الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بغداد
كلية الزراعة
قسم الاقتصاد الزراعي

الاقتصاد الرياضي

MATHEMATICAL ECONOMICS

تاليف
الاستاذ المساعد
الدكتور علي درب كسار الحيالي
قسم الاقتصاد الزراعي
كلية الزراعة- جامعة بغداد

الاهداء

اهدي ثمرة جهدي العلمي المتواضع هذا الى:

الوالدين الكريمين.... حبا وتوقا للبر بهما وعرفانا بالجميل

أشقائي الذين سبقوني الى رحمة الله

زوجتي...رفيقة دربي الوفية

أولادي.... جواهري وأحبائي

المؤلف

مقدمة

انتشرت في الآونة الاخيرة كتب ومراجع عربية كثيرة في الاقتصاد الرياضي ، حاول فيها من أهتم بهذا الموضوع المهم أن يوصل للقراء والمتخصصين في هذا المجال المفاهيم الاساسية التي يتضمنها موضوع الاقتصاد الرياضي ودور الرياضيات المهم في معالجة الكثير من الموضوعات في الاقتصاد فضلا عن اخضاع الرياضيات لتفسير السلوك الانساني ولاسيما أن الاقتصاد علم اجتماعي تتمثل الصعوبة فيه عندما يتم التعرض الى السلوك الانساني باسلوب رياضي أو تحويل القرارات البشرية إلى معادلات رياضية يتم على اساسها استقراء المستقبل وتنفيذ الخطط في مختلف المجالات.

من هنا كانت هذه المحاولة المتواضعة في إعداد هذا الكتاب ليكون في متناول طلبة الاقتصاد بشكل عام وطلبة الاقتصاد الزراعي بشكل خاص ، إذ سيتضمن الكتاب تمارين تخص الواقع الزراعي فضلا عن تمارين عامة لموضوعات إقتصادية مختلفة، وتجدر الاشارة الى ان الكتاب يتطلب ان يكون القاريء ملما جيدا في الرياضيات إذ انه لن يتناول اساسيات الرياضيات بقدر ما يوظف هذه الاساسيات في الاقتصاد لتكون الاستفادة قدر الامكان منها في تفسير الظواهر الاقتصادية ، وعلى من تواجهه الاشكالات في فهم حالة رياضية معينة الرجوع الى كتب الرياضيات المتخصصة .

لقد اضيفت مادة الاقتصاد الرياضي الى مناهج قسم الاقتصاد الزراعي للمرحلة الرابعة حصرا قبل سنوات ، ولافتقار القسم الى كتاب منهجي والاعتماد على محاضرات الاستاذ المعتمدة اصلا على مراجع اجنبية وعربية، بدأ قسم الاقتصاد الزراعي بمحاولات إعداد مجموعة من الكتب المنهجية او تنقيح القديم منها لتضاف الى المكتبة العلمية ، سائلين المولى عز وجل أن يتم نعمته في انجاز هذا الكتاب، وأخيرا لابد من الاشادة بجهود كل من سبقونا في دراسة هذا الموضوع ولمن قدم المشورة والمعلومة ابتغاء وجهه تعالى.

الدكتور
علي الحيالي

محتويات الكتاب

الفصل الاول
الرياضيات وعلاقته بالاقتصاد

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- علاقة الرياضيات بعلم الاقتصاد
- الفرق بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي
- اسباب استخدام الاقتصاد الرياضي
- محاذير استخدام الاسلوب الرياضي
- الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي
- النماذج الاقتصادية
- العلاقات في الانموذج الاقتصادي
- خطوات بناء الانموذج الاقتصادي
- أنواع الدوال

الفصل الاول

الرياضيات وعلاقته بالاقتصاد

يتباهى علم الاقتصاد أو ربما يندب حظه لوجود علاقة واسعة وحميمة، ليست مثمرة دوما، بينه وبين علم الرياضيات ، فالباحثون في علم الاقتصاد يستخدمون على نحو روتيني الرياضيات بدءا من عبارات جبرية بسيطة إلى مفاهيم معقدة في الطبولوجيا التفاضلية بغية التعبير عن نظرياتهم ، ويشهد على ذلك كرّاسة كتبها في القرن الثامن عشر بإيطاليا (بيكاريا) استند فيها الى علم الجبر كي يبين اخطار تهريب البضائع وفوائده، غير أن السنوات الاخيرة شهدت اقبالا واضحا من الاقتصاديين على نشر بحوثهم ذات التوجه الرياضي المتقدم تخطى الى حد بعيد البحوث في النظرية الاقتصادية الاساسية ، الامر الذي يؤكد وجود شغف كبير في الرياضيات وان الوقت حان لترسيخ مجموعة من المبادئ الاقتصادية الرصينة.

شهد الاهتمام بالاقتصاد الرياضي حماسا متزايدا ولاسيما بعد الحرب العالمية الثانية ، فقد وجد علماء الاجتماع ومنهم علماء الاقتصاد ان الرياضيات تمدهم بفائدتين مهمتين، أولهما ان الرياضيات يزودهم بنظام دقيق يساعدهم على صياغة نظرياتهم بشكل دقيق ، وثانيهما انه أداة لاستخراج مفاهيم عميقة من أكوام هائلة من البيانات الخام.

إن استخدام الرياضيات في المساعدة على طرح الاسئلة الصحيحة مهد الطريق لبناء نماذج تنطوي على براعة رياضية بالغة التعقيد، وفي الوقت نفسه توفر اعترافا بالمبادئ الاقتصادية الاساسية إلا ان هذا الحماس الزائد للرياضيات في معالجة المشاكل الاقتصادية قابله تذمر حتى من الاقتصاديين انفسهم ، اذ يقول العالم (ليونتيف) الحائز على جائزة نوبل عام ١٩٧٢ في هذا الشأن ((إن الحماسة المطلقة تجاه الصياغة الرياضية عملت في الأغلب على إخفاء المحتوى الجوهري للموضوع خلف جبهة هائلة من الإشارات الجبرية))، كما اشار هذا العالم الى ان الرياضيات قد خرجت من مهمتها في مساعدة الاقتصاد الى اثبات النظريات الرياضية فحسب ويتجلى هذا بقوله ((الرياضيات تتصدى لمشكلات خاصة لأنها مدفوعة نحو إثبات النظريات المهمة رياضيا أكثر من أهميتها الاقتصادية)).

واليوم لا يمكن أن يدعي أي فرد أنه عالم اقتصاد أو عالم نفساني أو عالم اجتماع إذا ما كان جاهلا بعلم الإحصاء أوبحساب الاحتمالات، فقط لأنهما أصبحا من أهم الأدوات التي بفضلهما يمكن للمختص أن يعالج مختلف المعلومات ومن ثم فهم مدلولات نتائج تجاربه و أبحاثه، و في هذا المجال نصح كورنو Cournot في سنة ١٨٣٨ باستعمال حساب الاحتمالات في ميدان الاقتصاد، وهذا العالم الذي هو من جهة أخرى صاحب الأعمال التي

تطورت أكثر بفضل تدعيمها ببحوث أخرى لعالم الاقتصاد الشهير Walras و بأعمال متنوعة للعالم Pareto .

و في السنوات الأخيرة بيّن علم القياس الاقتصادي أو مايسمى الاقتصاد القياسي (Econometrics) أن ما تسمى بنظرية الالعاب (Game theory) قد تحولت إلى نظرية رياضية يمكن استعمالها في دراسة السلوكيات الاقتصادية، وبذلك و بعد تأخر كبير، فرض علم الاحتمالات نفسه في برامج معاهد الاقتصاد السياسي.

أما أعمال (*كونودكرات*) عن سبر آراء الناخبين و التي أهملت لمدة تقارب القرن و النصف، فقد أكدت للجميع اليوم حتمية التوجه لعلمي الإحصاء و الاحتمالات لمعرفة الاتجاه العام للناخبين إثر سبر لآراء عينة منهم تُختار بشكل علمي و دقيق، إذ يمكن التكهن وفي إطار محدود ومدروس بمختلف النسب التي سيتحصل عليها لحظات قليلة بعد الانتهاء من الاقتراع، و فيما يتعلق بالسياسة و بطرائق التسيير و بحسن اتخاذ القرارات فيها، فإن علم الاحتمالات قد فرضت قواعدها على أصحاب القرار في مختلف الديمقراطيات الغربية ولاسيما إذا ما كان التحضير للقرار مرتبطا بشكل طردي مع عامل الزمن، وعندئذ يكون النجاح متعلقا بحسن تصور التغيرات المستقبلية للوضعيات الحاضرة، فالاقتصادي و السياسي والاستراتيجي في مختلف الميادين يجد نفسه مضطرا للاختيار بين عدة سبل للتحرك و هذا أمام أكثر من موضوعة تكون عموما متغيرة و بشكل مستمر مع الزمن مما يجعله غير متيقن بالقدر الكافي من مقدار تغير الموضوعات حيث تبدأ نتائج قراراته بالظهور، و لهذا يتفق العلماء المعاصرون على أن كل نجاح لأية طريقة أو اسلوب لابد أن يُركَّز فيه على التثمين الحقيقي و الفعال للرياضيات و لعلم الاحتمالات خصوصا.

وخلاصة القول أن حل مسألة قرار يكمن في المخاطرة باختيار حل من الحلول المتاحة كما يفعل لاعب الشطرنج الذي يعلم ضمنيا أن كل قرار يتخذه لابد أن يغيّر مصير المقابلة و هو المصير الذي يتوقف بدوره على قرارات الخصم التي تبقى في أغلب الأحيان مفترضة.

و في هذا المجال طور العلماء منذ عهد قريب جدا أدوات رياضية مهمة للتحكم في الأحداث نذكر منها بحوث العمليات (Operation research) الذي ارتبط أساسا بالحرب العالمية الثانية و الذي من خلاله تمّ اخضاع العوامل الأساسية التي تدخل في مسائل التنظيم العسكري و الاقتصادي و الصناعي للرياضيات، ويوظف البحث العملياتي علم الاحتمالات فضلا عن عدة مفاهيم رياضية حديثة كنظرية البيانات إذ تمثل المدن أو المصانع أو مراحل الإنتاج بالنقط كما تمثل العلاقات بينها بقطع المستقيمات أو بالأسهم. و تعد الطريقة المسماة بعملية التقويم واستعراض المهام Process Evaluation and Review Tasks و اختصارا – P.E.R.T – من أهم الطرائق التنظيمية في برمجة مختلف

الوظائف التي يحتاجها كل مشروع ذي أهمية حيث تتم عملية مراقبة الإنجاز منهجيا، فمثلا بطريقةP.E.R.T يمكن للمختصين أن يتابعوا و أن يسيّروا المخزون إذ يهتم في هذا الميدان بالطلب على السلعة و التموين بها و إعادة التموين و كذلك ثمن تخزينها و مدة تسويقها وفقدانها في السوق،فضلا عن الدقة الأكيدة في مراقبة مختلف الأجهزة من حيث فقدان القيمة و التآكل و التجديد ومن ثم تحديد قيمة الاستثمارات الملائمة ويتم كل هذا بطرائق رياضية تفرضها باستمرار الظاهرة الاقتصادية.

الفرق بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي

على الرغم من ان الارتباط بين المفهومين هو ارتباط وثيق غير ان كلا منهما يتميز عن الآخر في مجموعة من المفاهيم والاهداف وطريقة التناول، إذ تتناول الرياضيات الاقتصادية (والتي ينبغي ان تعطى في المراحل الأولية لطلبة الاقتصاد) مختلف الطرائق الرياضية التي تساعد الطالب في فهم السلوك الاقتصادي للمتغيرات الاقتصادية من دون الدخول في تعقيدات الطرائق الرياضية وتشابكاتها إذ ان المرحلة الاولى تتطلب مستوى معينا من التحليل الاقتصادي يتناسب ومستوى مادة الاقتصاد التي تعطى في هذه المرحلة ، فضلا عن ان التوسع في الطرائق الرياضية بما يخدم الاقتصاد قد يخرج المادة من اهدافها عليه تبقى الرياضيات أساسا يعتمد عليه في وضع الطالب على الطريق الصحيح في تفسير السلوك الاقتصادي للظواهر الاقتصادية أيا كانت.

أما فيما يتعلق بالاقتصاد الرياضي فهو الطريقة التي يقوم الاقتصادي بها ببناء أنموذج اقتصادي نظري مبتدئين بالفروض ثم العلاقات الرياضية ثم المعالجة الرياضية التي توصلنا الى النتائج النظرية المتوخاة، ومن الطبيعي ان تكون النتائج النظرية التي نحصل عليها من المعالجة الرياضية معتمدة على مدى واقعية الفروض التي ترتكز عليها العلاقات الرئيسة للأنموذج. وتجدر الاشارة الى ان الفرق الجوهري بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي يكمن في ان الثاني يتناول دراسة ظواهر اقتصادية معقدة ونماذج متقدمة يصعب على المبتدئين في الاقتصاد تناولها، لذا ينبغي للمتصدين للنماذج المعقدة ان يتسلحوا بمقدار وافي من المعرفة الرياضية فضلا عن المعرفة الاقتصادية والتي سوف يتعرف عليها الطالب في المراحل المتقدمة من الدراسة ونعني بها المراحل الثالثة والرابعة.

اسباب استخدام الاقتصاد الرياضي

إن استخدام الاسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي له مايبرره فهو يتمتع بمزايا مهمة تجعله مهيئا لمعالجة المشاكل الاقتصادية المعقدة ووضعها بصيغ رياضية تسهل الحل ، ومن اهم هذه المزايا :-

١. له امكانية كبيرة في تحليل النتائج المتحصل عليها بسبب تحديده للفروض التي يتم اعتمادها في بناء الأنموذج.
٢. يساعدنا في التعامل مع عدد كبير من المتغيرات الاقتصادية التي تتضمنها بعض الظواهر الاقتصادية ، وبذلك يكون متفوقا على الطرائق الاخرى كالبيانية والوصفية في التحليل التي تقتصر في تحليلها احيانا على متغيرين او ثلاثة واحيانا على متغير واحد فقط، وهو بهذه الميزة سوف يقلل الجهد والوقت اللازمين لحل المشكلات الاقتصادية فضلا عن الدقة في التحليل.
٣. الدقة والوضوح والايجاز في التعبير عن النظريات الاقتصادية وعرض العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية.
٤. تجنب الافتراضات الضمنية التي يصعب اكتشافها وجعلها اكثر صراحة والمساهمة في تطبيق علم الاقتصاد القياسي الذي يتطلب تطبيقه صياغة النظريات والعلاقات الاقتصادية باسلوب رياضي.
٥. التقدم المذهل في الحاسبات الالكترونية الذي يسهل عملية المعالجة والتحليل بصرف النظر عن عدد المتغيرات او تعدد العلاقات وغيرها.
٦. تعدد وتنوع وتوافر برامج الحاسوب الرياضية منها والاحصائية.

محاذير استخدام الاسلوب الرياضي

على الرغم من المزايا التي يتمتع بها الاسلوب الرياضي في التحليل ، إلا ان استخدامه يشوبه نوع من الحذر ، فقد اشترط الاقتصاديون الرياضيون توافر شرطين اساسيين لاستخدام الرياضيات في الاقتصاد هما:-

١. قابلية الظواهر الاقتصادية للقياس الامر الذي يمكن معه التعبير عن تلك الظواهر بارقام أو برموز رياضية.
٢. قابلية العلاقات بين الظواهر الاقتصادية الكمية للصياغة الرياضية بشكل يمكن معه استخدام المعادلات والعلاقات الرياضية المختلفة.

واختلفت الاراء بين دعاة استخدام الرياضيات في الاقتصاد ومن خالفوها وذلك لاسباب عدة ، فقد اكد المخالفون ان استخدام الرياضيات قد اسهم في تقدم العلوم الطبيعية في حين ان الاقتصاد علم انساني وان تضمن عوامل كمية فانه يتضمن عوامل اخرى يصعب قياسها او تقديرها كميا كما اعترضوا على استخدام لغة الرموز المستخدمة في النماذج الرياضية واشاروا الى ان لغة الرموز فقيرة لانها دقيقة جدا ، في حين ان اللغة الوصفية الادبية وان كانت غامضة وغير صريحة احيانا لكنها واسعة وغنية جدا، ومن الممكن ايجاز الانتقادات الموجهة للاقتصاد الرياضي بشكل خاص ولاستخدام الرياضيات في التحليل الاقتصادي على النحو الاتي:-

١. وجود فجوة بين الاقتصاديين الرياضيين وقدماء الاقتصاديين الوصفيين بسبب عدم تمكن الوصفيين او اطلاعهم على الاساليب الرياضية الكافية حتى مع تحول علم الاقتصاد وبشكل واسع الى الاسلوب الرياضي والكمي.
٢. وقوع بعض الاقتصاديين تحت تأثير الطابع الرياضي والاغراق في الاسلوب الرياضي بينما الاساليب الرياضية لا تستخدم إلا وسيلة وليست غاية.
٣. هناك بعض المتغيرات والظواهر الاقتصادية غير قابلة للقياس الكمي مما يصعب صياغتها في شكل رياضي.
٤. لا يفرق الاقتصاد الرياضي بين الحل الرياضي الناتج عن الصياغة الرياضية للنظرية الاقتصادية والحل الممكن تحقيقه اقتصاديا وسياسيا واجتماعيا وانسانيا.

وعلى الرغم من هذه الانتقادات الموجهة للاقتصاد الرياضي إلا أن معظم الاقتصاديين يؤمن باهميته الكبيرة وان له دوراً بارزاً في فهم النظرية الاقتصادية واثبات اسسها وافتراضاتها ومدلولاتها فضلا عن استخدامها في التحليل.

الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي

Mathematical Economics & Econometrics

يقول الاقتصادي (*Johnston*) ((ان الدور الاساس للاقتصاد القياسي هو التقدير والاختبار الاحصائي للنماذج الاقتصادية)) ، ويتمثل هذا الدور ، أولاً في تحديد او توصيف الأنموذج الاقتصادي بشكل رياضي، وثانياً في تجميع البيانات الاحصائية ذات العلاقة بالمتغيرات التي تظهر في ذلك الأنموذج ، وثالثاً في استخدام البيانات التي تم تجميعها لتقدير معالم او ثوابت الأنموذج الاقتصادي بعد تحويله الى شكل قابل للتقدير الاحصائي بادخال المتغيرات العشوائية الى العلاقات الرياضية للأنموذج (من غير المتطابقات)، واخيرا اخضاع العلاقات التي تم تقديرها احصائيا والتي تكون الأنموذج الاقتصادي المقدر الى مجموعة من الاختبارات

الاحصائية والاقتصادية لمعرفة ما اذا كان الأنموذج المقدر احصائيا يعطي صورة قريبة للواقع أم لا.

بناءً على ذلك يمكن القول ان الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي يتفاعلان ، أي يؤثر احدهما في الاخر وبشكل متبادل، فالاقتصاد الرياضي يعد الاقتصاد القياسي أنموذجاً اقتصاديا نظريا دليلاً للعمل القياسي يوضع من قبل الاخير، ومن الناحية المبدئية على الاقل، موضع الاختبار العملي لمعرفة ما اذا كانت نتائج ذلك الأنموذج تتفق او تتعارض مع الواقع ، وفي ضوء تلك النتائج يتم قبول او تعديل او رفض الأنموذج النظري الذي وضع موضع الاختبار العملي. ومع كل ماسبق فإن الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي شيئان مختلفان وكلاهما يختلف عن الرياضيات الاقتصادية.

إن الحديث عن الرياضيات والاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي لابد له ان ينحرف بنا قليلا الى الحديث عن الأنموذج ومفهومه ولاسيما وان كلمة الأنموذج تدخل في شتى العلوم سواء الكمية أوغير الكمية وحري بنا ان نوضح هذه الكلمة بشيء من التفصيل.

النماذج الاقتصادية: *Economic Models*

يعكس الأنموذج الاقتصادي العلاقات الاقتصادية التي يتم صياغتها عادة بصيغ رياضية لتوضيح اتجاه هذه العلاقات ، وغالبا مايشار لهذه العلاقات بالمعادلات الهيكلية، ويتضح من التعريف المذكور ان النماذج الاقتصادية تسهل عملية وضع صورة مبسطة وسهلة الفهم والتحليل لكيفية عمل الانشطة ضمن اقتصاد معين أو نشاط اقتصادي محدد خلال مدة زمنية معينة في صورة تجريد محدد او رموز او قيم عددية.

مكونات الأنموذج الاقتصادي: *Economic Model Components*

يتكون الأنموذج الاقتصادي في ضوء النظرية الاقتصادية من مجموعة من العناصر والعلاقات الاقتصادية والصيغ الهيكلية التي توضح الهيكل الاساس للأنموذج المراد بناؤه.

عناصر الأنموذج الاقتصادي: *Economic model Elements*

يتكون الأنموذج الاقتصادي من العناصر الاتية:-

اولا: المتغيرات *Variables*

ثانيا: الثوابت *Constants*

ثالثا: المعلمات *Parameters*

اولا: المتغيرات Variables

تمثل متغيرات الانموذج الاقتصادي أي شيء يتغير مقداره (قيمته) مثل السعر P ، والتكاليف C ، والانتاج Y ، والاستثمار I، والربح π، والصادرات X، والواردات M، وغيرها من المتغيرات الاقتصادية المعروفة، ويمكن تصنيف المتغيرات التي يتضمنها الأنموذج الاقتصادي الى عدة انواع وكما يأتي:-

أ- **متغيرات خارجية *Exogenous Variables***: وهي المتغيرات التي يتم تحديد قيمتها من خارج الانموذج بوساطة عوامل لم تتم مناقشتها داخل الأنموذج ، وفي بعض الاحيان يتم تحديد قيمتها بوساطة أنموذج آخر مختلف عن الأنموذج الحالي، او بوساطة آليات خارجية قد تكون سياسية او اجتماعية وغيرها وتسمى احيانا بالمتغيرات التحكمية عندما يكون بالامكان التحكم بها *Control Variables* . وتنقسم المتغيرات الخارجية بحسب درجة تاثيرها في الأنموذج الاقتصادي الى الاتي:-

- **متغيرات خارجية أداتية تحكمية** : وهي متغيرات خارجية تستخدم أدوات للتحكم او التأثير في المتغيرات الداخلية المستهدفة مثل مستوى الضرائب T أو مستوى الانفاق الحكومي G أو مستوى سعر الفائدة r وغيرها.
- **متغيرات خارجية غير اداتية** : وهي متغيرات خارجية لا تستخدم أدوات للتحكم في او التاثير في المتغيرات الداخلية المستهدفة ، وقد تكون ذات ابعاد غير اقتصادية كأن تكون بيئية او اجتماعية او سكانية او غير ذلك.

ب-**متغيرات داخلية *Endogenous Variables***: وهي المتغيرات التي يتم تحديد قيمتها ضمن الانموذج الاقتصادي نفسه عن طريق المعاملات *Coefficients* ، وقيم المتغيرات الخارجية للانموذج، وتنقسم المتغيرات الداخلية الى الاتي:-

- **متغيرات هدفية** : وهي متغيرات يراد استهدافها او التاثير فيها.
- **متغيرات غير هدفية:** لا يراد التحكم بها او التاثير فيها.

وكمثال على المتغيرات الخارجية والداخلية ناخذ الأنموذج الآتي:-

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_o - M$$

نجد هنا ان كلا من الاستهلاك C، والدخل القومي Y، و الواردات M ، هي متغيرات داخلية يمكن تقديرها او تقييمها من خلال معرفتنا للمتغيرات الخارجية، في حين يعد الاستثمار I_o، والانفاق الحكومي G_o، والصادرات X_o، متغيرات خارجية تحدد بفعل قوى وآليات من خارج الأنموذج، ويلاحظ ان المتغيرات الخارجية تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتاثر بها، بينما المتغيرات الداخلية تتأثر ببعضها وبالمتغيرات الخارجية.

كما ان هناك انواعا اخرى من المتغيرات قد يحتويها النموذج الاقتصادي يمكن تصنيفها على النحو الاتي:-

١. **المتغيرات المتباطئة زمنيا(المتخلفة زمنيا) *Lagged variables*** : وهي المتغيرات التي تنتمي الى مدة زمنية سابقة ، وكمثال على ذلك الانفاق الشخصي الحالي الذي قد لايعتمد على الدخل الشخصي المتاح للانفاق في السنة الحالية فقط ، ولكن ايضا يعتمد على الدخل الشخصي المتاح للانفاق في سنوات سابقة (مدة الابطاء) ، ويمكن توضيح ذلك من خلال معادلة الفروق الاتية:-

$$C_t = c_o + c_1 Y_t + c_2 Y_{t-1} + c_3 Y_{t-2} + c_m Y_{t-n} + U_t ....$$

ويطلق على هذه المعادلة بأنموذج مراحل الابطاء(التخلف) الموزعة ، وهنا تعتمد القيمة الحالية للمتغير التابع C_t الحالي على المجموع المرجح لمتغيرات القيمة الحالية والقيم السابقة للمتغيرات المستقلة (Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t) فضلا عن المتغيرات العشوائية (U_t).

٢. **المتغيرات العشوائية *Random variables*** :وهي المتغيرات التي تتولد قيمتها بفعل عملية عشوائية وبذلك يحكمها قانون احتمالي إذ ان المتغير العشوائي عبارة عن حد الخطأ Error term والذي يمثل المتغيرات التي تؤثر في الانفاق الاستهلاكي (كما في مثالنا السابق) والتي يصعب اخذها في الاعتبار بوضوح.

ثانيا: الثوابت *Constants*

يعرف الثابت بانه كمية او مقدار او رمز جبري لا تتغير قيمته مثل ٧ ، ٩ ، ٦ ، b، c ، وهو عكس المتغير ويسمى احيانا بثابت التقاطع *Intercept* ، وتظهر هذه الثوابت منفردة في الانموذج الاقتصادي ويسمى بالحد المطلق *Absolute term*، او انها تظهر بصورة مقترنة بالمتغيرات، فإذا ظهرت مقترنة بالمتغيرات تسمى معاملات *Coefficients* او بالميل *Slope* فمثلا $7P$ في هذه الحالة يسمى ٧ بمعامل او بميل المتغير P . فمثلا معادلة الخط المستقيم $y = a + bx$ وهي دالة خطية من الدرجة الاولى ، بمعنى انها تطبق على أي خط مستقيم مثل

$y=\frac{1}{2}+4x$ او $y=5+6x$ ، أي ان b,a تكون معلمات ثابتة وهذه الثوابت او المعلمات تكتب بالرموز الانجليزية او اللاتينية وهي معلمات الأنموذج الاقتصادي ***Parameters*** ، أما قيم هذه المعلمات والتي هي $\left(4\ ,\ \frac{1}{2}\right)$و $(6\ ,5)$ فيطلق عليها معاملات***(Coefficients)*** وهذه المعلمات تشكل الجزء الثالث من عناصر الأنموذج الاقتصادي.

العلاقات في الانموذج الاقتصادي:

تعرف العلاقات في الانموذج الاقتصادي بانها مجموعة من الاليات يمكن استخدامها في تحديد حجم التاثير المتبادل بين عناصر الانموذج الاقتصادي ، وتسمى العلاقات بسلوك الأنموذج الاقتصادي او ديناميكية المتغيرات الاقتصادية مع بعضها ، وتندرج تحت هذا العنوان بعض العلاقات الاقتصادية منها:-

١. **العلاقات الاقتصادية السلوكية *Behavioral Relationships* :** تستخدم العلاقات السلوكية لوصف سلوك الوحدات الاقتصادية كسلوك المستهلكين وسلوك المنتجين وغيرها من سلوك الوحدات الاقتصادية محل الدراسة، فمثلا لمعرفة متوسط نصيب الفرد من الناتج المحلي Y نجد ان:

$$Y=\frac{GDP}{N}$$

إذ ان ، GDP: الناتج المحلي الاجمالي ، و N عدد السكان .

٢. **العلاقات الاقتصادية الفنية *Technical Relationships*** :هي العلاقات التي تشرح او تصف الارتباط الفني لمتغير بمتغير آخر ، مثل العلاقة بين مستوى الانتاج من منتج ما والمدخلات اللازمة لانتاج هذا المنتج، كالعلاقة التي توضحها دالة كوب دوكلاص للانتاج.

$$Q=AK^{\alpha}\,L^{\beta}$$

اذ ان:-

Q= حجم الانتاج — A = معلمة الكفاءة

K= راس المال المستخدم — α= مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر راس المال

L= العمل — β= مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر العمل

٣. **العلاقات الاقتصادية الجزئية والكلية *Micro & Macro Relationships***: تمثل العلاقات الجزئية ***Micro Relationships*** العلاقة التي تتعلق بالوحدات الاقتصادية وتتناول السلوك الاقتصادي لتلك الوحدات، وهي قد تكون جزئية سلوكية ، كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة ، أي علاقة طلب المستهلك على سلعة ما واسعار تلك السلعة واسعار السلعة البديلة ودخل المستهلك وكما موضحة بالصيغة الاتية:-

$$Q_d = a + b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 Y$$

اذ ان:-

Q_d= الكمية المطلوبة ، P_1=سعر السلعة المطلوبة ، P_2= سعر السلعة البديلة

Y= دخل المستهلك ، (b_3, b_2, b_1, α)= معلمات

أما العلاقات الكلية *Macro Relationships*: فهي تلك العلاقات التي تربط بين متغيرات اقتصادية تتصل بسلوك المتغيرات الاقتصادية العامة والبنية العامة للاقتصاد ، بمعنى ان العلاقات الكلية تشمل قطاعات كاملة في الاقتصاد مثل العلاقة الكلية للاستهلاك الكلي(القومي ويسمى احيانا الوطني) والاستثمار العام والدخل القومي (الوطني) وغيرها من العلاقات والتي منها المعادلة الهيكلية للدخل القومي:-

$$Y = C + I + G_o$$
$$C = C_o + c_1 Y$$
$$I = I_o - ir$$

وبدورها قد تكون العلاقات الكلية فنية او سلوكية وهكذا.

٤. **العلاقات الاقتصادية الساكنة *Static Relationships*** : هي العلاقات التي لا يكون الزمن احد متغيراتها او مؤثرا في تغيير قيم احد المتغيرات الداخلة فيها (أي من دون مدد إبطاء زمني) مثل انموذج ساكن لتعظيم منفعة المستهلك والعلاقات الساكنة مختلفة ، فقد تكون جزئية سلوكية او قد تكون كلية سلوكية وقد تكون جزئية فنية او كلية فنية وما الى ذلك.

٥. **العلاقات الاقتصادية الحركية *Dynamic Relationships*** : وهي تلك العلاقات التي يكون الزمن احد متغيراتها او مؤثرا في احد متغيراتها، فالعلاقات المتحركة توضح كيفية تاثير الزمن في المتغيرات الاقتصادية ، وتعد هذه العلاقات اكثر واقعية وقد تكون هذه العلاقات متحركة مستمرة او متصلة *Continuous* ويمكن التعبير عنها بمعادلات تفاضلية ، او قد تكون علاقات متحركة منفصلة او متقطعة *Discrete* ويمكن التعبير

عنها بمعادلات فروق وكمثال على العلاقات الحركية التي يمكن التعبير عنها وفق الدالة الاتية:

$$C = c_o + c_1 Y + c_2 Y_{t-1}$$

إذ تشير C الى متوسط استهلاك الفرد من السلع المنتجة في السنة الجارية ، في حين تمثل Y الدخل النقدي الحقيقي الفردي في السنة الجارية ، بينما تشير Y_{t-1} الدخل النقدي في السنة السابقة ، اما كلا من c_2, c_1, c_o فتمثل معلمات الأنموذج الاقتصادي، وتعد هذه العلاقة سلوكية كلية حركية فمن حيث كونها سلوكية فلأنها تصف سلوك متوسط استهلاك الفرد عندما يتغير الدخل، اما كونها علاقة كلية فلانها تصف سلوك المستهلكين في المتوسط ككل وليست وصفاً لمستهلك واحد، اما كونها علاقة حركية لأن المستهلكين لا يتاثرون بالدخل في المرحلة الحالية فحسب بل بالمراحل السابقة ايضا.

٦. **العلاقات الاقتصادية التعريفية *Definitional Relationships*** : وهي العلاقات التي تعبر عن علاقة اقتصادية ناتجة عن تعاريف متفق عليها ، او هي العلاقات التي تعرف احد المتغيرات تعريفا غير مشروط ، أي انها معادلات محاسبية ، فإذا عرفنا الدخل(Y) بأنه يساوي الاستهلاك(C) والادخار(S) فإنه يمكننا القول ان الادخار يساوي الدخل ناقصا الاستهلاك:-

$$Y = C + S \rightarrow S = Y - C$$
$$S = I \qquad \rightarrow I = Y - C$$

٧. **العلاقات الاقتصادية التنظيمية *Organizational Relationships*** : وتسمى تنظيمية او تشريعية لان المجتمع هو الذي ينظمها ، وهي تستخدم لوضع متغيرات تحدد مسبقا من خلال التشريعات والقوانين التنظيمية في المجتمع ، وكمثال على ذلك العلاقة بين الحصيلة الضريبية والمبيعات من سلعة معينة ، إذ ان الحصيلة الضريبية تساوي المعامل الضريبي مضروبا في قيمة المبيعات أي ان:

$$T_x = t.S$$

إذ يمثل t المعامل الضريبي بينما تمثل S قيمة المبيعات وهذه العلاقة تعد تنظيمية تعريفية كلية.

٨. **العلاقات الخطية وغير الخطية *Linear & Non Linear Relationships*:**

أ- **العلاقات الخطية *Linear Relationships*:** تعرف العلاقة الخطية بانها تلك التي تتخذ معادلتها الصيغة الخطية ، وتظهر متغيرات هذه العلاقات في صورة معادلات من الدرجة الاولى والتي يعبر عنها بيانيا في صورة خط مستقيم، وهنا يمكن التمييز بين نوعين من العلاقات الخطية هما:

- **العلاقات الخطية البسيطة *Simple Linear Relationships*:** وهي تلك العلاقة التي تتكون من معادلة واحدة معالمها خطية وتحتوي على متغيرين فقط ، مثل دالة الاستهلاك $C = c_o + c_1Y$ ، وكذلك دالة الطلب $Q_d = a - bP$ ، ودالة العرض $Q_s = -c + dP$.
- **العلاقات الخطية العامة *General Linear Relationships*** : وتسمى بالأنموذج الخطي العام وتتكون من متغيرين مستقلين او اكثر ، وكلما ازداد عدد المتغيرات كلما اصبحت العلاقة اكثر تعقيدا مما يجعل من الضروري استخدام المصفوفات لحلها ، وتسمى ايضا العلاقات الخطية متعددة المتغيرات وكمثال على ذلك معادلة الطلب على سلعة معينة والتي تعتمد الكمية المطلوبة فيها على سعر السلعة موضوع الدراسة ودخل المستهلك كما يمكن اضافة عوامل اخرى وسنقتصر هنا على متغيرين مستقلين فقط:-

$$Q_d = a - b_1P + b_2Y$$

ب- **العلاقات غير الخطية *Non Linear Relations*:** هنا تكون متغيرات العلاقة الاقتصادية او بعضها تحمل أسا اعلى من الدرجة الاولى ، ولا تشكل هذه العلاقة خطا مستقيما ، واي علاقة مرفوعة لأس غير الواحد تعد علاقة غير خطية ولا تمثل خطا مستقيما ، وكمثال على ذلك دالة انتاج كوب – دوكلاص

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

خطوات بناء الأنموذج الاقتصادي

Steps of Building Economic Model

تمثل هذه الخطوات امكانية تحويل الانموذج الاقتصادي الوصفي *Descriptive Economic Model* الى انموذج اقتصادي رياضي *Mathematical Economic Model* وتسمى هذه الخطوات بخطوات توصيف الانموذج *Specification of the model* :

١. **تحديد متغيرات الأنموذج *Variables Determination*** : وهنا يتم تحديد المتغيرات الخارجية والداخلية للظاهرة محل البحث.

٢. **وضع الفروض الاقتصادية *Economic Assumptions*** : تعد هذه الخطوة مهمة جدا وتعتمد على الفروض والمعطيات والنظريات الاقتصادية المعروفة لتحديد نوع العلاقة واتجاه وطبيعة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ، فمثلا نقول ان شرط التوازن يحدث عندما تتساوى الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة ، او نقول مثلا ان الكمية المطلوبة دالة متناقصة في السعر (*Decreasing Function*) وهكذا.

٣. **تحديد الشكل الرياضي للانموذج الاقتصادي *Mathematical form Determination*** وهنا يتم تحديد المتغيرات ونوع العلاقات بين هذه المتغيرات والمعادلات ودرجتها ومدى تجانسها واتساقها وارتباطها مع بعضها ومع هدف الأنموذج الرياضي.

٤. **الحل الرياضي للانموذج *Mathematical Solution*** : ونعني بالحل الرياضي ايجاد القيم التي تحقق توازن الأنموذج الاقتصادي ، وهذا يعتمد على عدد معادلات الأنموذج وعدد متغيراتها ودرجتها ويتم هذا باستخدام الطرائق الرياضية البسيطة او الجبر الخطي او غيرها من الاساليب الرياضية.

٥. **التمثيل البياني للأنموذج الاقتصادي *Graphical Presentation*** : وهو العرض البياني للأنموذج الاقتصادي أي تمثيل العلاقة بين اهم متغيرين او ثلاثة في اقصى حد مما يساعد في تبسيط فهم تركيب الأنموذج.

انواع الدوال *Types of Functions*:

يعبر عن الدالة بشكل عام بانها علاقة بين متغيرين واكثر. وعلى وفق ذلك يمكن تقسيم الدوال الى مجموعتين رئيستين هما:-

١. **الدوال ذات المتغير الواحد Functions of one variable** :- وهنا يكون المتغير التابع دالة لمتغير مستقل واحد فقط مثل الصيغة الاتية: $y = f(x)$. وتتدرج تحت هذا النوع الدوال الاتية:-

- الدالة الخطية *Linear Function* وتأخذ الصيغة الاتية $y = a_0 + a_1 x$
- الدوال غير الخطية *Non Linear Functions*: و هي دوال الدرجة الثانية او الدرجة الثالثة او اكثر وتاخذ الصيغ الآتية:-

أ- الدالة التربيعية *Quadratic Function*: ويعبر عنها بالصيغة الاتية: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

ب-الدالة التكعيبية *Cubic Function*: وتاخذ الصيغة الآتية:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

- الدوال اللوغاريتمية *Logarithmic Functions* : يمكن كتابة صيغتها $y = \log_b x$:
- الدوال الاسية *Exponential Functions*: يعبر عنها يالصيغة الاتية: $y = b^x$

٢ - **الدوال ذات متغيرين او اكثر *Functions of two or more variables*** : تجدر الاشارة الى ان معظم الدوال الاقتصادية تكون ذات متغيرين او اكثر كدوال الطلب والعرض إذ يتاثر المتغير التابع بمجموعة من العوامل وليس بعامل واحد ، وبشكل عام يمكن كتابة الصيغة العامة لهذه الدوال بالشكل الآتي:

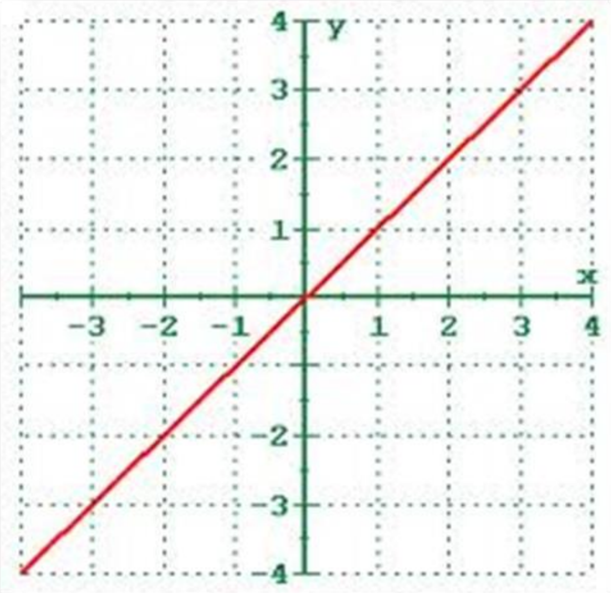
$$y = f(x, z, w)$$

ولو عبرنا عن دالة الطلب متعددة المتغيرات فيمكن كتابتها كما يأتي:-

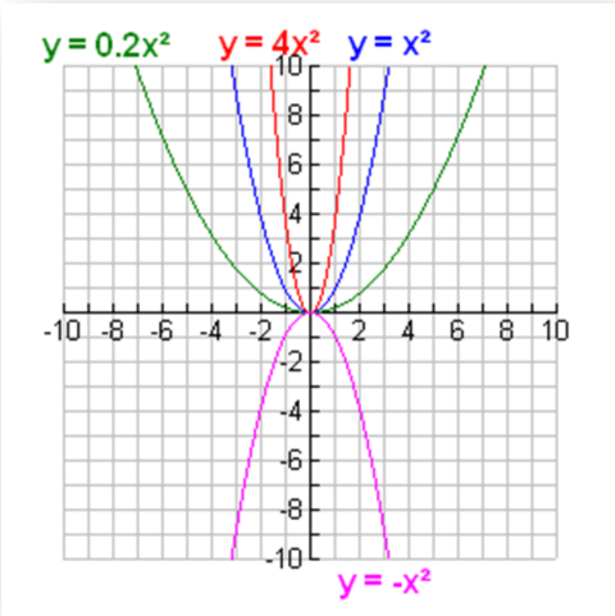
$$Q_d = f(P_x, P_y, I, T)$$

فيعبر عن سعر السلعة بالمتغير P_x ، وعن اسعار السلع الاخرى P_y، وعن الدخل I، وعن الاذواق T.

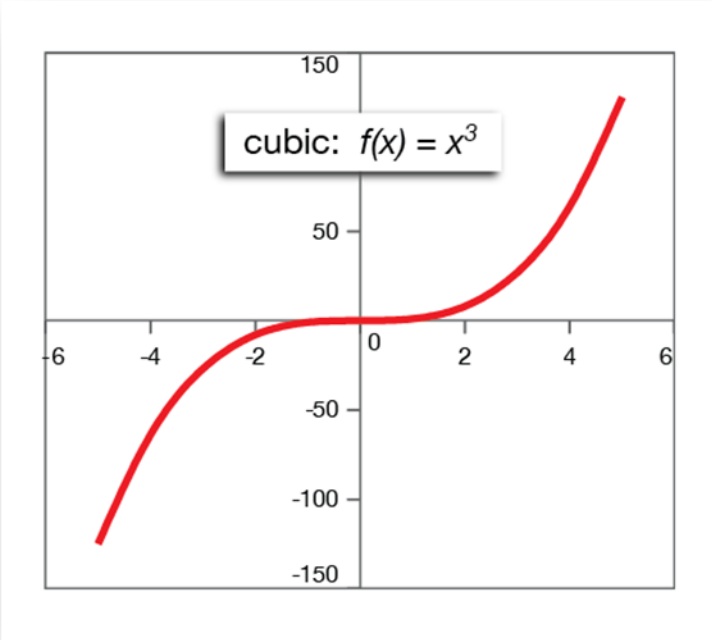
يشير الشكل البياني الآتي إلى اشكال الدوال المختلفة :



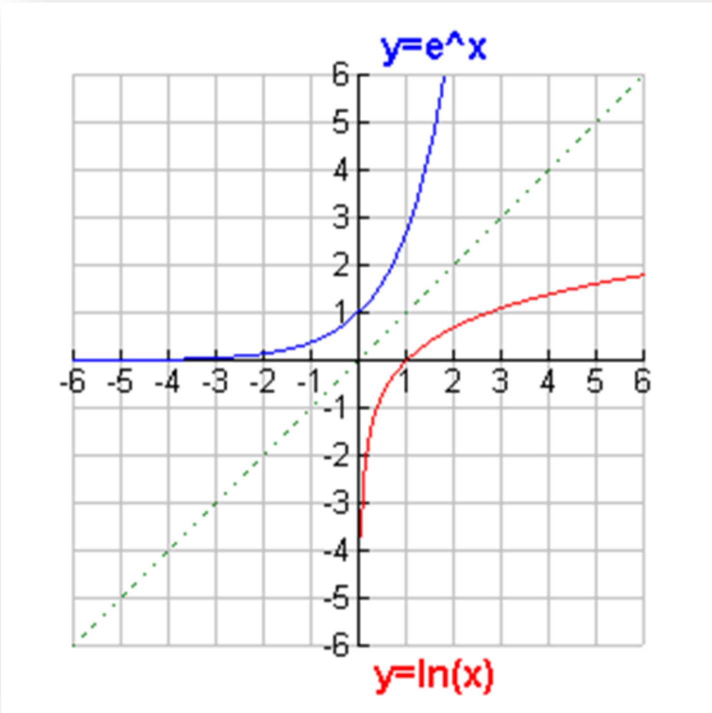
الدالة الخطية



الدالة التربيعية



الدالة التكعيبية



الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

شكل (١) التمثيل البياني لاشكال الدوال المختلفة

مصادر الفصل الاول//

١. ابي محمد صبري الوتار و اثيل عبد الجبار الجومرد – مدخل الى الاقتصاد الرياضي – دار الكتب للطباعة والنشر – جامعة الموصل– العراق– ١٩٩٣.

٢. اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات.

٣. حسين علي بخيت – مباديء الاقتصاد الرياضي– كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ,٢٠٠٠

٤. الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات.

٥. شمعون شمعون – الرياضيات الاقتصادية – ديوان المطبوعات الجامعية – الساحة المركزية – الجزائر– منشور على شبكة المعلومات.

٦. مجلة العلوم – ١٩٩٧– مؤسسة الكويت للتقدم العلمي – منشور على الموقع الالكتروني www.google.com

7- Chiang.C Alpha. Fundamental Methods of Mathematical Economics.3rd edition.McGraw-Hill,Inc.1984

الفصل الثاني

تحليل التوازن في الاقتصاد

Equilibrium Analysis in Economic

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على:

- مفهوم وأنواع التوازن
- التوازن الجزئي والتوازن الكلي
- تأثير الضرائب والاعانات الانتاجية في التوازن
- التوازن في سوق ذي سلعتين واكثر
- التوازن في النماذج غير الخطية
- استخدام المصفوفات في التوازن

الفصل الثاني

تحليل التوازن في الاقتصاد

Equilibrium Analysis in Economic

مقدمة

إن الحديث عن مفهوم التوازن يقصد منه توازن السوق في الاقتصاد وهو الحالة التي تكون فيها قوى العرض والطلب على السلع عند وضع الاستقرار الذي لايرغب احد في تغييره. كما يعرف التوازن بأنه" رقم لمجموعة قيم من المتغيرات المختارة لعلاقة متبادلة ومتسقة مع بعضها ومتوافقة كلا مع الاخر الى درجة ان الأنموذج الذي يتضمنها لا يعتريه أي نزوع داخلي نحو التغير، ويعرف التوازن بانه الثبات (الاستقرار) في السوق ، كما يعرف بأنه توافق رغبات المنتجين او المسوقين لسلعة ما ممثلا بمنحنى العرض مع رغبات المستهلكين ممثلا بمنحنى الطلب.

عند التعرض الى مفهوم التوازن ينبغي توضيح مفهومين من التوازن هما ، التوازن المستهدف وغير المستهدف وكما يأتي:-

- **التوازن المستهدف:** هو محاولة تحقيق مستويات معينة مستهدفة لمتغيرات اقتصادية معينة ، مثل تحقيق معدل معين من نمو الدخل القومي خلال مدة زمنية محددة او تحقيق معدل نمو محدد في الصادرات او معدل محدد في مستويات الاستخدام (التوظيف) ، ويطلق على هذا النوع من التوازن بالتوازن الأمثل Optimal Equilibrium
- **التوازن غير المستهدف** : هو الذي ينشأ نتيجة تعادل وتفاعل القوى الاقتصادية وغير الاقتصادية ، ولا يحقق الاهداف او المؤشرات المقترحة والمرجوة ، على سبيل المثال التوازن الذي ينشأ في سوق سلعة معينة نتيجة تعادل قوى العرض والطلب او توازن الدخل القومي تحت ظروف معينة من الاستهلاك والاستثمار.

سيتم تناول التوازن في الحالات الآتية:-

أولاً: التوازن الجزئي

ثانياً: التوازن الكلي

أولاً : التوازن الجزئي سيتم تناول التوازن الجزئي في الحالات الآتية:

1. **النماذج الخطية :**
2. **التوازن الجزئي للنماذج الخطية بعد اضافة ضريبة**
3. **النماذج اللاخطية**
4. **استخدام المصفوفات في تحليل التوازن**

١. النماذج الخطية

نماذج التوازن الجزئي: يقصد بأنموذج التوازن الجزئي *Partial Equilibrium* في سوق معينة هو تحديد السعر والكمية التوازنية في سوق سلعة واحدة بمعزل عن بقية اسواق السلع الاخرى ، ويمكن تطبيق خطوات بناء النماذج باتباع الخطوات الاتية:-

أ- **تحديد متغيرات الأنموذج *Variables Determination*** : تتحدد المتغيرات في هذه النماذج المبسطة بثلاثة متغيرات هي الكمية المطلوبة Quantity Demanded (Q_d) ، والكمية المعروضة Quantity Supplied (Q_s) ، وسعر السلعة Price (P).

ب-**وضع الفروض الاقتصادية *Economic Assumptions*** : وهي الفروض عن آلية او نظام عمل السوق ، اذ ان الشرط الاول لتحقيق التوازن هو تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة من السلعة اذ ان:

$$Q_d = Q_s$$

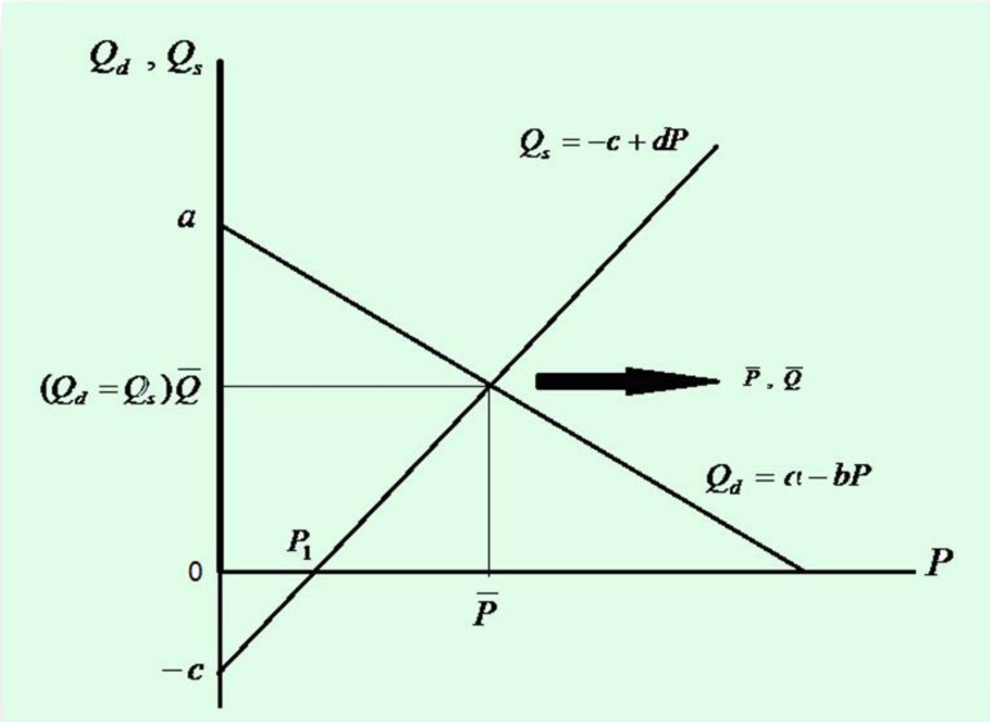
وبحسب النظرية الاقتصادية فينبغي ان تكون الكمية المطلوبة دالة متناقصة في السعر (قانون الطلب) وان الكمية المعروضة دالة متزايدة في السعر (قانون العرض)

ج- **تحديد الشكل الرياضي للانموذج *Mathematical form*** : أي ترجمة الفروض المعطيات الى معادلات رياضية اذ ان:

- شرط التوازن هو : $Q_d = Q_s$
- دالة الطلب هي : $Q_d = a - bP \qquad (a, b > 0)$
- دالة العرض هي : $Q_s = -c + dP \qquad (c, d > 0)$

د- **التمثيل البياني للانموذج *Graphical model*** : يوضح الشكل رقم (٢) التمثيل البياني لأنموذج السوق الجزئي لسوق سلعة واحدة ، إذ تظهر دالة الطلب في الشكل بميل سالب $(-b)$ وبجزء مقطوع من المحور الرأسي موجب عند النقطة a وتظهر دالة العرض

بميل موجب $(+d)$ وجزء مقطوع من المحور الرأسي سالب عند النقطة $(-c)$. وتجدر الاشارة الى انه يمكن حل أنموذج التوازن بيانيا وكما سيتم توضيحه لاحقا.



شكل (٢) التمثيل البياني لأنموذج السوق الجزئي لسلعة واحدة

د- الحل الرياضي للانموذج *Mathematical Solution*: يمثل الحل الرياضي للانموذج الحصول على قيم المتغيرات الثلاث (P, Q_d, Q_s) التي تحقق شرط التوازن، وتجدر الاشارة الى ان هناك اكثر من طريقة لحل الأنموذج الخطي منها:

أ- طريقة التعويض *Substitution Method*

ب-طريقة الحذف *Elimination Method*

وسيتم تناول التوازن في الحالات الآتية:

1. **التوازن في سوق ذي سلعة واحدة**
2. **التوازن في سوق ذي سلعتين واكثر**

١. التوازن في سوق ذي سلعة واحدة//

مثال (٢,١) : لديك أنموذج السوق الاتي ، استخرج السعر والكمية التوازنيتين بدلالة معلمات الأنموذج (الاسلوب المباشر).

$$Q_d = a - bP$$
$$Q_s = -c + dP$$

إن شرط التوازن كما بيناه سابقا هو $Q_d = Q_s = \overline{Q}$

$$a - bP = -c + dP$$
$$dP + bP = a + c$$
$$(b + d)P = a + c$$

اذن معادلة السعر التوازني هي $\boxed{\overline{P} = \frac{a + c}{b + d}}$

هنا نلاحظ ماياتي:-

١. إن السعر التوازني $\overline{P}$ الذي تم الحصول عليه قد تم التعبير عنه بالكامل بدلالة معلمات الأنموذج جميعها.
٢. إن قيمة السعر التوازني هي قيمة محددة لان معلمات النموذج هي بيانات معطاة ومحددة مسبقا.
٣. إن السعر التوازني الذي حصلنا عليه هو سعر موجب لان المعلمات جميعها التي يتضمنها الأنموذج قد افترضت من البداية انها موجبة.

وللحصول على الكمية التوازنية $\overline{Q}$ نعوض عن السعر التوازني $\overline{P}$ في أي من معادلتي الطلب والعرض فلو عوضنا عن السعر التوازني في دالة الطلب:

$$\overline{Q} = a - b\left(\frac{a + c}{b + d}\right)$$
$$\overline{Q} = a - \frac{ab + bc}{b + d}$$
$$\overline{Q} = \frac{a(b + d)}{b + d} - \frac{ab + bc}{b + d} \Rightarrow \overline{Q} = \frac{ab + ad - ab - bc}{b + d}$$

وعليه فان الكمية التوازنية هي:

$$\boxed{\overline{Q} = \frac{ad - bc}{b + d}}$$

وكما تمت ملاحظته في السعر التوازني يمكن ادراج الملاحظات الاتية عن الكمية التوازنية:

١. تم الحصول على الكمية التوازنية بدلالة معلمات الأنموذج جميعها.
٢. إن قيمة الكمية التوازنية هي قيمة موجبة

٣. يمكن التحقق من اننا سنحصل على الكمية التوازنية نفسها لو قمنا بالتعويض عن السعر التوازني في دالة العرض.

مثال(٢,٢): جد السعر والكمية التوازنيتين لأنموذج السوق الاتي:-

$$Q_d = 18 - 2P \quad , \quad Q_s = -6 + 6P$$

يمكن استخراج $\overline{P}\ ,\ \overline{Q}$ بإحدى الطريقتين الآتيتين:-

١. **طريقة التعويض:**

$$Q_d = Q_s = \overline{Q}$$
$$18 - 2P = -6 + 6P$$
$$18 + 6 = 6P + 2P$$
$$24 = 8P \Rightarrow \overline{P} = \frac{24}{8} = 3$$

وبالتعويض عن قيمة $\overline{P}$ في احدى المعادلتين فنحصل على الكمية التوازنية:

$$\overline{Q} = 18 - 2(3) \Rightarrow \overline{Q} = 18 - 6 = 12$$

اذن السعر التوازني يساوي ٣ والكمية التوازني تساوي ١٢

٢. **طريقة الحذف:** تقوم هذه الطريقة على اساس ان حذف احد المتغيرين وذلك بضرب طرفي معادلته بقيمة معامل نظيره في المعادلة الاخرى وعندئذ يتم الحذف بجمع او طرح المعادلتين من بعضهما (ويتوقف ذلك على اشارة المعامل) ، وبالاعتماد على بيانات المثال (٢) يكون الحل كما يأتي:

اذا ضربنا طرفي معادلة العرض بمعامل سعر معادلة الطلب :

$$(-2)Q_s = (-2)(-6) + (-2)(6)P$$
$$-2Q_s = 12 - 12P \text{..........................}(1)$$

وبضرب طرفي معادلة الطلب بمعامل سعر معادلة العرض

$$(6)Q_d = (6)(18) - (6)(2)P$$
$$6Q_d = 108 - 12P \text{........................}(2)$$

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) وباعتماد حالة التوازن حيث $\overline{Q} = Q_d = Q_s$ يكون:

$$6\overline{Q} - (-2\overline{Q}) = 108 - 12 - 12P - (-12P)$$
$$6\overline{Q} + 2\overline{Q} = 96 - 12P + 12P$$
$$8\overline{Q} = 96 \Rightarrow \therefore \overline{Q} = \frac{96}{8} = 12$$

وبالتعويض في احدى المعادلتين يمكن ايجاد قيمة $\overline{P}$

$$-2(12)=12-12P$$
$$-24-12=-12P$$
$$-36=-12P$$
$$\overline{P}=\frac{-36}{-12}=3$$

مثال(٢,٣): اذا كانت دالتا الطلب والعرض في الأنموذج الخطي لتوازن السوق الجزئي كما يأتي:-

$$Q_d=30-2p$$
$$Q_s=-6+5P$$

المطلوب// جد السعر والكمية التوازنيتين مع التمثيل البياني لهما.

الحل

يمكن استخراج $\overline{P},\overline{Q}$ بدلالة معلمات الأنموذج او الاسلوب المباشر او عن طريق التعويض في الصيغ المختزلة في معادلتي الكمية التوازنية والسعر التوازني السابقين وكما يأتي:-

١. الاسلوب المباشر

$$\overline{P}=\frac{a+c}{b+d}\Rightarrow\overline{P}=\frac{30+6}{2+5}=\frac{36}{7}$$
$$\therefore\ \overline{P}\approx5.14$$
$$\overline{Q}=\frac{ad-bc}{b+d}\Rightarrow\overline{Q}=\frac{30(5)-2(6)}{2+5}=\frac{138}{7}$$
$$\therefore\overline{Q}\approx19.7$$

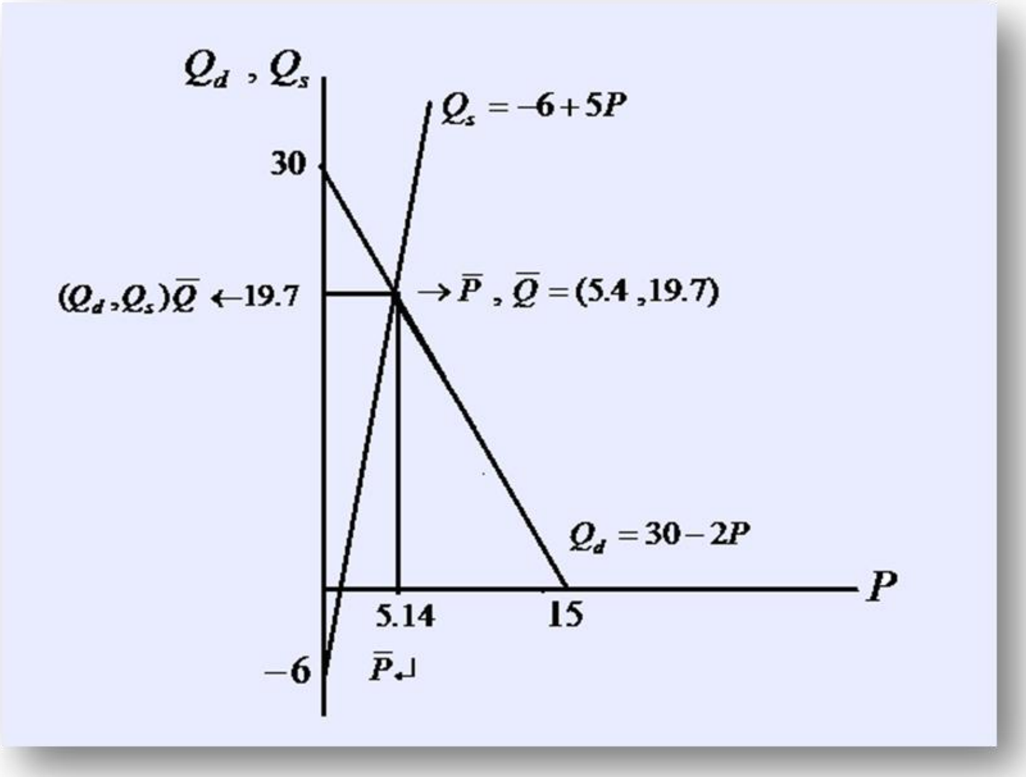
٢. طريقة التعويض

$$\because Q_d=Q_s$$
$$30-2P=-6+5P$$
$$30+6=5P+2P$$
$$36=7P$$
$$\therefore\overline{P}\approx5.14$$

ثم نعوض في أي من معادلتي العرض او الطلب بقيمة السعر التوازني نحصل على:

$$\overline{Q}=Q_s=30-2(5.14)$$
$$\therefore\overline{Q}\approx19.7$$

ويمكن رسم معادلتي الطلب والعرض وتحديد سعر وكمية التوازن كما في الشكل البياني (٣)



شكل (٣) أنموذج توازن سوق سلعة واحدة (مثال ٢,٣)

٢. تاثير الضرائب والاعانات الانتاجية في التوازن.

تتدخل الحكومة في النشاط الاقتصادي عن طريق عدد من السياسات الاقتصادية تهدف من خلالها الى التحكم في النشاط الاقتصادي ، ومن اشكال هذا التدخل هو تقديم اعانات او فرض ضرائب او كليهما على الانتاج، وتسمى هذه الضرائب بضرائب الانتاج النوعية *Qualitative Taxes* وهي عبارة عن فرض مبلغ معين كضريبة على كل وحدة من وحدات الانتاج ، وقد تفرض الضريبة على المبيعات وتسمى في هذه الحالة ضرائب القيمة المضافة *Value Added Taxes* وهي عبارة عن فرض نسبة معينة على سعر بعض السلع المباعة، ويؤثر النوعان من الضرائب على السعر والكمية التوازنيتين، وتتفاوت درجة تاثير فرض الضرائب بكلا نوعيها حسب :-

١. نوع السوق
٢. درجة المرونة السعرية
٣. نوع السلعة واهميتها

أ- تاثير ضرائب الانتاج النوعية في توازن سوق السلعة

وتجدر الاشارة الى ان فرض الضريبة النوعية سيؤثر في دالة العرض دون دالة الطلب ، فإذا كان مقدار الضريبة هو t فإن دالة العرض تصبح كما يأتي:

$$Q_s = -c + dP^*$$
$$or\ Q_s = -c + d(P - t)$$

وتبقى دالة الطلب دون تغيير $Q_d = a - bP$. وان تغير دالة العرض يكون بسبب تغيير السعر الذي يحصل عليه المنتج والذي سيكون اقل من سعر السوق بمقدار الضريبة وهذا يؤدي الى التقليل من الكمية المعروضة، كما ان فرض الضريبة النوعية على الانتاج سوف يؤدي الى ارتفاع السعر التوازني ولكن بمقدار اقل من الضريبة على الوحدة.

مثال (٢,٤) لديك أنموذج السوق الجزئي وتوجب على المنتج ان يدفع ضريبة على الانتاج مقدارها t لكل وحدة منتجة ، استخرج السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض الضريبة.

$$Q_d = a - bP \qquad\qquad Q_s = -c + dP$$

بعد فرض الضريبة ستكون دالة العرض كالاتي:-

$$Q_s = -c + d(P - t)$$

وتتكون لدينا ثلاث معادلات هي :

$$Q_d = a - bP.............................(1)$$
$$Q_s = -c + d(P - t)...................(2)$$
$$Q_d = Q_s....................................(3)$$

وبتعويض المعادلتين (١) و(٢) في المعادلة (٣) نحصل على :-

$$a - bP = -c + d(P - t)$$
$$a - bP = -c + dP - dt$$
$$a + c + dt = bP + dP$$
$$a + c + dt = P(b + d)$$

وبتقسيم الطرفين على $(b+d)$ نحصل على قيمة $\overline{P}$

$$\overline{P} = \frac{a + c + dt}{b + d} \Rightarrow \overline{P} = \frac{a + c}{b + d} + \frac{d}{b + d}t.................(4)$$

وبما ان السعر التوازني قبل فرض الضريبة هو:

$$P_0 = \frac{a + c}{b + d}$$

اذن السعر التوازني الجديد (بعد فرض الضريبة) يكون كما ياتي:

$$\overline{P} = P_0 + \frac{d}{b + d}t$$

ويتبين أن أثر الضريبة على السعر التوازني هو زيادته بالمقدار $\left(\frac{d}{b+d}t\right)$

وبتعويض المعادلة (٤) في معادلة الطلب او العرض نستطيع ايجاد الكمية التوازنية

$$\overline{Q} = a - bP \Rightarrow \overline{Q} = a - b\frac{(a+c+dt)}{b+d}$$

$$\overline{Q} = a - \frac{b(a+c+dt)}{b+d} \Rightarrow a - \frac{ba+bc+bdt}{b+d}$$

$$\overline{Q} = \frac{a(b+d)-ba-bc-bdt}{b+d}$$

$$\overline{Q} = \frac{ab+ad-ba-bc-bdt}{b+d}$$

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d} - \frac{bdt}{b+d} \text{.................................(5)}$$

من المعادلة (٥) يتبين ان الكمية التوازنية بعد فرض الضريبة تساوي

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d} - \frac{bd}{b+d}t$$

ولما كانت الكمية التوازنية قبل فرض الضريبة هي $\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}$

فان أثر الضريبة على الكمية التوازنية يكون بتقليلها بالمقدار $\left(\frac{bd}{b+d}t\right)$.

