الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

المعهد العالي

للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

التحليل

5

متسلسلات فورييه وتحويلاته

تكامل لوبيغ

نظرية التوزيعات

التحليل

الجزء الخامس

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

2018

التحليل

الجزء الخامس

عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الجمهورية العربية السورية، 2018.

هذا الكتاب منشور تحت رخصة المشاع الإبداعي - النسب للمؤلف – حظر الاشتقاق (CC-BY-ND 4.0).
يحق للمستخدم بموجب هذه الرخصة نسخ هذا الكتاب ومشاركته وإعادة نشره أو توزيعه بأية صيغة وبأية وسيلة للنشر ولأية غاية تجارية أو غير تجارية، وذلك شريطة عدم التعديل على الكتاب وعدم الاشتقاق منه وعلى أن ينسب للمؤلف الأصلي على الشكل الآتي حصراً:

عمران قوبا، التحليل، الجزء الخامس، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية، 2018.

متوفر للتحميل من www.hiast.edu.sy.

Analysis

Volume 5

Omran Kouba

Publications of the

Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)

Syrian Arab Republic, 2018.

ISBN: 978-9933-9-2612-0

Published under the license:

Creative Commons Attrribution-NoDerivatives 4.0 International (CC-BY-ND 4.0)

https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/legalcode

Available for download at: www.hiast.edu.sy

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2011، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.
- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا، 2018.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.
يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983

هاتف +(963)(11)5123819

فاكس +(963)(11)5140760

بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy

موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل والدكتور خالد حلاوة على قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ مروان البواب الذي دقّق الكتاب لغوياً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل

حقل الأعداد الحقيقيّة

الفصل الثاني

المتتاليات العدديّة

الفصل الثالث

المتسلسلات العدديّة

الفصل الرابع

التوابع لمتحوّل حقيقي : النهايات والاستمرار

الفصل الخامس

التوابع لمتحوّل حقيقي : الاشتقاق

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل السادس

التوابع المألوفة

الفصل السابع

مقارنة التوابع والنشر المحدود

الفصل الثامن

متتاليات ومتسلسلات التوابع

الفصل التاسع

التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

الفصل العاشر

التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة

والتكاملات التابعة لوسيط

محتوى الجزء الثالث

مقدّمة

الفصل الحادي عشر

الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الثاني عشر

التوابع لعدّة متحوّلات

الفصل الثالث عشر

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضليّة السلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

الفصل الخامس عشر

المعادلات التفاضليّة الخطّية

الفصل السادس عشر

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

محتوى الجزء الرابع

مقدّمة

الفصل السابع عشر

المتسلسلات الصحيحة

الفصل الثامن عشر

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

الفصل التاسع عشر

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

الفصل العشرون

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

محتوى الجزء الخامس

مقدّمة

الفصل الحادي والعشرون

متسلسلات فورييه

الفصل الثاني والعشرون

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

الفصل الثالث والعشرون

تحويلات فورييه

الفصل الرابع والعشرون

التوزيعات

مقدّمة

التحليل الرياضيّ هو فرعٌ من فروع الرياضيّات يتعامل مع الأعداد الحقيقيّة والأعداد العقديّة والتوابع، وهو يدرس مفاهيم الاستمرار والتكامل والتفاضل في أطرها العامّة.

تاريخياً، يمكن إرجاع بدايات هذا الفرع من فروع الرياضيّات إلى القرن السابع عشر، مع اختراع نيوتن ولايبنتز حسابَي التفاضل والتكامل، ثُمّ تطوّرت موضوعات المعادلات التفاضليّة وتحليل فورييه، والتوابع المولّدة في العمل التطبيقي في القرنين السابع عشر والثامن عشر، وجرى استخدام تقانات حسابَي التفاضل والتكامل بنجاح في تقريب العديد من المسائل المنقطعة، والمسائل المتّصلة.

وبقي تعريف مفهوم التابع موضع نقاش ومحاورة بين الرياضيّاتيين طوال القرن الثامن عشر، وكان كوشي CAUCHY أوّل من وضع التحليل الرياضي على أسس منطقيّة صلبة بإدخاله مفهوم متتاليات كوشي وذلك مع بداية القرن التاسع عشر. كما أرسى كوشي القواعد الصوريّة الأساسيّة للتحليل العقدي ووضع شروطاً تضمن وجود حلول للمعادلات التفاضليّة ووحدانية هذه الحلول. ودرسَ بواسون POISSON وليوفيل LIOUVILLE وفورييه FOURIER وغيرهم المعادلات التفاضليّة الجزئيّة والتحليل التوافقي.

وفي منتصف القرن التاسع عشر وضع ريمان RIEMANN نظريّته في التكامل. وشهد الثُلث الأخير من ذلك القرن إعادة التنظيم الأخيرة للمفاهيم الأساسيّة في التحليل الرياضي بجهود فايرشتراس WEIERSTRASS ، الذي رأى أنّ النظرة الهندسيّة لمفاهيم النهاية والاستمرار تقود أحياناً إلى استنتاجات خاطئة، فوضع ما يسمّى تعريف ε-δ للنهاية. وبعدها تنبّه الرياضيّاتيّون إلى أنّهم يفترضون وجود مجموعة "متّصلة" من الأعداد الحقيقيّة دون أي إثبات على وجود هذه المجموعة، فأنشأ ديدكند DEDKINDE مجموعة الأعداد الحقيقيّة مستخدماً ما سُميّ لاحقاً "مقاطع ديدكند"، وجرت في الوقت نفسه تقريباً محاولات تطوير المبرهنات المتعلّقة بتكامل ريمان، وهذا ما أدّى إلى دراسة "قياس" المجموعات التي تكون عليها التوابع الحقيقيّة منقطعة.

وبدأت تظهر «الوحوش» المتمثّلة بتوابع غريبة مثل التوابع الحقيقيّة التي لا تقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة، أو تلك التوابع التي تملأ منحنياتها الفراغ. وفي هذه الحقبة، طوّر جوردان JORDAN وبورِل BOREL نظرّية القياس، وطوّر كانتور CANTOR ما يُعرف اليوم بالنظريّة «الساذجة» للمجموعات.

ومع بداية القرن العشرين صار التحليل الرياضي يُصاغ باستخدام المفاهيم الجديدة في نظريّة المجموعات، وحلّ لوبيغ LEGESGUE مسألة نظريّة القياس والتكامل، وأدخل هِلبرت HILBERT مفهوم الفضاءات التي عُرفت فيما بعدُ باسمه لحل المعادلات التكامليّة، وكان مفهوم الفضاء الشعاعي المنظّم في الجوّ، إذ أنشأ باناخ BANACH في العشرينيات من ذلك القرن التحليل التابعي.

بدأت مفاهيم التوابع المعمّمة أو التوزيعات تظهر في نهايات القرن التاسع عشر، وذلك في إطار توابع غرين GREEN، وتحويلات لابلاس LAPLACE ونظريّة ريمان للمتسلسلات المثلثيّة التي هي ليست متسلسلات فورييه لتوابع قابلة للمُكاملة على سبيل المثال. وقاد الاستخدام المُكثّف لتحويلات لابلاس، واستخدام طرائق الحساب الرمزي إلى ما صار يُعرف بحساب العمليات. حملت هذه الطرائق سمعة سيّئة بين الرياضيّاتيين لأنّ تعليل صحّتها كان يعتمد على متسلسلات متباعدة.

أمّا المرّة الأولى التي احتل فيها مفهوم التابع المُعمّم موقعاً مركزيّاً في الرياضيّات فقد جاءت في إطار تكامل لوبيغ، إذ صار التابع القابل للمكاملة بمعنى لوبيغ مُكافئاً لأي تابع يتفق معه اتفاقاً شبه أكيد. وظهر تابع ديراك δ في العشرينيات والثلاثينيات من القرن العشرين، إذ راح ديراك DIRAC يتعامل مع القياس بصفته تابعاً بالمعنى التقليدي.

وجاء التتويج النهائي لهذه المفاهيم في نظريّة التوزيعات لشوارتز SCHWARTZ وذلك في نهاية الأربعينيات من القرن العشرين. تكمن نقطة الضعف الأساسيّة في هذه النظريّة في أنّه لا يمكن في إطار هذه النظريّة معالجة المسائل اللاخطيّة، فالتوزيعات بمعنى شوارتز لا تؤلّف جبراً، ولا يمكن حساب جداء ضرب التوزيعات كما تُضرب التوابع.

يهدف هذا المؤلَّف إلى دراسة التحليل الرياضي، وهو موجّه إلى طلاب سيتابعون دراستهم في مجالات هندسيّة، ومكوّن من خمسة أجزاء.

نعالج في هذا الجزء الخامس الموضوعات الآتية:

- يدرس الفصل الحادي والعشرون نشر التوابع الدوريّة بمتسلسلات فورييه، وأنماط التقارب المختلفة لهذه المتسلسلات، وبعض التطبيقات.

- ويعرض الفصل الثاني والعشرون مقدّمة حول نظريّة القياس وتكامل لوبيغ، ومبرهنات التقارب المختلفة، والتكاملات التابعة لوسيط، والتكاملات المضاعفة، وفضاءات التوابع القابلة للمكاملة، والفضاءات L^p .

- ويتضمّن الفصل الثالث والعشرون دراسة تحويلات فورييه في فضاء التوابع القابلة للمكاملة، وفي فضاء التوابع ذات التناقص السريع، وفي الفضاء L^2 .

- وأخيراً يحتوي الفصل الرابع والعشرون على دراسة توزيعات شوارتز، والعمليّات عليها، والتوزيعات المُلطّفة، وتحويلات فورييه عليها. وكذلك يدرس التوزيعات ذات الحوامل المتراصّة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصّة أو كتاب شعر يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلّاً ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألّا يطّلع على الحلول المُقترحة للتمارين إلّا بعد أن يستنفد جميع محاولات حلها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النّور، وأُعرب سلفاً عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءَيْن حول فحوى هذا الكتاب.

أيار 2017

عمران قوبا

متسلسلات فورييه

1. فضاء التوابع $\mathcal{R}_{2\pi}$

نذكّر فيما يلي بتعريف توابع الصف $\mathcal{R}$ الذي درسناه سابقاً.

1-1. تعريف. ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً وغير تافه من $\mathbb{R}$. نقول إنّ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ينتمي إلى **الصف** $\mathcal{R}$ إذا وفقط إذا وُجدت متتالية من التوابع المستمرّة قِطَعيّاً متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من f. و يكافئ هذا الشرط وجود نهاية من اليمين عند كلّ نقطة من $[a,b[$ ونهاية من اليسار عند كلّ نقطة من $]a,b]$ للتابع f. ونقول إنّ التابع $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ إذا انتمى كلٌّ من $\operatorname{Im} f$ و $\operatorname{Re} f$ إلى الصف $\mathcal{R}$. وأخيراً نقول إنّ التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}_{2\pi}$، ونكتب عندئذ $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$ إذا وفقط إذا كان f تابعاً دورياً ويقبل 2π دوراً له، وانتمى مقصور f على المجال $[0,2\pi]$ إلى الصف $\mathcal{R}$.
لقد جرت العادة أنّ نستخدم الرموز الآتية في حالة f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، و x من $\mathbb{R}$:

$$f(x^-)=\lim_{t\to x,t<x} f(t) \quad \text{و} \quad f(x^+)=\lim_{t\to x,t>x} f(t)$$

1-2. ملاحظات

- سندرس في هذا الفصل التوابع الـ $2\pi-$دوريّة، وذلك لأنّ دراسة التوابع التي تقبل العدد T دوراً لها تؤول إلى الحالة السابقة بتغيير بسيط للمتحوّل.
- تكوّن مجموعة التوابع $\mathcal{R}_{2\pi}$ جبراً بالنسبة إلى قوانين التشكيل المألوفة مثل جمع التوابع، وضرب التوابع بعدد عقدي، وضرب التوابع. ويحتوي هذا الجبر على جبر التوابع الـ $2\pi-$دوريّة المستمرّة قِطعيّاً وهذا بدوره يحتوي على $\mathcal{C}_{2\pi}$ أي جبر التوابع الـ $2\pi-$دوريّة والمستمرّة.
- إذا كان f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$ فإنّ التكامل $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ لا يتعلّق بالعدد الحقيقي a ونرمز إليه بالرمز $\int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{d}t$ أو $\int_{\mathbb{T}} f$.

إذا كان f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عرّفنا

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle} \quad \text{و} \quad \langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)}\cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

إنّ التطبيق $\langle\cdot,\cdot\rangle$ تطبيق نصف خطّي بالنسبة إلى المركّبة الأولى، وخطّي بالنسبة إلى المركّبة الثانية، وهو هرمتي وموجب. ولكنّه ليس جداءً سلميّاً على $\mathcal{R}_{2\pi}$، لأنّ الشرط $\langle f,f\rangle = 0$ لا يقتضيّ $f = 0$. نقول في مثل هذه الحالة إنّ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ **نصف جداء سلّمي** على $\mathcal{R}_{2\pi}$. ولكنّ مقصور $\langle\cdot,\cdot\rangle$ على الفضاء $\mathcal{C}_{2\pi}\times\mathcal{C}_{2\pi}$ يجعل من $\mathcal{C}_{2\pi}$ فضاءَ جداء سلّمي ويكون مقصور $\|\cdot\|_2$ على $\mathcal{C}_{2\pi}$ نظيماً.

نستخدم أيضاً، على الفضاء $\mathcal{R}_{2\pi}$ **النظيم المنتظم**؛ أي المعرّف بالعلاقة

$$\forall f\in\mathcal{R}_{2\pi},\quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

1-3. تعريف. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$، وليكن x عدداً من $\mathbb{R}$. عندئذ ينتمي التابع $t\mapsto f(t)g(x-t)$ إلى $\mathcal{R}_{2\pi}$ فنضع بالتعريف

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

وعندها نسمّي التابع الـ $2\pi-$دوريّ الذي يقرن بالعدد x العددَ $f*g(x)$ **جداءَ التلافّ** للتابعين f و g.

يبيّن تغيير المتحوّل $t\mapsto x-u$ في التكامل الذي يُعرِّف $f*g(x)$ أنّ جداء التلافّ تبديليٌّ أي $f*g = g*f$.

1-4. مبرهنة. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ يكون التابع $f*g$ مستمراً. أي

$$(f,g)\in\mathcal{R}_{2\pi}\times\mathcal{R}_{2\pi} \Rightarrow f*g\in\mathcal{C}_{2\pi}$$

الإثبات

لنذكّر أوّلاً بالخاصة المهمة الآتية:

ليكن $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمراً، عندئذ تتقارب المتتالية $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$، المعرّفة بالصيغة الآتية $h_n(x) = h(a+\frac{b-a}{n}\lfloor n\frac{x-a}{b-a}\rfloor)$، بانتظام من التابع h.

في الحقيقة، إنّ إثبات هذه الخاصّة بسيط انطلاقاً من الاستمرار المنتظم للتابع h على $[a,b]$، وقد عرضناه في تمارين بحث متتاليات التوابع، كذلك في بحث تحويلات لابلاس في الجزء الرابع.

نلاحظ أنّ التابع h_n تابعٌ ثابتٌ على كلٍّ من المجالات $\left]a+\delta_n k, a+\delta_n(k+1)\right[$

حيث $0 \le k < n$ و $\delta_n = (b-a)/n$

فنقول إنّه تابع درجيّ. نستنتج إذن أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ تكوّن مجموعة كثيفة في فضاء التوابع المستمرّة على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.

وإذا كان $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ مستمراً قِطَعيّاً وجدنا $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}=b$ تجعل كلّاً من التوابع $h_{|]t_k,t_{k+1}[}$ قابلاً للتمديد إلى تابع مستمرٍّ على $[t_k,t_{k+1}]$. إذن يمكن تقريب التابع $h_{|]t_k,t_{k+1}[}$ بانتظام بمتتالية من التوابع الدرجيّة، وبناءً على ذلك يمكن تقريب التابع h ذاته بمتتالية متقاربة بانتظام من التوابع الدرجيّة.

وأخيراً إذا كان $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$ وجدنا متتالية $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع المستمرة قِطَعِياً تحقّق $h \overset{u}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n$. واستناداً إلى المناقشة السابقة نجد، أيّاً كان n، تابعاً درجيّاً h_n يُحقّق $\sup_{[a,b]}\left|h_n-\tilde{h}_n\right| \le 2^{-n}$ وعلى هذا يكون $h \overset{u}{=} \lim_{n\to\infty} h_n$. نستنتج إذن أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ كثيفة في فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.

ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ نجد متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع الدرجيّة على $[0,2\pi]$ متقاربة بانتظام من $f_{|[0,2\pi]}$. وعندها، مهما تكن x من $\mathbb{R}$، يكن :

$$\begin{aligned}\left|f*g(x)-f_n*g(x)\right| &\le \int_0^{2\pi}\left|f(t)-f_n(t)\right|\left|g(x-t)\right|\frac{\mathrm{d}\,t}{2\pi}\\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{[0,2\pi]}\left|f-f_n\right|\cdot\int_{\mathbb{T}}\left|g\right|\end{aligned}$$

أو

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|f*g-f_n*g\right| \le \frac{1}{2\pi}\sup_{[0,2\pi]}\left|f-f_n\right|\cdot\int_{\mathbb{T}}\left|g\right|$$

أي تتقارب المتتالية $(f_n*g)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام من التابع $f*g$. إذن يكفي حتى يُنجز البرهان أن نثبتَ أنّ التوابع f_n*g مستمرّة، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.

ليكن $h:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ تابعاً درجيّاً. إذن يوجد أعداد $(t_k)_{0\le k\le m+1}$ وتوجد أعداد $(\lambda_k)_{0\le k\le m}$ تحقّق $0=t_0<t_1<\cdots<t_{m+1}=2\pi$ و

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,m\},\ \forall t\in\,]t_k,t_{k+1}[,\quad h(t)=\lambda_k$$

وبناءً على هذا يكون

$$h*g(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_k}{2\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(x-t)\,\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_k}{2\pi}\int_{x-t_{k+1}}^{x-t_k}g(u)\,\mathrm{d}\,u$$

والتابع $h*g$ مستمرٌّ لأنّ التابع $t\mapsto G(t)=\int_0^t g(u)\,\mathrm{d}\,u$ تابعٌ مستمرٌّ. ❐

2. تعريف متسلسلات فورييه Fourier

2-1. تعريف. ليكن k من $\mathbb{Z}$، نعرّف التابع e_k من $\mathcal{C}_{2\pi}$ بالعلاقة $e_k(x)=\exp(\mathrm{i}\,kx)$، ونسمي كلَّ عبارة خطيّة في الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ **كثير حدود مثلّثي**، ونرمز بالرمز $\mathcal{T}$ إلى فضاء كثيرات الحدود المثلثيّة أي $\mathcal{T}=\mathrm{vect}\big((e_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$. وإذا كان n من $\mathbb{N}$ عرّفنا الفضاء الشعاعي الجزئي $\mathcal{T}_n=\mathrm{vect}\big((e_k)_{|k|\le n}\big)$. نذكّر أنّ الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ تكوّن أساساً متعامداً نظامياً للفضاء $\mathcal{T}$. (بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرّفناه على $\mathcal{C}_{2\pi}$).

ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$T_f:\mathcal{R}_{2\pi}\to\mathcal{R}_{2\pi},\quad g\mapsto f*g$$

نلاحظ أنّه، مهما تكن k من $\mathbb{Z}$، فلدينا

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad T_f(e_k)(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)e^{\mathrm{i}\,k(x-t)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}}f(t)e^{-\mathrm{i}\,kt}\mathrm{d}t\right)\cdot e^{\mathrm{i}\,kx}\\&=\langle e_k,f\rangle e_k(x)\end{aligned}$$

فالجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ مكوّنة من أشعة ذاتيّة للتطبيق الخطّي T_f، والقيمة الذاتيّة الموافقة للشعاع الذاتي e_k هي $\langle e_k,f\rangle$. تبرّر لنا هذه الملاحظة وضع التعريف الآتي.

2-2. **تعريف**. ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، نعرّف الجماعة $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ بالعلاقة

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t = \langle e_n, f\rangle$$

ونسميها **طيف فورييه** للتابع f [1]، ونسمّي العدد $C_n(f)$ **ثابت (أو مُعامل) فورييه الأسّي** من المرتبة n للتابع f.

لقد أثبتنا أنّ

$$\forall f \in \mathcal{R}_{2\pi},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f * e_n = C_n(f)\cdot e_n$$

3-2. **تعريف**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$، نعرّف الجماعتين $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالعلاقتين :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}\,t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}\,t$$

ونسمّيهما **ثوابت (أو مُعاملات) فورييه المثلثيّة** للتابع f . ونتيقَّن بسهولة صحة العلاقات

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = C_n(f) + C_{-n}(f)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \mathrm{i}\big(C_n(f) - C_{-n}(f)\big)$$

4-2. **اصطلاح**. لتكن $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ جماعة ما من عناصر فضاء شعاعي منظّم. نصطلح أنّ نستخدم الرمز $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n$ دلالة على المتسلسلة $\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n + \lambda_{-n})$.

5-2. **تعريف**. ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، نسمّي **متسلسلة فورييه** للتابع f متسلسلة التوابع

$$S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\,e_n$$

أو، بأسلوب مُكافئ، متسلسلة التوابع المعرّفة بالصيغة :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\big)$$

[1] الأصحّ أن نقول طيف T_f **1**؟

3. خواص ثوابت فورييه

تلخِّصُ المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة التي تُبرهَنُ مباشرة انطلاقاً من التعريف تاركين تفاصيل الإثبات تمريناً للقارئ.

3-1. مبرهنة

1. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$، وليكن λ و μ من $\mathbb{C}$، عندئذ
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(\lambda f + \mu g) = \lambda C_n(f) + \mu C_n(g)$$
2. ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، و τ من $\mathbb{R}$. نعرِّف f_τ من $\mathcal{R}_{2\pi}$ بالعلاقة
$$f_\tau(x) = f(x-\tau)$$
عندئذ يكون
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f_\tau) = C_n(f) \cdot e^{-\mathrm{i}n\tau}$$
3. ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$، و لتكن (n,m) من $\mathbb{Z}^2$، عندئذ يكون
$$C_n(e_m \cdot f) = C_{n-m}(f)$$

ونأتي الآن إلى مبرهنة مهمّة جداً.

3-2. مبرهنة : ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f * g) = C_n(f) \cdot C_n(g)$$

الإثبات

- لنبدأ بإثبات الحالة الخاصّة الموافقة للقيمة $n = 0$. لمّا كان مقصور التابع $g * f$ على المجال $[0, 2\pi]$ مستمرّاً استنتجنا أنّ
$$C_0(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f*g(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f*g\left(\frac{2\pi k}{m}\right)$$
وإذا عُدنا إلى تعريف $g * f$ واستخدمنا الخاصّة الخطيّة للتكامل استنتجنا
$$C_0(f*g) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2\pi k}{m} - t\right)\right)\mathrm{d}\,t$$

لنعرِّف إذن

$$h_m : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\, h_m(t) = f(t)\cdot \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2\pi k}{m} - t\right)$$

نلاحظ أنّ h_m ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ أياً كانت $0 < m$، وأنّ

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\quad \lim_{m\to\infty} h_m(t) &= f(t)\cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u-t)\,\mathrm{d}\,u\\ &= f(t)\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(w)\,\mathrm{d}\,w = C_0(g)\cdot f(t)\end{aligned}$$

وأخيراً نرى أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,2\pi],\quad \left|h_m(t)\right| \le \left\|f\right\|_\infty \left\|g\right\|_\infty$$

فإذا استخدمنا مبرهنة التقارب للوبيغ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}C_0(f*g) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_m(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to\infty} h_m(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= C_0(g)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

أو $C_0(f*g) = C_0(f)\cdot C_0(g)$، وبذا يتم إثبات المطلوب في حالة $n = 0$.

- لنثبتْ الحالة العامّة، لتكن n من $\mathbb{Z}$، عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}(e_{-n}\cdot f)*(e_{-n}\cdot g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}nt} f(t) e^{-\mathrm{i}n(x-t)} g(x-t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= e^{-\mathrm{i}nx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= e_{-n}\cdot(f*g)(x)\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}C_n(f*g) &= C_0\left(e_{-n}(f*g)\right) = C_0\left((e_{-n}f)*(e_{-n}g)\right)\\ &= C_0(e_{-n}f)\cdot C_0(e_{-n}g) = C_n(f)\cdot C_n(g)\end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب. $\square$

3-3. مبرهنة – متراجحة بِسِل Bessel. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|C_n(f)\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

الإثبات

ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$، ولتكن n من $\mathbb{N}$. نضع بالتعريف

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\cdot e_k = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f\rangle \cdot e_k$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $\langle f - S_n(f), e_p\rangle = 0$ أيّاً كانت العدد p من المجال $[-n,n]$. ومنه نستنتج أنّ

$$\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0$$

ومن ثَمّ

$$\|S_n(f)\|_2^2 \leq \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

ولكن نجد بحساب بسيطٍ أنّ

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n} \left|C_k(f)\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة. ❐

النتيجتان الآتيتان واضحتان انطلاقاً من المبرهنة السابقة.

4-3. نتيجة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ

$$\frac{1}{2}\left|a_0(f)\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n(f)\right|^2 + \left|b_n(f)\right|^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

5-3. نتيجة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$، عندئذ

$$\lim_{n\to\infty} C_n(f) = \lim_{n\to\infty} C_{-n}(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$$

3-6. **مبرهنة**. ليكن f و g من $\mathcal{R}_{2\pi}$، وليكن $h = f * g$. عندئذ تتقارب متسلسلة فورييه للتابع h بالنظيم. وبقول أكثر دقّة تتحقّق المتراجحة

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|C_n(f*g)\right| \le \left\|f\right\|_2 \cdot \left\|g\right\|_2$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض أنّ $\|f\|_2 \neq 0$، وإلّا لا يوجد ما يجب إثباته. لتكن λ من $\mathbb{R}_+^*$، وعندئذ يُمكننا أن نكتب، بمُقتضى المبرهنة 3-2. ما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad C_n(h) = C_n(f)\cdot C_n(g) = C_n(\lambda f)\cdot C_n\left(\frac{1}{\lambda}g\right)$$

ومن ثَمّ[2]

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \left|C_n(h)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|C_n(\lambda f)\right|^2 + \left|C_n\left(\frac{1}{\lambda}g\right)\right|^2\right)$$

واستناداً إلى متراجحة Bessel نجد

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n}\left|C_k(h)\right| \le \frac{1}{2}\left(\lambda^2\left\|f\right\|_2^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left\|g\right\|_2^2\right)$$

أياً كانت قيمة λ . فإذا اخترنا قيمة λ التي تجعل الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة أصغرياً، أي $\lambda = \sqrt{\left\|g\right\|_2/\left\|f\right\|_2}$، وجدنا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n}\left|C_k(h)\right| \le \left\|f\right\|_2 \cdot \left\|g\right\|_2$$

وهذا يُثبت النتيجة المطلوبة. ❒

3-7. **مبرهنة**. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف C^1 و $2\pi-$دوري. عندئذ

$$\forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\qquad C_n(f) = \frac{1}{\mathrm{i}n}C_n(f')$$

الإثبات

---

[2] لأنّ $ab \le (a^2+b^2)/2$

يكفي إجراء مُكاملة بالتجزئة لنجد

$$\begin{aligned}C_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\right]_0^{2\pi} + \frac{\mathrm{i}\,n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \mathrm{i}\,nC_n(f) = \mathrm{i}\,nC_n(f)\end{aligned}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

3-8. نتيجة. ليكن k من $\mathbb{N}^*$، وليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً $2\pi-$دورياً من الصف C^k، عندئذ يكون $C_n(f)=o(n^{-k})$.

الإثبات

في الحقيقة، نستنتج من المبرهنة السابقة وبالتدريج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad n^k\left|C_n(f)\right| = \left|C_n(f^{(k)})\right|$$

ونحصل على النتيجة المطلوبة بالاستفادة من النتيجة 3-5. ❐

4. التقارب البسيط لمتسلسلات فورييه

تؤدّي التوطئة الآتية دوراً مهماً في دراستنا اللاحقة.

4-1. توطئة – ريمان Riemann. ليكن $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$. عندئذ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

الإثبات

لقد وجدنا عند إثبات المبرهنة 1-4. أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ كثيفة في فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.

لتكن $0<\varepsilon$. إذن، يوجد تابعٌ درجيٌّ g_ε على $[a,b]$، يُحقّق الشرط :

$$\sup_{[a,b]}|g-g_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

وعندها، مهما تكن λ من $\mathbb{R}$ يكن :

$$\left|\int_a^b g(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t-\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right|\le(b-a)\sup_{[a,b]}\left|g-g_\varepsilon\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad ①$$

ولمّا كان g_ε تابعاً درجيّاً، وجدنا نقاطاً $(t_k)_{0\le k\le m+1}$ وأعداداً $(\alpha_k)_{0\le k\le m}$ تُحقّق

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{m+1}=b$$

و

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,m\},\ \forall t\in\,]t_k,t_{k+1}[,\quad g_\varepsilon(t)=\alpha_k$$

وبناءً على هذا يكون

$$\begin{aligned}\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t&=\sum_{k=0}^m\alpha_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^m\alpha_k\left(\cos\lambda t_k-\cos\lambda t_{k+1}\right)\end{aligned}$$

ومنه

$$\left|\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right|\le\frac{2}{\lambda}\sum_{k=0}^m\left|\alpha_k\right|$$

فإذا اخترنا $\lambda_\varepsilon=\frac{4}{\varepsilon}\sum_{k=0}^m\left|\alpha_k\right|$ صار لدينا

$$\forall\lambda>\lambda_\varepsilon,\quad\left|\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right|\le\frac{\varepsilon}{2} \quad ②$$

ومن ① و ② نجد

$$\forall\lambda>\lambda_\varepsilon,\quad\left|\int_a^b g(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right|\le\varepsilon$$

وبهذا يتمّ الإثبات. ❐

2-4. **تعريف**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$. لقد عرّفنا، في حالة n من $\mathbb{N}$، المجموع الجزئيّ :

$$S_n(f)=\sum_{k=-n}^n C_k(f)e_k=\sum_{k=-n}^n f*e_k=f*\left(\sum_{k=-n}^n e_k\right) \quad ❶$$

نسمّي العنصرَ $D_n=\sum_{k=-n}^n e_k$ من $\mathcal{R}_{2\pi}$ **نواة ديرخليه** Dirichlet ذات الدليل n.

ويتيقَّن القارئ بحساب بسيط أنّ

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}(e^{\mathrm{i}\,x})^k=\frac{e^{-\mathrm{i}\,nx}-e^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-e^{\mathrm{i}\,x}}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\quad D_n(x)=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} \qquad ❷$$

ليكن x من $\mathbb{R}$. تُكتبُ العلاقة ❶ بالشكل

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

فإذا استفدنا من كوْن التابع D_n زوجيّاً أمكننا تحويل التكامل السابق إلى الشكل

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}\,t+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\,f(x+t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}$$

إذن نستنتج أنّه، مهما تكن ℓ من $\mathbb{C}$، فلدينا

$$S_n(f)(x)-\ell=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\Big(f(x-t)+f(x+t)-2\ell\Big)\mathrm{d}\,t$$

ولكنّ توطئة Riemann تبيِّنُ أنّ

$$\forall\delta\in]0,\pi],\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}D_n(t)\Big(f(x-t)+f(x+t)-2\ell\Big)\mathrm{d}\,t=0$$

وعليه نكون قد أثبتنا تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

❸

- ❖ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=\ell$
- ❖ يوجد عدد δ من $]0,\pi]$ يحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\delta}D_n(t)\Big(f(x-t)+f(x+t)-2\ell\Big)\mathrm{d}\,t=0$$

ولكنّ التابع

$$t \mapsto \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}$$

يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $[0,\pi]$ ، وبناءً على ذلك فإنّ توطئة Riemann تتيح لنا أن نكتبَ، أيّاً كانت δ من $]0,\pi]$ ،

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \left(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}\right)\big(f(x-t)+f(x+t)-2\ell\big)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t = 0$$

فإذا استفدنا من ذلك، وعُدنا إلى عبارة D_n في ❷، أمكننا التعبير عن التكافؤ ❸ كما يأتي:

الخاصتان الآتيتان متكافئتان:

❹

❖ $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \ell$

❖ يوجد عدد δ من $]0,\pi]$ يحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x-t)+f(x+t)-2\ell}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t = 0$$

تتيح لنا المناقشة السابقة إثبات المبرهنة المهمّة الآتية.

3-4. مبرهنة Dirichlet. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$. ولتكن x من $\mathbb{R}$. نعرّف التطبيقين

$$f^- : \left]-\infty, x\right] \to \mathbb{C},\quad f^-(t) = \begin{cases} f(x^-) & : \ t = x \\ f(t) & : \ t < x \end{cases}$$

$$f^+ : \left[x, +\infty\right[\to \mathbb{C},\quad f^+(t) = \begin{cases} f(x^+) & : \ t = x \\ f(t) & : \ t > x \end{cases}$$

إذا كان التطبيقان f^- و f^+ قابلين للاشتقاق عند x ، كانت متسلسلة فورييه للتابع f متقاربة عند النقطة x ، وكان مجموعها $S(f)(x)$ مساوياً $\frac{1}{2}\big(f(x^+)+f(x^-)\big)$.

الإثبات

لنعرّف

$$\ell = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

وليكن δ عنصراً ما من $]0,\pi]$. عندئذ نتيقَّن بسهولة أنّ

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2\ell}{t} = (f^+)'(x) - (f^-)'(x)$$

وبناءً على ذلك يقبل التابع

$$t \mapsto \frac{f(x+t)+f(x-t)-2\ell}{t}$$

التمديد إلى تابع من الصف $\mathcal{R}$ على المجال $[0,\delta]$. ومن ثَمّ فإنّ توطئة Riemann تقتضي ما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x-t)+f(x+t)-2\ell}{t} \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}\, t = 0$$

فإذا استفدنا من التكافؤ ❹ وصلنا إلى النتيجة المطلوبة. ❐

4-4. نتيجة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{C}_{2\pi}$ ، قابلاً للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند كلِّ نقطة من $\mathbb{R}$. عندئذ تتقارب متسلسلة فورييه للتابع f ببساطة من التابع f .

5. التقارب بمعنى سيزارو لمتسلسلات فورييه

1-5. تعريف. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نعرّف **نواةَ فَيِّر** Fejér ذات الدليل n ، بأنّها العنصر

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

من $\mathcal{R}_{2\pi}$ حيث D_k نواةُ ديرخليه ذات الدليل k .

نلخِّص فيما يأتي بعض أهم خواص نواة فَيِّر.

2-5. مبرهنة

1.مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن x من $\mathbb{R}$، فلدينا

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

2. مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن x من $\mathbb{R}$، يكن $K_n(x) \geq 0$.

3.مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، يكن $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$.

4.مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن δ من $]0,\pi[$ ، تكن المتراجحة الآتية صحيحة:

$$\forall x \in [-\pi,\pi]\backslash[-\delta,\delta], \quad K_n(x) \leq \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}$$

الإثبات

1. لنعرّف $\tilde{K}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{\mathrm{i}kx}$. عندئذ، أيّاً كانت $m \geq 1$، فلدينا

$$\begin{aligned}(m+1)\tilde{K}_{m+1} - m\tilde{K}_m &= \sum_{k=-m}^{m}(m+1-|k|)e^{\mathrm{i}k\bullet} - \sum_{k=-m}^{m}(m-|k|)e^{\mathrm{i}k\bullet}\\ &= \sum_{k=-m}^{m} e^{\mathrm{i}k\bullet} = D_m\end{aligned}$$

ولكن $\tilde{K}_1 = D_0 \equiv 1$ إذن

$$\begin{aligned}n\tilde{K}_n &= \tilde{K}_1 + \sum_{m=1}^{n-1}((m+1)\tilde{K}_{m+1} - m\tilde{K}_m)\\ &= D_0 + \sum_{m=1}^{n-1} D_m = nK_n\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ المساواة الأولى. ومن جهة أخرى نعلم أنّه، في حالة x من $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ لدينا

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{1-\cos x}$$

فإذا استفدنا من العلاقة $(n+1)K_{n+1} - nK_n = D_n$ أمكننا أن نكتب، أيّاً كانت n،

$$(n+1)K_{n+1}(x) + \frac{\cos(n+1)x}{1-\cos x} = nK_n(x) + \frac{\cos nx}{1-\cos x}$$

وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج

$$nK_n(x)+\frac{\cos nx}{1-\cos x}=K_1(x)+\frac{\cos x}{1-\cos x}=\frac{1}{1-\cos x}$$

وذلك مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. ومن ثَمّ نجد بإصلاح العلاقة السابقة:

$$K_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

وتبقى هذه العلاقة صحيحة حين ينتمي x إلى $2\pi\mathbb{Z}$ على أن نُمدِّد الطرف الأيمن بالاستمرار عند هذه النقاط.

2. إنّ الخاصّة المذكورة واضحة اعتماداً على النتيجة السابقة.

3. لمّا كان $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}x=0$ في حالة $k\neq 0$، استنتجنا من المساواة الأولى في 1. أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,\mathrm{d}x=1$$

4. من الواضح أنّ

$$\forall x\in[-\pi,\pi]\backslash[-\delta,\delta],\quad \sin^2(\delta/2)\le\sin^2(x/2)$$

وبالاستفادة من المساواة الثانية في 1. نحصل على المتراجحة المطلوبة. ❐

ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$. لقد وجدنا أنّ متتالية المجاميع الجزئيّة $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ لمتسلسلة فورييه للتابع f ، يمكن بوجهٍ عامٍّ، ألّا تكون متقاربة. ولكن ماذا يمكننا أن نقول عن متتالية **متوسطات سيزارو** Cesàro أي المتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$، حيث $\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f)$ ؟

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f*D_k\\&=f*\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k\right)=f*K_n\end{aligned}$$

وإذا استخدمنا المبرهنة 2-5. وجدنا

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k(f) e^{\mathrm{i}kx}$$

وبالاستفادة من كوْن K_n تابعاً زوجياً ومن الخاصّة 3. في المبرهنة 2-5. نجد

$$\text{①} \qquad \sigma_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) \cdot \big(f(x+t) + f(x-t) - 2\ell\big)\,\mathrm{d}t$$

تتيح لنا خواص نواة فَيِّر أن نثبت المبرهنة المهمّة الآتية.

5-3. مبرهنة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$. ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع f ، وأخيراً لتكن $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متوسطات سيزارو Cesàro للمتتالية $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، أي $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$. عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

الإثبات

لتكن x من $\mathbb{R}$ ، نعرّف كما في السابق $\ell = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. ونعوّض في ① فنجد

$$\sigma_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)\big(f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)\big)\,\mathrm{d}t$$

ومن ثَمّ، أياً كانت δ من $]0,\pi]$ ، فلدينا

$$\left|\sigma_n(f)(x) - \ell\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} K_n(t)\Delta_x(t)\,\mathrm{d}t + \frac{4}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) \cdot \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t$$

حيث

$$\Delta_x(t) = \left|f(x+t) - f(x^+)\right| + \left|f(x-t) - f(x^-)\right|$$

وبالاستفادة من المبرهنة 2-5. نجد، أياً كانت δ من $]0,\pi]$ ، وأياً كان n من $\mathbb{N}^*$ ، ما يلي :

$$\text{②} \qquad \left|\sigma_n(f)(x) - \ell\right| \le \sup_{0<t<\delta} \big(\Delta_x(t)\big) + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2(\delta/2)}$$

لتكن $\varepsilon > 0$، إذن يوجد، استناداً إلى تعريف النهاية، δ_ε من $]0,\pi]$ يُحقّق

$$0 < t < \delta_\varepsilon \Rightarrow \Delta_x(t) \le \varepsilon$$

وبعدها نجد n_ε في $\mathbb{N}^*$، يُحقّق

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta_\varepsilon/2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا طبّقنا ② استنتجنا، اعتماداً على ما سبق، أنّ

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \left|\sigma_n(f)(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

أي إنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ ، وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

5-4. نتيجة. ليكن f من $\mathcal{R}_{2\pi}$. إذا تقاربت متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة ما x من $\mathbb{R}$، حينئذ يكون مجموعها $S(f)(x)$ مساوياً $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

الإثبات

لنفترض أنّ متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة x من $\mathbb{R}$، متقاربة، وأنّ مجموعها يساوي ℓ. عندئذ تتقارب متتالية المجاميع الجزئيّة $(S_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ من ℓ، واستناداً إلى توطئة سيزارو تتقارب المتتالية $(\sigma_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ أيضاً من ℓ. ولكنّ نهاية هذه المتتالية الأخيرة هي $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ بمُقتضى المبرهنة السابقة، إذن $\ell = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. وبذلك يتم إثبات المطلوب. ❐

5-5. نتيجة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{C}_{2\pi}$. إذا تقاربت متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة ما x من $\mathbb{R}$، حينئذ يكون مجموعه $S(f)(x)$ مساوياً $f(x)$.

الإثبات

هذه نتيجة واضحة من الخاصّة السابقة. ❐

5-6. نتيجة. ليكن f من $\mathcal{C}_{2\pi}$. إذا كان طيف f صفرياً كان التابع f ذاته صفرياً. أي إنّ الشرط $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n(f) = 0$ يقتضي $f = 0$.

الإثبات

لأنّه عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)C_k(f)e_k = 0$$

والمتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب ببساطة من f بناءً على المبرهنة 5-3. ❐

5-7. **ملاحظة**. تُبيِّنُ الخاصّة السابقة أن التطبيق الخطّي الذي يربط بتابع مستمرٍّ و $2\pi-$دوري f طيفَه؛ أي $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ هو تطبيق خطّي متباين. وعادة نستخدم هذه الخاصّة على الوجه الآتي:
"إذا كان لتابعين مستمرّيْن و $2\pi-$دوريين الطيف نفسه، أي ثوابت فورييه نفسها، كانا متساويين".

وبوجه عام، إنّ الإثبات السابق نفسه يبيِّن أنّه إذا كان لتابعين من الصف $\mathcal{R}_{2\pi}$ الطيف نفسه، كانا متساويين عند نقاط استمرارهما المشتركة.

5-8. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{C}_{2\pi}$. ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع f. وأخيراً لتكن $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متوسطات سيزارو للمتتالية $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. عندئذ تتقارب المتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ بانتظام من f.

الإثبات

لمّا كان $\sigma_n(f) = f * K_n$ فإننا نجد استناداً إلى النقطة 3. من المبرهنة 5-2. أنّه مهما كان n من $\mathbb{N}^*$ ومهما كان العدد الحقيقي x كان

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\big(f(x-t)-f(x)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

وبناءً عليه، مهما تكن x من $\mathbb{R}$، و n من $\mathbb{N}^*$، و δ من $]0,\pi[$ يكن لدينا

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n(f)(x)-f(x)\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\left|f(x-t)-f(x)\right|\mathrm{d}\,t + \\ &\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)\left|f(x-t)-f(x)\right|\mathrm{d}\,t \\ &\le \sup_{|t|\le\delta}\left|f(x-t)-f(x)\right| + 2\left\|f\right\|_\infty \sup_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)\end{aligned}$$

وأخيراً، مهما تكن x من $\mathbb{R}$، و n من $\mathbb{N}^*$، و δ من $]0,\pi[$ يكن لدينا

$$① \qquad \left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right| \le \sup_{|t|\le\delta}\left|f(x-t) - f(x)\right| + \frac{2\,\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}$$

لتكن $\varepsilon > 0$. لمّا كان f مستمرّاً بانتظام على $\mathbb{R}$ ، لأنّه تابع مستمرٌّ ودوريٌّ، استنتجنا أنّه يوجد δ_ε في $]0,\pi[$ تُحقِّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon], \quad \left|f(x-t) - f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

وعندئذ نجد n_ε في $\mathbb{N}^*$ تُحقِّق

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta_\varepsilon/2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا طبّقنا ① استنتجنا، اعتماداً على ما سبق، أنّ

$$\forall n \ge n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

أي إنّ المتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب بانتظام من f ، وهذا هو المطلوب إثباته. ❒

5-9. **ملاحظة**. تُبيِّنُ المبرهنة السابقة أنّ مجموعة كثيرات الحدود المثلّثيّة $\mathcal{T}$ كثيفة في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. أي يُمكن تقريب كلِّ تابع مستمرٍّ و $2\pi-$دوريّ بمتتالية متقاربة بانتظام من كثيرات الحدود المثلّثيّة.

6. التقارب بالمتوسّط التربيعي لمتسلسلات فورييه

6-1. **مبرهنة**. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$ ، عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) C_n(g) e^{\mathrm{i}\,nx}$$

الإثبات

لنعرّف الجماعة $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بالصيغة $\lambda_n = C_n(f)\cdot C_n(g) = C_n(f*g)$، لقد أثبتنا في المبرهنة 6-3. أنّ المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$ متقاربة بالنظيم. نعرّف إذن التابع h من $\mathcal{C}_{2\pi}$ بأنه مجموع هذه المتسلسلة $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$. عندئذ يكون للتابعين $f * g$ و h من $\mathcal{C}_{2\pi}$ طيف فورييه ذاته.

ونستنتج بمُقتضى الملاحظة 5-7. أنّهما متساويان ويتم إثبات المطلوب. ❒

2-6. **مبرهنة – متطابقة** Bessel-Parseval . ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$ ، عندئذ

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{C_n(f)} \cdot C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|C_n(f)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

الإثبات

من الواضح أنّ المساواة الثانية تنتج من الأولى بوضع $g = f$. يكفي إذن أن نُثبتَ صحةَ المساواة الأولى.

ليكن f و g تابعين من $\mathcal{R}_{2\pi}$ ، ولنعرّف التابع h من $\mathcal{R}_{2\pi}$ بالعلاقة $h(t) = \overline{f(-t)}$. عندئذ يتوثّق القارئ بسهولة من صحة الخاصّتين الآتيتين:

$$h * g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ C_n(h) = \overline{C_n(f)}$$

ولكن، استناداً إلى المبرهنة السابقة، لدينا

$$h * g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(h) C_n(g)$$

وهذه هي المساواة المطلوبة. ❐

3-6. **نتيجة**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}_{2\pi}$ ، ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع f . عندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \left|f(t) - S_n(f)(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t = 0$$

ونعبِّر عن هذه النتيجة بقولنا إنّ متسلسلة فورييه للتابع f تتقارب من f بالمتوسّط التربيعيّ.

الإثبات

إذا عُدنا إلى إثبات متراجحة Bessel نجد أنّ

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t - \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2$$

والنتيجة السابقة تبيِّن إذن أنّ $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_2^2 = 0$ ، وهذا هو المطلوب. ❐

7. تطبيقات

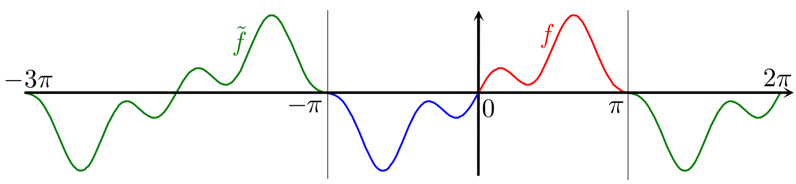
7-1.متراجحة Writinger. ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً غير تافه من $\mathbb{R}$. ولنتأمّل الفضاءَ $E = C_0^1([a,b])$، فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف C^1 على $[a,b]$ وتنعدم عند كلٍّ من a و b. عندئذ

$$\forall f \in E, \quad \int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

أمّا الثابت $(b-a)^2\pi^{-2}$ فهو أفضل ثابت ممكن في هذه المتراجحة.

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $a=0$ و $b=\pi$. وليكن التابع f عنصراً من E عندئذ يوجد تابع وحيد $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ فردي ويقبل 2π دوراً ويحقّق $\tilde{f}_{|[0,\pi]} = f$. نتيقّنُ بسهولة أنّ $\tilde{f}$ ينتمي إلى الصف C^1.



لتكن إذن $S(\tilde{f}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}$. أمّا متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}'$ فهي $S(\tilde{f}') = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathrm{i}\, n c_n e_n$، لأنّ $C_0(\tilde{f}')=0$، إذ استخدمنا الفرْض $f(0)=f(\pi)$.

وبملاحظة أنّ $c_0=0$، لأنّ $\tilde{f}$ تابع فردي، نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|c_n\right|^2 \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2\left|c_n\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وبالاستفادة من كوْن التابعين $t \mapsto \left|\tilde{f}(t)\right|^2$ و $t \mapsto \left|\tilde{f}'(t)\right|^2$ زوجيّين استنتجنا

$$\int_0^\pi \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t \leq \int_0^\pi \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

حيث تحدث المساواة إذا كان $c_n = 0$ أيّاً كانت n من $\mathbb{Z}\backslash\{-1,+1\}$، أي إذا وُجِدَ λ في $\mathbb{C}$ يُحقِّق $\forall t \in [0,\pi],\ f(t) = \lambda \sin t$.

لإثبات الحالة العامّة، نتأمّل تابعاً f من E . ونعرِّف

$$g : [0,\pi] \to \mathbb{C},\ g(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)$$

فنلاحظ أنّ g ينتمي إلى الصف C^1 على $[0,\pi]$ وينعدم عند 0 وعند π . إذن بمقتضى الحالة السابقة نجد

$$\int_0^\pi \left|g(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t \leq \int_0^\pi \left|g'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

وهذا يُكافئ

$$\int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$$

إذ تحدث المساواة إذا وفقط إذا كان g متناسباً مع التابع $\sin$ على $[0,\pi]$، أي إذا وفقط إذا وُجِدَ λ في $\mathbb{C}$ يُحقِّق

$$\forall t \in [a,b],\quad f(t) = \lambda \sin\left(\frac{t-a}{b-a}\pi\right).$$

2-7. كثيرات حدود برنولي Bernoulli

من الواضح أنّ الشروط الثلاثة الآتية تعرِّف بوجه وحيد وبالتدريج متتالية من كثيرات الحدود $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نسميها كثيرات حدود برنولي:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad B_0(x) = 1\\
&(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall x \in \mathbb{R},\ B_n'(x) = n\,B_{n-1}(x)\\
&(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^{2\pi} B_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 0
\end{aligned}$$

في الحقيقة، إذا افترضنا معرفة B_{n-1} فإنّ الشرط (2) يبيِّن وجود ثابت λ_n بحيث

$$B_n(x) = \lambda_n + n\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

والشرط (3) يسمح لنا بتعيين λ_n كما يلي:

$$\begin{aligned}0 &= 2\pi\lambda_n + n\int_0^{2\pi}\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,x\\ &= 2\pi\lambda_n + \left[n(x-2\pi)\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t\right]_0^{2\pi} - n\int_0^{2\pi}(x-2\pi)B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\lambda_n = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

إذن

$$B_n(x) = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t + n\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{4}$$

فعلى سبيل المثال نجد

$$\begin{aligned}B_1(x) &= x-\pi\\ B_2(x) &= x^2-2\pi x+\frac{2\pi^2}{3}\\ B_3(x) &= x^3-2\pi x^2+2\pi^2 x\end{aligned} \tag{5}$$

ونلاحظ أنّه، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، لدينا

$$B_{n+1}(2\pi) - B_{n+1}(0) = \int_0^{2\pi} B'_{n+1}(t)\,\mathrm{d}\,t = (n+1)\int_0^{2\pi} B_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

وبناءً على هذا يكون

$$\forall n \geq 2,\ \ B_n(2\pi) = B_n(0) \tag{6}$$

لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع الـ $2\pi-$دوري الوحيد $\tilde{B}_n$ الذي يتّفق مع B_n على المجال $[0,2\pi[$. نلاحظ أنّ $\tilde{B}_n$ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعِياً.

لنعيِّن متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{B}_1$. في الحقيقة، إنّ $C_0(\tilde{B}) = 0$، أمّا في حالة $k \neq 0$ فنجد

$$\begin{aligned} C_k(\tilde{B}_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{(\pi-x)e^{-\mathrm{i}\,kx}}{2\pi\,\mathrm{i}\,k}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\,k}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{i}}{k} \end{aligned}$$

وبمُقتضى مبرهنة ديرخليه نجد

$$\forall x \in\,]0,2\pi[, \quad x-\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,kx}}{k} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \tag{7}$$

لنعيِّن بوجه عام متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{B}_n$، مع $n \leq 2$. في الحقيقة يبيِّن الشرط (3) أنّ $C_0(\tilde{B}_n) = 0$، أمّا حين يكون $k \neq 0$، فلدينا، استناداً إلى الخاصّة (2):

$$C_k(\tilde{B}_n) = \frac{1}{\mathrm{i}\,k}C_k(\tilde{B}_n') = \frac{n}{\mathrm{i}\,k}C_k(\tilde{B}_{n-1})$$

وهذا يفيدنا لنستنتج بالتدريج:

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad C_k(\tilde{B}_n) = -\frac{n!}{(\mathrm{i}\,k)^n} \tag{8}$$

إنّ استمرار التابع $\tilde{B}_n$ والتقارب المنتظم لمتسلسلة فورييه للتابع $\tilde{B}_n$ حين يكون $n \leq 2$ يسمحان لنا أن نستنتج

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in [0,2\pi], \quad B_n(x) = -n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{\mathrm{i}\,kx}}{(\mathrm{i}\,k)^n}$$

وبناءً على هذا، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما تكن x من $[0,2\pi]$ فلدينا

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!}B_{2n}(x) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+1)!}B_{2n+1}(x) \tag{10}$$

لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، $b_n = \frac{B_n(0)}{(2\pi)^n}$. فيكون $b_0 = 1$، $b_1 = -\frac{1}{2}$. واستناداً إلى العلاقة (2) نجد

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}(2\pi)^{n-k} b_{n-k} \tag{11}$$

وإذا لاحظنا أنّ درجة كثير الحدود B_{n+1} هي $n+1$، استنتجنا من منشور تايلور أنّ:

$$B_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_{n+1}^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

فإذا استفدنا من العلاقتين (6) و (11) استنتجنا أنّه، في حالة $1 \leq n$:

$$(2\pi)^{n+1} b_{n+1} = B_{n+1}(2\pi) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k b_{n+1-k} (2\pi)^{n+1}$$

أو

$$\forall n \geq 1, \ \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k b_k = 0 \tag{12}$$

ومنه

$$\forall n \geq 1, \ b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k b_k \tag{13}$$

وتفيد هذه العلاقة الأخيرة، إضافة إلى الشرط $b_0 = 1$ في تعيين جميع حدود المتتالية $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ التي تسمّى متتالية **أعداد برنولي**. وتفيد هذه المتتالية بتعيين كثيرات الحدود $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ وذلك استناداً إلى منشور تايلور والعلاقة (11) فنجد

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} (2\pi)^{n-k} x^k \tag{14}$$

لاحظ أنّ العلاقة (10) تُبيِّنُ أنّ $b_{2n+1} = 0$ في حالة $n \geq 1$، في حين تُعطي العلاقة (9) عند $x = 0$ النتيجة الآتية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{b_{2n}}{2(2n)!} (2\pi)^{2n} \tag{15}$$

ونجد في الجدول الآتي بعض القيم العدديّة

n	2	4	6	8	10
b_n	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

نختتم هذه الفقرة بتطبيق أخير يتعلّق بمتتالية أعداد برنولي. في الحقيقة، ينتج من الخاصّة (15) أنّ المتتالية $\left(\frac{b_n}{n!}(2\pi)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وهذا يبيّن تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ في القرص المفتوح $D(0,2\pi)$. لنعرّف إذن التابع التحليلي F بالعلاقة :

$$F : D(0,2\pi) \to \mathbb{C},\ F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$$

ومن جهة أخرى لنعرّف التابع التحليلي

$$G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

إذ نلاحظ أنّ $G(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ في حالة $z \neq 0$، والنقطة $z = 0$ نقطة شاذّة كاذبة.

ومن ثَمّ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\forall z \in D(0,2\pi),\ \ F(z)\cdot G(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\frac{1}{(n+1-k)!}\right)z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}b_k\right)\frac{z^n}{(n+1)!} = 1\end{aligned}$$

إذ استفدنا من العلاقة (12). وبناءً على ما سبق نرى أنّ

$$\forall z \in D(0,2\pi), \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n = \frac{z}{e^z - 1}$$

وإذا استفدنا من كون $b_{2n+1} = 0$ أياً كانت $n \geq 1$، استنتجنا أنّ

$$\forall z \in D(0,2\pi), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{e^z - 1} - b_1 z$$

$$= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z/2}{\operatorname{th}(z/2)}$$

وبناءً على هذا نجد

$$\forall z \in D(0,\pi), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n} 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{\operatorname{th}(z)}$$

وبطرح العلاقتين السابقتين وملاحظة أنّ $\frac{1}{\operatorname{th}(z)} - \frac{1}{2\operatorname{th}(z/2)} = \frac{1}{2}\operatorname{th}(z/2)$ نجد

$$\forall z \in D(0,\pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{2} \operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right)$$

أو

$$\forall z \in D(0,\pi/2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \operatorname{th} z$$

وأخيراً، لمّا كان $\operatorname{th}(\mathrm{i}\, z) = \mathrm{i} \tan z$ استنتجنا النشر بمتسلسلة صحيحة في جوار 0، للتابع $\tan$ كما يلي :

$$\forall z \in D(0,\pi/2), \quad \tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} b_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

تمرينات

التمرين 1. عيّن متسلسلة فورييه للتابع الزوجي f الذي يقبل العدد 2π دوراً، والمعرّف على المجال $[0,\pi]$ بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \quad 0\le x\le \pi/2\\ \dfrac{2(\pi-x)}{\pi} & : \quad \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$$

واستنتج متسلسلة فورييه للتابع الزوجي وال $2\pi-$دوري g المعرّف على المجال $[0,\pi]$ بالعلاقة

$$g(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2x}{\pi} & : \quad 0\le x\le \pi/2\\ 0 & : \quad \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$$

الحل

في حالة $n\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
C_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x)e^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x \qquad ☞ f(-x)=f(x)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2(\pi-x)}{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}\,x\\
&=\left[\frac{\sin nx}{n\pi}\right]_0^{\pi/2}+\left[\frac{2(\pi-x)\sin nx}{\pi^2 n}\right]_{\pi/2}^{\pi}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}-\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}-\left[\frac{2\cos nx}{n^2\pi^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\\
&=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $C_0(f)=\dfrac{3}{4}$.

وبملاحظة أنّ $C_{-n}(f) = C_n(f)$ نستنتج مباشرة أنّ متسلسلة فورييه للتابع f تُعطى بالعلاقة :

$$S(f)(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n(f)\cos nx$$

أو

$$S(f)(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}$$

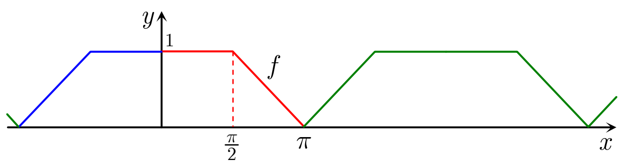
ونلاحظ أنّ هذه المتسلسلة متقاربة بالنظيم على $\mathbb{R}$، وعليه نستنتج من استمرار التابع f أنّ

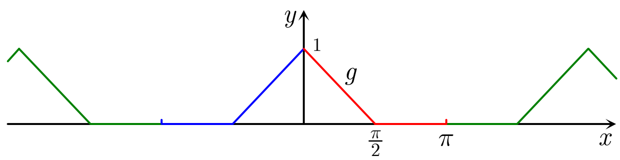
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}$$

ونجد بوجه خاص، في حالة $x = 0$، أنّ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

وإذا تأمّلنا الرسم البياني للتابعين f و g لاحظنا مباشرة أنّهما يرتبطان بالعلاقة البسيطة :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 1 - f(x - \pi)$$





وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}$$

والتقارب بالنظيم لهذه المتسلسلة يُثبتُ أنّ المتسلسلة السابقة هي ذاتها $S(g)$ أي متسلسلة فورييه للتابع g. ■

التمرين 2. عيّن متسلسلة فورييه للتابع f الذي يقبل العدد 2π دوراً والمعرّف على المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقة $f(x)=|x|$. واستنتج أنّ

$$\forall x\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2(2n+1)x}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}x^2-\frac{\pi}{6}x^3$$

الحل

في حالة $n\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
C_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xe^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}\,x\\
&= \left[\frac{x\sin nx}{n\pi}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x\\
&= \left[\frac{\cos nx}{n^2\pi}\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $C_0(f)=\dfrac{\pi}{2}$.

وبملاحظة أنّ $C_{-n}(f)=C_n(f)$ نستنتج مباشرة أنّ متسلسلة فورييه للتابع f تُعطى بالعلاقة :

$$S(f)(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}2C_n(f)\cos nx$$

أو

$$S(f)(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

ونلاحظ أنّ هذه المتسلسلة متقاربة بالنظيم على $\mathbb{R}$ ، ونستنتج من استمرار التابع f أنّ

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

يتيح لنا التقارب المنتظم لهذه المتسلسلة على المجال $[0,\pi]$ مُكاملتها حدّاً حدّاً على المجال $[0,x]$ لنجد

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad \frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

وهذه المتسلسلة أيضاً متقاربة بالنظيم على المجال $[0,\pi]$ مما يتيح لنا مُكاملتها مجدّداً حدّاً حدّاً على المجال $[0,x]$ لنجد

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad \frac{\pi x^2}{4}-\frac{x^3}{6}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4} \qquad ①$$

فإذا استبدلنا x بالمقدار $2x$ في العلاقة السابقة استنتجنا أنّ

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right],\qquad \frac{\pi^2x^2}{8}-\frac{\pi x^3}{6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2(2n+1)x}{(2n+1)^4}$$

وبوجه خاص نستنتج في حالة $x=\dfrac{\pi}{2}$ أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

وبالعودة إلى ① نستنتج أنّ

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad \frac{\pi^4}{96}-\frac{\pi^2x^2}{16}+\frac{\pi x^3}{24}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4} \qquad ■$$

التمرين 3. عيّن متسلسلة فوريه للتابع الزوجي والـ2−دوري f المعرّف على المجال $[0,1]$ بالعلاقة $f(x)=-2x+1$. ثُمّ استنتج متسلسلة فوريه للتابع الفردي g الذي يقبل العدد 2 دوراً والمعرّف على المجال $[0,1]$ بالعلاقة $g(x)=-x^2+x$.

الحل

ليكن $\tilde{f}$ التابع الذي يقبل 2π دوراً والمعرّف بالعلاقة $\tilde{f}(x)=f(x/\pi)$. إنّ $\tilde{f}$ تابع زوجي ويتّفق مع التابع $1-2x/\pi$ $x\mapsto$ على المجال $[0,\pi]$.

في حالة $n\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
C_n(\tilde{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\tilde{f}(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(-x)e^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x \qquad ☞\tilde{f}(-x)=\tilde{f}(x)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,\mathrm{d}\,x\\
&= \left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n\pi}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x\\
&= \left[-\frac{2\cos nx}{n^2\pi^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2n^2}
\end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $C_0(\tilde{f})=0$. وبملاحظة أنّ $C_{-n}(\tilde{f})=C_n(\tilde{f})$ نستنتج مباشرة أنّ متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}$ تُعطى بالعلاقة الآتية :

$$S(\tilde{f})(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2C_n(\tilde{f})\cos nx=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

ولكن $S(\tilde{f})(x)=S(f)(\pi x)$ ، إذن

$$S(f)(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$$

يثبتُ تقارب هذه المتسلسلة بالنظيم على $\mathbb{R}$ ، واستمرار التابع f أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$$

يتيح لنا التقارب المنتظم لهذه المتسلسلة على المجال $[0,1]$ مُكاملتها حدّاً حدّاً على المجال $[0,x]$ لنجد

$$\forall x\in[0,1],\quad x-x^2=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3}$$

ولكنّ التابع

$$x \mapsto \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3}$$

تابعٌ فردي يقبل العدد 2 دوراً وينطبق على التابع $x \mapsto x - x^2$ على المجال $[0,1]$، فهو إذن ينطبق على التابع g . ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3}$$

وهذه هي متسلسلة فورييه للتابع g لأنّها متقاربة بالنظيم. ■

التمرين 4. عيّن متسلسلة فورييه للتابعين f و g اللذين يقبلان العدد 2π دوراً والمعرّفين على المجال $]-\pi,\pi]$ بالعلاقتين $f(x) = e^{ax}$ و $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$ ، حيث $a \neq 0$ ، ثُمّ استنتج مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^2}{(n^2+a^2)^2}$$

الحل

لنرمز، في حالة a من $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$ ، بالرمز f_a إلى التابع الذي يقبل 2π دوراً، والمعرّف بالعلاقة $f_a(x) = e^{ax}$ على المجال $]-\pi,\pi]$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} C_n(f_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{e^{(a-in)x}}{2\pi(a-in)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{a-in} \\ &= \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n(a+in)}{a^2+n^2} \end{aligned}$$

وعليه تكون متسلسلة فورييه للتابع f_a هي

$$S(f_a)(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a} + \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos nx - \frac{(-1)^n n}{n^2+a^2}\sin nx\right)$$

ونعلم استناداً إلى مبرهنة ديرخليه، أنّ المتسلسلة $S(f_a)$ متقاربة أيّاً كانت قيمة x ، وبوجه خاص لدينا في حالة x من $]-\pi,\pi[$ لدينا

$$e^{ax} = \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a} + \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos nx - \frac{(-1)^n n}{n^2+a^2}\sin nx\right)$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ التابع g_a الذي يقبل العدد 2π دوراً وينطبق على التابع $x \mapsto \operatorname{ch} ax$ في المجال $]-\pi,\pi]$ يُحقّق $g_a = \frac{1}{2}(f_a + f_{-a})$. إذن

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(g_a) = \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}$$

أمّا متسلسلة فورييه للتابع g_a فهي

$$S(g_a)(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a} + \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos nx$$

ولمّا كانت هذه المتسلسلة متقاربة بالنظيم، وكان التابع g_a مستمرّاً على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a} + \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos nx$$

وبوجه خاص

$$① \qquad \forall x \in [-\pi,\pi],\ \operatorname{ch} ax = \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a^2}{n^2+a^2}\cos nx\right)$$

فإذا عوّضنا $x=0$ وجدنا

$$\frac{\pi a}{\operatorname{sh}\pi a} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2a^2}{n^2+a^2}$$

ثُمّ إذا اخترنا $a=1$ وجدنا

$$\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi} + \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

وكذلك إذا عوّضنا $x=\pi$ في ① وجدنا

$$\frac{\pi}{2\operatorname{th} a\pi} + \frac{1}{2a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

وأخيراً،

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(g_a * g_a) = \left(C_n(g_a)\right)^2 = \frac{\operatorname{sh}^2\pi a}{\pi^2}\cdot\frac{a^2}{(g_a * g_a)^2}$$

ولكنّ متسلسلة فوريية للتابع $g_a * g_a$ متقاربة بالنظيم ومجموعها يساوي $g_a * g_a$ إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a * g_a(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 \pi a}{\pi^2 a^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^4 \cos nx}{(a^2 + n^2)^2}\right)$$

فإذا عوّضنا $x = 0$ استنتجنا أنّ

$$g_a * g_a(0) = \frac{\operatorname{sh}^2 \pi a}{\pi^2 a^2}\left(-1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^4}{(a^2 + n^2)^2}\right)$$

ولكن

$$g_a * g_a(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}^2 ax \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2\pi a}{4\pi a} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh} \pi a \operatorname{ch} \pi a}{2\pi a}$$

إذن

$$\frac{\pi^2}{4 \operatorname{sh}^2 \pi a} + \frac{\pi}{4a \operatorname{th} \pi a} + \frac{1}{2a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + n^2)^2}$$ ■

التمرين 5. عيّن متسلسلة فوريية للتابع f المعرّف بالعلاقة $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left|\sin x\right|^3$. ثمّ استنتج أنّ

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 9)^2 (4n^2 - 1)^2}$$

الحل

التابع $x \mapsto \left|\sin x\right|^3$ تابعٌ زوجي، فمتسلسلة فوريية الموافقة هي متسلسلة جيوب تمام :

$$S(f)(x) = C_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx$$

ولمّا كان التابع f يقبل العدد π دوراً استنتجنا أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1}(f) = 0$ ، وعليه فإنّ

$$S(f)(x) = C_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(f) \cos 2nx$$

ولكن في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}a_{2n}(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin^3 x\right|\cos 2nx\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\cos 2nx\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\cos 2nx\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}a_{2n}(f) &= \frac{3}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos 2nx\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 3x\cos 2nx\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{3}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\Big)\,\mathrm{d}\,x\\ &\qquad - \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\sin(2n+3)x - \sin(2n-3)\Big)x\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{3}{2\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n-3}\right)\\ &= \frac{24}{\pi(4n^2-9)(4n^2-1)}\end{aligned}$$

وكذلك نجد

$$\begin{aligned}C_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin^3 x\right|\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(3\sin x - \sin 3x\Big)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3\pi}\end{aligned}$$

ولمّا كان التابع f ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعيّاً، استنتجنا أنّ متسلسلة فورييه $S(f)$ متقاربة ببساطة من التابع f . إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin^3 x\right| = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$$

فإذا اخترنا $x = \dfrac{\pi}{2}$ استنتجنا أنّ

$$\pi = \frac{4}{3} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$$

أمّا إذا استفدنا من علاقة Parseval فإننا نجد

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{16}{9\pi^2} + \frac{288}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}$$

ولكن نجد بحساب بسيط أنّ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{5}{16}$ إذن

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4609}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}$$

التمرين 6. لتكن m من $\mathbb{N}$، ولنعرّف $\forall x\in\mathbb{R},\ f_m(x) = \left|\sin x\right|^{2m+1}$.

1. أثبت أنّه، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، فلدينا $b_n(f_m) = 0$ و $a_{2n-1}(f_m) = 0$.
2. لنعرّف $A_n^{(m)} = \int_0^{\pi}\sin^{2m+1}(x)\cdot\cos(2nx)\,\mathrm{d}\,x$.

   i. أثبت أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n^{(0)} = \frac{2}{1-4n^2}$.

   ii. ثُمّ أثبت كذلك أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall m\in\mathbb{N}^*,\qquad A_n^{(m)} = \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2-4n^2}A_n^{(m-1)}$$

3. اكتب متسلسلة فورييه للتابع f_m، واستنتج عبارة للعدد π بصيغة مجموع متسلسلة عددية.

الحل

هذا تعميم للتمرين السابق.

1. التابع f_m تابعٌ زوجي، فمتسلسلة فورييه الموافقة هي متسلسلة جيوب تمام، أي $b_n(f_m) = 0$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$. ولمّا كان التابع f_m يقبل العدد π دوراً، استنتجنا أنّ $a_{2n+1}(f) = 0$ مهما كان العدد الطبيعي n .

i.2. هذا حساب دقيق. في الحقيقة :

$$\begin{aligned}
A_n^{(0)} &= \int_0^\pi \sin x \cos 2nx \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\big)\,\mathrm{d}\, x\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^\pi\\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{2}{1-4n^2}
\end{aligned}$$

$.ii.2$ وفي حالة $m \geq 1$ لدينا

$$\begin{aligned}
A_n^{(m-1)} - A_n^{(m)} &= \int_0^\pi \sin^{2m-1} x \cos^2 x \cos 2nx \,\mathrm{d}\, x\\
&= \left[\frac{\sin^{2m} x}{2m}\cos x \cos 2nx\right]_0^\pi + \frac{1}{2m}\int_0^\pi \sin^{2m} x\big(\cos x \cos 2nx\big)'\,\mathrm{d}\, x\\
&= \frac{1}{2m}\int_0^\pi \sin^{2m} x\big(2n\cos x \sin 2nx + \sin x \cos 2nx\big)\,\mathrm{d}\, x\\
&= \frac{n}{m}\int_0^\pi \sin^{2m} x \cos x \sin 2nx \,\mathrm{d}\, x + \frac{1}{2m}\int_0^\pi \sin^{2m+1} x \cos 2nx \,\mathrm{d}\, x\\
&= \frac{1}{2m}A_n^{(m)} + \frac{n}{m}\underbrace{\int_0^\pi \sin^{2m} x \cos x \sin 2nx \,\mathrm{d}\, x}_{B_n^{(m)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^{(m)} &= \int_0^\pi \sin^{2m} x \cos x \sin 2nx \,\mathrm{d}\, x\\
&= \left[\frac{\sin^{2m+1} x}{2m+1}\sin 2nx\right]_0^\pi - \frac{2n}{2m+1}\int_0^\pi \sin^{2m+1} x \cos 2nx \,\mathrm{d}\, x\\
&= -\frac{2n}{2m+1}A_n^{(m)}
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$A_n^{(m-1)} - A_n^{(m)} = \frac{1}{2m}A_n^{(m)} - \frac{2n^2}{(2m+1)m}A_n^{(m)}$$

إذن

$$A_n^{(m-1)} = \left(1+\frac{1}{2m}-\frac{2n^2}{(2m+1)m}\right)A_n^{(m)} = \frac{(1+2m)^2-4n^2}{2(2m+1)m}A_n^{(m)}$$

أو

$$A_n^{(m)} = \frac{2(2m+1)m}{(1+2m)^2-4n^2}A_n^{(m-1)}$$

3. نستنتج من الحساب السابق أنّه، مهما تكن (n,m) من $\mathbb{N}^2$ يكن

$$A_n^{(m)} = \frac{(2m+1)(2m)}{(1+2m)^2-4n^2}\cdots\frac{3\cdot 2}{9-4n^2}A_n^{(0)} = \frac{2\cdot(2m+1)!}{\prod_{k=0}^{m}((2k+1)^2-4n^2)}$$

ولكن، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، يكن $a_{2n}(f_m) = \dfrac{2}{\pi}A_n^{(m)}$ و $C_0(f_m) = \dfrac{1}{\pi}A_0^{(m)}$. أمّا متسلسلة فورييه للتابع f_m فهي متقاربة ببساطة من التابع f_m على $\mathbb{R}$، لأنّه ينتمي وضوحاً إلى الصف C^1 قِطعيّاً. إذن مهما تكن x من $\mathbb{R}$، ومهما تكن m من $\mathbb{N}$، يكن

$$\left|\sin x\right|^{2m+1} = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{\pi(2m+1)!}+\frac{4\cdot(2m+1)!}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{(2k+1)^2-4n^2}\right)\cos 2nx$$

أو بصيغة مُكافئة

$$\left|\sin x\right|^{2m+1} = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{\pi(2m+1)!}+\frac{4(-1)^{m+1}}{\pi}\cdot(2m+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\prod_{k=n-m}^{n+m+1}(2k-1)}$$

وبوجه خاص، في حالة $x=\dfrac{\pi}{2}$، نجد

$$\pi = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}+4\cdot(2m+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m+1}}{\prod_{k=n-m}^{n+m+1}(2k-1)}$$

وهي النتيجة المطلوبة ■

التمرين 7. ليكن التابع f الذي يقبل العدد 2π دوراً والمعرّف على المجال $[0,2\pi]$ بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{3(x-\pi)^2-\pi^2}{12}$$

1. ارسم بيان التابع f وانشره بمتسلسلة فورييه.

2. استنتج قيمة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

3. لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$. ولنضع $F(a)=\int_0^{\infty}e^{-ax}f(x)\,\mathrm{d}\,x$. أثبت أنّ

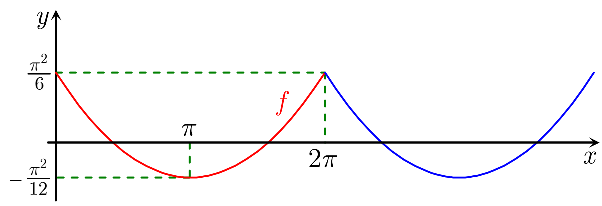
$$F(a)=\frac{1}{1-e^{-2a\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-ax}f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ثُمّ احسب $F(a)$.

4. أثبت أنّ $F(a)=a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2+a^2)}$.

الحل

1. لنتأمّل فيما يلي الخط البياني للتابع f.



في حالة $n\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
C_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{3(x-\pi)^2-\pi^2}{12}e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\left[-\frac{3(x-\pi)^2-\pi^2}{24\,\mathrm{i}\,n\pi}e^{-\mathrm{i}nx}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{4\,\mathrm{i}\,n\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\left[\frac{x-\pi}{4n^2\pi}e^{-\mathrm{i}nx}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{4n^2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $C_0(f)=0$. ولمّا كان التابع f ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعيّاً، استنتجنا أنّ متسلسلة فورييه $S(f)$ متقاربة ببساطة من التابع f. إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

2. إذا استفدنا من علاقة Parseval وجدنا أنّ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{288\pi}\int_0^{2\pi} (9(x-\pi)^4 - 6\pi^2(x-\pi)^2 + \pi^4)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\pi^4}{180}\end{aligned}$$

إذن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3. التابع f تابعٌ محدودٌ على $\mathbb{R}$، إذن التكامل الذي يُعرّف F متقاربٌ. ويكون

$$\begin{aligned}F(a) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi n)e^{-a(x+2\pi n)}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi a n}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi a n}\right)\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ولكن نجد بحساب مباشر أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} \frac{3(x-\pi)^2-\pi^2}{12}e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[-\frac{3(x-\pi)^2-\pi^2}{12a}e^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{\pi^2(1-e^{-2a\pi})}{6a} + \left[\frac{x-\pi}{2a^2}e^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi} e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{\pi^2a^2+3}{6a^3}(1-e^{-2a\pi}) - \frac{\pi}{2a^2}(1+e^{-2a\pi})\end{aligned}$$

نستنتج إذن أنّ

$$\forall a>0,\qquad F(a)=\frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi^2a^2}{3}+1-\frac{\pi a}{\operatorname{th}\pi a}\right)$$

4. لمّا كانت متسلسلة فورييه للتابع f متقاربة بانتظام على المجال $[0,2\pi]$ استنتجنا أنّ

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(e^{(-a+\mathrm{i}n)x}+e^{(-a-\mathrm{i}n)x}\right)\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-a+\mathrm{i}n)x}}{-a+\mathrm{i}n}+\frac{e^{(-a-\mathrm{i}n)x}}{-a-\mathrm{i}n}\right]_0^{2\pi} = \frac{a(1-e^{-2\pi a})}{a^2+n^2}\end{aligned}$$

إذن

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x = (1-e^{-2\pi a})\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{(a^2+n^2)n^2}$$

ومن مقارنة صيغتي $F(a)$ اللتين وجدناهما سابقاً نستنتج إذن

$$\forall a>0,\qquad \frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a\operatorname{th}\pi a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2+n^2)n^2}$$

■

التمرين 8.

1. لتكن $a \neq 0$، وليكن g التابع الـ $2\pi-$دوري المعرّف على المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقة $g(x) = a^2x^2/2$.

i. عيّن متسلسلة فورييه للتابع g، وأثبت أنّها متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ من g.

ii. احسب مجموع كلٍّ من المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

2. نعرّف في حالة a من $\mathbb{R}_+^*$ و x من $\mathbb{R}$، المقدار

$$f(x) = 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2+a^2}$$

أثبت أنّ f تابع معرّف ومستمرٌّ و $2\pi-$دوريّ على $\mathbb{R}$.

3. i. أثبت أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - f(x) = \frac{a^2\pi^2}{6} + 2a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2(n^2+a^2)}$$

ii. استنتج أنّ التابع $f - g$ ينتمي إلى الصف C^2 واحسب $(g-f)''$.

iii.أثبت أنّه على المجال $]-\pi,\pi[$ يكون التابع f حلّاً لمعادلة تفاضليّة خطّية من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة يُطلب تعيينها.(أي أثبت أنّه توجد أعداد α و β و γ تُحقّق $f'' + \alpha f' + \beta f = \gamma$).

iv. استنتج أنّه توجد أعداد A و B و C بحيث يكون

$$\forall x \in\,]-\pi,\pi[,\ f(x) = A\,\mathrm{ch}(ax) + B\,\mathrm{sh}(ax) + C$$

v. استنتج قيمة كلٍّ من

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

الحل

1.i. في حالة $n \neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned} C_n(g) &= \frac{a^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x = \cancel{\left[-\frac{a^2x^2}{4\mathrm{i}\pi n}e^{-\mathrm{i}nx}\right]_{-\pi}^{\pi}} + \frac{a^2}{2\pi\,\mathrm{i}\,n}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{a^2x}{2\pi n^2}e^{-\mathrm{i}nx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a^2}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ

$$C_0(g) = \frac{a^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^2\pi^2}{6}$$

وعليه تكون متسلسلة فورييه $S(g)$ للتابع g :

$$S(g)(x) = \frac{a^2\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

1.ii. إنّ المتسلسلة $S(g)$ متقاربة بالنظيم على $\mathbb{R}$، والتابع g تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$، إذن تتقارب متسلسلة فورييه $S(g)$ من التابع g. فإذا عوّضنا $x = 0$ أو $x = \pi$ وجدنا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

وبحساب نصف الفرق نستنتج أيضاً أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

أمّا متطابقة Parseval فتتيح لنا أن نكتب

$$\frac{\pi^4}{36} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^4}{4}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi^4}{20}$$

ومنه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2. إنّ المتسلسلة التي تعرّف f متقاربة بالنظيم على $\mathbb{R}$، فالتابع f تابعٌ معرّف ومستمرٌّ على $\mathbb{R}$، ويقبل العدد 2π دوراً.

3.i. من الواضح أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$g(x)-f(x)=\frac{a^2\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}2a^2(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+a^2}\right)\cos nx$$
$$=\frac{a^2\pi^2}{6}+4a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)n^2}\cos nx$$

$ii.3$. لمّا كانت متسلسلتا التوابع

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+a^2}\cos nx \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n^2+a^2)n}\sin nx$$

متقاربتين بالنظيم، إذن بانتظام، على $\mathbb{R}$، استنتجنا أنّ التابع $g-f$ ينتمي إلى الصف C^2 على $\mathbb{R}$ وأنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (g-f)''(x)=-4a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nx=-a^2f(x)$$

$iii.3$. ولكن على المجال $]-\pi,\pi[$ ينتمي التابع g إلى الصف C^2 ويُحقِّق

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[,\quad g''(x)=a^2$$

إذن

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[,\quad f''(x)-a^2f(x)=a^2$$

$iv.3$. من الواضح أنّ التابع الثابت $x\mapsto -1$ حلٌّ خاصّ للمعادلة التفاضليّة السابقة، أمّا الحل العام لهذه المعادلة بدون طرف ثانٍ فيُكتب بالشكل $x\mapsto A\operatorname{ch}ax+B\operatorname{sh}ax$. إذن يوجد عددان A و B يُحقِّق

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[,\quad f(x)=A\operatorname{ch}ax+B\operatorname{sh}ax-1$$

ولكنّ التابع f تابعٌ زوجي على المجال $]-\pi,\pi[$ إذن $B=0$، ومن جهة أخرى، التابع $(g-f)'$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ ويقبل العدد 2π دوراً، إذن

$$\lim_{x\to\pi^-}(g-f)'(x)=\lim_{x\to\pi^+}(g-f)'(x)=\lim_{x\to(-\pi)^+}(g-f)'(x)$$

أو

$$a^2\pi-aA\operatorname{sh}a\pi=-a^2\pi+aA\operatorname{sh}a\pi$$

إذن $A=\pi/\operatorname{sh}a\pi$.

