الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info


الوحدة الأولى
المتجهات
Vectors

محتويات الوحدة

Lecture six

المقدمة

لا شك أنك تدرك الفرق بين الكمية القياسية (كالكتلة) والكمية المتجهة (كالقوة)، وكثيرا ما كنا نضرب لطلبتنا مثالا يتعلق بالقوى المتعاكسة التي تدفع طاولة من طرفين متقابلين، فتبقى الطاولة ثابتة مكانها لأن اتجاه القوة الأولى معاكس لاتجاه القوة الثانية، وكنا نربط هذا المثال الفيزيائي بقوله تعالى: "ولا تنازعوا فتفشلوا وتذهب ريحكم" فالنزاع يشبه دفع المسألة الواحدة باتجاهين مختلفين، فلا المسألة تتحرك بالاتجاه المطلوب؛ ولا القوى الدافعة تحافظ على عنفوانها حتى النهاية، وإنما يذهب الريح أو (القوة) سدى.

سنتناول في هذه الوحدة تعريف الكميات المتجهة والكميات القياسية، ونركز بشيء من التفصيل على الكميات المتجهة؛ إذ نعرّف جمع المتجهات وطرحها، ونعرف متجه الوحدة، وحاصل ضرب المتجهات القياسي والاتجاهي، مع إيراد أمثلة فيزيائية ورياضية عليها وسنتناول أيضاً حاصل الضرب القياسي الثلاثي وحاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي.

وقد زودنا الوحدة بعدد كبير من الأمثلة التوضيحية والأسئلة الخاصة بالتقويم الذاتي، والتدريبات، وذلك لمساعدتك في فهم مادة هذه الوحدة بكل يسر وسهولة، فإذا واجهتك أي صعوبة في فهم أي جزء منها فما عليك إلا أن تلجأ إلى مشرفك الأكاديمي فهو حاضر دائما لمساعدتك.. لا تنتظر اللقاء الدوري معه، وإنما بادر بالاتصال به؛ واستفسر عن كل ما تحتاج إليه.

نرحب بك مرة أخرى في هذه الوحدة، نتمنى أن تكون مفيدة لك، وأن تساهم معنا في اقتراحات لتطويرها مستقبلاً.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1) **تفرّق** بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

2) **تشرح** الكميات القياسية/ المتجهة بعباراتك الخاصة.

3) **تمثل** المتجهات تمثيلاً بيانياً.

4) **تشرح** كيفية جمع المتجهات وطرحها عملياً ونظرياً.

5) **تعدد** بعض خصائص المتجهات.

6) **تجري** عمليات رياضية لإيجاد حاصل الضرب القياسي والاتجاهي.

7) **تربط** بين ضرب المتجهات وبعض الكميات الفيزيائية والرياضية.

8) **تجـري** عمليات رياضية لإيجاد حاصل الضرب القياسي الثلاثي والضرب الاتجاهي الثلاثي.

Lecture six

1. الكميات القياسية والكميات المتجهة

Scalars and Vectors

هنالك نوعان من الكميات الفيزيائية التي نتعامل معها ، **النوع الأول** يسمى بالكميات **القياسية** او العددية **والنوع الثاني** يسمى بالكميات **المتجهة.**

الكميات القياسية (العددية) تتحدد بالمقدار فقط ولا تتأثر بتغير الاتجاه ومن الأمثلة عليها:

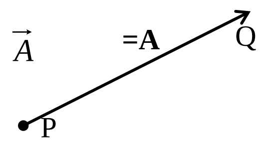
المسافة، الكتلة، الزمن، الكثافة، الطاقة، درجة الحرارة، وضغط الدم.

أما الكميات المتجهة فتتعين بالمقدار والاتجاه معاً مثل:

الإزاحة، السرعة ، التسارع (العجلة)، القوة (وبالتالي الوزن)، العزم.

ويرمز للمتجه بحرف غامق مثل **A** في شكل (1) او بوضع سهم على الحرف مثل $\vec{A}$ في نفس الشكل. كما يمكن تمثيله بيانياً بسهم PQ، حيث P (نقطة الابتداء) و Q (نقطة انتهاء) ويعبر عن مقدار المتجه أو طوله بكتابته على الصورة $|\vec{A}|$ أو A (خط فاتح).

الشكل (1)



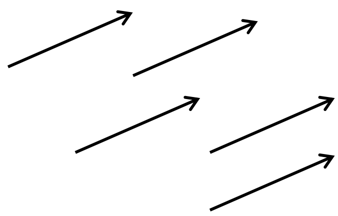
2. خواص المتجهات Properties of Vectors

1.2 تساوي المتجهات Equality of Vectors

عزيزي الدارس،

يتساوى المتجهان إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه، لذلك نستنتج أن موقع المتجه في الفضاء لا يحدد المتجه وبالتالي يمكن إزاحة المتجه من موقع في الفضاء إلى آخر، شرط ألا يتغير طوله أو اتجاهه فجميع المتجهات في الشكل (2) متساوية.

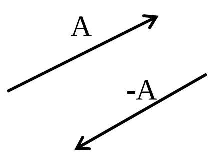
الشكل (2)



2.2 سالب المتجه Negative Vector

إذا كان $\overrightarrow{A}$ متجه فإن A- يسمى سالب المتجه A وهو متجه له نفس طول A واتجاهه عكس اتجاه A (الشكل 3).

