الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

حساب التفاضل والتكامل

Precalculus

د . جمانة حكمت سلمان

كلية العلوم –بكالوريوس الامن السيبراني

المحاور :

- المخرجات المتوقعة من الدرس
- المقدمة
- العناوين الفرعية :

- المستوى الديكارتي واستخدامه في تحليل البيانات
- الرسوم البيانية وتحليل الأنماط
- الدوال ورموزها
- المعادلات الخطية
- تحويلات الدوال ، جمع الدوال، معكوس الدالة
- مراجع علمية للمادة

المخرجات المتوقعة من الدرس:

1. تحديد إحداثيات النقاط في المستوى الديكارتي .
2. حساب المسافة بين نقطتين في المستوى ، إيجاد نقطة المنتصف بين نقطتين .
3. رسم المعادلات باستخدام تمثيل النقاط .
4. حساب الميل وتفسيره ضمن السياق الرياضي
5. كتابة المعادلات الخطية وتحليلها .
6. فهم الإِزاحات، الانعكاسات، التمدد والانكماش في الدوال .
7. القدرة على جمع الدوال وتحليل الدوال المركبة .
8. فهم معكوس الدوال ورسمه بيانياً .

المقدمة

أهمية مبادئ التفاضل والتكامل في الأمن السيبراني

تشكل الأساس الذي تبنى عليه المهارات التحليلية والتقنية في مجال الأمن السيبراني، حيث توفر الأدوات اللازمة لفهم المشكلات المعقدة وتحليل الأنظمة الرقمية. تشمل هذه الأدوات:

– الدوال (Functions): لفهم العلاقات بين المتغيرات وتحليل تأثيرها.

–الرسوم البيانية (Graphs): لفهم الاتجاهات والأنماط في البيانات، مما يساعد في الكشف عن التهديدات والتنبؤ بها.

المقدمة

دور الرياضيات في الأمن السيبراني :

– التشفير (Cryptography) : يعتمد على مفاهيم رياضية مثل الدوال اللوغاريتمية والأسية لتصميم خوارزميات التشفير.

– تحليل البيانات الضخمة (Big Data Analysis) : تستخدم الرياضيات التمهيدية لتحليل الأنماط في كميات هائلة من البيانات .

– التنبؤ بالتهديدات (Threat Prediction) : باستخدام الدوال الرياضية لتحليل الاتجاهات السابقة والتنبؤ بالتهديدات المستقبلية .

دور الرسوم البيانية والدوال :

– تحليل الأنماط الشاذة (Anomaly Detection) : اكتشاف الأنماط غير المعتادة في حركة المرور على الشبكات .

– تصميم الأنظمة الأمنية : تحسين أداء الأنظمة بناءً على النماذج الرياضية .

– مراقبة الأداء (Performance Monitoring) : تسهيل اتخاذ القرارات من خلال الرسوم البيانية التي تُظهر أداء النظام .

المستوى القطبي (الديكارتي)

- في هذا القسم ، ستتعلم
- رسم النقاط في نظام الاحداثيات الديكارتية
- ايجاد المسافة بين نقطتين
- ايجاد نقطة المنتصف بين نقطتين

المستوى القطبي (الديكارتي)

المستوى الديكارتي اربع ارباع

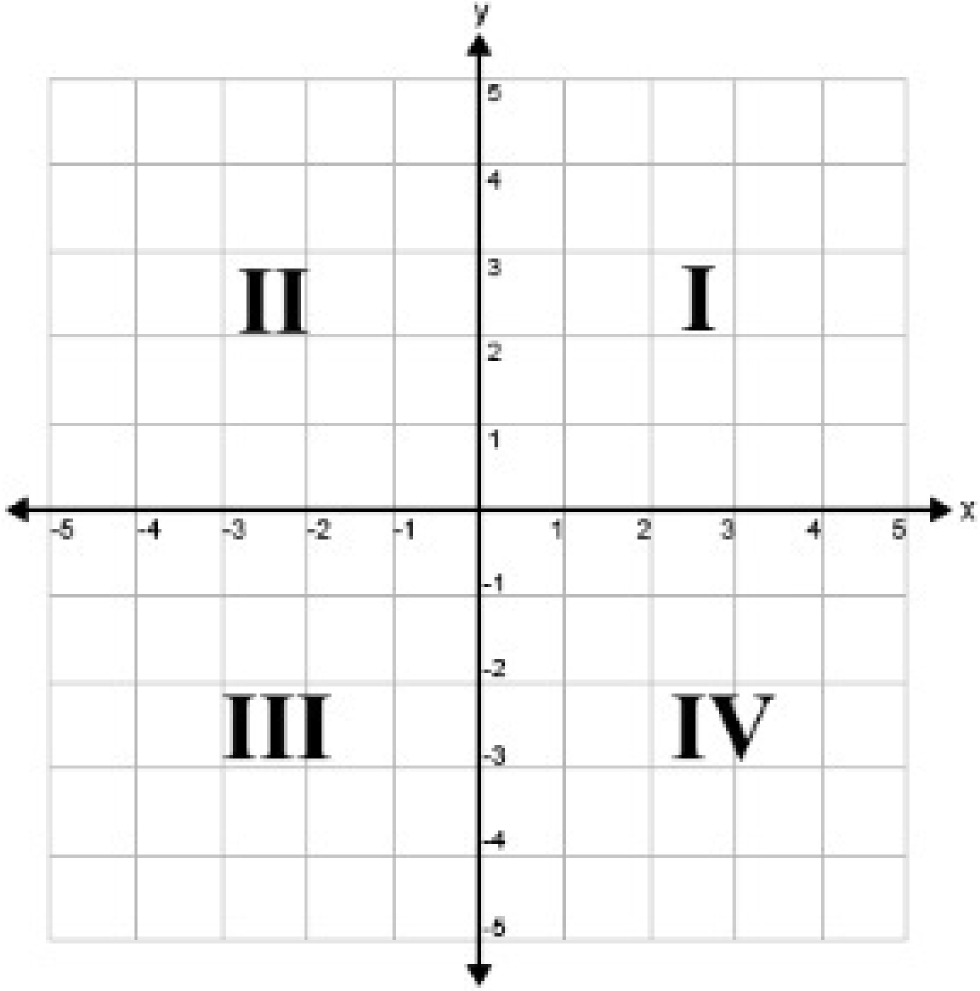
النقطة تكون على شكل زوج مرتب (x,y)

مثال :

النقطة

A(3,2)

B(-1,4)



المستوى القطبي (الديكارتي)

مثال :

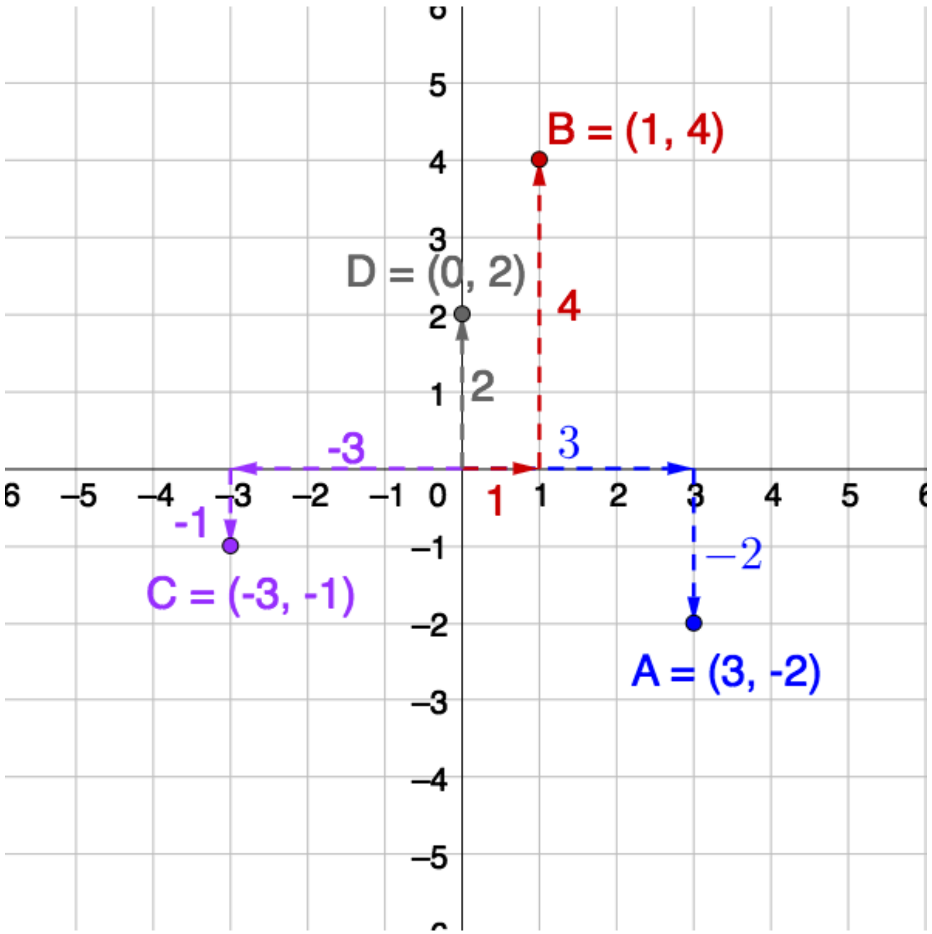
النقطة

A(3,-2)

B(1,4)

C(-3,-1)

D(0,2)



المستوى القطبي (الديكارتي)

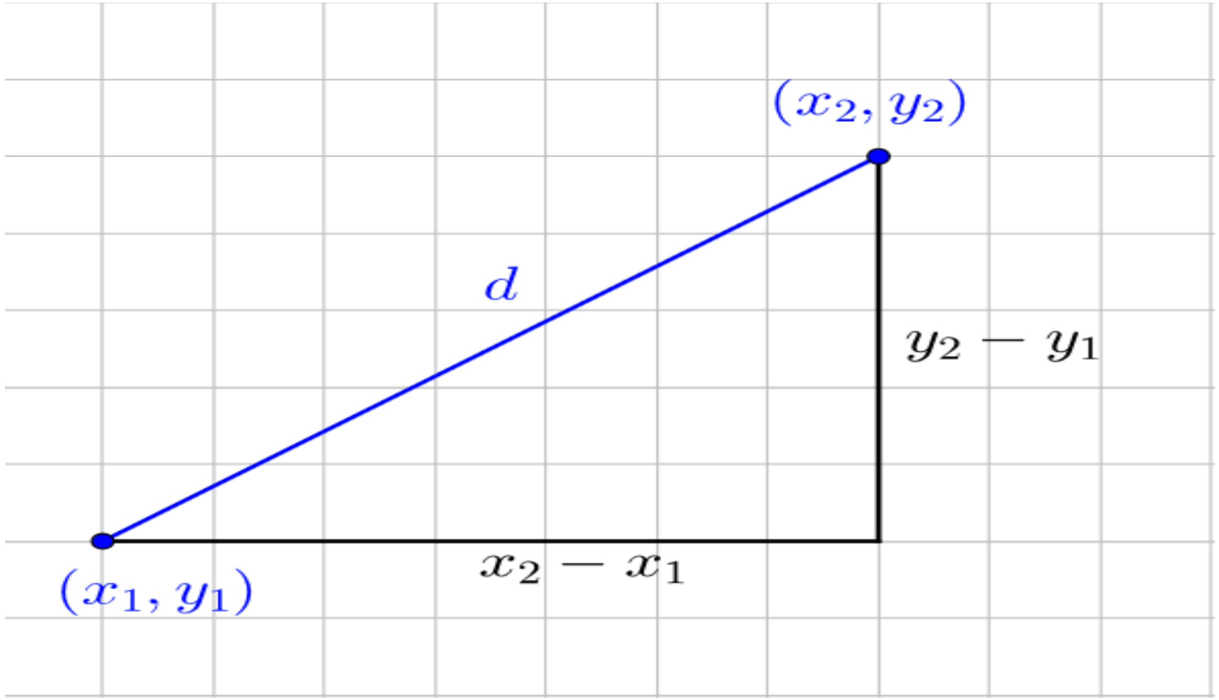
قانون المسافة :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

جد المسافة بين النقطتين

E(1,-4) , W(-5,8)



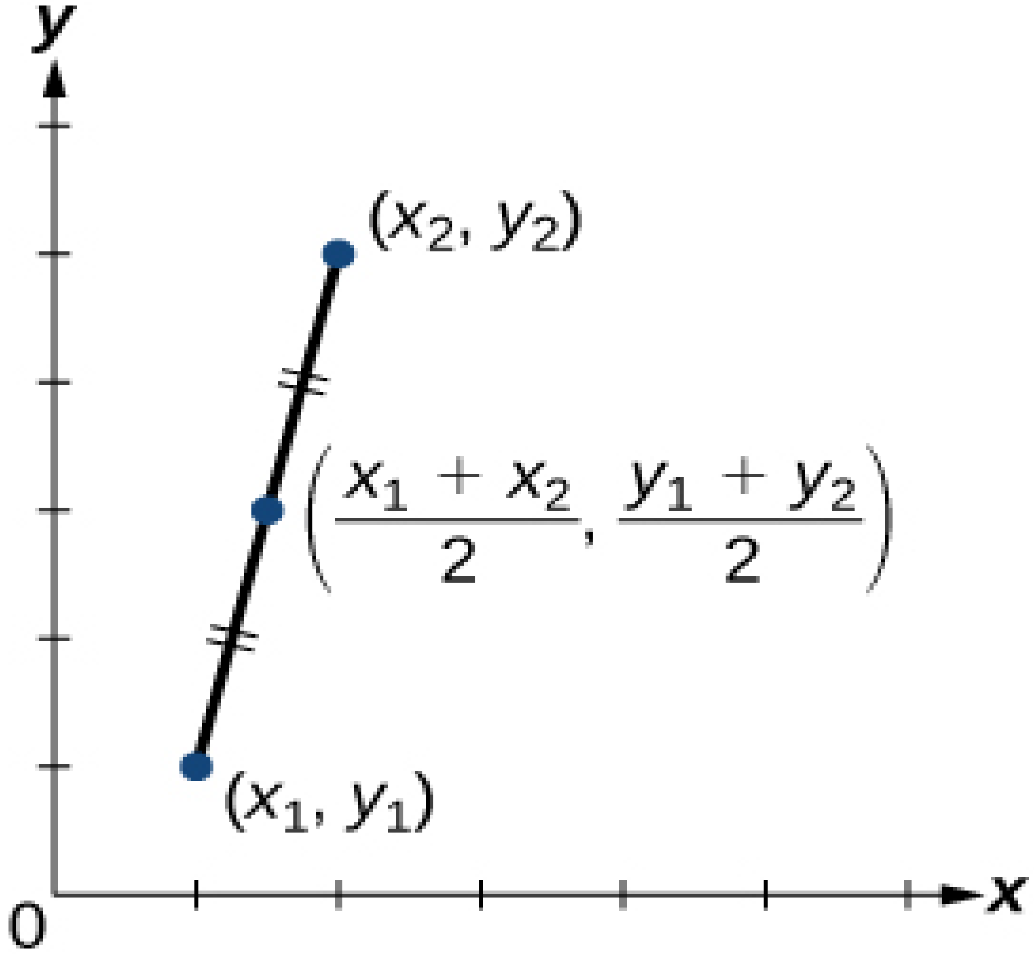
المستوى القطبي (الديكارتي)

قانون المنتصف :

هو المعدل (الوسط الحسابي) للنقطتين

جد نقطة المنتصف بين النقطتين

E(1,-4) , W(-5,8)



الرسم البياني

في هذا القسم ستتعلم :

- رسم المعادلات عن طريق تحديد النقاط
- رسم المعادلات عن طريق استخدام ادوات الرسم
- ايجاد تقاطعات المحورين

$x, \ y$

- رسم الدوائر

الرسم البياني

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4

ارسم معادلة بيانيًا من خلال رسم النقاط :

أنشئ جدولاً يحتوي على صفين أو عمودين يحملان اسمي x وy .

املأ قيم x بما في ذلك الأرقام الموجبة والسالبة .

استبدل كل قيمة x في المعادلة لحساب قيمة y المقابلة .

ارسم الأزواج المرتبة من الجدول .

قم بتوصيل النقاط بخط أو منحنى .

مثال : ارسم

$Y=2x-4$

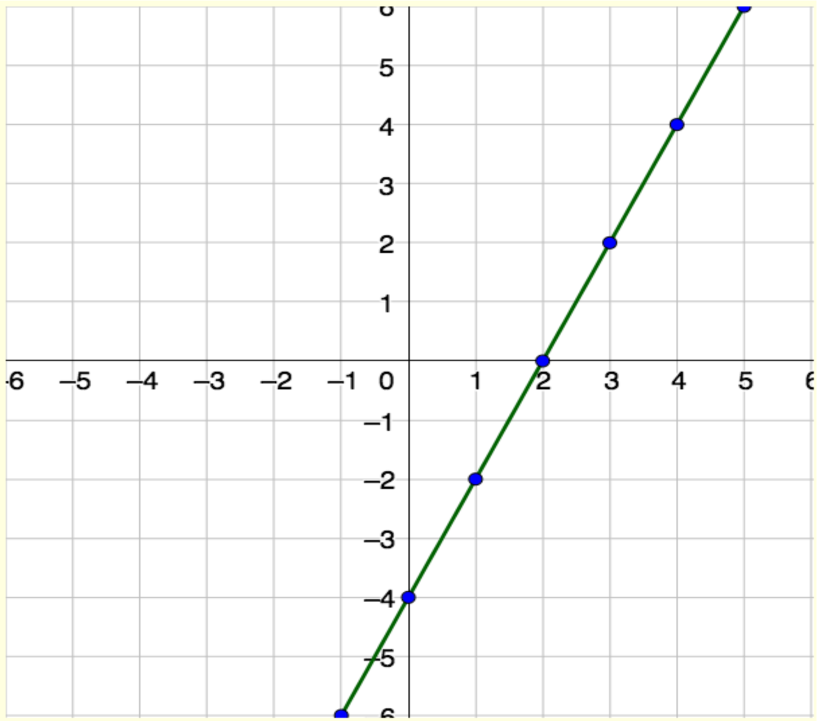


Figure 2: Graph of $y = 2x - 4$

الرسم البياني

إيجاد نقاط التقاطع بين المحورين x وy

نقطة التقاطع مع المحور :

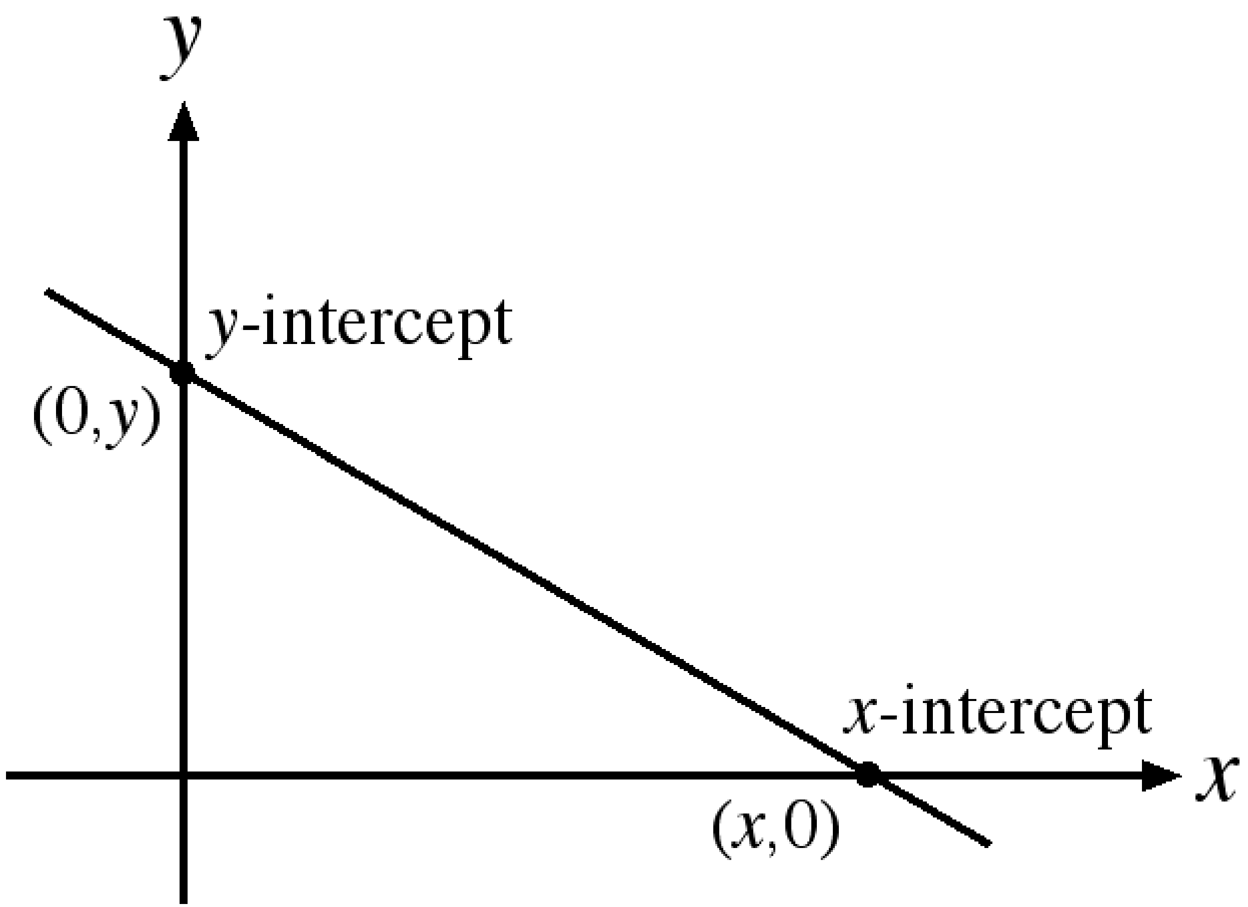
النقطة التي يتقاطع عندها الرسم البياني مع المحور x

استبدل $0 = y$ وحل لقيمة x .

