الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

المعادلات التفاضليّة

الجزء الأول

تأليف
الأستاذ الدكتور
حسن مصطفى العويضي
أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر
كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور
عبد الوهاب عباس رجب
أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر
كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتورة
سناء علي زارع
أستاذ الرياضيات المساعد
كلية التربية للبنات - الرياض

مكتبة الرشد
ناشرون

المحتويات

الباب الثالث : تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

الباب الرابع : المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

الباب الخامس : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

الباب السادس : معادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة

الباب السابع : طريقة المعاملات غير المعينة

الباب الثامن : طريقة تغيير البارامترات (الوسائط)

الباب التاسع : تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

الباب العاشر : تحويل لابلاس وتطبيقاته

الباب الحادى عشر : استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

ملحق

المقدمة

مازالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم فى فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها فى دراسة التحليل الرياضى وامتدت استخداماتها فى العلوم الاقتصادية والاجتماعية . وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها فى جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وفى هذا الكتاب عرضنا كيفية تكوين المعادلة التفاضلية وطرق حلها سواء كانت خطية متجانسة أو غير متجانسة من أى رتبة وذات معاملات ثابتة أو متغيرة ؛ هذا بالإضافة إلى حل المعادلات غير الخطية من الرتبة الأولى مع بعض التطبيقات المختلفة .

ثم أضفنا فى الباب العاشر تحويلات لابلاس وتطبيقاته وفى الباب الحادى عشر عرضنا كيفية حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات . كما زودنا الكتاب بمسائل كثيرة متنوعة لتنمى قدرة الطالب .

وقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقلل من البراهين النظرية والإكثار من الأمثلة دون الإخلال بالدقة العلمية حتى تكون المادة العلمية سهلى المأخذ عظيمة المنفعة .

الباب الأول

مفاهيم أساسية

الباب الأول

مفاهيم أساسية

١- مقدمة :

تعريف

المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوى بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع ولـيكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ...... y', y'', أى أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x , y مستقلان ، وكان $z(x, y)$ ، متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من $x, \; y$ جزئياً ، سميت المعادلة المشـتملة علـى المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ، معادلة تفاضلية جزئية ، وهى على الصورة :

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية :

$$y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x \qquad (1)$$

$$y' + xy = x^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x \qquad (3)$$

نلاحظ أن المعادلتين (2) ,(1) كلاً منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلـة تفاضلية جزئية .

تعريف :

رتبة المعادلة *Order* : هى رتبة أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة .

درجة المعادلــة *Degree* : هى درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة بشــرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .

مثال :

من مجموعة المعادلات التفاضلية السابقة نجد أن المعادلة *(1)* من الرتبة الثالثة والدرجــة الثانية بينما المعادلة *(2)* من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة *(3)* فهى تفاضلية جزئية (ليست محل دراستنا) وهى من الرتبة الثانية والدرجة الأولى .

مثال :

أوجد رتبة ودرجة المعادلة $y''=(5-2y')^{3/2}=0$.

الحـــــل :

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية ...... لماذا ؟

تعريف :

حل المعادلة التفاضلية *Solution of D.E.* : تســمى الدالـــة $y=y(x)$ حـــلاً للمعادلـــة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^n)=0$ إذا كانت :

١) قابلة للاشتقاق n مرة .

٢) تحقق المعادلة التفاضلية أى : $F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots, y^{(n)}(x))=0$

مثال :

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

الحـــل :

$y(x) = c \sin x,$ $\quad y'(x) = c \cos x,$ $\quad y''(x) = -c \sin x$

وعلى ذلك نجد أن :

$y''(x) + y(x) = -x \sin x + x \sin x = 0$

مثال :

أثبت أن $\ln y + \frac{x}{y} = c, \quad y > 0$ ……… (1) حيـث c ثابـت هـو حـل للمعادلـة

$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0$ ……………… (2) .

الحـــل :

بتفاضل طرفى $\ln y + \frac{x}{y} = c$ بالنسبة إلى x :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=0 \qquad y \neq 0$$

$$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0$$

أى أن المعادلة (١) حل للمعادلة (٢) .

٢- الحل العام والحل الخاص *General Solution and Particular Solution* :

الحّل العام لمعادل تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أى حب يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

مثال :

الحل العام للمعادلة $y''' - 5y' + 6y' = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x} \qquad y = 3 + 5e^{2x^2} \qquad y = 5 - 2e^{3x}$$

٣- تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت) :

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) = 0 \qquad (I)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجرى n من المشتقات للمعادلة (I) .

يكون لدينا $n+1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (I) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التى عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام $y = c \sin x$ ………………… (1)

<u>الحــــل :</u>

نفاضل مرة واحدة

$y' = c \cos x$ …………………… (2)

نحذف c من المعادلتين (2) , (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هى : $y' = y \cot x$.

<u>حـل آخـر :</u>

يمكن لحذف c من (2) , (1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y\cos x - y'\sin x = 0$$

$$\therefore \; y' = y \cot x$$

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ ………………………………………………………………(1)

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

<u>الحــــل :</u>

بتفاضل (1) مرتين :

$y' = 2c_1 e^{2x} + 3 c_2 e^{3x}$ …………………………………………………………… (2)

$y'' = 4 c_1 e^{2x} + 9 c_2 e^{3x}$ ……………………………………………………………(3)

لحذف c_1, c_2 :

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow y\,(18\text{-}12) - y(9\text{-}4) + y'(3\text{-}2) = 0$$

$$\therefore \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$$y = c_1 + c_2\,x + x^2$$

<u>الحـــل</u> :

نضع الحل العام على الصورة :

$$y - x^2 = c_1 + c_2\,x$$

ونفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1, c_2 فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هى :

$$\therefore\; y'' - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = 2$$

٤- الشروط الابتدائية والشروط الحدية

Initial Conditions and Boundary Conditions

فى بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التى يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية . وهذه الشروط هى التى تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التى تظهر فى الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال :

أوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التى تحقق الشرط $y(2) = 3$.

الحــل :

بتكامل المعادلة التفاضلية $y(x) = x2 + c$

بالتعويض فى الشرط $\therefore\ 3 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$

$\therefore$ الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

والحل يعنى هندسياً ، منحنى يمر بالنقطة $(2, 3)$.

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة ، وهذان الشرطان يأخذا صوراً مختلفة ومنها :

١- إذا أعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_o مثل :

$$y(x_o) = a \qquad , \qquad y'(x_o) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند xo ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية *Initial Value Problem* .

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_2) = y_2$, $y(x_1) = y_1$ كانت الشروط شروطاً حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية *Boundary Value Problem* .

ملحوظة : الصورة القياسية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فى الدالة المجهولة y هى $y' = f(x, y)$ والتى يمكن كتابتها على الصورة :

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

مثال :

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y'' = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$$

الحـــــل :

بإجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

الذى يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة .

حيث $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

بالتعويض فى الشروط الابتدائية :

$$y'(0) = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = c_2$$

ويكون حل المسألة المعطاة هو :

$$y = \frac{1}{6}x3 - x + 1$$

مثال :

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = 6x + 2$$

مع الشروط الحدية : $y(2) = 8$, $y(0) = 2$

الحــــــل :

بتكامل طرفى المعادلة مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على :

$y(0) = 2 \qquad \therefore \boxed{2 = B}$

$y(2) = 8 \qquad \therefore 8 = 8 + 4 + 2A + 2 \qquad \boxed{A = -3}$

ويكون الحل المطلوب هو :

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

٥- نظرية الوجود والوحدوية لحل المعادلة التفاضلية العادية (بدون برهان)

سوف نعرض للنظرية الأساسية لوجود ووحدوية حل المعادلة التفاضلية العادية .

نظرية :

نفرض المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \qquad \dots\dots (1)$$

ونفرض الشرط الابتدائى $y(x_o) = y_o \dots\dots (2)$

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المعرفة فى المنطقة المغلقة المحددة R:

$$R : |x-x_o| \le a \quad , \qquad |y-y_o| \le b$$

حيث a, b ثابتان ، تحقق :

١- الدالة $f(x, y)$ متصلة ومن ثم محدودة أى إذا وجد عدد موجب M فإن $|f(x,y)| \le M$.

٢- الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y ومحدودة أى أن $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$

حيث K عدد موجب .

فإن المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائى (2) فـى المنطقـة $|x-x_o| \le h$ ، حيث $h = \min\left(a, b/M\right)$.

مثال :

ابحث عن وجود حل وحيد للمسألة الابتدائية $y(0) = 0$; $y' = x^2 + y^2$.

الحـــــل :

حيث أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ دالة كثيرة حدود فى x, y .

إذن الحل بأى شروط ابتدائية يكون وحيداً .

نكون المستطيل R الذى مركزه $(0,0)$ أى :

$$R : |x| \le a \quad , \qquad |y| \le b$$ حيث $a, b > 0$

$$|f(x,y)| = |x^2+y^2| \le |x^2| + |y^2| = x^2+y^2 = M \quad , \quad h = \min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

أى أن h تعتمد على a, b ، فإذا كانت مثلاً $a = b = 1$ نجد أن $h = \min(a, \frac{1}{2})$ أى أن $h = \frac{1}{2}$ ، وبالتالى فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد فى الفترة $|x| \le \frac{1}{2}$ يحقق الشرط $y(0) = 0$.

ملحوظة : لبرهان هذه النظرية أنظر الجزء الثانى من الكتاب .

تمارين

١. حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية فى كل من :

1) $y''' - 3\,xy' + y = e^x + 1$

2) $t\,y'' + t\,y' + \cos\sqrt{y} = t^2 + 1$

3) $s^2\dfrac{d^2t}{ds^2} - s\dfrac{dt}{ds} + 3s = 0$

4) $2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^9 + y^3 - x = 0$

٢. ضع المعادلات التالية فى الصورة القياسية :

1) $x2\,y' + 3y = 0$

2) $x\,y' + \sin y + y = 3$

3) $\dfrac{x+y}{x-y}dx + 3dy = 0$

4) $dy - dx = 0$

٣. كون المعادلات التفاضلية العادية بحذف الثوابت a, b, c .

1) $y = a\,x^2 - bx + c$

2) $y = a\,e^{2x} + b\,e^x$

3) $y = a\sin 3x + b\cos 3x$

4) $\ln y = ax^2 + bx + c$

5) $y = A\,e^x + B\,e^{2x} + c\,e^{3x}$

6) $y = a\,e^x + b$

الباب الثانى

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

الفصل الثانى

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

أو

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

١- طريقة فصل المتغيرات ***Separation of Variables*** :

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة فى x فقط و $g(y)$ دالة فى y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

حيث C ثابت اختيارى ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختيارى على أى صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائى ، نستطيع حذف الثابت الاختيارى والحل الناتج يكون حلاً خاصاً .

مثال :

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذى يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y \, dx + (1 + e^x) \sin y \, dy = 0$$

الحـــــل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفى المعادلة المعطاة على $\cos y \, (1 + e^x)$ فنحصل على :

$$\therefore \frac{e^x}{1+e^x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\therefore \ln (1 + e^x) - \ln |\cos y| = \ln c$$

$$\therefore \ln \frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$1 + e^x = c \, |\cos y|$$

بالتعويض عن $x = 0, \;\; y = 0$

$$\therefore 1 + 1 = c \qquad \text{و} \qquad c = 2$$

ويكون الحل الخاص

$$1 + e^x = 2 \, |\cos y|$$

مثال :

أوجد معادلة المنحنيات التى تحقق المعادلة :

$$xy\,dy - \frac{1+y^2}{1+x^2}dx = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ثم أوجد حل المعادلة *(1)* التى تعطى شكلاً يمر بالنقطة *(1, -3)* .

الحــــــل :

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ، ليكن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+b_2}{1+x^2}$$

$$1 = A\,(1+x_2) + (B_1x + B_2)\,x$$

وبمساواة الحد المطلق فى الطرفين نحصل على : $A = 1$

وبمساواة معامل x^2 فى الطرفين نحصل على : $B_1 = -1$ $\qquad A + B = \Rightarrow$
0

وبمساواة معامل x فى الطرفين نحصل على : $B_2 = 0$

أى أن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = 0$$

وبالتكامل المباشر نحصل على :

$\frac{1}{2} \ln (1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln c$

أى أن :

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = k \qquad , \qquad c^2 = k$$

عند $y = -3$, $x = 1$ يكون : $\frac{(10)(2)}{1} = k \quad \Rightarrow \quad k = 20$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$(1+x^2)(1+y^2) = 20\, x^2$

$1 - 19\, x^2 + x^2 y^2 + y^2 = 0$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $y' + e^x y = e^x y^2$

الحـــــل :

نكتب المعادلة على الصورة $y' = e^x (y^2 - y)$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على : $e^x\, dx = \frac{1}{y(y-1)}\, dy$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن : $e^x\, dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right] dy$

ثم بالتكامل المباشر نحصل على : $- e^x = \ln |y-1| - \ln |y| + c$

وهو الحل العام ...

٢- المعادلة التفاضلية المتجانسة *Homogeneous Equation*

يقال أن المعادلة التفاضلية $M(x,t)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

متجانسة إذا كان كل من M , N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad , \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

$$1)\ f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة 2 .

$$2)\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}} \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن M , N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أى أن من الممكن $f(x,y) = f(x/y)$.

الخلاصة :

المعادلة التفاضلية $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ تكون متجانسة إذا كانت كل من M , N متجانسة من نفس الدرجة .

أى أن المعادلة على الصورة $y' = f(x/y)$ تكون معادلة متجانسة .

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $\frac{y}{x} = v$ أى $y = xv$ وبالتالى $dy = x\,dv + v\,dx$ ثم تتحول المعادلة إلى معادلة يمكن فصل متغيراتها ، ثم تحل كما سبق .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $(x^2 + y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$

الحـــــل :

من الواضح أن المعادلة متجانسة .

$\therefore$ نستخدم التعويض $y = vx$ $\Leftarrow$ $dy = vdx + xdv$

$$\therefore\ (x^2+v^2x^2)\,dx - 2x^2v\,(vdx + xdv) = 0$$

$\therefore$ بالقسمة على x^2 نحصل على :

$$(1+v^2)\,dx - 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

أى أن $\therefore\ [1+v^2-2v^2]\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

أى $\therefore\ (1-v2)\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

وبفضل المتغيرات نحصل على $\frac{1}{x}\,dx - \frac{2v}{1-v^2} = 0$

$\therefore$ بالتكامل المباشر $\ln x + \ln(1-v^2) = \ln c$

حيث أن : $v = y/x$

$\therefore x\,[1 - \frac{y^2}{x^2}\,] = c$ $\qquad\qquad$ $x^2 - y^2 = cx$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال :

أوجد الصورة العامة للمعادلة : $y' = f(\frac{y}{x})$

الحـــــل :

حيث أن المعادلة متجانسة ، نضع $v = (\frac{y}{x}) \Leftarrow y = vx$

$\therefore y` = v + xv`$

$\therefore\ v + x\,v` = f(v) \quad )\ xv` = f(v) - v$

أى أن $x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

$\therefore\ \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$

أى أن الحل العام $\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln cx$

حيث $v = {}^{y}\!/\!_{x}$

مثال :

استخدم النتيجة السابقة فى حل المعادلة : $2x^2y` - y(2x+y) = 0$

الحــــل :

المعادلة متجانسة .... لماذا ؟

$$\therefore\ y' = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

بوضع $y/x = v$

$$\therefore\ f(v) = v + \frac{1}{2}v^2 \quad \Rightarrow \quad f(v) - v = \tfrac{1}{2}v^2$$

$\therefore$ حل المعادلة

$$\int \frac{dv}{\tfrac{1}{2}v^2} = \ln c\,x$$

$$\therefore\ \frac{-2}{v} = \ln c\,x$$

أى أن :

$$\frac{-2x}{y} = \ln c\,x$$

وهو الحل العام .

ولايجاد الحل الخاص نستخدم التعويض $y(e) = e$

$$\frac{-2e}{e} = \ln c\,e \quad \Rightarrow \quad -2 = \ln c + 1$$

$$\ln c = -3 \quad \Rightarrow \quad c = e^{-3}$$

$\therefore$ الحل الخاص

$$\frac{-2x}{y} = -3 + \ln x$$

أو

$$2x + y\ln x = 3y$$

معادلات تفاضلية عادية تؤول إلى معادلات متجانسة :

تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \qquad (1)$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت :

إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية *(1)* تؤول إلى المعادلة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1y}{a_2x+b_2y} \qquad (2)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة حيث أن كل من دالتى البسط والمقام متجانسة من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة *(2)* كما فى البند السابق .

لحل المعادلة التفاضلية العادية *(1)* فإننا نبحث فيما إذا كان الخطان المستقيمان

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

يتقاطعان أم لا يتقاطعان .

ولذلك سنناقش الحالتين كل على حدة .

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان متقاطعان :

يتقاطع المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad or \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

بافتراض أن نقطة تقاطع المستقيمان هى (h, k) فأننا نستخدم التعويض

$$y = v + k \qquad , \qquad x = u + h$$

حيث h, k ثوابت وعلى ذلك فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

وبالتعويض فى المعادلة (1) فإننا نحصل على :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \qquad (4)$$

وحيث أن (h, k) نقطة تقاطع المستقيمان (3) ، أى أنها تقع على كل منهما وعليه فإن :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وعلى هذا فإن المعادلة التفاضلية (4) تأخذ الصورة :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \qquad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى المتغيرين u, v ويمكن حلها كما سبق وذلك باستخدام التعويض $v = zu$ فتتحول المعادلة التفاضلية (5) إلى معادلة تفاضلية تحل بفصل المتغيرات ثم نستخدم التعويض $z = \frac{v}{u}$ ثم نعوض بعد ذلك عن كل من u, v حيث $u = x - h, \ v = y - k$ فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية (1) .

والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحلولة .

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية : $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x+y-2}$

<u>الحـــــل :</u>

واضح أن المستقيمان

$$2x + y - 3 = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

متقاطعان وبحل هاتين المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(1,1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

ومنها نجد أن $\frac{dv}{du}=\frac{dy}{dx}$ وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(u+1)+(v+1)-3}{u+1+v+1-2}$$
$$=\frac{2u+v}{u+v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v = uz$ ومنها :

$$\frac{dv}{du}=v\frac{dz}{du}+z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{2u+uz}{u+uz} \quad \Rightarrow \quad u\frac{dz}{du}+z=\frac{2+z}{1+z}$$

إذن :

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2+z}{1+z}$$
$$=\frac{2+z-z+z^2}{1+z}=\frac{2-z^2}{1+z}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1+z}{2-z^2}dz=\frac{du}{u} \qquad (5)$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{1+z}{2-z^2}\,dz=\int\frac{du}{u}$$
$$\Rightarrow\ \int\frac{dz}{2-Z^2}+\int\frac{z}{2-z^2}\,dz=\ln|u|+c_1$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

بالنسبة للتكامل $\int\frac{z\,dz}{2-z^2}$ نجد أن :

$$\int\frac{z\,dz}{2-z^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right|+c_2$$

وبالنسبة للتكامل $\int\frac{dz}{2-z^2}$ باستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\frac{1}{2-z^2}=\frac{1}{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}-z)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}-z}+\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}+z}$$

ومنها :

$$\int \frac{dz}{2-z^2} = \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z}$$

$$= \left(-\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}+z\right| + c_3$$

مما سبق نجد أن الحل العام للمعادلة *(5)* هو :

$$\left(-\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}+z\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right| = \ln|u| + c$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل العام هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\frac{u}{v}}{\sqrt{2}-\frac{v}{u}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-\frac{v^2}{u^2}\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $u=x-1,\ v=y-1$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}(x-1)+y-1}{\sqrt{2}(x-1)-y+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2(x-1)^2-(y-1)^2}{(y-1)^2}\right| = \ln|x-1| + c$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

<u>الحـــــل :</u>

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 3 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

متقاطعان ، وبحل المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(2, 1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 2 \qquad , \qquad y = v - 1$$

ومنها $\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$ وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2 + v + 1 - 3}{u + 2 - v - 1 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v = uz$.

ومنها :

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{u + uz}{u - uz} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$\Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1 + z}{1 - z} - z = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z} = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1 - z}{1 + z^2}dz = \frac{du}{u}$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{dz}{1 + z^2} - \int\frac{z\,dz}{1 + z^2} = \int\frac{du}{u} + c$$

حيث c ثبات اختيارى ومنها :

$$\tan^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + z^2\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل هو :

$$\tan^{-1}\frac{v}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $u = x - 2 \quad , \quad v = y - 1$:

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\tan^{-1}\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right| = \ln|x-2| + c$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإننا نفترض أن المستقيمان *(3)* متوازيان فإن شرط التوازى هو :

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض :

$$z = a_1 x + b_1 y \qquad or \qquad z = a_2 x + b_2 y$$

أيهما أكثر سهولة فى هذه الحالة بعد التعويض تتحول المعادلة التفاضلية العادية *(1)* إلى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل المتغيرات والذى سنوضحه فى الأمثلة المحلولة الآتية :

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 5}{x + y + 1}$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 5 = 0$$
$$x + y + 1 = 0$$

متوازيين . نستخدم التعويض :

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-5}{z+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-5}{z+1} + 1 = \frac{2z-4}{z+1}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int \frac{z+1}{2z-4} dz = \int dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} z + \frac{3}{2} \ln|z-2| = x + c$$

ولكن $z = x+y$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2} \ln|x = y - 2| = x + c$$

حيث c ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان

$$2x + y - 1 = 0$$

$$4x + 2y + 5 = 0$$

متوازيان ، نستخدم التعويض :

$$z = 2x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z-1}{2z+5}+2=\frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int\frac{2z+5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+c$$

ولكن $z=2x+y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+c$$

حيث c ثابت اختيارى .

٣- المعادلات التفاضلية التامة *Exact Differential Equations*

تعريف : التفاضلة التامة :

التفاضلة التامة للدالة $f(x,y)$ تكون على الصورة :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

وإذا كانت مساوية الصفر فإن :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ، ونلاحظ أن :

$df(x, y) = 0$ أى أن حلها يكون $f(x, y) = c$

حيث c مقدار ثابت .

فإذا كان لدينا المعادلة التفاضلية .

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

فإنها تكون تامة بالمقارنة بالمعادلة (1) التامة إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad (3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad (4)$$

السؤال الآن ما الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة (2) تامة ؟

بتفاضل (3) جزئياً بالنسبة إلى y وتفاضل (4) جزئياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومع اعتبار أن المشتقات الجزئية للدالتين N, M متصلة فإن الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة (2) تامة هو :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ولحل المعادلة التامة (2) نفترض دالة مَا $f(x, y)$ تحقق :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

فيكون حلها $f(x, y) = c$ حيث c ثابت .

وتحقق

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \;............(3), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \;............(4)$$

بإجراء التكامل على المعادلة *(3)* بالنسبة إلى x .

$$\therefore f(x,y)=\int^{x} M(x,y)dx+\varphi(y) \qquad (5)$$

حيث نلاحظ أن $\varphi(y)$ مقدار ثابت بالنسبة إلى x .

ثم بتفاضل طرفى *(5)* جزئياً بالنسبة إلى y واستخدام المعادلة *(4)* ينتج أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx+\varphi'(y)=N$$

أى أن

$$\varphi'(y)=N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx$$

سوف نلاحظ أن الطرف الأيمن فى المعادلة الأخيرة دائماً دالة فى y فقط ... (لماذا) ؟

وبتكامل طرفى المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y ، نستنتج شكل الدالة $\varphi`(y)$ حيث :

$$\varphi(y)=\int^{y} N(x,y)dy-\int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy$$

وبالتعويض فى المعادلة *(5)* نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة *(2)* ويكون على الصورة :

$$\int^{x} M(x,y)dx+\int^{y} N(x,y)dy-\int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy=C \qquad (6)$$

مثال :

أوجد حل للمعادلة :

$$(6x^2+4xy+y^2)\,dx+(2x^2+2xy-3y^2)\,dy=0$$

<u>الحــــــل :</u>

نفترض أن :
$$M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$$
$$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

نوجد
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$$

أى أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلى ذلك تكون المعادلة المعطاة تامة ، وبالتالى فإن :

$$\int^{x} M(x,y)dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2$$

$$\int^{y} N(x,y)dy = 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx = 2x^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy = 2x^2y + xy^2$$

يكون حل المعادلة (باستخدام القانون) هو :
$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2x^2y - xy^2 = C$$
أى أن :
$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = C$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة .

ملحوظة (١) : يمكن حل المعادلة التفاضلية التامة باستخدام القانون *(2)* :

$$\int^{x} M\,dx + \int^{y} N\,dy - \int^{x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N\,dy\right]dx = C$$

ويعطى نفس النتيجة المطلوبة .

ملحوظة (٢) : المثال الأخير يمكن حله باعتبار المعادلة تفاضلية متجانسة .

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2\ln 3x + \frac{3}{y}$$

أى أن المعادلة غير تامة .

لكن بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$

نجد أن المعادلة المعطاة تصبح على الصورة :

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2\ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

نفترض أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}$

أى بضرب طرفى المعادلة الأصلية فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة ، وهذا المقدار $\frac{1}{x}$ يسمى عامل التكامل *(integrating factor)* الذى يجعل المعادلة تامة .

٤- طريقة تعيين عامل التكامل $I(x,y)$:

إذا كانت المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ غير تامة بضرب طرفى المعادلة فى $I(x,y)$ تصبح تامة .

أى أن المعادلة $I\,M\,dx + I\,N\,dy = 0$ تامة ، حيث I, M, N دوال فى x, y .

∴ يتحقق الشرط $\frac{\partial (IM)}{\partial y} = \frac{\partial (IN)}{\partial x}$

$$\therefore I\,M_y + I_y M = I\,N_x + I_x N$$

مع ملاحظة أن $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$I\left[M_y - N_x\right] = I_x N - I_y M \qquad (I)$$

الآن نفترض حالات خاصة لعامل التكامل $I(x,y)$

١) $I(x, y) = I(x)$:

أى أن I دالة فى x فقط .

$$I_x = \frac{d\mu}{dx} \qquad , \qquad I_y = 0$$

تصبح المعادلة (I) :

$$I\left[M_y - N_x\right] = N\,\frac{d\mu}{dx}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{dI}{I} = \frac{M_y - N_x}{N}dx$$

مع ملاحظة أن $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (دالة فى x فقط) وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\ln I = \int p(x)dx$$

أى أن $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ أو $I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$.

٢) $I(x, y) = I(y)$:

أى أن I دالة فى y فقط

$$I_y = \frac{dI}{dy} \qquad , \qquad I_x = 0$$

وبالتعويض فى (I) نستنتج أن :

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy}$$

حيث نلاحظ أن $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (دالة فى y فقط) .

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3+2y)dx+(2x\ln 3x+\frac{3x}{y})dy=0$$

الحـــــل :

نفترض $N=2x\ln 3x+\frac{3x}{y}$, $M=3x^3+2y$ فيكون :

$$M_y=2 \quad , \quad N_x=2+2\ln 3x+\frac{3}{y}$$

أى أن :

$$M_y-N_x=-(2\ln 3x+\frac{3}{y})\neq 0$$

∴ المعادلة غير تامة

لكن :

$$\frac{M_y-N_x}{N}=-\frac{(2\ln 3x+3/y)}{x(2\ln 3x+3/y)}=-\frac{1}{x}=p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$(3x^2+\frac{2y}{x})dx+(2\ln 3x+\frac{3}{y})dy=0$$

بافتراض أن :

$$M=3x^2+\frac{2y}{x} \quad , \quad N=2\ln 3x+\frac{3}{y}$$

$$\int^{x} M\,dx = x^3 + 2y\ln x$$

$$\int^{y} N\,dy = 2y\ln 3x + 3\ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx = 2\ln x \quad \Rightarrow \quad \int^{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx\right)dy = 2y\ln x$$

ويكون حل المعادلة هو :
$$x^3 + 2y\ln x + 2y\ln 3x + 3\ln y - 2y\ln x = C$$

أى أن
$$x^3 + 2y\ln 3x + 3\ln y = C$$

حيث C ثابت اختيارى .

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y(2x+y)\,dx + (3x^2 + 4xy - y)\,dy = 0$$

<u>الحـــــل :</u>

ليكن :
$$M = y(2x+y) \quad , \quad N = 3x^2 + 4xt - y$$

فإن
$$M_y = 2x + 2y \quad , \quad N_x = 6x + 4y$$

وبالتالى :
$$M_y - N_x = -4x - 2y = -2(2x+y) \neq 0$$

أى أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2(2x+y)}{-y(2x+y)} = \frac{2}{y}$$ دالة فى y فقط فيكون :

$$I = I(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

بضرب طرفى المعادلة فى $y2$ تصبح تامة على الصورة :

$$y^3 (2x+y)\, dx + y^2(3x^2 + 4xy - y)\, dy = 0$$

ونفترض أن $M = 2xy^3 + y^4 \quad , \quad N = 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3$

وعلى ذلك فإن

$$\int^x M\, dx = x^2y^3 + xy^4 + xy^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\int^x M\, dx = 3x^2y^2 + 4xy^3$$

$$\therefore \int^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int^x M\, dx \right) dy = x^2y^3 + xy^4$$

$$\int^y N\, dy = x^2y^3 = xy^4 - \frac{1}{4}y^4$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^2y^3 + xy^4 + x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 - x^2y^3 - xy^4 = C$$

أى أن : $$x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 = C$$

٥- المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته فى المعادلة مـــن الدرجـــة الأولى .

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx}+P'(x)y=Q(x) \qquad (I)$$

وتسمى خطية فى y .

والمعادلة من الرتبة الأولى خطية فى x على الصورة :

$$\frac{dx}{dy}+\alpha(y)x=\beta(y)$$

ولإيجاد حل للمعادلة (I) ، نضعها على الصورة :

$$[P(x)y-Q(x)]\,dx+dy=0$$

ونحاول أن نجعلها تامة ، فنفترض :

$$M=P(x)\,y-Q(x) \quad , \qquad N=1$$

$$M_y=P(x) \qquad N_x=0$$

$$M_y-N_x=P(x)\neq 0$$

أى أن المعادلة غير تامة ، ونجد أن :

$$I=I(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}=e^{\int P(x)dx}$$

وهو عامل التكامل (عامل المكاملة) .

بضرب طرفى المعادلة فى $I(x)$ تصبح تامة .

$$e^{\int P(x)\,dx} P(x)y\,dx + e^{\int P(x)\,dx}\,dy = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

أى أن :

$$d[e^{\int P(x)\,dx}\,y] = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

وبتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة على الصورة :

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$$

حيث c ثابت التكامل .

ويمكن تبسيط شكل الحل كما يلى :

$$I(x)y = \int I(x)\ Q(x) + C$$

حيث :

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

ويمكن استنتاج صورة حل المعادلة الخطية

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y)$$

ويكون حلها هو :

$$I(y)\,x = \int I(y)\,\beta(y)\,dy + K$$

حيث K ثابت التكامل ، وعامل التكامل هو :

$$I(y) = e^{\int \alpha(y)dy}$$

<u>**مثال :**</u>

أوجد حل المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

<u>**الحـــــل :**</u>

المعادلة خطية فى y .

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

أى أن $\qquad (2) \qquad \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} y = x^2$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$P(x) = \frac{2}{x} \qquad , \qquad Q(x) = x^2$$

نوجد

$$1) \quad \int P(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = \ln x^2$$

$$\therefore \quad I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$2) \quad \int \mu(x)\,Q(x)\,dx = \int x^2 x^2 dx = \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو :

$$I\,y = \int I\,Q\,dx + C$$

أى أن : $\quad x^2 y = \dfrac{1}{5} x^5 + c$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(y + y^2)\,dx - (y^2 + 2xy + x)\,dy = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذى يحقق أن $y=1$ عندما $x=3$.

الحـــــل :

المعادلة خطية فى x .... (لماذا ؟)

نضع المعادلة على الصورة : $\quad \dfrac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y) \qquad (1)$

بقسمة طرفى المعادلة على $(y+y2)\ dy$ نحصل على :

أى أن
$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}\ x=\frac{y^2}{y+y^2} \qquad (2)$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$\alpha(y)=-\frac{2y+1}{y^2+y} \qquad , \qquad \beta(y)=\frac{y^2}{y^2+y}=\frac{y}{y+1}$$

$$I(y)=e^{-\int\frac{2y+1}{y^2+y}dy}=e^{-\ln(y^2+y)}=e^{\ln\left(\frac{1}{y^2+y}\right)}=\frac{1}{y^2+y}$$

$$\int I(y)\,\beta(y)\,dy=\int\frac{1}{y^2+y}\cdot\frac{y}{y+1}\,dy=\int\frac{1}{(y+1)^2}\,dy=-\frac{1}{y^2+1}$$

ويكون حل المعادلة هو
$$I(y)\,x=\int I(y)\,\beta(y)\,dy+C$$

أى أن
$$\frac{1}{y^2+y}\,x=-\frac{1}{y+1}+C$$

$$\therefore\ x=-y+C\,(y^2+y)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ولحساب الحل الخاص ، نضع $y=1$, $x=3$ فنحصل على :

$$3=-1+2C \qquad \Rightarrow \qquad C=2$$

ويكون الحل الخاص هو :
$$x=-y+2\,(y^2+y)$$

أو
$$2y^2+y=x$$

ملحوظة :

١- عند حل المعادلة الخطية وتعيين المعامل المكامل I يجب أن تكون المعادلة على نفس الصورة المعروفة أى معامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أو معامل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ هو الواحد الصحيح .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = {y^2}\big/{(1-3xy)}$$

الحـــــل :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x}{y}$$

أى أن

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$$

ويكون المعامل المكامل هو :

$$I = e^{\int \frac{3}{4} dy} = \ln y^3 = y^3$$

ويكون الحل العام هو :

$$Ix = \int I\,Q\,dy + C$$

$$y^3 x = \int \frac{1}{y^2} y^3\,dy + C = \frac{y^2}{2} + C$$

حيث C ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=4y+3$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة المعطاة خطية فى x حيث :

$$P(y)=\frac{2}{y} \qquad , \qquad Q(y)=4y+3$$

المعامل المكامل I هو :

$$I=e^{2\int\frac{1}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$I\,x \;=\int I\,Q\,dy+C$$

$$y^2x=\int y2(4y=3)dy+C$$

$$=y^4+y^3+C$$

أى أن الحل العام هو :

$$y\,x=y^2+y+\frac{C}{y^2}$$

٦- معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية :

١- معادلة برنوللى *Bernoulli's Equation*

تكون المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$$

حيث $n \neq 0, 1$ تسمى معادلة برنوللى ، n عدد حقيقى .

وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلى معادلة خطية :

١- بالقسمة على y^n نجد أن :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x) \qquad (1)$$

٢- نفترض أن $z = y^{-n+1}$ ثم باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

٣- بضرب طرفى (1) فى $(-n+1)$ والتعويض عن y بدلالة z نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,P(x)\,z=(-n+1)\,Q(x)$$

٤- نضع

$$(-n+1)\,Q(x)=q(x) \quad , \quad (-n+1)\,P(x)=p(x)$$

تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{dz}{dx}+p(x)\,z=q(x)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية فى z .

٥- حل المعادلة هو :

$$I(x)z=\int I(x)q(x)\,dx+C$$

٦- ثم باستبدال $z = y^{-n+1}$ ، نحصل على الحل المطلوب :

$$I(x)\, y^{-n+1} = \int I(x) \quad q(x)\ dx + C$$

حيث

$$I(x) = e^{\int p(x) dx}$$

<u>مثال :</u>

أوجد حل المعادلة :

$$dy + 2xy\, dx = xe^{-x^2} y^3\, dx$$

<u>الحـــــل :</u>

يمكن وضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + 2\,x\,y = xe^{-x^2} y^3$$

وهى معادلة برنوللى

.: بالضرب فى y^{-3} نحصل على :

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2} \qquad (1)$$

بوضع $z = y^{-2}$ نجد أن :

$$-2y^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

بضرب المعادلة (1) فى -2 والتعويض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = 2x\,e^{-x^2}$$

وهى معادلة خطية على الصورة

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x)$$

أى أن : $p(x)=-4x \qquad , \qquad q(x)=-2xe^{-x^2}$

$$\int p(x)dx=-2x^2$$

$$I(x)=e^{-2x^2}$$

فيكون $\int I(x)\,q(x)\,dx=\int e^{-2x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right)dx$

$$=-2\int xe^{-3x^2}dx=\frac{1}{3}e^{-3x^2}$$

.: حل المعادلة على الصورة

$$I(x)z=\int \mu(x)\,q(x)\,dx+c$$

أى أن $e^{-2x^2}z=\frac{1}{3}e^{-3x^2}+c$

وحيث أن $z=y^{-2}$ فيكون :

$$e^{-2x^2}y^{-2}=\frac{1}{3}e^{-3x^2}+c$$

أو $e^{x^2}y^{-2}=\frac{1}{3}+c\,e^{3x^2}$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{1}{x}\right)y=-2e^x y^2$$

الحـــــل :

المعادلة المعطاة فى صورة معادلة برنوللى وبالضرب فى y^2 نحصل على :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{1}{x}\right)y^{-1}=-2e^x$$

نضع $y^{-1} = z$ فيكون $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

بضرب المعادلة فى (-1) وبالتعويض عن y بدلالة z تصبح المعادلة على الصورة .

$$\frac{dz}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)z = 2e^{x}$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x)$$

حيث $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \qquad , \qquad q(x) = 2e^{x}$

فيكون :

$$\int p(x)\,dx = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + \ln x$$

$$I(x) = e^{x+\ln x} = x\,e^{x}$$

$$\int I(x)\,q(x)\,dx = \int x\,e^{x}\,2\,e^{x}dx$$

$$= \int 2\,x\,e^{2x}\,dx$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = 2x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = 2dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int I\,q\,dx = x\,e^{2x} - \int e^{2x}dx = x\,e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

حل المعادلة $I\,z = \int I\,q\,dx + c$

أى أن $x\,e^{2x}z = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

حيث أن $z \neq y^{-1}$

.: الحل العام $\dfrac{x}{y}e^{x} = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

٢- معادلة ريكاتى Ricatti's Equation

تأخذ معادلة ريكاتى الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (1)$$

حيث P, Q, R دوال فى x فقط .

المعادلة (1) تصبح خطية عندما $P(x) = 0$

كذلك المعادلة (1) تصبح برنوللى عندما $R(x) = 0$

وعلى ذلك فإن معادلة ريكاتى أعم من معادلة برنوللى والمعادلة الخطية ، ولايجاد حل معادلة ريكاتى لابد من أن نعلم حلاً خاصاً وليكن y_1 ، حيث $y_1 = y_1(x)$.

ويكون الحل العام لمعادلة ريكاتى باستخدام التعويض :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة :

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = P(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = P(x)\,y_1^2 + 2P(x)y_1\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)y_1 + Q(x)\frac{1}{z} + R(x)$$

وحيث أن y_1 حلاً خاصاً للمعادلة فإن :

وبالضرب فى z^2 نحصل على :

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = 2P(x)y_1\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)\frac{1}{z}$$

وبالضرب فى z^2 نحصل على :

$$\frac{dz}{dx} + \left(2P(x)y_1 + Q(x)\right)z = -P(x)$$

وهى معادلة خطية فى z تحل كما سبق .

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$2x^2\frac{dy}{dx} = (x-1)(y^2-x^2) + 2xy$$

حيث $y = x$ حل خاص لها .

<u>الحـــــل :</u>

بالتحقيق نجد أن $y = x$ حلاً للمعادلة :

.: نفترض أن :

$$y = x + \frac{1}{z}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

حيث أن المعادلة معادلة ريكاتى

.: بالتعويض فى المعادلة ، نجد أن :

$$2x^2\left(1-z^{-2}\frac{dz}{dx}\right)=(x-1)\left[(x+\frac{1}{z})^2-x^2\right]+2x(x+\frac{1}{z})$$

$$2x^2-2\frac{x^2}{z^2}\frac{dz}{dx}=(x-1)\left(\frac{2x}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+2x^2+\frac{2x}{z}$$

$$\therefore -2\frac{x^2}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2x^2}{z}+\frac{x}{z^2}-\frac{2x}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{2x}{z}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=-z-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}+z=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

حيث $p(x)=1 \quad , \quad q(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$

$$\int p(x)\,dx=x \qquad \Rightarrow \qquad I(x)=e^x$$

$$\int I(x)q(x)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x}\right)dx$$

نوجد $\int\frac{e^x}{x}dx$ بالتجزئ .

$$u=\frac{1}{x} \qquad dv=e^x\,dx$$

$$du=-\frac{1}{x^2}dx \qquad v=e^x$$

$$\int I(x)\,q(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{e^x}{x^2}dx-\frac{e^x}{x}-\int\frac{e^x}{x^2}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{e^x}{x}$$

أى أن حل المعادلة على الصورة :

$$I(x)z = \int I(x)\, q(x)\, dx + c$$

$$\therefore\ e^x z = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x} + c$$

$$\because\ y = x + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = y - x \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - x}$$

أى أن الحل العام للمعادلة يكون :

$$\frac{e^x}{y - x} = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x} + c$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + xy - 3$$

حيث $y = \frac{1}{x}$ حل خاص لها .

<u>الحـــــل :</u>

بوضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{3}{x^2}$$

وهى معادلة ريكاتى :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$$

التى تتحول إلى المعادلة الخطية :

$$\frac{dz}{dx} + \left(xP(x)y_1 + Q(x)\right)z = -P(x)$$

حيث $y_1 = \frac{1}{x}$ $\quad Q(x) = \frac{1}{x}$ $\quad P(x) = 1$

أى أن

$$\frac{dz}{dx}+\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\right]z=-1$$

حيث $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=-1$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx}+P(x)z=q(x)$$

حيث :

$$p(x)=\frac{3}{x} \quad , \quad q(x)=-1$$

$$\int p(x)dx=\int\frac{3}{x}dx=\ln x^3$$

وبالتالى فإن :

$$I(x)=e^{\ln x^3}=x^3$$

وبذلك نحصل على :

$$\int I(x)q(x)dx=\int -x^3dx=-\frac{1}{4}x^4$$

أى أن حل المعادلة المعطاة هو :

$$x^3z=-\frac{1}{4}x^4+c$$

وحيث أن :

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{xy-1}{x} \qquad z=\frac{x}{xy-1}$$

.: الحل العام للمعادلة :

$$x^3\frac{x}{xy-1}=-\frac{1}{4}x^4+c$$

أو

$$xy-1=\frac{4x^4}{4c-x^4} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{4x^3}{4c-x^4}+\frac{1}{x}$$

٣- المعادلات التفاضلية على الصورة :

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+P(x)\,f(y)=Q(x) \qquad (1)$$

حيث $P(x),\ \ Q(x)$ دوال فى المتغير x و $f(y)$ دالة فى المتغير y فقط و $f'(y)$ هـــو تفاضـــل الدالة $f(y)$ بالنسبة إلى y .

لحل هذا النوع من المعادلات فإننا نستخدم التعويض

$$z=f(y) \qquad (2)$$

ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dz}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية (1) نحصل على :

$$\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x) \qquad (3)$$

المعادلة (3) معادلة تفاضلية خطية فى z يمكن حلها بإيجاد المعامل المكامل ثـــم نســـتخدم التعويض (2) لايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$e^{y}\frac{dy}{dx}+e^{x}=x$$

الحـــــل :

نأخذ التعويض $z=e^{y}$ ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة نجد أن

$$\frac{dz}{dx} + z = x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية وحلها هو :

$$z = x\,e^x - e^x + c$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$e^y = e^x\,(x-1) + c$$

حيث c ثابت اختيارى .

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$3x(1-x^2)y^2\,\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y^3 = a\,x^3$$

حيث a مقدار ثابت .

<u>الحـــــل :</u>

بقسمة طرفى المعادلة على $x(1-x^2)$ نحصل على :

$$3y^2\,\frac{dy}{dx} + \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}\,y^3 = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

باستخدام التعويض $z = y^3$ ومنها $\frac{dz}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$

وبالتعويض فى المعادلة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2x^2-1}{x(1-x)^2}\,z = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية .

ويكون المعامل المكامل هو :

$$I(x) = e^{\int\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}dx} = e^{\ln\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

وبذلك يكون الحل هو :

$$\frac{z}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{ax^2}{1-x^2}\, dx + c$$

$$= a\int \frac{x}{(1-x2)^{\frac{3}{2}}}\, dx + c$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

ولكن $z = y^3$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\frac{y^3}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

حيث c ثابت اختيارى .

تمارين

٣) فصل المتغيرات :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائى :

1) $(x-1)dy+(y-2)dx=0$

2) $2x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+2x^2\right)dy=0$

3) $y'-2y=y^2 \quad ; \ y=3 \quad ,x=0$

4) $t\ \dfrac{dr}{dt}=-2r \qquad ; \ r\left(-\tfrac{1}{3}\right)=9$

5) $x^3\,dy+xydx=x^2dy+2ydx \qquad ; \quad y(2)=e$

6) $3e^x \tan y+\left(1+e^x\right)\sec^2 y \quad y'=0 \qquad ; \ y=\dfrac{\pi}{4} \ , \quad x=\ell n2$

7) $y'+2x\sqrt{1-y^2}\ =0$

8) $x^2\,e^{\ x3-y2}+yy'=0 \qquad ; \ y(0)=0$

9) $\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0 \qquad ; \ y(0)=1$

٤) المعادلات المتجانسة :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائي :

1) $(2x-3y)dx-(2y+3x)\,dy=0$

2) $ydx+(2x+3y)\,dy=0$

3) $xy^2dy-\left(x^3+y^3\right)dx=0$

4) $y'=\dfrac{4x+3y+2}{3x+2y+1}$

5) $y' = \dfrac{-2x+2y}{y-1}$

6) $y' = \dfrac{3y-7x+2}{7x-3y-3}$

7) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-5}$

8) $y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$

9) $y' = \dfrac{2x+2y+1}{x+y-1}$

10) $\left(x + y\sin\frac{y}{x}\right)dx - x\sin\dfrac{y}{x}\,dy = 0 \quad ; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

11) $y\left(x^2 + xy - 2y^2\right)dx + x\left(3y^2 - xy - x^2\right)dy = 0$

12) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

13) $y' = \dfrac{6x-3y+2}{2x-y-1}$

14) $y' = \dfrac{xy}{x^3 - y^2}$

15) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

16) $xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2} \quad ; \; y(1) = 0$

17) $y' = \dfrac{3x-2y+4}{2x+7y-1}$

٥) المعادلات التفاضلية التامة ومعادلات تؤول إلى التامة:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

1) $\left(3x^2 + 3xy^2\right)dx - \left(3y^2 - 2y - 3x^2y\right)dy = 0$

2) $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$

3) $y(x-1)^{-1}dx + \left[\ell n(2x-2) + \frac{1}{y}\right]dy = 0$

4) $2\frac{x}{y}dy + \left(2\ell n 5y + \frac{1}{x}\right)dx = 0$

5) $ex^2(dy + 2xydx) = 3x^2dx$

6) $y^3 \sin 2x\, dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$

7) $\frac{3y^2}{x^2+3x}dx + \left(2y\ell n\frac{5x}{x+3} + 3\sin y\right)dy = 0$

8) $(1-xy)dx - (x^2 - xy)dy = 0$

9) $xdy + \cos y(\sin y - 3x^2\cos y)\, dx = 0$

10) $2xydx - (3x^2 - y^2)dy = 0$

11) $(x2 + y2 + x)\, dx + xydy = 0 \quad ; \quad y(-1)=1$

12) $4xtdx + (4x^2 + 3t) = 0 \quad ; \quad x(1) = 0$

13) $r(t^2 + r^2 + 2t)dt + (t^2 + 3r^2)\, dr = 0$

14) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\, dx + (x^2y^4e^y + x^2y^2 + 3x)dy = 0$

٦) معادلات تفاضلية خطية ومعادلات تؤول إلى خطية :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3 - 3$

2) $\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}x = 2t$.

3) $x^2y' - 2xy = x^4 + 3 \quad ; y(1) = 2$

4) $ydx - 4xdy = y^6dy \quad ; x(1) = 4$

5) $t\,ds = (3t+1)s\,dt + t^3 e^{3t}\,dt$.

6) $xdy + ydx = 2(x - x^2 y)dx$

7) $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

8) $y' + \dfrac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$.

9) $\dfrac{dx}{dt} + 3t^2 x = x^2 t\, e^{t3}$

10) $3dy - ydx = 3y^3 e^{\frac{4x}{3}}\, dx$

11) $(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy \quad ; \; y(0) = 1$

12) $\dfrac{dx}{dy} - 2xy = y e^{-3y2}\left\{xe^{-y2} + 3(xe^{-y2})^2\right\}$ (استخدم التعويض $xe^{-y2} = Z$)

13) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ ($y = \dfrac{1}{x}$ حل خاص)

14) $x\dfrac{dy}{dx} = 2(x-y)^2 + (x-y) + x$ ($y = x$ حل خاص)

15) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy + x^2 y^2 = 4$ ($y = \dfrac{-2}{x}$ حل خاص)

16) $y' + 2ye^x + y^2 = e^{2x} + e^x$ ($y = e^x$ حل خاص)

تمارين عامة

أوجد الحل :

1) $xdx - y^2dy = 0$

2) $y' = y^2x^3$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{2y}$

4) $dy = 2t\left(y^2+9\right)dt$

5) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y}$; $y(0) = 1$

7) $y' = \dfrac{y+x}{x}$

8) $y' = \dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$

9) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

10) $\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0$; $y(1) = -2$

11) $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy - ydx = 0$

12) $2xydx + \left(1+x^2\right)dy = 0$; $y(1) = -5$

13) $\left(2y - xe^{xy}\right)dy - \left(2 + ye^{xy}\right)dx = 0$

14) $y^2dt + (2yt+1)dy = 0$; $y(1) = -2$

15) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^2(x-1)}{4x^3+6x^2t+2xt^2}$; $x(2) = 3$

16) $xy^2dx + x^2y(y+1)dy = 0$

17) $2e^{2t}dt + \frac{1+e^{2t}}{x}\,dx = 0$

18) $(\cos x \tan y + x\sin y)\,dy + (\sec y - \cos y - y\tan y \sin x)dx = 0$

19) $3x^2 ydx + (2x3 + 4y^2)\,dy = 0$

20) $y' + \frac{4}{x}y = \frac{1}{x^4}$

21) $y' + xy = xy^2$

22) $y' + \frac{3}{x}y = x^4\sqrt[3]{y}$

23) $y' + \frac{2}{x}y = 0$

24) $y' + xy = 6x\sqrt{y}$

25) $y' + \frac{2}{x}y = -x^9y^5 \quad ;\ y(-1) = 2$

26) $\frac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t \quad ; q(0) = 1$

27) $\frac{dx}{dt} + 3t^2x = x^2te^{t3}$

28) $\frac{dy}{dx} = \cos x - y\sin x + y^2$ حيث $y = sin\,x$ حل خاص

29) $y' = 2 + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\,y - \frac{1}{2}y$ حيث $y = x + \frac{1}{x}$ حل خاص

30) $x(1 - x^3)y^3 = x^2 + y - 2xy^2$ حيث $y = x^2$ حل خاص

31) $y' = 1 + y^2$ حيث $y = tan\,x$ حل خاص

الباب الثالث

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

الباب الثالث

تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

١. المسارات المتعامدة

تعريف :

إذا كان لدينا مجموعة من المنحيات (1) ..... $F(x,y,c) = 0$ فإن المنحنى (المنحنيات) الذى يقطع تلك المنحنيات على التعامد يسمى مساراً (مسارات) متعامداً ، حيث يصنع ذلك المسار مع كل منحنى من المجموعة (1) زاوية قائمة وللحصـول علـى معادلـة ذلـك المسار ، نتبع الخطوات الآتية:

١. نوجد مشتقة الطرفين للمعادلة (1) بالنسبة إلى x ، نحصل على المعادلة

$$G(x, y, y', C) = 0 \qquad (2)$$

٢. بحذف C من المعادلتين (2) ، (1) ، نحصل على

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

حيث تمثل $f(x,y)$ ميل مجموعة المنحيات (1).

٣. يكون ميل المسار العمودى $\frac{-1}{f(x,y)}$ ، وعلى ذلك فإن المعادلـة التفاضـلية للمسـار العمودى $y' = \frac{-1}{f(x,y)}$.

وذلك فى حالة الإحداثيات الكارتيزية.

٤. بحل المعادلة التفاضلية ، نحصل على معادلـــة المســـار العمـــودى علـــى الصـــورة

$$g(x, y, \alpha) = 0$$

حيث α ثابت اختيارى.

مثـــــال :

أوجد المسارات العمودية لمجوعة الدوائر $x^2 + y^2 - C^2$ حيث c بارامتر

الحـــــل :

بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة إلى x ، نحصل على

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = f = (x, y)$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية للمسار العمودى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

بفصل المغيرات نجد أن

$$\therefore \frac{1}{y}dyt = \frac{1}{x}dx$$

بالتكامل نحصل على

$$\therefore ln\, y = ln\, x + ln\, \alpha$$

$\therefore$ معادلة المسار العمودى هى $y = \alpha x$ حيث α ثابت

مثـــــال :

أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات

$$a x^2 + y^2 = 2 a c x \qquad (1)$$

حيث c بارامتر ، a ثابت

الحـــــل :

بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة إلى x .

$$\therefore 2 a x + 2yy' = 2a c \qquad (2)$$

بضرب طرفى (2) فى x

$$\therefore 2ax^2 + 2xyy' = 2acx \qquad (3)$$

من (3) ، (1) يمكن حذف c

$$\therefore 2ax^2 + 2xyy' = ax^2 + y^2$$

وعلى ذلك النحو نجد أن

$$y' = \frac{-ax^2 + y^2}{2xy}$$

نلاحظ أن المعادلة الناتجة تمثل ميل المماس لمجموعة المنحنيات.

وتكون المعادلة التفاضلية للمسارات العمودية على الصورة

$$y' = \frac{2xy}{ax^2 - y^2}$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة.

نفرض $y = vx$ أى أن $y' = v'x + v$

بالتعويض فى المعادلة

$$\therefore xv' + v = \frac{2v}{a-v^2}$$

$$\therefore xv' = \frac{2v - av + v^3}{a-v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(2-a)v + v^3)}{a-v^2}$$

أى أن

بفصل المتغيرات ، نجد أن

$$\frac{(a-v^2)}{(2-a)v+v^3)}dv = \frac{dv}{x} \qquad (1)$$

<u>أولا</u> : إذا كانت $a \neq 2$

باستخدام التحويل إلى الكسور الجزئية للطرف الأيسر للمعادلة

$$\frac{(a-v^2)}{v[(2-a)+v^2]} = \frac{A}{v} + \frac{Bv+c}{(2-a)+v^2}$$

$$\therefore a - v^2 = A[(2-a)+v^2] + [Bv+c]v$$

بمساواة الحد المطلق فى الطرفين نجد أن

$$a = A(2-a) \qquad \Rightarrow A = \frac{a}{2-a}$$

بمساواة معاملات v^2 فى الطرفين نجد أن

$$\therefore -1 = A + B$$

$$\therefore -1 = A + B$$

$$\therefore B = -1 - \frac{a}{2-a} \Rightarrow B = \frac{-2}{2-a}$$

بمساواة معاملات v فى الطرفين نجد أن $\therefore C = 0$

وعلى ذلك بتكامل طرفى (I) نحصل على

$$\therefore \frac{a}{2-a} \ln[(2-a)+v^2] = \ln kn$$

$$\therefore \frac{v^a}{(2-a)+v^2} = k^{2-a}\, x^{2-a}$$

نضع $k^{a-2} = c_1$ ، $v = \frac{y}{x}$ فنحصل على

$$\therefore c_1 \left(y/x\right)^a = x^{2-a}[(2-a) + \frac{y^2}{x^2}]$$

بضرب الطرفين فى x^a تكون معادلة المسار العمودى

$$c_1 y^a = (2-a)\, x^2 + y^2$$

<u>ثانيا</u> : إذا كانت $a = 2$

بالتعويض فى (I) نجد أن

$$\therefore \frac{2-v^2}{v^3}\, dv = \frac{dx}{x}$$

بالتكامل نحصل على

$$\therefore \frac{-1}{v^2} - \ln v = \ln kx$$

أى أن

$$\frac{-1}{v^2} = \ln\ kxv$$

بوضع $v = \frac{y}{x}$ فنجد أن

$$-\frac{x^2}{y^2} = \ln k\ y$$

وهى تمثل معادلة المسار العمودى فى حالة $a = 2$

<u>مثـــــال : (فى حالة الاحداثيات القطبية)</u>

أوجد مجموعة المنحنيات التى تقطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات

$r^2 = a^2 \cos(\theta)$ حيث a بارامیتر.

<u>الحـــــل :</u>

بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة إلى θ فإننا نجد أن

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -a^2 \sin(\theta)$$

وبحذف a بين المعادلتين نحصل على

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2} r \tan(\theta)$$

بوضع $(-r^2 \frac{dr}{d\theta})$ بدل من $(\frac{dr}{do})$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة تكون

$$2r^2 \frac{d\theta}{dr} = r \tan(\theta)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل يكون الحل العام هو

$$r = c \sin^2(\theta)$$

وهذه تمثل مجموعة المنحنيات التى تتقاطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات المعطاة.

٢- المسارات غير المتعامدة :

ليكن لدينا المعادلة

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

والتى تمثل عائلة المنحنيات المستوية ذات البارامیتر c. المنحنـــى الـــذى يقطـــع عائلـــة المنحنيات (1) بزاوية $a \neq 90°$ يسمى مسار غير عمودى لعائلة المنحنيات. (1) بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x و بحذف c بين المعادلة الناتجة والمعادلة (1) نحصل علـــى معادلة تفاضلية على الصورة

$$\frac{dy}{dx} f(x, y) \qquad (2)$$

خط تماس عائلة المنحيات (1) ميله يكون $f(x,y)$ عند النقطة (x,y) وبالتالى فإن زاوية ميله $\tan^{-1}(f(x,y))$ عند النقطة (x,y). ومن هذا فإن خط التماس للمسار المائل الـــذى يقطع المنحنيات بزاوية a سيكون له زاوية ميل $\tan^{-1}(f(x,y)) + a$ عند نفس النقطة (x,y) ومن هذا فإن ميل المسار المائل هو

$$\tan[\tan^{-1}(f(x,y)) + a] = \frac{f(x,y) + \tan a}{1 - f(x,y)\tan a}$$

ومن هذا تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات المائلة هى

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)+\tan a}{1-f(x,y)\tan a} \qquad (3)$$

بحل المعادلة التفاضلية *(3)* نحصل على معادلة المسارات الغير متعامدة للمعادلة *(1)* والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحلولة.

<u>مثـــال :</u>

أوجد المسارات بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على مجموعة الدوائر

$$x^2+y=c$$

<u>الحـــل :</u>

من المعادلة $x^2+y^2=c$ نجد أن $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ من هذه المعادلة يكون $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ ولكن $a=\frac{\pi}{4}$ وعليه فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{x}{y}+\tan(\frac{\pi}{4})}{1+\frac{x}{y}\tan(\frac{\pi}{4})}=\frac{y-x}{y+x}$$

أى أن المعادلة هى

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى حله هو

$$x^2+y^2=c_1\,e^{\left(-2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)}$$

وهذه تمثل عائلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ للمنحنيات المعطاة حيث c_1 ثابت إختيارى.

مثـــال :

أوجد المسارات التى تقطع المستقيمات $y = cx$ بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$

الحــل :

من المعادلة $y = cx$ نجد أن $y' = c$ وبحذف c من المعادلتين نحصــل علــى المعادلــة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

من هذه المعادلة يكون $f(x,y) = \frac{y}{x}$ ولكن $a = \frac{\pi}{4}$ فإن المعادلة التفاضــلية للمســارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{y} + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \frac{x}{y}\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{y+x}{x-y}$$

أى أن المعادلة هى $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى والحل العام لها هو

$$In(c_1^2\,(x^2+y^2)) - 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

وهى معادلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على المنحنيات المعطاة حيث c_1 ثابت إختيارى.

٣- مسائل النمو والاضمحلال

لترمز $N(t)$ لكمية المادة أو (مجموع السكان) التى إما أن تكون نامية أو مضـــمحلة ، إذا فرضنا أن dN/dt (هو معدل التغير الزمنى لهذه الكمية من المادة) تكون متناسبة مع كمية المادة الموجودة ، فإن $dN/dt = k\,N$ أو

$$\frac{dN}{dt} = kN = 0$$

حيث k ثابت التناسب.

بفرضنا أن $N(t)$ تكون دالة قابلة للاشتقاق وبالتالى فهى متصلة ودالة فى الزمن ، وهـــذا الافتراض غير صحيح في مسائل تعداد السكان ، حيث $N(t)$ هى دالة متقطعـــة وقيمهـــا أعداد صحيحة. وبالرغم من هذا فإن المعادلة *(1-)* مازالت تعطى تقريبا جيـــدا للقـــوانين الفيزيائية التى تحكم هذا النظام.

<u>مثـــــال :</u>

يتناسب معدل نمو البكتريا فى مزرعة جرثومية مع عدد العناصر الموجودة بها. لوحظ أنه بعد ساعة واحدة كان للبكتريا 1000 سلالة. وبعد أربع ساعات أصبحت 3000 ســـلالة. أوجد :

أ. تعبيرا عن عدد السلالات الموجودة تقريبا عند أى لحظة t.

ب. عدد السلالات التقريبية الموجودة أصلا.

<u>الحـــل :</u>

(أ) ليكن $N(t)$ عند عدد السلالات فى اللحظة t . فإن المعادلة

$$dN/dt - kN = 0 \qquad (1)$$

وهى معادلة خطية قابلة للفصل أى ذات متغيرات منفصلة وكون حلها هو

$$N(t) = ce^{kt} \qquad (2)$$

عندما $t = 1$ ، $N = 1000$ يكون $1000 = ce^{k}$. وعندما $t = 4$ ، $N = 3000$ يكون $3000 = ce^{4k}$ وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى كل من $c,\ k$ نحصل على : $K = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.366$ وبالتعويض عن قيمتى k, c فى (1) نحصل $c = 1000\ e^{-0.366} = 694,$ على $N(t) = 694e^{0.366t}$ كتعبير عن عدد السلالات الموجودة عند اللحظة t .

(ب) لمعرفة N عندما $t = 0$ فى المعادلة نحصل على

$$N(0) = 694\ e^{(0.366)(0)} = 694$$

<u>مثـــال :</u>

يتناسب معدل ازدياد تعداد سكان قطر معين مع عدد السكان الذين يعيشون فيه. إذا تضاعف عدد السكان بعد سنتين وأصبح 20.000 بعد ثلاث سنوات. أوجد عدد السكان الذين يعيشون فى القطر فى البداية.

<u>الحـــل :</u>

ليكن $N(t)$ عدد السكان الذين يعيشون فى القطر عند أى لحظة t. $N°$ عدد السكان فى البداية فى هذا القطر. من المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{dN}{dt} - KN = 0 \qquad \text{والتى حلها} \qquad (1) \qquad N(t) = ce^{kt}$$

عندما $t = 0$, $N = N°$ فإنه ينتج من (1) أن $N° = ce^{k(0)}$ ومنه $c = N°$. وعليه فإن : (2) $N = N°e^{kt}$. عندما $t = 2$, $N = 2N°$ ، بعد التعويض هذه القيمة فى (2) نحصل على

$N = N_0e^{0.347t}$ (3). وعندما $N=20.000, t = 3$ ، بتعويض هذه القيم فى (3) نحصل على :

$20.000 = N_0e^{(0.347)(3)} = N_0(2.832)$ (4) ومنها نحصل على $N_0 = 7062$.

٤- مسائل درجة الحرارة

ينص قانون نيوتن للتبريد والذى يطبق تماما فى التسخين على أن "معدل التغير الزمنى لدرجة حرارة جسم يتناسب مع الفرق فى درجتى حرارة الجسم والوسط المحيط به". لتكن T هى درجة حرارة الجسم و T_m درجة حرارة الوسط المحيط. فإن معدل التغير الزمنى حرارة الجسم تكون dt/dt ، ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد على الصورة

$$dT/dt = -k\,(T-T_m) \qquad (1)$$

أو الصورة

$$\frac{dT}{dt}+kT=KT_m \qquad (2)$$

حيث k هو ثابت التناسب الموجب. تكون الإشارة السالبة مطلوبة طالما اخترنا k موجبة فى قانون نيوتن لجعل dT/dt سالبة فى عملية التبريد عندما بكون T أكبر من T_m ، و موجبة فى عملية التسخين ، عندما تكون T اقل من T_m.

<u>مثـــال :</u>

وضع قضيب معدنى درجة حرارته $100\ °F$ فى حجرة درجة حرارتها ثابتة عند $0\ °F$. أصبحت درجة حرارة القضيب $50\ °F$ بعد عشرين دقيقة. أوجد :

أ. الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القضيب إلى $25\ °F$.

ب. درجة حرارة القضيب بعد عشر دقائق.

الحـــــل :

باستخدام المعادلة (2) مع $T_m = 0$ ، ويكون الوسط هنا هو الحجرة التى لها درجة حـــرارة ثابتة $0\ ^\circ F$.

وبالتالى يكون لدينا $\frac{dT}{dt} + kt = 0$ والتى يكون حلها $T = e^{-kt}$.

وحيث أن $T = 100$ عندما $t = 0$ (حرارة القضيب الابتدائية هى $100\ ^\circ F$) ، فينتج من (1) $100 = ce^{-k(0)}$ أو $c = 100$. بتعويض هذه القيمة فى (1) ، نحصل على :

$$T = 100e^{-kt} \qquad (2)$$

عنـــدما $t = 20$ تكـــون $T = 50$ ، وبالتـــالى مـــن (2) $50 = 100e^{-20k}$ ، ومنهـــا $k = \frac{-1}{20}\ln\frac{50}{100} = \frac{-1}{20}(-0.693) = 0.035$. وبتعويض هذه القيمة فى (2) نحصل علـــى درجة حرارة القضيب عند أى لحظة t ، أى

$$T = 100e^{-0.035\,t} \qquad (3)$$

أ. لإيجاد t عندما $T = 25$ بوضع $T = 25$ فـــى (3) يكـــون لـــدينا $25 = 100e^{-0.035t}$ أو $-0.035t = \ln\frac{1}{4}$ وبالحل نجد أن $t = 39.6\ min$.