الشكل (3)

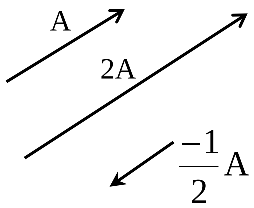


3.2 ضرب المتجهات بأعداد حقيقية

Multiplication of Vectors by Real Numbers

إذا كان $\vec{A}$ متجها وكان n عدداً حقيقياً غير الصفر فإن $n\vec{A}$ هو متجه طوله يساوي $|\vec{A}|\,|n|$ أي $|n|A$ واتجاهه هو اتجاه $\vec{A}$ نفسه، إذا كانت n موجبة، وبعكس الاتجاه إذا كانت n سالبة، فمثلاً $2\vec{A}$ هو متجه طوله يساوي ضعفي طول $\vec{A}$ وله اتجاه $\vec{A}$ نفسه، أما $\frac{-1}{2}\vec{A}$ فهو متجه طوله يساوي نصف طول $\vec{A}$ وباتجاه معاكس لاتجاه $\vec{A}$.

الشكل (4)



ومن الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية قانون نيوتن الثاني (Newton’s Second Law) والذي ينص على أن محصله القوي $\vec{F}$ المؤثرة على جسم كتلته m وتسارعه $\vec{a}$ هي : $\vec{F} = m\vec{a}$ حيث m كمية قياسية.

4.2 جمع المتجهات Addition of Vectors

عند جمع المتجهات يجب أن تكون للمتجهات البعد (Dimension) نفسه أي له نفس الابعاد, فمثلاً لا يمكن أن نجمع متجه إزاحة إلى متجه سرعة.

حاصل جمع المتجهين (محصلة المتجهين) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في الشكل (5 أ) المرسوم أدناه (مع أخذ مقياس رسم مناسب) يمكن تمثيله بالمتجه $\vec{C}$ الناشئ من وضع نقطة ابتداء المتجه $\vec{B}$ على نقطة انتهاء المتجه $\vec{A}$ وتوصيل نقطة ابتداء المتجه $\vec{A}$ بنقطة انتهاء المتجه $\vec{B}$

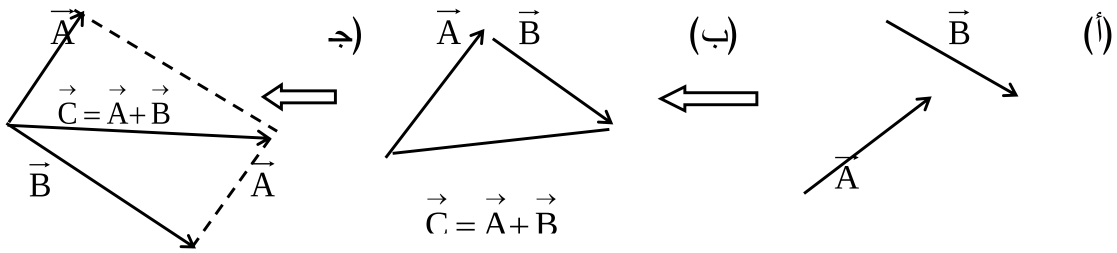
انظر الشكل (5 ب) وهذه الطريقة تعرف بطريقة المثلث (Triangle Method of addition) نكتب:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

هذا التعريف يكافئ قانون متوازي الأضلاع (Parallelogram Law for Vector addition) بجمع المتجهات كما هو موضح في الشكل (5 جـ).

C = A+B

الشكل (5)



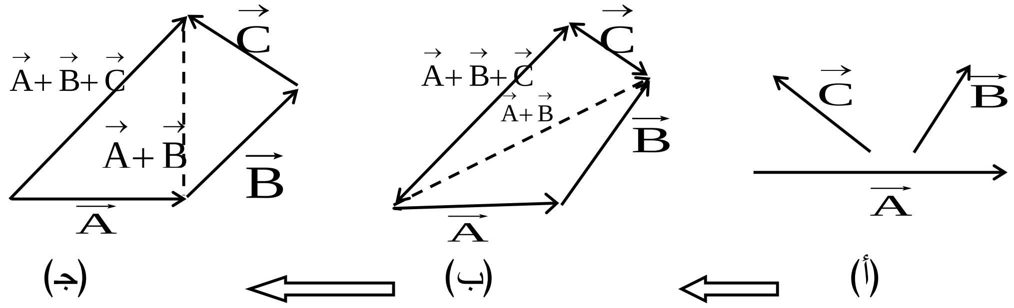
ويتضح من الشكل (5 جـ) أننا إذا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه $\vec{B}$ أولاً ثم جمعنا إليه المتجه $\vec{A}$ أي قمنا بعملية الجمع $\vec{B}+\vec{A}$ فإننا نحصل على نفس المحصلة السابقة نفسها $\vec{C}$، وهذا يعني أن ترتيب المتجهات في عملية الجمع لا يغير في النتيجة وبذلك نستطيع أن تكتب:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

وتسمى هذه النتيجة **بقانون التبادل للجمع** (Commutative Law of addition)

وهذه الطريقة تطبق لجمع أكثر من متجهين، فمثلاً إذا رغبنا في إيجاد حاصل جمع المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ الشكل (6 أ) فإن بالإمكان أن نأخذ حاصل جمع $\vec{B}+\vec{A}$ ثم نضيف عليه المتجه $\vec{C}$ الشكل (6ب).