ومنه

$$\forall x \in \left]-\pi,\pi\right[,\quad f(x)=\frac{\pi \operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi}-1$$

فإذا استفدنا من استمرار التابع f وصلنا إلى النتيجة الآتية :

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\quad f(x)=2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+a^2}=\frac{\pi \operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi}-1$$

$.v.3$ باختيار $a=1$ نجد

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1}=\frac{\pi \operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}\pi}-\frac{1}{2}$$

فإذا عوّضنا $x=0$ ثمّ $x=\pi$ وجدنا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi}-\frac{1}{2}=\frac{\pi e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi \operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}-\frac{1}{2}=\pi\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}$$

■

التمرين 9. عيّن متسلسلة فورييه للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=\max(\sin x,0)$ في حالة x من $\mathbb{R}$. ثمّ ادرس تقارب هذه المتسلسلة، واحسب قيمة : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

الحل

لنلاحظ أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\left|\sin x\right|\right)$ ، فإذا استفدنا من نتيجة التمرين 6. في حالة $m=0$ استنتجنا أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \max\left(0,\sin x\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

وهي متسلسلة فورييه للتابع f لأنّها متقاربة بالنظيم. وإذا عوّضنا $x=\frac{\pi}{2}$ وجدنا

$$\frac{2-\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

■

التمرين 10. ليكن التابع Θ الذي يقبل العدد 2π دوراً والمعرّف كما يأتي:

$$\Theta(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & : \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

1. أثبت أنّه، أياً كانت x من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 \quad \text{و} \quad \Theta(x) = \frac{2}{\mathrm{i}\,\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}(2k+1)x}$$

2. استنتج أنّه، أياً كانت n من $\mathbb{N}^*$ ، فلدينا

$$\forall x \in [-n,n], \qquad x = \frac{4n}{\mathrm{i}\,\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}(2k+1)\pi x}{2n}\right)$$

3. ليكن كثير الحدود المثلثيّ من درجة أصغر أو تساوي n : $P(t) = \sum_{r=-n}^{n} c_r e^{\mathrm{i}rt}$ أثبت أنّ

$$P'(t) = \frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}P\left(t + \frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

4. **متراجحة** Bernstein . استنتج أنّه إذا كانت $\mathcal{T}_n = \mathrm{vect}((e_k)_{-n\le k\le n})$ فإنّ

$$\forall P \in \mathcal{T}_n, \quad \left\|P'\right\|_\infty \le n\left\|P\right\|_\infty$$

هل يمكن أن نستبدل بالثابت n ثابتاً أصغر منه في المتراجحة السابقة ؟

الحل

1. نلاحظ بسهولة أنّ Θ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعيّاً، إذن تتقارب متسلسلة فورييه لهذا التابع منه، وذلك استناداً إلى مبرهنة ديرخليه. ونجد بحساب مباشر

$$\begin{aligned} C_n(\Theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x}_{x\leftarrow\pi-x} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xe^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x + \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xe^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1+(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos nx\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\frac{(-1)^n - 1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

وأخيراً

$$C_n(\Theta) = \mathrm{i}\frac{(-1)^n - 1}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin nx \,\mathrm{d}\,x$$

فإذا كان n زوجيّاً كان $C_n(\Theta) = 0$ ، أمّا في حالة n فرديّ، مثلاً $n = 2k+1$ ، فلدينا

$$C_n(\Theta) = \frac{2}{\mathrm{i}\,\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin nx \,\mathrm{d}\,x = \cancel{\left[-\frac{2x\cos nx}{\mathrm{i}\,\pi n}\right]_0^{\pi/2}} + \frac{2}{\mathrm{i}\,\pi n}\int_0^{\pi/2} \cos nx \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{2\sin nx}{\mathrm{i}\,\pi n^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2(-1)^k}{\mathrm{i}\,\pi(2k+1)^2}$$

وعليه، أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$\Theta(x) = \frac{2}{\mathrm{i}\,\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}(2k+1)x}$$

وبوجه خاص، في حالة $x = \frac{\pi}{2}$ نجد

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

وهذا يُكافئ النتيجة المطلوبة.

2. لتكن x من $[-n, n]$ عندئذ ينتمي العدد $\frac{\pi x}{2n}$ إلى المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وعليه

$$\frac{\pi x}{2n} = \Theta\left(\frac{\pi x}{2n}\right) = \frac{2}{\mathrm{i}\,\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi x}{2n}}$$

أو

$$\forall x \in [-n, n], \qquad \mathrm{i}\,x = \frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}\,\pi\left(\frac{2k+1}{2n}\right)x}$$

3. ليكن P كثير حدود مثلثيّ من درجة أصغر أو تساوي n مثلاً :

$$P(t) = \sum_{r=-n}^{n} c_r e^{\mathrm{i}\,rt}$$

عندئذ، مهما تكن t من $\mathbb{R}$ يكن

$$\begin{aligned}P'(t) &= \sum_{r=-n}^{n} \mathrm{i}\, r c_r e^{\mathrm{i} rt}\\ &= \sum_{r=-n}^{n}\left(\frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}\pi\left(\frac{2k+1}{2n}\right)r}\right)c_r e^{\mathrm{i} rt}\\ &= \frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sum_{r=-n}^{n} c_r \exp\left(\mathrm{i} r\left(t+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)\\ &= \frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}P\left(t+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\end{aligned}$$

4. ليكن P من $\mathcal{T}_n$، وجدنا أنّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad P'(t)=\frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}P\left(t+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

وعليه، بالاستفادة من نتيجة السؤال 1. نجد

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \left|P'(t)\right|\le\frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2}\left\|P\right\|_\infty = n\left\|P\right\|_\infty$$

ومن ثَمّ

$$\forall P\in\mathcal{T}_n,\qquad \left\|P'\right\|_\infty\le n\left\|P\right\|_\infty$$

وهي أفضل متراجحة ممكنة، إذ تتحقّق المساواة في حالة $P(t)=\cos(nt)$ مثلاً. ■

التمرين 11.

1. نثبّتُ عدداً r من $[0,1[$.

i. أثبت أنّ $\forall t\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin(nt)=\dfrac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}$، حيث تتقارب المتسلسلة بالنظيم.

ii. استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R}, -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n}\cos(nx)=\dfrac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos x)$.

iii. احسب، في حالة n من $\mathbb{N}$، التكامل

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x$$

ثُمّ استنتج، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، قيمة

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\ln(1+r^2-2r\cos x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x$$

.2 نُعرِّف التابع φ بالعلاقة

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x\,\ln(1-\cos x) & : \quad x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 & : \quad x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

$.i$ أثبت أنّ φ تابع فردي من $\mathcal{C}_{2\pi}$. هل هو قابل للاشتقاق عند 0 ؟

$.ii$ استخدم نتيجة $.iii.1$ لتحسب قيمة التكامل $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x$ حين يكون $n\in\mathbb{N}^*$.

$.iii$ استنتج متسلسلة فورييه للتابع φ، وادرس تقاربها.

الحل

$.i.1$ في الحقيقة، إنّ المتسلسلة المدروسة متقاربة بالنظيم وضوحاً، ولدينا

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nt &= \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(re^{\mathrm{i}t})^n\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{re^{\mathrm{i}t}}{1-re^{\mathrm{i}t}}\right)\\ &=\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}\end{aligned}$$

$.ii.1$ لتكن x من $\mathbb{R}$. إنّ التقارب بالنظيم، بالنسبة إلى المتحوِّل t، للمتسلسلة المدروسة يسمح لنا بمُكاملة هذه المتسلسلة حدّاً حدّاً بين 0 و x لنجد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(1-\cos nx)=\frac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos x)-\ln(1-r)$$

فإذا تذكّرنا أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}=-\ln(1-r)$$

استنتجنا من المساواة السابقة أنّ

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nx = \frac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos x)$$

.iii.1 إنّ نتيجة السؤال السابق، والتقارب بالنظيم للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos kx\cos nx$ يسمحان لنا أن نكتب

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} -\dfrac{2r^n}{n} & : \quad n\neq 0 \\ 0 & : \quad n=0\end{cases}$$

ولكن نعلم أنّ $2\sin x\cdot\sin nx = \cos(n-1)x-\cos(n+1)x$ إذن

$$\begin{aligned} I_n(r) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ln(1+r^2-2r\cos x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x \\ &= \begin{cases} \dfrac{r^{n+1}}{n+1}-\dfrac{r^{n-1}}{n-1} & : \quad n>1 \\ \dfrac{r^2}{2} & : \quad n=1\end{cases}\end{aligned}$$

.i.2 من الواضح أنّ التابع φ تابعٌ فردي، ومستمرٌّ ويقبل العدد 2π دوراً. إلاّ أنّ φ لا يقبل الاشتقاق عند 0.

.ii.2 لنضع بالتعريف

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ln\big(2(1-\cos x)\big)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

مهما تكن x من $[0,\pi]$ يكن

$$\ln(1+r^2-2r\cos x) = \ln\left((1+r)^2\sin^2\frac{x}{2}+(1-r)^2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

وعليه، مهما تكن x من $]0,\pi]$ يكن

$$\ln\left(\frac{1+r^2-2r\cos x}{2(1-\cos x)}\right)=\ln\left(\frac{(1+r)^2\sin^2(x/2)+(1-r)^2\cos^2(x/2)}{4\sin^2(x/2)}\right)$$
$$=\ln\left(\left(\frac{1+r}{2}\right)^2+\frac{(1-r)^2}{4\tan^2(x/2)}\right)$$
$$=2\ln\left(\frac{1+r}{2}\right)+\ln\left(1+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\frac{1}{\tan^2(x/2)}\right)$$

ومنه

$$\left|\ln\left(\frac{1+r^2-2r\cos x}{2\left(1-\cos x\right)}\right)\right|\leq 2\ln\left(1+\frac{1-r}{1+r}\right)+\ln\left(1+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\frac{1}{\tan^2(x/2)}\right)$$

☞ $u\geq 0\Rightarrow\quad \ln\left(1+u\right)\leq u,$

$$\leq 2\frac{1-r}{1+r}+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\frac{1}{\tan^2(x/2)}$$

☞ $\frac{1-r}{1+r}\leq 1,\quad \tan\left(\frac{x}{2}\right)\geq\frac{x}{2}$

$$\leq 2\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$$

☞ $x^2\leq\pi^2<10,\quad 0\leq r<1$

$$\leq 2\left(1-r\right)\left(\frac{2+x^2}{x^2}\right)\leq 24\frac{1-r}{x^2}$$

وأخيراً إذا تذكّرنا أنّ

$$\left|\sin x\sin nx\right|\leq nx^2$$

استنتجنا أنّه مهما تكن x من $]0,\pi]$ يكن

$$\left|\sin x\sin nx\ln\left(\frac{1+r^2-2r\cos x}{2(1-\cos x)}\right)\right|\leq 24n(1-r)$$

وعليه

$$\forall r\in[0,1[,\ \left|I_n(r)-J_n\right|\leq 48n(1-r)$$

إذن $\lim_{r\to 1^-}I_n(r)=J_n$.

ومن ثَمّ

$$J_n = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2-1} & : \quad n > 1 \\ \dfrac{1}{2} & : \quad n = 1 \end{cases}$$

ولكن

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x + \frac{2\ln 2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cdot \sin nx \,\mathrm{d}\,x$$

إذن

$$b_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2-1} & : \quad n > 1 \\ \dfrac{1}{2} - \ln 2 & : \quad n = 1 \end{cases}$$

$iii.2$. نستنتج مما سبق أنّ متسلسلة فورييه للتابع φ هي

$$S(\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)\sin x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\sin nx$$

ولمّا كان التابع φ مستمرّاً على $\mathbb{R}$ ومتسلسلة فورييه السابقة متقاربة بالنظيم استنتجنا أنّ مجموعها يساوي φ إذن

$$\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)\sin x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\sin nx = \begin{cases} \sin x \ln\left(1-\cos x\right) & : \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & : \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 12. ليكن a عنصراً من $]0,\frac{\pi}{2}]$. ولنعرّف التابع f_a من $\mathfrak{R}_{2\pi}$ بالعلاقة:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}\cdot\left(1 - \dfrac{|x|}{2a}\right) & : \quad x \in [-2a, 2a] \\ 0 & : \quad x \in [-\pi,\pi]\backslash[-2a,2a] \end{cases}$$

i .1. اكتب متسلسلة فورييه للتابع f_a وادرس تقاربها.

ii. احسب المجموع $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 na}{n^2a^2}$.

iii. احسب، في حالة $0 < a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$، المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)\sin^2(nb)}{n^4}$. ما قيمة هذا المجموع إذا كان $0 < b \leq a \leq \frac{\pi}{2}$؟

2. لتكن λ من $\mathbb{R}_+^*$، وليكن g_λ التابع من $\Re_{2\pi}$ المعرّف بالعلاقة:

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad g_\lambda(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$$

اكتب متسلسلة فورييه للتابع g_λ وادرس تقاربها.

3. *i*. احسب بطريقتين مختلفتين المقدار $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) g_\lambda(x)\,\mathrm{d}\,x$ ، واستنتج أنّه مهما تكن a من $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ومهما تكن λ من $\mathbb{R}_+^*$ يكن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(an)}{n^2(\lambda^2 + n^2)} = \frac{\pi \operatorname{sh}^2(\lambda a) - a^2 \lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

هل تبقى النتيجة السابقة صحيحة عند قيم أخرى للعدد λ؟

ii. احسب مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(an)}{n^4}$.

الحل

1.*i*. من الواضح أنّ f_a ينتمي إلى الصف C^1 قِطعيّاً، إذن تتقارب متسلسلة فورييه الموافقة منه.

في حالة $n \neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned} C_n\left(f_a\right) &= \frac{1}{2a}\int_{-2a}^{2a}\left(1 - \frac{|x|}{2a}\right) e^{-\mathrm{i} nx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a}(2a - x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x \\ &= \cancel{\left[\frac{(2a-x)\sin nx}{2a^2 n}\right]_0^{2a}} + \frac{1}{2a^2 n}\int_0^{2a}\sin nx\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{\cos nx}{2a^2 n^2}\right]_0^{2a} = \frac{\sin^2 an}{a^2 n^2} \end{aligned}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $C_0(f_a) = 1$. نستنتج إذن أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^2 \cos nx$$

$ii.1$. فإذا عوّضنا $x=\pi$ استنتجنا أنّ

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^2$$

$iii.1$. نلاحظ أنّ $C_0(f_a * f_b)=1$ ، وأنّ $C_n(f_a * f_b)=\dfrac{\sin^2 an\cdot\sin^2 bn}{a^2b^2n^4}$ في حالة $n\neq 0$. ولمّا كانت متسلسلة فورييه للتابع $f_a * f_b$ متقاربة بانتظام من التابع نفسه، استنتجنا

$$f_a * f_b(0)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 an\cdot\sin^2 bn}{a^2b^2n^4}$$

ولكن

$$f_a * f_b(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_a(x)f_b(-x)\,\mathrm{d}\,x$$

فإذا استفدنا من الفرض $0<a\leq b\leq\frac{\pi}{2}$ وجدنا

$$\begin{aligned}
f_a * f_b(0)&=\frac{\pi}{2ab}\int_{-2a}^{2a}\left(1-\frac{|x|}{2a}\right)\left(1-\frac{|x|}{2b}\right)\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{\pi}{4a^2b^2}\int_{0}^{2a}(2a-x)(2b-x)\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{\pi(3b-a)}{3b^2}
\end{aligned}$$

إذن، في حالة $0<a\leq b\leq\frac{\pi}{2}$ لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 an\cdot\sin^2 bn}{n^4}=\frac{\pi}{2}a^2b-\frac{\pi}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2b^2$$

أمّا في حالة $0<b\leq a\leq\frac{\pi}{2}$ فنجد مباشرة أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 an\cdot\sin^2 bn}{n^4}=\frac{\pi}{2}ab^2-\frac{\pi}{6}b^3-\frac{1}{2}a^2b^2$$

2. لقد حسبنا ثوابت فورييه للتابع g_λ في التمرين 4. ووجدنا

$$C_n(g_\lambda)=\frac{\operatorname{sh}\pi\lambda}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\lambda}{n^2+\lambda^2}$$

أمّا متسلسلة فورييه للتابع g_λ فهي

$$S(g_\lambda)(x) = \frac{\operatorname{sh} \pi\lambda}{\pi\lambda} + 2\frac{\operatorname{sh} \pi\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda}{n^2+\lambda^2}\cos nx$$

وهي متقاربة بالنظيم على $\mathbb{R}$، فإذا استفدنا من استمرار التابع g_λ على $\mathbb{R}$ استنتجنا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\lambda(x) = \frac{\operatorname{sh} \pi\lambda}{\pi\lambda} + 2\frac{\operatorname{sh} \pi\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda}{n^2+\lambda^2}\cos nx$$

$i.3$ لنلاحظ أنّ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)g_\lambda(x)\,\mathrm{d}\,x = f_a * g_\lambda(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f_a)C_n(g_\lambda)$$

ولكن

$$\begin{aligned}
f_a * g_\lambda(0) &= \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}(2a-x)\operatorname{ch}(\lambda x)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \cancel{\left[\frac{(2a-x)\operatorname{sh}(\lambda x)}{2a^2\lambda}\right]_0^{2a}} + \frac{1}{2a^2\lambda}\int_0^{2a}\operatorname{sh}(\lambda x)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{\operatorname{ch}(2a\lambda)-1}{2a^2\lambda^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 a\lambda}{a^2\lambda^2}
\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية $C_0(f_a)C_0(g_\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh}\lambda\pi}{\lambda\pi}$ وفي حالة $n \neq 0$ لدينا

$$C_n(f_a)C_n(g_\lambda) = \frac{\lambda \operatorname{sh} \pi\lambda}{a^2\pi}\cdot\frac{(-1)^n\sin^2 an}{(n^2+\lambda^2)n^2}$$

إذن

$$\frac{\operatorname{sh}^2 a\lambda}{a^2\lambda^2} = \frac{\operatorname{sh}\lambda\pi}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{a^2\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2 an}{(n^2+\lambda^2)n^2}$$

أو

$$\frac{\pi\operatorname{sh}^2 a\lambda}{2\lambda^3\operatorname{sh}\pi\lambda} - \frac{a^2}{2\lambda^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2 an}{(n^2+\lambda^2)n^2}$$

.ii.3 لنعرّف في حالة $n \in \mathbb{N}^*$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ المقدار

$$h_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \sin^2 an}{(n^2+\lambda^2)n^2}$$

عندئذ نلاحظ أنّ متسلسلة التوابع $\sum h_n$ تتقارب بالنظيم على $\mathbb{R}$، وأنّ كلّاً من التوابع h_n مستمرٌّ على $\mathbb{R}$. إذن المجموع مستمرٌّ أيضاً على $\mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 an}{n^4} &= \lim_{\lambda \to 0^+} \left(\frac{\pi \operatorname{sh}^2 a\lambda}{2\lambda^3 \operatorname{sh} \pi\lambda} - \frac{a^2}{2\lambda^2} \right) \\ &= \frac{(2a^2-\pi^2)a^2}{12}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 13. لنعرّف، في حالة x من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$، المقدار $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

1. لنعرّف $f(x) = (\pi - x)/2$ في حالة $x \in [0, 2\pi[$. أثبت أنّ

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

2. أثبت أنّ $\forall x \in]0,2\pi[, \ S_n(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x D_n(t)\,\mathrm{d}t$، و D_n هي نواة ديرخليه.

3. نعرّف على المجال $[0,\pi]$ التابع g بالعلاقة

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin(x/2)} - \dfrac{1}{x} & : \quad x \in]0,\pi] \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

.i أثبت أنّ g مستمرٌّ على المجال $[0,\pi]$.

.ii أثبت أنّ

$$S_n(x) = \int_0^x g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}$$

.iii استنتج أنّ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

4. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

5. استنتج أنّه يوجد ثابتٌ $0 < \alpha$ يُحقِّق

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \alpha + \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

وهذه تسمّى **ظاهرة** Gibbs.

الحل

1. ليكن $\tilde{f}$ التابع الذي يتّفق مع f على المجال $[0,2\pi[$، والذي يقبل العدد 2π دوراً. عندئذ نلاحظ بحساب بسيط أنّ $\left(S_n(x)\right)_{n\geq 1}$ هي متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}$. ولكنّ التابع $\tilde{f}$ ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $]0,2\pi[$. إذن مهما تكن x من $]0,2\pi[$ فإنّ المتتالية $\left(S_n(x)\right)_{n\geq 1}$ تتقارب من $f\left(x\right)$.

2. من المعلوم أنّ

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

إذن من السهل ملاحظة أنّ

$$\forall x \in [0,2\pi[, \quad S_n(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x D_n(t)\,\mathrm{d}\,t - \frac{x}{2}$$

i.3. نلاحظ بإجراء نشرٍ محدود بسيط أنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ ، وعليه فالتابع g تابعٌ مستمرٌّ على $[0,\pi]$.

ii.3. بالاستفادة من النتيجة 2. يمكننا أن نكتب في حالة x من $[0,\pi]$ ما يلي :

$$S_n(x) = \int\limits_0^x g(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^x \frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t - \frac{x}{2}$$

iii.3. بالاستفادة من توطئة ريمان المعروفة، نستنتج من استمرار التابع g أنّ

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^x g(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t = 0$$

.iv.3 نختار $x=\pi$ في .ii.3 ونستفيد من النتيجة السابقة لنجد

$$0=f(\pi)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}\,t-\frac{\pi}{2}$$

فإذا أجرينا تغييراً بسيطاً في المتحوّل، وتذكّرنا أنّ التكامل $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ، استنتجنا أنّ

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t=\frac{\pi}{2}$$

.4 من المعلوم أنّ

$$S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(k\pi/n\right)}{k\pi/n}$$

إذن $S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$ هو مجموع ريمان للتابع $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ الموافق لتقسيمة منتظمة للمجال $[0,\pi]$، فهو يتقارب، عندما تسعى n إلى $+\infty$، من تكامل هذا التابع على $[0,\pi]$. أي

$$\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t$$

.5 نلاحظ أنّ

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin u}{2\pi k+u}\mathrm{d}\,u\\&=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\pi k+u}\mathrm{d}\,u-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\pi k-u}\mathrm{d}\,u\\&=-2\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{4\pi^2k^2-u^2}\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

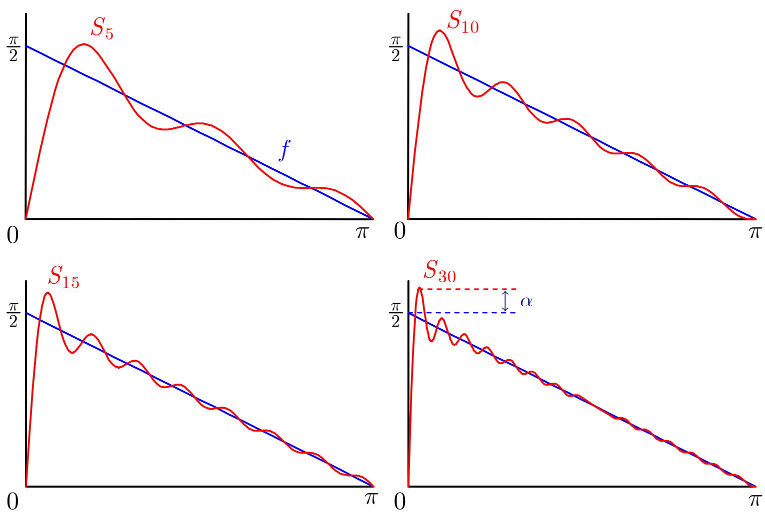
وعليه

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t - \frac{\pi}{2} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{u\sin u}{4\pi^2k^2 - u^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &> 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{u\sin u}{4\pi^2k^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &> \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\int_0^\pi u\sin u\,\mathrm{d}\,u\right)\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\pi = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

وعلى هذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{\pi}{12} + \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

يوضِّح الشكل التالي هذه الظاهرة.



وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 14. ليكن a عنصراً من $\mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{Z}\cup i\mathbb{Z}\right)$. نتأمّل التابع الدوري $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$ المعرّف بالعلاقة :

$$\forall x\in\left]-\pi,\pi\right],\quad f(x)=\frac{\cos(ax)}{\sin(a\pi)}+\frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{sh}(a\pi)}.$$

1. أثبت أنّ التابع f تابعٌ من الصف C^2 على $\mathbb{R}$.
2. احسب ثوابت فورييه الأسيّة $\left(C_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ للتابع f .
3. استنتج وجود متتالية عدديّة $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ يُطلب تعيينها، تُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\cos nx$$

4. احسب المجموعَين التاليتين : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-a^4}$ و $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4-a^4}$.

الحل

1. نعلم أنّ $\sin a\pi=0$ إذا وفقط إذا كان $a\in\mathbb{Z}$ ، وكذلك $\operatorname{sh}a\pi=0$ إذا وفقط إذا كان $a\in i\mathbb{Z}$. إذن نستنتج أنّ التابع f ينتمي إلى الصف C^∞ على المجال $\left]-\pi,\pi\right[$.

- نلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to(-\pi)^+}f(x)=\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi}+\frac{\operatorname{ch}a\pi}{\operatorname{sh}a\pi}=\lim_{x\to\pi^-}f(x)$$

إذن f مستمرّ عند π .

- وكذلك

$$\forall x\in\left]-\pi,\pi\right],\quad f'(x)=a\left(\frac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}a\pi}-\frac{\sin ax}{\sin a\pi}\right)$$

إذن

$$\lim_{x\to\pi^+}f'(x)=\lim_{x\to(-\pi)^+}f'(x)=0=\lim_{x\to\pi^-}f'(x)$$

والتابع f قابل للاشتقاق عند π ، والتابع f' مستمرّ عند π .

- ونجد أيضاً

$$\forall x\in\left]-\pi,\pi\right],\quad f''(x)=a^2\left(\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{sh}a\pi}-\frac{\cos ax}{\sin a\pi}\right)$$

إذن

$$\lim_{x\to\pi^+} f''(x) = \lim_{x\to(-\pi)^+} f''(x) = 0 = \lim_{x\to\pi^-} f''(f)$$

فالتابع f' قابل للاشتقاق عند π، والتابع f'' مستمرّ عند π. وهذا يبرهن أنّ f ينتمي إلى الصف C^2 على $\mathbb{R}$.

2. ليكن b من $\mathbb{C}\backslash \mathrm{i}\,\mathbb{Z}$ ولنعرّف التابع g_b من $\mathcal{R}_{2\pi}$ بالعلاقة

$$\forall x \in\ ]-\pi,\pi],\ g_b(x) = \frac{e^{bx}}{\operatorname{sh} b\pi}$$

عندئذ

$$\begin{aligned} C_n(g_b) &= \frac{1}{2\pi \operatorname{sh} b\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(b-\mathrm{i}\,n)x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{e^{(b-\mathrm{i}\,n)x}}{2\pi \operatorname{sh} b\pi(b-\mathrm{i}\,n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-1)^n\,\frac{(e^{b\pi}-e^{-b\pi})}{2\pi \operatorname{sh} b\pi(b-\mathrm{i}\,n)} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{b-\mathrm{i}\,n} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} &= \frac{1}{2}\big(g_a(x) - g_{-a}(x)\big) \\ \frac{\cos ax}{\sin a\pi} &= \mathrm{i}\,\frac{\operatorname{ch}(\mathrm{i}\,ax)}{\operatorname{sh}(\mathrm{i}\,a\pi)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\big(g_{\mathrm{i}\,a}(x) - g_{-\mathrm{i}\,a}(x)\big) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} C_n(f) &= \frac{1}{2}\Big(C_n(g_a) - C_n(g_{-a}) + \mathrm{i}\big(C_n(g_{\mathrm{i}\,a}) - C_n(g_{-\mathrm{i}\,a})\big)\Big) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{1}{a-\mathrm{i}\,n} + \frac{1}{a+\mathrm{i}\,n} + \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{2a}{a^2+n^2} + \frac{2a}{a^2-n^2}\right) = \frac{2a^3(-1)^n}{\pi(a^4-n^4)} \end{aligned}$$

3. متسلسلة فورييه للتابع f متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ فمجموعها يساويه. وبملاحظة أنّ

$$C_{-n}(f) = C_n(f)$$

نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{\mathrm{i}\,nx} \\ &= C_0(f) + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n(f)\cos nx \\ &= \frac{2}{\pi a} - \frac{4a^3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 - a^4}\cos nx\end{aligned}$$

4. باختيار $x = \pi$ وملاحظة أنّ $f(\pi) = \dfrac{\cos a\pi}{\sin a\pi} + \dfrac{\operatorname{ch} a\pi}{\operatorname{sh} a\pi}$ نستنتج أنّ

$$\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} + \frac{\operatorname{ch} a\pi}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{2}{\pi a} - \frac{4a^3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4 - a^4}$$

ومنه

$$\frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{2}{\pi a} - \frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} - \frac{\operatorname{ch} a\pi}{\operatorname{sh} a\pi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4 - a^4}$$

وباختيار $x = 0$ وملاحظة أنّ $f(0) = \dfrac{1}{\sin a\pi} + \dfrac{1}{\operatorname{sh} a\pi}$ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{\sin a\pi} + \frac{1}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{2}{\pi a} - \frac{4a^3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 - a^4}$$

ومنه

$$\frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{2}{\pi a} - \frac{1}{\sin a\pi} - \frac{1}{\operatorname{sh} a\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 - a^4}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

يعاني التكامل بمعنى ريمان Riemann الذي دأبنا على دراسته، وعلى استخدامه في محطّات دراستنا المختلفة، من نقاط ضعف أساسيّة أهمّها هو أنّ مجموعة التوابع التي يمكن حساب تكاملها وفق ريمان «صغيرة» فمثلاً لنتأمّل التابع

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ولنتأمّل ، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التقسيمتين المنقوطتين

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \left((t_k)_{0 \le k \le n} ; (\lambda_k)_{0 \le k < n}\right) = \left(\left(\tfrac{k}{n}\right)_{0 \le k \le n} ; \left(\tfrac{k}{n}\right)_{0 \le k < n}\right) \\ \tilde{\sigma}_n &= \left((t_k)_{0 \le k \le n} ; (\tilde{\lambda}_k)_{0 \le k < n}\right) = \left(\left(\tfrac{k}{n}\right)_{0 \le k \le n} ; \left(\tfrac{k}{n} + \tfrac{1}{n\pi}\right)_{0 \le k < n}\right) \end{aligned}$$

عندئذ نلاحظ أنّ خطوة كلٍّ من σ_n و $\tilde{\sigma}_n$ تساوي $\frac{1}{n}$، وهي، من ثَمّ، تسعى إلى 0 عندما تسعى n إلى $+\infty$، ومع هذا فإنّ مجموعَي ريمان الموافقين يُحقّقان

$$\forall n \ge 1, \quad S\left(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma_n\right) = 1, S\left(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \tilde{\sigma}_n\right) = 0,$$

وعليه لا تتقارب مجاميع ريمان $S\left(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma\right)$ من عدد حقيقي عندما تسعى خطوة التقسيمة المنقوطة σ إلى الصفر. إذن لا يمكن حساب التكامل $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ وفق ريمان.

هذا مثال أوّلي على قصور تكامل ريمان، وهناك أمثلة كثيرة لن نطيل في ذكرها، ولكن حان الوقت لنلتقي مفهوماً جديداً للتكامل هو تكامل لوبيغ Lebesgue.

لقد عرض لوبيغ في أطروحته عام 1904 نظريته الجديدة في التكامل، وقد بناها على مفهوم **قياس** «أو طول» المجموعات التي سبقه في دراستها بورِل Borel.

سنعطي في هذا البحث فكرة سريعة عن هذه النظريّة، والمفاهيم المقرونة بها، وتطبيقاتها ثُمّ سنتابع الاستفادة منها في دراستنا اللاحقة للتحويلات التكامليّة ولنظريّة الاحتمالات.

1. الجبور التامّة

1-1. تعريف. لتكن X مجموعة. نسميّ **جبراً تامّاً** من أجزاء X، كلّ مجموعة جزئيّة Σ من أجزاء المجموعة X تُحقِّق الخواص الآتية:

① المجموعة الخالية عنصر من Σ، أي $\varnothing \in \Sigma$.

② متمِّمة عنصر من Σ هي عنصر من Σ. أي $A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$.

③ اجتماع متتالية من عناصر Σ هو عنصرٌ من Σ. أي إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من Σ كان $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ عنصراً من Σ.

ونسمّي **فضاءً قَيوساً**، أو **قابلاً للقياس**، كلّ زوج (X,Σ) مكوّن من مجموعة X، ومن جبرٍ تامٍّ Σ من أجزاء X.

فمثلاً، $\mathcal{P}(X)$، أي مجموعة أجزاء X، هو جبرٌ تامٌّ من أجزاء X يحوي جميع الجبور التامّة على X. وكذلك نرى أنّ $\{\varnothing, X\}$ هو جبرٌ تامٌّ من أجزاء X محتوى في جميع الجبور التامّة على X.

2-1. مبرهنة. ليكن Σ جبراً تامّاً من أجزاء مجموعة X.

① إذا كان A و B عنصرين من Σ، انتمى كلٌّ من المجموعات $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A \backslash B$ و $A \Delta B$ إلى Σ.

② إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من Σ كان $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ عنصراً من Σ.

③ إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من Σ كانت المجموعتان

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \overset{\text{تعريف}}{=} \bigcup_{n\ge 0}\left(\bigcap_{k\ge n} A_k\right) \quad \text{و} \quad \varlimsup_{n\to\infty} A_n \overset{\text{تعريف}}{=} \bigcap_{n\ge 0}\left(\bigcup_{k\ge n} A_k\right)$$

عنصرين من Σ.

الإثبات

إنّ الإثبات تحقّق مباشرٌ باستخدام العمليّات على المجموعات ودساتير دومورغان. ❐

3-1. ملاحظة. لتكن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من المجموعات الجزئيّة من X، عندئذ ينتمي a إلى $\varlimsup_{n\to\infty} A_n$ إذا وفقط إذا انتمى a إلى عددٍ لانهائي من المجموعات A_n. وينتمي a إلى $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ إذا وفقط إذا انتمى a إلى جميع المجموعات A_n بدءاً من دليل n_a.

1-4. **مبرهنة**. لتكن $(\Sigma_i)_{i\in I}$ جماعة من الجبور التامّة من أجزاء مجموعة X. عندئذ يكون تقاطعها $\bigcap_{i\in I}\Sigma_i$ جبراً تامّاً من أجزاء X.

الإثبات

الإثبات هنا أيضاً تحقّق مباشرٌ باستخدام العمليّات على المجموعات. ❐

1-5. **تعريف**. لتكن $\mathcal{C}$ مجموعة من أجزاء مجموعة X. عندئذ يكون تقاطع جميع الجبور التامّة في X التي تحوي $\mathcal{C}$ أصغرَ جبرٍ تامّ من أجزاء X يحوي $\mathcal{C}$، ونسميّه **الجبر التامّ الذي تولَّده** $\mathcal{C}$، ونرمز إليه بالرمز $\Sigma(\mathcal{C})$.

وعليه إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً تامّاً من أجزاء X يُحقّق الشرطين:

- $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$.
- كلُّ $\mathcal{B}$ جبر تامّ من أجزاء X يحوي $\mathcal{C}$ يحقّق $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$.

عندئذ يكون $\mathcal{A}=\Sigma(\mathcal{C})$.

1-6. **أمثلة مهمّة**

- في حالة $X=\mathbb{R}$، و $\mathcal{C}=\{]c,+\infty[\,:c\in\mathbb{R}\}$، يسمّى الجبر التامّ $\Sigma(\mathcal{C})$ الذي تولّده المجالات $\mathcal{C}$ **جبر المجموعات البورِليّة** في $\mathbb{R}$ ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. وهو نفسه الجبر التامّ الذي تولّده المجالات المفتوحة، وكذلك هو نفسه الجبر التامّ التي تولّده المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$. وكذلك هو نفسه الجبر التامّ التي تولّده المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$.

- في حالة $X=\overline{\mathbb{R}}$، و $\mathcal{C}=\{]c,+\infty]:c\in\mathbb{R}\}$، يسمّى الجبر التامّ $\Sigma(\mathcal{C})$ الذي تولّده المجالات $\mathcal{C}$ **جبر المجموعات البورِليّة** في $\overline{\mathbb{R}}$ ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

- ونعرّف بأسلوب مماثل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ **جبر المجموعات البورِليّة** في $\mathbb{R}^n$. وهو الجبر التامّ الذي تولده المجموعات من الشكل $]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[$، وهو نفسه الجبر التامّ الذي تولّده المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة. عندما نتحدث عن جبر تامٍّ على $\mathbb{R}$ أو $\overline{\mathbb{R}}$ أو $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ فإننا نقصد جبر المجموعات البورِليّة ما لم نذكر خلاف ذلك. هذا ويُبرهن أنّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\neq\mathcal{P}(\mathbb{R})$، فتوجد في $\mathbb{R}$ مجموعات جزئيّة غير بورِليّة.

2. القياسات الموجبة على الجبور القَيوسة

1-2. تعريف. ليكن (X,Σ) فضاءً قابلاً للقياس. نسمّي **قياساً موجباً** على (X,Σ) كلَّ تطبيق $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ يُحقّق الخواص الآتية:

① $\mu(\varnothing)=0$.

② إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من Σ مكوّنة من مجموعات منفصلة مثنى مثنى كان

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)$$

2-2. أمثلة

❶ **قياس ديراك.** ليكن (X,Σ) فضاءً قابلاً للقياس، ولتكن a من X. نسمّي قياس ديراك عند a، القياس δ_a المعرّف كما يأتي:

$$\forall A\in\Sigma,\quad \delta_a(A)=\begin{cases}1 & : \quad a\in A\\ 0 & : \quad a\notin A\end{cases}$$

ونترك للقارئ مهمّة التيقّن من كون δ_a قياساً موجباً على (X,Σ).

❷ **قياس التعداد.** لتكن X مجموعة ما، عندئذ نعرّف قياس التعداد ν على $(X,\mathcal{P}(X))$ بأنّه القياس المعرّف كما يأتي:

$$\forall A\in\Sigma,\quad \nu(A)=\begin{cases}\operatorname{card}(A) & : \quad A \text{ منتهية}\\ +\infty & : \quad A \text{ غير منتهية}\end{cases}$$

❸ لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة. عندئذ نعرّف على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ قياساً μ بوضع $\mu(A)=\sum_{k\in A}a_k$.

❹ **قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$.** لقد أثبت لوبيغ أنّه **يوجد** قياس **وحيد** λ معرّف على $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ يقرن بكلّ مجال محدودٍ طولَه:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, a\leq b\Rightarrow\lambda(]a,b[)=b-a$$

إنّ إثبات هذه الخاصّة صعبٌ لذلك سنقبل بها دون عرض إثباتها. ولكن من المعلوم أنّ كلَّ مجموعة مفتوحة O تُكتب بشكل اجتماع متتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجالات المفتوحة المنفصلة مثنى مثنى، التي يمكن أن يكون بعضها خالياً، وعندئذ يكون لدينا $\lambda(O)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(I_n)$.

كما يمكن الاستفادة من كون قياس لوبيغ قياساً نظاميّاً لحساب قياس أيّ مجموعة بورلِيّة، إذ تنص هذه الخاصّة على أنّه في حالة A من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ لدينا

$$\lambda(A) = \inf\left\{\lambda(O) : A \text{ مجموعة مفتوحة تحوي } O\right\}$$
$$= \sup\left\{\lambda(K) : A \text{ مجموعة متراصّة محتواة في } K\right\}$$

3-2. مبرهنة. ليكن (X, Σ, μ) فضاءً مَقيساً، أي ليكن μ قياساً على الفضاء القابل للقياس (X, Σ).

① أيّاً كان A و B من Σ كان $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(A \backslash B)$.

② أيّاً كان A و B من Σ فإنّ $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

③ أيّاً كان A و B من Σ كان

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

④ أيّاً كانت المتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من Σ فإنّ

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

⑤ إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من Σ، أي $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$ فإنّ

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

⑥ إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة من Σ، أي $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$ وكان $\mu(A_0) < +\infty$ كان

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

الإثبات

① إذا تأملنا المتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $A_0 = A$ و $A_1 = B\backslash A$ و $A_n = \varnothing$ في حالة $n \geq 2$، لاحظنا أنّها متتالية من Σ مكوّنة من مجموعات منفصلة مثنى مثنى إذن

$$\mu(A \cup B) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B\backslash A)$$

② هذه النتيجة واضحة بسبب النتيجة السابقة، بعد الاستفادة من كون القياس μ يأخذ قيماً موجبة.

③ استناداً إلى ① نجد

$$\mu(B) = \mu(B\backslash A) + \mu(A\cap B) \quad \text{و} \quad \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A)$$

وعليه

$$\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B\backslash A) + \mu(A\cap B)}$$
$$= \mu(A) + \mu(B)$$

④ انطلاقاً من متتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من Σ نعرّف المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من Σ كما يأتي:

$$B_0 = A_0, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad B_{n+1} = A_{n+1}\backslash\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} A_k\right)$$

عندئذ نبرهن بالتدريج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} B_k$$

إذن حدود المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى ولدينا $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ ، وعليه

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

⑤ كما في السابق، نعرّف المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من Σ كما يأتي:

$$B_0 = A_0, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad B_{n+1} = A_{n+1}\backslash A_n$$

عندئذ نبرهن بالتدريج أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} B_k$. إذن حدود المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى، و $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ ، وعليه

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

⑥ بتطبيق ⑤ على المتتالية المتزايدة $(A_0\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نستنتج أنّ

$$\mu\left(A_0\backslash\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_0\backslash A_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_0\backslash A_n)$$

وبالاستفادة من ① و ② ومن الفرْض $\mu(A_0) < +\infty$ نستنتج أنّ

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

وبذا يكتمل إثبات المبرهنة. ❐

ملاحظة. إنّ الشرط $\mu(A_0)<+\infty$ ضروري في الخاصّة ⑥ من المبرهنة السابقة، كما يوضّح، في حالة قياس لوبيغ λ، مثال المتتالية المتناقصة $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ المعرّفة بالصيغة $A_n=[n,+\infty[$ في حالة n من $\mathbb{N}$.

2-4. **مثال**. لنتأمّل قياس لوبيغ λ على $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. وليكن a عدداً حقيقيّاً. عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ $\{a\}=\bigcap_{n\geq 1}]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}[$ ومن ثَمَّ

$$\lambda(\{a\})=\lim_{n\to\infty}\lambda(]a-\tfrac{1}{n},a+\tfrac{1}{n}[)=\lim_{n\to\infty}\tfrac{2}{n}=0$$

إذن، في حالة $a\leq b$ يكون لدينا

$$\lambda(]a,b[)=\lambda([a,b[)=\lambda(]a,b])=\lambda([a,b])=b-a$$

ونستنتج أيضاً أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\lambda(\{\tfrac{k}{n}:k\in\mathbb{N}\})=\sum_{k=0}^{\infty}\mu(\{\tfrac{k}{n}\})=0$$

وكذلك يكون لدينا $\lambda(\{\frac{-k}{n}:k\in\mathbb{N}^*\})=0$ إذن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \lambda(\{\tfrac{k}{n}:k\in\mathbb{Z}\})=0$$

وإذا استفدنا من ④ في المبرهنة السابقة وجدنا أنّ

$$\lambda(\mathbb{Q})=\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\tfrac{k}{n}:k\in\mathbb{Z}\}\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{\tfrac{k}{n}:k\in\mathbb{Z}\})=0$$

في الحقيقة، إذا كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة ما، كان

$$\lambda(\{x_k:k\in\mathbb{N}\})=0$$

والنتيجة المتعلّقة بالمجموعة $\mathbb{Q}$ حالةٌ خاصّة من هذه، لأنّ $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد.

2-5. **تعريف**. ليكن (X,Σ,μ) فضاء مَقيساً، عندئذ نقول إنّ مجموعةً جزئيّة B من X، **مهملة**، أو **μ-مهملة**، إذا وُجدت، في Σ، مجموعة A تُحقّق

$$B\subset A \quad \text{و} \quad \mu(A)=0$$

ونثبت دون عناء أنّ كلّ مجموعة جزئيّة من مجموعة مهملة هي نفسها مهملة، وكلّ اجتماع **لِمتتالية** من المجموعات المهملة هو مجموعة مهملة أيضاً.

2-6. **مثال**. نقول إنّ العدد a من $\mathbb{R}$ **عددٌ جبري** إذا كان جذراً لكثير حدود غير معدوم أمثاله أعداد صحيحة. نرمز عادة بالرمز $\mathfrak{A}$ إلى مجموعة الأعداد الجبريّة، فمثلاً جميع عناصر $\mathbb{Q}$ هي أعدادٌ جبريّة، وكذلك جميع الأعداد من الشكل $\sqrt[n]{a}$ حيث a من $\mathbb{Q}$، و $\sqrt[3]{14+\sqrt{120}}$ وغيرها... .

لنثبت أنّ $\mathfrak{A}$ مجموعة مهملة بالنسبة إلى قياس لوبيغ. في الحقيقة،

$$\lambda(\mathfrak{A})=0 \quad \text{و} \quad \mathfrak{A}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

ليكن m من $\mathbb{N}^*$. نقول إنّ كثير حدود $P(X)=\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$ من $\mathbb{Z}[X]$ ينتمي إلى المجموعة B_m إذا كان $\deg P\leq m$ وكان $|a_k|\leq m$ أياً كانت قيمة k من $\{0,1,\ldots,\deg P\}$.

نلاحظ مباشرة أنّ $\operatorname{card}(B_m)\leq(2m+1)^{m+1}$. ولمّا كان كلُّ كثير حدود غير معدوم من B_m يقبل m جذراً حقيقيّاً على الأكثر، استنتجنا أنّ عدد عناصر المجموعة

$$\mathfrak{A}_m=\left\{x\in\mathbb{R}:\exists P\in B_m,\ P(x)=0\right\}$$

محدود بالعدد $m(2m+1)^{m+1}$، فهو منته. إذن $\lambda(\mathfrak{A}_m)=0$.

لمّا كان من الواضح أنّ $\mathbb{Z}[X]=\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} B_m$ استنتجنا أنّ مجموعة الأعداد الجبريّة تُحقّق $\mathfrak{A}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\mathfrak{A}_m$. وهذا يبرهن على أنّ $\mathfrak{A}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و $\lambda(\mathfrak{A})=0$.

2-7. **تعريف**. ليكن (X,Σ,μ) فضاء مَقيساً، عندئذ نقول إنّ قضيّةً مفتوحةً $\mathbb{P}(x)$ معرّفة عند كلّ x من X هي قضيّة **شبه محقّقة**، أو **μ-شبه محقّقة** أو **محقّقة في μ-كلّ مكان تقريباً**، إذا كانت مجموعة قيم x من X التي لا تتحقّق عندها القضيّة $\mathbb{P}(x)$ مجموعة μ-مهملة، وعندئذ نكتب $\mathbb{P}(x)$ صحيحة μ - $a.e.$ [1].

فمثلاً إذا تأمّلنا التابع

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & : \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & : \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

استنتجنا من كون المجموعة $\mathbb{Q}$ مهملة أنّ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}=0,\ \lambda$ - $a.e.$.

---

[1] μ-$a.e.$ هي اختصار للعبارة μ almost everywhere .

3. التوابع المقيسة، أو القابلة للقياس

3-1. تعريف. ليكن $(X,\mathcal{A})$ و $(Y,\mathcal{B})$ فضاءَين قابلين للقياس. نقول إنّ التابع $f : X \to Y$ **مقيس** أو **قابلٌ للقياس** إذا كانت الصورة العكسيّة وفق f لكلّ مجموعة مقيسة B من $\mathcal{B}$ تنتمي إلى $\mathcal{A}$. أي

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

3-2. مبرهنة. ليكن $(X,\mathcal{A})$ و $(Y,\mathcal{B})$ فضاءَين قابلين للقياس. نفترض أنّ $\mathcal{C}$ مجموعة جزئيّة من $\mathcal{B}$ تولّد $\mathcal{B}$ أي $\mathcal{B} = \Sigma(\mathcal{C})$. عندئذ يكون التابع $f : X \to Y$ قابلاً للقياس إذا وفقط إذا كان

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \qquad ⌘$$

الإثبات

من الواضح أنّ كلّ تابع مقيس $f : X \to Y$ يُحقّق الخاصّة ⌘.

وبالعكس، لنفترض أنّ $f : X \to Y$ تابعٌ يُحقّق الخاصّة ⌘، ولنتأمّل المجموعة الجزئيّة $\mathcal{M} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ من أجزاء Y.

- إنّ $\mathcal{M}$ جبرٌ تامٌّ من أجزاء Y. وهذه نتيجة مباشر من خواص الصورة العكسيّة.
- إنّ $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ وذلك استناداً إلى الخاصّة ⌘.
- لمّا كان $\mathcal{B}$ هو الجبر التامّ المولّد بالمجموعة $\mathcal{C}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

وهذا يقتضي أنّ التابع f تابعٌ قابلٌ للقياس. ويتمّ الإثبات. ❐

3-3. نتيجة. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءً قابلاً للقياس، نزوّد $\mathbb{R}$ بجبر المجموعات البورِليّة $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. عندئذ يكون التابع $f : X \to \mathbb{R}$ مقيساً إذا وفقط إذا كان

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{A}$$

في الحقيقة، يمكن أنّ نستبدل بالمجالات $]-\infty, a]$ في النتيجة السابقة، أيّ نوع آخر من المجالات؛ مثل $]-\infty, a[$ أو $[a, +\infty[$ أو $]a, +\infty[$ أو... لأنّها تولّد الجبر التامّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

ملاحظة. عندما نتحدّث عن كون تابع f يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ أو $\overline{\mathbb{R}}$ أو $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}^n$ مقيساً، فإننا نفترض أنّنا زوّدنا المجموعة التي يأخذ قيمه فيها بجبر المجموعات البورِليّة ما لم يُذكر خلافه.

3-4. نتيجة : كلُّ تابع مستمرٍّ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ قابلٌ للقياس.

الإثبات

في الحقيقة، ينتج من استمرار f أنّ المجموعات $f^{-1}\left(\prod_{1\le k\le n}[a_k,b_k]\right)$ مجموعات مغلقة وذلك مهما كانت الأعداد a_k و b_k من $\mathbb{R}$. وهذا يبرهن المطلوب. ❐

3-5. مبرهنة. لتكن $(X,\mathcal{A})$ و $(Y,\mathcal{B})$ و $(Z,\mathcal{C})$ ثلاثة فضاءات قابلة للقياس. ولنتأمّل تابعين مقيسين $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$. عندئذ يكون $g\circ f$ مقيساً أيضاً.

الإثبات

هذا تحقّق مباشر نترك تفاصيله للقارئ. ❐

3-6. مثال. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءً قابلاً للقياس. ولنتأمّل تابعاً مقيساً $f : X \to \mathbb{R}$. عندئذ نستنتج من استمرار التوابع $x\mapsto \lambda x$ و $x\mapsto |x|$ و $x\mapsto |x|^\alpha$ (حيث $\alpha>0$)، و $x\mapsto x^+=\max(x,0)$ و $x\mapsto x^-=\max(-x,0)$ أنّ التوابع

$$\lambda f \quad \text{و} \quad |f| \quad \text{و} \quad |f|^\alpha \quad \text{و} \quad f^+=\max(f,0) \quad \text{و} \quad f^-=\max(-f,0)$$

مقيسةٌ أيضاً.

3-7. مبرهنة. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءً قابلاً للقياس. نتأمّل تابعين مقيسَيْن $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : X \to \mathbb{R}$. عندئذ يكون التابعان $f+g$ و fg أيضاً مقيسَيْن.

الإثبات

- ليكن c من $\mathbb{R}$. ولنعرّف في حالة (p,n) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ المجموعة
$$A_{p,n}=f^{-1}(]-\infty,c-\tfrac{p}{n}[)\cap g^{-1}(]-\infty,\tfrac{p}{n}[)$$
لمّا كان التابعان f و g مقيسين استنتجنا أنّ $A_{p,n}\in\mathcal{A}$. ومن ثَمّ
$$A=\bigcup_{(p,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}A_{p,n}\in\mathcal{A}$$
ولكن نتحقّق مباشرة أنّ $A=(f+g)^{-1}(]-\infty,c[)$. إذن $f+g$ تابعٌ مقيسٌ لأنّ
$$\forall c\in\mathbb{R},\quad (f+g)^{-1}(]-\infty,c[)\in\mathcal{A}$$
- نستنتج من المثال 3-6. أنّ التابعين $\frac14(f+g)^2$ و $-\frac14(f-g)^2$ مقيسان، فيكون من ثَمّ مجموعهما fg مقيساً أيضاً. ❐

3-8. **ملاحظة**. نذكّر أنّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ مولّدة بالمجموعات من الشكل $\prod_{k\in\mathbb{N}_n}[a_k,b_k]$. فإذا تأمّلنا تطبيقاً $f : X \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\big)$ ، كان لدينا

$$f^{-1}\left(\prod_{k\in\mathbb{N}_n}[a_k,b_k]\right) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}([a_k,b_k])$$

ومن ثَمّ يكون $f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ مقيساً إذا كانت التوابع $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ مقيسة. والعكس صحيح وضوحاً.

وبوجه خاص، بالمطابقة بين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$ نرى أنّ $f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{C},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ قابلٌ للقياس إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ قابلين للقياس من $(X,\mathcal{A})$ إلى $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

وبالاستفادة من هذه الملاحظة، ومن استمرار $(x,y)\mapsto x+y$ و $(x,y)\mapsto xy$ ومن نتيجة المبرهنة 3-5. نحصل على إثبات جديد للمبرهنة 3-7.

3-9. **مبرهنة**. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءً قابلاً للقياس. نتأمّل متتالية توابع مقيسة $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من X إلى $\mathbb{R}$. إذا افترضنا أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة من تابع f كان f مقيساً.

الإثبات

ليكن c من $\mathbb{R}$. عندئذ نترك القارئ يتحقّق صحة التكافؤ التالي :

$$\big(f(x) < c\big) \Leftrightarrow \exists(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ \forall k \geq m, \big(f_k(x) < c - 2^{-n}\big)$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$f^{-1}(]-\infty,c[) = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\left(\bigcap_{k\geq m} f_k^{-1}(]-\infty,c-2^{-n}[)\right)$$

اي إنّ $f^{-1}(]-\infty,c[)\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ أيّاً كان c من $\mathbb{R}$، والتابع f تابعٌ مقيس. ❐

ملاحظة. تبقى نتيجة المبرهنة السابقة صحيحة في حالة كون التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ أو في $\overline{\mathbb{R}}$.

3-10. **تعريف**. إذا كانت B مجموعة جزئيّة من X عرّفنا **التابع المميِّز للمجموعة** B بأنّه التابع $\mathbb{1}_B$ الذي يأخذ فقط القيمتين 0 و 1. فيكون $\mathbb{1}_B(x) = 1$ في حالة x ينتمي إلى B، و $\mathbb{1}_B(x) = 0$ في حالة x لا ينتمي إلى B.

ويكون التابع $\mathbb{1}_B : (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ مقيساً إذا وفقط إذا كان $B \in \Sigma$.

3-11. **تعريف**. نقول إنّ تابعاً حقيقياً أو عقدياً معرّفاً على فضاء مقيس (X,Σ) هو **تابعٌ بسيطٌ أو درجيٌّ** إذا وفقط إذا كان تابعاً مقيساً يأخذ عدداً منتهياً من القيم. ونرمز بالرمز $\mathcal{E}(X,\Sigma)$ إلى مجموعة التوابع البسيطة على (X,Σ)، وبالرمز $\mathcal{E}^+(X,\Sigma)$ إلى مجموعة التوابع من $\mathcal{E}(X,\Sigma)$ التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$.

- من الواضح أنّ كلّ تابعٍ من الصيغة $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{B_k}$ هو تابعٌ بسيطٌ، شرط أن تكون المجموعات $(B_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ مقيسة أي أن تنتمي إلى Σ، وتنتمي الأعداد $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ إلى $\mathbb{C}$.

- وبالعكس، ليكن $f : X \to \mathbb{C}$ تابعاً بسيطاً، ولنعرّف $V = f(X)$ مجموعة قيم التابع f التي عددُ عناصرها منتهٍ. وفي حالة v من V، لنعرّف B_v من Σ بالصيغة $B_v = f^{-1}(\{v\})$. عندئذ تكون $(B_v)_{v\in V}$ تجزئة بمجموعات مقيسة للمجموعة X، ويكون $f = \sum_{v\in V} v\mathbb{1}_{B_v}$.

- وأخيراً من الواضح أنّ مجموعة التوابع البسيطة على الفضاء المقيس (X,Σ) تؤلّف جبراً تابعيّاً، فهي مغلقة بالنسبة إلى عمليتي جمع التوابع وضربها.

نأتي الآن إلى مبرهنة مهمّة تتعلّق بتقريب التوابع المقيسة.

3-12. **مبرهنة**. ليكن $f : (X,\Sigma) \to \mathbb{R}$ تابعاً مقيساً يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$. عندئذ توجد متتالية توابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مؤلّفة من توابع بسيطة معرّفة على (X,Σ) وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$، وتُحقّق الخاصّتين الآتيتين:

① أيّاً كانت x من X كانت المتتالية $(f_n(x))_{n\geq 1}$ متزايدة.

② أيّاً كانت x من X كان $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

الإثبات

لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}$، التابع $J_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ بالصيغة

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad J_n(x) = \min\left(2^n, 2^{-n}\left\lfloor 2^n x\right\rfloor\right)$$

نتيقّن مباشرة أنّ

$$J_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[} + 2^n \mathbb{1}_{[2^n,+\infty[}$$

فالتابع J_n تابعٌ بسيطٌ. هو يحقّق الخاصتين الآتيتين :

❶ $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad J_n(x) \leq J_{n+1}(x)$$

❷ $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 2^n], \quad x - \frac{1}{2^n} \leq J_n(x) \leq x$$

- **إثبات** ❶. لتكن x من $\mathbb{R}_+$ ولنناقش الحالتين الآتيتين:
  - حالة $x \geq 2^n$. عندئذ $2^{2n+1} \leq \left\lfloor 2^{n+1}x\right\rfloor$ ومن ثَمّ
  $$J_n(x) = 2^n \leq \min\left(2^{n+1}, 2^{-n-1}\left\lfloor 2^{n+1}x\right\rfloor\right) = J_{n+1}(x)$$
  - حالة $0 \leq x < 2^n$. نعرّف $k = \left\lfloor 2^n x\right\rfloor$ فيكون $k < 2^{2n}$ إذن
  $$J_n(x) = k2^{-n}$$
  ولمّا كان $k \leq 2^n x < k+1$ استنتجنا أنّ $2k \leq 2^{n+1}x < 2k+2$ ومن ثَمّ $2k+2 > \left\lfloor 2^{n+1}x\right\rfloor \geq 2k$ إذن
  $$k2^{-n} \leq 2^{-n-1}\left\lfloor 2^{n+1}x\right\rfloor < (k+1)2^{-n} \leq 2^n$$
  وهذا يبرهن أنّ $J_n(x) \leq J_{n+1}(x)$ في هذه الحالة أيضاً.
- **إثبات** ❷. لتكن x من $\mathbb{R}_+$. عندئذ $\left\lfloor 2^n x\right\rfloor \leq 2^n x < \left\lfloor 2^n x\right\rfloor + 1$ ومن ثَمّ
  $$2^{-n}\left\lfloor 2^n x\right\rfloor \leq x < 2^{-n}\left\lfloor 2^n x\right\rfloor + 2^{-n}$$
  فإذا افترضنا أنّ $0 \leq x \leq 2^n$ كان لدينا $J_n(x) = 2^{-n}\left\lfloor 2^n x\right\rfloor$ ومنه
  $$\forall x \in [0, 2^n], \quad x - 2^{-n} < J_n(x) \leq x$$

لنعرّف إذن $f_n = J_n \circ f$. من الواضح أنّ f_n مقيسٌ لأنّه ناتج تركيب تابعين مقيسين، وهو تابعٌ بسيطٌ لأنّ J_n يأخذ عدداً منتهياً من القيم. ونستنتج من ❶ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

وهي الخاصّة ①.

ومن ناحية أخرى، مهما تكن x من X يوجد عددٌ n_0 يُحقّق $2^{n_0} \geq f(x)$، وعندئذ مهما تكن n أكبر من n_0 يكن لدينا بناءً على ❷ ما يلي

$$f(x) - 2^{-n} < f_n(x) \leq f(x)$$

لأنّ $f(x) \in [0, 2^n]$. وهذا يبرهن صحة الخاصّة ② . ويتمّ الإثبات. ❒

3-13. ملاحظات

- نلاحظ من الإثبات السابق أنّه في الحالة التي يكون فيها التابع f محدوداً يكون تقارب المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ السابقة منتظماً.

- في حالة تابع حقيقي مقيس f يمكننا تطبيق النتيجة السابقة على f^+ و f^- لنستنتج أنّ f الذي يساوي $f^+ - f^-$ هو نهاية بسيطة لمتتالية من التوابع الدرجيّة.

- وكذلك، في حالة تابع عقدي مقيس f يمكننا تطبيق النتيجة السابقة على $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ لنستنتج أنّ f هو أيضاً نهاية بسيطة لمتتالية من التوابع الدرجيّة.

4. التكامل بمعنى لوبيغ

☜ نثبّتُ في هذه الفقرة فضاءً مقيساً (X, Σ, μ) .

1-4. مُكاملة التوابع الدرجيّة

نرمز بالرمز $\mathcal{E}^+(X,\Sigma)$ ، أو ببساطة $\mathcal{E}^+$ ، إلى مجموعة التوابع الدرجيّة أو البسيطة الموجبة المعرّفة على الفضاء المقيس (X, Σ, μ) .

4-1-1. تعريف. ليكن f تابعاً من $\mathcal{E}^+$. نسمّي **تكامل f بالنسبة إلى القياس μ** العنصر من $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ المعرّف بالصيغة

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\mu\left(f^{-1}(\{\alpha\})\right)$$

مع الاصطلاح $0 \times (+\infty) = 0$ لنتمكّن من تعريف $\alpha\mu\left(f^{-1}(\{\alpha\})\right)$ في حالة $\alpha = 0$.

لاحظ أنّ هذا التعريفَ صحيحٌ لأنّ التابع f يأخذ عدداً منتهياً من القيم، ومن ثَمّ تكون جميع حدود المجموع صفرية ما عدا عدداً منتهياً منها. بقولٍ آخر، إذا كانت مجموعة قيم التابع f هي $V = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$، وكانت $(B_1, B_2,\ldots, B_n)$ هي التجزئة بمجموعات مقيسة للفضاء X الموافقة للتابع f؛ أي $B_k = \left\{x \in X : f(x) = \beta_k\right\}$، عندئذ

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\mu(B_k)$$

4-1-2. مبرهنة. لتكن $A_1, A_2,\ldots, A_m$ مجموعات مقيسة **منفصلة مثنى مثنى**، وليكن f تابعاً بسيطاً معرّفاً بالصيغة $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ حيث $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ من $\mathbb{R}_+$. عندئذ:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\mu(A_k)$$

الإثبات

لتكن $V = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ مجموعة قيم التابع f. ولنعرّف في حالة k من $\mathbb{N}_n$ المجموعة

$$I_k = \left\{j \in \mathbb{N}_m : \alpha_j = \beta_k\right\}$$

عندئذ $B_k = f^{-1}(\{\beta_k\}) = \bigcup_{j\in I_k} A_j$، و $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ تجزئة للمجموعة $\mathbb{N}_m$. إذن

$$\begin{aligned}
\int f \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\mu\left(\bigcup_{j\in I_k} A_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta_k\left(\sum_{j\in I_k} \mu(A_j)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in I_k} \alpha_j\mu(A_j)\right)\\
&= \sum_{j\in I_1\cup\cdots\cup I_n} \alpha_j\mu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}_m} \alpha_j\mu(A_j)
\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

4-1-3. تعريف. ليكن f تابعاً من $\mathcal{E}^+$. نقول إنّ f **قابلٌ للمُكاملة** بالنسبة إلى القياس μ إذا كان $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$، وهذا يُكافئ أن يكون $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)\right) < +\infty$.

تلخّص المبرهنة الآتية أهم خواص تكامل التوابع الدرجيّة الموجبة الذي عرّفناه :

4-1-4. مبرهنة

① ليكن f و g من $\mathcal{E}^+$. عندئذ $f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$.

② ليكن f و g من $\mathcal{E}^+$. عندئذ $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

③ ليكن f من $\mathcal{E}^+$ و α من $\mathbb{R}_+$. عندئذ $\int (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$.

الإثبات

① لنفترض أنّ $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ و $g = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$، والجماعتان $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ و $(B_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ هما تجزئتان للمجموعة X بمجموعات مقيسة.

نعرّف في حالة (i,j) من $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ العددين α_{ij} و β_{ij} بوضع $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ في حالة $A_i \cap B_j = \varnothing$، ووضع $\alpha_{ij} = \alpha_i$ و $\beta_{ij} = \beta_j$ في حالة $A_i \cap B_j \neq \varnothing$.

عندئذ يكون لدينا

$$f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \alpha_{ij} \mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

و

$$g = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \beta_{ij} \mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

واستناداً إلى الفرْض، لدينا $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$، وعليه

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \alpha_{ij}\mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \beta_{ij}\mu(A_i \cap B_j) = \int g \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة، والتي تعبّر عن كون $h \mapsto \int h \,\mathrm{d}\mu$ **متزايداً** على $\mathcal{E}^+$.

② لنفترض أنّ $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ و $g = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$، والجماعتان $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ و $(B_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ هما تجزئتان للمجموعة X بمجموعات مقيسة. عندئذ يكون لدينا

$$f + g = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} (\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j)\\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \alpha_i\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \beta_j\mu(A_i \cap B_j)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_m} \alpha_i\left(\sum_{j\in\mathbb{N}_n} \mu(A_i \cap B_j)\right) + \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \beta_j\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_m} \mu(A_i \cap B_j)\right)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_m} \alpha_i\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_n} (A_i \cap B_j)\right) + \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \beta_j\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_m} (A_i \cap B_j)\right)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_m} \alpha_i\mu(A_i) + \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \beta_j\mu(B_j)\\
&= \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ الخاصّة المطلوبة.

③ إنّ إثبات هذه الخاصّة بسيط، ونتركه للقارئ. ❐

4-1-5. رمز جديد. لتكن A مجموعة مقيسة، أي $A \in \Sigma$. عندئذ نكتب $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$ دلالة على $\int f\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu$. ومن السهل أن نتيقّن أنّه في حالة A و B من Σ، و f من $\mathcal{E}^+$ لدينا

$$\mu(A\cap B) = 0 \Rightarrow \int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

سنبرهن فيما يلي توطئة بسيطة ولكنها تؤدّي دوراً أساسيّاً في دراسة التكامل.

4-1-6. توطئة. لتكن $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من Σ، تُحقّق $\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \subset E_{n+1}$، و $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$، ثُمّ ليكن f من $\mathcal{E}^+$، عندئذ يكون لدينا

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,\mathrm{d}\mu$$

الإثبات

لنفترض أنّ $f=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$، والجماعة $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ تجزئة للمجموعة X بمجموعات مقيسة. عندئذ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_{E_n} f\,\mathrm{d}\,\mu=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(A_k\cap E_n) \tag{1}$$

ولكن المتتالية $(A_k\cap E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية متزايدة من المجموعات المقيسة التي تُحقّق

$$A_k=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_k\cap E_n)$$

إذن

$$\forall k\in\mathbb{N}_m,\quad \mu(A_k)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_k\cap E_n)$$

إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية في (1) نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,\mathrm{d}\,\mu=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\lim_{n\to\infty}\mu(A_k\cap E_n)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(A_k)=\int f\,\mathrm{d}\,\mu$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❒

2-4. مُكاملة التوابع المقيسة الموجبة

نرمز في هذه الفقرة بالرمز $\mathcal{M}^+(X,\Sigma)$، أو ببساطة $\mathcal{M}^+$، إلى مجموعة التوابع المقيسة الموجبة المعرّفة على الفضاء المقيس (X,Σ). ونذكّر أنّ عناصر $\mathcal{M}^+$ هي نهايات بسيطة لمتتاليات متزايدة من عناصر $\mathcal{E}^+$ وذلك عملاً بالمبرهنة 12-3.

1-2-4. تعريف. ليكن f من $\mathcal{M}^+$، نسمّي **تكامل f بالنسبة إلى القياس μ** العنصر من $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ الذي نرمز إليه بالرمز $\int f\,\mathrm{d}\,\mu$ أو $\int f(x)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$ والمعرّف كما يلي:

$$\int f\,\mathrm{d}\,\mu=\sup\Big\{\int\varphi\,\mathrm{d}\,\mu:(\varphi\in\mathcal{E}^+)\wedge(\varphi\le f)\Big\}$$

ونقول إنّ f من $\mathcal{M}^+$ قابلٌ للمكاملة إذا وفقط إذا كان $\int f\,\mathrm{d}\,\mu<+\infty$.

4-2-2. مبرهنة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{M}^+$. عندئذ

$$f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\,\mu$$

الإثبات

هذه النتيجة واضحة لأنّ

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^+ : \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{E}^+ : \varphi \leq g\}$$

وهذا يقتضي المتراجحة المطلوبة. ❐

4-2-3. مبرهنة التقارب المتزايد. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{M}^+$. نفترض أنّ هذه المتتالية **متزايدة** و**متقاربة ببساطة** من تابع f . عندئذ ينتمي f إلى $\mathcal{M}^+$ ويتحقّق ما يلي :

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \leq +\infty$$

الإثبات

- إنّ f ينتمي إلى $\mathcal{M}^+$ استناداً إلى المبرهنة 3-9 .
- لمّا كان $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int f_{n+1} \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int f \,\mathrm{d}\,\mu$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int f \,\mathrm{d}\,\mu \qquad (*)$$

- وبالعكس، ليكن φ عنصراً من $\mathcal{E}^+$ يُحقّق $f \leq \varphi$، وليكن α من $]0,1[$. في حالة n من $\mathbb{N}$ نعرّف المجموعة المقيسة

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

لمّا كان $f_n \geq \alpha \mathbb{1}_{E_n} \varphi$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\,\mu$$

ولكنّ المتتالية $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةٌ متزايدة من Σ تُحقّق $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ ، واستناداً إلى التوطئة 4-1-6. لدينا $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\,\mu = \int \varphi \,\mathrm{d}\,\mu$ ، وعليه

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \geq \alpha \int \varphi \,\mathrm{d}\,\mu$$

ولأنّ α عددٌ كيفي من $]0,1[$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\,\mu \geq \int \varphi\,\mathrm{d}\,\mu$$

ولأنّ المتراجحة السابقة محقّقة أيّاً كان العنصر φ من $\mathcal{E}^+$ الذي يُحقّق $f \leq \varphi$. استنتجنا

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\,\mu \geq \int f\,\mathrm{d}\,\mu$$

وهذا، مع المتراجحة $(*)$، يثبت المطلوب. ❐

4-2-4. مبرهنة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{M}^+$، وليكن α من $\mathbb{R}_+$. عندئذ :

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu + \int g\,\mathrm{d}\,\mu$$

$$\int (\alpha f)\,\mathrm{d}\,\mu = \alpha\int f\,\mathrm{d}\,\mu$$

الإثبات

عملاً بالمبرهنة 4-12 توجد متتاليتان متزايدتان $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{E}^+$ تُحقّقان

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = g(x)$$

أيّاً كانت x من X. وبالاستفادة من المبرهنة السابقة نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\int \psi_n\,\mathrm{d}\,\mu = g$$

ولأنّ

$$\int \varphi_n\,\mathrm{d}\,\mu + \int \psi_n\,\mathrm{d}\,\mu = \int (\varphi_n+\psi_n)\,\mathrm{d}\,\mu$$

نستنتج

$$\int g\,\mathrm{d}\,\mu + \int f\,\mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty}\int (\varphi_n+\psi_n)\,\mathrm{d}\,\mu$$

ولكنّ المتتالية $(\varphi_n+\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةٌ متزايدة من $\mathcal{E}^+$ تسعى ببساطة إلى $f+g$ إذن بناءً على المبرهنة السابقة ذاتها نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int (\varphi_n+\psi_n)\,\mathrm{d}\,\mu = \int (f+g)\,\mathrm{d}\,\mu$$

وهذا يثبت الخاصّة المطلوبة.

أمّا إثبات الخاصّة $\int (\alpha f)\,\mathrm{d}\,\mu = \alpha\int f\,\mathrm{d}\,\mu$ فهو سهلٌ ونتركه للقارئ. ❐

5-2-4. مبرهنة. ليكن f عنصراً من $\mathcal{M}^+$ ، عندئذ هناك تكافؤ بين الخاصّتين الآتيتين :

❶ $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.

❷ $f = 0,\ \mu\text{-}a.e.$ أي إنّ المجموعة $\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ مجموعة μ-مهملة.

الإثبات

- إنّ النتيجة واضحة في حالة f من $\mathcal{E}^+$.

- ليكن f عنصراً من $\mathcal{M}^+$ يُحقّق $f = 0,\ \mu\text{-}a.e.$. نتيقّن مباشرة أنّ

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^+ : \varphi \leq f\} \subset \left\{\varphi \in \mathcal{E}^+ : \varphi = 0\ \mu\text{-}a.e.\right\}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu \leq \sup\left\{\int \varphi \,\mathrm{d}\,\mu : \varphi = 0\ \mu\text{-}a.e.\right\} = 0$$

فنكون قد أثبتنا الاقتضاء ❶ $\Rightarrow$ ❷ .

- وبالعكس، لنفترض أنّ $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$ ، توجد متتالية متزايدة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{E}^+$ تُحقّق $\forall x \in X,\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

لمّا كان $0 \leq \varphi_n \leq f$ استنتجنا أنّ $\int \varphi_n \,\mathrm{d}\,\mu = 0$ ، ولأنّ φ_n ينتمي إلى $\mathcal{E}^+$ نتج من ذلك أنّ $\varphi_n = 0,\ \mu\text{-}a.e.$. أي إنّ المجموعة

$$A_n = \{x \in X : \varphi_n(x) \neq 0\}$$

مجموعةٌ μ-مهملة. ينتج من ذلك أنّ المجموعة $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ هي أيضاً مجموعة μ-مهملة.

في حالة $x \notin A$ يكون لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) = 0$ ، ومن ثَمّ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$$

وهذا يُثبت أنّ $f = 0,\ \mu\text{-}a.e.$. ويتمّ الإثبات. ❐

6-2-4. نتيجة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{M}^+$ ، نفترض أنّ f و g يختلفان على مجموعة μ-مهملة، أي $f = g,\ \mu\text{-}a.e.$ ، عندئذ

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int g \,\mathrm{d}\,\mu$$

الإثبات

نعرّف التابع $h = \min(f, g)$ من $\mathcal{M}^+$، ثمّ نعرّف كذلك التابعين

$$\ell = g - h \in \mathcal{M}^+ \quad \text{و} \quad k = f - h \in \mathcal{M}^+$$

من الواضح أنّ $k = 0 \ \mu\text{-}a.e.$ و $\ell = 0 \ \mu\text{-}a.e.$. إذن

$$\int k \,\mathrm{d}\,\mu = 0 \quad \text{و} \quad \int \ell \,\mathrm{d}\,\mu = 0$$

ولكن $g = h + \ell$ إذن

$$\int g \,\mathrm{d}\,\mu = \int h \,\mathrm{d}\,\mu + \int \ell \,\mathrm{d}\,\mu = \int h \,\mathrm{d}\,\mu$$

وكذلك $f = h + k$ إذن

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int h \,\mathrm{d}\,\mu + \int k \,\mathrm{d}\,\mu = \int h \,\mathrm{d}\,\mu$$

إذن $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int h \,\mathrm{d}\,\mu = \int g \,\mathrm{d}\,\mu$ ، وبذا يتم الإثبات. ❒

4-3. فضاء التوابع القابلة للمُكاملة $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$

4-3-1. تعريف. ليكن f تابعاً معرّفاً على X ، مزوّدةً بالجبر التامّ Σ ، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. نقول إنّ f **قابلٌ للمكامَلة بالنسبة إلى القياس μ** إذا وفقط إذا f مقيساً وتحقّق الشرط $\int |f| \,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$. ونرمز بالرمز $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ إلى فضاء التوابع القابلة للمُكاملة بالنسبة إلى القياس μ وتأخذ قيمها في الحقل $\mathbb{K}$ الذي هو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. نثبتُ دون عناء أنّ $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

في حالة تابع حقيقي مقيس $f : X \to \mathbb{R}$ ، ينتمي التابعان

$$f^- = \max(-f, 0) \quad \text{و} \quad f^+ = \max(f, 0)$$

إلى $\mathcal{M}^+$. ونستنتج من كون $|f| = f^+ + f^-$ أنّ الشرط $\int |f| \,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$ يقتضي أنّ التكاملين $\int f^+ \,\mathrm{d}\,\mu$ و $\int f^- \,\mathrm{d}\,\mu$ منتهيان، وهذا ما يفيدنا في وضع التعريف الآتي :

4-3-2. تعريف. ليكن $f : X \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للمُكامَلة بالنسبة إلى القياس μ . عندئذ نسمّي تكامل f بالنسبة إلى القياس μ العدد الحقيقي $\int f \,\mathrm{d}\,\mu$ المعرّف بالصيغة

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\,\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\,\mu$$

4-3-3. تعريف. ليكن $f : X \to \mathbb{C}$ تابعاً قابلاً للمكامَلة بالنسبة إلى القياس μ. عندئذ نسمّي تكامل f بالنسبة إلى القياس μ العدد العقدي $\int f \,\mathrm{d}\,\mu$ المعرّف بالصيغة

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\,\mu + \mathrm{i}\int \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\,\mu$$

4-3-4. مبرهنة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$، وليكن α من $\mathbb{K}$. عندئذ :

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu + \int g\,\mathrm{d}\,\mu$$

$$\int (\alpha f)\,\mathrm{d}\,\mu = \alpha \int f\,\mathrm{d}\,\mu$$

الإثبات

- لنفترض أوّلاً أنّ f و g يأخذان قيمهما في $\mathbb{R}$، عندئذ نستنتج من المساواة

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

أنّ

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

ولأنّ جميع التوابع في طرفي هذه المساواة تنتمي إلى $\mathcal{M}^+$ استنتجنا أنّ

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\,\mu + \int f^-\,\mathrm{d}\,\mu + \int g^-\,\mathrm{d}\,\mu = \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\,\mu + \int f^+\,\mathrm{d}\,\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\,\mu$$

ومن ثَمّ

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\,\mu - \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\,\mu = \int f^+\,\mathrm{d}\,\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\,\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\,\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\,\mu$$

أو

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu + \int g\,\mathrm{d}\,\mu$$

- أمّا في الحالة التي يأخذ فيها f و g قيمهما في $\mathbb{C}$، فيكفي أن نستفيد من الحالة السابقة ومن المساواتين :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g)$$

▪ وأخيراً، لإثبات $\int f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int (\alpha f)\,\mathrm{d}\mu$ ، يكفي أن نتحقّق من صحة هذه المساواة في حالة $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ، ثُمَّ في حالة $\alpha = -1$ ، وأخيراً في حالة $\alpha = \mathrm{i}$. وهذا أمرٌ سهلٌ في جميع هذه الحالات. ❐

4-3-5. مبرهنة. ليكن f عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. عندئذ :

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا وُجد θ من $\mathbb{R}$ يُحقّق $f = e^{\mathrm{i}\theta}|f|,\ \mu\text{-}a.e.$.

الإثبات

ليكن θ عدداً من $\mathbb{R}$ يُحقّق $\int f\,\mathrm{d}\mu = e^{\mathrm{i}\theta}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right|$ ، عندئذ يمكننا أن نكتب

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| = e^{-\mathrm{i}\theta}\int f\,\mathrm{d}\mu = \int e^{-\mathrm{i}\theta} f\,\mathrm{d}\mu$$

ولأنّ الطرف الأيسر في المساواة السابقة حقيقيّ استنتجنا أنّ

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| = \mathrm{Re}\Big(\int e^{-\mathrm{i}\theta} f\,\mathrm{d}\mu\Big) = \int \mathrm{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\theta} f\big)\,\mathrm{d}\mu$$

ومن ثَمّ

$$\int |f|\,\mathrm{d}\mu - \left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| = \int \big(|f| - \mathrm{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\theta} f\big)\big)\,\mathrm{d}\mu$$

ولكنّ التابع $|f| - \mathrm{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\theta} f\big)$ عنصرٌ من $\mathcal{M}^+$ فتكامله موجبٌ ولا يساوي الصفر إلّا إذا كانت المجموعة التي لا ينعدم عليها هذا التابع مجموعة μ-مهملة. إذن

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

وتحدث المساواة إذا كان $|f| = \mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\theta} f\big),\ \mu\text{-}a.e.$. وإذا لاحظنا أنّه في حالة عددٍ عقدي w لدينا

$$(\mathrm{Re}\, w = |w|) \Leftrightarrow w = |w|$$

استنتجنا أنّ المساواة تقع في حالة $f = e^{\mathrm{i}\theta}|f|,\ \mu\text{-}a.e.$ وفقط في هذه الحالة. ❐

6-3-4. **نتيجة**. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. عندئذ:

$$\left(f=g,\ \mu\text{-}a.e.\right)\Rightarrow\left(\int f\,\mathrm{d}\,\mu=\int g\,\mathrm{d}\,\mu\right)$$

الإثبات

استناداً إلى الفرْض $|f-g|\in\mathcal{M}^+$ ويُحقّق $|f-g|=0,\ \mu\text{-}a.e.$، إذن عملاً بالنتيجة 6-2-4. نجد

$$\int|f-g|\,\mathrm{d}\,\mu=0$$

ولكن لدينا المتراجحة

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\,\mu-\int g\,\mathrm{d}\,\mu\right|\leq\int|f-g|\,\mathrm{d}\,\mu=0$$

فيتمّ الإثبات. ❐

ملاحظة مهمّة. اعتماداً على النتيجة السابقة، إذا كانت المجموعة التي يختلف عليها عنصران f و g من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ مهملة، اعتبرناهما تمثيلين للعنصر نفسه من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$، ولا نميّز بينهما. فعند كتابة « $f=0$ » في $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ » نقصد « $f=0,\ \mu\text{-}a.e.$ » وفي هذا الإطار يصبح الفضاء $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ مزوّداً بالنظيم $\|\cdot\|_1$ المعرّف بالصيغة

$$\forall f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu),\quad\|f\|_1=\int|f|\,\mathrm{d}\,\mu$$

فضاءً شعاعيّاً منظّماً.

5. مبرهنات التقارب

☜ نثبّت في هذه الفقرة فضاءً مقيساً (X,Σ,μ).

1-5. **مبرهنة**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المقيسة **الموجبة** على X. نفترض أنّ $\sum u_n(x)$ متقاربة μ - $a.e.$، أي إنّ مجموعة قيم x من X التي تكون عندها المتسلسلة $\sum u_n(x)$ متباعدة مجموعةٌ μ-مهملة، عندئذ يكون لدينا

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\mathrm{d}\,\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int u_n\,\mathrm{d}\,\mu\right)$$

الإثبات

لنضع

$$\tilde{X} = \left\{ x \in X : \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) < +\infty \right\}$$

عندئذ، استناداً إلى الفرْض، يكون لدينا $\mu\left(X \backslash \tilde{X}\right) = 0$.

نعرّف إذن $v_n = \mathbb{1}_{\tilde{X}} u_n$ ، فتكون $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المقيسة الموجبة على X . وتكون المتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة ببساطة على X . بتطبيق مبرهنة التقارب المتزايد 3-2-4. على متتالية المجاميع الجزئيّة $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $f_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ نستنتج أنّ

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu$$

أو

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k \right) \mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int v_k \,\mathrm{d}\,\mu \right)$$

أي

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int v_n \,\mathrm{d}\,\mu \right)$$

ولكن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n,\ \mu\text{-}a.e.$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,\ \mu\text{-}a.e.$ إذن

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int u_n \,\mathrm{d}\,\mu \right)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

2-5. **مبرهنة**. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية **متزايدة** من عناصر $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$. نفترض أنّ المتتالية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة μ - $a.e.$ ، أي إنّ مجموعةَ قيم x من X التي تكون عندها المتتالية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ غير محدودة مجموعةٌ μ-مهملة. عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \mathrm{d}\,\mu \leq +\infty$$

الإثبات

بتطبيق المبرهنة السابقة على المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $u_n = f_{n+1} - f_n$ نستنتج

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n - f_0)\,\mathrm{d}\,\mu = \int\Big(\lim_{n\to\infty} f_n - f_0\Big)\mathrm{d}\,\mu \leq +\infty$$

وبإضافة $\int f_0\,\mathrm{d}\,\mu$ إلى طرفي المساواة السابقة نصل إلى النتيجة المطلوبة. ❐

3-5. مبرهنة التقارب للوبيغ. ليكن (X,Σ,μ) فضاءً مقيساً. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع معرّفة على X وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. وليكن $f : X \to \mathbb{K}$. نفترض ما يأتي:

① أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n تابعٌ مقيس.