ب. لإيجـــــاد T عندما $t = 10$. بوضع $t = 10$ فى (3) وبالحل بالنسبة الى T نجد أن :
$T = 100e^{(-0.035)(10)} = 100(0.705) = 70.5\ ^\circ F$

ملاحظة : يجب ملاحظة أن قانون نيوتن يكون متحققـــا للفـــروق الصـــغيرة لـــدرجات الحرارة ، وعلى ذلك فإن الحسابات السابقة تمثل فقط تقريبا أوليا للوضع الفيزيائى.

مثـــــال :

وضع جسم درجة حرارته $50°F$ بالخارج حيث درجة الحــرارة $100°F$ وكانــت درجــة حرارة الجسم بعد خمس دقائق هى $60°F$ ، أوجد :

أ. الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلى $75°F$.

ب. درجة حرارة الجسم بعد عشرين دقيقة.

الحــــل :

باستخدام المعادلة (2) مع $T_m = 100$ ، (الوسط المحيط بالخارج هو الهواء). وبالتالى يكون لدينا $\frac{dT}{dt} + kt = 100k$ وهى معادلة تفاضلية خطية حلها على الصورة:

$$T = e^{-kt} + 100. \qquad (1)$$

وحيث أن $T = 50$ أو $t = 0$ ، فينتج من (1) أن $50 = ce^{-k(0)} + 100$ أو $c = -50$. بتعويض هذه القيمة فى (1) ، نحصل على :

$$T = 50e^{-kt} + 100 \qquad (2)$$

عــندما $t = 5$ تكون $T = 60$ ، وبالتالى من (2) $60 = -50^{-5k} + 100$ ومنها $-40 = -50e^{-5k}$ أو $k = \frac{-1}{5}\ln\frac{40}{50} = \frac{-1}{5}(0.223) = (0.045)$.

وبتعويض هذه القيمة فى (2) نحصل على درجة حرارة الجسم عنــد أى لحظــة t علـــى الصورة :

$$.T = -50e^{-0.045} + 100 \qquad (3)$$

أ. لإيجاد t عندما $T = 75$ بوضع $T = 75$ فى (3) فيكون لدينا

$75 = -50e^{-0.045t}$ أو $\frac{1}{2}\ e^{-0.045t}$ وبالحل بالنسبة إلى t نجد أن $-0.045t = \ln\frac{1}{2}$

أو $t = 15.4\ min$.

ب. لإيجاد T عندما $t = 20$. بوضع $t = 20$ فى (3) وبالحل بالنسبة إلى T نجد أن :

$$T = -50e^{(-0.045)(20)} + 100 = -50(0.41) + 100 = 79.5^{\circ}$$

٥- مسائل الجسم الساقط

اعتبر جسما كتلته m ساقطا رأسيا متأثر فقط بالجاذبية الأرضية g ومقاومة الهواء التى تتناسب مع سرعة الجسم ، نفترض أن كلا من الجاذبية الأرضية والكتلة يبقيان ثابتان. وللمواءمة ، نختار الاتجاه الرأسى إلى أسفل هو الاتجاه الموجب.

قانون نيوتن الثانى للحركة

القوى المحصلة المؤثرة على جسم تساوى المعدل الزمنى لتغير كمية الحركة أو للكتلة الثابتة ،

$$F = m\frac{dv}{ddt} \qquad (3)$$

حيث F هى القوى المحصلة على الجسم و v هى سرعة الجسم ، كلاهما عند الزمن t.

فى المسألة التى لدينا توجد قوتان تؤثران على الجسم (1) قوة الجاذبية المعطاة بوزن الجسم W والتى تساوى mg و(2) قوة مقاومة الهواء معطاة بـ $-kv$ ، حيث $0 \geq k$ هو ثابت التناسب. والإشارة السالبة تكون مطلوبة لأن اتجاه هذه القوة عكس اتجاه السرعة التى

تؤثر رأسيا إلى أعلى فى الاتجاه السالب وتكون بالتالى القوى المحصلة F على الجسم هى $F = mg - kv$ بتعويض هذه النتيجة فى *(3)* نحصل على $mg - kv = m\dfrac{dv}{dt}$ أو

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \qquad (4)$$

كمعادلة الحركة للجسم. إذا أهملنا مقاومة الهواء أو كانت غير موجــودة ، فــإن $k = 0$ وعلى ذلك فإن المعادلة *(4)* تبسط إلى :

$$\frac{dv}{dt} = g \qquad (5)$$

السرعة النهائية v_l عندما $k > 0$ تعرف بالمعادلة:

$$v_1 = \frac{mg}{k} \qquad (6)$$

تحذير : تكون المعادلات *(4)* ,*(5)*, *(6)* متحققة فقط إذا تحققت الشروط المعطاة. لا تتحقق هذه المعادلات إذا كانت ، مثل ، مقاومة الهواء لا تتناسب مع السرعة مع مربع السرعة ، أو إذا أخذ الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب.

مثـــــال :

أسقط جسم كتلته *5* رطل من ارتفاع *100* قدم بسرعة صفرية ، وبفرض عــدم مقاومــة الهواء ، أوجد

أ. تعبيرا عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ب. موضع الجسم عند أى لحظة t ،

ج. الزمن اللازم لكى يصل الجسم إلى الأرض.

الحـــل :

أ. حيث أنه لا توجد مقاومة للهواء فإن المعادلة $(5-6)$ تؤول إلى $dv/dt = g$ إلى معادلة تفاضلية خطية ، أو فى الصورة التفاضلية وقابلة للفصل ويكون حلها هو $v = gt + c$.
عندما $v = 0, t = 0$ (سرعة الجسيم الابتدائية هى الصفر) ، فإن $0 = g(0) + c$, $c =$ 0. وبالتالى $v = gt$. وبفرض أن $g = 32ft/sec^2$ ، فإن:

$$v = 32t \qquad (1)$$

ب. لتكن السرعة هى المعدل الزمنى لتغير الإزاحة x. وبالتالى $v = dx/dt$ وعليه فـــإن المعادلة (1) تؤول إلى $32t$ dx/dt وهذه المعادلة التفاضلية خطيـــة وقابلـــة للفصـــل ويكـــون حلـــها:

$$x = 16t^2 + c_1 \qquad (2)$$

ولكن عندما $t = 0$ تكون $x = 0$. وبالتالى $0 = (16)(0)^2 + c_1$ أو $c_1 = 0$ وبتعويض هـــذه القيمة فى (2) ، نحصل على :

$$x = 16t^2 \qquad (3)$$

ج. لإيجاد t عندما $x = 100$ ، من (3) نحصل على $2=\sqrt{(100)(16)=2.5}$ sec.

مثـــال :

أسقطت كرة من الصلب تزن رطل من ارتفاع 3000 قدم من السكون.

وأثناء سقوطها فإنها تواجه مقاومة الهواء التى تساوى عددا $v/8$ (بالرطل) حيث هـــى سرعة الكرة (قدم لكل ثانية) . أوجد:

أ. السرعة النهائية للكرة .

ب. الزمن اللازم لوصول الكرة إلىالأرض.

الحـــل :

حيث موقع الآن عند $x = 3000\,ft$ ، $w = 2lb$ ، $K = \frac{1}{8}$.

بفــرض أن عجــلة الجاذبية g هى $32\ ft/sec^2$ ، فيكون لـــــدينا من الصيغة $w = mg$ ، أن $2 = m(32)$ ، أى أن كتلة الكرة هى $m = 1/6\ slug$

وتصبح معادلة (4) على الصورة $\frac{dv}{dt} + 2v = 32$

ويكون حلها هو (1) $v = (t) = ce^{-2t} + 16$. عندما $(t = 0)$ يكون لدينا $v = 0$.

وبالتعويض فى (1) ، نحصل على :

$0 = c^{-2(0)} + 16 = c + 16$ ،ومنها نجد أن $c = 16$ ، وتصبح (1) على الصورة :

$$v = (t) = -16e^{-2t} + 16 \qquad (٢)$$

(أ) من (1) و (2) نجد أن $t \to \infty, v \to 16$ وبالتالى فإن السرعة النهائية هى $16\, ft/sec$.

(ب) لإيجاد الزمن الذى تستغرقه الكرة لتصل إلى الأرض $(x = 3000)$ ، فإننا نحتاج إلى تعبير عن موضع الكرة عند أى لحظة t. حيث أن ، $v = dx/dt$ ، فإنه يمكن كتاب (2) على الصورة $\frac{dx}{dt} = 16e^{-2t} + 16$

وبتكامل طرفى المعادلة الخيرة مباشرة بالنسبة إلى t ، فيكون لدينا :

$$(3) \qquad x(t) = 8e^{-2t} + 16t + c_1$$ حيث c_1 هو ثابت التكامل .

عندما $t = 0$ ، $x = 0$ وبالتعويض عن هذه القيم فى (3) نحصل على :

$0 = 8e^{-2(0)} + 16\,(0) + c_1 = 8 + c_1$ ، ومنها نجد أن $c_1 = -8$ ، وتصبح المعادلة (3) على الصورة

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8 \qquad (4)$$

وتصل الكرة إلى الأرض عندما $x(t) = 3000$ ، وبالتعويض عن هذه القيمة فى (4) يكون لدينا $3000 = 8\,e^{-2t} + 16\,t - 8$ أو :

$$376 = e^{-2t} + 2\,t \qquad (5)$$

بالرغم أنه لا يمكن حل المعادلة (5) صراحة بالنسبة إلى t ، فإنه يمكن أن نقرب الحل بالتجربة والخطأ ، وذلك بتعويض قيم مختلفة للزمن t فى (5) حتى نصل إلى درجة الدقة التى نريدها . وبديلا ، نلاحظ أنه لأى قيمة كبيرة للزمن t ، تجعل الحد الأسى صفرا .

ونحصل جيد فى هذه الحالة بأخذ $2\,t = 376$ وذلك من (5) وتكون $t = 188\ sec$ وهذه القيمة للزمن t تجعل الحد الأسى e^{-2t} صفراً (مهملاً) .

تمارين

١. تنمو بكتريا فى محلول غذائى بمعدل يتناسب مع عدد العناصر الموجودة. وجد فى البداية ان 250 سلالة بكتريا فى المحلول وأصبحت 800 سلالة بعد سبع ساعات . أوجد

أ. تعبيرا عن عدد السلالات فى المزرعة عند أى لحظة t،

ب. الزمن اللازم لنمو التكتريا إلى 1600سلالة.

٢. تنمو بكتريا فى مزرعة بمعدل يتناسب مع عدد العناصر الموجودة. وجد أن فى البداية أن 3000 سلالة زادت بنسبة 20 فى المائة بعد ساعتين . أوجد

أ. تعبيرا عن العدد التقريبى فى المزرعة عند أى لحظة t ،

ب. الزمن اللزم لكى يكون عدد السلالات ضعف الموجودة فى البداية.

٣. ينمو عفن بمعدل يتناسب مع حجمه الموجود . وجد أن ، فى البداية $2\ oz$ من هذا العفن بعد يومين $3\ 0z$. أوجد

أ. حجم العفن الموجود بعد يوم واحد

ب. حجم العفن الموجود بعد يوم عشرة أيام.

٤. وضع جسم درجة حرارته $0°F$ فى حجرة حرارتها ثابتة عند $100°F$. إذا كانت درجة حرارة الجسم $25°F$ بعد عشر دقائق ، أوجد

أ. الزمن الازم لتصل درجة حرارة الجسم الى $50°F$ ،

ب. درجة حرارة الجسم بعد عشرين دقيقة.

٥. وضع جسم درجة حرارته $0°\ F$ فى حجرة درجة حرارتها ثابتة عند $100°\ F$. إذا أصبحت درجة حرارة الجسم $40°\ F$ بعد 20 دقيقة ، $20°\ F$ بعد 40 دقيقة ، أوجد درجة حرارة الجسم فى البداية.

٦: وضع جسم درجة حرارته $50°F$ فى فرن تبقى درجة حرارته ثابتة عند $150°F$. إذا أصبحت درجة حرارة الجسم 75^5 بعد 10 دقائق ، أوجد الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلى $100°F$.

٧. أسقط جسم كتلته 3 $slugs$ من ارتفاع 500 قدم بسرعة صفر. بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. تعبيرا عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ب. تعبيرا عن موضع الجسم عند أى لحظة t .

٨. أسقط جسم من ارتفاع 300 قدم بسرعة ابتدائية 30 قدم لكل ثانية. بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. تعبيرا عن سرعة الجسم عند اى لحظة t ،

ب. الزمن اللازم للجسم ليصل الى الأرض.

٩. قذف جسم كتلته رأسيل إلى أعلى فى الهواء بسرعة ابتدائية v^o .

بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. معادلة الحركة ،

ب. تعبيرا عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ج. الزمن t_m الذى يصل فيه لأقصى ارتفاع ،

د. تعبيرا عن موضع الجسم عند أى لحظة t ،

ه. أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم .

١٠. أوجد المسارات المتعامدة لكل من

(i) $x - y = 0$ (ii) $y = cx^3$ (iii) $x^2 + y^2 = cx^2$

(iv) $r = a\,(1 + \sin\theta)$ (vi) $r = a\,(\sec\theta + \tan\theta)$

١١. أوجد عائلة المسارات المائلة التى تقطع المنحنيات $y^2 = 4\,ax$ بزاوية قدرها $\pi/4$

١٢. أوجد عائلة المسارات المائلة التى تقطع المستقيم $y = ax$ بزاوية قدرها $\pi/4$

١٣. أوجد عائلة المسارات المائلة التى تقطع المستقيم $x - y = a$ بزاويـــة قـــدرها $\pi/4$ ، حيث a بارامتر .

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة

الأولى و الدرجات العليا

تعريف : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تأخذ الصورة

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

يمكن أن توضع على الصورة

$$F(x, y, p) = 0$$

حيث $p=\frac{dy}{dx}$ بارامیتر. فإذا كنت درجة p اكبر من الواحد فإن المعادلة التفاضلية فى هذه الحالة تكون من الرتبة الأولى والدرجات العليا فى الصورة البارامترية ويكون الحل فى هذه الحلة دالة فى البارامبتر p.

١- معادلات تفاضلية على الصورة $F(y') = 0$:

نفترض أن المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$F(y') = 0$$

حيث $p=y'=\frac{dy}{dx}$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$$

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(y')^3-(y')^2-2y'=0$$

الحــــل :

بوضع $y'=p$ فإن المعادلة تأخذ الصورة

$$p^3-p^2-2p=0$$

ومنها نجد أن

$$P(p-2)(p+1)=0$$

ومن هذا يكون

$$,\ p=0\rightarrow y=c_1$$

$$,\ p=2\rightarrow y=2x+c_2$$

$$p=-1\rightarrow y=-x+c_3$$

ويكون الحل العام هو

$$(y-c_1)(y-2x-c_2)(y+x-c_3)=0$$

وحيث أن المعادلة التفاضلية المعطاة من الرتبة الأولى فإن الحل لابد أن يحتوى على ثابت اختيارى واحد فقط. من هذا فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يكون على الصورة

$$(y-c)(y-2x-c)(y+x-c)=0$$

حيث c ثابت اختيارى.

٢- معادلات على الصورة $F(x,y')=0$:

فى هذه الحالة يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$x=f(y,p) \qquad (1)$$

حيث $p=\dfrac{dy}{dx}$.

بتفاضل طرفى المعادلة (1) بالنسبة إلى y فإننا نحصل على

$$\frac{1}{P}=\frac{dx}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}=f_1(y,p,\frac{dp}{dy})$$

ومنها يكون

$$\frac{1}{p}=f_1(y,p\frac{dp}{dy})$$

وهذه المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وهى تحل باحدى الطرق التى درست فيما سبق ، وبافتراض أن الحل يعطى على الصورة :

$$y=\varphi(p,c) \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختيارى .

وتكون المعادلتان (1) و (2) هما الحل العام للمعادلة التفاضلية فى الصورة البارامترية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x = 3(\frac{dy^4}{dx}) - (\frac{dy}{dx})^2 \quad +6$$

الحــــل :

حيث أن $\frac{dy}{dx} = p$ فإن المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن وضعها على الصورة

$$x = 3p^4 - p^2 + 6 \qquad (2)$$

بتفاضل طرفى المعادلة (1) بالنسبة الى y نحصل على

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 12p^3 \frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$

ومنها

$$\frac{1}{p} = (12p^3 \ -2p)\frac{dp}{dy}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى . بفصل المتغيرات نحصل على

$$dy = (12p^4 - 2p^2)\,dp$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dy = \int (12p^5 - 2\,p^2)\;dp \ + \ c$$

أى

$$y=\frac{12}{5}p^5-\frac{2}{3}p^3+c \qquad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) تمثلان الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة فى الصورة البارمترية حيث c ثابت اختيارى.

٣- معادلات على الصورة $F(y, y') = 0$

في هذه الحالة يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = f(x, p) \qquad (1)$$

بتفاضل طرفى المعادلة (1) بالنسبة الى x نحصل على

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}=f_1(x, p, \frac{dp}{dx})$$

ومنها

$$p = f_1(x, p, \frac{dp}{dx})$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وهى تحل بإحدى الطرق التى درست ، وبفرض أن الحل بعطى على الصورة

$$x = \psi(p, c) \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختيارى

وتكون المعادلتان (1) ، (2) هما الحل للمعادلة التفاضلية فى الصورة البارامترية .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = (\frac{dy}{dx})^6 - 3(\frac{dy}{dx})^3 - 7(\frac{dy}{dx})^2 - 5$$

الحـــل :

حيث أن $\frac{dy}{dx} = p$ فإن المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن وضعها على الصورة

$$y = p^6 - 3p^3 - 7p^2 - 5 \qquad (1)$$

بتفاضل *(1)* بالنسبة الى x نحصل على

$$p = \frac{dy}{dx} = (6p^{5-} - 9p^2 - 14p)\frac{dp}{dx}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dx = (6p^4 - 9p - 14)\, dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$x = \frac{6}{5}p^5 - \frac{9}{2}p^2 - 14p + c \qquad (2)$$

حيث c ثابت إختيارى.

المعادلتان *(2)* , *(1)* تمثلان الحل فى الصورة البارامترية للمعادلة المعطاة .

٤- معادلة لاجرانج *(Lagrange's equation)*

تأخذ معادلة لاجرانج الصورة :

$$y = x\, f(y') + g(y'); \qquad f(y') \neq y', \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

بوضع $y' = p$ فإن معادلة لاجرانج تأخذ الصورة

$$y = x\, f(p) + g(p) \qquad (2)$$

بتفاضل طرفى المعادلة *(1)* بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

حيث : $;f'(p) = \dfrac{d(f(p))}{dp}, g'(p) = \dfrac{d(g(p))}{dp}$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فى متغيرين x , p تحل كما سبق بافتراض أن الحل يعطى من

$$x = \varphi\,(p\,,\,c) \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختيارى. المعادلتان *(2)* ، *(1)* هما حل معادلة لاجرانج التفاضلية فى الصورة البارامترية.

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = 2px + p^3 \qquad (1)$$

<u>الحـــــل :</u>

هذه المعادلة لجرانج التفاضلية ؛ بتفاضل الطرفين بالنسبة الى x نحصل على

$$p = \frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\,\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p=(2x+3p^2)\frac{dp}{dx} \qquad\qquad \Rightarrow \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=-3p$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية فى x ويكون عامل التكامل هو :

$$I=I(p)=e^{\int \frac{2}{p}dp}=p^2$$

ويكون الحل هو

$$p^2x=\int p^2(-3p)dp+c=\frac{-3}{4}p^4+c$$

أى أن :

$$x=\frac{-3}{4}p^2+\frac{c}{p^2} \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختيارى

المعادلتان (2) ، (1) هما حل معادلة لاجرانج التفاضلية فى الصورة البارامترية.

٥- **معادلة كليرو** *(Clairout's equation)* :

تنتج معادلة كليرو كحالة خاصة من معادلة لاجرلنج وذلك بوضع $f(y')=y'$ وعلى هذا فأن معادلة كليرو وتأخذ الصورة

$$y=x\,y'+g(y'); \qquad\qquad p=y'=\frac{dy}{dx}$$

ومنها تكتب معادلة كليرو على صورة :

$$y=x\,p+g(p) \qquad (1)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة الى x نحصل على :

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad g'(p) = \frac{dg(p)}{dp}$$

ومن المعادلة السابقة نحصل على :

$$\frac{dp}{dx}(x+g'(p)) = 0$$

ومنها إما $\frac{dp}{dx} = 0$ أو $x + g'(p) = 0$

وفى حالة ما إذا كان $\frac{dp}{dx} = 0$ فإن $p = c$ حيث c ثابت اختيارى. وفى هذه الحالة يكون الحل لمعادلة كليرو هو

$$Y = xc + f(c)$$

وأيضا فى حالة

$$x + f'(p) = 0 \qquad (2)$$

يكون الحل هو المعادلتين (2) ، (1) فى الصورة البارامترية وهذا لن نتعرض لدراسته فى هذا الباب.

وببساطة يمكن الحصول على الحل العام لمعادلة كليرو بوضع c - ثابت اختيارى – بدلا من y' فى المعادلة المعطاة.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = xy' + \sqrt{4 + y'^2}$$

الحـــــل :

بافتراض أن c ثابت اختيارى فيكون الحل العام لمعادلة كاييرو المعطاة هو

$$y = xc + \sqrt{4 + c^2}$$

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y = xp + 2p^2 + 3p - 1 + e^p$$

<u>الحـــل :</u>

هذه المعادلة يمكن وضعها على الصورة :

$$y = xp + (2p^2 + 3p + e^p - 1)$$

وهذه تأخذ شكل معادلة كليرو التفاضلية وبافتراض أن c ثابت اختيارى فإن الحل للمعادلة المعطاة هو

$$y = xc + (2c^2 + 3c + e^c - 1)$$

تمـاريــــن

أوجد الحل العام فى الصورة البارامترية للمعادلات التفاضلية الآتية حيث $y'=p$:

(1) $x = y'(y'2' + 1)\frac{1}{2}$

(2) $y = (y'-1)e^{y'}$

(3) $y = \log(1 + y'^2)$

(4) $p^2 - xp + y = 0$

(5) $y^2p^2 + 3xp - y = 0$

(6) $p^2 + p - 6 = 0$

(7) $p^3 + p = e^y$

(8) $x + yp^2 = p(1 + xy)$

(9) $p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$

(10) $(y')^7 - 3(y')^3 + 16 = 0$

(11) $(y')^8 + 7(y')^6 + 2(y')^5 - 12 = 0$

(12) $x = p^3 - p + 2$

(13) $x^2 p^2 - xyp - 6y^2 = 0$

(14) $x + p^2 = 1$

(15) $p^2 - 3p + 2 = 0$

(16) $y = 3y' + \sqrt{1 + y'^2}$

(17) $y = (1 + y')x + y'^2$

(18) $y = p^2x + p$

(19) $p = \tan\left(x - \frac{p}{p^2 + 1}\right)$

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية فى المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}$ من الدرجة الاولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} y + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_o \neq 0$

فاذا كانت جميع المعاملات $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة فى x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ فى المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فان المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلى D :

نعرّف $D \equiv \frac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x .

كذلك فان :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}\ ;\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

مثال

$$D\,e^{3x} = \frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2\,e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{3x} = 9\,e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

1) $D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$

2) $D[kf(x)] = kDf(x)$

3) $F(D)\,e^{\alpha x} = F(\alpha)\,e^{\alpha x}$; F كثيرة حدود فى D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة *(1)* باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x)$$

حيث نجد ان

$$\Phi(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}D + a_n$$

دالة كثيرة حدود فى D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة *(1)* على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D)\,y = f(x)$$

وهى معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

٢- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

نفترض أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

نظرية :

إذا كان كل من y_1 , y_2 حل خاص للمعادلة (1) فان $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ حل أيضا للمعادلة (1) ،حيث $c_1 ,\ c_2$ ثابتان .

البرهان : يترك للطالب

تعريف :

١) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مستقلان خطياً اذا كان (ثابت) $\dfrac{y_2}{y_1} \neq c$

اى ان $y_2 \neq c\, y_1$

٢) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مرتبطان خطياً اذا كان (ثابت) $\dfrac{y_2}{y_1} = c$

اى ان $y_2 = c\, y_1$

تعريف (الرونسكيان) : *Wronskian*

اذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فى نطاق تعريفهما ، فاننا نعرف الرونسكيان لهما كما ياتى :

$$W\{y_1(x),\ y_2(x)\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف :

١) الحلان $y_1 ,\ y_2$ للمعادلة *(1)* مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1 ,\ y_2\} \equiv 0$.

٢) الحلان $y_1 ,\ y_2$ للمعادلة *(1)* مستقلان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1 ,\ y_2\} \neq 0$.

مثال :

ابحث إرتباط واستقلال كل مجموعة من الدوال الآتية :

$1)\ e^x , e^{-x}$ $\quad$ $2)\ 1, x , x^2$ $\quad$ $3)\ e^x , 2e^x , x$

الحل :

$$1) \qquad W\{e^x ,\ e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\therefore$ الدالتان مستقلتان خطياً .

$$2)\quad W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3)\quad W\{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ الدوال مرتبطة خطياً .

تعريف : **الحل العام** :

إذا كان y_1 , y_2 حلين مستقلين للمعادلة *(1)* فان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة *(1)* ، حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'', a_1 y', a_2 y = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_1,\ a_2$ ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة *(1)* حيث λ مقدار ثابت .

نضع المعادلة على الصورة $(D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$

ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad , D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1 , λ_2

حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

١) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

٢) حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$.

٣) مركبان .

سوف ندرس كل حالة على حده .

١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً ..... لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4$, $\lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $2y'' - 3y' = 0$

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)\ y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $2\lambda^2 + 3\lambda = 0$

و تكون جذورها $\lambda = 0 \ , \ 3/2$

ويكون الحل العام صفر

اى ان $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3/2 x}$

$$y = c_1 + c_2 e^{3/2 x}$$

---

٢) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{\lambda x}$$

حيث $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\,y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ويكون جذراها $\lambda = 2,\ 2$

أى أن الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

---

٣) **جذرا المعادلة المميزة مركبان :**

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (1)$$

حيث $A_1,\ A_2$ ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (1) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right]$$

ونعلم ان $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$, $e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$

وعلى ذلك فان

$$y = e^{\alpha x}[A_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + A_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x]$$

ونعتبر $A_1 + A_2 = C_1$, $i(A_1 - A_2) = C_2$

فيكون الحل هو : $y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الحـــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 2D + 4)\,y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\therefore\ \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x}[c_1\cos 2x + c_2\sin 2x]$$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 9y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 9) = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 9 = 0$

ويكون جذراها $\therefore\ \lambda = \neq 3i$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

٣- حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة

يمكن تعميم الحالات السابقة الخاصة بحل معادلات الرتبة الثانية على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المساعدة

$$a_0 \lambda^n + a1 \lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

التى نحصل منها على الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور .

١) اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq .... \neq \lambda_n$ (أعداداً حقيقية)

فان الحل العام

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$$

٢) اذا كانت جميع الجذور حقيقية واحد الجذور مكرر K من المرات

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 .... = \lambda_k, \qquad \lambda_{k+1} \neq ...... \neq \lambda_n$ فان الحل العام يكون

$$y = \left[c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_k x^{k-1}\right] e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + ... + c_n x^{\lambda_{nx}}$$

٣) اذا كانت الجذور $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$

فانه يوجد $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\alpha x}\left[\left(\left[c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x\right]\right.$$

أمثلة عامة

<u>مثـــال</u> :

أوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ; y(0) = 4 \ , \ y'(0) = 8 \ , y''(0) = -4$$

<u>الحـــل</u> :

نضع المعادلة على الصورة $(D^3 + 2D^2 - 3D)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 0 \;,\; 1 \;,\; -3$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد

$$y' = c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} \qquad (2)$$

$$y'' = c_1 e^x + 9c_2 e^{-3x} \qquad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية فى المعادلات $(1), (2), (3)$

$y(0) = 4$ (1) $\Leftarrow$ $\therefore\; 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \; ....(4)$

$y`(0) = 8$ (2) $\Leftarrow$ $8 = c_2 - 3c_3 \;......................(5)$

$y``(0) = -4 = -4$ (3) $\Leftarrow$ $c_2 + 9\, c_3 \;..........................(6)$

بحل المعادلات $(4), (5), (6)$ ، $c_1 = 0 ,\quad c_2 = 5 ,\quad c_3 = -1$

و يكون الحل على الصورة $y = 5e^x - e^{-3x}$

<u>مثـــــال</u> :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y'' - 2y = 0$$

الحـــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)\, y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 1\,,\ -1,\ -2$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1\ e^{x} + c_2\ e^{-x} + c_3^{\ -2x}$$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D-2)^3(D+3)^2(D-4)y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^3\,(\lambda + 3)^2\,(\lambda - 4) = 0$$

$$\therefore\ \lambda = 2,\ 2,\ 2,\ -3,\ -3,\ 4$$

ويكون الحل العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\,e^{2x} + (c_4 + c_5 x)e^{-3x} + c_6 e^{2x}$$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)\, y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \qquad \Rightarrow \lambda = 0,\ 0,\ 1,\ 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^{x} .$$

مـــثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0 , \qquad y'(0) = 2 , \qquad y''(0) = -6$$

الحـــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)\, y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=0,\ 3,\ 3$$

ويكون الحل العام

$$y=c_1+(c_2+c_3x)e^{3x} \tag{1}$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y'=3(c_2+c_3x)\,e^{3x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y''&=9(c_2+c_3x)\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x}\\ &=3\left[3(c_2+c_3x)e^{3x}+2c_3\,e^{3x}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

بالتعويض فى $(1), (2), (3)$ من الشروط الابتدائية .

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=c_1+c_2 \tag{4}$$

$$y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad 2=3c_2+c_3 \tag{5}$$

$$y''(0)=-6 \Rightarrow -6=3[3c_2+2c_3]$$

$$\Rightarrow \qquad -2=3c_2+2c_3 \tag{6}$$

بحل $(4), (5), (6)$ نجد أن

$$c_1=-2 \quad, c_2=2 \quad, c_3=-4$$

ويكون الحل الخاص الذى يحقق الشروط

$$y=2(1-2x)e^{3x}-2$$

<u>مثـــــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)\, y = 0$$

<u>الحـــل :</u>

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور.

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جذر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

نفرض $\lambda = 1$ $\therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0$

نفرض $\lambda = -1$ $L.H.S. = -1-3-9+13=0=R.H.S$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftarrow$ $\lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

∴ تصبح المعادلة المميزة $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

ويكون الحل العام $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}[c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x]$

٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

نعلم أن المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots, \dots a_o \neq 0 \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة متصلة فى نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D)\, y = f(x) \qquad (2)$$

حيث $\Phi(D)$ دالة كثيرة حدود من درجة n فى D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (2) نتبع الخطوات الآتية :

١) نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة

$$\Phi(D) = y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته ، ونرمز للحل الناتج بالرمز y_h ، أى أن y_h نحقق المعادلة المتجانسة فقط.

٢) نوجد حلاً خاصاً نرمز له بالرمز y_p ويحقق المعادلة (2) ، وسوف نعرض لطريقة ايجاد y_p

٣) نوجد الحل العام y_G حيث $y_G = y_h = y_p$ وبالطبع فإن y_G نحقق المعادلة (2).

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\Phi(D)\, y = 0$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y_h = 0$

y_p يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y = f(x$

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$L.H.S \;= \Phi(D)\, y_G = \Phi(D)\, [y_h + y_p] = \Phi(D)\, y_h + \Phi(D)\, y_p = 0 + f(x) = f(x)$

$= R.H.S$

طرق ايجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المؤثر العكسي:

حيث ان y_P حل يحقق المعادلة $\Phi(D)\,y = f(x)$

$$\therefore \Phi(D)\, y_P = f(x)$$

باستخدام التأثير العكسى على الطرفين

$$\frac{1}{\phi(D)}\phi(D)y_p = \frac{1}{\phi(D)}\, f(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{\phi(D)}\, f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ فى صور مختلفة .

١) اذا كان $f(x)=e^{\alpha x}$.

نعلم ان

$$\phi(D)e^{\alpha x} = \phi(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)}\phi(\alpha)\, e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)}\phi(D)\, e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha)\frac{1}{\phi(D)}\ e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq o$

أى أن $\quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(\alpha)}\, e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)}\, e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0$

٢) اذا كان $f(x)=e^{\alpha x}\,v(x)$

نعلم أن

$$D[e^{\alpha x}v(x)] = e^{\alpha x}D\,v(x)+\alpha\,e^{\alpha x}v(x)$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)\,v(x)$$

أيضاً

$$D^2[e^{\alpha x}v(x)] = D[e^{\alpha x}(D+\alpha)\,v(x)]$$

$$e^{\alpha x}[D^2 v(x) + \alpha D\,v(x)] + \alpha\,e^{\alpha x}(D+\alpha)\,v(x) =$$

$$= e^{\alpha x}[D+\alpha]^2\,v(x)$$

وهكذا نجد أن

$$D)[e^{\alpha x}v(x)] = e^{\alpha x}\phi(D+x)\,v(x) \quad \phi($$

ومن ذلك ، يمكن اثبات ان

$$\frac{1}{\phi(D)}\,e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{\phi(D+\alpha)}v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi(D)\frac{1}{\phi(D)}\,e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D)[e^{\alpha x}\frac{1}{\phi(D+x)}\,v(x)$$

$$= e^{\alpha x}\,\phi(D+\alpha)\frac{1}{\phi(D+\alpha)}\,v(x)$$

$$= e^{\alpha x}v(x)$$

٣) $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\,dx$

الإثبات $\quad$ let $\frac{1}{D} f(x) = z \Rightarrow f(x) = Dz = \frac{dz}{dx}$.

