الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

اسم المادة :حساب التفاضل والتكامل

اسم الدكتور: محمد نهاد كردية

الأكاديمية العربية الدولية – منصة أعد

مخطط المقرر

الاشتقاق:

المعنى الهندسي للمشتقات العددية

خواص المشتقات للتوابع الأساسية

مشتقات التوابع

مشتق التوابع اللوغاريتمية

مشتق التوابع المثلثية

مشتق التابع العكسي

مشتق التابع القطعي

تطبيقات على الاشتقاق

نهايات التوابع

التكامل:

التوابع الأصلية والتكامل

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل للتوابع المثلثية

تكامل التوابع الأسية

التكامل بالتجزئة

التكامل بالكسور

التكامل المحدود

تطبيقات على التكامل المحدود

الاشتقاق "المعنى الهندسي"

المعنى الهندسي للاشتقاق:

إذا كان لدينا تابع مستمر على المجال (a, b) " حيث a, b أعداد حقيقية هي حدود التكامل"، وكان لدينا النقطة c "عدد حقيقي بين القيمتين a وb، من مجموعة تعريف التابع فإن التابع g معرف على كل قيم التابع ما عدا c يكون بالشكل التالي:

قيمة التابع = فرق التابعين على فرق القيمتين.

التابع قابل للاشتقاق إذا كانت النهاية موجودة.

تكون النهاية موجودة إذا كانت قيمة النهاية من الطرفين متساوية.

مشتق التابع الثابت

التابع الثابت:

إذا كان لدينا التابع الثابت بالشكل:

$f(x) = k$

حيث k قيمة ثابتة (عدد)

و $f(x)$ تابع للمتحول x، فإن مشتق هذا التابع كما يلي:

إن مشاق التابع الثابت يساوي الصفر

يرمز للمشتق بالرمز وفوقه فتحة أو نقطة.

مشتق القوة

التابع بشكل أس (قوة):

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل أس كما في الشكل:

$f(x) = x^n$

التابع x مرفوع للأس n فإن مشتقه وهو تصغيره يكون بالشكل:

نضع الأس مضروباً بالتابع مرفوع لأس ناقص واحد من الأس الأساسي.

مشتق القوة

التابع بشكل أس (قوة):

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل قوس مرفوع لأس كما في الشكل:

f(x) =(x+2)^n

- تابع f أي function عبارة عن كثير حدود x + 2 مرفوع للأس n حيث n عدد حقيقي
- فإن مشتقه وهو تصغيره يكون بالشكل:

مشتق الأس مضروب بمشتق ما داخل القوس.

مشتق جداء تابعين

التابع بشكل جداء تابعين:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل جداء تابعين كما في الشكل:

f(x) =x.(x+2)^n

حيث x متحول أو وحيد الحد مضروب بالتابع كثير الحدود ومرفوع لأس n عدد حقيقي

- فإن مشتقه وهو تصغيره يكون بالشكل:

مشتق الأول في الثاني + مشتق الثاني في الأول.

مشتق كسر

التابع بشكل كسر:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل كسركما في الشكل:

f(x) =x/(x+2)^n

حيث التابع هو x المتحول بالبسط مقسوم على التابع كثير الحدود المرفوع للأس n العدد الحقيقي وهو المقام

- فإن مشتقه وهو تصغيره يكون بالشكل:

مشتق البسط في المقام – مشتق المقام في البسط على مربع المقام.

مشتق تابع التابع

التابع بشكل تابع لتابع آخر:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع لآخر في الشكل:

$$f(x) = g(h(x))$$

حيث g تابع للتابع h الذي يتبع المتحول x

- أي تابع مركب فإن مشتقه وهو تصغيره يكون بالشكل:

مشتقه بالنسبة للتابع g ضرب مشتق تابع h.

