الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الفاتح ثورة علمية

سلسلة الفاتح في الرياضيات

مبادئ رياضة (1)

الجزء الأول
لطلبة كلية الهندسة والعلوم
والزراعة والاقتصاد و المعاهد العليا
تحتوي على شرح مفصل للمقرر
وعلى 700 مسألة محلولة

إعداد

أحمد علي مصطفى بن مصطفى

المراجعة العلمية

المهندس / عبد الغفار إمحمد بيزان
المهندس / أحمد إبراهيم أبو فروة
المهندس / محمد محمود النكاع
المهندس / أحمد أبو بكر الشمندي
المهندس / أحمد عبد الرحمن المصراتي
المهندس / محمد عبد الرحمن البوني

بســـم الله الـرحــمــن الـرحــيـــم

الــمــقــدمـــة

إن الحمد لله نحمده ونستعينه ونستغفره ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن سيئات أعمالنا من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادى له وأشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له وأشهد أن محمداً عبده ورسوله أما بعد :

الحمد لله الذي علم الإنسان ما لم يعلم والحمد لله الذي وفقني ويسر لي بفضله وتوفيقه أن أقدم هذا الكتاب المتواضع في عرضه وبسطه لمن أحب العلم وأهله ولمن أحب أن تزدهر بلادنا بلاد المسلمين بالعلم النافع الساطع الذي ينفع العباد ويرفع شأن البلاد ومن أحب العلم سعى لنشره قربةً لله وحده.

والعلم ليس حكراً على أحد بل ساحة العلم ذات نطاق واسع تسع المجتهدين المصيبين والمخطئين من أصاحب التخصص وكل إنسان له طريقته في عرض العلم بأسلوبه الخاص الذي وهبه الله له أما أصل العلم فهو ثابت في قواعده الذي وضعها العلماء وما على المتخصصين إلا أن يستقوا العلم من بطون الكتب ويظهروه بعرضهم المتميز لكافة الطلاب والمهندسين والباحثين وقد احتوى هذا الكتاب على كميات كبيرة جداً من مسائل رياضة (1) التي تم حلها بطريقة راعيت فيها التبسيط بقدر المستطاع فعسى أن ينتفع بهذا الكتاب الطلاب الحريصين على العلم وأخيراً إن أصبت فمن الله وحده وإن أخطأت فمن تقصيري ومن زعم الكمال في عمله فقد أخطأ .

ولا يفوتني أن أنوه بالشكر الجزيل للمجهودات التي قام بها المراجعون الأكفاء ولولا صبرهم واهتمامهم لما ظهر الكتاب بهذه الصورة العلمية التي يراها عليها القارئ وهؤلاء المراجعون هم من طلاب مدرسة شهداء الشط هذه المدرسة تزخر بأعضاء هيئة تدريس لهم مكانة علمية مرموقة فهم من صفوة المدرسين وما وصل له هؤلاء الطلاب من قدرتهم على مراجعة هذا الكتاب إلا دليل على أنهم أصحاب أقدام راسخة في العلم فعسى الله أن يجعل هذه المدرسة ومن فيها ذخراً لهذا الوطن ولخدمة العلم وأهله والحمد لله رب العالمين إليه يرجع الفضل كله أوله وآخره ظاهره وباطنه .

أحمدعلي مصطفى بن مصطفى
هاتف نقال /0927962234

سبحان الله وبحمده

عدد خلقه ورضا نفسه

وزنة عرشه ومداد كلماته

Mostafamas

المحتويات

الـــمــجـــمـــوعـــات

تعريف المجموعة:- هي أي تجمع من الأشياء المعروفة والمحددة تحديداً تاماً.
عناصر المجموعة:- الأشياء التي تتألف منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة.
طرق التعبير عن المجموعة :- يوجد طريقتان:
طريقة القائمة أوالحصر:- وهي أن تكتب عناصر المجموعة داخل أقواس مع وضع فاصلة بين كل عنصر وآخر نحو:

$A= \{1،2،3،4،5،6\}$

طريقة الوصف :- وهي أن تستخدم وصفاً معيناً يُعبّر به عن عناصر المجموعة وذلك إذا وجدت خاصية أو صفة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر ويوجد أسلوبين :

(A) **الوصف اللفظي:** وفي هذه الحالة نعبر عن المجموعة بأسلوب لفظي نحو:

C = { x : x عدد زوجي أقل من 10 }

(B) **الوصف الرمزي:** وفي هذه الحالة نعبر عن المجموعة بأسلوب رمزي نحو:

$C = \{ x : 1 < x < 5 \ , x \in R \}$

الـــمــجـــمـــوعـــة الـــخـــالـــيـــة:- هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز { } أو ϕ ويقرأ فاي .

الـــمــجـــمـــوعـــة الـــجـــزئـــيـــة:- إذا كانت x , y مجموعتان وكانت كل عناصر x هي عناصر في المجموعة y بحيث $x \neq y$ فإنه يقال أن المجموعة x مجموعة جزئية فعلية من y وتكتب $x \subset y$ وإذا كانت $x = y$ فإنه يقال أن المجموعة x مجموعة جزئية من y وتكتب $x \subseteq y$ وإذا كان على الأقل يوجد عنصر موجود في x

وغير موجود في المجموعة y فإن المجموعة x ليست مجموعة جزئية فعلية من

المجموعة y و تكتب $x \not\subset y$.

$EX:$

$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

$\{1,2,3\} \not\subset \{1,2,4,5\}$

$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

الإنـتـمـاء وعــدم الإنــتــمــاء :-

الرمز $\in$ يعني ينتمي ويستخدم للدلالة على أن العنصر موجود في المجموعة والرمز $\notin$ يعني لا ينتمي ويستخدم للدلالة على أن العنصر غير موجود في المجموعة .

$EX:$

$1 \in \{1,2,3,4,5\}$

$3 \notin \{1,2,4,5\}$

مــلاحـــظــات :-

(1) الرمزان $\in, \notin$ كل منهما يربط بين عنصر ومجموعة .
(2) الرموز $\subseteq, \not\subset, \subset$ كل منهما يربط بين مجموعة ومجموعة أخرى .
(3) المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أي مجموعة .

مــثـــال:- بين أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة :-

$(1)\ 2 \in \{2,3,4\}$ العبارة الرياضية صحيحة

$(2)\ 4 \in \{2,3,44\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن 4 غير موجودة في المجموعة

$(3)\ 2 \subset \{2,3,4\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن الرمز $\subset$ يربط بين مجموعتين

$(4)\ \{3\} \subset \{2,3,4\}$ العبارة الرياضية صحيحة

$(5)\{2\}\in\{2,3,4\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن الرمز $\in$ يربط بين عنصر ومجموعة

$(6)\{2\}\not\in\{2,3,4\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن الرمز $\not\in$ يربط بين عنصر ومجموعة

$(7)\phi\not\in\{2,3,4\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن الرمز $\not\in$ يربط بين عنصر ومجموعة

$(8)\{\{3\}\}\subset\{2,3,4\}$ العبارة الرياضية غير صحيحة لأن العنصر $\{3\}$ غير موجود في المجموعة

$(9)\{\{3\}\}\subset\{\{2\},\{3\},\{4\}\}$ العبارة الرياضية صحيحة

$(10)\{\{3\},\{6\}\}\not\subset\{\{2\},\{3\},\{4\}\}$ العبارة الرياضية صحيحة

$(11)\{\{3\},\phi\}\subset\{\{2\},\{3\},\{4\}\}$ العبارة الرياضية صحيحة

$(12)\{3\}\in\{\{2\},\{3\},\{4\}\}$ العبارة الرياضية صحيحة

ملاحظات :-

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية هي $N=\{1,2,3,..........\}$

(2) مجموعة الأعداد الكلية هي $W=\{0,1,2,..........\}$

(3) مجموعة الأعداد الصحيحة هي $z=\{0,\pm1,\pm2,..........\}$

(4) مجموعة الأعداد القياسية هي $Q=\{\frac{a}{b} : a,b\in z \ , b\neq0\}$

(5) مجموعة الأعداد الغير قياسية وهي تضم جميع الأعداد التي لا يمكن وضعها على صورة عدد قياسي ويرمز لها بالرمز $\bar{Q}$ نحو .... $\sqrt{2}\ ,\sqrt[3]{3},$

(6) مجموعة الأعداد الحقيقية وهي تضم جميع الأعداد السابقة $R=(-\infty,\infty)$

الــمــجــمــوعـــة الـشـامـلـــة:-

هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر قيد الدراسة والبحث
ويرمز لها في أغلب الأحيان بالرمز U

المجموعات الجزئية لأي مجموعة:- لأي مجموعة يمكن إيجاد المجموعات الجزئية لها

بحيث يكون عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة $= 2^n$ حيث n عدد

عناصر المجموعة.

مــثـــال:- أوجد المجموعات الجزئية للمجموعة $A = \{5 ، 6 ، 7\}$ ؟

الـــحـــل

عدد المجموعات الجزئية $= 2^3 = 2\times2\times2=8$

ϕ , {5}, {6} , {7} ,{5,6},{5,7},{6,7},{5,6,7}

الــعــمــلــيـــات عــلـــى الــمــجــمــوعــات:-

(1) عملية الاتحاد :- المقصود من عملية اتحاد المجموعات هو دمج عناصر هذه
المجموعات في مجموعة واحدة ويرمز لعملية الاتحاد بالرمز $\cup$
أي إذا كانت A , B مجموعتين فإن :

$$A \cup B = \{x : x \in A \ or \ x \in B\}$$

Ex: A={1،2،3،4} ، B={1،3،5،7}

$A \cup B = \{1،2،3،4\} \cup \{1،3،5،7\} = \{1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 7\}$

(2) عملية التقاطع :- المقصود من عملية تقاطع المجموعات هو إيجاد العناصر المشتركة بين هذه المجموعات ووضعها في مجموعة واحدة ويرمز لعملية التقاطع بالرمز $\cap$ أي إذا كانت A , B مجموعتين فإن :

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \ and \ \ x \in B\}$$

Ex: A={1،2،3،4} ، B={1،3،5،7}

$A \cap B$ = {1،2،3،4} $\cap$ {1،3،5،7} ={1، 3}

(3) عملية الفرق :- إذا كانت A , B مجموعتين فإن الفرق بينهما يرمز له بالرمز A – B أي أن :

$$A - B = \{x : x \in A \ \ and \ \ x \notin B\}$$

A – B = { العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B }

$$B - A = \{x : x \in B \ \ and \ \ x \notin A\}$$

B – A = { العناصر الموجودة في B وغير موجودة في A }

Ex: A={1، 2 ، 3 ، 4} ، B={1،3،5،7}

A - B = {1، 2 ، 3 ، 4} - {1،3،5،7} ={2،4}

(3) عملية التكميل:- إذا كانت A مجموعة و U المجموعة الشاملة فإن مكملة المجموعة A يرمز لها بالرمز A^c أو A' وهي تعني مجموعة العناصر الموجودة في U قيد الدراسة وغير موجودة في A

$$A^c = \{x : x \in U \ \ and \ \ x \notin A\}$$

مــثــال:- إذا كانت $U=\{1،2،3،\ldots\ldots\ldots\}$ مجموعة شاملة وكانت
$A=\{1،2،3،4،5\}$ ، $B=\{x \,/\, x\leq 7 \,,\, x\in N\}$ فأوجد :-
$A\cap B,\ A\cup B, A-B, B-A,\ A^c, (A\cap B)^c$ ؟

الـــحـــل

$B=\{1،2،3،4،5،6،7\}$

$A\cap B=\{1،2،3،4،5\}\cap\{1،2،3،4،5،6،7\}=\{1،2،3،4،5\}$
$A\cup B=\{1،2،3،4،5\}\cup\{1،2،3،4،5،6،7\}=\{1،2،3،4،5،6،7\}$
$A-B=\{1،2،3،4،5\}-\{1،2،3،4،5،6،7\}=\phi$
$B-A=\{1،2،3،4،5،6،7\}-\{1،2،3،4،5\}=\{6،7\}$
$A^c=\{6،7،8،\ldots\ldots\ldots\}$
$(A\cap B)^c=\{6،7،8،\ldots\ldots\ldots\}$

مــثــال:- إذا كانت $U=\{1،2،3،\ldots\ldots\ldots،10\}$ مجموعة شاملة وكانت
$A=\{1،2،3،4\}$ ، $B=\{1،3،5،7\}$ ، $C=\{2،3،6\}$ فأوجد :-
$A^c, A-B\,,\, A^c-B\,,\,(A\cup C)^c$ ؟

الـــحـــل

$A^c=\{5،6،7،8،9،10\}$
$A-B=\{1،2،3،4\}-\{1،3،5،7\}=\{2،4\}$
$A^c-B=\{5،6،7،8،9،10\}-\{1،3،5،7\}=\{6،8،9،10\}$
$A\cup C=\{1،2،3،4\}\cup\{2،3،6\}=\{1،2،3،4،6\}$
$(A\cup C)^c=\{5،7،8،9،10\}$

مـثـال:- إذا كانت $U=\{1،2،3،\dots\dots\dots\}$ مجموعة شاملة وكانت
$A=\{x / x\leq 3 , x \in N\}$ ، $B=\{x / x^2 - 4 = 0 , x \in N\}$ فأوجد:-
$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A^c$ ؟

الـحـل

$A=\{1،2،3\}$

$x^2 - 4 = 0 \therefore x = 2 , x \in N$

$B=\{2\}$

$A \cap B =\{1،2،3\} \cap \{2\} = \{2\}$

$A \cup B = \{1،2،3\} \cup \{2\} = \{1،2،3\}$

$A - B =\{1،2،3\} - \{2\} = \{1،3\}$

$B - A =\{2\} - \{1،2،3\}= \phi$

$A^c = \{4،5،6،\dots\dots\dots\}$

مـثـال:- إذا كانت $U= \{x / x \leq 11 , x \in w\}$ مجموعة شاملة وكانت
$A= \{x / x \geq 5 , x \in w\}$ ، $B= \{x / x < 10 , x \in N\}$ ، فأوجد :-
$A^c - B, A^c - B^c, (A \cup B) - B, (A - B) \cap A$ ؟

الـحـل

$U =\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

$A=\{5،6،7،\dots\dots\dots،11\}$ لأن المجموعة الشاملة أصغر من أوتساوي 11

$B=\{1،2،3،4،5،6،7،8،9\}$

$A^c=\{0،1،2،3،4\}$

$B^c= \{0،10،11\}$

$A^c - B = \{0،1،2،3،4\} - \{1،2،3،4،5،6،7،8،9\} = \{0\}$

$A^c - B^c = \{0،1،2،3،4\} - \{0،10،11\} =\{1،2،3،4\}$

$A \cup B = \{5،6،7،\dots\dots\dots،11\} \cup \{1،2،3،4،5،6،7،8،9\}$

$= \{1،2،3،4،5،6،7،8،9،10،11\}$

$(A \cup B) - B = \{1،2،3،4،5،6،7،8،9،10،11\} - \{1،2،3،5،4،6،7،8،9\}$

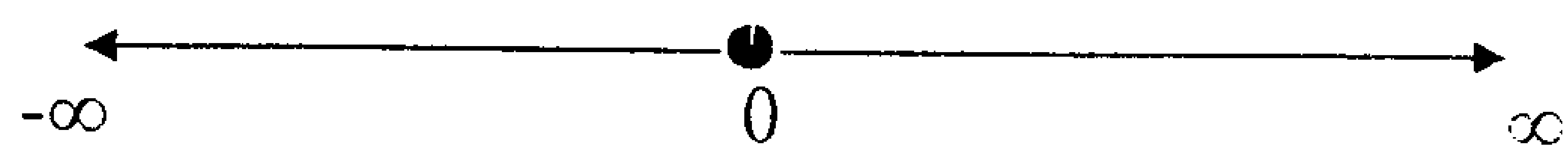
$= \{10،11\}$

$A - B = \{5،6،7،..............،11\} - \{1،2،3،4،5،6،7،8،9\} = \{10،11\}$

$(A - B) \cap A = \{10،11\} \cap \{5،6،7،..............،11\} = \{10،11\}$

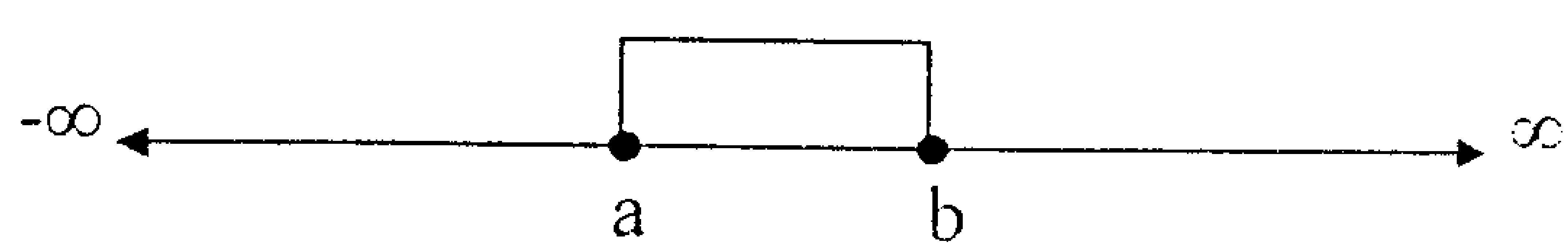
الــــفــــتـــرات

الفترة هي مجموعة جزئية أو مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الحقيقية

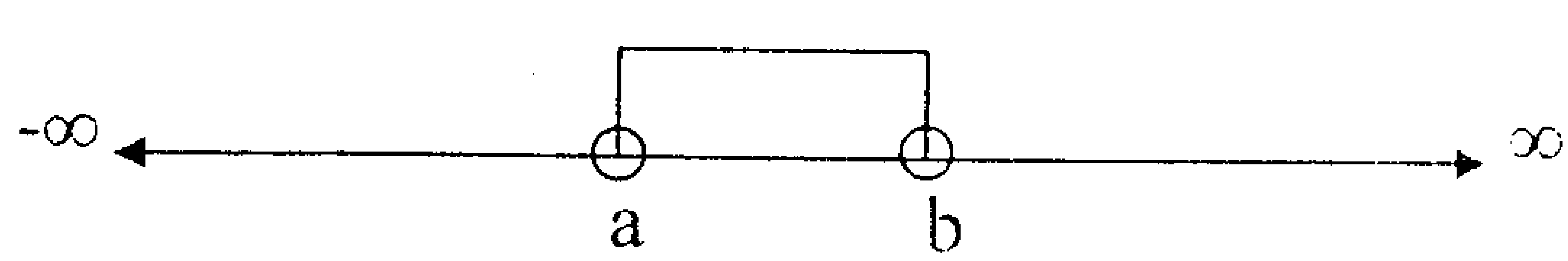


أنــواع الــفــتــرات :-

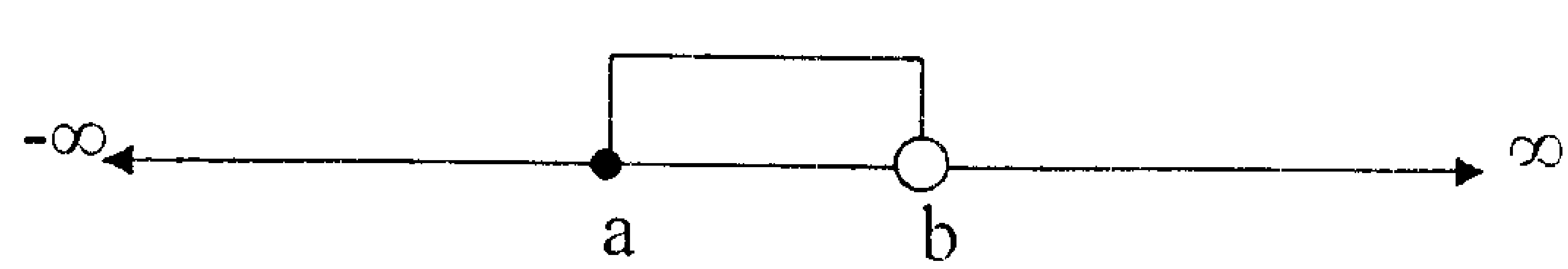
(1) **فترة مغلقة :-** وتكتب على صورة [a ، b] وتعني أن b ، a ضمن عناصر الفترة

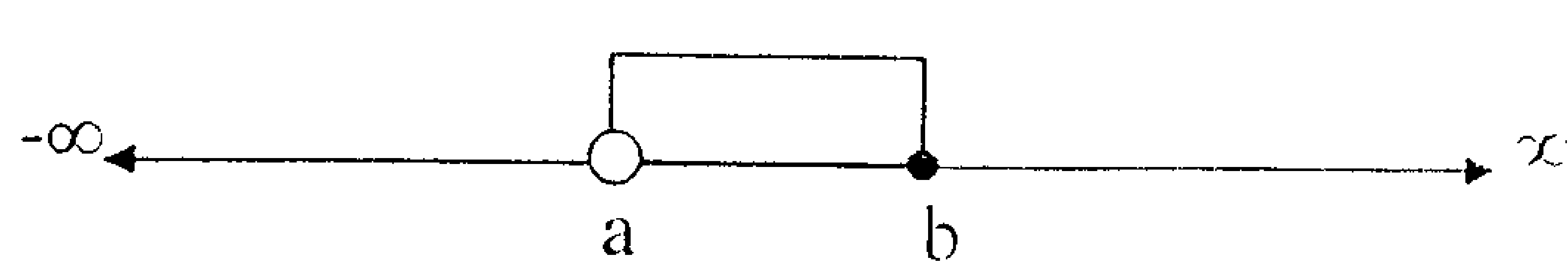


(2) **فترة مفتوحة :-** وتكتب على صور(b ، a) وتعني أن b ، a ليس ضمن عناصر الفترة



(3) **فترة نصف مغلقة ونصف مفتوحة :-**

[a ، b)


(a ، b]


ملاحظات :-

(1) الرمز ∞ يسمى ما لا نهاية وهو رمز لكمية كبيرة جدا

(2) الرمز ∞- يسمى سالب ما لا نهاية وهو رمز لكمية صغيرة جدا

(3) علامات التباين هي:-

$>$ تقرأ أكبر من

$<$ تقرأ أصغر من

$\geq$ تقرأ أكبر من أو تساوي

$\leq$ تقرأ أصغر من أو تساوي

(4) قوس الفترة من جهة $\pm\infty$ دائماً مفتوح

(5) يجب أن يكون العنصر الأول في الفترة (من جهة اليسار) عنصر صغير والعنصر الثاني في الفترة (من جهة اليمين) عنصر كبير

$(-\infty، 4]$ ، $[6 ، \infty)$ ، $[6 ، 7)$

(6) إذا كانت علامة التباين تحتوي على يساوي $\leq$ ، $\geq$ فإن قوس الفترة من جهة العدد مغلق لأن العدد ضمن عناصر الفترة

$$x \geq 2 \Longrightarrow [2 ، \infty)$$
$$x \leq 2 \Longrightarrow (-\infty ، 2]$$

(7) إذا كانت علامة التباين لا تحتوي على يساوي $>$ ، $<$ فإن قوس الفترة من جهة العدد مفتوح لأن العدد ليس ضمن عناصر الفترة

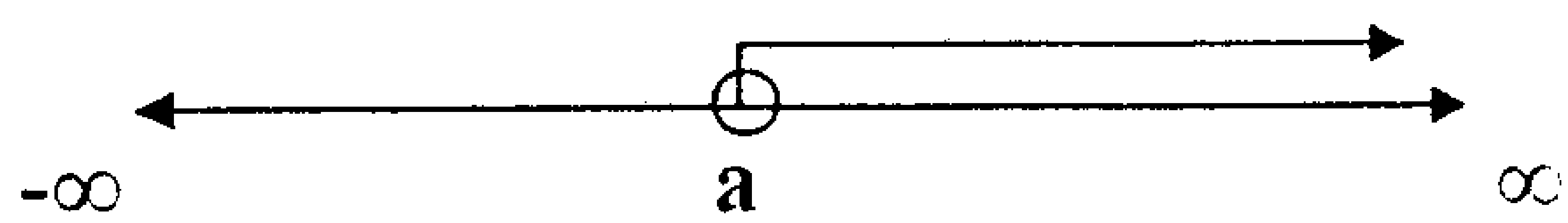
$$x > 2 \Longrightarrow (2 ، \infty)$$
$$x < 2 \Longrightarrow (-\infty ، 2)$$

(8) تعتبر مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الشاملة في أي مسألة ما لم ينص في المسألة خلاف ذلك .

(9) المتباينة المتكونة من ثلاثة أجزاء تقرأ من المنتصف نحو $1 < x < 5$ تقرأ x أكبر من 1 وأصغر من 5 .

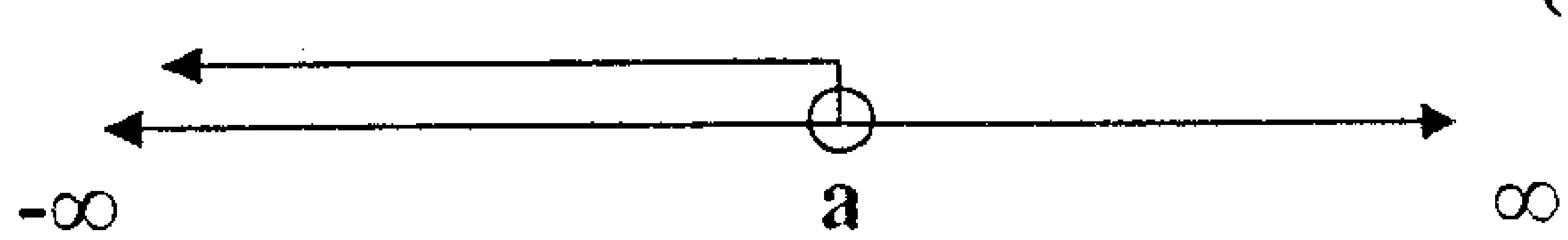
(10) كتابة الفترات على صورة متباينات :- وهذا يعتمد على نوع الفترة كما يأتي:

(A) الفترة (a ، ∞)



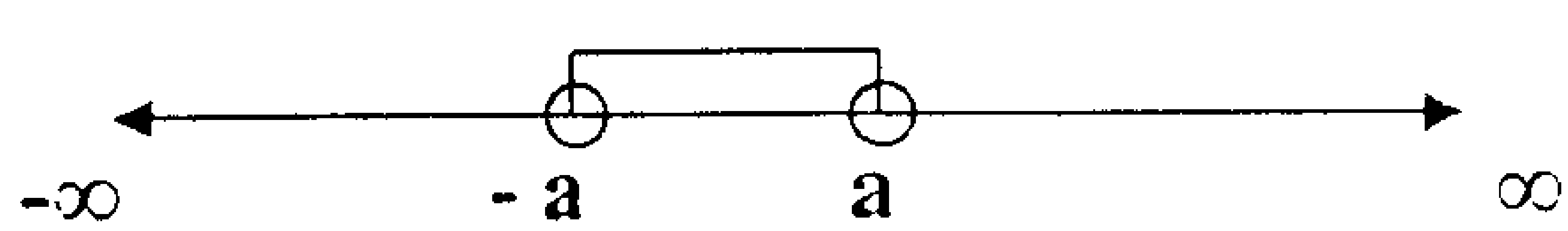
المتباينة $x > a$

(B) الفترة (- ∞ ، a)



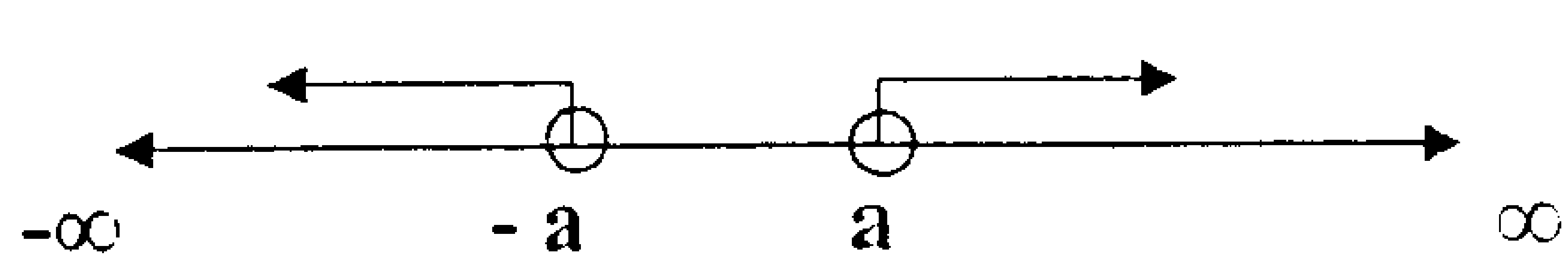
المتباينة $x < a$

(C) الفترة (- a ، a)



المتباينة $- a < x < a$

(D) الفترة (a ، ∞) ∪ (- ∞ ، -a)

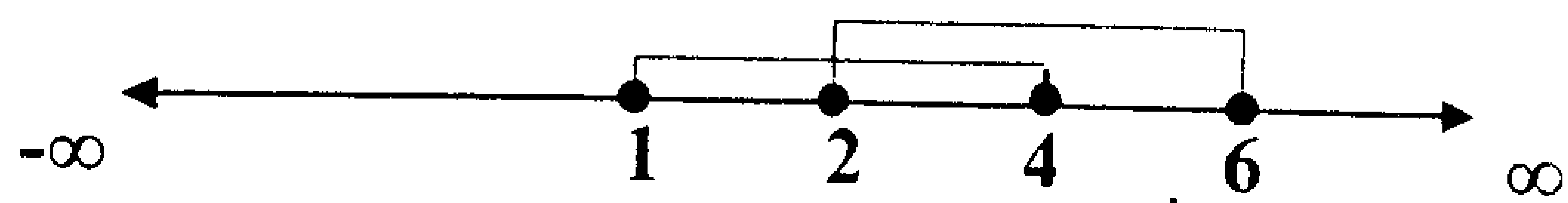


المتباينة $x > a$ or $x < -a$

ملاحظة :- إذا كانت الفترات مغلقة فإن علامات التباين تحتوي على علامة يساوي .

مـثـال:- إذا كانت $A=[1،4]$ ، $B=[2،6]$ فأوجد $A\cap B, A\cup B$ ؟

الـحـل

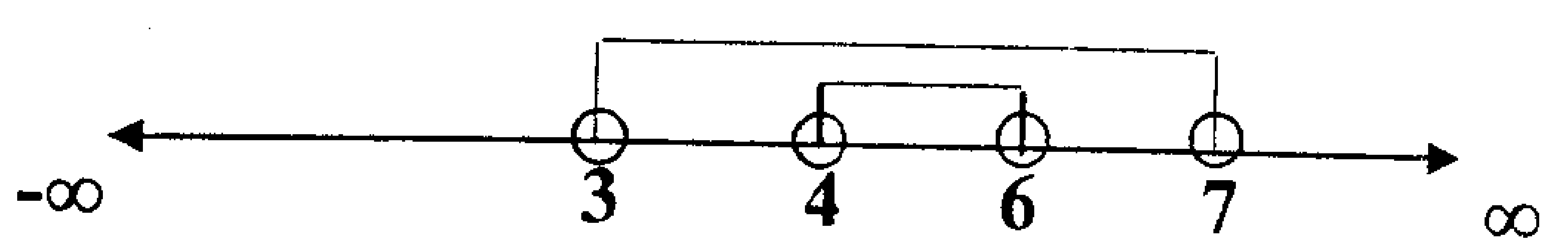


$A\cap B = [1،4] \cap [2،6] = [2،4] = \{x: \ 2\le x\le 4 , x\in R\}$

$A\cup B = [1،4] \cup [2،6] = [1،6] = \{x: \ 1\le x\le 6 , x\in R\}$

مـثـال:- إذا كانت $A=(3،7)$ ، $B=(4،6)$ فأوجد $A\cap B, A\cup B$ ؟

الـحـل

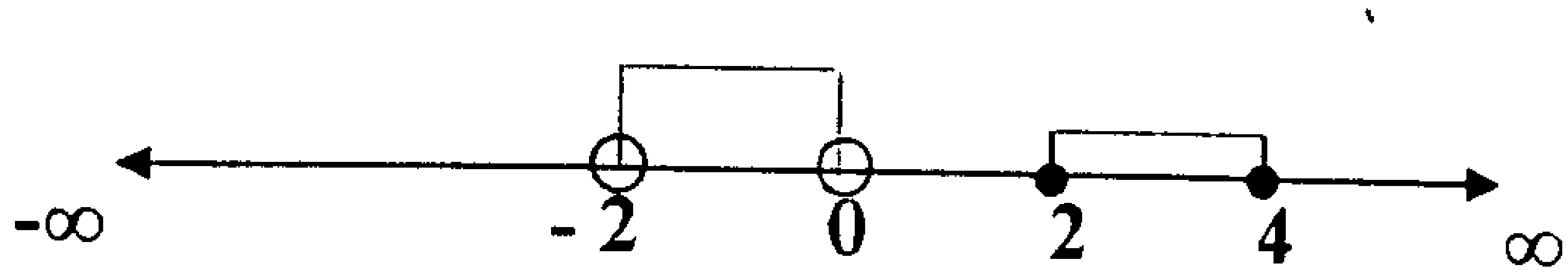


$A\cap B = (3،7) \cap (4،6) = (4،6) = \{x: \ 4< x< 6 , x\in R\}$

$A\cup B = (3،7) \cup (4،6) = (3،7) = \{x: \ 3< x< 7 , x\in R\}$

مـثـال:- إذا كانت $A=[2،4]$ ، $B=(-2،0)$ فأوجد $A\cap B, A\cup B$ ؟

الـحـل

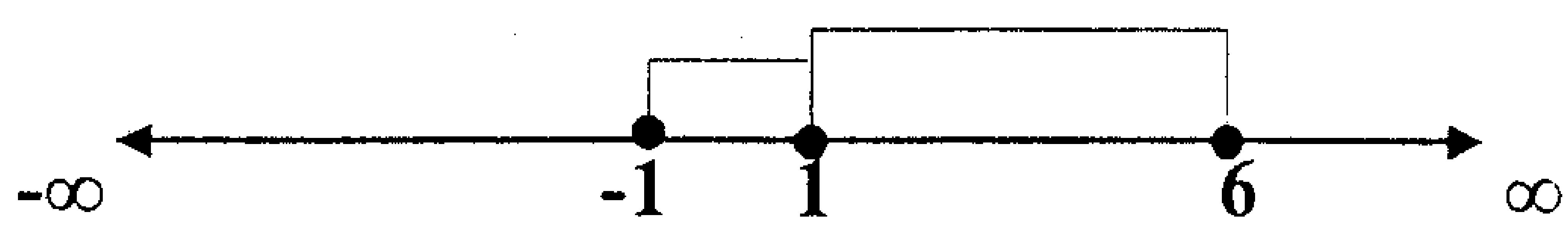


$A\cap B = (-2،0) \cap [2،4] = \phi$

$A\cup B = (-2،0) \cup [2،4] = \{x: -2< x< 0 \ \ or \ 2\le x\le 4 , x\in R\}$

مـثـال:- إذا كانت $A=[-1،1]$ ، $B=[1،6]$ فأوجد $A\cap B,\ A\cup B,\ A^c, B^c$ ؟

الـحـل



$A\cap B = [-1،1] \cap [1،6] = \{1\}$

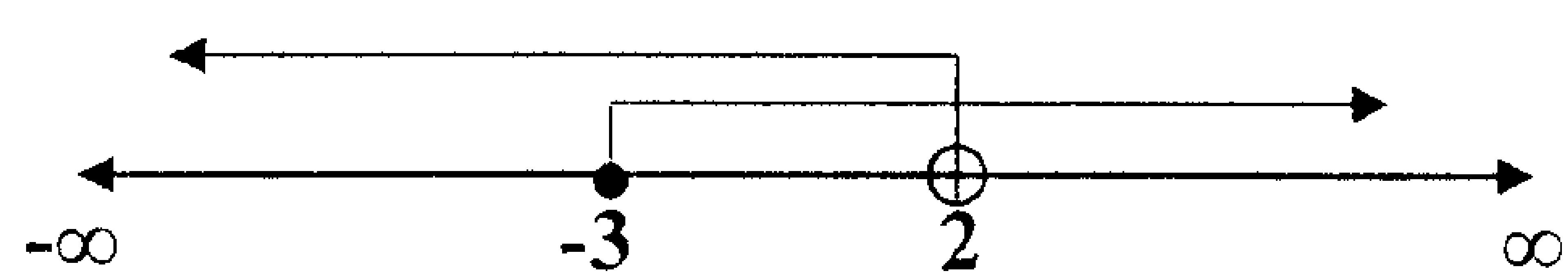
$A\cup B = [-1،1] \cup [1،6] = [-1،6] = \{x: -1\le x\le 6 , x\in R\}$

$A^c = (-\infty،-1) \cup (1،\infty) = \{x: x<-1 \ or\ x>1 , x\in R\}$

$B^c = (-\infty،1) \cup (6،\infty) = \{x: x<1 \ or\ x>6 , x\in R\}$

مـثـال:- إذا كانت $B=(-\infty،2)$ ، $A=[-3،\infty)$ فأوجد $A\cap B,\ A\cup B,\ A^c, B^c$ ؟

الـحـل



$A\cap B = [-3،\infty) \cap (-\infty،2) = [-3،2) = \{x: -3\le x<2 , x\in R\}$

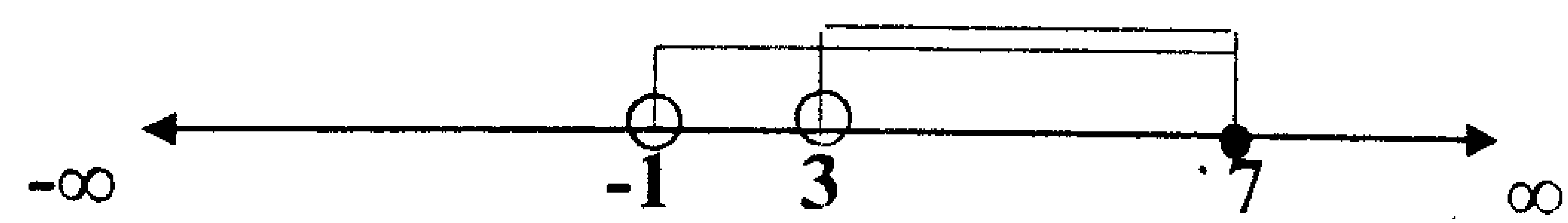
$A\cup B = [-3،\infty) \cup (-\infty،2) = R$

$A^c = (-\infty،-3) = \{x: x<-3 , x\in R\}$

$B^c = [2،\infty) = \{x: x\ge 2 , x\in R\}$

مثال:- إذا كانت A=(3،7] ، B =(-1،7] فأوجد $A\cap B,\ A\cup B, A^c, B^c$ ؟

الحل



$A\cap B$ = (3،7] ∩ (-1،7] = (3،7] = $\{x:\ 3<x\le 7 , x\in R\}$

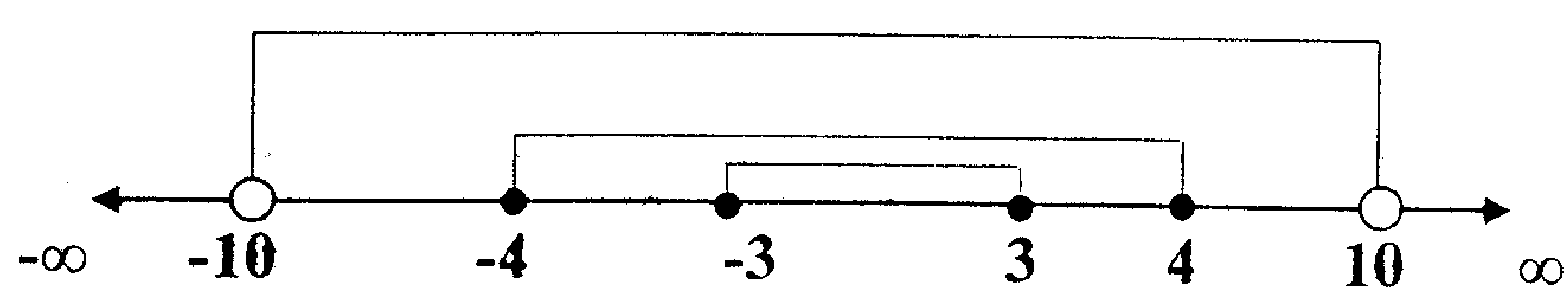
$A\cup B$ = (3،7] ∪ (-1،7] = (-1،7] = $\{x:\ -1<x\le 7 , x\in R\}$

A^c =(-∞،3] ∪ (7، ∞) = $\{x:\ x\le 3\ or\ x>7 , x\in R\}$

B^c =(-∞،-1] ∪ (7، ∞) = $\{x:\ x\le -1\ or\ x>7 , x\in R\}$

مثال:- إذا كانت U= {x /-10< x < 10 , x ∈R } المجموعة الشاملة وكانت
A= [-4،4] ، B= [-3،3] فأوجد $A^c\cap B^c,\ (A\cup B)^c$ ؟

الحل



$U=(-10,10)$

A^c =(-10،-4) ∪ (4، 10) = $\{x:\ -10<x<-4\ \ or\ 4<x<10 , x\in R\}$

B^c =(-10،-3) ∪ (3، 10) = $\{x: -10<x<-3\ \ or\ 3<x<10 , x\in R\}$

$A^c\cap B^c$ =(-10،-4) ∪ (4، 10) = $\{x: -10<x<-4\ \ or\ 4<x<10 , x\in R\}$

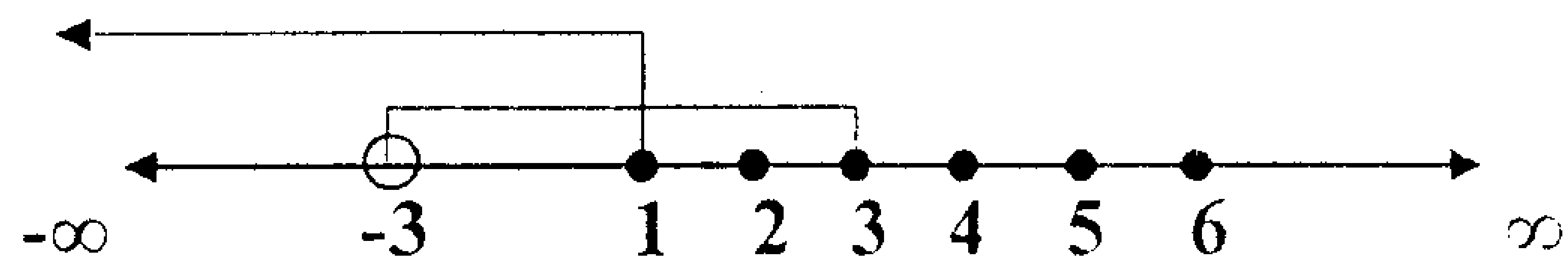
$(A\cup B)$= [-4،4] ∪ [-3،3] =[-4،4] = $\{x:\ -4\le x\le 4 , x\in R\}$

$(A\cup B)^c$= (-10،-4) ∪ (4، 10) = $\{x: -10<x<-4\ or\ 4<x<10 , x\in R\}$

مـثــال:- إذا كانت $A=(-3,3]$ ، $B=\{x / x \le 1 , x \in R\}$
$C=\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}$ فأوجد $A\cap C, A\cup B, B-C, A^c$ ؟

الـحــل

$B=(-\infty,1]$



$A\cap C=(-3,3]\cap\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}=\{1,2,3\}$

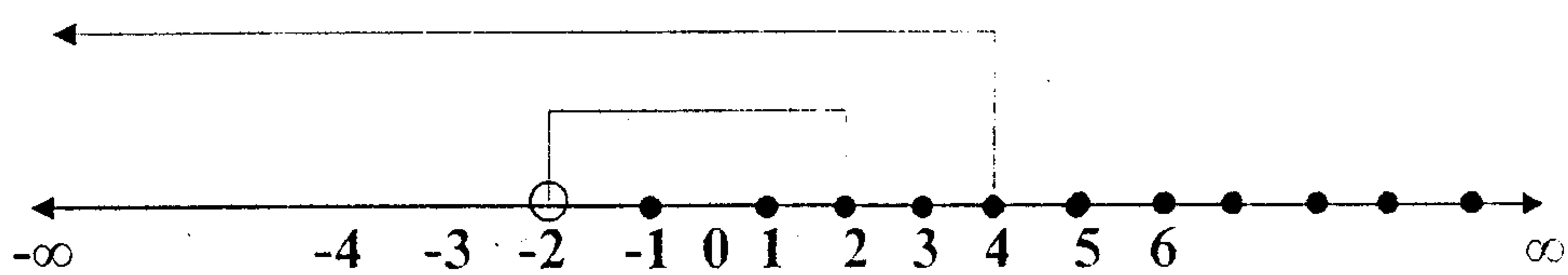
$A\cup B=(-3,3]\cup(-\infty,1]=(-\infty,3]=\{x:\ x\le 3 , x\in R\}$

$B-C=(-\infty,1]-\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}=(-\infty,1)=\{x:\ x<1 , x\in R\}$

$A^c=(-\infty,-3]\cup(3,\infty)=\{x: x\le -3\ or\ x>3 , x\in R\}$

مـثــال:- إذا كانت $A=\{\pm 1\}$ ، $B=(-\infty,4]$ ، $C=(-2,2]$ ، $D=N$
والمجموعة الشاملة هي $U=R$ فأوجد $A^c, A\cap D, D\cap C, A\cup B, A-D$ ؟

الـحــل



$A^c=R-\{\pm 1\}=\{x:\ x<-1\ or\ -1<x<1\ or\ x>1 , \in R\}$

$A\cap D=\{\pm 1\}\cap\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}=\{1\}$

$D\cap C=\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}\cap(-2,2]=\{1,2\}$

$A\cup B=\{\pm 1\}\cup(-\infty,4]=(-\infty,4]=\{x:\ x\le 4 , x\in R\}$

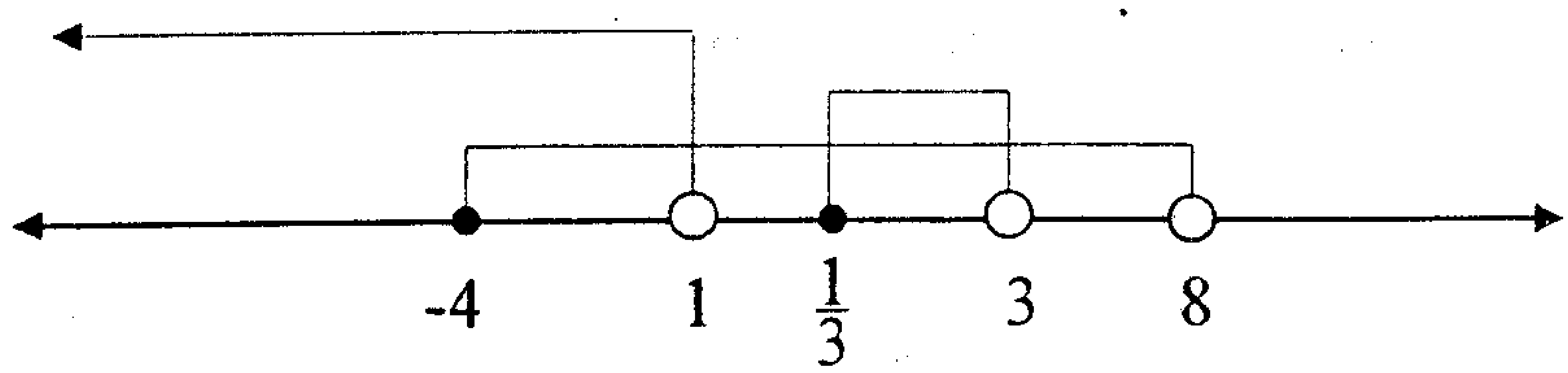
$A-D=\{\pm 1\}-\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}=\{-1\}$

مثال:- إذا كانت $A = \{x \ / -\infty < x < 1 \ , x \in R\}$

$B = \{x \ / -4 \le x < 8, x \in R\}$ ، $C = \{x \ / \frac{1}{3} \le x < 3, x \in R\}$

$E = \{x \ / -4 \le x < 0, x \in N\}$ فأوجد $A^c, \ B^c, C^c, A \cap B, E \cup A$ ؟

الحل



$A = (-\infty ، 1)$

$B = [-4 ، 8)$

$C = [\frac{1}{3} ، 3)$

$E = \phi$

$A^c = [1, \infty) = \{x: \ x \ge 1, x \in R\}$

$B^c = (-\infty ، -4) \cup [8 ، \infty) = \{x: \ x < -4 \ or \ x \ge 8, x \in R\}$

$C^c = (-\infty ، \frac{1}{3}) \cup [3 ، \infty) = \{x: \ x < \frac{1}{3} \ or \ x \ge 3, x \in R\}$

$A \cap B = (-\infty ، 1) \cap [-4 ، 8) = [-4 ، 1) = \{x: \ -4 \le x < 1, x \in R\}$

$A \cup E = (-\infty ، 1) \cup \phi = (-\infty ، 1) = \{x: \ x < 1, x \in R\}$

مـثـــال:- اذا كانت $B = \{x : x^2 - x = 0\}$, $A = \{x : |x| < 2, x \in R\}$

$c = \{x : x^2 + 1 < 0, x \in R\}$ فأوجد A^c, C^c , $A \cup B$, $A \cap B$ ؟

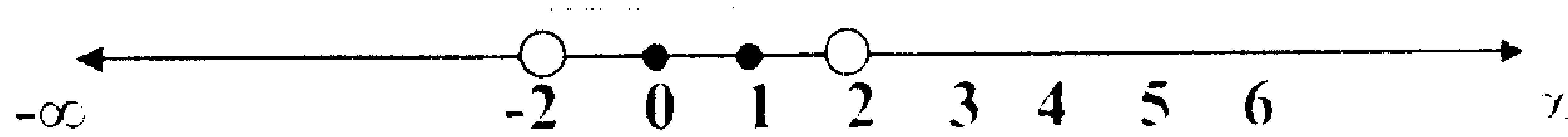
الـــحـــل

$A = (-2,2)$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 1$

$B = \{1,0\}$

$c = \phi$



$A \cap B = (-2,2) \cap \{1,0\} = \{1,0\}$

$A \cup B = (-2,2) \cup \{1,0\} = (-2,2) = \{x : -2 < x < 2, x \in R\}$

$A^c = (-\infty,-2] \cup [2,\infty) = \{x : x \le -2 \ \ or \ \ x \ge 2, x \in R\}$

$C^c = (-\infty,\infty) = \{x : x \in R\}$

حل معادلات الدرجة الأولى في مجهول واحد

عند حل معادلات الدرجة الأولى في مجهول واحد فإننا نضع المجهول في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر وإذا كان المجهول مضروباً في عدد فإننا نقسم الطرفين على هذا العدد أو نضرب الطرفين في المعكوس الضربي لهذا العدد للتخلص منه .

مثال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x + 2 = 3$

الحل

$x = 3 - 2$

$x = 1$

(2) $2x = 3$

الحل

$$x = \frac{3}{2}$$

(3) $2x + 1 = 3$

الحل

$2x = 3 - 1$

$2x = 2$

$x = 1$

(4) $\frac{3}{2}x + 1 = 3$

الحل

$\frac{3}{2}x = 3 - 1$

$\frac{3}{2}x = 2$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{2}{3} \cdot 2 \Longrightarrow x = \frac{4}{3}$$

حل معادلات الدرجة الثانية فما فوق في مجهول واحد

عند حل معادلات الدرجة الثانية فما فوق في مجهول واحد فإننا نقوم بوضع المقدار في طرف واحد ثم نحلل المقدار بأحد طرق التحليل إلى عوامله ثم نساوي كل عامل بالصفر لإيجاد المجهول .

طرق التحليل :-

أولاً إخراج عامل مشترك :- العامل المشترك هو المتغير المشترك بين حدود المقدار الجبري بأصغر أس .

مثال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^2 - x = 0$

الحل

x (x-1) = 0
x = 0
x – 1= 0 , x =1

(2) $x^2 + 2x = 0$

الحل

x (x+2) = 0
x = 0
x + 2= 0 , x = -2

(3) $x - x^2 = 0$

الحل

x (1- x) = 0
x = 0
1 – x = 0 , x = 1

ثانياً الفرق بين مربعين:- $x^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow (x-a)(x+a) = 0$

مــثـــال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^2 - 4 = 0$

الـــحـــل

(x+2) (x-2) = 0
x – 2= 0 , x =2
x + 2= 0 , x =-2

(2) $x^2 - 3 = 0$

الـــحـــل

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$
$$(x-\sqrt{3}) = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3}$$
$$(x+\sqrt{3}) = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{3}$$

(3) $16 - x^2 = 0$

الـــحـــل

$$(4-x)(4+x) = 0$$
$$(4-x) = 0 \Longrightarrow x = 4$$
$$(4+x) = 0 \Longrightarrow x = -4$$

(4) $16 - 4x^2 = 0$

الـــحـــل

$$(4-2x)(4+2x) = 0$$
$$(4-2x) = 0 \Longrightarrow x = 2$$
$$(4+2x) = 0 \Longrightarrow x = -2$$

ملاحظات هامة:-

(1) مسائل الفرق بين مربعين يمكن حلها مباشرة وذلك بان نضع المجهول في طرف والحد المطلق في الطرف الآخر ثم نأخذ الجذر التربيعي للطرفين .

@ $x^2 - 4 = 0$

الحـــل

$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

(2) مجموع مربعين لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية $x^2 + a^2 = 0$ وإنما يمكن تحليله في نطاق الأعداد المركبة مع العلم أن $i = \sqrt{-1}$:-

@ $x^2 + 4 = 0$

الحـــل

$$x^2 = -4$$
$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\ \sqrt{4} = \pm 2i$$

@ $x^2 + 25 = 0$

$$x^2 = -25$$
$$x = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{-1}\ \sqrt{25} = \pm 5i$$

ثانياً الفرق بين مكعبين:- $x^3 - a^3 = 0 \Longrightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$

مع ملاحظةأن المقدار الثلاثي $(x^2 + ax + a^2)$ لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية

مـثــال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^3 - 8 = 0$

الــحــل

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$
$$x^2 + 2x + 4 \neq 0$$

طــريــقـــة أخـــرى للحل مباشرة في نطاق الأعداد الحقيقية فقط:-

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$x = 2$

(2) $x^3 - 27 = 0$

الــحــل

$$(x-3)(x^2 + 3x + 9) = 0$$
$$(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$$
$$x^2 + 3x + 9 \neq 0$$

طــريــقـــة أخـــرى للحل مباشرة في نطاق الأعداد الحقيقية فقط :-

$x^3 - 27 = 0$

$x^3 = 27$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$x = 3$

رابعاً مجموع مكعبين:- $x^3+a^3=0 \Longrightarrow (x+a)(x^2-ax+a^2)=0$

مع ملاحظةأن المقدا الثلاثي (x^2-ax+a^2) لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية

مـثـال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^3+8=0$

الـحـل

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0$$
$$(x+2)=0 \Longrightarrow x=-2$$
$$x^2-2x+4\neq 0$$

طـريـقـة أخـرى للحل مباشرة في نطاق الأعداد الحقيقية فقط :-

$x^3+8=0$

$x^3=-8$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$x=-2$

(2) $x^3+27=0$

الـحـل

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$
$$(x+3)=0 \Longrightarrow x=-3$$
$$x^2-3x+9\neq 0$$

طـريـقـة أخـرى للحل مباشرة في نطاق الأعداد الحقيقية فقط :-

$x^3+27=0$

$x^3=-27$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$x=-3$

خامساً المقدار الثلاثي:- $ax^2+bx+c=0$ يوجد هناك نوعان من المقدار الثلاثي:

النوع الأول :- إذا كان معامل x^2 يساوي واحد $(a=1)$ فهناك حالتان :-

(A) إذا كانت إشارة الحد المطلق c موجبة في هذه الحالة نختار عددين حاصل ضربهما الحد المطلقc وحاصل جمعهماالحد الأوسط b وإشارتهما هي نفس إشارةالحد الأوسط b

مـثـــال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^2+5x+6=0$

الـــحـــل

$$(x+2)(x+3)=0$$
$$(x+2)=0 \Longrightarrow x=-2$$
$$(x+3)=0 \Longrightarrow x=-3$$

(2) $x^2-7x+12=0$

الـــحـــل

$$(x-4)(x-3)=0$$
$$(x-4)=0 \Longrightarrow x=4$$
$$(x-3)=0 \Longrightarrow x=3$$

(B) إذا كانت إشارة الحد المطلق c سالبة في هذه الحالة نختار عددين حاصل ضربهما الحد المطلقc وحاصل طرحهما الحد الأوسط b وإشارة أحدهما موجب والأخر سالب وأكبر العددين يأخذ إشارة الحد الأوسط b

مـثـــال:- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $x^2 - x - 12 = 0$

الـــحـــل

$(x-4)(x+3) = 0$

$(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 4$

$(x+3) = 0 \Longrightarrow x = -3$

(2) $x^2 + 4x - 5 = 0$

الـــحـــل

$(x-1)(x+5) = 0$

$(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$

$(x+5) = 0 \Longrightarrow x = -5$

النوع الثاني:- إذا كان معامل x^2 لا يساوي واحد $(a \neq 1)$ يوجد هناك طريقتان للحل:

(A) نستخدم القانون الآتي لحل المعادلة مباشرة دون التحليل $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ملاحظة هامة :- يستخدم هذا القانون لحل أي مقدار ثلاثي سواء كان معامل x^2 يساوي واحد أو لا يساوي واحد .

مـثــال:- أوجد حل المعادلة الآتية:-

@ $2x^2 + x - 1 = 0$

الـحــل

$a = 2$ ، $b = 1$ ، $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow (x - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$x = \frac{-1-3}{4} = -1 \Longrightarrow (x+1) = 0$$

$$(x - \tfrac{1}{2})(x+1) = 0$$

(B) نستخدم طريقة التحليل بالأقواس السابقة ولكن في هذه الحالة لا يكون حاصل طرح أو جمع العددين اللذين تم اختيارهما هو الحد الأوسط مباشرة وإنما يكون كالتالي :-

مـثــال:- أوجد حل المعادلة الآتية:-

(1) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

الـحــل

$$(2x - 1)(x - 3) = 0$$

$$-6x - x = -7x$$

$$(2x-1) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$$

(2) $2x^2-7x-15=0$

الـــحـــل

$(2x+3)(x-5)=0$

$-10x+3x=-7x$

$(2x+3)=0 \Longrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$(x-5)=0 \Longrightarrow x=5$

خامساً القسمة المطولة :- تستخدم القسمة المطولة لتحليل أي مقدار جبري وذلك بأن نبحث على عدد يجعل المقدار المراد تحليله يساوي صفراً عند التعويض به فيكون هذا العدد هو أحد عوامل المقدار ثم نقسم المقدار على هذا العامل باستخدام القسمة المطولة و هذا العدد الذي نبحث عنه يكون أحد عوامل الحد المطلق للمقدار الجبري المراد تحليله

مـــثـــال:- أوجد حل المعادلة الآتية:-

(1) $x^3-3x^2-6x+8=0$

الـــحـــل

عوامل الحد المطلق هي :- ±1 ، ±2

$x=1$

$(1)^3-3(1)^2-6(1)+8=0 \quad \therefore\ x-1=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-8 \\
\hline
x-1 & x^3-3x^2-6x+8 \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & -2x^2-6x+8 \\
 & \underline{-2x^2+2x} \\
 & -8x+8 \\
 & \underline{-8x+8} \\
 & 0
\end{array}
$$

$x^3-3x^2-6x+8=0$

$(x-1)(x^2-2x-8)=0$

$(x-1)(x-4)(x+2)=0$

$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

$(x-4)=0 \Rightarrow x=4$

$(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$

(2) $x^3-3x^2-4x+12=0$

الــحــل

عوامل الحد المطلق هي :- ±1 ، ±2 ، ±3

$x=2$

$(2)^3-3(2)^2-4(2)+12=0 \quad \therefore\ x-2=0$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x-6 \\ \hline x-2 & x^3-3x^2-4x+12 \\ & \underline{x^3-2x^2} \\ & -x^2-4x+12 \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & -6x+12 \\ & \underline{-6x+12} \\ & 0 \end{array}$$

$x^3-3x^2-4x+12=0$

$(x-2)(x^2-x-6)=0$

$(x-2)(x-3)(x+2)=0$

$(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$(x-3)=0 \Rightarrow x=3$

$(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$

حـــل مـــعـــادلات الـــقـــيـــمـــة الـــمـــطـــلـــقـــة

عند حل معادلات القيمة المطلقة {أي إذا كان ما بداخل القيمة المطلقة مقدار مجهولاً غير معلوم هل إشارته موجبة أو سالبة } فإننا نضع القيمة المطلقة في طرف وباقي الحدود في طرف ثم بعد ذلك هناك طريقتان لحل المعادلة :-

الطريقة الأولى:- نربع الطرفين للتخلص من القيمة المطلقة ونحل المعادلة الناتجة

الطريقة الثانية:- نلغي القيمة المطلقة ونضع لأحد طرفي المعادلة إشارتي ± ونحل المعادلة الناتجة .

مـــلاحـــظـــات :-

(1) بعد حل معادلة القيمة المطلقة يجب أن نتحقق من أن أي قيمة تم إيجادها تحقق معادلة القيمة المطلقة وذلك بالتعويض بهذه القيم في معادلة القيمة المطلقة .

(2) إذا كانت معادلة القيمة المطلقة تحتوي على قيمتين مطلقتين مجموعتين أو مطروحتين فإننا نضع كل قيمة مطلقة في طرف ثم نطبق أحد الطريقتين السابقتين

(3) إذا كان المقدار الذي بداخل القيمة المطلقة مقداراً موجباً معلوم الإشارة فإننا لا نحتاج لحل المعادلة إلى أحد الطريقتين السابقتين وإنما نكتفي بإلغاء القيمة المطلقة فقط ومن أبرز المقادير الموجبة دائماً :-

(A) مجموع مربعين x^2+a^2

(B) المقدار الثلاثي الذي مميزه أصغر من الصفر ax^2+bx+c , $b^2-4ac<0$

(C) المقادير المرفوعة لأس زوجي $(x+a)^n$ حيث n عدد زوجي

مـــثـــال :- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $|2x+1|=2$

الـــحـــل

$$2x+1=\pm 2$$

$2x+1=2$	$2x+1=-2$
$2x=1$	$2x=-3$
$x=\frac{1}{2}$	$x=-\frac{3}{2}$

التحقيق:-

$x=\frac{1}{2}$:

$$|2x+1|=2 \Longrightarrow |2(\tfrac{1}{2})+1|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة x = ½ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=-\frac{3}{2}$:

$$|2x+1|=2 \Longrightarrow |2(-\tfrac{3}{2})+1|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة x = - 3/2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

(2) $|x+1|-3=0$

الـــحـــل

$|x+1|=3$

$$x+1=\pm 3$$

$x+1=3$	$x+1=-3$
$x=2$	$x=-4$

التحقيق:-

$x=2:$

$|x+1|-3=0 \Longrightarrow |2+1|-3=0 \Longrightarrow 0=0$

القيمة x = 2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=-4:$

$|x+1|-3=0 \Longrightarrow |-4+1|-3=0 \Longrightarrow 0=0$

القيمة x = - 4 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

(3) $|x+1|-2x=0$

الحـــل

$|x+1|=2x$

$x+1=\pm 2x$

$x+1=2x$	$x+1=-2x$
$2x-x=1$	$2x+x=-1$
$x=1$	$3x=-1$
	$x=-\frac{1}{3}$

التحقيق:-

$x=1:$

$|x+1|-2x=0 \Longrightarrow |1+1|-2=0 \Longrightarrow 0=0$

القيمة x =1 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=-\frac{1}{3}:$

$|x+1|-2x=0 \Longrightarrow \left|-\frac{1}{3}+1\right|-2(-\frac{1}{3})=0 \Longrightarrow \frac{4}{3}\neq 0$

القيمة x = -⅓ غير مقبولة لأنها لا تحقق المعادلة

(4) $\left|x^2-2\right|-3=0$

الحل

$\left|x^2-2\right|=3$

$$x^2-2=\pm3$$

$x^2-2=3$	$x^2-2=-3$
$x^2=5$	$x^2+1=0$
$x=\pm\sqrt{5}$	$x=\pm i$
	مرفوضة في نطاق الأعداد الحقيقية

التحقيق:-

$x=\sqrt{5}$:

$$\left|x^2-2\right|-3=0 \Longrightarrow \left|(\sqrt{5})^2-2\right|-3=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة $\sqrt{5}$ = x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=-\sqrt{5}$:

$$\left|x^2-2\right|-3=0 \Longrightarrow \left|(-\sqrt{5})^2-2\right|-3=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة $-\sqrt{5}$ = x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

(5) $|x^2-5x+2|-2=0$

الحــل

$$|x^2-5x+2|=2$$

$$x^2-5x+2=\pm 2$$

$x^2-5x+2=2$	$x^2-5x+2=-2$
$x^2-5x=0$	$x^2-5x+4=0$
$x(x-5)=0$	$(x-4)(x-1)=0$
$x=0, x=5$	$x=4, x=1$

التحقيق:-

$x=0:$

$$|x^2-5x+2|=2 \Longrightarrow |(0)^2-5(0)+2|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة x = 0 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=5:$

$$|x^2-5x+2|=2 \Longrightarrow |(5)^2-5(5)+2|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة x = 5 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=4:$

$$|x^2-5x+2|=2 \Longrightarrow |(4)^2-5(4)+2|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة4 = x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=1:$

$$|x^2-5x+2|=2 \Longrightarrow |(1)^2-5(1)+2|=2 \Longrightarrow 2=2$$

القيمة 1= x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(6)\ \left|\frac{x+2}{x+1}\right|-2=0$$

الـحـل

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right|=2$$

$$\frac{x+2}{x+1}=\pm 2$$

$$\frac{x+2}{x+1}=2 \qquad\qquad \frac{x+2}{x+1}=-2$$

$$x+2=2x+2 \qquad\qquad x+2=-2x-2$$

$$2x-x=2-2 \qquad\qquad 3x=-4$$

$$x=0 \qquad\qquad x=-\frac{4}{3}$$

التحقيق:-

$x=0:$

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-2=0 \Longrightarrow \left|\frac{0+2}{0+1}\right|-2=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة $x = 0$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=-\frac{4}{3}:$

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-2=0 \Longrightarrow \left|\frac{-\frac{4}{3}+2}{-\frac{4}{3}+1}\right|-2=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة $x =-4/3$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$(7)\ |x-1|-|x-4|=0$

الـحـل

$|x-1|=|x-4|$

$$x-1=\pm(x-4)$$

$x-1=x-4$

$0\neq-3$

تناقض رياضي

$x-1=-x+4$

$2x=5$

$x=\frac{5}{2}$

التحقيق:-

$x=\frac{5}{2}:$

$$|x-1|-|x-4|=0 \Longrightarrow \left|\frac{5}{2}-1\right|-\left|\frac{5}{2}-4\right|=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة x =5/2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$(8)\ |2x-5|-|x-7|=0$

الـحـل

$|2x-5|=|x-7|$

$$2x-5=\pm(x-7)$$

$2x-5=x-7$

$x=-2$

$2x-5=-x+7$

$3x=12$

$x=\frac{12}{3}=4$

التحقيق:-

$x=-2:$

$$|2x-5|-|x-7|=0 \Longrightarrow |2(-2)-5|-|-2-7|=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة x = - 2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x = 4:$

$$|2x-5|-|x-7|=0 \Longrightarrow |2(4)-5|-|4-7|=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة 4 = x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

(9) $|x-3|\ |x+3| = 0$

الحل

$$|(x-3)(x+3)| = 0$$

$$|x^2-9| = 0 \Longrightarrow x^2-9=0$$

$x^2-9=0$

$(x-3)(x+3)=0$

$(x-3)=0 \quad , \ x=3$

$(x+3)=0 \ , \ x=-3$

التحقيق:-

$x=-3:$

$$|x^2-9|=0 \Longrightarrow |(-3)^2-9|=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة 3- = x ، مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x=3:$

$$|x^2-9|=0 \Longrightarrow |(3)^2-9|=0 \Longrightarrow 0=0$$

القيمة 3 = x مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(10)\ |x^2 + 2| - 6 = 0$$

الــحــل

انظر ملاحظة (A)- (3) صفحة (34)

$$|x^2 + 2| = 6$$
$$x^2 + 2 = 6$$
$$x^2 + 2 - 6 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad , x = 2$$
$$x + 2 = 0 \quad , x = -2$$

التحقيق:-

$x = -2:$

$$|x^2 + 2| - 6 = 0 \Longrightarrow |(-2)^2 + 2| - 6 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

القيمة x = -2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$x = 2:$

$$|x^2 + 2| - 6 = 0 \Longrightarrow |(2)^2 + 2| - 6 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

القيمة x = 2 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(11)\ |x+1| + 3 = 0$$

الــحــل

مجموعة حل هذه المعادلة هو ϕ لأنه لا توجد قيمة تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتين يساوي صفرا ويمكن للطالب أن يحل المعادلة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق من ذلك

$$(12)\ |2x-5|+|x-7|=0$$

الحـــل

مجموعة حل هذه المعادلة هو ϕ لأنه لا توجد قيمة تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتّين يساوي صفرا ويمكن للطالب أن يحل المعادلة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق من ذلك

$$(13)\ |x-1|\ |3x-4|=-4$$

الحـــل

مجموعة حل هذه المعادلة هو ϕ لأنه لا توجد قيمة تحقق أن حاصل ضرب كميتين موجبتين يساوي كمية سالبة ويمكن للطالب أن يحل المعادلة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق من ذلك .

حـــل الـــمـــعـــادلات الـــجـــذريـــة

عند حل المعادلات المشتملة على جذور فإننا نضع الحدود المشتملة على جذور في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر ثم نرفع الطرفين لأس دليل الجذر للتخلص من الجذر .

مــلاحـظـة :-

@ بعد حل المعادلة الجذرية يجب أن نتحقق من أن القيم التي تم إيجادها تحقق المعادلة الجذرية وذلك بالتعويض بهذه القيم في المعادلة الجذرية .

مــثــال :- أوجد حل المعادلات الآتية :-

(1) $\sqrt{x+1} = 2$

الــحــل

$$(\sqrt{x+1})^2 = (2)^2$$
$$x+1 = 4$$
$$x = 4-1$$
$$x = 3$$

التحقـيـق :-

$$\sqrt{x+1} = 2$$
$$\sqrt{3+1} = 2$$
$$\sqrt{4} = 2$$
$$2 = 2$$

القيمة $x = 3$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(2)\ \sqrt{2x-1}-3=0$$

الـحـل

$$\sqrt{2x-1}=3$$

$$(\sqrt{2x-1})^2=(3)^2$$

$$2x-1=9$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

التـحـقـيـق :-

$$\sqrt{2x-1}-3=0$$

$$\sqrt{10-1}-3=0$$

$$\sqrt{9}-3=0$$

$$0=0$$

القيمة $x = 5$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

(3) $x + \sqrt{x} = 6$

الــحــل

$$(\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2$$

$$x = 36 - 12x + x^2$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x - 9)(x - 4) = 0$$

$$(x - 9) = 0 \Longrightarrow x = 9$$

$$(x - 4) = 0 \Longrightarrow x = 4$$

الـتحـقـيـق :-

$$x = 9$$

$$x + \sqrt{x} = 6$$

$$9 + \sqrt{9} = 6$$

$$12 \neq 6$$

القيمة $x = 9$ غير مقبولة لأنـها لا تحقق المعادلة

$$x = 4$$

$$x + \sqrt{x} = 6$$

$$4 + \sqrt{4} = 6$$

$$6 = 6$$

القيمة $x = 4$ مقبولة لأنـها تحقق المعادلة

$$(4)\ x + \sqrt{x+2} = 4$$

الحل

$$(\sqrt{x+2})^2 = (4-x)^2$$
$$x + 2 = 16 - 8x + x^2$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0$$
$$(x-2)(x-7) = 0$$
$$(x-2) = 0 \quad , x = 2$$
$$(x-7) = 0 \quad , x = 7$$

التحقيق :-

$$x = 2$$
$$x + \sqrt{x+2} = 4$$
$$2 + \sqrt{4} = 4$$
$$4 = 4$$

القيمة $x = 2$ غير مقبولة لأنها لا تحقق المعادلة

$$x = 7$$
$$x + \sqrt{x+2} = 4$$
$$7 + \sqrt{9} = 4$$
$$10 \neq 4$$

القيمة $x = 7$ غير مقبولة لأنها لا تحقق المعادلة

$$(5)\ \sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$$

الـــحـــل

$$(\sqrt{x}-\sqrt{x-5})^2=(1)^2$$

$$x-2\sqrt{x^2-5x}+x-5=1$$

$$-2\sqrt{x^2-5x}=-2x+6$$

بقسمة الطرفين على 2-

$$\sqrt{x^2-5x}=x-3$$

$$(\sqrt{x^2-5x})^2=(x-3)^2$$

$$x^2-5x=x^2-6x+9$$

$$-5x+6x=9$$

$$x=9$$

الـتـحـقـيـق :-

$$x=9$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$$

$$\sqrt{9}-\sqrt{9-5}=1$$

$$3-2=1$$

$$1=1$$

القيمة x = 9 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(6)\ \sqrt{x-3}-\sqrt{x}=-1$$

الـحـل

$$(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})^2=(-1)^2$$

$$x-3-2\sqrt{x^2-3x}+x=1$$

$$-2\sqrt{x^2-3x}=-2x+4$$

بقسمة الطرفين على 2-

$$\sqrt{x^2-3x}=x-2$$

$$(\sqrt{x^2-3x})^2=(x-2)^2$$

$$x^2-3x=x^2-4x+4$$

$$-3x+4x=4$$

$$x=4$$

التحقـيـق :-

$$x=4$$

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=-1$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{4}=-1$$

$$1-2=-1$$

$$-1=-1$$

القيمة $x = 4$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(7)\ x\sqrt{x^2-1}=0$$

الـحـل

$$\left(x\sqrt{x^2-1}\right)^2=(0)^2$$

$$x^2(x^2-1)=0$$

$$x^2=0\ ,x=0$$

$$(x^2-1)=0$$

$$(x-1)(x+1)=0$$

$$(x-1)=0\ ,x=1$$

$$(x+1)=0\ ,x=-1$$

التحقـيـق :-

$$x=0$$

$$x\sqrt{x^2-1}=0$$

$$(0)\sqrt{0-1}=0$$

$$0=0$$

القيمة x = 0 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$x=1$$

$$x\sqrt{x^2-1}=0$$

$$(1)\sqrt{(1)^2-1}=0$$

$$0=0$$

القيمة x = 1 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$x=-1$$

$$x\sqrt{x^2-1}=0$$

$$(-1)\sqrt{(-1)^2-1}=0$$

$$0=0$$

القيمة x = -1 مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(8)\ \sqrt[3]{x+1}=2$$

الـحـل

$$(\sqrt[3]{x+1})^3=(2)^3$$
$$x+1=8$$
$$x=8-1$$
$$x=7$$

التـحـقـيـق :-

$$\sqrt[3]{x+1}=2$$
$$\sqrt[3]{7+1}=2$$
$$\sqrt[3]{8}=2$$
$$2=2$$

القيمة $x = 7$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

$$(9)\ \sqrt{x+1}+2=0$$

الـحـل

مجموعة حل هذه المعادلة هو ϕ لأنه لا توجد قيمة تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتين يساوي صفرا ويمكن للطالب أن يحل المعادلة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق منها

$$(10)\ \sqrt{x-3}+\sqrt{x}=-1$$

الـحـل

مجموعة حل هذه المعادلة هو ϕ لأنه لا توجد قيمة تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتين يساوي كمية سالبة ويمكن للطالب أن يحل المعادلة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق منه

(11) $\sqrt{x^2-3} = |x+2|$

الــحــل

$$\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2 = (|x+2|)^2$$

$$x^2-3 = x^2+4x+4$$

$$4x+4=-3$$

$$4x=-7$$

$$x=-\frac{7}{4}$$

التحـقـيـق :-

$$x=-\frac{7}{4}$$

$$\sqrt{x^2-3}=|x+2|$$

$$\sqrt{(-\frac{7}{4})^2-3}=\left|-\frac{7}{4}+2\right|$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}-3}=\left|-\frac{7}{4}+2\right|$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

القيمة $x = -7/4$ مقبولة لأنها تحقق المعادلة

دراســـة إشـــارة الــمــقـاديــر الــجـبـريــة

مــثــال:- ادرس إشارة المقادير الجبرية الأتية :-

(1) $x+1=0$

الــحــل

$x=-1$

$x<-1 \qquad x=-1 \qquad x>-1$

$$\xleftarrow{\;- - - - - - - - - - - - - - - -\;}\bullet\xrightarrow{\;+ + + + + + + + + + + +\;}\quad (x+1)$$

-1

المقدار يكون موجب في الفترة $(-1، \infty)$

المقدار يكون سالب في الفترة $(-\infty، -1)$

المقدار يساوي صفراً عند $x = -1$

(2) $2x+4=0$

الــحــل

$2x=-4$

$x=-2$

$x<-2 \qquad x=-2 \qquad x>-2$

$$\xleftarrow{\;- - - - - - - - - - - - - - - - -\;}\bullet\xrightarrow{\;+ + + + + + + + + + + +\;}\quad (x+2)$$

-2

المقدار يكون موجب في الفترة $(-2، \infty)$

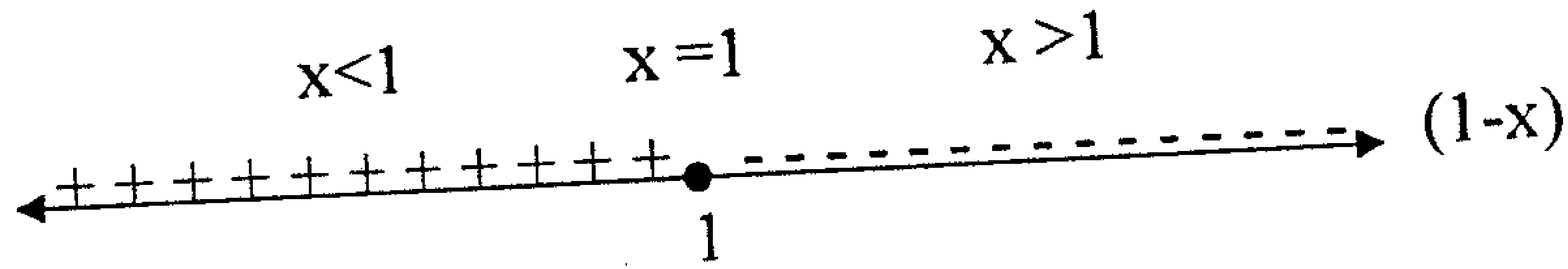
المقدار يكون سالب في الفترة $(-\infty، -2)$

المقدار يساوي صفراً عند $x = -2$

(3) $1-x=0$

الحـــل

$x=1$



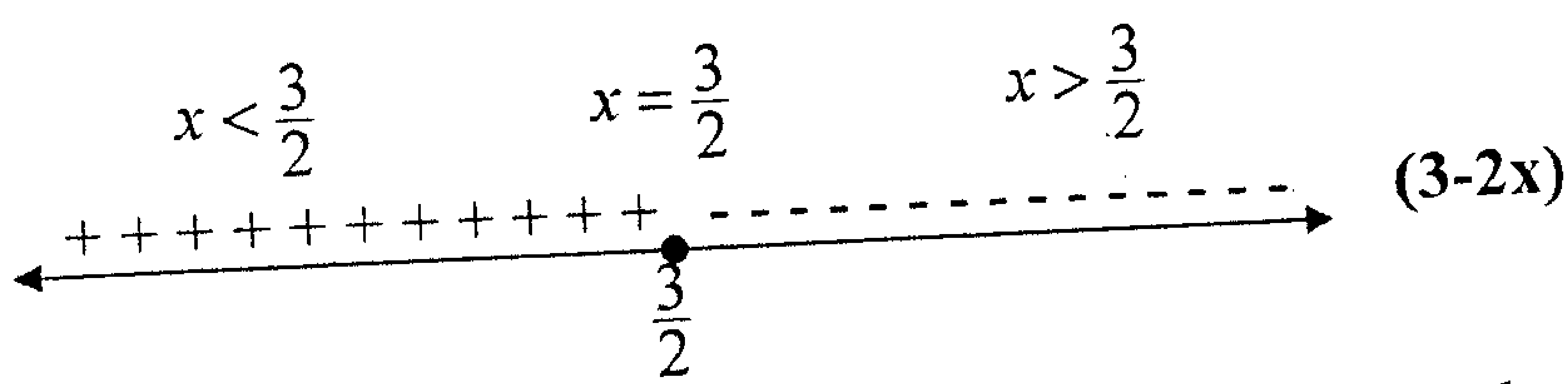
المقدار يكون موجب في الفترة (1 ، ∞-)
المقدار يكون سالب في الفترة (∞ ،1)
المقدار يساوي صفراً عند $x = 1$

(4) $3-2x=0$

الحـــل

$3=2x$

$x=\frac{3}{2}$



المقدار يكون موجب في الفترة ($\frac{3}{2}$ ، ∞-)

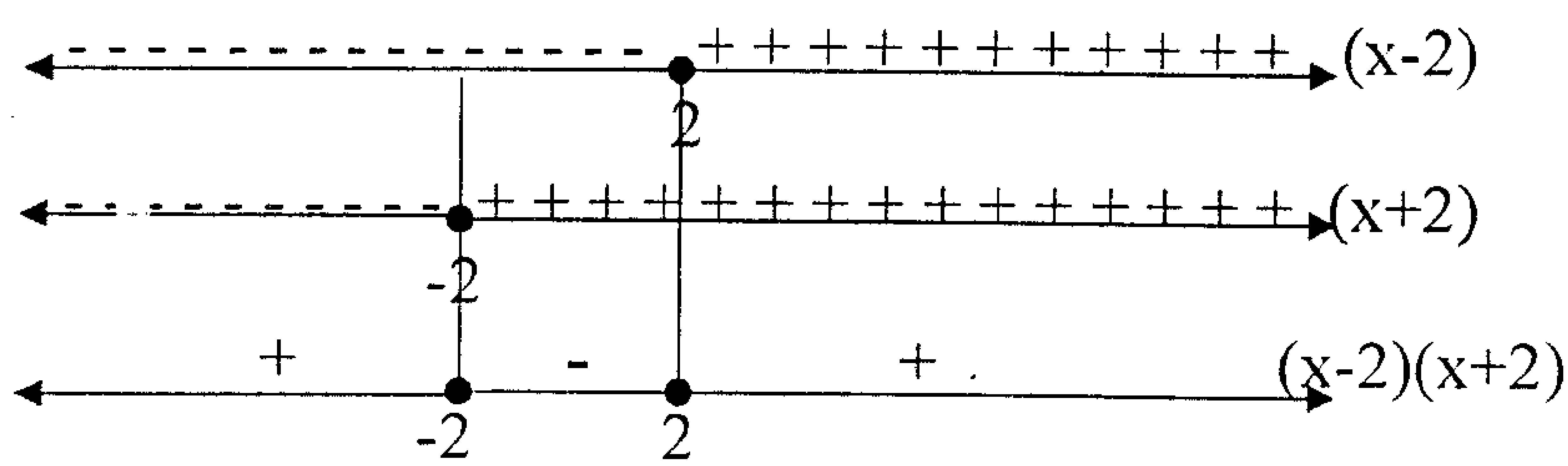
المقدار يكون سالب في الفترة (∞ ، $\frac{3}{2}$)

المقدار يساوي صفراً عند $x = \frac{3}{2}$

(5) $x^2-4=0$

الحـــل

$$(x-2)(x+2)=0$$
$$(x-2)=0 \quad ,x=2$$
$$(x+2)=0 \quad ,x=-2$$

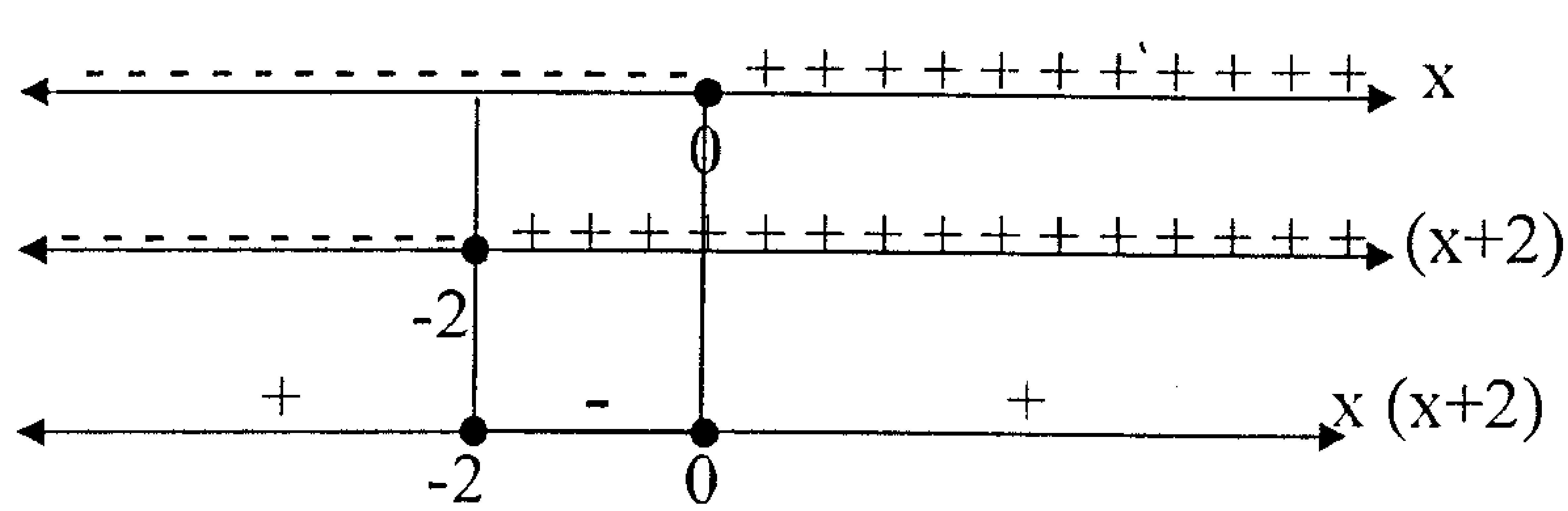


المقدار يكون موجب في الفترة (∞ ، 2) ∪ (2- ،∞-)
المقدار يكون سالب في الفترة (2 ،2-)
المقدار يساوي صفراً عند x = -2 ، x = 2

(6) $x^2+2x=0$

الحـــل

$$x(x+2)=0$$
$$x=0$$
$$(x+2)=0 \quad ,x=-2$$

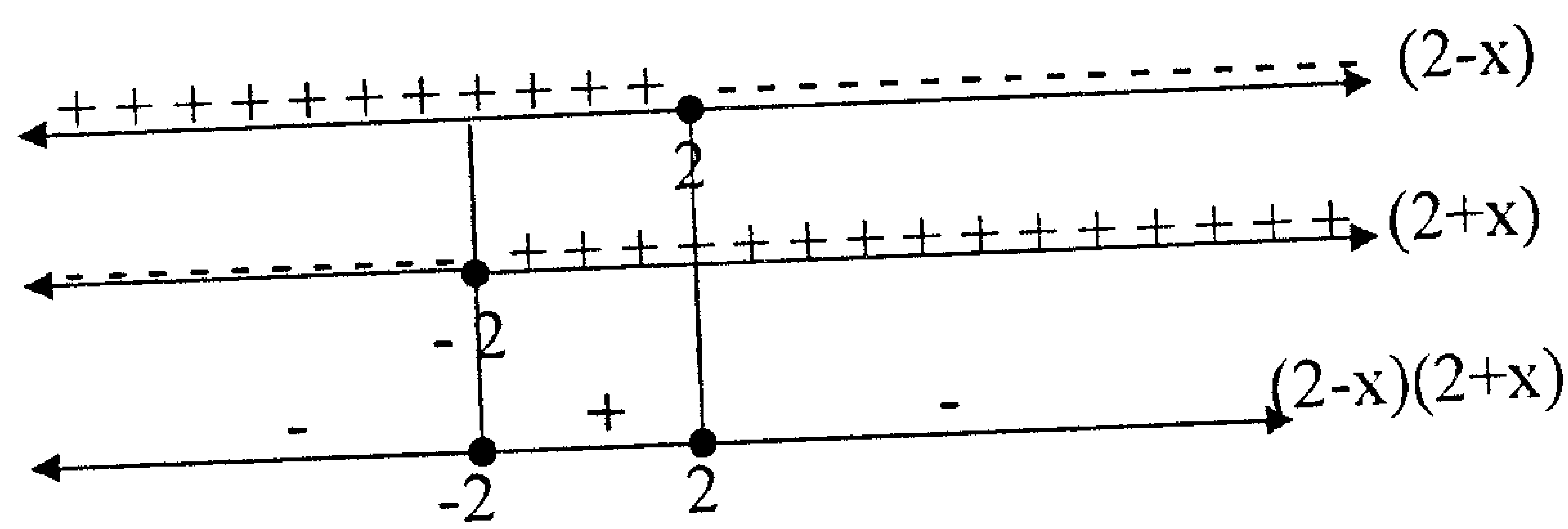


المقدار يكون موجب في الفترة (∞ ، 0) ∪ (2- ،∞-)
المقدار يكون سالب في الفترة (0 ،2-)
المقدار يساوي صفراً عند 2- = x ، x = 0

$(7)\, 4-x^2=0$

الـــحـــل

$(2-x)(2+x)=0$
$(2-x)=0 \quad ,x=2$
$(2+x)=0 \quad ,x=-2$



المقدار يكون موجب في الفترة (2 ،2-)
المقدار يكون سالب في الفترة (∞ ، 2) ∪ (2- ،∞-)
المقدار يساوي صفراً عند 2- = x ، x = 2

حــاصــل الــضــرب الــكــارتــيــزي :-

إذا كانت A ، B مجموعتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزي لهما يعرف كالتالي:- $A \times B = \{(x,y) \;:\; x \in A, y \in B\}$

مــثــال :- إذا كانت $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$ فأوجد $A \times B$ ؟

الــحــل

$$A \times B = \{1,2,3\} \times \{0,1\} = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

الــعــلاقــة :- هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين غير خالتين A, B ويعبر عنها بطريقتين :-

(A) طريقة القائمة :- وهي أن تكتب عناصر العلاقة داخل أقواس مجم_عة مع وضع فاصلة بين كل عنصر وآخر

$$EX : h = \{(1,2),(1,3),(1,5)\}$$

(B) طريقة الوصف الرمزي :- وفي هذه الحالة نعبر عن العلاقة بأسلوب رمزي

$$EX : h = \{(x,y) \quad y = 2x \quad , x \in A, y \in B\}$$

وتكتب العلاقة في هذه الحالة بشكل مختصر كالتالي :

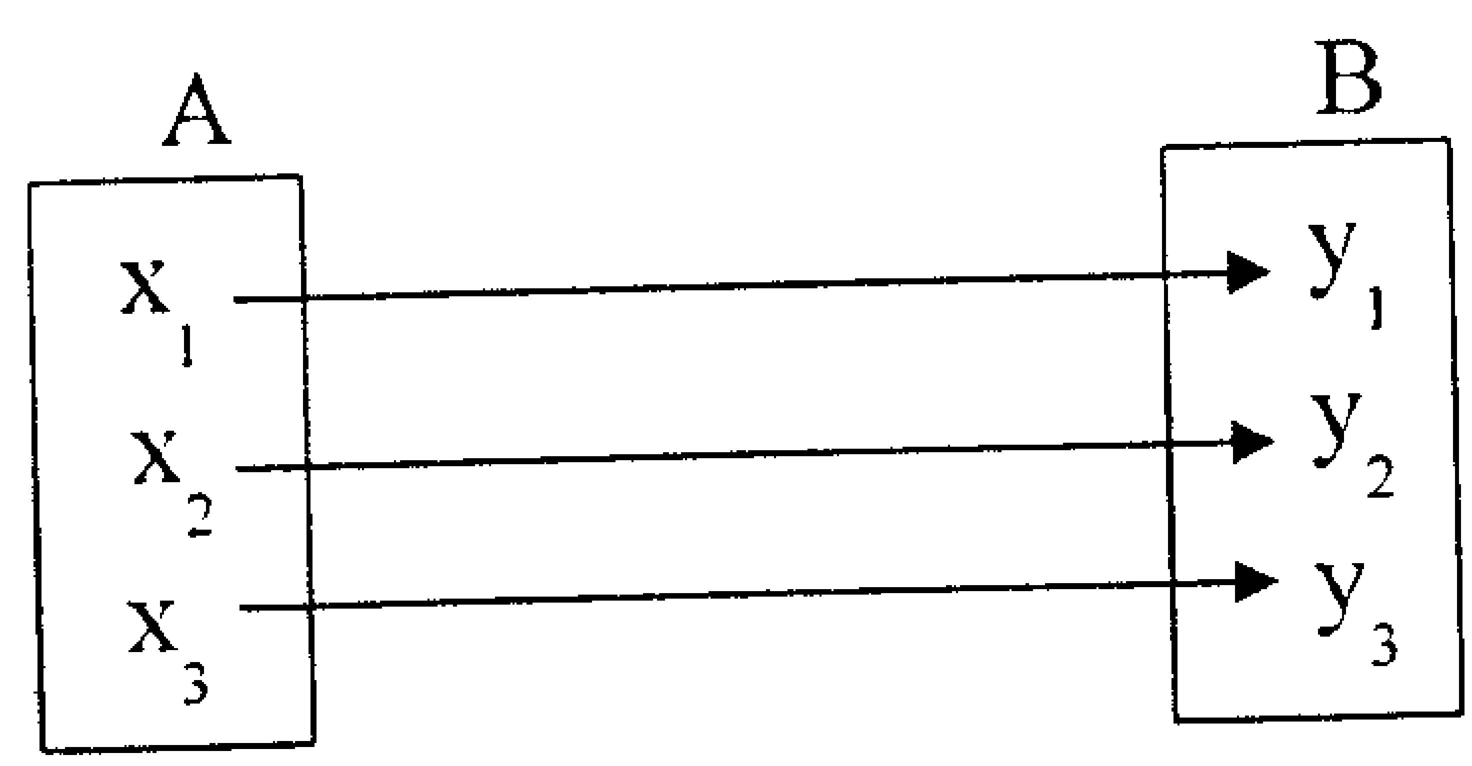
$$h(x) = 2x \;\;,\;\; x \in A \;\;,\;\; y = h(x) \in B$$

مــلاحــظــة:- يعبر عن العلاقة بين مجموعتين A , B مرتبطين بالرمز :

$$h : A \longrightarrow B$$

التمثيل البياني للعلاقات المكتوبة بطريقة القائمة :- إذا كانت B ، A مجموعتين غير خاليتين و h علاقة $h : A \longrightarrow B$ فيمكن تمثيل العلاقة h بيانياً وذلك برسم شكلين هندسيين بحيث توضع عناصر A في أحد الشكلين وعناصر B في الشكل الآخر ثم يتم توصيل عناصر A مع عناصر B بواسطة أسهم على حسب ارتباط العناصر في العلاقة h

$$h = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$$

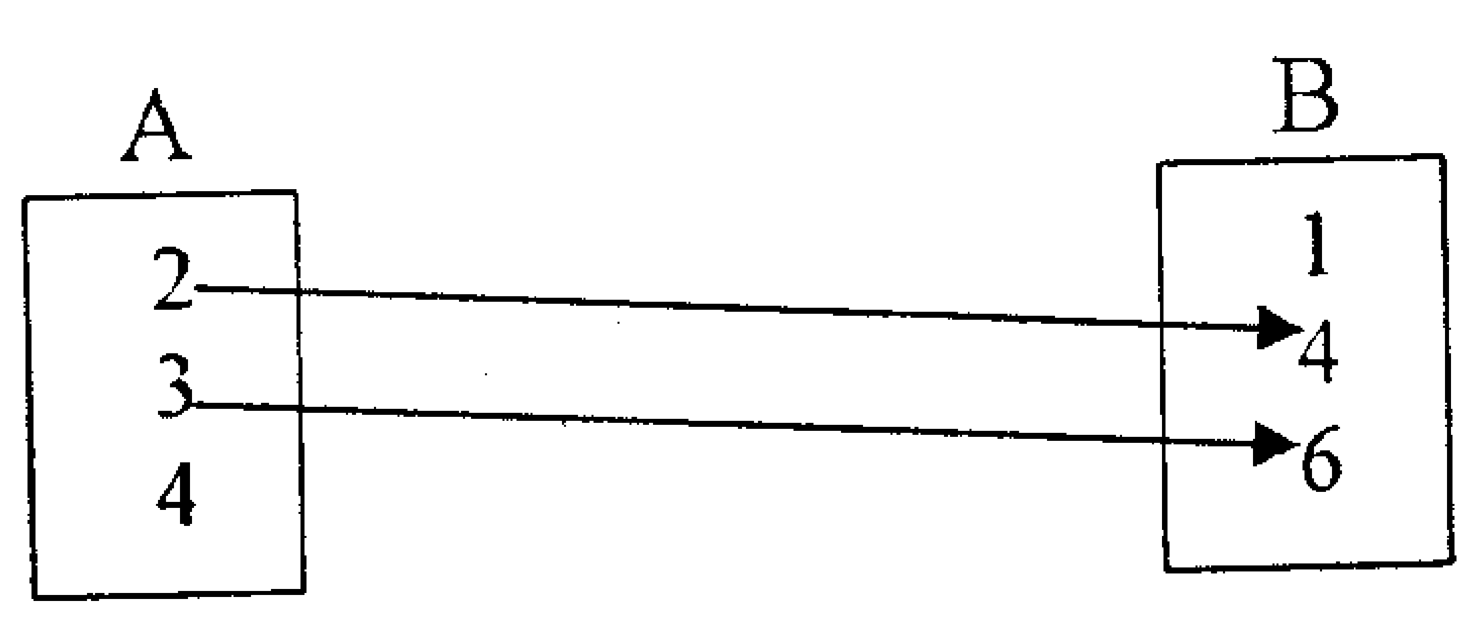


مــثــال:- إذا كانت $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$ مجموعتين فعبر عن العلاقة الآتية بطريقة القائمة ومثلها بيانياً :-

$$EX : h = \{(x, y) \quad x = \frac{1}{2} y \quad , x \in A, x \in B\}$$

الــحــل

$$A \times B = \{2,3,4\} \times \{1,4,6\} = \{(2,1),(2,4),(2,6),(3,1),(3,4),(3,6),(4,1),(4,4),(4,6)\}$$
$$h = \{(2,4),(3,6)\}$$



مـثـال:- إذا كانت $A=\{0,1,2\}$, $B=\{2,3,0\}$ مجموعتين فعبر عن العلاقة

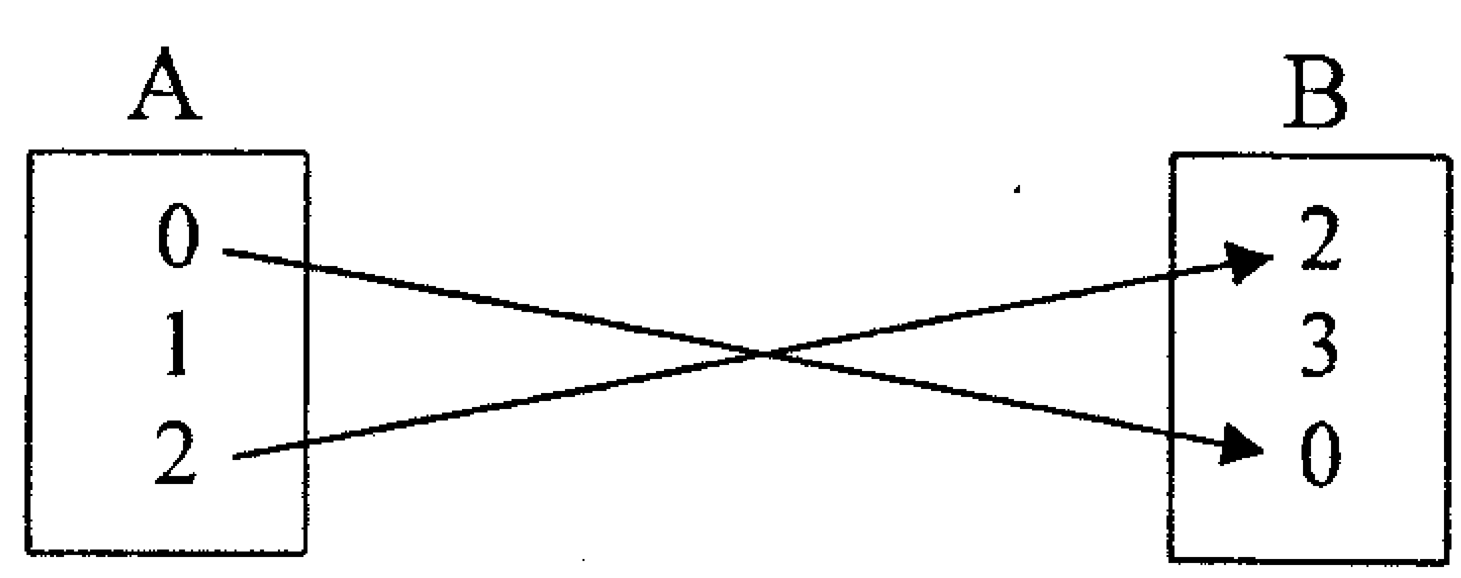
الآتية بطريقة القائمة ومثلها بيانياً :-

$$EX : g(x)=x \;\; , \;\; x\in A \; , \; y=g(x)\in B$$

الـــحـــل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{2,3,0\}=\{(0,2),(0,3),(0,0),(1,2),(1,3),(1,0),(2,2),(2,3),(2,0)\}$$

$$g=\{(0,0),(2,2)\}$$



الـعـلاقـة الـعـكـسـيـة :- إذا كانت h علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B

$h : A \longrightarrow B$ فإن العلاقة العكسية تكون علاقة

من المجموعة B إلى المجموعة A ويرمز لها بالرمز h^{-1}

$h^{-1}: B \longrightarrow A$ ويمكن إيجادها كما يلي :

(A) **إذا كانت العلاقة في صورة أزواج مرتبة :-** فالعلاقة العكسية لها نحصل عليها

بأن تتبادل x مع y الأوضاع في الأزواج المرتبة للعلاقة .

$$EX : h=\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$$

$$h^{-1}=\{(2,1),(3,1),(5,1)\}$$

(B) إذا كانت العلاقة في صورة وصف رمزي :- إذا كانت $y = h(x)$ علاقة فإن العلاقة العكسية لها هي $x = h(y)$

$$Ex:\ h(x) = 3x$$
$$\because y = 3x$$
$$x = \frac{1}{3}y$$
$$h(y) = \frac{1}{3}y$$

ملاحظة :- يمكن إيجاد العلاقة العكسية بدلالة x وذلك بأن تتبادل x ، y الوضع في الصورة x = h(x) ويرمز لها في هذه الحالة بالرمز $y = h^{-1}(x)$

ففي المثال السابق يمكن كتابة العلاقة بدلالة x كالتالي $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$

نطاق العلاقة :- يطلق على مجموعة العناصر التي تظهر كإحداثي أول في العلاقة الثنائية h ويرمز له بالرمز D_h

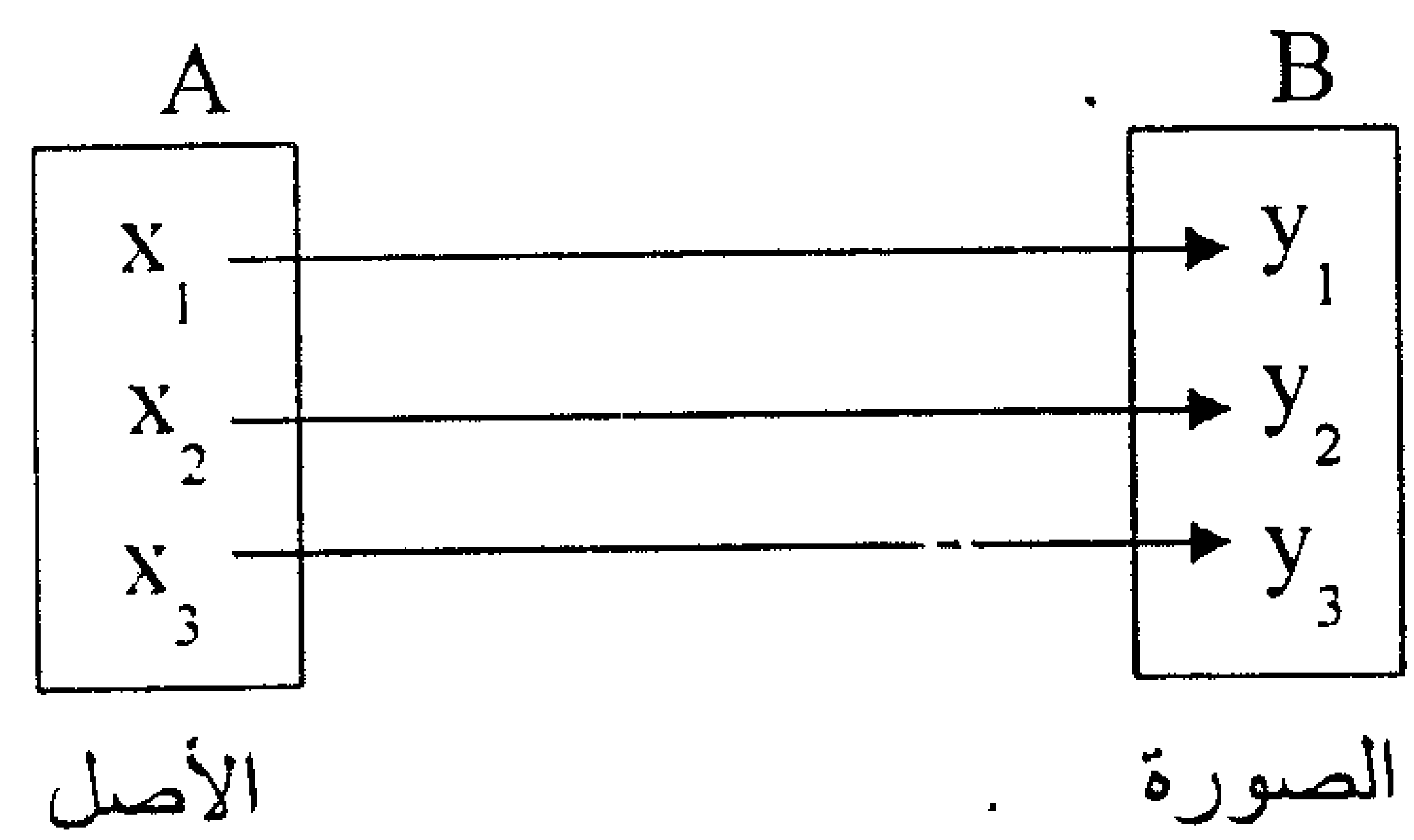
$$EX: h = \{(1,2),(3,3),(4,5)\}$$
$$D_h = \{1,3,4\}$$

مدى العلاقة :- يطلق على مجموعة العناصر التي تظهر كإحداثي ثاني في العلاقة الثنائية h ويرمز له بالرمز R_h

$$EX: h = \{(1,2),(3,3),(4,5)\}$$
$$R_h = \{2,3,5\}$$

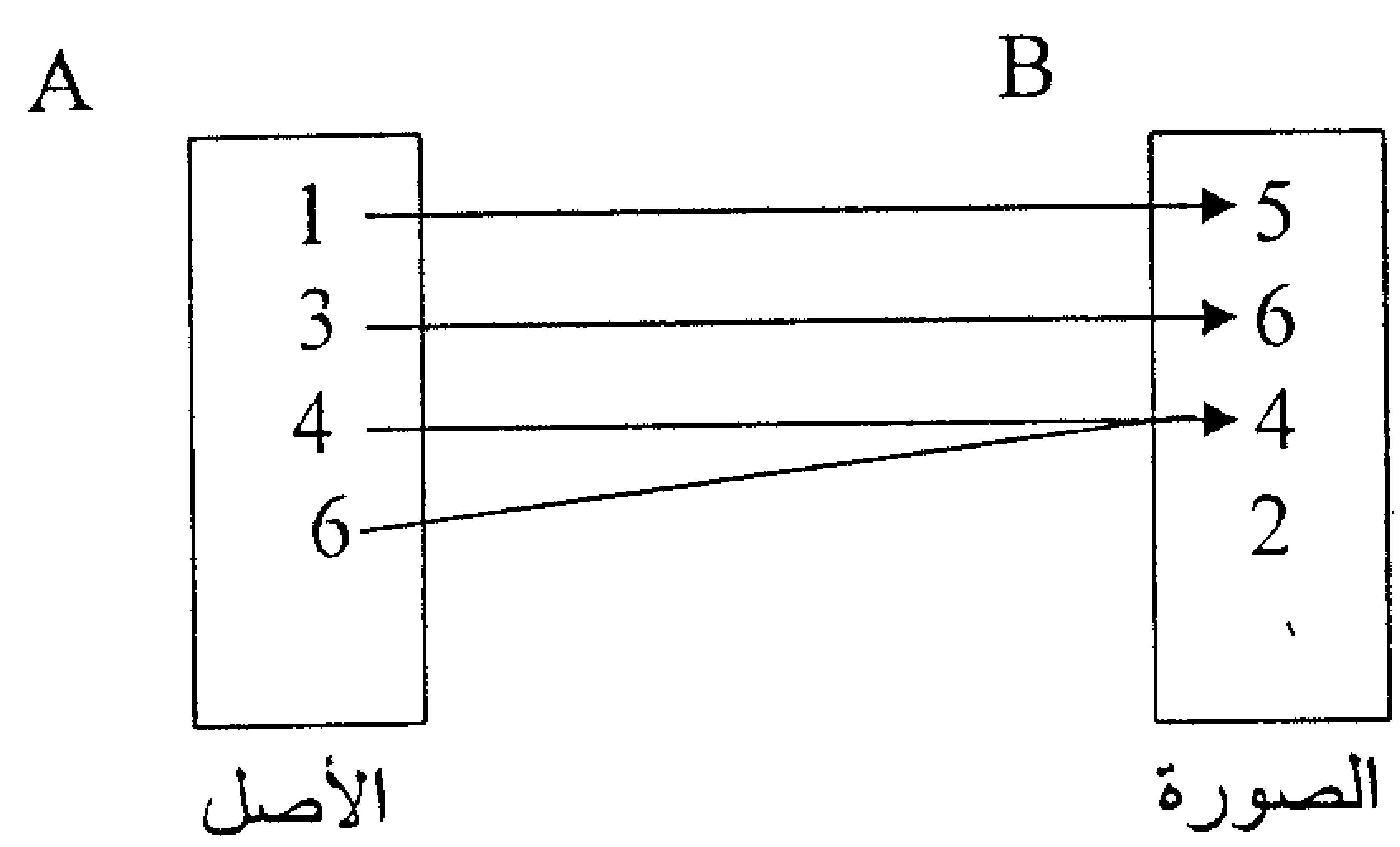
الــدالـــة

هي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B يتحقق فيها أن كل عنصر x ينتمى إلى A يرتبط بعنصر وحيد y ينتمي إلى B .



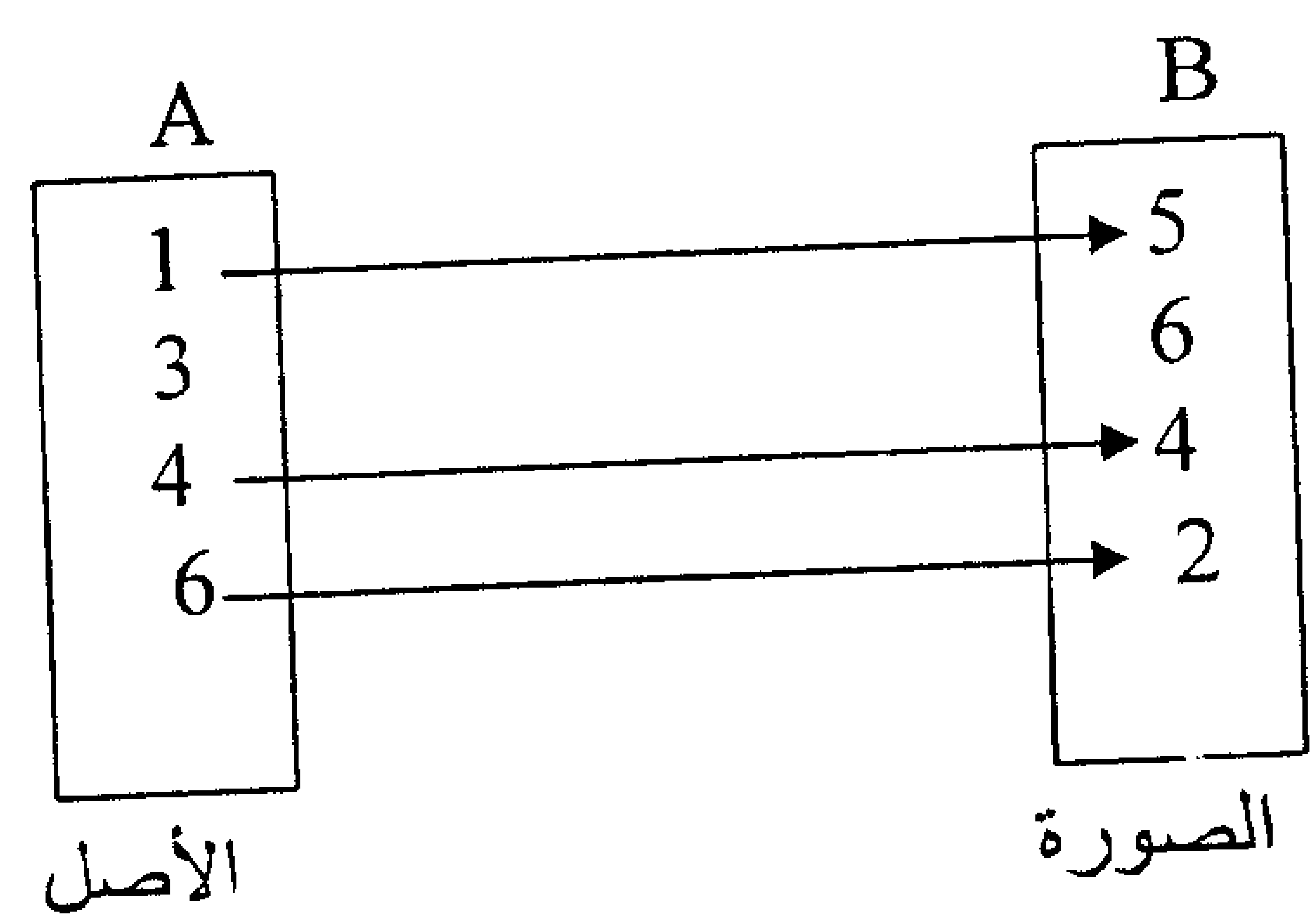
مـثـــال:- إذا كانت $B = \{5,6,4,2\}$, $A = \{1,3,4,6\}$ فبين أي العلاقات الآتية تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة :

(1) $h = \{(1,5),(3,6),(4,4),(6,4)\}$



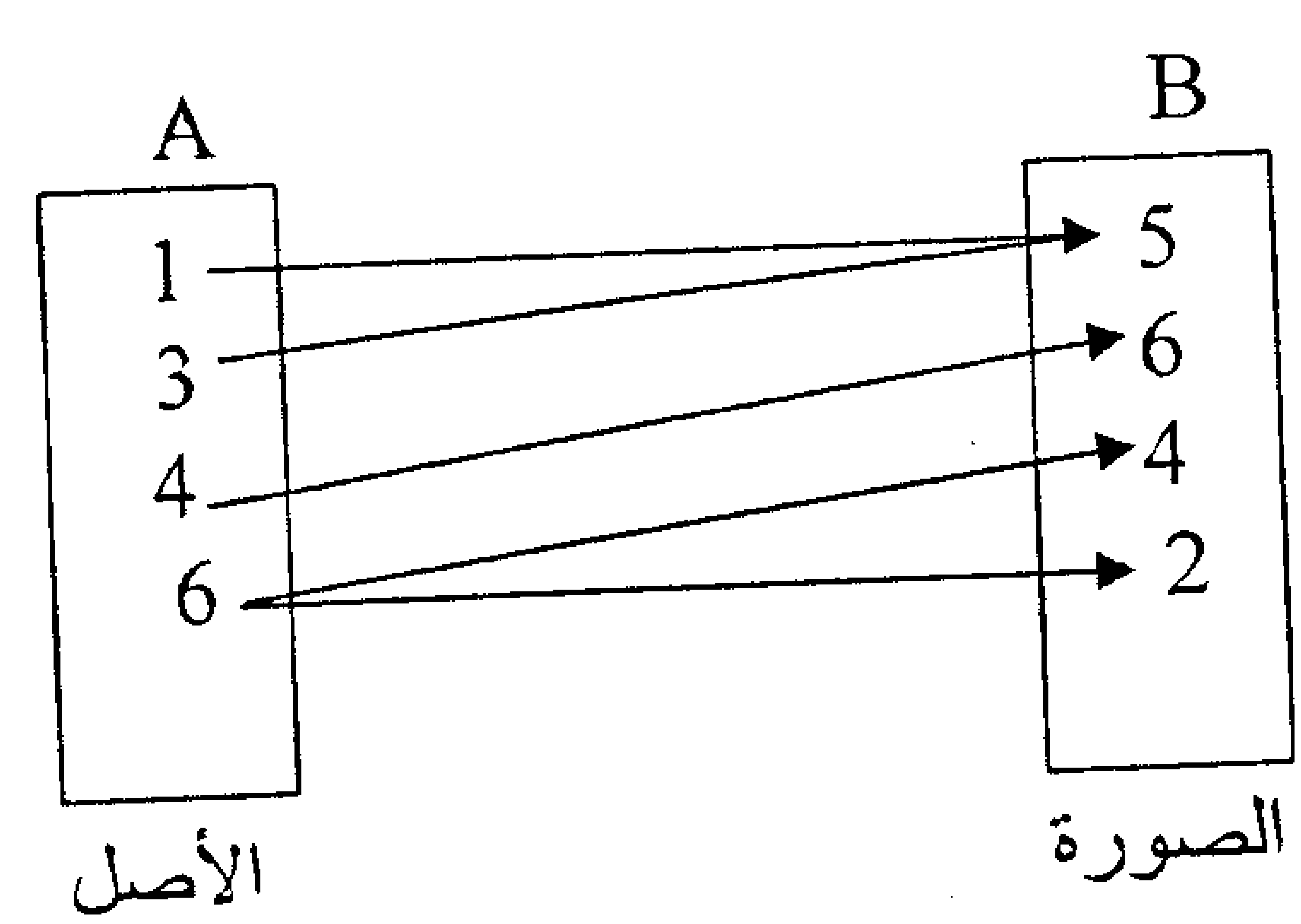
العلاقة تمثل دالة

(2) $h=\{(1,5),(4,4),(6,2)\}$



العلاقة لا تمثل دالة لأن العدد 3 ليس له صورة في B

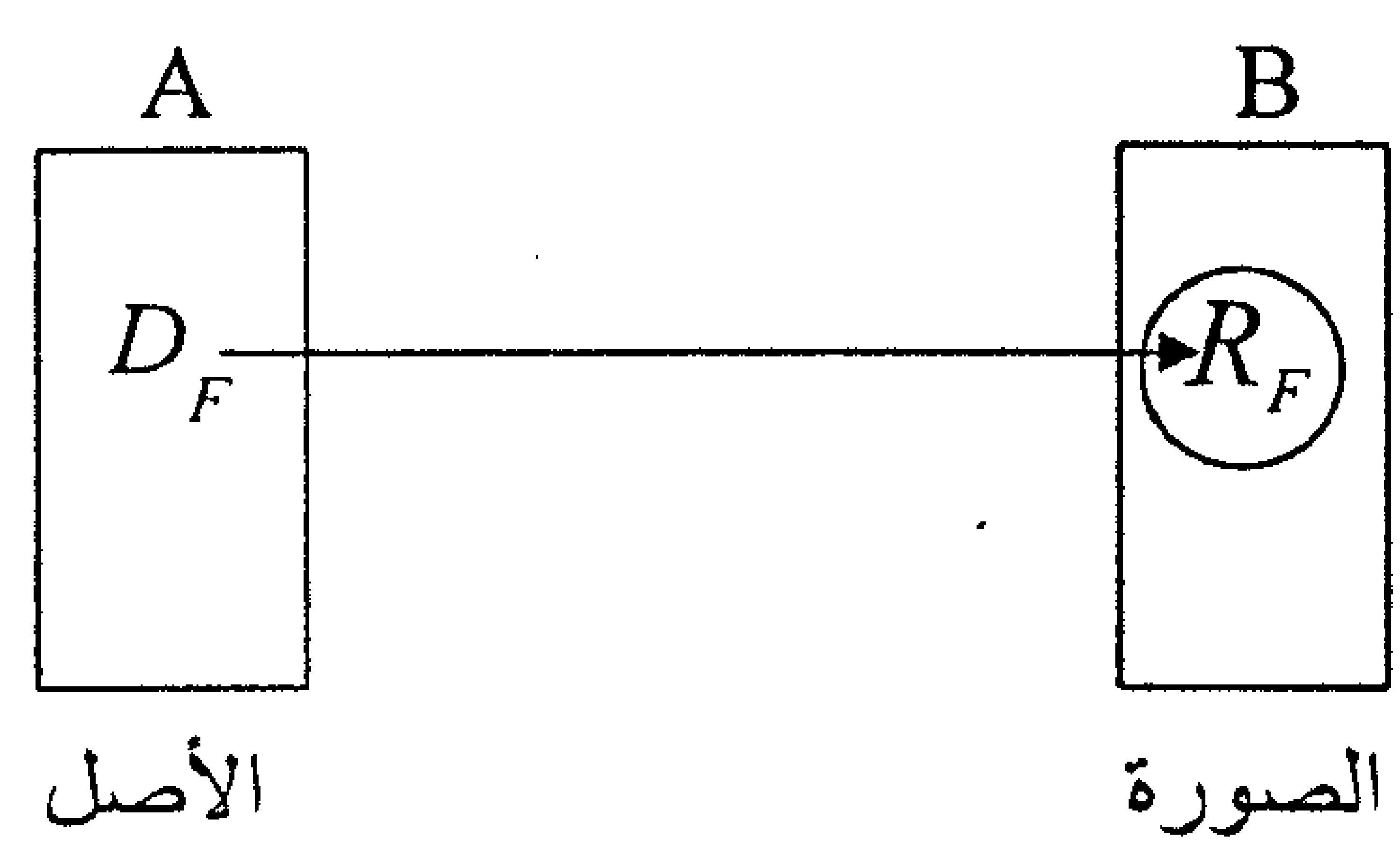
(3) $h=\{(1,5),(3,5),(4,6),(6,2),(6,4)\}$



العلاقة لا تمثل دالة لأن العدد 6 له صورتان في B

ملاحظات :-

(1) تكتب الدالة على صورة $y = F(x)$ للدلالة على أن العنصر y هو تلك القيمة الناتجة من x أو مرتبطة بـ x أو صورة لـ x وتسمى عناصر x بنطاق الدالة أو مجال الدالة ويرمز له بالرمز D_F بينما تسمى عناصر y بمدى الدالة ويرمز لها بالرمز R_F .



(2) المجموعة B تسمى النطاق المصاحب والمدى هو مجموعة جزئية من النطاق المصاحب وقد يكون النطاق المصاحب يساوي المدى

(3) يعبر عن الدالة كونها علاقة بين مجموعتين غير خالتين كالتالي :-

$$F: D_F \longrightarrow B$$

F: النطاق ⟵ النطاق المصاحب

أنـــواع الدوال الحقيقية

أولاً الدالة الحدودية (كثيرة الحدود) :-

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+..........+a_nx^n \quad , \quad n\in N$$

$$EX: F(x)=x^2+2x+3$$

$$F(x)=x^3+2x^2+3x+4$$

$$F(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+4$$

ثانياً الدالة القياسية:-

$$F(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad , \quad h(x)\neq 0$$

حيث الدوال $g(x)\,,\,h(x)$ هي دوال حدودية

$$EX: F(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^3+3x}+x^{-2}$$

$$F(x)=\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x+1}$$

ثانياً الدالة غير قياسية :-

$$F(x)=\sqrt[n]{g(x)}\,,n\in N$$

حيث الدالة $g(x)$ هي دالة حدودية أو قياسية أو غير قياسية

$$EX: F(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

$$F(x)=\sqrt{\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x-2}}$$

حـــــالات خاصة من الدوال :-

(1) الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة :- لها عدة صور من أبرزها :

الصورة الأولى :- وتكتب على النحو التالي:-

$$F(x)=\begin{cases} 2x^2+1 & , \quad x\neq 1 \\ 3 & , \quad x=1 \end{cases}$$

$x<1$ $\qquad$ $F(x)=3$ $\qquad$ $x>1$

$F(x)=2x^2+1$ $\qquad$ $F(x)=2x^2+1$

x =1

$$F(2)=2(2)^2+1=8+1=9$$
$$F(0)=2(0)^2+1=0+1=1$$
$$F(1)=3$$

الصورة الثانية :- وتكتب على النحو التالي:-

$$F(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\leq 1 \\ 2x+1 & , \quad x>1 \end{cases}$$

$x<1$ $\qquad$ $F(x)=x^2+1$ $\qquad$ $x>1$

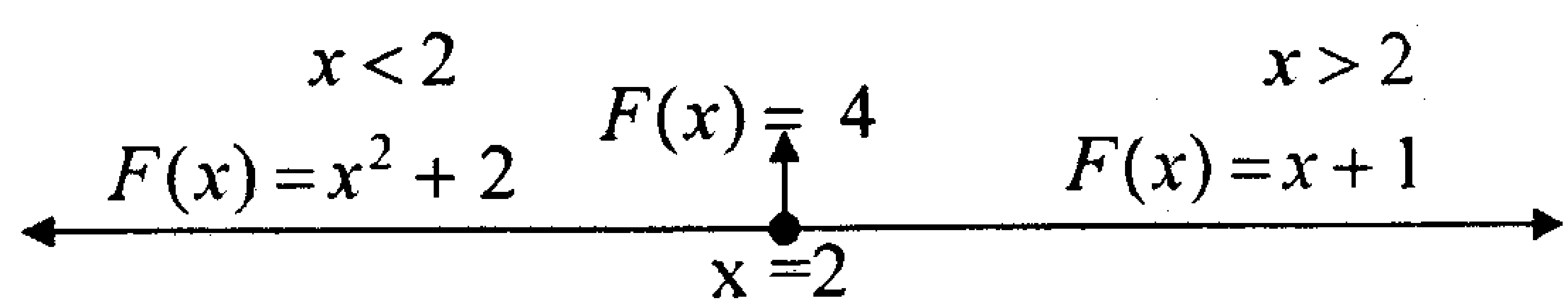
$F(x)=x^2+1$ $\qquad$ $F(x)=2x+1$

x =1

$$F(2)=2(2)+1=4+1=5$$
$$F(0)=(0)^2+1=0+1=1$$
$$F(1)=(1)^2+1=1+1=2$$

الصورة الثالثة :- وتكتب على النحو التالي:-

$$F(x)=\begin{cases} x^2+2 & , \ x<2 \\ 4 & , \ x=2 \\ x+1 & , \ x>2 \end{cases}$$



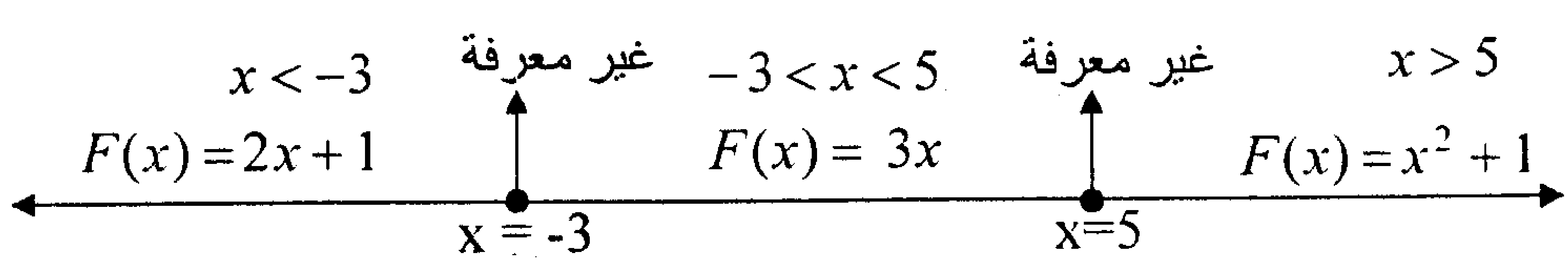
$F(3)=3+1=4$

$F(1)=(1)^2+2=1+2=3$

$F(2)=4$

الصورة الرابعة :- وتكتب على النحو التالي:-

$$F(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \ x<-3 \\ 3x & , \ -3<x<5 \\ x^2+1 & , \ x>5 \end{cases}$$



$F(-4)=2(-4)+1=-8+1=-7$

$F(0)=3(0)=0$

$F(6)=(6)^2+1=37$

$F(-3)=$ غير معرفة

$F(5)=$ غير معرفة

(2) **دالة القيمة المطلقة :-** وتكتب عل النحو التالي : $F(x) = |g(x)|$

حيث $g(x)$ دالة حقيقية.