$\therefore z = \int f(x)\,dx = \frac{1}{D} f(x)$.

$\frac{1}{D}$ التاثير العكسى للمؤثر D ، اى $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة الى x ، بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x عدد k من المرات .

٤) اذا كان $f(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n ، وكان $\phi(D)$ تاخذ احدى صور

$(1+D)\,,(1-D)\,,(1+D)^2,(1-D)^2\,,\ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \frac{1}{1+D} f(x) = [1 - D + D^2 + \ldots\ldots + (-1)^n\ D^n]\ f(x)$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = [1 + D + D^2 + \ldots\ldots\ldots + D^n]\ f(x)$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \ldots + (n+1)D^n]\ f(x)$$

أو نتبع القسمة المطولة لإيجاد $1/\phi(D)$

٥- إذا كان $f(x) = c$ ، c مقدار ثابت .

$$\frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{\Phi(D)} c\,e^{ax} = c\frac{1}{\Phi(0)} e^{ax} = \frac{c}{\Phi(0)}; \qquad \Phi(0) \neq 0$$

فإذا كان $\quad$ 1) $\Phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$

$\therefore \Phi(0) = 5$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{c}{\Phi(0)} = \frac{c}{5}$$

2) $\Phi(d) = D^3 - 2D^2 + 6D \quad \to \quad \Phi(0) = 0.$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D} c = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2 - 2D = 6} c = \frac{1}{D} \frac{c}{6} = \frac{c}{6} x$$

-٦
$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

فإن

$$\frac{1}{\Phi(D^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

نعلم أن $D \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$

$D^2 \sin(\alpha x + \beta) = - \alpha^2 \sin(\alpha x + \beta)$

$D^3 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^3 \cos(\alpha^4 \sin(\alpha x + \beta)$

$D^4 \sin(\alpha x + \beta) = \alpha^4 \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^2 \sin(\alpha x + \beta)$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$(D^2)^k \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \sin(\alpha x + \beta)$

وبالمثل نثبت أن

$(D^2)^k \cos(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \cos(\alpha x + \beta)$

وعلى ذلك فإن
$$\therefore \Phi(D^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \Phi(-\alpha^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

بأخذ $f(x) = \sin(\alpha x + \beta)$

$$\therefore \Phi(D^2) \sin(\alpha x + \beta) = \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسى $\frac{1}{\Phi(D^2)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\Phi(-\alpha^2)\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

وحيث $\Phi(-\alpha^2)$ مقدار ثابت

$$\therefore \Phi(-\alpha^2)\frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

بالقسمة على $\Phi(-\alpha^2)\neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\frac{1}{\Phi(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

٧- من الحالة (1) إذا كان $\Phi(x)=0$

نضع $v(x)$ $e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\,.\,1=e^{\alpha x}$

من (2) $\therefore \frac{1}{\Phi(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\Phi(D)}(e^{\alpha x}.1)=e^{\alpha x}\frac{1}{\Phi(D)}\{1\}$

٨- من الحالة (٦) إذا كان $\Phi(-\alpha^2)=0$

فى هذه الحالة نضع $\sin(\alpha x+\beta)=I\,e^{i(\alpha x+\beta)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha\alpha+\beta)=I\frac{1}{\Phi(D)^2}e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\,1)=I\,e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\frac{1}{\Phi(D+i\alpha)^2)}$$

٤- أمثـلة متنوعة :

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 2D = 3)\, y = 42\, e^{4x}$$

الحـــل :

أولا : نوجد حل $(D^2 + 2D - 3)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

.: المعادلة المميزة $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$$\therefore (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

ثالثا : الحل العام $y_g = y_4 = y_p$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان.

مثـــال :

أوجدى حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(D + 4D + 3)y = 8\,xe^x - 6, \qquad y(0) = \frac{-11}{4}, \qquad y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحـــــل :

أولا : نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المميزة هى :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\therefore (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1\,,\, -3$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 3}[8xe^x - 6] = \frac{1}{(D+1)(D+3)}[8xe^x - 6]$$

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 8x e^x = 8 e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)} e^x \frac{1}{(1+\frac{D}{2})(1+\frac{D}{4})} x = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x$$

$$= e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{1}{4}) = e^x [x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} e^x (4x - 3)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2$$

ثالثا : نوجد الحل العام

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\therefore y = y_G = y\,c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x}(4x-3) + 2 \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد :

$$y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x}[4 + 4x - 3]$$

$$\therefore y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x}(4x + 1) \qquad (2)$$

من (1) ، (2) والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-11}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{4} c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \qquad (3)$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} = -c1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \qquad (4)$$

بجمع (3) ، (4)

$$\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

بالتعويض فى (3)

$$c_1 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

.: الحل المطلوب

$$y = \frac{1}{4} e^{x}(4x-3) - 2$$

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2)\,y = 2\cos x$$

الحـــل :

أولا : نوجد حل $(D^3 - D^2)\, y = 0$

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانيا : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2\cos x = 2\frac{1}{-D+1}\cos x$$

بالضرب فى المرافق $1 + D$

$$\therefore\ y_p = 2\frac{1+D}{1-D^2}\cos x = 2\frac{1+D}{1+1}\cos x = (1+D)\cos x = \cos x - \sin x$$

ثالثا : الحل العام $y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} + \cos x - \sin x$

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D + 5} \{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5} \{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{1 - D} \{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)} \{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 - D^2)} \{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5} \{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right) + \frac{1}{5} (\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

وفي المثال التالي سنناقش الحل عندما يكون $\phi(-\alpha^2) = 0$.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2 + 4)y = \sin 2x$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + 4)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4}\{\sin 2x\}$$

واضح أن $\phi(-m^2) = \phi(-4) = 0$ في هذه الحالة فإننا نستخدم الطريقة التالية :

من نظرية دى موافر نجد أن : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

أى أن

$$\text{الجزء الحقيقي} = \cos x = \text{Re}.(e^{ix})$$

$$\text{الجزء التخيلي} = \sin x = \text{Im}.(e^{ix})$$

وعلى هذا فإن

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\,\text{Im}.\{e^{2ix}\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{(D+2i)^2+4}\{1\}$$

$$y_p = \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD-4+4}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1+\frac{D}{4i})^{-1}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\ldots)\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.(\frac{1}{4iD}+\frac{1}{16}+\ldots)\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.(\frac{x}{4i}+\frac{1}{16})$$

$$= \text{Im}.(\cos 2x + i\sin 2x).(-\frac{x}{4}i+\frac{1}{16})$$

ومنها

$$y_p = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

من هذا المثال يمكن اثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2+4)y=\cos 2x$$

هو

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x.$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

٩- إذا كانت $F(x)$ على الصورة $F(x)=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$:

فى هذه الحالة فإننا نستخدم الحالة (٦) حيث :

$$\frac{1}{\phi(D^2)}=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}=\frac{1}{\phi(m^2)}\quad=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$$

بشرط أن $\phi(m^2)\neq 0$.

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4-8D^2-9)y=50\ \sinh 2x$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4-8D^2-9)y=0$$

بافتراض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^4-8\lambda^2-9=0$$

بالتحليل نجد أن

$$(\lambda^2-9)(\lambda^2+1)=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda^2+1)=0$$

ومنها الجذور هى $\lambda=3,\quad \lambda=-3\quad ,\ \lambda=\pm i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D^4-8D^2-9}\{50\sinh 2x\}$$

$$=\frac{50\sinh 2x}{16-32-9}=\frac{50\sinh 2x}{-25}$$

ومنها $y_p=-2\sinh 2x.$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos x+c_4\sin x-2\sinh 2x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 - 1)y = 10\cos x.\cosh x$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4 - 1)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي .

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

بالتحليل نجد أن $(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

ومنها الجذور هى $\lambda = 1, \quad \lambda = -1 \ , \ \lambda = \pm i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 1}\{10\cos x.\cosh x\}$$

$$= \text{Re}.\frac{10}{(D^2 - 1)(D^2 + 1)}\{e^{ix}.\frac{e^x + e^{-x}}{2}\}$$

$$= 5.\text{Re}.\frac{1}{(D^2 - 1)(D^2 + 1)}\{e^{(1+i)x} + e^{(i-1)x}\}$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2-1)((1+i)^2+1)}+\frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2-1)((i-1)^2+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)}+\frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{x}e^{ix}}{-5}+\frac{e^{-x}e^{ix}}{-5}]$$

$$= -\text{Re}.(e^{x}+e^{-x})e^{ix}$$

$$= -\text{Re}.2\cosh x(\cos x + i\sin x)$$

$$= -2\cosh x.\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - 2\cosh x.\cos x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^2(D+1)y = -2e^{x}$$

<u>الحــــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-1)^2(D+1)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)}\{-2e^{x}\}$$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{-2e^{x}}{2(D+1-1)^2}\{1\}$$

$$= -e^{x}\frac{1}{D^2}\{1\} = -\frac{1}{2}x^2 e^{x}$$

ومنها

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 e^{x}$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x} - \frac{1}{2}x^2 e^{x}.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-2)y = 3e^{x}(x+1)$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-2)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda-2=0$$

ومنها $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D-2}\{3e^x(x+1)\}$$

$$=3e^x\frac{1}{D+1-2}\{x+1\}$$

$$=-3e^x\frac{1}{1-D}\{x+1\}$$

$$=-3e^x(1-D)^{-1}\{x+1\}$$

$$=-3e^x(1+D+\ldots)\{x+1\}$$

$$=-3e^x(x+1+1)$$

ومنها

$$y_p=-3(x+2)e^x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1e^{2x}-3(x+2)e^x.$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$D^2(D^2+4)y=96x^2$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$D^2(D^2+4)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2(\lambda^2+4)=0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda=0,0 \quad , \quad \lambda=\pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D^2(D^2+4)}\{96x^2\}$$

$$=\frac{96}{4}\frac{1}{D^2}(1+\frac{D^2}{4})^{-1}\{x^2\}$$

$$=24\frac{1}{D^2}(1-\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{16}-\ldots)\{x^2\}$$

$$=24(\frac{1}{D^2}-\frac{1}{4}+\frac{D^2}{16}-\ldots)\{x^2\}$$

$$=24\left(\frac{x^4}{12}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}\right)$$

ومنها

$$y_p = 2x^4 - 6x^2 + 3$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x^4 - 6x^2 + 3$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 50(e^x + \cos 3x)$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

وتكون الجذور هى

$$\lambda = 1 \quad , \quad \lambda = \pm 2i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = \frac{50}{D^3 - D^2 + 4D - 4}\{e^x + \cos 3x\}$$

$$= \frac{50\ e^x}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + 4(D+1) - 4}\{1\} + \frac{50}{D^3 + 9 + 4D - 4}\{\cos 3x\}$$

$$= \frac{50\ e^x}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - D^2 - 2D - 1 + 4D + 4 - 4}\{1\}$$

$$+ 50\,\text{Re}.\frac{1}{D^3 + 4D + 5}\{e^{3ix}\}$$

$$= \frac{50e^x}{D^3 + 2D^2 + 5D}\{1\} + 50\,\text{Re}.\frac{1}{(3i)^3 + 4(3i) + 5}e^{3ix}$$

$$= \frac{50e^x}{5D}(1 + \frac{D^2 + 2D}{5})^{-1}\{1\} + 50\,\text{Re}.\frac{1}{-27i + 12i + 5}e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x(\frac{1}{D} - \frac{2}{5} + \ldots)\{1\} + 50\,\text{Re}.\frac{1}{5 - 15i}e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x(x - \frac{2}{5}) + 10\,\text{Re}.\frac{1}{1-3i}.\frac{1+3i}{1+3i}\ e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x(x - \frac{2}{5}) + \frac{10}{10}\text{Re}.(1+3i)(\cos 3x + i\sin 3x)$$

ومنها

$$y_p = 10\ e^x(x - \frac{2}{5}) + \cos 3x - 3\sin 3x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + 10e^x(x - \frac{2}{5}) + \cos 3x - 3\sin 3x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 5D + 6)y = 100\sin 4x.$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda = 3$, $\lambda = 2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\{100\sin 4x\}$$

$$= \frac{100}{-16 - 5D + 6}\{\sin 4x\}$$

$$= -20 \ \text{Im}.\frac{1}{D + 2}\{e^{4ix}\}$$

$$= -20 \ \text{Im}.\frac{e^{4ix}}{D + 4i + 2}\{1\}$$

$$= -20\ \text{Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}(1+\frac{D}{4i+2})^{-1}\{1\}$$

$$= -20\ \text{Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}(1+......)\{1\}$$

$$= -20\,\text{Im}.\frac{e^{4ix}}{2+4i}.\frac{2-4i}{2-4i}.1$$

$$= -20\,\text{Im}.\frac{(\cos 4x + i\sin 4x)(2-4i)}{20}$$

ومنها

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة أخرى

$$y_p = -20\frac{1}{D+2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{1}{D+2}\cdot\frac{D-2}{D-2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{D^2-4}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{-16-4}\{\sin 4x\}$$

$$= (D-2)\{\sin 4x\}$$

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D+1)y = x\sin x.$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D+1)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda + 1 = 0$$

ومنها $\lambda = -1$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D+1}\{x\sin x\} \\ &= \operatorname{Im}.\frac{1}{D+1}\{x e^{ix}\} \\ &= \operatorname{Im}.\frac{e^{ix}}{D+i+1}\{x\} \end{aligned}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{i+1}(1+\frac{D}{i+1})^{-1}\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}(1-\frac{D}{1+i}+\ldots\ldots)\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}(1-i)}{2}(x-\frac{1}{1+i})$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{2}.(x(1-i)-\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i})$$

$$= \text{Im}.\frac{(\cos x+i\sin x)}{2}(x(1-i)+i)$$

ومنها

$$y_p = \frac{x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1e^{-x}+\frac{x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\cos x$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2+m^2)y = a\cos mx+b\sin mx.$$

حيث a,b ثوابت .

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2+m^2)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + m^2 = 0$$

ومنها تكون الجذور هى $\lambda = \pm mi$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - m^2}\{a\cos mx + b\sin mx\}$$

$$= \frac{a}{D^2 + m^2}\{\cos mx\} + \frac{b}{D^2 + m^2}\{\sin mx\}$$

$$= a\,\mathrm{Re}.\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\} + b\,\mathrm{Im}.\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\}$$

نعتبر الآتى

$$\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\} = e^{imx}\ .\frac{1}{(D + im)^2 + m^2}\{1\}$$

$$= e^{imx}\ .\frac{1}{D^2 + 2imD}\{1\}$$

$$= \frac{e^{imx}}{2imD}(1 + \frac{D}{2im})^{-1}\{1\}$$

$$= \frac{e^{imx}}{2im}(\frac{1}{D} - \frac{1}{2im} + \ldots\ldots)\{1\}$$

$$= -i\frac{e^{imx}}{2m}(x + \frac{i}{2m})$$

$$= \frac{-1}{2m}(\cos mx + i\sin mx)(ix - \frac{1}{2m})$$

من هذا نستنتج أن

$$\mathrm{Re}.\left(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}\right)=\frac{1}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right),$$

$$\mathrm{Im}.\left(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}\right)=\frac{-1}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

من هذا يكون

$$y_p=\frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right)-\frac{b}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1\cos mx+c_2\sin mx+\frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right)$$
$$-\frac{b}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

تمـاريـــن

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $y'' - 14y' - 48y = 0$
2. $y'' - 12y' + 27y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + y' - 2y = 0$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0$
6. $y'' + 12y' + 36y = 0$
7. $y'' + 3y' + 4y = 0$
8. $y'' - 2y' + 4y = 0$
9. $y'' + 2y' = 0$
10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
11. $y'' + 4y' + 13y = 0$
12. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
13. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$
14. $4y^{(5)} - 3y''' - y'' = 0$
15. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$
16. $4y^{(4)} - 23y'' - y' = 0$
17. $y'' - 10y' + 16y = 6$
18. $y'' - 5y' + 6y = 7$
19. $y'' + 4y' + 5y = 10$
20. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
21. $y'' - 5y' + 6y = 3x$
22. $y'' - y' + y = x^3$
23. $y'' + 4y' + 3y = x$
24. $y'' - y = x^2 + 2$
25. $3y'' + y' - 14y = 2e^x$
26. $y'' - 5y' + 6y = 7e^{4x}$
27. $y'' - y = e^x$
28. $y'' + y' + y = e^{3x} + 5$
29. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
30. $(y'' - 2y)^2 = e^x + xe^{2x}$
31. $(y'' - 2y)^2 = x^2 e^{2x}$
32. $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2} e^{3x}$

33. $y' - y = (x+3)e^{2x}$

34. $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$

35. $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^{x}$

36. $y'' - 6y' + 10y = x^3 e^{3x}$

37. $y'' - 5y' + 6y = 9\sin 2x$

38. $y'' - 5y' + 6y = 9\cos 2x$

39. $y'' - 4y = \sin 6x$

40. $y'' + 2y' + y = 3\cos 4x$

41. $y'' - 2y' + y = xe^{x}\sin x$

42. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

43. $y'' + 4y = \cos 2x$

44. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$

45. $y'' - 2y' - y = e^{x}\cos x$

46. $y^{(4)} - y = \sin 2x$

47. $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$

48. $y'' + 3y' + 2y = x\sin 2x$

49. $y'' + 9y = 4\sin 3x$

50. $y'' - y = x^2\sin 3x$

51. $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

52. $y'' + 4y = 4\tan 2x$

53. $y'' + y = \sec x$

54. $y'' - y' - 2y = 10\cos x$

55. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$

56. $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + xe^{2x}$

57. $y'' + y = 3\cos 2x + 2\sin 3x$

58. $y'' + 3y' - 4y = \sin 2x$

59. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x}+3)^2$

60. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

61. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$

62. $y'' + 5y = \sin x + 2\sin 2x$

63. $y'' - 9y = 3 - 9x^2 + 27x^4$

64. $y'' + 6y' + 5y = 104e^{3x}$

65. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

66. $y'' - 5y' + 6y = 25\sin 4x$

67. $y'' - 10y' + 25y = x^5 e^{5x}$

68. $y'' + 2y' = 24x$

69. $4y'' + 8y' + 3y = e^{-x}(x^2 + \sin\frac{x}{2})$

70. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$

71. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$

72. $y^{(4)} - 8y'' + 9y = 50\sinh 2x$

73. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 50(e^x + \cos 3x)$

74. $y^{(5)} - y' = 12e^x + 8e^{-2x}\sinh x$

75. $y^{(4)} - 6y'' - 8y' - 3y = 256(x+1)e^{3x}$

76. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

77. $y^{(4)} - y = 10\cos x\cosh x$

78. $y'' - y' + 3y = e^{2x}$

79. $y'' - 8y' + 15y = 30$

80. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

81. $y'' - 3y' + 2y = x^2$

82. $2y'' - y' - y = xe^x$

83. $y'' - y' + 5y = \sin 2x$

84. $y'' + 9y = \sin 3x$

85. $y'' + 4y' + 3y = x$

86. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

87. $y'' - 10y' + 9y = (x-2)e^x$

88. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x + 1$

89. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$

90. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$

الباب السادس

معادلات تفاضلية
ذات
معاملات متغيرة

الباب السادس

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

سوف ندرس في هذا الباب بعض المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة التـــي لهما أهمية خاصة .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

"The differential equation variant coefficient"

تسمى المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = f(x) \;, \qquad a_n \neq 0$$

حيث أن كل من $f(x), a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x بمعادلة تفاضلية من الرتبة النونية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة .بحيث أن $f(x) \neq 0$ أما إذا كـــان $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة النونية متجانسة ذات معاملات متغيرة حيث أن كـــل من $a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x .

١- معادلة أويلر التفاضلية : "Euler's differential equation"

معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ الصورة

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_oy = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_2, a_1, a_o ثوابت .

لحل المعادلة *(1)* فإننا نستخدم التعويض

$$x = e^t \qquad or \qquad t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة *(1)* ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية مناظرة ذات معاملات ثابتة كالآتى :

نفترض أن $\theta = \frac{d}{dt} \ , \quad D = \frac{d}{dx}$

بذلك نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}$

أى أن $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$

ومنها فإن $xD = \theta \qquad (3)$

وأيضاً

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}) = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx})$$

$$= \frac{d}{dx}(\frac{d}{dt}.\frac{1}{x}) = \frac{d}{dt} \ .\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\frac{d}{dt})$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}).\frac{dt}{dx}$$

بذلك يكون $$D^2 = \frac{-1}{x^2}\theta + \frac{1}{x^2}\theta^2$$

أى أن $$x^2D^2 = \theta(\theta - 1) \qquad (4)$$

من العلاقات (4) , (3) يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3D^3 = \theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$\dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \dots$$

$$x^nD^n = \theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+1)$$

والآن بالتعويض من المعادلتين (4) و (3) فى المعادلة (1) نجد أن

$$a_2\theta(\theta-1)y + a_1\theta\ y + a_o y = f(e^t)$$

ومنها $$(a_2\theta^2 + (a_1 - a_2)\theta + a_o)y = f(e^t)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته . وبالتالى يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة أويلر التفاضلية (1) كما سنوضح ذلك فى الأمثلة الآتية.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 4x^3$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ ونفترض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

ومنها

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

لحل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى

$$\lambda_1 = 1 \qquad , \lambda_2 = 2$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}\{4e^{3t}\}$$

$$= \frac{1}{3^2 - 3\times 3 + 2} \cdot 4e^{3t} = 2e^{3t}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2e^{3t}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

<u>**مثـــال :**</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = 0$$

<u>**الحـــل :**</u>

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta - 1)(\theta - 2) + 2\theta - 2)y = 0$$

ومنها $$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة متجانسة ذات معاملات ثابتة .

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

بالتحليل $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0$

فتكون الجذور هى $\lambda_1=1 \quad , \lambda_{2,3}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x+x(c_2\cos(\ln x)+c_3\sin(\ln x))$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y''-6y=x^2+\frac{1}{x^2}$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x=e^t$ *وبفرض أن* $\theta=\dfrac{d}{dt}$ فإن

$$xD=\theta$$

$$x^2D^2=\theta(\theta-1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$(\theta\,(\theta-1)-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$$

ومنها $(\theta^2-\theta-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$

المعادلة المتجانسة هى $(\theta^2-\theta-6)y=0$

نفترض أن الحل على الصورة $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى $\lambda^2-\lambda-6=0$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-2$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}+e^{-2t}\}$$

$$=\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}\}+\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{-2t}\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{4-2-6}+\frac{e^{-2t}}{(\theta-2)^2-(\theta-2)-6}\{1\}$$

$$=\frac{-1}{4}e^{2t}+e^{-2t}\frac{1}{\theta^2-5\theta}\{1\}$$

$$=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta}{5})^{-1}\{1\}$$

$$=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots)\{1\}$$

$$=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x^{-2}(\ln x + \frac{1}{5})$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = x^2 \log x + x$$

الحـــــل :

بالتعويض عن $x = e^t$ فإننا نحصل على المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = te^{2t} + e^t$$

كما فى مثـــــال (٢) وجدنا أن

$$y_h = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2}\{te^{2t} + e^t\}$$

$$= \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2}\{te^{2t}\} + \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2}\{e^t\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{(\theta+2)^3-3(\theta+2)^2+4(\theta+2)-2}\{t\}$$

$$+\frac{e^{t}}{(\theta+2)^3-3(\theta+2)^2+4(\theta+2)-2}\{1\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{\theta^3+3\theta^2+4\theta+2}\{t\}+\frac{e^{t}}{\theta^3+\theta}\{1\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{2}(1+\frac{4\theta+3\theta^2+\theta^3}{2})^{-1}\{t\}+e^t\,\frac{1}{\theta}(1+\theta^2)^{-1}\{1\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{2}(1-2\theta+\ldots)\{t\}+e^t(\frac{1}{\theta}-\ldots)\{1\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{2}(t-2)+te^t$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)+\frac{1}{2}(t-2)e^{2t}+te^t$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x+x(c_2\cos(\ln x)+c_3\sin(\ln x))+\frac{1}{2}(\ln x-2)x^2+x\ln x$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln x$$

الحـــــل :

نفترض أن $x=e^t$ و أن $\theta=\frac{d}{dt}$ وعليه فإن

$xD = \theta$

$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$

$x^3D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) - 4\theta(\theta - 1) + 8\theta - 8)y = 4t$$

ومنها $(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 4t$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

بالتحليل $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

فتكون الجذور هى $\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8}\{4t\}$$

$$= \frac{4}{-8}(1 - \frac{14\theta - 7\theta^2 + \theta^3}{8})^{-1}\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(1 + \frac{14}{8}\theta + \ldots\ldots)\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{16}(8\ln x + 14)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x^5$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ *وبفرض أن* $\theta = \frac{d}{dt}$ *فإن*

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta-1)-\theta-3)y=e^{5t}$$

ومنها

$$(\theta^2-2\theta-3)y=e^{5t}$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2-2\theta-3)y=0$$

نفترض أن الحل لها هو $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-1$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_H=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^2-2\theta-3}\{e^{5t}\}$$

$$=\frac{1}{25-10-3}\cdot e^{5t}=\frac{1}{12}e^{5t}$$

بذلك يكون الحل هو $y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+\frac{1}{12}e^{5t}$

ولكن $x=e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^3+c_2x^{-1}+\frac{1}{12}x^5$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 5x^2 + 6$$

الحـــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) + 2\theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

ومنها $$(\theta^2 + \theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1 = 2 \quad , \lambda_2 = -3$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2+\theta-6}\{5e^{2t}+6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\frac{1}{(\theta+2)^2+(\theta+2)-6}\{1\} + \frac{1}{\theta^2+\theta-6}\{6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\frac{1}{\theta^2+5\theta}\{1\} - \frac{1}{6}(1-\frac{\theta+\theta^2}{6})^{-1}\{6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\frac{1}{5\theta}(1+\frac{\theta}{5})^{-1}\{1\} - (1-\frac{\theta+\theta^2}{6})^{-1}\{1\}$$

$$= e^{2t}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta}{5}+......)\{1\} - (1-......)\{1\}$$

$$= e^{2t}(t-\frac{1}{5}) - 1$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + e^{2t}(t-\frac{1}{5}) - 1$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1x^2 + c_2x^{-3} + x^2(\ln x - \frac{1}{5}) - 1$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = \ln x$$

الحـــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \dfrac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + 6\theta + 6)y = t$$

ومنها
$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = t$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = 0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى
$$\lambda_1 = -2 \qquad , \lambda_2 = -3$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو
$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 + 5\theta + 6}\{t\}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5\theta + \theta^2}{6}\right)^{-1}\{t\}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{5\theta}{6} + \ldots\ldots\right)\{t\}$$
$$= \frac{1}{6}\left(t - \frac{5}{6}\right)$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6} t - \frac{5}{36}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{1}{6} \ln x - \frac{5}{36}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

تمـــارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^2$
2. $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 4x + 6x^3$
3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = (1 + \frac{1}{x})^2 \log x$
4. $x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2}$
5. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \log x$
6. $x^2y'' + xy' + y = \ln x$
7. $x^2y'' + 6xy' + 6y = \ln x$
8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3\log x$
9. $x^2y'' - 2xy' + 2y = (\log x)^2 - \log x^2$
10. $2x^2y'' + 15xy' - 7y = \sqrt{x}$
11. $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x)$
12. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32x^2$
13. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2$
14. $x^2y'' - xy' = 2$
15. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x^3$
16. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x$

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية :

(1) $x^2y'' - 6y = \ln x \,, \qquad y(1) = \frac{1}{6} \,, \qquad y'(1) = \frac{-1}{6}$

(2) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^3 \,, \quad y(-2) = 1 \,, \qquad y'(-2) = 7$

٢- معادلة لاجرانج التفاضلية : "Lagrangels differential equation"

هذه المعادلة تأخذ صورة عامة لمعادلة اويلر التفاضلية السابقة وهى على الصورة

$$F[(ax+b)D]y = f(x)$$

حيث a, b ثوابت ، D هو المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$. وعلى الصورة الخطية تأخذ الصورة

$$a_0 (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

حيث $a, b, a_0, a_1, \dots\dots\dots a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $a_0 \neq 0$.

واضح انه عندما نأخذ $a=1$, $b=0$ فان معادلة لاجرانج تتحول إلى معادلة اويلر التفاضلية . أى أن معادلة اويلر التفاضلية صورة خاصة من معادلة لاجرانج التفاضلية. ولحل معادلة لاجرانج التفاضلية فإننا نستخدم التعويض $z = ax+b$, $z=e^t$ فتتحول المعادلة إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

الحل :

باستخدام التعويض $z = 3x+2$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{dy}{dz} \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = 9\frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$9z^2\frac{d^2y}{dz^2}+9z\frac{dy}{dz}-36y=3\left(\frac{z-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{z-2}{3}\right)+1$$

$$=\frac{1}{3}\left(z^2-4_z+4+4_z-8+3\right)=\frac{1}{3}\left(z^2-1\right)$$

باستخدام التعويض $z=e^t$ وبوضع $\theta=\frac{d}{dt}$ فان

$$(9\theta(\theta-1)+9\theta-36)\,y=\frac{1}{3}(e^{2t}-1)$$

و منها

$$(\theta^2-4)=\frac{1}{27}(e^{2t}-1)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

المعادلة المتجانسة هى

$$\left(\theta^2-4\right)y=0$$

نفترض ان الحل على صورة $y=e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda^2-4=0$$

وبتحليل نجد ان الجذرين هما

$$\lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-2$$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

حيث $c_1\ ,c_2$ ثابتان اختياريان .

الحل الخاص يعطى من

$$y_p = \frac{1}{\theta^2 - 4}\left\{\frac{1}{27}\left(e^{2t} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{27}\frac{e^{2t}}{(\theta+2)^2 - 4}\{1\} + \frac{1}{108}\left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right)^{-1}\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{27}\frac{1}{\left(\theta^2 - 4\theta\right)}\{1\} + \frac{1}{108}\left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right)\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{108}\frac{1}{\theta}\left(1 + \frac{\theta}{4}\right)^{-1}\{1\} + \frac{1}{108}$$

$$= \frac{e^{2t}}{108}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4} + \dots\dots\right)\{1\} + \frac{1}{108}$$

ومنها

$$y_p = \frac{e^{2t}}{108}\left(t - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{108}$$

بذلك

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}\frac{e^{2t}}{108}\left(t - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{108}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \operatorname{In} x$ وأيضـــاً $z = 3x + 2$ بذلك يكون الحل العام للمعادلـــة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1(3x+2)^2 + c_2(3x+2)^{-2} + \frac{(3x+2)^2}{108}\left(\operatorname{In}(3x+2) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{108}$$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياران .

مـــــثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+2)^2 y'' + (x+2)y' - y = x$$

الحـــــل

باستخدام التعويض $z = x+2$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - y = z-2$$

وهذه معادلة اويلر التفاضلية .

باستخدام التعويض $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فان

$$(\theta(\theta-1)+\theta-1)\, y = e^t - 2$$

ومنها

$$(\theta^2-1)\, y = e^t - 2$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2-1)\, y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda\ 2-1=0$$

وبالتحليل نجد Hن الجذرين هما

$$\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1$$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1e^t + c_2e^{-1}$$

حيث c_1 , c_2 ثوابت اختيارية .

الحل الخاص يعطى من

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 - 1}\{e^t - 2\}$$

$$= \frac{e^t}{(\theta+1)^2 - 1}\{1\} + \left(1-\theta^2\right)^{-1}\{2\}$$

$$= \frac{e^t}{\theta^2 + 2\theta}\{1\} + \left(1+\theta^2 ....\right)\{2\}$$

$$= \frac{e^t}{2}\frac{1}{\theta}\ \left(1+\tfrac{\theta}{2}\right)^{-1}\ \{1\}\ + 2$$

$$= \frac{e^t}{2}\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} + ...\right)\{1\} + 2$$

ومنها

$$y_P = \frac{e^t}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2$$

وبذلك يكون الحل

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right) + 2$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = x + 2$ فيكون الحل العام للمعادلـــة التفاضـــلية المعطاة هو

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

<u>مـــثـــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحـــــل :

نفترض أن $z = 1 + 2x$ فيكون

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} - 4z\frac{dy}{dz} + 4y = \frac{1}{2}\ z - 1$$

وهذه معادلة اويلر التفاضلية .

نفترض ان $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فان

$$(4\theta(\theta - 1) - 4\theta + 4)\ y = \frac{1}{2}\ e^t - 1$$

ومنها

$$(\theta^2 - 2\theta + 1)\ y = \frac{1}{8}(e^t - 2)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 - 2\theta + 1)\ y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلـــة المساعدة

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

وبالتحليل نجد ان الجذرين هما $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 0$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = (c_1 + c_2 t)e^t$$

حيث c_2 , c_1 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1}\left\{\frac{1}{8}(e^t - 2)\right\}$$

$$= \frac{1}{8} \quad \frac{e^t}{(\theta+1)^2 - 2\theta + 1}\{1\} \; \frac{1}{4}(1 + (2\theta - \theta^2))^{-1}\{1\}$$

$$= \frac{e^t}{8}\frac{1}{\theta^2}\{1\} - \frac{1}{4}(1 - 2\theta + \theta_2 - ....)\{1\}$$

$$= \frac{t^2 e^t}{16} - \frac{1}{4}$$

وبذلك يكون الحل هو

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + \frac{t^2 e^t}{16} - \frac{1}{4}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = 2x + 1$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = (c_1 + c_2 \log(2x+1)(2x+1) + \frac{1}{16}(2x+1)\log^2(2x+1) - \frac{1}{4}$$

حيث c_2 , c_1 ثابتان اختياريان .