خلاصة القول ان السعر التوزني سوف يرتفع نتيجة وجود الضريبة بمقدار $\left(\frac{d}{b+d}t\right)$ ، ويكون صافي ما يحصل عليه البائع من بيعه لسلعة اقل بمقدار الضريبة المفروضة من سعر السوق الذي هو الان يتضمن الضريبة، أما الكمية التوازنية فسوف تنخفض عن مستواها قبل فرض الضريبة نتيجة لارتفاع السعر، وهكذا فإن السعر التوازني والكمية التوازنية عند نقطة التوازن بعد فرض الضريبة هما:

$$(\overline{P},\overline{Q}) = (\frac{a+c}{b+d} + \frac{dt}{b+d}\ ,\ \frac{ad-bc}{b+d} - \frac{bdt}{b+d})$$

مما سبق يتضح ان للضريبة أثراً واضحا على السعر والكمية التوازنيتين ، والسؤال الذي يتبادر الى الذهن ، من الذي يتحمل عبء الضريبة هل هو المنتج ام المستهلك ام كلاهما؟ وللاجابة على هذا السؤال سيعتمد على نوع السوق هل هو سوق منافسة تامة ام احتكار ام غير ذلك ، كذلك يعتمد على مرونة الطلب ومرونة العرض السعرية ، وبشكل عام يمكن اجمال ذلك بالنقاط الآتية:-

١. إذا كانت مرونة الطلب عالية $E_d > 1$ فمعنى ذلك ان أي ارتفاع في سعر السلعة سيؤدي الى انخفاض كبير في الكمية التي يطلبها المستهلكون، فاذا حاول المنتجون رفع سعر السلعة بمقدار الضريبة بحيث يتحملها المستهلك بالكامل فإن النتيجة انه سيكون

هناك فائض كبير في السلعة في السوق مما يضطرهم لتخفيض السعر للوصول الى كمية التوازن ، الامر الذي يجعل المنتجين يتحملون الجزء الاكبر من الضريبة .

٢. اذا كان الطلب على السلعة غير مرن $E_d < 1$ فإن رفع السعر بمقدار الضريبة لن يؤثر كثيراً على الكمية المطلوبة وبذلك يستطيع المنتجون ان ينقلوا الجزء الاكبر من عبء الضريبة الى المستهلكين من دون أي تاثير على الكمية المعروضة.

٣. يتحمل المستهلك عبء الضريبة باكمله اذا كان منحنى الطلب على السلعة عديم المرونة $E_d = 0$.

٤. يتحمل المنتج عبء الضريبة باكمله اذا كان منحنى الطلب على السلعة لانهائي المرونة $E_d = \infty$.

وكذلك الحال فيما يتعلق بمرونة العرض فكلما كان منحنى العرض اقل مرونة كلما تحمل المنتج الجزء الاكبر من عبء الضريبة ، وكلما كان منحنى العرض اكثر مرونة ، تحمل المستهلك الجزء الاكبر منها ، والحالة المتطرفة يتحمل المنتج عبء الضريبة باكمله اذا كان العرض عديم المرونة بينما يتحمل المستهلك عبء الضريبة باكمله اذا كان العرض لانهائي المرونة.

مثال(2.5): توفرت البيانات الآتية عن أنموذج خطي لسوق سلعة ما :

$$Q_d = 20 - 7P$$
$$Q_s = -4 + 5P$$

المطلوب //

١. ايجاد السعر والكمية التوازنيتين $\overline{Q}\ ,\ \overline{P}$

٢. ماهو اثر فرض ضريبة نوعية مقدارها ($t = 2$ على سعر وحدة الانتاج) على كل من السعر التوازني والكمية التوازنية

٣. من يتحمل التغيرات السعرية بسبب فرض الضريبة

الحل// بالطريقة المباشرة

١. السعر والكمية التوازنيتين قبل فرض الضريبة

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{20+4}{5+7} = \frac{24}{12}$$
$$\therefore \overline{P} = 2$$
$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d} = \frac{20(5)-7(4)}{5+7}$$
$$\therefore \overline{Q} = 6$$

$\therefore$ السعر التوازني $\overline{P} =$ ٢ ، والكمية التوازنية $\overline{Q} =$ ٦

٢. اثر فرض ضريبة نوعية على وحدة الانتاج مقدارها $t = 2$ على $\overline{Q}, \overline{P}$

معادلة السعر التوازني بعد فرض الضريبة هي:

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} + \frac{dt}{b+d}$$

$$\overline{P} = \frac{20+4}{5+7} + \frac{5(2)}{5+7}$$

$$\overline{P} = 2 + 0.83$$

$$\overline{P} \approx 2.83$$

اما معادلة الكمية التوازنية بعد فرض الضريبة فهي :

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d} - \frac{bdt}{b+d}$$

$$\overline{Q} = \frac{72}{12} - \frac{70}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\overline{Q} \approx 0.166$$

الحل بطريقة التعويض//

١. السعر والكمية التوازنيتين قبل فرض الضريبة

$$Q_d = Q_s = \overline{Q}$$

$$20 - 7p = -4 + 5P$$

$$20 + 4 = 7P + 5P$$

$$24 = 12P$$

$$\overline{P} = 2$$

$$\overline{Q} = 20 - 7\overline{P}$$

$$\overline{Q} = 20 - 7(2)$$

$$\overline{Q} = 6$$

٢. السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض الضريبة

تجدر الاشارة الى أن دالة الطلب لن تتغير في حين سيطرأ تغيير على دالة العرض وكما يأتي:

$$Q_d = 20 - 7P$$
$$Q_s^* = -4 + 5(P - t)$$
$$Q_s^* = -4 + 5(P - 2)$$
$$Q_s^* = -4 + 5P - 10 \Rightarrow Q_s^* = -14 + 5P$$
$$Q_d = Q_s^*$$
$$20 - 7P = -14 + 5P$$
$$34 = 12P$$
$$\overline{P} = 2.83$$
$$\overline{Q} = -14 + 5(2.83) \Rightarrow \overline{Q} \approx 0.16$$

التفسير الاقتصادي للنتائج المستخرجة:

تشير النتائج الى ان فرض ضريبة مقدارها ٢ ادى الى رفع السعر التوازني لوحدة الانتاج من ٢ وحدة نقدية الى ٢,٨٣ وحدة نقدية ، أي ان المستهلك قد تكبد جزءا من الضريبة المفروضة على المنتج مقداره (٢,٨٣−٢=٠,٨٣)، اما الجزء الذي يتحمله المنتج من الضريبة فهو (٢−٠,٨٣=١,١٦٧)، اما الكمية التوازنية فقد تاثرت هي الاخرى نتيجة فرض الضريبة وانخفضت بمقدار (6−0.16=5.84).

مثال(2.6): اذا علمت ان دالتي الطلب والعرض في السوق لسلعة ما هي:

$$Q_d = 10 - P$$
$$Q_s = 2P - 5$$

المطلوب:

1. **ايجاد السعر التوازني والكمية التوازنية**
2. **فرضت ضريبة نوعية مقدارها دينار واحد للوحدة المباعة . جد السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض الضريبة**
3. **التمثيل البياني لحالة التوازن قبل فرض الضريبة وبعدها**

الحل

التوازن قبل فرض الضريبة

يتحقق التوازن عندما :

$$Q_d = Q_s = \overline{Q}$$
$$10 - P = 2P - 5$$
$$10 + 5 = 2P + P$$
$$15 = 3P \Rightarrow \overline{P} = 5$$
$$\overline{Q} = 10 - 5 = 5$$

∴ السعر التوازني والكمية التوازنية قبل فرض الضريبة = (٥، ٥) على التوالي

التوازن بعد فرض الضريبة

شرط التوازن بعد فرض الضريبة ، حيث تتغير دالة العرض وتبقى دالة الطلب على حالها

$$Q_d = 10 - P$$

$$Q_s^* = 2(p-1) - 5 \Rightarrow Q_s^* = 2P - 2 - 5 \Rightarrow Q_s^* = 2P - 7$$

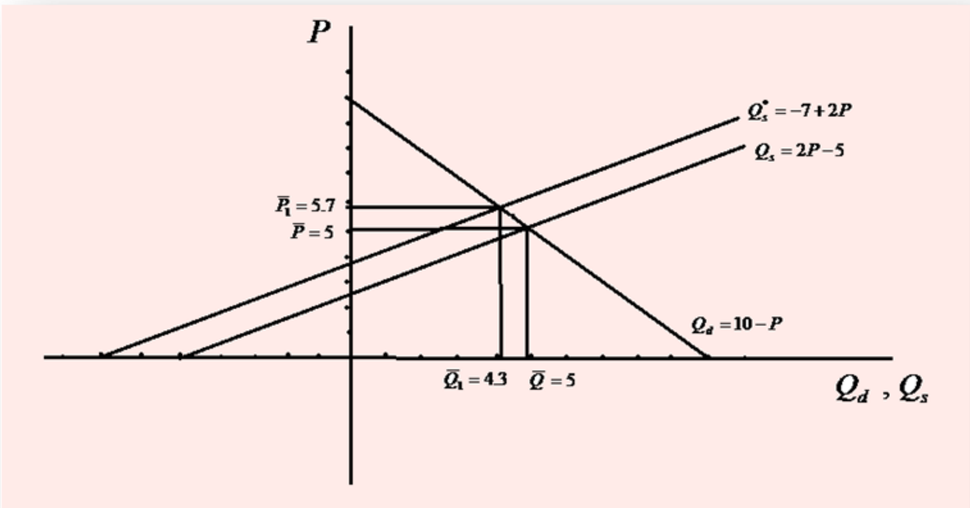
$$Q_d = Q_s^*$$
$$10 - P = 2P - 7$$
$$17 = 3P$$
$$\overline{P}_1 \approx 5.7$$
$$\overline{Q}_1 = 10 - 5.7 = 4.3$$

السعر التوازني والكمية التوازنية بعد فرض الضريبة = ٥,٧ ، ٤,٣ على التوالي

مقدار الزيادة في السعر التوازني : $\Delta\overline{P} = \overline{P}_1 - \overline{P} = 5.7 - 5 = 0.7$

مقدار النقصان في الكمية التوازنية: $\Delta\overline{Q} = \overline{Q}_1 - \overline{Q} = 4.3 - 5 = -0.7$

ويمكن توضيح حالة التوازن قبل وبعد فرض الضريبة بيانيا كما في الشكل البياني رقم (٤):



شكل (4) التمثيل البياني لتوازن السوق مثال (٢,٦)

ب- أثر ضرائب الانتاج القيمية على توازن سوق السلعة//

تختلف الضريبة القيمية عن النوعية بانها تفرض على المنتج كنسبة مئوية من السعر ، فاذا رمزنا لهذه النسبة بـ r فان دالة العرض ستاخذ الشكل الاتي:

$$Q_s = -c + dP(1-r)$$

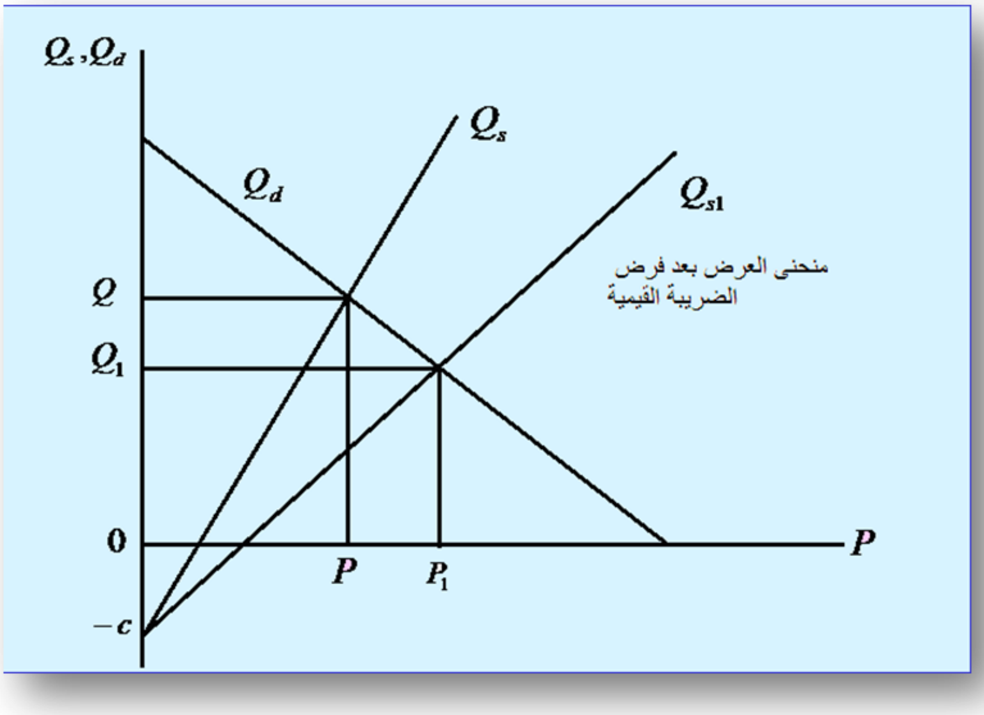
ولان السعر الذي سيتقاضاه المنتج هو سعر السوق مطروحا منه الضريبة كنسبة مئوية من السعر أي:-

$$P_r = P - rP = P(1-r)$$

اما دالة الطلب فستبقى على حالها من دون تغيير وسيأخذ التوازن شكله الجديد نظرا لتغير دالة العرض.

$$Q_s = -c + dP(1-r)$$
$$Q_d = a - bP$$
$$Q_d = Q_s$$

وبيانيا سنلاحظ ان منحنى دالة العرض سياخذ وضعا جديدا مقارنة بالحالة قبل فرض الضريبة وكما ياتي:-



شكل (٥) انتقال منحنى العرض بعد فرض ضريبة الانتاج القيمية

اما القيم التوازنية الجديدة بعد فرض الضريبة فنحصل عليها كما ياتي:-

$$-c + dP(1-r) = a - bP$$
$$-c + dP - drP = a - bP$$
$$dP - drP + bP = a + c$$
$$P(b + d - dr) = a + c$$
$$\overline{\overline{P}} = \frac{a+c}{b+d-dr}$$
$$\overline{\overline{Q}} = \frac{(ad-bc) - adr}{b+d-dr}$$

أي ان السعر الجديد هو اعلى من السعر قبل فرض الضريبة ويزداد السعر كلما ازدادت نسبة الضريبة r. اما الكمية التوازنية الجديدة فهي اقل من الكمية قبل فرض الضريبة وتتناقص كلما ازدادت r.

مثال (٢,٧):اذا توفرت لديك المعلومات الاتية عن دالة الطلب والعرض لسلعة ما في السوق:

$$Q_d = 40 - 0.2P$$
$$Q_s = -30 + 0.5P$$

المطلوب// ١- جد سعر وكمية التوازن ٢- فرضت ضريبة بنسبة ٢٥% من سعر السلعة ، احسب السعر والكمية التوازنيتين في ظل الوضع الجديد.

الحل

١- قبل فرض الضريبة:

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{40+30}{0.2+0.5} = \frac{70}{0.7} = 100$$
$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d} = \frac{(40)(0.5)-(30)(0.2)}{0.2+0.5} = \frac{14}{0.7} = 20$$

٢- بعد فرض الضريبة:

$$\overline{\overline{P}} = \frac{a+c}{b+d-dr} = \frac{40+30}{(0.2)+(0.5)-(0.5)(0.25)} = \frac{70}{0.575} = 121.739$$
$$\overline{\overline{Q}} = \frac{(ad-bc)-adr}{b+d-dr} = \frac{(40)(0.5)-(30)(0.2)-(40)(0.5)(0.25)}{(0.2)+(0.5)-(0.5)(0.25)} = \frac{9}{0.575} = 15.652$$

نلاحظ هنا ان السعر التوازني الجديد اكبر من السعر التوازني قبل فرض الضريبة أي ان :-

$$\overline{\overline{P}} > \overline{P}$$
$$121.739 > 100$$

في حين ان الكمية التوازنية الجديدة اقل من الكمية التوازنية قبل فرض الضريبة أي ان:-

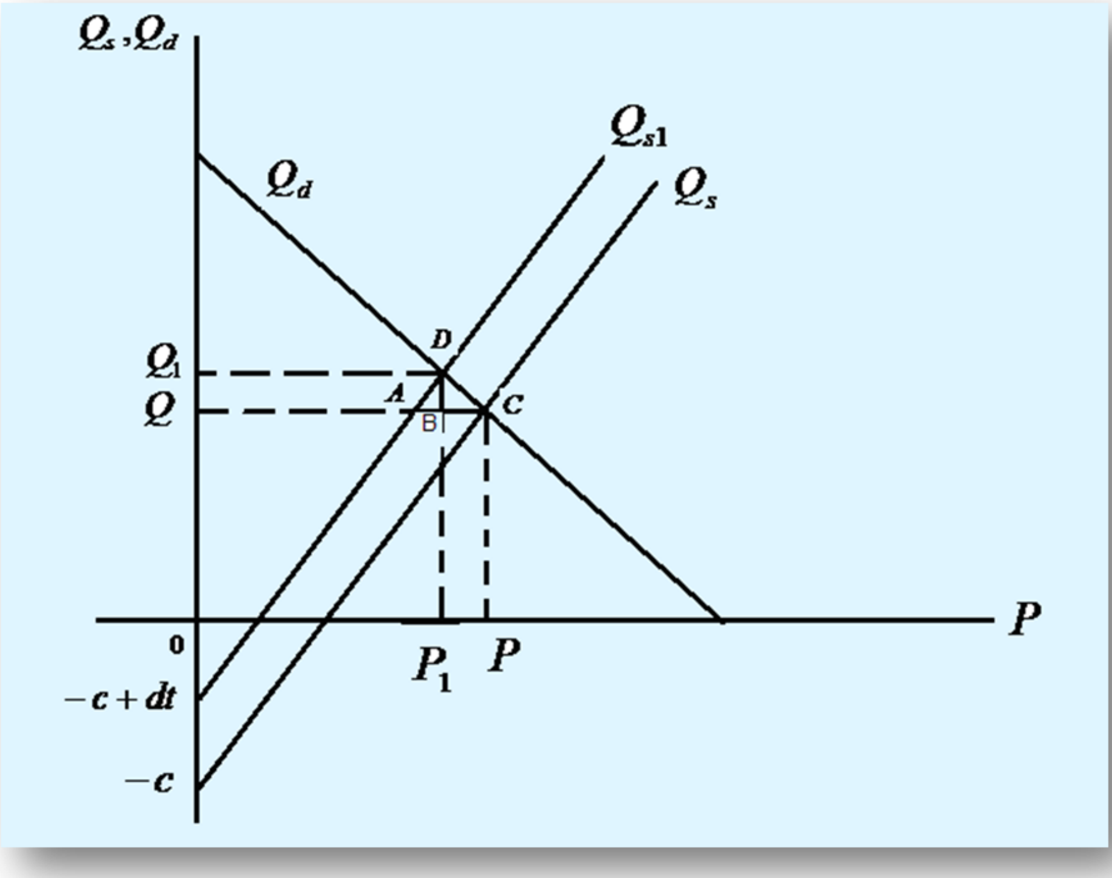
$$\overline{\overline{Q}} < \overline{Q}$$
$$15.652 < 20$$

ج- تاثير الاعانات الانتاجية على توازن سوق سلعة

الاعانات الانتاجية هي الاعانات التي تقدمها الحكومة للمنتج لتحفزه على زيادة الانتاج من سلعة معينة او تقديم خدمة معينة وتؤثر في توازن السوق بشكل مغاير لتاثير الضرائب . ان حصول المنتج على اعانات انتاجية سيؤدي الى تحفيزه وزيادة انتاجه من تلك السلعة إذ سينتقل منحنى العرض الى الاعلى لان دالة العرض ستصبح كما ياتي:-

$$Q_s = -c + d(P+t)$$
$$Q_s = -c + dP + dt$$

في حين ستبقى دالة الطلب على حالها ، وسنحصل على وضع توازني جديد كما في الشكل البياني (٦):-



شكل (٦) تاثير الاعانات الانتاجية في توازن سوق السلعة

إن القيم التوازنية قبل فرض الاعانة هي :

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} \quad , \quad \overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

بعد تلقي المنتج اعانات بمقدار t عن كل وحدة منتجة تنخفض تكاليف الانتاج ومن ثم ينخفض سعر الوحدة مما يؤدي الى ارتفاع الطلب على هذه السلعة. وكل هذا يدفع المنتجين الى زيادة الانتاج الامر الذي يؤدي الى ظهور وضع توازني جديد وكما ياتي:-

$$Q_s = -c + d(P + t)$$
$$Q_d = a - bP$$
$$Q_d = Q_s \Rightarrow -c + dP + dt = a - bP$$
$$dP + bP = a + c - dt$$
$$P(d + b) = a + c - dt$$
$$\overline{\overline{P}} = \frac{a + c - dt}{d + b} = \frac{a + c}{d + b} - \frac{dt}{d + b}$$

اما الكمية التوازنية الجديدة فستكون كما ياتي:-

$$\overline{\overline{Q}} = a - b\overline{\overline{P}}$$
$$\overline{\overline{Q}} = a - b\left(\frac{a + c}{b + d} - \frac{dt}{b + d}\right) = a - \left(\frac{ba + bc - bdt}{b + d}\right)$$
$$\overline{\overline{Q}} = \frac{ad - bc}{b + d} + \frac{bd}{b + d}t$$

أي ان المستهلك يستفيد من الاعانات ما نسبته : $\frac{d}{b + d}t$

وهو على الشكل يمثل BC ويستفيد المنتج من النسبة الباقية والممثلة على الشكل AB والمساوية الى : $\left(t - \frac{td}{b + d}\right)$

مثال (٢,٨): اذا علمت ان دالة العرض والطلب لسلعة في سوق ما هما على الشكل الاتي:-

$$Q_d = 20 - 0.5P$$
$$Q_s = -6 + 0.3P$$

المطلوب//

١- جد السعر والكمية التوازنتين

٢- جد السعر والكمية التوازنتين بعد تلقي المنتجين لاعانة انتاجية قيمتها ١٠ وحدات نقدية لكل وحدة منتجة.

الحل//

١- التوازن قبل منح الاعانة:

$$\overline{P} = \frac{a + c}{b + d} = \frac{20 + 6}{0.3 + 0.5} = \frac{26}{0.8} = 32.5$$
$$\overline{Q} = \frac{ad - bc}{b + d} = \frac{(20)(0.3) - (0.5)(6)}{0.3 + 0.5} = \frac{3}{0.8} = 3.75$$

٢- التوازن بعد منح اعانة انتاجية:

$$\overline{\overline{P}} = \frac{a+c}{d+b} - \frac{dt}{d+b}$$
$$\overline{\overline{P}} = \frac{20+6}{0.3+0.5} - \frac{(0.3)(10)}{0.3+0.5} = \frac{23}{0.8} = 28.75$$

$$\overline{\overline{Q}} = \frac{ad-bc}{d+b} + \frac{bd}{d+b}t$$
$$\overline{\overline{Q}} = \frac{(20)(0.3)-(6)(0.5)}{0.5+0.3} + \frac{(0.5)(0.3)}{0.5+0.3}(10) = \frac{4.5}{0.8} = 5.625$$

ونلاحظ ان السعر التوازني بعد منح الاعانة اقل منه قبل منحها :

$$\overline{\overline{P}} < \overline{P}$$
$$28.75 < 32.5$$

كما ان الكمية التوازنية بعد منح الاعانة اكبر من الكمية التوازنية قبل منح الاعانة:

$$\overline{\overline{Q}} > \overline{Q}$$
$$5.625 > 3.75$$

التوازن في سوق ذي سلعتين واكثر

لايقتصر التحليل في الاقتصاد على علاقة الكمية من سلعة ما بسعرها كما لاحظنا سابقا أي ان الكمية المطلوبة من سلعة ما والكمية المعروضة منه تظهر دالة في سعر هذه السلعة فقط ،بل ان الواقع يقول انه من النادر ان توجد سلعة ما بهذا الوجود المنفرد، أي ان كل سلعة لابد من وجود سلعة مكملة *Complementary* ، لها او بديلة عنها *Substitute* او كليهما، وبذلك لابد من الاهتمام عند تقدير دالة الطلب او العرض ان تؤخذ العوامل الاخرى وليس سعر السلعة نفسها في الحسبان ، ومن هذه العوامل اسعار السلع الاخرى.

التوازن في سوق ذي سلعتين

سنتناول في هذا الجزء كيفية حل النماذج التي تحتوي على سلعتين مكملتين او قابلتين للاحلال من خلال الامثلة الاتية:-

مثال (٢,٩): توافرت لديك المعطيات الاتية عن دوال الطلب والعرض لسلعتين هما x و y في سوق المنافسة الكاملة . المطلوب ايجاد السعر والكمية التوازنية للسلعتين x و y

معادلة الطلب للسلعة x $\quad Q_{dx} = 5 - P_x + 0.5P_y$

معادلة العرض للسلعة x $\quad Q_{sx} = -4 + 2P_x$

معادلة الطلب للسلعة y $\quad Q_{dy} = 10 + 0.5P_x - P_y$

معادلة العرض للسلعة y $\quad Q_{sy} = 2P_y$

الحل

شرط التوازن للسلعة x : $Q_{dx} = Q_{sx}$

$$5 - P_x + \frac{1}{2}P_y = -4 + 2P_x$$

$$-P_x + \frac{1}{2}P_y - 2P_x = -4 - 5$$

$$-3P_x + \frac{1}{2}P_y = -9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

شرط التوازن للسلعة y : $Q_{dy} = Q_{sy}$

$$10 + \frac{1}{2}P_x - P_y = 2P_y$$

$$\frac{1}{2}P_x - P_y - 2P_y = -10$$

$$\frac{1}{2}P_x - 3P_y = -10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبحل المعادلتين (١) و (٢) آنيا *Simultaneously* وذلك بضرب المعادلة (١) في (٦) والمعادلة رقم (٢) في (١) للتخلص من P_y والحصول على قيمة P_x

$$-3P_x + 0.5P_y = -9 \qquad \times 6$$

$$0.5P_x - 3P_y = -10 \qquad \times 1$$

$$-18P_x + 3P_y = -54$$

$$0.5P_x - 3P_y = -10$$

$$-17.5P_x = -64$$

$$P_x \approx 3.657$$

أي ان السعر التوازني للسلعة x يساوي $\overline{P}_x = 3.657$

وبالتعويض عن قيمة P_x في أي من المعادلات ١ او ٢ نحصل على قيمة P_y :

$$-3P_x + \frac{1}{2}P_y = -9$$

$$-3(3.657) + \frac{1}{2}P_y = -9$$

$$-10.971 + 9 = -\frac{1}{2}P_y$$

$$-1.971 = -0.5P_y$$

$$\overline{P}_y = 3.942$$

أي ان السعر التوازني للسلعة y *يساوي* $\overline{P}_y = 3.942$

وبـالتعويض عـن الاسـعار التوازنيـة فـي معـادلتي الطلـب والعـرض نحصـل علـى الكميـات التوازنية من السلعتين وكما ياتي:

$$Q_{dx} = 5 - (3.657) + 0.5(3.942)$$
$$\overline{Q}_{dx} = 3.314$$
$$Q_{sx} = -4 + 2(3.657)$$
$$\overline{Q}_{sx} = 3.314$$
$$\therefore Q_{dx} = Q_{sx} = 3.314$$

الكمية المطلوبة للسلعة x = الكمية المعروضة للسلعة x = ٣,٣١٤

كذلك الحال مع السلعة y

$$Q_{dy} = 10 + 0.5(3.657) - (3.942)$$
$$\overline{Q}_{dy} = 7.886$$
$$Q_{sy} = 2(3.942)$$
$$\overline{Q}_{sy} = 7.88$$
$$\therefore Q_{dy} = Q_{sy} = 7.88$$

الكمية المطلوبة للسلعة y = الكمية المعروضة للسلعة y = ٧,٨٨

مثال (٢,١٠): توافرت المعلومات عن دالتي الطلب والعرض لسوق سلعتين، جد الاسعار والكميات التوازنية.

$$Q_{d1} = 10 - 2P_1 + P_2$$
$$Q_{d2} = 5 + 2P_1 - 2P_2$$
$$Q_{S1} = -3 + 2P_1$$
$$Q_{S2} = -2 + 3P_2$$

الحل

بالاعتماد على معادلة التوازن الاتية:-

$$Q_{d1} = Q_{S1} \qquad , \qquad Q_{d2} = Q_{S2}$$

ومن معادلة التوازن الاولى:-

$$10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1$$
$$10 - 2P_1 + P_2 + 3 - 2P_1 = 0$$
$$-4P_1 + P_2 = -13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ومن معادلة التوازن الثانية:-

$$5 + 2P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2$$
$$7 + 2P_1 - 5P_2 = 0$$
$$2P_1 - 5P_2 = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبحل المعادلتين (١) و(٢) آنيا نحصل على الاتي:-

$$-4P_1 + P_2 = -13$$
$$2P_1 - 5P_2 = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots \times (2)$$

$$-4P_1 + P_2 = -13$$
$$4P_1 - 10P_2 = -14$$

$$-9P_2 = -27$$
$$P_2 = \frac{-27}{-9} \Rightarrow P_2 = 3$$

وبتعويض قيمة P_2 في أي من المعادلتين (١) او (٢) نحصل على قيمة P_1وتساوي (٤)

وبتعويض قيم الاسعار التوازنية في معادلات الطلب والعرض نحصل على القيم الاتية:-

$$Q_{d1} = Q_{S1} = 5$$
$$Q_{d2} = Q_{S2} = 7$$

اذن حصلنا على الاسعار التوازنية والكميات التوازنية وهي كالاتي:-

$$\overline{P}_1 = 4 \ , \ \overline{P}_2 = 3 \ , \ \overline{Q}_1 = 5 \ , \ \overline{Q}_2 = 7$$

التوازن في سوق لثلاث سلع

يمكن استخراج قيم الكميات والاسعار التوازنية لسلع ثلاث وبالطرائق الرياضية نفسها

مثال (٢،١١): بافتراض وجود ثلاث سلع في السوق وان معادلات الطلب والعرض لها هي كالاتي:-

$$Q_{d1} = 16 - 2P_1 + 2P_2 - P_3$$
$$Q_{s1} = -5 + P_1$$
$$Q_{d2} = 8 + 2P_1 - P_2 + 2P_3$$
$$Q_{s2} = -2 + 2P_2$$
$$Q_{d3} = 4 - P_1 + P_2 - P_3$$
$$Q_{s3} = -1 + P_3$$

الحل// يتساوى الطلب والعرض في حالة التوازن ولكل سلعة :

السلعة الاولى:

$$Q_{d1} = Q_{s1} = \overline{Q}_1$$
$$16 - 2P_1 + 2P_2 - P_3 = -5 + P_1$$
$$3P_1 - 2P_2 + P_3 = 21 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

السلعة الثانية:

$$Q_{d2} = Q_{s2} = \overline{Q}_2$$
$$8 + 2P_1 - P_2 + 2P_3 = -2 + 2P_2$$
$$-2P_1 + 3P_2 - 2P_3 = 10 ....(2)$$

السلعة الثالثة :

$$Q_{d3} = Q_{s3} = \overline{Q}_3$$
$$4 - P_1 + P_2 - P_3 = -1 + P_3$$
$$P_1 - P_2 + 2P_3 = 5 ....(3)$$

الحل

تجدر الاشارة الى انه يمكن حل هذه المعادلات بطريقة الحذف والتعويض وطريقة المصفوفات، وسيتم الحل بالطريقة الاولى. وبوضع المعادلات التي تم تكوينها من عملية التوازن للسلع الثلاثة نحصل على:

$$3P_1 - 2P_2 + P_3 = 21 ....(1)$$
$$-2P_1 + 3P_2 - 2P_3 = 10 ....(2)$$
$$P_1 - P_2 + 2P_3 = 5 ....(3)$$

وبحل المعادلات آنيا:

تضرب المعادلة (١) بالمقدار (٢) فنحصل على المعادلة (٤)

$$6P_1 - 4P_2 + 2P_3 = 42 ....(4)$$

وبجمع المعادلتين (٤) و (٢) نحصل على المعادلة (٥)

$$4P_1 - P_2 = 52 ....(5)$$

وبجمع المعادلتين (٢) و (٣) نحصل على المعادلة (٦)

$$-P_1 + 2P_2 = 15 ....(6)$$

وبضرب المعادلة (٥) بالمقدار (٢) نحصل على المعادلة (٧)

$$8P_1 - 2P_2 = 104 ....(7)$$

وبجمع المعادلتين (٦) و (٧) نحصل على:

$$7P_1 = 119$$
$$\overline{P}_1 = 17$$

وبالتعويض بقيمة $\overline{P}_1$ في المعادلة (٦) نحصل على:

$$-17 + 2P_2 = 15$$
$$\overline{P}_2 = 16$$

وبالتعويض بقيم $\overline{P}_2, \overline{P}_1$ في المعادلة (٤) نحصل على:

$$6(17)-4(16)+2P_3=42$$
$$102-64+2P_3=42$$
$$\overline{P}_3=2$$

وبالتعويض في معادلة الطلب ومعادلة العرض للسلعة الاولى نحصل على:

$$Q_{d1}=16-2(17)+2(16)-2=12$$
$$Q_{s1}=-5+(17)=12$$
$$\therefore Q_{d1}=Q_{s1}=\overline{Q}_1=12$$

وكذلك الحال للسلعة الثانية:

$$Q_{d2}=8+2(17)-16+2(2)=30$$
$$Q_{s2}=-2+2(16)=30$$
$$\therefore Q_{d2}=Q_{s2}=\overline{Q}_2=30$$

وللسلعة الثالثة :

$$Q_{d3}=4-17+16-2=1$$
$$Q_{s3}=-1+2=1$$
$$\therefore Q_{d3}=Q_{s3}=\overline{Q}_3=1$$

٣.النماذج اللاخطية *Non linear models* :

يتم اعتماد النماذج الخطية في التحليل لغرض التبسيط في التحليل غير ان معظم دوال الطلب والعرض هي دوال لاخطية ، ولإيجاد التوازن في نموذج السوق غير الخطي الذي تتمثل فيه نماذج العرض والطلب بمعادلات من الدرجة الثانية ، وسيتم اعتماد اساليب جديدة في التحليل هي:

١. **الطريقة البيانية *Graphical method*** : يتقاطع منحنيا العرض والطلب في هذه الحالة في نقطتين وتهمل القيم السالبة للكميات والاسعار وتعتمد القيم الموجبة فقط لمنطقيتها.

٢. **طريقة التحليل الى العوامل *Factorization method*** : ويسعى هذا التحليل الى ايجاد قيمتين للكمية Q تحقق كل منهما المعادلة التربيعية ، أي ايجاد جذري المعادلة ، وتهمل القيم السالبة ايضا.

٣. **طريقة المعادلة التربيعية العامة (الدستور) *The General Quadratic Formula:*** في بعض الاحيان يكون من الصعب تنفيذ طريقة التحليل الى العوامل بسبب الكسور في معاملات المعادلة فيتم اللجوء الى هذه الطريقة.

١. **الطريقـة البيانيـة *Graphical Method***: حتى نفهم الطريقة البيانية في حل النماذج غير الخطية ناخذ المثال الاتي:

مثال (٢,١٢): اذا كان أنموذج السوق غير الخطي على الشكل الاتي:

$$Q_d = 3 - P^2$$
$$Q_s = 6P - 4$$

جد السعر والكمية التوازنية باستخدام الرسم البياني

الحل//

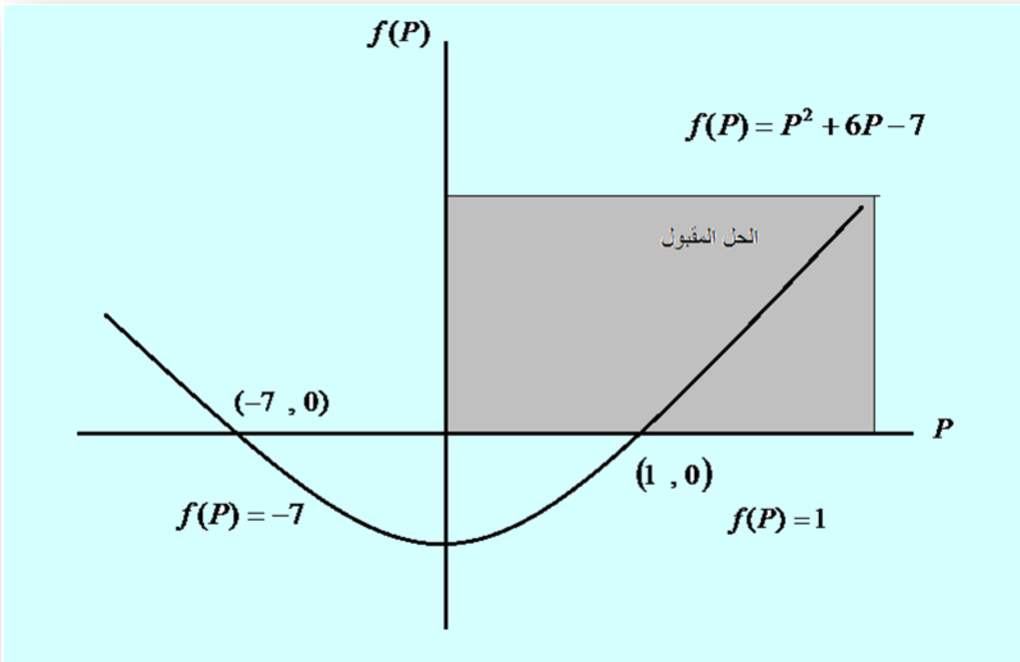
$$\because \; Q_d = Q_s$$
$$3 - P^2 = 6P - 4$$
$$P^2 + 6P - 7 = 0$$

يتم وضع المعادلة التربيعية الاخيرة على شكل دالة تربيعية في السعر كما يأتي:

$$f(P) = P^2 + 6P - 7$$

وتوضح الدالة ان قيم P التي تجعل الدالة اعلاه تساوي صفرا ، أي ان قيم P التي تجعل الدالـة تتقاطع مـع الاحداثي السيني تمثل مجموعـة جذور المعادلـة الحقيقيـة مـع اهمـال القيم السالبة للسعر لتعارضها مع منطق النظرية الاقتصادية.

P	....	−٨	−٧	−٦	−٥	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	...
$f(P)$	...	٩	٠	−٧	−١٢	−١٥	−١٦	−١٥	−١٢	−٧	٠	٩	...



شكل (٧) نقطة التوازن لأنموذج سوق غير خطي مثال (٢,١٢)

ويتضح من المثال ان هناك قيمتين للسعر هما $P=1$ و $P=-7$ تجعلان الدالة $f(P)$ تساوي الصفر وعند اهمال القيمة السالبة لتعارضها مع المنطق الاقتصادي فإن السعر التوازني هو $\overline{P}=1$ وهو ما سنلاحظه عند اعتماد الطرائق الاخرى.

٢. **طريقة التحليل الى العوامل** ***Factorization:*** باعتماد البيانات نفسها في المثال (١١) وبما ان المعادلة P^2+6P-7 هي معادلة من الدرجة الثانية حدها الاول P^2 وحدها الاوسط $6P$ وحدها المطلق Absolute term هو ٧− ويمكن حل هذه المعادلة بطريقة التحليل وكما ياتي:

$$\because P^2+6P-7=0$$
$$(P+7)(P-1)=0$$

اما
$$(P+7)=0$$
$$\therefore \overline{P}=-7$$

وهذا الحل مرفوض وغير مقبول اقتصاديا لانه لا يوجد سعر سالب

أو ان السعر التوازني هو
$$\because (P-1)=0$$
$$\therefore \overline{P}=1$$

اما الكمية التوازنية فنحصل عليها بالتعويض عن قيمة السعر التوازني في احدى معادلتي الطلب او العرض وكما ياتي:

$$\because \overline{Q}=Q_d=3-P^2$$
$$\overline{Q}=3-1$$
$$\overline{Q}=2$$

٣. **طريقة المعادلة التربيعية العامة (الدستور):**

$$\because P^2+6P-7=0$$
$$\overline{P}_1,\overline{P}_2=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\overline{P}_1,\overline{P}_2=\frac{-(6)\pm\sqrt{36-4(1)(-7)}}{2(1)}$$
$$\overline{P}_1,\overline{P}_2=\frac{-(6)\pm\sqrt{64}}{2}$$
$$\overline{P}_1,\overline{P}_2=\frac{-(6)\pm 8}{2}$$
$$\therefore \overline{P}_1=\frac{-(6)-(8)}{2}=\frac{-14}{2}=-7$$

وهذا الحل مرفوض وغير مقبول اقتصاديا لان السعر دائما اكبر من الصفر أي موجب

او:

$$\overline{P}_2 = \frac{-(6)+8}{2} = 1$$

وهـذا يعنــي ان السـعر التـوازني = ١ وهـو الحـل نفسـه الـذي تـم الحصـول عليـه بـالطريقتين السابقتين.

مثال (٢,١٣): اعطيت دالتي العرض والطلب الاتيتين:-

$$P = Q_S^2 + 14Q_S + 22$$

$$P = Q_d^2 - 10Q_d + 150$$

المطلوب: احسب السعر والكمية التوازنيتين.

الحل

$$Q_d = Q_S$$

وبما ان المعادلتين تساويان السعر نحصل على:-

$$Q^2 + 14Q + 22 = -Q^2 - 10Q + 150$$

$$2Q^2 + 24Q - 128 = 0 \qquad \div 2$$

$$Q^2 + 12Q - 64 = 0$$

وبتطبيق القانون العام

$$Q = \frac{-12 \mp \sqrt{(12)^2 - 4(1) - (64)}}{2(1)}$$

$$Q = \frac{-12 \mp \sqrt{400}}{2} \Rightarrow Q = \frac{-12 \mp 20}{2}$$

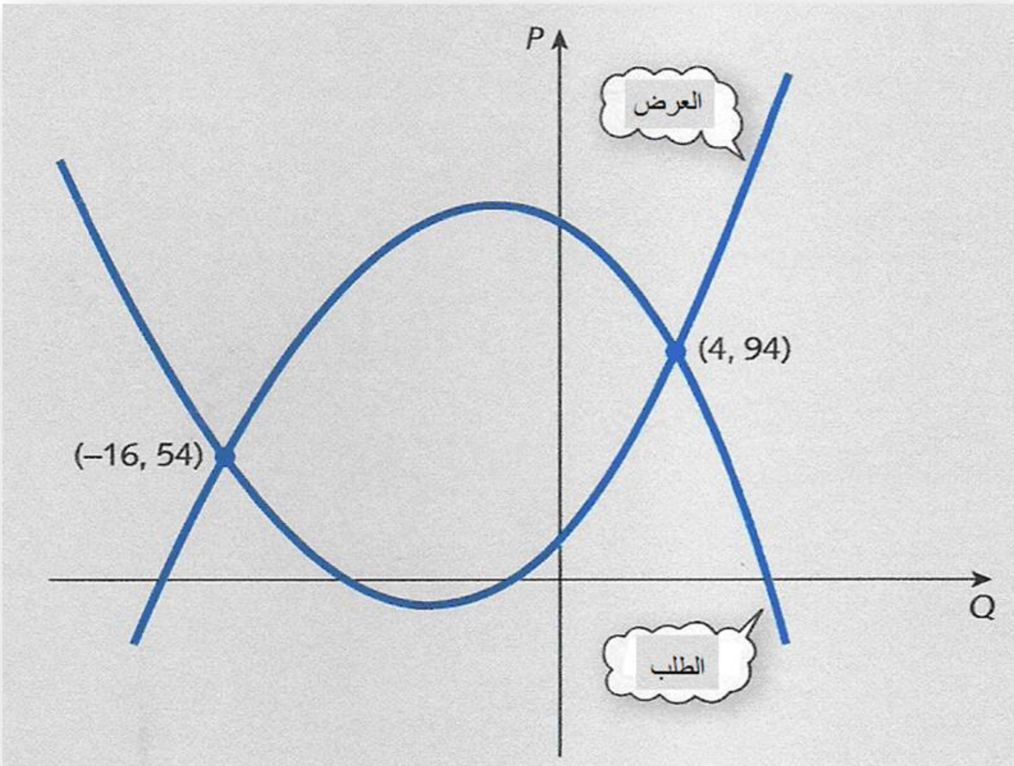
$$Q = -16 \quad or \quad Q = 4$$

وتهمل القيمة السالبة بطبيعة الحال ، وعليه نحصل على قيمة السعر كما ياتي:-

$$P = 4^2 + 14(4) + 22 = 94$$

$$P = -(4)^2 - 10(4) + 150 = 94$$

وبيانيا يمكن تمثيل السؤال بالشكل الآتي:-



شكل (٨) التمثيل البياني للمثال (2.13)

٤.استخدام المصفوفات في تحليل التوازن

يعد جبر المصفوفات من الاساليب التي يمكن من خلالها عرض المشاكل الاقتصادية ومعالجتها بطرائق منتظمة، وقد برزت الحاجة للمصفوفات التي تمثل مدخلاتها قيما لكثير من المتغيرات والتي تعكس تاثير هذه القيم على قيم متغيرات اخرى محل الدراسة في الأنموذج الاقتصادي، وتأتي اهمية المصفوفات في العلوم الاقتصادية من قدرتها على التحليل الشامل للنماذج الاقتصادية واكتشاف طبيعة العلاقات بين المتغيرات المؤثرة في الظاهرة المدروسة وذلك للوصول الى نتائج نهائية تعين على اتخاذ القرارات المثلى التي تزيد من قيمة المنشأة السوقية من خلال الاستفادة من الموارد الاقتصادية المتاحة.

ان الطرائق السابقة في حل النظام الخطي قد تكون قابلة للحل في حال وجود مجهول او مجهولين اوثلاثة ، غير ان وجود عدد n من المعادلات وعدد n من المجاهيل فاننا نستخدم الجبر الخطي والمعبر عنه بالمصفوفات والمحددات، وسنتطرق هنا لبعض التطبيقات الاقتصادية على المستوى الجزئي فضلا عن استخداماتها على المستوى الكلي.

أنموذج التوازن الجزئي باستخدام المصفوفات:

انموذج توازن سلعة واحدة: يمكن حل انموذج توازن السوق الخطي لسوق سلعة واحدة باستخدام قوانين الجبر الخطي وكما ياتي:

$$Q_d = a - bP \qquad (a,b > o)$$
$$Q_s = -c + dP \qquad (c,d > o)$$

ينبغي اولا تكوين المنظومة المصفوفية للانموذج الخطي وبمعنى آخر نضع المعادلات في شكل مصفوفة.

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d - (0)Q_s + bP = a$$
$$(0)Q_d + Q_s - dP = -c$$
$$Q_d - Q_s - (0)P = 0$$

وبذلك تكون منظومة المصفوفة بالشكل الاتي:

مصفوفة الثوابت = (مصفوفة المجاهيل)(مصفوفة المعلمات)

$$AX = D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن حل الأنموذج اعلاه باحدى الطرائق المعروفة

١. طريقة معكوس المصفوفة *Inverse Matrix Method*

٢. طريقة كرامر *Grammar Rule*

مثال (٢,١٤): في أنموذج السوق الاتي:

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d = 27 - 4P$$
$$Q_s = -3 + 2P$$

جد السعر التوازني والكمية التوازنية باستخدام طريقة معكوس المصفوفة.

الحل//

تعاد كتابة الدوال السابقة بالشكل الاتي:-

$$Q_d - Q_s = 0$$
$$Q_d + 4P = 27$$
$$Q_s - 2P = -3$$

وباستخدام نظام المصفوفات تعاد كتابة المعادلات وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وعلى وفق الطريقة يكون معكوس المصفوفة:

$$X_i = A^{-1} D$$

إذ ان :

$$\begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} [adj\, A][D]$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4 + (-2) + 0$$

$$|A| = -6 \qquad \Rightarrow |A| \neq 0$$

وبالامكان ايجاد المصفوفة المرافقة من خلال مصفوفة العوامل المتممة *Cofactors Matrix* وكما ياتي:-

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

ثم نجد مبدلة مصفوفة العوامل المتممة *Transpose* والتي من خلالها نحصل على المصفوفة المرافقة:

$$adj\, A = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}| = \alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{12}| = \alpha_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|C_{13}| = \alpha_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|C_{21}| = \alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|C_{22}| = \alpha_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|C_{23}| = \alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|C_{31}| = \alpha_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{32}| = \alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{33}| = \alpha_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$adj\, A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$Q_d = \frac{(-4)(0) + (-2)(27) + (-4)(-3)}{-6} = \frac{-42}{-6} = 7$$

$$Q_s = \frac{(2)(0) + (-2)(27) + (-4)(-3)}{-6} = \frac{-42}{-6} = 7$$

$$P = \frac{(1)(0) + (-1)(27) + (1)(-3)}{-6} = \frac{-30}{-6} = 5$$

$\therefore$ الكمية التوازنية = $Q_d = Q_s = \overline{Q} = 7$

والسعر التوازني = $P = \overline{P} = 5$

مثال (٢,١٥): اذا كانت معادلة الطلب على محصول القطن في بلد ما هي $Q_d = 14 - 2P$ ، ومعادلة عرضه هي $Q_s = -16 + 3P$. جد السعر والكمية التوازنية باستخدام طريقة كرامر.

الحل:

$$Q_d + 2P = 14$$
$$Q_s - 3P = -16$$
$$Q_d - Q_s = 0$$

لاستخراج الكميات التوازنية ينبغي اجراء الخطوات الاتية حسب ماتقتضيه طريقة كرامر:

١. استخراج المحدد العام للمصفوفة: باستخدام عناصر الصف الاول وكما ياتي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1\{(1)(0) - (-3)(-1)\} - (0) + 2\{(0)(-1) - (1)(1)\}$$

$$|A| = 1(-3) - (0) + 2(-1)$$

$$|A| = -3 - 2 = -5$$

٢. استخراج المحدد الاول $|A_1|$ وذلك بوضع عمود الثوابت مكان العمود الاول من المصفوفة وبنفس الطريقة في الخطوة الاولى نستخرج المحدد الاول $|A_1|$ويساوي =-١٠

٣. استخراج المحدد الثاني $|A_2|$ وهنا يساوي (-١٠)

٤. استخراج المحدد الثالث $|A_3|$ ويساوي (-٣٠)

$$Q_d = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$Q_s = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$Q_d = Q_s = \overline{Q} = 2$$

$$\overline{P} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-30}{-5} = 6$$

∴ الكمية التوازنية $\overline{Q}$ =٢ ، والسعر التوازني $\overline{P}$ = ٦ .

وباستخدام الطريقة الاعتيادية للتوازن نستطيع استخراج الكمية والسعر التوازنيتين:

$$Q_d = Q_s$$
$$14 - 2P = -16 + 3P$$
$$14 + 16 = 2P + 3P$$
$$30 = 5P$$
$$\overline{P} = \frac{30}{5} = 6$$
$$\overline{Q} = 14 - 2(6) = 14 - 12 = 2$$
$$\therefore \overline{Q}, \overline{P} = (2, 6)$$

ثانيا: التوازن الكلي

تناولنا في الصفحات السابقة كيفية حل نماذج التوازن الجزئي بمختلف الطرائق الرياضية سواء التوازن بطريقة الحذف والتعويض او بطريقة المصفوفات ، والامر نفسه سيتم تناول حلول نماذج التوازن الكلي بالطرائق ذاتها ، تاركين الاطار النظري الذي يتعلق بها لمراجعة الطالب نفسه على اعتبار ان الاطار النظري قد تم تناوله في السنوات السابقة من دراسة الطالب ولاسيما في المرحلة الثالثة في مادة النظرية الاقتصادية الكلية.

مثال(٢.١٦): اذا كان أنموذج الدخل القومي على الشكل الاتي:-

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 58 + 0.8Y_d$$
$$I_0 = 25 \quad , \quad G_0 = 15 \quad T = 0.3Y$$

المطلوب//

احسب الدخل القومي التوازني $\overline{Y}$ والاستهلاك التوازني $\overline{C}$ والضرائب التوازنية

الحل//

$$\because C = 58 + 0.8Y_d$$
$$\because C = 58 + 0.8(Y - T)$$
$$C = 58 + 0.8(Y - 0.3Y)$$
$$C = 58 + 0.8Y - 0.24Y$$
$$\therefore C = 58 + 0.56Y$$

ولايجاد الدخل التوازني نعوض بمعادلة الاستهلاك التي حصلنا عليها في معادلة الدخل

$$\because Y = C + I_0 + G_0$$
$$Y = (58 + 0.56Y) + 25 + 15$$
$$(Y - 0.56Y) = 98$$
$$0.44Y = 98$$
$$\overline{Y} = \frac{98}{0.44} = 222.73$$

وبالتعويض في دالة الاستهلاك نحصل على الاستهلاك التوازني:

$$\because C = 58 + 0.56Y$$
$$C = 58 + 0.56(222.73)$$
$$\therefore \overline{C} = 58 + 124.73$$
$$\therefore \overline{C} = 128.73$$

وتحسب الضرائب التوازنية :

$$\because T = 0.3(\overline{Y})$$
$$\therefore \overline{T} = 0.3(222.73)$$
$$\therefore \overline{T} = 66.82$$

مثال (٢,١٧): توافرت المعلومات الاتية عن أنموذج الدخل القومي :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$
$$C = C_0 + c_1 Y$$
$$M = M_0 + mY$$
$$X_0 = 40 \quad , \quad G_0 = 32 \quad , \quad I_0 = 45 \quad , \quad c_1 = 0.8 \quad m = 0.15$$
$$M_0 = 20 \; , \quad C_0 = 35$$

المطلوب: استخرج القيم التوازنية لكل من $\overline{Y}$, $\overline{C}$, $\overline{M}$

الحل

نعوض بالقيم المعطاة في السؤال في معادلة الدخل القومي وكما ياتي:

$$\because Y = C_0 + c_1 Y + I_0 + G_0 + (X_0 - (M_0 + mY))$$
$$Y = 35 + 0.8Y + 45 + 32 + (40 - (20 + 0.15Y))$$
$$Y = 35 + 0.8Y + 45 + 32 + 40 - 20 - 015Y$$
$$Y = 35 + 45 + 32 + 40 - 20 + 0.8Y - 0.15Y$$
$$Y = 132 + 0.65Y$$
$$Y - 0.65Y = 132$$
$$Y(1 - 0.65) = 132$$
$$0.35Y = 132$$
$$\overline{Y} = \frac{132}{0.35} = 377.143$$

∴ الدخل التوازني = ٣٧٧,١٤٣

ولايجاد الاستهلاك التوازني نعوض بقيمة $\bar{Y}$ في دالة الاستهلاك وكما ياتي:

$$\because C = 35 + 0.8Y$$
$$C = 35 + 0.8(377.143)$$
$$\bar{C} = 35 + 301.71$$

$\therefore$ الاستهلاك التوازني = ٣٣٦,٧١

ثم نعوض قيمة $\bar{Y}$ في دالة الواردات لايجاد الواردات التوازنية:

$$\because M = M_0 + mY$$
$$M = 20 + 0.15Y$$
$$\bar{M} = 20 + 0.15(377.143)$$
$$\bar{M} = 20 + 56.57$$
$$\bar{M} = 76.57$$

أي ان حجم الواردات التوازني = ٧٦,٥٧

كما يمكن ايجاد حجم الادخار باستخدام المعادلة الاتية:

$$\because S = -C_0 + (1 - c_1)Y_d$$
$$S = -35 + 0.2Y$$
$$S = -35 + 75.43$$
$$\therefore S = 40.43$$

مثال (٢,١٨): توفرت المعلومات الاتية عن اقتصاد مغلق كان فيه أنموذج الدخل القومي على الشكل الاتي:

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 58 + 0.8Y$$
$$I_0 = 25 \qquad G_0 = 15$$

المطلوب ١- ايجاد الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$ والاستهلاك التوازني $\bar{C}$

٢- استخرج المضاعف مع تفسير معناه الاقتصادي

الحل

١- نعوض معادلة الاستهلاك في معادلة الدخل القومي

$$Y = 58 + 0.8Y + 25 + 15$$
$$Y - 0.8Y = 98$$
$$0.2Y = 98$$
$$\therefore \bar{Y} = 490$$

وبتعويض قيمة الدخل التوازني $\bar{Y}$ المستخرجة اعلاه في دالة الاستهلاك نحصل على الاستهلاك التوازني:

$$C = 58 + 0.8(490)$$
$$\therefore \bar{C} = 450$$

٢- يتم استخراج مضاعف الاستثمار *The Investment Multiplier* وكما ياتي:-

$$Multiplier = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-0.8} = 5$$

يمثل المضاعف عدد المرات التي يتضاعف فيها الدخل القومي نتيجة مضاعفة الانفاق الاستثماري مرة واحدة ، وتفسير النتيجة التي حصلنا عليها بانه عند زيادة الاستثمار مرة واحدة فإن ذلك يؤدي الى مضاعفة الدخل القومي بمقدار خمس مرات.

مثال (2.19) : اذا كانت دالة الاستهلاك لسلعة ما في بلد ما هي

$$C = 12 + 0.8Y$$

احسب الدخل التوازني $\bar{Y}$ والاستهلاك التوازني $\bar{C}$ اذا علمت ان الاستثمار كان $I_0 = 4$

الحل

$$Y - C = I_0$$
$$Y - C = 4$$
$$-0.8Y + C = 12$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

باستخدام قانون كرامر نستخرج القيم التوازنية لـ $\bar{Y}$ و $\bar{C}$

المحدد العام $|A|$=٠,٢ المحدد الاول $|A_1| = 16$ المحدد الثاني $|A| = 15.2$

$$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{16}{0.2} = 80$$

$$\bar{C} = \frac{|A_2|}{|A_1|} = \frac{15.2}{0.2} = 76$$

مثال (٢,٢٠): ليكن الأنموذج الخطي الاتي:

$$Y = C + I + G$$
$$C = 10 + 0.75y$$
$$I = 40$$
$$G = 10$$

المطلوب

جد $\bar{Y}$, $\bar{C}$ بالطريقة العادية وبطريقة المصفوفات

الحل

الطريقة الاولى:

$$Y = 10 + 0.75Y + 40 + 10$$
$$0.25Y = 60$$
$$\bar{Y} = \frac{60}{0.25} = 240$$
$$\bar{C} = 10 + 0.75(240) = 10 + 180 = 190$$

الطريقة الثانية:

$$Y = C + 40 + 10$$
$$C = 10 + 0.75Y$$
$$Y - C = 50$$
$$-0.75Y + C = 10$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$
$$\bar{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{60}{1-0.75} = \frac{60}{0.25} = 240$$

$$\bar{C} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ -0.75 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10+37.5}{0.25} = 190$$

مثال (٢,٢١): لو اعطيت المعلومات الاتية:

$$G = 20 \quad , \quad I = 35 \quad , \quad C = 0.9Y_d + 70 \quad , \quad T = 0.2Y + 25$$

المطلوب: أوجد المستوى التوازني للدخل القومي.

الحل

$$Y = C + I + G$$
$$Y = C + 35 + 20 = C + 55$$
$$Y_d = Y - (0.2Y + 25)$$
$$Y_d = Y - 0.2Y - 25$$
$$Y_d = 0.8Y - 25$$
$$C = 0.9(0.8Y - 25) + 70$$
$$C = 0.72Y - 22.5 + 70$$
$$C = 0.72Y + 47.5$$
$$Y = C + 55$$
$$Y = 0.72Y + 47.5 + 55$$
$$Y = 0.72Y + 102.5$$
$$Y - 0.72Y = 102.5$$
$$0.28Y = 102.5$$
$$Y = \frac{102.5}{0.28} = 366$$

اذن المستوى التوازني للدخل القومي=٣٦٦

اسئلة الفصل الثاني

س١:–اذا كانت معادلة الطلب والعرض على سلعة ما هي كما يأتي:

$$Q_d = -1.5P + 14$$
$$Q_s = 4P - 5$$

جد سعر وكمية التوازن لهذه السلعة

س٢:– اعطيت أنموذج السوق الاتي:–

$$Q_d = 24 - 2P$$
$$Q_S = -5 + 7P$$

المطلوب

١– جد سعر وكمية التوازن بطريق الحذف او الاختزال

٢– جد سعر وكمية التوازن بالطريقة المباشرة

س٣:– احسب كمية وسعر التوازن لأنموذج السوق الاتي:

$$Q_s + 32 - 7P = 0$$
$$Q_d - 128 + 9P = 0$$

س٤:- في أنموذج السوق الاتي:-

$$Q_d = 27 - 4P$$
$$Q_s = -3 + 2P$$

احسب كلا من سعر التوازن وكمية التوازن بعد فرض ضريبة مقدارها (٣) وبين مقدار الارتفاع في السعر وهل هو اقل من مقدار الضريبة او لا.

س٥: لديك أنموذج السوق الاتي:

$$Q_d = 4 - P^2$$
$$Q_S = 4P - 1$$

جد سعر وكمية التوازن بيانيا.

س٦:- جد سعري وكميتي التوازن في سوقي سلعتين اذا كانت دالتا العرض والطلب للسلعتين هما كالاتي:

$$Q_{d1} = -2P_1 + P_2 + 10$$
$$Q_{s1} = 3P_1 - 2$$

$$Q_{d2} = P_1 - P_2 + 15$$
$$Q_{s2} = 2P_1 - 1$$

س٧: جد الحل التوازني لكل من النماذج الاتية:

$$a)\ Q_d = 3 - P^2 \qquad b)\ Q_d = 8 - P^2$$
$$Q_S = 6P - 4 \qquad Q_S = P^2 - 2$$

س٨:- اذا كانت دالة طلب السوق : $P + Q^2 + Q = 11$ **ودالة عرض السوق :** $2P - 2Q^2 - Q - 4 = 0$. احسب السعر والكمية التوازنيتين في ذلك السوق.

س٩:-اذا تحددت دوال الطلب والعرض لثلاث سلع ، احسب الاسعار والكميات التوازنية لهذا الأنموذج لسوق السلع الثلاث.

$$Q_{d1} = 45 - 2P_1 + 2P_2 - 2P_3$$
$$Q_{d2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 2P_3$$
$$Q_{d3} = 30 - P_1 + 2P_2 - P_3$$
$$Q_{s1} = -5 + 2P_1$$
$$Q_{s2} = -4 + 2P_2$$
$$Q_{s3} = -5 + P_3$$

س١٠:- اذا توفرت لديك المعلومات الاتية حول اقتصاد مغلق:

$$C = 100 + 0.8Y$$
$$I = 1200 - 30r$$

إذ يمثل r سعر الفائدة

ومعادلة الطلب على النقود لاغراض المعاملات والحيطة: $M_{d1} = 0.25Y$

والطلب على النقود لاغراض المضاربة: $M_{d2} = 1375 - 25r$

وعرض النقود: $M_s = 2500$

المطلوب// جد القيم التوازنية لكل من Y و r

س١١:- اذا علمت ان دالة الطلب والعرض لاحدى السلع كما ياتي:-

$$Q_d = 100 - 0.6P$$
$$Q_s = -30 + 2P$$

المطلوب

١- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين.

٢- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض ضريبة نوعية على الانتاج مقدارها ٢ وحدة على كل وحدة منتجة.

٣- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد منح اعانة على الانتاج بواقع وحدتين نقديتين على كل وحدة.

٤- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض ضريبة قيمية على الانتاج بنسبة ٥% من سعر البيع P

س١٢:- توفرت دوال الطلب والعرض لسلعتين مستقلتين:

$$Q_{d1} = 40 - 5P_1 - P_2$$
$$Q_{d2} = 50 - 2P_1 - 4P_2$$
$$Q_{S1} = -3 + 4P_1$$
$$Q_{S2} = -7 + 3P_2$$

المطلوب

١- جد $\overline{P},\overline{Q}$

٢- بين العلاقة بين السلعتين هل هي تكاملية أم تبادلية؟

س١٣:- لديك دالة الطلب والعرض لسلعة معينة:

$$P = -5Q_d + 80$$
$$P = 2Q_S + 10$$

المطلوب

احسب سعر وكمية التوازن:

١- بيانيا

٢- جبريا

س١٤:- توافرت المعلومات عن دوال الطلب والعرض لثلاث سلع

$$Q_{d1} = 15 - P_1 + 2P_2 + P_3$$
$$Q_{d2} = 9 + P_1 - P_2 - P_3$$
$$Q_{d3} = 8 + 2P_1 - P_2 - 4P_3$$
$$Q_{S1} = -7 + P_1$$
$$Q_{S2} = -4 + 4P_2$$
$$Q_{S3} = -5 + 2P_3$$

مصادر الفصل الثاني

١- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٢- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٣- حسين علي بخيت- مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ٢٠٠٠.

٤- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٥- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. ٢٠١٠.

6- Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.

7- Henderson James M & Quandt Richard E, Microeconomc theory A mathematical approach , 3rd ed, 1980.

8- Samuelson P.A , Foundation of economic analysis , Cambridge Mass, Harvard university Press.1948.

الفصل الثالث

الميل والمرونة

Slope & Elasticity

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- تعريف الميل في الاقتصاد
- المرونة
- مرونة الطلب السعرية
- مرونة الطلب التقاطعية
- مرونة الطلب الدخلية
- مرونة العرض

الفصل الثالث
الميل والمرونة
Slope & Elasticity

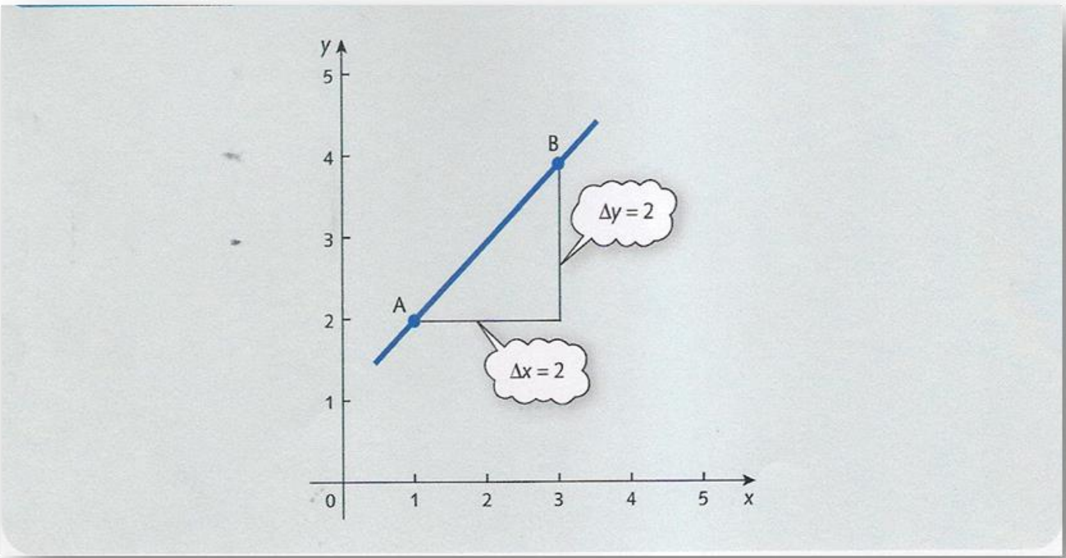
الميل *Slope* :

يعبر الميل عن التغير في قيمة متغير ما مثل y نتيجة التغير في قيمة متغير اخر مثل x بمقدار وحدة واحدة. وحقيقة الامر فانه ليس بالضرورة ان نحدد التغير في x بمقدار وحدة واحدة.