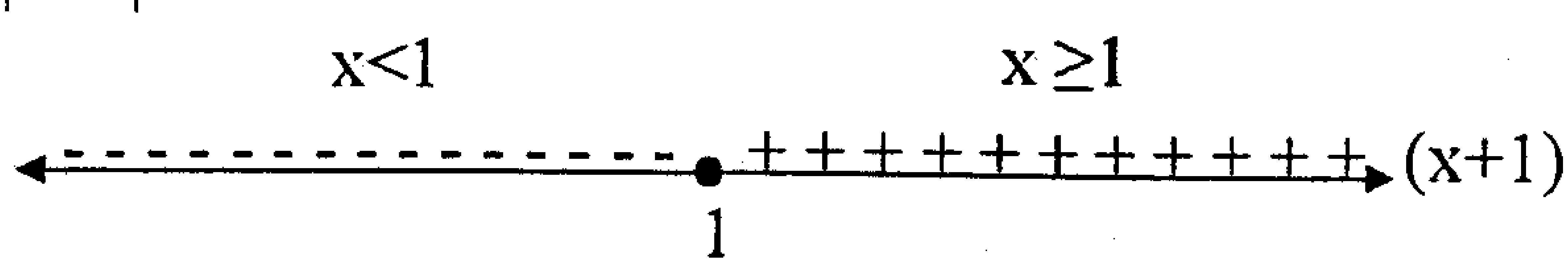
$EX:\ F(x) = |2x-3|$

$$F(1) = |2(1)-3| = |2-3| = |-1| = 1$$
$$F(2) = |2(2)-3| = |4-3| = |1| = 1$$
$$F(\tfrac{3}{2}) = \left|2(\tfrac{3}{2})-3\right| = |3-3| = |0| = 0$$

إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة :-

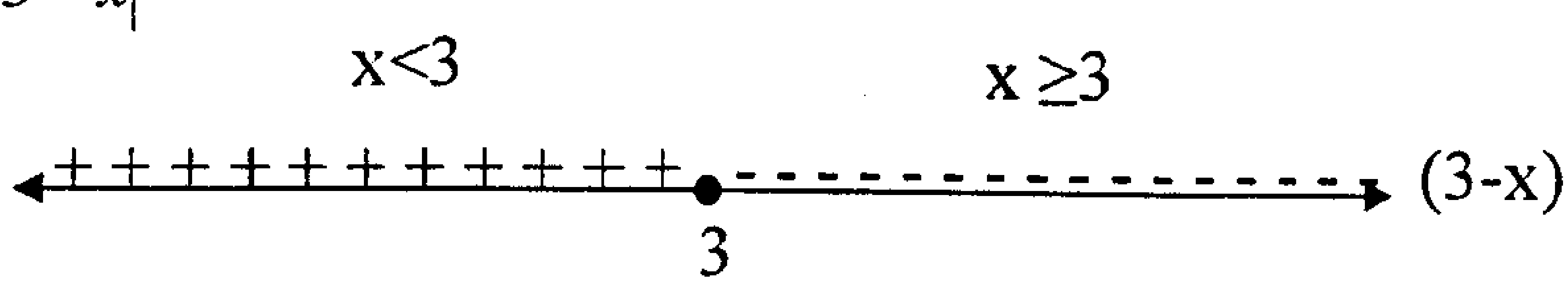
يمكن تحويل دالة القيمة المطلقة إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة وذلك بأن يتم دراسة إشارة المقدار الذي بداخل القيمة المطلقة متى يكون موجب ومتى يكون سالب ومتى يساوي صفراً وبناء على هذه الدراسة نعيد تعريف الدالة بأكثر من قاعدة .

$EX: F(x) = |x-1|$



$$F(x) = \begin{cases} x-1 & , \ x \geq 1 \\ -(x-1) & , \ x < 1 \end{cases}$$

$EX: g(x) = |3-x|$



$$g(x) = \begin{cases} -(3-x) & , \ x \geq 3 \\ (3-x) & , \ x < 3 \end{cases}$$

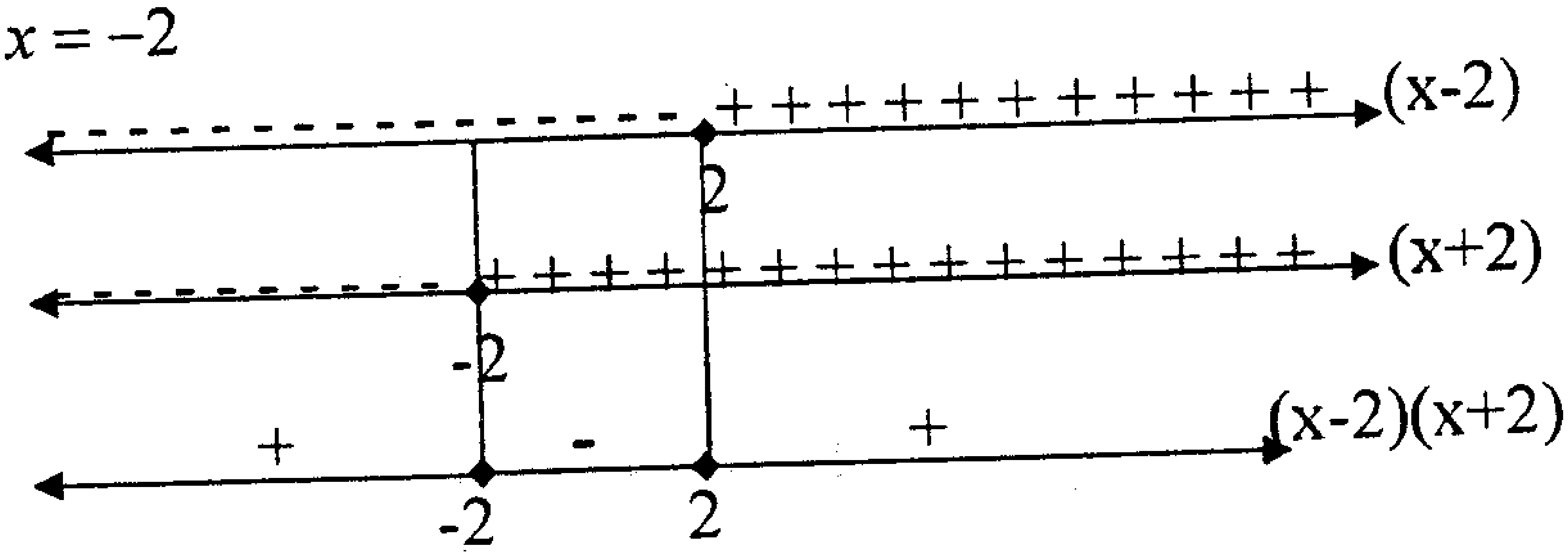
$EX : F(x) = |x^2 - 4|$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$(x-2) = 0 \ , x = 2$

$(x+2) = 0 \ , x = -2$



$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \geq 2 \ , \ x < -2 \\ -(x^2 - 4) & , \ -2 \leq x < 2 \end{cases}$$

(3) دالة الإشارة :- وتكتب عل النحو التالي :

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

وبشكل عام $F(x) = \operatorname{sgn}[g(x)]$ حيث $g(x)$ دالة حقيقية ودالة الإشارة

$F(x) = \operatorname{sgn}[g(x)]$ لها ثلاثة قيم إما تساوي 0 أو تساوي 1 أو تساوي 1-

على النحو التالي :-

(A) الفترة التي تكون فيها g(x) موجبة تكون قيمة دالة الإشارة تساوي 1 أي أن :

إذا كانت g(x) موجبة

$F(x) = \operatorname{sgn}[g(x)] = 1$

(B) الفترة التي تكون فيها g(x) سالبة تكون قيمة دالة الإشارة تساوي 1 - أي أن :

إذا كانت g(x) سالبة $F(x) = \text{sgn}[g(x)] = -1$

(C) القيم التي تجعل g(x) = 0 تكون قيمة دالة الإشارة تساوي 0 أي أن :

إذا كانت g(x)= 0 $F(x) = \text{sgn}[g(x)] = 0$

ولهذا يمكن تحويل دالة الإشارة إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة وذلك بأن يتم دراسة إشارة الدالة g(x) متى تكون موجبة ومتى تكون سالبة ومتى تساوي صفراً وبناء على هذه الدراسة نعيد تعريف الدالة بأكثر من قاعدة .

$EX : F(x) = \text{sgn}(x-1)$

$$\underset{x<1}{\overleftarrow{- - - - - - - - - - - - - - - -}}\underset{1}{\bullet}\underset{x>1}{\overrightarrow{+ + + + + + + + + + + + + +}}\ (x-1)$$

$$F(x) = \text{sgn}(x-1) = \begin{Bmatrix} \dfrac{|x-1|}{x-1} & , & x \neq 1 \\ 0 & , & x = 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x-1}{x-1} & , & x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & , & x < 1 \\ 0 & , & x = 1 \end{Bmatrix}$$

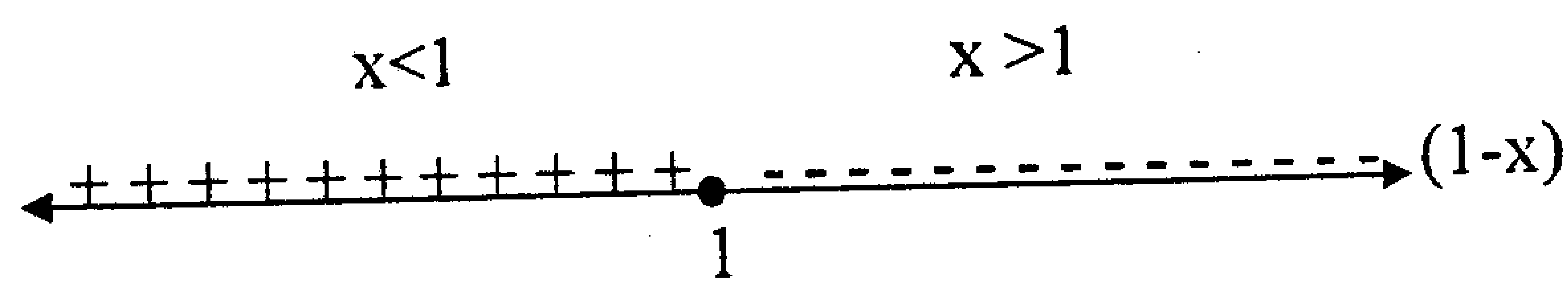
$$F(x) = \text{sgn}(x-1) = \begin{Bmatrix} 1 & , & x > 1 \\ -1 & , & x < 1 \\ 0 & , & x = 1 \end{Bmatrix}$$

$F(4) = 1$

$F(-2) = -1$

$F(1) = 0$

$EX : F(x) = \text{sgn}(1-x)$



$$F(x) = \text{sgn}(1-x) = \begin{cases} \dfrac{|1-x|}{1-x} & , \ x \neq 1 \\ 0 & , \ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-x} & , \ x < 1 \\ \dfrac{-(1-x)}{1-x} & , \ x > 1 \\ 0 & , \ x = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \text{sgn}(1-x) = \begin{cases} 1 & , \ x < 1 \\ -1 & , \ x > 1 \\ 0 & , \ x = 1 \end{cases}$$

$F(0) = 1$

$F(1) = 0$

$F(2) = -1$

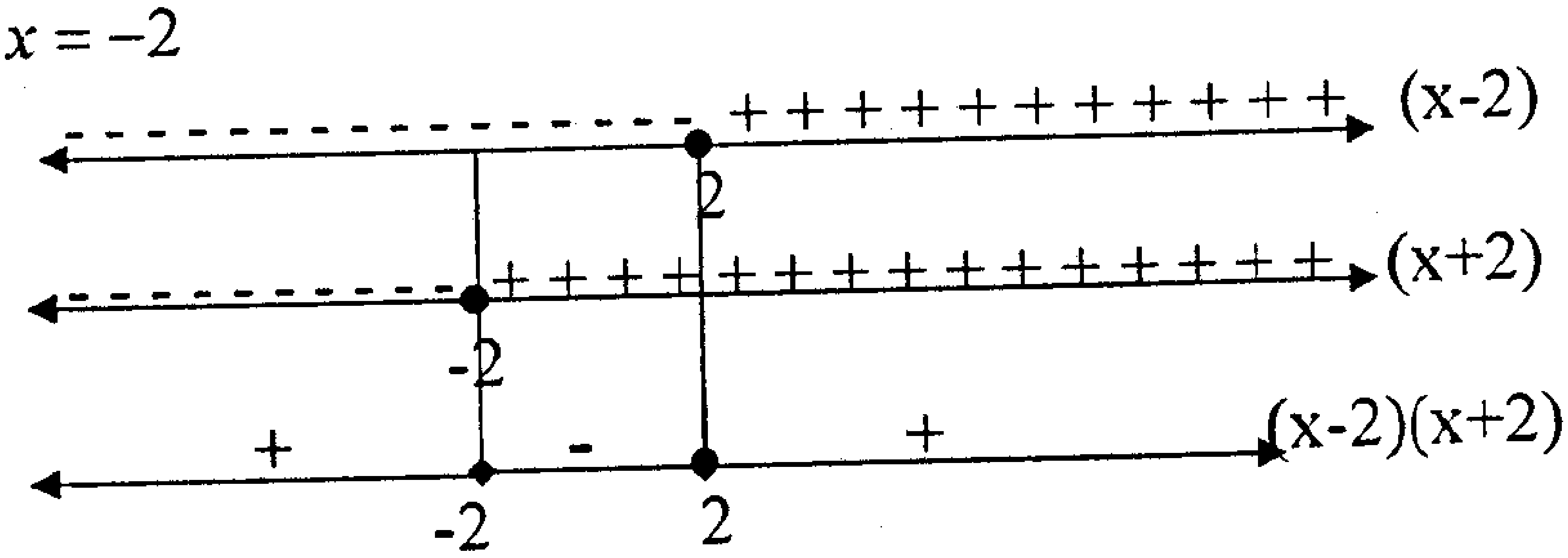
$EX : F(x) = \text{sgn}(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$(x-2) = 0 \ , x = 2$

$(x+2) = 0 \ , x = -2$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4} & , x\neq \pm 2\\ 0 & , x=\pm 2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-4} & , x<-2\ , x>2\\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & ,-2<x<2\\ 0. & , x=2, x=-2\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}1 & , x<-2\ , x>2\\ -1 & ,-2<x<2\\ 0 & , x=2, x=-2\end{cases}$$

$F(0)=-1$

$F(3)=1$

$F(-4)=1$

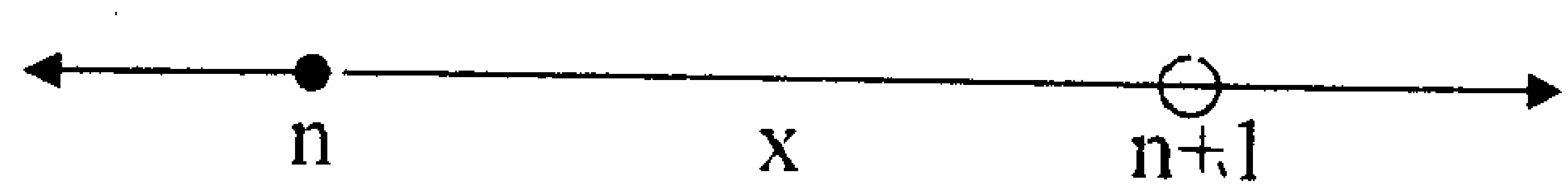
$F(2)=0$

$F(-2)=0$

(4) دالة الصحيح الأعظم :- وتكتب عل النحو التالي :

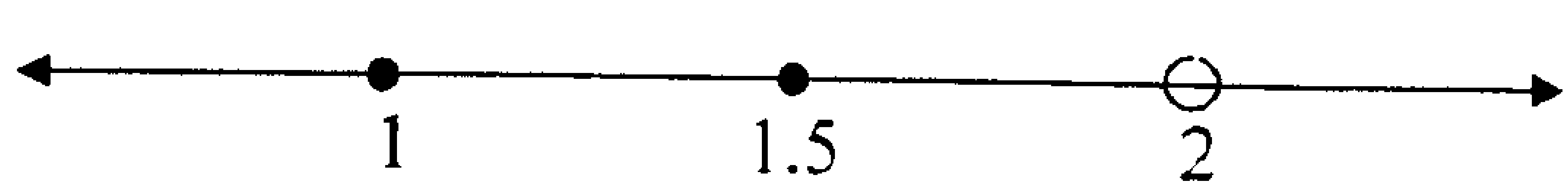
$$F(x)=[x]=n \quad , x\in[n,n+1) \ , n\in\mathbb{Z}$$

حيث n أكبر عدد صحيح أصغرمن أو يساوي x مباشرة

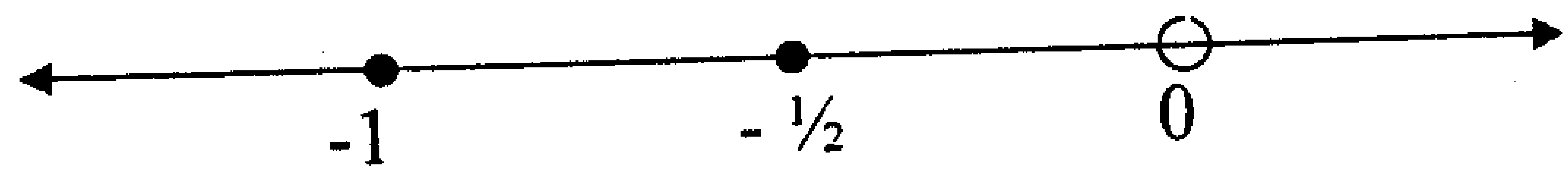


مـثـــال:- إذا كان $F(x)=[x+1]$ فأوجد :-

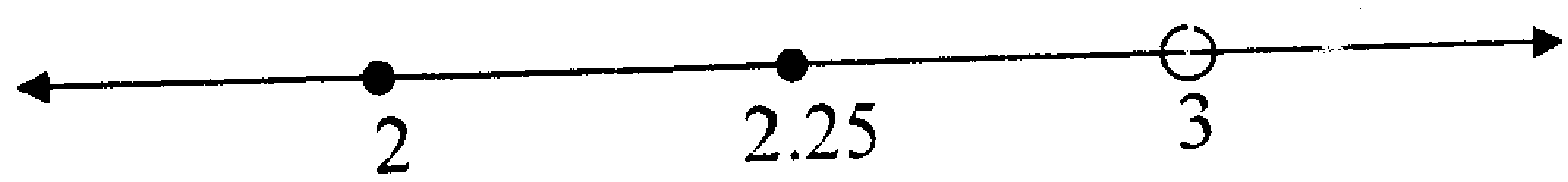
(1) $F(\frac{1}{2})=\left[\frac{1}{2}+1\right]=\left[\frac{3}{2}\right]=[1.5]=1 \quad , \quad 1.5\in[1.2)$



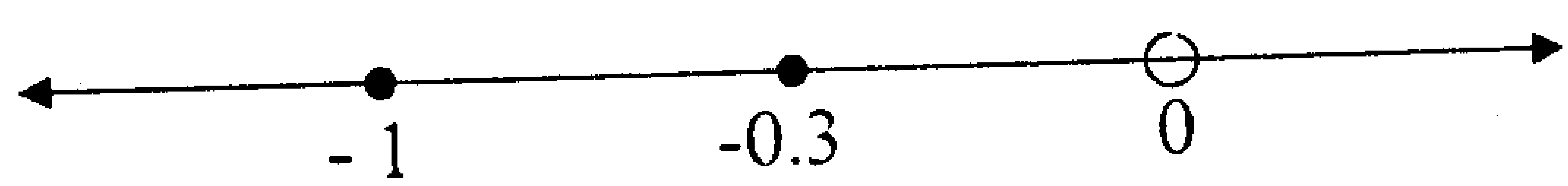
(2) $F(-\frac{3}{2}) = \left[-\frac{3}{2}+1\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] = -1 \quad , \quad -\frac{1}{2} \in [-1,0)$



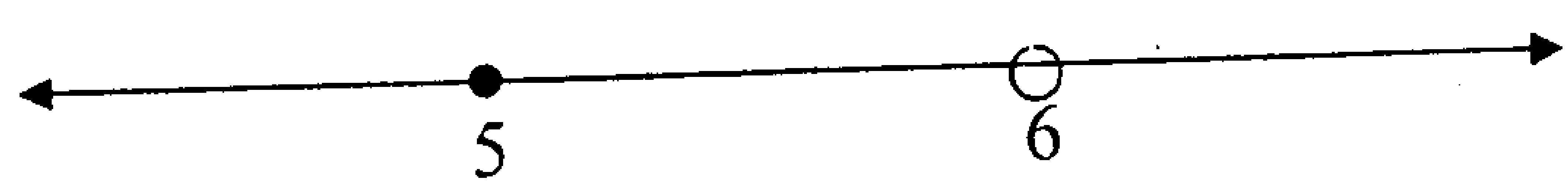
(3) $F(\frac{5}{4}) = \left[\frac{5}{4}+1\right] = \left[\frac{9}{4}\right] = [2.25] = 2 \quad , \quad 2.25 \in [2,3)$



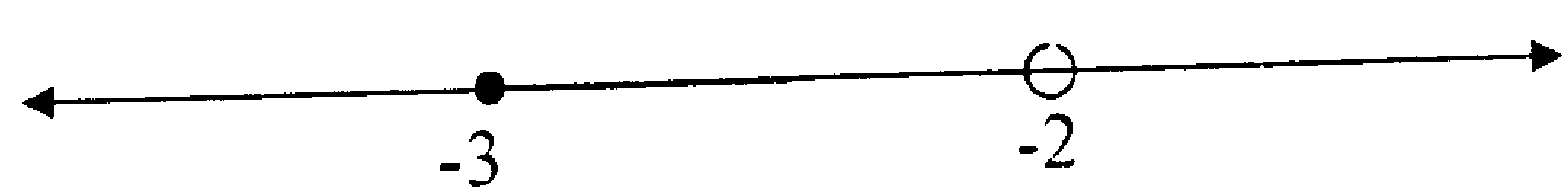
(4) $F(-\frac{9}{7}) = \left[-\frac{9}{7}+1\right] = \left[-\frac{2}{7}\right] \approx [-0.3] = -1 \quad , \quad -1 \in [-1,0)$



(5) $F(4) = [4+1] = [5] = 5 \quad , \quad 5 \in [5,6)$



(6) $F(-4) = [-4+1] = [-3] = -3 \quad , \quad -3 \in [-3,-2)$



إعادة تعريف دالة الصحيح الأعظم إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة :-

يمكن تحويل دالة الصحيح الأعظم إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة وذلك وفق الفترة التي سوف تعطى أو وفق مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي :

(1) $F(x)=[x] \quad , \quad x \in R$

الـحـل

$$F(x)=[x]=\begin{cases} \vdots & \vdots \\ -1 , & -1 \le x < 0 \\ 0 , & 0 \le x < 1 \\ 1 , & 1 \le x < 2 \\ 2 , & 2 \le x < 3 \\ 3 , & 3 \le x < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

(2) $F(x)=[x] \quad , \quad -2 \le x \le 2$

الـحـل

$$F(x)=[x]=\begin{cases} -2 , & -2 \le x < -1 \\ -1 , & -1 \le x < 0 \\ 0 , & 0 \le x < 1 \\ 1 , & 1 \le x < 2 \\ 2 , & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$(3)\ F(x)=[x] \qquad , \ 0<x<5$$

الـحـل

$$F(x)=[x]=\begin{cases} 1 & , \quad 1\le x<2 \\ 2 & , \quad 2\le x<3 \\ 3 & , \quad 3\le x<4 \end{cases}$$

$$(4)\ F(x)=[x] \qquad , \ x\ge 2$$

الـحـل

$$F(x)=[x]=\begin{cases} 2 & , \quad 2\le x<3 \\ 3 & , \quad 3\le x<4 \\ 4 & , \quad 4\le x<5 \\ 5 & , \quad 5\le x<6 \\ 6 & , \quad 6\le x<7 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$

$$(5)\ F(x)=[x+1] \qquad , \ 0\le x<3$$

الـحـل

$$F(x)=[x+1]=\begin{cases} 0 & , \quad 0\le x+1<1 \\ 1 & , \quad 1\le x+1<2 \\ 2 & , \quad 2\le x+1<3 \end{cases}=\begin{cases} 0 & , \quad -1\le x<0 \\ 1 & , \quad 0\le x<1 \\ 2 & , \quad 1\le x<2 \end{cases}$$

يجب إلغاء الفترة $-1\le x<0$ لأنها ليس ضمن الفترة المطلوبة في المسألة $0\le x<3$
ويجب إضافة الفترة $2\le x<3$ لأنها ضمن الفترة المطلوبة في المسألة

$$F(x)=[x+1]=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x<1\\ 2 & , \quad 1\le x<2\\ 3 & , \quad 2\le x<3\end{cases}$$

(6) $F(x)=[x-2] \qquad , \ -1\le x<2$

الحل

$$F(x)=[x-2]=\begin{cases}-1 & , \quad -1\le x-2<0\\ 0 & , \quad 0\le x-2<1\\ 1 & , \quad 1\le x-2<2\end{cases}=\begin{cases}-1 & , \quad 1\le x<2\\ 0 & , \quad 2\le x<3\\ 1 & , \quad 3\le x<4\end{cases}$$

يجب إلغاء الفترة $2\le x<3$ ، $3\le x<4$ لأنهما ليس ضمن الفترة المطلوبة في المسألة $-1\le x<2$

ويجب إضافة الفترة $-1\le x<0$ ، $0\le x<1$ لأنهما ضمن الفترة المطلوبة في المسألة

$$F(x)=[x-2]=\begin{cases}-3 & , \quad -1\le x<0\\ -2 & , \quad 0\le x<1\\ -1 & , \quad 1\le x<2\end{cases}$$

المـــتـــبـــايـــنـــات

من المعلوم أن الجمل الرياضية التي تحتوي على علامات التباين< ، > ، $\leq$ ، $\geq$
تسمى متباينات نحو : $x + 1 > 3$ ، $x^2 - 3 > 2$

أولاً حل متباينات الدرجة الأولى في مجهول واحد :-

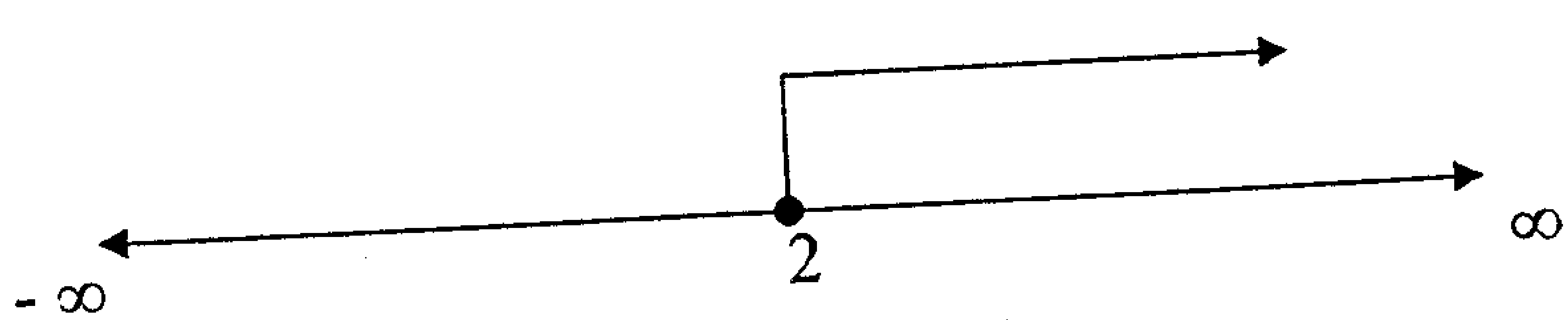
عند حل هذا النوع من المتباينات نضع المجهول في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخروإذا كان المجهول مضروباً في عدد فإننا نقسم الطرفين على هذا العدد مع مراعاة أننا إذا ضربنا أو قسمنا أي متباينة على إشارة سالب(-) فإن علامة التباين تتغير إذا كانت أكبر< تصبح أصغر> والعكس .

مـثـــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :

(1) $3x - 1 \geq 5$

الـحـــل

$3x \geq 5+1$
$3x \geq 6$
$x \geq 2$

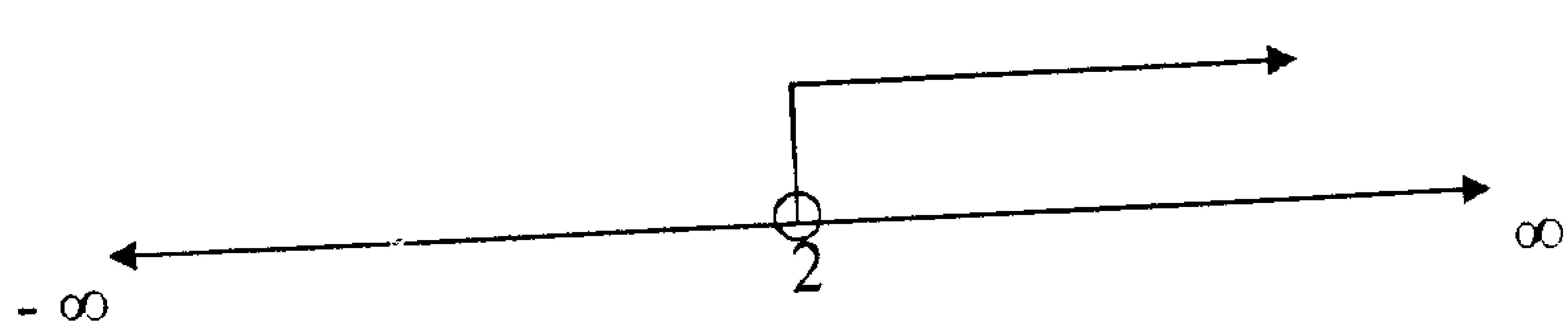


$= \{x : x \geq 2 \ , x \in R\}$
$= [2, \infty)$

(2) $2x - 1 > 3$

الـحـــل

$2x > 3+1$
$2x > 4$
$x > 2$



$= \{x : x > 2 \ , x \in R\}$
$= (2, \infty)$

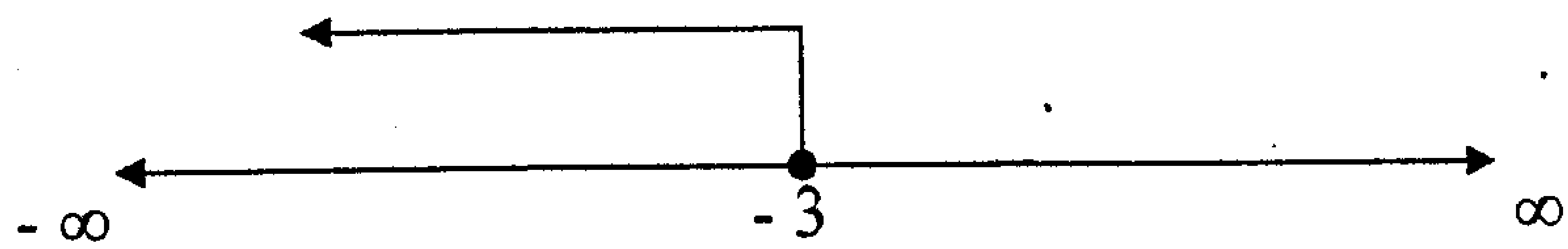
(3) $4x+2 \le -10$

الحل

$4x \le -10-2$

$4x \le -12$

$x \le -3$



$= \{x : x \le -3,\ x \in R\}$

$= (-\infty, -3]$

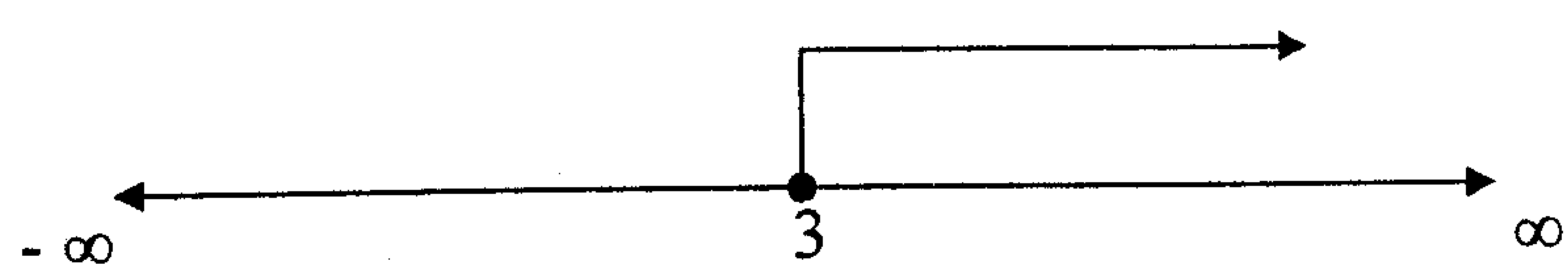
(4) $2-3x \le -7$

الحل

$-3x \le -7-2$

$-3x \le -9$

$x \ge 3$



$= \{x : x \ge 3,\ x \in R\}$

$= [3, \infty)$

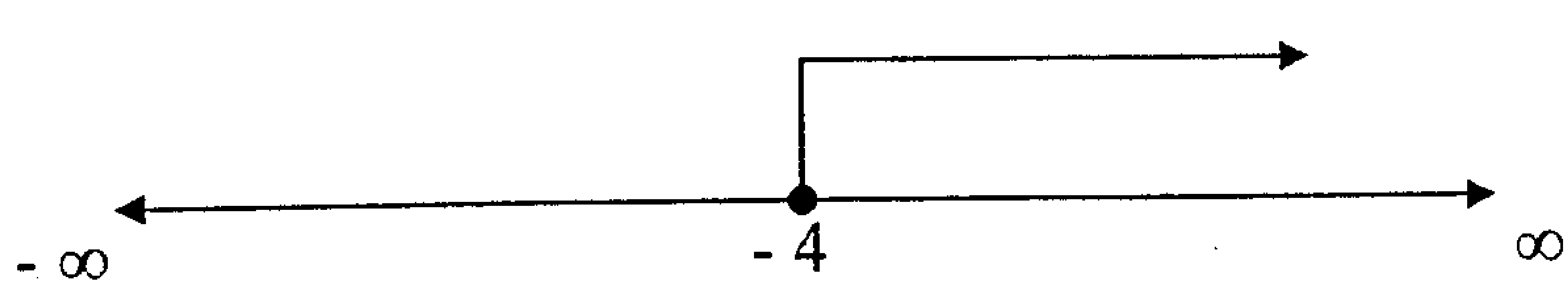
(5) $2-x \le 6$

الحل

$-x \le 6-2$

$-x \le 4$

$x \ge -4$



$= \{x : x \ge -4,\ x \in R\}$

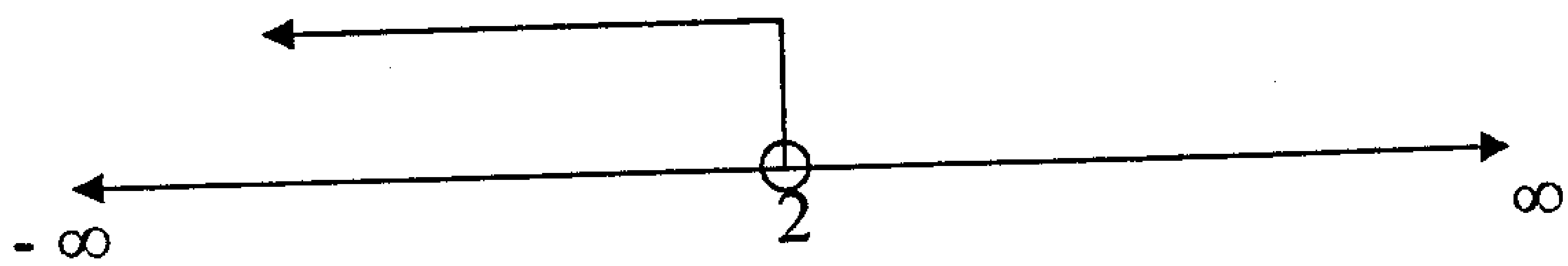
$= [-4, \infty)$

(6) $2x-5<x-3$

الحــل

$2x-x<5-3$

$x<2$



$=\{x: x<2,\ x\in R\}$

$=(-\infty,2)$

ثـانـيـاً حل المتباينات المتكونة من ثلاثة أجزاء :-

وتكتب على الصورة : $a \le x \le b$ حيث $a, b \in R$ وعند حل هذا النوع من المتباينات فإننا نقوم بتجزئة المتباينة الثلاثية إلى جزأين $x \le b$, $a \le x$ ثم نقوم بإيجاد فترة الحل لكل متباينة على حدة ثم نأخذ تقاطع هاتين الفترتين فتكون هي فترة الحل للمتباينة المتكونة من ثلاثة أجزاء .

مـثـال:- أوجد حل المتباينات الآتية :

$(1) -10 \le 3x - 8 \le 8$

الـحـل

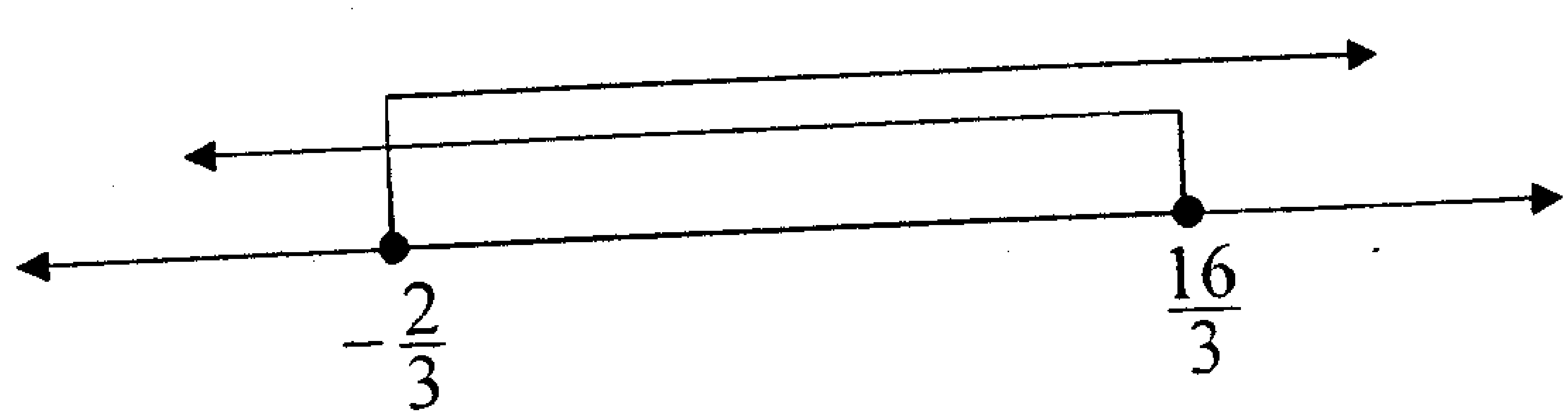
$$-10 \le 3x - 8 \le 8$$

$$3x - 8 \le 8 \qquad\qquad -10 \le 3x - 8$$

$$3x \le 8 + 8 \qquad\qquad 3x - 8 \ge -10$$

$$3x \le 16 \qquad\qquad 3x \ge -2$$

$$x \le \frac{16}{3} \qquad\qquad x \ge -\frac{2}{3}$$



$$= \{x : -\frac{2}{3} \le x \le \frac{16}{3} \ , x \in R\}$$

$$= [-\frac{2}{3}, \frac{16}{3}]$$

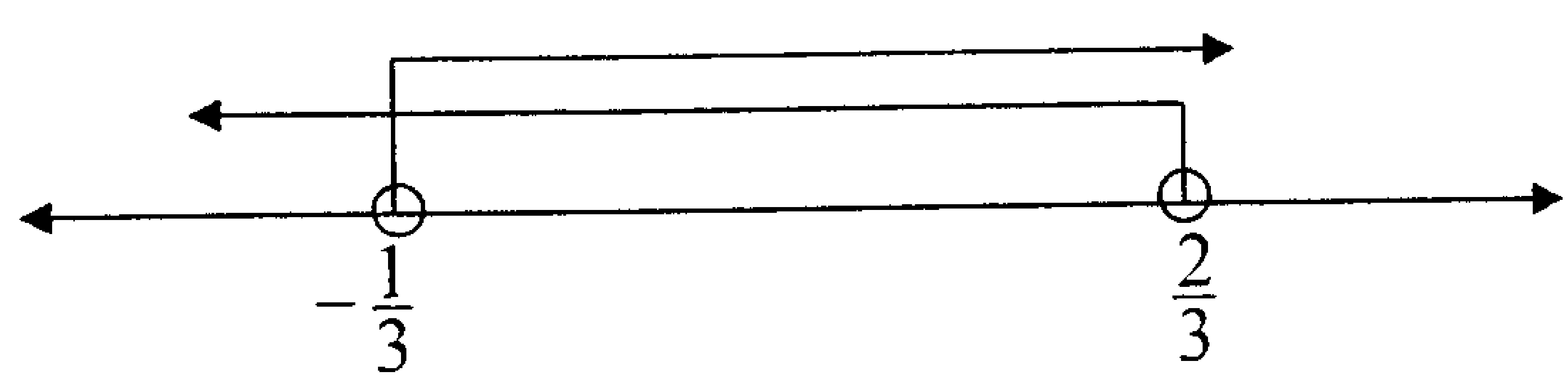
$(2) -4 < 2 - 9x < 5$

الحـــل

$$-4 < 2 - 9x < 5$$

$$-4 < 2 - 9x$$
$$-9x + 2 > -4$$
$$-9x > -6$$
$$x < \frac{2}{3}$$

$$2 - 9x < 5$$
$$-9x < 5 - 2$$
$$-9x < 3$$
$$x > -\frac{1}{3}$$



$= \{x : -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \;,\; x \in R\}$

$= (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

(3) $-1<\frac{3-7x}{4}\leq 6$

الحل

$$-1<\frac{3-7x}{4}\leq 6$$

$$-1<\frac{3-7x}{4}$$

$$\frac{3-7x}{4}>-1$$

$$-7x+3>-4$$

$$-7x>-4-3$$

$$-7x>-7$$

$$x<1$$

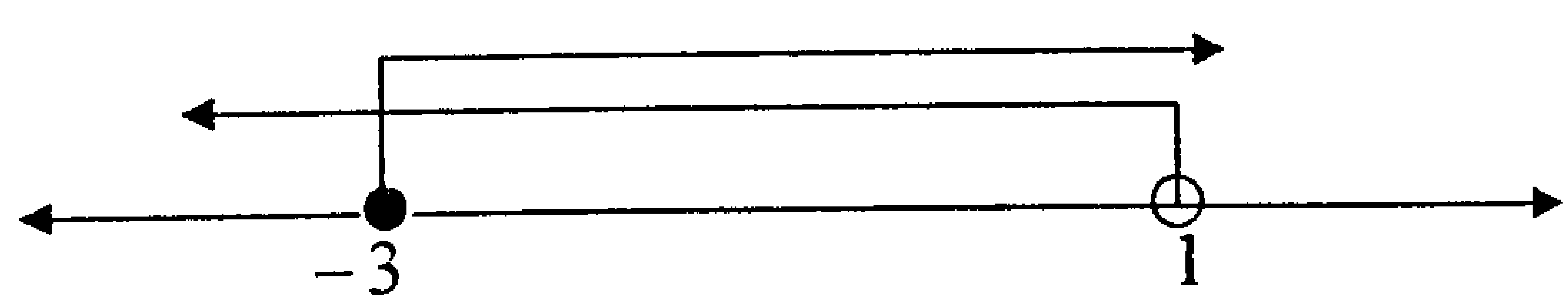
$$\frac{3-7x}{4}\leq 6$$

$$3-7x\leq 24$$

$$-7x\leq 24-3$$

$$-7x\leq 21$$

$$x\geq -3$$



$=\{x:\ -3\leq x<1\ ,\ x\in R\}$

$=[-3,1)$

(4) $4x<2x+1<-3x+1$

الحل

$$4x<2x+1<-3x+1$$

$4x<2x+1$

$4x-2x<1$

$2x<1$

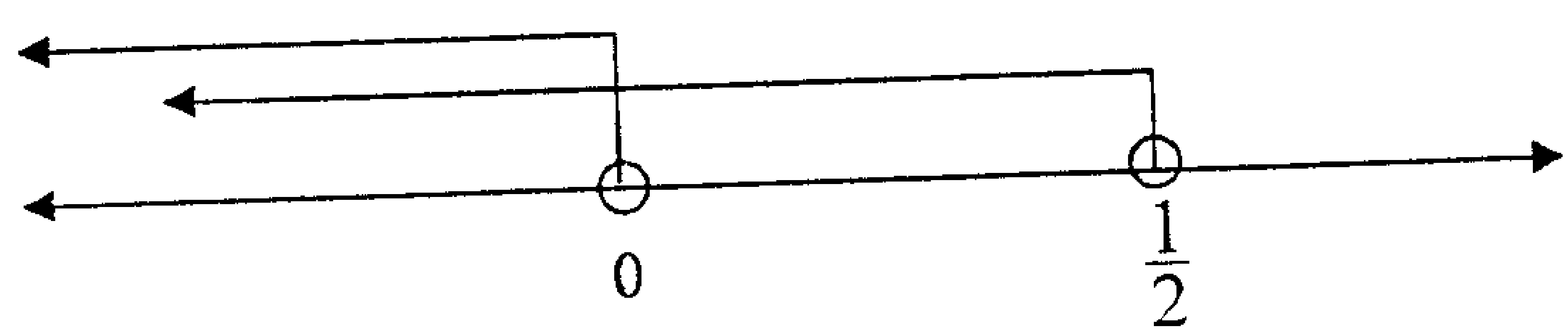
$x<\frac{1}{2}$

$2x+1<-3x+1$

$2x+3x<1-1$

$5x<0$

$x<0$



$=\{x:\ x<0\ ,\ x\in R\}$

$=(-\infty,0)$

(5) $4x+1\leq x+1<2x-4$

الحل

$$4x+1\leq x+1<2x-4$$

$4x+1\leq x+1$

$4x-x\leq 1-1$

$3x\leq 0$

$x\leq 0$

$x+1<2x-4$

$2x-x>1+4$

$x>5$

$=\phi$

ملاحظة هامة :- إذا كانت المتباينة المتكونة من ثلاثة أجزاء على صورة $a \leq cx + d \leq b$ فإنه يمكن إيجاد حل المتباينة مباشرة وذلك بأن يكون الهدف أن نجعل في الجزء الأوسط x فقط وذلك كما يلي:

مـثــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :

(1) $1 \leq 2x + 1 < 2$

الــحـــل

$$1 - 1 \leq 2x < 2 - 1$$
$$0 \leq 2x < 1$$
$$0 \leq x < \frac{1}{2}$$
$$= [0, \frac{1}{2})$$
$$= \{x : 0 \leq x < \frac{1}{2} \ , x \in R\}$$

(2) $2 \leq x + 5 \leq 7$

الــحـــل

$$-5 + 2 \leq x \leq 7 - 5$$
$$-3 \leq x \leq 2$$
$$= [-3, 2]$$
$$= \{x : -3 \leq x \leq 2 \ , x \in R\}$$

(3) $-7 \leq 2x + 1 \leq -3$

الــحـــل

$$-7 - 1 \leq 2x \leq -3 - 1$$
$$-8 \leq 2x \leq -4$$
$$-4 \leq x \leq -2$$
$$= [-4, -2]$$
$$= \{x : -4 \leq x \leq -2 \ , x \in R\}$$

ثـــالـــثـــاً حل متباينات الدرجة الثانية فما فوق :-

عند حل متباينات الدرجة الثانية فما فوق فإننا نضع المتباينة في طرف واحد ثم نقوم بتحليل هذا الطرف بأحد طرق التحليل الستة إن أمكن ثم ندرس إشارة المقدار الجبري الذي تم تحليله كما ذكرنا سابقاً ونقوم بتعيين الفترة المطلوبة موجبة أوسالبة على حسب علامة التباين في المسألة وهناك حالات :-

الحالة الأولى متباينات الفرق بين مربعين :-

مـــثـــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^2-4>0$

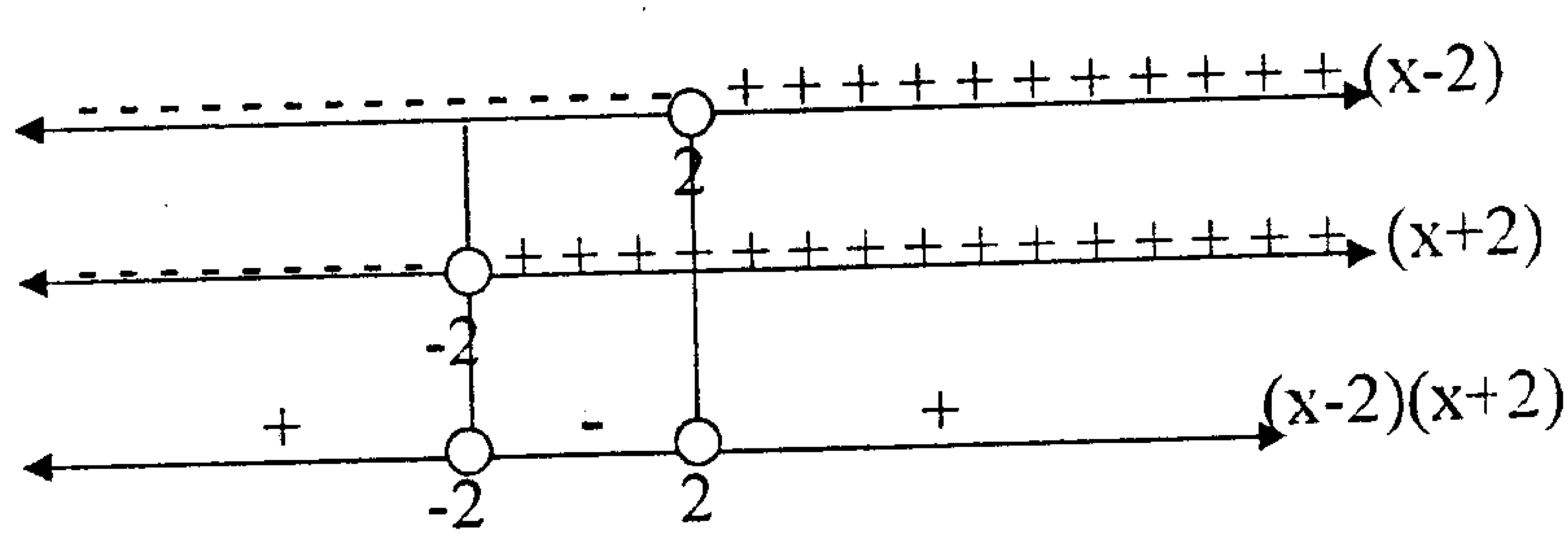
الـــحـــل

$(x-2)(x+2)>0$

$(x-2)(x+2)=0$

$(x-2)=0 \ ,x=2$

$(x+2)=0 \ ,x=-2$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>) فالمطلوب هي الفترة الموجبة

وهي : $(-\infty, -2) \cup (2 , \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x<-2 \quad or \quad x>2\ , x\in R\}$

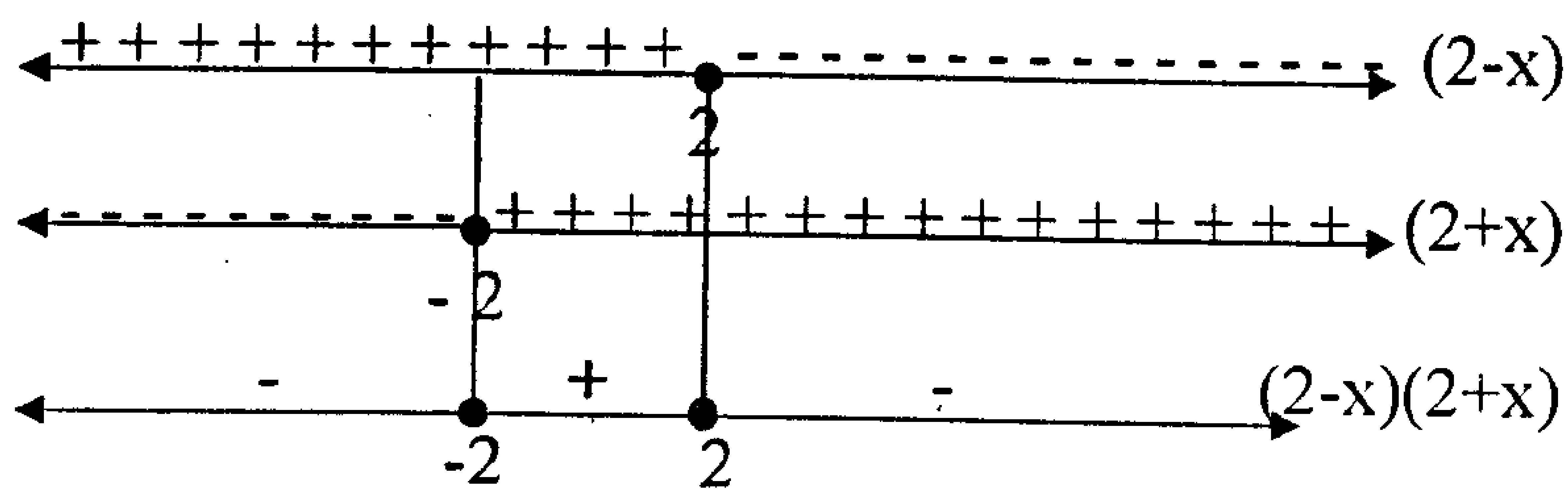
$(2)\ 4-x^2 \geq 0$

الحـــل

$(2-x)(2+x) \geq 0$

$(2-x)=0 \ \ ,x=2$

$(2+x)=0 \ \ ,x=-2$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي(≥)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: [-2، 2]

ومجموعة الحل هي : $\{x: -2 \leq x \leq 2 \quad , x \in R\}$

الحالة الثانية متباينات مجموع مربعين :- وهذه الحالة لها أنواع على حسب علامة التباين في المتباينة وذلك كما يلي :-

(A) إذا كانت المتباينة على صورة $x^2+a^2>0 \quad \text{or} \quad x^2+a^2\geq 0$
فإن فترة الحل لها هي $R=(-\infty,\infty)$ لأن مجموع مربعين دائماً موجباً لأي قيمة لـ x

(B) إذا كانت المتباينة على صورة $x^2+a^2<0 \quad \text{or} \quad x^2+a^2\leq 0$
فإن مجموعة الحل لها هي ϕ لأن مجموع مربعين لا يمكن أن يكون سالباً

مـثـال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $4+x^2\geq 0$

الـحـل

مجموع مربعين دائماً موجب كما ذكرنا سابقاً ولهذا فإن :
فترة الحل هي: $(-\infty,\infty)$
ومجموعة الحل هي : $\{x:-\infty<x<\infty \quad , x\in R\}=\{x:\ x\in R\}$

(2) $1+x^2<0$

الـحـل

مجموع مربعين دائماً موجب كما ذكرنا سابقاً ولهذا فإن :
مجموعة الحل هي $=\phi$

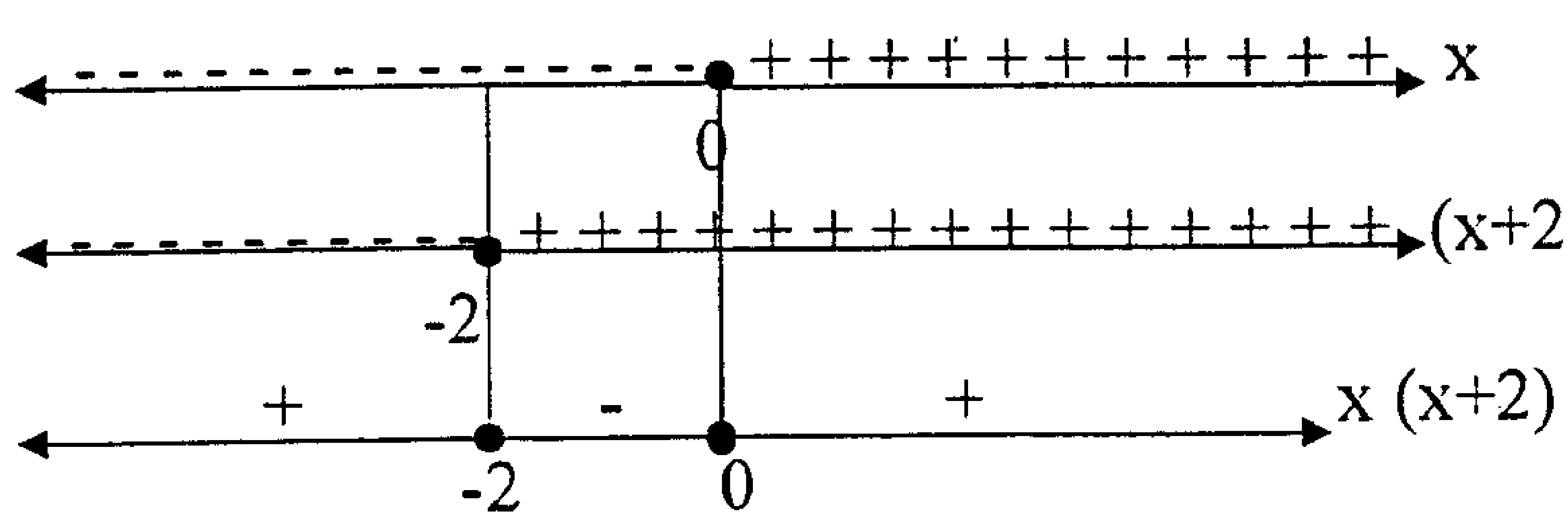
الحالة الثالثة متباينات إخراج عامل مشترك :-

مـثــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^2+2x\geq 0$

الــحــل

$$x(x+2)\geq 0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x=0$$
$$(x+2)=0\ ,x=-2$$



$\because$ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي($\geq$)فالمطلوب هي الفترة

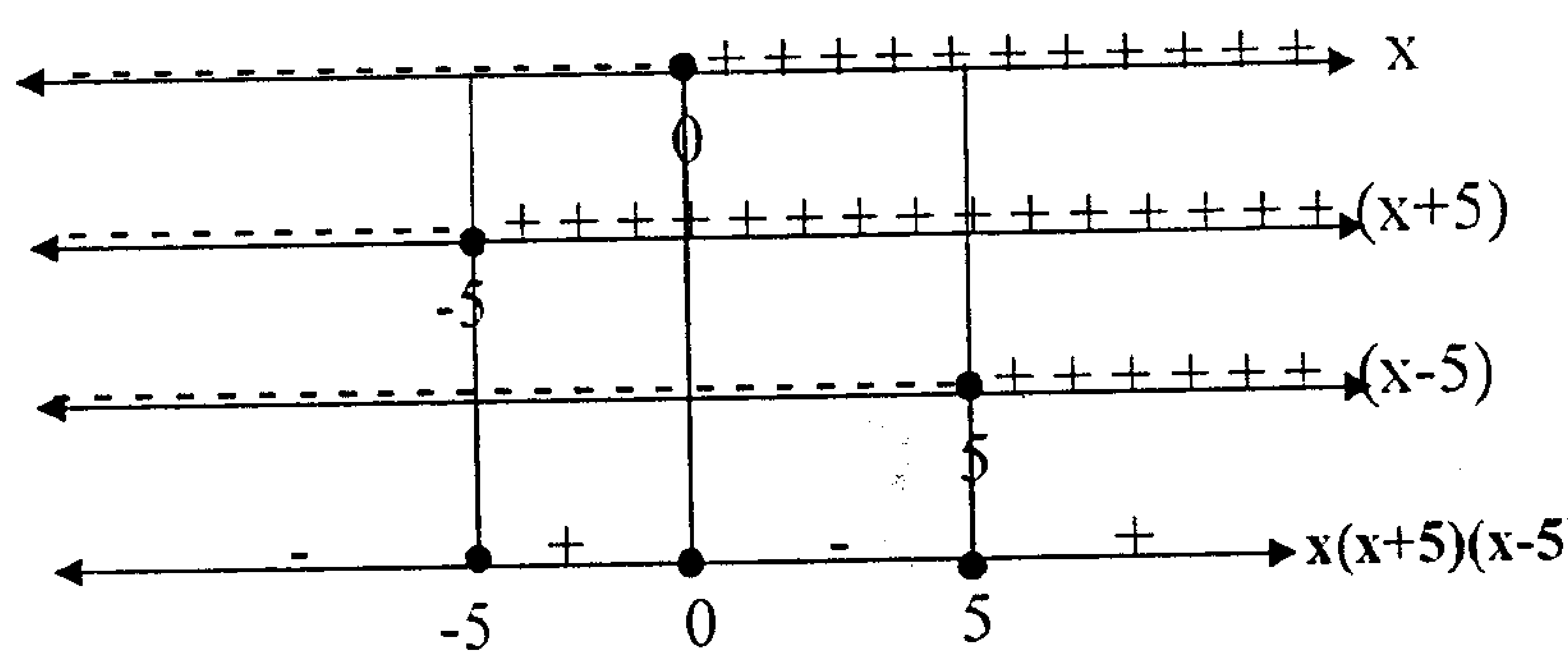
الموجبة وهي: $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x\leq -2 \quad or \quad x\geq 0 \quad , x\in R\}$

(2) $x^3 - 25x \geq 0$

الحل

$$x(x^2 - 25) \geq 0$$
$$x(x+5)(x-5) \geq 0$$
$$x(x+5)(x-5) = 0$$
$$x = 0$$
$$(x+5) = 0 \ , x = -5$$
$$(x-5) = 0 \ , x = 5$$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي(≥)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي : $[-5، 0] \cup [5 ، \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x : -5 \leq x \leq 0 \quad or \quad x \geq 5 \ , x \in R\}$

(3) $x+x^3 < 0$

الـــحـــل

$x\,(1+x^2) < 0$

$x\,(1+x^2) < 0$

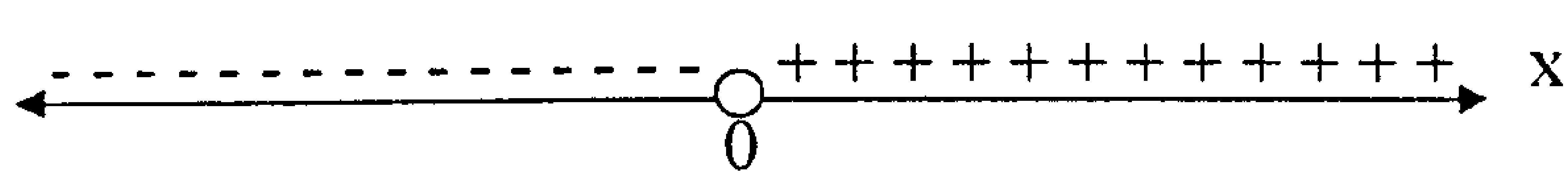
$x\,(1+x^2) = 0$

$x = 0$

مجموع مربعين لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية و دائماً موجب $1+x^2 > 0$

ولهذا ندرس إشارة المقدار x فقط أما المقدار $1+x^2$ فلا يحتاج إلى دراسة لأنه دائماً

موجب



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (>) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي: $(-\infty \,،\, 0)$

ومجموعة الحل هي: $\{x : x < 0 \quad , x \in R\}$

$(4)\ x^4 - 25x^2 \geq 0$

الحـــل

$x^2(x^2 - 25) \geq 0$

$x^2(x+5)(x-5) \geq 0$

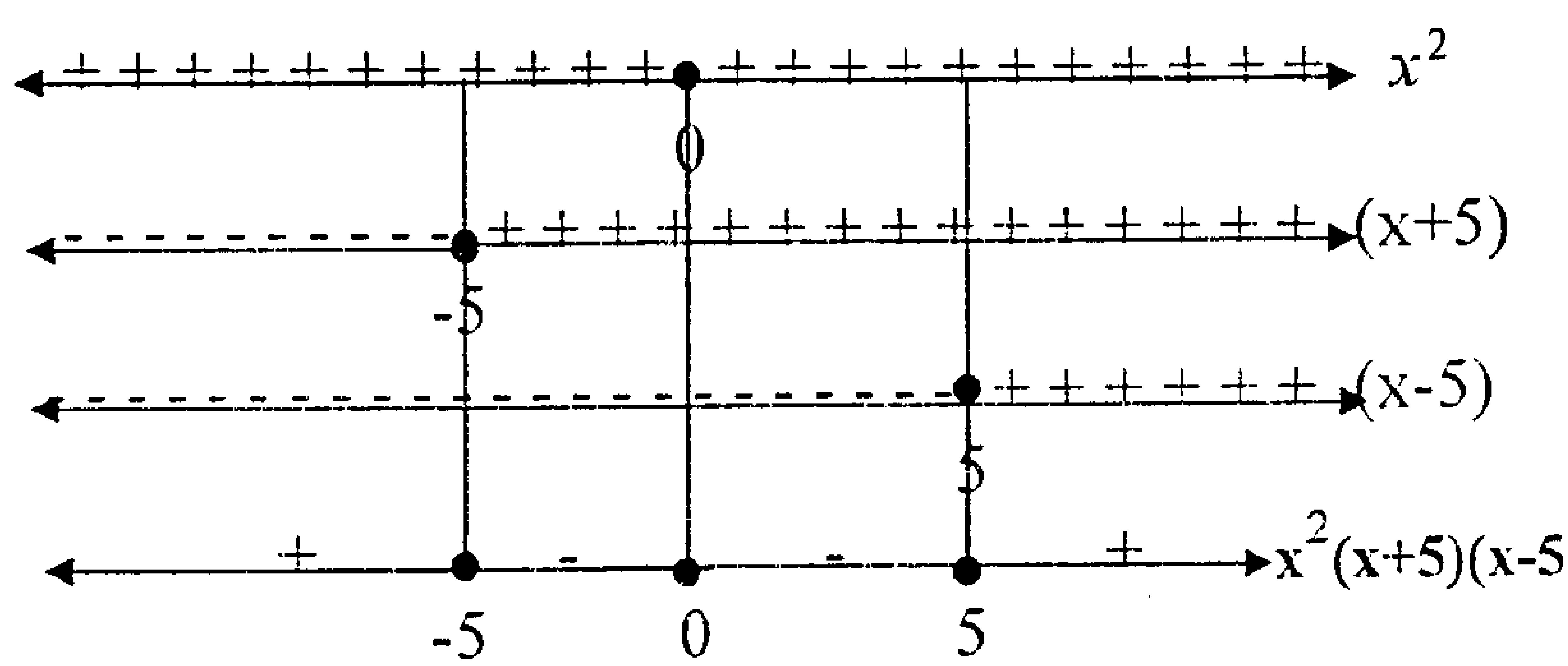
$x^2(x+5)(x-5) = 0$

$x^2 = 0 \quad , x = 0$

$(x+5) = 0 \ , x = -5$

$(x-5) = 0 \ , x = 5$

لا حظ أن المقدار x^2 دائما موجباً ويساوي صفراً عند $x = 0$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي(≥)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty, -5\,] \cup [5, \infty) \cup \{0\}$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x \leq -5 \ \ or \ \ x \geq 5 \ \ or \ \ x = 0, x \in R\}$

$$(5)\ x^4 - 4x^2 > 0$$

الحل

$$x^2(x^2 - 4) > 0$$

$$x^2(x+2)(x-2) > 0$$

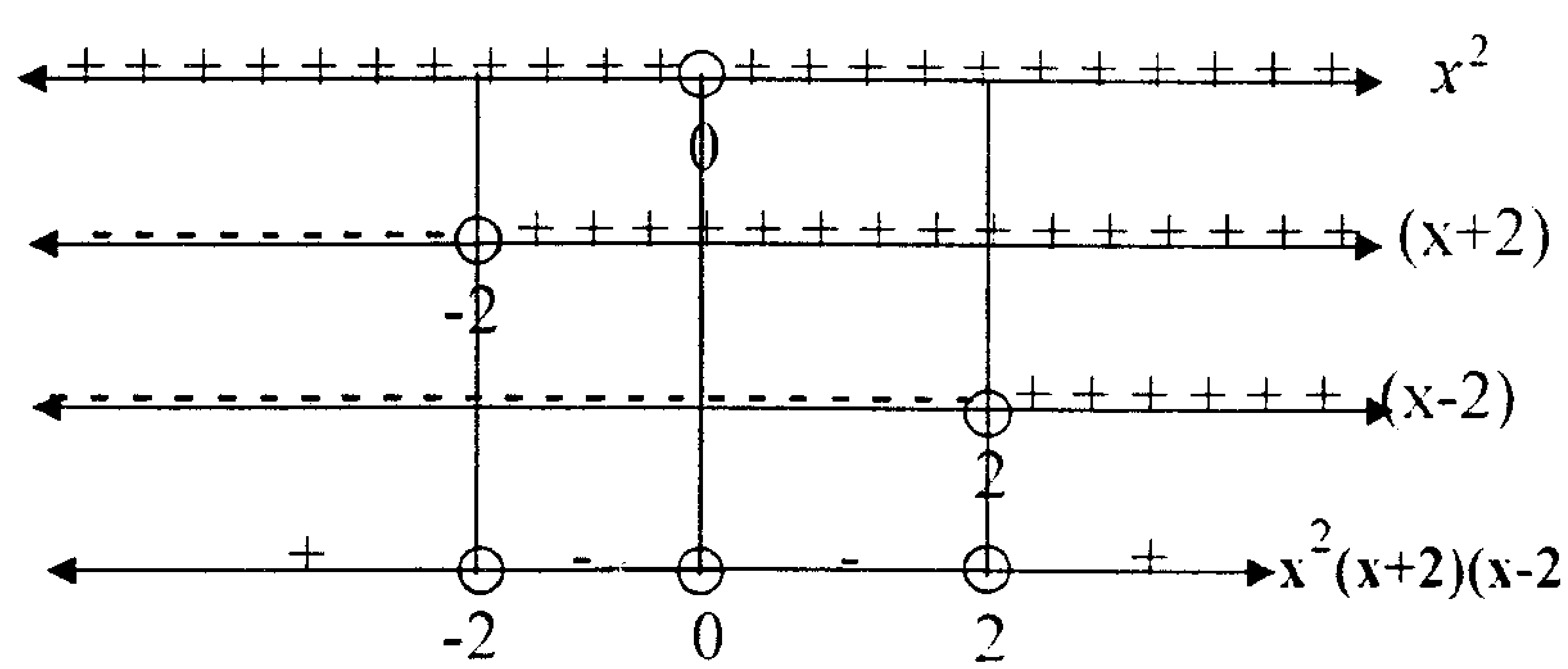
$$x^2(x+2)(x-2) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad , x=0$$

$$(x+2) = 0 \quad , x = -2$$

$$(x-2) = 0 \quad , x = 2$$

لا حظ أن المقدار x^2 دائما موجباً ويساوي صفراً عند x = 0



$\because$ علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

ومجموعة الحل هي :- $\{x:\ x < -2 \quad or \quad x > 2 \quad . x \in R\}$

الحالة الرابعة متباينات الفرق بين مكعبين :-

عند حل متباينات الفرق بين مكعبين فإننا نحلل مسألة الفرق بين مكعبين كما ذكرنا سابقاً في تحليل الفرق بين المكعبين $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

مع التنبه إلى أن المقدار الثلاثي الناتج من الفرق بين مكعبين $(x^2 + ax + a^2)$ دائماً موجباً $x^2 + ax + a^2 > 0$ لأن مميزه دائماً أصغر من الصفر $b^2 - 4ac < 0$

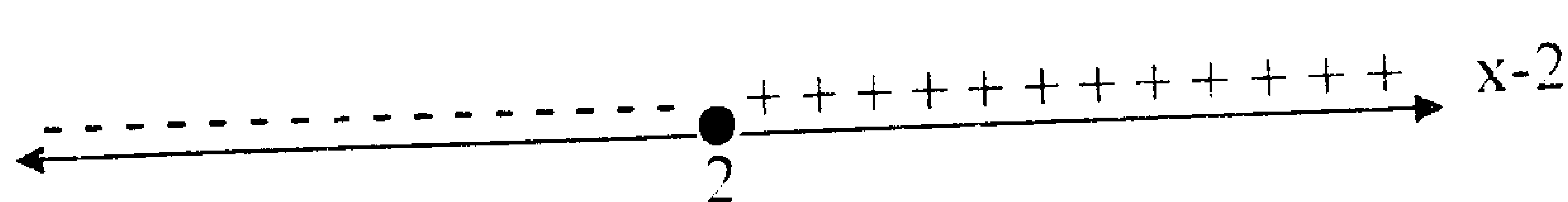
مـثـــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^3 - 8 \geq 0$

الــحـــل

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) \geq 0$$
$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$(x-2) = 0 \quad , \quad x = 2$$
$$x^2 + 2x + 4 \neq 0$$

المقدار الثلاثي $x^2 + 2x + 4$ دائماً موجب لأن مميزه أصغر من الصفر
ولهذا ندرس إشارة المقدار(x-2) فقط



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي ($\geq$) فالمطلوب هي الفترة الموجبة و هي:

$[2 ، \infty)$

ومجموعة الحل هي :

$\{x : x \geq 2 \quad , x \in R\}$

(2) $x^3 - 27 < 0$

الــحــل

$$(x-3)(x^2+3x+9) < 0$$

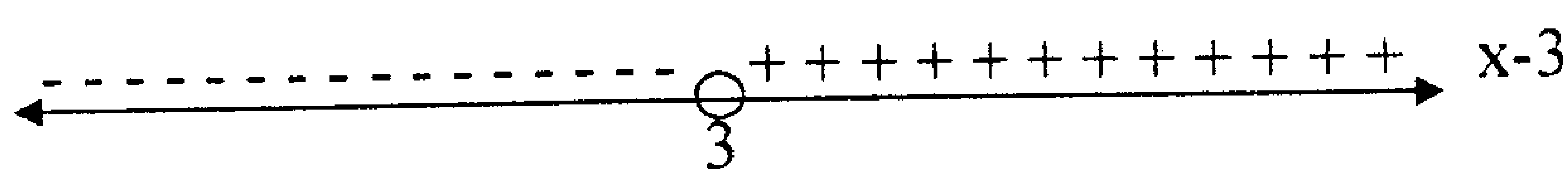
$$(x-3)(x^2+3x+9) = 0$$

$$(x-3) = 0 \quad , \quad x = 3$$

$$x^2+3x+9 \neq 0$$

المقدار الثلاثي x^2+3x+9 دائماً موجب لأن مميزه أصغر من الصفر

ولهذا ندرس إشارة المقدار(x-3) فقط



⊖ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (<) فالمطلوب هي الفترة السالبة وهي:

$(-\infty ، 3)$

ومجموعة الحل هي:

$\{x : x < 3 \quad , x \in R\}$

الحالة الخامسة متباينات مجموع مكعبين :-

عند حل متباينات مجموع مكعبين فإننا نحلل مسألة مجموع مكعبين كما ذكرنا سابقاً في تحليل مجموع المكعبين $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$ مع التنبه إلى أن المقدار الثلاثي الناتج من مجموع مكعبين $(x^2 - ax + a^2)$ دائماً موجباً $x^2 - ax + a^2 > 0$ لأن مميزه دائماً أصغر من الصفر $b^2 - 4ac < 0$

مـثـــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^3 + 8 \geq 0$

الــحــل

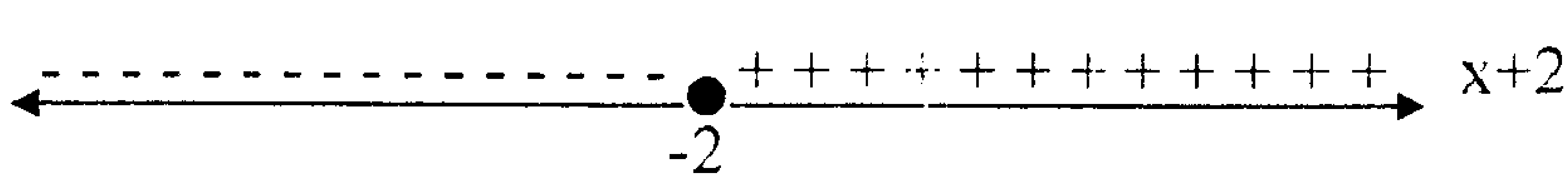
$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) \geq 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x+2) = 0 \quad , \quad x = -2$$

$$x^2 - 2x + 4 \neq 0$$

المقدار الثلاثي $x^2 - 2x + 4$ دائماً موجب لأن مميزه أصغر من الصفر
ولهذا ندرس إشارة المقدار(x + 2) فقط



⊙ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي ($\geq$) فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $[-2 \,،\, \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x : x \geq -2 \quad , x \in R\}$

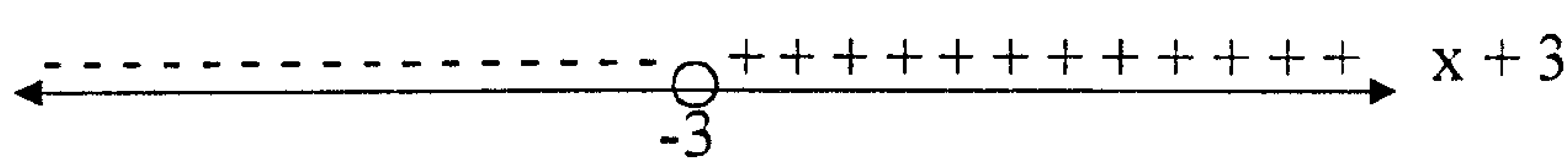
(2) $x^3+27<0$

الحــل

$$(x+3)(x^2-3x+9)<0$$
$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$
$$(x+3)=0 \quad , \quad x=-3$$
$$x^2-3x+9\neq 0$$

المقدار الثلاثي x^2-3x+9 دائماً موجب لأن مميزه أصغر من الصفر

ولهذا ندرس إشارة المقدار(x + 3) فقط



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من ($<$) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي : $(-\infty ، -3)$

ومجموعة الحل هي : $\{x : x<-3 \quad , x\in R\}$

الحالة السادسة متباينات المقدار الثلاثي :-

متباينات المقدار الثلاثي x^2+ax+b لها حالات بناء على قيمة المميز b^2-4ac وعلى علامة التباين وذلك كالتالي :-

(A) إذا كان مميز المقدار الثلاثي x^2+ax+b أكبر من أو يساوي الصفر $b^2-4ac\geq 0$ فإننا نقوم بتحليل المقدار الثلاثي ونحل المتباينة :

مـثـــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^2-3x+2<0$

الـحـــل

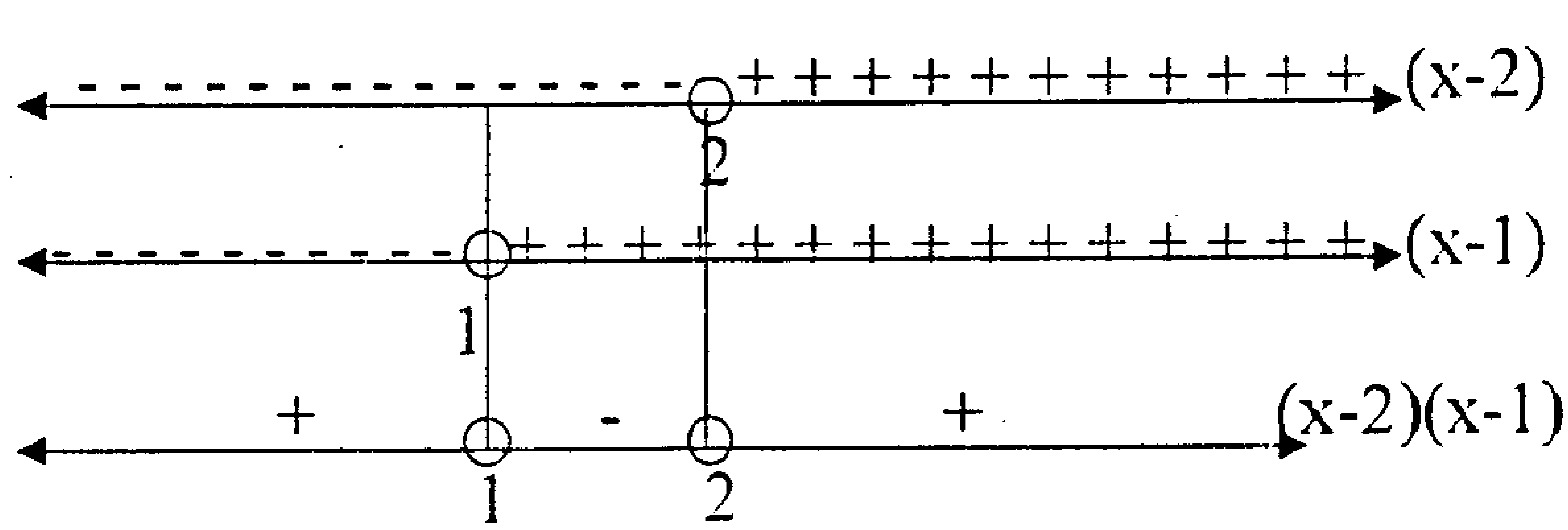
$b^2-4ac=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1>0$

$(x-2)(x-1)<0$

$(x-2)(x-1)=0$

$(x-2)=0 \quad ,x=2$

$(x-1)=0 \quad ,x=1$



$\because$ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (<) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي: $(1 ، 2)$

ومجموعة الحل هي: $\{x:1<x<2 \quad , x\in R\}$

(2) $x^2 - 2x - 3 > 0$

الحـــل

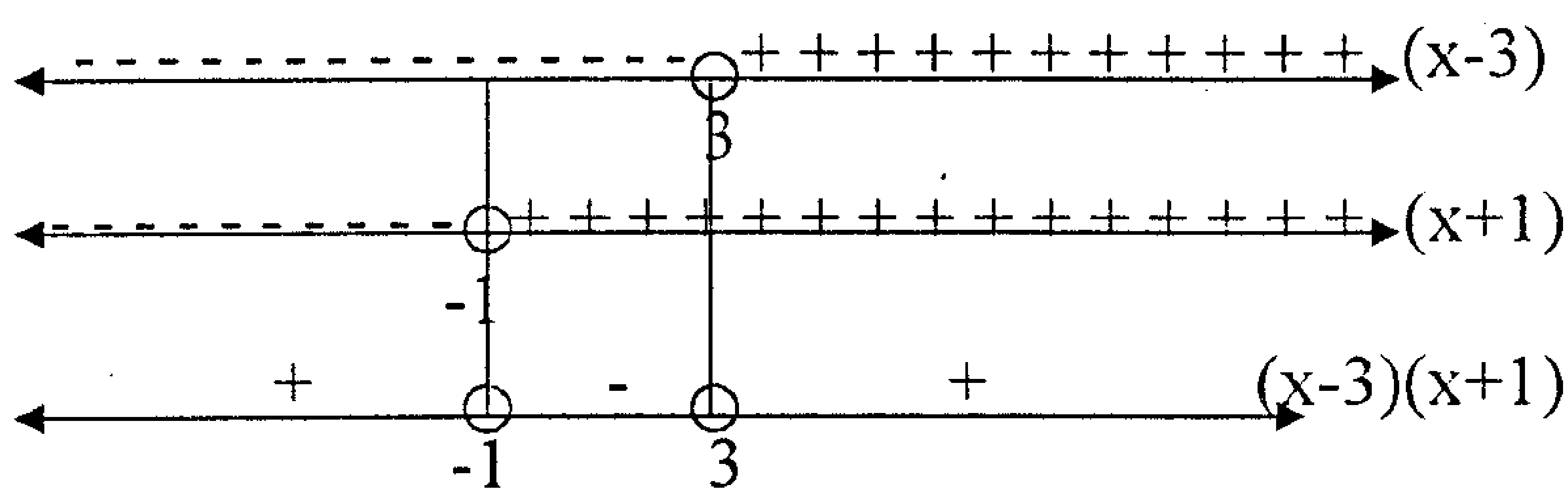
$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

$(x-3)(x+1) > 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$(x-3) = 0 \ , x = 3$

$(x+1) = 0 \ , x = -1$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty ، -1) \cup (3 ، \infty)$

ومجموعة الحل هي: $\{x:\ x < -1 \ \ or \ \ x > 3 \ \ , x \in R\}$

(3) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

الحل

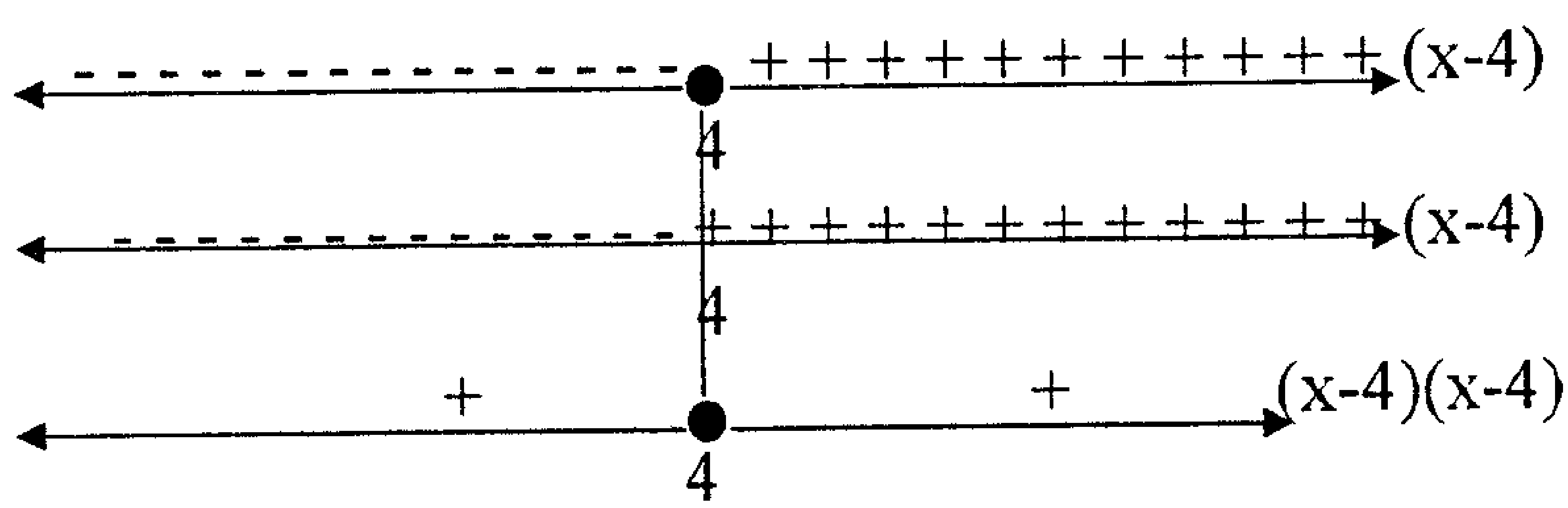
$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

$(x-4)(x-4) \geq 0$

$(x-4)(x-4) = 0$

$(x-4) = 0 \quad , x = 4$

$(x-4) = 0 \quad , x = 4$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو يساوي ($\geq$)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty \text{ ، } \infty)$

ومجموعة الحل هي: $\{x: -\infty < x < \infty \quad , x \in R\} = \{x: \quad x \in R\}$

(4) $x^2+6x+9>0$

الحـــل

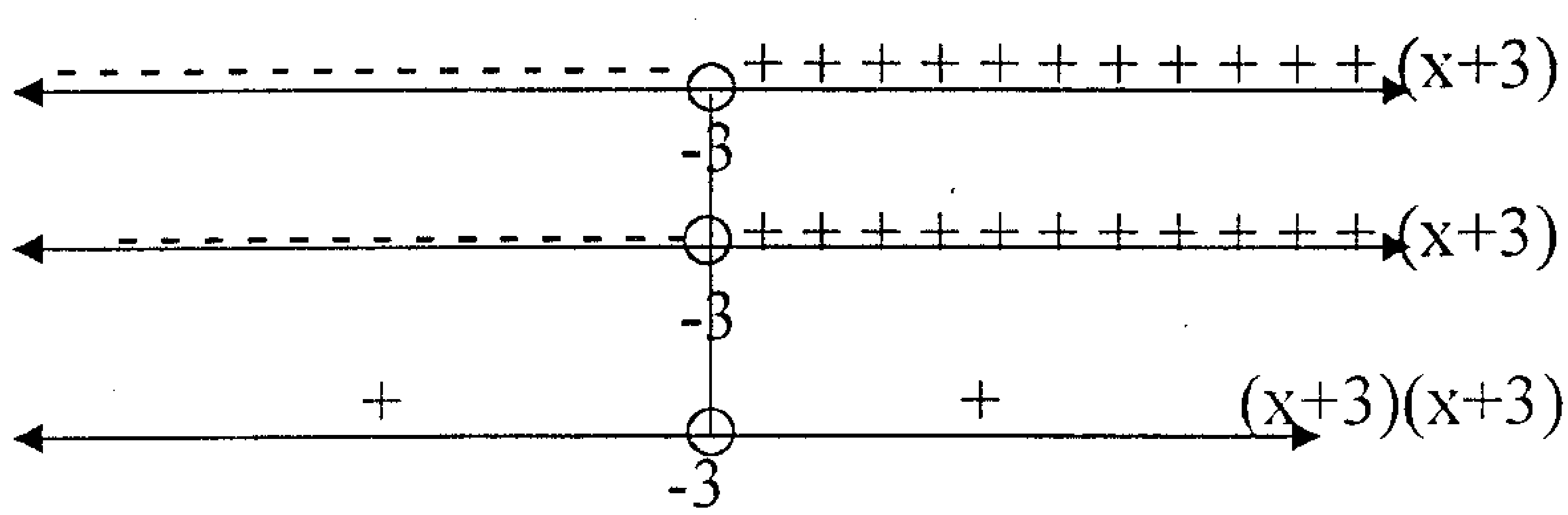
$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$

$(x+3)(x+3)>0$

$(x+3)(x+3)=0$

$(x+3)=0\ ,x=-3$

$(x+3)=0\ ,x=-3$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty ، -3)\cup(-3 ، \infty)=R-\{3\}$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x<-3\ \ or\ \ x>-3\ \ ,x\in R\}$

(5) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

الحـــل

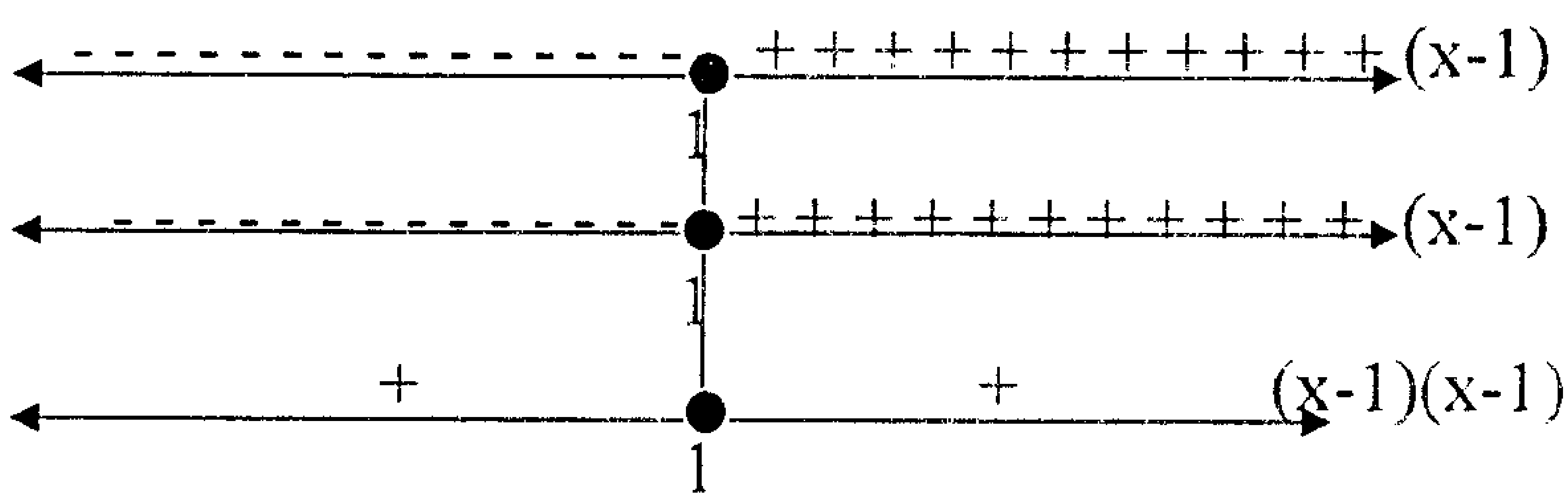
$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

$(x-1)(x-1) \leq 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$(x-1) = 0 \quad , x = 1$

$(x-1) = 0 \quad , x = 1$



$\because$ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي ($\leq$)فالمطلوب هي الفترة السالبة وهي غير موجودة وإنما يوجد فقط القيمة التي تجعل المتباين تساوي صفراً

ومجموعة الحل = $\{1\}$

(6) $x^2 + 10x + 25 < 0$

الــحــل

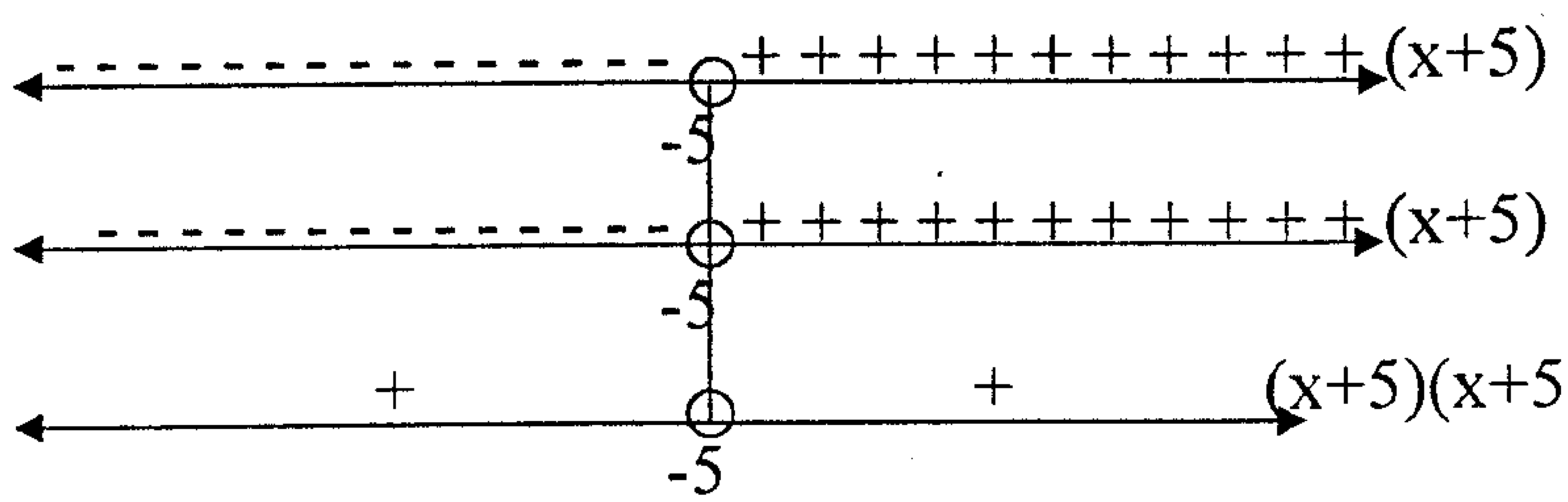
$b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$

$(x+5)(x+5) < 0$

$(x+5)(x+5) = 0$

$(x+5) = 0 \ , x = -5$

$(x+5) = 0 \ , x = -5$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (>)فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي غير موجودة

مجموعة الحل = ϕ

(B) إذا كان مميز المقدار الثلاثي x^2+ax+b أصغر من الصفر $b^2-4ac<0$
فهناك احتمالان للحل بناء على علامة التباين :-

(1) إذا كانت المتباينة على صورة $x^2+ax+b>$ or $x^2+ax+b \geq$
فإن مجموعة الحل هي $R=(-\infty,\infty)$ لأن المقدار الثلاثي الذي مميزه أصغر من الصفر دائماً موجب لأي قيمة لـ x

(2) إذا كانت المتباينة على صورة $x^2+ax+b<$ or $x^2+ax+b \leq$
فإن مجموعة الحل هي ϕ لأن المقدار الثلاثي الذي مميزه أصغر من الصفر لا يكون سالباً .

مـثـال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $x^2+x+1\leq 0$

الـحـل

$$b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$$

$\because$ المقدار الثلاثي مميزه أصغر من الصفر والمتباينة أصغر من أو تساوي صفراً ($\leq$)
$\therefore$ مجموعة الحل هي = ϕ .

(2) $x^2-3x+9>0$

الـحـل

$$b^2-4ac=(-3)^2-4(1)(9)=9-36=-27<0$$

$\because$ المقدار الثلاثي مميزه أصغر من الصفر والمتباينة أكبر من الصفر ($>$)
$\therefore$ فترة الحل هي $R=(-\infty,\infty)$.
مجموعة الحل هي $\{x: x\in R\}=\{x:-\infty<x<\infty \quad , x\in R\}$

$(3)\ (x^2 - 2x + 4)\,(x+1) \leq 0$

الحـــل

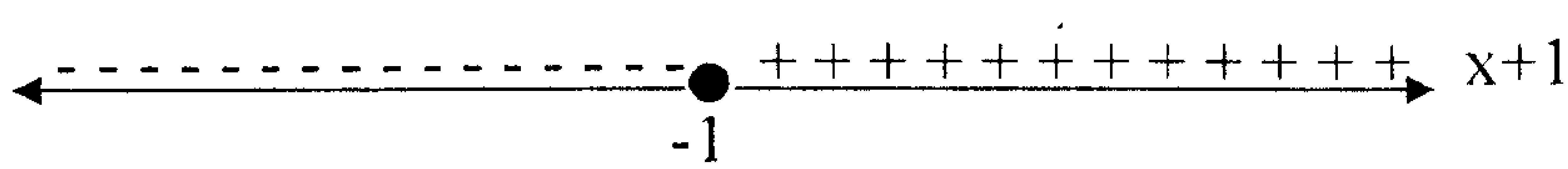
$(x^2 - 2x + 4)\,(x+1) = 0$

$(x+1) = 0 \quad , \quad x = -1$

$(x^2 - 2x + 4) \neq 0\ ,\ b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -8 < 0$

وحيث أن المميز أصغر من الصفر فإن المقدار الثلاثي $(x^2 - 2x + 4)$ دائماً

موجب ولهذا ندرس إشارة المقدار $x + 1$ فقط



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي ($\leq$) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي: $(-\infty , -1]$

ومجموعة الحل هي: $\{x : x \leq -1 \ , \ x \in R\}$

رابعاً المتباينات المشتملة على كسور:-

عند حل المتباينات المشتملة على كسور نقوم بوضع حدود المتباينة في طرف واحد ثم نقوم بتوحيد المقامات إن وجد توحيداً للمقامات ثم نقوم بضرب طرفي المتباينة في مربع المقام للتخلص منه ثم نقوم بحل المتباينة كما ذكرنا سابقاً أو نقوم بضرب طرفي المتباينة في مربع المقامات قبل وضع الحدود في طرف واحد وتوحيد هذه المقامات .

ملاحـظـات هـامــة :-

(1) عند إيجاد فترة الحل يجب مراعاة أن القيم التي تجعل مقام المتباينة تساوي صفراً لابد أن يكون قوس الفترة من جهة هذه القيم مفتوح .

(2) إذا كان مقام المتباينة عبارة عن مقداراً موجباً فإننا نضرب طرفي المتباينة في هذا المقدار مباشرة دون تربعه لأنه مقداراً موجباً .

مــثــال:- أوجد حل المتباينات الآتية :-

(1) $\frac{x-1}{x+2} < 0$

الــحــل

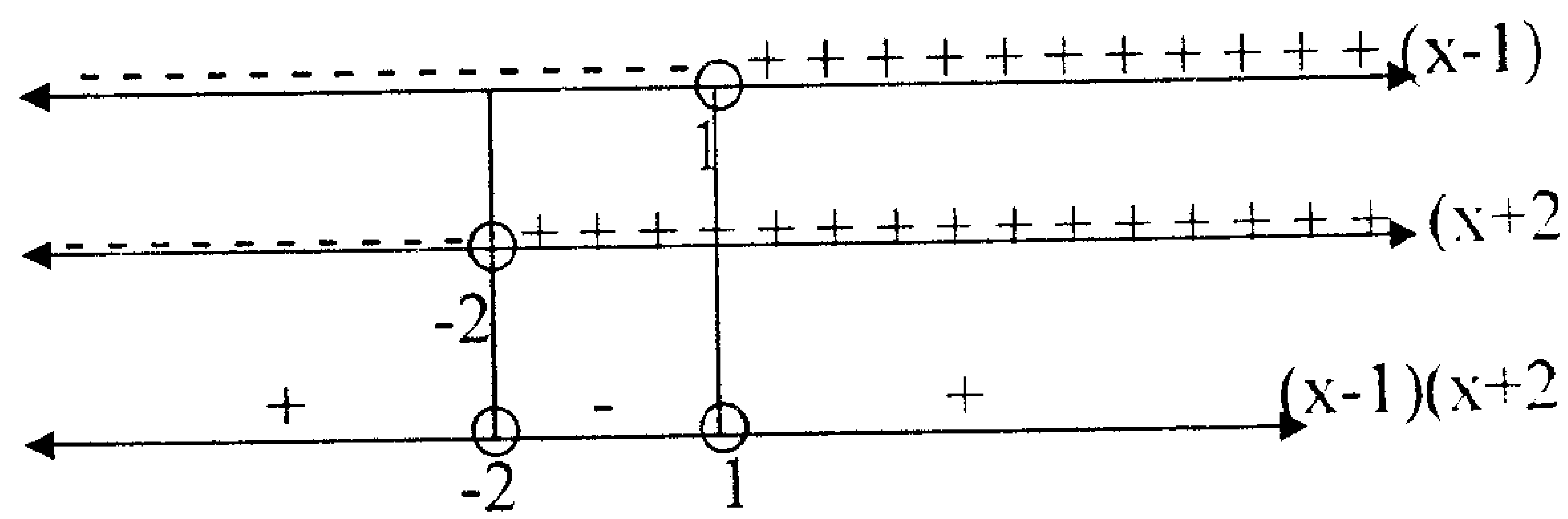
$$\frac{x-1}{x+2}(x+2)^2 < (0)(x+2)^2$$

$$(x-1)(x+2) < 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$(x-1) = 0 \ , \ x=1$$

$$(x+2) = 0 \ , \ x=-2$$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (<) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي : $(-2 ، 1)$

ومجموعة الحل هي : $\{\ x:-2<x<1\quad ,\ x\in R\}$

(2) $\dfrac{2x-3}{x+5}\le 0$

الـحــل

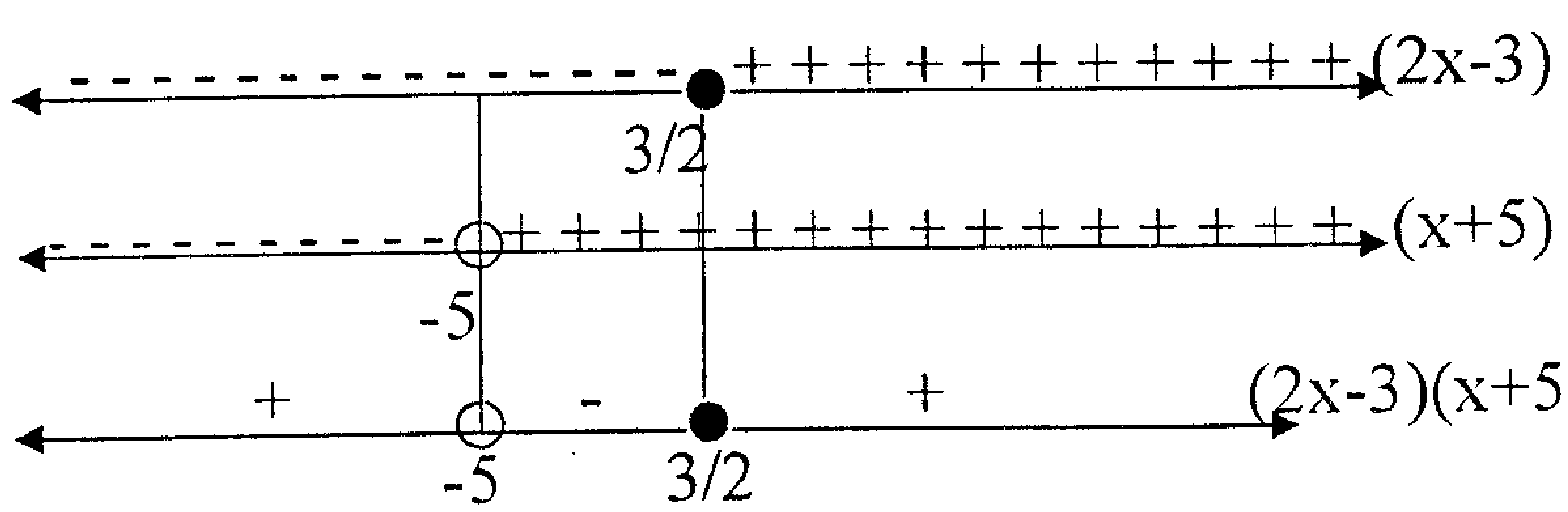
$$\frac{2x-3}{x+5}(x+5)^2\ \le\ (0)\,(x+5)^2$$

$$(2x-3)(x+5)\le 0$$

$$(2x-3)(x+5)=0$$

$$(2x-3)=0\ ,\ x=\frac{3}{2}$$

$$(x+5)=0\ ,\ x=-5$$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي (≤) فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي: $(-5 ، \frac{3}{2}]$

ومجموعة الحل هي: $\{\ x:-5<x\le\frac{3}{2}\quad ,\ x\in R\}$

(3) $\frac{3x-4}{x+2} \geq 1$

الحـــل

$$\frac{3x-4}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{3x-4-x-2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x-6}{x+2} \geq 0$$

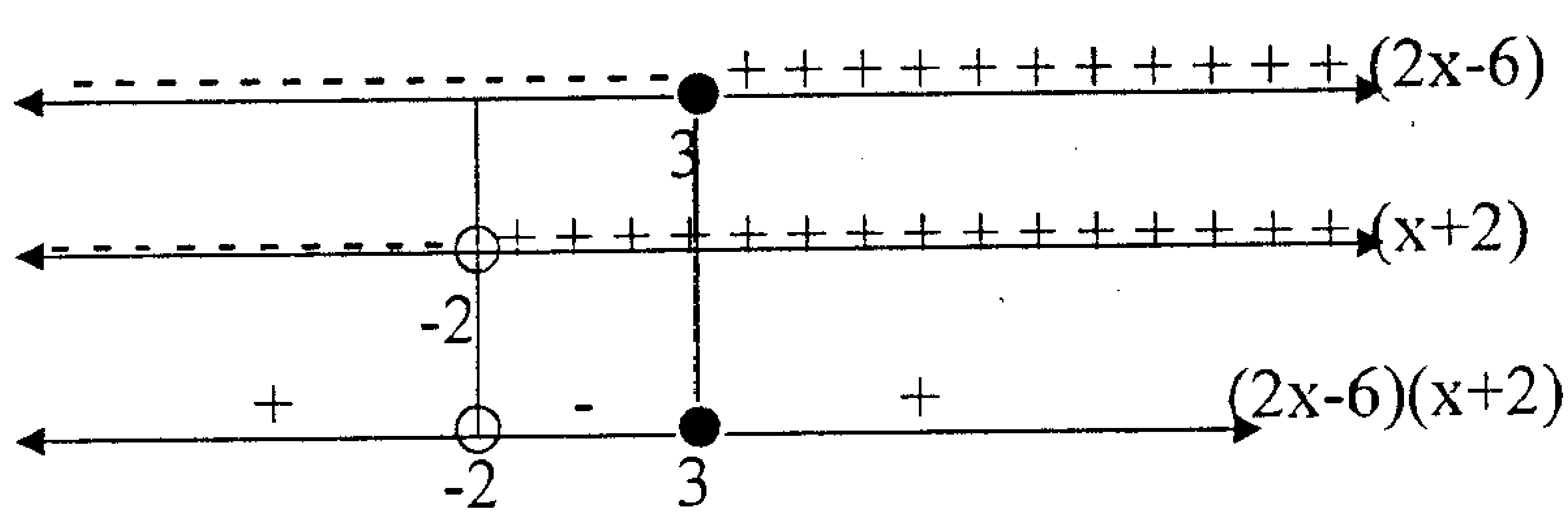
$$\frac{2x-6}{x+2}(x+2)^2 \geq (0)(x+2)^2$$

$$(2x-6)(x+2) \geq 0$$

$$(2x-6)(x+2) = 0$$

$$(2x-6) = 0 \ , x = 3$$

$$(x+2) = 0 \ , x = -2$$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي (≥) فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty , -2) \cup [3 , \infty)$

ومجموعة الحل هي: $\{x: \ x < -2 \ \ or \ \ x \geq 3 \ \ , x \in R\}$

$$(4)\ \frac{x+3}{x-2} \le -2$$

الــحــل

$$\frac{x+3}{x-2} + 2 \le 0$$

$$\frac{x+3+2x-4}{x-2} \le 0$$

$$\frac{3x-1}{x-2} \le 0$$

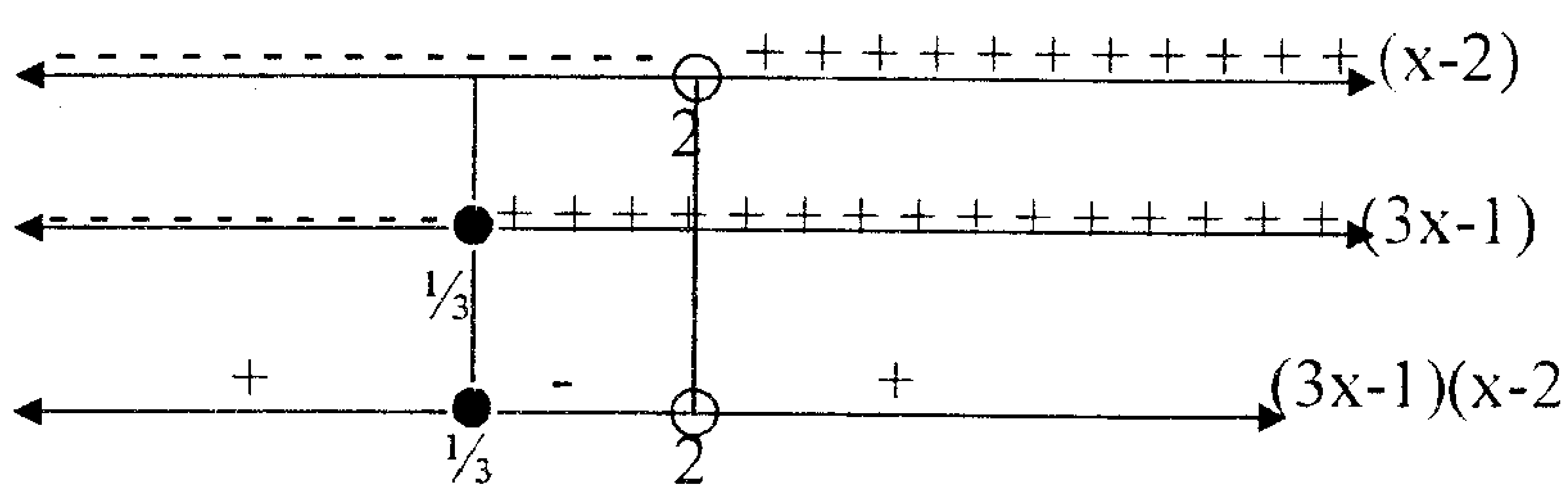
$$\frac{3x-1}{x-2}(x-2)^2 \le (0)(x-2)^2$$

$$(3x-1)(x-2) \le 0$$

$$(3x-1)(x-2) = 0$$

$$(3x-1) = 0\ ,\ x = \frac{1}{3}$$

$$(x-2) = 0\ ,\ x = 2$$



⊖ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي ($\le$)فالمطلوب هي الفترة

السالبة وهي : $[\frac{1}{3} , 2)$

ومجموعة الحل هي: $\{\ x : \frac{1}{3} \le x < 2\ \ ,\ x \in R\}$

(5) $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{3}{x-4}$

الحـــل

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x-4-3x}{x(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{-2x-4}{x(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{-2x-4}{x(x-4)}\, x^2(x-4)^2 \geq (0)\ x^2(x-4)^2$$

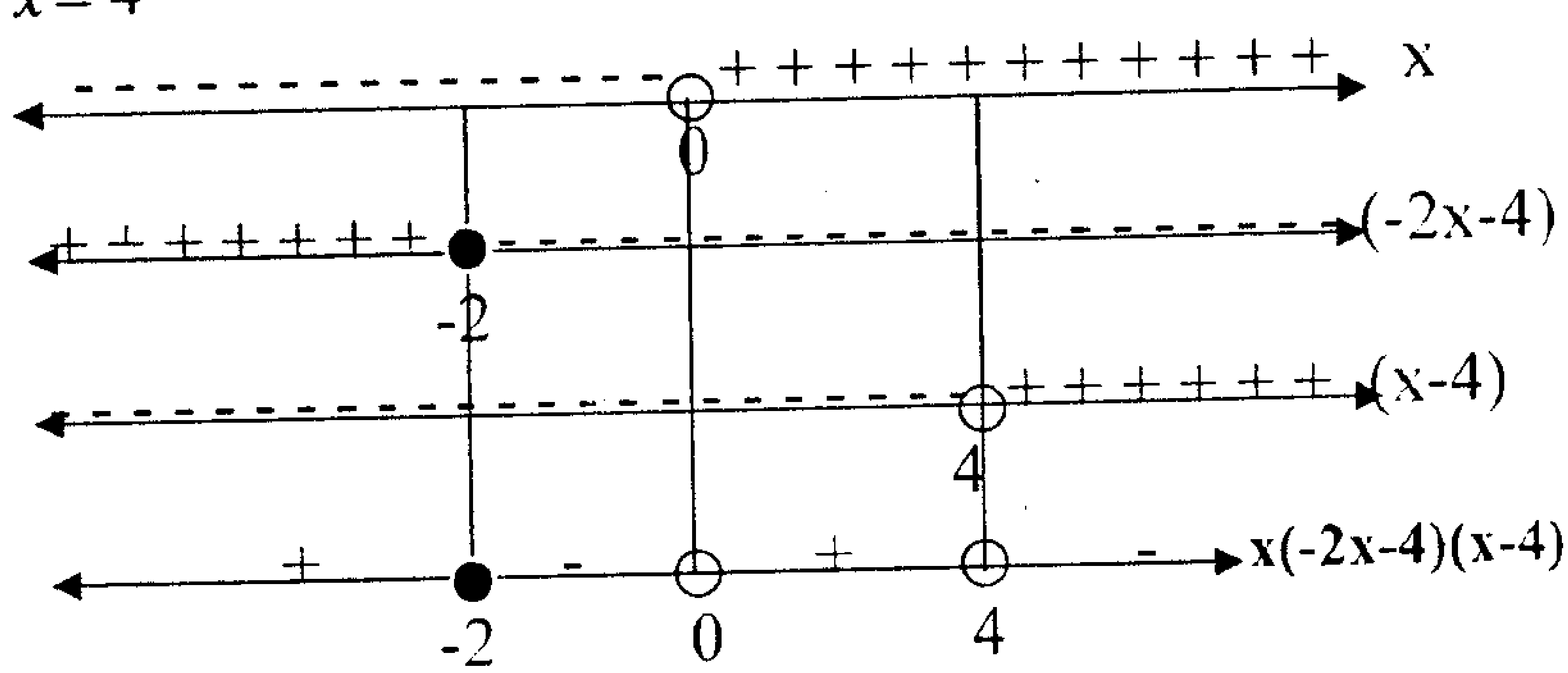
$$(-2x-4)x(x-4) \geq 0$$

$$(-2x-4)x(x-4) = 0$$

$$(-2x-4) = 0 \ ,\ x = -2$$

$$x = 0$$

$$(x-4) = 0 \ ,\ x = 4$$



⊖ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي (≥)فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي: $(-\infty ، -2\,] \cup (0 ، 4)$

ومجموعة الحل هي : $= \{x:\ x \leq -2 \quad or \quad 0 < x < 4 \quad , x \in R\}$

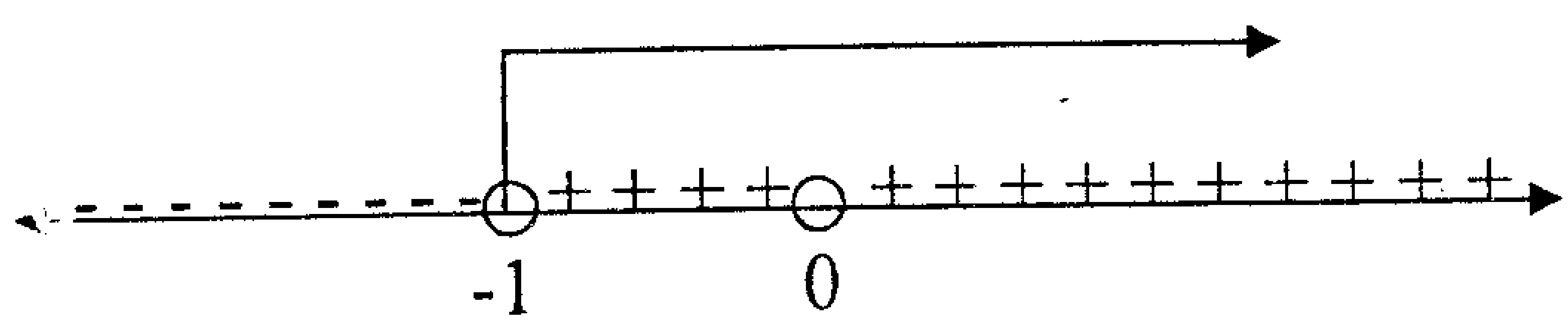
(6) $\frac{x+1}{x^2} > 0$

الـــحـــل

$\frac{x+1}{x^2}\, x^2 > (0)\, x^2$

$(x+1) > 0$

$x > -1$



∵ علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>)فالمطلوب هي الفترة الموجبة و هي:

$(-1 ، 0) \cup (0 ، \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ -1 < x < 0 \quad or\ x > 0 \quad , x \in R\}$

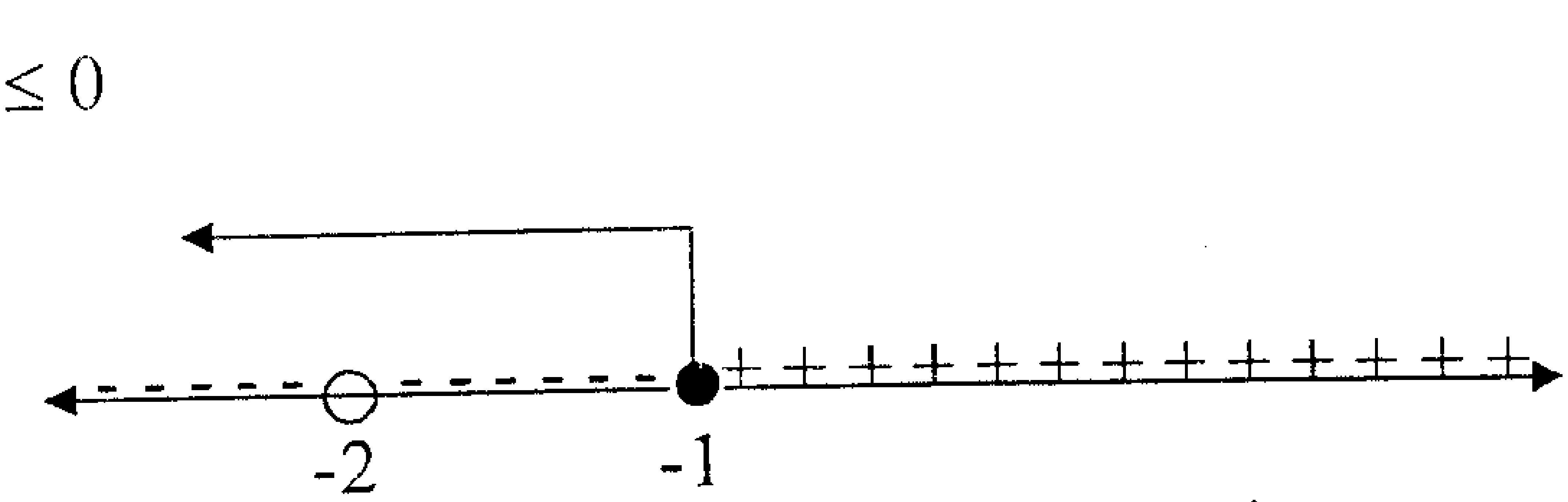
(7) $\frac{x+1}{(x+2)^2} \leq 0$

الـــحـــل

$\frac{x+1}{(x+2)^2}(x+2)^2 \leq (0)\,(x+2)^2$

$(x+1) \leq 0$

$x \leq -1$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي (≤)فالمطلوب هي الفترة السالبة وهي:

$(-\infty ، -2) \cup (-2 ، -1]$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x < -2 \quad or\ -2 < x \leq -1 \quad , x \in R\}$

$$(8)\ \frac{4}{x^2+1} > 0$$

الـحـل

لاحظ أن المقام مجموع مربعين ولهذا دائماً يكون مقداراً موجباً

$$\frac{4}{x^2+1}\ x^2+1 > (0)\,(x^2+1)$$

$$4 > 0$$

لاحظ أنه لاي قيمة لـ x يتحقق أن 0 < 4 وهذه جملة رياضية صحيحة

فلهذا فإن فترة الحل هي: $(-\infty,\infty)$

ومجموعة الحل هي: $\{x: -\infty < x < \infty \quad, x \in R\} = \{x: \ x \in R\}$

$$(9)\ \frac{-3}{x^2+x+1} > 0$$

الـحـل

لاحظ أن المقام مقدار ثلاثي مميزه أصغر من الصفر ولهذا دائماً يكون مقداراً موجباً

$$\frac{-3}{x^2+x+1}\ x^2+1 > (0)\,(x^2+x+1)$$

$$-3 > 0$$

لاحظ أنه لاي قيمة لـ x يتحقق أن 0 < 3- وهذه جملة رياضية غير صحيحة

فلهذا فإن مجموعة الحل هي ϕ

خامساً متباينات القيمة المطلقة :- لها عدة صور وهي :-

(A) إذا كانت متباينة القيمة المطلقة على صورة $|x| \le b$ في هذه الحالة يوجد طريقتان للتخلص من القيمة المطلقة :-

الطريقة الأولى :- نقوم بتربيع الطرفين ثم نحل المتباينة الناتجة .

الطريقة الثانية :- نقوم بتحويل متباينة القيمة المطلقة إلى الصورة $-b \le x \le b$ ثم نحل المتباينة المتكونة من ثلاثة أجزاء .

مـــلاحـــظـــة هـــامـــة :- إذا كان المقدار الذي داخل القيمة المطلقة مقدار موجباً فلا نحتاج لأحد الطريقتين وإنما نكتفي بإلغاء القيمة المطلقة ونحل المتباينة وسبق أن ذكرنا هذا في حل معادلات القيمة المطلقة أيضاً.