<u>مثال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1+2x)^2 y'' - 6(1+2x)y' + 16y = 8(1+2x)^2$$

الحل

نفترض أن $z = 1+2x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dz}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} - 12z\frac{dy}{dz} + 16y = 8z^2$$

وهذه معادلة اويلر التفاضلية .

نفرض ان $z = e^t$ وبوضع $\theta \frac{d}{dt}$ فان

$$(\theta(\theta-1) - 3\theta + 4)\,y = 2e^{2t}$$

ومنها

$$(\theta^2 - 4\theta + 4)\,y = 2e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 - 4\theta + 4)\,y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y=e^{\lambda t}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

وبالتحليل نجد أن الجذرين هما $\lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = 2$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_H = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$

حيث $c_1 \,,\, c_2$ ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{\theta^2 - 4\theta + 4}\{2e^{2t}\}$$

$$= \frac{2e^{2t}}{(\theta+2)^2 - 4(\theta+2) + 4}\{1\}$$

$$= 2e^{2t}\ \frac{1}{\theta^2 + 4\theta + 4 - 4\theta - 8 + 4}\{1\}$$

$$= 2e^{2t}\frac{1}{\theta^2}\{1\}$$

$$= t^2 e^{2t}$$

وبذلك يكون الحل هو

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + t^2 e^{2t}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = 2x + 1$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = [c_1 + c_2 \ln(2x+1) + \ln^2(2x+1)](2x+1)^2$$

حيث c_2 , c_1 ثابتان اختياريان .

<u>ملحوظة</u> : توجد طرق لحل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة مثل :

١- الصورة القياسية .

٢- تغير البارامترات (الوسائط) إذا علم احد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة .

٣- تحليل المؤثر .

٤- طريقة آبل .

٥- استبدال المتغير المستقل .

وهذه الطرق مشروحة بالكامل فى الجزء الثانى من الكتاب .

تمارين

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1) $(x+1)^2 y'' + (x+1)y' - y = \log(1+x)^2 + x - 1$

2) $(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = 4\cos(\log(x+1))$

3) $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 9$

4) $(x-3)^2 y'' + 6(x-3)y' + 12y = 1 + 2x$

5) $(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 4y = (1+x)^3$

6) $(x+1)^2 y'' - (x+2)y' - 3y = x$

7) $(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' - 12y = 6x$

8) $(2x-3)^2 y'' - 6(2x-3)y' + 12y = 1 + 2x$

9) $(2x+3)^3 y'' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$

10) $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$

11) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y\dfrac{dy}{dx} = 0$

12) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -w^2 y,$ $\qquad w =$ ثابت

13) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \qquad , \dfrac{dy}{dx} \neq 0$

14) $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx}\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad \dfrac{dy}{dx} \neq o$

15) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x + x^2 + 2x + 3$$

16) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos y + y$$

17) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3$$

18) $$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 1$$

19) $$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}$$

٣- بعض الحالات الخاصة :

سنتعرض فى هذا الجزء لبعض الحالات الخاصة لمعادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدما ما درسناه فى الفصل الثامن . وتتلخص هذه الطريقة بوضع $\frac{dy}{dx}=p$

ويكون $\frac{d^2y}{dx}=\frac{dp}{dx}$ أو $\frac{d^2y}{dx^3}=p\frac{dp}{dy}$

وتتضح الطريقة من الأمثلة التالية

مثـــال :

أ. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$$

وتحل هذه المعادلة بالتكامل المباشر مرتين

مثـــال

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4x^3+3x^2-6x+5$$

الحــــل

بالتكامل بالنسبة الى x مرتين نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=x^4+x^3-3x^2+5x+c_1$$

$$y=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5}{2}x+c_1x+c_2$$

حيث c_2 , c_1 ثابتان إختياريان

مثـــال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x + 2x + 3$$

الحـــل

بالتكامل مرتين بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x^2 + 3x + c_1$$

$$y = -\cos x + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

ب. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$$

نضع $\frac{dy}{dx} = p$ ويكون $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}(p) = \frac{d}{dy} p \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

ونعوض فى المعادلة التفاضلية المعطاة فنحصل على

$$p\frac{dp}{dy} = g(y)$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$[pdp = g(y)\, dy$$

وبالتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}p^2 = \int g(y)\, dy$$

وبأخذ الجذر التربيعى والتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثـــال

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y + a$$

حيث a عدد ثابت

الحـــل

نضع $\frac{dy}{dx} = p$ فيكون $\frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$p\frac{dp}{dy} = y + a$$

ومنها نجد أن

$$pdp = (y + a)\, dy$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{y^2}{2} + ay + c_1$$

$$P^2 = y^2 + 2ay + 2c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = p = \sqrt{y^2 + 2ay + 2c_1} \qquad 2c_1 = c$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2ay + c}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+a)^2 + (c - a^2)}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$x = \sinh^{-1}\left(\frac{y+a}{c_2}\right) + c_3 \qquad , \qquad b = (c - a^2)$$

ومنها نحصل على

$$\frac{y+a}{c_2} = \sinh(x - c_3)$$

أى أن

$$y = b \ \sinh(x - c_3) - a$$

ج. معاملات تفاضلية خالية من x

وتكون على الصورة

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

مثـــال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ، \qquad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

الحـــل

نضع $\frac{dy}{dx} = p$ فيكون $\frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$

وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$p\frac{dp}{dy} - 2yp = 0$$

أى أن

$$p\left(\frac{dp}{dy} - 2y\right) = 0$$

ومنها نحصل على

إما $p = 0$ وهو مرفوض افتراضاً

أو

$$\frac{dp}{dy} - 2y = 0$$

أى أن

$$dp = 2y\,dy$$

ومنها نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = y^2 + c$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2 + c}$$

$$x = \frac{1}{c}\tan^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + c_1$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو

$$y = c\tan(cx - c_2) \qquad c_2 = c_1 c$$

مثـــال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=0 \quad , \qquad \frac{dy}{dx}\neq 0$$

الحـــل

باستخدام التعويض السابق نحصل على

$$yp\frac{dy}{dp}-p(1+p)=0 \qquad , \quad p\neq 0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dp}{1+p}=\frac{dy}{y}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\ln(1+p)=\ln y+\ln c_1$$

أي أن

$$1+p=c_1y$$

$$\frac{dy}{dx}=p=cy-1$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{c}\int c\frac{dy}{cy-1}=\int dx+c_1$$

$$\frac{1}{c}\ln(y-1)=x+\ln c_1$$

ومنها نحصل على

$$y=\frac{1}{c}+\frac{c_2}{c}e^{cx}$$

حيث $c_2 = c\,c_1$

وهو حل المعادلة التفاضلية المعطاة

د. معادلات خالية من y :

وتكون على الصورة

$$f=(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2})=0$$

وفى هذه الحالة تضع $\frac{dy}{dx}=p$ فيكون $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

مثـــال

حل المعادلة التفاضلية $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=3 \quad , \quad x\neq 0$

الحـــل

باستخدام التعويض $\frac{dy}{dx}=p \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

فتؤول المعادلة إلى

$$x\frac{dp}{dx}-p=3$$

أى أن

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=\frac{3}{x} \qquad (2)$$

وهى معادلة خطية فى أ ويكون المعامل المكامل هى

$$I = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = 1/x$$

ويكون حل المعادلة *(2)* هو

$$Ip = \frac{p}{x} = \int \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{p}{x} = \frac{-3}{x} + c$$

ومنها

$$\frac{dy}{dx} = p = cx - 3$$

وبالتكامل يكون حل المعادلة التفاضلية *(1)* هو

$$y = c\frac{x^2}{2} - 3x - c_1$$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياران

<u>مثـــــال :</u>

حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' = 6 \ln x \qquad x = \neq 0 \text{ و } (1)$$

<u>الحـــــل :</u>

نضع

$$\frac{dy}{dx} = p \quad , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

فتؤول المعادلة التفاضلية إلى

$$x\frac{dp}{dx} + p = 6 \ln x$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = \frac{6 \ln x}{x} \qquad (2)$$

وهى معادلة خطية فى أ ويكون المعامل المكامل هو

$$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$xp = \int 6 \ln x \, dx +$$

$$= 6[x \ln x - x] + c$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx} = p = 6 [\ln x - 1] + \frac{c}{x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$y = 6 [x \ln x - x] - 6x + c \ln x + c_1$$

حيث $c1 , c$ ثابتان اختياريان .

تمـاريــن

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

i. $y'' = 6x^2 - 3x + 9$

ii. $y'' - 3x^3 + 5x + 1$

iii. $y'' + 3\sin x - \cos x + \tan x + 6\sinh x$

iv. $y'' - 5y = 9$

v. $y'' - 4y\,y' = 0$ $\quad$ $y'' - 6y' = 2$

vi. $y'' = 4y + 3$

vii. $y\,y'' - y'(2 + y') = 0$ $\quad$ $y' \neq 0$

viii. $x\,y'' - y' = 6$

ix. $x\,y'' - 3y' = 2$

x. $x\,y'' + y' = 2\ln x$

الباب السابع

طريقة المعاملات غير المعينة

الباب السابع

طريقة المعاملات غير المعينة

لقد أعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية $L(y) = \Phi(x)$ على الصورة $y = y_h + y_b$ حيث يرمز y_b إلى حل ما للمعادلة التفاضلية و y_h عندما يكون للمعادلات التفاضلية معاملات ثابتة . سوف نعطى فى هذا الفصل طريقتين للحصول على حل خاص y_b عند معرفة y_h.

١- الصورة المبسطة للطريقة

تستخدم طريقة المعاملات غير المعينة إذا أمكن كتابة الدالة Φ وكل مشتقاتها بدلالة نفس مجموعة الحلول المتسقلة خطيا والتى نرمز لها بـ $\{y_1(x),(y_2)(x),\dots,y_n\ (x)\}$. نفترض فى البداية أن الحل الخاص يكون على الصورة $y_p(x) = A_1y_1(x) + \dots + A_ny_n(x)$ حيث $A_1,A_2,\dots,A_n$ ثوابت اختيارية . يمكن إيجاد هذه الثوابت الاختيارية بتعويض الحل المفترض فى المعاجلة التفاضلية المعطاة ومساواة معاملات الحدود المتشابهة .

وتوجد عدة صور للدالة $\Phi(x)$:

الحالة الأولى:

$\Phi(x) = p_n(x)$ كثيرة حدود من درجة n فى x. نفترض أن الحل على الصورة

$$y_p = A_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 \qquad (1)$$

حيث $A_j\ (j = o - 0, 1, 2, \dots, n)$ ثوابت يراد تعيينها .

الحالة الثانية

$\Phi(x) = ke^{\alpha x}$ حيث a , k ثابتان معلومان . نفترض أن الحل على الصورة

$$y_p = Ae^{\alpha x} \qquad (2)$$

حيث A ثابت يراد تعينه.

الحالة الثالثة

$\Phi(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos\beta x$ حيث β, k, k_2 ثوابت معلومة . نفترض أن الحـــل علـــى الصورة

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x \qquad (3)$$

حيث B,A ثابتان يراد تعيينهما .

ملاحظة : نفترض الحل (3) حتى لو كان k_1 أو k_2 صفرا ، لأن مشتقات sines أو cosine على كل من cosines, sines.

٢- تعميمات

إذا كانت $\Phi(x)$ هى ناتج حدود الحالات الثلاثة ، فإننا نأخذ y_p كناتج ضرب الحلول المفروضة وربطهم جبريا بثوابت اختيارية ما أمكن . وعلى وجه خاص ، إذا كانت $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ أى ناتج ضرب كثيرة حدود فى دالة أسية ، فإننا نفترض أن

$$y_p = e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) \qquad (4)$$

حيث A_1 كما فى الحالة الأولى . أما إذا كانت $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ أى ناتج ضرب كثيرة حدود ودالة أسية وحد يحتوى على sin أو إذا كان $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ أى ناتج ضرب كثيرة حدود ودالة أسية وحد يحتوى على cos فإننا نفترض أن :

$$y_p = e^{\alpha x}\sin \beta x\,(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) +$$

$$e^{\alpha x}\cos \beta x\,(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0) \qquad (5)$$

حيث $A_j, B_j, (j = 0,1,2,\ldots,n,)$ ثوابت يجب تعيينها . إذا كانت $\Phi(x)$ حاصل جمع (أو فرق) حدود سبق اعتبارها ، فإننا نأخذ y_p ليكون حاصل جمع (أو فرق) الحلول المفترضة المناظرة وربطهم جبريا بثوابت ما أمكن ذلك.

٣- تعديلات

إذا كان أى حد من الحل المفروض ، بغض النظر عن الثوابت الضربية ، هو أيضا حد فى y_h (حل المعادلة المتجانسة) فإنه يجب أن نعدل الحل المفروض وذلك بضربه بـ x^m حيث m هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون ناتج ضرب x^m فى الحل المفروض ليس به حدود مشتركة مع y_h .

٤- قيود على الطريقة

عموما إذا كان $\Phi(x)$ ليست واحدة من أنواع الدوال السابق ذكرها أو إذا كانت المعادلة التفاضلية ليست ذات معاملات ثابتة ، فإنه يفضل الطريقة المعطاة فى الفصل الحادى عشر .

مثـــال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

الحـــل :

الحل المتجانس هو $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x) = 4x^2$ وهى كثيــرة حــدود مــن الدرجة الثانية ، فإنه طبقا للحالة الأولى ، باستخدام *(1)* ، فإن الحل الخاص يأخذ الصورة:

$$y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0 \qquad (1)$$

وبالتالى $y'_p = 2A_2x + A_1$ و $y'' = 2A_2$ وبتعويض هذه النتائج فى المعادلة التفاضــلية ، يكون لدينا

$$2A_2 - (2A_2x + A_1) - 2\,(A_2\,x^2 + A_1x + A_0) = 4x^2$$

والتى تكافئ :

$$(2A_2)\,x^2 + (-2A_2 - 2A_1)\,x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2 + (0)\,x + 0$$

وبمساواة قوى x المتشابهة ، نحصل على

$$2A_2 = 4, A_2 - 2\,A_1 = 0, \qquad 2\,A_2 - A_1 - 2A_0 = 0$$

بحل هذا النظام ، نجد أن $A_0 = -3,\ A_2 = -2, A_1 = 2$ وبالتالى تصبح المعادلــة *(1)* علــى الصورة $y_p = -2x^2 + 2x - 3$

ويكون الحل العام هو

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

مثـــال :

حل المعادلة التفاضلية $y''-y'-2y=e^{3x}$

الحـــل :

الحل المتجانس هو $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x)=e^{3x}$ ، وبالتالى نحـــن بصـــدد الحـــالة الثانية حـــيث $a=3,\ k=1$. وعلى ذلك يكون الحل الخاص على الصورة :
$y_p=Ae^{3x}$ (1) ، وبالتالى $y'_p=3\,Ae^{3x}$ و $y''=9\,Ae^{3x}$.

وبتعويض هذه النتائج فى المعادلة التفاضلية ، يكون لدينا

$9Ae^{3x}-3Ae^{3x}-2Ae^{3x}=e^{3x}$ أو $4\,Ae^{3}=e^{3x}$ ويلـــى مـــن ذلـــك أن $4A=1$ أو $A=\dfrac{1}{4}$ ، وبالتالى تصبح (1) على الصورة $y_p=\dfrac{1}{4}e^{3x}$. ويكون الحل العام هو :

$$y=y_h+y_p=c_1e^{-x}+c_1e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$$

مثـــال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''-y'-2y=\sin 2x$$

الحـــل :

الحل المتجانس هو $y_h=c_1e^{-x}+c_{2e}{}^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x)=\sin 2x$ ، وبالتالى نحن بصدد الحالة الثالثة حيث $\beta=2, k_1=1,\ k_2=0$. وعلى ذلك يكـــون الحـــل الخـــاص علـــى الصـــورة : (1) $y_p=A\sin 2x+4b\cos 2x$ وبالتـــالى $y'_p=2A\cos 2x-2B\sin 2x$

و $y''= -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$. وبتعويض هذه النتائج فى المعاددلة التفاضــلية ، يكــون لدينا

$$(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) - (2A \cos 2x - 2B \sin 2x) -$$
$$2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x$$

والتى تكافئ

$$(-6A + 2b) \sin 2x + (-6B - 2A) \cos 2x = \sin 2x + (0) \cos 2x \qquad (2)$$

وبمساواة معاملات الحدود المتشابهة ، نحصل على

$$-2A - 6B = 0, -6A + 2B = 1$$

وبحل هذا النظام ، نجد أن $B = 1/20, A = -3/20$

وبالتالى تصبح العادلة *(1)* على الصورة:

$$y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

ويكون الحل العام هو :

$$y = y_h + y_p$$
$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

مثـــــال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$$

الحـــل :

الحـــل المتــجانس هو $y_h = c_1e^x + c_2e^{3x}$. وتكـــــون $\Phi(x) = e^{ax} P_n 9x)$ ، حــيث P_n $(x) = 2x, a = 1$ ، كـــثيرة حـــدود من الدرجـــة الأولى . باستخدام المعادلة (4) ، نفترض أن $y_p = e^{-x} (A_1x + A_0)$ وبالتالى

$$y'_p = -A_1xe^{-x} + A_1e^{-x} - A_0e^{-x}$$

$$y''_p = A_1xe^{-x} + A_0e^{-x}$$

$$y'''_p = A_1xe^{-x} + 3A_1e^{-x} - A_0e^{-x}$$

بتعويض هذه النتائج معاملات الحدود المتشابهة ، يكون لدينا

$$-24A_1 = 2, 26A_1 - 24A_0 = 0$$

ومنها $A_0 = -13/144, \qquad A_1 = -1/2$

وتصبح المعادلة (1) على الصورة:

$$y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

مثـــال :

حدد صورة الحل الخاص للمعادلة

$$y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

الحـــل :

الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية المتجانسة المصاحبة $y'' = 0$ هي

$$y_h = c_1x + c_0.$$

وحيث أن $\Phi(x) = 9x^2 + 2x - 1$

كثيرة حدود فيكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

لاحظ أن هذا الحل يختوى على حدود مشتركة ، بغض النظر عن الثوابت الضربية ، مع y_h ، وعلى وجه خاص حد القوة الأولى والحـــد الثابت . وبالتالى يجب أن نحدد أصـــغر عدد صحـــيح موجب بحيث أن $x^m (A_2x^2 + A_1x + A_0)$ ليس له حدود مشـــتركة مـــع y_h عندما $m = 1$ ، نحصل على :

$$x(A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x$$

هو مازال يحتوى على حد القوة الأولى مشتركا مع y_h . وعندما $m = 2$ نحصل على

$$x^2 (A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2$$

والـــذى ليس له حـــدود مشتركة مع y_h ، وبالتالى ، نفـــترض تعبيرا على هذه الصورة للحل y_h.

مثـــال :

حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

الحـــل

الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية المتجانسة المصاحبة $y'' = 0$ هو

$$y_h = c_1 x + c_0$$

نفترض أن الحل الخاص يكون على الصورة

$$y_p = A_2 x^4 + A_1 x^3 + A_0 x^2 \qquad (1)$$

وبتعويض (1) فى المعادلة التفاضلية ، نحصل على

$$12 A_2 x^2 - 6 A_1 x + 2 A_0 = 9 x^2 + 2 x - 1$$

حيث

$$A_2 = 3/4, \qquad A_1 = 1/3, \qquad A_0 = -1/2$$

وبالتالى فإن (1) تصبح :

$$y_p = \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$y = c_1 x + c_0 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$

مثـــال :

حل المعادلة

$$y' - 5\,y0 = 2\,e^{5x}$$

الحـــل

الحل المتجانس هى $y_h = c_1e^{5x}$. حيث أن $\Phi(x) = 2e^{5x}$ فإنـــه ينـــتج المعادلـــة (2) أن التخمين للحل الخاص y_p يجب أن يكون $y_p = A_0e^{5x}$.

لاحظ أن الحل الخاص y_p هو تماما مثل y_h وبالتالى يجب أن نعدل y_p . وبضرب y_p فى x $(m = 1)$ ، نحصل على :

$$y_p = A_0xe^{5x} \qquad (1)$$

وحيث أن هذا التعبير ليس له حدود مشتركة مع y_h ، فإنه يكون مرشحا كحـــل خـــاص ، وبالتعويض عن (1) و $y'_p = A_0e^{5x} + 5A_0xe^{5x}$ فى المعادلة التفاضلية وبعد التبسيط نحصل على $A_0e^{5x} = 2e^{5x}$ ومنها تكون

$A_0 = 2$ ، وتصبح المعادلة (1) على الصورة $y_p = 2e^{5e}$ ، ويكون الحل العام هو

$$y = (c1 + 2x)e^{5x}$$

تمارين

بطريقة المعاملات غير المعينة ، أوجد حل المعادلات الآتية :

1) $(D^2 + 2D + 5)\, y = 12\, e^x - 34 \sin 2x$

2) $(D + 1)^2\, y = 2e^{-x}$

3) $(D - 2)^2\, (D + 3) = 10e^x + 25e^{-3x}$

4) $y'' - 2y' - 3y = 12\, xe^{-x}$

5) $y'' + 2y' - 8y = 16x - 12$

6) $(D^2 + 4)\, y = \sin x + \sin 2x$

7) $(D^2 + 1)\, y = e^x + 3^x$

8) $(D^2 + 4)\, y = 8x + 1 - 15e^x$

9) $(D^3 + D)\, y = 15$

10) $(4D^2 + 4D + 1) = 7e^{-x} + 2$

الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط)

الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط - الثوابت)

Variation of Parameters

١- مقدمة

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامة لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_H حيث أننا نعتبر الثوابت الاختيارية دوال فى المتغير x .

والآن سوف نشرح هذه الطريقة على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع ملاحظة أنه يمكن تطبيقها على المعادلات التفاضلية ذات الرتب الأعلى .

لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة .

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان و $f(x)$ دالة فى المتغير المستقل x.

وتكون المعادلة المتجانسة هى

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

بافتراض أن حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

حيث كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) .

والآن لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية (1) فإننا نعتبر أن كل من A, B دوال فى المتغير x ويكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A(x)y_1 + B(x)y_2 \qquad (3)$$

بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y'_p = Ay'_1 + A'y_1 + By'_2 + B'y_2$$

نختار كل من A, B بحيث أن

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 \qquad (4)$$

ومنها يكون

$$y'_p = Ay'_1 + By'_2$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = Ay''_1 + A'y'_1 + By''_2 + B'y'_2$$

وبالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية (1) نحصل على

$$Ay''_1 + A'y'_1 + By''_2 + B'y'_2 + a_1(Ay'_1 + By'_2) + a_2(Ay_1 + By_2) = f(x)$$

ومنها

$$A(y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1) A'y_1' + B(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + A'y_1' + B'y_2' = f(x)$$

وحيث أن كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) فإن

$$y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1 = 0 \ ,$$
$$y_2'' + a_1 y_2' \div a_2 y_2 = 0$$

بذلك يكون

$$A'y_1' + B'y_2' = f(x) \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (4) و (5) فى الدالتين A, B فأننا نحصل على كل منهما وبمعرفتهما نكون قد حللنا على الحل الخاص (3) وبذلك يمكن إيجاد الحل العام

$y_G = y_h + y_p$ للمعادلة التفاضلية (1) . مع ملاحظة أن هذه الطريقة تستخدم بصفة خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ على إحدى الصور

$$\frac{e^x}{x}, \ \sec x, \ \cot x, \ \tan x, \ \ln x, \ \sin^{-1} x, \ \ldots\ldots$$

والآن سنقوم بتطبيق هذه الطريقة فى الأمثلة الآتية .

٢- أمثلة محلولة :

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هى

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$.

نفترض أن حل هذه المعادلة على الصورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعـويض نجـد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 3 \quad , \lambda_2 = 3$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x}$$

حيث $A(x),\ B(x)$ دالتين في x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = 3Ae^{3x} + A'e^{3x} + B'xe^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^{3x} + B'xe^{3x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = 3Ae^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = 9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

بالتعويض عن كل من $y''_p,\ y'_p,\ y_p$ في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$
$$- 18Ae^{3x} - 6Be^{3x} - 18Bxe^{3x} + 9Ae^{3x} + 9Bxe^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

ومنها نجد أن

$$3A'e^{3x} + B'(1+3x)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

أى أن

$$3A' + B'(1+3x) = \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$A' = -\frac{1}{x} \quad , \qquad B' = \frac{1}{x^2}$$

وبالتكامل نجد أن

$$A = -\ln x \quad , \qquad B = -\frac{1}{x}$$

بذلك يكون

$$y_p = -e^{3x}\ln x - \frac{1}{x}xe^{3x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} - e^{3x}\ln x - \frac{1}{x}xe^{3x}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y = \frac{2}{1+e^x}$$

<u>الحـــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$y'' - y = 0$$

بافتراض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = -1$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^{x} + Be^{-x}$$

بافتراض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^{x} + B(x)e^{-x}$$

حيث $A(x), B(x)$ دالتين فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = Ae^{x} + A'e^{x} - Be^{-x} + B'e^{-x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^{x} + B'e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = Ae^x - Be^{-x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x}$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x} - Ae^x - Be^{-x} = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها نجد أن

$$A'e^x - B'e^{-x} = \frac{2}{1+e^x} \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$2A'e^x = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dA = \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dA = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dx}{e^x} - \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$= -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

ومنها

$$A = -e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})$$

وبطرح (2) من (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dB = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

ومنها

$$B = -\ln\,(1+e^x)$$

بذلك يكون

$$y_p = e^x\left(-e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})\right) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

$$= -1 + e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

مثــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = \tan x$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هى $y'' + y = 0$

نفترض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

وبالتحليل تكون الجذور هى $\lambda = \pm i$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = A\cos x + B\sin x$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$

حيث $A(x), B(x)$ دوال فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x $y_p' = A'\cos x - A\sin x + B'\sin x + B\cos x$

نختار A, B بحيث أن

$$A'\cos x + B'\sin x = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون $y_p' = -A\sin x + B\cos x$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p'' = -A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$-A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x + A\cos x + B\sin x = \tan x$$

ومنها نجد أن

$$-A'\sin x + B'\cos x = \tan x \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (*1*) فى $\sin x$ و المعادلة (*2*) فى $\cos x$ وبجمع المعادلتين الناتجتين نجد أن

$$B'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \tan x \ . \cos x$$

ومنها

$$B' = \sin x \qquad (3)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$B = -\cos x$$

وبالتعويض من (*3*) فى (*1*) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$A' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

ومنها

$$dA = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

وبالتكامل

$$\int dA = -\int(\sec x - \cos x)\ dx$$

$$= -\int \sec x\, dx + \int \cos x\ dx$$

$$A = -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x$$

بذلك يكون الحل الخاص

$$y_p = [-\ln(\sec x + \tan x) + \sin x]\cos x - \cos x .\ \sin x$$

$$= [-\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos x + B\sin x - [\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

تمــاريــن

(١) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية باســتخدام طريقــة تغييــر الوســائط (البارامترات)

(1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

(2) $y'' - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}$

(3) $y'' + 4y = 2\tan x$

(4) $y'' + y = \sec x$

(5) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

(6) $y'' + y = \cot x$

(7) $y'' - y = e^x / 1 + e^x$

(8) $y'' + y = \tan^{-1} x$

(٢) باستخدام طريقة تغيير البارامترات اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int \sin(\omega(x-t)).f(t)\,dt$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

(٣) أوجد الحل العام باستخدام طريقة تغيير البارامترات إذا علم حلان أو $x2$ للمعادلـــة المتجانسة المصاحبة .

i. $x^2 y'' - xy' + y = x^3 \; e^x$

ii. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t / t^3$

iii. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^t / 1 + e^t$

iv. $\dfrac{d^3 z}{d\theta^3} - 3\dfrac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\dfrac{dz}{d\theta} = e^{3\theta} / 1 + e^{\theta}$

الباب التاسع

تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

الباب التاسع

تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية

من الرتبة الثانية

١- مسائل الزنبرك

يتكون نظام الزنبرك البسيط من كتلة متصلة بالطرف السفلى لزنبرك معلق رأسياً من مكان مرتفع . يكون النظام فى موضع الاتزان عندما يكون فى حالة السكون . تبدأ الكتلة الحركة بوسيلة أو أكثر مما يلى : إزاحة الكتلة من موضع اتزانها بإعطائها سرعة ابتدائية أو تعريضها لقوة خارجية $F(t)$.

قانون هوك :

تكون قوة استرداد الزنبرك F مساوية ومضادة للقوى المؤثرة على الزنبرك وتتناسب مع الاستطالة (الانكماش) l للزنبرك كنتيجة للقوة المؤثرة أى أن $F = -kl$ حيث k هو ثابت التناسب ، ويسمى عادة بثابت الزنبرك .

<u>**مثـــال :**</u>

علقت كرة من الصلب وزنها $128\ lb$ فى زنبرك فأحدثت استطالة قدرها $2\ ft$ فى طوله الطبيعى . يكون وزن الكرة $128\ lb$ هو القوة المؤثرة المسئولة عن الاستطالة $(2\ ft)$. وبالتالى فإن $F = -128\ lb$. ومن قانون هوك نجد أن $-128 = -k(2)$ أو $k = 64\ lb/ft$.

نختار الاتجاه الرأسى إلى أسفل هو الاتجاه الموجب ونأخذ نقطة الأصل هى مركز ثقل الكتلة فى موضع الاتزان وذلك للملاءمة . نفرض أن كتلة الزنبرك تافهة ويمكن إهمالها وأن مقاومة الهواء عند وجودها تتناسب مع سرعة الكتلة . وبالتالى عند أى لحظة t ، توجد ثلاث قوى تؤثر على النظام :

(١) $F(t)$ وتقاس فى الاتجاه الموجب .

(٢) قوة الاسترداد المعطاة بقانون هوك وهى : $F_s = -kx, \quad k > 0$.

(٣) قوة مقاومة الهواء وتعطى هكذا $F_a = -ax, \quad a > 0$ حيث a ثابت التناسب .

لاحظ أن قوة الاسترداد F_s تؤثر دائما فى اتجاه بحيث تعيد النظام لموضع الاتزان . إذا كانت الكتلة أسفل موضع الاتزان فإن x تكون سالبة ويكون $-kx$ موجباً ، بينما إذا كانت الكتلة أعلى موضع الاتزان فإن x تكون موجبة ويكون $-kx$ سالباً . نلاحظ أيضا أن قوة مقاومة الهواء F_a تؤثر فى الاتجاه المضاد للسرعة وتعمل على تضاؤل حركة الكتلة وذلك لأن $a > 0$. وينتج الآن من قانون نيوتن الثانى أن $mx = -kx - ax + F(t)$ أو :

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \qquad (1)$$

إذا بدأ النظام الحركة عندما $t = 0$ بسرعة ابتدائية V_o من موضع ابتدائى x_o ، فيكون لدينا الشروط الابتدائية :

$$X(o) = x_o \qquad \ddot{x}(0) = V_o \qquad (2)$$

لاتظهر قوة الجاذبية فى المعادلة (1) صراحة ، وعلى الرغم من ذلك نعوض عن هذه القوة بقياس المسافة من موضع اتزان الزنبرك . إذا أردنا النص على قوة الجاذبية صراحة ، فإنه يجب قياس المسافة من الطرف السفلى لطرف الزنبرك الطبيعى . أى أنه يمكن أن تعطى حركة تذبذب الزنبرك بالعلاقة :

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{F(t)}{m}$$

إذا كانت نقطة الأصل ، $x = 0$ هى نقطة نهاية طرف الزنبرك غير المشدود قبل تعلق الكتلة m .

<u>**مثـــال :**</u>

علقت كرة من الصلب وزنها $128\ lb$ فى زنبرك ، فاستطال الزنبرك $2\ ft$ فى طولـه الطبيعى . بدأت الكرة الحركة بدون سرعة ابتدائية بإزاحتهـا $6\ \ in$ أعلـى موضـع الاتزان . بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد :

(أ) تعبيراً عن موضع الكرة عند أى لحظة t ،

(ب) موضع الكرة عندما $t = \pi/12$.

<u>**الحـــل :**</u>

(أ) تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (1) . لا توجد قوة خارجية وبالتـالى $F(t) = 0$. وبإهمال مقاومة الهواء فى الوسط المحيط ، وعليه فإن $a = 0$. تكون الحركة حرة وغير متضائلة ، ويكون لدينا $g = 32\,ft/sec^2,\ m = 128/32 = 4\ slugs$ ، ينـتج مـن المثـال الأول أن $k = 64\ lb/ft$. تصـبح المعادلـة (1) علـى الصـورة $\ddot{x} + 16x = 0$. ويكون جذرا المعادلة المميزة هما $\lambda = \pm 4i$ ويكون حلها هو :

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t \qquad (1)$$

عندما $t = 0$ يكون موضع الكرة هو $x_o = \frac{1}{2}\ ft$ ، (الإشارة السالبة تكون مطلوبـة لأن الكرة فى البداية أزيحت أعلى موضع الاتزان ، أى أنهـا فـى الاتجـاه السـالب) . باستخدام الشرط الابتدائى فـى (1) نجـد أن $\frac{1}{2} = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin\ 0 = c_1$

وبالتالى تصبح المعادلة (1) على الصورة :

$x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + c_2 \sin 4t \quad (2)$

وقـد أعـطينا السرعة الابتـدائية وهى $V_o = 0\ ft/sec$ بتـفاضل (2) نحـصل على $v(t) = \dot{x}(t) = 2\sin 4t + 4c_2 \cos 4t$ وعليه فإن :

$0 = v(0) = 2\sin 0 + 4c_2 \cos 0 = 4c_2$

وبالتالى فإن $c_2 = 0$ ، وتصبح المعادلة (2) :

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t \qquad (3)$$

كمعادلة الحركة للكرة عند أى لحظة t :

(ب) عندما $t = \pi/12$ فإن

$$x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{12} = -\frac{1}{4}\ ft$$

<u>مثـــال :</u>

عين التردد الدائرى والتردد الطبيعى والزمن الدورى للحركة التوافقية البسيطة المبينة فى المثـــال السابق .