بشكل عام فإن الميل *Slope* او درجة الميل او المنحدر *Gradiant* للخط يمكن ان يؤخذ من التغير في قيمة y مقسوما على التغير المناظر له في x عند التحرك بين أي نقطتين على ذلك الخط. ويعبر عن التغير في y بالرمز اللاتيني Δy وعن التغير في x بالرمز Δx ، ورياضيا:-

$$Slope = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

تعبر الاشكال البيانية الاتية عن الميل على وفق القيم المختلفة لكل من المتغيرين y و x وكما ياتي:-



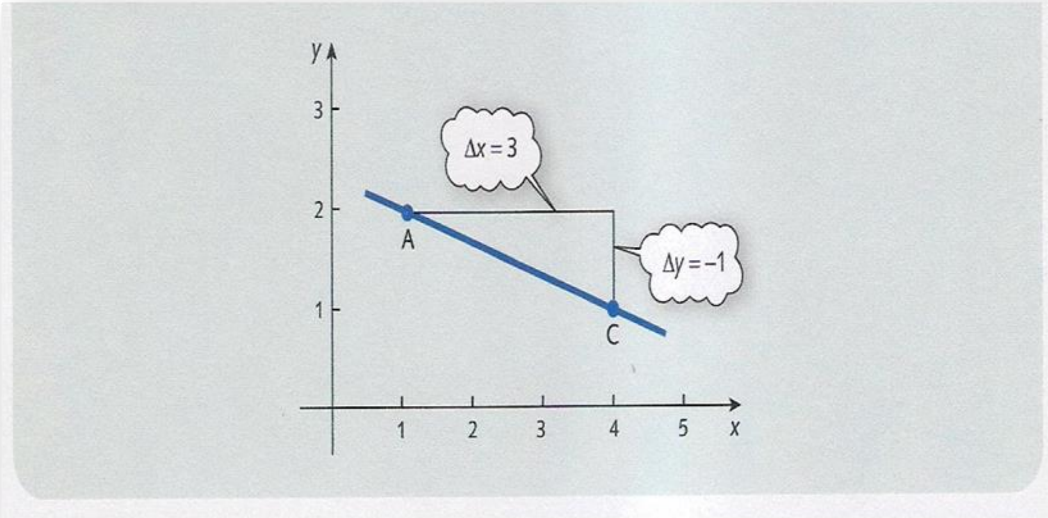
شكل (٩) الميل بين النقطتين A و B موجب

لحساب الميل بين النقطتين A و B نتبع الاتي:-

$$Slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

عند التحرك من A و B فإن الاحداثي y يتغير من ٢ الى ٤ ، الامر الذي يشير الى زيادة مقدارها وحدتين، والاحداثي x يتغير من ١ الى ٣ بزيادة مقدارها وحدتين، وهذا يعني ان قيمة الميل تساوي ١.

أما الشكل البياني (١٠) فيشير الى وضع اخر للميل بين النقطتين A و C وكما ياتي:-



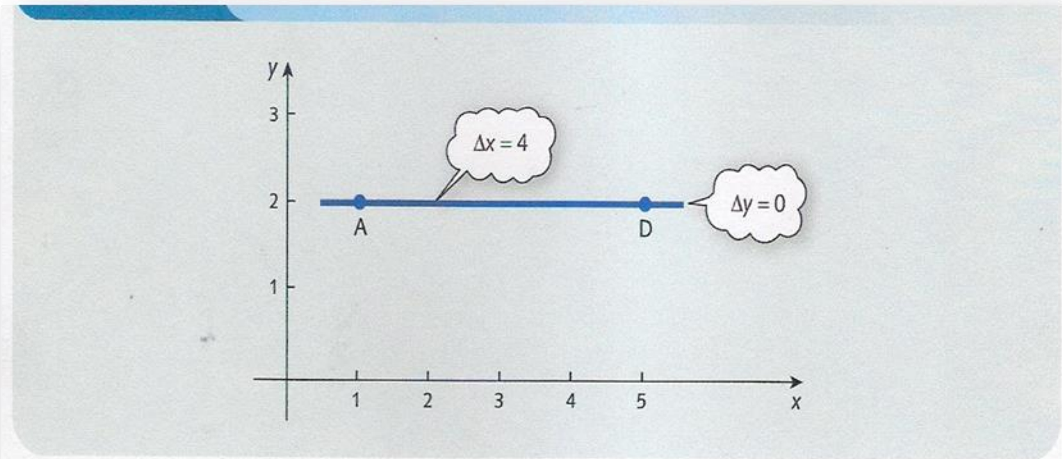
شكل (١٠) الميل بين النقطتين A و C سالب

$$Slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{4-1} = \frac{-1}{3} = -0.33$$

نلاحظ هنا ان التحرك من نقطة A الى نقطة C يتغير y من ٢ الى ١ أي ينخفض بمقدار وحدة واحدة ، في حين يتغير x من ١ الى ٤ بزيادة مقدارها ٣ وحدات.

أما الشكل البياني (١١) فيشير إلى أن الميل كان ثابتا لان التغير في y كان ثابتا في حين تغيرت x من ١ الى ٥ وكما ياتي:-

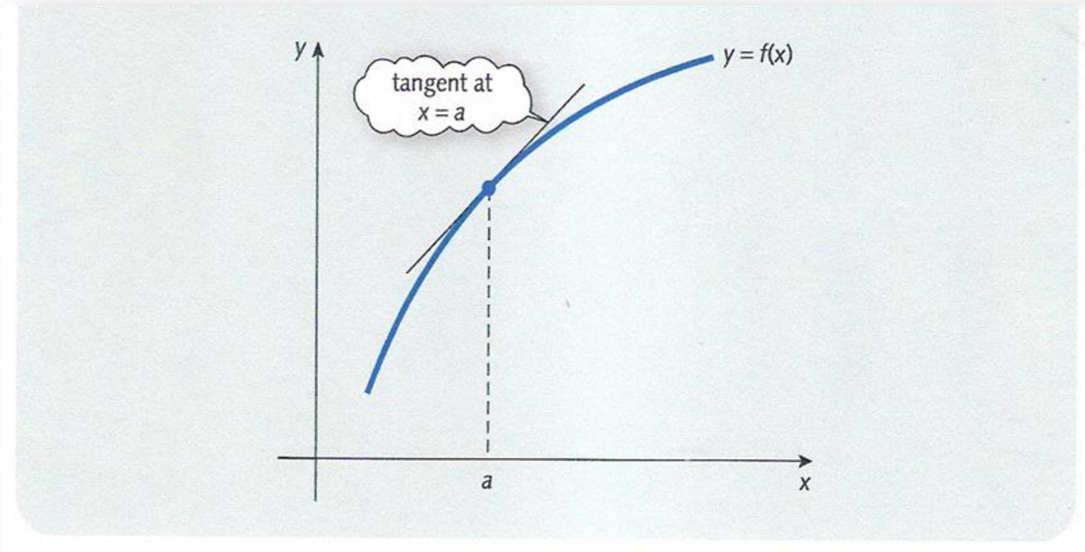
$$Slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{5-1} = \frac{0}{4} = 0$$



شكل (١١) الميل بين النقطتين A و D ثابت=صفر

من خلال الامثلة السابقة نلاحظ ان الميل كان موجبا طالما كان الخط متجها الى الاعلى، وسالبا اذا كان الخط متجها نحو الاسفل ، في حين يكون الميل صفرا اذا كان الخط افقيا.

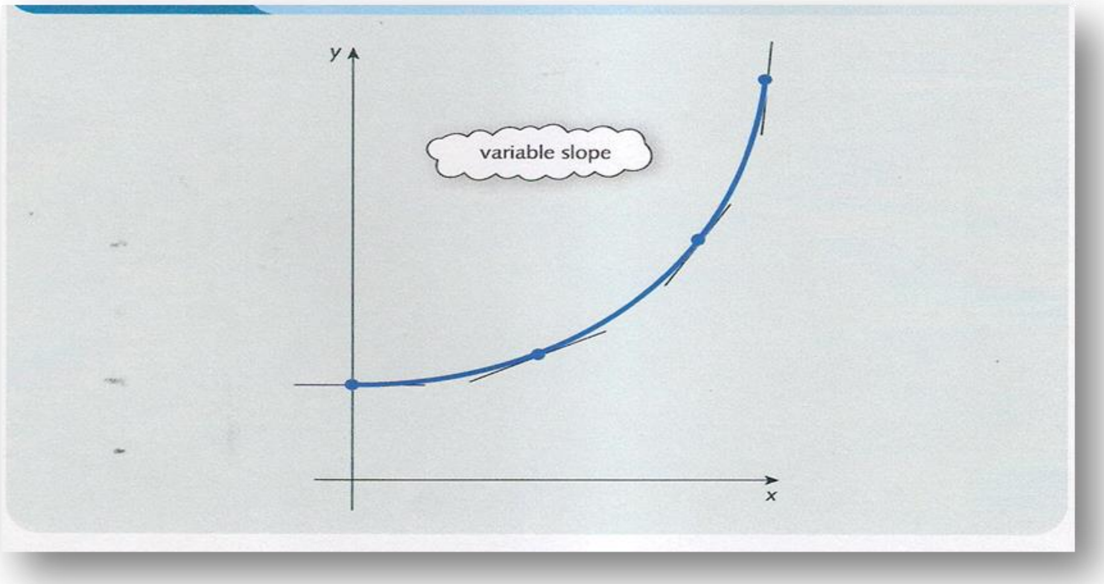
ولسوء الحظ ليست كل الدوال الاقتصادية خطية ، ولهذا من الضروري ان نوسع مفهوم الميل حتى يشمل منحنيات اكثر ، ولكي نتوصل الى ذلك ينبغي التعريف بمفهوم ظل الزاوية *(Tangent)* والموضح بالشكل البياني الاتي:-



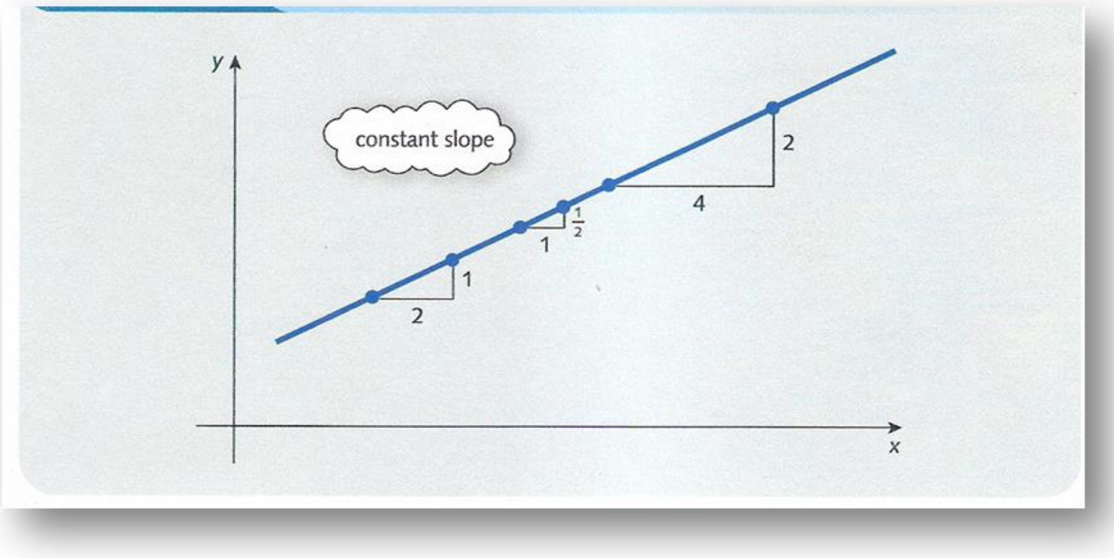
شكل (١٢) ظل الزاوية

يمثل الخط الذي يمر من خلال النقطة a على المنحني يمس المنحنى عند تلك النقطة ويسمى عندئذ ظل الزاوية.

ان الميل او المنحدر للمنحنى عند $x = a$ يعرف بظل الزاوية عند $x = a$. وتجدر الاشارة الى ان ظل الزاوية او الميل ، يمكن ان يكون متغيراً او ثابتا كما في الاشكال البيانية الآتية:



شكل (١٣) الميل او ظل الزاوية المتغير



شكل (١٤) الميل او ظل الزاوية الثابت

يعبر الميل عن مشتقة الدالة او بشكل ادق عن المشتقة الاولى للدالة الرياضية ، وفي هذه الحالة يمكن التعبير عنه رياضيا :-

$$\frac{dy}{dx}$$

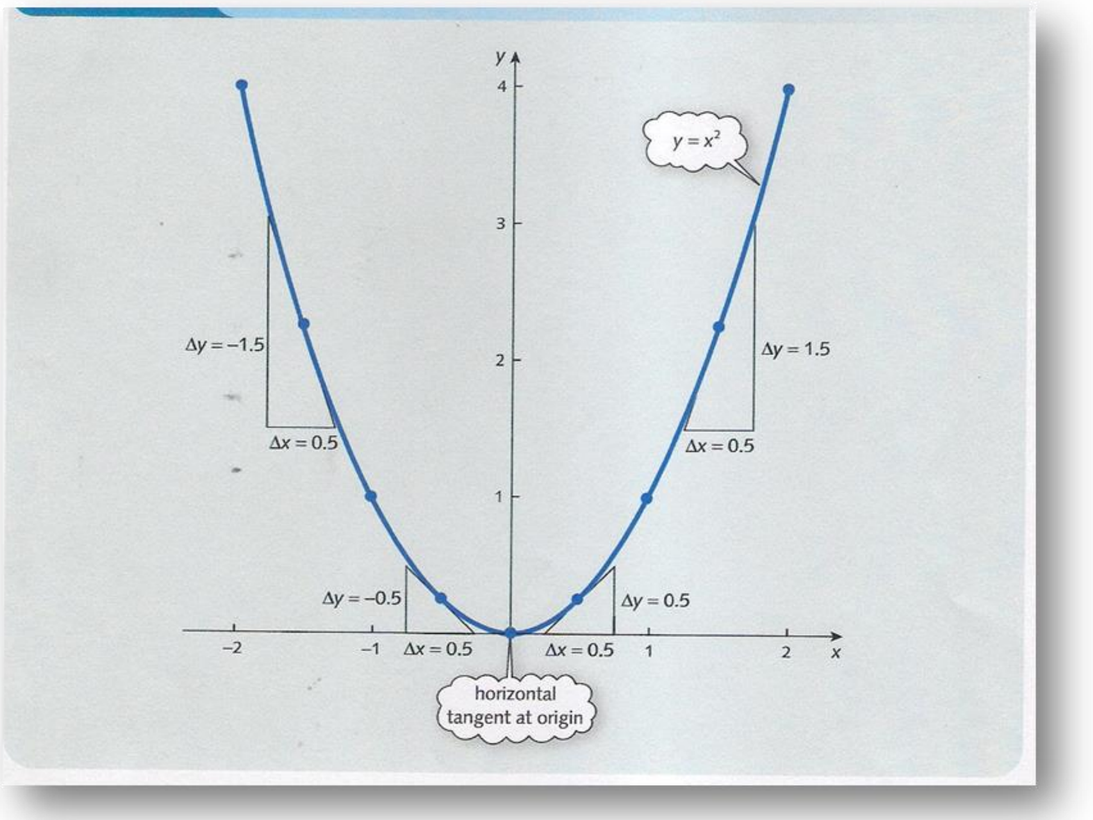
وكما يمكن كتابته باستخدام الرمز الرياضي f' والذي يشير الى المشتقة الاولى للدالة.

مثال (٣,١): اكمل الجدول الاتي لقيم الدالة الاتية $f(x)=x^2$

x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.5	٠,٠	0.5	١,٠	١,٥	٢,٠
$f(x)$									

الحل//

x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.5	٠,٠	0.5	١,٠	١,٥	٢,٠
$f(x)$	٤	٢,٢٥	١	٠,٢٥	٠,٠	٠,٢٥	١,٠	٢,٢٥	٤



شكل (١٥) التمثيل البياني للمثال (٣,١)

من الرسم البياني نلاحظ الاتي:-

$$f'(-1.5) = \frac{-1.5}{0.5} = -3$$

$$f'(-0.5) = \frac{-0.5}{0.5} = -1$$

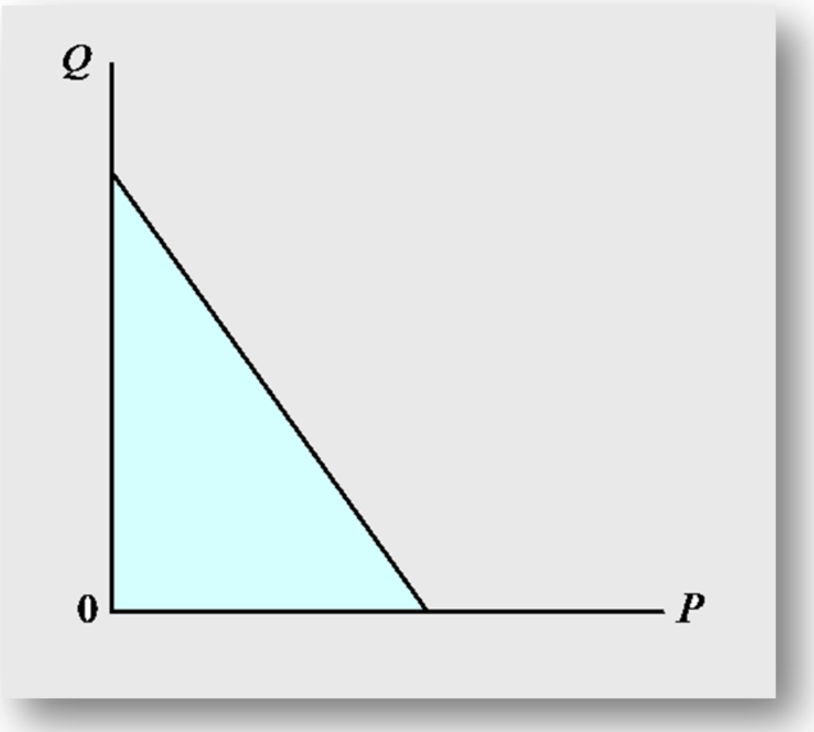
$$f'(0) = \frac{0}{0.5} = 0$$

$$f'(0.5) = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

$$f'(1.5) = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

الميل في الاقتصاد//

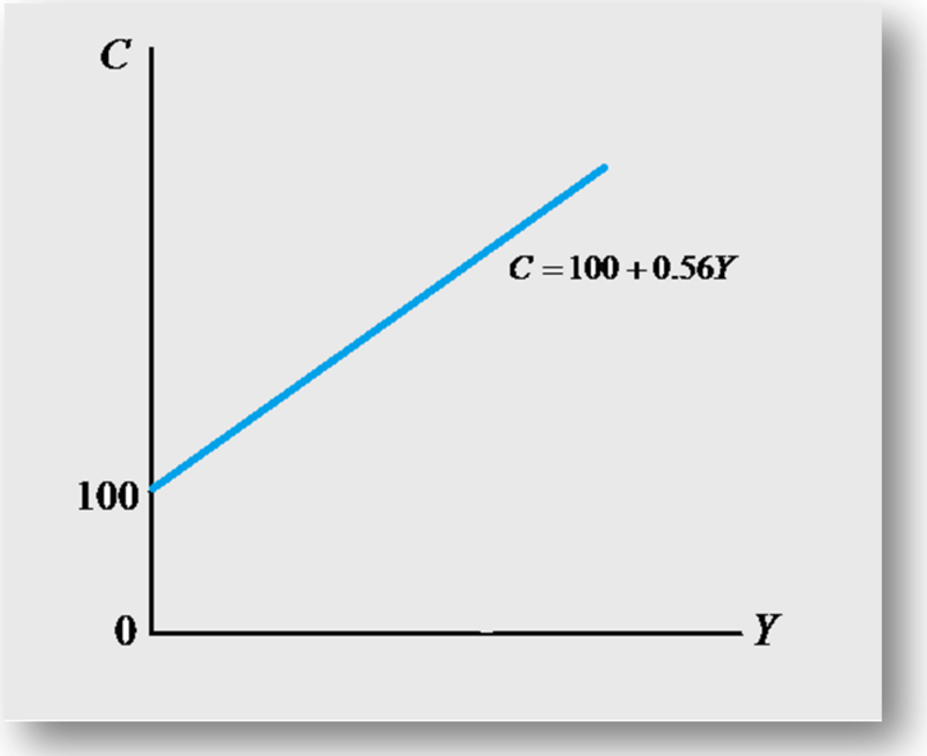
تعرفنا على المعنى الرياضي للميل واشكاله البيانية وطريقة التوصل اليه ، وفي الاقتصاد ياخذ الميل حيزا كبيرا ، فمثلا لو اخذنا دالة الطلب $Q = a - bP$ ، ورسمنا Q على المحور العمودي و P على المحور الافقي سيكون ميل الدالة $Q = a - bP$ مساويا الى b لان زيادة وحدة واحدة في P تؤدي الى انخفاض Q بمقدار b من الوحدات وكما موضح بالشكل البياني الاتي:



شكل (١٦) منحنى طلب خطي

نجد ان الميل في الشكل البياني (١٦) سالب لان ارتفاع السعر قد اقترن بانخفاض الكمية المطلوبة ، ويقال بان الكمية هي دالة متناقصة للسعر. فاذا كانت الدالة $Q = a - bP$ ذات ميل سالب فيعني هذا ان $b < 0$.

اما لو اخذنا دالة الاستهلاك الخطية الاتية $C = 100 + 0.56Y$ ، نجد ان لهذه الدالة ميلا موجبا مقداره ٠,٥٦ يمثل زيادة الاستهلاك مع زيادة الدخل. وهكذا يقال بان الاستهلاك دالة متزايدة للدخل، فاذا كانت الدالة من الشكل $C = \alpha + \beta Y$ فانها ذات ميل موجب ويعني هذا ان β يجب ان تكون موجبة او $\beta > 0$ ويمكن توضيح ذلك بيانيا من الشكل (١٧):-



شكل (١٧) دالة استهلاك خطية

يبين ميل الرسم البياني للدالة كيفية تغير المتغير التابع عند تغير المتغير المستقل ، فاذا كانت دالة الاستهلاك كالاتي:-

$$C = \alpha + \beta Y$$

فاذا تغير Y بمقدار ΔY و C بمقدار ΔC فان:-

$$C + \Delta C = \alpha + \beta (Y + \Delta Y)$$

وعندما نطرح $C = \alpha + \beta Y$ من الدالة اعلاه نحصل على :-

$$\Delta C = \beta \Delta Y$$

وبالعودة الى دالة الاستهلاك الخطية السابقة وهي $C = 100 + 0.56Y$ نجد الاتي:-

$$C = 100 + 0.56Y$$
$$C + \Delta C = 100 + 0.56(Y + \Delta Y)$$
$$\Delta C = 0.56\Delta Y$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta Y} = 0.56$$

ويبين $\frac{\Delta C}{\Delta Y}$ نسبة تغير الاستهلاك استجابة لتغير الدخل ويسمى الميل الحدي للاستهلاك MPC . فاذا رسمنا دالة الاستهلاك مع Y على المحور الافقي و C على المحور العمودي وكما في الشكل البياني (١٧) فإن MPC هو ميلهما، وفي دالة الاستهلاك الخطية يكون MPC ثابتا ولايعتمد على مقدار تغير الدخل ΔY او على مستوى الدخل Y الذي بدأ منه التغير، اما في دالة الاستهلاك غير الخطية (الانحنائية) فلا يكون MPC ثابتا بل يعتمد على كل من ΔY و Y.

المرونة *Elasticity* :

يقيس الميل الاستجابة الفعلية لاحد المتغيرات الناتجة عن تغير متغير آخر، في حين اذا اردنا المقارنة بين دوال مختلفة فيستوجب الامر الرجوع الى مقياس اخر غير الميل وبه نقارن بين التغيرات النسبية في كلا المتغيرين ، فإذا ازدادت اسعار السلعتين معا بنسبة ١% فباي نسبة مئوية تتغير الكمية المطلوبة او المعروضة منهما؟ ان مقارنة الميول لا يمكن ان توفر لنا هذه المعلومات إذ يعتمد ميل منحنى عرض او طلب أي سلعة على وحدات القياس المستخدمة ، وعليه يستوجب الامر الرجوع الى مقياس اخر وهو المرونة.

تعرف المرونة بانها مدى استجابة المتغير التابع للتغيرات في المتغير المستقل، ورياضيا تعرف بانها التغير النسبي في المتغير التابع مقسوما على التغير النسبي للمتغير المستقل، فاذا رمزنا بالرمز E فإن مرونة التابع Y بالنسبة للمتغير المستقل X هي:-

$$E_{Y/X} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\Delta Y}{Y} / \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} * \frac{X}{Y}$$

ومن هذه العلاقة نجد انه يمكن حساب المرونة بين نقطتين حيث يكون الفرق بين فواصل وتراتيب هذه النقاط $\Delta Y, \Delta X$ ، كما يمكن حساب المرونة عند نقطة واحدة إذ اقتربت ΔX الى الصفر وعندها تكون المرونة هي:-

$$E_{Y/X} = \frac{\partial Y}{\partial X} * \frac{X}{Y} = Y' * \frac{X}{Y}$$

مثال (٣,٢) لنفرض انه لدينا الدالة الاتية : $Y = 12 + 0.5X$ ، احسب المرونة بين النقطتين $X = 2$ و $X = 6$ ، ثم احسب المرونة عند النقطة $X = 2$.

الحل

المرونة بين نقطتين:

$$E_{Y/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} * \frac{X}{Y}$$
$$X = 2 \Rightarrow Y = 13$$
$$X = 6 \Rightarrow Y = 15$$
$$\Delta X = 6 - 2 = 4$$
$$\Delta Y = 15 - 13 = 2$$
$$E_{Y/X} = \frac{2}{4} * \frac{2}{13} = 0.077$$

المرونة عند نقطة واحدة $X = 2$:

$$E_{Y/X} = Y' * \frac{X}{Y}$$
$$= 0.5 * \frac{2}{13}$$
$$= 0.077$$

يتضح مما ذكرنا آنفا بان المرونة هي مقياس يعطي التغيرات في المتغير التابع مأخوذة بشكل مئوي عندما يتغير المتغير المستقل بنسبة ١% وعليه يمكن وصف المرونة كما ياتي:

١- $E = 0$: المتغير التابع عديم المرونة أي لايستجيب لتغيرات المتغير المستقل.

٢- $1 > |E| > 0$: المتغير التابع ضعيف المرونة أي التغيرات في التابع اقل من التغيرات في المتغير المستقل.

٣- $|E| = 1$: المتغير التابع متكافيء المرونة أي ان المتغير التابع يتغير بتغير المتغير المستقل نفسه.

٤- $|E| > 1$: المتغير التابع مرن حيث تكون التغيرات في المتغير التابع اكثر من التغيرات في المتغير المستقل.

٥- $|E| = \infty$: المتغير التابع لانهائي المرونة.

مثال (3.3): لنفترض انه لدينا القيم الاتية لعدة متغيرات مستقلة X والقيم المقابلة للمتغير التابع Y في حالات مختلفة.

الحالة (١):

$$X_1 = 100 \Rightarrow Y_1 = 200$$
$$X_2 = 101 \Rightarrow Y_2 = 200$$
$$E_{Y/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} * \frac{X}{Y}$$
$$= \frac{200-200}{101-100} * \frac{100}{200}$$
$$= \frac{0}{1} * \frac{100}{200}$$
$$E_{Y/X} = 0$$

وتفسير النتيجة هنا : عندما تغير X بنسبة ١% كانت تغيرات Y بنسبة ٠% ، عليه التابع عديم المرونة(عديم الاستجابة أي انه لم يستجب للتغير في X)

الحالة (٢):

$$X_1 = 100 \Rightarrow Y_1 = 200$$
$$X_2 = 101 \Rightarrow Y_2 = 202$$
$$E_{Y/X} = \frac{202-200}{101-100} * \frac{100}{200}$$
$$E_{Y/X} = \frac{2}{1} * (0.5) \Rightarrow 1$$

وهنا بتغير X بنسبة ١% تغير Y بنفس النسبة ١% أي ان استجابة المتغير التابع لتغير مساوي للتغير في المتغير المستقل X.

الحالة (٣):

$$X_1 = 100 \Rightarrow Y_1 = 200$$
$$X_2 = 101 \Rightarrow Y_2 = 201$$
$$E_{Y/X} = \frac{1}{1} * \frac{100}{200} = 0.5$$

من الواضح ان تغير Y كان اقل من تغير X حيث بلغ تغير Y ٠,٥% في حين كان تغير X = ١% ، عليه التابع قليل المرونة أي استجابته قليلة للتغير في المتغير المستقل.

الحالة (٤):

$$X_1 = 100 \Rightarrow Y_1 = 200$$
$$X_2 = 101 \Rightarrow Y_2 = 208$$
$$E_{Y/X} = \frac{8}{1} * \frac{100}{200} = 4$$

وهنا نسبة التغير في Y تفوق التغير في X بكثير فنقول ان المتغير التابع مرن جدا.

بعد هذا التعريف الشامل للمرونة اصبح بالامكان تطبيقها على الدوال الاقتصادية حيث تختلف هذه الدوال عن بعضها بالمتغير التابع والمتغير المستقل مما يعطي للمرونات اسماء مختلفة.

١. مرونة الطلب السعرية *Price Elasticity of Demand* : تعرف مرونة الطلب السعرية على انها:- التغير النسبي في الكمية المطلوبة مقسوما على التغير النسبي في سعر الكمية المطلوبة نفسها

ورياضيا :-

مرونة الطلب السعرية = التغير النسبي في الكمية المطلوبة/ التغير النسبي في السعر

$$E_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P}$$

فإذا كانت دالة الطلب على النحو الاتي:-

$$Q = a + bP$$
$$Q + \Delta Q = a + b(P + \Delta P)$$

وبذلك فإن:-

$$\Delta Q = b\Delta P$$

وان :-

$$b = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

واذ أن التغير النسبي في Q هو $\frac{\Delta Q}{Q}$ ، كما ان التغير النسبي في P هو $\frac{\Delta P}{P}$ لذلك فإن:

$$E_d = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}$$

وبذلك لا يعتمد هذا على وحدات القياس التي استخدمت في قياس الاسعار او الكميات لاننا اذا استخدمنا وحدات اصغر كقياس الكميات بالباوندات بدلا من الاطنان ، مثلا فسوف يؤثر ذلك على ΔQ بنسبة تاثيره نفسها على Q.

كما يمكن التوصل الى قانون المرونة المذكور باتباع الاتي:-

التغير المئوي في السعر يمكن صياغته كالاتي:-

$$\frac{\Delta P}{P}\times 100$$

وكذلك الحال بالنسبة الى الكمية :-

$$\frac{\Delta Q}{Q}\times 100$$

وعليه فإن المرونة تساوي:-

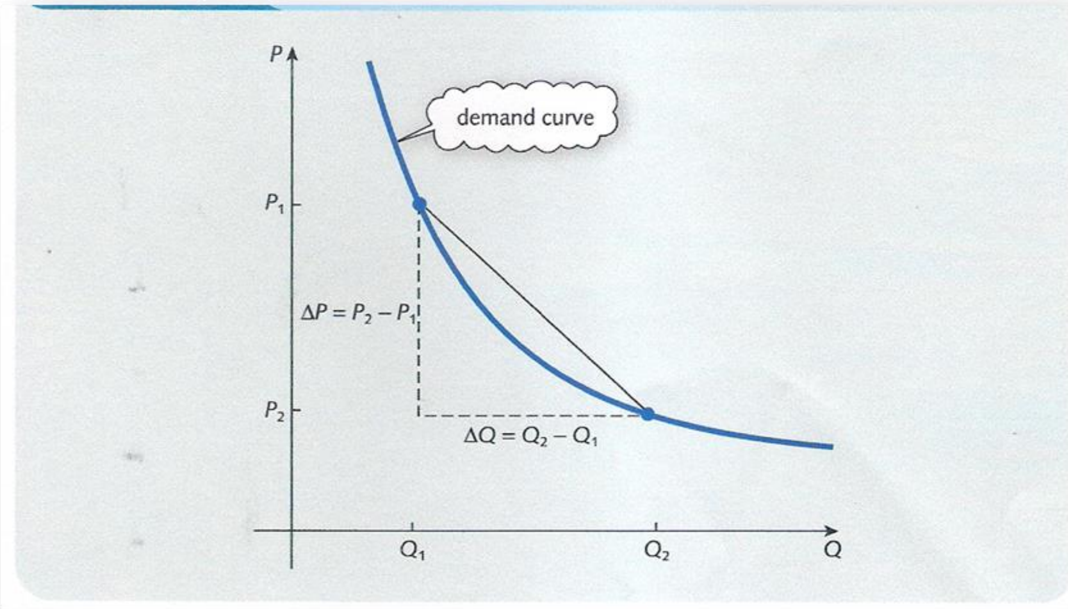
$$E=-\left(\frac{\Delta Q}{Q}\times 100\right)\div\left(\frac{\Delta P}{P}\times 100\right)$$

$$E=-\left(\frac{\Delta Q}{Q}\times 100\right)\times\left(\frac{P}{100\times\Delta P}\right)$$

بحذف ١٠٠ من القوسين نحصل على المرونة:-

$$E=-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\times\frac{P}{Q}$$

ويشير الشكل البياني الاتي الى التمثيل البياني لمنحنى الطلب وفيه ينخفض السعر من P_1 الى P_2 ومؤديا الى زيادة الكمية من Q_1 الى Q_2.

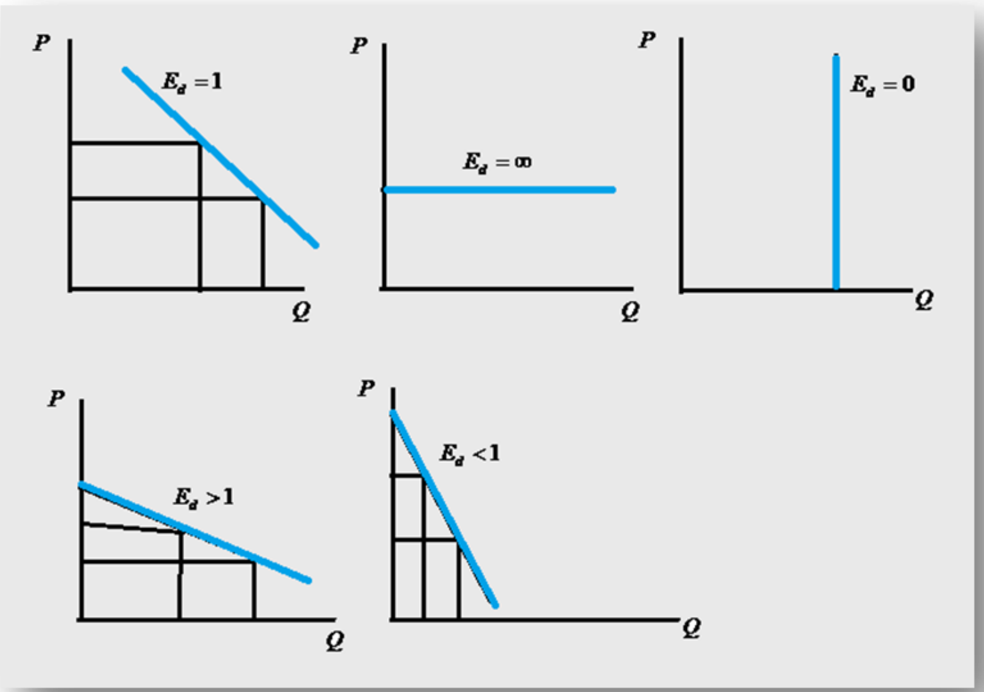


شكل (١٨) التغيرات في الاسعار والكميات

تجدر الاشارة الى انه طالما كانت العلاقة بين الاسعار والكميات المطلوبة هي علاقة عكسية ، لذا تكون مرونة الطلب السعرية في الحالات الاعتيادية ذات قيمة سالبة ولاتكون اشارتها موجبة الا في الحالات الاستثنائية حيث تكون السلعة موضوع البحث من السلع الرديئة ***(Inferior Goods)*** او سلع جيفن ***(Geffen's Goods)***. ولكي نتجنب القيمة السالبة فان العلامة (-) ستدخل المعادلة لايجاد قيمة المرونة وستكون المرونة اكبر من واحد عندما يكون الطلب مرنا

، واذا كانت المرونة اقل من واحد فان الطلب على السلعة غير مرن وهكذا وفيما يأتي الحالات المختلفة لمرونة الطلب رياضيا وبيانيا.

١- يكون الطلب مرنا تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_d > 1$
٢- يكون الطلب غير مرن تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_d < 1$
٣- يكون الطلب احادي المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_d = 1$
٤- يكون الطلب لانهائي المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_d = \infty$
٥- يكون الطلب عديم المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_d = 0$



شكل (١٩) الحالات المختلفة لمرونة الطلب

مثال (3.4): احسب مرونة الطلب السعرية عندما يكون $P = 2$ في دالة الطلب الاتية:

$$P = 25 - 0.5Q$$

الحل

من معادلة الطلب $P = 25 - 0.5Q$ نجد ان :

$$Q = \frac{25}{0.5} - \frac{1}{0.5}P$$
$$Q = 50 - 2P$$

وعندما يكون $P = 2$ فان :

$$Q = 50 - 2(2) = 46$$

ولما كانت معادلة المرونة هي $E_d = \frac{\partial Q}{\partial P} * \frac{P}{Q}$ ،

نجد قيمة $\frac{\partial Q}{\partial P}$ وتساوي ٢- وعليه فإن مرونة الطلب السعرية :-

$$E_d = -2\left(\frac{2}{46}\right) = -0.09$$

مثال(3.5): اذا كانت دالة الطلب هي:

$$Q_d = -P^2 - 40P + 2300$$

احسب التغير في الكمية المطلوبة اذا زاد السعر بمقدار وحدة واحدة عن السعر $P = 10$ ، وقارن النتيجة بحساب التغير الفعلي في كمية الطلب.

الحل//

لحساب التغير في الكمية المطلوبة بالنسبة للتغير في السعر نجد المشتقة الاولى لدالة الطلب وكما ياتي:-

$$\frac{\partial Q_d}{\partial P} = f'(P) = -2P - 40$$

ولقياس التغير في الكمية المطلوبة اذا زاد السعر بمقدار وحدة واحدة نعوض $P = 10$ في المشتقة وكما ياتي:-

$$f'(10) = -2(10) - 40 = -60$$

نلاحظ انه عند التعويض في مشتقة دالة الطلب باي سعر فإن التغير في الكمية المطلوبة سيكون سالبا وسبب ذلك معروف لوجود العلاقة العكسية بين السعر والكمية، كما سنلاحظ ان الكمية المطلوبة ستقل بمقدار ٦٠ وحدة اذا تم رفع السعر بمقدار وحدة واحدة عن السعر الذي يساوي ١٠.

والان نقارن كمية الطلب عند السعر $P = 10$ وعند السعر $P = 11$ كما يأتي:-

عندما $P = 10$ فإن كمية الطلب هي:

$$Q_d = -(10)^2 - 40(10) + 2300 = 1800$$

وعند زيادة السعر بمقدار وحدة واحدة أي $P = 11$ فان كمية الطلب هي :

$$Q_d = -(11)^2 - 40(11) + 2300 = 1739$$

نلاحظ ان الفرق بين السعرين هو ٦١- وحدة نقدية وهذا تقريبا يساوي المقدار الذي حصلنا عليه من التعويض بالمشتقة الاولى لدالة الطلب وهو ٦٠-.

مثال(3.6): اذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $Q_d = 10 - \frac{1}{5}P$. جد مرونة الطلب السعرية للطلب عندما يكون السعر ١٥ وحدة نقدية.

الحل

$$\frac{\partial Q_d}{\partial P} = \frac{-1}{5}$$

الكمية المطلوبة عندما $P = 15$ وهي:

$$Q_d = 10 - \frac{1}{5}(15) = 7$$

ويمكن حساب مرونة الطلب كما ياتي:-

$$E_d = \frac{\partial Q_d}{\partial P} * \frac{P}{Q} \Rightarrow E_d = \frac{-1}{5} * \frac{15}{7} \Rightarrow E_d = -0.429$$

تجدر الاشارة الى اعتماد القيمة المطلقة لقيمة المرونة ، وعليه فإن قيمة المرونة المستخرجة هي ٠,٤٢٩ وهي اقل من الواحد وهذا يعني ان الطلب غير مرن.

مثال(3.7): اذا كانت دالة الطلب كالاتي:-

$$Q_d = 60 - 3P - 0.8P^2$$

المطلوب

١- احسب مرونة الطلب السعرية عندما $P = 5$

٢- مثل المعادلة بيانيا

الحل

١- تحسب مرونة الطلب من المعادلة $E_d = \frac{\partial Q}{\partial P} * \frac{P}{Q}$ ومن معادلة الطلب المذكورة يمكن حساب الجزء الاول من المرونة وهو الميل كما ياتي:

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = -3 - 1.6P$$

وعند $P = 5$ فإن قيمة الميل هي: $\frac{\partial Q}{\partial P} = -3 - 1.6(5) = -11$

وبالتعويض في دالة الطلب بقيمة السعر :

$$Q_d = 60 - 3(5) - 0.8(5)^2 = 25$$

وبذلك فإن المرونة تساوي :

$$E_d = -11\left(\frac{5}{25}\right) = -22$$

٢- تمثيل المعادلة بيانيا: لتحديد الجذر الموجب للمعادلة $Q_d = 60 - 3P - 0.8P^2$ فعندما $Q = 0$ فإن $60 - 3P - 0.8P^2 = 0$

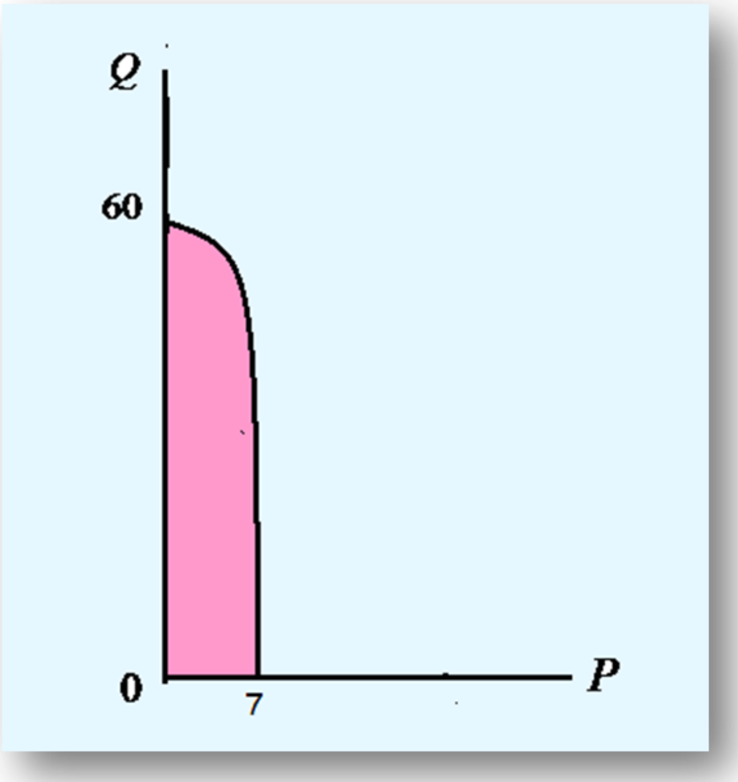
$$P = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-0.8)(60)}}{2(-0.8)}$$

$$P = 7$$

وعند $P = 0$ فان :

$$Q_d = 60 - 3(0) - 0.8(0)^2 = 60$$

وبيانيا يمكن تمثيل المعادلة كما ياتي:



شكل (٢٠) تمثيل المعادلة في المثال (٣,٧)

مثال (٣.8): اعطيت دالة الطلب الاتية :-

$$P = -Q^2 - 4Q + 96$$

المطلوب

١- احسب مرونة الطلب السعرية عندما $P = 51$.

٢- ازداد السعر بنسبة ٢% ، احسب التغير المئوي الموافق في الطلب.

الحل

١- عندما يكون السعر = ٥١ فإن دالة الطلب تساوي

$$-Q^2-4Q+96=51$$

$$-Q^2-4Q+45$$

$$Q=\frac{-(-4)\pm\sqrt{((-4)^2-4(-1)(45))}}{2(-1)}$$

$$Q=\frac{4\pm\sqrt{196}}{-2}$$

$$Q=\frac{4\pm14}{-2}$$

لحل المعادلة نحصل على قيمتين لـ Q هما : اما $Q=-9$ او $Q=5$ وبطبيعة الحال تهمل القيمة السالبة ، أي ان قيمة $Q=5$.

ولايجاد قيمة المرونة ينبغي حساب القيمة $\frac{dQ}{dP}$ وكما ياتي:-

$$\frac{dP}{dQ}=-2Q-4$$

$$\frac{dQ}{dP}=\frac{1}{dP/dQ}=\frac{1}{-2Q-4}$$

وتحسب المرونة كما ياتي:-

$$E=-\frac{P}{Q}\times\frac{dQ}{dP}$$

$$P=51\ ,\ Q=5\ \ ,\ \frac{dQ}{dP}=-\frac{1}{14}$$

$$E=-\frac{51}{5}\times\left(-\frac{1}{14}\right)=0.73$$

٢- عند تغير السعر بنسبة ٢%

$$E=-\frac{Percentage\ change\ in\ demand}{Percentage\ change\ in\ \mathrm{Pr}ice}$$

$$0.73=-\frac{Percentage\ change\ in\ demand}{2}$$

$$0.73\times2=-1.46\%$$

وهذا يعني انه بتغير السعر بنسبة ٢% فان الكمية المطلوبة تتغير (تنخفض) بنسبة ١,٤٦%

٢- مرونة العرض السعرية ***Price Elasticity of Supply***

تعرف مرونة العرض السعرية على انها التغير النسبي في الكميات المعروضة مقسوما على التغير النسبي في الاسعار أي :

مرونة العرض السعرية= التغير النسبي في الكميات المعروضة / التغير النسبي في الاسعار

حيث يتحدد العرض في منشآت تنافسية تعد كل منها اسعار السوق محددة ، فاذا كانت دالة العرض محددة بالشكل الاتي:-

$$Q_s = \gamma + \delta P$$

ثم ازدادت P بمقدار ΔP فان:-

$$Q + \Delta Q = \gamma + \delta(P + \Delta P)$$

$$\Delta Q = \delta \Delta P$$

ويكون ميل منحنى العرض في هذه الحالة :

$$\delta = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

ويكون ميل منحنى العرض موجبا دائما ، حيث يكون المنتج على استعداد دائم لزيادة انتاج وعرض السلعة عند ارتفاع سعرها.

وبافتراض ان الكمية المعروضة قيست على المحور العمودي والسعر على المحور الافقي فان مرونة العرض السعرية ستكون:-

$$E_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P}$$

$$E_s = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}$$

او تكتب بالصيغة الاتية بافتراض ثبات العوامل الاخرى المؤثرة في العرض:

$$E_s = \frac{\partial Q}{\partial P} * \frac{P}{Q}$$

وكما هو الحال في مرونة الطلب فان مرونة العرض لها حالات مختلفة باختلاف قيمة المرونة وكما ياتي:-

١- يكون العرض مرنا تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_s > 1$

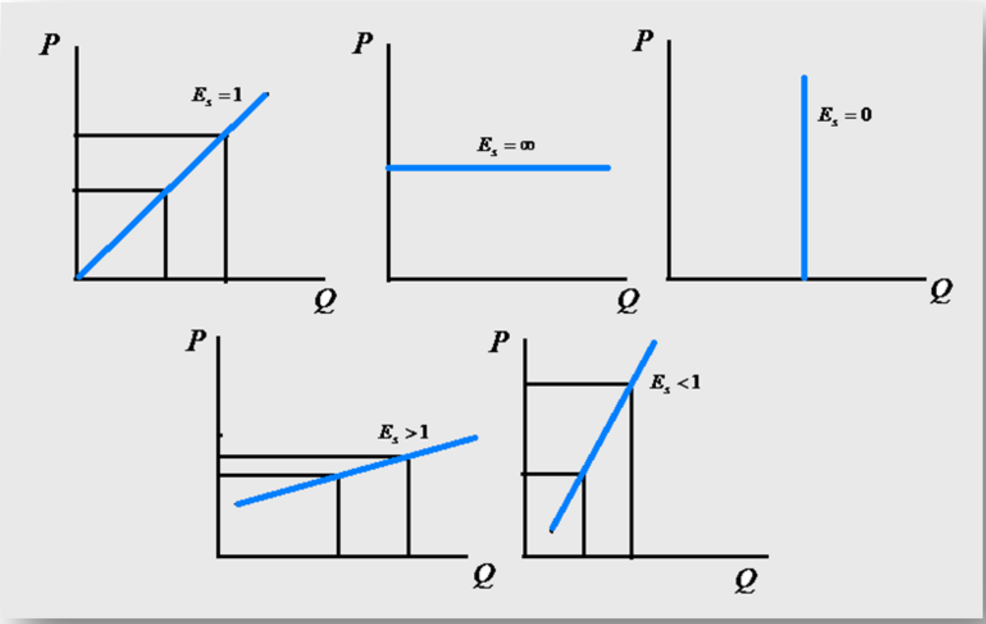
٢- يكون العرض غير مرن تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_s < 1$

٣- يكون العرض احادي المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_s = 1$

٤- يكون العرض لانهائي المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_s = \infty$

٥- يكون العرض عديم المرونة تجاه التغير في السعر اذا كانت $E_s = 0$

وبيانيا يمكن تمثيل حالات المرونة المذكورة آنفا بالشكل البياني(٢١):



شكل (٢١) الحالات المختلفة لمرونة العرض

مثال(٣.9): اعطيت دالة العرض الاتية:-

$$P=10+\sqrt{Q}$$

المطلوب

احسب مرونة العرض السعرية في الحالات الاتية:

١- بين القيمتين $Q=100$ **و** $Q=105$

٢- عند النقطة $Q=100$

الحل

عند القيمتين $Q=100$ **و** $Q=105$ **نحسب قيمتين للسعر وكما ياتي:-**

$$P_1=10+\sqrt{100}=20 \quad and \quad P_2=10+\sqrt{105}=20.247$$

وعليه:-

$$\Delta P=20.247-20=0.247\ , \qquad \Delta Q=105-100=5$$

$$P=\frac{1}{2}(20+20.247)=20.123, \qquad Q=\frac{1}{2}(100+105)=102.5$$

اذن قيمة المرونة هي:-

$$E=\frac{P}{Q}\times\frac{\Delta Q}{\Delta P}=\frac{20.123}{102.5}\times\frac{5}{0.247}=3.97$$

٢- المرونة عند النقطة $Q=100$

الحل

$$P=10+Q^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{Q}}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP}=2\sqrt{Q}$$

وعند النقطة $Q=100$ نحصل على:-

$$\frac{dQ}{dP}=2\sqrt{100}=20$$

اذن المرونة عند $Q=100$

$$E=\frac{P}{Q}\times\frac{dQ}{dP}=\frac{20}{100}\times 20=4$$

نلاحظ من الحل ان قيمة المرونة في الحالتين قريبة جدا.

٣- مرونة الطلب الدخلية *Income Elasticity of Demand*

تقيس مرونة الطلب الدخلية درجة استجابة الكميات المطلوبة او الانفاق لتغيرات الدخل ، ورياضيا يمكن التعبير عنها بالاتي:-

مرونة الطلب الدخلية = التغير النسبي في الكميات المطلوبة/ التغير النسبي في الدخل

$$E_y=\frac{\%\Delta Q}{\%\Delta Y}$$

$$E_y=\frac{\Delta Q/Q}{\Delta Y/Y}=\frac{\Delta Q}{\Delta Y}*\frac{Y}{Q}$$

وكما هو الحال بمرونة الطلب والعرض ، أي بافتراض ثبات العومل الاخرى المؤثرة في الطلب فيمكن كتابة معادلة مرونة الطلب الدخلية كما ياتي:-

$$E_y=\frac{\partial Q}{\partial Y}*\frac{Y}{Q}$$

وتكون مرونة الطلب الدخلية موجبة في اكثر الاحوال لان قيمة الميل موجبة وهذا في حالة السلع الاعتيادية ، في حين تكون سالبة في حالة سلع جيفن.

٤- مرونة الطلب التقاطعية ***Cross Elasticity of Demand***

يعبر عنها بانها الاستجابة النسبية للكميات المطلوبة من سلعة ما للتغيرات في اسعار السلع الاخرى سواء البديلة او المكملة ، أي :

مرونة الطلب التقاطعية= التغير النسبي في الكمية المطلوبة/ التغير النسبي في اسعار السلع

$$E_{cross} = \frac{\%\Delta Q_x}{\%P_r}$$

$$E_{cross} = \frac{\Delta Q_x / Q_x}{\Delta P_r / P_r} \Rightarrow \frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r} * \frac{P_r}{Q_x}$$

فاذا كانت السلعة r سلعة بديلة للسلعة x فان الميل $\frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r}$ يكون موجبا ومن ثم تكون اشارة المرونة موجبة.

اما اذا كانت السلعة r سلعة مكملة للسلعة x فان الميل $\frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r}$ يكون سالبا وبالتاي تكون اشارة المرونة سالبة.

مثال (٣,١٠): توفرت لديك المعلومات عن دالة الطلب على سلعة الدهن النباتي إذ اتخذت دالة الطلب الشكل الاتي:-

$$Q_{d\,oil} = 10 - 0.5P_1 + 0.8P_2 + 0.1Y$$

إذ أن:-

P_1 = **سعر سلعة الدهن النباتي**

P_2 = **سعر سلعة الدهن الحيواني(كسلعة بديلة)**

Y = **الدخل**

المطلوب

١- احسب مرونة الطلب السعرية عندما يكون:

أ- P_1 = ٦ P_2 =١٥ Y =١٠٠

٢- احسب مرونة الطلب التقاطعية عندما يكون :

أ- P_1 = ٤ P_2 =١٠ Y =١٢٠

٣- احسب مرونة الطلب الدخلية عندما يكون:

أ- P_1 = ٣ P_2 =٦ Y =٢٠٠

الحل

١- حساب مرونة الطلب السعرية : وهنا يتم التعويض في دالة الطلب بقيم $P_2 = 15$ و $Y = 100$ دون قيمة P_1 وكما ياتي:-

$$Q_d = 10 - 0.5P_1 + 0.8(15) + 0.1(100)$$
$$Q_d = 10 - 0.5P_1 + 12 + 10$$
$$Q_d = (10 + 12 + 10) - 0.5P_1$$
$$Q_d = 32 - 0.5P_1 ....(1)$$

وباخذ المشتقة الاولى للدالة نستخرج الميل :

$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_1} = -0.5$$

وبالتعويض عن قيمة $P_1 = 6$ في دالة الطلب في معادلة (١) نحصل على ما ياتي:-

$$Q_d = 32 - 0.5(6)$$
$$Q_d = 29$$

وبتطبيق قانون مرونة الطلب السعرية :

$$E_d = \frac{\partial Q_d}{\partial P_1} * \frac{P_1}{Q_d}$$
$$= -0.5\left(\frac{6}{29}\right) = -0.1$$

∴ مرونة الطلب السعرية = ٠,١-

٢- حساب مرونة الطلب التقاطعية: هنا سيتم التعويض عن قيمتي $P_1 = 4$ و $Y = 120$ في دالة الطلب دون قيمة P_2 وكما ياتي:-

$$Q_d = 10 - 0.5(4) + 0.8P_2 + 0.1(120)$$
$$Q_d = (10 - 2 + 12) + 0.8P_2$$
$$Q_d = 20 + 0.8P_2$$
$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_2} = 0.8$$
$$Q_d = 20 + 0.8(10) = 28$$
$$E_{cross} = \frac{\partial Q_d}{\partial P_2} * \frac{P_2}{Q_d} \Rightarrow 0.8\left(\frac{10}{28}\right)$$
$$E_{cross} = 0.29$$

∴ مرونة الطلب التقاطعية = ٠,٢٩

٣- حساب مرونة الطلب الدخلية : هنا يتم التعويض بقيمتي $P_1 = 3$ و $P_2 = 6$ في دالة الطلب من دون قيمة Y وكما ياتي:

$$Q_d = 10 - 0.5(3) + 0.8(6) + 0.1Y$$
$$Q_d = (10 - 1.5 + 4.8) + 0.1Y$$
$$Q_d = 13.3 + 0.1Y$$
$$Q_d = 13.3 + 0.1(200)$$
$$Q_d = 13.3 + 20 = 33.3$$
$$\frac{\partial Q_d}{\partial Y} = 0.1$$
$$E_y = \frac{\partial Q_d}{\partial Y} * \frac{Y}{Q_d} = 0.1\left(\frac{200}{33.3}\right)$$
$$E_y = 0.6$$

$\therefore$ **مرونة الطلب الدخلية = ٠,٦**

اذن قيم المرونات الثلاث هي كالاتي:-

١- مرونة الطلب السعرية E_d =-٠,١

٢- مرونة الطلب التقاطعية E_{cross} =٠,٢٩

٣- مرونة الطلب الدخلية E_y = ٠,٦

اسئلة الفصل الثالث

س١:- اثبت ان مرونة الطلب السعرية للدالة الاتية = b

$$Q_d = aP^b$$

س٢:- احسب مرونة الطلب و العرض السعرية للدوال الاتية عندما $P=8$ و $P=6$

١- $P = 40 - 0.5Q$

٢- $Q = -4 + 0.75P$

٣- $Q - P + 2 = 0$

٤- $2P + 0.25Q = 40$

٥- $P = 20 - 2Q$

٦- $4Q + 4P = 64$

س٣:-اذا امكن تمثيل جدول الطلب لسلعة ما بالمعادلة :

$$Q_1 = 20 - 2P_1 - 0.5P_2 + 0.01Y$$

إذ أن :- Q_1= كمية السلعة ، P_1= سعر السلعة ، P_2= سعر سلعة اخرى ، Y= الدخل

عبر عن :

١- $Q_1 = f(P_1)$ **عندما** $P_2 = 10$ **و** $Y = 500$**، ثم احسب المرونة السعرية عندما** $P_1 = 5$

٢- $Q_1 = f(P_2)$ **عندما** $P_1 = 10$ **و** $Y = 2000$ **، ثم احسب المرونة التقاطعية عندما** $P_2 = 10$

٣- $Q_1 = f(Y)$ **عندما** $P_1 = 5$ **و** $P_2 = 10$ **، ثم احسب المرونة الدخلية عندما** $Y = 1000$

س٤:- اذا كانت دالة الطلب والعرض على سلعة زراعية كالاتي:-

$$Q_d = 50 - 0.4P$$
$$Q_s = -16 + 0.6P$$

استخرج مرونة الطلب والعرض عند نقطتي التوازن.

س٥:-اذا كانت دالة الطلب :

$$P = 100Q^{-\frac{1}{2}}$$

المطلوب

١- مرونة الطلب السعرية عندما يكون السعر = ٢٥

٢- مقدار الطلب الاستهلاكي عندما يكون السعر =٢٥

س٦:- اذا كانت دالة الاستهلاك تعطى حسب المعادلة:

$$C = 0.06Y^2 - Y + 100$$

المطلوب

احسب MPC **و** MPS **عندما** $Y = 15$

س٧:- اذا كانت دالة الاستهلاك تعطى بالمعادلة الاتية:

$$C = 25 + 6\sqrt{Y}$$

المطلوب

احسب MPC **و** MPS **عندما** $Y = 16$

س٨:- اذا كانت دالة الطلب على البضائع المصدرة من بلد ما الى بلد اجنبي تعطى كالاتي:-

$$Q = \sqrt{Y_f} + \frac{20}{P^2}$$

إذ أن : Y_f**: دخل المستهلك في البلد الاجنبي**

P **: سعر السلعة المصدرة للبلد الاجنبي**

المطلوب

احسب المرونة السعرية والمرونة الدخلية عندما $Y_f = 3600$ **و** $P = 4$

س٩:-اذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة A **تعطى بالشكل الاتي:**

$$Q_A = 120 - 20P_A + 30P_B + 0.4Y$$

اذا كانت : $P_A = 8$ **و** $P_B = 10$ **و** $Y = 1200$

المطلوب//

١- مرونة الطلب السعرية E_A

٢- مرونة الطلب التقاطعية $E_{cross AB}$

٣- مرونة الطلب الدخلية E_Y

س١٠:-اذا كانت دالة العرض هي:-

$$Q = 150 + 5P + 0.1P^2$$

احسب مرونة العرض السعرية في الحالات الاتية:-

١- بين النقطتين $P = 9$ **و** $P = 11$

٢- عند النقطة $P = 10$

س١١:- اعطيت دالة الطلب الاتية:-

$$P = -Q^2 - 10Q + 150$$

١-احسب مرونة الطلب السعرية عندما $Q = 4$

٢- احسب التغير النسبي في السعر لزيادة الكمية المطلوبة بنسبة ١٠%

مصادر الفصل الثالث

١- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على الشبكة الدولية المعلوماتية.

٢ - ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٣- حسين علي بخيت – مباديء الاقتصاد الرياضي– كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ٢٠٠٠.

٤- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور الشبكة الدولية المعلوماتية.

٥- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. ٢٠١٠.

٦- الوتار، ابي محمد صبري واثيل عبد الجبار الجومرد ، مدخل الى الاقتصاد الرياضي، دار الكتب للطباعة والنشر ، الموصل، ١٩٩٣.

7-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.

8-G.Tian. Mathematical Economics (lecture notes). Published on line www.google.com.

9-Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

الفصل الرابع

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد

Optimization of Functions of One variable

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:-

- الدوال المتزايدة والمتناقصة
- القيم القصوى
- تطبيقات الامثلية الاقتصادية
- مبدا تساوي التكاليف الحدية والايرادات الحدية لتحقيق الامثلية

الفصل الرابع

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد

Optimization of Functions of One variable

إن الهدف الاساس في بناء أي أنموذج اقتصادي هو تحديد الحلول المثلى للأنموذج المدروس ، إذ ان تحقيق الهدف الرئيس للمنشأة وهو رفع القيمة السوقية للمنشأة في السوق لا يتحقق الا عن طريق تعظيم الارباح وخفض التكاليف، وتقسم الامثلية الى حالتين هما ، التعظيم *Maximization* ، والتدنية *Minimization*. وسنتناول في هذا الفصل طريقة الوصول الى الامثلية في النماذج الاقتصادية عن طريق تحديد القيم القصوى بشقيها (العظمى والدنيا) للدوال موضوع الأنموذج ، مثل دالة التكاليف الكلية والارباح الكلية ودالة الانتاج وغيرها.

وقبل الدخول في تفاصيل الامثلية لابد من استعراض بعض المفاهيم الرياضية ذات العلاقة بموضوع الامثلية والتي تساعد على فهم الموضوع.

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة *Increasing and Decreasing functions*

نقول ان الدالة $y = f(x)$ هي دالة متزايدة في مدة محددة من الاعداد اذا كانت قيم الدالة y تتزايد مع تزايد قيم x التي تنتمي الى هذه الفترة ، أي ان:−

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

وذلك لجميع قيم x ضمن المدة بحيث ان $x_1 \le x_2$.

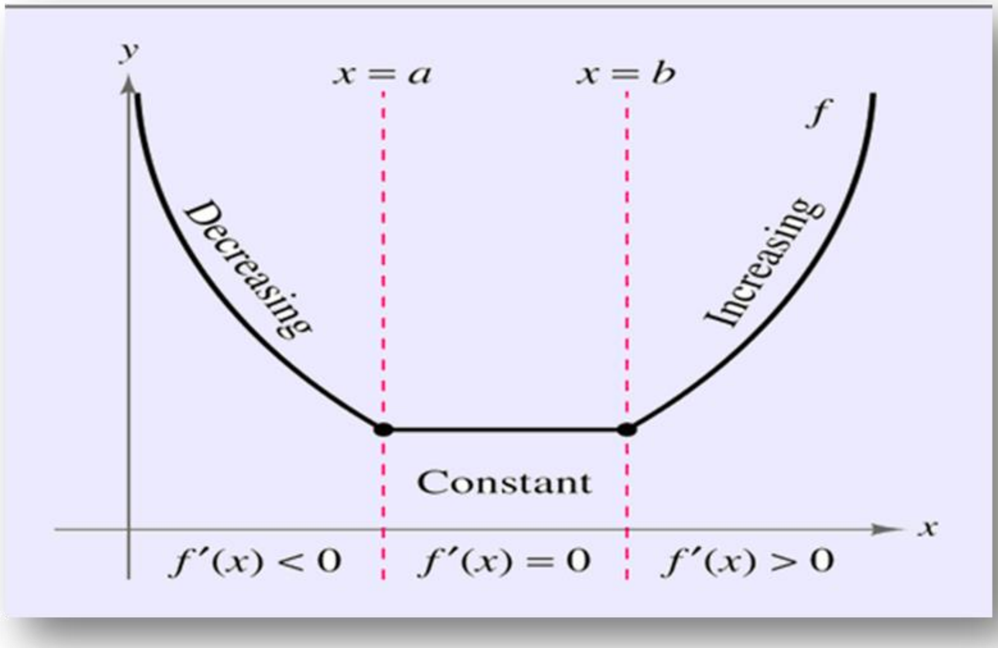
تجدر الاشارة الى ان خير مثال على الدوال المتزايدة هي دالة العرض اذ ان الكمية المعروضة تزداد بزيادة السعر كما هو معلوم.

نقول ان الدالة $y = f(x)$ هي دالة متناقصة في مدة محددة من الاعداد اذا كانت قيم الدالة y تتناقص مع تزايد قيم x التي تنتمي الى هذه المدة ، أي ان:−

$$f(x_1) \ge f(x_2)$$

وذلك لجميع قيم x ضمن المدة بحيث ان $x_1 \le x_2$. وتمثل دالة الطلب واحدة من الدوال المتناقصة حيث تتناقص الكمية المطلوبة بزيادة السعر.