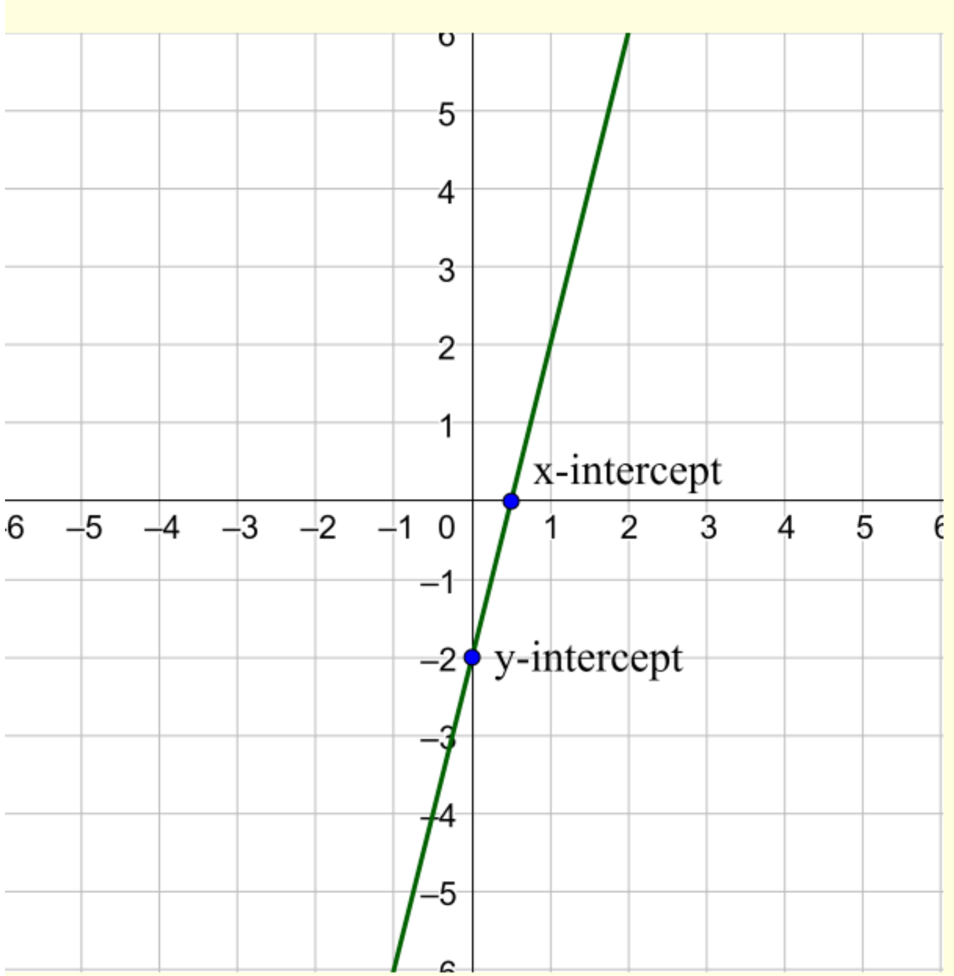
نقطة التقاطع مع المحور y:

النقطة التي يتقاطع عندها الرسم البياني مع المحور y .

استبدل $0 = x$ وحل لقيمة y .



الرسم البياني



أوجد (أ) نقطة التقاطع مع المحور x و(ب) نقطة التقاطع مع المحور y لـ $y = 4x - 2$.

لإيجاد نقطة قطع المحور x، استبدل $y = 0$ وحل لمعادلة x.

Y=4x-2

0=4x-2

X=1/2

لإيجاد نقطة التقاطع مع المحور y، استبدل $x = 0$ وحل لمعادلة y.

Y=0-2

Y=-2

الرسم البياني

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

حيث (h, k) هو المركز وr هو نصف القطر.

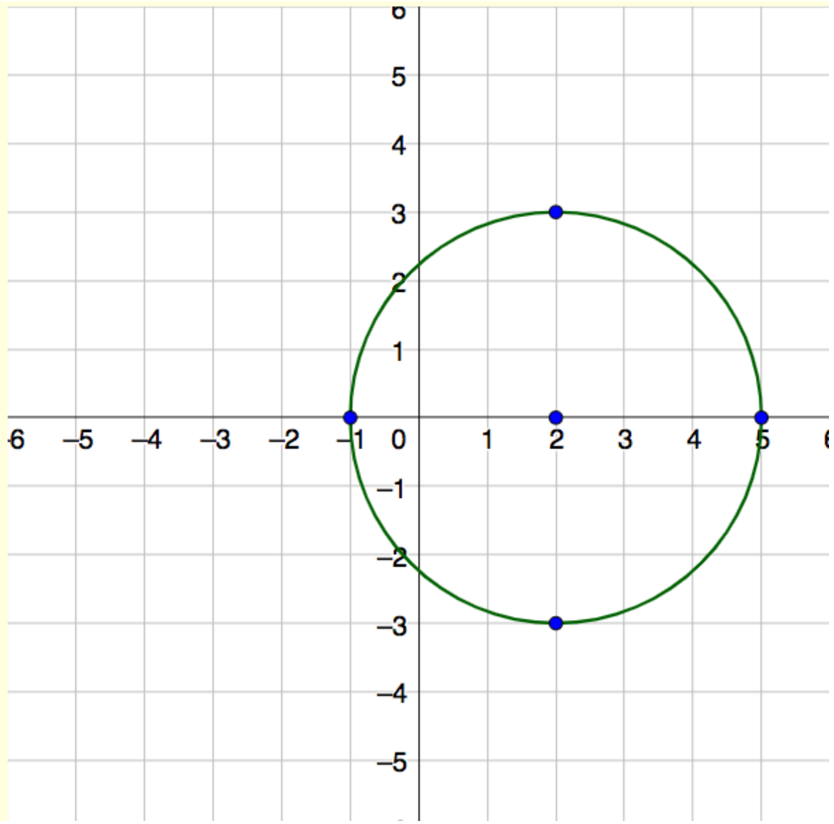
ارسم دائرة

ارسم المركز.

انقل مسافة نصف القطر من المركز إلى اليمين واليسار والأعلى والأسفل.

ارسم دائرة تمر عبر النقاط الأربع.

الرسم البياني



الرسم البياني

$(x-2)^2+y^2=9$

الحل

قارن

$(x-2)^2+y^2=9$

مع

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

لتجد أن $h = 2$، $k = 0$ لأن

$(y-0)^2=y^2$.

كذلك، $r^2=9$، لذا $r = 3$.

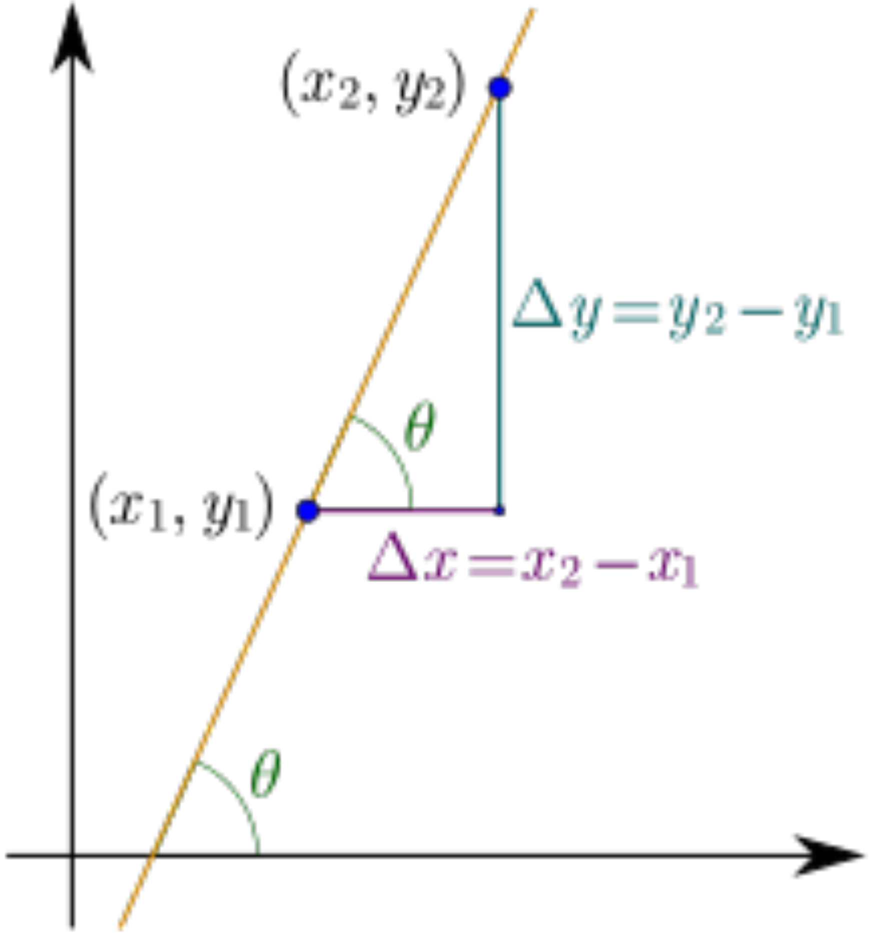
وبالتالي فإن المركز هو $(2, 0)$ ونصف القطر هو 3 . ارسم المركز ثم حرك مسافة نصف القطر في كل اتجاه.

المعادلات الخطية بمتغيرين

في هذا القسم، سوف تقوم بما يلي :

حساب وتفسير الميل .
كتابة المعادلات الخطية .
رسم الدوال الخطية بيانياً .

المعادلات الخطية بمتغيرين



اكتب دالة خطية

أوجد الميل، m

أوجد نقطة على الخط، (x_1, y_1).

أعوّض الميل والنقطة في صيغة نقطة–ميل

، $y - y_1 = m(x - x_1)$.

أحل y لوضعها في صيغة ميل–مقطع.

أو

أوجد الميل، م.

أوجد نقطة قطع y، b.

أعوّض الميل والنقطة قطع y في صيغة ميل–مقطع، $y = mx + b$

.

المعادلات الخطية بمتغيرين

مثال : أوجد ميل الخط الذي يمر عبر (2-، 1) و(6، 3) . هل هذه الدالة صاعدة أم هابطة؟

الحل : استبدل النقاط في صيغة الميل.

لا يهم الترتيب الذي يتم استخدام النقاط به طالما أن إحداثي y الأول المستخدم يتوافق مع إحداثي x الأول المستخدم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{6 - (-2)}{3 - 1}$$

$$m = \frac{8}{2}$$

$$m = 4$$

الدالة صاعدة لان قيمة الميل اكبر من صفر.

المعادلات الخطية بمتغيرين

مثال : اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (-1، 2) وميله 2 . اكتب الإِجابة في صيغة الميل والقاطع .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 2(x - 2)$$

$$y + 1 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 5$$

الحل :الميل هو 2، لذا فإِن $m = 2$. النقطة (x_1، y_1) هي (-1، 2) . استبدل تلك القيم في صيغة النقطة والميل للخط المستقيم .

المعادلات الخطية بمتغيرين

الخطوط المتوازية والمتعامدة

يكون الخطان متوازيين إذا لم يتقاطعا . ويكون ميلا الخطين متساويين.

يكون الخطان $y = m1x + b1$ و $y = m2x + b2$ متوازيين إذا كان

$m1 = m2$.

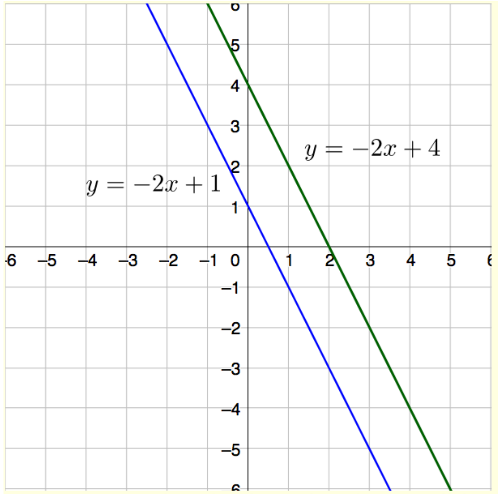


Figure 7: y = −2x + 4 and y = −2x + 1 are parallel.

يكون الخطان متعامدين إذا تقاطعا بزاوية قائمة .

يكون الخطان $y = m1x + b1$ و $y = m2x + b2$ متعامدين إذا كان

$m1 \cdot m2 = -1$، وبالتالي فإن

$m2 = -1 / m1$

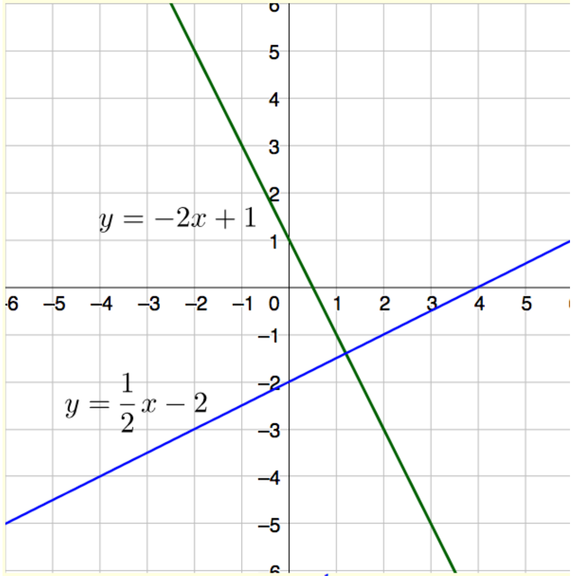
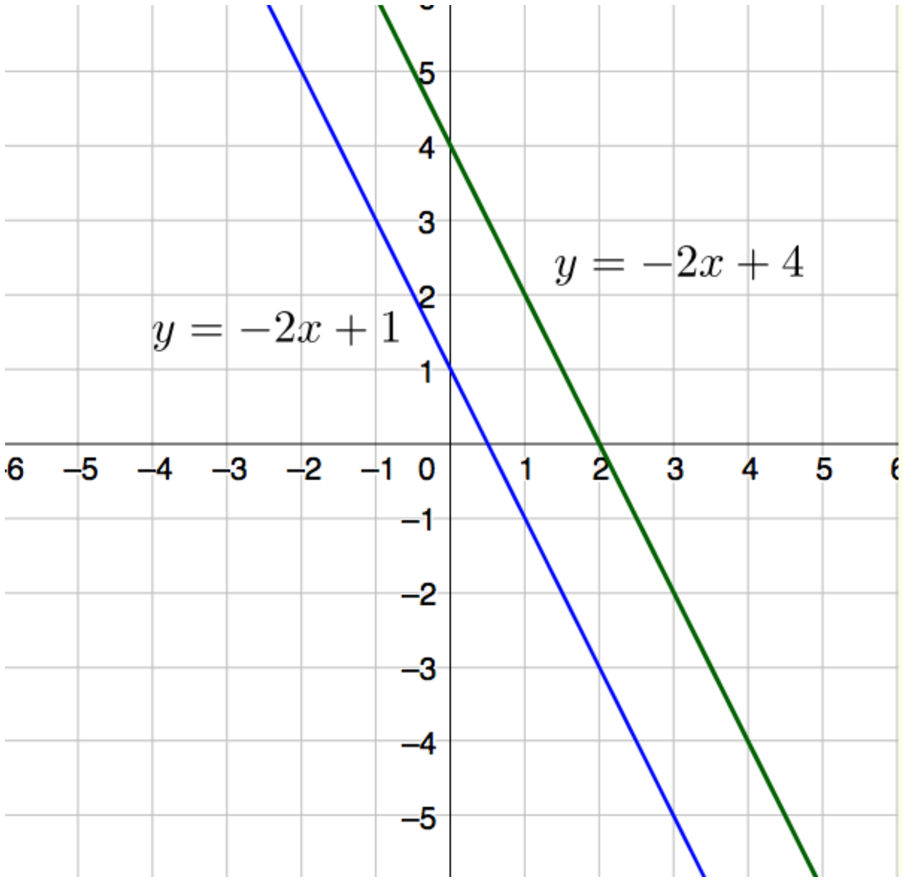


Figure 8: y = −2x + 1 and y = $\frac{1}{2}$x − 2 are perpendicular

المعادلات الخطية بمتغيرين

مثال : أوجد معادلة الخط الموازي لـ $y = -2x + 4$ الذي يمر عبر النقطة (2 ,-3).



الحل :أولاً، أوجد الميل. يطلب السؤال إيجاد خط موازٍ للخط المعطى، وميلا الخطين المتوازيين متماثلان. ميل الخط المعطى هو 2-، لذا فإن ميل الخط المطلوب هو أيضاً $m = -2$.