مـــثـــال :- أوجد حل المتباينات الآتية :-

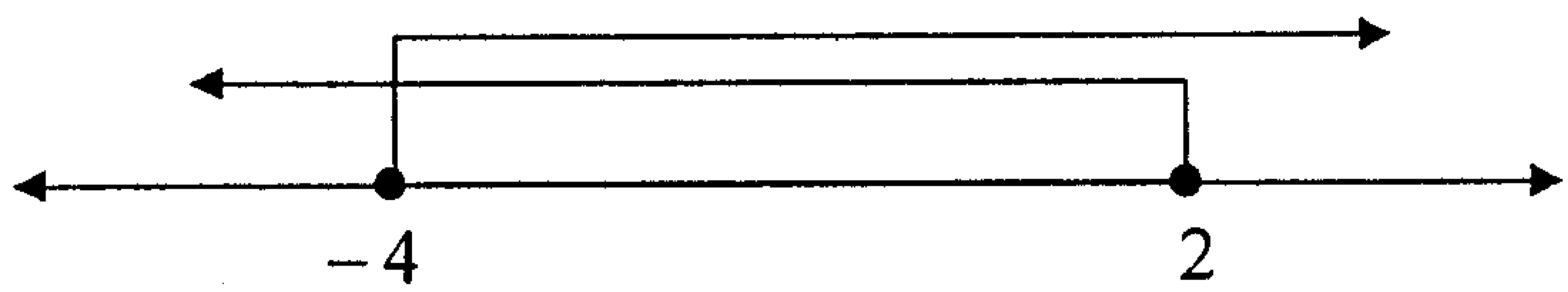
(1) $|x+1| \le 3$

الـــحـــل

$-3 \le x+1 \le 3$

$$-3 \le x+1 \le 3$$

$-3 \le x+1$	$x+1 \le 3$
$x+1 \ge -3$	$x \le 3-1$
$x \ge -3-1$	$x \le 2$
$x \ge -4$	$x \le 2$



$= \{x:\ -4 \le x \le 2\ ,\ x \in R\}$

$= [-4, 2]$

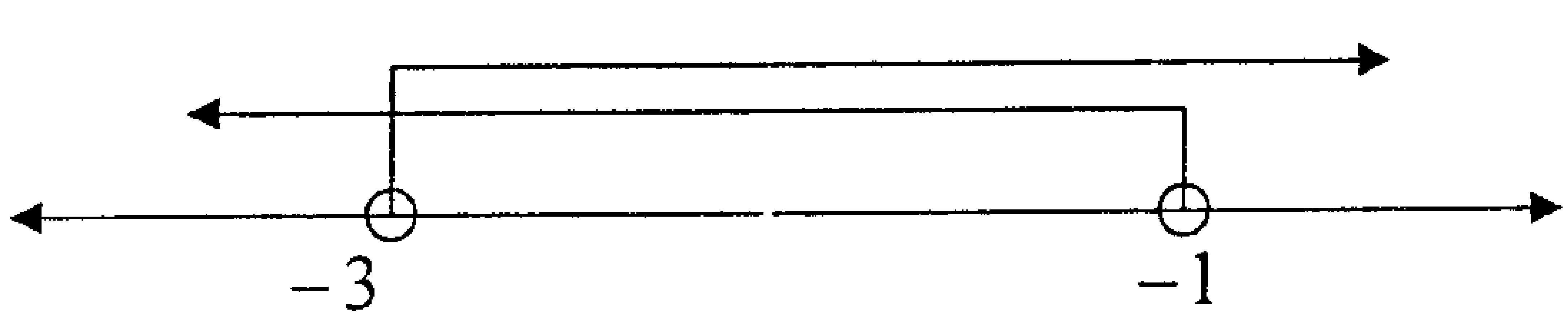
(2) $|x+2| < 1$

الحـــل

$-1 < x+2 < 1$

$$-1 < x+2 < 1$$

$-1 < x+2$	$x+2 < 1$
$x+2 > -1$	$x < 1-2$
$x > -2-1$	$x < -1$
$x > -3$	$x < -1$



$= \{x:\ -3 < x < -1\ ,\ x \in R\}$

$= (-3, -1)$

$(3)\ \left|\frac{x+1}{x}\right|<2$

الحل

$$-2<\frac{x+1}{x}<2$$

$$-2<\frac{x+1}{x}<2$$

$$-2<\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{x+1}{x}>-2$$

$$\frac{x+1}{x}+2>0$$

$$\frac{x+1+2x}{x}>0$$

$$\frac{3x+1}{x}>0$$

$$\frac{3x+1}{x}\ x^2>0$$

$$(3x+1)x>0$$

$$\frac{x+1}{x}<2$$

$$\frac{x+1}{x}-2<0$$

$$\frac{x+1-2x}{x}<0$$

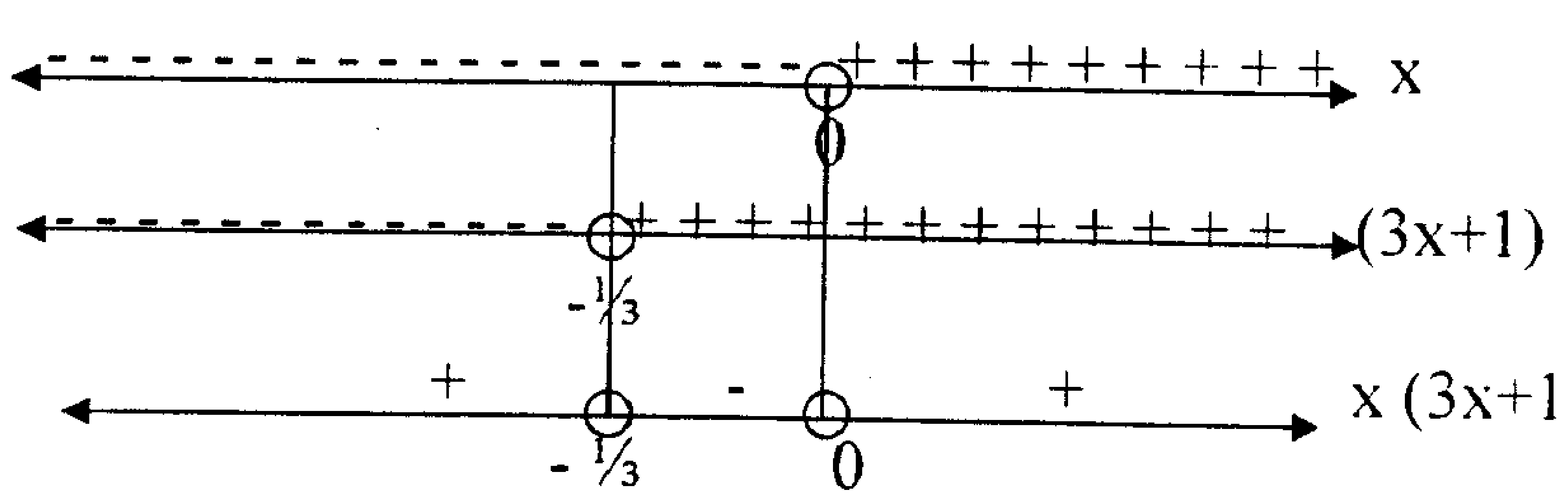
$$\frac{-x+1}{x}>0$$

$$\frac{-x+1}{x}\ x^2<0$$

$$(-x+1)x<0$$

أولاً حل المتباينة : $(3x+1)\ x > 0$

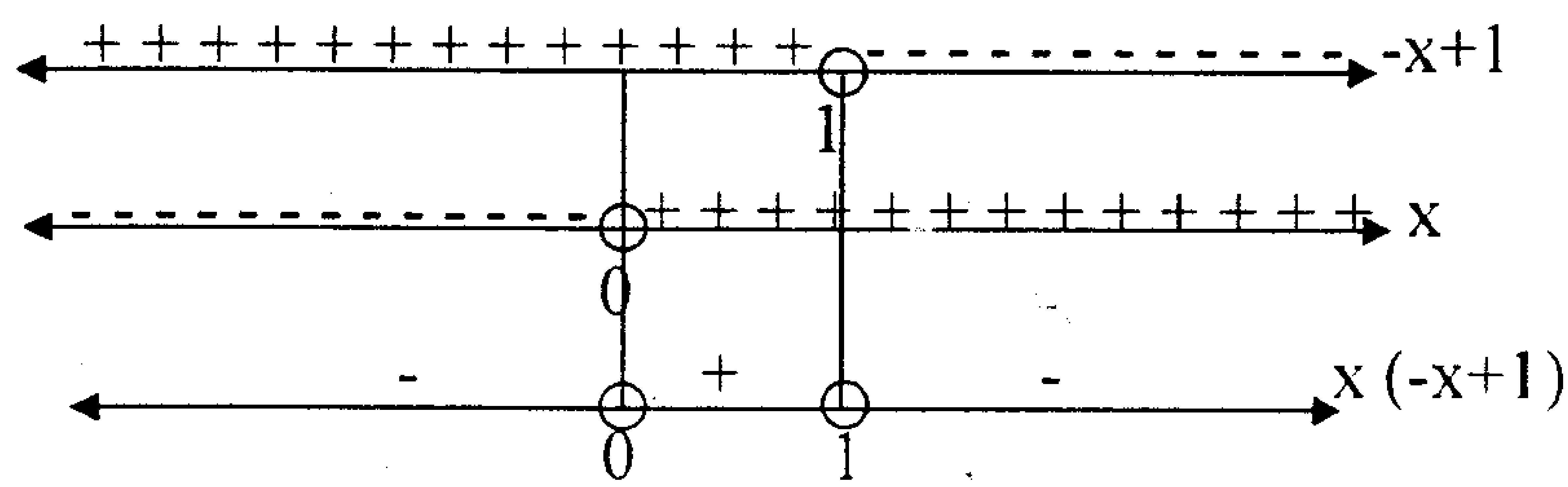
$$x(3x+1)=0$$
$$x=0$$
$$3x+1=0\ ,\ x=-\frac{1}{3}$$



فترة الحل هي: $(-\infty ، -\frac{1}{3}) \cup (0 ، \infty)$

ثانياً حل المتباينة : $x(-x+1) < 0$

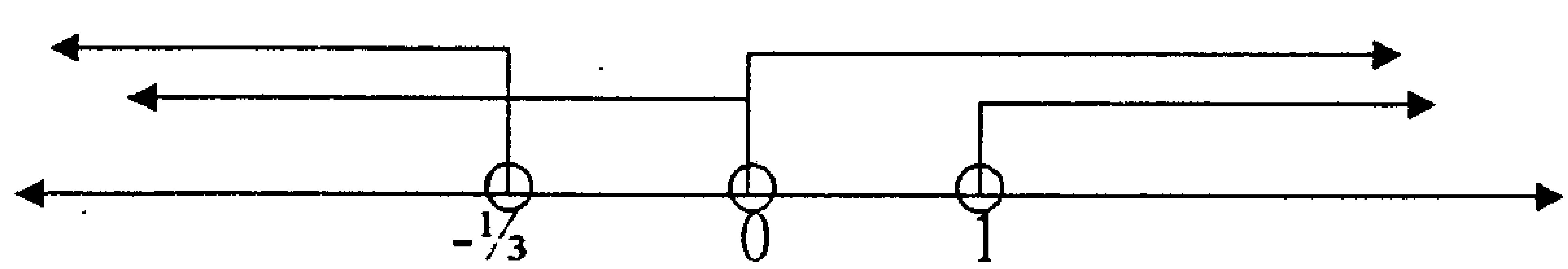
$$x(-x+1)=0$$
$$x=0$$
$$-x+1=0\ ,\ x=1$$



فترة الحل هي: $(-\infty ، 0) \cup (1 ، \infty)$

فترة الحل للمتباينة هي:

$$\left[(-\infty ، -\tfrac{1}{3}) \cup (0 ، \infty)\right] \cap \left[(-\infty ، 0) \cup (1 ، \infty)\right] = (-\infty ، -\tfrac{1}{3}) \cup (1 ، \infty)$$



ومجموعة الحل هي :- $=\{x:\ x<-\frac{1}{3}\ \ or\ \ x>1\ \ ,x\in R\}$

$$(4)\left|\frac{6-4x}{1+x}\right|\le 8$$

الحــل

$$-8\le\frac{6-4x}{1+x}\le 8$$

$$-8\le\frac{6-4x}{1+x}\le 8$$

$$-8\le\frac{6-4x}{1+x}$$

$$\frac{6-4x}{1+x}\ge -8$$

$$\frac{6-4x}{1+x}+8\ge 0$$

$$\frac{6-4x+8+8x}{1+x}\ge 0$$

$$\frac{4x+14}{x+1}\,(x+1)^2\quad\ge 0$$

$$(4x+14)\;(x+1)\ge 0$$

$$\frac{6-4x}{1+x}\le 8$$

$$\frac{6-4x}{1+x}-8\le 0$$

$$\frac{6-4x-8-8x}{x+1}\le 0$$

$$\frac{-2-12x}{x+1}\le 0$$

$$\frac{-2-12x}{x+1}\;(x+1)^2\le 0$$

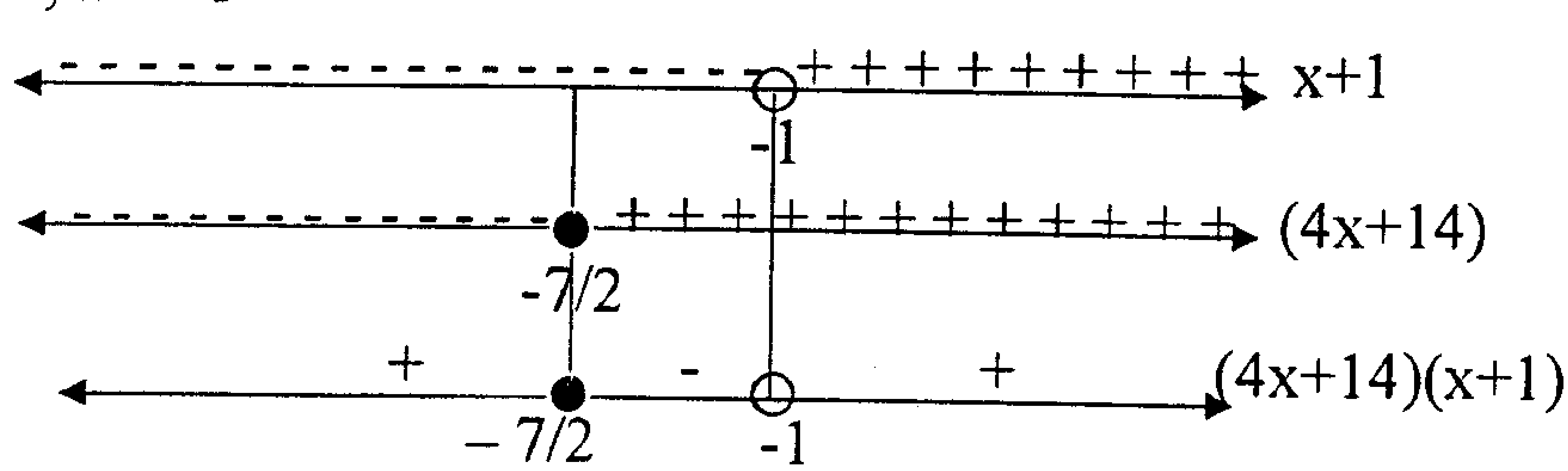
$$(-2-12x)(x+1)\le 0$$

أولاً حل المتباينة : $(4x+14)(x+1) \ge 0$

$$(4x+14)(x+1)=0$$

$$4x+14=0\ ,\ x=-\frac{7}{2}$$

$$x+1=0\ ,\ x=-1$$



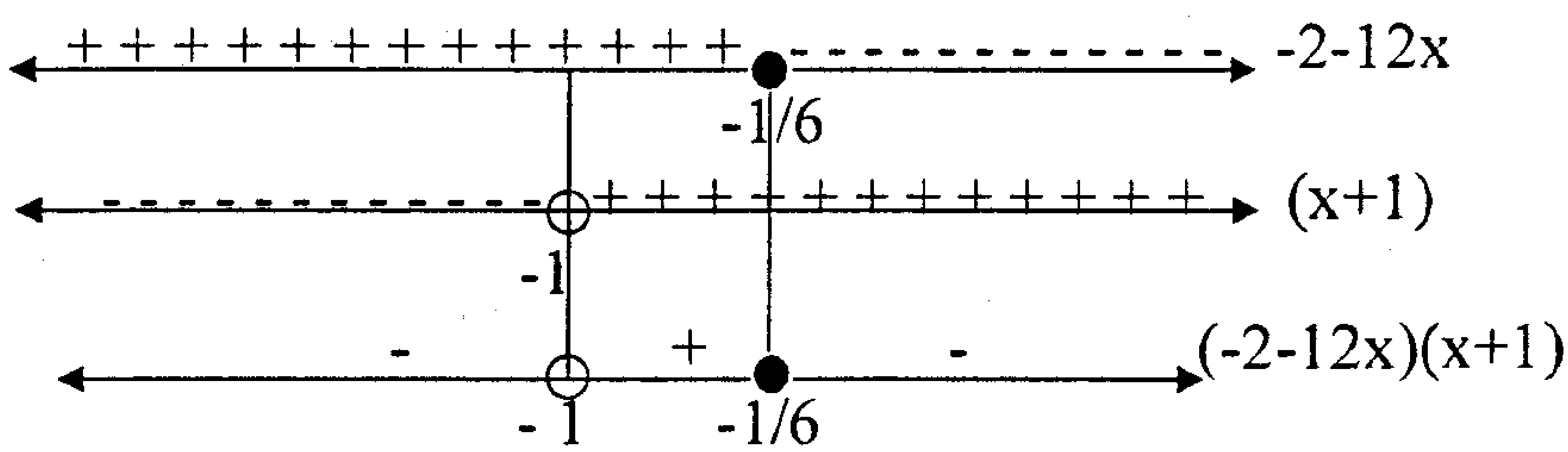
فترة الحل هي: $(-\infty، -7/2]\cup(-1،\infty)$

ثانياً حل المتباينة : $(-2-12x)(x+1) \le 0$

$$(-2-12x)(x+1)=0$$

$$-2-12x=0 \ , \ x=-\frac{1}{6}$$

$$x+1=0 \ , \ x=-1$$

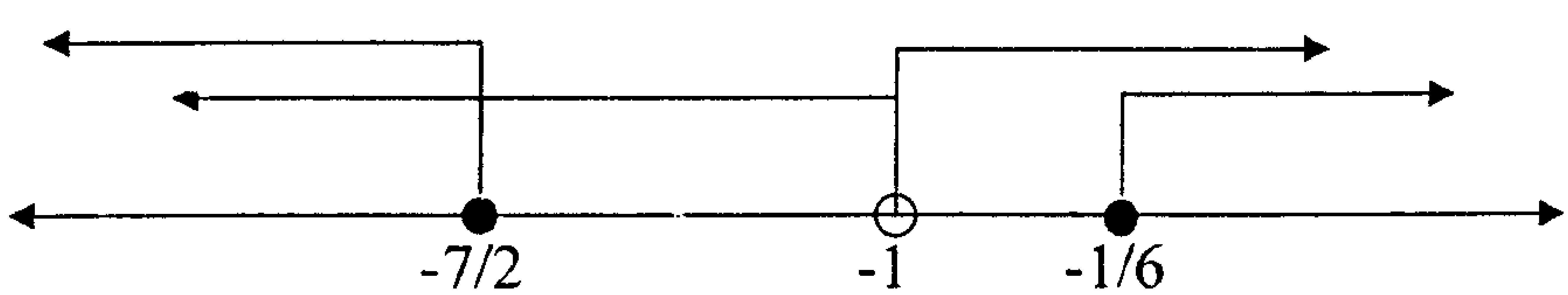


فترة الحل هي $(-\infty ، -1) \cup [-1/6 ، \infty)$

فترة الحل للمتباينة هي:

$$\left[(-\infty ، -7/2] \cup (-1 ، \infty)\right] \cap \left[(-\infty ، -1) \cup [-1/6 ، \infty)\right]$$

$$=(-\infty ، -7/2] \cup [-1/6 ، \infty)$$



ومجموعة الحل هي : $\{x: \ x \le -\frac{7}{2} \ \ or \ \ x \ge -\frac{1}{6} \ , x \in R\}$

$(5)\ |x^2-1|<3$

الحــل

$-3<x^2-1<3$

$$-3<x^2-1<3$$

$-3<x^2-1$

$x^2-1>-3$

$x^2+2>0$

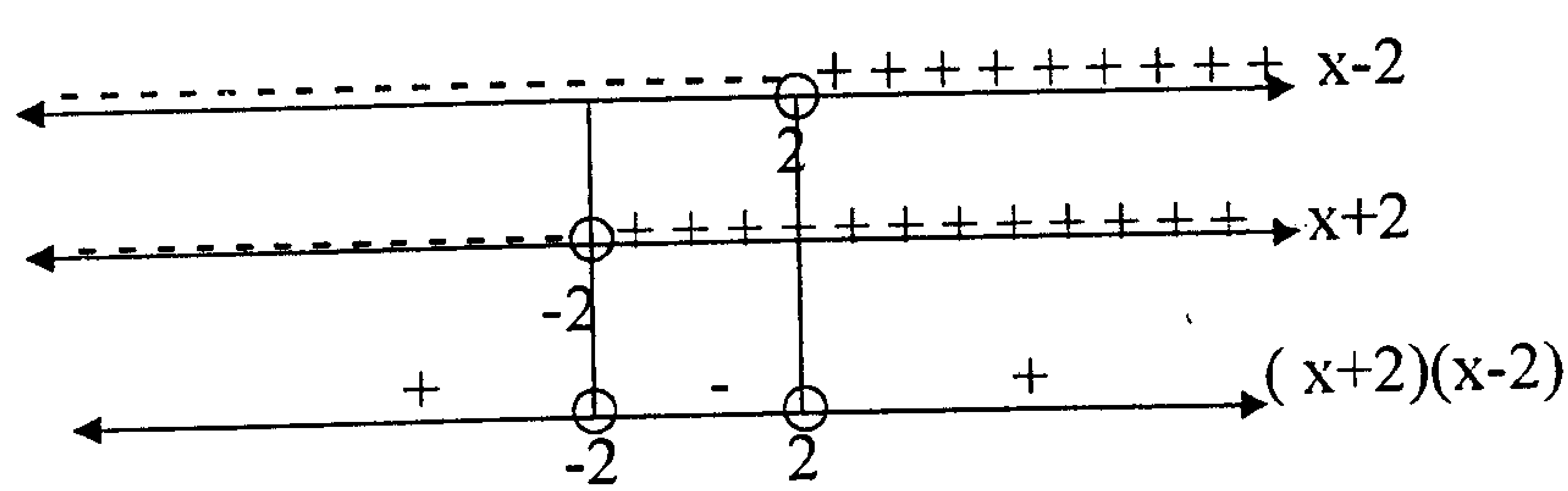
$x^2-1<3$

$x^2-1-3<0$

$x^2-4<0$

أولاً حل المتباينة : $x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0$
$(x+2)(x-2)=0$
$(x+2)=0,\ x=-2$
$(x-2)=0,\ x=2$



فترة الحل هي: $(-2،2)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ -2<x<2\ ,\ x\in R\}$

ثانياً حل المتباينة : $x^2+2>0$

مجموع مربعين دائماً موجب كما ذكرنا سابقاً ولهذا فإن :

فترة الحل: $(-\infty,\infty)$

فترة الحل للمتباينةهي: $(-\infty,\infty)\cap(-2,2)=(-2,2)$

ومجموعة الحل هي : $=\{x:\ -2<x<2\ ,\ x\in R\}$

(6) $|x-2|<0$

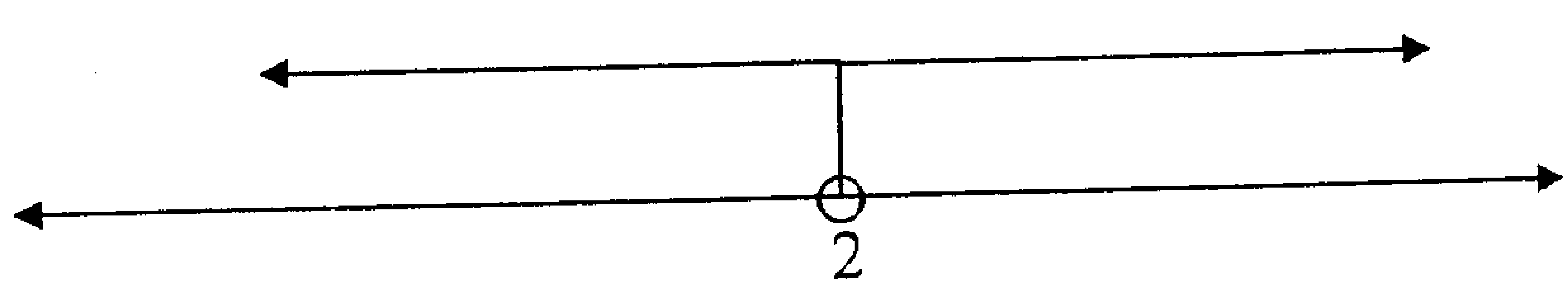
الحــــل

$0<x-2<0$

$0<x-2<0$

$0<x-2$	$x-2<0$
$x-2>0$	$x<2$
$x>2$	
$(2,\infty)$	$(-\infty,2)$

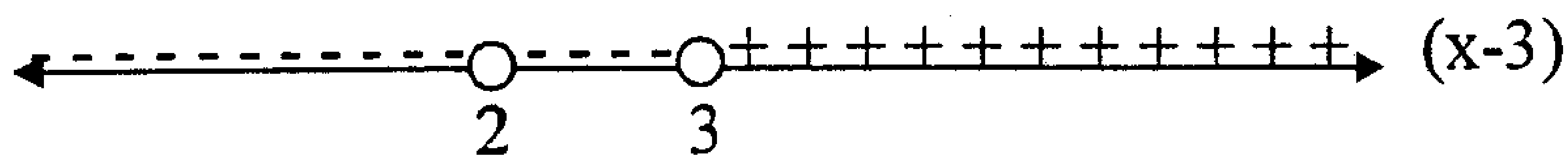
ومجموعة الحل هي : $(2،-\infty)\cap(\infty،2)=\phi$



(7) $(x-3)|x-2| < 0$

الحـــل

بما أن المقدار $|x-2|$ دائماً موجب فلا داعي لدراسته مع ملاحظة أن هذا المقدار يساوي صفراً إذا كانت $x = 2$ و نكتفي بدارسة $(x - 3)$



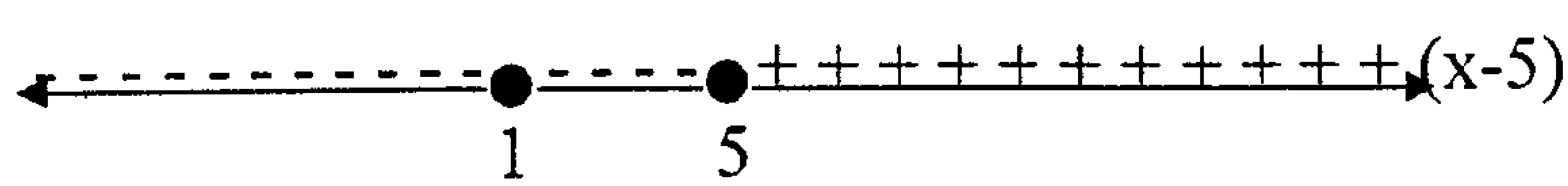
فترة الحل هي: $(-\infty ، 2) \cup (2 ، 3)$

ومجموعة الحل هي : $\{x: \ x < 2 \ \ or \ \ 2 < x < 3 \ \ x \in R\}$

(8) $(x-5)|x-1| \geq 0$

الحـــل

بما أن المقدار $|x-1|$ دائماً موجب فلا داعي لدراسته مع ملاحظة أن هذا المقدار يساوي صفراً إذا كانت $x = 1$ و نكتفي بدارسة $(x - 5)$



فترة الحل هي: $[5 ، \infty) \cup \{1\}$

ومجموعة الحل هي : $\{x: \ x > 5 \ \ or \ \ x = 1 \ \ x \in R\}$

(9) $\dfrac{1}{|x-2|} \geq 2$

الحل

$$\frac{1}{|x-2|} \cdot |x-2| \geq 2\,|x-2|$$

$$1 \geq 2\,|x-2|$$

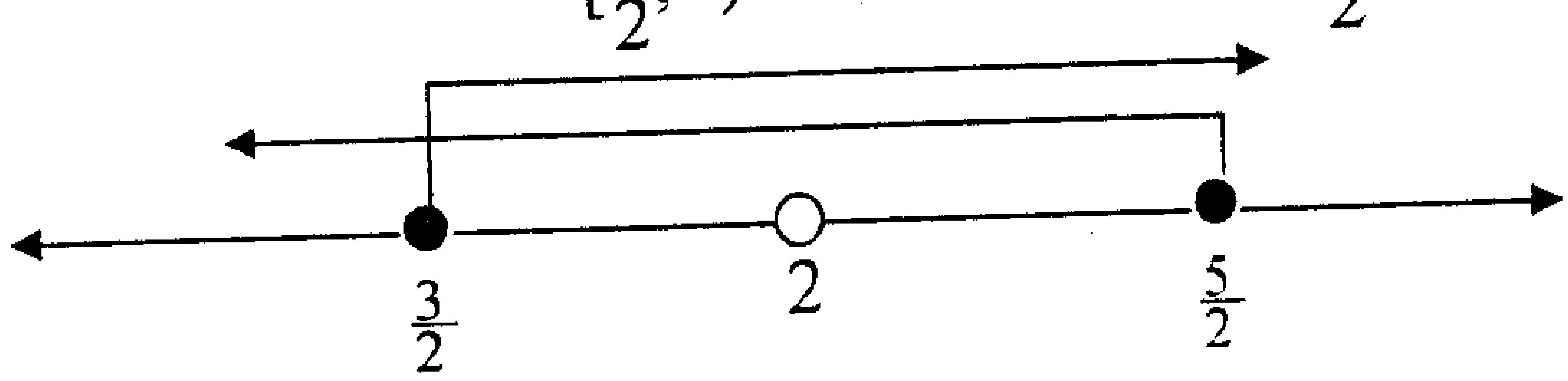
$$2\,|x-2| \leq 1$$

$$|x-2| \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x-2 \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x-2 \leq \frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} \leq x-2$	$x-2 \leq \frac{1}{2}$
$x-2 \geq -\frac{1}{2}$	$x \leq 2+\frac{1}{2}$
$x \geq \frac{3}{2}$	$x \leq \frac{5}{2}$
$[\frac{3}{2},\infty)$	$(-\infty,\frac{5}{2}]$



$$=[\frac{3}{2},\infty) \cap (-\infty,\frac{5}{2}]-\{2\}$$

$$=[\frac{3}{2},\frac{5}{2}]-\{2\}=[\frac{3}{2},2) \cup (2,\frac{5}{2}]$$

$$=\{x:\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \ \ or\ \ 2 < x \leq \frac{5}{2}\,,\ x \in R\}$$

$$(10)\quad \frac{|x-1|}{x-2} \geq 0$$

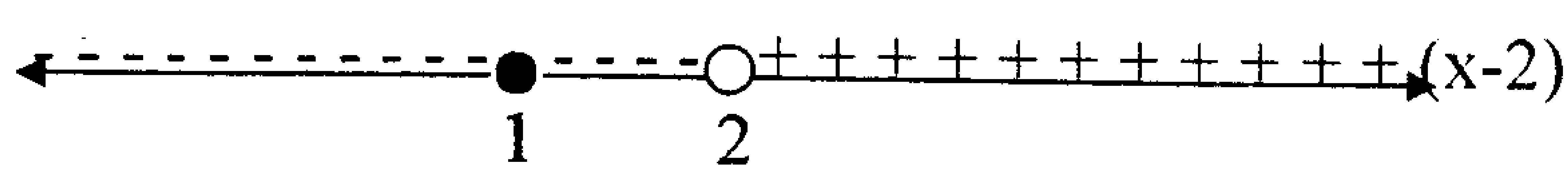
الحــل

$$\frac{|x-1|}{x-2}(x-2)^2 \geq 0$$

$$|x-1|(x-2) \geq 0$$

بما أن المقدار $|x-1|$ دائماً موجب فلا داعي لدراسته مع ملاحظة أن هذا المقدار

يساوي صفراً إذا كانت $x = 1$ و نكتفي بدارسة $(x - 2)$



فترة الحل هي: $(2، \infty) \cup \{1\}$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x > 2\ \ or\ \ x = 1\ \ x \in R\}$

$$(11)\ |x+1| + 3 \leq 0$$

الحــل

مجموعة حل هذه المتباينة هو ϕ لأنه لا توجد قيم تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتين

أصغر من أوتساوي صفرا ويمكن للطالب أن يحل المتباينة كما ذكرنا سابقاً ويتحقق منها

(12) $\dfrac{-2}{|2x+1|} \geq 1$

الحــل

$$\frac{-2}{|2x+1|} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-2-|2x+1|}{|2x+1|} \geq 0$$

$$\frac{-2-|2x+1|}{|2x+1|}\ |2x+1| \geq 0$$

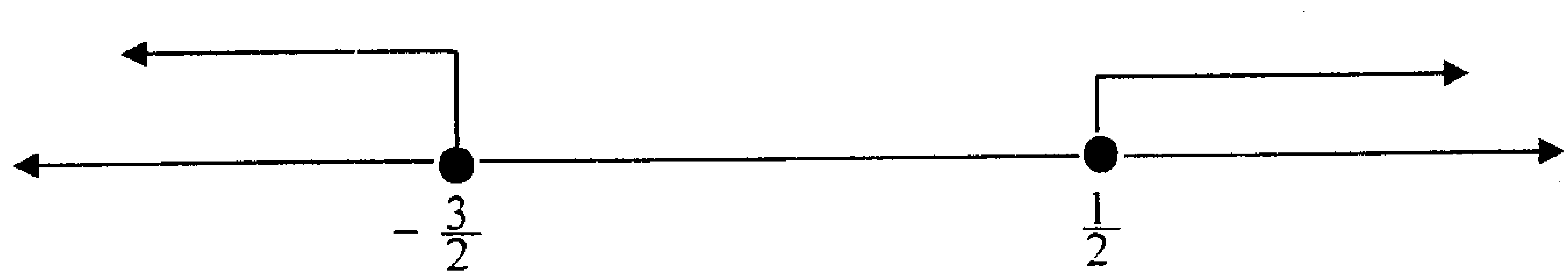
$$-2-|2x+1| \geq 0$$

$$|2x+1| \leq -2$$

$$-(-2) \leq 2x+1 \leq -2$$

$$2 \leq 2x+1 \leq -2$$

$2 \leq 2x+1$	$2x+1 \leq -2$
$2x+1 \geq 2$	$2x \leq -2-1$
$x \geq \frac{1}{2}$	$x \leq -\frac{3}{2}$
$[\frac{1}{2}, \infty)$	$(-\infty, -\frac{3}{2}]$



مجموعة الحل هي = ϕ

(B) إذا كانت متباينة القيمة المطلقة على صورة $|x| \geq b$ في هذه الحالة يوجد طريقتان للتخلص من القيمة المطلقة :-

الطريقة الأولى :- نقوم بتربيع الطرفين ثم نحل المتباينة الناتجة .

الطريقة الثانية:- نقوم بتحويل متباينة القيمة المطلقة إلى الصورة $x \geq b \quad or \quad -x \geq b$ ثم نحل المتباينتين وفترة الحل هي اتحاد فترتي الحل للمتباينتين .

مـــلاحـــظـــة هـــامـــة :- إذا كان المقدار الذي داخل القيمة المطلقة مقدار موجباً فلا نحتاج لأحد الطريقتين وإنما نكتفي بإلغاء القيمة المطلقة ونحل المتباينة وسبق أن ذكرنا هذا في حل معادلات القيمة المطلقة أيضاً.

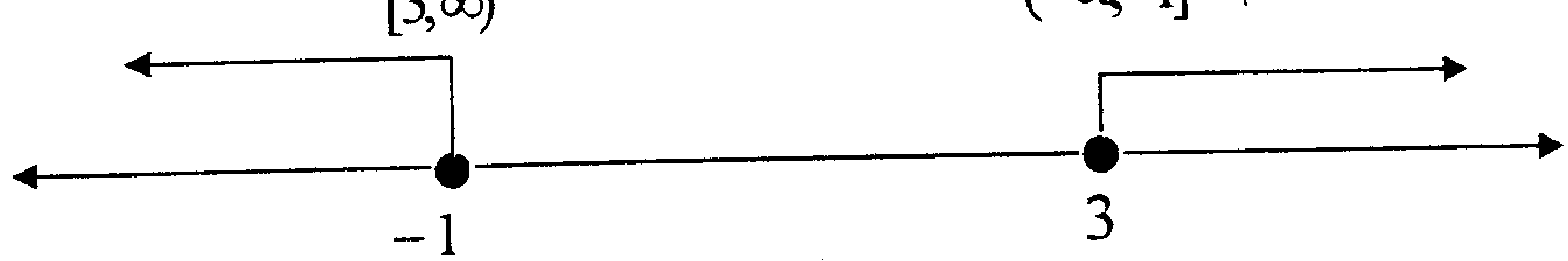
مـــثـــال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

(1) $|2x-2| \geq 4$

الـــحـــل

$$|2x-2| \geq 4$$

$2x-2 \geq 4$	$-(2x-2) \geq 4$
$2x \geq 4+2$	$2x-2 \leq -4$
$2x \geq 6$	$2x \leq -2$
$x \geq 3$	$x \leq -1$
$[3,\infty)$	$(-\infty,-1]$



فترة الحل هي: $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x: \; x \leq -1 \quad or \quad x \geq 3 \;\; x \in R\}$

(2) $|x+1| > 7$

الحــل

$$|x+1| > 7$$

$x+1>7$	$-(x+1)>7$
$x>7-1$	$x+1<-7$
$x>6$	$x<-8$
$(6,\infty)$	$(-\infty,-8)$

فترة الحل هي: $(-\infty ، -8) \cup (6 ، \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x<-8 \quad or \quad x>6\ x\in R\}$

(3) $\frac{x+3}{x-2} \geq 2$

الحـــل

$$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq 2$$

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 2$$

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x+3-2x+4}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{-x+7}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{-x+7}{x-2}(x-2)^2 \geq 0$$

$$(-x+7)(x-2) \geq 0$$

$$-\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \geq 2$$

$$\frac{x+3}{x-2} \leq -2$$

$$\frac{x+3}{x-2} + 2 \leq 0$$

$$\frac{x+3+2x-4}{x-2} \leq 0$$

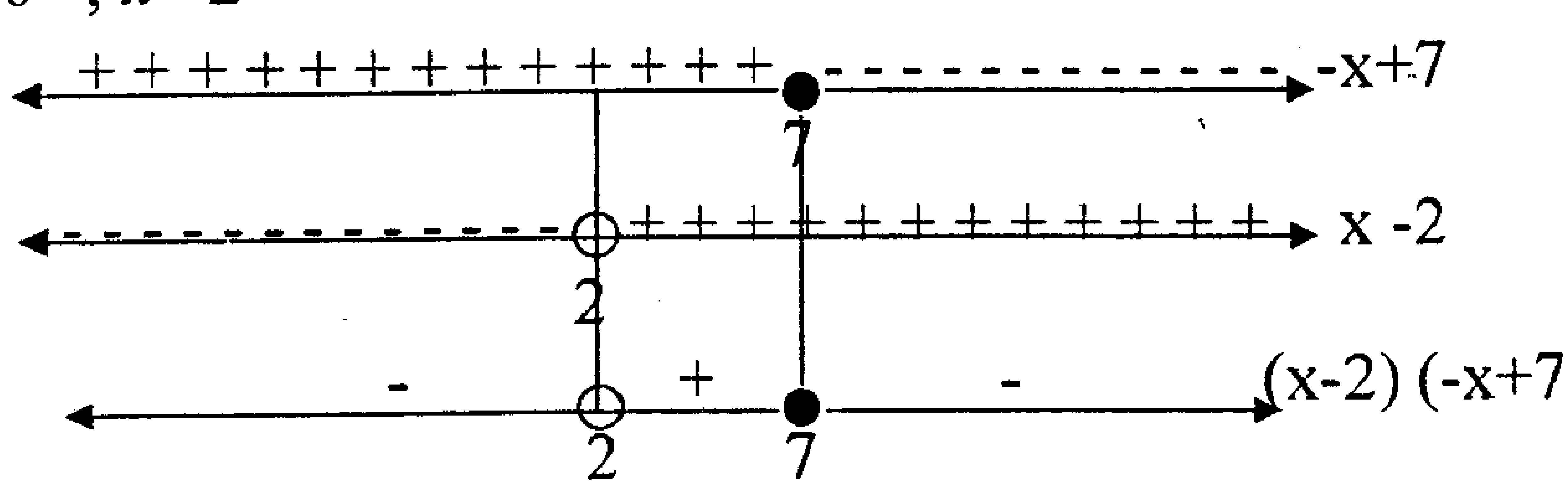
$$\frac{3x-1}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{3x-1}{x-2}(x-2)^2 \leq 0$$

$$(3x-1)(x-2) \leq 0$$

أولاً حل المتباينة : $(-x+7)(x-2) \geq 0$

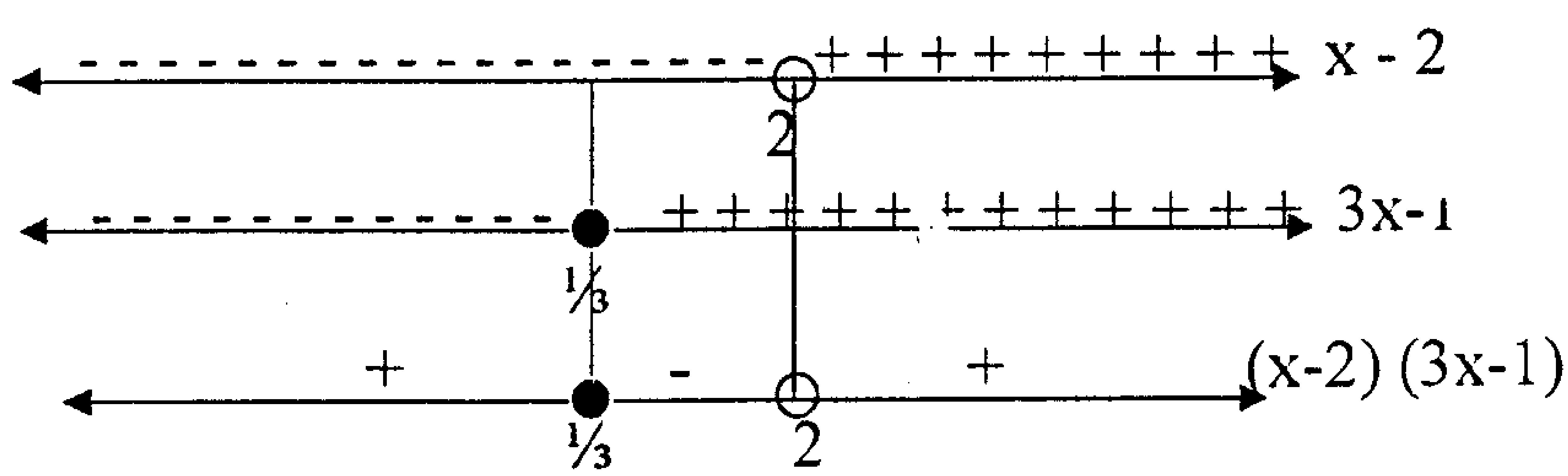
$$(-x+7)(x-2)=0$$
$$-x+7=0 \ , \ x=7$$
$$x-2=0 \ , \ x=2$$



فترة الحل هي: $(2, 7]$

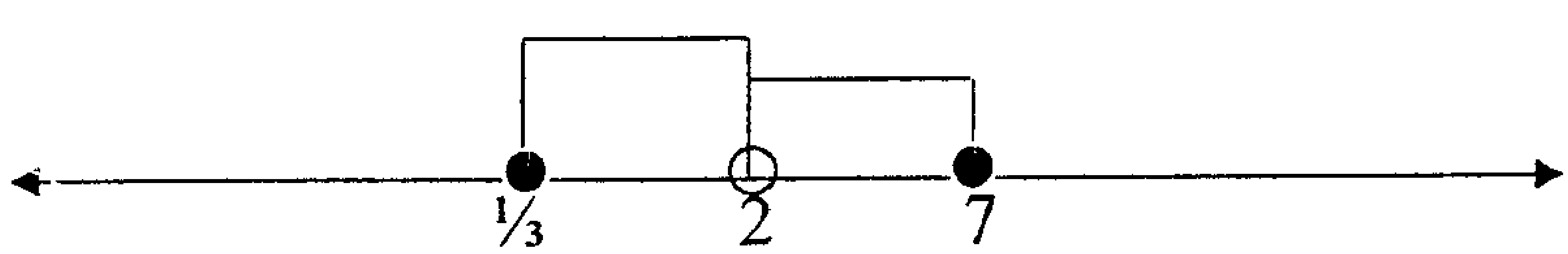
ثانياً حل المتباينة : $(3x-1)(x-2) \le 0$

$$(3x-1)(x-2)=0$$
$$3x-1=0 \ , \ x=\frac{1}{3}$$
$$x-2=0 \ , \ x=2$$



فترة الحل هي: $[\frac{1}{3}, 2)$

فترة الحل للمتباينة هي: $(2, 7] \cup [\frac{1}{3}, 2)$



ومجموعة الحل هي : $\{x: 2 < x \le 7 \ or \ \frac{1}{3} \le x < 2 \ \ , x \in R\}$

$$(5)\ |x^2-1|>3$$

الحــل

$$|x^2-1|>3$$

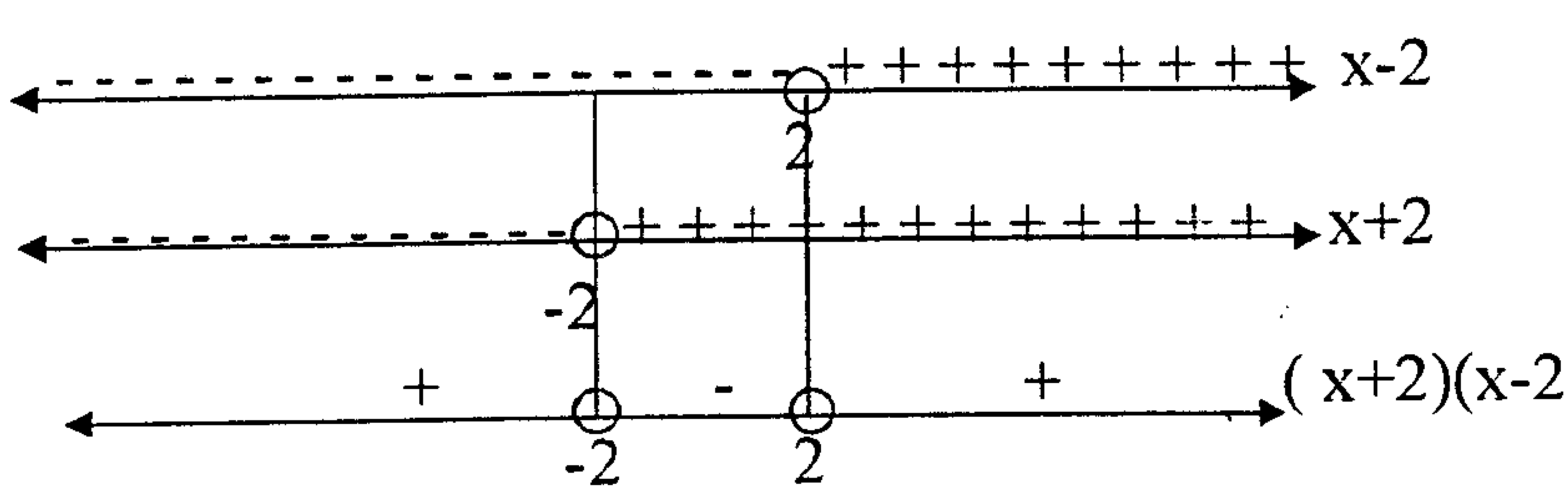
$$x^2-1>3 \qquad\qquad -(x^2-1)>3$$

$$x^2-4>0 \qquad\qquad x^2-1<-3$$

$$x^2+2<0$$

أولاً حل المتباينة : $x^2-4>0$

$$(x+2)(x-2)>0$$
$$(x+2)(x-2)=0$$
$$(x+2)=0,\ x=-2$$
$$(x-2)=0,\ x=2$$



فترة الحل هي : $(-\infty ، -2) \cup (2 ، \infty)$

ثانياً حل المتباينة : $x^2+2<0$

مجموع مربعين دائماً موجبا كما ذكرنا سابقاً ولهذا فإن :

مجموعة الحل هي :- ϕ

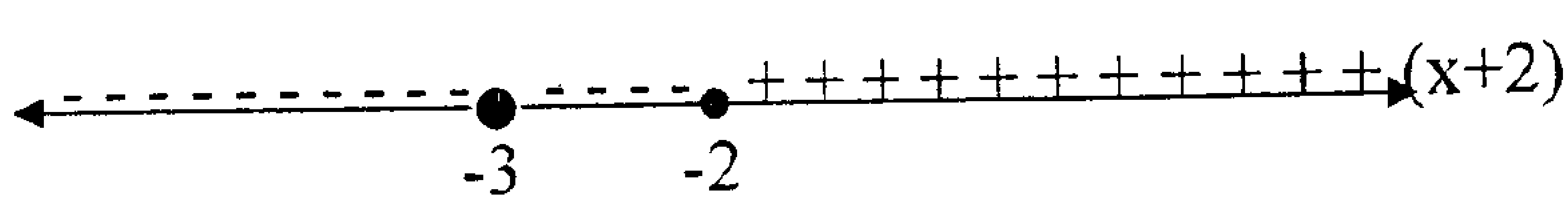
فترة الحل للمتباينة : $(-\infty, -2) \cup (2, \infty) \cup \phi = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x: x<-2 \ \ or \ \ x>2 \ , x\in R\}$

(6) $(x+2)|x+3| \geq 0$

الحــل

بما أن المقدار $|x+3|$ دائماً موجب فلا داعي لدراسته مع ملاحظة أن هذا المقدار يساوي صفراً إذا كانت $x=-3$ و نكتفي بدراسة $(x+2)$



فترة الحل هي : $[-2, \infty) \cup \{-3\}$

ومجموعة الحل هي : $\{x: \ x\geq -2 \ \ or \ \ x=-3 \ , x\in R\}$

(7) $\dfrac{1}{|x-1|} \leq 2$

الحــل

$$\frac{1}{|x-1|} \cdot |x-1| \leq 2\,|x-1|$$

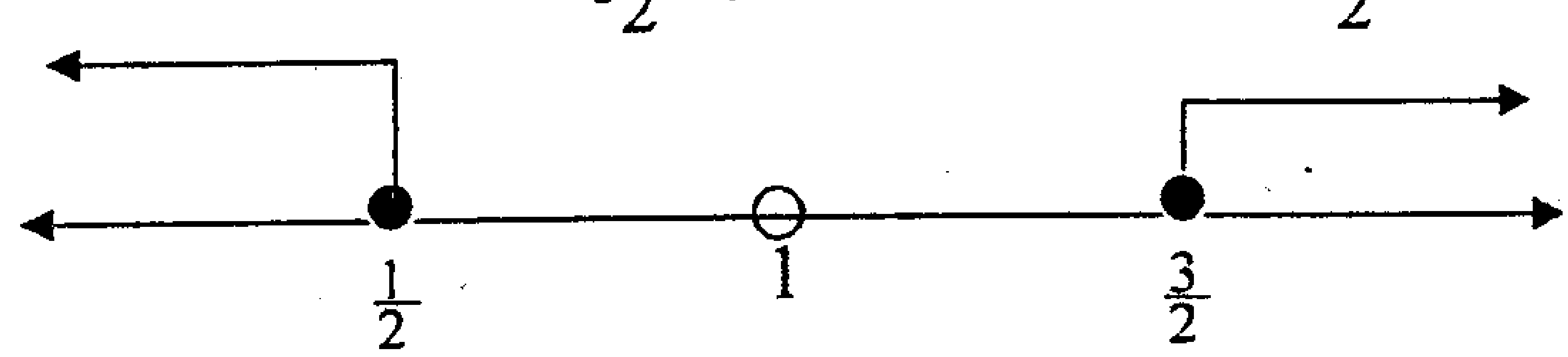
$$1 \leq 2\,|x-1|$$

$$2\,|x-1| \geq 1$$

$$|x-1| \geq \frac{1}{2}$$

$$|x-1| \geq \frac{1}{2}$$

$x-1 \geq \frac{1}{2}$	$-(x-1) \geq \frac{1}{2}$
$x \geq 1+\frac{1}{2}$	$x-1 \leq -\frac{1}{2}$
$x \geq \frac{3}{2}$	$x \leq \frac{1}{2}$
$[\frac{3}{2},\infty)$	$(-\infty,\frac{1}{2}]$



فترة الحل هي : $(-\infty,\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2},\infty)$

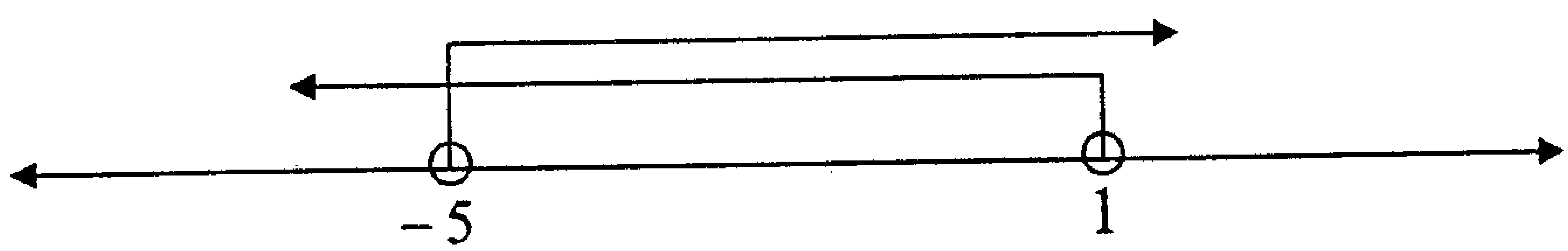
مجموعة الحل: $\{x:\ x \leq \frac{1}{2} \ \ or \ \ x \geq \frac{3}{2} \ ,\ x \in R\}$

$(8)\ |x+2|+3>0$

الـحـل

$|x+2|>-3$

$x+2>-3$	$-(x+2)>-3$
$x>-3-2$	$x+2<3$
$x>-5$	$x<1$
$(-5,\infty)$	$(-\infty,1)$



فترة الحل هي: $(-\infty ، 1)\cup(-5 ، \infty)=R$

ومجموعة الحل هي : $\{x: -\infty<x<\infty\ ,\ x\in R\}$

$(9)\ \left|4+x^2\right|\geq 0$

الـحـل

∵المقدار$(4+x^2)$هو مجموع مربعين و دائماً موجب كما ذكرنا سابقاً لهذا يمكن إلغاء القيمة المطلقة مباشرة وبالتالي :

$4+x^2\geq 0$

فترة الحل هي: $(-\infty,\infty)$

ومجموعة الحل هي: $\{x:-\infty<x<\infty\ \ ,\ x\in R\}=\{x: x\in R\}$

(10) $1<|x+3|<x+1$

الحــل

أولاً المتباينة $1<|x+3|$:

$$|x+3|>1$$

$-(x+3)>1$	$x+3>1$
$(x+3)<-1$	$x>1-3$
$x<-4$	$x>-2$
$(-\infty,-4)$	$(-2,\infty)$

فترة الحل هي : $(-\infty ، -4)\cup(-2 ، \infty)$

ثانياً المتباينة $|x+3|<x+1$:

$$-x-1<x+3<x+1$$

$x+3<x+1$	$-x-1<x+3$
$3<1$	$-2x>4$
تناقض رياضي	$x<-2$
	$(-\infty,-2)$

فترة الحل هي: $(-\infty ، -2)$

فترة الحل للمتباينة هي : $\left[(-\infty ، -4)\cup(-2 ، \infty)\right]\cap(-\infty ، -2)=(-\infty ، -4)$

مجموعة الحل هي : $\{x: x<-4, x\in R\}$

(C) إذا كانت متباينة القيمة المطلقة على صورة $|x_1| \geq |x_2|$ أو $|x_1| \leq |x_2|$

في هذه الحالة نقوم بتربيع الطرفين للتخلص من القيمة المطلقة .

مـثـال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

(1) $|x+4| < |x+8|$

الحـل

$(|x+4|)^2 < (|x+8|)^2$

$(x+4)^2 < (x+8)^2$

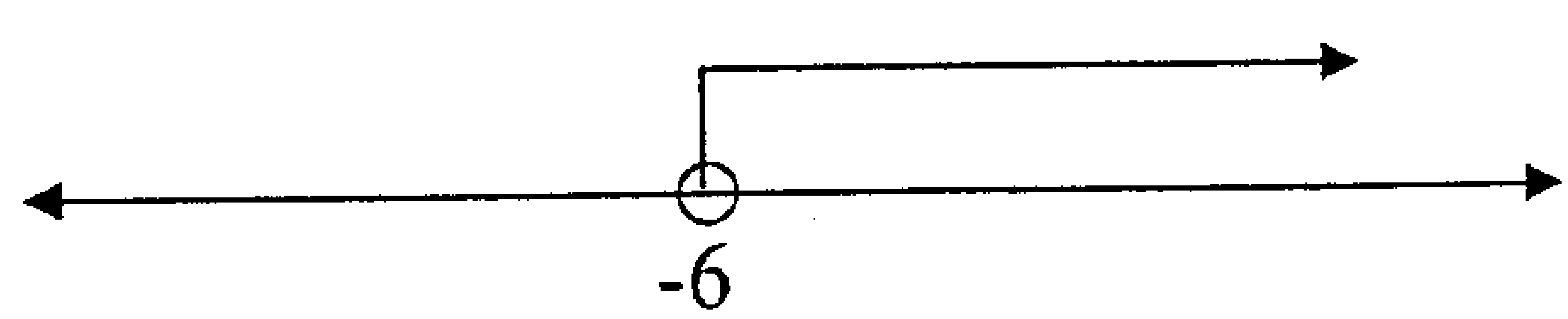
$x^2+8x+16 < x^2+16x+64$

$-8x < 48$

$x > -6$

$(-6,\infty)$

$=\{x : x > -6 , x \in R\}$



(2) $|x+2| \geq |x+1|$

الحـل

$(|x+2|)^2 \geq (|x+1|)^2$

$(x+2)^2 \geq (x+1)^2$

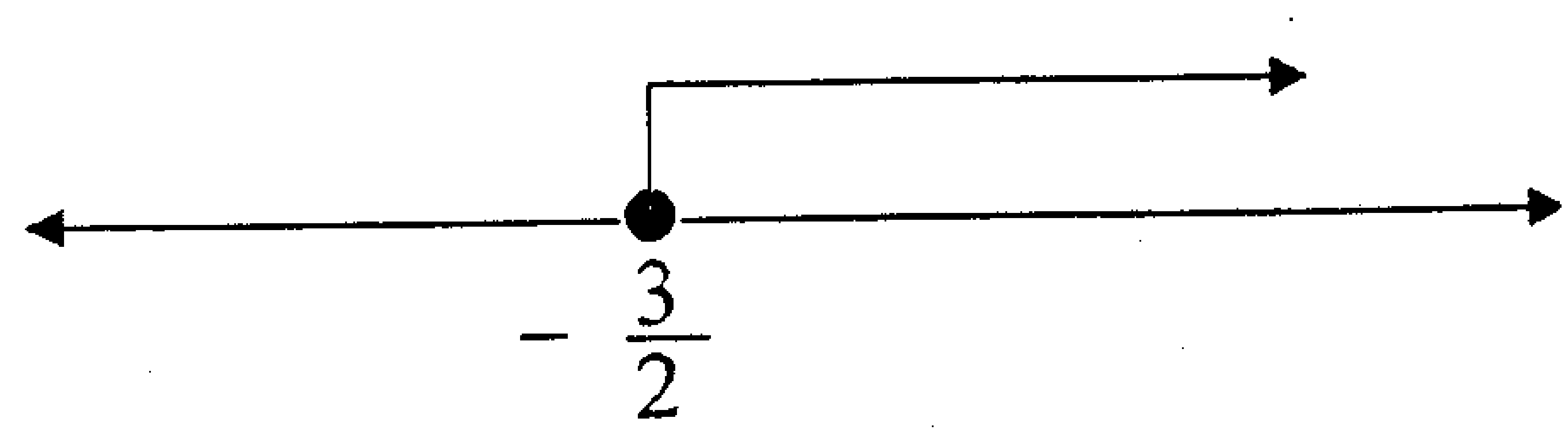
$x^2+4x+4 \geq x^2+2x+1$

$2x \geq -3$

$x \geq -\frac{3}{2}$

$[-\frac{3}{2},\infty)$

$=\{x : x \geq -\frac{3}{2} , x \in R\}$



(3) $\dfrac{1}{|x-2|} > \dfrac{1}{|x+1|}$

الحـــل

بضرب طرفي المتباينة في $|x-2|, |x+1|$ للتخلص من المقامات

$$\frac{1}{|x-2|} \cdot |x-2|\,|x+1| > |x-2|\,|x+1| \cdot \frac{1}{|x+1|}$$

$$|x+1| > |x-2|$$

$$(|x+1|)^2 > (|x-2|)^2$$

$$(x+1)^2 > (x-2)^2$$

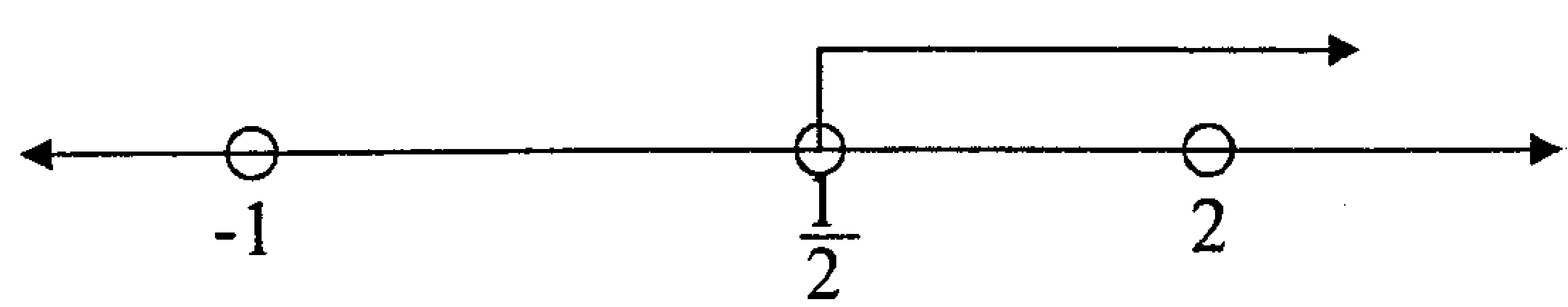
$$x^2+2x+1 > x^2-4x+4$$

$$6x > 3$$

$$x > \frac{1}{2}\ , x \neq 2 , x \neq -1$$

$$(\tfrac{1}{2}, 2) \cup (2, \infty)$$

$$= \{x : \tfrac{1}{2} < x < 2 \ \ or \ \ x > 2 , x \in R\}$$



(4) $|x-2| > |2x+1|$

الحــل

$$(|x-2|)^2 > (|2x+1|)^2$$

$$x^2-4x+4 > 4x^2+4x+1$$

$$3x^2+8x-3<0$$

$$3x^2+8x-3=0 \quad ,a=3\ ,\ b=8\ ,c=-3$$

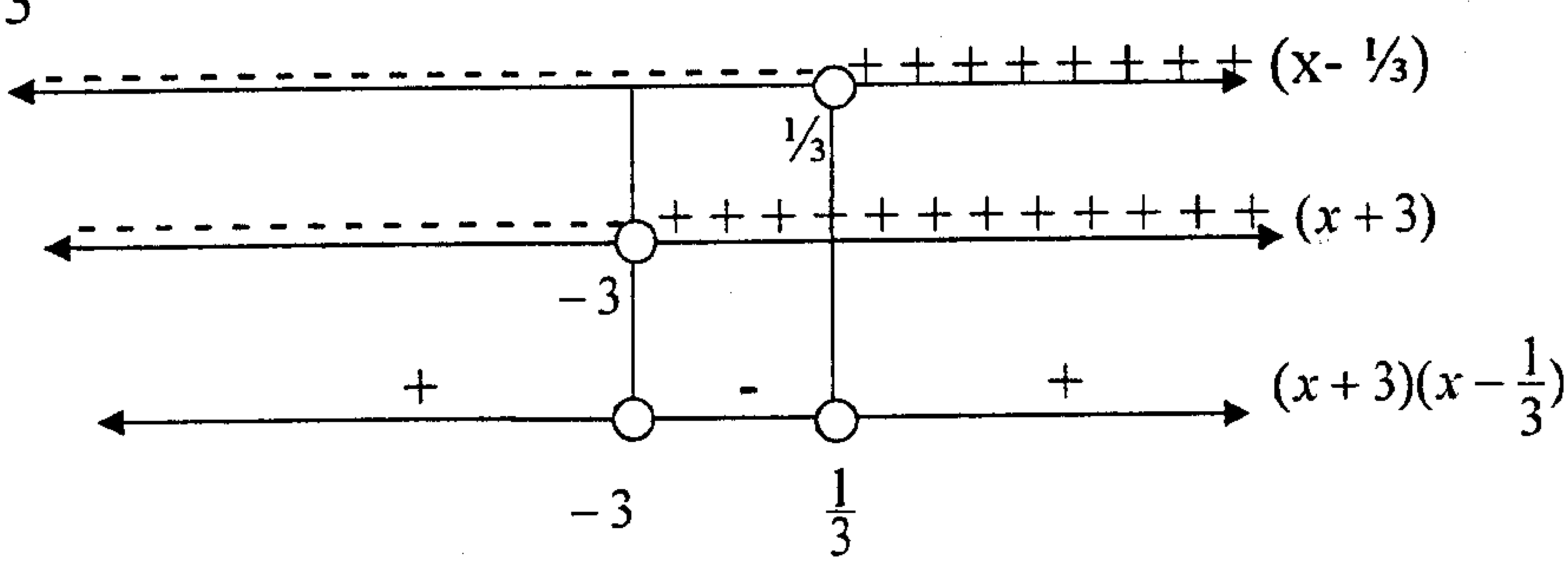
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4(3)(-3)}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{-8\pm10}{6}$$

$$x=\frac{-8+10}{6}=\frac{1}{3} \Longrightarrow (x-\tfrac{1}{3})=0$$

$$x=\frac{-8-10}{6}=-3 \Longrightarrow (x+3)=0$$

$$(x-\tfrac{1}{3})(x+3)=0 \quad , x=\tfrac{1}{3} \quad , x=-3$$

$$(x-\tfrac{1}{3})(x+3)<0$$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من (<) فالمطلوب هي الفترة السالبة

وهي : $(-3\ ,\ \tfrac{1}{3})$

ومجموعة الحل هي: $\{x:\ -3<x<\tfrac{1}{3}\ ,\ x\in R\}$

(D) إذا كانت متباينة القيمة المطلقة على صورة $A_3 \geq |A_1| + |A_2|$ في هذه الحالة يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية $|A_1 + A_2| \leq |A_1| + |A_2|$

إلى الصورة $|A_1 + A_2| \leq |A_1| + |A_2| \leq A_3$ ويتم بذلك حل المتباينة :-

$$A_3 \geq |A_1 + A_2| \quad or \quad |A_1 + A_2| \leq A_3$$

مــثــال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

(1) $|x+3| + |x-3| \leq 6$

الـــحـــل

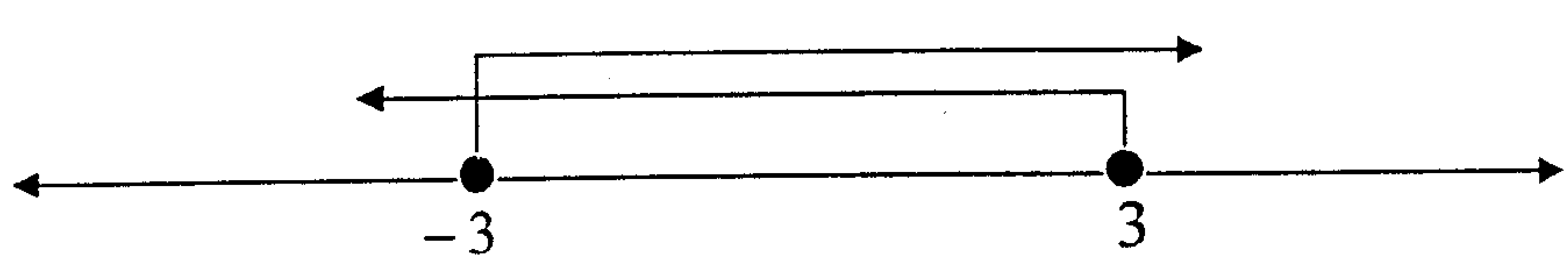
$|x+3+x-3| \leq 6$

$|2x| \leq 6$

$-6 \leq 2x \leq 6$

$$-6 \leq 2x \leq 6$$

$-6 \leq 2x$	$2x \leq 6$
$2x \geq -6$	$x \leq 3$
$x \geq -3$	
$[-3, \infty)$	$(-\infty, 3]$



فترة الحل هي : $[-3, \infty) \cap [-\infty, 3] = [-3, 3]$

ومجموعة الحل هي:- $\{x : -3 \leq x \leq 3, x \in R\}$

(2) $|x-2|+|x+3| \le 1$

الحـــل

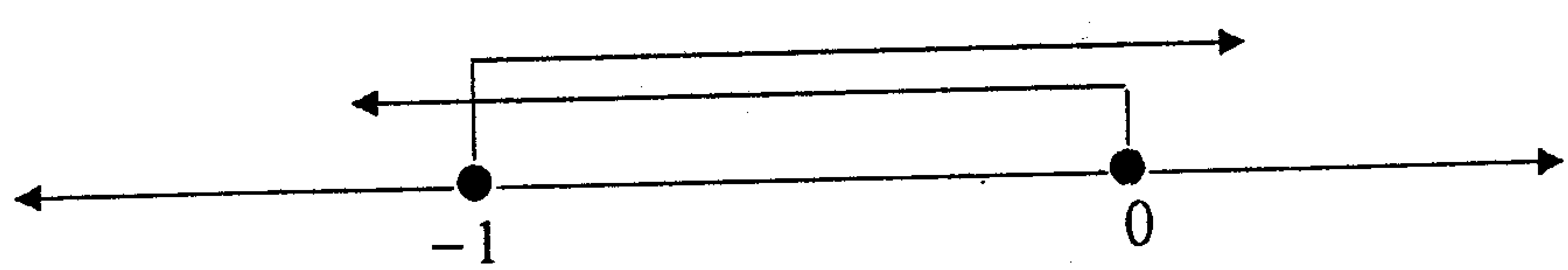
$|x-2+x+3| \le 1$

$|2x+1| \le 1$

$-1 \le 2x+1 \le 1$

$$-1 \le 2x+1 \le 1$$

$-1 \le 2x+1$	$2x+1 \le 1$
$2x+1 \ge -1$	$2x \le 1-1$
$2x \ge -1-1$	$2x \le 0$
$2x \ge -2$	$x \le 0$
$x \ge -1$	
$[-1,\infty)$	$(-\infty,0]$



فترة الحل هي :

$[-1 ، \infty) \cap [-\infty ، 0] = [-1 ، 0]$

ومجموعة الحل هي:-

$\{x : -1 \le x \le 0, x \in R\}$

(E) إذا كانت متباينة القيمة المطلقة على صورة $|A_1| - |A_2| \geq A_3$ في هذه الحالة

يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية $|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$

إلى الصورة $|A_1 - A_2| \leq |A_1| - |A_2| \leq A_3$ ويتم بذلك حل المتباينة :-

$$A_3 \leq |A_1 - A_2| \quad or \quad |A_1 - A_2| \geq A_3$$

مـثـال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

(1) $|2x-1| - |x+2| \geq 3$

الـحـل

$|2x-1-x-2| \geq 3$

$|x-3| \geq 3$

$|x-3| \geq 3$

$x-3 \geq 3$	$-(x-3) \geq 3$
$x \geq 3+3$	$x-3 \leq -3$
$x \geq 6$	$x \leq 0$
$[6,\infty)$	$[-\infty,0]$

فترة الحل هي : $[6، \infty] \cup (-\infty ، 0]$

ومجموعة الحل هي : $\{x: x \geq 6 \ or \ x \leq 0, x \in R\}$

(2) $|x-3|-|2x-1|\geq 1$

الـحـل

$|x-3-2x+1|\geq 1$

$|-x-2|\geq 1$

$$|-x-2|\geq 1$$

$-x-2\geq 1$

$-x\geq 1+2$

$x\leq -3$

$(-\infty,-3]$

$-(-x-2)\geq 1$

$-x-2\leq -1$

$-x\leq -1+2$

$x\geq -1$

$[-1,\infty)$

فترة الحل هي : $(-\infty, -3]\cup[-1 , \infty)$

ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x\leq -3\ \ or\ \ x\geq -1, x\in R\}$

سادساً المتباينات المشتملة على جذرتربيعي :-

عند حل المتباينات المشتملة على جذور نتبع الآتي :-

(1) نضع الجذر في طرف وباقي الحدود في طرف

(2) نرفع الطرفين لأس دليل الجذر للتخلص من الجذر

(3) نحل المتباينة الناتجة ونعين فترة الحل

(4) يجب أن يكون ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفراً إذا كان الجذر في البسط ولهذا نكوّن المتباينة { **ما تحت الجذر** $\leq$ **0** } ونعين فترة الحل لها

(5) ندرس إشارة الطرف الذي لا يحتوي على جذر ونعين الفترة التي تحقق أن الجذر أكبر أو أصغر {على حسب المسألة}من الطرف الآخر

(6) فترة الحل للمتباينة المشتملة على جذور هي تقاطع فترات الحل السابقة

مــثـــال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

$(1)\ \sqrt{x}-1\geq 0$

الـــحـــل

$(a)\ \sqrt{x}\ \geq 1$

$(b)\ (\sqrt{x}\ )^2\geq (1)^2$

$(c)\ x\geq 1$

$[1,\infty)$

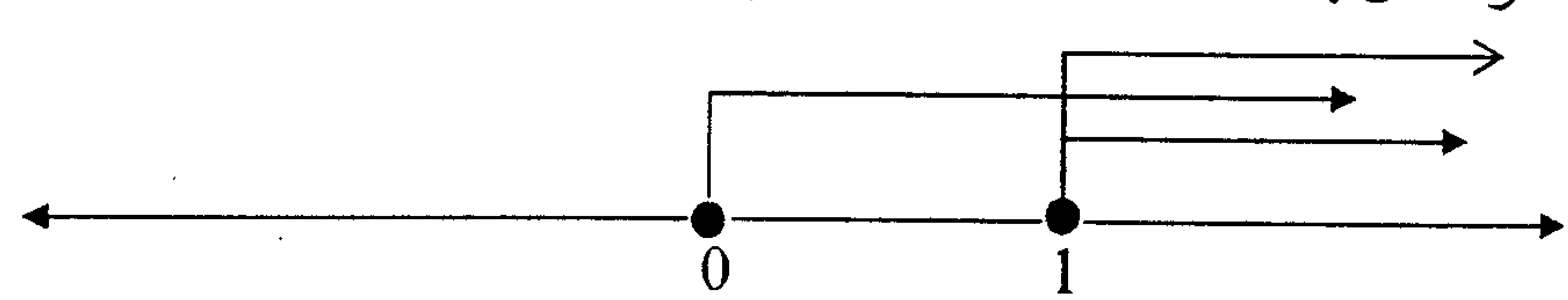
$(d)\ x\geq 0\ ,\ [0,\infty)$

$(e)\ [1,\infty)$

المطلوب أن الجذرالتربيعي لـــ x أكبر من أو يساوي واحد

$(f)\ [1,\infty)\cap[0,\infty)\cap[1,\infty)\ =\ [1,\infty)$

فترة الحل :



ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x\geq 1\ \ ,\ x\in R\ \}$

$(2)\ 2-\sqrt{x} \geq 0$

الــحــل

$(a)\ -\sqrt{x} \geq -2$

$\sqrt{x} \leq 2$

$(b)\ (\sqrt{x})^2 \leq (2)^2$

$(c)\ x \leq 4$

$(-\infty, 4]$

$(d)\ x \geq 0\ ,\ [0, \infty)$

$(e)\ (-\infty, 4]$

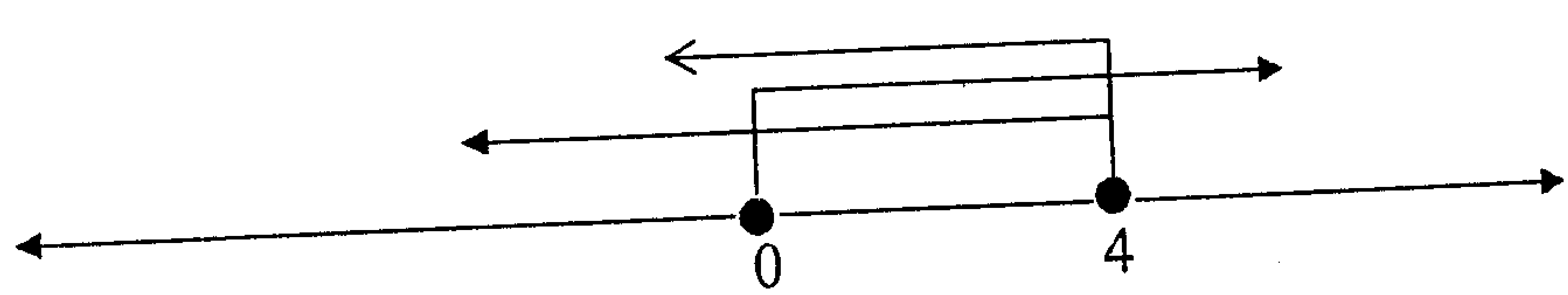
المطلوب أن الجذر التربيعي لــ x أصغر من أو يساوي 2

ولاحظ أن حد الفترة 4 وليس 2 لأن العدد 2 ينتج من الجذر التربيعي لـ 4

وذلك بناء على الطرف الأيسر

فترة الحل :

$(f)\ (-\infty, 4] \cap [0, \infty) \cap (-\infty, 4] = [0, 4]$



ومجموعة الحل هي :

$\{x:\ \ 0 \leq x \leq 4\ \ ,\ x \in R\}$

(3) $5-\sqrt{x-1} \geq 0$

الـحـل

$(a)\ -\sqrt{x-1} \geq -5$

$\sqrt{x-1} \leq 5$

$(b)\ (\sqrt{x-1})^2 \leq (5)^2$

$(c)\ x-1 \leq 25$

$x \leq 26$

$(-\infty, 26]$

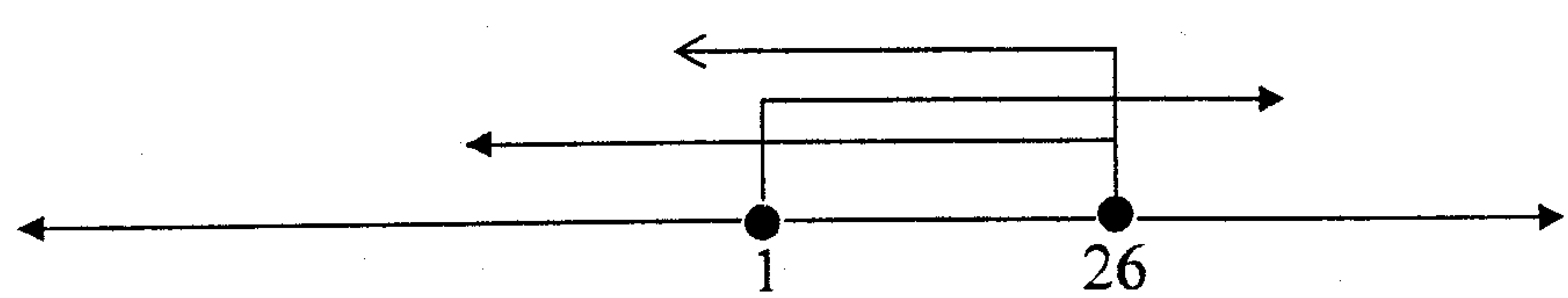
$(d)\ x-1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1 \quad , \quad [1, \infty)$

$(e)(-\infty, 26]$ المطلوب أن الجذرالتربيعي لــ x-1 أصغر من أو يساوي 5

ولاحظ أن حد الفترة 26 وليس 5 لأن العدد 5 ينتج من الجذرالتربيعي لـ 26-1

وذلك بناء على الطرف الأيسر

فترة الحل : $(f)\ (-\infty, 26] \cap [1, \infty) \cap (-\infty, 26] = [1, 26]$



ومجموعة الحل هي : $\{x:\ 1 \leq x \leq 26 \quad , \ x \in R\}$

(4) $\sqrt{x-3}+2 \geq 0$

الـــحـــل

$(a)\ \sqrt{x-3}\ \geq -2$

$(b)\ (\sqrt{x-3}\ )^2 \geq (-2)^2$

$(c)\ x-3 \geq 4$

$x \geq 7$

$[7,\infty)$

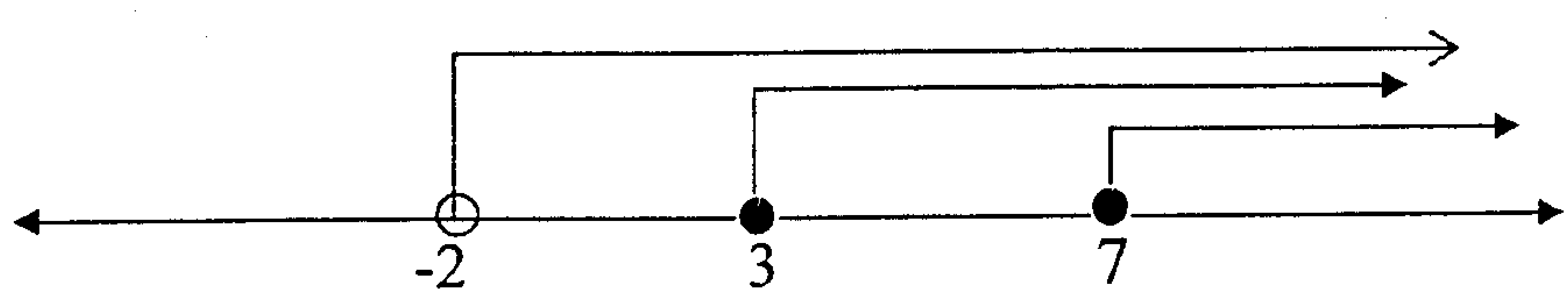
$(d)\ x-3 \geq 0\ ,\ [3,\infty)$

$(e)(-2,\infty)$ المطلوب أن الجذرالتربيعي لـــ x-3 أكبر من أو يساوي 2-

ولاحظ أن حد الفترة 2- وذلك لأن الطرف الأيسر لا ينتج عدد جذره 2-

ولهذا وضعنا العدد كما هو والفترة مفتوحة من جهته

فترة الحل : $(f)\ [7,\infty) \cap [3,\infty) \cap (-2,\infty) = [7,\infty)$



ومجموعة الحل هي : $\{x:\ x \geq 7\ \ ,\ x \in R\ \}$

(5) $\sqrt{x+1}+2\leq 0$

الـحـل

$\sqrt{x+1} \leq -2$

مجموعة الحل لهذه المتباينة هي ϕ لأن الجذر التربيعي لا يمكن أن ينتج قيم أصغر من

أو حتى تساوي 2-

$(a)\ \sqrt{x+1} \leq -2$

$(b)\ (\sqrt{x+1})^2 \leq (-2)^2$

$(c)\ x+1\leq 4$

$x\leq 3$

$(-\infty,3]$

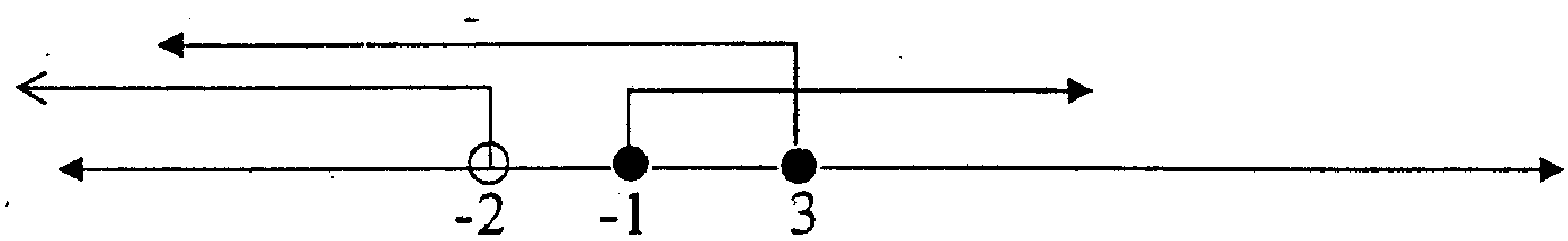
$(d)\ x+1\geq 0 \quad , \ [-1,\infty)$

$(e)(-\infty,-2)$ المطلوب أن الجذر التربيعي لـــ x+1 أصغر من أو يساوي 2-

لاحظ أن حد الفترة 2- وذلك لأن الطرف الأيسر لا ينتج عدد جذره 2- ولهذا

وضعنا العدد كما هو والفترة مفتوحة من جهته

$(f)\ (-\infty,3]\cap[-1,\infty)\cap(-\infty,-2)=\phi$



(6) $\sqrt{5-x} \le x+1$

الحــل

$(a)\sqrt{5-x} \le x+1$

$(b)(\sqrt{5-x}\ )^2 \le (x+1)^2$

$(c)\ 5-x \le x^2+2x+1$

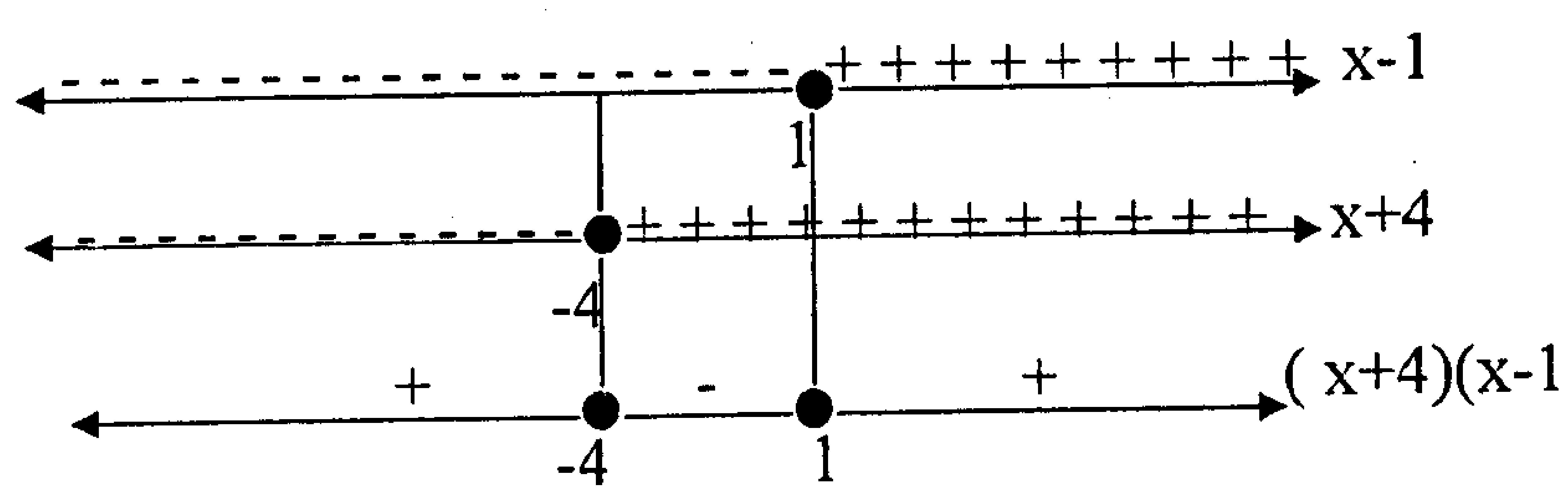
$x^2+3x-4 \ge 0$

$(x+4)(x-1) \ge 0$

$(x+4)(x-1) = 0$

$(x+4)=0\ ,\ x=-4$

$(x-1)=0\ ,\ x=1$



فترة الحل هي : $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$

$(d) 5-x \ge 0$

$-x \ge -5$

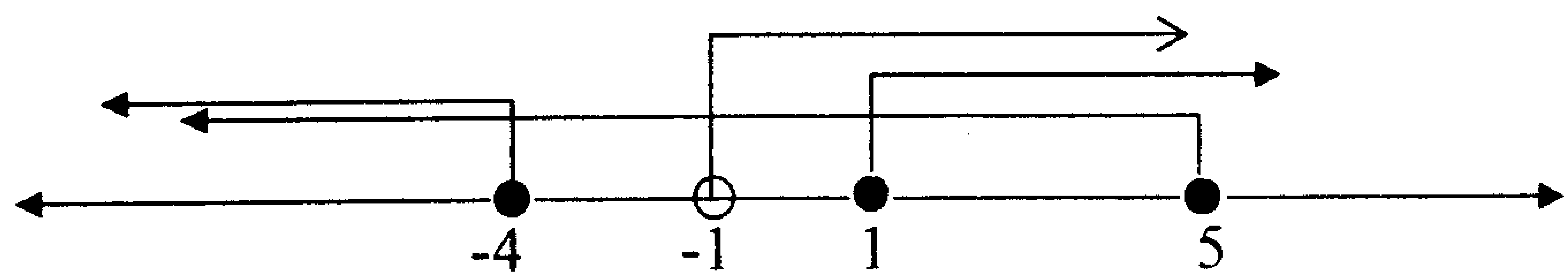
$x \le 5$

$(-\infty, 5]$

$(e)(-1,\infty)$

المطلوب أن $x+1$ أكبر من أو يساوي $\sqrt{5-x}$ وهذا يتحقق في الفترة $(-1,\infty)$
ولاحظ أن قوس الفترة من جهة 1- مفتوح لأن الجذر التربيعي لا ينتج 1-

$(f)[1,\infty)\cap(-\infty,5]\cap(-1,\infty)=[1,5]$



$\{x:\ 1\le x\le 5\ ,\ x\in R\}$ مجموعة الحل هي :

(7) $\sqrt{x+1}\le x-1$

الـحـل

$(a)\sqrt{x+1}\le x-1$

$(b)(\sqrt{x+1}\,)^2\le(x-1)^2$

$(c)\ x+1\le x^2-2x+1$

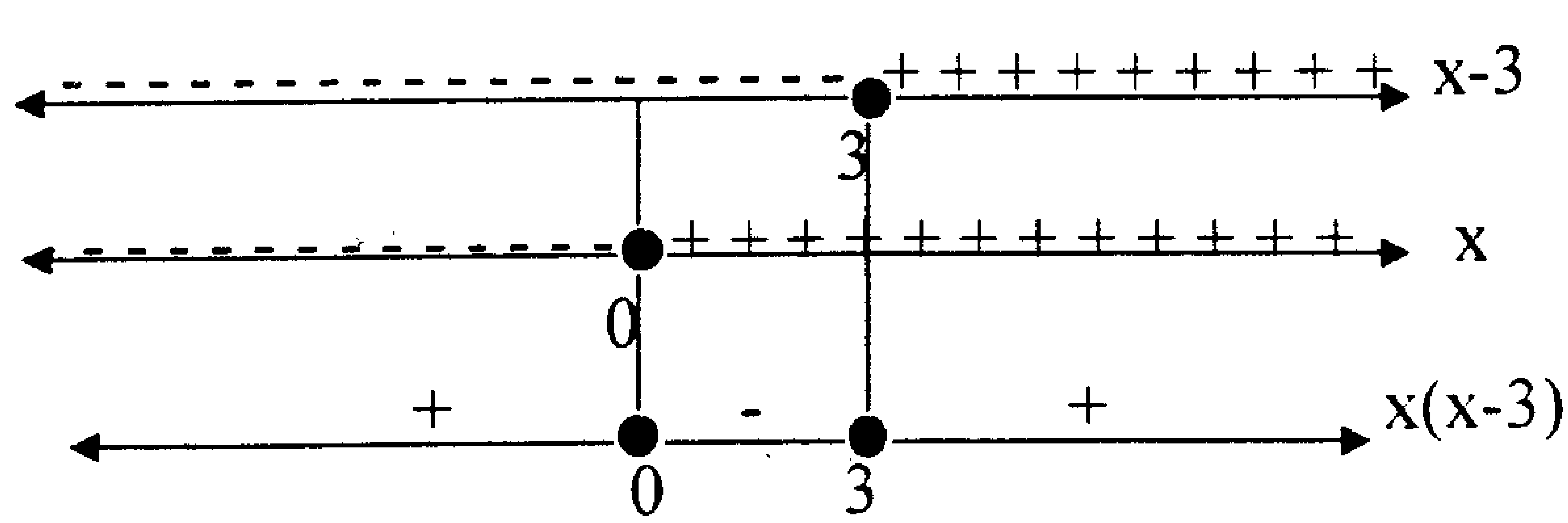
$x^2-3x\ge 0$

$x(x-3)\ge 0$

$x(x-3)=0$

$(x-3)=0\ ,\ x=3$

$x=0$



$(-\infty, 0]\cup[3, \infty)$ فترة الحل هي :

$(d)x+1\geq 0$

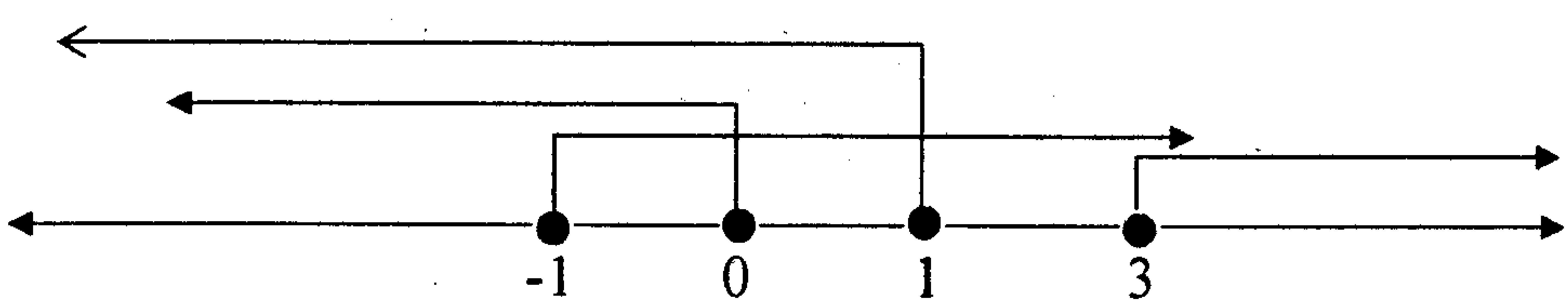
$x\geq -1$

$[-1,\infty)$

$(e)(-\infty,1]$

المطلوب أن $x-1$ أصغر من أو يساوي $\sqrt{x+1}$ وهذا يتحقق في الفترة$(-\infty,1]$
ولاحظ أن قوس الفترة من جهة 1 مغلق لأن الجذر التربيعي ينتج العدد 1

$(f)[-\infty,0]\cap[3,\infty)\cap(-\infty,1]=[-1,0]$



مجموعة الحل هي : $\{x:\ \ -1\leq x\leq 0\ ,\ x\in R\}$

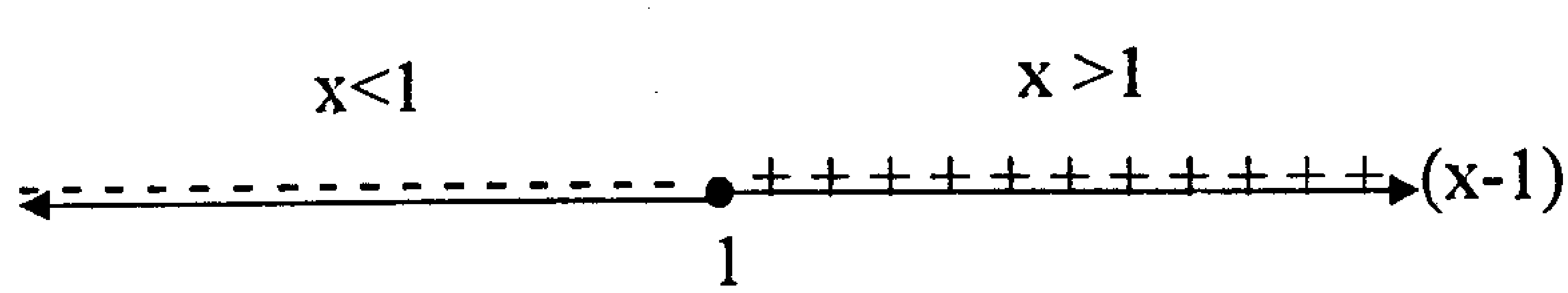
سابعاً متباينات دالة الإشارة:-

سوف ندرس في نفس الوقت حل معادلة دالة الإشارة لارتباط الموضوعين ببعضهما فمن المعلوم أن دالة الإشارة $\mathrm{sgn}[F(x)]$ قيمها إما تساوي 1 أو 1- أو 0 وهذه القيم تعتمد على القيم التي تأخذها x في الدالة F(x) كما ذكرنا سابقاً في شرحنا لدالة الإشارة ولذلك عند حل متباينة أومعادلة دالة الإشارة فإننا نضعها في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخرثم نعيد تعريف دالة الإشارة بأكثر من قاعدة وندرس إشارة الدالة F(x) متى تكون موجبة ومتى سالبة ومتى تساوي صفراً وبمقارنة هذه الدراسة بالطرف الأيمن لمتباينة أو معادلة دالة الإشارة نعين قيم x التي تحقق المتباينة .

مـثـال:- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

$(1)\ \mathrm{sgn}(x-1)>0$

الـحـل



$$F(x)=\mathrm{sgn}(x-1)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1\\ 0 & , x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-1} & , x>1\\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & , x<1\\ 0 & , x=1\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}1 & , x>1\\ -1 & , x<1\\ 0 & , x=1\end{cases}$$

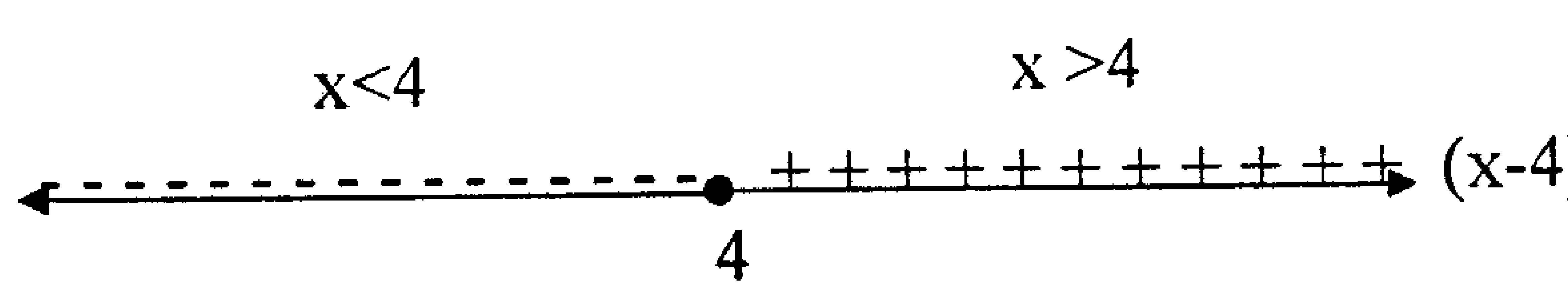
وحيث أن متباينة دالة الإشارة أكبر من الصفر فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أكبر من الصفر من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-1)=1 لأن الواحد أكبر من الصفر

فترة الحل هي : $(1,\infty)$

ومجموعة الحل $\{x:\ x>1\ ,x\in R\}$

(2) $\operatorname{sgn}(x-4)\geq 0$

الــحــل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-4)=\begin{cases}\dfrac{|x-4|}{x-4} & , x\neq 4\\ 0 & , x=4\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-4} & , x>4\\ \dfrac{-(x-4)}{x-4} & , x<4\\ 0 & , x=4\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-4)=\begin{cases}1 & , x>4\\ -1 & , x<4\\ 0 & , x=4\end{cases}$$

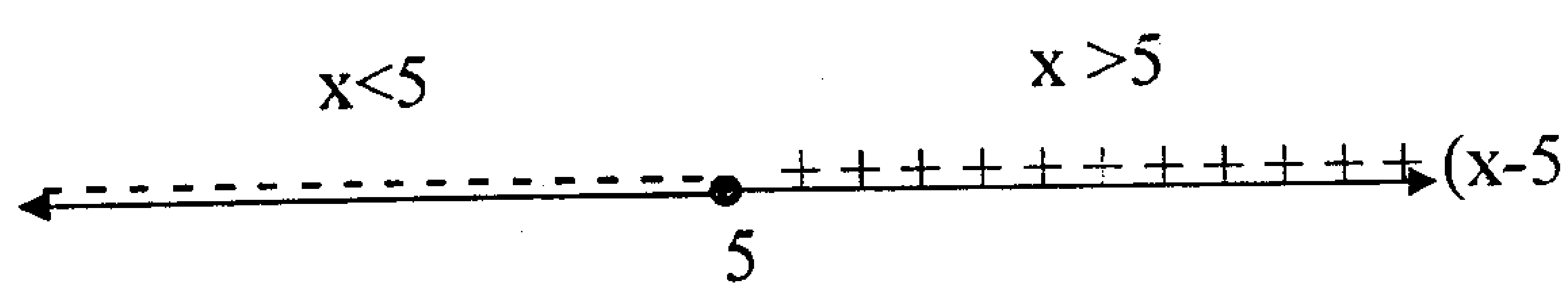
وحيث أن متباينة دالة الإشارة أكبر من أو تساوي الصفر فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أكبر من أو تساوي الصفر من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-4)=1 و sgn(x-4)=0 .

فترة الحل هي : [4،∞)

ومجموعة الحل: $\{x:\ x\geq 4\ \ ,x\in R\}$

(3) $\operatorname{sgn}(x-5)\leq 0$

الحـــل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases}\dfrac{|x-5|}{x-5} & ,\ x\neq 5\\ 0 & ,\ x=5\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-5} & ,\ x>5\\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & ,\ x<5\\ 0 & ,\ x=5\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases}1 & ,\ x>5\\ -1 & ,\ x<5\\ 0 & ,\ x=5\end{cases}$$

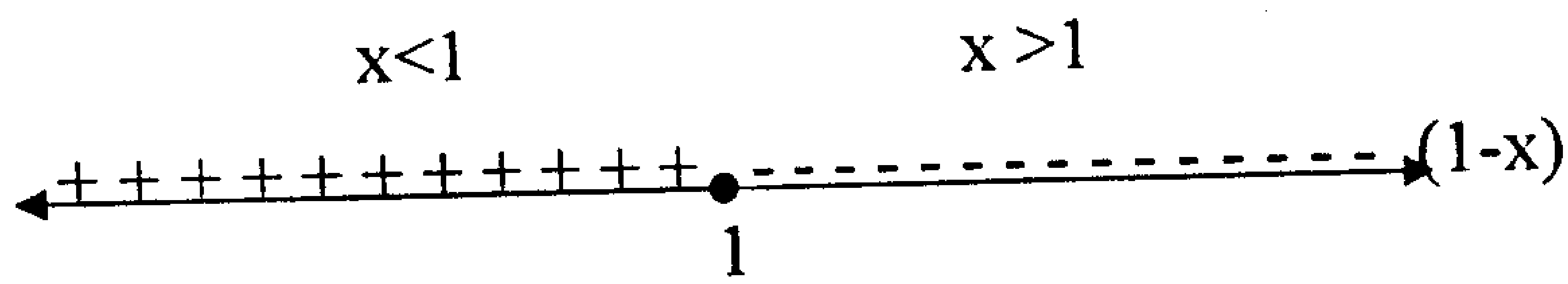
وحيث أن متباينة دالة الإشارة أصغر من أو تساوي الصفر فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أصغر من أو تساوي الصفر من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-5)=-1 و sgn(x-5)=0 .

فترة الحل هي : (- ∞،5]

ومجموعة الحل: $\{x:\ x\leq 5\ \ ,x\in R\}$

$$(4)\ \operatorname{sgn}(1-x)\leq 1$$

الحــل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(1-x)=\begin{cases}\dfrac{|1-x|}{1-x} & , \ x\neq 1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1-x} & , \ x<1\\ \dfrac{-(1-x)}{1-x} & , \ x>1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(1-x)=\begin{cases}1 & , \ x<1\\ -1 & , \ x>1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}$$

وحيث أن متباينة دالة الإشارة أصغر من أو تساوي الواحد فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أصغر من أو تساوي واحد من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(1-x)=-1 و sgn(1-x)=1 و sgn(1-x)=0

فترة الحل هي : $(-\infty ، \infty)$

ومجموعة الحل: $\{x:\ \infty<x<-\infty \quad , x\in R\}$

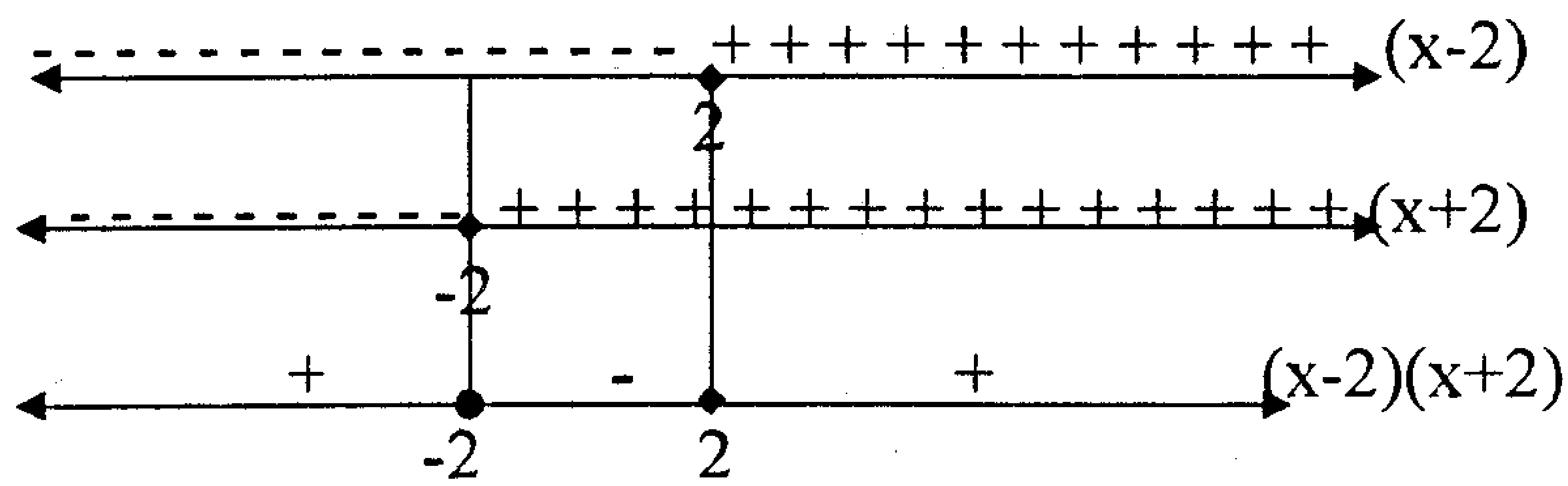
$$(5)\ \operatorname{sgn}(x^2-4)>0$$

$$x^2-4=0$$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$(x-2)=0\ ,x=2$$

$$(x+2)=0\ ,x=-2$$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4} & ,x\neq\pm 2\\ 0 & ,x=\pm 2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-4} & ,\ x<-2\ ,x>2\\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & ,-2<x<2\\ 0 & ,x=2,x=-2\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}1 & ,\ x<-2\ ,x>2\\ -1 & ,-2<x<2\\ 0 & ,x=2,x=-2\end{cases}$$

وحيث أن متباينة دالة الإشارة أكبر من الصفر فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أكبر من الصفر من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم **x** التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-1)=1 لأن الواحد أكبر من الصفر

فترة الحل هي : $(-\infty،-2)\cup(2،\infty)$

ومجموعة الحل: $\{x:\ x<-2\ or\ x>2\ ,x\in R\}$

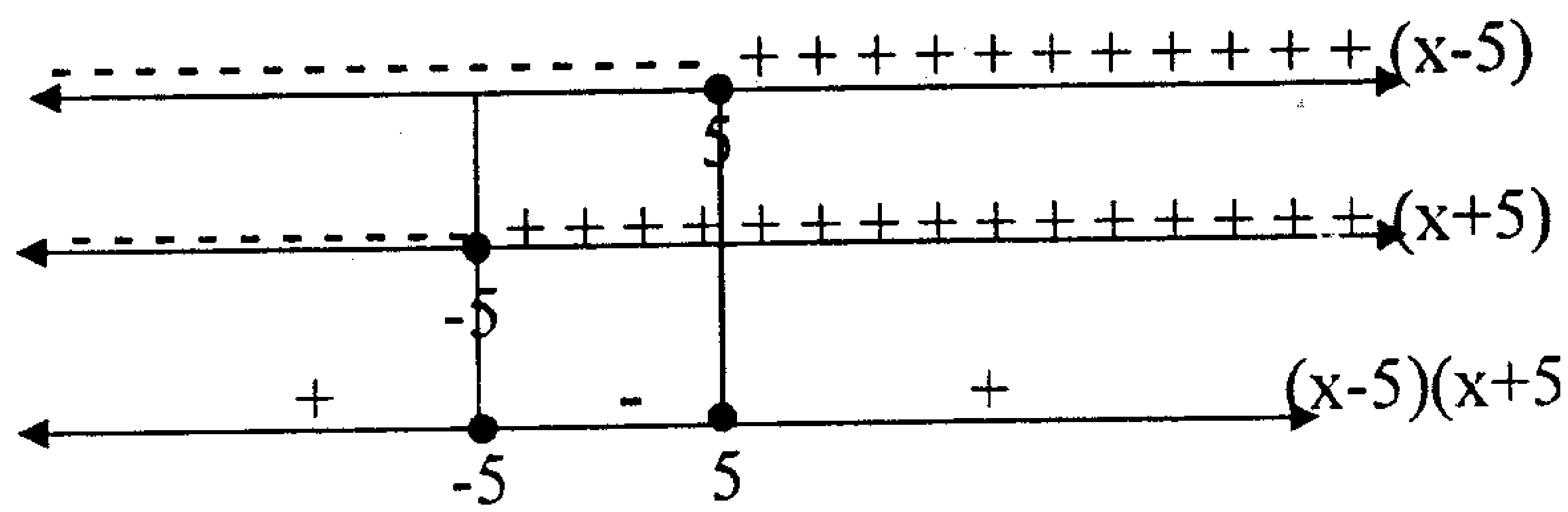
(6) $\operatorname{sgn}(x^2-25)\le 0$

$x^2-25=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$(x-5)=0 \quad ,x=5$

$(x+5)=0 \quad ,x=-5$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-25)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-25|}{x^2-25} & , x\neq\pm5\\ 0 & , x=\pm5\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x^2-25} & , x<-5\ ,x>5\\ \dfrac{-(x^2-25)}{x^2-25} & ,-5<x<5\\ 0 & ,x=5,x=-5\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-25)=\begin{cases}1 & , x<-5\ ,x>5\\ -1 & ,-5<x<5\\ 0 & ,x=5,x=-5\end{cases}$$

وحيث أن متباينة دالة الإشارة أصغر من أو تساوي الصفر فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أصغر من أو تساوي الصفر من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أن نريد قيم **x** التي تجعل دالة الإشارة $\operatorname{sgn}(x^2-25)=-1$, $\operatorname{sgn}(x^2-25)=0$

فترة الحل هي : $[-5،5]$

ومجموعة الحل هي: $\{x:-5\le x\le 5 \quad , x\in R\}$

(7) $\operatorname{sgn}(x-7)+4>0$

$\operatorname{sgn}(x-7)>-4$

الـــحـــل

x<7 x >7

- - - - - - - - - - - - - - - - - - ● + + + + + + + + + + + + + (x-7)

7

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-7)=\begin{cases}\dfrac{|x-7|}{x-7} & , x\neq 7\\ 0 & , x=7\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-7}{x-7} & , x>7\\ \dfrac{-(x-7)}{x-7} & , x<7\\ 0 & , x=7\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-7)=\begin{cases}1 & , x>7\\ -1 & , x<7\\ 0 & , x=7\end{cases}$$

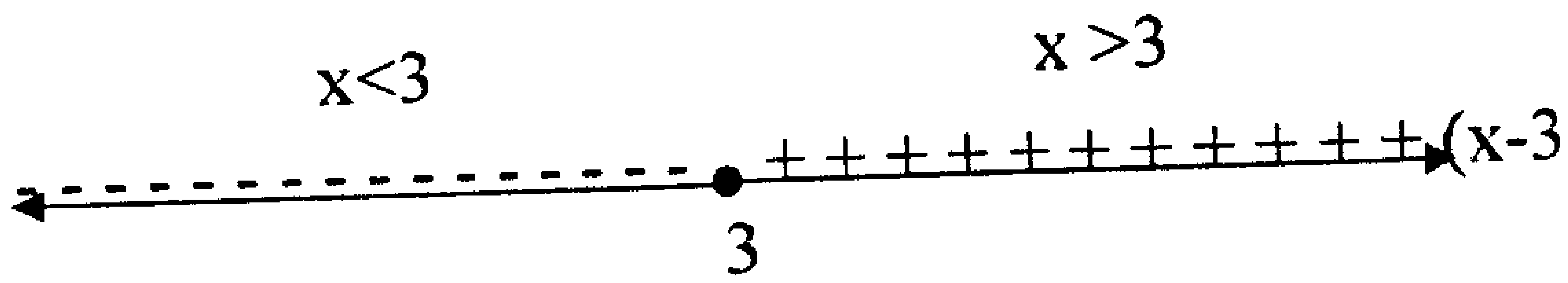
وحيث أن متباينة دالة الإشارة أكبر من 4- فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أكبر من 4- من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أننا نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-7)= 1 و sgn(x-7)=-1 و sgn(x-7)=0

فترة الحل هي : (- ∞،∞)

ومجموعة الحل : $\{x: x\in R\}=\{x: -\infty<x<\infty \ , x\in R\}$

$$(8)\ \operatorname{sgn}(x-3)-4<0$$
$$\operatorname{sgn}(x-3)<4$$

الـحــل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-3)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & , x\neq 3\\ 0 & , x=3\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-3} & , x>3\\ \dfrac{-(x-3)}{x-3} & , x<3\\ 0 & , x=3\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-3)=\begin{cases}1 & , x>3\\ -1 & , x<3\\ 0 & , x=3\end{cases}$$

وحيث أن متباينة دالة الإشارة أصغر من 4 فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أصغرمن 4 من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه أي أننا نريد قيم x التي تجعل دالة الإشارة sgn(x-3)= 1 و sgn(x-3)=-1 و sgn(x-3)=0

فترة الحل هي : $(-\infty,\infty)$

ومجموعة الحل: $\{x:-\infty<x<\infty \ , x\in R\}=\{x: x\in R\}$

$$(9)\ \operatorname{sgn}(x-3)-4>0$$

الحـــل

$$\operatorname{sgn}(x-3)>4$$

مجموعة حل المتباينة هي ϕ وذلك لأن دالة الإشارة لا تأخذ قيمة أكبر من 4 فدالة الإشارة لها ثلاثة قيم 1 ، 1- ، 0

$$(10)\ \operatorname{sgn}(x-1)+5<0$$

الحـــل

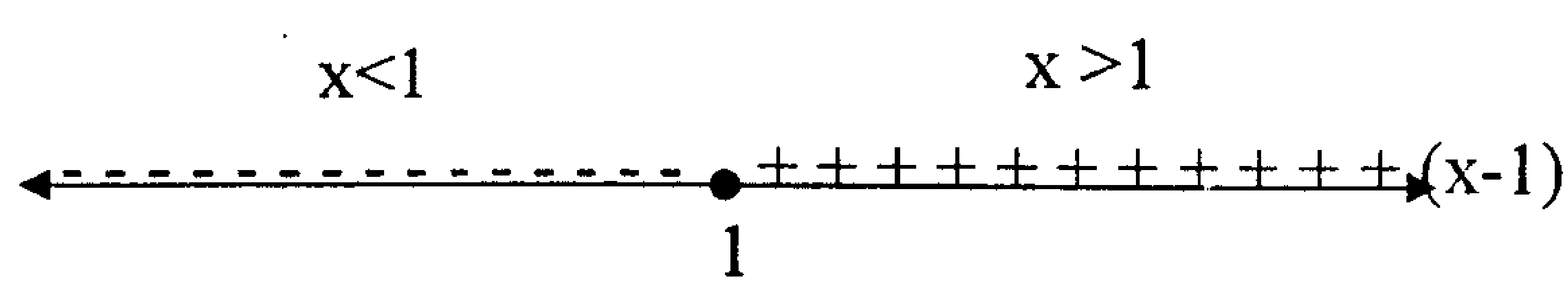
$$\operatorname{sgn}(x-1)<-5$$

مجموعة حل المتباينة هي ϕ وذلك لأن دالة الإشارة لا تأخذ قيمة أصغر من 5- فدالة الإشارة لها ثلاثة قيم 1 ، 1- ، 0

مـثـــال:- أوجد حل المعادلات الآتية:-

$$(1)\ \operatorname{sgn}(x-1)=1$$

الحـــل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1\\ 0 & , x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-1} & , x>1\\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & , x<1\\ 0 & , x=1\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases} 1 & , \ x>1 \\ -1 & , \ x<1 \\ 0 & , \ x=1 \end{cases}$$

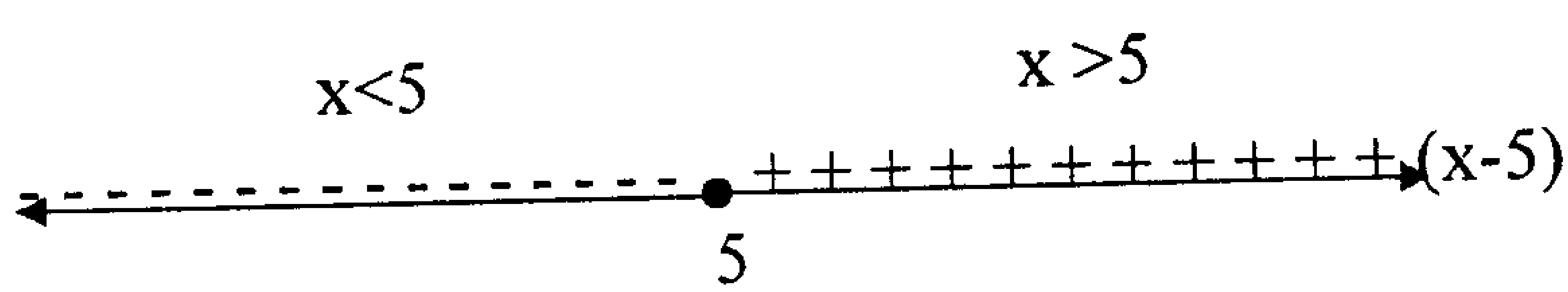
وحيث أن معادلة دالة الإشارة تساوي واحد فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة تساوي واحد من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه

فترة الحل هي : $(1 ، \infty)$

ومجموعة الحل: $\{x: \ x>1 \ , x\in R\}$

(2) $\operatorname{sgn}(x-5)=-1$

الحل



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases} \dfrac{|x-5|}{x-5} & , \ x\neq 5 \\ 0 & , \ x=5 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-5} & , \ x>5 \\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & , \ x<5 \\ 0 & , \ x=5 \end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases} 1 & , \ x>5 \\ -1 & , \ x<5 \\ 0 & , \ x=5 \end{cases}$$

وحيث أن معادلة دالة الإشارة تساوي سالب واحد فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة تساوي سالب واحد من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه

فترة الحل هي : $(-\infty ، 5)$

ومجموعة الحل : $\{x: \ x<5 \ , x\in R\}$

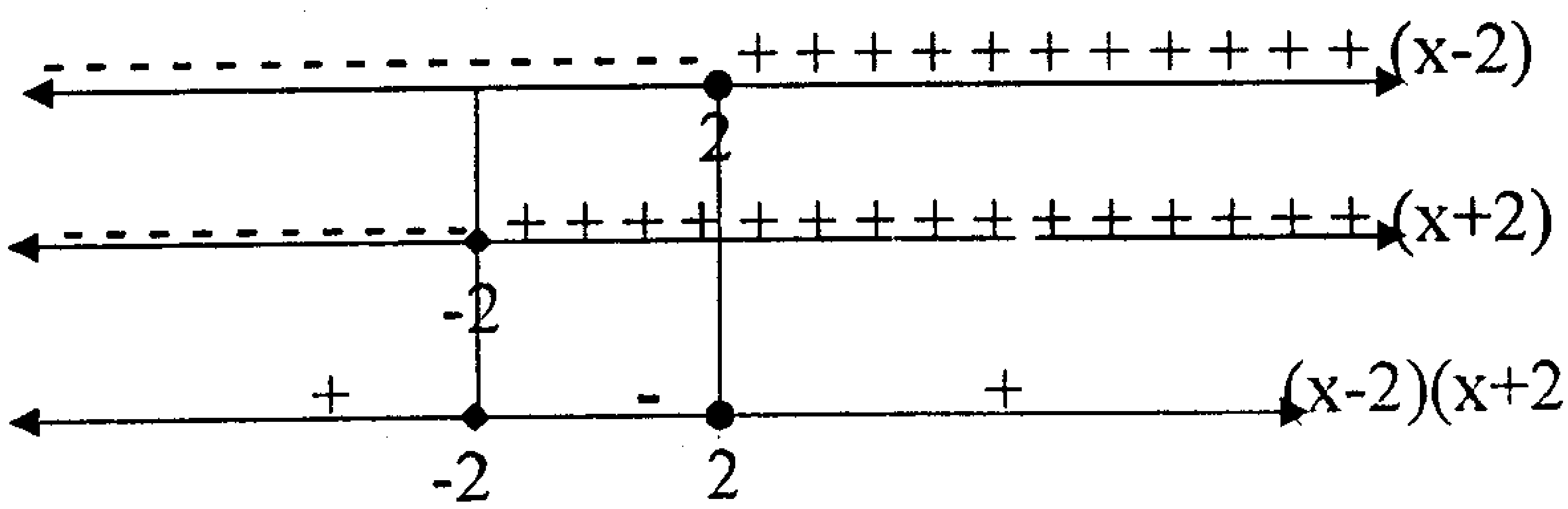
$$(3)\ \operatorname{sgn}(x^2-4)=0$$

$$x^2-4=0$$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$(x-2)=0 \quad ,x=2$$

$$(x+2)=0 \quad ,x=-2$$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4} & , x\neq\pm2\\ 0 & , x=\pm2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-4} & , x<-2\ , x>2\\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & ,-2<x<2\\ 0 & , x=2, x=-2\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}1 & , x<-2\ , x>2\\ -1 & ,-2<x<2\\ 0 & , x=2, x=-2\end{cases}$$

وحيث أن معادلة دالة الإشارة تساوي صفراً فإننا نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة صفراً من تعريف دالة الإشارة الذي أوجدناه ومجموعة الحل هي:

$$\{x:\ x=-2 \ \ or\ \ x=2\ \}$$

$$(4)\ \operatorname{sgn}(x-3)-4=0$$

الـحـل

$$\operatorname{sgn}(x-3)=4$$

مجموعة حل المعادلة هي ϕ وذلك لأن دالة الإشارة لا تأخذ قيمة تساوي 4 فدالة الإشارة لها ثلاثة قيم 1 ، -1 ، 0

$$(5)\ \operatorname{sgn}(x-1)+5=0$$

الـحـل

$$\operatorname{sgn}(x-1)=-5$$

مجموعة حل المعادلة هي ϕ وذلك لأن دالة الإشارة لا تأخذ قيمة تساوي -5 فدالة الإشارة لها ثلاثة قيم 1 ، -1 ، 0

ثامناً حل متباينات دالة الصحيح الأعظم:-

قبل أن ندرس حل متباينات دالة الصحيح الأعظم سوف نتطرق أولاً إلى حل معادلات دالة الصحيح الأعظم .

عند حل معادلة دالة الصحيح الأعظم التي على الصورة $[F(x)]=n$ فإننا نقوم بتحويل هذه المعادلة إلى متباينة $n \le F(x) < n+1$ ثم نقوم بحل المتباينة لإيجاد قيم x التي تحقق معادلة دالة الصحيح الأعظم $[F(x)]=n$

مـثـال :- أوجد حل المعادلات الآتية :

(1) $[x+1]=0$

الـحـل

$0 \le x+1 < 1$
$-1 \le x < 0$
$=[-1,0)$
$=\{x: -1 \le x < 0 \ , \ x \in R\}$

(2) $[x]+4=0$

الـحـل

$[x]=-4$
$-4 \le x < -3$
$=[-4,-3)$
$=\{x: -4 \le x < 3 \ , \ x \in R\}$

$$(3)\ [2x-4]-5=0$$

الحل

$$[2x-4]=5$$
$$5\le 2x-4<6$$
$$5+4\le 2x<6+4$$
$$9\le 2x<10$$
$$\frac{9}{2}\le x<5$$
$$=[\frac{9}{2},5)$$
$$=\{x:\frac{9}{2}\le x<5\ ,\ x\in R\}$$

$$(4)\ [x+1]=\frac{1}{2}$$

الحل

مجموعة حل هذه المعادلة ϕ لأن دالة الصحيح الاعظم لا يمكن أن تنتج أعدد قياسية أي لا توجد قيمة تحقق صحة معادلة دالة الصحيح الأعظم .

ندرس الآن كيفية حل متباينات دالة الصحيح الأعظم :-

المتباينات المتكونة من طرفين (جزأين):- عند حل هذا النوع من المتباينات ولتكن المتباينة مثلاً على صورة $[F(x)] \geq b$ فإننا نقوم بحل المتباينة $F(x) \geq b$ بشكل عادي كما ذكرنا سابقاً ونعين فترة ومجموعة الحل .