والشكل البياني الاتي يوضح الدوال المتناقصة والمتزايدة :



شكل (٢٢) الدوال المتناقصة والمتزايدة والثابتة

مثال(4.1):اختبر الدوال الاتية من حيث التزايد والتناقص

$$1)\,Q_s = 40 + 2P \qquad 2)\,Q_d = 25 - 3P$$

الحل

نعوض مجموعة من الاعداد العشوائية في الدالتين ونرى كيف تتجه قيم الدالتين :

١) $Q_s = 40 + 2P$

$Q_s = 40 + 2P$	P
$Q_s = 40 + 2(1) = 42$	١
$Q_s = 40 + 2(2) = 44$	٢
$Q_s = 40 + 2(3) = 46$	٣

من ملاحظة قيم الجدول نجد انه بزيادة بقيم P زادت قيم Q_s وهذا يعني ان الدالة متزايدة

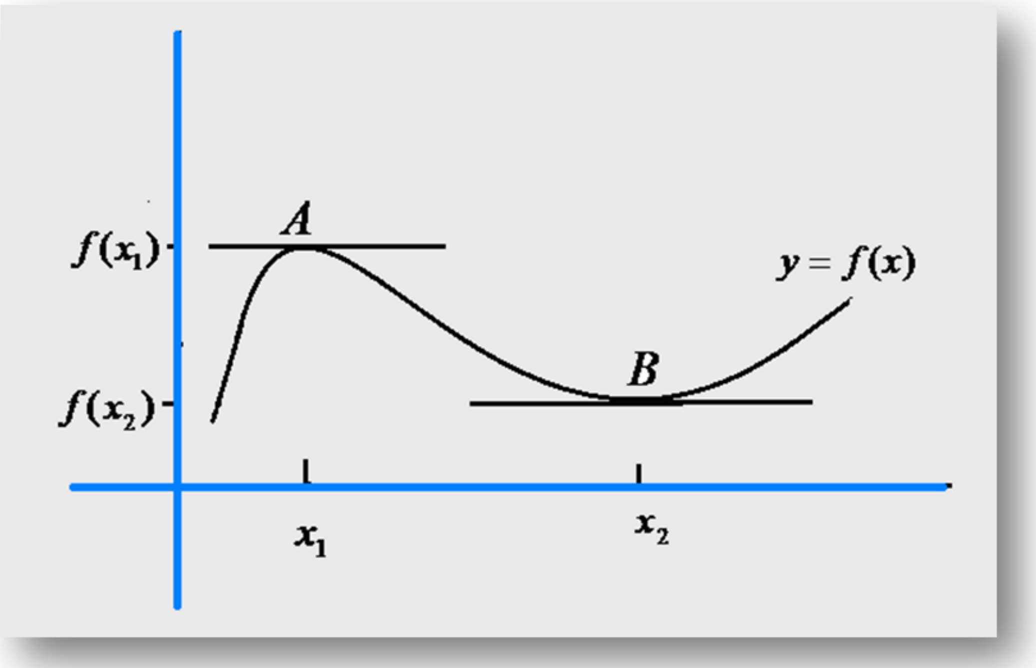
٢) $Q_d = 25 - 3P$

$Q_d = 25 - 3P$	P
$Q_d = 25 - 3(1) = 22$	١
$Q_d = 25 - 3(2) = 19$	٢
$Q_d = 25 - 3(3) = 16$	٣

من ملاحظة قيم الجدول نجد انه بزيادة قيم P نقصت قيم Q_d وهذا يعني ان الدالة متناقصة

القيم القصوى *Extreme Values*:

تشير القيم القصوى والتي تشمل القيم العظمى والصغرى الى الاعداد التي تمثل اكبر قيمة تحققها الدالة وكذلك اصغر قيمة ضمن المدة المدروسة ، ويمكن تمثيل القيم القصوى للدالة بالشكل الاتي:-



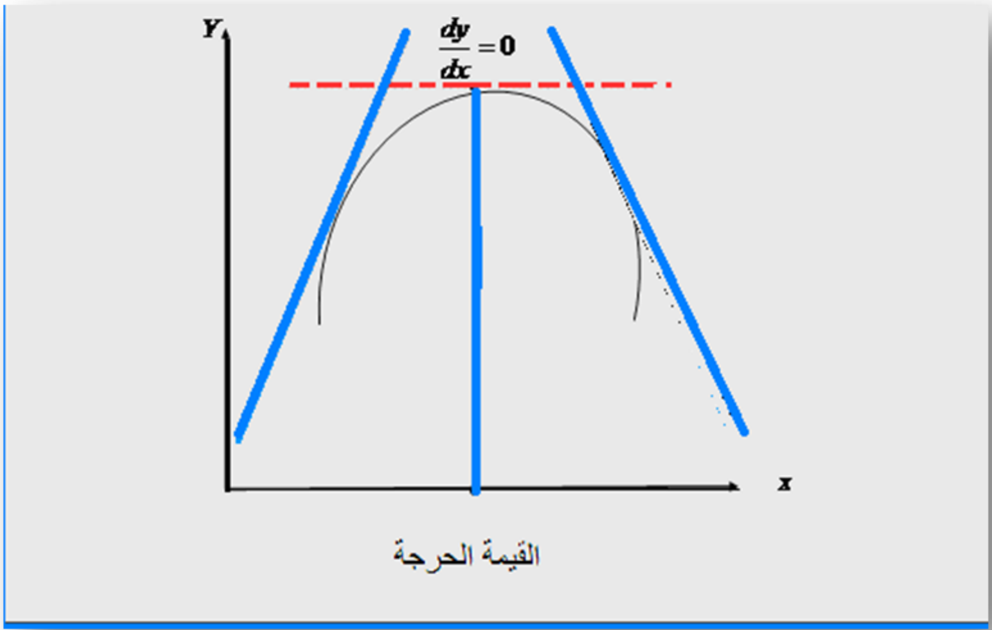
شكل (٢٣) القيم القصوى للدالة $y = f(x)$

نلاحظ من الشكل (٢٣) ان النقطة A تمثل قيمة عظمى للدالة $f(x)$ اذا ماقورنت بقيم الدالة التي حولها ، كما نلاحظ ان منحنى الدالة يبقى متجها الى الاعلى الى ان يصل الى النقطة A ثم بعد ذلك يتجه منحدرا الى الاسفل ، وتسمى النقطة A بالعظمى المحلية *Local maximum*

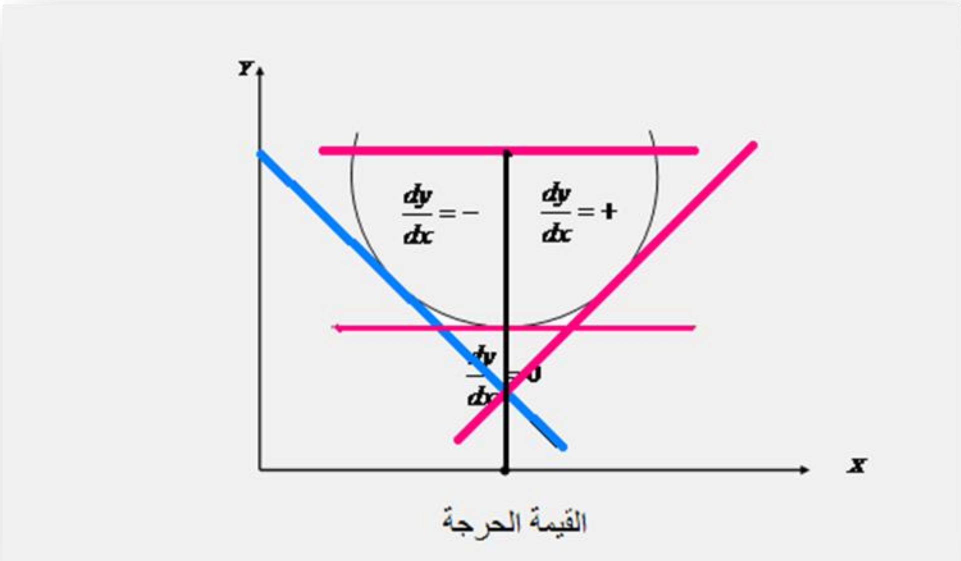
او العظمى النسبية *Relative maximum* ، وان الدالة $y = f(x)$ تحقق قيمة نسبية عند $x = x_1$ وهذه القيمة العظمى هي $f(x_1)$

اما فيما يتعلق بالنقطة B فتمثل قيمة صغرى للدالة $f(x)$ اذا ماقورنت بقيم الدالة التي حولها ، إذ نلاحظ ان منحنى الدالة ينحدر الى الاسفل الى ان يصل الى النقطة B ثم يتجه صعودا بعد ذلك. وتسمى النقطة B بالصغرى المحلية *Local Minimum* او الصغرى النسبية *Relative Minimum* ، ونقول ان الدالة $y = f(x)$ تحقق قيمة صغرى نسبية عند $x = x_2$ وهذه القيمة هي $f(x_2)$.

وبالرجوع الى الشكل (٢٣) نلاحظ ان المماس الذي يمر بالنقطة A و B مواز للمحور الافقي والذي يعني ان ميل المماسين هو صفر ، وحيث ان قيمة المشتقة الاولى عند نقطة تشير الى ميل المماس عند تلك النقطة فإن $f'(x_1) = 0$ او $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$ ، وكذلك الحال بالنسبة الى $f'(x_2) = 0$ او $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$ ، ويطلق على هذه النقاط بالنقاط الحرجة *Critical Points* وكما موضحة بالشكلين البيانيين الاتيين (٢٤) و (٢٥).



شكل (٢٤) القيمة الحرجة في حالة التعظيم



شكل (٢٥) القيمة الحرجة في حالة التدنية

وخلاصة القول انه للحصول على القيم القصوى ينبغي اولا ان نجد جذور المشتقة الاولى ثم نحدد فيما اذا كانت القيم عظمى ام صغرى ، ويتم اختبار فيما اذا كانت النقطة صغرى او عظمى بالاعتماد على الاختبار الاتي:

ليكن $x = a$ هو احد جذور المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ فانه:-

– اذا كانت $f''(a) < 0$ او $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ فتوجد قيمة عظمى عند $x = a$

– اذا كانت $f''(a) > 0$ او $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ فتوجد قيمة صغرى عند $x = a$

ويمكن تلخيص خطوات ايجاد القيم القصوى للدالة $y = f(x)$ بما يأتي:-

١. نجد المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ ثم نجد جذورها.

٢. نجد المشتقة الثانية للدالة ونعوض جذور المشتقة الاولى التي تم ايجادها بالخطوة السابقة وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض سالبة فتكون هنالك قيمة عظمى، في حين اذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض موجبة فتكون هناك قيمة صغرى. أما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض صفرا فيكون الاختبار قد فشل في اعطاء معلومات عن القيم القصوى. ويسمى هذا الاختبار باختبار المشتقة الثانية *Second Derivative test*

مثال (4.2): اوجد القيم القصوى للدالة :

$$y = f(x) = -3x^2 + 6x + 4$$

الحل

نطبق المشتقة الاولى للدالة ثم نجد جذورها كما ياتي:-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

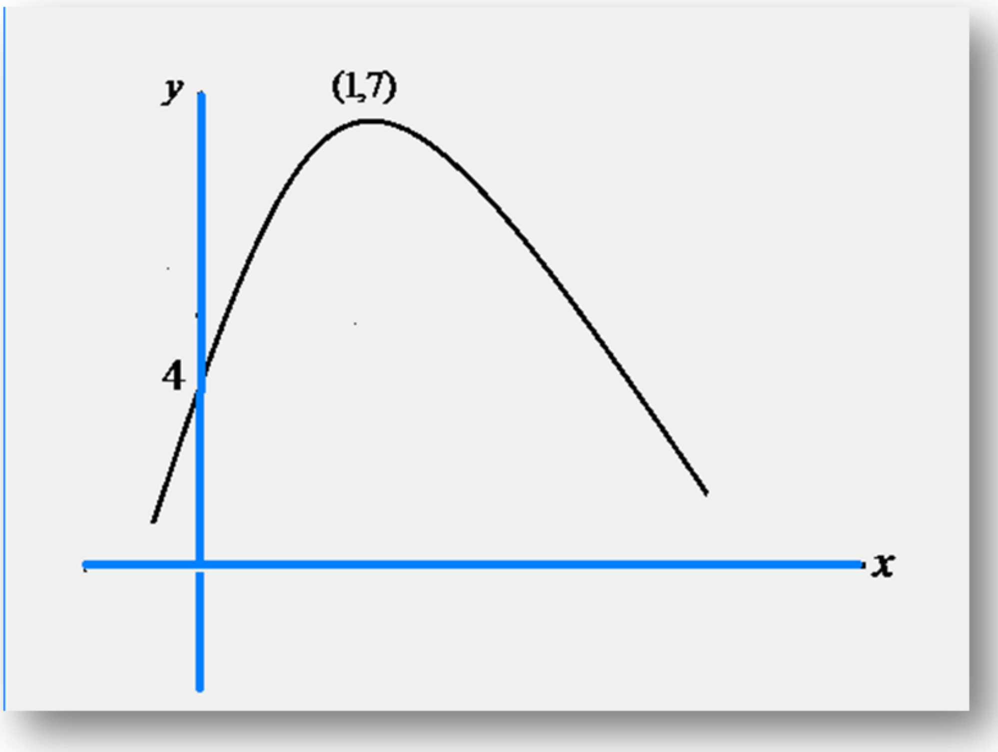
نطبق اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -6 < 0$$

هنا نجد ان المشتقة الثانية سالبة وهذا يعني وجود قيمة عظمى عند $x = 1$ **وهذه القيمة هي:**

$$y = f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 4 = 7$$

وهذا يعني ان اكبر قيمة ستحققها الدالة هي ٧ وكما في الشكل الاتي:-



شكل (٢٦) القيمة العظمى للدالة $y = f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

مثال(4.3): اوجد القيم القصوى للدالة :

$$y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$$

الحل

نجد المشتقة الاولى للدالة ثم نجد جذورها كما ياتي:-

$$\frac{\partial y}{\partial x}=3x^2-3x-18=0$$

والدالة المذكورة دالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام إذ أن :-

$$c=-18 \quad , \quad b=-3 \quad , \quad a=3$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(3)(-18)}}{2(3)}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{225}}{6}=\frac{3\pm 15}{6}$$

$$x=3 \quad or \quad x=-2$$

نطبق الان اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x)=6x-3$$

نعوض الان $x=3$ **في دالة المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(3)=6(3)-3=15>0$$

وهذا يعني وجود قيمة صغرى عند $x=3$ **وهذه القيمة هي :-**

$$y=f(3)=(3)^3-\frac{3}{2}(3)^2-18(3)+5=-35.5$$

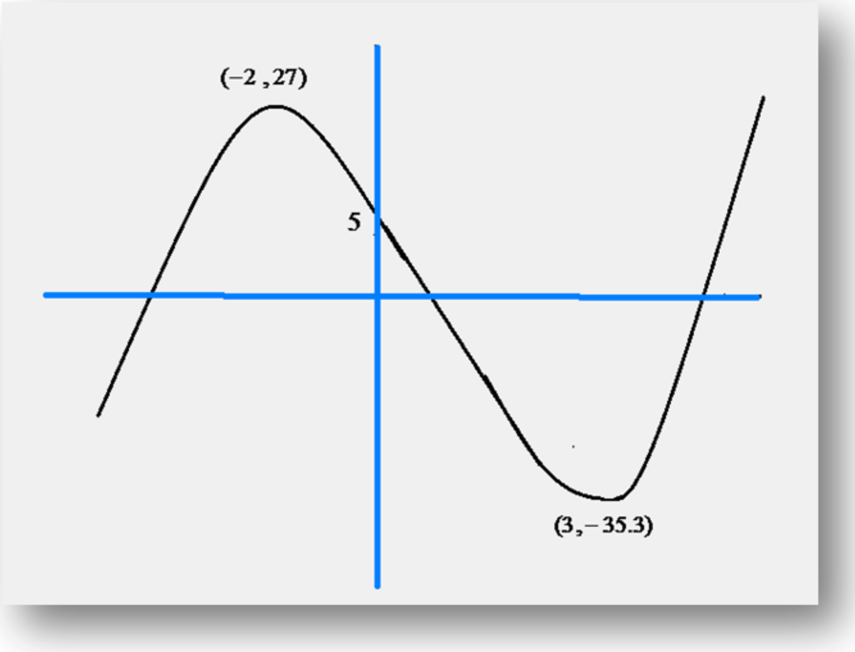
نعوض الان $x=-2$ **في دالة المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-**

$$f''(-2)=6(-2)-3=-15<0$$

وهذا يعني وجود قيمة عظمى عند $x=-2$ **وهذه القيمة هي:-**

$$y=f(-2)=(-2)^3-\frac{3}{2}(-2)^2-18(-2)+5=27$$

ويمكن تمثيل الدالة بيانيا كما في الشكل الاتي:-



شكل (٢٧) تمثيل الدالة $y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$ بيانيا

مثال(٤,٤): جد القيم القصوى للدالة الآتية ومثلها بيانيا.

$$y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

الحل

نستخرج المشتقة الاولى والثانية للدالة

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$f''(x) = 12x + 6$$

نحتاج الى حل المشتقة الاولى للدالة لانها معادلة من الدرجة الثانية :

$$6x^2 + 6x - 12 \qquad \div 6$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4(1)(-2))}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2,1$$

توجد قيمتان من الحل لـ x هما ٢− و ١ ،

ولتصنيف النقطتين نحتاج الى ايجاد $f''(-2)$ و $f''(1)$ أي ان:−

$$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18$$

وهذه القيمة المستخرجة قيمة سالبة عليه توجد نقطة نهاية عظمى عند $x = -2$ وعندما $x = -2$

$$y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 4 = 24$$

وعند نقطة النهاية العظمى نجد الاحداثية الاتية $(-2,24)$.

لتصنيف النقطة الثانية $f''(1)$:-

$$f''(1)=12(1)+6=18$$

وهذه النقطة موجبة أي توجد نقطة نهاية دنيا عند $x=1$ وعندما $x=1$ نحصل على:-

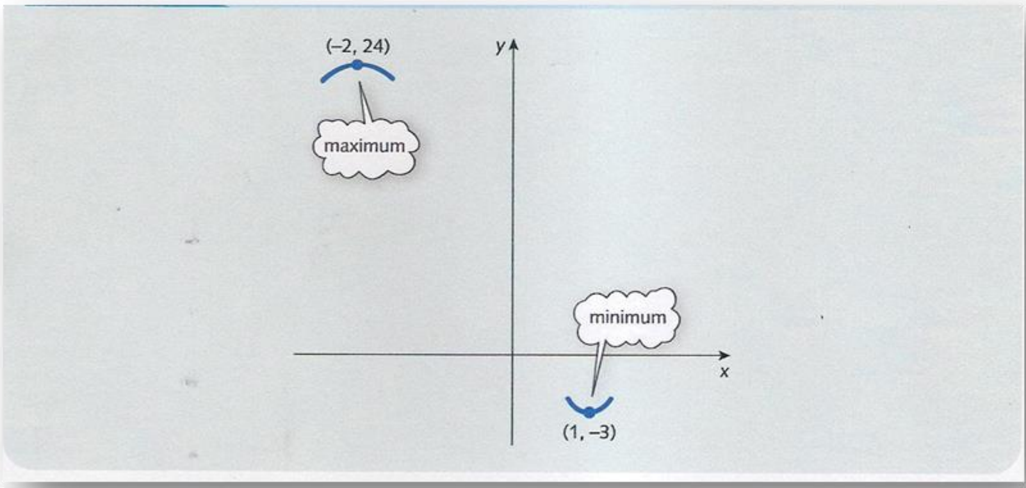
$$y=2(1)^3+3(1)^2-12(1)+4=-3$$

وعليه عند نقطة النهاية الدنيا نجد الاحداثية $(1\ ,-3)$

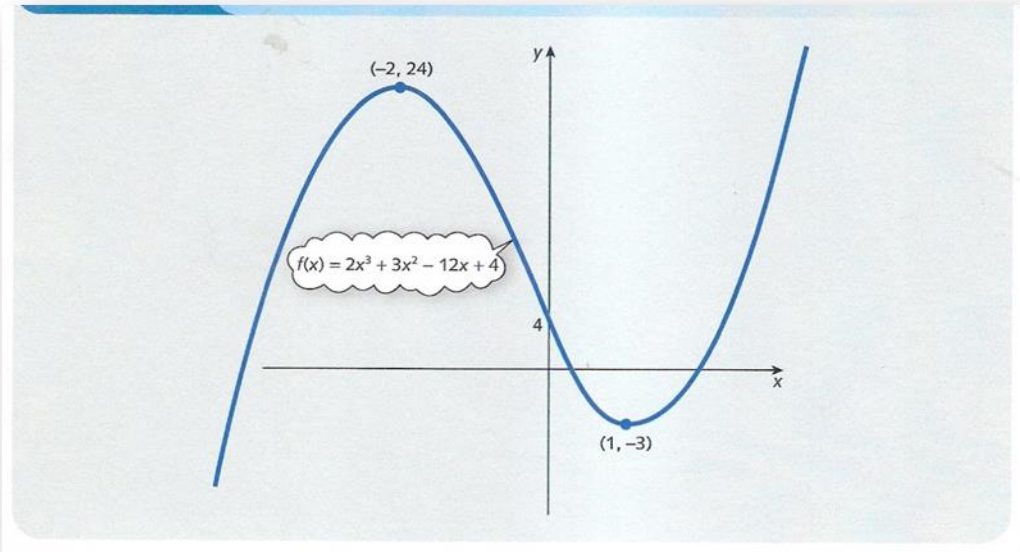
ولتوضيح الصورة بشكل عام يمكن توقيع بعض النقاط لقيم x والمناظرة لها قيم y وكما موضح بالجدول الاتي:-

x	-10	0	10
y	-1816	4	2184

ويمكن توضيح الدالة بيانيا من خلال الاشكال البيانية الاتية:-



شكل(٢٨) النقاط العظمى والدنيا للمثال (4.4)



شكل (٢٩) التمثيل البياني للدالة $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

تطبيقات الامثلية الاقتصادية *Economical Application of Optimization*

اولا– دالة الايراد الكلي *Total Revenue Function*

مثال (4.5): جد حجم الانتاج الامثل الذي يحقق اعلى ايراد ممكن اذا علمت ان دالة الايراد الكلي هي:–

$$TR = -2Q^2 + 24Q$$

الحل

لايجاد قيمة Q (حجم الانتاج) التي تحقق عندها دالة الايراد الكلي قيمة عظمى ينبغي ايجاد المشتقة الاولة لدالة الايراد الكلي ثم نجد جذور المشتقة وكما ياتي:

$$\frac{\partial TR}{\partial Q} = -4Q + 24 = 0 \Rightarrow Q = \frac{24}{4} = 6$$

والان نجد المشتقة الثانية لدالة الايراد الكلي ونتاكد من كون القيمة التي تتحقق عند $Q = 6$ هي قيمة عظمى:

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = -4 < 0$$

من النتيجة يتبين ان المشتقة الثانية سالبة ويعني وجود قيمة عظمى عند $Q = 6$. اما قيمة الايراد الكلي عند هذه الكمية من الانتاج فهي:

$$TR = -2(6)^2 + 24(6) = 72$$

ولو جربنا أي قيمة اخرى غير $Q = 6$ ولتكن ٥ فتكون قيمة الايراد الكلي عند ٥ هي:

$$TR = -2(5)^2 + 24(5) = 70$$

وهذه القيمة اقل من ٧٢

وفي حال اختيار قيمة اكبر من ٦ ولتكن القيمة ٧ ستكون قيمة الايراد الكلي عند القيمة ٧ هي:

$$TR = -2(7)^2 + 24(7) = 70$$

وهذه القيمة كذلك اقل من ٧٢

عليه تكون قيمة الانتاج $Q = 6$ تحقق اعلى قيمة لدالة الايراد الكلي.

ثانيا- دالة التكاليف الكلية *Total Cost Function*

مثال(4.6): اذا كانت دالة الكلفة الكلية هي:

$$TC = Q^3 - 9Q^2 + 24Q + 15$$

المطلوب : جد حجم الانتاج الذي يخفض الكلفة الكلية لادنى مستوياتها:

الحل

نشتق دالة التكاليف الكلية ثم نجد جذور المشتقة وكما ياتي:-

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = 3Q^2 - 18Q + 24 = 0$$

وهذه الدالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام (الدستور) إذ أن:-

$$c = 24 \ , \ b = -18 \ , \ a = 3$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(24)}}{2(3)}$$

$$Q = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6}$$

$$Q = 4 \quad or \quad Q = 2$$

نجد الان المشتقة الثانية لدالة التكاليف ونختبر القيم الناتجة من جذور المشتقة الاولى وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q^2} = 6Q - 18$$

نعوض $Q = 4$ و $Q = 2$ في المشتقة الثانية لنحدد القيمة الصغرى وكما ياتي:

عند $Q = 4$ فان قيمة المشتقة الثانية هي:-

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = 6(4) - 18 = 6 > 0$$

وعند $Q = 2$ فإن قيمة المشتقة الثانية هي:-

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = 6(2) - 18 = -6 < 0$$

والمشتقة الثانية عند $Q = 2$ هي سالبة فهي لاتحقق شرط المشتقة الثانية في حالة التدنية اذ ينبغي ان تكون موجبة.

وعليه فعند $Q = 4$ فان المشتقة الثانية موجبة وهي تحقق الشرط ، وان القيمة الصغرى للتكاليف الكلية تتحقق عند $Q = 4$ وهذه الكلفة هي:-

$$TC = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) + 15 = 31$$

ويمكن التاكد من القيمة $Q = 4$ تحقق ادنى قيمة لدالة التكاليف الكلية وذلك بتجربة ارقام اخرى اكبر واقل من $Q = 4$ وتعويضها في دالة التكاليف الكلية.

ثالثا- دالة الربح الكلي *Total Profit Function*

مثال(4.7): اذا كانت دالة الطلب هي:-

$$P = 200 - 0.5Q$$

ودالة الكلفة الكلية هي:-

$$TC = 500 + 20Q$$

المطلوب: عند أي مستوى من المبيعات يتحقق اعلى ربح ممكن؟

الحل

نجد دالة الربح الكلي وهي:-

$$\pi = TR - TC$$

ويعبر عن دالة الايراد الكلي بما ياتي:-

$$TR = P.Q = (200 - 0.5Q)Q = 200Q - 0.5Q^2$$

$$\pi = 200Q - 0.5Q^2 - 20Q - 500$$

$$\pi = -0.5Q^2 + 180Q - 500$$

نشتق دالة الربح ونجد جذورها:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -Q + 180 = 0 \Rightarrow \; Q = 180$$

نجد المشتقة الثانية للتاكد من شرط التعظيم وان القيمة ١٨٠ تتحقق عندها معظمة الدالة:-

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -1 < 0$$

ولان المشتقة الثانية سالبة فهذا يشير الى وجود قيمة عظمى للربح الكلي عند $Q = 180$ وهذه القيمة للربح الكلي هي:-

$$\pi = -0.5(180)^2 + 180(180) - 500 = 15700$$

كما يمكن ان نجد ان اعلى ربح يتحقق عند تساوي الايراد الكلي مع التكلفة الحدية وكما ياتي:

مبدأ تساوي التكاليف الحدية مع الإيرادات الحدية لتحقيق الأمثلية

وبعد أن تسنى لنا التعرف على كيفية الاستعانة بعلم التفاضل لحل مشكلات الأمثلية العظمى أو الصغرى ، يصبح من السهل علينا إدراك حقيقة مهمة ، وهي أن القاعدة الأساسية لتعظيم الربح ، لا تتأتى إلا حينما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي ، ويوضح الشكل (٢٨) دالتي التكاليف الكلية والإيرادات الكلية لشركة ما وبما أن الربح الكلي يساوي الإيرادات الكلية مطروحا منه التكاليف الكلية ، لذا فإن الربح الكلي يكون مساويا للمسافة الرأسية بين منحنى الإيرادات الكلية ومنحنى التكلفة الكلية عند أي مستوى من مستويات الإنتاج المختلفة . هذا وتصل هذه المسافة إلى أقصاها عند مستوى الإنتاج Q_1 ، حيث يتساوى ميل منحنى الإيرادات الكلية مع ميل منحنى التكاليف الكلية ولما كان ميل منحنى الإيرادات الكلية هو الإيراد الحدي(MR) وميل منحنى التكاليف الكلية هو التكلفة الحدية(MC) ، فإن هذا يعني وصول الربح إلى أقصى حد ممكن عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيرادات الحدية .

ورياضيا:

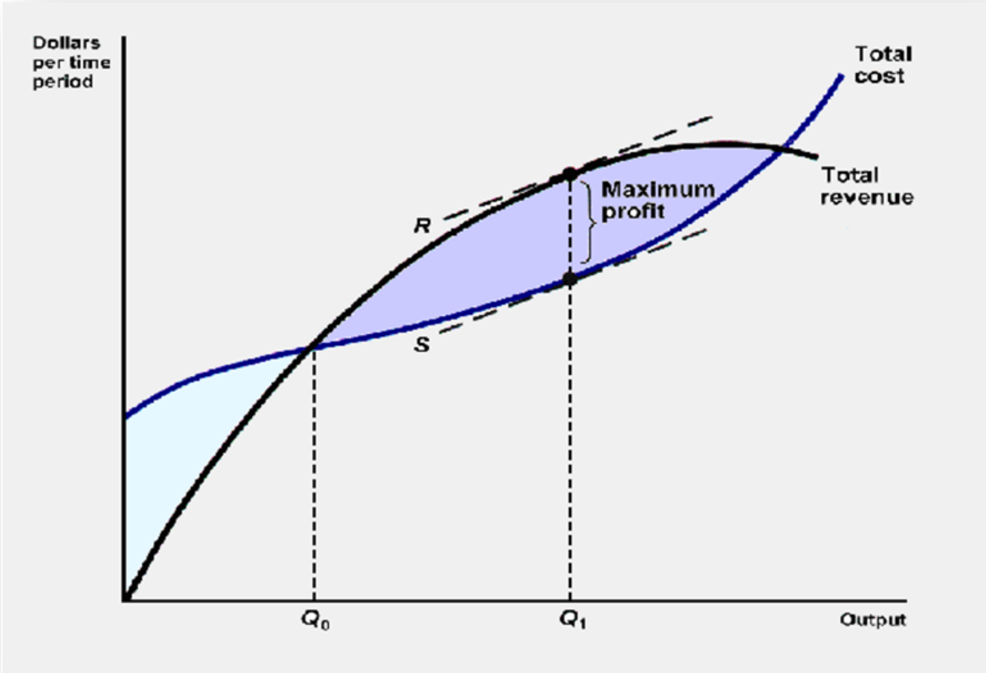
$$\pi = TR - TC$$

وان القيمة العظمى تتحقق عندما $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$ فهذا يؤدي الى

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial TR}{\partial Q} - \frac{\partial TC}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial TR}{\partial Q} = \frac{\partial TC}{\partial Q}$$

وهذا يعني ان اعلى ربح يتحقق عندما :

$$MR = MC$$



شكل (30) قاعدة تساوي التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي لتعظيم الربح : عند مستوى الإنتاج Q_1 يتعظم الربح نظراً لأن الإيراد الحدي (والذي يساوي ميل المستقيم R) يساوي التكلفة الحدية (والتي تساوي ميل المستقيم S) .

مثال (8.4): جد الكمية التي يتحقق عندها اعلى ربح ممكن اذا كانت دالة الايراد الكلي هي:

$$TR = -3Q^2 + 388Q$$

ودالة الكلفة الكلية هي: $TC = Q^3 - 9Q^2 + 100Q + 15$

الحل

يتحقق اعلى ربح ممكن عندما $MR = MC$

نجد الايراد الحدي : $MR = \dfrac{\partial TR}{\partial Q} = -6Q + 388$

ثم نجد الكلفة الحدية : $MC = \dfrac{\partial TC}{\partial Q} = 3Q^2 - 18Q + 100$

وبالمساواة ينتج :

$$MR = MC$$
$$-6Q + 388 = 3Q^2 - 18Q + 100$$
$$-3Q^2 + 18Q - 100 - 6Q + 388 = 0$$
$$-3Q^2 + 12Q + 288 = 0$$

وهذه دالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام(الدستور) :

$$Q=\frac{-(12)\pm\sqrt{(12)^2-4(-3)(288)}}{2(-3)}$$

$$Q=\frac{-12\pm\sqrt{3600}}{-6}=\frac{-12\pm 60}{-6}$$

$$Q=12 \qquad or \qquad Q=-8$$

وحيث ان الكمية السالبة تهمل فتكون الكمية التي تحقق اعلى ربح هي ١٢.

مثال (٤,٩): اذا كانت دالة طلب السوق لمنشأة ما كالاتي:-

$$4P+Q-16=0$$

وكانت دالة التكاليف المتوسطة كالاتي:-

$$AC=\frac{4}{Q}+2-0.3Q+0.05Q^2$$

المطلوب: جد قيمة Q التي تحقق:-

١- اقصى ايراد ممكن

٢- ادنى تكاليف حدية

٣- اقصى ارباح

الحل

١- اقصى ايراد ممكن:

نبسط دالة الطلب ونجدها كالاتي:-

بالتقسيم على ٤ ستكون دالة الطلب كالاتي: $P=4-0.25Q$

نجد دالة الايراد الكلي :

$$TR=P.Q=(4-0.25Q)\,Q=4Q-0.25Q^2$$

ويكون الايراد الكلي عند نهايته العظمى عندما $\frac{\partial TR}{\partial Q}=0$ و $\frac{\partial^2 TR}{\partial Q}<0$ وكما ياتي:-

$$\frac{\partial TR}{\partial Q}=4-0.5Q$$

$$Q=\frac{4}{0.5}=8$$

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q}=-0.5<0$$

وبذلك فان الايراد الكلي يكون عند نهايته العظمى عندما $Q=8$ وقيمته هي :-

$$TR=4(8)-0.25(8)^2=16$$

٢- ادنى تكاليف حدية:

حتى نجد قيمة Q التي تدني التكاليف الحدية ينبغي اولا ايجاد دالة التكاليف الكلية وكما ياتي:-

$$TC = (AC)(Q)$$
$$TC = \frac{4}{Q} + 2 - 0.3Q + 0.05Q^2$$
$$TC = 4 + 2Q - 0.3Q^3 + 0.05Q^3$$

اما دالة التكاليف الحدية فهي المشتقة الاولى لدالة التكاليف الكلية وتساوي:

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Q} = 2 - 0.6Q + 0.15Q^2$$

وتكون التكاليف الحدية عند نهايتها الدنيا عند $\frac{\partial MC}{\partial Q} = 0$ و $\frac{\partial^2 MC}{\partial Q^2} > 0$

$$\frac{\partial MC}{\partial Q} = -0.6 + 0.3Q = 0$$
$$-0.6 + 0.3Q = 0$$
$$0.3Q = 0.6$$
$$Q = 2$$
$$\frac{\partial^2 MC}{\partial Q^2} = 0.3 > 0$$

لذلك فان التكاليف الحدية تكون عند نهايتها الدنيا عندما $Q = 2$

٣- اقصى ارباح

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 4Q - 0.25Q^2 - 4 - 2Q + 0.3Q^2 - 0.05Q^3$$
$$\pi = -0.05Q^3 + 0.05Q^2 + 2Q - 4$$

وتكون الارباح عند نهايتها العظمى عندما $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$ و $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} < 0$ وكما ياتي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -0.15Q^2 + 0.1Q + 2 = 0$$

وبعد حل المعادلة باستخدام القانون العام نحصل على قيمتين لـQ هما اما $Q = 4$ او $Q = -3.3$. وحيث ان Q لايمكن ان تكون سالبة عليه فان $Q = 4$ هي التي تحقق الشرط وعندما $Q = 4$ فإن :-

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -0.3Q + 0.1$$
$$= -0.3(4) + 0.1 = -1.1 < 0$$

وبذلك فإن الارباح تكون اقصى مايمكن عند $Q = 4$.

مثال (٤,١٠):اذا كانت دالة الطلب : $Q_d = 40 - 2P$ ، وكانت دالة العرض: $2P - Q_s = 20$. افترض ان الحكومة قد فرضت ضريبة بمقدار t على كل وحدة من الوحدات المعروضة، وقد قام المنتجون بتعديل دالة العرض لتتضمن هذه الضريبة . احسب:

١- نسبة الضريبة التي تعظم ايراد الضريبة

٢- اقصى ايراد ضريبة يمكن الحصول عليه

الحل

١- نسبة الضريبة التي تعظم ايراد الضريبة

اذا كانت $2P - Q_s = 20$ ، فان $P = 10 + 0.5Q_s$ ، إذ ان المنتجين يعدلون دالة العرض لتتضمن الضريبة فسيؤدي ذلك الى انتقال الدالة كما تم بيانها سابقا.

$$P = 10 + 0.5Q_s + t$$

إذ ان دالة الطلب هي:

$$P = 20 - 0.5Q_d$$

وعند حالة التوازن تكون $Q_s = Q_d$ وبذلك فإن :

$$10 + 0.5Q + t = 20 - 0.5Q$$
$$t = 10 - Q$$

t هي نسبة الضريبة وبذلك فان اجمالي ايراد الضريبة: $T = tQ$

أي انه نسبة الضريبة مضروبة في الكمية المنتجة وبذلك فان:

$$T = (10 - Q)Q = 10Q - Q^2$$

وتكون Tاقصى ما يمكن عندما $\frac{\partial T}{\partial Q} = 0$ و $\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} < 0$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = 10 - 2Q$$

وعندما يكون اجمالي ايراد الضريبة T اقصى ما يمكن فان:

$$10 - 2Q = 0$$

اي ان:

$$Q = 5$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} = -2 < 0$$

وبذلك تكون T اقصى ما يمكن عند $Q = 5$ ، وعندما تكون $Q = 5$ فان:

$$t = 10 - 5 = 5$$

وبذلك فإن $t = 5$ هي نسبة الضريبة التي تعظم T

٢- اقصى ايراد ضريبي يمكن الحصول عليه

$$T = tQ = 5(5) = 25$$

اسئلة الفصل الرابع

س١:-كانت دالة طلب محتكر كالاتي:

$$P = 30 - 0.75Q$$

فإذا كانت دالة AC على الشكل الاتي:

$$AC - \frac{30}{Q} = 9 + 0.3Q$$

المطلوب: جد قيمة Q التي تعطي:

١- اقصى ايراد ممكن

٢- ادنى تكاليف متوسطة

٣- اقصى ارباح

٤- اختبر في كل حالة الشرط الثاني

س٢:- اذا كانت دالة الطلب والكلفة الكلية لسلعة ما هي:

$$4P + Q - 16 = 0$$

$$TC = 4 + 2Q - 3\frac{Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}$$

المطلوب//

١- جد كلا من $\pi\ ,\ MC\ ,\ MR,\ TR$

٢- جد النقطة التي تجعل $MR = MC$

٣- اثبت رياضيا ان مرونة النقطة التي تعظم الايرادات تساوي $\left(\left(E_d\right) = -1\right)$

س٣:-مشروع اقتصادي معين كانت دالتا معدل ايراداته ومعدل تكاليفه كما ياتي:

$$AR = 22 - 0.5Q$$

$$AC = \frac{1}{3}Q^2 - 8.5Q + 50 + \frac{90}{Q}$$

المطلوب:

١- استخراج الايرادات الحدية والتكاليف الحدية

٢- مستوى انتاجه الذي يعظم ارباحه

س٤:- تعمل احدى المنشآت في ظل المنافسة غير الكاملة ولها دالة كلفة كلية من الدرجة الاولى ، يكلف انتاج كل وحدة اضافية ١٨٠٠ وحدة نقدية ، وتبلغ الكلفة الثابتة ٤٠٠٠٠ وحدة نقدية ، اما دالة الطلب فهي $P = 3000 - 5Q$ والمطلوب:

١- ايجاد مستوى الانتاج الذي يعظم الربح

٢- ايجاد اعظم الارباح

٣- ايجاد مستوى السعر الموافق لمستوى الانتاج الذي يعظم الايراد

س٥:- لديك دالة الطلب الاتية: $P + Q = 30$

ودالة الكلفة الكلية هي:- $TC = \frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7$

المطلوب

١. جد مستوى الانتاج الذي يعظم الايراد الكلي.
٢. جد مستوى الناتج الذي يعظم الربح
٣. احسب الايراد الحدي والكلفة الحدية

س٦:- اعطيت دالة الطلب الاتية:- $P + 2Q = 20$

ودالة الكلفة الكلية الاتية: $Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$

المطلوب

١. جد مستوى الناتج الذي يعظم الايراد الكلي
٢. جد مستوى الناتج الذي يعظم الربح

س٧:- اعطيت دالة الكلفة الكلية الاتية:

$$TC = 3Q^3 - 3Q^2 + 36Q$$

المطلوب: احسب مستوى الانتاج الذي يدني متوسط الكلفة ، ثم احسب متوسط الكلفة والكلفة الحدية عند ذلك المستوى من الانتاج.

س٨:- لديك المعلومات الاتية عن دالتي الطلب والكلفة الكلية :

$$4P+Q-16=0$$
$$and$$
$$TC=4+2Q-\frac{3Q^2}{10}+\frac{Q^3}{20}$$

المطلوب:

١. استخرج دوال TR , π , MR , MC بدلالة الناتج Q.

٢. حل المعادلة الاتية : $\frac{\partial \pi}{\partial Q}$، ثم جد قيمة الناتج الذي يعظم الربح.

٣. اثبت انه عند النقطة التي يعظم بها الربح فان $MR=MC$

مصادر الفصل الرابع

١- أسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٢- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٣- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٤- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد - ٢٠٠٠.

٥- الرياضيات الاقتصادية - كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٦- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. ٢٠١٠.

٧-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.

٨- Henderson James M & Quandt Richard E, Microeconomc theory A mathematical approach , 3rd ed, 1980.

٩- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

١٠- Samuelson P.A , Foundation of Economic Analysis , Cambridge Mass, Harvard university Press.1948.

الفصل الخامس

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغيرات المتعددة

Optimization of Functions of Several variables

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:-

- الدوال الاقتصادية ذات متغيرين مستقلين
- الدوال الاقتصاديةمتعددة المتغيرات
- الامثلية غير المقيدة
- الامثلية المقيدة
- الامثلية المقيدة ومضاعفات لاكرانج

الفصل الخامس

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغيرات المتعددة

Optimization of Functions of Several variables

مقدمة

تناولنا في الفصل الرابع الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد ، غير ان هناك دوالا اقتصادية تحتوي أكثر من متغير مستقل تسمى بدوال ذات متغيرات متعددة كما في دالة الطلب الاتية والتي تتاثر فيها الكمية المطلوبة بمجموعة من المتغيرات وكما ياتي:

$$Q_d = f(P_1, P_2, P_3, Y, N_p)$$

وسنتناول في هذا الفصل الامثلية للدوال الاقتصادية غير المقيدة *Unconstrained Optimization* والدوال الاقتصادية المقيدة *Constrained Optimization*.

وكما لاحظنا في حالة الدوال ذات المتغير المستقل الواحد والشروط الواجب توافرها لكي تكون الدالة عند قيمتها العظمى او الصغرى، فنوضح الشروط الواجب توافرها في حالة الدوال ذات المتغيرات المتعددة ولسهولة التحليل سناخذ اولا الدوال ذات متغيرين فقط ، ثم الدوال المتضمنة اكثر من متغيرين مستقلين.

اولا: الدوال الاقتصادية ذات متغيرين مستقلين

نفترض وجود الدالة الاتية ذات المتغيرين المستقلين X_2, X_1 وهي $Y = f(X_1, X_2)$ وينبغي توافر شرطين مهمين لكي تكون الدالة عند نهايتها العظمى او الصغرى (الدنيا)

١- الشرط الضروري (اللازم) ***Necessary Condition*** : المشتقات الجزئية الاولى لهذه الدالة يجب ان تساوي صفرا أي ان:-

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = f_1 = f' = 0 \quad , \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = f_2 = f'' = 0$$

ملاحظة: تمت كتابة رموز المشتقات الجزئية الاولى بصيغ مختلفة لتعدد صيغها في بعض الكتب حتى يمكن للطالب ملاحظتها جميعا.

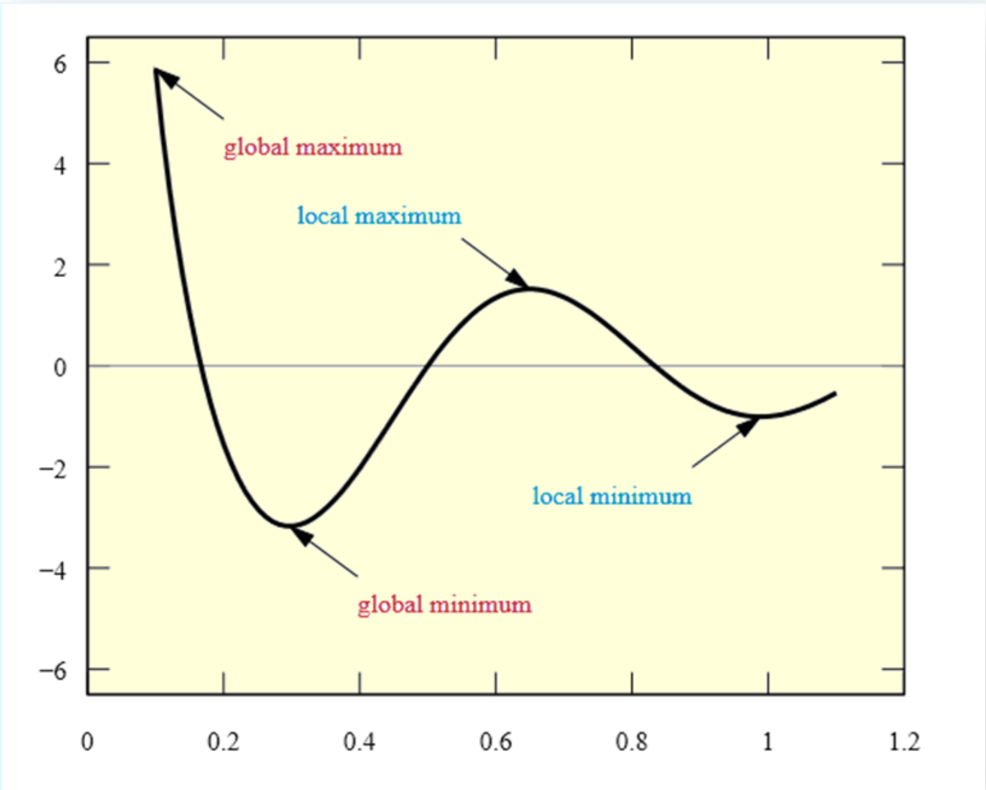
٢- الشرط الكافي ***Sufficient Condition*** : ان تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية للدالة عند القيم الحرجة وكما ياتي:

- إن تكـــون موجبـــة فـــي حالـــة النهايـــات الصـــغرى أي ان $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} > 0$ او $(f_{11}, f_{22} > 0)$، ويعنى ذلك ان الدالة متجهة الى الاعلى عند القيمة الحرجة.
- أما في حالة النهايات العظمى فينبغي ان تكون المشتقات الجزئية الثانية للدالة سالبة أي $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} < 0$ او $(f_{11}, f_{22} < 0)$ ويعني ذلك ان الدالة متجهة الى الاسفل عند القيم الحرجة.

٣- أما في حال معرفة كون الدالة في حالتها المثلى عند النظر اليها من الاتجاهات جميعها فينبغي ان يتحقق الشرط الاتي:

$$(f_{11})(f_{22}) > (f_{12})^2 \quad or \quad \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2}\right)^2$$

وفي حال عدم توافر الشرط المذكور فإن الدالة ذات قيمة عظمى او صغرى محلية (*Local Maximum or Minimum*) وليست قيمة كلية *Global*. ويمكن توضيح ذلك بيانيا من الشكل الاتي:



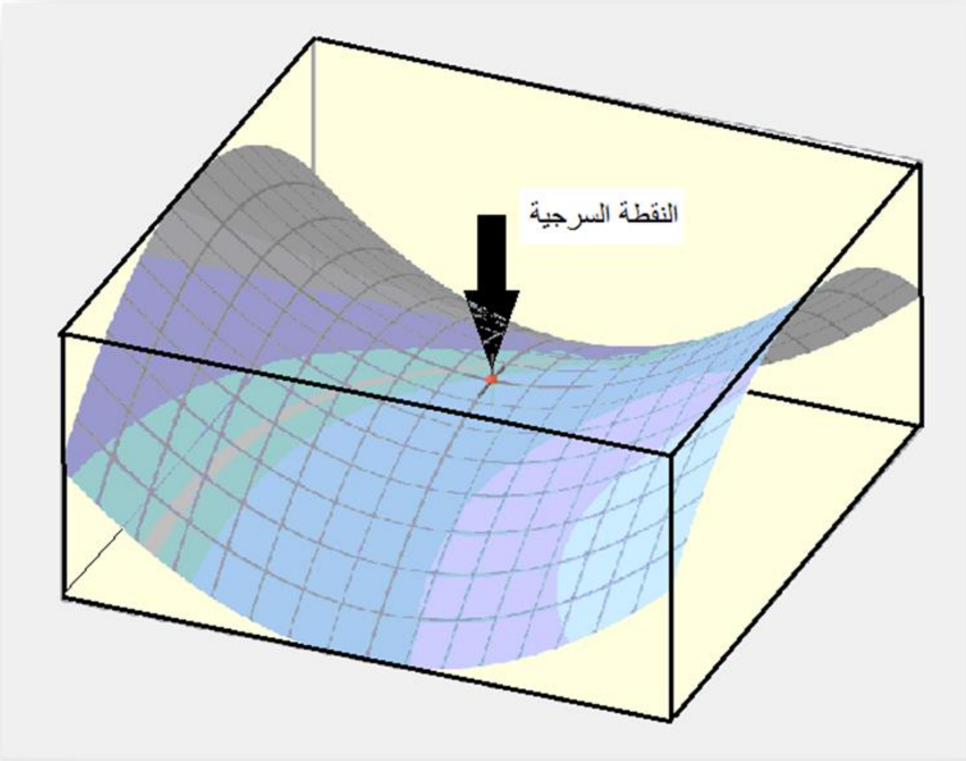
شكل رقم (31) النقاط المحلية العظمى والصغرى والكلية

ان ماذكرناه آنفا لا يمثل الحالات جميعها التي يمكن ان تظهر بها الدالة ففي احيان اخرى لايكفي ان تتشابه الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية لتحقيق النهايات العظمى والدنيا للدالة ومن هذه الحالات :-

١- الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية غير متشابهة وكان حاصل ضرب المشتقات الثانية اقل من قيمة مربع المشتقة المتقاطعة ، وهنا ليست للدالة نهاية عظمى او صغرى وانما عند نقطة تسمى النقطة السرجية *Saddle Point*، أي ان:-

$$(f_{11})(f_{22}) < (f_{12})^2$$

ويبن الشكل البياني الاتية النقطة السرجية للدالة $Z = X^2 - Y^2$ مؤشرة باللون الاحمرفي وسط الشكل البياني

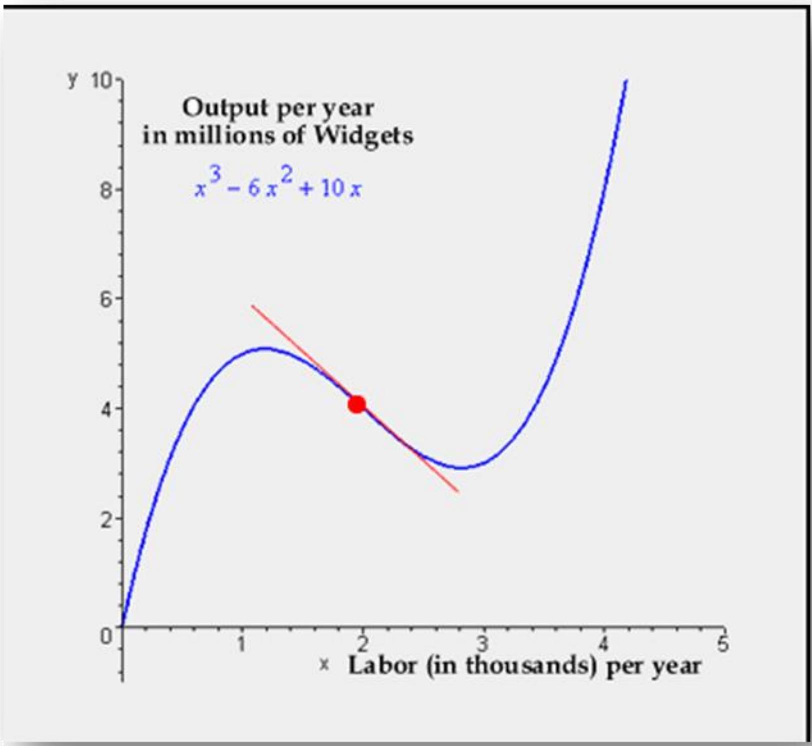


شكل (32) النقطة السرجية

٢- أما إذا كانت الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية متشابهة إلا ان حاصل ضربهما معا اقل من قيمة مربع المشتقة المتقاطعة عند هذه الحالة تكون الدالة عند نقطة تعرف بنقطة الانقلاب *Inflection Point* ، أي ان:-

$$(f_{11})(f_{22}) < (f_{12})^2$$

ويبن الشكل البياني الآتي أحد اشكال نقطة الانقلاب للدالة $Y = X^3 - 6X^2 + 10X$:



شكل (33) التمثيل البياني لنقطة انقلاب معينة

والجدول الاتي يوضح شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين

$Y = f(X_1, X_2)$

جدول ١. شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين مستقلين

نقطة سرجية Saddle Point	نقطة انقلاب Inflection Point	نقطة عظمى Maximum	نقطة دنيا Minimum	الشرط Condition
$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$	الاول 1st
$f_{11} > 0,\ f_{22} < 0$ *or* $f_{11} < 0,\ f_{22} > 0$	$f_{11}, f_{22} < 0$ or $f_{11}, f_{22} > 0$	$f_{11}, f_{22} < 0$	$f_{11}, f_{22} > 0$	الثاني 2nd
$f_{11} f_{22} < (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} < (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} > (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} > (f_{12})^2$	الثالث 3rd

ثانيا: الدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات

تناولنا في الفقرة اولا السابقة الدوال التي تحتوي متغيرين مستقلين فقط ، وهنا نعرض الدوال متعددة المتغيرات أي ثلاثة متغيرات وأكثر ولنفترض ان لدينا الدالة الاتية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$$

ومثل هذه الدوال ينبغي توافر الشروط الاتية لتكون الدالة عند نهايتها العظمى او الصغرى وكما ياتي:-

١- الشرط الضروري (اللازم) ***Necessary Condition*** : هو ان تبلغ الدالة نقطة استقرارها ، أي ان الدالة عند هذه النقاط ليست متزايدة ولا متناقصة (أي ان الدالة عند القيمة الحرجة)، وفي هذه النقطة تكون جميع المشتقات الجزئية الاولى للدالة بالنسبة للمتغيرات المستقلة تساوي صفرا ، أي ان:-

$$f_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = 0, \quad f_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = 0 \ , \quad f_3 = \frac{\partial Y}{\partial X_3} = 0$$

٢- الشرط الكافي ***Sufficient Condition*** : هنا ينبغي الحصول اولا على مصفوفة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية ، ويتم ذلك من خلال اعادة تفاضل الدالة جزئيا بالنسبة لجميع المتغيرات، وبما اننا نتناول الدوال متعددة المتغيرات، سنفرض ان عدد المتغيرات المستقلة في الدالة يساوي n ويعني ذلك ان هذه المصفوفة تحتوي على $(n \times n)$ من العناصر وكما ياتي:-

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{bmatrix}$$

وبعد استخراج القيم الحرجة لكل من $X_n, ..., X_2, X_1$ يتعين تطبيق شروط الفئة الثانية لمعرفة ما اذا كانت القيم الحرجة تعبر عن نقطة قصوى ام دنيا. إلا ان هذه الخطوات تتطلب استخدام المحدد الهيسي.

المحدد الهيسي *Hessian Determinant*

يستخدم هذا المحدد لتشخيص استيفاء شرط الفئة الثانية *Second Order Condition* الخاص بالنقاط المثلى سواء العظمى او الدنيا للدوال متعددة المتغيرات، إذ عند افتراض الدالة الاتية :-

$$Y = f(X_1, X_2, X_3)$$

وبعد تطبيق شرط الفئة الاولى *First Order Condition* فإن:-

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial X_2}=0 \; , \; \frac{\partial Y}{\partial X_3}=0$$

ومن ثم استخراج القيم الحرجة لكل من X_3, X_2, X_1 ، يتعين تطبيق شرط الفئة الثانية لمعرفة ما اذا كانت القيم الحرجة تعبر عن نقطة عظمى أم دنيا، وتكون عناصر المحدد الهيسي جميعها مشتقات جزئية ثانية ، بعضها مباشر وتقع على القطر الرئيس، في حين تقع المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة خارج القطر الرئيس، ويكون المحدد الهيسي $|H|$ من الفئة الثانية $|H_2|$ اذا كانت الدالة تضم متغيرين مستقلين ، ومن الفئة الثالثة $|H_3|$ اذا كانت تضم ثلاثة متغيرات مستقلة. وبالنسبة للدالة فان المحدد الهيسي لها سيكون:-

$$|H|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

وفي حالة النقاط العظمى تكون:

$$|H_1|<0 \;,\; |H_2|>0 \;,\; |H_3|<0 \;,\; |H_4|>0,.......$$

وفي حالة النقاط الدنيا تكون:

$$|H_1|>0 \;,\; |H_2|>0 \;,\; |H_3|>0,.....$$

ويشير الجدول الاتي الى شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات $:Y=f(X_1,X_2,....,X_n)$

جدول ٢. شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

الشرط Condition	النقطة العظمى Maximum	النقطة الدنيا Minimum
الاول 1st	$f_1=f_2=.....=f_n=0$	$f_1=f_2=.....=f_n=0$
الثاني 2nd	$\|H_1\|<0,\|H_2\|>0,....,\|H_n\|>0$	$\|H_1\|,\|H_2\|,...,\|H_n\|>0$

المحدد الهيسي المؤطر *Bordered Hessian Determinant*

يستخدم هذا المحدد لتشخيص استيفاء شرط الفئة الثانية الخاص بالنقاط المثلى سواء العظمى أو الدنيا للدوال متعددة المتغيرات الخاضعة لقيود بافتراض الدالة الاتية مثلا:-

$$Y = f(X_1, X_2)$$

الخاضعة للقيد $G = g(X_1, X_2)$

فإن الدالة المركبة *Composite Function* تكون عندئذ:-

$$F = f(X_1, X_2) + \lambda[g(X_1, X_2) - G]$$

حيث λ يعبر عن مضاعف لاكرانج *Lagrange Multiplier* ويكون المحدد الهيسي المؤطر بالنسبة لهذه الدالة من الفئة الثانية ويرمز له $|\overline{H}_2|$ إذ ان:-

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & 0 \end{vmatrix}$$

في حالة النقطة العظمى يكون:-

$$|\overline{H}_2| > 0 \ , \quad |\overline{H}_3| < 0, \quad |\overline{H}_4| > 0, \ldots\ldots\ldots.$$

أي ان قيمة المحدد الهيسي المؤطر تكون موجبة اذا كانت فئة المحدد زوجية ، أي ان دالة الهدف تضم عددا زوجيا من المتغيرات ، وتكون سالبة اذا كانت فئة المحدد فردية ، أي ان دالة الهدف تضم عددا فرديا من المتغيرات المستقلة.

في حالة النقطة الدنيا يكون:-

$$|\overline{H}_2| < 0 \ , \quad |\overline{H}_3| < 0, \quad |\overline{H}_4| < 0, \ldots\ldots\ldots.$$

أي ان قيمة المحدد الهيسي المؤطر تكون سالبة دائما بصرف النظر عن عدد المتغيرات المستقلة في دالة الهدف.

وكما ان دالة الهدف يمكن ان تضم عدة متغيرات مستقلة فانها يمكن ايضا ان تخضع لعدة قيود ، أي ان الدالة المركبة يمكن ان تاخذ الشكل العام الاتي:-

$$L = f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) + \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j \left[g_j(X_1, X_2, \ldots., X_n) - G_j\right]$$

وعندئذ يكون المحدد الهيسي المؤطر كما ياتي:-

$$
|\overline{H}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_n} \cdots & \dfrac{\partial g^1}{\partial X_1} \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial g^1}{\partial X_n} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial X_n \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial X_n^2} & \dfrac{\partial g^m}{\partial X_1} \cdots\cdots & \dfrac{\partial g^m}{\partial X_n} \\ \dfrac{\partial g^1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial g^m}{\partial X_1} & 0 \quad \cdots\cdots & 0 \\ \dfrac{\partial g^1}{\partial X_n} & \dfrac{\partial g^m}{\partial X_n} & 0 \quad \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

وبما ان استخدام المحددات في حل مسائل الامثلية ولاسيما الامثلية المقيدة سيتم الاشارة الى اطارها النظري من دون الدخول في تفاصيل حل امثلة تختص بهذا النوع وانما سيتم اللجوء الى مسائل اقل صعوبة تتناسب ومستوى الطالب في مرحلة البكالوريوس.

بعد التعرف على الجزء النظري للامثلية الاقتصادية في حالتيها غير المقيدة والمقيدة سنتناول بعض الامثلة في الحالتين.

امثلة على الحالة الاولى(الامثلية غير المقيدة)

مثال (٥,١): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالتي طلب على سلعة في سوقين منفصلين هما:

$$P_1 = 400 - 3Q_1$$
$$P_2 = 300 - 2Q_2$$

P_1 = سعر السلعة في السوق الاول ، P_2 = سعر السلعة في السوق الثاني

Q_1 = الكمية المطلوبة في السوق الاول ، Q_2 = الكمية المطلوبة في السوق الثاني

وكانت دالة التكلفة الكلية هي : $TC = 2Q^2 + 3Q + 250$

المطلوب: جد حجم الطلب على السلعة في السوقين والذي يحقق اعلى ربح ممكن.

الحل

١- يعبر عن الايراد الكلي هنا بانه مجموع الايراد المتحقق في السوقين أي ان:-

$$TR = TR_1 + TR_2$$

$$TR_1 = P_1Q_1 \Rightarrow TR_1 = (400-3Q_1)Q_1 = 400Q_1 - 3Q_1^2$$
$$TR_2 = P_2Q_2 \Rightarrow TR_2 = (300-2Q_2)Q_2 = 300Q_2 - 2Q_2^2$$
$$TR = TR_1 + TR_2 \Rightarrow TR = 400Q_1 - 3Q_1^2 + 300Q_2 - 2Q_2^2$$

٢- اما دالة الكلفة للسلعتين فيعبر عنها كالاتي:

$$TC = 2Q^2 + 3Q + 250$$
$$TC = 2(Q_1 + Q_2)^2 + 3(Q_1 + Q_2) + 250$$
$$TC = 2Q_1 + 4Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 3Q_1 + 3Q_2 + 250$$

٣- نجد دالة الربح الكلي والذي يعبر عنه بما ياتي:-

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 400Q_1 - 3Q_1^2 + 300Q_2 - 2Q_2^2 - (2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 3Q_1 + 3Q_2 + 250)$$
$$\pi = -5Q_1^2 - 4Q_2^2 - 4Q_1Q_2 + 397Q_1 + 297Q_2 - 250$$

٤- لايجاد النقاط الحرجة نقوم بايجاد جذور المشتقة الجزئية الاولى لدالة الربح الكلي بالنسبة لكل من Q_1 , Q_2 وكما ياتي:-

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -10Q_1 - 4Q_2 + 397 = 0..............(1)$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -8Q_2 - 4Q_1 + 297 = 0.................(2)$$

وبعد حل المعادلتين المذكورتين باحدى الطرائق المعروفة نحصل على الاتي:-

$$16Q_1 - 497 = 0$$
$$16Q_1 = 497$$
$$Q_1 \approx 31$$

وبتعويض قيمة Q_1 في احدى المعادلتين ١ او ٢ نحصل على قيمة Q_2 وتساوي ٢٢

٥- نجد الان المشتقة الجزئية الثانية لاختبار النقطة الحرجة $(Q_1, Q_2) = (31{,}22)$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -10$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -8$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -4$$

٦- نجري اختبارا لتحديد نوع النقطة الحرجة

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -10 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -8 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} * \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} > (\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2})^2$$

$$(-10)*(-8) > (-4)^2$$

$$80 > 16$$

نستنتج ان النقطة المتحصل عليها هي نقطة عظمى لدالة الربح ، إذ ان اعلى ربح يمكن تحقيقه من بيع السلعة في السوقين بعد تعويض قيمتي Q_1 و Q_2 في دالة الربح وهو:

$$\pi = 9122$$

مثال(5.2):منشأة تبيع منتوجين G1 و G2، بسعر ١٠٠٠$ للمنتج الاول ، و ٨٠٠$ للمنتج الثاني. وكانت المنشأة تواجه دالة الكلفة الاتية:

$$TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

وتمثل Q_1 مستوى الانتاج لـ G1 و Q_2 مستوى الانتاج لـ G2 .

المطلوب: احسب اقصى الارباح وقيم كل من Q_1 و Q_2 عند اقصى الارباح

الحل

نستخرج معادلة الايراد الكلي الاول والثاني وكما ياتي:

$$TR_1 = 1000Q_1$$

$$TR_2 = 800Q_2$$

وعليه يكون الايراد الكلي للمنشأة هو:

$$TR = TR_1 + TR_2 = 1000Q_1 + 800Q_2$$

ودالة الكلفة المعطاة اعلاه:

$$TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

وبذلك تكون دالة الربح هي:

$$\pi = TR - TC$$

$$= (1000Q_1 + 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$$

$$= 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

تتضمن هذه الدالة متغيرين هما Q_1 و Q_2 ولتحقيق الامثلية نستخرج الشرط الضروري الاول والشرط الكافي للمشتقة وكما ياتي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2$$

وينبغي ان تكون المشتقة الاولى مساوية للصفر أي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0$$

وتحل المعادلتان آنيا وكما ياتي:

$$1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$$
$$800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0$$

بترتيب المعادلتين نحصل على الاتي:

$$4Q_1 - 2Q_2 = 1000 ....(1)$$
$$2Q_1 - 2Q_2 = 800 ....(2)$$

$$2Q_1 = 200$$

وعليه نحصل على قيمة Q_1 وتساوي ١٠٠ $(Q_1 = 100)$، وبتعويضها في احدى المعادلتين اعلاه نحصل على قيمة Q_2 وتساوي ٣٠٠ $(Q_2 = 300)$.

وللتأكد من ان تلك النقطة هي نقطة نهاية عظمى نتبع الاتي:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} < 0 \ , \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 \quad , \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2 \ , \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-2)^2$$
$$(-4)(-2) - (-2) = 4 > 0$$

اذن اتضح ان المنشأة تعظم ارباحها عند مستويات $(Q_1 = 100)$ و $(Q_2 = 300)$ للمنتوجين G1 و G2 .

ويمكن حساب مستوى الربح عند تلك المستويات وهو:

$$\pi = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$
$$\pi = 1000(100) + 800(300) - 2(100)^2 - 2(100)(300) - (300)^2$$
$$\pi = 170000\$$$

مثال(5.3): محتكر يبيع منتوجين X و Y وكان لديه دوال الطلب الاتية:

$$0.1P_X - 1.2 + 0.2X = 0$$
$$10P_Y - 320 + 40Y = 0$$

وكانت دالة تكاليفه المشتركة كالاتي:

$$TC - X^2 - 2XY - Y^2 = 0$$

المطلوب:

جد السعر وكمية الناتج من كل سلعة الذي يعظم ارباحه، ثم تحقق من هذه الارباح كانت عند نهايتها في تلك النقطة.