مشتق النسب المثلثية

التابع بشكل مثلثي أي جب sin:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع مثلثي كما في الشكل:

$f(x) = \text{Sin}(x)$

تابع جيبي هو تابع الجيب أو يقال له sin تابع للزاوية x بالدرجات

- أي تابع من الشكل الجيبي مشتقه يكون بالشكل:

مشتق الـ جب هو تجب

أي مشتق sin هو cos

مشتق النسب المثلثية

التابع بشكل مثلثي أي تجب Cos:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع مثلثي كما في الشكل:

f(x) =Cos (x)

- أي تابع من الشكل الجيبي مشتقه يكون بالشكل:

مشتق الـ تجب هو - جب

أي مشتق cos هو - Sin

مشتق النسب المثلثية

التابع بشكل مثلثي أي ظل Tan:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع مثلثي كما في الشكل:

f(x) =Tan (x)

- أي تابع من الشكل الجيبي مشتقه يكون بالشكل:

مشتق الـ ظل هو 1 على مربع التجب أو مربع سيك

أي مشتق Tan هو Cos^2x/1 أو Sec^2x

أي أن secهو تابع مثلثي.

مشتق النسب المثلثية

التابع بشكل مثلثي أي تظل Cotx:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع مثلثي كما في الشكل:

f(x) =Cot (x)

- أي تابع من الشكل الجيبي مشتقه يكون بالشكل:

مشتق الـ تظل هو -1 على مربع الجب أو - مربع كو سيك

أي مشتق Cot هو -Sin^2x/1 أو CSc^2

وتابع الـ Csc هو تابع مثلثي

مشتق التابع الأسي

التابع بشكل تابع أسي:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع أسي كما في الشكل:

$f(x) = e^x$

- أي تابع من الشكل الأسي مشتقه يكون بالشكل:

إذا كان التابع الأسي له أس تابع لـ x فإن مشتق التابع الأسي البسيط هو نفسه

مشتق التابع الذي له أس تابع هو مشتق الأس ضرب التابع نفسه.

التابع e هو تابع ثابت عبارة عن العدد النيبري الذي قيمته 2.87 ومرفوع للمتحول x.

مشتق التابع اللوغاريتمي

التابع بشكل تابع لوغاريتمي:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع لوغاريتمي كما في الشكل:

$f(x) = \log x$

- أي تابع من الشكل اللوغاريتمي مشتقه يكون بالشكل:
- 1/ اللوغاريتم الطبيعي للدليل على مشتق اللوغاريتم الطبيعي التابع

وللوغاريتمات خواص كثيرة منها:

لوغاريتم جداء = مجموع اللوغاريتمين

لوغاريتم قسمة = فرق اللوغاريتمين

التابع log لوغاريتمي له أساس ثابت.

مشتق التابع اللوغاريتمي الطبيعي

التابع بشكل تابع لوغاريتمي طبيعي:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع لوغاريتمي طبيعي كما في الشكل:

$f(x) = \ln x$

- أي تابع من الشكل اللوغاريتمي الطبيعي مشتقه يكون بالشكل:
- مشتق ما أمام اللوغاريتم على ما أمامه

وللوغاريتمات خواص كثيرة منها:

لوغاريتم جداء = مجموع اللوغاريتمين

لوغاريتم قسمة = فرق اللوغاريتمين

التابع ln هو تابع لوغاريتمي طبيعي عكس التابع الأسي.

مشتق التابع العكسي

مشتق التابع العكسي للتابع المثلثي:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع عكسي لتابع الـ Sin أو Cos كما في الشكل:

$f(x) = \text{Sin } x$ أو $f(x) = \text{Cos } x$

التابع العكسي لهذا التابع هو من الشكل:

$X = \text{arc sin } y$

التابع arc يعني تابع عكسي للتابع الأصلي يؤخذ من الآلة الحاسبة

- أي تابع من الشكل التابع العكسي هناك قانون:
- مشتق التابع x مشتق التابع العكسي لها = 1

مشتق التابع القطعي

مشتق التابع القطعي:

إذا كان لدينا التابع المتغير بشكل تابع قاطع، أي:

$y = f(x) = \sec x$ or $y = f(x) = \csc x$

مشتق هذا التابع القاطع يكون بإيجاد التابع العكسي

ومن ثم نتبع قانون أن جداء مشتق التابع x تابعه العكسي = 1.