مــثــال :- أوجد حل المتباينات الآتية :

(1) $[x] \geq 0$

الــحــل

$$x \geq 0$$
$$= [0, \infty)$$
$$= \{x : x \geq 0, x \in R\}$$

(2) $[x+1] \geq 0$

الــحــل

$$x+1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$
$$= [-1, \infty)$$
$$= \{x : x \geq -1, x \in R\}$$

(3) $[4x+3] \geq 0$

الــحــل

$$4x+3 \geq 0$$
$$4x \geq -3$$
$$x \geq -\frac{3}{4}$$
$$= [-\frac{3}{4}, \infty)$$
$$= \{x : x \geq -\frac{3}{4}, x \in R\}$$

(4) $[x+1] \geq 3$

الحـــل

$x+1 \geq 3$

$x \geq 2$

$= [2, \infty)$

$= \{x : x \geq 2, x \in R\}$

(5) $[2x-1] < 3$

الحـــل

$2x-1 < 3$

$2x < 4$

$x < 2$

$= (-\infty, 2)$

$= \{x : x < 2, x \in R\}$

(6) $[x^2-9] \leq 0$

الحـــل

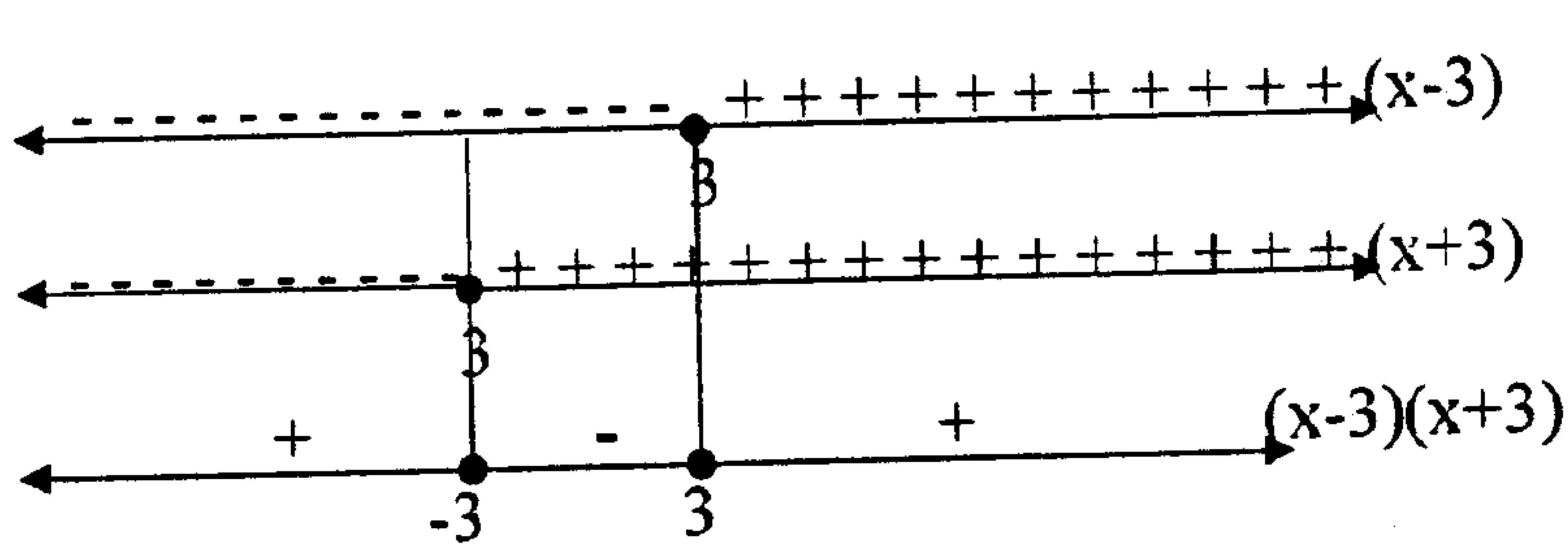
$x^2-9 \leq 0$

$(x-3)(x+3) \leq 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

$(x-3) = 0 \ , x = 3$

$(x+3) = 0 \ , x = -3$



∵ علامة التباين في المسألة هي أصغر من أو تساوي($\leq$)فالمطلوب هو الفترة السالبة وهي : $[-3، 3]$

ومجموعة الحل هي : $\{x: -3 \leq x \leq 3 \quad , x \in R\}$

$(7)\,[\,|x+2|\,] < 1$

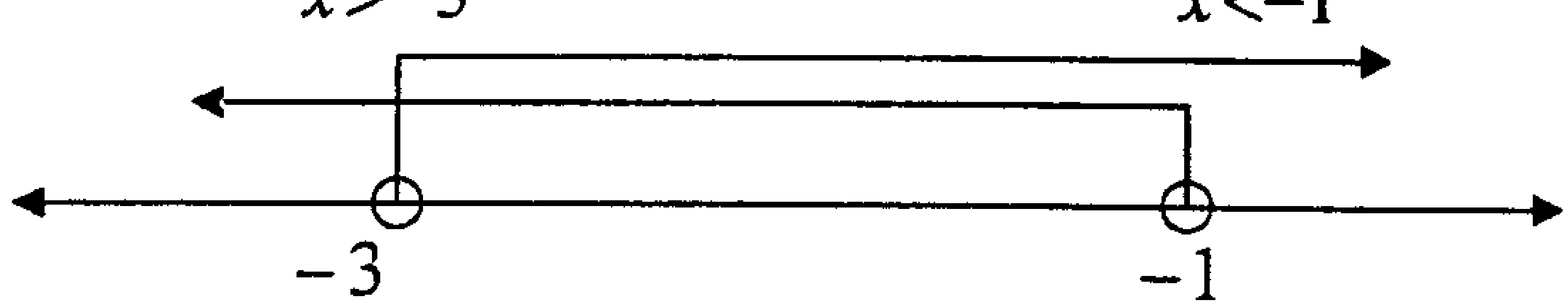
الحــل

$|x+2| < 1$

$-1 < x+2 < 1$

$-1 < x+2 < 1$

$-1 < x+2$	$x+2 < 1$
$x+2 > -1$	$x < 1-2$
$x > -2-1$	$x < -1$
$x > -3$	$x < -1$



$= \{x:\ -3 < x < -1\ ,\ x \in R\}$

$= (-3, -1)$

نطاق الدوال الحقيقية

أولاً نطاق الدوال الحدودية :- سبق أن ذكرنا أن الدالة الحدودية تكون على صورة :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots\dots + a_n x^n \quad . \quad n \in N$$

ونطاق أي دالة حدودية هو $D_F = R = (-\infty.\infty)$

مـثـال:- أوجد نطاق الدوال الآتية :-

$(1)\, F(x) = 2x^2 + 3x + 4$

$(2)\, F(x) = 2x + 3$

$(3)\, F(x) = 2$

$(4)\, F(x) = (x+1)^2 + 3$

$(5)\, F(x) = \frac{2}{3}x + 2$

لاحظ أن جميع الدوال حدودية ولذلك نطاق كل هذه الدوال هو $D_F = R = (-\infty.\infty)$

نطاق بعض الدوال الخاصة (هذه الدوال ليست دوال حدودية) :-

(1)نطاق دالة القيمة المطلقة التي على صورة $F(x) = |g(x)|$,g(x) دالة حدودية:-

$D_F = R = (-\infty,\infty)$

(2)نطاق دالة الإشارة التي على صورة $F(x) = \text{sgn}[g(x)]$ g(x) دالة حدودية: -

$$D_F = R = (-\infty,\infty)$$

(3)نطاق دالة الصحيح الأعظم التي على صورة $F(x) = [g(x)]$ g(x) دالةحدودية: -

$$D_F = R = (-\infty,\infty)$$

مـثـــال: أوجد نطاق الدوال الآتية : -

$(1)\ F(x)=|x+2|$

$(2)\ F(x)=\left|x^2+2\right|+3$

$(3)\ F(x)=[x+1]$

$(4)\ F(x)=[x+1]-2x$

$(5)\ F(x)=\text{sgn}(x+1)$

$(6)\ F(x)=\text{sgn}(x+1)-2x$

نطاق كل الدوال السابقة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $D_F = R = (-\infty,\infty)$

ثانياً نطاق الدوال القياسية : سبق أن ذكرنا أن الدالة القياسية تكون على صورة : -

$$F(x) = \frac{g(x)}{h(x)}\ ,\ h(x) \neq 0$$

حيث $g(x)$ ، $h(x)$ دوال حدودية

ونطاق أي دالة قياسية هو :

$D_F = R - \{\ g(x) = 0\} = R - \{$ القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً $\}$

مـثـال:- أوجد نطاق الدوال الآتية :-

$$(1)\, F(x)=\frac{3x+1}{x-2}$$

الـحـل

$$x-2=0\ ,\ x=2$$
$$D_F=R-\{2\}$$

$$(2)\, F(x)=\frac{3x+1}{2x-7}$$

الـحـل

$$2x-7=0\ ,\ x=\frac{7}{2}$$
$$D_F=R-\{\tfrac{7}{2}\}$$

$$(3)\, F(x)=\frac{3x+1}{x^2-4}$$

الـحـل

$$x^2-4=0$$
$$(x-2)(x+2)=0$$
$$(x-2)=0\ ,\ x=2$$
$$(x+2)=0\ ,\ x=-2$$
$$D_F=R-\{\pm 2\}$$

$$(4)\,F(x)=\frac{3x+1}{x^3-27}$$

الحـــل

$$x^3-27=0$$
$$(x-3)(x^2+3x+9)=0$$
$$(x-3)=0,\,x=3$$
$$x^2+3x+9\neq 0$$
$$D_F=R-\{3\}$$

$$(5)\,F(x)=\frac{3x+1}{x^2-5x+6}$$

الحـــل

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-3)(x-2)=0$$
$$(x-3)=0,\,x=3$$
$$(x-2)=0,\,x=2$$
$$D_F=R-\{3\,,\,2\}$$

$$(6)\,F(x)=\frac{3x+1}{x^2+4}$$

الحـــل

المقام هو مجموع مربعين ومن المعلوم أن مجموع المربعين لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية أي أن $x^2+4\neq 0$ ولهذا لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفراً

$$D_F=R$$

$$(7)\, F(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

الـحـل

المقام هو مقدار ثلاثي مميزه أصغر من الصفر $b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$

ومن المعلوم أن أي مقدار ثلاثي مميزه أصغر من الصفر لا يمكن تحليله في نطاق

الأعداد الحقيقية أي أن $x^2+x+1\neq 0$ ولهذا لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفراً

$$D_F=R$$

$$(8)\, F(x)=\frac{2x+1}{2x^2+4x+1}$$

الـحـل

$2x^2+4x+1=0$

$a=2\ ,\ b=4\ ,c=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(2)(1)}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{4}$$

$$x=\frac{-4+2\sqrt{2}}{4}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{-4-2\sqrt{2}}{4}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D_F=R-\{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

نطاق بعض الدوال : -

مـثـــال: أوجد نطاق الدوال الآتية : -

$$(1)\, F(x)=\frac{3x+1}{|x-2|}$$

الـحـــل

$$|x-2|=0$$
$$x-2=\pm 0 \quad , x=2$$
$$D_F=R-\{2\}$$

$$(2)\, F(x)=\frac{3x+1}{|x+1|-3}$$

الـحـــل

$$|x+1|-3=0$$
$$|x+1|=3$$

$$x+1=\pm 3$$

$$x+1=3 \qquad\qquad x+1=-3$$
$$x=2 \qquad\qquad x=-4$$

وبعد التعويض بالقيمتين $x=-4$ و $x=2$ في معادلة القيمة المطلقة نجد

أنهما تحققان المعادلة ولذلك يكون النطاق هو : -

$$D_F=R-\{2,-4\}$$

$$(3)\, F(x)=\frac{3x+1}{|x-4|+1}$$

الحـــل

$$|x-4|+1\neq 0$$

لاحظ أنه لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفراً لأن حاصل جمع مقدارين موجبين لا يساوي صفراً ويمكن للطالب التأكد من ذلك بحل معادلة القيمة المطلقة كما ذكرنا سابقاً وسيجد أن مجموعة حل هذه المعادلة بعد التحقيق هو ϕ أي أن :

$$D_F = R$$

$$(4)\, F(x)=\frac{3x+1}{[x]-1}$$

الحـــل

$$[x]-1=0$$
$$[x]=1$$
$$1\leq x<2$$
$$D_F = R-[1\,,2)=(-\infty,1)\cup[2,\infty)$$

$$(5)\, F(x)=\frac{x+1}{[x-3]-2}$$

الحـــل

$$[x-3]-2=0$$
$$[x-3]=2$$
$$2\leq x-3<3$$
$$5\leq x<6$$

$$D_F = R-[5\,,6)=(-\infty,5)\cup[6,\infty)$$

$$(6)\, F(x)=\frac{3x+1}{[x]-\frac{1}{2}}$$

الـــحـــل

$$[x]-\frac{1}{2}\neq 0$$

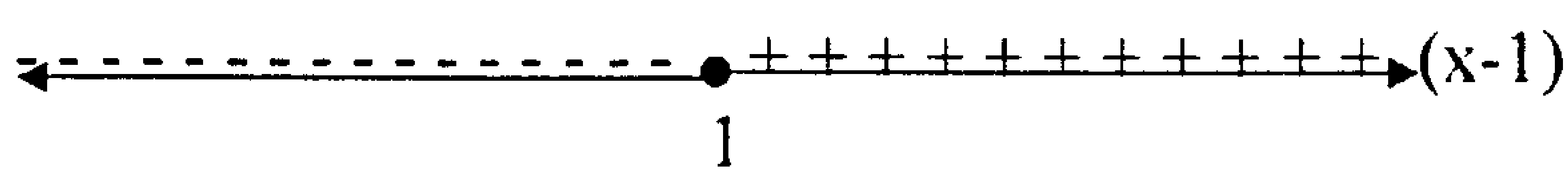
لاحظ أنه لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفراً لأن دالة الصحيح الأعظم لا يمكن أن تساوي عدداً قياسياً أي أن $[x]\neq\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن نطاق الدالة هو : $D_F = R$

$$(7)\, F(x)=\frac{3x+1}{\operatorname{sgn}(x-1)}$$

الـــحـــل

$$\operatorname{sgn}(x-1)=0$$

x < 1 x > 1



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1\\ 0 & , x=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{x-1}{x-1} & , x>1\\ \frac{-(x-1)}{x-1} & , x<1\\ 0 & , x=1\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}1 & , x>1\\ -1 & , x<1\\ 0 & , x=1\end{cases}$$

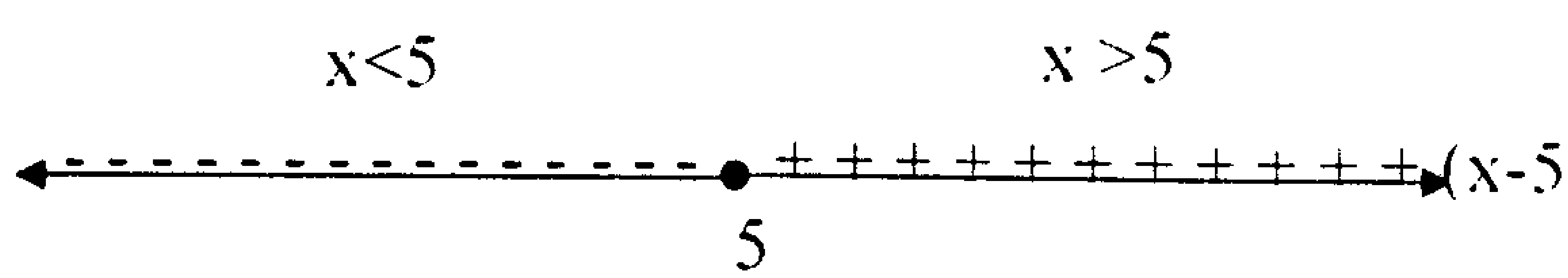
من المعلوم أن دالة الإشارة تساوي صفراً عند القيمة التي تجعل دالتها (x-1) تساوي صفرا أي أن 1 = x ومن تعريف دالة الإشارة نجد أن النطاق هو :-

$$D_f = R - \{1\}$$

(8) $F(x) = \dfrac{x-3}{\operatorname{sgn}(x-5)+1}$

الحل

$$\operatorname{sgn}(x-5)+1=0$$
$$\operatorname{sgn}(x-5)=-1$$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases} \dfrac{|x-5|}{x-5} & .\ x\neq 5 \\ 0 & .\ x=5 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-5} & .\ x>5 \\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & .\ x<5 \\ 0 & .\ x=5 \end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{cases} 1 & .\ x>5 \\ -1 & .\ x<5 \\ 0 & .\ x=5 \end{cases}$$

من المعلوم أن دالة الإشارة تساوي (-1) عند القيمة التي تجعل دالتها (x-5) سالبة ومن

تعريف دالة الإشارة نجد أن النطاق هو :-

$$D_f = R-(-\infty.\ 5)=[5.\infty)$$

$$(9)\, F(x)=\frac{x+2}{\operatorname{sgn}(x^2-4)-1}$$

الحـــل

$$\operatorname{sgn}(x^2-4)-1=0$$

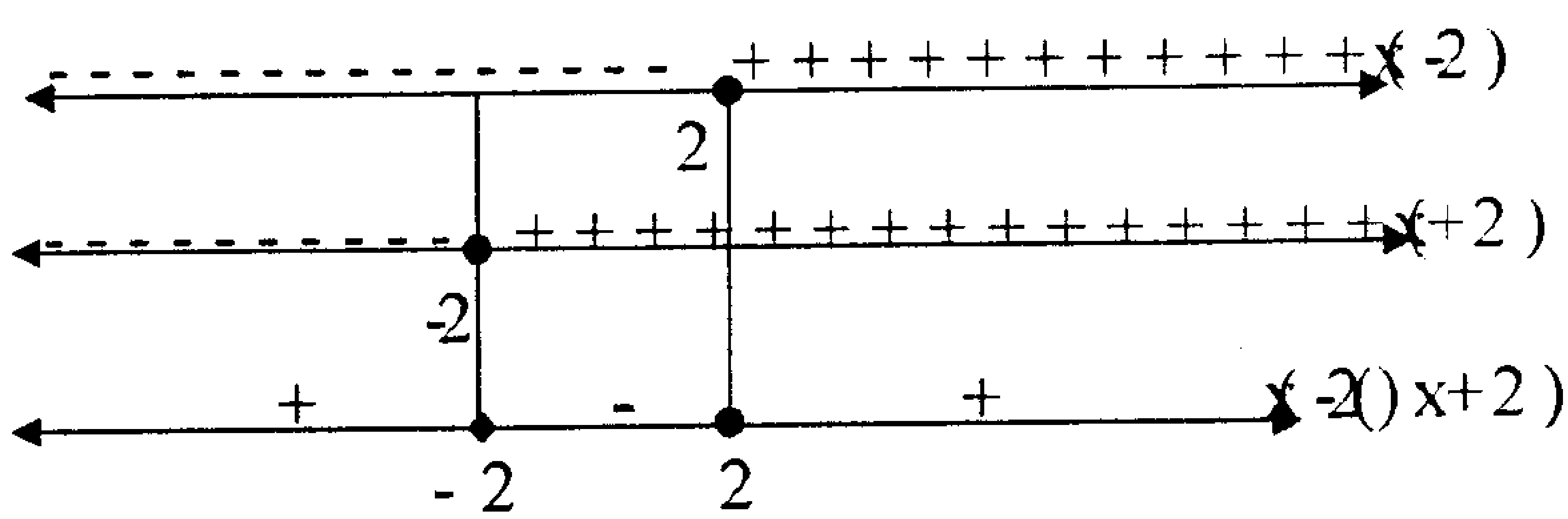
$$\operatorname{sgn}(x^2-4)=1$$

$$x^2-4=0$$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$(x-2)=0\ ,x=2$$

$$(x+2)=0\ ,x=-2$$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{Bmatrix} \dfrac{\left|x^2-4\right|}{x^2-4} & , & x\neq\pm 2 \\ 0 & , & x=\pm 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{x^2-4}{x^2-4} & , x<-2\ ,x>2 \\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & ,-2<x<2 \\ 0 & .\ x=2,x=-2 \end{Bmatrix}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{Bmatrix} 1 & ,\ x<-2\ ,x>2 \\ -1 & ,-2<x<2 \\ 0 & ,\ x=2,x=-2\end{Bmatrix}$$

من المعلوم أن دالة الإشارة تساوي (1) عند القيمة التي تجعل دالتها (x^2-4) موجبة

ومن تعريف دالة الإشارة نجد أن النطاق هو :-

$$D_F = R - \{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\} = [-2,2]$$

$$(10)\ F(x) = \frac{x-1}{\operatorname{sgn}(x-2)+4}$$

الحــل

$$\operatorname{sgn}(x-2) = -4$$

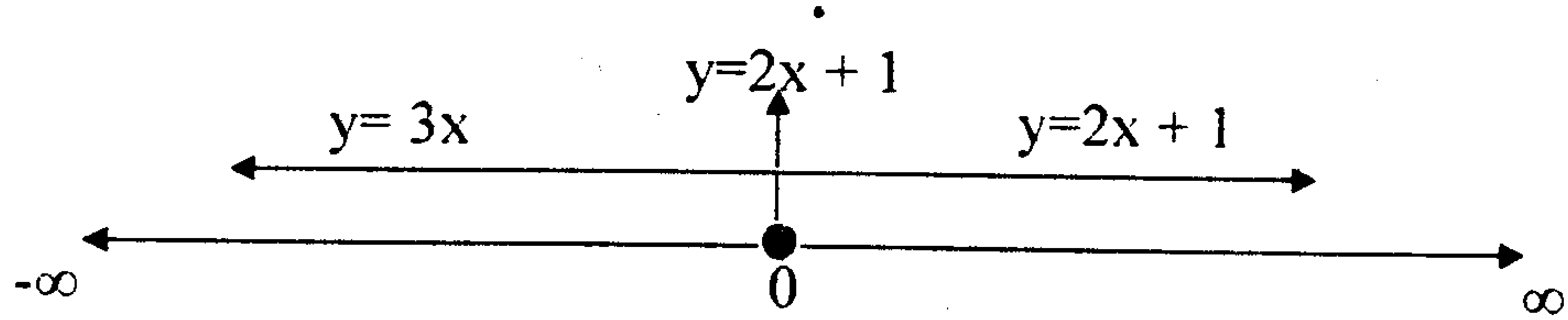
لاحظ أنه لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفراً لأن دالة الإشارة لا يمكن أن تساوي

عددا عدا 0 ، 1 ، -1 أي أن $\operatorname{sgn}(x-2) \neq -4$ وبالتالي فإن نطاق الدالة هو :

$$D_F = R$$

$$(11)\ F(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \ x \geq 0 \\ 3x & , \ x < 0 \end{cases}$$

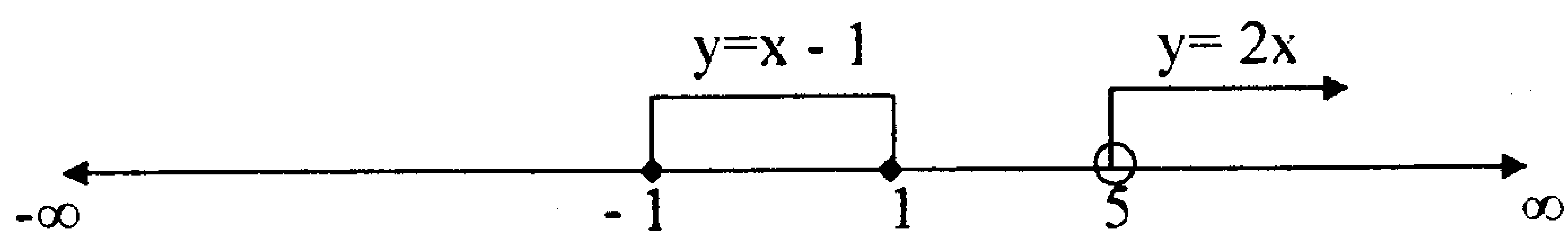
الحــل



$$D_F = (-\infty,\infty) = R$$

(12) $F(x)=\begin{cases} x-1 & , \ -1\le x\le 1 \\ 2x & , \ x>5 \end{cases}$

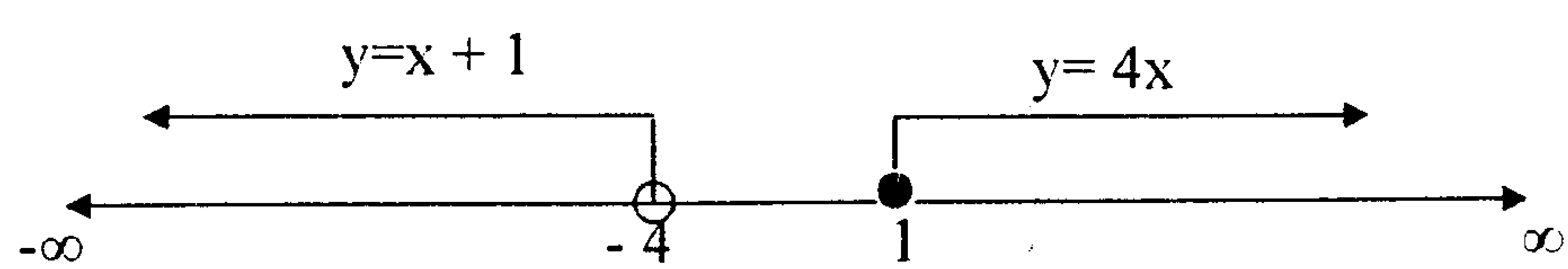
الحل



$D_F=[-1,1]\cup(5,\infty)$

(13) $F(x)=\begin{cases} x+1 & , \ x<-4 \\ 4x & , \ x\ge 1 \end{cases}$

الحل



$D_F=(-\infty,-4)\cup[1,\infty)$

ثالثاً نطاق الدالة الغير قياسية :-

سبق أن ذكرنا أن الدالة الغير القياسية تكون على صورة:- $F(x)=\sqrt[n]{g(x)}, n \in N$
وهناك حالتان بناء على دليل الجذر n هل هو عدد فردي أم زوجي :

الحالة الأولى إذا كان دليل الجذر عدد فردي :-

في هذه الحالة عند إيجاد نطاق أي دالة غير قياسية فإننا نقوم بإيجاد النطاق بالطرق المعتادة على حسب نوع الدالة التي تحت الجذر وذلك لأن الكميات السالبة تحت الجذر ذا الدليل الفردي معرفة

$$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)(-3)(-3)}=-3$$
$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}=-2$$

مـثـال:- أوجد نطاق الدوال الآتية :-

$$(1)\ F(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

الـحـل

بما أن ما تحت الجذر التكعيبي هو دالة حدودية فإن النطاق هو : $D_F=R$

$$(2)\ F(x)=\sqrt[5]{\frac{x-1}{x^2-1}}$$

الـحـل

بما أن ما تحت الجذر الخامس هو دالة قياسية فإن :

$$x^2-1=0$$
$$(x-1)(x+1)=0$$
$$x-1=0, x=1$$
$$x+1=0, x=-1$$

لذلك فإن النطاق هو : $D_F=R-\{\pm 1\}$

الحالة الثانية إذا كان دليل الجذر عدد زوجي : -

في هذه الحالة عند إيجاد نطاق أي دالة غير قياسية فإنه يوجد صورتان بناء على الجذر ذا الدليل الزوجي هل هو في البسط أو في المقام :

الصورة الأولى إذا كان الجذر في البسط : - $F(x)=\sqrt[n]{g(x)}, n\in N$

فالنطاق في هذه الحالة هو مجموعة حل المتباينة $g(x)\geq 0$

الصورة الثانية إذا كان الجذر في المقام : - $F(x)=\dfrac{h(x)}{\sqrt[n]{g(x)}}, n\in N$

حيث $h(x)$ دالة حدودية فالنطاق في هذه الحالة هو مجموعة حل المتباينة $g(x)>0$

مــثــال: أوجد نطاق الدوال الآتية : -

(1) $F(x)=\sqrt{x-3}$

الــحــل

$x-3\geq 0$

$x\geq 3$

$D_F=[3,\infty)$

(2) $F(x)=\sqrt{4-2x}$

الــحــل

$4-2x\geq 0$

$-2x\geq -4$

$x\leq 2$

$D_F=(-\infty,2]$

(3) $F(x)=\sqrt{x^2-4}$

الــحــل

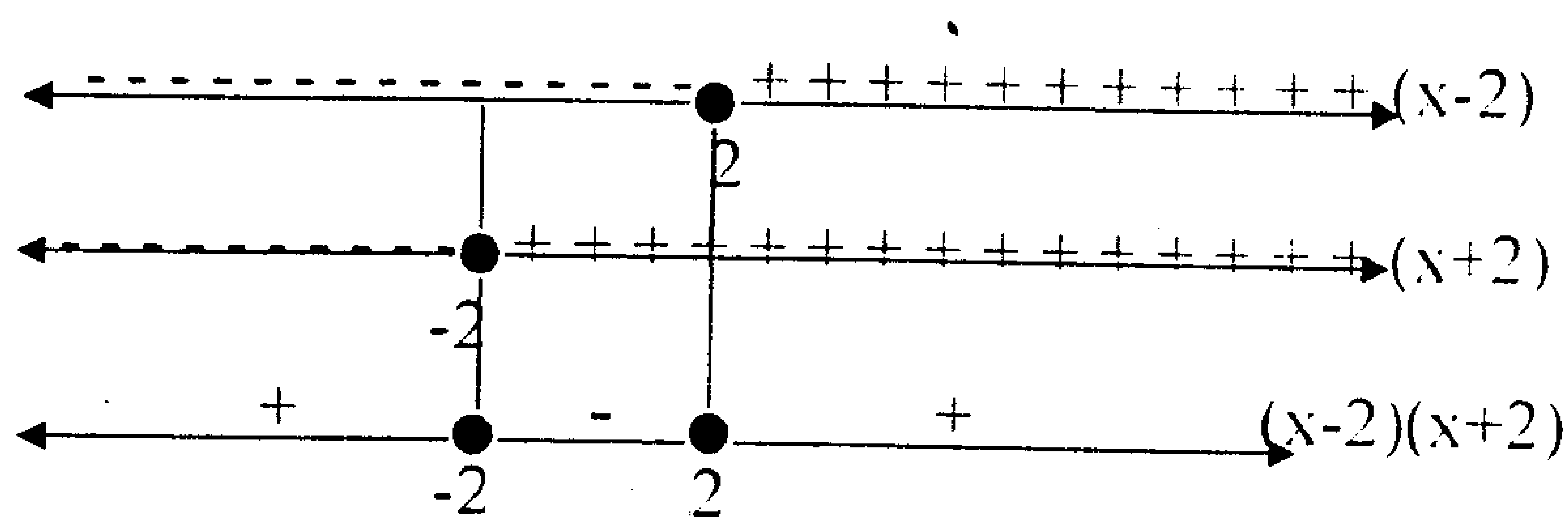
$x^2-4\geq 0$

$(x-2)(x+2)\geq 0$

$(x-2)(x+2)=0$

$(x-2)=0 \quad ,x=2$

$(x+2)=0 \quad ,x=-2$



(-) علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي ($\geq$) فالمطلوب هي الفترة

الموجبة وهي النطاق : $D_F=(-\infty.-2]\cup[2.\infty)$

(4) $F(x)=\sqrt[4]{4+x^2}$

الــحــل

مجموع المربعين دائما موجبا كما ذكرنا سابقاً $4+x^2>0$ ولهذا فإن النطاق هو :

$D_F=(-\infty.\infty)$

$$(5)\ F(x) = \sqrt[6]{\frac{2x-6}{x+2}}$$

الحـــل

$$\frac{2x-6}{x+2} \geq 0$$

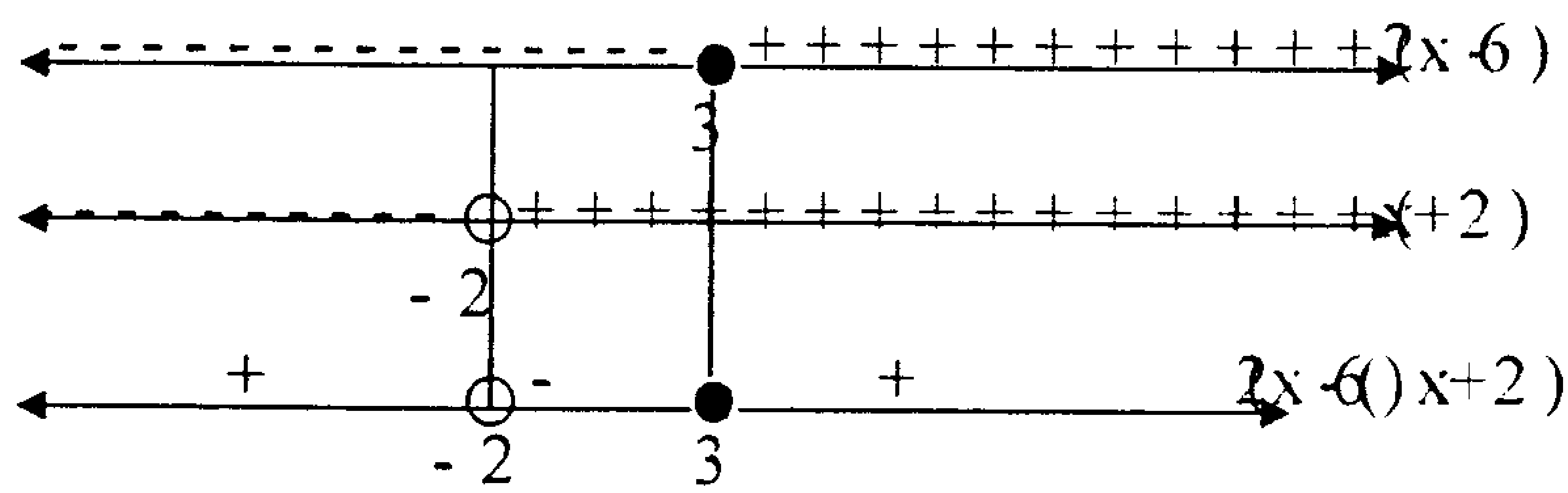
$$\frac{2x-6}{x+2}(x+2)^2 \geq (0)(x+2)^2$$

$$(2x-6)(x+2) \geq 0$$

$$(2x-6)(x+2) = 0$$

$$(2x-6) = 0 \ , x = 3$$

$$(x+2) = 0 \ , x = -2$$



⊙ علامة التباين في المسألة هي أكبر من أو تساوي ($\geq$)فالمطلوب هي الفترة الموجبة وهي النطاق : $D_F = (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$

$$(6)\ F(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$$

الحـــل

$$x^2 - 3x + 9 \geq 0$$

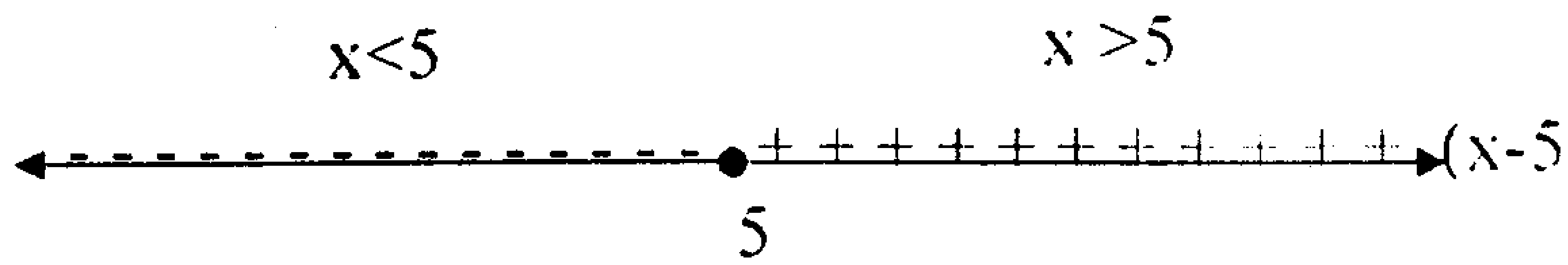
$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(9) = 9 - 36 = -27 < 0$$

⊙المقدار الثلاثي مميزه أصغر من الصفر فهو دائماً موجبا و حيث أن المتباينة أكبر من أو تساوي صفراً($\geq$) فالنطاق هو $D_F = (-\infty, \infty)$.

(7) $F(x)=\sqrt[4]{\operatorname{sgn}(x-5)}$

الـحـل

$\operatorname{sgn}(x-5)\geq 0$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{Bmatrix} \dfrac{|x-5|}{x-5} & , & x\neq 5 \\ 0 & , & x=5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{x-5}{x-5} & , & x>5 \\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & , & x<5 \\ 0 & , & x=5 \end{Bmatrix}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)=\begin{Bmatrix} 1 & , & x>5 \\ -1 & , & x<5 \\ 0 & , & x=5 \end{Bmatrix}$$

من المعلوم أن دالة الإشارة تساوي (1) عند القيمة التي تجعل دالتها (x-5) موجبة وتساوي صفرا عند x = 5 ومن تعريف دالة الإشارة نجد أن النطاق هو :-

$D_F = [5,\infty)$

(8) $F(x)=\sqrt{\operatorname{sgn}(x-1)+5}$

الـحـل

$$\operatorname{sgn}(x-1)+5\geq 0 \Longrightarrow \operatorname{sgn}(x-1)\geq -5$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{Bmatrix} 1 & , & x>1 \\ -1 & , & x<1 \\ 0 & , & x=1 \end{Bmatrix}$$

من تعريف دالة الاشارة نعين قيم x التي تجعل دالة الإشارة أكبر من أو تساوي (-5)

أي التي تجعل sgn(x-1)=-1 sgn(x-1)=0. sgn(x-1)=1

مجموعة الحل لهذه المتباينة هي النطاق وهي $D_F = R = (-\infty,\infty)$

$(9)\ F(x)=\sqrt[8]{[x+1]}$

الحــل

$[x+1]\geq 0$

$x+1\geq 0$

$x\geq -1$

$D_F=[-1,\infty)$

$(10)\ F(x)=\sqrt[4]{[x+1]-3}$

الحــل

$[x+1]-3\geq 0$

$x+1\geq 3$

$x\geq 2$

$D_F=[2,\infty)$

$(11)\ F(x)=\sqrt{|2x-2|-4}$

الحــل

$|2x-2|-4\geq 0$

$|2x-2|\geq 4$

$2x-2\geq 4$	$-(2x-2)\geq 4$
$2x\geq 4+2$	$2x-2\leq -4$
$2x\geq 6$	$2x\leq -2$
$x\geq 3$	$x\leq -1$
$[3,\infty)$	$(-\infty,-1]$

فترة الحل وهي النطاق: $D_F = (-\infty، -1] \cup [3، \infty)$

$(12) F(x) = \sqrt[4]{|x+2| + 3}$

الحل

$|x+2| + 3 \geq 0$

$$|x+2| \geq -3$$

$x+2 \geq -3$

$x \geq -3-2$

$x \geq -5$

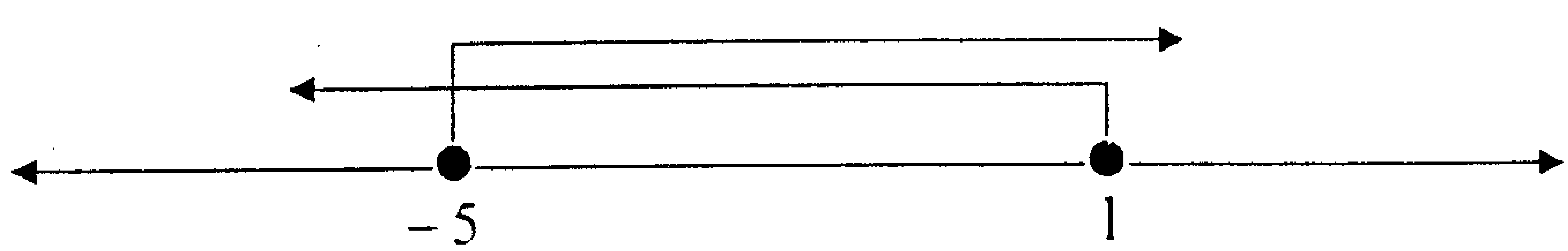
$[-5,\infty)$

$-(x+2) \geq -3$

$x+2 \leq 3$

$x \leq 1$

$(-\infty,1]$



فترة الحل وهي النطاق: $D_F = (-\infty، 1] \cup [-5، \infty) = (-\infty ، \infty)$

$(13)\ F(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$

الحل

$x - 1 > 0$

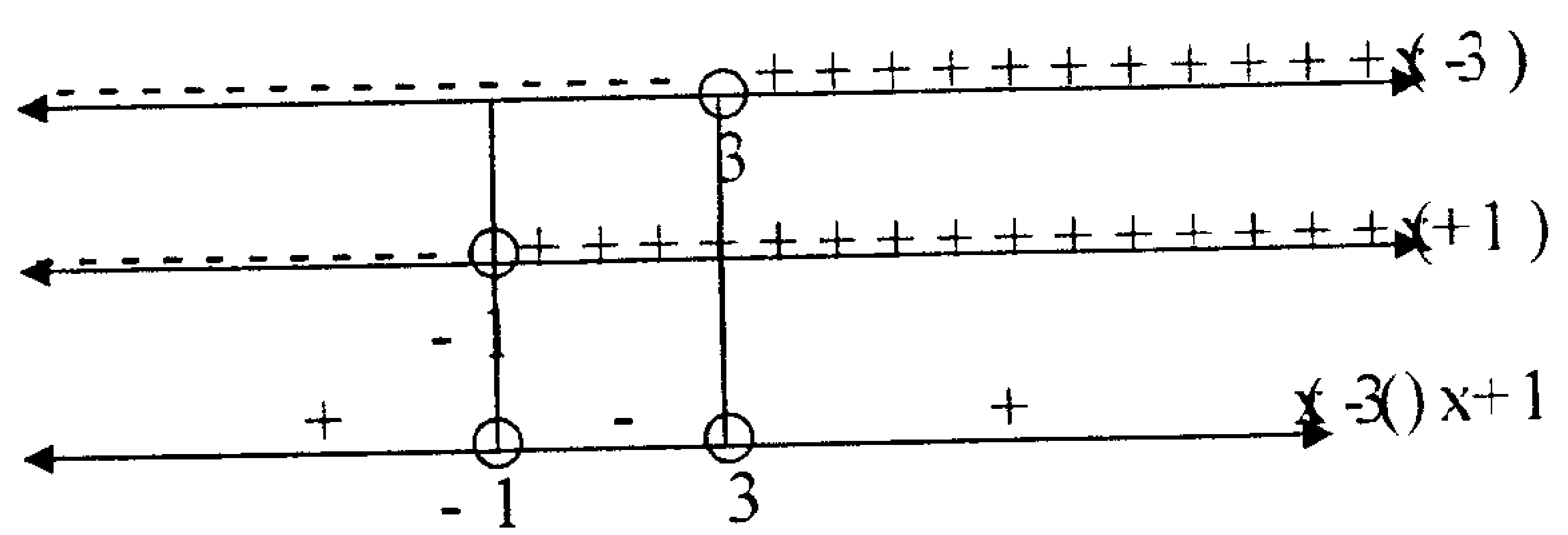
$x > 1$

$D_F = (1,\infty)$

$$(14)\ F(x)=\frac{2x+6}{\sqrt[6]{x^2-2x-3}}$$

الحـــل

$$x^2-2x-3>0$$
$$b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-3)=4+12=16>0$$
$$(x-3)(x+1)>0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$(x-3)=0\ ,x=3$$
$$(x+1)=0\ ,x=-1$$



(-) علامة التباين في المسألة هي أكبر من (>) فالمطلوب هي الفترة الموجبة وهي النطاق :

$$D_F=(-\infty ,-1)\cup(3,\infty)$$

$$(15)\ F(x)=\sqrt{|x|}$$

الحـــل

$$|x|\geq 0$$

وحيث أن القيمة المطلقة تلغي الإشارة السالبة فالنطاق هو $D_F=R=(-\infty,\infty)$

ويمكن للطالب أن يتحقق من ذلك بحل المتباينة $|x|\geq 0$.

رابعاً نطاق الدالة المتكونة من خليط من الدوال :-

إذا كانت الدالة تحتوي على خليط من الدوال الحدودية والقياسية وغير قياسية وكل ما ذكرناه سابقاً فإن نطاقها هو تقاطع نطاق كل هذه الدوال ومن الأفضل فصل الدوال الخليط عن بعضها كل نوع على حدة ثم إيجاد نطاق كل دالة على حدة ثم نعين تقاطع نطاق هذه الدوال .

مـثـال:- أوجد نطاق الدوال الآتية :-

(1) $F(x)=\sqrt{x+2}+2\sqrt{4-x}$

الـحـل

$g(x)=\sqrt{x+2}\quad , \quad h(x)=2\sqrt{4-x}$

أولاً نطاق الدالة g(x):-

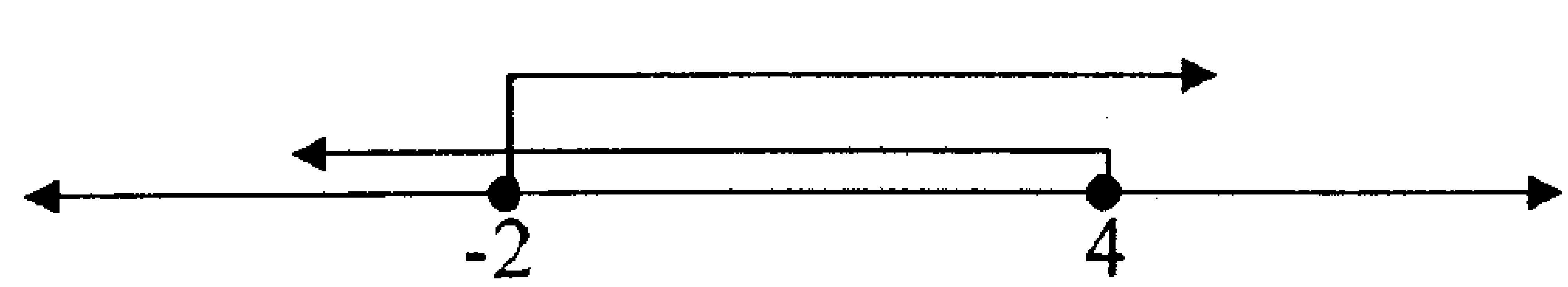
$$g(x)=\sqrt{x+2}$$
$$x+2\geq 0$$
$$x\geq -2$$
$$D_g=[-2,\infty)$$

ثانياً نطاق الدالة h(x):-

$$h(x)=2\sqrt{4-x}$$
$$4-x\geq 0$$
$$x\leq 4$$
$$D_h=(-\infty,4]$$

نطاق الدالة F(x):-

$$D_F=D_g\cap D_h$$
$$D_F=[-2,\infty)\cap(-\infty,4]=[-2,4]$$



(2) $F(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{-8-x}$

الــحــل

$g(x)=\sqrt{x+6} \quad , \quad h(x)=\sqrt{-8-}\,x$

أولاً نطاق الدالة g(x):-

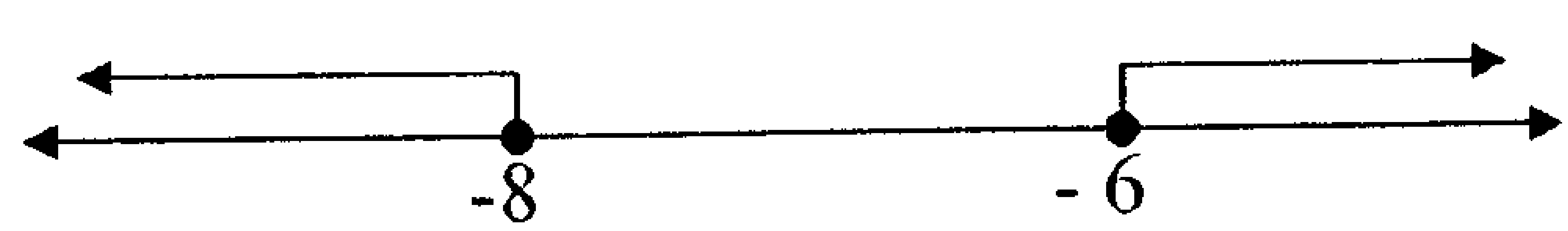
$$g(x)=\sqrt{x+6}$$
$$x+6\geq 0$$
$$x\geq -6$$
$$D_g=[-6,\infty)$$

ثانياً نطاق الدالة h(x):-

$$h(x)=\sqrt{-8-x}$$
$$-8-x\geq 0$$
$$x\leq -8$$
$$D_h=(-\infty,-8]$$

نطاق الدالة F(x):-

$$D_F=D_g\cap D_h$$
$$D_F=[-6,\infty)\cap(-\infty,-8]=\phi$$



(3) $F(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{2x+3}{x-5}$

الـــحـــل

$g(x)=\sqrt{x+1} \quad , \quad h(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$

أولاً نطاق الدالة g(x):-

$g(x)=\sqrt{x+1}$

$x+1\geq 0$

$x\geq -1$

$D_g=[-1,\infty)$

ثانياً نطاق الدالة h(x):-

$h(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$

$x-5=0$

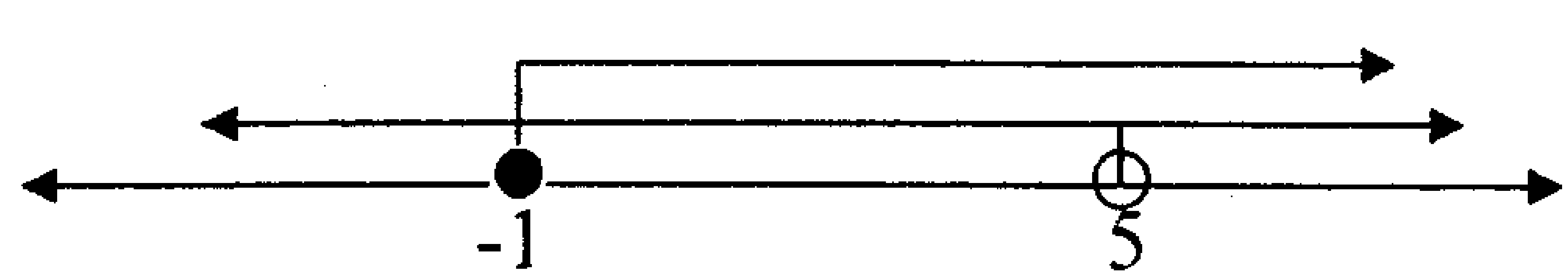
$x=5$

$D_h=R-\{5\}$

نطاق الدالة F(x):-

$D_F=D_g\cap D_h$

$D_F=[-1,\infty)\cap R-\{5\}=[-1,5)\cup(5,\infty)$



$$(4)\quad F(x)=\frac{2x+1}{(x-2)\sqrt{x-5}}$$

الحــل

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}\cdot\frac{2x+1}{(x-2)}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}\quad,\quad h(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

أولاً نطاق الدالة g(x):-

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

$$x-5>0$$

$$x>5$$

$$D_g=(5,\infty)$$

ثانياً نطاق الدالة h(x):-

$$h(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

$$x-2=0$$

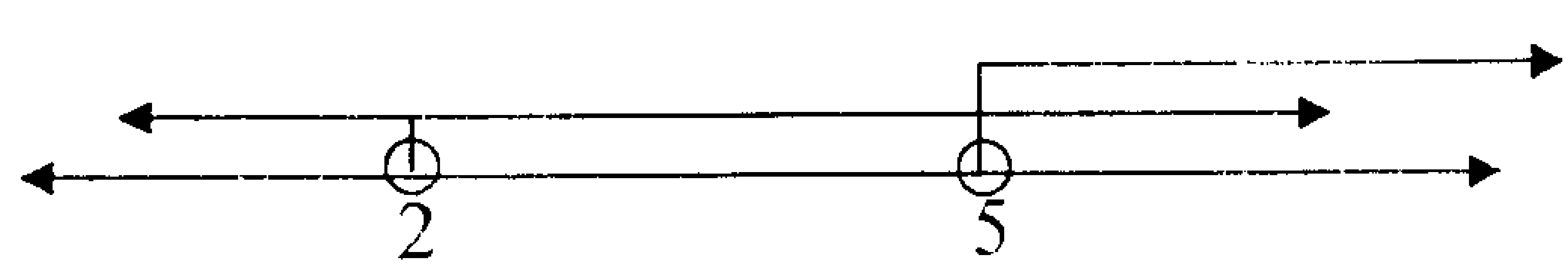
$$x=2$$

$$D_h=R-\{2\}$$

نطاق الدالة F(x):-

$$D_F=D_g\cap D_h$$

$$D_F=(5,\infty)\cap R-\{2\}=(5,\infty)$$



(5) $F(x)=\dfrac{3x-1+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3-x}}$

الحــل

$$F(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{3-x}}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\cdot\sqrt{2x+1}$$

$$g(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{3-x}}\quad,\quad h(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}\quad,\ P(x)=\sqrt{2x+1}$$

أولاً نطاق الدالة g(x),h(x):-

$$g(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{3-x}}$$

$$3-x>0$$

$$x<3$$

$$D_g=D_h=(-\infty,3)$$

ثانياً نطاق الدالة p(x):-

$$p(x)=\sqrt{2x+1}$$

$$2x+1\ge 0$$

$$2x\ge -1$$

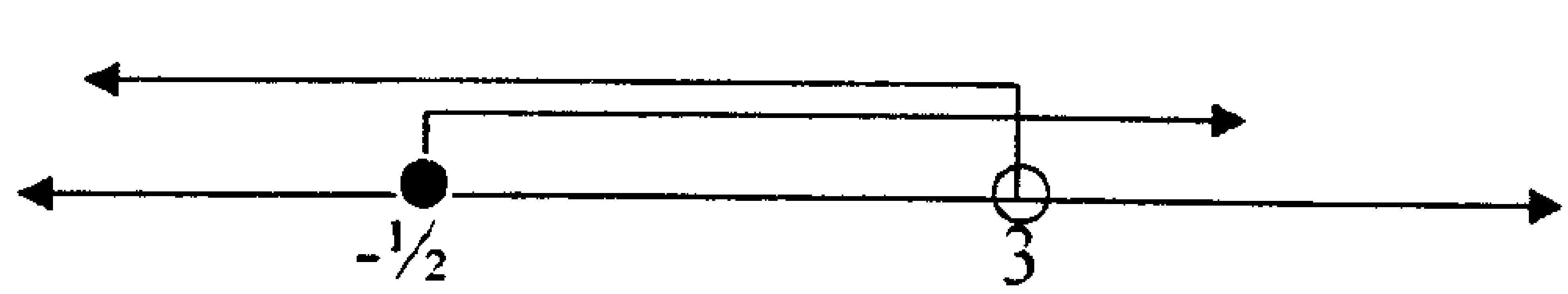
$$x\ge -\frac{1}{2}$$

$$D_h=[-\frac{1}{2},\infty)$$

نطاق الدالة F(x):-

$$D_F=D_g\cap D_p$$

$$D_F=(-\infty,3)\cap[-\frac{1}{2},\infty)=[-\frac{1}{2},3)$$



(6) $F(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}\ -2}$

الـــحـــل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{x-1}\ -2\neq 0$ وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $x-1\geq 0$

أولاً نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً :-

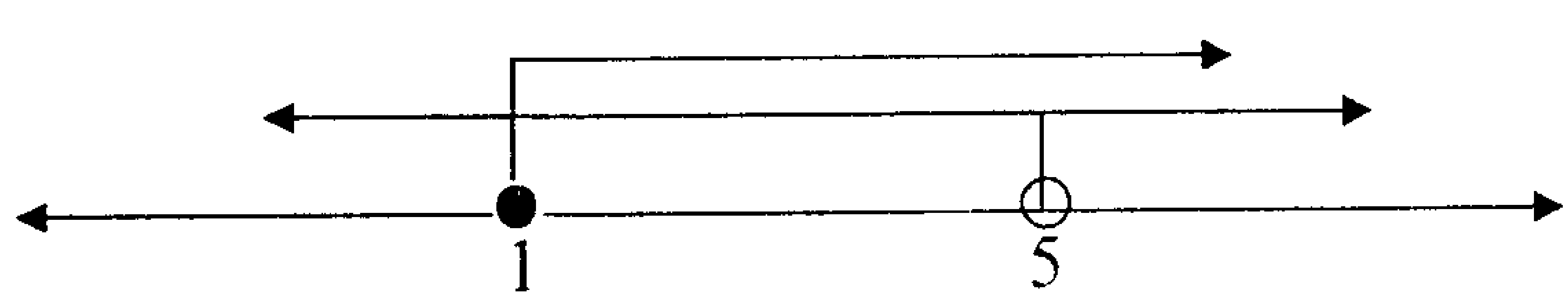
$$\sqrt{x-1}\ -2=0$$
$$\sqrt{x-1}=2$$
$$x-1=4$$
$$x=5\quad , D_1=R-\{5\}$$

ثانياً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

$$x-1\geq 0$$
$$x\geq 1$$
$$D_2=[1,\infty)$$

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F=D_1\cap D_2\ =R-\{5\}\cap[1,\infty)=[1,5)\cup(5,\infty)$$



(7) $F(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x+1}-3}$

الـحـل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{2x+1}-3\neq 0$ وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $2x+1\geq 0$

أولاً نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً :-

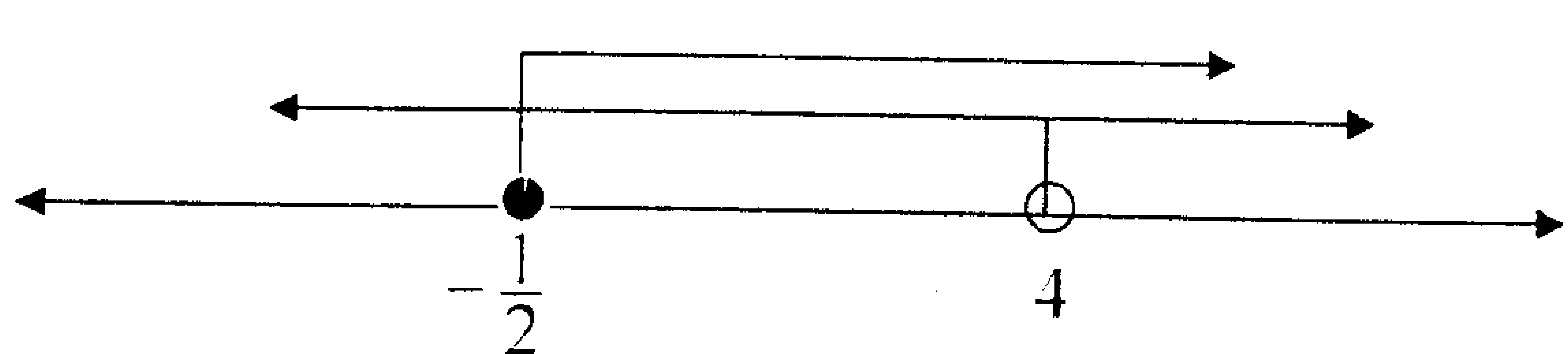
$$\sqrt{2x+1}-3=0$$
$$\sqrt{2x+1}=3$$
$$2x+1=9$$
$$2x=8$$
$$x=4 \quad , D_1=R-\{4\}$$

ثانياً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

$$2x+1\geq 0$$
$$x\geq -\frac{1}{2}$$
$$D_2=[-\frac{1}{2}.\infty)$$

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F=D_1\cap D_2=R-\{4\}\cap[-\frac{1}{2}.\infty)=[-\frac{1}{2}.4)\cup(4.\infty)$$



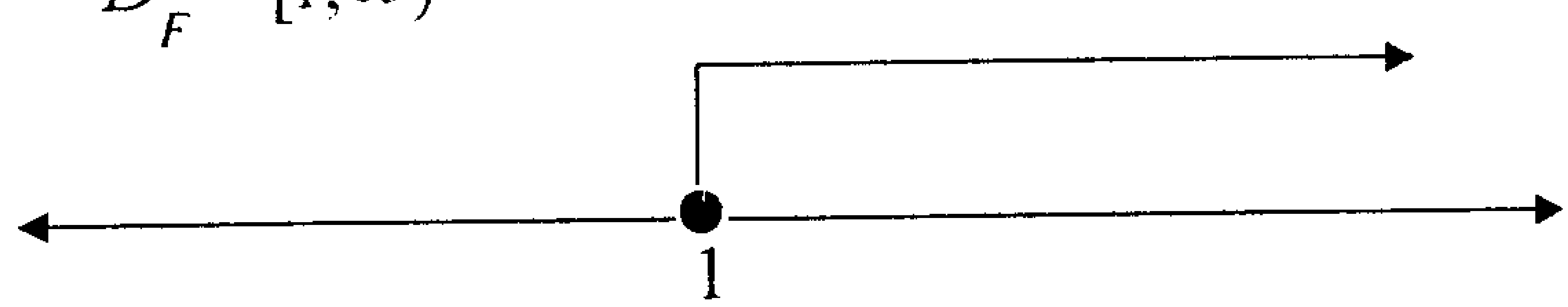
(8) $F(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}\ +2}$

الـحـل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{x-1}\ +2\neq 0$ وحيث أن المقام يتكون من حاصل جمع كميتين موجبتين فلا يمكن أن يساوي صفراً ويمكن للطالب أن يتأكد وذلك بأن يحل المعادلة الجذرية وسيلاحظ أنه لا توجد قيمة تحقق المعادلة الجذرية وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أويساوي صفرا $x-1\geq 0$

نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف فتكون هي نطاق الدالة : -

$$x-1\geq 0$$
$$x\geq 1$$
$$D_F=[1,\infty)$$



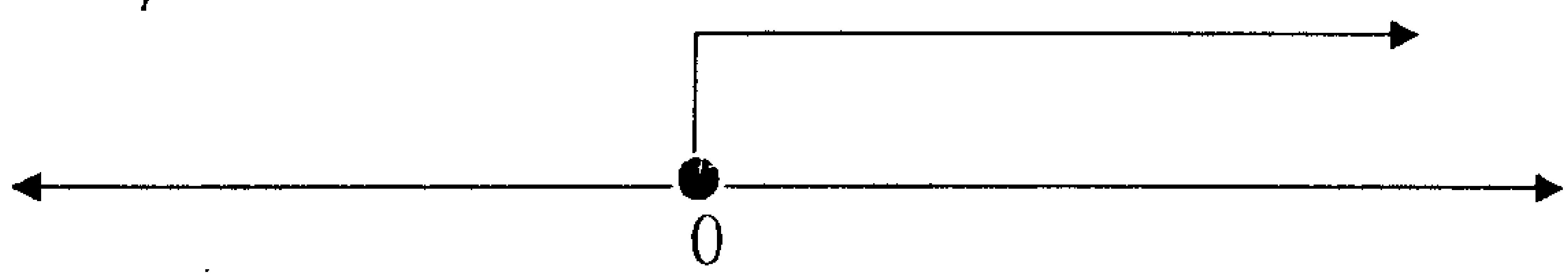
(9) $F(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}\ +3}$

الـحـل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{x}\ +3\neq 0$ وحيث أن المقام يتكون من حاصل جمع كميتين موجبتين فلا يمكن أن يساوي صفراً ويمكن للطالب أن يتأكد وذلك بأن يحل المعادلة الجذرية وسيلاحظ أنه لا توجد قيمة تحقق المعادلة الجذرية

وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $x \geq 0$
نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف فتكون هي نطاق الدالة :-

$$x \geq 0$$
$$x \geq 0$$
$$D_F = [0, \infty)$$



$$(10)\quad F(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

الـــحـــل

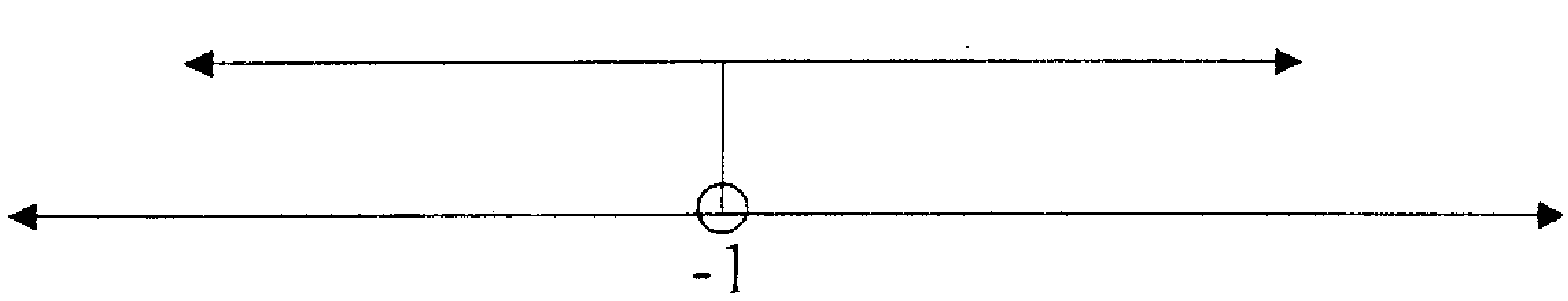
في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt[3]{x} + 1 \neq 0$ وأيضاً حيث أن

الجذر تكعيبي فمسموح أن تأخذ x أي قيمة سالبة فالكميات السالبة تحت الجذر ذا الدليل

الفردي معرفة

نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً :-

$$\sqrt[3]{x} + 1 = 0$$
$$\sqrt[3]{x} = -1$$
$$x = -1$$
$$D_F = R - \{-1\}$$



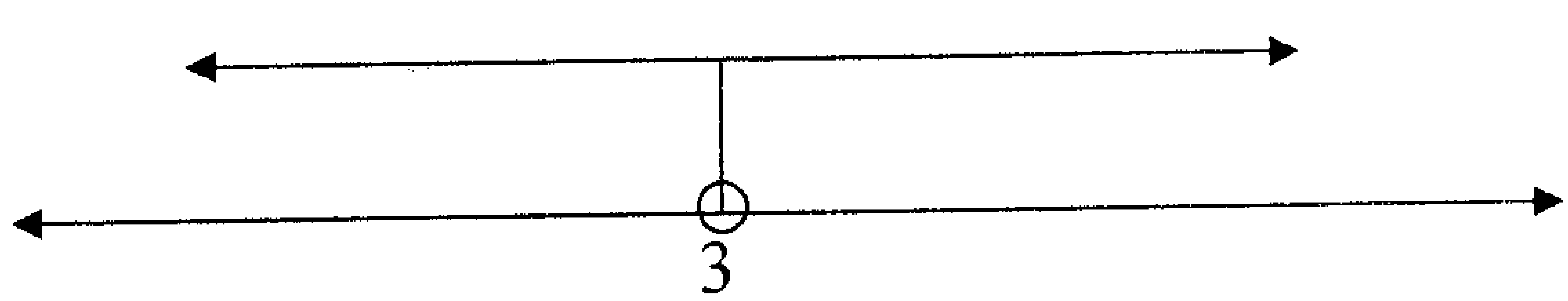
$$(11)\quad F(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x+5}\;-2}$$

الــحــل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt[3]{x+5}\;-2\neq 0$ وأيضاً حيث أن الجذر تكعيبي فمسموح أن تأخذ $x+5$ أي قيمة سالبة فالكميات السالبة تحت الجذر ذا الدليل الفردي معرفة

نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً : -

$$\sqrt[3]{x+5}-2=0$$
$$\sqrt[3]{x+5}=2$$
$$x+5=8$$
$$x=3$$
$$D_F=R-\{3\}$$



(12) $F(x)=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-7}\ -1}$

الـــحـــل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{x-7}\ -1\neq 0$ وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $x-7\geq 0$ وأيضاً $x\geq 0$.

أولاً نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً :-

$\sqrt{x-7}\ -1=0$

$\sqrt{x-7}\ =1$

$x-7=1$

$x=8$

$x=8 \quad , D_1=R-\{8\}$

ثانياً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

$x-7\geq 0$

$x\geq 7$

$D_2=[7,\infty)$

ثالثاً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

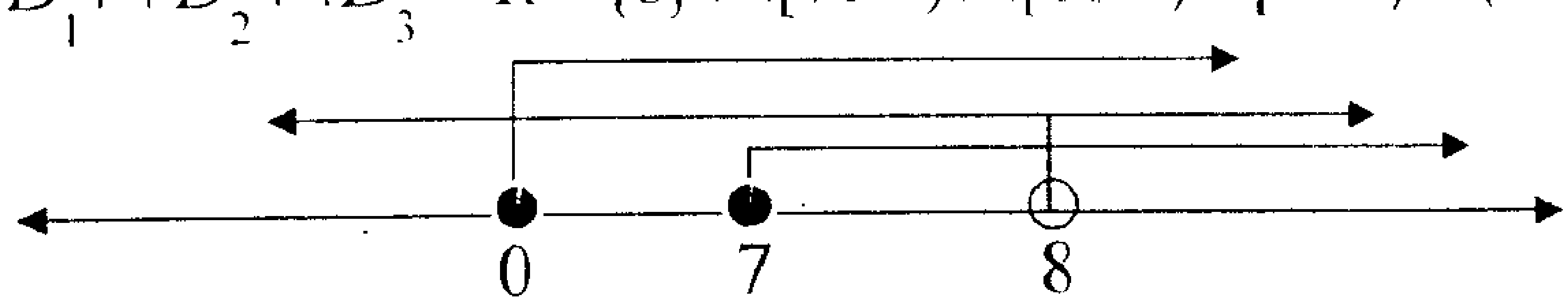
$x\geq 0$

$x\geq 0$

$D_3=[0,\infty)$

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F=D_1\cap D_2\cap D_3=R-\{8\}\cap[7,\infty)\cap[0,\infty)=[7,8)\cup(8,\infty)$$



(13) $F(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-2}\ -3}$

الـــحـــل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{x-2}\ -3\neq 0$ وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $x-2\geq 0$ وأيضاً $x+1\geq 0$.

أولاً نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً : -

$$\sqrt{x-2}\ -3=0$$
$$\sqrt{x-2}\ =3$$
$$x-2=9$$
$$x=11$$
$$x=11\quad ,D_1=R-\{11\}$$

ثانياً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف : -

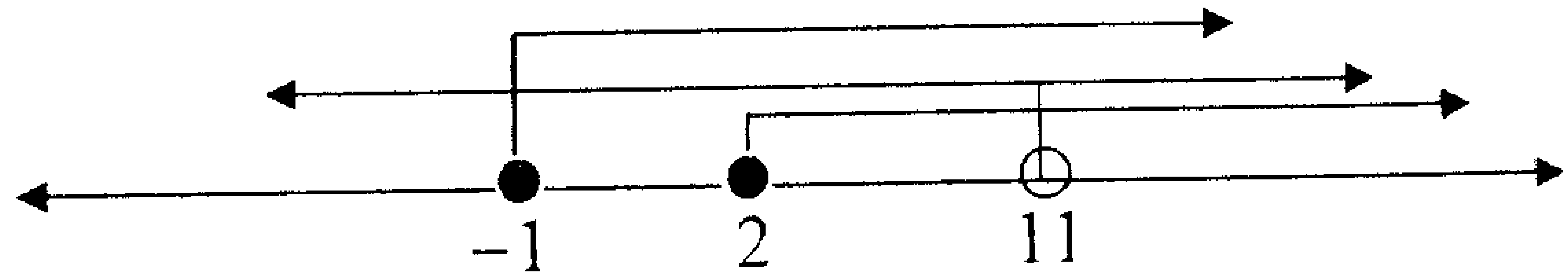
$$x-2\geq 0$$
$$x\geq 2$$
$$D_2=[2,\infty)$$

ثالثاً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف : -

$$x+1\geq 0$$
$$x\geq -1$$
$$D_3=[-1,\infty)$$

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F=D_1\cap D_2\cap D_3\ =R-\{11\}\cap[2,\infty)\cap[-1,\infty)=[2,11)\cup(11,\infty)$$



$$(14)\ F(x)=\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{2x}\ +3}$$

الـحـل

في هذه الحالة يجب أن يكون المقام لا يساوي صفراً $\sqrt{2x}\ +3\neq 0$ وفي نفس الوقت لابد أن يكون ما تحت الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي صفراً $2x\geq 0$ وأيضاً $x+1\geq 0$.

أولاً نعين القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً :-

وحيث أن المقام يتكون من حاصل جمع كميتين موجبتين فلا يمكن أن يساوي صفراً

ويمكن للطالب أن يتأكد وذلك بأن يحل المعادلة الجذرية وسيلاحظ أنه لا توجد قيمة

تحقق المعادلة الجذرية فالمقام لا يساوي صفراً مطلقاً

ثانياً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

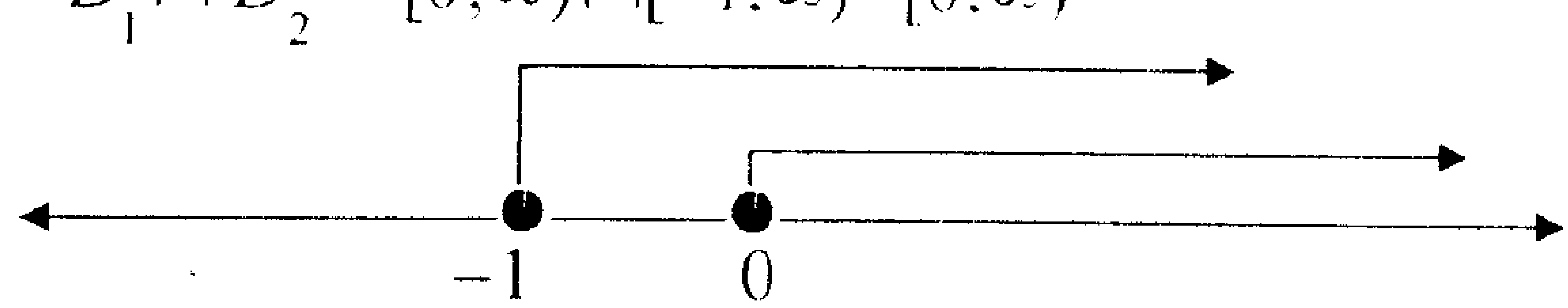
$$2x\geq 0$$
$$x\geq 0$$
$$D_1=[0,\infty)$$

ثالثاً نعين القيم التي تجعل الجذر التربيعي معرف :-

$$x+1\geq 0$$
$$x\geq -1$$
$$D_2=[-1,\infty)$$

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F=D_1\cap D_2=[0,\infty)\cap[-1,\infty)=[0,\infty)$$



(15) $F(x)=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}$

الحـــل

$(a)5+\sqrt{x-1}\geq 0$

$\sqrt{x-1}\geq -5$

$x-1\geq 25$

$x\geq 26$

$D_1=[26,\infty)$

$(b)x-1\geq 0$

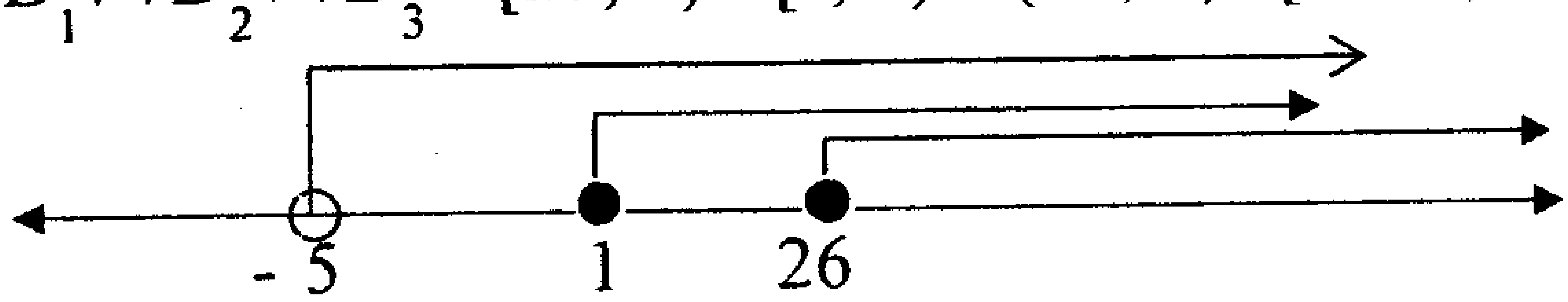
$x\geq 1$

$D_2=[1,\infty)$

$(c)D_3=(-5,\infty)$ المطلوب الجذر التربيعي لـ x-1 أكبر من أو يساوي 5 -

نطاق الدالة F(x) : -

$D_F=D_1\cap D_2\cap D_3=[26,\infty)\cap[1,\infty)\cap(-5,\infty)=[26,\infty)$



(16) $F(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$

الحـــل

$(a)\,1-\sqrt{x}\geq 0$

$\sqrt{x}\leq 1$

$x\leq 1$

$D_1=(-\infty,1]$

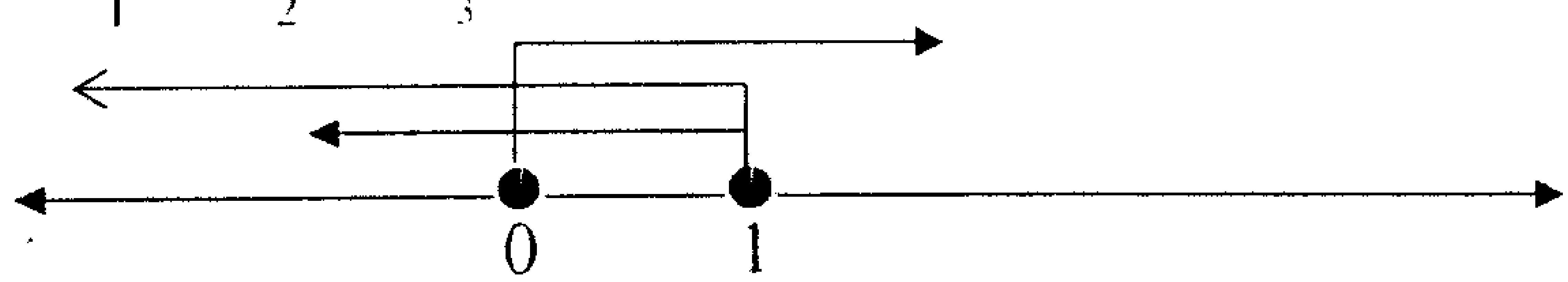
$(b)\, x \geq 0$

$D_2 = [0, \infty)$

$(c)\, D_3 = (-\infty, 1]$ المطلوب الجذر التربيعي لـ x أصغر من أو يساوي 1

نطاق الدالة F(x) :-

$$D_F = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (-\infty, 1] \cap [0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$



$(17)\quad F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x+1} - 5}$

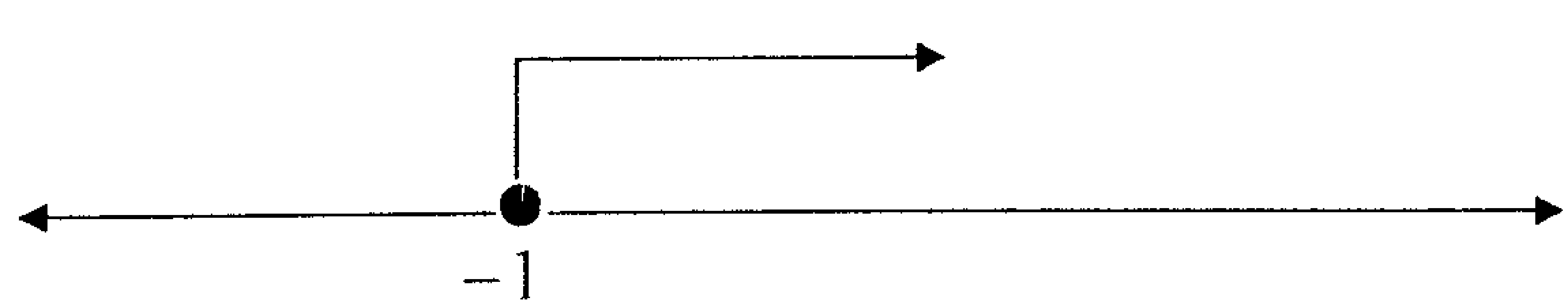
الـحـل

بما أن الجذر تكعيبي فإنه مسموح أن تأخذ $\sqrt{x+1} - 5$ أي قيمة سالبة فالكميات السالبة تحت الجذر ذا الدليل الفردي معرفة

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$D_F = [-1, \infty)$



مدى الـدوال الـحـقـيـقـيـة

قبل أن نتطرق إلى مدى الدوال الحقيقية سوف نذكر ضابط يساعد بشكل كبير في رسم بيان الدوال الحقيقية فإذا كانت $F(x)=g(x)$ أي دالة حقيقية مهما كان نوعها فإن : -

$$F(x)=g(x)$$

$F(x)=g(x)+C$
في هذه الحالة بيان الدالة
يرتفع إلى أعلى مسافة C

$F(x)=g(x)-C$
في هذه الحالة بيان الدالة
يهبط إلى أسفل مسافة C

$$F(x)=g(x)$$

$F(x)=g(x+c)$
في هذه الحالة بيان الدالة
يتجه إلى اليسار مسافة C

$F(x)=g(x-c)$
في هذه الحالة بيان الدالة
يتجه إلى اليمين مسافة C

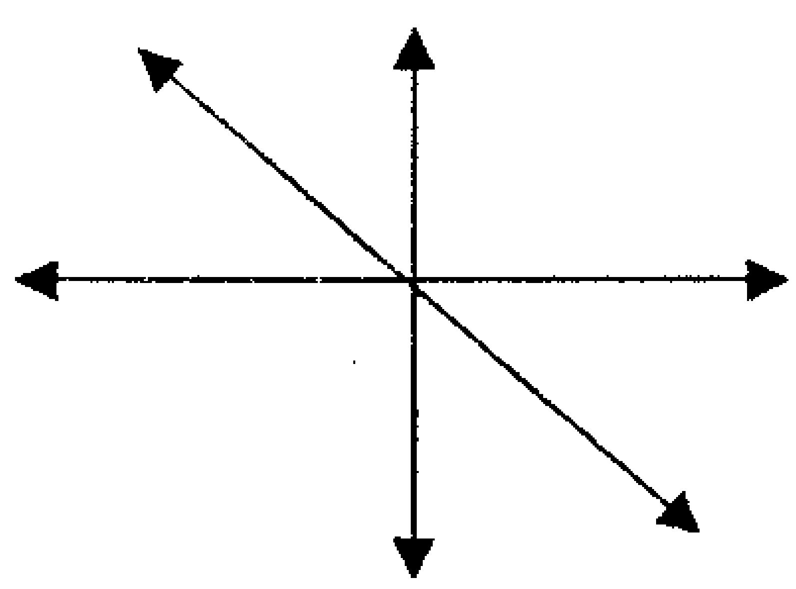
أولاً مدى الدوال الحدودية : الدوال الحدودية لها عدة أنواع :

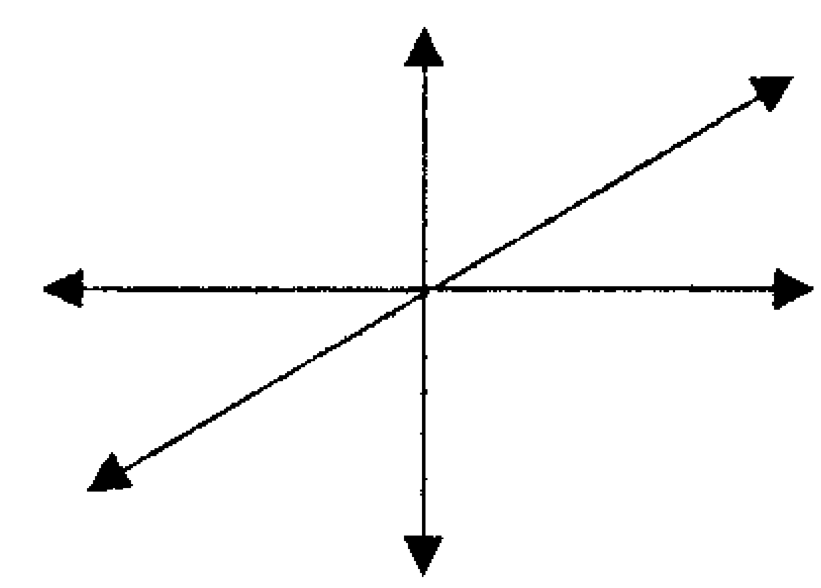
النوع الأول : مدى دالة الخط المستقيم $F(x)=ax+b \quad , \quad b, a\in R$

مدى هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $R_F = R = (-\infty, \infty)$ ويرسم بيان دالة الخط المستقيم بطريقة بسيطة كما يلي :

$$F(x)=ax$$

$F(x)=-ax$ | $F(x)=ax$





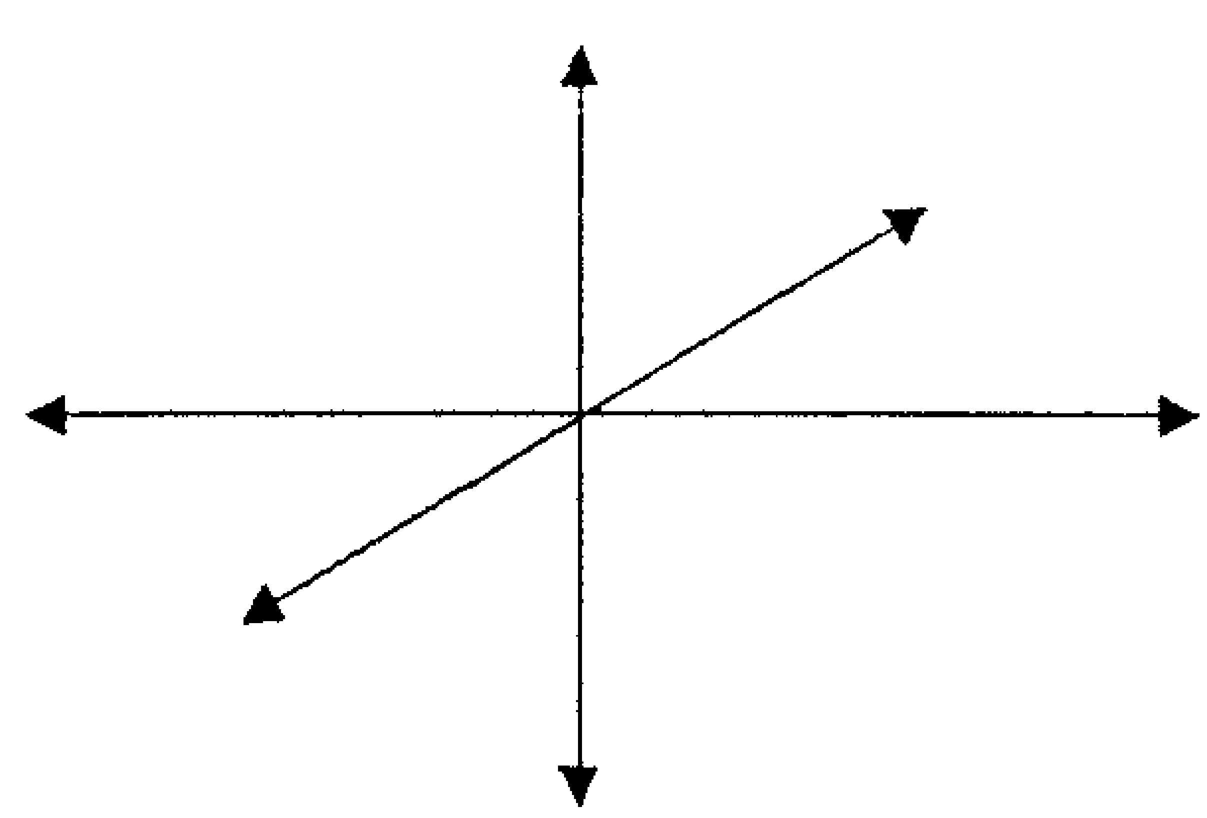
مـثـال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

(1) $F(x)=2x$

الـحـل

$y=2x$

$R_F=(-\infty,\infty)$

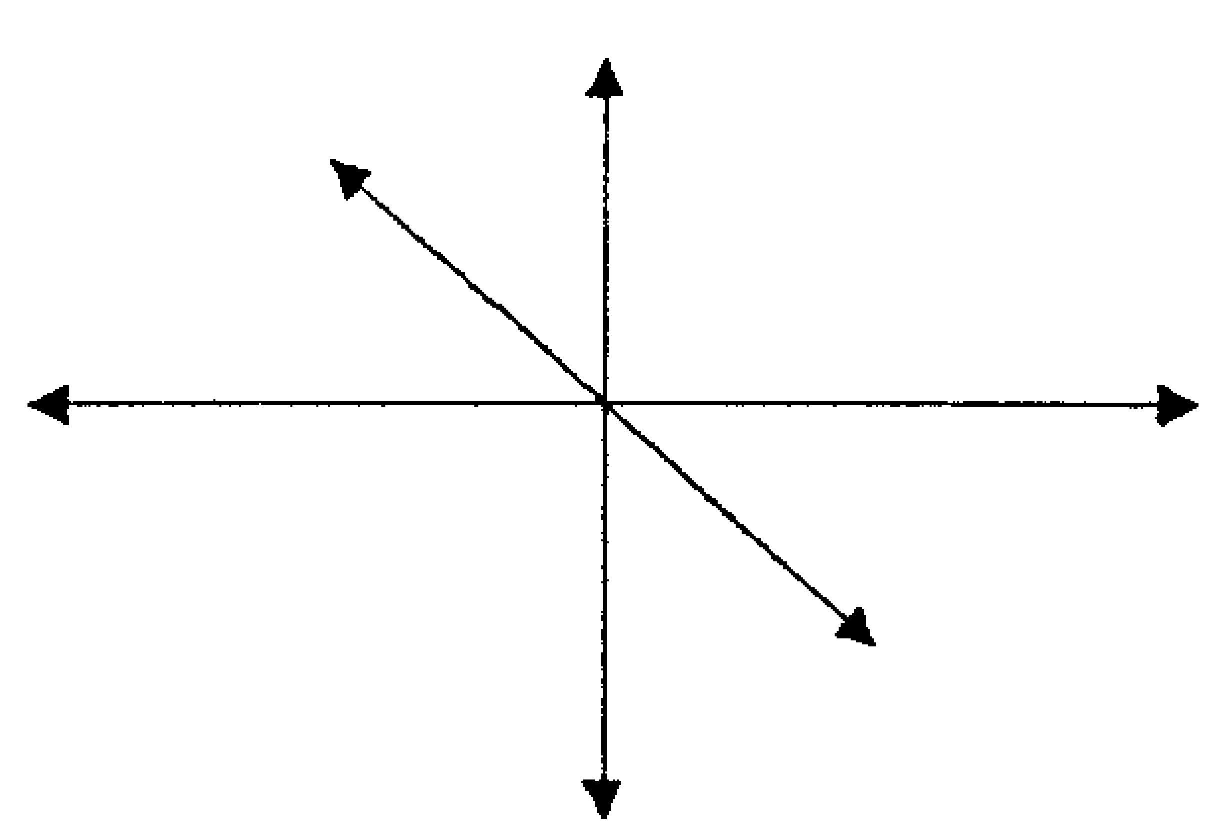


(2) $F(x)=-\frac{2}{3}x$

الـحـل

$y=-\frac{2}{3}x$

$R_F=(-\infty,\infty)$

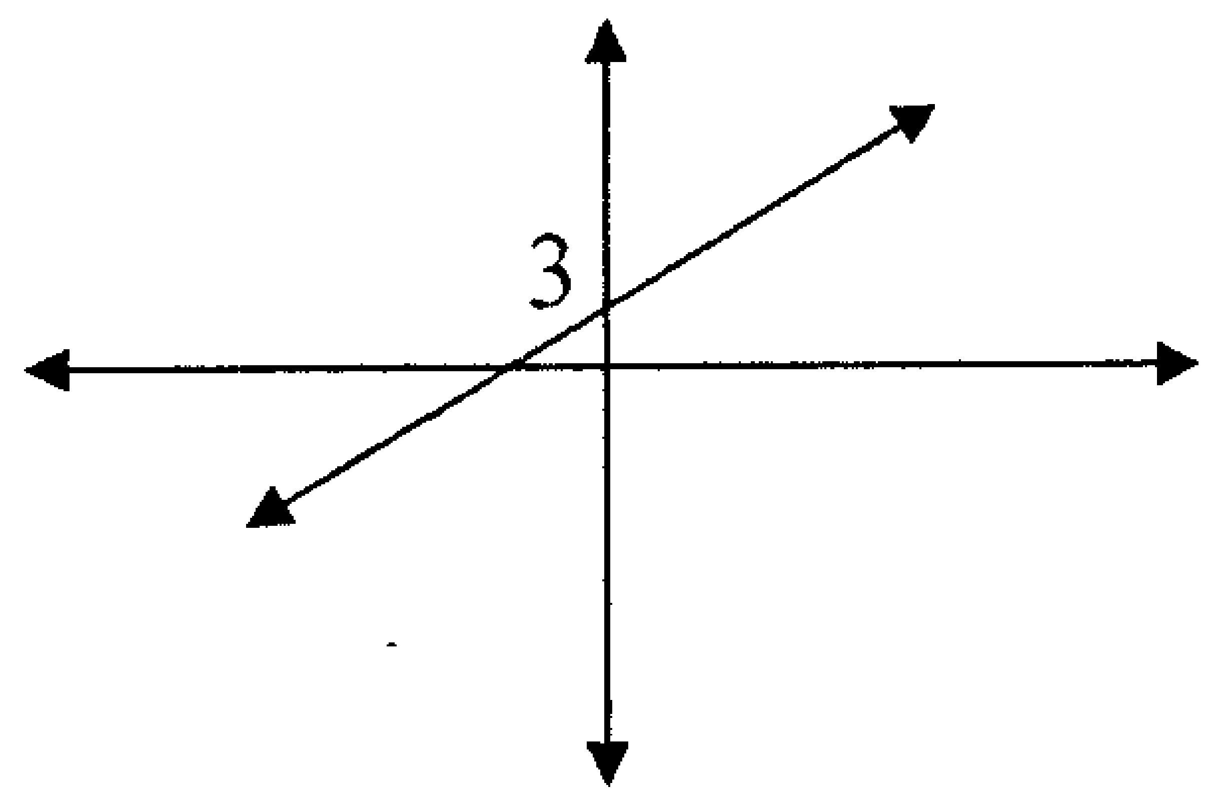


(3) $F(x)=x+3$

الحل

$y=x+3$

$R_F=(-\infty,\infty)$

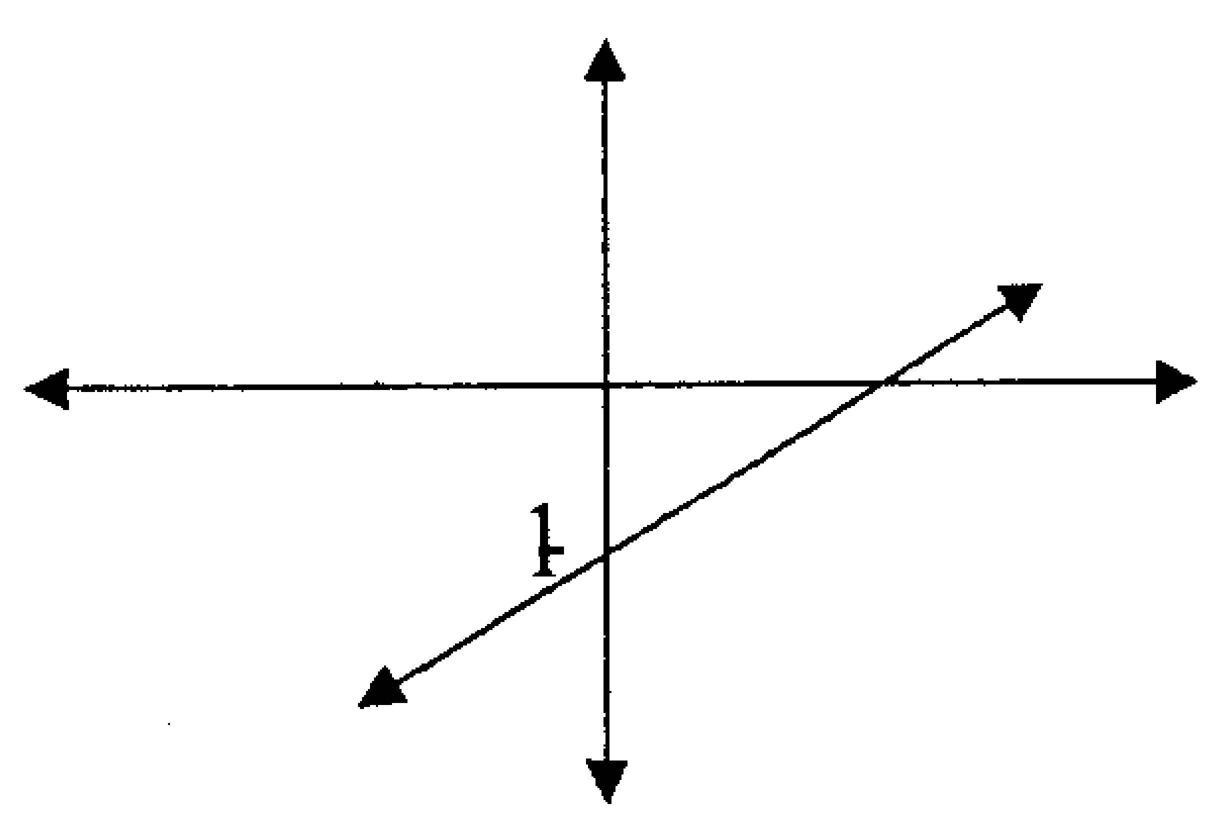


(4) $F(x)=2x-1$

الحل

$y=2x-1$

$R_F=(-\infty,\infty)$

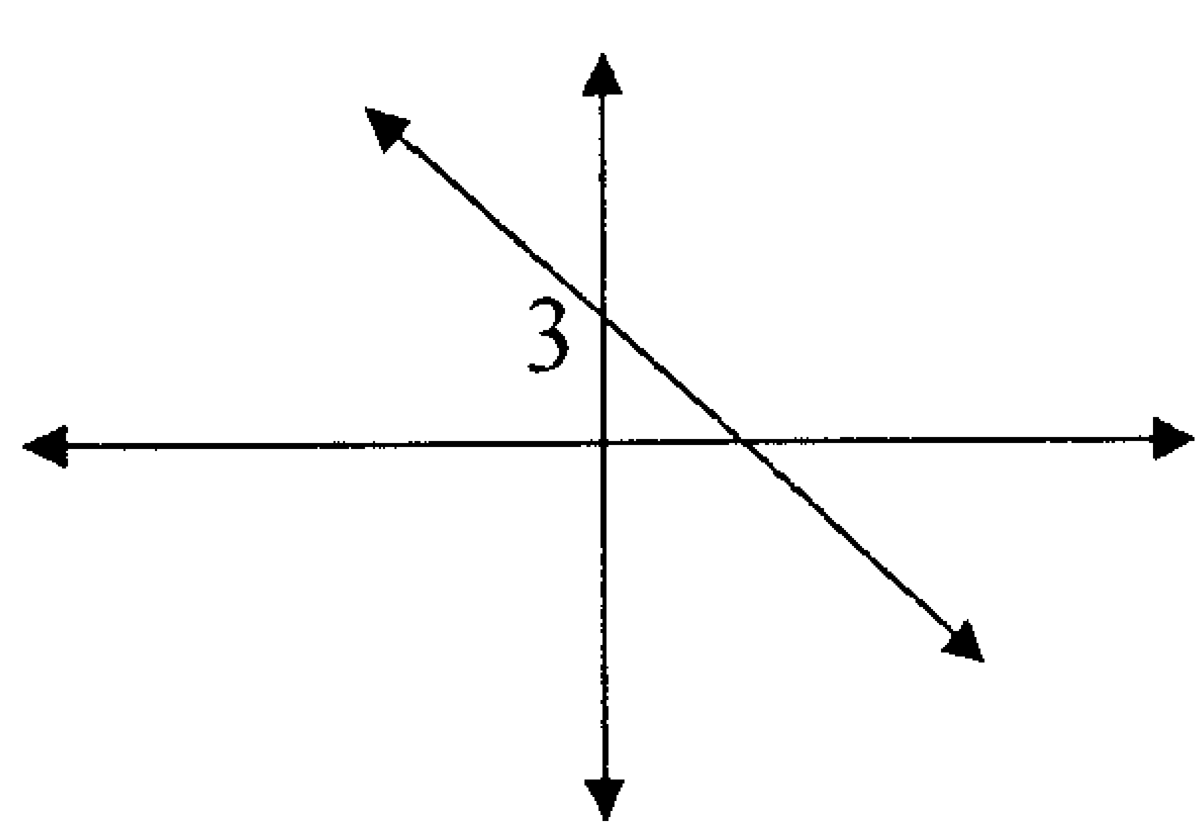


(5) $F(x)=3-2x$

الحل

$y=3-2x$

$R_F=(-\infty,\infty)$

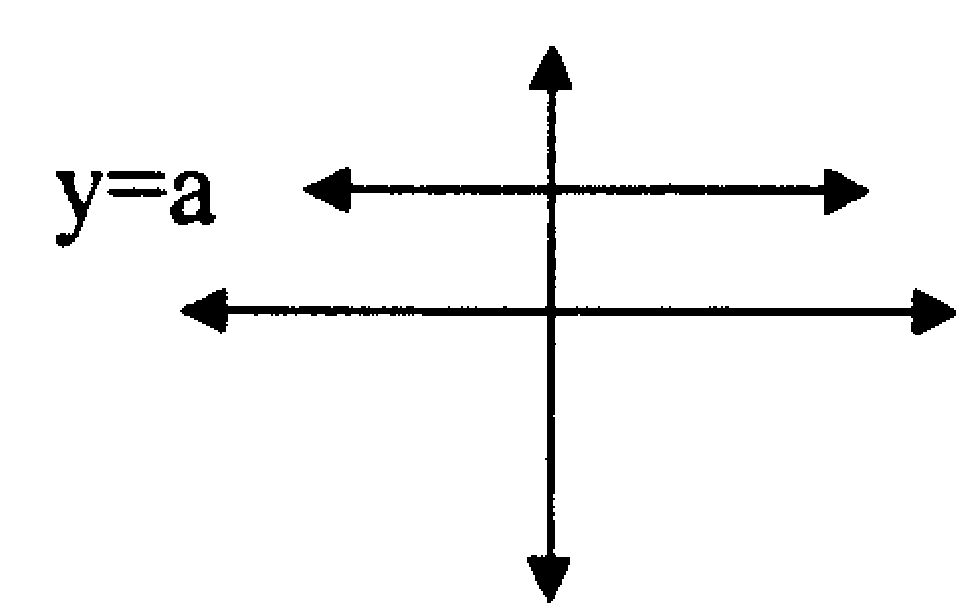


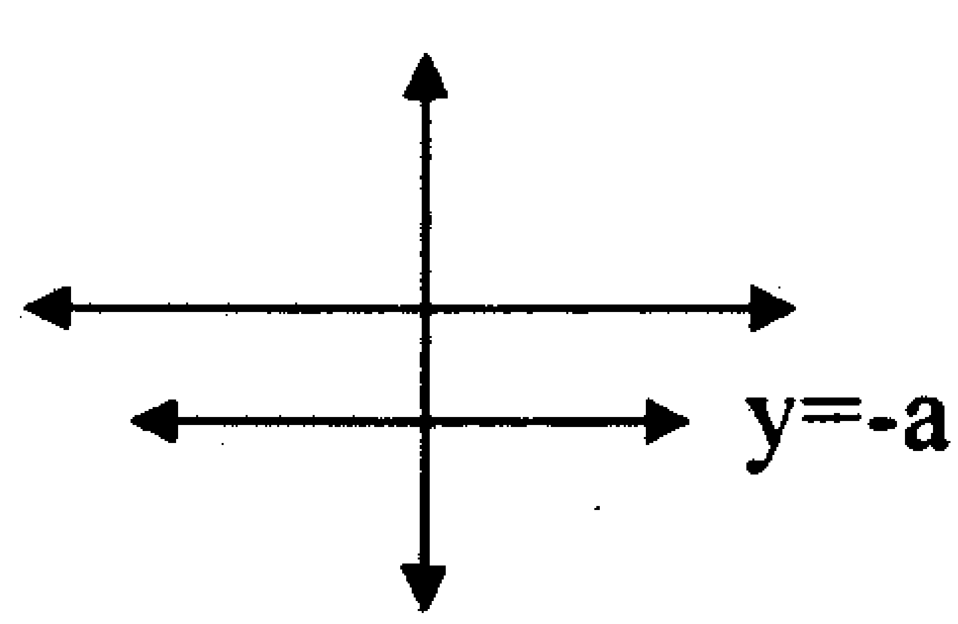
النوع الثاني :- مدى الدالة الثابتة $F(x)=a \quad , a\in R$

مدى هذه الدالة هو $R_F=\{a\}$ ويرسم بيان الدالة الثابتة بطريقة بسيطة كما يلي :

$$F(x)=a$$

$F(x)=a$ ← → $F(x)=-a$



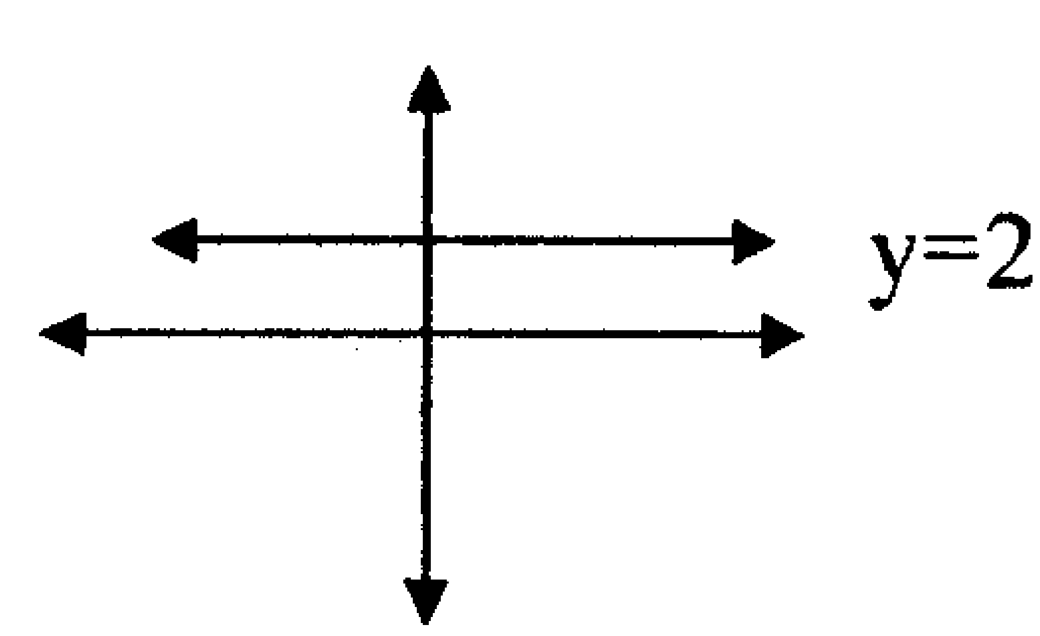


مــثــال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

(1) $F(x)=2$

الـحـل

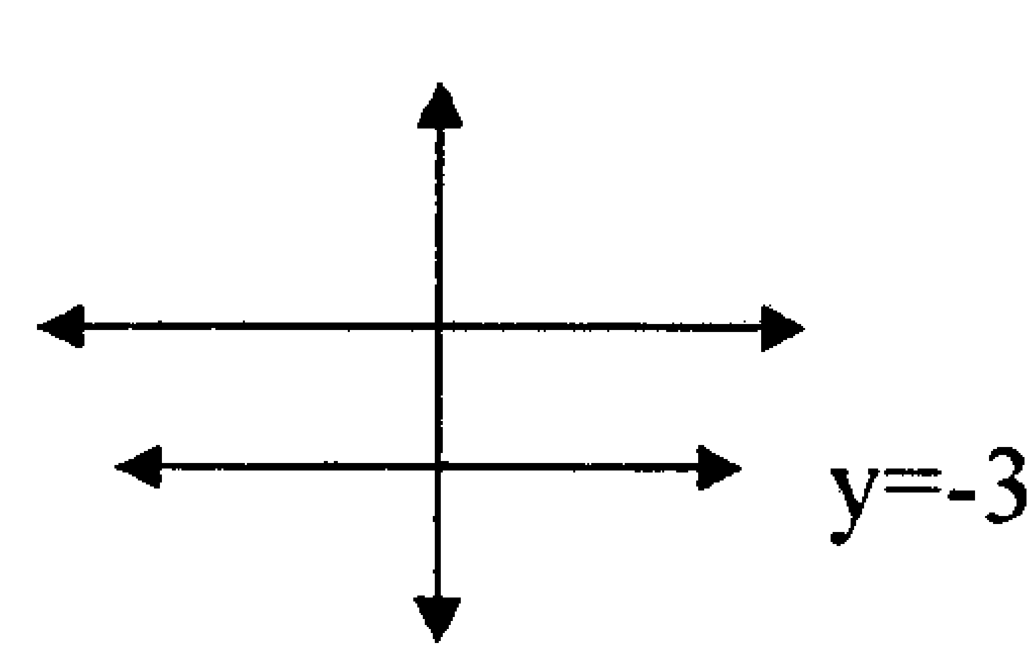
$R_F=\{2\}$



(2) $F(x)=-3$

الـحـل

$R_F=\{-3\}$



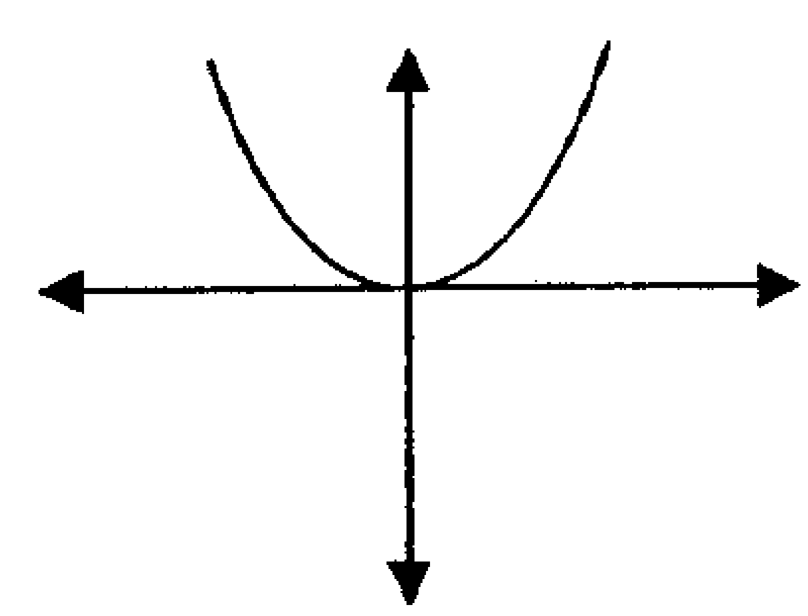
النوع الثالث :- مدى الدالة التربيعية ولها عدة صور :

الصورة الأولى : $a \in R$, $F(x) = ax^2$

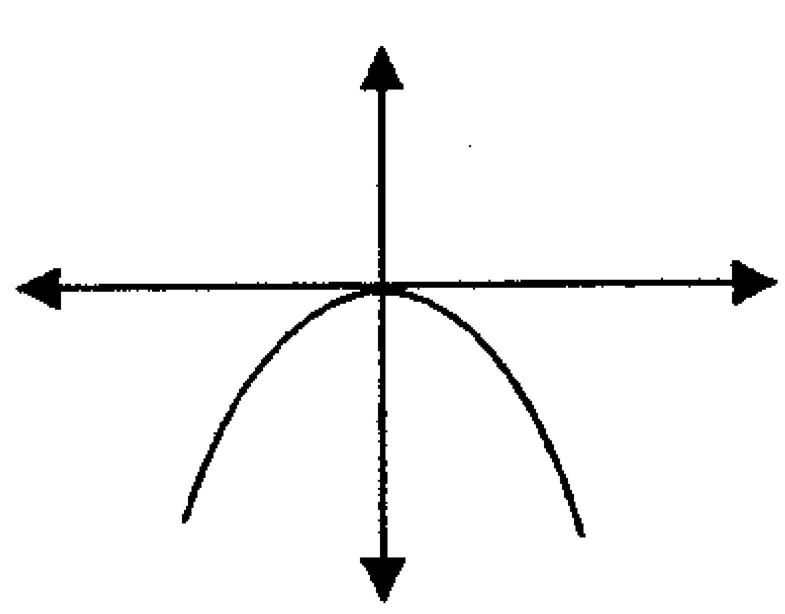
ويرسم بيان الدالة التربيعية بطريقة بسيطة كما يلي :

$$F(x) = ax^2$$

$$F(x) = ax^2$$
$$R_F = [0, \infty)$$

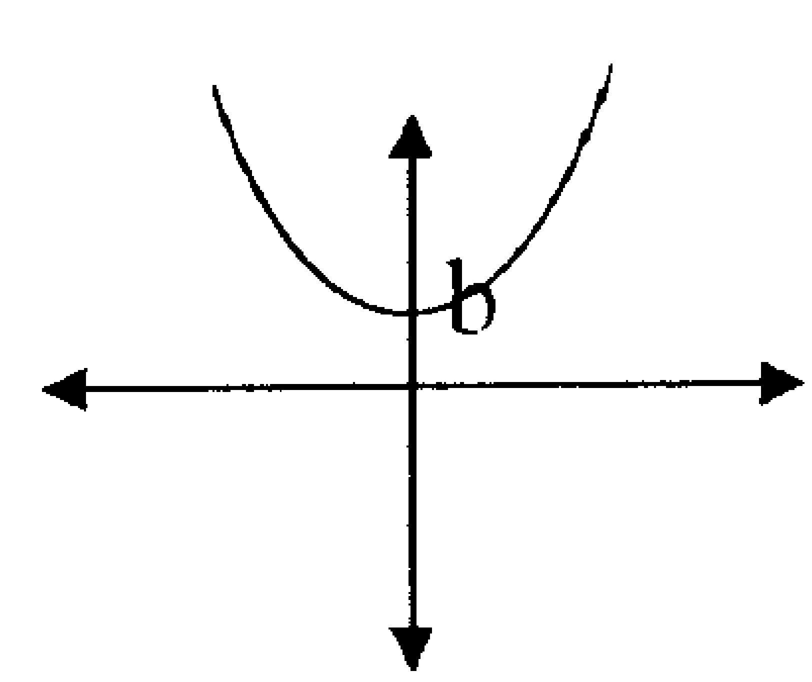


$$F(x) = -ax^2$$
$$R_F = (-\infty, 0]$$

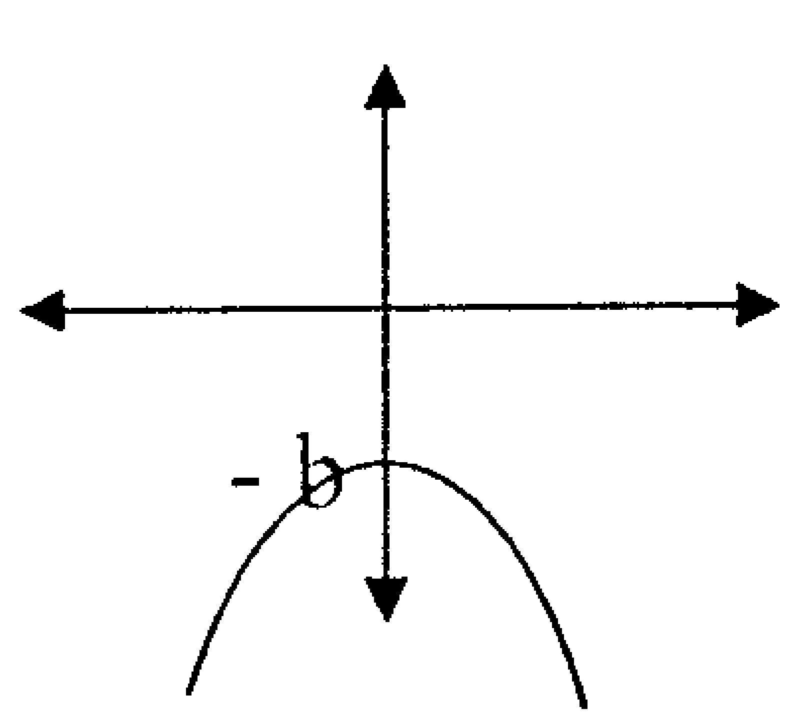


$$F(x) = ax^2 + b$$

$$F(x) = ax^2 + b$$
$$R_F = [b, \infty)$$



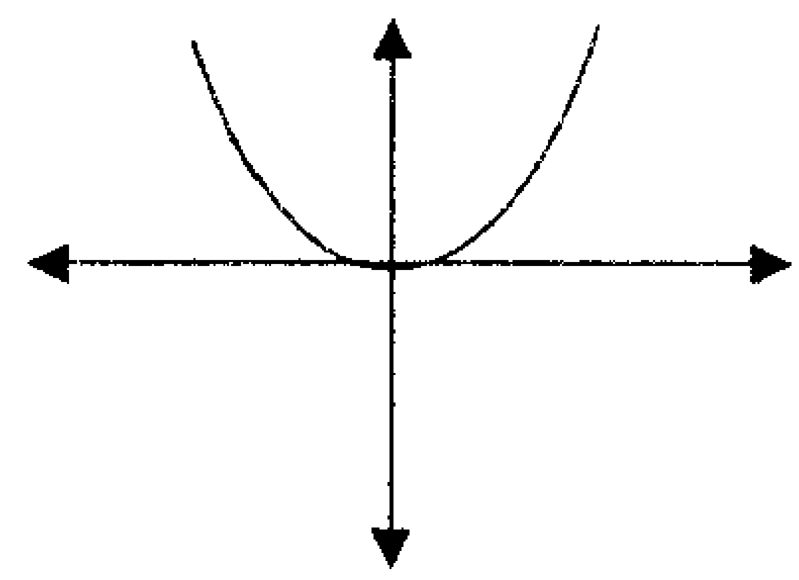
$$F(x) = -ax^2 - b$$
$$R_F = (-\infty, -b]$$



مـثـال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1) F(x)=2x^2$

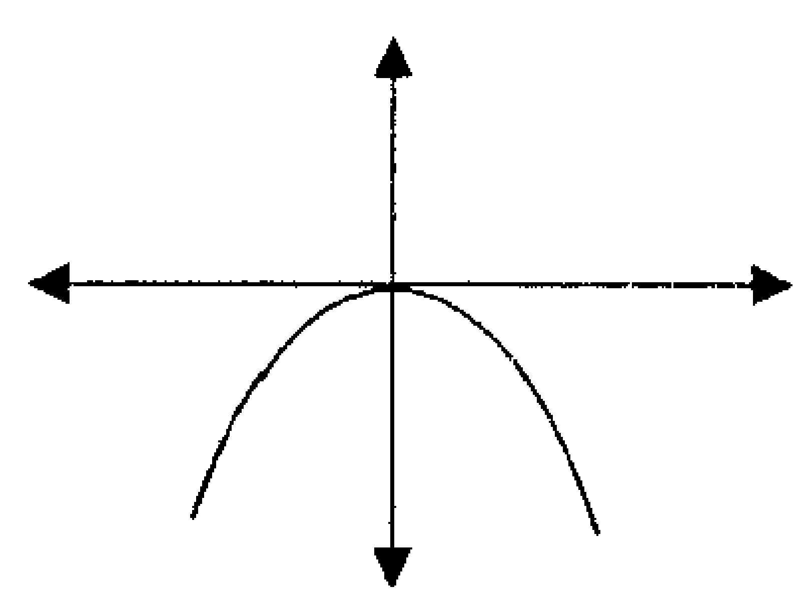
الـحـل



$R_F=[0,\infty)$

$(2) F(x)=-2x^2$

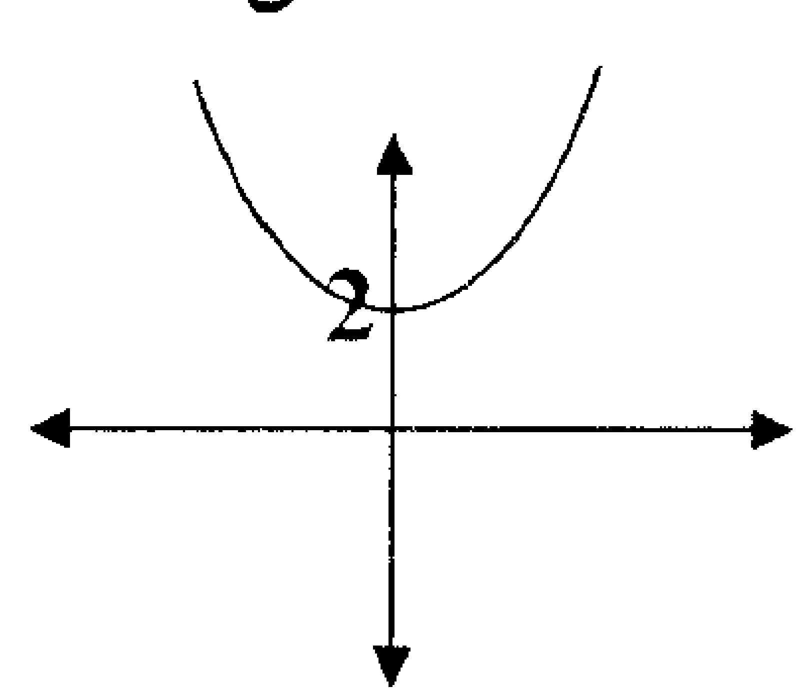
الـحـل



$R_F=(-\infty,0]$

$(3) F(x)=\frac{1}{2}x^2+2$

الـحـل

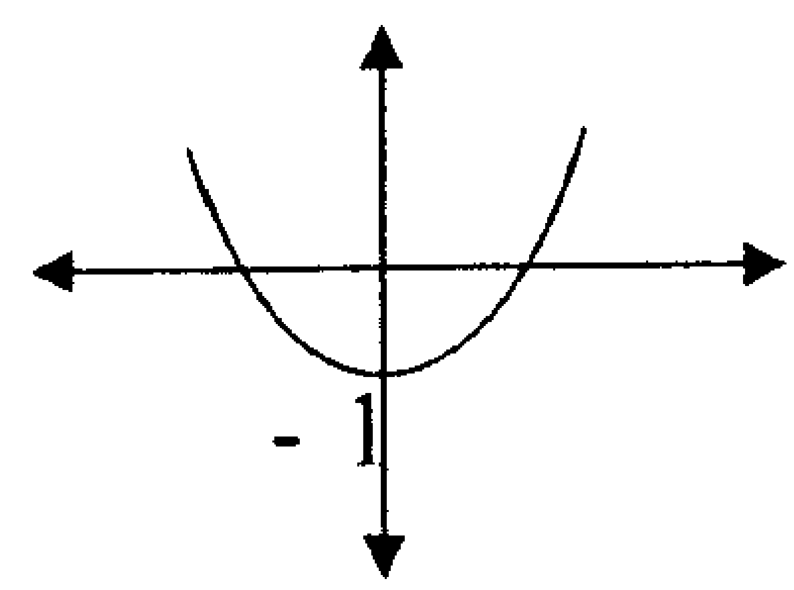


$R_F=[2,\infty)$

$(4) F(x) = x^2 - 1$

الحــل

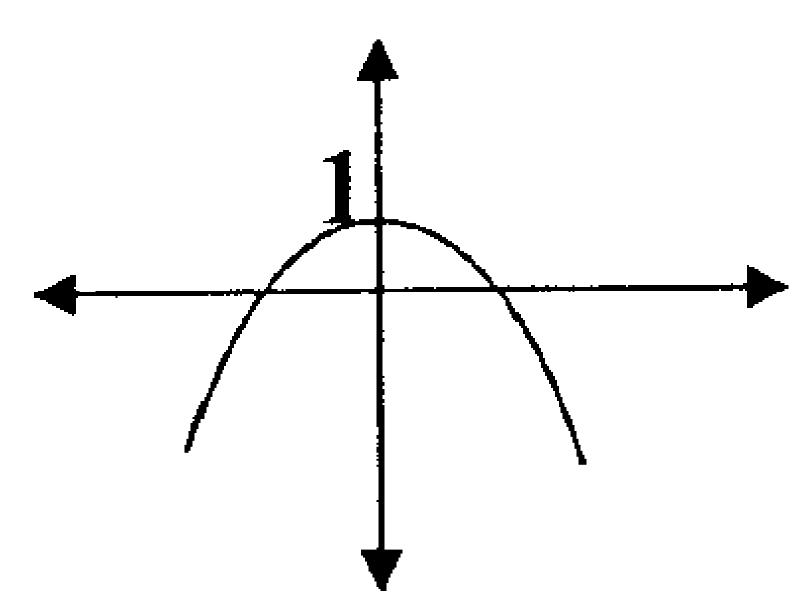
$R_F = [-1, \infty)$



$(5) F(x) = -x^2 + 1$

الحــل

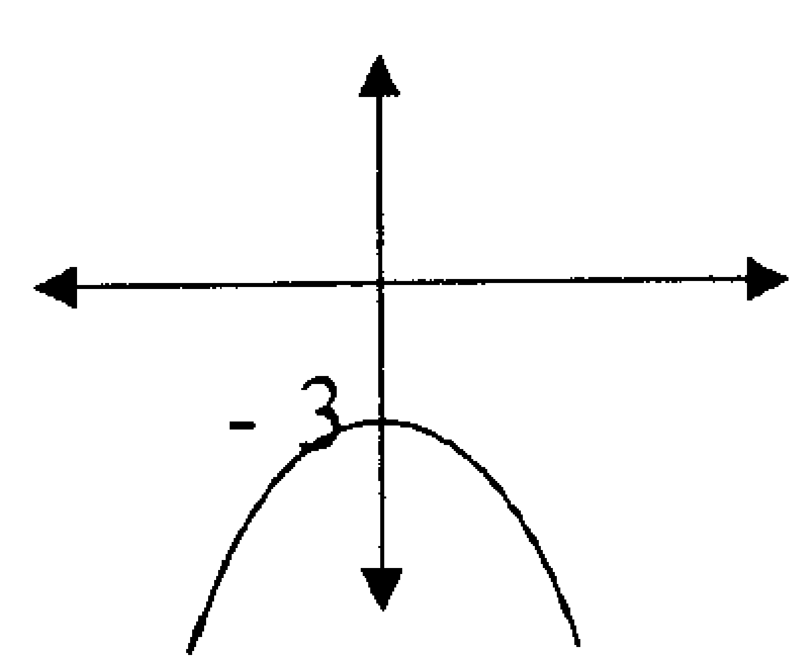
$R_F = (-\infty, 1]$



$(6) F(x) = -x^2 - 3$

الحــل

$R_F = (-\infty, -3]$



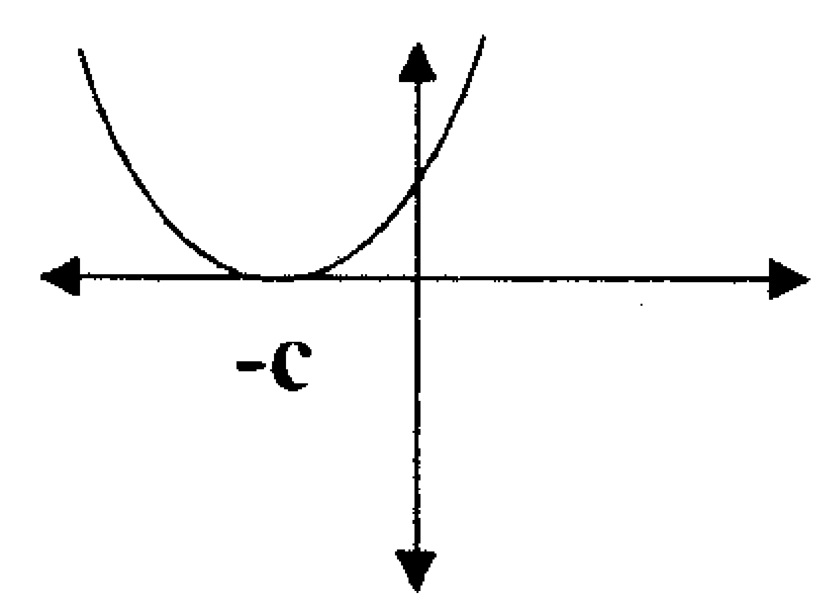
الصورة الثانية : $F(x)=(x+c)^2 \quad , c \in R$

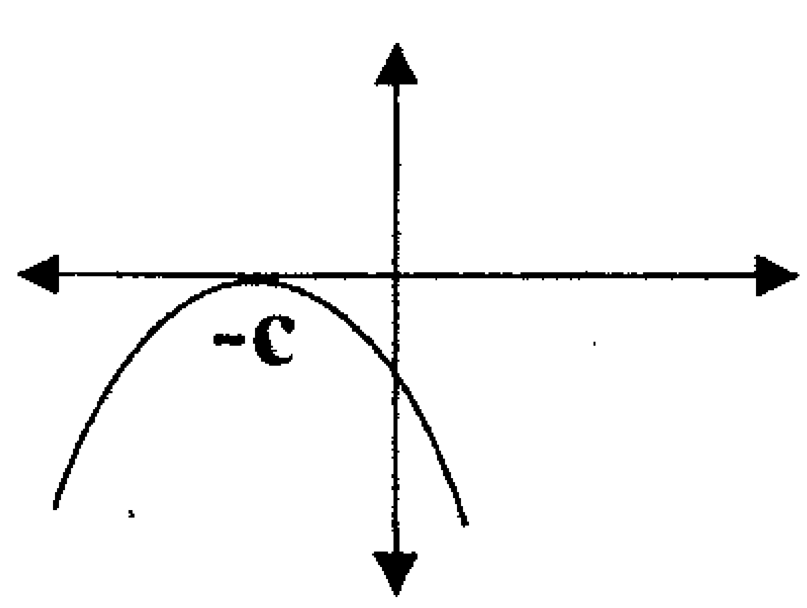
ويرسم بيان الدالة التربيعية بطريقة بسيطة كما يلي :

$$F(x)=(x+c)^2$$

$F(x)=(x+c)^2$	$F(x)=-(x+c)^2$
$R_F=[0,\infty)$	$R_F=(-\infty,0]$

$$x+c=0 \;\therefore\; x=-c$$





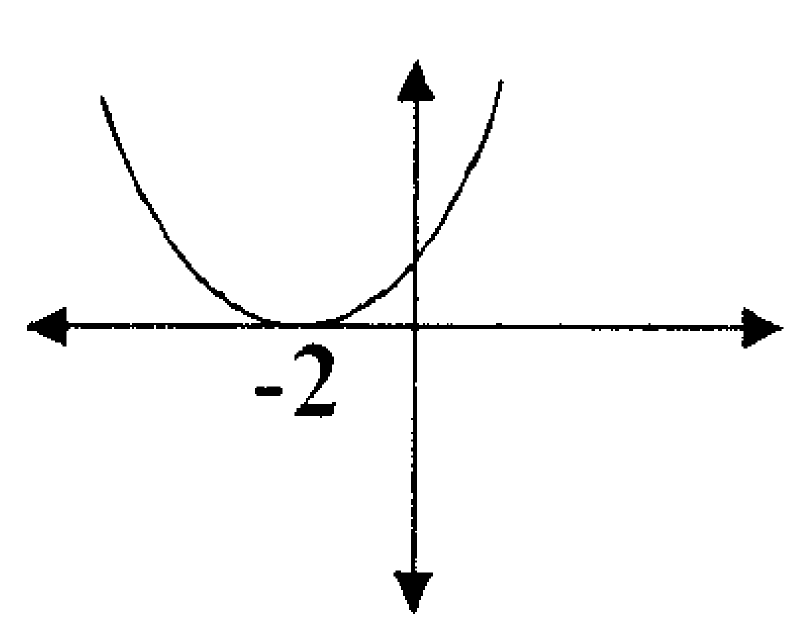
مـثـــال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1) F(x)=(x+2)^2$