② $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \mu$ - $a.e.$. أي توجد مجموعة μ-مهملة $\mathcal{N}$ تُحقّق

$$\forall x \notin \mathcal{N},\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

③ يوجد تابعٌ g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$، يُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N}, \big|f_n(x)\big| \leq g(x),\ \mu \text{ - } a.e.$$

أي مهما كانت n من $\mathbb{N}$ توجد مجموعة μ-مهملة $\mathcal{N}_n$ تُحقّق

$$\forall x \notin \mathcal{N}_n,\quad \big|f_n(x)\big| \leq g(x)$$

عندئذ ينتمي f إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$، ويكون

$$\lim_{n\to\infty}\int |f - f_n|\,\mathrm{d}\,\mu = 0$$

وبوجه خاص

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu$$

الإثبات

نعلم أنّ المجموعة $\mathcal{N}\cup\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_n\big)$ مجموعة μ-مهملة، فتوجد مجموعة $\widetilde{\mathcal{N}}$ من Σ تحوي الاجتماع $\mathcal{N}\cup\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_n\big)$ وتُحقّق $\mu(\widetilde{\mathcal{N}}) = 0$. نعرّف $\widetilde{X} = X\backslash\widetilde{\mathcal{N}}$، ونعرّف التابع $\tilde{f}_n = f_n\mathbb{1}_{\widetilde{X}}$ في حالة n من $\mathbb{N}$، و $\tilde{f} = f\mathbb{1}_{\widetilde{X}}$، وأخيراً $\tilde{g} = g\mathbb{1}_{\widetilde{X}}$.

- لمّا كانت $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المقيسة المتقاربة ببساطة من $\tilde{f}$، استنتجنا أنّ $\tilde{f}$ تابعٌ مقيسٌ.
- ولمّا كان $\left|\tilde{f}_n\right| \leq \tilde{g}$ في حالة n من $\mathbb{N}$، استنتجنا أنّ جميع حدود المتتالية $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$، ولأنّ $f_n = \tilde{f}_n,\ \mu\text{-}a.e.$ استنتجنا أنّ جميع حدود المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$.
- كما نستنتج من المتراجحة $\left|\tilde{f}\right| \leq \tilde{g}$ التي نحصل عليها من التقارب البسيط أنّ $\tilde{f}$ ينتمي أيضاً إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. ولأنّ $f = \tilde{f},\ \mu\text{-}a.e.$ استنتجنا أنّ
$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$$
- لنعرّف في حالة x من X المقدار
$$\begin{aligned} h_n(x) &= \inf_{k\geq n}\left(2\tilde{g}(x) - \left|\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}(x)\right|\right) \\ &= 2\tilde{g}(x) - \sup_{k\geq n}\left|\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}(x)\right| \end{aligned}$$

إنّ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من التوابع المقيسة الموجبة التي تتقارب ببساطة من $2\tilde{g}$، إذن

$$\begin{aligned} 2\int g\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= 2\int g\,\mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty}\int \sup_{k\geq n}\left|\tilde{f}_k - \tilde{f}\right|\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int \sup_{k\geq n}\left|\tilde{f}_k - \tilde{f}\right|\mathrm{d}\mu = 0$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\int \left|\tilde{f}_n - \tilde{f}\right|\mathrm{d}\mu = 0$$

ولكن $f_n - f = \left(\tilde{f}_n - \tilde{f}\right),\ \mu\text{-}a.e.$ إذن

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$$

ونستنتج المطلوب لأنّ

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \int f_n\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$$

ويتمّ الإثبات. ❒

5-4. **مبرهنة التمام.** ليكن (X,Σ,μ) فضاءً مقيساً. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. نفترض أنّ $\sum_{n=0}^{\infty}\| f_n\|_1 < +\infty$ ، عندئذ يوجد تابعٌ f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ ، وتوجد مجموعة مهملة $\mathcal{N}$ ، يُحقّقان:

❶ مهما تكن x من $X\backslash\mathcal{N}$ فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بالإطلاق، ومجموعها يساوي $f(x)$.

❷ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة في $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ من f . أي

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_1 = 0$$

الإثبات

لتكن (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$. نعرّف المجموعة المقيسة

$$A_{n,m} = \left\{x\in X : \sum_{k=0}^{n}\left| f_k(x)\right| > m\right\}$$

لمّا كان $m\mathbb{1}_{A_{n,m}} \leq \sum_{k=0}^{n}| f_k|$ استنتجنا أنّ

$$m\mu(A_{n,m}) \leq \int\left(\sum_{k=0}^{n}| f_k|\right)\mathrm{d}\,\mu = \sum_{k=0}^{n}\int| f_k|\,\mathrm{d}\,\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty}\| f_k\|_1$$

نثبّتُ العددَ m من $\mathbb{N}^*$. لمّا كانت $(A_{n,m})_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متزايدة نتج من المبرهنة 2-3. أنّ

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{n,m}\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_{n,m}) \leq \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\| f_k\|_1$$

فإذا عرّفنا $B_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{n,m}$ كان لدينا

$$\mu(B_m) \leq \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\| f_k\|_1$$

ومن ثَمّ $\lim_{m\to\infty}\mu(B_m) = 0$. ولمّا كانت $(B_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متناقصة من المجموعات التي قياسها محدود استنتجنا أيضاً من المبرهنة 2-3. أنّ

$$\mu\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} B_m\right) = \lim_{m\to\infty}\mu(B_m) = 0$$

وعليه نرى أنّ المجموعة $\mathcal{N} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{n,m}\right)$ هي مجموعة μ-مهملة.

ونلاحظ أنّ

$$x \in (X \backslash \mathcal{N}) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq m$$

وهذا يعني أنّ المتسلسلة $\sum \left| f_k(x) \right|$ تكون متقاربة بالإطلاق في حالة x من $X \backslash \mathcal{N}$.

نعرّف إذن التابع المقيس $g : X \to \mathbb{R}$ بوضع $g(x) = 0$ في حالة x من $\mathcal{N}$ وبالصيغة $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| f_k \right|(x)$ في حالة x من $X \backslash \mathcal{N}$. وعملاً بالمبرهنة 5-1. يكون لدينا

$$\int g \,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| \,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_1 < +\infty$$

إذن $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \Sigma, \mu)$.

وكذلك نعرّف $f(x) = 0$ في حالة x من $\mathcal{N}$ ، و $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ في حالة x من $X \backslash \mathcal{N}$ ، فيكون f تابعاً مقيساً ويكون $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k,\ \mu\text{-}a.e$.

لنضع $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ ، ولنطبّق مبرهنة التقارب للوبيغ على متتالية التوابع $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، فالتابع S_n تابعٌ مقيسٌ.
- أيّاً كانت x من $X \backslash \mathcal{N}$ ، تتقارب المتتالية $\left(S_n(x) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ من $f(x)$.
- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، وأيّاً كانت x من $X \backslash \mathcal{N}$ ، كان $\left| S_n(x) \right| \leq g(x)$.

ولمّا كان $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \Sigma, \mu)$ استنتجنا أنّ f ينتمي إلى $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$ وأنّ

$$\lim_{n \to \infty} \| f - S_n \|_1 = 0$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

ملاحظة. إذن في حالة متتالية $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$ ، فإنّ تقارب $\sum \| f_n \|_1$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum f_n$ في $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$ ، وكذلك تقاربها بالإطلاق في μ- كلّ مكان تقريباً.

5-5. **نتيجة**. ليكن (X, Σ, μ) فضاءً مقيساً. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة أنّ كلّ متسلسلة متقاربة بالنظيم من عناصر $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$ تكون متقاربة في $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$. وهذا يعني أنّ الفضاء الشعاعي المنظّم $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(X, \Sigma, \mu)$ هو فضاءٌ شعاعي منظّم تامٌّ، أو فضاء باناخ Banach ، أي تتقارب فيه كلُّ متتالية تحقّق شرط كوشي.

6. التكاملات التابعة لوسيط

☜ نثبّتُ في هذه الفقرة فضاءً مقيساً (X,Σ,μ).

6-1. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من فضاء شعاعي منظّم E. وليكن

$$f : X\times A \to \mathbb{K}$$

تابعاً يُحقّق الخواص الآتية:

① أيّاً كانت t من A فالتابع $x\mapsto f(x,t)$ تابعٌ مقيس.

② توجد مجموعة مهملة $\mathcal{N}$ تُحقّق أنّه مهما تكن x من $X\backslash\mathcal{N}$ يكن التابع $t\mapsto f(x,t)$ مستمرّاً عند t_0 من A.

③ يوجد تابعٌ g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$، وتوجد مجموعة مهملة $\widetilde{\mathcal{N}}$ تُحقّق

$$\forall x\in X\backslash\widetilde{\mathcal{N}}, \forall t\in A,\quad |f(x,t)|\le g(x)$$

عندئذ يكون التابع $t\mapsto F(t)=\int f(x,t)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$ مستمرّاً عند t_0.

الإثبات

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر A تسعى إلى t_0. نعرّف التوابع المقيسة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و φ بالعلاقات :

$$\varphi(x)=f(x,t_0)\quad \text{و}\quad \varphi_n(x)=f(x,u_n)$$

لنطبّق مبرهنة التقارب للوبيغ على متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، فالتابع φ_n تابعٌ مقيسٌ.
- أيّاً كانت x من $X\backslash\mathcal{N}$، تتقارب المتتالية $\big(\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\varphi(x)$.
- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، وأيّاً كانت x من $X\backslash\widetilde{\mathcal{N}}$، كان

$$\big|\varphi_n(x)\big|\le g(x)$$

ولمّا كان $g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ استنتجنا أنّ φ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ وأنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n\,\mathrm{d}\,\mu=\int\varphi\,\mathrm{d}\,\mu$$

أي $\lim\limits_{n\to\infty}F(u_n)=F(t_0)$. وهذا يثبت استمرار F عند t_0. ❐

2-6. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير خالٍ من $\mathbb{R}$. وليكن

$$f : X \times I \to \mathbb{K}$$

تطبيقاً يُحقّق الخواص الآتية:

① أيّاً كانت t من I فالتابع $x \mapsto f(x,t)$ تابعٌ من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$.

② توجد مجموعة مهملة $\mathcal{N}$ ، تُحقّق أنّه مهما تكن x من $X \backslash \mathcal{N}$ يكن التابع $t \mapsto f(x,t)$ قابلاً للاشتقاق على I ، نرمز إلى هذا المشتق بالرمز $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,\cdot)$.

③ يوجد تابعٌ g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ ، وتوجد مجموعة مهملة $\widetilde{\mathcal{N}}$ تُحقّق

$$\forall x \in X \backslash \widetilde{\mathcal{N}}, \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

عندئذ يكون التابع $t \mapsto F(t) = \int f(x,t)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$ اشتقاقياً على I ، ويكون:

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\,\mu(x) .$$

الإثبات

التابع $x \mapsto f_t'(x,t)$ ليس معرّفاً على المجموعة المهملة $\mathcal{N}$ ، والقول إنّه ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ ، يعني أنّه بالإمكان تمديده إلى تابع قابل للمُكاملة، وأيّاً كان هذا التمديد فإنّه لا يؤثّر على قيمة التكامل $\int f_t'(x,t)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$.

لتكن t_0 من I ، ولنتأمّل متتاليةً ما $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $I \backslash \{t_0\}$ تسعى إلى t_0 . نعرّف التوابع المقيسة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و φ بالعلاقات:

$$\varphi(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \quad \text{و} \quad \varphi_n(x) = \frac{f(x,u_n) - f(x,t_0)}{u_n - t_0}$$

لنطبّق مبرهنة التقارب للوبيغ على متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، فالتابع φ_n تابعٌ مقيسٌ.
- أيّاً كانت x من $X \backslash \mathcal{N}$ ، تتقارب المتتالية $\left(\varphi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\varphi(x)$.
- أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، وأيّاً كانت x من $X \backslash \left(\widetilde{\mathcal{N}} \cup \mathcal{N}\right)$ ، كان

$$\left|\varphi_n(x)\right| \leq g(x)$$

وذلك بناءً على مبرهنة التزايدات المحدودة.

ولمّا كان $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ استنتجنا أنّ φ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ وأنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n \,\mathrm{d}\,\mu = \int \varphi \,\mathrm{d}\,\mu$$

أي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(u_n)-F(t_0)}{u_n-t_0} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$$

وهذا يثبت النتيجة المطلوبة. ❐

3-6. مبرهنة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن

$$f : X\times\Omega \to \mathbb{C}$$

تطبيقاً يُحقّق الخواص الآتية:

① أيّاً كانت z من Ω فالتابع $x \mapsto f(x,z)$ تابعٌ مقيسٌ.

② توجد مجموعة مهملة $\mathcal{N}$ تُحقّق أنّه مهما تكن x من $X\backslash\mathcal{N}$ يكن التابع $z \mapsto f(x,z)$ هولومورفيّاً على Ω.

③ يوجد تابعٌ g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ ، يُحقّق

$$\forall x\in X\backslash\mathcal{N},\forall z\in\Omega,\quad \left|f(x,z)\right| \le g(x)$$

عندئذ يكون التابع $z\mapsto F(z)=\int f(x,z)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$ هولوموفيّاً على Ω، ومهما تكن z من Ω، و n من $\mathbb{N}^*$ ، يكن التابع $x\mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)$ قابلاً للمكاملة، أي ينتمِ إلى الفضاء $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\Sigma,\mu)$ ، ويكن :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\Omega,\quad F^{(n)}(z)=\int \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$$

الإثبات

لتكن z_0 من Ω . يوجد عددٌ ρ موجبٌ تماماً يجعل القرص المفتوح $D(z_0,2\rho)$ محتوى تماماً في Ω . لتكن x من $X\backslash\mathcal{N}$ ، و n من $\mathbb{N}^*$ ، لمّا كان $z\mapsto f(x,z)$ هولومورفيّاً على Ω، استنتجنا من متراجحات كوشي أنّ

$$(1)\quad \forall z\in D(z_0,\rho),\quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\right| \le \frac{n!}{\rho^n}\times\sup_{|\xi-z|=\rho}\left|f(x,\xi)\right| \le \frac{n!}{\rho^n}g(x)$$

وهذا يثبتُ بوجه خاص أنّ $x\mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z_0)$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\Sigma,\mu)$.

ولمّا كانت النتيجة السابقة محقّقةً أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ و z_0 من Ω، أمكننا تعريف متتالية التوابع $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة على Ω بالصيغة $G_n(z)=\int \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$.

لنتأمّل مجدّداً نقطة z_0 من Ω. وليكن ρ عدداً موجباً تماماً يجعل القرص المفتوح $D(z_0,2\rho)$ محتوى تماماً في Ω. ثُمّ لنتأمّل متتالية $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر القرص المنقوص $\widetilde{D}(z_0,\rho)$ تسعى إلى العدد z_0. ولنعرّف متتالية التوابع $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ بالصيغة

$$\forall x\in X,\quad \varphi_m(x)=\frac{1}{\zeta_m-z_0}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,\zeta_m)-\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z_0)\right)$$

والتابع φ المعرّف بالعلاقة $\varphi(x)=\frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}}(x,z_0)$ في حالة x من $X\backslash\mathcal{N}$.

بتطبيق مبرهنة التقارب للوبيغ على المتتالية $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

- أيّاً كان m من $\mathbb{N}$، فالتابع φ_m تابعٌ مقيسٌ.
- أيّاً كانت x من $X\backslash\mathcal{N}$، تتقارب المتتالية $\left(\varphi_m(x)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ من $\varphi(x)$. لأنّ التابع $z\mapsto f(x,z)$ هولومورفيّ على القرص المفتوح $D(z_0,2\rho)$ في هذه الحالة.
- أيّاً كان m من $\mathbb{N}$، وأيّاً كانت x من $X\backslash\mathcal{N}$، كان

$$\varphi_m(x)=\int_0^1 \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}}(x,z_0+t(\zeta_m-z_0))\,\mathrm{d}\,t$$

وبناءً على (1)، نستنتج أنّ $\left|\varphi_m(x)\right|\le\frac{(n+1)!}{\rho^{n+1}}g(x)$.

إذن عملاً بمبرهنة التقارب للوبيغ، يكون لدينا $\lim_{n\to\infty}\int\varphi_m\,\mathrm{d}\,\mu=\int\varphi\,\mathrm{d}\,\mu$. أي

$$\lim_{m\to\infty}\frac{G_n(\zeta_m)-G_n(z_0)}{\zeta_m-z_0}=G_{n+1}(z_0)$$

ولأنّ $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية كيفيّة من عناصر القرص المنقوص $\widetilde{D}(z_0,\rho)$ تسعى إلى العدد z_0. استنتجنا أنّ

$$\lim_{\zeta\to z_0}\frac{G_n(\zeta)-G_n(z_0)}{\zeta-z_0}=G_{n+1}(z_0)$$

أي إنّ G_n هولومورفي و $G_n'=G_{n+1}$. وهذا ما يفيد في إثبات أنّ $G_n=F^{(n)}$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، وذلك بالتدريج على العدد n ويتمّ الإثبات. ❐

مثال 1. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً مقيساً يُحقّق $\forall t<0,\ f(t)=0$. نفترض أنّه يوجد عددٌ حقيقي σ يَجعل التابع $t\mapsto |f(t)|e^{-\sigma t}$ عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. عندئذ يكون التابع $z\mapsto F(z)=\int f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}\,\lambda(t)$ هولومورفيّاً في نصف المستوي $\mathbb{P}_\sigma$. ويكون

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{P}_\sigma,\quad F^{(n)}(z)=\int(-t)^n f(t)e^{-zt}d\lambda(t)$$

مثال 2. تتمات حول التابع Γ لأولر.

① مهما كان z من $\mathbb{C}$ ينتمِ التابع $x\mapsto f_1(x,z)=x^{z-1}e^{-x}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ إلى الفضاء $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، ويكن التابع $\Gamma_1(z)=\int_1^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ هولومورفياً في $\mathbb{C}$.

في الحقيقة، لتكن $A>0$، ولنعرّف $\Omega_A=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)<A\}$، ثُمّ لنطبّق المبرهنة 3-6. على التابع

$$f_1:\mathbb{R}\times\Omega_A\to\mathbb{C},\ f_1(x,z)=x^{z-1}e^{-x}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

- أيّاً كانت z من Ω_A فالتابع $x\mapsto f_1(x,z)$ تابعٌ مقيسٌ.
- مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن التابع $z\mapsto f_1(x,z)$ هولومورفيّاً على Ω_A.
- ينتمي التابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=x^{A-1}e^{-x}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، ويُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall z\in\Omega_A,\quad |f_1(x,z)|\le g(x)$$

إذن نستنتج بناءً على المبرهنة 3-6. أنّ التابع Γ_1 هولومورفي في Ω_A، ولأنّ A عددٌ موجبٌ كيفي استنتجنا أنّ Γ_1 هولومورفي في $\mathbb{C}$ وأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{C},\ \Gamma_1^{(n)}(z)=\int_1^\infty(\ln x)^n\,x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$$

② أيّاً كانت z من $\mathbb{P}_0=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>0\}$ ينتمي التابع

$$x\mapsto f_2(x,z)=x^{z-1}e^{-x}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، والتابع $\Gamma_2(z)=\int_0^1 x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ هولومورفي في $\mathbb{P}_0$.

في الحقيقة، لتكن $A>0$ ، ولنعرّف $\mathbb{P}_A=\left\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>A\right\}$ ، ثُمّ لنطبّق المبرهنة 3-6. على التابع

$$f_2:\mathbb{R}\times\mathbb{P}_A\to\mathbb{C},\ f_2(x,z)=x^{z-1}e^{-x}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

- أيّاً كانت z من $\mathbb{P}_A$ فالتابع $x\mapsto f_2(x,z)$ تابعٌ مقيسٌ.
- مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن التابع $z\mapsto f_2(x,z)$ هولومورفيّاً على $\mathbb{P}_A$.
- ينتمي التابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=x^{A-1}e^{-x}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، ويُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{P}_A,\quad \left|f_2(x,z)\right|\le g(x)$$

إذن نستنتج بناءً على المبرهنة 3-6. أنّ التابع Γ_2 هولومورفي في $\mathbb{P}_A$ ، ولأنّ A عددٌ موجبٌ كيفي استنتجنا أنّ Γ_2 هولومورفي في $\mathbb{P}_0$ وأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{P}_0,\ \Gamma_2^{(n)}(z)=\int_0^1(\ln x)^n x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$$

③ أيّاً كانت z من $\mathbb{P}_0=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>0\}$ ينتمي التابع

$$x\mapsto f(x,z)=x^{z-1}e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، والتالي $\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ هولومورفي في $\mathbb{P}_0$.

في الحقيقة، هذه نتيجة مباشرة من النقطتين السابقتين، إذ إنّ

$$\Gamma=\Gamma_{1|\mathbb{P}_0}+\Gamma_2\quad \text{و}\quad f=f_1+f_2$$

④ يوجد تابعٌ وحيدٌ ميرومورفي في $\mathbb{C}$ ، مجموعة أقطابه $\mathcal{P}=-\mathbb{N}$ ويتّفق مع Γ على $\mathbb{P}_0$. نرمز بالرمز Γ إلى هذا التابع أيضاً.

في الحقيقة، نعلم في حالة $0<x<1$ و n من $\mathbb{N}$ ، أنّ

$$\left|e^{-x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k\,!}x^k\right|\le\frac{x^n}{n\,!}$$

ومن ثَمّ، في حالة $z=\alpha+\mathrm{i}\,\beta\in\mathbb{C}$ ، يكون لدينا

$$\left|x^{z-1}e^{-x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k\,!}x^{z+k-1}\right|\le\frac{x^{n+\alpha-1}}{n\,!}$$

وأخيراً، إذا افترضنا أنّ z ينتمي إلى $\mathbb{P}_0$ وكاملنا طرفي المتراجحة السابقة على $]0,1[$ وجدنا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \Gamma_2(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \right| \leq \frac{1}{n!(n+\alpha)}$$

وعليه

$$\forall z \in \mathbb{P}_0, \quad \Gamma_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}$$ ⌘

لنتأمّل إذن متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الهولومورفيّة في $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ المعرّفة بالصيغة

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

فإذا كانت K مجموعة متراصّة محتواة في $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$، وعرّفنا $\delta_K = d(K, -\mathbb{N})$ كان لدينا

$$\sup_{z\in K} \left| f_n(z) \right| \leq \frac{1}{n!\delta_K}$$

ومن ثَمّ تتقارب المتسلسلة $\sum f_n$ بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة محتواة في $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$، ويكون مجموعها F هولومورفيّاً في $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. لتكن k من $\mathbb{N}$ ولتكن z عنصراً من القرص المنقوص $\widetilde{D}\left(-k, \frac{1}{2}\right)$ عندئذ يكون لدينا $\forall n \neq k,\ |z+n| \geq \dfrac{1}{2}$ ومن ثَمّ

$$\left| F(z) - f_k(z) \right| \leq \sum_{0\leq n, n\neq k}^{\infty} \frac{2}{n!} < 2e$$

إذن النقطة $-k$ نقطة شاذّة كاذبة للتابع $F - f_k$، وهذا يُثبتُ أنّ f_k هو الجزء القطبي للتابع F الموافق للقطب $-k$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ F تابعٌ ميرومورفي في $\mathbb{C}$ مجموعةُ أقطابه هي $-\mathbb{N}$، وأنّ جميع أقطابه بسيطة، ولدينا $\operatorname{Res}(F, -k) = \dfrac{(-1)^k}{k!}$. وأثبتنا أنّ $\Gamma = F_{|\mathbb{P}_0}$ في ⌘. أمّا الوحدانيّة فهي واضحة لأنّ أي تابع يُحقّق الشروط المعطاة يجب أن يتفق مع F على $\mathbb{P}_0$ ومن ثَمّ على كامل $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ لأنّ هذه الأخيرة مجموعة مفتوحة مترابطة.

ومنه الصيغة التالية للتابع Γ على $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$:

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}), \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, \mathrm{d}\, x$$

7. العلاقة بين التكامل بمعنى ريمان وتكامل لوبيغ

☜ في هذه الفقرة نتأمّل الفضاء المقيس $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، و λ هو قياس لوبيغ.

7-1. مبرهنة. ليكن f تابعاً حقيقيّاً مستمرّاً، على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$. نمدّد f على $\mathbb{R}$ بوضع $\forall x<a,\ f(x)=f(a)$ و $\forall x>b,\ f(x)=f(b)$. عندئذ يكون لدينا:

$$\int \mathbb{1}_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\lambda=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

الإثبات

لنعرّف في حالة x من المجال $[a,b]$ العدد $F(x)$ بالصيغة

$$F(x)=\int \mathbb{1}_{[a,x]}f\,\mathrm{d}\lambda$$

ولنناقش الحالات التالية :

- في حالة α من $[a,b[$ و x من $]\alpha,b[$ لدينا

$$\begin{aligned}\bigl|F(x)-F(\alpha)-(x-\alpha)f(\alpha)\bigr| &=\Bigl|\int \mathbb{1}_{[\alpha,x]}\bigl(f-f(\alpha)\bigr)\mathrm{d}\lambda\Bigr|\\ &\leq \int \mathbb{1}_{[\alpha,x]}\bigl|f-f(\alpha)\bigr|\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \lambda\bigl([\alpha,x]\bigr)\sup_{t\in[\alpha,x]}\bigl|f(t)-f(\alpha)\bigr|\\ &\leq (x-\alpha)\cdot\sup_{t\in[\alpha,x]}\bigl|f(t)-f(\alpha)\bigr|\end{aligned}$$

ولأنّ f مستمرٌّ عند α استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ F يقبل الاشتقاق من اليمين عند α وأنّ $F'(\alpha^+)=f(\alpha)$.

- وكذلك، في حالة α من $]a,b]$ و x من $]a,\alpha[$ لدينا

$$\begin{aligned}\bigl|F(\alpha)-F(x)-(\alpha-x)f(\alpha)\bigr| &=\Bigl|\int \mathbb{1}_{[x,\alpha]}\bigl(f-f(\alpha)\bigr)\mathrm{d}\lambda\Bigr|\\ &\leq \int \mathbb{1}_{[x,\alpha]}\bigl|f-f(\alpha)\bigr|\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \lambda\bigl([x,\alpha]\bigr)\sup_{t\in[x,\alpha]}\bigl|f(t)-f(\alpha)\bigr|\\ &\leq (\alpha-x)\cdot\sup_{t\in[x,\alpha]}\bigl|f(t)-f(\alpha)\bigr|\end{aligned}$$

ولأنّ f مستمرٌّ عند α استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ F يقبل الاشتقاق من اليسار عند α وأنّ $F'(\alpha^-)=f(\alpha)$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 على $[a,b]$ وأنّ $F' = f$ ، وعليه فإنّ F هو تابعٌ أصلي للتابع f . واستناداً إلى تعريف تكامل ريمان لدينا

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

7-2. **نتيجة**. ليكن f تابعاً حقيقياً مستمرّاً قِطَعيّاً، على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$. عندئذ يكون لدينا: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$.

الإثبات

هذه نتيجة واضحة اعتماداً على ما سبق وعلى علاقة شال. ❐

7-3. **نتيجة**. ليكن f تابعاً حقيقياً من الصف $\mathcal{R}$ ، على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$. عندئذ يكون لدينا: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$.

الإثبات

توجد متتالية توابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الصف C^1 قطعيّاً على $[a,b]$، متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ من التابع f . نعرّف كلَّ φ_n على كامل $\mathbb{R}$ بوضع

$$\forall x < a,\ \varphi_n(x) = f(a) \text{ و } \forall x > b,\ \varphi_n(x) = f(b)$$

تتقارب المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من تابع مقيس يتفق مع f على $[a,b]$ نرمز إليه بالرمز f أيضاً. ومن جهة أخرى، لدينا

$$\left|\int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda - \int \mathbb{1}_{[a,b]} \varphi_n\,\mathrm{d}\lambda\right| \le \int \mathbb{1}_{[a,b]} |f - \varphi_n|\,\mathrm{d}\lambda$$

ومن ثَمّ

$$\left|\int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le (b-a) \sup_{[a,b]} |f - \varphi_n|$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathbb{1}_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

7-4. **ملاحظة**. لقد رأينا أنّ التكامل بالنسبة إلى قياس لوبيغ يعمّم مفهوم التكامل بمعنى ريمان، لذلك، كثيراً ما نكتب $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}x$ بدلاً من $\int f\,\mathrm{d}\lambda$ في حالة f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.

8. التكاملات المضاعفة

1-8. **تعريف**. نتأمّل فضاءات قَيوسة $((X_k, \Sigma_k))_{k\in\mathbb{N}_d}$ حيث $d \geq 2$. ونتأمّل الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$. نسمّي الجبر التامّ Σ على X الذي تولّده المجموعات

$$\{A_1 \times \cdots \times A_d \,:\, \forall k \in \mathbb{N}_d, A_k \in \Sigma_k\}$$

جبر جداء الجبور $(\Sigma_k)_{k\in\mathbb{N}_d}$، ونرمز إليه بالرمز $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_d$.

لعلّ أهمّ مثال على هذا هو حالة $(X_k, \Sigma_k) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ حيث k من $\mathbb{N}_d$، إذ نبرهن أنّ جبر المجموعات البورِليّة $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ في $\mathbb{R}^d$ هو جبر الجداء $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{d}$. ونبرهن أيضاً بالسهولة نفسها أنّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$.

2-8. **تعريف**. نقول إنّ الفضاء المقيس (X, Σ, μ) هو فضاء **σ-منتهٍ** إذا وُجدت متتالية متزايدة $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر Σ، تُحقّق

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < +\infty$$

تنبع أهميّة التعريف السابق من الخاصة المهمةّ الآتية:

3-8. **مبرهنة وتعريف**. نتأمّل فضاءَيْن مقيسين (X_1, Σ_1, μ_1) و (X_2, Σ_2, μ_2) نفترض أنّهما σ-منتهيين. عندئذ **يوجد** قياس **وحيدٌ** μ معرّف على $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$ ويُحقّق:

$$\forall (A_1, A_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2, \quad \mu(A_1 \times A_1) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

(مع الاصطلاح $0 \times \infty = 0$). نسمّي μ **قياس الجداء** ونرمز إليه $\mu_1 \otimes \mu_2$، ويكون الفضاء المقيس $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ فضاءً σ-منتهياً.

تتيح لنا هذه المبرهنة أن نعرّف قياس لوبيغ λ_d على $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ بالتدريج على العدد d بوضع $\lambda_d = \lambda \otimes \lambda_{d-1}$ في حالة $d \geq 2$.

نأتي الآن إلى المبرهنتين الأساسيّتين في التكاملات المضاعفة:

8-4. مبرهنة-تونلّي Tonelli . نتأمّل فضاءَيْن مقيسَيْن (X_1, Σ_1, μ_1) و (X_2, Σ_2, μ_2) نفترض أنّهما σ-منتهيين، ونعرّف

$$(X, \Sigma, \mu) = (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

وأخيراً نتأمّل تابعاً مقيساً وموجباً $f : X \to \mathbb{R}_+$. عندئذ

① التابع $x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2)$ تابعٌ مقيسٌ على (X_1, Σ_1).

② التابع $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1)$ تابعٌ مقيسٌ على (X_2, Σ_2).

③ وتتحقّق في $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ المساواة

$$\begin{aligned}\int f\, \mathrm{d}\mu &= \int \Big(\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \Big) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int \Big(\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \Big) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned} \qquad ⌘$$

في الحقيقة، تنبع أهميّة مبرهنة تونلّي من كون الشروط المطلوبة من f لتتحقّق المساواة ⌘، شروطاً بسيطة جداً، وهي أن يكون f مقيساً وموجباً.

ملاحظة. لاحظ أيضاً أنّه يمكن أن يكون القياسان μ_1 و μ_2 قياسَي جداء، فهذه المبرهنة تشمل في الحقيقة تكاملات ثنائيّة وثلاثيّة و . . . .

8-5. مبرهنة-فوبيني Fubini . نتأمّل فضاءَيْن مقيسَيْن (X_1, Σ_1, μ_1) و (X_2, Σ_2, μ_2) نفترض أنهما σ-منتهيين. ونعرّف

$$(X, \Sigma, \mu) = (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

وأخيراً نتأمّل تابعاً $f : X \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$. عندئذ

① تعرّف الصيغة $x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2)$ تابعاً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$.

② تعرّف الصيغة $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1)$ تابعاً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$.

③ وتتحقّق المساواة

$$\begin{aligned}\int f\, \mathrm{d}\mu &= \int \Big(\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \Big) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int \Big(\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \Big) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned} \qquad ⌘$$

ملاحظة مهمّة. كي نتوثّق من انتماء تابع f إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$ ، نطبّق عادة مبرهنة تونلّي على التابع $|f|$.

ونختم هذه الفقرة بذكر مبرهنة تغيير المتحوّلات.

6-8. مبرهنة تغيير المتحوّلات. في هذه المبرهنة نتأمّل الفضاء المقيس $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$، والمجموعتين Δ و D المفتوحتين في $\mathbb{R}^n$. نفترض أنّ يوجد تقابلٌ
$\Phi : D \to \Delta, (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_n)$ (حيث $y_k = \varphi_k(x_1,\ldots,x_n)$)
ينتمي هو وتقابله العكسي إلى الصف C^1. نرمز كما جرت العادة بالرمز $J_\Phi(x)$ إلى محدّد مصفوفة جاكوبي للتابع Φ عند $x = (x_1,\ldots,x_n)$ من D، أي

$$J_\Phi(x) = \det\left(\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right]_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\right)$$

① ليكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ تابعاً مقيساً موجباً. عندئذ يكون

$$\int_\Delta f(y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \int_D f(\Phi(x))\big|J_\Phi(x)\big|\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

② ليكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. ينتمي التابع $\mathbb{1}_\Delta f$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$، إذا وفقط انتمى التابع $\mathbb{1}_D f \circ \Phi |J_\Phi|$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$، وعندئذ يكون لدينا

$$\int_\Delta f(y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \int_D f(\Phi(x))\big|J_\Phi(x)\big|\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

7-8. مثال – الإحداثيّات القطبيّة. نعلم أنّ التابع

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[}_{D} \to \underbrace{\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_-\times\{0\})}_{\Delta}, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

يُعرّف تقابلاً من الصف C^1، وتقابله العكسي مُعطى بالصيغة

$$\Phi^{-1} : \Delta \to D, (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

كما نلاحظ أنّ

$$J_\Phi(r,\theta) = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r$$

إذن مهما يكن التابع الموجب المقيس $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ يكن لدينا

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

إذا ستفدنا من كون المجموعة $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ مجموعة مهملة.

9. الفضاءات L^p

1-9. توطئة. ليكن p من $]1,+\infty[$. نعرّف q من $]1,+\infty[$ بالصيغة $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$، عندئذ :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

الإثبات

المتراجحة المطلوبة صحيحة في حالة $x = 0$ أو $y = 0$. لنفترض أنّ $x > 0$ و $y > 0$. عندئذ يوجد عددان حقيقيّان a و b يُحقّقان $x = e^a$ و $y = e^b$. ولأن التابع الأسّي محدّبٌ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} xy &= \exp(a+b) = \exp\left(\tfrac{1}{p}pa + \tfrac{1}{q}qb\right) \\ &\le \tfrac{1}{p}e^{pa} + \tfrac{1}{q}e^{qb} = \tfrac{1}{p}x^p + \tfrac{1}{q}y^q \end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة. ❐

2-9. مبرهنة – متراجحة Hölder . ليكن p و q من $]1,+\infty[$. يُحقّقان $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$، وليكن (X,Σ,μ) فضاءً مقيساً. عندئذ، أيّاً كان f و g من $\mathcal{M}^+(X,\Sigma)$ كان

$$\int fg \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

الإثبات

لنضع $A = \left(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ و $B = \left(\int g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$ تعريفاً. ولنناقش الحالات التالية:

- في حالة $A = 0$ أو $B = 0$، يكون $f = 0, \mu\text{-a.e.}$ أو $g = 0, \mu\text{-a.e.}$، وتتحقّق المتراجحة وضوحاً.
- في حالة $A = +\infty$ أو $B = +\infty$، المتراجحة المطلوبة تافهة.
- نفترض إذن أنّ A و B ينتميان إلى $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ يكون لدينا استناداً إلى التوطئة السابقة ما يأتي:

$$\frac{f}{A} \times \frac{g}{B} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{f^p}{\int f^p \,\mathrm{d}\mu} + \frac{1}{q} \cdot \frac{g^q}{\int g^q \,\mathrm{d}\mu}$$

ومن ثَمّ

$$\int \frac{f}{A} \times \frac{g}{B} \mathrm{d}\,\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

أو $\int fg \,\mathrm{d}\,\mu \leq AB$. وهي النتيجة المطلوبة. ❐

9-3. مبرهنة – متراجحة Minkowski . ليكن p من $[1, +\infty[$. وليكن (X, Σ, μ) فضاءً مقيساً. عندئذ، أيّاً كان f و g من $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ كان

$$\left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p}$$

الإثبات

النتيجة واضحة في حالة $p = 1$. نفترض إذن أنّ $p > 1$ ، ونضع $q = \frac{p}{p-1}$. فإذا طبّقنا متراجحة Hölder على التابعين f و $(f+g)^{p-1}$ وجدنا

$$\int f(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\,\mu \leq \left(\int f^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/q}$$

وبأسلوب مماثل نجد

$$\int g(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\,\mu \leq \left(\int g^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/q}$$

وبالجمع نجد

$$\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq \left(\left(\int f^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

إذن

- في حالة $\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu \in \mathbb{R}_+^*$ نستنتج مباشرة المتراجحة المطلوبة.
- كما نلاحظ أنّ هذه المتراجحة صحيحة وضوحاً في حالة $\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.
- أمّا في حالة $\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\,\mu = +\infty$ ، فنستفيد من المتراجحة

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2}$$

(التي تعبّر عن كون التابع $x \mapsto x^p$ محدّباً) لنستنتج أنّ أحد التكاملين $\int f^p \,\mathrm{d}\,\mu$ أو $\int g^p \,\mathrm{d}\,\mu$ يساوي $+\infty$ ، فالمتراجحة المطلوبة محقّقة أيضاً في هذه الحالة. ❐

9-4. تعريف. ليكن p من $[1,+\infty[$. عندئذ ، نعرّف الفضاء $\boldsymbol{\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)}$ بأنّه فضاء التوابع المقيسة $f:X\to\mathbb{K}$ التي تُحقّق $\int |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu<+\infty$ ، ونطابق كما في حالة $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ بين تابعين f و g يُحقّقان $f=g,\ \mu\text{-}a.e.$. ونعرّف في حالة f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ الرمز $\|f\|_p$ دلالة على $\left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{1/p}$.

تبرهن متراجحة مينكوفسكي على أنّ $f\mapsto \|f\|_p$ نظيمٌ على $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. ونبرهن كما فعلنا في المبرهنة 5-4. على أنّ كلّ متسلسلة متقاربة بالنظيم في الفضاء $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ تكون متقاربة فيه، وتتقارب ببساطة من النهاية نفسها على متمّمة مجموعة مهملة. وهذا يُثبتُ أنّ الفضاء $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ هو فضاء شعاعي منظّمٌ تامٌّ، أي **فضاء باناخ**.

وبوجه خاص، نجد أنّ $\mathcal{L}^2_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ هو **فضاء هِلبرت**، إذ إنّ النظيم $\|\cdot\|_2$ هو النظيم الموافق للجداء السلّمي المعرّف بالصيغة

$$\forall (f,g)\in (\mathcal{L}^2_{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu))^2,\quad \langle f,g\rangle=\int \overline{f}g\,\mathrm{d}\,\mu$$

نجد فيما يلي خاصّة سنستفيد منها تكراراً.

9-5. مبرهنة. ليكن p و q عددين من $]1,+\infty[$ يُحقّقان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. وليكن الفضاء المقيس (X,Σ,μ)، نفترض أنّ القياس μ قياسٌ σ-منته، وليكن $f:X\to\mathbb{R}$ تابعاً مقيساً يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$. نفترض أنّه يوجد ثابتٌ M يُحقّق، أيّاً كان التابع الموجب g من $\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ ، المتراجحةَ

$$\int fg\,\mathrm{d}\,\mu\le M\|g\|_q$$

عندئذ ينتمي التابع f إلى $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ وتتحقّق المتراجحة $\|f\|_p\le M$.

الإثبات

استناداً إلى الفرْض توجدُ متتالية متزايدة $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجموعات المقيسة التي تحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mu(X_n)<+\infty \quad \text{و} \quad X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$$

◆ لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$، ولنضع $A_a = f^{-1}(]a,+\infty])$. وأخيراً لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ التابع $g_n = \mathbb{1}_{A_a \cap X_n}$. عندئذ يكون لدينا

$$\int g_n^q \,\mathrm{d}\,\mu \leq \mu(X_n) < +\infty$$

واستناداً إلى الفرْض

$$a\mu(A_a \cap X_n) \leq \int f g_n \,\mathrm{d}\,\mu \leq M \cdot \sqrt[q]{\int g_n^q \,\mathrm{d}\,\mu} = M \cdot \sqrt[q]{\mu(A_a \cap X_n)}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(A_a \cap X_n) \leq \left(\frac{M}{a}\right)^p$$

ولأنّ $(A_a \cap X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة اجتماعُها يساوي A_a استنتجنا أنّ

$$\mu(A_a) \leq \left(\frac{M}{a}\right)^p$$

◆ وبملاحظة أنّ $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة تُحقّق $f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m$، استنتجنا أنّ $\mu\big(f^{-1}(\{+\infty\})\big) = 0$، فالمجموعة $\mathcal{N} = f^{-1}(\{+\infty\})$ مجموعة μ-مهملة.

◆ لنعرّف $B_n = X_n \cap f^{-1}([0,n])$ في حالة n من $\mathbb{N}$، ولنختر $g = \mathbb{1}_{B_n} f^{p/q}$ فيكون

$$\int g^q \,\mathrm{d}\,\mu = \int \mathbb{1}_{B_n} f^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq n^p \mu(X_n) < +\infty$$

ومن ثَمّ، لأنّ $fg = \mathbb{1}_{B_n} f^p$، استنتجنا من الفرْض

$$\int \mathbb{1}_{B_n} f^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq M \cdot \sqrt[q]{\int \mathbb{1}_{B_n} f^p \,\mathrm{d}\,\mu}$$

ومنه

$$\int \mathbb{1}_{B_n} f^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq M^p$$

ولكنّ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة تُحقّق $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X \backslash \mathcal{N}$ إذن بجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نستنتج أنّ

$$\int \mathbb{1}_{X\backslash\mathcal{N}} f^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq M^p$$

ومن ثَمّ $\int f^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq M^p$، لأنّ $\mathcal{N}$ مجموعة μ-مهملة. وبذا يتمّ الإثبات. ❐

نستفيد من المبرهنة السابقة في تعريف جداء التلافّ كما تبيِّن المبرهنة التالية.

9-6. **مبرهنة**. لتكن p من $[1,+\infty[$، وليكن التابع h من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ والتابع f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. عندئذ، توجد مجموعة λ-مهملة $\mathcal{N}$ ، تجعل التابع

$$t \mapsto f(x-t)h(t)$$

عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ مهما يكن x من $\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$ ، وهذا يتيح لنا تعريف **جداء التّلاف** $f*h$ بالصيغة

$$f*h(x)=\int f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ينتمي $f*h$ إلى $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، وتتحقّق المتراجحة

$$\|f*h\|_p \le \|f\|_p\,\|h\|_1$$

الإثبات

- **حالة** $p=1$. لنتأمّل التابع المقيس Φ المعرّف كما يلي :

$$\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C},\ \ \Phi(x,t)=f(x-t)h(t)$$

إنّ Φ عنصرٌ من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\lambda_2\right)$ ، لأنّه استناداً إلى مبرهنة Tonelli لدينا

$$\int\left|\Phi(x,t)\right|\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t=\int\left(\int\left|f(x-t)\right|\mathrm{d}\,x\right)\left|h(t)\right|\mathrm{d}\,t=\|f\|_1\|h\|_1<+\infty$$

فإذا عرّفنا

$$\mathcal{N}=\left\{x\in\mathbb{R}:\int\left|f(x-t)h(t)\right|\mathrm{d}\,t=+\infty\right\}$$

استنتجنا من كون $\int\left(\int\left|f(x-t)h(t)\right|\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x<+\infty$ أنّ المجموعة $\mathcal{N}$ مجموعة λ-مهملة. وإذا كان x من $\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$ كان التابع $t\mapsto f(x-t)h(t)$ عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، وهذا ما يتيح لنا تعريف التابع $f*h$ بالصيغة

$$f*h(x)=\int f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ونستنتج من مبرهنة Tonelli نفسها أنّ

$$\int\left|f*h(x)\right|\mathrm{d}\,x\le\int\left(\int\left|f(x-t)\right|\left|h(t)\right|\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x=\|f\|_1\|h\|_1$$

إذن ينتمي $f*h$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، وتتحقّق المتراجحة

$$\|f*h\|_1\le\|f\|_1\,\|h\|_1$$

▫ **حالة** $p > 1$. لنتأمّل تابعاً موجباً ما g من $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{q}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. ولنتأمّل التابع المقيس Φ المعرّف كما يأتي :

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \Phi(x,t) = g(x) f(x-t) h(t)$$

إنّ Φ عنصرٌ من $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{1}\big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2\big)$، لأنّه استناداً إلى مبرهنة Tonelli، ومتراجحة Hölder، لدينا

$$\begin{aligned}\int \big|\Phi(x,t)\big| \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, t &= \int \Big(\int g(x) \big|f(x-t)\big| \,\mathrm{d}\, x \Big) \big|h(t)\big| \,\mathrm{d}\, t \\ &\leq \int \left(\Big(\int \big|f(x-t)\big|^p \,\mathrm{d}\, x \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int \big(g(x)\big)^q \,\mathrm{d}\, x \Big)^{\frac{1}{q}} \right) \big|h(t)\big| \,\mathrm{d}\, t \\ &\leq \big\|f\big\|_p \big\|g\big\|_q \big\|h\big\|_1 < +\infty\end{aligned}$$

إذن يُحقّق التابع المقيس الموجب k المعطى بالصيغة $x \mapsto \int \big|f(x-t)\big|\big|h(t)\big| \,\mathrm{d}\, t$ الخاصّة التالية :

$$\forall g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{q}\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda\big),\ g \geq 0 \Rightarrow \int g(x) k(x) \,\mathrm{d}\, x \leq \big\|f\big\|_p \big\|h\big\|_1 \big\|g\big\|_q$$

وهذا يُثبتُ، بناءً على المبرهنة 9-5.، أنّ التابع k ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ وأنّ $\|k\|_p \leq \|f\|_p \|h\|_1$. وهنا نعرّف

$$\mathcal{N} = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \int \big|f(x-t)h(t)\big| \,\mathrm{d}\, t = +\infty \Big\}$$

فنستنتج من كون $\int \Big(\int \big|f(x-t)h(t)\big| \,\mathrm{d}\, t \Big)^p \,\mathrm{d}\, x < +\infty$ أنّ المجموعة $\mathcal{N}$ مجموعة λ-مهملة. وإذا كان x من $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ كان التابع $t \mapsto f(x-t)h(t)$ عنصراً من $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{1}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ ، وهذا ما يتيح لنا تعريف التابع $f * h$ بالصيغة

$$f * h(x) = \int f(x-t) h(t) \,\mathrm{d}\, t$$

ونستنتج من كون $|f * h| \leq k$ أنّ $\|f * h\|_p \leq \|f\|_p \|h\|_1$، وهي النتيجة المرجوّة. ❐

ونختم هذه الفقرة بخاصّة مفيدة.

9-7. **مبرهنة**. لتكن p من $[1, +\infty[$، ولتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية من التوابع من عناصر $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(X, \Sigma, \mu)$. نفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة في $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(X, \Sigma, \mu)$ من تابع f ، وأنها متقاربة ببساطة من تابع g . عندئذ لا بُدّ أن يكون $f = g,\ \mu\text{-}a.e.$.

الإثبات

لنعرّف التابع $\varphi = |g-f|^p$، وفي حالة n من $\mathbb{N}$، التابع $\varphi_n = |f_n - f|^p$. عندئذ، بناءً على الفرْض، تتقارب المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع φ، كما إنّها تُحقّق وضوحاً

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}\,\mu = 0 .$$

ثُمّ لنضع $\psi_n = \inf_{k\geq n} \varphi_k$ في حالة n من $\mathbb{N}$. لمّا كان من الواضح أنّ

$$k \geq n \Rightarrow \varphi - \sup_{j\geq n} \left| \varphi_j - \varphi \right| \leq \varphi_k$$

استنتجنا من ذلك أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi - \sup_{j\geq n} \left| \varphi_j - \varphi \right| \leq \psi_n \leq \varphi_n$$

وهذا يبرهن على تقارب المتتالية $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع φ. ونستنتج من المتراجحة الواضحة: $0 \leq \psi_n \leq \varphi_n$، أنّ

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \,\mathrm{d}\,\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}\,\mu = 0$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \int \psi_n \,\mathrm{d}\,\mu = 0$. ولكنّ المتتالية $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من التوابع المقيسة الموجبة، إذن، عملاً بمبرهنة التقارب المتزايد لدينا

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\,\mu = \int \lim_{n\to\infty} \psi_n \,\mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \,\mathrm{d}\,\mu = 0$$

وهذا يقتضي أنّ $\varphi = 0,\ \mu\text{-}a.e.$. وهي النتيجة المرجوّة. ❐

10. مبرهنات الكثافة في الفضاءات L^p

1-10. تعريف. في حالة تابعٍ ما $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$، نعرّف **حامل التابع** f، بأنها لصاقة مجموعة النقاط التي لا ينعدم عندها التابع f، أي

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0 \right\}}$$

2-10. تعريف. نرمز بالرمز $\boldsymbol{C_c}(\mathbb{R})$ إلى مجموعة التوابع المستمرّة وحواملها مجموعات متراصّة. وعليه ينتمي $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ إلى $C_c(\mathbb{R})$، إذا كان f تابعاً مستمراً ومعدوماً خارج مجال محدودٍ.

10-3. تعريف. نرمز بالرمز $\mathfrak{D}$ إلى مجموعة التوابع التي تنتمي إلى الصف C^∞ وحواملها مجموعات متراصّة.

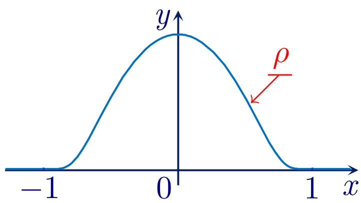
فمثلاً نعلم أنّ التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ينتمي إلى الصف C^∞ وهو معدومٌ على $\mathbb{R}_-$. وعليه، ينتمي التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(1-x)\varphi(1+x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right) & : \quad |x| < 1 \\ 0 & : \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

إلى الصف $\mathfrak{D}$، وهو تابعٌ موجبٌ من الصف C^∞، ويحقّق $\operatorname{supp}(f) = [-1,+1]$.
وبقسمة التابع f على الثابت $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$. نحصل على تابعٍ موجبٍ ρ ينتمي إلى $\mathfrak{D}$ حامله المجال $[-1,1]$، ويُحقّق $\int \rho(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$.



10-4. مبرهنة. ليكن f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، وليكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ يوجد تابع h_ε من $C_c(\mathbb{R})$، يُحقّق $\|f - h_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

الإثبات

يمر الإثبات بدراسة حالات مختلفة تتدرّج من الأبسط إلى الأعقد.

▫ حالة $f = \mathbb{1}_B$ و B مجموعة بورليّة. إنّ شرط انتماء f إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ يُكافئ $\lambda(B) < +\infty$.

لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. لمّا كان $\lim_{n\to\infty} \lambda(B \cap]-n,n[) = \lambda(B)$، استنتجنا أنّه يوجد ν من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق

$$\lambda(B \cap]-\nu,\nu[) \geq \lambda(B) - \frac{\varepsilon}{2}$$

نعرّف إذن $\widetilde{B} = B \cap]-\nu,\nu[$. فيكون $\lambda\left(B\backslash\widetilde{B}\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

بالاستفادة من كون قياس لوبيغ نظامي أي من كون

$$\begin{aligned}\lambda\left(\widetilde{B}\right) &= \inf\left\{\lambda(O) : \text{مجموعة مفتوحة تحوي } \widetilde{B} \ O\right\}\\ &= \sup\left\{\lambda(K) : \text{مجموعة متراصّة محتواة في } \widetilde{B} \ K\right\}\end{aligned}$$

نستنتج أنّه توجد مجموعة مفتوحة O_ε، ومجموعة متراصّة K_ε ، تُحقّقان

$$\lambda(O_\varepsilon\backslash K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad K_\varepsilon \subset \widetilde{B} \subset O_\varepsilon$$

يمكننا أن نفترض أنّ $O_\varepsilon \subset]-\nu,\nu[$، وإلاّ استبدلنا $O_\varepsilon \cap]-\nu,\nu[$ بالمجموعة O_ε . ثُمّ نعرّف التابع المستمرّ

$$h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_\varepsilon(x) = \frac{d(x,\mathbb{R}\backslash O_\varepsilon)}{d(x,K_\varepsilon) + d(x,\mathbb{R}\backslash O_\varepsilon)}$$

الذي يأخذ قيمه في المجال $[0,1]$ ويحقّق وضوحاً

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x) \le h_\varepsilon(x) \le \mathbb{1}_{O_\varepsilon}(x)$$

ولأنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x) \le \mathbb{1}_{\widetilde{B}}(x) \le \mathbb{1}_{O_\varepsilon}(x)$$

استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\mathbb{1}_{O_\varepsilon\backslash K_\varepsilon}(x) \le h_\varepsilon(x) - \mathbb{1}_{\widetilde{B}}(x) \le \mathbb{1}_{O_\varepsilon\backslash K_\varepsilon}(x)$$

وعليه، لأنّ $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\widetilde{B}} + \mathbb{1}_{B\backslash\widetilde{B}}$ ، نرى أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$\begin{aligned}\left|h_\varepsilon(x) - \mathbb{1}_B(x)\right| &\le \left|h_\varepsilon(x) - \mathbb{1}_{\widetilde{B}}(x)\right| + \mathbb{1}_{B\backslash\widetilde{B}}(x)\\ &\le \mathbb{1}_{O_\varepsilon\backslash K_\varepsilon}(x) + \mathbb{1}_{B\backslash\widetilde{B}}(x)\end{aligned}$$

ومنه

$$\int|\mathbb{1}_B - h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda \le \lambda(O_\varepsilon\backslash K_\varepsilon) + \lambda\left(B\backslash\widetilde{B}\right) < \varepsilon$$

وهي النتيجة المطلوبة لأنّ h_ε تابعٌ مستمرٌّ ومعدومٌ خارج المجال $[-\nu,\nu]$.

▫ حالة f تابعٌ بسيطٌ موجبٌ، أي من الصيغة $f=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \mathbb{1}_{B_k}$. يمكننا أن نفترض أنّ $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ أعدادٌ موجبةٌ تماماً. وعندئذ يكون $\forall k\in\mathbb{N}_m,\ \lambda(B_k)<+\infty$ لأنّ f ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.

لتكن $\varepsilon>0$. عندئذ مهما تكن k من $\mathbb{N}_m$ يوجدُ تابعٌ مستمرٌّ $h_{\varepsilon,k}$ من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\int\left|\mathbb{1}_{B_k}-h_{\varepsilon,k}\right|\mathrm{d}\lambda<\frac{\varepsilon}{m\alpha_k}$$

وذلك بناءً على ما أثبتناه في الحالة السابقة. وعندئذ إذا عرّفنا $h_\varepsilon=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k h_{\varepsilon,k}$ كان h_ε تابعاً مستمراً ومعدوماً خارج مجال محدود، وكان

$$\begin{aligned}\int|f-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda&\leq\int\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left|\mathbb{1}_{B_k}-h_{\varepsilon,k}\right|\right)\mathrm{d}\lambda\\&\leq\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int\left|\mathbb{1}_{B_k}-h_{\varepsilon,k}\right|\mathrm{d}\lambda<\varepsilon\end{aligned}$$

▫ حالة f تابعٌ بورِلي موجبٌ. لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ استناداً إلى التعريف 4-2-1. يوجد تابعٌ بسيطٌ موجبٌ φ_ε يُحقّق

$$\varphi_\varepsilon\leq f \quad \text{و} \quad \int\varphi_\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda\geq\int f\,\mathrm{d}\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\int|f-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

واستناداً إلى ما أثبتناه في الحالة السابقة، يوجد تابعٌ h_ε من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\int|\varphi_\varepsilon-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda<\frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه $\int|f-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda<\varepsilon$.

▫ حالة f تابعٌ بورِلي حقيقي. لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ بتطبيق ما سبق على كلٍّ من f^+ و f^- نستنتج وجود تابعين φ_ε^+ و φ_ε^- من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّقان

$$\int|f^+-\varphi_\varepsilon^+|\,\mathrm{d}\lambda<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \int|f^--\varphi_\varepsilon^-|\,\mathrm{d}\lambda<\frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه يكون $h_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^-$ تابعاً من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\begin{aligned}\int \left|f - h_\varepsilon\right| \mathrm{d}\lambda &= \int \left|f^+ - \varphi_\varepsilon^+ - (f^- - \varphi_\varepsilon^-)\right| \mathrm{d}\lambda \\ &\le \int \left|f^- - \varphi_\varepsilon^-\right| \mathrm{d}\lambda + \int \left|f^+ - \varphi_\varepsilon^+\right| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon\end{aligned}$$

▫ حالة f تابعٌ بورِلي يأخذ قيمه في $\mathbb{C}$. لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ بتطبيق ما سبق على كلٍّ من $\mathrm{Re}(f)$ و $\mathrm{Im}(f)$ نستنتج وجود تابعين φ_ε^r و φ_ε^i من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّقان

$$\int \left|\mathrm{Im}(f) - \varphi_\varepsilon^i\right| \mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \int \left|\mathrm{Re}(f) - \varphi_\varepsilon^r\right| \mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه يكون $h_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^r + \mathrm{i}\varphi_\varepsilon^i$ تابعاً من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\begin{aligned}\int |f - h_\varepsilon| \mathrm{d}\lambda &= \int \left|\mathrm{Re}(f) - \varphi_\varepsilon^r + \mathrm{i}\big(\mathrm{Im}(f) - \varphi_\varepsilon^i\big)\right| \mathrm{d}\lambda \\ &\le \int \left|\mathrm{Re}(f) - \varphi_\varepsilon^r\right| \mathrm{d}\lambda + \int \left|\mathrm{Im}(f) - \varphi_\varepsilon^i\right| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon\end{aligned}$$

وبذا يكتمل الإثبات. ❐

سنرى في المبرهنة الآتية أنّ نتيجة المبرهنة السابقة صحيحة أيضاً في أيٍّ من الفضاءات $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ حيث $1 \le p$، ولكنّ هذا يتطلّب منّا أن نبدأ بالتوطئة الآتية.

5-10. توطئة. ليكن f من $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. وليكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ توجد مجموعة بورِليّة **محدودة** B_ε تجعل التابع $f \mathbb{1}_{B_\varepsilon}$ **محدوداً** وتُحقّق $\int |f| \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus B_\varepsilon} \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$.

الإثبات

بتطبيق مبرهنة التقارب المتزايد 4-2-3. على المتتالية $\left(|f| \mathbb{1}_{[-n,n]}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbb{1}_{[-n,n]} \mathrm{d}\lambda = \int |f| \mathrm{d}\lambda$$

إذن توجد n_0 تُحقّق

$$\int \left|f - f\mathbb{1}_{[-n_0,n_0]}\right| \mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

نعرّف $g = f\mathbb{1}_{[-n_0,n_0]}$. ونتأمّل المجموعة $B_m = \left\{x : \left|g(x)\right| \le m\right\}$. فتكون المتتالية $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة تُحقّق

$$\lambda(\mathbb{R}\setminus B_m) = \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus B_m} \mathrm{d}\lambda \le \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus B_m} \frac{1}{m} |g| \mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{m} \|g\|_1$$

فالمجموعة $\mathcal{N}= \mathbb{R}\backslash(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m)$ مهملة لأنّ $\lambda(\mathcal{N}) = \lim_{m\to\infty} \lambda(\mathbb{R}\backslash B_m) = 0$.
وبتطبيق مبرهنة التقارب المتزايد ذاتها على المتتالية $(|g|\mathbb{1}_{B_m})_{m\in\mathbb{N}}$ نستنتج أنّ

$$\lim_{m\to\infty}\int |g|\mathbb{1}_{B_m}\mathrm{d}\lambda = \int |g|\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}}\mathrm{d}\lambda = \int |g|\mathrm{d}\lambda$$

إذن توجد m_0 تُحقّق

$$\int \left|g - g\mathbb{1}_{B_{m_0}}\right|\mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

وعليه، من (1) و (2)، نجد

$$\int \left|f - f\mathbb{1}_{[-n_0,n_0]\cap B_{m_0}}\right|\mathrm{d}\lambda \le \int |f-g|\mathrm{d}\lambda + \int \left|g - g\mathbb{1}_{B_{m_0}}\right|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$$

ويكفي أن نختار $B_\varepsilon = [-n_0,n_0] \cap B_{m_0}$، ليتحقّق المطلوب. ❐

10-6. مبرهنة. لتكن p من $[1,+\infty[$، وليكن f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، عندئذ مهما تكن ε من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد تابع h_ε من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق $\|f - h_\varepsilon\|_p < \varepsilon$.

الإثبات

حالة $p = 1$ هي نتيجة المبرهنة 10-4. لذلك سنفترض فيما يأتي أنّ $p > 1$. ونُجري الإثبات بمُعالجة عدّة حالات تتدرّج من الأسهل إلى الأعقد.

▫ حالة f تابعٌ موجبٌ. ليكن ε من $\mathbb{R}_+^*$، توجد مجموعة بورلِيّة محدودة B_ε يكون عليها $f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}$ محدوداً، وتُحقّق

$$\int \left|f - f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}\right|^p \mathrm{d}\lambda = \int |f|^p \mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash B_\varepsilon}\mathrm{d}\lambda < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

إذن يوجد عددان ν_ε و μ_ε من $\mathbb{N}^*$ يُحقّقان

$$\forall x \in B_\varepsilon,\quad f(x) \le \mu_\varepsilon \quad \text{و} \quad B_\varepsilon \subset [-\nu_\varepsilon,\nu_\varepsilon]$$

ولمّا كان $\int \left|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}\right|\mathrm{d}\lambda \le 2\nu_\varepsilon\mu_\varepsilon < +\infty$ استنتجنا أنّه يوجد φ_ε من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\int \left|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon} - \varphi_\varepsilon\right|\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{\mu_\varepsilon^{p-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

لنعرّف $h_\varepsilon = \max(0,\min(\varphi_\varepsilon,\mu_\varepsilon))$ فيكون h_ε تابعاً من $C_c(\mathbb{R})$. ولتكن المجموعات

$$A_3 = \varphi_\varepsilon^{-1}(]\mu_\varepsilon,+\infty[) \text{ و } A_2 = \varphi_\varepsilon^{-1}([0,\mu_\varepsilon]) \text{ و } A_1 = \varphi_\varepsilon^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$$

عندئذ

$$\begin{aligned}\int_{A_1}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{A_1} f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}\,\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \int_{A_1}(f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{A_1}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

وكذلك

$$\int_{A_2}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda = \int_{A_2}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda$$

وأخيراً

$$\begin{aligned}\int_{A_3}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{A_3}(\mu_\varepsilon - f\mathbb{1}_{B_\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \int_{A_3}(\varphi_\varepsilon - f\mathbb{1}_{B_\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda = \int_{A_3}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

وعليه نرى أنّ

$$\begin{aligned}\int|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{A_1}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda+\int_{A_2}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda+\int_{A_3}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \int_{A_1}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda+\int_{A_2}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda+\int_{A_3}|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \int|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-\varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{\mu_\varepsilon^{p-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\int|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|^p\,\mathrm{d}\lambda &= \int|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon||f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda\\ &\leq \int|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon|\mu_\varepsilon^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \leq \mu_\varepsilon^{p-1}\frac{1}{\mu_\varepsilon^{p-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\end{aligned}$$

إذن

$$\|f-h_\varepsilon\|_p \leq \|f-f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}\|_p+\|f\mathbb{1}_{B_\varepsilon}-h_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$$

ويتمّ الإثبات في هذه الحالة.

▫ حالة f تابعٌ ما من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. ليكن ε من $\mathbb{R}_+^*$، عندئذ توجد أربعة توابع موجبة $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_4}$ من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ تُحقّق

$$f = f_1 - f_2 + \mathrm{i}(f_3 - f_4)$$

ومن ثَمّ توجد أربعة توابع $(h_{\varepsilon,k})_{k\in\mathbb{N}_4}$ من $C_c(\mathbb{R})$ تُحقّق

$$\forall k\in\mathbb{N}_4,\quad \|f_k-h_{\varepsilon,k}\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$$

وعندئذ يكون $h_\varepsilon=h_{\varepsilon,1}-h_{\varepsilon,2}+\mathrm{i}(h_{\varepsilon,3}-h_{\varepsilon,4})$ تابعاً من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّق المتراجحة

$$\|f-h_\varepsilon\|_p\le\sum_{k=1}^{4}\|f_k-h_{\varepsilon,k}\|_p<\varepsilon$$

وهو المطلوب. ❐

نجد فيما يلي تطبيقاً مهمّاً للمبرهنة السابقة.

7-10. مبرهنة. لتكن p من $[1,+\infty[$، وليكن f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، نرمز في حالة h من $\mathbb{R}$ بالرمز $\tau_h(f)$ إلى التابع $x\mapsto f(x-h)$. عندئذ

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h(f)-f\|_p=0$$

الإثبات

لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ يوجد تابعٌ مستمرٌّ φ_ε، معدوم خارج مجال محدودٍ، وليكن $[-a_\varepsilon,a_\varepsilon]$، ويُحقّق

$$\|f-\varphi_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3}\tag{1}$$

التابعُ φ_ε تابعٌ مستمرٌّ بانتظام على المجال المتراص $[-a_\varepsilon-1,a_\varepsilon+1]$، فيوجد η_ε من المجال $]0,1[$ يُحقّق في حالة u و v من $I_\varepsilon=[-a_\varepsilon-1,a_\varepsilon+1]$ الاقتضاء

$$|u-v|<\eta_\varepsilon\Rightarrow|\varphi(u)-\varphi(v)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt[p]{2(1+a_\varepsilon)}}$$

وعليه، في حالة $|h|<\eta_\varepsilon$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\varphi_\varepsilon(x-h)-\varphi_\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}\lambda(x)&=\int_{I_\varepsilon}|\varphi_\varepsilon(x-h)-\varphi_\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}\lambda(x)\\&\le2(1+a_\varepsilon)\frac{1}{2(1+a_\varepsilon)}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\end{aligned}$$

ومنه

$$|h|<\eta_\varepsilon\Rightarrow\|\tau_h(\varphi_\varepsilon)-\varphi_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3}\tag{2}$$

وبالاستفادة من (1) و (2) نرى أنّ الشرط $|h| < \eta_\varepsilon$ يقتضي

$$\left\|\tau_h(f) - f\right\|_p \leq \left\|\tau_h(f) - \tau_h(\varphi_\varepsilon)\right\|_p + \left\|\tau_h(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\right\|_p + \left\|\varphi_\varepsilon - f\right\|_p$$

$$\leq \left\|\tau_h(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\right\|_p + 2\left\|\varphi_\varepsilon - f\right\|_p < \varepsilon$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة. ❐

ملاحظة. تعبّر المبرهنة السابقة عن الاستمرار المنتظم للتابع

$$\mathcal{T}_f : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda),\ u \mapsto \tau_u(f)$$

ونجد في المبرهنة الآتية تطبيقاً مهمّاً على النتيجتين السابقتين.

8-10. مبرهنة. لتكن p و q من $]1, +\infty[$، تُحقّقان $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. وليكن h تابعاً من $\mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ و f تابعاً من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$. عندئذ، مهما يكن x من $\mathbb{R}$، ينتمِ التابع $t \mapsto f(x-t)h(t)$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ وهذا يتيح لنا تعريف **جداء التلافّ**

$$f * h(x) = \int f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ويكون $f * h$ تابعاً مستمرّاً بانتظام على كامل $\mathbb{R}$، ويقبل العدد 0 نهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وتتحقّق المتراجحة $\|f * h\|_\infty \leq \|f\|_p \|h\|_q$.

الإثبات

يمكننا أن نفترض أنّ $\|f\|_p \neq 0$ و $\|h\|_q \neq 0$ إذ لا يوجد ما يجب إثباته في حالة $f = 0,\ \lambda$ - a.e. أو $h = 0,\ \lambda - a.e.$.

لتكن x من $\mathbb{R}$. عندئذ اعتماداً على متراجحة Hölder لدينا

$$\begin{aligned}\int \left|f(x-t)\right|\left|h(t)\right|\mathrm{d}\,t &\leq \left(\int \left|f(x-t)\right|^p \mathrm{d}\,t\right)^{1/p} \left(\int \left|h(t)\right|^q \mathrm{d}\,t\right)^{1/q} \\ &\leq \left\|f\right\|_p \left\|h\right\|_q\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ انتماء التابع $t \mapsto f(x-t)h(t)$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$، فالتابع $f * h$ معرّفٌ مهما تكن x من $\mathbb{R}$، وتتحقّق المتراجحة $\|f * h\|_\infty \leq \|f\|_p \|h\|_q$.

ومن جهة أخرى، في حالة x و y من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}\left|f*h(x)-f*h(y)\right| &\leq \int\left|f(x-t)-f(y-t)\right|\left|h(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq \left\|f(x-\cdot)-f(y-\cdot)\right\|_p\left\|h\right\|_q\\ &\leq \left\|\tau_{y-x}(f)-f\right\|_p\left\|h\right\|_q\end{aligned}$$

ولكن $\lim\limits_{\delta\to 0}\|\tau_\delta(f)-f\|_p=0$. إذن، لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد δ_0 من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق

$$|\delta|<\delta_0 \Rightarrow \|\tau_\delta(f)-f\|_p<\frac{\varepsilon}{\|h\|_q}$$

ومن ثَمّ

$$\left|x-y\right|<\delta_0 \Rightarrow \left|f*h(x)-f*h(y)\right|\leq\left\|\tau_{y-x}(f)-f\right\|_p\left\|h\right\|_q<\varepsilon$$

وهذا يُثبتُ الاستمرار المنتظم للتابع $f*h$.

ومن جهة أخرى، لتكن ε من $]0,1[$. يوجد تابعان φ_ε و ψ_ε من $C_c(\mathbb{R})$ يُحقّقان

$$\|h-\psi_\varepsilon\|_q<\frac{\varepsilon}{3\left(1+\|f\|_p\right)} \quad \text{و} \quad \|f-\varphi_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3\left(1+\|h\|_q\right)}$$

ليكن $[-a_\varepsilon,a_\varepsilon]$ مجالاً محدوداً ينعدم خارجه التابعان φ_ε و ψ_ε. عندئذ

$$\begin{aligned}\exists t\in\mathbb{R},\varphi_\varepsilon(x-t)\psi_\varepsilon(t)\neq 0 &\Rightarrow \exists t\in\mathbb{R}:\left(|t|\leq a_\varepsilon\right)\wedge\left(|x-t|\leq a_\varepsilon\right)\\ &\Rightarrow |x|\leq|t|+|x-t|\leq 2a_\varepsilon\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $|x|>2a_\varepsilon$ يقتضي $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_\varepsilon(x-t)\psi_\varepsilon(t)=0$، ومنه

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |x|>2a_\varepsilon \Rightarrow \varphi_\varepsilon*\psi_\varepsilon(x)=0$$

وعليه، لأنّ

$$f*h=(f-\varphi_\varepsilon)*(\psi_\varepsilon-h)+(f-\varphi_\varepsilon)*h+f*(h-\psi_\varepsilon)$$

استنتجنا أنّه في حالة $|x|>2a_\varepsilon$ لدينا

$$\begin{aligned}\left|f*h(x)\right| &\leq \left\|f-\varphi_\varepsilon\right\|_p\left\|\psi_\varepsilon-h\right\|_q+\left\|f-\varphi_\varepsilon\right\|_p\left\|h\right\|_q+\left\|f\right\|_p\left\|\psi_\varepsilon-h\right\|_q\\ &\leq\left(1+1+1\right)\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّه

$$\forall\varepsilon>0,\exists A_\varepsilon>0,\quad |x|>A_\varepsilon \Rightarrow \left|f*h(x)\right|<\varepsilon$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f*h(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f*h(x)=0$$

ويتمّ الإثبات. ❐

ونجد في المبرهنة التالية تطبيقاً آخر للمبرهنة 10-7.

10-9. مبرهنة – تقريب الواحد. ليكن ρ تابعاً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، يُحقّق الشرط $\int \rho\,\mathrm{d}\,\lambda=1$. ولنعرّف متتالية التوابع $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \rho_n(x)=n\rho(nx)$$

عندئذ مهما تكن p من $[1,+\infty[$، ومهما يكن f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، يكن $\lim_{n\to\infty}\|f-f*\rho_n\|_p=0$ أي تتقارب متتالية التوابع $(f*\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من f في $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.

الإثبات

بناءً على نتيجة المبرهنة 9-6، توجد مجموعة λ-مهملة $\mathcal{N}$ تُحقّق أنه، مهما تكن x من $\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$، ومهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، فلدينا

$$f*\rho_n(x)=\int f(x-t)\rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولمّا كان $\int \rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t=1$ استنتجنا أنّه، مهما تكن x من $\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$ ومهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، يكن

$$f(x)-f*\rho_n(x)=\int\big(f(x)-f(x-t)\big)\rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ومنه

$$\big|f(x)-f*\rho_n(x)\big|\le\int\big|f(x)-f(x-t)\big|\big|\rho_n(t)\big|\,\mathrm{d}\,t$$

وهنا نناقش حالتين :

- في حالة $p=1$، نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$\int\big|f(x)-f*\rho_n(x)\big|\mathrm{d}x\le\int\Big(\int\big|f(x)-f(x-t)\big|\,\mathrm{d}\,x\Big)\big|\rho_n(t)\big|\,\mathrm{d}\,t$$

ومنه

$$\big\|f-f*\rho_n\big\|_1\le\int\big\|\tau_t(f)-f\big\|_1\big|\rho_n(t)\big|\,\mathrm{d}\,t \qquad (1)$$

▫ وفي حالة $p>1$، فعندئذ مهما يكن التابع الموجب g من $\mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ حيث $q=\dfrac{p}{p-1}$، يكون لدينا بالاستفادة من متراجحة Hölder ما يلي :

$$\begin{aligned}\int\left|f(x)-f*\rho_n(x)\right|g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int\left(\int\left|f(x)-f(x-t)\right|g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq \int\left\|\tau_t(f)-f\right\|_p\left\|g\right\|_q\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq \left\|g\right\|_q\int\left\|\tau_t(f)-f\right\|_p\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

ولأنّ g تابعٌ موجبٌ كيفي من $\mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ اقتضى هذا بناءً على المبرهنة 9-5. أنّ

$$\left\|f-f*\rho_n\right\|_p \leq \int\left\|\tau_t(f)-f\right\|_p\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t \tag{2}$$

وبالنظر إلى (1) نرى أنّ (2) محقّقة مهما تكن p من $[1,+\infty[$ و n من $\mathbb{N}^*$. ولكن

$$\begin{aligned}\int\limits_{|t|<a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t &\leq \sup_{|t|<a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\int\limits_{|t|<a}\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq \sup_{|t|<a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\int\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq \sup_{|t|<a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\left\|\rho\right\|_1\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\int\limits_{|t|\geq a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t &\leq 2\left\|f\right\|_p\int\limits_{|t|\geq a}\left|\rho_n(t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq 2\left\|f\right\|_p\int\limits_{|u|\geq na}\left|\rho(u)\right|\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

إذن، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما تكن a من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$\left\|f-f*\rho_n\right\|_p \leq \sup_{|t|<a}\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\left\|\rho\right\|_1+2\left\|f\right\|_p\int\limits_{|u|\geq na}\left|\rho(u)\right|\mathrm{d}\,u \tag{2}$$

لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. لمّا كان التابع $t\mapsto\left\|f-\tau_t(f)\right\|_p$ مستمراً عند 0، بناءً على المبرهنة 10-7.، استنتجنا وجود a_ε من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق

$$\forall t\in\left[-a_\varepsilon,a_\varepsilon\right],\quad \left\|f-\tau_t(f)\right\|_p\leq\frac{\varepsilon}{2\left\|\rho\right\|_1}$$

ولأنّ ρ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{|u|\geq na_\varepsilon}\left|\rho(u)\right|\mathrm{d}\,u=0$$

وعليه توجد n_ε من $\mathbb{N}^*$ تُحقّق

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\qquad \int\limits_{|u|\geq na_\varepsilon}\left|\rho(u)\right|\mathrm{d}\,u<\frac{\varepsilon}{4\left\|f\right\|_p}$$

وبالعودة إلى (2) نرى أننا قد أثبتنا الخاصّة الآتية

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\quad \left\|f-f*\rho_n\right\|_p\leq\varepsilon$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

تبيّن المبرهنة التالية الدور المهمّ الذي يؤدّيه جداء التلاف.

10-10. **مبرهنة**. ليكن f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ، وليكن $\mathcal{X}$ من $\mathfrak{D}$ عندئذ ينتمي التابع $f*\mathcal{X}$ إلى الصف C^∞ وإذا كان f معدوماً خارج مجال محدود، كان $f*\mathcal{X}$ عنصراً من $\mathfrak{D}$.

الإثبات

لنتأمّل التابع $F:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{C},\ F(x,t)=f(t)\mathcal{X}(x-t)$. ولنلاحظ ما يلي :

- مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن التابع $t\mapsto F(x,t)$ عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ لأنّه مقيسٌ وضوحاً ولأنّ $\forall t\in\mathbb{R},\ |F(x,t)|\leq\|\mathcal{X}\|_\infty|f(t)|$.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}$ ، ينتمِ التابع $x\mapsto F(x,t)$ إلى الصف C^1 ويكن
$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)=f(t)\mathcal{X}'(x-t)$$
- وأخيراً ينتمي التابع $g=\|\mathcal{X}'\|_\infty|f|$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ ويُحقّق
$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|\leq g(t)$$

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، ينتمي التابع $\int F(\cdot,t)\mathrm{d}t$ أي $f*\mathcal{X}$ إلى الصف C^1 ومشتقّه هو التابع $f*\mathcal{X}'$.

بتطبيق ما أثبتناه على التابع $\mathcal{X}^{(n)}$ من $\mathfrak{D}$، مع $n \in \mathbb{N}^*$، نرى أنّ $f * \mathcal{X}^{(n)}$ ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ مشتقّه هو التابع $f * \mathcal{X}^{(n+1)}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $f * \mathcal{X}$ ينتمي إلى الصف C^∞ وأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f * \mathcal{X})^{(n)} = f * \mathcal{X}^{(n)}$$

وإذا افترضنا أنّ $f(x) = 0$ في حالة $x \notin [-B, B]$، وأنّ $\mathcal{X}(x) = 0$ في حالة $x \notin [-A, A]$، عندئذ نستنتج مباشرة أنّ

$$\exists t \in \mathbb{R},\, f(t)\mathcal{X}(x-t) \neq 0 \ \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R},\, \big(|t| \leq B\big) \wedge \big(|x-t| \leq A\big)$$
$$\Rightarrow |x| \leq A + B$$

وعليه

$$\big|x\big| > A + B \ \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\, f(t)\mathcal{X}(x-t) = 0$$
$$\Rightarrow f * \mathcal{X}(x) = \int f(t)\mathcal{X}(x-t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

إذن

$$\operatorname{supp}(f * \mathcal{X}) \subset [-A-B, A+B]$$

ومن ثَمّ $f * \mathcal{X} \in \mathfrak{D}$. ويتمّ الإثبات. ❐

تعبّر المبرهنة التالية عن كثافة فضاء التوابع $\mathfrak{D}$ في كلٍّ من الفضاءات $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ في حالة $p \geq 1$.

11-10. مبرهنة. لتكن p من $[1, +\infty[$، وليكن f من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$، عندئذ مهما يكن ε من $\mathbb{R}^*_+$ يوجد تابعٌ φ_ε من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. أي إنّ $\mathfrak{D}$ فضاءٌ جزئي كثيف في $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

الإثبات

لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ يوجد تابعٌ h_ε ينتمي إلى $C_c(\mathbb{R})$ ويُحقّق

$$\left\| f - h_\varepsilon \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

نختار تابعاً موجباً ρ ينتمي إلى $\mathfrak{D}$ ويُحقّق $\operatorname{supp}(\rho) \subset [-1,1]$ و $\int \rho \, \mathrm{d}\lambda = 1$. ونعرّف متتالية التوابع $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. فيكون لدينا بناءً على المبرهنة 9-10. ما يلي

$$\lim_{n\to\infty} \left\| h_\varepsilon - h_\varepsilon * \rho_n \right\|_p = 0$$

ومن ثَمّ يوجد تابعٌ $\varphi_\varepsilon = h_\varepsilon * \rho_{n(\varepsilon)}$ يُحقّق

$$\| h_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \|_p < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

وبناءً على (1) و (2) يكون لدينا $\| f - \varphi_\varepsilon \|_p < \varepsilon$. ولكن عملاً بنتيجة المبرهنة السابقة، ينتمي التابع φ_ε إلى الفضاء $\mathfrak{D}$. وبذا يتم الإثبات. ❐

تمرينات

التمرين 1. نقول إنّ المجموعة A **قابلة للعدّ** إذا وُجِدَ تقابلٌ بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

1. أثبت أنّ كلّ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}$ تكون منتهيةً أو قابلة للعدّ. واستنتج أنّه إذا كانت B مجموعة قابلة للعدّ و A مجموعة جزئيّة من B، كانت A منتهية أو قابلة للعدّ.
2. أثبت أنّ التطبيق $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n,m) \mapsto 2^n(2m+1)-1$ تقابل واستنتج أنّ المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ قابلة للعدّ.
3. أثبت أنّ اجتماعَ جماعة منتهية أو قابلة للعدِّ من مجموعات قابلة للعدّ مجموعةٌ قابلة للعدّ.
4. استنتج ممّا سبق أنّ مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$ قابلة للعدّ.
5. لتكن A مجموعة غير خالية، أثبت أنّه لا يوجد تطبيق غامر من A إلى مجموعة أجزائها. ثُمّ استنتج أنّ مجموعة أجزاء $\mathbb{N}$ غير قابلة للعدّ.

الحل

1. لتكن $\mathcal{N}$ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}$. ولنفترض أنّ $\mathcal{N}$ غير منتهية. نعرّف عندئذ بالتدريج تطبيقاً φ من $\mathbb{N}$ إلى $\mathcal{N}$ كما يلي :

$$\varphi(0) = \min \mathcal{N} \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min \mathcal{N}\backslash\varphi(\{0,1,\ldots,n\})$$

هذا التعريف صحيح لأنّ $\mathcal{N}\backslash\varphi(\{0,1,\ldots,n\})$ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{N}$، وذلك بسبب افتراض أنّ $\mathcal{N}$ مجموعة غير منتهية. التطبيق φ المعرّف بهذا الأسلوب تطبيقٌ متزايدٌ تماماً لأنّه إذا كان $n < m$ انتمى n إلى $\{0,\ldots,m-1\}$، ومنه $\varphi(n) \in \varphi(\{0,\ldots,m-1\})$، ولكنّ العنصر $\varphi(m)$ هو أصغر عناصر المجموعة $\mathcal{N}\backslash\varphi(\{0,1,\ldots,m-1\})$ إذن يجب أن يكون $\varphi(n) < \varphi(m)$. إذن أوجدنا تطبيقاً متبايناً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$، ولنثبتْ أنّ φ تقابلٌ.

نتأمّل عنصراً b من $\mathcal{N}$. لمّا كان φ متزايداً تماماً استنتجنا أنّ $\varphi(n) \geq n$ أيّاً كانت قيمة n. وعليه $n > b \Rightarrow \varphi(n) > \varphi(b) \geq b$. إذن المجموعة $\mathcal{N}_b = \left\{k \in \mathbb{N} : \varphi(k) \leq b\right\}$ هي مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{N}$، لأنها تحوي 0، وهي محدودة من الأعلى بالعدد b. فلا بُدّ أنّ فيها أكبر عنصرٍ وليكن $m = \max \mathcal{N}_b$.

استناداً إلى تعريف m لدينا $\varphi(m) \leq b < \varphi(m+1)$، فإذا كان $\varphi(m) < b$ استنتجنا أنّ $b \in \mathcal{N} \backslash \varphi(\{0,1,\ldots,m\})$ ومنه $\varphi(m+1) \leq b$ وهذا خُلفٌ. إذن $\varphi(m) = b$.
والتطبيق $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ يعرّف تقابلاً بين $\mathbb{N}$ و $\mathcal{N}$ فهي مجموعة قابلة للعدّ.

