول على القوة F_L التي وفرت الدفع للسفينة. نضيف هنا أن الرفع الحقيقي أقل مما تتنبأ به المعادلة (10.22) بسبب إغفال هذه المعادلة للأثر اللزجي.

يعرف معامل الرفع C_L بالمعادلة :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{2\pi \alpha a}{U} \dots\dots\dots(10.23)$$



الشكل 10.10

مثال

أسطوانة قطرها 0.3m تدور حول محورها بسرعة 300rpm داخل سريان سرعته الرئيسية 4.0m/s وكثافته 1.0kg/m^3 أحسب معامل الرفع و الرفع المثالي على متر واحد من طول الاسطوانة وحدد مواضع الركود.

$$\omega = 2\pi N/60 = 2\pi(300)/60 = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$C_L = 2\pi(31.42)0.15/4.0 = \mathbf{7.40}$$

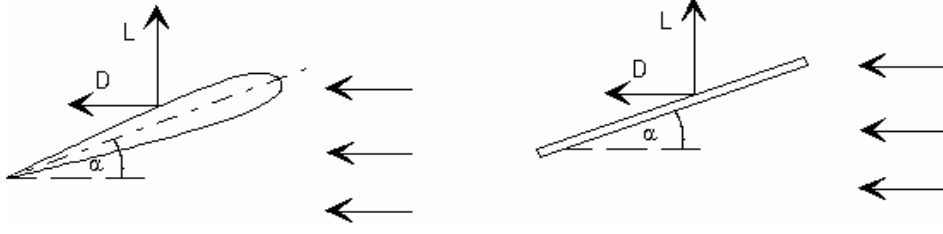
$$A = bd = 1(0.3) = 0.3 \text{ m}^2$$

$$F_L = 7.4(1/2)1.0(4.0)^2 (0.3) = \mathbf{17.77N}$$

$$\theta_s = \sin^{-1} \left(-\frac{\omega a}{2U} \right) = \sin^{-1}(-0.589)$$

$$\theta_{s1} = -36.1^\circ = \mathbf{323.9^\circ}, \quad \theta_{s2} = \mathbf{216.1^\circ} .$$

10.4 الرفع على الجنيح



الشكل 10.11

الجنيح شريحة وتربة من الأجسام ذات الخصائص الحركية. أمثلة لهذه الأجسام: جناح الطائرة، ريش الدقّاع و ريش المضخات والعنفات. نحن معنيون هنا باستخلاص قوة الرفع على الجنيح و سنرى أن النظرية التي استخلصت لتقدير الدفع على الأسطوانة تفيد في استخلاص الرفع على الجنيح. بُنيت نظرية الرفع على الاسطوانة على اعتبار السريان لالزجي. إلا أننا أضفنا الافتراض القاضي بانتقال سرعة دوران الاسطوانة إلى طبقة المائع اللصيقة بها.

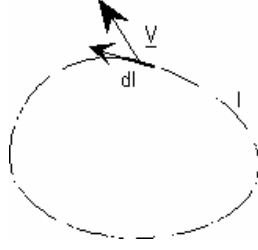
وبدراسة سريان فعلي عبر جنيح بزاوية هجوم ثابتة نرى أن قوة الرفع تنشأ دون الحاجة لدوران الجنيح حول محوره كشأن الاسطوانة. إلا أننا ندرك أيضاً أن زاوية الهجوم للجنيح الثابت تسببت في دوران المائع حول الجنيح دوراناً جزئياً. وهذا يقود إلى الاستنتاج الهام بأن الرفع في كل الأحوال، ملازم لدوران المائع حول الجسم.

التدوير Γ

يوضح الشكل (10.12) خط حلقي طوله l في سريان رتيب. السرعة عند نقطة ما على الخط الحلقي $\underline{v}$ ويعرّف التدوير بالعلاقة:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{l} \dots\dots\dots(10.24)$$

بتطبيق هذا التعريف على حالة الاسطوانة بالتعويض
من المعادلة (10.20) في المعادلة (10.24)



الشكل 10.12

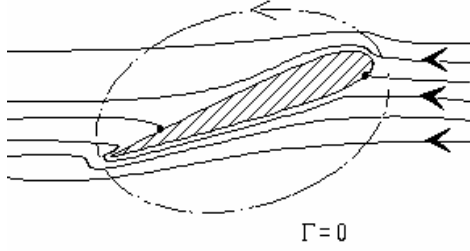
$$\Gamma = \int_0^{2\pi} (2U \sin\theta + \omega a) \underline{I}_\theta \cdot a d\theta \underline{I}_\theta$$

$$= 2\pi a^2 \omega$$

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi a^2}$$

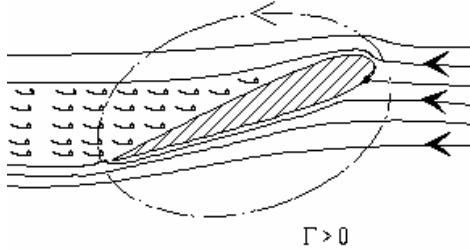
وبالتعويض لـ ω في المعادلة (10.22)

$$F_L = b\rho U \Gamma \dots\dots\dots (10.25)$$



$\Gamma = 0$

بملاحظة أن التدوير يمكن استخلاصه
للأجسام المختلفة بما فيها الجنيحات
نرى عمومية المعادلة (10.25) وتُعرف
هذه المعادلة الهامة بقانون **كوتا-
يوكوفسكي**.



$\Gamma > 0$

ندرس الآن السلوك الفعلي للسريان
حول جناح بزاوية هجوم صغيرة و
موجبة.
في بداية الحركة يكون السريان مثالياً
وتكون قيمة التدوير Γ حول الجنيح
صفرًا.

الشكل 10.13

إلا أن هذا الوضع المثالي لا يستمر
طويلاً إذ أن الانعكاس الحاد في خطوط

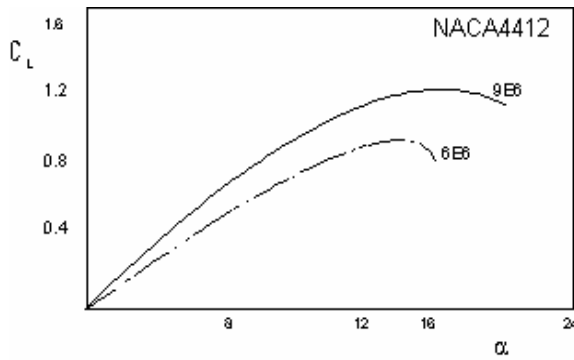
السريان عند ذيل الجنيح لا يستمر. فتستقيم خطوط السريان مسببة انفصال الطبقة
الجدارية و ظهور الدوامات في مؤخرة الجنيح التي يجرفها التيار باستمرار إلى سافل

المجال. و ينتج عن استقامة هذه الخطوط فقد توازن الجوانب الموجبة والسالبة لتكامل التدوير مما يؤدي إلى أن يصبح التدوير حول الجنيح غير مساو للصفر. ويعني ذلك أن التدوير Γ لا ينتج عن طواف المائع حول الجنيح و إنما عن أن خالص التكامل حول الجنيح لم يعد صفراً. و تنشأ بذلك قوة رفع على الجنيح يمكن معرفة قيمتها النظرية بتعويض قيمة التدوير في معادلة الرفع (10.25).

نرى أيضاً من التجربة أن الرفع على الجنيح يزيد مع زيادة زاوية الهجوم α في مدى زوايا الهجوم الصغيرة. وبذلك يكون أثر زاوية الهجوم على الجنيح مماثلاً لأثر السرعة الزاوية ω في حالة الاسطوانة التي سبقت دراستها في القسم (10.3).

إذا كان الجنيح لوحاً مستوياً و لزوايا الهجوم الصغيرة يمكن استخلاص العلاقة النظرية:

$$C_L = 2\pi \sin \alpha \dots\dots\dots (10.26)$$



الشكل 10.14

عند زوايا الهجوم العالية للجنيحات يزداد الانفصال وتزداد الدوامات عنفاً وينشأ عن ذلك نقصاناً في معدل زيادة C_L مع α ثم يتبع ذلك نقصاناً في قيمة C_L وزيادة في C_D وتعرف هذه بحالة **الانهيار**. ويوضح الشكل (10.14) العلاقة التجريبية للجنيح NACA4412 عند عددي رينولز 1E6 و 6E6 .

الأثر الناشئ عن محدودية الباع

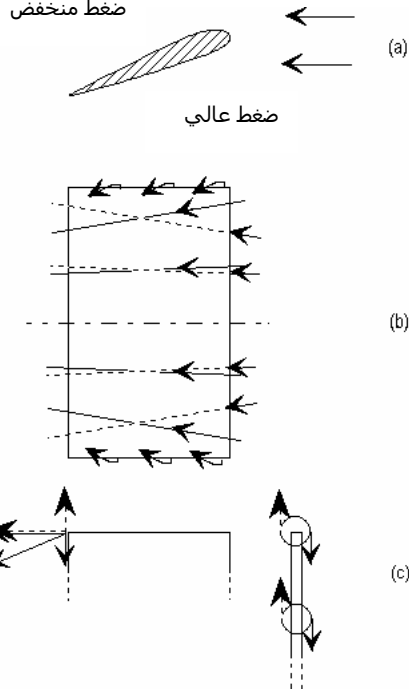
التحليل السابق اعتمد ثنائية أبعاد السريان. ويعني أن الجنيح أو الاسطوانة ذوا باع طويل جداً مقارنةً بالوتر. أي أن النسبة الباعية عالية. وتعرف النسبة الباعية كما يلي:

النسبة الباعية

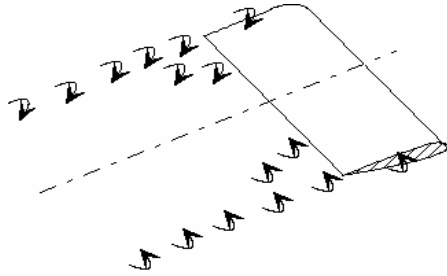
$$AR = \text{باع الجناح} / \text{الوتر} =$$

لحالات النسبة الباعية غير العالية نحتاج لدراسة طبيعة السريان ثلاثي البعد حول الجناح. ضغط المائع تحت الجناح أعلى من ضغطه فوق الجناح، كما هو موضح في الشكل (10.15a). ينشأ عن الفرق في الضغط هروب المائع من أسفل الجناح إلى أعلاه عند طرفي الجناح - الشكل (10.15b).

تؤدي الإضافة المذكورة في الجانب الأعلى إلى محصلة سرعة تتجه جزئياً نحو الخط النصفى للجناح. كما أن نقصان الكتلة في الجانب السفلي يؤدي إلى محصلة سرعة تتجه جزئياً نحو جانبي الجناح (b,c). نشوء هذه الدوامات - الشكل (10.16) - يعني فقدان في الطاقة ترتب على محدودية الطول في البعد المكاني الثالث ونقصان في الرفع عن قيمته المثالية.



الشكل 10.15

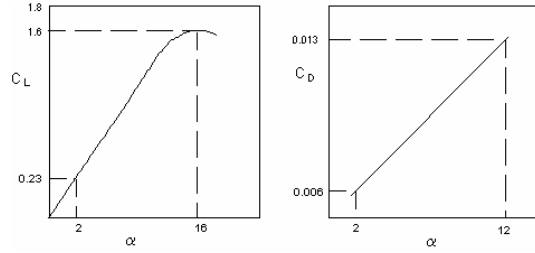


الشكل 10.16

تتبع في الصناعة بعض الطرق العملية للتقليل من أثر محدودية الباع، منها زيادة النسبة الباعية أو وضع حواجز جانبية للحد من هروب المائع إلى أعلى الجناح.
لحساب الرفع الحقيقي على الجناح يضرب الرفع المثالي المحسوب في نسبة تحدد تجريبياً على نوع الجنيح المستخدم.

مثال

طائرة تزن 20kN . المساحة المؤثرة للجناح 30m² . سرعة التحليق 70m/s في هواء كثافته 1.16kg/m³ . خصائص قطاع الجناح موضحة في الشكل (10.17). قدر زاوية الهجوم والقدرة المطلوبة لمقاومة الإعاقة على الأجنحة. تجاهل أثر الهروب الطرفي.



الشكل 10.17

للتوازن عند التحليق :

الرفع = الوزن

$$Wt = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_L$$

$$C_L = \frac{Wt}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{20E3}{\frac{1}{2} (1.16)(70)^2 30} = 0.23$$

من منحنى الرفع - الشكل (10.17) - عند $C_L = 0.23$ ، $\alpha \approx 2^\circ$ ،
القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقة

$$P = DU = \frac{1}{2} \rho A U^3 C_D$$

من منحنى الجنيح عند $\alpha = 2^\circ$ ، $C_D = 0.006$ ،

$$P = \frac{1}{2} (1.16)(70)^3 (30)(0.006) = \mathbf{35.8kW}$$

مسائل

10.1 يتصف سريان بدالة الكمون: $\phi = y^3 - 3x^2y$

(أ) أستخلص مركبات السرعة .

(ب) استخلص دالة السريان .

(ج) أرسم بعض خطوط السريان في المستوى x-y لقيم x الموجبة.

$$[u = 6xy, v = 3y^2 - 3x^2, \psi = x^3 - 3xy^2]$$

10.2 بدءاً من المعادلة (10.19) لمتجه السرعة للسريان قرب اسطوانة ثنائية البعد

في مجال لالزجي ، استخلص تعبيراً عن دالة السريان .

$$[\psi = -(r - \frac{a^2}{r})U \sin \theta - a^2 \omega \ln r]$$

10.3 خصائص السريان الأساسي لهواء كما يلي :

الضغط 0.101 MPa

درجة الحرارة 300 K

السرعة -70i m/s

يمر السريان بأسطوانة طويلة الباع قطرها 0.3m تدور حول محورها عكس عقارب

الساعة بمعدل 40rps . مستخدماً نظرية السريان المثالي أحسب :

(أ) المواقع الزاوية للركود .

(ب) الضغط عند مواقع الركود .

(ج) السرعة والضغط قرب سطح الاسطوانة عند الزوايا : 90° , 270°

(د) الرفع على وحدة طول .

$$[190.6^\circ, 344.4^\circ; 0.1.39 \text{ MPa}; -177.7 \text{ m/s}; 0.0854 \text{ MPa}; -120.3 \text{ m/s};$$

$$0.0978 \text{ MPa}; 2.92 \text{ kN}]$$

10.4 جناح طائرة من لوح مسطح طول وتره 1.5m يتحرك في هواء كثافته 1.2 kg/m^3

ولزوجته الكينماتية $6 \text{E-}5 \text{ m}^2/\text{s}$ بزاوية هجوم 10° . عدد رينولز للطيران $3 \text{E}6$ مبنياً على

وتر الجناح . بافتراض أن السريان ثنائي البعد أحسب :

(أ) قوة الرفع على كل متر من الباع .

(ب) باع الجناح إذا كان الوزن الكلي 0.1 MN

$$[14.1 \text{ kN}; 7.1 \text{ m}]$$

10.5 دلت اختبارات أجريت على جناح طائرة أنه يمكن تقريب تغير معاملي الرفع والإعاقة مع زاوية الهجوم α في مدى زاوية الهجوم $0^\circ - 12^\circ$ كما يلي :

$$C_L = 0.35(1 + 0.2 \alpha)$$

$$C_D = 0.01 (1 + \alpha)$$

وزن الطائرة 0.15 MN ومساحة الجناح 35m^2 . زاوية الهجوم عند التحليق الثابت 3° .
أحسب سرعة الطائرة والقدرة اللازمة لمجابهة الإعاقة على الجناح . أعتبر كثافة الهواء 1.2kg/m^3

10.6 قارب سريع مزود بجنيح مائي مساحته المؤثرة 0.5m^2 · معاملي الرفع والإعاقة للجنيح 1.2 و 0.02 ، على التوالي . وزن القارب 20kN وكثافة الماء 1000kg/m^3 .
متجاهلاً مقاومة الهواء أحسب :

(أ) أقل سرعة ممكنة للقارب يحمل فيها الجنيح وزن القارب كلياً .