الــحـــل

$x+2=0 \;\therefore\; x=-2, y=0$

$R_F=[0,\infty)$

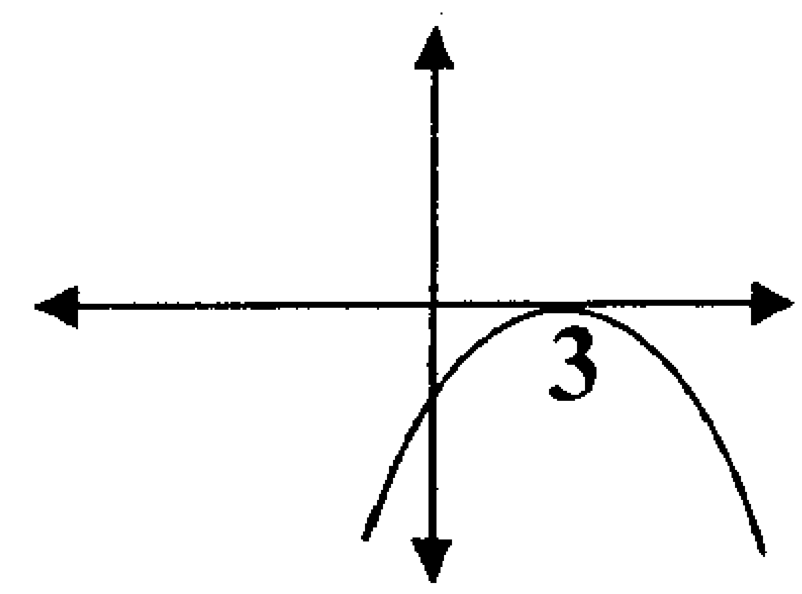


$(2)F(x)=-(2x-6)^2$

الـحـل

$2x-6=0 \therefore x=3, y=0$

$R_F=(-\infty,0]$

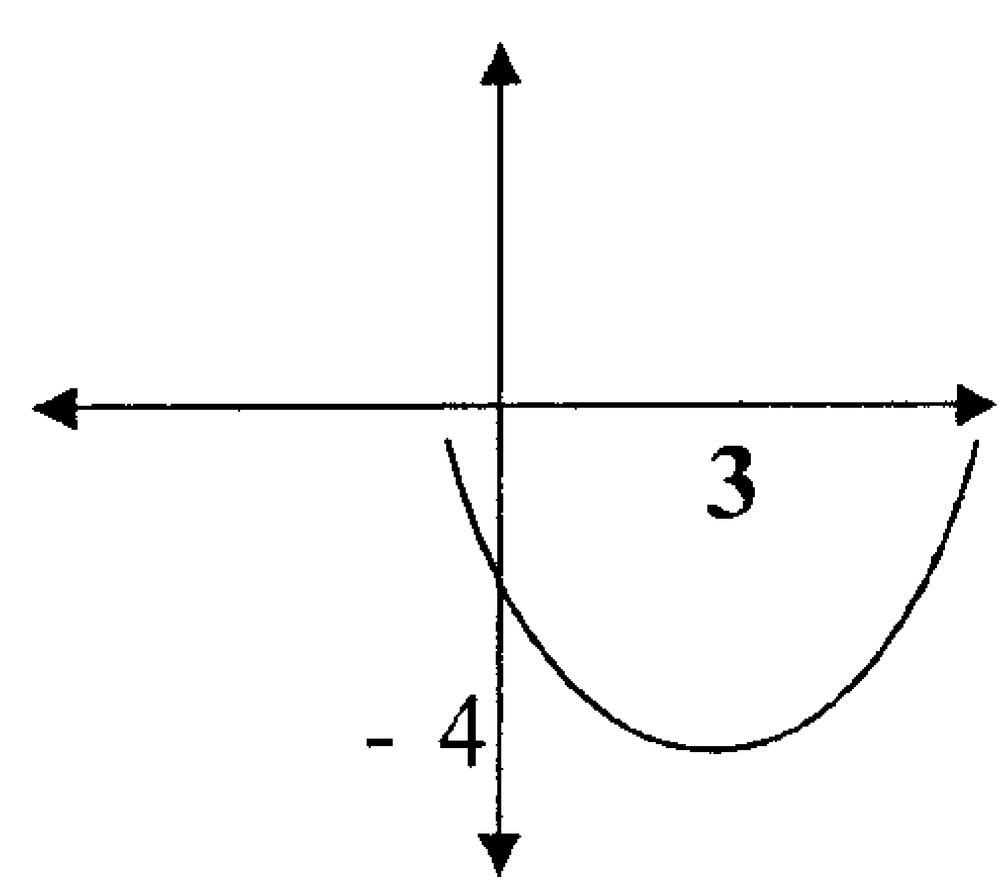


$(3)F(x)=(x-3)^2-4$

الـحـل

$x-3=0 \therefore x=3 \ , y=-4$

$R_F=[-4,\infty)$

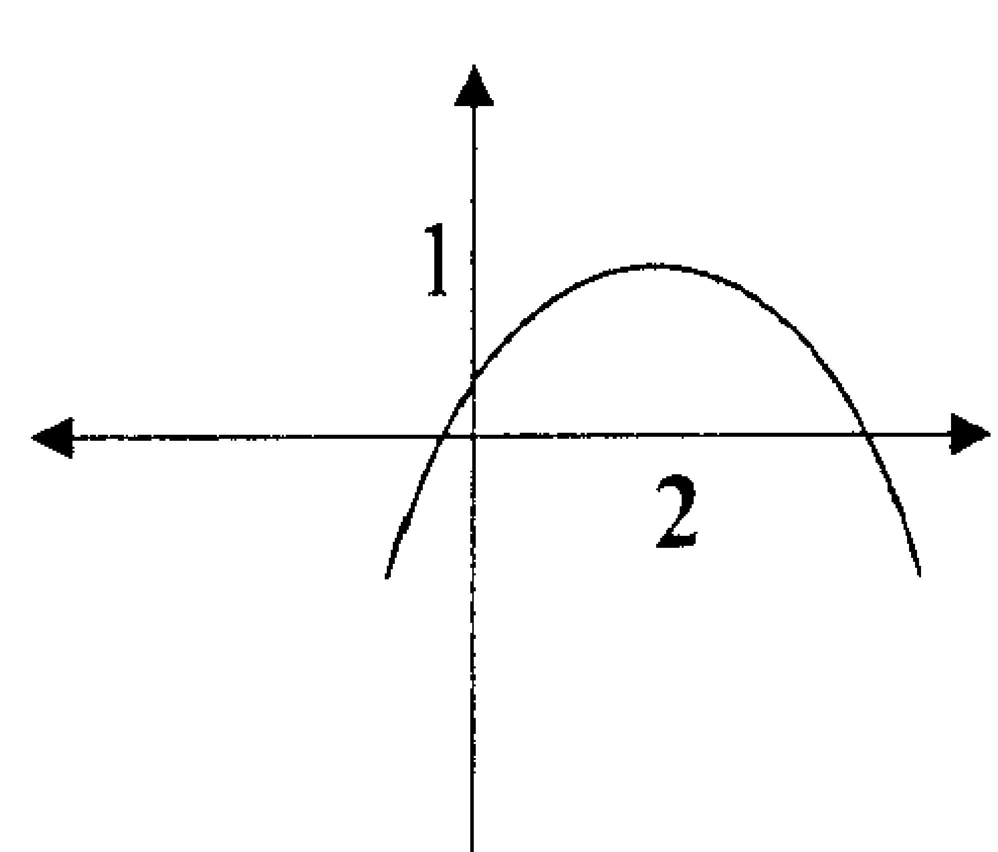


$(4)F(x)=1-(2x-4)^2$

الـحـل

$2x-4=0 \therefore x=2 \ , y=1$

$R_F=(-\infty,1]$



الصورة الثالثة :- $F(x)=ax^2+bx+c \quad .a.b.c \in R \quad ,a \neq 0$

هذه الصورةتقوم بإكمال مربع لهاوذلك حتى تصل إلى الصورة الثانيةمن الدالة التربيعية التي درسناها سابقا وإكمال مربع هو إضافة وطرح مربع نصف معامل x بشرط أن يكون معامل x^2 يساوي واحد قبل المباشرة في إكمال المربع

مـثـال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1)F(x)=x^2+2x+3$

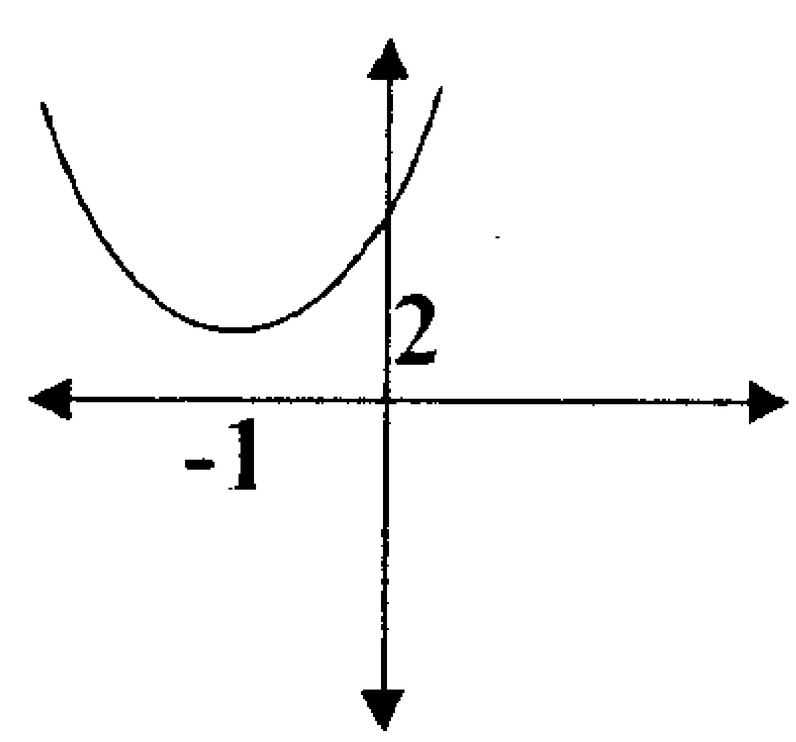
الــحــل

$F(x)=x^2+2x+1-1+3$

$F(x)=(x+1)^2+2$

$x+1=0 \;\therefore\; x=-1 , y=2$

$R_f = [2,\infty)$



$(2)F(x)=x^2+3x+1$

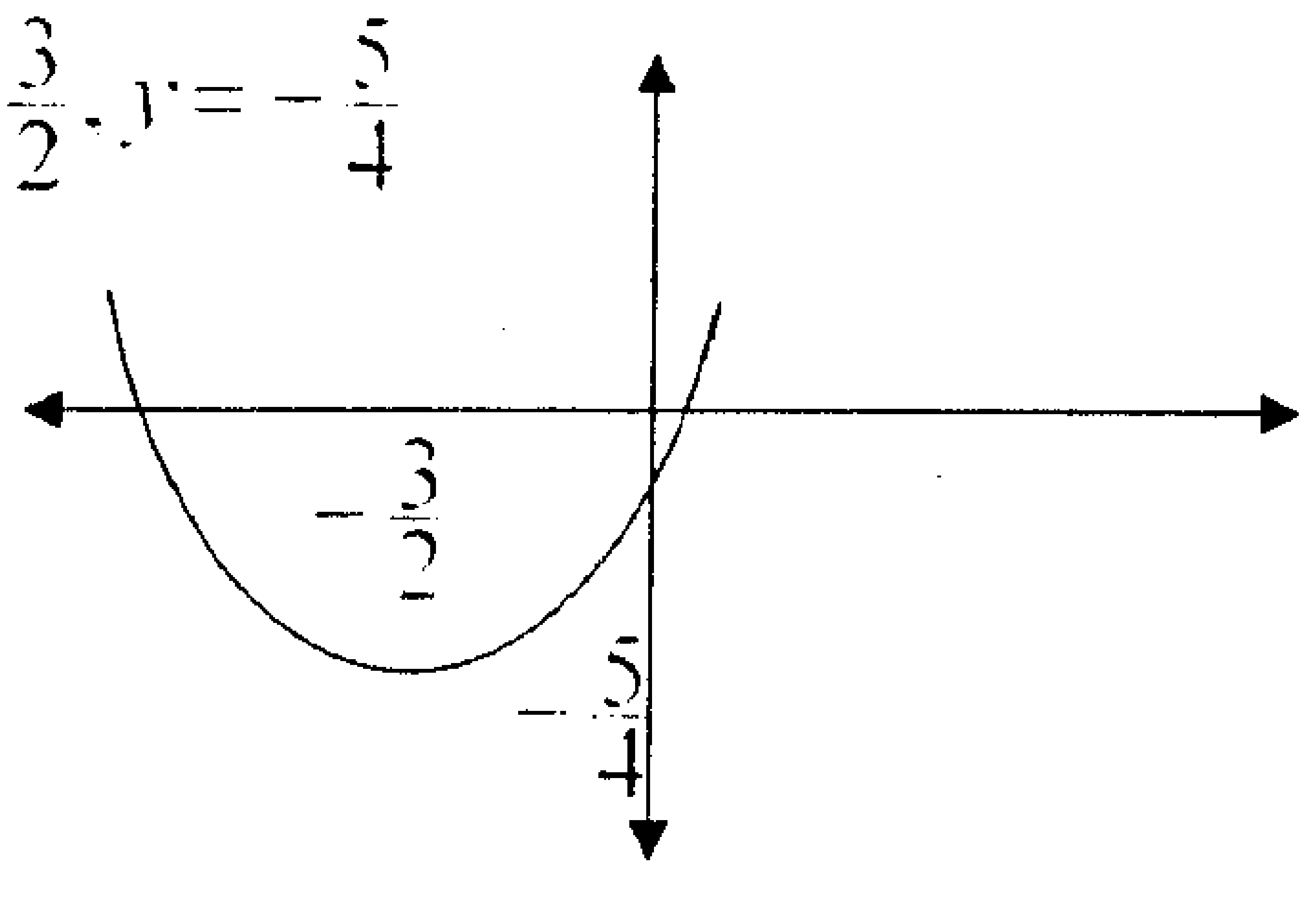
الــحــل

$F(x)=x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1$

$F(x)=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$

$x+\frac{3}{2}=0 \;\therefore\; x=-\frac{3}{2} , y=-\frac{5}{4}$

$R_f = [-\frac{5}{4},\infty)$



$$(3) F(x) = -x^2 + 2x + 1$$

الحـــل

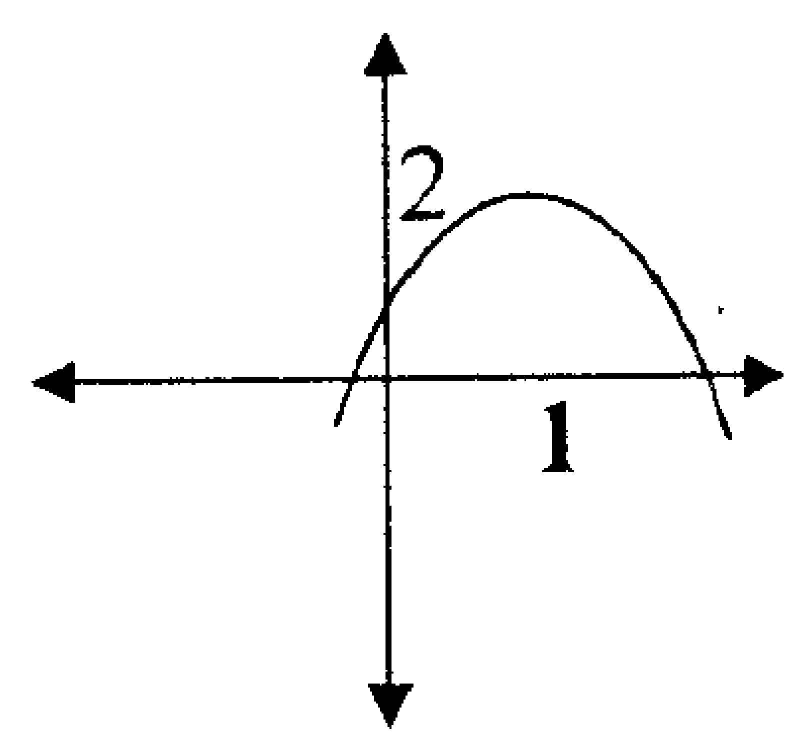
$$F(x) = -[x^2 - 2x - 1]$$

$$F(x) = -[x^2 - 2x + 1 - 1 - 1]$$

$$F(x) = -(x-1)^2 + 2$$

$$x - 1 = 0 \;\therefore\; x = 1, y = 2$$

$$R_F = (-\infty, 2]$$



$$(4) F(x) = -2x^2 + x - 2$$

الحـــل

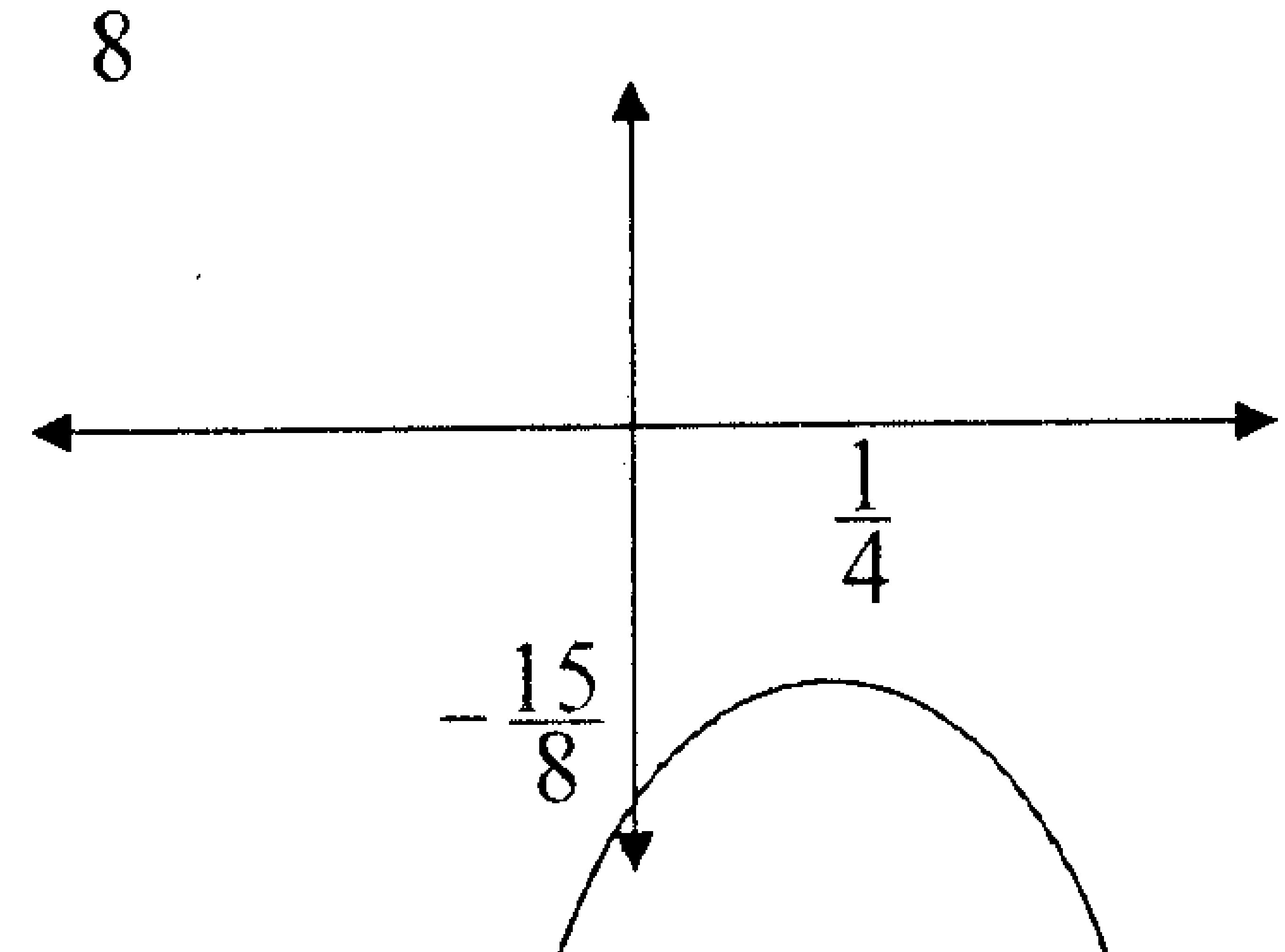
$$F(x) = -2[x^2 - \frac{1}{2}x + 1]$$

$$F(x) = -2[x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 1]$$

$$F(x) = -2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{15}{8}$$

$$x - \frac{1}{4} = 0 \;\therefore\; x = \frac{1}{4} \;,\; y = -\frac{15}{8}$$

$$R_F = (-\infty, -\frac{15}{8}]$$



$(5) F(x) = x^2 + 2x$

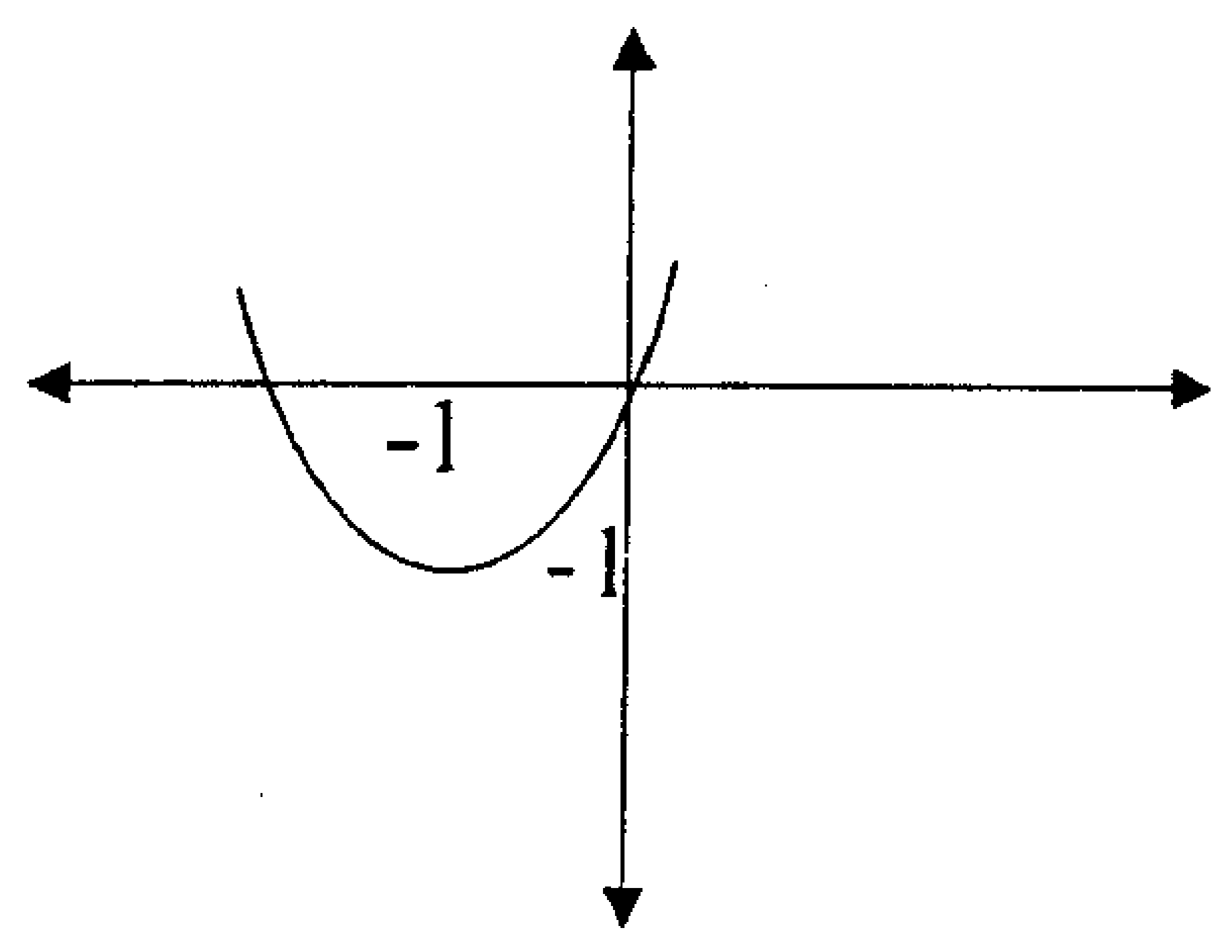
الحـــل

$F(x) = x^2 + 2x + 1 - 1$

$F(x) = (x+1)^2 - 1$

$x + 1 = 0 \therefore x = -1, y = -1$

$R_F = [-1, \infty)$



$(6) F(x) = -x^2 + 2x$

الحـــل

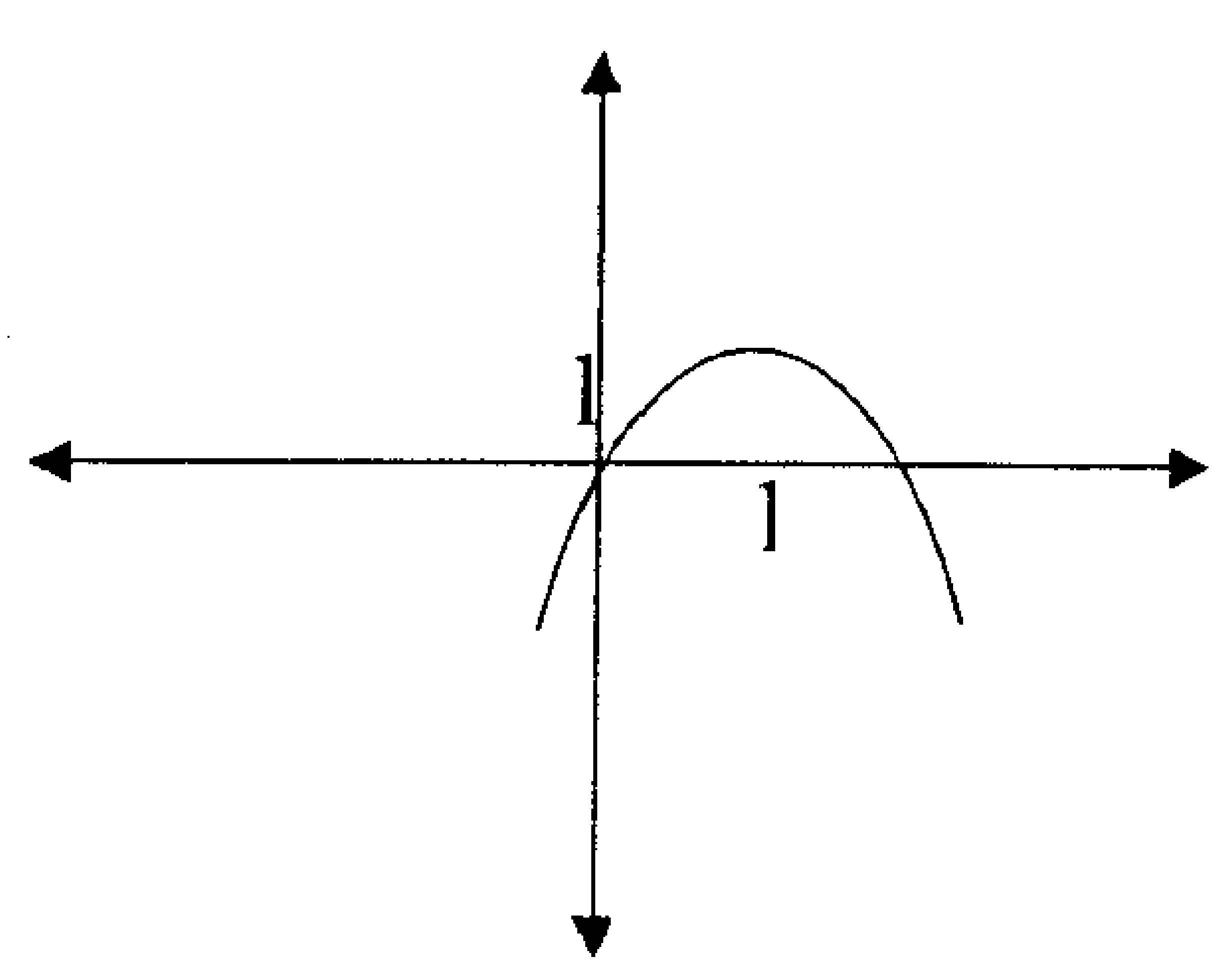
$F(x) = -[x^2 - 2x]$

$F(x) = -[x^2 - 2x + 1 - 1]$

$F(x) = -(x-1)^2 + 1$

$x - 1 = 0 \therefore x = 1, y = 1$

$R_F = (-\infty, 1]$



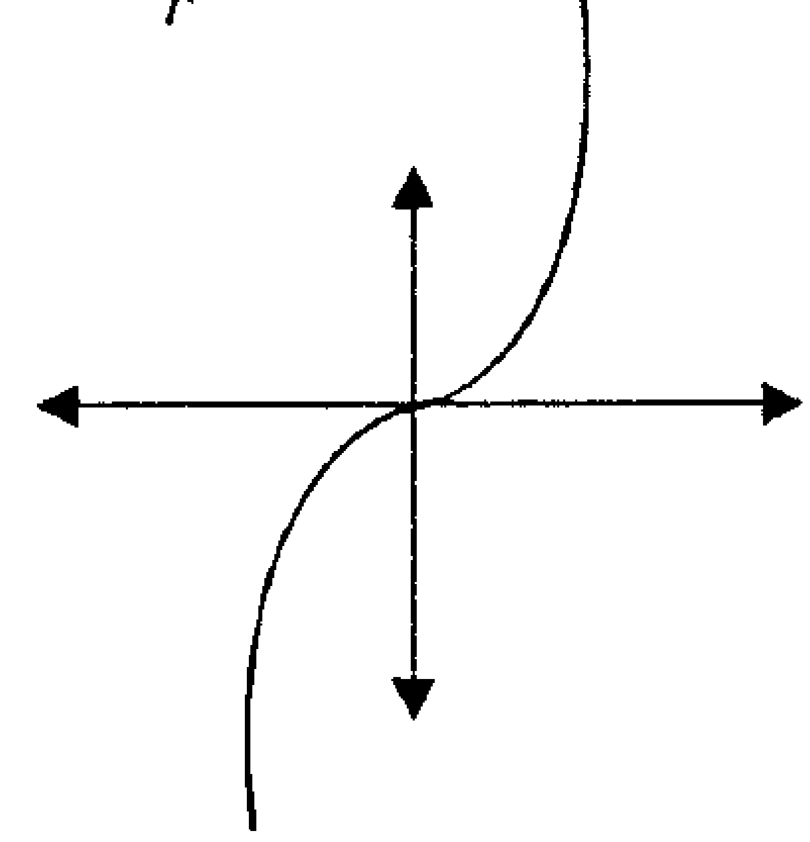
النوع الرابع : الدالة التكعيبية التي على الصورة $F(x)=ax^3\ ,\ a\in R\ ,a\neq 0$

ويرسم بيان الدالة التكعبية بطريقة بسيطة كما يلي :

$$F(x)=ax^3$$

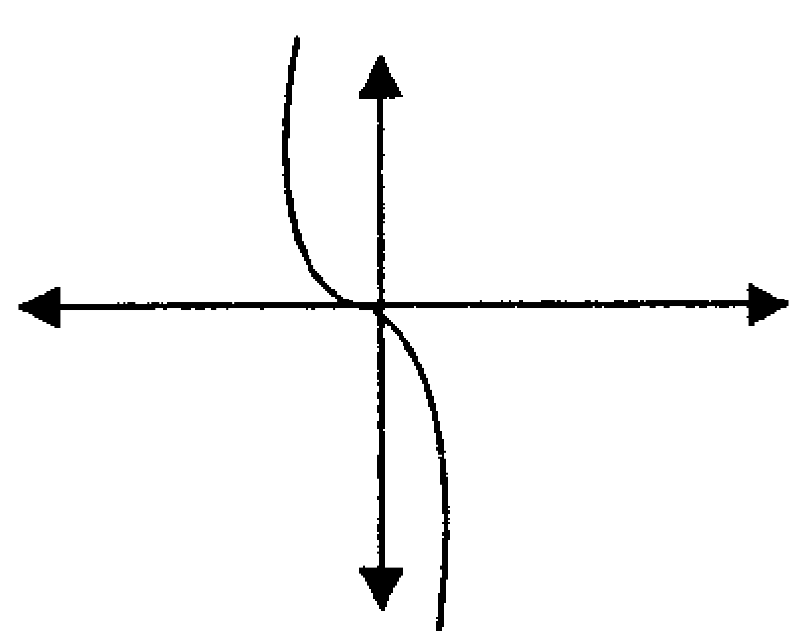
$F(x)=ax^3$

$R_F=(-\infty,\infty)$



$F(x)=-ax^3$

$R_F=(-\infty,\infty)$

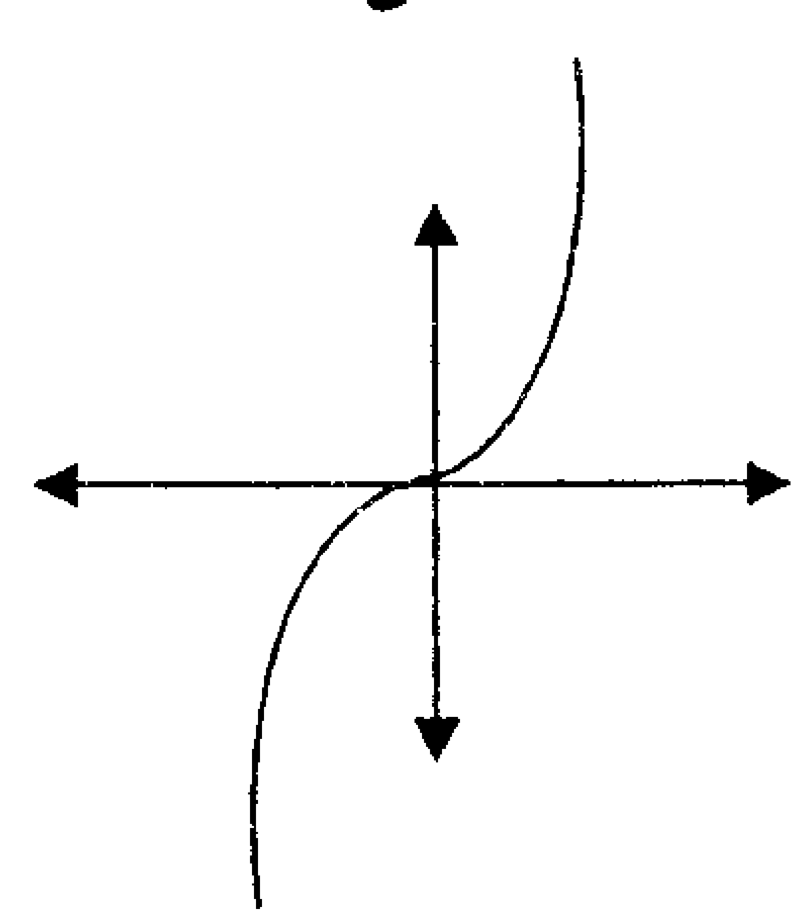


مــثــال: ـأوجد مدى الدوال الأتية مع رسم بيان الدالة : -

$(1)F(x)=2x^3$

الــحــل

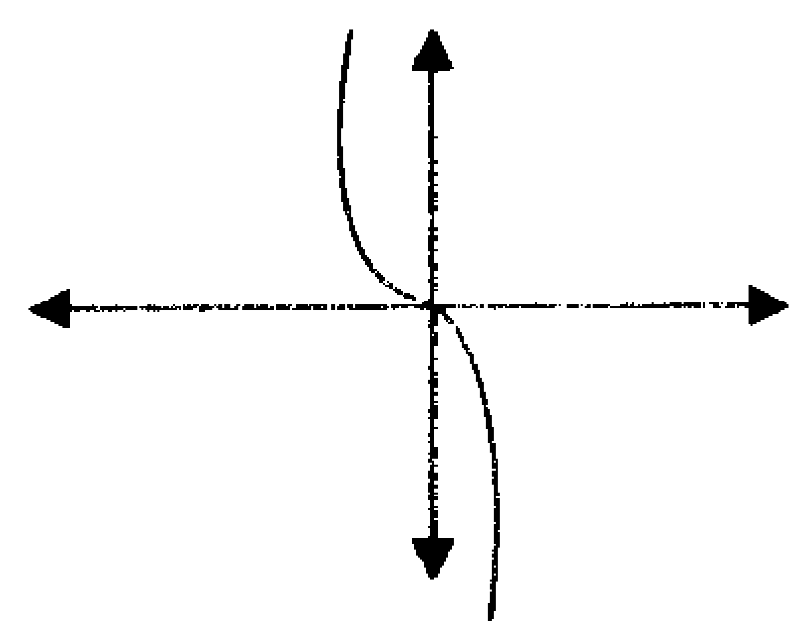
$R_F=(-\infty,\infty)$



$(2) F(x) = -x^3$

الحــل

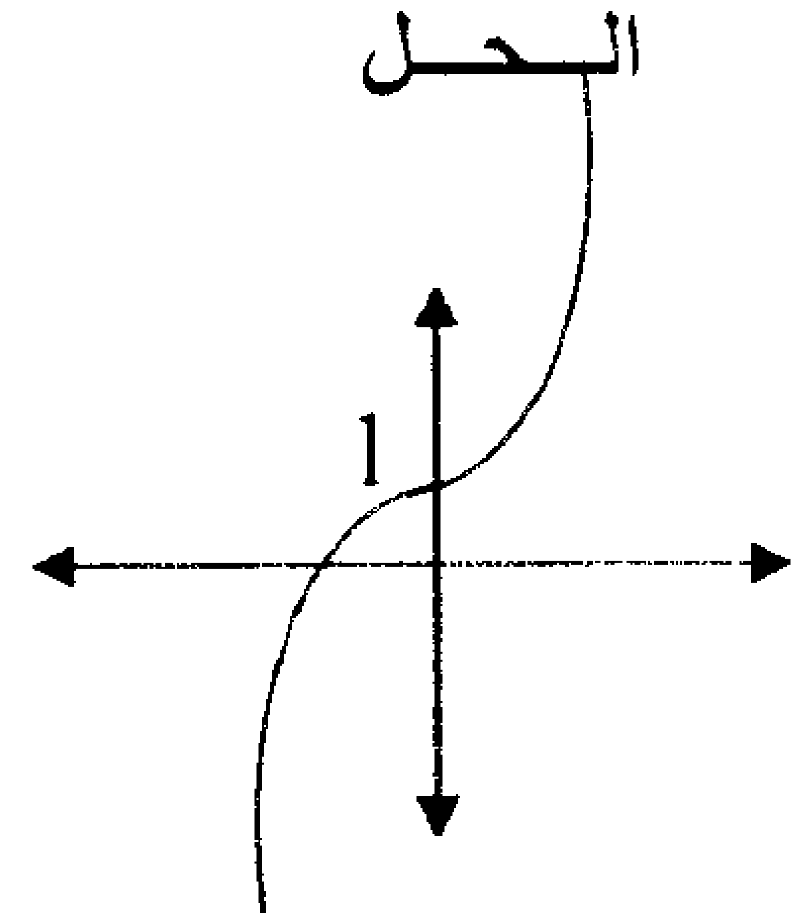
$R_F = (-\infty, \infty)$



$(3) F(x) = x^3 + 1$

الحــل

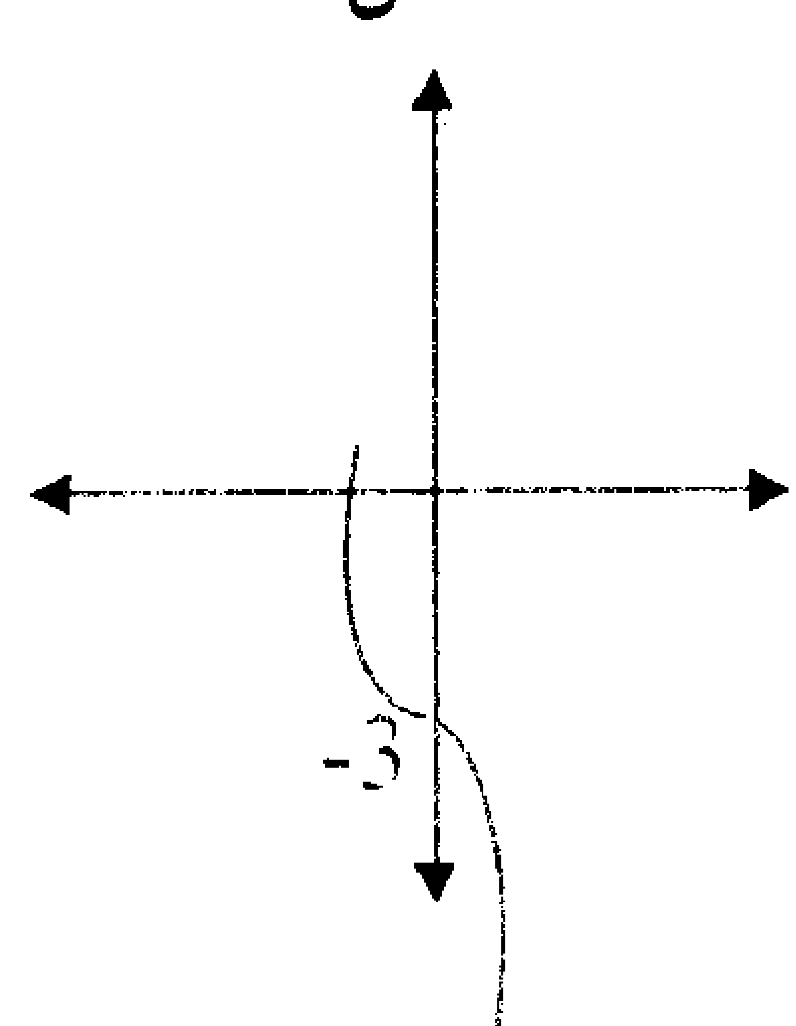
$R_F = (-\infty, \infty)$



$(4) F(x) = -2x^3 - 3$

الحــل

$R_F = (-\infty, \infty)$



حـــالات خـــاصـــة من الـــدوال : -

(1) مدى الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة : يتم رسم الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة ومن بيان الدالة نعين المدى .

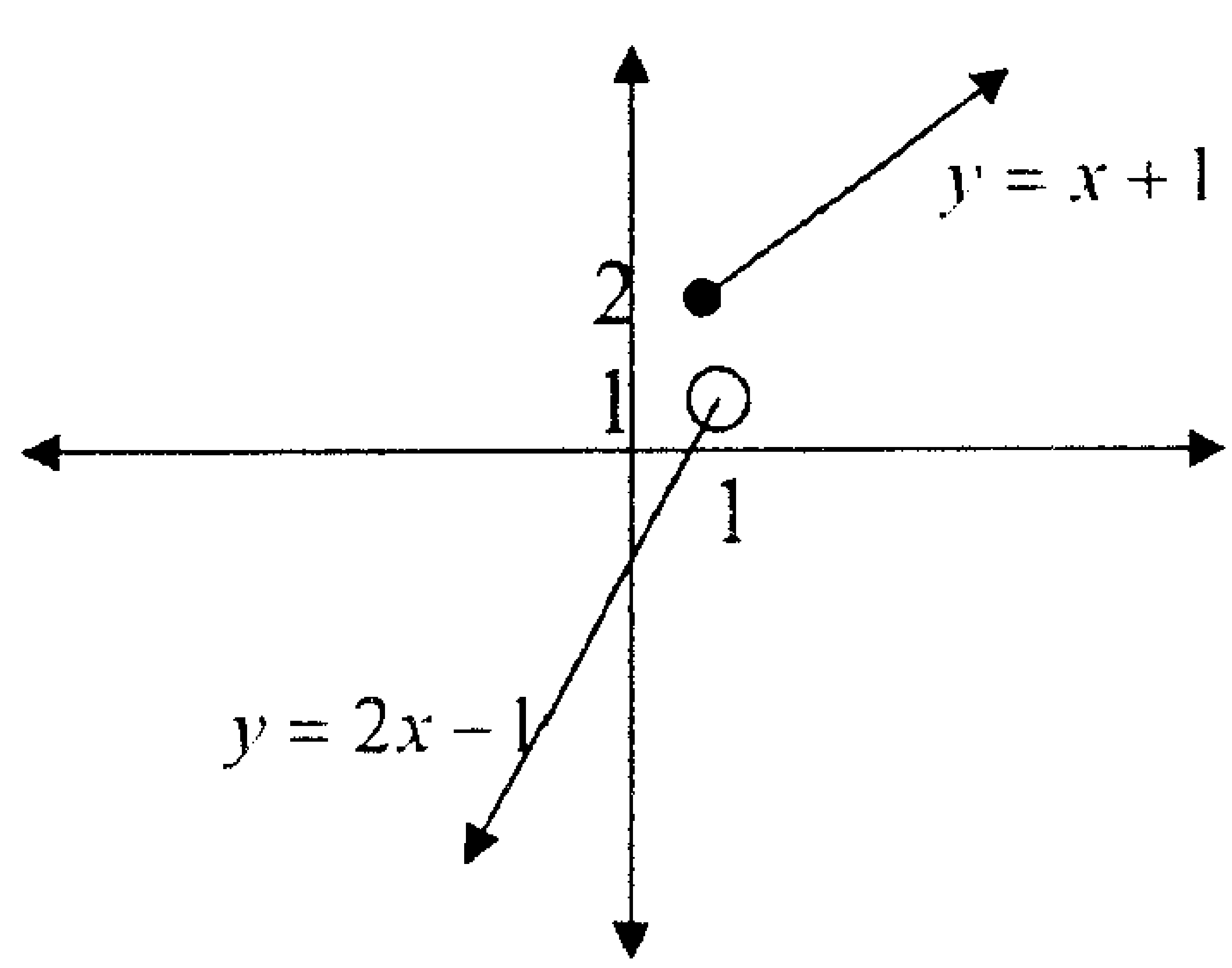
مـــثـــال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

$$(1)\,F(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & , & x\ge 1 \\ 2x-1 & , & x<1 \end{Bmatrix}$$

الـــحـــل

$y=2x-1 \ \ , x<1$
$x=1\ ,\ y=2-1=1$

$y=x+1 \ \ , x\ge 1$
$x=1\ ,\ y=1+1=2$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=(-\infty,1)\cup[2,\infty)$

$$(2)\, F(x)=\begin{cases} x-1 & , \ x<3 \\ 2x+1 & , \ x\geq 3 \end{cases}$$

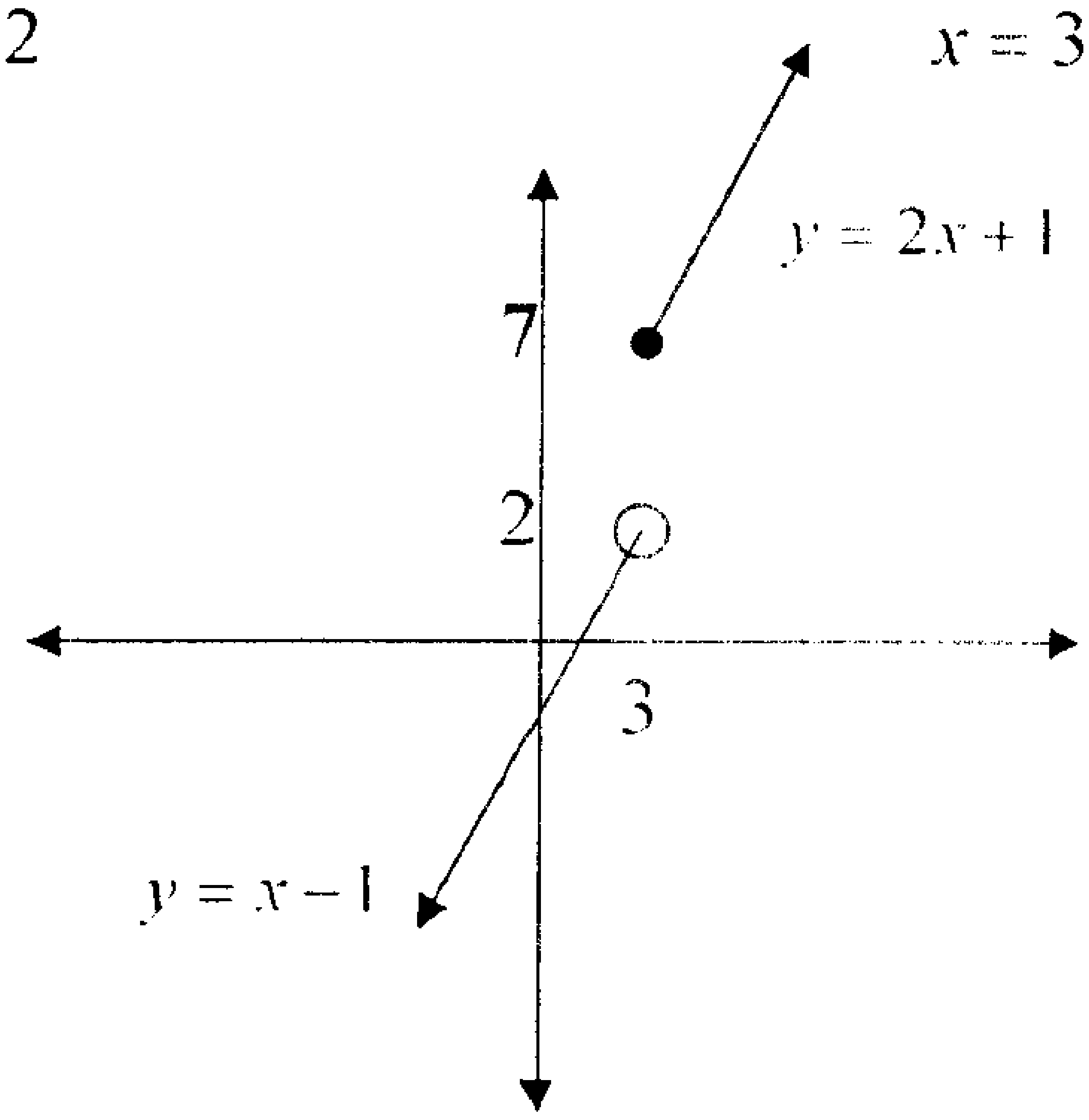
الحــل

$y=x-1 \ , x<3$

$x=3 \ , y=3-1=2$

$y=2x+1 \ . x\geq 3$

$x=3 \ . y=2(3)+1=7$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=(-\infty,2)\cup[7,\infty)$

$$(3)\, F(x)=\begin{cases} 6x+7 & , \ x\leq -2 \\ 4-3x & , \ x>-2 \end{cases}$$

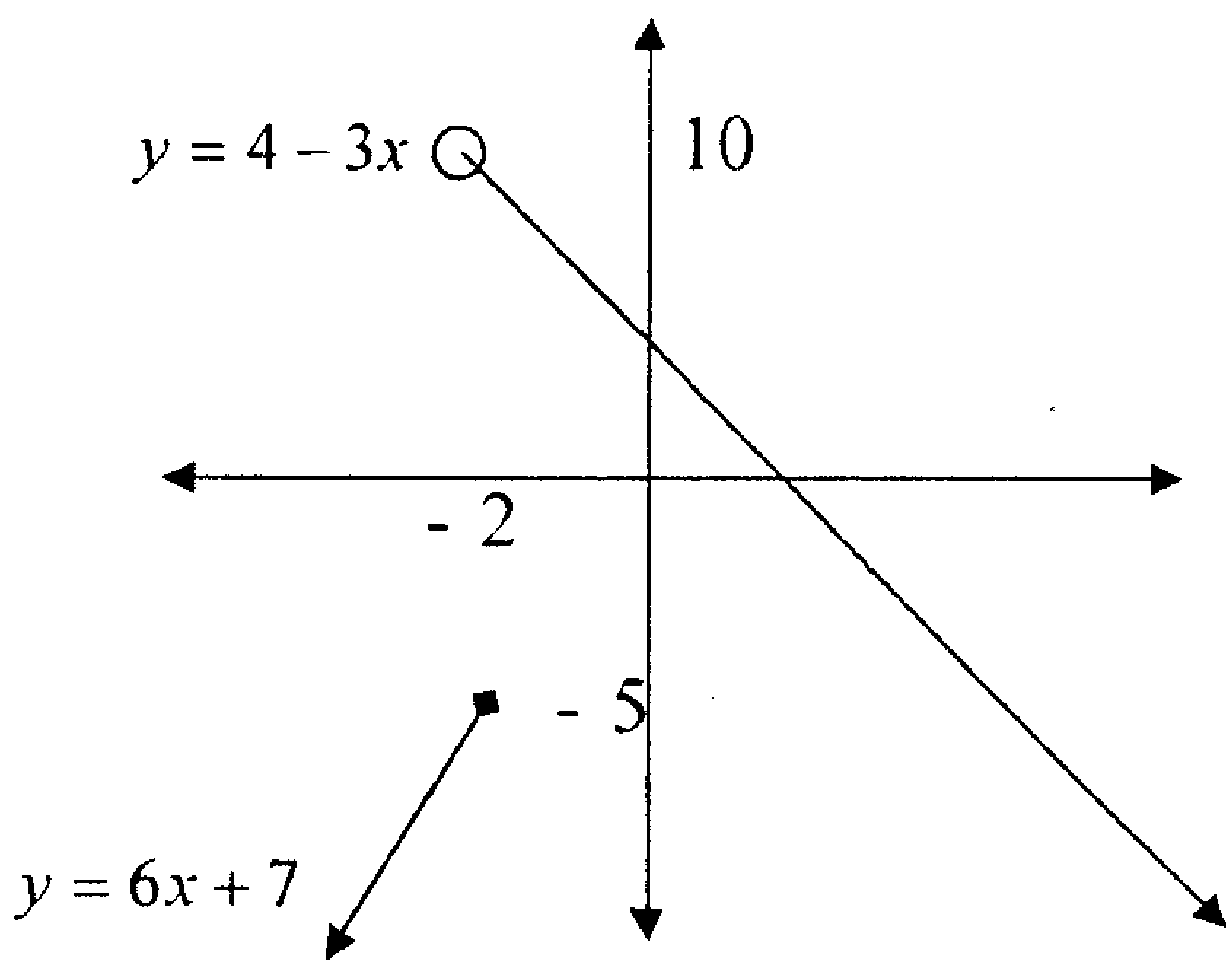
الحــل

$y=6x+7 \ , x\leq -2$

$x=-2 \ , y=6(-2)+7=-5$

$y=4-3x \ . x>-2$

$x=-2 \ . y=4-3(-2)=10$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, 10)$

$$(4)\; F(x) = \begin{cases} 1 - 3x & , \; x \geq 3 \\ 3x - 2 & , \; x < 3 \end{cases}$$

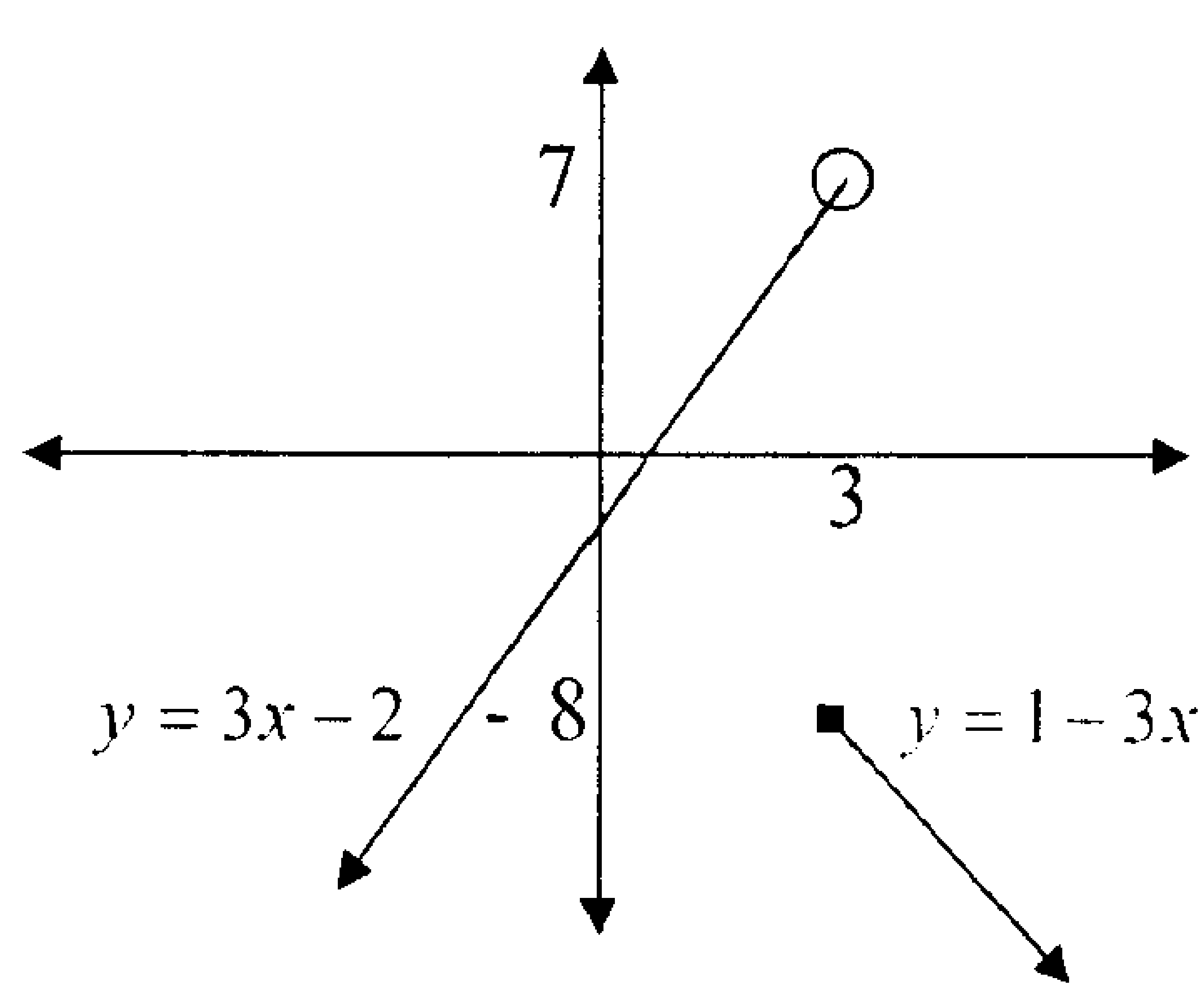
الحـــل

$y = 3x - 2 \;\; , x < 3$

$x = 3 \;, \; y = 3(3) - 2 = 7$

$y = 1 - 3x \;\; , x \geq 3$

$x = 3 \;, \; y = 1 - 3(3) = -8$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, 7)$

$$(5)\, F(x)=\begin{cases} x^2+2 & , \ x\geq 2 \\ 1-x & , \ x<2 \end{cases}$$

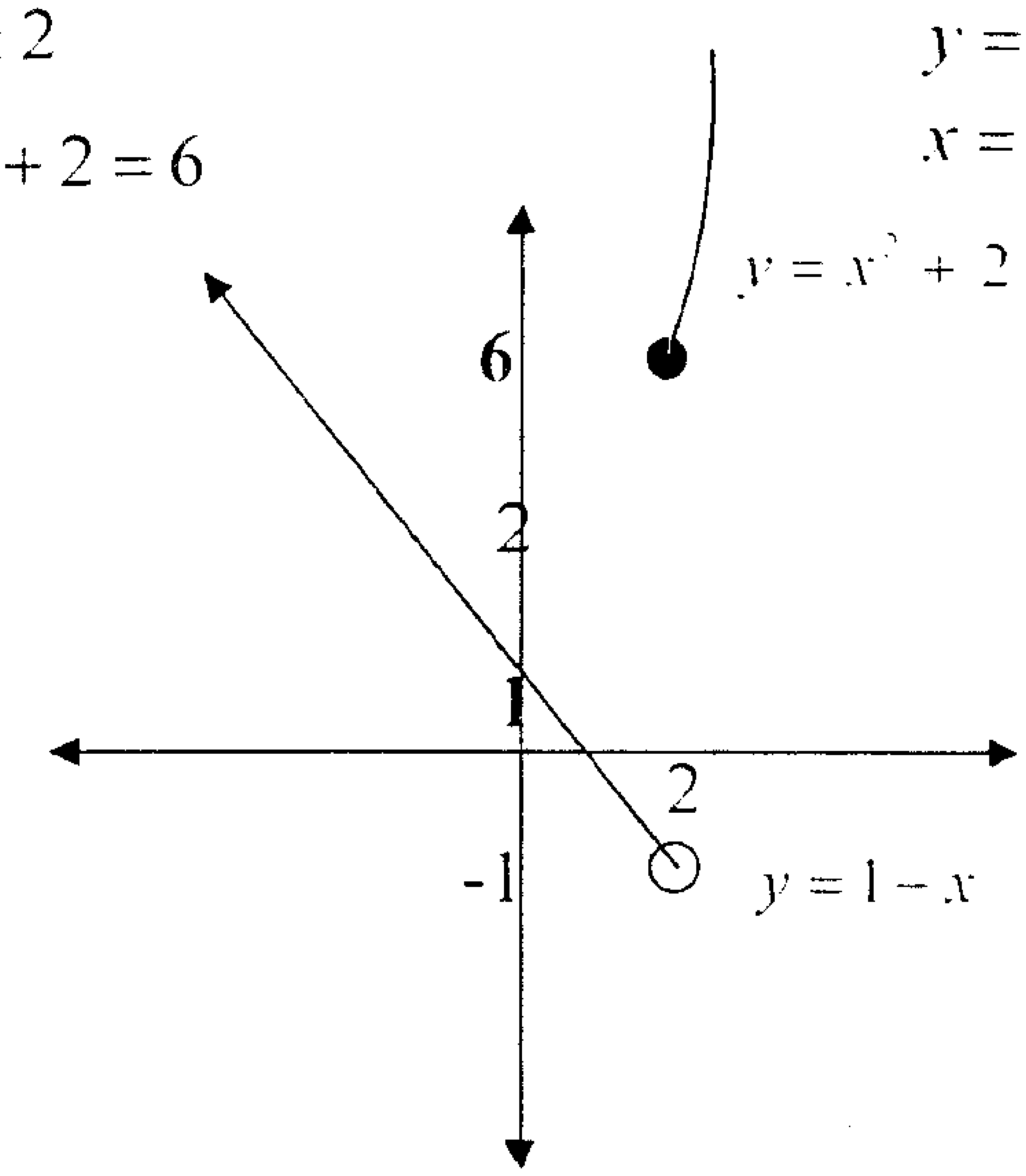
الــحــل

$y=x^2+2\ ,\ x\geq 2$

$x=2\ ,\ y=(2)^2+2=6$

$y=1-x\ ,\ x<2$

$x=2\ ,\ y=1-2=-1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=(-1,\infty)$

$$(6)\, F(x)=\begin{cases} 2x & , \ x\geq 0 \\ -3 & , \ x<0 \end{cases}$$

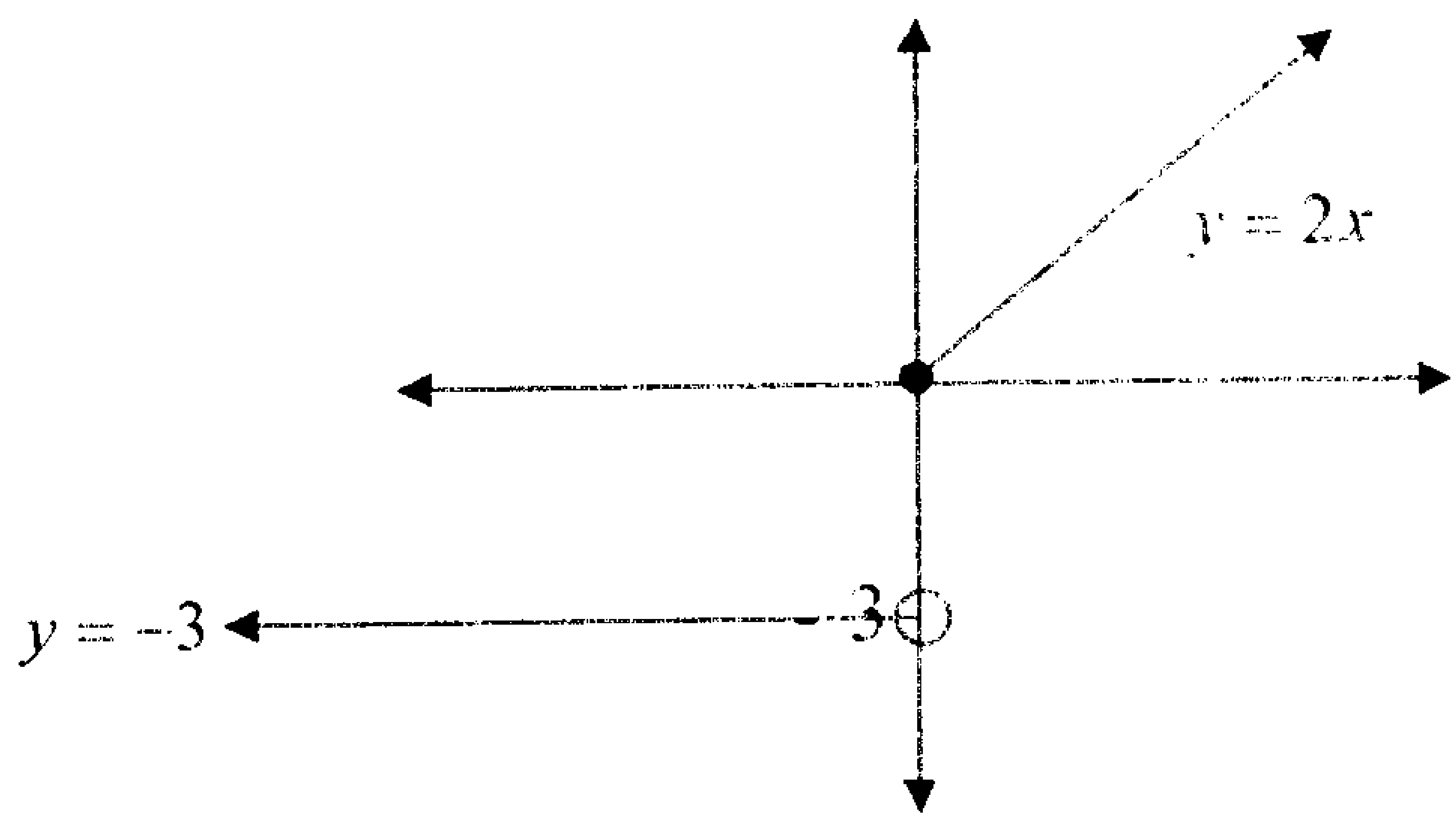
الــحــل

$y=2x\ ,\ x\geq 0$

$x=0\ ,\ y=2(0)=0$

$y=-3\ ,\ x<0$

$x=0\ ,\ y=-3$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = [0,\infty) \cup \{-3\}$

$$(7)\ F(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 0 \\ -1 & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

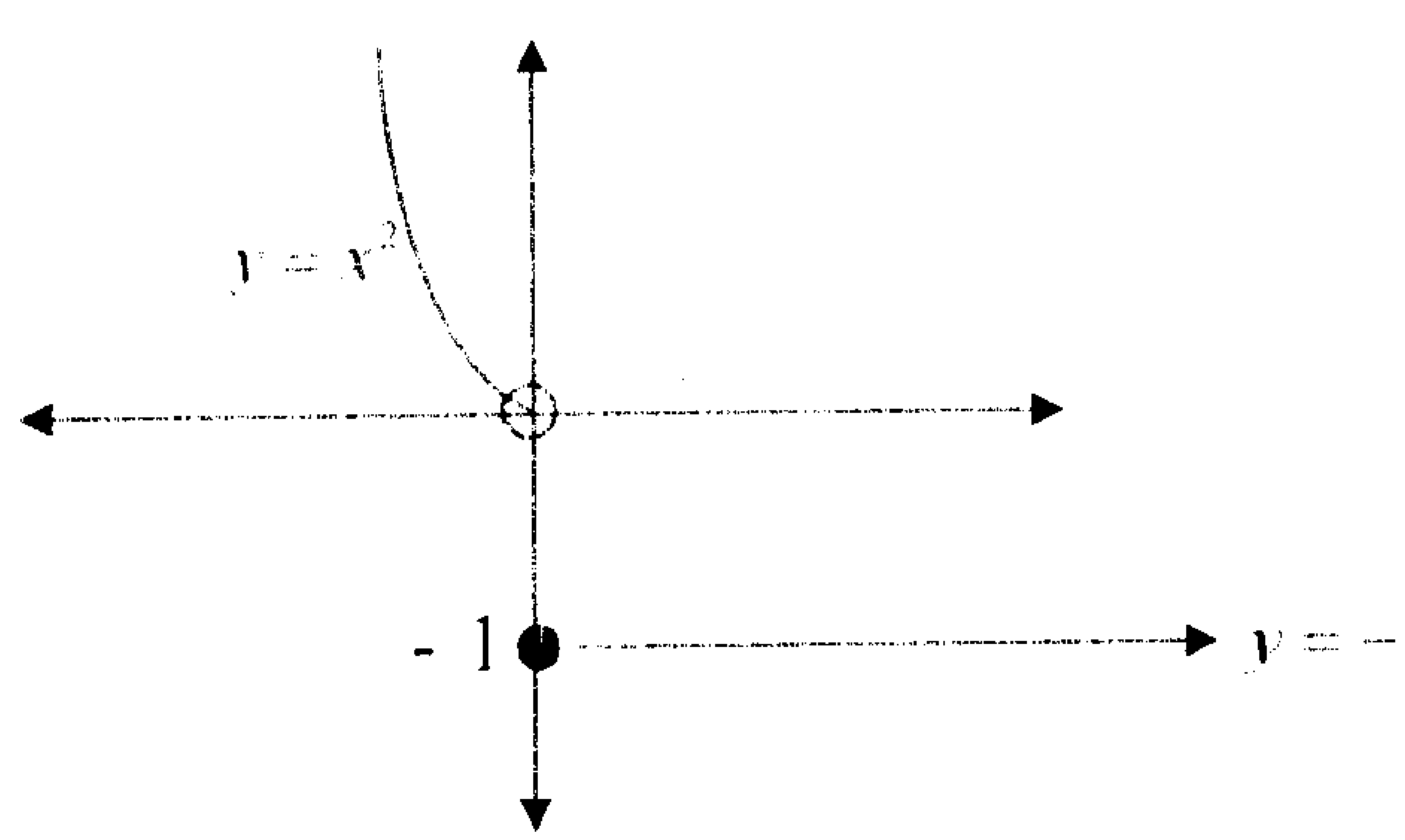
الحـــل

$y = x^2 \quad , x < 0$

$x = 0 \ , \ y = (0)^2 = 0$

$y = -1 \quad , x \geq 0$

$x = 0 \ , y = -1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (0,\infty) \cup \{-1\}$

$$(8)\ F(x)=\begin{cases} 1 & , x>1 \\ x & , -1\le x\le 1 \\ -1 & , x<-1 \end{cases}$$

الحـــل

$y=1\ ,\ x>1$

$x=1\ ,\ y=1$

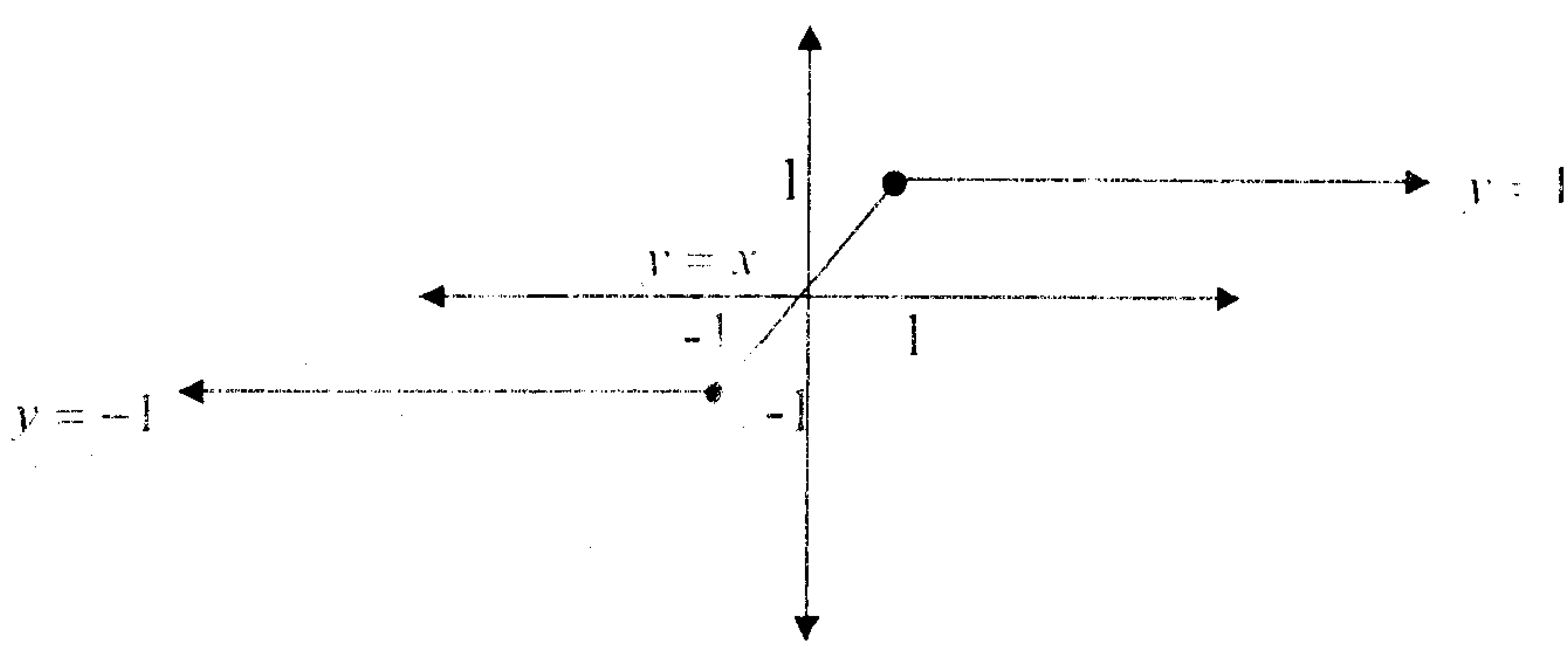
$y=x\ ,\ -1\le x\le 1$

$x=-1\ ,\ y=-1$

$x=1\ ,\ y=1$

$y=-1\ ,\ x<-1$

$x=-1\ ,\ y=-1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_f=[-1,1]$

$$(9)\ F(x)=\begin{cases} 4 & , x<1 \\ x^2 & , 0\le x<2 \\ 1 & , x\ge 2 \end{cases}$$

الحـــل

$y=4\ ,\ x<1$

$x=1\ ,\ y=4$

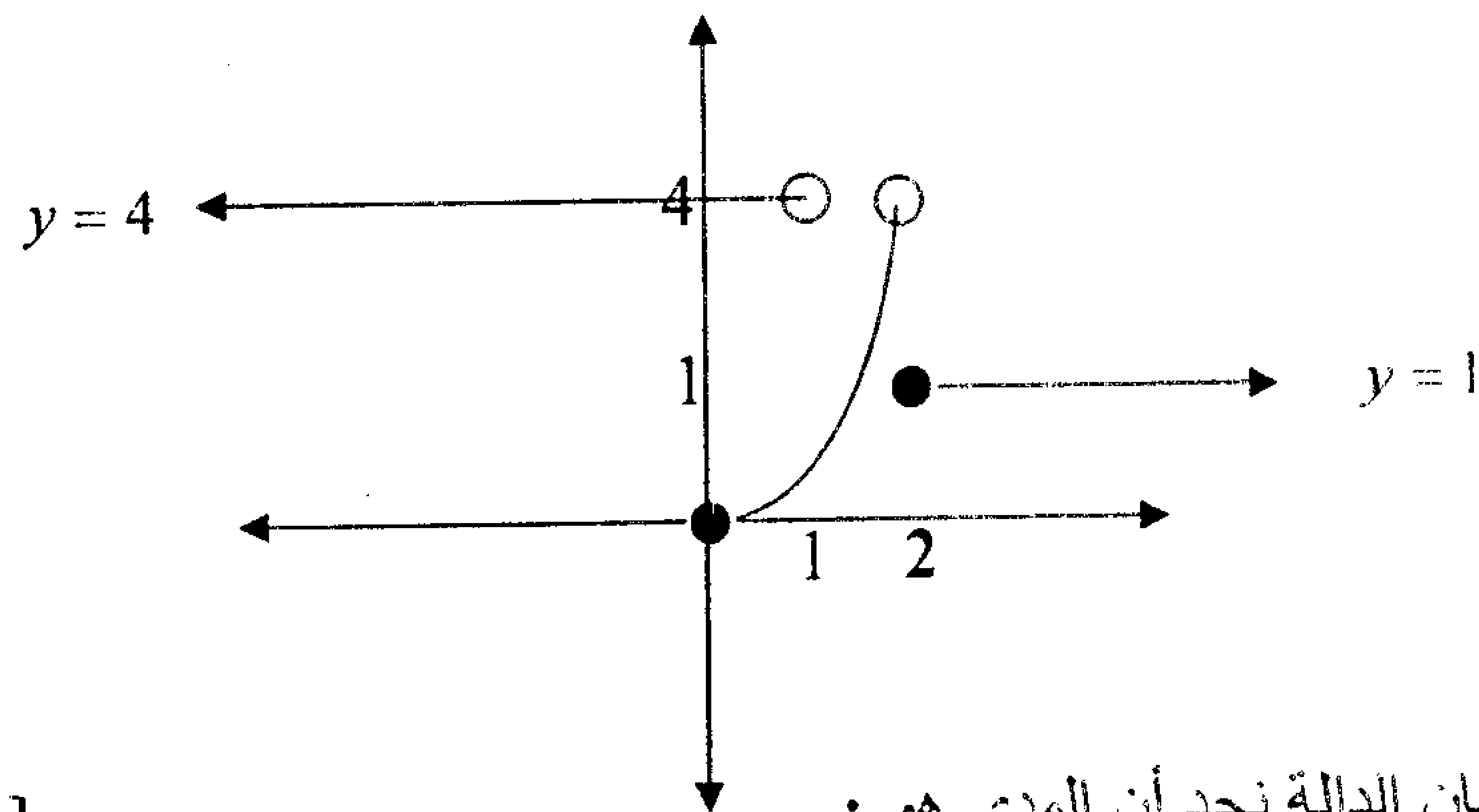
$y=x^2\ ,\ 0\le x<2$

$x=0\ ,\ y=0$

$x=2\ ,\ y=4$

$y=1\ ,\ x\ge 2$

$x=2\ ,\ y=1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F = [0,4]$

$$(10)\ F(x) = \begin{cases} 2x+3 & , \ x<1 \\ x^2 & , \ 0 \le x < 2 \\ 1 & , \ x \ge 2 \end{cases}$$

الحـــل

$y = 2x+3 \ , \ x<1$

$x = 1 \ , \ y = 2(1)+3 = 5$

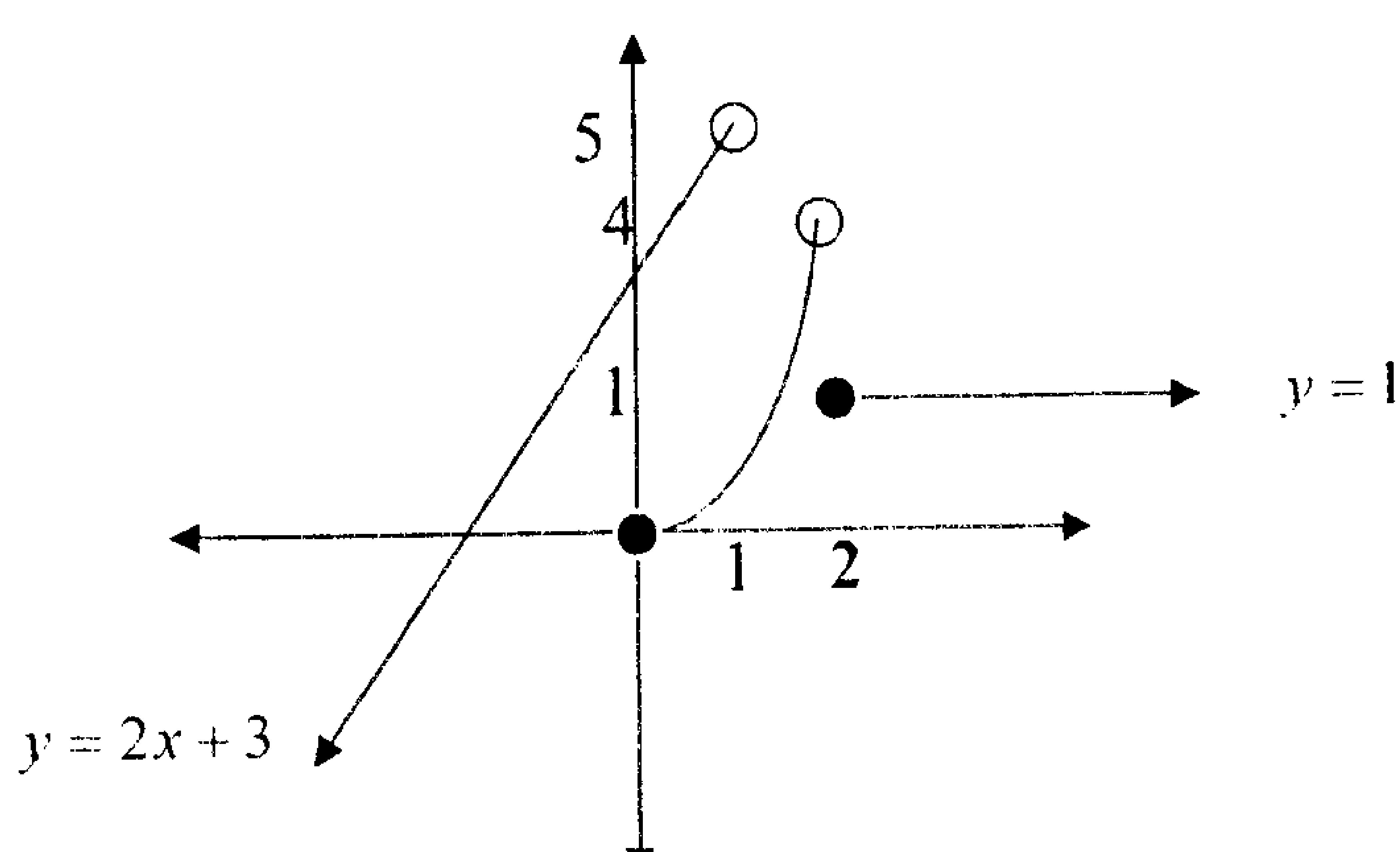
$y = x^2 \ , 0 \le x < 2$

$x = 0, y = 0$

$x = 2 \ , \ y = 4$

$y = 1 \ , \ x \ge 2$

$x = 2, y = 1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F = (-\infty, 5)$

$$(11)\ F(x)=\begin{cases}-1 & , x<0\\ x^2 & , 0\le x<2\\ \frac{1}{2}x^2+1 & , x>2\end{cases}$$

الحـــل

$y=-1\ ,\ x<0$

$x=0\ ,\ y=-1$

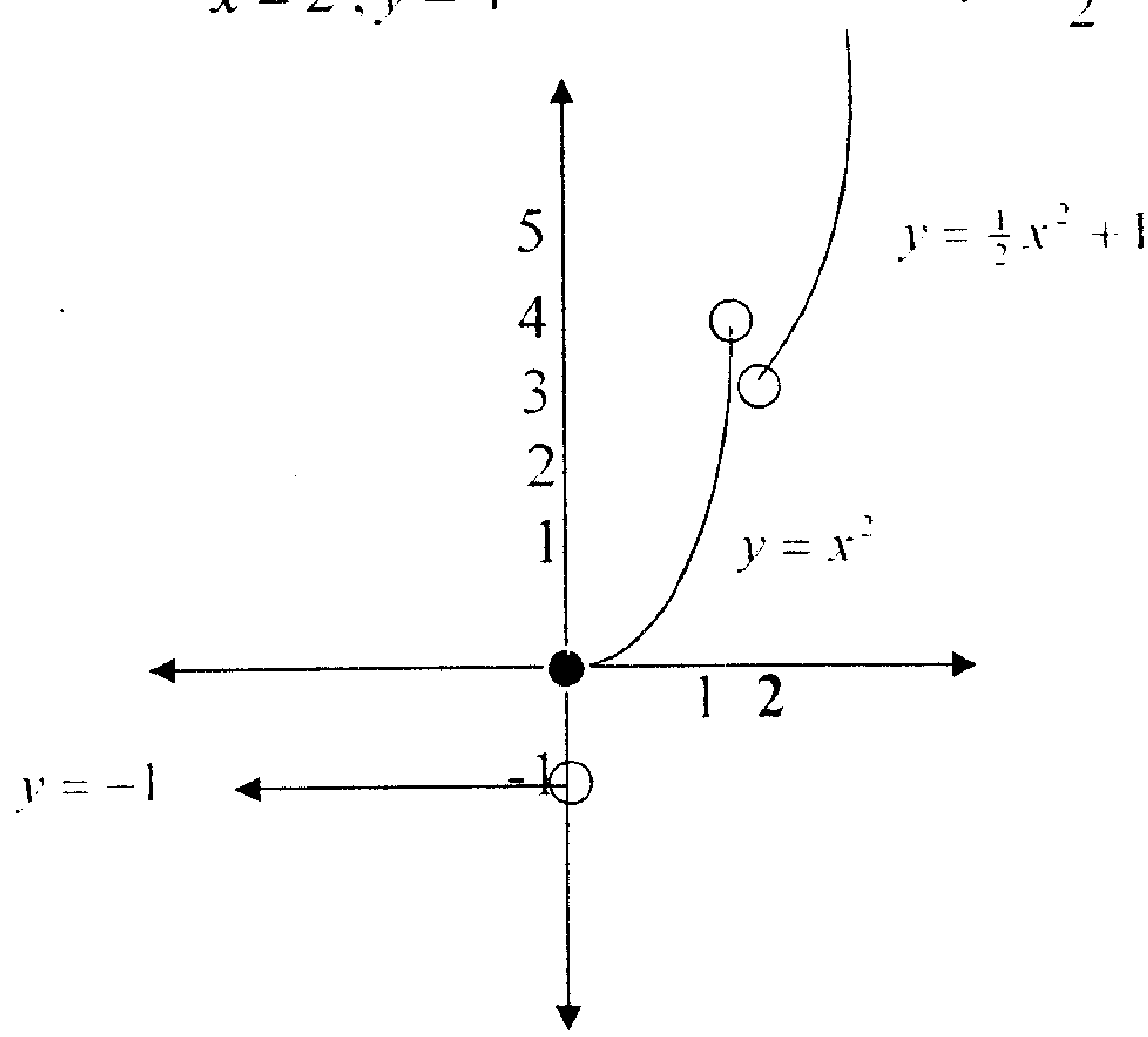
$y=x^2\ \ ,0\le x<2$

$x=0, y=0$

$x=2\ ,\ y=4$

$y=\frac{1}{2}x^2+1\ ,\ x>2$

$x=2, y=\frac{1}{2}(2)^2+1=3$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=[0,\infty)\cup\{-1\}$

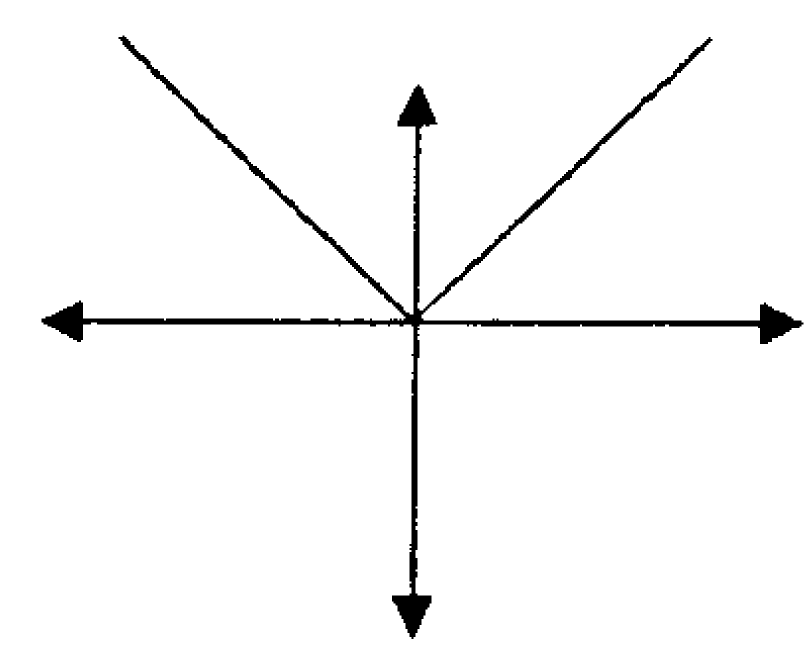
(2)مدى دالة القيمة المطلقة : -ولها عدة صور منها : -

الصورة الأولى : - $F(x)=|x|$

ويرسم بيان دالة القيمة المطلقة بطريقة بسيطة كما يلي :

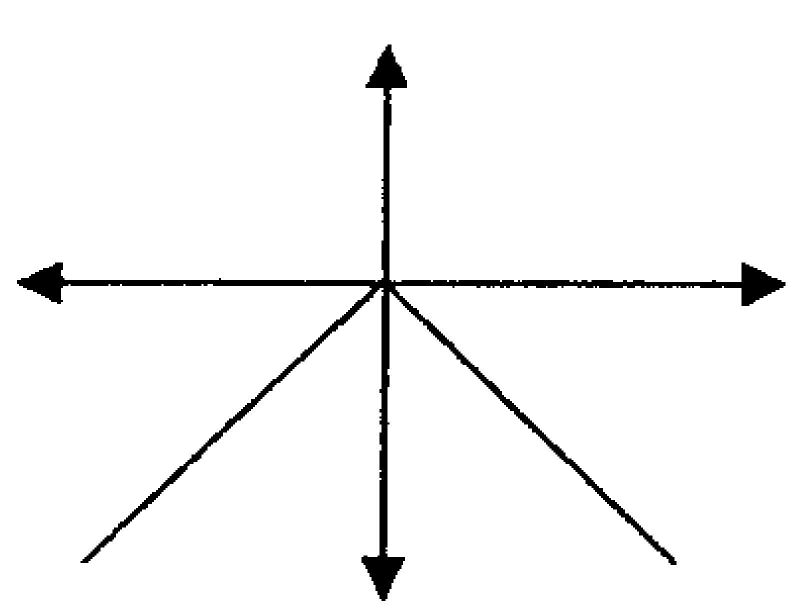
$F(x)=|x|$

$R_F=[0,\infty)$



$F(x)=-|x|$

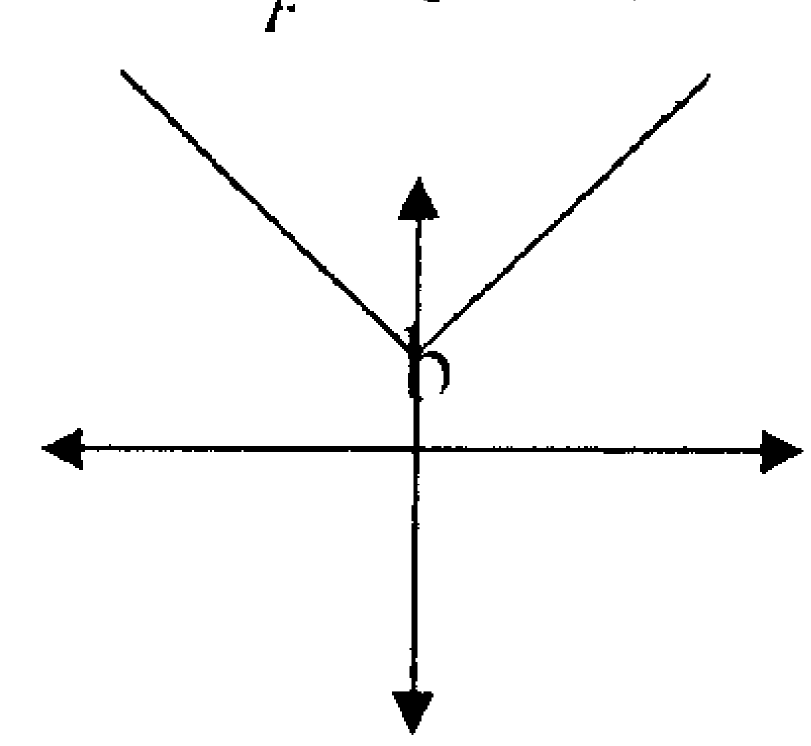
$R_F=(-\infty,0]$



$F(x)=|x|+b$

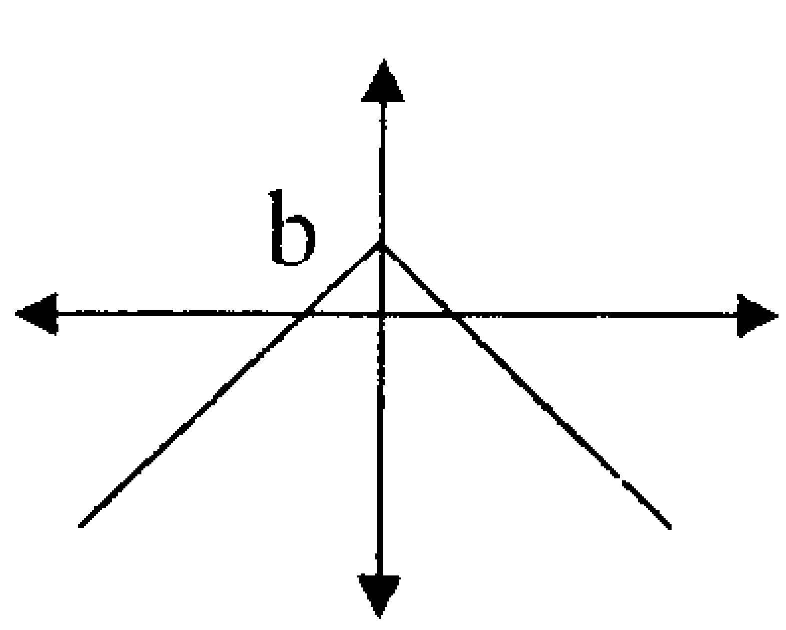
$F(x)=|x|+b$

$R_F=[b,\infty)$



$F(x)=-|x|+b$

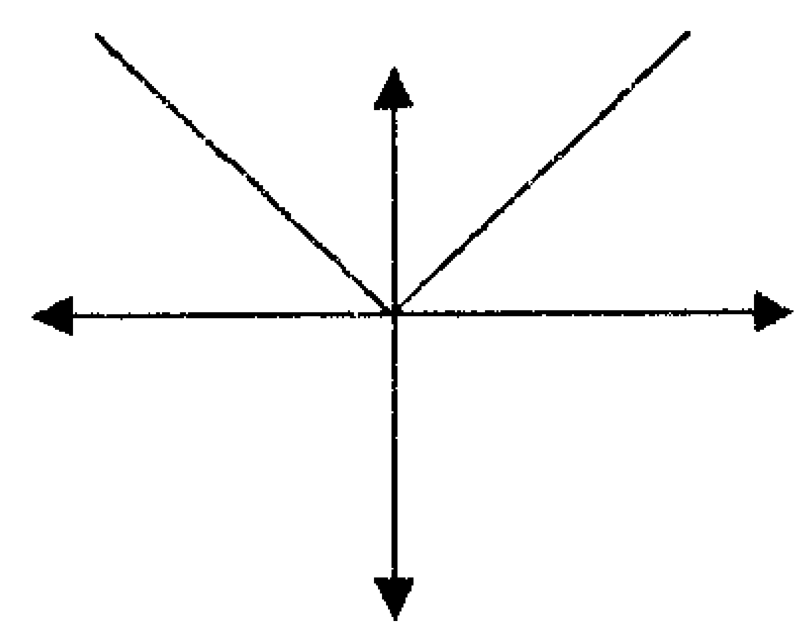
$R_F=(-\infty,b]$



مـثــال:- أوجد مدى الدوال الأتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1) F(x)=|2x|$

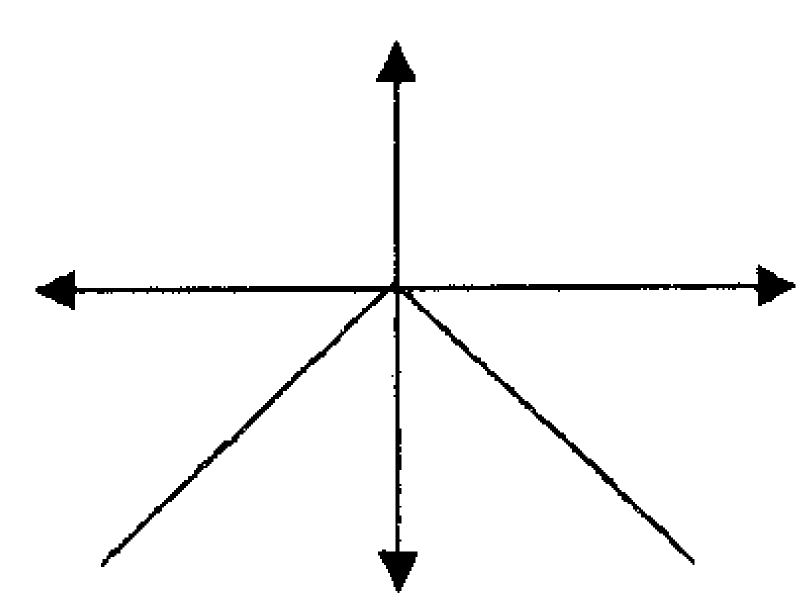
الـحــل



$R_F=[0,\infty)$

$(2) F(x)=-\left|\frac{1}{2}x\right|$

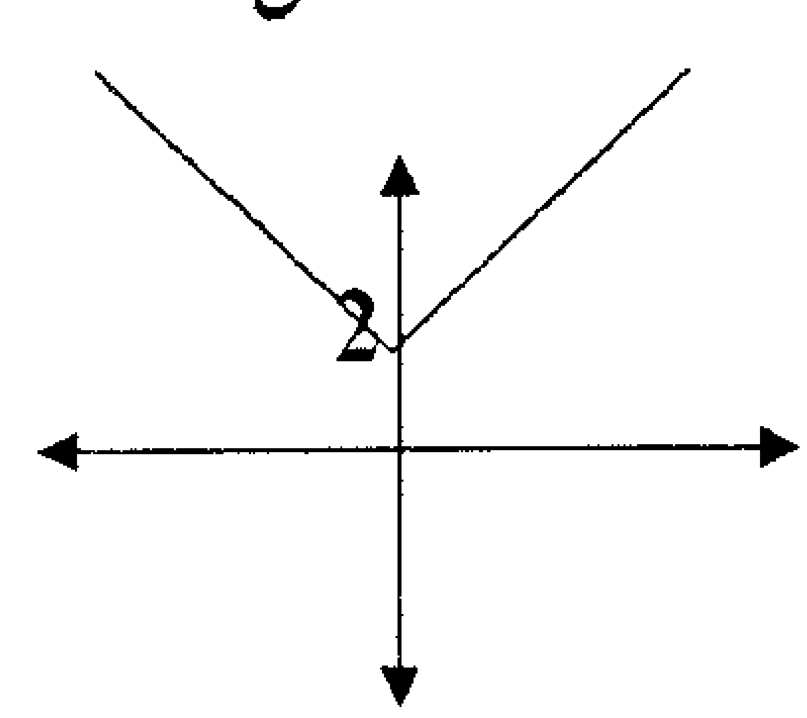
الـحــل



$R_F=(-\infty,0]$

$(3) F(x)=\left|\frac{1}{2}x\right|+2$

الـحــل

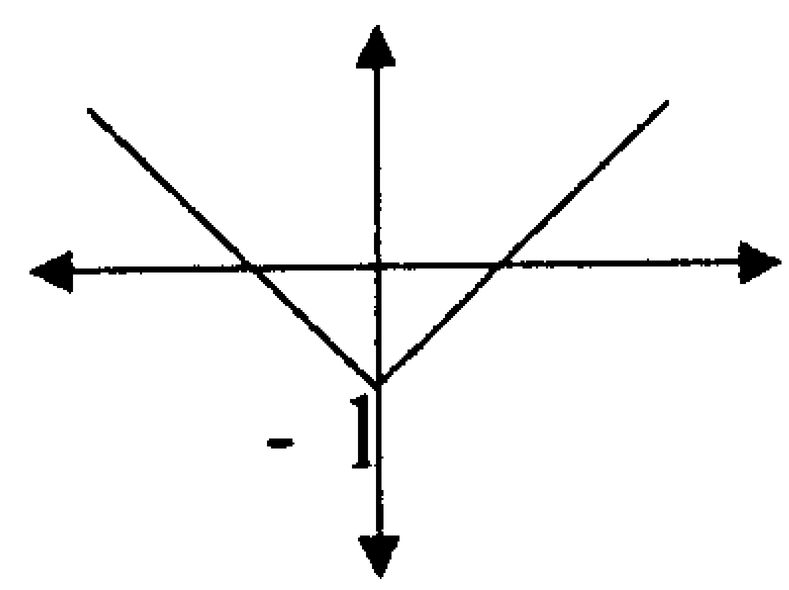


$R_F=[2,\infty)$

$(4) F(x) = |x| - 1$

الحــل

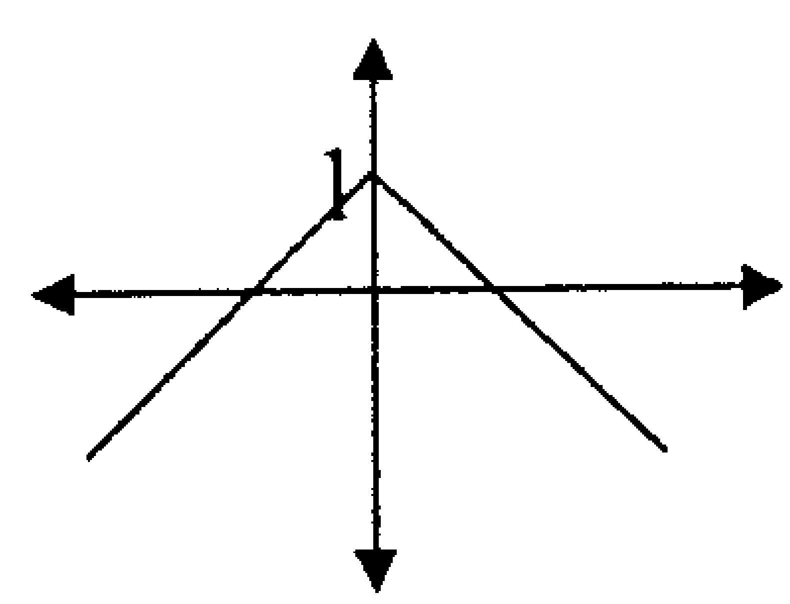
$R_F = [-1, \infty)$



$(5) F(x) = -|x| + 1$

الحــل

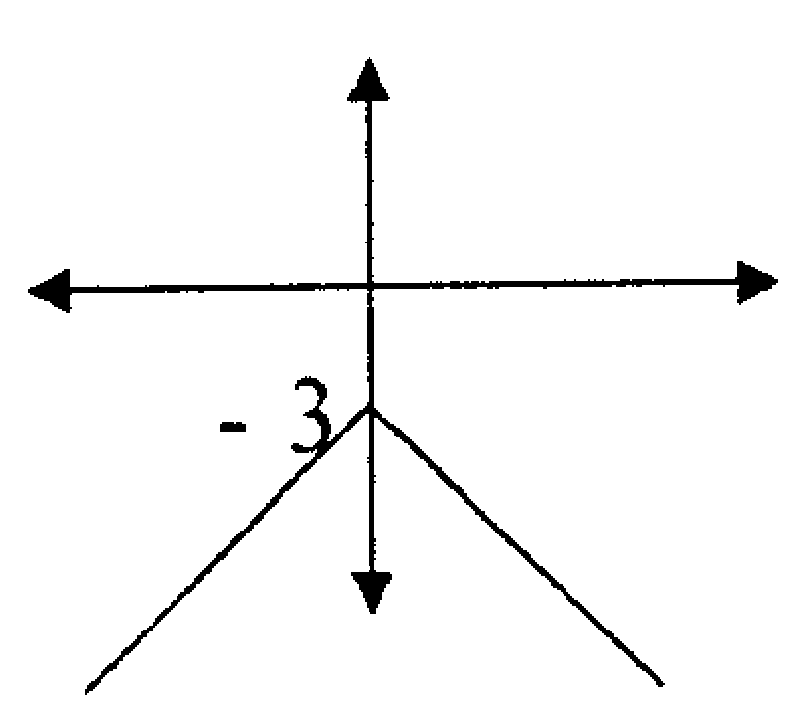
$R_F = (-\infty, 1]$



$(6) F(x) = -|2x| - 3$

الحــل

$R_F = (-\infty, -3]$



الصورة الثانية : $F(x)=|x+c|\ ,\ c\in R$

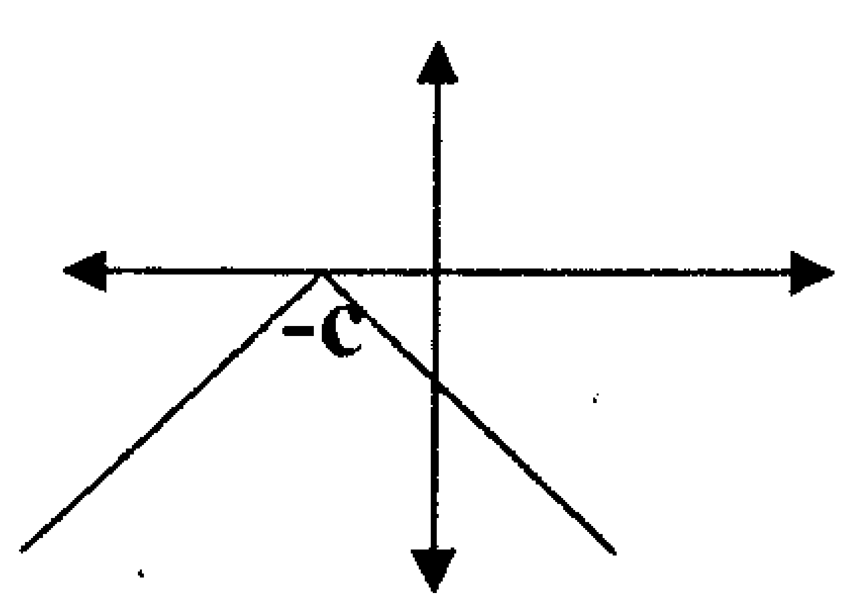
ويرسم بيان دالة القيمة المطلقة بطريقة بسيطة كما يلي :

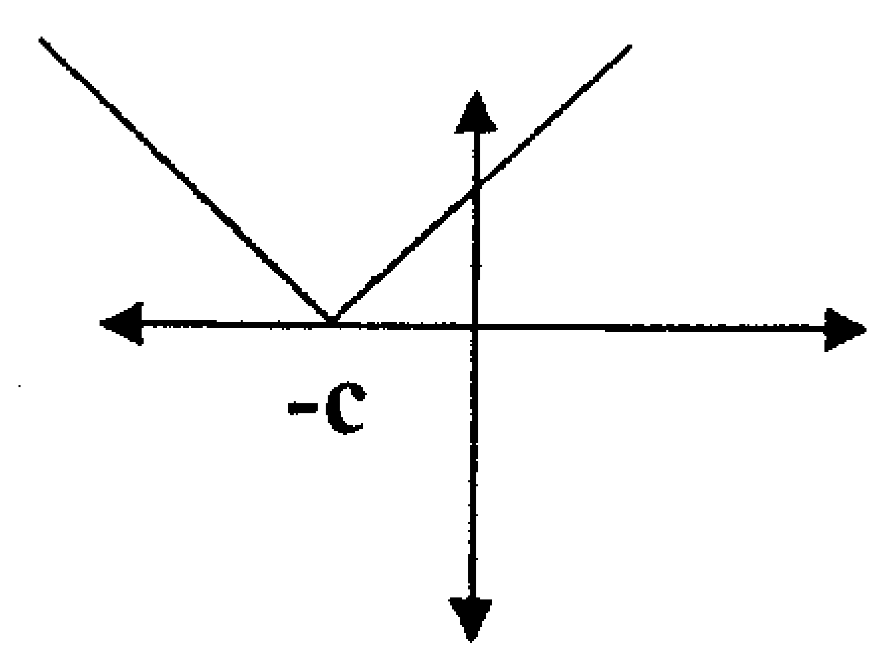
$$F(x)=|x+c|$$

$$F(x)=|x+c| \qquad R_F=[0,\infty)$$

$$F(x)=-|x+c| \qquad R_F=(-\infty,0]$$

$$x+c=0 \ \therefore\ x=-c$$





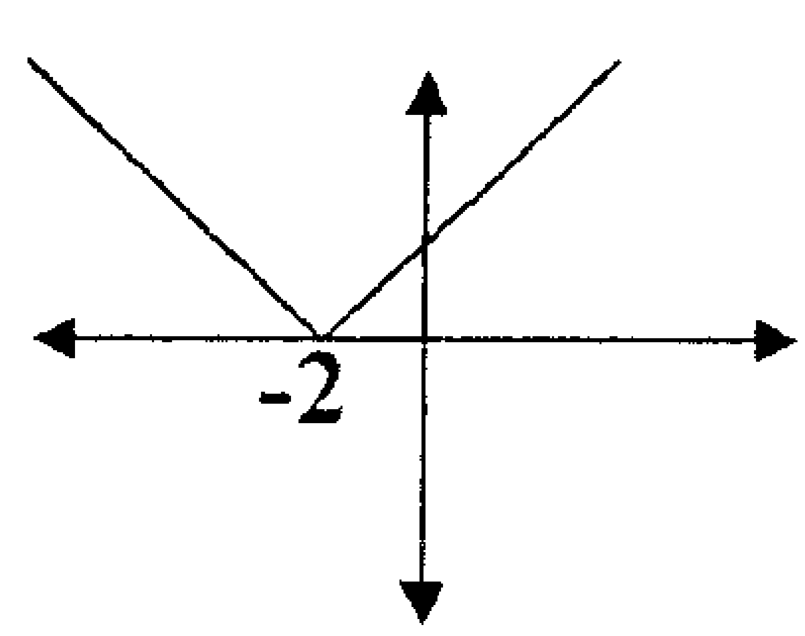
مـثـال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1)F(x)=|x+2|$

الـحـل

$x+2=0 \ \therefore\ x=-2\ ,\ y=0$

$R_F=[0,\infty)$

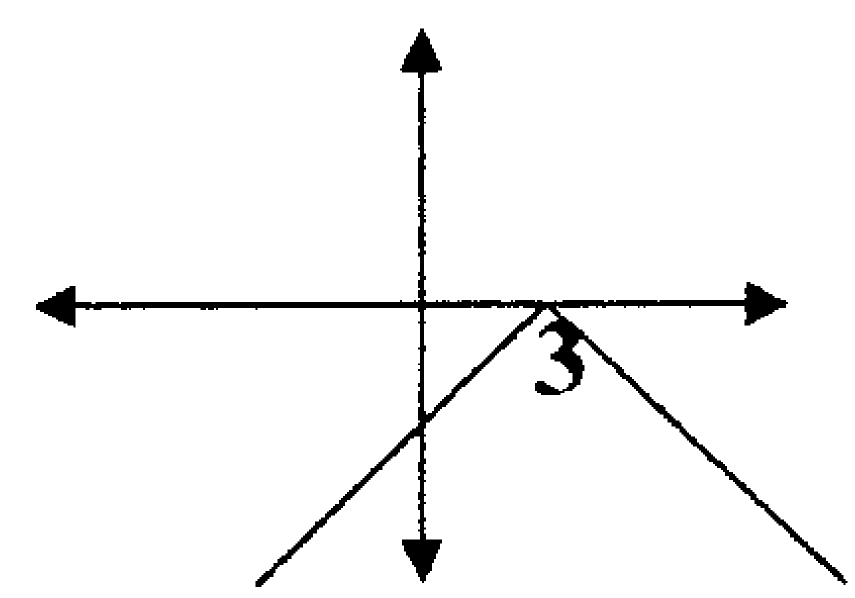


$(2) F(x) = -|2x-6|$

الحل

$2x-6=0 \therefore x=3, y=0$

$R_F = (-\infty, 0]$

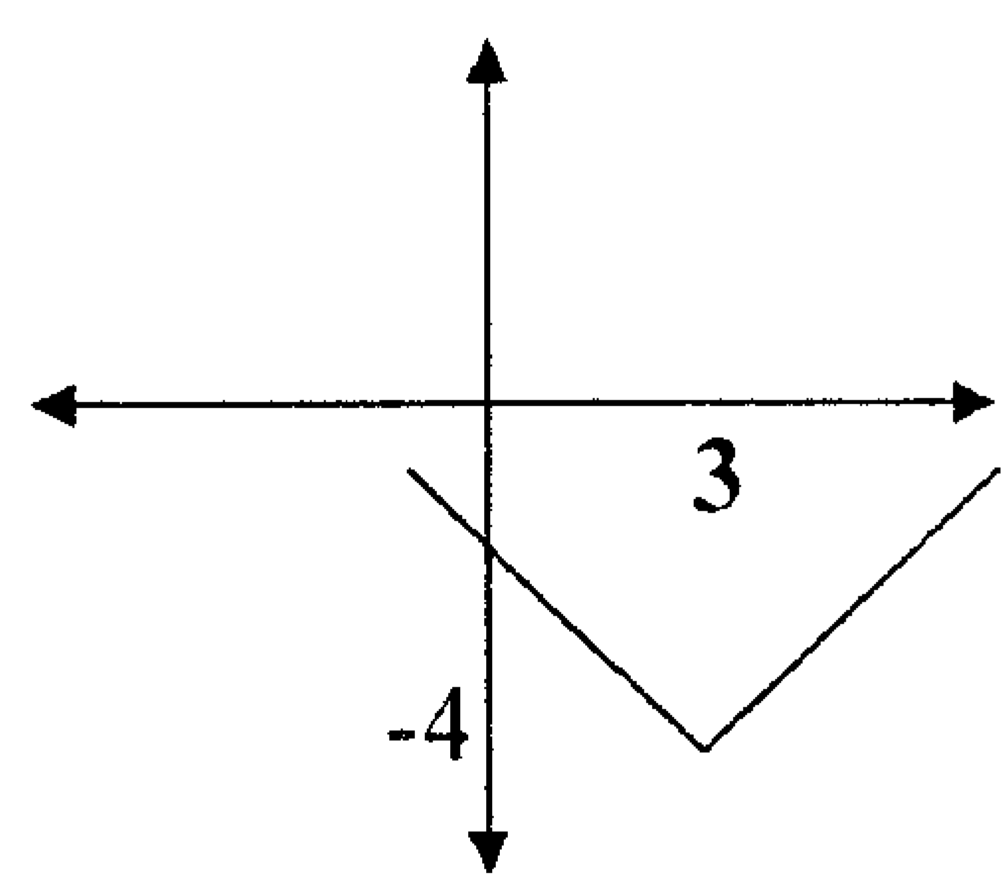


$(3) F(x) = |x-3| - 4$

الحل

$x-3=0 \therefore x=3 \ , y=-4$

$R_F = [-4, \infty)$

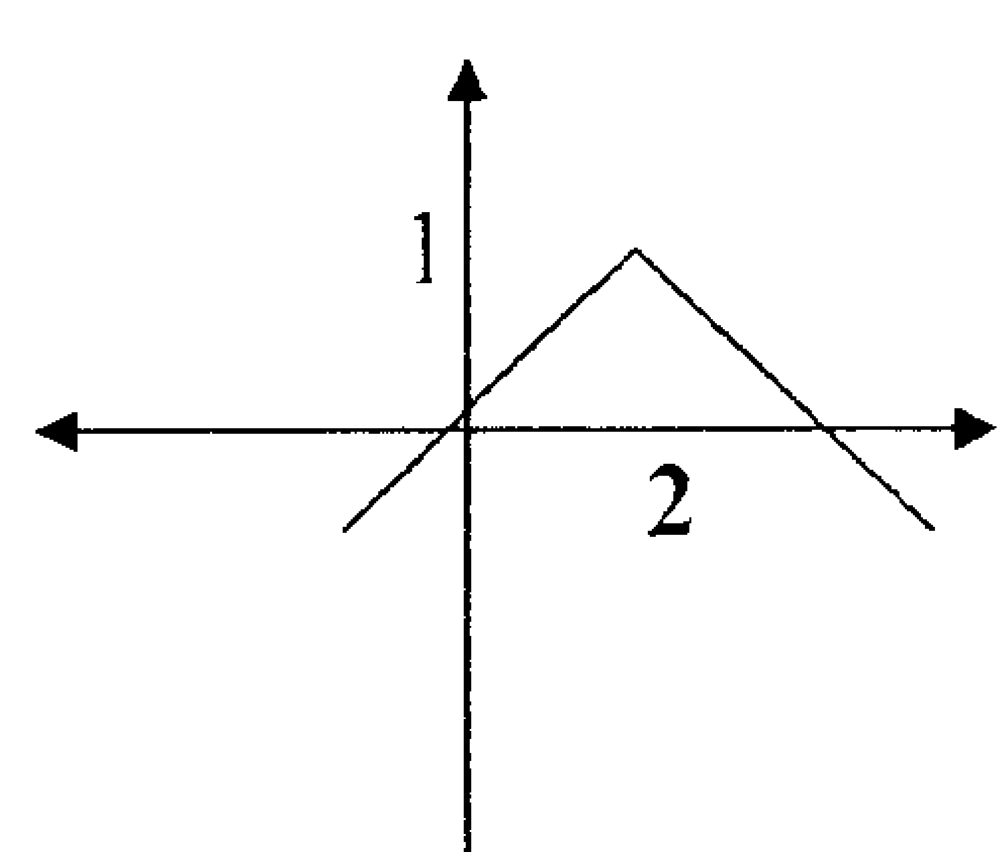


$(4) F(x) = 1 - |2x-4|$

الحل

$2x-4=0 \therefore x=2 \ , y=1$

$R_F = (-\infty, 1]$



الصورة الثالثة :- $F(x)=|g(x)|+h(x) \quad or \quad F(x)=|g(x)|\cdot h(x)$

وكل من $g(x),h(x)$ هي دوال حقيقية :

في هذه الحالة نقوم بإعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا سابقاً

مـثـــال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

$(1) F(x)=|x|+x$

الـحــل

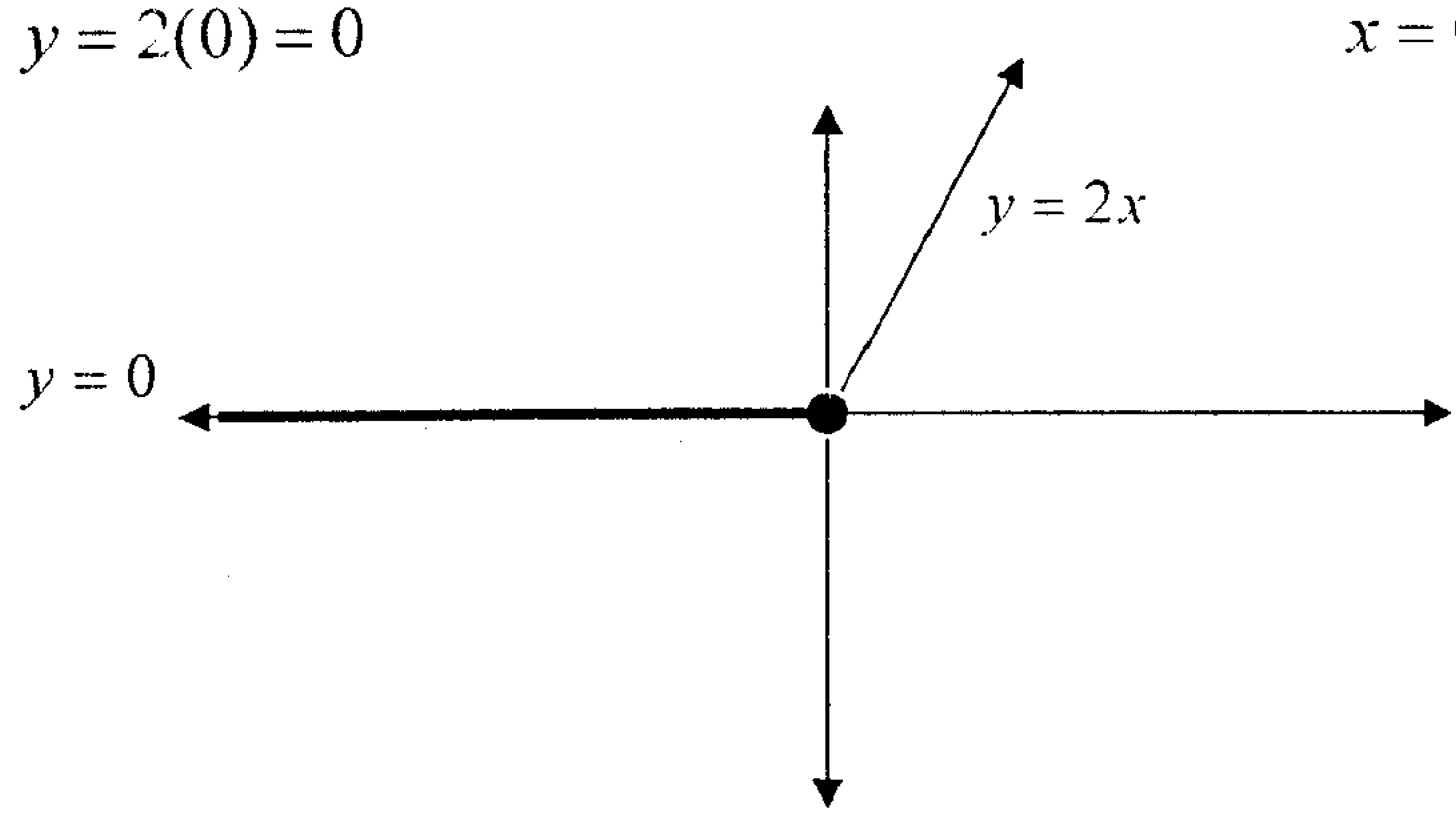
$$F(x)=|x|+x=\begin{Bmatrix} x & , & x\geq 0 \\ -x & , & x<0 \end{Bmatrix}+x=\begin{Bmatrix} 2x & , & x\geq 0 \\ 0 & , & x<0 \end{Bmatrix}$$

$y=0 \quad , x<0$

$x=0 \; , \; y=0$

$y=2x \quad , x\geq 0$

$x=0 \; , \; y=2(0)=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=[0,\infty)$

$(2) F(x) = x - |x|$

الحــل

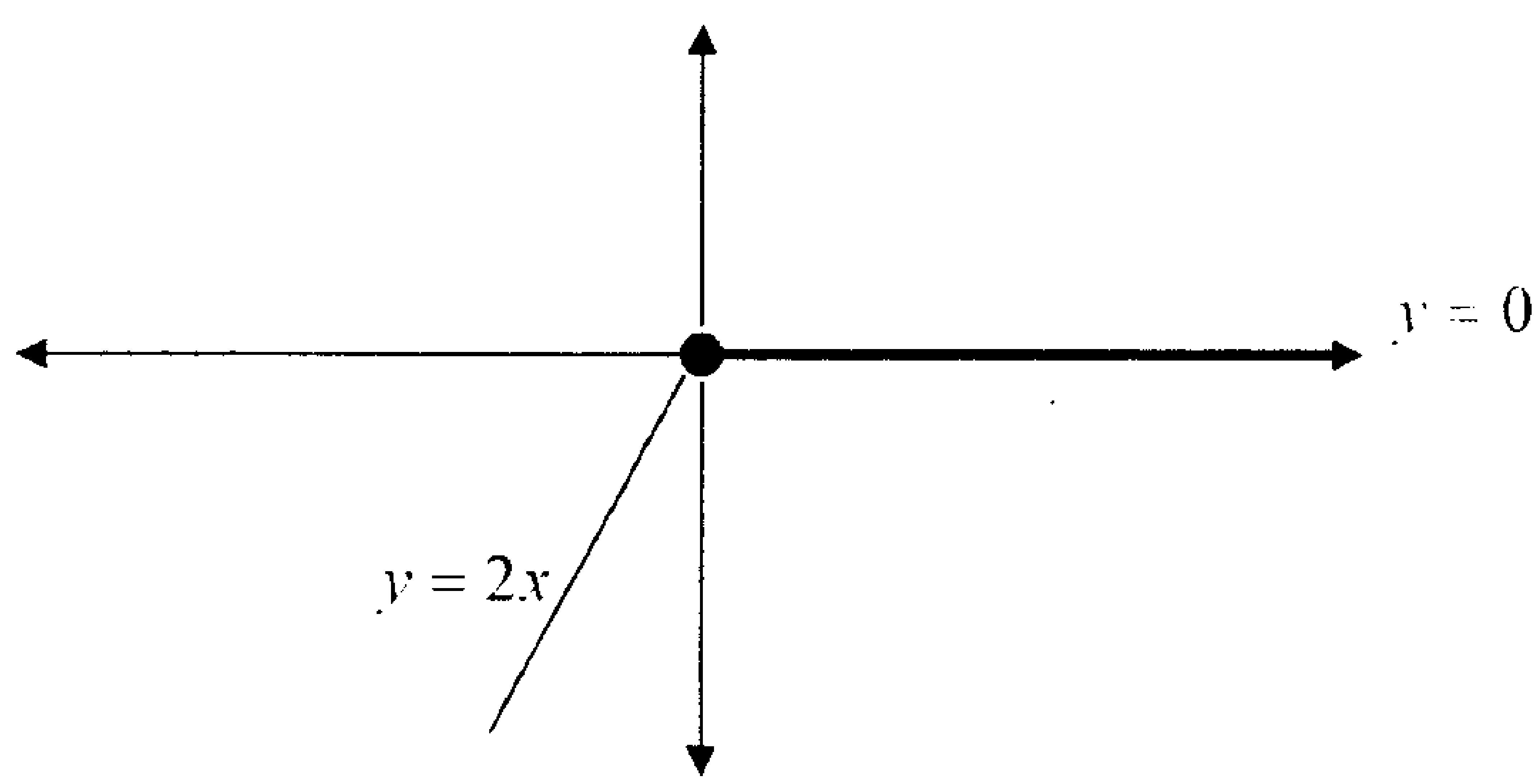
$$F(x) = x - |x| = x - \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$$

$y = 2x \quad , x < 0$

$x = 0 \ , \ y = 2(0) = 0$

$y = 0 \quad , x \geq 0$

$x = 0 \ , \ y = 0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_f = (-\infty, 0]$

