# الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

## الأكاديمية العربية الدولية

# المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

# Fourier series with solved examples - متسلسلات فورير مع مسائل محلول

**Chapter** · November 2018



**1 author:**

Emil Shoukralla
Menoufia University

الباب
2

# متسلسلات فـــــورير
# Fourier Series

في نظريـة التقريـب *(Approximation Theory)* نجـد أنـه مـن الشـائع تقريـب أو تمثيـل الـدوال على صـورة متسلسـلات القـوى *(Power Series)* أو دوال كثـيرات الحـدود *(Polynomials)*، وذلك لسهولة التعامل الجبري مع مثل هذه الدوال، علاوة على أن عمليات تفاضلها وتكاملها تعتبر من العمليات البسيطة جداً. بيد أنـه توجـد بعض الشـروط الضـرورية لكـي يمكـن تمثيـل دالـة مـا في شـكل متسلسـلة قـوى. فالدالـة المطلـوب تمثيلهـا أو تقريبهـا علـى شـكل متسلسـلة تايلـور . مـثلاً . يجـب أن تكـون دالـة متصـلة *(Continuous Function)* في مجال تعريفها، بالإضافة إلى ضـرورة وجـود مشـتقاتها مـن كـل الـدرجات، أي يجـب أن تكـون دالـة ملساء *(Smooth)* فإذا لم يتحقق أياً من هـذه الشروط فإنه يتعذر إيجاد تقريب تايلور للدالة.

وللتغلب على قسوة هذه الشروط قدم عالم الرياضيات الفرنسي فورير *(Fourier J. B., 1768-1830)* نظرية لتمثيل الدوال التي تحقق شـروطاً أقل من شـروط تايلـور مثل الاتصـال على فـترات، والاشـتقاق علـى فـترات، وذلـك في متسلسـلات سميـت باسمـه. في الواقـع إن متسلسـلات فـورير لهـا أهميـة علميـة كبـيرة جـداً، فبعـد

ظهور متسلسلات فورير أمكن إيجاد حلول الكثير من المعادلات التفاضلية الجزئية *(Partial Differential Equations)* والمسائل الحدية *(Boundary Value Problems)*، والمسائل الابتدائية المعقدة. هذا النجاح الرائع لمتسلسلات فورير يرجع بالدرجة الأولى إلى قدرتها على استبدال الدوال بمتسلسلات فورير المكونة من دوال الجيب وجيب التمام الدورية. فمثلاً دوال الموجات الصوتية *(Acoustic Waves)*، وهي عبارة عن مجموع توافقيات *(Harmonics)*، أمكن استبدالها بمتسلسلات فورير بسعات *(Amplitudes)* وترددات *(Frequencies)* مختلفة.
كذلك فقد أمكن استبدال الدوال الدورية والتي دورتها $2L$ بواسطة متسلسلات فورير، وبصفة عامة فقد أمكن تمثيل الدوال غير الدورية أيضاً في متسلسلات فورير التي تحتوي على دوال الجيب وجيب التمام معاً أو أية واحدة منها منفردة كما سنرى.
علاوة على كل ما سبق فهنالك فائدة عظيمة لتمثيل الدوال بواسطة متسلسلات فورير؛ هذه الفائدة تكمن في استبدال الدوال ذات الحدود المحدودة بمتسلسلات لا نهائية: الأمر الذي يساعد بقوة في الحصول على مجاميع الكثير من المتسلسلات اللانهائية.

## 2.1 مقدمـــــــــــــــة

في هذا الباب نتناول موضوع استبدال الدوال الدورية، وغير الدورية، وتمثيلها في متسلسلات فورير، فنقدم شكل متسلسلات فورير، وندرس الشروط الواجب توافرها في دالة معينة لكي يمكن تمثيلها على شكل متسلسلة فورير. كما ندرس كذلك تقارب *(Convergence)* متسلسلة فورير إلى الدالة الأصلية. ونعرَّج أيضاً على متسلسلات فورير للدوال الزوجية والدوال الفردية وندرس تقاربها في هذه الحالات أيضاً.

في الواقع فإن متسلسلات فورير في حالة الدوال الزوجية تحتوي على دوال جيب التمام فقط ولهذا تسمى متسلسلات جيب التمام لفورير. وفي حالة الدوال الفردية فإن متسلسلة فورير لها تحتوي على دوال الجيب فقط ولهذا تسمى متسلسلة الجيب لفورير. كما نتعرض في هذا الباب لإيجاد متسلسلة فورير للدوال المعرفة على نصف الفترة أو نصف الدورة، وندرس تقاربها أيضاً. ولكن بدايةً يجب التذكرة ببعض المصطلحات الرياضية ومفاهيمها العلمية وذلك لكونها ضرورية لدراسة متسلسلات فورير. فنقدم بعض التعريفات الهامة مثل الدالة الدورية، الدالة المتصلة على فترات، وأيضاً الدالة الملساء،

والدالة الملساء على فترات، المشتقة الأولى اليمنى والمشتقة الأولى اليسرى، وكذلك مفاهيم المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عند نقط نهايات فترة تعريف الدالة المراد تمثيلها بواسطة متسلسلة فورير.

**تعريف 2.1**

**الدالة الدورية**
**Periodic Function**

**الدالة $f(x)$ تسمى دالة دورية إذا حققت الشرط: $f(x) = f(x + n\rho)$ حيث $n \neq 0$ أي عدد صحيح لا يساوي الصفر، كما أن $\rho$ هو ثابت موجب.**

✍.

**في الواقع فإن كل عدد $(n\rho)$ يسمى دورة *(Period)*، مما يعني أن الدالة الدورية يمكن أن يكون لها عدد لانهائي من الدورات. كما أن $\rho$ وهي أصغر هذه الدورات الموجبة تسمى الدورة البدائية *(Primitive Period)* أو باختصار تسمى الدورة.**

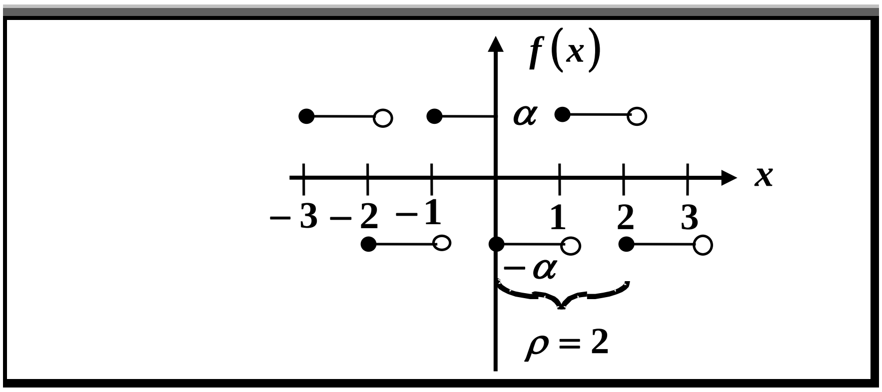
**مثال توضيحي**

**(1) الدالة $f(x) = \sin(bx)$ دورية، دورتها هي $\rho = \dfrac{2\pi}{b}$ وذلك لأن**

$$f(x)=\sin(bx)=\sin(bx+2\pi)=\sin\left[b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)\right]$$

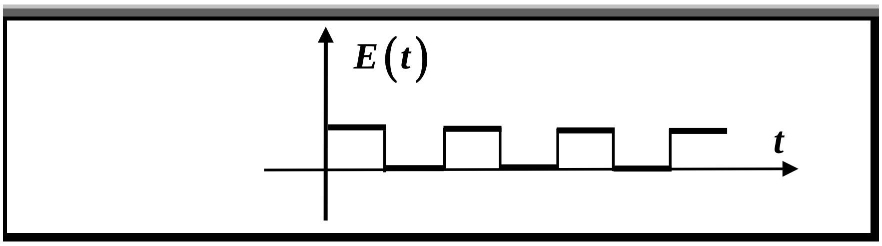
(2) الدالة $f(x)=\begin{cases}-\alpha\ ; & 2n\le x<2n+1\\ \alpha\ ; & 2n+1\le x<2n+2\end{cases}$ ، حيث $n$

عدد صحيح هي دالة دورية، دورتها $\rho=2$ . انظر شكل (2.1).

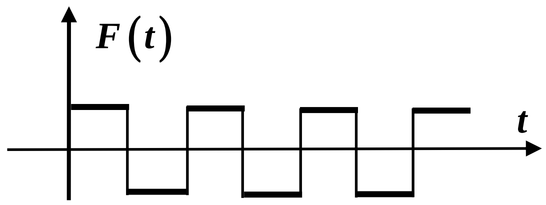



شكل 2.1

(3) الدالة $E(t)$ ، حيث $t$ يرمز للزمن تعبر عن فولتية الدخل لدائرة كهربية والتي تتكون من نبضات متتالية كما في شكل (2.2). أيضاً فإن تأثير التشويش على النظم الميكانيكية يظهر على شكل قوة $F(t)$ ثابتة المقدار، اتجاهها يتغير دورياً. انظر شكل (2.3).




شكل 2.2




شكل 2.3

(4) بالطبع فإن أفضل مثال على الدوال الدورية هو الدوال المثلثية، فنجد . مثلاً . أن الدوال $\sin(x),\cos(x)$ دورية دورة أياً منها $2\pi$ .
أيضاً نلاحظ أن

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=\cos(x+6\pi)...=\cos(x)$$

الأمر الذي يعني أي من الأعداد $2\pi,4\pi,6\pi,...$ تعتبر دورة للدالة $\cos(x)$ . ولكن وبما أن $2\pi$ هي أصغر دورة ***(Least Period)*** موجبة، إذن فهي الدورة البدائية أو ببساطة الدورة.

**تعريف 2.2**

**الدالة المتصلة على فترات**
**Piecewise Continuous Function**

يُقال للدالة $f(x)$ أنها متصلة على فترات على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

(1) الدالة $f(x)$ متصلة عند كل نقط الفترة المغلقة $[a,b]$ بخلاف عدد محدود من النقط $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ، التي تحقق الشرط

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < b$$

والتي يوجد عندها عدم اتصال من النوع الذي يسمى البسيط *(Removable Discontinuity)* أو عدم اتصال من نوع القفزة *(Jump Discontinuity)*.

(2) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة المفتوحة

$$]a, x_1[ \cup ]x_1, x_2[ ... \cup ]x_n, b[$$

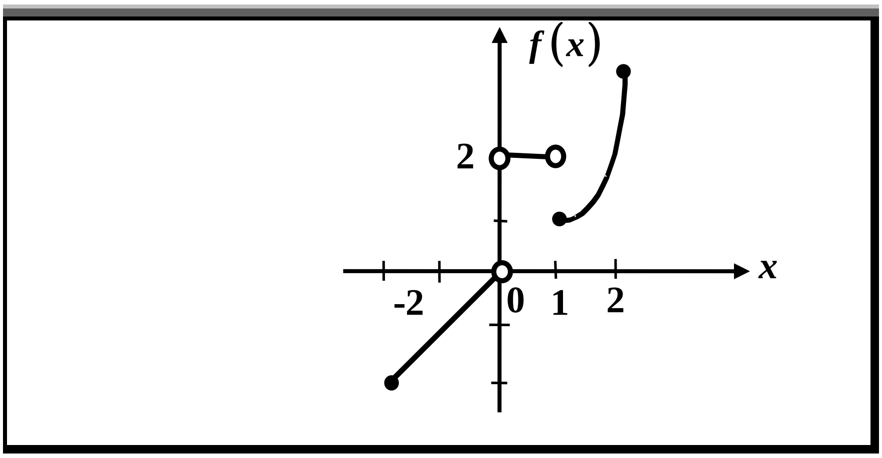
(3) الدالة $f(x)$ يوجد لها نهاية يمنى *(Right Limit)* فقط عند النقطة $a$ ويوجد لها نهاية يسرى *(Left Limit)* فقط عند النقطة $b$، كما توجد كلا النهايتين اليمنى واليسرى عند كل النقط $x_j;\ j = \overline{1,n}$ .

مثال توضيحي

انظر شكل (2.4). لترى كيف أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ -2 \le x < 0 \\ 2 & ; \quad 0 < x < 1 \\ x^2 & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

متصلة على فترات. أولاً نرسم هذه الدالة ثم ندرس الشروط التي يجب أن تتحقق لكي تكون متصلة على فترات.




شكل 2.4

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[-2,2]$ ماعدا عند النقطتين $x_1 = 0 \, ; \, x_2 = 1$ حيث يوجد عدم اتصال. والآن ندرس عدم الاتصال عند هاتين النقطتين لمعرفة نوعيته. أولاً: دراسة نوع عدم الاتصال عند النقطة $x_1 = 0$ . بما أن

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \quad \& \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

إذن، فالنهايتان اليمنى واليسرى لهما وجود وهما محدودتان *(Finite)* أي لهما قيم حقيقية (لا تساوي ما لانهاية)، لكنهما غير متساويتين، حيث

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

إذن يوجد عند النقطة $x_1 = 0$ عدم اتصال من نوع القفزة. ثانياً: دراسة نوع عدم الاتصال عند النقطة $x_2 = 1$. بما أن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \quad \& \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

إذن، فالنهايتان اليمنى واليسرى لهما وجود وهما محدودتان، أي لهما قيم حقيقية. وبما أن $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ . إذن يوجد عدم اتصال القفزة عند $x_2 = 1$ .

(2) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة

$$]-2,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,2[$$

إذ نجد أن

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \forall\, c \in\, ]-2,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,2[$$

(3)عند نقطة بداية الفترة (النقطة $x = -2$ )، فإن $f(x)$ لها نهاية يمنى فقط حيث $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -2$ ، وعند نقطة نهاية الفترة (النقطة $x = 2$ ) فإن الدالة $f(x)$ لها نهاية يسرى فقط، حيث

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$ . إذن الدالة $f(x)$ متقطعة الاتصال أو متصلة على فترات على الفترة $[-2,2]$. لاحظ أن $\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{7}{3}$

✍.

## 2.2 مفاهيم المشتقة الأولى اليمنى والمشتقة الأولى اليسرى

لنفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق *(Differentiable)* عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة المفتوحة $]a,b[$ . ماذا يعني هذا الكلام؟ يعني أنه لكل نقطة غير طرفية $x_0$ . مثلاً . تنتمي إلى الفترة المفتوحة $]a,b[$ ، فإنه توجد النهاية

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

في الحقيقة فإن النهاية المعطاة في (2.1) يكون لها وجود فقط (وعندئذٍ تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند $x_0$ ) إذا كانت المشتقة الأولى

اليمنى $f_R'(x_0)$ تساوي المشتقة الأولى اليسرى $f_L'(x_0)$ تساوي $f'(x_0)$ حيث

$$f_R'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ; \qquad (2.2)$$

$$f_L'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.3)$$

الآن، وبما أن نقط النهايات $a, b$ لا تنتمي إلى أية فترات مفتوحة تحتويها فكيف يمكن للدالة $f(x)$ أن تكون قابلة للتفاضل عند نقط النهايات $a, b$؟ الإجابة عن هذا التساؤل كانت سبباً في تعريف ما يسمى بالمشتقة الأولى اليمنى، والمشتقة الأولى اليسرى للدالة عند النقط الطرفية أو نقط النهايات. في الحقيقة أن المشتقة الأولى اليمنى للدالة $f(x)$ تُعرَّف عند النقطة $x = a$ على أنها

$$f_R'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad (2.4)$$

وبما أن النقطة $x = a$ هي نقطة طرفية ***(End-Point)*** يسرى، إذن فحسب تعريف المشتقة الأولى للدالة فإن $f(x)$ تكون قابلة للتفاضل عند $x = a$ إذا كانت متصلة عندها وهذا يعني وجدود

النهاية اليمنى فقط؛ لأنه لا يمكن الوصول إلى $x = a$ إلا من خلال قيم أكبر من النقطة $a$ نفسها. انظر شكل (2.5). في هذه الحالة فإن

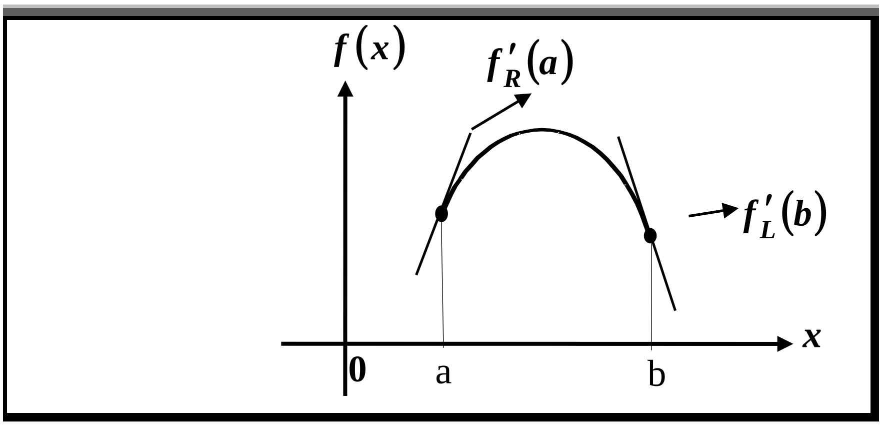
$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

إذن وبالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على المشتقة الأولى اليمنى للدالة $f(x)$ عند النقطة الطرفية $x = a$ في الشكل الرياضي

$$f_R{}'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - \lim\limits_{x \to a^+} f(x)}{\Delta x} \qquad (2.5)$$

بالمثل يمكن تعريف المشتقة الأولى اليسرى للدالة $f(x)$ عند النقطة الطرفية الأخرى $x = b$ على أنها

$$f_L{}'(b) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(b - \Delta x) - \lim\limits_{x \to b^-} f(x)}{-\Delta x} \qquad (2.6)$$




شكل 2.5

## تعريف 2.3

## الدالة المـــــلساء على فترات
## Piecewise Smooth Function

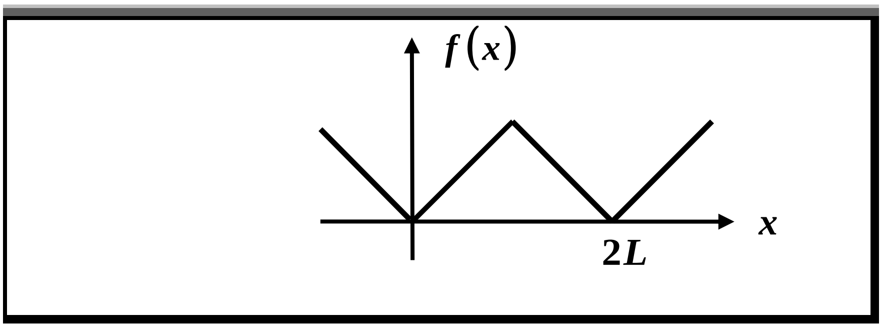
يُقال للدالة $f(x)$ أنها دالة ملساء على فترات على الفترة $[-L,L]$ إذا كانت الدالة $f(x)$ ذاتها بالإضافة إلى مشتقتها الأولى، $f'(x)$، متصلتين على فترات على طول الفترة $[-L,L]$.