(ب) القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقة عند السرعة المحسوبة أعلاه .

(ج) أعلى سرعة للقارب إذا كانت القدرة القصوى 20kW .

[8.2m/s ; 2.7kW; 15.9 m/s]

11 السريان الانضغاطي للغاز

11.1 مقدمة

تعريف: يوصف السريان بأنه انضغاطي إذا تغيرت الكثافة بقدر مؤثر عند تغير العوامل الأخرى ، مثل الضغط و درجة الحرارة.

11.1.1 بعض معادلات الديناميكا الحرارية ذات الصلة

معادلة الحالة للغاز الكامل

$$p = \rho RT \dots\dots\dots(11.1.1)$$

$$R : \text{ ثابت الغاز ووحده } \frac{J}{kg \ K}$$

$$R = \frac{\bar{R}}{M_r} = \text{ ثابت الغاز الكوني\الكثلة النسبية}$$

$$\bar{R} = 8310 \text{ J/kg-K}$$

بالنسبة للهواء:

$$M_r \sim 29 \rightarrow R = 287 \text{ J/kg-K}$$

باعتبار c_v الحرارة النوعية عند ثبات الحجم
 c_p الحرارة النوعية عند ثبات الضغط
 k نسبة الحرارة النوعية

$$k = \frac{c_p}{c_v} \dots\dots\dots(11.1.2)$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \dots\dots\dots(11.1.3)$$

$$c_p = c_v + R = \frac{kR}{k-1} \dots\dots\dots(11.1.4)$$

تظهر كل من c_p و c_v فى تعابير الطاقة الداخلية و المحتوى الحرارى:

$$u = c_v T \dots\dots\dots(11.1.5)$$

$$h = c_p T \dots\dots\dots 11.1.6)$$

للسريان اللاتبيدي

$$p = \text{const. } \rho^k \dots\dots\dots(11.1.7)$$

العلاقة التفاضلية بين المحتوى الحرارى و التبديد

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \dots\dots\dots(11.1.8)$$

الزيادة فى التبديد بين الموضعين (1) و (2) لغاز مثالي:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \dots\dots\dots(11.1.9)$$

11.1.2 معادلات الحفظ

التغيرات في درجة الحرارة للسريان الانضغاطى ذات أهمية، بصفة عامة. للسريان الرتيب أحادى البعد بدون شغل من مصدر خارجي و بتجاهل التغيرات فى الطاقة الوضعية - لصاليتها بالنسبة للغازات - تأخذ معادلة الطاقة الصورة:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}$$

حيث v السرعة المتوسطة في المقطع

$\dot{Q}$ معدل اضافة الحرارة

$\dot{m}$ معدل السريان الكتلي للغاز

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \dots\dots\dots(11.1.10)$$

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة:

$$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m}v) + \tau_w A_w = 0 \dots\dots\dots(11.1.11)$$

11.1.3 المقادير اللابعدية ذات الصلة

1 عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث v و c سرعة الغاز و سرعة الصوت في موضع واحد.

2 نسبة الحرارة النوعية k

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

3 عدد رينولز Re

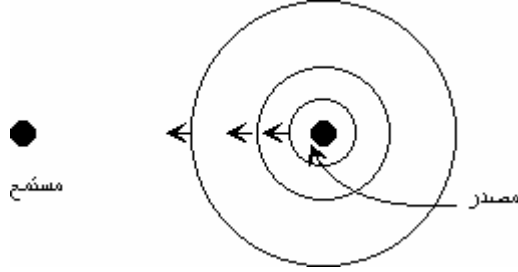
$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

حيث L إزاحة مرجعية في السريان
 μ اللزوجة الحركية للمائع
 ν اللزوجة الكينماتية للمائع.

11.2 حركة الموجات الصوتية

11.2.1 العلاقة بين الصوت ومصدره و وسط انتقاله

ينتقل الصوت بواسطة موجات ضغطية و بذلك فهو يحتاج لوسط ناقل و تعتمد سرعة الصوت على انضغاطية الوسط الناقل.

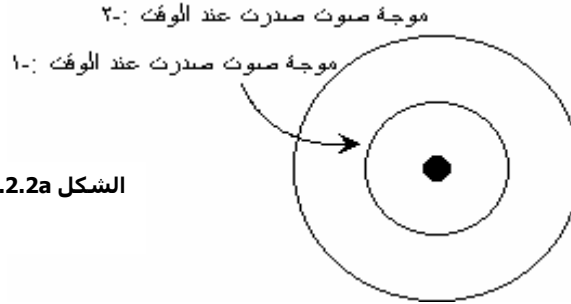


الشكل 11.2.1

لنتأمل موجتين صوتيتين يبدأان حركتهما من مصدر واحد. بعثت الموجة الأولى قبل وحدتي زمن من الآن - أي عند الوقت (-2) . و بعثت الثانية قبل وحدة زمنية واحدة من الآن - أي عند الوقت (-1) . تكون هذه الموجات في شكل كرات تزداد أنصاف أقطارها بسرعة الصوت.

الشكل (11.2.1) يوضح مقاطع من هذه الكرات كما تشاهد الآن (t=0) .

الحالة I : مصدر الصوت ساكن $\left\{ \frac{v}{c} = 0 \right\}$



الشكل 11.2.2a

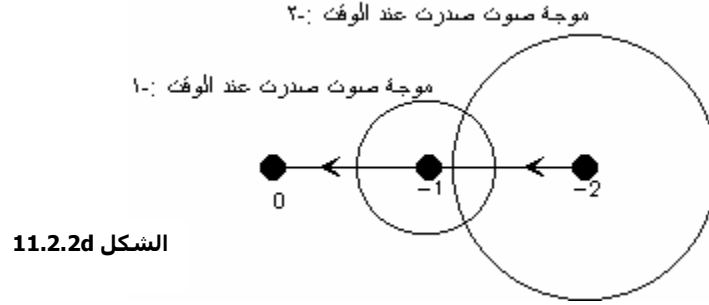
الحالة II : $\left\{ \frac{v}{c} < 1 \right\}$ **مصدر الصوت يتحرك بسرعة أقل من سرعة الصوت**
(الحالة دون الصوتية)



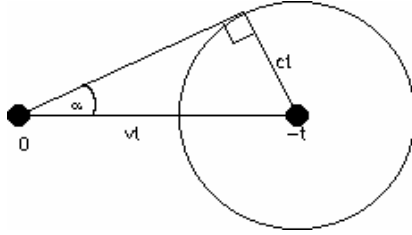
الحالة III : $\left\{ \frac{v}{c} = 1 \right\}$ **مصدر الصوت يتحرك بسرعة تساوي سرعة الصوت**
(الحالة الصوتية)



الحالة IV : **مصدر الصوت يتحرك بسرعة تفوق سرعة الصوت** $\left\{ \frac{v}{c} > 1 \right\}$
 (الحالة فوق الصوتية)



الشكل 11.2.2d



الشكل 11.2.3

11.2.2 مخروط ماخ

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}$$

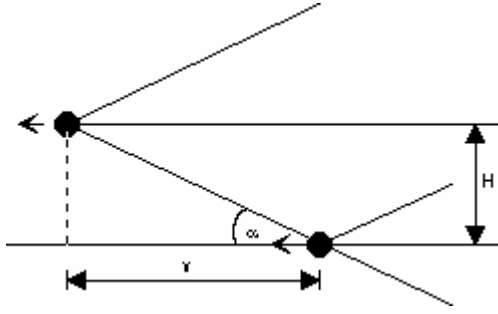
$\alpha =$ زاوية ماخ

$$a = \sin^{-1} \frac{c}{v} = \sin^{-1} \frac{1}{M} \dots\dots\dots (11.2.1)$$

و هذا يعنى انه إذا كان عدد ماخ ثابتاً فان زاوية مخروط ماخ تظل ثابتة.

مثال

طائرتان حريبتان تطيران في اتجاه واحد على مستوى عمودي واحد و بنفس عدد ماخ. المطلوب حساب أقصى مسافة أفقية ممكنة بين الطائرتين بحيث لا تكون أي منهما في مجال صوت الأخرى. في أي مدى لعدد ماخ يكون ذلك ذا معنى؟



الشكل 11.2.4

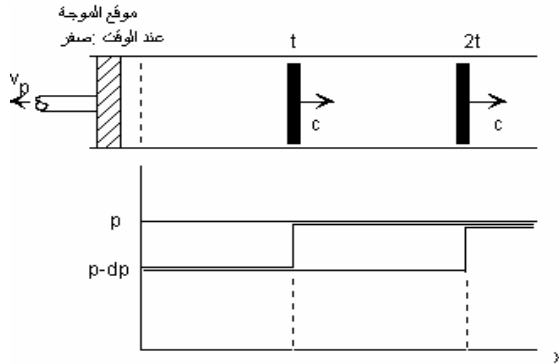
$$\tan \alpha = \frac{H}{x}$$

$$x = H\sqrt{M^2 - 1}$$

$$\rightarrow M > 1$$

11.2.3 سرعة الصوت

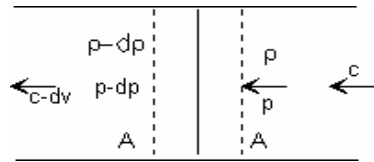
الأنبوب الموضح في الشكل (11.2.5) يحوي غاز ساكن منتظم الضغط p . يحد الأنبوب عند جانبيه الأيسر مكبس. يحرك المكبس فجأة إلى اليسار (حركة تفريغية) ينتج عنها هبوط في الضغط بمقدار ضئيل dp . ينتشر هذا الهبوط بسرعة محددة c ليعم كل الأنبوب. مخطط الضغط-المسافة في الشكل (11.2.5) يبين توزيع الضغط في الأوقات 0 و t و $2t$.



الشكل 11.2.5

لاستخلاص علاقة سرعة الصوت بانضغاطية السريان ندرس قوانين الحفظ مطبقة على حجم تحكمي يحوي موجة صوتية -

الشكل (11.2.6).
باتخاذ الموجة مناطقاً يمكن اعتبار الغاز يتحرك بسرعة c في اتجاه x السالب.



الشكل 11.2.6

حفظ الكتلة يُعطي

$$(الكثافة)(المساحة)(السرعة) = ثابت$$

$$(\rho - d\rho)(c - dv)A = \rho c A$$

$$\rho dv + c d\rho = 0 \dots\dots\dots(11.2.2)$$

حفظ كمية الحركة:

$$\Delta(pA) + \Delta(mv) + \tau_w A_w = 0 \dots\dots\dots(11.1.11)$$

نسبةً لضالة سمك الموجة

$$A_w \tau_w = 0$$

$$\Delta(pA) = -A d\rho$$

$$\Delta(mv) = m \Delta v = \rho c A (-dv) = -A \rho c dv$$

$$d\rho + \rho c dv = 0 \dots\dots\dots(11.2.3)$$

(11.2.2) و (11.2.3) تعطيان

$$\frac{d\rho}{d\rho} = c^2 \dots\dots\dots(11.2.4)$$

$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{1}{c^2} \dots\dots\dots(11.2.5)$$

المعادلة (11.2.6) تعبر عن معدل تغير الكثافة مع الضغط و بذلك تكون مؤشراً للانضغاطية. و نلاحظ اعتماد ذلك كلياً على سرعة الصوت c .

للسريان اللاتبيدي

$$\frac{p}{\rho^k} = const \dots\dots\dots(11.1.7)$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{d(\rho^k)}{\rho^k} = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k \frac{\rho^{k-1}}{\rho^k} d\rho = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} \dots\dots\dots(1)$$

معادلة الغاز الكامل:

$$p = R\rho T$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \dots\dots\dots(2)$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dp}{d\rho} = kRT \dots\dots\dots(3)$$

(3) و (11.2.5) تعطيان

$$c^2 = kRT$$

$$c = \sqrt{kRT} \dots\dots\dots(11.2.6)$$

11.3 السريان اللاتبيدي

11.3.1 مقدمة

ينبغي التحليل في هذا الفصل على الافتراضات :

- (أ) سريان رتيب
- (ب) أحادي البعد
- (ج) الآثار اللزجية وانتقال الحرارة وأثر الجاذبية ضئيلة التأثير ويمكن تجاهلها .
- (د) الغاز مثالي .

الافتراضات المذكورة تبسط التحليل كثيراً إلا انه يظل مناسباً للتطبيق على الكثير من العمليات الهندسية بدقة مناسبة. أمثلة لهذه العمليات : السريان في منافث ومبطنات العنفة الغازية والعنفة البخارية والمنافث الصاروخية .

ينبغي مراعاة الجوانب العملية الآتية لتصح الافتراضات أعلاه في مجاري الغاز:
(أ) معدل تغير المساحة مع المسافة يؤثر في الطبقة الجدارية ويجب أن يكون صغيراً .

(ب) إذا كان الخط المحوري للمجرى منحنياً يجب أن يكون نصف قطر الانحناء كبيراً مقارنة مع قطر المجرى .

11.3.2 المعادلات التفاضلية

إبتداءً من قوانين الحفظ (كتلة و طاقة) مطبقة على حجم تحكمي تفاضلي لمجرى متغير المساحة في اتجاه السريان، نحصل على العلاقات التفاضلية للسريان اللاتبيدي و التي تعرف ايضاً بالعلاقات الوصفية للسريان .

قانوني حفظ الكتلة والطاقة :

$$\rho v A = \text{const}$$

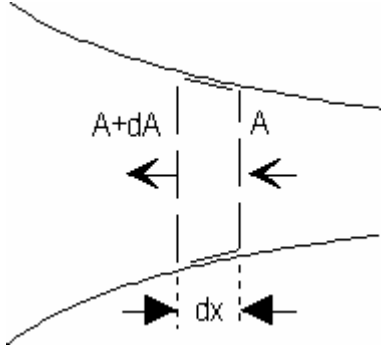
$$h + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

وفي صورتيهما التفاضلية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \dots\dots(1)$$

$$dh + v dv = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \dots\dots\dots(3)$$



الشكل 11.3.1

وبما أن السريان لا تبديدي

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

وتصبح المعادلة (2)

$$\frac{dp}{\rho} + v dv = 0$$

$$\frac{dp}{\rho v^2} + \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

(1) و (4) تعطيان

$$\frac{dp}{\rho v^2} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{d\rho}{dp} - \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} = 0$$

وباستخدام (11.16)

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} = 0$$

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} c^2 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho kRT}{A} = \frac{dA}{dp} k \frac{p}{A}$$

$$\frac{dp}{dA} = k \frac{p}{A} \frac{M^2}{1 - M^2} \dots\dots\dots(11.3.1)$$

(4) و (11.3.1) تعطيان

$$\frac{dv}{dA} = \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dA}$$

$$\frac{dv}{dA} = - \frac{v}{A} \frac{1}{1 - M^2} \dots\dots\dots(11.3.2)$$

- المعادلة (11.3.2) تدل على أن عدد ماخ حرج عند $M = 1$
- في حال $M < 1$ فإن السرعة تقل مع زيادة المساحة في اتجاه السريان وتزيد بنقصان المساحة ، تماماً كما هو الحال بالنسبة للسريان اللاإنضغاطي حيث

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}$$

- وفي حال $M > 1$ تنعكس العلاقة ، حيث تزيد السرعة وتنقص تبعاً لزيادة المساحة أو نقصانها .
- المعادلة (11.3.1) تدل على أن عدد ماخ حرج أيضاً عند $M = 1$ والعلاقة بين الضغط والمساحة دوماً على عكس العلاقة بين السرعة والمساحة .

11.3.3 المعادلات التكاملية

- عند استخلاص المعادلات التكاملية للسريان اللاتبيدي في صورة لابعدية نحتاج لتحديد نقاط مرجعية للمتغيرات وهي كما يلي :
- النقطة المرجعية الأولى هي الحالة الركودية ($v = 0$) و سيشمل ذلك المتغيرات: T, p, ρ و تكون قيمها المرجعية : T_0, p_0, ρ_0 على التوالي.
 - النقطة المرجعية الثانية هي الحالة الصوتية ($v = c$) . و سيقصر استخدامها هنا على المساحة A . و تكون قيمتها المرجعية A^* .