الشكل (6)



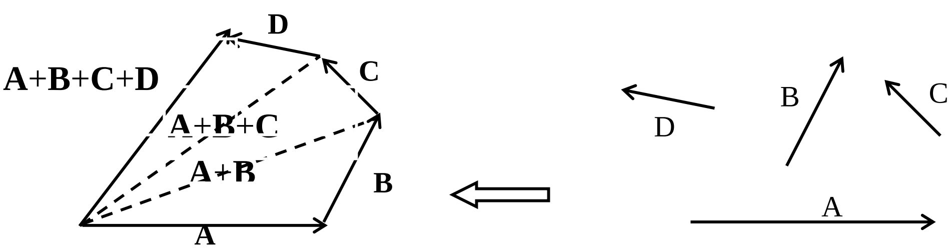
كذلك يمكن إجراء عملية الجمع بأخذ حاصل جمع $\vec{B}+\vec{C}$ أولاً ثم نضيف إليه المتجه $\vec{A}$ كما في الشكل (6 جـ) وكما هو موضح في الرسم فإننا نحصل على نفس النتيجة السابقة، ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

وتسمى هذه الخاصية **بقانون الترافق للجمع** (Associative Law of addition).

وكذلك يمكن تعميم طريقة المثلث للجمع لتشمل أكثر من ثلاثة متجهات، فمثلاً إذا فرضنا حاصل أربع متجهات **A,B,C,D** (الشكل (7) أ) فإننا نرسم الواحد تلو الآخر كما في الشكل (7) ب وتكون المحصلة بقفل المضلع من بداية المتجه **A** وتنتهي عند رأس المتجه **D**.

الشكل (7)

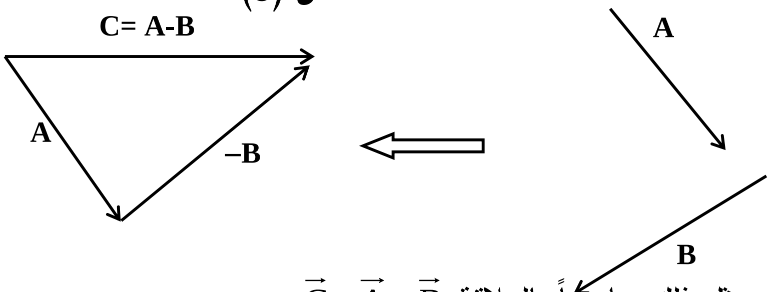


(ب) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ (أ) $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$

5.2 طرح المتجهات Subtraction of Vectors

إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلاً الفرق بين المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ يمثل بالمتجه $\vec{A} - \vec{B}$ مثلا هو المتجه $\vec{C}$ ولتحديد المتجه $\vec{C}$ نقوم برسم المتجه $\vec{A}$، أولاً ومن رأس A نرسم متجهاً موازياً ومعاكساً في الاتجاه للمتجه $\vec{B}$ الشكل (8) وهذا المتجه هو- $\vec{B}$.

الشكل (8)



ويمثل ذلك رياضياً بالعلاقة $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

◂◂ مثال (1)

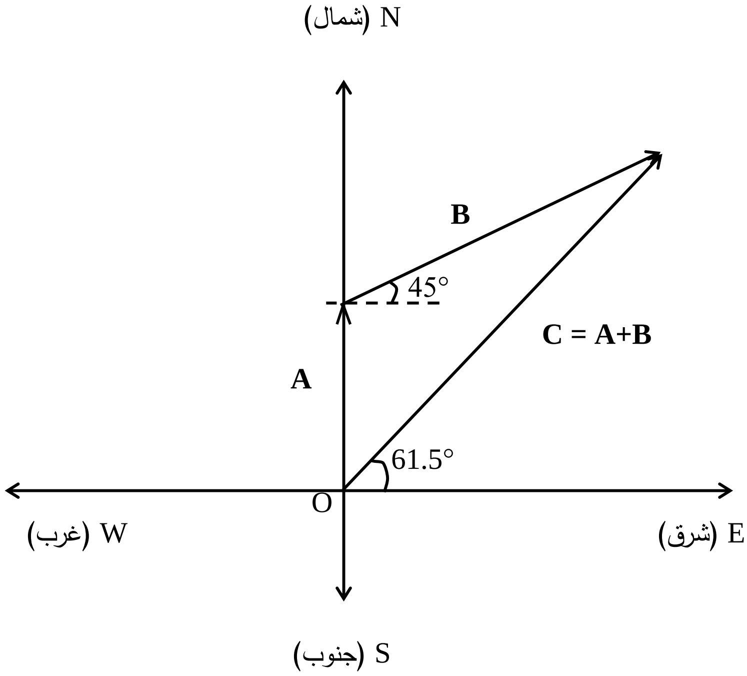
عربة تقطع 3 كم جهة الشمال، ثم 5 كم شمال شرق كما هو موضع بالشكل (9) مثل هذه الإزاحات بيانياً وحدد محصلة الإزاحة بالرسم.

الحل:

نختار مقياس رسم مناسب وليكن كل 1 كم يمثل بمقدار 2 سم، المتجه $\vec{A}$ يمثل إزاحة العربة 3كم جهة الشمال (على الرسم 6 سم) المتجه $\vec{B}$ يمثل إزاحة العربة 5 كم اتجاهة شمال شرق (على الرسم 10 سم) والمقصود هنا شمال الشرق أي أن الزاوية بينهما 45°.

الشكل (9)

حاصل جمع المتجه A ، والمتجه B



وبقياس طول المتجه $\vec{C}$ نجد طوله 14.8cm أي أن المحصلة 7.4km وباستعمال المنقلة نجد أن $\theta = 61.5°$ شمال الشرق.