وبوجه عام، لتكن A مجموعة جزئيّة من مجموعة B قابلة للعدّ. ولنتأمل تقابلاً $f : \mathbb{N} \to B$، عندها تكون المجموعة $\mathcal{N} = f^{-1}(A)$ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}$. إذن

- إمّا أن تكون $\mathcal{N}$ منتهية وهناك تقابلٌ $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathcal{N}$. فيكون
$$\tilde{\varphi} : \mathbb{N}_n \to A, k \mapsto f(\varphi(k))$$
تقابلاً بين $\mathbb{N}_n$ و A، والمجموعة A منتهية.
- وإمّا أن تكون $\mathcal{N}$ قابلة للعدّ، وهناك تقابلٌ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$. فيكون $f \circ \varphi$ تقابلاً بين $\mathbb{N}$ و A، والمجموعة A قابلة للعدّ.

2. لنثبت أنّ f متباينٌ. ليكن (n,m) و (n',m') عنصرين من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$، ولنفترض أنّ
$$f(n,m) = f(n',m')$$
عندئذ يكون لدينا $2^n(2m+1) = 2^{n'}(2m'+1)$. فإذا كان $n \neq n'$ أمكننا دون الإقلال من عموميّة الإثبات أن نفترض مثلاً أنّ $n < n'$، وعندئذ يكون
$$2m+1 = 2^{n'-n}(2m'+1)$$
وفي هذا تناقضٌ إذ لا يمكن لعدد زوجي أن يساوي عدداً فرديّاً. إذن يجب أن يكون $n = n'$ ومن ثَمّ يجب أن يكون $2m+1 = 2m'+1$ أو $m = m'$. ومنه $(n,m) = (n',m')$.
أمّا إثباتُ أنّ f غامرٌ، فهو نتيجة من خواص الأعداد الطبيعيّة. فإذا كان p عنصراً من $\mathbb{N}$ عرّفنا
$$m_p = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2^{n_p}} - 1\right) \quad \text{و} \quad n_p = \max\left\{k \in \mathbb{N} : 2^k \,|(p+1)\right\}$$
فيكون لدينا وضوحاً $f(n_p, m_p) = p$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ f تقابلٌ بين $\mathbb{N}^2$ و $\mathbb{N}$، والمجموعة $\mathbb{N}^2$ قابلة للعدِّ.

3. يكفي أن نثبت الخاصّة الآتية : لتكن $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ جماعةً مجموعةُ أدلّتها قابلة للعدِّ مكوّنةً من مجموعات قابلة للعدِّ. عندئذ تكون المجموعة $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ قابلة للعدِّ.

مهما تكن k من $\mathbb{N}$ يوجد تقابلٌ $\varphi_k : \mathbb{N} \to A_k$. ليكن $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ التقابل الذي درسناه في الطلب السابق. نعرّف عندئذ التطبيق :

$$\psi : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \to \mathbb{N},\ \psi(x) = \min\left\{ f(k,n) : x = \varphi_k(n)\right\}$$

فيكون التطبيق ψ متبايناً.

في الحقيقة، لنفترض أنّ $\psi(x) = \psi(y)$ ولتكن p هذه القيمة المشتركة، عندئذ يوجد (k,n) في $\mathbb{N}^2$ يُحقّق $f(k,n) = p$. وعندئذ يكون $x = \varphi_k(n)$ و $y = \varphi_k(n)$ أي $x = y$.

نستنتج إذن أنّ هناك تقابلاً بين A ومجموعة جزئيّة هي $\psi(A)$ من $\mathbb{N}$. المجموعة $\psi(A)$ قابلة للعدِّ استناداً إلى نتيجة الطلب الأوّل. إذن A نفسها قابلة للعدِّ.

4. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ تكون المجموعة $A_n = \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{N}\right\}$ قابلة للعدِّ لأنّ هناك تقابلاً واضحاً بين A_n و $\mathbb{N}$. نستنتج إذن أنّ $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ مجموعة قابلة للعدِّ. ولأنّ هناك تقابلاً واضحاً بين $\mathbb{Q}_+$ و $\mathbb{Q}_-$ استنتجنا أنّ $\mathbb{Q}_-$ أيضاً قابلة للعدِّ. وعليه تكون المجموعة $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ قابلة للعدِّ.

5. لتكن A مجموعة غير خالية، ولنفترض أنّ $f : A \to \mathcal{P}(A)$ تطبيق غامرٌ من A إلى مجموعة أجزائها. عندئذ نعرّف المجموعة

$$\Omega = \left\{ x \in A : x \notin f(x)\right\}$$

لمّا كان f غامراً وجدنا عنصراً ω في A يحقّق $f(\omega) = \Omega$. وهنا ناقش حالتين :

- في حالة $\omega \in \Omega$ يكون لدينا $\omega \notin f(\omega)$ تبعاً لتعريف Ω، وهذا يناقض $f(\omega) = \Omega$.
- وفي حالة $\omega \notin \Omega$ يكون لدينا $\omega \in f(\omega)$ تبعاً لتعريف Ω، وهذا يناقض $f(\omega) = \Omega$ مجدداً.

إذن لا يوجد تطبيق غامرٌ من A إلى $\mathcal{P}(A)$.

نستنتج مما سبق أنّه لا يوجد تقابلٌ بين $\mathbb{N}$ ومجموعة أجزائها $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. فالمجموعة $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ غير قابلة للعدّ. ■

التمرين 2. نتأمّل في $\mathbb{R}$ المجموعة $\mathcal{C} = \left\{]c,+\infty[,\ c \in \mathbb{R} \right\}$. وليكن Σ جبراً تامّاً في $\mathbb{R}$ يحوي $\mathcal{C}$.

1. لتكن b من $\mathbb{R}$ أثبت أنّ المجال $\left[b,+\infty\right[$ ينتمي إلى Σ .
2. ليكن a و b عددين حقيقيّين يُحقّقان $b < a$ أثبت أنّ المجال $]a,b[$ ينتمي إلى Σ .
3. لتكن O مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}$. نعرّف على O علاقة ثنائيّة $\mathcal{R}$ كما يلي

$$\left(x\,\mathcal{R}\,y\right) \Leftrightarrow \left(\forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in O\right)$$

① أثبت أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

② ليكن I_x صف تكافؤ العنصر x من O . أثبت أنّ I_x هو مجالٌ مفتوح.

③ أثبت أنّه توجد مجموعة جزئيّة S محتواة في $\mathbb{Q}$ تُحقّق $O = \bigcup_{r\in S} I_r$.

④ استفدْ من التمرين السابق لتثبت أنّ $O \in \Sigma$.

الحل

1. يكفي أن نلاحظ أنّ

$$[b,+\infty[\ = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]b + 2^{-n},+\infty\right[$$

لنستنتج أنّ $[b,+\infty[$ ينتمي إلى Σ، أيّاً كان b من $\mathbb{R}$.

2. في حالة $b < a$ لدينا

$$]a,b[\ =\ ]a,+\infty[\setminus[b,+\infty[$$

إذن ينتمي المجال $]a,b[$ إلى Σ .

3. ① لنلاحظ أنّ :

$$\forall (x,y) \in O^2,\quad x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \left[\min(x,y),\max(x,y)\right] \subset O$$

أي يرتبط العددان x و y من O وفق العلاقة $\mathcal{R}$ إذا وفقط إذا كان المجال المغلق الذي طرفاه x و y محتوى في O . وبهذه الصيغة نرى وضوحاً أنّ العلاقة الثنائيّة $\mathcal{R}$ هي علاقة تكافؤ.

3. ② ليكن $\alpha = \inf I_x$ من $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$، و $\beta = \sup I_x$ من $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
ولنلاحظ ما يلي :

- من الواضح أنّ $I_x \subset [\alpha, \beta]$.
- إنّ α لا ينتمي إلى I_x، لأنّه إذا كان $\alpha \in I_x \subset O$ استنتجنا، من كون O مجموعة مفتوحة، أنّه يوجد ε في $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $]\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon[\subset O$، وينتج من ذلك أنّ $(\alpha - \varepsilon)\mathcal{R}\alpha$ ومن ثَمّ $(\alpha - \varepsilon)\mathcal{R}x$ أو $(\alpha - \varepsilon) \in I_x$، وهذا يناقض كون $\alpha = \inf I_x$.
- وبأسلوب مماثل نبرهن أنّ β لا ينتمي إلى I_x. إذن $I_x \subset \ ]\alpha, \beta[$.
- وبالعكس، إذا كان y عنصراً من $]\alpha, \beta[$، فيوجد، استناداً إلى تعريف α و β، عددان u و v ينتميان إلى I_x ويُحقّقان $u < y < v$.
  - في حالة $x \leq y$ يكون y عنصراً من المجال $[x, v]$ المحتوى في O، إذن $[x, y] \subset O$، ومنه $y \in I_x$.
  - وفي حالة $y < x$ يكون y عنصراً من المجال $[u, x]$ المحتوى في O، إذن $[y, x] \subset O$، ومنه $y \in I_x$.

  بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $I_x = \ ]\alpha, \beta[$.

3. ③ لتكن $O/\mathcal{R}$ مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{R}$. ولنختر في كلِّ صفّ تكافؤ I من $O/\mathcal{R}$ عدداً عاديّاً r_I. إنّ هذا ممكنٌ لأنّ I مجال مفتوح غير خالٍ من $\mathbb{R}$، عندئذ نعرّف تطبيقاً

$$\varphi : O/\mathcal{R} \to \mathbb{Q}, I \mapsto r_I$$

إنّ φ تطبيق متباينٌ لأنّ عناصر $O/\mathcal{R}$ تكوّن تجزئة للمجموعة O. فإذا عرّفنا $S = \varphi(O/\mathcal{R})$، كانت S مجموعة جزئيّة من $\mathbb{Q}$ وكان $O/\mathcal{R} = \{I_r : r \in S\}$. ومن ثَمّ $O = \bigcup_{r \in S} I_r$.

3. ④ لمّا كانت $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعدّ، ولمّا كانت S مجموعة جزئيّة منها استنتجنا أنّ S مجموعة منتهية أو قابلة للعدّ. إذن المجموعة O هي اجتماع عددٍ منتهة من المجالات المفتوحة، أو هي اجتماع متتالية من المجالات المفتوحة. فهي إذن عنصر من Σ.

وهكذا نرى أنّ الجبر التام الذي تولّده المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو نفسه الجبر التام الذي تولّده المجالات من النمط $]c,+\infty[$ مع c من $\mathbb{R}$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّه نفسه الجبر التام الذي تولّده المجالات من النمط $]-\infty,c[$ مع c من $\mathbb{R}$. ■

التمرين 3. ليكن $f : X \to Y$ تابعاً بين مجموعتين غير خاليتين. وليكن $\mathcal{B}$ جبراً تامّاً في Y، عندئذ تكون المجموعة $f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\right\}$ جبراً تامّاً في X ، نسميّه الصورة العكسيّة وفق f للجبر التام $\mathcal{B}$.

الحل

لنضع $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$.

- من الواضح أنّ $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- كما نعلم من خواص الصورة العكسيّة أنّ $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$ ، إذن تنتمي متمّمة كل عنصر من $\mathcal{A}$ إلى $\mathcal{A}$.
- وكذلك لمّا كان $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ استنتجنا أنّ اجتماع متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ ينتمي إلى $\mathcal{A}$.

وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$ جبرٌ تام. ■

التمرين 4. ليكن $f : X \to Y$ تابعاً بين مجموعتين غير خاليتين. وليكن $\mathcal{A}$ جبراً تامّاً في X، عندئذ تكون المجموعة $f^{\#}(\mathcal{A}) = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ جبراً تامّاً في Y .

الحل

لنضع $\mathcal{B} = f^{\#}(\mathcal{A})$.

- من الواضح أنّ $\varnothing \in \mathcal{B}$.
- كما نعلم من خواص الصورة العكسيّة أنّ $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$ ، وعليه

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B} &\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow X\backslash f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y\backslash B) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow Y\backslash B \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

إذن تنتمي متمّمة كل عنصر من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}$.

- وكذلك لمّا كان $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ استنتجنا أنّ اجتماع متتالية من عناصر $\mathcal{B}$ ينتمي إلى $\mathcal{B}$.

وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{B} = f^{\#}(\mathcal{A})$ جبرٌ تام.

التمرين 5. ليكن $f : X \to Y$ تابعاً بين مجموعتين غير خاليتين. لتكن $\mathcal{C}$ مجموعة من أجزاء Y، أثبت أنّ الصورة العكسيّة وفق f للجبر التام الذي تولّده $\mathcal{C}$ هو الجبر التامّ الذي تولّده الصورة العكسيّة وفق f للمجموعة $\mathcal{C}$ أي:

$$f^{-1}(\Sigma(\mathcal{C})) = \Sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

الحل

- من جهة أولى $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\Sigma(\mathcal{C}))$، ولأنّ $f^{-1}(\Sigma(\mathcal{C}))$ جبرٌ تامٌّ، استناداً إلى نتيجة التمرين 3.، استنتجنا أنّ

$$\Sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\Sigma(\mathcal{C}))$$

- ومن جهة ثانية، بناءً على نتيجة التمرين 4.، نجد أنّ $f^{\#}(\Sigma(f^{-1}(\mathcal{C})))$ هي جبرٌ تامٌّ يحوي $\mathcal{C}$ فهو يحوي $\Sigma(\mathcal{C})$. أي

$$\Sigma(\mathcal{C}) \subset f^{\#}(\Sigma(f^{-1}(\mathcal{C})))$$

وهذا يعني أنّ

$$f^{-1}(\Sigma(\mathcal{C})) \subset \Sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

وبذا يتمّ الإثبات.

التمرين 6. لتكن $\varepsilon > 0$، أثبت أنّه توجد مجموعة مفتوحة O_ε في $\mathbb{R}$ تُحقّق الشرطين

$$\overline{O}_\varepsilon = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \lambda(O_\varepsilon) \le \varepsilon$$

حيث λ هو قياس لوبيغ.

الحل

نعلم أنّ $\mathbb{Q}$ قابلة للعدّ. أي توجد متتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. لتكن $\varepsilon > 0$، ولنعرّف المجموعة المفتوحة O_ε بالصيغة

$$O_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]r_n - \varepsilon 2^{-n-2}, r_n + \varepsilon 2^{-n-2}[$$

عندئذ نستنتج من كون $O_\varepsilon \supset \mathbb{Q}$ أنّ $\overline{O}_\varepsilon = \mathbb{R}$ ، ومن جهة أخرى

$$\lambda(O_\varepsilon) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\Big(\,]r_n - \varepsilon 2^{-n-2}, r_n + \varepsilon 2^{-n-2}[\,\Big) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 7. نتأمّل مجموعة بورِليّة A من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ تُحقّق $\lambda(A) < +\infty$. ونتأمّل التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda\big(A \cap \,]-\infty, x]\big)$$

أثبت استمرار φ على $\mathbb{R}$.

الحل

ليكن a من $\mathbb{R}$.

▫ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة تسعى إلى a ، ولنضع $A_n = A \cap \,]-\infty, x_n]$. عندئذ تكون $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ، تحقّق $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \cap \,]-\infty, a]$ ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lambda(A \cap \,]-\infty, a[)$$

ولأنّ $\lambda(\{a\}) = 0$ ، ولدينا الاحتواء

$$A \cap \,]-\infty, a[\,\subset A \cap \,]-\infty, a] \subset \big(A \cap]-\infty, a[\big) \cup \{a\}$$

استنتجنا أنّ $\varphi(a) = \lambda(A \cap \,]-\infty, a[)$ ، ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(a)$$

ولأنّ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة كيفيّة تسعى إلى a ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to a^-} \varphi(x) = \varphi(a)$.

▫ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة تسعى إلى a ، ولنضع $A_n = A \cap \,]-\infty, x_n]$. عندئذ تكون $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة من عناصر $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ، تحقّق $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \cap \,]-\infty, a]$ ولأنّ قياس المجموعة A_1 منته لأنّها محتواة في A استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lambda(A \cap \,]-\infty, a]) = \varphi(a)$$

ولأنّ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة كيفيّة تسعى إلى a ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to a^+} \varphi(x) = \varphi(a)$. وبذا نكون قد أثبتنا استمرار φ عند a ، وتمّ الإثبات. ■

التمرين 8. مجموعات كانتور Cantor

ليكن p من $\mathbb{N}$ يحقّق $p \geq 2$. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$، و x من $[0,1[$، المقدار

$$\delta_n^{(p)}(x) = \left\lfloor p^n x \right\rfloor - p \left\lfloor p^{n-1} x \right\rfloor$$

1. نضع $\mathbb{D}_p = \{0,\ldots,p-1\}$. أثبت أنّ

$$\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_n^{(p)}(x) \in \mathbb{D}_p$$

2. أثبت أنّ : $\forall x \in [0,1[, x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(p)}(x) p^{-n}$. فنقول إنّ العدد x يُكتب بالأساس p بالصيغة $(0.\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots)_p$ حيث $\delta_k = \delta_k^{(p)}(x)$.

3. لتكن x من $[0,1[$. أثبت صحّة الخاصّة الآتية

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k > n : \delta_k^{(p)}(x) \neq p-1$$

4. في حالة j من المجموعة $\mathbb{D}_p$، نعرّف $B_j = \mathbb{D}_p \backslash \{j\}$، ونعرّف المجموعة

$$A_j^{(p)} = \left\{ x \in [0,1[: \forall n \in \mathbb{N}^*, \delta_n^{(p)}(x) \in B_j \right\}$$

إذن $A_j^{(p)}$ هي مجموعة الأعداد من المجال $[0,1[$ التي لا يحوي تمثيلها بالأساس p على الخانة j. أثبت أنّ $A_j^{(p)}$ مجموعة بوريليّة.

5. نرمز في حالة $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ من $(\mathbb{D}_p)^n$ بالرمز $I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}$ إلى المجال المغلق

$$I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} = \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k}, \sum_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k} + p^{-n} \right]$$

لتكن j من المجموعة $\mathbb{D}_p$، أثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{A_j^{(p)}} \subset \bigcup_{(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in (B_j)^n} I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}$$

واستنتج من ذلك أنّ $\lambda\left(\overline{A_j^{(p)}}\right) = 0$.

6. نفترض أنّ p و q عددين طبيعيّين يُحقّقان $2 \leq p < q$. ونعرّف التابع $f_{p,q}$، الذي سنرمز إليه اختصاراً بالرمز f لأنّ p و q ثابتين في هذا السؤال، بالصيغة

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}$$

① نفترض أنّ x و y عددين من $[0,1[$ يُحقّقان $x < y$.

- علّل صحة الخاصة الآتية: $\left\{n \in \mathbb{N}^* : \delta_n^{(p)}(x) \neq \delta_n^{(p)}(y)\right\} \neq \varnothing$.
- نعرّف إذن

$$m = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* : \delta_n^{(p)}(x) \neq \delta_n^{(p)}(y)\right\}$$

أثبت أنّ $\delta_m^{(p)}(x) < \delta_m^{(p)}(y)$.

- استنتج مما سبق أنّ $f(x) < f(y)$.

② نعرّف إذن المجموعة $\mathcal{C}_{p,q} = f_{p,q}([0,1[)$. أثبت أنّ $\mathcal{C}_{p,q}$ مجموعة غير قابلة للعدِّ ومهملة بالنسبة إلى قياس لوبيغ.

7. نفترض أنّ p و q عددين طبيعيّين يُحقّقان $2 \leq p < q$. أثبت باعتماد رموز السؤال السابق أنّ $[0,1[= \mathcal{C}_{p,q} + \mathcal{C}_{q+1-p,q}$. الجمع هنا معرّف كما يلي:

$$A + B = \left\{a + b : \left(a,b\right) \in A \times B\right\}$$

الحل

1. لنتأمّل التابع

$$\Delta_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Delta_p(x) = \left\lfloor px \right\rfloor - p\left\lfloor x \right\rfloor$$

من الواضح أنّ Δ_p تابعٌ يقبل العدد 1 دوراً. وفي حالة j من $\mathbb{D}_p$، و x من $\left[\frac{j}{p}, \frac{j+1}{p}\right[$ لدينا $\Delta_p(x) = j$. إذن

$$\begin{aligned}
\Delta_p(\mathbb{R}) &= \Delta_p\left([0,1[\right) \\
&= \Delta_p\left(\bigcup_{j\in\mathbb{D}_p}\left[\frac{j}{p}, \frac{j+1}{p}\right[\right) \\
&= \bigcup_{j\in\mathbb{D}_p}\Delta_p\left(\left[\frac{j}{p}, \frac{j+1}{p}\right[\right) \\
&= \bigcup_{j\in\mathbb{D}_p}\{j\} = \mathbb{D}_p
\end{aligned}$$

وأخيراً، لأنّ

$$\delta_n^{(p)}(x) = \Delta_p(p^{n-1}x)$$

استنتجنا أنّ

$$\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_n^{(p)}(x) \in \mathbb{D}_p$$

2. لتكن x من $[0,1[$، ولتكن m من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n} &= \sum_{n=1}^{m}\left(\left\lfloor p^n x\right\rfloor - p\left\lfloor p^{n-1}x\right\rfloor\right)p^{-n}\\ &= \sum_{n=1}^{m}\left\lfloor p^n x\right\rfloor p^{-n} - \sum_{n=1}^{m}\left\lfloor p^{n-1}x\right\rfloor p^{-n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{m}\left\lfloor p^n x\right\rfloor p^{-n} - \sum_{n=0}^{m-1}\left\lfloor p^{n}x\right\rfloor p^{-n}\\ &= \left\lfloor p^m x\right\rfloor p^{-m} - \left\lfloor x\right\rfloor = \left\lfloor p^m x\right\rfloor p^{-m}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$x - \sum_{n=1}^{m}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n} = \frac{p^m x - \left\lfloor p^m x\right\rfloor}{p^m}$$

ومنه

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x - \sum_{n=1}^{m}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n} \leq \frac{1}{p^m}$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in [0,1[, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n}$$

3. لتكن x من $[0,1[$. لنفترض جدلاً أنّ الخاصّة $\mathcal{S}$ الآتية صحيحة.

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall k > N, \quad \delta_k^{(p)}(x) = p - 1$$

عندئذ

$$\begin{aligned}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n} + (p-1)\sum_{n=N+1}^{\infty}p^{-n}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\delta_n^{(p)}(x)p^{-n} + \frac{1}{p^N} = \frac{k}{p^N}\end{aligned}$$

☞ $$k = 1 + \sum_{n=1}^{N}\delta_n^{(p)}(x)p^{N-n} \in \mathbb{N}$$

وينتج من ذلك أنّ $p^n x \in \mathbb{N}$ مهما تكن n التي تحقّق $n \geq N$ ومن ثَمّ

$$\forall n > N, \quad \delta_n^{(p)}(x) = \Delta_p(p^{n-1}x) = \Delta_p(0) = 0$$

وهذا يناقض تماماً الخاصّة $\mathcal{S}$. وعليه فإنّ نفي الخاصّة $\mathcal{S}$ صحيحٌ، ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k > n : \delta_k^{(p)}(x) \neq p-1$$

4. التابع Δ_p تابعٌ بورِلي لأنّه مستمرٌّ قِطَعيّاً. في الحقيقة، إنّه تابعٌ بسيطٌ، فإذا عرّفنا

$$\forall \ell \in \mathbb{D}_p, \quad X_\ell = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\tfrac{\ell}{p} + k, \tfrac{\ell+1}{p} + k \right[$$

كان $\Delta_p = \sum_{\ell \in \mathbb{D}_p} \ell \mathbb{1}_{X_\ell}$. ولمّا كان التابع

$$m_n^{(p)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m_n^{(p)}(x) = p^{n-1}x$$

تابعاً مستمرّاً، استنتجنا أنّ التابع $\delta_n^{(p)} = \Delta_p \circ m_n^{(p)}$ تابعٌ بورِلي أيضاً. نستنتج من ذلك أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\delta_n^{(p)})^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

ومن ثَمّ

$$A_j^{(p)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\delta_n^{(p)})^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

في الحقيقة نجد بقراءة دقيقة للإثبات السابق أنّ

$$A_j^{(p)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{\ell \in B_j} \left(\bigcup_{k=0}^{p^{n-1}-1} \left[\frac{\ell}{p^n} + \frac{k}{p^{n-1}}, \frac{\ell+1}{p^n} + \frac{k}{p^{n-1}} \right[\right) \right)$$

5. لتكن x من $[0,1[$ ، و n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{(p)}(x) p^{-k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k^{(p)}(x) p^{-k} \overset{❶}{<} (p-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} p^{-k} = \frac{1}{p^n}$$

إذ استفدنا من السؤال 3. عند كتابة المتراجحة ❶ . ونستنتج من ذلك أنّ

$$x \in \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k^{(p)}(x) p^{-k}, \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{(p)}(x) p^{-k} + \frac{1}{p^n} \right[$$

فإذا افترضنا أنّ x ينتمي إلى $A_j^{(p)}$ كان $(\delta_1^{(p)}(x), \ldots, \delta_n^{(p)}(x)) \in (B_j)^n$ ومن ثَمّ

$$x \in \bigcup_{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in (B_j)^n} \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k}, \sum_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k} + \frac{1}{p^n} \right[$$

وعليه

$$A_j^{(p)} \subset \bigcup_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in(B_j)^n} \left[\sum\nolimits_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k}, \sum\nolimits_{k=1}^{n} \delta_k p^{-k} + \frac{1}{p^n}\right[$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{A_j^{(p)}} \subset \bigcup_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in(B_j)^n} I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\bigcup\nolimits_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in(B_j)^n} I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\Big) &\leq \sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in(B_j)^n} \lambda(I_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)})\\ &= \operatorname{card}((B_j)^n)p^{-n}\\ &\leq \left(\operatorname{card}(B_j)/p\right)^n = \left(1-p^{-1}\right)^n\end{aligned}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda\big(\overline{A_j^{(p)}}\big) \leq (1-p^{-1})^n$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نستنتج أنّ $\lambda\big(\overline{A_j^{(p)}}\big) = 0$.

6. ① نفترض أنّ x و y عددان من $]0,1[$ يُحقّقان $x < y$. لمّا كان

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(p)}(y)p^{-n} \quad \text{و} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(p)}(x)p^{-n}$$

استنتجنا من كون $y \neq x$ أنّ المجموعة $\left\{n \in \mathbb{N}^* : \delta_n^{(p)}(x) \neq \delta_n^{(p)}(y)\right\}$ غير خالية، وهذا ما يتيح لنا تسمية m أصغر عناصرها. إذا افترضنا جدلاً أنّ $\delta_m^{(p)}(x) > \delta_m^{(p)}(y)$ صار لدينا

$$\begin{aligned}y - \sum_{k=1}^{m-1} \delta_k^{(p)}(y)p^{-k} &= \sum_{k=m}^{\infty} \delta_k^{(p)}(y)p^{-k} = \frac{\delta_m^{(p)}(y)}{p^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_k^{(p)}(y)p^{-k}\\ &< \frac{\delta_m^{(p)}(y)}{p^m} + (p-1)\sum_{k=m+1}^{\infty} p^{-k}\\ &< \frac{\delta_m^{(p)}(y)+1}{p^m} \leq \frac{\delta_m^{(p)}(x)}{p^m}\\ &< \sum_{k=m}^{\infty} \delta_k^{(p)}(x)p^{-k} = x - \sum_{k=1}^{m-1} \delta_k^{(p)}(x)p^{-k}\end{aligned}$$

ولكن استناداً إلى تعريف m لدينا $\sum_{k=1}^{m-1}\delta_k^{(p)}(x)p^{-k}=\sum_{k=1}^{m-1}\delta_k^{(p)}(y)p^{-k}$ إذن $x<y$،
وهذا يناقض الفرْض. وعليه لا بُدّ أن يكون $\delta_m^{(p)}(y)<\delta_m^{(p)}(x)$. إذن

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}+\frac{\delta_m^{(p)}(x)}{q^m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}\\
&\leq\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}+\frac{\delta_m^{(p)}(x)}{q^m}+\frac{p-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^m}\\
&<\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\delta_n^{(p)}(y)}{q^n}+\frac{\delta_m^{(p)}(x)+1}{q^m}\\
&<\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\delta_n^{(p)}(y)}{q^n}+\frac{\delta_m^{(p)}(y)}{q^m}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(p)}(y)}{q^n}=f(y)
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ f تابعٌ متزايدٌ تماماً على $[0,1[$.

6. ② لنفترض جدلاً أنّ المجموعة $\mathcal{C}_{p,q}=f_{p,q}([0,1[)$ قابلة للعدِّ. وليكن $\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathcal{C}_{p,q}$ تقابلاً. عندئذ نعرّف المتتالية $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من عناصر $\mathbb{D}_p$ بالصيغة

$$\delta_n=\min\left(\mathbb{D}_p\backslash\{\delta_n^{(q)}(\varphi(n))\}\right)$$

ونعرّف العدد $x=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n p^{-n}$. عندئذ يكون $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n q^{-n}\in\mathcal{C}_{p,q}$، ولأنّ φ تقابلٌ استنتجنا وجود عددٍ m من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $\varphi(m)=f(x)$. وهذا يقتضي بوجه خاصّ أنّ

$$\delta_m^{(q)}(\varphi(m))=\delta_m^{(q)}(f(x))=\delta_m\in\mathbb{D}_p\backslash\{\delta_m^{(q)}(\varphi(m))\}$$

وهو خُلفٌ واضحٌ. إذن المجموعة $\mathcal{C}_{p,q}$ غير قابلة للعدّ.

ومن جهة أخرى نرى مباشرة أنّ $\mathcal{C}_{p,q}\subset A_p^{(q)}$، ومن ثَمّ $\lambda(\mathcal{C}_{p,q})=0$.

7. لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة x من $[0,1[$ لدينا

$$0\leq f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(p)}(x)}{q^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p-1}{q^n}=\frac{p-1}{q-1}$$

ومن ثَمّ $\mathcal{C}_{p,q} \subset \left[0, \frac{p-1}{q-1}\right[$ و $\mathcal{C}_{q+1-p,q} \subset \left[0, \frac{q-p}{q-1}\right[$ ، وهذا يقتضي صحة الاحتواء

$$\mathcal{C}_{q+1-p,q} + \mathcal{C}_{p,q} \subset \left[0, \frac{p-1}{q-1}\right[+ \left[0, \frac{q-p}{q-1}\right[\subset [0,1[$$

وبالعكس، ليكن x من $[0,1[$ ، ولنضع $\delta_n = \delta_n^{(q)}(x)$ ، عندئذ نعرّف المتتاليتين $\left(\delta_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $\mathbb{D}_p$ ، و $\left(\delta_n''\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $\mathbb{D}_{q+1-p}$ ، كما يأتي:

- في حالة $0 \le \delta_n < p-1$ نضع $(\delta_n', \delta_n'') = (\delta_n, 0)$.
- في حالة $\delta_n = p-1$ نضع $(\delta_n', \delta_n'') = (\delta_n - 1, 1)$.
- في حالة $p \le \delta_n < q$ نضع $(\delta_n', \delta_n'') = (\delta_n - p, p)$.

ثُمّ نعرّف

$$u' = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n' p^{-n} \in [0,1[$$
$$u'' = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n'' (q+1-p)^{-n} \in [0,1[$$

عندئذ

$$x' = f_{p,q}(u') = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n' q^{-n} \in \mathcal{C}_{p,q}$$
$$x'' = f_{q+1-p,q}(u'') = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n'' q^{-n} \in \mathcal{C}_{q+1-p,q}$$

وتتحقّق وضوحاً المساواة $x' + x'' = x$. إذن

$$\mathcal{C}_{q+1-p,q} + \mathcal{C}_{p,q} = [0,1[$$

وبذا يتمّ المطلوب. ∎

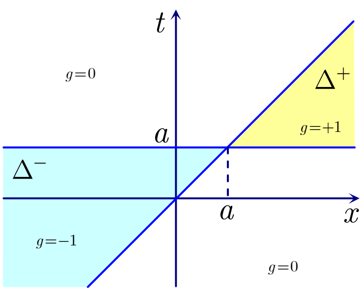
ملاحظة. تسمّى المجموعة $\mathcal{C} = 2\overline{\mathcal{C}_{2,3}}$ مجموعة Cantor .

التمرين 9. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً بورِليّاً، ولنفترض أنّه مهما يكن a و b من $\mathbb{R}$ مع $a<b$ يكن التابع $\mathbb{1}_{[a,b]}f$ عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. نُثبِّتُ عدداً a في $\mathbb{R}$، ونُعرّف في حالة x من $\mathbb{R}$ المقدار $F(x)$ كما يلي

$$F(x)=\begin{cases}\int \mathbb{1}_{[a,x]}f\,\mathrm{d}\lambda & : \quad x\geq a\\ -\int \mathbb{1}_{[x,a]}f\,\mathrm{d}\lambda & : \quad x<a\end{cases}$$

1. أثبت أنّ F تابعٌ مستمرٌّ.
2. نفترض أنّ f يقبل نهاية $f(b^+)$ عندما تسعى x إلى b بقيم أكبر من b. أثبت أنّ F يقبل الاشتقاق من اليمين عند b وأنّ $F'(b^+)=f(b^+)$.
3. نفترض أنّ f يقبل نهاية $f(b^-)$ عندما تسعى x إلى b بقيم أصغر من b. أثبت أنّ F يقبل الاشتقاق من اليسار عند b وأنّ $F'(b^-)=f(b^-)$.
4. تأمّل حالة $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ لتأخذ عبرة.

الحل



1. لندرس أوّلاً حالة f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. نعرّف في $\mathbb{R}^2$ المجموعتين الجزئيّتين

$$\Delta^+=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : a\leq t\leq x\right\}$$
$$\Delta^-=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x\leq t\leq a\right\}$$

ثُمّ نعرّف

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,t)=\mathbb{1}_{\Delta^+}(x,t)-\mathbb{1}_{\Delta^-}(x,t)$$

عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int g(x,t)f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

لنطبّق مبرهنة استمرار التكامل التابع لوسيط. لتكن b من $\mathbb{R}$.

- أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$، فالتابع $t\mapsto g(x,t)f(t)$ تابعٌ مقيس.
- أيّاً كانت t من $\mathbb{R}\backslash\{b\}$. فالتابع $x\mapsto g(x,t)f(t)$ تابعٌ مستمرٌّ عند b.
- التابع $\left|f\right|$ قابل للمكاملة ويُحقّق $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\left|g(x,t)f(t)\right|\leq\left|f(t)\right|$.

إذن F تابعٌ مستمرٌّ عند b. ولأنّ b عددٌ كيفي من $\mathbb{R}$ استنتجنا استمرار F على $\mathbb{R}$.

في الحالة العامّة. نطبّق ما أثبتناه على التابع $f\mathbb{1}_{[a-M,a+M]}$ فنستنتج استمرار F على $[a-M,a+M]$، وذلك مهما كانت M من $\mathbb{R}_+^*$. وهذا يثبتُ استمرار F على $\mathbb{R}$.

2. لتكن x و y من $\mathbb{R}$، ولنفترض أنّ $x<y$. عندئذ نناقش الحالات التالية :

- حالة $a \le x$. إذن

$$F(y)-F(x)=\int\left(\mathbb{1}_{[a,y]}-\mathbb{1}_{[a,x]}\right)f=\int\mathbb{1}_{[x,y]}f$$

- حالة $x<a<y$. إذن

$$F(y)-F(x)=\int\left(\mathbb{1}_{[a,y]}+\mathbb{1}_{[x,a]}\right)f=\int\mathbb{1}_{[x,y]}f$$

- حالة $y \le a$. إذن

$$F(y)-F(x)=\int\left(-\mathbb{1}_{[y,a]}+\mathbb{1}_{[x,a]}\right)f=\int\mathbb{1}_{[x,y]}f$$

إذن في جميع الأحوال لدينا

$$y>x \Rightarrow F(y)-F(x)=\int\mathbb{1}_{[x,y]}f$$

نفترض أنّ f يقبل نهاية $f(b^+)$ عندما تسعى x إلى b بقيم أكبر من b. عندئذ في حالة $0<h$ لدينا

$$F(b+h)-F(b)-hf(b^+)=\int\mathbb{1}_{[b,b+h]}(f-f(b^+))$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left|F(b+h)-F(b)-hf(b^+)\right| &\le \int\mathbb{1}_{[b,b+h]}\left|f-f(b^+)\right|\\ &\le h\sup_{[b,b+h]}\left|f-f(b^+)\right|\end{aligned}$$

ولأنّ $\lim\limits_{h\to0^+}\sup\limits_{[b,b+h]}\left|f-f(b^+)\right|=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{h\to0^+}\left|\frac{F(b+h)-F(b)}{h}-f(b^+)\right|=0$$

إذن F يقبل الاشتقاق من اليمين ومشتقّه من اليمين يساوي $f(b^+)$.

3. نفترض أنّ f يقبل نهاية $f(b^-)$ عندما تسعى x إلى b بقيم أصغر من b. عندئذ في حالة $0<h$ لدينا

$$F(b)-F(b-h)-hf(b^-)=\int\mathbb{1}_{[b-h,b]}(f-f(b^-))$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left|F(b)-F(b-h)-hf(b^-)\right| &\leq \int \mathbb{1}_{[b-h,b]}\left|f-f(b^-)\right| \\ &\leq h \sup_{[b-h,b]}\left|f-f(b^-)\right|\end{aligned}$$

ولأنّ $\lim\limits_{h\to 0^+} \sup\limits_{[b-h,b]}\left|f-f(b^-)\right|=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{h\to 0^+}\left|\frac{F(b)-F(b-h)}{h}-f(b^-)\right|=0$$

إذن F يقبل الاشتقاق من اليسار ومشتقّه من اليسار يساوي $f(b^-)$.

4. في حالة $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. يكون لدينا $F=0$. وهذا التابع يقبل الاشتقاق على كامل $\mathbb{R}$ ومشتقّه التابع الصفريّ. أمّا f فليس له نهاية من اليمين ولا من اليسار عند أيّة قيمة.

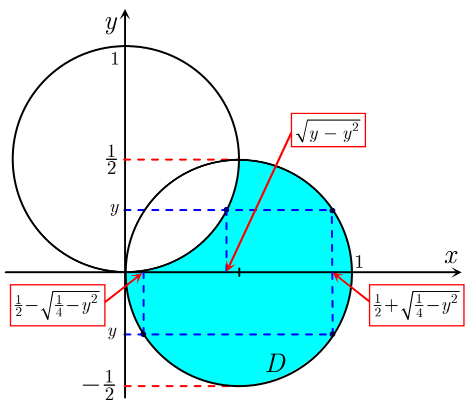
التمرين 10. لتكن D المجموعة الجزئيّة من $\mathbb{R}^2$ المعرّفة بالعلاقة :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-x\leq 0)\wedge(x^2+y^2-y\geq 0)\right\}$$

احسب التكامل $I=\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أننا نُكامل تابعاً مستمرّاً موجباً لمتحوّلين على المجموعة D المكوّنة من النقاط التي تقع داخل الدائرة التي معادلتها $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ وخارج الدائرة التي معادلتها $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.



لمّا كان التابع المُكامل موجباً لا نهتم بترتيب التكامل، ونجد أنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1/2}^{0}\left(\int_{\frac12-\sqrt{\frac14-y^2}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y+\int_{0}^{1/2}\left(\int_{\sqrt{y-y^2}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y \\ &= \underbrace{\int_{-1/2}^{0}g(y)\,\mathrm{d}\,y}_{I_1}+\underbrace{\int_{0}^{1/2}h(y)\,\mathrm{d}\,y}_{I_2} \end{aligned}$$

حيث

$$h(y)=\int_{\sqrt{y-y^2}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}\,x \quad \text{و} \quad g(y)=\int_{\frac12-\sqrt{\frac14-y^2}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}\,x$$

وهنا نلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac13\left(\frac12+y+\sqrt{\frac14-y^2}\right)^3-\frac13\left(\frac12+y-\sqrt{\frac14-y^2}\right)^3 \\ &= \frac13\left(\frac12+y\right)^{3/2}\left(\left(\sqrt{\frac12+y}+\sqrt{\frac12-y}\right)^3-\left(\sqrt{\frac12+y}-\sqrt{\frac12-y}\right)^3\right) \\ &= \frac23\big(1+2y\big)\big(1+y\big)\sqrt{\frac14-y^2} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$I_1=\frac13\int_{-1/2}^{0}\big(1+2y\big)\big(1+y\big)\sqrt{1-4y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

فإذا أجرينا تغيير المتحوّل $y\leftarrow -\frac12\sin\theta$ في هذا التكامل استنتجنا أنّ

$$I_1=\frac16\int_{0}^{\pi/2}\big(1-\sin\theta\big)\left(1-\frac12\sin\theta\right)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{3\pi}{64}-\frac1{12}$$

وكذلك نلاحظ أنّ

$$h(y)=\frac13\left(\frac12+y+\sqrt{\frac14-y^2}\right)^3-\frac13\left(y+\sqrt{y-y^2}\right)^3$$

إذن

$$I_2 = \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}+y+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^3 dy}_{J_1} - \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^{1/2}\left(y+\sqrt{y-y^2}\right)^3 dy}_{J_2}$$

ولكن

$$\left(\frac{1}{2}+y+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^3 = \frac{1+3y-4y^3}{2} + (1+y)(1+2y)\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}$$

إذن بالاستفادة من تغيير المتحول $y \leftarrow \frac{1}{2}\sin\theta$ نجد

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{13}{32} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\sin\theta)\left(1+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \frac{9\pi}{128} + \frac{17}{32} \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\left(y+\sqrt{y-y^2}\right)^3 = 3y^2 - 2y^3 + (y+2y^2)\sqrt{y-y^2}$$

إذن، بالاستفادة من تغيير المتحول $y \leftarrow \sin^2\theta$ نجد

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{3}{32} + 2\int_0^{\pi/4}\sin^4\theta(1+2\sin^2\theta)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \frac{9\pi}{128} - \frac{1}{32} \end{aligned}$$

وأخيراً

$$I_2 = \frac{3\pi}{128} + \frac{17}{96} - \left(\frac{3\pi}{128} - \frac{1}{96}\right) = \frac{3}{16}$$

وبالعودة إلى I نجد أنّ

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3\pi}{64} + \frac{5}{48}$$

■

التمرين 11. ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان $0 < a < b$. ولتكن المجموعة الجزئيّة $D = [0,1] \times [a,b]$ من $\mathbb{R}^2$. احسب التكامل $\iint_D x^y \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ بطريقتين، واستنتج قيمة $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x$.

الحل

لمّا كان التابع $x^y \mapsto (x,y)$ موجباً ومستمرّاً على D استنتجنا بتطبيق مبرهنة Tonelli أنّ

$$I = \iint_D x^y \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \int_a^b x^y \,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \int_0^1 x^y \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

ولكن من جهة أولى لدينا

$$\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$$

ومن ثَمّ

$$I = \int_a^b \int_0^1 x^y \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}\,y = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\int_a^b x^y \,\mathrm{d}\,y = \int_a^b e^{y\ln x}\,\mathrm{d}\,y = \left[\frac{e^{y\ln x}}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

ومن ثَمّ

$$I = \int_0^1 \int_a^b x^y \,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x$$

وعليه نجد

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 12. لاحظ أنّ $\forall x \in [0,1],\ \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}\,y$ ، واستنتج من ذلك قيمة التكامل $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

الحل

لنلاحظ أنّ التابع :

$$f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}_+, f(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$$

تابعٌ مقيسٌ موجبٌ. إذن اعتماداً على مبرهنة Tonelli يمكننا أن نكتب

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x$$

ولكن، من جهة أولى لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = J \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{1+y^2} \Big[\ln\sqrt{1+x^2} + y \arctan x - \ln\big(1+xy\big) \Big]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi y}{4} - \ln(1+y) \right) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y \\ &= \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}\,y}{1+y^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

وعليه، لأنّ

$$\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y = \frac{\ln 2}{2}$$

استنتجنا مما سبق أنّ

$$J = \frac{\pi \ln 2}{4} - J$$

أو $J = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$. وهو المطلوب. ∎

التمرين 13. ليكن التابع

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+, f(x,y,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$$

ولتكن $\Delta = [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}_+$. احسب بأسلوبين التكامل المضاعف التالي

$$I = \iiint_{\Delta} f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,t$$

ثُمّ استنتج قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 \mathrm{d}\,t$.

الحل

لنلاحظ أنّ التابع المُكامل تابعٌ مستمرٌّ وموجبٌ، وعليه استناداً إلى مبرهنة Tonelli يكون لدينا

$$\int_0^\infty \left(\iint_{[0,1]^2} f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,t = \iint_{[0,1]^2} \left(\int_0^\infty f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,t \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

ولكن، من جهة أولى لدينا في حالة $y \neq x$ ما يلي :

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right)$$

ومنه، في حالة $y \neq x$، لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} &= \left[\frac{1}{x^2-y^2}\big(x\arctan xt - y\arctan ty\big)\right]_{t=0}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x+y}\end{aligned}$$

وهي تبقى صحيحة في حالة $y = x$. ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\int_0^\infty f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+y}\,\mathrm{d}\,y = \frac{\pi}{2}\int_0^1\big(\ln(1+y)-\ln y\big)\,\mathrm{d}\,y \\ &= \left[\frac{\pi}{2}y\big(\ln(1+y)-\ln y\big)\right]_0^1 - \frac{\pi}{2}\int_0^1 y\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}\,y \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}\,y = \pi\ln 2\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية،

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2t^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2t^2} = \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$$

وهذا ما يثبتُ أنّ

$$\int_0^\infty \iint_{[0,1]^2} f(x,y,t)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}\,t$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المساواة

$$\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}\,t = \pi\ln 2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 14. احسب التكاملات المضاعفة $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ في الحالات الآتية.

① $f(x,y)=x^2y$ و $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0, y+|x|\leq 1\right\}$.

② $f(x,y)=xy$ و $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0, (x+y)^2\leq \frac{2}{3}x\right\}$.

③ $f(x,y)=x^2+y^2$ و $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1-\frac{y^2}{4}\right\}$.

④ $f(x,y)=x^2+y^2$ و $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$.

الحل

① لمّا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب، ولمّا كان $f(x,y)=f(-x,y)$ استنتجنا أنّ

$$I_1=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

وقد عرّفنا

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, y+x\leq 1\right\}$$

وعندئذ نستنتج بتطبيق مبرهنة Tonelli على التابع الموجب f أنّ

$$I_1=2\int_0^1\left(\int_0^{1-x} x^2y\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x^2(1-x)^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{30}$$

② المهمّ هنا دراسة المجموعة D. فإذا افترضنا أنّ (x,y) عنصر من D استنتجنا أنّ $x\geq 0$، ولأنّ $y\geq 0$ وجب أن يكون $x+y\leq\sqrt{2x/3}$. وهذا يقتضي بوجه خاص أنّ $x\leq\sqrt{2x/3}$ إذن

$$0\leq x\leq\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad 0\leq y\leq\sqrt{\frac{2x}{3}}-x$$

وبالعكس، تنتمي كلُّ (x,y) تُحقّق الشرطين السابقين إلى D، وعليه

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq\frac{2}{3}, 0\leq y\leq\sqrt{\frac{2x}{3}}-x\right\}$$

إذن

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2/3}\left(\int_0^{\sqrt{2x/3}-x} xy\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2/3} x\left(\sqrt{2x/3}-x\right)^2\mathrm{d}\,x = \int_0^{2/3}\left(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{2}x^3-\sqrt{\tfrac{2}{3}}x^{5/2}\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{81}-\frac{2}{7}\cdot\frac{16}{81} = \frac{2}{7\cdot 3^5} = \frac{2}{1701} \end{aligned}$$

③ لمّا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى محور الفواصل، ولمّا كان $f(x,y)=f(x,-y)$ استنتجنا

$$I_3 = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

وقد عرّفنا

$$D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\sqrt{1-x}\right\}$$

وعندئذ نستنتج بتطبيق مبرهنة Tonelli على التابع الموجب f أنّ

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\int_0^1\left(\int_0^{2\sqrt{1-x}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x \\ &= 4\int_0^1\sqrt{1-x}\left(x^2+\frac{4}{3}-\frac{4x}{3}\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1\sqrt{t}\left(3-2t+3t^2\right)\mathrm{d}\,t && ☞\ t\leftarrow 1-x \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1\left(3t^{1/2}-2t^{3/2}+3t^{5/2}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{96}{35} \end{aligned}$$

④ لمّا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى محوري الإحداثيّات، ولمّا كان

$$f(x,y)=f(-x,y) \text{ و } f(x,y)=f(x,-y)$$

استنتجنا أنّ

$$I_4 = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 4\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

وقد عرّفنا

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - x^2/a^2}\right\}$$

عندئذ نستنتج بتطبيق مبرهنة Tonelli على التابع الموجب f أنّ

$$\begin{aligned}
I_4 &= 4\int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x \\
&= 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(x^2 + \frac{b^2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right) \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{4ba}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\left(b^2 + (3a^2 - b^2)\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\,\theta \qquad \theta \leftarrow \arcsin\frac{x}{a} \\
&= ba\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{2b^2}{3}\cos 2\theta - \frac{3a^2 - b^2}{6}\cos 4\theta \right)\mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

وبذا يتمّ حساب التكاملات المطلوبة. ■

التمرين 15. احسب التكاملات المضاعفة $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ في الحالات الآتية.

① $f(x,y) = \ln(1 + x + y)$ و $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$.

② $f(x,y) = (x + y)\sin x \sin y$ و D هي مجموعة نقاط الربع الأوّل $(\mathbb{R}_+)^2$ التي تُحقّق إحداثياتها (x,y) الشرط $x + y \leq \pi$.

③ $f(x,y) = x + y + \sqrt{a^2 + (x+y)^2}$ و D هي مجموعة نقاط الربع الأوّل $(\mathbb{R}_+)^2$ التي تُحقّق إحداثياتها (x,y) الشرط $x + y \leq a$، مع $0 < a$.

الحل

في جميع الحالات نرى أنّه من المناسب النظر في تغيير المتحوّل الخطّي

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \left(u = x + y, v = x - y\right)$$

الذي يُحقّق $\mathrm{Jac}_\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، ومن ثَمّ $\left|J_\Phi(x,y)\right| = 2$.

إذن، مهما يكن التابع المقيس الموجب g يكن

$$\iint\limits_{\Phi(D)} g(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = 2\iint\limits_{D} g(x+y,x-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

① هنا $g(u,v)=\ln(1+u)$ و $\Phi(D)=[-1,1]^2$. إذن

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\ln(1+u)\,\mathrm{d}\,v\right)\mathrm{d}\,u\\
&= \int_{-1}^{1}\ln(1+u)\,\mathrm{d}\,u\\
&= \Big[\,(1+u)\ln(1+u)-u\Big]_{-1}^{1} = 2\ln\frac{2}{e}
\end{aligned}$$

② هنا لدينا

$$\Phi(D)=\left\{(u,v):|v|\le u\le\pi\right\} \quad \text{و} \quad g(u,v)=\frac{1}{2}u(\cos v-\cos u)$$

وبالاستفادة من كون $\Phi(D)$ متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب، وكون $g(u,v)=g(u,-v)$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Phi(D)} g(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{u}u(\cos v-\cos u)\,\mathrm{d}\,v\right)\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(u\sin u-u^2\cos u)\,\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{1}{2}\Big[\,(3-u^2)\sin u-3u\cos u\Big]_{0}^{\pi} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

③ هنا لدينا

$$\Phi(D)=\left\{(u,v):|v|\le u\le a\right\} \text{ و } g(u,v)=u+\sqrt{a^2+u^2}$$

وبالاستفادة من كون $\Phi(D)$ متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب، وكون $g(u,v)=g(u,-v)$ نستنتج ما يأتي:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Phi(D)} g(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\\
&= \int\limits_0^a \left|\int\limits_0^u \left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)\mathrm{d}\,v\right|\mathrm{d}\,u\\
&= \int\limits_0^a \left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)u\,\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{a^3}{4}\int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3 \qquad ☞\ t \leftarrow \operatorname{argsh}(u/a)
\end{aligned}$$

وبذا يتمّ المطلوب. ■

التمرين 16. نهدف إلى حساب $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

1. أثبت أنّ التطبيق

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+^{*2},\ \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

تقابلٌ من الصف C^1 .

2. أثبت أنّه مهما يكن التابع المقيس $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ يكن

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{\mathbb{R}_+^* \times]0,\pi/2[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

3. احسب التكامل المضاعف $\int_{\mathbb{R}_+^{*2}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ بأسلوبين لتستنتج قيمة التكامل $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

الحل

1. ينتمي التابع

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+^{*2},\ (r,\theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

إلى الصف C^1 وضوحاً. ويُعطى تابعه العكسي بالصيغة

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}_+^* \times \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[,\ (x,y) \mapsto \left(r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}\right)$$

وهو أيضاً ينتمي إلى الصف C^1 .

وكذلك فإنّ

$$\mathrm{Jac}_\Phi(r,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

إذن $J_\Phi(r,\theta)=r$.

2. استناداً إلى مبرهنة تغيير المتحوّل نرى أنّه مهما يكن التابع المقيس الموجب $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ ، يكن

$$\iint\limits_{\Phi\left(\mathbb{R}_+^*\times]0,\pi/2[\right)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,\pi/2[} f\circ\Phi(r,\theta)\,r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

أو

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,\pi/2[} f\circ\Phi(r,\theta)\,r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

3. فإذا اخترنا التابع $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ كان لدينا من جهة أولى

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y&=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y\\&=\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\times\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y=I^2\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,\pi/2[} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta&=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty re^{-r^2}\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\theta\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}\,\mathrm{d}\,r=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

وعليه يكون $I^2=\pi/4$ أو

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 17. في حالة $a>0$ نعرّف $\Gamma(a)=\displaystyle\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$، وفي حالة a و b من $\mathbb{R}_+^*$ نضع $\beta(a,b)=\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}\,t$.

1. أثبت أنّ التطبيق الآتي

$$\Phi:\mathbb{R}_+^*\times\left]0,1\right[\to\mathbb{R}_+^{*2},\ \Phi(s,r)=(sr,s(1-r))$$

تقابلٌ من الصف C^1 .

2. أثبت أنّه مهما يكن التابع المقيس $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ يكن

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(t,u)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,u=\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*}\times]0,1[} f(sr,s(1-r))s\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r$$

3. احسب التكامل المضاعف $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}_+^{*2}} x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ بأسلوبين لتستنتج حساب $\beta(a,b)$ بدلالة التابع Γ .

الحل

1. ينتمي التابع

$$\Phi:\mathbb{R}_+^*\times]0,1[\to\mathbb{R}_+^{*2},\ \Phi(s,r)=\big(x=sr,y=s(1-r)\big)$$

إلى الصف C^1 وضوحاً. ويُعطى تابعه العكسي بالصيغة

$$\Phi^{-1}:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R}_+^*\times]0,1[,\ \Phi^{-1}(x,y)=\left(s=x+y,r=\frac{x}{x+y}\right)$$

وهو أيضاً ينتمي إلى الصف C^1 . وكذلك فإنّ

$$\mathrm{Jac}_{\Phi}(s,r)=\begin{bmatrix} r & s\\ 1-r & -s\end{bmatrix}$$

إذن $J_{\Phi}(s,r)=-s$.

2. استناداً إلى مبرهنة تغيير المتحوّل نرى أنّه مهما يكن التابع المقيس الموجب $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ ، يكن

$$\iint\limits_{\Phi(\mathbb{R}_+^*\times]0,1[)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f\circ\Phi(s,r)\big|J_{\Phi}(s,r)\big|\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r$$

أو

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(sr,s(1-r))s\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r$$

3. فإذا اخترنا التابع الموجب $f(x,y) = x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}$ كان لدينا من جهة أولى

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y\\ &= \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x \times \int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\,y\\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(sr,s(1-r))s\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r &= \iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} (sr)^{a-1}(s(1-r))^{b-1}e^{-s}s\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} s^{a+b-1}e^{-s}r^{a-1}(1-r)^{b-1}\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,r\\ &= \int_0^\infty s^{a+b-1}e^{-s}\,\mathrm{d}\,s\int_0^1 r^{a-1}(1-r)^{b-1}\,\mathrm{d}\,r\\ &= \Gamma(a+b)\beta(a,b)\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\Gamma(a+b)\beta(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

أو

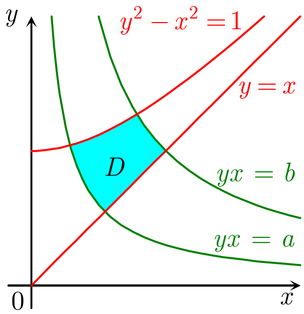
$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

ملاحظة. باختيار $a = b = \frac{1}{2}$ وملاحظة أنّ $\Gamma(1) = 1$ نستنتج أنّ

$$\left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \beta\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to\sin^2\theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \pi$$

إذن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.



التمرين 18. ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان المتراجحة $0<a<b$. ولتكن D المجموعة الجزئيّة المحدودة من $(\mathbb{R}_+)^2$ التي تحدّها المنحنيات: $y-x=0$، و $y^2-x^2=1$، و $xy=a$، و $xy=b$.

بالاستفادة من تغيير المتحولات :

$$u=y^2-x^2 \quad \text{و} \quad v=2xy$$

احسب التكامل

$$\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

الحل

نطابق كالعادة بين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$. فيكون $\Phi:\mathbb{P}_0\to\mathbb{L}, z\mapsto z^2$ تقابلاً هولومورفيّاً هو وتقابله العكسي. وإذا عدنا إلى الصيغة الحقيقيّة استنتجنا أنّ

$$\varphi:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_-\times\{0\}),(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$$

يعرّف تقابلاً من الصف C^1 هو وتقابله العكسي. ويكون $\operatorname{Jac}_\varphi(x,y)=\begin{bmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}$.

إذن مهما يكن التابع المقيس الموجب f، والمجموعة المفتوحة Ω المحتواة في $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ يكن

$$\iint_{\varphi(\Omega)} f(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=4\iint_{\Omega} f(x^2-y^2,2xy)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

فإذا اخترنا $f(u,v)=u^{v/2}$ استنتجنا أنّه مهما تكن المجموعة المفتوحة Ω المحتواة في $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ يكن

$$\iint_{\varphi(\Omega)} u^{v/2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=4\iint_{\Omega}(x^2-y^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

بقي أن نلاحظ أنّ $\varphi(D)=[0,1]\times[2a,2b]$. ومن ثَمّ

$$\iint_D (x^2-y^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{4}\int_{2a}^{2b}\int_0^1 u^{v/2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=\frac{1}{4}\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{d}\,v}{1+v/2}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(v+2)\ \Big]_{2a}^{2b}=\frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{a+1}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 19. لتكن $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2\le 2x\right\}$. احسب التكامل

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

الحل

إنّ شكل التابع المُكامَل يوحي بالانتقال إلى الإحداثيّات القطبيّة. لنذكّر أنّ التابع

$$\Phi:\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[\,\to\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_-\times\{0\}),(r,\theta)\mapsto(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)$$

هو تقابل من الصف C^1 هو وتابعه العكسي. ولدينا

$$\mathrm{Jac}_\Phi(r,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

إذن $J_\Phi(r,\theta)=r$. ومهما يكن التابع المقيس الموجب f، والمجموعة المفتوحة Ω المحتواة في $\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[$ يكن

$$\iint_{\Phi(\Omega)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint_\Omega f\circ\Phi(r,\theta)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

فإذا اخترنا

$$f(x,y)=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$$

استنتجنا أنّه مهما تكن المجموعة المفتوحة Ω المحتواة في المجموعة $\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[$ يكن

$$\iint_{\Phi(\Omega)}\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2}=\iint_\Omega\frac{r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

بقي أن نختار $\Omega=\Phi^{-1}(\mathrm{int}(D))$، ولكن

$$\begin{aligned}(r,\theta)\in\Omega\quad&\Leftrightarrow\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)\in\mathrm{int}(D)\\&\Leftrightarrow r^2\sin^2\theta<2r\cos\theta\\&\Leftrightarrow r<2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

إذن

$$\Omega=\left\{(r,\theta):\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\wedge\left(0<r<2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\right\}$$

وعليه

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta}\frac{r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta}\frac{2r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{-1}{1+r^2}\right]_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta}\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^4\theta}{\sin^4\theta+4\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\,\theta \end{aligned}$$

ولكن

$$1-\frac{\sin^4\theta}{\sin^4\theta+4\cos^2\theta} = \frac{4\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2} = 4\frac{1+\tan^2\theta}{(2+\tan^2\theta)^2}$$

إذن

$$I = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\theta}{(2+\tan^2\theta)^2}\mathrm{d}\,\theta$$

نجري تغيير المتحوّل $\theta \leftarrow \arctan\left(\sqrt{2}\tan\varphi\right)$ فنستنتج أنّ

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

طريقة ثانية : لمّا كان التابع المُكامَل مستمرّاً وموجباً استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{y^2/2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}\,y \\ &= 2\int_0^{\infty}\left(\int_{y^2/2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

نُجري في التكامل الداخلي تغيير المتحوّل $x \leftarrow \sqrt{1+y^2}u$ فنجد

$$I = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}}\int_{y^2/(2\sqrt{1+y^2})}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{(1+u^2)^2}\right)\mathrm{d}\,y$$

وإذا أجرينا تغيير المتحوّل $y \leftarrow \tan\theta$ استنتجنا أنّ

$$I = 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\int_{\sin^2\theta/(2\cos\theta)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{(1+u^2)^2}\right)\mathrm{d}\,\theta$$

وأخيراً إذا أجرينا تغيير المتحوّل $u \leftarrow \tan\varphi$ استنتجنا أنّ $I = 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta F(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$ ، وقد رمزنا

$$F(\theta) = \int_{\arctan\left(\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$$

وهنا نلاحظ أنّ $\lim_{\theta\to0^+}F(\theta) = \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$ و $\lim_{\theta\to\pi/2}F(\theta) = 0$ ، وأخيراً أنّ

$$F'(\theta) = -\left(\arctan\left(\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)\right)'\cos^2\left(\arctan\left(\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)\right) = -\frac{8\cos^2\theta\sin\theta}{(1+\cos^2\theta)^3}$$

فإذا أجرينا مُكاملة بالتجزئة أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}I &= 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta F(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \Big[2\,\sin\theta F(\theta)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}2\sin\theta F'(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= 16\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^3}\mathrm{d}\,\theta = 16\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta}{(2+\tan^2\theta)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

وأخيراً بإجراء تغيير المتحوّل $\theta \leftarrow \arctan\left(\sqrt{2}\tan\varphi\right)$ نجد

$$I = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

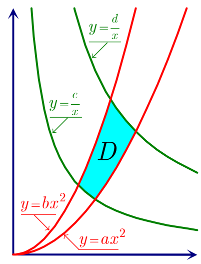
وهذه هي النتيجة التي وجدناها سابقاً. ■

التمرين 20. لتكن a و b و c و d من $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّق $b>a$ و $d>c$. نتأمّل المجموعة

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(ax^2\le y\le bx^2\right)\wedge\left(c\le xy\le d\right)\right\}$$

- احسب $\mathcal{A}(D)$ مساحة D.
- ثمّ احسب $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

الحل



إنّ شكل المجموعة D يوحي بتأمّل التقابل

$$\Phi:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R}_+^{*2},(x,y)\mapsto\left(u=xy,v=\frac{y}{x^2}\right)$$

الذي تقابله العكسي

$$\Phi^{-1}:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R}_+^{*2},\left(u,v\right)\mapsto\left(x=\sqrt[3]{\frac{u}{v}},y=\sqrt[3]{u^2v}\right)$$

إذ نلاحظ أنّ

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}:\Phi(x,y)\in[c,d]\times[a,b]\right\}=\Phi^{-1}\left([c,d]\times[a,b]\right)$$

وأنّ $J_{\Phi^{-1}}(u,v)=\dfrac{1}{3v}$. وعليه، مهما يكن التابع المقيس الموجب f، والمجموعة المفتوحة Ω المحتواة في $\mathbb{R}_+^{*2}$ يكن

$$\iint\limits_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{v}f\circ\Phi^{-1}(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

فإذا اخترنا $\Omega=\left]c,d\right[\times\left]a,b\right[$ استنتجنا أنّه مهما يكن التابع المقيس الموجب f يكن

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{3}\iint\limits_{]c,d[\times]a,b[}\frac{1}{v}f\circ\Phi^{-1}(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

- في حالة $f(x,y)=1$ نستنتج أنّ

$$\mathcal{A}(D)=\iint\limits_D\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{3}\int_c^d\int_a^b\frac{\mathrm{d}\,v}{v}\,\mathrm{d}\,u=\frac{d-c}{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- وفي حالة $f\left(x,y\right)=x+y$ نستنتج أنّ

$$I=\iint_D\left(x+y\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{3}\int_c^d\left(\int_a^b\frac{u^{1/3}v^{-1/3}+u^{2/3}v^{1/3}}{v}\mathrm{d}\,v\right)\mathrm{d}\,u$$
$$=\frac{1}{3}\int_c^d u^{1/3}\,\mathrm{d}\,u\times\int_a^b v^{-4/3}\,\mathrm{d}\,v+\frac{1}{3}\int_c^d u^{2/3}\,\mathrm{d}\,u\times\int_a^b v^{-2/3}\,\mathrm{d}\,v$$

ومن ثَمّ

$$I=\frac{3}{4}\left(d\sqrt[3]{d}-c\sqrt[3]{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)+\frac{3}{5}\left(d\sqrt[3]{d^2}-c\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}\right)$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 21. الصّفوف المطّردة.

$\mathcal{I}$

نقول عن مجموعة $\mathcal{M}$ من أجزاء مجموعة X إنّها **صفٌّ مطّردٌ** إذا حقّقت الشروط :

- $X\in\mathcal{M}$.
- إذا كان A و B من $\mathcal{M}$ يُحقّقان $A\subset B$ كان $B\backslash A\in\mathcal{M}$.
- إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}$ كان $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{M}$.

ونقول عن مجموعة $\mathcal{A}$ من أجزاء مجموعة X إنّها **مغلقة بالنسبة إلى التقاطع المنتهي**، إذا حقّقت الشرط الآتي :

- إذا كانت $A_1,\ldots,A_n$ عناصر من $\mathcal{A}$ كان $\bigcap_{k=1}^n A_k\in\mathcal{A}$.

1. ليكن $\mathcal{A}$ جبراً من أجزاء X . أثبت أنّه يوجد صفٌّ مطّردٌ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ يكون أصغر صفّ مطّردٍ يحوي $\mathcal{A}$. يسمى الصفّ المطّرد الذي تولده $\mathcal{A}$. وبيّن أنّه محتوى في $\Sigma(\mathcal{A})$.

2. نعرّف

$$\mathcal{M}_1=\left\{M\in\mathcal{M}(\mathcal{A}):\forall A\in\mathcal{A},\,M\bigcap A\in\mathcal{M}(\mathcal{A})\right\}$$

أثبت أنّ $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

3. نعرّف

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ M \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\, M \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})) \right\}$$

أثبت أنّ $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. ماذا تستنتج بشأن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ؟

4. أثبت أنّ اجتماع عددٍ منته من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ينتمي إلى $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ، ثُمّ استنتج مما سبق أنّ $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Sigma(\mathcal{A})$.

5. نتأمّل مجموعة X ، ومجموعة $\mathcal{A}$ من أجزاء X مغلقة بالنسبة إلى التقاطع المنتهي. ثُمّ نتأمّل الفضاء القابل للقياس $\left(X, \Sigma(\mathcal{A})\right)$، وقياسين μ و ν على $\left(X, \Sigma(\mathcal{A})\right)$.

① نفترض أنّ $\nu(X) = \mu(X) < +\infty$ ، و $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \mu(A)$ ، أثبت أنّ $\mu = \nu$.

② نفترض أنّ $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \mu(A)$ ، ونفترض وجود متتالية متزايدة $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{A}$ تحقّق $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ ، و $\forall n \in \mathbb{N}, \nu(V_n) < +\infty$. أثبت أنّ $\mu = \nu$.

$\mathcal{II}$

نتأمّل الفضاء المقيس $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$، وقد رمزنا كالعادة بالرمز λ_n إلى قياس لوبيغ. ونتأمّل نظيماً ما $\|\cdot\|$ على الفضاء $\mathbb{R}^n$.

1. لتكن $B(a,r)$ الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r . أثبت أنّ

$$\lambda_n(B(a,r)) = r^n \lambda_n(B(0,1))$$

نرمز فيما يلي بالرمز V دلالة على $\lambda_n(B(0,1))$. ما قيمة $\lambda_n(\overline{B}(a,r))$ ؟

2. نعرّف في حالة B من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ المقدارين

$$\mu(B) = \lambda_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in B\right\}\right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
$$\nu(B) = V\int_B n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\lambda(r) \qquad \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

أثبت أنّ μ و ν قياسين على $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$، ثُمّ أثبت أنّهما متساويان.

3. أثبت أنّه مهما يكن التابع البورِلي الموجب $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ يكن لدينا

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, \mathrm{d}\lambda_n(x) = V\int_0^\infty n r^{n-1} f(r)\, \mathrm{d} r$$

4. لتكن $p \geq 1$، ولنفترض أنّ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ أي النظيم المعطى بالصيغة
$$\left\|(x_1,\ldots,x_n)\right\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$
ولنضع $V_n^{(p)}$ دلالة على حجم الكرة الواحديّة في $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$ أي
$$V_n^{(p)} = \lambda_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\right\}\right)$$
طبّق 2. على التابع $f(u) = e^{-u^p}$ لتستنتج قيمة $V_n^{(p)}$ بدلالة التابع Γ.

الحل

$\mathcal{I}$.1 في الحقيقة، إنّ $\Sigma(\mathcal{A})$، أي الجبر التام الذي تولّده $\mathcal{A}$، هو صفّ مطّرد يحوي $\mathcal{A}$. وعليه يكفي أن نأخذ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ تقاطع جميع الصفوف المطّردة التي تحوي $\mathcal{A}$. ويكون بوجه عام $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \Sigma(\mathcal{A})$.

$\mathcal{I}$.2 إنّ كون الصف $\mathcal{A}$ مُغلق بالنسبة إلى التقاطع المنتهي يقتضي أن يكون
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

- من الواضح أنّ $X \in \mathcal{M}_1$.
- إذا كان M و N عنصرين من $\mathcal{M}_1$ يُحقّقان $N \subset M$ كان $M\backslash N$ عنصراً من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ يُحقّق
$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (M\backslash N) \bigcap A = (M \cap A)\backslash(N \cap A) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$
ومن ثَمّ $M\backslash N \in \mathcal{M}_1$.
- إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}_1$ وكان A عنصراً من $\mathcal{A}$، كانت $(A \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من الصف المطّرد $\mathcal{M}(\mathcal{A})$، وكان من ثَمّ
$$A \bigcap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A \bigcap A_n\right) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$
ولأنّ هذا محقّق أيّاً كان العنصر A من $\mathcal{A}$ استنتجنا أنّ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ينتمي إلى $\mathcal{M}_1$.

إذن، $\mathcal{M}_1$ هو صفٌّ مطّردٌ يحوي $\mathcal{A}$ فهو يحوي $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. أي

$$\forall M \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \forall A \in \mathcal{A}, \;\; M \bigcap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$3.\mathcal{I}$ استناداً إلى ما أثبتناه في النقطة السابقة لدينا

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

▫ من الواضح أنّ $X \in \mathcal{M}_2$.

▫ إذا كان M و N عنصرين من $\mathcal{M}_2$ يُحقّقان $N \subset M$ كان $M \backslash N$ عنصراً من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ يُحقّق

$$\forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \; (M \backslash N) \bigcap A = (M \cap A) \backslash (N \cap A) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

ومن ثَمّ $M \backslash N \in \mathcal{M}_2$.

▫ إذا كانت $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}_2$ وكان A عنصراً من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ، كانت $(A \cap A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من الصف المطّرد $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ، وكان من ثَمّ

$$A \bigcap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A \bigcap A_n \right) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

ولأنّ هذا محقّق أيّاً كان العنصر A من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ استنتجنا أنّ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ينتمي إلى $\mathcal{M}_2$.

إذن، $\mathcal{M}_2$ هو صفٌّ مطّردٌ يحوي $\mathcal{A}$ فهو يحوي $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. أي

$$\forall M \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \;\; M \bigcap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

أي إنّ الصفّ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مُغلق بالنسبة إلى عمليّة التقاطع. ونثبتُ بالتدريج أنّه مغلق بالنسبة إلى التقاطع المنتهي.

$4.\mathcal{I}$ لأنّ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مُغلقة بالنسبة إلى عمليّة أخذ المتمّم، وبالنسبة إلى التقاطع المنتهي، استنتجنا مباشرة أنّ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مُغلقة بالنسبة إلى الاجتماع المنتهي استناداً إلى دستور دو مورغان. لنثبت أنّ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبرٌ تامٌّ.

لتكن $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. عندئذ نعرّف المتتالية المتزايدة $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ، بالصيغة $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

وعليه نرى أنّ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبرٌ تامٌّ يحوي $\mathcal{A}$ فهو يحوي $\Sigma(\mathcal{A})$. وبذلك نكون قد أثبتنا صحّة المساواة: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Sigma(\mathcal{A})$.

$5.\mathcal{I}$ نتأمّل مجموعة X ، ومجموعة $\mathcal{A}$ من أجزاء X مغلقة بالنسبة إلى التقاطع المنتهي. ثُمّ نتأمّل الفضاء القابل للقياس $\left(X,\Sigma(\mathcal{A})\right)$، وقياسين μ و ν على $\left(X,\Sigma(\mathcal{A})\right)$.

① لنتأمّل المجموعة $\mathcal{M}=\left\{M\in\Sigma(\mathcal{A}):\nu(M)=\mu(M)\right\}$. عندئذ نلاحظ ما يلي :

- من الواضح أنّ $X\in\mathcal{M}$.
- إذا كان M و N عنصرين من $\mathcal{M}$ يُحقّقان $M\subset N$ كان $M\backslash N\in\mathcal{M}$ ، لأنّ

$$\begin{aligned}\nu(M\backslash N)&=\nu(M)-\nu(N)\\&=\mu(M)-\mu(N)=\mu(M\backslash N)\end{aligned}$$

- إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}$ ، كان $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{M}$ ، لأنّ

$$\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)$$

إذن $\mathcal{M}$ هو صفٌّ مطّردٌ يحوي $\mathcal{A}$ استناداً إلى الفرْض، فهو يحوي $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ الذي يساوي $\Sigma(\mathcal{A})$ بناءً على ما أثبتناه آنفاً. وعليه نرى أنّ $\mathcal{M}=\Sigma(\mathcal{A})$ وهذا يثبت أنّ $\nu=\mu$.

② لنتأمّل مجدداً المجموعة $\mathcal{M}=\left\{M\in\Sigma(\mathcal{A}):\nu(M)=\mu(M)\right\}$. عندئذ نلاحظ ما يلي :

- إنّ $X\in\mathcal{M}$. لأنّ

$$\begin{aligned}\nu(X)&=\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\nu(V_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu(V_n)=\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n\Big)=\mu(X)\end{aligned}$$

- ليكن M و N عنصرين من $\mathcal{M}$ يُحقّقان $M\subset N$ عندئذ

$$\begin{aligned}\nu\big(V_n\cap(M\backslash N)\big)&=\nu\big((V_n\cap M)\backslash(V_n\cap N)\big)\\&=\nu(V_n\cap M)-\nu(V_n\cap N)\\&=\mu(V_n\cap M)-\mu(V_n\cap N)\\&=\mu\big((V_n\cap M)\backslash(V_n\cap N)\big)\\&=\mu\big(V_n\cap(M\backslash N)\big)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ $\nu(M\backslash N)=\mu(M\backslash N)$ ، ومن ثَمّ $M\backslash N$ ينتمي إلى $\mathcal{M}$.

▫ وأخيراً، لتكن $\left(A_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}$، و n من $\mathbb{N}$، عندئذ

$$\begin{aligned}\nu\left(V_n \cap \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right)\right) &= \lim_{m\to\infty} \nu(V_n \cap A_m)\\ &= \lim_{m\to\infty} \mu(V_n \cap A_m) = \mu\left(V_n \cap \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right)\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد $\nu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right)$، ومن ثَمّ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

إذن $\mathcal{M}$ هو صفٌّ مطّردٌ يحوي $\mathcal{A}$ استناداً إلى الفرْض، فهو يحوي $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ الذي يساوي $\Sigma(\mathcal{A})$ بناءً على ما أثبتناه آنفاً. وعليه نرى أنّ $\mathcal{M} = \Sigma(\mathcal{A})$ وهذا يثبتُ أنّ $\nu = \mu$.

ملاحظة. نستنتج مما سبق أنّ قياس لوبيغ هو القياس الوحيد المعرّف على $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right)$ ويقرن بكلّ مجالٍ طوله.

II. نتأمّل الفضاء المقيس $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n\right)$، إذ رمزنا كالعادة بالرمز λ_n إلى قياس لوبيغ. ونتأمّل نظيماً ما $\|\cdot\|$ على الفضاء $\mathbb{R}^n$.

II.1. لتكن $B(a,r)$ الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : B(0,1) \to B(a,r), x \mapsto a + rx$$

تقابلاً من الصف C^1 هو وتقابله العكسي. ويكون $\mathrm{Jac}_\Phi(x) = rI_n$.

إذن

$$\begin{aligned}\lambda_n(B(a,r)) &= \int_{\Phi(B(0,1))} \mathrm{d}\lambda_n(y) = \int_{B(0,1)} \left|J_\Phi(f)\right| \mathrm{d}\lambda_n(x)\\ &= \int_{B(0,1)} r^n \, \mathrm{d}\lambda_n(x)\\ &= r^n \lambda_n(B(0,1)) = r^n V\end{aligned}$$

ونستنتج من تكافؤ جميع النظم على $\mathbb{R}^n$ أنّه يوجد R موجبٌ تماماً يُحقّق

$$B(0,1) \subset [-R,R]^n$$

ومن ثَمّ يكون

$$V = \lambda_n(B(0,1)) \le \lambda_n([-R,R]^n) = 2^n R^n < +\infty$$

فقياس لوبيغ لأي كرة مفتوحة محدودٌ.

وإذا لاحظنا أنّ $\left(B(a,r+2^{-m})\right)_{m\in\mathbb{N}}$ هي متتالية متناقصة من الكرات استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\lambda_n(\overline{B}(a,r)) &= \lambda_n\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B(a,r+2^{-m})\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\lambda_n(B(a,r+2^{-m}))\\ &= \lim_{m\to\infty}(r+2^{-m})^n V = r^n V\end{aligned}$$

$2.\mathcal{II}$. نعرّف في حالة B من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ المقدارين

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \lambda_n\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\in B\right\}\right) \in \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}\\ \nu(B) &= V\int_B nr^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\,\mathrm{d}\,\lambda(r) \qquad \in \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}\end{aligned}$$

إنّ التحقّق من كون μ و ν قياسين على الفضاء القابل للقياس $\left(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right)$ أمرٌ بسيط نتركه للقارئ.

لإثبات تساوي القياسين μ و ν سنستفيد من نتيجة $\mathcal{I}$. نعرّف $\mathcal{A}$ بأنّها مجموعة المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$. وهي تتمتّع بخاصّة التقاطع المنتهي.

▫ لتكن a من $\mathbb{R}$. في حالة $a\le 0$ يكون $\nu(]-\infty,a[)=0$ و $\mu(]-\infty,a[)=0$ وضوحاً. أمّا في حالة $a>0$ فلدينا

$$\mu(]-\infty,a[) = \lambda_n(B(0,a)) = a^n V < +\infty$$

$$\begin{aligned}\nu(]-\infty,a[) &= V\int_{]-\infty,a[} nr^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\,\mathrm{d}\,r\\ &= V\int_0^a nr^{n-1}\,\mathrm{d}\,r = a^n V < +\infty\end{aligned}$$

ونستنتج من ذلك، بالاستفادة من كون $]-\infty,b] = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}]-\infty,b+2^{-m}[$ ، أنّ

$$\forall b\in\mathbb{R},\quad \mu\left(]-\infty,b]\right) = \nu\left(]-\infty,b]\right) < +\infty$$

وأخيراً، في حالة $a<b$ ، لأنّ $]b,a[=]-\infty,a[\setminus]-\infty,b]$ ، نستنتج أنّ

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad a\le b \Rightarrow \mu(]b,a[) = \nu(]b,a[) < +\infty$$

▫ بقي أن نلاحظ أنّ متتالية المجالات المفتوحة $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ حيث $I_m =]-\infty, m[$ تُحقّق في آن معاً الخاصتين:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m \text{ و } \forall m \in \mathbb{N},\ \nu(I_m) = m^n V < +\infty.$$

▫ وأخيراً نعلم أنّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \Sigma(\mathcal{A})$.

إذن استناداً إلى $②.5.\mathcal{I}$ نستنتج أنّ $\nu = \mu$.

$3.\mathcal{II}$. في الحقيقة، نستنتج من المساواة $\nu = \mu$ أنّه

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \int \mathbb{1}_B\left(\|x\|\right) \mathrm{d}\,\lambda_n(x) = V \int \mathbb{1}_B(r)\, n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\, r$$

وإذا كان f تابعاً درجيّاً موجباً من الشكل $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbb{1}_{B_k} \in \mathcal{E}^+$، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\begin{aligned}
\int f\left(\|x\|\right) \mathrm{d}\,\lambda_n(x) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k \int \mathbb{1}_{B_k}\left(\|x\|\right) \mathrm{d}\,\lambda_n(x) \\
&= V \sum_{k=1}^m \alpha_k \int \mathbb{1}_{B_k}(r)\, n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\, r \\
&= V \int f(r)\, n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\, r
\end{aligned}$$

ولـمّا كان كلُّ تابعٍ بورِلي موجبٍ هو نهاية بسيطة لمتتالية متزايدة من التوابع الدرجيّة الموجبة، استنتجنا مما سبق أنّه مهما يكن التابع البورِلي الموجب f يكن

$$\int f\left(\|x\|\right) \mathrm{d}\,\lambda_n(x) = V \int f(r)\, n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\, r$$

$4.\mathcal{II}$. لتكن $p \geq 1$، ولنفترض أنّ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$، ولنضع $V_n^{(p)}$ دلالة على حجم الكرة الواحديّة في $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)$. نختار $f(u) = e^{-u^p}$ في النتيجة السابقة، فيكون لدينا

$$\int \exp\left(-\sum_{k=1}^n \left|x_k\right|^p\right) \mathrm{d}\, x_1 \cdots \mathrm{d}\, x_n = V_n^{(p)} \int e^{-r^p} n r^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\, \mathrm{d}\, r$$

ولكن من جهة أولى لدينا

$$\begin{aligned}\int e^{-\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p^p}\,\mathrm{d}\,x_1\cdots\mathrm{d}\,x_n &= \int\prod_{k=1}^{n} e^{-|x_k|^p}\,\mathrm{d}\,x_1\cdots\mathrm{d}\,x_n\\ &= \prod_{k=1}^{n}\int e^{-|x_k|^p}\,\mathrm{d}\,x_k\\ &= \left(\int e^{-|t|^p}\,\mathrm{d}\,t\right)^n\\ &= 2^n\left(\int_0^\infty \frac{1}{p}u^{\frac{1}{p}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u\right)^n\\ &= 2^n\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\int e^{-r^p}nr^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)\,\mathrm{d}\,r &= \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{n}{p}-1}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)\end{aligned}$$

وعليه نستنتج أنّ

$$V_n^{(p)} = 2^n\frac{\big(\Gamma\big(1+1/p\big)\big)^n}{\Gamma\big(1+n/p\big)}$$

وبذا يتمّ الحل.