✍.

**مثال توضيحي**

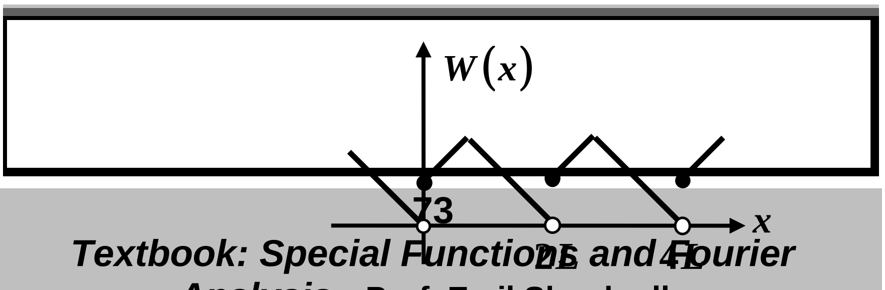
(1) الدالة $f(x)$ متصلة على فترات وملساء على فترات. انظر شكل (2.6).

شكل 2.6

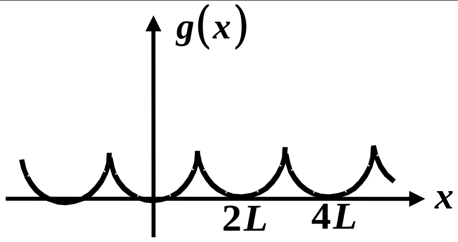



(2) الدالة $W(x)$ متصلة وملساء على فترات، انظر شكل (2.7).

شكل 2.7



(3) الدالة $g(x)$ متصلة على فترات، ولكنها غير ملساء على فترات لأن $g'(x)$ ليست متصلة على فترات. انظر شكل (2.8).




شكل 2.8

✍.

## 2.3 متسلسلات فورير للدوال الدورية، والتي دورتها ـ $2\pi$

لنفرض أن $f(x)$ هي أية دالة دورية، دورتها $2\pi$. ، والمطلوب هو تمثيلها (وضعها) على شكل مجموع توافقيات من دوال الجيب،

$\sin(x)$، ذات سعات، وترددات مختلفة، إذن لنفرض $f(x)$ مثلاً في الصيغة الرياضية

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 \sin(x+\alpha_1) + c_2 \sin(2x+\alpha_2) + \cdots \\ &+ c_n \sin(nx+\alpha_n) + \cdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

في الواقع أن الحد النوني $c_n \sin(nx+\alpha_n)$ يعبر عن التوافقية النونية ***(Harmonic)*** والتي فيها $c_n$ ترمز إلى السعة ***(Amplitude)***، حيث يرمز $n$ إلى التردد. أيضاً فإن $nx+\alpha_n$ يعبر عن طور التوافقية النونية ***(Phase)***، حيث يرمز $\alpha_n$ إلى الطور الابتدائي ***(Initial Phase)***. وباستخدام قانون حساب المثلثات:

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$$

فإن $f(x)$ المتمثلة في الشكل (2.7) يمكن إعادة كتابتها في الشكل

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1\left(\sin(x)\cos(\alpha_1) + \cos(x)\sin(\alpha_1)\right) \\ &+ c_2\left(\sin(2x)\cos(\alpha_2) + \cos(x)\sin(\alpha_2)\right) + \ldots \\ &+ c_n\left(\sin(nx)\cos(\alpha_n) + \cos(nx)\sin(\alpha_n)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.8}$$

بترتيب الحدود نحصل على

$$\begin{aligned} f(x) = c_0 + \{&(c_1 \sin(\alpha_1))\cos(x) + (c_2 \sin(\alpha_2))\cos(2x) \\ &+ \ldots + (c_n \sin(\alpha_n))\cos(nx) + \cdots\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$+\left\{\left(c_1\cos\left(\alpha_1\right)\right)\sin\left(x\right)+\left(c_2\cos\left(\alpha_2\right)\right)\sin\left(2x\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(c_n\cos\left(\alpha_n\right)\right)\sin\left(nx\right)+\cdots\right\}$$

وللتسهيل نضع

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1\sin\left(\alpha_1\right),\ \cdots\ ,a_n=c_n\sin\left(\alpha_n\right)$$
$$b_1=c_1\cos\left(\alpha_1\right),\ b_2=c_2\cos\left(\alpha_2\right),\ \cdots,b_n=c_n\cos\left(\alpha_n\right)$$

وعندئذٍ تأخذ الدالة $f\left(x\right)$ الشكل

$$\begin{aligned}f\left(x\right)=a_0+a_1\cos\left(x\right)+a_2\cos\left(2x\right)+a_3\cos\left(3x\right)+\cdots\\+a_n\cos\left(nx\right)+\cdots+b_1\sin\left(x\right)+b_2\sin\left(2x\right)\\+b_3\sin\left(3x\right)+\cdots+b_n\sin\left(nx\right)+\cdots\end{aligned}\qquad(2.10)$$

أو الصيغة الرياضية

$$f\left(x\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)\right)\qquad(2.11)$$

إذن، فقد تمكنا من تمثيل أو وضع الدالة $f\left(x\right)$ في شكل المتسلسلة

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)\right)\qquad(2.12)$$

المتسلسلة اللانهائية ***(Infinite Series)*** المعطاة في **(2.12)** تسمى **"<u>متسلسلة فورير</u>"** ***(Fourier Series)*** للدالة الدورية $f\left(x\right)$ والتي دورتها $2\pi$. نلاحظ أن كل حد من حدود المتسلسلة **(2.12)** هو دالة دورية، دورتها $2\pi$. وعلى هذا فإذا وجِد مجموع لهذه

المتسلسلة، أي إذا كانت المتسلسلة (2.12) تقاربية *(Convergent)* فإن الناتج أيضاً سيكون دالة دورية دورتها $2\pi$. الآن علينا تحديد قيم المعاملات $a_0, a_n, b_n$، والتي تسمى "<u>معاملات فورير</u>" *(Fourier Coefficients)* حتى يتسنى لنا الحصول على المتسلسلة (2.12) في شكلها النهائي. للحصول أولاً على المعامل $a_0$ يتم ضرب طرفي الصيغة (2.11) في الدالة $\cos(0\times x)$ (لاحظ أن $\cos(0\times x)=\cos(0)=1$) ثم نحسب بعد ذلك التكامل من $x=-\pi$ إلى $x=\pi$، فنجد أن

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0\times x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(0x)dx + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\cos(0x)dx \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin(nx)\cos(0x)dx\end{aligned} \tag{2.13}$$

وبتطبيق (A.4), (A.6) من الملحق A في (2.13) نحصل على

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\cdot 2\pi + zero + zero \tag{2.14}$$

ومنها نجد أن

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (2.15)$$

للحصول على المعاملات $b_n$ يتم ضرب طرفي الشكل (2.11) في $\sin(mx)$، حيث $m$ هو أي عدد صحيح موجب ثابت ثم نحسب التكامل من $x=-\pi$ إلى $x=\pi$ ، فنجد أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(mx)\,dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin(mx)\cos(nx)\,dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx)\cos(mx)\,dx \qquad (2.16)$$

وبتطبيق (A.6) من الملحق A في (2.16) نجد أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = zero + zero + b_n \pi \qquad (2.17)$$

ومنها نحصل على $b_n$ في الشكل

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \qquad n \ge 1 \qquad (2.18)$$

هذا، وللحصول على المعاملات $a_n$ نستخدم نفس التكنيك السابق فيتم ضرب طرفي الصورة (2.11) في $\cos(mx)$، حيث $m$ هو أي عدد صحيح موجب ثابت ثم نحسب التكامل من $x=-\pi$ إلى $x=\pi$، فنجد. باختصار. أن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \quad n \ge 1 \tag{2.19}$$

**ملخص**

إذا كانت $f(x)$ دالة دورية متصلة على فترات على الفترة $[-\pi,\pi]$ فإن متسلسلة فورير لها هي المتسلسلة المعطاة في (2.12) حيث معاملات فورير $a_0, b_n, a_n$ تعطى من الصيغ الرياضية (2.19) ,(2.18) ,(2.15) على الترتيب.

**مثال 2.1**

أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x)=|x|; -\pi \le x \le \pi$

**الحل**

نعيد أولاً كتابة الدالة في الشكل

$$|x| = \begin{cases} -x & ; x<0 \\ x & ; x \ge 0 \end{cases}$$

باستخدام (2.19) ,(2.18) , (2.15) نحصل على معاملات فورير على النحو التالي:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{\pi}{2} \; ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx\right) = \frac{2(\cos(n\pi)-1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة هي

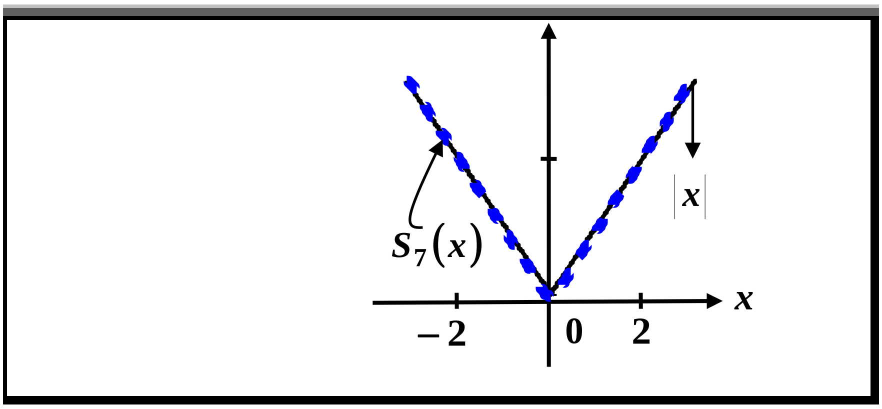
$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1)\cos(nx) \quad \forall\, x}$$

*لنفرض أن*

$$\boxed{S_k(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1)\cos(nx) \;\forall\, x}$$

***حيث ترمز $S_k(x)$ لمتسلسلة المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورير. انظر شكل (2.9) حيث تجد شبه تطابق بين منحنى الدالة الأصلية $f(x)=|x|$ ومنحنى $S_7(x)$ ؛ مما يعني سرعة تقارب متسلسلة فورير إلى الدالة لأصلية.***

شكل 2.9




مثال 2.2

أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \ -\pi \le x < 0 \\ \sin(x) & ; \ 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

**الحل** باستخدام (2.15), (2.18), (2.19) وتطبيق ملحق $A$ نحصل على معاملات فورير على النحو التالي:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx==\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi}\sin(x)dx\right)=\frac{1}{\pi} \ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(x)\cos(nx)dx$$

$$=-\frac{\cos\left[(1-n)x\right]}{2\pi(1-n)}-\frac{\cos\left[(1+n)x\right]}{2\pi(1+n)}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1+\cos(n\pi)}{\pi\left(1-n^2\right)}\;;n\neq 1$$

في حالة $n=1$ نستخدم (2.18) فنجد أن

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx=0\,;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(nx)dx$$

$$=\frac{\sin\left[(1-n)x\right]}{2\pi(1-n)}-\frac{\sin\left[(1+n)x\right]}{2\pi(1+n)}\Bigg|_0^{\pi}=0\;;\;n\neq 1$$

في حالة $n=1$ نستخدم (2.19) فنجد أن

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos(2x)\right)dx=\frac{1}{2}$$

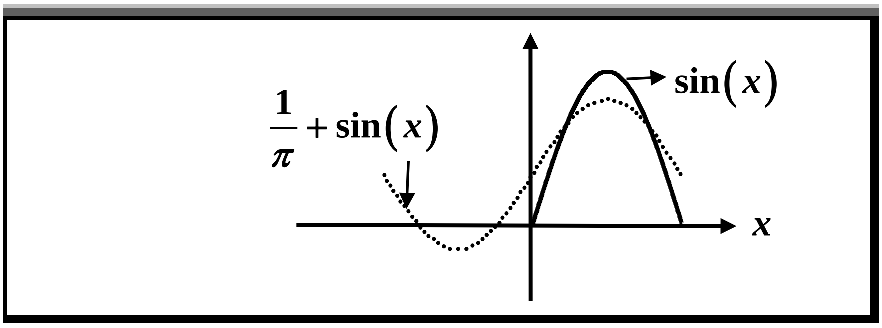
وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة هي

$$\boxed{\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\cos(nx)}$$

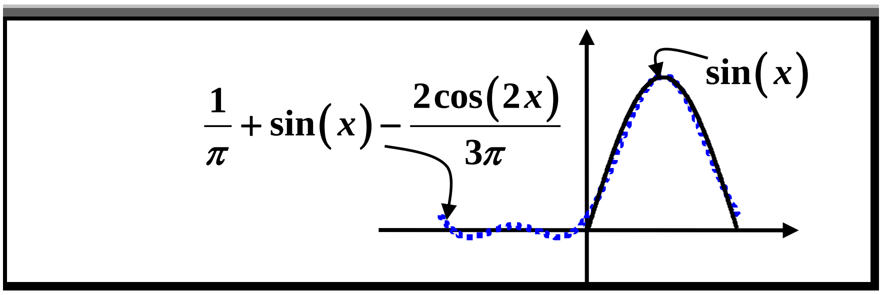
*وإذا كانت*

$$\boxed{S_k(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{k}\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\cos(nx)}$$

ترمز $S_k(x)$ لمتسلسلة المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورير التي حصلنا عليها وباستخدام (A.7) من الملحق فسوف نجد شبه تطابق بين منحنى الدالة الأصلية $f(x)$ ومنحنى $S_2(x)$ كما يلاحظ في الشكل *(2.10)*؛ مما يعني سرعة تقارب متسلسلة فورير إلى الدالة لأصلية. انظر أيضاً الشكل *(2.11)* لتقارن منحنى الدالة الأصلية مع مجموع الحلين الأولين فقط من متسلسلة فورير.




شكل 2.10




شكل 2.11

✍.

## 2.4 متسلسلات فورير للدوال الدورية، والتي دورتها 2L -

الآن، وقد تمكنا من الحصول على متسلسلة فورير في حالة الدوال الدورية، والتي دورتها $2\pi$ . فهل نستطيع الحصول على متسلسلة فورير في حالة ما تكون الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[-L,L]$، دورية، دورتها $2L$، حيث $f(x+2L)=f(x)$ ؟

الإجابة بالتأكيد نعم، وذلك إذا استخدمنا التعويض $x=\dfrac{Lt}{\pi}$ الذي يستبدل المتغير $x$ بالمتغير $t$ بحيث إذا تغير $x$ من $-L$ إلى $L$ فإن المتغير الجديد $t$ يتغير من $-\pi$ إلى $\pi$، ولهذا السبب فإن الدالة $f(x)$ تتحول إلى الدالة الدورية $g(t)$ والتي دورتها $2\pi$. إذن من (2.11) نجد أنه يمكن تمثيل $g(t)$ في متسلسلة فورير هكذا

$$g(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\ \forall\ t \qquad (2.20)$$

حيث معاملات فورير هي

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(nt)dt \qquad (2.21)$$

فإذا عدنا إلى المتغير الأصلي $x$ ، مع ملاحظة أن $t=\dfrac{\pi x}{L}$ ، فإننا نجد أن متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x)$ والتي دورتها $2L$ . هي

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right); \tag{2.22}$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx; \tag{2.23}$$
$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx;$$

**نظرية 2.1**

إذا كانت الدالة $\phi(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[-L,L]$ بالإضافة إلى كونها دالة دورية، دورتها . $2L$ ، وكان $\alpha$ أي عدد اختياري فإن

$$\int_{-L}^{L}\phi(x)dx=\int_{\alpha}^{\alpha+2L}\phi(x)dx \tag{2.24}$$

**مثال 2.3**

أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية $\phi(x)=\begin{cases}-1, & -5\le x\le 0\\ 1, & 0<x<5\end{cases}$

**الحل** بما أن $\phi(x)$ دالة دورية، ودورتها هي $2L=10$ إذن فإن $L=5$.
انظر شكل (2.12). بالتالي يمكن حساب معاملات فورير هكذا

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx=\frac{1}{10}\left(\int_{-5}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{5}(1)dx\right)=0\,;$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(-1)\cos\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx+\frac{1}{5}\int_{0}^{5}(1)\cos\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx=0\,;$$

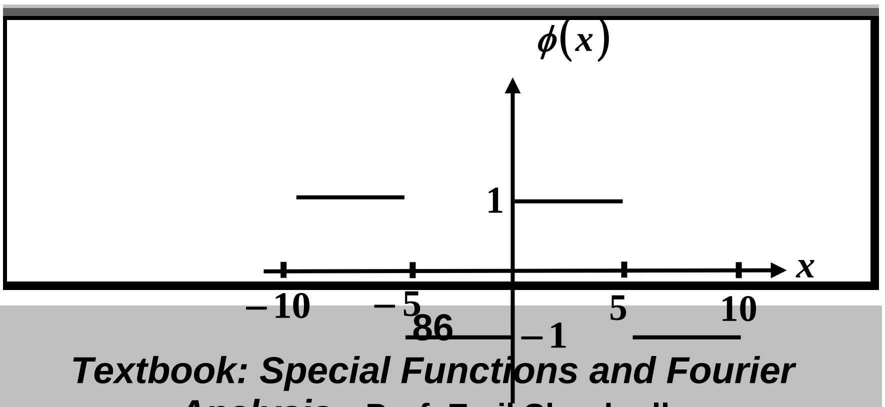
$$b_n=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(-1)\sin\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx+\int_{0}^{5}(1)\sin\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\left[\cos\left(n\frac{\pi x}{5}\right)\right]_{-5}^{0}-\left[\cos\left(n\frac{\pi x}{5}\right)\right]_{0}^{5}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\left[1-\cos(n\pi)\right]-\left[\cos(n\pi)-1\right]\right]=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

إذن متسلسلة فورير للدالة المعطاة لجميع قيم المتغير $x$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right)$$




شكل 2.12

## 2.5 متسلسلة فورير للدوال غير الدورية

الآن، وقد رأينا أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ مثلاً دالة دورية دورتها $2\pi$ أو $2L$ فإنه يمكن إيجاد متسلسلة فورير لها لجميع قيم $x$، أي على طول خط الأعداد $]-\infty,\infty[$. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هل يمكن أن توجد متسلسلة فورير لدالة غير دورية؟، أي إذا فرضنا أن $h(x)$ هي دالة غير دورية، ومعرفة على الفترة $[-L,L]$ فقط ولا تتكرر على طول خط الأعداد فهل يمكن أن توجد لها متسلسلة فورير؟ الإجابة طبعاً ستكون نعم إذا أمكن اعتبار مثل هذه الدالة غير الدورية $h(x)$ جزءاً من دالة أخرى تكون دورية.

