

الأكاديمية العربية الدولية



الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية المقررات الجامعية

بسم الله الرحمن الرحيم



جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم

شعبة الرياضيات



بحث تكميلي لنيل درجة بكالوريوس الشرف

بعنوان:

مبادئ المعادلات التفاضلية الجزئية

وبعض تطبيقاتها

The Principles of Partial Differential Equations and Some Applications

إعداد الطلاب:

أمانى الرشيد حسن محمد

تساييح خلف الله عبد الرحمن

كوثر حسب الرسول محمد علي

مناسك صلاح أحمد إبراهيم

إشراف الأستاذ:

عمر الخليل عثمان إسحق

سبتمبر ٢٠١٥ م



الآية

قال تعالى:

(يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ^ج
وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

صدق الله العظيم

سورة المجادلة آية رقم (١١)

الذوق في الأدب

أولا: إلى الذين قالوا ربنا الله ثم استقاموا.

ثانيا: إلى اللواتي حملننا وهنا على وهن أمهاتنا العزيزات.

ثالثا: إلى الذين أفنوا شبابهم لراحة بالننا وسعادتنا آباءنا الأعزاء.

رابعا: إلى أساتذتنا الذين منحونا أفضل العلم ووقفوا معنا لو

استطعنا لوضعناهم في قرص الشمس وأشرنا إلى الجميع بأنهم رفقاء

دربنا.

خامسا: إلى أخواننا الأعزاء دون فرز أحد منهم.

سادسا: إلى أصدقائنا وزملائنا الذين وقفوا معنا وقفة رجل واحد.

الشكر والتقدير

أولاً نشكر الله سبحانه وتعالى

لا بد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية مع وقفة تعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهوداً كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد ...

نتقدم بجزيل الشكر لأستاذنا الفاضل:

عمر الخليل عثمان إسحق

الذي تفضل مشكوراً بقبول الإشراف على هذا البحث، والذي غمرنا بنبل أخلاقه وحسن توجيهه وإرشاده،

وأيضاً الشكر للدكتور:

عبد القادر البشري

وقبل أن نمضي نتقدم بأسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة وإلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة إلى جميع أساتذتنا الأفاضل ...

لكم بذلك الشكر والتقدير،،،

الفهرس

الموضوع	رقم الصفحة
الآية	أ
الإهداء	ب
الشكر والعرفان	ج
الفهرس	د
المستخلص	و
Abstract	ز
الفصل الأول الإطار العام	
(١) خطة البحث	١
(١-١) مشكلة البحث	١
(٢-١) أهداف البحث	١
(٣-١) أهمية البحث	١
(٤-١) أسئلة البحث	٢
(٥-١) المنهج البحثي	٢
(٦-١) مصطلحات البحث	٢
الفصل الثاني مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية	
(١-٢) تمهيد في المعادلات التفاضلية الجزئية	٤
(٢-٢) كيف تحل المعادلات التفاضلية الجزئية	٥
(٣-٢) المعنى الهندسي للحلول العامة والخاصة	١١
(٤-٢) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية	١٥
الفصل الثالث فوريير (متسلسلات - تحويلات - تطبيقات)	
(١-٣) تمهيد	١٨

١٩	(٢-٣) سلاسل فورية
٢٣	(٣-٣) تحويلات فورييه
٣١	(٤-٣) تحويل فورية وتطبيقاته في المعادلات التفاضلية الجزئية
الفصل الرابع تطبيقات عامة في المعادلات التفاضلية الجزئية	
٣٧	(١-٤) تمهيد
٣٧	(٢-٤) استخدام المعادلات التفاضلية الجزئية في المسائل التطبيقية
٤٦	(٣-٤) مسائل القيم الحدية
٤٨	(٤-٤) تطبيقات الموجة
٥٦	المراجع

المستخلص

بفضل من الله وتوفيقه تم عمل بحث لمبادئ المعادلات التفاضلية الجزئية وبعض تطبيقاتها وذلك بهدف التعرف علي المعادلات التفاضلية الجزئية وطرق حلها والتوسع في دراستها وحل مسائل أكثر صعوبة بطريقة فصل المتغيرات وذلك بنهج تقديم الأسئلة العلمية وإجاباتها بحلول المنشدة مع استصحاب الأمثلة المناسبة من المعادلات التفاضلية وذلك في اطار وصفي وتحليلي ليحقق الغاية المنشودة.

Abstract

The grace of Allah Almighty was the work of search principles differential equations and some of their applications in order to identify the partial differential equations and their solutions and the expansion of the study and resolve issues more difficult way separation of variables and this approach to provide scientific questions and their answers by female performers with rooming appropriate examples of differential equations, as part of descriptive and analytical to achieve the desired end

الفصل الأول

الإطار العام

(1) خطة البحث:

(1-1) مشكلة البحث:

تبيان المقصود بالمعادلات التفاضلية الجزئية وكيفية حلها وعرض مؤجز عن تصنيفها ونظرة عامة عن عدد من الأفكار التي ستدرس بالتفاصيل. إن معظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل سريان الموائع الكهربائية، الميكانيك، البصريات أو سريان الحرارة يمكن أن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية. وفي الحقيقة إن معظم الفيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية وعلى الرقم من أن التبسيطات تحول المعادلات قيد الدرس إلي معادلات تفاضلية اعتيادية إلا أن الوصف الكامل لهذه المنظومات يقع ضمن المجال العام للمعادلات التفاضلية الجزئية. ولذلك جاء البحث للتطرق لهذه المجالات وأبرزها بصورة تبين ارتباط الرياضيات بالعلوم الأخرى.

(2-1) أهداف البحث:

- أ. التعرف على المعادلات التفاضلية الجزئية وطرق حلها.
- ب. التوسع في دراستها.
- ج. حل مسائل أكثر صعوبة بطريقة فصل المتغيرات.

(3-1) أهمية البحث:

إن معظم القوانين الطبيعية في الفيزياء مثل معادلات ماكسويل وقوانين نيوتن للتبريد ومعادلات نافير كلها مكتوبة بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية وبعبارة أخرى فإن هذه القوانين تصف الظواهر الفيزيائية بإيجاد العلاقات بين

الفضاء والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن فالمشتقات الجزئية تظهر في هذه المعادلات لكونها تمثل أشياء طبيعية.

وتتبع أهمية البحث من أن المعادلات التفاضلية الجزئية لها دور كبير في حل بعض المشكلات في العلوم الأخرى وهذا ما سنتطرق إليه في هذا البحث.

(1 - 4) أسئلة البحث:

- (1) مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية.
- (2) لفورير دور مهم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية (متسلسلات – تحويلات – تطبيقات).
- (3) تطبيقات عامة في المعادلات التفاضلية الجزئية في مجال (علوم، هندسة.....الخ).

(1 - 5) منهج البحث:

لجأ الدارسون للمنهج الوصفي للإجابة على أسئلة المبحث.

(1-6) مصطلحات البحث:

١/ المعادلات التفاضلية الجزئية:

هي معادلات تفاضلية تحتوي علي دالة واحدة أو أكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية.

٢/ المعادلة التفاضلية:

هي معادلة تتضمن دالة مجهولة ومشتقاتها.

٣/المشتقة:

تعرف المشتقة على أنها مقدار التغير في الاقتران على مقدار التغير لـ X .

٤/ الحل العام:

إن حل المعادلة التفاضلية هي خطوة معاكسة لتركيبها وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة يجب أن يحوي عددا من الثوابت الاختيارية مساو لمرتبة المعادلة.

٥/ المؤثر التفاضلي:

هو $D = \frac{d}{dx}$ الذي يؤثر على الحل المطلوب الحصول عليه بدرجات مختلفة بالمشتقة من نفس الرتبة فيتحول بذلك نظام المعادلات التفاضلية إلى نظام من المعادلات الجبرية يتم حله بأي طريقة مع التخلص من تأثير المؤثر التفاضلي على الحل عن طريق فصل المتغيرات وإجراء التكامل.

الفصل الثاني

مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية

(1-2) تمهيد في المعادلات التفاضلية الجزئية:

المعادلات التفاضلية الجزئية هي معادلات تفاضلية تحتوي علي دالة واحدة أو أكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية.

سنقتصر دراستنا للمعادلات التفاضلية الجزئية علي تلك المعادلات التي تحتوي علي دالة مجهولة واحدة فقط ذات متغيرين حقيقيين وأكثر. فمثلا إذا كانت $u=f(x,y)$ فإن u تحقق معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية علي الصورة :

$$f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)=0 \dots\dots\dots (1)$$

وسنفرض أن (1) تحتوي علي الأقل علي احدي مشتقات u الجزئية وان المشتقات الجزئية المختلفة لا تعتمد علي ترتيب عملية التفاضل أي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

ونقصد بـحل المعادلة (1) تلك الدالة f المعطاة بالصيغة $u = f(x,y)$ والمعرفة علي الفئة S من المناطق غير المتداخلة من المستوى x,y والتي تحقق (1) في كل نقطة من نقط S .

وبالنسبة للمعادلات التفاضلية في دالة u في أكثر من متغيرين، يعرف نطاق الحل بنفس الكيفية كمنطقة في الفراغ ثلاث أبعاد أو أكثر.

تعريف:

رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية هي رتبة أعلى مشتقة واردة في المعادلة التفاضلية.

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية خطية عندما وفقط عندما تكون خطية في الدالة المجهولة u ومشتقاتها الجزئية. وتسمى كل المعادلات التفاضلية الجزئية الأخرى بالمعادلات اللاخطية.

وإذا احتوت كل حد من حدود المعادلة التفاضلية الجزئية علي الدالة المجهولة u أو احدي مشتقاتها الجزئية فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تسمى متجانسة وإلا فإنها تسمى بغير المتجانسة.

(2-2) بعض طرق حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

هنالك طرق كثيرة جدا مطبقة عمليا وأعظمها أهمية تلك الطرق التي بإتباعها تتحول المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية اعتيادية ومنها

1- فصل المتغيرات:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستغلة إلى n من المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

2- التحولات التكاملية:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستغلة إلى معادلة تفاضلية جزئية ذات $n-1$ من المتغيرات المستغلة ومن ثم بهذه الطريقة يمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغيرين إلى معادلة تفاضلية اعتيادية.

3- تبديل المتغيرات:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية أو إلى معادلة تفاضلية جزئية (أسهل) وذلك بتبديل متغيرات المسالة (كالتدوير أو ما شابه ذلك).

4- تحويل المتغير التابع:

بهذه الطريقة يتم تحويل المجهول في المسألة إلى مجهول آخر يمكن احتسابه بطريقة أسهل.

5- الطرائق العددية:

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى مجموعه من المعادلات الفرقية التي يمكن حلها بعمليات حسابيه متكررة بواسطة الحاسبة الالكترونية وفي عدد من الحالات يكون هذا هو الحل الوحيد وإضافة لذلك هناك طرائق لتقريب الحلول بسطوح معادلتها متعددات حدودية (التقريب أشرائي).

٦- طرائق الترجاف:

تحول المسألة غير الخطية إلى متتابعة من المسائل الخطية والتي تقرب للمسألة الأولى.

٧- طريقه الحافز وإلا استجاب:

تجزا الشروط الابتدائية والشروط الحدودية للمسألة إلى حوافز بسيطة ثم توجد استجابات هذه الحوافز وتجمع هذه الاستجابات البسيطة لحساب الاستجابة الكلية.

٨- المعادلات التكاملية:

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادله تفاضلية تكاملية (معادله يكون المجهول فيها داخل التكامل) وبعدئذ تحل المعادلة التكاملية بطريقة مختلفة.

٩_ طرائق حساب التغيرات:

يوجد حل للمعادلات التفاضلية الجزئية بإعادة صياغتها كمسألة نهايات صغرى وعندئذ يتبع عند النهاية الصغرى لمقدارها (يحتمل إن يمثل المقدار الطاقة الكلية) تكون أيضا حل للمعادلة التفاضلية.

10- طريقة الدوال الذاتية:

بهذه الطريقة يتم إيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية كمجموع عدد غير منتهي من الدوال الذاتية وهذه الدوال الذاتية توجد بحل ما يسمى من مسائل القيم الذاتية المناظرة للمسألة الأصلية.