الحل

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = P_X X + P_Y Y - TC$$

ناخذ دالة الطلب الاولى: $0.1P_X - 1.2 + 0.2X = 0$ بالتقسيم على معامل السعر ٠,١ نحصل على دالة الطلب الاولى بالصورة الاتية:

$$P_X = 12 - 2X$$

اذن دالة الايراد الكلي الاولى تساوي $P_X X$ أي $TR_X = P_X X$

$$TR_X = (12 - 2X)X = 12X - 2X^2$$

وكذلك الحال بالنسبة لدالة الطلب الثانية : $10P_Y - 320 + 40Y = 0$ بالتقسيم على معامل السعر ١٠ نحصل على دالة الطلب الثانية بالصورة الاتية:

$$P_Y = 32 - 4Y$$

اذن دالة الايراد الكلي الثانية تساوي $P_Y Y$ أي $TR_Y = P_Y Y$

$$TR_Y = (32 - 4Y)Y = 32Y - 4Y^2$$

ستصبح دالة الربح بالاعتماد على الصيغ الجديدة للايراد الكلي الاولى والثانية:

$$\pi = TR_X + TR_Y - TC$$
$$\pi = 12X - 2X^2 + 32Y - 4Y^2 - X^2 - 2XY - Y^2$$
$$\pi = 12X - 3X^2 + 32Y - 5Y^2 - 2XY$$

وتكون الارباح عند نهايتها العظمى عندما $f_X = f_Y = 0$ وعندما تكون f_{XX} و f_{YY} سالبة وعندما تكون $f_{XX}\,f_{YY} > (f_{XY})^2$ وكما ياتي:-

عندما $f_X = 0$ ، فان $12 - 6X - 2Y = 0$ ....(١)

وعندما $f_Y = 0$ ، فان $32 - 10Y - 2X = 0$ ....(٢)

من معادلة رقم (١) نحصل على المعادلة (٣) وهي:

$$-6X - 2Y = -12 \text{......................} (3)$$

ومن معادلة رقم (٢) نحصل على المعادلة (٤) وهي:-

$$-2X - 10Y = -32 \text{.................} (4)$$

وبضرب المعادلة (٤) في ٣ نحصل على:

$$-6X - 30Y = -96 \text{.................} (5)$$

وبطرح المعادلة (٥) من المعادلة (٣) نحصل على الاتي:-

$$28Y = 84$$

$$Y = 3$$

وعندما $Y = 3$ فان $X = 1$ بعد تعويض قيمة Y في المعادلة $-6X - 2Y = -12$

وباخذ المشتقات الثانية لكل من X و Y وكذلك المشتقة المتقاطعة f_{XY} نحصل على الاتي:

$$f_{XX} = -6 < 0$$

$$f_{YY} = -10 < 0$$

$$f_{XY} = \frac{\partial(32 - 10Y - 2X)}{\partial X} = -2$$

ويجب ان تكون $f_{XX}\, f_{YY} > (f_{XY})^2$ أي ان : $(-6)(-10) > (-2)^2$ ويساوي $60 > 4$

أي ان الارباح تكون اعظم مايمكن عندما :

$X = 1$ و $P_X = 10$

$Y = 3$ و $P_Y = 20$

تجدر الاشارة انه تم الحصول على قيم P_X و P_Y بعد تعويض قيم X و Y في دوال الطلب.

وقد يلاحظ الطالب انه تم استخدام رموز المشتقات بصيغ مختلفة في حلول التمرينات وذلك مراعاة لاختلاف الصيغ في مختلف الكتب التي قد يتم الاطلاع عليها للاستزادة ولذلك تم الرجوع الى مختلف الصيغ في حل المسائل علما انها تشير الى النتيجة نفسها.

امثلة على الامثلية المقيدة

كما اشرنا سابقا سيتم حل مسائل الامثلية المقيدة من دون اللجوء الى طريقة المحددات مراعاة لمستوى الطالب في هذه المرحلة من الدراسة.

سنتناول الان المثال رقم (٥,٤) والذي يتناول الامثلية المقيدة من دون مضاعف لاكرانج.

مثال (٥,٤): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالة التكلفة الكلية لانتاج سلعتين:

$$TC = Q_1 Q_2^{-1} + 2Q_2$$

المطلوب : ايجاد عدد الوحدات المنتجة من كل سلعة لتحقيق اقل كلفة معينة ضمن القيد الاتي:

$$Q_1 + Q_2 = 10$$

الحل

تتم كتابة دالة الكلفة اعلاه بالصيغة الاتية: $TC = \frac{Q_1}{Q_2} + 2Q_2$

باستخدام معادلة القيد يتم استخراج الكمية الاولى بدلالة الثانية وكما ياتي:

$$Q_1 = 10 - Q_2$$

ثم نعوض عن قيمة Q_1 في دالة الكلفة فنحصل على الاتي:-

$$TC = \frac{10 - Q_2}{Q_2} + 2Q_2$$

$$TC = \frac{10 - Q_2 + 2Q_2^2}{Q_2}$$

بتطبيق قاعدة مشتقة قسمة دالتين نشتق دالة الكلفة بالنسبة للمتغير Q_2:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = \frac{Q_2((-1) + 4Q_2) - (10 - Q_2 + 2Q_2^2)(1)}{Q_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = \frac{-Q_2 + 4Q_2^2 - 10 + Q_2 - 2Q_2^2}{Q_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = \frac{2Q_2^2 - 10}{Q_2^2} = 0$$

$$2Q_2^2 = 10 \Rightarrow \quad Q_2^2 = 10 \Rightarrow \quad Q_2^2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$Q_2 = \sqrt{5} \approx 2$$

نجد المشتقة الثانية لاختيار النقطة الحرجة وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2} = \frac{(Q_2^2)(4Q_2) - (2Q_2^2 - 10)(2Q_2)}{Q_2^4}$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2} = \frac{20Q_2}{Q_2^4} = \frac{20}{Q_2^3}$$

نعوض قيمة $Q_2 = 2$ في المشتقة الثانية وكما ياتي:

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2} = \frac{20}{(2)^2} = 3.3 > 0$$

من النتيجة اعلاه يتبين مجود قيمة صغرى عند القيمة $Q_2 = 2$ ، ثم نعوض قيم $Q_2 = 2$ في معادلة القيد ونحصل على قيمة Q_1:

$$Q_1 + Q_2 = 10$$
$$Q_1 = 10 - 2$$
$$Q_1 = 8$$

اذن النتيجة توضح انه لتقليل التكاليف لادنى مستوى ينبغي انتاج ٨ وحدات من السلعة الاولى ووحدتين من السلعة الثانية.

مثال(٥,٥):

نفترض أن شركة ما تقوم بإنتاج نوعين من السلع ، وأن إجمالي تكلفتها :

$$TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$$

إذ أن Q_1 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الأولى في الساعة ، وأن Q_2 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الثانية في الساعة . ونتيجة لالتزامات الشركة تجاه عملائها ، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج ما لا يقل عن 30 وحدة في الساعة من السلعتين معا، ومن الطبيعي أن يرغب مدير الشركة في الوقوف على مستويات الإنتاج من السلعتين التي من شأنها تخفيض تكاليف الشركة إلى أدنى حد ممكن مع افتراض أن حاصل إنتاج السلعتين معا يساوي 30 وحدة في الساعة .

الحل

يمكن التعبير عن مثل هذا النوع من مشاكل الأمثلية المقيدة على النحو الآتي :

دالة الكلفة الكلية : $TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$

ضمن القيد الاتي: $Q_1 + Q_2 = 30$

وبالطبع يتمثل القيد في أنه لا بد أن تكون : $Q_1 + Q_2 = 30$. ولحل مشكلة قيد Q_1 علينا أن نتتبع الخطوات الآتية:

$$Q_1 = 30 - Q_2$$

وبالتعويض عن $Q_1 = 30 - Q_2$ بـ Q_1 في معادلة دالة الكلفة الكلية نجد أن :

$$TC = 4(30 - Q_2)^2 + 5Q_2^2 - (30 - Q_2)Q_2$$
$$= 4(900 - 60Q_2 + Q_2^2) + 5Q_2^2 - 30Q_2 + Q_2^2$$
$$= 3600 - 270Q_2 + 10Q_2^2$$

يتم الحصول على مشتقة TC بالنسبة إلى Q_2، وجعلها مساوية للصفر .

$$\frac{dTC}{dQ_2} = -270 + 20Q_2 = 0$$

$$20Q_2 = 270$$

$$Q_2 = 13.5$$

وللتحقق من أنها نهاية صغرى – لا عظمى – ينبغي الحصول على المشتقة الثانية وهي :

$$\frac{d^2\,TC}{dQ_2^{\,2}} = 20$$

وبما أن هذه المشتقة الثانية موجبة ، لذا فإن الناتج نهاية صغرى .

ولإيجاد قيمة Q_1 التي تصل بالتكلفة الإنتاجية إلى أدنى حد ، علينا أن نتذكر أن القيد يتطلب أن تكون : $Q_1 + Q_2 = 30$ ، أي أن:

$$Q_1 = 30 - Q_2$$

ولما كنا على علم بأن القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 ، فإنه من الطبيعي أن تكون القيمة المثلى لـ Q_1 هي $Q_1 = 30 - 13.5 = 16.5$. وجملة القول هو أنه إذا ما أرادت الشركة الحد من إجمالي تكلفتها إلى أدنى درجة ممكنة مع وجود قيد الإنتاج وهو ألا يزيد إجمالي إنتاجها من السلعتين معا عن 30 وحدة ، فإنه يتعين على الشركة القيام بإنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة ، أي أنه ينبغي أن تقوم الشركة بإنتاج 33 وحدة من السلعة الأولى و 27 وحدة من السلعة الثانية كل ساعتين .

بالتعويض عن Q_1 بـ 16.5 و عن Q_2 بـ 13.5 ، في معادلة دالة الكلفة الكلية ، نجد أن إجمالي تكلفة الشركة تساوي :

$$\begin{aligned} TC &= 4(16.5)^2 + 5(13.5)^2 - (16.5)(13.5) \\ &= 4(272.25) + 5(182.25) - 222.75 \\ &= 1089 + 911.25 - 222.75 \\ &= \$1777.5 \end{aligned}$$

مثال(٥,٦): لديك دالة الانتاج الاتية:

$$Q = 4LK + L^2$$
$$subject\ to$$
$$K + 2L = 105$$

المطلوب: جد مستويات K و L التي تعظم الناتج

الحل

تعاد كتابة معادلة القيد كما ياتي:-

$$K = 105 - 2L$$

تعوض معادلة القيد في دالة الانتاج وكما ياتي:-

$$Q = 4L(105 - 2L) + L^2 = 420L - 8L^2 + L^2 = 420L - 7L^2$$

نلاحظ ان دالة الهدف أي دالة الانتاج تحتوي متغيرا واحدا هو L ، والان نحسب المشتقة الاولى بالنسبة الى L وكما ياتي:-

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 420 - 14L = 0 \Rightarrow L = \frac{420}{14} = 30$$
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -14 < 0$$

اقصى انتاج يمكن الحصول عليه بتعويض قيمة L في دالة الانتاج:

$$Q = 420L - 7L^2$$
$$Q = 420(30) - 7(30)^2 = 6300$$

وبتعويض قيمة L في دالة القيد نحصل على قيمة K وكما ياتي:

$$K = 105 - 2L \Rightarrow K = 105 - 2(30) = 45$$

اذن من الحل ينبغي على المنشأة استخدام ٣٠ وحدة من العمل و ٤٥ وحدة من رأس المال لتحقيق اقصى انتاج وهو ٦٣٠٠.

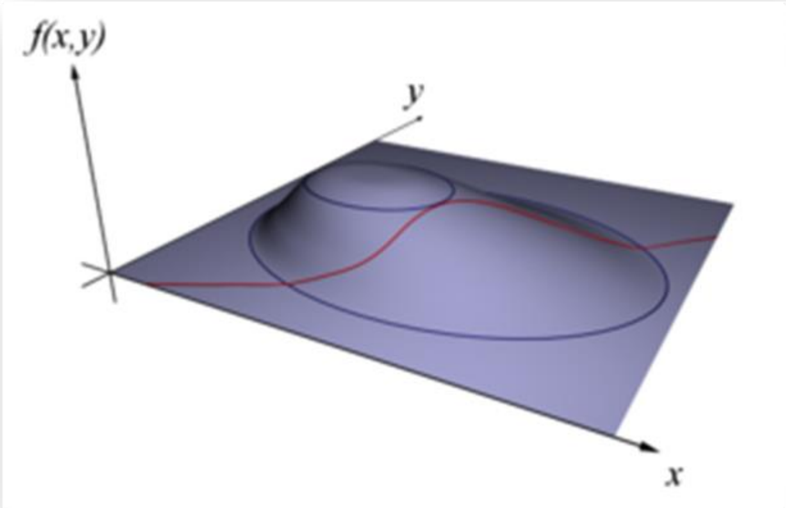
الامثلية المقيدة ومضاعف لاكرانج *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier*

قد يكون الأسلوب الذي قمنا بتناوله فيما سبق ذا جدوى محدودة للتطبيق عند كثرة القيود أو تعقدها ، لذلك يمكن الاستعانة بمضاعفات ***Lagrange*** . وتنطوي هذه الطريقة الخاصة بحل مشكلات الأمثلية المقيدة على تكوين معادلة تعرف بدالة ***Lagrange*** ، وهي المعادلة التي تشتمل على كل من الدالة المراد الحصول على أقصى أو اصغر قيمة لها من ناحية والقيود أو الضوابط من ناحية أخرى ، وتتم صياغة هذه المعادلة لتكون هناك حقيقتان :

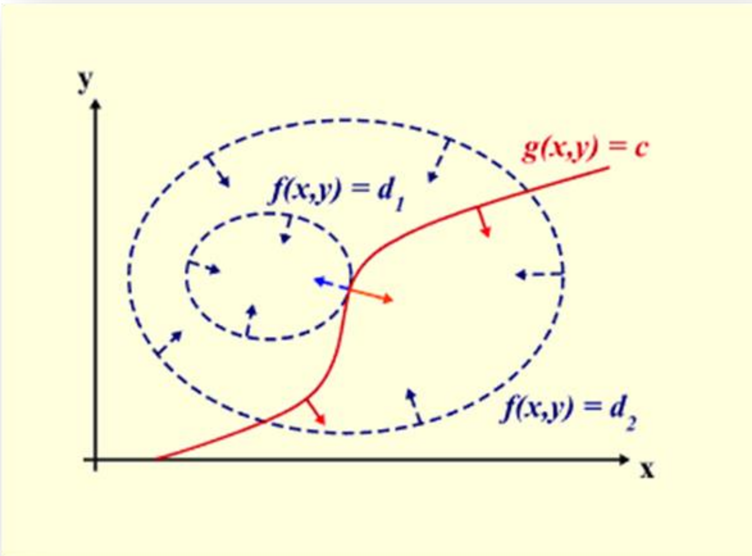
(1) عندما تبلغ هذه المعادلة أقصى – أو أصغر – قيمة لها ، تكون الدالة الأصلية عند أقصى – أو أصغر – قيمة لها بالفعل .

(2) وفي هذه الحالة نكون قد واجهنا الضوابط أو القيود جميعها.

ويشير الشكل البياني (34) الى الامثلية المقيدة بشكلها المجسم ذي الابعاد الثلاثة:–



شكل (34) الامثلية المقيدة : ايجاد قيمة x و y التي تعظم الدالة $f(x,y)$ ضمن القيد الموضح باللون الاحمر $g(x,y)=c$



شكل (35): يمثل الخريطة المناسيبية للشكل (34)

يشير الشكل البياني (٣٥) الخريطة المناسيبية للشكل البياني (34) ويشير الخط الاحمر الى القيد $g(x,y)=c$ ، في حين تشير الخطوط الزرقاء الى تناسيبات الدالة $f(x,y)$، اما

النقطة التي تقع عند نقطة تماس الخط الاحمر والخط الازرق تشير الى نقطة الحل ، حيثما $d_1 > d_2$ ، والحل هو تعظيم الدالة $f(x,y)$.

ولإيضاح كيفية بناء إحدى دوال ***Lagrange*** ، علينا معاودة الحديث عن المشكلة التي واجهتها الشركة في مثالنا السابق (٥,٥). فقد أشرنا إلى أن الشركة ترغب في الوصول بـ TC إلى أصغر قيمة لها بحيث : $TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$ ، عند وجود قيد $Q_1 + Q_2 = 30$. ولعل أولى الخطوات الواجب إتباعها عند تكوين دالة ***Lagrange*** لمواجهة مشكلة هذه الشركة هي القيام بإعادة صياغة القيد الذي تواجهه الشركة في شكل معادلة مساوية للصفر :

$$30 - Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (١)$$

فإذا قمنا بضرب هذا النوع من القيود في عامل مجهول نشير إليه بـ λ ، ثم نجمع النتيجتين على الدالة التي نرغب في الحصول على قيمتها الصغرى في المعادلة (2) فإننا نحصل على دالة ***Lagrange*** وهي :

$$L_{tc} = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 + \lambda\left(30 - Q_1 - Q_2\right) \qquad (٢)$$

ولأسباب سيرد ذكرها في الفقرة الآتية يمكننا التحقق من أنه إذا ما تمكننا من إيجاد القيمة العظمى – أو الصغرى – غير المقيدة لدالة ***Lagrange*** فإن الحل سوف يكون مطابقا تماما لحل المشكلة الأصلية للقيمة العظمى – أو الصغرى – المقيدة ، وبعبارة أخرى ، فإن حل مشكلة الأمثلية المقيدة يتطلب منا القيام بتحقيق أمثلية دالة Lagrange. ففي حالة شركتنا هنا ، لا بد لنا من إيجاد قيم كل من Q_1 و Q_2 و λ التي تؤدي إلى الوصول بـ L_{tc} إلى أصغر قيمة لها في المعادلة (1) . وللقيام بذلك ، يتحتم علينا إيجاد المشتقة الجزئية لـ L_{tc} بالنسبة إلى كل من هذه المتغيرات الثلاثة Q_1 و Q_2 و λ :

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_1} = 8Q_1 - Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_2} = -Q_1 + 10Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial \lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

وكما أشرنا فيما سبق ، أنه ينبغي أن نجعل هذه المشتقات الجزئية الثلاثة مساوية للصفر حتى نتمكن من الحصول على أدنى قيمة لـ L_{tc} وهكذا فإن :

$$8Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \qquad (٣)$$

$$-Q_1 + 10Q_2 - \lambda = 0 \qquad (٤)$$

$$-Q_1 + Q_2 + 30 = 0 \qquad (٥)$$

كما أنه من الضروري ملاحظة أن المشتقة الجزئية لدالة ***Lagrange*** بالنسبة إلى λ (أي أن : $\partial L_{tc} / \partial \lambda$) عندما تكون مساوية للصفر في المعادلة (5) هي نفسها القيد الموجود في مشكلة الأمثلية الأصلية [راجع المعادلة (1)] ويعود السبب في ذلك إلى الأسلوب الذي تتألف منه دالة ***Lagrange***، ولذلك فإذا كانت هذه المشتقة تساوي صفر ، يمكننا التأكد من استيفاء هذا القيد الأصلي لمتطلباته ، وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير على يمين دالة ***Lagrange*** صفرا ، وهكذا تؤول دالة ***Lagrange*** إلى الدالة الأصلية التي كنا نرغب في الحصول على القيمة العظمى – أو الصغرى – لهاو وهو الأمر الذي يعني نجاحنا في حل المشكلة الأصلية للأمثلية المقيدة إذا ما تمكنا من الحصول على أكبر – أو أصغر – قيمة ممكنة لدالة ***Lagrange*** .

وبمعاودة الحديث عن الشركة موضوع البحث نجد أن المعادلات (3) ، (4) ، (5) هي ثلاث معادلات آنية في ثلاث مجاهيل هي Q_1 و Q_2 و λ ، فإذا تمكننا من حل هذا النوع من المعادلات لـ Q_1 و Q_2 ، فإننا نحصل على القيم المثلى لـ Q_1 و Q_2 ، وبطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) نجد أن :

$$9Q_1 - 11Q_2 = 0 \qquad (6)$$

وبضرب المعادلة (5) في المقدار 9 واضافة الناتج إلى المعادلة (6) نتمكن من إيجاد الحل لـ Q_2 :

$$\begin{array}{rl} -9Q_1 - 9Q_2 + 270 & = 0 \\ 9Q_1 - 11Q_2 & = 0 \\ \hline -20\,Q_2 + 270 & = 0 \\ Q_2 = 270 / 20 & \\ = 13.5 & \end{array}$$

وهكذا تكون القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 وبالتعويض عن Q_2 بـ 13.5 في المعادلة (5) ، نجد أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 .

وهكذا فإننا نصل إلى النتيجة نفسها : وهي أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 وأن القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5. وبعبارة أخرى، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة . كما يتضح أن طريقة مضاعفات ***Lagrange*** هذه أفضل من تلك التي سبق لنا تفصيلها وذلك لسببين في الأقل:

(1) أنها قادرة على معالجة أكثر من قيد واحد .

(2) أن قيمة λ تمد صانع القرار بمعلومات مهمة ونافعة .

إن λ [والتي تعرف بمضاعف ***Lagrange***] فإنها تستخدم خصيصا لقياس ما يحدث من تغير في العامل أو المتغير الذي نرغب في الحصول على أقصى أو أدنى قيمة لـ TC في هذه الحالة مع افتراض إمكانية تجاوز القيد بمقدار وحدة واحدة فإذا كانت الشركة ترغب في تخفيض إجمالي نفقاتها إلى أدنى حد ممكن مع وجود قيد إنتاجي يسمح لها بإجمالي إنتاج 31 وحدة من السلعتين معا بدلا من 30 وحدة فقط ، وكانت قيمة λ هي التي توضح مقدار الزيادة في القيمة الصغرى لـ TC ، فما هي قيمة λ وطبقا للمعادلة (3) ، وبالتعويض عن $Q_1 =$ 16.5 و $Q_2 = 13.5$ تصبح :

$$\lambda = 8(16.5) - 13.5 = 118.5$$

معنى ذلك أنه في حالة تجاوز الإنتاج بمقدار وحدة واحدة ، بحيث يكون إجمالي الإنتاج 31 بدلا من 30 وحدة ، فسوف يرتفع إجمالي التكلفة بمقدار 118.50 دولار .

وتعد هذه المعلومات ذات قيمة كبرى في حالة الكثير من القرارات الإدارية فعلى فرض ان أحد عملاء شركات أراد شراء احدى السلعتين اللتين تنتجهما الشركة مقابل 115 دولار ، سوف يتحتم على الشركة زيادة إجمالي إنتاجها إلى 31 وحدة في الساعة . وبناء على المعلومات السابق إيضاحها ، فإنه ليس من الصواب بمكان أن توافق الشركة على هذا العرض ، إذ أن هذه الوحدة الإضافية المنتجة سوف ترفع التكاليف بمقدار 118.50 دولار ، أي بزيادة قدرها 3.50 دولار عن الثمن الذي سوف يدفعه العميل(الزبون) مقابل هذه الوحدة الإضافية .

مثال (5.7): اذا كانت دالة المنفعة للسلعتين x_1 و x_2 هي

$$U = (x_1, x_2) = x_1 x_2 + 4x_1$$

اوجد حجم الاستهلاك الامثل من السلعتين لتحقيق اعلى منفعة ممكنة اذا كان قيد الكلفة للسلعتين هو : $8x_1 + 4x_2 = 120$

الحل

باتباع خطوات طريقة لاكرانج

$$L = x_1 x_2 + 4x_1 + \lambda(8x_1 + 4x_2 - 120)$$

نجد المشتقات الجزئية لكل من x_1 و x_2 و λ

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 4 + 8\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = -x_2 - 4 \Rightarrow \lambda = -0.125x_2 - 0.5 \text{ ....(1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow 4\lambda = -x_1 \quad \Rightarrow \lambda = -0.25x_1 \quad \text{................(2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 8x_1 + 4x_2 - 120 = 0 \text{..(3)}$$

$\because$ كلا من معادلة (١) ومعادلة (٢) تساوي λ

$$\therefore\ -0.125x_2 - 0.5 = -0.25x_1$$

بضرب طرفي المعادلة بـ(١-) ثم التقسيم على معامل x_1 نحصل على الاتي:-

$$0.5x_2 + 2 = x_1$$

نعوض قيمة x_2 في معادلة القيد رقم (٣) فنحصل على الاتي:-

$$8(0.5x_2 + 2) + 4x_2 - 120 = 0$$
$$4x_2 + 16 + 4x_2 - 120 = 0$$
$$8x_2 + 16 = 120$$
$$8x_2 = 120 - 16$$
$$8x_2 = 104 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{104}{8} = 13$$

للحصول على قيمة x_1 نعوض x_2 في معادلة القيد (٣):

$$8x_1 + 4(13) - 120 = 0$$
$$8x_1 + 52 - 120 = 0$$
$$8x_1 - 68 = 0$$
$$x_1 = \frac{68}{8} = 8.5$$

ونكون بذلك قد اوجدنا حجم الاستهلاك من السلعتين والذي يحقق اكبر منفعة ممكنة والتي تساوي المقدار الاتي بعد تعويض كل من قيم السلعتين في دالة المنفعة:

$$U = (x_1, x_2) = x_1x_2 + 4x_1$$
$$U = (8.5)(13) + 4(8.5)$$
$$U = 110.5 + 34$$
$$U = 144.5$$

مثال (5.8): منتج محتكر ينتج سلعتين هما G1 و G2 لديه دالة التكاليف المشتركة الاتية:

$$TC = 10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2$$

Q_1 : تشير الى الكميات المنتجة من السلعة G1.

Q_2 : تشير الى الكميات المنتجة من السلعة G2 .

وكانت دوال الطلب التي يواجهها المحتكر هي:-

$$P_1 = 50 - Q_1 + Q_2$$
$$P_2 = 30 + 2Q_1 - Q_2$$

المطلوب: احسب اقصى ارباح يمكن الوصول اليها ضمن القيد الاتي:-

$$Q_1 + Q_2 = 15$$

الحل

$$\pi = TR - TC$$

$$TC = 10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2$$

للحصول على معادلة الايراد الكلي من بيع السلعة G1 نتبع الاتي:-

$$TR_1 = P_1Q_1 = (50 - Q_1 + Q_2)Q_1 = 50Q_1 - Q_1^2 + Q_2Q_1$$

وكذلك الحال للسلعة G2 :-

$$TR_2 = P_2Q_2 = (30 + 2Q_1 - Q_2)Q_2 = 30Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

ثم نستخرج معادلة الايراد الكلي للسلعتين:-

$$TR = TR_1 + TR_2$$

$$= 50Q_1 - Q_1^2 + Q_2Q_1 + 30Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$= 50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2$$

وبعد الحصول على معادلة الايراد الكلي والكلفة الكلية نكتب معادلة الربح :

$$\pi = TR - TC$$

$$= (50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2) - (10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2)$$

$$= 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2$$

اصبح لدينا المشكلة الرياضية لتعظيم دالة الهدف هنا كما ياتي:-

$$\pi = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2$$

$$subject\ \ to:$$

$$Q_1 + Q_2 = 15$$

باستخدام صيغة لاكرانج :-

$$L = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2 + \lambda(15 - Q_1 - Q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 ....(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = 2Q_1 + 20 - 2Q_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2Q_1 + 20 - 2Q_2 ....(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 15 - Q_1 - Q_2 = 0 ....(3)$$

بما ان كل من معادلة (١) ومعادلة (٢) تساوي λ نحصل على الاتي:

$$40-2Q_1+2Q_2=2Q_1+20-2Q_2$$
$$40-2Q_1+2Q_2-2Q_1-20+2Q_2=0$$
$$20-4Q_1+4Q_2=0 \qquad \div 4$$
$$5-Q_1+Q_2=0$$

$$Q_2=Q_1-5$$

وبتعويض قيمة Q_2 في معادلة (٣) نحصل على:-

$$15-Q_1-(Q_1-5)=0$$
$$15-Q_1-Q_1+5=0$$
$$20-2Q_1=0$$
$$20=2Q_1$$
$$Q_1=10$$
$$\therefore Q_2=10-5=5$$

وبتعويض قيمة Q_2,Q_1 في دالة الربح نحصل على الاتي:-

$$\pi=40(10)-(10)^2+2(10(5)+20(5)-(5)^2$$
$$\pi=475$$

اسئلة الفصل الخامس

س١:- لديك دالة المنفعة الاتية :

$$U = X^{0.6}Y^{0.25}$$

المطلوب// ماهي افضل توليفة من السلعتين التي يجب ان تستهلك لغرض تعظيم المنفعة اذا علمت ان هذه الدالة مقيدة بالشرط الاتي:

$$8X + 5Y = 680$$

س٢:- منشأة تبيع منتوجين X و Y في سوقين مرتبطين وكانت دوال الطلب كالاتي:-

$$P_X - 13 + 2X + Y = 0$$

$$P_Y - 13 + X + 2Y = 0$$

فاذا كانت $TC = X + Y$.

المطلوب// جد السعر ومقدار الناتج من كل سلعة الذي يعظم الارباح . ثم تحقق من ان هذه الارباح كانت عند نهايتها العظمى في تلك النقطة.

س٣:-لتكن دالة المنفعة معطاة يالشكل الاتي:-

$$U = 2LogX_1 + LogX_2$$

وقيد الميزانية:-

$$2X_1 + 4X_2 = 36$$

المطلوب//

جد مستويات X_1 و X_2 التي تعظم منفعة المستهلك بوجود قيد الميزانية

س٤:- منتج محتكر لسلعتين يواجه دالتي الطلب الاتيتين :-

$$P_1 = 50 - Q_1$$

$$P_2 = 95 - 3Q_2$$

وكانت دالة كلفته هي:-

$$TC = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q^2$$

المطلوب// جد قيم (Q_1) و (Q_2) التي تعظم الربح .

س٥:- لديك دالة المنفعة الاتية :-

$$U = 260x_1 + 310x_2 + 5x_1x_2 - 10x_1^2 - x_2^2$$

المطلوب// احسب قيم كل من x_1 و x_2 التي تعظم المنفعة U.

س٦:- لديك دالة المنفعة الاتية :

$$U = x_1 x_2$$

ضمن القيد الاتي:-

$$2x_1 + 10x_2 = 400$$

المطلوب// جد مستويات x_1 , x_2 التي تعظم دالة المنفعة

س٧:- جد مستويات L , K التي تدني دالة الكلفة الكلية الاتية:-

$$TC = 4K + 3L$$

ضمن القيد الاتي:-

$$2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = 160$$

س٨:- اعطيت دالة انتاج منشأة ما :-

$$Q = 10K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}$$

وكانت دالة القيد هي:-

$$4K + 5L = 60$$

المطلوب// احسب مستويات L , K التي تعظم الناتج.

س٩:- لديك دالة منفعة لمستهلك :-

$$U = \ln x_1 + 2\ln x_2$$

المطلوب// جد قيم x_2 , x_1 التي تعظم المنفعة ضمن قيد الميزانية الاتي:-

$$2x_1 + 3x_2 = 18$$

باستخدام مضاعفات لاكرانج اجب عن الاسئلة الاتية:-

س١٠:- استخرج قيم x_2 , x_1 التي تعظم دالة المنفعة الاتية:-

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 3x_1$$

المقيدة بالقيد الاتي:-

$$x_1 + 2x_2 = 83$$

س١١:- جد القيمة القصوى لدالة الانتاج الاتية :-

$$Q = 10\sqrt{KL}$$

ضمن القيد الاتي:-

$$K + 4L = 16$$

س١٢:- منتج محتكر ينتج سلعتين هما G1و G2 ولديه دالة الكلفة الاتية:-

$$TC = 5Q_1 + 10Q_2$$

ويواجه دالتي الطلب الاتيتين:-

$$P_1 = 50 - Q_1 - Q_2$$
$$P_2 = 100 - Q_1 - 4Q_2$$

المطلوب// احسب اقصى ارباح ضمن القيد الاتي:-

$$Q_1 + Q_2 = 100$$

مصادر الفصل الخامس:

١- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٢- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٣- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٤- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد - ٢٠٠٠.

٥- الرويس ،خالد.. اقتصاديات الإنتاج الزراعي.(كتاب منشور على صفحات الانترنيت)

جامعة الملك سعود. كلية علوم الأغذية والزراعة. قسم الاقتصاد الزراعي. ٢٠٠٩.

٦- الرياضيات الاقتصادية - كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

٧- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. ٢٠١٠.

٨-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.

٩- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

١٠- John Baxley. Optimization Methods in Economics. Department of Mathematics. Wake Forest University. Published on line . www. google.com.

١١-John V. Baxley and John C. Moorhouse. Lagrange Multiplier Problems in Economics. Wake Forest University,Winston-Salem, NC 27109. Published on line . www. google.com.

1٢- K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff . Optimization with Constraints. 2nd Edition, March 2004**.** . Published on line . www. google.com.

1٣- Michael D. Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory (Classics in Applied Mathematics). Publisher: Society for Industrial Mathematics | 2002| .

1٤-Shuonan Dong . Methods for Constrained Optimization. Published on line . www. Mathematics.com. 2006.

الفصل السادس

دوال الانتاج

Production Functions

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- مفهوم دالة الانتاج
- اشكال دوال الانتاج
- عوائد الحجم
- تعظيم ارباح المنشأة باستخدام دالة كوب دوكلاص
- اشتقاق دالة التكاليف من دالة انتاج كوب دوكلاص
- دالة الانتاج ذات مرونة الاحلال الثابتة
- الدوال الانتاجية الجبرية من الدرجة الثانية
- دوال الانتاج غير الجبرية

الفصل السادس

دوال الانتاج

Production Functions

مقدمة

يتناول هذا الفصل نظرية الانتاج فضلا عن التعرف على بعض دوال الانتاج الشائعة في الاقتصاد، كما سنستعرض مختلف مؤشرات دوال الانتاج بالاعتماد على مفاهيم الاشتقاق الجزئية ثم ننتقل الى دوال الانتاج المتجانسة وخواصها ، ويشمل هذا الفصل ايضا الشكل العام لدالة الانتاج ومؤشراتها والمعدل الحدي للاحلال ومرونة الاحلال فضلا عن موضوعات اخرى.

دالة الانتاج *Production Function*

تمثل دالة الانتاج مجموعة العلاقات الممكنة والكفوءة فنيا *Technically Efficient* بين عناصر الانتاج وكمية الانتاج . فاذا تم التعبير عن كمية الانتاج التي تمثل المتغير التابع *Dependent Variable* الرمز Y ، واعطيت عناصر الانتاج وهي المتغيرات المستقلة *Independent Variables* الرموز $X_1, X_2, ..., X_n$ فان دالة الانتاج تاخذ الشكل الاتي:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

كما يمكن ان تعرف دالة الانتاج بانها((علاقة تربط بين عناصر الانتاج (المدخلات)(Inputs) والناتج النهائي (المخرجات) (Outputs))). وتعبر عن الحالة الفنية التي تربط المدخلات والمخرجات، وتقوم هذه العلاقة على اساس استخدام عناصر الانتاج باشكالها المختلفة والتي من اهمها العمل ***L*** ورأس المال ***K***.

ويمكن صياغة دالة الانتاج في ابسط صورها من ان حجم الانتاج Y يرتبط بعلاقة دالية بعوامل الانتاج ، رأس المال والعمل والتقدم التقني، وتاخذ دالة الانتاج في هذه الحالة الشكل العام الاتي:-

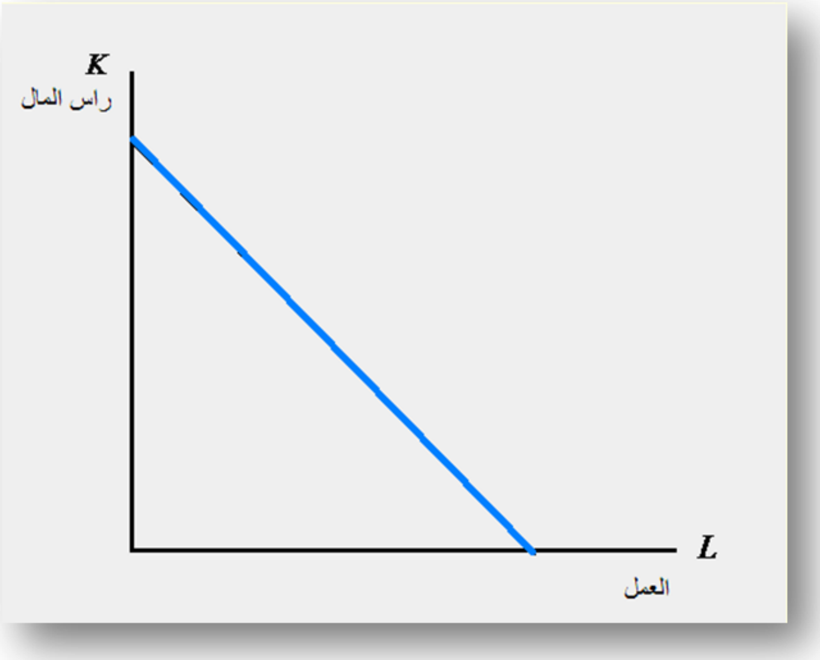
$$Y = f(K, L)$$

إذ تمثل Y كمية الانتاج في وحدة الزمن ، اما K فتمثل كمية رأس المال و L تمثل حجم العمل المستخدم في العملية الانتاجية، أما التقدم التقني فيمكن ادخاله في العلاقة الدالية بطرائق عدة لا مجال للتعرض اليها هنا، وقد بذل الاقتصاديون القياسيون جهودا كبيرا لمحاولة توضيح الاشكال الرياضية لدوال الانتاج انطلاقا من الاحصاءات المتوفرة على مستوى المنشأة او القطاع الصناعي او الاقتصاد القومي وتنحصر مهمة الاقتصاد الرياضي في تحليل دوال الانتاج من الوجهة النظرية والرياضية وايجاد مؤشراتها بالاعتماد على مفاهيم الاشتقاق والتفاضل.

تتعدد اشكال دوال الانتاج وتتخذ صورا مختلفة إلا ان أكثرها شيوعا هي دوال الانتاج الاتية:

اولا- الدالة الخطية *Linear Function*

يفترض هذا الشكل من الدوال احلال كاملا بين عناصر الانتاج ، إذ ان السلعة هنا يمكن ان تنتج أما باستخدام رأس المال فقط أو عنصر العمل فقط أو بتوليفات لانهائية من العمل ورأس المال، وتتخذ الشكل الاتي:



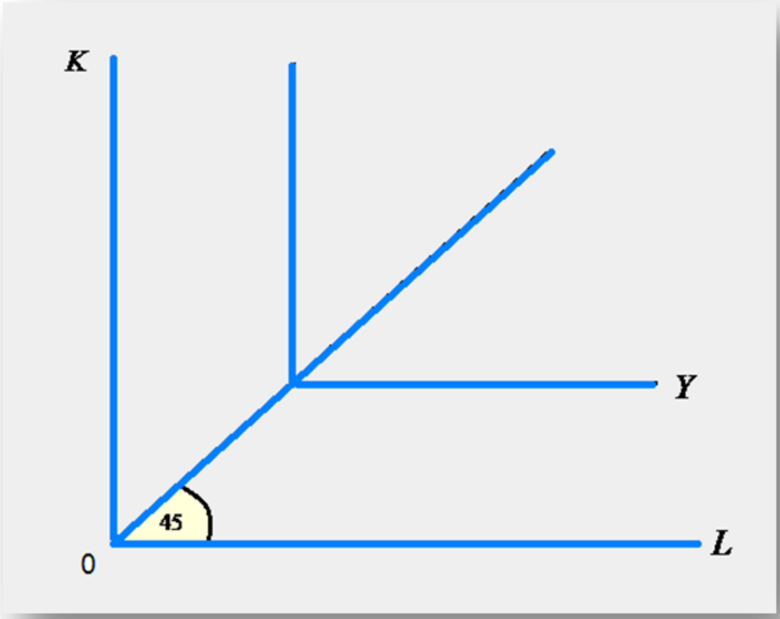
شكل (٣٦) الشكل الخطي لدالة الانتاج

ثانيا- دالة المستخدم المنتج (دالة ليونيتيف) *Input-Output Function*

تعتمد الدالة في صياغتها على ان معامل الاحلال بين عناصر الانتاج يساوي صفرا ، الأمر الذي يعني ان هناك طريقة واحدة فقط لانتاج أي سلعة ، فإما أن يكون استخدام لعنصر رأس المال من دون أي استخدام لعنصر العمل او استخدام لعنصر العمل من دون أي استخدام لعنصر رأس المال وهذا يعني ان مرونة الاحلال بين عنصري رأس المال والعمل مساوية للصفر اي:-

$$\sigma = 0$$

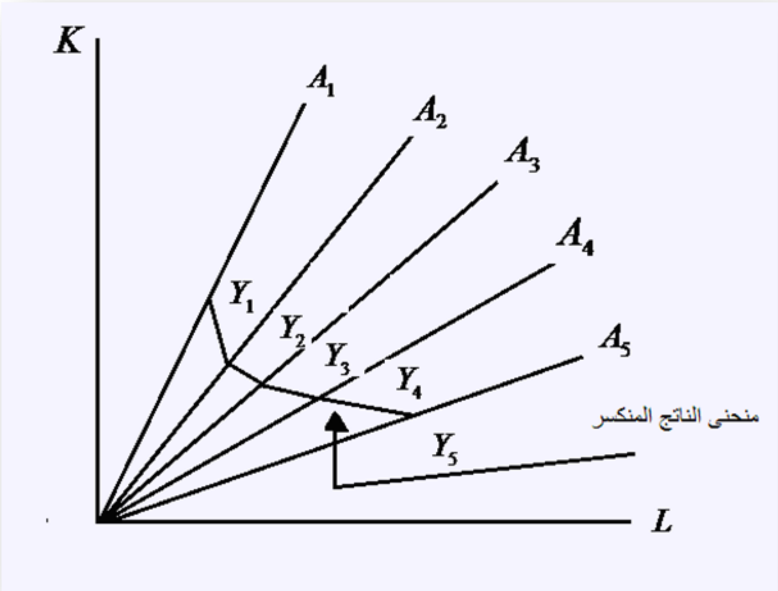
وتتخذ دالة ليونيتيف الشكل الاتي:-



شكل (٣٧) دالة المستخدم المنتج – ليونيتيف

ثالثا– دالة الناتج المتساوي المنكسر

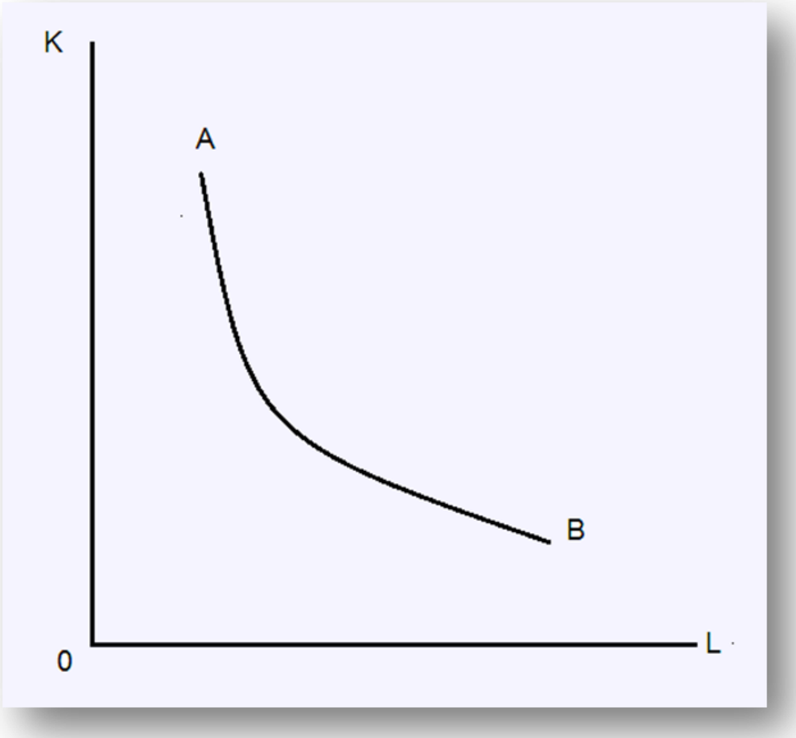
يمثل المنحنى المنكسر (Kinked Isoquant) في الشكل البياني (38) ويكون فيه الإحلال محدوداً بين عناصر الإنتاج (K,L) ، وتوجد طرائق قليلة فقط لإنتاج أي سلعة ، ويكون الإحلال ممكناً عند نقطة الانكسار ويسمى هذا الشكل أيضاً بمنحنى تحليل النشاط أو منحنى البرمجة الخطية ، إذ يميل عامة المنظمين ومهندسي الإنتاج إلى استخدام المنحنى المنكسر نظراً لأنهـــم ينظـــروا إلـــى عمليـــة الإنتـــاج علـــى أنهـــا ذات اتجـــاه منفصـــل (Discrete) وليس مستمراً (Continuous) . ، وكما في الشكل الاتي:



شكل (38) منحنى الناتج المنكسر

رابعا– دالة الناتج المتساوي المحدب تجاه نقطة الاصل

وهو الإحلال المحدود بين عنصري الإنتاج العمل ورأس المال (L,K) ، وهو المنحنى المحدب الأملس *Smooth–Convex Isoquant* . ويكون التحدب نحو نقطة الأصل لأنه يمثل إحلالا حديا متناقصا، وذلك لأن معدل الإحلال الحدي سوف يساوي النسبة بين الإنتاجية الحدية لأحد عناصر الإنتاج إلى الإنتاجية الحدية للعنصر الآخر في أي نقطة على منحنى الناتج المتساوي مما يجعل ميله سالبا ، فكلما ازداد القدر المستخدم من عنصر ما ازدادت صعوبة إحلالهِ محل العنصر الآخر جاعلاً النواتج الحدية لعناصر الإنتاج موجبة ومتناقصة والتي تمثل بدورها المنطقة الرشيدة للإنتاج ، ويعبر عنه بالشكل الآتي:



شكل (٣٩) منحنى الناتج المحدب

ويعبر عن ذلك رياضياً بالآتي:-

إذا كانت دالة الانتاج $Y = f(K,L)$ ، فيمكن عند ذلك إشتقاق *MRTS* رياضيا ، الذي يمثل ميل منحنى الناتج المتساوي ، وذلك بأخذ التفاضل الكلي لدالة الانتاج وكما يأتي :-

$$dY = f_1 dK + f_2 dL$$

إذ تمثل f_1 و f_2 المشتقة الجزئية الاولى لكل من عنصري الانتاج K و L على التوالي بالنسبة لـ Y والتي تساوي الانتاجية الحدية لكل منهما. ولغرض المحافظة على مستوى الانتاج نفسه فإن ذلك يستوجب أن يكون $dY = 0$. وعند ذلك يمكن زيادة K بمقدار dK وتقليل L بمقدار dL، أي أن :-

$$f_1 dK + f_2 dL = 0$$

$$f_1 dK = -f_2 dL$$

$$-\frac{dL}{dK} = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{MPK}{MPL} = MRTS_{LforK}$$

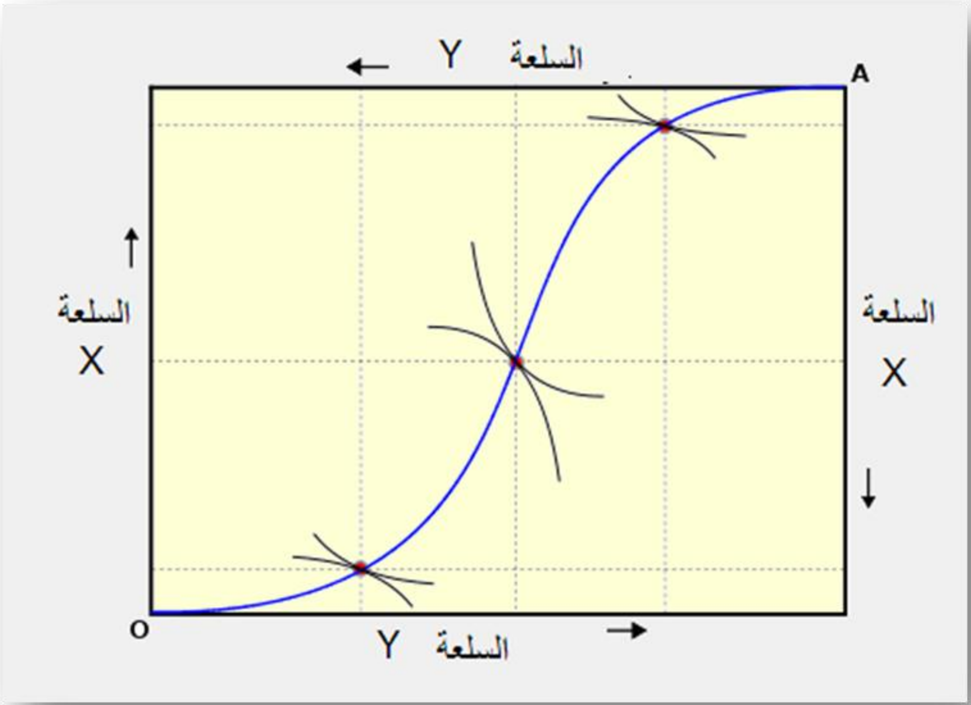
Where $f_1 = MPK$

$f_2 = MPL$

إن هذا يقود إلى اصطلاح معدل الإحلال الحدي التقني (*Marginal Rate of Technical Substitution*) ، والذي يرمز له (MRS_t) ، ويعني تناقص الكميات المستخدمة من عنصر إنتاجي معين مقابل زيادة الوحدات المستخدمة من عنصر إنتاجي آخر مع بقاء مستوى الإنتاج من دون تغيير ، وميل منحنى سواء المنتج يعبر عن ذلك الاصطلاح .

خامسا – دالة صندوق ايدجورث *Edgworth Box*

تستخدم هذه الدالة لانتاج سلعتين وليس سلعة واحدة وباستخدام خليط مختلف من عنصري الانتاج العمل ورأس المال إذ تتكون هنا دالتان بعدد السلع المنتجة ويكون لكل سلعة دالة انتاج.



شكل (٤٠) دالة صندوق ايدجورث

سادسا – دالة كوب دوكلاس *Cobb–Douglas Function*

تستخدم هذه الدالة بشكل واسع في البحوث النظرية والتطبيقية ولهذا سيتم التركيز على هذا الشكل من دوال الانتاج في الصفحات القادمة.

تجدر الاشارة الى ان هناك ثلاثة قوانين أساسية تحكم العملية الإنتاجية وهي:

اولا:– وجود علاقة طردية بين حجم الإنتاج (Y) والمستخدم من عوامل الإنتاج($x's$).

ثانيا:– قانون تناقص الغلة *Law of Diminishing Return* : إذ تتناقص الإنتاجية الحدية لعوامل الإنتاج عند زيادتها.

ثالثا:- غلة الحجم إذ تبين غلة الحجم نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الكلي الناتجة من زيادة في مستوى النشاط(أي جميع عوامل الإنتاج المستخدمة) بنسبة معينة، فإذا بدأنا بالدالة:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

ولقد أكتشف كل من *Paul Douglas,C.W Cobb* باستخدام بيانات عن علاقات واقعية للإنتاج على مدى أربعة وعشرين عاما دالة من أكبر مميزاتها طواعيتها لتطبيق القوانين الثلاثة السابق الإشارة إليها، وقد ارتبطت هذه الدالة بإسميهما عام ١٩٢٧م ويمكن كتابتها كما أتت في دراستهما رياضيا كما يأتي:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

إذ أن:

Y = الناتج،

L= عدد العاملين (رجل/سنة)،

K= رأس المال،

β_0 = مقدار ثابت.

β_1, β_2 = عوامل موجبة تختلف قيمتها من دالة لأخرى.

تعد هذه الدالة التي حاول فيها *Paul Douglas,C.W Cobb* تطويع بيانات عن الصناعة الأمريكية في المدة من ١٨٩٩-١٩٢٢م لقياس مدى مساهمة العمالة ورأس المال في الإنتاج من أهم أدوات التحليل الاقتصادي التي ظهرت حتى الآن والتي انتشرت بشكل واسع وما زالت تستخدم بكثرة في مجال الدراسات الاقتصادية، فضلا عن أن هذه الدالة تعد الأداة التي مكنت الاقتصاديين من بناء نماذج واكتشاف دوال أخرى أدت إلى إحداث طفرة واضحة في أساليب التحليل الاقتصادي في عصرنا هذا ولهذا فإن دراسة هذه الدالة بالتفصيل من كافة جوانبها تعد هدفا أساسيا في هذا الجزء من المادة.

كيفية إنطباق القوانين الثلاثة على هذه الدالة:

أولا: مرونة الإنتاج بالنظر إلى عامله

ويقصد بها درجة استجابة التغير في حجم الإنتاج نتيجة التغير في حجم أحد عوامل الإنتاج المستخدمة. بمفاضلة الدالة (١) بالنسبة لعنصر العمل L يتضح أن:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \left(\beta_0 \, L^{\beta_1 - 1} \, K^{\beta_2}\right)$$

$$= \beta_1 \, \frac{\beta_0 \, L^{\beta_1} \, K^{\beta_2}}{L}$$

$$= \beta_1 \, \frac{Y}{L}$$

اذ ان:

$$Y = \beta_0 \, L^{\beta_1} \, K^{\beta_2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} * \frac{L}{Y} = \beta_1 ....(2)$$

ويطلق على مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل L (العمالة) حيث أن النتيجة في المعادلة (٢) تشير إلى أن:

معلمة عنصر العمل= التغير النسبي في حجم الناتج (Y) / التغير النسبي في عنصر العمل (L)

وبالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر راس المال K تساوي β_2 أي أن:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} \frac{K}{Y} = \beta_2$$

فإذا زادت نسبة المستخدم من عنصر العمل (L) بنسبة ١% فان ذلك سيؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة β_1% بافتراض ثبات عنصر راس المال (K) واذا ازدادت نسبة المستخدم من عنصر راس المال بنسبة ١% فان ذلك سيؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة β_2% بافتراض ثبات عنصر العمل(L).

ثانيا: تناقص الغلة

يعني قانون تناقص الغلة، تناقص الإنتاجية الحدية. أي أن الإنتاجية الحدية لعنصر العمل L هي:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \, \frac{Y}{L}$$

أي أن الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج L $\beta_1 \frac{Y}{L}$ تتناقص بزيادة المستخدم من L وقياسا على ذلك فإن الإنتاجية الحدية للعامل K هي:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \beta_2 \, \frac{Y}{K}$$

أي ان الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج *K* $\beta_2 \frac{Y}{K}$ تتناقص هي الأخرى بزيادة المستخدم من *K*.

ثالثا: غلة الحجم

تبين غلة الحجم نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الكلي الناتجة من زيادة في مستوى النشاط(أي جميع عوامل الإنتاج المستخدمة) بنسبة معينة، فإذا بدأنا بالدالة:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

فإذا قررنا زيادة مستوى النشاط بالنسبة *A* فإن:

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 (AL)^{\beta_1} (AK)^{\beta_2} \\ &= \beta_0 A^{\beta_1} L^{\beta_1} (A^{\beta_2} K^{\beta_1}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ....(3) \\ &= A^{\beta_1+\beta_2} (\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}) \\ &= A^{\beta_1+\beta_2} Y \end{aligned}$$

أي إذا زاد حجم النشاط بنسبة *A* فإن حجم الإنتاج الكلي سيزيد بنسبة $A^{\beta_1+\beta_2}$ والمعادلة (٣) يمكن أن تساعدنا في تقدير عائد السعة *Returns to Scale* وعلى ذلك إذا كانت:

(١) $\beta_1 + \beta_2$ =١ فإن هذا يعني ثبات عائد السعة *Constant Returns to Scale*.

(٢) $\beta_1 + \beta_2$ < ١ فإن هذا يعني تزايد عائد السعة *Increasing Returns to Scale*.

(٣) $\beta_1 + \beta_2$ >١ فإن هذا يعني تناقص عائد السعة *Decreasing Returns to Scale*

مثال(6.1): بين سمة عوائد الحجم في دوال الانتاج الاتية:

$$Y = 2L^{0.7} K^{0.6}$$

الحل

لكي نحسب عوائد الحجم في دوال الانتاج السابقة تضرب عوامل الانتاج L,K بقيمة ثابتة ولتكن مثلا m او A او أي رمز آخر وكما ياتي:-

$$\begin{aligned} Y &= 2L^{0.7} K^{0.6} \\ &= 2(mL)^{0.7} \ (mK)^{0.6} \\ &= 2(m)^{0.7} \ (L)^{0.7} \ (m)^{0.6} \ (K)^{0.6} \\ &= (m)^{0.7+0.6} \, 2(L^{0.7} K^{0.6}) \\ &= m^{1.3} \ \ Y \end{aligned}$$

$\because 1.3 > 1$ فان عوائد الحجم في هذه الدالة متزايدة. وهكذا يمكن استخدام الطريقة نفسها لمختلف اشكال دالة الانتاج.

فضلا عن الخصائص السابق الإشارة إليها فإن دالة كوب- دوكلاس Cobb-Douglas تتسم أيضا بالآتي:

١- إن الدالة خطية في الصورة اللوغاريتمية أي أن:

$$LogY = Log\beta_0 + \beta_1 LogL + \beta_2 LogK.....................(4)$$

وتعد الصيغة (٤) ذات أهمية خاصة إذ أن الدالة يتم تقدير معلماتها وهي في هذه الصورة المبسطة.

٢- يعد الناتج الحدي للمورد دالة للناتج المتوسط فإذا كان الناتج الحدي للمورد مثلا هو:

$$MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \frac{Y}{L} > 0$$
$$= \beta_1 (AP_L) > 0..................(5)$$

واذ أن *AP* تشير إلى الناتج المتوسط الذي يساوي الناتج الكلي Y مقسوما على مورد الإنتاج *L* ، المعادلة (5) توضح أن مرونة الإنتاج للمورد *L* تساوي نسبة الإنتاج الحدي لمتوسط إنتاج المورد نفسه أي أن :

$$\beta_1 = \frac{MP_L}{AP_L}$$

يظل الناتج الحدي موجبا مادام مورد الإنتاج كذلك كما أن مجموعة النقاط التي تكون فيها الإنتاجية الحدية للموارد مساوية للصفر على خريطة سواء الإنتاج تشكل الخطوط الحرجة *Ridge Lines* للدالة والتي تحصر بداخلها توليفة الموارد الأكثر كفاءة من الناحية التقنية و التي يطلق عليها أيضا المنطقة الرشيدة للإنتاج.

٣- تسمح دالة كوب دوكلاس بظهور أحدى المراحل الثلاث للإنتاج والتي تكون فيها الإنتاجية الحدية إما ثابتة، متزايدة، أو متناقصة ويظهر هذا من خلال التفاضل الثاني للناتج بالنسبة لمستوى مورد الإنتاج كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \beta_1(\beta_1 - 1)\frac{Y}{L^2}$$

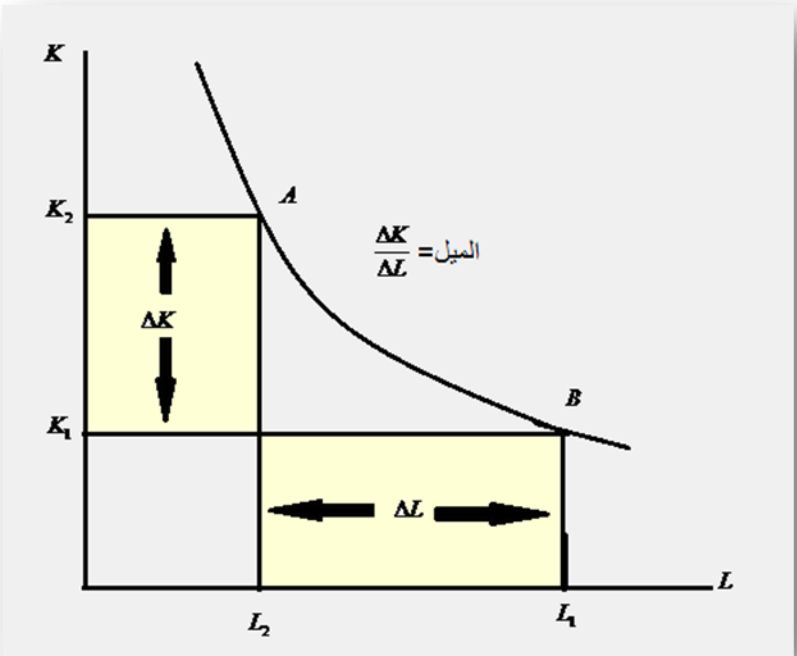
ويتضح من التفاضل الثاني أن قيمته سواء كانت صفرية، موجبة، أو سالبة إنما تتوقف على قيمة β_1

٤- دالة كوب – دوكلاس هي دالة متجانسة من الدرجة $\beta_1 + \beta_2$ أي أن درجة التجانس تتوقف على مجموع مرونات الإنتاج *E* حيث:

$$E = \beta_1 + \beta_2$$

وكما سبق وأشرنا فإن درجة التجانس قد تكون مساوية للوحدة أو الصفر أو أكبر من الوحدة وذلك في حالات ثبات عائد السعة أو تناقصها أو تزايدها على الترتيب، هذا وتشير درجة التجانس إلى مدى استجابة الناتج للتغير في عنصري الإنتاج بنسبة واحدة.

٥-إن القيم الموجبة لمرونة إنتاج الموردين والتي تقل عن الوحدة في هذه الدالة، إنما تعني أن منحنى سواء الإنتاج محدب تجاه نقطة الأصل مما يعني تناقص معدل الإحلال الحدي *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* بين الموردين كما في الشكل الاتي:



شكل (٤١) المعدل الحدي للاحلال الفني

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K}$$
$$= \frac{\beta_1 Y / L}{\beta_2 Y / K} = \frac{\beta_1 K}{\beta_2 L} ....(6)$$

ويتضح من المعادلة أنه كلما زاد إحلال L محل K فإن $MRTS_{LK}$ يتناقص باستمرار.

٦- الدالة ليس لها نهاية عظمى ومن ثم ليس لها خطوط حرجة.

٧- يتوقف الأسلوب التقني (طريقة مزج الموارد) على النسبة $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ في المعادلة (٦).

فمع ثبات معامل عنصر رأس المال فإن زيادة معامل العمالة β_1 تعني استخدام أسلوب تكثيف العمالة *Labour Intensive Technique* في الإنتاج على حساب الآلات أي بمعنى آخر استخدام قدر أكبر من العمالة والعكس إذا كانت قيمة β_2 أكبر من قيمة β_1 فإن استخدام إسلوب تكثيف رأس المال *Capital Intensive Technique* هو الأفضل للإنتاج. هذا وتجدر الإشارة إلى أن اختيار أي من الأسلوبين إنما يتوقف على أسعار هذين الموردين.

٨- ثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة، تعرّف مرونة الإحلال *The Elasticity of Substitution* بأنها التغير النسبي في الموارد إلى التغير النسبي في معدل الإحلال الحدي أي أن:

σ = *التغير النسبي في* K/L /*التغير النسبي في* MRTS

$$\sigma = \frac{\%\Delta K / \%\Delta L}{\%\Delta MRTS}$$

إذ أن σ هي مرونة الإحلال، ولإثبات أن مرونة إحلال دالة *C–D* ثابتة ومساوية للوحدة فإن:

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\partial(\partial K/\partial L)/(\partial K/\partial L)} = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\frac{\partial(\beta_1/\beta_2.K/L)}{(\beta_1/\beta_2.K/L)}} \text{.......................}(7)$$

$$= \frac{\partial(K/L)(\beta_1/\beta_2)}{(\beta_1/\beta_1)\partial(K/L)} = 1$$

مما يعني أن الممر التوسعي لدالة كوب–دوجلاس يكون خطا مستقيما كما هو موضح بالمعادلة الآتية:

$$K = (\beta_1/\beta_2)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)L$$

تــعظيم أربــاح الــمنشأة باســتخدام دالة كــوب- دوكــلاس

تعرف أرباح المنشأة بأنها الفرق بين الإيراد الكلي والتكاليف الكلية، فإذا فرضنا أن الإيراد الكلي يأخذ الشكل :

$$TR = Y.P_Y$$

وتشير TR إلى الإيراد الكلي في حين تشير كل من P_y, Y إلى الناتج المادي و سعر الوحدة من الناتج على الترتيب. وبفرض وجود موردين إنتاجيين فقط هما X_2, X_1 فإن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل:

$$TC = P_{X_1} X_1 + P_{X_2} X_2 + TFC$$

حيث تشير TFC إلى التكاليف الثابتة الكلية في حين تشير كل من P_{X_2}, P_{X_1} إلى سعر الوحدة من الموردين X_2, X_1 على الترتيب. وأن دالة الربح تأخذ الصورة الآتية:

$$\prod = YP_Y - P_{X_1} - P_{X_2} - TFC ....(8)$$

هناك ثلاث طرائق لتعظيم أرباح المنشأة وإن كانت جميعها تصل في النهاية الى نتيجة واحدة وهي:

الطريقة الأولى: وذلك بإحلال دالة الإنتاج في المعادلة (8) وبعدها يتم إيجاد التفاضلات الجزئية للمتغير $\prod$ بالنسبة لمتغيرات المعادلة وهي في هذه الحالة X_2, X_1.

الطريقة الثانية: وفيها يتم الاستعانة بمضروبات لا جرانج وفيها تتحول دالة الربح إلى دالة لا جرانج كما يأتي:

$$\prod = YP_Y - P_{X_1} X_1 - P_{X_2} X_2 - TFC - \lambda [Y - F(X_1, X_2)]$$

λ تشير إلى معامل لاجرانج *Lagrange Multiplier* وباقي العوامل كما هي معرفة سابقاً، ثم يتم إجراء التفاضلات الجزئية للمتغيرات X_2, X_1 بالإضافة إلى المتغير λ و المتغير Y مع ملاحظة أن ($Y P_y$) يعبر عن الإيراد الكلي في هذه الحالة ولا يتم إحلال الدالة $Y=f(X_2, X_1)$ محل Y في الإيراد الكلي.

الطريقة الثالثة: وفيها يتم استخدام مضروبات لاجرانج ولكن لإيجاد توليفة الموارد الأقل تكلفة. أي أن دالة الهدف تكون تدنية تكاليف المنشأة في ظل قيد دالة الإنتاج، وتصبح دالة الهدف في هذه الحالة كما في المعادلة الآتية:

$$TC = P_{X_1} X_1 + P_{X_2} X_2 + TFC + \lambda \left[\overset{0}{Y} - F(X_1, X_2) \right]$$

ثم يتم إيجاد التفاضلات الجزئية لدالة الهدف للمتغيرات λ, X_1, X_2 في حين $\overset{0}{Y}$ تشير إلى ثبات الإنتاج عند $\overset{0}{Y}$ ولا يتم إجراء التفاضل بالنسبة له، وفي مناقشتنا سوف نستخدم الطريقة الثانية ومن خلال استخدام دالة إنتاج كوب- دوكلاس المشار إليها في المعادلة (١) تصبح دالة الهدف كما يأتي:

أي أن:

$$\prod^* = P_Y Y - rK - wL - TFC - \lambda(Y - \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2})$$

$$\prod^* = TR - rK - wL - TFC - \lambda(Y - \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

إذ أن:

$\prod$=أقصى ربح،

r= سعر الوحدة من رأس المال (سعر الفائدة)،

w= أجر العامل،

TFC = إجمالي التكاليف الثابتة،

λ = معامل لاجرانج،

P_y = سعر الوحدة من الناتج Y ،

TR = الإيراد الكلي.