ملاحظة. في النظيم الإقليدي المألوف الموافق لـ $p=2$ نجد أنّ حجم الكرة الواحدية في الفضاء الإقليدي المألوف $\mathbb{R}^n$ يعطى بالصيغة

$$V_n^{(2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$$

فعلى سبيل المثال:

$$V_4^{(2)} = \frac{\pi^2}{2},\ V_3^{(2)} = \frac{4\pi}{3},\ V_2^{(2)} = \pi,$$

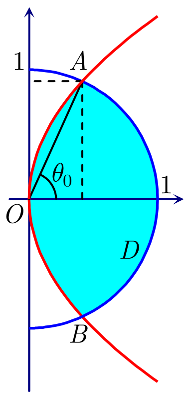
التمرين 22. احسب قيمة التكامل

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

في حالة

$$.\, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 < 1) \wedge (y^2 < 2x)\right\}$$

الحل

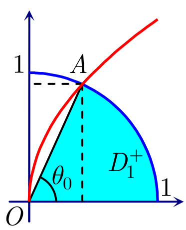


لنلاحظ أولاً أنّ الدائرة التي معادلتها $y^2 + x^2 = 1$ والقطع المُكافئ الذي معادلته $y^2 = 2x$ يتقاطعان في النقطتين

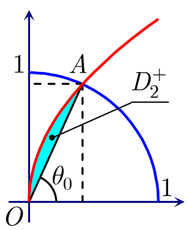
$$B\left(\sqrt{2}-1, -\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \text{ و } A\left(\sqrt{2}-1, \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \theta_0 &= \arctan \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1}\\ &= \arctan\sqrt{2+2\sqrt{2}}\end{aligned}$$



التابع المُكامَل موجبٌ ومقيسٌ، وهو متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل، وكذلك فإنّ المجموعة D نفسها متناظرة بالنسبة إلى محور الفوصل. إذن إذا رمزنا بالرمز D^+ إلى الجزء من D الواقع فوق محور الفواصل، وبالرمز D_1^+ إلى مجموعة النقاط M من D^+ التي تُحقّق $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \le \theta_0$، وأخيراً بالرمز D_2^+ إلى مجموعة النقاط M من D^+ التي تُحقّق $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) > \theta_0$، كان لدينا



$$\mathcal{I} = 2\iint_{D_1^+} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} + 2\iint_{D_2^+} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

ولكن بالانتقال إلى الإحداثيّات القطبيّة يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1^+} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} &= \int_0^1 \int_0^{\theta_0} \frac{r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta}{(1+r^2)^2} \\
&= \theta_0 \int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}\,r}{(1+r^2)^2} \\
&= \frac{\theta_0}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,u}{(1+u)^2} = \frac{\theta_0}{4} \\
&= \frac{1}{4} \arctan \sqrt{2+2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

وكذلك نجد أن

$$\iint\limits_{D_2^+} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta} \frac{r\,\mathrm{d}\,r}{(1+r^2)^2} \right) \mathrm{d}\,\theta$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2^+} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2} &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left(\left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta} \right) \mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin^4\theta}{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta} \right) \mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{4\cos^2\theta}{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \int_0^{\cot\theta_0} \frac{2u^2}{(1+2u^2)^2}\,\mathrm{d}\,u : \qquad \cot\theta = u
\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_0^{\cot\theta_0}\frac{2u^2}{(1+2u^2)^2}\,\mathrm{d}\,u &= \left[u\frac{-1}{2(1+2u^2)}\right]_0^{\cot\theta_0}+\frac{1}{2}\int_0^{\cot\theta_0}\frac{\mathrm{d}\,u}{1+2u^2}\\ &= \frac{-\tan\theta_0}{2(\tan^2\theta_0+2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta_0}\end{aligned}$$

ولأنّ $\tan\theta_0=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ استنتجنا أنّ

$$\iint_{D_2^+}\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{-1}{4\sqrt{1+\sqrt{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{-1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{2+2\sqrt{2}}\\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

تحويلات فورييه

1. تحويلات فورييه في $L^1(\mathbb{R})$

ندرس في هذه الفقرة خواص تحويلات فورييه على فضاء التوابع القابلة للمكاملة على كامل $\mathbb{R}$ والذي رمزنا إليه سابقاً بالرمز $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$، وسنرمز إليه اختصاراً $L^1(\mathbb{R})$ في هذا البحث.

إنّ $L^1(\mathbb{R})$ هو فضاء التوابع المقيسة التي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ وتُحقّق الشرط

$$\|f\|_1 \overset{\text{تعريف}}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

وكالعادة، نطابق في هذا الفضاء بين التوابع التي تختلف على مجموعة مهملة بالنسبة إلى قياس لوبيغ، فنحصل بذلك على فضاء شعاعي منظّم تامّ بالنسبة إلى النظيم $\|\cdot\|_1$.

يحوي الفضاء $L^1(\mathbb{R})$ فضاءات جزئيّة مهمّة مثل $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ الذي يمثّل فضاء التوابع المستمرّة على $\mathbb{R}$ وحواملها مجموعات متراصّة، و $\mathfrak{D}$ الذي يمثّل فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف C^∞ وحامل كلٍّ منها مجموعة متراصّة. ولقد رأينا (مبرهنة 10-11 صفحة 126) أنّ $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ و $\mathfrak{D}$ فضاءان جزئيّان كثيفان في $L^1(\mathbb{R})$.

1-1. عموميّات

1-1-1. **تعريف**. ليكن f عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ نعرّف في حالة ξ من $\mathbb{R}$، المقدارين

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

يسمّى التابع $\mathcal{F}(f)$ **تحويل فورييه** للتابع f، ويسمّى التابع $\bar{\mathcal{F}}(f)$ **تحويل فورييه المرافق** للتابع f.

بالطبع، إنّ للتكاملين اللذين يعرّفان $\mathcal{F}(f)$ و $\bar{\mathcal{F}}(f)$ معنى لأنّ التابع f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$، ولأنّه مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$، لدينا $\left|e^{\pm 2\pi\mathrm{i}\xi(\cdot)}f\right| = |f|$.

2-1-1. أمثلة

- لنتأمّل حالة التابع المميّز للمجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ أي $f = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}$. في هذه الحالة لدينا

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} & : \quad \xi \neq 0 \\ 1 & : \quad \xi = 0 \end{cases}$$

- وبوجه عام، في حالة التابع المميّز للمجال $[a,b]$ أي $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$، لدينا

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi} e^{-\pi \mathrm{i}\xi(a+b)} & : \quad \xi \neq 0 \\ b-a & : \quad \xi = 0 \end{cases}$$

- لنتأمّل حالة التابع $x \mapsto f(x) = e^{-|x|}$، عندئذ، في حالة ξ من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi \mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2\pi \mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{e^{-(1+2\pi \mathrm{i}\xi)x}}{1+2\pi \mathrm{i}\xi}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(1-2\pi \mathrm{i}\xi)x}}{1-2\pi \mathrm{i}\xi}\right]_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{1+2\pi \mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1-2\pi \mathrm{i}\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} \end{aligned}$$

- لنتأمّل حالة التابع $x \mapsto f(x) = \max(0,1-|x|)$، عندئذ

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 (1-x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{0} (1+x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 (1-x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 (1-x)e^{2\pi \mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\hat{f}(\xi) = \cancel{\left[(1-x)\frac{\sin(2\pi\xi x)}{\pi\xi}\right]_{x=0}^{x=1}} + \frac{1}{\pi\xi}\int_0^1 \sin(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2} = \left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2$$

3-1-1. مبرهنة. ليكن f عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ يكون تحويل فورييه $\hat{f}$ تابعاً محدوداً ومستمرّاً بانتظام على كامل $\mathbb{R}$. ويكون

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \overset{\text{تعريف}}{=} \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\hat{f}\right| \leq \left\|f\right\|_1$$

الإثبات

- المتراجحة $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \left\|f\right\|_1$ واضحة، لأنّ $\left|e^{\pm 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi(\cdot)}f\right| = \left|f\right|$.
- لتكن (ξ,η) من $\mathbb{R}^2$ تحقّق $\eta\neq\xi$ ، عندئذ

$$\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}}\left(e^{2\pi\,\mathrm{i}(\eta-\xi)x}-1\right)e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\eta x}f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ

$$\left|\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\eta)\right| \leq \int_{\mathbb{R}}\left|e^{2\pi\,\mathrm{i}(\eta-\xi)x}-1\right|\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x$$

لتكن A من $\mathbb{R}_+^*$ ، عندئذ بالاستفادة من المتراجحة

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad |e^{\mathrm{i}\,u}-1| \leq \min\left(|u|,2\right)$$

نجد

$$\int_{\{x:|x|\leq A\}}\left|e^{2\pi\,\mathrm{i}(\eta-\xi)x}-1\right|\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x \leq 2\pi A\left|\eta-\xi\right|\int_{\{x:|x|\leq A\}}\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x$$
$$\leq 2\pi A\left|\eta-\xi\right|\left\|f\right\|_1$$

$$\int_{\{x:|x|>A\}}\left|e^{2\pi\,\mathrm{i}(\eta-\xi)x}-1\right|\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x \leq 2\int_{\{x:|x|>A\}}\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x$$

ومنه

$$\left|\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\eta)\right| \leq 2\pi A\left|\eta-\xi\right|\left\|f\right\|_1 + 2\int_{\{x:|x|>A\}}\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x$$

لنختر $A = 1/\sqrt{|\xi-\eta|}$ ، فنجد

$$\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|\hat f(\xi)-\hat f(\eta)\right|\le \omega\left(\left|\xi-\eta\right|\right) \tag{1}$$

وقد وضعنا $\omega(0)=0$، وعرّفنا

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\quad \omega(\varepsilon)=2\pi\sqrt{\varepsilon}\left\|f\right\|_1+2\int\limits_{\left\{x:|x|>1/\sqrt{\varepsilon}\right\}}\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x$$

فإذا لاحظنا أنّ $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\omega(\varepsilon)=0$ ، استنتجنا من (1) الاستمرار المنتظم للتابع $\hat f$ على $\mathbb{R}$. ❐

.4-1-1 مبرهنة Riemann- Lebesgue : ليكن f عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left|\hat f(\xi)\right|=0 \quad \text{و} \quad \lim_{\xi\to+\infty}\left|\hat f(\xi)\right|=0$$

الإثبات

ليكن ε من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ يوجد تابعٌ φ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\left\|f-\varphi\right\|_1<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

ثُمّ لنتأمّل عدداً حقيقيّاً M يُحقّق $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\left]-M,M\right[$ ، عندئذ، في حالة $\xi\ne0$،

$$\begin{aligned}\hat\varphi\left(\xi\right)&=\int_{-M}^{M}\varphi(x)e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\,x\\&=\cancel{\left[-\frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}}{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}\varphi(x)\right]_{x=-M}^{M}}+\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}\int_{-M}^{M}\varphi'(x)e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^*,\quad\left|\hat\varphi(\xi)\right|\le\frac{1}{2\pi\left|\xi\right|}\int_{-M}^{M}\left|\varphi'(x)\right|\mathrm{d}\,x=\frac{\left\|\varphi'\right\|_1}{2\pi\left|\xi\right|}$$

وعليه يوجد A من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad\left|\xi\right|>A\Rightarrow\left|\hat\varphi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ومن ثَمّ، في حالة $|\xi|>A$، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left|\hat f(\xi)\right|&\le\left|\mathcal{F}(f-\varphi)(\xi)\right|+\left|\hat\varphi(\xi)\right|\\&\le\left\|f-\varphi\right\|_1+\left|\hat\varphi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة. ❐

ملاحظة. إذا رمزنا بالرمز $\boldsymbol{C_0}(\mathbb{R})$ إلى فضاء التوابع المستمرّة على كامل $\mathbb{R}$ وتسعى إلى 0 عند $+\infty$ وعند $-\infty$ مزوّداً بالنظيم المنتظم $\|\cdot\|_\infty$. نرى أنّنا قد أثبتنا أنّ تحويل فوربيه $\mathcal{F}$ هو تطبيقٌ خطيٌّ مستمرٌّ من $L^1(\mathbb{R})$ إلى $C_0(\mathbb{R})$، وأنّ $\left\|\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})\right\| \leq 1$. أمّا مثال التابع $f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}$، فيبرهن على المساواة في المتراجحة السابقة أي

$$\left\|\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})\right\| = 1$$

5-1-1. **مبرهنة**. ليكن f و g عنصرين من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ ينتمي التابعان $f\hat{g}$ و $\hat{f}g$ إلى $L^1(\mathbb{R})$، وتتحقّق المساواة

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

الإثبات

بالاستفادة من المبرهنة 1-1-3. يمكننا أن نكتب

$$\left|f\hat{g}\right| \leq \left\|g\right\|_1 \left|f\right| \quad \text{و} \quad \left|\hat{f}g\right| \leq \left\|f\right\|_1 \left|g\right|$$

وهاتان المتراجحتان تثبتان انتماء التابعين $f\hat{g}$ و $\hat{f}g$ إلى $L^1(\mathbb{R})$.

ومن جهة أخرى، بالاستفادة من مبرهنة Fubini-Tonelli، نرى أنّ التابع

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ F(x,y) = e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy} f(x)g(y)$$

ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^2)$، ومن ثَمّ

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

وهذا يُكافئ المساواة المطلوبة. ❐

ملاحظة. يمتلك تحويل فوربيه المرافق $\overline{\mathcal{F}}$ خواص تحويل فوربيه نفسها التي أثبتناها في المبرهنات السابقة.

2-1. قواعد حساب تحويلات فورييه

☜ نرمز كما جرت العادة بالرمز X^k إلى التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $t \mapsto t^k$.

1-2-1. مبرهنة – تحويل فورييه والاشتقاق

① نفترض أنّ التابع $X^k f$ ينتمي إلى الفضاء $L^1(\mathbb{R})$ في حالة k من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$. عندئذ يقبل تحويل فورييه $\hat{f}$ الاشتقاق n مرّة، ويكون

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \frac{\mathrm{d}^k \hat{f}}{\mathrm{d}\,\xi^k} = (-2\pi\,\mathrm{i})^k \mathcal{F}(X^k f)$$

② نفترض أنّ التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى الصف C^n، وأنّ التوابع $\left(f^{(k)}\right)_{0\leq k\leq n}$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \widehat{f^{(k)}} = (2\pi\,\mathrm{i})^k X^k \hat{f}$$

③ إذا كان f عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$، وكان f معدوماً خارج مجال محدود، انتمى التابع $\hat{f}$ إلى الصف C^∞.

الإثبات

① لنثبت الخاصّة المطلوبة بالتدريج على العدد n.

- حالة $n = 1$. نتأمّل التابع لمتحوّلين

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, F(\xi, x) = e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)$$

ونسعى إلى تطبيق مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط.

- أيّاً كان ξ من $\mathbb{R}$، انتمى التابع $x \mapsto F(\xi, x)$ إلى $L^1(\mathbb{R})$.
- أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، انتمى التابع $\xi \mapsto F(\xi, x)$ إلى الصف C^1، ولدينا

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x) = (-2\pi\,\mathrm{i}) e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} x f(x)$$

- التابع $g : x \mapsto 2\pi\left|x f(x)\right|$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ويُحقّق

$$\forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x)\right| \leq g(x)$$

واستناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، يقبل التابع $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(\xi, x)\,\mathrm{d}\,x$، أي $\hat{f}$، الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقّه يساوي $(-2\pi\,\mathrm{i})\mathcal{F}(Xf)$.

▪ لنفترض صحّة الخاصّة المرجوّة، في حالة $n-1$. ولنتأمّل تابعاً f من $L^1(\mathbb{R})$ يُحقّق $X^k f \in L^1(\mathbb{R})$ في حالة k من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$. عندئذ استناداً إلى فرْض التدريج يقبل تحويل فورييه $\hat{f}$ الاشتقاق $n-1$ مرّة، ويكون

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}, \quad \frac{\mathrm{d}^k \hat{f}}{\mathrm{d}\,\xi^k} = (-2\pi\,\mathrm{i})^k \mathcal{F}(X^k f)$$

وإذا طبّقنا حالة $n = 1$، على $g = X^{n-1} f$، استنتجنا أنّ $\hat{g}$ يقبل الاشتقاق، وأنّ

$$(\hat{g})' = (-2\pi\,\mathrm{i})\mathcal{F}(Xg)$$

ولكن $\hat{g} = \mathcal{F}(X^{n-1}f) = \dfrac{1}{(-2\pi\,\mathrm{i})^{n-1}}(\hat{f})^{(n-1)}$، إذن يقبل $\hat{f}$ الاشتقاق n مرّة، ويكون

$$(\hat{f})^{(n)} = (-2\pi\,\mathrm{i})^{n-1}\frac{\mathrm{d}\,\hat{g}}{\mathrm{d}\,\xi} = (-2\pi\,\mathrm{i})^n \mathcal{F}(Xg) = (-2\pi\,\mathrm{i})^n \mathcal{F}(X^n f)$$

وهذا يُثبتُ صحّة الخاصّة في حالة n، ومنه النتيجة المطلوبة.

② هنا أيضاً نثبت الخاصّة المطلوبة بالتدريج على العدد n.

▪ حالة $n = 1$. لنتأمّل تابعاً $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ من الصف C^1، ولنفترض أنّ التابعين f و f' ينتميان إلى $L^1(\mathbb{R})$.

لمّا كان $f' \in L^1(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ $f'\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \in L^1(\mathbb{R})$ و $f'\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} \in L^1(\mathbb{R})$، وهذا يثبتُ وجود التكاملين $\int_0^\infty f'(x)\,\mathrm{d}\,x$ و $\int_{-\infty}^0 f'(x)\,\mathrm{d}\,x$ ولكن لمّا كان

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

استنتجنا وجود النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. في الحقيقة،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}\,t = \ell$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(t)\,\mathrm{d}\,t = \ell^*$$

سنبيّن فيما يأتي أنّ انتماء f إلى $L^1(\mathbb{R})$ يقتضي $\ell = \ell^* = 0$.

في الحقيقة، إذا كان $\ell \neq 0$ وُجدَ عددٌ $A > 0$ يُحقّق

$$x \geq A \Rightarrow \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{2}|\ell|$$

وهذا يقتضي

$$\int_{\mathbb{R}}\left|f\right| \geq \int_{[A,\infty[}\left|f\right| \geq \frac{1}{2}\,|\ell|\,\lambda\big([A,\infty[\big) = +\infty$$

ويناقض انتماء f إلى $L^1(\mathbb{R})$، إذن $\ell = 0$. ونثبتُ بأسلوب مماثل أنّ $\ell^* = 0$.

بإجراء مُكامَلة بالتجزئة يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\int_A^B e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\right]_A^B + 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\int_A^B e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi A} f(A) - e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi B} f(B) + 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\int_A^B e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وبالاستفادة من كون $\lim\limits_{B\to+\infty} f(B) = 0$ و $\lim\limits_{A\to-\infty} f(A)$ نستنتج مما سبق أنّ

$$\widehat{f'}\big(\xi\big) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\hat{f}(\xi)$$

وهذا يثبتُ المطلوب في حالة $n = 1$.

■ لنفترض صحّة الخاصّة المرجوّة، في حالة $n-1$. ولنتأمّل تابعاً f من الصف C^n، ولنفترض أنّ التوابع $\left(f^{(k)}\right)_{0\leq k\leq n}$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ استناداً إلى الحالة السابقة يكون لدينا، من جهة أولى

$$\widehat{f'} = 2\pi\,\mathrm{i}\,X\hat{f}$$

ومن جهة ثانية، بتطبيق فرض التدريج على التابع f' نستنتج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n-1},\quad \widehat{\left(f'\right)^{(k)}} = (2\pi\,\mathrm{i})^k X^k\widehat{f'}$$

أو

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n-1},\quad \widehat{f^{(k+1)}} = (2\pi\,\mathrm{i})^{k+1} X^{k+1}\hat{f}$$

وبذا نكون قد أثبتنا صحّة النتيجة في حالة n. وتم المطلوب.

③ إذا كان f معدوماً خارج مجال محدود، انتمت جميع التوابع $\left(X^k f\right)_{k\in\mathbb{N}}$ إلى الفضاء $L^1(\mathbb{R})$، و هذا يبرهن، بناءً على ①، انتماء $\hat{f}$ إلى الصف C^∞. ❒

☜ في حالة تابعٍ بمتحوّل حقيقي $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$، نرمز بالرمز $\overline{f}$ إلى **مرافقه** $t\mapsto\overline{f(t)}$، ونرمز بالرمز $\overleftarrow{f}$ إلى **مُناظره** $t\mapsto f(-t)$، ونكتب أيضاً $\sigma(f)$ دلالة على $\overleftarrow{f}$.

1-2-2. مبرهنة – تحويل فورييه والمُرافق والمناظر

ليكن f تابعاً من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

① $\hat{\overline{f}}=\overline{\mathcal{F}}(\overline{f})$.

② $\overleftarrow{\hat{f}}=\overline{\mathcal{F}}(f)=\hat{\overleftarrow{f}}$، أي $\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\circ\sigma=\sigma\circ\mathcal{F}$.

③ إذا كان f زوجيّاً كان $\hat{f}$ زوجيّاً، وإذا كان f فرديّاً كان $\hat{f}$ فرديّاً.

④ إذا كان f زوجيّاً وحقيقيّاً كان $\hat{f}$ زوجيّاً وحقيقيّاً أيضاً، وإذا كان f فرديّاً وحقيقيّاً كان $\hat{f}$ فرديّاً وتخيّلياً بحتاً.

الإثبات

① في الحقيقة، مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$، يكن

$$\hat{\overline{f}}(\xi)=\overline{\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}\,x}=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi\mathrm{i}\xi x}\overline{f(x)}\,\mathrm{d}\,x=\overline{\mathcal{F}}(\overline{f})(\xi)$$

② وكذلك،

$$\overleftarrow{\hat{f}}(\xi)=\hat{f}(-\xi)=\underbrace{\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}\,x}_{\overline{\mathcal{F}}(f)}\underset{x\leftarrow -x}{=}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}f(-x)\,\mathrm{d}\,x=\hat{\overleftarrow{f}}$$

③ يكون f زوجيّاً إذا وفقط إذا كان $f=\overleftarrow{f}$، وهذا يقتضي، بناءً على ②، أنّ $\hat{f}=\overleftarrow{\hat{f}}$ أي أن يكون $\hat{f}$ زوجيّاً.

ومن جهة أخرى يكون f فرديّاً إذا وفقط إذا كان $f=-\overleftarrow{f}$، وهذا يقتضي، بناءً على ②، أنّ $\hat{f}=-\overleftarrow{\hat{f}}$ أي أن يكون $\hat{f}$ فرديّاً.

④ نستنتج من ① و ② أنّ $\hat{\overline{f}}=\overline{\mathcal{F}}\left(\overline{f}\right)=\overleftarrow{\overline{\hat{f}}}$. ولكن يكون f زوجيّاً وحقيقياً إذا وفقط إذا كان $f=\overleftarrow{f}$ و $f=\overline{f}$، وهذا يقتضي، بناءً على ③، أنّ $\hat{f}$ زوجي، وكذلك أنّ $\hat{f}=\overleftarrow{\overline{\hat{f}}}=\overline{\hat{f}}$، أي إنّ $\hat{f}$ حقيقي.

ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\hat{f}$ يكون فرديّاً وتخيّلياً بحتاً إذا كان f فرديّاً وحقيقيّاً. وبذا يتمّ الإثبات. ❐

☜ في حالة تابعٍ بمتحوّل حقيقي $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$، وعددٍ a من $\mathbb{R}$، نكتب $\tau_a(f)$ دلالة على $t\mapsto f(t-a)$. ونكتب $f^{[a]}$ دلالة على $t\mapsto f(at)$، في حالة a من $\mathbb{R}^*$. ونرمز، في حالة λ من $\mathbb{C}$، بالرمز $\mathcal{E}^{[\lambda]}$ إلى التابع بمتحوّل حقيقي $t\mapsto e^{\lambda t}$.

1-2-3. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

① $\forall a\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}(\tau_a(f))=\mathcal{E}^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,a]}\hat{f}$.

② $\forall a\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}(\mathcal{E}^{[2\pi\,\mathrm{i}\,a]}f)=\tau_a(\hat{f})$.

③ $\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad \widehat{f^{[a]}}=\dfrac{1}{|a|}\left(\hat{f}\right)^{[1/a]}$.

الإثبات

إنّ الإثبات تحقّقٌ مباشر نتركه تمريناً للقارئ. ❐

1-2-4. **أمثلة**. نذكّر بالتابع $H=\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ الذي أسميناه تابع **هڤيسايد** Heaviside.

① نتأمّل في حالة $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ التابع $f=\mathcal{E}^{[-\lambda]}H$ عندئذ ينتمي f إلى $L^1(\mathbb{R})$ ويكون لدينا

$$\hat{f}(\xi)=\int_0^\infty e^{-(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi+\lambda)x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}$$

② ونتأمّل في حالة $\mathrm{Re}(\lambda)>0$، و k من $\mathbb{N}^*$، التابع $g=\dfrac{1}{k!}X^k\mathcal{E}^{[-\lambda]}H$ عندئذ ينتمي g إلى $L^1(\mathbb{R})$. وبالاستفادة من 1-2-1. ومن نتيجة المثال ① لدينا

$$\frac{(-2\pi\,\mathrm{i})^k k!}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{k+1}}=\frac{\mathrm{d}^k\hat{f}}{\mathrm{d}\,\xi^k}(\xi)=(-2\pi\,\mathrm{i})^k\,\widehat{X^k f}=(-2\pi\,\mathrm{i})^k k!\,\hat{g}$$

ومن ثَمّ

$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{k+1}}$$

③ وكذلك، في حالة $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$، نتأمّل التابع $k : x \mapsto k(x) = e^{-\lambda|x|}$ عندئذ نلاحظ أنّ $k = f + \overleftarrow{f}$ ومن ثَمّ

$$\hat{k}(\xi) = \frac{1}{\lambda + 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} + \frac{1}{\lambda - 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

④ وكذلك، في حالة $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$، نتأمّل التابع $\ell : x \mapsto \ell(x) = \mathrm{sgn}(x) e^{-\lambda|x|}$ عندئذ نلاحظ أنّ $\ell = f - \overleftarrow{f}$ ومن ثَمّ

$$\hat{\ell}(\xi) = \frac{1}{\lambda + 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} - \frac{1}{\lambda - 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} = \frac{-4\pi\,\mathrm{i}\,\xi}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

⑤ نأتي الآن إلى مثال مهمّ هو التابع $x \mapsto h_a(x) = e^{-ax^2}$، في حالة $a > 0$. لحساب تحويل فورييه للتابع h_a، نتأمّل التابع الهولومورفي في المستوي $\mathbb{C}$ المعرّف بالصيغة $z \mapsto e^{-az^2}$. لمّا كان تكامل هذا التابع على أيّ منحن مغلق من الصف C^1 قِطَعيّاً معدوماً، استنتجنا، بِمُكاملة هذا التابع على المستطيل $\mathcal{R}$ الذي رؤوسه النقاط :

$$R \text{ و } R + \mathrm{i}\,T \text{ و } -R + \mathrm{i}\,T \text{ و } -R \quad \text{حيث} \quad T = \frac{\pi\xi}{a}$$

ما يأتي

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}\,x}_{I_1(R)} + \underbrace{\mathrm{i}\int_{0}^{T} e^{-a(R+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}\,t}_{I_2(R)} - \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-a(x+\mathrm{i}T)^2}\,\mathrm{d}\,x}_{I_3(R)} - \underbrace{\mathrm{i}\int_{0}^{T} e^{-a(-R+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}\,t}_{I_4(R)} = 0$$

ولكن نجد بحسابٍ بسيطٍ أنّ

$$\left|I_2(R)\right| \le e^{-aR^2} T e^{aT^2} \quad \text{و} \quad \left|I_4(R)\right| \le e^{-aR^2} T e^{aT^2}$$

وأنّ

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}\,x$$

وأخيراً

$$\lim_{R\to\infty} I_3(R) = e^{\pi^2\xi^2/a}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}\,x = e^{\pi^2\xi^2/a}\,\widehat{h_a}(\xi)$$

إذن بجعل R تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$e^{\pi^2\xi^2/a}\,\widehat{h_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وأخيراً

$$\widehat{h_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\xi^2/a}$$

وبوجه خاص نرى أنّ التابع $h_\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\pi x^2}$ هو **شعاع ذاتي** لتحويل فورييه يوافق القيمة الذاتيّة 1، أي $\mathcal{F}(h_\pi) = h_\pi$.

3-1. تحويل فورييه العكسي في $L^1(\mathbb{R})$

1-3-1. مبرهنة. لنفترض أنّ f تابعٌ من $L^1(\mathbb{R})$ وأنّ $\hat{f}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

① $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f,\ \ \lambda$ - a.e.

② وإذا كانت $\mathrm{cont}(f)$ هي مجموعة النقاط التي يكون f مستمرّاً عندها، كان

$$\forall t \in \mathrm{cont}(f), \quad \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t) = f(t)$$

الإثبات

لنضع $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \rho(x) = e^{-\pi x^2}$، ولنلاحظ أنّ ρ تابعٌ موجبٌ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ويُحقّق $\|\rho\|_1 = 1$. ثُمّ لنعرّف متتالية التوابع $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.
رأينا في المثال السابق أنّ $\hat{\rho} = \rho$، وبالاستفادة من المبرهنة 1-2-3. نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \rho_n = n\hat{\rho}^{[n]} = \widehat{\rho^{[1/n]}}$$

ونستنتج مما سبق ومن المبرهنة 1-2-3. نفسها، أنّه في حالة t من $\mathbb{R}$، لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tau_t(\rho_n) = \tau_t\left(\widehat{\rho^{[1/n]}}\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{[2\pi\,\mathrm{i}\,t]}\rho^{[1/n]}\right)$$

وإذا استفدنا من المبرهنة 1-1-5.، ومن كون ρ_n زوجياً، استنتجنا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، أنّ

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(t-x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}\rho\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{d}\,\xi$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f * \rho_n(t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}e^{-\pi\xi^2/n^2}\,\mathrm{d}\,\xi}_{I_n(t)}$$

▫ لنثبت أوّلاً أنّ المتتالية $(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تسعى إلى $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$. هنا نطبّق مبرهنة التقارب للوبيغ على متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة كما يأتي:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f_n(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}e^{-\pi\xi^2/n^2}$$

- إنّ حدود المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ توابع مستمرّة على كامل $\mathbb{R}$.
- مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$ ، تتقارب المتتالية $\left(f_n(\xi)\right)_{n\geq 1}$ من $\hat{f}(\xi)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}$.
- ينتمي التابع $g = \left|\hat{f}\right|$ إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، ولدينا

$$\forall n \geq 1, \forall\xi \in \mathbb{R}, \quad \left|f_n(\xi)\right| \leq g(\xi)$$

إذن، استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ، لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}\,\mathrm{d}\,\xi$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t) = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t)$$

وهذا يعني أنّ متتالية التوابع $(f * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب ببساطة من التابع $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$.

▫ ومن جهة أخرى، نعلم، بناءً على ما درسناه عند دراسة نظريّة القياس وتكامل لوبيغ، أنّ المتتالية $(f * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب في $L^1(\mathbb{R})$ من f ، ولأنّها تتقارب ببساطة من التابع $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$ ، استنتجنا مباشرة أنّ $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f, \ \lambda$ - $a.e.$. ومنه ① .

▫ نعلم استناداً إلى ما أثبتناه أنّ المجموعة الآتية مجموعة λ-مهملة:

$$\mathcal{N} = \left\{x \in \mathbb{R} : \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) \neq f(x)\right\}$$

لتكن t من $\mathrm{cont}(f)$. عندئذ، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ، يكن

$$\lambda(]t - 2^{-n}, t + 2^{-n}[\backslash\mathcal{N}) = 2^{1-n} > 0$$

فيوجد عددٌ t_n ينتمي إلى المجموعة $]t - 2^{-n}, t + 2^{-n}[\backslash\mathcal{N}$. وحينئذ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t_n) = f(t_n) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

ولكنّ استمرار التابعين $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = \mathcal{F}(\overleftarrow{\hat{f}})$ و f عند t يجعلنا نستنتج مما سبق أنّ

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t) = f(t)$$

ومنه ② . وبذا يتمّ إثبات المبرهنة. ❐

1-3-2. **نتيجة**. إنّ تحويل فورييه $C_0(\mathbb{R}) \leftarrow L^1(\mathbb{R}) : \mathcal{F}$ تطبيقٌ خطّيٌّ متباينٌ.

تُعطي المبرهنة الآتية أسلوباً سهلاً لتبيان انتماء تحويل فورييه $\hat{f}$ إلى الفضاء $L^1(\mathbb{R})$ وذلك بناءً على معلومات عن التابع f نفسه.

1-3-3. **مبرهنة**. لنفترض أنّ f تابعٌ من الصف C^2، ولنفترض أنّ التوابع f و f' و f'' تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ ينتمي $\hat{f}$ إلى $L^1(\mathbb{R})$.

الإثبات

في الحقيقة، نعلم استناداً إلى المبرهنة 1-2-1. أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f - f'')(\xi) = (1 + 4\pi^2\xi^2)\hat{f}(\xi)$$

ومن ثَمّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (1 + 4\pi^2\xi^2)\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left\|f - f''\right\|_1$$

وهذا يقتضي

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right| \mathrm{d}\,\xi \leq \left\|f - f''\right\|_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\,\xi}{1 + 4\pi^2\xi^2} = \frac{1}{2}\left\|f - f''\right\|_1$$

وهي الخاصّة المطلوبة. ❐

1-3-4. **مثال**. لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

من المعلوم أنّ f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. وإذا استندنا إلى الأمثلة 1-2-4. استنتجنا أنّ التابع

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$$

الذي ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ يُحقّق $\hat{g} = f$. ولأنّ التابع g مستمر، استنتجنا من المبرهنة السابقة أنّ $g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{g}) = \overline{\mathcal{F}}(f) = \hat{\hat{f}} = \hat{f}$، إذن

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}}{1 + x^2} \mathrm{d}\,x = \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

4-1. تحويل فورييه وجداء التلافّ في $L^1(\mathbb{R})$

لقد رأينا عند دراسة نظريّة القياس وتكامل لوبيغ، أنّه في حالة تابعين f و h من $L^1(\mathbb{R})$ يمكننا تعريف تابعٍ $f * h$ من $L^1(\mathbb{R})$ بالصيغة $f * h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}\,t$، ويكون لدينا $\|f * h\|_1 \leq \|f\|_1 \|h\|_1$. تبيِّن المبرهنة الآتية صلة مهمّة بين جداء التّلافّ وتحويل فورييه.

1-4-1. مبرهنة. ليكن f و h من $L^1(\mathbb{R})$. عندئذ

$$\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h}$$

الإثبات

لتكن ξ من $\mathbb{R}$. ولنتأمّل التابع لمتحوّلين

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ g(x,t) = e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x} f(x-t)h(t)$$

من الواضح أنّ g تابعٌ مقيسٌ. ونجد بتطبيق مبرهنة Tonelli أنّ

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left|g(x,t)\right| \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|f(x-t)\right|\left|h(t)\right| \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|h(t)\right| \int_{\mathbb{R}} \left|f(x-t)\right| \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|h(t)\right| \left\|f\right\|_1 \mathrm{d}\,t = \left\|f\right\|_1 \left\|h\right\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

إذن ينتمي g إلى $L^1(\mathbb{R}^2)$. ومن ثَمّ، نستنتج اعتماداً على مبرهنة Fubini، ما يلي

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,t}_{A} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x}_{B}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x} f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\mathrm{i}\xi(x-t)} f(x-t)\,\mathrm{d}\,x\right) e^{-2\pi\mathrm{i}\xi t} h(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\mathrm{i}\xi u} f(u)\,\mathrm{d}\,u\right) e^{-2\pi\mathrm{i}\xi t} h(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi\mathrm{i}\xi t} h(t)\,\mathrm{d}\,t = \hat{f}(\xi)\hat{h}(\xi)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} B &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} f(x-t) h(t) \, \mathrm{d}\, t \Big) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) h(t) \, \mathrm{d}\, t \Big) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} f * g(x) \, \mathrm{d}\, x = \widehat{f * g}(\xi) \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ المطلوب لأنّ $A = B$. ❐

2. فضاء التوابع ذات التناقص السريع $\mathcal{S}$

لاحظنا في دراستنا السابقة، أنّه في كثير من الأحيان علينا قَصْر تحويل فورييه على فضاء جزئي من $L^1(\mathbb{R})$ حتّى تصبح دساتير الاشتقاق ودستور تحويل فورييه العكسي صالحة. لذلك سنتعرّف في هذه الفقرة فضاءً جزئياً من $L^1(\mathbb{R})$، يكون محفوظاً بتأثير العديد من العمليات المرغوبة كالاشتقاق، والضرب في كثير حدود، وتحويل فورييه وغيرها.

2-1. **تعريف**. نقول إنّ التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى **فضاء التوابع ذات التناقص السريع** $\mathcal{S}$، إذا وفقط إذا حقّق الشروط التالية :

❶ التابع f ينتمي إلى الصف C^∞.

❷ مهما تكن n و k من $\mathbb{N}$ يكن $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n f^{(k)}(x) \right| < +\infty$.

نرى وضوحاً أنّ $\mathcal{S}$ فضاء شعاعي يحوي الفضاء $\mathfrak{D}$ المكوّن من التوابع التي تنتمي إلى الصف C^∞ وحامل كلٍّ منها مجموعة متراصّة. ولقد جرت العادة أن نرمز، في حالة f من $\mathcal{S}$، بالرمز $p_{n,k}(f)$ إلى المقدار $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n f^{(k)}(x) \right|$.

2-2. **مبرهنة** : تتحقّق في $\mathcal{S}$ الخواص الآتية:

① إذا كان f عنصراً من $\mathcal{S}$، وكان P تابعاً كثير الحدود، انتمى Pf إلى $\mathcal{S}$.

② إذا كان f عنصراً من $\mathcal{S}$، كان f' عنصراً من $\mathcal{S}$.

③ مهما تكن p من $[1, +\infty[$، فإنّ $\mathcal{S}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ كثيفٌ في $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

الإثبات

① ليكن f من $\mathcal{S}$، و m من $\mathbb{N}$، عندئذ

$$\begin{aligned}(X^m f)^{(k)} &= \sum_{r=0}^{k} C_k^r m(m-1)\cdots(m-r+1)X^{m-r}f^{(k-r)}\\ &= \sum_{0\le r\le \min(m,k)} C_k^r \frac{m!}{(m-r)!}X^{m-r}f^{(k-r)}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، مهما تكن (n,k) من $\mathbb{N}^2$، يكن

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n(X^m f)^{(k)}(x)\right| \le \sum_{r=0}^{\min(m,k)} C_k^r \frac{m!}{(m-r)!}p_{n+m-r,k-r}(f) < +\infty$$

وهذا يُثبتُ أنّ $X^m f \in \mathcal{S}$ مهما تكن m من $\mathbb{N}$. ومنه الخاصة ①.

② ليكن f عنصراً من $\mathcal{S}$، ولنضع $g = f'$ عندئذ، مهما تكن (n,k) من $\mathbb{N}^2$، يكن

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n g^{(k)}(x)\right| = p_{n,k+1}(f) < +\infty$$

وهذا يُثبتُ أنّ f' ينتمي إلى $\mathcal{S}$.

③ ليكن f عنصراً من $\mathcal{S}$، ولنعرّف

$$M = p_{0,0}(f) + p_{2,0}(f)$$

عندئذ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (1+x^2)\left|f(x)\right| \le M$$

ولأنّ $x\mapsto \dfrac{M}{1+x^2}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ استنتجنا أنّ $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.
ولمّا كان $\mathfrak{D}$ فضاءً جزئيّاً من $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ كثيفاً في $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. استنتجنا من الاحتواء $\mathcal{S}\subset\mathfrak{D}$ أنّ $\mathcal{S}$ نفسه كثيفٌ في $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{p}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. وبذا يتم الإثبات. ❐

2-3. **مبرهنة**. إذا كان f عنصراً من $\mathcal{S}$، كان $\hat{f}$ عنصراً من $\mathcal{S}$. أي

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$$

الإثبات

▫ مهما تكن m من $\mathbb{N}$ ينتمِ التابع $X^m f$ إلى $\mathcal{S}$ ومن ثَمّ إلى $L^1(\mathbb{R})$. إذن، استناداً إلى المبرهنة 1-1-2.، ينتمي تحويل فورييه $\hat{f}$ إلى الصف C^∞ .

▫ لتكن (n,k) من $\mathbb{N}^2$ ، ولنضع $g_{n,k} = (X^k f)^{(n)}$. استناداً إلى المبرهنة 2-2. ينتمي التابع $g_{n,k}$ إلى $\mathcal{S}$ ، ومن ثَمّ إلى $L^1(\mathbb{R})$. وعليه يكون لدينا

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left|\widehat{g_{n,k}}(\xi)\right| \leq \left\|g_{n,k}\right\|_1$$

ولكن، استناداً إلى المبرهنة 1-1-2. لدينا، في حالة ξ من $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned}\widehat{g_{n,k}}(\xi) &= (-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^n \mathcal{F}(X^k f)(\xi) \\ &= (-1)^k (2\pi\,\mathrm{i})^{n-k} \xi^n (\hat{f})^{(k)}(\xi)\end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left|\xi^n (\hat{f})^{(k)}(\xi)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \left\|g_{n,k}\right\|_1$$

ومن ثَمّ ينتمي التابع $\hat{f}$ إلى $\mathcal{S}$. ❐

سنحتاج فيما يلي إلى تعريف مفهومٍ للتقارب في الفضاء $\mathcal{S}$ ، وهذا هو هدف التعريف الآتي.

2-4. **تعريف**. لتكن $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$ ، نقول إنّ متتالية التوابع $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تتقارب في $\mathcal{S}$ من العنصر f من $\mathcal{S}$. إذا وفقط إذا كان

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \lim_{m\to\infty} p_{n,k}(f_m - f) = 0$$

ونكتب عندئذ $f = \mathcal{S}\text{-}\lim_{m\to\infty} f_m$.

تنص المبرهنة الآتية على استمرار أغلب العمليّات على الفضاء $\mathcal{S}$.

2-5. **مبرهنة**. لتكن $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$، تسعى في $\mathcal{S}$ إلى التابع الصفري 0. عندئذ

① تسعى متتالية المشتقات $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ في $\mathcal{S}$ إلى التابع الصفري 0. وهذا يُعبّر عن استمرار مؤثّر الاشتقاق $f \mapsto f'$ بصفته تابعاً خطّياً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$.

② أيّاً كان التابع كثير الحدود P، فإنّ المتتالية $(Pf_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تسعى في $\mathcal{S}$ إلى التابع الصفري 0. وهذا يُعبّر عن استمرار التطبيق $f \mapsto Pf$ بصفته تابعاً خطّياً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$.

③ تسعى المتتالية $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ في $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ إلى التابع الصفري 0. وهذا يُعبّر عن استمرار التطبيق الخطّي $f \mapsto f$ بصفته تابعاً خطّياً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.

④ تسعى متتالية تحويلات فورييه $(\hat{f}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ في $\mathcal{S}$ إلى التابع الصفري 0. وهذا يُعبّر عن استمرار تحويل فورييه $f \mapsto \hat{f}$ بصفته تابعاً خطّياً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$.

الإثبات

① هذه نتيجة واضحة لأنّ

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{n,k}(f'_m) = p_{n,k+1}(f_m)$$

يقتضي $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} f'_m = 0$.

② يكفي أن نثبت المطلوب في حالة $P = X^q$ حيث q من $\mathbb{N}$. وهنا نستفيد من المتراجحة التي رأيناها عند إثبات المبرهنة 2-2. لنكتب، في حالة (n,k) من $\mathbb{N}^2$،

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{n,k}(X^q f_m) \le \sum_{r=0}^{\min(q,k)} C_k^r \frac{q!}{(q-r)!} p_{n+q-r,k-r}(f_m)$$

وهذا يقتضي $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty}(X^q f_m) = 0$.

③ لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة f من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\left|f(x)\right| \le p_{0,0}(f) + p_{2,0}(f)$$

ومن ثَمّ، لأنّ

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}} = \left(\frac{\Gamma(p-1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)}\right)^{1/p} = I_p < +\infty$$

استنتجنا أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \|f_m\|_p \le I_p\left(p_{0,0}(f_m) + p_{2,0}(f_m)\right)$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتتالية $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تسعى في $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ إلى التابع الصفري 0.

④ لتكن (n,k) من $\mathbb{N}^2$. عندئذ نستنتج من $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} f_m = 0$، ومن النتائج السابقة أنّ $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} X^k f_m = 0$، ومن ثَمّ أنّ $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} (X^k f_m)^{(n)} = 0$.

وهذا بدوره يقتضي أنّ متتالية التوابع $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $g_m = (X^k f_m)^{(n)}$ تسعى إلى الصفر في $L^1(\mathbb{R})$، أي $\lim\limits_{m\to\infty} \|g_m\|_1 = 0$. ولكن

$$\widehat{g_m}(\xi) = (-1)^k (2\pi\,\mathrm{i})^{n-k} \xi^n (\widehat{f_m})^{(k)}(\xi)$$

إذن

$$p_{n,k}\left(\widehat{f_m}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \|\widehat{g_m}\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \|g_m\|_1$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{m\to\infty} p_{n,k}\left(\widehat{f_m}\right) = 0$، إذن $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \widehat{f_m} = 0$. ويتمّ الإثبات. ❒

6-2. مبرهنة. إنّ تحويل فوريه $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto \hat{f}$ تقابلٌ خطّي مستمرٌّ هو وتقابله العكسي، ولدينا $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$.

الإثبات

لقد أثبتنا أنّ $\mathcal{F}$ تطبيق خطّي مستمرٌّ من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$. وفي حالة تابعٍ f من $\mathcal{S}$ ينتمي $\hat{f}$ إلى $L^1(\mathbb{R})$، ومن ثَمّ يتّفق $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$ مع التابع f عند نقاط استمرار التابع f. أي يكون $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f$ لأنّ f مستمر. ومنه

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I_{\mathcal{S}}$$

ومن جهة أخرى، إذا تذكّرنا أنّ $\overleftarrow{\hat{f}} = \overline{\mathcal{F}}(f) = \hat{\overleftarrow{f}}$ أمكننا أن نستنتج مما سبق ما يلي

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad \bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = \overleftarrow{\hat{\hat{f}}} = \hat{\hat{\overleftarrow{f}}} = \mathcal{F} \circ \bar{\mathcal{F}}(f)$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I_{\mathcal{S}}$$

إذن $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$.

وأخيراً لمّا كان التطبيق $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto \overleftarrow{f}$ مستمرّاً وضوحاً استنتجنا من المساواة $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \circ \sigma$ استمرار التابع $\overline{\mathcal{F}}$. وبذا يتمّ الإثبات. ❒

ملاحظة. اعتماداً على ما سبق نرى أنّ $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}=\sigma$ وأنّ $\mathcal{F}^4=I_{\mathcal{S}}$.

2-7. مبرهنة

① إذا كان f و g عنصرين من $\mathcal{S}$، انتمى fg إلى $\mathcal{S}$، والتطبيق $(f,g)\mapsto fg$ تطبيق ثنائي الخطيّة مستمرٌّ على $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$.

② إذا كان f و g عنصرين من $\mathcal{S}$، انتمى $f*g$ إلى $\mathcal{S}$، وكان $(f,g)\mapsto f*g$ تطبيقاً ثنائي الخطيّة مستمرّاً على $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$.

الإثبات

① في الحقيقة، في حالة (n,k) من $\mathbb{N}^2$، لدينا

$$x^n(fg)^{(k)}(x)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r x^n f^{(r)}(x)g^{(k-r)}(x)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|x^n(fg)^{(k)}(x)\right|\leq\sum_{r=0}^{k}C_k^r p_{n,r}(f)p_{0,k-r}(g)$$

إذن ينتمي fg إلى $\mathcal{S}$، ولدينا

$$p_{n,k}(fg)\leq\sum_{r=0}^{k}C_k^r p_{n,r}(f)p_{0,k-r}(g)\tag{1}$$

لنثبت الآن استمرار التابع $(f,g)\mapsto fg$.

لتكن $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ و $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتاليتين من $\mathcal{S}$ متقاربتين في $\mathcal{S}$ من التابعين f و g بالترتيب. ولنعرّف، في حالة m من $\mathbb{N}$، التابعين

$$\psi_m=g_m-g \quad \text{و} \quad \varphi_m=f_m-f$$

بناءً على (1) لدينا، في حالة (n,k) من $\mathbb{N}^2$، المتراجحات

$$p_{n,k}(f\psi_m)\leq\sum_{r=0}^{k}C_k^r p_{n,r}(f)p_{0,k-r}(\psi_m)$$

$$p_{n,k}(\varphi_m g)\leq\sum_{r=0}^{k}C_k^r p_{n,r}(\varphi_m)p_{0,k-r}(g)$$

$$p_{n,k}(\varphi_m\psi_m)\leq\sum_{r=0}^{k}C_k^r p_{n,r}(\varphi_m)p_{0,k-r}(\psi_m)$$

إذن

$$\lim_{m\to\infty} p_{n,k}\left(f\psi_m\right) = 0$$

و

$$\lim_{m\to\infty} p_{n,k}\left(\varphi_m g\right) = 0$$

و

$$\lim_{m\to\infty} p_{n,k}\left(\varphi_m\psi_m\right) = 0$$

ولمّا كان

$$\begin{aligned} f_m g_m - fg &= (f+\varphi_m)(g+\psi_m) - fg \\ &= f\psi_m + g\varphi_m + \varphi_m\psi_m \end{aligned}$$

كان

$$p_{n,k}\left(f_m g_m - fg\right) \le p_{n,k}\left(f\psi_m\right) + p_{n,k}\left(\varphi_m g\right) + p_{n,k}\left(\varphi_m\psi_m\right)$$

ومنه

$$\lim_{m\to\infty} p_{n,k}\left(f_m g_m - fg\right) = 0$$

ولأنّ هذا مُحقّق أيّاً كان (n,k) من $\mathbb{N}^2$ استنتجنا أنّ $(f_m g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تسعى في $\mathcal{S}$ إلى fg. ومنه استمرار التطبيق الثنائي الخطيّة

$$\times : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathcal{S},\ (f,g) \mapsto f\cdot g$$

② ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{S}$. ولنتأمّل التابع لمتحولين

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ \ F(x,t) = f(x-t)g(t)$$

- مهما تكن x من $\mathbb{R}$، يكن التابع $F(x,t) \ t\mapsto$ مستمرّاً على $\mathbb{R}$.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}$ يكن التابع $F(x,t) \ x\mapsto$ مستمراً على $\mathbb{R}$.
- وأخيراً، ينتمي التابع g إلى $L^1(\mathbb{R})$ ويُحقّق

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad |F(x,t)| \le p_{0,0}(f)|g(t)|$$

إذن، استناداً إلى مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط، نرى أنّ التابع

$$f*g : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$. وكذلك فإنّ انتماء كلٍّ من f و g إلى $L^1(\mathbb{R})$ يقتضي انتماء $f*g$ إلى $L^1(\mathbb{R})$، وتتحقّق المساواة $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

من جهة أخرى، لمّا كان التابعان $\hat{f}$ و $\hat{g}$ ينتميان إلى $\mathcal{S}$، انتمى التابع $\hat{f}\,\hat{g} = \widehat{f*g}$ إلى $\mathcal{S}$، وذلك عملاً بالنتيجة السابقة. ولكنّ انتماء $\widehat{f*g}$ إلى $L^1(\mathbb{R})$، وكون التابع $f*g$ مستمرّاً يقتضيان صحّة المساواة $f*g = \overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f*g}\right)$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall (f,g)\in \mathcal{S}\times\mathcal{S},\quad f*g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\cdot\hat{g}) \tag{2}$$

وأخيراً، إنّ انتماء $\hat{f}\cdot\hat{g}$ إلى $\mathcal{S}$، وكون تحويل فورييه العكسي $\overline{\mathcal{F}}$ يعرّف تقابلاً على $\mathcal{S}$، يجعلاننا نستنتج أنّ $f*g$ ينتمي إلى $\mathcal{S}$. وكذلك فإنّ العلاقة (2) تبرهن استمرار التطبيق الثنائي الخطيّة

$$*:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S},\ \ (f,g)\mapsto f*g$$

بسبب استمرار كلٍّ من التوابع $\mathcal{F}$ و $\overline{\mathcal{F}}$ و $\times$. وبذا يتمّ إثبات المبرهنة. ❑

2-8. نتيجة. إنّ جداء التلاف قانون تشكيل داخلي تبديلي وتجميعي على $\mathcal{S}$. ومهما يكن f و g من $\mathcal{S}$ يكن :

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g} \quad \text{و} \quad \hat{f}*\hat{g} = \widehat{f\cdot g}$$

الإثبات

في الحقيقة، علينا فقط إثبات المساواة الأخيرة، وهذا يجري كما يلي :

$$\hat{f}*\hat{g} = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{\hat{f}*\hat{g}}) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{\hat{f}}\cdot\hat{\hat{g}}) = \overline{\mathcal{F}}(\check{f}\cdot\check{f}) = \widehat{f\cdot g}$$

ويتمّ الإثبات. ❑

2-9. مبرهنة – Plancherel-Parseval : مهما يكن f و g من $\mathcal{S}$ يكن

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\,\xi$$

الإثبات

في الحقيقة، بالاستفادة من المبرهنة 1-1-5. يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\,\xi &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(g)})(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(\overline{g}))(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ المطلوب. ❑

10-2. نتيجة – Bessel. مهما يكن f و g من $\mathcal{S}$ يكن

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \,\mathrm{d}\lambda$$

إذن يحافظ تحويل فورييه $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ على النظيم $\|\cdot\|_2$.

3. تحويلات فورييه في $L^2(\mathbb{R})$

لقد رمزنا بالرمز $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ إلى فضاء التوابع المقيسة التي تقبل مربّعاتها المُكاملة على كامل $\mathbb{R}$، وسنرمز إليه اختصاراً $L^2(\mathbb{R})$. كالعادة، نطابق في هذا الفضاء بين التوابع التي تختلف على مجموعة مهملة، فنحصل بذلك على فضاء شعاعي منظّم تامّ بالنسبة إلى النظيم $\|\cdot\|_2$ الذي نذكّر به فيما يلي :

$$\|f\|_2 \overset{\text{تعريف}}{=} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$

في الحقيقة، إنّ $L^2(\mathbb{R})$ فضاء هِلبيرت لأن النظيم $\|\cdot\|_2$ هو النظيم الموافق للجداء السلّمي

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} g \,\mathrm{d}\lambda$$

ولقد رأينا أنّ كلّاً من $\mathcal{S}$ و $\mathfrak{D}$ فضاء شعاعي جزئي كثيفٌ في $L^2(\mathbb{R})$. (انظر المبرهنة 11-10 صفحة 126).

1-3. مبرهنة. يوجد تقابلٌ خطّي يحافظ على النظيم $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ يمدّد تحويل فورييه $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

الإثبات

ليكن g من $L^2(\mathbb{R})$. عندئذ توجد متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{S}$ تسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g أي تُحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - g\|_2 = 0$. وهذا يقتضي أنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق شرط كوشي في $L^2(\mathbb{R})$. أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad (n \geq m \geq N) \Rightarrow \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 < \varepsilon$$

ولكن، استناداً إلى النتيجة 10-2. (متطابقة Bessel)، لدينا

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 = \|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m\|_2$$

ومنه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\quad (n \geq m \geq N) \Rightarrow \left\| \hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m \right\|_2 < \varepsilon$$

وهذا يبرهن على أنّ المتتالية $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق شرط كوشي في $L^2(\mathbb{R})$. ولكنّ هذا الفضاءَ فضاءٌ تامٌّ، فالمتتالية $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في $L^2(\mathbb{R})$، أي يوجد في $L^2(\mathbb{R})$ عنصرٌ نرمز إليه $\hat{g}$ يُحقّق $\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{\varphi}_n - \hat{g} \right\|_2 = 0$.

لا يتعلّق $\hat{g}$ بالمتتالية التي نختارها من عناصر $\mathcal{S}$ لتسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g . لأنّه إذا كانت $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أخرى من عناصر $\mathcal{S}$ تسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g . كان

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|_2 = 0$$

ولأنّ $\left\| \varphi_n - \psi_n \right\|_2 = \left\| \hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n \right\|_2$ استنتجنا من ذلك أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n \right\|_2 = 0$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{\psi}_n - \hat{g} \right\|_2 = 0$.

نعرّف إذن في حالة g من $L^2(\mathbb{R})$، العنصر $\mathcal{F}(g) = \hat{g}$ بأنّه النهاية في $L^2(\mathbb{R})$ لأي متتالية من النمط $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$ تسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g .

نعرّف بذلك تطبيقاً $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$، يتّفق مع تحويل فورييه على $\mathcal{S}$.

▫ **إنّ $\mathcal{F}$ تطبيق خطّي**. لأنّه في حالة g و h من $L^2(\mathbb{R})$ و λ من $\mathbb{C}$، نتأمّل متتاليتين $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{S}$ تسعيان في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g و h بالترتيب. عندئذ تكون $(\varphi_n + \lambda\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{S}$ تسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى $h + \lambda g$. ومنه

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g + \lambda h) &= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \widehat{(\varphi_n + \lambda\psi_n)} = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} (\hat{\varphi}_n + \lambda\hat{\psi}_n) \\ &= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n + \lambda \cdot L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \hat{\psi}_n = \mathcal{F}(g) + \lambda\mathcal{F}(h)\end{aligned}$$

▫ **إنّ $\mathcal{F}$ يُحافظ على النظيم**. لأنّه في حالة g من $L^2(\mathbb{R})$، نتأمّل متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{S}$ تسعى في $L^2(\mathbb{R})$ إلى g . وهنا يكون لدينا استناداً إلى متطابقة Bessel :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\| \varphi_n \right\|_2 = \left\| \hat{\varphi}_n \right\|_2$$

ولكن $L^2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = g$ و $L^2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = \mathcal{F}(g)$. إذن

$$\|g\|_2 = \|\mathcal{F}(g)\|_2$$

وهذا، مهما يكن g من $L^2(\mathbb{R})$.

▫ لنذكّر بالتطبيق $\sigma : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \sigma(f) = \overleftarrow{f}$ ، الذي يُعرّف تقابلاً خطيّاً مُحافظاً على النظيم.

لمّا كان التطبيقان $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ و σ مستمرّين على $L^2(\mathbb{R})$ ، وكان $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_{|\mathcal{S}} = \sigma_{|\mathcal{S}}$ ، و $\mathcal{S}$ فضاءً جزئياً كثيفاً في $L^2(\mathbb{R})$ ، استنتجنا أنّ $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \sigma$. وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{F}$ تقابلٌ على $L^2(\mathbb{R})$ وأنّ $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$. ❐

2-3. **مبرهنة**. على الفضاء $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ، يتفق تحويل فورييه الذي عرّفناه على الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ مع تحويل فورييه الذي عرّفناه على الفضاء $L^1(\mathbb{R})$.

الإثبات

سنحتاج في إثبات هذه المبرهنة إلى التوطئة الآتية:

توطئة. ليكن f عنصراً من $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ، وليكن ε من $]0,1[$. عندئذ يوجد تابعٌ φ_ε من $\mathfrak{D}$ يُحقّق في آن معاً الشرطين :

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \quad \text{و} \quad \|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

إثبات التوطئة

ليكن f عنصراً من $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ، وليكن ε من $]0,1[$. لمّا كان التابع $|f| + |f|^2$ عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(|f| + |f|^2\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}\, \mathrm{d}\lambda = 0$$

وعليه نجدُ عدداً طبيعيّاً ν يُحقّق في آن معاً الشرطين

$$\int |f|^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\nu,\nu]} \mathrm{d}\lambda \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \quad \text{و} \quad \int |f|\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\nu,\nu]} \mathrm{d}\lambda \le \frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه، إذا عرّفنا $f_1 = f \mathbb{1}_{[-\nu,\nu]}$ كان لدينا

$$\|f - f_1\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \|f - f_1\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

وكان

$$\forall x \notin [-\nu,\nu],\ f_1(x) = 0$$

وهنا نتأمّل تابعاً موجباً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\operatorname{supp}(\rho) \subset [-1,1]$ و $\int \rho \,\mathrm{d}\lambda = 1$. ونعرّف انطلاقاً من ρ متتالية التوابع $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. عندئذ نعلم ممّا درسناه في بحث « مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل » أنّ متتالية التوابع $(f_1 * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب من f_1 في كلٍّ من $L^1(\mathbb{R})$ و $L^2(\mathbb{R})$ لأنّ f_1 ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. إذن يوجد عددٌ طبيعي n_0 يُحقّق

$$\|f_1 - f_1 * \rho_{n_0}\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \|f_1 - f_1 * \rho_{n_0}\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

ولكن التابع $f_1 * \rho_{n_0}$ ينتمي إلى $\mathfrak{D}$ لأنّه من الصف C^∞، وحامله محتوى في المجال المتراص $[-\nu-1,\nu+1]$. يكفي إذن أن نعرّف $\varphi_\varepsilon = f_1 * \rho_{n_0}$ ليكون φ_ε عنصراً من $\mathfrak{D}$ يُحقّق في آن معاً الشرطين :

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \quad \text{و} \quad \|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

وبذا يتم إثبات التوطئة.

لإثبات المبرهنة 3-2. نتأمّل تابعاً f من $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. عندئذ نستنتج من التوطئة السابقة أنّه توجد متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathfrak{D}$ تُحقّق

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0$$

لنرمز بالرمز $\hat{f}$ إلى تحويل فورييه للتابع f بصفته تابعاً من $L^1(\mathbb{R})$. ولنرمز بالرمز $\mathcal{F}(f)$ إلى تحويل فورييه للتابع f بصفته تابعاً من $L^2(\mathbb{R})$. عندئذ نستنتج من المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left\|\hat{f} - \hat{\varphi}_n\right\|_\infty \le \left\|f - \varphi_n\right\|_1$$

أنّ متتالية التوابع $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{S}$ تتقارب ببساطة من $\hat{f}$. ونستنتج من المساواة

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left\|\mathcal{F}(f) - \hat{\varphi}_n\right\|_2 = \left\|f - \varphi_n\right\|_2$$

أنّ متتالية التوابع $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب في $L^2(\mathbb{R})$ من $\mathcal{F}(f)$. ونستنتج من ذلك مباشرة أنّ $\mathcal{F}(f) = \hat{f},\ \lambda\text{-}a.e.$ ، وذلك بناءً على ما أثبتناه عند دراسة الفضاءات L^p . □

3-3. **مبرهنة**. ليكن f من $L^2(\mathbb{R})$، عندئذ $\hat{f}$ هو النهاية في $L^2(\mathbb{R})$ لمتتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\quad \varphi_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}\,x$$

الإثبات

لنضع $f_n = f\mathbb{1}_{[-n,n]}$. عندئذ تنتمي التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $L^1(\mathbb{R})$، لأنّه استناداً إلى متراجحة كوشي-شوارتز، لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int \left|f_n\right| \mathrm{d}\,\lambda \le \left\|f\right\|_2 \left\|\mathbb{1}_{[-n,n]}\right\|_2 = \sqrt{2n}\left\|f\right\|_2$$

ومن ثَمّ نرى مباشرة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \varphi_n = \hat{f}_n$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان

$$\left\|f - f_n\right\|_2^2 = \int \left|f\right|^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}\mathrm{d}\,\lambda$$

استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f - f_n\right\|_2 = 0$$

فالمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى f في $L^2(\mathbb{R})$. ومن ثَمّ، بسبب استمرار تحويل فورييه على $L^2(\mathbb{R})$، تسعى المتتالية $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $\hat{f}$ في $L^2(\mathbb{R})$. وبذا يتمّ الإثبات. ❐

مثال. لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \ne 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

من المعلوم أنّ $f \notin L^1(\mathbb{R})$. ولكن نرى وضوحاً أنّ $f \in L^2(\mathbb{R})$.

وكذلك نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\varphi_n(\xi) &= \int_{-n}^{n} \frac{\sin x}{x} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{-n}^{n} \frac{\sin x\cos(2\pi\xi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{0}^{n} \frac{\sin(x+2\pi\xi x)+\sin(x-2\pi\xi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= F_n(1+2\pi\xi)+F_n(1-2\pi\xi)\end{aligned}$$

حيث

$$F_n(a) = \int_0^n \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

ولكن $F_n(-a) = -F_n(a)$ ، وفي حالة $a > 0$ لدينا

$$F_n(a) = \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

وبإجراء مُكاملة بالتجزئة نجد

$$F_n(a) = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{na} + \int_0^{na} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

أو

$$F_n(a) = \frac{1-\cos na}{na} + \int_0^{na/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = A$$

وعليه نرى أنّ

$$\forall a \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty} F_n(a) = A\,\mathrm{sgn}(a)$$

إذن

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\xi) = A\big(\operatorname{sgn}(1+2\pi\xi)+\operatorname{sgn}(1-2\pi\xi)\big)$$
$$= 2A\mathbb{1}_{]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}[}(\xi) + A\mathbb{1}_{\{-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\}}(\xi)$$

فالمتتالية $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ تتقارب ببساطة من التابع $2A\mathbb{1}_{]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}[} + A\mathbb{1}_{\{-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\}}$، ولأنها تتقارب في $L^2(\mathbb{R})$ من التابع $\hat{f}$ استنتجنا أنّ

$$\hat{f} = 2A\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}, \quad \lambda\text{-}a.e.$$

وأخيراً لـمّا كان

$$\|f\|_2^2 = 2A \quad \text{و} \quad \left\|\hat{f}\right\|_2^2 = \frac{4A^2}{\pi}$$

استنتجنا من علاقة Bessel أنّ $A = \dfrac{\pi}{2}$.

☜ لقد رأينا عند دراسة نظريّة القياس وتكامل لوبيغ، أنّه في حالة f و g من $L^2(\mathbb{R})$ يمكننا تعريف جداء التلافّ $f * g$ بالصيغة

$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ويكون التابع $f * g$ عنصراً من $C_0(\mathbb{R})$، أي تابعاً مستمرّاً يسعى إلى 0 عند $+\infty$ و $-\infty$.
وتتحقّق المتراجحة $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. وهذا يعبّر عن استمرار التطبيق الثنائي الخطيّة

$$* : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}), (f,g) \mapsto f * g$$

4-3. مبرهنة. مهما يكن f و g من $L^2(\mathbb{R})$، يكن

$$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g} \quad \text{و} \quad f * g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\cdot\hat{g})$$

الإثبات

لنتأمّل التطبيق الثُنائي الخطيّة

$$\Phi : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}),\ \Phi(f,g) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\cdot\hat{g})$$

مهما يكن f و g من $L^2(\mathbb{R})$ فلدينا

$$\|\Phi(f,g)\|_\infty \leq \left\|\hat{f}\cdot\hat{g}\right\|_1 \leq \left\|\hat{f}\right\|_2 \|\hat{g}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$$

إذن Φ تطبيق مستمرٌّ. ولقد رأينا في المبرهنة 2-7. أنّ

$$\forall (f,g) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \quad \Phi(f,g) = f * g$$

وعليه نستنتج من استمرار التابعين Φ و $*$ على $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ ، ومن كثافة الفضاء $\mathcal{S}$ في $L^2(\mathbb{R})$ ، أنّ المساواة $\Phi(f,g) = f * g$ تبقى صحيحة أيّاً كان f و g من $L^2(\mathbb{R})$.

وبتطبيق النتيجة السابقة على $\hat{f}$ و $\hat{g}$ بدلاً من f و g تنتج المساواة $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$. ❐

3-5. **مبرهنة**. مهما يكن f من $L^2(\mathbb{R})$ و g من $L^1(\mathbb{R})$ ، يكن

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

الإثبات

إنّ الإثبات مشابهٌ للإثبات السابق، ونتركه تمريناً للقارئ. ❐

تمرينات

التمرين 1. نعرّف، في حالة σ من $\mathbb{R}_+^*$ و μ من $\mathbb{R}$، التابع

$$G_{\sigma,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G_{\sigma,\mu}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

احسب $\widehat{G_{\sigma,\mu}}$، ثُمّ أثبت أنّ

$$\forall(\sigma,\sigma') \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall(\mu,\mu') \in \mathbb{R}^2, \quad G_{\sigma,\mu} * G_{\sigma',\mu'} = G_{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2},\mu+\mu'}$$

الحل

لنتذكّر أنّ التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = e^{-\pi x^2}$ يُحقّق $\hat{h} = h$. وهنا نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{[1/(\sigma\sqrt{2\pi})]}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

ومن ثَمّ، مهما كانت x من $\mathbb{R}$ يكن

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tau_\mu\left(h^{[1/(\sigma\sqrt{2\pi})]}\right)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

أي

$$G_{\sigma,\mu} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tau_\mu\left(h^{[1/(\sigma\sqrt{2\pi})]}\right)$$

ومنه، مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$، يكن

$$\begin{aligned}
\widehat{G_{\sigma,\mu}}(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(\tau_\mu\left(h^{[1/(\sigma\sqrt{2\pi})]}\right)\right)(\xi) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mu\xi} \mathcal{F}(h^{[1/(\sigma\sqrt{2\pi})]})(\xi) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mu\xi} \times \sigma\sqrt{2\pi}\ \hat{h}(\sigma\sqrt{2\pi}\xi) \\
&= e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2 - 2\pi\,\mathrm{i}\,\mu\xi}
\end{aligned}$$

ونستنتج أنّه، مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(G_{\sigma,\mu} * G_{\sigma',\mu'})(\xi) &= \widehat{G_{\sigma,\mu}}(\xi)\cdot\widehat{G_{\sigma',\mu'}}(\xi)\\ &= e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2-2\pi\,\mathrm{i}\,\mu\xi}\times e^{-2\pi^2\sigma'^2\xi^2-2\pi\,\mathrm{i}\,\mu'\xi}\\ &= e^{-2\pi^2(\sigma^2+\sigma'^2)\xi^2-2\pi\,\mathrm{i}(\mu+\mu')\xi}\\ &= \mathcal{F}(G_{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2},\mu+\mu'})(\xi)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$G_{\sigma,\mu} * G_{\sigma',\mu'} = G_{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2},\mu+\mu'}$$

■

التمرين 2. نعرّف، في حالة α و λ من $\mathbb{R}_+^*$ ، التابع

$$Y_{\alpha,\lambda}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ Y_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$$

احسب $\widehat{Y_{\alpha,\lambda}}$ ، ثُمّ أثبت أنّ

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\quad Y_{\alpha,\lambda}*Y_{\beta,\lambda}=Y_{\alpha+\beta,\lambda}$$

الحل

نهدف إلى حساب التكامل $\widehat{Y_{\alpha,\lambda}}(\xi)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)x}\,\mathrm{d}\,x$ في حالة ξ من $\mathbb{R}$. لتحقيق ذلك نتأمّل التابع الآتي لمتحوّلين:

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{P}_{\lambda/2}\to\mathbb{C},(x,z)\mapsto F(x,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)x^{\alpha-1}e^{-zx}$$

حيث $\mathbb{P}_s=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>s\right\}$. وهنا نلاحظ ما يأتي:

- مهما تكن z من $\mathbb{P}_{\lambda/2}$ ، فالتابع $x\mapsto F(x,z)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}^*$.
- مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، فالتابع $z\mapsto F(x,z)$ هولومورفي في $\mathbb{P}_{\lambda/2}$.
- التابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)x^{\alpha-1}e^{-\lambda x/2}$ قابل للمُكاملة ويُحقّق

$$\forall(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{P}_{\lambda/2},\quad\left|F(x,z)\right|\le g(x)$$

نستنتج إذن أنّ التابع $z\mapsto f(z)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}F(x,z)\,\mathrm{d}\,x$ هولومورفي في $\mathbb{P}_{\lambda/2}$.

من جهة أخرى، في حالة t من $\left]\frac{\lambda}{2},+\infty\right[$ ، لدينا

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-tx}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{t^{\alpha}}\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u=\frac{1}{t^{\alpha}}$$

ولأنّ $z\mapsto z^{-\alpha}=\exp(-\alpha\operatorname{Log}z)$ تابعٌ هولومورفي في $\mathbb{P}_{\lambda/2}$ ، ويتّفق مع f على المجال $\left]\frac{\lambda}{2},+\infty\right[$ ، استنتجنا أنّهما يتّفقان على كامل $\mathbb{P}_{\lambda/2}$. إذن

$$\forall z\in\mathbb{P}_{\lambda/2},\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-zx}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{z^{\alpha}}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{\alpha}}$$

ومنه

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad \widehat{Y_{\alpha,\lambda}}(\xi)=\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{\alpha}}$$

بالاستفادة من المساواة

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{2},\ \forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{-},\quad z^{-\alpha}\cdot z^{-\beta}=z^{-\alpha-\beta}$$

نجد أنّه مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Y_{\alpha,\lambda}*Y_{\beta,\lambda})(\xi)&=\widehat{Y_{\alpha,\lambda}}\left(\xi\right)\cdot\widehat{Y_{\beta,\lambda}}(\xi)\\&=\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{\alpha}}\times\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{\beta}}\\&=\frac{1}{(\lambda+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)^{\alpha+\beta}}\\&=\mathcal{F}(Y_{\alpha+\beta,\lambda})(\xi)\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$Y_{\alpha,\lambda}*Y_{\beta,\lambda}=Y_{\alpha+\beta,\lambda}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 3. نعرّف، في حالة α من $\mathbb{R}_+^*$، التابع

$$Z_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Z_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

احسب $\widehat{Z_\alpha}$، ثُمّ أثبت أنّ

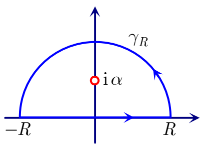
$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad Z_\alpha * Z_\beta = Z_{\alpha+\beta}$$

الحل

لمّا كان Z_α زوجيّاً استنتجنا أنّ $\widehat{Z_\alpha}$ زوجي، لذلك يكفي أن نحسب $\widehat{Z_\alpha}(\xi)$ في حالة $\xi < 0$. لنفترض إذن أنّ $\xi < 0$. ولنتأمّل التابع الميرومورفي

$$z \mapsto f(z) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^{-2\pi \mathrm{i} \xi z}}{\alpha^2 + z^2}$$

الذي يقبل قطباً بسيطاً وحيداً $\mathrm{i}\alpha$ واقعاً في نصف المستوي $\mathbb{Q}_0 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.



بمُكاملة التابع f على المنحني Γ_R المكوّن من المجال $[-R,R]$ متبوعاً بنصف الدائرة γ_R التي مركزها 0 ونصف قطرها R والمحتواة في $\mathbb{Q}_0$. نستنتج استناداً إلى مبرهنة الرواسب أنّه في حالة $R > \alpha$ لدينا

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}\,\alpha) = e^{2\pi\xi\alpha}$$

ولكن

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &\le \pi R \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left|f(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \\ &\le R\alpha \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left|\frac{\exp(-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi R e^{\mathrm{i}\theta})}{\alpha^2 + R^2 e^{2\mathrm{i}\theta}}\right| \le \frac{R\alpha}{R^2 - \alpha^2}\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كون $\xi < 0$. وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

ولأنّ

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \widehat{Z_\alpha}(\xi)$$

استنتجنا أنّ $\forall \xi < 0,\quad \widehat{Z_\alpha}(\xi) = e^{2\pi\alpha\xi}$. وهذا يقتضي أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad \widehat{Z_\alpha}(\xi) = e^{-2\pi\alpha|\xi|}$$

ونستنتج من ذلك أنّه، مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Z_\alpha * Z_\beta)(\xi) &= \widehat{Z_\alpha}(\xi)\cdot\widehat{Z_\beta}(\xi)\\ &= e^{-2\pi\alpha|\xi|}\times e^{-2\pi\beta|\xi|}\\ &= e^{-2\pi(\alpha+\beta)|\xi|}\\ &= \mathcal{F}(Z_{\alpha+\beta})(\xi)\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$Z_\alpha * Z_\beta = Z_{\alpha+\beta}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 4. ليكن a من $\mathbb{R}_+^*$ ، حلّ في $L^1(\mathbb{R})$ المعادلة التكامليّة التالية بالمجهول f

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \int_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a^2+x^2}$$

الحل

ليكن f من $L^1(\mathbb{R})$ حلّاً للمعادلة المعطاة. عندئذ نستنتج أنّ تحويل فورييه $\hat{f}$ يُحقّق المساواة

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad (\hat{f}(\xi))^2 = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\xi|} \tag{$*$}$$

وقد استفدنا من نتيجة التمرين السابق. ولمّا كان $\forall \xi \in \mathbb{R},\ (\hat{f}(\xi))^2 \in \mathbb{R}_+^*$ استنتجنا أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad \hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$$

ولكنّ استمرار التابع $\hat{f}$ يقتضي أنّ $\hat{f}(\mathbb{R})$ مجال من $\mathbb{R}$ ، ولأنّ 0 لا ينتمي إلى هذا المجال استنتجنا أنّ

$$\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^* \quad \text{أو} \quad \hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-^*$$

- في حالة $\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$، نستنتج من $(*)$ أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi a|\xi|}$$

وبالاستفادة من التمرين السابق ذاته نجد $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} \cdot \frac{1}{a^2 + 4x^2}$.

- في حالة $\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-^*$، نستنتج من $(*)$ أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi a|\xi|}$$

وبالاستفادة من التمرين السابق نجد $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{\frac{4a}{\pi}} \cdot \frac{1}{a^2 + 4x^2}$.

ونتيقّن مباشرة، بالاستفادة من تحويل فورييه، أنّ التابعين اللذين عثرنا عليهما آنفاً، هما حلّان للمعادلة التكامليّة المطروحة. ■

التمرين 5. حلّ في $L^1(\mathbb{R})$ المعادلة التكامليّة التالية بالمجهول f

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, \mathrm{d}\, t = e^{-x^2}$$

الحل

ليكن f من $L^1(\mathbb{R})$ حلاً للمعادلة المعطاة. عندئذ نستنتج أنّ تحويل فورييه $\hat{f}$ يُحقّق المساواة

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f}(\xi))^2 = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2} \qquad (*)$$

لمّا كان $\forall \xi \in \mathbb{R}, (\hat{f}(\xi))^2 \in \mathbb{R}_+^*$ استنتجنا أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$$

ولكنّ استمرار التابع $\hat{f}$ يقتضي أنّ $\hat{f}(\mathbb{R})$ مجال من $\mathbb{R}$، ولأنّ 0 لا ينتمي إلى هذا المجال استنتجنا أنّ

$$\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^* \quad \text{أو} \quad \hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-^*$$

- في حالة $\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$، نستنتج من $(*)$ أنّ $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \sqrt[4]{\pi}\, e^{-\pi^2\xi^2/2}$، ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}} \cdot e^{-2x^2}$$

▪ في حالة $\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-^*$، نستنتج من $(*)$ أنّ $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = -\sqrt[4]{\pi}\, e^{-\pi^2\xi^2/2}$، ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}, f[a] = -\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}} \cdot e^{-2x^2}.$$

ونتيقّن مباشرة، بالاستفادة من تحويل فورييه، أنّ التابعين اللذين عثرنا عليهما آنفاً، هما حلّان للمعادلة التكامليّة المطروحة. ■

التمرين 6. أوجد توابع f_1 و f_2 و f_3 من $L^1(\mathbb{R})$ تُحقّق في حالة $\xi \neq 0$ ما يلي :

$$\widehat{f_1}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi} \text{ و } \widehat{f_2}(\xi) = \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{4\pi^2\xi^2} \text{ و } \widehat{f_3}(\xi) = \frac{\sin^3(2\pi\xi)}{8\pi^3\xi^3}$$

استنتج قيمة التكاملات $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^k \mathrm{d}\,x$ في حالة $k \in \{2,3,4,5,6\}$.

الحل

▪ لنتأمّل التابع $f_1 = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ عندئذ نجد بحساب مباشر أنّه في حالة $\xi \neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}}{-4\pi\mathrm{i}\xi}\right]_{x=-1}^{1}\\ &= \frac{1}{2\pi\xi}\cdot\frac{e^{2\pi\mathrm{i}\xi} - e^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2\mathrm{i}} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\end{aligned}$$

وعليه إذا عرّفنا $f_1 = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ كان $\widehat{f_1}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}$.

▪ لمّا كان f_1 عنصراً من $L^1(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{f_1 * f_1}(\xi) = (\widehat{f_1}(\xi))^2 = \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{4\pi^2\xi^2}$$

وعليه يُحقّق التابع $f_2 = f_1 * f_1$ الخاصّة المطلوبة. ونجد بحساب مباشر أنّ

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{4}\int_{x-1}^{x+1}\mathbb{1}_{[-1,1]}(v)\,\mathrm{d}\,v\\ &= \frac{1}{4}\lambda\big([-1,1]\cap[x-1,x+1]\big)\end{aligned}$$

وعليه

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & : \quad |x|>2\\ \frac{1}{4}(2+x) & : \quad -2\leq x\leq 0\\ \frac{1}{4}(2-x) & \quad\quad 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

الذي يُكتب بالصيغة المُكافئة :

$$.\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f_2(x)=\frac{1}{4}\max(0,2-|x|)$$

- لمّا كان f_1 و f_2 عنصرين من $L^1(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^*,\quad \widehat{f_2*f_1}(\xi)=\widehat{f_2}(\xi)\widehat{f_1}(\xi)=\frac{\sin^3(2\pi\xi)}{8\pi^3\xi^3}$$

وعليه يُحقّق $f_3=f_2*f_1$ الخاصّة المطلوبة. ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}f_3(x)&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-t)f_2(t)\,\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{8}\int_{x-1}^{x+1}\max(0,2-|t|)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

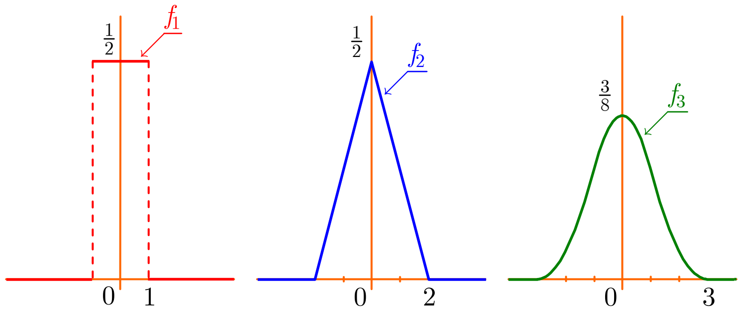
وعليه

$$f_3(x)=\begin{cases}0 & : \quad |x|>3\\ \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{-2}^{x+1}(2+u)\,\mathrm{d}\,u & : \quad -3\leq x\leq -1\\ \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}(2-|u|)\,\mathrm{d}\,u & : \quad -1\leq x\leq 1\\ \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{x-1}^{2}(2-u)\,\mathrm{d}\,u & : \quad 1\leq x\leq 3\end{cases}$$

أو

$$f_3(x)=\begin{cases}0 & : \quad |x|>3\\ \frac{1}{16}(3+x)^2 & : \quad -3\leq x\leq -1\\ \frac{1}{8}(3-x^2) & : \quad -1\leq x\leq 1\\ \frac{1}{16}(3-x)^2 & : \quad 1\leq x\leq 3\end{cases}$$

ونجد في الشكل الآتي الرسم البياني للتوابع f_1 و f_2 و f_3 .



- بسبب استمرار f_2 وكون $\widehat{f_2}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}\,x = \pi \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin 2\pi\xi}{2\pi\xi}\right)^2 \mathrm{d}\,\xi \\ &= \pi \widehat{\widehat{f_2}}(0) = \pi \overleftarrow{f_2}(0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- وكذلك بسبب استمرار f_3 وكون $\widehat{f_3}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \mathrm{d}\,x = \pi \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin 2\pi\xi}{2\pi\xi}\right)^3 \mathrm{d}\,\xi \\ &= \pi \widehat{\widehat{f_3}}(0) = \pi \overleftarrow{f_3}(0) = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

- ومن جهة أخرى، لأنّ f_2 ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R})$ نستنتج من علاقة بِسِل أنّ

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \mathrm{d}\,x = \pi \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin 2\pi\xi}{2\pi\xi}\right)^4 \mathrm{d}\,\xi \\ &= \pi \left\| \widehat{f_2} \right\|_2^2 = \pi \left\| f_2 \right\|_2^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^2 (2-u)^2 \,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{\pi(2-u)^3}{24} \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■ وكذلك، لأنّ f_2 و f_3 ينتميان إلى $L^2(\mathbb{R})$ نستنتج من علاقة بلانشرِل–بارسفال أن

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 \mathrm{d}\,x = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^5 \mathrm{d}\,\xi \\
&= \pi\left\langle \widehat{f_2}, \widehat{f_3} \right\rangle = \pi\left\langle f_2, f_3 \right\rangle = 2\pi\int_0^2 f_2(x) f_3(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{32}(2-x)(3-x^2)\,\mathrm{d}\,x + 2\pi\int_1^2 \frac{1}{64}(2-x)(3-x)^2\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{16}\int_0^1 (2-x)(3-x^2)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\pi}{32}\int_0^1 v(1+v)^2\,\mathrm{d}\,v = \frac{115}{384}\pi
\end{aligned}$$

■ وأخيراً، لأن f_3 ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R})$ نستنتج من علاقة بِسِل أنّ

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 \mathrm{d}\,x = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^6 \mathrm{d}\,\xi \\
&= \pi\left\| \widehat{f_3} \right\|_2^2 = \pi\left\| f_3 \right\|_2^2 \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{64}(3-x^2)^2\,\mathrm{d}\,x + 2\pi\int_1^3 \frac{1}{256}(3-x)^4\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{32}\int_0^1 (9-2x^2+x^4)\,\mathrm{d}\,u + \frac{\pi}{128}\int_0^2 u^4\,\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{11}{40}\pi
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 7. نتأمّل التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$. باستخدام نظريّة الرواسب احسب في حالة α من $\mathbb{R}_+^*$ التكامل

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}\,x$$

ثُمَّ احسب تحويل فورييه $\hat{f}$. واستنتج قيمة التكامل $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^4)^2}$.