حلول بعض المعادلات التفاضلية البسيطة:

لكي نتوصل إلى بعض الأفكار التي تخص طبيعة الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية دعونا ندرس الآتي:
مثلاً:

استخرج حولا للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2 \dots \dots \dots (1)$$

يعتمد المتغير التابع في (2) على المتغيرين المستقلين x, y لإيجاد الحلول

نحاول إن نحدد m بدلالة x و y إلى $u(x, y)$ إذا كتبنا (1) بالصيغة:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] = 6x + 12y^2 \dots \dots \dots (2)$$

فإننا نستطيع أن نكامل بالنسبة إلى x مع الاحتفاظ ب y ثابتا نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy^2 + F(y) \dots \dots \dots (3)$$

حيث أضفنا ثابت التكامل الاختياري الذي يمكن أن يعتمد على y ولذلك فهو في الواقع دالة اختيارية لـ y ويرمز لها بالرمز $f(y)$ ونكامل الآن (3) بالنسبة إلى y مع الإحتفاظ بـ x ثابت نجد أن:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + \int F(y)dy + G(x) \dots \dots (4)$$

في هذه المرة أضفنا دالة اختيارية لـ x معطاة بـ $G(x)$ بما أن التكامل دالة اختيارية لـ y هو عبارة عن دالة اختيارية أخرى لـ y فإننا نستطيع أن نكتب (4) بـ:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \quad (5)$$

يمكن التحقق من (5) بتعويضها في (1) والحصول على مطابقة بما أن (1) هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثابتة بينما الحل (5) له دالتان إختياريتان فإن هذا يقودنا مقارنة بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى تسمية (5) بالحل العام لـ (1) لإستخدام التشابه نفسه.

من الطبيعي أن سمي أي حل مستخرج من الحل العام (5) بواسطة إختيارات خاصة للدوال الإختيارية على سبيل المثال $G(x) = \sin x, H(y) = y^2$ بالحل الخاص إن هذا يقودنا عندئذ لعمل الآتي:

تعريف:

أعطيت معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الـ n يسمى الحل الذي يحتوي علي n من الدوال الإختيارية بالحل العام وإن أي حل مستخرج من الحل العام بإختيارات خاصة للدوال الإختيارية يسمى بالحل الخاص.

كما في دالة المعادلات التفاضلية الإعتيادية فإننا غالبا ما نحتاج إلي تحديد حلول من المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحقق شروطا، علي سبيل المثال أفترض إننا نريد حل المعادلات التفاضلية (1) خاضعة للشرطين:

$$u(1, y) = y^2 - 2y, u(x, 2) = 5x - 5 \quad (6)$$

بعد ذلك يقودنا الحل العام (5) والشرط الأول في (6) إلي:

$$u(1, y) = 3(1)^2y + 4(1)y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y$$

$$H(y) = y^2 - 4y^3 - G(1) \quad \text{أو}$$

لذلك فإن:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + G(x) \dots \dots (7)$$

إذا استخدمنا الآن الشرط في (6) فإن ذلك يقودنا إلي:

$$u(x, 2) = 3x^2(2) + 4x(2)^3 - 5(2) - 4(2)^3 - G(1) + G(x)$$

$$= 5x - 5$$

والتي منها نحصل علي

$$G(x) = 33 - 27x - 6x^2 + G(1)$$

باستخدام هذه الأخيرة في (7) نحصل علي الحل المطلوب:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - 27x - 6x^2 + 33 \dots \dots (8)$$

يمكننا أن نستخدم مصطلح مسائلتي القيمة الابتدائية والحدودية نفسه بالنسبة

إلي المعادلات التفاضلية الجزئية.

من ناحية أخرى لان هناك بصوره عامه جمعا لشروط ابتدائية وحدودية

فإننا نشير عادةً إلي مسائل من هذا النوع بمسائل القيمة الحدية.

تطبيق(1):

جد حلاً لمسألة القيمة الحدية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \quad , \quad u(0, y) = 0 \quad , \quad u_x(x, 0) = x^2$$

الحل بكتابة المعادلة بالصيغة:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - u \right] = 2$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x ينتج:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - u = 2x + F(y)$$

التي هي معادلة خطية لها عامل تكاملي e^{-y} اذن:

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-y} u) = 2x e^{-y} + e^{-y} F(y)$$

أو

$$u(x, y) = -2x + e^y \int e^{-y} F(y) dy + e^y G(x)$$

حيث $G(x)$ هي دالة اختيارية بكتابة:

$$H(y) = e^y \int e^{-y} F(y) dy$$

يكون لدينا

$$u(x, y) = -2x + H(y) + e^y G(x) \quad (9)$$

من $u(0, y)$ نجد أن:

$$H(y) = -G(0) e^y$$

لذلك فإن (9) تصبح:

$$u(x, y) = -2x - G(0) e^y + e^y G(x)$$

بالمفاضلة بالنسبة إلى x وبوضع $y = 0$ نجد أن:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + c$$

أو

$$u_x(x, 0) = -2 + \dot{G}(x) = x^2$$

إذن

$$u(x, y) = -2x - G(0) e^y + e^y \left[\frac{x^3}{3} + 2x + c \right]$$

بما أن $c = G(0)$ فإن:

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} e^y + 2x e^y - 2x \dots \dots \dots (3 - 2)$$

(٣-٢) المعنى الهندسي للحلول العامة والخاصة:

من الحل العام (10)

$$u = 3x^2y + 4xy^2 + H(y) + G(x)$$

لنفترض الآن نختار دالتين خاصتين $G(x), H(y)$ ونبدل u ب z عندئذ

نأخذ (10) الصيغة:

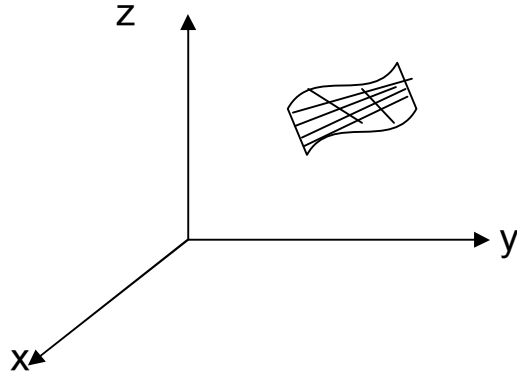
$$Z = f(x, y) \quad (11)$$

التي يمكن تفسيرها هندسياً سطحاً S في نظام إحداثيات عمودي t و xyz مثل النظام المبين في الشكل أدناه يتكون السطح من نقاط ذات إحداثيات (x, y, z) تحقق (11) بالنسبة للدوال الاختيارية $G(x)$ و $H(y)$ نحصل على مجموعة سطوح كل واحد منها يناظر اختياراً خاصاً لـ $H(y)$ و $G(x)$ أي يناظر حلاً خاصاً، المعادلة التفاضلية التي لها هذه السطوح حلولاً تسمى عندئذ بالمعادلة التفاضلية لمجموع السطوح. يلاحظ الطالب التشابه مع المعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تمثل فيها الحل العام لثوابت اختيارية مجموعة منحنيات كل منحي فيها يناظر حلاً خاصاً.

أي يناظر اختياراً خاصاً لتلك الثوابت الاختيارية. يمكن تعميم هذه الأفكار لحالات يوجد فيها أكثر من متغيرين مستقلين. لذلك وعلى سبيل المثال في حالة

كون u داله لثلاث متغيرات مستقلة والتي يمكن أن نرمز لها بـ x_3, x_2, x_1 فإننا نستطيع أن نفكر بحل خاص لمعادلة تفاضلية جزئية يتضمن تلك المتغيرات ومعطي ب:

$$u = f(x_1, x_2, x_3) \quad (1,2)$$



الشكل (١-٢)

إن هذا لا يمكن تصوره كما في الشكل أعلاه ولكن نستطيع أن نفكر بمجموعة الأرقام الرباعية (u, x_1, x_2, x_3) علي إنها تمثل نقطه في فضاء ذي أربعة أبعاد وعندئذ نشير (١٢) علي أنها سطح ذو أربعة أبعاد أو سطح فوقى علي سبيل المثال تماما كما تمثل $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ كره نصف قطرها c في فضاء ذي ثلاث أبعاد فإن $x_1^2 + y_2^2 + z_3^2 + u^2 = c^2$ ستمثل سطحها فوقيا نصف قطرها c في فضاء ذي أربعة أبعاد.

معادلة تفاضلية جزئية ناتجة من حذف دوال اختيارية:

بما أن الحلول التامة للمعادلة التفاضلية الجزئية تتضمن دوال إختيارية فإنه منطقيا أن نستخرج معادلات تفاضلية بعلميه عكسية متضمنة إختزال مثل هذه الدوال.

تطبيق (2):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى حلها العام هو:

$$u = y^2 F(x) - 3x + 4y \quad (13)$$

حيث $F(x)$ دالة اختيارية ل x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yF(x) + 4 \quad (14)$$

بعد ذلك بإختزال $F(x)$ بواسطة (13) و (14) نجد المعادلة:

$$y \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 6x - 4y \quad (15)$$

$$\begin{aligned} y \frac{\partial u}{\partial y} - 2u &= y[2yF(x) + 4] - 2[y^2F(x) - 3x + 4y] \\ &= 6x - 4y \end{aligned}$$

تطبيق (3):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى حلها العام هو:

$$Z = F(3x - 4y) \quad (16)$$

حيث F دالة اختيارية.

الحل

ضع $u = 3x - 4y$ عندئذ (16) تصبح

$$z = F(u) \quad (17)$$

بمفاضلة (17) بالنسبة ل x يكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{F}(u)(3) = 3\dot{F}(u) \quad (18)$$

بمفاضلة (18) بالنسبة ل y يكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{F}(u)(-4) = -4\dot{F}(u) \quad (19)$$

باختزال (18) بين (19) نتجت المعادلة:

$$4 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

تطبيق (4):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية حلها العام هو:

$$u = x F(y) + y G(x) \quad (21)$$

حيث F و G دالتان إختياريتان.

الحل:

نستطيع أن نختزل $F(y)$ في (21) بقسمة كلا طرفي (21) علي x ومفاضلة النتيجة بالنسبة إلي x .
بعد ذلك نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[F(y) + \frac{y}{x} G(x) \right]$$

أي أن:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - u = xy \dot{G}(x) - yG(x)$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - u = y [x \dot{G}(x) - G(x)] \quad (22)$$

إذا قسمنا الآن كلا من الطرفين (22) علي y وفاضلنا بالنسبة ل y وجدنا

إن:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \right] = 0$$

أو

$$x y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \quad (23)$$

التي تعطي معادلة المرتبة الثاني المطلوبة لاحظ إن المعادلة الثانية في (23) يمكن إن تكتب أيضا بالصيغة:

$$x y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

(4-2) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية بناء علي إعتبارات عدة والتصنيف ذو مفهوم مهم لأن النظرية العامة وطريقة الحل عادة تطبق علي صنف معني من المعادلات ،وتصنف المعادلات التفاضلية الجزئية إلي ستة أصناف هي:

1- رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية:

وهي رتبة أعلى مشتقة جزئية في المعادلة فمثلا

$$u_t = u_{xx} \quad \text{من الرتبة الثانية.}$$

$$u_t = u_x \quad \text{من الرتبة الأولى.}$$

$$u_t = uu_{xxx} + \sin x \quad \text{من الرتبة الثالثة.}$$

2- عدد المتغيرات:

وهو عدد المتغيرات المستقلة فمثلا:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{(ذات متغيرين (t, x))}$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad \text{(ذات متغيرات (r, \theta, t))}$$

3- الخطية:

المعادلات التفاضلية الجزئية إما أن تكون خطيه وإما أن غير خطية في المعادلة الخطية يكون المتغير التابع u وجميع مشتقاتها تظهر بصيغة خطية (أي

أنها غير مضروبة ببعضها أو إن أحداها مربعة) و بصورة أدق فإن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المتغيرين هي معادلة من الصيغة:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F ثوابت أو دوال معلومة بدلالة x, y فمثلا:

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad \text{خطية}$$

$$u_{xx} + u_t = 0 \quad \text{خطية غير}$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad \text{خطية}$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad \text{خطية غير}$$

4- التجانس:

يكون المعادلة (1) متجانسة إذا كان الطرف الأيمن $G(x, y)$ يساوي صفر لكل x, y .

إذا لم يكن $G(x, y)$ متساويا للصفر فعندئذ تسمى غير متجانسة.

5- نوعية المعاملات:

في المعادلة (1) إذا كانت A, B, C, D, E, F ثوابت فعندئذ تسمى المعادلة ذات معاملات ثابتة (وإذا لم تكن كذلك تسمى المعادلة ذات معاملات متغيرة).

6- الأنماط الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية:

كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل (1) تتمثل احد الأنماط التالية:

أ- القطع المكافئ.

ب - القطع الزائد.

ج - القطع الناقص.