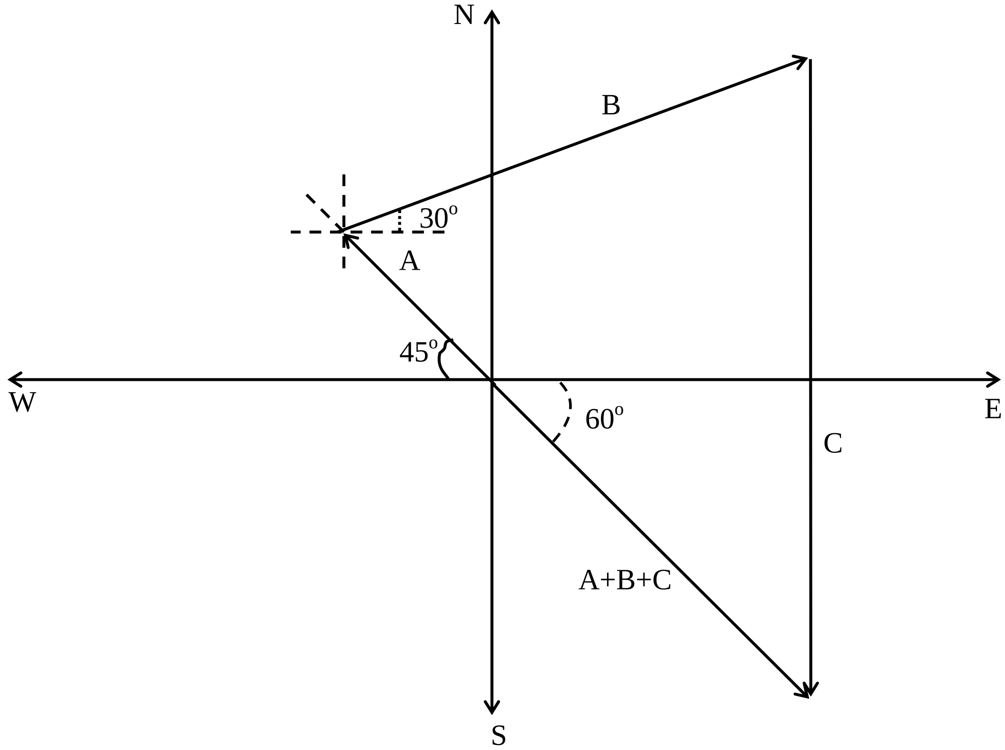
مثال (2)

جسيم يتحرك مسافة 10م، في اتجاه الشمال الغربي ثم 20م في اتجاه 30° شمال شرق ثم 35م في اتجاه الجنوب، مثل هذه الإزاحات بالرسم (بيانياً) وحدد محصلة الإزاحة بالرسم.

الحل:

- المتجه A يمثل إزاحة 10م في اتجاه شمال غرب (4سم).
- المتجه B يمثل إزاحة 20م في اتجاه 30° شمال الشرق (8سم).
- المتجه C يمثل إزاحة 35م في اتجاه الجنوب (14سم).

الشكل (10) : A+B+C



نختار مقياس رسم مناسب وليكن كل 5m يمثل في الرسم 2سم وباستخدام المنقلة نحدد الزوايا. وبقياس طول المتجه $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ نجد طوله وباستعمال المنقلة نجد θ حيث طوله يساوي 8.2cm أي أنه يساوي 20.5 م و $\theta = 60°$ جنوب الشرق.

التدريب (1)

جسيم يخضع لثلاث إزاحات متتالية بحيث تكون محصلة الإزاحة صفراً، كانت الإزاحة الأولى 8m باتجاه الغرب والإزاحة الثانية 6m باتجاه الشمال أوجد مقدار واتجاه الإزاحة الثالثة بيانياً.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

؟

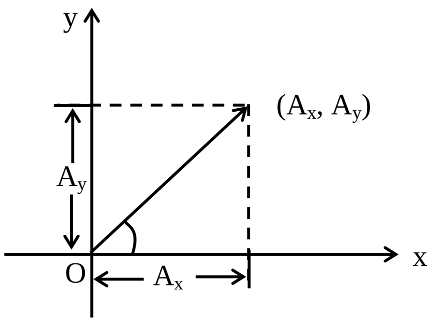
1. تحرك رجل مسافة 25 كم في اتجاه شمال الشرق، 15كم إلى الشرق، 10كم إلى الجنوب، باستخدام الطريقة البيانية جد محصلة الإزاحة مقداراً واتجاهاً.
2. اشرح معنى: الكميات المتجهة، والكميات القياسية. واضرب أمثلة فيزيائية على كل منهما.

3. مركبات المتجه Components of a Vector

عزيزي الدارس،

لنفرض أن المتجه $\vec{A}$ يقع في مستوى xy (مستوى الصفحة) وطول هذا المتجه $|\vec{A}|$ ويصنع زاوية مقدار θ مع الاتجاه الموجب لمحور x كما في الشكل (11).

الشكل (11)



لنفرض أن إحداثيات رأس المتجه $\vec{A}$ هي (A_x, A_y) أي أن مسقطه على محور x هو A_x ومسقطه على محور y هو A_y فيكون لدينا مثلث قائم الزاوية، وبذلك يكون

بمقدورنا أن نكتب:

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \quad , \quad \cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

أو

$$A_x = A\cos\theta \quad \text{.......................................}(1)$$

$$A_y = A\sin\theta \quad \text{.......................................}(2)$$

أي أن للمتجه A مركبتان $A_x = A\cos\theta$ وهي مركبة المتجه A باتجاه محور x وتسمى (المركبة الأفقية) و $A_y = A\sin\theta$ وهي مركبة المتجه A باتجاه محور y وتسمى (المركبة العمودية).

وبتطبيق نظرية فيثاغورس نحصل على:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad \text{.......................................}(3)$$

أي أن:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{.......................................}(4)$$

ومن شكل (11) نجد أن:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

وهذه الطريقة تسمى بالطريقة التحليلية Analytical Method.