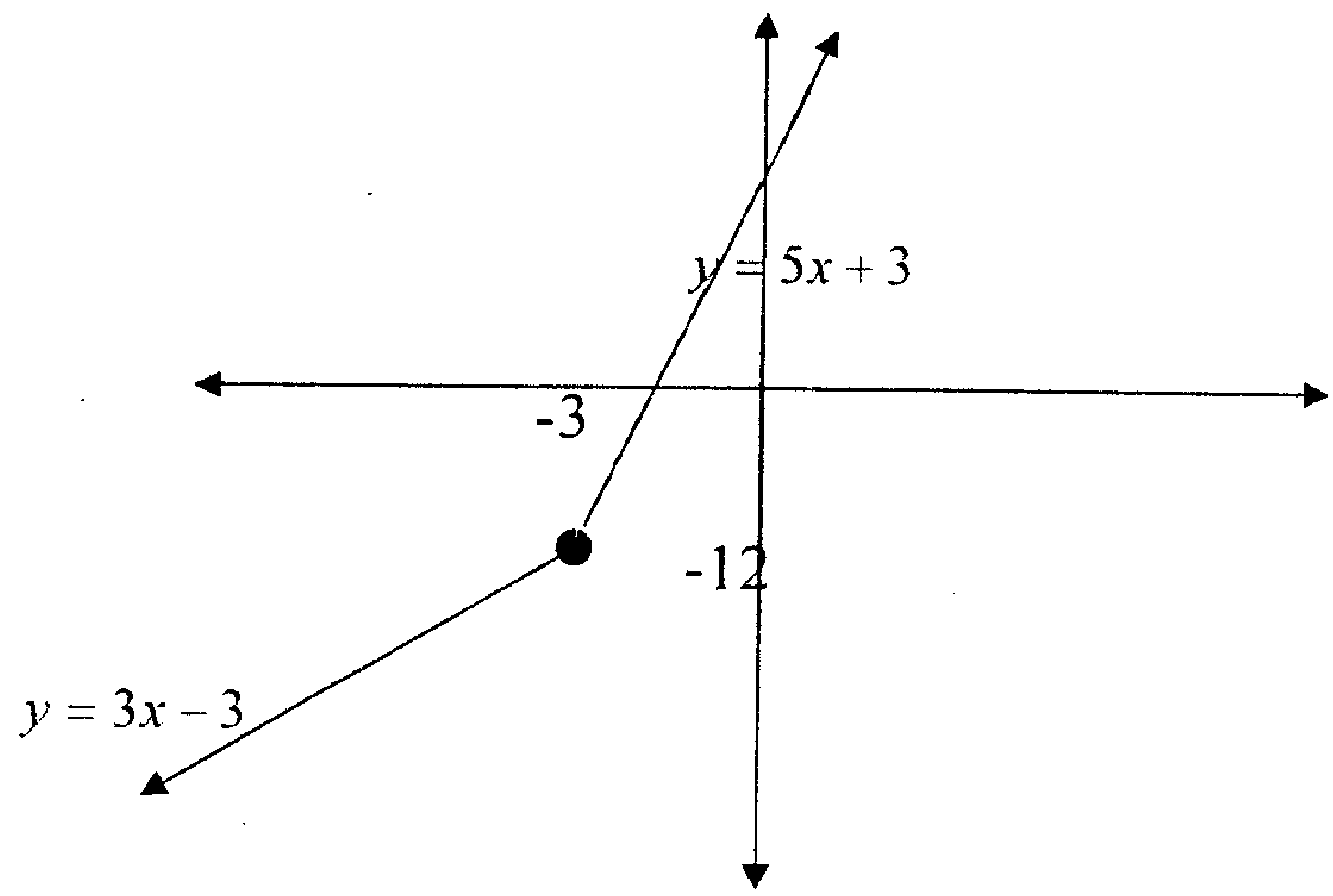
$(3) F(x) = |x + 3| + 4x$

الحــل

$$F(x) = |x + 3| + 4x = \begin{cases} x + 3 & , x \geq -3 \\ -x - 3 & , x < -3 \end{cases} + 4x = \begin{cases} 5x + 3 & , x \geq -3 \\ 3x - 3 & , x < -3 \end{cases}$$

$y = 3x - 3 \quad , x < -3$
$x = -3 \ , \ y = 3(-3) - 3 = -12$

$y = 5x + 3 \quad , x \geq -3$
$x = -3 \ , \ y = 5(-3) + 3 = -12$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, \infty)$

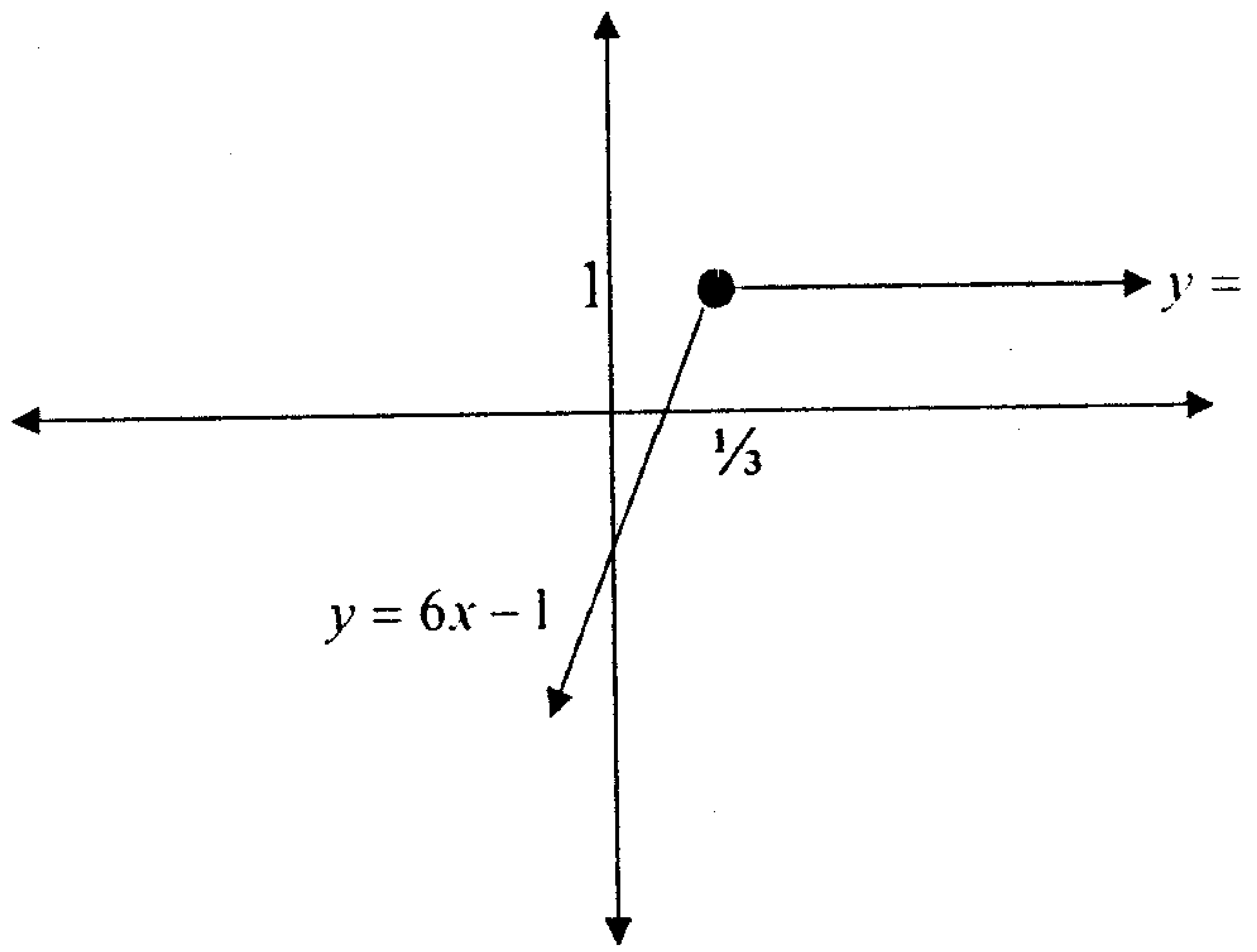
$(4) F(x) = 3x - |3x - 1|$

الحـــل

$$F(x) = 3x - |3x-1| = 3x - \begin{Bmatrix} 3x-1 & , \ x \geq 1/3 \\ -3x+1 & , \ x < 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & , \ x \geq 1/3 \\ 6x-1 & , \ x < 1/3 \end{Bmatrix}$$

$y = 6x - 1 \ , \ x < 1/3$
$x = 1/3 \ , \ y = 6(1/3) - 1 = 1$

$y = 1 \quad , x \geq 1/3$
$x = 1/3 \ , \ y = 1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, 1]$

$(5) F(x) = x^2 + |2x|$

الحـــل

$$F(x) = x^2 + |2x| = x^2 + \begin{cases} 2x & , x \ge 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x & . x \ge 0 \\ x^2 - 2x & . x < 0 \end{cases}$$

$y = x^2 + 2x \quad , x \ge 0$

$y = x^2 + 2x + 1 - 1$

$y = (x+1)^2 - 1, (-1, -1)$

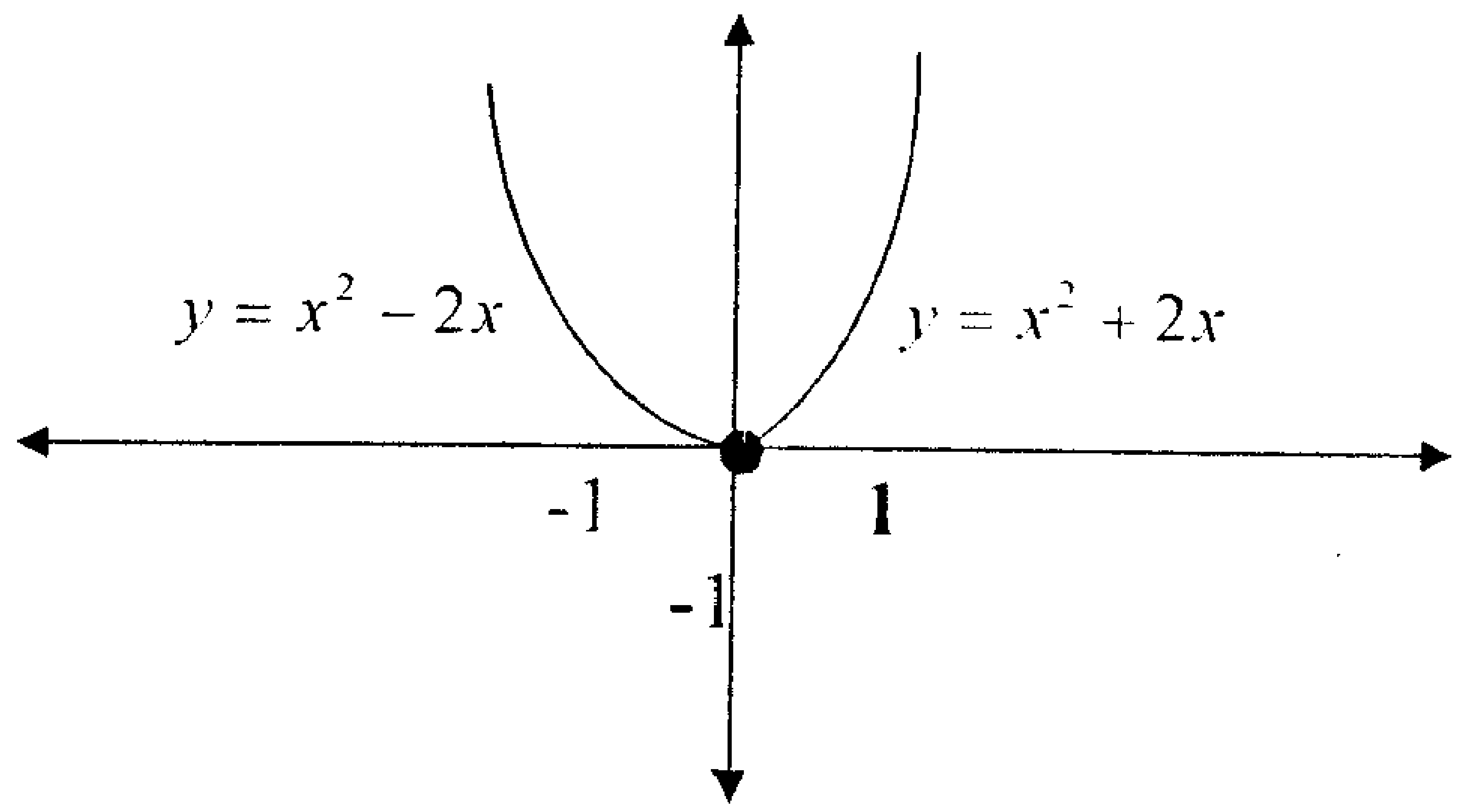
$x = 0 \ , \ y = (0+1)^2 - 1 = 0$

$y = x^2 - 2x \quad , x < 0$

$y = x^2 - 2x + 1 - 1$

$y = (x-1)^2 - 1, (1, -1)$

$x = 0 \ , \ y = (0-1)^2 - 1 = 0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = [0, \infty)$

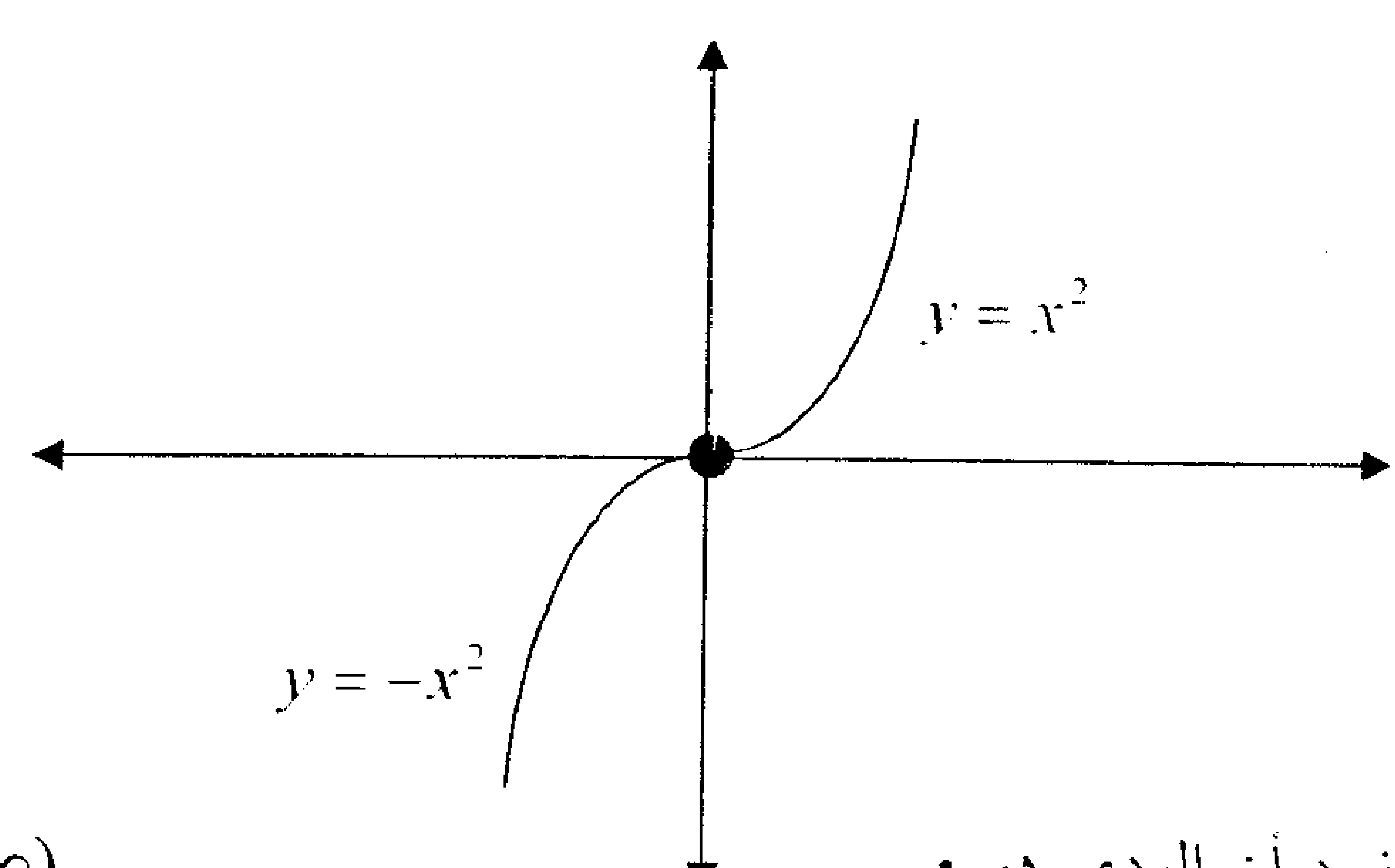
$(6) F(x) = x|x|$

الحـــل

$$F(x) = x|x| = x\begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

$y = x^2 \quad , x \geq 0$ $\qquad$ $y = -x^2 \quad , x < 0$

$x = 0 \ , \ y = (0)^2 = 0$ $\qquad$ $x = 0 \ , \ y = -(0)^2 = 0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, \infty)$

الصورة الرابعة : -$F(x)=|g(x)|$ حيث أن $g(x)$ هي دالة تربيعية في هذه الحالة نقوم بإعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا

مـثـال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

(1) $F(x)=\left|x^2-4\right|$

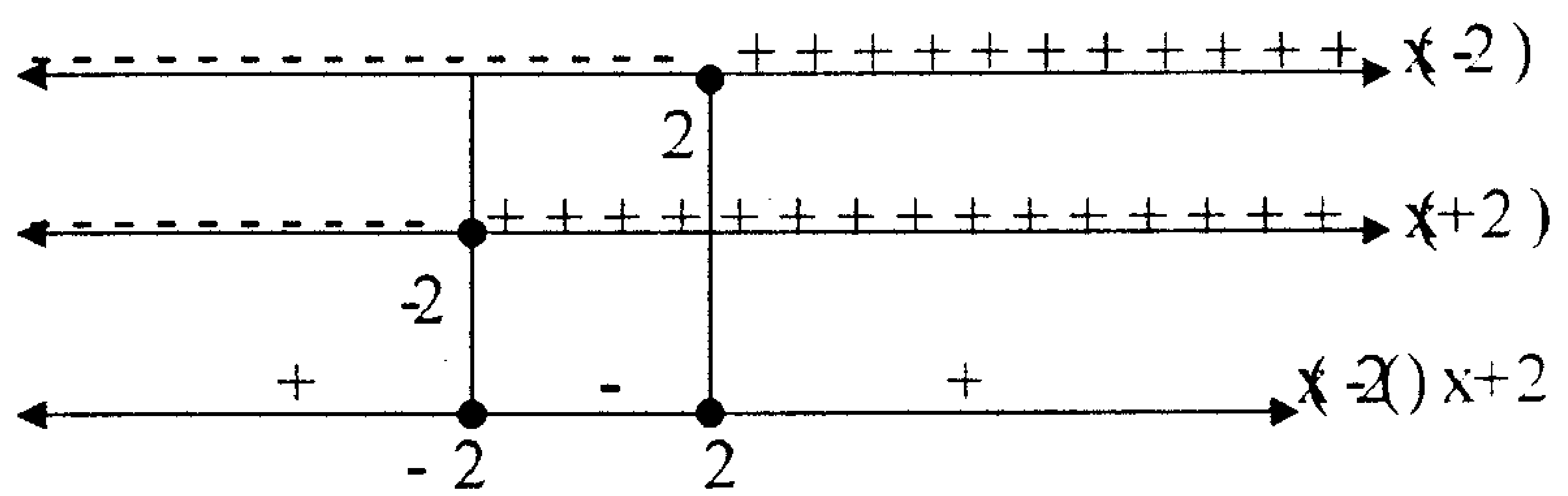
الــحــل

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$(x-2)=0\ ;x=2$

$(x+2)=0\ ,x=-2$



$$F(x)=\begin{cases} x^2-4 & , x\geq 2\ ,\ x<-2 \\ -x^2+4 & , -2\leq x<2 \end{cases}$$

$y=x^2-4\ \ ,x\geq 2\ ,x<-2$

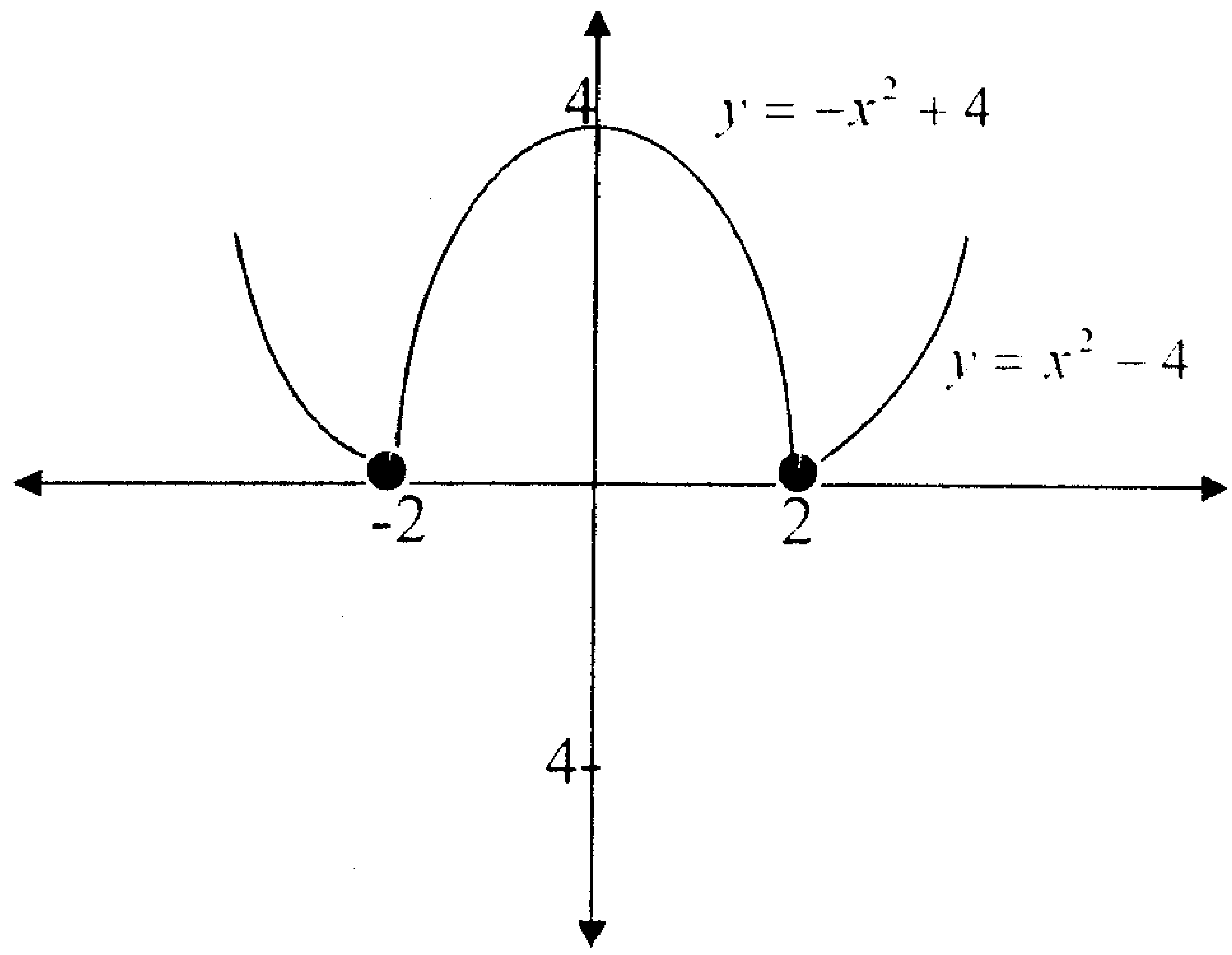
$x=2\ ,\ y=0$

$x=-2\ ,\ y=0$

$y=-x^2+4\ .\ -2\leq x<2$

$x=2\ .\ y=0$

$x=-2\ ,\ y=0$

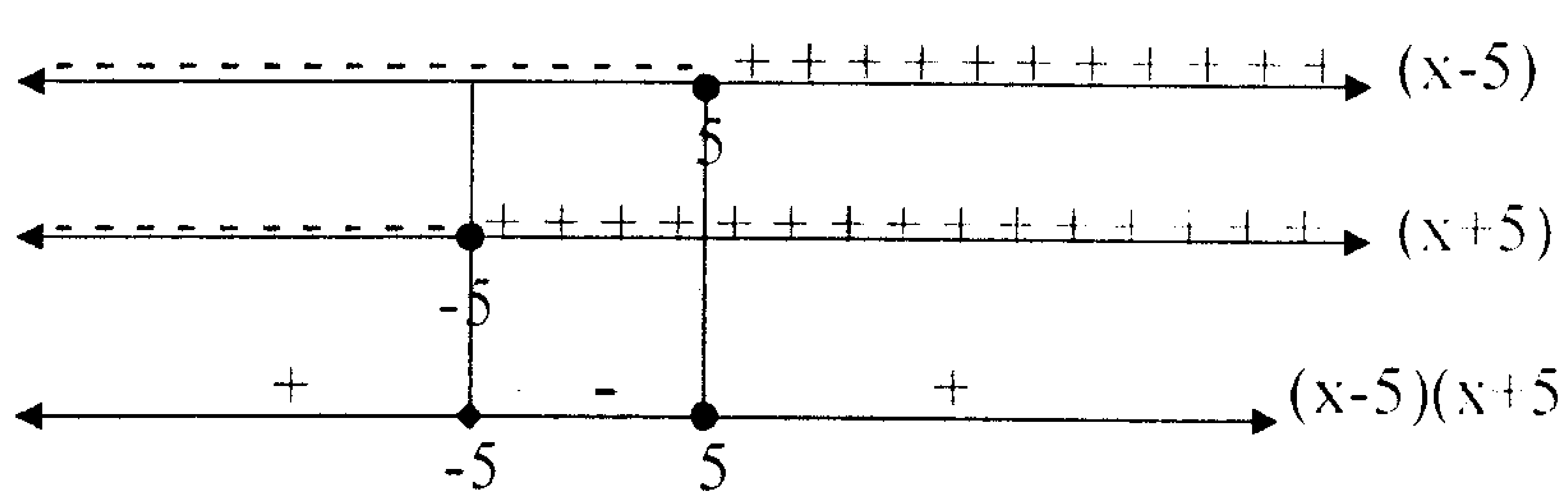


من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=[0,\infty)$

(2) $F(x)=\left|25-x^2\right|$

الحـــل

$$\left|25-x^2\right|=\left|x^2-25\right|$$
$$x^2-25=0$$
$$(x-5)(x+5)=0$$
$$(x-5)=0\ ,x=5$$
$$(x+5)=0\ ,x=-5$$

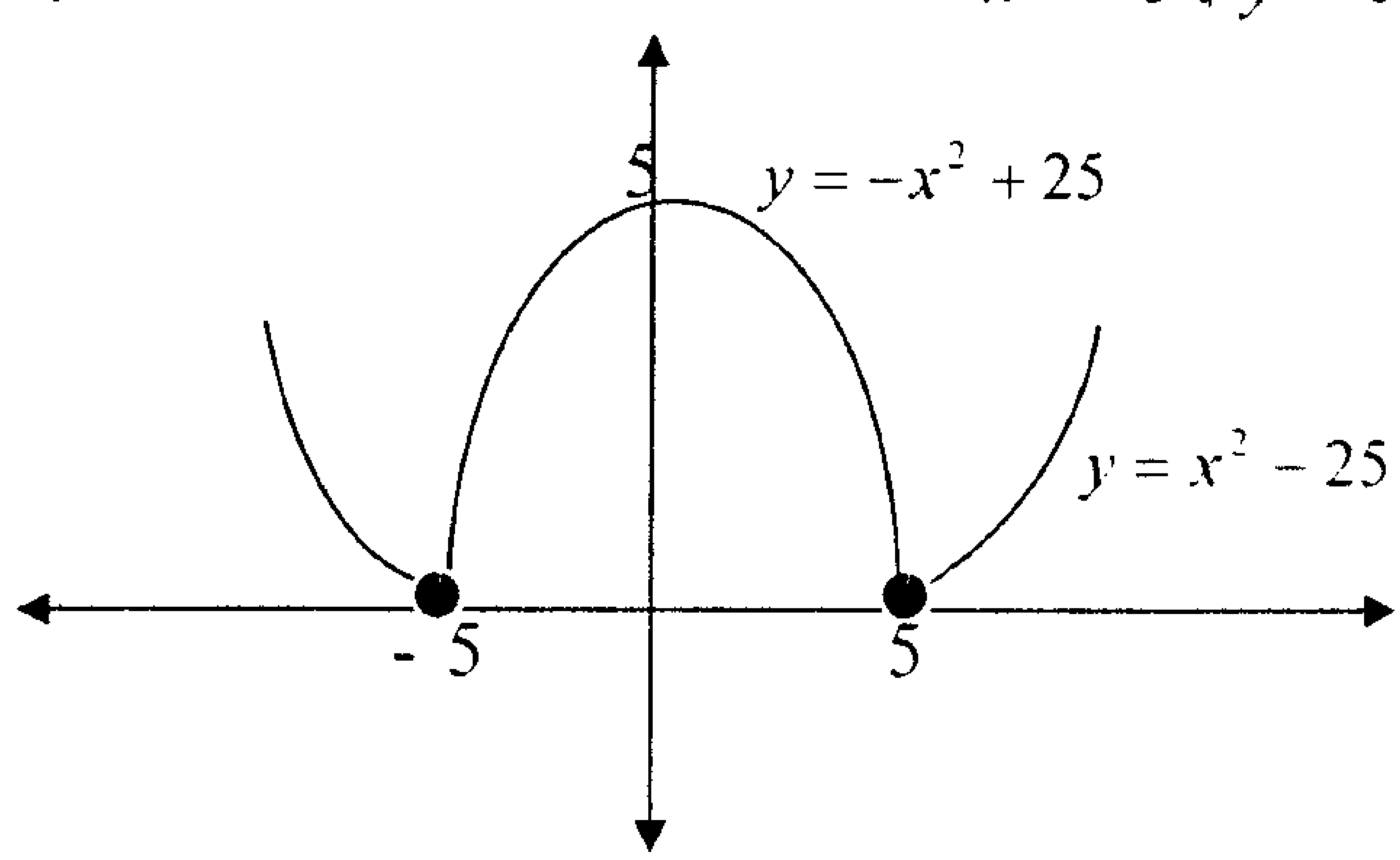


$$F(x)=\begin{cases} x^2-25 & , x\geq 5,\ x<-5 \\ -x^2+25 & , -5\leq x<5 \end{cases}$$

$y=x^2-25\ \ , x\geq 5\ ,x<-5$ $\qquad\qquad$ $y=-x^2+25\ , -5\leq x<5$

$x=5\ ,\ y=0$ $\qquad\qquad$ $x=5\ .\ y=0$

$x=-5,\ y=0$ $\qquad\qquad$ $x=-5\ ,\ y=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=[0,\infty)$

(3) $F(x)=\left|x^2-4\right|+4$

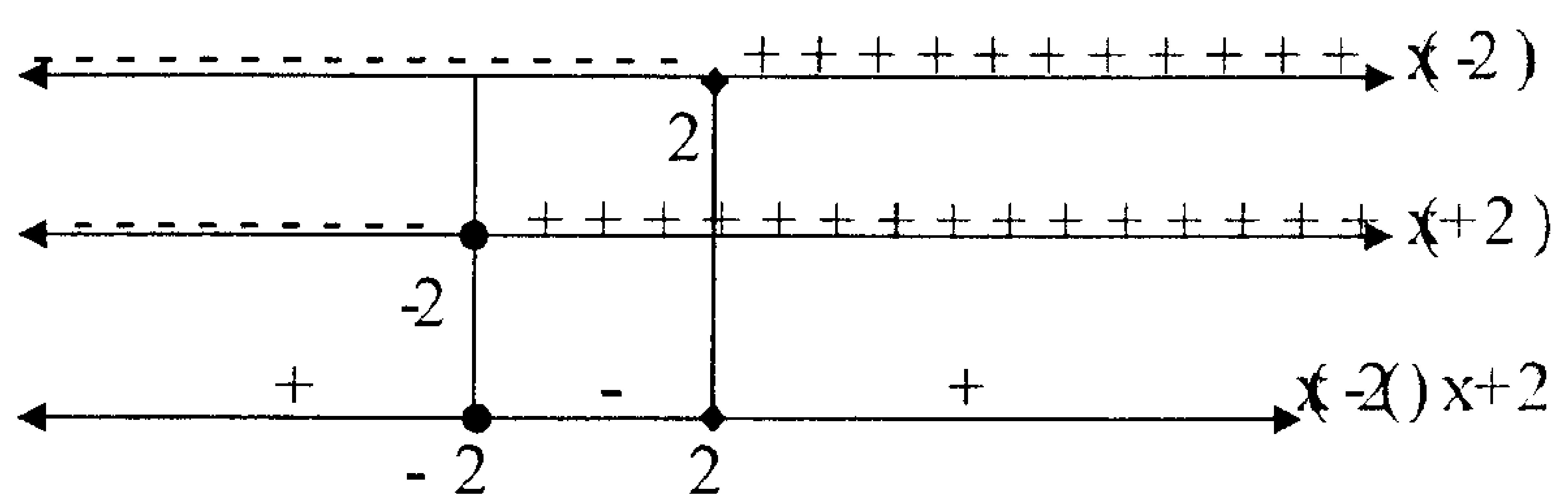
الـــحـــل

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$(x-2)=0\ \ ,x=2$

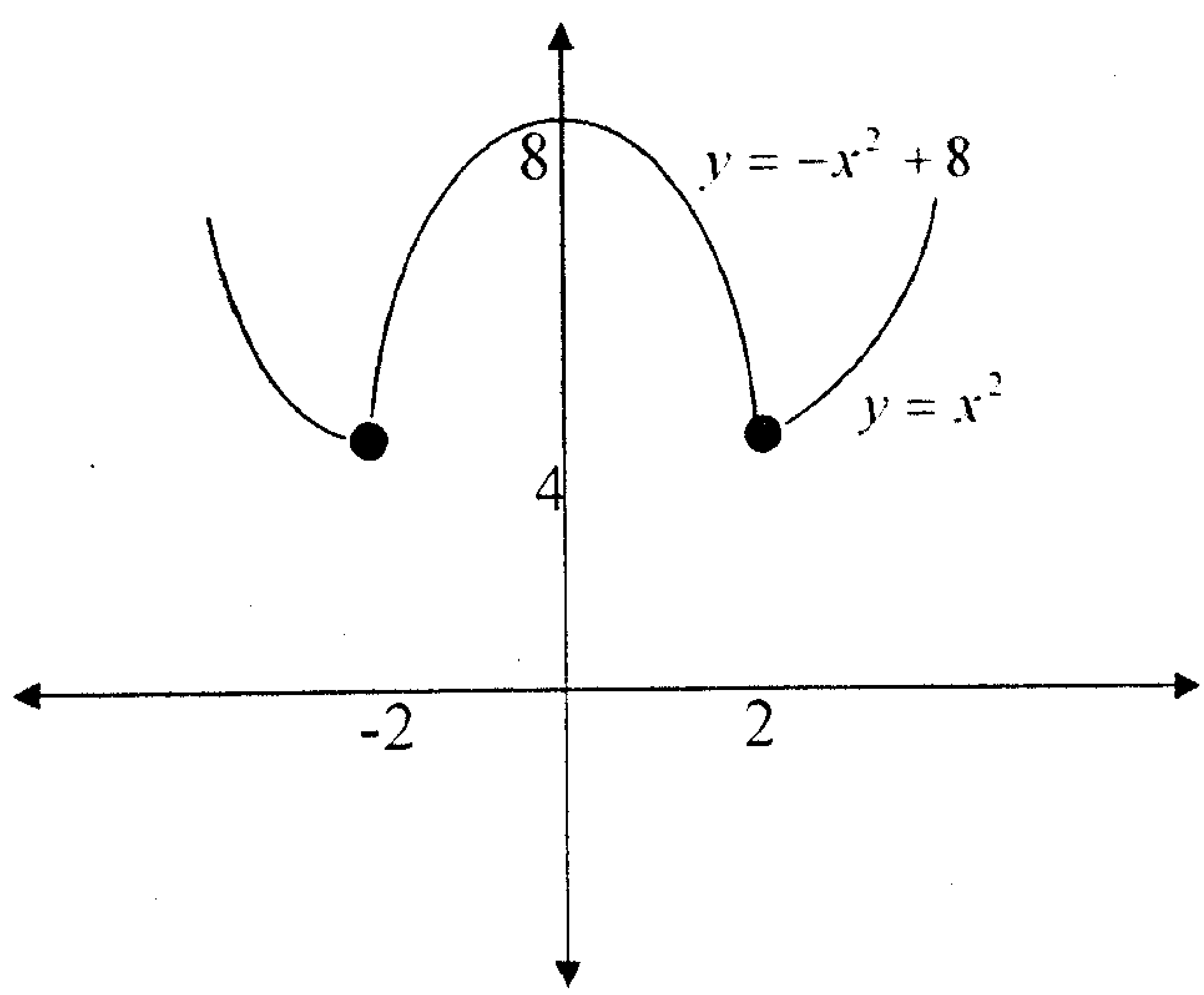
$(x+2)=0\ \ ,x=-2$



$$F(x)=\begin{cases} x^2-4 & , x\geq 2\ ,\ x<-2 \\ -x^2+4 & , -2\leq x<2 \end{cases}+4=\begin{cases} x^2 & , x\geq 2\ ,\ x<-2 \\ -x^2+8 & , -2\leq x<2 \end{cases}$$

$y=x^2 \quad , x\geq 2\ , x<-2$
$x=2 \quad , y=4$
$x=-2\ , y=4$

$y=-x^2+8\ , -2\leq x<2$
$x=2 \quad , y=4$
$x=-2\ , y=4$



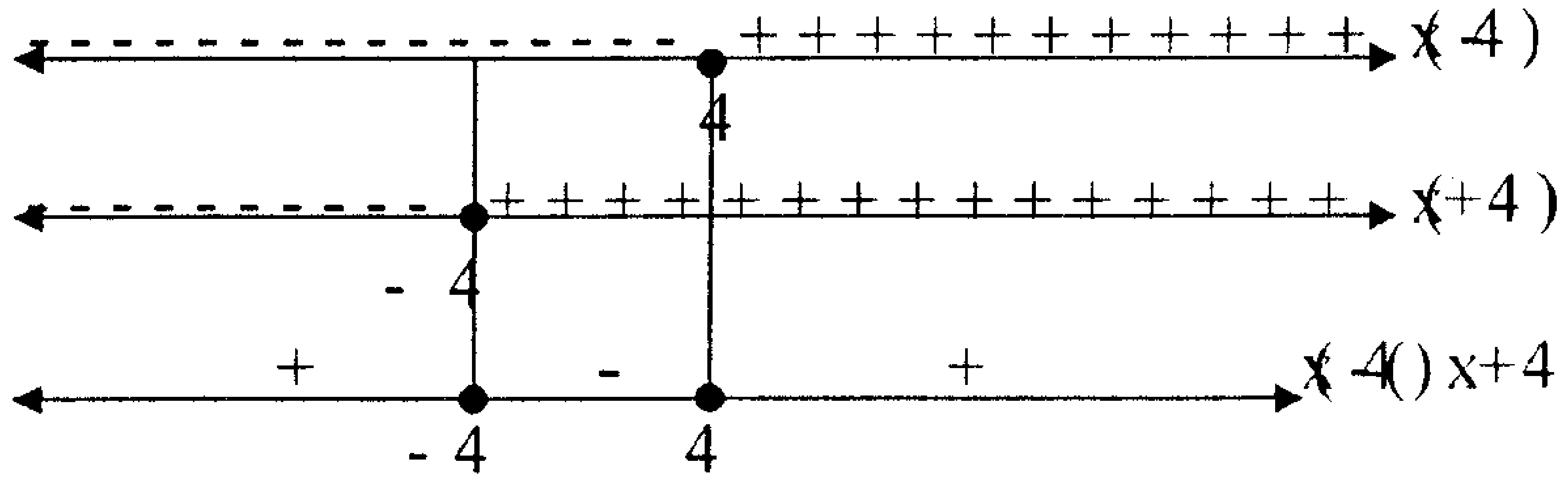
من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F=[4,\infty)$

(4) $F(x)=-\left|x^2-16\right|$

الـحـل

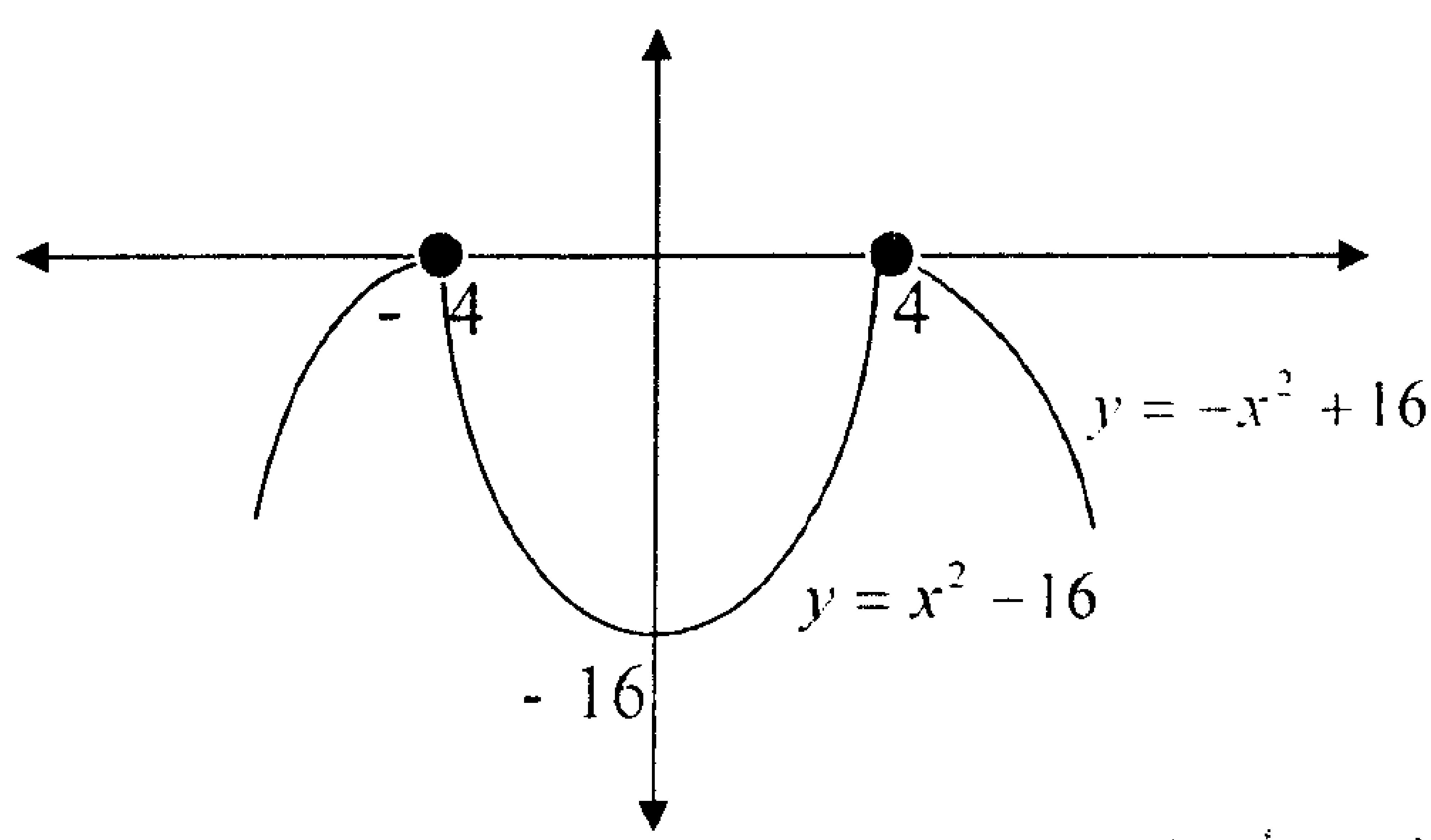
$x^2-16=0$
$(x-4)(x+4)=0$
$(x-4)=0 \quad , x=4$
$(x+4)=0 \quad , x=-4$



$$F(x)=-\left|x^2-16\right|=-\begin{cases} x^2-16 & , x\ge 4,\ x<-4 \\ -x^2+16 & , -4\le x<4 \end{cases}=\begin{cases} -x^2+16 & , x\ge 4,\ x<-4 \\ x^2-16 & , -4\le x<4 \end{cases}$$

$y=-x^2+16 \quad , x\ge 4 \,, x<-4$
$x=4 \,,\ y=0$
$x=-4 \,,\ y=0$

$y=x^2-16 \,, -4\le x<4$
$x=4 \,,\ y=0$
$x=-4 \,,\ y=0$

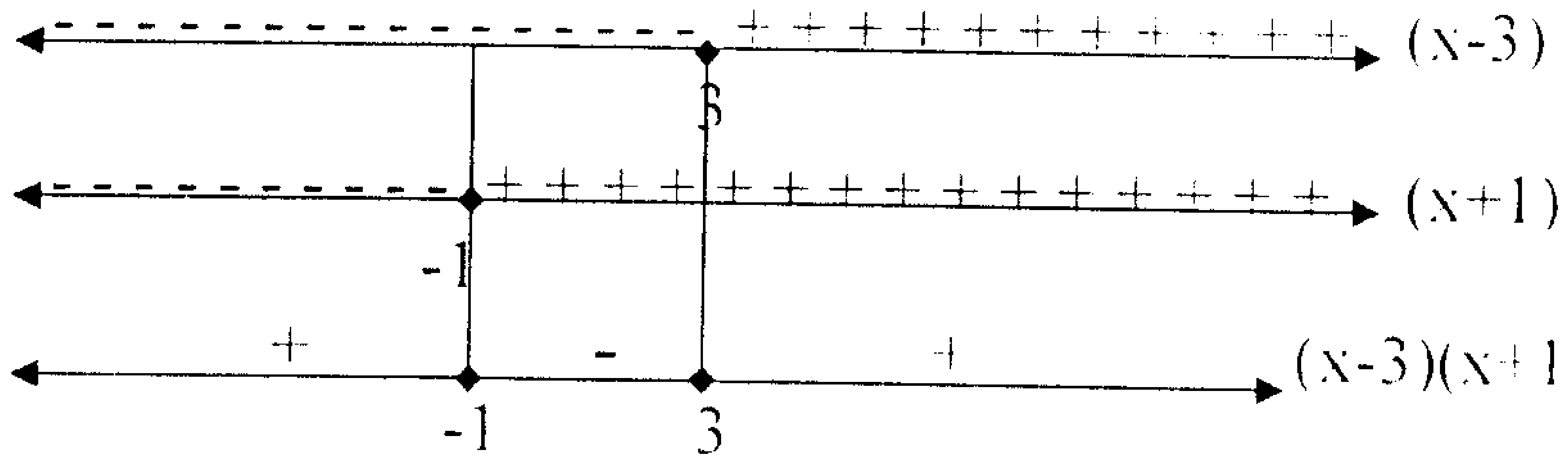


من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=(-\infty,0]$

(5) $F(x)=\left|x^2-2x-3\right|$

الحـــل

$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$(x-3)=0 \quad ,x=3$
$(x+1)=0 \quad ,x=-1$



$$F(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & , \ x\geq 3 \ , \ x<-1 \\ -x^2+2x+3 & , \ -1\leq x<3 \end{cases}$$

$y=x^2-2x-3 \ , \ x\geq 3 \ , x<-1$

$y=x^2-2x+1-1-3$

$y=(x-1)^2-4,(1,-4)$

$x=3 \ , \ y=0$

$x=-1 \ , \ y=0$

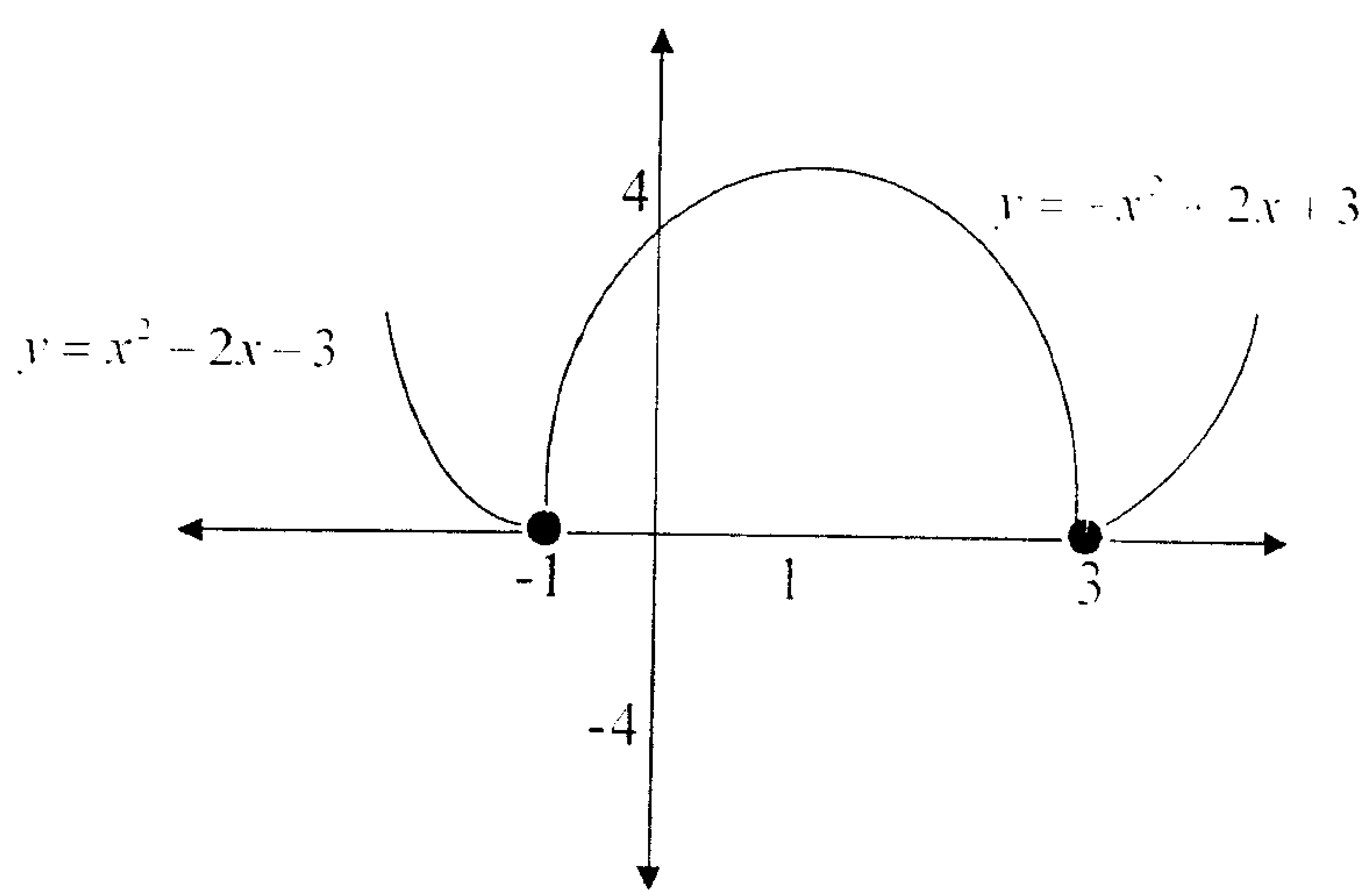
$y=-x^2+2x+3 \ , \ -1\leq x<3$

$y=-[x^2-2x+1-1-3]$

$y=-(x-1)^2+4,(1,4)$

$x=3 \ , \ y=0$

$x=-1 \ , \ y=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_f=[0,\infty)$

الصورة الخامسة : -$F(x)=|g(x)|+|h(x)|$ حيث أن $g(x),h(x)$ هي دوال حقيقية

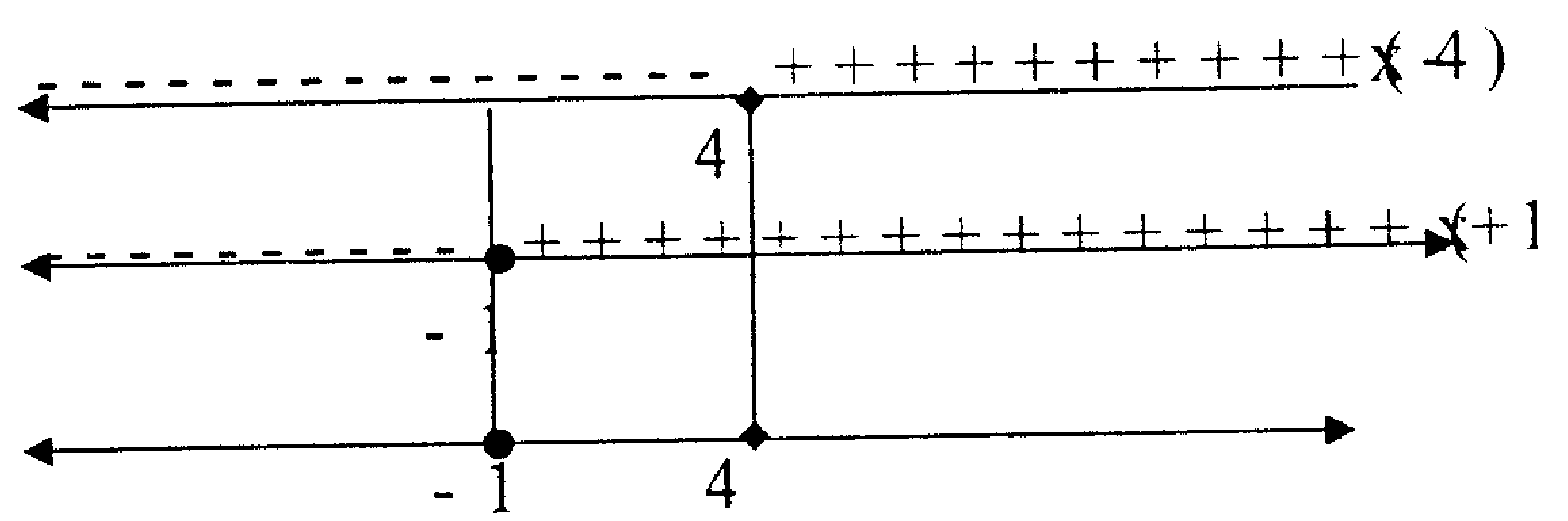
وفي هذه الحالة نقوم بإعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثر من قاعدة

مـثـال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

(1) $F(x)=|x+1|+|x-4|$

الـحـل

$$F(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & , x\geq -1 \\ -(x+1) & , x<-1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} x-4 & , x\geq 4 \\ -(x-4) & , x<4 \end{Bmatrix}$$



$$F(x)=\begin{Bmatrix} x+1+x-4 & , x\geq 4 \\ x+1-x+4 & , -1\leq x<4 \\ -x-1-x+4 & , x<-1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2x-3 & , x\geq 4 \\ 5 & , -1\leq x<4 \\ -2x+3 & , x<-1 \end{Bmatrix}$$

$y=2x-3 \quad , x\geq 4$

$x=4 \quad , y=5$

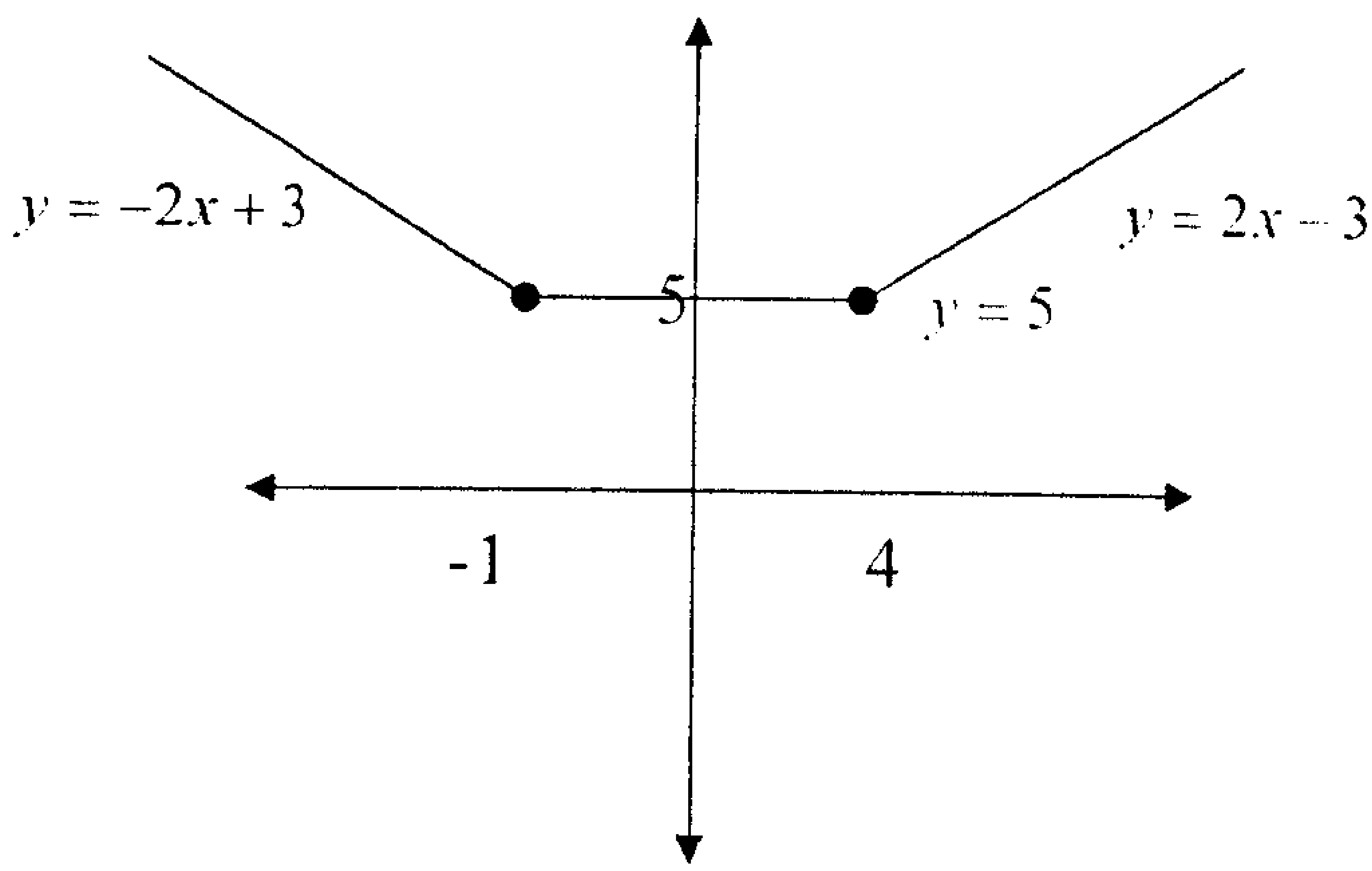
$y=5 \quad ,-1\leq x<4$

$x=-1, y=5$

$x=4 , y=5$

$y=-2x+3 \quad , x<-1$

$x=-1 \; . \; y=5$

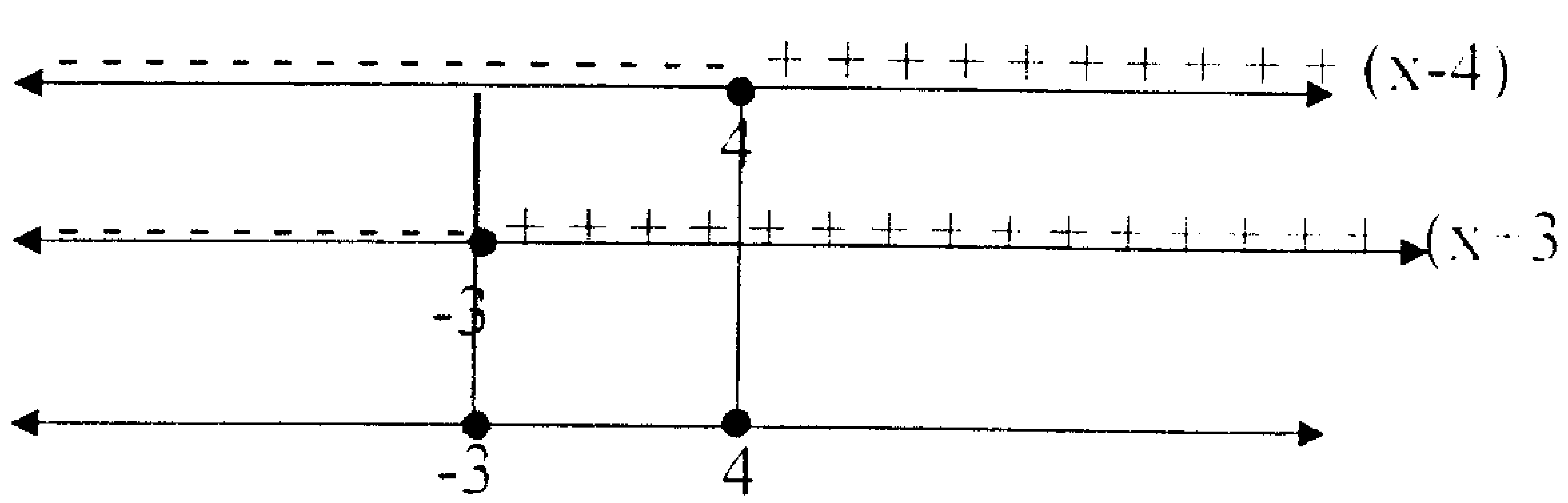


من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_f = [5, \infty)$

(2) $F(x) = |x+3| + |x-4|$

الـحـل

$$F(x) = \begin{cases} x+3 & , x \geq -3 \\ -(x+3) & , x < -3 \end{cases} + \begin{cases} x-4 & , x \geq 4 \\ -(x-4) & , x < 4 \end{cases}$$

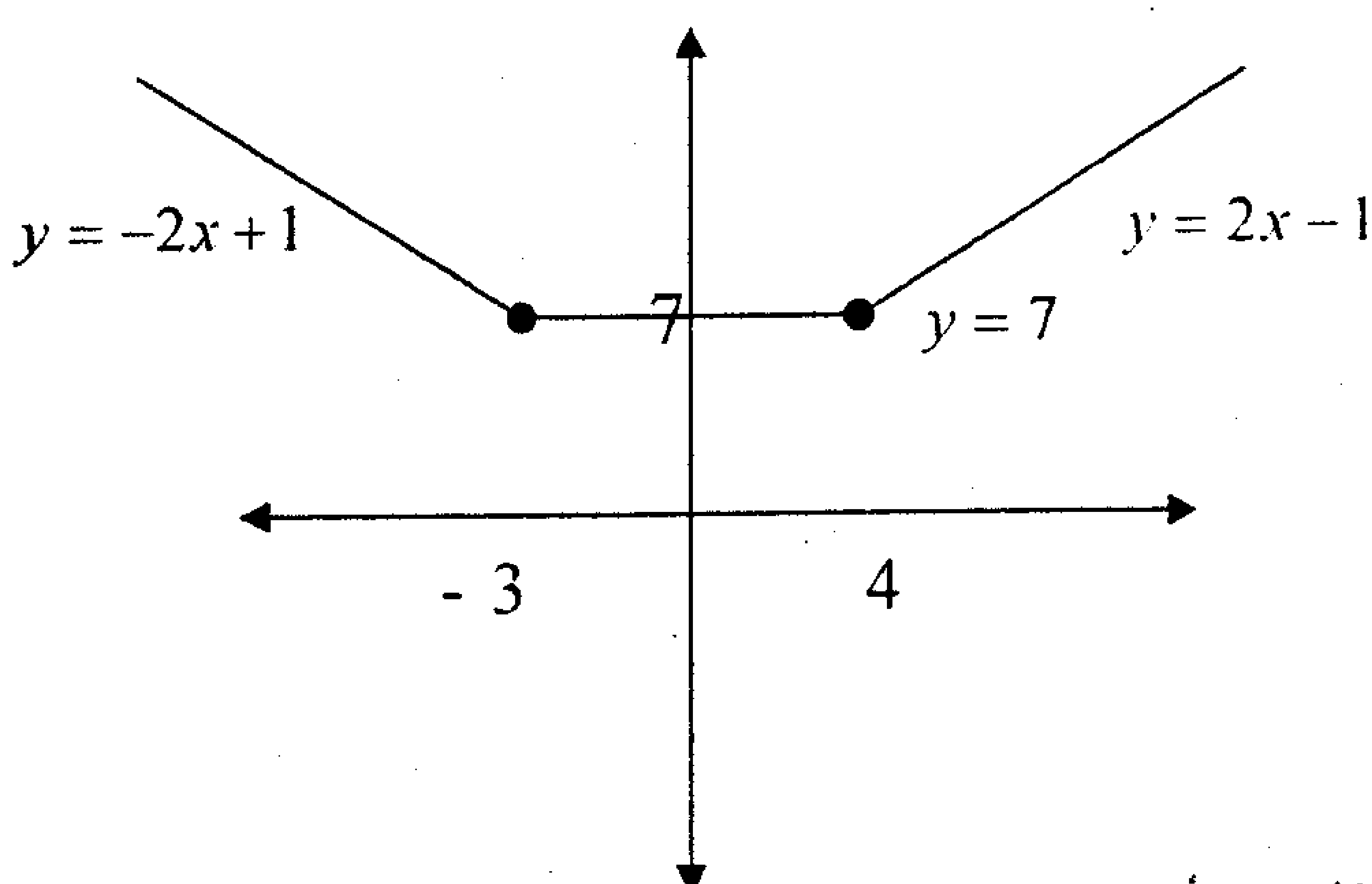


$$F(x) = \begin{cases} x+3+x-4 & , x \geq 4 \\ x+3-x+4 & , -3 \leq x < 4 \\ -x-3-x+4 & , x < -3 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq 4 \\ 7 & , -3 \leq x < 4 \\ -2x+1 & , x < -3 \end{cases}$$

$y = -2x+1 \quad , x < -3$
$x = -3 \; , \; y = 7$

$y = 7 \quad , -3 \le x < 4$
$x = -3 , y = 7$
$x = 4 , y = 7$

$y = 2x - 1 \quad , x \ge 4$
$x = 4 \; , \; y = 7$

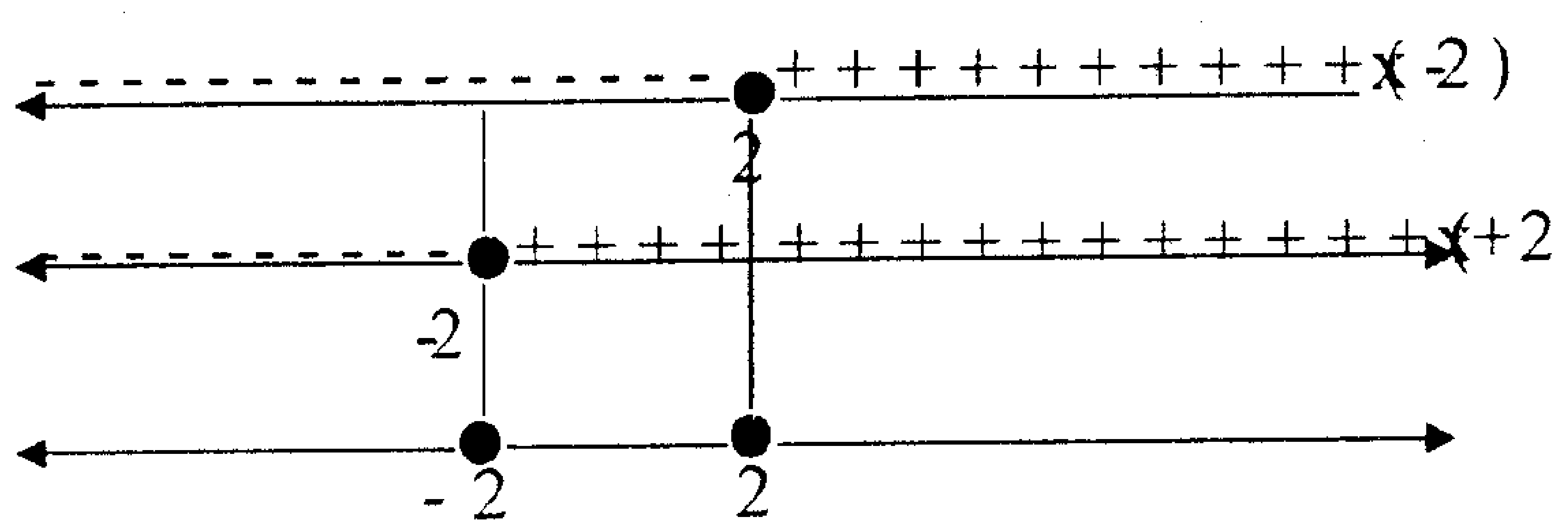


من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = [7, \infty)$

(3) $F(x) = |x+2| + |x-2| + x$

الــحـــل

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+2 & , x \ge -2 \\ -(x+2) & , x < -2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} x-2 & , x \ge 2 \\ -(x-2) & , x < 2 \end{array} \right\} + x$$



$$F(x)=\begin{cases} x+2+x-2+x & , x\geq 2 \\ x+2-x+2+x & , -2\leq x<2 \\ -x-2-x+2+x & , x<-2 \end{cases}=\begin{cases} 3x & , x\geq 2 \\ x+4 & , -2\leq x<2 \\ -x & , x<-2 \end{cases}$$

$y=3x \quad , x\geq 2$

$x=2 \quad , y=6$

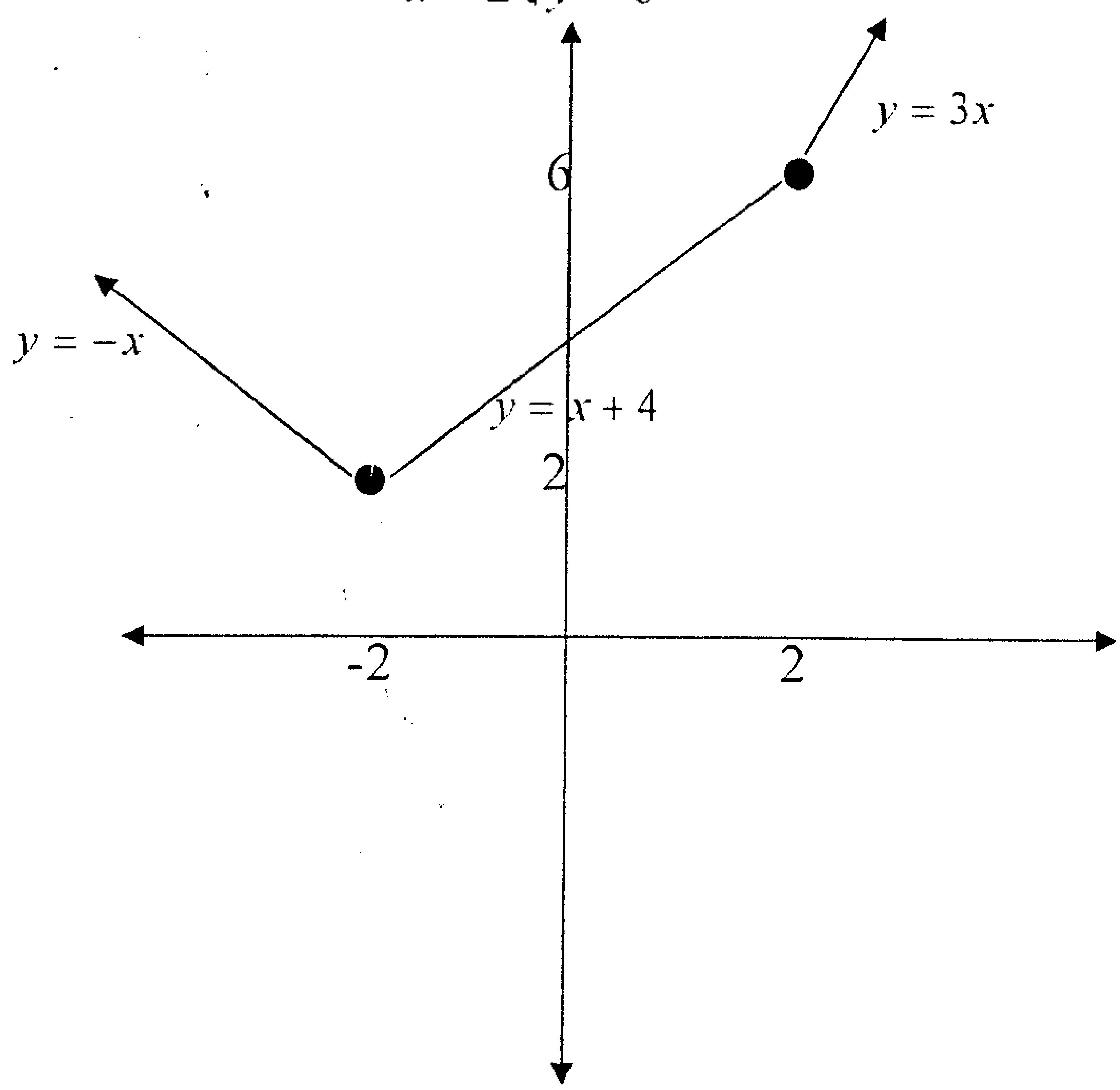
$y=x+4 \quad , -2\leq x<2$

$x=-2 , y=2$

$x=2 , y=6$

$y=-x \quad , x<-2$

$x=-2 \quad , y=2$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F=[2,\infty)$

الصورة السادسة : - $F(x)=\frac{g(x)}{|g(x)|}$ or $F(x)=\frac{|g(x)|}{g(x)}$ حيث أن $g(x)$ هي دالة حقيقية وفي هذه الحالة نقوم بإعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثر من قاعدة ومن بيان الدالة نعين المدى .

مــثــال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

$$(1)\ F(x)=\frac{|x|}{x}$$

الـحـل

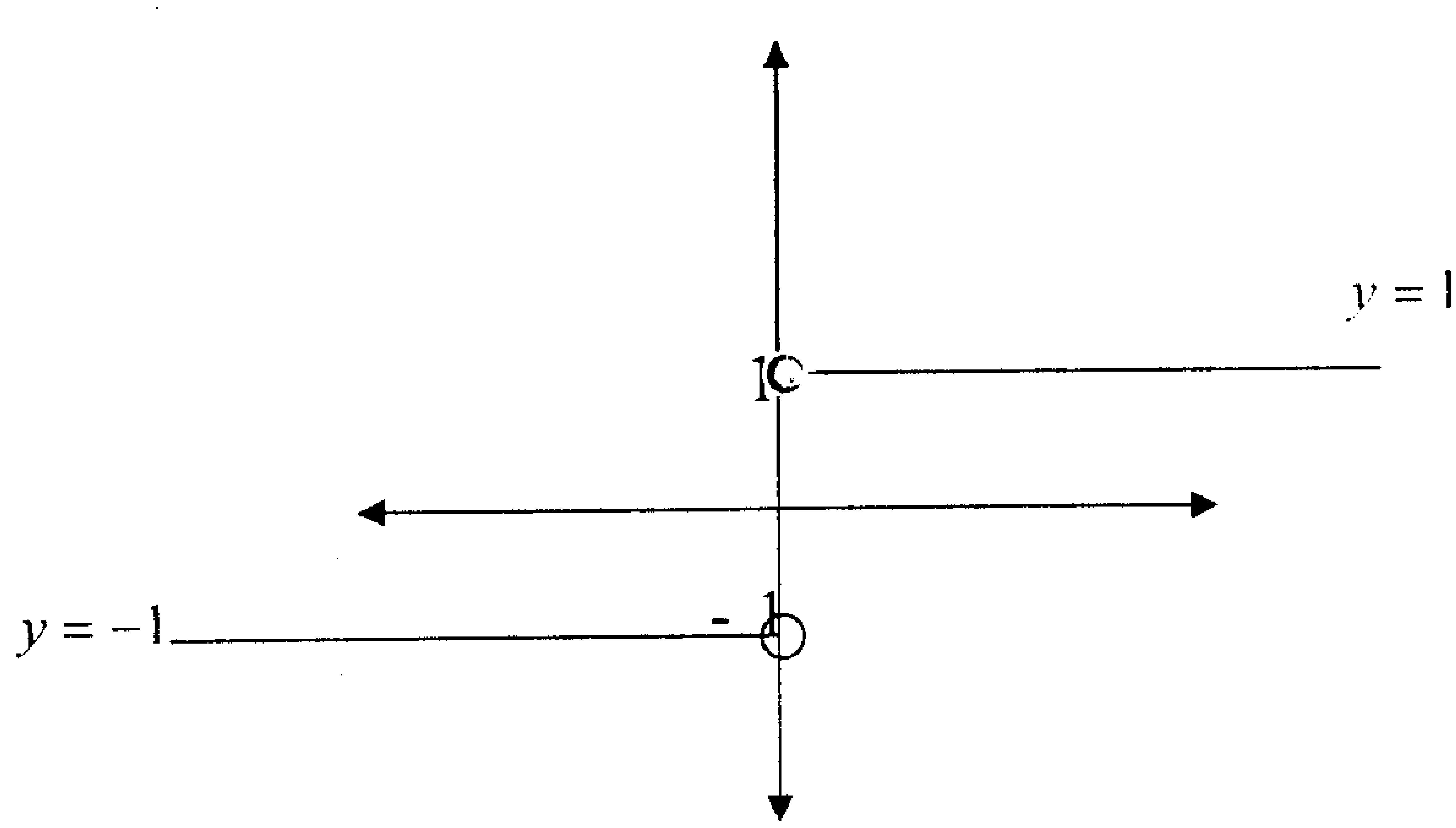
$$F(x)=\begin{cases} \frac{x}{x} & , x>0 \\ -\frac{x}{x} & , x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , x>0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$$

$y=1\ ,\ x>0$

$x=0\ ,\ y=1$

$y=-1\ ,\ x<0$

$x=0\ ,\ y=-1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{-1,1\}$

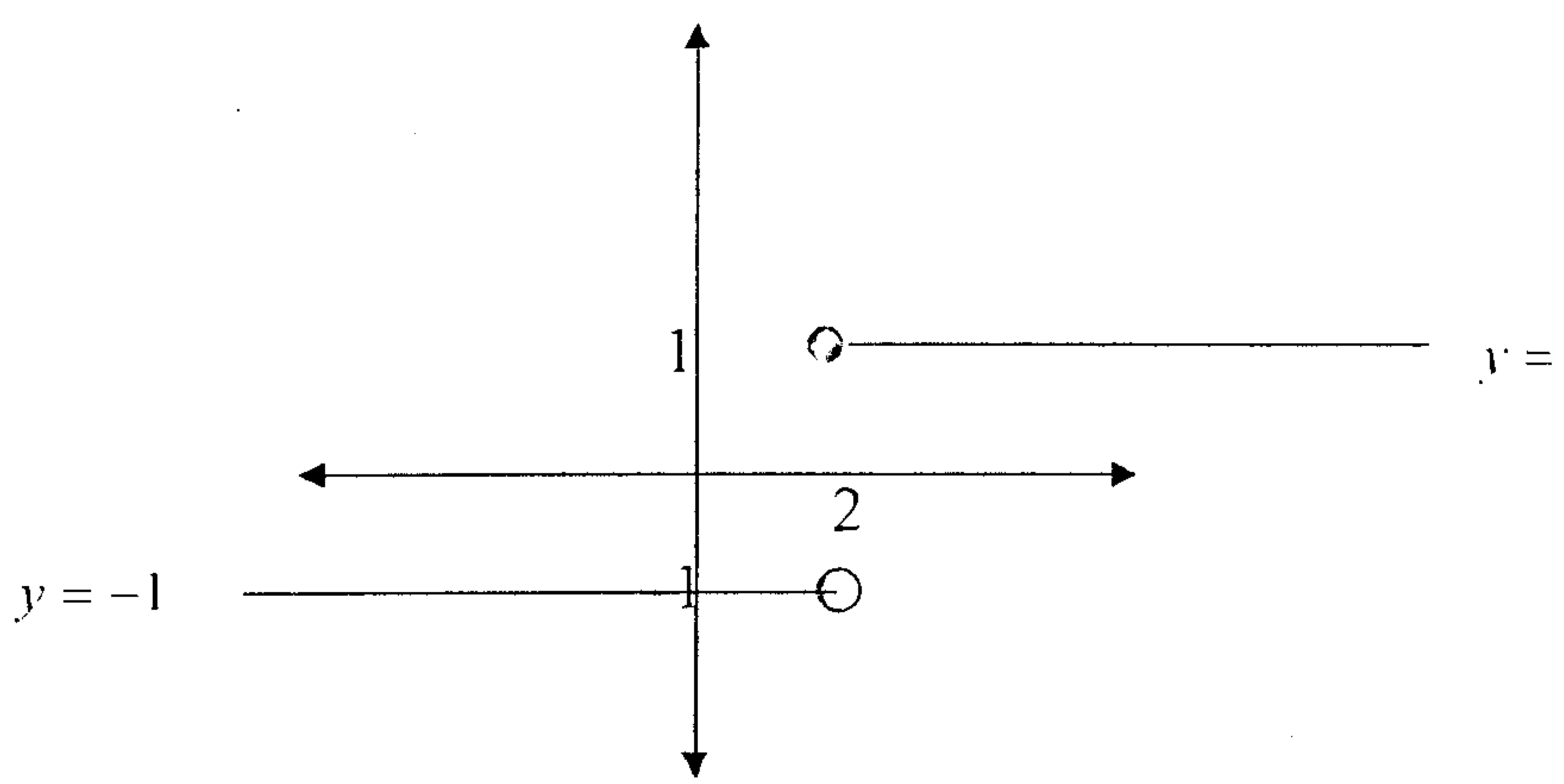
$$(2)\ F(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$$

الـحـل

$$F(x)==\begin{Bmatrix} \frac{x-2}{x-2} & , x>2 \\ -\frac{x-2}{x-2} & , x<2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & , x>2 \\ -1 & , x<2 \end{Bmatrix}$$

$y=1\ ,\ x>2$ 　　　　 $y=-1\ .\ x<2$

$x=2\ .\ y=1$ 　　　　 $x=2\ .\ y=-1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{-1.1\}$

$$(3)\ F(x)=\frac{x-3}{2|x-3|}$$

الحـل

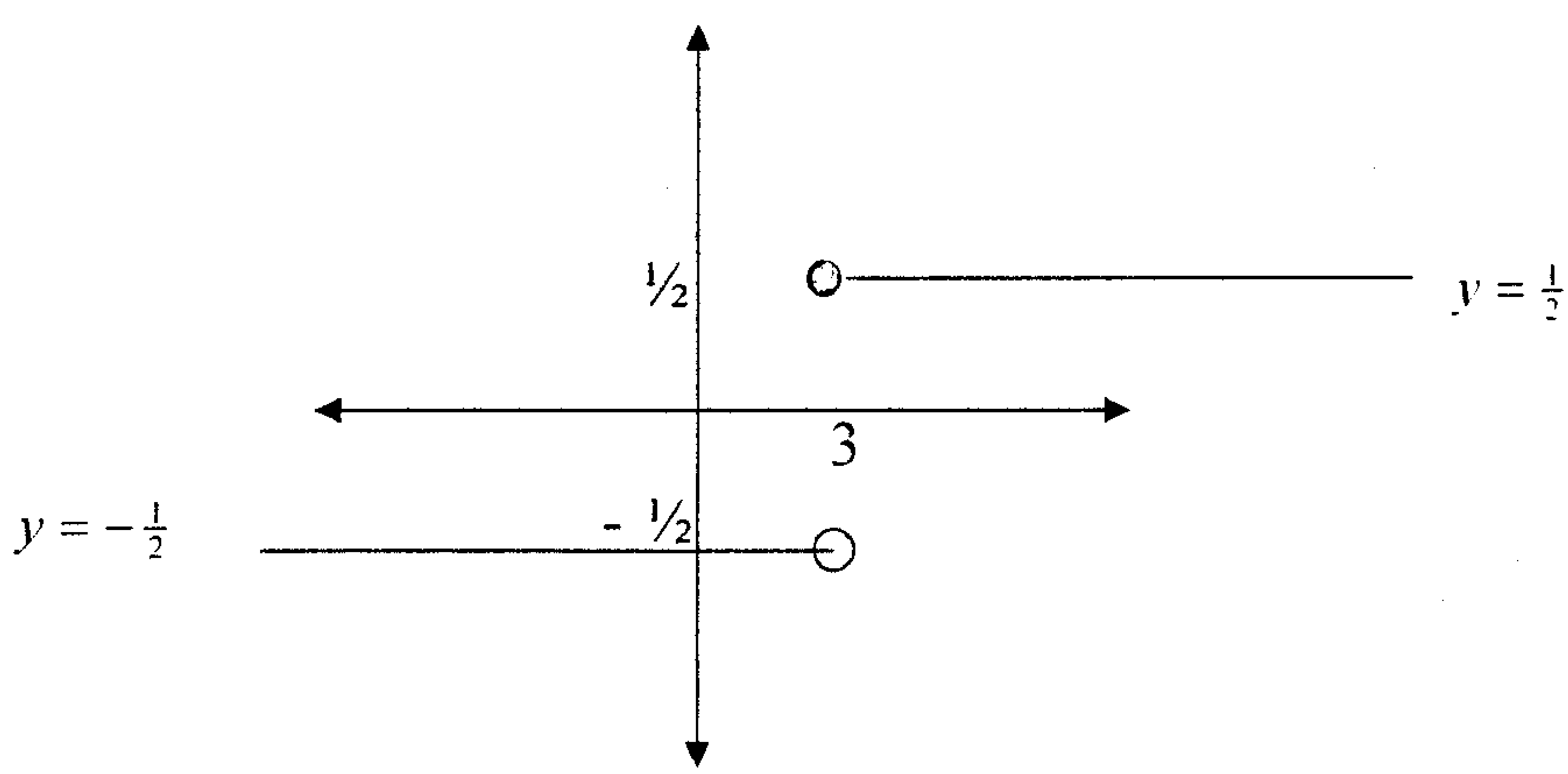
$$F(x)==\left\{\begin{array}{ll}\frac{x-3}{2(x-3)} & ,\ x>3 \\ -\frac{x-3}{2(x-3)} & ,\ x<3\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2} & ,\ x>3 \\ -\frac{1}{2} & ,\ x<3\end{array}\right\}$$

$y=\frac{1}{2}\ ,\ x>3$

$x=3\ ,\ y=\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}\ ,\ x<3$

$x=3\ ,y=-\frac{1}{2}$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$$R_F=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$$

(4) $F(x)=\dfrac{x-3}{|x-3|}+1$

الحـــل

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-3)} & , x>3 \\ -\dfrac{x-3}{(x-3)} & , x<3 \end{cases} +1 = \begin{cases} 1 & , x>3 \\ -1 & , x<3 \end{cases} +1$$

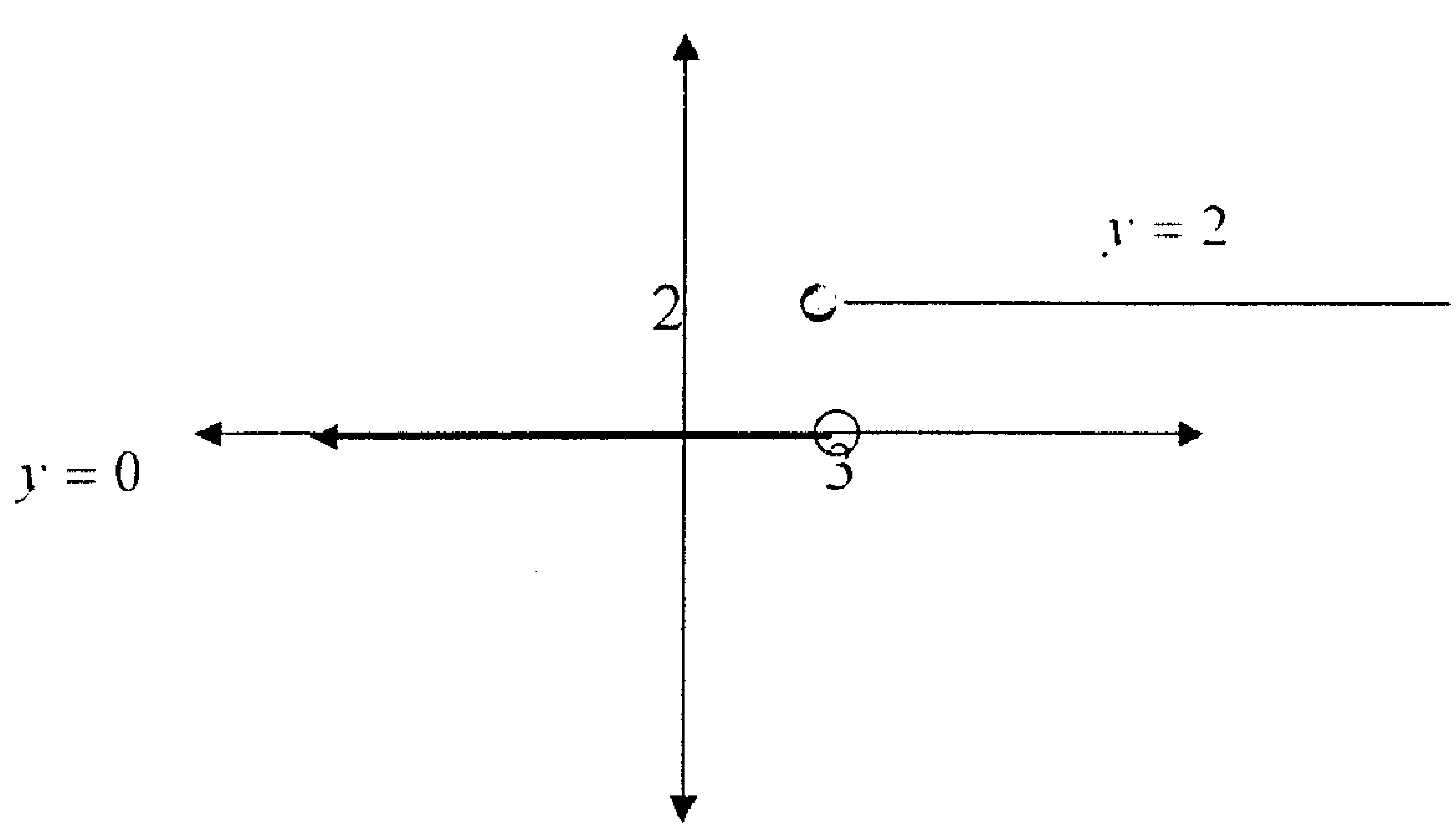
$$F(x)=\begin{cases} 2 & , x>3 \\ 0 & , x<3 \end{cases}$$

$y=2 \ , \ x>3$

$x=3 \ , \ y=2$

$y=0 \ , \ x<3$

$x=3 \ , \ y=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{0,2\}$

الصورة السابعة : دالة معرفة على أكثر من قاعدة تحتوي على قيمة مطلقة نقوم برسم بيان الدالة ومنه نعين المدى .

مثــال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

$$(1)\ F(x)=\begin{cases} |x| & , x<0 \\ x^2 & , 0\le x<2 \\ 4 & , x\ge 2 \end{cases}$$

الــحــل

$y=|x| \quad , x<0$

$x=0\ , y=0$

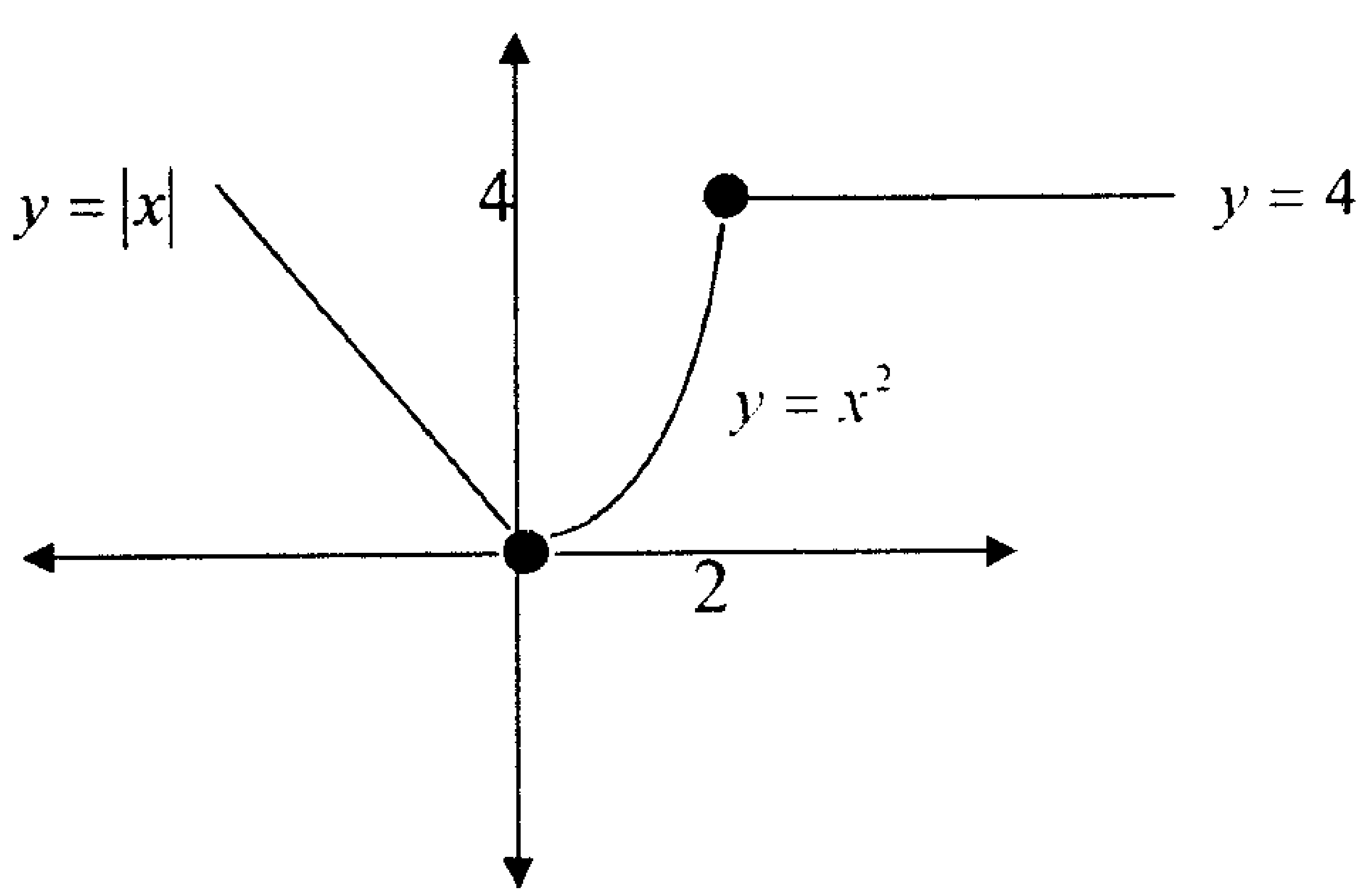
$y=x^2 \quad ,0\le x<2$

$x=0, y=0$

$x=2\ , y=4$

$y=4 \quad , x\ge 2$

$x=2, y=4$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F=[0,\infty)$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases} -|x+1| & , \ x<-1 \\ x^2 & , \ -1\le x<0 \\ 1 & , \ x\ge 0 \end{cases}$$

الحـــل

$y=-|x+1|\ \ , x<-1$

$x=-1\ , y=0$

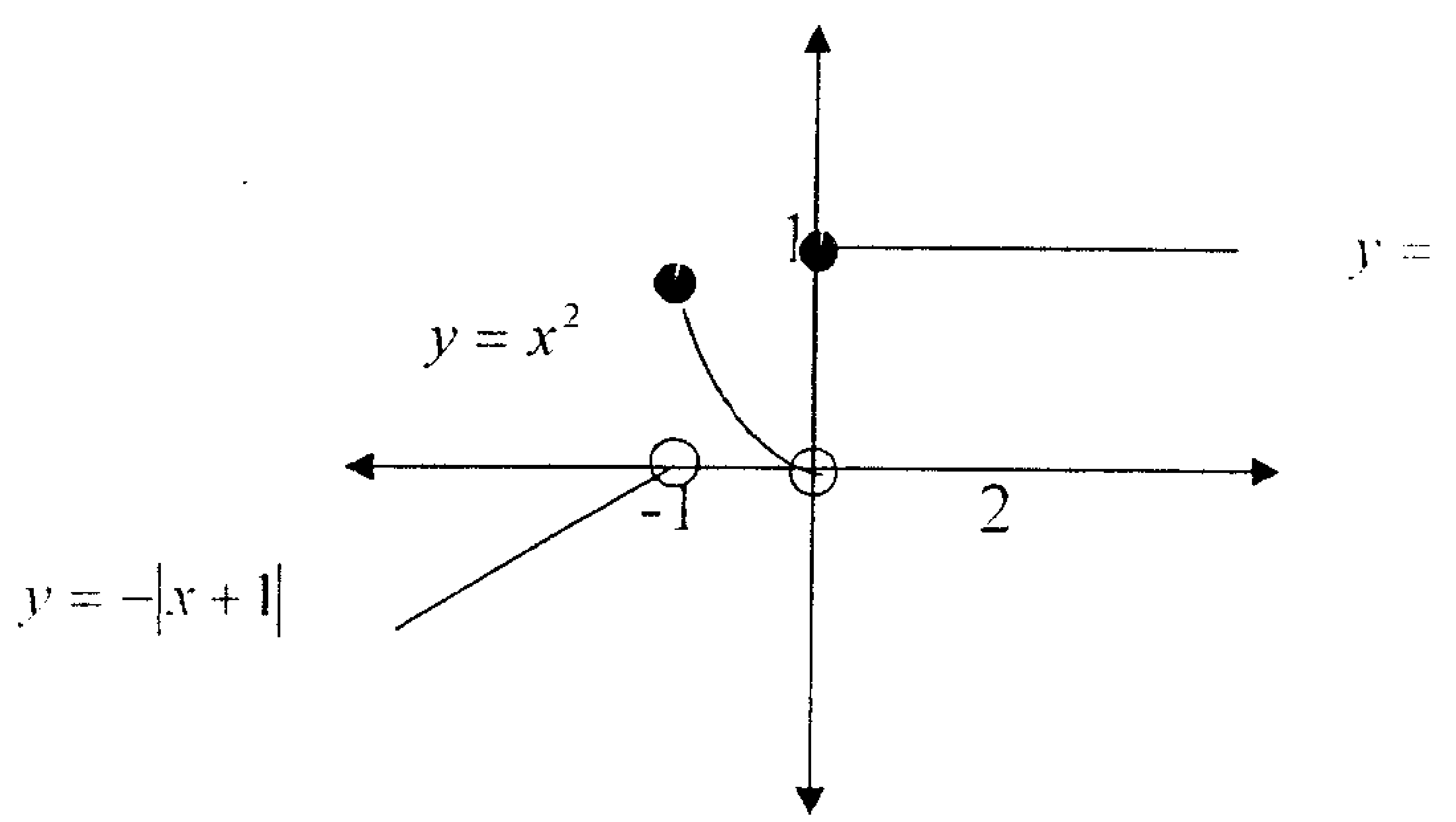
$y=x^2\ \ ,-1\le x<0$

$x=0, y=0$

$x=-1\ , y=1$

$y=1\ \ , x\ge 0$

$x=0, y=1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_f=(-\infty,0)\cup(0,1]$

(3) مدى دالة الإشارة : يتم إعادة تعريف دالة الإشارة بأكثر من قاعدة ومن بيان الدالة نعين مداها .

مـثــال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

(1) $F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$

الـحــل

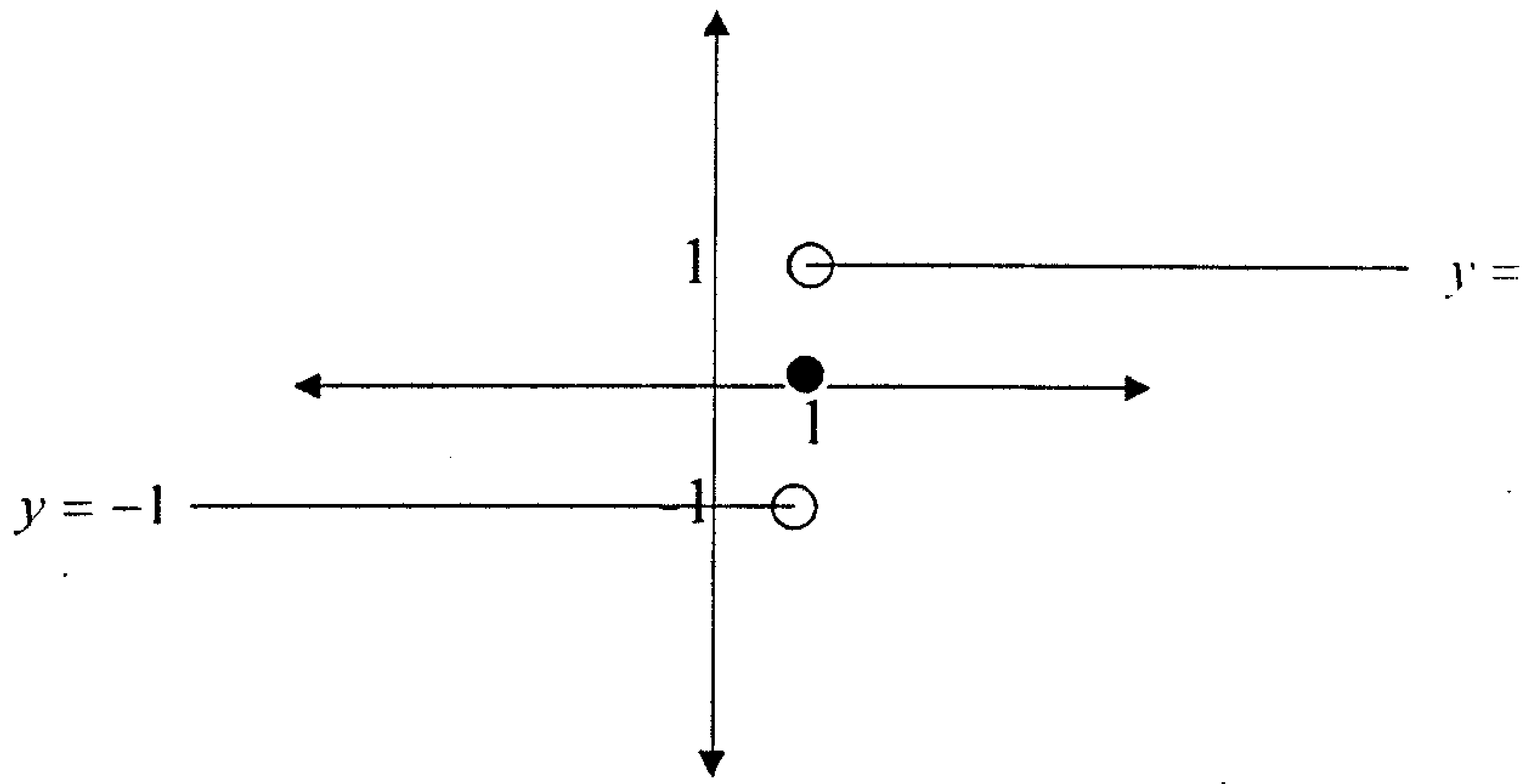
$$\underset{x<1}{- - - - - - - - - - - - - -}\ \underset{1}{\bullet}\ \underset{x>1}{+ + + + + + + + + + +}\ (x-1)$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & , \ x\neq 1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-1} & , \ x>1\\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & , \ x<1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}1 & , \ x>1\\ -1 & , \ x<1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}$$

$y=1 \ , x>1$ $\qquad$ $y=-1 \ , x<1$ $\qquad$ $y=0 \ , x=1$

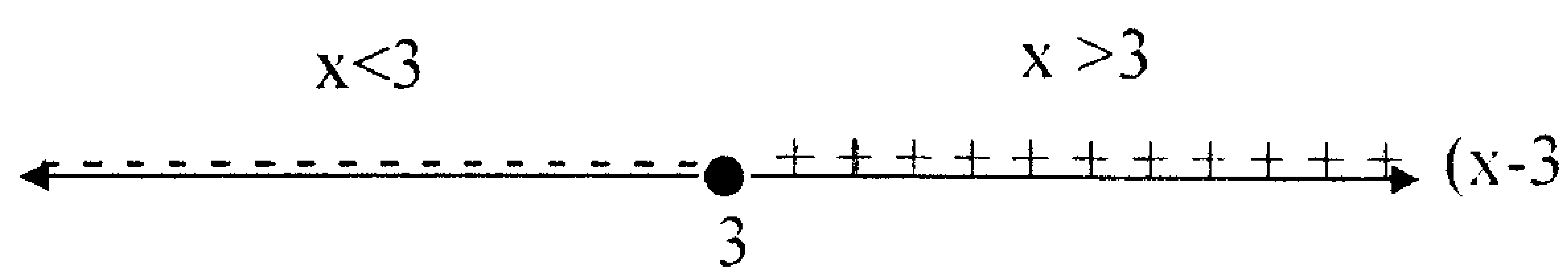
$x=1 \, , y=1$ $\qquad$ $x=1 \, , y=-1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = \{1, -1, 0\}$

(2) $F(x) = \operatorname{sgn}(x-3)$

الــحــل



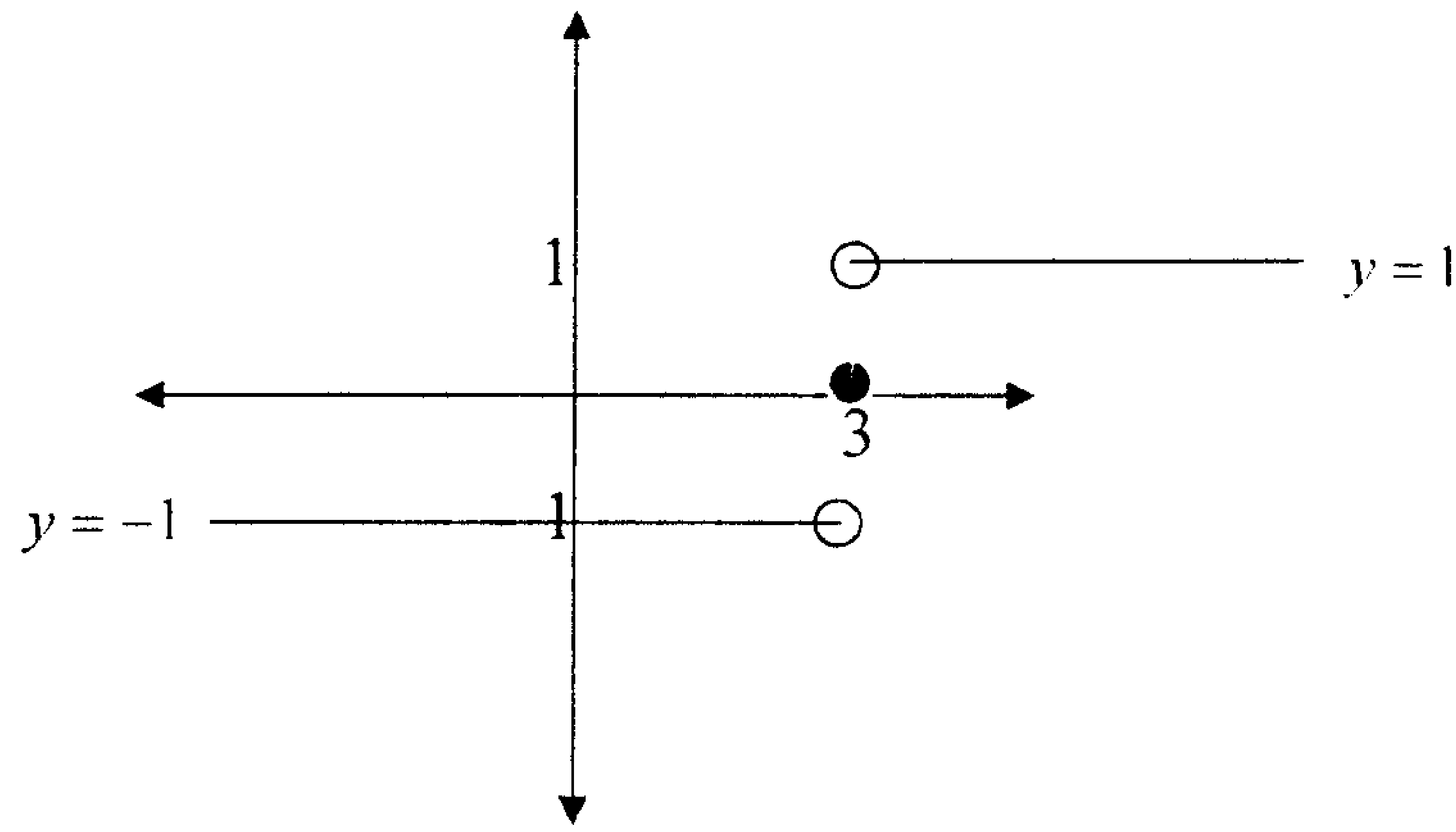
$$F(x) = \operatorname{sgn}(x-3) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ 0 & , \ x = 3 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3} & , \ x > 3 \\ \dfrac{-(x-3)}{x-3} & , \ x < 3 \\ 0 & , \ x = 3 \end{cases}$$

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x-3) = \begin{cases} 1 & , \ x > 3 \\ -1 & , \ x < 3 \\ 0 & , \ x = 3 \end{cases}$$

$y=1 \ , x>3$
$x=3 \ , y=1$

$y=-1 \ , x<3$
$x=3 \ , y=-1$

$y=0 \ , x=3$

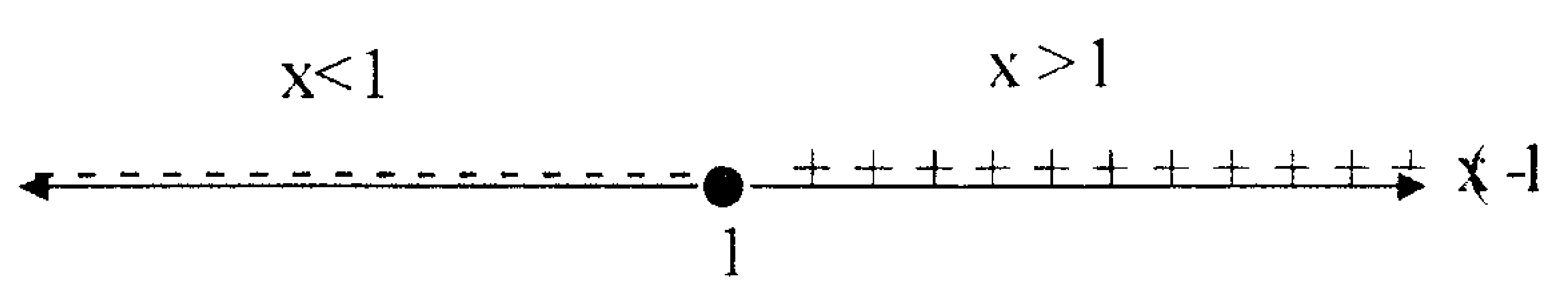


من بيان الدالة نجد أن المدى هو :

$R_F=\{1,-1,0\}$

(3) $F(x)=2\operatorname{sgn}(x-1)$

الحـــل



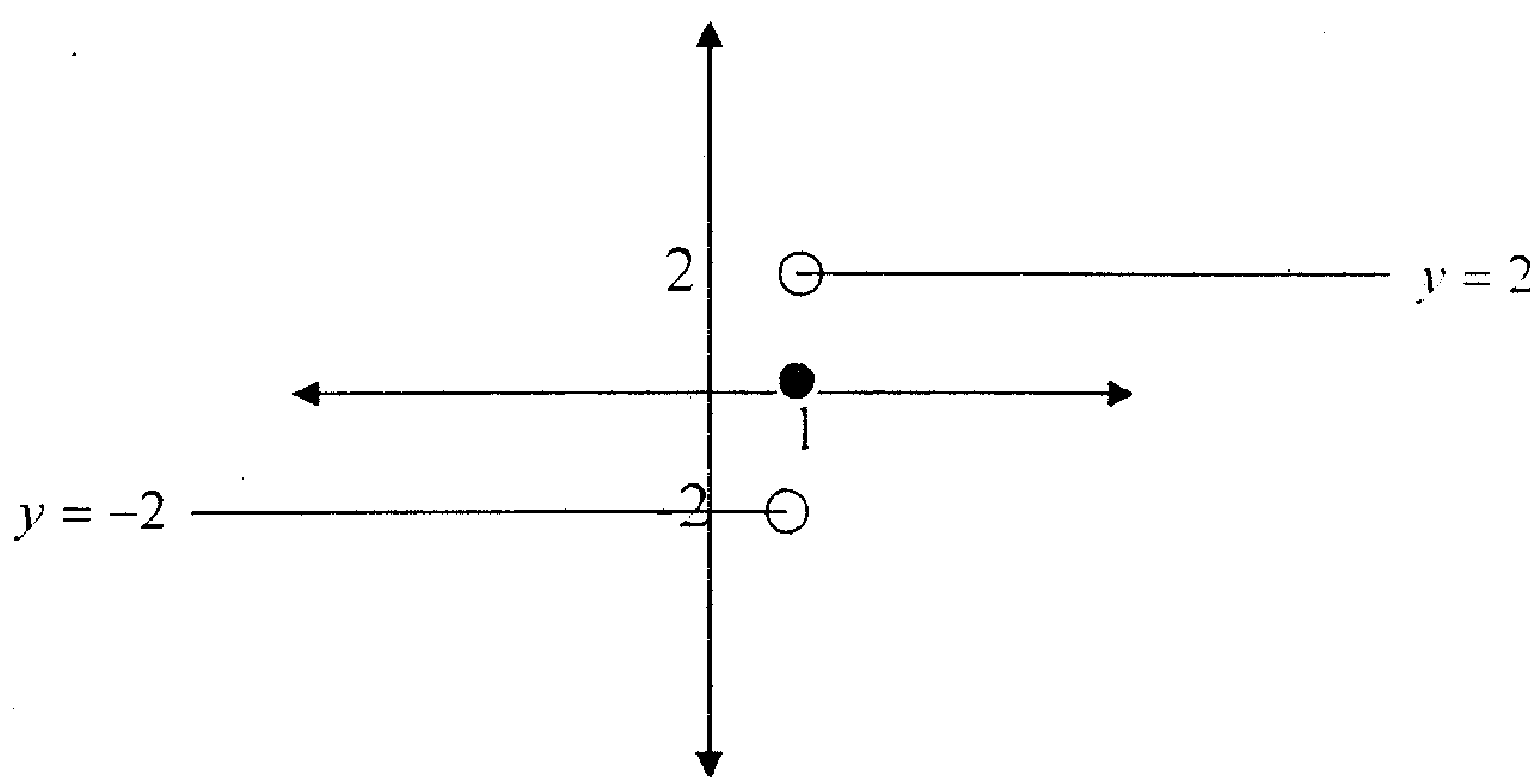
$$F(x)=2\operatorname{sgn}(x-1)=2\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1\\ 0 & , x=1\end{cases}=2\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-1} & . \ x>1\\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & . \ x<1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}$$

$$F(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x-1) = \begin{Bmatrix} 2 & , & x>1 \\ -2 & , & x<1 \\ 0 & , & x=1 \end{Bmatrix}$$

$y = 2 \quad , x > 1$
$x = 1 \,, y = 2$

$y = -2 \quad , x < 1$
$x = 1 \,, y = -2$

$y = 0 \quad , x = 1$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = \{2, -2, 0\}$

(4) $F(x) = \mathrm{sgn}(x-3) + 1$

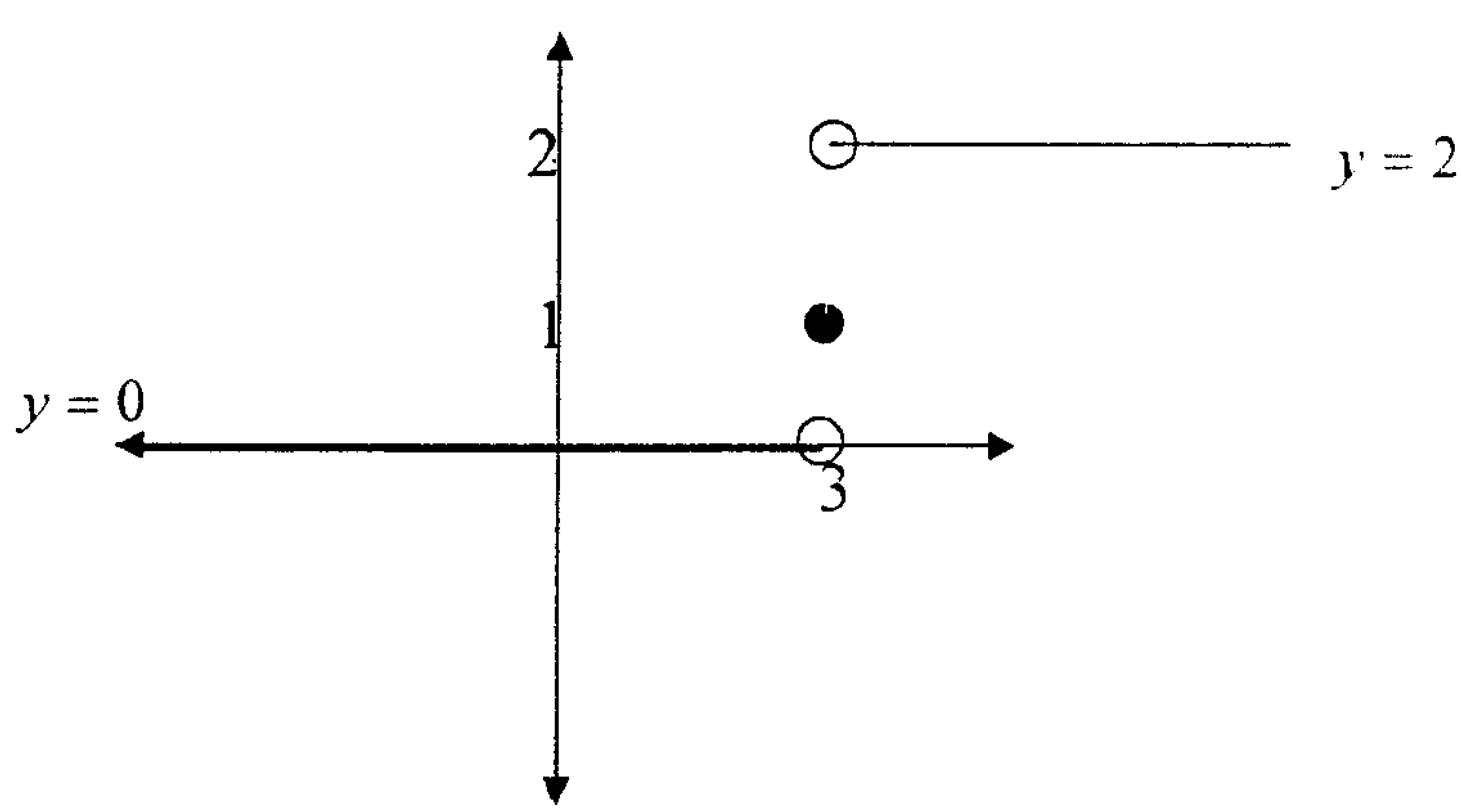
الـحـل

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-3)+1=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & , x\neq 3\\ 0 & , x=3\end{cases}+1=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-3} & , x>3\\ \dfrac{-(x-3)}{x-3} & , x<3\\ 0 & , x=3\end{cases}+1$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-3)+1=\begin{cases}1+1 & , x>3\\ -1+1 & , x<3\\ 0+1 & , x=3\end{cases}=\begin{cases}2 & , x>3\\ 0 & , x<3\\ 1 & , x=3\end{cases}$$

$y=2 \ , x>3$ $\qquad$ $y=0 \ , x<3$ $\qquad$ $y=1 \ , x=3$

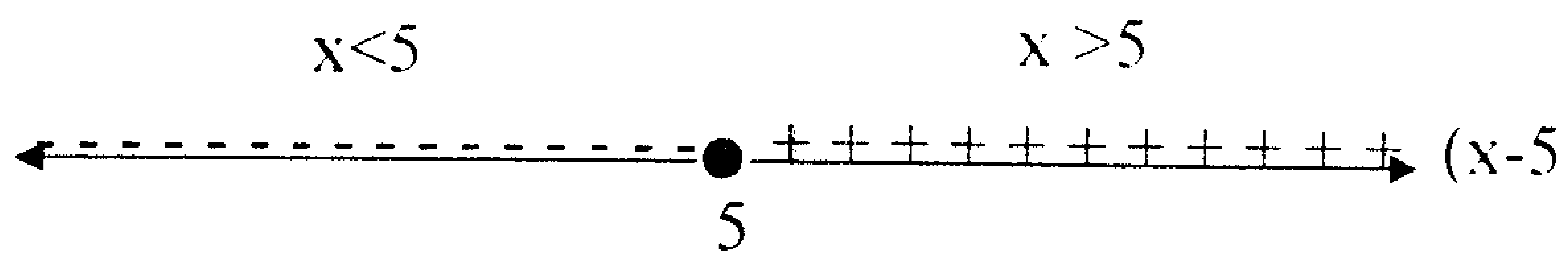
$x=3 \, , y=2$ $\qquad$ $x=3 \, , y=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{0,1,2\}$

(5) $F(x) = \operatorname{sgn}(x-5) + x$

الحـــل



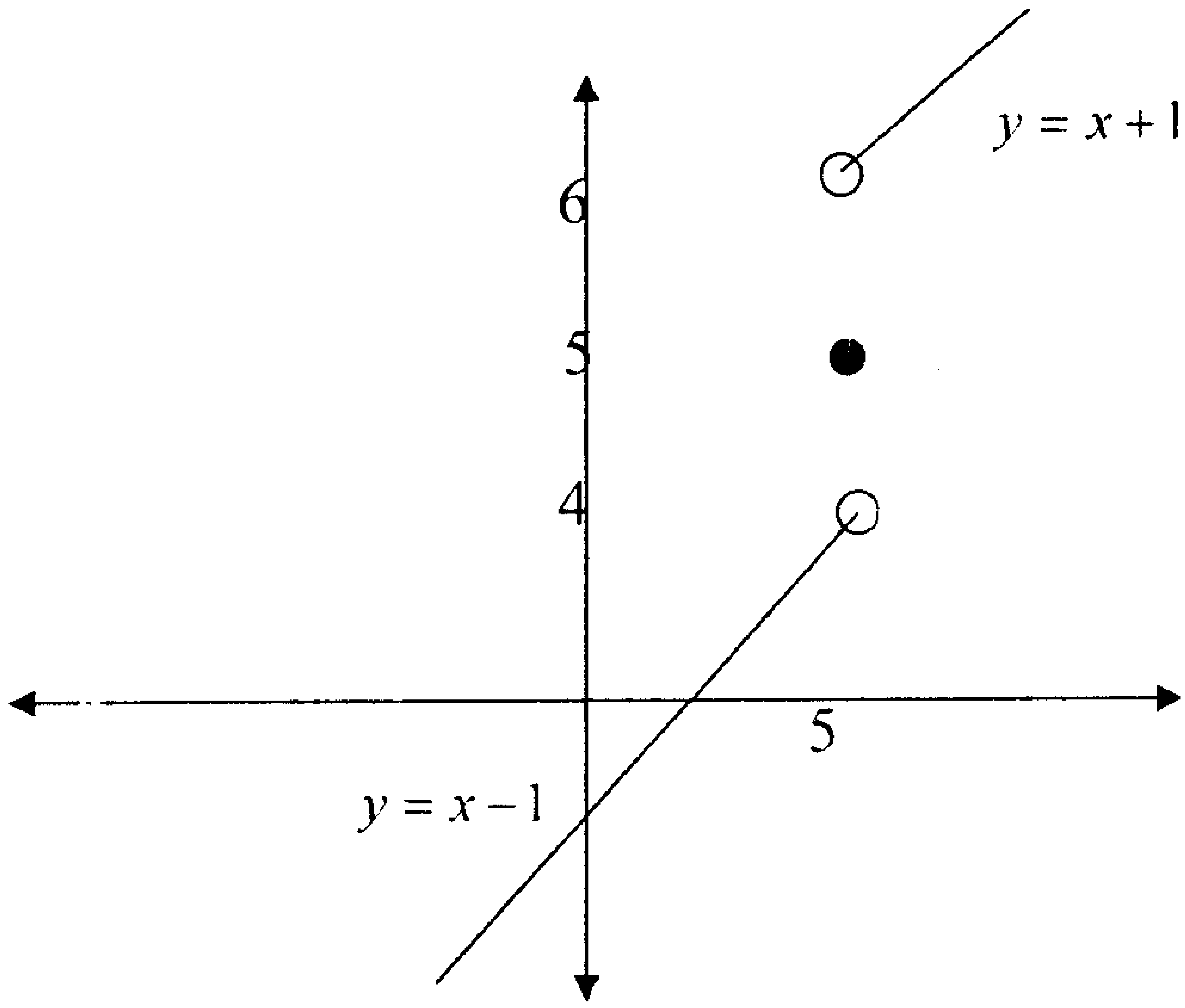
$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)+x=\begin{cases}\dfrac{|x-5|}{x-5} & , x\neq 5\\ 0 & , x=5\end{cases}+x=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-5} & , x>5\\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & , x<5\\ 0 & , x=5\end{cases}+x$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)+x=\begin{cases}1 & , x>5\\ -1 & , x<5\\ 0 & , x=5\end{cases}+x=\begin{cases}1+x & , x>5\\ -1+x & , x<5\\ 0+x & , x=5\end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x-5)+x=\begin{cases}1+x & , x>5\\ -1+x & , x<5\\ x & , x=5\end{cases}$$

$y=1+x \ , x>5$ $\qquad$ $y=-1+x \ , x<5$ $\qquad$ $y=x \ , x=5$

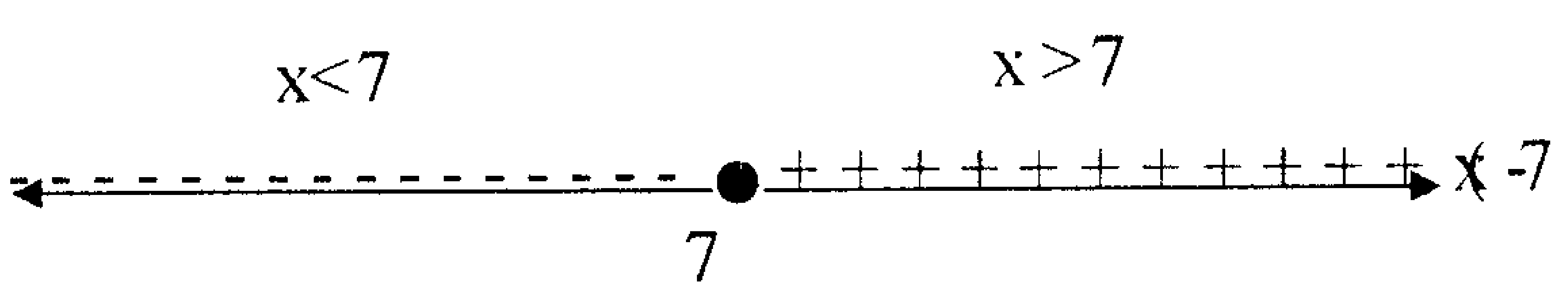
$x=5 \ , y=6$ $\qquad$ $x=5 \ , y=4$ $\qquad$ $x=5 \ , y=5$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = (-\infty, 4) \cup (6, \infty) \cup \{5\}$