فمعادلات القطع المكافئ تصف سريان الحرارة وعمليات الانتشار وتحقق

الخاصية

$$B^2 - 4AC = 0$$

ومعادلات القطع الزائد تصف حركات الاهتزاز وحركات الموجة وتحقق

الخاصية

$$B^2 - 4AC > 0$$

ومعادلات القطع الناقص تصف ظواهر الحالة المستقرة وتحقق الخاصية

$$B^2 - 4AC < 0$$

تطبيقات:

أ- $u_t = u_{xx}$ معادلة قطع مكافئ لان $B^2 - 4AC = 0$

ب- $u_{tt} = u_{xx}$ معادلة قطع زائد لان $B^2 - 4AC = 4$

ج- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادلة قطع ناقص لان

$$y_{xx} + u_{yy} = 0, \quad B^2 - 4AC = -4y \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{عندما يكون قطع ناقص} & y > 0 \\ \text{عندما يكون قطع ناقص} & y > 0 \\ \text{عندما يكون قطع زائد} & y < 0 \end{array} \right.$$

الفصل الثالث

فوريير (متسلسلات – تحويلات –

تطبيقات)

(1-3) تمهيد:

استخدم عالم الرياضيات الفرنسي جان باتيست فورييه *Fourier* (1768 - 1830) في تحليله للانتقال الحراري في الأجسام الصلبة والتي كان قد اقترحها عوضاً من قبل العالم الرياضي السويسري دانيال بيرنولي *D.Bernonly* (1700 - 1782) والمتعلقة بتمثيل الدالة f بمتسلسلة لانهاية علي الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin nx$$

بمعني آخر لقد اخذ في الاعتبار إمكانية تحقيق الشرط الحدي $u(x, 0) = f(x)$ باختيار مناسب للمعاملات D_n ومن ثم الحصول علي حل معطي بمتسلسلة لانهاية علي الصورة:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n e^{-n^2 t} \sin nt$$

قدم فورييه كثيراً من أفكاره عام 1822م في رسالة بعنوان (نظرية التحليل الحراري "*Analytique delachaleur*"). وكانت هذه هي بداية التفسير الرياضي لنظرية الدفع الحراري وانتقد كثيراً من معاصري فورييه بما فيهم لاجرانج ولابلاس وليجنذر أعماله علي أساس نقص الدقة . وتركز الاعتراض الرئيسي حول نوعية الدالة التي يمكن فكها في متسلسلة فورييه.

وقد أعيد البحث في التعريف الصحيح للدالة ووضعت أخيراً نظرية متسلسلات فورييه علي أسس منطقيه ثابتة. وتعتبر أعمال فورييه اليوم علامة مميزة في تاريخ الرياضيات.

ونظرية متسلسلات فورييه ليست سهله. وفي هذا الفصل سنقدم الطرق التي يمكن أن توجد بواسطتها متسلسلات فورييه لدوال معطاة. وسندرس بقيه الفصل

لاستنتاج المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحكم بعض العمليات الفيزيائية الهامة. ونصنع مسائل القيم الحدية لها ونحلها بطريقتي فصل المتغيرات ومتسلسلات فورييه.

(2-3) سلاسل فورية:

تعريف سلسلة فورييه وإثبات أنه يمكن تمثيل الدوال الدورية $f(x)$ كمجموع جيوب وجيب بتمام:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

وإذا كانت الدالة غير دورية معرفة على الفترة $(-\infty, \infty)$ فبرهن على أنه يمكن أن يستخدم تحويل فورييه بدلا من سلسلة فورية لتمثيلها كما سنثبت كيفية تمثيل الدالة $f(x)$ بصورة تحليل مستمر من دوال بسيطة.

وهذا التحليل (تكامل فورييه) يمكن أن يكتب بالصيغة المركبة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\epsilon x} dx \right] e^{i\epsilon x} d\epsilon$$

التي تؤدي إلى تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي:

(تحويل فورييه):

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\epsilon x} dx$$

(تحويل فورييه العكسي):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) e^{i\epsilon x} d\epsilon$$

أن أهمية سلاسل فورية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية هي إن الدوال الدورية $f(x)$ المعرفة على $(-\infty, \infty)$ أو الدوال المعرفة على فترة منتهية

يمكن تمثيلها فترة لانتهائية من الجيوب وجيوب التمام، وبهذه الطريقة يمكن تجزئة المسائل إلى أخرى مبسطة وعلى سبيل المثال الدالة التي تدعى بالمسنة:

$$f(x) = x \quad -L < x < L$$

(شرط دوري)

$$f(x - 2L) = f(x)$$

يمكن تمثيل سلسلة فورية بالاتي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L))] \quad (1)$$

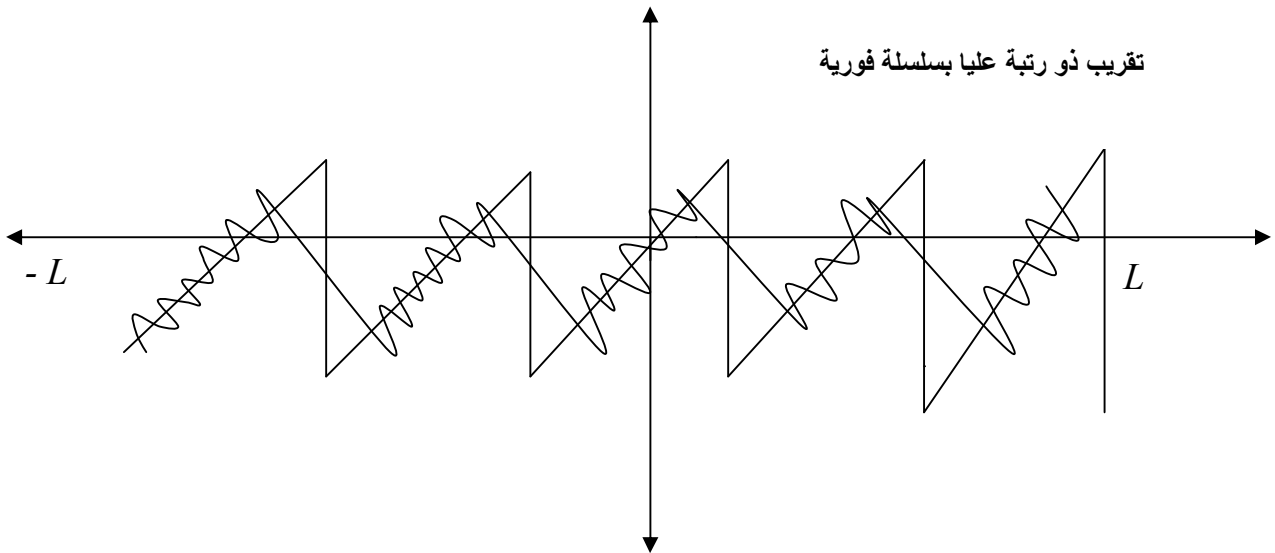
حيث تحسب معادلات فورية بموجب صيغ أويلر:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx = -(2L/n\pi) (-1)^n$$

$$n=0, 1, 2, \dots (2)$$

لاحظ الشكل أدناه



شكل (3-1) الدالة المسنة ممثلة بسلسلة فورية

هذه التكاملات هي حسابات روتينية لإيجاد صيغ أويلر للمعادلات a_n, b_n

على التوالي نضرب طرفي المعادلة (1) بالحد $\sin(n\pi x/L)$ أو بالحد

$\cos(n\pi x/L)$ ونكامل المعادلة الناتجة من $-L$ إلى L أن تعامد الدوال $\sin(n\pi x/L)$ و $\cos(n\pi x/L)$ يسهل حساب في a_n, b_n وتمثيل فوريير للدالة المسننة هو الآتي:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \left[\sin(\pi x/L) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x/L) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x/L) - \dots \right] \quad (3)$$

حيث أن لكل حد فيها (يدعي توافقي) تردد أكبر من سابقه وكل هذه الترددات هي مضاعفات للتردد الأولي الذي له نفس الدورة كالدالة $f(x)$.

أن أحد مردات سلاسل فوريير هو أنه لكي يكون للدالة تمثيل بسلسلة فوريير يجب أن تكون دورية وبالطبع إذا أردنا أن تمثيل الدالة المعرفة على فترة منتهية (مثل $f(x) = x$ على $0 \leq x \leq 1$) يمكن أن نتخذ التمثيل (1) وحقيقة كون دورية سلسلة فورية خارج الفترة $[0,1]$ لا يهمنا لأننا نحصر انتباهنا في الفترة (1) فقط وفي الحقيقة أنه يمكن تمثيل دالة داخل فترة معينة بنماذج عديدة من سلاسل فورية بإتخاذ نماذج مختلفة من توسيعات الدالة خارج الفترة (بعضها يقترب أسرع من البعض).

وعلينا الآن ندعي أنه تمثيل كل دالة دورية بدلالة سلسلة فورية والذي نفهمه هو أنه إذا أمكن تمثيل الدالة بسلسلة فورية (1) فعندئذ نحسب المعاملات a_n, b_n بموجب صيغ أويلر (2) والأكثر من ذلك أنه حتى إذا أمكن تمثيل الدالة $f(x)$ بسلسلة فورية فعندئذ لا يمكن إيجاد مشتقاتها $f'(x)$ بالضرورة بإشتقاق حدود سلسلة فورية حدا حدا. وفي الحقيقة يمكن الملاحظة بسهولة أنه لا يمكن إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = x$ (للدالة المسننة) بإشتقاق كل حد من السلسلة الفورية (3) وبالفعل فإن مشتقات حدود السلسلة لا تكون حتى متقاربة إلى أي x .

ولمعرفة الشروط الدقيقة التي تؤمن أن مشتقة الدالة المتمثلة بسلسلة فورية يمكن أن تحسب بإشتقاق حدود السلسلة حداً حداً.

وللوصول إلي أهدافنا نعد لمعرفة النتيجة المهمة التي تدعي مبرهنة دير اشلية التي تنص علي:

(3-2-1) مبرهنة دير أشلية:

إذا كانت $f(x)$ دالة مفيدة دورية ذات عدد منته من النهايات العظمي والصغري وعدد منته من نقاط عدم الإستمرارية في كل دورة فعندئذ تكون سلسلة فورية للدالة $f(x)$ متقاربة من $f(x)$ عند كل نقطة x فيها $f(x)$ مستمرة ومتقاربة من معدل النهاية من اليمين و النهاية من اليسر عند كل نقطة تكون فيها $f(x)$ غير مستمرة.

فمثلا في شكل أعلاه تكون سلسلة فورية متقاربة من الدالة $f(x)$ لكي النقط باستثناء $x = \pm l, \pm 3l, \dots$ (نقاط عدم الاستمرارية) في هذه النقاط تقترب من صفر (معدل $-L, +L$) تكاد نكون الآن مستعدين لأن نعرف تحويل فورية إلا انه من المفيد قبل ذلك تعريف مفهوم طيف تردد الدالة الدورية.

طيف تردد الدوال الدورية المتقطع:

يمكن تفسير سلاسل فورية بالنسبة للدوال الدورية كتبديل الدالة الدورية $f(x)$ بمتتابعة $\{e_n\}$ من الأعداد:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

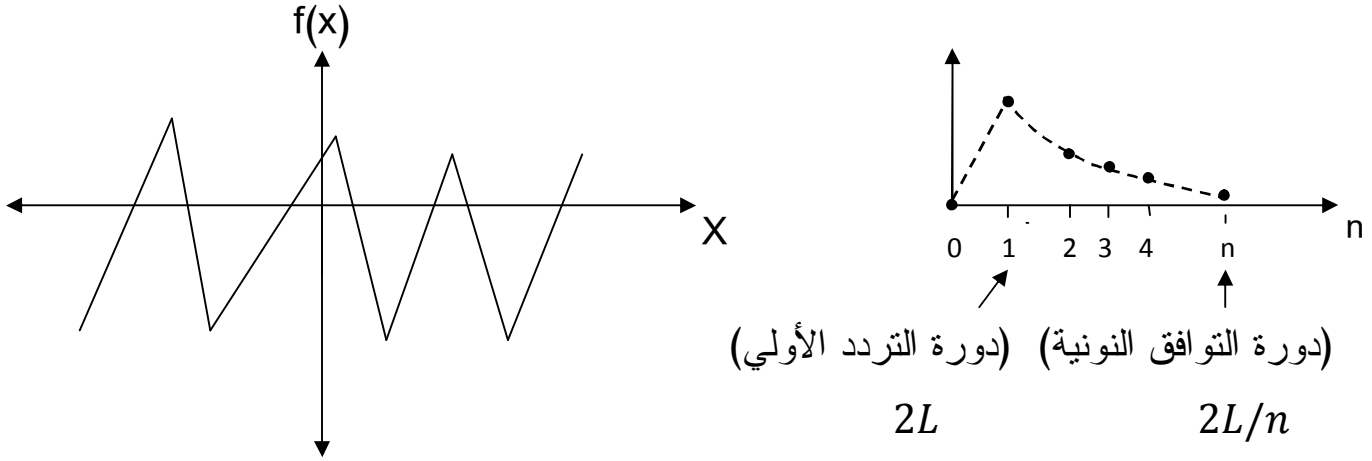
حيث تؤخذ c_n كمقياس أمدى إسهامات مركبات التردد المختلفة للدالة

$f(x)$ أو علي سبيل المثال فإن التمثيل الفوري للدالة المسننة $f(x)$ هو:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \sin 2\pi x/L \right]$$

وعليه فان طيف التردد $\{e_n\}$ هو $n = 2L/n\pi$ حيث $n=0,1,2,\dots$

$$c_0 = |a_0| = 0$$



شكل (2-3) طيف التردد المتقطع للدالة المسننة

إن المتتابعة $\{c_n\}$ مشابهة نوعاً ما إلى تحليل الضوء الأبيض إلى طيف تردد الألوان الحاصلة بالمطياف.