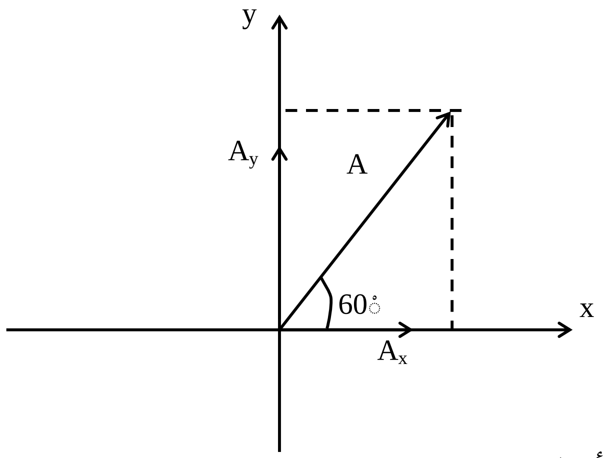
مثال (3)

متجه $\vec{A}$ طوله 4 وحدات ويضع زاوية مقدارها $60°$ مع الاتجاه الموجب لمحور x احسب المركبتين الأفقية والعمودية للمتجه $\vec{A}$.

الحل:

نرسم الشكل (12) دون الحاجة لاستخدام المنقلة (رسم توضيحي)

الشكل (12)



المركبة الأفقية A_x

$$A_x = A\cos\theta = 4\cos 60^\circ = 2 \text{ وحدة}$$

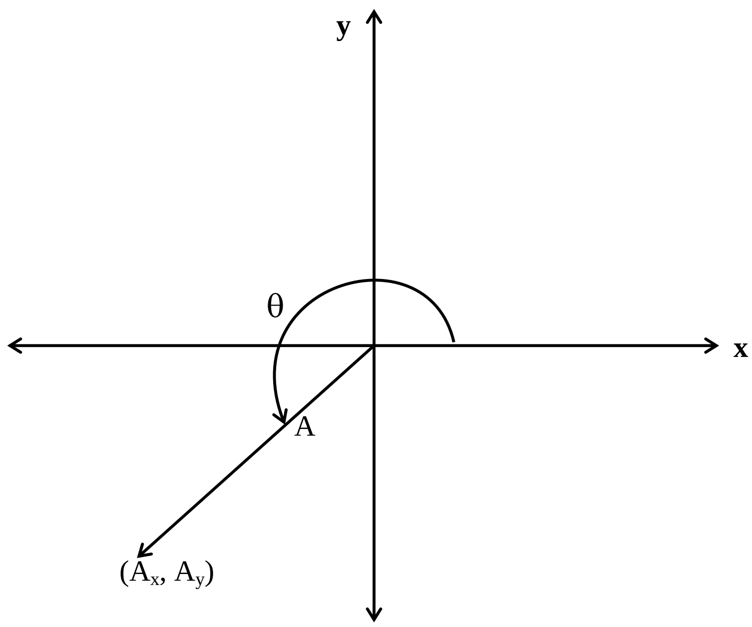
المركبة العمودية A_y

$$A_y = A\sin\theta = 4\sin 60^\circ = 3.46 \text{ وحدة}$$

مثال (4)

إذا كانت المركبة الأفقية للمتجه **A** هي 3− وحدات والمركبة العمودية للمتجه **A** هي 5.2− وحدات أوجد مقدار واتجاه المتجه **A**.

الشكل (13)



الحل:

$A_x = -3$ (وحدة)

$A_y = -5.2$ (وحدة)

المقدار $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$A = \sqrt{(-3)^2 + (-5.2)^2}$ $A =$ 6 وحدات

الاتجاه: $\tan\theta = \frac{Ay}{Ax} = \frac{-5.2}{-3}$

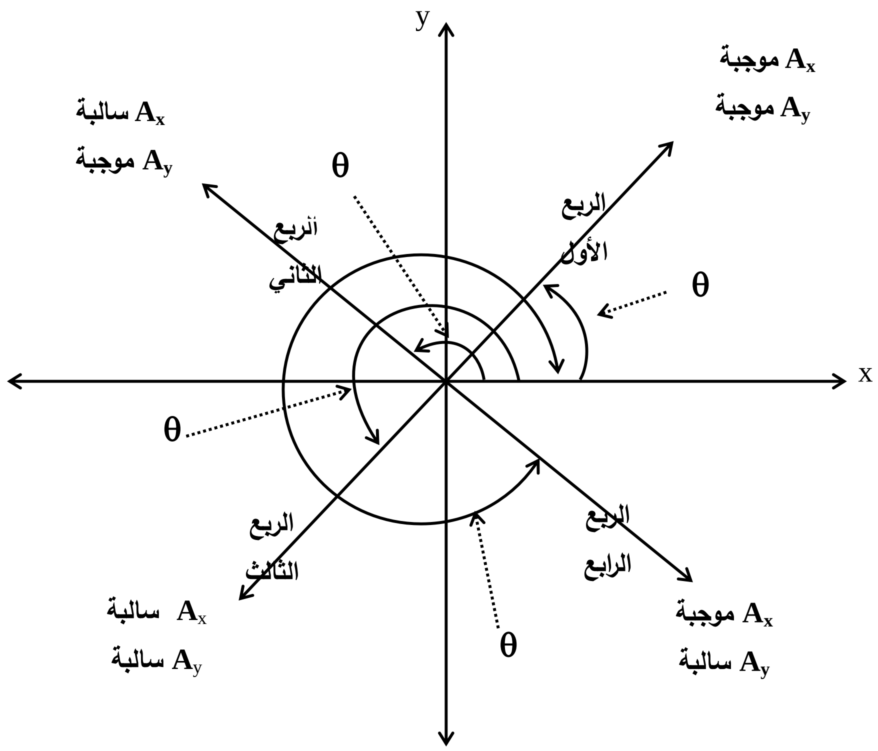
أي أن $\theta = \tan^{-1}\frac{-5.2}{-3} = 240°$

أي أن المتجه **A** يصنع 240° مع محور x الموجب (الشكل 13).