ولتحديد كميات الموارد التي تحقق هدف المنشأة في معظمة أرباحها فإن ذلك يستدعي تحقيق شرطين:

الشرط الضروري:

وفيه يجب مساواة التفاضلات الجزئية لدالة الهدف لمتغيرات الدالة بالصفر كما يأتي:

$$\frac{\partial \prod}{\partial L} = -w + \lambda\beta_1 \frac{\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{L} = 0$$

ومنها:

$$w = \lambda\beta_1 \frac{Y}{L}$$

وبالمثل :

$$\frac{\partial \prod}{\partial L} = -r + \lambda\beta_2 \frac{\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{K} = 0$$

ومنها:

$$r = \lambda\beta_2 \frac{Y}{K}$$

كذلك:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \hat{Y}} = P_Y - \lambda = 0$$

ومنها:

$$P_Y = \lambda$$

كذلك:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda} = -Y + \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} = 0$$

ومنها فإن:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

الشرط الكافي:

لمعظمة أرباح المنشأة يستدعى أن تكون التفاضلات الثانية لدالة الربح لموارد الإنتاج سالبة أي أن:

(أ) $$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = PF_{11} < 0$$

(ب) $$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = PF_{22} < 0$$

(ج) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial L^2} \end{vmatrix} = P^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} < 0$$

واذ أن:

$$f_{11} = \frac{\beta_2(\beta_2 - 1)Y}{K^2}$$

$$f_{22} = \frac{\alpha_1(\beta_1 - 1)Y}{L^2}$$

$$f_1 = \beta_1 \beta_0 L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2}$$

$$f_{12} = \frac{\beta_1 \beta_0 L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2}}{LK} = \frac{\beta_1 \beta_2 Y}{LK}$$

$$f_{21} = \frac{\beta_1 \beta_2 Y}{LK}$$

ولما كان سعر الوحدة من الناتج P_y موجبة فإن تحقيق الشرط الكافي لمعظمة أرباح المنشأة يستدعي أن:

$$f_{11} = \frac{\beta_2(\beta_2 - 1)Y}{K^2} < 0$$

$$f_{22} = \frac{\beta_1(\beta_1 - 1)Y}{L^2} < 0$$

$$f_{11} f_{22} > f_{12} f_{21}$$

$$\frac{\beta_1\beta_0(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1)Y^2}{L^2K^2} > \frac{(\beta_1\beta_2)^2 Y^2}{L^2K^2}$$

أي أن :

$$(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) > \beta_1\beta_2$$

وهذا يستدعي بالطبع أن تكون :

$$\beta_1 + \beta_2 < 1$$

أي أن شرط تعظيم الأرباح بافتراض سيادة المنافسة الكاملة في أسواق الموارد وسوق الناتج يستدعي أن تكون الدالة متجانسة من الدرجة أقل من الوحدة أي معنى آخر في ظل تناقص عوائد السعة.

امثلة متنوعة عن تعظيم الانتاج:

نظرا لصعوبة الاطار النظري المعروض حول استخدام المصفوفات والمحددات سيتم تناول بعض الامثلة التي تتناسب مع مستوى الطالب في هذه المرحلة ، وتمهيدا لهذا الامثلة سيتم عرض اطار نظري عن كيفية تعظيم المنتج لانتاجه في ظل قيود معينة او تدنية لدالة كلفته لانتاج حجم معين من الانتاج وكل هذا ضمن موضوع توازن المنتج.

توازن المنتج

يتعرض المستهلك الى مشكلة اختيار السلع التي تمنحه اقصى اشباع ممكن في حدود دخله ، و الشيء نفسه يواجهه المنتج في اختيار عوامل الانتاج من عمل ورأس المال الذي يمنحه اقصى انتاج باقل كلفة ممكنة، وسنتعرض الى بعض المفاهيم التي تساعدنا في تناول هذا الموضوع أي توازن المنتج.

منحنى الناتج المتساوي *Isoquant curve*:

هو المحل الهندسي لكافة التوليفات من عنصري العمل ورأس المال (كما تم افتراضه في مبحثنا هذا) والتي تمنح المنتج حجم الانتاج نفسه والممثل بالدالة الاتية:

$$Y_0 = f(K, L)$$

المعدل الحدي للاحلال مابين عاملي الانتاج (العمل وراس المال) *Marginal rate of substitution:* ويساوي النسبة ما بين التغير في كمية العمل على التغير في كمية رأس المال . ولحساب ذلك نحسب التفاضل الكلي لدالة الانتاج وكما ياتي:

$$dY_0 = f_K dK + f_L dL = 0$$

الانتاجية الحدية لرأس المال/ الانتاجية الحدية للعمل = $MRS = -\dfrac{\Delta L}{\Delta K} = \dfrac{f_K}{f_L}$

خط التكاليف المتساوية *Isocost*: هنا نفترض ان المنتج يخصص مبلغا معينا من المال نسميه الميزانية لشراء عوامل الانتاج وهنا كما افترضنا العمل ورأس المال وذلك لانتاج كمية معينة من سلعة معينة. وتكتب دالة الكلفة على النحو الاتي:-

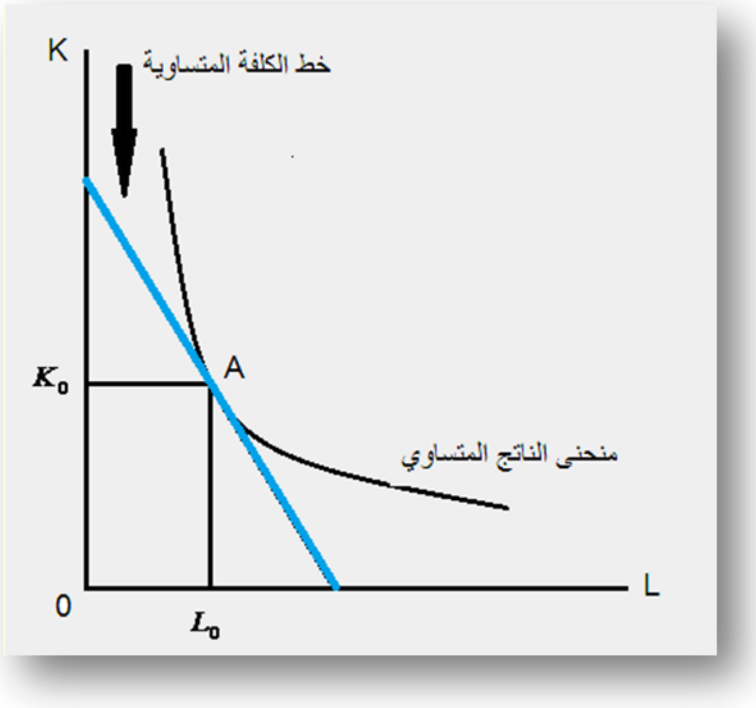
$$TC = P_K K + P_L L$$

ويعبر عن النسبة بين عوامل الانتاج بميل الخط المستقيم أي ميل خط التكاليف ويساوي:-

$$-\frac{P_L}{P_K}$$

السلوك الامثل للمنتج : يهدف المنتج الى الحصول على اقصى انتاج ممكن باقل تكلفة ممكنة ويمكن التوصل الى هذه النتيجة بالطرائق الاتية:-

١- **الطريقة البيانية** : نرسم منحنى الناتج المتساوي ومنحنى خط التكاليف. وعندما يمس خط التكاليف المتساوية منحنى الناتج المتساوي في النقطة المؤشرة بالرسم ادناه وهي نقطة A فان احداثيات هذه النقطة تمثل الكميات اللازمة من عنصري العمل ورأس المال التي تعظم انتاج المشروع باقل كلفة.



شكل (٤٢) تعظيم الانتاج

٢- **الطريقـة الجبريـة:** فـي نقطـة التمـاس فـإن :- ميـل خـط التكـاليف = المعـدل الحـدي للاحلال

سعر وحدة رأس المال/ سعر وحدة العمل= الانتاجية الحدية لرأس المال/ الانتاجية الحدية للعمل

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{f_K}{f_L}$$

٣- **طريقة مضاعف لاكرانج:** يتم تعظيم دالة الانتاج تحت قيد الكلفة ويتم تشكيل الصيغة الاتية :-

$$F = f(K,L) + \lambda(TC - P_K K - P_L L)$$

وباخذ المشتقات الجزئية الاولى نحصل على الاتي:-

$$\frac{\partial F}{\partial K} = f_K dK - \lambda P_K = 0 \Rightarrow f_K = \lambda P_K \text{..............}(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = f_L dL - \lambda P_L = 0 \Rightarrow f_L = \lambda P_L \text{..................}(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = TC - P_K K - P_L L = 0 \text{..............................}(3)$$

ومن معادلة (١) ومعادلة (٢) نحصل على الاتي:-

$$\frac{f_K}{f_L}=\frac{P_K}{P_L}$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقا.

أما السلوك الامثل للمنتج الذي يهدف الى تقليل تكاليف الانتاج عند حجم انتاج معين فيمكن الحصول عليه بتشكيل صيغة لاكرانج وكما ياتي:-

$$F=P_K K+P_L L+\lambda(Y_0-f(K,L)$$

وباخذ المشتقات الجزئية الاولى نحصل على:-

$$\frac{\partial F}{\partial K}=P_K-\lambda f_K=0\Rightarrow P_K=\lambda f_K \text{..................(1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}=P_L-\lambda f_L=0\Rightarrow P_L=\lambda f_L \text{......................(2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=Y_0-f(k,L) \text{...(3)}$$

ومن معادلة (١) ومعادلة (٢) نحصل على الاتي:-

$$\frac{P_K}{P_L}=\frac{f_K}{f_L}$$

مثال(٦,٢) : لدينا دالة الانتاج الاتية : $Y=4KL$ **، واسعار عوامل الانتاج** $P_K=5$ **و** $P_L=10$.

المطلوب: ماهو اقصى انتاج ممكن ضمن كلفة كلية =١٠٠ .

الحل: بالطريقة الرياضية

يمكن التعبير عن دالة الكلفة الكلية بالاتي:

$$TC=100=5K+10L$$

لتعظيم الانتاج تحت قيد الكلفة الكلية نشكل صيغة لاكرانج :

$$F=4KL+\lambda(100-5K-10L)$$

شرط تعظيم الدالة نستخرج المشتقات الجزئية الاولى

$$\frac{\partial F}{\partial K}=4L-5\lambda=0\Rightarrow\ 4L=5\lambda \text{.............(1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}=4K-10\lambda=0\Rightarrow 4K=10\lambda \text{..........(2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=100-5K-10L=0 \text{.....................(3)}$$

من معادلة (١) و معادلة (٢) نحصل على الاتي:-

$$\lambda = \frac{4}{5}L$$

$$\lambda = \frac{4}{10}K$$

$$\frac{4L}{5} = \frac{4K}{10}$$

$$20K = 40L$$

$$2K = 4L$$

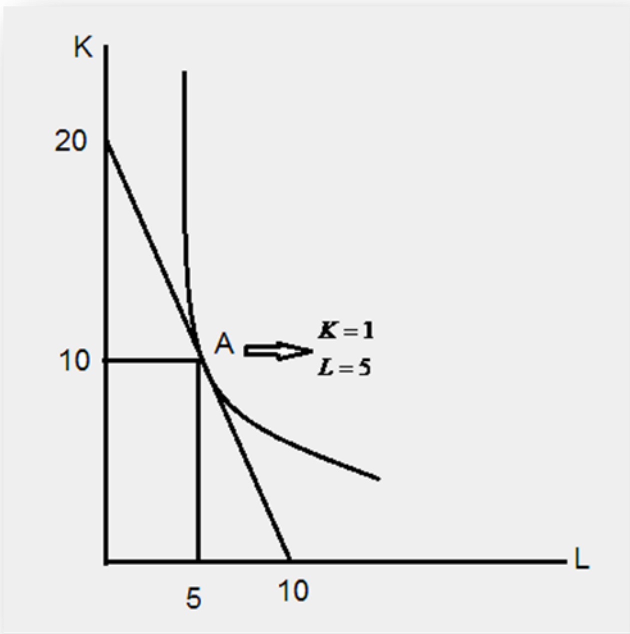
$$K = 2L$$

وبالتعويض عن قيمة K في معادلة (٣) نحصل على الاتي:-

$$K = 10 \quad , \quad L = 5 \quad , \quad Y = 200$$

الحل بالطريقة البيانية

نرسم منحنى الناتج المتساوي $K = \frac{50}{L}$ وكذلك خط التكاليف $K = 20 - 2L$. يمس خط التكاليف منحنى الناتج المتساوي في النقطة A واحداثياتها هي $(L = 5 \ , \ K = 10)$ وحجم الانتاج المقابل $Y = 200$.



شكل(٤٣) تعظيم الانتاج للمثال (٦,٢)

مثال (٦,٣):توفرت المعلومات عن دالة انتاج تاخذ الشكل الاتي:-

$$Y = 2K^2 - 4KL + 5L^2$$

واسعار عوامل الانتاج هي:- $P_L = 40$ **و** $P_K = 80$

المطلوب:

١- احسب قيمة الكلفة الكلية الموافقة لحجم الانتاج الذي يساوي $Y = 2000$

٢- احسب حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية تساوي $TC = 6000$

الحل

نريد تخفيض تكاليف الانتاج عند حجم انتاج معين نشكل الصيغة الاتية:-

$$F = (80K + 40L) + \lambda(2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2)$$

لتعظيم هذه الدالة نستخرج المشتقات الجزئية الاولى لنحصل على:-

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 80 - 4\lambda K + 4\lambda L = 0 \Rightarrow 80 = 4\lambda(K - L)............(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 40 + 4\lambda K - 10\lambda L = 0 \Rightarrow 40 = 2\lambda(5L - 2K)........(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2 = 0.............................(3)$$

من معادلة ١ ومعادلة ٢ نحصل على الاتي:-

$$K = 2L$$

وبعد الحل نحصل على قيمة كل من:-

$$L = 20 \;, \qquad K = 40$$

إذن الكلفة الكلية الموافقة لحجم الانتاج $Y = 2000$ هي $TC = 4000$

لحساب حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية معلومة نشكل الصيغة الاتية:-

$$F = 2K^2 - 4KL + 5L^2 + \lambda(6000 - 80K - 40L)$$

نستخرج المشتقات الجزئية الاولى فنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial L} = -4K + 10L - 40\lambda = 0 \Rightarrow 40\lambda = 10L - 4K........(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 4K - 4L - 80\lambda = 0 \Rightarrow 80\lambda = 4K - 4L.............(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 6000 - 80K - 40L = 0.....................................(3)$$

بعد الحل نحصل على $K = 2L$

اذن حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية $TC = 6000$ هو $Y = 4500$

أهم عيوب دالة كوب – دوكلاس

أوضح ريدر *Reder* عام ١٩٤٣م أن أهم عيوب دالة (*C–D*) هي:

١- ثبات الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج خاصة العمل داخل المنشأة و المتحصل عليه من معادلة *C–D* وذلك كما يأتي:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \frac{Y}{L}$$

والذي يتفق مع النتيجة التي توصل إليها دوكلاس *Douglas* من أن معدل الأجر *w* يتساوى مع الإنتاجية الحدية للعمل أي أن :

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = w$$

وهو أمر غير ممكن ولاسيما إذا واجه عنصر العمل ظروف تشغيل احتكار القلة في سوق العمل إذ تدفع المنشآت للعمل أجراً أقل من إنتاجيته الحدية.

٢– كما أضاف كارتر *Carter* ١٩٥٦م أن أمام بساطة وسهولة قياس دالة *C–D* فإن هناك ثمناً لهذا يتمثل في ثبات المرونة الإنتاجية للموارد وكذلك ثبات مرونة الإحلال إذ أن كفاءة المورد قد تتناقص باستمرار عند إضافة وحدات متتالية منه ومن ثم انخفاض إنتاجيته الحدية.

٣– الدالة غير قادرة على التعبير عن مراحل الإنتاج الثلاث معاً في آن واحد أي أنها غير قادرة على إظهار الأحوال التي تعكس العائد الحدي المتزايد والمتناقص فضلا عن العائد الحدي السالب معاً.

٤– في حين ذكر هيثفيلد *Heathfield* ١٩٧١م ان دالة *C–D* هي دالة تطبيقية فقط للموارد الإحلالية وليس المكملة ولهذا فإن الدالة تصلح فقط للمدى البعيد إذ يمكن أن تتحول الموارد المكملة في المدى القريب إلى إحلالية في المدى البعيد.

٥– أما يوتوبولس و نوجنت *Yotopoulos, Pan A–and Deffery B.Nugent* ١٩٧٦م فأضافوا أن ثبات مرونة الإحلال لدالة *C–D* ومساواتها للوحدة إنما تعني أن الممر التوسعي للمنشأة هو خط مستقيم أي أن مقدرة الموارد على الإحلال محل بعضها هي مقدرة ثابتة. ليس هذا فحسب فإذا اشتملت الدالة على أكثر من متغيرين مستقلين فإن هذا يعني أن الممرات التوسعية لكل عنصرين إنتاجيين في الدالة يجب أن تكون خطية وهذا بالطبع أمر بالغ الصعوبة إن لم يكن نادر الحدوث، فلا يمكن أن تظل جميع الموارد بالكفاءة نفسها مع استمرار إحلالها محل بعضها.

٦- تشترط دالة $C-D$ ضرورة وجود كل عناصر الإنتاج لتتم العملية الإنتاجية إذ أن غياب أحدهما يؤدي إلى تلاشي الدالة كلية .

اشتقاق دالـة الـتكاليف من دالـة إنـتاج كـوب - دوكـلاس

إذا فرض أن دالة كوب دوجلاس تأخذ الشكل الآتي:-

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

وأن دالة التكاليف للمنشأة هي:

$$C = rK + wL$$

و:

Y = الناتج، K= رأس المال، L= العمل، r= سعر رأس المال، w = سعر وحدة العمل، C= التكاليف الكلية (المتغيرة)، A,α,β= معلملات الدالة.

باستخدام مضروبات لاجرانج فإن كميات الموارد التي تحقق تدنيه التكاليف الإنتاجية ،تعني مساواة التفاضلات الجزئية للدالة لهذه المتغيرات بالصفر كما يأتي:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial L} = w - \lambda\beta \frac{Y}{L} = 0$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial K} = r - \lambda\beta \frac{Y}{K} = 0$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = Y - AK^{\alpha}L^{\beta} = 0$$

وهذا ما يسمى بالشرط الضروري لتدنيه التكاليف الإنتاجية للمنشأة، ومن هذا الشرط الضروري يتضح أن :

$$\frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{r}{w}$$

وعلى هذا فإن:

$$K = \frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L$$

وبإحلال K المتوصل إليها في معادلة الإنتاج الأصلية ينتج أن:

$$Y = A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha L^{\alpha+\beta}}$$

ومنها ينتج أن دالة الطلب المشروط لعنصر العمل تكون كالآتي:-

$$L^{*} = \left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

وبإحلال L في معادلة الممر التوسعي $\left(K=\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L\right)$ نحصل على دالة الطلب المشترط لعنصر رأس المال والتي تكون على النحو الآتي:

$$K^{*}=\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ثم بإحلال المعادلتين الأخيرتين L^{*},K^{*} في معادلة التكاليف الأصلية نحصل على دالة التكاليف المطلوبة:

$$C=r\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}+w\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن التكاليف دالة لكل من الناتج Y و أسعار الموارد r,w فضلا عن معلملات دالة كوب دوكلاس A,α,β.

دالـة الإنـتـاج ذات مـرونـة الإحـلال الـثـابتة

The Constant Elasticity of Substitution Production Function (CES)

أشـار أرو *Arrow*، تشـنري *Chenery* ومنهـاس *Minhas* فضـلا عـن سـولو *Solw* سـنة ١٩٦١م إلى أن معدل الإحلال الثابت بين موردي العمل ورأس المال والمساوي للوحدة في دالة كوب دوجلاس هو أخطر عيوبها وعليه ولتلافي هذا العيب تم ابتكار دالة *CES* التي تفترض ثبات مرونة الإحلال بين الموارد ولكن عدم مساواة تلك المرونة للوحدة، هذا وتأخذ هذه المعادلة (التي يطلق عليها أحياناً دالة *ACMS* نسبة إلى الحروف الأولى لمكتشفيها) الشكل الرياضي الاتي:

$$Y=A\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

إذ أن:

Y = الناتج،

A= ثابت الدالة ويطلق عليه معامل الكفاءة.

δ= معامل توزيع حيث يوضح مدى مساهمة كل من رأس المال والعمل في الإنتاج وعادة ما تنحصر قيمة هذا المعامل بين الوحدة والصفر $(0<\delta<1)$.

ρ = معامل الإحلال، يوضح مرونة الإحلال بين الموارد وعادة ما تكون قيمته أكبر من أو يساوي الوحدة $(\rho\geq1)$. L,K= متغير رأس المال والعمل على الترتيب.

خصائص دالة CES :

١- الإنتاجية الحدية للموارد موجبة فمثلا نجد أن الإنتاجية الحدية لمورد رأس المال يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة الآتية:

$$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{A}{-\rho}(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\delta\rho K^{-\rho-1}$$

$$MP_K = \delta A\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\rho} \text{..........................}(9)$$

ونظرا لأن A,δ هي عوامل موجبة فإن MP في المعادلة (9) موجب للقيم الموجبة لرأس المال K.

٢- تناقص معدل الإحلال الحدي التقني بين رأس المال والعمل حيث أن:

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}$$

٣- الدالة ليس لها نهاية عظمى وليس لها خطوط حرجة.

٤- مرونة الإحلال ثابتة ولا تساوي الوحدة إنما تعتمد على قيمة ρ كما هو موضح بالمعادلة الآتية:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d(MRTS)}{(MRTS)}} \qquad \sigma = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}} \qquad \sigma = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}{\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}} = \frac{1}{\rho+1}$$

ولما كانت قيمة ρ ثابتة، فإن σ أيضاً ثابتة إلا أن قيمة الأخيرة تختلف باختلاف قيمة ρ فإذا كانت:

أ) ρ = صفر فإن الدالة تتسم بثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة وتتفق الدالة في هذه الحالة مع دالة كوب دوكلاس.

ب) ρ = −١ فإن منحنى سواء الإنتاج يكون خطاً مستقيماً والإحلال لانهائياً بين الموارد.

ج) ρ (>)− ١ فإن منحنى سواء الإنتاج يكون أكبر ميلاً ويكون الإحلال مرتفعاً لارتفاع مرونة الإحلال.

د)ρ (<)−١ فإن منحنى سواء الإنتاج يتخذ الشكل المقعر تجاه نقطة الأصل على عكس المألوف الذي يتصف بالتحدب تجاه نقطة الأصل.

الدالـة تتميـز بعـدم مسـاواة مرونـة الإحـلال للوحـدة كمـا أن الدالـة تسـمح بـالإحلال والتكامـل بـين عناصـر الإنتـاج فإذا كانـت مرونـة الإحـلال أكبـر مـن الصـفر ($\sigma>0$) فـإن هـذا يعنـي أن المـوارد إحلالية، أمـا إذا كانـت المـوارد مكملـة فـإن مرونـة الإحـلال تأخـذ القيمـة أقـل مـن الصـفر ($\sigma<0$)، وعلـى هـذا فـإن الدالـة تصلح لوصـف بيانـات المـدى القصـير والمـدى الطويـل بعكـس الحـال فـي دالـة كـوب دوكـلاس التـي تصلح لبيانـات المـدى الطويـل فقط.

أهم عـيوب دالة *CES*:

أ) من الصعب استخدام هذه الدالة للبيانات الخاصة بأكثر من متغيرين مستقلين.

ب) ثبات مرونة الإحلال على الرغم من أنها لا تساوي الوحدة إلاّ أن الدالة مازالت مقيدة بهذا الشرط.

ج) الدالـة يمكـن أن تصـف أحـد المراحـل الثلاثـة المعروفـة للإنتـاج ولـيس جميعهـا فـي آن واحـد وتتفق في هذا مع دالة كوب دوجلاس.

دالـة الإنتاج ذات مـرونـة الإحلال المتغيرة

تعد دالـة *VES* تطـويراً جديداً لدالـة كـوب دوكـلاس و دالـة *CES* حيـث تحـررت مـن شـرط ثبـات مرونـة الإحلال، وتأخذ الدالة الصورة الرياضية الآتية:

$$Y=\left[aK^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}+a^{-\frac{1}{b}}\frac{1-b}{1-b-c}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\frac{c}{b}}L^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}\right]^{\frac{-1}{\frac{1}{b}-1}}$$

وبفرض أن :

$$\theta=\frac{1-b}{1-b-c}a^{-\frac{1}{b}}=(1-a)A^{-\rho}$$

$$\rho=\frac{1}{b}-1..............(10)$$

فإن الدالة (١٠) يمكن إعادة كتابتها كما يأتي:

$$Y=\left[aK^{-\rho}+A(1-a)\theta\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho c(1+\rho)}L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}...........(11)$$

يلاحظ من المعادلة (١١) أنها تتخذ شكل دالة *CES* فيما عدا أن دالة *VES* تحتوي على عنصر ثالث وهو نسبة رأس المال إلى العمل $\frac{K}{L}$

وتـتسم مــرونة الإحـــلال في الـــدالة *VES* بالــخصائص الآتية:

١- مرونة الإحلال في الدالة *VES* تأخذ الصورة الآتية:

$$\sigma = \frac{b}{1 - c\left(1 + \frac{\partial K}{\partial L} \cdot \frac{L}{K}\right)} ....(12)$$

فإذا كانت $c = 0$ فإن *CES=VES* ، أما إذا كانت $c = 0$ ، $b = 1$ فإن *VES = C–D*

٢- تتفق دالة *VES* مع كل من دالة *C–D, CES* في أن دالة الناتج الحدي للمورد هي دالة موجبة الميل.

ومن أهم عيوب دالة *VES* مايلي:

١- يصعب تعميم الدالة لأكثر من متغيرين.

٢- الدالة غير خطية المعلمات *Coefficients* مما يشكل صعوبة في تقديرها.

الدوال الإنتاجية الجبرية من الدرجة الثانية Quadratic Production Functions

تتخذ الصورة العامة للدوال الجبرية من الدرجة الثانية الشكل الآتي:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \frac{1}{2}b_1X_1^2 + \frac{1}{2}b_2X_2^2 + b_3X_1X_2 ....(13)$$

إذ أن:

Y = الإنتاج،

X_2, X_1 = موردي العمل ورأس المال،

a_o= ثابت الدالة،a,b= معاملات الدالة.

وتتسم هذه الدالة بالخصائص الآتية:

١- الدالة غير متجانسة.

٢- إذا كانت قيمة b_3<0 (أقل من الصفر) فإن الدالة تصلح للموارد المتنافسة

أما إذا كانت قيمة b_3 = الصفر فإن الدالة يمكن تطبيقها في حالة الموارد المستقلة،

أما إذا كانت قيمة b_3>0 (أكبر من الصفر) فالدالة تطبيقية في حالة الموارد المكملة.

٣- الخطوط الحرجة موجبة الميل إذا كانت الموارد مكملة، وسالبة الميل إذا كانت الموارد متنافسة، وخطوط مستقيمة موازية للمحورين إذا كانت الموارد مستقلة.

٤- منحنيات السواء محدبة تجاه نقطة الأصل.

٥- يمكن أن تصف الثلاث مراحل للإنتاج.

ومن أهم عيوبها هو صعوبة تطبيقها لأكثر من متغيرين.

دوال الانتاج التحويلية Transcendental Production Functions

تتخذ الصورة الرياضية العامة لهذه الدوال الشكل الرياضي الآتي:

$$Y = cX_1^{a_1}e^{b_1x_1}X_2^{a_2}e^{b_2x_2}......X_n^{a_n}e^{b_nx_n}.......(14)$$

إذ أن:

Y = الإنتاج،

e= أساس اللوغاريتم الطبيعي،

$X_1,X_2,...,X_n$= عوامل الإنتاج،

$C,a_1,a_2,...,a_n$= معاملات الدالة.

هذا ويمكن أن تتحول هذه الدالة إلى دالة إنتاجية في متغير واحد مباشرة و من ثم تتخذ الدالة الشكل الجديد التالي:

$$Y = CX^a e^{bx}...............(15)$$

يركز الاقتصاديون كثيرا على خصائص الدالة (١٥) كبديل للدالة (١٤) حتى يسهل فهم طبيعة هذه الدالة التي تتلخص في ما يأتي:

١- الناتج الحدي للمورد موجب للقيم الموجبة لهذا المورد على النحو الآتي:

$$\frac{\partial K}{\partial X} = Y\left(\frac{a}{x} + b\right)$$

بمساواة التفاضل الجزئي بالصفر يمكن إيجاد قيمة X المعظمة للإنتاج كما يأتي (١٦)

$$x = -\frac{a}{b}................(16)$$

بمساواة التفاضل الثاني بالصفر يمكن إيجاد قيمة X عند نقطة انقلاب الدالة كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = Y\left(\frac{a^2 - a}{X^2} + \frac{2ab}{X} + b^2\right) = 0$$

$$X = \frac{-a + \sqrt{a}}{b}...........(17)$$

٢- من أهم ما يجذب الانتباه لهذه الدالة هي أنه عندما تتخذ (b) في المعادلة (١٦) والمعادلة (١٧) قيمة سالبة أو قيمة أكبر من الوحدة فإن الدالة سوف تنطبق عليها الصورة الكلاسيكية إذ سيزداد الناتج Y بمعدل متزايد، ثم معدل متناقص، حتى يصل الناتج أقصاه ثم يتناقص الإنتاج بزيادة كمية المورد المستخدم كما يشير لذلك قانون تناقص الغلة.

٣- تتحول الدالة إلى دالة كوب دوجلاس وهي دالة جبرية عندما تساوي (b) الصفر ويصبح الشكل العام للدالة كما يأتي:

$$Y = CX ....(18)$$

٤- الدالة غير متجانسة في صورتها العامة إلا إذا تحقق الشرط الآتي:

$$b_1 = b_2 = 0$$

وفي هذه الحالة فإن الدالة سوف تتخذ شكل دالة كوب دوجلاس.

٥- مرونة إنتاج الموارد X_2, X_1 تأخذ الصورة الآتية:

$$E_1 = b_1 X_1 + a_1$$

$$E_2 = b_2 X_2 + a_2$$

إذ أن E_2, E_1 تشير إلى مرونة الإنتاج للموارد X_1 و X_2 على الترتيب.

٦- منحنى سواء الدالة محدب تجاه نقطة الأصل إذا تحقق شرط التجانس.

٧- إذا تحقق شرط التجانس فإن الخطوط الحرجة تحصر الموارد المكملة ولكن على نقاط الخطوط الحرجة فإن الموارد لا تتصف بالاستقلالية.

اسئلة الفصل السادس

س١:- لدينا دالة الانتاج الاتية: $Y = 4X_1^{\frac{2}{3}} X_2^{\frac{1}{3}}$

المطلوب

١- احسب الانتاجية المتوسطة والحدية لكل عامل انتاج.

٢- لدينا اسعار عوامل الانتاج $P_{X_2} = 3$, $P_{X_1} = 2$. ماهو الحد الادنى لتكاليف الانتاج الموافق لحجم الانتاج $Y = 100$.

س٢:- اذا اعطيت دوال الانتاج الاتية:-

$$1)\ Y = f(K, L) = 10\sqrt{K}\sqrt{L}$$

$$2)\ Y = f(K, L) = 5K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}$$

وتم مضاعفة عناصر الانتاج K و L بين ما مدى تاثير ذلك على حجم الانتاج

س٣:- اذا كانت لديك دالة الانتاج الاتية:-

$$Y = f(K, L) = 100K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{5}{4}}$$

وكان قيد الكلفة لراس المال والعمل: $200K + 100L = 10000$

المطلوب: جد حجم رأس المال والعمل الامثلين بحيث يكون الانتاج اكبر ما يمكن.

س٤:- اذا كانت دالة الانتاج ممثلة بالشكل الاتي:-

$$Y = 2\sqrt{KL}$$

اوجد مایاتي:-

١- الانتاجية الحدية لعنصر رأس المال MP_K .

٢- الانتاجية الحدية لعنصر العمل MP_L .

٣- التغير في الانتاجية الحدية لعنصر رأس المال ΔMP_K .

٤- التغير في الانتاجية الحدية لعنصر العمل ΔMP_L .

س٥:- اذا كانت دالة انتاج مشروع ما:

$$Y = K^{0.3} L^{0.5}$$

وكانت مقيدة بالقيد الاتي: $6K + 2L = 284$

جد الحجم الامثل للانتاج في ظل القيد.

مصادر الفصل السادس

١- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٢- حسين علي بخيت – مباديء الاقتصاد الرياضي– كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ٢٠٠٠.

٣- شمعون شمعون – الرياضيات الاقتصادية – دوان المطبوعات الجامعية – الساحة المركزية – الجزائر– منشور على الشبكة العالمية الدولية.

٤- الوتار، ابي محمد صبري واثيل عبد الجبار الجومرد ، مدخل الى الاقتصاد الرياضي، دار الكتب للطباعة والنشر ، الموصل، ١٩٩٣.

٥- Arne Henningsen &Geraldine Henningsen, Econometric Estimation of the "Constant Elasticity of Substitution" Function in R: Package micEconCES.2011.

٦- Elmer G. Wiens, Egwald Economics: Microeconomics: Production Functions,2012, Published on line www. Egwald.com.

٧- Judith K. Hellerstein and David Neumark, Production Function and Wage Equation Estimation with Heterogeneous Labor: Evidence from a New Matched. Employer-Employee Data Set. 2007. Published on line http://www.nber.org/books/bern07-1.

٨- KC Border, On the Cobb–Douglas Production Function,California Institute of Technology , Division of the Humanities and Social Sciences. Published on line: www.google .com.

٩- Krister Ahlersten, Essentials of Microeconomics: Exercises. 2008. Published on line www.bookboon.com.

١٠- Rainer Klump, Peter McAdam and Alpo Willman, The Normalized CES Production Function Theory and Empirics . European Central Bank. Working Paper Series.2011.

١١- Ronald C. Griffin, John M. Montgomery, and M. Edward Rister, Selecting Functional Form in Production Function Analysis. Published on line: www.google .com.

1٢- Ted Bergstrom, Lecture Notes on Elasticity of Substitution. 2011. Published on line: www.google .com.

الفصل السابع

التحليل الديناميكي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

Dynamic Analysis

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- التحليل الديناميكي المستمر
- مفهوم التكامل وانواعه
- التطبيقات الاقتصادية للتكامل
- فائض المنتج والمستهلك
- فائض المجتمع
- التحليل الديناميكي المتقطع
- معادلات الفروق
- تطبيقات اقتصادية على معادلات الفروق

الفصل السابع

التحليل الديناميكي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

مقدمة

يتناول هذا الفصل انواع التحليل الديناميكي والذي يهدف بدوره الى تحديد اتجاهات المتغيرات الاقتصادية ومدى ميلها نحو الاستقرار بمرور الزمن ، وهو بادخاله عامل الزمن فانه يتجاوز عيوب التحليل الساكن والساكن المقارن، وينقسم التحليل الديناميكي الى قسمين رئيسين هما: التحليل الديناميكي المستمر *Continuious Dynamic analysis* وافضل تطبيق لهذا النوع من التحليل هو التفاضل *Differentation* (وقد تم الحديث عنه سابقا)، والتكامل *Integration* . في حين يتناول القسم الثاني التحليل الديناميكي المتقطع والمعبر عنه بمعادلات الفروق.

التحليل الديناميكي المستمر *Continuious Dynamic analysis*

لقد تم تناول موضوع التفاضل في الفصول السابقة ولاسيما تطبيقاته الاقتصادية بشيء من التفصيل ، وعليه سيتم تناول الجزء الثاني من الموضوع وهو التكامل وتطبيقاته الاقتصادية.

ان للتكامل تطبيقات عدة في مختلف العلوم ومنها الاقتصادية، وتندرج تحت التطبيقات الاقتصادية للتكامل ، الدوال الحدية والكلية ومنها التكلفة الكلية والايرادات الكلية فضلا عن دالة الاستهلاك والادخار و فائض المنتج والمستهلك وغيرها من التطبيقات الاقتصادية.

مفهوم التكامل

يعرف التكامل بانه عملية ايجاد الدالة نفسها أي انه عكس عملية التفاضل، فاذا كانت $f'(Q)$ مشتقة الدالة $F(Q)$ فان $F(Q)$ هي تكامل $f'(Q)$ وتصاغ على الشكل الاتي:-

$$f(Q) = \int f'(Q)dQ$$

وتشير الدالة $f'(Q)$ الى الدالة المتكاملة ، أي هي الدالة التي نحاول ايجاد تكاملها، ويضاف dQ لتاثير المتغير الذي اعتمادا عليه يتم تكامل الدالة $f'(Q)$ ، فضلا عن انه يستخدم مؤشراً لتحديد اين تنتهي الدالة التي يجري تكاملها.

مما يتضح ان التكامل هو معكوس التفاضل ، وتجدر الاشارة الى انه لاتوجد قاعدة عامة للتكامل عكس ما هو متعارف عليه في التفاضل. كما ينبغي الالمام بقواعد التفاضل عند ايجاد تكامل الدالة.

تكاملات الصورة القياسية

حتى يمكن فهم التكامل لنفترض اننا نرغب في ايجاد تكامل X^2 ، أي ان X^2 هي مشتقة دالة واننا نريد الحصول على تلك الدالة ، سوف نتبع الاتي:-

$$X^2 = f'(X)$$

$$f(X) = \int f'(X)dX = ?$$

ومن قواعد المشتقة المعروفة مسبقا نجد ان:-

$$dX^3/dX = 3X^2$$

وبذلك فان:-

$$d(X^3/3)/dX = 3X^2/3 = X^2$$

أي ان الدالة التي تكون مشتقتها X^2 هي $X^3/3$

وينبغي ان نلاحظ هنا ان $X^3/3$ هي ليست التكامل الوحيد لـ X^2 انما هي احد التكاملات . ولنتامل الدالة $\frac{X^3}{3}+k$ ، حيث ان k هو ثابت ، وان مشتقة الدالة $\frac{X^3}{3}+k$ بالنسبة الى X هي ايضا X^2 وهنا نستنتج ان الدالة التي تكون مشتقتها X^2 هي $\frac{X^3}{3}+k$ حيث يسمى k ثابت التكامل.

قوانين التكامل Integration Laws

١- تكامل المقدار الثابت يساوي المقدار الثابت في تكامل المتغير مضافا اليه ثابت التكامل:-

$$\int kdX = kX + C$$

٢- تكامل dX يساوي (X)

$$\int dX = X + C$$

٣- تكامل الدالة الأسية X^n يساوي الاس مضافا اليه واحد مقسوم على الاس الجديد .

$$\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \neq -1$$

٤- تكامل المقدار السالب هو Ln أي:-

$$\int X^{-1}dX = LnX + C$$

$$\int \frac{1}{X}dX = \int X^{-1}dX = LnX + C$$

٥- تكامل مقدار ثابت مرفوع الى أس يساوي المقدار نفسه مقسوما على معامل الاس في الاساس Ln

$$\int a^{kx} dX = \frac{a^{kx}}{kLna} + C$$

٦- تكامل جمع او طرح دالتين او اكثر يساوي جمع او طرح تكامل دالتين:-

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

٧- تكامل الدالة السالبة يساوي الاشارة (-) مضروبا في تكامل الدالة:

$$\int - f(x)dx = -\int f(x)dx$$

٨- تكامل الأس الطبيعي:

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

تجدر الاشارة الى ان هناك قوانين اخرى للتكامل هي ليست ضمن مجال دراستنا كقانون التكامل بالتجزئة وقانون التكامل بالتعويض وغيرها.

كما ينبغي الاشارة الى ان التكامل ينقسم الى قسمين هما:

١- التكامل المحدود: وهو التكامل الذي يمتلك حدين حدا اعلى ويكتب اعلى علامة التكامل ، وحدا اسفل ويكتب اسفل علامة التكامل.

٢- التكامل غير المحدود

التطبيقات الاقتصادية للتكامل

اولا: الدوال الحدية والكلية

يساعدنا التكامل في ايجاد دالة الكلفة الكلية TC من دالة الكلفة الحدية MC التي تعرف بانها التغير الحاصل في الكلفة الكلية الناتج من الزيادة في الانتاج. ومن المعروف ان الجزء الذي يتغير من الكلفة الكلية هو الكلفة المتغيرة بتغير مستوى الانتاج أي ان:-

$$TC = \int MCdQ = VC + C = VC + FC$$

عندما يكون ثابت التكامل هو C والمعبر عنه بالكلفة الثابتة *Fixed Cost*

مثال(٧,١): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالة الكلفة الحدية للمنتج x :-

$$MC = 5 + 16x - 3x^2$$

فاذا كانت الكلفة الكلية لانتاج ٥ وحدات من x تساوي ٥٠٠ وحدة نقدية .

المطلوب: جد دالة الكلفة الكلية

الحل

$$MC = 5 + 16x - 3x^2$$
$$TC = \int (5 + 16x - 3x^2)dx$$

$$= 5x + 16\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + k$$
$$TC = 5x + 8x^2 - x^3 + k$$

وعندما $x = 5$ فان الكلفة الكلية =٥٠٠

$$500 = 25 + 200 - 125 + k$$
$$k = 400$$

اذن دالة الكلفة الكلية تكون:-

$$TC = 5x + 8x^2 - x^3 + 400$$

ثانيا: دالة الايرادات الكلية *Total Revenues Function*

يستخدم التكامل هنا لايجاد دالة الايرادات الكلية TR من خلال دالة الايراد الحدي MR، والتي يعبر عنها بالاتي:-

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

ويمكن ايجاد دالة الايراد الكلي من خلال:

$$\int dTR = \int MRdQ$$
$$TR = \int MRdQ + k \qquad , \quad k = Constant\ of\ Integration$$

مثال (٧,٣) لديك دالة الايراد الحدي لسلعة ما معبر عنها بالصيغة الاتية:

$$MR = 12 - 3x^2 + 4x$$

المطلوب: جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب

الحل

$$MR = 12 - 3x^2 + 4x$$
$$TR = \int (12 - 3x^2 + 4x)dx + k$$
$$TR = 12x - x^3 + 2x^2 \quad , \quad k = 0$$

اما دالة الطلب فهي:

$$P = \frac{TR}{x} = 12 + 2x - x^2$$

مثال (٧,٤): لديك دالة الايراد الحدي الاتية:

$$MR = \frac{6}{(x-3)^2} - 4$$

المطلوب: جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب

الحل

$$TR = \int \left| \frac{6}{(x-3)^2} - 4 \right| dx = -\frac{6}{x-3} - 4x + k$$

$$x = 0 \text{ , } TR = 0 \text{ , } k = -2$$

اذن دالة الايراد الكلي المطلوبة هي :

$$TR = -\frac{6}{x-3} - 4x - 2$$

الان دالة الطلب هي:

$$P = \frac{TR}{x} = -\frac{6}{x(x-3)} - 4 - \frac{2}{x}$$

$$= -\frac{6}{x(x-3)} - \frac{2}{x} - 4$$

$$= \frac{-6 - 2x + 6}{x(x-3)} - 4$$

$$= \frac{-2}{x-3} - 4 = \frac{2}{3-x} - 4$$

اذن دالة الطلب المطلوبة هي:

$$P = \frac{2}{3-x} - 4$$

ثالثا: دالة الاستهلاك *Consumption Function*

يمكن الحصول على دالة الاستهلاك من خلال تكامل الميل الحدي للاستهلاك MPC وكما ياتي:

مثال (٧,٥): اذا كان الميل الحدي للاستهلاك معطى بالصيغة الاتية:

$$MPC = 0.8 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}}$$

واذا علمت ان الاستهلاك يساوي الدخل عندما الدخل يساوي ١٠٠

المطلوب: جد دالة الاستهلاك

الحل

$$C = \int (MPC)dY = \int (0.8 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}})dY$$

$$C = \int (0.8 + 0.1Y^{-\frac{1}{2}})dY$$

$$C = 0.8Y + \frac{0.1Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k$$

$$C = 0.8Y + 0.2Y^{\frac{1}{2}} + k$$

ولغرض ايجاد ثابت التكامل k نعوض المعلومات المثبتة في السؤال وكما ياتي:-

$$100 = 0.8(100) + 0.2(100)^{\frac{1}{2}} + k$$

$$100 = 80 + 2 + k$$

$$k = 18$$

اذن دالة الاستهلاك بصورتها الكاملة هي:-

$$C = 0.8Y + 0.2Y^{\frac{1}{2}} + 18$$

رابعا: دالة الادخار *Saving Function*

مثال(٧,٦) : اذا كان الميل الحدي للادخار MPS يساوي ٠,٤ اوجد:

١- دالة الادخار

٢- دالة الاستهلاك عندما $C = 4$

الحل

$$S = \int MPSdY$$

$$= \int (0.4)dY$$

$$= 0.4Y + C$$

اذن دالة الادخار هي $S = 0.4Y + C$

$$Y = C + S$$

$$C = Y - S$$

$$C = Y - [0.4Y + C]$$

$$C = Y - 0.4Y - C$$

$$C = 0.6Y - C \qquad C = 4$$

$$\therefore C = -4 = 0.6Y$$

دالة الادخار : $S = 0.4Y + C$

دالة الاستهلاك: $C = -4 + 0.6Y$

خامسا: تعظيم الربح *Profit Maximization*

تناولنا في فصول سابقة الشرط الضروري لتعظيم الربح وهو عندما يتساوى الايراد الحدي مع الكلفة الحدية ، الامر الذي يمكننا ايجاد مستوى الانتاج الذي يعظم الربح من خلال دالتي الكلفة الحدية والايراد الحدي وعند اجراء التكامل للدالتين نستطيع ايجاد الربح الاجمالي عند مستوى الانتاج الذي يعظم الربح ، أي ان:

$$\pi = \int_{0}^{Q^*} (MR - MC)dQ$$

مثال(٧,٧): اذا كانت دالتا الايراد الحدي والكلفة الحدية لمشروع ما هما:-

$$MR = 600 - 6Q^2$$
$$MC = 216$$

المطلوب: جد الربح الكلي للمشروع

الحل

نستخدم الشرط الضروري لتعظيم الربح وهذا الشرط هو:

$$MR = MC$$
$$600 - 6Q^2 = 216$$
$$6Q^2 = 600 - 216$$
$$6Q^2 = 384 \Rightarrow Q^2 = 64$$

اذن اما $Q = 8$ او $Q = -8$

وبتطبيق الشرط الكافي لمعرفة ان $Q = 8$ هو المستوى الذي يعظم الانتاج

$$\pi = 600 - 6Q^2 - 216$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -12Q < 0$$

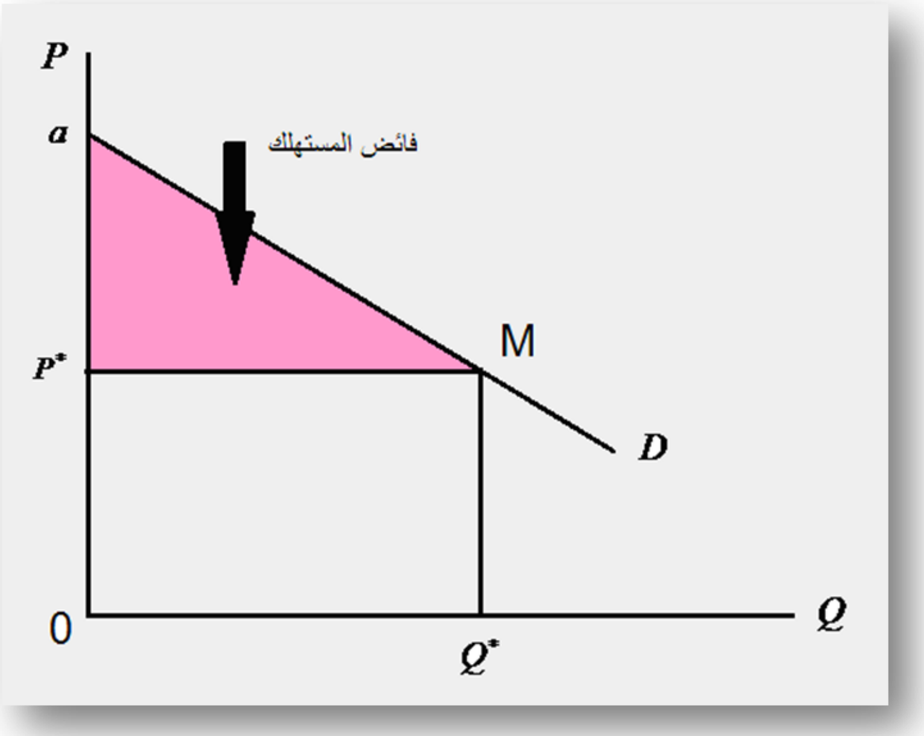
وللحصول على اقصى ربح عند مستوى الانتاج $Q = 8$ ، فإن هذا يتم باجراء التكامل وكما ياتي:-

$$\pi = \int_{0}^{8} (MR - MC)dQ$$
$$\pi = \int_{0}^{8} (600 - 6Q^2 - 216)dQ$$
$$\pi = \left[600Q - 2Q^3 - 216Q\right]$$
$$\pi = \left[600(8) - 2(8)^2 - 216(8)\right] - [0]$$
$$\pi = 2048$$

سادسا: فائض المستهلك وفائض المنتج *Consumer and Producer Surplus*

فـائض المسـتهلك CS : هو الفرق بين السعر الذي يكون المستهلك مستعدا لدفعه للحصول على كمية معينة من سلع وخدمات وبين السعر الذي يدفعه فعلا لتلك الكمية حسب ما حددته اليات السوق (سعر التوازن) ومن الرسم البياني (٤٤) فهو يمثل المساحة المحصورة بين منحنى الطلب وسعر التوازن.

لنفرض ان لدينا دالة طلب في صيغتها العامة وهي: $Q = a - bP$ وكان لدينا السعر التوازني P^* والكميـة التوازنيـة Q^* والمطلـوب حسـاب فـائض المسـتهلك الـذي مثلـه المثلـث aP^*M ولحسـاب فـائض المسـتهلك نقـوم اولا بحسـاب مسـاحة الشـكل aMQ^*0 ونطـرح منـه مسـاحة المستطيل P^*MQ^*0



شكل (٤٤) فائض المستهلك

ونوجد مساحة الشكل aMQ^*0 عن طريق التكامل المحدد

$$CS = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ$$

إذ ان $P(Q)$ هو السعر للدالة في الكمية التوازنية وان معادلة الطلب:

$$Q = a - bP$$

فنوجد معكوس دالة الطلب:

$$P = \frac{Q-a}{-b} = \frac{Q}{-b} - \frac{a}{-b}$$

وبذلك تكون مساحة الشكل aMQ^*0 هي:-

$$aMQ^*0 = \int_0^{Q^*} f(P)dQ = \int_0^{Q^*} \left(\frac{Q}{-b} + \frac{a}{b}Q \right) dQ$$

$$CS = \left[\frac{Q^2}{-2b} + \frac{a}{b}Q \right]_0^{Q^*} - \left[P^* \times Q^* \right]$$

$$CS = \frac{Q^2}{-2b} + \frac{aQ}{b} - \left[P^* \times Q^* \right]$$

مثال (٧,٨): اذا كانت دالة الطلب ممثلة بالصيغة الاتية:

$$Q = 12 - 3P$$

فاذا كان سعر التوازن يساوي ١ $(P^* = 1)$ فان الكمية التوازنية = ٩ $Q^* = 9$

المطلوب: اوجد قيمة فائض المستهلك

الحل

دالة سعر التوازن هي:

$$P = 4 - \frac{1}{3}Q$$

وعليه يكون فائض المستهلك هو:

$$CS = \int_0^{Q^*} \left(4 - \frac{1}{3}Q \right) dQ - P^* Q^*$$

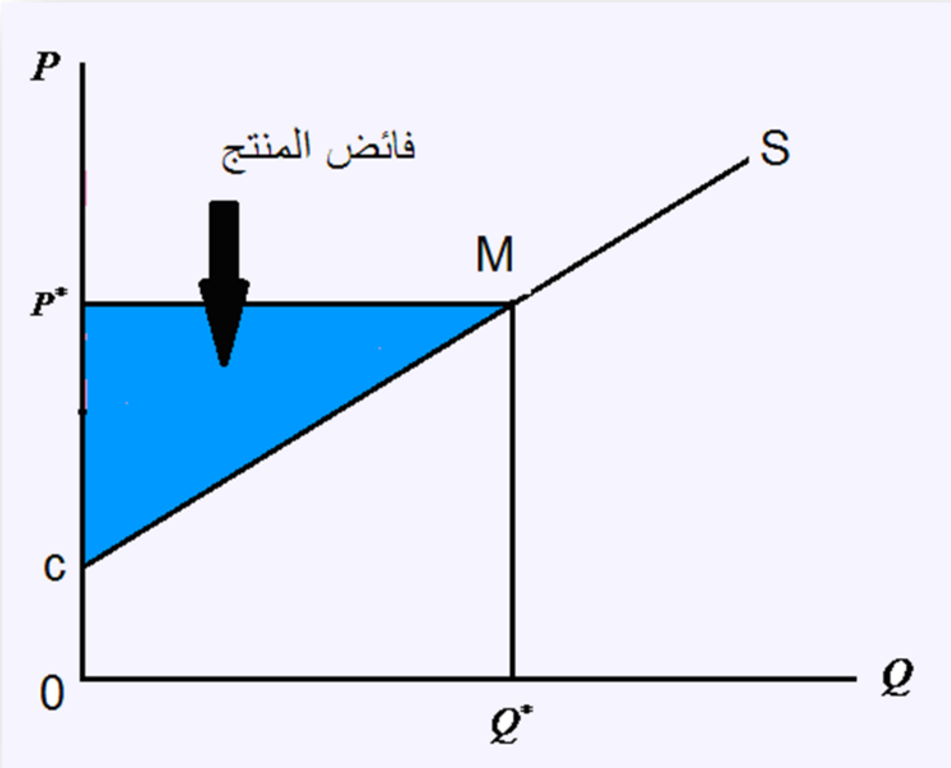
$$CS = \left[4Q - \frac{1}{6}Q^2 \right]_0^9 - 9$$

اذن فائض المستهلك في هذه الحالة :

$$CS = (36 - 13.5) - 9 = 13.5$$

فائض المنتج PS: يعبر عن فائض المنتج بانه الفرق بين السعر الذي يكون المنتج مستعدا لبيع كمية معينة من سلع وخدمات عنده وبين السعر الذي يحصل عليه فعلا لتلك الكمية حسب ما حددته آليات وقوى السوق (سعر التوازن) ومن الرسم البياني (٤٥) فهو يمثل المساحة المحصورة بين منحنى العرض وسعر التوازن.

اذا كان لدينا دالة العرض $Q_S = -c + bP$ و Q^* هي الكمية التوازنية و P^* هو السعر التوازني والمثلث P^*Mc يمثل فائض المنتج.



شكل (٤٥) فائض المنتج

ويمكن حساب فائض المنتج كما ياتي:-

نحسب مساحة الشكل cMQ^*0 التي تساوي تكامل دالة العرض المحدد بالنطاق $(0, Q^*)$ أي ان:-

$$PS = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ$$

ثم نطرحها من مساحة المستطيل P^*MQ^*0 لتكون المساحة الناتجة هي مساحة المثلث P^*Mc او فائض المنتج.

مثال(٧,٩): اذا كانت دالة العرض هي: $Q=-4+3P$

وكان السعر التوازني هو ٥ $(P^*=5)$ **وعليه فان الكمية التوازنية تساوي ١١** $(Q^*=11)$ ،

جد فائض المنتج.

الحل

تكون دالة السعر (معكوس دالة العرض) هي:

$$P=\frac{Q}{3}+\frac{4}{3}$$

وعليه يكون فائض المنتج مساويا الى:-

$$PS=P^*Q^*-\int_0^{Q^*}\left(\frac{Q}{3}+\frac{4}{3}\right)dQ \backslash$$

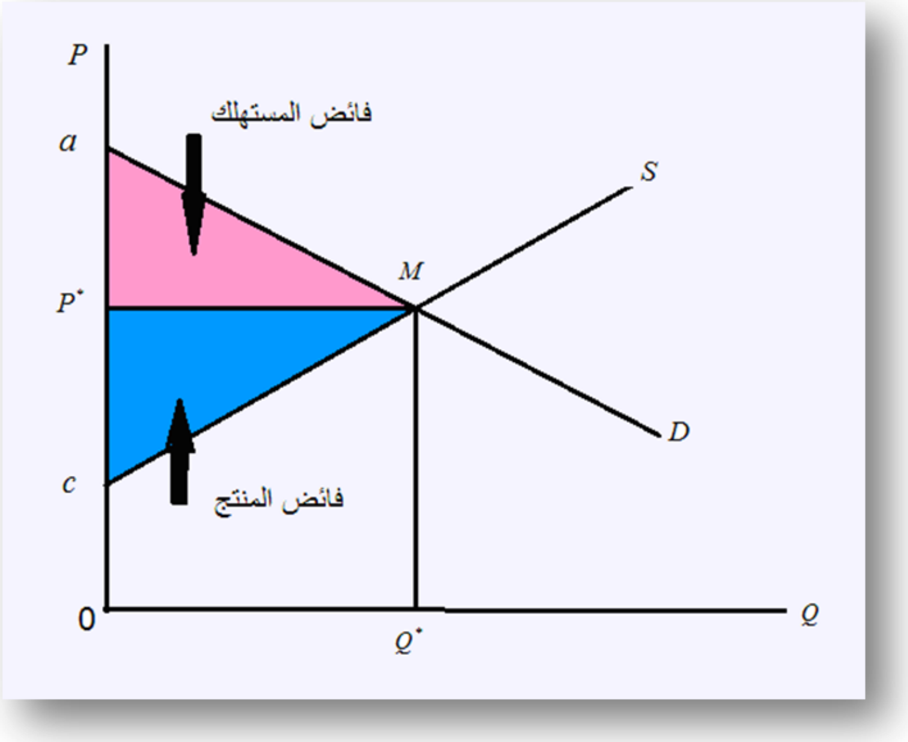
$$PS=(5)(11)-\left[\frac{Q^2}{9}+\frac{4}{3}Q\right]_0^{11}=55-(13.444+14.6)$$

اذن قيمة فائض المنتج هي:-

$$PS=55-28.044=26.925$$

فائض المجتمع *PCS*

يعد فائض المجتمع (او مجموع فائض المستهلك والمنتج) من اهم المفاهيم او الادوات في تحليل اقتصاديات الرفاهية، ويتم حسابه بجمع فائض المستهلك مع فائض المنتج او بحساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب في نطاق الكمية التوازنية، وكما في الشكل البياني الاتي:-



شكل (٤٦) فائض المنتج والمستهلك

معكوس دالة الطلب: $P_1 = f_1(Q)$

معكوس دالة العرض: $P_2 = f_2(Q)$

فائض المستهلك:

$$CS = \int_0^{Q^*} f_1(Q)dQ - Q^*P^*$$

بينما فائض المنتج:

$$PS = Q^*P^* - \int_0^{Q^*} f_2(Q)dQ$$

وبجمع فائض المنتج مع فائض المستهلك للحصول على فائض المجتمع، او الحصول على فائض المجتمع مباشرة عن طريق حساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب ، فإن:

فائض المجتمع:

$$PCS = \int_0^{Q^*} f_1(Q)dQ + \int_0^{Q^*} f_2(Q)dQ$$

مثال(٧,١٠): لديك دالة الطلب الاتية :

$$P_d = 25 - Q^2$$

ودالة العرض الاتية:

$$P_S = 2Q + 1$$

فاذا علمت ان التوازن يعني $Q_d = Q_S$ فاجب عما ياتي:

١- احسب سعر وكمية التوازن.

٢- احسب فائض المستهلك وفائض المنتج وفائض المجتمع.

الحل

١- حساب سعر وكمية التوازن:

$$\because P_S = P_d$$
$$2Q + 1 = 25 - Q^2$$

$$Q^2 + 2Q - 24 = 0$$
$$(Q+6)(Q-4) = 0$$

اذن كمية التوازن وسعر التوازن بعد الحل هما :

$$(P^*, Q^*) = (9,4)$$

٢- حساب فائض المستهلك وفائض المنتج وفائض المجتمع:

فائض المستهلك:

$$CS = \int_0^{Q^*} (P_d)dQ - (P^*Q^*)$$

$$CS = \int_0^{4} (25 - Q^2)dQ - (P^*Q^*) = \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^4 - [(4)(9)]$$

$$CS = 78.67 - 36$$

$$CS = 42.67$$

فائض المنتج:

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} (P_S)dQ$$

$$PS = P^*Q^* - \int_0^4 (2Q+1)dQ = 36 - \left[Q^2 + Q\right]_0^4$$

$$PS = 36 - 20 = 16$$

فائض المجتمع:

$$PCS = 42.67 + 16 = 58.67$$

كما يمكن حساب فائض المجتمع بان ناخذ دالة التوازن ثم نكامل هذه الدالة وكما ياتي:

$$Q^2 + 2Q - 24 = 0$$

$$PCS = \int_0^4 (Q^2 + 2Q - 24)dQ$$

$$PCS = \left[\frac{1}{3}Q^3 + Q^2 - 24Q\right]_0^4$$

$$PCS = 0 - (21.333 + 16 - 96)$$

$$PCS = 58.67$$

وهو النتيجة نفسها في الحالة الاولى.

التحليل الديناميكي المتقطع ***Discrete Dynamic analysis***

تفترض النماذج الاقتصادية الساكنة ان متغيرا ما يعتمد على متغير اخر في المدة الزمنية نفسها ، إلا ان الاقتصاد ليس ساكنا فقد تعتمد مثلا الكمية المعروضة في مرحلة زمنية معينة على السعر الذي كان سائدا في المرحلة السابقة ، او قد يعتمد الاستهلاك الجاري على الدخول السابقة وهكذا.

إن دراسة اثر هذه التباطؤات (التخلف الزمني) *Lags* هو أمر اساس عند دراسة التغيرات التي تواجه الاقتصاد خلال الزمن. ومثل هذا التحليل يعني اننا نتعامل مع اقتصاد ديناميكي (حركي) وهو نقيض للاقتصاد الساكن.

تستخدم معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى في دراسة التغيرات المتعلقة بالزمن عندما يعتمد ما يحدث في فترة زمنية على ما حدث في المدة السابقة، ونفهم من سياق الحديث ان تطبيق ذلك على على دالة الاستهلاك مثلا يعني ان الاستهلاك في أي مدة زمنية ولتكن المدة t مثلا يعتمد على دخل المدة $t-1$ ويعبر عن ذلك رياضيا بالاتي:-

$$C_t = f(Y_{t-1})$$

معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى:

حتى يمكن التعرف على مفهوم معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاول سنتناول نظاما اقتصاديا مغلقا من دون وجود نشاط حكومي وكما ياتي:-

$$Y_t = C_t + I_t$$

والرموز المثبتة في المعادلة اعلاه قد تم التعرف عليها مسبقا غير ان ماتجدر الاشارة اليه هنا ان الفرق بين هذه المعادلة والمعادلة الاتية ، $Y = C + I$ هو ان المدة الزمنية قد تم تاشيرها بالرمزالسفلي t.وهذا هو الفرق بين الأنموذج الساكن والأنموذج الديناميكي كما تم الاشارة اليه مسبقا.

ولنفترض ان I_t ياخذ القيمة I_0 وهي قيمة لاتتغير مع تغير t ، واذا كان الاستهلاك دالة لدخل المدة السابقة فسوف تتخذ دالة الاستهلاك الشكل الاتي:-

$$C_t = c_0 + cY_{t-1}$$

إذ تمثل c_0 الاستهلاك التلقائي(المستقل عن الدخل)، في حين يمثل c الميل الحدي للاستهلاك MPC وبما ان:-

$$Y_t = C_t + I_t$$

فإن:-

$$Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0 ....(1)$$

وهذه معادلة فروق خطية من الدرجة الاولى ، بسبب ان الدخل في المدة t يعتمد جزئيا على ما حدث في المدة السابقة. فاذا ما كان الدخل في المدة t متاثرا باحداث المدة $t-2$ او $t-3$ ، أي $Y_t = f(Y_{t-2})$ ، او $Y_t = f(Y_{t-2})$ ، فسيكون لدينا معادلة فروق من الدرجة الثانية او من الدرجة الثالثة. وكون المعادلة (١) اعلاه خطية لانها لم تحتو على حدود مرفوعة لاس اكبر من واحد مثل $c(Y_{t-1})^2$.

ان خطوات حل معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى يمكن اجمالها بالمثال الاتي:

مثال(٧,١١): اذا كان لدينا المعادلة $Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0$ والسؤال بماذا ستخبرنا هذه المعادلة حول تغيرات الدخل بالنسبة للزمن ، وكانت لدينا المعلومات الاتية:

$$c = 0.8 \;, \quad I_0 = 500 \;, \quad C_0 = 100$$

بتوفر المعلومات نكتب معادلة الدخل كالاتي:

$$Y_t = 100 + 0.8Y_{t-} + 500$$
$$Y_t = 600 + 0.8Y$$

وحتى يمكن التعرف على تغير Y بالنسبة للفترة الزمنية t ينبغي معرفة قيمة الدخل في المدة الاولية (الابتدائية) أي Y_0 ولتكن هذه القيمة تساوي ٢٥٠٠ أي ان $(Y_0 = 2500)$ واذ ان:-

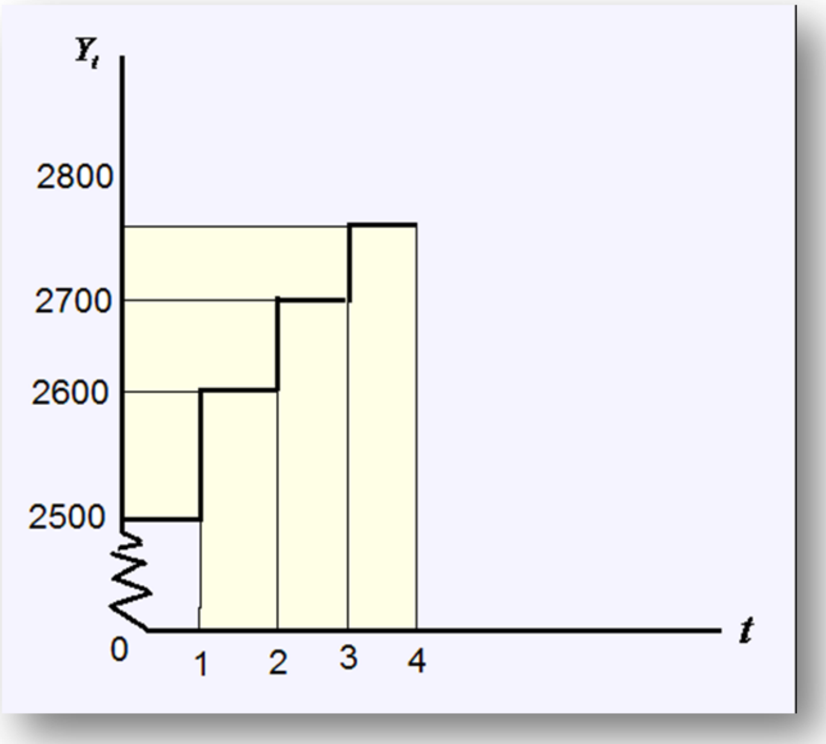
$$Y_t = 600 + 0.8Y_{t-1}$$

فانه يمكن حساب Y_t عندما t= ١، ٢، ٣ .....