(3-3) تحويلات فورييه:

تعريف سلسلة فورية وإثبات أنه يمكن تمثيل الدوال الدورية $f(x)$ كمجموع جيوب وجيب تمام.

أن الصعوبة العظمى بالنسبة لتمثيلات سلاسل فورية هي عدم إمكانية تمثيل الدوال غير الدورية المعرفة على $(-\infty, \infty)$ مع ذلك يمكن إيجاد تمثيل مشابه لبعض هذه الدوال. وبدون الرجوع إلى تفاضل البرهان يمكن إثبات أن تمثيل فورية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L))]$$

يتغير إلى تمثيل تكامل فورية (تمثيل تردد مستمر):

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\varepsilon) \cos(\varepsilon x) d\varepsilon + \int_0^{\infty} b(\varepsilon) \sin(\varepsilon x) d\varepsilon \dots \dots \dots (1)$$

حيث:

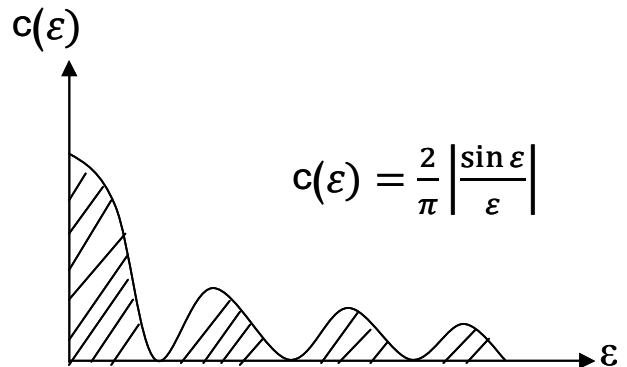
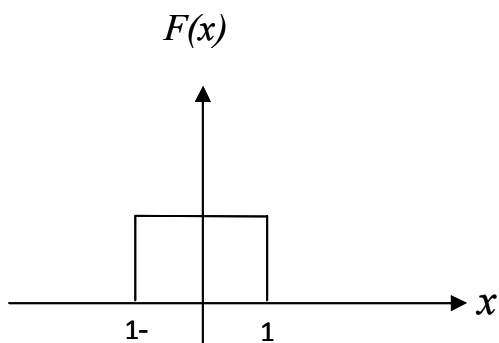
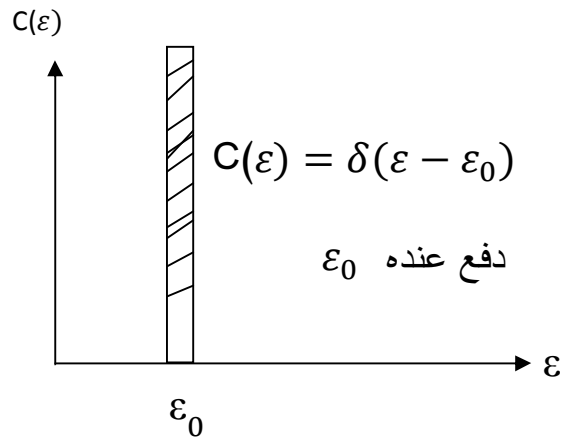
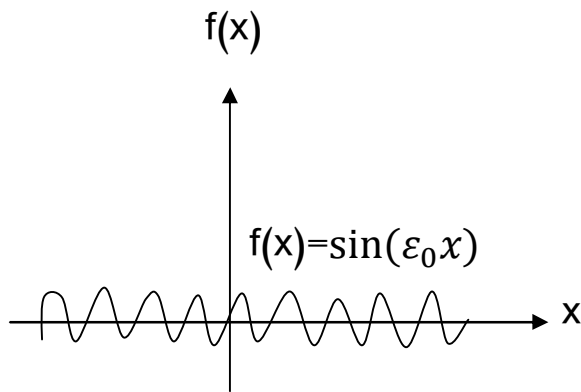
$$a(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\varepsilon x) dx$$

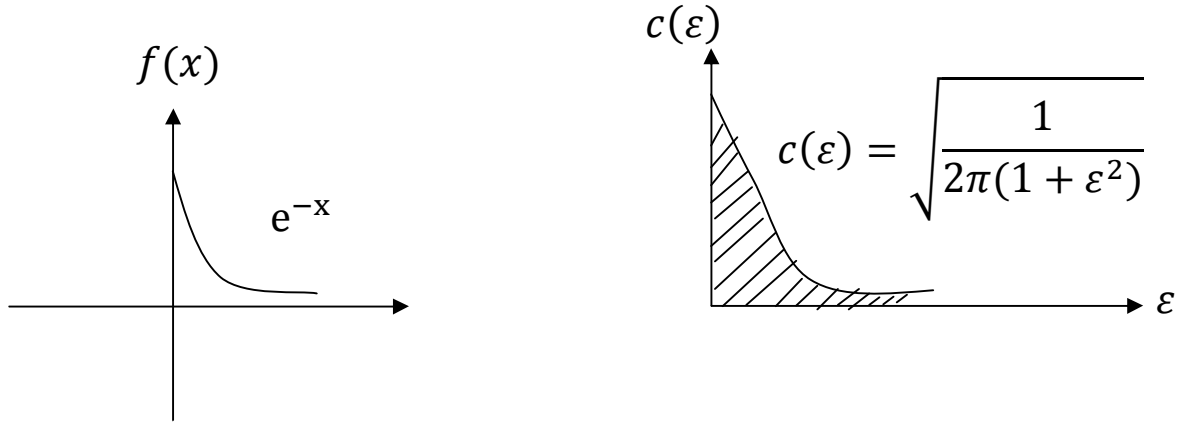
$$b(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\varepsilon x) dx$$

وذلك لدوال غير الدورية المعرفة علي $(-\infty, \infty)$ وهنا نلاحظ ان التمثيل التكاملي الفوري بصرف الدالة $f(x)$ إلي كل تردداتها $0 < \varepsilon < \infty$ وليس فقط مضاعفات التردد أساس واحد كما الدوال الدورية) كما أجرينا في سلاسل فورية نعرف طيف التردد

$$c(\varepsilon) = \sqrt{a^2(\varepsilon) + b^2(\varepsilon)}$$

الذي يعين تركيب الدالة $f(x)$ من حدود تردداتها وفي الشكل أعلاه بعض التطبيقات علي دوال $f(x)$ واطيافها.





شكل (3-3)

$$c(\varepsilon) = \sqrt{a^2(\varepsilon) + b^2(\varepsilon)}$$

لاحظ أن الدوال التي لها حافات حادة أي أطيف تردد ذوات ترددات عالية لان الحافات تتطلب مركبات ترددات عالية لتمثيلها من ناحية أخرى فأنه يتضح بسهولة أن الدالة الدورية البسيطة $f(x) = \sin(\varepsilon_0 x)$ ذات طيف تردد يساوي صفرا عند كل النقاط ما عدا $\varepsilon = \varepsilon_0$ نحن الان في وضع لتعريف ما يسمى تحويل فورييه الاسي (معادلتا فوريلا فورية الجيبى و الجيب تمامي) بموجب معادلة (اويلر):

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

يمكن إعادة صياغة (1) بعد إجراء بعض العمليات بالاتي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx \right] e^{i\varepsilon x} d\varepsilon \quad (3)$$

والتي تدعي بتمثيل فورييه التكاملي ومن هذا يمكن استنتاج المعادلتين

(تحويل فورييه):

$$\mathcal{F}[f] \equiv F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\varepsilon x} dx \dots \dots \dots (4)$$

(تحويل فورية العكسي):

$$\mathcal{F}[f] \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} d\varepsilon$$

اللّتين تمثلان تحويل فورية وتحويل فورية العكسي.

تحويلات فوريه المنتهية:

(التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي):

لتقديم تحويل فورية التكامليين (التحويل الجيبي المنتهي والتحويل الجيبتمامي المنتهي)

$$S_n = s[f] = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{التحويل الجيبي المنتهي})$$

$$C_n = c[f] = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad (\text{التحويل الجيبتمامي المنتهي})$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\pi x/L) \quad (\text{التحويل العكسي الجيبي})$$

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x/L) \quad (\text{التحويل العكسي الجيبتمامي})$$

وتبيان كيفية حل مسائل القيم الحدودية (وبصورة خاصة غير متجانسة) باستخدام هذه التحويلات.

وقد تعلمنا سابقا عن التحويلات فورية ولا بلاس المنتظمة وكيفية حل المسائل بتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية، فتحويل فورية المعتاد يتطلب تحويل المتغير إلى مدي من $-\infty$ إلى ∞ وعلى فان يستخدم لحل المسائل في الفضاء الحد (بدون حدود) وفي هذا يتبين كيفية حل المسائل القيمة الحدودية (بالحدود) بتحويل المتغيرات المحدودة (أو المفيدة) والذي تقوم بإجراه للمرة الاولى.

لنؤجل أولاً النظر في سبب استخدام هذه ونبدأ فقط بتعريفها هي و معكوساتها و استخداماتها.

باختصار يمكن اختيار طريقة التحويل هذه كتجزئة لدوال لمسألة إلي تردداتها المختلفة. حل طيف كلي للمسائل كلي تردد تم جمع هذه النتائج. نبدأ أولاً بدالة $f(x)$ علي الفترة $[0, L]$ ، التحويلات الجيبية والجيبتمامي المنتهيان لهذه الدالة يعرفان كالآتي:

$$s[f] = S_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (\text{التحويل الجيبى المنتهى})$$

$$c[f] = C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad (\text{التحويل الجيبتمامى المنتهى})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

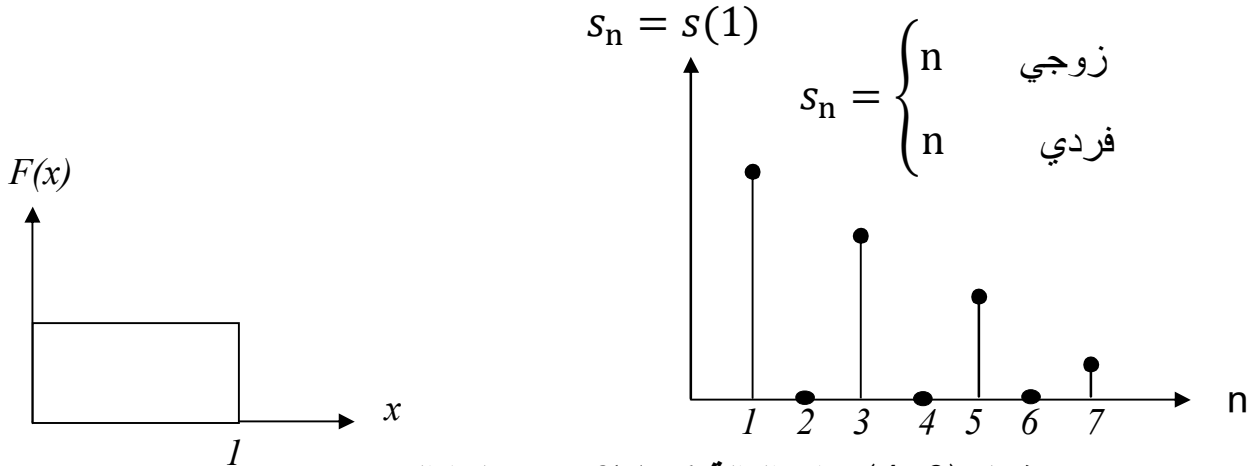
لاحظ أن المجموع يبدأ من $n = 1$ في التحويل العكسي الجيبى ويبدأ من $n = 0$ في التحويل العكسي الجيبتمامى.