لاحظ أن قيمة A_x و A_y سالبتان (الربع الثالث) تبعاً للزاوية θ لذلك يمكن وضع

شكل توضيحي لقيم A_x و A_y (موجب أو سالب) تبعاً للزاوية θ (مقاسة بالنسبة لمحور x الموجب) في أي ربع هي الشكل (14) يبين ذلك.

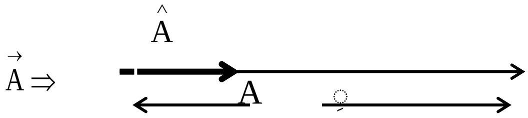
الشكل (14)



4. متجه الوحدة Unit Vector

متجه الوحدة عبارة عن متجه مقداره (طوله) يساوي وحدة واحدة من وحدات الكمية الفيزيائية التي يمثلها ويشير دائماً باتجاه المتجه، فمثلاً المتجه **A** يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\vec{A} = A\,\hat{A} \quad \text{...} (6)$$



حيث $\hat{A}$ متجه الوحدة ومقداره يساوي وحدة واحدة، يمكن إعادة كتابة العلامة السابقة على النحو التالي:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \quad \text{...}$$

وتبعاً لهذه العلاقة يمكن إعادة تعريف متجه الوحدة بأنه حاصل قسمة المتجه $\vec{A}$ على مقداره.

وكما سنرى ادناه فان استخدام مفهوم متجه الوحدة مفيد ومريح جدا عند تحليل وجمع وضرب

المتجهات. لقد استخدمنا سابقا الطريقة التحليلية (الشكل 11) حيث تحصلنا على المركبتين A_x و A_y بدلالة الزاوية θ بين المتجه **A** والمحور x .

الآن دعنا نعتبر المتجه $\vec{A}$ موجودا في مستوى xy ودعنا نعرف $\hat{i}$ على أنه متجه وحدة موازي لمحور x في اتجاه محور x الموجب، و $\hat{j}$ متجه وحدة في اتجاه محور y الموجب (الشكل 15) ، لذلك نستطيع كتابة المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته على النحو التالي:

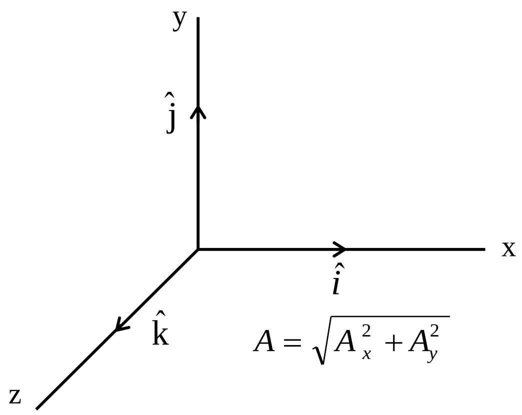
$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} \quad \text{..} (8)$$

أما في حالة المتجه **A** في الأبعاد الثلاثة (فضاء xyz المتعامدة) نعرف $\hat{k}$ على أنه متجه وحدة في اتجاه محور z الموجب، ويمكن كتابة المتجه A على النحو التالي:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,j + A_z\,\hat{k} \quad ....(9)$$

حيث أن $\hat{k}$، $\hat{j}$، $\hat{i}$ متجهات الوحدة في الفضاء xyz الشكل (15) (محور z عمودي على مستوى الصفحة).

الشكل (15)



مقدار المتجه **A** المعطى بالمعادلة (8) هو نفسه الذي حصلنا عليه سابقا فس المعادلة (4). أي.

وبنفس الطريقة فان مقدار المتجه $\vec{A}$ في فضاء xyz يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad ....(10)$$

وسنتعرف لاحقا على كيفية الحصول على المعادلة (10) من المتجه (9).

◄◄ مثال (5)

أوجد قيمة الوحدة للمتجه $A=6\hat{i}+8\hat{j}$

A مقدار المتجه $\vec{A} = \sqrt{(6)^2+(8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$\hat{A}$ مقدار الوحدة $\hat{A} = \frac{A}{A} = \frac{6\hat{i}+8\hat{j}}{10} = 0.6\hat{i}+0.8\hat{j}$

التدريب (2)

المتجه A له المركبات $Ax = 5m$ ، $A_y = -3m$ والمتجه B له المركبات:

$B_y = 1m$ ، $B_x = 11m$

أما المتجه C فله المركبات:

$C_y = 2m$, $C_x = -4m$

فإذا كان $\vec{A}+\vec{B}-2\vec{C}+2\vec{D}=0$

أوجد مركبات المتجه $\vec{D}$ ومتجه الوحدة في اتجاه $\vec{D}$.

◄◄ مثال (6)

إذا كان المتجه $\vec{A}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ فجد $\hat{A}$

$\vec{A}$ مقدار المتجه $A=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{9}=3$

متجه الوحدة $\hat{A}=\frac{A}{A} = \frac{2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}{3}$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. في المثال (6) السابق، هل يمكن اعتبار $\hat{A}$ متجه وحدة؟

2. المتجه $\vec{A}$ يضع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور x أوجد مركبات المتجه A في الحالات التالية:

(أ) $A = 4m$ ، $\theta = 30°$

(ب) $\vec{A} = 8m$ ، $\theta=150°$

(ج) $A=6m$ ، $\theta = 225°$

(د) $A=5m$ ، $\theta = 315°$.