بكلمات أخرى علينا أن نكرر الدالة غير الدورية $h(x)$، المعرفة على الفترة $[-L,L]$ على طول خط الأعداد $]-\infty,\infty[$، فنحصل على دالة دورية دورتها $2L$. تسمى " **<u>الدالة الممتدة</u>** " ***(Extended Function)*** للدالة $h(x)$ ونرمز لها بالرمز $\psi(x)$.
الآن، وبسبب أن الدالة $\psi(x)$ دورية دورتها $2L$، فإننا نستطيع الحصول على متسلسلة فورير لها نرمز لها بالرمز $S(x)$، وذلك لجميع قيم $x$ التي تنتمي إلى الفترة $]-\infty,\infty[$. وبما أن الدالة $h(x)$ هي جزء من الدالة $\psi(x)$، إذن يمكن تعريف متسلسلة فورير للدالة $h(x)$ لتكون المتسلسلة $S(x)$ أيضاً ولكن لقيم $x$ التي تنتمي إلى الفترة $[-L,L]$ فقط. الأمر الذي يعني أنه لقيم $x$ خارج $[-L,L]$ فإن $S(x)$ لا تعبر عن متسلسلة فورير للدالة $h(x)$.

**ملاحظة**

عند إيجاد متسلسلة فورير لأية دالة يجب معرفة . أولاً . شكل الدالة، وثانياً الفترة المعرفة عليها، وذلك لأنه باختلاف فترة تعريف الدالة فإن متسلسلة فورير . أيضاً . تختلف مع أن الدالة مازالت نفس الدالة.

**مثال 2.4**

*أوجد متسلسلة فورير للدوال غير الدورية*

$$f(x)=2x+1\ ;-5\le x\le 5\ \ \&\ g(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\end{cases}$$

**الحل** (1) $f(x)$ معرفة على $[-5,5]$، إذن نكررها على طول خط الأعداد، لنحصل على الدالة الممتدة $\psi(x)$ كما في شكل (2.13).

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ تأخذ الصيغة (2.22).

حيث يتم حساب المعاملات فنجدها

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{2\times 5}\int_{-5}^{5}(2x+1)dx=1;$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2x+1)\cos\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx=0\ ;$$

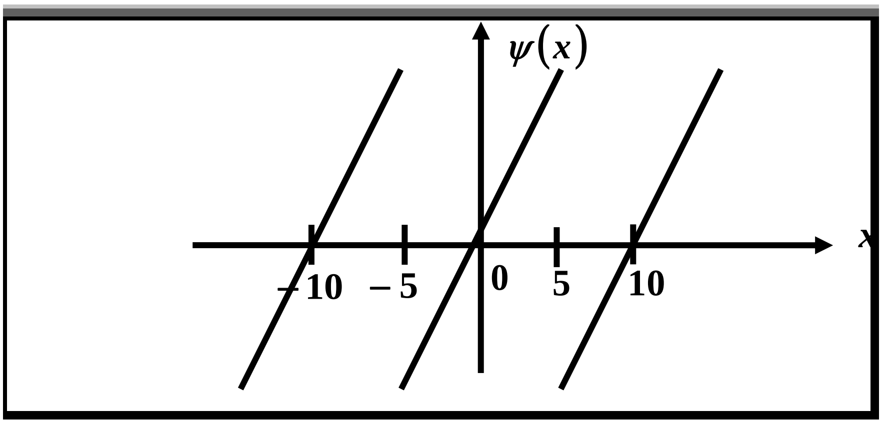
$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2x+1)\sin\left(n\frac{\pi x}{5}\right)dx=\frac{-12}{n\pi}\cos(n\pi)$$

إذن فإن متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ تأخذ الصورة

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-12}{n\pi}\cos(n\pi)\ \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\quad \forall\ x\in\,]-\infty,\infty[$$

وعندئذٍ يمكن تعريف متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ على أنها نفس متسلسلة فورير للدالة الممتدة ولكن على الفترة $[-5,5]$ فقط. إذن متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ المعطاة هي

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-12}{n\pi}\cos(n\pi)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\quad \forall\, x\in[-5,5]$$




شكل 2.13

(2) الدالة $g(x)$ معرفة على الفترة $-1\le x<1$ فقط، وهي لذلك ليست دالة دورية. إذن نوجد الدالة الممتدة $\psi(x)$ لها على طول خط الأعداد. انظر شكل (2.14). هكذا نجد أن الدالة $\psi(x)$ هي دالة دورية، دورتها $2L=2$ ، أي أن $L=1$ . وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ على الفترة $]-\infty,\infty[$ تعطى من (2.22)، حيث

$$;a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx==\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(1)dx\right)=0$$

$$;a_n=\int_{-1}^{0}(-1)\cos(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}(1)\cos(n\pi x)dx=0$$

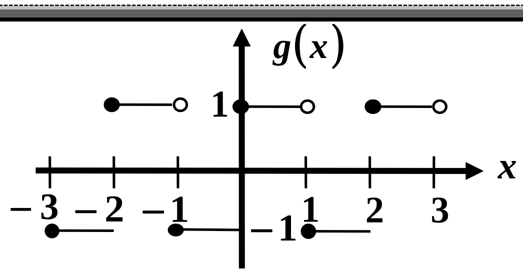
$$b_n = -\int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} \sin(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

إذن متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\sin(n\pi x) \quad \forall\ x \in ]-\infty,\infty[$$

عندئذٍ تكون متسلسلة فورير للدالة المعطاة هي نفسها متسلسلة فورير للدالة الممتدة $\psi(x)$، ولكن على الفترة $[-1,1]$. أي أنها

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\ \sin(n\pi x)\ ;\ \forall x \in [-1,1]}$$




شكل 2.14

ملاحظة

بغض النظر عن فترة تعريف الدالة، مفتوحة، مغلقة أو مفتوحة من جهة واحدة فإن متسلسلة فورير تعرف لكل قيم $x$ التي في نفس الفترة بالإضافة إلى نقط النهايات.

<u>**بكلمات أخرى:**</u> بغض النظر عن كون النقط الطرفية لا تنتمي إلى مجال الدالة فإن متسلسلة فورير تُعرَّف لكل النقط بما فيها النقط

الطرفية. فمثلاً في المثال السابق الدالة معرفة على الفترة المفتوحة من جهة اليمين $-1 \le x < 1$ ، ومع ذلك فقد حصلنا على متسلسلة فورير لكل قيم $x$ في الفترة المغلقة $[-1,1]$.

## 2.6 متسلسلات الجيب وجيب التمام لفورير

رأينا فيما سبق أنه إذا كانت $f(x)$ دالة دورية، دورتها $2\pi$ فإنه يمكن إيجاد متسلسلة فورير لها. وإذا كانت الدورة $2L$ وليس $2\pi$ . فإنه يمكن إيجاد متسلسلة فورير لها أيضاً. فإذا كانت الدالة $f(x)$ ليست دالة دورية، فعندئذٍ نعتبرها جزء من دالة دورية (الدالة الممتدة) وهكذا يمكن إيجاد متسلسلة فورير لها. في جميع هذه الحالات فإن متسلسلة فورير هي مجموع لانهائي من دوال $\sin(x),\cos(x)$ معاً. والسؤال الذي يطرح نفسه. الآن. هل يمكن أن تحتوي متسلسلة فورير على دوال $\sin(x)$ فقط ؟ و متى تحتوي على دوال $\cos(x)$ فقط؟ في الحقيقة أن الإجابة عن هذا السؤال تكمن في ماهية الدالة $f(x)$ ذاتها؛ هل هي دالة زوجية ***(Even Function)*** أم أنها دالة فردية ***(Odd Function)***، فإذا كانت الدالة $f(x)$ دالة زوجية فإننا نجد أن متسلسلة فورير لها تحتوي على دوال $\cos(x)$ فقط؛ ولذلك تسمى متسلسلة جيب التمام

لفورير *(Fourier Cosine Series)*. فإذا كانت $f(x)$ فردية فإن متسلسلة فورير لها تحتوي على دوال $\sin(x)$ فقط ولذلك تسمى متسلسلة الجيب لفورير *(Fourier Sine Series)*.

## أولاً متسلسلة جيب التمـــــام لفورير Fourier Cosine Series

لنفرض أن $f(x)$ دالة دورية دورتها $2L$، ولنفرض أيضاً أنها دالة زوجية. وبما أن تكامل دالة زوجية على فترة متماثلة يساوى ضعف تكاملها على نصف الفترة، بينما تكامل الدالة الفردية على الفترة المتماثلة يساوي الصفر. وبلغة الرياضيات بما أن

$$\int_{-L}^{L}\left[\text{Even Function}\right]dx = 2\int_{0}^{L}\left[\text{Even Function}\right]dx \qquad (2.25)$$

$$\int_{-L}^{L}\left[\text{Odd Function}\right]dx = 0 \qquad (2.26)$$

إذن في حالة أن $f(x)$ زوجية، فإننا نجد من (2.25) أن $a_0$ يصبح

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{2L}\int_{0}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \qquad (2.27)$$

وبما أن الدالتين $f(x), \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ زوجيتان، إذن فإن حاصل الضرب $f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ هو دالة زوجية. إذن من (2.25) فإن المعامل $a_n$ يصبح

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx \qquad (2.28)$$

أيضاً بما أن $f(x)$ زوجية بينما $\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ فردية، إذن فإن حاصل الضرب $f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ دالة فردية. إذن من (2.29) نجد أن المعامل $b_n$ يصبح

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx = 0 \qquad (2.29)$$

وباستخدام (2.27), (2.28), (2.29) فإن متسلسلة فورير في حالة ما تكون الدالة $f(x)$ زوجية تحتوي على دوال جيب التمام $\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ فقط وتأخذ الشكل

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \; ; \; \forall\, x \in \left]-\infty,\infty\right[} \qquad (2.30)$$

ثانياً

## متسلسلة الجيب لـــــــفورير
## Fourier sine Series

لنفرض أن $f(x)$ دالة دورية، دورتها $2L$، ولنفرض أيضاً أنها دالة فردية، إذن في هذه الحالة وباستخدام العلاقة (2.26) فإن المعامل $a_0$ يصبح

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \tag{2.31}$$

وبما أن الدالة $f(x)$ فردية، والدالة $\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ زوجية، إذن فإن حاصل الضرب $f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ هو دالة فردية. بالتالي نجد من (2.26)أن المعامل $a_n$ يصبح

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx = 0 \tag{2.32}$$

بمـا أن الـدالتين $f(x),\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ فرديتـان، إذن فـإن حاصـل الضرب $f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$ هو دالة زوجية وبالتالي نجد من (2.25) أن المعامل $b_n$ يصبح

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx \quad (2.33)$$

هكذا نجد أنه في حالة ما تكون $f(x)$ فردية فإن متسلسلة فورير تحتوى على دوال الجيب $\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$، فقط وتأخذ الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.34)$$

**ملخص**

(1) إذا كانت $f(x)$ دالة دورية وزوجية على $[-L,L]$، فإن متسلسلة فورير لها تعطى من (2.30) حيث المعاملات تحسب من (2.28) ,(2.27).

(2) إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة دورية، وفردية على الفترة $[-L,L]$، فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تعطى من (2.34) حيث المعامل $b_n$ يتم حسابه من (2.33).

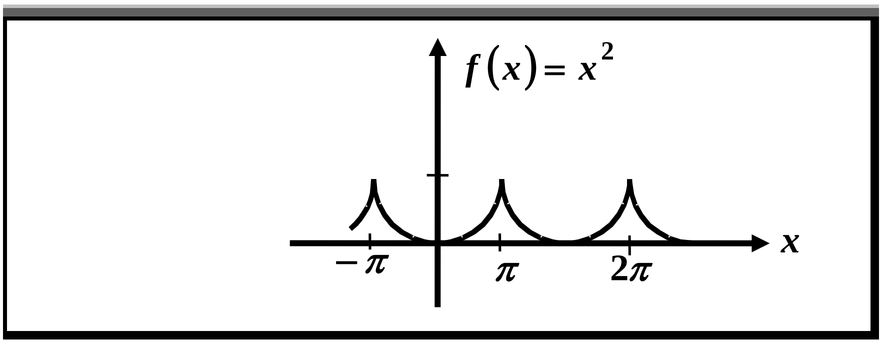
**مثال 2.5**

أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x) = x^2$ إذا كانت:

(1) الدالة دورية، ومعرفة على الفترة $-\pi < x < \pi$. (2) الدالة دورية، ومعرفة على الفترة $0 < x < 2\pi$. (3) الدالة ليست دورية، ومعرفة على الفترة $0 < x < 2\pi$.

**الحل** (1) نرسم . أولاً . الدالة $f(x)=x^2$ الدورية على الفترة $-\pi<x<\pi$. انظر شكل (2.15).

**شكل 2.15**




بما أن الدالة $f(x)$ دورية، دورتها $2\pi$، وهي أيضاً دالة زوجية على الفترة $[-\pi,\pi]$، إذن فإن

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos\left(n\frac{\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{4(-1)^n}{n^2};n>0$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة لجميع قيم $x$ هي

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

(2) الدالـة المعطـاة ليسـت زوجيـة ولا فرديـة علـى الفـترة $]0,2\pi[$ . انظر شكل (2.16). بما أن $L=\pi$ ، وباختيار $\alpha=0$، إذن من نظرية (2.1) نجد أن

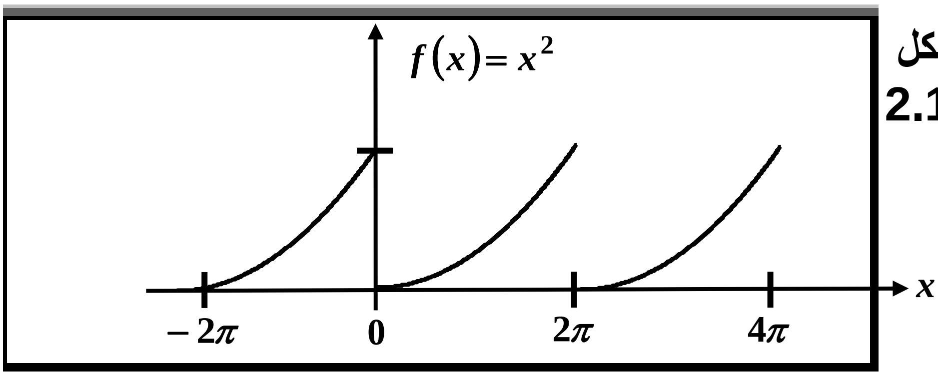
$$;\quad a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$;a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos\left(n\frac{\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{4}{n^2};\quad n\neq 0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin\left(n\frac{\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{-4\pi}{n}$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة لجميع قيم $x$ هي

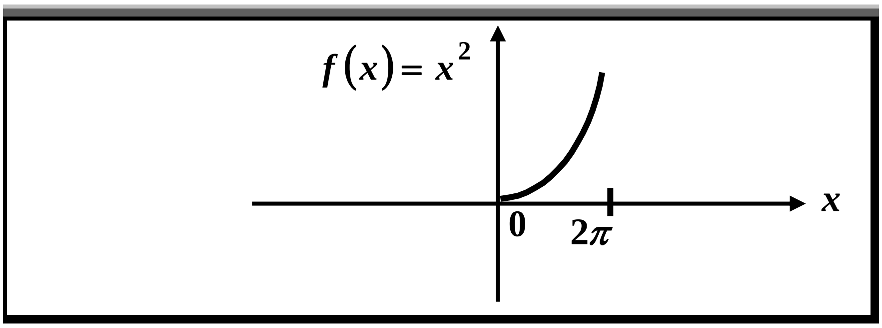
$$\boxed{\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)}$$




شكل 2.16

(3) نرسم الدالة كما في شكل (2.17). وحيث أن الدالة ليست دورية، علاوة على أنها ليست زوجية ولا فردية على الفترة $]0,2\pi[$، إذن يمكن أن نعتبرها جزء من الدالة الممتدة $\psi(x)$، وهي دالة دورية دورتها $2\pi$. وبالتالي فمتسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ هي نفسها المتسلسلة التي حصلنا عليها في الحالة (2) السابقة لجميع قيم $x$.
إذن متسلسلة فورير للدالة المعطاة هي

$$\boxed{\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)\quad \forall x\in[0,2\pi]}$$




شكل 2.17

.✍

**مثال 2.6** أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)=x$ إذا كانت:

(1) الدالة دورية على الفترة $-\pi < x < \pi$ . (2) الدالة غير دورية على الفترة $]-1,1[$ . (3) الدالة دورية على الفترة $]0,2L[$ .

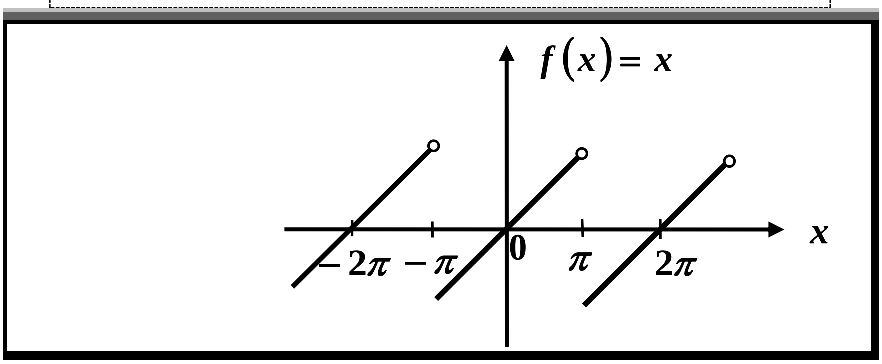
**الحل** (1) نرسم الدالة $f(x) = x$ على الفترة $]-\pi,\pi[$ ولأنها دورية دورتها $2\pi$ ، نكررها على طول خط الأعداد. انظر شكل (2.18).