النقطة (x_1, y_1) هي (2 ,-3). استبدل تلك القيم في صيغة نقطة–ميل الخط.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

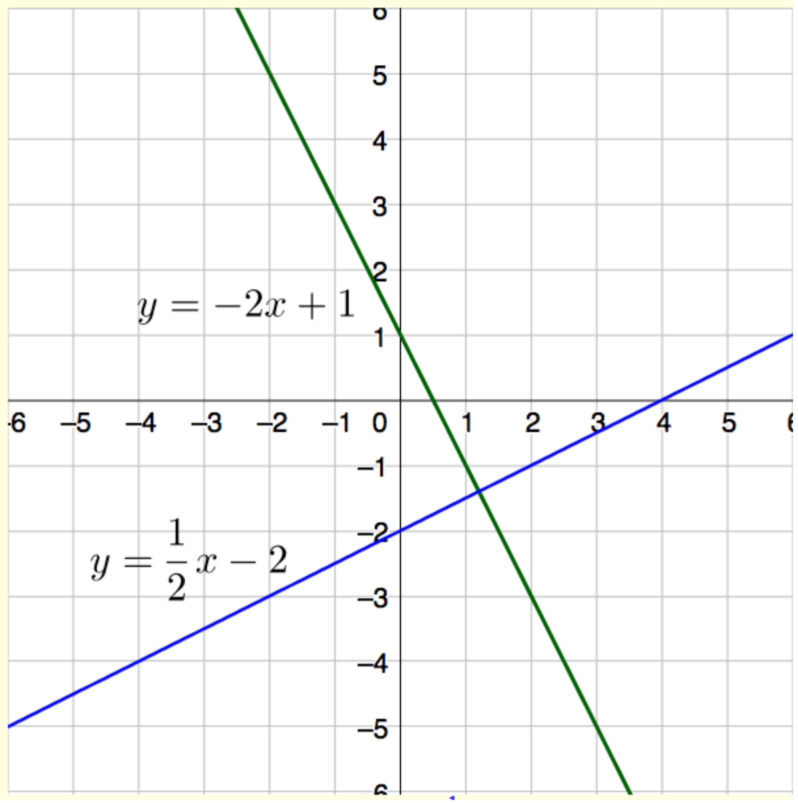
$$y - (-3) = -2(x - 2)$$

$$y + 3 = -2x + 4$$

$$y = -2x + 1$$

المعادلات الخطية بمتغيرين

مثال : أولاً، أوجد الميل. يطلب السؤال إيجاد خط عمودي على الخط $y = -2x + 1$، وميل الخطوط العمودية هو المقلوب السالب. ميل الخط المعطى هو -2، لذا فإن ميل الخط المطلوب هو $m=1/2$



النقطة ($x1, y1$) هي (2,-1) . استبدل تلك النقاط في صيغة نقطة–ميل الخط.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

الاختبارات

- ١ أجرى جان وفرانسوا تجربة وحصلا على نقاط البيانات التالية. ارسم النقاط بيانيًا ووصف النمط.

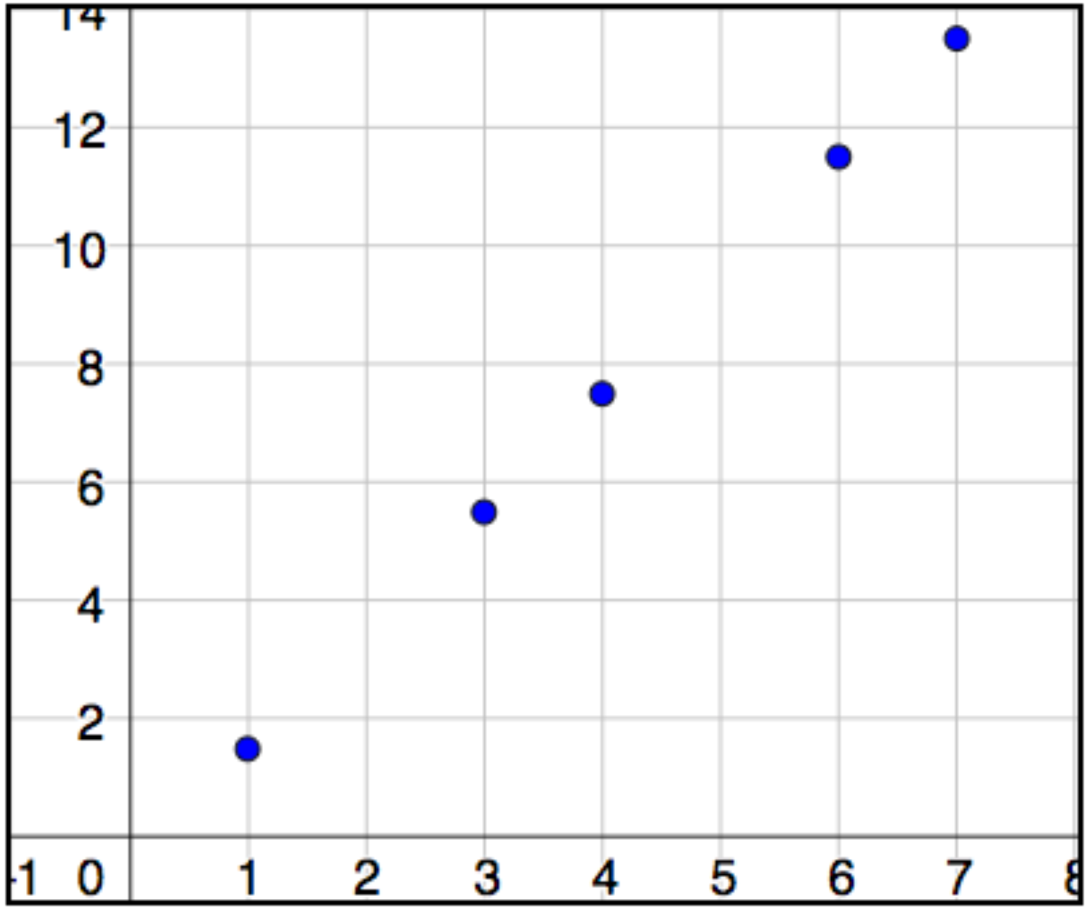
- (7, 13.5)، (6, 11.5)، (4, 7.5)، (3, 5.5)، (1, 1.5)
- بالنسبة للتمارين التالية، (أ) أوجد المركز و(ب) نصف القطر و(ج) ارسم الدائرة بيانياً.
- (x+2)^2+(y-1)^2=4

(x-3)^2+y^2=8

- أوجد المسافة بين (1، 2) و (−3، −1)
- قم برسم الرسم البياني $y = x^2$ عن طريق إنشاء جدول أولاً.

الاجوبة

جواب السؤال الاول :

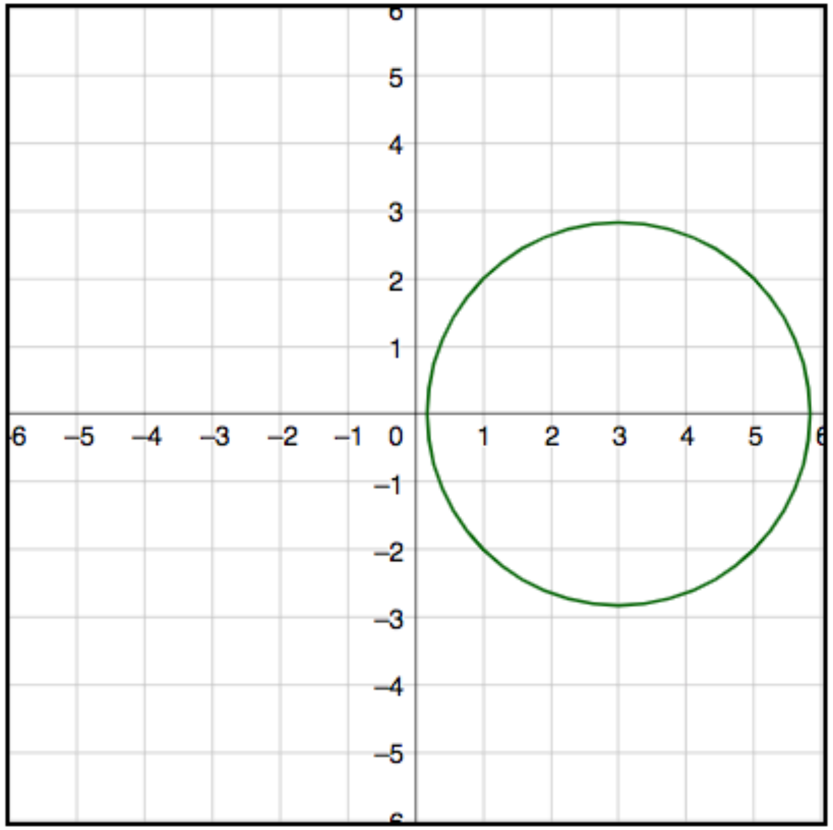


; a line

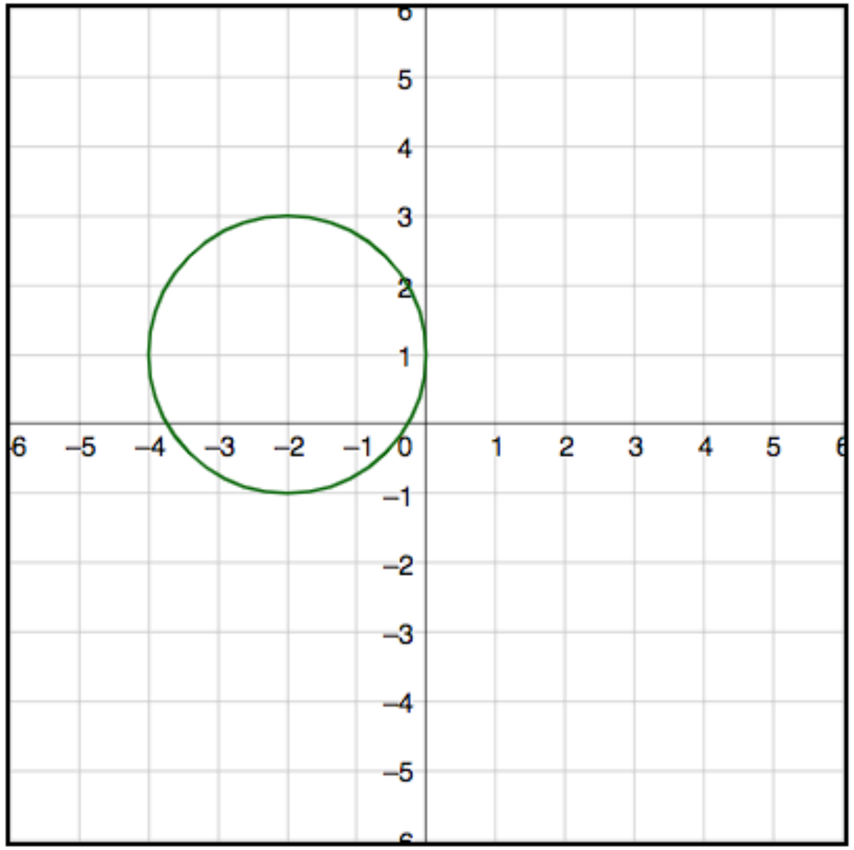
الأجوبة

- جواب السؤال الثاني

. $(3, 0);\ 2\sqrt{2};$

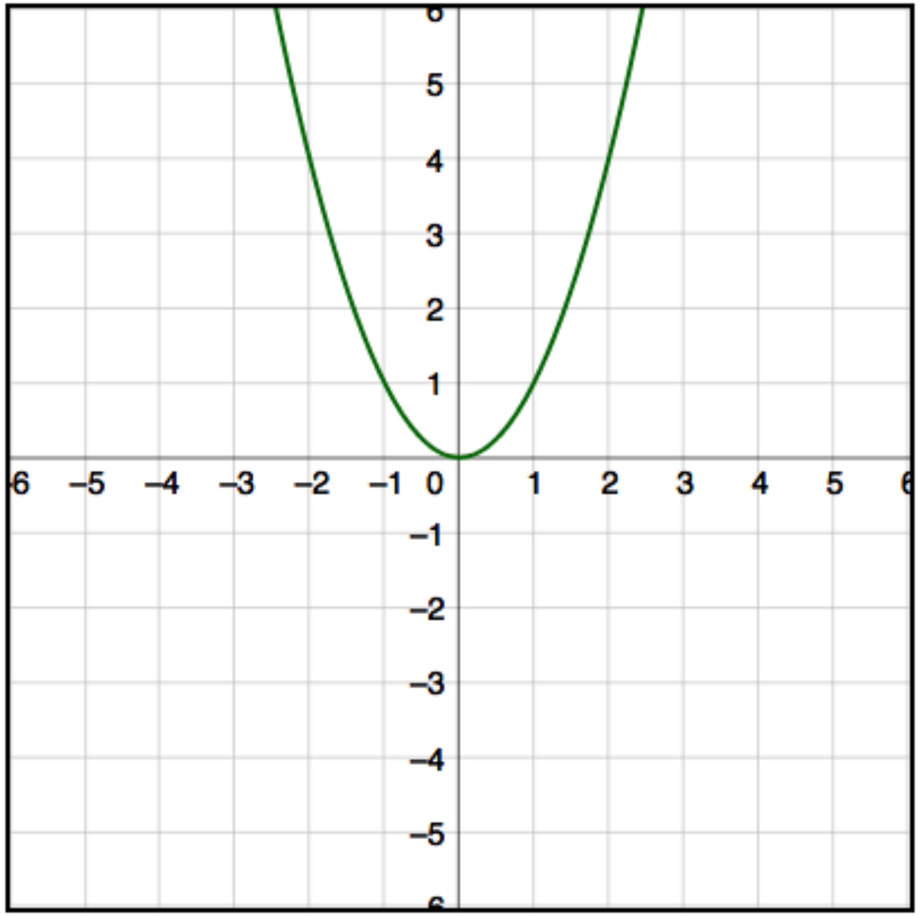


. $(-2, 1);\ 2;$



الأجوبة

- جواب السؤال الثالث هو 5
- جواب السؤال الرابع



الدوال و رموز الدالة

في هذا القسم، سوف تقوم بما يلي :

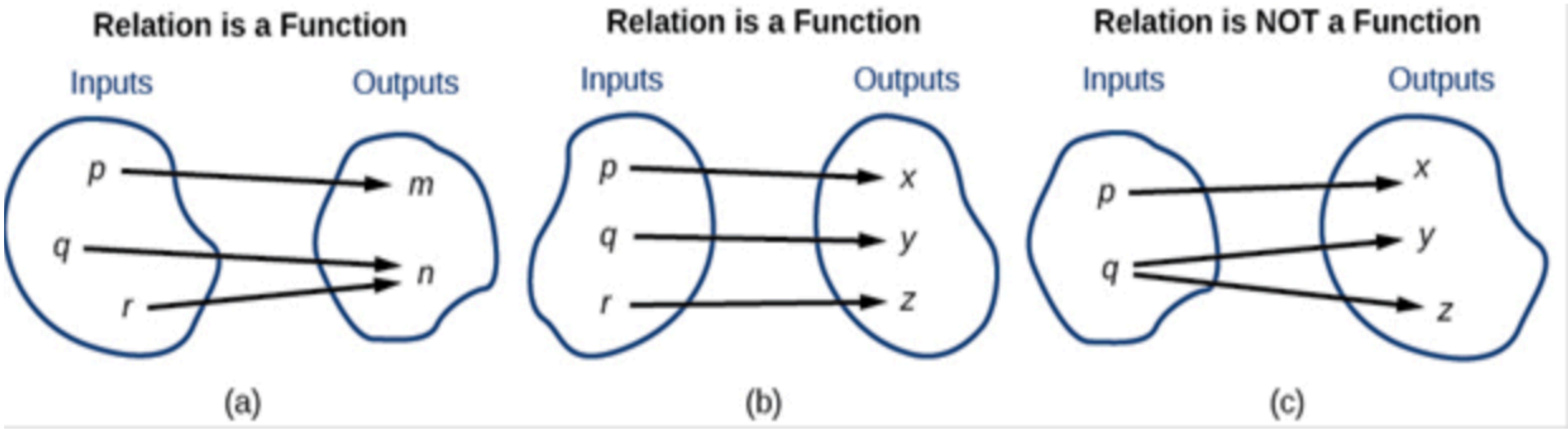
- تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة .
- إيجاد قيم الإدخال (المنطلق) والإخراج (المدى) للدالة .
- إيجاد مجال الدالة .
- تقييم الدوال المتقطعة .

الدوال و رموز الدالة

العلاقات : القاعدة التي تربط بين كميتين.

الدوال : هي علاقة حيث يتم إقران كل قيمة إدخال ممكنة بقيمة إخراج واحدة فقط.

- حيث ان الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B هي علاقة تعين كل عنصر x في المجموعة A إلى عنصر واحد فقط في المجموعة B
- المجموعة A هي المنطلق .
- المجموعة B هي المدى .

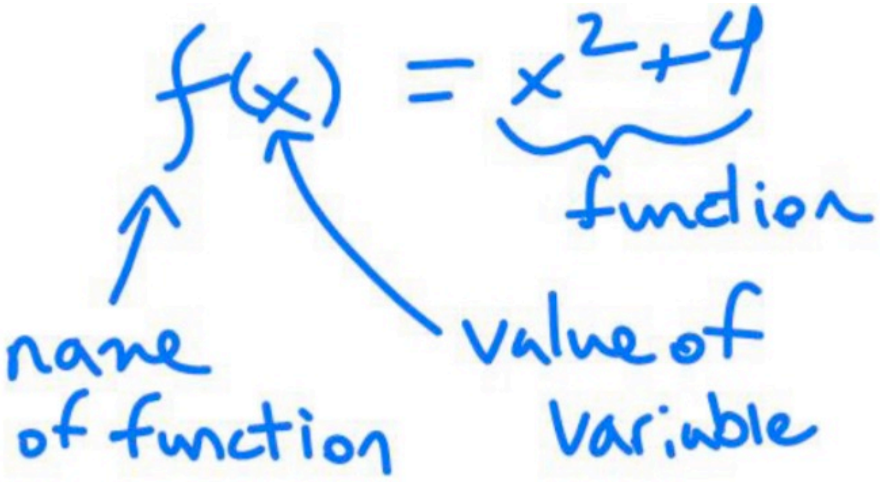


الدوال و رموز الدالة

رموز الدالة :

يحدد الرمز f(x)

دالة تسمى f .



يُقرأ هذا على النحو التالي "y هي دالة لـ x" .

يمثل الحرف x قيمة المنطلق (الادخال) أو المتغير المستقل .

يحل محل الحرف y الحرف

f(x)

ويمثل قيمة الإخراج (المدى) أو المتغير التابع .

الدوال و رموز الدالة

مثال : إذا كانت الدالة $f(x) = -2x + 3$، أوجد قيمة $f(7)$

$f(7) = -11$

إذا كانت $f(x) = x2 - 2x + 1$، فقم بتقييم

$f(2)$

$f(a)$

$f(a+h)$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$f(2) = 2^2 - 2(2) + 1$$
$$f(2) = 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$f(a) = a^2 - 2a + 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$f(a+h) = (a+h)^2 - 2(a+h) + 1$$
$$f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h + 1$$

الدوال و رموز الدالة

إيجاد مجال الدالة المكتوبة كمعادلة :

تحديد قيم المجال (المنطلق)، عادةً X .