3. إذا كان المتجه: $A = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

جد متجه الوحدة في اتجاه A (متجه الوحدة $\hat{A}$).

5. جمع المتجهات بالطريقة التحليلية

Addition of Vectors using Analytical Method

عزيزي الدارس،

مر بنا سابقاً جمع المتجهات بطريقة التمثيل البياني، وبعد أن عرفنا كيفية كتابة المتجه بدلالة مركباته يمكننا إيجاد حاصل جمع المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ولكن دعنا قبل ذلك نكتب كل متجه على النحو التالي:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \qquad (11)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \qquad (12)$$

افرض أن:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (13)$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة العلاقة السابقة على الصورة:

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad (14)$$

ولكن:

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k} \qquad (15)$$

لذلك تكون مركبات المتجه **C** على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

ولإيجاد حاصل طرح المتجه **A** من المتجه **B** فإن الناتج هو:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \qquad (17)$$

بحيث أن مركبات المتجه C هي:

$$\left.\begin{array}{l} C_x = A_x - B_x \\ C_y = A_y - B_y \\ C_z = A_z - B_z \end{array}\right\} \quad \text{..........} \quad (18)$$

مثال (7)

إذا كان

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

جد كل من:

(أ) $\vec{A} + \vec{B}$ (ب) $\vec{A} - \vec{B}$

(جـ) $|\vec{A} + \vec{B}|$ (د) $|\vec{A} - \vec{B}|$

(هـ) متجه وحدة في اتجاه $\vec{A} + \vec{B}$.

الحل:

(أ) $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{k}$

(ب) $\vec{A} - \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

(جـ) $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

(د) $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

(هـ) $\dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\hat{i} + 3\hat{k}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} =$ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A} + \vec{B}$

التدريب (3)

إذا كان $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ، $\vec{B}=-4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

جد (أ) مقدار كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$

(ب) $3\vec{A}-2\vec{B}$ ،

(ج) $\left|3\vec{A}-2\vec{B}\right|$ ،

(د) متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A}-2\vec{B}$.

مثال (8)

إذا كان

$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{C}=\hat{i}-\hat{j}$

جد الثوابت التالية s, t, r بحيث أن:

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=s\vec{A}+t\vec{B}+r\vec{C}$$

الحل:

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=s\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)+r\left(\hat{i}-\hat{j}\right)$$

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=(s+t+r)\hat{i}+(s+t-r)\hat{i}+(s-t)\hat{k}$$

نقارن معامل كل متجه على حده:

$4=s+t+r$ ....(1)

$6=s+t-r$ ....(2)

$-1=s-t$ ....(3)

نجمع المعادلة (1) مع المعادلة (2) فنحصل على:

$10=2s+2t$

أو:

$5=s+t.$ ....(4)

نجمع معادلة (4) مع معادلة (3) فنحصل على:

$4=2s+0t$

أي: $4=2s$ ومنها $s=2$

نعوض قيمة s في المعادلة (3) فنجد:

$-1=2-t \Rightarrow t=3$

ومنها نجد r من معادلة (1) التي تصبح :

$4=2+3+r \quad \Rightarrow r=-1$

مثال (9)

إذا كان مقدار المتجه $\vec{A}$ يساوي 4م ويصنع زاوية $30°$ مع محور x الموجب ومقدار المتجه B يساوي 2م ويصنع $120°$ من محور x الموجب الشكل (16) جد:

(أ) $\vec{A}+\vec{B}$، (ب) $\vec{A}-\vec{B}$، (جـ) $|\vec{A}+\vec{B}|$، (د) متجه وحدة في اتجاه $\vec{A}-\vec{B}$.

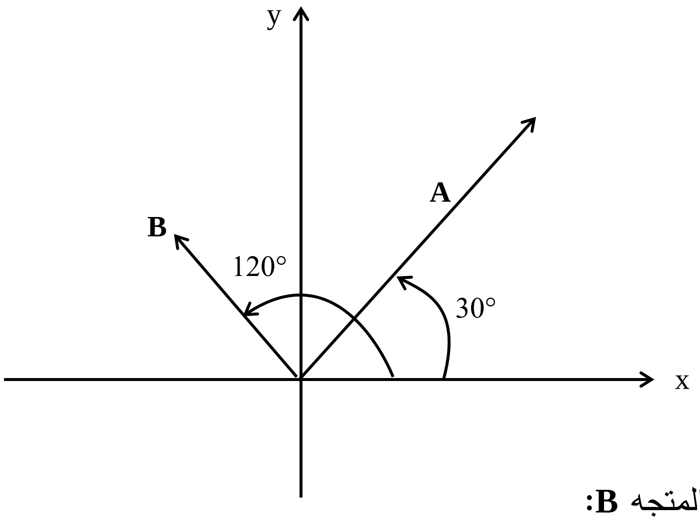
الحل:

المتجه $\vec{A}$

$$A_x = A\cos\theta = 4\cos 30^\circ = 3.46 \text{ م}$$

$$A_y = A\sin\theta = 4\sin 30^\circ = 2 \text{ م}$$

$$\vec{A} = Ax\,\hat{i} + Ay\,\hat{i} = 3.46\,\hat{i} + 2\hat{j} \text{ م}$$



المتجه **B:**

$$B_x = 2\ \mathrm{Cos}\ 120^\circ = -1\,\mathrm{m}$$

$$B_y = 2\,\mathrm{Sin}\ 120^\circ = 1.73\ \mathrm{m}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} + 1.73\,\hat{j}$$