وبما أن $f(x)$ المعطاة فردية، إذن فإن معامل فورير الوحيد هو

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\left(n\frac{\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير لجميع قيم $x$ تصبح

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\sin(nx) = \pi\sin(x) - \frac{\pi}{2}\sin(2x) + \cdots$$




شكل 2.18

(2) الدالة $f(x)$ معرفة على $]-1,1[$ وهي دالة غير دورية. انظر شكل (2.19). ولإيجاد متسلسلة فورير لها نعتبرها جزء من الدالة

الممتدة $\psi(x)=x$ على الفترة $]-1,1[$، وهي دالة دورية دورتها $2L=2$ . ولأن الدالة فردية، إذن فإن

$$b_n=\int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)dx=\frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

وبالتالي فمتسلسلة فورير للدالة $\psi(x)=x$ هي

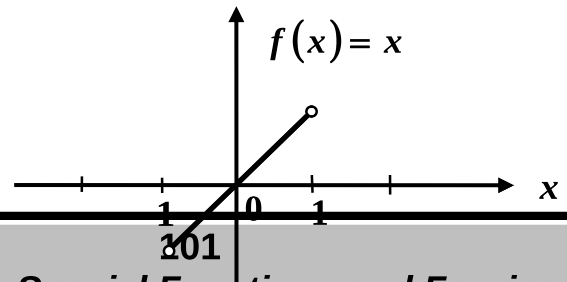
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)\ \ \forall\ x}$$

وعندئذٍ فإن متسلسلة فورير للدالة غير الدورية $f(x)$ ، والمعرفة على الفترة المفتوحة $]-1,1[$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)\ \ \forall\ x\in[-1,1]$$

وبما أن الدالة المعطاة متصلة على الفترة $]-1,1[$، إذن فإنه لكل $x$ ينتمي إلى $]-1,1[$ فإن

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$




شكل 2.19

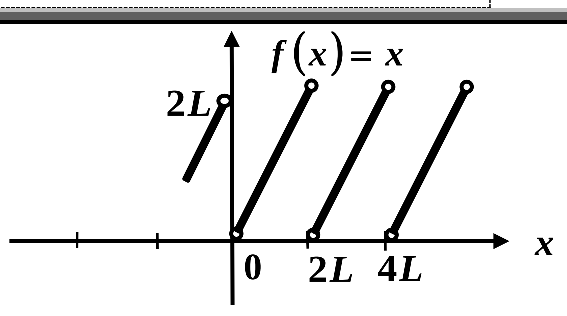
(3) بالنسبة للدالة $f\left(x\right)=x$ فهي دورية على $]0,2L[$، ولكنها ليست دالة زوجية ولا فردية. انظر شكل (2.20). إذن، باستخدام نظرية (2.5) نجد أن معاملات فورير لها هي

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_0^{2L} x dx = L;\quad a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} x\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx=0$$

$$=\frac{1}{L}\left\{\frac{-Lx}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right\}_0^{2L}=\frac{-2L}{n\pi}$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير المطلوبة هي

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\quad \forall\ x\in\left]-\infty,\infty\right[$$




شكل 2.20

.

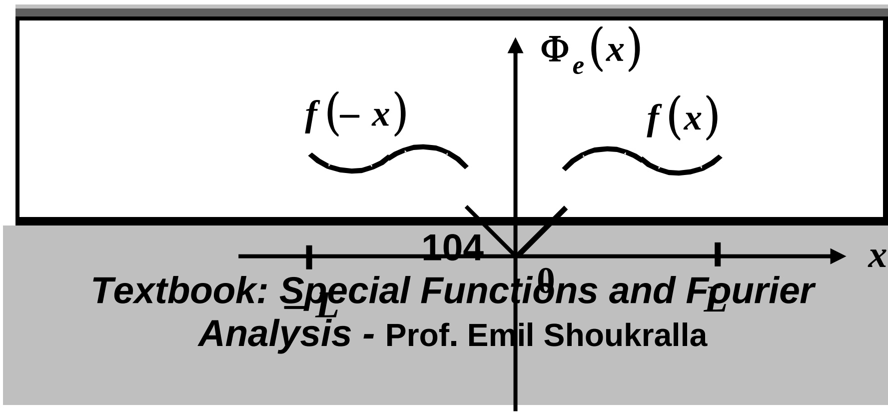
## 2.7 متسلسلات الجيب ودالة جيب التمام على نصف الفترة

رأينا فيما سبق أنه إذا كانت $f(x)$ دالة دورية، بغض النظر عن دورتها $2\pi$ أم $2L$ فإنه يمكن إيجاد متسلسلة فورير لها، وإذا كانت الدالة $f(x)$ غير دورية فعندئذٍ نعتبرها جزءاً من دالة دورية تسمى الدالة الممتدة وبالتالي يمكن أيضاً إيجاد متسلسلة فورير لها. فإذا كانت الدالة المراد إيجاد متسلسلة فورير لها دالة زوجية بالإضافة إلى كونها دورية فإننا نحصل على متسلسلة جيب التمام لفورير فقط، وإذا كانت الدالة المراد إيجاد متسلسلة فورير لها فردية بالإضافة إلى كونها دالة دورية فإننا نحصل على متسلسلة الجيب لفورير فقط. في جميع تلك الحالات السابقة كانت الدالة $f(x)$ معرفة على كل الفترة أو الفترة الكاملة $[-L,L]$.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو: ما هو الوضع لو كانت الدالة المراد إيجاد متسلسلة فورير لها معرفة على نصف فترة فورير *(Fourier Half Interval)* أي على الفترة $[0,L]$ وليس على الفترة الكاملة $[-L,L]$؟

بكلمات أخرى ما هي متسلسلة فورير لدالة معرفة على الفترة $[0,L]$ ؟ طبعاً لدينا الآن بعض الخبرة للإجابة عن هذا السؤال.

فيمكن مثلاً أن نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $[0,L]$ هي نصف دالة أخرى تسمى الدالة المكملة *(Expanded Function)*، نرمز لها بالرمز $\Phi(x)$، بحيث تكون معرفة على الفترة الكاملة $[-L,L]$. هذا الكلام. ومع أنه يبدو منطقياً. إلا أنه يحمل سؤالاً آخر هو: كيف نحصل على هذه الدالة المكملة $\Phi(x)$؟ في الحقيقة، فإنه يمكن للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[0,L]$ أن تمتد أو تتكرر. بطريقة معينة. على الفترة الكاملة $[-L,L]$ بحيث نحصل في النهاية على دالة مكملة تكون إما زوجية وإما فردية طبقاً لطريقة تكرارها. فإذا كانت الدالة المكملة الناتجة زوجية (نرمز لها بالرمز $\Phi_e(x)$)، عندئذٍ يمكن أن نحصل على متسلسلة جيب التمام لفورير. وإذا كانت الدالة المكملة الناتجة فردية (نرمز لها بالرمز $\Phi_o(x)$) عندئذٍ يمكن أن نحصل على متسلسلة الجيب لفورير. انظر شكل (2.21) حيث نرى أن الدالة $f(x)$ يمكن اعتبارها نصف الدالة الزوجية المكملة $\Phi_e(x)$، والمعرفة على فترة فورير الكاملة $[-L,L]$. حيث تنطبق $\Phi_e(x)$ تماماً مع $f(x)$ على الفترة $[0,L]$.



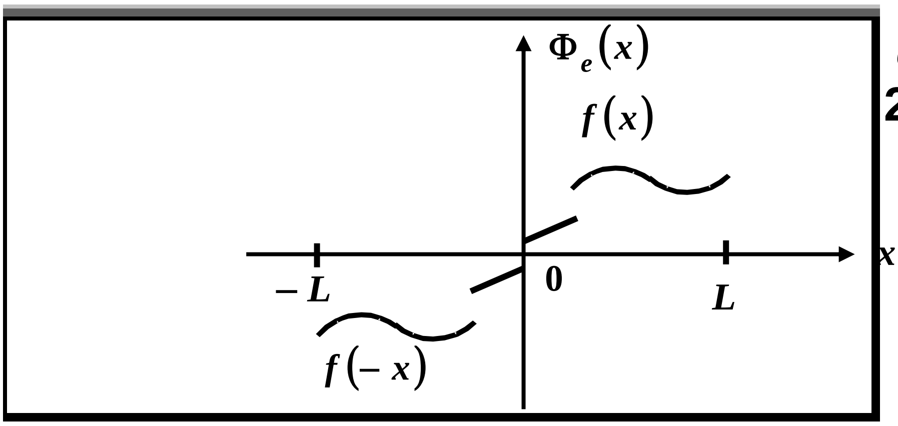

شكل 2.21

إذن فإن

$$\Phi_e(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le L \\ f(-x) & -L\le x<0 \end{cases} \tag{2.35}$$

انظر . أيضاً . شكل (2.22)، حيث نرى أن الدالة $f(x)$ يمكن اعتبارها نصف الدالة الفردية المكملة $\Phi_o(x)$، والمعرفة على فترة فورير الكاملة $[-L,L]$. نلاحظ أن $\Phi_o(x)$ تنطبق تماماً مع $f(x)$ على نصف الفترة أي على الفترة $[0,L]$. إذن فإن

$$\Phi_o(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le L \\ -f(-x) & -L\le x<0 \end{cases} \tag{2.36}$$




شكل 2.22

ملخص

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[0,L]$، إذن فإنه يمكن الحصول لها على متسلسلات فورير التالية:

(1) متسلسلة جيب التمام لفورير للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,L]$، والتي نرمز لها بالرمز $S_c(x)$ هي

$$S_c(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall\ x \in [0,L] \tag{2.37}$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx;\ n \ge 1$$

(2) متسلسلة الجيب لفورير للدالة $f(x)$ على $[0,L]$، والتي نرمز لها بالرمز $S_s(x)$ هي

$$S_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall\ x \in [0,L] \tag{2.38}$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx;\ n \ge 1$$

**مثال 2.6** أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x) = x$ على الفترة $]0,1[$.

**الحل** (1) يمكن الحصول على متسلسلة الجيب لفورير بتكوين الدالة

المكملة الفردية $\Phi_o(x)$ على الفترة الكاملة $[-1,1]$. انظر شكل (2.23). الآن نكرر الدالة $\Phi_o(x)$ على طول خط الأعداد فنحصل على الدالة الممتدة $\psi(x)$، والتي دورتها هي $2L=2$ .

ولأن الدالة $\Phi_o(x)$ فردية فإننا نوجد لها متسلسلة الجيب لفورير لكل $x$ ينتمي إلى الفترة $]-\infty,\infty[$ ومن ثم نوجد متسلسلة الجيب لفورير لكل $x$ ينتمي إلى الفترة $[0,1]$. يمكن أيضاً الحصول على متسلسلة الجيب لفورير لكل $x$ ينتمي إلى الفترة $[0,1]$ بطريقة مختصرة حيث نجد متسلسلة الجيب لفورير للدالة $\psi(x)$ في الشكل

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\sin(n\pi x) \quad \forall\ x}$$

حيث

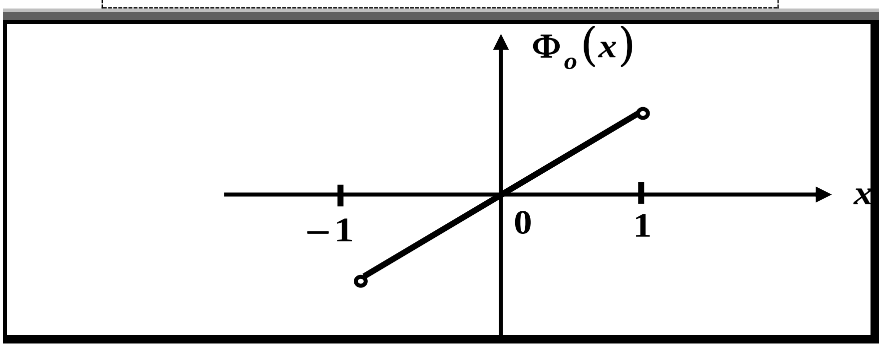
$$b_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi)$$

وبالتالي فإن متسلسلة الجيب لفورير للدالة $\Phi_o(x)$ المكملة للدالة $f(x)=x$ تصبح لكل $x$ تنتمي للفترة $[-1,1]$ على الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\sin(n\pi x)$$

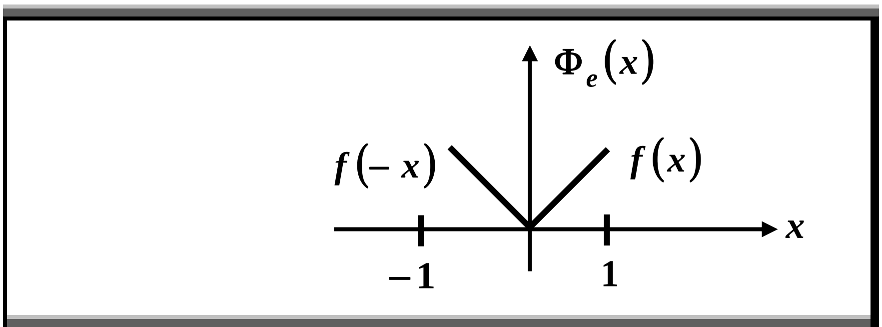
عندئذ تأخذ متسلسلة الجيب لفورير للدالة $f(x)=x$ على الفترة $]0,1[$ الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\sin(n\pi x)$$

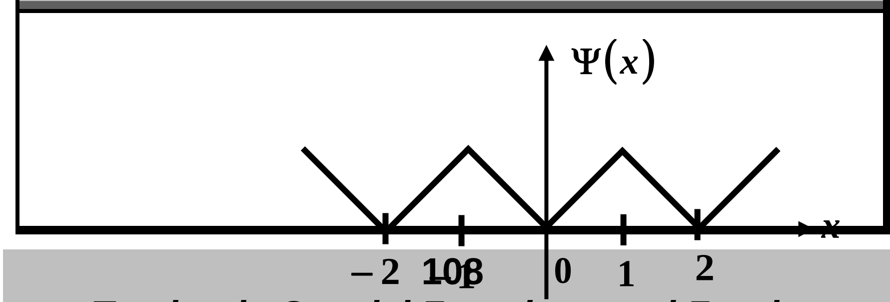



شكل 2.23

(2) للحصول على متسلسلة جيب التمام لفورير نكون الدالة الزوجية $\Phi_e(x)$ المكملة للدالة $f(x)$ . ثم نوجد الدالة الدورية، $\psi(x)$، (الدالة الممتدة) للدالة المكملة $\Phi_e(x)$، انظر الأشكال (2.24), (2.25).




شكل 2.24




شكل 2.25

بما أن
$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$
$$a_n = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = \frac{-2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$
وبالتالي فإن متسلسلة جيب التمام للدالة $f(x)=x$ هي
$$\boxed{\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos(n\pi)\right)}{n^2}\cos(n\pi x);\ 0\le x\le 1}$$

.

## 2.8 تقـــارب متسلسلات فوريـــــــــــــــر

في هذا الفصل نحاول الإجابة على سؤال هام جداً، يعتبر من الأسئلة التقليدية الأساسية في نظريات التقريب. لنفرض أن $f(x)$ دالة ما معرفة على الفترة $I$، ولنفرض أن المتسلسلة $S(x)$ ترمز لمتسلسلة فورير الخاصة بها.

والسؤال هو: ما هي العلاقة بين الدالة $f(x)$ ومتسلسلة فورير $S(x)$؟ هل يمكن أن نقول مثلاً إن $f(x)=S(x)$ لكل $x\in I$،

أم أنه لبعض قيم المتغير $x$ نجد $f(x)=S(x)$ بينما لقيم $x$ الأخرى فإن $f(x)\approx S(x)$ (بمعنى أن الدالة $f(x)$ تقترب *(Close to)* من $S(x)$)؟ بكلمات أخرى ما هو تقارب *(Convergence)* متسلسلة فورير $S(x)$ من الدالة الأصلية $f(x)$ لكل $x\in I$ ؟.

الإجابة عن هذا السؤال تقدمه النظرية التالية.

**نظرية 2.2** **تقارب متسلسلات فورير**

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[-L,L]$ وهي دورية، وملساء على فترات فإن قيمة متسلسلة فورير لها عند أية نقطة $x_0$ تنتمي إلى الفترة $[-L,L]$ تتقارب إلى القيمة $S(x_0)$، حيث

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x)+\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] \qquad (2.39)$$

وبالنسبة للنقط الطرفية $x=-L,\ x=L$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى القيمة الوحيدة

$$S(-L)=S(L)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-L)^+} f(x)+\lim_{x\to(L)^-} f(x)\right] \qquad (2.40)$$

بشرط وجود المشتقات $f_R'(-L),\ f_L'(L)$ .

توضيح

لتوضيح هذه النظرية سنقوم بدراسة تقارب متسلسلة فورير عند النقط الداخلية، والنقط الطرفية للفترة $[-L,L]$.

**أولاً:** تقارب متسلسلة فورير عند النقط الداخلية. إذا كانت النقطة $x_0$ حيث $-L < x_0 < L$ نقطة داخلية فهناك احتمالان.

النقطة $x_0$ نقطة اتصال

في هذه الحالة فإن النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى تساوي قيمة الدالة عند نفس النقطة، أي أن

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

وفي هذه الحالة فإن متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ عند نقطة الاتصال $x_0$ تتقارب إلى

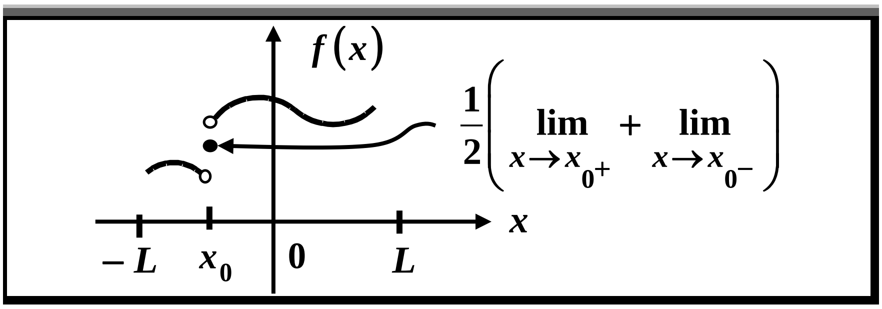
$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[2f(x_0)\right] = f(x_0) \qquad (2.41)$$

بشرط وجود كل من المشتقة الأولى اليمنى $f_L'(x_0)$ ، والمشتقة الأولى اليسرى $f_R'(x_0)$ . هذا الكلام يعني أنه إذا كانت النقطة $x_0$ نقطة اتصال فإن قيمة متسلسلة فورير عند نقطة الاتصال $x_0$ هي نفسها قيمة الدالة الأصلية عند نفس النقطة $x_0$ بشرط وجود كل من $f_R'(x_0), f_L'(x_0)$ .