تحديد أي قيود على الإدخال واستبعاد تلك القيم من المجال .

كتابة المجال في شكل فترة، إذا كان ذلك ممكنًا .

يتم إعطاء شكل الفترة للمجموعة بواسطة رقمين وأقواس : ( ) تشير إلى عدم المساواة و [ ] تشير إلى المساواة .أمثلة على الفترات هي

$2 \leq x < 4$ becomes $[2, 4)$

$x < -1$ becomes $(-\infty, -1)$

$x \geq 5$ becomes $[5, \infty)$

الدوال و رموز الدالة

أوجد مجال الدالة $h(x) = \sqrt{x+6}.$

المتغير المدخل هو x . عندما يكون هناك جذر تربيعي في المعادلة، يتم استبعاد جميع الأرقام السالبة من الجذر لأن الجذور الزوجية للأرقام السالبة تنتج نتائج غير حقيقية .

ضع الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وحل لـ x .

$$x + 6 \geq 0$$

$$x \geq -6$$

المجال هو جميع الأرقام الأكبر من أو تساوي -6 .

x ≥ -6 becomes [-6, ∞)

الدوال و رموز الدالة

أوجد مجال الدالة

$$g(x)=(x+2)/(x-3)$$

الحل

قيمة الإدخال هي x. تكون الدالة غير معرفة عند قسمتها على 0. أوجد القيم المستبعدة لـ x عن طريق وضع المقام على 0 وحل x.

$$x-3=0$$

$$x=3$$

الآن، استبعد تلك القيمة، 3، من المجال. المجال هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء 3. يمكن كتابة هذا على هيئة $x \neq 3$. يمكن أيضًا كتابة هذا على هيئة $x < 3$ أو $x > 3$. يمكن دمج هذه باستخدام رمز الاتحاد، U.

في شكل فاصل، مجال g هو $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

الدوال و رموز الدالة

الدالة المتفرعة (المتقطعة) :

تتكون الدالة المتقطعة من عدة دوال على فترات زمنية محددة .

$$f(x) = \begin{cases} \text{formula 1, if domain 1} \\ \text{formula 2, if domain 2} \\ \text{formula 3, if domain 3} \end{cases}$$

مثال : تستخدم شركة الهاتف المحمول الدالة أدناه لحساب التكلفة، C، بالدولار لكل جيجا بايت من البيانات . أوجد تكلفة استخدام 3.5 جيجابايت من البيانات وتكلفة استخدام 8 جيجابايت من البيانات .

$$C(g) = \begin{cases} 50, \text{if } g \le 5 \\ 50 + 10(g-5), \text{if } g > 5 \end{cases}$$

الحل : لإيجاد تكلفة 3.5 جيجابايت من البيانات، في هذه الحالة، $3.5 \le 5$ ، لذا فهي تقع ضمن مجال المعادلة العليا . استبدل 3.5 في المعادلة الأولى للحصول على الإجابة . بالطبع، المعادلة العليا هي الثابت 50 فقط، لذا فإن النتيجة هي 50 .

لإيجاد تكلفة 8 غيغابايت من البيانات، في هذه الحالة، 8 > 5 ، لذا فهي تندرج تحت مجال المعادلة السفلية . استبدل الرقم 8 في المعادلة السفلية للحصول على الإجابة .

$$C(g) = 50 + 10(g-5)$$

$$C(8) = 50 + 10(8-5)$$

$$C(8) = 80$$

رسم الدوال

في هذا القسم، سوف:

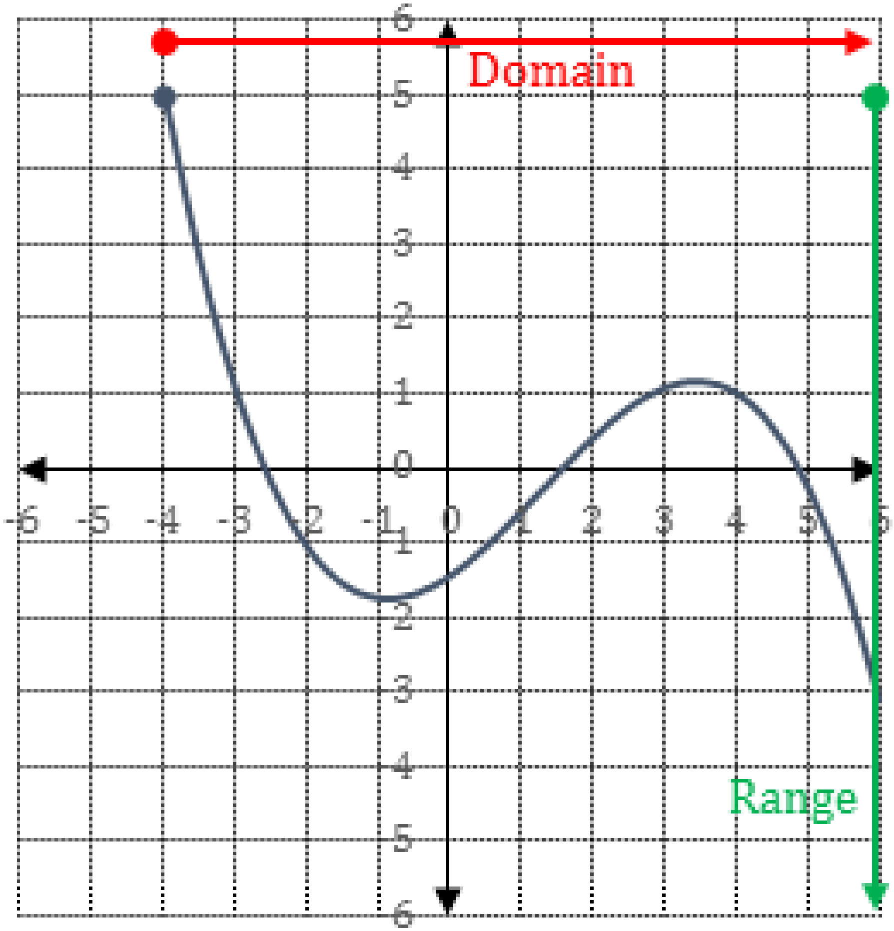
تجد المجال والنطاق من الرسوم البيانية.
تحدد ما إذا كانت الرسوم البيانية تمثل الدوال.
تجد أصفار الدوال.
تجد متوسط معدل تغير الدالة.
تحدد متى يكون الرسم البياني متزايداً أو متناقصاً أو ثابتاً.

رسم الدوال

إيجاد المجال والمدى من الرسم البياني

المجال : جزء من المحور السيني يغطيه الرسم البياني

المدى : جزء من المحور الصادي يغطيه الرسم البياني

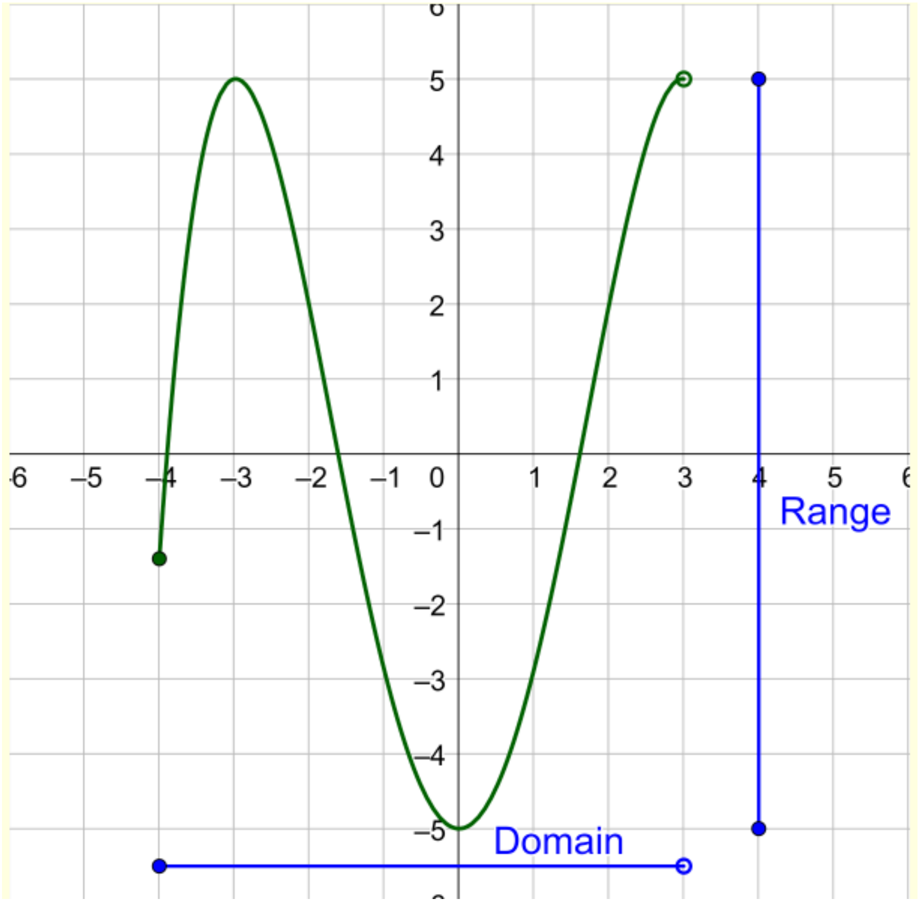


رسم الدوال

أوجد مجال ومدى الدالة في الرسم البياني أدناه.

المدى الأفقي للرسم البياني هو من $x = -4$ إلى $x = 3$. ولأن الطرف الأيمن للدالة عبارة عن نقطة مفتوحة، فإنها لا تتضمن النقطة عند $x = 3$. لذا فإن المجال هو $[-4,3)$.

المدى الرأسي للرسم البياني هو من $y=-5$ إلى $y = 5$. ولأن الذروة اليسرى للرسم البياني تتضمن في الواقع $y = 5$، فإنها متضمنة في النطاق حتى وإن لم تكن متضمنة في النقطة اليمنى. النطاق هو $[-5,5]$.



رسم الدوال

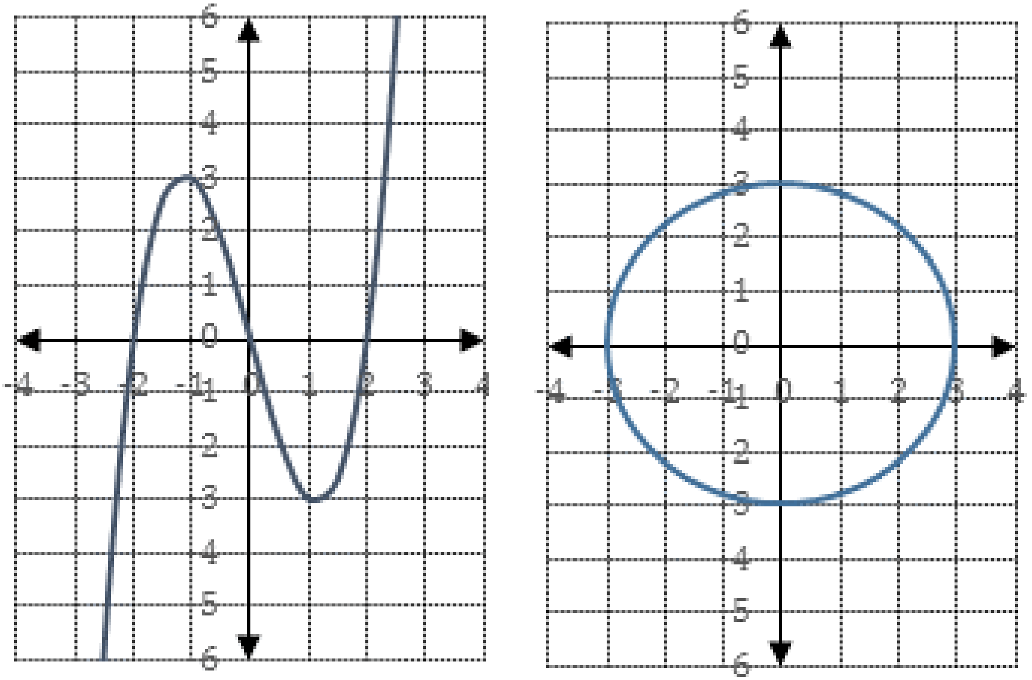
اختبار الخط العمودي

انظر إلى الرسم البياني لترى ما إذا كان أي خط عمودي يتقاطع مع المنحنى أكثر من مرة.

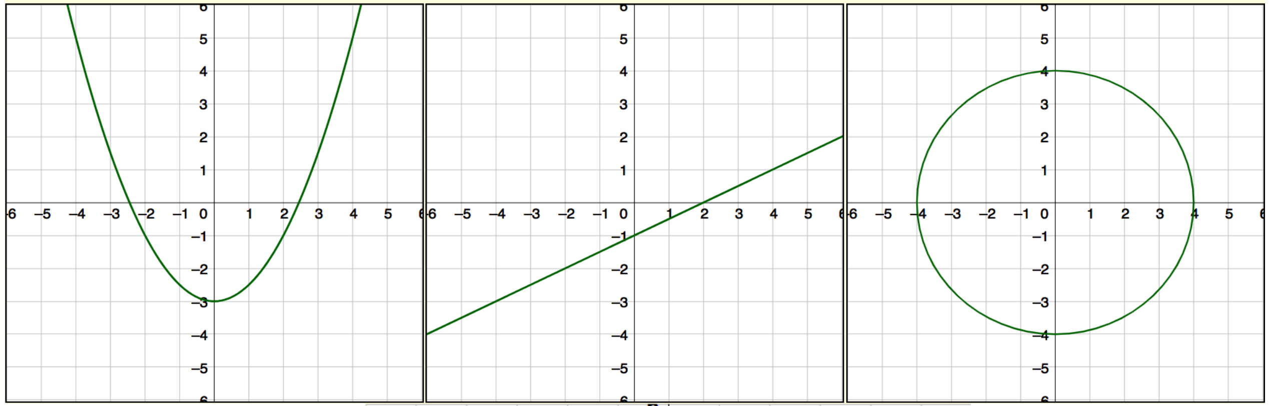
إذا كان هناك مثل هذا الخط، فإن الرسم البياني لا يمثل دالة.

وإلا، فإن الرسم البياني يمثل دالة.

يمثل الرسم البياني دالة إذا لم يتمكن أي خط رأسي من لمس نقطتين على الرسم البياني

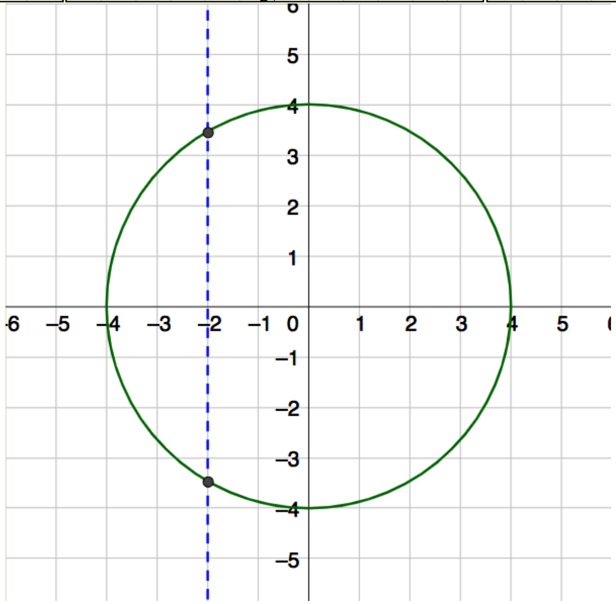


رسم الدوال



أي من الرسوم البيانية يمثل دالة؟

يقول اختبار الخط الرأسي أنه إذا قطع أي خط رأسي رسماً بيانياً أكثر من مرة، فإن الرسم البياني لا يمثل دالة.



الرسمان البيانيان الأوليان عبارة عن دوال لأنه لا يمكن لأي خط رأسي أن يقطع الرسم البياني أكثر من مرة. الدائرة ليست دالة لأن الخط الرأسي يمكن أن يقطعها مرتين.

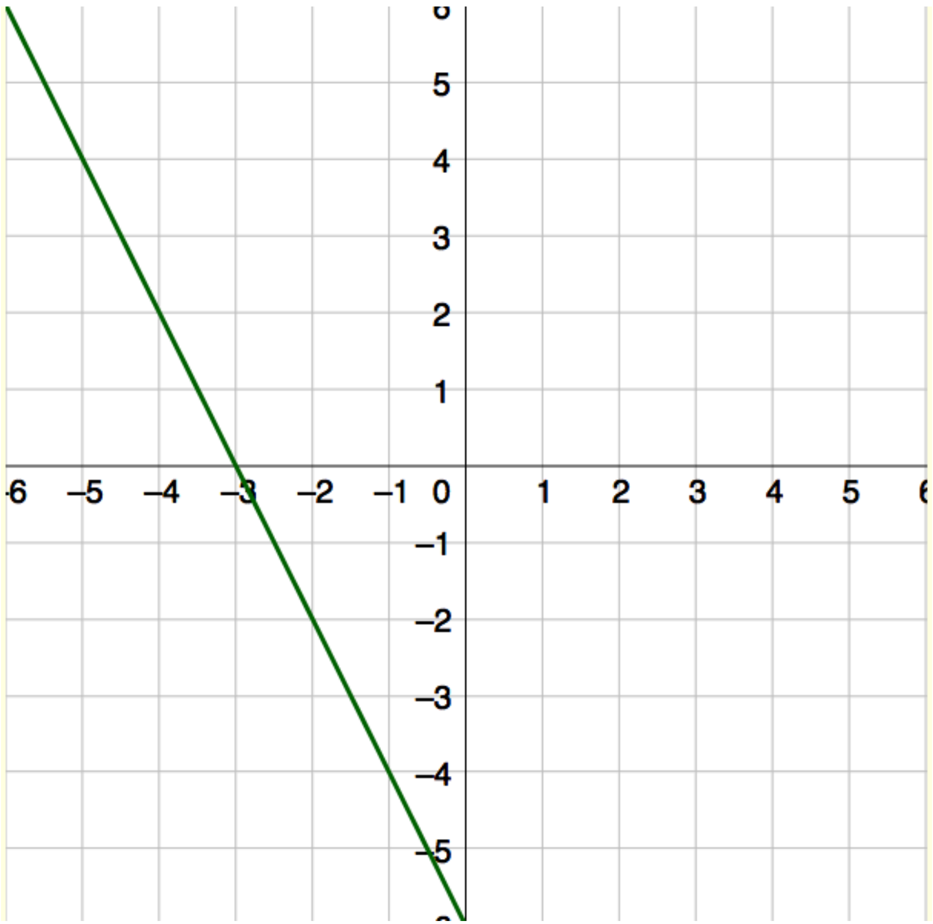
رسم الدوال

حلول (اصفار) الدالة

هي قيم x التي يكون $f(x) = 0$ حل قيمة x .