بتطبيق معادلة الطاقة (11.1.10) بين نقطة عامة و النقطة المرجعية (الركودية) :

$$h + \frac{1}{2} v^2 = h_0$$

$$v^2 = 2(h_0 - h)$$

و بالاستفادة من المعادلات (11.1.6) و (11.1.4)

$$v^2 = 2 C_p (T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1} (T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1} T \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right)$$

$$M^2 = \frac{2}{k-1} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right)$$

$$\frac{T}{T_0} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]^{-1} \dots\dots\dots (11.3.3)$$

و بتعريف μ

$$\mu = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]$$

$$\frac{T}{T_0} = \mu^{-1} \dots\dots\dots (11.3.3)$$

للسريان اللاتبيدي و من المعادلتين (11.1.1) و (11.1.7)

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

و بالتعويض في المعادلة (11.3.3)

$$\frac{P}{P_0} = \mu^{-\frac{k}{k-1}} \dots\dots\dots(11.3.4)$$

و بالاستفادة من المعادلة (11.1.7)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

و بالتعويض من (11.3.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \mu^{-\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots(11.3.5)$$

و لاستخلاص العلاقة التكاملية للمساحة نبدأ من معادلة حفظ الكتلة:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho V}$$

حيث الموضع **1** موضع محدد في السريان

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 M_1 C_1}{\rho M C} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{kRT_1}}{\rho M \sqrt{kRT}} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{T_1}}{\rho M \sqrt{T}} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\rho_1/\rho_0}{\rho/\rho_0} \right) \sqrt{\left(\frac{T_1/T_0}{T/T_0} \right)}$$

و بالتعويض من المعادلات (11.3.3) و (11.3.5)

$$\frac{A}{A_1} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\mu}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

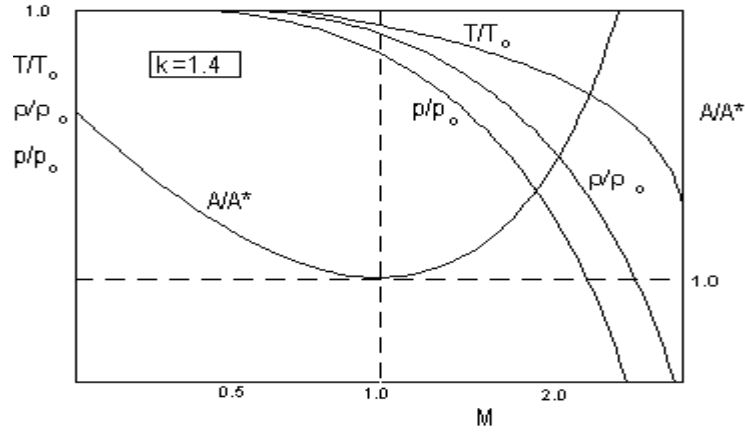
و إذا اعتبرنا المقطع (1) هو المقطع الصوتي حيث

$$M = 1.0, A_1 = A^*$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}(k-1)(1) = \frac{1}{2}(k+1)$$

و تصبح المعادلة

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.3.6)$$



الشكل 11.3.2

الشكل (11.3.2) يبين منحنيات التغير الممثلة للمعادلات التكاملية المستخلصة. و يجد القارئ في الملحق (د) قوائم مستخلصة من المعادلات المذكورة للسريان اللاتبيدي عند $k = 1.4$.

مثال

يسري غاز في مجرى متغير المساحة. نسبة الحرارة النوعية للغاز 1.25 . درجة الحرارة عند موضع ما 30°C و درجة الحرارة الركودية 180°C . لوحظ أن الضغط عند هذا الموضع يتناقص في اتجاه السريان.

- أحسب عدد ماخ
- وضح ما إذا كان المجرى لاماً أم ناشراً
- وضح ما إذا كانت السرعة تزيد أو تنقص عند هذا الموضع.

$$\begin{aligned} T &= 30 + 273 = 303\text{K} \\ T_0 &= 180 + 273 = 453\text{K} \end{aligned} \quad (I)$$

$$\rightarrow \mu = 1.50$$

المعادلة (11.3.3) تعطي

$$1.5 = 1 + 0.125 M^2$$

$$M = 2.0$$

(ب) المعادلة (11.3.1):

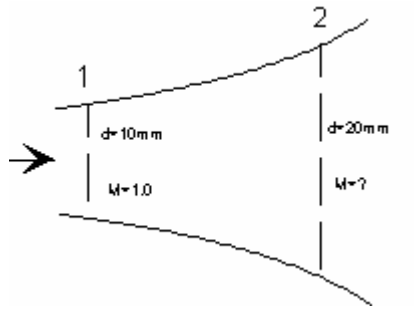
$$\frac{dp}{dA} = k \frac{p}{A} \frac{M^2}{1 - M^2}$$

(ج) $M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن سالب. و بما أن dp سالبة فإن dA تكون موجبة و يعني ذلك أن **المجرى ناشر**.
المعادلة (11.3.2):

$$\frac{dv}{dA} = - \frac{v}{A} \frac{1}{1 - M^2}$$

$M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن موجب و بما أن dA موجبة فإن dv تكون موجبة و يعني ذلك أن **السرعة تزايد**.

مثال



الشكل 11.3.3

قيمة النسبة k للسريان في المجرى الموضح في الشكل (11.3.3) تساوي 1.25 . المجرى ناشر و قيمة M عند المقطع (1) تساوي 1.0 و $dM/dx > 0$. قطر المجرى يزيد من 10mm عند المقطع (1) إلى 20mm عند المقطع (2). المطلوب قيمة عدد ماخ عند المقطع (2).

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 4$$

المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{1}{M_2} \left(\frac{2\mu_2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$4 = \frac{1}{M_2} \{ 0.889 [1 + 0.125 M_2^2] \}^{4.5}$$

المعادلة أعلاه تتطلب طريقة تكريره للحل.

باستخدام طريقة نيوتن رافسون - الملحق (ب):

$$F = 0.147 [1 + 0.125 M_2^2]^{4.5} - M$$

$$F' = 0.166 M_2 [1 + 0.125 M_2^2]^{3.5} - 1.0$$

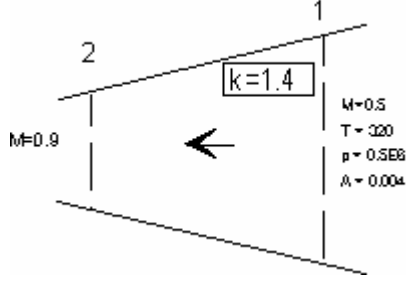
$$M_{i+1} = M_i - F/F'$$

نعرف وجود حلين للمعادلة: فوق صوتي و دون صوتي:

الحل فوق الصوتي: $M_2 = 3.00, 2.77, 2.70, \mathbf{2.70}$

الحل دون الصوتي: $M_2 = 0.40, 0.14, 0.15, \mathbf{0.15}$

اعتماداً على طبيعة السريان عند المقطع 1 حيث $dM/dx > 0$ نستنتج أن $M_2 = \mathbf{2.70}$



مثال

لجريان الهواء الموضح في الشكل
(11.3.4) المطلوب إيجاد A_2 , p_2 , T_2

باستخدام:

(أ) معادلات الجريان اللاتبيدي
(ب) قوائم الجريان الانضغاطي.

للغذاء:

$$k = 1.4, R = 287 \text{ J/kg-K}$$

الشكل 11.3.4

(أ) باستخدام المعادلات:

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-1} T_1$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2} (k-1) M_1^2 = 1.050$$

$$\mu_2 = 1.162$$

$$T_2 = (1.162/1.05)^{-1} (320) = \mathbf{289K}$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-\frac{k}{k-1}} p_1 = \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^{-\frac{1.4}{0.4}} (0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} A_1 = \frac{0.5}{0.9} \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^3 A_1 = \mathbf{0.003m^2}$$

(ب) باستخدام قوائم الغاز للجريان الانضغاطي اللاتبيدي:

M	T/T ₀	p/p ₀	A/A*	
0.5	0.9524	0.8430	1.3398	س ل 1
0.9	0.8606	0.5913	1.0089	س ل 2

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{0.8606}{0.9524} \right) (320) = \mathbf{289K}$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{0.5913}{0.8430} \right) (0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{1.0089}{1.3398} (0.004) = \mathbf{0.003m^2}$$

11.3.3 أثر عدد ماخ على الكثافة

المعادلة (11.3.5) للسريان الانضغاطي:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]^{\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots (1)$$

و للسريان اللاانضغاطي: ثابت $\rho = \rho_0$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 \dots\dots\dots (2)$$

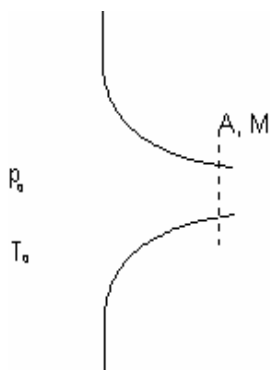
و باعتبار $k = 1.4$ القائمة أدناه تبين الخطأ الناتج عن افتراض اللاانضغاطية عند أعداد ماخ مختلفة.

M	0.2	0.4	0.5	1.0
ρ_0/ρ	1.02	1.08	1.13	1.58
$\epsilon \%$	2	7	12	37

11.3.4 معدل السريان الكتلي عبر منفث

الشكل (11.3.6) يوضح منفث موصل إلى مستودع غاز مضغوط بالمواصفات الآتية:

p_0 الضغط في مستودع الإمداد
 T_0 درجة الحرارة في المستودع
 A مساحة مقطع المنفث عند موضع الرصد
 M عدد ماخ عند موضع الرصد



معادلة حفظ الكتلة:

$$\dot{m} = \rho v A = \left(\frac{p}{RT}\right) \left(M \sqrt{kRT}\right) A = \sqrt{\frac{k}{RT}} A M p \dots\dots\dots (11.3.7)$$

الشكل 11.3.6

بإستخدام المعادلات (11.3.3) و (11.3.4) للمتغيرات p و T

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A M P_0}{\sqrt{T_0}} \frac{\mu^{-\frac{k}{k-1}}}{\mu^{-\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots (11.3.8)$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A P_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\mu^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \dots\dots\dots (11.3.8)$$

يمكن استخلاص المعدل الأعلى للسريان بإجراء التفاضل $\frac{d\dot{m}}{dM}$ على المعادلة (11.3.7) و مساواته بالصفر. النتيجة أن أعلى معدل سريان يحدث عند $M = 1$ ، وأعلى معدل ممكن للسريان هو

$$\dot{m}_M = \sqrt{\frac{k}{R}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \dots\dots\dots (11.3.9)$$

حيث A^* المساحة الحرجة، أي عند $M = 1$.
و في نفس الموضع

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p^*}{p_0}$$

= النسبة الحرجة للضغط.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T^*}{T_0}$$

= النسبة الحرجة لدرجة الحرارة.

و بتعويض $M = 1$ فى المعادلات (11.3.4) و (11.3.3):

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{للـهواء } = 0.528)$$

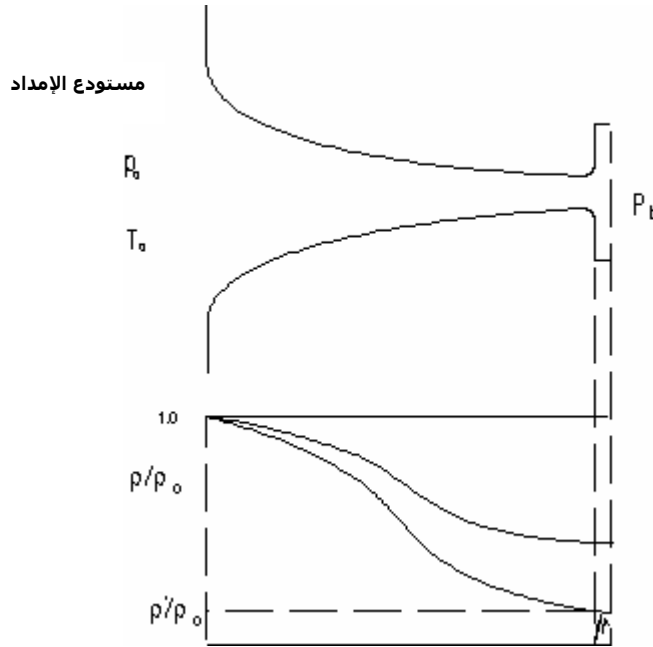
$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (\text{للـهواء } = 0.833)$$

و تعطى المعادلة (11.3.8) الصيغة أدناه عند $k = 1.4$:

$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \dots\dots\dots (11.3.10)$$

المعادلات أعلاه استخلصت للسريان اللاتبيدي. نسبة لوجود قدر من الاحتكاك في الواقع فإن معدل السريان الحقيقي يقل عن المقدار المعبر عنه أعلاه. وبذلك يمكن تعريف معامل السريان C_m ليربط السريان الفعلي بالسريان اللاتبيدي:
معدل السريان الكتلى الفعلى \ معدل السريان الكتلى اللاتبيدي $C_m =$
و للمنافث المستقيمة جيدة التصنيع فإن قيمة C_m تكون في المدى 0.94 – 0.99 .

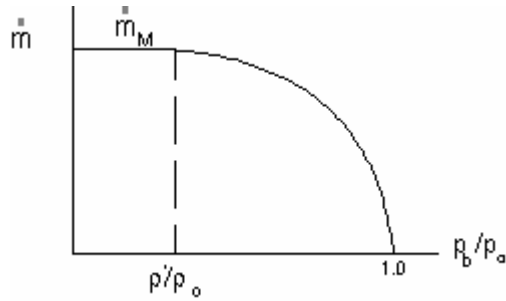
11.3.5 توزيع الضغط في المنفت اللام



الشكل 11.3.7

ندرس هنا توزيع الضغط في المنفت اللام من خلال تجربة يتم فيها تثبيت الضغط ودرجة الحرارة في مستودع الإمداد و يعدل الضغط في المستودع المستقبل و يتتبع ما يحدث للضغط في محور المنفت

(أ) الضغط النهائي p_b يساوي الضغط الركودي p_0
 $p_b / p_0 = 1.0$



الشكل 11.3.8

ممال الضغط في المنفت
 = صفر و بذلك لا يوجد
 سريان.

(ب) الضغط النهائي p_b يقل
 عن الضغط الركودي p_0 . يحدث
 هذا ممال ضغط في المنفت و
 يؤدي إلى سريان في اتجاه x
 الموجب.

الضغط الخرجي =
 الضغط النهائي،
 $p_e = p_b$

و كلما خفض الضغط p_b ينخفض
 الضغط الخرجي p_e لنفس
 المستوى و تزيد السرعة M_e .

(ج) الحالة الحدودية: بالاستمرار في خفض p_b تبلغ p^* و تصبح $p_e = p^*$ و يصبح عدد ماخ $M_e = 1.0$ و يأخذ معدل السريان الكتلي أعلى قيمة له، $\dot{m}_M$.

(د) حالة الشَرَق: بخفض p_b أدنى من p^* لا تستجيب p_e و تظل عند المستوى p^* و تظل M_e عند 1.0 و $\dot{m}$ عند $\dot{m}_M$ و بذلك يوصف السريان بأنه **شرق**. ينخفض الضغط سافل المنفت بصورة شبه فجائية إلى p_b عبر موجات تمددية.