**الاحتمال الثاني**

**النقطة $x_0$ نقطة عدم اتصال القفزة**

في هذه الحالة فإن متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ عند نقطة عدم الاتصال $x_0$ تتقارب إلى القيمة $S(x_0)$ المعطاة في (2.39).
بشرط وجود $f_R'(x_0), f_L'(x_0)$ . انظر شكل (2.26).




شكل 2.26

**<u>ثانيا:</u>** تقارب متسلسلة فورير عند النقط الطرفية. عند النقط الطرفية $x=\pm L$ حتى ولو كانت فترة تعريف الدالة فترة مفتوحة فإن لمتسلسلة فورير قيمة واحدة هي القيمة المعطاة في (2.40).

ملاحظة

بما أن متسلسلة فورير هي

$$S(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

إذاً فإن

$$S(-L)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right)$$

وحيث أن

$$\cos(x)=\cos(-x),\sin\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right)=0$$

إذاً فإن

$$S(-L)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi) \tag{2.42}$$

وعند $x=L$ فإن

$$S(L)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi(L)}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi(L)}{L}\right)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi) \tag{2.43}$$

الأمـر الـذي يعـني أن لمتسلسـلة فـورير عنـد الـنقط الطرفيـة $x=-L, x=L$ قيمة واحدة هي

$$S(L)=S(-L)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi) \qquad (2.44)$$

■■■

**مثال 2.7** أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x)=4-x^2$ المعرفة على الفترة $[-2,2]$ وادرس تقاربها

**الحل** من (2.23) لدينا وباستخدام (A.17) من الملحق A نحصل على

$$a_0=\frac{1}{2\times 2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\frac{8}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=2\int_{-2}^{2}\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}-\frac{4x}{n^2\pi^2}\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$-\frac{n^2\pi^2x^2-8}{n^3\pi^3}\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1};n\neq 0;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx=0$$

هكذا نجد من (2.22) ونظرية التقارب ومع الأخذ في الاعتبار أن الدالة المعطاة متصلة على طول فترة تعريفها $[-2,2]$ أن

$$f(x)=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)$$

أو

$$f(x)=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\dots\right)$$

**ملاحظة**

عادة ما تستخدم متسلسلات فورير في حساب مجموع المتسلسلات اللانهائية. فمثلاً في المثال السابق حيث الدالة هي $f(x)=4-x^2$ فإننا نجد أن $f(0)=4$ ، وبالتعويض في المتسلسلة السابقة عن $x=0$ نجد أن

$$4=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

أي أن

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{12}$$

✍.

**مثال 2.8** ادرس تقارب متسلسلة فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases} 2 & -3 \le x < -1 \\ |x| & -1 < x \le 0 \\ x^2 & 0 < x < 2 \\ x+5 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

**الحل** من الواضح أن الدالة $f(x)$ متصلة على فترات على فترة تعريفها $[-3,3]$، وذلك لوجود عدد محدود من نقط عدم اتصال القفزة عند النقط $x=-1,\ x=2$.

أيضاً فإن الدالة $f(x)$ ملساء على فترات، وذلك لوجود المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عند جميع نقط الفترة $[-3,3]$. إذاً يمكن إيجاد متسلسلة فورير $S(x)$ لهذه الدالة على الفترة $[-3,3]$.

بالنسبة إلى تقارب متسلسلة فورير إلى الدالة المعطاة علينا أن نقوم بدراسة التقارب عند ثلاثة أنواع من النقط التي تنتمي إلى الفترة المعرفة عليها الدالة، أي الفترة $[-3,3]$. فندرس أولاً التقارب عند نقط اتصال الدالة على الفترة المفتوحة $]-3,3[$، وثانياً التقارب عند نقط عدم اتصال الدالة على الفترة المفتوحة $]-3,3[$، أي عند النقط $x=-1, x=2$، وثالثاً التقارب عند نقط نهايات الدالة، أي عند النقط $x=-3, x=3$.

**أولاً :** التقارب عند نقط اتصال الدالة: نلاحظ أولاً أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=0$ ، وذلك لأن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

إذاً الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة

$$\Omega=\left]-3,-1\right[\cup\left]-1,2\right[\cup\left]2,3\right[$$

إذاً فحسب النظرية (2.2) فإن متسلسلة فورير $S(x)$ تتقارب إلى الدالة $f(x)$ نفسها لكل نقطة $x$ تنتمي إلى الفترة $\Omega$، أي أن

$$S(x)=f(x)\ \forall x\in\Omega$$

**ثانياً:** التقارب عند نقط عدم اتصال الدالة. عند نقط عدم الاتصال $x_0=-1,\ x_0=2$ نجد من (2.39) أن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x)+\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right]$$

يمكن التأكد من وجود كل من المشتقتين الأولى اليمنى، واليسرى $f_L'(x_0)\ ,\ f_R'(x_0)$ . وسوف نوجد . الآن . قيمة $S(x_0)$ عند كل من $x_0=-1\ ,\ x_0=2$ . بالنسبة للنقطة $x_0=-1$ ، نجد أن

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\left|-1\right|=1,\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 2=2$$

وبالتالي فإن

$$f_R'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-1+\Delta x)-\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-(-1+\Delta x)-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

أيضاً فإن

$$f_L'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-1-\Delta x)-\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{-\Delta x}=0$$

وهكذا، نجد أن المشتقتين اليمنى $f_R'(-1)=-1$ ، واليسرى $f_L'(-1)=0$ ، موجودتان وبالتالي فعند نقطة عدم الاتصال $x_0=-1$ نجد متسلسلة فورير تتقارب إلى القيمة $S(-1)$ ، حيث

$$S(-1)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-1)^+} f(x)+\lim_{x\to(-1)^-} f(x)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2}$$

لاحظ أن الدالة $f(x)$ غير معرفة *(Undefined)* عند النقطة $x=-1$ ، ولكن بفضل متسلسلة فورير استطعنا الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند هذه النقطة هي القيمة $\frac{3}{2}$. بالنسبة إلى النقطة $x=-2$ ، نجد أن

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2+5=7,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4$$

وبالتالي فإن

$$f_R'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(2+\Delta x)+5-7}{\Delta x}=1;$$

$$f_L'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(2-\Delta x)^2-4}{-\Delta x}=4$$

وهكذا، نجد أن المشتقة الأولى اليمنى $f_R'(2)=1$ ، والمشتقة الأولى اليسرى $f_L'(2)=4$ ، موجودتان، وذلك لأن كلاً منهما تساوي قيمة محدودة *(Finite)* وليست ما لانهاية، إذاً عند نقطة عدم

الاتصال $x=2$ فإن متسلسلة فورير. طبقاً للصورة (2.39) تتقارب إلى $S(2)$، حيث

$$S(2)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(2)^{+}} f(x)+\lim_{x\to(2)^{-}} f(x)\right]=\frac{1}{2}(7+4)=\frac{11}{2}$$

لاحظ أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند النقطة $x=2$، ولكن بفضل متسلسلة فورير استطعنا الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند هذه النقطة وهي القيمة $\frac{11}{2}$.

**ثالثاً:** التقارب عند النقط الطرفية. عند النقط الطرفية $x=-3, x=3$، نجد من (2.40) أن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(-3)=S(3)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-3)^{+}} f(x)+\lim_{x\to(3)^{-}} f(x)\right]$$

ويمكن التأكد من وجود كل من المشتقة الأولى اليمنى $f_R{}'(-3)$ والمشتقة الأولى اليسرى $f_L{}'(3)$. بما أن

$$\lim_{x\to-3^{+}} f(x)=2,\quad \lim_{x\to3^{-}} f(x)=3+5=8$$

وبالتالي فإن

$$f_R{}'(-3)=\lim_{\Delta x\to0^{+}}\frac{f(-3+\Delta x)-\lim_{x\to-3^{+}} f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2-2}{\Delta x} = 0\,;$$

$$f_L{}'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3-\Delta x) - \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(3-\Delta x)+5-8}{-\Delta x} = 1$$

وبما أن المشتقتين: اليمنى $f_R{}'(-3)=0$ ، واليسرى $f_L{}'(3)=1$ موجودتان، إذاً نجد من (2.40) أن متسلسلة فورير تتقارب عند النقط الطرفية $x=-3, x=3$ إلى القيمة

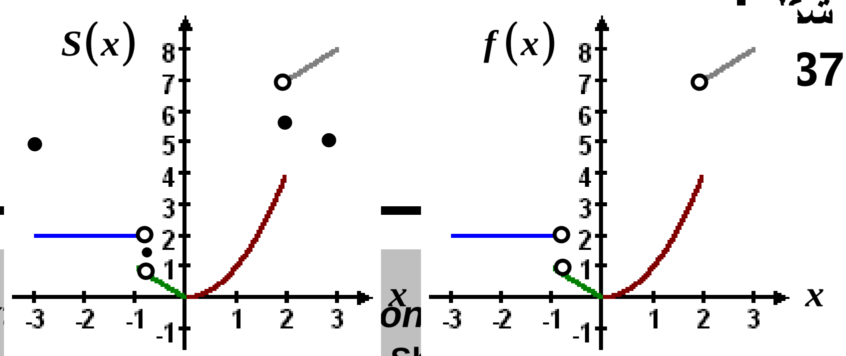
$$S(-3) = S(3) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to (-3)^+} f(x) + \lim_{x \to (3)^-} f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2+8] = 5$$

لاحظ أن الدالة $f(x)$ معرفة عند $x=-3, x=3$ حيث أن $f(-3)=2, f(3)=8$ ، بينما متسلسلة فورير تعطي $S(-3)=S(3)=5$ . انظر شكل (2.27).

من فضلك

شكل 37



✍.

**مثال 2.9** ادرس تقارب متسلسلة فورير للدالة

$$g(x)=\begin{cases} 1-x & -4\le x<0 \\ 2 & 0<x<3 \\ \sqrt{e^x} & 3<x<4 \end{cases}$$

**الحل** من الواضح أن الدالة $f(x)$ متصلة على فترات على فترة تعريفها $[-4,4]$، وذلك لوجود عدد محدود من نقط عدم اتصال القفزة عند النقط $x=0,\ x=3$ .

علاوة على أن الدالة $g(x)$ ملساء على فترات، وذلك لوجود المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عند جميع نقط الفترة $[-4,4]$. إذاً يمكن إيجاد متسلسلة فورير $S(x)$ لهذه الدالة على الفترة $[-4,4]$.

بالنسبة إلى تقارب متسلسلة فورير $S(x)$ إلى الدالة المعطاة نقوم بدراسة التقارب عند ثلاثة أنواع من النقط التي تنتمي إلى الفترة المعرفة عليها الدالة: أولاً التقارب عند نقط اتصال الدالة على الفترة

المفتوحة $]-4,4[$، وثانياً التقارب عند نقط عدم اتصال الدالة على الفترة المفتوحة $]-4,4[$، أي عند النقط $x=0, x=3$، وثالثاً التقارب عند نقط نهايات الدالة أي عند $x=-4, x=4$. **أولاً:** التقارب عند نقط اتصال الدالة. الدالة $g(x)$ متصلة على الفترة

$$\Omega = ]-4,0[ \cup ]0,3[ \cup ]3,4[$$

إذاً، فحسب النظرية (2.2) فإن متسلسلة فورير $S(x)$ تتقارب إلى الدالة $g(x)$ لكل نقطة $x$ تنتمي إلى الفترة $\Omega$، أي أن

$$S(x) = g(x) \ \forall x \in \Omega$$

**ثانياً:** التقارب عند نقط عدم اتصال الدالة. عند نقط عدم الاتصال $x=0,3$ نجد من (2.39) أن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_0^+} g(x) + \lim_{x \to x_0^-} g(x)\right]$$

ويمكن التأكد من وجود $g_R{}'(x_0), g_L{}'(x_0)$. وسوف نوجد الآن قيمة متسلسلة فورير عند كل من $x_0 = 0,\ x_0 = 3$. عند $x_0 = 0$ نجد أن

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$$

وبالتالي فإن

$$g_R{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(0+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{\Delta x}=0$$

كما أن

$$g_L{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(0-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-(0-\Delta x)-1}{-\Delta x}=-1$$

وبما أن $g_R{}'(0)=0,\ g_L{}'(0)=-1$ موجودتان، إذاً عند نقطة عدم الاتصال $x_0=0$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(0)^+} g(x)+\lim_{x\to(0)^-} g(x)\right]=\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$$

لاحظ أن الدالة $g(x)$ غير معرفة عند النقطة $x=0$ ، ولكن بفضل متسلسلة فورير استطعنا الحصول على قيمة تقريبية للدالة عند هذه النقطة ألا وهي $\frac{3}{2}$. عند $x=3$ نجد أن

$$\lim_{x\to 3^+} g(x)=\sqrt{e^3},\quad \lim_{x\to 3^-} g(x)=2$$

وبالتالي فإن

$$g_R{}'(3)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(3+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{3+\Delta x}}-\sqrt{e^3}}{\Delta x}=\frac{\sqrt{e^3}}{2};$$

$$g_L{}'(3)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(3-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)}{-\Delta x}$$

وبما أن المشتقة اليمنى هي $g_R{}'(3)=\frac{\sqrt{e^3}}{2}$ ، والمشتقة اليسرى هي $g_L{}'(3)=0$ ، وهما موجودتان. إذاً عند نقطة عدم الاتصال $x=3$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(3)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(3)^+} g(x)+\lim_{x\to(3)^-} g(x)\right]=\frac{1}{2}\left(\sqrt{e^3}+2\right)$$

لاحظ . أيضاً . يا صديقي أن الدالة $g(x)$ غير معرفة عند $x=3$ ولكن بفضل متسلسلة فورير استطعنا الحصول على قيمة تقريبية للدالة $g(x)$ عند هذه النقطة ألا وهي $1+\frac{\sqrt{e^3}}{2}$.

**<u>ثالثاً:</u>** التقارب عند النقط الطرفية $x=-4, x=4$ . في هذه الحالة نجد من (2.40) أن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S(-4)=S(4)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-4)^+} g(x)+\lim_{x\to(4)^-} g(x)\right]$$

وذلك بشرط وجود كل من المشتقة الأولى اليمنى $g_R{}'(-4)$، والمشتقة الأولى اليسرى $g_L{}'(4)$. بما أن

$$\lim_{x\to-4^+} f(x)=1-(-4)=5\ ,\ \lim_{x\to4^-} f(x)=\sqrt{e^4}$$

إذاً فإن

$$g_R{}'(-4)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{g(-4+\Delta x)-\lim\limits_{x\to-4^+} g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{1-(-4+\Delta x)-5}{\Delta x}=-1;$$

$$g_L{}'(4)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{g(4-\Delta x)-\lim\limits_{x\to4^-} g(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\sqrt{e^{4-\Delta x}}-\sqrt{e^4}}{-\Delta x}=\frac{e^2}{2}$$

وبما أن $g_R{}'(-4)=-1,\ g_L{}'(4)=\frac{e^2}{2}$ موجودتان، إذاً عند $x=-4, x=4$ ، فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى

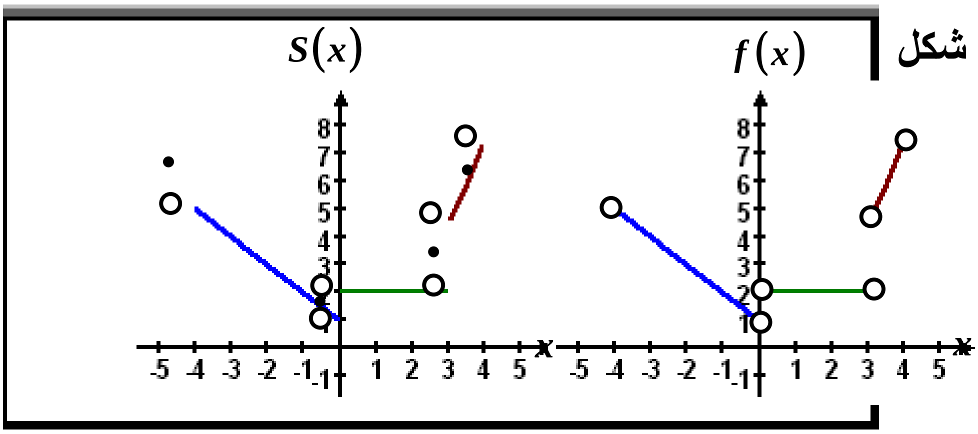
$$S(-4)=S(4)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-4)^+} g(x)+\lim_{x\to(4)^-} g(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[5+\sqrt{e^{4}}\right]$$

لاحظ أن قيمة الدالة $g(x)$ عند النقطة $x=-4$ هي $g(-4)=5$ وهي تختلف عن قيمة متسلسلة فورير $S(-4)==\frac{1}{2}\left[5+\sqrt{e^{4}}\right]$.

بينما نجد أن $g(x)$ غير معرفة عند $x=4$ أي أن $g(4)$ ليس لها وجـــود، بينمـــا متسلســـلة فـــورير عنـــد النقطـــة $x=4$ تعطـــي القيمة $S(4)=\frac{1}{2}\left[5+\sqrt{e^{4}}\right]$ . انظر شكل (2.28).

شكل




.

## 2.9 تـقـــــارب متسلسلات الجيب وجيب التمام لفورير

من المؤكد . الآن . أنه يمكن دراسة تقارب متسلسلات الجيب وجيب التمام لفورير من نظرية (2.2)، باعتبار أن متسلسلات الجيب وجيب التمام لفورير هي حالة خاصة من متسلسلة فورير. لكن .. علينا أن تذكر أن متسلسلات الجيب لفورير تحتوي على دوال الجيب فقط، بينما تحتوي متسلسلات جيب التمام على دوال جيب التمام فقط.

وبما أن الدوال المعرفة على نصف فترة فورير أي على الفترة $[0,L]$ يمكن أن تُمثل في متسلسلة جيب التمام لفورير (إذ نعتبرها نصف دالة زوجية معرفة على الفترة الكاملة $[-L,L]$)، أو يمكن أن تُمثل في متسلسلة الجيب لفورير (إذ نعتبرها نصف دالة فردية معرفة على الفترة الكاملة $[-L,L]$).

إذاً يمكن تكييف نظرية *(2.2)* لتتلاءم مع المعطيات الإضافية لمتسلسلات الجيب وجيب التمام لفورير بالنسبة إلى الدوال المعرفة على نصف فترة فورير $[0,L]$. هذا ما تعبر عنه النظرية التالية.

**نظرية 2.3**

***تقارب متسلسلات الجيب وجيب التمام***

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة، ومتصلة على فترات على الفترة $[0,L]$، فإن قيمة متسلسلة الجيب أو جيب التمام لفورير لهذه

الدالة عند أية نقطة تتقارب إلى القيمة $S_s(x_0)$ ، أو $S_c(x_0)$ حيث

$$S_s(x_0)=S_c(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x)+\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] \qquad (2.45)$$

بشرط وجود المشتقات $f_R'(x_0), f_L'(x_0)$ .