تطبيقات على المشتقات

معادلة المماس:

إن ميل المنحني هو تغير التابع y على تغير المتحول x. أو هو ظل الزاوية. أو هو المشتق الأول للتابع بعد أن نعوض فيه نقطة التماس المطلوبة.

وميل المنحني هو المماس للتابع.

معادلة المماس هي نفس معادلة المستقيم.

ونفس الطريقة نوجد بها معادلة الناظم.

تطبيقات على المشتقات

التابع المتزايد والتابع المتناقص:

إن دراسة تزايد وتناقص التابع وحساب النهايات العظمى والصغرى يساعدنا في إيجاد أكبر وأصغر قيمة للتابع عند مدى معين للمتحول x.

ولإيجاد النهايات التي تحدد التزايد والتناقص لا بد من حساب المشتقات للتوابع المراد إيجاد تغيرها تزايداً أم تناقصاً.

يتم عند إيجاد النهايات دراسة إشارة التابع خلال تغيره بالنسبة لـ x.

تطبيقات على المشتقات

نقط الانعطاف وتقعر للتابع والنقاط الحرجة:

نقول إن تقعر التابع للأسفل عندما تكون نقاط التابع المجاورة لنقاط التماس واقعة تحت المماس.

أو إذا كان المشتق الثاني للتابع أصغر من الصفر.

ويكون تقعر التابع للأعلى إذا كان المشتق الثاني للتابع أكبر من الصفر.

نقطة الانعطاف هي النقطة التي يغير فيها التابع اتجاه تقعره، أي عندما يكون المشتق الثاني للتابع يساوي الصفر.

نهايات التوابع

حالات عدم التعيين:

الحالة الأولى:

- صفر على صفر
- يتم إزالة عدم التعيين بهذه الحالة بإيجاد مشتق البسط على مشتق المقام وهذه قاعدة أوبيتال وإن ظهر عدم التعيين مرة ثانية نعيد تطبيق القاعدة. وهكذا حتى نحصل على قيمة عددية.

نهايات التوابع

حالات عدم التعيين:

الحالة الثانية:

- لانهاية على لانهاية
- نحولها لحالة صفر على صفر كما يلي:
- مقلوب المقام على مقلوب البسط ومن ثم نطبق قاعدة أوبيتال.

نهايات التوابع

حالات عدم التعيين:

الحالة الثالثة:

- لانهاية x صفر
- نحولها لحالة صفر على صفر أو لا نهاية على لا نهاية كما يلي:
- إما البسط على مقلوب المقام أو المقام على مقلوب البسط ومن ثم نطبق قاعدة أوبيتال.

التكامل "المعنى الهندسي"

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

المعنى الهندسي للتكامل:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية أي تكامل للدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$f(x)$ هي مشتق التابع $F(x)$ بالنسبة لـ x.

أي أن $F(x) + c$ حيث c ثابت التكامل ومختلف من تكامل لآخر هو تابع تكامل للتابع $f(x)$ لأن مشتق العدد الثابت يساوي الصفر.

إذا وجد لتابع ما تابع أصلي فإنه يوجد عدد غير منته من التوابع الأصلية له تختلف عن بعضها بالعدد الثابت.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية أي تكامل للدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$f(x)$ هي مشتق التابع $F(x)$ بالنسبة لـ x.

أي أن $F(x) + c$ حيث c ثابت التكامل ومختلف من تكامل لآخر هو تابع تكامل للتابع $f(x)$ لأن مشتق العدد الثابت يساوي الصفر.

إذا وجد لتابع ما تابع أصلي فإنه يوجد عدد غير منته من التوابع الأصلية له تختلف عن بعضها بالعدد الثابت.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود:

* تكامل العدد الثابت، إذا كان التابع هو قيمة ثابتة a فإن تكامله هو:

العدد الثابت ضرب المتحول x + ثابت التكامل.