مثال

منفت لام موصل بمستودع إمداد به هواء عند ضغط ركودي ثابت و درجة حرارة ركودية 25°C . الضغط النهائي ثابت عند 0.1MPa و مساحة المنفت الخرجية 0.0005 m^2 . المطلوب حساب معدل السريان الكتلي للحالتين:

- (أ) الضغط في مستودع الإمداد 0.15MPa
(ب) الضغط في مستودع الإمداد 0.35MPa

$$\dot{m} = \rho_e v_e A_e = \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e M_e p_e \quad (أ)$$

$p_0 = 0.15 \text{ MPa}$
نبدأ بتحديد ما إذا كان السريان شرقاً
 $p_b = 0.1 \text{ E}6$

$$p_b/p_0 = 0.667 > p^*/p_0 \quad (0.528)$$

اذن السريان غير شرق

$$\Rightarrow p_e = p_b = 0.1 \text{ E}6$$

$$p_e/p_0 = 0.667$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = \mu_e^{-3.5} = 0.667$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.123 = 1 = \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.78$$

$$T_e = T_0 (T_e/T_0) = T_0 (\mu_e^{-1}) = (25+273)(1/1.123) = \mathbf{265K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(265)}} (5E-4) (0.78) (0.1E6) = \mathbf{0.17 \text{ kg/s}}$$

$$p_b/p_0 = 0.286 < p^*/p_0 \quad p_0 = 0.35 \text{ MPa} \quad (\text{ب})$$

اذن السريان شرّق

$$\Rightarrow p_e/p_0 = p^*/p_0 = 0.528$$

$$p_e = (0.528)(0.35E6) = 0.185E6$$

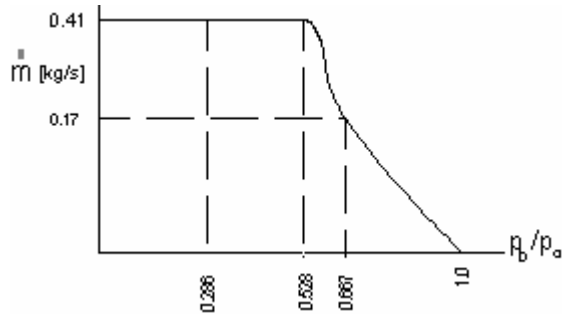
$$T_e/T_0 = T^*/T_0 = 0.833$$

$$\rightarrow T_e = (0.833)298 = \mathbf{248K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(248)}} (5E-4) (1.0) (0.185E6) = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$

و بطريقة أخرى يمكن استخدام المعادلة (11.3.9)

$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{(5E-4)(0.35E6)}{\sqrt{298}} = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$



الشكل 11.3.9

مثال

منفذ لام موصل بمروحة ساحية. مدخل المنفذ مفتوح إلى الجو بضغط 0.1MPa و درجة حرارة ركودية 303K . المساحة الخرجية للمنفذ 0.0001m² . الضغط النهائي في مخرج المنفذ يساوي:

(أ) 0.08MPa

(ب) 0.05MPa

المطلوب تقدير معدل السريان الكتلي و الحجمي.

$$p_b = 0.08 \text{MPa} \quad (\text{أ})$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A M P}{\sqrt{T}}$$

$$p_b / p_0 = 0.08 / 0.1 = 0.8 > 0.528$$

اذن السريان غير شرق

$$p_e = p_b$$

$$p_e / p_0 = 0.8$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$0.8 = \mu_e^{-3.5}$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.066$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.57$$

$$T_e / T_0 = \mu_e^{-1} = 0.938$$

$$\rightarrow T_e = (0.938)(303) = 284K$$

$$= 0.0189 \text{ kg/s} \dot{m}$$

$$q_e = \dot{m} / \rho_e = \dot{m} R T_e / p_e = (0.0189)(287)(284) / 0.08E6 = 19 \text{ l/s}$$

$$p_b / p_0 = 0.5 < 0.528 \quad p_b = 0.05 \text{MPa} \quad (\text{ب})$$

اذن السريان شرق

$$p_e / p_0 = 0.528$$

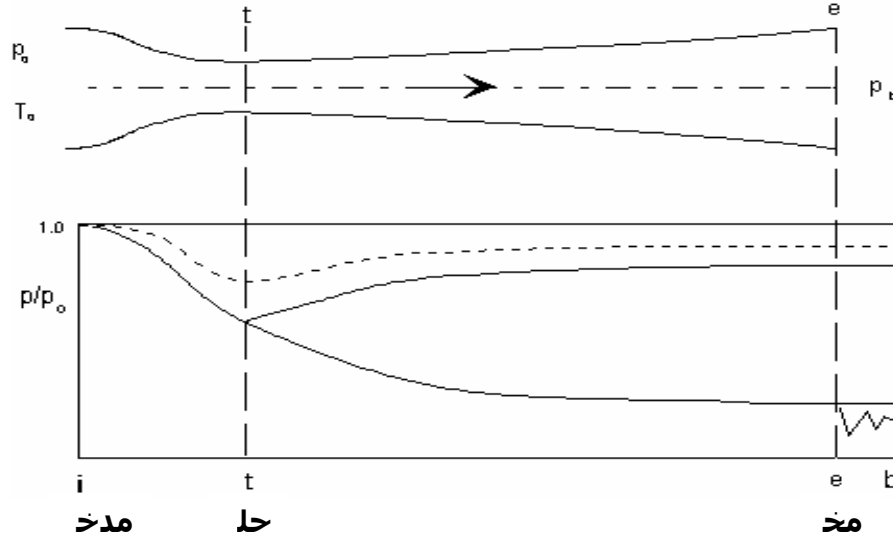
$$p_e = 0.528(0.1 \text{E}6) = 0.0528 \text{E}6$$

$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} = \mathbf{0.023 \text{ kg/s}}$$

$$q_e = \dot{m} R T_e / p_e$$

$$T_e = \left(\frac{T^*}{T_0} \right) T_0 = (0.8333)(303) = 252 \text{K}$$

$$q_e = \mathbf{31.5 \text{ l/s}}$$



الشكل 11.3.10

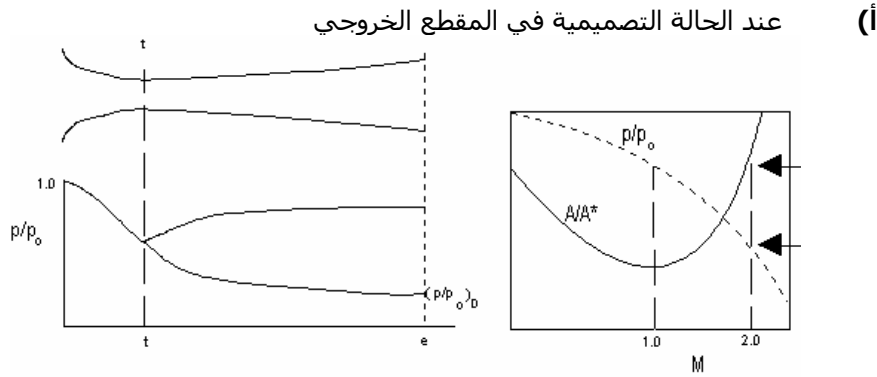
- التجربة هنا شبيهة بتلك التي سردت عن المنفت اللام في القسم (11.3.5):
 (أ) الضغط النهائي مساو لضغط الإمداد $p_b/p_0 = 1$ مماال الضغط = صفر . لا سريان.
 ب) بفض p_b قليلاً ينشأ سريان في اتجاه x الموجب.
 السريان في كل المنفت دون صوتي. و بالرجوع إلى المعادلات التفاضلية للسريان دون الصوتي - القسم (11.3.2) - يمكن إدراك أن الضغط يتناقص في الجانب اللام ليصل أدنى مستواً له في حلق المنفت ثم يتزايد في الجانب الناشر. عدد ماخ، بالتالي، يتزايد في الجانب اللام ليصل أعلى مستواً له في حلق المنفت ثم يتناقص في الجانب الناشر.
 ج) الضغط الخروحي في هذه الحالة يساوي الضغط النهائي. $p_e = p_b$.
 بفض الضغط النهائي أكثر نبلغ الحالة الحدودية للسلوك (ب).
 يميز هذه الحالة الحدودية أن عدد ماخ في الحلق يكون صوتياً ($M=1$) و بذلك يكون الضغط هناك حرجاً ($p/p_0 = p^*/p_0$) و يكون السريان في كل مواضع المنفت الأخرى دون صوتي.
 بدراسة المعادلة (11.3.6) يتضح أن السلوك (ج) هو أحد حلي المعادلة.
 السلوك (د) يطابق الحل الثاني للمعادلة (11.3.6) ، و هو الحل فوق الصوتي.
 نحصل على هذا السلوك تجريباً بفض الضغط النهائي إلى مقدار الضغط المحصل من حل المعادلتين (11.3.6) و (11.3.4) على التوالي. و السلوك (د) هنا مشابه للسلوك (ج) في الجانب اللام من المنفت. ينخفض الضغط باطراد ليلبغ أدناه في المخرج. كما أن عدد ماخ يزداد عن القيمة الصوتية في الحلق ليلبغ أعلاه عند المخرج.
 يعرف السلوك (د) بـ **السلوك التصميمي** للمنفت اللام-الناشر.

(هـ) ينشأ السلوك (هـ) إذا خُفض الضغط النهائي إلى مستوىً أدنى من الضغط التصميمي الخروجي المشار إليه في (د).
لا يستجيب توزيع الضغط داخل المنفت لهذا الخفض. إلا أن النفث يتعرض لخفض مفاجئ في الضغط عبر موجات تمددية ليوائم الضغط النهائي السائد. و يصبح السريان **شرفاً**.

مثال

منفت لام-ناشر موصل بمستودع إمداد به هواء ضغطه و درجة حرارته 3 MPa و 400K على التوالي. المساحة الخرجية للمنفت 0.1m^2 . المطلوب أن يخرج الهواء من المنفت بعدد ماخ 2.0 أحسب:

- (أ) مساحة حلق المنفت و الضغط النهائي و معدل السريان عند الحالة التصميمية.
(ب) أعلى ضغط خروجي ممكن و عدد ماخ المناظر لنفس معدل السريان.



الشكل 11.3.12

$$M_e = 2.0$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2 = 1.8$$

$$\frac{P_e}{P_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = 0.128$$

$$p_e = 0.128(3E6) = 0.383E6$$

$$p_b = p_e = \mathbf{0.383MPa}$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 1.688$$

$$A^* = A_t = (A^*/A_e)A_e = \mathbf{0.059m^2}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e P_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = T_0 (T_e/T_0) = T_0 \mu_e^{-1} = (1.8)^1 (400) = \mathbf{222K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(222)}} (0.1) (2.0) (0.383E6) = \mathbf{359 kg/s}$$

(ب) بالاطلاع على الرسمين يمكن استنتاج أن الضغط الأعلى الذي يعطي نفس

قيمة $\dot{m}$ هو الحل الثاني (دون الصوتي). معدل السريان في الحالتين هو الأعلى - نسبة لأن عدد ماخ يساوي 1.0 عند مرور السريان بالحلق.

$$A/A^* = 1.688$$

باستخدام قوائم السريان اللاتبيدي عند المخرج:

M	p/p ₀	A/A*
2.0	0.128	1.688
0.37	0.91	1.688

$$\rightarrow p_e = 0.383E6, 2.7E6$$

$$\mathbf{2.7Mpa}$$

الضغط الأعلى هو:

$$\mathbf{.M_e = 0.37}$$

و يناظر ذلك

11.3.7 الدفع الصاروخي

الدفع على الصاروخ ينشأ كرد فعل لاندفاع الغاز من منفث في مؤخرة الصاروخ - القسم (7.2). و يفصل التحليل أدناه المتغيرات المؤثرة في مقدار هذا الدفع.



الشكل 11.3.13

برسم حجم تحكمي داخل غرفة الاحتراق و المنفث تصبح معادلة كمية التحرك للحالة:

$$\oint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = \oint_A \underline{\sigma} dA$$

الضغط الجوي يعمل على كل أسطح الصاروخ فيصبح صافي الضغط على السطح الخروجي $p_e - p_a$

$$\rho_e v_e^2 A_e \underline{i} = (p_e - p_a) A_e (-\underline{i}) + R_x$$

$$F_x = -R_x = [\rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e] (-\underline{i})$$

و بذلك فان الدفع في اتجاه x السالب:

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e \dots\dots\dots(11.3.11)$$

في الحالة التصميمية:

$$p_e = p_a$$

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e = \frac{P_e}{RT_e} (kRT_e) M_e^2 A_e$$

$$F_T = k A_e M_e^2 p_e \dots\dots\dots(11.3.12)$$

مثال

صمم محرك صاروخي ليعطي دفعاً يساوي 4.5kN عند الارتفاع 1.2km حيث الضغط الجوي 0.02MPa . درجة الحرارة و الضغط في غرفة الاحتراق 2000K و 2MPa ، على التوالي. قيمة k للغازات النفث 1.3 و الكتلة النسبية 20 .
أحسب: عدد ماخ الخروجي و المساحة الخروجية المطلوبة و مساحة حلق المنفث و معدل سريان الغازات.
يمكن افتراض أن السريان لاتبدي في المنفث و غير شرق.

للسريان غير الشرق

$$p_e = p_b = p_a = 0.02E6$$

$$p_e/p_0 = 0.01$$

المعادلة (11.3.4)

$$\mu_e = \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} = (0.01)^{0.231} = 2.89$$

$$M_e = [(\mu_e - 1) \frac{2}{k-1}]^{1/2} = 3.55$$

معادلة الدفع:

$$F_T = kA_e M_e^2 p_e$$

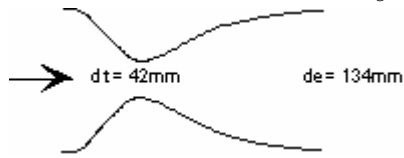
$$4.5E3 = (1.3)A_e(3.55)^2(0.02E6)$$

$$A_e = 0.014m^2$$

بما أن السريان فوق صوتي في الجزء الناصر فهو إذن صوتي عند الحلق
 $A^* = A_t$

المعادلة (11.3.6) تعطي

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 9.63$$



$$A^* = A_t = 0.014/9.63 =$$

$$0.00145m^2$$

الشكل 11.3.14

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e p_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = (T_e/T_0) T_0 = (\mu_e^{-1}) T_0 = 692K$$

$$R = \frac{\bar{R}}{MW} = \frac{8310}{20} = 415.5$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1.3}{(415.5)(692)}}(0.014)(3.55)(0.02E6) = \mathbf{2.11 \text{ kg/s}}$$

مسائل

11.3.1

- (أ) أحسب سرعة الصوت فى الهواء عند درجات الحرارة: 0°C ، 40°C .
 (ب) أحسب سرعة الصوت فى غاز الهليوم عند درجات الحرارة: 40°C ، 0°C ($k = 1.66$, $MW = 4$)
 (ج) أحسب عدد ماخ لطائرة تتحرك بالسرعة 1000km/h فى هواء ساكن فى درجة الحرارة 0°C .
 [355m/s, 331m/s; 1039m/s, 970m/s; 0.84]

- 11.3.2** طائرة فوق صوتية تطير بسرعة 3000 km/h عند الارتفاع 400m . درجة حرارة الجو 15°C . ما هى المسافة الأفقية التى تقطعها الطائرة فوق مراقب أرضى قبيل سماع هذا المراقب لصوت الطائرة؟
 [895m]

11.3.3 استخلص العلاقات الآتية من الأسس الأولية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2\mu} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

حيث T^* و p^* قيم درجة الحرارة و الضغط عند الحالة الصوتية.
 μ تساوى $[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]$.

- 11.3.4** يسرى الهليوم من مستودع كبير درجة الحرارة فيه 10°C عبر منفث لام . المساحة الخرجية للمنفت 0.0003m^2 و تؤدى إلى غرفة الضغط فيها 0.1MPa . أحسب معدل السريان الكتلى عبر المنفت إذا كان الضغط المطلق فى المستودع:
 (أ) 0.15 MPa ,
 (ب) 0.35 MPa .
 [0.04kg/s, 0.10kg/s]

- 11.3.5** الضغط و درجة الحرارة و السرعة تساوى 0.35 MPa و 350 K و 300 m/s ، على التوالي ، عند مدخل أنبوب ناشر يحوى سريان لاتبيدي. إذا كانت نسبة المساحة الخرجية للمساحة الدخولية 2.5 أحسب الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند المخرج.
 [0.51 MPa, 391 K, 91 m/s]

- 11.3.6** الضغط و درجة الحرارة فى مستودع هواء 0.7 MPa at و 15°C . المستودع موصل إلى مستودع مستقبل عبر منفث لام-ناشر. مساحة مقطعى الحلق و الخروج تساوى $1.3\text{E}-3$ و $5.2\text{E}-3\text{m}^2$ ، على التوالي. احسب:
 (أ) أعلى معدل للسريان
 (ب) قيم عدد ماخ الخرجية إلى تعطى أعلى معدل للسريان مع بقاء السريان داخل المنفت لاتبيدي
 (ج) قيم ضغط الاستقبال المناظرة للحالة (ب) .
 [2.2kg/s; 2.94, 0.15; 0.02MPa, 0.69MPa]

11.3.7 يراد نفث هواء من مستودع كبير الضغط فيه 0.3 MPa و درجة الحرارة 300 K إلى الجو حيث الضغط 0.1 MPa بمعدل 1.0 kg/s. باعتبار السريان داخل المنفث لاثديدي حدد المساحة الخروجية المناسبة و عدد ماخ مستخدماً:

(أ) منفث لام
(ب) منفث لام-ناشر
أرسم منحنى الضغط لكل حالة.