تطبيقات علي التحويل الجيبى:

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$S_n = s[1] = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & n \text{ زوجي} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

لاحظ بيان الدالة $f(x)$ وتحويلها في الشكل ادناه



شكل (3-4) بيان الدالة $f(x)=1$ وتحويلها العكسي يكون:

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} \right] \sin(n\pi x)$$

هل تعلم ما هو بيان الدالة خارج الفترة $[0,1]$ ؟ إذا تأملت ذلك ستلاحظ أيضا إن التحويل الجيبي للدالة $f(x)$ هو دالة معرفة علي مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة فقط (إي أنها متتابعة من الأعداد الصحيحة الموجبة) وبعبارة أخرى كلا من التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي يحول الدوال إلي متتابعات.

خواص التحويلات:

قبل البدء بحل المسائل علينا استنتاج بعض الخواص المفيدة لهذه التحويلات فإذا كانت $u(x, t)$ دالة ذات متغيرين فعندئذ

$$s[u] = S_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin(n\pi x/L) dx$$

$$c[u] = C_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \cos(n\pi x/L) dx$$

(لاحظ إننا حولنا المتغير x فقط وحصلنا علي متتابعة من الدوال

المعتمدة علي الزمن فقط)

ماذا عن المشتقات؟ هنا عدد من القوانين المفيدة.

$$S[u_t] = \frac{\partial s[u]}{\partial t} \quad S[u_{tt}] = \frac{\partial^2 s[u]}{\partial t^2}$$

$$s[u_{xx}] = -\left[\frac{n\pi}{l}\right]^2 s[u] + 2n\pi/l^2 [u(0, t) + (-1)^{n+1} u(l, t)]$$

$$c[u_{xx}] = -[n\pi/l]^2 c[u] - \frac{2}{l} [u_x(0, t) + (-1)^{n+1} u_x(l, t)]$$

حل المسائل بطريقة التحويل المنتهي:

حل مسائل القيم الحدودية غير المتجانسة باستخدام التحويل الجيبي المنتهي

تأمل معادلة الموجة المتجانسة الآتية:-

المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x) \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية

$$\begin{cases} u(x,0) = 1 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

لحل هذه المسألة نجري الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى: (تعيين التحويل)

بما أن المتغير x يتغير من 0 إلى 1 فننتبع التحويل المنتهي في هذه الحالة، التحويل الجيبي، نستطيع حل المسألة باستخدام تحويل لابلاس بتحويل t (وستضمن نفس الصعوبة تقريبا كما في التحويل الجيبي المنتهي)

الخطوة الثانية (إجراء التحويل):

بتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية هنا نحصل علي :

$$s[u_{tt}] = s[u_{xx}] + s[\sin(\pi x)]$$

حيث $s_n(t) = s[u]$ وباستخدام متطابقات التحويل الجيبي نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s_n(t)}{dt^2} &= -(n\pi)^2 s_n(t) \\ &+ 2n\pi[u(0,1) + (-1)^{n+1}u(1,t) + D_n(t)] \\ &= -(n\pi)^2 s_n(t) + D_n(t) \end{aligned}$$

حيث

$$D_n(t) = s[\sin(\pi x)] = \begin{cases} 1 & n = 1, 2, \dots \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

(هذه هي معادلات سلسلة فورية الجيبية)

والآن إذا حولنا الشروط الابتدائية للمسألة فنحصل علي الشروط الابتدائية
للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$S[u(x, 0)]s_n(0) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n = 1, 3, \dots \\ 0 & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$S[u_t(x, 0)] = \frac{ds_n(0)}{dt} = 0$$

وعليه بحل مسألة (أو مسائل) القيم الابتدائية الآتية:

$$\frac{d^2 s_n}{dt^2} + (n\pi)^2 s_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} s_n(0) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = 1, 3, \dots \\ 0 & n = 2, 4, \dots \end{cases} \\ \frac{ds_n(0)}{dt} = 0 & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

يتبع أن:

$$s_1(t) = A \cos(\pi t) + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

حيث:

$$A = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} = 1.17$$

$$S_n(t) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, \dots \\ \frac{4}{4\pi} \cos(n\pi t) & n = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

وعلية فان الحل $u(x, t)$ للمسالة هو

$$u(x, t) = [A \cos(\pi t) + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2] \sin(\pi x) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos[(2n+1)\pi t] \sin[(2n+1)\pi x]$$

(3-4) تحويل فورية وتطبيقاته في المعادلات التفاضلية الجزئية:

لإيضاح خواص مفيدة متعددة لتحويل فورية وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، بصورة خاصة سنبين كيفية أن تحويل فورية يحول التفاضل إلى ضرب وعلية تتحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية، كذلك نستخدم مفهوم الالتفاف غير المنتهي.

أن تحويل فورية للدالة $f(x)$ حيث $-\infty < X < \infty$ يتعين بالصيغة الآتية:-

$$f[\varepsilon] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx \quad (1)$$

أي انه إذا ابتدأنا بدالة $f(x)$ معرفة علي محور x الحقيقي فنعوض عنها بالمعادلة (1)

ونحصل علي دالة جديدة $f(\varepsilon)$ حيث $-\infty < \varepsilon < \infty$ وعلي سبيل المثال،

فان جدول (1) يبين بعض تحويلات فورية المؤلفه .

جدول بعض تحويلات فورية المؤلف:

الدالة $f(x)$	تحويل فورييه $f(\varepsilon)$
1 - $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$	$f(\varepsilon) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}$ (دالة مركبة)
2 - $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{في الحالات الاخرى} \end{cases}$	$f(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ (دالة حقيقية)
3 - $f(x) = e^{-x^2}$	$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$ (دالة حقيقية)

ولتحويلات أخرى نشير إلى الجداول في تزييل الكتاب نلاحظ من التطبيقات أن الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ قد تكون مركبة وقد لا تكون ففي المثال الأول الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ تتضمن العدد المركب i وعليه نسميها دالة مركبة القيم بالمتغير الحقيقي ε (حيث ε يتغير من $-\infty$ إلى ∞)، وبعبارة أخرى أن قيم المتغير ε حقيقية وقيم الدالة المركبة.

ان فائدة تحويل فورية (كما في معظم التحويلات الاخرى) تأتي من حقيقة تحويل عملية التفاضل إلى عملية ضرب، أي أن المعادلة التفاضلية تتحول إلى معادلة جبرية، كما أن هنالك عدد كبير من الخواص التي تجعل من تحويل فورية أداة عملية فعالة، ندون قليلا منها.

خواص مفيدة لتحويل فورية:

الخاصية الأولى: (أزواج تحويل فورية)

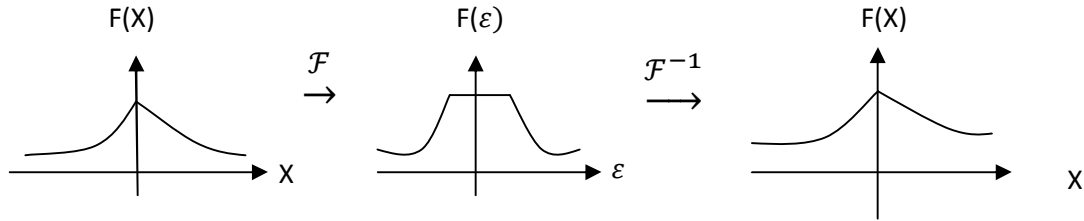
أن تحويل فورية للدالة $f(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ يعطي دالة جديدة $f(x)$ معرفة بالصيغة:

$$\mathcal{F}[F] = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx$$

وان تحويل فورييه العكسي $f(x)$ حيث $-\infty < \varepsilon < \infty$ سيعطي الدالة
الاصلية $f(x)$ طبقا للصيغة:

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} dx$$

لاحظ الشكل



شكل (3-5) يبين منحنى الدالة وتحويلها

الخاصية الثانية: (التحويل الخطي) أن تحويل فورييه هو تحويل خطي اي ان:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

ويمكن إثبات هذه الصيغة بسهولة حيث ستطبق مرارا ف المستقبل فمثلا

تحويل فورييه للدالة

$$\frac{1}{x^2+1} + 3e^{-x^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right] + 3\mathcal{F}[e^{-x^2}]$$

الخاصية الثالثة: (تحويل المشتقات الجزئية):

عندما نناقش تحويل المشتقات يجب أن نميز المشتقات الجزئية بالنسبة إلى

متغيراتها المختلفة فمثلاً إذا كان تحويل فورييه يحول المتغير x (متغير التكامل في

التحويل) وإذا كانت الدالة المراد تحويلها هي المشتقة الجزئية للدالة $u(x,t)$

بالنسبة إلى x فعند إذن صيغ التحويل تكون

$$\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) e^{-i\varepsilon x} dx = i\varepsilon \mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-i\epsilon x} dx = -\epsilon^2 \mathcal{F}[u]$$

من ناحية أخرى إذا حولنا المشتقة الجزئية $u_t(x, t)$ (وإذا كان المتغير

التكامل في التحويل x) فعندئذ يكون تحويل:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{-i\epsilon x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u] \\ \mathcal{F}[u_{xx}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-i\epsilon x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{F}[u] \end{aligned}$$

الخاصية الرابعة: (خاصية الالتفاف)

لكل تحويل تكاملي هنالك ما يسمى بخاصية الالتفاف حيث أنه لا يكون بالضرورة حاصل ضرب الدالتين $f(x), g(x)$ مساويا حاصل ضرب تحويليهما أي أن:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] \neq \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

ومع ذلك وفي نظرية التحويلات هنالك ما يسمى بالالتفاف $f * g$ للدالتين f, g

التي تلعب بطريقة أو بأخرى دور حاصل الضرب والصحيح عن الالتفاف هو أن:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad \dots \dots \quad (2)$$

فما هو الالتفاف؟ يعرف بالصيغة

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) g(\epsilon) d\epsilon \quad \dots \dots \dots (3)$$

هذا ويمكن وبدون صعوبة إثبات صحة (2) ونلاحظ من تعرية الالتفاف انه

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين فعندئذ الالتفاف $(f * g)(x)$ دالة جديدة

تطبيق علي التفاف الدالتين:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ G(x) &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

عندئذ التفاف هاتين الدالتين هو:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varepsilon) e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$$

وحصلنا علي هذه القيمة بتطبيق الصيغة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} = \sqrt{\pi}$$

أن أهمية الالتفاف (3) في التطبيقات غالبا ما يعزي إلي أن الخطوة الأخيرة من حل المعادلة التفاضلية الجزئية هي باختصار إيجاد التحويل العكسي لمقدار يمكن أن يفسر بأنه حاصل ضرب تحويلين $\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[f]$ أي إيجاد

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\}$$

وباتخاذ التحويل العكسي لطرفي (2) نحصل علي النتيجة الآتية

$$F * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\}$$

وعلية إيجاد (4) فان كل ما علينا هو إيجاد التحويل العكسي لكل عامل للحصول علي g و f ثم حساب التفافهما.