توضيح

*(1)* إذا كانت النقطة $x_0$ نقطة اتصال للدالة $f(x)$ ، بالإضافة إلى كونها ليست نقطة طرفية، أي أن $x_0\in\,]0,L[$ ، فإن

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

بالتعويض في *(2.45)*، إذاً فإن

$$S_s(x_0)=S_c(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0)+f(x_0)\right]=f(x_0)$$

بشرط وجود المشتقات $f_R'(x_0), f_L'(x_0)$ . الأمر الذي يعني أن قيمة متسلسلة الجيب لفورير $S_s(x)$ ، أو متسلسلة جيب التمام لفورير $S_c(x)$ للدالة $f(x)$ عند أية نقطة اتصال تساوي قيمة الدالة نفسها عند هذه النقطة. أي تساوي $f(x_0)$ . بشرط وجود المشتقات اليمنى واليسرى $f_R'(x_0), f_L'(x_0)$ .

*(2)* بالنسبة إلى النقطة الطرفية $x_0 = 0$ ، فطبعاً توجد للدالة $f(x)$ عندها نهاية يمنى فقط، وعليه فإذا وجدت المشتقة اليمنى $f_R'(0)$ ، فإن قيمة متسلسلة جيب التمام لفورير $S_c(x)$ للدالة $f(x)$ عند $x_0 = 0$ تصبح

$$S_c(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \tag{2.46}$$

أما قيمة متسلسلة الجيب لفورير $S_s(x)$ فتصبح

$$S_s(0) = 0 \tag{2.47}$$

*(3)* بالنسبة إلى النقطة الطرفية الأخرى $x_0 = L$ ، نجد أن للدالة $f(x)$ نهاية يسرى فقط عند $x_0 = L$ ، وعليه فإن قيمة متسلسلة جيب التمام $S_c(x)$ للدالة $f(x)$ عند $x_0 = L$ هي

$$S_c(L) = \lim_{x \to L^-} f(x) \tag{2.48}$$

بشرط وجود المشتقة $f_L'(L)$ . أما قيمة متسلسلة الجيب لفورير $S_s(x)$ عند $x_0 = L$ فيمكن إثبات أنها تساوي الصفر، أي أن

$$S_s(L) = 0 \tag{2.49}$$

بما أن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[0, L]$، إذاً ولكي نحصل على متسلسلة جيب التمام $S_c(x)$

برهـــان التوضيح رقم *(2)*

للدالة $f(x)$ نوجد الدالة الزوجية $\Phi_e(x)$ التي تكمل الدالة $f(x)$ لتصبح معرفة على فترة فورير الكاملة $[-L,L]$.

وبالتالي فإن القيمة التي تتقارب إليها متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ هي نفسها القيمة التي تتقارب إليها متسلسلة جيب التمام لفورير $S_c(x)$. وحيث أنه من نظرية *(2.2)* نجد أنه بالنسبة للدالة الزوجية $\Phi_e(x)$، والمعرفة على $[-L,L]$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى $S(x)$، حيث

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(x-\Delta x)\right]$$

وعند $x_0=0$، نجد أن

$$S(0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(0+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(0-\Delta x)\right]$$

بما أن $\Phi_e(x)$ دالة زوجية، بمعنى أن $\Phi_e(\Delta x)=\Phi_e(-\Delta x)$، إذاً بالتعويض في القيمة السابقة نحصل على

$$S(0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0^+}\Phi_e(\Delta x)\right]$$

ومن *(2.35)* نجد أن

$$S(0)=\frac{1}{2}\left[2\lim_{\Delta x\to 0^+} f(\Delta x)\right]=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

وبالتـالي فـإن متسلســلة جيـب التمـام لفـورير تتقـارب إلى القيمـة $S_c(x)$ ، حيث $S_c(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$ .

بالمثل يمكن دراسة تقارب متسلسلة الجيب لفورير للدالة $f(x)$ . في هـذه الحالـة فـإن الدالـة المكملـة للدالـة $f(x)$ هـي الدالـة الفرديـة $\Phi_o(x)$ ، وبمـا أن $\Phi_o(\Delta x)=-\Phi_o(-\Delta x)$ ، إذاً فـإن متسلسـلة الجيب لفورير عند $x_0=0$ تصبح $S_s(0)=0$ .

برهــان آخر.

بمـا أن متسلسـلة الجيـب لفـورير للدالـة $f(x)$ على الفترة $[0,L]$ هي

$$S_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall\ x\in[0,L]$$

إذاً عند $x=0$ ، نجد لكل $n\geq 1$ أن

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(0)\sin(0)dx=0$$

وبالتالي فإن $S_s(0)=0$ . بالمناسبة، يمكـن بنفس الأسلوب السـابق إثبـات $S_s(L)=0$ ، وذلـك بوضـع $x=L$ في متسلســلة الجيــب $S_s(x)$ .

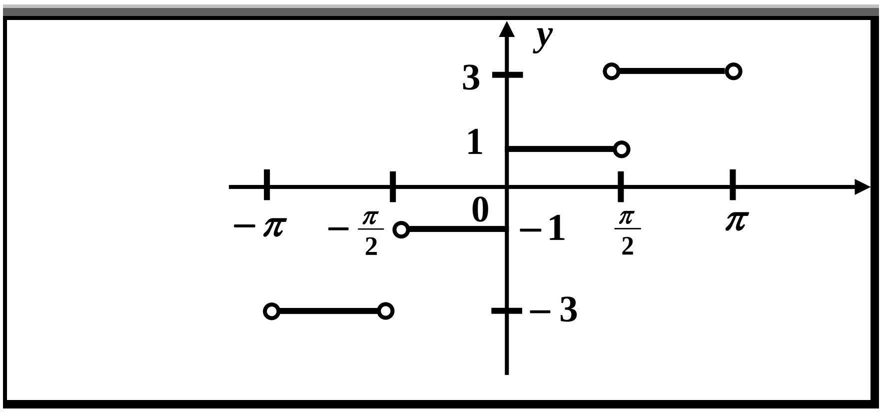
**مثال 2.10** أوجد متسلسلة فورير، وادرس تقاربها للدالة

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi/2\\ 3, & \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

**الحل** بداية يجب ملاحظة أن الدالة $f(x)$ متصلة على فترات على الفترة $]0,\pi[$، وذلك لوجود نقطة عدم اتصال القفزة عند $x=\pi/2$.

أيضاً فإن $f(x)$ ملساء على فترات على $]0,\pi[$، وذلك بسبب وجود المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عند جميع نقط الفترة $]0,\pi[$. ولأن $f(x)$ معرفة على نصف فترة فورير $]0,\pi[$ وليس على الفترة الكاملة $[-\pi,\pi]$، إذاً فلا يمكن الحصول على متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ ولكن يمكن الحصول على متسلسلة الجيب لفورير $S_s(x)$، أو متسلسلة جيب التمام لفورير $S_c(x)$.

للحصول على متسلسلة الجيب للدالة $f(x)$، نكون - أولاً - الدالة الفردية $\Phi_o(x)$ كما في *(2.36)*، والمكملة للدالة $f(x)$ لتصبح معرفة على فترة فورير الكاملة $[-\pi,\pi]$. بعد ذلك نقوم بتكرار الدالة $\Phi_o(x)$ على طول خط الأعداد لنحصل على الدالة الممتدة $\psi(x)$، وهي دورية دورتها $2\pi$. انظر شكل *(2.29)*.




شكل 2.29

الآن، يمكن إيجاد متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$، وذلك لكل $x\in[-\pi,\pi]$ ، والتي سوف تحتوي بالتأكيد على حدود في دوال الجيب فقط لكونها دالة فردية، وهكذا يمكن الحصول على متسلسلة الجيب للدالة $\Phi_o(x)$ لكل $x\in[-\pi,\pi]$ ، ثم بعد ذلك يمكن الحصول على متسلسلة الجيب للدالة $f(x)$ لكل $x\in[0,\pi]$ .

انتبه!

إلى أنه يمكن أن تختصر كل الخطوات السابقة، وذلك باستخدام *(2.38)* حيث نجد أن

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx+3\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}-\frac{6}{n\pi}\cos(n\pi)$$

وبالتالي فإن

$$S_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

أو

$$S_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}-\frac{6}{n\pi}\cos(n\pi)\right]\sin(nx)$$

وذلك لكل $x$ ينتمي إلى $[0,\pi]$. الآن، ندرس تقارب متسلسلة الجيب $S_s(x)$ عند نقط اتصال الدالة. بما أن

$$\lim_{c\to c} f(x)=f(c) \quad \forall\, x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

إذاً الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $\Omega$ إذاً فحسب النظرية *(2.3)* فإن متسلسلة فورير $S_s(x)$ تتقارب إلى الدالة $f(x)$ لكل نقطة $x$ تنتمي إلى الفترة $\Omega$، أي أن

$$S_s(x)=f(x)\ \forall x\in\Omega$$

بالنسبة إلى تقارب $S_s(x)$ عند نقطة عدم اتصال الدالة، فبالطبع توجد نقطة عدم اتصال واحدة من نوع القفزة هي $x_0=\frac{\pi}{2}$، وحسب الصورة *(2.45)* من النظرية *(2.3)* فإن متسلسلة الجيب

لفورير تتقارب إلى القيمة $S_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ بشرط وجود كل من المشتقة الأولى اليمنى $f_R'(x_0)$ والمشتقة الأولى اليسرى $f_L'(x_0)$ . بما أن

$$; \lim_{x\to\left(\pi/2\right)^+} f(x)=3, \quad \lim_{x\to\left(\pi/2\right)^-} f(x)=1$$

$$f_R'\left(\pi/2\right)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(\pi/2+\Delta x\right)-\lim\limits_{x\to\left(\pi/2\right)^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$;=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3-3}{\Delta x}=0$$

$$f_L'\left(\pi/2\right)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(\pi/2-\Delta x\right)-\lim\limits_{x\to\left(\pi/2\right)^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{-\Delta x}=0$$

وبما أن المشتقة اليمنى $f_R'\left(\pi/2\right)=0$ لها وجود، والمشتقة اليسرى $f_L'\left(\pi/2\right)=0$ لها وجود أيضاً؛ لأن كل منهما لها قيمة محدودة، وليست ما لانهاية، إذاً عند نقطة عدم الاتصال $x_0=\frac{\pi}{2}$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى

$$S_S\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)+\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(1+3)=2$$

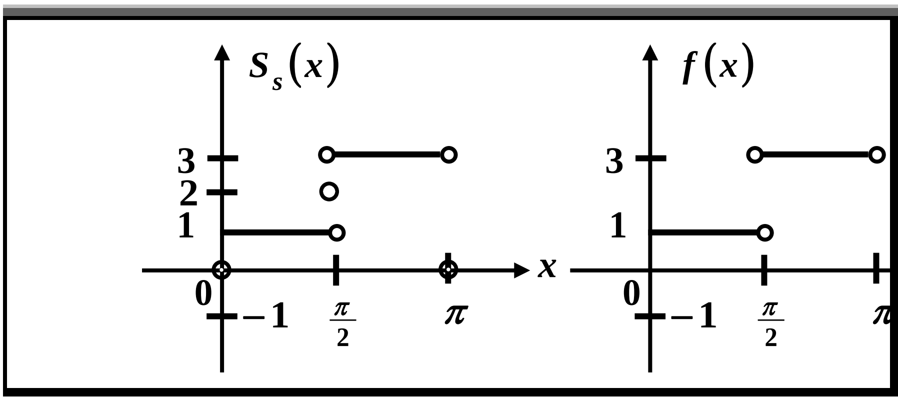
نلاحظ هنا أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x=\dfrac{\pi}{2}$ ، ولكن بفضل متسلسلة فورير استطعنا الحصول على قيمة تقريبية لها عند هذه النقطة ألا وهي *2*. الآن ندرس تقارب $S_S(x)$ عند النقط الطرفية $x=0, x=\pi$ . بما أن $f_R{}'(0),\ f_L{}'(\pi)$ موجودتان، حيث أن

$$f_R{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x}$$
$$;=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

$$f_L{}'(\pi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\pi-\Delta x)-\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3-3}{-\Delta x}=0$$

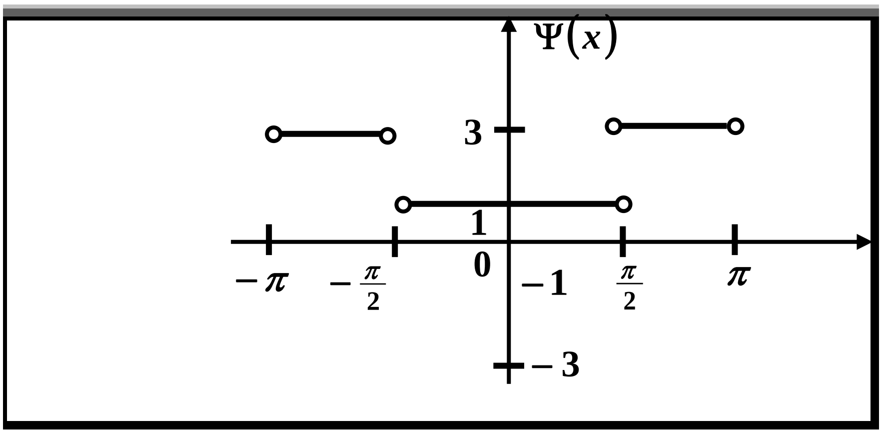
إذاً، نجد من *(2.47), (2.49)* أن $S_S(0)=S_S(\pi)=0$ .

لاحظ أن $f(0)=1$ ، وأيضاً لدينا $S_S(0)=0$ . أيضاً فإن $f(x)$ غير معرفة عند $x=\pi$ بينما $S(\pi)=0$ . انظر شكل *(2.30)*.




شكل 2.30

للحصول على متسلسلة جيب التمام للدالة $f(x)$ نكون الدالة الزوجية $\Phi_e(x)$ وهي الدالة المكملة للدالة $f(x)$ لتصبح بذلك $f(x)$ معرفة على فترة فورير الكاملة $[-\pi,\pi]$. بعد ذلك نقوم بتكرار الدالة $\Phi_e(x)$ على طول خط الأعداد لنحصل على الدالة الممتدة $\Psi(x)$، وهي دورية دورتها $2\pi$. انظر شكل *(2.31)*.




شكل 2.31

الآن، يمكن الحصول على متسلسلة فورير للدالة $\psi(x)$ لكل $x \in ]-\infty,\infty[$ . هذه المتسلسلة سوف تحتوي على حدود في دوال جيب التمام فقط لكونها دالة زوجية. وهكذا، يمكن الحصول على متسلسلة جيب التمام للدالة $\Phi_e(x)$ لكل $x \in [-\pi,\pi]$ ثم بعد ذلك يمكن أن نحصل على متسلسلة جيب التمام للدالة $f(x)$ لكل $x$ ينتمي للفترة $[0,\pi]$. على أية حال يمكن أن تختصر كل الخطوات السابقة وذلك باستخدام *(2.37)* حيث نستطيع أن نوجد متسلسلة جيب التمام لفورير للدالة $f(x)$ في الشكل

$$S_c(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall\ x \in [0,\pi]$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 3dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

وحيث
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos(nx)dx = -\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

وبالتالي فإن

$$S_c(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos(n\pi) \quad \forall\ x \in [0,\pi]$$

الآن ندرس تقارب المتسلسلة $S_c(x)$ عند نقط اتصال الدالة. بما أن

$$\lim_{c\to c} f(x) = f(c) \quad \forall\ x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

إذاً الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $\Omega = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

وبالتالي فبحسب النظرية *(2.3)* فإن متسلسلة فورير $S_c(x)$ تتقارب إلى الدالة $f(x)$ لكل نقطة $x$ تنتمي إلى الفترة $\Omega$، أي أن

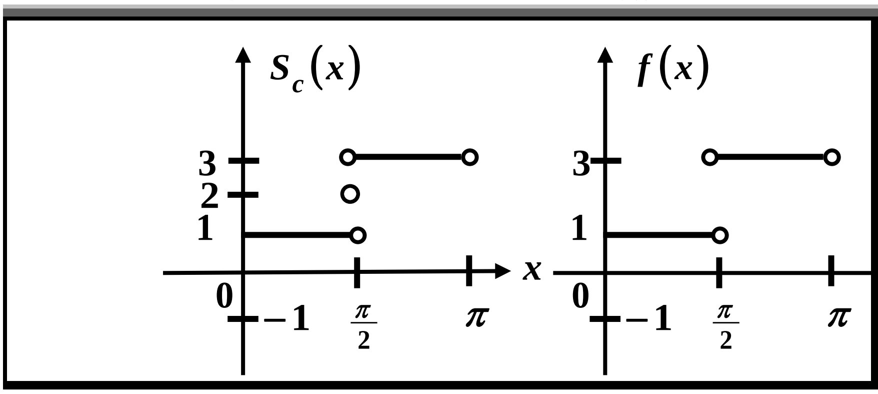
$$S_c(x) = f(x) \ \forall x \in \Omega$$

بالنسبة لتقارب المتسلسلة $S_c(x)$ عند نقطة عدم اتصال القفزة $x_0 = \frac{\pi}{2}$ وحسب النظرية *(2.3)* فإن متسلسلة جيب التمام لفورير تتقارب إلى القيمة

$$S_c\left(\pi/2\right) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) + \lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}[3+1] = 2$$

لاحظ أن كل من المشتقة الأولى اليمنى $f_R'\left(\pi/2\right)$ ، والمشتقة الأولى اليسرى $f_L'\left(\pi/2\right)$ موجودتان. لاحظ . أيضاً . أن $f\left(\pi/2\right)$ غير موجودة وذلك لأن الدالة $f\left(x\right)$ غير معرفة عند النقطة $x=\dfrac{\pi}{2}$ ، ولكن باستخدام متسلسلة جيب التمام لفورير يمكن الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f\left(x\right)$ عند النقطة $x=\dfrac{\pi}{2}$ هي القيمة $S_c\left(\pi/2\right)=2$ . لدراسة تقارب $S_c\left(x\right)$ عند النقط الطرفية $x=0, x=\pi$ ، نجد أن المشتقة الأولى اليمنى $f_R'\left(0\right)$ ، والمشتقة الأولى اليسرى $f_L'\left(\pi\right)$ لهما وجود، كما رأينا فيما سبق، إذاً فمن نظرية *(2.7)* نجد أن متسلسلة جيب التمام لفورير (انظر شكل *(2.32)* تتقارب عند النقط $x=0, x=\pi$ إلى القيمة

$$S_c\left(0\right)=\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=1,\ S_c\left(\pi\right)=\lim_{x\to \pi^-} f\left(x\right)=3$$




شكل
2.32

✍.