(أ) $\vec{A}+\vec{B} = 2.46\,\hat{i} + 3.73\,\hat{i}$

(ب) $\vec{A}-\vec{B} = 4.46\,\hat{i} + 0.27\,\hat{j}$

(جـ) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{(2.46)^2 + (3.73)^2} = 4.47\,\mathrm{m}$

(د) $\vec{A}-\vec{B}$ متجه وحدة في اتجاه $= \dfrac{\vec{A}-\vec{B}}{\left|\vec{A}-\vec{B}\right|} = \dfrac{4.46\,\hat{i} + 0.27\,\hat{j}}{\sqrt{(4.46)^2 + (0.27)^2}}$

$$= \frac{4.46\,\hat{i} + 0.27\,\hat{j}}{4.47}$$

مثال (10)

إذا كان $\vec{A}=3\,\hat{i}-4\,\hat{j}$ $\vec{B}=1\,\hat{i}+3\,\hat{j}$

أوجد حاصل جمع المتجهين A, B مقداراً واتجاهاً.

الحل: نفرض أن المتجه **C** هو حاصل جمع المتجهين, أي:

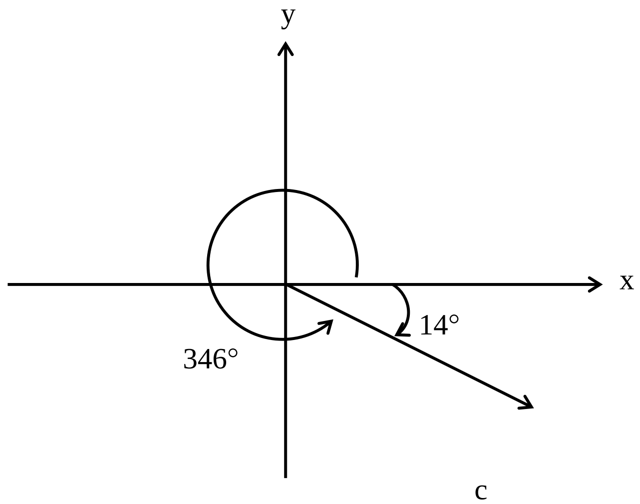
$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \qquad =4\,\hat{i}-\hat{j}$$

مقدار المحصلة $C=\sqrt{(4)^2+(-1)^2} \qquad =\sqrt{17}$

اتجاه المحصلة $\tan\theta=\frac{C_y}{C_x}=\frac{-1}{4}$

تذكر أن مركبة C_x موجبة ومركبة C_y سالبة لذلك نحن في الربع الرابع، وبالتالي نحصل على:

$\theta=346°$ مع محور السينات الموجب (أو $-14°$) (فسر ذلك؟)



مثال (11)

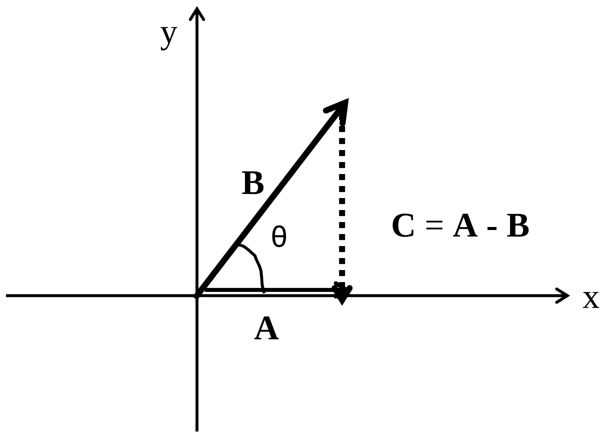
إذا كانت الزاوية بين المتجهين **A,B** هي θ في الشكل (17), فأثبت أن:

$$|A-B| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,Cos\,\theta}$$

الحل:

نفرض أن: $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

الشكل (17)



مركبات المتجه **A**

$$A_x = A\cos 0 = A$$
$$A_y = A\sin 0 = 0$$
$$\vec{A} = A\hat{i} + 0\hat{j} = A\hat{i}$$

مركبات المتجه **B**

$$B_x = B\cos\theta$$
$$B_y = B\sin\theta$$
$$\vec{B} = B\cos\theta\,\hat{i} + B\sin\theta\,\hat{j}$$

لذلك يكون المتجه **C**

$$\vec{C}=(A-B\cos\theta)\hat{i}-B\sin\theta\,\hat{j}$$

أو

$$\vec{C}=C_x\,\hat{i}+C_y\,\hat{j}$$

ومقدار المتجه C يساوي:

$$C=|\vec{C}|=\sqrt{C_x^{\,2}+C_y^{\,2}}=\sqrt{(A-B\cos\theta)^2+(-B\sin\theta)^2}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2-2AB\cos\theta+B^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{A^2-2AB\cos\theta+B^2\left(\cos^2\theta+\mathrm{Sin}^2\theta\right)}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1. إذا كان $\vec{A}$ يمثل إزاحة مقدارها 2م باتجاه يضع 45° مع الاتجاه الموجب لمحور x وكانت $\vec{B}$ تمثل إزاحة مقدارها 4م بالاتجاه الموجب لمحور y أوجد باستخدام طريقة تحليل المركبات:
(أ). $\vec{A}+\vec{B}$، (ب) $\vec{A}-\vec{B}$، (جـ) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$ ، (د) $3\vec{A}-\vec{B}$.

2. متجه مركبته على محور x هي 15m- ومركبتة على محور y هي 45m أوجد مقدار واتجاه هذا المتجه.