نحن الآن في موضع يؤهلنا لحل مسألة مهمة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية وهذا هو حل مسألتنا، وقبل ترك المسألة لنحل هذه النتيجة، نلاحظ أن الدالة المطلوب تكاملها تتألف من حدين

$$1- \text{درجة الحرارة الابتدائية } \emptyset(x)$$

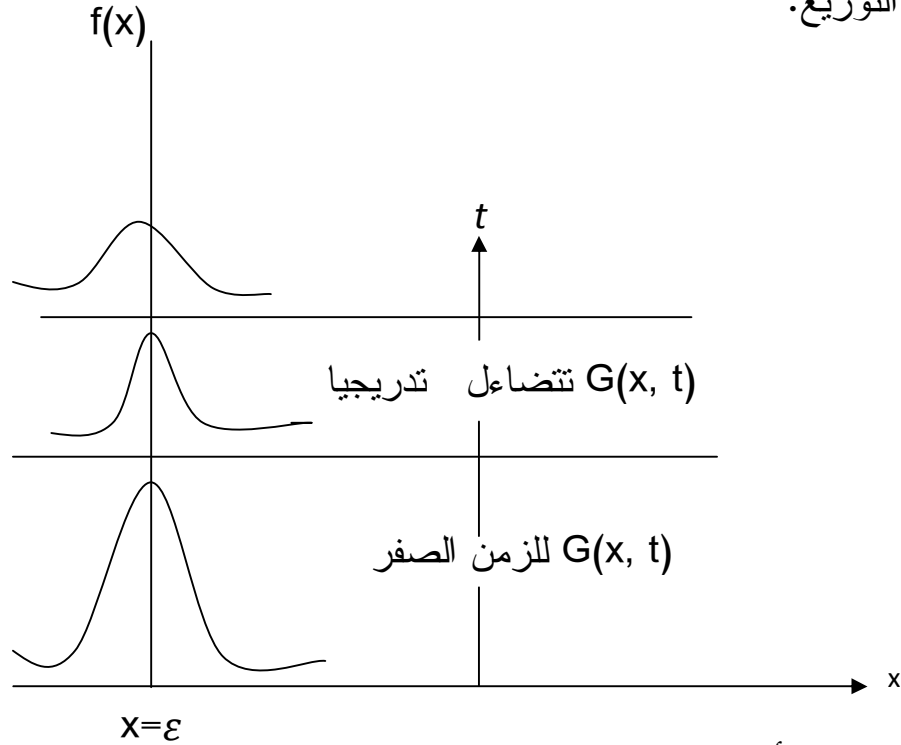
$$2- \text{الدالة } G(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{gt}} e^{-(x-\varepsilon)^2/4a^2t}$$

والتي تسمى بدالة كرين أو دالة الحافز والاستجابة

يمكن البرهنة علي أن دالة الحافز والاستجابة $G(x, t)$ هذه هي درجة حرارة الاستجابة الي درجة حرارة الحافز عندما $x=\varepsilon$ وبعبارة اخرى $G(x, t)$ هي درجة حرارة في الذراع في زمن t الناشئة عن وحدة حافز حرارة عندما $x=\varepsilon$

$G(x,t)$ شبه ما يسمى منحني التوزيع الطبيعي في الإحصاء حيث نلعب دور

تباين التوزيع.



الشكل أعلاه دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ من درجة حرارة محفزة عندما

$x = \varepsilon$ لذا فان تفسير حل (٤) هو أن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = \emptyset(x)$ تتجزأ إلي متصلة من الحوافز ذات قيم $\emptyset(\varepsilon)$ (عند كل نقطة $x = \varepsilon$) وتوجد درجة الحرارة الناتجة $\emptyset(\varepsilon)G(x,t)$ وثم تجمع (تكامل) درجات الحرارة هذه للحصول علي (٤) سنلاحظ بعدئذ أن هذا المفهوم العام يعرف بالتركيب من جهة النظر العلمية.

غالبا ما يمكن إيجاد التكامل في الحل (٤) لدرجة حرارة ابتدائية معينة

$\emptyset(x)$ أما إذا لم يمكن إيجاد ذلك تحليليا فان الحل يمكن إيجاده عند أي نقطة (x,t) بحساب التكامل بطرائق عديدة.

الفصل الرابع

تطبيقات عامة في المعادلات التفاضلية الجزئية

(1-4) تمهيد:

لابلاس ليس له أهمية تذكر في تحويل لابلاس، بالرغم من أن طريقته لحل بعض المعادلات التفاضلية يمكن اعتبارها مثالا لاستخدامها. والتطور الحقيقي بدا في نهاية القرن التاسع عشر غيرها اكتشف العالم اولفر هيفي ساير طريقه فوريه لكنها غير مبرده وهي الطريقة الدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية والاعتيادية للفيزياء الرياضية وحوالي عام 1920م. فإن طريقه هيفي سايد أصبحت شرعية واعتبرت مثل تحويل لابلاس الذي يستخدم الآن وبعد ذلك التعميم كانت نظريه شوارتز في التوزيع عام 1940م. وحساب تفاضل وتكامل ميكوتسكي 1950م. ولأخير يعتبر أكثر عموما (لاحظ المعادلات التفاضلية الرياضية التطبيقية تالف ديف وتاير 1966) كلا النظريتين تعطي التفسير ل $\Gamma(s)=1$ والذي هو ليس تحويل لابلاس لابه داله، بالمعني الذي استخدم وتوجد أعداد أخرى من التحويلات تحت اسم فوريه، ميلان هيتكل وآخرين تشبه تحويل لابلاس في حين أن بعض الدوال الاخرى e^{-st} لتعريف التكامل (العمليات الرياضية) تالف تشيرشل 1972م يعطي معلومات أخرى حول تطبيقات التحويلات. إن جداول التحويلات يمكن إيجادها في جداول الخاصة بتحويل التكامل تأليف ايردلين 1954 م.

(2-4) استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية:

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عادة في المسائل التطبيقية التالية:-

(1) معادله الموجه Wave Equation:

$$\begin{aligned} \text{أحادية البعد} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{ثنائية البعد} \quad \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{C^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(2) معادلة سريان الحرارة : *Heat flow equation*

$$\begin{aligned} \text{أحادية البعد} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[\frac{1}{k} \right] \frac{\partial u}{\partial t} \\ \text{ثنائية البعد} \quad \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{k} \right] \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

(3) معادله لابلاس : *Laplace equation*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(4) معادله يوسوان : *poisson equation*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(5) معادله البث : *Radio equation*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{I}{x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

حيث V هو الجهد، I هو التيار، L هو معامل الحث

1/ معادله الموجه:

تطبيق:-

خيط طوله L مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل واعلي لمسافتين متساويين من نقطتين علي بعد متساوي من الطرفين كما في الشكل إستنتج تعبير عن إزاحة الخيط عند أي زمن t واثبت أن الإزاحة صفر عند نقطه المنتصف.

الحل:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots \dots \dots (1) \quad \text{عند أي نقطه تحقق المعادلة}$$

الإزاحة $Y(x, t)$

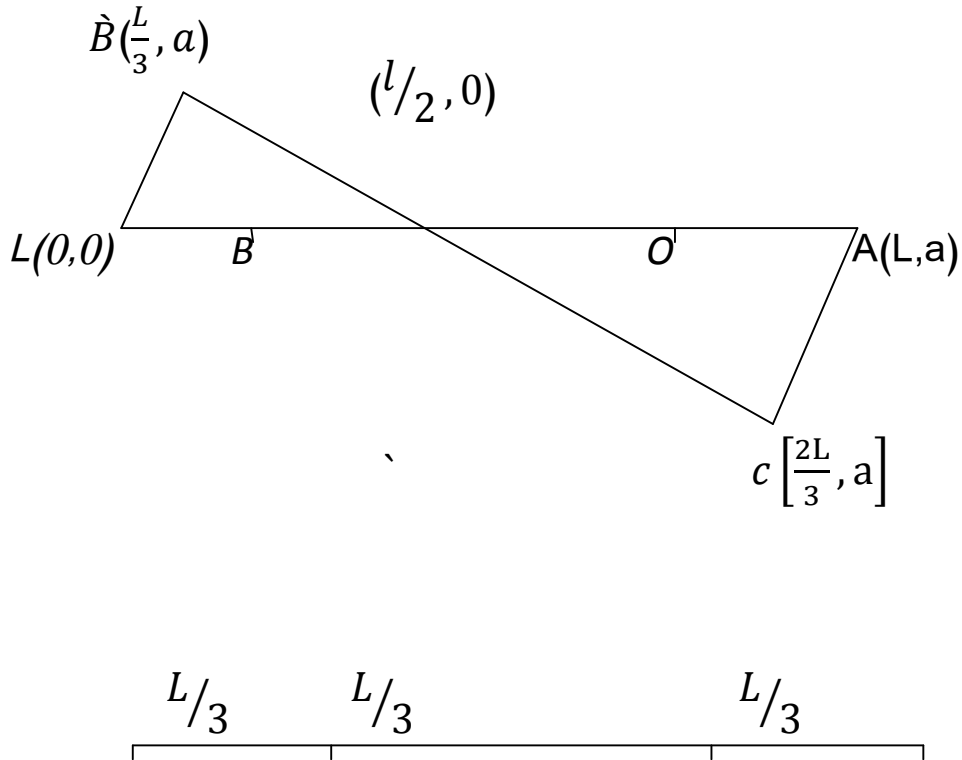
والشروط الحدية هي

$$Y(0,t)=0, y(l,t)=0 \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]_{t=0} \quad (3)$$

باقي الشروط عنده $t=0$ يكون الخيط كما هو مبين بالشكل $\hat{B}\hat{C}\hat{A}$ معادله

$\hat{O}\hat{B}$ هي



معادله $\hat{B}\hat{C}$ هي

$$y = \frac{3a}{l} x$$

معادله $\hat{C}\hat{A}$ هي

$$\frac{y-0}{x-\frac{l}{3}} = \frac{0-(-a)}{\frac{l}{3}-\frac{2l}{3}}$$

$$y = \frac{3a}{l} (l - 2x)$$

أي أن

وعليه يكون

$$y(x, 0) = \frac{3a}{l} \left\{ \begin{array}{ll} x & 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \\ (L - 2x) & \frac{1}{3}L \leq x \leq \frac{2}{3}L \\ (x - L) & \frac{2}{3}l \leq x \leq l \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

حل المعادلة (١) تحت الشروط الحدية (٢) و (٣) هي

$$y(x, 0) = \frac{3a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

$$y(x, 0) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

باستخدام متسلسلة فورييه تحصل علي

$$B_n = \frac{2}{L} \left\{ \int_0^{\frac{l}{3}} x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (L - 2x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx + \int_{\frac{2L}{3}}^L (x - L) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} \left(\frac{3a}{L}\right)$$

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \int x \sin(mx) dx &= -\frac{1}{m} x \cos(mx) + \frac{1}{m^2} \sin(mx) \\ \int (L - 2x) \sin(mx) dx &= -\frac{1}{m} (L - 2x) \cos(mx) - \frac{2}{m^2} \sin(mx) \end{aligned}$$

$$\int (x - L) \sin(mx) dx = -\frac{1}{m}(x - L) \cos(mx) + \frac{1}{m^2} \sin(mx)$$

وعلي ذلك فإنه

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{6a} - B_n &= \left\{ \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \frac{L}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}_0^{\frac{l}{3}} \\ &\quad \left\{ \frac{-2L^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \frac{L}{n\pi} (l - 2x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \\ &\quad + \left\{ \frac{-L^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \frac{L}{n\pi} (x - l) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}_{\frac{2l}{3}}^{\frac{l}{3}} \\ &= \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right\} - \\ &\quad \frac{L}{n\pi} \left[\frac{L}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{L}{3} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{L}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{L}{3} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right] \\ B_n &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) [1 + (-1)^n] \end{aligned}$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{36a}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & , \text{ زوجي } n \\ 0 & , \text{ فردي } n \end{cases}$$

$$y(x, t) = \sum_{n=2,3} \frac{36a}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)$$

يأخذ $n=2m$ حيث $m=1,2,3,\dots$

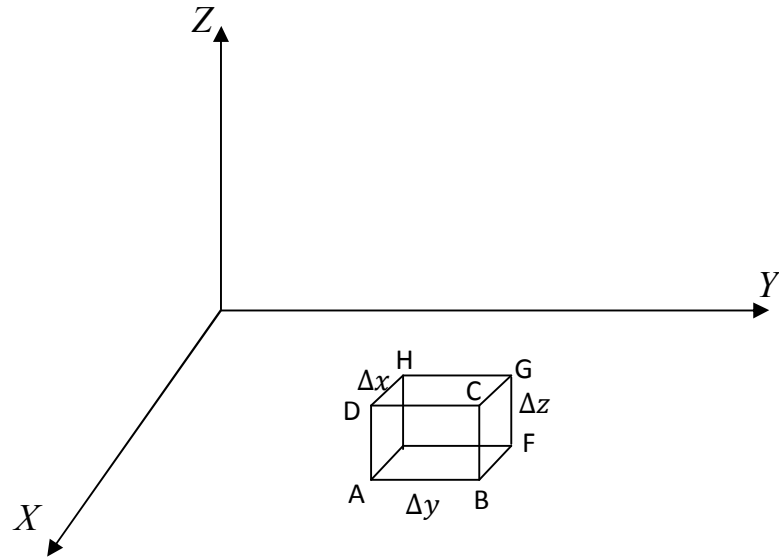
$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9a}{m^2 \pi^2} \sin\left(\frac{2m\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2m\pi}{l} x\right) \cos \frac{2m\pi c t}{l}$$

بوضع $x = \frac{1}{2} L$ نجد ان

$$Y(x,t)=0 \Rightarrow y\left(\frac{1}{2}L, t\right)=0$$

2/جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ:

إن أفضل مثال لتكوين المعادلات التفاضلية الجزئية هو في تصور جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ كما يوضح ذلك الشكل أدناه ويجب الأخذ بعين الاعتبار الحقائق التالية:



1. إن جريان الحرارة يحدث باتجاه تناقص الحرارة.
2. معدل جريان الحرارة خلال مساحة معينة يتناسب مع إنحدار الحرارة بالدرجات لوحدة المساحة وفي اتجاه عمودي علي تلك المساحة.
3. كميته الحرارة المكتسبة من قبل النظام المفقود من الجسم تتناسب مع كتلته الجسم درجة الحرارة.