عليه يمكن حسابها كالاتي:-

$$Y_1 = 600 + 0.8Y_{1-1} \Rightarrow Y_1 = 600 + 0.8Y_0 \Rightarrow Y_1 = 600 + 0.8(2500) \Rightarrow Y_1 = 2600$$
$$Y_2 = 600 + 0.8Y_{2-1} \Rightarrow Y_2 = 600 + 0.8Y_1 \Rightarrow Y_2 = 600 + 0.8(2600) \Rightarrow Y_2 = 2680$$
$$Y_3 = 600 + 0.8Y_{3-1} \Rightarrow Y_3 = 600 + 0.8Y_2 \Rightarrow Y_3 = 600 + 0.8(2680) \Rightarrow Y_3 = 2744$$
$$Y_4 = 600 + 0.8Y_{4-1} \Rightarrow Y_4 = 600 + 0.8Y_3 \Rightarrow Y_4 = 600 + 0.8(2744) \Rightarrow Y_4 = 2795.2$$

يشير الشكل البياني (٤٧) الى التغيرات في الدخل خلال المدد المؤشرة في المثال اعلاه. كما يبين الشكل البياني بوضوح ان النماذج الاقتصادية التي تم التعبير عنها بصيغة معادلات فروق تعالج الزمن على انه متغير منفصل او غير مستمر.



شكل (47) تغيرات الدخل خلال الزمن

وتعد هذه الطريقة بسيطة في حال اردنا حساب دخل لقيم صغيرة من t ، غير ان الامر يصبح اكثر تعقيدا كلما اصبحت t اكبر.

مثال(٧,١٢): لديك المعادلة الاتية : $Y_t = 2Y_{t-1}$، وضح التغيرات التي ستحدث على المتغير Y اذا علمت ان قيمة Y في الزمن صفر =٣ أي $Y_0 = 3$

الحل

في حالة كانت قيمة Y تساوي ٣ فان:-

$$Y_1 = 2Y_0 = 2\times 3 = 6$$
$$Y_2 = 2Y_1 = 2\times 6 = 12$$
$$Y_3 = 2Y_2 = 2\times 12 = 24$$

ولتوليد الصيغة العامة للحل اعلاه يمكن كتابتها على الشكل الاتي:-

$$Y_1 = 2Y_0 = 2^1 \times 3$$
$$Y_2 = 2Y_1 = 2^2 \times 3$$
$$Y_3 = 2Y_2 = 2^3 \times 3$$

والان يمكن كتابة الصيغة العامة للحل اعلاه:

$$Y_t = 3(2^t)$$

وبشكل عام هناك طريقتان لحل معادلات الفروق من الدرجة الاولى وهي كما ياتي:-

1. **طريقة التكرار *Iterative Method***
2. **الطريقة العامة *General Method***

١- طريقة التكرار: تبين معادلات الفروق التغير في قيمة المتغير y في نهايتي مدة زمنية او مدتين زمنيتين فاذا علمت y_0 فإن y_3, y_2, y_1 ينتج باضافة الفرق الثابت Δy_t تباعا. ولتبيان هذه الطريقة نفترض المثال الاتي:-

مثال (٧,١٢): حل معادلة الفروق $\Delta y_t = 2$ مفترضا ان القيمة الاولية $y_0 = 15$

الحل//

من التعريف الاتي:-

$$\Delta y_t = y_{+1} - y_t$$

نحصل على الاتي:-

$$y_{t+1} = y_t + \Delta y_t$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + 2 \\ y_2 &= y_1 + 2 = y_0 + 2(2) \\ y_3 &= y_2 + 2 = y_0 + 3(2) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_t &= y_0 + t(2) = 15 + 2t \end{aligned}$$

٢- الطريقة العامة: ولن ندخل في تفاصيلها .

تطبيقات اقتصادية على معادلات الفروق:

من اهم التطبيقات التي تعالجها معادلات الفروق هي توازن السوق غير ان أنموذج التوازن هذا يعالج الكميات المعروضة Q_S كدالة ليس للسعر الجاري وانما للسعر في مدة زمنية سابقة، فلو افترضنا ان قرار الانتاج في المدة الزمنية t يمثل السعر الجاري P_t. وعادة ما يكون الانتاج غير متاح للعرض او البيع الا في المدة الزمنية القادمة او اللاحقة وهي المدة $t+1$ ، من هذا لايكون السعر الجاري محددا في المدة الزمنية t وانما في المدة الزمنية $t+1$ ايضا.

واعتمادا على ما ذكر تكون دالة العرض كالاتي:-

$$Q_{S_{t+1}} = S_{Pt}$$
$$Q_{S_t} = S_{Pt-1}$$

اما معادلة الطلب فهي كما ياتي:-

$$Q_{d,t} = D(Pt)$$

اما أنموذج توازن السوق فهو:-

$$Q_{d,t} = Q_{S,t}$$
$$Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t \qquad \alpha > 0\ , \quad \beta > 0$$
$$Q_{S,t} = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

وبتعويض كل من معادلة الطلب والعرض بأنموذج التوازن للسوق يتحول النموذج التوازني الى معادلة فروق من الدرجة الاولى كالاتي:-

$$Q_{d,t} = Q_{S,t}$$
$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1}$$
$$\alpha + \gamma = \delta P_{t-1} + \beta P_t$$
$$\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$$
$$\beta P_{t+1} + \delta P_t = \alpha + \gamma$$

بالقسممة على β نحصل على الاتي:-

$$P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

من هذا يمكن كتابة الشكل العام للأنموذج كالاتي:-

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t + \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right)$$

$$P_t = (P_0 - P^*) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t + P^*$$

إذ يمثل P^* سعر التوازن

وتظهر ثلاث حالات من اشكال التذبذب في أنموذج التوازن وهي:-

١- اذا كان ميل منحنى العرض اكبر من ميل منحنى الطلب $(\delta > \beta)$ فإن شكل التذبذب تصاعدي *Explosive* .

٢- اذا كان ميل منحنى العرض يتساوى مع ميل منحنى الطلب $(\delta = \beta)$ فان شكل التذبذب منظم *Uniform*.

٣- اذا كان ميل منحنى العرض اقل من ميل منحنى الطلب $(\delta < \beta)$ فإن شكل التذبذب يكون تنازليا *Damped*.

مثال (٧,١٣): اذا كانت دوال الطلب والعرض كما يأتي:-

$$Q_{d,t} = 20 - 2P_t$$

$$Q_{S,t} = -10 + 3P_{t-1}$$

المطلوب

١- ايجاد سعر التوازن.

٢- تحديد شكل التذبذب.

٣- ايجاد السعر بعد مرور ٤ فترات زمنية علما ان السعر عند الزمن $(t = 0)$ يساوي ١٤ وحدة نقدية.

الحل

١- ايجاد سعر التوازن

$$P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$$P^* = \frac{20 - 10}{-2 + 3} = 10$$

٢- تحديد شكل التذبذب: بما ان ميل منحنى العرض اكبر من ميل منحنى الطلب $\delta > \beta$ أي ان $3 > -2$ لذا فإن شكل الأنموذج هو شكل تصاعدي *Explosive*

٣- ايجاد السعر بعد مرور ٤ مدد زمنية:

$$P_t = \left(P_0 - P^*\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^*$$

$$P_4 = (14-10)\left(-\frac{3}{-2}\right)^4 + 10$$

$$P_4 = (4)\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 10$$

$$P_4 = 30.250$$

اذن السعر بعد مرور ٤ مدد زمنية يساوي ٣٠,٢٥٠ وحدة نقدية

اسئلة الفصل السابع

س١:- لديك دالة الكلفة الحدية لمنشأة :

$$MC = Q^2 + 2Q + 4$$

المطلوب// جد دالة الكلفة الكلية اذا علمت ان الكلفة الثابتة تساوي ١٠٠.

س٢:- اذا علمت ان دالة الايراد الحدي لمنتج محتكر هي:

$$MR = 10 - 4Q$$

المطلوب// جد دالة الايراد الكلي ثم استنتج دالة الطلب الملائمة.

س٣:- استخرج دالة الاستهلاك من معادلة الميل الحدي للاستهلاك الاتي:-

$$MPC = 0.5 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}}$$

اذا علمت ان الاستهلاك يساوي ٨٥ عندما الدخل يساوي ١٠٠.

س٤:- جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب الملائمة من دوال الايراد الحدي الاتية:-

$a)\ MR = 20 - 2Q \qquad b)\ MR = \frac{6}{\sqrt{Q}}$

س٥:- جد فائض المستهلك عند $(Q = 8)$ من دالة الطلب الاتية:-

$$P = 100 - Q^2$$

س٦:- لديك دالة الطلب الاتية: $P = 35 - Q_d^2$ ، ودالة العرض الاتية: $P = 3 + Q_S^2$

المطلوب// استخرج فائض المنتج مفترضا سوق منافسة تامة.

س٧:- استخرج فائض المستهلك والمنتج من المعلومات الاتية:

$$P = 50 - 2Q_d$$

$$P = 10 + 2Q_S$$

س٨:-اعطيت دالة الطلب الاتية :- $P = -Q_d^2 - 4Q_d + 68$ ،

ودالة العرض الاتية:- $P = Q_S^2 - 2Q_S + 12$

المطلوب// استخرج فائض المستهلك والمنتج مفترضا سوق منافسة تامة

مصادر الفصل السابع

١- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . ١٩٩١.

٢- حسين علي بخيت - مبادىء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد - ٢٠٠٠.

3-Akila Weerapana , Models With Difference Equations, Published on line www.google.com.

4- Courtney Brown, An Introduction to First-Order Linear Difference Equations With Constant Coefficients. Published on line www.google.com.

5- Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.

6- Elaydi, S. and R. Sacker, Global stability of periodic orbits of nonau- tonomous difference equations in population biology and the Cushing- Henson conjectures, Proceedings of the 8th International Conference on Difference Equations, Brno, 2003.

7- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

8- Klaus Neusser, Difference Equations for Economists(preliminary and incomplete). Published on line www.google.com. 2008.

9- Marcel B. Finan, Consumer and Producer Surplus, Published on line www.google.com.

10- Saber Elaydi and Robert J. Sacker, Skew-product dynamical systems: Applications to difference equations.2004.

الفصل الثامن

تحليل المستخدم - المنتج

Input - Output Analysis

يهدف هذا الفصل الى التعرف على :-

- انموذج المستخدم – المنتج
- افتراضات انموذج ليونتيف

انواع نماذج ليونتيف

أ- الانموذج المفتوح

ب- الانموذج المغلق

الفصل الثامن
المستخدم ـ المنتج
Input - Output

يعتمد انموذج المستخدم – المنتج او انموذج المدخلات – المخرجات في اساسه النظري على شروط التوازن الاقتصادي العام التي حددها الاقتصادي الفرنسي ليون فالراس على شكل مجموعة من المعادلات الخطية الآنية، ثم قام العالم ليونيتيف فيما بعد بالاستفادة علميا من هذه المعادلات لدراسة بنية القطاع الانتاجي وذلك بتقسيمه لعدد من الفروع. ويعد انموذج المدخلات– المخرجات كغيره من النماذج تبسيطا للواقع الاقتصادي المعقد واداة للتخطيط.

تعد جداول المستخدم– المنتج إحدى أهم الأدوات التي احتلت مكانا" بارزا" في التخطيط والتحليل الاقتصاديين من خلال أيجاد العلاقات التشابكية للقطاعات الإنتاجية مع الأخذ بالاهتمام علاقات التشابك المتبادلة بين خطط الإنتاج والنشاطات في الصناعات المختلفة المكونة للاقتصاد القومي ، وتعالج جداول المستخدم– المنتج علاقات الإنتاج فيما يتعلق بتحديد ما يمكن إنتاجه وكمية السلع الوسيطة التي تستخدم في العملية الإنتاجية بافتراض معرفة الكميات المتاحة من موارد الإنتاج والتكنولوجيا المتبعة في العملية الإنتاجية. وتظهر أهمية تحليل جداول المستخدم . المنتج بوصفه أحد أساليب بناء النماذج الاقتصادية لأغراض التحليل والتركيب الاقتصاديين ، بمعنى استخدامها لأغراض التخطيط القومي الشامل، إذ يمكن ان يستخدم في المجالات الآتية:

1 . تحليل العلاقات الرئيسة المتبادلة بين قطاعات الاقتصاد الوطني وفروعه.

2 . تأمين التوازن بين فروع الاقتصاد الوطني في أثناء عملية أعداد الخطة ، وذلك بتحديد حجم الناتج من كل فرع من فروع الاقتصاد وبالشكل الذي يتناسب مع حجم الطلب النهائي والطلب الوسيط.

3 . تحديد الأثر المتبادل بين الاقتصاد الوطني والعالم الخارجي الأمر الذي يساعد على تخطيط التركيب الهيكلي للتجارة الخارجية بالشكل الذي يخدم الاقتصاد الوطني.

4. مساعدة المخطط على اختيار السياسات الاستثمارية التي تحقق السياسة الاقتصادية والاجتماعية للمجتمع.

٥. يستخدم في حل مشاكل التنمية الاقتصادية للدول النامية .

٦. يستخدم في حل المشاكل العسكرية.

٧. اعطاء صورة مفصلة عن بنية الاقتصاد القومي والتي يستفاد منها في اعداد الحسابات القومية

وبناء على ماتقدم ، نستطيع القول ان ضخامة عمليات التشغيل في مختلف مراحل الانتاج ولا سيما في النظام الاقتصادي المتقدم فانه لا توجد علاقة بسيطة بين الطلب النهائي للمستهلكين والحكومة وبين الانتاج الكلي المنتج بوساطة الصناعات الاصلية ، ولهذا لا بد ان يكون لاغراض التخطيط التعبوي اسلوب يمكن به قياس هذه العلاقات وهذا الاسلوب هو انموذج المستخدم – المنتج (انموذج المدخلات – المخرجات). ويحاول هذا الانموذج ((الذي كان لليونيتيف الفضل الاكبر في اخراجه للعالم[1])) الاجابة عن السؤال الآتي:-

((ما هو حجم الانتاج الكلي المطلوب من كل صناعة لمواجهة مجموعة محددة من الطلب النهائي مع ثبات الاسعار والتطور التقني؟))

الافتراضات التي يقوم عليها انموذج ليونيتيف *Leontief Model*

يقوم انموذج ليونيتيف على مجموعة من الافتراضات هي كالاتي:

١. وجود دالة انتاج خطية متجانسة " اي ان التكاليف المتغيرة تتناسب طرديا مع تغيير حجم الانتاج "

٢. يفترض الانموذج الاستقرار اي انه يهمل العرض والطلب ويحل محلها الحاجات ويعالج الاسعار والكميات كل على حدة.

انموذج المستخدم – المنتج

يمكن وصف جدول المستخدم – المنتج بانه يوضح توزيع مخرجات (منتجات) كل صناعة على الصناعات او القطاعات الاخرى للاقتصاد القومي ، وفي الوقت نفسه يوضح مدخلات (مستخدمات) كل صناعة من الصناعات والقطاعات الاخرى.

يعبر المحتوى الاحصائي والاقتصادي لجدول المستخدم – المنتج ، بصورة عامة بانه هيكل احصائي يترجم العلاقات الاقتصادية القائمة بين مختلف القطاعات الاقتصادية التي تتجسد في مستلزمات الانتاج التي يوفرها كل قطاع الى القطاعات الاخرى، وبالمقابل توفير مستلزماته من القطاعات الاخرى.

يشير الجدول الاتي الصورة العامة لجدول المستخدم – المنتج

---

[1] يعتقد بغض الاقتصاديين ان الاقتصادي الفرنسي فرانسوا كيناي هو اول من وضع الجدول الاقتصادي بصورة اولية عام ١٧٥٨ ثم قام العالم الروسي ليونيتيف بتطوير الجدول المذكور

جدول المستخدم المنتج

مجموع الانتاج X_i	مجموع الطلب النهائي F_i	الطلب الوسيط		القطاعات
		مجموع الطلب الوسيط	$J = 1, 2, \ldots\ldots n$	
X_1	F_1	$\sum_j^n Z_{1j}$	$Z_{11} \quad Z_{12} \quad Z_{13} \ldots\ldots Z_{1n}$	$i = 1$
X_2	F_2	$\sum_j^n Z_{2j}$	$Z_{21} \quad Z_{22} \quad Z_{23} \ldots\ldots Z_{2n}$	2
X_3	F_3	$\sum_j^n Z_{3j}$	$Z_{31} \quad Z_{32} \quad Z_{33} \ldots\ldots Z_{3n}$	3
		.	. . . .	
			. . . .	
			. . . .	
X_n	F_n	$\sum_j^n Z_{nj}$	$Z_{n1} \quad Z_{n2} \quad Z_{n3} \ldots\ldots Z_{nn}$	n
$\sum_i^n X_i$	$\sum_i^n F_i$	$\sum_i^n \sum_j^n Z_{ij}$	$\sum_i^n Z_{in} \quad \sum_j^n Z_{nj} \quad \sum_i^n Z_{i2} \quad \sum_i^n Z_{i1}$	مجموع المستلزمات الوسيطة
	$\sum_j^n O_j$	$\sum_j^n V_j$	$V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_n$	مجموع القيمة المضافة
		$\sum_j^n M_j$	$M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_n$	الاستيرادات
		$\sum_j^n X_j$	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_n$	مجموع المدخلات X_j

يمكن التعبير عن محتويات الجدول بالاتي:

١- المصفوفة المربعة Z_{ij} = تمثل التداخلات القطاعية اما محتويات صفوفها واعمدتها :

أ- صفوف المربعة= تمثل الصفوف جزءا من ناتج كل قطاع الذي تحصل عليه القطاعات الاخرى كمستلزمات انتاج.

ب–اعمدة المصفوفة = تمثل مستلزمات الانتاج للقطاعات التي تحصل عليها من القطاعات الاخرى.

٢– المتجه العمودي F_i = يشمل المتجه العمودي على الجزء الاخر من ناتج القطاعات والذي يتوزع ويستهلك بشكل سلع نهائية من قبل الافراد (والذي يمثل استهلاكا نهائيا) ، أو الحكومة (ويمثل استهلاكا حكوميا) ، أو يستخدم كسلع استثمارية (تكوين رأس المال) او يصدر ، او يضاف الى المخزون ، وهذه الانواع الخمسة من الاستخدامات بمجموعها يطلق عليها الطلب النهائي F_i ، وعليه يمكن القول ان الناتج المحلي سيكون عبارة عن مجموع الطلب الوسيط والطلب النهائي وتوضحه المعادلة الاتية:–

$$X_i = \sum_{j}^{n} Z_{ij} + \sum_{i}^{n} F_i \text{..................................(1)}$$

اذ ان :–

X_i = الناتج المحلي للقطاع i

Z_{ij} = مقدار ما يحتاجه القطاع (j) من القطاع (i) لانتاج ما مقداره X_j من الناتج الاجمالي لذلك القطاع.

F_i = الطلب النهائي على القطاع (i)

تجدر الاشارة الى أن المعادلة (١) تصلح فقط للدول التي بمقدور انتاجها المحلي تغطية الطلب الكلي اي (الطلب الوسيط(الطلب الداخلي) + الطلب النهائي) من دون الحاجة الى فقرة الاستيرادات إلا ان معظم الدول ان لم تكن جميعها ليس بمقدورها تحقيق الاكتفاء الذاتي لسد الطلب الكلي عن طريق الانتاج المحلي فقط. عليه لا بد من الاعتماد على الاستيرادات في تغطية النقص المتوقع حصوله في الانتاج لتغطية الطلب الكلي ، من هنا تصبح الصيغة اعلاه في المعادلة (١) كالاتي:

$$X_i + M_i = \sum_{j}^{n} Z_{ij} + \sum_{i}^{n} F_i \text{..................................(2)}$$

اذ ان : M_i = الاستيرادات

ولغرض تبسيط الانموذج سيتم استبعاد الاستيرادات ، واستنادا الى المعادلة (١) ستتكون مجموعة من المتطابقات تعبر كل منها عن توزيع ناتج قطاع معني بين الطلب الوسيط والطلب النهائي وكما ياتي:-

$$
\begin{array}{l}
Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_{1n} + F_1 = X_1 \\
Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_{2n} + F_2 = X_2 \\
Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_{3n} + F_3 = X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\
.. \quad . \quad . \qquad\qquad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \qquad\qquad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \qquad\qquad . \quad . \quad . \\
Z_{n1} + Z_{n2} + Z_{n3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_{nn} + F_n = X_n
\end{array}
$$

يفترض الانموذج بشكله المبسط وجود مجموعة من الافتراضات هي:

١- معرفة الطلب النهائي ، بمعنى ان الكميات التي يشتريها المستهلك النهائي من القطاعات الاخرى ينبغي ان تكون معلومة.

٢- زيادة الانتاج في قطاع معين بنسبة معينة تؤدي الى زيادة مشترياته من القطاعات الاخرى بالنسبة نفسها.

٣- ثبات الاسعار، اذ ان التغير في الاسعار يؤدي الى التغير في المعاملات الفنية والمعبر عنها في صورة نقدية.

خلاصة القول ان وجود مجموعة قطاعات انتاجية عددها (n) في اقتصاد بلد ما ، فإن انتاج كل من هذه القطاعات سيكون مطلوبا من القطاعات الاخرى في الاقتصاد نفسه، ويسمى هذا الطلب الوسيط او الطلب الداخلي ***(Internal Demand)*** ، وكمثال على ذلك تحتاج شركة ما مثل شركة الكهرباء الى الوقود لتشغيل مولدات الكهرباء ، وفي الوقت نفسه تحتاج مصفاة تكرير النفط الى الكهرباء لتشغيل آلاتها التي تعمل على استخراج انواع الوقود المستخدمة. أما النوع الآخر من الطلب فهو الطلب النهائي او الخارجي ***(Final (external) Demand)*** ، وهذا الطلب يمثل الانتاج المتبقي بعد اشباع الطلب الداخلي ، ويوفر هذا الطلب حاجات المستهلك الذي قد يكون فردا او عائلة او قطاعا حكوميا او مخصصا للتصدير، اي ان

الطلب الكلي او النهائي على اي سلعة هو عبارة عن محموع الطلب الداخلي والطلب النهائي كما سبق القول.

تطبيقات اقتصادية على انموذج المستخدم المنتج (المدخلات – المخرجات)

إن التطبيقات الاقتصادية لهذا الاسلوب من التحليل تحاول الاجابة عن السؤال الاتي:

((ما هو حجم الانتاج اللازم من كل قطاع من قطاعات الاقتصاد المختلفة لاشباع الطلب الكلي للانتاج؟))

سنفترض وجود ثلاثة قطاعات فقط في الاقتصاد ، ولهذا فان انتاج القطاع الواحد يمكن تمثيله حسب المعادلة الاتية:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + d_i$$

اذ ان:-

X_i = حجم الانتاج الكلي في القطاع i

a_{ij} = المعامل الفني ***(Technical Coefficient)*** والذي يشير الى كمية الطلب على السلعة j اللازمة لانتاج وحدة واحدة من السلعة i ، اذ ان :-

$$i = 1 , 2 , 3 \quad and \quad j = 1 , 2 , 3$$

d_i = الطلب النهائي على السلعة i

اذن لتمثيل الطلب الكلي من القطاعات الثلاثة السابقة نستعين بالانموذج الخطي الاتي:-

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + d_1 \\ X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + d_2 \\ X_3 &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + d_3 \end{aligned}$$

ويمكن كتابة الانموذج اعلاه باستخدام المصفوفات وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عن الانموذج السابق بشكل معادلة مصفوفية على النحو الاتي:-

$$X = AX + D$$

اذ ان:-

A = مصفوفة المعاملات الفنية ***(Technical Coefficient Matrix)*** وهي من الرتبة $(n \times n)$.

X = مصفوفة قيم الانتاج الكلي وهي من الرتبة $(n \times 1)$.

D = مصفوفة الطلب النهائي وهي من الرتبة $(n \times 1)$.

ويتم الحل باستخدام المعادلة الاتية :-

$$X = (I_n - A)^{-1} D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وتمثل (I_n) مصفوفة الوحدة من الدرجة n.

يتم الوصول الى المعادلة (٤) كما ياتي:-

$$X = AX + D$$
$$X - AX = D$$
$$(I_n - A)X = D$$
$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

اذ ان:-

$(I_n - A)$= المصفوفة الفنية ***(Technical Matrix)*** أو مصفوفة ليونيتيف ***(Leontief's Matrix)***.

يطلق على الانموذج $X = AX + D$ انموذج ليونيتيف المفتوح ***(Open Leontief Model)*** ، بسبب ان هناك منتجات زادت عن حاجة قطاعات الاقتصاد الثلاثة في الانتاج الخاص بها وكانت معدة للاستهلاك او التصدير.

انموذج ليونتيف المغلق ***(Closed Leontief Model):***– هو الانموذج الذ لا تزيد منتجاته عن حاجات القطاعات الاخرى. وفي هذا الانموذج تكون مصفوفة الطلب النهائي مصفوفة صفرية اي ان $D = 0$ ويصبح النظام على الشكل $X = AX$

مثال (٨,١)

اذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

وكانت مصفوفة الطلب النهائي لثلاثة قطاعات انتاجية هي:

$$D = \begin{bmatrix} 150 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix}$$

المطلوب // اوجد الانتاج الكلي لكل قطاع من القطاعات الثلاثة

الحل

لنفرض ان مصفوفة الانتاج الكلي هي:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

وتحسب قيم متغيرات المصفوفة X بالاعتماد على المعادلة الاتية:

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

نحسب اولا المصفوفة $(I_n - A)$ ، ثم نجد مقلوبها ونحقق المعادلة اعلاه وكما يأتي:

$$I_n - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ -0.4 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

نحسب الان محدد المصفوفة $(I_n - A)$ باستخدام طريقة ارقام الصف الاول وكما ياتي:

$$|I_n - A| = 0.4 \begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.6 & 0.6 \end{vmatrix} - (-0.2) \begin{vmatrix} -0.4 & 0 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} + (-0.6) \begin{vmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix}$$

$$= 0.4[(0.2 \times 0.6) - (-0.6) \times (0)] - (-0.2)[(-0.4 \times 0.6) - (-0.2 \times 0)]$$

$$+ (-0.6)[(-0.4 \times -0.6) - (-0.2 \times 0.2)]$$

$$|I_n - A| = 0.168$$

نحسب الان المصفوفة المرافقة $adj(I_n - A)$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.6 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.12$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0.4 & 0 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.24$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 \end{vmatrix} = 0.28$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0.2 & -0.6 \\ -0.6 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.48$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.12$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & -0.6 \end{vmatrix} = 0.28$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0 \end{vmatrix} = 0.12$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.4 & 0 \end{vmatrix} = 0.24$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.4 & 0.2 \end{vmatrix} = 1$$

وهكذا مصفوفة المرافقات هي:

$$adj(I_n - A) = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.24 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0.28 \\ 0.12 & 0.24 & 1 \end{bmatrix}$$

وباخذ منقول المصفوفة:

$$adj(I_n - A) = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.48 & 0.12 \\ 0.24 & 0.12 & 0.24 \\ 0.28 & 0.28 & 1 \end{bmatrix}'$$

ثم نحسب مقلوب المصفوفة $(I_n - A)^{-1}$ وكما ياتي:

$$(I_n - A)^{-1} = \frac{adj(I_n - A)}{|I_n - A|} = \frac{1}{0.168}\begin{vmatrix} 0.12 & 0.48 & 0.12 \\ 0.24 & 0.12 & 0.24 \\ 0.28 & 0.28 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(I_n - A)^{-1} = \begin{vmatrix} 0.714 & 2.856 & 0.714 \\ 1.428 & 0.714 & 1.428 \\ 1.666 & 1.666 & 5.95 \end{vmatrix}$$

باستخدام المعادلة الاتية نستطيع ايجاد قيم متغيرات المصفوفة X :

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$X = (I_n - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 0.714 & 2.856 & 0.714 \\ 1.428 & 0.714 & 1.428 \\ 1.666 & 1.666 & 5.95 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 300 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 214.2 \\ 999.6 \\ 4760 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني ان قيم X هي كالاتي:

$$X_1 = 214.2 \;, \qquad X_2 = 999.6 \;, \qquad X_3 = 4760$$

مثال (٨,٢)

لديك المعلومات الاتية عن اقتصاد ما:

١- وجود ثلاثة قطاعات رئيسة يتكون منها هذا الاقتصاد وهي قطاع الزراعة وقطاع الصناعة وقطاع الخدمات.

٢- يتميز كل قطاع بوجود مدخلات من المستخدمات يشتريها من القطاعات الاخرى ، ومخرجات من المنتجات يبيعها الى القطاعات الاخرى بضمنها القطاع نفسه ، فضلا عن المستهلكين النهائيين.

٣- تمثل الارقام في التشابك القطاعي المشار اليه في الجدول الى وحدات نقدية مقدرة بالالاف او الملايين او اي تقدير آخر.

٤- ان قيم الانتاج الاجمالي والصافي ومستلزمات الانتاج لكل قطاع من القطاعات الثلاثة هي كما في الجدول الاتي:

المخرجات / المدخلات	الطلب الوسيط				الطلب النهائي	الناتج الكلي
	الزراعة	الصناعة	الخدمات	مجموع الطلب الوسيط		
الزراعة	٨	٢٠	٠	٢٨	١٢	٤٠
الصناعة	١٠	٢٠	١٠	٤٠	٢٠	٦٠
الخدمات	٠	١٢	٤	١٦	٤	٢٠
مجموع المستخدمات الوسيطة	١٨	٥٢	١٤	٨٤	٣٦	١٢٠
المستلزمات الاولية (القيمة المضافة)	٢٢	٨	٦	٣٦		
المستخدمات الكلية	٤٠	٦٠	٢٠	١٢٠		

يمكن تفسير الجدول اقتصاديا وكما ياتي:

الصف الثاني من الجدول والذي يخص قطاع الصناعة (الجزء المظلل في الجدول):

الناتج الكلي	الطلب النهائي	الطلب الوسيط				المخرجات / المدخلات
		مجموع الطلب الوسيط	الخدمات	الصناعة	الزراعة	
٤٠	١٢	٢٨	٠	٢٠	٨	الزراعة
٦٠	٢٠	٤٠	١٠	٢٠	١٠	الصناعة

١- (١٠) وحدات من من القطاع الصناعي تذهب الى قطاع الزراعة (على شكل آلات ومعدات زراعية)

٢- (٢٠) وحدة من القطاع الصناعي تذهب الى القطاع الصناعي نفسه كمستخدمات فيه (على شكل آلات او اغراض للاستخدانات الصناعية)

٣- (١٠) وحدات من القطاع الصناعي تذهب الى قطاع الخدمات (على شكل معدات للقيام بخدمة معينة)

٤- (٢٠) وحدة منه تباع كاستهلاك نهائي للمستهلكين (على شكل سلع استهلاكية مصنعة)

اذن الناتج النهائي الكلي للقطاع الصناعي= ١٠+٢٠+١٠+٢٠=٦٠

اما العمود الثاني من الجدول فهو يبين مقدار المنتجات التي تستعمل كمستخدمات في العملية الانتاجية للقطاع الصناعي وكما ياتي(الجزء المظلل من الجدول):

الصناعة	الزراعة	
٢٠	٨	الزراعة
٢٠	١٠	الصناعة
١٢	٠	الخدمات

١- يستعمل القطاع الصناعي (٢٠) وحدة من القطاع الزراعي (مثل المواد الزراعية التي تستخدم في صناعة الزيوت او الانسجة الصوفية او القطنية).

٢- يستعمل القطاع الصناعي (٢٠) وحدة من القطاع الصناعي نفسه (على شكل سلع نصف مصنعة مثلا).

٣- يستعمل القطاع الصناعي (١٢) وحدة من قطاع الخدمات (بصفة مستخدمات في عملياته الانتاجية).

كما نستطيع من خلال الجدول ان نحدد مقدار ما تحتاجه الوحدة الواحدة من انتاج كل قطاع من مستلزمات القطاعات الاخرى وكما يأتي:

من خلال العمود الثاني (عمود مستخدم الصناعة) نجد ان مقدار ما تحتاجه الوحدة الواحدة من ناتج الصناعة (من كل مستخدم) يمكن الحصول عليه بقسمة كل عنصر في العمود على مجموع المستخدمات الصناعية الكلية. فلانتاج وحدة واحدة من الانتاج في قطاع الصناعة يتطلب الاتي:

$\frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0.33$ وحدة (من مستخدمات الزراعة)

$\frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0.33$ وحدة (من مستخدمات الصناعة)

$\frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0.20$ وحدة (من مستخدمات الخدمات)

وسنتبع الخطوات نفسها في المثال (١) في حل مثالنا هذا إذ يتم استخراج مصفوفة المعاملات الفنية والتي كانت متوافرة في المثال (١) أما هنا فيتطلب الامر ايجاد هذه المصفوفة وكما يأتي:

$a_{11} = \frac{8}{40} = 0.20$	$a_{12} = \frac{20}{60} = 0.33$	$a_{113} = \frac{0}{20} = 0$
$a_{21} = \frac{10}{40} = 0.25$	$a_{22} = \frac{20}{60} = 0.33$	$a_{23} = \frac{10}{20} = 0.50$
$a_{31} = \frac{0}{40} = 0$	$a_{32} = \frac{12}{60} = 0.20$	$a_{33} = \frac{4}{20} = 0.20$

بعد استخراج مصفوفة المعاملات الفنية يمكن التعبير عن ذلك بالمعادلات الاتية:-

$$\begin{aligned} 0.2X_1 + 0.33X_2 + 0X_3 + d_1 &= X_1 \\ 0.25X_2 + 0.33X_2 + 0.50X_3 + d_2 &= X_2 \\ 0X_1 + 0.20X_2 + 0.20X_3 + d_3 &= X_3 \end{aligned}$$

ويمكن كتابة المعادلات اعلاه بشكل مصفوفة وكما ياتي:-

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.33 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.50 \\ 0 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على المعادلة الاتية:-

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$(I_n - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.20 & 0.33 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.50 \\ 0 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.33 & 0 \\ -0.25 & 0.67 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ثم نحسب محدد المصفوفة $(I_n - A)$ ونتبع الخطوات نفسها في المثال (١) . والمحدد يساوي هنا $|I_n - A| = 0.28$

نحسب المصفوفة المرافقة بايجاد كل من $(C_{33}, C_{32}, C_{31}, C_{23}, C_{22}, C_{21}, C_{13}, C_{12}, C_{11})$ والتي تساوي القيم الاتية:-

$$C_{13} = 0.05\ , C_{12} = 0.2, C_{11} = 0.44$$

$$C_{23} = 0.16\ , C_{22} = 0.64,\ C_{21} = 0.26,$$

$$C_{33} = 0.45, C_{32} = 0.4,\ C_{31} = 0.17\ ,$$

وهكذا فان المصفوفة المرافقة

$$adj(I_n - A) = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.20 & 0.05 \\ 0.26 & 0.64 & 0.16 \\ 0.17 & 0.40 & 0.45 \end{bmatrix}$$

وباخذ منقول المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0.44 & 0.26 & 0.17 \\ 0.20 & 0.64 & 0.40 \\ 0.05 & 0.16 & 0.45 \end{bmatrix}$$

نستخرج الان مقلوب المصفوفة وكالاتي:

$$(I_n - A)^{-1} = \frac{adj(I_n - A)}{|I_n - A|} = \frac{1}{0.28}\begin{bmatrix} 0.44 & 0.26 & 0.17 \\ 0.20 & 0.64 & 0.40 \\ 0.05 & 0.16 & 0.45 \end{bmatrix}$$

$$(I_n - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5576 & 0.9204 & 0.6018 \\ 0.708 & 2.2656 & 1.416 \\ 0.177 & 0.5664 & 1.593 \end{bmatrix}$$

باستخراج مقلوب المصفوفة نستطيع ايجاد قيم متغيرات المصفوفة الاتية:

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$X = (I_n - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 1.5576 & 0.9204 & 0.6018 \\ 0.708 & 2.2656 & 1.416 \\ 0.177 & 0.5664 & 1.593 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 7.2216 \\ 28.32 \\ 6.372 \end{bmatrix}$$

وهكذا تم ايجاد قيم المتغيرات الثلاث وهي:

الانتاج الكلي لقطاع الزراعة $X_1 = 7.2216$

الانتاج الكلي لقطاع الصناعة $X_2 = 28.32$

الانتاج الكلي لقطاع الخدمات $X_3 = 6.372$

تمكننا النتائج المستخرجة من تقدير الزيادة المطلوبة في الانتاج عند توقع زيادة الطلب النهائي على منتج قطاع او اكثر بنسبة معينة.

مثال (٨,٣)

افترض وجود ٥ قطاعات لاقتصاد ما.

القطاع الاول :السيارات ، القطاع الثاني:الفولاذ ، القطاع الثالث: الكهرباء

القطاع الرابع: الفحم ، القطاع الخامس: الكيمياويات

وكانت مصفوفة المعاملات الفنية كالاتي:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 \\ 0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix}$$

وكانت مصفوفة الطلب النهائي كالاتي:

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

الحل//

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 \\ 0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.05 & -0.05 & -0.10 \\ -0.40 & 0.80 & -0.10 & -0.10 & -0.10 \\ -0.10 & -0.25 & 0.80 & -0.10 & -0.20 \\ -0.10 & -0.20 & -0.30 & 0.85 & -0.10 \\ -0.05 & -0.10 & -0.05 & -0.02 & 0.95 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.37 & 0.30 & 0.19 & 0.14 & 0.23 \\ 0.85 & 1.60 & 0.39 & 0.29 & 0.37 \\ 0.56 & 0.68 & 1.51 & 0.30 & 0.48 \\ 0.58 & 0.68 & 0.66 & 1.38 & 0.42 \\ 0.20 & 0.23 & 0.14 & 0.08 & 1.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.23 \\ 821.74 \\ 1007.23 \\ 1153.28 \\ 712.49 \end{bmatrix}$$

اذن قيم X_i هي كالاتي:

X_1 قطاع السيارات= ٤٢٥,٢٣

X_2 قطاع الفولاذ = ٨٢١,٧٤

X_3 قطاع الكهرباء= ١٠٠٧,٢٣

X_4 قطاع الفحم= ١١٥٣,٢٨

X_5 قطاع الكيمياويات= ٧١٢,٤٩

مثال (٨,٤)

لتكن x تشير الى قيمة الانتاج النهائي لقطاع الزراعة بالمليون دولار ، و y تشير الى قيمة الانتاج النهائي لقطاع الطاقة بالمليون دولار ايضا. ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلات الاتية:

$$0.4x + 0.2y$$
$$0.2x + 0.1y$$

وقيم الطلب النهائي يمكن تمثيلها بالاتي:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وباضافة قيم الطلب النهائي يمكن التعبير عن المعادلات السابقة بما ياتي:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وكما تعلمنا سابقا يمكن حل المصفوفة اعلاه باستخدام الصيغة الاتية:

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة $(I_n - A)$ هي

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

ثم تضرب قيمة معكوس المصفوفة $(I_n - A)$ في مصفوفة الطلب النهائي وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.2 \\ 15.6 \end{bmatrix}$$

اذن قيمة الانتاج النهائي لقطاع الزراعة = ٢٥,٢ مليون دولار

قيمة الانتاج النهائي لقطاع الطاقة = ١٥,٦ مليون دولار

اسئلة الفصل الثامن

س١:- افرض بان هناك اقتصادا بسيطا مكون من ثلاثة قطاعات ومصفوفة المعاملات الفنية هي كالاتي:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

المطلوب // جد انتاج القطاعات الثلاثة اذا تغير الطلب النهائي عن القطاعات ١٠ مليون دولار و ٥ مليون دولار و ٦ مليون دولار على الترتيب.

س٢:- لديك البيانات الاتية :-

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

المطلوب // جد الانتاج للقطاعات الثلاثة

س٣:-جد الانتاج النهائي الذي يقابل الطلب لـ ٥٠٠ وحدة من القمح و ١٠٠٠ وحدة من الزيت ، اذا توفرت لديك المعلومات الاتية:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.08 \\ 0.33 & 0.11 \end{bmatrix}$$

س٤:- افترض ان طلب المستهلك يتغير من ١٢ مليون دولار لقطاع الزراعة الى ٨ مليون دولار ، وطلب المستهلكللطاقة من ٩ مليون الى ٥ مليون دولار. جد الانتاج النهائي لكل قطاع الذي يستوفي حاجة الطلب النهائي لهؤلاء المستهلكين من القطاعين. وكانت مصفوفة المعاملات الفنية هي كالاتي:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

س٥:- اعطيت جدول المستخدم – المنتج ولثلاثة قطاعات اقتصادية (زراعة وصناعة وخدمات)

الناتج الكلي	الطلب النهائي	الطلب الوسيط				المخرجات / المدخلات
		مجموع الطلب الوسيط	الخدمات	الصناعة	الزراعة	
٢٣,١٤	٨	١٤,٣٢	٧,٤٥	٢,٢٥	٤,٦٢	الزراعة
٢٥,٢١	١٠	١٤,٨٣	٤,٩٦	٧,٥٦	٢,٣١	الصناعة
٢٤,٨٤	١٢	١٢,٥٠	٢,٨٤	٥,٠٤	٤,٦٢	الخدمات

المطلوب //

ايجاد الانتاج الكلي لقطاع الزراعة والصناعة والخدمات .

مصادر الفصل الثامن

١- حسين علي بخيت – مباديء الاقتصاد الرياضي– كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ٢٠٠٠.

٢- عبد الله الثنيان . تحليل المستخدم – المنتج. منشور على الشبكة العالمية الدولية www.google.com

٣-مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان.٢٠١٠

4- Chiang,Alpha C, Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3rd edition. McGraw-Hill, Inc.1984.

5- Harris.Tom , Doeksen.G.A. Input –Output Model Basic. Published on line www.google.com.

6- Hendrickson, Chris , and others . Economic Input – Output Models for Environmental Life-Cycle Assessment. Published on line www.google.com. 1998.

7- Jacques,Jan. Mathematics for Economics and Business.5th edition. Prentice Hall. 2006.

8- Jensen, Iris. The Leontief Production Model or Input-Output Analysis. Published on line www.google.com.2001.

9- Leontief,Wassily. Input-Output Economics, Second Edition. Oxford University Press,1986.

10- Sargento, Ana Lucia Marto . Introducing Input – Output Analysis at the Regional Level: Basic Notions and Specific Issues . Published on line , www.real.illinois.edu. 2009.

الفصل التاسع

البرمجة الخطية

Linear Programing

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- البرمجة الرياضية
- البرمجة الخطية
- الخطوات الاساسية للبرمجة الخطية
- طرائق حل البرمجة الخطية

الفصل التاسع
البرمجة الخطية

مقدمة

تعد البرمجة الخطية من اكبر انجازات منتصف القرن العشرين ،ويعود الفضل في استخدامها الى العالم الروسي كانتروفتش ***Kantorovich*** في عام ١٩٣٩ إذ تمت في ذلك الوقت اول صياغة للبرمجة الخطية من دون ايجاد حلول لها وبحلول عام ١٩٤٧ استطاع العالم الامريكي الدكتور جورج دانتزج ***(G.Dantzig)*** في حل هذه المسائل والتي وفرت الملايين من الاموال ومن ساعات العمل لعدد من الشركات والمنشآت الانتاجية المستخدمة لهذا الفرع من فروع بحوث العمليات، وتعالج البرمجة الخطية مشاكل توزيع الموارد المحدودة على الانشطة المتنافسة داخل المنشأة ، وتبرز هذه المشاكل بصورة جلية في شركات الانتاج والنقل بانواعها المختلفة.

قبل الدخول الى موضوع الفصل الحالي سنتناول وبشيء مختصر بعض التعاريف ذات العلاقة بموضوع الفصل ومن اهمها الاتي:

البرمجة الرياضية *(Mathematical Programming)* : تنقسم البرمجة الرياضية الى اقسام عدة وهي:

١- **البرمجة الخطية *(Linear Programming LP)*** :- تعد من اهم اساليب البرمجة الرياضية واكثرها تطبيقا في الحياة العملية لضمان الاستخدام الامثل للموارد في ظل امكانيات وموارد محدودة ، مثل ايجاد المزيج الامثل من بين المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق اكبر ربح طيقا للمتاح من العمل والمواد الخام. ومن امثلة البرمجة الخطية هي نقل منتجات معينة من مناطق انتاج الى مراكز استهلاك بحيث تقوم كل منطقة انتاجية بتوزيع منتجاتها الى مراكز الاستهلاك بحيث يشبع كل مركز استهلاكي احتياجه بأقل كلفة ممكنة.

٢- **برمجة الاهداف *(Goal Programming GP)*** :- في هذه النوع من البرمجة يوجد اكثر من هدف ويعبر عن كل هدف بقيد في صورة معادلة يعرف بقيد الهدف ***(Goal Constraint)*** يحتوي على متغيرين انحرافيين ***(Deviation Variables)*** ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها. ويمكن تقدير معامل لكل هدف يسمى معامل اولوية ***(Priority Factor)*** يعكس درجة تفضيل متخذ القرار ويمكن تقدير وزن نسبي لكل هدف، ويتم حل برنامج الاهداف باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى يهتم بها في معاملات الاولوية.

٣- البرمجة الصحيحة *(Integer Programming)* :- تستخدم هذه الطريقة عندما لا يكون من المناسب ان تكون اعداد المشروعات في صورة كسرية، ففي كثير من المواقف الادارية تكون قيم متغيرات القرار اعدادا صحيحة ، فمثلا عند اختيار التوليفة الاقل كلفة من الطائرات المطلوب شراؤها طبقا للسعر ووفق الصيانة والطاقة الاستيعابية فانه في هذه الحالة ليس من المعقول ان تكون اعداد الطائرات في صورة كسرية. وكذلك عند اختيار التوليفة الاكثر ربحا من بين المشروعات المطلوب انشاؤها طبقا للموارد المالية المتاحة .ويمكن التفرقة بين ثلاثة انواع من البرمجة الصحيحة بحسب نوع متغيرات القرار التي يتضمنها البرنامج وهي:

أ- **البرمجة الصحيحة العامة *General Integer Programming*** :- وهي التي تكون جميع متغيرات القرار فيها في صورة صحيحة.

ب- **البرمجة الصحيحة الثنائية *Binary Integer Programming*** :-وهي التي يمكن ان تكون يها متغيرات القرار اما صفرا او واحد.

ت- **البرمجة الصحيحة المختلطة :- *Mixed Integer Programming*** :- وهي التي تحتوي على خليط من المتغيرات ذات الطبيعة الصحيحة والكسرية

٤- **البرمجة غير الخطية *Non –Linear Programming***:- يعد البرنامج غير خطي اذا تمت صياغة علاقة او اكثر من العلاقات في صورة غير خطية ويمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم او تخفض دالة الهدف باستخدام مضاعفات لاكرانج وذلك اذا كانت القيود الهيكلية في صورة معادلات و باستخدام شروط كون توكر ***Khun Tucker*** ومضاعفات لاكرانج اذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.

٥- **البرمجة التربيعية *Quadratic Programming*** :- هنا تكون دالة الهدف في صورة تربيعية والقيود الهيكلية في صورة خطية وهي حالة خاصة من البرمجة غير الخطية . ومن الطرائق المستخدمة في الحل هي طريقة السمبلكس لـ وولف ***Wolfe's Simplex Methods for QP*** وهي تعتمد على اساس مضاعفات لاكرانج وشرروط كون تكر فضلا عن طريقة السمبلكس.

٦- **البررمجة العشوائية او الاحتمالية *Stochastic Programming SP***:- وهنا يتم وصف مؤشر او اكثر من مؤشرات الانموذج باستخدام متغيرات عشوائية – احتمالية . ومن الطرائق المعروفة للحل طرقة البرمجة العشوائية المقيدة ***Chance Continues Programming*** إذ تقدر القيم المتوقعة لدالة الهدف ومعاملات

متغيرات القرار من القيود الهيكلية او الطرف الايمن لها او كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

٧- **البرمجة الديناميكية *DP Dynamic Programming* :-** تستخدم هذه الطريقة عندما يكون الهدف هو التوصل الى حلول متعلقة ببعضها البعض وفي فترات متغيررة ومتعاقبة وبكون الغرض من دالة الهدف هو امثلية هذه الاهداف على الفترات المختلفة باكملها.

البرمجة الخطية *Linear Programming*

تعود الجذور التاريخية لهذا العلم المتخصص الى الحرب العالمية الثانية عندما كانت القوات البريطانية تواجه العديد من المشاكل الامر الذي ادى بها الى استخدام الاساليب الرياضية في بحوث العمليات لحل العديد من المشاكل التي تواجه ادارتها للعمليات الحربية فضلا عن عمليات ادارة الاعمال والادارة الحكومية وذلك لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد البشرية والمادية المتاحة.

بعد النجاح الذي حققه استخدام هذا الفرع من فروع المعرفة في المجالات الحربية تحول استخدامه الى حقول المعرفة الاخرى ولاسيما في حقول المعضلات الادارية. وقد اسهمت مجموعة من العوامل في استخدام هذا العلم في الحقول الاخرى كالصناعة مثلا وتتمثل هذه العوامل في اتساع حجم السوق المحلية والاقليمية والدولية وشدة المنافسة بين المنشآت الصناعية وتعقد وتنوع المشاكل التي تواجه المشاريع.

الخطوات الاساسية لدراسة البرمجة الخطية

١- **تعريف المشكلة قيد الدرس:-** اي تحديد كل مما ياتي:

أ- الهدف: يتمثل في زيادة الارباح او زيادة الطاقة الانتاجية او تقليل التكاليف

ب-البدائل: تحديد طرائق العمل المختلفة والتي تستخدم في التقييم اذ يمكن قياس الكفاءة بالربح او بالكلفة او عدد الوحدات او الوقت

ت-القيود: المقصود بها المحددات مثل الاموال والايدي العاملة والمعدات والوقت وغيرها.

٢-**بناء الانموذج :-** إن بناء الانموذج هو عملية تمثيل المكونات والمشكلة والعوامل المؤثر فضلا عن الظروف المحيطة بها بحيث تساعد في فهم المشكلة ومن ثم التوصل الى قرار صائب.

٣- **حل الانموذج:-** والغرض من حل الانموذج هو استخراج مجموعة قيم المتغيرات وذلك باتباع اساليب البرمجة الخطية.

٤- **اختبار الانموذج:-** والغرض من اختبار الانموذج إظهار قدرته على تمثيل المسألة ، ويتم ذلك باستعمال بيانات تاريخية وقد يتطلب الانر تحوير الانموذج واعادة اختباره الى ان تزول كافة النواقص الموجودة فيه.

٥- **وضع الحل موضع التطبيق العملي:-** بعد التاكد من صلاحية الانموذج وملاءمته للبيانات يتم وضع الحل موضع التطبيق العملي ووضعه بايدي اصحاب القرار.

شروط و فروض البرمجة الخطية

يستند انموذج البرمجة الخطية على عدة شروط هي:

١- التحديد الجيد لدالة الهدف.

٢- ان تكون العلاقة التي تربط دالة الهدف والقيود علاقة خطية وان تكون معادلات الانموذج معادلات من الدرجة الاولى وخطية ايضا.

٣- محدودية الموارد : ينبغي ان تتصف الموارد بالمحدودية كي يتسنى تطبيق انموذج البرمجة الخطية.

فروض البرمجة الخطية

١- التناسبية : ينبغي ان يكون هناك تناسب خطي بين المخرجات والمدخلات فعندما يزداد عنصر العمل مثلا بنسبة ٨% فانه ينبغي ان تزداد المخرجات بالنسبة نفسها.

٢- عدم السالبية: اي ان تكون جميع متغيرات الانموذج غير سالبة .

٣- الانقسامية: اي ان تكون جميغ وحدات الانموذج قابلة للانقسام الى وحدات كسرية.

٤- التراكمية : يقصد بها ان المشاركة في الربح الاجمالي هو حصيلة جمع مشاركة جميع الوحدات الداخلة في أنموذج البرمجة الخطية.

الصيغة العامة لانموذج البرمجة الخطية

يمكن توضيح الانموذج العام لاسلوب البرمجة الخطية وكما ياتي:-

١- **دالة الهدف:**

$$Min \quad or \quad Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

٢ - **القيود الهيكلية :**

$$\begin{aligned}
&subject\ to \\
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \leq, =, \geq b_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \leq, =, \geq b_2 \\
&\quad . \quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\
&\quad . \quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n \leq, =, \geq b_m
\end{aligned}$$

٣-**قيد عدم السالبية**

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0$$

اي ان الانموذج يشمل ثلاثة عناصر اساسية هي دالة الهدف والقيود الهيكلية وقيد عدم السالبية ، اذ ان:-

Z = قيمة دالة الهدف (تعظيم او تدنية)

C = معاملات دالة الهدف (ربح او كلفة الوحدة الواحدة ....الخ)

X = متغيرات القرار

a = احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت موارد اولية او الزمن او عدد العاملين ....الخ.

n = عدد المتغيرات

m = عدد القيود

b = الموارد المتاحة

بعد التعرف على الشكل الرياضي لمكونات انموذج البرمجة الخطية يمكن اعادة كتابة الصيغة الرياضية للانموذج بالشكل العام:-

١-**دالة الهدف :**

$$Min\ or\ Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad j = 1, 2\ 3, ...n$$

٢- القيود الهيكلية :

$$Subject\ \ to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ (\leq\ ,\ =\ \ ,\ \geq\ )\ b_i \qquad i=1\,,2\ ,.......n$$

٣- قيد عدم السالبية :

$$X_j \geq 0$$

كما يمكن كتابة الانموذج بطريقة المصفوفات وكما ياتي:-

١- دالة الهدف

$$Min\ or\ Max\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & ....C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

٢- القيود الهيكلية

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}.........a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.........a_{2n} \\ . & . \qquad\qquad . \\ . & . \qquad\qquad . \\ a_{m1} & a_{m2} \qquad\quad a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} \leq,=,\geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

٣- قيد عدم السالبية: $\left(X_1\ ,X_2\,,.........,X_n\right) \geq 0$

اذ ان :-

A = **مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود.**

X = **متجه عمودي يمثل متغيرات القرار.**

b = **متجه عمودي يمثل الموارد المتاحة.**

C = **متجه افقي يمثل معاملات دالة الهدف.**

طرائق حل انموذج البرمجة الخطية

للتوصل الى حل مشكلة البرمجة الخطية توجد طرائق عدة هي:-

١- الطريقة البيانية ***Graphical Method***

٢- الطريقة الجبرية ***Algebrian Method***

٣- طريقة الانموذج المقابل ***The Dual Method***

٤- الطريقة المبسطة ***Simplex Method***

١- الطريقة البيانية *Graphical Method*

تعد هذه الطريقة من ابسط الطرائق المستخدمة لحل مشكلة البرمجة الخطية كونها تعالج المشاكل ذات متغيرين اثنين فقط ، وتتركز فائدتها في توضيح الحلول الممكنة وكيفية الحصول على الحل الامثل. وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة في اطار الاحداثيات الافقية والعمودية لتحديد منطقة الحل الممكن ***Feasible Solution*** (وهي منطقة مغلقة بكافة القيود الواردة في المسألة)، ومن بعدها يتم تحديد النقاط المتطرفة ***Extreme Points*** (وهي النقاط التي تكون على حدود مساحة الحل الممكن) التي تعظم او تدني دالة الهدف، ويمكن توضيح الخطوات الرئيسة للحل بموجب هذه الطريقة بالاتي:

أ- الصيغة الرياضية ***Mathematical Form*** لمسالة البرمجة الخطية ، اي تحويل مسالة البرمجة الخطية من الصياغة اللفظية الى الشكل الرياضي وتحديد دالة الهدف والقيود وتعد هذه الخطوة اساسية لكل طرائق الحل الممكنة.

ب-الصيغة المعيارية او القياسية ***Standard Form*** اي تحويل جميع القيود (ما عدا قيد عدم السالبية) الى متساويات (معادلات).

ت-تحديد نقاط الحل للمعادلات ***Solution Points*** وذلك من خلال معرفة حل كل منهما بالنسبة للمتغير الاول بدلالة المتغير الثاني.

ث-التمثيل البياني لنقاط الحل ***Graphical Presentation*** ، إذ يتم تمثيل نقاط حل كل معادلة بخط مستقيم واصل بين نقطتي الحل.

ج- تحديد نقاط منطقة الحلول الممكنة ***Feasible Solution Region*** ، وتختلف منطقة الحلول الممكنة حسب الامثلية المطلوبة لدالة الهدف.

ح- تحديد الحل الامثل ***Optimal Solution*** الذي يحقق الامثلية المطلوبة عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول في دالة الهدف.

تجدر الاشارة الى ان هذه الطريقة واجهت انتقادات عدة منها انه في حالة احتواء المشكلة المراد حلها على ثلاثة متغيرات او اكثر فيصعب تمثيلها بيانيا لانها تستلزم الاستعانة بنظريات هندسية خاصة ، كما تستلزم الدقة في الرسم للحصول على نتائج دقيقة ، الامر الذي عد هذه الطريقة محدودة الفائدة ، مما يستلزم اللجوء الى طرائق اخرى كالطريقة المبسطة وغيرها.

مثال (١-٩): مشروع اقتصادي يصنع فراش نوم وخيام ، كل فراش نوم يستلزم ٢ ساعة للقطع و ٥ ساعات للخياطة ، و ساعة واحدة للطلاء ضد الماء ، وكل خيمة تتطلب ساعة واحدة للقطع ، و ٥ ساعات للخياطة ، و ٣ ساعات للطلاء ضد الماء. وكانت موارد الشركة ١٤ ساعة للقطع ، و ٤٠ساعة للخياطة ، و ١٨ ساعة للطلاء ضد الماء في اليوم ، وان هامش الربح ٣٠ وحدة نقدية من الخيمة الواحدة ، و ٥٠ وحدة نقدية من الفراش.

المطلوب: اوجد الحل الامثل لهذا الانموذج الخطي؟

الحل

نطبق خطوات الحل السابقة :

١- ايجاد الصيغة الرياضية وكما ياتي:

نرمز لفراش النوم بالرمز x_1 وللخيمة بالرمز x_2 ثم نكون الجدول الاتي:-

المنتج ساعات العمل	x_1	x_2	طاقة المصنع القصوى
قطع	٢	١	١٤
خياطة	٥	٥	٤٠
طلاء	١	٣	١٨
الربح	٥٠	٣٠	

بعد وضع الجدول اعلاه تكون الصياغة الرياضية لمسالة البرمجة الخطية هي:-

دالة الهدف $Max\ \ z = 50x_1 + 30x_2$

$$Subject\ \ to:$$

قيد القطع: $2x_1 + x_2 \le 14$

قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 \le 40$

قيد الطلاء: $x_1 + 3x_2 \le 18$

قيد عدم السالبية : $x_1 , x_2 \ge 0$

٢- ايجاد الصيغة المعيارية او القياسية وكما ياتي:-

من قيد القطع: $2x_1 + x_2 = 14$

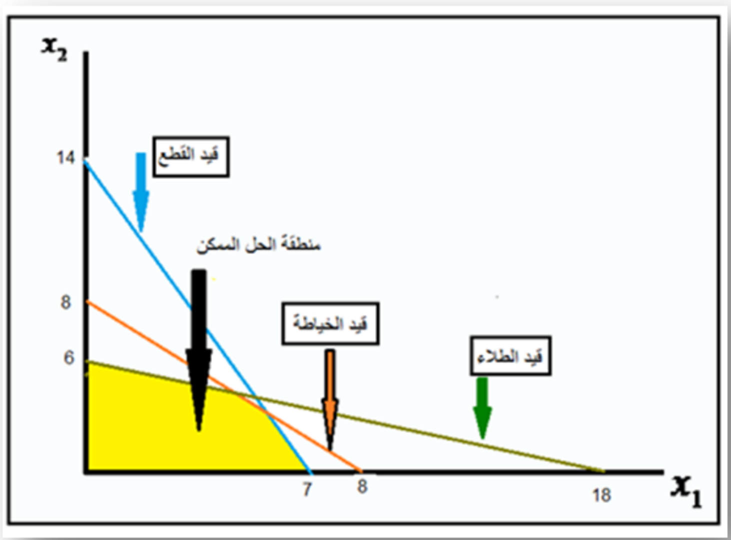
من قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$

من قيد الطلاء: $x_1 + 3x_2 = 18$

٣- تحديد نقاط الحل للمعادلات من خلال معرفة حل كل منهما بالنسبة لـ x_2 بدلالة x_1 ونفرض ان x_2 تساوي صفرا لايجاد x_1 ، ثم نفرض x_1 تساوي صفرا لايجاد x_2 ، او باسلوب اسهل ومختصر وذلك بقسمة الثوابت على معاملات المتغيرات لايجاد نقطة كل متغير ، اي ان:

نقاط الاحداثيات	الاحداثي x_2	الاحداثي x_1	
(7 , 14)	$14/1 = 14$	$14/2 = 7$	قيد القطع
(8 , 8)	$40/5 = 8$	$40/5 = 8$	قيد الخياطة
(18 , 6)	$18/3 = 6$	$18/1 = 18$	قيد الطلاء

٤- التمثيل البياني لنقاط الحل، إذ يتم تمثيل نقاط حل كل معادلة بخط مستقيم واصل بين احداثيات كل قيد ، وتمثل هذه ما يسمى بمنحنيات الربح المتساوي الميل ***Isoprofit Curves*** ويتكون الشكل البياني الاتي:



شكل (٤٨) التمثيل البياني للمثال (٩-١)

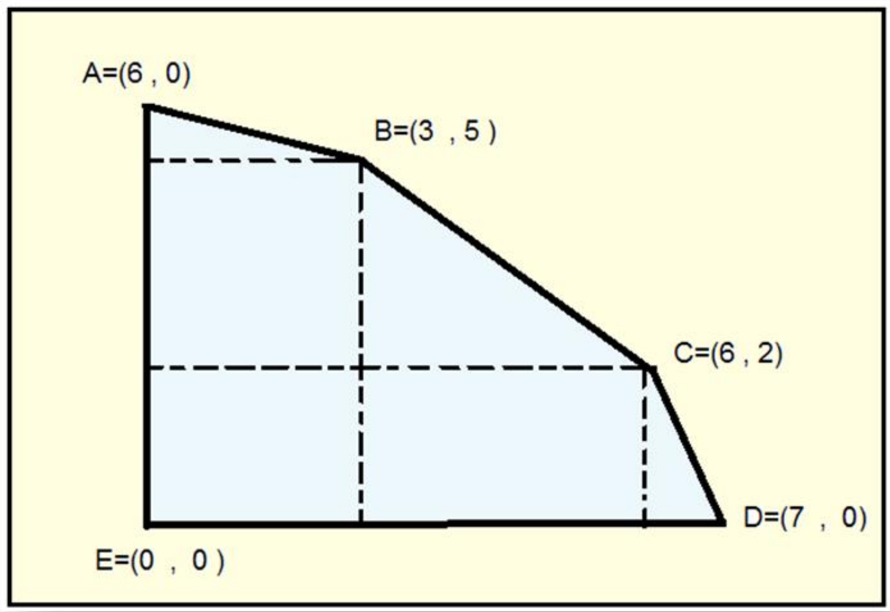
٥- تحديد نقاط منطقة الحلول الممكنة : وهي المنطقة المحدبة الى نقطة الاصل والمحددة بنقاط احداثية ناتجة من تقاطع منحنيات الارباح الممثلة لكل قيد . وتختلف منطقة الحلول حسب الامثلية المطلوبة لدالة الهدف، اذ نجد ان الامثلية المطلوبة هي تعظيم دالة الهدف وبالتالي فمنطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة باللون الاصفر اعلاه وبايجاد احداثيات النقاط الركنية ***Corner Points*** لمنطقة الحلول المقبولة، علما انه يوجد اكثر من طريقة لايجاد احداثيات النقاط وكما ياتي:

أ- طريقة الحساب البياني ***Graphical Calculating***

ب-طريقة الحساب الجبري ***Algebra Calculating***

أ- طريقة الحساب البياني ***Graphical Calculating***:

تتلخص هذه الطريقة بايجاد نقاط الاحداثيات من الرسم البياني مباشرة ، اذ عند تقاطع اي مستقيمين نسقط سهمين ، الاول على محور X_1 ونحدد الرقم على هذا المحور وهذا الرقم هو قيمة X_1 ، وبالمثل مع X_2 اذ ان:



شكل (٤٩) طريقة الحساب البياني للمثال (١-٩)

ب-طريقة الحساب الجبري:

نظرا لان تحديد احداثيات النقاط مباشرة من الرسم البياني قد تكون احيانا غير دقيقة ، وبالتالي من المجدي استخدام طريقة اكثر دقة في تحديد احداثيات نقاط التقاطع ، وتتلخص الطريقة الجبرية في حل معادلتي المستقيمين المتقاطعين ، فمثلا لايجاد النقطة B التي يتقاطع عندها معادلتان هما قيد الطلاء وقيد الخياطة:

قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$

قيد الطلاء : $x_1 + 3x_2 = 18$

بحل المعادلتين نجد ان النقطة B تساوي:

$$B = (3 , 5)$$

وكذلك الحال بالنسبة لبقية النقاط اي ان:

$$A = (6,0)$$
$$D = (7,0)$$
$$E = (0,0)$$
$$C = (6,2)$$

٦- تحديد الحل الامثل الذي يحقق التعظيم عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف، اذ ان النقطة التي تجعل دالة الهدف عند نهايتها العظمى هي احدى النقاط الركنية لمنطقة الحلول المحتملة وهي ابعد هذه النقاط عن نقطة الاصل وتسمى بالنقطة المتطرفة ***Extreme Point*** وبما ان دالة الهدف هي :

$$z = 50x_1 + 30x_2$$

فان:

النقاط الركنية	قيمة z	الاحداثيات
A	$z_A = 50 \times 6 + 30 \times 0 = 300$	$(x_1, x_2) = (6,0)$
B	$z_B = 50 \times 3 + 30 \times 5 = 300$	$(x_1, x_2) = (3,5)$
C	$z_C = 50 \times 6 + 30 \times 2 = 360$	$(x_1, x_2) = (6,2)$
D	$z_D = 50 \times 7 + 30 \times 0 = 350$	$(x_1, x_2) = (7,0)$
E	$z_E = 50 \times 0 + 30 \times 0 = 0$	$(x_1, x_2) = (0,0)$

وبهذه الطريقة نحدد النقطة التي تجعل قيمة دالة الهدف اكبر القيم وهي النقطة C (المستطيل المظلل) ، وان قيمة الارباح عندها تساوي ٣٦٠ ، وللحصول على اكبر ربح ممكن ينتج المشروع ٦ وحدات من الفراش ووحدتين من الخيام .