أوجد أصفار الدوال التالية . لاحظ أن الرسم البياني في الشكل له

نقطة قطع x



(-3,0)

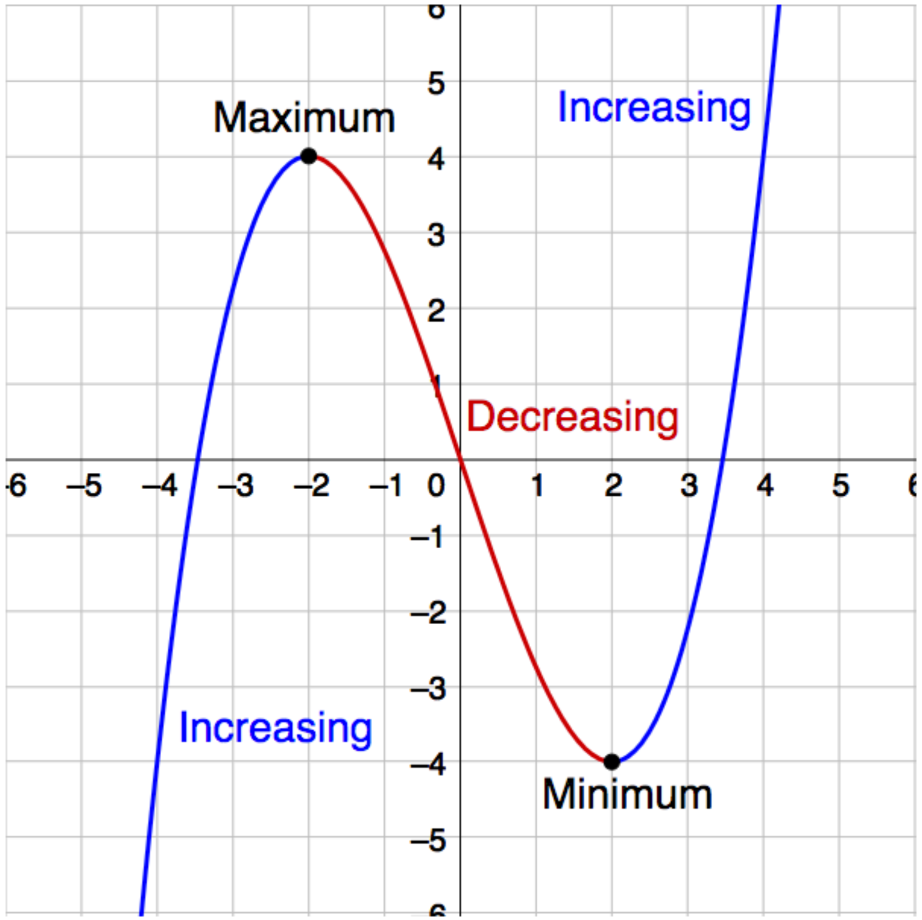
$$f(x) = -2x - 6$$

0= - 2x-6

6= - 2x

X= - 3

رسم الدوال



متزايد (يرتفع من اليسار إلى اليمين)

متناقص (يهبط من اليسار إلى اليمين)

ثابت (أفقي)

الحد الأدنى النسبي (أدنى نقطة في المساحة)

الحد الأقصى النسبي (أعلى نقطة في المساحة)

يتم وصف هذه المناطق بقيم X في تدوين الفترات .

القيم العظمى

القيمة المحلية العظمية هو أعلى نقطة في منطقة الرسم البياني ويحدث عندما يتغير الرسم البياني من التزايد إلى التناقص .

القيمة المحلية الصغرى هو أدنى نقطة في منطقة الرسم البياني ويحدث عندما يتغير الرسم البياني من التناقص إلى التزايد .

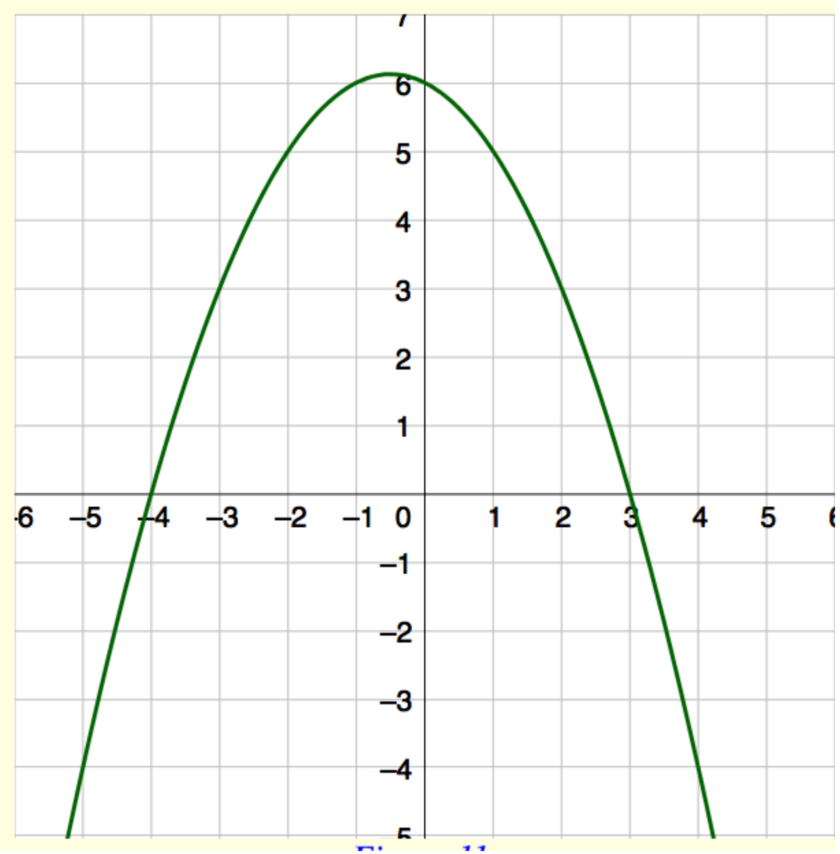
رسم الدوال

يصف معدل التغير كيفية تغير قيم المخرجات بالنسبة لقيم المدخلات.

معدل التغير المتوسط هو نفس الميل بين نقطتين.

مثال : أوجد متوسط معدل التغير على الفترات [-2, 4] للدالة في الرسم البياني.

الحل :ابدأ بإيجاد النقطتين حيث $x = -2$ و $x = 4$. وهما (5، -2) و(4، −4).



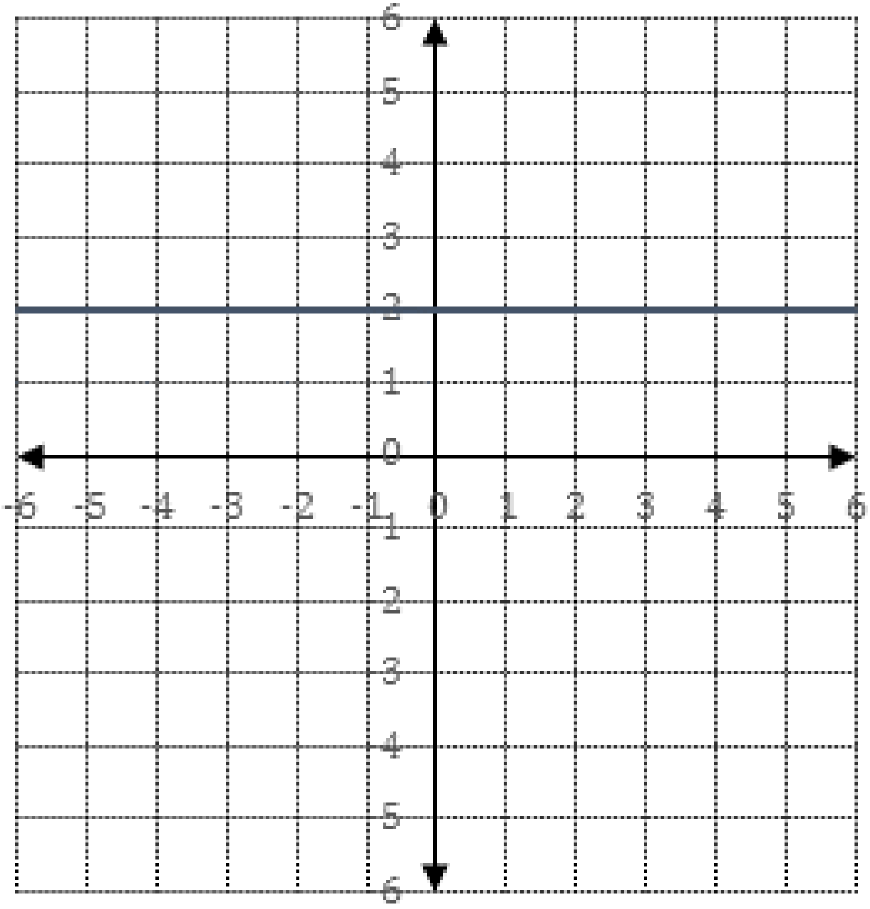
استبدل هاتين النقطتين في صيغة الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-4 - 5}{4 - (-2)}$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

رسم الدوال الاساسية



في هذا القسم، سوف تقوم بما يلي :

تحديد الرسوم البيانية للدوال الاساسية .

رسم الدوال المتقطعة .

الدالة الثابتة

$f(x) = c$،

المجال هو كل الأعداد الحقيقية .

المدى هو المجموعة $\{c\}$ التي تحتوي على هذا العنصر المفرد .

لا تتزايد ولا تتناقص .

متماثل على المحور y

رسم الدوال الاساسية

الدالة الثابتة

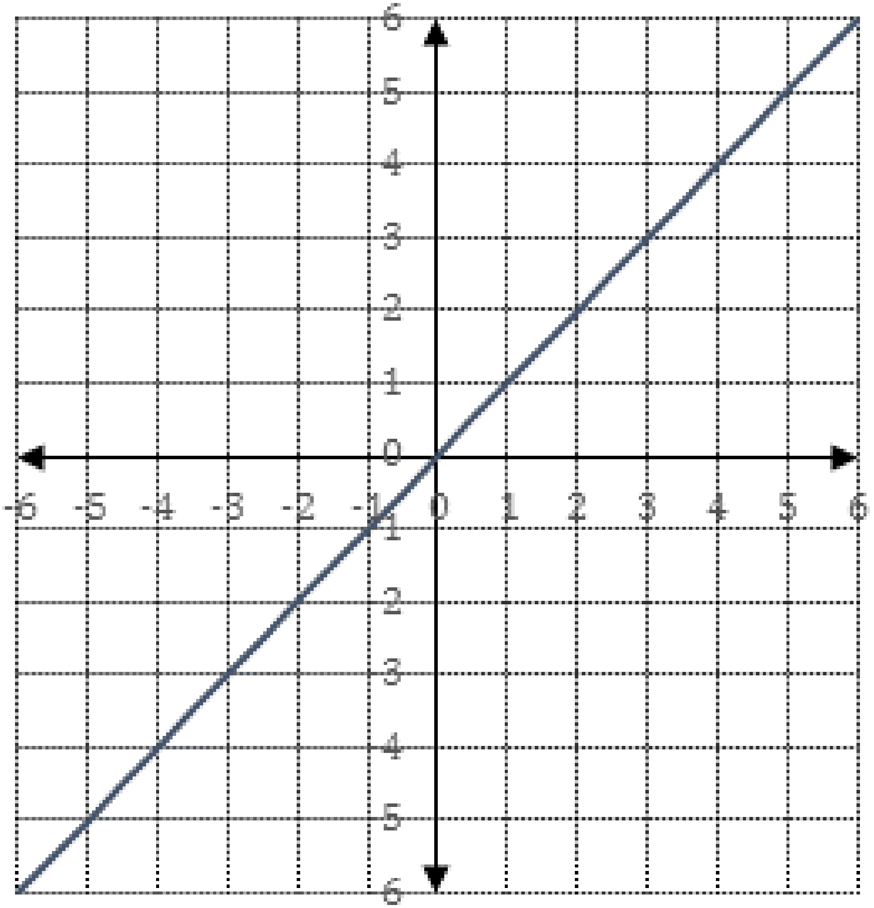
تحديد الدالة $f(x) = x$،

المجال هو كل الأعداد الحقيقية .

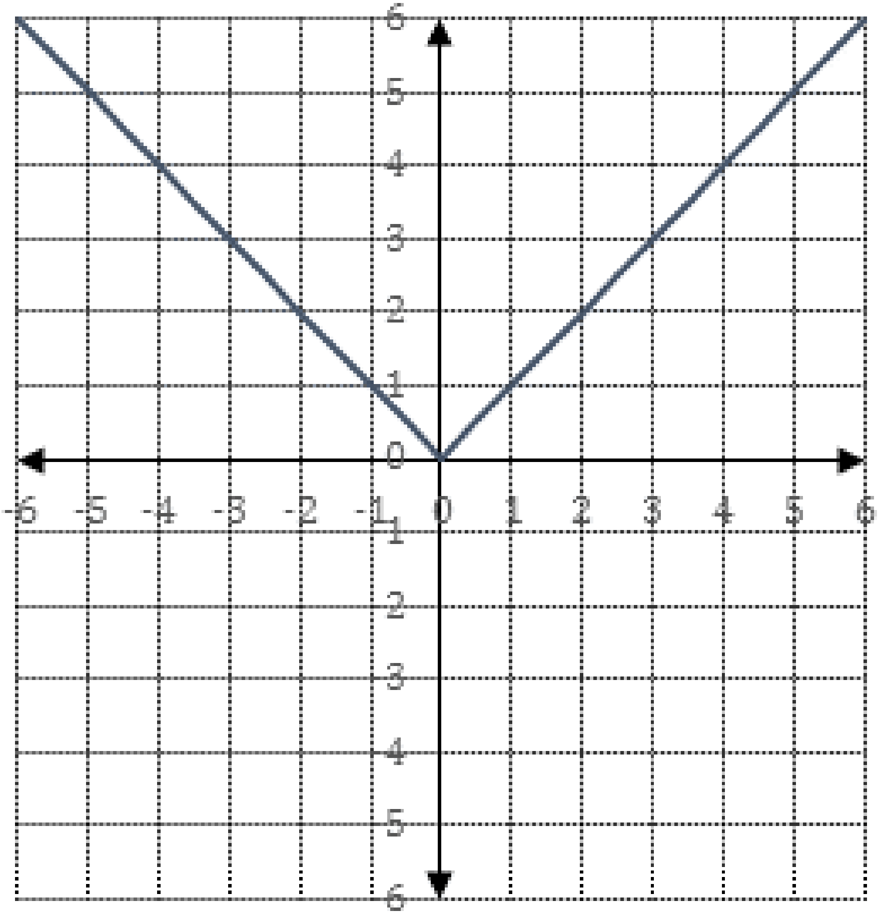
المدى هو كل الأعداد الحقيقية .

يتزايد من $(-\infty, \infty)$.

متماثل حول نقطة الأصل



رسم الدوال الاساسية



دالة القيمة المطلقة

$f(x) = |x|$

المجال هو كل الأعداد الحقيقية .

المدى هو $[0,\infty)$.

متناقص على

$(-\infty,0)$ ومتزايد على $(0,\infty)$.

متماثل على المحور y

رسم الدوال الاساسية

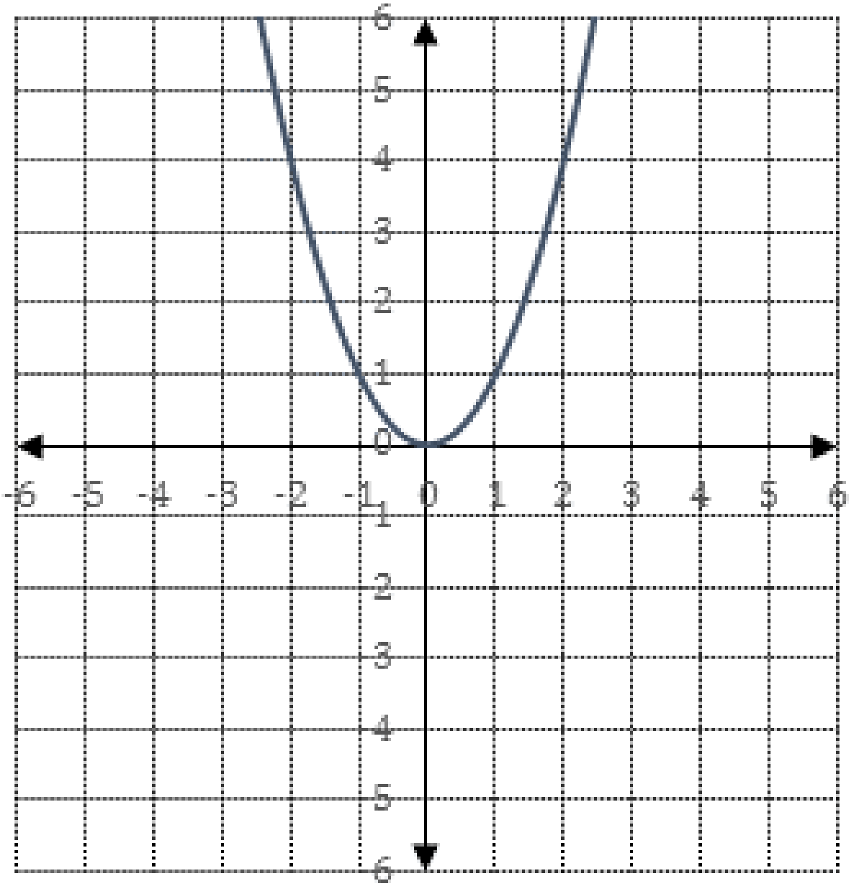
الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

المجال هو كل الأعداد الحقيقية .

المدى هو فقط الأعداد الحقيقية غير السالبة، $[0,\infty)$.

متناقصة على $(-\infty,0)$ ومتزايدة على $(0,\infty)$.

متماثلة على المحور y .



رسم الدوال الاساسية

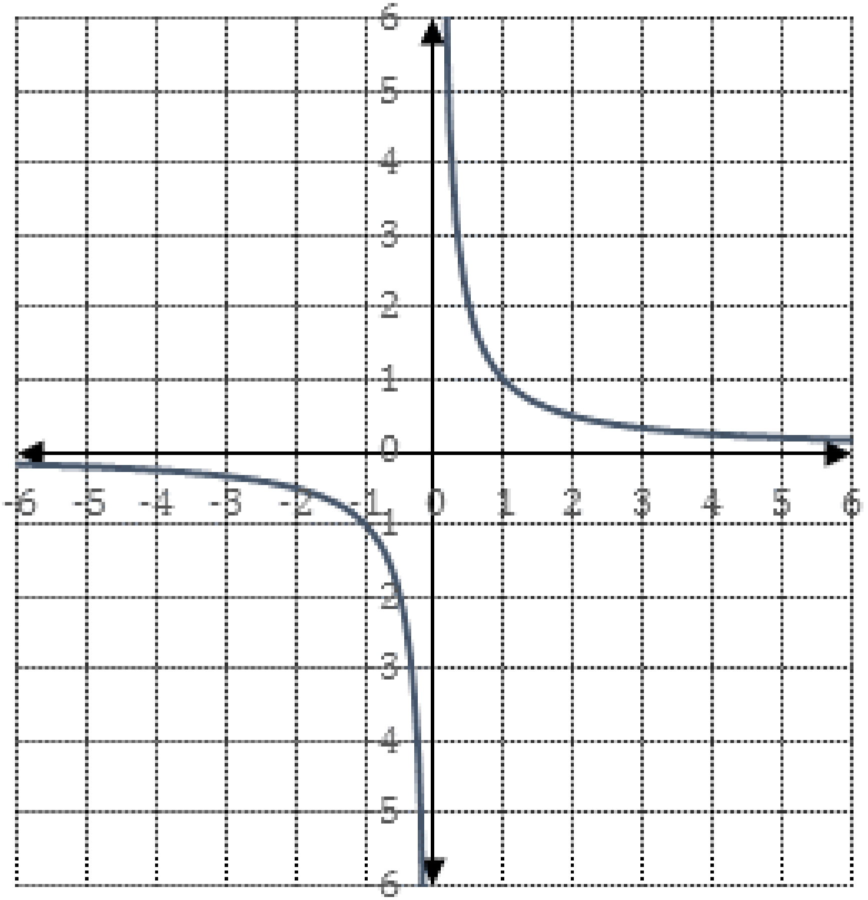
الدالة الكسرية $f(x)= 1/x$

المجال هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء 0، $\{x|x \neq 0\}$.

