الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

العنوان: طرق الإثبات في الرياضيات

اسم الدكتور: فياض كاظم

الأكاديمية العربية الدولية – منصة أعد

مقدمة

- الرياضيات مبنية على نظريات وقواعد عديدة وصيغ ومعادلات.
- لا تعتمد في الرياضيات أي قاعدة دون أن يكون لها إثبات وتسلسل منطقي.
- نستعرض في هذا الدرس طرق الإثبات في الرياضيات وأساسها.
- بالرغم أن قواعد الإثبات التي سنتعرف عليها هي القواعد الأساسية المعتمدة في الرياضيات إلا أنها قواعد منطقية عامة، لذلك سنحاول استخدام أمثلة عامة بعيدة عن الرياضيات لفهم المعنى بشكل أوضح.

المنطق الاقتراحي

- تعريف: العبارة رياضيا هي الجملة التي تحتمل الصواب والخطأ.
- أمثلة على عبارات: الحديد يتمدد بالحرارة. / الحرارة تقتل الجراثيم. / لا يمكن للماء أن يغلي.
- أمثلة على جمل ليست بعبارات: متى تشرق الشمس؟ / ليت الشباب يعود يوما. / ما أجمل اللون الأزرق!
- تعريف: المنطق الاقتراحي هو فرع من علم المنطق يهتم بدراسة العبارات ودراسة صحتها من خطئها.

جداول الحقيقة

- جداول الحقيقة هي جداول منطقية تعتمد على مسلّمات المنطق الرئيسية وهي الأساس لتقييم صحة العبارة من عدمها، لنستعرض أهم هذه الجداول:

- جدول "و":

أ	ب	أ "و" ب
صحيح T	صحيح T	صحيح T
خطأ F	صحيح T	خطأ F
صحيح T	خطأ F	خطأ F
خطأ F	خطأ F	خطأ F

- إذن العبارة هنا صحيحة حينما يكون طرفاها صحيحين، فمثلا: "الشمس تشرق والماء لا يغلي" عبارة غير صحيحة بينما "الشمس تشرق والعصفور يطير" عبارة صحيحة.

جداول الحقيقة

- جدول "أو":

أ	ب	أ "أو" ب
صحيح T	صحيح T	صحيح T
خطأ F	صحيح T	صحيح T
صحيح T	خطأ F	صحيح T
خطأ F	خطأ F	خطأ F

- إذن العبارة هنا صحيحة حينما يكون أحد طرفيها صحيحا، فمثلا: "الشمس تشرق أو الماء لا يغلي" عبارة صحيحة بينما "الفيل يطير أو النار باردة" عبارة غير صحيحة.

جداول الحقيقة

- جدول "يؤدي إلى":

أ	ب	أ "يؤدي إلى" ب
صحيح T	صحيح T	صحيح T
خطأ F	صحيح T	صحيح T
صحيح T	خطأ F	خطأ F
خطأ F	خطأ F	صحيح T

- قد تكون جميع القواعد في جدول "يؤدي إلى" واضحة ما عدا القاعدة الثانية، ولذلك نعطي مثالا لتوضيحها: حينما نقول أن يوم الجمعة يؤدي إلى عطلة، فهل معناه إذا كان اليوم ليس بجمعة فلا يمكن أن تكون هنالك عطلة؟ طبعا لا، إذن خطأ العبارة الأولى قد يؤدي إلى صحة العبارة الثانية.

متى تكون العبارة صحيحة دائما؟

- تكون العبارة صحيحة دائما حينما تكون كل حالاتها تؤدي إلى جواب صحيح، مثلا:

أ	ليس أ	أ "أو" ليس أ
صحيح T	خطأ F	صحيح T
خطأ F	صحيح T	صحيح T

- هذا النوع من العبارات هو ما يسمى "تحصيل حاصل" ومعناه أن العبارة صحيحة دائما، على سبيل المثال: "الفيل يطير أو لا يطير" / "النار تحرق أو لا تحرق".

متى تكون العبارة خطأ دائما؟

- تكون العبارة خطأ دائما حينما تكون كل حالاتها تؤدي إلى جواب خاطئ، مثلا:

أ	ليس أ	أ "و" ليس أ
صحيح T	خطأ F	خطأ F
خطأ F	صحيح T	خطأ F

- هذا النوع من العبارات هو ما يسمى "التناقض" ومعناه أن العبارة خطأ دائما، على سبيل المثال: "القلب ينبض ولا ينبض" / "النبات يتكلم ولا يتكلم".