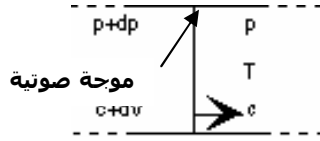
11.4 الصدمة المتعامدة

11.4.1 طبيعة الموجة الصدمية

الصدمة في حركية الغاز هي الزيادة المفاجئة في ضغط الغاز. و يصاحب ذلك تغيرات كبيرة في متغيرات السريان الأخرى. و يحدث ذلك في مسافة متناهية الصغر في اتجاه السريان. توصف الصدمة بالمتعامدة إذا تعامدت على اتجاه سريان الغاز. و ان لم تكن كذلك فهي صدمة مائلة.

و يميز الموجة الصدمية عن الموجة الصوتية أن الزيادة في الضغط المصاحبة للأولى كبيرة بينما الزيادة في الضغط تفاضلية في حالة الموجة الصوتية. تتحرك الموجة الصوتية بسرعة الصوت بطبيعة الحال بينما تفوق سرعة الموجة الصدمية سرعة الصوت. تنشأ الموجة الصدمية أصلاً من التتابع السريع لموجات صوتية و يمكن استنتاج ذلك مما يلي:

قانون الغاز المثالي:



$$p = R\rho T$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(1)$$

الشكل 11.4.1

السريان اللاتبيدي:

$$p = \text{const.} \rho^k$$

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho} \dots\dots\dots(2)$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{k} \frac{dp}{p} = \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p} \dots\dots\dots(3)$$

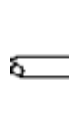
المعادلة (11.2.6)

$$c = \sqrt{kRt}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{k-1}{2k} \frac{dp}{p} \dots\dots\dots(4)$$

بما أن $k > 1$ المعادلة (3) تدل الى أن الزيادة في الضغط بسبب الموجة الضغطية تصاحبها زيادة في درجة الحرارة. المعادلة (4) تدل الى زيادة تفاضلية في سرعة الصوت بسبب الموجة الضغطية.

في حال تفرق الموجات الصوتية لا يكون هناك مجال لتأثرها ببعضها البعض. و بالتالي لا ينشأ أثر تراكمي عن الزيادات الطفيفة في الضغط و درجة الحرارة و سرعة الصوت.



T+++	T++	T++	T+	T
p+++	p++	p++	p+	p
c+++	c++	c++	c+	c

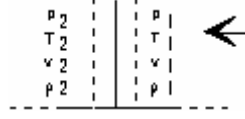
الشكل 11.4.2

أما في حال التتابع المطرد للموجات الصوتية فان الأثر التراكمي يكون كما هو مبين في الشكل (11.4.2).

الموجة الصوتية الأولى ترفع درجة الحرارة من T إلى T^+ و سرعة الصوت من c إلى c^+ . و إذا تتابعت الموجات فإنها تزيد هذه المقادير زيادات تراكمية متتابة. و ينشأ عن ذلك أن كل موجة تتحرك بسرعة أكبر من سابقتها مما يؤدي إلى أن تدرك الموجات بعضها البعض حتى تتحد في موجة واحدة. يترتب على ذلك أن فرق الضغط بين جانبي الموجة الناشئة يساوي فرق الضغط بين أول و آخر الموجات الصوتية الأساسية. و إذا كان عدد الموجات الأساسية كبيراً فان هذا الفرق في الضغط لا يكون تفاضلياً. كما أن سرعة الموجة الناشئة أعلى من سرعة الصوت منسوبة إلى الغاز الساكن. و بذلك تنشأ الموجة الصدمية.

11.4.2 معادلات السريان ذو الصدمة

بتطبيق معادلات الحفظ على حجم تحكمي حول صدمة متعامدة و بملاحظة أن عرض الصدمة ضئيل بما يجعل الحجم التحكمي كظيم الحرارة و لا احتكاكي يمكننا استخلاص العلاقات التكاملية بين جانبي الصدمة.



الشكل 11.4.3

(1) درجة الحرارة الركودية

معادلة الطاقة

$$h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$h_{o1} = h_{o2}$$

$$c_p T_{o1} = c_p T_{o2}$$

$$T_{o2} = T_{o1} = T_o \dots \dots \dots (11.4.1)$$

و يعني ذلك أن درجة الحرارة الركودية لا تتغير نتيجة للصدمة.

(2) درجة الحرارة

من معادلة الطاقة

$$C_p T_1 + \frac{1}{2} c_1^2 M_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2} c_2^2 M_2^2$$

$$\frac{kR}{k-1} T_1 + \frac{1}{2} k R T_1 M_1^2 = \frac{kR}{k-1} T_2 + \frac{1}{2} k R T_2 M_2^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2} (k-1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2} (k-1) M_2^2} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \dots \dots \dots (11.4.2)$$

(3) الضغط

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة

$$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m} v) = 0$$

$$p_2 A_2 - p_1 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_1 v_1^2 A_1 = 0$$

$$p_2 - p_1 = -\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2$$

$$p_1 \left(1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1}\right) = p_2 \left(1 + \frac{\rho_2 v_2^2}{p_2}\right)$$

معادلة الغاز الكامل

$$p = R\rho T$$

$$p_1 \left(1 + \frac{k v_1^2}{k R T_1}\right) = p_2 \left(1 + \frac{k v_2^2}{k R T_2}\right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \right) \dots\dots\dots (11.4.3)$$

(4) عدد ماخ

قانون حفظ الكتلة

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho = p/RT, \quad v = cM, \quad c = \sqrt{kRT}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

و بالتعويض ل p_2/p_1 و T_2/T_1 من المعادلات (11.4.2) و (11.4.3)

$$\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_2^2}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_2^2}}{1 + k M_2^2} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_1^2}}{1 + k M_1^2}$$

بتربيع الجانبين:

$$\frac{M_2^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_2^2 \right]}{[1 + k M_2^2]^2} = \frac{M_1^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_1^2 \right]}{[1 + k M_1^2]^2}$$

و جعل N تساوي جانب المعادلة الأيمن و إعادة ترتيب الحدود

$$[\frac{1}{2}(k-1) - k^2 N] M_2^4 + [1 - 2kN] M_2^2 - N = 0$$

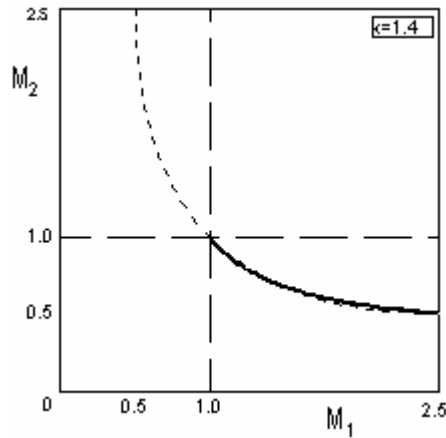
و باستخدام قاعدة المعادلات من الدرجة الثانية للمجهول M_2^2

$$M_2^2 = \frac{\sqrt{(2kN - 1) \pm (1 - 2kN)^2 - 4\left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)(-N)}}{2\left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)}$$

حلا المعادلة:

$$M_2^2 = M_1^2$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1}$$



بما أن الحل الأول غير ذي أهمية
فان العلاقة بين M_2 و M_1 تصبح:

$$M_2^2 =$$

$$\frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \dots\dots\dots (11.4.4)$$

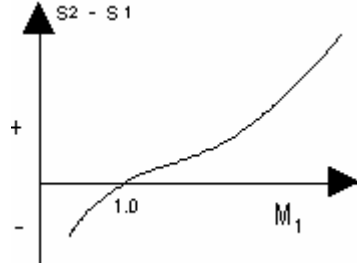
الشكل (11.4.4) يوضح العلاقة
(11.4.4) .

الشكل 11.4.4

و يمكن التدليل منهما على الإمكانية النظرية لحدوث الصدمة سواء كان السريان فوق صوتي أم دون صوتي. إلا أن التجربة تدل على اقتصار حدوث الصدمة على السريان فوق الصوتي. و يمكن تفسير ذلك بالرجوع إلى القانون الثاني للحركة الحرارية.

المعادلة (11.1.9) :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$



الشكل (11.4.5)

بالتعويض في (11.1.9) من المعادلتين (11.4.2) و (11.4.3) لـ T_2/T_1 و p_2/p_1 ثم التعويض من (11.4.4) لـ M_2 نحصل على علاقة معقدة بعض الشيء تربط $s_2 - s_1$ بـ M_1 و k . يوضح الشكل (11.4.5) منحنياً لهذا الحل.

بالنظر إلى أن القانون الثاني لحركة الحرارة ينص على أن الشرط اللازم لحدوث أي عملية **2-1** هو أن يكون فرق التبدد $s_2 - s_1$ موجباً. ويدل المنحنى في الشكل (11.4.5) أن ذلك يحدث فقط عندما تكون $M_1 > 1$.

(5) الضغط الركودي

المعادلتان (11.4.3) و (11.3.4) تعطيان

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right] = \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

و بالتعويض في القوس المربع من المعادلة (1)

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.4.5)$$

(6) المساحة الحرجة A^*

باعتبار A هي المساحة عند مقطع الصدمة

$$\frac{A/A_2^*}{A/A_1^*} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$$

و بالتعويض من المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.4.6)$$

عند مقارنة المعادلتين (11.4.5) و (11.4.6) نستنتج

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \dots\dots\dots(11.4.7)$$

مثال

v_2	$v=600$
T_2	$T=303$
p_2	$p=0.1E6$

الشكل 11.4.6

موجة صدمية متعامدة تتحرك في أنبوب
بسرعة 600m/s . درجة الحرارة و الضغط
في الهواء الساكن قبل مرور الموجة 30°C و
0.1MPa ، على التوالي.

أحسب عدد ماخ على جانبي الموجة

بالنسبة إلى مناط مثبت على الموجة. أحسب أيضاً الزيادة في درجة الحرارة و الضغط
بسبب مرور الموجة الصدمية.

$$M_1 = \frac{V_1}{C_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$T_1 = 30 + 273 = 303K$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{600}{\sqrt{1.4(287)(303)}} = \mathbf{1.72}$$

المعادلة (11.4.4) تعطي **M₂ = 0.64**

والمعادلة (11.4.3) تعطي

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

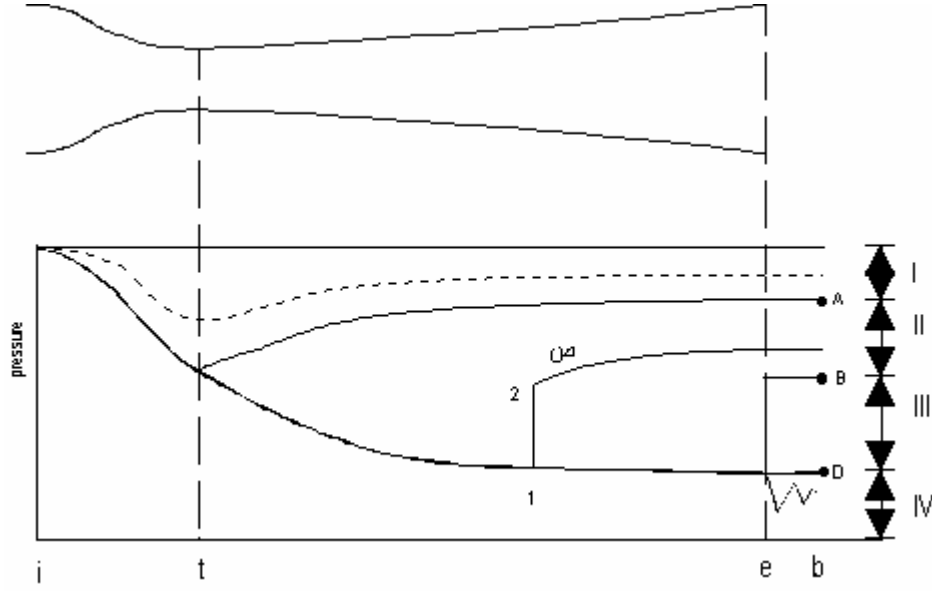
$$\mu_1 = 1.59, \mu_2 = 1.08 \rightarrow T_2 = 445 = \mathbf{172^\circ C}$$

$$\Delta t = 172 - 30 = \mathbf{142^\circ C}$$

$$p_2 = p_1 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \mathbf{0.33 MPa}$$

$$\Delta p = (0.33 - 0.1)E6 = \mathbf{0.23 MPa}$$

11.4.3 الموجة الصدمية فى المنفت اللام-الناشر



الشكل 11.4.7

عند دراسة السريان اللاتبيدي فى المنفت اللام-الناشر في القسم (11.3) أغفلنا ما يحدث عندما يكون الضغط النهائي في المدى A – D [II و III في الشكل (11.4.7)]. السريان في هذا المدى **تبيدي** في بعض أجزائه و تتخلله صدمة، كما هو مبين في السلوك ص في الشكل (11.4.7) .

في هذه الحالة و بسبب وقوع الضغط النهائي في المدى II فان الصدمة تحدث عند الموضع (1) حيث السريان فوق صوتي فيرتفع الضغط إلى المستوى (2) و تنخفض قيمة عدد ماخ إلى قيمة دون صوتية. فيما يلي الموضع (2) يكون السريان لاتبيدي و لكن بثوابت تختلف عن تلك التي تسود في الجزء الذي يسبق الموضع (1) .

تكون الصدمة متعامدة و داخل المنفت في الحالة المذكورة و لمدى الضغط النهائي II. و بخفض الضغط النهائي يقترب مقطع الصدمة من المقطع الخرجي حتى يبلغه عند انخفاض الضغط النهائي إلى المستوى B .

عندما يكون الضغط النهائي في المدى **III** تصبح الصدمة مائلة و تكون خارج المنفذ.
يستمر هذا السلوك حتى ينخفض الضغط النهائي إلى القيمة التصميمية p_D .
تعرف المستويات A و B و D بأنها **الحدود التشغيلية** للمنفت.

عدد ماح الخروجي M_e :

يحتاج تحديد قيمة M_e في العادة لمعالجة خاصة.
بتذكر أن $A_2^* \neq A_1^*$ في حالة الصدمة فان كل المتغيرات اللابعدية التي تسبق الصدمة (قبل الموضع (1)) تحمل قيمها المرجعية اللاحقة 1 ، مثلاً A/A_1^* و p/p_{01} . بينما المتغيرات اللابعدية التي تلي الصدمة (بعد الموضع (2)) تحمل قيمها المرجعية الرمز 2 ، مثلاً A/A_2^* و p/p_{02} . و بذلك فان M_e تحسب من المقادير اللابعدية ذات اللاحقة 2.

يعتمد التحليل التالي على حاصل الضرب $\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)$$

المقدار داخل القوس = 1 - المعادلة (11.4.7).