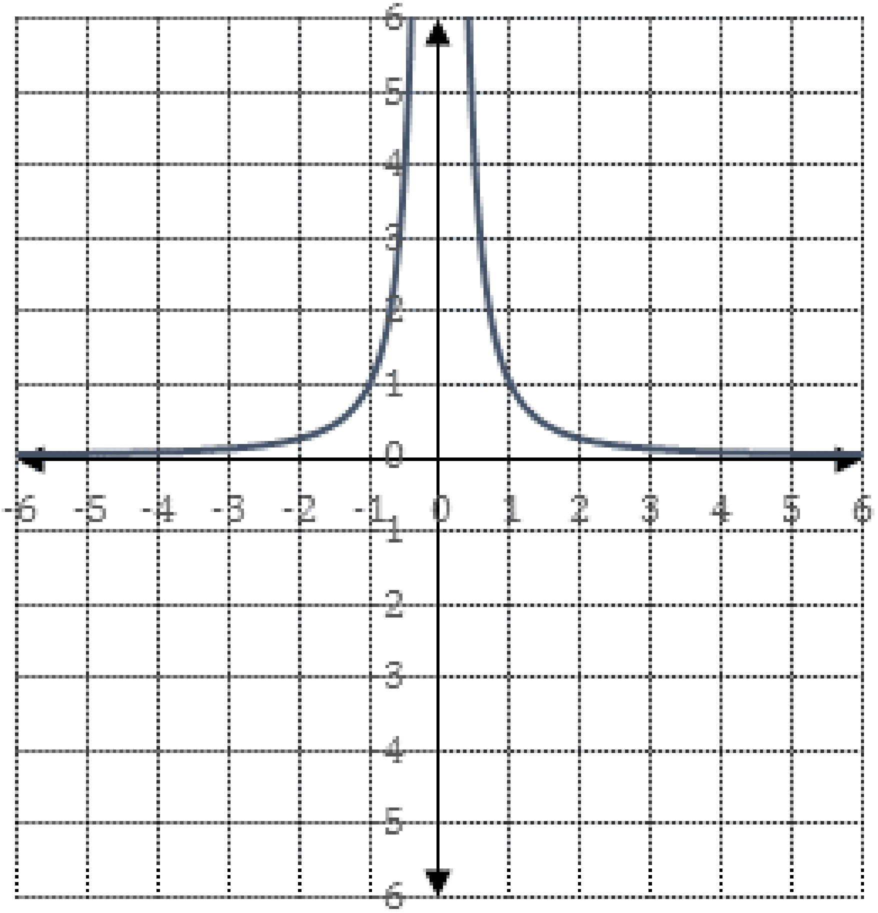
المدى هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء 0، $\{y|y \neq 0\}$.

متناقصة على $(\infty, 0)$ و$(0, -\infty)$.

متماثلة حول الأصل وعلى طول الخطين $y = x$ و$y = -x$.



رسم الدوال الاساسية



الدالة الكسرية التربيعية $f(x)= 1/x^2$

المجال هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء 0، $\{x|x \neq 0\}$.

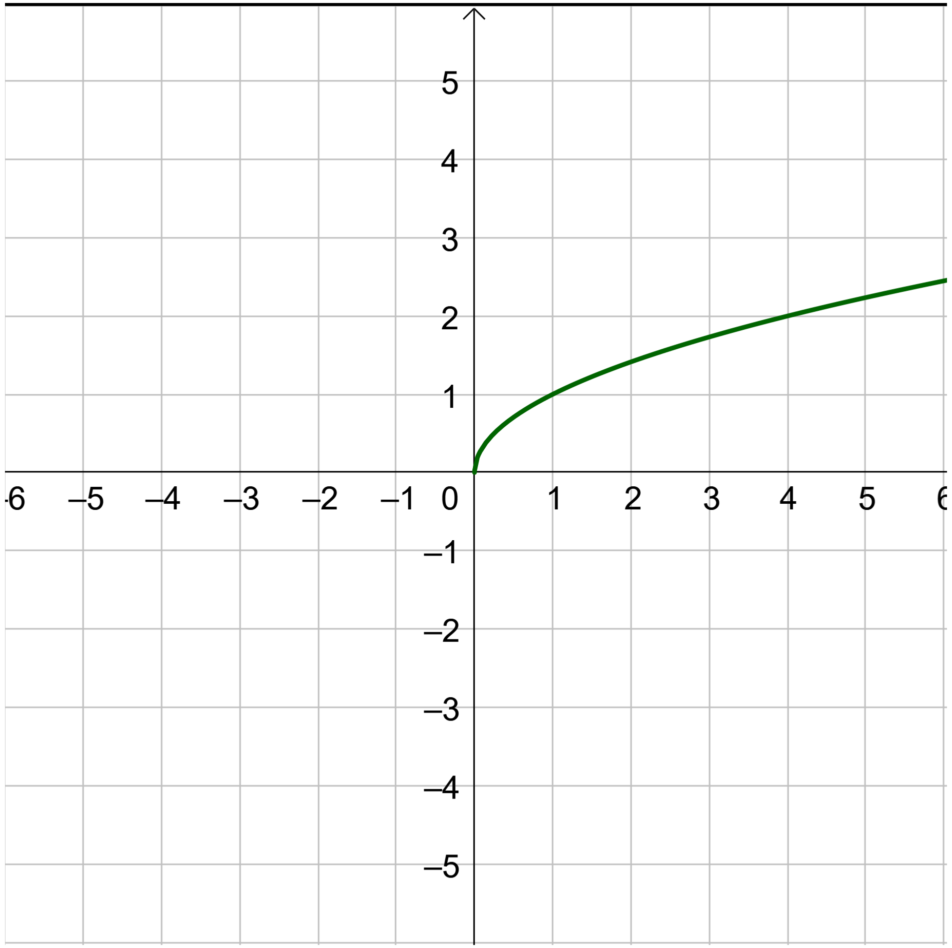
المدى هو فقط الأعداد الحقيقية الموجبة، $(0, \infty)$.

متزايدة على $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على $(0, \infty)$.

متماثلة على المحور y.

رسم الدوال الاساسية

دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$



المجال هو 0 أو أكبر،$[0 , \infty)$.

المدى هو 0 أو أكبر، $[0 , \infty)$.

متزايد على $(0 , \infty)$.

لا يوجد تماثل..

رسم الدوال الاساسية

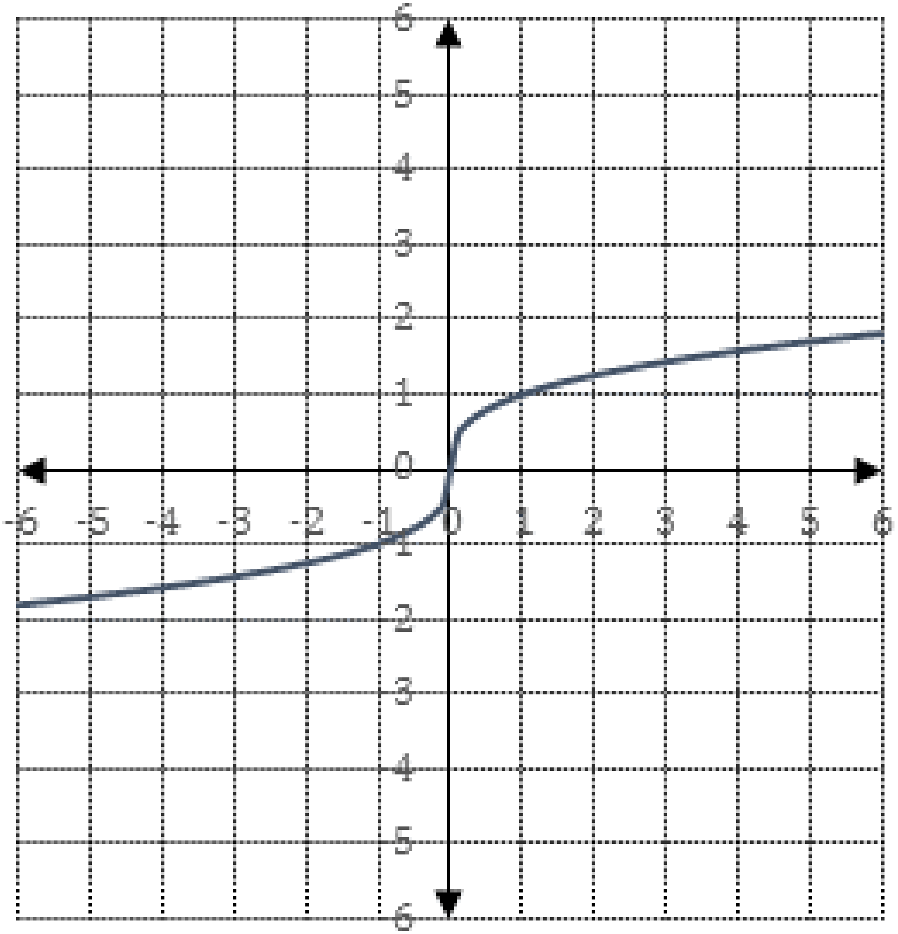
دالة الجذر التكعيبي $f(x) = \sqrt[3]{x}$

المجال هو كل الأعداد الحقيقية .

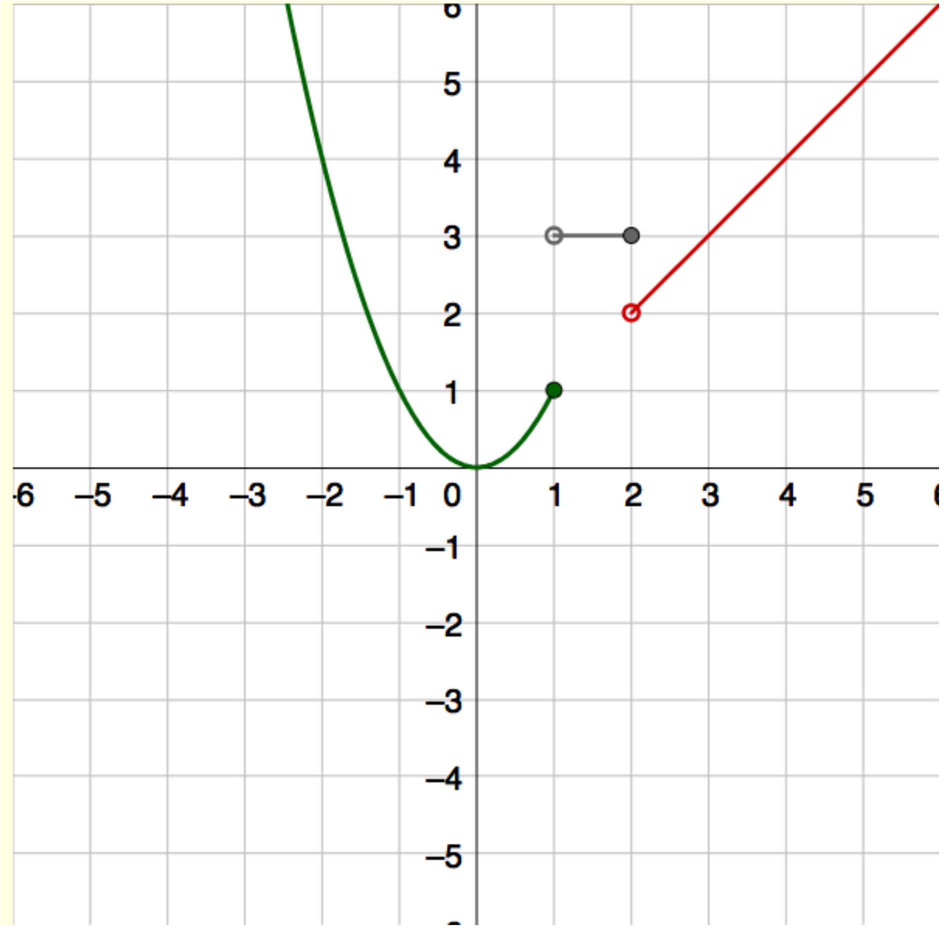
المدى هو كل الأعداد الحقيقية .

متزايد على $(\infty, -\infty)$.

متماثل حول الأصل .



رسم الدوال الاساسية



الدالة المتفرعة (المتقطعة) :

ارسم بيانيًا لدالة متقطعة

ضع علامة على الحدود على المحور السيني للفترات لكل جزء من المجال .

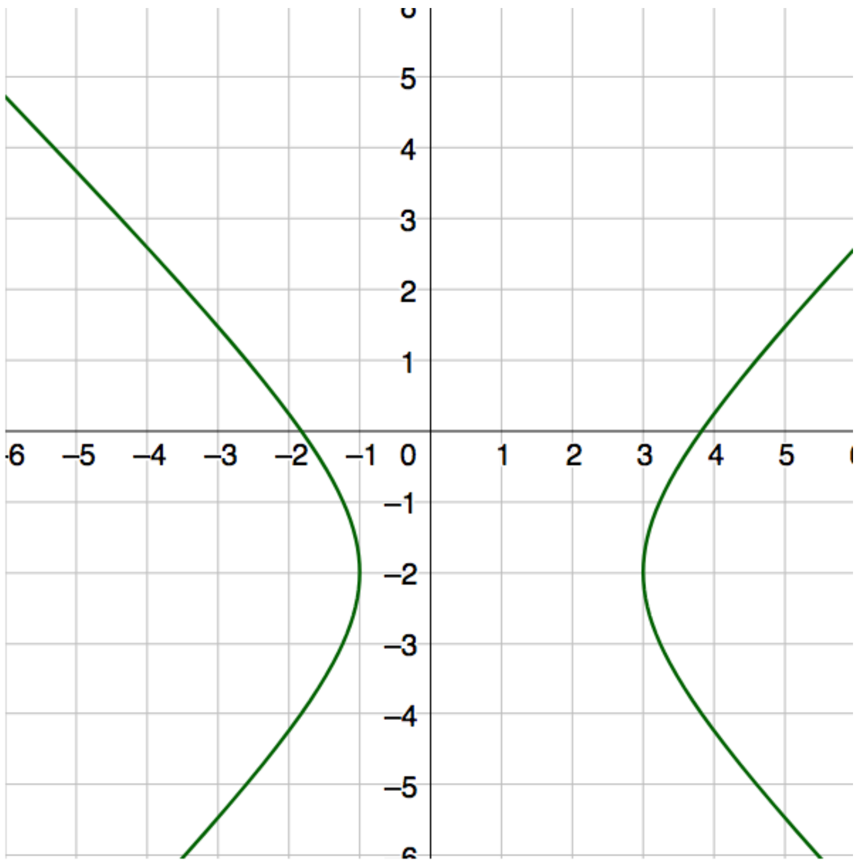
إذا كانت متساوية ـــ نقطة صلبة

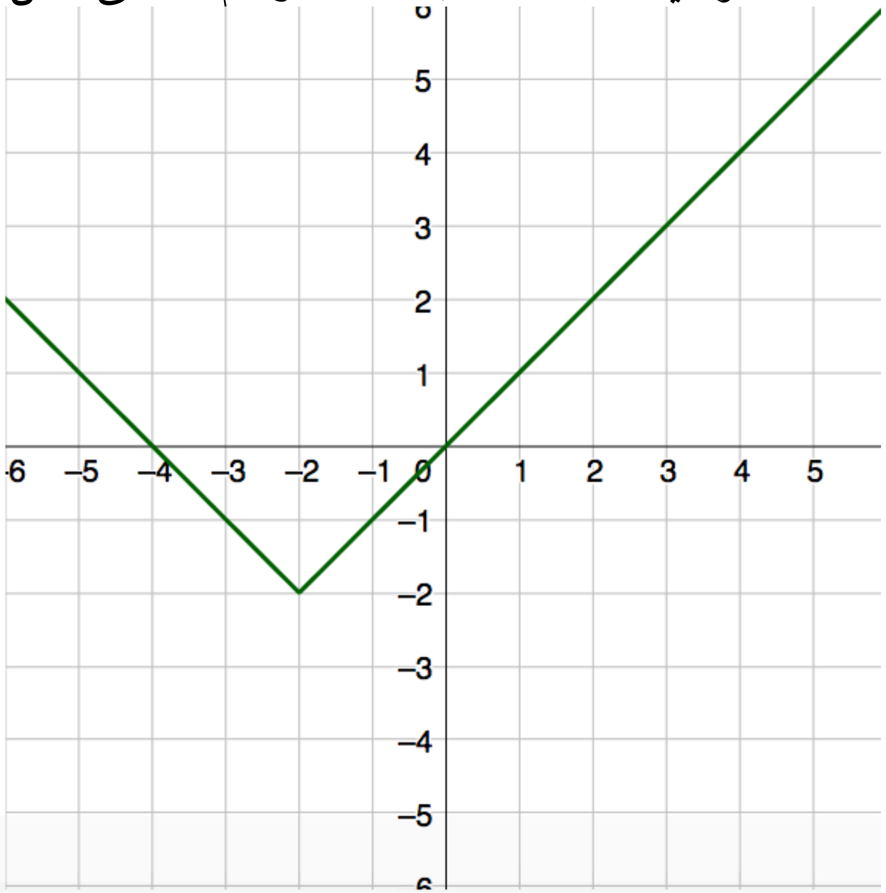
إذا لم تكن متساوية ـــ نقطة مفتوحة

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if } x \le 1 \\ 3, & \text{if } 1 < x \le 2 \\ x, & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

اختبارات

١ / استخدم اختبار الخط العمودي لتحديد ما إذا كان الرسم البيانى يمثل دالة .





اختبارات

٢ / أوجد أصفار الدوال التالية .

$$g(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$h(x) = \sqrt{x + 1}$$

٣ / أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة على الفترة

$$k(x) = -2x + 1 \text{ on } [1, 1 + h]$$

$$m(x) = 2x^2 - 3 \text{ on } [x, x + h]$$

الاجابة

١ / الرسم الاول على اليمين يمثل دالة والاخر ليس دالة

٢ / أوجد أصفار الدوال التالية .

$g(x)= -2 ,-1$

$h(x)= -1$

٣ / أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة على الفترة

$k(x)= -2$

$m(x)= 4x +2h$

تحويلات الدوال

في هذا القسم، سوف تتعلم:

رسم الدوال بيانيًا مع الازاحات .
رسم الدوال بيانيًا مع الانعكاسات.
رسم الدوال بيانيًا مع التمدد والانكماش.
تنفيذ سلسلة من التحويلات.