## 2.10 مسائل

أوجد متسلسلة فورير للدوال الآتية على الفترات المعرفة عليها، ثم ادرس تقاربها.

1. $f(x) = x^2; -\pi < x \le \pi$
2. $f(x) = x^3; -\pi < x < \pi$
3. $f(x) = -4; -3 \le x \le 3$
4. $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & -\pi \le x \le 0 \\ \sin(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$
5. $f(x) = |x|; -\pi \le x \le \pi$
6. $f(x) = 2\sin(3x),\ -\pi \le x < \pi$
7. $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$
8. $f(x) = 2 - |x|, -3 \le x < 3$
9. $f(x) = 2x + 1; -3 \le x < 3$
10. $f(x) = 2x - e^{2x}, -4 < x \le 4$

**11.** $f(x)=\begin{cases} k; & 2n\pi \le x < (2n+1)\pi \\ -k; & (2n+1)\pi \le x \le (2n+2)\pi \end{cases}$

حيث $k$ هو مقدار ثابت، كما أن $n=0,\pm1,\pm2\cdots$

**12.** $f(x)=\cos(2x), 0 < x \le \frac{\pi}{2}$

**13.** $f(x)=\begin{cases} k & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$

**14.** $f(x)=x+x^2, 0 < x \le 5$

**15.** $f(x)=x; \quad -1 < x < 1$

**16.** $f(x)=-4, \ 0 < x \le 2$

**17.** $f(x)=\begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$

**18.** $f(x)=\begin{cases} -x, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 3 \end{cases}$

***(19)*** أوجد معاملات فورير $b_n$ لكل $x$ تنتمي إلى الفترة $]0,3[$ بحيث يكون

$$1+2x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

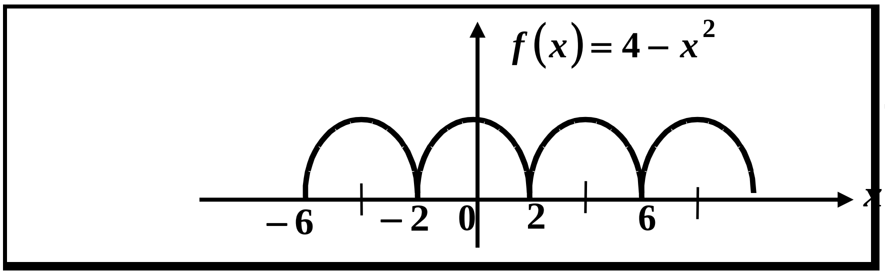
$$(20)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & -2\le x<0 \\ 1 & 0<x<1 \\ x & 1<x\le 2 \end{cases}$$

*(21)* أوجد معاملات فورير $a_n$ لكل $x$ تنتمي إلى الفترة $]0,3[$ بحيث يكون

$$1+2x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$(22)\quad z(x)=x(10-x),\quad 0<x<10$$

*(23)* أوجد متسلسلة فورير وادرس تقاربها للدالة المعطاة في شكل *(2.33)*.




شكل 2.33

24. $f(x)=e^{-x},\ 0<x\le 2$

25. $w(x)=\begin{cases} 2, & 0<x<3 \\ -2, & -3<x<0 \end{cases};\ w(x+6)=w(x)$

26. $f(x)=x+\sin(x),\ 0\le x\le \pi$

27. $r(x)=\begin{cases}\cos(x), & 0<x<\pi\\ 0, & \pi<x<2\pi\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$

29. $f(x)=x,\ 0<x<2$

30. $f(x)=e^{x},\ 0<x\le 1$

31. $f(x)=e^{2x},\quad 0\le x\le 1$

32. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 2, & 1<x\le 2\\ \cos(x), & 2<x\le 4\end{cases}$

33. $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \pi/2\\ 2 & \pi/2<x\le \pi\end{cases}$

*********************************************

## حلول المسائل الفردية

**1**

الدالـة $f(x)$ زوجيـة علـى الفـترة $]-\pi,\pi[$، ولِـذا نحسـب فقـط المعاملات $a_0, a_n$، إذن

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}\ ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos\left(n\frac{\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}; n > 0$$

وبالتال فإن متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ تأخذ الشكل

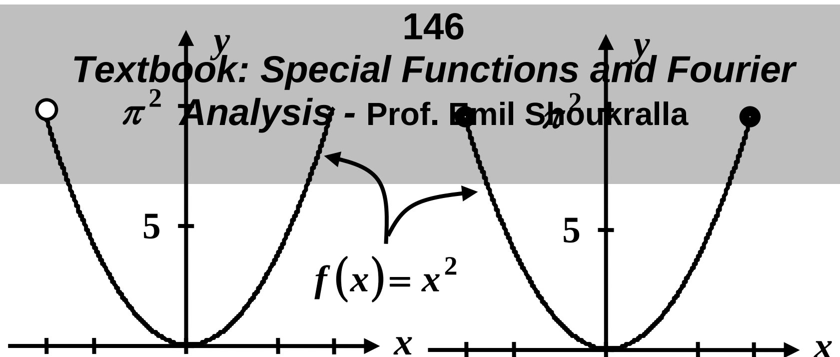
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

وبما أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $]-\pi,\pi[$ وتوجد كل من المشتقة الأولى اليمنى والمشتقة الأولى اليسرى عند كل نقط الفترة $]-\pi,\pi[$ ، إذن فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة نفسها عند كل نقط الفترة $]-\pi,\pi[$ . بالنسبة للنقطة الطرفية $x = \pm\pi$ ، بما أن

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \pi^2,\ \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \pi^2$$

وأيضاً توجد المشتقة الأولى اليمنى عند $x = -\pi$ كما توجد المشتقة الأولى اليسرى عند $x = +\pi$ ، إذن فمتسلسلة فورير عند النقط $x = \pm\pi$ تتقارب إلى القيمة $\frac{1}{2}(\pi^2 + \pi^2) = \pi^2$ . وهكذا نجد أن متسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها لكل $x$ تنتمي إلى الفترة $[-\pi,\pi]$. انظر شكل (2.34). أي أن

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$



شكل 2.34

**3**

الدالة المعطاة ثابتة في الفترة $[-3,3]$، ولِذا نحسب كل المعاملات $a_0, a_n, b_n$، إذن

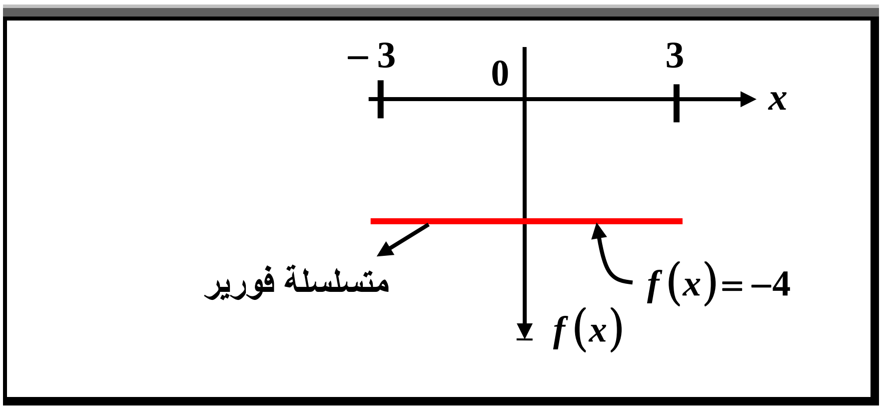
$$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}(-4)dx = -4, \quad a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(-4)\cos\left(n\frac{\pi x}{3}\right)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(-4)\sin\left(n\frac{\pi x}{3}\right)dx = 0$$

وعندئذٍ تأخذ متسلسلة فورير للدالةالمعطاة على الفترة $[-3,3]$ الشكل

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\frac{\pi x}{3}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\frac{\pi x}{3}\right)\to -4$$

وحيث أن كل المعاملات تساوي الصفر ماعدا المعامل $a_0=-4$؛ ولأن الدالة متصلة والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى لها وجود عند جميع نقط الفترة $[-3,3]$، فمتسلسلة فورير كما هو واضح تتقارب إلى الدالة $f(x)=-4$ نفسها عند جميع نقط الفترة $[-3,3]$. انظر شكل (2.35).




شكل 2.35

5

الدالــة $f(x)$ زوجيــة علــى الفــترة $[-1,1]$، ولِـذا نحســب فقــط المعاملات $a_0, a_n$، إذن

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{1}(x)dx\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{0} -x\cos(nx)dx + \int_{0}^{1} x\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1)$$

ولأن الدالة $|x|$ متصلة، والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى لها وجود عند جميع نقط الفترة $[-\pi,\pi]$، فمتسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة $|x|$ نفسها عند جميع نقط الفترة $[-\pi,\pi]$. أي أن

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(\cos(n)-1)\cos(nx); x \in [-\pi,\pi]$$

7

هنا $L = 2$، إذن

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} 0dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{1} 1dx + \frac{1}{4}\int_{1}^{2} 2dx = \frac{3}{4};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx+2\int_1^2\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx\right)=\frac{-1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^1\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx+\int_1^2\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1-2\cos(n\pi)\right]$$

وهكذا، نجد أن متسلسلة فورير للدالة المعطاة على الفترة $[-2,2]$ هي

$$\frac{3}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1-2\cos(n\pi)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

ولدراسة تقارب الدالة المعطاة، نحدد أولاً نقط عدم الاتصال للدالة فنجد أنهما $x=0, x=1$ . بالنسبة للنقطة الأولى $x=0$ ، نجد أن المشتقتين الأوليتين اليمنى واليسرى مجودتان عند $x=0$ ، حيث أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

وبالتالي فإن

$$f_R'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

$$f_L{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)}{-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{-\Delta x}=0$$

عندئذٍ فإن متسلسلة فورير تتقارب عند النقطة $x=0$ إلى القيمة $\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$.

بالنسبة للنقطة $x=1$ ، نجد أن المشتقات الأولى اليمنى واليسرى لها وجود عند النقطة $x=1$ ، حيث أن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

وبالتالي فإن

$$f_R{}'(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{\Delta x}=0$$

كما أن

$$f_L{}'(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)}{-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{-\Delta x}=0$$

عندئذٍ فإن متسلسلة فورير تتقارب عند النقطة $x=1$ إلى القيمة

$$\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$$

بالنسبة إلى النقط الطرفية $x=2, x=-2$ نجد أن النهاية اليمنى عند $x=-2$ ، والنهاية اليسرى عند النقطة $x=2$ هما على الترتيب

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=2$$

وبالتالي فالمشتقة الأولى اليمنى عند $x=-2$ والمشتقة الأولى اليسرى عند $x=2$ هما على الترتيب

$$f_R{}'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-2+\Delta x)-\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$;=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_L{}'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}{-\Delta x}$$

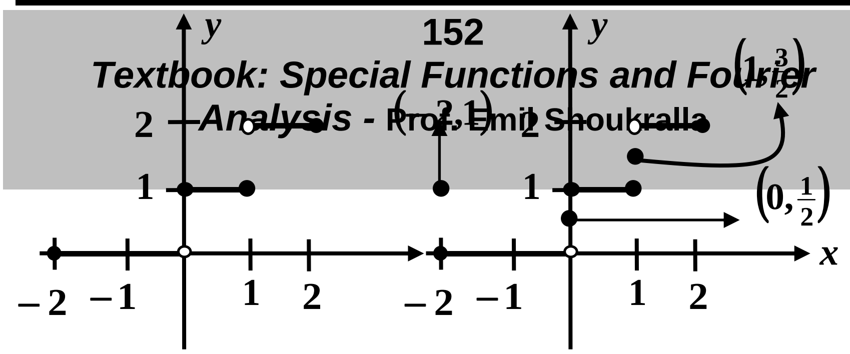
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{-\Delta x}=0$$

هكذا نجد أنه عند النقط الطرفية $x=-2, x=2$ ، فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى القيمة $1=\frac{1}{2}(2+0)$ . في النهاية نجد أن متسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها لكل $x$ ينتمي إلى فترة اتصال الدالة، أي الفترة

$$]-2,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$$

وتتقارب إلى القيمة $\frac{1}{2}$ عند نقطة عدم الاتصال $x=0$ ، وتتقارب إلى القيمة $\frac{3}{2}$ عند نقطة عدم الاتصال $x=1$ ، بينما تتقارب إلى القيمة $1$ عند النقط الطرفية $x=-2,2$ . انظر شكل (2. 36).

شكل



2.36

9

نحسب أولاً المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}(2x+1)dx = 1$$

وأيضاً

$$a_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x+1)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = 0 \quad \forall\, n = 1,2,,\ldots$$

كما أن
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x+1)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{-12}{n\pi}\cos(n\pi)$$

إذن فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة على الفترة $]-3,3[$ . مع ملاحظة أن $\cos(n\pi)=(-1)^n$ هي

$$1+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

وبما أن الدالة المعطاة (دالة كثيرة حدود) متصلة (لا توجد نقط عدم اتصال)، بالإضافة إلى وجود مشتقاتها اليمنى واليسرى على طول الفترة $]-3,3[$ ، إذن فمتسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة المعطاة ذاتها على الفترة $]-3,3[$ .

$$2x+1=1+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

أو
$$x=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

أما بالنسبة للنقط الطرفية $x=-3,\ x=3$ ، فنجد أن المشتقة اليمنى عند $x=-3$ والمشتقة اليسرى عند $x=3$ لهما وجود حيث أن

$$f_R'(-3)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-3+\Delta x)-\lim\limits_{x\to -3^+}f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2(-3+\Delta x)+1-(-5)}{\Delta x}=2$$

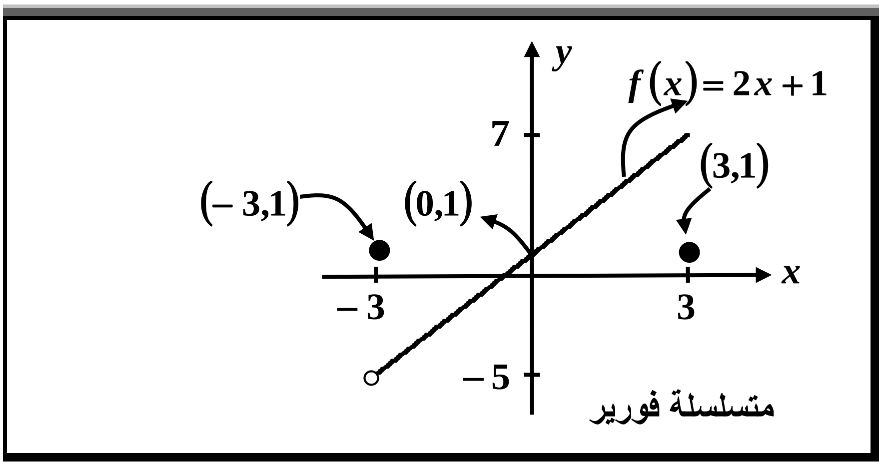
كما أن

$$f_L{}'(3)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(3-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2(3-\Delta x)+1-7}{-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-2\Delta x}{-\Delta x}=2$$

لاحظ أن

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}(2x+1)=-5\,;$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(2x+1)=7$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة تتقارب عند النقط الطرفية إلى القيمة $\frac{1}{2}(-5+7)=1$ . انظر شكل (2.33).




شكل
2.33

هذه الدالة دورية، دورها $2\pi$ ، حيث أن

$$f\left(x+2n\pi\right)=f\left(x\right)\quad \forall\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

بما أن الدالة المعطاة (الموجة التربيعية) فردية على $[-\pi,\pi]$، إذن فإن $a_0=0, a_n=0$ ، أما المعاملات $b_n$ فهي

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}k\sin(nx)dx$$

$$=-\frac{k}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx-\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right)=\frac{2k}{\pi n}(1-\cos(n\pi))$$

عندئذٍ فإن متسلسلة فورير للموجة التربيعية المعطاة لكل $x$ تنتمي إلى الفترة $]-\infty,\infty[$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{\pi n}(1-\cos(n\pi))\sin(nx)\forall x\in R$$

لدراسة تقارب متسلسلة فورير على الفترة $[-\pi,\pi]$، نجد أن الدالة المعطاة متصلة والمشتقات اليمنى والمشتقة الأولى اليسرى موجودة على الفترة $]0,\pi[\cup]-\pi,0[$ ، ولذا فمتسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها على الفترة $]0,\pi[\cup]-\pi,0[$ . أما بالنسبة إلى نقطة عدم الاتصال $x=0$ ، فنجد أن

$$f_R{}'(0)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{k-k}{\Delta x} = 0\,;$$

$$f_L{}'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0-\Delta x) - \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-k-(-k)}{-\Delta x} = 0$$

لاحظ أن $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = k,\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -k$

إذن عند النقطة $x = 0$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى القيمة $\frac{1}{2}(-k+k) = 0$ . بالنسبة إلى النقط الطرفية $x = -\pi, x = \pi$ ، فإننا نجد أن المشتقتين: اليمنى عند $x = -\pi$ ، واليسرى عند $x = \pi$ موجودتان حيث أن

$$f_R{}'(-\pi) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-\pi+\Delta x) - \lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-k-(-k)}{\Delta x} = 0\,;$$

$$f_L{}'(\pi) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\pi-\Delta x) - \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{k-k}{-\Delta x} = 0$$

لاحظ أن $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -k,\ \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = k$

وهكذا نجد أن متسلسلة فورير للدالة المعطاة تتقارب عند النقط الطرفية $x=-\pi, x=\pi$ إلى القيمة $0=\frac{1}{2}(-k+k)$ .