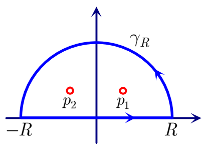
الحل

لنتأمّل التابع الميرومورفي

$$h : z \mapsto h(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{1+z^4}$$

الذي يقبل في نصف المستوي $\mathbb{Q}_0 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$، قطبين بسيطين فقط هما

$$p_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad p_2 = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \,.$$



بمُكاملة التابع h على المنحني Γ_R المكوّن من المجال $[-R, R]$ متبوعاً بنصف الدائرة γ_R التي مركزها 0 ونصف قطرها R والمحتواة في $\mathbb{Q}_0$. نستنتج استناداً إلى مبرهنة الرواسب أنّه في حالة $R > 1$ لدينا

$$\int_{\Gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(h, p_1) + \operatorname{Res}(h, p_2)\big)$$

ولكن

$$\int_{\Gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} h(z)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}\,z$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &\leq \pi R \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left|h(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \\ &\leq \pi R \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left|\frac{\exp(\mathrm{i}\,\alpha R e^{\mathrm{i}\theta})}{1+R^4 e^{4\mathrm{i}\theta}}\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1}\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كون $\alpha > 0$. وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

ولأنّ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{d}\,x = I(\alpha)$$

استنتجنا أنّ

$$I(\alpha) = 2\pi\,\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(h, p_1) + \operatorname{Res}(h, p_2)\big)$$

ولكن $\operatorname{Res}(h, p_k) = -\frac{1}{4} p_k e^{\mathrm{i}\alpha p_k}$ ، إذن

$$I(\alpha) = \frac{\pi e^{-\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

لمّا كان f زوجيّاً استنتجنا أنّ $\widehat{f}$ زوجيّ، لذلك يكفي أن نحسب $\widehat{f}(\xi)$ في حالة $\xi < 0$. ولكن نرى مباشرة أنّ $\forall \xi < 0,\ \hat{f}(\xi) = I(-2\pi\xi)$ ، ومن ثَمّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\pi e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|}}{\sqrt{2}}\left(\sin(\sqrt{2}\pi|\xi|) + \cos(\sqrt{2}\pi\ \xi)\right)$$

لأنّ طرفَي المساواة السابقة زوجيّان. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$J = \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^2 e^{-2\sqrt{2}\pi|\xi|}}{2}\left(\sin(\sqrt{2}\pi|\xi|) + \cos(\sqrt{2}\pi\ \xi)\right)^2 \mathrm{d}\,\xi \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-u}(1 + \sin u)\,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 + \operatorname{Im}\int_0^\infty e^{(-1+\mathrm{i})u}\,\mathrm{d}\,u\right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 + \operatorname{Im}\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right) = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 8. احسب تحويل فورييه لكلٍّ من التابعين :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

الحل

لقد رأينا في التمرين 3. أنّ تحويل فورييه للتابع $x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{a}{a^2+x^2}$ هو $\xi \mapsto e^{-2\pi a|\xi|}$.

نثبّتُ فيما يلي العدد ξ في $\mathbb{R}$. إذا عرفنا في حالة $0 < a$ المقدار

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}{a^2+x^2} \mathrm{d}\, x$$

كان لدينا $F(a) = \dfrac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$. لنتأمّل إذن التابع لمتحوّلين :

$$h : \mathbb{R} \times \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{C}, h(x,a) = \frac{e^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}{a^2+x^2}$$

- مهما تكن a من $\left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[$ ، ينتمِ التابع $x \mapsto h(x,a)$ إلى $L^1(\mathbb{R})$.
- مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، يقبل التابع $a \mapsto h(x,a)$ الاشتقاق على $\left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[$ ، ويكن

$$\frac{\partial h}{\partial a}(x,a) = -\frac{2a e^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}{(a^2+x^2)^2}$$

- وإذا تنبّهنا أنّه في حالة $a > \dfrac{1}{2}$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{a^2+x^2} \leq \frac{4}{1+4x^2} \quad \text{و} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \frac{a}{a^2+x^2} \leq 2$$

استنتجنا أنّ التابع $x \mapsto g(x) = \dfrac{16}{1+4x^2}$ الذي ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\forall (x,a) \in \mathbb{R} \times \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial a}(x,a)\right| \leq g(x)$$

إذن يقبل التابع $a \mapsto F(a)$ الاشتقاق على $\left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[$ ، ويُعطى مشتقّه $F'(a)$ بالصيغة

$$F'(a) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{2a e^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}{(a^2+x^2)^2} \mathrm{d}\, x$$

ولكن $F(a) = (\pi / a) e^{-2\pi a|\xi|}$ إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall a > \frac{1}{2}, \quad -\int_{\mathbb{R}} \frac{2a e^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}{(a^2+x^2)^2} \mathrm{d}\, x = -\frac{\pi}{a^2}\big(1 + 2\pi a|\xi|\big) e^{-2\pi a|\xi|}$$

وبوجه خاص، في حالة $a = 1$، نجد

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\left(1+2\pi\left|\xi\right|\right)e^{-2\pi\left|\xi\right|}$$

ولمّا كان $g = Xf$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. استنتجنا أنّ $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \dfrac{\mathrm{i}}{2\pi}(\hat{f})'(\xi)$ ومنه

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(\xi) = -\,\mathrm{i}\,\pi^2 \xi e^{-2\pi\left|\xi\right|}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 9. نتأمّل التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. باستخدام نظريّة الرواسب احسب في حالة α من $\mathbb{R}_+^*$ التكامل $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\,\alpha x}\,\mathrm{d}\,x$. ثُمّ احسب تحويل فورييه $\hat{f}$. واستنتج تابعاً g من الصيغة $f^{[\beta]}$ يُحقّق $\hat{g} = g$.

الحل

في حالة α من $\mathbb{R}_+^*$، نتأمّل التابع الميرومورفي $h : z \mapsto h(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{\operatorname{ch} z}$. تمثل الجماعة $\left(\mathrm{i}\,\pi(k+1/2)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ أقطاب h وهي جميعاً بسيطةٌ. ومن بينها قطبان فقط يقعان في الشريط $\mathbb{S} = \left\{z : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi\right\}$، هما

$p_1 = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ و $p_2 = \frac{3\pi}{2}\mathrm{i}$.

نُكامل التابع h على طول المستطيل $\mathcal{R}$ الذي رؤوسه هي النقاط $A(-R)$ و $B(R)$ و $C(R+2\pi\,\mathrm{i})$ و $D(-R+2\pi\,\mathrm{i})$، فنجد اعتماداً على نظريّة الرواسب أنّ

$$\int_{\mathcal{R}} h(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}(h,p_1) + \operatorname{Res}(h,p_2)\right) \qquad ①$$

ولكن من جهة أولى لدينا

$$\left|\int_{[BC]} h(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq 2\pi \sup_{t\in[0,2\pi]}\left|\frac{2e^{\mathrm{i}\,\alpha(R+\mathrm{i}t)}e^{R+\mathrm{i}t}}{e^{2R+2\mathrm{i}t}+1}\right| \leq \frac{4\pi e^{R}}{e^{2R}-1}$$

و

$$\left|\int_{[DA]} h(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq 2\pi \sup_{t\in[0,2\pi]}\left|\frac{2e^{\mathrm{i}\,\alpha(-R+\mathrm{i}t)}e^{-R+\mathrm{i}t}}{e^{-2R+2\mathrm{i}t}+1}\right| \leq \frac{4\pi e^{-R}}{1-e^{-2R}}$$

وأخيراً،

$$\int_{[AB]} h(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}\,x$$

و

$$\int_{[DC]} h(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha(x+2\,\mathrm{i}\,\pi)}}{\operatorname{ch}(x+2\,\mathrm{i}\,\pi)}\,\mathrm{d}\,x = e^{-2\pi\alpha}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}\,x$$

إذن بجعل R تسعى إلى $+\infty$ نستنتج من ① أنّ

$$② \qquad (1-e^{-2\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(h,p_1)+\operatorname{Res}(h,p_2)\big)$$

ولكن

$$\operatorname{Res}(h,p_1) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha p_1}}{\operatorname{sh} p_1} = -\,\mathrm{i}\,e^{-\alpha\pi/2} \quad \text{و} \quad \operatorname{Res}(h,p_2) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha p_2}}{\operatorname{sh} p_2} = \mathrm{i}\,e^{-3\alpha\pi/2}$$

وبالعودة إلى ② نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}(1-e^{-2\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}\,x &= 2\pi(e^{-\alpha\pi/2}-e^{-3\alpha\pi/2})\\ &= 2\pi e^{-\alpha\pi/2}(1-e^{-\alpha\pi})\end{aligned}$$

ولأنّ $(1-e^{-2\pi\alpha}) = (1-e^{-\alpha\pi})(1+e^{-\alpha\pi})$ استنتجنا أنّ

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\frac{e^{-\alpha\pi/2}}{1+e^{-\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\alpha\pi/2)}$$

وبوجه خاص نجد أنّه في حالة $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ لدينا

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi^2\xi)} = \pi f^{[\pi^2]}(\xi)$$

ومنه، يكون لدينا

$$\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \widehat{f^{[\beta]}} = \frac{1}{\beta}\hat{f}^{[1/\beta]} = \frac{\pi}{\beta} f^{[\pi^2/\beta]}$$

وعلى وجه الخصوص، إذا اخترنا $g = f^{[\pi]}$ ، كان $\hat{g} = g$. ■

التمرين 10. التابع f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ويُحقّق

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^4}$$

احسب $B = f'(0)$ و $A = \int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}\,t$

الحل

في الحقيقة، نلاحظ أوّلاً أنّ $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$، وهذا يعني أنّ المقدار $\hat{\hat{f}}$ يتفق مع $\overleftarrow{f}$ عند نقاط استمراره، ولكنه مستمرٌّ فرضاً. إذن $\hat{\hat{f}} = \overleftarrow{f}$. سنكتب فما يأتي g دلالة على التابع $\hat{f}$.

- نستنتج، من مبرهنة الاشتقاق، ومن كون التابعين g و Xg ينتميان إلى $L^1(\mathbb{R})$، أنّ $\hat{g}$ ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ $(\hat{g})' = -2\pi\,\mathrm{i}\,\mathcal{F}(Xg)$. ولأنّ $\hat{g} = \overleftarrow{f}$ استنتجنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ $f' = 2\pi\,\mathrm{i}\,\overleftarrow{\mathcal{F}(X\hat{f})}$. وبوجه خاص

$$B = f'(0) = 2\pi\,\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\pi^2$$

لأنّ $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

- من جهة أخرى، لمّا كان g و g' ينتميان إلى $L^1(\mathbb{R})$، استنتجنا أنّ

$$\widehat{g'} = 2\pi\,\mathrm{i}\,X\hat{g} = -2\pi\,\mathrm{i}\,\overleftarrow{(Xf)}$$

ولمّا كان

$$g(x) = \frac{x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\omega} + \frac{1}{x+\omega}\right) \quad \text{حيث} \quad \omega = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

استنتجنا بتحقّق مباشر أنّ التوابع g' و g'' و $g^{(3)}$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$، وهذا يقتضي أنّ $\widehat{g'}$ نفسه ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. ومنه نستنتج أنّ Xf ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. وعليه تقتضي المساواة $\widehat{g'} = -2\pi\,\mathrm{i}\,\overleftarrow{(Xf)}$ أنّ $g' = -2\pi\,\mathrm{i}\,\widehat{Xf}$ ، وبوجه خاص،

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}\,t = \widehat{Xf}(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\,g'(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 11. احسب المقدار $\int_{\mathbb{R}}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$. إذا علمتَ أنّ التابع f من $L^2(\mathbb{R})$ يُحقّق

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \frac{1 - \mathrm{i}\,\xi}{1 + \mathrm{i}\,\xi}$$

الحل

في الحقيقة، استناداً إلى متطابقة Bessel لدينا $\left\|f\right\|_2^2 = \left\|\hat{f}\right\|_2^2$ إذن

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t &= \int_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\,\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\mathrm{d}\,\xi\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}\mathrm{d}\,\xi\end{aligned}$$

ومن جهة، أخرى نعلم أنّه في حالة $0 \neq \xi$ لدينا

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}}{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}\right]_{x=-1}^{1}\\ &= \frac{e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} - e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}}{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}\end{aligned}$$

إذن

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}\mathrm{d}\,\xi = \left\|\mathbb{1}_{[-1,1]}\right\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,t = 2$$

وعليه

$$\int_{\mathbb{R}}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t = \pi$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 12. احسب المقدار $\int_{\mathbb{R}}\left|f * f'(t)\right|^2 \mathrm{d}\,t$. إذا علمتَ أنّ تحويل فورييه للتابع f يُحقّق المساواة $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{1 + |\xi|^3}$.

الحل

لنضع $\hat{f} = g$. نستنتج، من مبرهنة الاشتقاق، ومن كون التابعين g و Xg ينتميان إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، أنّ $\hat{g}$ ينتمي إلى الصف C^1 ، وأنّ $(\hat{g})' = -2\pi\,\mathrm{i}\,\mathcal{F}(Xg)$. ولأنّ $\hat{g} = \overleftarrow{f}$ استنتجنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ $f' = 2\pi\,\mathrm{i}\,\overleftarrow{\mathcal{F}(X\hat{f})}$. كما نستنتج من كون $\hat{f}$ و $X\hat{f}$ ينتميان إلى $L^2(\mathbb{R})$ أنّ f و f' ينتميان أيضاً إلى $L^2(\mathbb{R})$.

من جهة أخرى، نتيقّن مباشرة أنّ g ينتمي إلى الصف C^2 ، وأنّ g و g' و g'' تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. وهذا يقتضي أنّ $\hat{g}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. ومنه $f \in L^1(\mathbb{R})$. وأخيراً، نتيقّن أيضاً أنّ Xg ينتمي إلى الصف C^2 ، وأنّ Xg و $(Xg)'$ و $(Xg)''$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. وهذا يقتضي أنّ $\widehat{Xg}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. ومنه $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

لمّا كان $f \in L^1(\mathbb{R})$ و $f' \in L^2(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ $f * f' \in L^2(\mathbb{R})$. وهذا يقتضي أنّ

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f * f'(t) \right|^2 \mathrm{d}\,t = \left\| f * f' \right\|_2^2 = \left\| \widehat{f * f'} \right\|_2^2$$

ولمّا كان $f' \in L^1(\mathbb{R})$ أيضاً، استنتجنا أنّ $f * f' \in L^1(\mathbb{R})$ ومن ثَمّ

$$\widehat{f * f'} = \hat{f} \cdot \widehat{f'} = \hat{f} \cdot 2\pi\,\mathrm{i}\,X\hat{f} = 2\pi\,\mathrm{i}\,X(\hat{f})^2$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left| f * f'(t) \right|^2 \mathrm{d}\,t &= \left\| \widehat{f * f'} \right\|_2^2 = 4\pi^2 \left\| X \cdot (\hat{f})^2 \right\|_2^2 \\
&= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^4 \mathrm{d}\,\xi \\
&= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1 + |\,\xi\,|^3)^4} \mathrm{d}\,\xi \\
&= 8\pi^2 \int_0^\infty \frac{\xi^2}{(1 + \xi^3)^4} \mathrm{d}\,\xi \\
&= \frac{8\pi^2}{3} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^4} \mathrm{d}\,u = \frac{8\pi^2}{9}
\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 13. استفد من تحويلات فورييه لتحسب التكامل

$$I=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x$$

الحل

لنتذكّر أنّه في حالة التابع $f=\mathbb{1}_{[-1,1]}$ لدينا

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^*,\quad \hat{f}\big(\xi\big)=\int_{-1}^{1}e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$$

وكذلك، في حالة التابع $x\mapsto g(x)=e^{-|x|}$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\forall\xi\in\mathbb{R},\quad \hat{g}(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi-|x|}\,\mathrm{d}\,x\\&=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{\infty}e^{-(1+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)x}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{1-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}+\frac{1}{1+2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}\\&=\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}\end{aligned}$$

وعليه، بالاستفادة من مطابقة Plancherel-Parseval ، نجد

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(1+4\pi^2\xi^2)}\,\mathrm{d}\,\xi\\&=\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\overline{\hat{f}(\xi)}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi=\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}\,\mathrm{d}\,x=\pi\int_{0}^{1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x\\&=\pi(1-e^{-1})\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 14. أثبت أنّه يوجد تابعان f و g من $\mathcal{S}$ يُحقّقان

$$f \neq 0 \text{ و } g \neq 0 \text{ و } f * g = 0$$

الحل

لنتأمّل التابع φ من $\mathfrak{D}$ المعرّف بالصيغة

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \mathbb{1}_{]-1,1[}(x) \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

الذي يُحقّق $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1,1]$. نعرّف إذن $f = \hat{\varphi}$ و $g = \widehat{\tau_3(\varphi)}$ ، فيكون $f \neq 0$ و $g \neq 0$ لأنّ $\varphi \neq 0$. ويكون

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f * g}\big(\xi\big) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(-3-\xi) = 0$$

إذن $f * g = 0$.

وعليه، تحوي الحلقة $\big(\mathcal{S}, +, *\big)$ قواسم للصفر. ■

التمرين 15. ليكن f من $L^1(\mathbb{R})$ ، أثبت أنّه لا يمكن أن تكون المجموعتان $\operatorname{supp}(f)$ و $\operatorname{supp}(\hat{f})$ مجموعتين متراصّتين وغير خاليتين في آن معاً. فلا يمكن لإشارة أن تكون محدودة في الزمن والتواتر في آن معاً.

الحل

لنفترض جدلاً وجود تابعٍ f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، ويُحقّق :

$$\operatorname{supp}(f) \subset [-A, A] \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-B, B]$$

عندئذ نتأمّل في حالة z من $\mathbb{C}$ المقدار

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} f(x)\, \mathrm{d}\, x$$

في الحقيقة، لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k f(x) z^k\right| \leq e^{A|z|}\big|f(x)\big|$$

ولكنّ التابع f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، استنتجنا اعتماداً على مبرهنة التقارب للوبيغ ما يأتي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Big(\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) \,\mathrm{d}\, x \Big) z^k$$

وهذا يبرهن أنّ التابع F تابعٌ تحليلي في $\mathbb{C}$. ولكن

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = F(2\pi \,\mathrm{i}\, \xi)$$

ولأنّ $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-B, B]$ ، استنتجنا أنّ التابع F ينعدم على $\{2\pi \,\mathrm{i}\, \xi : \xi > B\}$ ، إذن أصفار F ليست معزولة، وهذا يقتضي أنّ $F = 0$ ، ومن ثَمّ $\hat{f} = 0$ و $f = 0$. وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 16. أثبت أنّه **لا** يوجد في $L^1(\mathbb{R})$ تابعٌ $\mathbb{1}$ يُحقّق

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad f * \mathbb{1} = f$$

وأثبت أنّ النتيجة نفسها تبقى صحيحة إذا استبدلنا الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ بالفضاء $L^1(\mathbb{R})$ فيما سبق.

الحل

في الحقيقة، إذا افترضنا وجود مثل هذا التابع $\mathbb{1}$ في $L^1(\mathbb{R})$ اختبرنا المساواة المشار إليها على التابع f من S المعرّف بالصيغة

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

فنستنتج من كون $\hat{f} = f$ أنّ

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ (\widehat{\mathbb{1}}(\xi) - 1) e^{-\pi \xi^2} = 0$$

وهذا يقتضي

أنّ $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ \widehat{\mathbb{1}}(\xi) = 1$

وهذا يناقض ضرورة انتماء $\widehat{\mathbb{1}}$ إلى $C_0(\mathbb{R})$.

ومن جهة أخرى لمّا كان جداء تلافّ تابعين من $L^2(\mathbb{R})$ تابعاً من $C_0(\mathbb{R})$ ، استنتجنا أنّ تحقّق الخاصّة المطلوبة في $L^2(\mathbb{R})$ يقتضي صحة الاحتواء $L^2(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ وهذا خُلفٌ واضحٌ. ■

التمرين 17. ليكن f عنصراً من $\mathcal{S}$، يُحقّق $\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2\,\mathrm{d}\,x=1$.

1. أثبت أنّ $\int_{\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|^2\,\mathrm{d}\,x=4\pi^2\int_{\mathbb{R}}\xi^2\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\,\mathrm{d}\,\xi$.
2. احسب المقدار $\mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}}x\overline{f(x)}\,f'(x)\,\mathrm{d}\,x\Big)$.
3. استنتج مما سبق أنّ

$$\frac{1}{16\pi^2}\le\Big(\int_{\mathbb{R}}x^2\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}\,x\Big)\times\Big(\int_{\mathbb{R}}\xi^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\,\xi\Big)$$

4. ليكن Ψ عنصراً من $\mathcal{S}$، يُحقّق $\int_{\mathbb{R}}\left|\Psi(x)\right|^2\,\mathrm{d}\,x=1$. نعرّف المقادير

$$\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}}x\left|\Psi(x)\right|^2\mathrm{d}\,x,\quad \mathrm{var}(X)=\int_{\mathbb{R}}\big(x-\mathbb{E}(X)\big)^2\left|\Psi(x)\right|^2\mathrm{d}\,x,$$
$$\mathbb{E}(P)=\int_{\mathbb{R}}p\left|\hat{\Psi}(p)\right|^2\mathrm{d}\,p,\quad \mathrm{var}(P)=\int_{\mathbb{R}}\big(p-\mathbb{E}(P)\big)^2\left|\hat{\Psi}(p)\right|^2\mathrm{d}\,p,$$

أثبت صحة المتراجحة

$$\frac{1}{16\pi^2}\le\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(P)$$

التي تعبّر عن مبدأ هايزنبرغ Heisenberg في الارتياب، المعروف في ميكانيك الكم.

الحل

1. في الحقيقة، نعلم أنّ $\widehat{f'}=2\pi\,\mathrm{i}(X\hat{f})$. واستناداً إلى مطابقة Bessel نجد

$$\left\|f'\right\|_2^2=\left\|\widehat{f'}\right\|_2^2=\left\|2\pi\,\mathrm{i}\,X\hat{f}\right\|_2^2=4\pi^2\left\|X\hat{f}\right\|_2^2$$

وهي المساواة المطلوبة.

2. من جهة أخرى، بإجراء مُكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_A^B x\,\mathrm{Re}\Big(\overline{f(x)}\,f'(x)\Big)\mathrm{d}\,x=\left[\frac{x}{2}\left|f(x)\right|^2\right]_A^B-\frac{1}{2}\int_A^B\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}\,x$$

وبالاستفادة من كون f ينتمي إلى $\mathcal{S}$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{|t|\to\infty}t\left|f(t)\right|^2=0$ ، ومن ثَمّ

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{xf(x)}\,f'(x)\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}\,x$$

أو $\left\|f\right\|_2^2=-2\,\mathrm{Re}\big(\left\langle Xf,f'\right\rangle\big)$.

3. وبالاستفادة من متراجحة Cauchy-Schwarz ومن الفرْض، يمكننا أن نكتب

$$1 = -2\,\mathrm{Re}\left(\left\langle Xf, f'\right\rangle\right) \leq 2\left|\left\langle Xf, f'\right\rangle\right| \leq 2\left\|Xf\right\|_2 \left\|f'\right\|_2$$

فإذا استفدنا من نتيجة 1. استنتجنا أنّ $\frac{1}{4\pi} \leq \left\|Xf\right\|_2 \left\|X\hat{f}\right\|_2$. وهي المتراجحة المطلوبة.

ملاحظة. وإذا وقعت المساواة، استنتجنا أنّه يوجد عددٌ $\lambda > 0$ يُحقّق $f' = -2\lambda Xf$ ، وهذا يقتضي أنّ $f(x) = ke^{-\lambda x^2}$ ، والشرط $\left\|f\right\|_2 = 1$ يقتضي أنّ $f(x) = \sqrt[4]{2\lambda/\pi}\; e^{-\lambda x^2}$. أمّا العكس، فهو صحيح وضوحاً.

4. نعلم أنّه في حالة a و b من $\mathbb{R}$، و Ψ من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{[2\pi\,\mathrm{i}\,a]}\tau_b(\Psi)\right) = \tau_a\left(\mathcal{E}^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,b]}\hat{\Psi}\right)$$

لنطبّق إذن المتراجحة السابقة على التابع $f = \mathcal{E}^{[2\pi\,\mathrm{i}\,a]}\tau_b(\Psi)$. نلاحظ مباشرة أنّ الشرط $\left\|\Psi\right\|_2 = 1$ يقتضي أنّ $\left\|f\right\|_2 = 1$ ، وأنّ

$$\left\|Xf\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \left|\Psi(x-b)\right|^2 \mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} (x+b)^2 \left|\Psi(x)\right|^2 \mathrm{d}\,x$$
$$\left\|X\hat{f}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{\Psi}(\xi-a)\right|^2 \mathrm{d}\,\xi = \int_{\mathbb{R}} (\xi+a)^2 \left|\hat{\Psi}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\,\xi$$

وعليه، مهما تكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يكن

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \int_{\mathbb{R}} (x+b)^2 \left|\Psi(x)\right|^2 \mathrm{d}\,x \times \int_{\mathbb{R}} (\xi+a)^2 \left|\hat{\Psi}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\,\xi$$

فإذا اخترنا $b = -\mathbb{E}(X)$ و $a = -\mathbb{E}(P)$ تحقّقت المتراجحة

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(P)$$

وهي صيغة من صيغ مبدأ Heisenberg في الارتياب. ∎

التمرين 18. ترشيح. لتكن Ω من $\mathbb{R}_+^*$. نرمز بالرمز L_Ω إلى فضاء التوابع من $L^2(\mathbb{R})$ التي طيفها محدود بالعدد Ω أي

$$L_\Omega = \left\{g \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(\hat{g}) \subset [-\Omega, \Omega]\right\}$$

ليكن f من $L^2(\mathbb{R})$. عيّن f_Ω أقرب تابعٍ من L_Ω إلى f بمعنى النظيم $\|\cdot\|_2$. أي

$$f_\Omega \in L_\Omega \quad \text{و} \quad \forall g \in L_\Omega,\quad \|f - f_\Omega\|_2 \leq \|f - g\|_2$$

الحل

في الحقيقة، لدينا في حالة f من $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ و g من L_Ω ما يلي

$$\begin{aligned}\left\|f-g\right\|_2^2 &= \left\|\hat{f}-\hat{g}\right\|_2^2 = \left\|\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}-\hat{g}+\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\|_2^2\\ &= \left\|\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}-\hat{g}\right\|_2^2+\left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\|_2^2+2\operatorname{Re}\underbrace{\left\langle \hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}-\hat{g},\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\rangle}_{①}\\ &= \left\|\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}-\hat{g}\right\|_2^2+\left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\|_2^2\end{aligned}$$

ولقد استفدنا من كون $\operatorname{supp}(\hat{g})\subset[-\Omega,\Omega]$ لنستنتج أنّ الجداء السلمّي ① معدوم. وهكذا نرى أنّ

$$\forall g\in L_\Omega,\quad \left\|f-g\right\|_2 \geq \left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\|_2$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان $\hat{g}=\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}$.

ولكن نعلم أنّ التابع G_Ω من $L^2(\mathbb{R})$ المعرّف بالصيغة

$$G_\Omega(x)=\frac{\sin(2\pi\Omega x)}{\pi x}$$

يُحقّق $\widehat{G_\Omega}=\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}$، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\hat{g}=\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]} &\Leftrightarrow \hat{g}=\hat{f}\widehat{G_\Omega}\\ &\Leftrightarrow g=f*G_\Omega\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا f_Ω بالصيغة $f*G_\Omega$، كان $f_\Omega\in L_\Omega$ لأنّ $\widehat{f_\Omega}=\hat{f}\mathbb{1}_{[-\Omega,\Omega]}$، وكان

$$\begin{aligned}\forall g\in L_\Omega,\quad \left\|f-g\right\|_2 &\geq \left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right\|_2\\ &= \left\|\hat{f}-\widehat{f_\Omega}\right\|_2=\left\|f-f_\Omega\right\|_2\end{aligned}$$

وعليه يكون $f_\Omega=f*G_\Omega$ أقرب عنصر من L_Ω إلى التابع f بمعنى النظيم $\left\|\cdot\right\|_2$. ونذكّر أنّ

$$f_\Omega(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-t)\frac{\sin 2\pi\Omega t}{\pi t}\,\mathrm{d}\,t$$

وهو الحلّ المطلوب. ■

التمرين 19. ليكن f عنصراً من $\mathcal{S}$. وليكن T عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. في حالة x من $\mathbb{R}$ نضع

$$F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)$$

1. أثبت أنّ F هو تابعٌ دوري يقبل العدد T دوراً، وأنّه ينتمي إلى الصف C^∞.
2. انشر F بمتسلسلة فورييه، واستنتج علاقة Poisson التالية:

$$\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)\exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,nx}{T}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)$$

3. اكتب علاقة Poisson في حالة التابع $f:x\mapsto f(x)=e^{-\pi x^2}$.
4. ليكن f تابعاً من $\mathfrak{D}$ حامله $\operatorname{supp}(f)$ محتوى في $[0,a]$. أثبت أنّه مهما تكن T أكبر تماماً a، يمكن استرجاع f انطلاقاً من $\left(\hat{f}(n/T)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

الحل

1. لنعرّف في حالة n من $\mathbb{Z}$ التابع f_n بالصيغة:

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \ f_n(x)=f(x+nT)$$

ولنثبتْ أنّ المتسلسلتين $\sum f_n$ و $\sum f_{-n}$ متقاربتان، وأنّ مجموعيهما ينتميان إلى الصف C^1، وأخيراً أنّ $\sum f_n'=\left(\sum f_n\right)'$ و $\sum f_{-n}'=\left(\sum f_{-n}\right)'$.

لنذكّر، في حالة f من $\mathcal{S}$، بالرمز

$$p_{p,q}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^p f^{(q)}(x)\right|=\|X^p f^{(q)}\|_\infty$$

إنّ التقارب البسيط للمتسلسلتين $\sum f_n$ و $\sum f_{-n}$ واضحٌ بسبب المتراجحة

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f_n(x)\right|\le\frac{p_{0,0}(f)+p_{2,0}(f)}{1+(x+nT)^2}$$

وهذا يتيح لنا تعريف التابع

$$F=\sum_{n\ge0} f_n+\sum_{n\ge1} f_{-n}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$$

على كامل $\mathbb{R}$. ونتيقّن مباشرة أنّ التابع F يقبل العدد T دوراً.

لنتأمّل عدداً كيفيّاً A من $\mathbb{R}_+^*$. ولنضع $n_0 = 1 + \left\lfloor \frac{A}{T} \right\rfloor$.

- أيّاً كانت n ، ينتمِ التابع f_n إلى الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$.
- بوضع $M = p_{0,1}(f) + p_{2,1}(f)$ ، نجد

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f'(x + nT) \right| \leq \frac{p_{0,1}(f) + p_{2,1}(f)}{1 + (x + nT)^2}$$

وعليه، في حالة n من $\mathbb{Z}$ تُحقّق $|n| > n_0$ يكون لدينا

$$\sup_{x \in [-A,A]} \left| f_n'(x) \right| \leq \frac{M}{1 + (|n|\, T - A)^2}$$

وهذا يبرهن تقارب المتسلسلتين $\sum_{n \geq n_0} f_n'$ و $\sum_{n \geq n_0} f_{-n}'$ بالنظيم على المجال $[-A, A]$. ومنه نستنتج أنّ المجموعين $\sum_{n \geq n_0} f_n$ و $\sum_{n \geq n_0} f_{-n}$ ينتميان إلى الصف C^1 على المجال $[-A, A]$ ، وأنّ

$$\left(\sum_{n \geq n_0} f_{-n} \right)' = \sum_{n \geq n_0} f_{-n}' \quad \text{و} \quad \left(\sum_{n \geq n_0} f_n \right)' = \sum_{n \geq n_0} f_n'$$

ولأنّ التابعين $\sum_{n=0}^{n_0-1} f_n$ و $\sum_{n=1}^{n_0-1} f_{-n}$ ينتميان وضوحاً إلى الصف C^1 على $[-A, A]$ ، استنتجنا أنّ التابعين $\sum_{n \geq 0} f_n$ و $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ ينتميان إلى الصف C^1 على $[-A, A]$ ، وأنّ

$$\left(\sum_{n \geq 0} f_n \right)' = \sum_{n \geq 0} f_n'$$

و

$$\left(\sum_{n \geq 1} f_{-n} \right)' = \sum_{n \geq 1} f_{-n}'$$

وأخيراً، لأنّ A عددٌ كيفي، استنتجنا أنّ التابعين $\sum_{n \geq 0} f_n$ و $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ ينتميان إلى الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$ ، وتتحقّق المساواتان السابقتان على $\mathbb{R}$. نستنتج إذن أنّ F يقبل مشتقاً مستمرّاً على كامل $\mathbb{R}$ ، وأنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + nT)$$

لتكن k من $\mathbb{N}$. بتطبيق ما أثبتناه على التابع $f^{(k)}$ الذي ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{S}$ ، نستنتج أنّ التابع

$$x \mapsto F_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(k)}(x+nT)$$

ينتمي إلى الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$ ، وأنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(k+1)}(x+nT) = F_{k+1}(x)$$

وهذا يُثبتُ أنّ F ينتمي إلى C^∞ على $\mathbb{R}$ وأنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\quad F^{(k)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(k)}(x+nT)$$

2. لمّا كان F تابعاً دوريّاً، يقبل العدد T دوراً، وينتمي إلى الصف C^∞ استنتجنا أنّ متسلسلة فورييه للتابع F متقاربة، ومجموعها يساوي F . إذن

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(F) e^{2\pi \mathrm{i} nx/T}$$

ولكن، في حالة n من $\mathbb{Z}$ ، لدينا

$$C_n(F) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t) e^{-2\pi \mathrm{i} nt/T}\,\mathrm{d}t$$

ولأنّ المتسلسلة التي تعرّف F متقاربة بانتظام على المجال $[0,T]$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} C_n(F) &= \frac{1}{T}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^T f(t+pT) e^{-2\pi \mathrm{i} nt/T}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{pT}^{(p+1)T} f(u) e^{-2\pi \mathrm{i} nu/T}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi \mathrm{i} nu/T}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا علاقة بواسون الآتية

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi \mathrm{i} nx/T}$$

وذلك في حالة f من $\mathcal{S}$ و T من $\mathbb{R}_+^*$.

3. في حال التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-\pi x^2}$ من $\mathcal{S}$، لدينا

$$\forall \xi\in\mathbb{R},\quad \widehat{f}(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$$

ومن ثَمَّ،

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+nT)^2}=\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{T^2}+\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,nx}{T}\right)$$

وبوجه خاص، بوضع $x=0$ و $u=T^2$ نجد

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 u}=\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/u}$$

يسمّى التابع

$$\vartheta:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, \vartheta(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi u}$$

تابع جاكوبي، ولقد أثبتنا آنفاً أنّ هذا التابع يُحقّق المعادلة التابعيّة

$$\forall u\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \vartheta(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}\vartheta\left(\frac{1}{u}\right).$$

وبالمثل، استناداً إلى نتيجة التمرين 10 نجد أيضاً أنّ التابع

$$\Psi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ \ \Psi(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi n u)}$$

يحقّق أيضاً المعادلة التابعية

$$\forall u\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \Psi(u)=\frac{1}{u}\Psi\left(\frac{1}{u}\right)$$

4. ليكن f تابعاً من $\mathfrak{D}$ حامله $\mathrm{supp}(f)$ محتوى في $[0,a]$. وليكن T أكبر تماماً a، عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$\forall x\in[0,a],\qquad f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)$$

واستناداً إلى علاقة بواسون يكون لدينا

$$\forall x\in[0,a],\qquad f(x)=\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,nx/T}$$

إذن يمكن في هذه الحالة استرجاع f انطلاقاً من $\left(\hat{f}(n/T)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 20. ليكن f عنصراً من $\mathcal{S}$. ولنفترض أنّ $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\nu_0, \nu_0]$.

1. اتبع أسلوب التمرين السابق لتثبتَ أنّه في حالة $\nu \geq 2\nu_0$ لدينا

$$\forall x \in \left[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right], \quad \hat{f}(x) = \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\nu}\right)\exp\left(-\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,nx}{\nu}\right)$$

2. مبرهنة Shannon. استنتج أنّه في حالة $T \leq \dfrac{1}{2\nu_0}$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\frac{\sin\omega(x-nT)}{\omega(x-nT)}$$

وقد عرّفنا $\omega = \dfrac{\pi}{T}$.

الحل

1. أثبتنا في التمرين السابق علاقة بواسون التي تنصّ على أنّه في حالة تابعٍ g من $\mathcal{S}$، وعددٍ موجبٍ ν، لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x+n\nu) = \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(\frac{n}{\nu}\right)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,nx/\nu}$$

فإذا طبّقنا هذه النتيجة على التابع $g = \hat{f}$ في حالة f من $\mathcal{S}$، نجد

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x+n\nu) = \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{f}}\left(\frac{n}{\nu}\right)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,nx/\nu}$$

ولكن $\hat{\hat{f}} = \overleftarrow{f}$ إذن

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x+n\nu) &= \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(-\frac{n}{\nu}\right)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,nx/\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\nu}\right)e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,nx/\nu}\end{aligned}$$

نفترض أنّ $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\nu_0, \nu_0]$، وأنّ $\nu \geq 2\nu_0$ عندئذ

$$\forall x \in \left[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right], \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x+n\nu) = \hat{f}(x)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \left[-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right],\quad \hat{f}(x) = \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\nu}\right)e^{-2\pi\,\mathrm{i}nx/\nu}$$

2. نستنتج إذن من المساواة السابقة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \hat{f}(x) = \frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\nu}\right)e^{-2\pi\,\mathrm{i}nx/\nu}\,\mathbb{1}_{\left[-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right]}(x)$$

ولكن إذا عرّفنا

$$\varphi_n = \frac{1}{\nu}f\left(\frac{n}{\nu}\right)\mathbb{1}_{\left[-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right]}\mathcal{E}^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,n/\nu]}$$

كان

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad \left\|\varphi_n\right\|_1 = \left|f\left(\frac{n}{\nu}\right)\right| \leq \frac{M}{\nu^2+n^2}$$

حيث $M = \nu^2(p_{0,0}(f)+p_{2,0}(f))$. وهذا يُثبتُ أنّ المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_n$ متقاربة في $L^1(\mathbb{R})$ لتقاربها بالنظيم. ولأنّها متقاربة ببساطة من التابع $\hat{f}$ استنتجنا أنّه في $L^1(\mathbb{R})$ لدينا

$$\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_n$$

ومن ثَمّ يكون لدينا $\hat{\hat{f}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi_n}$ في $C_0(\mathbb{R})$ ، أو $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overleftarrow{\hat{\varphi}_n}$ ، وهذا التقارب منتظم.

ولكن

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_n(x) &= \frac{1}{\nu}f\left(\frac{n}{\nu}\right)\mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,n/\nu]}\mathbb{1}_{\left[-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right]}\right)(x)\\ &= f\left(\frac{n}{\nu}\right)\frac{\sin\pi\nu(x+n/\nu)}{\pi\nu(x+n/\nu)}\end{aligned}$$

إذن

$$\overleftarrow{\hat{\varphi}_n}(x) = f\left(\frac{n}{\nu}\right)\frac{\sin\pi\nu(x-n/\nu)}{\pi\nu(x-n/\nu)}$$

إذن نستنتج من المساواة $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overleftarrow{\hat{\varphi}_n}$ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\nu}\right)\frac{\sin\pi\nu(x-n/\nu)}{\pi\nu(x-n/\nu)}$$

وإذا عرّفنا

$$\omega = \frac{\pi}{T} = \pi\nu \quad \text{و} \quad T = \frac{1}{\nu}$$

استنتجنا أنّه في حالة $T \leq \dfrac{1}{2\nu_0}$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\frac{\sin \omega(x - nT)}{\omega(x - nT)}$$

وهي مبرهنة Shannon. ■

التمرين 21. نعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}$، **تابع هرميت** Hermit من المرتبة n بالصيغة

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(e^{-2\pi x^2})^{(n)} e^{\pi x^2}$$

1. أثبت أنّ $x \mapsto H_n(x) = e^{\pi x^2} h_n(x)$ هو تابعٌ كثير الحدود من الدرجة n. واستنتج أنّ h_n عنصرٌ من $\mathcal{S}$.
2. أثبت أنّه، في حالة n من $\mathbb{N}$ و x من $\mathbb{R}$، لدينا
$$h_n'(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x) \qquad (1)$$
3. أثبت أنّه، في حالة n من $\mathbb{N}$ و x من $\mathbb{R}$، لدينا
$$h_n'(x) + 2\pi x h_n(x) = 4\pi h_{n-1}(x) \qquad (2)$$
مع الاصطلاح $h_{-1} = 0$. يمكنك أن تشتق n مرة التابع $x \mapsto -4\pi x e^{-2\pi x^2}$.
4. نعرّف $k_n = (\mathrm{i})^n \widehat{h_n}$ في حالة n من $\mathbb{N}$. أثبت أنّ المتتالية $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق العلاقة التدريجيّة (1).
5. استنتج أنّه مهما يكن n من $\mathbb{N}$ فلدينا $\widehat{h_n} = (-\mathrm{i})^n h_n$.
6. نعرّف على $\mathcal{S}$ المؤثر الخطّي
$$K : \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ f \mapsto f'' - 4\pi^2 X^2 f$$
أثبت أنّ h_n شعاعٌ ذاتي للمؤثر الخطّي K.
7. استنتج أنّ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جملة متعامدة في $L^2(\mathbb{R})$.

8. أثبت أنّه، في حالة n من $\mathbb{N}$، لدينا

$$(n+1)h_{n+1} = 4\pi h_{n-1} - 2h_n' \tag{3}$$

واستنتج أنّ

$$(n+1)\|h_{n+1}\|_2^2 = 4\pi\|h_n\|_2^2$$

ثُمّ احسب $\|h_n\|_2^2$.

9. ① نعرّف $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ بالصيغة $G(z) = e^{-2\pi z^2}$. أثبت أنّ

$$\forall (w,z) \in \mathbb{C}^2, \quad G(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(z)}{n!} w^n$$

② استنتج أنّه في حالة (x,t) من $\mathbb{R}^2$ لدينا

$$e^{-\pi x^2 - 2\pi t^2 + 4\pi xt} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) t^n \tag{4}$$

③ نثبّت t في $\mathbb{R}$، أثبت أيضاً تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} t^n h_n$ في $L^2(\mathbb{R})$.

④ ليكن f تابعاً ما من $L^2(\mathbb{R})$، ولنفترض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, h_n \rangle = 0$. استفدْ مما سبق لتثبتَ أنّ $f * h_0 = 0$، وأخيراً أنّ $f = 0$.

10. في هذا السؤال نعرّف $e_n = h_n / \|h_n\|_2$. ونتأمّل تابعاً f من $L^2(\mathbb{R})$.

① أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, f \rangle e_n$ متقاربة في $L^2(\mathbb{R})$، ليكن g مجموعها.

② أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle f - g, h_n \rangle = 0$. واستنتج من ذلك أنّ

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, f \rangle e_n \quad \text{و} \quad \hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^n \langle e_n, f \rangle e_n$$

11. نحتفظ برموز السؤال السابق. استفد من 6. لتثبتَ، في حالة f من $\mathcal{S}$، ما يلي

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |\langle e_n, f \rangle|^2$$
$$\geq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$$

طبّق المتراجحة السابقة على $f^{[a]}$ واختر a بأسلوب مُناسب لتستنتج إثباتاً جديداً لمتراجحة هايزنبرغ Heisenberg.

الحل

1. لنلاحظ أنّ $h_0(x) = e^{-\pi x^2}$، ومن ثمّ $H_0(X) = 1$. فهو كثير حدود من الدرجة 0 .

لنفترض إذن أنّ $x \mapsto H_n(x) = e^{\pi x^2} h_n(x)$ هو تابعٌ كثير الحدود من الدرجة n . عندئذ نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-2\pi x^2} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(e^{-2\pi x^2})^{(n)}$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{-2\pi x^2} H_n(x))' &= -(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(e^{-2\pi x^2})^{(n+1)} \\ &= -(n+1)e^{\pi x^2} h_{n+1}(x)\end{aligned}$$

وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\big(4\pi x H_n(x) - H_n'(x)\big)e^{-\pi x^2}$$

فإذا عرّفنا كثير الحدود H_{n+1} بالصيغة :

$$H_{n+1}(X) = \frac{4\pi}{n+1} X H_n(X) - \frac{1}{n+1} H_n'(X) \qquad (1)'$$

كانت $\deg H_{n+1} = 1 + \deg H_n = n+1$، وكان

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h_{n+1}(x) = H_{n+1}(x) e^{-\pi x^2}$$

وهذا يُثبتُ المطلوب. ويُثبتُ بوجه خاص أنّ $h_n \in \mathcal{S}$، لأنّ $(x \mapsto e^{-\pi x^2}) \in \mathcal{S}$.

2. لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-\pi x^2} h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(e^{-2\pi x^2})^{(n)}$$

إذن بالاشتقاق نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{-\pi x^2} h_n(x))' &= \frac{(-1)^n}{n!}(e^{-2\pi x^2})^{(n+1)} \\ &= -(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(e^{-2\pi x^2})^{(n+1)} \\ &= -(n+1)e^{-\pi x^2} h_{n+1}(x)\end{aligned}$$

وبالاصلاح نستنتج أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ و x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$h_n'(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x) \tag{1}$$

3. من جهة أخرى، نلاحظ أن

$$(e^{-2\pi x^2})' = -4\pi x e^{-2\pi x^2}$$

ومن ثَمّ في حالة n من $\mathbb{N}^*$ نجد باشتقاق طرفَي المساواة السابقة n مرّة أنّ

$$\begin{aligned}(e^{-2\pi x^2})^{(n+1)} &= -4\pi(xe^{-2\pi x^2})^{(n)}\\ &= -4\pi\Big(x(e^{-2\pi x^2})^{(n)} + n(e^{-2\pi x^2})^{(n-1)}\Big)\end{aligned}$$

وقد استفدنا من علاقة لايبنتز. تُكتبُ المساواة السابقة بالصيغة المُكافئة

$$(n+1)h_{n+1}(x) = 4\pi x\, h_n(x) - 4\pi h_{n-1}(x) \tag{2$'$}$$

وتبقى هذه المساواة صحيحة في حالة $n=0$ إذا اصطلحنا أنّ $h_{-1}=0$. وبالاستفادة من (1) نستنتج

$$h_n'(x) + 2\pi x h_n(x) = 4\pi h_{n-1}(x) \tag{2}$$

4. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ التابع k_n بالصيغة $k_n = (\mathrm{i})^n \widehat{h_n}$. نستنتج من العلاقة (1) أنّ

$$\widehat{h_n'} - 2\pi \widehat{Xh_n} = -(n+1)\widehat{h_{n+1}}$$

ولكن $\widehat{h_n'} = 2\pi\,\mathrm{i}\, X\widehat{h_n}$ وكذلك $(\widehat{h_n})' = -2\pi\,\mathrm{i}\,\widehat{Xh_n}$، إذن تُكتب العلاقة السابقة بالشكل

$$(\widehat{h_n})' - 2\pi X\widehat{h_n} = -(n+1)\,\mathrm{i}\,\widehat{h_{n+1}}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$k_n'(\xi) - 2\pi\xi k_n(\xi) = -(n+1)k_{n+1}(\xi)$$

فالمتتالية $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق العلاقة التدريجيّة (1) ذاتها.

5. نعلم أنّ $k_0 = h_0$. فإذا افترضنا في حالة n من $\mathbb{N}$، أنّ $h_n = k_n$ استنتجنا من (1) أنّ

$$(n+1)h_{n+1} = 2\pi X\, h_n - h_n' = 2\pi X\, k_n - k_n' = (n+1)k_n$$

إذن $h_{n+1} = k_{n+1}$. فنكون قد أثبتنا بالتدريج على n، أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ h_n = k_n$. أو

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \widehat{h_n} = (-\mathrm{i})^n h_n$$

6. نعرّف على $\mathcal{S}$ المؤثر الخطّي

$$K:\mathcal{S}\to\mathcal{S},\ f\mapsto f''-4\pi^2X^2f$$

نستنتج باشتقاق (1) أنّ

$$h_n''(x)-2\pi h_n(x)-2\pi x h_n'(x)=-(n+1)h_{n+1}'(x) \tag{3}$$

ولكن بناءً على (2) لدينا

$$h_{n+1}'(x)=4\pi h_n(x)-2\pi x\,h_{n+1}(x)$$

فإذا عوّضنا في العلاقة (3) استنتجنا أنّ

$$h_n''(x)-2\pi h_n(x)-2\pi x h_n'(x)=-(n+1)\big(4\pi h_n(x)-2\pi x h_{n+1}(x)\big)$$

أو

$$h_n''(x)-2\pi x\left(h_n'(x)+(n+1)h_{n+1}(x)\right)=-2\pi(2n+1)h_n(x)$$

وأخيراً إذا استفدنا من (1) مرّة ثانية استنتجنا أنّ

$$h_n''(x)-4\pi^2x^2h_n(x)=-2\pi(2n+1)h_n(x)$$

وهذا يُثبتُ أنّ h_n شعاعٌ ذاتي للمؤثر الخطّي K، يوافق القيمة الذاتيّة $-2\pi(2n+1)$.

7. لنبرهن أنّ التطبيق الخطّي K تطبيق هرمتي أي إنّ :

$$\forall(f,g)\in\mathcal{S}^2,\quad \left\langle K(f),g\right\rangle=\left\langle f,K(g)\right\rangle$$

وعندئذ نستنتج أنّ أشعته الذاتيّة الموافقة لقيم ذاتيّة مختلفة تكون متعامدة.

لنتأمّل عنصرين f و g من $\mathcal{S}$. ولنعرّف $\ell=\overline{f}'g-\overline{f}g'$. من الواضح أنّ ℓ ينتمي إلى $\mathcal{S}$. ومن ثَمّ $\lim_{|x|\to\infty}\ell(x)=0$، وهذا يقتضي أنّ $\int_{\mathbb{R}}\ell'(x)\,\mathrm{d}\,x=0$. ولكن

$$\ell'=\overline{f}''g-\overline{f}g''$$

إذن

$$\left\langle f'',g\right\rangle=\left\langle f,g''\right\rangle$$

ولكن من الواضح أنّ

$$\left\langle -4\pi^2X^2f,g\right\rangle=\left\langle f,-4\pi^2X^2g\right\rangle$$

فنستنتج بالطرح، أنّ

$$\left\langle K(f),g\right\rangle=\left\langle f,K(g)\right\rangle$$

وبوجه خاص، في حالة n و m من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} -2\pi(2n+1)\langle h_n, h_m\rangle &= \langle K(h_n), h_m\rangle \\ &= \langle h_n, K(h_m)\rangle \\ &= -2\pi(2m+1)\langle h_n, h_m\rangle \end{aligned}$$

أو

$$(n-m)\langle h_n, h_m\rangle = 0$$

إذن في حالة $n \neq m$ يكون لدينا $\langle h_n, h_m\rangle = 0$. وهذا يبرهن على أنّ الجملة $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جملة متعامدة في $L^2(\mathbb{R})$.

8. في حالة n من $\mathbb{N}$، نستنتج من جمع العلاقتين (1) و (2) طرفاً إلى طرف أنّ

$$(n+1)h_{n+1} = 4\pi h_{n-1} - 2h_n' \tag{4}$$

وعليه نستنتج من جهة أولى أنّ

$$(n+1)\|h_{n+1}\|_2^2 = 4\pi\cancel{\langle h_{n-1}, h_{n+1}\rangle} - 2\langle h_n', h_{n+1}\rangle = -2\langle h_n', h_{n+1}\rangle$$

ومن جهة ثانية

$$(n+1)\cancel{\langle h_{n+1}, h_{n-1}\rangle} = 4\pi\|h_{n-1}\|_2^2 - 2\langle h_n', h_{n-1}\rangle$$

وهذا يقتضي، بعد استبدال $n+1$ بالعدد n فيما سبق، أنّ

$$4\pi\|h_n\|_2^2 = 2\langle h_{n+1}', h_n\rangle = -2\langle h_n', h_{n+1}\rangle$$

وقد نتجت المساواة الأخيرة بعد إجراء مُكاملة بالتجزئة. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)\|h_{n+1}\|_2^2 = 4\pi\|h_n\|_2^2$$

نستنتج إذن أنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدّها العام

$$a_n = \frac{n!}{(4\pi)^n}\|h_n\|_2^2$$

ثابتة، ولأنّ $a_0 = \sqrt{2}/2$، استنتجنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|h_n\|_2^2 = \frac{(4\pi)^n}{n!\sqrt{2}}$$

9. ① نعرّف $G:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ بالصيغة $G(z)=e^{-2\pi z^2}$. يكفي أن نلاحظ أنّ G تابعٌ تحليلي في $\mathbb{C}$ لنستنتج أنّ

$$\forall (w,z)\in\mathbb{C}^2,\quad G(z+w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G^{(n)}(z)}{n!}w^n$$

② وبوجه خاص، في حالة (x,t) من $\mathbb{R}^2$، لدينا

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{-2\pi(x+t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h_n(x)e^{-\pi x^2}t^n$$

أو

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{-\pi x^2-2\pi t^2+4\pi xt}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(x)t^n \tag{5}$$

③ نثبّت t في $\mathbb{R}$، ونضع $S_n=\sum_{k=0}^{n}t^k h_k$. بالاستفادة من تعامد الجملة $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ في $L^2(\mathbb{R})$. نستنتج أنّه في حالة $n>m$ لدينا

$$\left\|S_m-S_n\right\|_2^2=\sum_{k=n+1}^{m}t^{2k}\left\|h_k\right\|_2^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(4\pi t^2)^k}{k!}$$

ولأنّ المتسلسلة $\sum\frac{(4\pi t^2)^k}{k!}$ متقاربة، استنتجنا من المساواة السابقة أنّ المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق شرط كوشي في $L^2(\mathbb{R})$، فهي متقاربة فيه لأنّه فضاء تامٌّ. ومنه تتقارب $\sum_{k=0}^{\infty}t^k h_k$ في $L^2(\mathbb{R})$. ولأنّ هذه المتسلسلة متقاربة ببساطة من التابع $x\mapsto e^{-\pi x^2-2\pi t^2+4\pi xt}$، استنتجنا أنها تتقارب منه في $L^2(\mathbb{R})$ أيضاً.

④ ليكن f تابعاً ما من $L^2(\mathbb{R})$. ولنفترض أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left\langle f,h_n\right\rangle=0$$

ليكن t من $\mathbb{R}$. عندئذ نستنتج من تقارب $\sum_{k=0}^{\infty}t^k h_k$ في $L^2(\mathbb{R})$ أنّ

$$\left\langle f,\sum_{n=0}^{\infty}t^n h_n\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left\langle f,h_n\right\rangle=0$$

وعليه نستنتج أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\pi x^2 - 2\pi t^2 + 4\pi x t} \, \mathrm{d}\, x = 0$$

أو

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\pi (x-2t)^2} \, \mathrm{d}\, x = 0$$

وأخيراً نستنتج أنّ $f * h_0 = 0$. وهذا يقتضي أنّ $\hat{f}\widehat{h_0} = 0, \ \lambda\text{-}a.e.$. ولأنّ $\widehat{h_0} = h_0$ لا ينعدم استنتجنا أنّ $\hat{f} = 0, \ \lambda\text{-}a.e.$ ، ومن ثَمّ $f = 0, \ \lambda\text{-}a.e.$.

10. في هذا السؤال نعرّف $e_n = h_n / \| h_n \|_2$. ونتأمّل تابعاً f من $L^2(\mathbb{R})$.

① نتأمّل، في حالة n من $\mathbb{N}$ ، المقدار $S_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k$. بملاحظة أنّ

$$(f - S_n) \perp e_k \text{ في حالة } 0 \leq k \leq n$$

نستنتج أنّ $(f - S_n) \perp S_n$ ومن ثَمّ

$$\| S_n \|_2^2 + \| f - S_n \|_2^2 = \| f \|_2^2$$

وبوجه خاص

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \| S_n \|_2^2 \leq \| f \|_2^2$$

ولكن، لأن الجملة $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متعامدة نظاميّة في $L^2(\mathbb{R})$ ، استنتجنا أنّ

$$\| S_n \|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \left| \langle e_k, f \rangle \right|^2$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left| \langle e_k, f \rangle \right|^2 \leq \| f \|_2^2$$

وهذا يُثبتُ تقارب المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \langle e_k, f \rangle \right|^2$ وأنّ مجموعها أصغر أو يساوي $\| f \|_2^2$.

من جهة أخرى، في حالة $m > n$ ، لدينا

$$\| S_m - S_n \|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \left| \langle e_k, f \rangle \right|^2$$

وعليه فإنّ تقارب المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\langle e_k, f\rangle\right|^2$ يقتضي أنّ المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق شرط كوشي في $L^2(\mathbb{R})$، فهي متقاربة من تابعٍ g ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R})$، لأنّ هذا الفضاء فضاءٌ تامٌّ. أي تتحقّق في $L^2(\mathbb{R})$ المساواة الآتية

$$g = \sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n, f\rangle e_n$$

② نستنتج، من تقارب المتسلسلة التي تعرّف g في $L^2\left(\mathbb{R}\right)$، أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن

$$\begin{aligned}\langle e_n, g\rangle &= \left\langle e_n, \sum_{k=0}^{\infty}\langle e_k, f\rangle e_k\right\rangle\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\langle e_k, f\rangle\langle e_n, e_k\rangle = \langle e_n, f\rangle\end{aligned}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left\langle f - g, h_n\right\rangle = 0$$

وعليه، عملاً بنتيجة 9، نستنتج أنّ $f = g$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle e_n, f\right\rangle e_n$$

ولأنّ تحويل فورييه تطبيق خطّي مستمرٌّ على $L^2(\mathbb{R})$، والمتسلسلة المذكورة آنفاً متقاربة في $L^2(\mathbb{R})$، استنتجنا أنّ

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n, f\rangle\hat{e}_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\langle e_n, f\rangle e_n$$

ولأنّ $\lim_{n\to\infty}\left\|f - S_n\right\|_2 = 0$ نستنتج أيضاً أنّ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\langle e_k, f\rangle\right|^2 = \left\|f\right\|_2^2$$

11. ليكن f من $\mathcal{S}$. عندئذ نستنتج بإجراء مُكاملة بالتجزئة أنّ

$$\langle f'', f\rangle = -\left\|f'\right\|_2^2 = -\left\|\hat{f}'\right\|_2^2 = -4\pi^2\left\|X\hat{f}\right\|_2^2$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\langle -4\pi^2 X^2 f, f\rangle = -4\pi^2\left\|f\right\|_2^2$$

إذن

$$\langle K(f), f\rangle = \left\langle f'' - 4\pi^2 X^2 f, f\right\rangle = -4\pi^2\left(\left\|Xf\right\|_2^2 + \left\|X\hat{f}\right\|_2^2\right)$$

لمّا كان $K(f)$ عنصراً من $\mathcal{S}$ استنتجنا أنّ المساواة التالية تتحقق في $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} K(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, K(f)\rangle e_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle K(e_n), f\rangle e_n = -2\pi\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\langle e_n, f\rangle e_n \end{aligned}$$

ولأنّ $f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n, f\rangle e_n$ ، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\langle K(f), f\rangle = -2\pi\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left|\langle e_n, f\rangle\right|^2$$

وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall f \in \mathcal{S},\quad \left\|Xf\right\|_2^2 + \left\|X\hat{f}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left|\langle e_n, f\rangle\right|^2$$

نستنتج بوجه خاص،

$$\forall f \in \mathcal{S},\quad \left\|Xf\right\|_2^2 + \left\|X\hat{f}\right\|_2^2 - \frac{1}{2\pi}\left\|f\right\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n\left|\langle e_n, f\rangle\right|^2 \geq 0$$

إذ تحدث المساواة إذا وفقط إذا كان

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \langle e_n, f\rangle = 0$$

وهذا يُكافئ أنّ $f = \lambda h_0$ حيث λ من $\mathbb{C}$.

لنتأمّل إذن عنصراً f من $\mathcal{S}$ ، وليكن a من $\mathbb{R}_+^*$. بتطبيق المتراجحة السابقة على $f^{[a]}$ نستنتج أنّ

$$\left\|Xf^{[a]}\right\|_2^2 + \frac{1}{a^2}\left\|X\hat{f}^{[1/a]}\right\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi}\left\|f^{[a]}\right\|_2^2$$

أو

$$\frac{1}{a^2}\left\|Xf\right\|_2^2 + a^2\left\|X\hat{f}\right\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi}\left\|f\right\|_2^2$$

فإذا اخترنا $a^2 = \|Xf\|_2 / \|X\hat{f}\|_2$ استنتجنا أنّ

$$2\|Xf\|_2\|X\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$$

أو

$$\frac{1}{16\pi^2}\|f\|_2^4 \leq \|Xf\|_2^2\|X\hat{f}\|_2^2$$

وهي متراجحة هايزنبرغ. وبذا يتمّ الإثبات.

تطبيق : لقد رأينا أنّ

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{-\pi x^2-2\pi t^2+4\pi xt} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)t^n$$

لتكن $\lambda > 0$. ولنتأمّل التابع $f_\lambda = h_0^{[\sqrt{\lambda}]}$ أي التابع المعطى بالعلاقة $f_\lambda(x) = e^{-\pi\lambda x^2}$. ولنضع

$$I(\lambda,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2-2\pi t^2+4\pi xt-\pi\lambda x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

عندئذ نلاحظ في حالة t من $\mathbb{R}$ ما يأتي

$$I(\lambda,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle h_n, f_\lambda\rangle t^n$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}
I(\lambda,t) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\pi(1+\lambda)\left(x^2 - \frac{4}{1+\lambda}xt + \frac{2}{1+\lambda}t^2\right)\right)\mathrm{d}\,x\\
&= \exp\left(\frac{2\pi(1-\lambda)}{1+\lambda}t^2\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\pi(1+\lambda)\left(x-\frac{2t}{\lambda+1}\right)^2\right)\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\exp\left(\frac{2\pi(1-\lambda)}{1+\lambda}t^2\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi v^2}\,\mathrm{d}\,v\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\exp\left(\frac{2\pi(1-\lambda)}{1+\lambda}t^2\right)
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle h_n, f_\lambda\right\rangle t^n &= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\exp\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}2\pi t^2\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi)^n}{n!\sqrt{1+\lambda}}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n t^{2n}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\begin{aligned}\forall m\in\mathbb{N},\quad \left\langle h_{2m+1}, f_\lambda\right\rangle &= 0\\ \left\langle h_{2m}, f_\lambda\right\rangle &= \frac{(2\pi)^m}{m!\sqrt{1+\lambda}}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^m\end{aligned}$$

وعليه

$$f_\lambda = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{(8\pi)^m m!}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^m h_{2m}$$

وهو منشور f_λ على أساس هيلبرت المتعامد $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $L^2(\mathbb{R})$. ■

التوزيعات (التوابع المعمّمة)

1. فضاءات توابع الاختبار

1-1. الفضاء $\mathfrak{D}$، فضاء التوابع من الصف C^∞ ذات الحوامل المتراصّة

نذكّر أنّه في حالة تابعٍ ما $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$، نعرّف **حامل التابع** f، بأنّه لصاقة مجموعة النقاط التي لا ينعدم عندها التابع f، أي

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\left\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\right\}}$$

وهذا التعريف يُكافئ قولنا إنّ $\mathbb{R}\backslash\operatorname{supp}(f)$ هي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة التي يكون مقصور f عليها معدوماً :

$$\mathbb{R}\backslash\operatorname{supp}(f) = \bigcup\left\{\mathcal{O} \text{ مجموعة مفتوحة و } : f_{|\mathcal{O}} = 0\right\}$$

ونرمز بالرمز $\mathfrak{D}$ إلى مجموعة التوابع التي تنتمي إلى الصف C^∞ وحواملها مجموعات متراصّة. وهي وضوحاً جبرٌ بالنسبة إلى عمليات جمع التوابع، وضربها، وضربها بعدد.

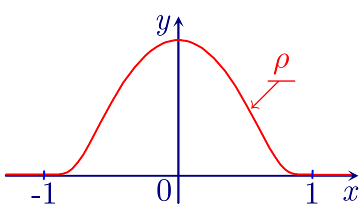
فمثلاً نعلم أنّ التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ \varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & : \ x > 0 \\ 0 & : \ x \leq 0 \end{cases}$$

ينتمي إلى الصف C^∞ وهو معدومٌ على $\mathbb{R}_-$. وعليه، ينتمي التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة

$$f(x) = \varphi(1-x)\varphi(x+1) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right) & : \ |x| < 1 \\ 0 & : \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

إلى الصف $\mathfrak{D}$، وهو تابعٌ موجبٌ من الصف C^∞، ويُحقّق $\operatorname{supp}(f) = [-1,1]$.



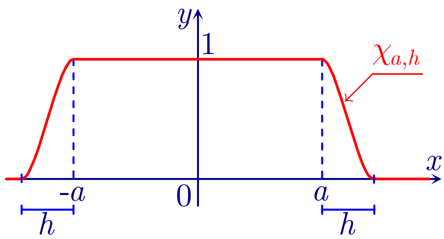
وبقسمة التابع f على الثابت $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$. نحصل على تابعٍ موجبٍ ρ ينتمي إلى $\mathfrak{D}$، وحامله هو المجال $[-1,1]$، ويُحقّق $\int \rho(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$.

وكذلك إذا تأمّلنا في حالة a و h من $\mathbb{R}_+^*$، التابع

$$\chi_{a,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_{a,h}(x) = \int_{-1+2(x-a)/h}^{1+2(x+a)/h} \rho(t)\,\mathrm{d}\,t$$

لاحظنا مباشرة أنّ $\chi_{a,h}$ يُحقّق الخواص الآتية

- $\chi_{a,h}$ ينتمي إلى الصف C^∞.
- وفي حالة $|x| \geq a+h$ لدينا $\chi_{a,h}(x) = 0$، إذن $\chi_{a,h} \in \mathfrak{D}$.
- وفي حالة $|x| \leq a$ لدينا $\chi_{a,h}(x) = 1$.
- وأخيراً لدينا $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \chi_{a,h}(x) \in [0,1]$.



لقد رأينا في بحث « مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل » أنّ الفضاء $\mathfrak{D}$ فضاء جزئي كثيفٌ في جميع الفضاءات $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ حيث p من $[1,+\infty[$. تُتَمِّم المبرهنة الآتية مجموعة الخواص السابقة.

1-1-1. **مبرهنة**. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمرّاً حاملُه متراص، أي $f \in C_c(\mathbb{R})$، عندئذ توجد متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathfrak{D}$ تتقارب بانتظام من التابع f. أي

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f - \varphi_n| = 0$$

الإثبات

نتأمّل تابعاً موجباً ρ ينتمي إلى $\mathfrak{D}$، حامله المجال $[-1,1]$، ويُحقّق $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$. ثمّ نعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}$، التابع ρ_n كما يأتي:

$$\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ \rho_n(x) = n\rho(nx)$$

وأخيراً نعرّف $\varphi_n = f * \rho_n$، في حالة n من $\mathbb{N}$. ونذكّر هنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

▪ لمّا كان $\operatorname{supp}(f)$ متراصّاً، وجدنا عدداً M يُحقّق $\operatorname{supp}(f) \subset [-M, M]$، ومن ثَمّ نتيقّن مباشرة أنّه في حالة $|x| > M+1$ لدينا

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\rho_n(x-t) = 0$$

ومن ثَمّ

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset [-M-1, M+1]$$

▪ نبرهن باستخدام مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط أنّه مهما تكن k من $\mathbb{N}$، يقبل التابع $f * \rho_n^{(k)}$ الاشتقاق على كامل $\mathbb{R}$ وأنّ مشتقّه هو التابع $f * \rho_n^{(k+1)}$. وهذا يُثبتُ أنّ φ_n ينتمي إلى الصف C^∞، وأنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n^{(k)} = f * \rho_n^{(k)}$$

ومن النتيجتين السابقتين نرى أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n \in \mathfrak{D}$.

▪ وأخيراً، لأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$

نستنتج في حالة x من $\mathbb{R}$، و n من $\mathbb{N}^*$، ما يأتي

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-t) - f(x)\big)\rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right)\rho(u)\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int_{-1}^{1} \left(f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right)\rho(u)\,\mathrm{d}\,u
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \leq \int_{-1}^{1} \rho(u)\,\mathrm{d}\,u \times \sup_{-1 \leq u \leq 1} \left|f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right|$$

أو

$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \leq \sup_{-\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{n}} \left|f(x-h) - f(x)\right| \qquad ①$$

في الحقيقة، نستنتج من الاستمرار المنتظم للتابع f على المجال $I = [-2-M, 2+M]$، أنّه في حالة ε من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد عددٌ η_ε من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق

$$\forall (u,v) \in I^2, \quad \left|u-v\right| < \eta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(u)-f(v)\right| < \varepsilon \qquad ②$$

لتكن إذن x من $\mathbb{R}$، ولتكن n من $\mathbb{N}^*$ تُحقّق $n > 1/\eta_\varepsilon$. عندئذ

- في حالة $|x| > M+1$ يكون لدينا $f(x) = 0$ و $\varphi_n(x) = 0$، ومن ثَمّ
$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$
- أمّا في حالة $|x| \le M+1$، فعندئذ مهما يكن h من $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$، ينتمِ العددان x و $x-h$ إلى I وتتحقّق بناءً على ② المتراجحة
$$\left|f(x-h) - f(x)\right| \le \varepsilon$$
واستناداً إلى المتراجحة ① فهذا يقتضي أنّ
$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \le \varepsilon$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$n > \frac{1}{\eta_\varepsilon} \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

1-1-2. تعريف – التقارب في $\mathfrak{D}$. لتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathfrak{D}$. نقول إنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من تابعٍ φ في $\mathfrak{D}$ إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط الآتية:

❶ توجد مجموعة متراصّة K تحوي جميع حوامل حدود المتتالية أي

$$\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$$

❷ مهما تكن p من $\mathbb{N}$، فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K}\left|\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)\right| = 0 \,.$$

ونكتب في هذه الحالة $\varphi = \mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n$.

1-1-3. **مبرهنة**. إنّ الفضاء $\mathfrak{D}$ مُغلقٌ بالنسبة إلى عمليّتي الاشتقاق والضرب بتوابع من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$. وهاتان العمليّتان مستمرتان على $\mathfrak{D}$. أي لتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathfrak{D}$ تُحقّق $\varphi = \mathfrak{D}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$. عندئذ

- من جهة أولى يكون لدينا $\varphi' = \mathfrak{D}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'_n$.
- ومن جهة ثانية، مهما يكن التابع f من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$، يكن
$$f\varphi = \mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} f\varphi_n$$

الإثبات

إنّ الإثبات بسيطٌ وفق التعريف، وباستخدام علاقة Leibniz المتعلّقة باشتقاق جداء. ❐

1-2. الفضاء $\mathcal{S}$، فضاء التوابع من الصف C^∞ ذات التناقص السريع

1-2-1. **تعريف**. نقول إنّ التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى **الصف $\mathcal{S}$**، إذا وفقط إذا حقّق الشروط الآتية :

❶ التابع f ينتمي إلى الصف C^∞.

❷ مهما تكن n و k من $\mathbb{N}$ يكن $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n f^{(k)}(x)\right| < +\infty$.

نرى وضوحاً أنّ $\mathcal{S}$ فضاء شعاعي يحوي الفضاء $\mathfrak{D}$، ولقد رأينا أنّ $\mathcal{S}$ هو في الحقيقة جبرٌ بالنسبة إلى عمليات جمع التوابع وضربها وضربها بعدد. ولقد جرت العادة أن نرمز، في حالة f من $\mathcal{S}$، بالرمز $p_{n,k}(f)$ إلى المقدار

$$p_{n,k}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n f^{(k)}(x)\right|$$

أمّا تعريف مفهوم التقارب في الفضاء $\mathcal{S}$، فهو كما يأتي:

1-2-2. **تعريف – التقارب في $\mathcal{S}$**. لتكن $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$، نقول إنّ متتالية التوابع $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تتقارب في $\mathcal{S}$ من العنصر f من $\mathcal{S}$. إذا وفقط إذا كان

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad \lim_{m\to\infty} p_{n,k}(f_m - f) = 0$$

ونكتب عندئذ $f = \mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} f_m$.

ملاحظة. إنّ التطبيق $i : \mathfrak{D} \to \mathcal{S}, f \mapsto f$ مستمرٌّ. أي إذا كانت $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathfrak{D}$ تُحقّق $\varphi = \mathfrak{D}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ ، كان $\varphi = \mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$.

3-2-1. مبرهنة. إنّ الفضاء $\mathfrak{D}$ فضاء جزئي كثيف في $\mathcal{S}$.

الإثبات

ليكن φ تابعاً من $\mathcal{S}$. ولنتأمّل تابعاً χ من $\mathfrak{D}$ يأخذ قيمه في $[0,1]$ ويُحقّق

$$\forall x \in [-1,1],\ \chi(x) = 1 \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\chi) \subset [-2,2]$$

عندئذ نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$، التابع f_n بالصيغة :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f_n(x) = \varphi(x)\chi(2^{-n}x)$$

فيكون لدينا، في حالة k و m من $\mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} X^m\left(\varphi - f_n\right)^{(k)} &= X^m\varphi^{(k)}\left(1-\chi^{[2^{-n}]}\right) - \sum_{\ell=0}^{k-1} C_k^\ell X^m \varphi^{(\ell)}\left(\chi^{[2^{-n}]}\right)^{(k-\ell)} \\ &= X^m\varphi^{(k)}\left(1-\chi^{[2^{-n}]}\right) - \sum_{\ell=0}^{k-1} C_k^\ell 2^{n(\ell-k)} X^m \varphi^{(\ell)}\left(\chi^{(k-\ell)}\right)^{[2^{-n}]} \end{aligned}$$

ومنه

$$\left|X^m(\varphi - f_n)^{(k)}\right| \leq \frac{p_{m+1,k}(\varphi)}{|X|}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-2^n,2^n]} + \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{k-1} C_k^\ell p_{m,\ell}(\varphi)p_{0,k-\ell}(\chi)$$

وأخيراً

$$p_{m,k}(\varphi - f_n) \leq \frac{1}{2^n}\left(p_{m+1,k}(\varphi) + \sum_{\ell=0}^{k-1} C_k^\ell p_{m,\ell}(\varphi)p_{0,k-\ell}(\chi)\right)$$

إذن

$$\forall (m,k) \in \mathbb{N}^2,\ \lim_{n\to\infty} p_{m,k}(f_n - \varphi) = 0$$

ومنه $\varphi = \mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. ❐

1-3. الفضاء $\mathcal{E}$، فضاء التوابع من الصف C^{∞}.

1-3-1. **تعريف** : نقول إنّ التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى **الصف $\mathcal{E}$**، إذا وفقط إذا انتمى إلى الصف C^{∞} على $\mathbb{R}$. إنّ $\mathcal{E}$ جبرٌ بالنسبة إلى عمليات جمع التوابع وضربها وضربها بعدد وهو يحوي الجبر $\mathcal{S}$.

ونعرّف مفهوم التقارب في الفضاء $\mathcal{E}$، كما يأتي:

1-3-2. **تعريف – التقارب في $\mathcal{E}$**. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{E}$، نقول إنّ متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب في $\mathcal{E}$ من العنصر f من $\mathcal{E}$. إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: **أيّاً** كانت المجموعة المتراصّة K، و**أيّاً** كان العدد p من $\mathbb{N}$، كان

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \left| f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) \right| = 0$$

ونكتب عندئذ $f = \mathcal{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$.

ملاحظة. إنّ التطبيق $i : \mathcal{S} \to \mathcal{E}, f \mapsto f$ مستمرٌّ. أي إذا كانت $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$ تُحقّق $f = \mathcal{S}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$، كان $f = \mathcal{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$.

ملاحظة. التابع الثابت $\mathbb{1}$ عنصرٌ من $\mathcal{E}\backslash\mathcal{S}$، والتابع $x \mapsto e^{-x^2}$ عنصرٌ من $\mathcal{S}\backslash\mathfrak{D}$. وعليه

$$\mathfrak{D} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{E}$$

2. التوزيعات، والتوزيعات المُلطَّفة، والتوزيعات ذات الحوامل المتراصّة

2-1. فضاء التوزيعات $\mathfrak{D}'$

2-1-1. **تعريف**. نسمّي **توزيعاً** كلَّ شكلٍ خطّي مستمرٍّ على $\mathfrak{D}$. فيكون التطبيق

$$T : \mathfrak{D} \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

توزيعاً إذا وفقط إذا كان T تطبيقاً خطيّاً، يُحقّق شرط الاستمرار الآتي: أيّاً كانت المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathfrak{D}$ التي تسعى في $\mathfrak{D}$ إلى 0، كان $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$. نرمز بالرمز $\mathfrak{D}'$ إلى الفضاء الشعاعي المكوّن من جميع التوزيعات.

2-1-2. **مبرهنة**. لنتأمّل شكلاً خطيّاً $T : \mathfrak{D} \to \mathbb{C}$. هناك تكافؤ بين الخاصتين الآتيتين:

❶ إنّ T توزيع.

❷ مهما تكن المجموعة المتراصّة K في $\mathbb{R}$، يوجد N_K من $\mathbb{N}$، و M_K من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان:

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \mathrm{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leq M_K \sum_{p=0}^{N_K} \sup_K \left|\varphi^{(p)}\right|$$

الإثبات

❷⇐❶. لنتأمّل متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathfrak{D}$ تسعى في $\mathfrak{D}$ إلى 0، عندئذ نعلم استناداً إلى التعريف أنّه توجد مجموعة متراصّة K، تُحقّق الشرطين الآتيين :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$.
- $\forall p \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_K \left|\varphi_n^{(p)}\right| = 0$.

ولكن استناداً إلى ❷، يوجد N_K من $\mathbb{N}$، و M_K من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \mathrm{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leq M_K \sum_{p=0}^{N_K} \sup_K \left|\varphi^{(p)}\right|$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\langle T, \varphi_n\rangle| \leq M_K \sum_{p=0}^{N_K} \sup_K \left|\varphi_n^{(p)}\right|$$

وهذا يقتضي وضوحاً أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$.

❶⇐❷. لنفترض أنّ ❷ خطأ. عندئذ توجد مجموعة متراصّة K_0، ومهما تكن n من $\mathbb{N}$، يوجد تابعٌ ψ_n من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\mathrm{supp}(\psi_n) \subset K_0$، والمتراجحة

$$\left|\left\langle T, \psi_n\right\rangle\right| > 2^n \sum_{m=0}^{n} \sup_{K_0} \left|\psi_n^{(m)}\right| \qquad (*)$$

نعرّف العدد M_n بالصيغة $M_n = 2^n \sum\limits_{m=0}^{n} \sup\limits_{K_0} \left|\psi_n^{(m)}\right|$، والتابع φ_n من $\mathfrak{D}$ بالصيغة

$$\varphi_n = \frac{1}{M_n} \psi_n$$

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K_0$$

و في حالة p من $\mathbb{N}$، لدينا

$$\forall n \geq p, \quad \sup_{K_0}\left|\varphi_n^{(p)}\right| = \frac{1}{M_n}\sup_{K_0}\left|\psi_n^{(p)}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

وهذا يبرهن أنّ $\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} \sup_{K_0}\left|\varphi_n^{(p)}\right| = 0$، إذن $\mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$.

ولكن بناءً على ❶، هذا يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$، ويناقض $(*)$ لأنّ المتراجحة $(*)$ تُكافئ $\forall n \in \mathbb{N},\ |\langle T, \varphi_n \rangle| > 1$. وهذا التناقض يُثبتُ صحة ❷. ❐

3-1-2. أمثلة

① **التوزيعات المنتظمة**. نقول إنّ تابعاً $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **قابلٌ للمكاملة محليّاً**، أو إنّه ينتمي إلى الفضاء $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$، إذا وفقط إذا انتمى التابع $f\mathbb{1}_K$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ وذلك مهما كانت المجموعة المتراصّة K من $\mathbb{R}$. في حالة تابع f من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$، نعرّف الشكل الخطّي T_f على $\mathfrak{D}$ بالصيغة

$$T_f :\to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

عندئذ ينتمي T_f إلى $\mathfrak{D}'$. وذلك لأنّه في حالة مجموعة متراصّة K من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \left|\langle T_f, \varphi \rangle\right| \leq \left(\int_K |f|\,\mathrm{d}\,\lambda\right) \cdot \sup_K |\varphi|$$

لنتأمّل إذن التطبيق الخطّي

$$i : L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{D}', f \mapsto T_f$$

ولنفترض أنّ $T_f = 0$ في حالة تابع f من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$.

ليكن a من $\mathbb{R}_+^*$، ولنتأمّل تابعاً $\chi_{a,1}$ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق

$$|x| \leq a \Rightarrow \chi_{a,1}(x) = 1 \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}\left(\chi_{a,1}\right) = [-a-1, a+1]$$

ثُمّ لنعرّف $f_a = f\chi_{a,1}$، فيكون f_a عنصراً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

ليكن ρ من $\mathfrak{D}$ تابعاً موجباً، حامله محتوى في المجال $[-1,1]$، ويُحقّق $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$.

ولنعرف في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع ρ_n بالصيغة

$$\rho_n(x) = n\rho(nx).$$

في حالة t من $\mathbb{R}$، و n من $\mathbb{N}$، ينتمي التابع $\varphi : x \mapsto \rho_n(t-x)\chi_{a,1}(x)$ إلى $\mathfrak{D}$. ومن ثَمّ

$$0 = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{a,1}(x)\rho_n(t-x)\,\mathrm{d}\,x$$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_a * \rho_n = 0$. ولكنّ المتتالية $(f_a * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathfrak{D}$ تسعى إلى f_a في $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. إذن $f_a = 0$ في $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$. وهذا يقتضي أنّ

$$\forall a > 0,\quad \lambda\Big(\big\{x \in [-a,a] : f(x) \neq 0\big\}\Big) = 0$$

إذن $f = 0,\ \lambda\text{-}a.e.$. وهذا يُثبتُ أنّ i تطبيق خطّي متباينٌ، ويتيح لنا المُطابقة بين فضاء التوابع القابلة للمُكاملة محليّاً وبين فضاء جزئي من فضاء التوزيعات $\mathfrak{D}'$، نسميّه فضاء التوزيعات المنتظمة.

② **قياس ديراك**. نعرّف في حالة a من $\mathbb{R}$ الشكل الخطّي δ_a على $\mathfrak{D}$ بالصيغة

$$\delta_a : \mathfrak{D} \to \mathbb{C},\ \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

من الواضح أنّه مهما تكن المجموعة المتراصّة K من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}&\forall \varphi \in \mathfrak{D},\\ &\quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \big|\langle \delta_a, \varphi \rangle\big| \leq \sup_K |\varphi|\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\delta_a \in \mathfrak{D}'$. ونكتب عادة δ دون دليل دلالة على δ_0.

③ **مشط ديراك**. إنّ هذا التوزيع هو الشكل الخطّي Ш المعرّف على $\mathfrak{D}$ بالصيغة

$$Ш : \mathfrak{D} \to \mathbb{C},\ \langle Ш, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$$

إذ من الواضح أنّه مهما تكن المجموعة المتراصّة K من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}&\forall \varphi \in \mathfrak{D},\\ &\quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \big|\langle Ш, \varphi \rangle\big| \leq \operatorname{card}(K \cap \mathbb{Z}) \cdot \sup_K |\varphi|\end{aligned}$$

ونعبّر عن هذا التوزيع بدلالة قياسات ديراك بالصيغة $Ш = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$.

☜ إنّ Ш هو الحرف السادس والعشرون من الأبجديّة السلافيّة ويُقرأ « شا ».

2-1-4. **تعريف**. ليكن T توزيعاً من $\mathfrak{D}'$، ولتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}$. نقول إنّ $\boldsymbol{T}$ **معدوم أو صفري على** $\boldsymbol{U}$ إذا وفقط إذا تحقّق ما يلي :

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \operatorname{supp}(\varphi)\subset U\Rightarrow\langle T,\varphi\rangle=0$$

نسمّي **حامل** $\boldsymbol{T}$، متمّمة أكبر مجموعة مفتوحة يكون T صفريّاً عليها، ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{supp}(T)$.

2-1-5. أمثلة

- في حالة تابعٍ مستمرٍّ f لدينا $\operatorname{supp}(T_f)=\operatorname{supp}(f)$.
- في حالة قياس ديراك δ_a لدينا $\operatorname{supp}(\delta_a)=\{a\}$.
- في حالة مشط ديراك Ш لدينا $\operatorname{supp}(\text{Ш})=\mathbb{Z}$.