تحويلات الدوال

الازاحات

إذا كانت الدالة

$y = f(x)$،

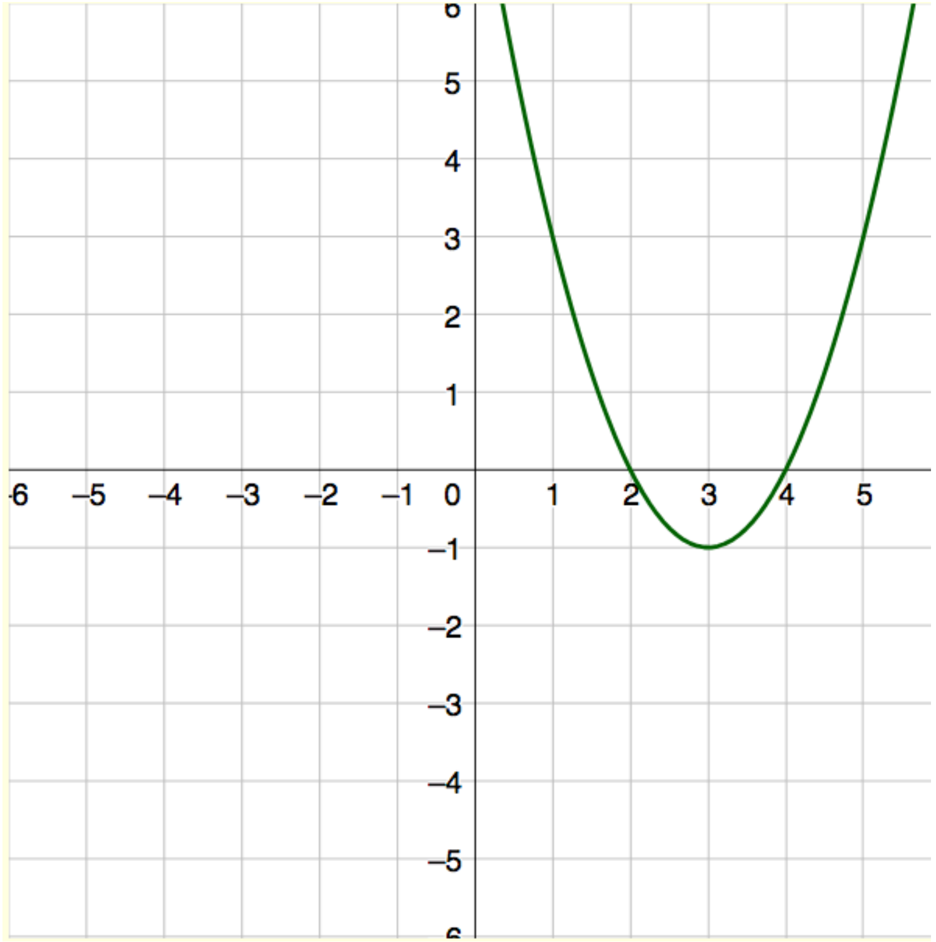
فإن الازاحة تكون في شكل

$$y = f(x - h) + k$$

حيث يتم ازاحة او تحريك الرسم البياني h وحدة إلى اليمين وk وحدة إلى الأعلى.

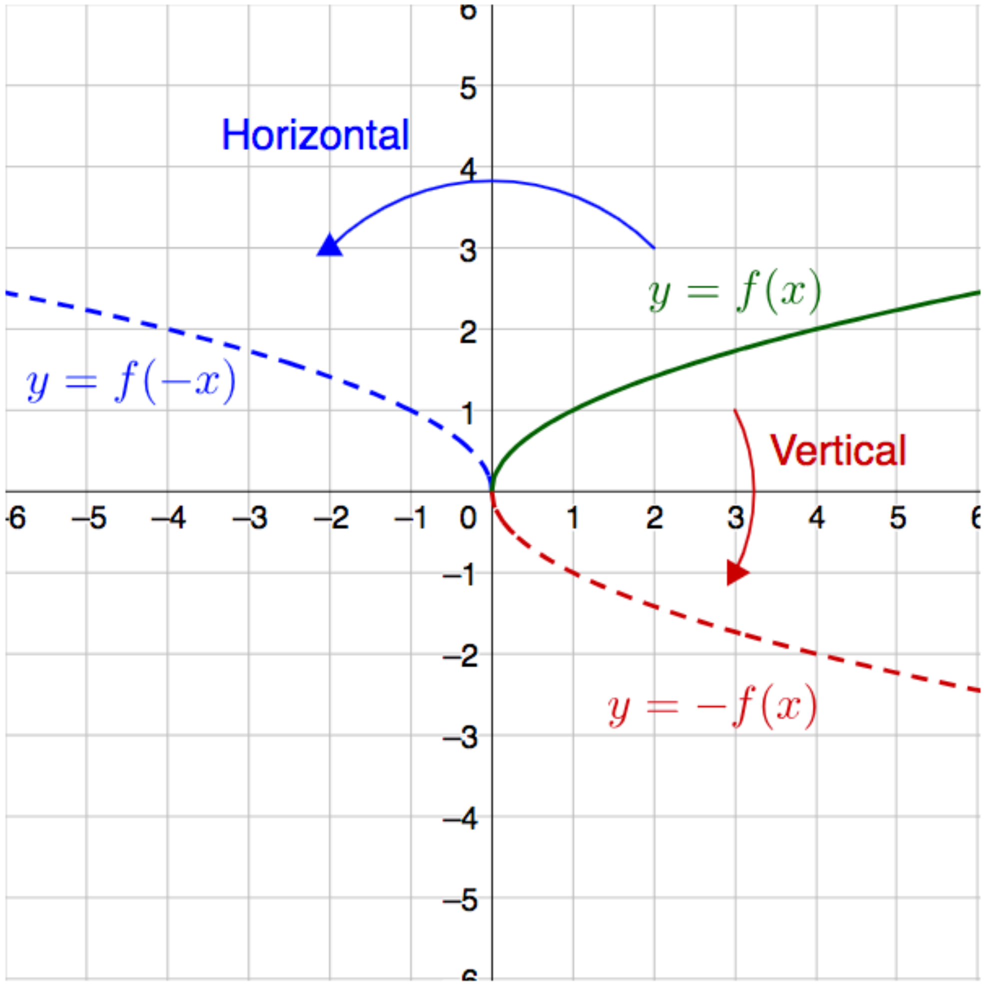
مثال :يمثل تحويلاً للدالة الأصلية $f(x) = x^2$. اربط هذه الدالة الجديدة

$g(x)$ ثم ابحث عن صيغة لـ $g(x)$ بـ $f(x)$،.



$$g(x) = (x - 3)^2 - 1.$$

تحويلات الدوال



الانعكاس

الانعكاس الأفقي :

$y = f(-x)$

ينعكس على المحور y .

الانعكاس الرأسي :

$y = -f(x)$

ينعكس على المحور x .

الدوال الزوجية والفردية

يكون رسم الدالة الزوجية متماثلاً مع وجود انعكاس حول المحور y .

يكون رسم الدالة الفردية متماثلاً مع دوران 180 درجة حول الأصل، أو انعكاسات في كل من المحورين x وy .

تحويلات الدوال

التمدد والانكماش

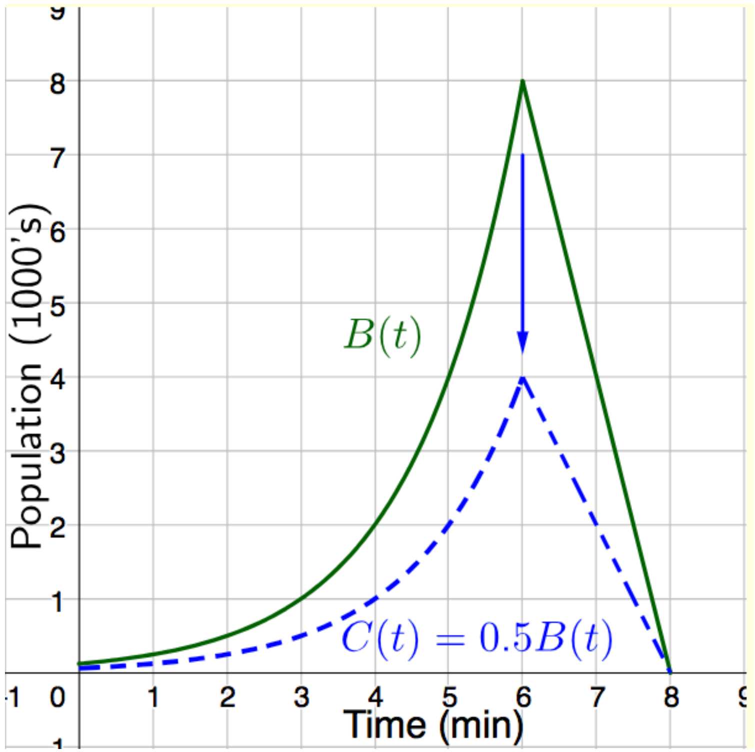
يحدث التمدد أو الانكماش الرأسي عندما يتم ضرب الدالة برقم .

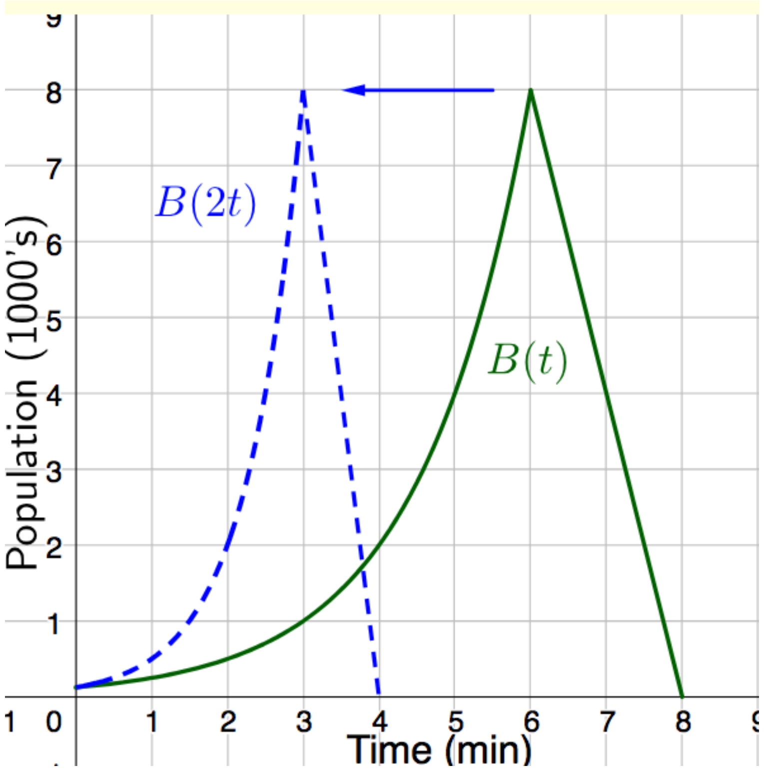
ارسم بيانيًا تمددًا أو انكماشًا

إذا كان

$y = af(bx)$،

فارسم بيانيًا حسب





عموديًا : اضرب جميع إحداثيات y في a

أفقيًا : اضرب جميع إحداثيات x في 1/b

تحويلات الدوال

جمع التحويلات :

عند دمج التحويلات العمودية المكتوبة في النموذج

$af(x) + k$

، يتم أولاً التمدد رأسياً بواسطة a ثم يتم النقل رأسياً بواسطة k .

عند دمج التحويلات الأفقية المكتوبة في النموذج

$f(bx + h)$

، يتم أولاً التمدد أفقياً بواسطة

$1/b$

ثم يتم النقل أفقياً بواسطة h .

التحويلات الأفقية والعمودية مستقلة .

لا يهم ما إذا كانت التحويلات الأفقية أو العمودية يتم إجراؤها أولاً .

تحويلات الدوال

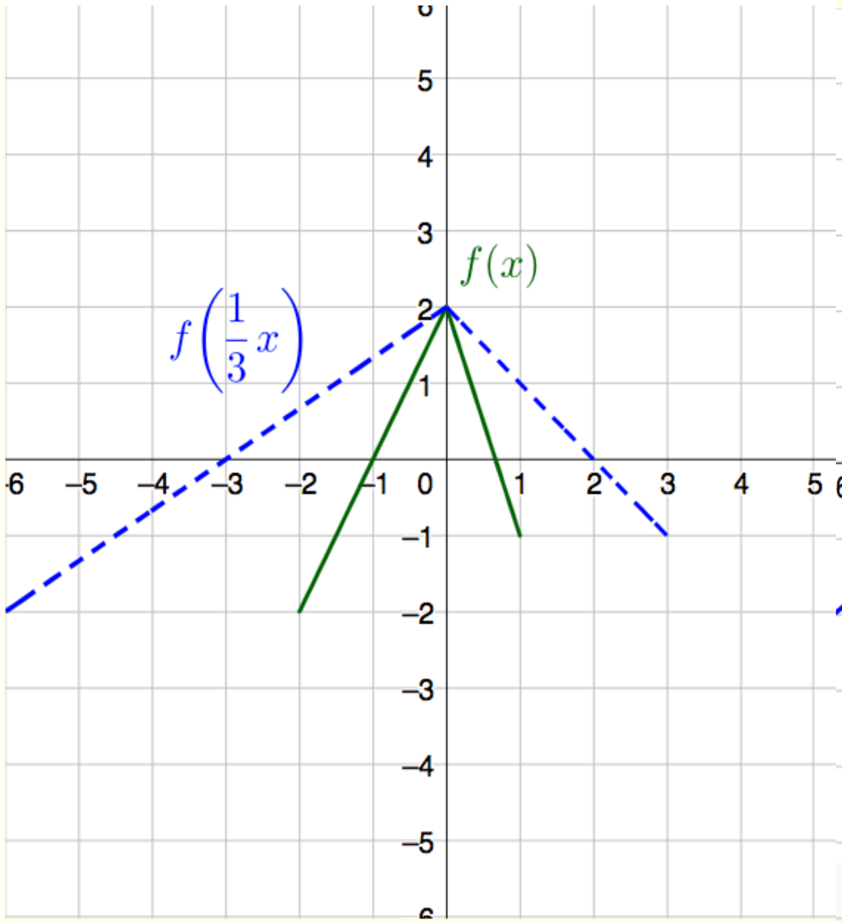


Figure 22: Horizontal stretch of f(x)

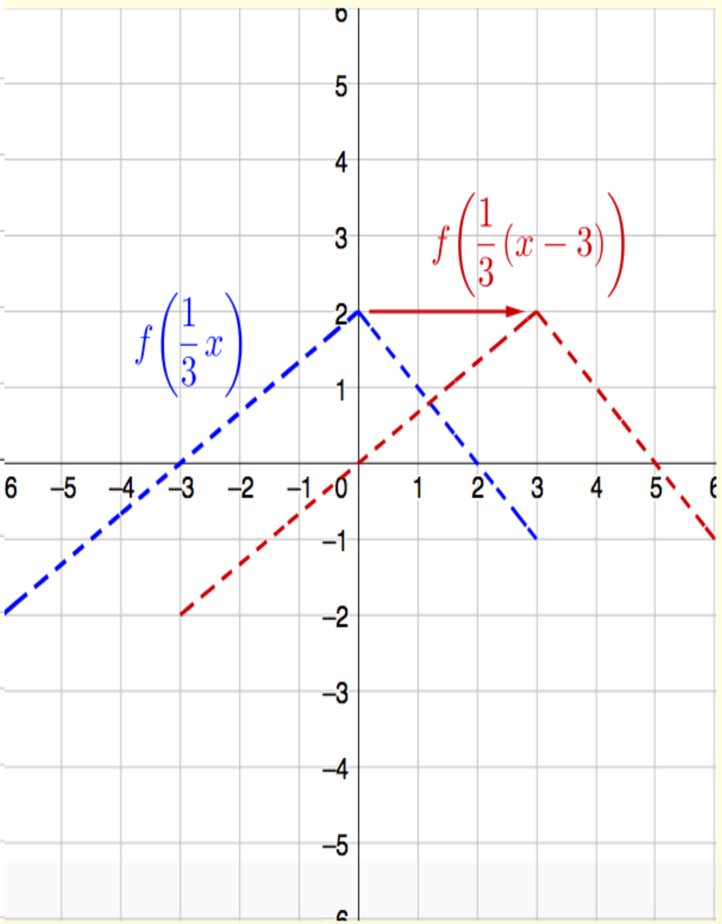


Figure 23: Horizontal translation of f(x)

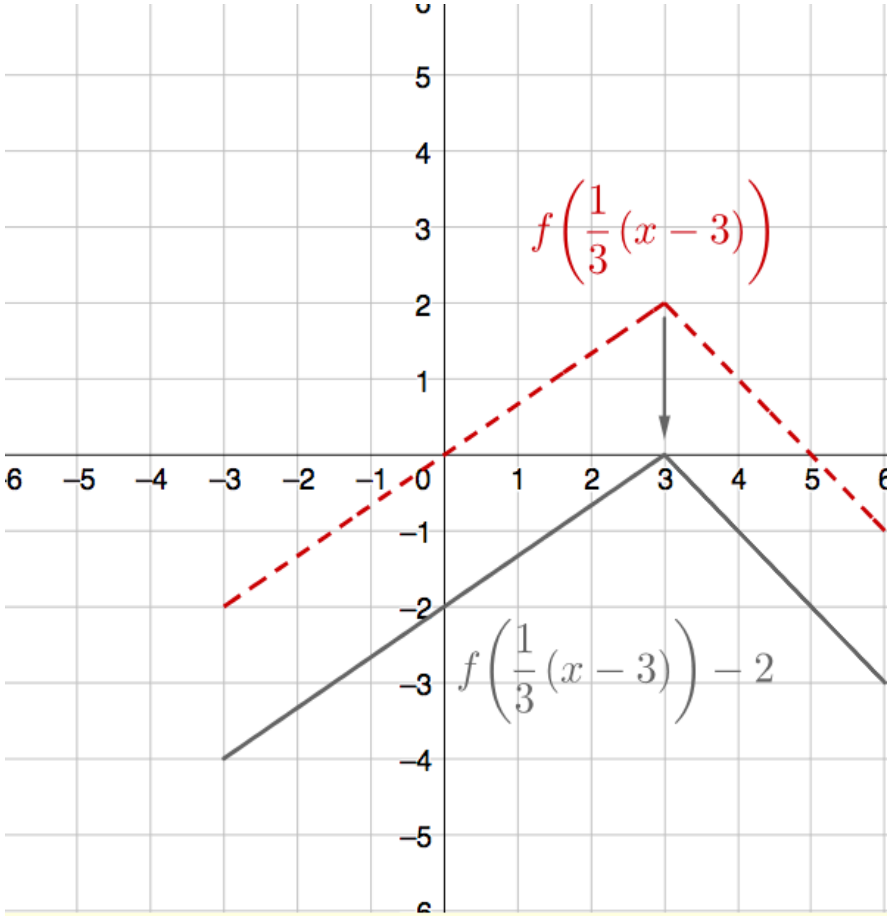


Figure 24: Vertical translation of f(x)

جمع الدوال

في هذا القسم، سوف تتعلم:

جمع الدوال باستخدام العمليات الجبرية.

إنشاء تركيبة من الدوال.

جمع الدوال مع العمليات الجبرية

إذا كانت هناك دالتان

$f(x)$ و$g(x)$، فإن

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$$

جمع الدوال

مثال : إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 1$،

أوجد (أ) $f + g$ (ب) $f - g$ (ج) $f \cdot g$ (د) f/g

$(f + g)(x) = x^2+x$

$(f - g)(x) = x^2 - x - 2$

$(fg)(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$(f/g)(x) = x - 1$

جمع الدوال

إيجاد مجال (منطلق) الدالة المركبة

إذا كانت الدالة مركبة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

إيجاد مجال الدالة f .