* تكامل التابع الأسي هو تابع نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد + ثابت التكامل

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود:

* تكامل تابع مضروب بعدد ثابت فإننا نخرج العدد الثابت خارج إشارة التكامل ونكامل التابع حسب نوعه.

* تكامل مجموع توابع يساوي مجموع التكاملات.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود:

* تكامل تابع مضروب بعدد ثابت فإننا نخرج العدد الثابت خارج إشارة التكامل ونكامل التابع حسب نوعه.

* تكامل تابع له أس مضروب بمشتق التابع يساوي التابع مرفوع لأس + 1على الأس الجديد + ثابت التكامل.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود:

* تكامل مشتق تابع على نفسه يساوي اللوغاريتم الطبيعي للتابع + ثابت التكامل.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود للتوابع المثلثية:

* تكامل تابع ال Cos هو sin + C.

* تكامل تابع ال Sin هو –Cos + C

* تكامل تابع ال Tan هو اللوغاريتم الطبيعي للقيمة المطلقة لتابع ال sec.

* تكامل تابع ال cot هو – اللوغاريتم الطبيعي للقيمة المطلقة لتابع ال csc.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود للتوابع الأسية:

* تكامل مشتق تابع ضرب عدد مرفوع لهذا التابع هو العدد الثابت مرفوع لأس هو العدد الثابت مقسوم على اللوغاريتم الطبيعي للعدد الثابت.

* تكامل مشتق تابع مضروب بالتابع الأسي (العدد النيبري) مرفوع لهذا التابع يساوي العدد النيبري مرفوع للتابع المشتق + ثابت التكامل.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل بالتجزئة:

* نعتمد على قانون مشتق جداء تابعين = مشتق الأول في الثاني + مشتق الثاني في الأول.

جداء تابعين = تكامل الأول في مشتق الثاني + تكامل الثاني في مشتق الأول.

قوانين التكامل غير المحدود

التكامل بالكسور الجزئية:

* نسمي تابع F(x) تابعاً كسرياً إذا كان عبارة عن كسر بسطه ومقامه تابعين كثيرات حدود.

** إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإن الكسر هو كسر حقيقي.

*** يمكننا تفريق الكسر إلى مجموع جبري لكسور جزئية. بسطوها ثوابت يجب تعيينها ومقاماتها تعتمد على شكل تابع المقام.

هناك عدة حالات للكسور الجزئية تعتمد على شكل كثيرة حدود المقام.

قوانين التكامل المحدود

التكامل بالكسور الجزئية:

* تكامل جميع التوابع مهما كان نوعها يجب مكاملتها وفق حدي التكامل وهنا لا داي لوجود ثابت التكامل، بل نكامل بين حدي التكامل الكبير ناقص الصغير بعد مكاملة التابع.

* نطبق كل أشكال التوابع فب التكامل غير المحدود بتعويض حدي التكامل بدل ثابت التكامل والذي هو عبارة عن حدود التكامل.

قوانين التكامل المحدود

خواص التكامل المحدود:

* إذا قلبنا حدي التكامل نكامل بالطريقة المعروفة مع وضع ناقص أمام التكامل.

* التكامل المحدود ضمن حدي تكامل متساويين يساوي الصفر.

* يمكن أن نكامل ضمن حدود تكامل بمجموع تكاملين ونضع حد تكامل أوسط بطرف كل تكامل.

تطبيقات التكامل المحدود

من تطبيقات التكامل المحدود:

* حساب المساحة وهي المساحة تحت منحني التابع الذي سنكامله ضمن حدي التكامل.

** إذا كان التابع أكبر أو يساوي الصفر أي سالب لكل قيم x بين حدي التكامل، فإن تكامل المساحة بين منحني التابع الواصلة بين حدي التكامل ومحور الx هي:

تكامل التابع بين حديه وهي سالبة أو نأخذها بالقيمة المطلقة.

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الرياضيات
التكامل والتفاضل

انتهى المقرر

وفقكم الله

أ. د. محمد نهاد كردية