إن ثابت التناسب في نقطه (2) يسمى بمعامل التوصيل الحراري (k) يسمى الحرارة النوعية للمادة (c).

وآلات تغير الظروف الحرارية في مقطع محدد من معدن موصل للحرارة كما في الشكل أعلاه إذا كانت كتلته المعدن لوحده الحجم أو يعرف فيزيائيا بالكثافة (ρ) فإن تغير كتله المقطع هو

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots (5)$$

ومن جهة أخرى إذا كانت t هي درجة الحرارة عند أي زمن و إذا كانت Δt هي التغير بدرجة الحرارة الذي يحدث خلال مقطع في فترة زمنية معينة محدده هي $\Delta \theta$ فإن كمية الحرارة المحفوظة في المقطع عن الفترة الزمنية هي :

$$\Delta H = C. \Delta m \Delta. \Delta t = c. \rho. (\Delta x. \Delta y. \Delta z) \dots \dots \dots (6)$$

أما معدل الحرارة التي يكتسبها النظام هي

$$\rho \frac{\Delta H}{\Delta \theta} = C \Delta x \Delta y \Delta z$$

حيث إن θ هو الزمن التي تسمى أيضا الحرارة المتراكمة أو المتجمعة في الجسم.

إن الحرارة التي تتولد نتيجة التغير في Δt تأتي من مصدرين هما :-

المصدر الأول:-

يمكن توليد الحرارة خلال الجسم بواسطة وسائل كهربائية أو كيميائية لحظية عند معدل معلوم مثل

$F(x, y, z, \theta)$ وان المعدل الذي تصل فيه الحرارة إلي المقطع من هذا

المصدر سيكون:

$$F(x, y, z, \theta) \Delta x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots$$

المصدر الثاني:

هو الحرارة المكتسبة من انتقال الحرارة المفترد خلال أوجه المقطع المختلفة .

إن الصيغة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال مساحه معينه يمكن

الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$-KA \frac{dT}{dx} \dots \dots \dots (7)$$

وعلي هذا الأساس فإن كمية الحرارة المنتقلة خلال المقطع (ADHL)x

هي

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$-K\Delta y\Delta z \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_x$$

وخلال نهاية المقطع $X + \Delta x$ هي:

$$-k\Delta y\Delta z \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}$$

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$\begin{aligned} -k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_y - \left[-k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} &= k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - \\ k\Delta y\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_y &= k\Delta y\Delta z \left[\frac{\partial t}{\partial x} \right]_{x+\Delta x} - \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_x \end{aligned} \quad (8)$$

إن الاشارة السالبة تعني أن التدفق الحراري يحدث باتجاه نقصان درجه

الحرارة ويمكن تكوين معادلات تفاضلية بنفس الحالة في اتجاهين y و z .

$$\begin{aligned} -k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_y - \left[-k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} &= k\Delta x\Delta z \left[\frac{\partial t}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} - \\ k\Delta x\Delta z \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_y &] \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

وفي اتجاه z يكون التدفق الحراري بصيغته النهائية علي الصورة التالية:

$$\begin{aligned} -k\Delta x\Delta y \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_z - \left[-k\Delta x\Delta y \frac{\partial t}{\partial z} \right]_{z+\Delta z} \\ = k\Delta x\Delta y \left[\frac{\partial t}{\partial z} \right]_{z+\Delta z} - k\Delta x\Delta y \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_z \end{aligned} \dots \dots (10)$$

وبموجب قانون حفظ الكتلة الطاقة فإن (الدخـل - الخارج = المتراكم)

($in-out = Accnmulation$) نجد أن:

صافي تدفق الحرارة في مقطع الجسم + الحرارة المتولدة في المقطع =
المتراكم الحراري.

بالتعويض عن كل صيغته بما يساويها من المعادلات أعلاه ينتج أن:

$$K\Delta y\Delta z \left[\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_x \right] + k\Delta x\Delta z \left[\frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_y \right] + \\ k\Delta x\Delta y \left[\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_z \right] + F(x, y, z, \theta)\Delta x\Delta y\Delta z = \\ \rho c\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial t}{\partial \theta} \dots \dots \dots (11)$$

إن الرمز $F(x, y, z, \theta)$ سيتم تغييره إلى q^0 أي كمية الحرارة المتولدة من الجسم وستصبح المعادلة (11) بعد قسمه جميع الحدود علي المقدار $\Delta x\Delta y\Delta z$ بالشكل التالي:

$$K \left[\frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} + \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y}{\Delta y} + \frac{\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} \right] + q^0 = \\ C\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots \dots \dots (12)$$

وبأخذ النهايات $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من الصفر ومن تعريف المشتقة نستنتج أن:
عندما تقترب كل

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q^0 = \rho c \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (13)$$

وبقسمة طرفي المعادلة علي الثابت k نحصل علي

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^0}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (14)$$

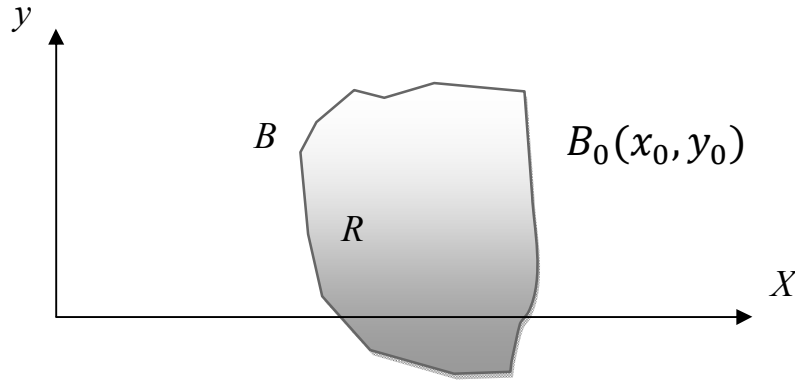
حيث أن: $\alpha = \frac{k}{\rho c}$

أو بما يعرف بمعامل الانتشار الحراري. وتمثل المعادلة (14) المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية الثلاثية الإبعاد.

(٣-٤) مسائل القيم الحدية:-

تكمّن المسألة الأساسية في المعادلات التفاضلية الجزئية التطبيقية في إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية صالح في منطقته ما R ويحقق شروط معينه تسمى بالشروط الحدية علي R حدود المنطقة R . والكمية u هي كميته متغيره لدرجه الحرارة مثلا، وهي داله حقيقية في n من المتغيرات الحقيقية، R فئة مفتوحة ومتصلة في فراغ المتغيرات n .

ولكن تحدد هذه الأفكار بدقه أكثر نفرض أن $n=2$ و $u=u(x,y)$ تحقق معادله تفاضلية جزئية عند كل نقطه من النقاط المنطقة R . الموضحة في الشكل أدناه حدود المنطقة R تتكون من الفئة النقط R التي بها خارجية إن كل دائرة مركزها B_0 تحتوي علي نقط موجوده في R ونقط غير موجوده في R . ومسألة القيم الحدية هي إيجاد دالة تتحقق شروط معينه علي الحدود B . وليس من الضروري أن تتحقق الحل $u=f(x,y)$ المعادلة التفاضلية الجزئية علي B .



ومن الواجب وضع شروط إضافية لكي تكون مسألة القيم الحدية جيد الصياغة (*well-posed*) إلي كلي مثل مسألة القيم الحدية نموذجاً مناسباً لدراسة عمليه فيزيائية واقعيه.

علي سبيل المثال نقض أن الشرط الحدي يؤكد أن $u=g(x,y)$ علي B حيث g داله معطاة إذا استطعنا أن نحصل علي حل $u=f(x,y)$ في R فانه يمكننا أن نعرف u اختياريا علي B بحيث تكون $u=g(x,y)$.

ومن الثابت إننا في كل وضعيه (حاله) معينه تريد من $f(x,y)$ أن تكون قريبه من قيمه $g(x,y)$ عند النقطة $B_0(x_0, y_0)$ الواقعه علي B أي أن تكون قريبه من $g(x_0, y_0)$ عندما تكون النقطة (x,y) في R قريبه من B_0 .

حيث:

$|f(x,y) - g(x_0, y_0)| < \varepsilon$ عندما تكون (x,y) في R و $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ وكذلك نفرض وجود حل لمسألة القيم الحدية وان الحل يكون وحيدا. ويمكن إحدى الطرق لإثبات أن هنالك حلا هي إنشاء حل يحقق جميع الشروط الحدية المعطاة ومن ثم التحقق مباشرة من أن الحل يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية في R . ولإثبات أن الحل المعطي بالدالة $u_1 = u_1(x,y)$ وحيدا نستطيع أن نستخدم الطريقة المضادة وذلك بفرض وجود حل آخر $u_2 = u_2(x,y)$ وبعد ذلك اثبات $u_1 = u_2$ في R وعلي حدوده.

كي تكون المعادلة التفاضلية جيدة الصياغة نفرض أن الحل الوحيد يعتمد باتصال (اعتماد متصلا) علي الشروط الحدية. وبعبارة عامه يعني هذا أن تغيرا صغيرا من الشروط الحدية الي تغير صغير في الحل. وهذا الافتراض ضروري، لان الشروط الحدية تحتوي عمليا علي معلومات ناتجة ومستمرة من الملاحظة، وبالتالي فلا بد وان تكون مثل هذه المعلومات قد دخل فيها التقريب، وإذا كان الحل المرتبط بمعلومات تقريبية لايقرب الحل المرتبط بالقيم الحدية المضبوطة فمن الواضح أن النموذج المستخدم لابعكس العملية الفيزيائية بدقه.

والمطلوبات ألأزمه لمسالة القيم الحدية كلي تكون جيدة الصياغة يسهل تعميمها إذا كان الحل المرغوب فيه يعتمد علي أكثر من متغيرين.

وكما ذكرنا سابقا تكون الدالة في معظم التطبيقات داله في الإحداثيات الفراغية x, y, z والزمن t . ويعرف الشرط الذي تحققه u عندما $t=0$ بالشرط الابتدائي ومن المناسب أحيانا أن ننظر إلي الشرط الابتدائي علي انه شرط حدي.

والتوضيح لماذا كانت u تمثل إزاحة وتر متذبذب مثبت عند $x=0$ و $x=2$ (قدم) فالمتغير y في شكل أعلاه يناظر t المنطقة R هي السرعة نصف ألانهاية المعرفة ب:

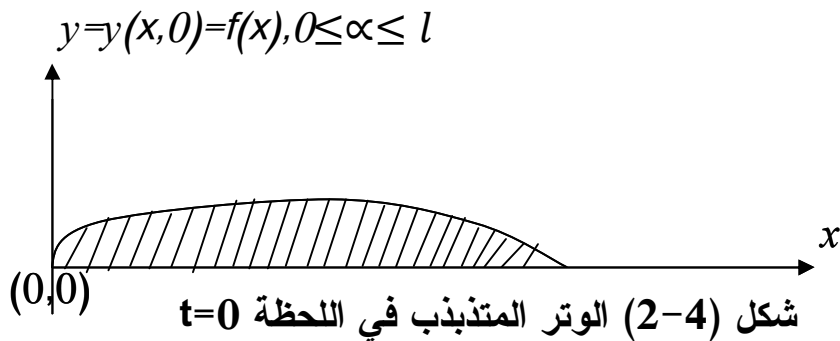
$$R=\{(x,y) ; 0 < x < 2, t > 0\}$$

والإزاحة u داله في الزمن t والمسافة x علي محور السينات المقاسة من $x=0$

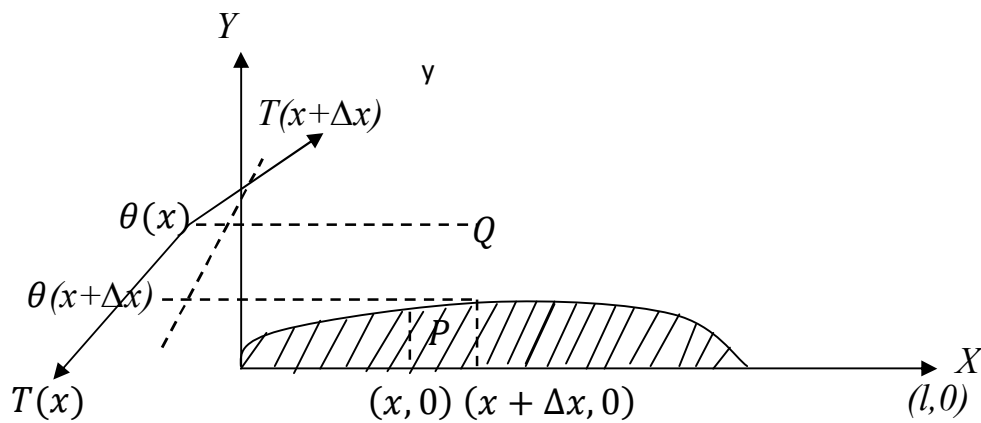
وهناك نوع آخر من الشروط الحدية وهو وصف قيم احدي مشتقات u الجزئية ولتكن مثلا $u_x(x,y)$ علي كل او علي جزء من B .