(6) $F(x) = x\,\mathrm{sgn}(x-7)$

الـحـل



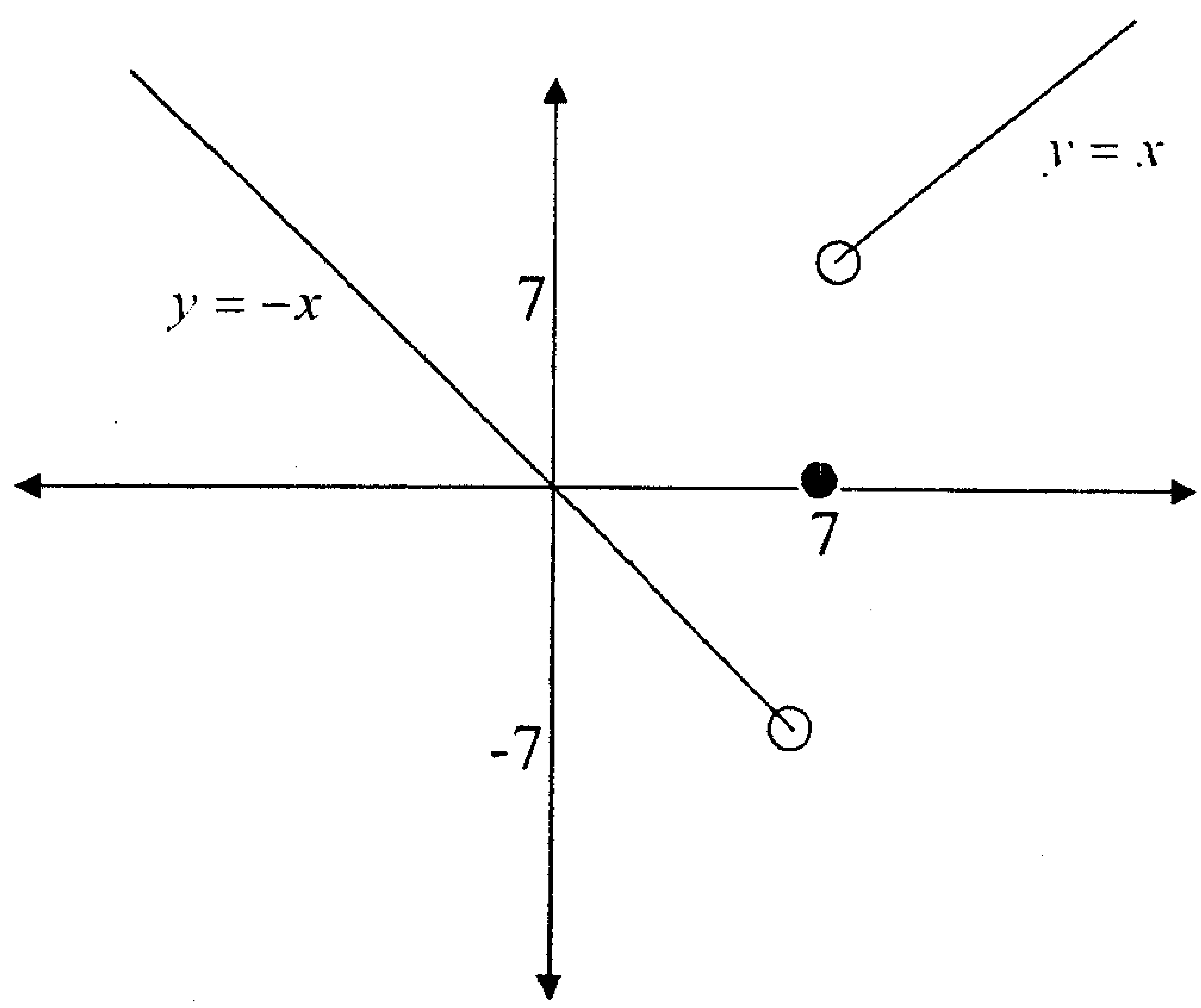
$$F(x) = x\,\mathrm{sgn}(x-7) = x\begin{cases} \dfrac{|x-7|}{x-7}, & x \neq 7 \\ 0, & x = 7 \end{cases} = x\begin{cases} \dfrac{x-7}{x-7} & . \; x > 7 \\ \dfrac{-(x-7)}{x-7} & , \; x < 7 \\ 0 & . \; x = 7 \end{cases}$$

$$F(x)=x\,\mathrm{sgn}(x-7)=x\begin{Bmatrix} 1 & , & x>7 \\ -1 & , & x<7 \\ 0 & , & x=7 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x & . & x>7 \\ -x & . & x<7 \\ 0 & . & x=7 \end{Bmatrix}$$

$y=x \quad , x>7$
$x=7 \, , y=7$

$y=-x \quad , x<7$
$x=7 \, , y=-7$

$y=0 \quad . x=7$
$x=7 \quad . y=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=(-7,\infty)$

$(7)\, F(x) = 2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

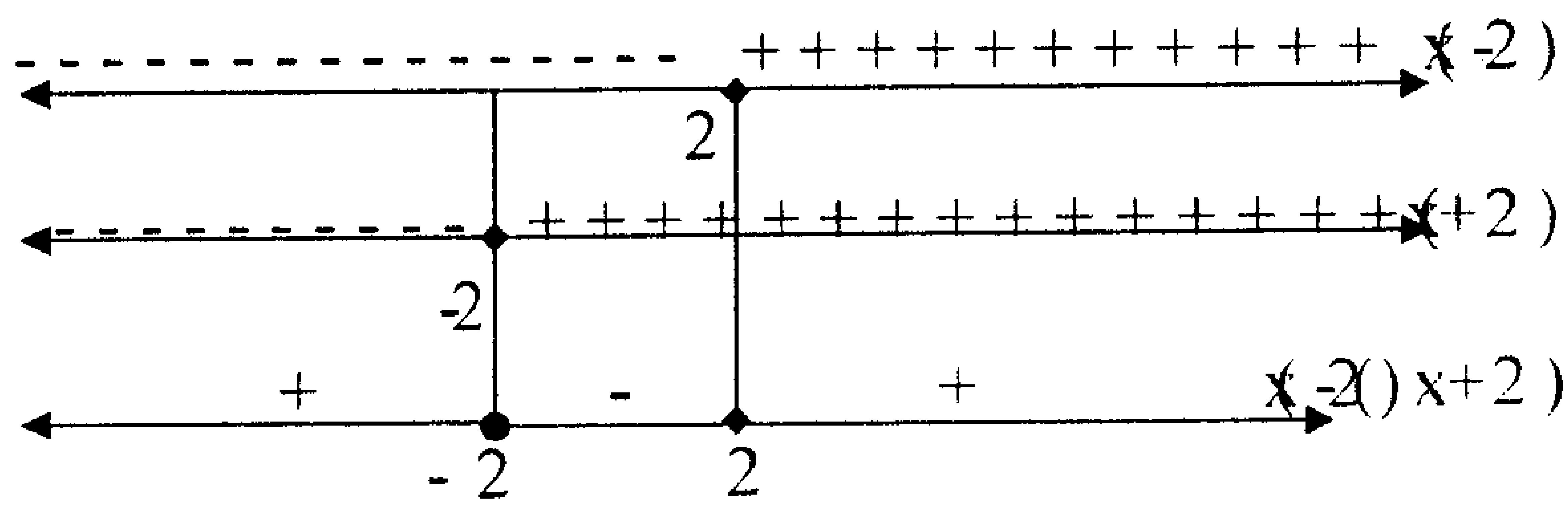
الحل

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$(x-2) = 0 \;\; , x = 2$

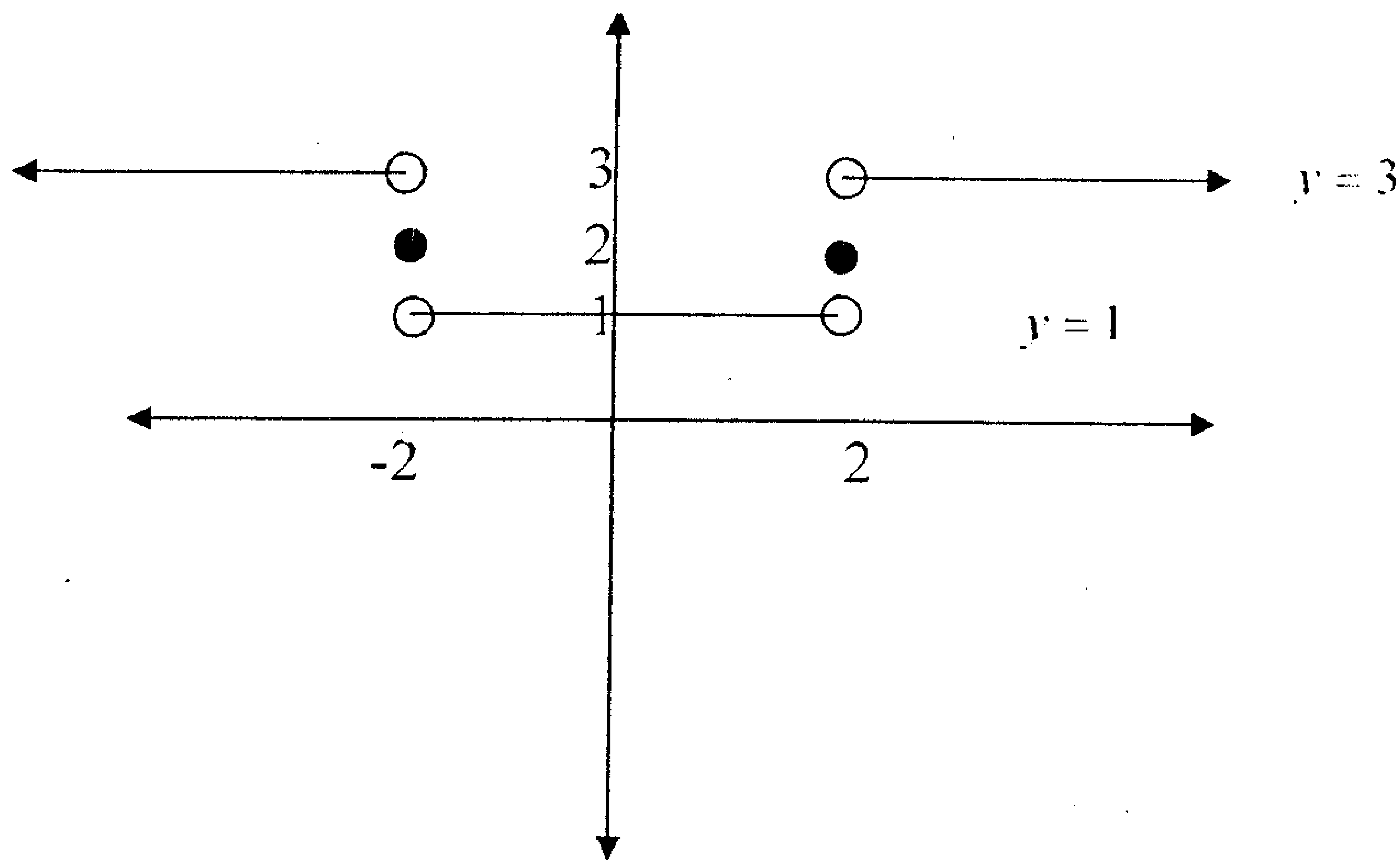
$(x+2) = 0 \;\; , x = -2$



$$F(x) = 2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 4) = 2 + \begin{cases} \dfrac{|x^2-4|}{x^2-4} & , x \neq \pm 2 \\ 0 & , x = \pm 2 \end{cases} = 2 + \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-4} & , x < -2 , x > 2 \\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & , -2 < x < 2 \\ 0 & , x = 2 , x = -2 \end{cases}$$

$$F(x) = 2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 4) = \begin{cases} 2+1 & , x < -2 , x > 2 \\ 2-1 & , -2 < x < 2 \\ 2+0 & , x = 2 , x = -2 \end{cases} = \begin{cases} 3 & , x < -2 , x > 2 \\ 1 & , -2 < x < 2 \\ 2 & , x = 2 , x = -2 \end{cases}$$

$y = 3 \;\; , x < -2 , x > 2$	$y = 1 \;\; , -2 < x < 2$	$y = 2 \;\; , x = 2 \;\; , x = -2$
$x = 2 \;\; , y = 3$	$x = -2 , y = 1$	$x = 2 \;\; , y = 2$
$x = -2 , y = 3$	$x = 2 , y = 1$	$x = -2 \;\; , y = 2$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F = \{1,2,3\}$

(4) مدى دالة الصحيح الأعظم : ـدالة الصحيح الأعظم التي على صورة

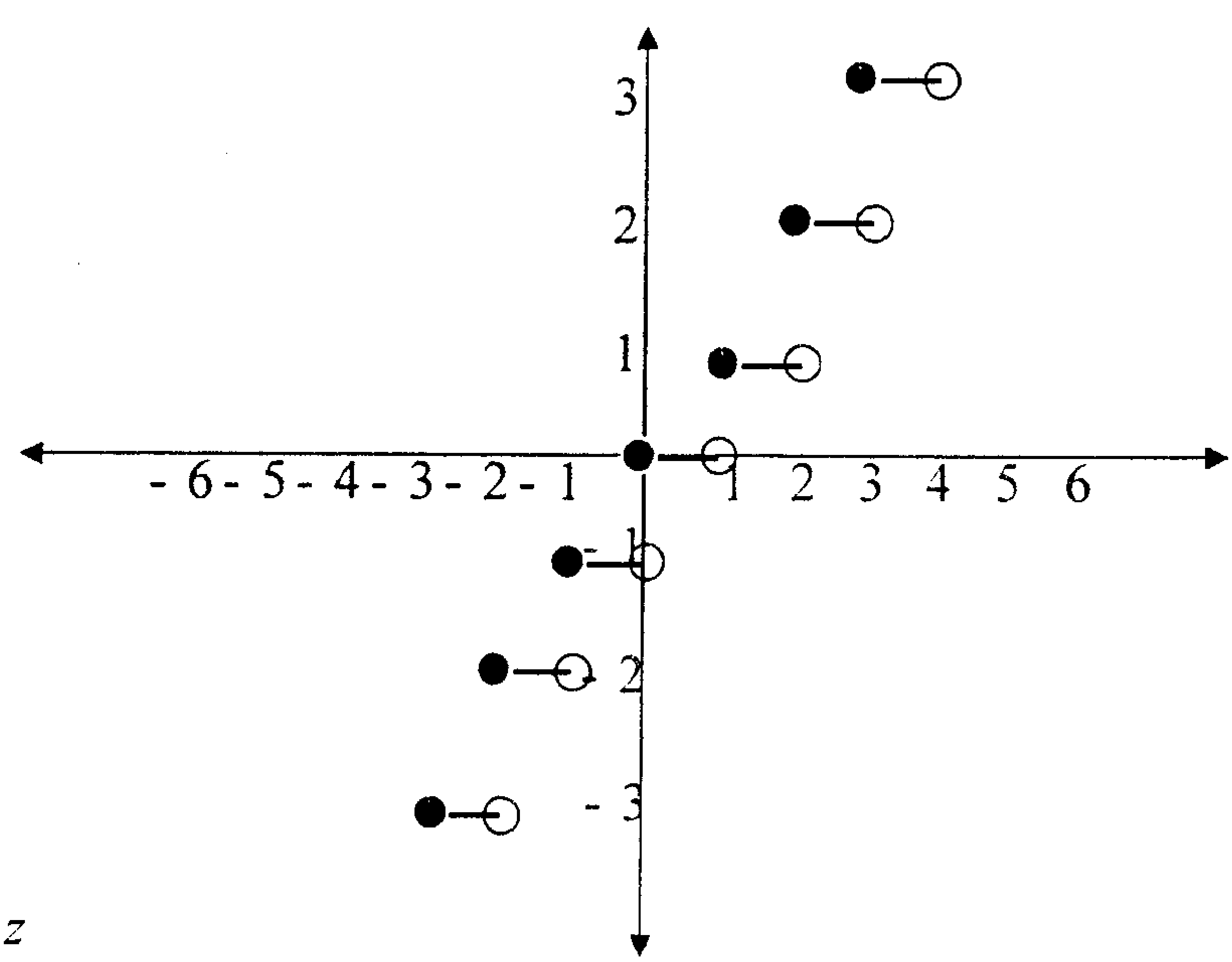
$F(x)=[g(x)]$ مداها $R_F = z$ ولرسم بيان الدالة نعيد تعريفها بأكثر من قاعدة

مـثــال: ـأوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة : -

(1) $F(x)=[x]$

الـــحـــل

$$F(x)=\begin{cases} -2 & , -2 \le x < -1 \\ -1 & , -1 \le x < 0 \\ 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , 1 \le x < 2 \\ 2 & , 2 \le x < 3 \end{cases}$$

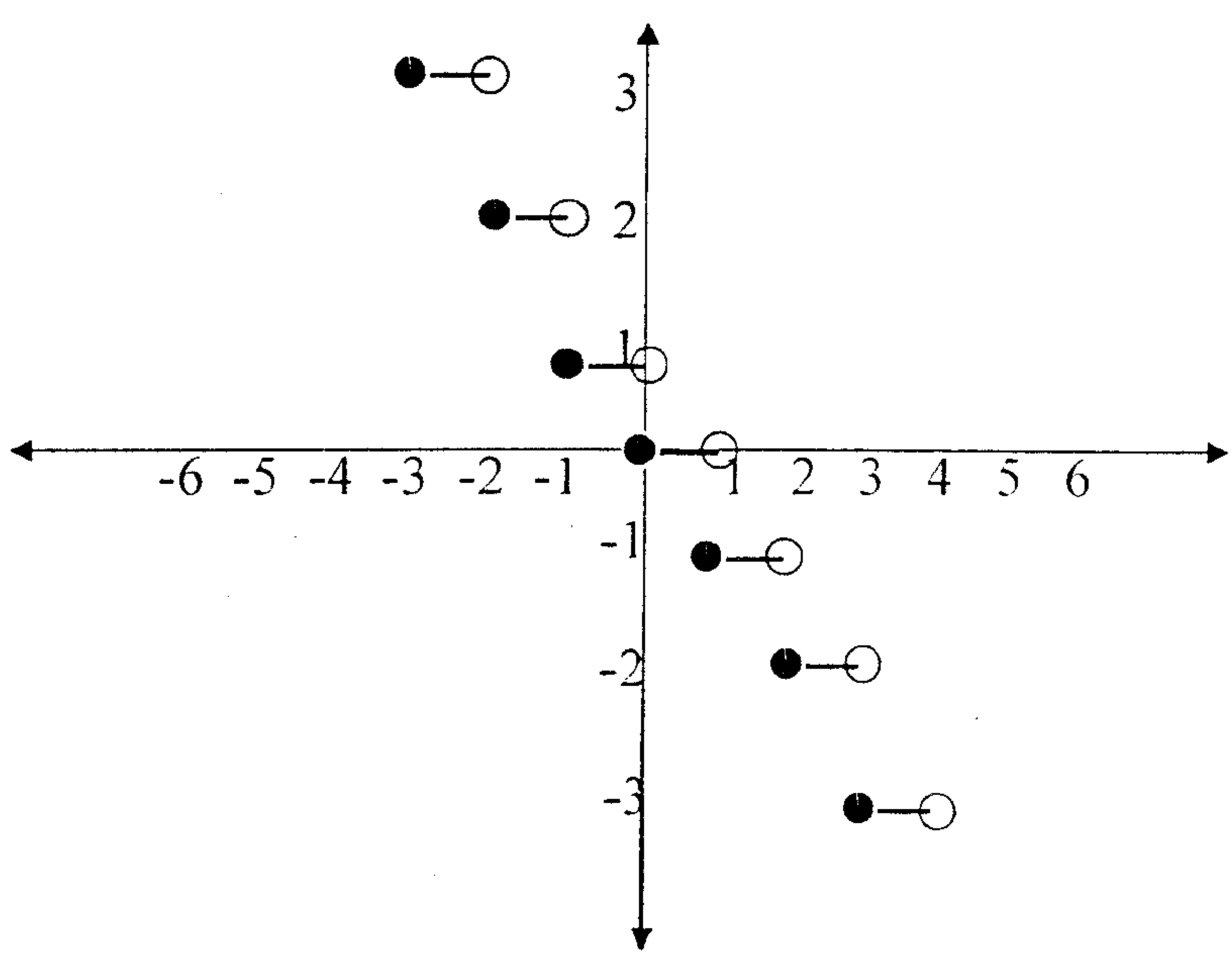


$R_F = z$

(2) $F(x) = -[x]$

الحـــل

$$F(x) = -\begin{Bmatrix} -2 & , -2 \le x < -1 \\ -1 & , -1 \le x < 0 \\ 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , 1 \le x < 2 \\ 2 & , 2 \le x < 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & , -2 \le x < -1 \\ 1 & , -1 \le x < 0 \\ 0 & , 0 \le x < 1 \\ -1 & , 1 \le x < 2 \\ -2 & , 2 \le x < 3 \end{Bmatrix}$$

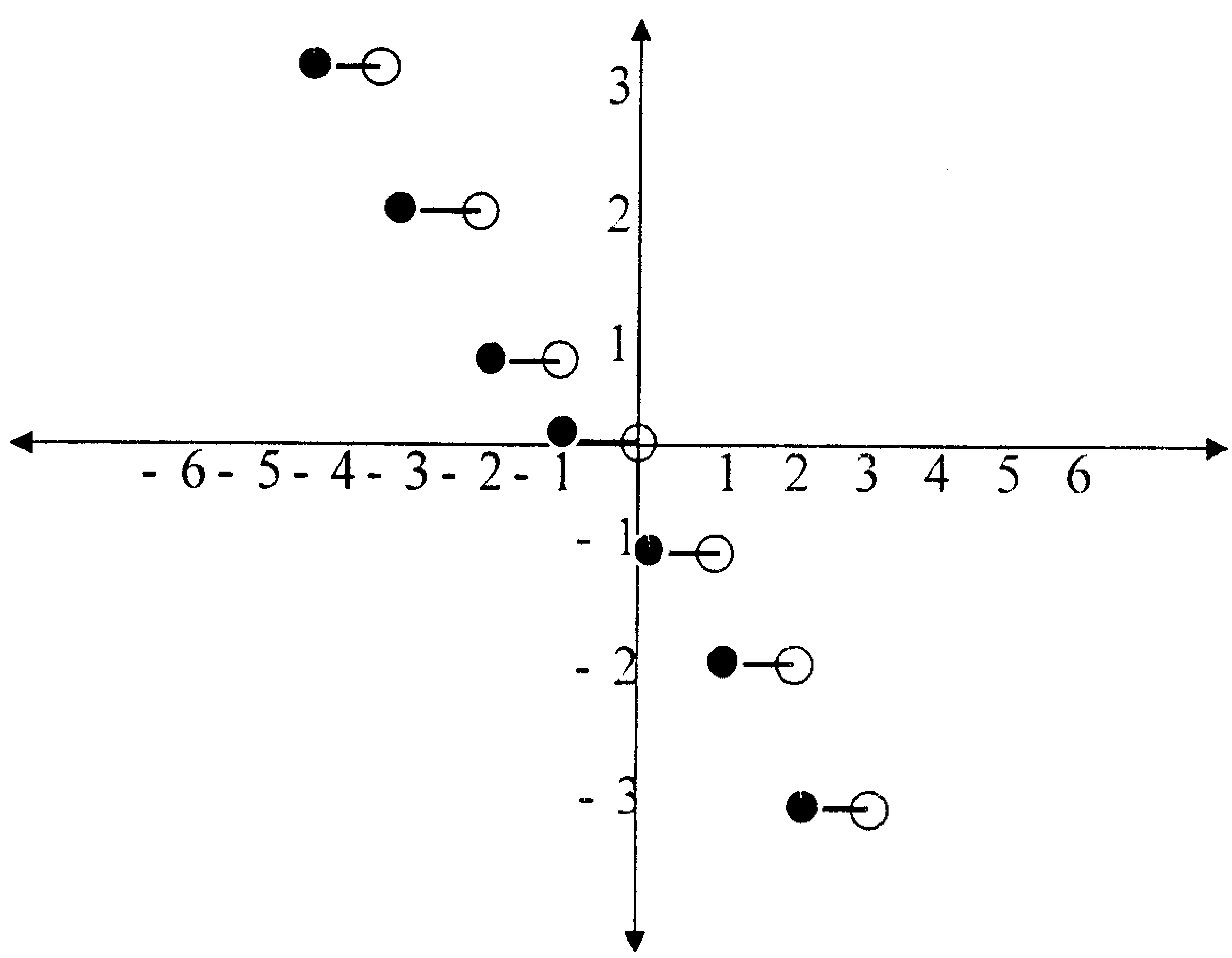


$R_F = z$

(3) $F(x)=[-x]$

الحـــل

$$F(x)=\begin{cases} -2 & , -2\le -x<-1 \\ -1 & , -1\le -x<0 \\ 0 & , 0\le -x<1 \\ 1 & , 1\le -x<2 \\ 2 & , 2\le -x<3 \end{cases} = \begin{cases} -2 & , 2\ge x>1 \\ -1 & , 1\ge x>0 \\ 0 & , 0\ge x>-1 \\ 1 & , -1\ge x>-2 \\ 2 & , -2\ge x>-3 \end{cases}$$

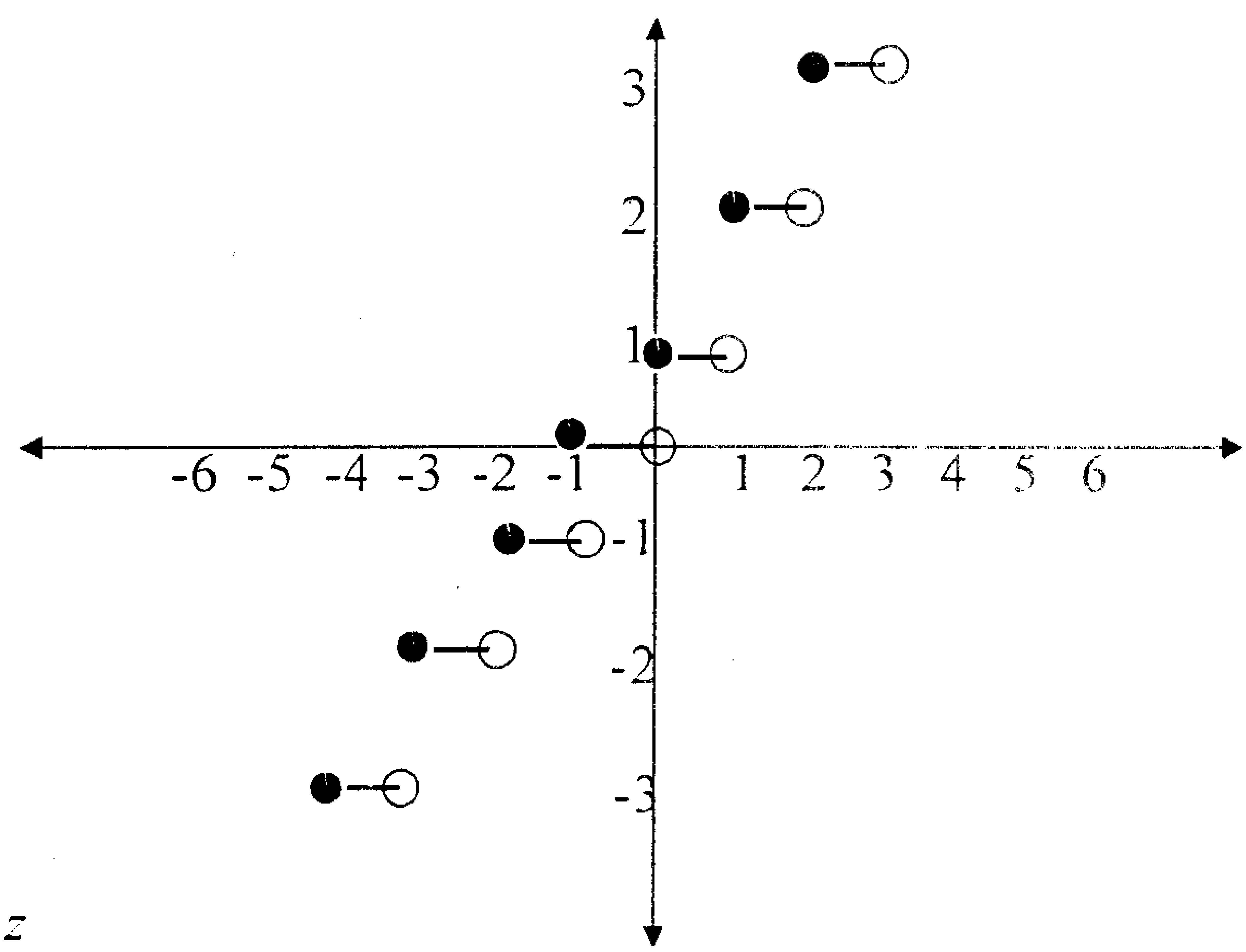


$R_F = z$

(4) $F(x)=[x]+1$

الحل

$$F(x)=\begin{cases} -2 & , -2\le x<-1 \\ -1 & , -1\le x<0 \\ 0 & , 0\le x<1 \\ 1 & , 1\le x<2 \\ 2 & , 2\le x<3 \end{cases} +1=\begin{cases} -1 & , -2\le x<-1 \\ 0 & , -1\le x<0 \\ 1 & , 0\le x<1 \\ 2 & , 1\le x<2 \\ 3 & , 2\le x<3 \end{cases}$$

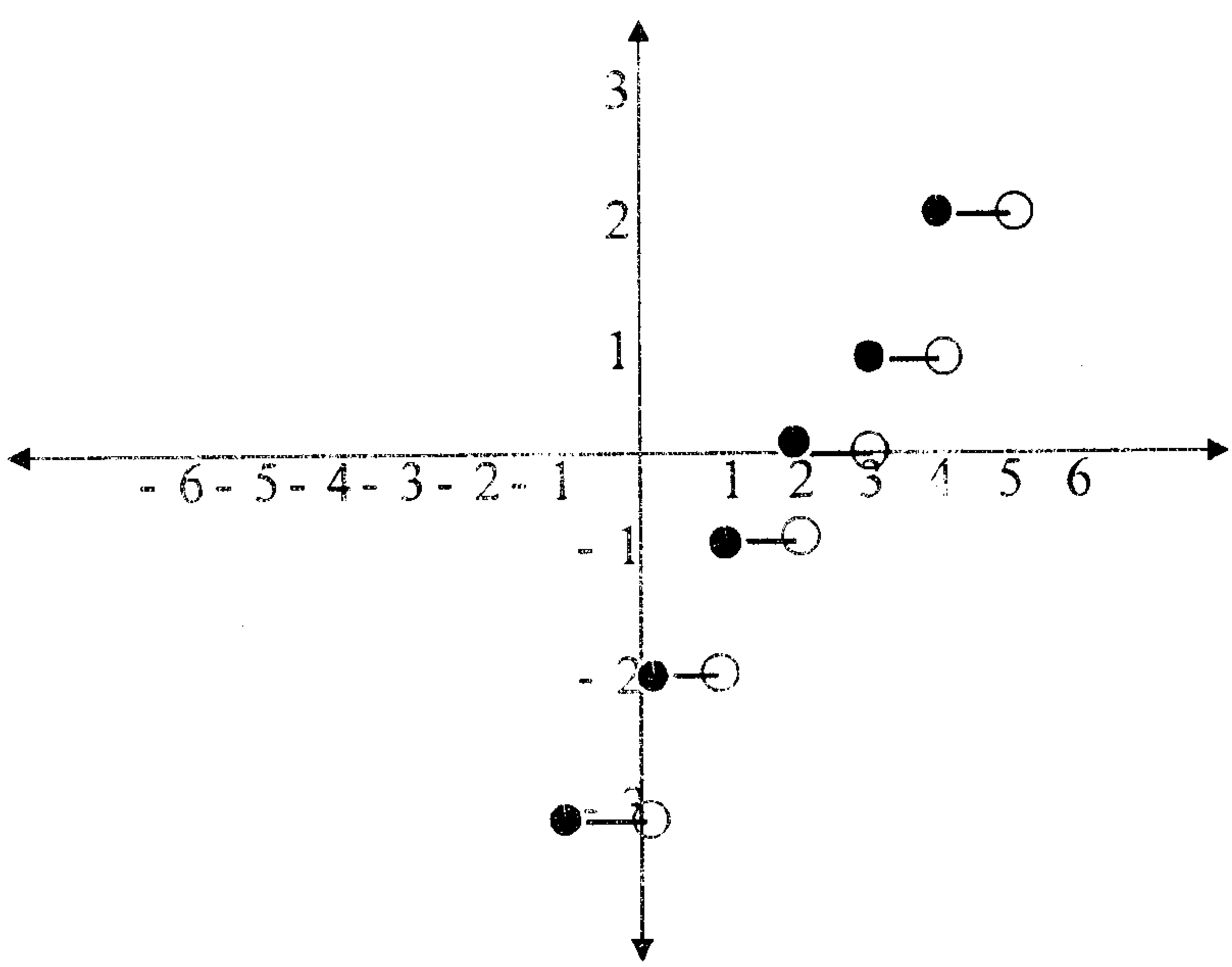


$R_F = z$

(5) $F(x)=[x]-2$

الحـــل

$$F(x)=\begin{cases}-2 & , -2\le x<-1\\ -1 & , -1\le x<0\\ 0 & , 0\le x<1\\ 1 & , 1\le x<2\\ 2 & , 2\le x<3\end{cases}\Bigg\}-2=\begin{cases}-4 & , -2\le x<-1\\ -3 & , -1\le x<0\\ -2 & , 0\le x<1\\ -1 & , 1\le x<2\\ 0 & , 2\le x<3\end{cases}\Bigg\}$$

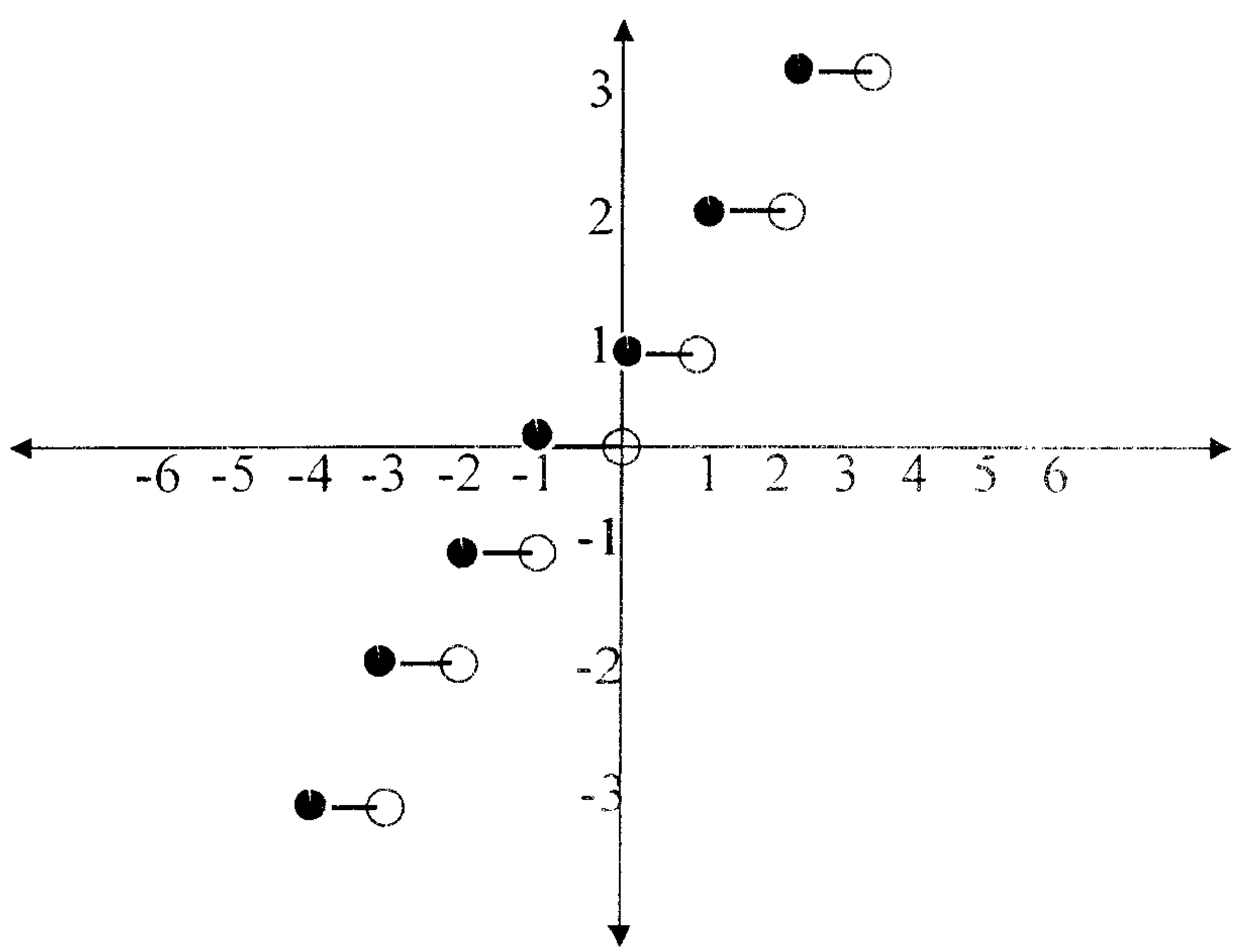


$R_F=z$

(6) $F(x)=[x+1]$

الـحـل

$$F(x)=\left\{\begin{array}{ll} -2 & , -2\le x+1<-1 \\ -1 & , -1\le x+1<0 \\ 0 & , 0\le x+1<1 \\ 1 & , 1\le x+1<2 \\ 2 & , 2\le x+1<3 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll} -2 & , -3\le x<-2 \\ -1 & , -2\le x<-1 \\ 0 & , -1\le x<0 \\ 1 & , 0\le x<1 \\ 2 & , 1\le x<2 \end{array}\right\}$$

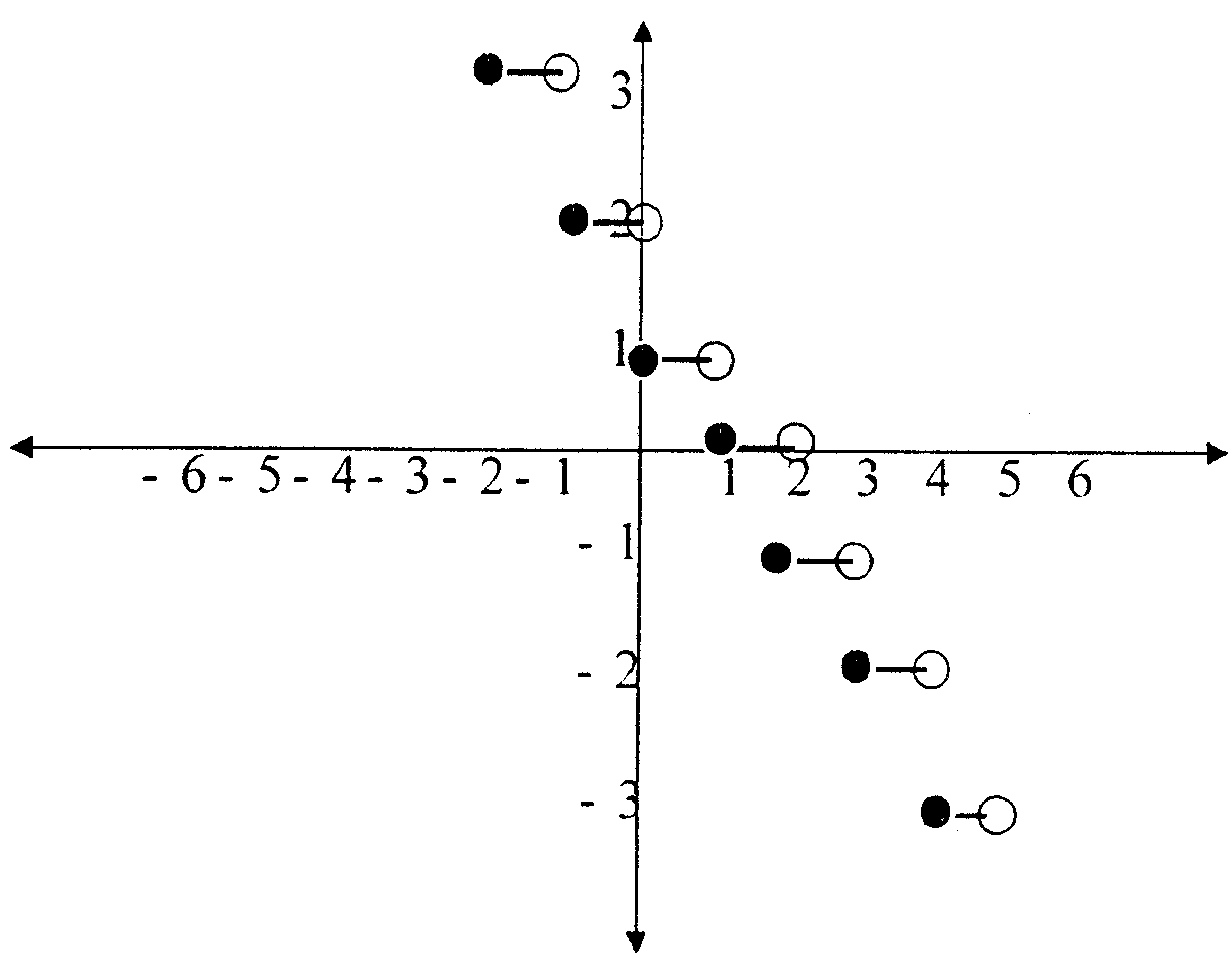


$R_f = z$

(7) $F(x)=1-[x]$

الحل

$$F(x)=1-\begin{cases}-2 & , -2\le x<-1\\ -1 & , -1\le x<0\\ 0 & , 0\le x<1\\ 1 & , 1\le x<2\\ 2 & , 2\le x<3\end{cases}=\begin{cases}3 & , -2\le x<-1\\ 2 & , -1\le x<0\\ 1 & , 0\le x<1\\ 0 & , 1\le x<2\\ -1 & , 2\le x<3\end{cases}$$



$R_F = z$

ثانياً مدى الدوال القياسية:-

يمكن إيجاد مدى الدالة القياسية $y = F(x)$ إذا تمكنا من إيجاد علاقتها العكسية على صورة $x = F(y)$ وذلك كما يلي :

(a) نعين العلاقة العكسية $x = F(y)$

(b) نعين نطاق العلاقة العكسية D_F^{-1}

(c) مدى الدالة = نطاق العلاقة العكسية $R_F = D_F^{-1}$

مـثــال:- أوجد مدى الدوال الآتية:-

$$(1)\ F(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

الـحـل

$$(a)\, y(x-1) = x+1$$

$$yx - y = x+1$$

$$yx - x = y+1$$

$$x(y-1) = y+1$$

$$x = \frac{y+1}{y-1} = F(y)$$

$$(b)\, D_F^{-1} = R - \{1\}$$

$$(c)\, R_F = D_F^{-1} = R - \{1\}$$

(2) $F(x)=\frac{x+2}{x}$

الحــل

$(a)\, yx=x+2$

$yx-x=2$

$x(y-1)=2$

$x=\frac{2}{y-1}=F(y)$

$(b)\, D_F^{-1}=R-\{1\}$

$(c)\, R_F=D_F^{-1}=R-\{1\}$

(3) $F(x)=\frac{1}{x^2}$

الحــل

$(a)\, yx^2=1$

$x^2=\frac{1}{y}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}$

$(b)\, y>0 \quad \therefore \quad D_F^{-1}=(0,\infty)$

$(c)\, R_F=D_F^{-1}=(0,\infty)$

$$(4)\ F(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

الحل

$$(a) y(x^2+1)=1$$

$$yx^2+y=1$$

$$yx^2=1-y$$

$$x^2=\frac{1-y}{y}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

$$(b) \frac{1-y}{y}\geq 0 \therefore D_F^{-1}=(0,1]$$

$$(c) R_F=D_F^{-1}=(0,1]$$

$$(5)\ F(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$$

الحل

$$(a) y(x^2+2x+3)=1$$

$$y[x^2+2x+1-1+3]=1$$

$$y[(x+1)^2+2]=1$$

$$y(x+1)^2+2y=1$$

$$(x+1)^2=\frac{1-2y}{y}$$

$$x+1=\pm\sqrt{\frac{1-2y}{y}}$$

$x = \pm\sqrt{\frac{1-2y}{y}} - 1$

$(b)\frac{1-2y}{y} \geq 0 \therefore D_F^{-1} = (0, \frac{1}{2}]$

$(c)R_F = D_F^{-1} = (0, \frac{1}{2}]$

(6) $F(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$

الحــل

$(a)y(4-x)^2 = 1$

$(4-x)^2 = \frac{1}{y}$

$4 - x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}} + 4 = F(y)$

$(b)\, y > 0 \therefore D_F^{-1} = (0, \infty)$

$(c)\, R_F = D_F^{-1} = (0, \infty)$

حالات خاصة للدوال القياسية :-

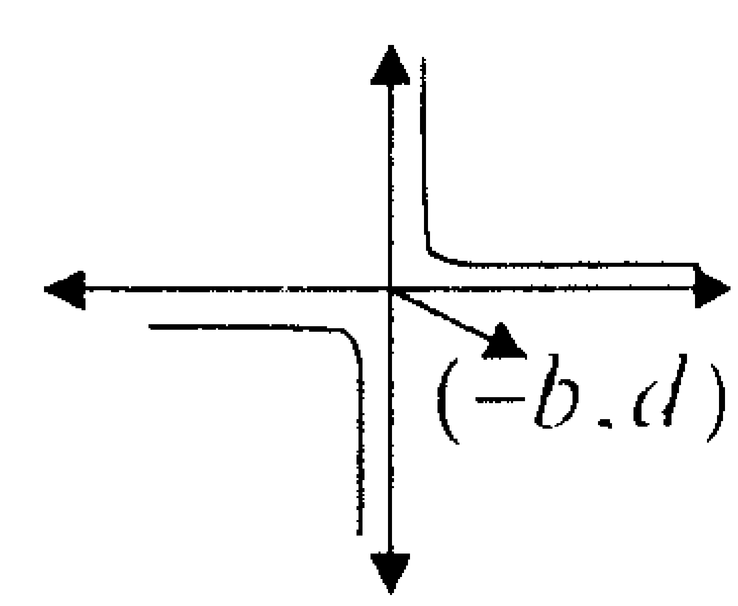
الحالة الأولى :- اذا كانت الدالة القياسية على صورة $F(x)=\frac{a}{x+b}+d$

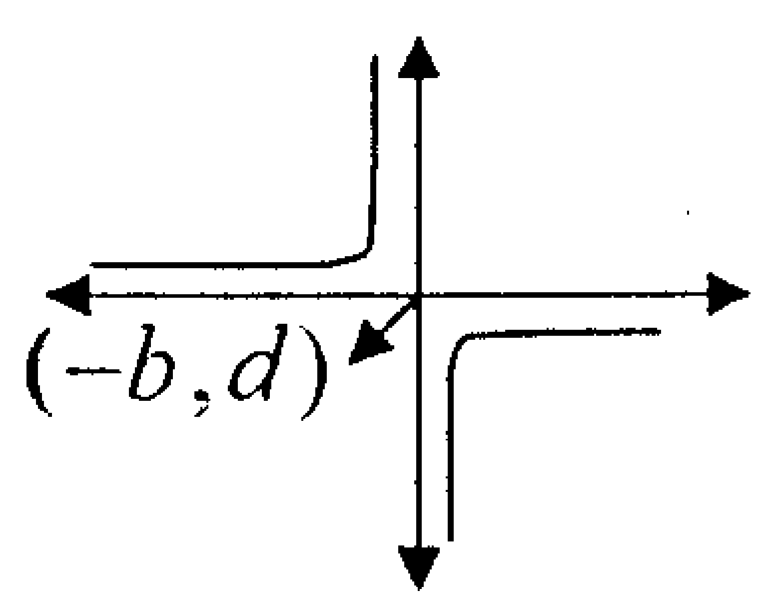
فان المدى هو $R_f = R-\{d\}$ ويمكن رسم الدالة كما يلي:

$$F(x)=\frac{a}{x+b}+d$$

اذا كان a عدداً موجباً   إذا كان a عدداً سالباً

$$x+b=0 \therefore x=-b$$
$$y=d$$





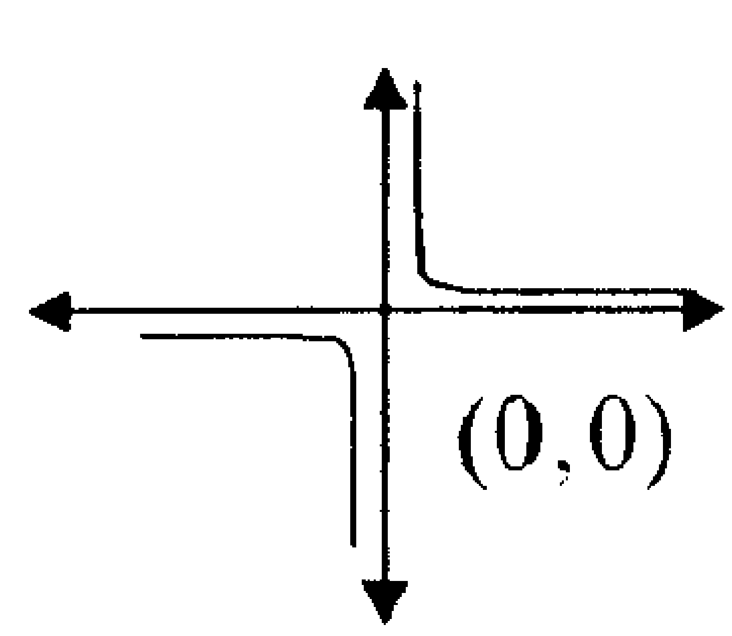
مـثــال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة:-

(1) $F(x)=\frac{1}{x}$

الــحــل

$x=0\ \ ,y=0$

$a=1>0$



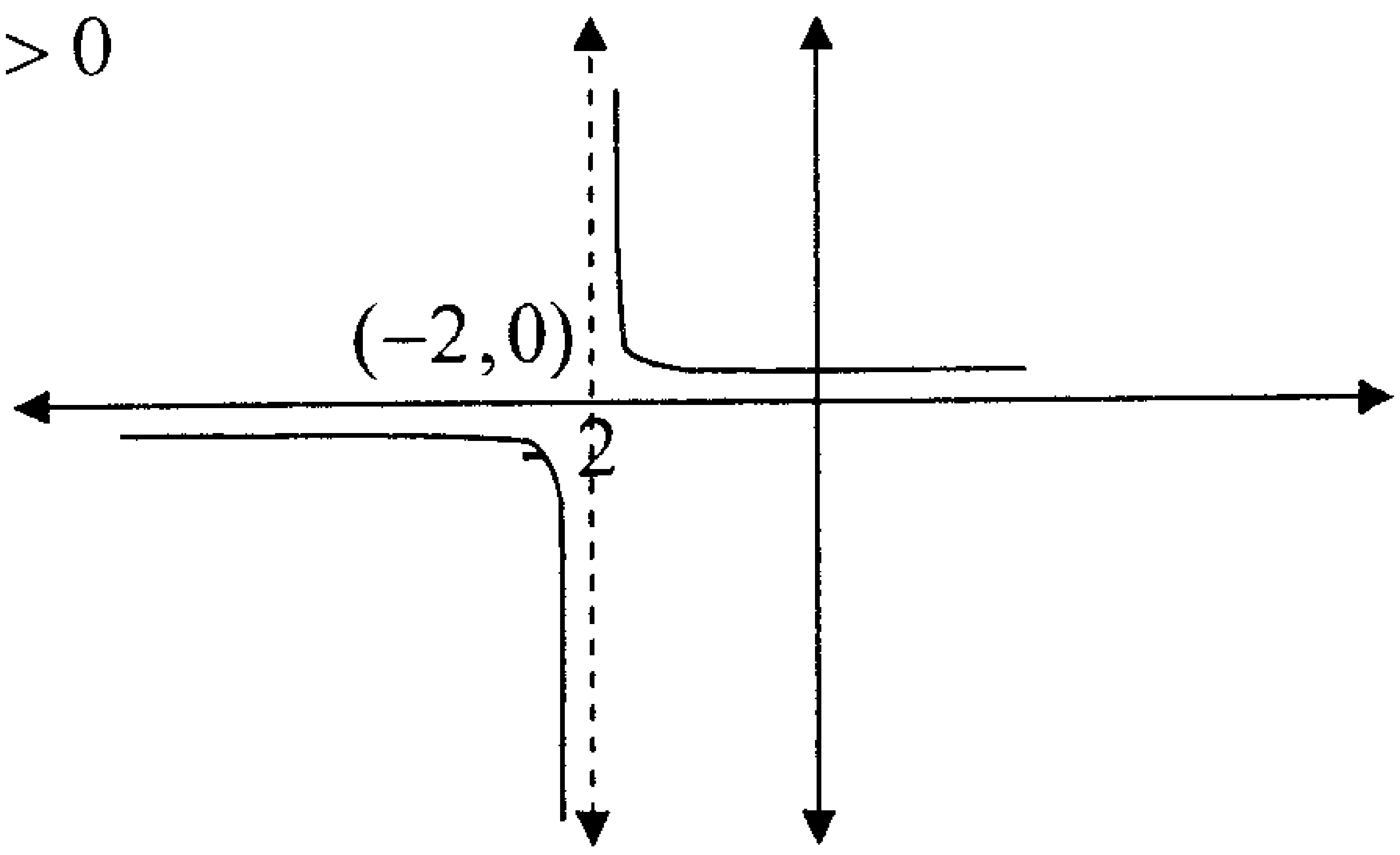
$R_f = R-\{0\}$

(2) $F(x)=\frac{3}{x+2}$

الحـــل

$x+2=0$, $x=-2$, $y=0$

$a=3>0$



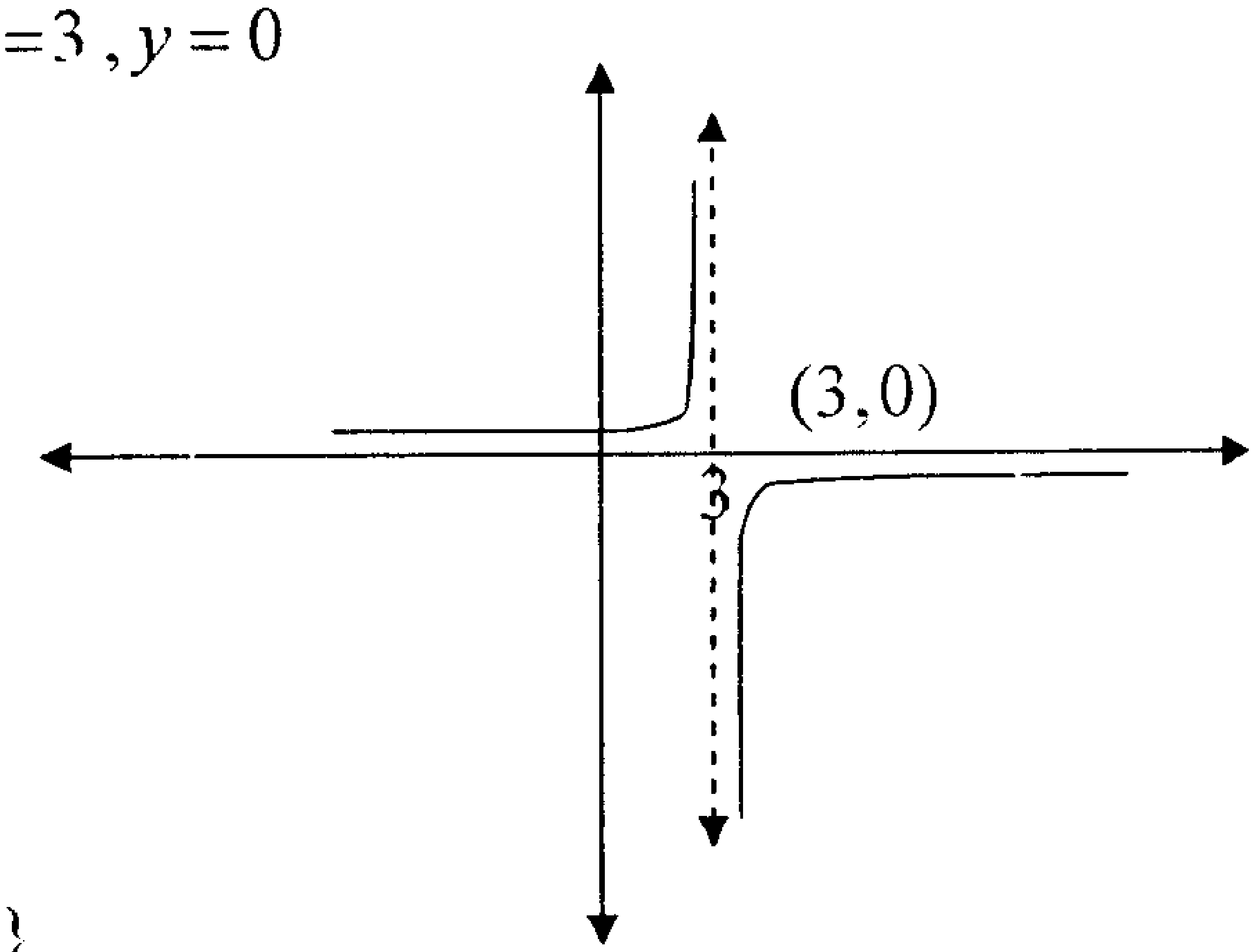
$R_F = R-\{0\}$

(3) $F(x)=\frac{-1}{x-3}$

الحـــل

$x-3=0$, $x=3$, $y=0$

$a=-1<0$



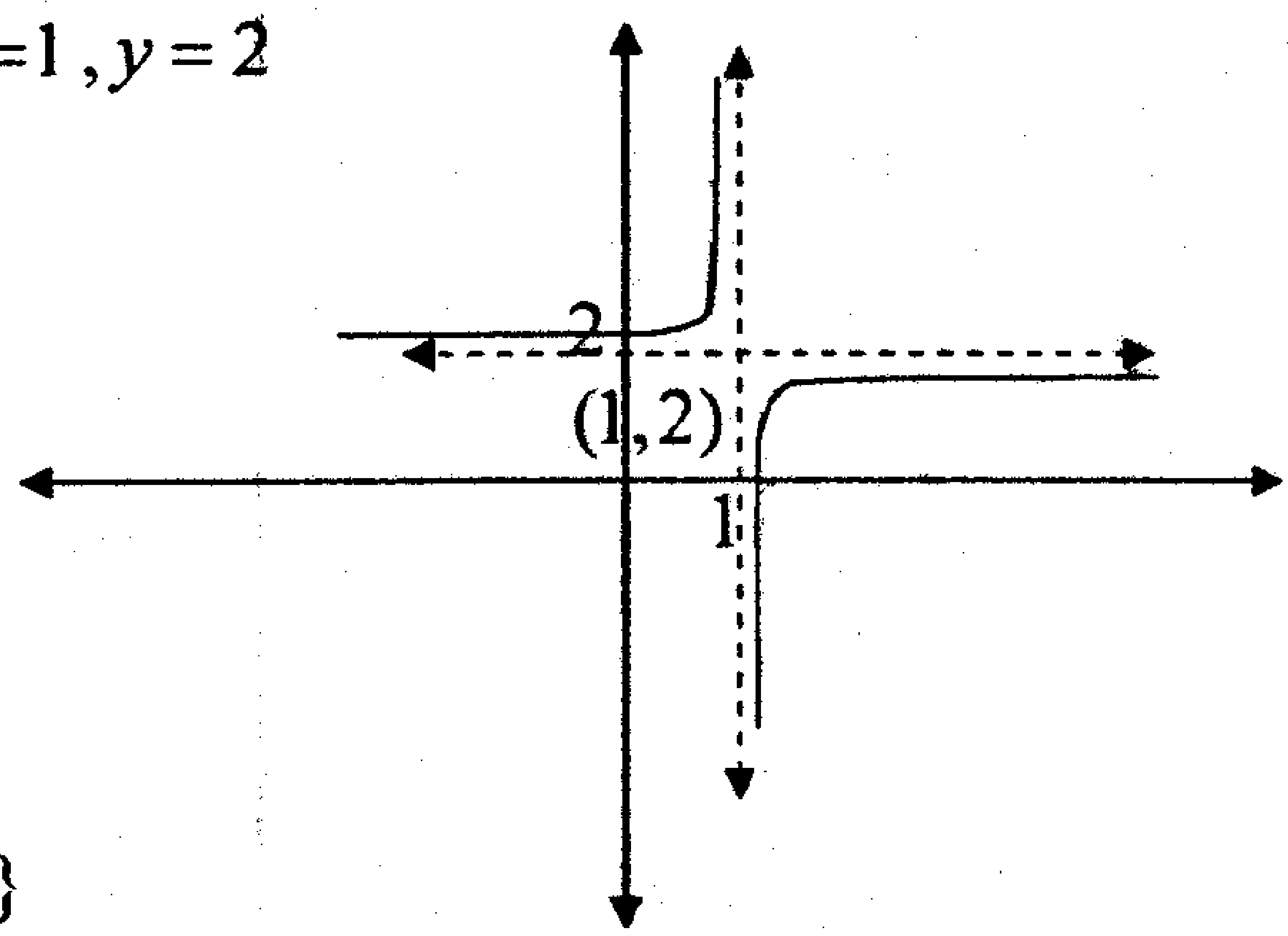
$R_F = R-\{0\}$

(4) $F(x)=\frac{-5}{x-1}+2$

الحل

$x-1=0 \;,\; x=1 \;,\; y=2$

$a=-5<0$



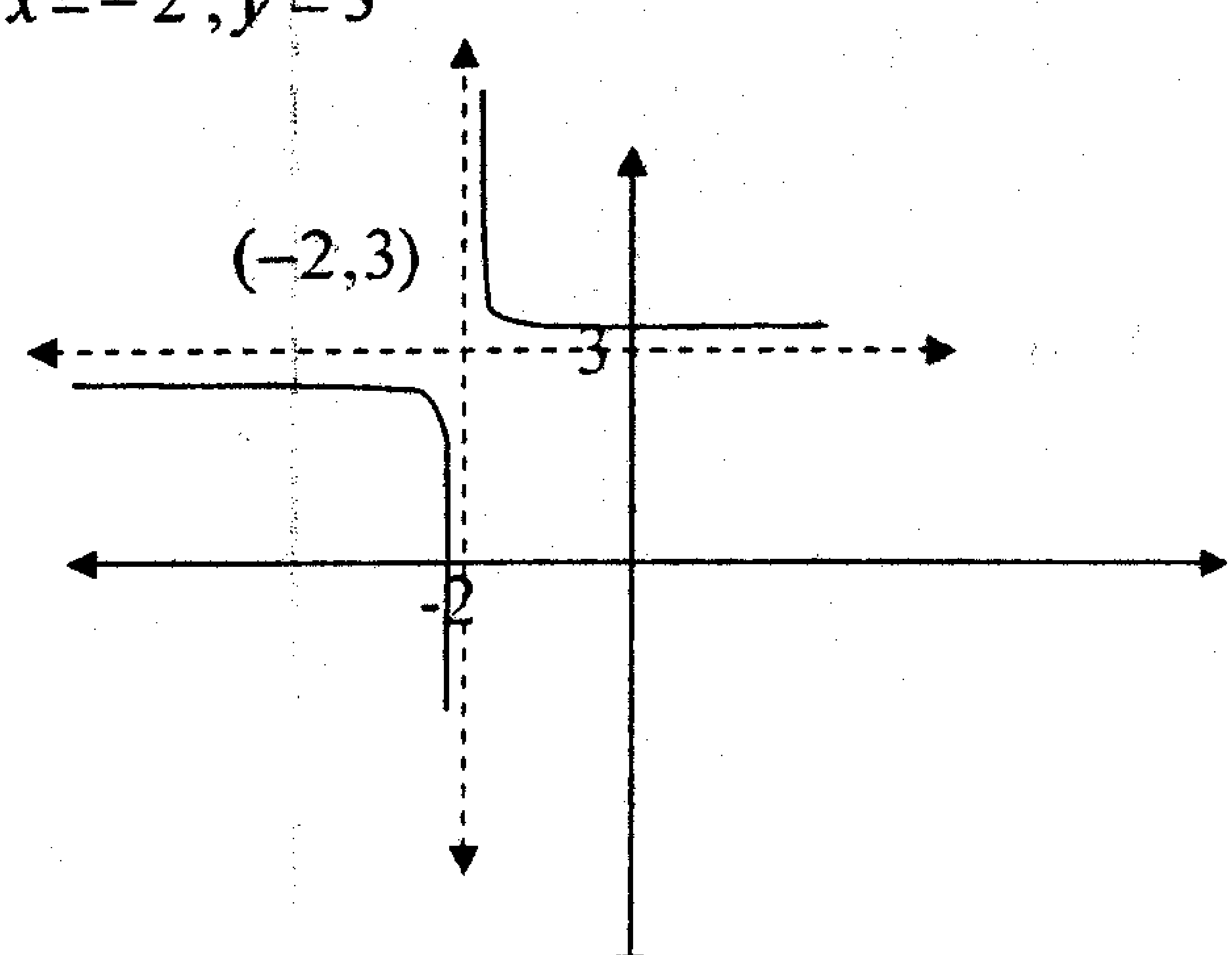
$R_F = R-\{2\}$

(5) $F(x)=\frac{1}{x+2}+3$

الحل

$x+2=0 \;,\; x=-2 \;,\; y=3$

$a=1>0$



$R_F = R-\{3\}$

الحالة الثانية : إذا كانت الدالة القياسية على صورة $F(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+D}$

لإيجاد مدى هذا النوع من الدوال نتبع الآتي :

(1) نحلل البسط ثم نختصر عوامل البسط مع المقام

(2) نحصل بعد الاختصار على دالة جديدة g (x)

(3) نعوض بالقيمة التي تجعل مقام F (x) يساوي صفراً في الدالة g (x) فنحصل على القيمة y_1

(4) مدى الدالة F (x) هو $R_F=R-\{y_1\}$

(5) بيان الدالة F (x) هو نفس بيان الدالة g (x) باستثناء النقطة $(x\,,y_1)$ حيث $(x\,,y_1)\in g(x)$. $(x\,,y_1)\notin F(x)$

مثـــال: أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة: -

(1) $F(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

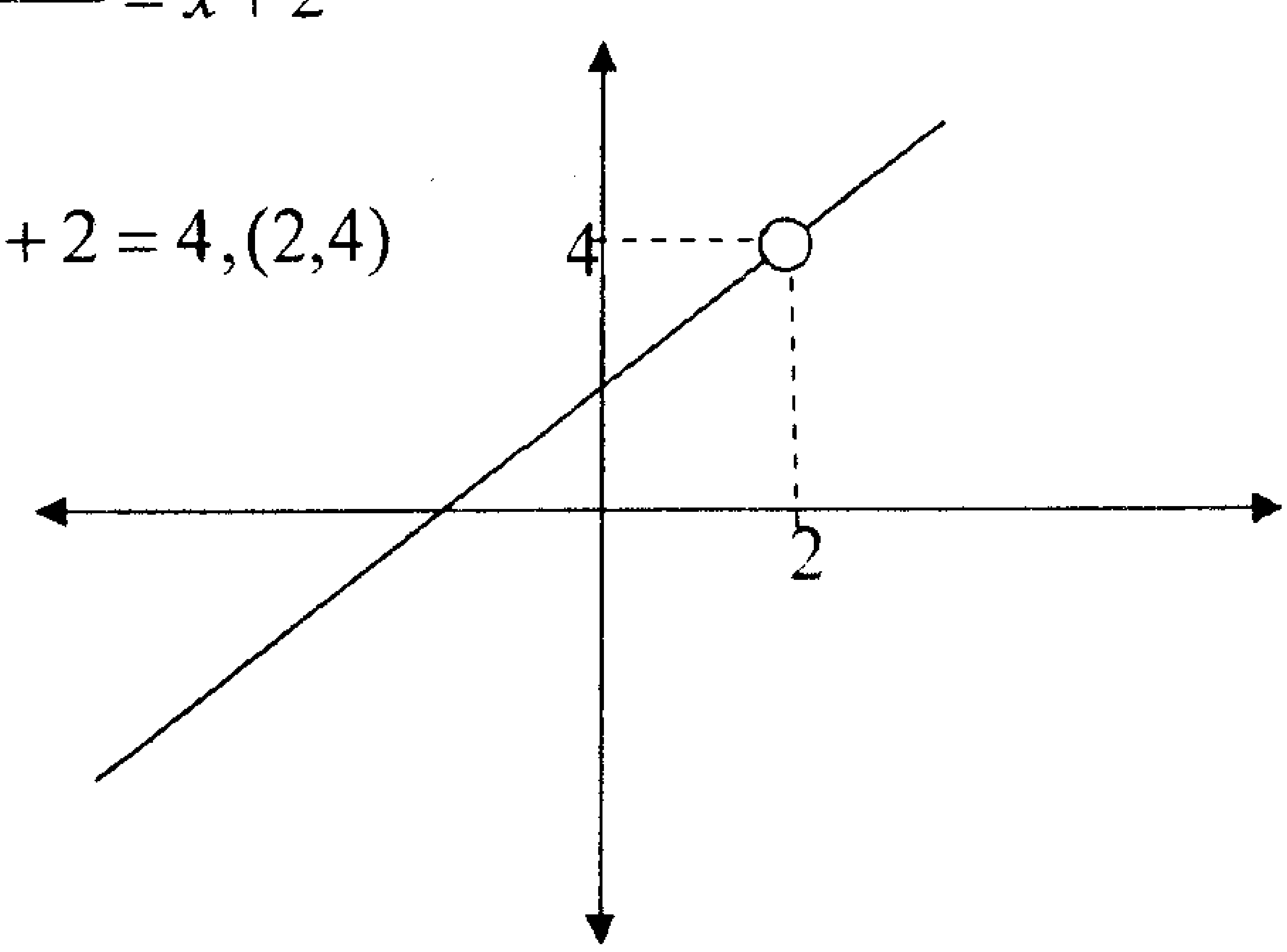
الـحـــل

$(a)\ g(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

$(b)\ g(x)=x+2$

$(c)\ x=2\ ,\quad g(2)=2+2=4,(2,4)$

$R_F=R-\{4\}$



(2) $F(x)=\dfrac{2x^2-x}{x}$

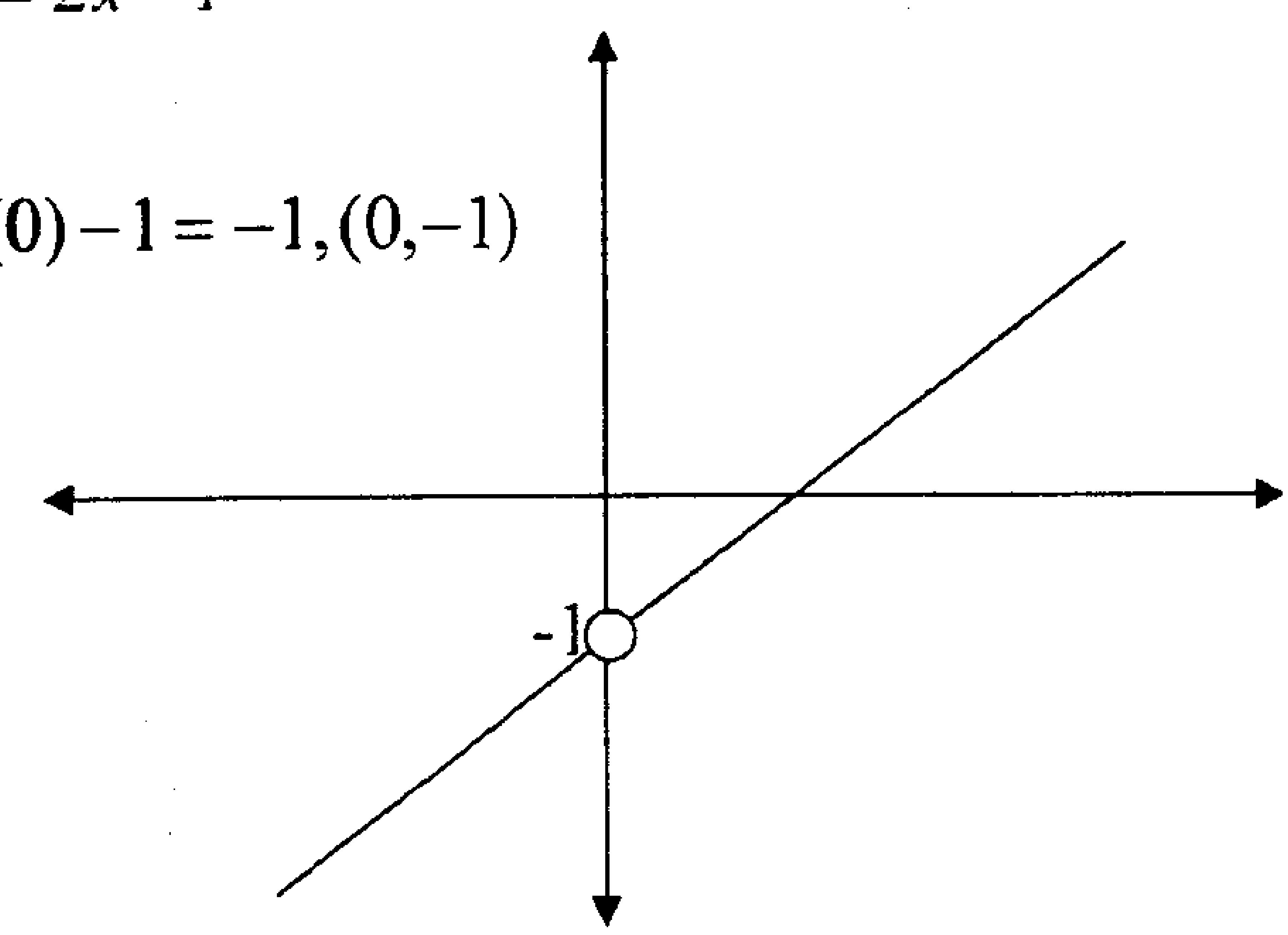
الحـــل

$(a)\ g(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x}=2x-1$

$(b)\ g(x)=2x-1$

$(c)\ x=0\ ;\ g(0)=2(0)-1=-1,(0,-1)$

$R_F=R-\{-1\}$



(3) $F(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$

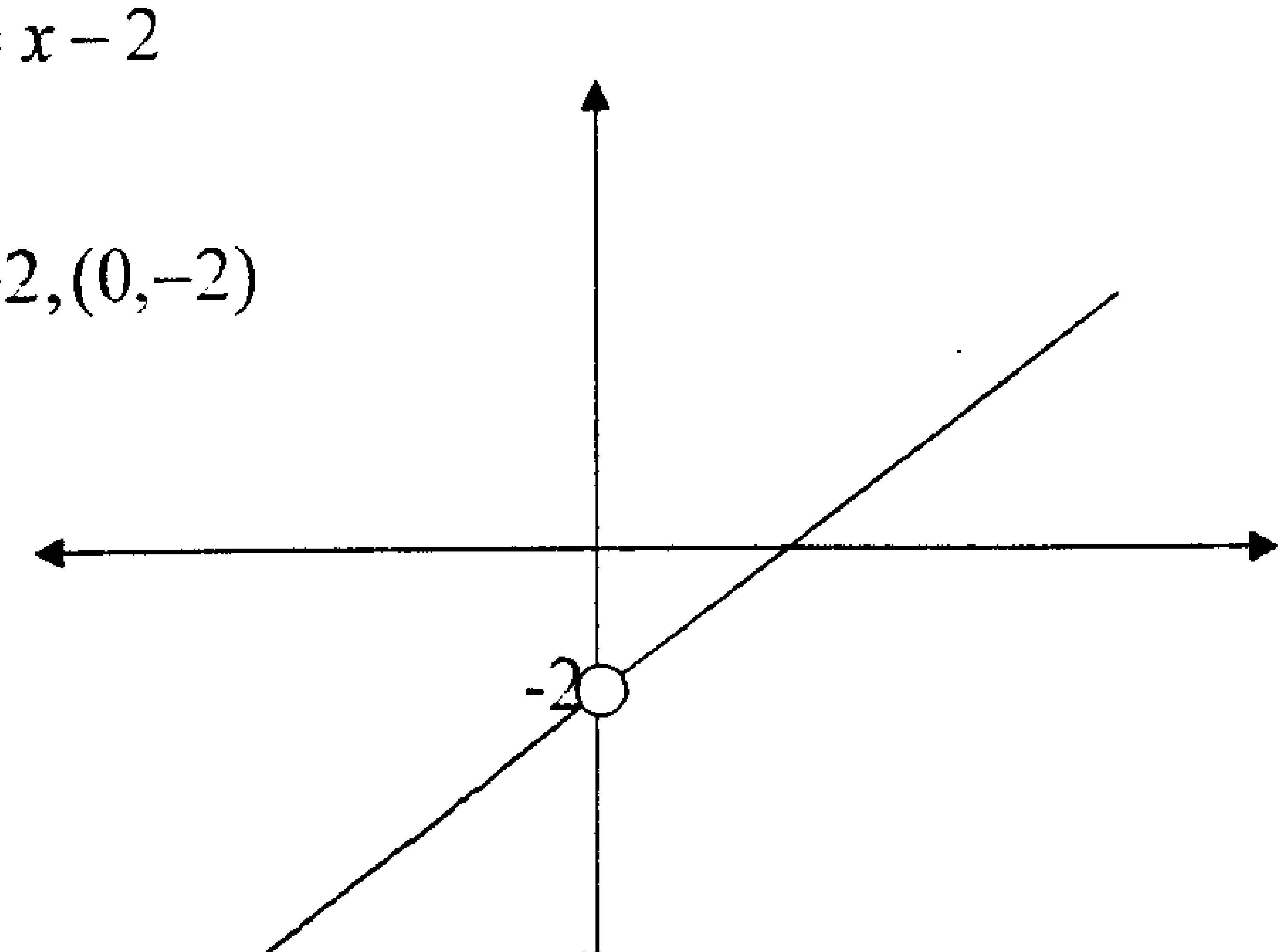
الحـــل

$(a)\ g(x)=\dfrac{x(x-2)}{x}=x-2$

$(b)\ g(x)=x-2$

$(c)\ g(0)=(0)-2=-2,(0,-2)$

$R_F=R-\{-2\}$



$$(4)\ F(x)=\frac{x^2-x-12}{x+3}$$

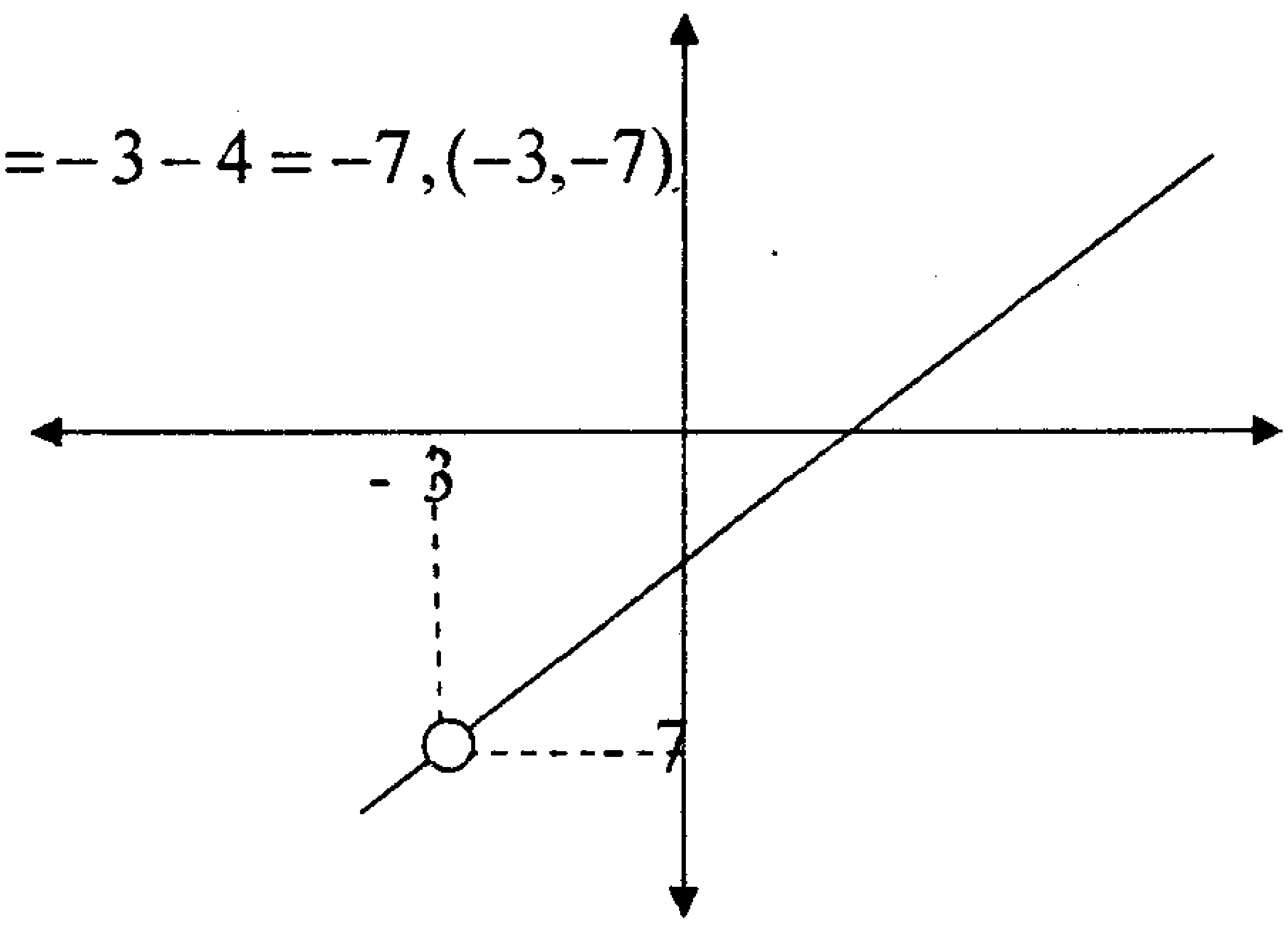
الـحـل

$$(a)\ g(x)=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4$$

$(b)\ g(x)=x-4$

$(c)\ x=-3\ ,\ g(-3)=-3-4=-7,(-3,-7)$

$R_F=R-\{-7\}$



الحالة الثالثة :- الدوال الحقيقية التي مقامها دالة الإشارة في هذه الحالة نعيد تعريف دالة الإشارة بأكثر من قاعدة ونرسم بيان الدالة ومنه نعين المدى .

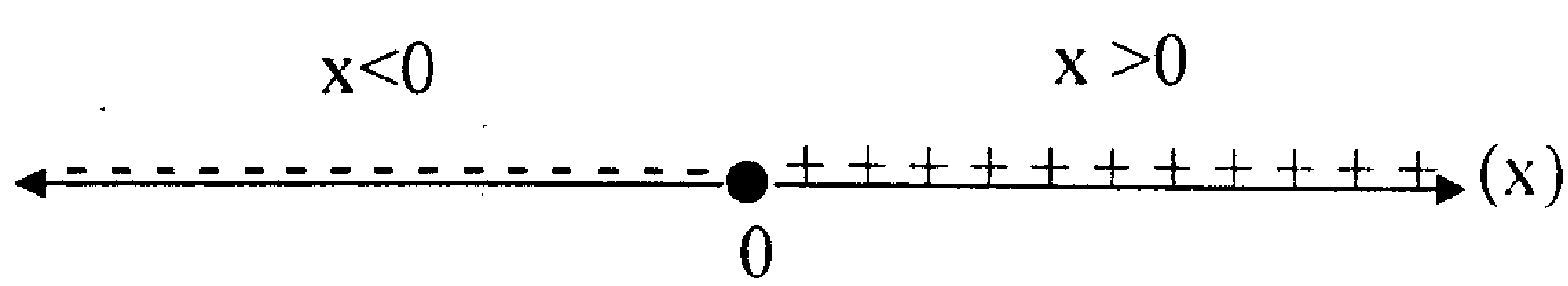
مـثـال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة:-

(1) $F(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sgn} x}$

الـحـل

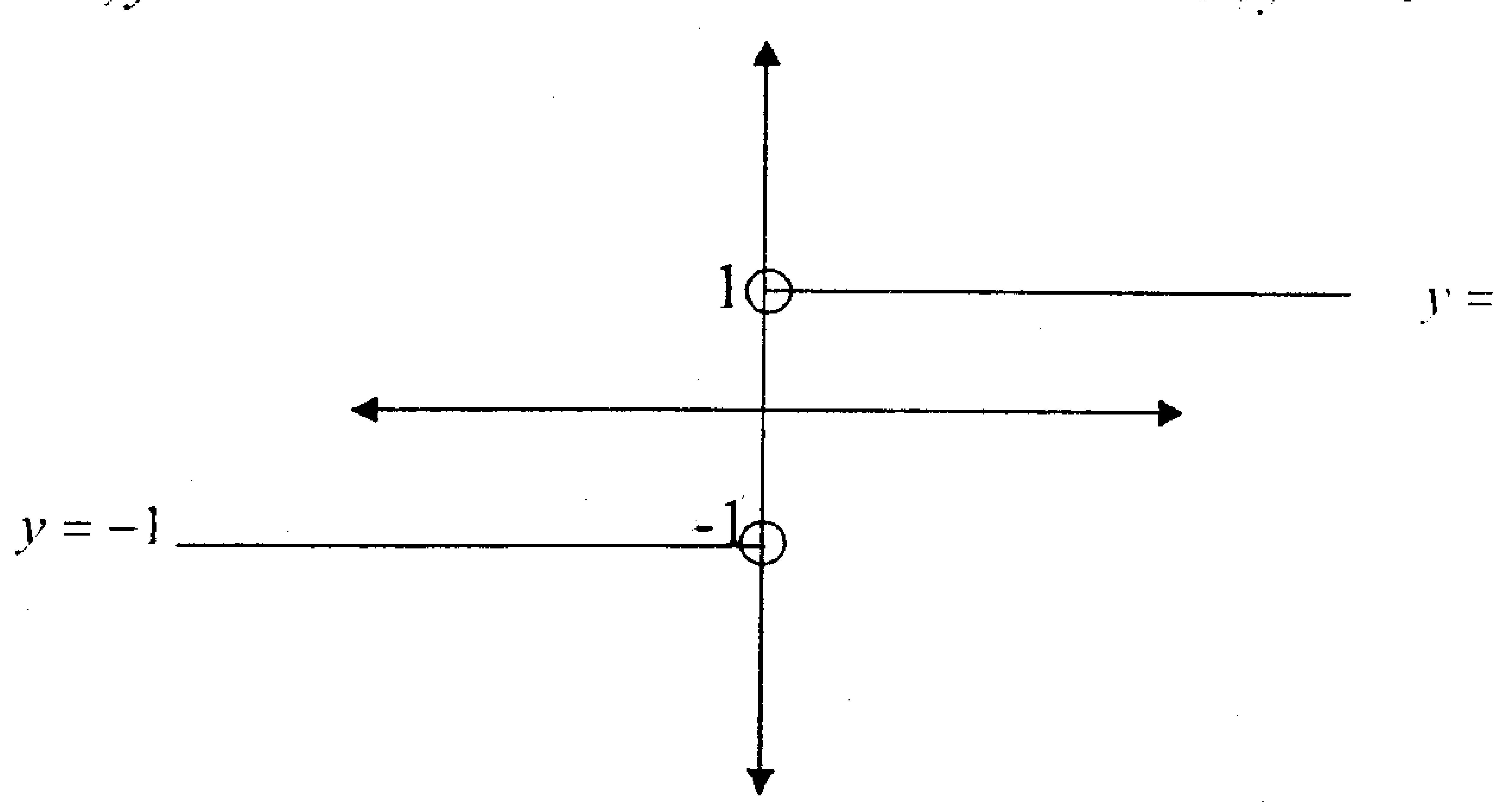
$D_F = R-\{0\}$

$$F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x)}=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\frac{|x|}{x}} & , \ x\neq 0\\ \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}1 & , \ x>0\\ -1 & , \ x<0\end{array}\right\}$$



$y=1 \ , x>0$ $\qquad$ $y=-1 \ , x<0$

$x=0 \ , y=1$ $\qquad$ $x=0 \ , y=-1$



س بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{1,-1\}$

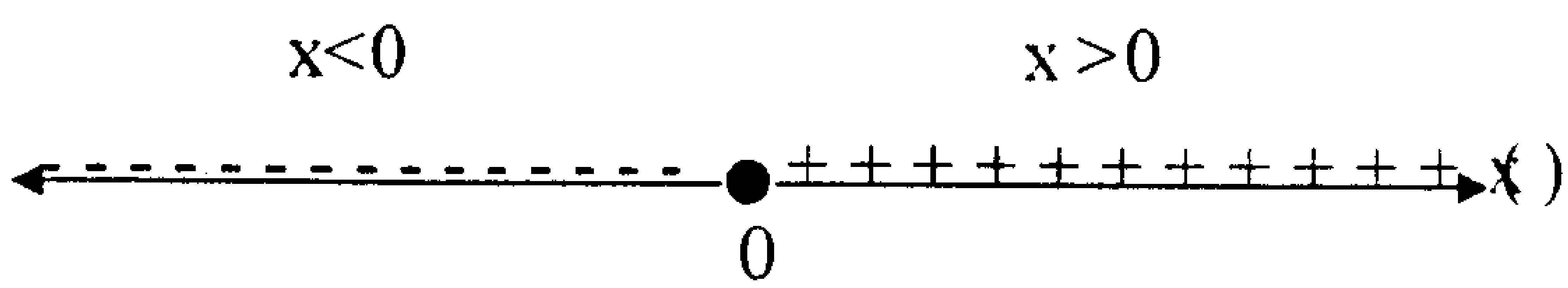
(2) $F(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sgn}(x)-1}$

الحل

$D_F=(-\infty,0]$

$$F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x)-1}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\frac{|x|}{x}-1} & , & x<0\\ \dfrac{1}{0-1} & , & x=0\end{Bmatrix}=\operatorname{sgn}(x)=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{-1-1} & , & x<0\\ -1 & , & x=0\end{Bmatrix}$$

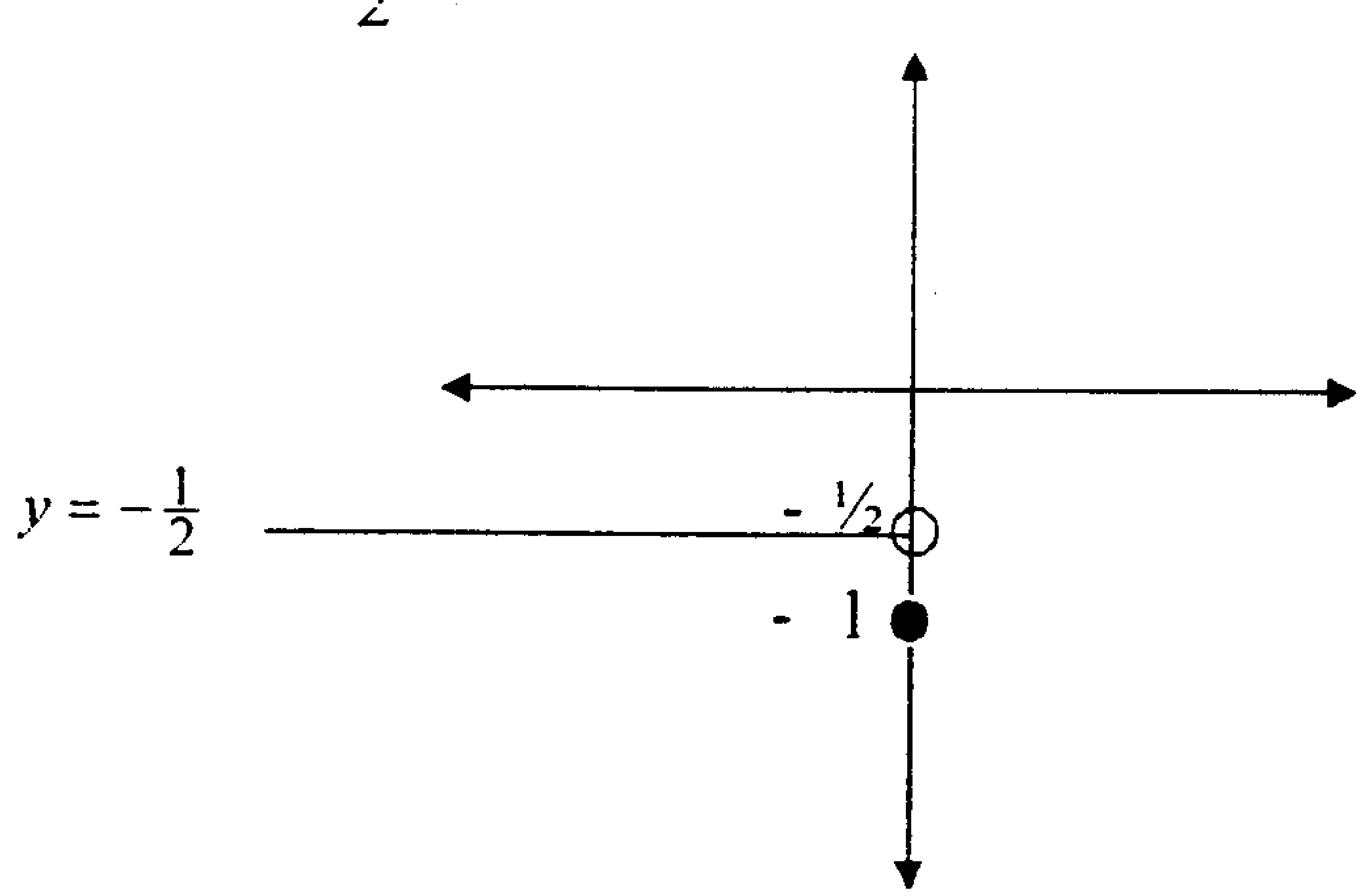
$$F(x)=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{2} & , & x<0\\ -1 & , & x=0\end{Bmatrix}$$



$y=-\frac{1}{2}\ ,x<0$

$x=0\ ,y=-\frac{1}{2}$

$y=-1,x=0$



من بيان الدالة نجد أن المدى هو : $R_F=\{-\frac{1}{2},-1\}$

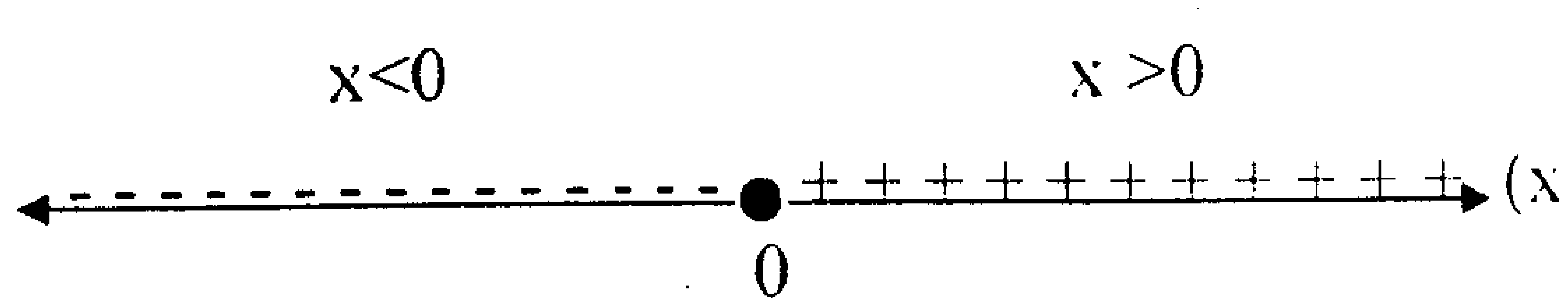
(3) $F(x)=\dfrac{1}{2+\operatorname{sgn}(x)}$

الحـــل

$D_F = R$

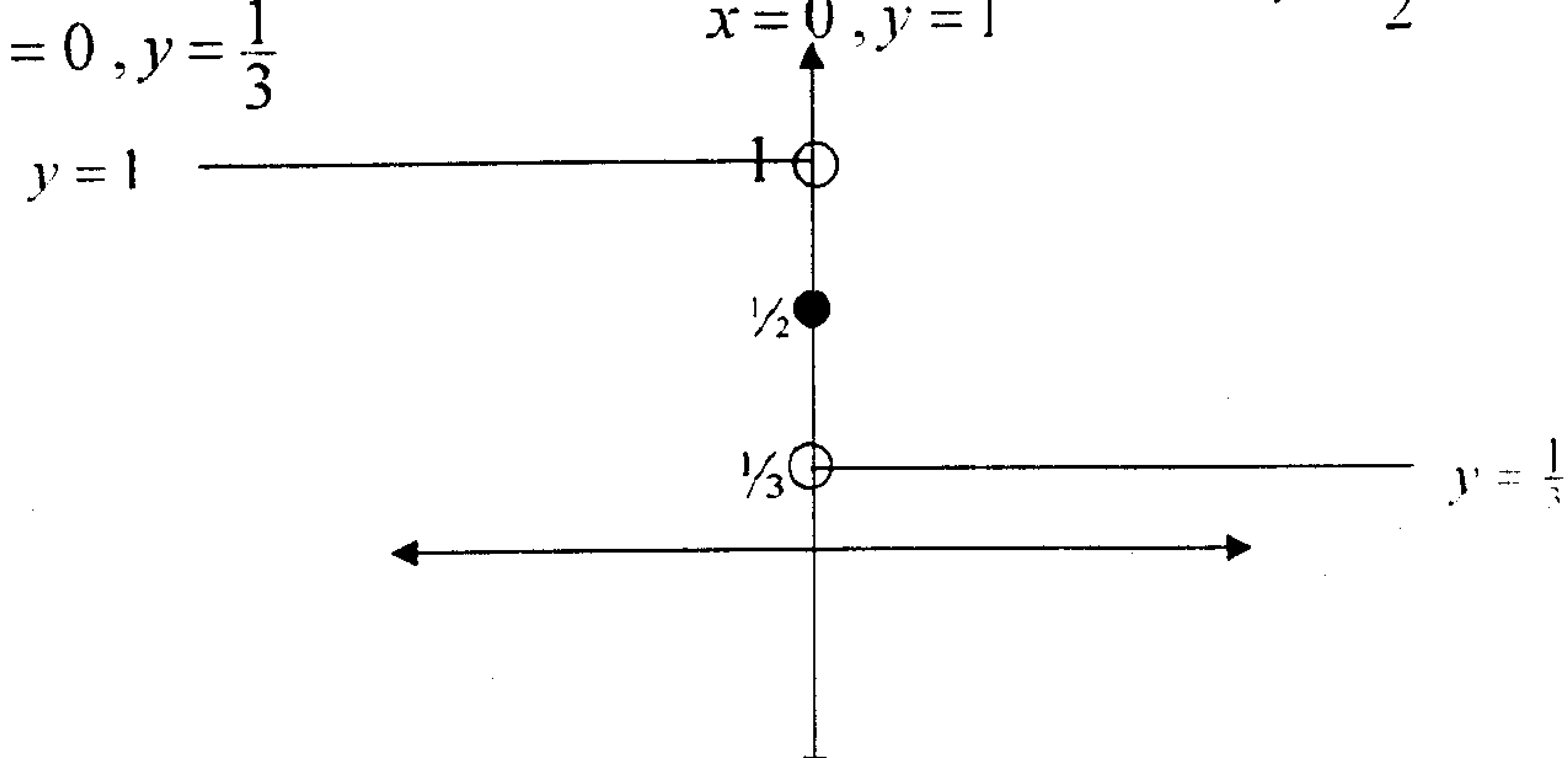
$$F(x)=\frac{1}{2+\operatorname{sgn}(x)}=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2+\dfrac{|x|}{x}} & , & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2+0} & , & x=0 \end{Bmatrix}=\operatorname{sgn}(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2+1} & . & x>0 \\ \dfrac{1}{2-1} & . & x<0 \\ \dfrac{1}{2} & , & x=0 \end{Bmatrix}$$

$$F(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{3} & , & x>0 \\ 1 & , & x<0 \\ \dfrac{1}{2} & , & x=0 \end{Bmatrix}$$



$y=\frac{1}{3}\ ,\ x>0$ $\quad$ $y=1\ ,\ x<0$ $\quad$ $y=\frac{1}{2} . x=0$

$x=0\ , y=\frac{1}{3}$ $\quad$ $x=0\ , y=1$



$R_F=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\}$ $\quad$ بيان الدالة نجد أن المدى هو :

ثالثاً مدى الدوال الغير قياسية: -

يمكن إيجاد مدى الدالة الغيرقياسية $y=\sqrt[n]{F(x)}$ إذا تمكنا من إيجاد علاقتها العكسية $x=F(y)$ وذلك كما يلي :

(a) نعين العلاقة العكسية $x=F(y)$

(b) نعين نطاق العلاقة العكسية D_F^{-1}

(c) مدى الدالة هي:

$R_F = D_F^{-1} \cap \{$ قيم y في الدالة F(x) من حيث كونها تأخذ قيم موجبة أو سالبة $\}$

مـثـــال: أوجد مدى الدوال الآتية: -

(1) $F(x)=\sqrt{x+1}$

الـحــل

$(a)\ y^2=x+1$

$x=y^2-1=F(y)$

$(b)\ D_F^{-1}=(-\infty,\infty)$

$(c)\ R_F=D_F^{-1}\cap[0,\infty)=(-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$

(2) $F(x)=-\sqrt{2x+1}$

الـحــل

$(a)\ y^2=2x+1$

$x=\dfrac{y^2-1}{2}=F(y)$

$(b)\ D_F^{-1}=(-\infty,\infty)$

$(c)\ R_F=D_F^{-1}\cap(-\infty,0]=(-\infty,\infty)\cap(-\infty,0]=(-\infty,0]$

(3) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

الحل

(a) $y^2=\dfrac{1}{x-1}$

$y^2(x-1)=1$

$x-1=\dfrac{1}{y^2}$

$x=\dfrac{1}{y^2}+1$

(b) $D_F^{-1}=R-\{0\}$

(c) $R_F=D_F^{-1}\cap(0,\infty)=R-\{0\}\cap(0,\infty)=(0,\infty)$

(4) $F(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x-3}}$

الحل

(a) $y^2=\dfrac{1}{x-3}$

$y^2(x-3)=1$

$x-3=\dfrac{1}{y^2}$

$x=\dfrac{1}{y^2}+3$

(b) $D_F^{-1}=R-\{0\}$

(c) $R_F=D_F^{-1}\cap(-\infty,0)=R-\{0\}\cap(-\infty,0)=(-\infty,0)$

(5) $F(x)=\sqrt{x^2+16}$

الحــل

$(a)\ y^2=x^2+16$

$x^2=y^2-16$

$x=\pm\sqrt{y^2-16}=F(y)$

$(b)\, D_F^{-1}=(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$

$(c)\, R_F=D_F^{-1}\cap(0,\infty)=\left((-\infty,-4]\cup[4,\infty)\right)\cap(0,\infty)=[4,\infty)$

(6) $F(x)=\sqrt{x^2-25}$

الحــل

$(a)\ y^2=x^2-25$

$x^2=y^2+25$

$x=\pm\sqrt{y^2+25}=F(y)$

$(b)\, D_F^{-1}=(-\infty,\infty)$

$(c)\, R_F=D_F^{-1}\cap[0,\infty)=(-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$

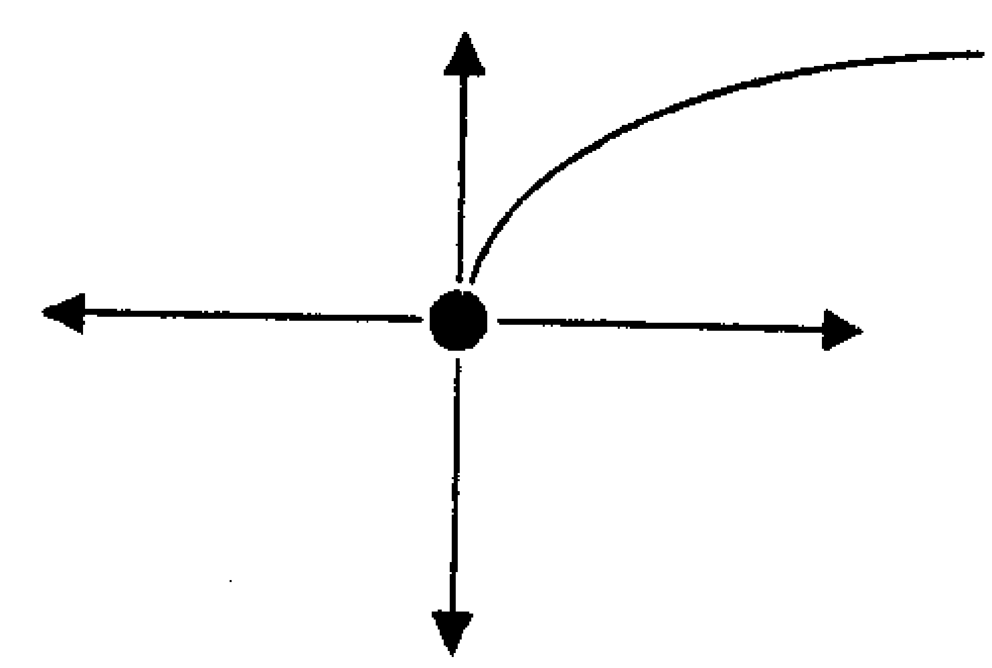
حالات خاصة للدوال الغير قياسية :-

الحالة الأولى :- إذا كانت الدالة القياسية على صورة $F(x)=\sqrt{x+a}+b$
في هذه الحالة يتم إيجاد المدى من خلال رسم بيان الدالة كما يلي :

مثال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

(1) $F(x)=\sqrt{x}$

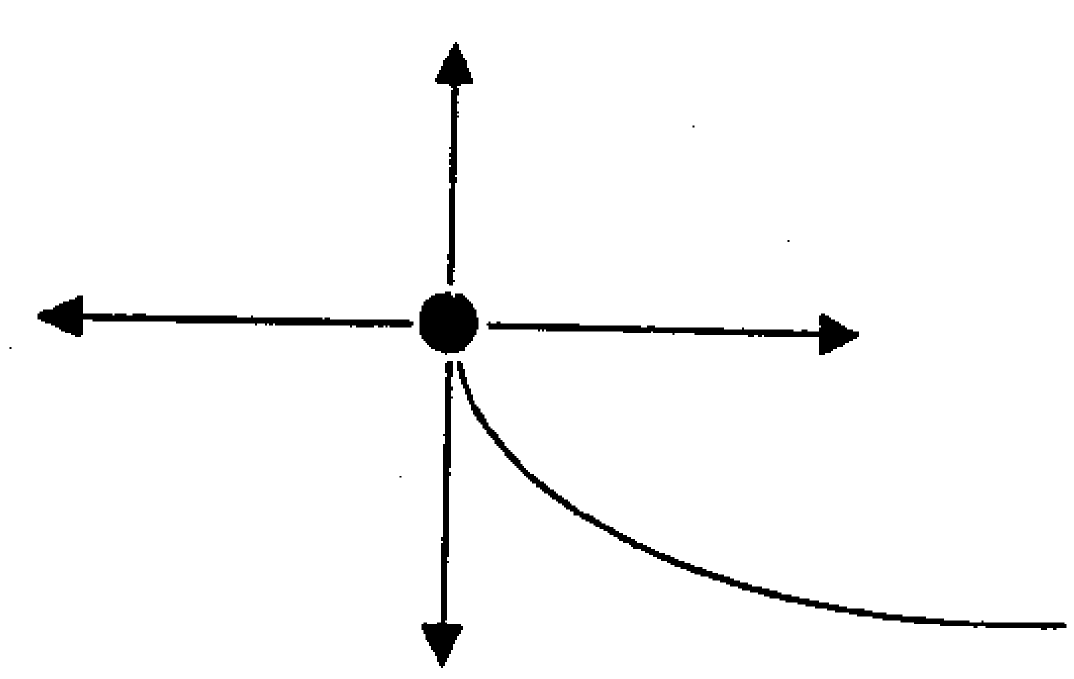
الحل



$R_F=[0,\infty)$

(2) $F(x)=-\sqrt{x}$

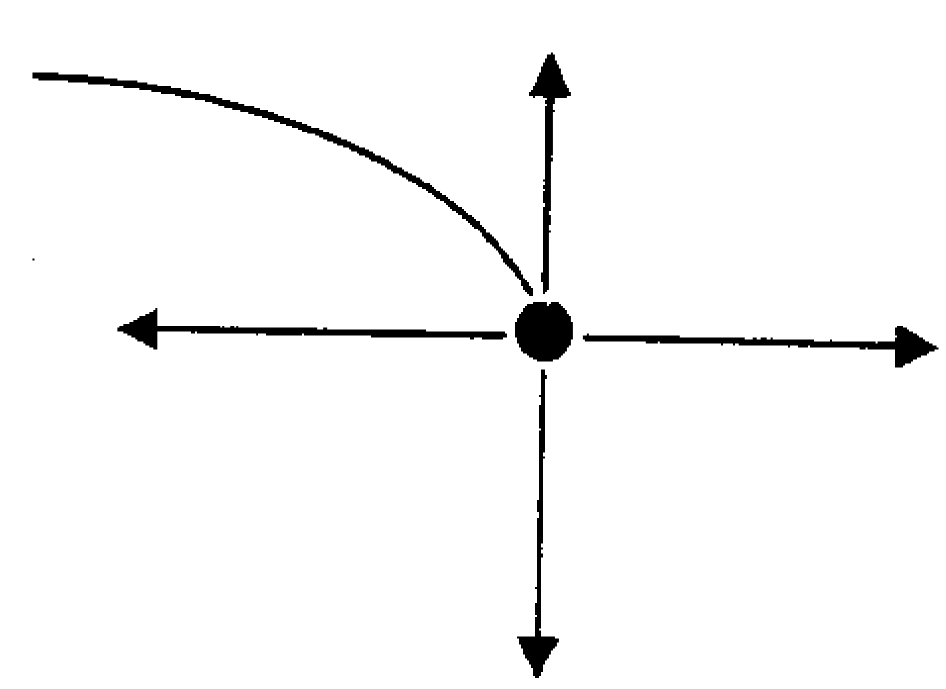
الحل



$R_F=(-\infty,0]$

(3) $F(x)=\sqrt{-x}$

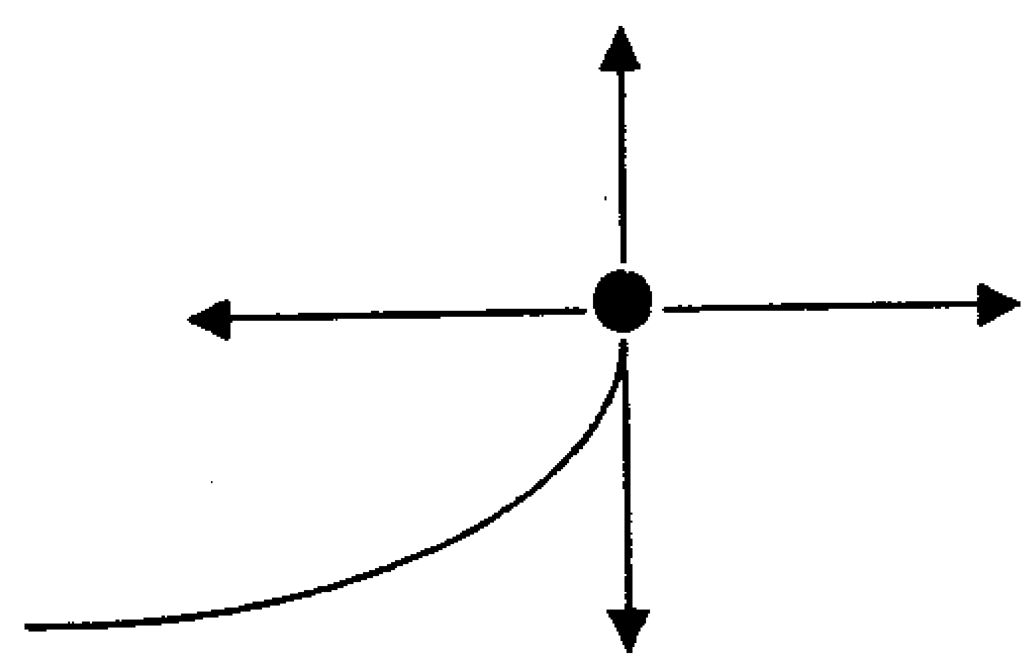
الحل



$R_F=[0,\infty)$

(4) $F(x) = -\sqrt{-x}$

الحـــل



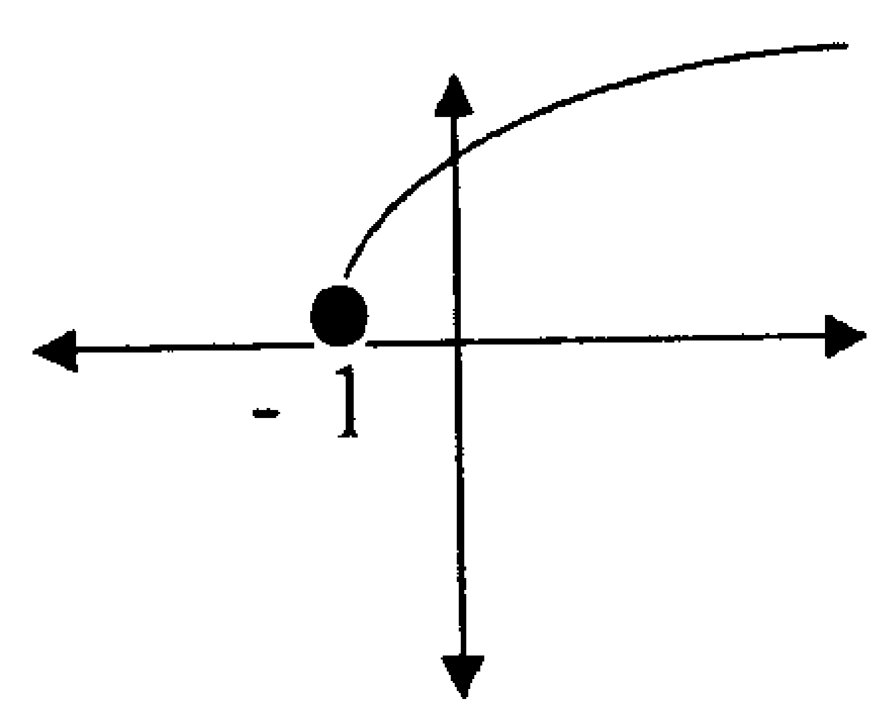
$R_F = (-\infty, 0]$

(5) $F(x) = \sqrt{x+1}$

الحـــل

$x+1=0 \therefore x=-1$

$y=0$



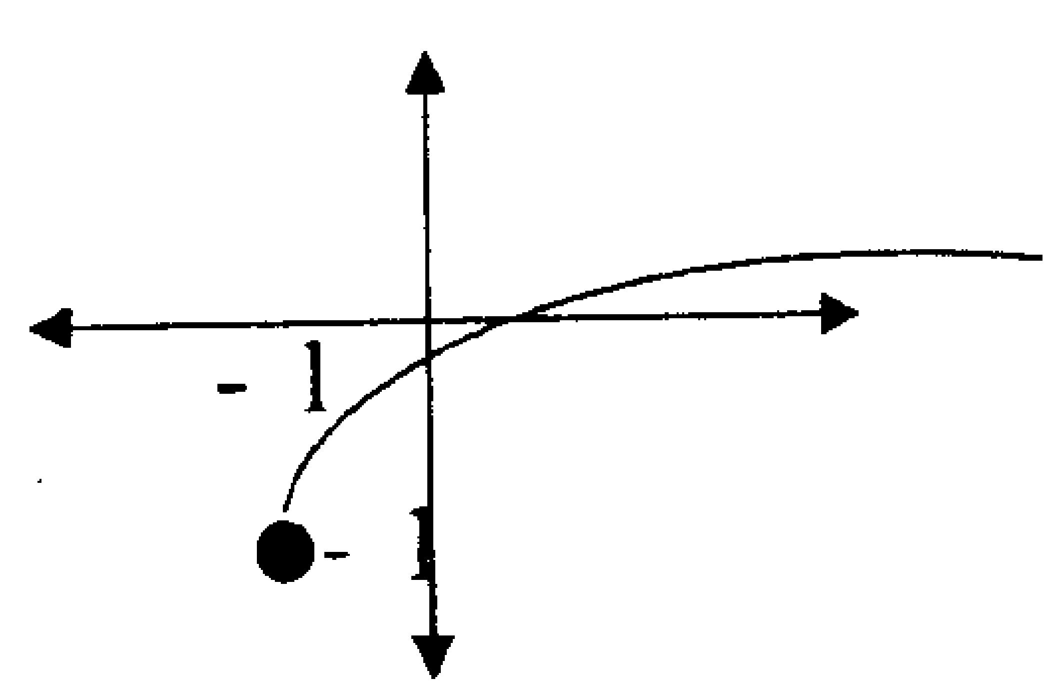
$R_F = [0, \infty)$

(6) $F(x) = \sqrt{x+1} - 1$

الحـــل

$x+1=0 \therefore x=-1$

$y=-1$



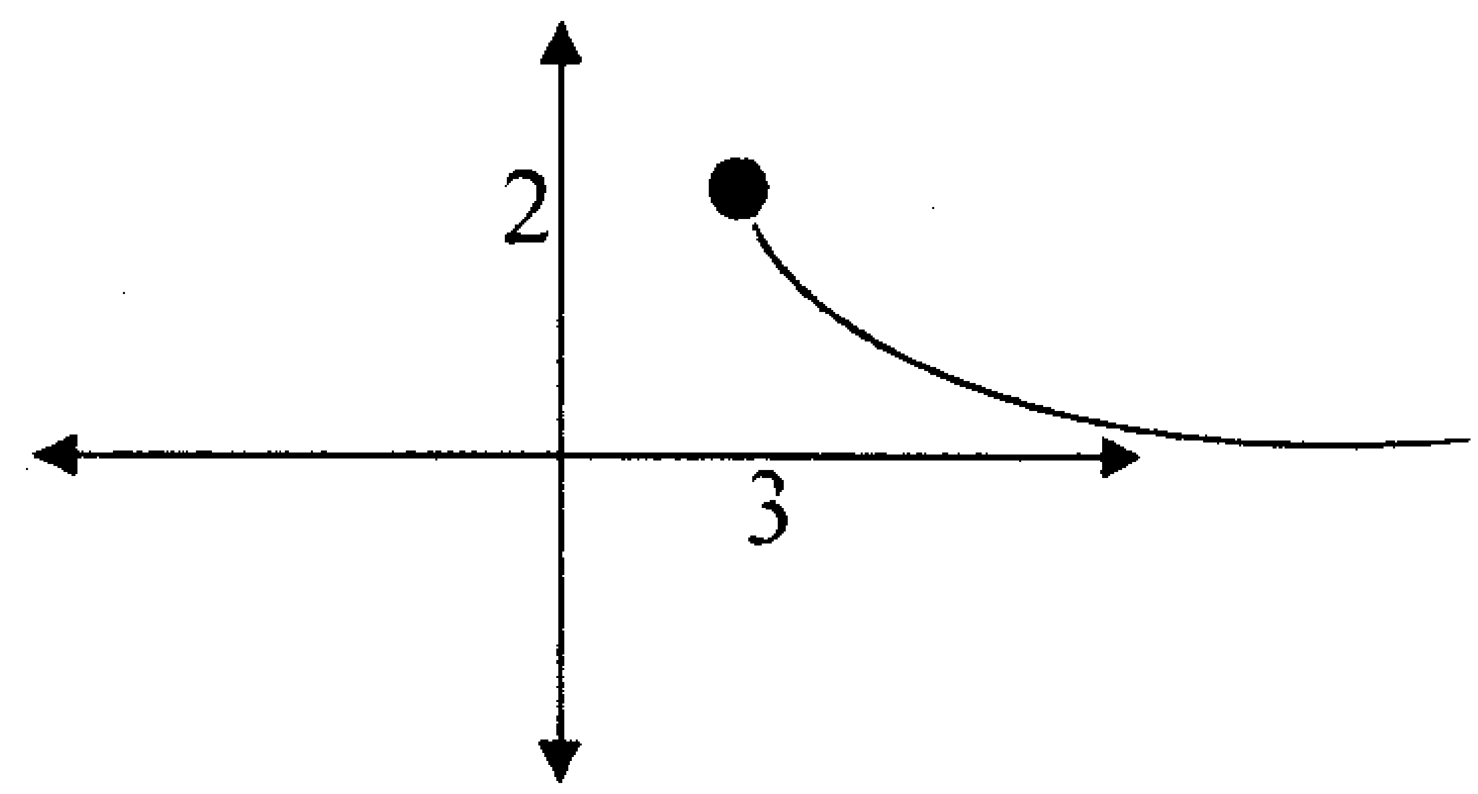
$R_F = [-1, \infty)$

(7) $F(x)=2-\sqrt{x-3}$

الحل

$x-3=0 \therefore x=3$
$y=2$

$R_F=(-\infty,2]$

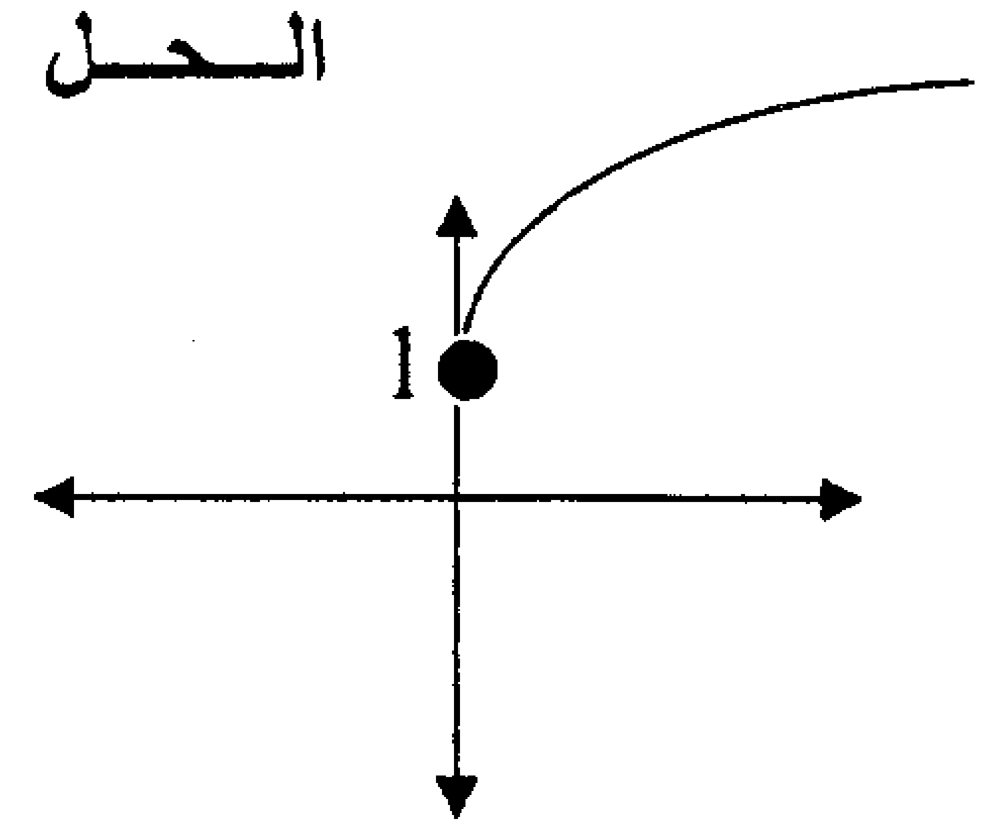


(8) $F(x)=\sqrt{x}+1$

الحل

$x=0, y=1$

$R_F=[1,\infty)$

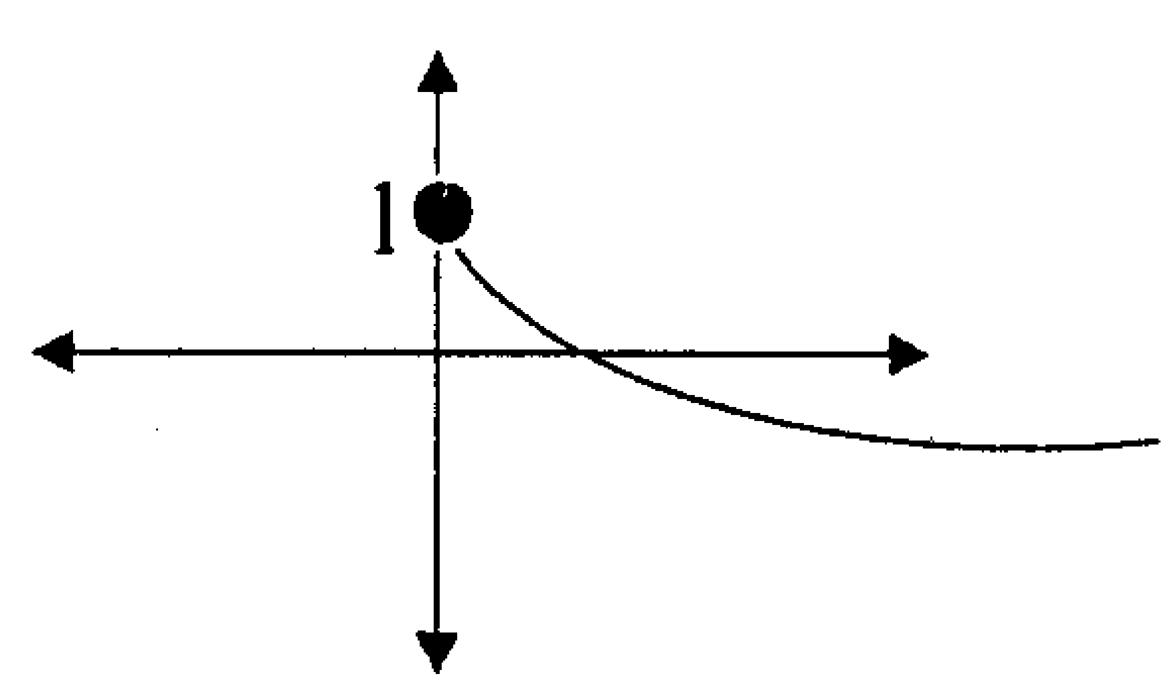


(9) $F(x)=1-\sqrt{x}$

الحل

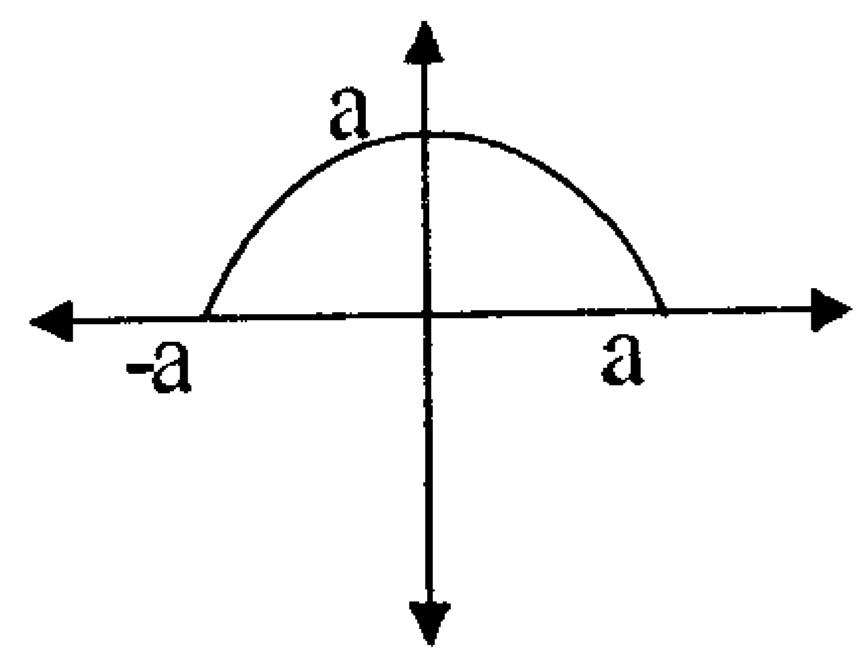
$x=0, y=1$

$R_F=(-\infty,1]$



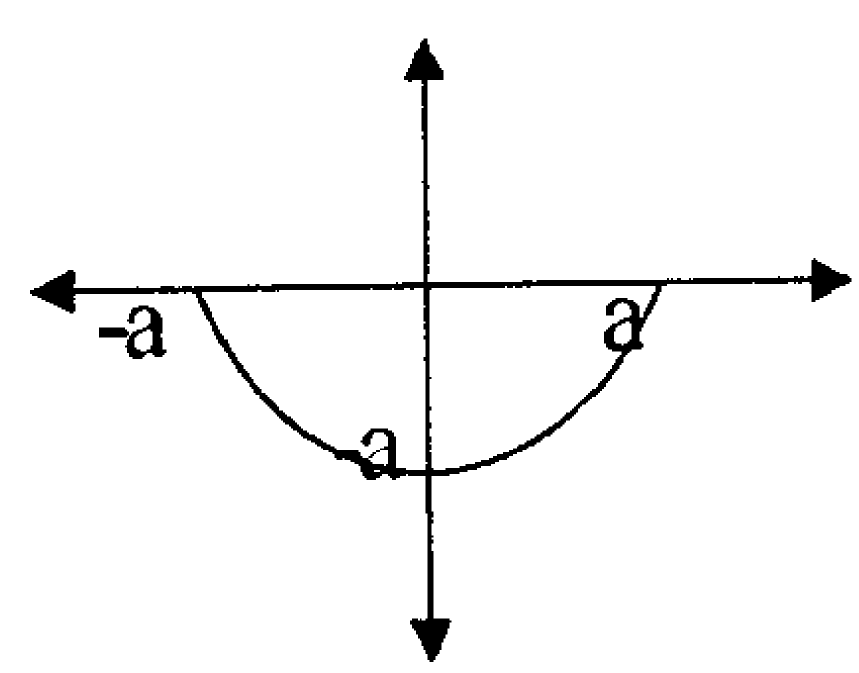
الحالة الثانية : إذا كانت الدالة الغير القياسية على صورة $F(x)=\sqrt{a^2-x^2}$