مثال على التناقض

- عبارة "كل شيء خطأ" هي عبارة متناقضة ولا تحمل معنى صحيح أبدا، كيف ذلك؟
- هناك احتمالان، إما أن تكون العبارة خطأ أو تكون صوابا، فلو كانت خطأ فالصحيح أن هنالك شيء ما صحيح، وإن كانت صوابا فمن نتائجها أنها هي خطأ أيضا لأنها تقول كل شيء خطأ فلو كانت صحيحة فالناتج أنها خطأ وهذا تناقض.

كيف نثبت في الرياضيات؟

- هنالك أربع طرق رئيسية في الإثبات في الرياضيات:

1. الإثبات المباشر.
2. الإثبات العكسي.
3. الإثبات بالتناقض.
4. الإثبات بالاستقراء الرياضي.

الإثبات المباشر

- هذا النوع من الإثبات ينطلق مباشرة من المعطيات التي لديه ويسلك طريقا منطقيا للنتيجة التي يريدها، مثلا: أثبت أنه إذا كنا في فصل الشتاء وفصل الشتاء يؤدي إلى الغيوم والغيوم تؤدي إلى هطول المطر فسوف يهطل مطر.

- الإثبات بسيط هنا: نحن في فصل الشتاء وهو يؤدي إلى الغيوم إذن يوجد لدينا غيوم، وبما أن وجود الغيوم يؤدي إلى هطول المطر ونحن لدينا غيوم إذن سوف يهطل المطر.

الإثبات العكسي

- هذا النوع من الإثبات يعتمد على قاعدة منطقية مثبتة بجداول الحقيقة تقول أن "أ يؤدي إلى ب" هي نفسها "نقيض ب يؤدي إلى نقيض أ"، مثلا لو أردنا أن نثبت أن اليوم ليس جمعة نستطيع القول أن اليوم ليس عطلة وبما أن "يوم الجمعة يؤدي إلى يوم عطلة" فإن "يوم الدوام يؤدي إلى أن اليوم ليس جمعة".

الإثبات بالتناقض

- هذا إثبات منطقي آخر نستخدمه في حياتنا اليومية دون أن نعرف أننا نستخدم الإثبات بالتناقض، ومبدؤه ينص على أنك إذا أردت أن تصل لنتيجة ما فافرض عكسها وبين أن ذلك يناقض المعطيات.
- مثلا: لو عرفنا أن الملابس المبللة دائما تجف بإحدى نوعيات جفافات الملابس بعد نصف ساعة من وضعها فيها، فإنه بإمكاننا إثبات أن جفافة ما قد أصيبت بعطل حينما نضع فيها ثيابا لنصف ساعة أو أكثر ولم يجفوا، حيث أننا سنقول: لو كانت الجفافة تعمل جيدا لكانت الثياب جفت ولكن الواقع غير ذلك، هذا نفسه هو الإثبات بالتناقض.

مثال مهم على الإثبات بالتناقض

- وجد بعض الباحثين أن قانون فيثاغورث المعروف لا يعمل جيدا في الطبيعة، خاصة في المسافات البعيدة، والمشكلة كل المشكلة أن قانون فيثاغورث مثبت رياضيا بعدة إثباتات لا يمكن نفيها، فما النتيجة لذلك؟

- الجواب: الخلل ليس في نظرية فيثاغورث وليس في نتائج الباحثين وإنما نتائجهم هي دليل على أن الأرض ليست مسطحة، لأن قانون فيثاغورث يعمل في الهندسة المسطحة وليس الهندسة غير الإقليدية، **فلو كانت الأرض مستوية لكان هنالك تناقض**، والنتيجة أنها ليست كذلك.

- شاهدوا مزيدا من هذا الرابط https://www.youtube.com/watch?v=I0rG7r3tcNw.

الإثبات بالاستقراء الرياضي

- معنى الاستقراء هو تعميم صحة العبارة، مثل تعميم صحة أن جميع المعادن تتمدد بالحرارة بمجرد معرفة صحتها عند معادن معينة.

- الاستقراء الرياضي إثبات يستخدم لبيان أن عبارة ما صحيحة لجميع النقاط الموجودة، و يمكن تخيله وكأنه لعبة أحجار الدومينو التي توضع مصفوفة بجنب بعض وتسقط جميعها بإسقاط الحجر الأول، ومبدأ هذا النوع من الإثبات هو إثبات شيئين، الأول هو إثبات صحة العبارة عند النقطة الأولى والثاني أن تثبت أن الصحة عند نقطة تؤدي إلى الصحة عند النقطة التي تليها.

- كيف نشرح فكرة الدومينو بالاستقراء الرياضي: أولا فقط علينا إثبات أن سقوط حجر يؤدي إلى سقوط الحجر الذي بعده، ومن ثم علينا إثبات أن الحجر الأول سقط بالفعل، وسينتج لدينا أن جميع الأحجار سقطت!

الخاتمة

شكرا على حسن الاستماع..