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \dots\dots\dots (11.4.8)$$

و من المعادلتين (11.3.4) و (11.3.6)

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{M_e \sqrt{\mu_e}} \dots\dots\dots (1)$$

المعادلتان (1) و (11.4.8) تعطيان

$$M_e \sqrt{\mu_e} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}}}$$

$$M_e^2 \mu_e = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \right)^2}$$

و بتسمية الجانب الأيمن B

$$M_e^2 \mu_e = B$$

$$M_e^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_e^2 \right] = B$$

و باتخاذ $N = M_e^2$

$$N \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) N \right] = B$$

$$\frac{1}{2} (k-1) N^2 + N - B = 0 \dots \dots \dots (2)$$

حل المعادلة (2) يعطي

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(k-1)B}}{k-1}$$

و بإبعاد الحل السالب لأنه يعطي قيمة خيالية

$$M_e^2 = \frac{\sqrt{1 + 2(k-1)B} - 1}{k-1} \dots \dots \dots (11.4.9)$$

حيث

$$B = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \right)^2}$$

و يمكن استخدام قوائم الغاز أيضاً من العمود $\frac{p}{p_0} \frac{A}{A^*}$ لمعرفة M_e و القيم اللابعدية

الأخرى - الملحق د.

مثال

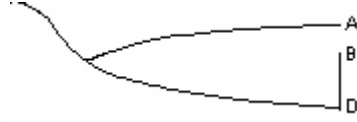
الضغط في مستودع هواء يساوي 2.0MPa . يُصرف المستودع الهواء عبر منفث لام-ناشر قطر حلقه 10mm و قطر مقطعه الخروجي 27mm

(أ) حدد الحدود التشغيلية للمنفث.

(ب) حدد سلوك السريان في المنفث للحالتين:

ب(1) الضغط النهائي 0.5MPa

ب(2) الضغط النهائي 0.1MPa



(أ) الحدود التشغيلية للمنفث: A و B و D

$$A^* = A_t$$

الشكل 11.4.8

$$\frac{A_e}{A^*} = \left(\frac{0.027}{0.010} \right)^2 = 7.45$$

باستخدام قوائم السريان اللاتبيدي

p/p_0	M	A/A^*	
0.01138	3.6	7.45	عند D
0.995	0.08	7.45	عند A

$$p_D = (0.01138)2.0E6 = \mathbf{0.02276E6 \text{ Pa}}$$

$$p_A = (0.995)2.0E6 = \mathbf{1.99E6Pa}$$

و لحساب p_B :

تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة عند المقطع الخروجي:

p_2/p_1	M_2	M_1
14.95	0.447	3.6

$$p_1 = p_D = 0.02276E6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = p_B = (14.95)0.02276E6 = \mathbf{0.34E6 \text{ Pa}}$$

$$0.5E6 = p_b \text{ النهائي } \quad (1\text{ب})$$

$$p_B < p_b < p_A$$

و يعني ذلك حدوث موجة صدمية في الجانب الناصر من المنفث.

لحساب قيم M_1 و M_2 و M_e

$$\frac{A_e}{A_1} \frac{p_e}{p_{01}} = 7.45 \frac{0.5E6}{2.0E6} = 1.863$$

قيمة B في المعادلة (11.4.9)

$$B = 0.0965$$

و بالتعويض في (11.4.9)

$$M_e = \mathbf{0.31}$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2} (k-1) M_e^2 = 1.019$$

$$\frac{p_e}{p_{02}} = \mu_e^{\frac{-k}{k-1}} = 0.936$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

يمكن استخدام قوائم السريان اللاتبيدي

$$\frac{A_e}{A_2} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1} \frac{p_e}{p_{01}} = 1.863$$

و تعطي القائمة

P/p_0	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
0.936	1.863

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

لحساب M_1 و M_2 تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة

p_{02}/p_{01}	M_1	M_2
0.267	3.24	0.46

(ب) الضغط النهائي $p_b = 0.1E6$

$$p_D < p_b < p_B$$

و يعني ذلك أن السريان لاتبديى في المنفت مصحوب بصدمة مائلة سافل المنفت.

مسائل

11.4.1 يؤدي اختبار لقنبلة ذرية إلى بعث موجة صدمية بسرعة 60km/s في هواء ساكن الضغط الجوي فيه 0.1MPa و درجة حرارته الابتدائية 30°C . قدر التغيرات الناشئة في الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند نقطة ثابتة.

11.4.2 ينفذ هواء مضغوط من مستودع الضغط فيه 0.7MPa و درجة الحرارة 340K عبر منفث لام-ناشر. لوحظت موجة صدمية ساكنة عند مقطع الضغط فيه 0.2MPa . أحسب الضغط الخروجي و قطر مقطع الخروج إذا كان معدل السريان 0.5kg/s و عدد ماخ الخروجي 0.5 .
[0.554MPa, 24mm]

11.4.3 صمم منفث لام-ناشر لنقل غاز ($k=1.3$, $R=300\text{ J/kg-K}$) ضغطه و درجة حرارته الركوديتين 1.0MPa و 400K على التوالي لينفث في مستودع مستقبل الضغط فيه 0.2MPa بمعدل 0.4kg/s .

(أ) أحسب قطري المنفث.

(ب) إذا ارتفع ضغط الاستقبال إلى 0.8MPa أحسب:

(1ب) عدد ماخ الخروجي

(2ب) عددي ماخ قبل و بعد الصدمة الناشئة

(3ب) قطر المعجل في موقع الصدمة.

[16mm, 19mm, 0.51, 1.345, 0.76, 17mm]

11.4.4 صمم منفث لمحرك صاروخي ليعمل بكفاءته الفضلى على ارتفاع 30km فوق سطح الأرض. نسبة مساحة المخرج لمساحة الحلق 5.0 . باعتبار أن الضغط الجوي على سطح الأرض 0.1MPa و الضغط داخل حجرة الاحتراق 2.0MPa و أن قيمة k للغازات الاحتراق 1.2 أحسب نسبة قوة الدفع عند سطح الأرض إلى نظيرتها عند الارتفاع 30km
[0.94]

11.5 السريان الانضغاطي الاحتكاكي

11.5.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطي الاحتكاكي في صورته العامة معقدة. إلا أنه يمكن تبسيط الدراسة كثيراً إذا حصرت في الافتراضات الآتية:

- (1) السريان أحادي البعد
- (2) كظيم الحرارة
- (3) مساحة مقطع السريان ثابتة
- (4) السريان رتيب.
- (5) غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفي الافتراضات أعلاه **سريان فانو** .

تعريف:

$$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad (1)$$

العلاقة أعلاه تعرف **معامل الاحتكاك** f بدلالة الإجهاد القصي و السرعة المتوسطة عند مقطع التحليل ومتوسط الكثافة عند نفس المقطع. سبق استخدام f بنفس التعريف في علاقة دارسي للسريان اللانضغاطي - المعادلة (4.3). و يعتمد المعامل f على كل من عدد رينولز Re و الخشونة اللابعدية k/d .

(2) يعرف **القطر السرياني** D بالعلاقة:

$$D = 4 \left[\text{محيط المقطع} \backslash \text{مساحة مقطع السريان} \right]$$

لاحظ أن قيمة D للمقطع الدائري تساوي d (قطر المقطع).

(3) المقدار اللابعدي $f \frac{x}{D}$ يبرز مراراً في معادلات السريان الاحتكاكي. و يمكن،

بداعي الاختصار، تعريف معامل الاحتكاك ϕ : $\phi = \frac{fx}{D}$ و بالتالي: $d\phi = \frac{f}{D} dx$

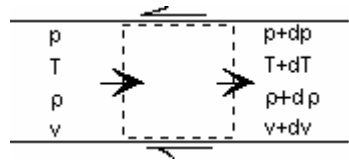
11.5.2 المعادلات التفاضلية للسريان الاحتكاكي

نسعى هنا لتكوين علاقات تفاضلية تربط المتغيرات: $p, T, \rho, p_0, v, \phi, M$ و نبدأ من علاقات الحفظ و بعض العلاقات الثانوية.

بالتطبيق على حجم التحكم التفاضلي:

معادلة الاستمرارية:

$$\rho v = \text{const.}$$



الشكل 11.5.1

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(2)$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}, M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(3)$$

معادلة الطاقة:

$$h + \frac{1}{2}v^2 = const$$

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$C_p dT + vdv = 0$$

$$\frac{kRT}{k-1} \frac{dT}{T} + vdv = 0$$

$$\frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + vdv = 0$$

$$\frac{c^2}{v^2} \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2 \frac{dv}{v} \dots\dots\dots(4)$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(pA) + d(\rho v^2 A) + d(\tau_w A_w) = 0$$

$$A dp + d(\rho v^2 A) + \tau_w dA_w = 0$$

بما أن: ثابت $\rho v A =$

$$d(\rho v^2 A) = \rho v A dv$$

$$A dp + \rho v A dv + \tau_w dA_w = 0$$

$$dp + \tau_w \frac{dA_w}{A} + \rho v^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots \dots \dots (4b)$$

$$\frac{dA_w}{A} = 4 \frac{dx}{D}$$

و من تعريف المعامل f

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho v^2 (f/4)$$

$$\rho v^2 = \frac{P}{RT} C^2 M^2 = \frac{P k R T M^2}{RT} = k P M^2$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} k P M^2 \cdot f/4$$

$$\tau_w \frac{dA_w}{A} = \frac{1}{2} k P M^2 \frac{f}{4} (4 \frac{dx}{D}) = \frac{1}{2} k P M^2 f \frac{dx}{D} = \frac{1}{2} k P M^2 d\phi$$

و بالتعويض في (4b)

$$\frac{dp}{P} + \frac{1}{2} k M^2 d\phi + k M^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

الضغط الركودي:

$$P_0 = P [1 + \frac{1}{2} (k - 1) M^2]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{k M^2}{[1 + \frac{1}{2} (k - 1) M^2]} \frac{dM}{M} \dots \dots \dots (6)$$

تلك ست معادلات تضم سبعة مجاهيل هي:

$$\frac{dM}{M}, \frac{dp}{p}, \frac{dT}{T}, \frac{d\rho}{\rho}, \frac{dv}{v}, \frac{dp_0}{p_0}, d\phi$$

و بذلك يمكن صياغة المعادلات الستة الأولى بدلالة المتغير السابع $d\phi$.

نبدأ بوضع النسبة $\frac{dM}{M}$ كمتغير مستقل:

(3) و (4) تعطيان

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} + \frac{1}{2} (k - 1) M^2 \frac{dv}{v} = [1 + \frac{k-1}{2} M^2] \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(7)$$

(1) و (7) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(8)$$

(4) و (7) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)M^2}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(9)$$

(2) و (8) و (9) تعطي

$$\frac{dp}{p} = -\frac{[1 + (k-1)M^2]}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(10)$$

(6) و (10) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{(1-M^2)}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11)$$

و بتعويض (10) و (7) في (5)

$$\frac{1}{2} k M^2 d\phi = \frac{[1 + (k-1)M^2 - kM^2]}{\mu} \frac{dM}{M} = \frac{(1 - M^2)}{\mu} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} \mu d\phi \dots\dots\dots(11.5.1)$$

(10) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2[1-(k-1)M^2]}{2(1-M^2)}d\phi \dots\dots\dots(11.5.2)$$

(9) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)kM^4}{2(1-M^2)}d\phi \dots\dots\dots(11.5.3)$$

(8) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)}d\phi \dots\dots\dots(11.5.4)$$

(1) و (11.5.4) تعطيان

$$\frac{dv}{v} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)}d\phi \dots\dots\dots(11.5.5)$$

(11) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{1}{2} kM^2 d\phi \dots\dots\dots(11.5.6)$$

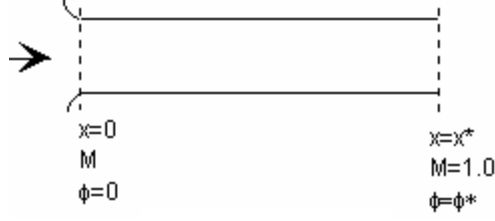
لاحظ أن تزايد و تناقص المتغيرات M, p, T, ρ, v يعتمد علي ما إذا كانت قيمة M أعلى أم اقل من 1.0 بسبب احتواء التعابير على الحد $1-M^2$. إلا أن p_0 ، الضغط الركودي، يتناقص مطلقاً في اتجاه السريان.

دراسة المعادلة (11.5.1) توضح سمة هامة للسريان الانضغاطي الاحتكاكي في الأنابيب: تزداد قيمة عدد ماخ في السريان دون الصوتي و تتناقص في السريان فوق الصوتي. ويعني ذلك أن عدد ماخ يتجه نحو القيمة الصوتية في كل الأحوال.

دراسة المعادلة (11.5.2) توضح أن تغير الضغط في المدى فوق الصوتي

يعتمد أيضاً على عدد حرج اضافي هو $M = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$.

11.5.3 المعادلات التكاملية للسريان الاحتكاكي



الشكل 11.5.2

بدراسة السريان الموضح في الشكل (11.5.2) داخل أنبوب قطره السرياني D نسعى لاجاد المسافة x^* اللازمة لرفع قيمة M إلى 1.0 . بدءً من المعادلة (11.5.1) نعوض ل $d\phi$ بالمقدار $f \frac{dx}{D}$ ونكامل من $x = 0$ إلى $x = x^*$ المناظرتين ل $M = 1.0$ ، على التوالي

$$d\phi = \frac{f}{D} dx = \frac{2(1 - M^2)}{kM^3\mu} dM$$

$$\frac{1}{D} \int_0^{x^*} f dx = \frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3\mu} dM$$

$$\phi^* = \bar{f} \frac{x^*}{D} = \text{الجانب الأيسر}$$

و يمكن مكاملة الجانب الأيمن بطريقة الكسور الجزئية
الجانب الأيمن =

$$\frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3\mu} dM = \frac{2}{k} I$$

$$\frac{1 - M^2}{M^3 [1 + \frac{k-1}{2} M^2]} = \frac{A}{M} + \frac{B}{M^2} + \frac{C}{M^3} + \frac{DM + E}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 - M^2 = A[M^2 + \frac{1}{2}(k-1)M^4] + B[M + \frac{1}{2}(k-1)M^3] + C[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2] + DM^4 + EM^3$$

$$0 = A \cdot \frac{1}{2}(k-1) + D$$

$$0 = B \cdot \frac{1}{2}(k-1) + E$$

$$-1 = A + C \cdot \frac{1}{2}(k-1)$$

$$0 = B$$

$$1 = C$$

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ -\frac{1}{2}(k+1) & 0 & 1 & (k+1)(k-1)/4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{1 - M^2}{M^3 \mu} = -\frac{k+1}{2M} + \frac{1}{M^3} + \frac{(k+1)(k-1)M}{4\mu}$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ I_1 &= \frac{1}{2}(k+1) \ln M \\ I_2 &= \frac{1}{2} \frac{1 - M^2}{M^2} \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{M dM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_{M^2}^{1.0} \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \mu$$

$$d\mu = \frac{k-1}{2} dM^2$$

$$I_3 = \frac{(k+1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{(k+1)}{4} [\ln \mu]_M^{1.0} = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2} M^2]}$$

$$I = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} + \frac{1-M^2}{2M^2}$$

$$\varphi^* = + \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} \dots\dots\dots(11.5.7)$$

و يمكن على هذا النسق استخلاص معادلات ل: p, T, v, p_0 عند أي مقطع في المجرى متخذين القيم الصوتية كمرجع.