فهي معادلة نصف دائرة $D_F=[-a,a]$, $R_F=[0,a]$



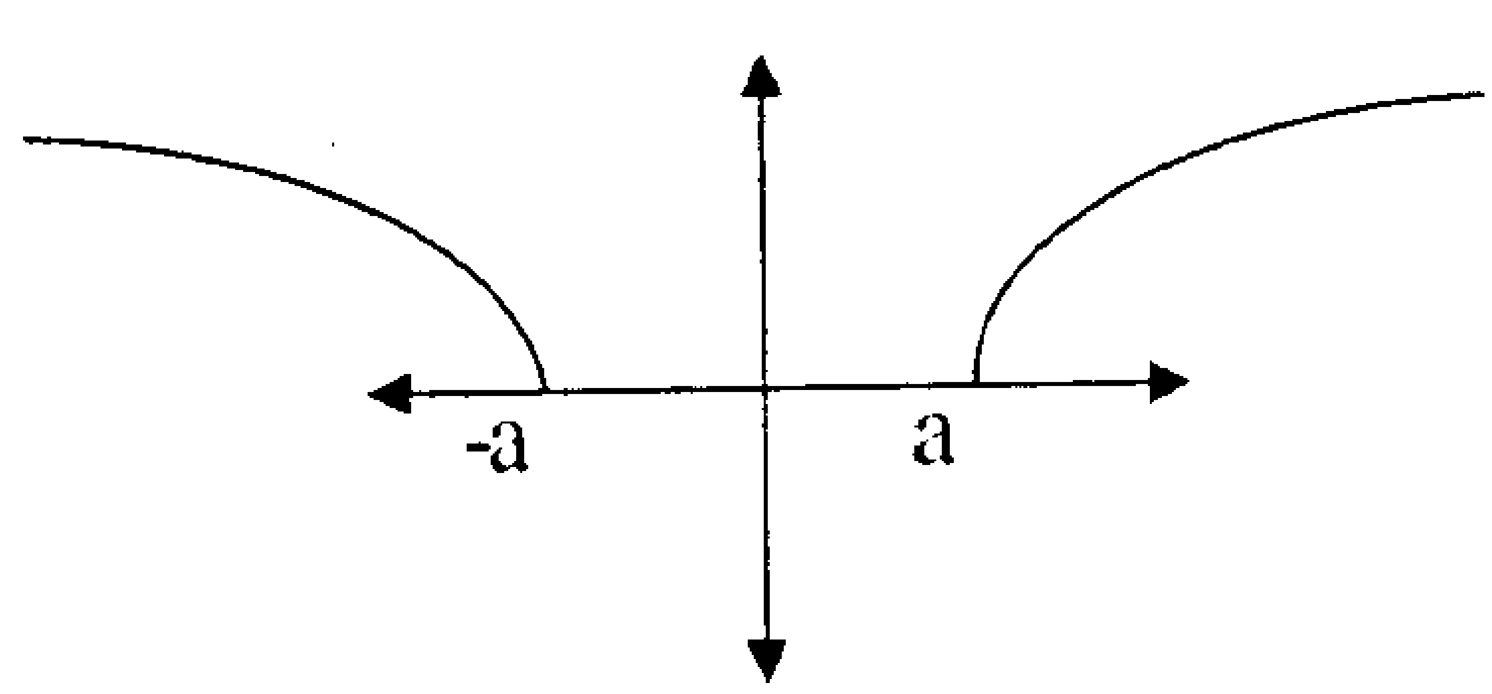
الحالة الثالثة : إذا كانت الدالة الغير القياسية على صورة $F(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$

فهي معادلة نصف دائرة $D_F=[-a,a]$, $R_F=[-a,0]$

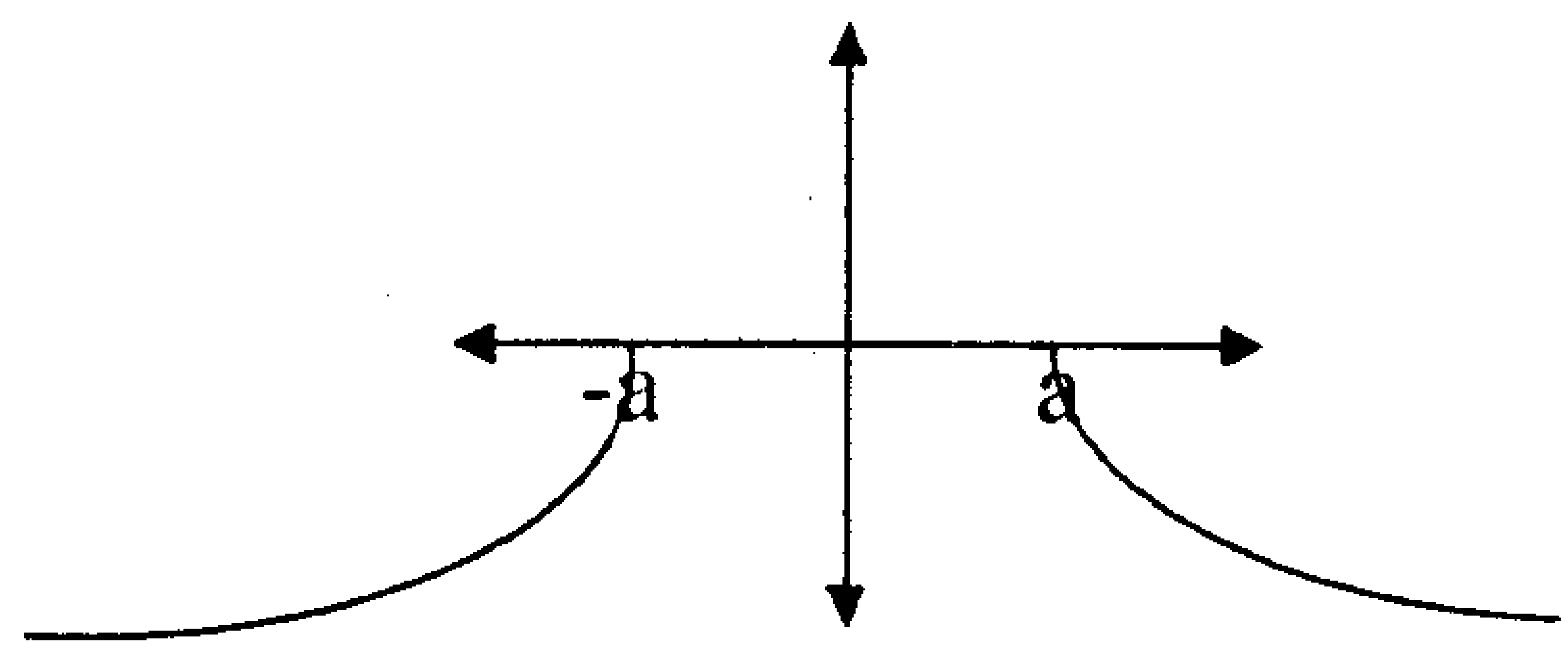


الحالة الرابعة : إذا كانت الدالة القياسية الغير على صورة $F(x)=\sqrt{x^2-a^2}$

فهي معادلةنصف قطع زائد $D_F=(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$, $R_F=[0,\infty)$



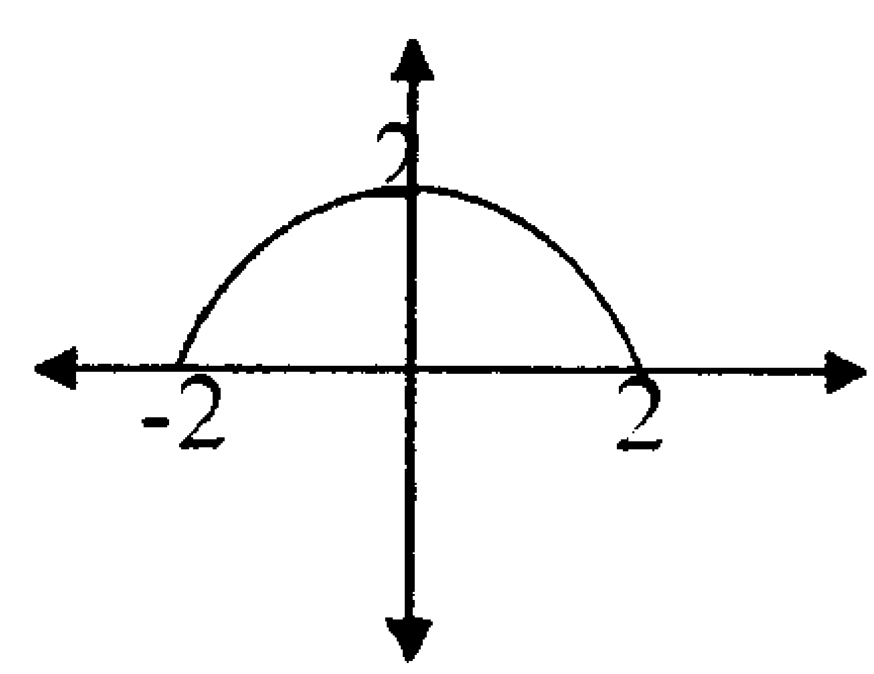
الحالة الخامسة :- إذا كانت الدالة القياسية الغير على صورة $F(x)=-\sqrt{x^2-a^2}$
فهي معادلةنصف قطع زائد $D_F=(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$, $R_F=(-\infty,0]$



مـثــال:- أوجد مدى الدوال الآتية مع رسم بيان الدالة :-

(1) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$

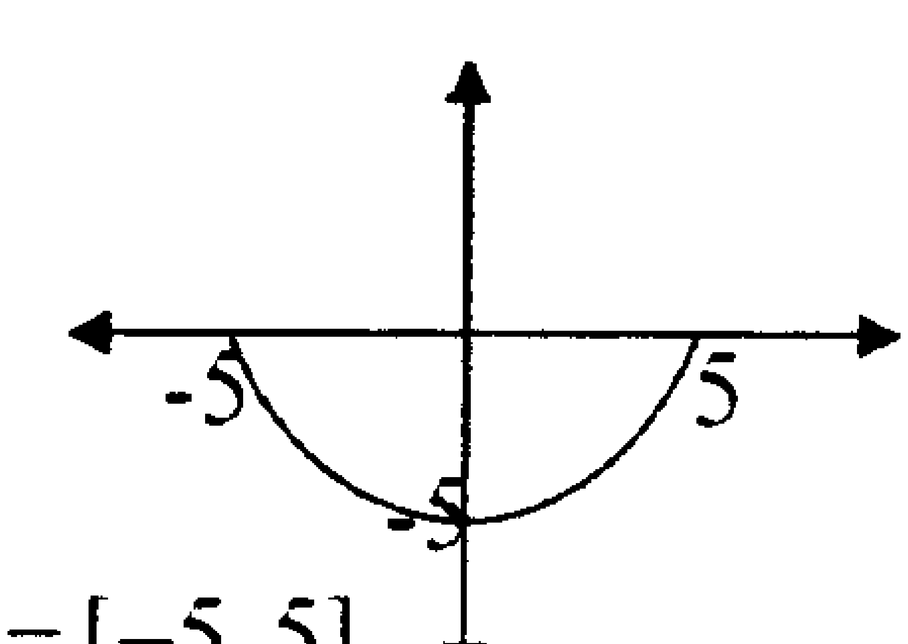
الــحــل



$R_F=[0,2]$, $D_F=[-2,2]$

(2) $F(x)=-\sqrt{25-x^2}$

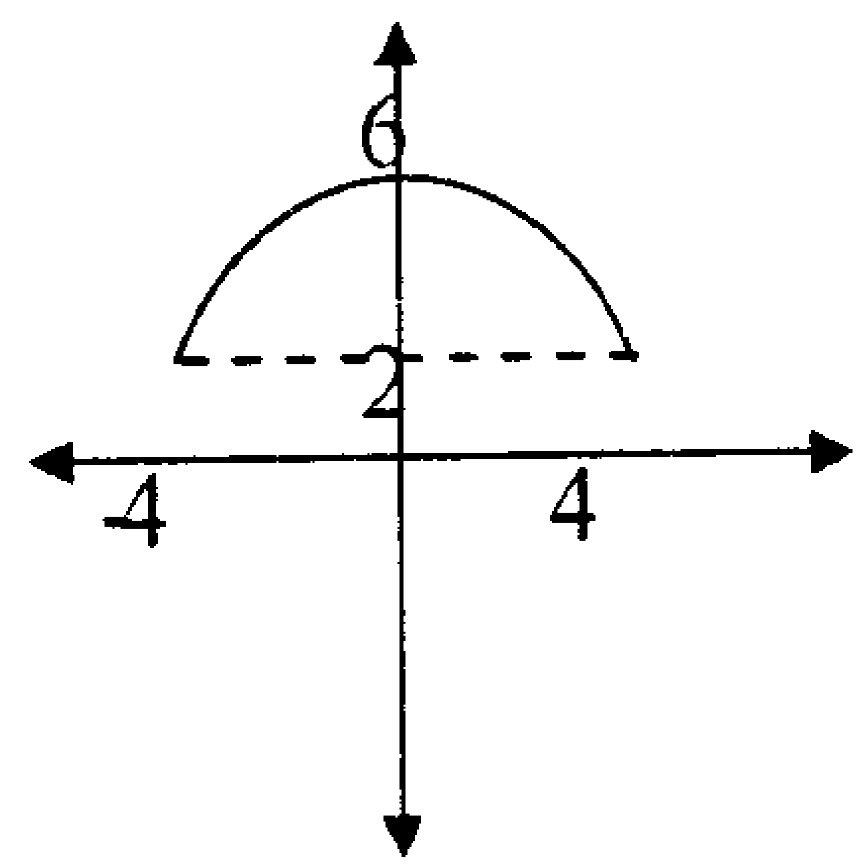
الــحــل



$R_F=[-5.0]$. $D_F=[-5.5]$

(3) $F(x)=\sqrt{16-x^2}+2$

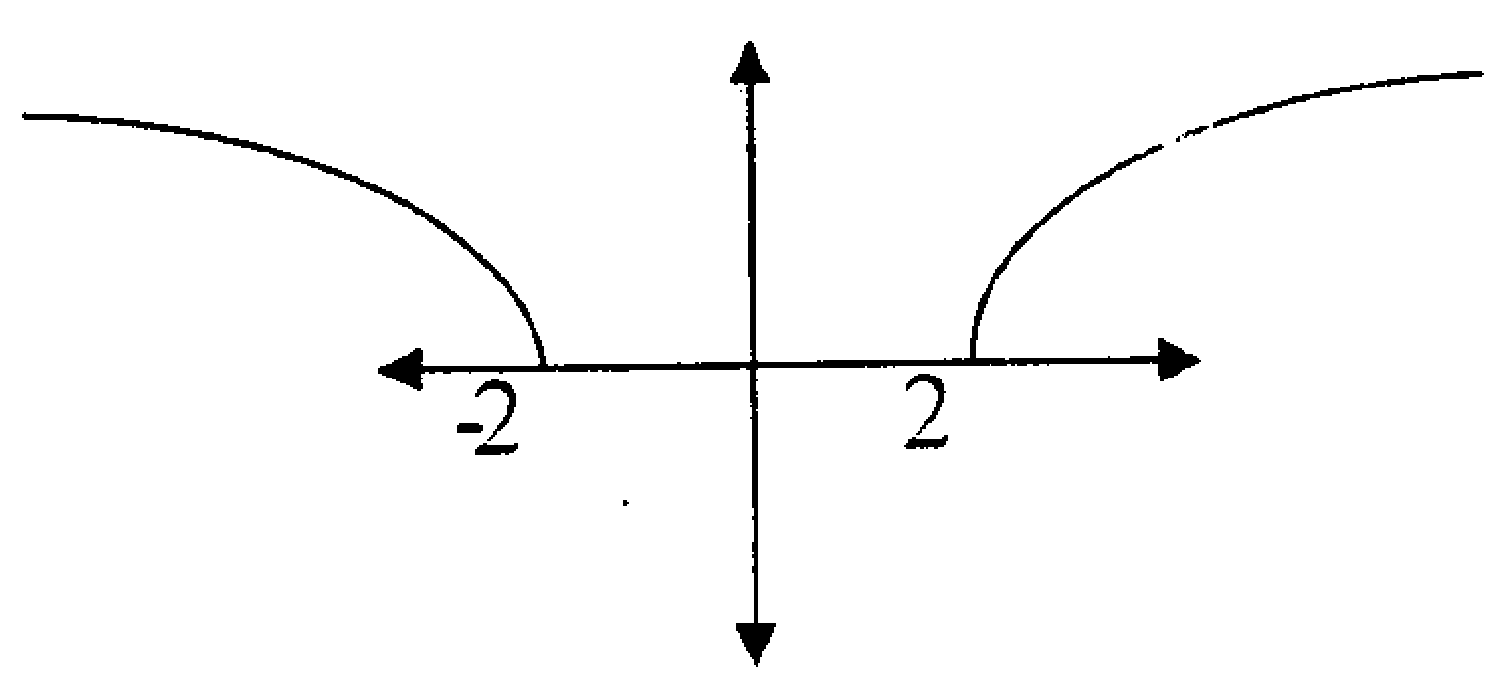
الحـــل



$R_F=[2,6]$, $D_F=[-4,4]$

(4) $F(x)=\sqrt{x^2-4}$

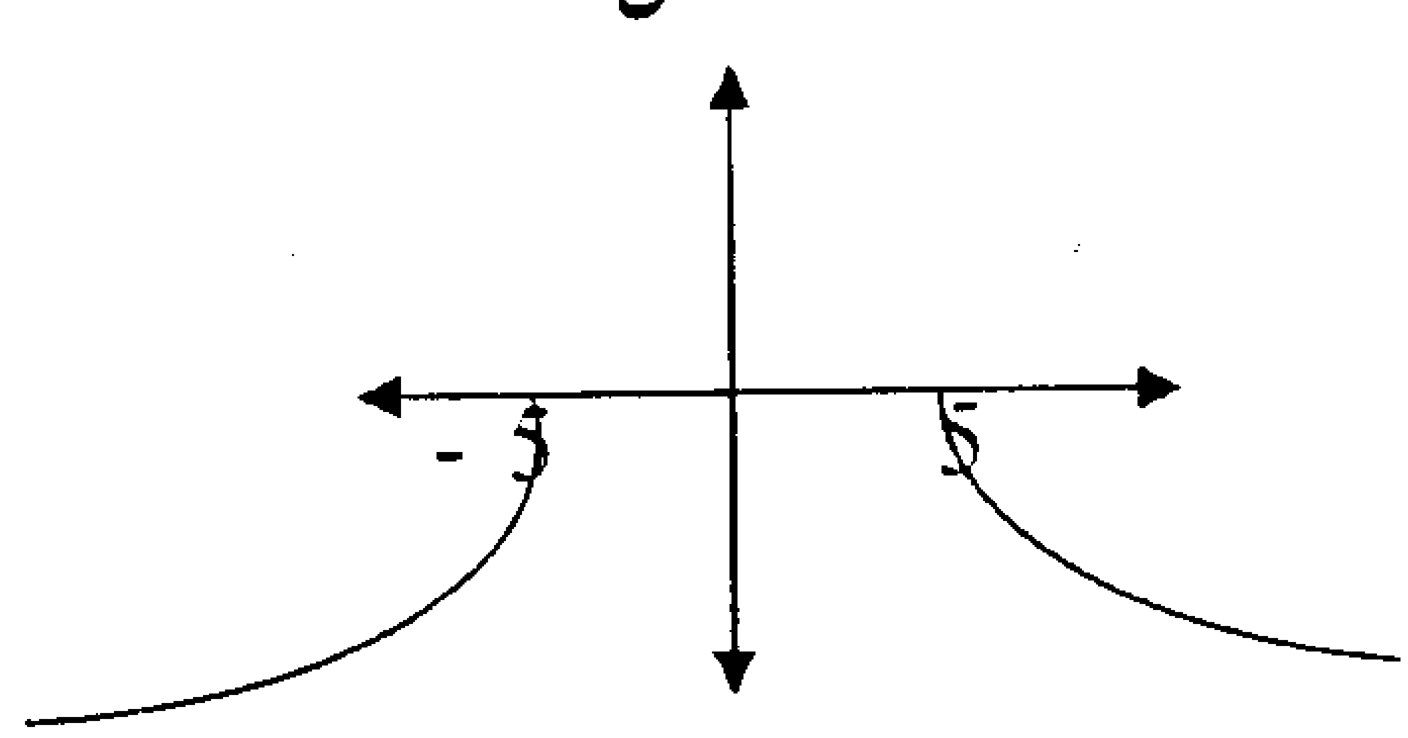
الحـــل



$R_F=[0,\infty)$, $D_F=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

(5) $F(x)=-\sqrt{x^2-25}$

الحـــل



$R_F=(-\infty,0]$, $D_F=(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

العمليات الجبرية على الدوال الحقيقية

أولاً جمع وطرح وضرب الدوال الحقيقية :إذا كانت $F(x), g(x)$ دالتين حقيقيتين فإن:

(1) عملية جمع الدالتين $F(x), g(x)$ تعرّف كالتالي: $F+g(x)=F(x)+g(x)$

(2) عملية طرح الدالتين $F(x), g(x)$ تعرّف كالتالي: $F-g(x)=F(x)-g(x)$

(3) عملية ضرب الدالتين $F(x), g(x)$ تعرّف كالتالي: $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)$

شرط جمع وطرح وضرب الدوال الحقيقية: لكي نتمكن من جمع أو طرح أو ضرب

الدوال الحقيقية لابد أن يكون نطاق الدالة الناتجة من حاصل الجمع أو الطرح

أو الضرب لايساوي ϕ إذ لافائدة من دالة ليس لها نطاق أي أن:

$$\left.\begin{array}{l} D_{F+g(x)} \neq \phi \rightarrow \\ D_{F-g(x)} \neq \phi \rightarrow \\ D_{F\cdot g(x)} \neq \phi \rightarrow \end{array}\right] \longrightarrow D_F \cap D_g \neq \phi$$

ثانياً قسمة الدوال الحقيقية : - إذا كانت $F(x), g(x)$ دالتين حقيقيتين فإن:

(1) قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ يعرّف كالتالي : $\dfrac{F}{g}(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}$

شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$$D_{\frac{F}{g}(x)} \neq \phi$$

$$D_{\frac{F}{g}(x)} = D_F \cap D_g - \{ g(x) = 0 \} \neq \phi$$

(2) قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ يعرّف كالتالي : $\frac{g}{F}(x) = \frac{g(x)}{F(x)}$

شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)} \neq \phi$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = D_g \cap D_F - \{ F(x) = 0 \} \neq \phi$$

ملاحظة :- إذا كان المطلوب جمع وطرح وضرب وقسمة أكثر من دالتين $F(x), g(x), h(x),$ فمن الأسهل إيجاد الدالة الجديدة الناتجة من العمليات على الدوال الحقيقية ومنها نعين نطاقها والشرط في هذه الحالة أن يكون نطاقها لا يساوي ϕ حتى يُقال أن العمليات الجبرية على الدوال الحقيقية يمكن إجراؤها .

مــثــال :- لكل من الدوال الآتية أوجد:

$$F+g(x),\ F-g(x),\ F\cdot g\ (x), \frac{F}{g}(x), \frac{g}{F}(x)$$

(1) $F(x)=\sqrt{x-2} \quad ,g(x)=\sqrt{x+3}$

الــحــل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x-2}$ **:-**

$$x-2\ge 0 \quad , x\ge 2$$
$$D_F=[2,\infty)$$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{x+3}$ **:-**

$$x+3\ge 0 \quad , x\ge -3$$
$$D_g=[-3,\infty)$$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$$D_F\cap D_g\neq\phi$$

$$[2,\infty)\cap[-3,\infty)=[2,\infty)\neq\ \phi$$

(i) $F+g\,(x)=F(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$

(ii) $F-g\,(x)=F(x)-g(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}$

(iii) $F\cdot g\,(x)=F(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+x-6}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ **على الدالة** $g(x)$ **هو:**

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F\cap\ D_g\ -\{\ g(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $g(x)=0$: -

$\sqrt{x+3}=0$ بتربيع الطرفين

$x+3=0\ , x=-3$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left([2,\infty)\cap[-3,\infty)\right)-\{-3\}=[2.\infty)-\{-3\}=[2.\infty)\neq\phi$$

(iv) $\dfrac{F}{g}(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$: -

$\sqrt{x-2}=0$ بتربيع الطرفين

$x-2=0\ , x=2$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=\left([-3,\infty)\cap[2,\infty)\right)-\{2\}=[2,\infty)-\{2\}=(2,\infty)\neq\phi$$

(iiv) $\dfrac{g}{F}(x)=\dfrac{g(x)}{F(x)}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$

(2) $F(x)=\sqrt{9-x^2} \quad ,g(x)=x$

الــحــل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{9-x^2}$:-

$9-x^2 \geq 0$

$D_F=[-3,3]$

نطاق الدالة $g(x)=x$:-

$D_g=(-\infty,\infty)$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$D_F \cap D_g \neq \phi$

$[-3,3] \cap (-\infty,\infty)=[-3,3] \neq \phi$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=\sqrt{9-x^2}+x$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=\sqrt{9-x^2}-x$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=\sqrt{9-x^2}\cdot x=x\sqrt{9-x^2}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F \cap D_g-\{g(x)=0\} \neq \phi$

نعين $g(x)=0$:-

$x=0$

$$D_{\frac{F}{g}(x)} = \left([-3,3] \cap (-\infty,\infty)\right) - \{0\} = [-3,3] - \{0\} = [-3,0) \cup (0,3] \neq \phi$$

(iv) $\frac{F}{g}(x) = \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = D_g \cap D_F - \{F(x) = 0\} \neq \phi$$

نعين $F(x) = 0$ **: -**

$\sqrt{9-x^2} = 0$ بتربيع الطرفين

$9 - x^2 = 0 \ , x = \pm 3$

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = \left((-\infty,\infty) \cap [-3,3]\right) - \{\pm 3\} = [-3,3] - \{\pm 3\} = (-3,3)$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = (-3,3) \neq \phi$$

(iiv) $\frac{g}{F}(x) = \frac{g(x)}{F(x)} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(3) $F(x)=\dfrac{1}{x^2-1} \quad ,g(x)=\sqrt{x}$

الــحــل

نطاق الدالة $F(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$:-

$$x^2-1=0$$
$$x=\pm 1$$
$$D_F=R-\{\pm 1\}$$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{x}$:-

$$x\geq 0$$
$$D_g=[0,\infty)$$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$$D_F\cap D_g\neq \phi$$

$$R-\{\pm 1\}\cap[0,\infty)=[0,1)\cup(1,\infty)\neq\phi$$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x}$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\sqrt{x}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F\cap D_g-\{g(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $g(x)=0$: -

$\sqrt{x}=0 \therefore x=0$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left(R-\{\pm 1\}\cap[0,\infty)\right)-\{0\}=\left([0,1)\cup(1,\infty)\right)-\{0\}=(0,1)\cup(1,\infty)\neq\phi$$

(iv) $\dfrac{F}{g}(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{x^2-1}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x}}$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$: -

$$\frac{1}{x^2-1}\neq 0$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=[0,\infty)\cap R-\{\pm 1\}=[0.1)\cup(1.\infty)\neq\phi$$

(iiv) $\dfrac{g}{F}(x)=\dfrac{g(x)}{F(x)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\dfrac{1}{x^2-1}}=\sqrt{x}(x^2-1)$

(4) $F(x)=\frac{1}{x}\ \ ,g(x)=\sqrt{3x-x^2}$

الـــحـــل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{x}$:-

$x=0$

$D_F=R-\{0\}$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{3x-x^2}$:-

$3x-x^2\geq 0$

$D_g=[0,3]$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$D_F\cap D_g\neq\phi$

$R-\{0\}\cap[0,3]=(0,3]\neq\phi$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{3x-x^2}$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{3x-x^2}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{3x-x^2}=\frac{\sqrt{3x-x^2}}{x}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F\cap D_g-\{g(x)=0\}\neq\phi$

نعين $g(x)=0$: -

$$\sqrt{3x-x^2}=0$$

$$3x-x^2=0 \Longrightarrow x(3-x)=0 \Longrightarrow x=0, x=3$$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left(R-\{0\}\cap[0,3]\right)-\{0,3\}=(0,3]-\{0,3\}=(0,3)\neq\phi$$

$$\text{(iv)}\ \frac{F}{g}(x)=\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{3x-x^2}}=\frac{1}{x\sqrt{3x-x^2}}$$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$: -

$$\frac{1}{x}\neq 0$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=[0,3]\cap\left(R-\{0\}\right)=(0,3]\neq\phi$$

$$\text{(iiv)}\ \frac{g}{F}(x)=\frac{g(x)}{F(x)}=\frac{\sqrt{3x-x^2}}{\frac{1}{x}}=x\sqrt{3x-x^2}$$

(5) $F(x)=1+\sqrt{x} \quad ,g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=1+\sqrt{x}$:-

$x \geq 0$

$D_F=[0,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$:-

$x+1=0, x=-1$

$D_g=R-\{-1\}$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$D_F \cap D_g \neq \phi$

$[0,\infty) \cap R-\{-1\}=[0,\infty) \neq \phi$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=1+\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+1}$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=1+\sqrt{x}-\frac{2x+1}{x+1}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=1+\sqrt{x}\cdot\frac{2x+1}{x+1}=\frac{(1+\sqrt{x})(2x+1)}{x+1}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F \cap D_g -\{g(x)=0\} \neq \phi$

نعين $g(x)=0$:-

$\frac{2x+1}{x+1}=0 \therefore x=-\frac{1}{2}$

$$D_{\frac{F}{g}(x)} = \{[0,\infty) \cap R - \{-1\}\} - \{-\tfrac{1}{2}\} = [0,\infty) - \{-\tfrac{1}{2}\} = [0,\infty) \neq \phi$$

(iv) $$\frac{F}{g}(x) = \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt{x}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{(1+\sqrt{x})(x+1)}{(2x+1)}$$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = D_g \cap D_F - \{ F(x) = 0 \} \neq \phi$$

نعين $F(x) = 0$: -

$$1 + \sqrt{x} = 0$$

مجموعة حل المعادلة الجذرية هو ϕ لأنه لاتوجد قيمة حقيقية تحقق أن حاصل جمع كميتين موجبتين تساوي مقداراً موجباً ولذلك لا توجد قيمة تجعل المقام يساوي صفراً

$$D_{\frac{g}{F}(x)} = R - \{-1\} \cap [0,\infty) = [0,\infty) \neq \phi$$

(iiv) $$\frac{g}{F}(x) = \frac{g(x)}{F(x)} = \frac{\frac{2x+1}{x+1}}{\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x}(x+1)}$$

(6) $F(x)=|x| \ , \ g(x)=\frac{x^2}{x-1}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=|x|$:-

$D_F=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\frac{x^2}{x-1}$:-

$x-1=0, x=1$
$D_g=R-\{1\}$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$D_F \cap D_g \neq \phi$

$(-\infty,\infty)\cap R-\{1\}=R-\{1\}\neq \phi$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=|x|+\frac{x^2}{x-1}=$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=|x|-\frac{x^2}{x-1}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=|x|\cdot\frac{x^2}{x-1}=\frac{|x|x^2}{x-1}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F \cap D_g -\{g(x)=0\}\neq \phi$

نعين $g(x)=0$: -

$$\frac{x^2}{x-1}=0 \quad \therefore x^2=0$$
$$x=0$$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left\{(-\infty,\infty)\cap R-\{1\}\right\}-\{0\}=\left(R-\{1\}\right)-\{0\}=R-\{0.1\}\neq\phi$$

(iv) $$\frac{F}{g}(x)=\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{|x|}{\frac{x^2}{x-1}}=\frac{|x|(x-1)}{x^2}$$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$: -

$$|x|=0\ ,\ x=0$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=\left\{R-\{1\}\cap(-\infty,\infty)\right\}-\{0\}=\left(R-\{1\}\right)-\{0\}=R-\{0.1\}\neq\phi$$

(iiv) $$\frac{g}{F}(x)=\frac{g(x)}{F(x)}=\frac{\frac{x^2}{x-1}}{|x|}=\frac{x^2}{|x|(x-1)}$$

$$(7)\ F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\quad ,g(x)=\sqrt{1-x}$$

الحــل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}$:-

$$\operatorname{sgn} x=0$$
$$x=0$$
$$D_F=R-\{0\}$$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{1-x}$:-

$$1-x\geq 0\ ,\ x\leq 1$$
$$D_g=(-\infty,1]$$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$$D_F\cap D_g\neq\phi$$

$$R-\{0\}\cap(-\infty,1]=(-\infty,0)\cup(0,1]\neq\phi$$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}+\sqrt{1-x}$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}-\sqrt{1-x}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{1-x}}{\operatorname{sgn} x}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F\cap D_g-\{g(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $g(x)=0$:-

$$\sqrt{1-x}=0$$
$$1-x=0 \therefore x=1$$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left[R-\{0\}\cap(-\infty,1]\right]-\{1\}=(-\infty,0)\cup(0,1]-\{1\}=(-\infty,0)\cup(0,1)\neq\phi$$

(iv) $$\frac{F}{g}(x)=\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sgn} x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{(\operatorname{sgn} x)\sqrt{1-x}}$$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$:-

$$\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\neq 0$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=(-\infty,1]\cap R-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,1]\neq\phi$$

(iiv) $$\frac{g}{F}(x)=\frac{g(x)}{F(x)}=\frac{\sqrt{1-x}}{\frac{1}{\operatorname{sgn} x}}=\sqrt{1-x}\,(\operatorname{sgn} x)$$

$$(8)\ F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}\quad ,g(x)=\sqrt{|x|-1}$$

الحـــل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}$:-

$$\operatorname{sgn}(x+1)=0$$
$$x+1=0, x=-1$$
$$D_F=R-\{-1\}$$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{|x|-1}$:-

$$|x|-1\ge 0\ ,\ |x|\ge 1$$
$$D_g=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

(A) شرط الجمع والطرح والضرب :-

$$D_F\cap D_g\ne\phi$$

$$R-\{-1\}\cap\left((-\infty,-1]\cup[1,\infty)\right)=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)\ne\phi$$

(i) $F+g(x)=F(x)+g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}+\sqrt{|x|-1}$

(ii) $F-g(x)=F(x)-g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}-\sqrt{|x|-1}$

(iii) $F\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}\cdot\sqrt{|x|-1}=\frac{\sqrt{|x|-1}}{\operatorname{sgn}(x+1)}$

(B) شرط قسمة الدالة $F(x)$ على الدالة $g(x)$ هو:

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=D_F\cap D_g-\{g(x)=0\}\ne\phi$$

$$\sqrt{|x|-1}=0$$

نعين $g(x)=0$: -

$$|x|-1=0 \therefore x=\pm 1$$

$$D_{\frac{F}{g}(x)}=\left\{R-\{0\}\cap(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\right\}-\{\pm 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)-\{\pm 1\}=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\neq\phi$$

(iv) $\dfrac{F}{g}(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}}{\sqrt{|x|-1}}=\dfrac{1}{[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{|x|-1}}$

(C) شرط قسمة الدالة $g(x)$ على الدالة $F(x)$ هو:

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=D_g\cap D_F-\{F(x)=0\}\neq\phi$$

نعين $F(x)=0$: -

$$\frac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}\neq 0$$

$$D_{\frac{g}{F}(x)}=\left\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\right\}\cap R-\{0\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\neq\phi$$

(iiv) $\dfrac{g}{F}(x)=\dfrac{g(x)}{F(x)}=\dfrac{\sqrt{|x|-1}}{\dfrac{1}{\operatorname{sgn}(x+1)}}=[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{|x|-1}$

مـثـال :- اذا كانت $F(x)=2x+1$, $g(x)=1-x$, $h(x)=x^2-1$ فأوجد :

$$(i)\frac{F(x)g(x)}{h(x)} \;,\; (ii)\frac{F(x)+g(x)}{F(x)} \;,\; (iii)\frac{g(x)}{F(x)-h(x)}$$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=2x+1$:- $D_F=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=1-x$:- $D_g=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $h(x)=x^2-1$:- $D_h=(-\infty,\infty)$

$$(i)\frac{F(x)g(x)}{h(x)}=\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-1}$$

شرط العمليات الجبرية :- $D_{\frac{F\cdot g}{h}(x)} \neq \phi$

$$x^2-1=0$$
$$x=\pm 1$$

$$D_{\frac{F\cdot g}{h}(x)} = R-\{\pm 1\} \neq \phi$$

$$(ii)\frac{F(x)+g(x)}{F(x)}=\frac{(2x+1)+(1-x)}{2x+1}=\frac{x+2}{2x+1}$$

شرط العمليات الجبرية :- $D_{\frac{F+g}{F}(x)} \neq \phi$

$$2x+1=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$D_{\frac{F+g}{F}(x)} = R-\{-\frac{1}{2}\} \neq \phi$$

$$(iii)\frac{g(x)}{F(x)-h(x)} = \frac{1-x}{2x+1-(x^2-1)} = \frac{1-x}{-x^2+2x+2}$$

شرط العمليات الجبرية :-

$$D_{\frac{g}{F-h}(x)} \neq \phi$$

$$-x^2+2x+2=0$$

$$x^2-2x-2=0$$

$$a=1 \ , b=-2 \ ,c=-2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(-2)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$$

$$x=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$$

$$D_{\frac{g}{F-h}(x)} = R-\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\} \neq \phi$$

مـثـال :- إذا كانت $F(x)=\sqrt{x-1}\ ,\ g(x)=|x+1|\ ,h(x)=2x+1$ فأوجد :

$$(i)\frac{F(x)+g(x)}{g(x)}\ ,\ (ii)\frac{h(x)+F(x)}{F(x)}\ ,\ (iii)\frac{h(x)}{F(x)\cdot g(x)}$$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x-1}$:- $D_F=[1,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=|x+1|$:- $D_g=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $h(x)=2x+1$:- $D_h=(-\infty,\infty)$

$$(i)\frac{F(x)+g(x)}{g(x)}=\frac{(\sqrt{x-1})+|x+1|}{|x+1|}$$

شرط العمليات الجبرية :-

$$D_{\frac{F+g}{g}(x)}\neq\phi$$

$$|x+1|=0\Longrightarrow x=-1$$

$$x-1\geq 0\Longrightarrow x\geq 1\Rightarrow [1,\infty)$$

$$D_{\frac{F+g}{g}(x)}=[1,\infty)-\{-1\}=[1,\infty)\neq\phi$$

$$(ii)\frac{h(x)+F(x)}{F(x)}=\frac{(2x+1)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

شرط العمليات الجبرية :-

$$D_{\frac{h+F}{F}(x)}\neq\phi$$

$$x-1>0\ ,x>1$$

$$(1,\infty)$$

$$D_{\frac{h+F}{F}(x)} = (1,\infty) \neq \phi$$

$$(iii)\frac{h(x)}{F(x)\cdot g(x)} = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}\ (|x+1|)}$$

شرط العمليات الجبرية :-

$$D_{\frac{h}{F\cdot g}(x)} \neq \phi$$

$$\frac{h(x)}{F(x)\cdot g(x)} = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}\ (|x+1|)} = \frac{2x+1}{|x+1|}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$F_1(x) = \frac{2x+1}{|x+1|}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

أولاً نطاق الدالة $F_1(x) = \frac{2x+1}{|x+1|}$:-

$$|x+1| = 0, x = -1$$

$$D_1 = R - \{-1\}$$

ثانياً نطاق الدالة $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$:-

$$x+1 > 0\ ,\ x > -1$$

$$D_2 = (-1,\infty)$$

$$D_{\frac{h}{F\cdot g}(x)} = D_1 \cap D_2 = R - \{-1\} \cap (-1,\infty) = (-1,\infty) \neq \phi$$

الدالة المحصلة (الدالة المركبة) (دالة الدالة)

إذا كانت $F(x), g(x)$ دالتين حقيقيتين فإن:-

$$(1)\ Fo\,g(x)=F[g(x)]$$

نعوض بـ $g(x)$ في $F(x)$ مكان x

شرط تعريف الدالة $Fo\,g(x)$:- يوجد طريقتان لتعريف دالة الدالة :

$(a)\ D_F \cap R_g \neq \phi$

$(b)\ D_{Fog} \neq \phi$

نطاق الدالة $Fo\,g(x)$:-

$$D_{Fog}=\{x\in D_g \ \ , g(x)\in D_F\}$$

$$(2)\ goF(x)=g[F(x)]$$

نعوض بـ $F(x)$ في $g(x)$ مكان x

شرط تعريف الدالة $goF(x)$:- يوجد طريقتان لتعريف دالة الدالة :

$(a)\ D_g \cap R_F \neq \phi$

$(b)\ D_{goF} \neq \phi$

نطاق الدالة $goF(x)$:-

$$D_{goF}=\{x\in D_F \ \ , F(x)\in D_g\}$$

مــثــال :- لكل من الدوال الآتية أوجد $Fo\,g(x)$ ، $go\,F(x)$:-

(1) $F(x)=x-6 \quad ,g(x)=3x+1$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=x-6$:- $\quad D_F=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=3x+1$:- $\quad D_g=(-\infty,\infty)$

(1) الدالة المحصلة $Fo\,g(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[3x+1]=3x+1-6=3x-5$$
$$Fog(x)=3x-5$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fo\,g(x)=3x-5$ مباشرة وهو $(-\infty,\infty)$ $D_1=(-\infty,\infty)$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $go\,F(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[x-6]=3(x-6)+1=3x-18+1$$
$$goF(x)=3x-17$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fo\,g(x)=3x-17$ مباشرة وهو $(-\infty,\infty)$ $D_1=(-\infty,\infty)$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)\neq\phi$$

(2) $F(x)=x^2-6 \quad ,g(x)=\sqrt{x+2}$

الـــحـــل

نطاق الدالة $F(x)=x^2-6$:- $D_F=(-\infty,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{x+2}$:- $D_g=[-2,\infty)$

(1) الدالة المحصلة $Fo\,g(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\sqrt{x+2}]=(\sqrt{x+2})^2-6$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fo\,g(x)$ مباشرة وهو $D_1=[-2,\infty)$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=[-2,\infty)\cap[-2,\infty)=[-2,\infty)\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[x^2-6]=\sqrt{x^2-6+2}=$$
$$goF(x)=\sqrt{x^2-4}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt{x^2-4}$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=(-\infty,\infty)\cap\{(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\}=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\neq\phi$$

(3) $F(x)=\sqrt{x} \quad ,g(x)=\sqrt{1-x}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x}$:- $D_F=[0,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{1-x}$:- $D_g=(-\infty,1]$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\sqrt{1-x}]=\sqrt{\sqrt{1-x}}=[(1-x)^{1/2}]^{1/2}=(1-x)^{1/4}$$

$$Fog(x)=\sqrt[4]{1-x}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt[4]{1-x}$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,1]$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=(-\infty,1]\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\sqrt{x}]=\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

$$goF(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ مباشرة وهو $D_1=[0,1]$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=[0,\infty)\cap[0,1]=[0,1]\neq\phi$$

(4) $F(x)=\frac{1}{x} \quad ,g(x)=\frac{x}{x+1}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{x}$:- $\quad D_F=R-\{0\}$

نطاق الدالة $g(x)=\frac{x}{x+1}$:- $\quad D_g=R-\{-1\}$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\frac{x}{x+1}]=\frac{1}{\frac{x}{x+1}} \quad \therefore Fog(x)=\frac{x+1}{x}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

لاحظ أن الدالة $Fog(x)=\frac{x+1}{x}$ تساوي الدالة $Fog(x)=\frac{1}{\frac{x}{x+1}}$

نعين نطاق $Fog(x)=\frac{x+1}{x}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{0\}$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=R-\{-1\}\cap R-\{0\}=R-\{0,-1\}\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\frac{1}{x}]=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} \quad \therefore goF(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$$

لاحظ أننا إذا بسطنا الدالة المركبة فإنه سوف تنتج دالة جديدة تختلف عن الدالة المركبة الأصلية قبل التبسيط فلن يكون لهما نفس النطاق وبالتالي فهما ليس متساويتين .

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{0,-1\}$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=R-\{0\}\cap R-\{0,-1\}=R-\{0,-1\}\neq\phi$$

(5) $F(x)=\sqrt{x-3} \quad , g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x-3}$:- $\qquad D_F=[3,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$:- $\qquad D_g=R-\{1\}$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\frac{1}{x-1}]=\sqrt{\frac{1}{x-1}-3}$$

$$Fog(x)=\sqrt{\frac{4-3x}{x-1}}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt{\dfrac{4-3x}{x-1}}$ مباشرة وهو $D_1=(1,\frac{4}{3}]$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=R-\{1\}\cap(1,\tfrac{4}{3}]=(1,\tfrac{4}{3}]\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\sqrt{x-3}]=\frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$$

$$goF(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}-1}$ مباشرة وهو $D_1=[3,4)\cup(4,\infty)$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=[3,\infty)\cap\{[3,4)\cup(4,\infty)\}=[3,4)\cup(4,\infty)\neq\phi$$

$$(6)\ F(x)=\sqrt{x} \quad ,g(x)=-x^2-1$$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x}$:- $\quad D_F=[0,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=-x^2-1$:- $\quad D_g=(-\infty,\infty)$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[-x^2-1]=\sqrt{-x^2-1}$$

$$Fog(x)=\sqrt{-x^2-1}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt{-x^2-1}$ مباشرة وهو $D_1=\phi$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=(-\infty,\infty)\cap\phi=\phi$$

لا يمكن تركيب الدالة g(x) في الدالة F(x) لأنه لا يوجد نطاق للدالة المحصلة

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\sqrt{x}]=-(\sqrt{x})^2-1$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)$ مباشرة وهو $D_1=(0,\infty)$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=[0,\infty)\cap(0,\infty)=[0,\infty)\neq\phi$$

(7) $F(x)=\sqrt{x-1} \quad ,g(x)=4$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{x-1}$:- $D_F=[1,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=4$:- $D_g=R$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$Fog(x)=F[g(x)]=F[4]=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

$Fog(x)=\sqrt{3}$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt{3}$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,\infty)$

$D_{Fog}=D_g\cap D_1=R\cap(-\infty,\infty)=R\neq\phi$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$goF(x)=g[F(x)]=g[\sqrt{x-1}]=4$

$goF(x)=4$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=4$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,\infty)$

$D_{goF}=D_F\cap D_1=[1,\infty)\cap(-\infty,\infty)=[1,\infty)\neq\phi$

(8) $F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x} \quad , g(x)=\sqrt{1-x}$

الــحــل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}$:- $\quad D_F=R-\{0\}$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{1-x}$:- $\quad D_g=(-\infty,1]$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\sqrt{1-x}]=\frac{1}{\operatorname{sgn}(\sqrt{1-x})}$$

$$Fog(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(\sqrt{1-x})}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\frac{1}{\operatorname{sgn}(\sqrt{1-x})}$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,1)$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=(-\infty,1]\cap(-\infty,1)=(-\infty,1)\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\frac{1}{\operatorname{sgn} x}]=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{sgn} x}}$$

$$goF(x)=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{sgn} x}}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{sgn} x}}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{0\}$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=R-\{0\}\cap R-\{0\}=R-\{0\}\neq\phi$$

(9) $F(x)=\frac{1}{1-\operatorname{sgn} x} \quad , g(x)=\sqrt{4-x^2}$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{1-\operatorname{sgn} x}$:- $\qquad D_F=(-\infty,0]$

نطاق الدالة $g(x)=\sqrt{4-x^2}$:- $\qquad D_g=[-2,2]$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\sqrt{4-x^2}]=\frac{1}{1-\operatorname{sgn}(\sqrt{4-x^2})}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\frac{1}{1-\operatorname{sgn}(\sqrt{4-x^2})}$ مباشرة وهو $D_1=\{2,-2\}$

$$D_{Fog}=D_g \cap D_1=[-2,2]\cap\{-2,2\}=\{-2,2\}\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\frac{1}{1-\operatorname{sgn} x}]=\sqrt{4-(\frac{1}{1-\operatorname{sgn} x})^2}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $\sqrt{4-(\frac{1}{1-\operatorname{sgn} x})^2}$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,0]$

$$D_{goF}=D_F \cap D_1=[-\infty,0]\cap(-\infty,0]=[-\infty,0]\neq\phi$$

(10) $F(x)=\sqrt{|x|-1}$, $g(x)=\text{sgn}(x+2)$

الــحــل

نطاق الدالة $F(x)=\sqrt{|x|-1}$:- $D_F=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

نطاق الدالة $g(x)=\text{sgn}(x+2)$:- $D_g=(-\infty,\infty)$

(1) الدالة المحصلة $Fog(x)$:-

$$Fog(x)=F[g(x)]=F[\text{sgn}(x+2)]=\sqrt{|\text{sgn}(x+2)|-1}$$
$$Fog(x)=\sqrt{|\text{sgn}(x+2)|-1}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fog(x)=\sqrt{|\text{sgn}(x+2)|-1}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{-2\}$

$$D_{Fog}=D_g\cap D_1=(-\infty,-\infty)\cap R-\{-2\}=R-\{-2\}\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $goF(x)$:-

$$goF(x)=g[F(x)]=g[\sqrt{|x|-1}]=\text{sgn}(\sqrt{|x|-1}+2)$$
$$goF(x)=\text{sgn}(\sqrt{|x|-1}+2)$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $goF(x)=\text{sgn}(\sqrt{|x|-1}+2)$ مباشرة وهو $D_1=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$$D_{goF}=D_F\cap D_1=\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}\cap\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\neq\phi$$

مـثـال :- إذا كانت $g(x)=\frac{1}{x+1}$, $F(x)=\frac{1}{x-1}$ فاوجد $Fo\frac{1}{g}(x), go\frac{1}{F}(x)$

الـحـل

نطاق الدالة $F(x)=\frac{1}{x-1}$:- $D_F=R-\{1\}$

نطاق الدالة $g(x)=\frac{1}{x+1}$:- $D_g=R-\{-1\}$

نطاق الدالة $x-1=$:- $\frac{1}{F(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}$ $D_{\frac{1}{F}}=R$

لاحظ أن الدالة $\frac{1}{F(x)}=x-1$ تساوي الدالة $\frac{1}{F(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}$

نطاق الدالة $x+1=$:- $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x+1}}$ $D_{\frac{1}{g}}=R$

لاحظ أن الدالة $\frac{1}{g(x)}=x+1$ تساوي الدالة $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x+1}}$

(1) الدالة المحصلة $Fo\frac{1}{g}(x)$:-

$$Fo\frac{1}{g}(x)=F[\frac{1}{g}(x)]=F[x+1]=\frac{1}{x+1-1}$$

$$Fo\frac{1}{g}(x)=\frac{1}{x}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $Fo\frac{1}{g}(x)=\frac{1}{x}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{0\}$

$$D_{Fo\frac{1}{g}}=D_{\frac{1}{g}}\cap D_1=R\cap R-\{0\}=R-\{0\}\neq\phi$$

(2) الدالة المحصلة $go\frac{1}{F}(x)$:-

$$go\frac{1}{F}(x)=g[\frac{1}{F}(x)]=g[x-1]=\frac{1}{x-1+1}$$

$$go\frac{1}{F}(x)=\frac{1}{x}$$

نطاق دالة الدالة (شرط التعريف) :-

نعين نطاق $go\frac{1}{F}(x)=\frac{1}{x}$ مباشرة وهو $D_1=R-\{0\}$

$$D_{go\frac{1}{F}}=D_{\frac{1}{F}}\cap D_1=R\cap R-\{0\}=R-\{0\}\neq\phi$$

مسائل غير مباشرة على دالة الدالة :-

النوع الأول :- إذا كان لدينا الدالة المحصلة $Fog(x)$ ، والدالة $F(x)$ وكان المطلوب الدالة g(x) فإننا نستخدم قانون الدالة المحصلة مباشرة $Fog(x)=F[g(x)]$ لإيجاد الدالة $g(x)$.

مـثـال :- في كل مما يأتي أوجد g(x) :-

$(1)\, F(x)=x^2 \quad , Fog(x)=(1+x)^2$

الـحـل

$Fog(x)=F[g(x)]$

$(1+x)^2=[g(x)]^2$

$g(x)=\pm(1+x)$

$g(x)=1+x \qquad or \qquad g(x)=-1-x$

$(2)\, F(x)=\sqrt{x-1} \quad , Fog(x)=x^2$

الـحـل

$Fog(x)=F[g(x)]$

$x^2=\sqrt{g(x)-1}$ بتربيع الطرفين

$x^4=g(x)-1$

$g(x)=x^4+1$

$$(3)\, F(x)=\frac{1-2x}{x-4} \quad , Fog(x)=2x$$

الحــل

$$Fog(x)=F[g(x)]$$

$$2x=\frac{1-2g(x)}{g(x)-4}$$

$$2x\,g(x)-8x=1-2g(x)$$

$$2xg(x)+2g(x)=8x+1$$

$$g(x)[2x+2]=8x+1$$

$$g(x)=\frac{8x+1}{2x+2}$$

$$(4)\, F(x)=x^2+x \quad , Fog(x)=x^3$$

الحــل

$$Fog(x)=F[g(x)]$$

$$x^3=g(x)^2+g(x)$$

$$g(x)^2+g(x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=x^3$$

$$[g(x)+\frac{1}{2}]^2=x^3+\frac{1}{4}$$

$$g(x)+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{x^3+\frac{1}{4}}$$

$$g(x)=\pm\sqrt{x^3+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\sqrt{x^3+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \quad or \quad g(x)=-\sqrt{x^3+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

النوع الثاني :- إذا كان لدينا الدالة المحصلة $Fog(x)$ ، وكان المطلوب الدالة F(x) , g(x) في هذه الحالة يوجد ما لانهاية من الدوال التي تحقق صحة دالة الدالة $Fog(x)$ ومن أبسط هذه الدوال التي تحقق صحة الدالة المحصلة هي :-

$$F(x)=Fog(x)$$
$$g(x)=x$$

مـثـال :- في كل مما يأتي أوجد g(x) ، F(x) :-

$$(1)\, Fog(x)=\sqrt{(x-3)(x+2)}$$

الـحـل

$$F(x)=Fog(x)=\sqrt{(x-3)(x+2)}$$
$$\therefore F(x)=\sqrt{(x-3)(x+2)}$$
$$g(x)=x$$

طـريـقـة ثـانـيـة :-

$$F(x)=\sqrt{x}$$
$$g(x)=(x-3)(x+2)$$

$$(2)\, Fog(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$

الـحـل

$$F(x)=Fog(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$
$$\therefore F(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$
$$g(x)=x$$

النوع الثالث :- إذا كان لدينا الدالة المحصلة $Fog(x)$ ، والدالة $g(x)$ وكان المطلوب الدالة F(x) في هذه الحالة نتبع الآتي:-

(A) نعين العلاقة العكسية للدالة g(x) وهي $g^{-1}(x)$

(B) نعوض بالعلاقة العكسية $g^{-1}(x)$ في الدالة المحصلة $Fog(x)$ فنحصل على الدالة المطلوبة F(x) أي أن :-

$$F(x)=(F o g) o g^{-1}(x)$$

مـثـال :- في كل مما يأتي أوجد F(x) :-

$$(1)\ g(x)=x+1 \quad , Fog(x)=2x-3$$

الـحـل

$(a)\ y=x+1$

$x=y-1$

$y=x-1 \quad \therefore\ g^{-1}(x)=x-1$

$(b)\ F(x)=(F o g) o g^{-1}(x)=fog[x-1]=2(x-1)-3$

$F(x)=2x-5$

$$(2)\ g(x)=2x+1 \quad , Fog(x)=|x|+1$$

الـحـل

$(a)\ y=2x+1$

$x=\dfrac{y-1}{2}$

$y=\dfrac{x-1}{2} \quad \therefore\ g^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$

$(b)\ F(x)=(F o g) o g^{-1}(x)=fog[\dfrac{x-1}{2}]=\left|\dfrac{x-1}{2}\right|+1$

$F(x)=\left|\dfrac{x-1}{2}\right|+1$

النـــــهـــــايـــات

لن نتعرض لمفهوم النهايات لعدم اتساع المقام لذلك وسنكتفي بسرد طرق حل والتعامل مع مسائل النهايات فعند حل مسائل النهايات $\lim_{x \to a} F(x)$ فإننا نعوض بقيمة x=a في الدالة F(x) وهناك حالات :-

الحالة الأولى :- إذا كانت نتيجة التعويض تساوي عدداً حقيقياً فإن النهاية موجودة وتساوي ذلك العدد التي تحصلنا عليه .

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 1 = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

الحالة الثانية :- إذا كانت نتيجة التعويض تساوي $\pm\infty$ فإن النهاية غير موجودة و لا يمكن إيجادها أي إذا كان $\frac{a}{0} = \pm\infty \ , a \in R \ , a \neq 0$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

الحالة الثالثة :- إذا كانت نتيجة التعويض كمية غير معرفة أي إذا كانت :

$\frac{0}{0} =$ كمية غير معرفة فإن النهاية لا يمكن إيجادها بطريقة التعويض مباشرة ولذلك يوجد طرق لإيجاد النهاية في هذه الحالة إن أمكن :

الطريقة الأولى :- نقوم بتحليل البسط والمقام إن أمكن بأحد طرق التحليل السابقة ثم نختصر عوامل البسط مع عوامل المقام حتى نتخلص من العامل المسبب في الصفر إن إمكن ثم نعوض مرة أخرى بقيمة x=a

الطريقة الثانية:- إذا كانت مسألة النهايات تحتوي على جذر فإننا نضرب البسط والمقام في مرافق الجذر ثم نختصر عوامل البسط مع عوامل المقام للتخلص من العامل المسبب للصفر ثم نعوض مرة أخرى بقيمة x=a .

توضيحات لموضوع المرافق :-

(1) مرافق الجذر التربيعي :-

المقدار $\sqrt{A}+B$ مرافقه هو $\sqrt{A}-B$ وحاصل ضربهما هو:

$$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=(\sqrt{A})^2-B^2$$

المقدار $\sqrt{A}-B$ مرافقه هو $\sqrt{A}+B$ وحاصل ضربهما هو:

$$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=(\sqrt{A})^2-B^2$$

المقدار	مرفقه	حاصل ضربهما
$\sqrt{x}-1$	$\sqrt{x}+1$	$(\sqrt{x})^2-(1)^2=x-1$
$\sqrt{x+1}+2$	$\sqrt{x+1}-2$	$(\sqrt{x+1})^2-(2)^2=x+1-4=x-3$

(2) مرافق الجذر التكعيبي :-

المقدار $\sqrt[3]{A}+B$ مرافقه هو $A^{\frac{2}{3}}-A^{\frac{1}{3}}B+B^2$ وحاصل ضربهما هو:

$$(\sqrt[3]{A}+B)(A^{\frac{2}{3}}-A^{\frac{1}{3}}B+B^2)=(\sqrt[3]{A})^3+B^3$$

المقدار $\sqrt[3]{A}-B$ مرافقه هو $A^{\frac{2}{3}}+A^{\frac{1}{3}}B+B^2$ وحاصل ضربهما هو:

$$(\sqrt[3]{A}-B)(A^{\frac{2}{3}}+A^{\frac{1}{3}}B+B^2)=(\sqrt[3]{A})^3-B^3$$

المقدار	مرفقه	حاصل ضربهما
$\sqrt[3]{x}-1$	$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$	$(\sqrt[3]{x})^3-(1)^3=x-1$
$\sqrt[3]{x}+1$	$x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1$	$(\sqrt[3]{x})^3+(1)^3=x+1$

أولاً مسائل نهايات تُحل بالتعويض المباشر :-

مـثــال:- أوجد قيمة النهايات الآتية إن أمكن :-

$$(1)\ \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(1)+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$(2)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(2)^2-9}{2-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$(3)\ \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2-4x+1} = \sqrt{(0)^2-4(0)+1} = 1$$

$$(4)\ \lim_{x \to -1} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(-1)+3}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$(5)\ \lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{-1+1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

ثانياً مسائل نهايات تُحل بالتحليل:-

مـثــال:- أوجد قيمة النهايات الآتية إن أمكن :-

$$(1)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{2})^2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})} = \lim_{x\to\sqrt{2}} (x+\sqrt{2}) = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{5-x} = \dfrac{(5)^2-25}{5-5} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{5-x} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{-(x-5)} = \lim_{x\to 5} -(x+5) = -(5+5) = -10$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x} = \dfrac{(0)^2-0}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} (x-1) = (0-1) = -1$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1} = \dfrac{(1)^2-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x = 1$$

(6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x-2} = \dfrac{(2)^3-8}{2-2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2-4)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x(x+2) = 2(2+2) = 8$$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+3)^2-9}{x} = \dfrac{(3)^2-9}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+6x+9-9}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+6x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+6)}{x} = \lim_{x \to 0} (x+6) = 0+6 = 6$$

(8) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x+5}{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}} = \dfrac{-5+5}{-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x+5}{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}} = \lim_{x \to -5} \frac{x+5}{\frac{5+x}{5x}} = \lim_{x \to -5} 5x\left(\frac{x+5}{x+5}\right)$$

$$\lim_{x \to -5} 5x = 5(-5) = -25$$

(9) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{1}{0}\left[\dfrac{1}{x+0} - \dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$$

(10) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{(2)^3-8}{2-2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 4+4+4 = 12$$

(11) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \frac{(-3)^3+27}{-3+3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)} = \lim_{x \to -3} (x^2-3x+9) = 9+9+9 = 27$$

(12) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(-1)^3+1}{1-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right) = \frac{1+1+1}{-1-1} = -\frac{3}{2}$$

(13) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3} = \frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2-2(-1)-3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)}{(x-3)} = \frac{-1-2}{-1-3} = \frac{3}{4}$$

(14) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(1)^2-(1)}{(1)^2-2(1)+1} == \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty$$

(15) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3-2x^2-15x}{x+3} = \frac{(-3)^3-2(-3)^2-15(-3)}{-3+3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x(x^2-2x-15)}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)(x-5)}{(x+3)} = \lim_{x \to -3} x(x-5) = -3(-3-5) = 24$$

ثالثاً مسائل نـهايات تُحل بالضرب في المرافق:-

مــثــال:- أوجد قيمة النهايات الآتية إن أمكن :-

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{\sqrt{0+9}-3}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+9})^2-(3)^2}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{0+2}-\sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{0}{\sqrt{0+4}-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4})+2)}{(\sqrt{x+4})^2-(2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4})+2)}{x+4-4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4})+2)}{x} = \lim_{x\to 0} (\sqrt{x+4})+2) = (\sqrt{0+4})+2) = 2+2 = 4$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{0}{\sqrt{0+1}-1} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x\to 0} (\sqrt{x+1}+1) = (\sqrt{0+1}+1) = 1+1 = 2$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{2-x}}{1-x} = \dfrac{1-\sqrt{2-1}}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{2-x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{2-x}}{1+\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1)^2-(\sqrt{2-x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{2-x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1-2+x}{(1-x)(1+\sqrt{2-x})}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+\sqrt{2-x})} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(1+\sqrt{2-x})} = \frac{-1}{(1+\sqrt{2-1})} = -\frac{1}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \dfrac{\sqrt{1+3}-2}{(1)^2-1} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2-(2)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{8}$$

(7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \dfrac{\sqrt{1-0}-\sqrt{1+0}}{0} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1-x})^2-(\sqrt{1+x})^2}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1-x-1-x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-2}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = -1$

(8) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}{x^2+x-6} = \dfrac{\sqrt{2-1}-\sqrt{2(2)-3}}{(2)^2+2-6} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}{x^2+x-6} \cdot \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{2x-3})^2}{(x^2+x-6)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})}$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x-1-2x+3}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})} = \lim_{x \to 2} \dfrac{-x+2}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})}$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})} = \lim_{x \to 2} \dfrac{-1}{(x+3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})}$

$= \dfrac{-1}{(2+3)(\sqrt{2-1}+\sqrt{2(2)-3})} = -\dfrac{1}{10}$

(9) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2} = \lim_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$\lim_{x \to 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$

$$(10)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{1}{\sqrt{x}})^2-1}{(1-x)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(1-x)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{(1-x)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}=\frac{1}{2}$$

$$(11)\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{\sqrt[3]{8}-2}{8-8}=\frac{2-2}{8-8}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-(2)^3}{(x-8)(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4)}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(8)^{\frac{2}{3}}+2(8)^{\frac{1}{3}}+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

$$(12)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{-1}+1}{-1+1}=\frac{-1+1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\cdot\frac{(x)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}=\lim_{x\to -1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x})^3+(1)^3}{(x+1)(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(-1)^{\frac{2}{3}}-(-1)^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

(13) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64} = \dfrac{\sqrt[3]{8}-2}{64-64} = \dfrac{2-2}{64-64} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4} = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(2)^3}{(x-8)(x+8)(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4)}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\cancel{x-8}}{(x-8)(x+8)(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4)} \lim_{x\to 8} \frac{1}{(x+8)(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4)}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{1}{(8+8)[(8)^{\frac{2}{3}}+2(8)^{\frac{1}{3}}+4]} = \frac{1}{16(4+4+4)} = \frac{1}{(16)(12)} = \frac{1}{192}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{2-\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{3-2}-1}{2-\sqrt{3+1}} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{2-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(2+\sqrt{x+1})}{(2)^2-(\sqrt{x+1})^2}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(2+\sqrt{x+1})}{3-x}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(2+\sqrt{x+1})}{3-x} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{[(\sqrt{x-2})^2-(-1)^2](2+\sqrt{x+1})}{(3-x)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{[x-2-1](2+\sqrt{x+1})}{(3-x)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{(3-x)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$\lim_{x\to 3} -\frac{(3-x)(2+\sqrt{x+1})}{(3-x)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x\to 3} -\frac{(2+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-2}+1)} = -\frac{(2+\sqrt{3+1})}{(\sqrt{3-2}+1)} = -2$$

$$(15)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{7-x}-2} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{\sqrt{7-3}-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{7-x}-2} \cdot \frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{7-x}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{(\sqrt{7-x})^2-(2)^2}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{7-x-4} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{3-x}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{3-x} \cdot \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{[(\sqrt{x+1})^2 -(2)^2](\sqrt{7-x}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{[x+1-4](\sqrt{7-x}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{7-x}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 3} -\frac{(3-x)(\sqrt{7-x}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} -\frac{(\sqrt{7-x}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)} = -\frac{(\sqrt{7-3}+2)}{(\sqrt{3+1}+2)} = -1$$

$$(16)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{1}-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(x)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(1)^3}{(\sqrt{x}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1}+1}{1^{\frac{2}{3}}+1^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{2}{3}$$

(17) $\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{1+8}-3}{2+\sqrt[3]{-8}} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4}{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4} = \lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(2)^3 + (\sqrt[3]{x})^3}$$

$$\lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{8+x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3} = \lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt{1-x})^2 - (3)^2[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$\lim_{x \to -8} \frac{(1-x-9)[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = \lim_{x \to -8} \frac{(-x-8)[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$\lim_{x \to -8} \frac{-(x+8)[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = \lim_{x \to -8} \frac{-[(x)^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4]}{(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$\frac{-[(-8)^{\frac{2}{3}} - 2(-8)^{\frac{1}{3}} + 4]}{(\sqrt{1+8}+3)} = -\frac{4+4+4}{3+3} = -\frac{12}{6} = -2$$

ثالثاً مسائل تؤول فيها النهاية إلى مالانهاية:-

في هذا النوع من المسائل التي تؤول فيها النهاية إلى$\pm\infty$ فإننا نقسم البسط والمقام على المتغير ذا أكبر أس الموجود في المسألة وأي متغيرتحت الجذر نخرجه من تحت الجذر ثم نقارنه بالمتغيرات التي خارج الجذر لمعرفة أي الأس أكبر كما ذكرنا ويشترط لقسمة البسط والمقام على المتغير ذا أكبر أس أن تكون الدالة قياسية وإذا كانت غير قياسية فإننا نقوم بضرب البسط والمقام في مرافق البسط لجعل الدالة قياسية .

مـثـــال:- أوجد قيمة النهايات الآتية إن أمكن :-

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+1}{2-7x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-7}=\frac{5-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty^3}-7}=\frac{5-0+0}{0-7}=-\frac{5}{7}$$

$$(2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2+2}{1-x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-1}=\frac{\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{(-\infty)^2}+\frac{2}{(-\infty)^4}}{\frac{1}{(-\infty)^4}-1}=\frac{0-0+0}{0-1}=0$$

(3) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2+2^6}{4-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5}-3\frac{x^2}{x^5}+\frac{2^6}{x^5}}{\frac{4}{x^5}-\frac{x^2}{x^5}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^3}+\frac{2^6}{x^5}}{\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^3}} = \frac{1-\frac{3}{\infty^3}+\frac{2^6}{\infty^5}}{\frac{4}{\infty^5}-\frac{1}{\infty^3}} = \frac{1-0+0}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty$$

(4) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x+3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}}{2+\frac{3}{\infty}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^6}+\frac{1}{x^6}}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{\infty^4}+\frac{1}{\infty^6}}}{1+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{\sqrt{0+0}}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(6)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{x^{2/3}}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x^{2/3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^{2/3}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{2/3}}}}=\frac{\sqrt[3]{\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^{2/3}}}}=\frac{0}{1}=0$$

$$(7)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-27x^6}}{x\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{8-27x^6}}{x^2}}{\dfrac{x\sqrt{4x^2+1}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{8-27x^6}}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{8}{x^6}-\dfrac{27x^6}{x^6}}}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{8}{x^6}-27}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}}=\frac{\sqrt[3]{\dfrac{8}{\infty^6}-27}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{\infty}}}=-\frac{3}{2}$$

$$(8)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{\sqrt{\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{0+0}}=\frac{1}{0}=\infty$$

(9) $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}\,)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

(10) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{x^2+x}+x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{x^2+x}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{x^2+x}+x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+x}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2/3}}}{\frac{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+x}+x^{\frac{2}{3}}}{x^{2/3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2/3}}}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{\frac{1}{\infty^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{\infty}}+1} = \frac{0}{3} = 0$$

رابعاً مسائل لنهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة :-

(A) الصورة الأولى:-

$$F(x)=\begin{cases} g(x) & , x \geq a \\ h(x) & , x < a \end{cases}$$

هذا النوع من الدوال له نهايتن عند القيمة التي يتغير عندها تعريف الدالة x=a إحداهما

نهاية يمنى ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ وفي هذه الحالة نعين نهاية القاعدة g(x)

الموجودة أمام علامة أكبر من والأخرى نهاية يسرى ويرمزبالرمز $\lim\limits_{x \to a^-} h(x)$ وفي

هذه الحالة نعين نهاية القاعدة h(x) الموجودة أمام علامة أصغرولكي تكون نهاية الدالة

F(x) موجودة لابد أن يتحقق :-

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} h(x) = \text{عددا حقيقيا}$$

ملاحظة هامة:- أي نقطة في نطاق الدالة عدا النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة =x تكون فيها النهاية اليمنى دائما تساوي النهاية اليسرى وجوداً وعدماً .

مـثـال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن عند كل نقطة مبينة :-

$$(1)\ F(x)=\begin{cases} 2x+1 & , x \geq 2 \\ 5x-5 & , x < 2 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \to 2} F(x)$$

الـحـل

$$\lim_{x \to 2^+} 2x+1 = 2(2)+1 = 4+1 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} 5x-5 = 5(2)-5 = 10-5 = 5$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^-} F(x) = 5$$ النهاية موجودة

$$(2)\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ,\ x<3\\ 5 & ,\ x\geq 3\end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 3} F(x)$$

الحل

$$\lim_{x\to 3^+} 5 = 5$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} x+3 = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x) \neq \lim_{x\to 3^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(3)\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-8}{x-2} & ,\ x\geq 2\\ \dfrac{x^4-16}{x^2-4} & ,\ x<2\end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 2} F(x)$$

الحل

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{x-2} = \frac{2(4)-8}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} 2(x+2) = 2(2+2) = 8$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^4-16}{x^2-4} = \frac{(2)^4-16}{(2)^2-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^4-16}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)} = \lim_{x\to 2^-} (x^2+4) = 4+4=8$$

$$\lim_{x\to 2} F(x) = \lim_{x\to 2^+} F(x) = \lim_{x\to 2} F(x) = 8$$ النهاية موجودة

$$(4)\ F(x)=\begin{cases} x+3 & , x\geq 0 \\ x^2-1 & , x<0 \end{cases} \quad , \lim_{x\to 2} F(x)\ , \lim_{x\to -1} F(x),\ \lim_{x\to 0^+} F(x)$$

الحل

$$\lim_{x\to 2} x+3 = 2+3 = 5$$

$$\lim_{x\to -1} x^2-1 = (-1)^2-1 = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x+3 = 0+3 = 3$$

(B) **الصورة الثانية:-**

$$F(x)=\begin{cases} g(x) & , \ x\geq a \\ t(x) & \ \ x=a \\ h(x) & , \ x<a \end{cases}$$

هذا النوع من الدوال له نهايتن عند القيمة التي يتغير عندها تعريف الدالة x=a إحداهما

نهاية يمنى ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ وفي هذه الحالة نعين نهاية القاعدة g(x)

الموجودة أمام علامة أكبر من والأخرى نهاية يسرى ويرمزبالرمز $\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$ وفي

هذه الحالة نعين نهاية القاعدة h(x) الموجودة أمام علامة أصغر ولكي تكون نهاية الدالة

F(x)موجودة لابد أن يتحقق:-

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} h(x) =$$ **عدداً حقيقياً**

ملاحظة هامة أي نقطة في نطاق الدالة عدا النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة x=a تكون فيها النهاية اليمنى دائما تساوي النهاية اليسرى وجوداً وعدماً.

مــثــال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن عند كل نقطة مبينة :-

$$(1)\ F(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x<1 \\ 1 & , \ x=1 \\ 2x-1 & , \ x\geq 1 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 1} F(x)$$

الــحــل

$$\lim_{x\to 1^-} x^2=(1)^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} 2x-1=2(1)-1=1$$

$$\lim_{x\to 1} F(x)= \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = 1$$ النهاية موجودة

$$(2)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x<2 \\ 4 & , x=2 \\ 3x & , x\geq 2 \end{cases} \qquad , \qquad \lim_{x\to 2} F(x)$$

الـحـل

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4-4}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-} x+2=2+2=4$$

$$\lim_{x\to 2^+} 3x=3(2)=6$$

$$\lim_{x\to 2^+} F(x) \neq \lim_{x\to 2^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(3)\ F(x)=\begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 3 & , x=2 \\ x-1 & , x\geq 2 \end{cases} \ , \ \lim_{x\to 0} F(x), \ \lim_{x\to 3} F(x) \text{ ، } \lim_{x\to 2^-} F(x)$$

$$\lim_{x\to 0} x+1=(0)+1=1$$

$$\lim_{x\to 3} x-1=3-1=2$$

$$\lim_{x\to 2^-} x+1=2+1=3$$

(C) الصورة الثالثة:-

$$F(x)=\begin{cases} g(x) & , x\neq a \\ h(x) & , x=a \end{cases}$$

هذا النوع من الدوال له نهايتين عند القيمة التي يتغير عندها تعريف الدالة ولكن دائماً النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى في هذه النوع من الدوال عند x=a أي أن :-

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x)$$

مـثـال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن عند كل نقطة مبينة :-

$$(1)\ F(x)=\begin{cases} 1-4x & , x\neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 1} F(x)$$

الـحـل

$$\lim_{x\to 1} 1-4x = 1-4(1) = -3$$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & , x\neq 0 \\ 3x & , x=0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 0} F(x)$$

الـحـل

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} (x-1) = 0-1 = -1$$

خامساً نهاية دالة القيمة المطلقة :- $\lim\limits_{x\to a} |g(x)|$ في هذه الحالة نعيد تعريف دالة القيمة المطلقة إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا سابقاً .

مــثـــال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن عند كل نقطة مبينة :-

(1) $\lim\limits_{x\to 2} |x-2|$

الــحــل

$$F(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 & , x\ge 2 \\ -(x-2) & , x<2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} x-2=2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} -(x-2)=-(2-2)=0$$

$$\lim_{x\to 2} F(x)=\lim_{x\to 2^+} F(x) = \lim_{x\to 2^-} F(x) = 0$$ النهاية موجودة

(2) $\lim\limits_{x\to 3} |6-2x|$

الــحــل

$$F(x)=|6-2x|=\begin{cases} 6-2x & , x<3 \\ -(6-2x) & , x\ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} -(6-2x)=-(6-6)=0$$

$$\lim_{x\to 3^-} (6-2x)=(6-6)=0$$

$$\lim_{x\to 3} F(x)=\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^-} F(x) = 0$$ النهاية موجودة

$$(3)\ \lim_{x\to 2} |2x-2|$$

الـحــل

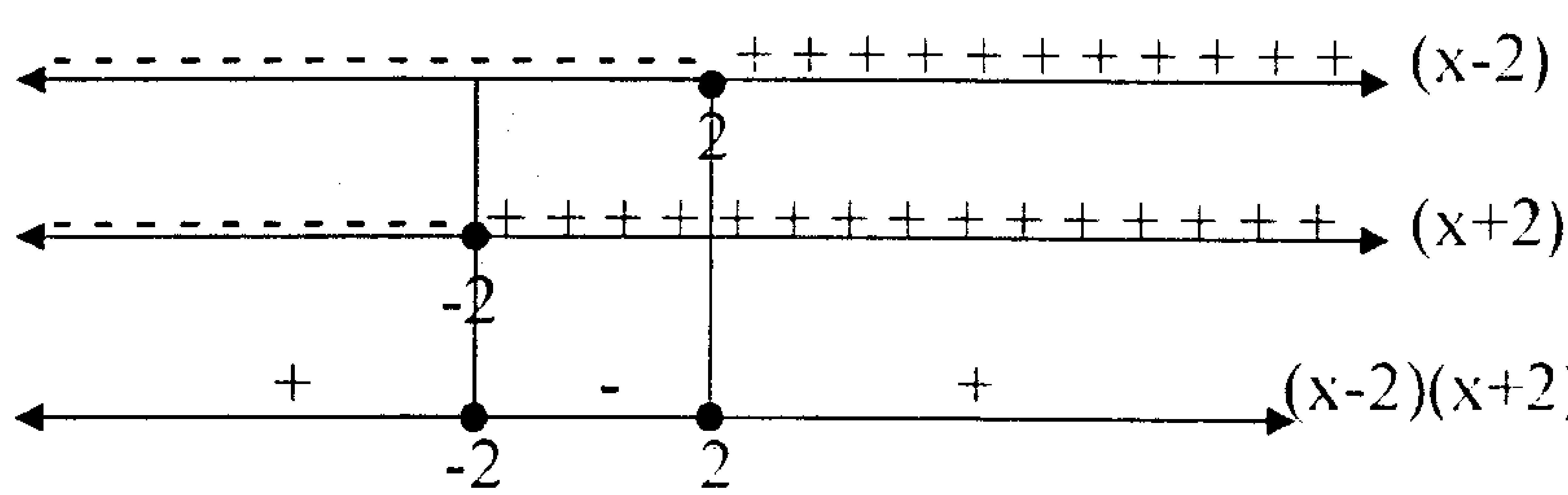
$$F(x) = |2x-2| = \begin{cases} 2x-2 & , \ x \ge 1 \\ -(2x-2) & , \ x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} 2x-2 = 4-2 = 2$$

$$(4)\ \lim_{x\to 2} \left|x^2-4\right|$$

الـحــل

$$x^2-4=0$$
$$(x-2)(x+2)=0$$
$$(x-2)=0\ \ , x=2$$
$$(x+2)=0\ \ , x=-2$$



$$F(x) = \left|x^2-4\right| = \begin{cases} x^2-4 & , \ x \ge 2\ .\ x < -2 \\ -x^2+4 & , \ -2 \le x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} x^2-4 = 4-4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} -x^2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^-} F(x) = 0$$ النهاية موجودة

(5) $\lim_{x \to -5} \left| x^2 - 25 \right|$

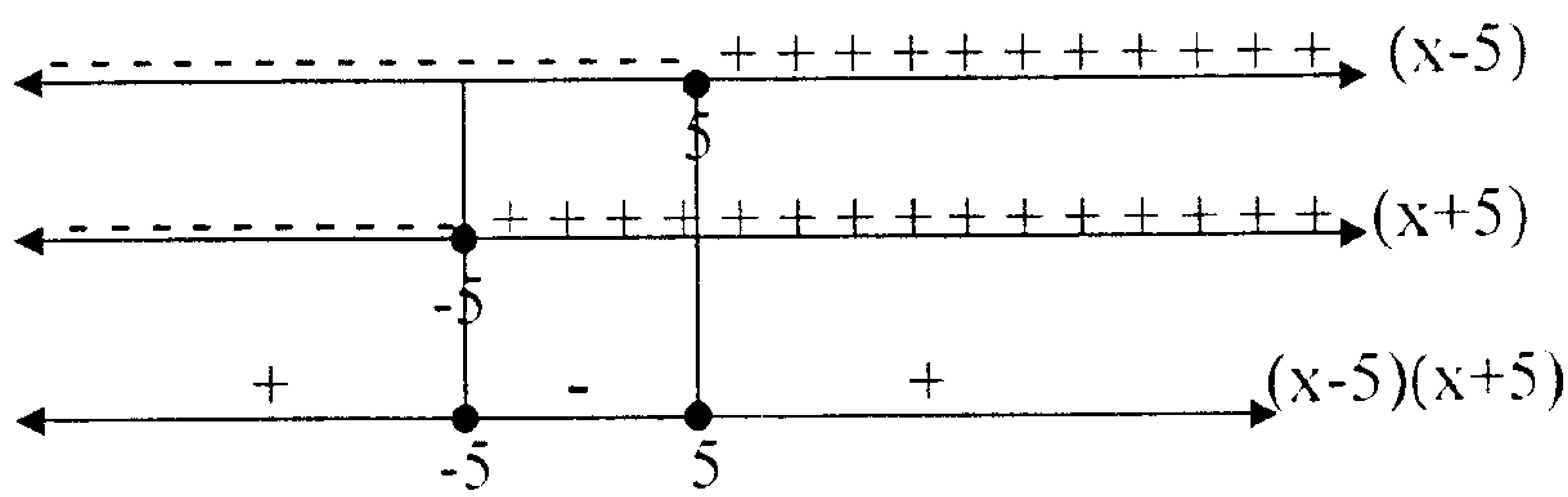
الحـــل

$x^2 - 25 = 0$

$(x-5)(x+5) = 0$

$(x-5) = 0 \ , x = 5$

$(x+5) = 0 \ , x = -5$



$$F(x) = \left| x^2 - 25 \right| = \begin{cases} x^2 - 25 & . \ x \geq 5 \ . \ x < -5 \\ -x^2 + 25 & . \ -5 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -5^+} x^2 - 25 = 25 - 25 = 0$$

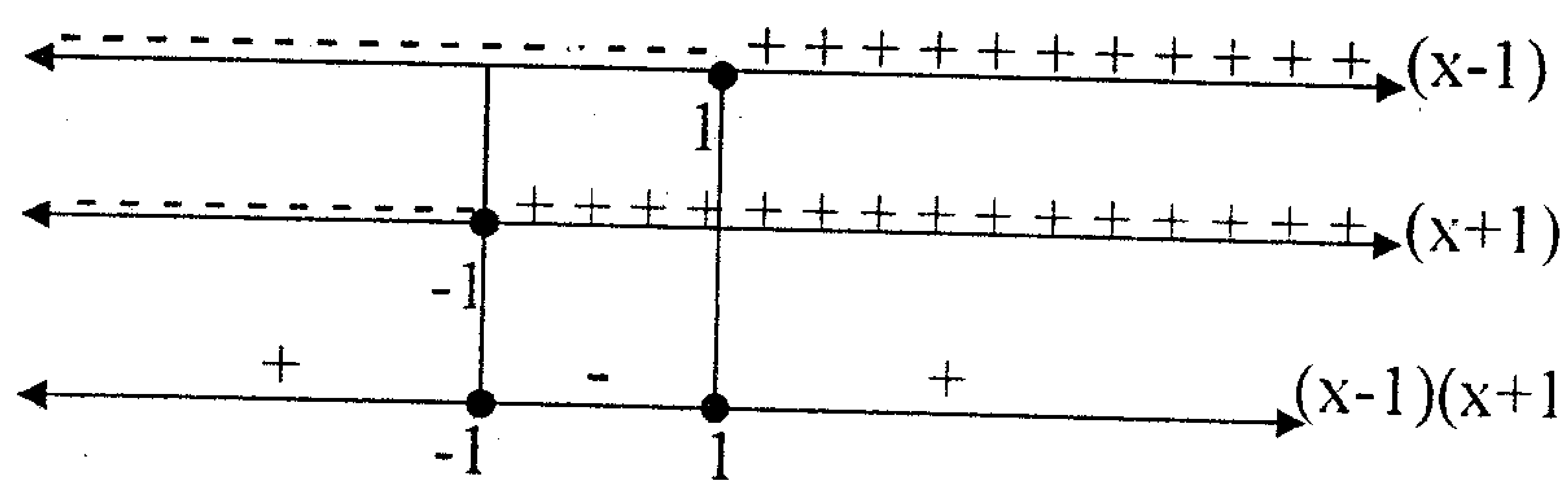
$$\lim_{x \to -5^-} -x^2 + 25 = -25 + 25 = 0$$

$$\lim_{x \to -5} F(x) = \lim_{x \to -5^+} F(x) = \lim_{x \to -5^-} F(x) = 0$$ النهاية موجودة

$$(6)\ \lim_{x \to -2} |x^2 - 1|$$

الحـــل

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$(x-1) = 0 \ , x = 1$$
$$(x+1) = 0 \ , x = -1$$



$$F(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x \ge 1 \ , \ x < -1 \\ -x^2 + 1 & , \ -1 \le x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2} x^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

بما أن المطلوب هو نهاية الدالة عند x=-2 وهذه القيمة لا يتغير عندها تعريف الدالة فالدالة يتغير تعريفها عند x=±1 وفي هذه الحالة يمكن التعويض مباشرة دون الحاجة لإعادة تعريف الدالة

$$@ \ \lim_{x \to -2} |x^2 - 1| = |(-2)^2 - 1| = |4 - 1| = |-3| = 3$$

$$(7)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x+2}$$

الحل

$$F(x)=\frac{|x-1|}{x+2}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+2} & , x\geq 1\\ -\dfrac{x-1}{x+2} & , x<1\end{cases}\quad , X\neq -2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1-1}{1+2}=\frac{0}{3}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}-\frac{x-1}{x+2}=-\frac{1-1}{1+2}=-\frac{0}{3}=0$$

$$\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^-}F(x)=0$$ النهاية موجودة

$$(8)\ \lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{|x+1|}$$

الحل

$$F(x)=\frac{3x+3}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{3x+3}{x+1} & , x>-1\\ -\dfrac{3x+3}{x+1} & , x<-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{3x+3}{x+1}=\frac{3(-1)+3}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{3(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}3=3$$

$$\lim_{x\to -1^-}-\frac{3x+3}{x+1}=-\frac{3(-1)+3}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^-}-\frac{3(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}-3=-3$$

$$\lim_{x\to -1^+}F(x)\neq\lim_{x\to -1^-}F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(9)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\left|x^2-1\right|}$$

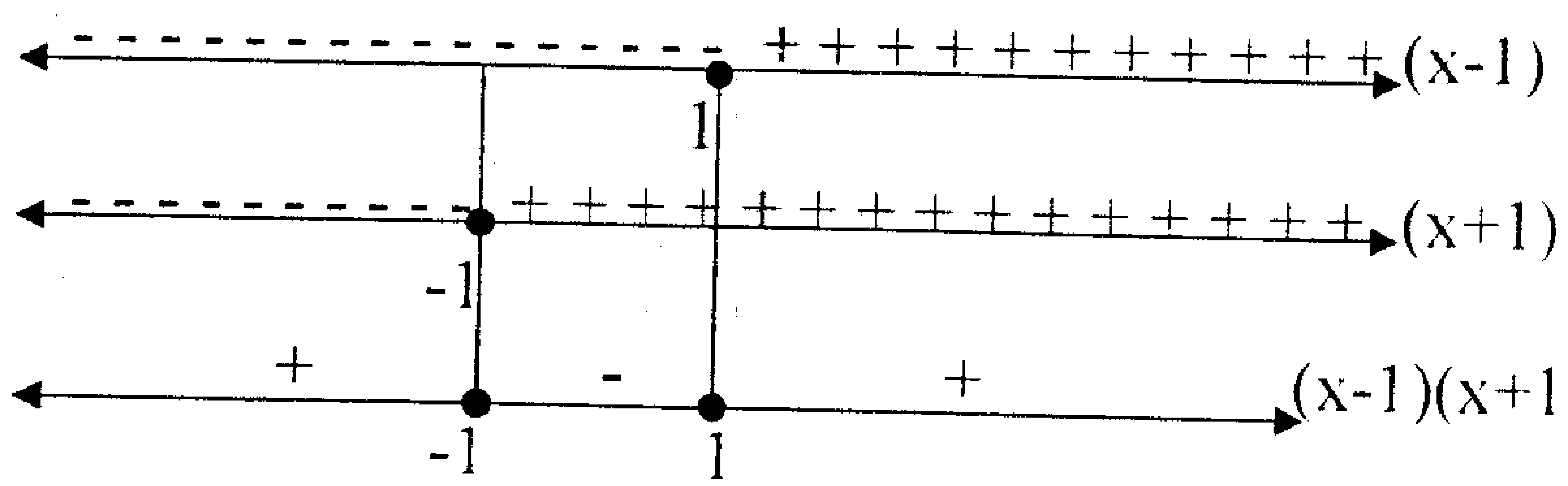
الحل

$$x^2-1=0$$

$$(x-1)(x+1)=0$$

$$(x-1)=0 \quad , x=1$$

$$(x+1)=0 \quad , x=-1$$



$$F(x)=\frac{x-1}{\left|x^2-1\right|}=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & , \ x>1\ ,\ x<-1 \\ -\dfrac{x-1}{x^2-1} & , \ -1<x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{(1+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{x-1}{x^2-1}=-\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1} -\frac{1}{(x+1)}=-\frac{1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) \neq \lim_{x\to 1^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(10)\ \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{2x\,(x^2-1)}$$

الحـــل

$$F(x) = \frac{|x|}{2x\,(x^2-1)} = \begin{cases} \dfrac{x}{2x\,(x^2-1)} & , x > 0 \\ -\dfrac{x}{2x\,(x^2-1)} & , x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2x\,(x^2-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2x\,(x^2-1)} == \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2(x^2-1)} = \frac{1}{2(0-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{2x\,(x^2-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{2x\,(x^2-1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{2(x^2-1)} = -\frac{1}{2(0-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) \neq \lim_{x \to 0^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(11)\ \lim_{x \to 0} \frac{x|x-1|}{x^2+x-2}$$

الحـــل

بما أن المطلوب هو نهاية الدالة عند $x=0$ وهذه القيمة لا يتغير عندها تعريف الدالة فالدالة يتغير تعريفها عند $x=1$ فيمكن التعويض مباشرة دون الحاجة لإعادة تعريف الدالة

$$\lim_{x\to 0} \frac{x|x-1|}{x^2+x-2} = \frac{(0)|0-1|}{(0)^2+0-2} = -\frac{0}{2} = 0$$

مـثـال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن عند كل نقطة مبينة :-

$$(1)\ \ F(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & , \ x \neq -2 \\ 2 & , \ x = -2 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 2} F(x)$$

الـحـل

$$\lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{|x+2|}{x+2} = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+2} & , \ x \geq -2 \\ -\dfrac{x+2}{x+2} & , \ x < -2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \ x \geq -2 \\ -1 & , \ x < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to -2^+} F(x) \neq \lim_{x\to -2} F(x)$$ النهاية غير موجودة

$$(2)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+3} & , \ x \neq -1 \\ 2 & , \ x=-1 \end{cases} \quad , \lim_{x \to -1} F(x)$$

الحـــل

$$\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+3}$$

$$F(x)=\frac{|x+1|}{x+3}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+3} & . \ x \geq -1 \\ -\dfrac{x+1}{x+3} & . \ x<-1 \end{cases} \quad , \ x \neq -3$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x+3}=\frac{-1+1}{-1+3}=-\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x \to -1^-} -\frac{x+1}{x+3}=-\frac{-1+1}{-1+3}=-\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x \to -1} F(x)=\lim_{x \to -1^+} F(x)=\lim_{x \to -1^-} F(x)=0$$ النهاية موجودة

$$(3)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & , \ x>-1 \\ 2x+3 & , \ x \leq -1 \end{cases} \quad . \lim_{x \to -1} F(x)$$

الحـــل

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x+1}=\lim_{x \to -1^+} 1=1$$

لاحظ أن الدالة $g(x)=\frac{|x+1|}{x+1}$ لها نهايتين وإنما اكتفينا فقط بالنهاية اليمنى لأن x> -1
في نص المسألة وفي نفس الوقت تعريف الدالة يتغير عند x = -1 فقط

$$\lim_{x\to -1^-} 2x+3=2(-1)+3=-2+3=1$$

$$\lim_{x\to -1} F(x)=\lim_{x\to -1^+} F(x)=\lim_{x\to -1^-} F(x)=1$$ النهاية موجودة

$$(4)\ \ F(x)=\begin{cases} \frac{|x-2|}{x+3} & , x\le 2 \\ 2x+1 & , x>2 \end{cases}\ ,\ \lim_{x\to 2} F(x)$$

الحل

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x+3}=\lim_{x\to 2^-} -\frac{x-2}{x+3}=-\frac{2-2}{2+3}=-\frac{0}{5}=0$$

لاحظ أن الدالة $g(x)=\frac{|x-2|}{x+3}$ لها نهايتين وإنما اكتفينا فقط بالنهاية اليسرى لأن
x ≤ 2 في نص المسألة وفي نفس الوقت تعريف الدالة يتغير عند x = 2 فقط

$$\lim_{x\to 2^+} 2x+3=2(2)+3=4+3=7$$

$$\lim_{x\to 2^+} F(x)\neq \lim_{x\to 2^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

سادساً نهاية دالة الإشارة :- $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sgn}[g(x)]$ في هذه الحالة نعيد تعريف دالة الإشارة إلى دالة معرفة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا سابقاً .

مـثــال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن:-

(1) $\lim\limits_{x \to -1} \operatorname{sgn}(x+1)$

الـحــل

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & , \ x \neq -1 \\ 0 & , \ x = -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+1} & . \ x > -1 \\ -\dfrac{x+1}{x+1} & , \ x < -1 \\ 0 & . \ x = -1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \ x > -1 \\ -1 & , \ x < -1 \\ 0 & , \ x = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} F(x) \neq \lim_{x \to -1^-} F(x)$$ النهاية غير موجودة

(2) $\lim\limits_{x \to 3} \operatorname{sgn}(x-3)$

الحل

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ 0 & , \ x=3 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3} & , \ x>3 \\ -\dfrac{x-3}{x-3} & , \ x<3 \\ 0 & , \ x=3 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 1 & , \ x>3 \\ -1 & , \ x<3 \\ 0 & , \ x=3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^{+}} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 3^{+}} F(x) \neq \lim_{x \to 3^{-}} F(x)$$ النهاية غير موجودة

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{sgn}(x-4)$

الحل

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-4|}{x-4} & , \ x \neq 4 \\ 0 & , \ x=4 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-4} & , \ x>4 \\ -\dfrac{x-4}{x-4} & , \ x<4 \\ 0 & , \ x=4 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 1 & , \ x>4 \\ -1 & , \ x<4 \\ 0 & , \ x=4 \end{cases} \quad \therefore \lim_{x \to 2} -1 = -1$$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} F(x)\operatorname{sgn}(x^2-4)$

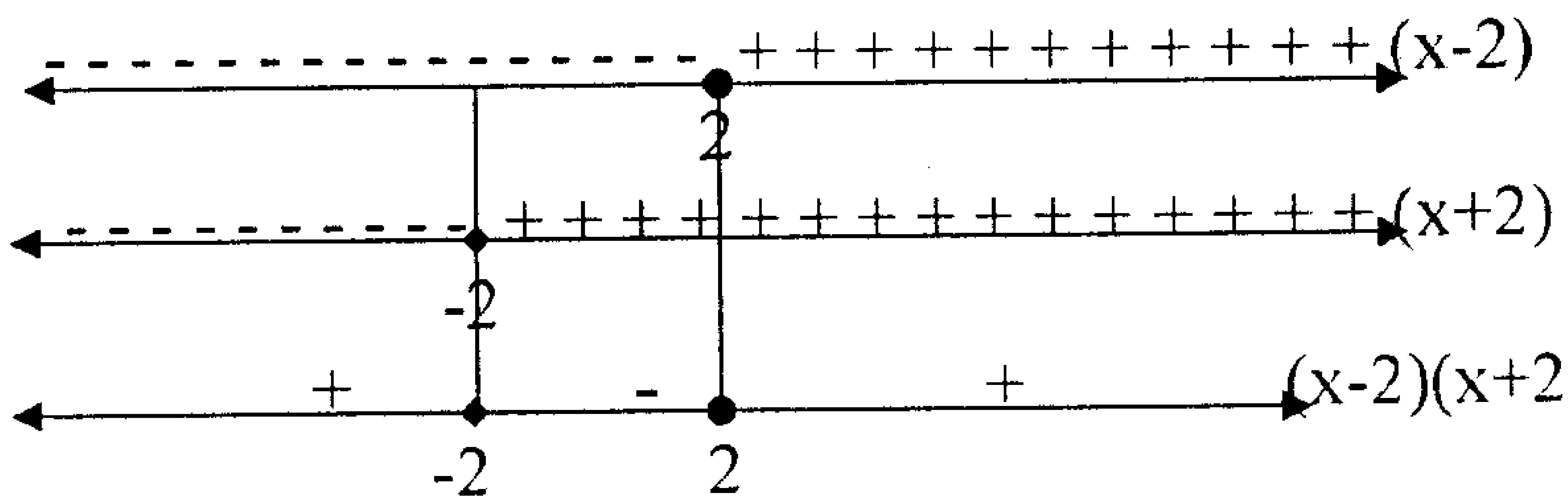
الحل

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$(x-2)=0 \ ,x=2$

$(x+2)=0 \ ,x=-2$



$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-4|}{x^2-4} & , x\neq \pm 2 \\ 0 & , x=\pm 2 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-4} & , x<-2 \ , x>2 \\ \dfrac{-(x^2-4)}{x^2-4} & ,-2<x<2 \\ 0 & , x=2, x=-2 \end{cases}$$

$$F(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases} 1 & , x<-2 \ , x>2 \\ -1 & ,-2<x<2 \\ 0 & , x=2, x=-2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2^+} 1=1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} -1=-1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$ النهاية غير موجودة

سابعا: نهاية دالة الصحيح الأعظم :- $\lim\limits_{x \to a} [g(x)]$

نعوض بقيمة $x = a$ في دالة الصحيح الأعظم ويوجد هناك نهايتن نهاية يمنى ونهاية يسرى أي أن :

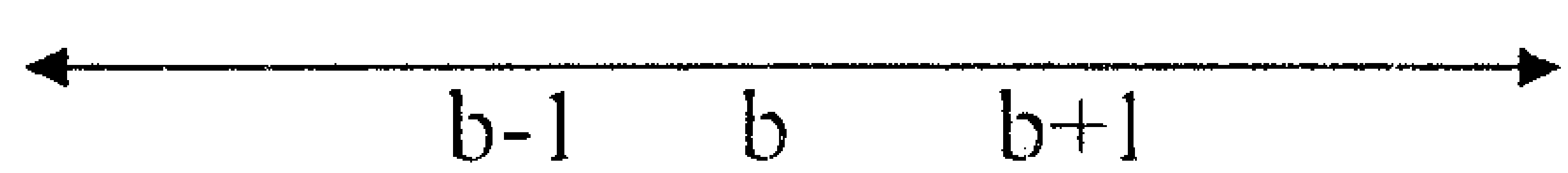
$$\lim_{x \to a} [g(x)]$$

نهاية يمنى

$$\lim_{x \to a^{+}} [g(x)] = [b] = b$$

نهاية يسرى

$$\lim_{x \to a^{-}} [g(x)] = [b] = b-1$$



مـثــال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الآتية إن أمكن:-

(1) $\lim\limits_{x \to 3} [x+1]$

الـــحـــل

$$\lim_{x \to 3^{+}} [x+1] = [3+1] = [4] = 4$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} [x+1] = [3+1] = [4] = 3$$

$$\lim_{x \to 3^{+}} [x+1] \neq \lim_{x \to 3^{-}} [x+1]$$ النهاية غير موجودة

$$(2)\quad \lim_{x \to -2} [2x+1]$$

الحـــل

$$\lim_{x \to -2^+} [2x+1] = [2(-2)+1] = [-3] = -3$$

$$\lim_{x \to -2^-} [2x+1] = [2(-2)+1] = [-3] = -4$$

$$\lim_{x \to -2^+} [2x+1] \neq \lim_{x \to -2^-} [2x+1]$$

$$(3)\quad \lim_{x \to 4} \frac{[x+1]}{x-2}$$

الحـــل

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{[x+1]}{x-2} = \frac{[4+1]}{4-2} = \frac{[5]}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{[x+1]}{x-2} = \frac{[4+1]}{4-2} = \frac{[5]}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{[x+1]}{x-2} \neq \lim_{x \to 4^-} \frac{[x+1]}{x-2}$$ النهاية غير موجودة

$$(4)\quad \lim_{x \to 2} (x-[x])$$

الحـــل

$$\lim_{x \to 2^+} x-[x] = 2-[2] = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} x-[x] = 2-[2] = 2-1 = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} [x+1] \neq \lim_{x \to 3^-} [x+1]$$ النهاية غير موجودة

$$(5)\ \lim_{x \to 3} [x+1]^2$$

الحل

$$\lim_{x \to 3^+} [x+1]^2 = [3+1]^2 = [4]^2 = (4)^2 = 16$$

$$\lim_{x \to 3^-} [x+1]^2 = [3+1]^2 = [4]^2 = (3)^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 3^+} [x+1]^2 \neq \lim_{x \to 3^-} [x+1]^2$$ النهاية غير موجودة

$$(6)\ \lim_{x \to -\frac{1}{2}} [x+1]$$

الحل

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} [x+1] = [-\frac{1}{2}+1] = [\frac{1}{2}] = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} [x+1] = [-\frac{1}{2}+1] = [\frac{1}{2}] = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} [x+1] = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} [x+1] = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} [x+1]$$ النهاية موجودة

ثامناً نهاية الدوال المثلثية :- عند حل مسائل نهاية الدوال المثلثية نحاول إيصال مسألة النهاية إلى صورة من صور القوانين الآتية إذا لم نتمكن من إيجاد النهاية بطريقة التعويض كما ذكرنا آنفاً.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

مـلاحـظـات :-

(1) $\sin^2 ax + \cos^2 ax = 1$

(2) $\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax)$

(3) $\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$

(4) $\cos 2ax = \cos^2 ax - \sin^2 ax$

(5) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(6) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(7) $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$

(8) $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$

(9) $\sin(\pi - a) = \sin a$

(10) $\sin 0^0 = 0$

(11) $\cos 0^0 = 1$

(12) $\sin 90^0 = 1$

(13) $\cos 90^0 = 0$

(14) $\sin x = \frac{1}{\csc x}$

(15) $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

مـثـال:- أوجد قيمة نهاية الدوال الاتية إن أمكن:-

$$(1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin 2(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 2(1) = 2$$

نفرض أن $y = 2x$ و عند $x \longrightarrow 0$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{3x} = \frac{\tan(0)}{3(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

$$(3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{2} x}{x} = \frac{\tan \frac{1}{2}(0)}{(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{2} x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

نفرض أن $y = \frac{1}{2} x$ و عند $x \longrightarrow 0$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(4)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin(0)}{\sin 2(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \sin x \cdot \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$$

نفرض أن $y = 2x$ و عند $x \longrightarrow 0$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(5)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{\sin(0)}{\tan 3(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \frac{1}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\tan 3x}$$

$$\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = \frac{1}{3}(1)(1) = \frac{1}{3}$$

نفرض أن $y = 3x$ وعند $0 \longleftarrow x$ فإن $0 \longleftarrow y$

$$(6)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \frac{\sin^2 4(0)}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}$$

$$4 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot 4 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 4(1)(4)(1) = 16$$

نفرض أن $y = 4x$ وعند $0 \longleftarrow x$ فإن $0 \longleftarrow y$

$$(7)\ \lim_{x\to -5} \frac{\tan(10+2x)}{5+x} = \frac{\tan(10-10)}{5-5} = \frac{\tan(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{\tan(10+2x)}{5+x} = 2 \lim_{x\to -5} \frac{\tan(10+2x)}{10+2x} = 2 \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 2(1) = 2$$

نفرض أن $y = 10+5x$ وعند $-5 \longleftarrow x$ فإن $0 \longleftarrow y$

$$(8)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^2 x} = \frac{(0)^3}{\sin^2(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x = (1)(1)(0) = 0$$

(9) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)} = \dfrac{(-1)^3+1}{\sin(-1+1)} = \dfrac{-1+1}{\sin(0)} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sin(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{\sin(x+1)} \cdot \lim_{x\to -1} x^2-x+1$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{x\to -1} x^2-x+1 = (1)[(-1)^2-(-1)+1] = 3$$

نفرض أن $y = x+1$ وعند $x \longrightarrow -1$ فإن $y \longrightarrow 0$

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+x}{x} = \dfrac{\sin(0)+0}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x}{x} = \lim_{x\to 0} [\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{x}] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} 1 = 1+1 = 2$$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x+\sin x} = \dfrac{0-\tan 0}{0+\sin 0} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-\tan x}{x}}{\frac{x+\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\tan x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\tan x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1 - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(12)\ \lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 2x}{2x+3\sin 4x}=\frac{6(0)-\sin 2(0)}{2(0)+3\sin 4(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{6x-\sin 2x}{x}}{\dfrac{2x+3\sin 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{6x}{x}-\dfrac{\sin 2x}{x}}{\dfrac{2x}{x}+\dfrac{3\sin 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6-\dfrac{\sin 2x}{x}}{2+\dfrac{3\sin 4x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}6-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}2+3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}6-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}2+(3)(4)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}6-2\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{x\to 0}2+12\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}}=\frac{6-2}{2+12}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

نفرض أن $y=2x$ وعند $x\to 0$ فإن $y\to 0$

ونفرض أن $z=4x$ وعند $x\to 0$ فإن $z\to 0$

$$(13)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax=2\sin^2 ax \quad ,\ 2a=1\ \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

$$1-\cos x=2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x}=2\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\tfrac{1}{2}x$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\tfrac{1}{2}x=(1)(1)\sin\tfrac{1}{2}(0)=(1)(1)(0)=0$$

نفرض أن $y=\frac{1}{2}x$ وعند $x\to 0$ فإن $y\to 0$

$$(14)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \frac{\sqrt{1-\cos 2(0)}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax = 2\sin^2 ax \quad , \quad 2a = 2 \therefore a = 1$$

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \sqrt{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= (\sqrt{2})(1) = \sqrt{2}$$

$$(15)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x+1-\cos x}{3x} = \frac{2(0)+1-\cos 0}{3(0)} = \frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax = 2\sin^2 ax \quad , \quad 2a = 1 \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$1-\cos x = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1-\cos x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+2\sin^2 \frac{1}{2}x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} + \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{3} + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3}) \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3}) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= \frac{2}{3} + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3})(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

نفرض أن $y = \frac{1}{2}x$ وعند $x \to 0$ فإن $y \to 0$

$$(16)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1+(0)\sin 0-\cos 0}{\sin^2 0}=\frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax=2\sin^2 ax\ ,\ 2a=1\ \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$1-\cos x=2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\sin^2\frac{1}{2}x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}$$

$$=1+(1)(1)(\tfrac{1}{2})(1)(\tfrac{1}{2})(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

نفرض أن $\frac{1}{2}x=y$ وعند $x\to 0$ فإن $y\to 0$

$$(17)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}=\frac{1-\cos 3(0)}{x\sin 2(0)}=\frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax=2\sin^2 ax \quad , \quad 2a=3 \therefore a=\frac{3}{2} \quad \therefore 1-\cos 3x=2\sin^2 \tfrac{3}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{2\sin\frac{3}{2}x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot(2)\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot(2)\frac{3}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{3}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{2}(1)\cdot(2)(\tfrac{3}{2})(1)(\tfrac{3}{2})(1)=\frac{9}{4}$$

نفرض أن $z=\frac{3}{2}x$ وعند $x\longrightarrow 0$ فإن $z\longrightarrow 0$

نفرض أن $y=2x$ وعند $x\longrightarrow 0$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(18)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\frac{(0)\sin 0}{1-\cos 0}=\frac{0}{0}$$

$$1-\cos 2ax=2\sin^2 ax \quad , \quad 2a=1 \therefore a=\frac{1}{2} \therefore 1-\cos x=2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$(\tfrac{1}{2})(2)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot(2)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$(\tfrac{1}{2})(2)\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot(2)\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=(1)(2)(1)=2$$

نفرض أن $y=\frac{1}{2}x$ وعند $x\longrightarrow 0$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(19)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sec(x)-1}=\frac{(0)\sin 0}{\sec 0-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\frac{1}{\cos x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x\sin x}{1-\cos x}$$

$$1-\cos 2ax=2\sin^2 ax \quad , \quad 2a=1 \therefore a=\frac{1}{2} \therefore 1-\cos x=2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x\sin x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$$(\tfrac{1}{2})(2)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot(2)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$(\tfrac{1}{2})(2)\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot(2)\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\cos 0=(1)(2)(1)(1)=2$$

نفرض أن $y=\frac{1}{2}x$ وعند $x\longrightarrow 0$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(20)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\tan^2 x}{\sec(x)+1}=\frac{\tan^2(\pi)}{\sec\pi+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{\cos x}+1}=\lim_{x\to \pi}\frac{\tan^2 x}{\frac{1+\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to \pi}\frac{\cos x\tan^2 x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{(1-\cos x)}{\cos x}=\frac{1-\cos\pi}{\cos\pi}=\frac{1+1}{-1}=-2$$

$$(21)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\pi-\pi}=\frac{0}{0}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{x-\pi}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)=-\frac{1}{2}$$

نفرض أن $y=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$ و عند $x\longrightarrow\pi$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(22)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{x}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2(1)=2$$

نفرض أن $y=2x$ و عند $x\longrightarrow 0$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(23)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}$$

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=-1$$

نفرض أن $y=\frac{\pi}{2}-x$ و عند $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ فإن $y\longrightarrow 0$

$$(24)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\frac{\sin\pi}{\pi-\pi}=\frac{0}{0}$$

$$\sin x=\sin(\pi-x)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=-\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=-1$$

نفرض أن $y=\pi-x$ وعند $x\to\pi$ فإن $y\to0$

$$(25)\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=\frac{4-4}{\cos\frac{\pi}{4}(2)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{\cos\frac{\pi}{4}x}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}x=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)}=-\frac{4}{\pi}\lim_{x\to2}\frac{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)}\cdot\lim_{x\to2}(x+2)$$

$$-\frac{4}{\pi}\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{x\to2}(x+2)=-\frac{4}{\pi}(1)(2+2)=-\frac{16}{\pi}$$

نفرض أن $y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x$ وعند $x\to2$ فإن $y\to0$

$$(26)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})(1+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\ \cos x}{(x-\frac{\pi}{2})(1+\sin x)}$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)\ \sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(x-\frac{\pi}{2})(1+\sin x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\sin x}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\sin x} = -(1)\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = -(1)(\frac{0}{2}) = 0$$

نفرض أن $y = \frac{\pi}{2} - x$ وعند $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(27)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sin(1-1)}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = (1)(1+1) = 2$$

نفرض أن $y = x-1$ وعند $x \longrightarrow 1$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(28)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{1-\cos 0}{(0)(\sqrt{1+0}-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(\sqrt{1+x}+1)}{x(1+x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(\sqrt{1+x}+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x \quad (\sqrt{1+x}+1)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x}+1)$$

$$2(\tfrac{1}{2}) \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot (\tfrac{1}{2}) \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x}+1)$$

$$2(\tfrac{1}{2}) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot (\tfrac{1}{2}) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x}+1)$$

$$(1)(\tfrac{1}{2})(\sqrt{1+0}+1) = 1$$

نفرض أن $y = \frac{1}{2}x$ وعند $x \longrightarrow 0$ فإن $y \longrightarrow 0$

$$(29)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{1+\cos 2(\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2(\frac{\pi}{2})}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}+\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1+\cos 2x})(\sqrt{\pi}+\sqrt{2x})}{\pi-2x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2\cos^2 x}\ \ (\sqrt{\pi}+\sqrt{2x})}{\pi-2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\cos x\ \ (\sqrt{\pi}+\sqrt{2x})}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\ \ \sin(\frac{\pi}{2}-x)\ \ (\sqrt{\pi}+\sqrt{2x})}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\pi}+\sqrt{2x})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\pi}+\sqrt{2x}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1)(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}) = \sqrt{2\pi}$$

نفرض أن $y = \frac{\pi}{2} - x$ وعند $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $y \longrightarrow 0$

الدوال المستمرة (المتصلة) والغير مستمرة

اتصال الدالة عند نقطة :- يقال عن الدالة $F(x)$ أنها متصلة عند $x = a$
إذا تحققت الشروط الآتية معاً :

(1) يجب أن تكون الدالة معرفة عند $x = a$ أي أن: عدداً حقيقياً $F(a) =$ ، $a \in D_F$

(2) يجب أن تكون النهاية موجودة أي أن: العدد الحقيقي $\lim_{x \to a} F(x) =$

(3) يجب أن تكون قيمة الدالة عند $x = a$ تساوي قيمة النهاية عندما تؤول $x \to a$

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a) = \text{العدد الحقيقي}$$

إذا لم يتحقق أحد هذه الشروط فإن الدالة غير مستمرة عند $x = a$

مثال:- بين ما إذا كانت الدوال الآتية مستمرة أم لا عند كل نقطة مبينة :-

$(1)\, F(x) = 2x^2 + 4 \quad , x = 0$

الحل

$(a)\, F(0) = 2(0)^2 + 4 = 4$

$(b)\, \lim_{x \to 0} 2x^2 + 4 == 2(0)^2 + 4 = 4$

$(c)\, F(0) = \lim_{x \to 0} F(x) = 4$

الدالة مستمرة عند $x = 0$

$(2)\, F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , x = 1$

الحل

$(a)\, F(1) = \dfrac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0} \quad , \; 1 \notin D_F = R - \{1\}$

الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

$(3)\ F(x)=\sqrt{x-1}\quad , x=0$

الـحـل

$(a)\ F(0)=\sqrt{0-1}=\sqrt{-1}\qquad , \ 0 \notin D_F=[1,\infty)$

الدالة غير مستمرة عند $x = 0$

$$(4)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x=2 \end{cases} \quad , \ x=2$$

الـحـل

$(a)\ F(2)=4$

$(b)\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{0} \therefore \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}= \lim\limits_{x \to 2} (x+2)=2+2=4$

$(c)\ F(2)=\lim\limits_{x \to 2} F(x)=4$

الدالة مستمرة عند $x = 2$

$$(5)\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases} \quad , \ x=0$$

الـحـل

$(a)\ F(0)=1$

$(b)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x}{x}=\dfrac{0}{0} \therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-1)}{x}= \lim\limits_{x \to 0} (x-1)=0-1=-1$

$(c)\ F(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} F(x)$

الدالة غير مستمرة عند $x = 0$

$$(6)\ F(x)=\begin{cases}3x-1 & , x<2\\ 5 & , x=2\\ 2x+1 & , x>2\end{cases}\ ,\ x=2$$

الحـــل

$(a)\ F(2)=5$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2^-} 3x-1 = 3(2)-1=6-1=5$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x+1 = 2(2)+1=4+1=5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} F(x)=5$

$(c)\ F(2) = \lim\limits_{x\to 2} F(x)=5$

الدالة مستمرة عند $x = 2$

$$(7)\ F(x)=\begin{cases}x-1 & , x<1\\ 3 & , x=1\\ 2x-2 & , x>1\end{cases}\ ,\ x=1$$

الحـــل

$(a)\ F(1)=3$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 1^-} x-1 = 1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-2 = 2(1)-2=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=0$

$(c)\ F(1) \neq \lim\limits_{x\to 1} F(x)$

الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

$$(8)\,F(x)=\begin{cases}1-x & , x<-1\\ 1 & , x=-1\\ x^3 & , x>-1\end{cases} \quad , \; x=-1$$

الحــل

$(a)\,F(-1)=1$

$(b)\quad \lim\limits_{x\to -1^-} 1-x = 1-(-1)=2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} x^3 = (-1)^3=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} F(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$ النهاية غير موجودة

الدالة غير مستمرة عند x = -1

$$(9)\,F(x)=\begin{cases}3x^2-x & , x<0\\ 2x & , x\geq 0\end{cases} \quad , \; x=0$$

الحــل

$(a)\,F(0)=2(0)=0$

$(b)\quad \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2-x = 3(0)^2-0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 2(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=0$

$(c)\,F(0) = \lim\limits_{x\to 0} F(x)=0$

الدالة مستمرة عند x = 0

$$(10)\, F(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 1 \\ 4 - x & , x \geq 1 \end{cases} \;,\; x = 1$$

الـحـل

$(a)\, F(1) = 4 - (1) = 3$

$(b)\, \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 1 = (1)^2 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} 4 - x = 4 - (1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$ النهاية غير موجودة

الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

$$(11)\, F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \;,\; x = 2$$

الـحـل

$(a)\, F(2) = \dfrac{x^2 - x}{x} = \dfrac{(2)^2 - 2}{2} = 1$

$(b)\, \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x}{x} = \dfrac{(2)^2 - 2}{2} = 1$

$(c)\, F(2) = \lim\limits_{x \to 2} F(x) = 1$

الدالة مستمرة عند $x = 2$

$$(12)F(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x<1 \\ 4-x & , x\geq 1 \end{cases} \quad , x=2$$

الــحــل

$(a)F(2)=4-(2)=2$

$(b)\ \lim\limits_{x \to 2} 4-2 = 4-(2)=2$

$(c)\ F(2)\ \lim\limits_{x \to 2} = F(2)=2$

الدالة مستمرة عند x = 2

$(13)F(x)=|x-2| \quad ,x=2$

الــحــل

$$F(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 & , x\geq 2 \\ -(x-2) & , x<2 \end{cases}$$

$(a)F(2)=2-2=0$

$(b)\ \lim\limits_{x \to 2^+} x-2=2-2=0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2)=-(2-2)=0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 0$

$(c)F(2)=\lim\limits_{x \to 2} F(x)=0$

الدالة مستمرة عند x = 2

$(14)\, F(x) = \operatorname{sgn}(x-3) \quad , x = 3$

الـــحـــل

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x-3) = \begin{Bmatrix} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , \; x \neq 3 \\ 0 & , \; x = 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & , \; x > 3 \\ -1 & , \; x < 3 \\ 0 & , \; x = 3 \end{Bmatrix}$$

$(a)\, F(3) = 0$

$(b) \lim\limits_{x \to 3^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} -1 = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} F(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$ النهاية غير موجودة

الدالة غير مستمرة عند x = 3

$(15)\, F(x) = [x+3] \quad , x = 3$

الـــحـــل

$(a)\, F(3) = [3+3] = [6] = 6$

$(b) \lim\limits_{x \to 3^+} [x+3] = [3+3] = [6] = 6$

$\lim\limits_{x \to 3^-} [x+3] = [3+3] = [6] = 5$

$\lim\limits_{x \to 3^+} F(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$ النهاية غير موجودة

الدالة غير مستمرة عند x = 3

مـثـــال :- أوجد قيمة K التي تجعل الدالة F(x) مستمرة عند كل نقطة مبينة :

$$(1)\, F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 2K & , x = 2 \end{cases} \quad , \; x = 2$$

الـــحـــل

$(a)\, F(2) = 2K$

$(b)\, \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0} \therefore \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$

$(c)\, F(2) = \lim\limits_{x \to 2} F(x)$

$2K = 4 \;\therefore k = 2$

$$(2)\, F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+kx-(5+k)}{x-2} & , x \neq 2 \\ 5 & , x = 2 \end{cases} \quad , \; x = 2$$

الـــحـــل

$(a)\, F(2) = 5$

$(b)\, \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+kx-(5+k)}{x-2} = \dfrac{(2)^2+k(2)-(5+k)}{2-2} = \dfrac{k-1}{2-2} = \dfrac{0}{0}$

$k - 1 = 0 \;\therefore\; k = 1$

$$(3)F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-(k+1)x+k}{x-1} & , x\neq 1 \\ 2 & , x=1 \end{cases} \quad , x=1$$

الحـــل

$(a)F(1)=2$

$(b)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(k+1)x+k}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-k)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-k)=1-k$

$(c)F(1)=\lim\limits_{x\to 1}F(x)$

$1-K=2 \therefore k=-1$

$$(4)F(x)=\begin{cases} 3x+4 & , x<2 \\ 3K-5 & , x=2 \\ x^3+2 & , x>2 \end{cases} \quad , x=2$$

الحـــل

$(a)F(2)=3K-5$

$(b)\lim\limits_{x\to 2^-} 3x+4 = 3(2)+4=6+4=10$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=10$

$(c)F(2)=\lim\limits_{x\to 2}F(x)$

$3K-5=10 \therefore k=5$

$$(5)F(x)=\begin{cases} x+k-1 & , x\le 1 \\ k^2x^2-2k & , x>1 \end{cases} \quad , x=1$$

الحل

$(a)F(1)=x+k-1=1+k-1=k$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 1^+} k^2x^2-2k = k^2(1)^2-2k=k^2-2k$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=k^2-2k$

$(c)\ F(1)=\lim\limits_{x\to 1} F(x)$

$k^2-2k=k$

$k^2-3k=0$

$k(k-3)=0 \ \therefore k=0 \ ,k=3$

$$(6)F(x)=\begin{cases} kx+2 & , x>2 \\ kx^2-3 & , x\le 2 \end{cases} \quad , x=2$$

الحل

$(a)F(2)=kx^2-3=4k-3$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2^+} kx+2 = 2k+2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} F(x)=2k+2$

$(c)\ F(2)=\lim\limits_{x\to 2} F(x)$

$4k-3=2k+2$

$\therefore K=\frac{5}{2}$

مـثــال :- أوجد قيم A,B التي تجعل الدالة F(x) مستمرة عند كل نقطة مبينة :

$$(1)\,F(x)=\begin{cases} Ax^2+Bx+2 & , x>2 \\ 5 & , x=2 \\ Bx^2+2 & , x<2 \end{cases} \quad , \; x=2$$

الــحــل

$(a)\,F(2)=5$

$(b)\;\lim\limits_{x\to 2^-} Bx^2+2 = B(2)^2+2 = 4B+2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} Ax^2+Bx+2 = A(2)^2+2B+2 = 4A+2B+2$

$(c)\;F(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)$

$5=4B+2 \;\therefore B=\frac{3}{4}$

$F(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} F(x)$

$5=4A+2B+2$

$5=4A+2(\frac{3}{4})+2$

$5=4A+\frac{3}{2}+2$

$4A=5-\frac{3}{2}-2$

$A=\frac{3}{8}$

$$(2)F(x)=\begin{cases} x^2-Ax-2B & , x>2 \\ 4 & , x=2 \\ 5A+Bx & , x<2 \end{cases} \quad , \ x=2$$

الـحـل

$(a)\, F(2)=4$

$(b)\ \lim\limits_{x \to 2^-} 5A+Bx = 5A+B(2) = 5A+2B$

$\lim\limits_{x \to 2^+} x^2-Ax-2B = (2)^2-A(2)-2B = 4+2A-2B$

$(c)\ F(2)= \lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$

$4 = 5A+2B \longrightarrow (1)$

$F(2)= \lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$

$4 = 4+2A-2B$

$2A-2B=0 \longrightarrow (2)$

$5A+2B=2$

$2A-2B=0 \quad (+)$

$7A=2 \ \therefore\ A=\frac{2}{7}$ وبالتعويض في (2)

$2(\frac{2}{7})-2B=0 \ \therefore\ B=\frac{2}{7}$

الفاتح ثورة علمية

سلسلة الفاتح في الرياضيات

مبادئ رياضة (1)

الجزء الأول

- يحتوي على شرح مفصل لمقرر رياضة (1) لطلبة الجامعات والمعاهد العليا
- يحتوي على 700 مسألة محلولة بطريقة واضحة ومبسطة
- يحتوي على حلول الامتحانات النصفية والنهائية للسنوات السابقة
- يعرض أفكار متنوعة تساعد في تنمية القدرة على التفكير العلمي السليم
- يعتبر مرجع علمي تفصيلي لكافة الطلاب والباحثين لإلمامه بتفاصيل علمية دقيقة
- يعالج بطريقة جديدة ومبتكرة الأجزاء النظرية بأسلوب يتيح للقارئ الوصول للفهم بشكل سهل
- يأتي تلبيّة لحاجة الطلاب إلى كتاب يكون معيناً ومرشداً لتحقيق غايات المقرر الدراسي
- يحتوي على تصنيفات علمية دقيقة لا تجدها في أي كتاب آخر