<u>الحـــل</u>

التردد الدائرى $\omega = 4\ cycles/sec. = 4\ Hz$

التردد الطبيعى $f = 4/2\pi = 0.6366\ Hz$

الزمن الدورى $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81\sec$

مثـــال :

علقت كتلة $2\ kg$ فى زنبرك معلوم ثابته الزنبركى وهو $10\,N/m$ وبعد أن أصبح فـــى حالة السكون وضع فى حركة بإعطائه سرعة ابتدائية $150\ cm/sec$. أوجد تعبيراً عن حركة الكتلة ، بإهمال مقاومة الهواء .

الحـــل

تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (1) وهى تمثل حركة غير متضائلة حرة لأنه لا توجد قوة خارجية مؤثرة على الكتلة ، $F(t) = 0$ ، ولا توجد مقاومة من الوسط المحيط ؛ أن أن $a = 0$. وقد أعطيت كتلة وثابت الزنبرك أى $k = 10N/m,\ m=2kg$ على الترتيب . وبالتالى تصبح المعادلة (1) على الصورة $\ddot{x}+5x=0$. ويكون جذرا المعادلة المميزة تخيليين بحت ، ويكون حلها هو :

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{5}\,t + c_2 \sin\sqrt{5}\,t \qquad (1)$$

عندما $t = 0$ ، يكون موضع الكتلة عند موضع الاتزان هو $x_o = 0$. باســتخدام هــذا الشرط الابتدائى فـــى المعادلـــة (1) ، نجـــد أن $0 = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$ وتصبح المعادلة (1) على الصورة $x(t) = c_2 \sin\sqrt{5}\,t\ \ (2)$ ، وقد أعطيـــت الســـرعة الابتدائية وهى $v_o = 150cm/sec = 1.5\ m/sec$ ، وبتفاضل المعادلـــة (2) ، نحصـــل على :

$$v(t) = \dot{x}(t) = \sqrt{5}C_2 \cos\sqrt{5}\,t \quad \text{وعليه فـــإن} : \quad 1.5 = v(0) = \sqrt{5}C_2 \cos 0 = \sqrt{5}C_2$$

ومنها $C2 = \dfrac{1.5}{\sqrt{5}} = 0.6708$. وتصبح المعادلة (2) على الصورة

$$x(t) = 0.6708\left(\sin\sqrt{5}\,t\right) \qquad (3)$$

وهو موضع الكتلة عند أى لحظة t .

مثـــال :

علقت كتلة $10\ kg$ فى زنبرك فأحدثت استطالة $0.7m$ فى طوله الطبيعى . بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية $1m/sec$ فى اتجاه رأسى إلى أعلى . أوجد الحركة التالية إذا كانت قوة مقاومة الهواء هى $-90\dot{x}N$.

الحـــل

بأخذ $g = 9.8\ m/sec^2$ فيكون لدينا $\omega = mg = 98\ N$, $k = \omega / l = 140\ N/m$ وعــلاوة على ذلك تكون $a = 90$ و $F(t) = 0$ (لاتوجد قوة خارجية) . وتصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = 0 \qquad (1)$$

ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -7$ وهما جذران حقيقيـــان ومخـــتلفان ، وهـــذا مثـــــال لحـــركة زائـــدة التضاؤل . ويكـــون حـــل المعادلـــة (1) هو $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-7t}$ ، وتكون الشروط الابتدائية هى $x(0) = 0$ (الكتلة بدأت فى الاتجاه السالب) . باستخدام هذين الشرطين نجد أن $C_1 = -C_2 = +\frac{1}{5}$ ، وبالتالى فإن $x = \frac{-1}{5}(e^{-7t} - e^{-2t})$. لاحظ أن $x \to 0$ عندما $t \to \infty$ ، وبالتـــالى هـــذه الحركـــة عابرة.

مثـــال :

أثبت أن أنواع الحركة الناتجة فى مسائل الحركة المتضائلة الحرة تتعين تماماً بالمقدار $a^2 - 4\ km$.

الحــــل :

يكون للحركة المتضائلة الحرة $F(t) = 0$ ، وتصـــبح المعادلـــة (1) علـــى الصـــورة $\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ، ويكـــون جـــذرا المـــعادلة الممـــيزة المصـــاحبة هـــما $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4km}}{2m}, \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4km}}{2m}$.

إذا كان $a^2 - 4km > 0$ فإن الجذرين حقيقيان ومختلفان ، وإذا كان $a^2 - 4km = 0$ يكون الجذران متساويين ، أما إذا كان $a^2 - 4km < 0$ فإن الجـــذرين مركبـــان مترافقـــان . وتكون الحركة المناظرة هى زائدة المضائلة ، مضائلة حرجة ، تذبذبية مخمدة علـــى الترتيب . وحيث أن الجزء الحقيقى فى كل من الجذرين يكون سالبا دائماً فإن الحركة الناتجة فى الحالات الثلاثة تكون عابرة . (للحركة زائدة المضائلة ، نحتاج لملاحظـــة أن $a^2 - 4km < a$ ، بينما فى كل من الحالتين الأخيرتين يكون الجزء الحقيقـــى هـــو $\left(-a/_{2m}\right)$.

مثـــــال :

علقت كتلة $10\ kg$ فى زنبرك له الثابت الزنبركى $140\ N/m$. بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية $1\ m/sec$ فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى وبقوة مـــؤثرة خارجية $F(t) = 5 \sin t$. أوجد الحركة الناتجة للكتلة إذا كانت قوة مقاومة الهواء هى $-90\dot{x}N$.

الحـــــل

لدينا $F(t) = 5 \sin t,\ m = 10,\ \ k = 140,\ \ a = 90$ وبالتالى تصبح معادلة الحركـــة *(1)* على الصورة :

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = \frac{1}{2}\sin t \qquad (1)$$

ويكون الحـــــل العام للمعادلة المتجانسة المصاحبة $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x$ ، (أنظر مثــــال ٤) هو $x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}$. وباستخدام طريقة المعاملات غير المعنية ، نجد أن :

$$x_p = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t \qquad (2)$$

وبالتالى يكون الحـــــل العام للمعادلة *(1)* هو :

$$x = x_h + x_p = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $x(0) = 0$ ، $\dot{x}(0) = 1$ نحصل على :

$$x = \frac{1}{500}\left(-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13\sin t + 9\cos t\right)$$

لاحظ أن الحدود الأسية ناتجة من x_h وبالتالى تمثل حركة حـــرة زائـــدة المضـــائلة المصاحبة وتتلاشى بسرعة . وتكون هذه الحدود هى الجزء العابر فى الحــــل .

والحدود الناتجة من x_p لا تنتهى عندما $t \to \infty$ وتكون هى جزء حالة الاستقرار فــى الحــــل .

٢- مسائل الدوائر الكهربية :

تتكون الدائرة الكهربية البسيطة من مقاومة R بالأوم ، ومكثف C بالفاراد ، وحث L بالهنرى ، وقوة دافعة كهربية (ق.د.ك.) $E(t)$ بالفولت ، وبطارية أو مولد متصلين جميعهم على التوالى . يقاس التيار I المار فى الدائرة بالأمبير والشحنة q على المكثف بالكولوم .

قانون عقدة كيرشوف

المجموع الجبرى لفروق الجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوى صفراً . من المعلوم أن فروق الجهد خلال مقاوم ، مكثف وحث يكونوا RI, $\left(\frac{1}{C}\right)q$, $L\left(\frac{dI}{dt}\right)$ على الترتيب ، حيث q هى الشحنة على المكثف .

يكون فرق الجهد خلال (ق.د.ك.) هو $-E(t)$ ، وبالتالى فإنه من قانون عقدة كيرشوف يكون لدينا :

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0 \qquad (3)$$

وتكون العلاقة بين I, q هى :

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \qquad (4)$$

وبتعويض هاتين القيمتين فى (3) نحصل على المعادلة التفاضلية للشحنة على المكثف

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t) \qquad (5)$$

ويكون الشرطان الابتدائيان على q هما :

$$q(0) = q_o \qquad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I(0) = I_o \qquad (6)$$

للحصول على معادلة تفاضلية للتيار ، نفاضل المعادلة *(3)* بالنسبة إلى t ثم نعــوض المعادلة *(4)* مباشرة فى المعادلة الناتجة فنحصل على :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} \qquad (7)$$

ويكون الشرط الابتدائى الأول هو $I(0) = I_o$. ونحصل على الشرط الابتدائى الثــانى من المعادلة *(3)* بحلها بالنسبة إلى $\frac{dI}{dt}$ ثم نضع $t = 0$ وبالتالى فإن :

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}E(0) - \frac{R}{L}I_o - \frac{1}{LC}q_o \qquad (8)$$

ويمكن الحصول على تعبير للتيار إما بحل المعادلة *(7)* مباشرة أو بحل المعادلــة *(5)* بالنسبة إلى الشحنة ثم نفاضل هذا التعبير .

مثـــال :

وصـــلت دائـــرة *(RCL)* علـــى التـــوالى لهـــا $R = 180$ ohms, $C = 1/280$ Farad, $L = 20$ henry وجهد مؤثر $E(t) = 10 \sin t$. وبفرض عدم وجود شحنة ابتدائية على المكثف ولكن يوجد تيار ابتدائى *1 ampere* عند $t = 0$ وذلك تأثير الجهد أولاً . أوجــد الشحنة الناتجة على المكثف .

الحـــل :

بتعويض القيم المعطاة فى المعادلة *(5)* نحصل على $\ddot{q} + 9\dot{q} + 14q = \frac{1}{2}\sin t$ وتكون هذه المعادلة مطابقة فى الصورة للمعادلة *(1)* فى المثـــال السابق ، لــذا يجــب أن يكون الحـــل مطابقاً فى الصورة لحل تلك المعادلة . وبالتالى :

$$q = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $q(0) = 0$ ، $\dot{q}(0) = 1,$ نحصل على $c_1 = {}^{110}\!/_{500}$ ، $c_2 = -{}^{101}\!/_{500}$ ، وبالتالى :

$$q = \frac{1}{500}\left(-110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t\right)$$

وكما فى مثال سابق ، يكون الحل عبارة عن مجموع حدود الحل العابر وحدود حل حالة الاستقرار .

مثـــال :

وصلت دائرة *(RCL)* على التوالى لها $R = 10$ *ohms* ، $C = 10^{-2}$ *Farad* ، $L = 05$ *henry* وجهد مؤثر $E(t) = 12$ *volts* . وبفرض عدم وجود تيار ابتدائى ولا شحنة ابتدائية عند $t=0$ وذلك عند تأثير الجهد أولاً . أوجد التيار الناتج فى النظام .

الحـــل :

بتعويض القيم المعطاة فى المعادلة *(7)* نحصل على معادلة تفاضلية متجانسة $\left[{}^{dE}\!/_{dt} = 0,\ \ E = 12\right]$ وهى $\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I = 0$ ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $\lambda_1 = -10 - 10i,\ \lambda_2 = -10 + 10i$ ، وبالتالى يكون هذا مثالا للنظام الحر غير المضائل للتيار . ويكون الحـــل هو :

$$I = e^{-10t}\,(c_1 \cos 10t) + c_2 \sin 10t \qquad (1)$$

ويكون الشرطان الابتدائيان هما $I(0)=0,\ q(0)=0$ ، ومن المعادلة *(8)* يكون :

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{12}{{}^{1}\!/_{2}} - \left(\frac{10}{{}^{1}\!/_{2}}\right)(0) - \frac{1}{\left({}^{1}\!/_{2}\right)\left(10^{-2}\right)}(0) = 24$$

وبتطبيق هذين الشرطين علـــى (1) نحصـــل علـــى $c_1 = 0$ ، $c_2 = \frac{12}{5}$ ، وبالتـــالى $I = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t$ وهو تيار عابر تماماً .

مثـــــال :

حل المثـــــال السابق بإيجاد الشحنة على المكثف أولاً .

الحـــــل

نحل أولاً بالنسبة للشحنة q ثم نستخدم العلاقة $I = {dq}/{dt}$ لنحصـــل علـــى التيـــار . بتعويض القيم المعطاة فـــى المثـــال الســـابق فـــى المعادلـــة (5) ، فيكـــون لـــدينا $\ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = 24$ والتى تمثل نظاماً قسرياً للشحنة على النقيض للنظام المضائل الحر الذى حصلنا عليه للتيار فى المثـــــال السابق . باستخدام طريقة المعاملات غير المعينـــــة لإيجـــــاد حـــــل خـــــاص ، فنحصـــــل علـــــى الحـــــل العـــــام $q = e^{-10t}\left[(c_1 \cos 10t) + (c_2 \sin 10t)\right]$ ويكون الشرطان الابتدائيان $I(0) = 0, q(0) = 0$ ونحصـــــــــــل علـــــــــــى $c_1 = c_2 = -{3}/{25}$ ، وبالتـــــــــــالى $q = -e^{-10t}\left(\frac{3}{25}\cos 10t + \frac{3}{25}\sin 10t\right) + \frac{3}{25}$ ومنهـــا $I = \frac{dq}{dt} = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t$ كما سبق . لاحظ أنه بالرغم من أن التيار يكون عابراً تماماً ، فـــإن الشـــحنة علـــى المكثف تكون هى مجموع حدود كل من الحـــل العابر وحل حالة الاستقرار .

مثـــــال :

وصلت دائرة RCL على التوالى لها مقاومة 5 *ohms* وحث 0.05 *Henry* ومكثف 4×10^{-4} *Farad* وقوة دافعة كهربائية تبادلية $200\cos 100t$ *volts* . أوجد تعبيراً للتيار المار

فى هذه الدائرة إذا كان كلا من التيار الابتدائى والشحنة الابتدائية على المكثف يساوى صفراً .

<u>الحــــل :</u>

لدينا

$$R/L = 5/0.05 = 100,\ 1/(LC) = 1/[0.05(4x10^{-4})] = 50.000$$

$$\frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{0.05}200(-10\sin 100t) = -400.000\sin 100t$$

وبالتالى تصبح المعادلة *(7)* :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 100\frac{dI}{dt} + 50.000I = -400.000\sin 100t$$

ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $-50 \pm 50\sqrt{19i}$ ، وبالتالى يكون حــل المعادلة المتجانسة المصاحبة هو :

$$I_h = c_1e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}\,t + c_2e^{-50t}\sin 50\sqrt{19}\,t$$

وباستخدام طريقة المعاملات غير المعينة ، نجد أن الحل الخاص هو :

$$I_p = \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\sin 100t$$

وبالتالى يكون الحــــل العام هو :

$$I = I_h + Ip = c_1e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}\,t + c_2e^{-50t}\sin 50\sqrt{19}\,t + \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\sin 100t \qquad (1)$$

ويكون الشرطان الابتدائيين هما $I(0) = 0,\ q(0) = 0$ ومن المعادلة *(8)*

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{200}{0.05} - \frac{5}{0.05}(0) - \frac{1}{0.05(4\times 10^{-4})}(0) = 400$$

وبتطبيـــق الشـــرط الأول علـــى المعادلـــة *(1)* مباشـــرة نحصـــل علـــى :
$0 = I(0) = c_1(1) + c_2(0) + \frac{40}{17}$ أو $c_1 = -40/17 = -2.35$ ، بتعويض هذه القيمة فى المعادلة (١) ثم بالتفاضل نجد أن :

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -2.35\left(-50e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}\,t - 50\sqrt{19}e^{-50t}\sin 50\sqrt{19}\,t\right)\\ &\quad + c_2\left(-50e^{-50t}\sin 50\sqrt{19}\,t + 50\sqrt{19}e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}\,t\right)\\ &\quad - \frac{4000}{17}\sin 100t - \frac{16.000}{17}\cos 100t\end{aligned}$$

بينما $4000 = \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = -2.35(-50) + c_2(50\sqrt{19}) - \frac{16.000}{17}$ ومنهـــا $c_2 = 22.13$

وتصبح المعادلة :

$$\begin{aligned}I &= -2.35e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + 22.13e^{-50t}\sin 50\sqrt{19}t\\ &\quad + \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\sin 100t\end{aligned}$$

٣- مسائل الطفو

اعتبر جسماً كتلته m مغمورا إما جزئياً أو كلياً فى سائل كثافته ρ . مثل هذا الجســم يخضع إلى قوتين :

قوة الجاذبية إلى أسفل وقوة معاكسة تحكم بالآتى :

مبدأ أرشميدس

يخضع جسم فى سائل إلى قوة دفع متجهة إلى أعلى تساوى وزن السائل المزاح بالجسم . يحدث الاتزان عندما تكون قوة دفع السائل المزاح (الطفو) تساوى قوة الجاذبية على الجسم . بافتراض اسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها H ، وارتفاع الاسطوانة المغمور h وحدة من ارتفاعها عند حالة الاتزان . عند الاتزان يكون حجم الماء المزاح بالاسطوانة هو $\pi r^2 h$ والذى يعطى قوة الدفع (الطفو) التى يجب أن تساوى وزن الاسطوانة mg ، وعليه فإن :

$$\pi r^2 h = mg \qquad (9)$$

تحدث الحركة عند إزاحة الأسطوانة من موضع الاتزان . نأخذ اختيارياً الاتجاه الرأسى لأعلى هو اتجاه x الموجب . إذا دفعت المياه الأسطوانة $x(t)$ وحدة ، حيث الأسطوانة ليست فى حالة الاتزان . القوة لأسفل أو السالبة على هذا الجسم تبقى mg ولكن قوة الدفع (الطفو) أو الموجبة تختزل إلى $\pi r^2[h - x(t)]\rho$. وينتج من قانون نيوتن الثانى أن :

$$m\ddot{x} = \pi\ r^2[h - x(t)]\rho - mg$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة باستخدام المعادلة (9) إلى $m\ddot{x} = -\pi r^2 x(t)\rho$

أو

$$x + \frac{\pi\ r^2 \rho}{m} x = 0 \qquad (10)$$

مثـــال :

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها $4\ in$ ، ارتفاعهــا $10\ in$ ، ووزنهــا $15\ lb$ ، يمكن أن تطفو فى بركة مياه عميقة كثافتها $62.5\ lb/ft^3$.

الحـــل :

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالقدم) فى موضع الاتزان . حيــث أن $r = \frac{1}{3}\ ft$ فإنه ينتج من المعادلة أن :

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{15}{\pi \left(\frac{1}{3}\right)^2 62.5} = 0.688\ ft = 8.25\ in$$

وبالتالى فإن الاسطوانة سوف تطفو بارتفاع $10 - 8.25 = 1.75\ in$ فوق خط الماء عند موضع الاتزان .

مثـــال :

عين تعبيراً لحركة الاسطوانة المبينة فى المثـــال السابق ، إذا أطلقت بعشرين فــى المائة من طولها أعلى خط الماء بسرعة $5\ ft/sec$ فى الاتجاه الرأسى لأسفل .

الحـــل

لدينا $m = 15/32\ slugs$, $\rho = 62.5\ lb/ft^3$, $r = \frac{1}{3}\ ft$. وتصــبح المعادلــة (10) على الصورة $\ddot{x} + 46.5421x = 0$ ، ويكون جذرا المعادلة المميزة المصــاحبة همــا $\pm\sqrt{46.5421}\ i = \pm 6.82\ i$ ، وعليه يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$x(t) = c_1 \cos 6.82\ t + c_2 \sin 6.82\ t \qquad (1)$$

عندما $t=0$ يكون عشرين فى المائة من طول الاسطوانة $10\ in$ هو $2\ in$ خارج الماء . باستخدام نتائج المثـــال السابق يكون معلوماً أن موضع الاتزان هو 1.75 أعلى الماء وبالتالى عند $t=0$ تكون الاسطوانة مرتفعــة بـــ $\frac{1}{4} in$ أو $\frac{1}{48} ft$ مــن موضــع اتزانها ، ويكون $x(0) = \frac{1}{48} ft$ وتكون السرعة الابتدائية $5\ ft/sec$ فى الاتجاه الرأسى إلى أسفل أو فى الاتجاه السالب ، وبالتالى فإن $\dot{x}(0) = -5$. وبتطبيق هذه الشــروط الابتدائية على المعادلـــة (1) نجـــد أن : $c_1 = \frac{1}{48} = 0.021$ ، $c_2 = \frac{-5}{6.82} = -0.73,$ وتصبح المعادلة (1) على الصورة $x(t) = 0.021 \cos 6.82t - 0.73 \sin 6.82t$.

<u>مثـــال :</u>

عـــين مــا إذا كانت أســطوانة نصـــف قـــطرها $10\ cm$ ، وارتفاعهـــا $15\ cm$ ، ووزنها $19.6\ N$ ، يمكن أن نطفو فى بركة مياه عميقة كثافتها $980\ dynes/cm^3$.

<u>الحـــل</u>

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الأسطوانة (بالسنتيمتر) عند موضع الاتـــزان . عند $mg = 19.6\ N = 1.96 \times 10^6\ dynes,\ \ r = 5\ cm$ فإنه ينتج من المعادلة (9) أن :

$$h = \frac{mg}{\pi\, r^2\, \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi\, (5)^2 (980)} = 25.5cm$$

وحيث أن هذا أطول من ارتفاع الاسطوانة فإن الاسطوانة لايمكن أن تزيح مياه كافية لتطفو وبالتالى سوف تغوص إلى قاع البركة .

<u>مثـــال :</u>

عين ما إذا كانت اسطوانة نصـــف قطرهـــا $10\ cm$ ، وارتفاعهـــا $15\ cm$ ، ووزنهـــا $19.6\ N$ ، يمكن أن تطفو فى بركة مياه عميقة كثافتها $2450\ dynes/cm^3$.

الحـــل

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالسنتيمتر) عند موضع الاتـــزان .
عند $mg = 19.6\ N = 1.96 \times 10^6\ dynes,\ \ r = 5\ cm$ فإنه ينتج من المعادلة (9) أن :

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi (5)^2 (2450)} = 25.5 cm$$

وبالتالى فإن الاسطوانة ستطفو بارتفاع $15 - 10.2 = 4.8\ cm$ أعلـــى موضـــع اتـــزان السائل .

مثـــال :

يطفو منشور مقطعه مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه l فى بركة لســائل كثافتـــه مجهولة بحيث يكون ارتفاعه موازياً للمحور الرأسى . بدأت حركة المنشور بإزاحتـــه من موضع اتزانه وأعطى سرعة ابتدائية . عين المعادلة التفاضلية التى تحدد حركـــة المنشور الناتجة .

الحـــل

يحدث الاتزان عندما تكون قوة دفع السائل المزاح تساوى قوة الجاذبية على الجســم . وتكون مساحة مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه l هو $A = \sqrt{3}\ l^2 / 4$. بفرض ارتفاع h من الوحدات مغمورة عند موضع الاتزان ، ويكون حجم الماء المزاح عنـــد

الاتزان هو $\sqrt{3}\, l^2\, h/4$. بفرض أن قوة الدفع (الطفو) هـــى $\sqrt{3}\, l^2\, h\rho/4$. ومـــن قانون أرشميدس ، يجب أن تساوى قوة الدفع هذه وزن المنشور mg ، وبالتالى :

$$\sqrt{3}\, l^2\, h\rho/4 = mg \qquad (1)$$

نأخذ اختيارياً الاتجاه الرأسى لأعلى هو اتجاه x الموجب . إذا رفع المنشور إلى أعلى سطح الماء بـــ $x(t)$ من الوحدات ، وبالتالى لا يكون فى موضع الاتزان . تبقى القوة على أسفل أو السالبة على الجسم كما هى mg ولكن قوة الدفع (الموجبة) تختزل إلـــى $\sqrt{3}\, l^2\, [h - x(t)]\rho$. وينتج الآن من قانون نيوتن الثانى أن :

$$m\ddot{x} = \frac{\sqrt{3}\, l^2\, [h - x(t)]\rho}{4} - mg$$

وبالتعويض عن المعادلة (1) فى هذه المعادلة الأخيرة وتبســيطها ، نحصــل علـــى $\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}\, l^2 \rho}{4m} x = 0$.

٤- تصنيف الحــلول

تحكم اهتزاز الزنبركات والدوائر الكهربية البسيطة والأجسام الطافية كلها بمعـــادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة على الصورة :

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_o x = f(t) \qquad (11)$$

ويكون لمسائل اهتزاز الزنبرك المعرفة بالمعادلة (1) :

$$f(t) \equiv F(t)/m, \quad a_1 = a/m, \quad a_o = k/m$$

ويكون لمسائل الطفو المعرفة بالمعادلة (10)

$$f(t) \equiv 0, \quad a_1 = 0, \quad a_o = {}^{\pi r^2} \rho/_m$$

ويكون لمسائل الدوائر الكهربية حيث يستبدل المتغير المستقل x إما بـــ q فى المعادلة (5) أو بـــ I فى المعادلة (7) . تقسم الحركة أو التيار فى هذه النظم إلى حرة أو غير متضائلة (أو غير مخمدة) عندما $a_1 = 0, \quad f(t) \equiv 0$ وهى تقسم كحركة متضائلة عندما تكون $f(t)$ صفراً تطابقياً ولكن a_1 لا تساوى صفراً . ويكون للحركة المتضائلة ثـــلاث حالات منفصلة طبقاً لجذور المعادلة المميزة المصاحبة ، وهى :

(١) حقيقية ومختلفة (٢) متساوية (٣) مركبة مترافقة ، وتقسم هذه الحـــالات علـــى الترتيب كما يلى :

(١) زائد المضائلة (٢) مضائلة حرجة (٣) التذبذبية المخمدة (أو ناقصة المضـــائلة فى المسائل الكهربية)

إذا لم تكن $f(t)$ صفراً تطابقياً ، فإن الحركة أو التيار يوصف بأنه قسرى (أو جبرى) . وتكون الحركة أو التيار عابراً إذا أختفى (أى يؤول إلـــى الصـــفر) عنـــدما $t \to \infty$. وتكون حركة حالة الاستقرار أو تيار حالة الاستقرار هى التى ليست عابرة ولاتصبح غير محدودة . تنتج حركات عابرة عن النظم المتضائلة الحرة ، بينما تنتج حركـــات عابرة وحالة الاستقرار عن النظم المتضائلة القسرية (بفـــرض أن القـــوة الخارجيـــة جيبية) . الحركة غير المتضائلة الحرة المعرفة بالمعادلة (11) حيث $f(t) \equiv 0, \ a_1 = 0$ دائماً لها حلول على الصورة :

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \qquad (12)$$

وهى تعرف حركة توافقية بسيطة . $\omega, \ c_1, \ c_2$ ثوابت ، وترمز ω غالباً إلـــى التـــردد الدائرى . ويكون التردد الطبيعى f ، هو $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ ، وهو يمثل عدد الذبذبات الكاملة

لكل وحدة زمن مأخوذة بالحـــــل . ويكون الزمن الدورى للنظام هو الزمن الـــلازم لإكمال دورة واحدة كاملة أى $T = \frac{1}{f}$. يكون للمعادلة *(12)* الصورة التبادلية .

$$x(t) = (-1)^k A \cos (\omega t - \phi) \qquad (13)$$

حيث السعة $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ ، وزاوية الطور $\phi = \arctan \left({}^{c_2}\!/_{c_1} \right)$ وتكون k مســـاوية الصفر عندما تكون c_1 موجبة وتساوى الوحدة عندما تكون c_1 سالبة .

تمارين

١. علق وزن $32\ lb$ فى زنبرك فأحدث استطالة $8\ ft$ فى طوله الطبيعى . بدأ الـــوزن الحركة بإزاحته $1\ ft$ فى الاتجاه الرأسى إلى أعلـــى وإعطائـــه ســـرعة ابتدائيـــة $2\ ft/sec$ فى الاتجاه الرأسى لأسفل . أوجد حركة الوزن الناشئة ، إذا كان الوسط المحيط يعطى مقاومة مهملة .

٢. عين (أ) التردد الدائرى و(ب) التردد الطبيعى و(ج) الزمن الدورى للاهتـــزازات المبينة فى مثـــــال (٩) .

٣. علقت كتلة $\frac{1}{2}\ slug$ فى زنبرك فأحدثت استطالة $2\ ft$ فى طوله الطبيعـــى . بـــدأت الكتلة الحركة بدون سرعة ابتدائية بازاحته $\frac{1}{2}\ ft$ فى الاتجاه الرأسى إلى أعلـــى . أوجد الحركة التالية للكتلة إذا كان الوسط يعطى مقاومة $-4x\ lb$.

٤. وصلت دائرة (RCL) علـــى التـــوالى حيـــث $R = 6\ ohms$ ، $C = 0.02\ Farad$ ، $L = 0.1\ Henry$ ولها جهد مؤثر $E(t) = 6\ volts$. وبفرض عدم وجود تيار ابتدائى وشحنة ابتدائية عند $t = 0$ ، وذلك عند تأثير الجهد أولاً . أوجد الجهد التالى على المكثف والتيار فى الدائرة .

٥. وصـــلت دائـــرة RCL علـــى التـــوالى ، بمقاومـــة $5\ ohms$ ، ومكثـــف ســـعته $4 \times 10^{-4}\ Farad$ ، وحـــث $0.05\ Henry$ ، ولهـــا قـــوة دافعـــة كهربيـــة مـــؤثرة $E(t) = 110\ volts$. وبفرض عدم وجود تيار ابتـــدائى وشـــحنة ابتدائيـــة علـــى المكثف ، أوجد تعبيراً لكل من التيار المار خلال الدائرة والشحنة على المكثـــف عند أى لحظة t .

٦. وصلت دائرة RCL على التوالى ، بمقاومة 16 *ohms* ومكثف سعته 0.02 *Farad* ، وحث 2 *Henry* ولها جهد مؤثر $E(t) = 100 \sin 3t$ وبفرض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية على المكثف ، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة على المكثف عند أى لحظة t .

٧. عين موضع اتزان اسطوانة نصف قطرها 3 *cm* ، ارتفاعها 10 *cm* ، وكتلتها 700 *g* ، والتى تطفو بحيث يكون محورها رأسياً فى بركة مياه عميقة كثافتها $1\ g/cm^3$.

٨. يطفو صندوق على شكل متوازى مستطيلات عرضه ω وطوله l وارتفاعه h فى بركة سائل عميقة كثافتها ρ بحيث يكون ارتفاعه موازياً للمحور الرأسى . بدأ الصندوق الحركة بإزاحته x_o وحدة من موضع اتزانه وإعطائه سرعة ابتدائية v_o . عين المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة الصندوق التالية .

الباب العاشر

تحويل لابلاس وتطبيقاته

الباب العاشر

تحويل لابلاس واستخدامه فى حل المعادلات التفاضلية العادية

Laplace Transform

يستخدم بتحويل لابلاس فى حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية .

١- **تعريف** : (تحويل لابلاس)

يسمى التكامل (1)

$$\bar{f}(p)=\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-px}\ dx \quad , \quad p>0$$

بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز $L\{\ \}$ و فى هذه الحالة يمكن كتابة *(1)* على الصورة :

$$L\{f(x)\}=\bar{f}\ (p)=\int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\ \ dx \quad , \quad p>0 \qquad (2)$$

٢- **خواص المؤثر** $L\{\ \}$:

نفترض ان α و β ثابتين وأن كل من *f(x)* و *g(x)* دالة فى المتغير x و أن $L\{\ \}$ هو مؤثر لابلاس ، فإن :

$$1-L\{\alpha\ f(x)\}=\alpha\ L\{f(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة *(1)* نجد أن :

$$L\{\alpha\ f(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ \ f(x).\ e^{-px}\quad dx$$

$$=\alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\quad dx$$

$$=\alpha\ L\{f(x)\}$$

$$2-L\{\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)\}=\alpha\, L=\{f(x)\}+\beta L\{g(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة *(1)* وحيث أن كل من $\propto$ و β ثابتين فإن :

$$L\{\alpha\ f(x)+\beta\, g(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ \ f(x)+\beta\, g(x).\ e^{-px}\quad dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha\, f(x)\ .\ e^{-px}\quad dx+\int_0^\infty \beta\, g(x).e^{-px}\, dx$$

$$=\alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\quad dx+\int_0^\infty \beta\, g(x).e^{-px}\, dx$$

$$=\alpha\ L\{\ f(x)\}+\beta\, L\{g(x)\}$$

مما سبق نستنتج أن المؤثر *{ }L* مؤثر تكاملى خطى .

<u>تعريف</u> : (تحويل لابلاس العكسى)

اذا كان $\quad L\{f(x)\}=f(p)\quad$ فإن $\quad f(x)=L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويسمى $L^{-1}\{\ \}$ بمؤثر لابلاس العكسى للمؤثر *{ }L* . وهذا المؤثر له الخواص الآتية :

$1-L\{L^{-1}\{\bar{f}(p)\}\}=\bar{f}(p),$

$2-L^{-1}\{L(f(p))\}\}=f(p),$

$3-L^{-1}\{a\bar{f}(p)\}=\alpha\, L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويمكن إيجاد تحويل لابلاس لكل دالة تحقق الشرط :

$$|f(x)| < M e^{\alpha x}$$

حيث α و M عددان حقيقيان موجبان .