جعل مدى الدالة g = مجال الدالة f .

إيجاد قيم x لإنتاج هذا النطاق من الدالة g .

وأخيراً، إيجاد مجال الدالة g .

مجال الدالة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ هو مزيج من الخطوتين 3 و4 .

مثال: $x+1= f$, $g= x^2$

مجال الدالة المركبة للمثال هو كل الاعداد الحقيقية

$$f(x) = x + 1$$
$$f(g(x)) = (x^2) + 1$$
$$= x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2$$
$$g(f(x)) = (x + 1)^2$$
$$= x^2 + 2x + 1$$

$$f(g(x)) \neq g(f(x))$$

اختبارات

١ / وصف كيف أن رسم الدالة هو تحويل لرسم الدالة الأصلية f .

$y = f(x+2)+4$

٢ / صف كيف أن الدالة المعطاة هي تحويل لدالة أصلية . ثم ارسم رسمًا بيانيًا للتحويل .

$$h(x) = -|2x - 4| + 3$$

٣ / استخدم كل زوج من الدوال لإيجاد

$f(g(x))$ و $g(f(x))$. بسّط إجاباتك.

$$f(x) = 2 - \sqrt{x} \text{ and } g(x) = (2 - x)^2$$

الاجابة

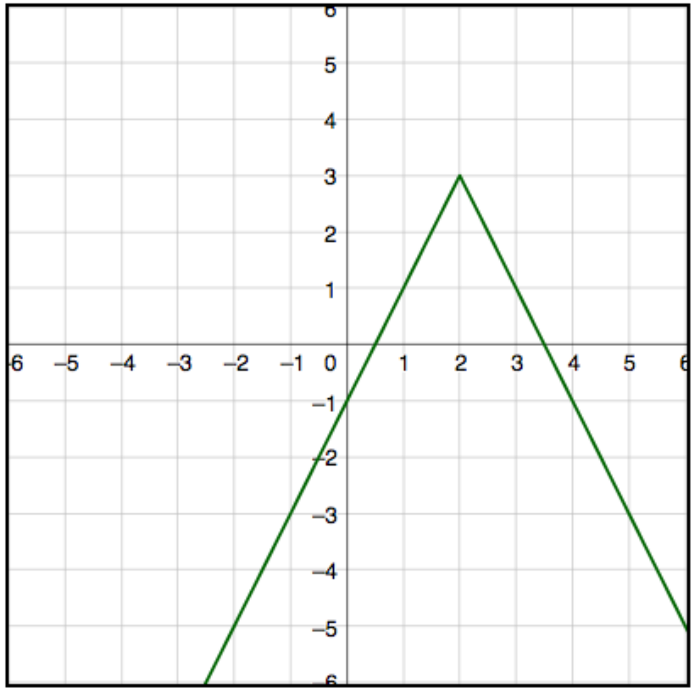
١ / وصف كيف أن رسم الدالة هو تحويل لرسم الدالة الأصلية f .

تمت الازاحة من اليسار 2 وما فوق 4

٢ /صف كيف أن الدالة المعطاة هي تحويل لدالة أصلية . ثم ارسم رسمًا بيانيًا للتحويل .

$$h(x) = -|2x - 4| + 3$$

ينعكس على المحور السيني، ويتقلص أفقيًا بعامل 1، وينتقل إلى اليمين 2 وإلى الأعلى 3



٣ /

f(g(x))=g(f(x))=x

معكوس الدالة

في هذا القسم، سوف تقوم بما يلي :

التحقق من أن الدالتين دالتان احدهما معكوس الاخرى .

إيجاد المجال والنطاق لمعكوس الدوال .

إيجاد معكوس الدالة .

معكوس الدالة

الدالة العكسية

تتبدل الدوال العكسية بين المدخل والمخرج: فهي تتبدل بين x وy.

بالنسبة لأي دالة أحادية إلى أحادية، إذا كانت $f(x) = y$، فإن $x = f^{-1}(y)$.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

إذا كانت الدالة الفردية $f(5) = -2$ و$f(10) = 23$ لدالة أحادية إلى أحادية معينة، فما هي قيم الإدخال والإخراج المقابلة لمعكوس الدالة؟

الحل

تقوم معكوس الدالة بتبديل كميات الإدخال والإخراج، لذا إذا كانت

$$f(5) = -2, \text{ then } f^{-1}(-2) = 5$$

$$f(10) = 23, \text{ then } f^{-1}(23) = 10$$

معكوس الدالة

اختبار ما إذا كانت دالتان احدهما معكوس الاخرى

$f(x)$ و$g(x)$ عكسيتان إذا كان إما $f(g(x)) = x$ أو $g(f(x)) = x$.

إذا كانت اي من العبارتين صحيحة، فكلاهما صحيح، و$g = f$^-1 و $f = g$^-1.

إذا كانت أي من العبارتين خاطئة، فكلاهما خاطئة.

مثال : إذا كانت $f(x)=2x-3$ و $g(x)=2x+3$ ، فهل $g = f$^-1؟

الحل : لاختبار ما إذا كانت دالتان معكوستان، أوجد تركيبهما. إذا كان التركيب يساوي x، فإنهما عكسيتان.

$$f(g(x)) = \frac{2}{\left(\frac{2}{x}+3\right)-3}$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{2}{1}\,\frac{x}{2}$$

$$= x$$

معكوس الدالة

إيجاد معكوس الدالة
تأكد من أن f دالة أحادية لواحد .
أعد كتابة $f(x)$ على هيئة y.
بدّل x وy .
حل المعادلة لإِيجاد قيمة y .
أعد كتابة y على هيئة
$f^{-1}(x)$.

معكوس الدالة

أوجد معكوس الدالة

$f(x)=\frac{3}{x+1}-2$

الحل

ابدأ بإِعادة كتابة المعادلة بحيث

لاتكون في صيغة دالة .

$$f(x) = \frac{3}{x+1} - 2$$

$$y = \frac{3}{x+1} - 2$$

$$x = \frac{3}{y+1} - 2$$

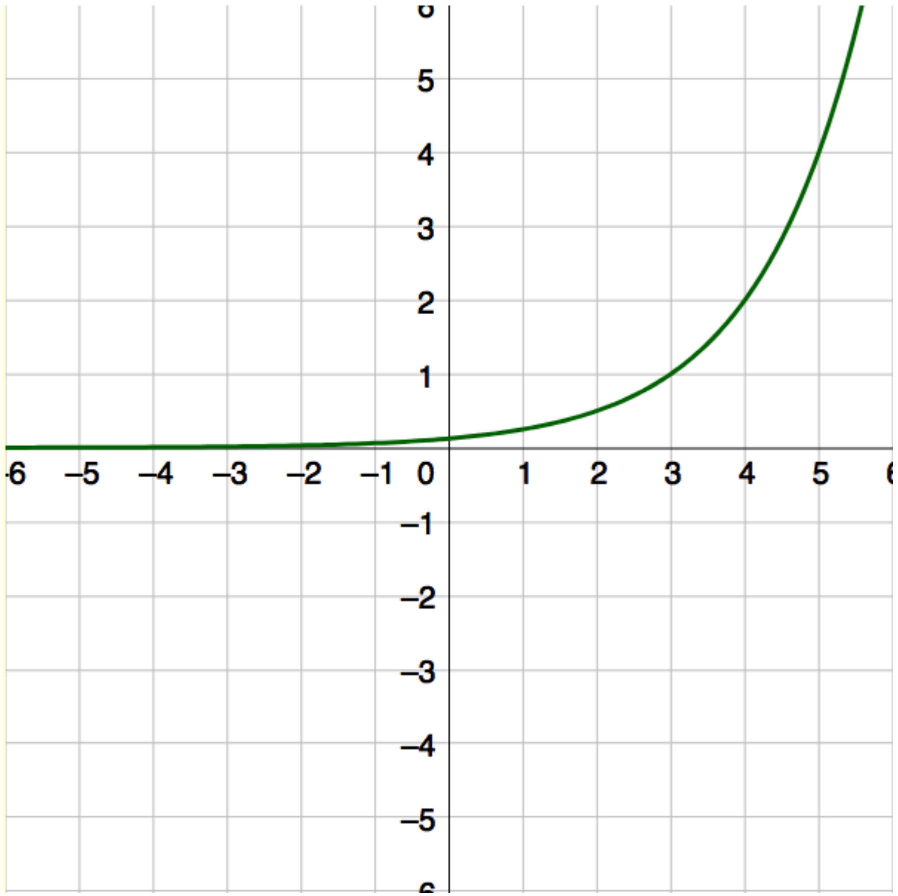
$$(x+2)(y+1) = 3$$

$$y+1 = \frac{3}{x+2}$$

$$y = \frac{3}{x+2} - 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{x+2} - 1$$

معكوس الدالة

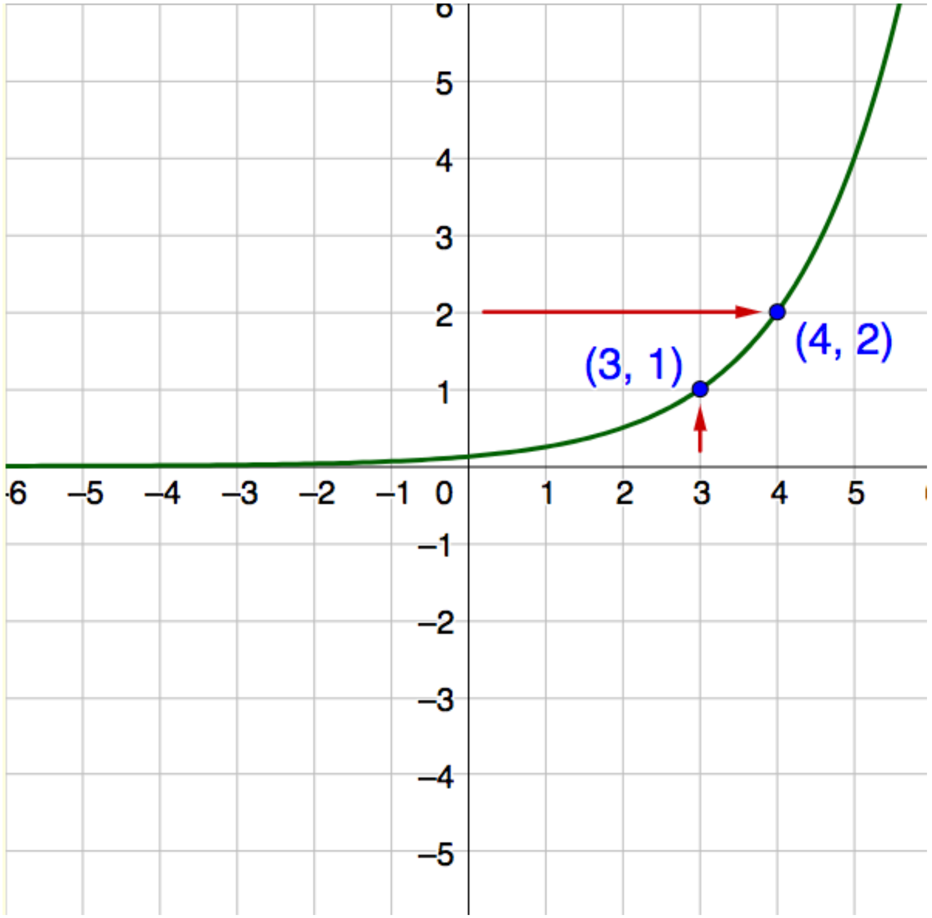


تقييم دالة معكوسة من رسم بياني للدالة الأصلية
ابحث عن المدخلات المطلوبة على المحور y للرسم البياني المعطى .
اقرأ ناتج الدالة المعكوسة من المحور x للرسم البياني المعطى .
مثال : استخدم الرسم البياني لـ f(x) لإيجاد

f(3) وf^-1(2).

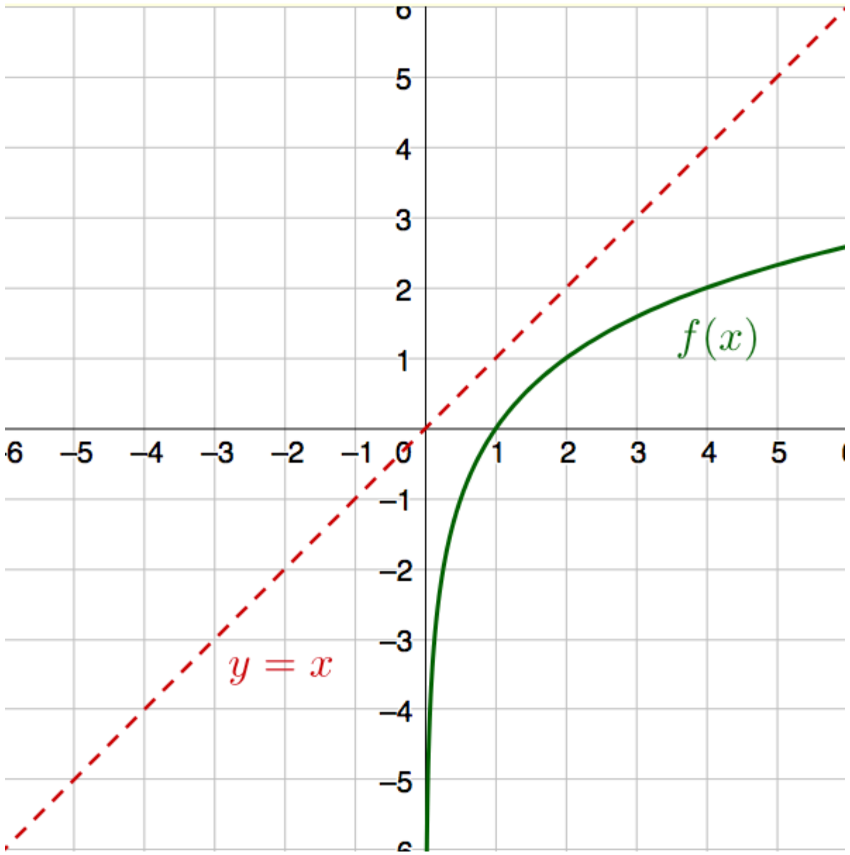
معكوس الدالة

لتقييم(3)f، ابحث عن 3 على المحور x وابحث عن قيمة الإخراج المقابلة على المحور y . تشير النقطة (3، 1) إلى أن $f(3) = 1$.



لتقييم (2)f^-1، تذكر أن قيمتي x وy تم تبديلهما للعكس. ابحث عن 2 على المحور y وابحث عن القيمة المقابلة على المحور x . تعني النقطة (4، 2) على الرسم البياني الأصلي أن النقطة على العكس هي (2، 4). وهذا يشير إلى أن $f^{-1}(2) = 4$.

معكوس الدالة



إيجاد الرسم البياني لمعكوس الدالة

الرسم البياني للدالة العكسية هو انعكاس($f(x)$ على الخط $y = x$.

لإيجاد الرسم البياني العكسي

اعكس النقاط على $f(x)$ على الخط $y = x$

أو

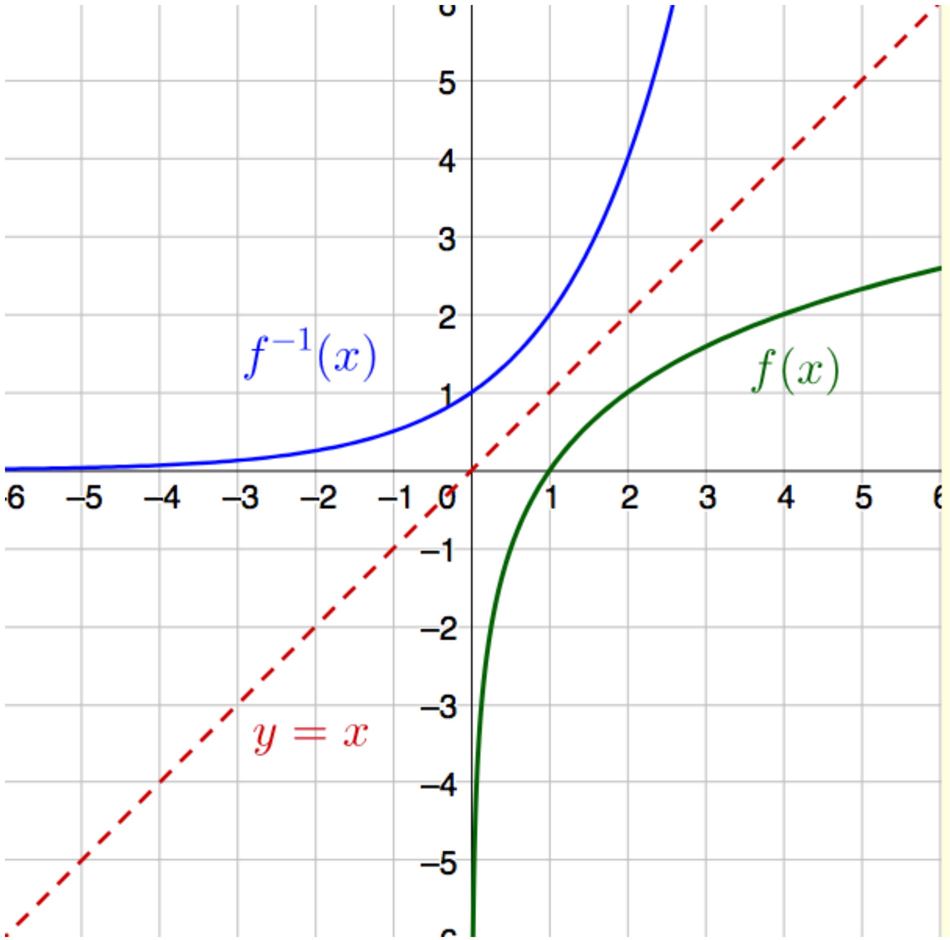
خذ النقاط على($f(x)$ واستبدل إحداثيات x وy لكل نقطة.

إذا كان($f(x)$في الشكل، ارسم رسمًا بيانيًا لـ $f^{-1}(x)$.

معكوس الدالة

الرسم البياني العكسي هو انعكاس على الخط $y = x$، لذا ابحث عن الكثير من النقاط وحركها بنفس المسافة إلى الجانب الآخر من الخط .

أو يقوم الرسم البياني العكسي بتبديل إحداثيات x وy. لذا، خذ مجموعة من نقاط $f(x)$وقم بتبديل إحداثياتها . ثم ارسم النقاط الجديدة بيانياً .



الاختبارات

1/ جد معكوس الدالة

$f(x)=x/(x-4).$

2/ جد معكوس الدالة

$f(x)=2x-3.$

الاجابة

1/ معكوس الدالة

$f(x)=x/(x-4).$

هو

$f^{-1}(x)=(x+3)/2$

2/ معكوس الدالة

$f(x) = 2x - 3.$

هو

$f^{-1}(x)=4x/(x-1)$

المراجع

- Precalculus An Investigation of Functions by

  David Lippman and Melonie Rasmussen

- Mr. Wright Teaches the Lesson

Precalculus

An Investigation of Functions

Edition 1.4

David Lippman
Melonie Rasmussen

This book is also available to read free online at
http://www.opentextbookstore.com/precalc/
If you want a printed copy, buying from the bookstore is cheaper than printing yourself.

شكرا لكم