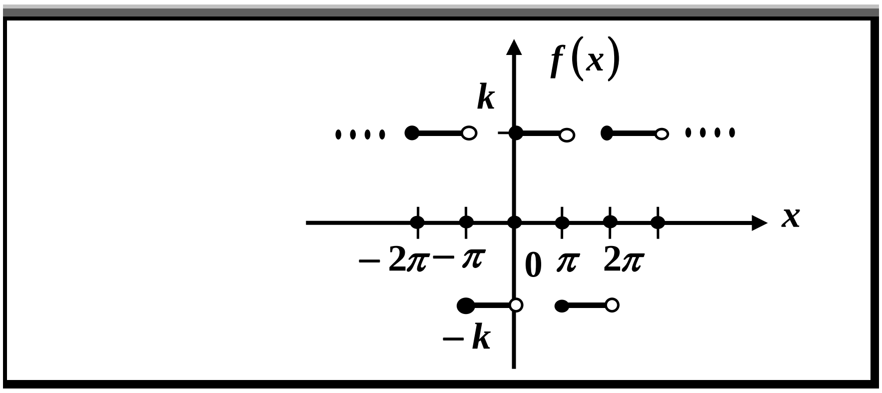
والخلاصة فإننا نجد مما سبق أن متسلسلة فورير لدالة الموجة التربيعية *(Square Wave)* المعطاة تتقارب على الفترة $[-\pi,\pi]$ إلى

$$\begin{array}{lll} k & \text{if} & 0<x<\pi \\ -k & \text{if} & -\pi<x<0 \\ 0 & \text{if} & x=0,\ x=\pi,,\ x=-\pi \end{array}$$

ونظراً لأن الدالة المعطاة هي دالة دورية على طول خط الأعداد $R$، فأنه يمكن تعميم النتائج السابقة لنصل إلى أن متسلسلة فورير للدالة المعطاة تتقارب إلى الدالة المعطاة ذاتها لكل قيم $x$ ماعدا عند القيم

$$x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots,\pm n\pi,\ldots$$

حيث $n$ عدد صحيح *(Integer)* حيث تتقارب عندها متسلسلة فورير إلى الصفر. انظر شكل (2.34).




شكل 2.34

13

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} kdx = \frac{k}{2};$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} 0\cdot\cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} k\cdot\cos(n\pi x)dx = 0;$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} 0\cdot\sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} k\cdot\sin(n\pi x)dx$$

$$= \frac{-k}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة على طول خط الأعداد $R$، هي

$$\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n\pi}[\cos(n\pi)-1]\sin(n\pi x)$$

لدراسة تقارب هذه الدالة، نجد أن هناك نقطة واحدة لعدم اتصالها عند $x=0$ . بما أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = k,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

إذن فإن

$$f_R'(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x) - \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x};$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{k-k}{\Delta x} = 0$$

$$f_L{}'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0-\Delta x) - \lim_{x \to 0^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{0-0}{-\Delta x} = 0$$

الأمر الذي يعني وجود المشتقتان اليمنى واليسرى عند النقطة $x=0$ ، وبالتالي فإن متسلسلة فورير تتقارب عند $x=0$ إلى القيمة $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}(0+k)$ . عند النقط الطرفية $x = \pm 1$ ، لدينا

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 1^-} f(x) = k$$

وبالتالي فإن

$$f_R{}'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1+\Delta x) - \lim_{x \to -1^+} f(x)}{\Delta x}$$

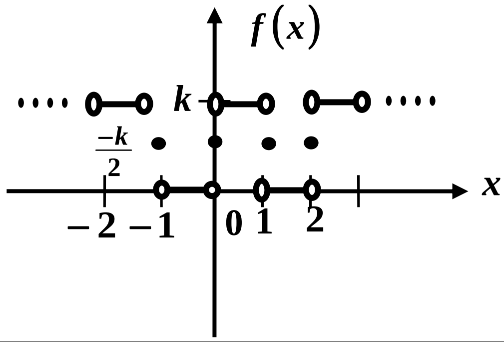
$$; = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$f_L{}'(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1-\Delta x) - \lim_{x \to 1^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{k-k}{-\Delta x} = 0$$

وهكذا نجد أن متسلسلة فورير تتقارب عند النقط الطرفية إلى القيمة $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}(0+k)$ . وأخيراً فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة

$f(x)$ نفسها عند جميع قيم $x$ ما عدا عند النقط $x = 0, \pm 1$ حيث تتقارب عندها إلى القيمة $\frac{k}{2}$. انظر شكل (2.35).




شكل 2.35

**15**

الدالة المعطاة دورية، دورتها $2L = 2$ ، علاوة على أنها دالة فردية؛ ولهذا السبب نبحث فقط عن المعاملات $b_n$، إذن

$$b_n = \int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx$$
$$= \frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

وبالتالي فإن متسلسلة فورير للدالة المعطاة على طول خط الأعداد $R$ تأخذ الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$

أيضاً وبما أن الدالة المعطاة متصلة والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى لها وجود على الفترة المفتوحة $]-1,1[$ فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى الدالة نفسها لكل $x$ تنتمي إلى الفترة $]-1,1[$. أما بالنسبة إلى النقط الطرفية $x=\pm 1$ ، فنجد أن

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x = -1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

وبالتالي فإن

$$f_R'(-1) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-1+\Delta x) - \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)}{\Delta x}$$

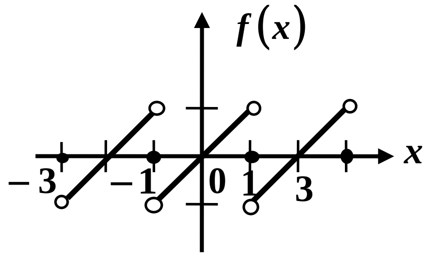
$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(-1+\Delta x)-(-1)}{\Delta x} = 1;$$

$$f_L'(1) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1-\Delta x) - \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(1-\Delta x)-1}{-\Delta x} = 1$$

عندئذٍ فإن متسلسلة فورير تتقارب عند النقط الطرفية $x=\pm 1$ إلى القيمة صفر. ولأن الدالة المعطاة دورية، بمعنى أنها معرفة على طول

خط الأعداد $R$، فيجب تعميم النتائج السابقة. إذن فمتسلسلة فورير للدالة المعطاة تتقارب لجميع قيم $x$ ماعدا عند النقط $x = 1 + 2n$ حيث $n$ عدد صحيح، حيث تتقارب متسلسلة فورير عندها إلى الصفر. انظر شكل (2.36).




شكل 2.36

17

الدالة المعطاة ليست دورية، لذلك نوجد الدالة الممتدة لها $\psi(x)$ على طول خط الأعداد $R$ عندئذٍ فإن الدالة $\psi(x)$ هي دالة دورية، دورتها $2L = 10$. إذن للحصول على متسلسلة فورير للدالة الدورية $\psi(x)$ نحسب المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} f(x)dx = \frac{1}{10}\int_{-5}^{0} 0dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{5} 3dx = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx = 0\,;$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

وهكذا نجد أن متسلسلة فورير للدالة الدورية $\psi(x)$ على طول خط الأعداد $R$ هي

$$\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$$

وهي نفس متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ المعطاة ولكن على الفترة $]-5,5[$ فقط. بما أن الدالة المعطاة متصلة على الفترة $]-5,0[\cup]0,5[$ ، إذن فإن متسلسلة فورير تتقارب لكل $x$ في الفترة $]-5,0[\cup]0,5[$ إلى الدالة ذاتها. أما بالنسبة لنقطة عدم الاتصال $x=0$ ، فنبحث عن المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عند هذه النقطة. بما أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ إذن

$$f_R{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3-3}{\Delta x} = 0\,;$$

$$f_L{}'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0-\Delta x) - \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{0-0}{-\Delta x} = 0$$

وهكذا نجد أن متسلسلة فورير تتقارب عند النقطة $x = 0$ إلى القيمة $\frac{1}{2}(0+3) = \frac{3}{2}$ . أما عند النقط الطرفية $x = \pm 5$ ، فنجد أن

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 0,\ \lim_{x \to 5^-} f(x) = 3$$

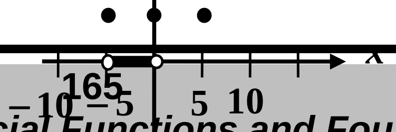
وبالتالي فإن

$$f_R{}'(-5) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-5+\Delta x) - \lim\limits_{x \to -5^+} f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{0-0}{\Delta x} = 0\,;$$

$$f_L{}'(5) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(5-\Delta x) - \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)}{-\Delta x} = 0$$

إذن عند النقط الطرفية $x = \pm 5$ تتقارب متسلسلة فورير إلى القيمة $\frac{1}{2}(0+3) = \frac{3}{2}$ . انظر شكل (2 .37).




شكل
2.37

**19**

الحصول على متسلسلة فورير للدالة $f(x)=2x+1$ ، المعرفة على نصف الفترة $]0,3[$ ، بحيث تحتوي متسلسلة فورير على المعاملات $b_n$ فقط يعني أن المطلوب هو تكميل الدالة $f(x)$ على الفترة الكاملة $]-3,3[$ بحيث تصبح نصف دالة فردية إذن

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3(2x+1)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx=\frac{2}{n\pi}\left(1-7\cos(n\pi)\right)$$

وبالتالي فمتسلسلة الجيب لفورير لكل $x$ ينتمي إلى الفترة $[0,3]$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-7\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

**21**

المطلوب هو الحصول على متسلسلة فورير للدالة $f(x)=2x+1$ ، المعرفة على نصف الفترة $]0,3[$ ، بحيث تحتوي متسلسلة فورير على المعاملات $a_n$ فقط. هذا الكلام يعني أن المطلوب هو تكميل الدالة $f(x)$ على الفترة الكاملة بحيث تصبح نصف دالة زوجية إذن

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^3(2x+1)dx=4\,;$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3(2x+1)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx=\frac{12}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3(2x+1)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx=\frac{12}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

إذن متسلسلة جيب التمام لفورير لكل $x$ ينتمي إلى الفترة المغلقة $[0,3]$ هي $4+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$

**23**

الدالة المعطاة دورية، ودورها $2L=4$، وهي أيضاً دالة زوجية على طول خط الأعداد، ولِذا فإن $b_n=0$. إذن

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=\frac{8}{3}\,;$$

$$a_n=\int_0^2\left(4-x^2\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\frac{-16}{n^2\pi^2}\cos(n\pi);n>0$$

وبالتالي فإن $\forall x \quad \frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)$

**25**

الدالة المعطاة دورية على طول خط الأعداد، ودورتها $2L = 6$، كما أنها دالة فردية، وبالتالي فإن $a_0 = 0, a_n = 0$، إذن

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{3}2\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{0}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx - \int_{0}^{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right)$$

$$= \frac{6}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

وهكذا نجد أن المتسلسلة المطلوبة هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\ \forall x$$

لدراسة التقارب نجد نقطة عدم اتصال للدالة عند النقطة $x = 0$. بما أن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$، إذن فإن

$$f_R'(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x) - \lim_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x};$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{\Delta x} = 0$$

$$f_L'(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0-\Delta x) - \lim_{x\to 0^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2-(-2)}{-\Delta x} = 0$$

بالتــــالي فمتسلســـلة فـــورير تتقـــارب عنـــد $x=0$ إلى القيمـــة $0 = \frac{1}{2}(-2+2)$. أما بالنسبة إلى النقط الطرفية $x=\pm 3$ فنجد أن

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = -k, \ \lim_{x \to \pi^-} f(x) = k$$

وأيضاً نجد أن

$$f_R'(-3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-3+\Delta x) - \lim_{x \to -3^+} f(x)}{\Delta x};$$

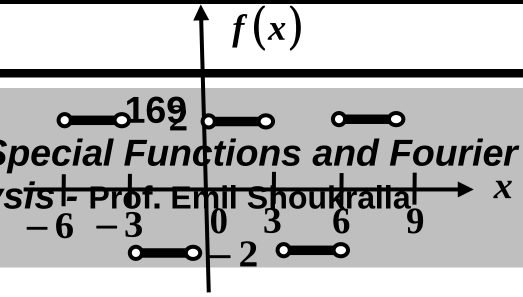
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2-(-2)}{\Delta x} = 0$$

$$f_L'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3-\Delta x) - \lim_{x \to 3^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2-2}{-\Delta x} = 0$$

إذن عند النقط الطرفية تتقارب متسلسلة فورير إلى القيمة $0 = \frac{1}{2}(-2+2)$. هكذا نجد أن متسلسلة فورير للدالة المعطاة تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها على طول خط الأعداد حيث الدالة متصلة، ماعدا عند النقط $x = 0, \pm 3, \pm 6, \ldots$ ، حيث تتقارب متسلسلة فورير عندها إلى الصفر. انظر شكل (2.38).

شكل



2.38

27

الدالة دورية، دورتها $2\pi$ ، غير أنها ليست زوجية ولا دالة فردية، إذن

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot\cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot\sin(nx)dx$$

$$= \frac{n}{\pi(n^2-1)}(\cos(n\pi)+1)$$

وهكذا نجد أن المتسلسلة المطلوبة هي

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)}(\cos(n\pi)+1)\sin(nx)$$

29

للحصول على متسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة نجد أن

$$a_0 = \frac{2}{2L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = 1\,;$$

$$a_n = \int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

إذن متسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة على الفترة غير الكاملة $[0,2]$ هي

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

هذا، ولدراسة تقارب متسلسلة جيب التمام لفورير على الفترة $[0,2]$، نجد أن الدالة المعطاة متصلة على الفترة $]0,2[$، وبالتالي فمتسلسلة جيب التمام لفورير التي حصلنا عليها تتقارب إلى الدالة المعطاة ذاتها لكل $x$ ينتمي إلى الفترة $]0,2[$. بالنسبة للتقارب عند النقط الطرفية $x=0, x=2$، نجد أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

وبالتالي فإن

$$f_R{}'(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x) - \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x}\,;$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$$f_L'(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2-\Delta x) - \lim_{x \to 2^-} f(x)}{-\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2-\Delta x - 2}{-\Delta x} = 1$$

وبالتالي فمتسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة تتقارب إلى القيمة 0 عند النقطة الطرفية $x = 0$ ، وتتقارب إلى القيمة 2 عند النقطة الطرفية $x = 2$ . للحصول على متسلسلة الجيب للدالة المعطاة نجد من (2.41) أن

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$= \int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi)$$

وبالتالي فإن متسلسلة الجيب للدالة المعطاة على الفترة $[0,2]$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

وهي تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها على الفترة $]0,2[$ ، حيث الدالة المعطاة متصلة، وتتقارب الصفر عند النقط الطرفية $x = 0, x = 2$ .

31

للحصول على متسلسلة جيب التمام لفورير للدالة المعطاة، نجد أن

$$a_0=\frac{2}{2L}\int_0^L f(x)dx=\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2-1}{2};$$

$$a_n=2\int_0^1 e^{2x}\cos(n\pi x)dx=\frac{4}{4+n^2\pi^2}\left(e^2\cos(n\pi)-1\right)$$

وبالتالي فإن متسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة على الفترة $[0,1]$ هي

$$\frac{e^2-1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4+n^2\pi^2}\left(e^2\cos(n\pi)-1\right)\cos(n\pi x)$$

وبما أن الدالة المعطاة متصلة على الفترة المفتوحة $]0,1[$، والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى موجودة على طول هذه الفترة، إذن فمتسلسلة جيب التمام لفورير تتقارب إلى الدالة المعطاة ذاتها على الفترة $]0,1[$. بالنسبة إلى النقط الطرفية $x=0, x=1$، فنجد أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{2x}=1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{2x}=e^2$$

وعندئذٍ فإن

$$f_R'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x};$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{2\Delta x}-1}{\Delta x}=0$$

$$f_L{}'(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1-\Delta x)-\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{2-2\Delta x}-e^2}{-\Delta x}=0$$

وبالتالي فمتسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة تتقارب إلى القيمة $1$ عند النقطة الطرفية $x=0$ ، وتتقارب إلى القيمة $e^2$ عند النقطة الطرفية $x=1$ . وللحصول على متسلسلة الجيب لفورير نبحث عن المعاملات $b_n$ فنجد أن

$$b_n=2\int_0^1 e^{2x}\sin(n\pi x)dx=\frac{2n\pi}{4+n^2\pi^2}\left(1-e^2\cos(n\pi)\right)$$

وهكذا نجد أن متسلسلة الجيب لفورير للدالة المعطاة على الفترة $[0,1]$ هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi}{4+n^2\pi^2}\left(1-e^2\cos(n\pi)\right)\sin(n\pi x)$$

هذا، وتتقارب هذه المتسلسلة إلى الدالة المعطاة نفسها لكل $x$ ينتمي إلى الفترة المفتوحة $]0,1[$ ، بينما تتقارب إلى الصفر عند النقط الطرفية $x=0, x=1$ .



هنا نجد أن

$$a_0=\frac{2}{2L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx=\frac{3}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\cos(nx)dx=-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

إذن متسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة على الفترة $[0,\pi]$ هي

$$\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx)$$

وبما أنه في حالة ما كان $n$ عدد صحيح زوجي فإن $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$.

وبما أن $\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)=(-1)^n$، إذن فإن هذه المتسلسلة تتحول إلى

$$\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}\cos((2n-1)x)$$

وبما أن الدالة المعطاة متصلة، والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى موجودة على طول الفترة $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$، إذن فإن متسلسلة

جيب التمام لفورير تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها على نفس الفترة. بالنسبة للتقارب عند نقطة عدم الاتصال $x=\frac{\pi}{2}$ نجد أن

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} f(x)=2,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} f(x)=1$$

وبالتالي فإن

$$f_R'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{2-2}{\Delta x}=0$$

وأيضاً

$$f_L'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-\Delta x\right)-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} f(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{1-1}{-\Delta x}=0$$

وهكذا نجد أن متسلسلة جيب التمام لفورير التي حصلنا عليها للدالة المعطاة تتقارب عند نقطة عدم الاتصال $x=\frac{\pi}{2}$ إلى القيمة

$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(1+2)$ . بالنسبة لتقاربها عند النقط الطرفية $x=0, x=\pi$ ، نجد أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to \pi^-} f(x)=2$$

وبالتالي فإن

$$f_R{}'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\Delta x};$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

$$f_L{}'(\pi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\pi-\Delta x)-\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2-2}{-\Delta x}=0$$

وبالتالي فمتسلسلة جيب التمام للدالة المعطاة تتقارب إلى القيمة 1 عند النقطة الطرفية $x=0$ ، وتتقارب إلى القيمة 2 عند النقطة الطرفية $x=\pi$ . للحصول على متسلسلة الجيب نجد أن

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\sin(nx)dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)$$

وبالتالي فإن متسلسلة الجيب للدالة المعطاة على الفترة $[0,\pi]$ هي

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1-2(-1)^n\right]\sin(nx)$$

وبما أن الدالة المعطاة متصلة، والمشتقات الأولى اليمنى واليسرى موجودة على طول الفترة $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ ، إذن فإن متسلسلة الجيب لفورير تتقارب إلى الدالة المعطاة نفسها على نفس الفترة. بالنسبة للتقارب عند نقطة عدم الاتصال $x=\frac{\pi}{2}$ نجد أنها تتقارب إلى $\frac{3}{2}$. بالنسبة للنقطتين الطرفيتين $x=0, x=\pi$ فإن متسلسلة فورير تتقارب عندهما إلى الصفر.

*************************************************************