2-2. فضاء التوزيعات المُلَطَّفة $\mathcal{S}'$

2-2-1. **تعريف**. نسمّي **توزيعاً مُلَطَّفاً** كلَّ شكلٍ خطّي مستمرٍّ معرّف على $\mathcal{S}$. فيكون التطبيق

$$T:\mathcal{S}\to\mathbb{C},\varphi\mapsto T(\varphi)=\langle T,\varphi\rangle$$

توزيعاً ملطّفاً إذا وفقط إذا كان T تطبيقاً خطيّاً، يُحقّق شرط الاستمرار الآتي: أيّاً كانت المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{S}$ التي تسعى في $\mathcal{S}$ إلى 0، كان

$$\lim_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle=0$$

نرمز بالرمز $\boldsymbol{\mathcal{S}'}$ إلى الفضاء الشعاعي المكوّن من جميع التوزيعات الملطَّفة.

2-2-2. **مبرهنة**. لنتأمّل شكلاً خطيّاً $T:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$. هناك تكافؤ بين الخاصتين الآتيتين:

❶ إنّ T توزيع مُلطّفٌ.

❷ يوجد N من $\mathbb{N}$، و M من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان :

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad |\langle T,\varphi\rangle|\le Mq_N(\varphi)$$

وقد عرّفنا

$$q_N(\varphi)=\sum_{0\le k,n\le N}p_{n,k}(\varphi)=\sum_{0\le k,n\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n\varphi^{(k)}(x)\right|$$

الإثبات

❷⇐❶. لنتأمّل متتالية $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{S}$ تسعى في $\mathcal{S}$ إلى 0، عندئذ نعلم استناداً إلى التعريف أنّ

$$\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \lim_{m\to\infty} p_{n,k}(\varphi_m)=0$$

ولكن استناداً إلى ❷، يوجد N من $\mathbb{N}$، و M من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان :

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad |\langle T,\varphi\rangle|\le M\,q_N(\varphi)$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad |\langle T,\varphi_m\rangle|\le M\,q_N(\varphi_m)$$

وهذا يقتضي وضوحاً أنّ $\lim\limits_{m\to\infty}\langle T,\varphi_m\rangle=0$.

❶⇐❷. لنفترض أنّ ❷ خطأ. عندئذ مهما تكن m من $\mathbb{N}$، يوجد تابعٌ ψ_m من $\mathcal{S}$ يُحقّق

$$|\langle T,\psi_m\rangle|>2^m q_m(\psi_m) \qquad (*)$$

نعرّف العدد A_m بالصيغة $A_m=2^m q_m(\psi_m)$، والتابع φ_m من $\mathcal{S}$ بالصيغة

$$\varphi_m=\frac{1}{A_m}\psi_m$$

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّه في حالة (n,k) من $\mathbb{N}^2$، لدينا

$$\forall m\ge\max(n,k),\quad \sup_{\mathbb{R}}\left|x^n\varphi_m^{(k)}\right|=\frac{1}{A_m}p_{n,k}(\psi_m)\le\frac{1}{2^m}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \lim_{m\to\infty} p_{n,k}(\varphi_m)=0$$

إذن $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=0$.

ولكن بناءً على ❶، هذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{m\to\infty}\langle T,\varphi_m\rangle=0$ ، ويناقض $(*)$ لأنّ المتراجحة $(*)$ تُكافئ $\forall m\in\mathbb{N}, |\langle T,\varphi_m\rangle|>1$. وهذا التناقض يُثبتُ صحة ❷. ❐

3-2-2. **مبرهنة**. إنّ كلَّ توزيعٍ مُلَطِّفٍ توزيعٌ، ولكنّ العكس غير صحيح :

$$\mathcal{S}'\subsetneq\mathfrak{D}'$$

الإثبات

في الحقيقة، نستنتج من الاحتواء $\mathcal{S} \subset \mathfrak{D}$، أنّه إذا كان T شكلاً خطيّاً على $\mathcal{S}$، كان مقصوره على $\mathfrak{D}$، أي كان $T_{|\mathfrak{D}}$ شكلاً خطيّاً على $\mathfrak{D}$. وإذا كانت $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathfrak{D}$ تُحقّق $\mathfrak{D}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m = 0$، كان لدينا $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m = 0$، واستنتجنا من استمرار T على $\mathcal{S}$ أنّ $\lim\limits_{m\to\infty} \langle T, \varphi_m \rangle = 0$. وهذا يبرهن على أنّ

$$T \in \mathcal{S}' \Rightarrow T_{|\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}'$$

وهو ما عبّرنا عنه بقولنا إنّ كلَّ توزيعٍ مُلَطَّف توزيعٌ.

نرى مباشرة أنّه في حالة التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$، ينتمي التوزيع المنتظم T_f إلى $\mathfrak{D}'$ ولكنّه لا ينتمي إلى $\mathcal{S}'$. ❐

4-2-2. أمثلة

① ليكن f تابعاً من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. عندئذ مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ ينتمِ التابع $f\varphi$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$، وتتحقّق المتراجحة

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \right| \leq \left\| f \right\|_1 q_0(\varphi)$$

وهذا يُثبتُ أنّ التطبيق الخطّي

$$T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ينتمي إلى $\mathcal{S}'$.

② لتكن p من $]1, +\infty[$. إذا كان f تابعاً من $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. استنتجنا من كون التطبيق $i : \mathcal{S} \to \mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda), \varphi \mapsto \varphi$ تطبيقاً مستمراً، حيث $q = \dfrac{p}{p-1}$، ومن متراجحة Hölder، أنّه مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ ينتمِ التابع $f\varphi$ إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. ويكون التطبيق الخطّي

$$T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

عنصراً من $\mathcal{S}'$.

③ إنّ قياس ديراك δ_a توزيعٌ مُلَطَّف، إذ لدينا

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad \left|\varphi(a)\right|\le q_0(\varphi)$$

④ إنّ التوزيع III توزيعٌ مُلَطَّف، لأنّ

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\varphi(n)\right| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\left|(1+n^2)\varphi(n)\right|\\ &\le\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\right)\left(p_{0,0}(\varphi)+p_{2,0}(\varphi)\right)\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّه مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ يتقارب المجموع $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)$ بالإطلاق وتتحقّق المتراجحة

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)\right|\le M\,q_{_2}(\varphi)$$

حيث $M=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{1+n^2}$. وهذا يُثبتُ أنّ مِشط ديراك $\mathrm{III}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n$ ينتمي إلى $\mathcal{S}'$.

⑤ نترك القارئ يُثبتُ بأسلوب مماثل أنّ $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^p\delta_{na}$ يُعرّف أيضاً توزيعاً مُلَطَّفاً من $\mathcal{S}'$.

2-3. فضاء التوزيعات ذات الحوامل المتراصّة $\mathcal{E}'$

2-3-1. تعريف. نسمّي **توزيعاً حامله متراص** كلّ شكلٍ خطّي مستمرٍّ على $\mathcal{E}$. فيكون التطبيق

$$T:\mathcal{E}\to\mathbb{C},\varphi\mapsto T(\varphi)=\langle T,\varphi\rangle$$

توزيعاً حامله متراص إذا وفقط إذا كان T تطبيقاً خطيّاً، يُحقّق شرط الاستمرار الآتي: أيّاً كانت المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{E}$ التي تسعى في $\mathcal{E}$ إلى 0، كان

$$\lim_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle=0$$

نرمز بالرمز $\mathcal{E}'$ إلى الفضاء الشعاعي المكوّن من التوزيعات ذات الحوامل المتراصّة.

2-3-2. مبرهنة : لنتأمّل شكلاً خطيّاً $T:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$. هناك تكافؤ بين الخاصتين الآتيتين:

❶ إنّ T توزيع ذو حامل متراص.

❷ توجد مجموعة متراصّة K_0، ويوجد N من $\mathbb{N}$، و M من $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّق :

$$\forall\varphi\in\mathcal{E},\quad \left|\langle T,\varphi\rangle\right|\le M\sum_{p=0}^{N}\sup_{x\in K_0}\left|\varphi^{(p)}(x)\right|$$

حيث تتعلّق (K_0,N,M) بالتطبيق الخطّي T.

الإثبات

❷⇐❶ . لنتأمّل متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{E}$ تسعى في $\mathcal{E}$ إلى 0، عندئذ نعلم استناداً إلى التعريف أنّه، مهما تكن المجموعة المتراصّة K في $\mathbb{R}$، ومهما تكن p من $\mathbb{N}$، يكن

$$\lim_{n\to\infty}\sup_K\left|\varphi_n^{(p)}\right| = 0$$

ولكن استناداً إلى ❷، لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |\langle T,\varphi_n\rangle| \le M\sum_{p=0}^{N}\sup_{x\in K_0}\left|\varphi_n^{(p)}(x)\right|$$

وهذا يقتضي وضوحاً أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = 0$.

❶⇐❷ . لنفترض أنّ ❷ خطأ. عندئذ مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يوجد تابعٌ ψ_n من $\mathcal{E}$ يُحقّق

$$\left|\left\langle T,\psi_n\right\rangle\right| > 2^n\sum_{p=0}^{n}\sup_{x\in[-n,n]}\left|\psi_n^{(p)}(x)\right| \qquad (*)$$

نعرّف العدد A_n بالصيغة

$$A_n = 2^n\sum_{p=0}^{n}\sup_{x\in[-n,n]}\left|\psi_n^{(p)}(x)\right|$$

والتابع φ_n من $\mathcal{E}$ بالصيغة $\varphi_n = \psi_n/A_n$ عندئذ نلاحظ مباشرة أنّه في مجموعة متراصّة ما K في $\mathbb{R}$، وفي حالة p من $\mathbb{N}$. يوجد عددٌ n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق $p \le n_0$ و $K\subset[-n_0,n_0]$. وعندئذ

$$\forall n\ge n_0,\quad \sup_K\left|\varphi_n^{(p)}\right| \le \frac{1}{A_n}\sup_{[-n,n]}\left|\psi_n^{(p)}\right| \le \frac{1}{2^n}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sup_K\left|\varphi_n^{(p)}\right| = 0$$

إذن $\mathcal{E}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = 0$.

ولكن، بناءً على ❶، هذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = 0$ ، ويناقض $(*)$ لأنّ المتراجحة $(*)$ تُكافئ $\forall n\in\mathbb{N},\ |\langle T,\varphi_n\rangle| > 1$. وهذا التناقض يُثبتُ صحة ❷ . ❐

2-3-3. **مبرهنة**. إنّ كلَّ توزيعٍ من $\mathcal{E}'$ هو توزيعٌ من $\mathcal{S}'$ حامله متراصّ، ولكنّ العكس غير صحيح ، أي إنّ $\mathcal{E}' \subsetneq \mathcal{S}'$.

الإثبات

في الحقيقة، نستنتج من الاحتواء $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$، أنّه إذا كان T شكلاً خطيّاً على $\mathcal{E}$، كان مقصوره على $\mathcal{S}$، أي كان $T_{|\mathcal{S}}$ شكلاً خطيّاً على $\mathcal{S}$. وإذا كانت $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$ تُحقّق $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m = 0$، كان لدينا $\mathcal{E}\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m = 0$، واستنتجنا من استمرار T على $\mathcal{E}$ أنّ $\lim\limits_{m\to\infty} \langle T, \varphi_m \rangle = 0$. وهذا يبرهن على أنّ

$$T \in \mathcal{E}' \Rightarrow T_{|\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'$$

وهذا ما نعبّر عنه بقولنا إنّ كلَّ توزيعٍ من $\mathcal{E}'$ هو توزيعٌ مُلَطَّف، وهو من ثَمّ توزيعٌ. من جهة أخرى، ليكن T من $\mathcal{E}'$. اعتماداً على التعريف، توجد مجموعة متراصّة K_0 ، ويوجد N في $\mathbb{N}$ ، وعددٌ موجبٌ M ، تُحقّق المتراجحة

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}, \quad \left|\langle T, \varphi \rangle\right| \leq M \sum_{p=0}^{N} \sup_{x\in K_0} \left|\varphi^{(p)}(x)\right|$$

وبوجه خاصّ نرى أنّ

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset (\mathbb{R} \backslash K_0) \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$$

وهذا يبرهن أنّ $\operatorname{supp}(T) \subset K_0$. ونرى أنّ T_{1} ينتمي إلى $\mathcal{S}'$ ولا ينتمي إلى $\mathcal{E}'$. ❐

2-3-4. **مثال**. δ_a ينتمي إلى $\mathcal{E}'$، و Ш لا ينتمي إلى $\mathcal{E}'$.

3. مفاهيم التقارب في فضاءات التوزيعات

3-1. **تعريف**. في هذا التعريف يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد فضاءات توابع الاختبار $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$، ويرمز $\mathcal{X}'$ إلى فضاء التوزيعات الموافق. لتكن $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{X}'$، نقول إنّ المتتالية $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى T من $\mathcal{X}'$، إذا وفقط إذا، مهما كان φ من $\mathcal{X}$، كان

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

3-2. **مثال**. ليكن f من $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ يُحقّق : $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda = 1$. ولنعرّف التابع

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n(x) = nf(nx)$$

في حالة n من $\mathbb{N}^*$. كما نعرّف متتالية التوزيعات $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $\mathcal{S}'$ بالعلاقة $T_n = T_{f_n}$.

عندئذ $\mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} T_n = \delta_0$.

في الحقيقة، ليكن φ من $\mathcal{S}$. عندئذ

$$\langle T_n,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}\,t$$

لنضع $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(t) = f(t)\varphi(t/n)$. ولنلاحظ ما يلي

- مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ ، فالتابع g_n تابعٌ مقيس.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}$ ، تتقارب المتتالية $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $f(t)\varphi(0)$.
- التابع $g = p_{0,0}(\varphi)|f|$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ يُحقّق

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|g_n(t)\right| \le g(t)$$

إذن، استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ، نجد

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \varphi(0)$$

أو

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0,\varphi\rangle$$

وهذا يُثبت أنّ $\mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} T_n = \delta_0$.

3-3. **مثال**. في الحقيقة، لدينا

$$\text{Ш} = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\delta_k$$

فإذا عرّفنا $T_n = \sum_{k=-n}^{n}\delta_k$ في حالة n من $\mathbb{N}$. وتأمّلنا φ من $\mathcal{S}$. استنتجنا أنّ

$$\left|\langle \text{Ш},\varphi\rangle - \langle T_n,\varphi\rangle\right| \le \sum_{|k|>n}\left|\varphi(k)\right| \le q_2(\varphi)\sum_{|k|>n}\frac{1}{k(k+1)} \le \frac{2q_2(\varphi)}{n}$$

وعليه

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = \langle \text{Ш},\varphi\rangle$$

4. العمليات على التوزيعات

1-4. الانسحاب. عرّفنا في حالة a من $\mathbb{R}$، و f من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ التابع $\tau_a(f)$ بالصيغة $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$. ينتج الخطّ البياني للتابع $\tau_a(f)$ من الخط البياني للتابع f بعد إجراء انسحاب شعاعه $a\vec{i}$. نرغب هنا بتعميم هذا المفهوم إلى التوزيعات.

ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\langle T_{\tau_a(f)}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+a)\,\mathrm{d}\,x = \langle T_f, \tau_{-a}(\varphi)\rangle\end{aligned}$$

وهذا ما يجعلنا نضع التعريف الآتي:

تعريف. في حالة توزيع T من $\mathfrak{D}'$ وعددٍ a من $\mathbb{R}$، نعرّف التوزيع $\tau_a(T)$ بالصيغة

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle\tau_a(T),\varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}(\varphi)\rangle$$

ونقول إنّ T **دوري** ويقبل العدد κ دوراً، إذا وفقط إذا كان $\tau_\kappa(T) = T$.

نلاحظ بوجه خاصّ أنّه في حالة a من $\mathbb{R}$، لدينا $\tau_a(\mathcal{S}') = \mathcal{S}'$ و $\tau_a(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$.

أمثلة. $\tau_a(\delta_0) = \delta_a$، والتوزيع Ш توزيعٌ دوري يقبل العدد 1 دوراً.

2-4. التناظر. في حالة f من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$، نعرّف التابع $\overleftarrow{f}$ بالصيغة $\overleftarrow{f}(x) = f(-x)$. ينتج الخطّ البياني للتابع $\overleftarrow{f}$ بأخذ نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى محور التراتيب. نسعى هنا إلى تعميم هذا المفهوم على التوزيعات.

ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\langle T_{\overleftarrow{f}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(-x)\,\mathrm{d}\,x = \langle T_f, \overleftarrow{\varphi}\rangle\end{aligned}$$

وهذا ما يجعلنا نضع التعريف التالي :

تعريف. في حالة توزيع T من $\mathfrak{D}'$، نعرّف **التوزيع المُناظر** $\overleftarrow{T}$ بالصيغة

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle\overleftarrow{T},\varphi\rangle = \langle T, \overleftarrow{\varphi}\rangle$$

نقول إنّ T **زوجي** إذا كان $\overleftarrow{T} = T$، ونقول إنّ T **فردي** إذا كان $\overleftarrow{T} = -T$.

نلاحظ بوجه خاصّ أنّ مناظر توزيع من $\mathcal{S}'$ أو من $\mathcal{E}'$ ينتمي إلى $\mathcal{S}'$ أو $\mathcal{E}'$ على الترتيب.

أمثلة

$\overleftarrow{\delta_a} = \delta_{-a}$، والتوزيعان δ_0 و $Ш$ توزيعان زوجيّان.

4-3. تغيير السلّم. عرّفنا في حالة a من $\mathbb{R}^*$، و f من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ التابع $f^{[a]}$ بالصيغة $f^{[a]}(x) = f(ax)$. نرغب إذن بتعميم هذا المفهوم إلى التوزيعات.

ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\langle T_{f^{[a]}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(ax)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{1}{a}x\right)\mathrm{d}\,x = \left\langle T_f, \frac{1}{|a|}\varphi^{[1/a]}\right\rangle\end{aligned}$$

وهذا ما يجعلنا نضع التعريف الآتي.

تعريف. في حالة توزيع T من $\mathfrak{D}'$ وعددٍ a من $\mathbb{R}^*$، نعرّف التوزيع $T^{[a]}$ بالصيغة

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \left\langle T^{[a]}, \varphi\right\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle T, \varphi^{[1/a]}\right\rangle$$

مثال.

في حالة a من $\mathbb{R}^*$ و b من $\mathbb{R}$ لدينا $\delta_b^{[1/a]} = |a|\,\delta_{ab}$.

4-4. الضرب في تابع

4-4-1. $\mathcal{E} \times \mathfrak{D}'$. ليكن ψ تابعاً من $\mathcal{E}$، إنّ التطبيق الخطّي

$$M_\psi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \varphi \mapsto \varphi\psi$$

تطبيق مستمرٌّ. لأنّه لدينا في حالة مجموعة متراصّة K، وعددٍ p من $\mathbb{N}$، ما يأتي

$$\sup_K\left|(M_\psi(\varphi))^{(p)}\right| \le \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell \sup_K\left|\psi^{(p-\ell)}\right|\sup_K\left|\varphi^{(\ell)}\right| \le A_\psi \cdot \sum_{\ell=0}^{p}\sup_K\left|\varphi^{(\ell)}\right|$$

حيث $A_\psi = \max_{0\le\ell\le p}\left(C_p^\ell \sup_K\left|\psi^{(p-\ell)}\right|\right)$.

وهذا يُثبتُ، في حالة متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathfrak{D}$، ما يأتي :

$$\mathfrak{D}\text{-}\lim_{m\to\infty} \varphi_n = \varphi \Rightarrow \mathfrak{D}\text{-}\lim_{m\to\infty} M_\psi(\varphi_n) = M_\psi(\varphi)$$

ليكن T من $\mathfrak{D}'$، وليكن ψ من $\mathcal{E}$. نستنتج من استمرار M_ψ أنّ $T \circ M_\psi$ هو شكلٌ خطّي مستمرٌّ على $\mathfrak{D}$، فهو إذن توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$ نرمز إليه عادة بالرمز ψT. أي

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \langle \psi T, \varphi \rangle = T \circ M_\psi(\varphi) = T(\psi\varphi) = \langle T, \psi\varphi \rangle$$

ونلاحظ بسهولة أنّه إذا كانت $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathfrak{D}'$ متقاربة من T. تقاربت المتتالية $(\psi T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathfrak{D}'$ من ψT.

أمثلة

- نستنتج من التعريف السابق أنّه في حالة a من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \quad \psi\delta_a = \psi(a)\delta_a$$

في ميكانيك الكمّ، نعبّر عن الموضع بالمؤثّر الخطّي

$$M_X : \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}', T \mapsto XT$$

إذ رمزنا كالعادة بالرمز X إلى التابع من $\mathcal{E}$ المعرّف بالصيغة $x \mapsto x$.

نستنتج مما سبق أنّ $X\delta_a = a\delta_a$، إذن جميع الأعداد الحقيقيّة هي قيم ذاتيّة للمؤثّر M_X، و δ_a شعاع ذاتيّ موافق للقيمة الذاتيّة a.

- في حالة ψ من $\mathcal{E}$ لدينا

$$\psi Ш = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)\delta_n$$

ملاحظات

- في حالة ψ من $\mathfrak{D}$، و T من $\mathfrak{D}'$، ينتمي التوزيع ψT إلى $\mathcal{E}'$ ويكون

$$\operatorname{supp}(\psi T) \subset \operatorname{supp}(\psi)$$

نعبّر عن هذا بالكتابة $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}' \subset \mathcal{E}'$.

- وكذلك، في حالة ψ من $\mathcal{E}$، و T من $\mathcal{E}'$، ينتمي التوزيع ψT إلى $\mathcal{E}'$ ويكون

$$\operatorname{supp}(\psi T) \subset \operatorname{supp}(T)$$

نعبّر عن هذا بالكتابة $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$.

4-4-2. **حالة التوزيعات المُلَطَّفة**. في حالة تابعٍ ψ من $\mathcal{E}$، وتابعٍ φ من $\mathcal{S}$، فإنّه بوجه عام لا ينتمي جداء الضرب $\psi\varphi$ إلى $\mathcal{S}$. (تأمّل على سبيل المثال حالة التابعين ψ و φ المعرّفين بالصيغتين $\psi(x) = e^{x^2}$ و $\varphi(x) = e^{-x^2}$)، لذلك عند ضرب تابعٍ من $\mathcal{E}$ في توزيع مُلَطَّف نحصل على توزيع لا يكون توزيعاً مُلَطَّفاً بالضرورة.

فمثلاً في حالة التابع ψ المعرّف بالصيغة $\psi(x) = e^{x^2}$، نرى أنّ $\psi\text{Ш}$ ينتمي إلى $\mathfrak{D}'$ ولكنّه لا ينتمي إلى $\mathcal{S}'$.

ومع ذلك، هناك حالتان خاصّتان مفيدتان نبيّنهما فيما يأتي:

- بأسلوب مماثل لما رأيناه في 4-4-1. نجد في حالة ψ من $\mathcal{S}$، أنّ الضرب في التابع ψ يُعرِّف تطبيقاً خطيّاً مستمراً على $\mathcal{S}$: $M_\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \varphi \mapsto \psi\varphi$.
وعليه في حالة ψ من $\mathcal{S}$، و T من $\mathcal{S}'$. يكون $T \circ M_\psi$ شكلاً خطيّاً مستمرّاً على $\mathcal{S}$، أي توزيعاً من $\mathcal{S}'$، نرمز إليه بالرمز ψT. وهو معرّف كما في الحالة السابقة وفق :
$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle$$
ونُعبّر عن هذا بالكتابة $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'$.
- وكذلك، في حالة التابع $X^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$، حيث n من $\mathbb{N}$، يُعرِّف الضرب في التابع X^n تطبيقاً خطيّاً مستمراً على $\mathcal{S}$:
$$M_{X^n} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \varphi \mapsto X^n\varphi$$
وعليه في حالة T من $\mathcal{S}'$. يكون $T \circ M_{X^n}$ شكلاً خطيّاً مستمرّاً على $\mathcal{S}$، أي توزيعاً من $\mathcal{S}'$، نرمز إليه بالرمز $X^n T$. وهو معرّف كما في الحالة السابقة وفق
$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle X^n T, \varphi \rangle = \langle T, X^n\varphi \rangle$$
ونُعبّر عن هذا بالكتابة $\mathbb{C}[X] \times \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'$.

ملاحظة. لا يوجد بوجه عامّ طريقة لتعريف ضرب التوزيعات.

4-5. اشتقاق التوزيعات

لنلاحظ أنّه في حالة تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ من الصف C^1 لدينا

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathfrak{D},\qquad \langle T_{f'},\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x = -\langle T_f,\varphi'\rangle\end{aligned}$$

في الحقيقة، لقد رأينا أنّ الاشتقاق :

$$\partial:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D},\ \partial(\varphi)=\varphi'$$

يُعرّف تطبيقاً خطيّاً مستمرّاً، راجع المبرهنة 3-1-1 . وهذا يقتضي أنّه مهما يكن التوزيع T من $\mathfrak{D}'$، يكن $T\circ\partial$ شكلاً خطيّاً مستمرّاً أي توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. وهذا ما يجعلنا نضع التعريف الآتي.

4-5-1. تعريف. في حالة توزيع T من $\mathfrak{D}'$ نعرّف مشتقّه بأنه التوزيع $T'=-T\circ\partial$. ونعرّف بوجه عام **مشتقّ T** من المرتبة n بأنّه التوزيع $T^{(n)}=(-1)^n T\circ\partial^n$. وهذا يُكتبُ بالصيغة المُكافئة

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle T^{(n)},\varphi\rangle=(-1)^n\langle T,\varphi^{(n)}\rangle$$

وعندئذ تتحقّق في حالة تابع f من الصف C^1 مثلاً المساواة $\left(T_f\right)'=T_{f'}$.

4-5-2. ملاحظة. لمّا كان كلٌّ من التطبيقين

$$\partial:\mathcal{E}\to\mathcal{E},\ \partial(\varphi)=\varphi' \text{ و } \partial:\mathcal{S}\to\mathcal{S},\ \partial(\varphi)=\varphi'$$

مستمرّاً أيضاً. استنتجنا من التعريف السابق أنّه في حالة T من $\mathcal{S}'$ تنتمي جميع المشتقات $T^{(n)}$ إلى $\mathcal{S}'$، وفي حالة T من $\mathcal{E}'$ تنتمي المشتقات $T^{(n)}$ إلى $\mathcal{E}'$.

4-5-3. أمثلة

① لنتأمّل التوزيع $H=T_{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}}$، وهو التوزيع الموافق لتابع هِفيسايد. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^{\infty}\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$$

وهذا يبرهن أنّ $H'=\delta$.

② ليكن E التوزيع الموافق لتابع الجزء الصحيح. عندئذ نجد في حالة φ من $\mathfrak{D}$ أنّ

$$\begin{aligned}\langle E',\varphi\rangle &= -\langle E,\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \lfloor x \rfloor \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n \int_n^{n+1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n(\varphi(n+1)-\varphi(n))\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n+1)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n-1)\varphi(n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \langle Ш,\varphi\rangle\end{aligned}$$

إذن $E' = Ш$.

4-5-4. **مبرهنة**. لنرمز بالرمز ∂ إلى مؤثِّر الاشتقاق $T \mapsto T'$. عندئذ يُحقّق ∂ الخواص الآتية:

- إنّ ∂ مؤثّرٌ خطّي.
- إنّ ∂ مستمرّ. أي إذا كانت $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توزيعات من $\mathfrak{D}'$، تسعى إلى T في $\mathfrak{D}'$، سعت المتتالية $(T'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى T' في $\mathfrak{D}'$، وتبقى هذه النتيجة إذا صحيحة إذا استبدلنا $\mathcal{S}'$ أو $\mathcal{E}'$ بالفضاء $\mathfrak{D}'$ في هذه الخاصّة.
- في حالة تابع ψ من $\mathcal{E}$، وتوزيع T من $\mathfrak{D}'$، لدينا $(\psi T)' = \psi' T + \psi T'$.
- في حالة تابع ψ من $\mathcal{E}$، وتوزيع T من $\mathfrak{D}'$، و n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$(\psi T)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \psi^{(k)} T^{(n-k)}$$

الإثبات

إنّ إثبات الخاصتين الأولى والثانية بسيط، نترك صياغة تفاصيله للقارئ.

لنثبت إذن الخاصّة الثالثة. لنتأمّل إذن تابعاً ψ من $\mathcal{E}$، وتوزيعاً T من $\mathfrak{D}'$، عندئذ

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle(\psi T)',\varphi\rangle &= -\langle\psi T,\varphi'\rangle = \langle T,-\psi\varphi'\rangle\\ &= \langle T,\psi'\varphi-(\psi\varphi)'\rangle = \langle T,\psi'\varphi\rangle - \langle T,(\psi\varphi)'\rangle\\ &= \langle\psi' T,\varphi\rangle + \langle T',\psi\varphi\rangle = \langle\psi' T,\varphi\rangle + \langle\psi T',\varphi\rangle\\ &= \langle\psi' T+\psi T',\varphi\rangle\end{aligned}$$

وتنتج الخاصّة الأخيرة بالتدريج. وهي النتيجة المرجوّة. ❐

4-5-5. أمثلة

① إنّ مؤثري الاشتقاق والانسحاب يتبادلان : $\partial\circ\tau_a = \tau_a\circ\partial$ أي

$$\forall a\in\mathbb{R},\forall T\in\mathfrak{D}',\quad (\tau_a(T))' = \tau_a(T')$$

وكذلك، نلاحظ أنّ

$$\forall T\in\mathfrak{D}',\quad (\overleftarrow{T})' = -\overleftarrow{T'}$$

فمثلاً، بملاحظة أنّ تابع الإشارة sgn يُعطى بالصيغة $\mathrm{sgn} = H - \overleftarrow{H}$ نستنتج أنّ

$$\mathrm{sgn}' = H' + \overleftarrow{H'} = \delta+\delta = 2\delta$$

② لنتأمّل في حالة n و p من $\mathbb{N}$، التوزيع $T = X^n\delta^{(p)}$. عندئذ في حالة φ من $\mathfrak{D}$ نجد

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle\delta^{(p)},X^n\varphi\rangle = (-1)^p\langle\delta,(X^n\varphi)^{(p)}\rangle$$

وبالاستفادة من علاقة Leibniz نجد

$$\begin{aligned}\langle T,\varphi\rangle &= (-1)^p\left\langle\delta,\sum\nolimits_{k=0}^{p} C_p^k (X^n)^{(k)}\varphi^{(p-k)}\right\rangle\\ &= (-1)^p\sum_{k=0}^{\min(p,n)} C_p^k\frac{n!}{(n-k)!}\left\langle\delta,X^{n-k}\varphi^{(p-k)}\right\rangle\end{aligned}$$

وعليه نستنتج أنّ

$$\langle T,\varphi\rangle = \begin{cases} 0 & : \ p<n\\ (-1)^p\dfrac{p!}{(p-n)!}\langle\delta,\varphi^{(p-n)}\rangle & : \ p\geq n\end{cases}$$

أو

$$\langle T,\varphi\rangle=\begin{cases}0 & : \ p<n\\ \dfrac{p\,!(-1)^n}{(p-n)\,!}\langle\delta^{(p-n)},\varphi\rangle & : \ p\geq n\end{cases}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$X^n\delta^{(p)}=\begin{cases}0 & : \ p<n\\ \dfrac{p\,!(-1)^n}{(p-n)\,!}\delta^{(p-n)} & : \ p\geq n\end{cases}$$

③ التوزيع $\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}$. لنتأمّل التابع ℓ من $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ المعرّف بالصيغة $\ell(x)=\ln|x|$. ولنثبت أنّ التوزيع الموافق T_ℓ ينتمي إلى $\mathcal{S}'$.

في الحقيقة، لمّا كان التابع

$$x\mapsto\frac{\big|\ln|x|\big|}{1+x^2}$$

ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، استنتجنا أنّه مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ ينتمِ التابع $x\mapsto\varphi(x)\ln|x|$ إلى $L^1(\mathbb{R})$. وهذا يتيح لنا تعريف الشكل الخطّي T_ℓ على $\mathcal{S}$ بالصيغة

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad\langle T_\ell,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\ln|x|\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

و T_ℓ توزيعٌ مُلطَّفٌ، لأنّ

$$\begin{aligned}\big|\langle T_\ell,\varphi\rangle\big|&\leq\int_{\mathbb{R}}\frac{\big|\ln|x|\big|}{1+x^2}(1+x^2)\big|\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}\,x\\&\leq K\Big(p_{0,0}(\varphi)+p_{2,0}(\varphi)\Big)\end{aligned}$$

وقد عرّفنا

$$.\,K=\int_{\mathbb{R}}\frac{\big|\ln|x|\big|}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

نسمّي المشتق T_ℓ' بالتعريف **توزيع القيمة الأساسيّة لـ $\frac{1}{\mathrm{x}}$**، ونرمز إليه $\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}$.

لنبحث إذن عن صيغة للتوزيع $\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}$. في حالة φ من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}},\varphi\right\rangle &= -\langle T_\ell,\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}\,x + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi'(x)\ln(-x)\,\mathrm{d}\,x\right)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}\,x + \int_{\varepsilon}^{\infty}\varphi'(-x)\ln x\,\mathrm{d}\,x\right)\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}},\varphi\right\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \big(\varphi'(x)+\varphi'(-x)\big)\ln x\,\mathrm{d}\,x\right)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\theta(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\right)\end{aligned}$$

حيث $\theta(\varepsilon) = \big(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)\big)\ln\varepsilon$. ولأنّ $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\theta(\varepsilon)=0$ ، استنتجنا أنّ

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad \left\langle \mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}},\varphi\right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

وهكذا نرى أنّه في $\mathcal{S}'$ لدينا $\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}} = \big(\ln\big|\cdot\big|\big)'$. كما نلاحظ مباشرة، أنّه في حالة φ من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\begin{aligned}\left\langle X\cdot\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}},\varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}},X\varphi\right\rangle &= \int_0^\infty \frac{x\varphi(x)+x\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_0^\infty \big(\varphi(x)+\varphi(-x)\big)\,\mathrm{d}\,x = \langle \mathbb{1},\varphi\rangle\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $X\cdot\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}} = \mathbb{1}$.

④ التوزيع $\mathrm{Pf}\frac{1}{\mathrm{x}^2}$. نعرّف **شبّه التابع** $\mathbf{\frac{1}{x^2}}$، بأنّه التوزيع $\mathrm{Pf}\frac{1}{\mathrm{x}^2}$ من $\mathcal{S}'$ المعرّف بالصيغة

$$\mathrm{Pf}\frac{1}{\mathrm{x}^2} = -\left(\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}\right)'\,\mathrm{Pf}\frac{1}{\mathrm{x}^2}$$

لنبحث إذن عن صيغة للتوزيع $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{\mathrm{x}^2}$. في حالة φ من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\left\langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{\mathrm{x}^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}, \varphi' \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

إذن

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \left\langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{\mathrm{x}^2}, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

ونجد مباشرة أنّ

$$X \cdot \mathrm{Pf}\,\frac{1}{\mathrm{x}^2} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$$

نأتي الآن إلى تعميم خاصّة مفيدة ومألوفة لدينا في حالة التوابع.

.6-5-4 مبرهنة. ليكن T توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. نفترض أنّ $T' = 0$ ، عندئذ يكون T ثابتاً. أي يوجد ثابتٌ c يُحقّق $T = c\mathbb{1}$. (وهو ما نكتبه عادة $T = c$.)

الإثبات

في الحقيقة، يُكافئ الفرْض قولَنا

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \langle T, \varphi' \rangle = 0 \qquad (*)$$

نثبّت تابعاً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\int_{\mathbb{R}} \rho\,\mathrm{d}\,\lambda = 1$ ، ونضع $c = \langle T, \rho \rangle$. ثُمّ نتأمّل في حالة تابعٍ ما φ من $\mathfrak{D}$ ، التابع $\tilde{\varphi}$ الآتي :

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \tilde{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \rho(t))\,\mathrm{d}\,t$$

تذكّر أنّ $\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\,\lambda = \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle$. هنا نلاحظ مباشرة أنّ $\tilde{\varphi}$ ينتمي إلى الصف C^∞ لأنّ

$$\tilde{\varphi}' = \varphi - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle\,\rho$$

وهي عبارةٌ خطيّةٌ بالتابعين φ و ρ .

وإذا اخترنا A يُحقّق

$$\operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\rho) \subset [-A, A]$$

كان $\tilde{\varphi}(x) = 0$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}\backslash[-A, A]$، إذن ينتمي التابع $\tilde{\varphi}$ إلى $\mathfrak{D}$. ونستنتج من $(*)$ أنّ

$$\begin{aligned} 0 = \langle T, \tilde{\varphi}' \rangle &= \langle T, \varphi \rangle - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \langle T, \rho \rangle \\ &= \langle T, \varphi \rangle - c \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle = \langle T - c\mathbb{1}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

إذن، لقد أثبتنا أنّ

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \langle T - c\mathbb{1}, \varphi \rangle = 0$$

أو $T = c\mathbb{1}$. ❐

4-5-7. **مثال**. ليكن T توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. نفترض أنّ $T' = a\delta_0$ حيث a من $\mathbb{C}$، عندئذ يوجد ثابتٌ c يُحقّق $T = aH + c\mathbb{1}$، و H هو توزيع هِڤيسايد Heaviside الذي يمثّل التابع $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$. (ونكتب أيضاً $T = aH + c$.)

في الحقيقة، لمّا كان

$$(T - aH)' = T' - a\delta_0 = 0$$

استنتجنا من المبرهنة 4-5-6 السابقة أنّه يوجد ثابتٌ c يُحقّق $T - aH = c\mathbb{1}$، وهي النتيجة المطلوبة.

5. تحويلات فورييه للتوزيعات المُلطَّفة

لقد رأينا عند دراستنا لتحويلات فورييه للتوابع ذات التناقص السريع، أنّ تحويل فورييه $\mathcal{F}$ يُعرّف تقابلاً خطيّاً مستمراً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$. وعليه إذا كان T توزيعاً مُلطَّفاً، أي شكلاً خطيّاً مستمرّاً على $\mathcal{S}$ كان $T \circ \mathcal{F}$ أيضاً شكلاً خطيّاً مستمرّاً على $\mathcal{S}$. ومنه التعريف الآتي.

5-1. **تعريف**. ليكن T توزيعاً مُلطّفاً من $\mathcal{S}'$. عندئذ نعرّف **تحويل فورييه** للتوزيع T بأنّه التوزيع الملطّف $\widehat{T}$، أو $\mathcal{F}(T)$، المعرّف بالصيغة $T \circ \mathcal{F}$. أي

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

5-2. **مبرهنة** : في حالة تابعٍ f من $L^1(\mathbb{R})$ أو من $L^2(\mathbb{R})$ لدينا $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.

الإثبات

- لنتأمّل حالة f من $L^1(\mathbb{R})$، و φ من $\mathcal{S}$. عندئذ نستنتج من كون $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ أنّ

$$\begin{aligned}\langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\\ &= \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.

- في حالة f من $L^2(\mathbb{R})$، و φ من $\mathcal{S}$. نعرّف $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\overline{\varphi})$ من $\mathcal{S}$، فنستنتج من علاقة Parseval أنّ

$$\begin{aligned}\langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\psi}(\xi)}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

لأنّ $\hat{\varphi} = \overline{\psi}$. وهذا يُثبتُ أنّ $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$ أيضاً في هذه الحالة. ❐

5-3. **مبرهنة**. يُعرّف تحويل فورييه $\mathcal{F}$ تقابلاً خطيّاً مستمرّاً هو وتقابله العكسي بين فضاء التوزيعات المُلَطَّفة $\mathcal{S}'$ ونفسه. أمّا $\mathcal{F}^{-1}$ فهو $\overline{\mathcal{F}}$ المعرّف في حالة T من $\mathcal{S}'$ بالصيغة

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\quad \langle \overline{\mathcal{F}}(T), \varphi\rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle$$

وهذا يُكافئ $\overline{\mathcal{F}}(T) = \widehat{\overleftarrow{T}} = \overleftarrow{\widehat{T}}$.

الإثبات

- أن يكون تحويل فورييه $\mathcal{F}$ خطيّاً أمرٌ بسيطٌ نترك التيقّن من صحّته تمريناً للقارئ.
- لتكن $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}'$ تُحقّق $T = \mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$. ولنتأمّل φ من $\mathcal{S}$. عندئذ، نستنتج من المساواة $\langle \widehat{T_n}, \varphi\rangle = \langle T_n, \hat{\varphi}\rangle$ أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\langle \widehat{T_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \hat{\varphi}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{T}, \varphi\rangle$$

إذن $\widehat{T} = \mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{T_n}$. وهذا يُثبتُ استمرار $\mathcal{F}$.

■ ليكن T من $\mathcal{S}'$. ولنتأمّل φ من $\mathcal{S}$. عندئذ

$$\langle \widehat{\widehat{T}}, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle T, \overleftarrow{\varphi} \rangle = \langle \overleftarrow{T}, \varphi \rangle$$

وهذا يبرهن على أنّ $\forall T \in \mathcal{S}', \widehat{\widehat{T}} = \overleftarrow{T}$.

فإذا عرّفنا

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}', \overline{\mathcal{F}}(T) = \widehat{\overleftarrow{T}} = \overleftarrow{\widehat{T}}$$

كان لدينا وضوحاً $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$. وهذا يبرهن على أنّ $\mathcal{F}$ تقابلٌ، وأنّ

$$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$$

ونرى أنّ $\mathcal{F}^{-1}$ مستمرٌّ، لأنّ $\mathcal{F}$ والتطبيق $T \mapsto \overleftarrow{T}$ مستمرّان وضوحاً. ❐

4-5. مبرهنة. يُحقّق تحويل فورييه الخواص الآتية:

① في حالة T من $\mathcal{S}'$ و k من $\mathbb{N}$، لدينا $(\widehat{T})^{(k)} = (-2\pi\,\mathrm{i})^k\, \mathcal{F}\left(X^k \cdot T\right)$.

② في حالة T من $\mathcal{S}'$ و k من $\mathbb{N}$، لدينا $\mathcal{F}\left(T^{(k)}\right) = (2\pi\,\mathrm{i})^k\, X^k \cdot \widehat{T}$.

③ في حالة T من $\mathcal{S}'$ و a من $\mathbb{R}$، لدينا

$$\mathcal{F}(\tau_a(T)) = \exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,a]} \cdot \widehat{T} \quad \text{و} \quad \tau_a(\widehat{T}) = \mathcal{F}\left(\exp^{[2\pi\,\mathrm{i}\,a]} \cdot T\right)$$

وقد رمزنا بالرمز $\exp^{[\alpha]}$ إلى التابع من الصف C^∞ المعرّف بالصيغة $x \mapsto e^{\alpha x}$.

④ في حالة T من $\mathcal{S}'$ لدينا

$$\overline{\mathcal{F}}(T) = \widehat{\overleftarrow{T}} = \overleftarrow{\widehat{T}} \text{ ، و } \widehat{\widehat{T}} = \overleftarrow{T}.$$

⑤ في حالة T من $\mathcal{S}'$ و a من $\mathbb{R}^*$، $\mathcal{F}\left(T[a]\right) = \dfrac{1}{|a|}(\widehat{T})^{[1/a]}$.

الإثبات

إنّ الإثبات تحقُّقٌ مباشرٌ استناداً إلى الخواص الموافقة في الصف التوابع ذات التناقص السريع $\mathcal{S}$. نترك التفاصيل تمريناً للقارئ. ❐

5-5. أمثلة

① لنحسب تحويل فورييه لتوزيع ديراك δ_a.

في الحقيقة، في حالة φ من $\mathcal{S}$ لدينا

$$\langle \widehat{\delta_a}, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi \mathrm{i} a x} \varphi(x) \,\mathrm{d}\, x = \langle \exp^{[-2\pi \mathrm{i} a]}, \varphi \rangle$$

وعليه نرى أنّ

$$\mathcal{F}\left(\exp^{[2\pi \mathrm{i} a]}\right) = \widehat{\widehat{\delta_{-a}}} = \delta_a \quad \text{و} \quad \widehat{\delta_a} = \exp^{[-2\pi \mathrm{i} a]}$$

وبوجه خاص إذا رمزنا بالرمز $\mathbb{1}$ إلى التوزيع المنتظم الموافق للتابع الثابت الذي يساوي 1. وجدنا

$$\hat{\mathbb{1}} = \delta_0 \quad \text{و} \quad \widehat{\delta_0} = \mathbb{1}$$

وأخيراً

$$\widehat{\delta_a^{(k)}} = (2\pi \mathrm{i})^k X^k \exp^{[-2\pi \mathrm{i} a]}$$

و

$$\mathcal{F}(X^k \exp^{[2\pi \mathrm{i} a]}) = \frac{1}{(-2\pi \mathrm{i})^k} \delta_a^{(k)}$$

② علاقة Poisson. ليكن φ من $\mathcal{S}$، نبرهن بسهولة أنّ

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x+n)$$

تابعٌ من الصف C^∞، وهو يقبل العدد 1 دوراً. إذن تتقارب متسلسلة فورييه للتابع F بانتظام من التابع F. أي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(F) e^{2\pi \mathrm{i} n x}$$

ولكن نجد بحساب بسيط أنّ

$$\begin{aligned}
C_n(F) &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi \mathrm{i} n x} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi(x+k) e^{-2\pi \mathrm{i} n x} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \varphi(f) e^{-2\pi \mathrm{i} n x} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi \mathrm{i} n x} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \hat{\varphi}(n)
\end{aligned}$$

وعليه، في حالة φ من $\mathcal{S}$، لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) e^{2\pi \mathrm{i} n x}$$

وبتعويض $x = 0$ نستنتج بوجه خاص علاقة Poisson الآتية

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)$$

تنصّ هذه المساواة على أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \ \langle Ш, \varphi\rangle = \langle Ш, \hat{\varphi}\rangle$$

أي $\widehat{Ш} = Ш$.

ومن جهة أخرى، نستنتج من استمرار تحويل فورييه أنّ

$$\widehat{Ш} = \mathcal{F}\left(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\right) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\delta_n} = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \exp^{[2\pi \mathrm{i} n]}$$

ومنه

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp^{[2\pi \mathrm{i} n]}$$

كما نستنتج من $\widehat{Ш} = Ш$ أنّه، في حالة a من $\mathbb{R}^*$ ، لدينا

$$\widehat{Ш^{[a]}} = \frac{1}{|a|} Ш^{[1/a]}$$

ولكن $\delta_b^{[a]} = \dfrac{1}{|a|}\delta_{b/a}$ ، إذن

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \mathcal{F}\left(\frac{1}{|a|}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na} = \frac{1}{|a|}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp^{[2\pi \mathrm{i} n/a]}$$

③ تحويل فورييه للتوزيع $\mathrm{Vp}\,\dfrac{1}{\mathrm{x}}$.

لقد رأينا أنّ $\mathrm{Vp}\,\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ توزيع مُلطَّف. سنثبت أنّ $\widehat{\mathrm{Vp}\,\dfrac{1}{\mathrm{x}}} = -\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}$. وقد رمزنا sgn دلالة على التوزيع المنتظم الموافق لتابع إشارة عدد : $\mathrm{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

لنضع $T = \widehat{\mathrm{Vp}\,\dfrac{1}{\mathrm{x}}}$. عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$T' = (-2\pi\,\mathrm{i})\widehat{X\cdot \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}} = -2\pi\,\mathrm{i}\,\widehat{\mathbb{1}} = -2\pi\,\mathrm{i}\,\delta$$

وعليه يوجد، استناداً إلى المثال 4-5-7. ثابتٌ c يُحقّق

$$T = -2\pi\,\mathrm{i}\,H + c\mathbb{1}$$

ولكنّ التوزيع $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$ فرديٌّ أي $\overleftarrow{\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}} = -\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$. وهذا يقتضي أنّ T فرديٌّ أيضاً. ومنه

$$0 = T + \overleftarrow{T} = 2c\mathbb{1} - 2\pi\,\mathrm{i}\,H - 2\pi\,\mathrm{i}\,\overleftarrow{H} = 2(c - \pi\,\mathrm{i})\mathbb{1}$$

لأنّ $H + \overleftarrow{H} = \mathbb{1}$. إذن $c = \pi\,\mathrm{i}$ ، ومن ثَمّ

$$T = -2\pi\,\mathrm{i}\,H + \pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{1} = -\pi\,\mathrm{i}(2H - \mathbb{1}) = -\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

④ تحويل فورييه لتوزيع هِڤيسايد Heaviside . إذا كان H التوزيع المنتظم الموافق للتابع المميِّز للمجموعة $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ ، كان

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$$

في الحقيقة، نستنتج من $\widehat{\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}} = (-\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{sgn}$ أنّ

$$\widehat{\mathrm{sgn}} = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\widehat{\widehat{\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}}} = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\overleftarrow{\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}} = \frac{1}{\pi\,\mathrm{i}}\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$$

ولمّا كان $H = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathrm{sgn})$ ، استنتجنا أنّ

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbb{1}} + \widehat{\mathrm{sgn}}\right) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$$

6. تحويلات فورييه للتوزيعات ذات الحوامل المتراصّة

سنحتاج لدراسة هذه التحويلات إلى بعض التمهيد، وهذا ما سنبدأ به.

6-1. تمهيد. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ يكن

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\nu}{n}\sup_{\mathbb{R}}|\varphi'|$$

و ν هو أيّ عددٍ من $\mathbb{N}$ يُحقّق $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-\nu, \nu]$.

الإثبات

نلاحظ أوّلاً أنّ كلاًّ من التكامل على كامل $\mathbb{R}$، والمجموع على كامل $\mathbb{Z}$، هما في الحقيقة تكامل على المجال $[-\nu,\nu]$، ومجموع على الأعداد k من $[-n\nu,n\nu]\cap\mathbb{Z}$. ولا توجد مشكلة بشأن تقارب هذه المجاميع. ويمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1\left(\varphi\left(\frac{k}{n}+\frac{t}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)&=\frac{1}{n^2}\int_0^1(1-t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi'\left(\frac{k}{n}+\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{n^2}\int_0^1(1-t)\sum_{k=-n\nu}^{n\nu-1}\varphi'\left(\frac{k}{n}+\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

ومنه

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{\nu}{n}\sup_{\mathbb{R}}|\varphi'|$$

وهي المتراجحة المنشودة. ❐

ملاحظة : نستنتج، بوجه خاصّ، أنّه في حالة φ من $\mathfrak{D}$ لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\mathbb{R}}\varphi\,\mathrm{d}\,\lambda$$

وهذا تعبيرٌ عن المساواة $\mathbb{1}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k/n}$.

2-6. **نتيجة**. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. نعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع

$$\psi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\psi_n(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\tfrac{k}{n}\right)\exp^{[-2\pi\mathrm{i}k/n]}(\xi)$$

وقد رمزنا كالعادة بالرمز $\exp^{[z]}$ إلى التابع $x\mapsto e^{zx}$ من $\mathcal{E}$. عندئذ يكون لدينا

$$\widehat{\varphi}=\mathcal{E}\text{-}\lim_{m\to\infty}\psi_n$$

الإثبات

لنختر ν من $\mathbb{N}^*$ تُحقّق $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-\nu, \nu]$. في حالة ξ من $\mathbb{R}$ نطبّق التمهيد 1-6. على التابع $\varphi \exp^{[-2\pi \mathrm{i}\, \xi]}$، فنجد

$$\begin{aligned} |\psi_n(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| &\le \frac{\nu}{n} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi' - 2\pi \mathrm{i}\, \xi \varphi| \\ &\le \frac{\nu}{n} \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi'| + 2\pi |\xi| \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \Big) \end{aligned}$$

ومنه في حالة مجموعة متراصّة K من $\mathbb{R}$، يكون لدينا

$$\sup_K |\psi_n - \widehat{\varphi}| \le \frac{\nu}{n} \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi'| + 2\pi \sup_{\xi \in K} |\xi| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \Big)$$

إذن

$$\lim_{n \to \infty} \sup_K |\psi_n - \widehat{\varphi}| = 0$$

وفي حالة p من $\mathbb{N}$، نطبّق ما سبق على التابع $(-2\pi \mathrm{i}\, X)^p \varphi$ من $\mathfrak{D}$ بدلاً من φ فنجد

$$\lim_{n \to \infty} \sup_K \left| \psi_n^{(p)} - \mathcal{F}\left((-2\pi \mathrm{i}\, X)^p \varphi \right) \right| = 0$$

ولكن

$$\mathcal{F}\left((-2\pi \mathrm{i}\, X)^p \varphi \right) = \widehat{\varphi}^{(p)}$$

إذن

$$\lim_{n \to \infty} \sup_K \left| \psi_n^{(p)} - \widehat{\varphi}^{(p)} \right| = 0$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه مهما تكن المجموعة المتراصّة K، ومهما يكن p من $\mathbb{N}$، يكن

$$\lim_{n \to \infty} \sup_K \left| \psi_n^{(p)} - \widehat{\varphi}^{(p)} \right| = 0$$

وهذا يعني أنّ

$$\widehat{\varphi} = \mathcal{E}\text{-}\lim_{m \to \infty} \psi_n \,.$$ ❐

3-6. **مبرهنة**. ليكن T توزيعاً ذا حامل متراصّ، أي عنصراً من $\mathcal{E}'$، عندئذ يكون التابع

$$F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, F(z)=\left\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}\right\rangle$$

تابعاً هولومورفيّاً في كامل المستوي $\mathbb{C}$. ويوجد عددان A و M من $\mathbb{R}_+^*$، وعددٌ ν من $\mathbb{N}$ بحيث تتحقّق المتراجحة:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \left|F(z)\right|\leq M(1+|z|^{\nu})e^{A|\operatorname{Im} z|}$$

وإذا عرّفنا f بأنّه مقصور F على $\mathbb{R}$، أي $f=F_{|\mathbb{R}}$، كان التوزيع المنتظم الموافق للتابع f هو تحويل فورييه للتوزيع T. أي $\widehat{T}=T_f$.

الإثبات

نثبّت z من $\mathbb{C}$. ونتأمّل متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{E}$ المعرّفة بالصيغة

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^k}{k!}x^k$$

نلاحظ أنّه في حالة x من $\mathbb{R}$، و n و p من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}\varphi_{n+p}^{(p)}(x)&=\sum_{k=p}^{n+p}\frac{(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^k}{k!}k(k-1)\cdots(k-p+1)x^{k-p}\\&=(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^p\varphi_n(x)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left(\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}\right)^{(p)}-\varphi_{n+p}^{(p)}=-(2\pi\,\mathrm{i}\,z)^p\left(\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}-\varphi_n\right)$$

إذن

$$\begin{aligned}\left|(\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]})^{(p)}(x)-\varphi_{n+p}^{(p)}(x)\right|&\leq\left|2\pi z\right|^p\left|e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,zx}-\varphi_n(x)\right|\\&\leq\left|2\pi z\right|^{p+n+1}e^{\left|2\pi zx\right|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

لتكن K مجموعة متراصّة ما من $\mathbb{R}$، ولتكن p من $\mathbb{N}$. بافتراض أنّ $K\subset[-a,a]$ نستنتج مباشرة مما سبق أنّ

$$\sup_K\left|(\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]})^{(p)}-\varphi_{n+p}^{(p)}\right|\leq\left|2\pi z\right|^{p+n+1}e^{2\pi a|z|}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذن، مهما تكن المجموعة المتراصّة K ، ومهما تكن p من $\mathbb{N}$ ، يكن

$$\lim_{n\to\infty}\sup_K\left|(\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]})^{(p)}-\varphi_n^{(p)}\right|=0$$

وهذا يبرهن على أنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب في $\mathcal{E}$ من التابع $\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}$. وعليه يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}\right\rangle &=\lim_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^k}{k\,!}\langle T,X^k\rangle\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle T,X^k\rangle}{k\,!}(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^k\end{aligned}$$

إذن، يقبل التابع F النشر بمتسلسلة صحيحة في $\mathbb{C}$. وهذا يبرهن صحّة الخاصّة المطلوبة.

من جهة أخرى، لمّا كان T توزيعاً من $\mathcal{E}'$ استنتجنا من التعريف أنّه توجد مجموعة متراصّة K_T ، ويوجد عددٌ طبيعي ν ، وعددٌ حقيقي M_1 ، بحيث

$$\forall\varphi\in\mathcal{E},\quad\left|\langle T,\varphi\rangle\right|\le M_1\sum_{p=0}^{\nu}\sup_{K_T}\left|\varphi^{(p)}\right|$$

وبوجه خاصّ

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad\left|\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}\rangle\right|\le M_1\sum_{p=0}^{\nu}\left|2\pi z\right|^p\sup_{x\in K_T}\left|e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xz}\right|$$

ليكن A من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $K_T\subset\left[-\frac{A}{2\pi},\frac{A}{2\pi}\right]$ ، عندئذ

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad\left|\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,z]}\rangle\right|\le M(1+|z|^\nu)e^{A|\mathrm{Im}\,z|}$$

وقد عرّفنا $M=M_1(1+\nu)(2\pi)^\nu$. وعلى الخصوص، يكون لدينا

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad\left|\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi]}\rangle\right|\le M(1+|\xi|^\nu)$$

وأخيراً، إذا عرّفنا f بالصيغة $f=F_{|\mathbb{R}}$ ، كان لدينا $T_f=\widehat{T}$. لأنّه في حالة φ من $\mathfrak{D}$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\left\langle T_f,\varphi\right\rangle &=\int_{\mathbb{R}}f(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi=\int_{\mathbb{R}}\left\langle T,\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi]}\right\rangle\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\\ &=\int_{\mathbb{R}}\left\langle T,\varphi(\xi)\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi]}\right\rangle\mathrm{d}\,\xi\end{aligned}$$

?

$$=\left\langle T,\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\exp^{[-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi]}\,\mathrm{d}\,\xi\right\rangle=\langle T,\widehat{\varphi}\rangle=\left\langle\widehat{T},\varphi\right\rangle$$

هنا، لا بُد من تعليل المُبادلة بين المؤثِّرَين T والتكامل، لذلك نناقش كما يأتي:

في حالة φ من $\mathfrak{D}$، نستنتج من النتيجة 6-2. والتمهيد 6-1. ما يلي

$$\begin{aligned}\langle T,\hat{\varphi}\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle T,\psi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\langle T,\exp^{[-2\pi\mathrm{i}k/n]}\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x = \left\langle T_f,\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

ومنه تَساوي التوزيعين $\widehat{T}$ و T_f. وبذا يتمّ الإثبات. ❐

7. جداء التّلافّ

7-1. مبرهنة. فيما يلي، يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. ليكن φ تابعاً من $\mathcal{X}$. نعرّف في حالة h من $\mathbb{R}^*$، التابع ψ_h من $\mathcal{X}$ بالصيغة

$$\psi_h = \frac{1}{h}(\tau_{-h}(\varphi)-\varphi)$$

عندئذ $\mathcal{X}\text{-}\lim_{h\to 0}\psi_h = \varphi'$.

الإثبات

لإثبات المطلوب علينا أن نثبتَ أنّ $\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to 0}\psi_{h_n} = \varphi'$ وذلك أيّاً كانت المتتالية $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}^*$ التي تسعى إلى 0. لنلاحظ بوجه عامّ أنّ

$$\begin{aligned}\psi_h(x)-\varphi'(x) &= \frac{1}{h}\big(\varphi(x+h)-\varphi(x)\big)-\varphi'(x)\\ &= \int_0^1\big(\varphi'(x+uh)-\varphi'(x)\big)\,\mathrm{d}\,u\\ &= h\int_0^1(1-u)\varphi''(x+uh)\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

وبتطبيق المساواة السابقة على $\varphi^{(k)}$ بدلاً من φ، في حالة k من $\mathbb{N}$، نجد

$$(*)\qquad (\psi_h)^{(k)}(x)-(\varphi')^{(k)}(x) = h\int_0^1(1-u)\varphi^{(k+2)}(x+uh)\,\mathrm{d}\,u$$

لنناقش إذن الحالات المختلفة.

■ حالة $\mathcal{X} = \mathfrak{D}$.

نفترض أنّ $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-A, A]$، عندئذ، نعرّف المجموعة المتراصّة

$$K_0 = [-A-1, A+1]$$

فيكون لدينا من جهة أولى $\operatorname{supp}(\psi_h) \subset K_0$ أيّاً كانت h من $[-1,1]$. ومن جهة ثانية، مهما تكن k من $\mathbb{N}$، ومهما تكن h من $\mathbb{R}^*$، نستنتج من $(*)$ ما يلي

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|(\psi_h)^{(k)} - (\varphi')^{(k)}\right| \leq \frac{1}{2}\left|h\right| \cdot \sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(k+2)}\right|$$

ومنه

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{h\to 0}\sup_{\mathbb{R}}\left|(\psi_h)^{(k)} - (\varphi')^{(k)}\right| = 0$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $\mathfrak{D}\text{-}\lim\limits_{h\to 0} \psi_h = \varphi'$، في حالة φ من $\mathfrak{D}$.

■ حالة $\mathcal{X} = \mathcal{S}$.

لتكن m و k من $\mathbb{N}$. عندئذ نستنتج من $(*)$ ما يلي

$$x^m\left((\psi_h)^{(k)}(x) - (\varphi')^{(k)}(x)\right) = h\int_0^1 (1-u)x^m\varphi^{(k+2)}(x+uh)\,\mathrm{d}\,u$$

ولكن

$$\begin{aligned} x^m\varphi^{(k+2)}(x+uh) &= (x+uh-uh)^m\varphi^{(k+2)}(x+uh) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} C_m^\ell(-uh)^{m-\ell}(x+uh)^\ell\varphi^{(k+2)}(x+uh) \end{aligned}$$

إذن، في حالة u و h من $[-1,1]$، و x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\left|x^m\varphi^{(k+2)}(x+uh)\right| \leq \sum_{\ell=0}^{m} C_m^\ell p_{\ell,k+2}(\varphi) \leq 2^m q_{m+k+2}(\varphi)$$

ومن ثَمّ

$$0 < |h| < 1 \Rightarrow p_{m,k}(\psi_h - \varphi') \leq h\cdot 2^{m-1} q_{m+k+2}(\varphi)$$

ومنه

$$\forall (m,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \lim_{h\to 0} p_{m,k}\left(\psi_h - \varphi'\right) = 0$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{S}\text{-}\lim\limits_{h\to 0} \psi_h = \varphi'$، في حالة φ من $\mathcal{S}$.

▪ حالة $\mathcal{X} = \mathcal{E}$.

لتكن K مجموعة متراصّة. نستنتج من استمرار التابع

$$\text{sum} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$$

أنّ المجموعة $K_0 = \text{sum}(K \times [-1,1]) = K + [-1,1]$ مجموعة متراصّة. نتأمّل k من $\mathbb{N}$. عندئذ نستنتج من $(*)$ أنّه في حالة h من $[-1,1]$ لدينا

$$\sup_K \left| (\psi_h)^{(k)} - (\varphi')^{(k)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| h \right| \cdot \sup_{K_0} \left| \varphi^{(k+2)} \right|$$

وهذا يبرهن، على أنّ

$$\lim_{h \to 0} \sup_K \left| (\psi_h)^{(k)} - (\varphi')^{(k)} \right| = 0$$

وذلك مهما كانت المجموعة المتراصّة K من $\mathbb{R}$، ومهما كان k من $\mathbb{N}$. ❐

2-7. **مبرهنة**. فيما يلي، يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. ليكن φ تابعاً من $\mathcal{X}$. وليكن T توزيعاً من $\mathcal{X}'$. نعرّف عندئذ التابع

$$T * \varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x(\overleftarrow{\varphi}) \rangle$$

فيكون $T * \varphi$ تابعاً من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$.

الإثبات

لنلاحظ أوّلاً أنّ التابع $T * \varphi$ معرّفٌ بأسلوب صحيح، لأنّه في حالة x من $\mathbb{R}$، و φ من $\mathcal{X}$ ينتمي التابع $\tau_x(\overleftarrow{\varphi})$ إلى $\mathcal{X}$. سنرمز بالرمز Ψ إلى التابع $T * \varphi$ تبسيطاً.

نثبّت x من $\mathbb{R}$، ولتكن h من $\mathbb{R}^*$. عندئذ

$$\frac{1}{h}(\Psi(x+h) - \Psi(x)) = \langle T, \frac{1}{h}(\tau_h(\tau_x(\overleftarrow{\varphi})) - \tau_x(\overleftarrow{\varphi})) \rangle$$

ولكن عملاً بالمبرهنة 1-7 مطبّقة على $\tau_x(\overleftarrow{\varphi})$ بدلاً من φ لدينا

$$\mathcal{X}\text{-}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\tau_h(\tau_x(\overleftarrow{\varphi})) - \tau_x(\overleftarrow{\varphi})) = -(\tau_x(\overleftarrow{\varphi}))' = \tau_x(\overleftarrow{\varphi'})$$

إذن نستنتج من استمرار T أنّ

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\Psi(x+h) - \Psi(x)) = \langle T, \tau_x(\overleftarrow{\varphi'}) \rangle = T * \varphi'(x)$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $T * \varphi$ قابلٌ للاشتقاق، وأنّ $(T * \varphi)' = T * \varphi'$.

ولكنّ هذه النتيجة مُطبّقة على $\varphi^{(p)}$ بدلاً من φ، تجعلنا نستنتج أنّ التابع $T*\varphi^{(p)}$ قابلٌ للاشتقاق وأنّ

$$\left(T*\varphi^{(p)}\right)'=T*\varphi^{(p+1)}$$

وعليه ينتمي $T*\varphi$ إلى الصف C^∞، ويتحقّق ما يلي :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad (T*\varphi)^{(p)}=T*\varphi^{(p)}=T^{(p)}*\varphi$$

أمّا المساواة الأخيرة فتنتج من كون

$$\forall a\in\mathbb{R},\ (\tau_a(\overleftarrow{\varphi}))^{(p)}=(-1)^p\,\tau_a(\overleftarrow{\varphi^{(p)}})\qquad\square$$

ملاحظة. ليكن f تابعاً من $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$، وليكن التوزيع المنتظم $T=T_f$ من $\mathfrak{D}'$، وأخيراً ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ، مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$\begin{aligned}T*\varphi(x)&=\int_{\mathbb{R}}f(t)\tau_x(\overleftarrow{\varphi})(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}f(t)\overleftarrow{\varphi}(t-x)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbb{R}}f(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t=f*\varphi(x)\end{aligned}$$

وهذا ما يبرّر وضع التعريف الآتي:

3-7. **تعريف**. فيما يلي، يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. عندئذ مهما يكن φ من $\mathcal{X}$. ومهما يكن T توزيعاً من $\mathcal{X}'$، نعرّف التابع $T*\varphi$ من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$، بالصيغة :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad T*\varphi(x)=\langle T,\tau_x(\overleftarrow{\varphi})\rangle=\langle\overleftarrow{T},\tau_{-x}(\varphi)\rangle$$

وعندئذ يكون لدينا، في حالة p من $\mathbb{N}$ ما يأتي

$$(T*\varphi)^{(p)}=T*\varphi^{(p)}=T^{(p)}*\varphi$$

4-7. **مثال**. إذا كان φ من $\mathcal{E}$، كان لدينا، في حالة x من $\mathbb{R}$، ما يلي

$$\delta_a*\varphi(x)=\left\langle\delta_a,\tau_x(\overleftarrow{\varphi})\right\rangle=\varphi(x-a)=\tau_a(\varphi)(x)$$

ومن ثَمّ، نكون قد أثبتنا أنّ :

$$\forall\varphi\in\mathcal{E},\ \forall a\in\mathbb{R},\quad \delta_a*\varphi=\tau_a(\varphi).$$

.5-7 مبرهنة – تقريب جداء التلاف. فيما يأتي، يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. ليكن ψ من $\mathfrak{D}$، و φ من $\mathcal{X}$. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ التابع $\theta_n(\varphi,\psi)$ من $\mathcal{X}$ بالصيغة

$$\theta_n(\varphi,\psi)=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x_{k,n})\tau_{x_{k,n}}(\varphi) \text{ حيث } x_{k,n}=\frac{k}{n}.$$

عندئذ تسعى المتتالية $(\theta_n(\varphi,\psi))_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathcal{X}$ إلى $\varphi*\psi$.

الإثبات

لنلاحظ أوّلاً أنّ المجموعة $\left\{k\in\mathbb{Z}:\psi(x_{k,n})\neq 0\right\}$ مجموعة منتهية، وهذا يبيّن أنّ التابع $\theta_n(\varphi,\psi)$ هو عبارة خطيّة بعناصر من $\mathcal{X}$، وهو إذن عنصرٌ من $\mathcal{X}$.

لنفترض أنّ ν عددٌ طبيعي يُحقّق $K_0=\operatorname{supp}\psi\subset[-\nu,\nu]$. بتطبيق التمهيد 1-6. على التابع $x\mapsto\psi(x)\psi(t-x)$ مع t من $\mathbb{R}$، وبعد ملاحظة أنّ

$$\sup_{K_0}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(\varphi(\cdot-t)\psi\big)\right|\leq\sup_{K_0-\{t\}}\left(\left|\varphi'\right|+\left|\varphi\right|\right)\cdot q_1(\psi)$$

وقد رمزنا $K_0-\{t\}$ إلى المجموعة $\{x-t:x\in K_0\}$، نستنتج أنّ

$$\left|\theta_n(\varphi,\psi)(t)-\varphi*\psi(t)\right|\leq\frac{\nu}{n}\cdot\sup_{K_0-\{t\}}\left(\left|\varphi'\right|+\left|\varphi\right|\right)\cdot q_1(\psi) \qquad (*)$$

وذلك مهما تكن t من $\mathbb{R}$.

▪ **حالة** $\mathcal{X}=\mathfrak{D}$.

لنفترض أنّ $\operatorname{supp}(\varphi)\subset[-\alpha,\alpha]$. عندئذ نلاحظ ما يأتي:

① مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، يكن $\operatorname{supp}(\theta_n(\varphi,\psi))\subset[-\alpha-\nu,\alpha+\nu]$. لأنّه إذا تأمّلنا t من $\mathbb{R}$ تُحقّق $|t|>\alpha+\nu$، وعدداً k من $\mathbb{Z}$، وقعنا في إحدى الحالتين الآتيتين :

- إمّا أن يكون $x_{k,n}\notin[-\nu,\nu]$، فيكون $\psi(x_{k,n})\varphi(t-x_{k,n})=0$.
- أو يكون $x_{k,n}>\nu$، وعندها يكون

$$\left|t-x_{k,n}\right|\geq\left|t\right|-\left|x_{k,n}\right|>\alpha+\nu-\nu=\alpha$$

وهذا بدوره يقتضي أنّ $\psi(x_{k,n})\varphi(t-x_{k,n})=0$.

وعليه يكون لدينا $\theta_n(\varphi,\psi)(t)=0$ في حالة $|t|>\alpha+\nu$.

② يمكننا كتابة $(*)$ في حالة φ من $\mathfrak{D}$ بالشكل

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi\right| \leq \frac{\nu}{n}\cdot q_1(\varphi)\cdot q_1(\psi)$$

وهذا يقتضي أنّه، مهما يكن φ و ψ من $\mathfrak{D}$، يكن

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi\right| = 0$$

③ ليكن p من $\mathbb{N}$. بتطبيق النتيجة السابقة على $\varphi^{(p)}$ الذي ينتمي إلى $\mathfrak{D}$، نستنتج

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(\varphi^{(p)},\psi)-\varphi^{(p)}*\psi\right| = 0$$

ولكن نرى مباشرة أنّ

$$\theta_n(\varphi^{(p)},\psi) = (\theta_n(\varphi,\psi))^{(p)} \quad \text{و} \quad \varphi^{(p)}*\psi = (\varphi*\psi)^{(p)}$$

إذن

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|(\theta_n(\varphi,\psi))^{(p)}-(\varphi*\psi)^{(p)}\right| = 0$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall(\varphi,\psi)\in\mathfrak{D}^2,\qquad \mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_n(\varphi,\psi) = \varphi*\psi$$

■ **حالة** $\mathcal{X}=\mathcal{S}$.

① هنا أيضاً يمكننا كتابة $(*)$ في حالة φ من $\mathcal{S}$ بالصيغة

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi\right| \leq \frac{\nu}{n}\cdot q_1(\varphi)\cdot q_1(\psi)$$

وهذا يقتضي أنّه مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ ومهما يكن ψ من $\mathfrak{D}$ فلدينا

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi\right| = 0$$

② ليكن m و ℓ من $\mathbb{N}$. بملاحظة أنّه، في حالة k من $\mathbb{Z}$، لدينا

$$\begin{aligned} X^m &= ((X-x_{k,n})+x_{k,n})^m = \sum_{r=0}^{m} C_m^r (X-x_{k,n})^{m-r}(x_{k,n})^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} C_m^r \tau_{x_{k,n}}(X^{m-r})(x_{k,n})^r \end{aligned}$$

نستنتج أنّه، مهما تكن k من $\mathbb{Z}$، لدينا

$$X^m \tau_{x_{k,n}}(\varphi^{(\ell)})\psi(x_{k,n}) = \sum_{r=0}^{m} C_m^r \tau_{x_{k,n}}(X^{m-r}\varphi^{(\ell)})(x_{k,n})^r \psi(x_{k,n})$$

وبالجمع، على جميع قيم k من $\mathbb{Z}$، نجد

$$X^m\left(\theta_n\left(\varphi^{(\ell)},\psi\right)\right) = \sum_{r=0}^{m} C_m^r \theta_n\left(X^{m-r}\varphi^{(\ell)}, X^r\psi\right)$$

ولكن في حالة $0 \leq r \leq m$ لدينا $X^r\psi \in \mathfrak{D}$، و $X^{m-r}\varphi^{(\ell)} \in \mathcal{S}$، إذن بناءً على ما أثبتناه في ① لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\theta_n(X^{m-r}\varphi^{(\ell)}, X^r\psi) - (X^{m-r}\varphi^{(\ell)}) * (X^r\psi)\right| = 0$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|X^m\theta_n(\varphi^{(\ell)},\psi) - \sum_{r=0}^{m} C_m^r (X^{m-r}\varphi^{(\ell)}) * (X^r\psi)\right| = 0$$

ولكن

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{m} C_m^r (X^{m-r}\varphi^{(\ell)}) * (X^r\psi)(t) = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{r=0}^{m} C_m^r (t-x)^{m-r} x^r\right)\varphi^{(\ell)}(t-x)\psi(x)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^m \varphi^{(\ell)}(t-x)\psi(x)\,\mathrm{d}\,t = \Big(X^m(\varphi^{(\ell)} * \psi)\Big)(t)
\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|X^m(\theta_n(\varphi^{(\ell)},\psi) - \varphi^{(\ell)} * \psi)\right| = 0$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} p_{m,\ell}\left(\theta_n\left(\varphi,\psi\right) - \varphi * \psi\right) = 0$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المرجوّة أي

$$\forall\left(\varphi,\psi\right) \in \mathcal{S}\times\mathfrak{D}, \quad \mathcal{S}\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_n\left(\varphi,\psi\right) = \varphi * \psi$$

▪ **حالة** $\mathcal{X}=\mathcal{E}$. لتكن K مجموعة متراصّة. نستنتج من استمرار التابع

$$\ominus : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,t)\mapsto x-t$$

أنّ المجموعة $\mathcal{K}=\ominus(K_0\times K)=K_0-K$ مجموعة متراصّة.

① هنا يمكننا كتابة $(*)$ بالصيغة

$$\sup_K|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi|\leq\frac{\nu}{n}\cdot\left(\sup_{\mathcal{K}}|\varphi'|+\sup_{\mathcal{K}}|\varphi|\right)\cdot q_1(\psi)$$

وهذا يبرهن أنّه مهما يكن φ من $\mathcal{E}$ يكن

$$\lim_{n\to\infty}\sup_K|\theta_n(\varphi,\psi)-\varphi*\psi|=0$$

② ليكن p من $\mathbb{N}$. بتطبيق ما سبق على $\varphi^{(p)}$ بدلاً من φ نستنتج مباشرة أنّ

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty}\sup_K\left|\theta_n(\varphi^{(p)},\psi)-\varphi^{(p)}*\psi\right|=0$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه مهما تكن المجموعة المتراصّة K ، ومهما يكن p من $\mathbb{N}$ ، فإنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sup_K\left|(\theta_n(\varphi,\psi))^{(p)}-(\varphi*\psi)^{(p)}\right|=0$$

وهذا يُثبتُ النتيجة المرجوّة أي

$$\forall(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}\times\mathfrak{D},\quad \mathcal{E}\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_n(\varphi,\psi)=\varphi*\psi \qquad \square$$

6-7. نتيجة. فيما يلي، يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. ليكن ψ من $\mathfrak{D}$ ، و φ من $\mathcal{X}$ ، وأخيراً ليكن T من $\mathcal{X}'$. عندئذ

$$(T*\varphi)*\psi=T*(\varphi*\psi)$$

الإثبات

في الحقيقة، باستخدام رموز المبرهنة السابقة، لدينا

$$\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_n(\varphi,\psi)=\varphi*\psi$$

ونستنتج من استمرار T ، أنّ

$$\langle T,\varphi*\psi\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle T,\theta_n(\varphi,\psi)\rangle$$

ولكن

$$\left\langle T,\theta_n(\varphi,\psi)\right\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x_{k,n})\langle T,\tau_{x_{k,n}}(\varphi)\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x_{k,n})\big(T*\overleftarrow{\varphi}\big)(x_{k,n})$$

وبتطبيق التمهيد 6-1. على التابع $x \mapsto \psi(x)T * \overleftarrow{\varphi}(x)$ من $\mathfrak{D}$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x_{k,n})(T*\overleftarrow{\varphi})(x_{k,n}) &= \int_{\mathbb{R}} T*\overleftarrow{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \langle T*\overleftarrow{\varphi},\psi\rangle\end{aligned}$$

وعليه نجد أنّ

$$\forall\big(\varphi,\psi\big)\in\mathcal{X}\times\mathfrak{D},\quad \langle T,\varphi*\psi\rangle = \langle T*\overleftarrow{\varphi},\psi\rangle$$

ليكن إذن (φ,ψ) من $\mathcal{X}\times\mathfrak{D}$. بتطبيق النتيجة السابقة على الزوج $(\overleftarrow{\varphi},\tau_x(\overleftarrow{\psi}))$ في حالة x من $\mathbb{R}$، نجد

$$\langle T,\overleftarrow{\varphi}*\tau_x(\overleftarrow{\psi})\rangle = \langle T*\varphi,\tau_x(\overleftarrow{\psi})\rangle$$

ولكن نتوثّق مباشرة أنّ

$$\overleftarrow{\varphi}*\tau_x(\overleftarrow{\psi}) = \tau_x(\overleftarrow{\varphi*\psi})$$

فتُكتب النتيجة السابقة بالشكل

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \langle T,\tau_x(\overleftarrow{\varphi*\psi})\rangle = \langle T*\varphi,\tau_x(\overleftarrow{\psi})\rangle$$

وهذا يُكافئ

$$T*(\varphi*\psi) = (T*\varphi)*\psi$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

7-7. مبرهنة. ليكن U من $\mathcal{E}'$. عندئذ

① مهما يكن ψ من $\mathfrak{D}$ يكن $U*\psi\in\mathfrak{D}$.

② $\forall(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}\times\mathfrak{D},\quad U*(\psi*\varphi) = (U*\psi)*\varphi$

الإثبات

① في الحقيقة، إذا افترضنا أنّ $\operatorname{supp}(\psi)\subset[-b,b]$، وأنّ $\operatorname{supp}(U)\subset[-a,a]$، عندئذ يكون لدينا

$$\operatorname{supp}(\tau_x(\overleftarrow{\psi}))\subset[x-b,x+b]$$

ومن ثَمّ

- إذا كان $x > a + b$ كان $\operatorname{supp}(\tau_x(\overleftarrow{\psi})) \subset \,]a, +\infty[$ إذن

$$U * \psi(x) = \langle U, \tau_x(\overleftarrow{\psi}) \rangle = 0$$

- وإذا كان $x < -a - b$ كان $\operatorname{supp}(\tau_x(\overleftarrow{\psi})) \subset \,]-\infty, -a[$ ومنه

$$U * \psi(x) = \langle U, \tau_x(\overleftarrow{\psi}) \rangle = 0$$

وهذا يبرهن على أنّ $\operatorname{supp}(U * \psi) \subset [-a - b, a + b]$، ولأننا نعرف أنّ $U * \psi$ من الصف C^∞ بناءً على المبرهنة 2-7. نستنتج أنّ $U * \psi \in \mathfrak{D}$.

② نتأمّل تابعاً ψ من $\mathfrak{D}$، وتابعاً φ من $\mathcal{E}$. نفترض أنّ

$$\operatorname{supp}(U) \subset [-a, a] \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\psi) \subset [-b, b]$$

ونعرّف $c = a + b + 1$، ثُمّ نتأمّل تابعاً زوجيّاً χ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق

$$\forall x \in [-c, c], \quad \chi(x) = 1$$

- لتكن x من $[-b, b]$، و t من $]-a - 1, a + 1[$. عندئذ ينتمي العدد $t - x$ إلى المجال $]-c, c[$، ومن ثَمّ $\chi(t - x) = 1$. إذن

$$\operatorname{supp}\big(1 - \tau_x(\chi)\big) \bigcap \,]-a - 1, a + 1[= \varnothing$$

وعليه

$$\forall \theta \in \mathcal{E}, \quad \operatorname{supp}(\theta - \tau_x(\chi)\theta) \bigcap \operatorname{supp}(U) = \varnothing$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall \theta \in \mathcal{E}, \forall x \in [-b, b], \quad \langle U, \theta \rangle = \langle U, \tau_x(\chi)\theta \rangle$$

- ولكن

$$\begin{aligned}
\langle U * \varphi, \psi \rangle &= \int_{-b}^{b} \langle U, \tau_x(\overleftarrow{\varphi}) \rangle \psi(x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_{-b}^{b} \langle U, \tau_x(\chi) \tau_x(\overleftarrow{\varphi}) \rangle \psi(x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle U, \tau_x(\overleftarrow{\chi\varphi}) \rangle \psi(x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= ((U * (\chi\varphi)) * \overleftarrow{\psi})(0)
\end{aligned}$$

والتابعان $\overleftarrow{\psi}$ و $\chi\varphi$ ينتميان إلى $\mathfrak{D}$، والتوزيع U ينتمي إلى $\mathfrak{D}'$ فإذا استفدنا من المبرهنة السابقة أمكننا أن نكتب

$$U*((\chi\varphi)*\overleftarrow{\psi})=U*(\overleftarrow{\psi}*(\chi\varphi))=(U*\overleftarrow{\psi})*(\chi\varphi)$$

ومن ثَمّ، لأنّ $\operatorname{supp}(U*\overleftarrow{\psi})\subset[-c,c]$ بناءً على ①، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}(U*((\chi\varphi)*\overleftarrow{\psi}))(0)&=\int_{-c}^{c}(U*\overleftarrow{\psi})(t)\chi(-t)\varphi(-t)\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_{-c}^{c}(U*\overleftarrow{\psi})(t)\varphi(-t)\,\mathrm{d}\,t\\&=((U*\overleftarrow{\psi})*\varphi)(0)\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه في حالة (φ,ψ) من $\mathfrak{D}\times\mathcal{E}$ لدينا

$$\int_{\mathbb{R}}U*\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}}\langle U,\tau_t(\psi)\rangle\varphi(-t)\,\mathrm{d}\,t$$

وبتطبيق هذه النتيجة على $\tau_y(\overleftarrow{\psi})$، حيث y من $\mathbb{R}$، بدلاً من ψ، نستنتج أنّ

$$\forall(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}\times\mathfrak{D},\quad(U*\varphi)*\psi=(U*\psi)*\varphi$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

7-8. مبرهنة. ليكن T من $\mathfrak{D}'$، و U من $\mathcal{E}'$. عندئذ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad U*(T*\varphi)=T*(U*\varphi)$$

الإثبات

ليكن ψ و φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ

$$\begin{aligned}(\underbrace{U}_{\mathcal{E}'}*(\underbrace{T*\varphi}_{\mathcal{E}}))*\underbrace{\psi}_{\mathfrak{D}}&=(U*\psi)*(T*\varphi)=(T*\varphi)*(U*\psi)\\&=T*(\varphi*(U*\psi))=T*((U*\psi)*\varphi)\\&=T*(U*(\psi*\varphi))=T*(U*(\varphi*\psi))\\&=T*((U*\varphi)*\psi)=(T*(U*\varphi))*\psi\end{aligned}$$

إذ استفدنا من المبرهنات 7-7. و 7-6. ومن كون جداء التلافّ بين التوابع تبديليّاً.