بدءً من المعادلة (11.5.2) و بالتعويض من المعادلة (11.5.1) لـ $d\varphi$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + (k-1)M^2}{M\mu} dM$$

نكامل في المدى p إلى p^* المناظر للمدى M إلى 1.0

$$\int_p^{p^*} \frac{dp}{p} = - \int_M^1 \frac{1 + (k-1)M^2}{M\mu} dM$$

$$\ln \frac{p^*}{p} \quad \text{الجانب الأيسر}$$

و باستخدام الكسور الجزئية في الجانب الأيمن

$$- \frac{1 + (k-1)M^2}{M[1 + \frac{k-1}{2}M^2]} = - \frac{1}{M} - \frac{(k-1)M}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$I = - \int_M^1 \frac{dM}{M} - \frac{k-1}{2} \int_M^1 \frac{MdM}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \frac{k-1}{4} \int_M^1 \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2 \right] \Big|_M^{1.0}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \ln \sqrt{\frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}}$$

$$\ln \frac{p^*}{p} = \ln \frac{M}{\sqrt{\frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \dots\dots\dots(11.5.8)$$

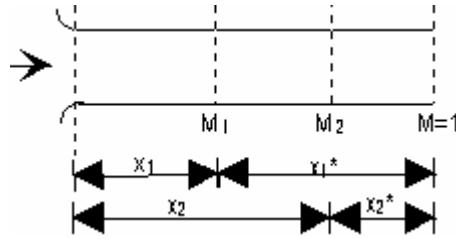
و بنفس الأسلوب يمكن استخلاص المعادلات الآتية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu} \dots\dots\dots(11.5.9)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2\mu}{k+1}} \dots\dots\dots(11.5.10)$$

$$\frac{v}{v^*} = M \sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \dots\dots\dots(11.5.11)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.5.12)$$



الشكل 11.5.3

مستعينين بالشكل (11.5.3)
يمكن ربط معاملات الاحتكاك
الموضعية ϕ_1^* و ϕ_2^* والمعامل
الكلية ϕ_{12} كما يلي

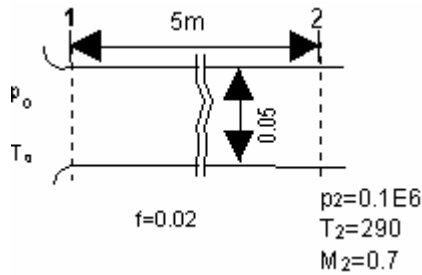
$$x_2 - x_1 = x_1^* - x_2^*$$

$$\frac{\bar{f}}{D} (x_2 - x_1) = \frac{\bar{f}}{D} (x_1^* - x_2^*)$$

$$= \bar{f} \frac{x_1^*}{D} - \bar{f} \frac{x_2^*}{D}$$

$$\phi_{12} = \phi_1^* - \phi_2^* \dots\dots\dots(11.5.13)$$

مثال



الشكل 11.5.4

أنبوب قطره 50mm موصل بمستودع هواء.
الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ يعادلوا
0.1MPa و 290K و 0.7 ، على التوالي، عند
مقطع على مسافة 5m سافل مدخل
الأنبوب. متوسط قيمة معامل الاحتكاك f
0.02 . يمكن افتراض أن السريان كظيم
الحرارة في الأنبوب و لاتبدي في المنفذ.
قدر قيم الضغط و درجة الحرارة في
المستودع.

السريان لاتبديدي: $p_0 = p_{01}$

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{P_{01}}{P_0} \frac{P_0^*}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_2}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.02 \frac{5}{0.05} = 2$$

س ف (2)

M	Φ_2^*	p_0/p_0^*
0.7	0.208	1.094

$$\varphi_1^* = \varphi_{12} + \varphi_2^* = 2 + 0.208$$

س ف (1)

Φ^*	p_0/p_0^*
2.208	1.54

س ل ت (2):

M	p/p_0
0.7	0.721

$$P_{01} = 0.1E6 (1.54)(1/1.094)(1/0.721) = 0.20E6 = \mathbf{0.20 MPa}$$

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = (T_{02}/T_{01})T_2$$

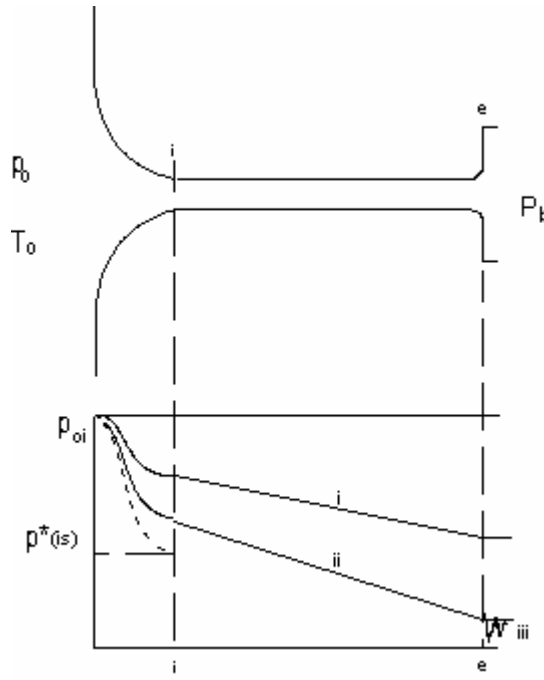
س ل ت (2):

M	T/T_0
0.7	0.911

$$T_0 = \mathbf{318K}$$

11.5.4 توزيع الضغط في أنبوب موصل بمنفت لأم

11.5.4.1 تأثير الضغط النهائي



الشكل 11.5.5

الشكل (11.5.5) يوضح منظومة مكونة من أنبوب رفيع موصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفت ناعم و موصل من الجانب السفلي بمستودع مستقبل يمكن التحكم في ضغطه الذي يشكل الضغط النهائي p_b للأنبوب. المراحل المفصلة أدناه توضح ما يحدث للسريان عند تغيير الضغط النهائي p_b :

(1) p_b أقل قيمة من p_{oi}

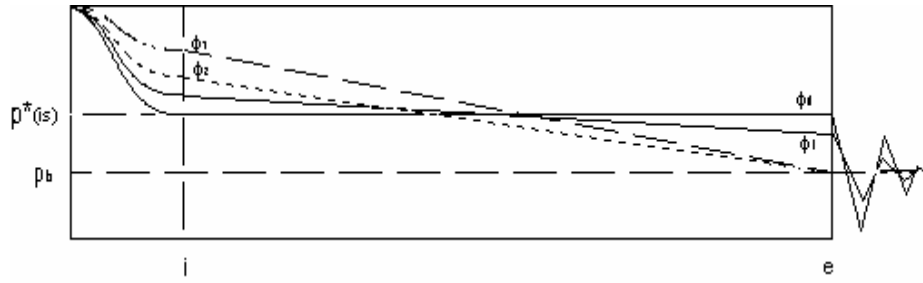
يتناقص الضغط في المنفت في اتجاه السريان بسبب تناقص المساحة. و يتناقص الضغط في الأنبوب بسبب الاحتكاك.

(2) السلوك الحرجي. $p_e = p^*$

لاحظ أن الضغط الخرجي للمنفت أعلى من القيمة الحرجة للمنفت.

(3) p_b أقل قيمة من القيمة الحرجية. لا يتأثر السريان داخل المنظومة بانخفاض p_b و يصير السريان شرقاً. تحدث موجة تمددية سافل المنظومة.

11.5.4.2 تأثير الاحتكاك



الشكل (11.5.6)

ندرس في هذه الحالة تأثير ϕ على توزيع الضغط في المنظومة مع ثبات الضغط الامدادي والضغط النهائي.

$$\phi = \phi_0 = 0 \quad (0)$$

أنبوب ضئيل الاحتكاك. ميل الضغط في اتجاه السريان = صفر.
موجة تمددية سافل المنظومة.

$$M_e = 1.0, \quad p_e = p_{is}^*$$

$$\phi = \phi_1 > 0 \quad (1)$$

فقد في الضغط بسبب الاحتكاك.

موجة تمددية أصغر حجماً. $M_e = 1.0$

$$\phi = \phi_2 > \phi_1 \quad (2)$$

سلوك حدودي. $M_e = 1.0, \quad p_e = p_b$

$$M_e < 1.0, \quad p_e = p_b \quad \phi = \phi_3 > \phi_2 \quad (3)$$

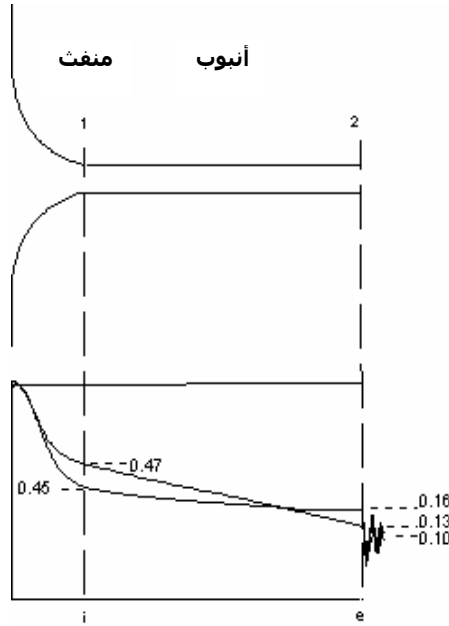
يصبح ميل الضغط أعلى بسبب الاحتكاك. و هذا يجعل الضغط الدخولي للأنبوب أعلى قيمة.

مثال

أنبوب معزول حرارياً قطره 80mm و طوله 26.5mm موصل إلى مستودع هواء بواسطة منفث لام. الضغط في المستودع 0.5MPa و درجة الحرارة 300K . الجانب السفلي للأنبوب مفتوح للجو حيث الضغط 0.1MPa .

(أ) إذا كان متوسط معامل الاحتكاك للأنبوب يعادل 0.016 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و معدل السريان الكتلي.

(ب) إذا نغم سطح الأنبوب الداخلي لتتنقص قيمة f إلى 0.008 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و أحسب الزيادة في المائة لمعدل السريان.



$$f = 0.016 \quad (أ)$$

تحديد p^* :

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p^*}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}}$$

الشكل 11.5.7

$$\phi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.016 \frac{26.5}{0.08} = 5.3$$

بما أن افتراض خرج السريان عند مخرج الأنبوب يستوجب $\phi_2^* = 0$
 $\phi_1^* = \phi_{12} = 5.3$

س ف (1)

Φ^*	M	p/p^*
5.3	0.3	3.619

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.3	0.940

$$p^* = 0.5E6(1/3.619)(0.940) = 0.13E6 \text{ Pa}$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرق.

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = 0.13 \text{ MPa}$$

$$P_1 = (0.94)(0.5)E6 = 0.471E6$$

و عن درجة الحرارة T_2 :

$$T_{02} = T_{01} = T_0 = 300$$

$$T_2 = (T/T_0)T_0$$

س ل ت (2):

M	T/T ₀
1.0	0.833

$$T_2 = (0.833)300 = \mathbf{250K}$$

و عن $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = 3.0 \text{ kg/s}$$

(ب) $f = 0.008$

$$\phi_{12} = 2.65$$

تحديد p^* :

$$\phi_1^* = \phi_{12} = 2.65$$

س ف (1):

Φ^*	M	p/p*
2.65	0.383	2.819

س ل ت (1)

M	p/p ₀
0.383	0.904

$$p^* = 0.5E6(1/2.819)(0.904) = 0.172E6 \text{ Pa}$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شروق

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.172MPa}$$

$$P_1 = (0.904)(0.5)E6 = 0.455E6$$

$$T_2 = (T/T_0)_2 T_0 = \mathbf{250K}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = \mathbf{3.825 \text{ kg/s}}$$

الزيادة في المائة في معدل السريان الكتلي =
 $(3.825 - 3.01)100/3.01 = \mathbf{27\%}$

و تسبب في ذلك انخفاض قيمة f بنسبة **50%** .

مسائل

11.5.1 الضغط و عدد ماخ عند المقطع (1) لأنبوب يحوي سريان كظيم للهواء يعادلان 0.3MPa و 0.3 ، على التوالي. طول الأنبوب 15m و قطره 30mm . متوسط معامل الاحتكاك 0.01 . احسب عدد ماخ عند المقطع (2) و الانخفاض في الضغط بين المقطعين.

[0.66, 0.168MPa]

11.5.2 أنبوب معزول حرارياً قطره 100mm و متوسط معامل الاحتكاك 0.025 . يراد استخدامه لنقل هواء بمعدل 3.0kg/s . درجة الحرارة و الضغط عند المدخل 60°C و 0.2MPa ، على التوالي. ما هو الطول المطلوب ليعطي حالة خروج صوتية؟ [4.3m]

11.5.3 أثبت أن معدل السريان لغاز كامل كظيم الحرارة في أنبوب شرق

$$\dot{m} = Ap * \sqrt{\frac{k(k+1)}{2RT_o}}$$

أنبوب معزول حرارياً قطره 50mm و طوله 0.5m و متوسط معامل الاحتكاك 0.02 . أوصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفث لام ناعم. الضغط في المستودع 0.7MPa و درجة الحرارة الركودية 330K . مستوى الضغط النهائي من الانخفاض بحيث يعطي سريان شرق.

(أ) قدر معدل سريان الكتلة

(ب) قارن النتيجة في (أ) بمعدل السريان الذي ينشأ إذا نزع الأنبوب و عرض مخرج المنفث إلى نفس الضغط النهائي المنخفض.

[2.80 kg/s, 3.03kg/s]

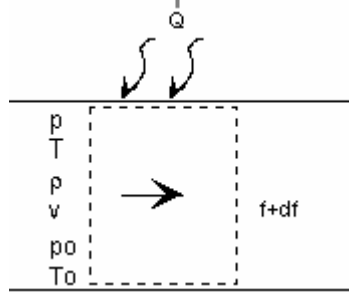
11.5.4 ينفث هواء من مستودع إمداد عبر منفث ناعم قصير و أنبوب طوله 10m . الضغط في المستودع 0.4MPa و درجة الحرارة الركودية 35°C . الضغط النهائي 0.1MPa . الخياران المتوفران لأقطار الأنابيب هما: 40mm و 80mm . بافتراض أن متوسط معامل الاحتكاك لكل من الأنبوبين 0.025 . احسب معدل سريان الكتلة لكل حالة. [2.65kg/s, 0.53kg/s]

11.6 السريان الانضغاطي اللاكظمي

11.6.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطي مع انتقال الحرارة في هذا الفصل مقيّد بالافتراضات الآتية:

- السريان أحادي البعد
 - ضئيل الاحتكاك
 - مساحة مقطع السريان ثابتة
 - السريان رتيب
 - غاز كامل.
- و يسمى السريان الذي يوفي الافتراضات أعلاه **سريان ريلي**.



الشكل 11.6.1

11.6.2 المعادلات التفاضلية

محتوى الطاقة في الصورة التفاضلية:

$$d\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$

$$dh + v dv = dh_0$$

$$c_p dT + v dv = c_p dT_0$$

$$\frac{kR}{k-1} T \frac{dT}{T} + v^2 \frac{dv}{v} = \frac{kR}{k-1} T_0 \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + c^2 M^2 \frac{dv}{v} = \frac{c^2}{k-1} \mu \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{1}{(k-1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{(k-1)M^2} \mu \frac{dT_0}{T_0} \dots\dots\dots (1)$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(Ap) + d(\rho v^2 A) = 0$$

$$dp + \rho v dv = 0$$

$$dv = 0 \frac{kv}{kRT} + \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

الاستمرارية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}$$

$$M^2 = \frac{v^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T}$$

$$2\frac{dM}{M} = 2\frac{dv}{v} - \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(4)$$

قانون الغاز الكامل:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(5)$$

المعادلة (11.3.4)

$$\rho_0 = \rho \mu^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(6)$$

المعادلات (2) و (3) و (4) و (5) تعطي

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.1)$$

(11.6.1) و (3) تعطي

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.2)$$

(11.6.1) و (2) تعطي

$$\frac{dp}{p} = - \frac{2kM^2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.3)$$

(4) تعطيان (11.6.1) و

$$\frac{dT}{T} = 2 \left[\frac{1-kM^2}{1+kM^2} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.4)$$

(1) و (11.6.1) و (11.6.4) تعطي

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{2(k+1)(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.5)$$

(6) تعطيان (11.6.3) و

$$\frac{dp_0}{p_0} = - \left[\frac{kM^2(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.6)$$

أثر عدد ماخ على سلوك المتغيرات الأخرى:

- (1) المعادلة الرئيسية في هذه الحالة هي (11.6.5) إضافة حرارة تعني أن dT_0 موجبة. و يتبع ذلك أن عدد ماخ يزيد إذا كان السريان دون صوتي، و ينقص إذا كان السريان فوق صوتي. ادرس التأثير المترتب من ذلك على dp و dp_0 و dT .
- (2) لاحظ أن $M = 1$ ليست قيمة حرجة للمتغير p_0 وأن $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ قيمة حرجة للمتغير T .