(٤ - ٤) تطبيقات الموجه:-

ندرس وترا تام المرونة مثبتا عند $(0,0)$ وعند $(L,0)$ كما في الشكل أدناه وتثبت في ذبذبة الوتر إزاحة رأسيه لكل نقطه من نقطه في المستوي xy . وهذا الإزاحة تكون صغيرة (ربما تكون صفرا) وكذلك سرعه ابتدائية (وربما تكون صفرا) عمودية علي محور السينات.



نستنتج معادله تفاضلية جزئية تحكم وتصف ذبذبه الوتر بعض الفرضيات الفيزيائية القليلة نفرض أن الشد T في الوتر قابل للانتشاء بما يكفي لان يكون الشد مماسا للوتر عند كل نقطه من نقطه. ونفرض أن جزئيات الوتر تتحرك راسيا في المستوي XY ، إن اكبر إزاحة لأي نقطه من الوتر متجانس نأخذ P كتله الوتر لوحده الطول ثابت. وهذا يتضمن إن الكتلة الكلية للوتر بين الخطين $X=x$ و $X=X+\Delta X$ مساويه $P(\Delta X)$ عند تذبذب الوتر ويوضح الشكل شكل أدناه الوتر في لحظه زمنيه اختياريه T . ويعتمد الارتفاع Y لأي نقطه من الوتر تبعد X من الوحدات عن المحور الراسي (الصادي) ليس فقط علي X وإنما علي الزمن T . وسنحاول إيجاد معادله تفاضلية جزئية تحققها $y(x,t)$ حيث $0 < x < l$ ، وكما هو موضح في شكل أدناه يقع جزء الوتر المحصور بين $x=x$ و $x=x+\Delta x$ تحت تاثير الشد $t=t(x)$ الذي يوتر بزاوية $\theta = \theta(x)$ عند نقطه P ، والشد $t=t(x+\Delta x)$ الذي يوتر بزاوية $\theta = \theta(x + \Delta x)$ عند نقطه Q .



الشكل (3-4) الوتر المتذبذب في اللحظة $t=t$

و θ هي زاوية ميل مماس للوتر. وتطبيق القانون الثاني لنيوتن في اتجاهين X, Y نحصل علي:

$$t(x + \Delta x) \sin[\theta(x + \Delta x)]$$

$$- T(x) \sin[\theta(x)] = P(\Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots \dots (15)$$

$$t(x + \Delta x) \cos[\theta(x + \Delta x)] - t(x) \cos[\theta(x)] = 0 \dots \dots \dots (16)$$

وتمثل $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ عجله مركز ثقل الجزء الصغير من الوتر محل الدراسة في الاتجاه y . ويكون الطرف الأيمن للمعادلة (16) مساويا للصفر لافتراضنا عدم حركه الوتر افقيا.

وبهذا فان:

$$t(x + \Delta x) \cos[\theta(x + \Delta x)] = t(x) \cos[\theta(x)] = t \dots (17)$$

حيث تمثل T الشد الأفقي الثابت للوتر. ومنها نجد:

$$\frac{t(x + \Delta x) \sin[\theta(x + \Delta x)]}{t(x + \Delta x) \cos[\theta(x + \Delta x)]} - \frac{t(x) \sin[\theta(x)]}{t(x) \cos[\theta(x)]} = \frac{p(\Delta x)}{t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

أو

$$\tan[\theta(x + \Delta x)] - \tan[\theta(x)] = \frac{p(\Delta x)}{t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots \dots \dots (18)$$

وحيث أن $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ ويمكن كتابة (18) علي الصور

$$\frac{\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x}}{\Delta x} = \frac{p}{t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

إذا كانت $0 \dots \dots \dots \Delta$ فان Y تؤول إلي y عندما $x=x$ والطرف الأيسر

يؤول إلي $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ عندما $x=x$ ونحصل علي معادله التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (19)$$

حيث $c = \sqrt{\frac{t}{p}}$ وتسمي (١٩) بالمعادلة الموجية في بعد واحد.

والآن نشرع في إيجاد ارتفاع الوتر المتذبذب Y بدلالة x , t . وتعين علينا حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt} \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (20)$$

$$Y(0,t)=0 \quad t \geq 0 \quad (21)$$

$$Y(l,t)=0 \quad t \geq 0 \quad (22)$$

$$Y(x,t)=0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (23)$$

$$Y(x,0)=g(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (24)$$

وتمثل الدالة f الشكل الابتدائي للوتر، وتصف الدالة g السرعة الابتدائية لأي نقطه من الوتر. ونفرض أن f, g دالتان متصلتان علي $[L, 0]$ ونلاحظ أن $f(0)=f(l)=g(x)=g(l)=0$ وذلك لان الوتر مثبت عند نهايته. ولقد رأينا منحنى الدالة f في الشكل اعلاه ومن المحتمل أن تأخذ $f(x)$ احدي الصيغ التالية: حيث a ثابت لا يساوي الصفر. وهناك احتمال آخر وهو أن تكون $f(x)=0$ وقد تنشأ هذه الحالة عندما لا تكون مثلاً في الحالة $g(x)$ مساوية للصفر بالتطابق. ومثلاً في حاله طرف وتر مستقر لبيانو. وعندما يعطي الوتر إزاحة ابتدائية $f(x)$ ويترك من حاله السكون فإن $g(x)=0$.

وبتطبيق طريقه فصل المتغيرات نحاول إيجاد حل المسألة القيم الحدية علي

الصورة:

$$Y(x, t) = x(x)t(t) \quad (25)$$

وبالتعويض بالصيغة (25) , (19) نحصل علي:

$$x''t = \frac{1}{c^2} xt''$$

وإذا كان $x \neq 0$ فإنه يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\frac{x''}{x} = \frac{1}{c^2} \frac{t''}{t} \quad (26)$$

فإن طرفي المعادلة (26) لهما نفس القيمة بالثانية k .

وبهذا نحصل علي معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$x'' - kx = 0 \quad (27)$$

$$t'' - kc^2 t = 0 \quad (28)$$

وإذا كان $k = \lambda^2 > 0$

$$Y(x, t) = (A \sinh \lambda x + B \cosh x)(C \sinh xct + D \cosh \lambda ct$$

في كلتا الحالتين لا تخفف الشروط الحدية. إلا إذا كانت $y(x)=0$ أي فقط

عندها يكون الحل التافه (*trivial*) هو الموجود.

و الآن تأخذ في اعتبار الاحتمال الوحيد الباقي $k = -\lambda^2 < 0$ من (١٩)

(٢٢)، (٢٥) نستنتج انه إذا كانت $y(x, t) \not\equiv 0$ فان $x(0)=x(L)=0$ ومسألة القيم

الحدية ذات النقطتين:

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(l) = 0 \quad (29)$$

نعطي :

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

من $x(0)=0$ نحصل علي $A=0$ ومن $x(L)=0$ نحصل علي $B \sin \lambda L = 0$

وهنا نفترض أن $B \neq 0$ وإلا كانت $X(x)=0$ و $y(x, t)$ ولهذا، فلكي نتحقق

الشروط الحدية (22) و (21) يجب أن يكون :

$$\sin \lambda x = 0$$

وهذا يتطلب أن يكون:

$$L\lambda = N\pi \text{ أو } \frac{\pi n}{L} = \lambda \text{ لقيم } N = -1, \mp 2, \dots$$

وبما أن $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ فإن حلول (29) غير التافهة تكون فقط علي

الصورة:

$$X_N = B_N \sin nx = B_N \sin \frac{N\pi x}{l}$$

حيث n عدد صحيح موجود وكل ثابت اختيار $B_{n \neq 0}$
وبمثل يكون للمعادلات التفاضلية العادية $t'' + \lambda c^2 t = 0$ حلول علي
الصورة:

$$T_n(t) = C_n \sin c\lambda n t + D_n \cos c\lambda n t$$

$$C_n \sin \frac{n\pi c}{L} t + D_n \cos \frac{n\pi c}{L} t$$

حيث أن $n=1,2,3,\dots$

وفي تكوين حاصل الضرب $x_n(x)T_n(t)$ تاخذ كلا من $B_n = 1$ بدون
الإخلال العمومية وذلك لأن C_n, D_n اختياري وتسمي قيم λ التي تحقق عندما
الصيغة

$$y(x, t) = \sin \lambda n x (C_n \sin c\lambda n t + D_n \cos c\lambda t)$$

المعادلة (20)، الشرط (22) (21)، بالقيم الذاتية لمسألة القيم الحدية .

وتسمي حلول المعادلة غير الصفريية المناظر لها $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ بالدالة لمسألة
القيم الحدية. ونهدف الآن إلي اختيار قيم D_n, C_n وقيم مسموح بها λ لكي تحقق
الشروط الحدية و الابتدائية (24) و (22) ولكي تتحقق (23) يجب أن يعطي
المعادلة (30):

$$y(x, 0) = D_n \sin \lambda_n x = D_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad \dots (30)$$

وإذا كانت $f(x)$ علي الصورة $D_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$ او حتي $\sum_{k=1}^n D_k(\frac{k\pi x}{L})$

ولذا سنحاول إيجاد الحل في الصورة:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \lambda_n x (C_n \sin C \lambda_n t + D_n \cos C \lambda_n t) \quad (31)$$

حيث $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ اي دعنا تركيز حلا لا نهائيا من الحلول التي علي الصورة (30) ولكي تتحقق (23) يجب ان تكون

$$0 \leq x \leq l \text{ علي } y(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \lambda_n x = f(x) \quad (31)$$

وتتعرف علي (30) بوصفها متسلسلة الجيب لفورييه للدالة f حيث الدورة $2P=2L$ وبهذا نعطي معادلات فورييه ب:

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (32)$$

وليتحقق الشرط لحدي النهائي (22) نفترض شرعيه تفاضل (31) حدا حدا ويعطينا هذا الفرض:

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C \lambda_n \sin \lambda_n x (c_n \cos C \lambda_n t - D_n \sin C \lambda_n t) \quad (33)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{حيث}$$

ويحول الشرط (24) لمعادله (33) الي :

$$y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C \lambda_n \sin \lambda_n x = g(x) \quad (34)$$

$$0 \leq x \leq l \quad \text{علي}$$

يوضع $C \lambda_n C_n = f_n$ (34) علي أنها متسلسلة الجيب الفورييه للدالة

g. حيث الدورة $2P=2L$ وبهذا نعطي معاملات فورييه ب:

$$y_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots \dots$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{f_n}{c\lambda_n} = \frac{lf_n}{n\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (35) \end{aligned}$$

المراجع

١. آس فارلو - ترجمة د. مها عواض الكبيسي - المعادلات التفاضلية الجزئية - منشورات جامعة عمر المختار البيضاء - بنغازي - ليبيا - ٢٠٠٥ م.
٢. أ.د حسن مصطفى العويضي - المعادلات التفاضلية الجزء الثاني - مكتبة الرشد - الرياض - المملكة العربية السعودية - ١٤٢٦ هـ / ٢٠٠٥ م.
٣. ديفيد ل. ياورز - ترجمة الدكتور. نزار حمدون شكر - مسائل القيمة الحدودية - لمديرية دار الكتب للطباعة والنشر - جامعة الموصل - العراق - ١٤٠٩ هـ / ١٩٨٩ م.
٤. د. أمين صادق الفرمانى - د. الفيدري عمر سالم - المعادلات التفاضلية.
٥. د. أمجد إبراهيم شحادة - م. محمد رياض علي - المعادلات التفاضلية - الطبعة الأولى - دار الفجر للنشر والتوزيع - القاهرة - مصر.