إذن، بتطبيق هذه المساواة على $\overleftarrow{\psi}$ بدلاً من ψ، وبعد أخذ قيمة الطرفين عند 0 نستنتج أنّ

$$\forall(\varphi,\psi)\in\mathfrak{D}^2,\quad \langle U*(T*\varphi),\psi\rangle=\langle T*(U*\varphi),\psi\rangle$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad U*(T*\varphi)=T*(U*\varphi)$$

وذلك لأنّ التابعين $T*(U*\varphi)$ و $U*(T*\varphi)$ مستمرّان. وبذا يتم الإثبات. ❐

7-9. **تعريف**. في حالة T من $\mathfrak{D}'$ و U من $\mathcal{E}'$. نعرّف التوزيع $U*T$ من $\mathfrak{D}'$ بالصيغة

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle U*T,\varphi\rangle=U*(T*\overleftarrow{\varphi})(0)=\left\langle U,\overleftarrow{T}*\varphi\right\rangle$$

وبتطبيق التعريف على $\tau_x(\overleftarrow{\varphi})$ بدلاً من φ نستنتج أنّ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad (U*T)*\varphi=U*(T*\varphi)$$

لاحظ أنّه عملاً بالمبرهنة السابقة لدينا :

$$U*T=T*U$$

مثال : في حالة T من $\mathfrak{D}'$، و φ من $\mathfrak{D}$، لدينا

$$(\delta_a*T)*\varphi=T*(\delta_a*\varphi)=T*\tau_a(\varphi)=\tau_a(T)*\varphi$$

ومنه الخاصّة التالية :

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \delta_a*T=\tau_a(T)$$

7-10. **مبرهنة**. في حالة T من $\mathfrak{D}'$، و U من $\mathcal{E}'$، و p من $\mathbb{N}$ يكون لدينا

$$(U*T)^{(p)}=U^{(p)}*T=U*T^{(p)}$$

الإثبات

في الحقيقة، لنتأمّل تابع اختبار φ من $\mathfrak{D}$، وليكن p من $\mathbb{N}$. عندئذ

$$\langle (U*T)^{(p)},\varphi\rangle=(-1)^p\langle U*T,\varphi^{(p)}\rangle=(-1)^p\langle U,\overleftarrow{T}*\varphi^{(p)}\rangle$$

ولكن لقد رأينا في المبرهنة 7-2. أنّ

$$(\overleftarrow{T}*\varphi)^{(p)}=\overleftarrow{T}*\varphi^{(p)}=(\overleftarrow{T})^{(p)}*\varphi=(-1)^p\overleftarrow{T^{(p)}}*\varphi \qquad (*)$$

إذن من جهة أولى لدينا

$$\begin{aligned}\langle (U*T)^{(p)},\varphi\rangle &= (-1)^p\langle U,(\overleftarrow{T}*\varphi)^{(p)}\rangle\\ &= \langle U^{(p)},\overleftarrow{T}*\varphi\rangle = \langle U^{(p)}*T,\varphi\rangle\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ $(U*T)^{(p)} = U^{(p)}*T$ لأنّ φ عنصرٌ كيفي من $\mathfrak{D}$.

ومن جهة ثانية لدينا

$$\langle (U*T)^{(p)},\varphi\rangle = \langle U,\overleftarrow{T^{(p)}}*\varphi\rangle = \langle U*T^{(p)},\varphi\rangle$$

وهذا يبرهن أنّ

$$(U*T)^{(p)} = U*T^{(p)}$$

لأنّ φ عنصرٌ كيفي من $\mathfrak{D}$. ❐

مثال. في حالة p من $\mathbb{N}$، و T من $\mathfrak{D}'$، لدينا

$$\delta_0^{(p)}*T = \delta_0*T^{(p)} = T^{(p)}$$

7-11. مبرهنة. ليكن φ من $\mathcal{S}$، وليكن T من $\mathcal{S}'$. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

① إنّ التابعَ $T*\varphi$ توزيعٌ مُلطّفٌ أي $T*\varphi\in\mathcal{S}'$.

② $\mathcal{F}(T*\varphi) = \hat{\varphi}\cdot\hat{T}$.

③ مهما يكن ψ من $\mathcal{S}$ يكن $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi)$

④ $\hat{T}*\hat{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi T)$.

الإثبات

① لقد رأينا أنّ $\varphi*T$ ينتمي إلى الصف C^∞. وكذلك نستنتج من استمرار T أنّه يوجد عددٌ طبيعي N، ويوجد عددٌ حقيقي M، يُحقّقان

$$\forall\theta\in\mathcal{S},\quad |\langle T,\theta\rangle|\le M\,q_N(\theta)$$

فإذا طبّقنا المتراجحة السابقة على $\tau_y(\overleftarrow{\varphi})$ حيث y من $\mathbb{R}$، استنتجنا أنّ

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad \left|\left\langle T,\tau_y(\overleftarrow{\varphi})\right\rangle\right|\le M_1\,q_N\left(\tau_y(\overleftarrow{\varphi})\right)$$

ولكن

$$X^r(\tau_y(\overleftarrow{\varphi}))^{(t)} = (-1)^t\tau_y\left(\tau_{-y}(X^r)\overleftarrow{\varphi^{(t)}}\right) = (-1)^t\tau_y\left(\sum_{\ell=0}^{r}C_r^\ell y^\ell X^{r-\ell}\overleftarrow{\varphi^{(t)}}\right)$$

ومن ثَمَّ، في حالة $r \le N$، و $t \le N$ نجد

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}}\left|X^r(\tau_y(\overleftarrow{\varphi}))^{(t)}\right| &\le \sum_{\ell=0}^{r} C_r^\ell \left|y\right|^\ell \sup_{\mathbb{R}}\left|X^{r-\ell}\varphi^{(t)}\right| \\ &\le \left(\sum_{\ell=0}^{r} C_r^\ell \left|y\right|^\ell\right) q_N(\varphi) \le \left(1+\left|y\right|\right)^N q_N(\varphi)\end{aligned}$$

ومنه

$$q_N\left(\tau_y\left(\overleftarrow{\varphi}\right)\right) \le (N+1)^2(1+|y|)^N q_N(\varphi)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا وجود عددٍ موجبٍ M، وعددٍ طبيعي N، يُحققان

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |T*\varphi(y)| \le M(1+|y|)^N$$

فإذاكان ψ من $\mathcal{S}$، استنتجنا من كون التابع $y \mapsto (1+|y|)^N \psi(y)$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ أنّ التابع $(T*\varphi)\psi$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$. وأنّ

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}(T*\varphi)(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\right| &\le M\int_{\mathbb{R}}(1+|y|)^N|\psi(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le M\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|y|)^N}{1+|y|^{2N+2}}\,\mathrm{d}y\right) q_{2N+2}(\psi)\end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ $T*\varphi$ توزيعٌ مُلطّفٌ.

② ليكن ψ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نستنتج من المبرهنة 7-6. ما يأتي

$$((T*\varphi)*\overleftarrow{\psi})(0) = (T*(\varphi*\overleftarrow{\psi}))(0)$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left\langle T*\varphi,\psi\right\rangle &= \left\langle T,\overleftarrow{\varphi}*\psi\right\rangle = \left\langle \hat{T},\bar{\mathcal{F}}\left(\overleftarrow{\varphi}*\psi\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{T},\bar{\mathcal{F}}(\overleftarrow{\varphi})\bar{\mathcal{F}}(\psi)\right\rangle = \left\langle \hat{T},\hat{\varphi}\bar{\mathcal{F}}(\psi)\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{\varphi}\hat{T},\bar{\mathcal{F}}(\psi)\right\rangle = \left\langle \bar{\mathcal{F}}(\hat{\varphi}\hat{T}),\psi\right\rangle\end{aligned}$$

ولأنّ هذا محقّق مهما يكن ψ من $\mathfrak{D}$، و $\mathfrak{D}$ كثيفة في $\mathcal{S}$، استنتجنا أنّ

$$T*\varphi = \bar{\mathcal{F}}(\hat{\varphi}\hat{T}) \qquad (*)$$

ومنه

$$\widehat{T*\varphi} = \hat{\varphi}\hat{T}$$

③ تنصّ المبرهنة 7-6 على أنّ

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}, \quad T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$$

وبسبب كثافة $\mathfrak{D}$ في $\mathcal{S}$، تبقى المساواة السابقة صحيحة في حالة ψ من $\mathcal{S}$.

④ ومن جهة أخرى بتطبيق الخاصّة $(*)$ على $\widehat{\varphi}$ و $\widehat{T}$ بدلاً من φ و T، نجد

$$\hat{T} * \hat{\varphi} = \overline{\mathcal{F}}(\overleftarrow{\varphi T}) = \widehat{\varphi T}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

7-12. **مبرهنة**. ليكن T من $\mathcal{S}'$، و U من $\mathcal{E}'$. عندئذ ينتمي $U * T$ إلى $\mathcal{S}'$ ويكون

$$\widehat{U * T} = \hat{U} \cdot \hat{T}$$

الإثبات

في الحقيقة، لقد أثبتنا عند دراسة المبرهنة 7-11. أنّه في حالة T من $\mathcal{S}'$ يوجد ثابتٌ موجبٌ M، وعددٌ طبيعي N يُحقّقان

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left|\overleftarrow{T} * \varphi(y)\right| \leq M(1+|y|)^N q_{_N}(\varphi)$$

ولأنّ

$$(\overleftarrow{T} * \varphi)^{(p)} = \overleftarrow{T} * \varphi^{(p)}$$

استنتجنا أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \left|(\overleftarrow{T} * \varphi)^{(p)}(y)\right| \leq M(1+|y|)^N q_{_{N+p}}(\varphi)$$

ومن جهة أخرى توجد مجموعة متراصّة K_U، وثابتٌ موجبٌ M_U، وعددٌ طبيعي ν تُحقّق

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \quad |\langle U, \psi\rangle| \leq M_U \cdot \sum_{p=0}^{\nu} \sup_{K_U} \left|\psi^{(p)}\right|$$

وعليه، في حالة φ من $\mathcal{S}$، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left|\left\langle U, \overleftarrow{T} * \varphi\right\rangle\right| &\leq M_U M \cdot \sup_{y \in K_U} (1+|y|)^N . \sum_{p=0}^{\nu} q_{_{N+p}}(\varphi) \\ &\leq \widetilde{M} \cdot q_{_{N+\nu}}(\varphi)\end{aligned}$$

حيث

$$\widetilde{M} = (\nu+1) M_U M \cdot \sup_{y \in K_U} (1+|y|)^N$$

وهذا ما يُثبتُ أنّ $U * T$ هو توزيعٌ مُلطّفٌ.

من جهة أخرى، لدينا في حالة φ من $\mathcal{S}$، ما يلي

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{U * T}, \varphi \right\rangle &= \left\langle U * T, \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle T, \overleftarrow{U} * \hat{\varphi} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{T}, \bar{\mathcal{F}}(\overleftarrow{U} * \hat{\varphi}) \right\rangle = \left\langle \hat{T}, \bar{\mathcal{F}}(\overleftarrow{U}) \bar{\mathcal{F}}(\hat{\varphi}) \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{T}, \hat{U}\varphi \right\rangle = \left\langle \hat{U}\hat{T}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\widehat{U * T} = \hat{U} \cdot \hat{T}$$

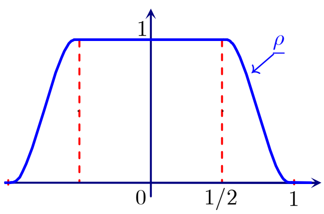
ويتمّ إثبات المطلوب. $\square$

تمرينات

التمرين 1. أثبت أنّه توجد جماعة $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ من عناصر $\mathfrak{D}$ تُحقّق الشروط الآتية:

- مهما تكن المجموعة المتراصّة $\mathcal{K}$ من $\mathbb{R}$، تكن المجموعة
$$\left\{m \in \mathbb{Z},\ \operatorname{supp}(\varphi_m) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing\right\}$$
مجموعة منتهية.
- $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_k(x) \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k(x) = 1$.

الحل



لنتأمّل التابع $\rho = \chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ من $\mathfrak{D}$، الذي يأخذ قيمه في المجال $[0,1]$، ويُحقّق الشرطين :

- $\operatorname{supp}(\rho) \subset [-1,1]$
- و $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad \rho(x) = 1$

ثُمّ نعرّف في حالة k من $\mathbb{Z}$، التابع ψ_k من $\mathfrak{D}$ بالصيغة $\psi_k = \tau_k(\rho)$ فيكون
$$\operatorname{supp}(\psi_k) \subset [k-1,k+1] \quad \text{و} \quad \forall x \in \left[k-\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right],\ \ \psi_k(x) = 1$$
لتكن $\mathcal{K}$ مجموعة متراصّة. عندئذ يوجد عددٌ طبيعي ν يُحقّق $\mathcal{K} \subset [-\nu,\nu]$. وعندئذ نستنتج مما سبق أنّ
$$\left\{m \in \mathbb{Z} : \operatorname{supp}(\psi_m) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing\right\} \subset [-\nu-1,\nu+1] \cap \mathbb{Z}$$
ومن ثَمّ
$$\operatorname{card}\left(\left\{m \in \mathbb{Z} : \operatorname{supp}(\psi_m) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing\right\}\right) \leq 2\nu + 2$$
وهذا يبرهن مباشرة أنّ المجموع $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k$ مجموعٌ منتهٍ محليّاً، فهو يعرّف تابعاً من الصفّ C^∞. كما نلاحظ أنّه في حالة x من $\mathbb{Z}$، إذا كان $k_x = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$، وهو أقرب عددٍ صحيح إلى x، كان
$$\psi(x) \geq \psi_{k_x}(x) = 1$$
ومن ثَمّ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \psi(x) \geq 1$.

وهذا ما يتيحُ لنا تعريف التوابع $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ بالصيغة

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \varphi_k(x)=\frac{\psi_k(x)}{\psi(x)}$$

وعندئذ نتيقّن مباشرة أنّ الجماعة $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ تُحقّق الشروط المرجوّة. ■

التمرين 2. مبرهنة بورِل – نتأمّل تابعاً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق

$$\forall x\in\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right],\quad \rho(x)=1 \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\rho)\subset[-1,1]$$

1. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. أثبت أنّه مهما يكن ε_n من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد λ_n من $\left[1,\infty\right[$ يحقّق

$$(*)\qquad \forall p\in\left\{0,1,\ldots,n-1\right\},\quad \sup_{\mathbb{R}}\left|(X^n\rho^{[\lambda_n]})^{(p)}\right|\le\varepsilon_n$$

2. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد العقديّة. نعرّف $\lambda_0=1$، وفي حالة n من $\mathbb{N}^*$، نختار $\varepsilon_n=\dfrac{n!}{(1+|a_n|)2^n}$، ونعرّف انطلاقاً منها العدد λ_n من $\left[1,\infty\right[$، الذي يُحقّق الشرط $(*)$. ثُمّ نتأمّل متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathfrak{D}$ المعرّفة بالصيغة

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n=\frac{a_n}{n!}X^n\rho^{[\lambda_n]}$$

① أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ من تابعٍ g.

② أثبت أنّ $\forall p\in\mathbb{N},\ g^{(p)}(0)=a_p$.

الحل

1. في الحقيقة، لنعرّف التابع $u_n=X^n\rho$. ولنلاحظ أنّه في حالة $0\le p<n$ لدينا

$$u_n^{(p)}=\sum_{r=0}^{p}C_p^r(X^n)^{(r)}\rho^{(p-r)}=\sum_{r=0}^{p}C_p^r\frac{n!}{(n-r)!}X^{n-r}\rho^{(p-r)}$$

ولأنّ $\operatorname{supp}(u_n)\subset[-1,1]$، نستنتج أنّ

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|u_n^{(p)}\right|\le\sum_{r=0}^{p}C_p^r\frac{n!}{(n-r)!}\cdot\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(p-r)}\right|\le n!\sum_{r=0}^{p}C_p^r\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(r)}\right|$$

وإذا عرّفنا العدد A_p بالصيغة $A_p=2^p\max\limits_{0\le r\le p}(\sup\limits_{\mathbb{R}}|\rho^{(r)}|)$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|(X^n\rho)^{(p)}\right|\le n!A_p\le n!A_n \qquad (1)$$

وهنا نلاحظ أنّ $(X^n\rho)^{[\lambda_n]} \cdot (\lambda_n)^{-n} = X^n\rho^{[\lambda_n]}$ ، ومن ثَمّ في حالة $p < n$ يكون لدينا

$$(X^n\rho^{[\lambda_n]})^{(p)} = (\lambda_n)^{p-n}((X^n\rho)^{(p)})^{[\lambda_n]}$$

وإذا استفدنا من المتراجحة (1)، استنتجنا أنّه بافتراض $\lambda_n \geq 1$ و $p < n$ لدينا

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|(X^n\rho^{[\lambda_n]})^{(p)}\right| = (\lambda_n)^{p-n}\sup_{\mathbb{R}}\left|(X^n\rho)^{(p)}\right| \leq \frac{n!A_n}{\lambda_n}$$

وعليه تتحقّق الخاصّة $(*)$ المطلوبة إذا اخترنا

$$\lambda_n = \max\left(1, \frac{n!A_n}{\varepsilon_n}\right)$$

①.2 لنلاحظ أوّلاً أنّ كون $\lambda_n \geq 1$ يقتضي

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}(f_n) \subset \left[-\tfrac{1}{\lambda_n}, \tfrac{1}{\lambda_n}\right] \subset [-1,1]$$

كما نستنتج من المتراجحة $(*)$ أنّه في حالة $p < n$ لدينا

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|f_n^{(p)}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

وهذا يبرهن بوجه خاصّ التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ التي تعرّف g . كما نستنتج من التقارب المنتظم للمتسلسلات $\sum_{n=p+1}^{\infty} f_n^{(p)}$ في حالة p من $\mathbb{N}^*$ ، أنّ التابع g ينتمي إلى الصف C^∞ ، وأنّ $p > n$ يقتضي

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|g^{(p)} - \sum_{k=0}^{n} f_k^{(p)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|f_k^{(p)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k = \frac{1}{2^n}$$

وهذا يُثبت أنّ $g = \mathfrak{D}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

②.2 لنلاحظ أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ ، لدينا $f_n(x) = \dfrac{a_n}{n!}x^n, \quad \forall x \in \left[-\tfrac{1}{2\lambda_n}, \tfrac{1}{2\lambda_n}\right]$.

وهذا يُثبتُ أنّ

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad f_n^{(p)}(0) = \delta_{n,p}a_n$$

حيث $\delta_{n,p}$ هو رمز كرونيكر. إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(0) = a_n$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 3. القسمة على X . نثبّت في هذا التمرين تابعاً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق

$$\forall x \in \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right], \quad \rho(x) = 1 \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\rho) \subset [-1,1]$$

1. نعرّف في حالة φ من $\mathfrak{D}$ التابع

$$\Delta_1(\varphi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \Delta_1(\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)\rho(x)}{x} & : \quad x \neq 0 \\ \varphi'(0) & : \quad x = 0 \end{cases}$$

أثبت أنّ $\Delta_1(\varphi) \in \mathfrak{D}$.

2. أثبت أنّ التطبيق $\Delta_1 : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ تطبيقٌ مستمرٌّ.

3. ليكن U توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. نعرّف $T_0 = U \circ \Delta_1$. أثبت أنّ T_0 توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$ يُحقّق $XT_0 = U$.

4. ليكن U توزيعاً مُعطى من $\mathfrak{D}'$. أثبت أنّ مجموعة حلول المعادلة $XT = U$ هي

$$\left\{T_0 + c\delta_0 : c \in \mathbb{C}\right\}$$

الحل

1. لنضع اختصاراً $\psi = \Delta_1(\varphi)$ ، ولتكن $\mathcal{O}$ المجموعة المفتوحة $\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $\psi|_{\mathcal{O}}$ ينتمي إلى الصف C^∞ . ومن جهة ثانية

$$\forall x \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[, \quad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

واستناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط نرى أنّ مقصور ψ على $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ ينتمي إلى الصف C^∞ ، وأنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[, \quad \psi^{(p)}(x) = \int_0^1 t^p \varphi^{(p+1)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

وأخيراً إذا كان $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-A, A]$ رأينا مباشرة أنّ $\operatorname{supp}(\psi) \subset [-A-1, A+1]$ ، وبهذا نكون قد تحقّقنا أنّ $\psi \in \mathfrak{D}$.

2. ومن جهة أخرى، في حالة $|x| \geq \frac{1}{2}$ و p من $\mathbb{N}$ ، لدينا

$$\psi^{(p)}(x) = \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell \frac{(-1)^\ell \ell!}{x^{\ell+1}} \left(\varphi^{(p-\ell)}(x) - \varphi(0)\rho^{(p-\ell)}(x)\right)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\geq\frac{1}{2}}\left|\psi^{(p)}(x)\right| &\leq p!\sum_{\ell=0}^{p}\frac{2^{\ell+1}}{(p-\ell)!}\left(\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(p-\ell)}\right|+\left|\varphi(0)\right|\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(p-\ell)}\right|\right)\\ &\leq 2^{p+1}p!\left(\sum_{\ell=0}^{p}\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(\ell)}\right|+\left|\varphi(0)\right|\sum_{\ell=0}^{p}\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(\ell)}\right|\right)\\ &\leq 2^{p+2}p!\left(\sum_{\ell=0}^{p}\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(\ell)}\right|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{p}\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(\ell)}\right|\right)\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى في حالة $|x|<\frac{1}{2}$ و p من $\mathbb{N}$، لدينا

$$\left|\psi^{(p)}(x)\right|=\left|\int_0^1 t^p\varphi^{(p+1)}(tx)\,\mathrm{d}\,t\right|\leq\int_0^1 t^p\left|\varphi^{(p+1)}(tx)\right|\mathrm{d}\,t\leq\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(p+1)}\right|$$

وعليه إذا عرفنا، في حالة p من $\mathbb{N}$، العدد A_p بالصيغة

$$A_p=2^{p+2}p!\left(\sum_{\ell=0}^{p}\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(\ell)}\right|\right)$$

كان لدينا

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad\sup_{\mathbb{R}}\left|\left(\Delta_1(\varphi)\right)^{(p)}\right|\leq A_p\sum_{\ell=0}^{p+1}\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(\ell)}\right|\tag{1}$$

لنثبت إذن استمرار التابع الخطّي $\Delta_1:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$.

لتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{D}$ متقاربة من 0 في $\mathfrak{D}$. عندئذ يوجد عددٌ A يُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\mathrm{supp}(\varphi_n)\subset[-A,A]$$

ويكون

$$\forall\ell\in\mathbb{N},\quad\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi_n^{(\ell)}\right|=0$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\mathrm{supp}\left(\Delta_1(\varphi_n)\right)\subset[-A-1,A+1]$$

وبالاستفادة من (1) نستنتج أيضاً أنّ

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\left(\Delta_1(\varphi_n)\right)^{(p)}\right|=0$$

ومنه

$$\mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \Rightarrow \mathfrak{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \Delta_1(\varphi_n) = 0$$

وهذا يُثبتُ استمرار التطبيق Δ_1 .

3. ليكن U من $\mathfrak{D}'$. لمّا كان Δ_1 مستمرّاً على $\mathfrak{D}$ استنتجنا أنّ $T_0 = U \circ \Delta_1$ شكلٌ خطي مستمرٌّ على $\mathfrak{D}$ أي إنّه توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$.

ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نلاحظ أنّ $\varphi = \Delta_1(X\varphi)$ ، ومن ثَمّ

$$\langle XT_0, \varphi \rangle = \langle T_0, X\varphi \rangle = \langle U, \Delta_1(X\varphi) \rangle = \langle U, \varphi \rangle$$

وهذا يُثبتُ أنّ $XT_0 = U$.

4. لنفترض أنّ S توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$ يُحقّق $XS = 0$. وليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ

$$\varphi = \varphi(0)\rho + X\Delta_1(\varphi)$$

وعليه، إذا عرّفنا $c = \langle S, \rho \rangle$ ، كان لدينا، في حالة φ من $\mathfrak{D}$ ، ما يأتي:

$$\begin{aligned}\langle S, \varphi \rangle &= \langle S, \varphi(0)\rho \rangle + \langle S, X\Delta_1(\varphi) \rangle \\ &= \langle S, \rho \rangle \langle \delta_0, \varphi \rangle + \langle XS, \Delta_1 \langle T, \varphi \rangle \rangle \\ &= c \langle \delta_0, \varphi \rangle\end{aligned}$$

ولمّا كان من المعلوم أنّ $X\delta_0 = 0$ استنتجنا أنّ

$$\{S \in \mathfrak{D}' : XS = 0\} = \{c\delta_0 : c \in \mathbb{C}\}$$

ليكن U من $\mathfrak{D}'$. وليكن T_0 التوزيع الذي وجدناه في 3. ليُحقّق $XT_0 = U$. عندئذ

$$\begin{aligned}XT = U &\Leftrightarrow X(T - T_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow T - T_0 \in \{c\delta_0 : c \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\{T \in \mathfrak{D}' : XT = U\} = \{T_0 + c\delta_0 : c \in \mathbb{C}\}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 4. القسمة على X^n . نثبّت في هذا التمرين عدداً n من $\mathbb{N}^*$، وتابعاً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق الشرطين $\mathrm{supp}(\rho) \subset [-1,1]$ و $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \rho(x) = 1$.

1. نعرّف في حالة φ من $\mathfrak{D}$ التابع $\Delta_n(\varphi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بالصيغة

$$\Delta_n(\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n}\left(\varphi(x) - \rho(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) & : \quad x \neq 0 \\ \varphi^{(n)}(0) & : \quad x = 0 \end{cases}$$

أثبت أنّ $\Delta_n(\varphi) \in \mathfrak{D}$. تذكّر منشور تايلور مع باقٍ تكاملي.

2. أثبت أنّ التطبيق $\Delta_n : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ تطبيقٌ مستمرٌّ.

3. ليكن U توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. نعرّف $T_0 = U \circ \Delta_n$. أثبت أنّ T_0 توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$ يُحقّق $X^n T_0 = U$.

4. ليكن U توزيعاً مُعطى من $\mathfrak{D}'$. أثبت أنّ مجموعة حلول المعادلة $X^n T = U$ هي

$$\left\{ T_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_0^{(k)} : (c_0,\ldots,c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \right\}$$

الحل

1. لنضع اختصاراً $\psi = \Delta_n(\varphi)$، ولتكن $\mathcal{O}$ المجموعة المفتوحة $\mathbb{R}\backslash\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $\psi_{|\mathcal{O}}$ ينتمي إلى الصف C^∞ . ومن جهة ثانية، اعتماداً على منشور تايلور مع باقٍ تكاملي، نرى أنّ

$$\forall x \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[, \quad \psi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

واستناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط نرى أنّ مقصور ψ على $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ ينتمي إلى الصف C^∞، وأنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[, \ \ \psi^{(p)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^p\varphi^{(p+n)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

وأخيراً إذا كان $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-A,A]$ رأينا مباشرة أنّ $\mathrm{supp}(\psi) \subset [-A-1, A+1]$، وبهذا نرى أنّ $\psi \in \mathfrak{D}$.

2. ومن جهة أخرى، نرى أنّه في حالة $|x| \geq \frac{1}{2}$ و p من $\mathbb{N}$، لدينا

$$\psi^{(p)}(x) = \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell \frac{(-1)^\ell (n+\ell-1)!}{(n-1)!x^{n+\ell}} \left(\varphi^{(p-\ell)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (X^k\rho)^{(p-\ell)}(x) \right)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\geq\frac{1}{2}} \left|\psi^{(p)}(x)\right| &\leq 2^{2p+n} \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} \sum_{\ell=0}^{p} \left(\sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(p-\ell)}\right| + \right. \\ &\qquad \left. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\varphi^{(k)}(0)|}{k!} \sup_{\mathbb{R}} \left|(X^k\rho)^{(p-\ell)}\right| \right) \\ &\leq 2^{2p+n+1} \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} \left(\sum_{\ell=0}^{n+p} \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(\ell)}\right| \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{p} \sup_{\mathbb{R}} \left|(X^k\rho)^{(\ell)}\right| \right)\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى في حالة $|x| < \frac{1}{2}$ و p من $\mathbb{N}$، لدينا

$$\left|\psi^{(p)}(x)\right| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^p \left|\varphi^{(p+n)}(tx)\right| \mathrm{d}\, t \leq \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(p+n)}\right|$$

وعليه إذا عرفنا، في حالة p من $\mathbb{N}$، العدد A_p بالصيغة

$$A_p = 2^{2p+n+1} \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{p} \sup_{\mathbb{R}} \left|(X^k\rho)^{(\ell)}\right| \right)$$

كان لدينا

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sup_{\mathbb{R}} \left| \left(\Delta_n(\varphi)\right)^{(p)} \right| \leq A_p \sum_{\ell=0}^{p+n} \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(\ell)}\right| \tag{1}$$

لنثبت إذن استمرار التابع الخطّي $\Delta_n : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$. لتكن $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{D}$ متقاربة من 0 في $\mathfrak{D}$. عندئذ يوجد عددٌ A يُحقّق

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}(\varphi_m) \subset [-A, A]$$

ويكون

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi_m^{(\ell)}\right| = 0$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}\left(\Delta_n(\varphi_m)\right) \subset [-A-1, A+1]$$

وبالاستفادة من (1) نستنتج أيضاً أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \left(\Delta_n(\varphi_m)\right)^{(p)} \right| = 0$$

ومنه

$$\mathfrak{D}\text{-} \lim_{m\to\infty} \varphi_m = 0 \Rightarrow \mathfrak{D}\text{-} \lim_{m\to\infty} \Delta_n(\varphi_m) = 0$$

وهذا يُثبتُ استمرار التطبيق Δ_n .

3. ليكن U من $\mathfrak{D}'$. لمّا كان Δ_n مستمرّاً على $\mathfrak{D}$ استنتجنا أنّ $T_0 = U \circ \Delta_n$ شكلٌ خطي مستمرٌّ على $\mathfrak{D}$ أي إنّه توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نلاحظ أنّ $\Delta_n(X^n\varphi) = \varphi$ ، ومن ثَمّ

$$\left\langle X^n T_0, \varphi \right\rangle = \left\langle T_0, X^n\varphi \right\rangle = \left\langle U, \Delta_n(X^n\varphi) \right\rangle = \left\langle U, \varphi \right\rangle$$

وهذا يُثبتُ أنّ $X^n T_0 = U$.

4. ليكن S توزيعاً من $\mathfrak{D}'$ يُحقّق $X^n S = 0$. وليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} X^k \rho + X^n \Delta_n(\varphi)$$

وعليه، إذا عرّفنا $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ من $\mathbb{C}^n$ بالصيغة

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle S, X^k\rho \right\rangle : k \in \left\{0, 1, \ldots, n-1\right\}$$

كان لدينا، في حالة φ من $\mathfrak{D}$ ، ما يلي :

$$\begin{aligned}
\left\langle S, \varphi \right\rangle &= \left\langle S, \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) X^k \rho \right\rangle + \left\langle S, X^n \Delta_n(\varphi) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left\langle S, X^k\rho \right\rangle \varphi^{(k)}(0) + \left\langle X^n S, \Delta_n(\varphi) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\langle \delta_0^{(k)}, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} c_k \delta_0^{(k)}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

ولمّا كان من اليسير أنّ نلاحظ أنّ $X^n \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_0^{(k)} = 0$ استنتجنا أنّ

$$\left\{ S \in \mathfrak{D}' : X^n S = 0 \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_0^{(k)} : (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \right\}$$

ليكن U من $\mathfrak{D}'$. وليكن T_0 التوزيع الذي وجدناه في 3. ليُحقّق $X^nT_0 = U$. عندئذ

$$\begin{aligned} X^nT = U &\Leftrightarrow X^n(T - T_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow T - T_0 \in \left\{\sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta_0^{(k)} : (c_0,\ldots,c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\right\} \end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\left\{T \in \mathfrak{D}' : X^nT = U\right\} = \left\{T_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta_0^{(k)} : (c_0,\ldots,c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\right\}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 5. نتأمّل في هذا التمرين توزيعاً T من $\mathfrak{D}'$.

1. نفترض أنّه يوجدُ عددٌ N من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $X^NT = 0$. أثبت أنّ

$$\operatorname{supp}(T) \subset \{0\}$$

2^*. وبالعكس، نفترض أنّ $\operatorname{supp}(T) \subset \{0\}$. أثبت أنّه يوجد N من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق

$$X^NT = 0$$

واستنتج صيغة T.

الحل

1. في الحقيقة، إذا كان φ عنصراً من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$ ، استنتجنا أنّه يوجد عددٌ ε من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $]-\varepsilon,\varepsilon[\cap \operatorname{supp}(\varphi) = 0$. وعليه ينتمي التابع

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{1}{x^N}\varphi(x)$$

إلى $\mathfrak{D}$. ومنه

$$\left\langle T,\varphi\right\rangle = \left\langle T, X^N\psi\right\rangle = \left\langle X^NT,\psi\right\rangle = 0$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall\varphi \in \mathfrak{D},\quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^* \Rightarrow \left\langle T,\varphi\right\rangle = 0$$

وهذا يبرهن على أنّ $\operatorname{supp}(T) \subset \{0\}$.

2. لمّا كان T عنصراً من $\mathcal{E}'$، يوجد مجال متراصّ $K=[-a,a]$، ويوجد N من $\mathbb{N}^*$، و M من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث

$$\forall\varphi\in\mathcal{E},\quad \left|\langle T,\varphi\rangle\right|\le M\sum_{p=0}^{N-1}\sup_K\left|\varphi^{(p)}\right|$$

لنتأمّل التابع $\rho=\chi_{\frac12,\frac12}$ من $\mathfrak{D}$، الذي يأخذ قيمه في المجال $[0,1]$، ويُحقّق الشرطين :

$$\forall x\in\left[-\tfrac12,\tfrac12\right],\ \rho(x)=1 \quad \text{و} \quad \operatorname{supp}(\rho)\subset[-1,1]$$

ليكن φ من $\mathfrak{D}$، وليكن n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$\operatorname{supp}\left(X^N(1-\rho^{[n]})\varphi\right)\cap\left]-\tfrac{1}{4n},\tfrac{1}{4n}\right[=\varnothing$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\left\langle T,X^N(1-\rho^{[n]})\varphi\right\rangle=0$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left\langle T,X^N\varphi\right\rangle=\left\langle T,X^N\rho^{[n]}\varphi\right\rangle=\frac{1}{n^N}\left\langle T,(X^N\rho)^{[n]}\varphi\right\rangle$$

إذن

$$(*)\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left|\left\langle T,X^N\varphi\right\rangle\right|\le\frac{M}{n^N}\sum_{p=0}^{N-1}\sup_K\left|((X^N\rho)^{[n]}\varphi)^{(p)}\right|$$

ولكن إذا عرّفنا $\chi=X^N\rho$ كان لدينا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، ما يأتي:

$$(\chi^{[n]}\varphi)^{(p)}=\sum_{\ell=0}^{p}C_p^\ell n^\ell(\chi^{(\ell)})^{[n]}\varphi^{(p-\ell)}$$

ومن ثَمّ، في حالة $0\le p<N$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\sup_K\left|(\chi^{[n]}\varphi)^{(p)}\right|&\le n^p\sum_{\ell=0}^{p}C_p^\ell\sup_{\mathbb{R}}\left|\chi^{(\ell)}\right|\sup_K\left|\varphi^{(p-\ell)}\right|\\&\le(2n)^{N-1}\left(\max_{0\le\ell<N}\sup_{\mathbb{R}}\left|\chi^{(\ell)}\right|\right)\left(\max_{0\le\ell<N}\sup_K\left|\varphi^{(\ell)}\right|\right)\end{aligned}$$

وبالعودة إلى $(*)$ نستنتج أنّه مهما كانت $n\ge1$ كان

$$\left|\left\langle T,X^N\varphi\right\rangle\right|\le\frac{MN2^{N-1}}{n}\left(\max_{0\le\ell<N}\sup_{\mathbb{R}}\left|\chi^{(\ell)}\right|\right)\left(\max_{0\le\ell<N}\sup_K\left|\varphi^{(\ell)}\right|\right)$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \left\langle T, X^N \varphi \right\rangle = 0$$

وهذا يبرهن على أنّ $X^N T = 0$. وبالاستفادة من نتيجة التمرين السابق، نستنتج أنّه توجد ثوابتُ عقديّة c_0 و c_1 و… و c_{N-1} تُحقّق

$$T = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta_0^{(k)}$$

وبذا يكتمل الحلّ.

التمرين 6. نعرّف في حالة φ من $\mathcal{E}$، و n من $\mathbb{N}^*$، المقدار

$$V_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \left(\ln n\right)\varphi'(0)$$

1. أثبت تقارب المتتالية $\left(V_n(\varphi)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. نرمز إلى نهايتها بالرمز $\left\langle T, \varphi \right\rangle$.
2. أثبت أننا بذلك نعرّف توزيعاً T من $\mathcal{E}'$، وعيِّن $\mathcal{K} = \operatorname{supp}(T)$.

الحل

1. ليكن φ من $\mathcal{E}$ عندئذ، بالاستفادة من منشور تايلور مع باقٍ تكاملي، يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2 \int_0^1 (1-t)\varphi''(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \varphi(0) + \frac{1}{k}\varphi'(0) + \frac{1}{k^2}\int_0^1 (1-t)\varphi''\left(\frac{t}{k}\right)\mathrm{d}\,t$$

إذن، مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$ يكن

$$V_n(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)\varphi'(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\int_0^1 (1-t)\varphi''\left(\frac{t}{k}\right)\mathrm{d}\,t$$

ولكن نعلم أنّ المتتالية $\left(H_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ التي حدها العام $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ متقاربة ونهايتها هي ثابتُ أولر

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \gamma$$

ومن جهة ثانية المتسلسلة $\sum v_k$ التي حدّها العام $v_k = \frac{1}{k^2}\int_0^1 (1-t)\varphi''\left(t/k\right)\mathrm{d}\,t$ متقاربة لأنّ

$$\forall k \geq 1, \qquad \left|\frac{1}{k^2}\int_0^1 (1-t)\varphi''\left(\frac{t}{k}\right)\mathrm{d}\,t\right| \leq \frac{1}{2k^2}\sup_{[0,1]}\left|\varphi''\right|$$

وعليه، مهما يكن φ من $\mathcal{E}$، فلدينا

$$\left\langle T,\varphi\right\rangle = \lim_{n\to\infty} V_n(\varphi) = \gamma\varphi'(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\int_0^1 (1-t)\varphi''\left(\frac{t}{k}\right)\mathrm{d}\,t$$

2. نستنتج من المساواة السابقة أنّه في حالة φ من $\mathcal{E}$ لدينا

$$\begin{aligned}\left|\left\langle T,\varphi\right\rangle\right| &\leq \gamma\left|\varphi'(0)\right| + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\cdot\sup_{[0,1]}\left|\varphi''\right| \\ &\leq \left|\varphi'(0)\right| + \sup_{[0,1]}\left|\varphi''\right| \leq \sup_{[0,1]}\left|\varphi'\right| + \sup_{[0,1]}\left|\varphi''\right|\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كون $\gamma \leq 1$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq 2$. وهذا يُثبت استمرار الشكل الخطّي T على $\mathcal{E}$، فهو إذن توزيعٌ حامله متراصٌّ.

ليكن I أيَّ واحدٍ من المجالات $]-\infty,0[$ أو $]1,+\infty[$ أو $\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[$ مع k من $\mathbb{N}^*$. عندئذ مهما يكن φ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\operatorname{supp}(\varphi) \subset I$ يكن $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n(\varphi) = 0$، وهذا يُثبتُ أنّ $\left\langle T,\varphi\right\rangle = 0$. إذن T معدومٌ على المجموعة المفتوحة

$$\mathcal{O} = \mathbb{R}_-^* \cup \left]1,+\infty\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[\right) = \mathbb{R}\backslash\left(\left\{0\right\}\cup\left\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{N}^*\right\}\right)$$

إذن

$$\operatorname{supp}(T) \subset \left\{0\right\}\cup\left\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{N}^*\right\}$$

وبالعكس، إذا تأمّلنا في حالة k من $\mathbb{N}^*$، تابعاً φ_k من $\mathfrak{D}$ حامله محتوى في المجال $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1}\right[$ في حالة $k \geq 2$ ومحتوى في المجال $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ في حالة $k = 1$، ويُحقّق $\varphi_k\left(\frac{1}{k}\right) = 1$، رأينا مباشرة أنّ

$$\forall n \geq k, \quad V_n(\varphi_k) = 1$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\langle T, \varphi_k \rangle = 1$. إذن

$$\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \operatorname{supp}(T)$$

ولكن لمّا كان $0 \in \overline{\left\{1/k : k \in \mathbb{N}^*\right\}}$ استنتجنا أنّ $0 \in \operatorname{supp}(T)$، وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$\operatorname{supp}(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

وبذا يتمّ الإثبات.

التمرين 7. ليكن T توزيعاً من $\mathfrak{D}'$، وليكن ψ عنصراً من $\mathcal{E}$. نفترض أنّ

$$\forall x \in \operatorname{supp}(T), \quad \psi(x) = 0$$

هل صحيح أنّ $\psi \cdot T = 0$ ؟

الحل

الجواب هو لا. لنتأمّل على سبيل المثال التوزيع $T = \delta_0'$، وليكن $\psi = X$. عندئذ من الواضح أنّ

$$\forall x \in \operatorname{supp}(T), \quad \psi(x) = 0$$

ولكن

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathfrak{D}, \qquad \left\langle \psi T, \varphi \right\rangle &= \left\langle \delta_0', X\varphi \right\rangle \\ &= -\left\langle \delta_0, \varphi + X\varphi' \right\rangle \\ &= -\left\langle \delta_0, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

إذن $\psi T \neq 0$.

التمرين 8. بسّط عبارة التوزيع $\exp^{[\alpha]}\delta_0^{(p)}$ في حالة p من $\mathbb{N}$ ، و α من $\mathbb{C}$.

الحل

ليكن φ من $\mathfrak{D}$ ، عندئذ

$$\begin{aligned}\left\langle \exp^{[\alpha]}\delta_0^{(p)}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \delta_0^{(p)}, \exp^{[\alpha]}\varphi \right\rangle \\ &= (-1)^p \left\langle \delta_0, (\exp^{[\alpha]}\varphi)^{(p)} \right\rangle \\ &= (-1)^p \left\langle \delta_0, \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell (\exp^{[\alpha]})^{(\ell)} \varphi^{(p-\ell)} \right\rangle \\ &= (-1)^p \left\langle \delta_0, \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell \alpha^\ell \exp^{[\alpha]} \varphi^{(p-\ell)} \right\rangle \\ &= (-1)^p \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell \alpha^\ell \varphi^{(p-\ell)}(0) \\ &= \left\langle \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell (-\alpha)^\ell \delta_0^{(p-\ell)}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

وعليه

$$\exp^{[\alpha]}\delta_0^{(p)} = \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell (-\alpha)^\ell \delta_0^{(p-\ell)}$$

وهي الصيغة المطلوبة. ■

التمرين 9. ليكن (a,b) من $\mathbb{C}^2$. نتأمّل المؤثّر التفاضلي

$$P = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} + b$$

كما نتأمّل تابعاً φ من $C^2(\mathbb{R})$ يُحقّقان

$$P\varphi = 0,\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1$$

وأخيراً نعرّف التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بالصيغة $h = \varphi H$ ، و H هو التوزيع الموافق لتابع Heaviside . احسب بمعنى التوزيعات المقدار Ph .

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ الشرط $P\varphi = 0$ يقتضي أنّ φ ينتمي إلى الصف C^∞، ومن ثَمّ $\varphi \in \mathcal{E}$.

إذن

$$\begin{aligned}\left(\varphi H\right)' &= \varphi' H + \varphi H' = \varphi' H + \varphi\delta_0 = \varphi' H + \cancel{\varphi(0)}\delta_0 = \varphi' H\\ \left(\varphi H\right)'' &= \varphi'' H + \varphi'\delta_0 = \varphi'' H + \varphi'(0)\delta_0 = \varphi'' H + \delta_0\end{aligned}$$

وعليه

$$Ph = \left(\varphi H\right)'' + a\left(\varphi H\right)' + \varphi H = \left(P\varphi\right)H + \delta_0 = \delta_0$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 10. أثبت ما يأتي :

1. تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\delta_{1/n}$ في $\mathfrak{D}'$.
2. المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\delta_{1/n}$ لا تتقارب في $\mathfrak{D}'$.
3. يوجد توزيع T من $\mathfrak{D}'$، يُحقّق

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \operatorname{supp}(\varphi)\subset\mathbb{R}_+^* \Rightarrow \left\langle T,\varphi\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

الحل

1. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ تتقارب المتسلسلة ذات الحدّ العام $\frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ لأنّ φ محدودٌ على المجال $[0,1]$، وهذا يتيحُ لنا تعريف الشكلّ الخطّي

$$T:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D},\left\langle T,\varphi\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

ولمّا كان

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \left|\left\langle T,\varphi\right\rangle\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\times\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi\right|$$

استنتجنا أنّ T توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$.

وكذلك، في حالة $n \geq 1$ و φ من $\mathfrak{D}$ لدينا

$$\left|\left\langle T - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \delta_{1/k}, \varphi \right\rangle\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \times \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

وهذا يبرهن على أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta_{1/n}$ متقاربة في $\mathfrak{D}'$ وأنّ مجموعها هو التوزيع T.

2. حتّى نرى أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{1/n}$ متباعدة في $\mathfrak{D}'$، يكفي أن نختبر تباعدها على تابع مُناسبٍ φ_0 من $\mathfrak{D}$. ليكن φ_0 تابعاً من $\mathfrak{D}$ يُحقّق

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi_0(x) = 1 \text{ و } \operatorname{supp}(\varphi_0) \subset \left[-1,2\right]$$

عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{1/k}, \varphi_0 \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{1/k}, \varphi_0 \right\rangle = +\infty$$

وهذا يُثبت عدم تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{1/n}$ في $\mathfrak{D}'$.

3. لنلاحظ أنّه في حالة φ من $\mathcal{E}$ لدينا

$$\frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right) = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \varphi'\left(\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n}\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right| \leq \frac{1}{n^2} \times \sup_{[0,1]} |\varphi'|$$

وهذا يُثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(0\right)\right)$. لنعرّف إذن

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}, \quad \left\langle T, \varphi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right)$$

إنّ T ينتمي إلى $\mathcal{E}'$ بسبب المتراجحة

$$\forall\varphi\in\mathcal{E},\quad \left|\left\langle T,\varphi\right\rangle\right|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\times\sup_{[0,1]}\left|\varphi'\right|$$

وكذلك فإنّه من الواضح أنّ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \operatorname{upp}(\varphi)\subset\mathbb{R}_+^*\Rightarrow\left\langle T,\varphi\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(1/n)}{n}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 11. نعرّف في حالة x من $\mathbb{R}$، و ε من $\mathbb{R}_+^*$ المقدار

$$f_\varepsilon(x)=\operatorname{Log}(x+\mathrm{i}\,\varepsilon)=\ln\left|x+\mathrm{i}\,\varepsilon\right|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}(x+\mathrm{i}\,\varepsilon)$$

1. أوجد $f_{0^+}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f_\varepsilon$.
2. احسب f'_{0^+} مشتق التوزيع f_{0^+}. نرمز إلى التوزيع f'_{0^+} بالرمز $\dfrac{1}{\mathrm{x+i0}}$.
3. استنتج أنّ : $\dfrac{1}{\mathrm{x+i0}}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{\mathrm{x+i}\varepsilon}=\mathrm{Vp}\dfrac{1}{\mathrm{x}}-\mathrm{i}\,\pi\delta_0$.

الحل

1. لنلاحظ أنّه في حالة $(x,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ لدينا $\operatorname{Arg}(x+\varepsilon\,\mathrm{i})\in\left]0,\pi\right[$، ومن ثَمّ ينتمي العدد θ المعرّف بالصيغة $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arg}(x+\varepsilon\,\mathrm{i})$ إلى المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. ولكن

$$e^{\mathrm{i}\,\theta}=\mathrm{i}\frac{\overline{x+\varepsilon\,\mathrm{i}}}{\left|x+\varepsilon\,\mathrm{i}\right|}=\frac{\varepsilon+\mathrm{i}\,x}{\left|x+\varepsilon\,\mathrm{i}\right|}$$

إذن $\tan\theta=\dfrac{x}{\varepsilon}$، ومنه $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arg}(x+\varepsilon\,\mathrm{i})=\arctan\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ أو

$$\operatorname{Arg}(x+\varepsilon\,\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

وعليه في حالة (x,ε) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ نجد

$$\operatorname{Log}\left(x+\varepsilon\,\mathrm{i}\right)=\ln\left|x+\varepsilon\,\mathrm{i}\right|+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

ليكن φ من $\mathfrak{D}$، ولتكن $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّق $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ ، نرغب بتعيين نهاية المتتالية $\left(\langle f_{\varepsilon_n},\varphi\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ في حال وجودها. ولهذا نعرّف متتالية التوابع $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالصيغة

$$h_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ g_n(x) = \operatorname{Log}(x+\mathrm{i}\,\varepsilon_n)\varphi(x)$$

- مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فالتابع h_n تابعٌ مستمرٌّ، فهو مقيسٌ.
- مهما تكن x من $\mathbb{R}^*$ ، تتقارب المتتالية $\left(h_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ونهايتها $h(x)$ تُعطى بالصيغة

$$h(x) = \begin{cases} (\ln x)\varphi(x) & : \ x>0 \\ (\ln(-x)+\mathrm{i}\,\pi)\varphi(x) & : \ x<0 \end{cases}$$

- وإذا كان $M=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\varepsilon_n)$ ، وعرّفنا g بالصيغة

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad g(x) = |\varphi(x)|\sqrt{\left(\max\left(\ln|x+M\,\mathrm{i}|,-\ln|x|\right)\right)^2+\pi^2}$$

رأينا مباشرة أنّ g ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، وأنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\left|h_n(x)\right|\le g(x)$$

إذن استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ، تتقارب المتتالية $\left(\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,\mathrm{d}\,x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\int_{\mathbb{R}} h$ ، وهذا يُكافئ قولنا

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_{\varepsilon_n},\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}(\ln|x|+\mathrm{i}\,\pi\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وعليه إذا عرّفنا f_{0^+} من $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ بالصيغة

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f_{0^+}(x) = \ln|x|+\mathrm{i}\,\pi\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)$$

كان لدينا $f_{0^+} = \mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon$.

2. لمّاكان $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} = \mathbb{1}-H$ و H هو توزيع Heaviside استنتجنا أنّ $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*})' = -\delta_0$.
ولأنّه لدينا بالتعريف $\left(\ln\left|\cdot\right|\right)' = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$ استنتجنا أنّ $(f_{0^+})' = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}-\mathrm{i}\,\pi\delta_0$ أي

$$\frac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{i}\,0} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{\mathrm{x}}-\mathrm{i}\,\pi\delta_0$$

3. لمّاكان $f_{0^+} = \mathfrak{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} f_\varepsilon$ ، استنتجنا أنّ

$$\frac{1}{\mathrm{x+i0}} = \left(f_{0^+}\right)' = \mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0^+} f'_\varepsilon = \mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{x+i}\varepsilon}$$

ومنه

$$\frac{1}{\mathrm{x+i0}}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{x+i\varepsilon}}=\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}-\mathrm{i}\,\pi\delta_0$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

ملاحظة : ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\langle\frac{1}{\mathrm{x-\,i}\,\varepsilon},\varphi\right\rangle&=\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\langle\frac{1}{\mathrm{x+\,i}\,\varepsilon},\overline{\varphi}\right\rangle}\\&=\left\langle\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}-\mathrm{i}\,\pi\delta_0,\overline{\varphi}\right\rangle=\left\langle\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}+\mathrm{i}\,\pi\delta_0,\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

وعليه إذا عرّفنا

$$\frac{1}{\mathrm{x-i0}}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{x-i\varepsilon}}$$

كان لدينا

$$\frac{1}{\mathrm{x-i0}}=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{x-i\varepsilon}}=\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}+\mathrm{i}\,\pi\delta_0$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$\begin{aligned}\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{x+i0}}+\frac{1}{\mathrm{x-i0}}\right)\\&=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{x+i\varepsilon}}+\frac{1}{\mathrm{x-i\varepsilon}}\right)\\&=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\varepsilon^2}\end{aligned}$$

في الحقيقة، لدينا $\mathrm{Vp}\frac{1}{\mathrm{x}}=\mathcal{S}'\text{-}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\varepsilon^2}$ لأنّ $x\mapsto\ln\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$ يسعى إلى $x\mapsto\ln|x|$ في $\mathcal{S}'$ عندما يسعى ε إلى 0 .

التمرين 12. في هذا التمرين يرمز H إلى توزيع Heaviside الموافق للتابع $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ ، ويرمز $\mathbb{1}$ إلى التوزيع الموافق للتابع الثابت الذي يساوي 1 . قارن بين التوزيعين

$\mathbb{1}*\left(\delta_0'*H\right)$ و $\left(\mathbb{1}*\delta_0'\right)*H$

الحل

في الحقيقة،

$$\mathbb{1}*\delta_0' = \mathbb{1}'*\delta_0 = 0*\delta_0 = 0 \Rightarrow \left(\mathbb{1}*\delta_0'\right)*H = 0*H = 0$$
$$\delta_0'*H = \delta_0*H' = \delta_0*\delta_0 = \delta_0 \Rightarrow \mathbb{1}*\left(\delta_0'*H\right) = \mathbb{1}*\delta_0 = \mathbb{1}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 13. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ التوزيع : $T_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_{n-2k}$.

1. احسب تحويل فوريه $\widehat{T_n}$.
2. أثبت تقارب المتتالية $\left(\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ التوزيع $U_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \delta_{\sqrt{n}-2k/\sqrt{n}}$. استنتج نهاية المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ في $\mathcal{S}'$.

الحل

1. في الحقيقة، لمّا كان T_n توزيعاً ذا حامل متراصٍّ استنتجنا أنّ $\widehat{T_n}$ تابعٌ من الصف C^∞، وهو معطى بالصيغة

$$\begin{aligned}\widehat{T_n}\left(\xi\right) &= \left\langle T_n, \exp^{[-2\pi\mathrm{i}\xi]}\right\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{-2\pi\mathrm{i}\left(n-2k\right)\xi}\\ &= \frac{1}{2^n}e^{-2\pi\mathrm{i}n\xi}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{4\pi\mathrm{i}\xi})^k = \frac{1}{2^n}e^{-2\pi\mathrm{i}n\xi}(1+e^{4\pi\mathrm{i}\xi})^n\\ &= \left(\frac{e^{2\pi\mathrm{i}\xi}+e^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2}\right)^n = \cos^n(2\pi\xi)\end{aligned}$$

2. لنلاحظ أنّ

$$\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}\left(\xi\right) = \left(\cos\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

ومن ثَمّ، مهما تكن ξ من $\mathbb{R}$ يكن

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}(\xi) = \exp(-2\pi^2\xi^2)$$

وبتطبيق مبرهنة التقارب للوبيغ نستنتج أنّ $T=\mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{m\to\infty}\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}$، و T هو التوزيع الموافق للتابع $\xi\mapsto e^{-2\pi^2\xi^2}$.

3. نستنتج مما سبق أنّ

$$\bar{\mathcal{F}}(T)=\mathcal{S}'\text{-}\lim_{m\to\infty}\bar{\mathcal{F}}\left(\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}\right)$$

ولكن $\bar{\mathcal{F}}(T)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$، وكذلك

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}\left(\widehat{T_n}^{[1/\sqrt{n}]}\right)&=\sqrt{n}\left(\bar{\mathcal{F}}(\widehat{T_n})\right)^{[\sqrt{n}]}\\&=\sqrt{n}(T_n)^{[\sqrt{n}]}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\delta_{\sqrt{n}-2k/\sqrt{n}}=U_n\end{aligned}$$

وعليه تتقارب متتالية التوزيعات الملطّفة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ في $\mathcal{S}'$ من التوزيع المنتظم الموافق للتابع $x\mapsto e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 14.

1. ليكن φ من $\mathfrak{D}$، و a من $\mathbb{R}_+^*$. أثبت أنّ المقدار

$$\int_0^a\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}\,x+(\ln a)\varphi(0)$$

لا يتعلّق بالعدد a، طالما أنّ $\operatorname{supp}(\varphi)\subset[-a,a]$.

2. إذن نعرّف في حالة φ من $\mathfrak{D}$ المقدار $\langle T,\varphi\rangle$ بالصيغة

$$\langle T,\varphi\rangle=\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}\,x+(\ln a)\varphi(0)\right)$$

أثبت أنّ T توزيعٌ من $\mathfrak{D}'$، وأنّ $\operatorname{supp}(T)\subset\mathbb{R}_+$.

3. احسب XT' بدلالة T وتوزيع ديراك δ_0.

4. عيّن توزيعاً U يُحقّق $U'=T$.

الحل

1. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. ولنعرّف

$$F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}, F(a) = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + (\ln a)\varphi(0)$$

عندئذ نجد بحساب بسيطٍ أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(a) = \frac{\varphi(a)}{a}$$

وعليه، إذا كان $a_0 = \max(0, \sup(\mathrm{supp}(\varphi)))$ كان لدينا $\forall a > a_0, F'(a) = 0$ ،
وهذا يُثبتُ أنّ F ثابتٌ على المجال $\left]a_0, \infty\right[$ وهي النتيجة المرجوّة.

2. في الحقيقة، لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x &= \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + \int_1^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + \int_1^a \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}\, x - (\ln a)\varphi(0)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + (\ln a)\varphi(0)\right) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}\, x$$

إذن

$$(*) \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}\, x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}\, x$$

وإذا كانت K مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}$ كان

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \mathrm{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \left|\langle T, \varphi\rangle\right| \le \sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi'\right| + \lambda(K)\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi\right|$$

وهذا يبرهن أنّ $T \in \mathfrak{D}'$.

وأخيراً، إذا كان $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}_-^*$ استنتجنا من $(*)$ أنّ $\langle T, \varphi\rangle = 0$ ، وهذا يبرهن صحة الاحتواء $\mathrm{supp}(T) \subset \mathbb{R}_+$.

3. ليكن φ من $\mathfrak{D}$. عندئذ

$$\begin{aligned}\langle XT',\varphi\rangle &= \langle T',X\varphi\rangle = -\langle T,(X\varphi)'\rangle\\ &= -\langle T,\varphi + X\varphi'\rangle = -\langle T,\varphi\rangle - \langle T,X\varphi'\rangle\end{aligned}$$

ولكن

$$\left\langle T,X\varphi'\right\rangle = \int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x = -\varphi(0) = -\langle\delta_0,\varphi\rangle$$

إذن

$$XT' = -T + \delta_0$$

4. لنلاحظ أنّه في حالة φ من $\mathfrak{D}$، لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \Big[\cancel{\ln x\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}\,x\\ \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \Big[\cancel{\ln x\varphi(x)}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle T,\varphi\rangle = -\int_0^\infty (\ln x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

لنعرّف إذن التوزيع المنتظم U من $\mathfrak{D}'$ الموافق للتابع $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\ln$ من $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$، أي

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle U,\varphi\rangle = \int_0^\infty (\ln x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّه

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\quad \langle T,\varphi\rangle = -\langle U,\varphi'\rangle = \langle U',\varphi\rangle$$

أو $U' = T$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

ملاحظة. يُرمز عادة إلى التوزيع T الذي عرّفناه في التمرين السابق بالرمز $\mathrm{Pf}\,\dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{x}}$.

التمرين 15. نعرّف في حالة φ من $\mathcal{S}$ و n من $\mathbb{N}^*$ المقدارين

$$\langle T_n,\varphi\rangle = \int_{-n}^{n} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{و} \quad \langle T,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x$$

1. أثبت أنّ T و T_n توزيعان مُلطّفان.

2. أثبت أنّ $T = \mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

3. في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ نضع $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u$.

① أثبت أنّ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad G(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \displaystyle\int_0^x \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u$.

② استنتج أنّ التابع G يقبل نهاية منتهية ℓ عندما تسعى x إلى $+\infty$.

③ أثبت أنّ $\ell > 0$. يمكنك أن تستفيد من المساواة الآتية بعد أن تثبت صحّتها

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{2(n\pi+u)\sqrt{n\pi+u}}$$

4. نحتفظ برموز السؤال السابق.

① أثبت أنّ مهما يكن φ من $\mathcal{S}$، يكن

$$\left\langle \widehat{T_n},\varphi\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\mathbb{R}} G(2\pi n|x|)\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x$$

② استنتج أنّ $\widehat{T} = \ell\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T$، واحسب ℓ.

الحل

1. لنتأمّل التابعين f و f_n المعرّفين كما يأتي

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\mathbb{1}_{[-n,n]}(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

عندئذ لمّا كان $f_n \in L^1(\mathbb{R})$، و $(f - f_n) \in L^3(\mathbb{R})$ استنتجنا أنّ التوزيعين المنتظمين T_{f_n} و T_{f-f_n} هما توزيعان مُلطّفان أي $T_{f_n} \in \mathcal{S}'$ و $T_{f-f_n} \in \mathcal{S}'$، وهذا يقتضي أنّ التوزيعين $T_n = T_{f_n}$ و $T = T_{f-f_n} + T_{f_n}$ هما توزيعان مُلطّفان.

2. ليكن φ من $\mathcal{S}$ عندئذ

$$\begin{aligned}\left|\langle T,\varphi\rangle-\langle T_n,\varphi\rangle\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} \frac{\left|\varphi(x)\right|}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} \frac{\left|nt\varphi(nt)\right|}{|t|\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}\,t \qquad : x\leftarrow nt\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left|\langle T,\varphi\rangle-\langle T_n,\varphi\rangle\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\mathrm{d}\,t}{|t|\sqrt{|t|}}\right)p_{1,0}(\varphi) \leq \frac{p_{1,0}(\varphi)}{\sqrt{n}}$$

وهذا يبرهن على أنّ $\forall\varphi\in\mathcal{S},\ \lim\limits_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$ أو $T=\mathcal{S}'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

①.3 هذه مُكاملة بالتجزئة، إذ نجد في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ ما يلي :

$$\begin{aligned}G(x)=\int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u &= \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_{u=0}^{x}+\int_0^x \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\int_0^x \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

②.3 ولكنّ التابع $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)\dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}}$ $u\mapsto$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ ، وكذلك $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

إذن نستنتج من المساواة السابقة أنّ

$$\lim_{x\to\infty}G(x)=\int_0^\infty \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u=\ell$$

③.3 لإثبات أنّ $\ell>0$ نلاحظ ما يأتي :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n\pi+u)}{2(n\pi+u)\sqrt{n\pi+u}}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2(n\pi+u)\sqrt{n\pi+u}}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(n\pi+u)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,u$ رأينا مباشرة أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر، إذن استناداً إلى خواص المتسلسلات المتناوبة يكون لدينا

$$0 < u_0 - u_1 \le \ell \le u_0.$$

4.① ليكن φ من $\mathcal{S}$. عندئذ

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{T_n}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_n, \hat{\varphi} \right\rangle &= \int_{-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\left(\int_{-n}^{n} \frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,tx}}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} \frac{e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,tx}}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x = \int_{0}^{n} \frac{2\cos(2\pi tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{0}^{n} \frac{2\cos(2\pi|t|x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi|t|}}\int_{0}^{2\pi n|t|} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u = \sqrt{\frac{2}{\pi|t|}}\,G(2\pi n|t|)\end{aligned}$$

إذن، مهما يكن φ من $\mathcal{S}$ يكن

$$\left\langle \widehat{T_n}, \varphi \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{|t|}}G(2\pi n|t|)\,\mathrm{d}\,t$$

4.② وهنا بالاستفادة من مبرهنة التقارب للوبيغ نستنتج أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \lim_{n\to\infty}\langle \widehat{T_n}, \varphi\rangle = \ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}\,t = \ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\langle T, \varphi\rangle$$

إذن $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n\to\infty} \widehat{T_n} = \ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T$. ولكن من جهة ثانية لدينا $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n\to\infty} \widehat{T_n} = \widehat{T}$. إذن لا بُدّ أن يكون

$$\widehat{T} = \ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T$$

ولكن بملاحظة أنّ T زوجي؛ أي $\overleftarrow{T} = T$، نستنتج مما سبق أنّ

$$T = \widehat{\widehat{T}} = \ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widehat{T} = \left(\ell\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 T$$

وهذا يقتضي أنّ $\ell = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ لأنّ ℓ موجبٌ. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\widehat{T} = T$. وأنّ

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

وبذا يتمّ الإثبات.

التمرين 16. ليكن T توزيعاً من $\mathfrak{D}'$. أثبت أنّه يوجد توزيع U من $\mathfrak{D}'$ يُحقّق

$$U' = T$$

الحل

لنثبّت عنصراً ρ من $\mathfrak{D}$ يُحقّق $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$. لنعرّف في حالة φ من $\mathfrak{D}$ التابع

$$P(\varphi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, P(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \big(\langle \mathbb{1}, \varphi\rangle \rho(t) - \varphi(t)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

عندئذ نرى مباشرة أنّ $\big(P(\varphi)\big)' = \langle \mathbb{1}, \varphi\rangle \rho - \varphi$، وهذا يبرهن أنّ $P(\varphi)$ ينتمي إلى الصف C^∞ . وإذا كان $\operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\rho) \subset [-A, A]$ رأينا وضوحاً أنّ

$$\operatorname{supp}(P(\varphi)) \subset [-A, A]$$

وعليه فإنّ $P(\varphi) \in \mathfrak{D}$.

ومن جهة أخرى، في حالة مجموعة متراصّة K لدينا

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}}\left|P(\varphi)\right| \le \lambda(K)\big(1 + \left\|\rho\right\|_1\big)\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi\right|$$

ولأنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, (P(\varphi))^{(p+1)} = \left\langle \mathbb{1}, \varphi\right\rangle \rho^{(p)} - \varphi^{(p)}$$

نستنتج، في حالة p من $\mathbb{N}$، و φ من $\mathfrak{D}$ بحيث $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$، ما يلي

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|(P(\varphi))^{(p+1)}\right| \le \sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(p)}\right| + \sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi\right|\sup_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(p)}\right|$$

وهذا يبرهن على أنّ التطبيق $P : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \varphi \mapsto P(\varphi)$ تطبيق خطّي مستمرٌّ.

وكذلك نلاحظ أنّه

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad P(\varphi') = -\varphi$$

ليكن T من $\mathfrak{D}'$. عندئذ ينتمي $U = T \circ P$ إلى $\mathfrak{D}'$، وهو يُحقّق

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \langle U', \varphi \rangle &= -\langle U, \varphi' \rangle \\ &= -\langle T, P(\varphi') \rangle = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

أي إنّ $U' = T$. ■

التمرين 17. في هذا التمرين يرمز $\mathcal{X}$ إلى أحد الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathcal{S}$ أو $\mathcal{E}$. ونتأمّل تحويلاً $\Psi : \mathcal{X} \to C(\mathbb{R})$ يُحقّق الخواص الآتية:

- التحويل Ψ تطبيق خطّي.
- التحويل Ψ مستمرّ. وقد زوّدنا فضاء التوابع المستمرّة $C(\mathbb{R})$ بتوبولوجيا التقارب المنتظم على كلّ مجموعة متراصّة.
- التحويل Ψ «يتبادل» مع الانسحاب : $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi \circ \tau_x = \tau_x \circ \Psi$.

عندئذ يوجد توزيع T من $\mathcal{X}'$ يُحقّق $\forall \varphi \in \mathcal{X}, \Psi(\varphi) = T * \varphi$.

الحل

لنعرّف في حالة φ من $\mathcal{X}$ المقدار $\langle T, \varphi \rangle$ بالصيغة $\langle T, \varphi \rangle = \Psi(\overleftarrow{\varphi})(0)$.

- نستنتج من كون Ψ خطّياً، أنّ T شكلٌ خطّي على $\mathcal{X}$.
- نستنتج من استمرار Ψ أنّه مهما تكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{X}$ التي تحقّق $\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$، ومهما تكن المجموعة المتراصّة K من $\mathbb{R}$ يكن $\lim_{n\to\infty} \sup_K \left|\Psi(\varphi_n)\right| = 0$.

لنتأمّل إذن متتالية ما $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{X}$ تُحقّق $\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$. عندئذ يكون لدينا وضوحاً $\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to\infty} \overleftarrow{\varphi}_n = 0$، ولأنّ $K = \{0\}$ مجموعة متراصّة يكون

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(\overleftarrow{\varphi}_n)(0) = 0$$

أي

$$\mathcal{X}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$$

وهذا يُثبت استمرار الشكل الخطّي T على $\mathcal{X}$. إذن $T \in \mathcal{X}'$.

- لنلاحظ أنّه في حالة x من $\mathbb{R}$ ، و φ من $\mathcal{X}$ لدينا

$$\begin{aligned} T * \varphi(x) &= \left\langle T, \tau_x(\overleftarrow{\varphi})\right\rangle = \Psi\left(\overleftarrow{\tau_x(\overleftarrow{\varphi})}\right)(0) \\ &= \Psi\left(\tau_{-x}(\varphi)\right)(0) = \left(\tau_{-x}(\Psi(\varphi))\right)(0) \\ &= \Psi(\varphi)(x) \end{aligned}$$

إذ من الواضح أنّ $\overleftarrow{\tau_x(\overleftarrow{\varphi})} = \tau_{-x}(\varphi)$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{X},\ T * \varphi = \Psi(\varphi)$$

وهي الخاصّة المرجوّة. ■

دليل مفردات الجزء الخامس

العدد هو رقم صفحة يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً

مَسْرد المصطلحات العلميّة

Français	English	العربيّة
		الألف
réunion	union	اجتماع المجموعات
base	basis	أساس
base canonique	canonical basis	أساس قانوني
cylindre de sécurité	cylinder of security	أسطوانة أمان
minimum	minimum	أصغر عنصر
nombres réels	real numbers	الأعداد الحقيقيّة
nombres entiers relatifs	integers	الأعداد الصحيحة
nombres entiers naturels	natural integers	الأعداد الطبيعيّة
nombres rationnels	rational numbers	الأعداد العاديّة
nombres complexes	complex numbers	الأعداد العقديّة
maximum	maximum	أكبر عنصر
preuve par récurrence	proof by induction	الإثبات بالتدريج
		الباء
dimension	dimension	بُعد
		التاء
fonction	function	تابع
fonction exponentielle	exponential function	التابع الأسّي
fonction originale	original function	تابع الأصل
fonction primitive	primitive function	التابع الأصلي
fonction sinus	sine function	تابع الجيب
fonction sinus hyperbolique	hyperbolic sine function	تابع الجيب الزائدي
fonction tangente	tangent function	تابع الظل

Français	English	العربيّة
		التاء
fonction tangente hyperbolique	hyperbolic tangent function	تابع الظل الزائديّ
fonction logarithme	logarithmic function	التابع اللوغاريتمي
fonction caractéristique	caracteristic function	التابع المميّز
fonction résolvante	resolvant function	التابع المولّد لحلول معادلة تفاضليّة
fonction étagée	simple function	تابع بسيط
fonction analytique	analytic function	تابع تحليلي
fonction constante	constant function	تابع ثابت
fonction partielle	partial function	تابع جزئي
fonction sinus hyperbolique	hyperbolic sine function	تابع جيب التمام الزائدي
fonction cosinus	cosine function	تابع جيب التمام
fonction réelle de la variable réelle	real valued function of one real variable	تابع حقيقي لمتحول حقيقي
fonction périodique	periodic function	تابع دوري
fonction paire	even function	تابع زوجي
fonction surjective	surjective function	تابع غامر
fonction impaire	odd function	تابع فردي
fonction dérivable	differentiable function	تابع قابل للاشتقاق
fonction différentiable	differentiable function	تابع قابل للمفاضلة
fonction intégrable	integrable function	تابع قابل للمُكاملة
fonction de plusieurs variables	function of several variables	تابع لعدة متحوّلات
fonction injective	injective function	تابع متباين
fonction croissante	non-decreasing function	تابع متزايد
fonction strictement croissante	increasing function	تابع متزايد تماماً
fonction décroissante	non-increasing function	تابع متناقص

Français	English	العربيّة

التاء

fonction strictement décroissante	decreasing function	تابع متناقص تماماً
fonction convexe	convex function	تابع محدّب
fonction bornée	bounded function	تابع محدود
fonction minorée	bounded below function	تابع محدود من الأدنى
fonction majorée	bounded above function	تابع محدود من الأعلى
fonction continue	continuous function	تابع مستمرّ
fonction uniformement continue	uniformly continuous function	تابع مستمرّ بانتظام
fonction continue par morceaux	piecewise continuous function	تابع مستمرّ قِطَعيّاً
fonction monotone	monotonic function	تابع مطّرد
fonction measurable	measurable function	تابع مقيس (قيوس)
fonction meromorphe	meromorphic function	تابع ميرومورفي
fonction holomorphe	holomorphic function	تابع هولومورفي
transformée de Fourier	Fourier transform	تحويل فورييه
transformée de Laplace	Laplace transform	تحويل لابلاس
homotopie	homotopy	تشويه مستمر
argument principale	principal argument	التعيين الأساسي للزاوية
différentielle	differential	تفاضل
bijection	bijective function	تقابل
isomorphisme	isomorphism	تقابل خطّي
convergence simple	simple convergence	التقارب البسيط
convergence uniforme	uniform convergence	التقارب المنتظم
convergence normale	normal convergence	التقارب بالنظيم
intersection	intersection	تقاطع
intégrale	integral	تكامل

Français	English	العربيّة

التاء

intégrale impropre	improper integral	تكامل معتل
distribution	distribution	توزيع
distribution temperée	tempered distribution	توزيع مُلطّف

الجيم

tribue	sigma algebra	جبر تام أوسيغما-جبر
produit de convolution	convolution	جداء التلافّ
zéro	zero	جذر (كثير حدود)
partie entière	floor	الجزء الصحيح
famille	family	جماعة
système d'équations différentielles linéaires	system of linear differential equations	جملة معادلات تفاضليّة خطّية
voisinage	neighborhood	جوار

الحاء

support	support	حامل
borne inférieure	greatest lower bound	الحد الأدنى
borne supérieure	least upper bound	الحد الأعلى
terme général	general term	الحدّ العام
corps commutatif	field	حقل تبديليّ
solution	solution	حل
solution général	general solution	حلّ العام
solution maximale	maximal solution	حل أعظمي
solution réelle	real solution	حل حقيقي
solution particulière	particular solution	حل خاص
solution globale	global solution	حلّ شامل

الخاء

algorithme	algorithm	خوارزميّة

Français	English	العربيّة

الدال

degré	degree	درجة
indice	index	دليل

الراء

résidu	residue	راسب

الزاي

argument	argument	زاوية عدد عقدي

الشين

forme différentielle exacte	exact differential form	شكل تفاضلي تام
forme différentielle fermée	closed differential form	شكل تفاضلي مغلق
forme différentielle du premier ordre	First order differential form	شكل تفاضلي من المرتبة الأولى

الصاد

zéro	zero	صفر
zéro simple	simple zero	صفر بسيط
zéro multiple d'ordre	multiple zero of order	صفر مضاعف من المرتبة

الطاء

chemin	path	طريق
lacet	closed path	طريق مغلق
variation des constantes	variation of parameters	طريقة جعل الثوابت متغيّرة
longueur	length	طول
module	module	طويلة

العين

relation d’ordre	relation of order	علاقة ترتيب
relation d’ordre partielle	partial order relation	علاقة ترتيب جزئي

Français	English	العربيّة

العين

relation d'ordre totale	total order relation	علاقة ترتيب كلّي
élément	element	عنصر
majorant	upper bound	عنصر راجح
minorant	lower bound	عنصر قاصر

الفاء

espace vectoriel	vector space	فضاء شعاعي
espace vectoriel complet	complete vector space	فضاء شعاعي تام
espace vectoriel de dimension finie	finite dimensional vector space	فضاء شعاعي منتهي البعد
espace vectoriel normé	normed vector space	فضاء شعاعي منظّم
espace mesurable	measurable space	فضاء قابل للقياس
espace mesuré	measure space	فضاء مقيس

القاف

disque	disc	قرص
disque de convergence	disc of convergence	قرص التقارب
pôle	pole	قطب
parabole	parabola	قطع مكافئ
mesure	measure	قياس
mesure regulière	regular measure	قياس نظامي
valeur absolue	absolute value	القيمة المطلقة
minimum local	relative minimum	قيمة صغرى محليّاً
maximum local	relative maximum	قيمة عظمى محليّاً

الميم

théorème des accroissements finis	mean value theorem	مبرهنة التزايدات المحدودة

Français	English	العربيّة

الميم

théorème des valeurs intermédiaires	intermediate value theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
théorème du point fixe	fixed point theorem	مبرهنة النقطة الثابتة
suite	sequence	متتالية
Suite de fonctions	function sequence	متتالية توابع
suite extraite	subsequence	متتالية جزئيّة
suite de Cauchy	Cauchy sequence	متتالية كوشي
suite divergente	divergent sequence	متتالية متباعدة
suite croissante	non-decreasing sequence	متتالية متزايدة
suite convergente	convergent sequence	متتالية متقاربة
suite décroissante	non-increasing sequence	متتالية متناقصة
suite bornée	bounded sequence	متتالية محدودة
suite monotone	monotonic sequence	متتالية مطّردة
inégalité	inequality	متراجحة
inégalité différentielle	differential inequality	متراجحة تفاضليّة
série	series	متسلسلة
série de fonctions	function series	متسلسلة توابع
série entière	power series	متسلسلة صحيحة
série de Fourier	Fourier series	متسلسلة فورييه
série de Laurent	Laurent series	متسلسلة لوران
série divergente	divergent series	متسلسلة متباعدة
série convergente	convergent series	متسلسلة متقاربة
série absolument convergente	absolutely convergent series	متسلسلة متقاربة بالإطلاق
série semi-convergente	semi-convergent series	متسلسلة نصف متقاربة
intervalle	interval	مجال
intervalle fermé	closed interval	مجال مغلق

Français	English	العربيّة
		الميم
intervalle ouvert	open interval	مجال مفتوح
somme	sum	مجموع (متسلسلة)
ensemble	set	مجموعة
ensemble vide	empty set	المجموعة الخالية
ensemble simplement connexe	simply connected set	مجموعة بسيطة الترابط
sous-ensemble	subset	مجموعة جزئيّة
ensemble denombrable	countable set	مجموعة قابلة للعدّ
ensemble connexe	connected set	مجموعة مترابطة
ensemble compact	compact set	مجموعة متراصّة
ensemble convexe	convex set	مجموعة محدّبة
ensemble borné	bounded set	مجموعة محدودة
ensemble fermé	closed set	مجموعة مغلقة
ensemble ouvert	open set	مجموعة مفتوحة
ensemble négligeable	negligible set	مجموعة مهملة
enemble étoilé	star shaped set	مجموعة نجميّة
ordre	order	مَرتبة
composante connexe	connected component	مركّبة مترابطة
distance	distance	مسافة
problème de la condition initiale	Initial-value problem	مسألة الشرط الابتدائي
ensemble d'arrivé	domain of arrival	مستقر
dérivée	derivative	المشتق
dérivée d’ordre n	n th order derivative	مشتق من المرتبة n
matrice	matrix	مصفوفة
matrice Jacobienne	Jacobian matrix	مصفوفة جاكوبي
matrice diagonale	diagonal matrix	مصفوفة قطريّة

Français	English	العربيّة
		الميم
équation différentielle	differential equation	معادلة تفاضليّة
équation différentielle partielle	partial differential equation	معادلة تفاضليّة جزئيّة
équation différentielle linéaire	linear differential equation	معادلة تفاضليّة خطيّة
équation différentielle à variables séparables	separable variables differential equation	معادلة تفاضليّة ذات متحولات منفصلة
équation différentielle ordinaire	ordinary differential equation	معادلة تفاضليّة عاديّة
équation différentielle homogène	homogeneous differential equation	معادلة تفاضليّة متجانسة
équation intégrale	integral equation	معادلة تكامليّة
restriction	restriction	مقصور
intégration par parties	integration by parts	مكاملة بالتجزئة
courbe paramétrée	parametric curve	منحن وسيطي
ensemble de départ	domain of departure	منطلق
negligeable	negligible	مهمل
		النون
rayon de convergence	radius of convergence	نصف قطر التقارب
norme	norm	نظيم
singularité essentielle	essential singularity	نقطة شاذّة أساسيّة
fausse singularité	removable singularity	نقطة شاذّة كاذبة
point d'adhérence	point of closure	نقطة لاصقة
point d'existence	point of existence	نقطة وجود
point d'unicité	point of uniqueness	نقطة وحدانيّة
point d'unicité locale	point of local uniqueness	نقطة وحدانيّة محلّية
limite	limit	نهاية
limite inférieure	limit inferior	نهاية الحدود الدنيا

Français	**English**	**العربيّة**
		النون
limite supérieure	limit superior	نهاية الحدود العليا
limite à gauche	left-hand limit	النهاية من اليسار
limite à droite	right-hand limit	النهاية من اليمين
noyau de Dirichlet	Dirichlet kernel	نواة ديرخليه
noyau de Fejer	Fejer kernel	نواة فَيِّر
		الياء
domine	dominate	يهيمن

مراجع الكتاب

[1] "*Cours de Mathématiques Spéciales,* I, II, III, IV.",
E. RAMIS & C. DESCHAMPS & J. ODOUX, Masson, 1979.

[2] "*Cours de Mathématiques du Premier Cycle* ",
J. DIXMIER, Gautier-villars, 1977.

[3] "*Cours de Mathématiques* ",
J.M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE, Dunod Université, 1986.

[4] "*A First Course in Real Analysis* ",
S.K. BERBERIAN, Spinger-Verlag, 1994.

[5] "*Analyse, tomes:* I, II, III, IV ",
L. SCHWARTZ, Collection enseignement des Sciences, Hermann, 1991-1993.

[6] "*Topology and Normed Spaces* ",
G.J.O. JAMESON, Chapman & Hall, 1974.

[7] "*Problems in Calculus of One Variable* ",
I.A. MARON, Mir Publishers, Moscow 1973.

[8] "*263 Exercices Corrigées de Mathématiques en Spéciales* ",
O. KOUBA, Editions Marketing, Paris 1995.

[9] "*Cours d'Analyse VI, fonctions de variable complexe* ",
B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, Armand Colin, 1978.

[10] "*Théorie Elémentaire de Fonctions Analytiques, d'une ou Plusieures Varaiables* ",
H. CARTAN, Hermann, sixième édition, 1978.

[11] "*Complex Analysis* ",
L.V. AHLFORS, McGraw Hill, Third edition, 1979.

[12] "*Real and Complex Analysis* ",
W. RUDIN, McGraw Hill, Second edition, 1974.

[13] "*Theory of Functions of a Complex Variable* ",
S. SVESHNIKOV, A. TIKHONOV, Mir Publishers, 1978.

[14] "*Trigonometric Series* ",

A. ZYGMUND, Cambridge University Press, Second edition, 1988.

[15] "*Complex Analysis* ",

S. LANG, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.

[16] "*Analyse numérique et équations différentielles* ",

J.P. DEMAILLY, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[17] "*Fourier analysis and boundary value problems* ",

E.A. GONZALES-VELASCO, Academic Press, 1995.

[18] "*Systèmes différentiels, étude graphique* ",

M. ARTIGUE, V. GAUTHERON ; Cedic/Fernand Nathan, 1983.

[19] "*Equations Intégrales* ",

M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO, Mir, 1977.

[20] "*Equations différentielles* ",

M. ROSEAU, Masson, 1976.

[21] "*Recueil de problèmes d'équations différentielles* ",

A. PHILIPPOV, Mir, 1976.

[22] "*Equations différentielles ordinaries* ",

V. ARNOLD; Mir, 1974.

[23] "*Differential equations and the calculus of variations* ",

L. ELSGOLTS, Mir, 1973.

[24] "*Equations différentielles ordinaries* ",

L. PONTRIAGUINE, Mir, 1969.

[25] "*Cours de calcul différentiel* ",

H. CARTAN, Hermann, 1967.

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الخامس من سلسلة التحليل الرياضي، يدرس القارئ مبادئ تحليل فورييه: متسلسلات فورييه وتحويلات فورييه ونظرية القياس وتكامل لوبيغ ونظرية التوزيعات والتوابع المعمّمة.

ISBN 978-9933-9-2612-0

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
Higher Institute for Applied Sciences and Technology
www.hiast.edu.sy