11.6.3 المعادلات التكاملية

نعتبر الوضع المرجعي عند $M = 1.0$ و نكامل المعادلات (11.6.1) إلى (11.6.6). لتوضيح طريقة المكاملة خذ المعادلة (11.6.1):

$$\int_v^{v^*} \frac{dv}{v} = \int_M^{1.0} \frac{2}{M(1+kM^2)} dM$$

و باستخدام الكسور الجزئية للجانب الأيمن

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{A}{M} + \frac{BM+C}{1+kM^2}$$

$$2 = (Ak+B)M^2 + CM + A$$

$$\square A=2, C=0, B=-2k$$

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{2}{M} + \frac{2kM}{1+kM^2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2 \int_M^{1.0} \frac{dM}{M} = \ln M^2 \Big|_M^1 = -\ln M^2$$

$$I_2 = -2k \int_M^{1.0} \frac{MdM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{2MdM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{dM^2}{1+kM^2}$$

$$\begin{aligned} 1+kM^2 &= u \\ du &= k dM^2 \end{aligned}$$

$$I_2 = - \int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln (1+kM^2) \Big|_M^1 = \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$I = -\ln M^2 + \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$\ln \frac{v^*}{v} = \ln \frac{1+kM^2}{1+k} - \ln M^2$$

$$\frac{v^*}{v} = \frac{1 + kM^2}{(1 + k)M^2}$$

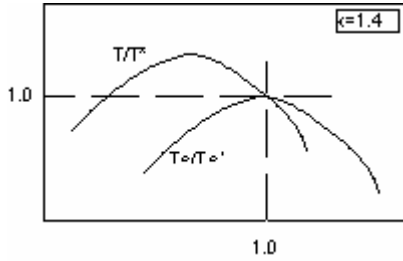
$$\frac{v}{v^*} = \frac{(1 + k)M^2}{1 + kM^2} \dots\dots\dots(11.6.7)$$

و يمكن على هذا النسق مكاملة المعادلات التفاضلية (11.6.2) إلى (11.6.6) لتعطي:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1 + kM^2}{(1 + k)M^2} \dots\dots\dots(11.6.8)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{k + 1}{1 + kM^2} \dots\dots\dots(11.6.9)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(k + 1)^2 M^2}{(1 + kM^2)^2} \dots\dots\dots(11.6.10)$$

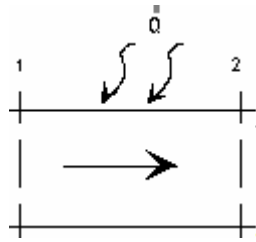


الشكل 11.6.2

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(1 + k)M^2 \mu}{(1 + kM^2)^2} \dots\dots\dots(11.6.11)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2} \left(\frac{2\mu}{k + 1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \dots\dots\dots(11.6.12)$$

يبين الشكل (11.6.2) صورة بيانية للمعادلتين (11.6.10) و (11.6.11). و يجد القارئ جداول سريان ريلي ضمن الملحق (د) لنسبة الحرارة النوعية 1.4.



الشكل 11.6.3

11.6.4 معادلة معدل انتقال الحرارة

معادلة الطاقة للمقطع 2-1 :

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\dot{Q}}{m} = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\frac{\dot{Q}}{m} = h_{02} - h_{01}$$

$$\dot{Q} = c_p m (T_{02} - T_{01}) \dots \dots \dots (11.6.13)$$

مثال 11.6.1

يسري هواء في أنبوب ضئيل الاحتكاك. الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ عند المدخل 0.55MPa، 230K و 0.5 ، على التوالي. يخرج الهواء من الأنبوب بدرجة الحرارة 280K . أحسب
 (أ) عدد ماخ الخروجي
 (ب) التغير في الضغط الركودي
 (ج) إذا كان معدل السريان 1.0kg/s احسب معدل انتقال الحرارة.

(أ)

$$\frac{T_2}{T^*} = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T^*}$$

س ر (1)

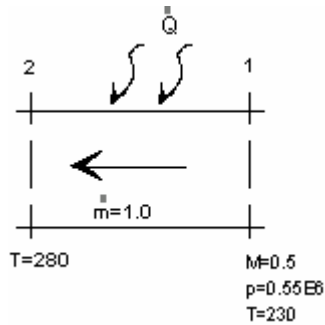
M	T/T*
0.5	0.790

$$T_2/T^* = 0.962$$

س ر (2)

T/T*	M
0.962	0.65

$$M_2 = 0.65$$



الشكل 11.6.4

(ب)
س ل ت (1)

M	p/p ₀
0.5	0.843

$$P_{01} = 0.652E6 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_0} \frac{P_0}{P_{01}}$$

س ر (2)

M	P ₀ /p ₀ *
0.65	1.058

س ر (1)

M	P ₀ /p ₀ *
0.5	1.114

$$p_{02} = 0.619E6 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_0 = p_{02} - p_{01} = -32.8E3$$

الانخفاض في الضغط = **32.8kPa**

(ج)

$$\dot{Q} = c_p \dot{m} (T_{02} - T_{01})$$

$$c_p = kR/(k-1) = 1004.5 \text{ J/kg-K}$$

س ل أ (1)

M	T/T ₀
0.5	0.9524

س ل أ (2)

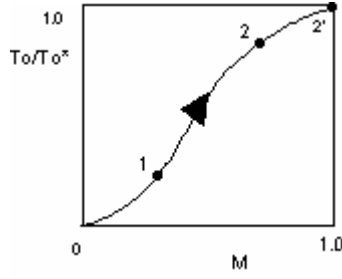
M	T/T ₀
0.65	0.9221

$$T_{02} = 303.7$$

$$T_{01} = 241.5$$

$$\dot{Q} = 1.0 (1004.5) (303.7 - 241.5) = \mathbf{62.5kW}$$

11.6.5 الشَّرَق



الشكل (11.6.5)

إضافة كمية حرارة للسريان تميزه زيادة في درجة الحرارة الركودية T_0 - المعادلة (11.6.13). و بالتالي، لاستنباط أثر انتقال الحرارة على السريان يمكن دراسة تأثير السريان بتغيير قيمة T_0 .

الشكل (11.6.5) يوضح تغير درجة الحرارة الركودية اللابعدية بعدد ماخ في المدى دون الصوتي حسب المعادلة (11.6.11). و يدل المنحنى إلى أن تسخين السريان من الوضع

الابتدائي ذو الإحداثيات $\left(M_1, \frac{T_{01}}{T_0^*}\right)$ إلى

الوضع النهائي $\left(M_2, \frac{T_{02}}{T_0^*}\right)$ يعني زيادة في

درجة الحرارة الركودية بالمقدار $T_{02} - T_{01}$. و يرتفع الموضع 2 بزيادة التسخين حتى يصل إلى الموضع 2*. إذا وولي التسخين بعد ذلك بغرض دفع الموضع 2 إلى أعلى من ذلك

بحيث $T_{02} > T_0^*$ فإن الأمر يصبح غير ممكن في الطبيعة لأن $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز الواحد

الصحيح. الذي يحدث في الواقع هو أن يتعدل كل السريان ليستوعب كمية الحرارة المضافة. و بالنظر إلى الشكل (11.6.5) نرى أن ذلك يحدث فقط بانخفاض M_1 لتزيد $T_{02} - T_{01}$ و يصبح السريان الخروجي صوتياً. و يسمى السريان في هذه الحالة شرفاً.

مثال 11.6.2

أنبوب ذو مقطع ثابت و ضئيل الاحتكاك. في البدء دُفع الهواء إلى داخل الأنبوب بعدد ماخ 0.5 و درجة حرارة ركودية 300K. ثم سخن المجرى حتى ارتفعت درجة الحرارة الركودية إلى 1000K. ما هو أثر التسخين على عدد ماخ الدخولي.

$$T_{02}/T_{01} = 1000/300 = 3.333$$

$$T_{02}/T_{01} = \frac{T_0}{T_0^*} \bigg|_2 \frac{T_0^*}{T_0} \bigg|_1 \dots\dots\dots (1)$$

إذا بقيت M_1 عند 0.5 بعد التسخين
س ر (1):

M	T_0/T_0^*
0.5	0.691

المعادلة (1) تعطي

$$\left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_2 = \frac{T_{02}}{T_{01}} \left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_1 = (3.333)(0.691) = 2.303$$

و هذا غير ممكن حيث $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز 1.0 .

و هذا يعني أن السريان شرق.

$$M_2 = 1.0$$

المعادلة (1) تعطي

$$\left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_1 = \frac{T_{01}}{T_{02}} \left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_2 = 300/1000 = 0.3$$

س ر (1):

T_0/T_0^*	M
0.3	0.274

$$M_1 = \mathbf{0.274}$$

مسائل

11.6.1 يعرف الآتي عند مدخل أنبوب يحوي سريان لا احتكاكي:

M_1	T_1	P_1	A_1
0.4	300K	0.1MPa	0.001m ²

- (أ) بالرجوع إلى جداول السريان اللاتبيدي أحسب درجة الحرارة الركودية T_{01} و الضغط الركودي p_{01} .
 (ب) سخن الأنبوب حتى بلغت درجة الحرارة $T_2 = 400K$. أحسب قيم المتغيرات الأخرى مستعيناً بقوائم السريان الحراري.
 (ج) وبوسيلة أخرى، استخلص التعبير الرياضي الذي يربط المتغيرات T_1 و T_2 و M_1 و M_2 و من ثم أحسب M_2 . قارن بالإجابة في (ب).
 (د) أحسب معدل انتقال الحرارة بالكيلووات.
 [310K, 0.112MPa, 0.52, 18kW]

11.6.2 يسري الهواء في أنبوب لا احتكاكي مساحة مقطعه 0.01m² . عند مدخل الأنبوب:

M	T_0	P_0
0.3	350K	0.2MPa

سخن الأنبوب و ارتفعت درجة الحرارة الركودية عند المخرج إلى 450K . أحسب معدل سريان الحرارة و عدد ماخ الخروجي و الضغط الخروجي.
 [0.21MW, 0.35, 0.18MPa]

11.6.3 قُرن مخرج منفث لام بأنبوب ثابت المقطع. مساحة مدخل المنفث 0.25m² . مساحة مخرج المنفث و مقطع الأنبوب 0.2m² . استخدمت المنظومة لتسريع هواء من الحالة الدخولية الآتية:

M	T	P
0.3	300K	0.1MPa

يمكن اعتبار السريان في المنفث لاتبيدي و يمكن تجاهل الاحتكاك في الأنبوب.
 قدر عدد ماخ الخروجي و درجة الحرارة الخروجية إذا سخن الأنبوب بمعدل 1MW .

[0.42, 327K]

11.7 قياس السرعة في السريان الانضغاطي

11.7.1 السريان دون الصوتي

عند استخدام منظومة أنبوب الضغط الحركي و المانومتر لقياس السرعة للسريان اللاانضغاطي - القسم (6.3.1.1) - استخدمت علاقة الطاقة المبسطة لربط السرعة بفرق الضغط لتعطي المعادلة

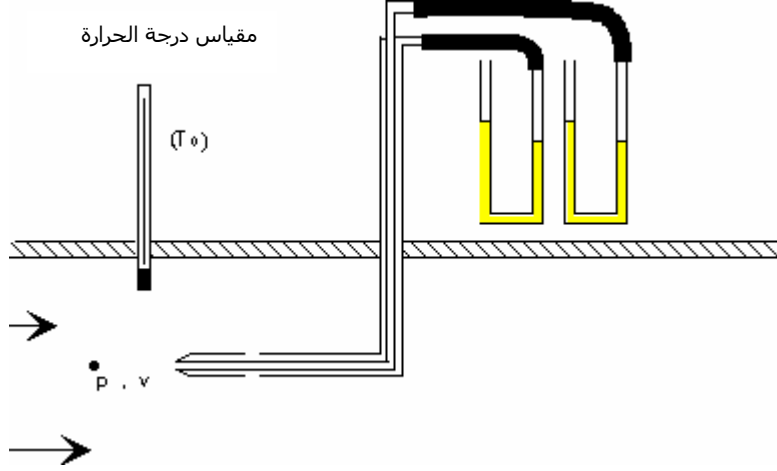
$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \dots\dots\dots (1)$$

اعتبرت الكثافة في المعادلة (1) ثابت، و هذا تبسيط مخل إذا كان السريان انضغاطياً.

عند اعتبار السريان انضغاطي مع الإبقاء على افتراض اللاتبديد بين الموضع العام، حيث الضغط p و السرعة V و المحتوى الحراري h ، و موضع الركود ، حيث الضغط p_0 و السرعة صفر و المحتوى الحراري h_0 .
حفظ الطاقة بين الموضعين يعطي

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0$$

$$V = \sqrt{2(h_0 - h)} = \left[2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right]^{1/2}$$



الشكل 11.7.1

و للسريان اللاتبيدي

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{T_0}$$

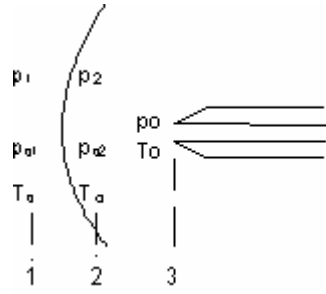
فتصبح السرعة

$$v = \left\{ \frac{2kRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(11.7.1)$$

يلاحظ أن:

- أنبوبي الضغط و الضغط الركودي موصلين بمانومتري منفصلين. بمعرفة الضغط الجوي يمكن استخلاص قيم p_0 و p .
- مقياس الحرارة يقرأ قيمة T_0 مباشرة.

11.7.2 السريان فوق الصوتي



تدل التجربة على انه ليس بالإمكان إبطاء السريان فوق الصوتي إلى الحالة دون الصوتية دون عبور صدمة. و بذلك عند وضع أنبوب الضغط الحركي في سريان فوق صوتي فإن السرعة تكون صفراً عند حافة الأنبوب و فوق صوتية على مبعده منه في الجانب الصعدي. بين الموضعين يعبر السريان صدمة منحنية. بالنظر إلى السريان في خط الانسياب المحوري يمكن اعتبار الصدمة مستقيمة و متعامدة و الاستفادة من معادلات الصدمة المتعامدة في القسم (11.4).

الشكل 11.7.2

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right) \dots\dots\dots(11.4.3)$$

و عند الموضع (2) تعطي معادلة السريان اللاتبيدي (11.3.4)

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_2^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_2^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2}$$

و يمكن التعويض عن M_2 بـ M_1 من المعادلة (11.4.4) لتعطي

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2kM_1^2 + 1 - k} \left(\frac{1}{2} M_1^2 \right)^k \right]^{\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots (11.7.2)$$

يستخدم أنبوب الضغط الركودي لقياس $p_{02} - p_a$ و أنبوب الضغط لقياس $p_1 - p_a$ عند موضع صعيد المقطع (1) . و يقاس الضغط الجوي p_a بالبارومتر . ثم تحل المعادلة (11.7.2) بطريقة تكررية لتعطي قيمة M_1 .
لحساب السرعة v نحسب أولاً درجة الحرارة T_1 من المعادلة

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_1^2 \right]^{-1} \dots\dots\dots (11.3.3)$$

ثم تستخدم المعادلة

$$v_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} \dots\dots\dots (11.7.3)$$

مثال

تطير طائرة في جو ضغطه 0.1MPa . الطائرة مجهزة بأنبوب ضغط ركودي و مقياس للحرارة. يدل أنبوب الضغط الركودي على القراءة 0.14MPa فوق الضغط الجوي و يعطي مقياس الحرارة القراءة 440K .
قدر سرعة الطائرة.

$$p = 0.1E6 \text{ pa} , \quad p_0 = (0.14 + 0.1)E6 \text{ Pa} = 0.24 E6 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 440K$$

نفترض في البدء أن السريان دون صوتي

$$p/p_0 = 0.1 / 0.24 = 0.417$$

قوائم السريان اللاتبيدي تعطي

$$M = 1.19$$

مما يدل على أن السريان فوق صوتي

$$p_{02} = 0.24E6, \quad p_1 = 0.1E6$$

المعادلة (11.7.2)

$$M_1^{2.8} - 1.284M_1^2 + 0.183 = 0$$

$$M_1 = 1.2$$

قائمة السرّيان اللاتبيدي عند الموضع (1):

M	T/T₀
1.2	0.7764

$$T_1 = 440 (0.7764) = 342K$$

$$v = M\sqrt{kRT} = \mathbf{445m/s = 1600km/h}$$