تسمى الـــدوال التى تحقق الشرط السابق دوال لها درجـــة أسية α وهى الـــدوال التى على الصورة $x^k,\ \sin kx,\ \cos kx,\ ....$

والآن سنوجد تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

(١) اذا كان $f(x)=1$

فإن

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

اى أن

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

(٢) اذا كان $f(x) = x^n \ ;\ n \ge 1$:

فإن

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty x^n e^{-px}\,dx$$

وبوضع $px = u$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \ ;\ n = 1,2,3,........ \qquad (4)$$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{ax}$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن

$$L\{e^{ax}\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{ax} e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)x}\, dx$$

$$L\{e^{ax}\} = \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a}$$

وبالتالى فإن

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} \quad ; \quad p>a \tag{5}$$

(٤) إذا كان $f(x)=\sin ax$ حيث a ثابت حقيقى :

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty \sin ax e^{-px}\, dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2+a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2} \tag{6}$$

(٥) إذا كان $f(x)=\cos ax$ حيث a ثابت حقيقى:

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty \cos ax.\, e^{-px}\, dx$$

فإن

$$= \frac{p}{p^2+a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\cos ax\}=\frac{p}{p^2+a^2} \qquad (7)$$

(٦) إذا كان $f(x)=\sinh ax$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن

$$L\{\sinh ax\}=\bar{f}(p)=\int_0^\infty \sinh ax . e^{-px}\,dx$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

أى أن :

$$L\{\sinh ax\}=\frac{a}{p^2-a^2} \qquad (8)$$

ذلك لأن :

$$\int_0^\infty \sinh ax . e^{-px}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{ax}-e^{-ax}\right).e^{-px}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(p-a)x}-e^{-(p+a)x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}-\frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

وبطريقة أخرى :

$$L\{\sinh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}-L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

(٧) إذا كان $f(x)=\cosh ax$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن :

$$L\{\cosh ax\}=\frac{p}{p^2-a^2} \qquad (9)$$

وذلك لان

$$L\{\cosh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}\ L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{p}{p^2-a^2}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج فى الجدول التالى :

S. No.	$f(x)$	$L f(p)$
1	1	$1/p\,,\ p>0$
2	x^n (n is a + v θ integer)	$n!/p^{n+1},\ p>0$
3	$x^n,\ n>-1$	$\Gamma(n+1)/p^{n+1},\ p>0$
4	x^{ax}	$1/(p-a),\ p>0$
5	$\sin^{-ax}$	$a/(p^2+a^2),\ p>0$
6	$\cos ax$	$p/(p^2+a^2),\ p>0$
7	$\sinh ax$	$a/(p^2-a^2),\ p>\lvert a\rvert$
8	$\cosh ax$	$p/p^2-a^2),\ p>\lvert a\rvert$

نظرية (١) :

إذا كانت $L\{f(x)=\bar{f}(p)$ فإن $L\{e^{-ax}f(x)\}=\bar{f}(p+a)$

البرهان :

من تعريف مؤثر لابلاس نجد ان :

$$L\left\{e^{-ax}\,f(x)\right\}=\int_{0}^{\infty}\cdot e^{-ax}\,f(x).e^{-px}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\cdot e^{-(a+P)x}\,f(x).\,dx=f(p+a)$$

مثـــال :

أثبت أن $L\{x^n e^{-ax}\}=\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}};n=1,2,3,......$

الحــــل:

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن

$$L\left\{x^n\,e^{-ax}\right\}=\int_{0}^{\infty}x^n\;e^{-ax}\;.e^{-px}\;dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}x^n\;e^{-(a+P)}\,.\,dx=\bar{f}(p+a)$$

ولدينا :

$$L\left\{x^n\right\}=\bar{f}(x)=\frac{n!}{p^{n+1}}\;;\;n=1,2,3,\;........$$

وعلى ذلك فإن

$$L\left\{x^n\,e^{-ax}\right\}=\bar{f}(p+a)=\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}\;;\qquad n=1,2,3,.......$$

نظرية (٢):

إذا كانت $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p); = 1, 2, 3 ....$

البرهان

حيث أن $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$

بالإشتقاق بالنسبة إلى p ومع خواص التفاضل والتكامل ، فإننا نحصل على

$$\frac{d}{dp}\bar{f}(p) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}(e^{-px}) f(x)dx$$

$$= -\int_0^\infty xe^{-px} f(x)dx$$

$$= -L\{xf(x)\}$$

بتكرار هذا الاشتقاق مرة أخرى نجد أن

$$\frac{d^2}{dp^2}\bar{f}(p) = (-1)^2 L\{x^2 L\{x^2 f(x)\}.$$

بتكرار هذا الاشتقاق بالنسبة إلى p عدد $(n\text{-}2)$ من المرات نحصل على العلاقة :

$$\frac{d^n}{dp^n}\bar{f}(p) = (-1)^n L\{x^n f(x)\} \quad ; \qquad n = 1, 2, 3$$

<u>مثـــال :</u>

إثبت أن $L\{x\cos ax\} = \dfrac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$

الحــــل:

لدينا $L = \{\cos ax\} = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$

بتطبيق نظرية (٢) فإن :

$$L\{x \cos ax\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2 + a^2}\right)$$

$$= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

نظرية (٣) : (تغير المقياس) *Change of scale*

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{f(ax)\} = \dfrac{1}{a}\bar{f}\left(\dfrac{p}{a}\right)$

مثــــــال:

أوجد $L\{\sin 3x\}$

الحــــل:

لدينا $L \ \{\sin x\} = \dfrac{1}{p^2 + 1}$

فإن $L \ \{\sin 3x\} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{3}{p^2 + 9}$

نظرية (٤):

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$ ، فإن $L\{\int_0^x (f(u)du\} = \dfrac{\bar{f}(p)}{p}$

مثـــــال:

أوجد $L\{\int_{0}^{x}\sin 2u\,du\}$

الحـــــل:

لدينا $L\{\sin 2x\}=\dfrac{2}{p^2+4}$ فيكون $L\{\int_{0}^{x}\sin 2u\,du\}=\dfrac{2}{p(p^2+4)}$

نظرية (٥) : القسمة على x

إذا كان $L(f(x))=\bar{f}(p)$ فإن $L\{\dfrac{f(x)}{x}\}=\int_{p}^{\infty}\bar{f}(u)\,du$

بشرط أن تكون $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ موجودة

مثـــــال:

أوجد $L=\{\dfrac{\sin x}{x}\}$

الحـــــل :

حيث أن $L\{\sin x\}=\dfrac{1}{p^2+1}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

فإن $L=\{\dfrac{\sin x}{x}\}=\int_{p}^{\infty}\dfrac{du}{u^2+1}=\tan^{-1}(\dfrac{1}{p})$

٣- تحويلات لابلاس العكسية *Inverse Laplace transforms*

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

وبافتراض أن L^{-1} هو المؤثر العكسى للمؤثر L فإن :

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$

وعلى هذا فإنه مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلى:

١- إذا كان $L = \{1\}\frac{1}{p}$ فإن $L^{-1}\{\frac{1}{p}\} = 1$

٢- إذا كان $L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}; n = 1,2,3....$ فإن $L^{-1}\{\frac{n!}{p^{n+1}}\} = x^n; n = 1,2,3$

٣- إذا كان $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a}$ فإن $L^{-1}\{\frac{1}{p-a}\} = e^{ax}$

٤- إذا كان $L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2}$ فإن $L^{`}\{\frac{p}{p^2+a^2}\} = \cos ax$

وهكذا بالنسبة لباقى الدوال

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ حيث a, b ثابتان .

الحـــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}$$

بالضرب فى $(p+a)\ (p+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A=-B=\frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{1}{a-b}[\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}]$$

وباستخدلم مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}[L^{-1}\{\frac{1}{p+a}-L^{-1}\frac{1}{p+b}]$$

$$=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

وبالتالى فإن

$$L^{-1}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ حيث a , b ثابتان حقيقيان.

الحـــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}[\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}[L^{-1}\{\frac{p}{p^2+a^2}\}-L^{-1}\{\frac{p}{p^2+b^2}\}]$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax-\cos bx)$$

وبالتالى
$$[L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\}=\frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax-\cos bx)]$$

<u>مثـــــال:</u>

أوجد $L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\}$ حيث a ثابت.

<u>الحـــــل:</u>

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{a}{p(p+a)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+a}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{p}\}-L^{-1}\{\frac{1}{p+a}\}$$
$$=1-e^{-ax}$$

وبالتالى
$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\}=1-e^{-ax}$$

٤ - تحويلات لابلاس للمشتقات *Laplace Transforms of Derivatives*

نفترض أن الدالة $y(x)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، فإن مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$.

ويعرف كالاتى : $L\{\frac{dy}{dx}\}=\int_0^\infty e^{-px}\frac{dy}{dx}dx$ أى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^\infty e^{-px} dy$$

$$= [ye^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty ye^{-px} dx$$

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

وبالتالى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0) \qquad (1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالآتى:

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} d(\frac{dy}{dx})$$

$$= [\frac{dy}{dx}e^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty \frac{dy}{dx}e^{-px} dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0))$$

من هذا نحصل على

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = p^2\bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \qquad (2)$$

حيث $y(0)$ هى قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$0 =$ و $y^{(1)}$ هى قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$.

والصيغة العامة هى

$$L\{\frac{d^ny}{dx^n}\} = p^n\bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) \qquad (3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هى قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$ و $r - 0,1,....n-1$.

٥ - تطبيقات تحويل لابلاس :

سوف نستخدم تحويل لابلاس ومعكوسة فى حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية .

أ- حل المعادلات التفاضلية العادية:

كتطبيق لتحويلات لابلاس سندرس فى الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية العادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

مثـــــال:

أوجد حل المعادلة النفاضلية العادية

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

حيث $y(0) = 1$

الحـــــل:

بالتأثير بمؤثر لابلاس على طرفى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$L\{\frac{dy}{dx}\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

لدينا

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0)$$
$$L\{y(x)\} = \bar{y}(p)$$
$$L\{\cos x\} = \frac{p}{p^2+1}$$

فنحصل على

$$py(p) - y(0) + 2y(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{(p+2)}$$

ولكن من الشروط الإبتدائية $y\,(0) = 1$ نحصل على :

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{(p+2)}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = -\frac{2}{5}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{5}(\frac{1+2p}{p^2+1})$$

ومنها

$$\bar{y}(p) = -\frac{2}{5}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{5}(\frac{1+2p}{p^2+1}) + \frac{1}{p+2}$$

$$= \frac{1}{5}(\frac{1}{p^2+1}) + \frac{2}{5}(\frac{p}{p^2+1}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{p+2})$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى نحصل على

$$y(x) = \frac{1}{5}L^{-1}[\frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{5}L^{-1}\{\frac{p}{p^2+1}\} + \frac{3}{5}L^{-1}\{\frac{1}{p+2}\}$$

$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

مثـــال

حل المعادلة $y'(0)=2 \quad , \quad y(0)=1$ و $y''+y=x$

الحـــل:

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\}+L\{y(x)\}=L\{x\}$$

وبالتالى فإن

$$p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)+\bar{y}=\frac{1}{p^2}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية

$$p^2\bar{y}(p)-p+2+\bar{y}=\frac{1}{p^2}$$

وعليه فإن

$$\bar{y}=L\{y\}=\frac{1}{p^2(p^2+1)}+\frac{p-2}{p^2+1}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية فنحصل على

$$\bar{y}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+1}$$

$$=\frac{1}{p^2}+\frac{p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على

$$y=L^{-1}\{\frac{1}{p^2}+\frac{p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+1}\}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y=x+\cos x-2\sin x$$

مثـــــال:

حل المعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, \qquad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

الحـــــل:

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على

$$l\{\frac{d^{2y}}{dx^2}\} - 3L\{\frac{dy}{dx}\{+2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالى

$$\{p^2 y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية فنجد أن

$$\{p^2\bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2y = \frac{4}{p-2}$$

وعلى ذلك

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p-2)} + \frac{14 - 3p}{P^2 - 3p + 2}$$

$$\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = -7\, e^x + 4\, e^{2x} + 4\, x\, e^{2x}$$

ب) المعادلة التفاضلية الجزئية

ليكن الدالة $y(x,t)$ معرفة على الفترة $a \le x \le b$ و $t > o$.

وإذا نظرنا إلى $y(x,t)$ كدالة فى t ، ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$ وأنها متصلة فى أجزاء (piece wise) على كل فترة محدودة من $t \ge 0$ فإننا نستخدم الرموز التالية

$$L\{y(x,t)\} = \int_0^\infty e^{pt} y(x,t)dt = \bar{y}(x,p) = \bar{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_x(x,t), \frac{\partial y}{\partial t} = y_t(x,t)$$

$$(\frac{\partial y}{\partial x})_{x=0} = y_x(0,t), (\frac{\partial y}{\partial t})_{t=o} = y(x,0)$$

فيكون لدينا

$$(i) \quad L\{\frac{\partial y}{\partial t}\} = p\bar{y}(x,p) - y(x,o)$$

$$(ii) \quad L\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\} = p^2 \bar{y}(x,p) - py(x,0) - y_t(x,o)$$

$$(iii) \quad L\{\frac{\partial y}{\partial x}\} = \frac{d\bar{y}}{dx} \qquad iv) \quad L\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\} = \frac{d^2\bar{y}}{dx^2}$$

<u>مثـــــال:</u>

حل المعادلة: $\frac{\partial y}{\partial x} = y + 2(\frac{\partial y}{\partial t})$ ، $y \quad (x, 0) = 6\, e^{-3x}$

والتى تكون محدودة لكل $x > 0$ ، $t > 0$

<u>الحـــــل :</u>

ليكن $l = \{y(x,t)\} = \bar{y}(x,p)$ وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على :

أى أن $\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{y} + 2[p\bar{y} - y(x,0)]$

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{y} + 2(p\bar{y} - 6e^{-3x}) \qquad (1)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية ويكون عامل التكامل هو

$$I = e^{-\int [2p+1]dx} = e^{-(2p+1)x}$$

ويكون حل المعادلة *(1)* هو

$$\overline{ye}^{(2p+1)x} = c - 12\int e^{-2x}, e^{(2p+1)x}dx$$

أى أن

$$\overline{ye}^{(2p+1)x} = c - 12\int e^{-3x}e^{-(2p+1)}dx$$

$$= c + \frac{6}{p+2}e^{-2(p+2)x}$$

$$\bar{y}(x,p) = ce^{(1+2p)x} + (\frac{6}{p+2})e^{-2x} \qquad (2)$$

وحيث أن *y(x,t)* محدودة عند ما $x \to \infty$ فينتج أن $\bar{y}(x,p)$ يجب أن تكون أيضا محدودة عندما $x \to \infty$ ، وباستخدام هذه الحقيقة فى *(2)* نرى أن يجب أخذ *C=0* وبالتالى فإن *(2)* تؤول إلى : $\bar{y}(x,p) = (6e^{-2x})/(p+2)$

وباخذ معكوس لابلاس نحصل على

$$y(x,t) = 6e^{-2x}L^{-1}\{\frac{1}{p+2}\} = 6e^{-2x}.e^{-2t} = 6e^{-(2x+2t)}$$

<u>مثـــــال:</u>

حـــــل المعادلة $\frac{\partial y}{\partial t} = 2\frac{o^2 y}{ox^2}$

حيث $y(x,0) = 10\sin 4\pi x$ ، $y = (5,0) = y(o,t) = 0$

الحـــــل:

ليكن $L = \{y(x,t) = \bar{y}^{(x,p)}$

وباخذ تحويل لابلاس للطرفين للمعادلة المعطاة نحصل على

$$p\bar{y} - y(x,0) = 2\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{p}{2}\bar{y} = -5\sin 4\pi x$$

أى أن $[D^2 - (\frac{p}{2})]\bar{y} = -5\sin 4x$

ويكون حل الدالة المتممة هو $\bar{y}_h = c_1 e^{\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-x\sqrt{p/2}}$

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\bar{y}_p = \frac{1}{D^2 - \left(\frac{p}{2}\right)}(-5\sin 4\pi x) = \frac{-5}{-4(4\pi)^2 - \frac{p}{2}}\sin 4\pi x$$

$$= \frac{10\sin 4\pi x}{32\pi^2 + p}$$

ويكون الحل العاملالمعادلة هو

$$\bar{y}(x,p) = c_1 e^{x\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-x\sqrt{p/2}} + \frac{10\sin 4\pi x}{32\pi^2 + p} \qquad (1)$$

وباخذ تحويل لابلاس للشروط الابتدائية $y(0,t) = 0$ ، $y(5,t) = 0$ نجد أن

$$y(0,p) = 0 \qquad (2)$$

$$y(5,p) = 0 \qquad (3)$$

بوضع $x = 0$ فى (1) وباستخدام (2) نجد أن

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (4)$$

ويوضع $x = 5$ فى *(1)* واستخدام *(3)* نجد أن

$$c_1 e^{5\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{p/2}} = 0 \qquad (5)$$

ومن *(5)* , *(6)* نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ ومن *(1)* نحصل على

$$\bar{y}(x, p) = 10 \sin 4\pi x / (32\pi^2 + p)$$

وبأخذ التحويل لابلاس العكسى نجد أن

$$y(x,t) = 10 \sin 4\pi x \, L^{-1}(32\pi^2 + p)$$

$$= 10 \; e^{-32\pi 2} \sin 4\pi x$$

جـ) المعادلات التكاملية:

الصورة العامة للمعادلة التكاملية هى

$$f(t) = g(t) + \int_a^t (k,u) f(u) du \qquad (1)$$

حيث النهاية العليا للتكامل إما أن تكون ثابتا أو متغير. الدالتان $K(t,u)$, $g(t)$ معلومتان أما الدالة $f(t)$ فهى مجهولة يراد تعينها. تسمى الدالة $k(t,u)$ بالنواة *(kernel)* . عندما تكون $k(t,u)$ على الصورة $k(t-u)$ فيقال أنها المعادلة *(1)* من نوع الحوية (التفاف *convolution*) (أنظر الحوية).

أما المعادلة التفاضلية التكاملية *Integro-Differential Equation* فهى معادلة تكاملية تحتوى $f(t)$, $f^{l}(t)$.

مثـــــال:

حل المعادلة التكاملية

$$f(t) = t^2 + \int_d^t f(u) \sin(t-u) du$$

الحـــل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة $f(t) = t^2 + f(t) * \sin t$

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على:

$$\bar{f}(p) = \frac{2}{p^2} + L\{f(t)\}L\{\sin t\} = \frac{2}{p^2} + \frac{\bar{f}(p)}{p^2+1}$$

أى أن

$$\bar{f}(p) = \frac{p^2+1}{p^5} = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}$$

وباخذ معكوس لابلاس نحصل على :

$$f(t) = 2(\frac{t^2}{2}) + 2(\frac{t^4}{4}) = t^2 + t^4/12$$

مثـــال:

حل المعادلة التفاضلية التكاملية

$$f'(t) = \sin t + \int_0^6 f(t-u).\cos u \, du$$

الحـــل :

بإعادة كتابة المعادلة على الصورة

$$f(t) = \sin t + f(t) * \cos t \qquad , \qquad F(0) = 0$$

وباخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل

$$p\bar{f}(p) - f(0) = \frac{1}{p^2+1} \; . \; L\{f(t)\} \; . L\{\cos t\}$$

أى أن

$$p\bar{f}(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{p\bar{f}(p)}{p^2+1}$$

أو

$$(p-\frac{p}{p^2+1})\bar{f}(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

أى

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{p^3}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على :

$$f(t)=t^2/2!=\frac{t^2}{2}$$

الحوية الإلتفاف - الطى (Comvolution)

تكون الحوية لدالتين $g(x), f(x)$ على الصورة

$$f(x)*g(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt \qquad (1)$$

نظرية ٦: العلاقة التالية صحيحة

$$f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$$

نظرية ٧ : (نظرية الحوية)

إذا كان $L\{f(x)\}=F(p)$ ، $L\{g(x)\}=G(p)$

فإن $L=\{f(x)*g(x)\}=L\{f(x)\}L\{g(x)\}=F(p)G(p)$

نستنتج مباشرة من هاتين النظرتين

$$L^{-1}\{F(p)\,G(p)=f(x)*g(x)=g(x)*f(x) \qquad (2)$$

إذا كانت إحدى الحويتين فى المعادلة *(1)* أبسط فى الحساب فإننا نختار تلك الحوية عند تعيين معكوس تحويل لابلاس للضرب.

مثـــــال:

أوجد $f(x) * g(x)$ عندما $g(x) = e^{2x}, f(x) = e^{3x}$

الحـــــل :

لدينا $f(t) = e^{3e}$ ، $g(x\text{-}t) = e^{2(x-t)}$

و

$$f(x)*g(x) = \int_0^x e^{3t}e^{2(x-t)}dt = \int_0^x e^{3t}e^{2x}e^{2t}dt$$

$$= e^{2x}\int_0^x e^{t}dt = e^{2x}[e^{t}]_{t=0}^{t=x} = e^{2x}(e^{x}-1) = e^{3x}-e^{2x}$$

مثـــــال:

أوجد $g(x) * f(x)$ للدالتين فى المثال السابق . وحقق نظرية (٦)

الحـــــل :

حيث أن $g(t)\ e^{2t}\ , f(x\text{-}t) = e^{3(x-t)}$ فإن

$$g(x)*g(t) = \int_0^x g(t)f(x-t)dt = \int_0^x e^{2t}e^{3(x-t)}dt$$

$$= e^{3x}\int_0^x e^{-t}dt = e^{3x}[-e^{-t}]_{t=0}^{t=x}$$

$$= e^{3x}(-e^{-x}+1) = e^{3x}-e^{2x}$$

والتى من المثال السابق فهى تساوى $f(x) * g(x)$

مثـــــال:

أوجد $f(x) * g(x)$ عندما $g(x) = x^2$ ، $f(x) = x$

الحـــــل:

لدينا $f(t) = t$ ، $g(x\text{-}t) = (x\text{-}t)^2 = x^2 \text{-}2x + t^2$ وعلى ذلك :

$$f(x) * g(x) = \int_0^x t(x^2 - 2xt + t^2 dt$$

$$= x^2 \int_0^x t dt - 2x \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^3 dt$$

$$= x^2 \frac{x^2}{2} - 2x\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = \frac{1}{12}x^4$$

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 - 5 + 6}\right\}$ بواسطة الحوية.

الحـــــل :

لاحظ أن $$\frac{1}{p^2 - 5p + 6} = \frac{1}{(p-3)(p-2)} = \frac{1}{p-3}\cdot\frac{1}{p-2}$$

ليكن $F(p) = \dfrac{1}{(p-3)}$ ، $G(p) = \dfrac{1}{(p-2)}$. ولدينا $f(x) = e^{3x}$ ، $g(x) = e^{2x}$.

وينتج أن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 - 5p + 6}\right\} = f(x) * g(x) = e^{3x} * e^{2x} = e^{3x} - e^{2x}$$

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{p^2-1}\right\}$

الحـــــل :

لاحظ أن
$$L^{-1}\left\{\frac{6}{p^2-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{6}{(p-1)(p+1)}\right\}=6\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right\}$$

ليكن
$$G(p)=\frac{1}{(p-1)} \qquad , \qquad F(p)=\frac{1}{(p+1)}$$

لدينا
$$g(x)=e^{-x} \qquad , \qquad f(x)=e^{x}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{6}{p^2-1}\right\}=6\,L^{-1}\{F(p)\;G(p)\}=6\,e^{x}\;*\,e^{-x}$$

ينتج من ذلك أن
$$=6\int_0^x e^{t}e^{-(x-t)}dt=6e^{-x}\int_0^x e^{2t}dt$$

$$=6e^{-x}\left[\frac{e^{2x}-1}{2}\right]_0^x=3e^{x}-3e^{-x}$$

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p-1)^2}\right\}$ بواسطة الحوية.

الحـــــل :

إذا عرفنا $F(p)=G(p)=\dfrac{1}{(p-1)}$ فإن $f(x)\;=\;g(x)\;=\;e^{x}$

ويكون
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\}=L^{-1}\{F(p)\;G(p)\}=f(x)*g(x)$$

$$=\int_0^x f(t)g(x-t)dt=\int_0^x e^{t}e^{x-t}dt$$

$$=e^{x}\int_0^x(1)dt=xe^{x}$$

مثــــــال:

برهن النظرية (٦).

الحـــــل :

نضع التعويض $\tau = x - t$ فى الطرف الأيمن من المعادلة *(1)* . فنحصل على

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_x^0 f(x-\tau)g(\tau)(-dt)$$

$$= -\int_x^0 g(\tau)f(x-\tau)d\tau = \int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau$$

$$= g(x) * g(x)$$

مثــــــال:

أثبت أن $f(x) * [g(x0+h(x)=f(x)*g(x)+f(x)*g(x)$

الحـــــل :

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = \int_0^x f(t)[g(x-t+h(x-t)]dt$$

$$= \int_0^x f(t)g(x-t) + f(t)h(x-t)dt$$

$$= \int_0^x f(t)g(x-t)dt + \int_0^x f(t)h(x-t)dt$$

$$= f(x) * g(x) + f(x) * h(x) = R.H.S$$

تمارين

(أ) أوجد تحويل لابلاس للدوال التالية :

e^{3x}, $e^{3x}\sin x$, $\cos 2x$, $e^{3x}\cos 2x$, x^3, $x\cos 3x$, $x^2\sin x$,

$\int_0^t te^{-3t}dt$, $x\sinh x$, $\dfrac{e^{-ax}-e^{bx}}{x}$, $\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}$, $\dfrac{\sinh x}{x}$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية

(1) $y^n+3y'+2y=0,$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1$

(2) $y''+4y=f(x)$

(3) $y''+2y'+5y=e^{-1}\sin t,$ $\quad y(0)=0,\ y$

(4) $y'''-3y'+3y'-y=t^2e^t, y(0)=1,$ $\quad y'(0), y''(0)=2$

(ج) أوجد باستخدام معكوس لابلاس العكسى فيما يلى:

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2+a^2}\right\}$ $\qquad$ (ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^{n+1}}\right\}$

(iii) $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+2}\right\}$ $\qquad$ (iv) $L^{-1}\left\{\dfrac{6p-4}{p^2-4p+20}\right\}$

(v) $L^{-1}\left\{\dfrac{3p+7}{p^2-2p-3}\right\}$ $\qquad$ (vi) $L^{-1}\left\{\dfrac{3p+7}{p^2-2p+3}\right\}$

(د) استخدم نظرية الحوية لحساب ما يلى:

(١) أوجد $x*\cos x$ $\qquad$ (٢) أوجد $2*x$

(٣) أوجد $4x*e^{2x}$ $\qquad$ (٤) أوجد $e^{4x}*e^{-2x}$

(٥) أوجد $x*e^{x}$ $\qquad$ (٦) أوجد $x*xe^{-x}$

(٧) أوجد $3*\sin 2x$ $\qquad$ (٨) أوجد $x*\cos x$

(هـ) استخدم الحويات لإيجاد معكوس لابلاس للدوال المعطاة

(1) $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$ (2) $\dfrac{1}{(p)(p)}$

(3) $\dfrac{2}{p(p+1)}$ (4) $\dfrac{1}{p^2+3p-40}$

(5) $\dfrac{3}{P^2(p^2+3)}$ (6) $\dfrac{4}{p(p^2+4)}$

(7) $\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$ مستخدما $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$ ، $G(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)}$

و) أوجد المحدود للمعادلة $\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $t>0, x>0$ تحت الشروط

$y(o,t)=1,\ y(x,0)=0$

ز) أوجد الحل المحدود

$$y(x,o)=10\sin 4\pi y-5\sin 6\pi x,\ y(5,t)=y(o,t)=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}=2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ح) أوجد الحل المحدود $y(x,0)=x,\ t>0,\ o<x<1,\ \dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial t}=1-e^{-t}$

ط) حل المعادلات التكاملية التالية

$$(i)\ f(t)=1+\int_0^t f(u)\sin 1(t-u)du$$

$$(ii)\ f(t)=e^{-t}-2\int_0^t f(u)\cos 1(t-u)du$$

$$(iii)\ f'(t)=t+\int_0^t f(t-u)\cos u\,du,\ F(0)=0$$

الباب الحادى عشر

استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

الباب الحادى عشر

حل المعادلات التفاضلية بطريقة المتسلسلات

Solution of Differential Equations by use of Series

درسنا فى الأبواب السابقة بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ومن بينها استخدام المتسلسلات ، أما المعادلات التفاضلية من الرتب العليا فإنه فى اغلب التطبيقات العملية تكون معادلات غاية فى الأهمية ولا يمكن حلها بالطرف العادية حيث أن حلها تحتوى على دوال معقدة غير معروفة لنا (مثال ذلك المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة سواء كانت خطية أو غير خطية) . ولذلك سنتعرض لدراسة طريقة المتسلسلات لإيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية ، وستقتصر دراستنا بالتفصيل على معادلات الرتبة الثانية لأهميتها فى المجالات العملية ويتضح هذا الأسلوب لحل المعادلات التفاضلية الأمثلة المعطاة .

١- مقدمة :

بعض الخواص على العلامة التجميعية Σ:

$$(1)\ \sum_{n=p}^{k} Fn) = F(p) + F(p+1) + \ldots + F(k), \qquad k > p$$

حيث K,p أعداد صحيحة .

$$(2)\ \sum_{n=p}^{\infty} a_n F(n) x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} a_{n-p} F(n-p) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} F(n+p) x^{n+2p}$$

مثـــــال:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n^2 a_n x^{n-2} + n a_n x^{n+5}] = \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)^2 a_{n+2} x^2 + \sum_{n=5}^{\infty}(n-5)a_{n-5}x^n$$

$$(3)\ If \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n \Rightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$$

مثـــــال:

إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$\therefore n c_n = c_{n-1} \Rightarrow c_n = \frac{c_n - 1}{n}$$

$$n = 1 \quad c_1 = c_0 \quad , \qquad c_2 = \frac{c_1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}, \ \dots \ , c_n = \frac{c_0}{n!}$$

تعريف: متسلسلة قوى x حول $x = a$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

وإذا كان $a = 0$ فنحصل على

$$\therefore \quad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

تعريف :

نفترض أن المعادلة

$$P_0(x)\, y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$$

حيث كل من $P_0(x), P_1(x)\ , P_2(x)$ دوال تحليلية فى x (أى يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسلة قوى فى x) فإن:

(١) $x = a$ (نقطة عادية) *ordinary point* إذا كان $P_0(a) \neq 0$.

(٢) أما إذا كانت $P_0(a) = 0$ فإن $x = 0$ تسمى نقطة شاذة *(Singular point)* .

مثــــال:

حل المعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = 0$

الحـــل:

نفترض أن الحل على صورة متسلسلة لانهائية

$$y = a_0 + a_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots\dots \qquad (1)$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots\dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 + 12a_4x^2 + \dots\dots$$

$$xy = +a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \dots\dots$$

$$xy'' = +2a_2x + 6a_3x^2 + 12a_4x^3 + 20a_5x^4 + 30a_6x^5 = 0$$

وقد وضعنا الحدود المتشابهة تحت عمود واحد لسهولة الحل

$$y'' = y' + x\,y = a_1 + (a_0 + 4a_2)\,x + (a_1 + 9a_3)\,x^2 + (a_2 + 16a_4)\,x^3 + \dots\dots$$

وحيث أن هذه متطابقة فانه بوضع المعاملات مساوية الصفر

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{4}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{9} = 0,$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{16} - \frac{a_0}{4.16}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{25} = 0, \quad a_6 = \frac{-a_4}{36} = \frac{a_0}{4.16.36}$$

وبذلك نحصل على

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots\dots\dots = 0$$

وبالتعويض بالقيم المتبقية فى المعادلة *(1)* نحصل على :

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4\ .\ 16} - \frac{x^6}{4\ .\ 16\ .\ 36} + \dots\right)$$

وهذا الحل يمكن كتابته أيضا فى الصورة:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots\dots\dots\dots\right) \qquad (2)$$

يتبقى الآن سؤلان:

(١) هل المتسلسلة *(2)* التى تمثل حل المعادلة *(1)* تقاربية ولأى قيم للمتغير x ؟

(٢) هلى المتسلسلة *(2)* فعلا حلا للمعادلة *(1)* ؟

<u>الإجابة:</u>

الإجابة على السؤال الأول بسيطة ومن معلوماتنا عن المتسلسلات يمكننا مثلا تطبيق اختبار النسبة لنرى أن المتسلسلة *(2)* تقاربية لجميع قيم x .

أما بالنسبة للسؤال الثانى فالإجابة عليه هو أن نسلك الطريق العكسى بمعنى أننا نفاضل المتسلسلة *(2)* حدا بعد حد مع الأخذ فى الاعتبار النظرية الهامة والقائلة بأن "عملية تفاضل متسلسلة ما تقاربية حدا بحد لا يؤثر فى تقاربها "ثم نعوض فى المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنها تحققها (يترك هذا كتمرين) .