مثال (٢-٩)

اذا توافر لديك البرنامج الخطي الاتي:

$$Max\ z = 4x_1 + 8x_2 \quad Objective\ \ function$$

$$Subject\ \ to:$$

$$8x_1 + 10x_2 \le 120$$

$$5x_1 + 10x_2 \le 90$$

$$10x_1 + 7x_2 \le 140$$

$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

حدد قمة كل من x_1 و x_2 اللذين بحققان النهاية العظمى لدالة الهدف بيانيا؟

الحل

احداثيات القيد الاول :

$8x_1 + 10x_2 \le 120$	
$(15,12)$	(x_1, x_2)

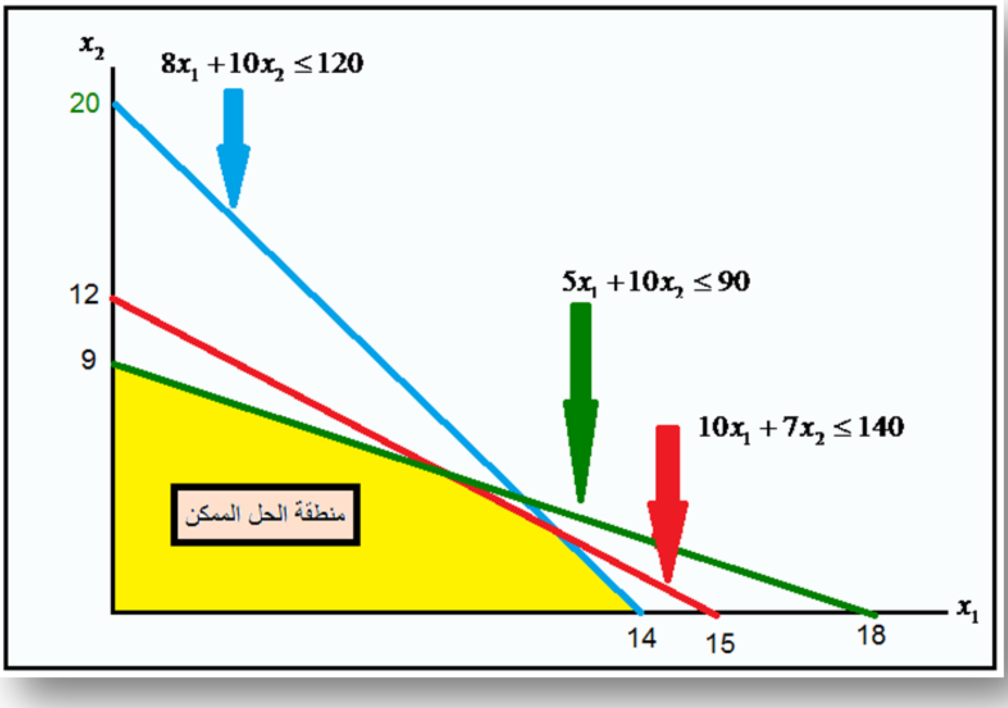
احداثيات القيد الثاني:

$5x_1 + 10x_2 \le 90$	
$(18,9)$	(x_1, x_2)

احداثيات القيد الثالث:

$10x_1 + 7x_2 \le 140$	
$(14,20)$	(x_1, x_2)

وفيما يتعلق بالتمثيل البياني لاحداثيات القيود:



شكل (٥٠) التمثيل البياني لقيود المثال (٢-٩)

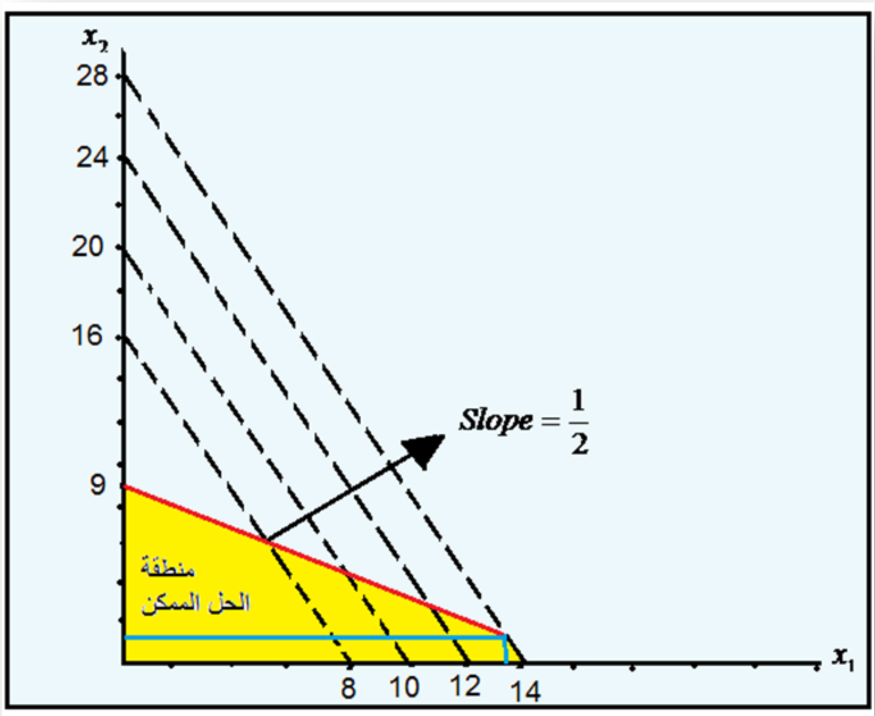
ثم ايجاد ميل دالة الهدف:

لايجاد الحل الامثل في نطاق منطقة الحلول الممكنة ، نرسم دالة الهدف كسلسلة من منحنيات الربح المتساوية (المتوازية) إذ ان ميل دالة الهدف هو عبارة عن حاصل قسمة معامل x_1 على معامل x_2 . وبما ان دالة الهدف هي:-

$$z = 4x_1 + 8x_2$$

فهذا يعني ان الميل ***Slope*** هو $\frac{1}{2}$

ويتم رسم هذه الخطوط او المنحنيات ذات الميل $\frac{1}{2}$ بدءا من نقطة الاصل والابتعاد تدريجيا الى الخارج (بالميل نفسه) عن نقطة الاصل الى ان نصل الى الخط الذي يلامس ابعد نقطة ركنية من نقطة الاصل بشرط ان تكون من بين النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة. بمعنى اوضح نختار معاملين لـ x_1 و x_2 الذي يكون حاصل قسمتهما يساوي $\frac{1}{2}$ ثم نصل هذين الرقمين بمستقيم حتى نصل للمستقيم الذي يلامس ابعد نقطة ركنية في منطقة الحلول الممكنة. فمثلا ارقام احداثي x_1 هي ١ و ٢ و ٤ و ٦ وهكذا ، بينما ارقام x_2 هي ٢ و ٤ و ٨ و ١٢ وهكذا ، إذ لو قسمنا اي رقم من x_1 على نفس تسلسل رقم من x_2 نحصل على الميل نفسه وكما هو موضح في الشكل البياني الاتي:-



شكل (٥١) ايجاد ميل دالة الهدف

مثال(٣-٩)

جد القيمة العظمى لمشكلة البرمجة الخطية الاتية:

Z=3x+2y
Subject to
$x+2y \le 4$
$x-y \ge 1$
$x,y \ge 0$

الحل//

عند النقطة $(0,0)$ فان .... $z = 3(0) + 2(0) = 0$

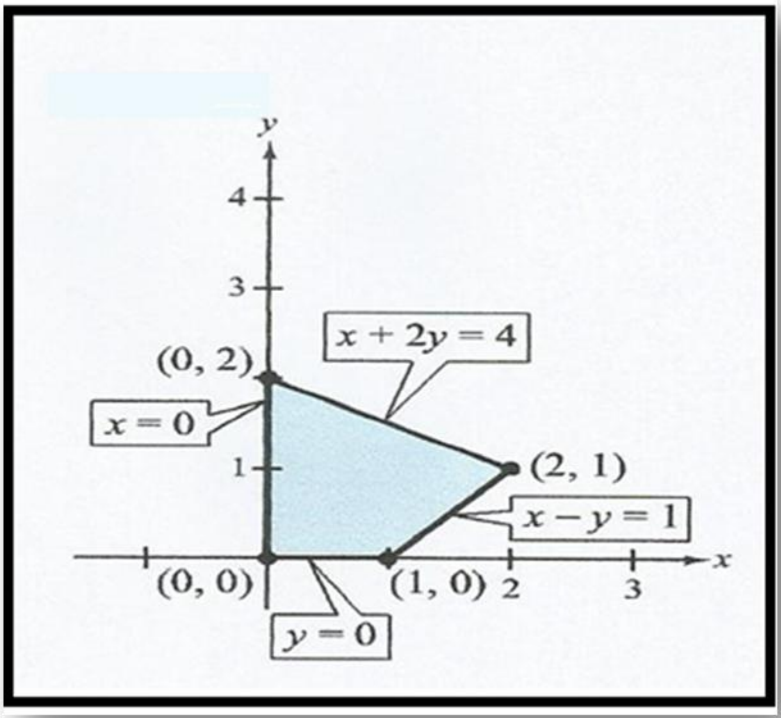
عند النقطة $(1,0)$ فإن .... $z = 3(1) + 2(0) = 3$

عند النقطة $(2,1)$ فإن .... $z = 3(2) + 2(1) = 8$

عند النقطة $(0,2)$ فإن .... $z = 3(0) + 2(2) = 4$

عليه فان القيمة العظمى لـ z هو ٨ وهذا يتحقق عندما $x = 2$ و $y = 1$

ويشير الشكل الاتي الى التمثيل البياني للمشكلة اعلاه:-



شكل (٥٢) التمثيل البياني للمثال (٣-٩)

مثال (4-9):

جد القيمة العظمى لدالة الهدف الاتية:-

$$z = 4x + 6y \quad \textit{Objective function}$$

$$\textit{where } x \geq 0 \ \textit{ and } \ y \geq 0 \ , \textit{ subject to the constraints}$$

$$-x + y \leq 11$$

$$x + y \leq 27$$

$$2x + 5y \leq 90$$

الحل//

$$At \ (0,0): \ z = 4(0) + 6(0) = 0$$

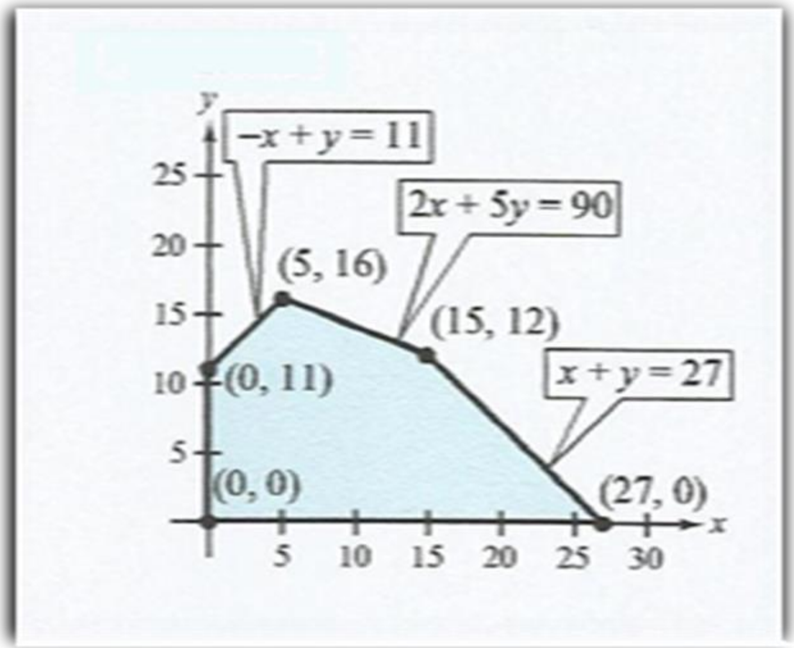
$$At \ (0,11): \ z = 4(0) + (6(11) = 66$$

$$At \ (5,16): z = 4(5) + 6(16) = 116$$

$$At \ (15,12): z = 4(15) + 6(12) = 132 \qquad (\textit{Maximum value of } \ z)$$

$$At \ (27,0): z = 4(27) + 6(0) = 108$$

يشير الشكل البياني الاتي الى التمثيل البياني للمشكلة



شكل (٥٣) التمثيل البياني للمثال (٤-٩)

مثال (٥-٩):

جد القيمة الدنيا لدالة الهدف الاتية:-

$z = 5x + 7y \quad Objective \quad function$

$where\ x \geq 0 \quad and \quad y \geq 0$, $subject\ to\ the\ constraints$

$2x + 3y \geq 6$

$3x - y \leq 15$

$-x + y \leq 4$

$2x + 5y \leq 27$

الحل//

$At \quad (0,2):\ z = 5(0) + 7(2) = 14 \quad Minimum \quad value\ of\ z$

$At\ (0,4):\ z = 5(0) + 7(4) = 28$

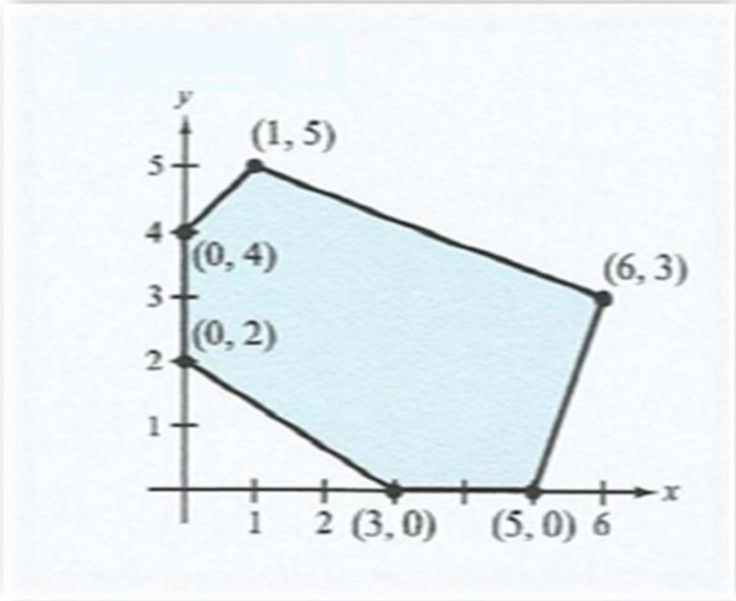
$At\ (1,5): z = 5(1) + 7(5) = 40$

$At\ (6,3): z = 5(6) + 7(3) = 51$

$At\ (5,0): z = 5(5) + 7(0) = 25$

$At\ (3,0): z = 5(3) + 7(0) = 15$

والشكل الاتي يمثل الحل البياني للمشكلة :-



شكل (٥٤) التمثيل البياني للمثال (٥٩-٩)

مثال(٦-٩):

جد القيمة العظمى لدالة الهدف الاتية:

$$Max\ \ z = 8x_1 + 6x_2$$
$$Subject\ \ to$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 48$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

الحل:

نرسم المتباينات كافة الواردة في المسألة بشكل خطوط مستقيمة لان المتباينات من الدرجة الاولى ، ثم يتم تحديد اتجاه كل متباينة بحسب الاشارة الواردة فيها فيما اذا كان اكبر ويساوي او اقل ويساوي.

$$4x_1 + 2x_2 = 60$$
$$if\ \ x_1 = 0 \ \rightarrow\ \ x_2 = 30 \qquad (0\ ,\ 30)$$
$$if\ \ x_2 = 0 \rightarrow\ \ x_1 = 15 \qquad (15\ ,\ 0)$$

$$2x_1 + 4x_2 = 48$$
$$if\ \ x_1 = 0 \ \rightarrow\ \ x_2 = 12 \qquad (0\ ,\ 12)$$
$$if\ \ x_2 = 0 \rightarrow\ \ x_1 = 24 \qquad (24,\ 0)$$

نقطة تقاطع المستقيمين :

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 &= 60 \\
2x_1 + 4x_2 &= 48 \qquad \times(-2)
\end{aligned}
$$

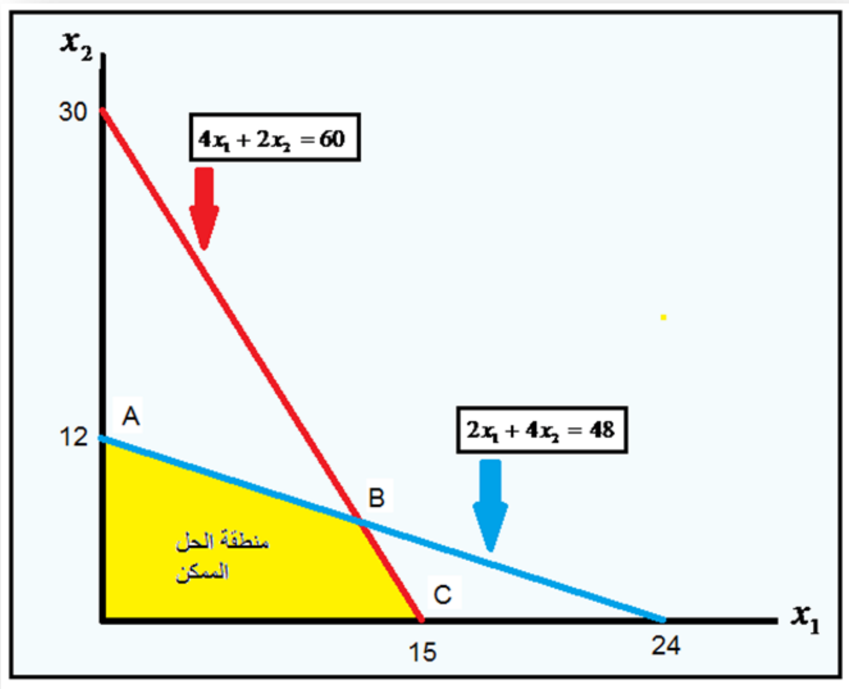
$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 &= 60 \\
-4x_1 - 8x_2 &= -96
\end{aligned}
$$

$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$
\begin{aligned}
-6x_2 &= -36 \\
x_2 &= 6 \\
\therefore x_1 &= 12
\end{aligned}
$$

والشكل البياني يشير الى منطقة الحل الممكن



شكل (٥٥) التمثيل البياني للمثال(٦-٩)

بعد تحديد منطقة الحل الممكن نحدد النقاط المتطرفة لتلك المنطقة وهي النقاط (C,B,A) ونختار بعد ذلك النقطة المتطرفة التي تجعل دالة الهدف في قيمتها المثلى (العظمى) وتمثل النقطة B هي النقطة التي تعظم دالة الهدف اي عندما $(x_1 = 12)$ و$(x_2 = 6)$

النقاط	قيمة z $z = 8x_1 + 6x_2$	الاحداثيات
A	$z = 8\times 0 + 6\times 12 = 72$	$(x_1, x_2) = (0,12)$
B	$z = 8\times 12 + 6\times 6 = 132$	$(x_1, x_2) = (12,6)$
C	$z = 8\times 15 + 6\times 0 = 120$	$(x_1, x_2) = (15,0)$

مثال (٧-٩):

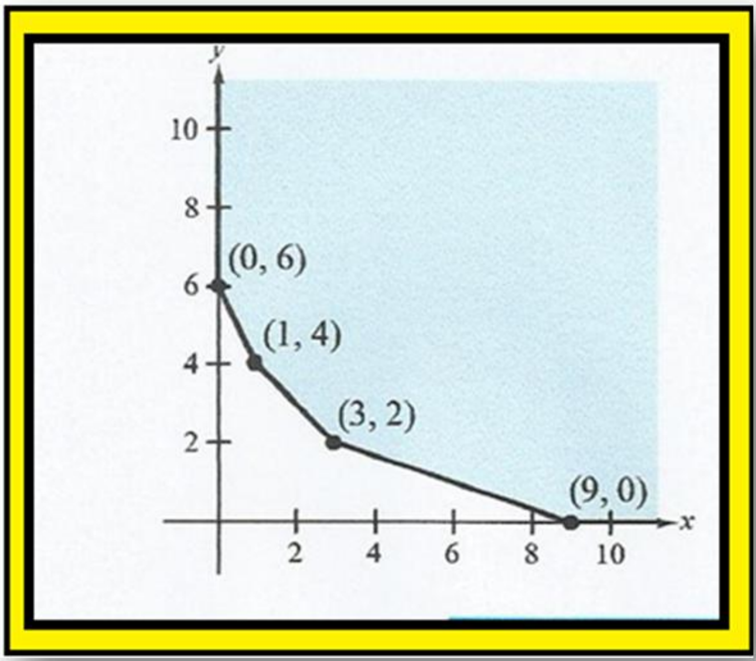
جد القيمة الدنيا لدالة الهدف الاتية:

$$C = 0.12x + 0.15y$$
$$Subject\ \ to$$
$$60x + 60y \geq 300$$
$$12x + 6y \geq 36$$
$$10x + 30y \geq 90$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

الحل:

$$At\quad (0,6): C = 0.12(0) + 0.15(6) = 0.90$$
$$At\quad (1,4): C = 0.12(1) + 0.15(4) = 0.72$$
$$At\quad (3,2): C = 0.12(3) + 0.15(2) = 0.66$$
$$At\quad (9,0): C = 0.12(9) + 0.15(0) = 1.08$$

عليه فان القيمة الدنيا التي تم الحصول عليها عند النقطة $(3,2)$ وتساوي ٠,٦٦ اي عند قيمة $(x = 3)$ و $(y = 2)$ ، والشكل الاتي يشير الى تمثيل الحل بيانيا.



شكل (٥٦) التمثيل البياني للمثال (٧-٩)

مثال (٨-٩) :

مستخدما الرسم البياني اوجد امثلية هذه الدالة:

$$TC = 18x_1 + 3x_2$$

$$Subject\ \ to$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$9x_1 \geq 6$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

الحل:

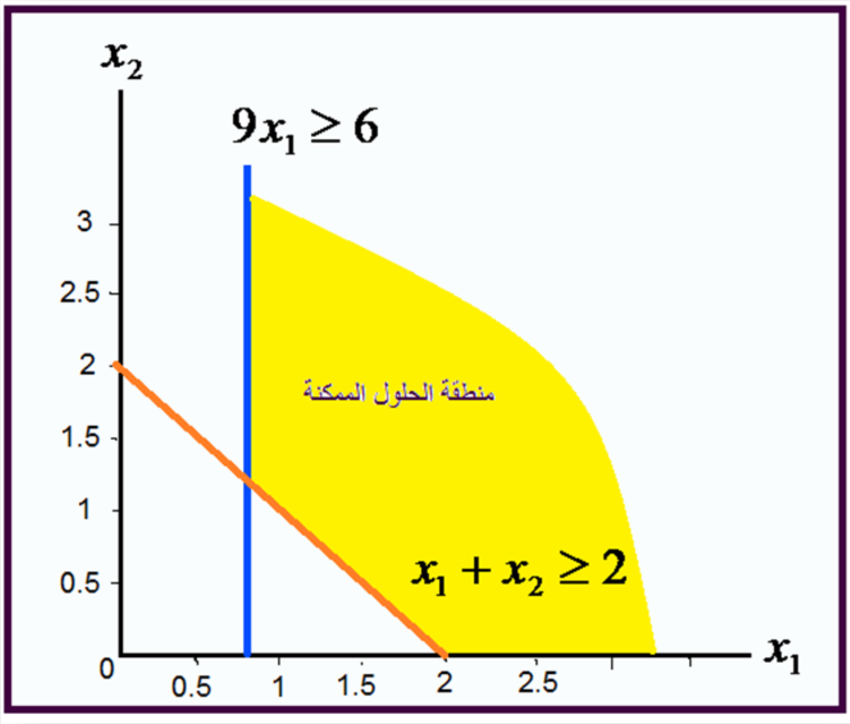
احداثيات القيد الاول:

$(x_1 + x_2 \geq 2)$	
(x_1, x_2)	$(2\ ,\ 2)$

احداثيات القيد الثاني:

$(9x_1 \geq 6)$	
(x_1, x_2)	$(\frac{2}{3}, 0)$

وبالرسم البياني لاحداثيات القيود نجد



شكل (٥٧) التمثيل البياني للمثال (٨-٩)

ومن الرسم نستطيع ان نحدد احداثيات نقاط منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المقعرة الى نقطة الاصل وتتحدد بالاحداثيات :

$$C = (2\ ,\ 0)$$

$$B = \left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\right)$$

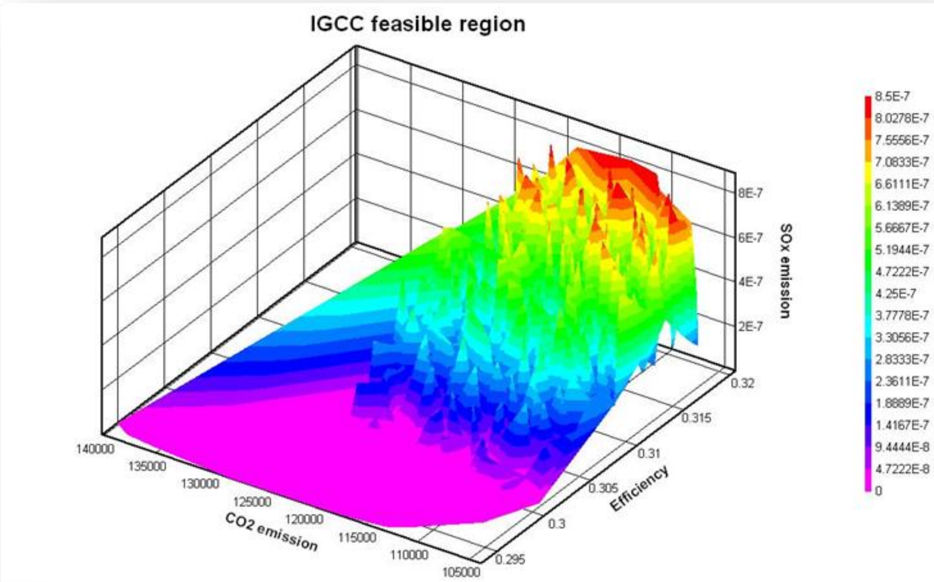
ثم نقوم تحديد الحل الامثل الذي يحقق التدنية لدالة الهدف عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف إذ ان النقطة التي تجعل دالة الهدف عند نهايتها الصغرى هي احدى النقاط الركنية لمنطقة الحلول المحتملة وهي اقرب هذه النقاط الى نقطة الاصل.

النقاط	قيمة TC	الاحداثيات
النقطة C	$TC_C = (18 \times 2) + (3 \times 0) = 36$	$(x_1 , x_2) = (2 , 0)$
النقطة B	$TC_B = (18 \times 2/3) + (3 \times 4/3) = 16$	$(x_1 , x_2) = (2/3 , 4/3)$

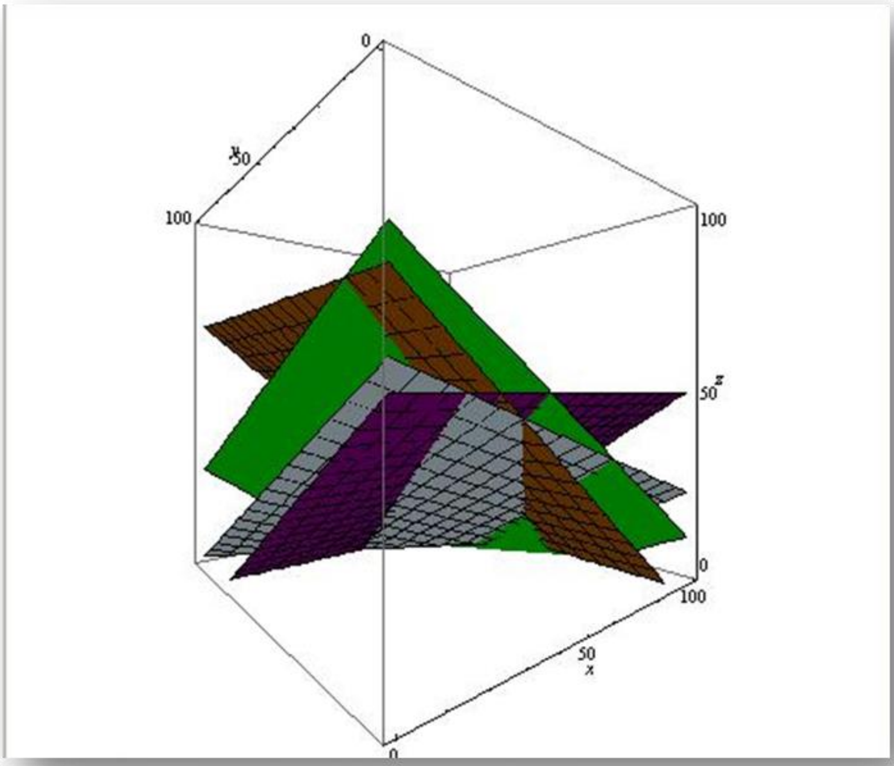
ومن ثم فإن قيمة TC الصغرى تتحقق عند النقطة B و $TC_B = 16$ تصل الى اقل ما يمكن.

مما سبق يتضح ان الشكل البياني او الطريقة البيانية يفتقد الى الدقة احيانا لانه اكثر تعرضا للاخطاء الشخصية ، كما انه يصعب حل المسائل ذات المتغيرات الثلاثة او اكثر بالطريقة البيانية ، الامر الذي تطلب اللجوء الى طريقة اكثر مرونة ودقة واقل جهدا من الطريقة البيانية، وتسمى هذه الطريقة بالطريقة الجبرية.

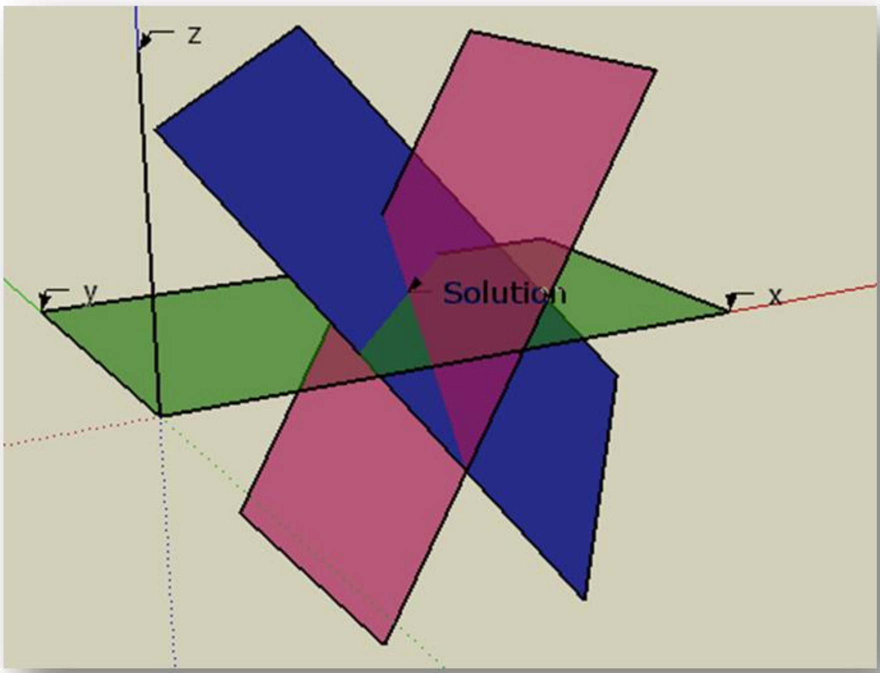
والاشكال البيانية الاتية توضح امكانية الوصول الى الحل في حالة وجود اكثر من متغيرين باستخدام الحل البياني إلا ان هذا الحل يكون صعبا على الكثير ممن يتصدى للحل في هذه الحالة فضلا عن عدم وضوح منطقة الحل الامثل الامر الذي يتطلب اللجوء الى حلول اخرى.



شكل (٥٨) منطقة الحل الامثل في حالة وجود اكثر من متغيرين



شكل (٥٩) التمثيل المجسم لمنطقة الحل الامثل لمشكلة برمجة خطية تحتوي اكثر من متغيرين



شكل (٦٠) التمثيل البياني لمشكلة برمجة خطية ذات ثلاثة متغيرات

٢- الطريقة الجبرية ***Algebraic Solution***

سنتعرض الى الطريقة الجبرية في حالتين هما:

اولا: تعظيم دالة الهدف ***Maximization***

ينبغي اتباع الخطوات الاتية في حالة التعظيم وكما يأتي:

١- تكوين الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية اي تحديد دالة الهدف والقيود رياضيا.

٢- تكوين الصيغة المعيارية او القياسية ، اي تحويل المتباينات جميعها (فيما عدا قيد عدم السالبية) الى متساويات (معادلات) مع اضافة متغيرات مساعدة ، بمعنى عندما تكون القيود اصغر من او يساوي تتم اضافة متغيرات مساعدة موجبة الاشارة تسمى بالمتغيرات الوهمية ***Slack Variables*** وتعبر هذه المتغيرات عن الطاقة غير المستغلة، وتتم اضافة متغير لكل قيد. ونلاحظ ان عدد المتغيرات المساعدة (المتغيرات الوهمية) ينبغي ان يساوي عدد القيود او المتباينات وان معامل كل متغير مساعد في دالة الهدف يساوي صفرا.

٣- تحديد عدد الحلول الممكنة ***Feasible Solution Number(F.S.N)*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق ***Combinations*** اذ ان:

$$F.S.N = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اذ ان:

$F.S.N$ = عدد الحلول الممكنة

n = عدد المتغيرات

r = عدد القيود

٤- تكوين جدول بدائل الحل ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف. وعند حساب قيمة المتغيرات لكل حل بديل ينبغي رفض اية قيمة سالبة، اي ان الحل يعد مرفوضا اذا صادفنا قيمة سالبة لاي متغير، ليتفق مع

شرط عدم السالبية ، وبالتعويض بقيم المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل.

٥- تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف ، حيث نختار اكبر قيمة في حالة اذا كانت الامثلية هي تعظيم دالة الهدف.

مثال(٩-٩)

مستخدما الطريقة الجبرية اوجد حل النظام الخطي الاتي:

$$
\begin{aligned}
& z = 8x_1 + 6x_2 \qquad \textit{Objective function} \\
& \textit{Subject to} \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\
& 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\
& x_1 \ , \ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل:

١- تحويل المتباينات الى متساويات واضافة متغيرين وهميين موجبي الاشارة لوجود متباينتين كما ان معاملات هذه المتغيرات ستكون اصفارا في دالة الهدف وكما ياتي:-

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + S_1 &= 60 \\
2x_1 + 4x_2 + S_2 &= 48
\end{aligned}
$$

وتكون دالة الهدف هي:-

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

٢- تحديد عدد الحلول الممكنة باستخدام التوافيق ، عدد المتغيرات=٤ (x_1 , x_2 , S_1 , S_2) وعدد القيود=٢ فنحصل على عدد الحلول الممكنة كالاتي:-

$$F.S.N = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$F.S.N = {}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

اذن عدد الحلول الممكنة = ٦ حلول ممكنة وعلى هذا الاساس يتكون جدول الحل من ٤ اعمدة (بعدد المتغيرات) وعمود لدالة الهدف و ٦ صفوف (بعدد الحلول الممكنة)

٣- تكوين جدول بدائل الحل ، ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف ، ويجب ان نلاحظ عند حساب قيم المتغيرات لكل حل بديل رفض اية قيمة سالبة ، وهذا يعني رفض الحل في حالة وجود قيمة سالبة تماشيا مع شرط عدم السالبية كما تم ذكره سابقا . وبالتعويض بقيم هذه المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل، وكما في الجدول الاتي:

جدول الحلول الممكنة

المتغيرات **الحلول** **البديلة**	x_1	x_2	S_1	S_2	$z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$
١	٠	٠	٦٠	٤٨	٠
٢	٠	٣٠	٠	سالب	مرفوض
٣	٠	١٢	٣٦	٠	٧٢
٤	١٥	٠	٠	١٨	١٢٠
٥	٢٤	٠	سالب	٠	مرفوض
٦	٦	١٢	٠	٠	١٣٢

أ: حساب الصف الاول من الجدول (البديل رقم ١)

هنا قيمة كل من x_1 و x_2 = صفر وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيم S_1 و S_2 وكما ياتي:-

$$4(0) + 2(0) + S_1 = 60$$
$$2(0) + 4(0) + S_2 = 48$$
$$\therefore S_1 = 60 \quad \& \quad S_2 = 48$$

ثم نعوض القيم في دالة الهدف لايجاد قيمة الربح z كاحد الحلول الممكنة:

$$z = 8(0) + 6(0) + 0(60) + 0(48) = 0$$

ب: حساب العمود الثاني :

هنا قيمة x_1 و S_1 =٠ ، وبالتعويض في المعادلات نحصل على x_2 و S_2 :

$$4(0)+2(x_2)+0=60 \quad \rightarrow \; x_2=30$$
$$2(0)+4(x_2)+S_2=48 \rightarrow 4(30)+S_2 \rightarrow S_2=48-120 \rightarrow S_2=-72$$

وطالما حصلنا على قيمة سالبة فإن الحل مرفوض ولاداعي لايجاد بقية المتغيرات لان هذا يتنافى مع قيد عدم السالبية

ج : حساب العمود الثالث:

هنا قيمة هنا قيمة x_1 ، $S_2=$٠ وبالتعويض في المعادلات نحصل على $S_2\,, x_2$:

$$4x_2=48 \;\Rightarrow\; \therefore x_2=12$$
$$S_1=60-24 \Rightarrow \therefore S_1=36$$

ثم نعوض القيم في دالة الهدف فنحصل على الاتي:-

$$z=6\times12=72$$

د: حساب العمود الرابع :

قيمة كل من $0=S_1\,, x_2$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على الاتي:-

$$x_1=15$$
$$S_2=18$$
$$\therefore z=15\times8=120$$

هـ : حساب العمود الخامس:

قيمة كل من $0=S_2\,, x_2$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على :

$$x_1=24$$
$$S_1=-36$$

وطالما حصلنا على قيمة سالبة فإن الحل مرفوض

و: حساب العمود السادس : الان باعتبار كل من $0=S_2 \;, \; S_1$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيمتي $x_2 \;, x_1$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 &= 60 ....(1) \qquad \times(2) \\
2x_1 + 4x_2 &= 48 ....(2) \qquad \times(-4)
\end{aligned}
$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 4x_2 &= 120 \\
-8x_1 - 16x_2 &= -192
\end{aligned}
$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$
\begin{aligned}
-12x_2 &= -72 \\
x_2 &= 6 \\
\therefore x_1 &= 12
\end{aligned}
$$

ثم نعوض في دالة الهدف للحصول على قيمة الربح كأحد الحلول الممكنة اي ان:-

$$
\begin{aligned}
z &= 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \\
z &= 8(12) + 6(6) + 0 \\
z &= 132
\end{aligned}
$$

٤- تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف ، ونختار اكبر القيم في حالة اذا كانت الامثلية المطلوبة هي تعظيم دالة الهدف إذ نجد ان الصف السادس يحقق اعلى قيم وبذلك فإن القيم المتحصل عليها لتعظيم دالة الهدف هي:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 12 \\
x_2 &= 60 \\
z &= 132
\end{aligned}
$$

ثانيا: تدنية دالة الهدف *Minimization*

ينبغي اتباع الخطوات الاتية عند استخدام الحل الجبري في حالة التدنية:

١- تكوين الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية .

٢-تكوين الصيغة المعيارية او القياسية ، اي تحويل جميع المتباينات (فيما عدا قيد السالبية) الى معادلات مع اضافة متغيرات مساعدة عندما تكون القيود اكبر من او يساوي تتم اضافة متغيرات مساعدة سالبة الاشارة تسمى بالمتغيرات الفائضة ***(Surplus***

(Variables اذ تتم اضافة متغير لكل قيد ، وعدد المتغيرات المساعدة التي تضاف يساوي عدد المتباينات ومعامل كل متغير مساعد تتم اضافته ليساوي صفرا في دالة الهدف.

٣-تحديد عدد الحلول الممكنة ***F.S.N*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق.

٤-تكوين جداول بدائل الحل، ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف. وينبغي ان نلاحظ عند حساب قيمة المتغيرات لكل حل بديل رفض اي قيمة سالبة ، وهذا كما ذكرنا سابقا تماشيا مع شرط عدم السالبية ، وبالتعويض بقيم هذه المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل.

٥-تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف، اذ نختار اصغر قيمة لان الامثلية المطلوبة هنا هي تدنية دالة الهدف.

مثال (١٠-٩)

مستخدما الطريقة الجبرية جد امثلية دالة الهدف الاتية:

$$\begin{aligned}
&TC = 7x_1 + 4x_2 \quad Objective \quad function \\
&Subject \ to \\
&3x_1 + 2x_2 \geq 48 \\
&9x_1 + 4x_2 \geq 108 \\
&3x_1 + 5x_2 \geq 65 \\
&x_1 \ , x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل:

تحويل المتباينات الى معادلات مع اضافة متغيرات فائضة سالبة الاشارة(عددها ثلاثة) بعدد المتباينات:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - S_1 &= 48 \\
9x_1 + 4x_2 - S_2 &= 108 \\
3x_1 + 5x_2 - S_3 &= 65
\end{aligned}$$

وكذلك تصبح دالة الهدف بعد اضافة ثلاثة متغيرات فائضة كالاتي:-

$$TC = 7x_1 + 4x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3$$

نحدد الان عدد الحلول الممكنة ***F.S.N*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق :

$$F.S.N = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$F.S.N = {}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

وهذا يعني ان هناك ١٠ حلول ممكنة اي ان الجدول سيتكون من ٥ اعمدة (بعدد المتغيرات) و ١٠ صفوف (بعدد الحلول الممكنة) وكما ياتي:-

جدول الحلول الممكنة

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$TC = 7x_1 + 4x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3$
١	٠	٠	سالب			مرفوض
٢	٠	٢٤	٠	سالب		مرفوض
٣	٠	٢٧	٦	٠	٧٠	١٠٨
٤	٠	١٣	سالب		٠	مرفوض
٥	١٦	٠	٠	٣٦	سالب	مرفوض
٦	١٢	٠	سالب	٠		مرفوض
٧	٣٢,٥	٠	٤٩,٥	١٨٩,٥	٠	مرفوض
٨	٤	١٨	٠	٠	٣٣	١٠٠
٩	١٠	٩	٠	١٨	٠	١٠٦
١٠	٧,٥	٩,٩	سالب	٠	٠	مرفوض

الان سنجري حسابات الصفوف والاعمدة المحددة في الجدول اعلاه:

حساب الصف الاول من الجدول (البديل رقم ١):

من الصف الاول قيمة كل من x_1 و x_2 يساوي صفرا وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيم كل من S_1 و S_2 و S_3 وكما ياتي:-

$$3(0) + 2(0) - S_1 = 48 \quad \rightarrow \quad S_1 = -48$$

$$9(0) + 4(0) - S_2 = 108$$

$$2(0) + 5(0) - S_3 = 65$$

وطالما قيمة S_1 سالبة فان الحل مرفوض ولاداعي لايجاد باقي قيم المتغيرات .

ويستمر الامر بالنسبة لبقية الصفوف وسنجد في نهاية الحل ان الحل الامثل هو في الصف الثامن إذ ان قيم المتغيرات هي كالاتي:-

$$TC = 100$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 18$$

الانموذج المقابل واسعار الظل *Dual model and Shadow Price*:

لكل مسألة من مسائل البرمجة الخطية التي تبحث في تعظيم الدالة الى حدها الاعلى ***Maximization*** هناك مسالة مقابلة لها تبحث في تصغير الدالة الى حدها الادنى ***Minimization*** ، كذلك فإن لكل مسألة في تدنية الدالة لها مسالة مقابلة لها تبحث في امكانية تعظيم الدالة ، ويمكن التعبير عن ذلك بالاتي:-

الصيغة الاولية ← الصيغة المقابلة

صيغة تعظيم ← صيغة تدنية

صيغة تدنية ← صيغة تعظيم

اهمية دراسة الانموذج المقابل:

١- يمكن حل مسائل التعظيم بصيغة مسائل التدنية والعكس صحيح بمعنى اذا كانت لدينا مسألة تدنية فانه يمكن حلها بالخطوات نفسها لمسألة التعظيم متى ما حصلنا على انموذج التعظيم المقابل وهذا يوفر الجهد لدراسة الطرائق البديلة .

٢- اذا كانت دالة الهدف تحتوي على ثلاثة متغيرات وقيدين يحددان طبيعة المسألة إذ ان هذه النوعية من مسائل البرمجة الخطية يصعب حلها بالطرائق البيانية .

قواعد التحويل للحصول على الانموذج المقابل

عند اشتقاق الانموذج المقابل من الانموذج الاصلي يلاحظ الاتي:

١-اذا كانت دالة الهدف تعظيم في المشكلة الاولية فإن دالة الهدف تصبح تدنية في المشكلة المقابلة والعكس صحيح.

٢-معاملات دالة الهدف في المشكلة الاولية تصبح ثوابت في المشكلة المقابلة وثوابت القيود في المشكلة الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة المقابلة.

٣-مصفوفة معاملات المتغيرات X's في قيود المشكلة الاولية يتم تحويرها اي جعل الصفوف اعمدة والاعمدة صفوف لتصبح معاملات المتغيرات Y's في قيود المشكلة المقابلة.

٤-اشارات المتباينات (القيود) تتعكس فإذا كانت اشارات المتباينات في المشكلة الاولية اقل من او يساوي تصبح اكبر من او يساوي والعكس صحيح ، اما قيد السالبية فيبقى كما هو من دون تغيير، وبشكل عام اذا كان لدينا الصيغة الاتية:

$$\begin{aligned}
&Max\,\pi = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots\ldots. + P_nX_n \\
&Subject\ \ to \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{1n}x_n \le C_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{2n}x_n \le C_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{mn}x_n \le C_m
\end{aligned}$$

$$X_i \ge 0 \qquad i = 1, 2\ , 3\ ,\ldots\ldots\ldots, n$$

يمكن اشتقاق الصيغة المقابلة للصيغة اعلاه وكما ياتي:-

$$\begin{aligned}
&Min\ \ TC = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots\ldots. + C_mY_m \\
&Subject\ \ to \\
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{1n}y_n \le P_1 \\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{2n}y_n \le P_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots\ldots\ldots. + a_{mn}y_m \le P_n \\
&\quad Y_i \ge 0 \qquad i = 1, 2\ , 3\ ,\ldots\ldots\ldots, m
\end{aligned}$$

اسعار الظل في الانموذج المقابل Shadow Prices in the dual Model

تعد اسعار الظل عن الكلفة الحدية للموارد النادرة ، ويشير سعر الظل لمورد ما الى زيادة او نقص الارباح نتيجة لزيادة او نقص وحدات هذا المورد بوحدة واحدة. كما يشير عمود الثوابت في الانموذج الثنائي الى سعر الظل (السعر المحاسبي او السعر الدفتري) . واسعار الظل ليست سعرا سوقيا فهي اسعار لموارد موجودة اصلا في المنشأة اي مقيدة دفتريا وليست اسعار السوق الحالية التي ربما تزيد او تنقص ومن ثم فان هذه الاسعار يطلق عليها اسعار ظل لانها لا تحتوي على تكلفة الفرصة البديلة وبذلك فهي تعبر عن الكلفة الحدية للموارد. ونلاحظ ان معاملات دالة الهدف في الانموذج الاولي تصبح اسعار ظل في الانموذج الثنائي(المقابل) إذ نجد ان معاملات دالة الهدف وهي $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_n$ هي نفسها اسعار الظل في الانموذج المقابل.

مثال (١١-٩)

عبر عن البرنامج الخطي الاتي في الصورة الاتية (تدنية)

$$TC = 5X_1 + 2X_2 + X_3$$
$$Subject\ \ to$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$
$$6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30$$
$$7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 50$$
$$X_1\ ,\ X_2,\ X_3 \geq 0$$

الحل :

سيتم تحويل صيغة التدنية الى الصيغة المقابلة وكما ياتي:-

الصيغة الاولية ← اشتقاق الصيغة المقابلة

الامثلية (تدنية) ← تعظيم

الثوابت ← تصبح معاملات دالة الهدف

معاملات دالة الهدف ← تصبح ثوابت

اشارة المتباينة اكبر او يساوي $\geq$ ← تصبح اصغر او يساوي $\leq$

الاعمدة ← تصبح صفوف

وبذلك يكون الانموذج المقابل هو :

$$\pi = 20Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3 + 50Y_4$$
$$Subject\ \ to$$
$$2Y_1 + 6Y_2 + 7Y_3 + Y_4 \leq 5$$
$$3Y_1 + 8Y_2 + Y_3 + 2Y_4 \leq 2$$
$$Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 \leq 1$$

$$Y_1\ , Y_2\ , Y_3\ ,Y_4 \geq 0$$

مثال (١٢-٩)

حول الصيغة الاولية المتمثلة بتدنية دالة الهدف الى الصيغة المقابلة (تعظيم دالة الهدف)

$$Min\ TC = 25X_1 + 32X_2 + 55X_3 \qquad Objective\ \ function$$
$$Subject\ \ to$$
$$4X_1 + 6X_2 + 9X_3 \geq 60$$
$$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \geq 45$$
$$X_i \geq 0$$

الحل:

الصيغة الثنائية المقابلة

$$Max\ \pi = 60X_1 + 45X_2 \qquad Objective\ \ function$$
$$Subject\ \ to$$
$$4Y_1 + 3Y_2 \leq 25$$
$$6Y_1 + 2Y_2 \leq 32$$
$$9Y_1 + 5Y_2 \leq 55$$
$$Y_i \geq 0$$

٤-الطريقة المبسطة Simplex Method

تعد طريقة السمبلكس طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول لمسائل البرمجة الخطية. وقد طورت هذه الطريقة من عالم الرياضيات الامريكي جورج دانتزج عام ١٩٤٧ ، وتستند هذه الطريقة على اساس الابتداء بحل معين يعد مقبولا ثم تستمر باسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل الى ان نحصل بعد عدد معين من الخطوات الى الحل الامثل. وينبغي بعد الوصول الى الحل الاساسي اختباره للوصول الى الحل الامثل إذ ان القيام بحل مثال عن البرمجة الخطية تحدده مجموعة خطوات يمكن معرفتها بحل المثال الاتي:

مثال (١٣-٩):

يرغب منتج زراعي بانتاج محصول القمح في الشتاء والذرة الصفراء في الصيف وكانت دالة الربح (دالة الهدف) هي كالاتي:-

$$Max\,Z = 32X_1 + 16X_2$$

$$Subject\ to:$$

$$0.5X_1 + 0X_2 \le 65 \text{ اذار عمل ساعة}$$

$$0X_1 + X_2 \le 110 \text{ تموز عمل ساعة}$$

$$X_1 + X_2 \le 160 \text{ ارض دونم}$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

تمثل الارقام الموجودة في دالة الهدف صافي دخل الدونم الواحد وهي كالاتي:-

32 وحدة نقدية للقمح X_1

١٦ وحدة نقدية للذرة الصفراء X_2

اما الموارد المحدودة المتوافرة للمنتج هي كالاتي:-

١- ١٦٠ دونما من الارض

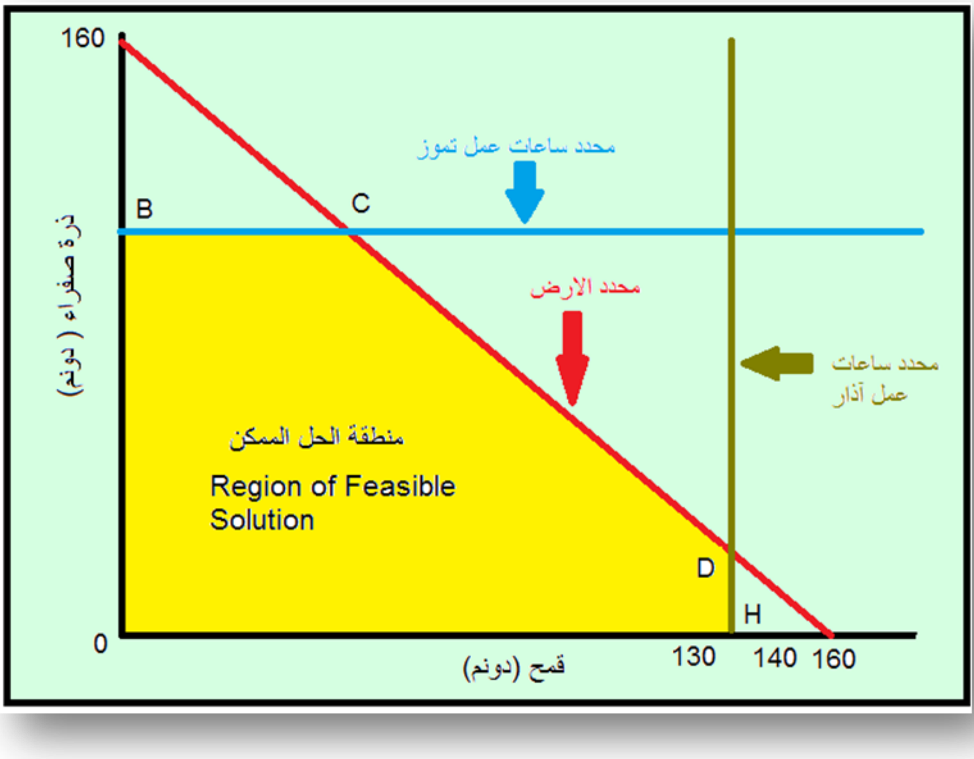
٢- ٦٥ ساعة عمل في شهر آذار

٣- ١١٠ ساعة عمل في شهر تموز

إن متطلبات الدونم الواحد من ساعات عمل آذار لمحصول القمح = ٠,٥ ساعة عمل

ومتطلبات الدونم الواحد من ساعات عمل تموز للذرة الصفراء = ساعة عمل واحدة.

قبل حل السؤال باستعمال طريقة السمبلكس سنحاول تمثيل الحل بيانيا:



شكل (٦١) التمثيل البياني للمثال (١٣-٩)

إن منطقة الحل الممكن تتحدد بالمساحة $(0BCDH)$ويبدأ حل المسألة عادة بنقطة الاصل إذ نفترض عدم وجود اي من المحصولين ، حتى تصبح للحل بداية جيدة ، ثم تتم تجربة نتائج الحل عند النقاط الاخرى وهي $(BCDH)$ فيستقر الحل الامثل عند نقطة معينة وهي النقطة D اي تتم بزراعة ١٣٠ دونم من القمح و ٣٠ دونما ذرة صفراء ، وهذا ما سنلاحظه عند حل السؤال بطريقة السمبلكس.

خطوات الحل:

١- تحويل المتباينات الى معادلات بادخال مجموعة من الانشطة الافتراضية (الراكدة)بعدد الموارد المحدودة وكما ياتي:-

S_3 =عدد ساعات عمل شهر اذار(مارس)

S_4 = عدد ساعات عمل شهر تموز (يوليو)

S_5 = عدد وحدات مساحة الارض.

٢- ان معامل الانشطة الافتراضية تاخذ مصفوفة وحدة ليكون اثرها حياديا في عملية الضرب في مصفوفة المعاملات الفنية للانشطة الحقيقية. ومن ثم تصبح مسألة البرمجة الخطية على الشكل الاتي:-

$$Max\,Z = 32X_1 + 16X_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5$$

$$Subject\ \ to$$

$$0.5X_1 + 0X_2 + 1S_3 + 0S_4 + 0S_4 = 65$$

$$0X_1 + \ \ X_2 + 0S_3 + 1S_4 + 0S_4 = 110$$

$$X_1 + \ \ X_2 + 0S_3 + 0S_4 + 1S_5 = 160$$

$$X_1, X_2, X_3, S_3, S_4, S_5 \geq 0$$

نلاحظ من المسالة اعلاه ان معاملات الانشطة الافتراضية الثلاث هي مصفوفة وحدة ، فإذا بدأنا الحل بنقطة الاصل اي بافتراض انشطة مستواها صفرا لانتاج القمح والذرة الصفراء فإن الانشطة الافتراضية التي يبدأ بها الحل تكون على النحو الاتي:-

ساعة عمل شهر اذار(مارس) ⟸ $1S_3 = 65$

ساعة عمل شهر تموز (يوليو) ⟸ $1S_4 = 110$

مساحة الارض (دونم) ⟸ $1S_5 = 160$

تبوب المعلومات الواردة اعلاه في جدول السمبلكس وتظهر لنا الخطة الاولى ***(Initial Plan)*** وكما ياتي:-

٣-يتم التقاط العمود في الانشطة الحقيقية الذي يعطي اعلى صافي دخل (او اعلى سعر ظلي اذا كانت الارقام تمثل اسعارا ظلية) ويسمى عمود الانتقال (Pivot Column)

٤-نقوم بقسمة الارقام التي تمثل الموارد المحدودة على المعاملات الموجودة تحت النشاط الحقيقي الذي حددناه في الخطوة رقم ٣ اعلاه ونضع حاصل القسمة تحت عمود خاص بذلك يسمى بعمود النسبة الموضح في جدول السمبلكس ، ويتم التقاط الصف الذي يعطي ادنى رقم وهو ١٣٠ في الجدول ويسمة صف الانتقال (Pivot Row). ان هاتين الخطوتين في ٣ و ٤ تتضمنان فكرة التقاط النشاط الانتاجي الذي يعطي اعلى مردود في نفس الوقت الذي يصاحبه استعمال اقل كمية من الموارد وهي ١٣٠ دونما.

جدول السمبلكس (الخطة الاولى)

الخطة الاولى		السعر	٣٢	١٦	صفر	صفر	صفر	النسبة	
		الانشطة الحقيقية			الانشطة الافتراضية				
السعر		الموارد	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5		
٠	S_3	٦٥	٠,٥	٠	١	٠	٠	$65 \div 0.5 = 130$	Pivot Row
٠	S_4	١١٠	٠	١	٠	١	٠	$110 \div 0 = \infty$	
٠	S_5	١٦٠	١	١	٠	٠	١	$160 \div 1 = 160$	
	Z	٠	٠	٠	٠	٠	٠		
المعيار	$Z - P$	٠	−٣٢	−١٦	٠	٠	٠		
			Pivot Column						

النشاط الخارج

النشاط الداخل

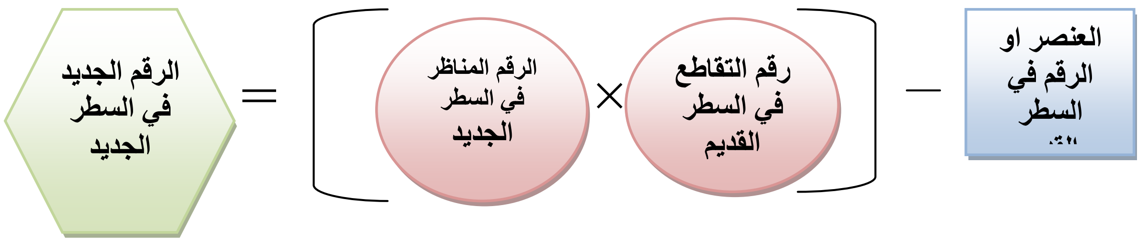
٥-الان بعد تحديد العمود (Pivot Column) والصف (Pivot Row) فان نقطة التقائهما هي نقطة الارتكاز وتمثل القيمة (٠,٥) تحت النشاط الحقيقي X_1 في جدول السمبلكس.

٦-نقوم بقسمة الارقام الموجودة في السطر (Pivot Row) الذي تم التقاطه على الرقم الموجود في نقطة الارتكاز (٠,٥) وحاصل القسمة هو الارقام الجديدة للسطر الجديد والتي تعود للنشاط الحقيقي الاول في الخطة الثانية وهي:-

$65 \div 0.5 =$ ١٣٠ دونم قمح (النشاط الحقيقي الاول

$$1 = 0.5 \div 0.5$$
$$0 = 0.5 \div 0$$
$$2 = 0.5 \div 1$$
$$0 = 0.5 \div 0$$
$$0 = 0.5 \div 0$$

٧-اما الانشطة الاخرى في الخطة الاولى وهي S_4 و S_5 فتبقى كما هي وتظهر في الخطة الثانية ، ولكن الارقام التي تعود للصف في كل منها لا تبقى كما هي وذلك لان الموارد المحدودة قد تاثرت وذهب قسم منها لسد حاجة النشاط الانتاجي الحقيقي الذي ظهر في الخطة الثانية وهو القمح X_1 ونحصل على الارقام التي تعود للصف لكل من S_4 و S_5 بالمعادلة الاتية:-



وبتطبيق هذه المعادلة على الارقام الموجودة في السطر الذي فيه S_4 في الخطة الاولى نحصل على الارقام الاتية التي تعود للسطر نفسه في الخطة الثانية.

$$110 - (0 \times 130) = 110$$
$$0 - (0 \times 1) = 0$$
$$1 - (0 \times 0) = 1$$
$$0 - (0 \times 2) = 0$$
$$1 - (0 \times 0) = 1$$
$$0 - (0 \times 0) = 0$$

أما الارقام التي تظهر مع S_5 في الخطة الثانية فهي:-

$$160-(1\times130)=30$$
$$1-(1\times1)=0$$
$$1-(1\times0)=1$$
$$0-(1\times2)=-2$$
$$0-(1\times0)=0$$
$$1-(1\times0)=1$$

٨-ينبغي ان تحتسب قيمة دالة الهدف Z في كل خطة، ففي جدول الخطة الثانية مثلا اصبحت قيمة دالة الهدف (٤١٦٠) وحدة نقدية ، ولاجل الحصول على هذا الرقم نقوم بضرب عمود السعر المذكور في اقصى يمين الجدول (الارقام ٣٢، ٠،٠) في الارقام الموجودة في متن الجدول ولكل عمود على انفراد بحيث تجمع نتيجة الضرب لكل عمود وتوضع مقابل Z ، فقيمة دالة الهدف للخطة الثانية هي :

$$(32\times130)+(0\times110)+(0\times30)=4160$$

وهكذا في بقية الاعمدة. والجدول الاتي يبين الخطة الثانية

جدول السمبلكس (الخطة الثانية)

الخطة الثانية		السعر	٣٢	١٦	صفر	صفر	صفر	النسبة
		الانشطة الحقيقية			الانشطة الافتراضية			
السعر		الموارد	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5	
٣٢	X_1	١٣٠	١	٠	٢	٠	٠	$130 \div 0 = \infty$
٠	S_4	١١٠	٠	١	٠	١	٠	$110 \div 1 = 110$
٠	S_5	٣٠	٠	١	−٢	٠	١	$30 \div 1 = 30$
	Z	٤١٦٠	٣٢	٠	٦٤	٠	٠	
	$Z-P$	٤١٦٠	٠	−١٦	٦٤	٠	٠	

Pivot Row

Pivot Column

النشاط الداخل

النشاط الخارج

٩-إن جدول الخطة الثالثة وهي النهائية والمثلى في الوقت نفسه هي تكرار للخطوات اعلاه ولكن ينبغي ان تسبقها خطوة مهمة هي ملاحظة السطر الاخير $Z-P$ في الجدول الثاني ، إذ يسمى $Z-P$ بالمعيار ***Criterion*** لانه يؤشر كيفية التقاط النشاط الحقيقي الثاني الذي يأتي بعد ان تمت معرفة النشاط الحقيقي الاول وهو القمح.

إن الارقام المذكورة مقابل $Z-P$ هي حاصل طرح الارقام مقابل Z من الاسعار المذكورة في اعلى الجدول، وهذه الاخيرة هي (٣٢، ١٦، ٠،٠،٠) على الترتيب ، ويتم عادة التقاط اكبر رقم بالسالب وهو (−١٦) حيث ان كل وحدة مساحة من X_2 (الذرة الصفراء) سوف تضيف لقيمة دالة الهدف (١٦) وحدة نقدية لكل دونم من هذا المحصول.

اما اذا ظهر الرقم موجبا تحت النشاط الحقيقي فانه يمثل كلفة حدية ، اي ان كل وحدة مساحة تستعمل تسبب نقصانا لقيمة دالة الهدف بهذا المقدار (ولكن هذا المعيار ينعكس اذا كانت المسألة تدنية للتكاليف)، اما الارقام الموجبة الموجودة تحت الانشطة الافتراضية الفائضة فانها تمثل قيمة الناتج الحدي ، بمعنى ان استعمال كل وحدة منها سوف تضيف لقيمة دالة الهدف.

ويلاحظ في آخر جدول (الخطة المثلى) ان الارقام الموجودة في المعيار وللانشطة الحقيقية X_1 و X_2 اصبحت صفرا بمعنى اننا وصلنا الى الحل الامثل لهما لان استعمال وحدة مساحة اضافية من احدهما سوف لن يضيف الى قيمة دالة الهدف وبهذا نعرف اننا وصلنا الى نهاية الحل وكما في الجدول الاتي:

جدول السمبلكس (الخطة الثالثة المثلى)

الخطة المثلى		السعر	٣٢	١٦	صفر	صفر	صفر	النسبة
		الانشطة الحقيقية			الانشطة الافتراضية			
السعر		الموارد	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5	
٣٢	X_1	١٣٠	١	٠	٢	٠	٠	
٠	S_4	٨٠	٠	٠	٢	١	−١	
١٦	X_2	٣٠	٠	١	٢٠	٠	١	
	Z	٤٦٤٠	٣٢	١٦	٣٢	٠	١٦	
المعيار	$Z-P$	٤٦٤٠	٠	٠	٣٢	٠	١٦	

اسئلة الفصل التاسع:

س١: جد بيانيا منطقة الحل الممكن لمسائل البرمجة الخطية الاتية:

$$
\begin{aligned}
&1-Objective \;\; function \\
&Z = 3x_1 + 2y \\
&Constraint\,s: \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0 \\
&x + 3y \leq 15 \\
&4x + y \leq 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2-\;Z = 8x_1 + 6x_2 \\
&Subject\ to \\
&4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\
&2x_1 + 4x_2 \leq 48
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3-Min\,C = 10x_1 + 25x_2 \\
&Subject\;\; to \\
&x_1 + x_2 \geq 50 \\
&x_1 \geq 20 \\
&x_2 \leq 40
\end{aligned}
$$

س٢: حول الصيغة الاولية المتمثلة بتدنية دالة الهدف الى الصيغة المقابلة (تعظيم دالة الهدف)

$$
\begin{aligned}
&Min \;\; TC = 3x_1 + 7x_2 \\
&Subject \;\; to \\
&4x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 7 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

س٣: كون الصيغة الرياضية للمسالة الاتية مع الرسم موضحا منطقة الحلول الممكنة؟

المنتجات / العمليات	X_1	X_2	الطاقة القصوى للالة
العملية الاولى	٣	٥	١٠٩
العملية الثانية	٤	٢	٨٠
الربح	١٠	٨	

س٤: جد حل الانموذج الاتي بطريقة السمبلكس

$$
\begin{aligned}
&Max\ \pi = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.5x_3 + 0.8x_4 \\
&Subject\ \ to \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24000 \\
&6x_1 + 3x_2 + x_4 \le 3000 \\
&3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12000 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

مصادر الفصل التاسع

١- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على الشبكة العالمية الدولية.

٢- حسين علي بخيت – مبادىء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – ٢٠٠٠.

٣- عبد الفتاح صالح القاضي و احمد شكري الريماوي. مبادىء في الادارة الزراعية. مكتبة الفلاح. عمان. الاردن. ١٩٩٧.

٤- عدنان شمحي جابر. الرياضيات للاقتصاديين.دار الكتب للطباعة والنشر . جامعة الموصل. العراق.١٩٨٨.

٥- هاشم علوان السامرائي. ادارة الاعمال المزرعية .مطابع دار السياسة – الكويت –

6- Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. ١٩٨٤.
7- Heady,E.O., Candler .W.Linear Programming Methods.The Iowa state university Press.Ames, Iowa,U.S.A.1973.
8- Jacques . Jan. Mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.
9- Linear Programming. Poblished on line www.college.cengage.com
10- The Simplex Solution Method. Published on line wps.prenhall.com