ملحوظة أخيرة على هذا المثال : بالنظر إلى المتسلسلة *(2)* نجد أنها غير مألوفة لنا (بمعنى أنها ليست على صورة المتسلسلة الأسية أو اللوغاريتمية أو حتى متسلسلة جيب أو جيب التمام) وأول من اكتشف هذه المتسلسلة هو العالم الفلكي بسل *F. Bessel* . ولذلك تسمى المتسلسلة *(2)* بمتسلسلة بسل من الرتبة صفر (لأنه كان قد اكتشف متسلسلات أخرى من الرتبة ١ ، ٢ ، ٣ ، ......) ويرمز للمتسلسلة *(2)* بالرمز $j_o(x)$ ويمكن حساب

$J_0(0) = 1$, $J_0(1) = 0.76$, $J_0(2) = 0.22$

$J_0(3) = 0.26$, $J_0(4), = -0.40$, $J_0(5) = 0.18$

انطلاقاً من هذا المثال نخطو الآن نحو الطرق المختلفة لحل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات :

٢- طريقة متسلسلات تايلور: *The method of Taylor Series*

الحل المطلوب لمعادلة تفاضلية ما هو $y(x)$ وانه يمكن وضعه على صورة مفكوك حول النقطة $x = a$ أي أن:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + y'''(a)(x-a)^3 + \ldots \qquad (3)$$

بهذه الطريقة يمكننا كتابة الحل $y\,(x)$ على هذه الصورة إذا ما علمت المشتقات . $y'(a)$, $y''(a)$, ...

مثـــال :

حل المعادلة $y'' = x\,y$

الحـــل:

نفترض أن $a = 0$ وأن الحل المطلوب هو :

$$y = c_1 + c_2 x + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

وبتطبيق نفس الأسلوب كما فى المثال السابق نحصل على الحل على الصورة :

$$y = c_1 + c_2 x + c_1 \frac{x^3}{3} + 2 8_2 x^4 + \frac{4 c_1 x^6}{6} + ...$$

$$y = c_1\left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{4x^6}{6} + ...\right) + c_2\left(x + \frac{2x^4}{4} + \frac{10x^7}{7} + ...\right)$$

وهذا هو الحل العام وسنترك اختبار تقارب هذه المتسلسلة كتمرين.

<u>مثـــال</u>:

حل المعادلة التفاضلية التالية فى صورة متسلسلة قوى فى x.

$$(1-x^2)\, y'' + xy' - y = 0$$

<u>الحــل</u>:

لدينا $P_0(x) = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; P_0(0) = 1 \neq 0$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة عادية .

نفترض أن الحل على الصورة : $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

وعلى ذلك : $y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \qquad y'' \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$

بالتعويض فى المعادلة نحصل على :

$$(1 + x^2)\sum_{n=2} c_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=0} c_n x^n = 0$$

$$\therefore \sum_{n=2} c_2 n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2} c_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1} c_n n x^n - \sum_{n=0} c_n x^n = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n-2} بالصفر فنحصل على:

$$\therefore \quad c_n n (n-1) + c_{n-2} (n-2) (n-3) + c_{n-2} (n-2) - c_{n-2} = 0$$

$$\therefore \quad c_n n (n-1) + c_{n-2} [n-2)^2 - 1] = 0$$

$$\therefore \quad c_n n (n-1) + c_{n-2} (n-3) (n-1) = 0, \qquad n \geq 2$$

$$\therefore \quad c_n n + c_{n-2} (n-3) = 0$$

∴ العلاقة التكرارية

$$c_n = \frac{3-n}{n} c_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

نفترض أن c_2, c_1 ثابتان اختياريان وعلى ذلك فإنه عندما :

$$n = 2: \qquad c_2 = \frac{1}{2} c_0$$

$$n = 4: \qquad c_4 = \frac{-1}{4} c_3 = \frac{-1}{8} c_0$$

$$n = 6: \qquad c_6 = \frac{-3}{6} c_4 = \frac{3}{48} c_0 = \frac{1}{16} c_0$$

$$n = 8: \qquad c_8 = \frac{-5}{8} c_6 = \frac{-5}{128} c_0, \qquad k$$

$$n = 3: \qquad c_3 = 0 \Rightarrow c_5 = c_7 = \dots = 0$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x x^n$$

$$= c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots] + (c_1 x + c_3 x^3 + \dots]$$

$$= c_0 [1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \dots] + c_1 x$$

أى أن الحل العام هو :

$$y = A \, [1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \dots] + Bx$$

مثــــال:

أوجدى حل المعادلة التفاضلية التالية فى صورة متسلسلة قوى $(x-2)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)\frac{dy}{dx}+y=0$$

الحـــل:

حيث أن $x=2$ نقطة عادية نفترض أن $x-2=z$ وبالتالى فإن :

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2} \qquad , \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\therefore \frac{d^2y}{dz^2}+(z+1)\frac{dy}{dz}+y=0$$

وعلى ذلك فإن $z=0$ نقطة عادية.

نفترض أن الحل على الصورة : $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$

فيكون : $\frac{d^2y}{dz^2}=\sum c_n n(n-1)z^{n-2} \quad , \quad \therefore \frac{dy}{dz}=\sum c_n n z^{n-1}$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة

$$\therefore \sum c_n n(n-1)z^{n-2}+\sum c_n nz^n+\sum c_n nz^{n-1}+\sum c_n z^n=0$$

بمساواة مجموع معاملات z^{n-2} (أقل أس لــ z) بالصفر نجد أن

$$\therefore c_n n(n-1)+c_{n-2}(n-2)+c_{n-1}(n-1)+c_{n-2}=0$$

$$\therefore c_n n(n-1)=-(n-1)(c_{n-1}+c_{n-2}); \qquad n\ge 2$$

$$\therefore c_n=\frac{-1}{n}[c_{n-1}+c_{n-2}] \qquad n\ge 2$$

نفترض أن c_0, c_1 ثابتان اختياريان فنجد أن :

$$\therefore c_2 = \frac{-1}{2}(c_1 + c_0)$$

$$\therefore c_3 = \frac{-1}{3}(c_2 + c_1) = \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{2}(c_1 + c_0) + c_1\right] = \frac{-1}{6}[c_1 - c_0$$

$$\therefore c_4 = \frac{-1}{4}(c_3 + c_2) = \frac{-1}{4}\left[\frac{1}{6}(c_0 - c_1) - \frac{1}{2}(c_1 + c_0)\right] = \frac{1}{12}(c_0 + 2c_1)$$

وبالتالى يكون حل المعادلة على الصورة :

$$y = \sum c_n z^n$$

$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots\ldots$$

$$= c_0\left[1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16}z^3 + \frac{1}{12}z^4 + \ldots\right] + c_1\left[z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \ldots\right]$$

وعلى ذلك يكون الحل العام المطلوب للمعادلة المعطاة هو :

$$y = A\left[1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 + \ldots\right]$$

$$+ B\left[(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{6}(x-2)^4 + \ldots\right]$$

٣- طريقة فروبنيوس The method of Frobenius

فى بعض الأحيان يكتشف الباحث فى المجالات التطبيقية أن المعادلة التفاضلية التـــى لديه لا يمكن حلها بالطرق العادية ولا حتى بطرق المتسلسلات الســابقة ، أى أنـــه لا يمكن كتابة الحل فى صورة متسلسلة قوى فى x أو على صورة مفكوك تـــايلور ومـــا على الباحث حينئذ إلا أن يفترض صورة أخرى للحل (وهو مازال يســتخدم طريقـــة المتسلسلات) إذا نفترض أن الحل على الصورة :

$$y = x^c(a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^3 + ...)$$

$$= x^c \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ x^r \qquad , \qquad a_o \neq 0 \qquad (4)$$

هذه المتسلسلة هى تعميم للمتسلسلة *(1)* لأنه بوضـــع $c = 0$ فـــى *(4)* نحصـــل علـــى المتسلسلة *(1)* والمتسلسلة *(4)* تعرف بمتسلسلة فروبنيوس وهى ذات فاعلية فى إيجـــاد حل المعادلة التفاضلية التى على الصورة :

$$P(x) . y'' + q(x)\ y' + r(x)\, y = 0$$

حيث r, q, p كثيرات حدود فى x .

مثـــــال :

حل المعادلة التفاضلية $4\,x\,y'' + 2y' + y = 0$

الحـــــل :

نفترض أن الحل على صورة المتسلسلة *(4)* والتى يمكن كتابتها كما يلى :

$$y(x) = a_o\ x^c + a_1 x^{c+1} + a_2 x^{c+2}\, a_3\, x^{c+3} + a_4\, x^{c+4} + ...$$

$$y' = ca_o\, x^{c-1} + a_1\,(c+1)\,x^c + a_2\,(c+2)\,x^{c+1} + a_3\,(c+3)\,x^{c+2} + ...$$

$$y'' = c\,(c-1)\,a_o\,x^{c-2} + a_1\,c(c+1)\,x^{c-1} + a_2\,(c+1)(c+1)\,x^c + ...$$

أى أن :

$$4xy'' = 4c(c-1)a_o x^{c-1} + 4a_1 c(c+1)x^c + 4a_2(c+1)(c+1)x^{c+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2y' = 2c\,a_o\,x^{c-1} + 2a_1(c+1)x^c + 2a_2(c+2)x^{c+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = \qquad + a_0\,x^c \qquad + a_1\,x^{c+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} 4\,x\,y'' + 2y' + y = {} & 2\,a_o\,c + 4\,c\,(c-1)\,a_o\,x^{c-1} \\ & + 4(c+1)ca_1 + 2(c+1)a_1 + a_o\,x^c \\ & + 4(c+2)(c+1)a_2 + 2(c+2)a_2 + a_1\,x^{c+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

ولكن هذه متطابقة فى قوى x وبمساواة معاملات x المختلفة بالصفر نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} & 2\,a_0\,c + 4c\,a_0\,(c-1) = 0 \\ & 4\,(c+1)\,c\,a_1 + 2\,(c+1)\,a_1 + a_o = 0 \\ & 4\,(c+2)\,(c+1)\,a_2 + 2\,(c+2)\,a_2 + a_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

وهكذا ....

نفترض أن $a_o \neq 0$ فإنه يكون لدينا من المعادلات (5) :

$$c = 0 \qquad\qquad c = ½$$

أى أن الجذرين مختلفين والفرق بينهما عدد كسرى "الحالة الأولى" .

هاتان القيمتان حصلنا عليهما من المعادلة الأولى فى (5) وتسمى هذه المعادلة والناتجة من مساواة معامل أقل قوة للمتغير x بالصفر بالمعادلة الدليلية *Indicial Equation* وجذورها بالجذور الدليلية *Indicial Roots* وذلك بعد وضع $r = 0$ أى أن الجذور الدليلية للمعادلة المعطاة هى : $c = 0 \quad , \quad c = ½$

من المعادلة الثانية نحصل على :

$$a_1 = \frac{a_o}{4(c+1)c+2(c+1)}$$

ومن المعادلة الثالثة فى *(5)* نحصل على :

$$a_2 = \frac{-a_1}{4(c+2)(c+1)+2(c+2)}$$

وهكذا ..... وعموماً :

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{4(c+n)(c+n-1)+2(c+n)} \qquad , n = 1, \ 2, \ 3, \ .... \qquad (6)$$

والمعادلة *(5)* تسمى بالعلاقة التكرارية *Recurrence Relations* والتـــى منهـــا يمكـــن استنتاج باقى المعاملات بدلالة c .

وفى هذا المثال هناك حالتان :

(i) عند $c = 0$ لتكون المعاملات هى :

$$a = -\frac{1}{2}a_o \ , \ a_2 = -\frac{a_1}{12} = \frac{a_o}{24} \ , \ a_3 = -\frac{a_2}{30} = -\frac{a_o}{720} \ , \ .....$$

وبذلك يكون :

$$y = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + ...\right)$$

حيث A هو ثابت اختيارى بدلاً من a_o .

(ii) عند $c = ½$ يكون لدينا بعد التعويض عن هذه القيمة فى العلاقة التكرارية لجميـــع قيم :

$$a_1 = -\frac{a_o}{6} \ , \ a_2 = -\frac{a_2}{20} = \frac{a_o}{120} \ , \ a_3 = -\frac{a_0}{42} = -\frac{a_o}{5040} \ , \ .....$$

وعلى ذلك فإن :

$$y = B\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7} + \ldots\ldots\right)$$

حيث هنا B هو ثابت اختيارى بدلاً من a_o :

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة هو :

$$y = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right) + B\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7} + \ldots\right)$$

واضح أن كلا من المتسلسلتين تقاربتان لجميع قيم x .

وبتعودنا على شكل المتسلسلات المختلفة يمكننا استنتاج أن الحل هو فعلاً :

$$y = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$$

وطبعاً ليس هذا التوفيق دائماً فى أن نعرف مفكوك المتسلسلات التى يحتويها الحل أى دوال تناظر .

والآن لحل المعادلة التفاضلية :

$$P(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = 0$$

لابد من مراعاة بعض الملاحظات على هذه المعادلة والتى نضعها فى صيغة تعاريف :

تعريف (١) : يقال للنقطة $x = a$ أنها نقطة عادية *Ordinary Point* للمعادلة *(7)* إذا كان $P(a) \neq 0$.

تعريف (٢) : إذا كان $P(a) = 0$ فإن النقطة $x = a$ تسمى نقطة شاذة *Singular Point* للمعادلة *(7)* .

تعريف (٣) : إذا كان $P(a) = 0$ وكانت النهايتان :

$$\lim_{x \to a}(x-a)\frac{q(x)}{p(x)} \quad and \quad \lim_{x \to a}(x-a)^2\frac{r(x)}{p(x)}$$

موجودتان فإن النقطة $x=a$ تسمى نقطة شاذة منتظمة *Regular Singular Point* وإلا كانت هذه النقطة ، نقطة شاذة غير منتظمة .

نظرية : إذا كانت $x = a$ نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة فإنه يوجد دائماً للمعادلة *(7)* حل في الصورة :

$$\begin{aligned} y &= (x-a)^c\left[a_o + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots\dots\right] \\ &= (x-a)^c \sum a_r (x-a)^r \quad , \quad a_o \neq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

وهذا الحل يعرف بمتسلسلة فروبنيوس حول النقطة $x = a$

ملحوظة (١) : في المثال السابق والأمثلة التالية تكون $x=0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك) .

ملحوظة (٢) : إذا لم يذكر قيمة a فإنه يفهم أن $a = 0$.

التعاريف السابقة بالإضافة إلى النظرية تمكننا من معرفة ما إذا كان للمعادلة *(7)* حل في الصورة *(8)* أم لا .

وعموماً إذا كانت المعادلة الدليلية لها جذران غير متساويان α , β والفرق بينهما عدد كسري فإننا نحصل على حلين مستقلين بالتعويض عن هذه القيم للعدد C في المتسلسلة :

$$y = x^c\left(a_o + a_1 x + a_2 x + \dots\dots\right)$$

الحالة الثانية : الجذران متساويان أى أن $x = \beta$ فإننا نحصل على حلـين مسـتقلين بالتعويض عن قيم c فى y وفى $\partial y / \partial c$. الحل الثانى يتكون عادة من حاصل ضرب الحل الأول (أو مضروباً فى ثابت) فى $\ln x$ مضافاً إلى متسلسلة أخرى .

مثـــال :

حل معادلة بسل من الرتبة صفر ونحصل عليها من معادلة بسل من الرتبة n :

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0$$

بوضع $n = 0$ نحصل على :

$$x^2 y'' + x\, y' + x^2\, y = 0$$

أى أن :

$$x\, y'' + y' + x\, y = 0 \qquad (2)$$

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = x^c \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

وبالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على :

$$(c+r)(c+r-1)a_r\, x^{c+r-1} + (c+r)a_r\, x^{c+r-1} + a_r\, x^{c+r-1} = 0$$

وبمساواة معامل أقل أس بالصفر أيِ معامل x^{c+r-1} وهو :

$$(c+r)(c+r-1)a_r + (c+r)a_r + a_{r-2} = 0$$

$$(c+r)(c+r-1+1)a_r + a_{r-2} = 0 \;\Rightarrow\; (c+r)^2\, a_r = a_{r-2} \qquad (3)$$

لكل قيم r .

وهى العلاقة التكرارية ، وبوضع $r = 0$ نحصل على المعادلة الدليلية :

$$(c+0)^2\, a_0 = a_{-1} \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \quad a_{-1} = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$$

بما أن (3) هى علاقة بين r و $(r-2)$ فيكون لدينا :

$$a_1 = a_3 = a_5 = \text{.........} \qquad = a_{2S+1} = 0$$

$$a_{2s} = \frac{(-)\,a_{2s-2}}{(c+2s)^2} = \frac{(-1)^2\, a_{2s-4}}{(C+2s)^2\,(c+24-2)^2}$$

أى أن :

$$a_{2s} = (-1)^s a_o\,(c+2s)^2\ (c+2s-2)\text{..........}(c+2)^2$$

إذن

$$y = x^c\left[a_o + \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} x^{2s}\right]$$

$$= x^c\, a_o + a_o \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^s\ x^{2s}}{(c+2s)^2\ (c+2s-2)^2\ \text{.......}(c+2)^2}$$

إذن أحد الحلين هو :

$$y_1(c=0) = a_1 + \frac{(-1)^s\ x^{2s}}{(2s)^2\ (2s-2)^2\ \text{......}2^2}$$

$$= a_o\left[1 + \frac{(-1)^s\ \left(\frac{1}{2}x\right)^{2s}}{s1\ \ s1}\right] = A\ j_o(x)$$

والحل الآخر هو : $\left(\partial y / \partial c\right)$ عند $c = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial c}(y(c)) = x^c \ln x_o\, a + a\frac{(-1)^s\ x^{2s}}{(c+2s)^2\text{.......}(c+2)^2} +$$

$$x^c\,\frac{2x^2}{(c+2)} - \frac{2x^4}{(c+2)^2\ (c+4)^2}$$

وعلى ذلك يكون

$$\left.\frac{\partial y}{\partial c}\right|_{c=0} = a_o \ln x\, y_1(x) + a_o\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2.4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

أى أن الحـــــل الثانى هو :

$$y_2 = B\left[\ln x \, . \, y_1(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 . 4^2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + ...\right]$$

ويكون الحل العام هو : $y = y_1 + y_2$

الحالة الثالثة : الجذران مختلفان والفروق بينهما عدد صحيح K يجعل المعامل a_k لا نهائى .

فى هذه الحالة نضع $\alpha - \beta = K$ وإذا كان أحد معاملات y أصبح لا نهائى عندما $c = \beta$ فإننا نحصل على حلين مستقلين بوضع $c = \alpha$ ، $c = \beta$ فى $\frac{\partial}{\partial c}(c - \beta) y$ بعد التفاضل .

<u>مثـــال :</u>

حل معادلة بسل من الدرجة الأولى :

$$i.\,e. \;\; x^2 \;\; y'' + x\, y' + \left(x^2 - 1\right) y = 0$$

نفترض أن $y = x_c \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, x^r$ ، $a \neq 0$ وبالتعويض فى المعادلة السابقة :

$$\therefore \sum (c+r)(c+r-1) a \; x^{c+r} + \sum (c+r)\; a_r \;\; x^{c+r} + \sum a_r \, x^{c+r} + \sum a_r x^{c+r+2} = 0$$

وبمساواة معامل أقل أس لـــ x بالصفر وهو معامل x^{c+r} :

$$\left[(c+r)(c+r-1) + (c+r) - 1\right] a_r + a_{r-2} = 0$$

$$\left[(r+c)(r+c) - 1\right] \, a_r + a_{r-2} = 0$$

$$\therefore a_r = {-a_{r-2}} \Big/ (c+r-1)(c+r+1)$$

المعاملة الدليلية هى (بوضع $r = 0$) : $\left(c^2 - 1\right) a_o = 0$

حيث $a_2 = 0 \ , \ a_o \neq 0$ $\quad \therefore c = 1 \quad , \quad -1$

$a_1 = 0$ لقيمتى c وعلى ذلك :

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$a_{2s} = -a_{2s-2}(c+2s-1)(c+2s+1)$$

$$a_{2s-2} = \frac{(-1)^2 \qquad a_{2S-4}}{(c+2s+1)\,(c+2s+1)\,(c+2s-3)\,(c-2s-1)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2s} = {(-1)^s a_o} \Big/ {(c+2s-1). \qquad .(c+1)(c+2s+1)\ldots(c+3)}$$

الحل الأول :

$$y_1 = y(c=1) = x^c\left(a_o + \sum_1^{\infty} a_{2s} \ x^{2s}\right)$$

أى أن :

$$y_1 = x\left(a_o + \sum \frac{(-1)^s \ a_o x^{2s}}{2s\,(2s-2)\ldots 2\,(2s+2)\,(2s\ldots 4)}\right)$$

$$= a_o x\left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^S \qquad x^{2s}}{2^s \quad s \quad 2^s \ (s+1)}\right)$$

$$= 2a_o \sum_0^{\infty} \frac{(-1)\left(\frac{1}{2}x\right)^{2s+1}}{s \quad (s+1)}$$

الحـــــل الثانى :

عند $C = -1$

$$y = \frac{\partial}{\partial c}\left[(c+1)y\right]$$

الذى يعطى :

$$y_2 = \beta\left[\ln x \sum \frac{(-1)^s}{s}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2s}-1}{(s-1)} + \frac{1}{x}\right.$$

$$\left. + \sum^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(s-1)}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2s-1}}{s}\left(1+\frac{1}{2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2s}\right)\right]$$

الحالة الرابعة : الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح K يجعل أحد المعاملات غير معين .

فى هذه الحالة يكون للمعادلة الدليلية جذران $\alpha\ ,\ \beta$ ، $\alpha - \beta = K$ عدد صحيح وإذا كان أحد المعاملات غير معين عندما $c = \beta$ فإن حل المعادلة يعطى بوضع $C = \beta$ فى y التى تحتوى على ثابتين اختياريين ، إذا وضعنا $c = \alpha$ فى y فإنه يعطى إحدى المتسلسلتين الموجودة فى الحل الأول مضروبة فى ثابت .

مثال :

حل المعادلة $\left(1 + x^2\right)y'' - 2x\,y' + 2y = 0$

الحل :

بوضع $y = x^c \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r\, x^r$ فى المعادلة كما سبق فيكون معامل x^{c+r-2} هو :

$$(c+r)(c+r-1)a_r - (c+r-2)(c+r-3)\, a_{r-2} - 2(c+r-2)a_{r-2} + 2a_{r-2} = 0$$
$$(c+r)(c+r-1)a_r = [(c+r-2)(c+r-1) - 2]a_{r-2}$$

بوضع $r = 0$ فنحصل على المعادلة الدليلية :

$$c(c-1)a_o = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = 0, \qquad c = 1$$

وتكون للعلاقة التكرارية :

$$a_r = \frac{(c+r-2)(c+r-1)-2}{(c+r)(c+r-1)}\, a_{r-2}$$

عند $c = 0$ نحصل على :

$$a_r = \frac{(r-2)(r-1)-2}{r(r-1)} a_{r-2}$$

$$a_r = \frac{r-3}{r-1} a_{r-2} \qquad a = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$a_{2S} = \frac{2S-3}{2S-1} a_{2S-2}$$

$$a_{2s-2} = \frac{(2S-3)(2S-5)}{(2S-1)(2S-3)}\, a_{2S-4}$$

$$= \frac{2S-5}{2S-1}\, a_{2S} = \frac{-1}{2S-1} a_o$$

يكون الحل الأول :

$$y_1 = (at\, C = 0) = a_o + a_1 X\;\; a_o X^2 - \frac{a_o}{3} X^4 - \frac{a_o}{5} X^6 - \frac{a_o}{7} X^8 \ldots\ldots\ldots$$

$$y_1 = a_o\left[1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\right] + a_1 x$$

$$y = A\left[1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 + \ldots\ldots\right] + \beta x$$

حيث A, β ثابتان اختياريان وهو يمثل الحل العام للمعادلة .

أى عند $c = 1$

$$a_r = \frac{(r-1)(r)-2}{r(r+1)}$$

$$= \frac{-(r-1)(r-2)}{r(r+1)} a_{r-2}$$

$$a_r = \left[{(r-2)}/{r} \right] a_{r-2}$$

$$a_1 = 0 = a_3 = a_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ويكون الحل الثانى هو $y = a_o x$ وهو جزء من الحل الأول (أى $c = 1, \;\; y = a_o x^c$)

ويكون الحل العام هو : $y = A y_1 + \beta y_2$

حيث A , β ثابتان اختياريان .

ملحوظة : يمكن استخدام طريقة فروبنيوس لإيجاد الحل عند قيم x الكبيرة جداً (أنظر الجزء الثانى من الكتاب) مع أمثلة متعددة محلولة .

تماريـــن

١- أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية في صورة متسلسلة لانهائية ثم حاول مقارنته بالحل الكامل للمعادلة :

i. $y'' + y = 0$ ii. $y'' - y - 2y = 0$

iii. $y'' + y' = 0$ iv. $x^2 y'' + xy + (x^2 - 1)y = 0$

v. $(1 - x^2)y - 2x\,y' + 6y = 0$ $y(1) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$

vi. $(x - 2x)y'' + (2 - 2x)y' + 2y = 0$ $y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 1$

vii. $y'' + x\,y = \sin x$

٢- أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية باستخدام مفكوك تايلور وذلك حـــول النقطة $(a, 0)$.

i. $y'' + y = x$ ii. $y'' = x + 4y \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$

iii. $y'' + xy + y = 0$

iv. $x^2 y'' = x + 1 \quad , \quad y(1) = y'(1) = 0 \quad (a = 1)$

٣- أوجد حل المعادلات التالية في متسلسلة قوى $(x-1)$:

i. $(x^2 - 2x + 2)y'' - 4(x - 1)y' + 6y = 0$

ii. $y'' + (x - 1)^2 y' - 4(x - 1)y = 0$

iii. $y'' + (x - 1)y' + y = 0$

٤- أوجد بطريقة فروبنيوس حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية :

i. $xy'' + y = 0$ ii. $x^2 y'' + xy + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)y = 0$

iii. $x(1-x)y''+2y'+2y=0$ iv. $x^2y''+xy+(x^2-4)y=0$

v. $xy''-y'+4x\ 3y=0$ vi. $xy''+2y'+xy=2x$

٥- اثبت أنه لا يوجد حل على صورة متسلسلة فروبنيوس للمعادلة :

$$x^4y''+2x^3y+y=0$$

حل المعادلة باستخدام التعويض $x=\dfrac{1}{U}$

٦- بين كيفية إيجاد حل على صورة سلسلة فروبنيوس للمعادلة :

$$(\sin x)y''+xy'+y=0$$

٧- المعادلة التفاضلية :

$$x(1-x)y''+y-(a+B+1)xy'-aBy=0$$

تسمى بمعادلة جاوس التفاضلية *Gauss's Differential Equation*

أو المعادلة التفاضلية فوق الهندسية *Hypergeometric Differential Equation*

أثبت أن حلها بطريقة المتسلسلات هو متسلسلة على الصورة

$$y=1+\frac{a\ B}{1y}x+\frac{a(a+1)\,B(B+1)}{12\,y(y+1)}x^2+\ldots$$

(تسمى هذه المتسلسلة فوق الهندسية *(Hupergemetric Series*

٨- حل المعادلات :

(1) $4xy''+2y'$

(2) $2x(1-x)y''+(1-x)y'+3y=0$

(3) $(x-x^2)y''+(1-x)y'-y=0$

(4) $xy''+(1+x)y'+2y=0$

(5) $x^2y''+xy'-2xt+2y=0$

(6) $x(1-x)y''3xy'-y=0$

(7) $(1-x^2)y''-2\,x\,y+2y=0$

(8) $y''+x^2y=0$

٩- اثبت أنه إذا كانت γ ليست صفراً ولا عدداً صحيحاً فإن للمعادلة :

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (x+B+1)x\}y' - xBy = 0$$

لها الحلين (المتقاربين إذا كانت $|x| < 1$)

$$F(x,B,\gamma,x), x^{1-\gamma} F(x-\gamma+1, B-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

حيث $F(x,B,\gamma,x)$ هي المتسلسلة

$$1 + \frac{xB}{1.\gamma} x + \frac{x(x+1)B(B+1)}{12\gamma(\gamma+1)} x^2 + ...$$

ملحق

جدول التكاملات

جدول التكاملات

Trigonometric Forms

1. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
3. $\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + C$
4. $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + C$
5. $\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$
6. $\int \csc x\, dx = -\log|\csc x + \cot x| + C$
7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
8. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
10. $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$
11. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
12. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
13. $\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x + C$
14. $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$
16. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x + C$
17. $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$
18. $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$
19. $\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx$
20. $\int \cot^n x\, dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x\, dx$
21. $\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$
22. $\int \csc^n x\, dx = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\, dx$
23. $\int \sin ax \sin bx\, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$
24. $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$
25. $\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$
26. $\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$
27. $\int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x + C$
28. $\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$

29. $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

30. $\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$

31. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx$

32. $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\dfrac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx$
$= \dfrac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$

Inverse Trigonometric Forms

33. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

34. $\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

35. $\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

36. $\int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

37. $\int \operatorname{arcsec} x\, dx = x \operatorname{arcsec} x - \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

38. $\int \operatorname{arccsc} x\, dx = x \operatorname{arccsc} x + \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Exponential and Logarithmic Forms

39. $\int e^x\, dx = e^x + C$

40. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$

41. $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$

42. $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$

43. $\int x^n a^x\, dx = \dfrac{x^n a^x}{\log a} - \dfrac{n}{\log a} \int x^{n-1} a^x\, dx + C$

44. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$

45. $\int \log x\, dx = x \log x - x + C$

46. $\int (\log x)^n\, dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} dx$

47. $\int \dfrac{1}{x \log x}\, dx = \log|\log x| + C$

48. $\int x^n \log x\, dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \dfrac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C$

49. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

50. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

Hyperbolic Forms

51. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

52. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

53. $\int \tanh x\, dx = \log \cosh x + C$

54. $\int \coth x\, dx = \log|\sinh x| + C$

55. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\sinh x) + C$

56. $\int \operatorname{csch} x\, dx = \log|\tanh \frac{1}{2}x| + C$

57. $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$

58. $\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$

59. $\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C$

60. $\int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$

61. $\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + C$

62. $\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x + C$

63. $\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\sinh bx - b\cosh bx) + C$

64. $\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\cosh bx - b\sinh bx) + C$

Forms Involving $a^2 - x^2$

65. $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

66. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

67. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

68. $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^4}{8}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

69. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\log\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

70. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} - \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

71. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

72. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\dfrac{1}{a}\log\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

73. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\dfrac{1}{a^2 x}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

74. $\int (a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = -\dfrac{x}{8}(2x^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{3a^4}{8}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

75. $\int \dfrac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$

Forms Involving $x^2 + a^2$

76. $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

77. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

78. $\int x^2\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \dfrac{x}{8}(2x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} - \dfrac{a^4}{8}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

79. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\log\left|\dfrac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + C$

80. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}\,dx = -\dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

81. $\int (x^2 + a^2)^{3/2}\,dx = \dfrac{x}{8}(2x^2 + 5a^2)\sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{3a^4}{8}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

82. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$

83. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$

84. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C = -\frac{1}{a}\sinh^{-1}\frac{a}{x} + C$

85. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

86. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

Forms Involving $x^2 - a^2$

87. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

88. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

89. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

90. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

91. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

92. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

93. $\int (x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

94. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$

95. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

96. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

97. $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

Forms Involving $a + bx$

98. $\int \frac{x}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\log|a+bx|) + C$

99. $\int \frac{x^2}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\log|a+bx|\right] + C$

100. $\int \frac{x}{(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \log|a+bx|\right) + C$

101. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(a+bx - \frac{a^2}{a+bx} - 2a\log|a+bx|\right) + C$

102. $\int \frac{1}{x(a+bx)}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

103. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a+bx)}\,dx = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

104. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2}\log\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

Forms Involving $\sqrt{a+bx}$

105. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^3}(3bx-2a)(a+bx)^{3/2} + C$

106. $\displaystyle\int x^n\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2x^n(a+bx)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,dx$

107. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

108. $\displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2x^n\sqrt{a+bx}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx$

109. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C & \text{if } a>0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}} + C & \text{if } a<0 \end{cases}$

110. $\displaystyle\int \frac{1}{x^n\sqrt{a+bx}}\,dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{1}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}}\,dx$

111. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$

112. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}\,dx = -\frac{(a+bx)^{3/2}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}\,dx$

Forms Involving $\sqrt{2ax-x^2}$

113. $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

114. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{2x^2-ax-3a^2}{6}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^3}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x} - \arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

117. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = \arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

118. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

119. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$

120. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C$

121. $\displaystyle\int \frac{1}{(2ax-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}} + C$

المراجع

أولاً : المراجع الأجنبية :

1) M.D. Raisinghania: Advanced Differential Equations. S. Chand and Company Ltd., India 1991.

2) E.D. Rainville and P. Bedient: Elementary Differential Equations. McMillan Pub. Co., New York, 1980.

3) M. Rao: Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons. N.Y. 1989.

4) S. Ross: Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons. N.Y. 1990.

ثانياً المراجع العربية :

٥) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم) الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د. حسن العويضى ، د. عبد الوهاب عباس (٢٠٠١) القاهرة .

٦) نظريات المعادلات التفاضلية ، د. رحمة عبد الكريم ، مطبوعات جامعة الملك سعود ، ١٤٠٨هـ .

٧) نظريات وسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم) فرانك أيرز ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ١٩٩٧م .

٨) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الثانى : د. حسن العويضى – د. عبد الوهاب عباس ، د. سناء على زارع ، دار الرشد ، ٢٠٠٥ .