الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

اهداء إلى قسم الرياضيات

٢٨/١١/ ٢٠٠٦

المدخل إلى التحليل الدالي

وتطبيقاته

تأليف

إيروين كريزيك

Erwin Kreyszig

ترجمة

الدكتور خضر حامد الأحمد

أستاذ في كلية العلوم - جامعة دمشق

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

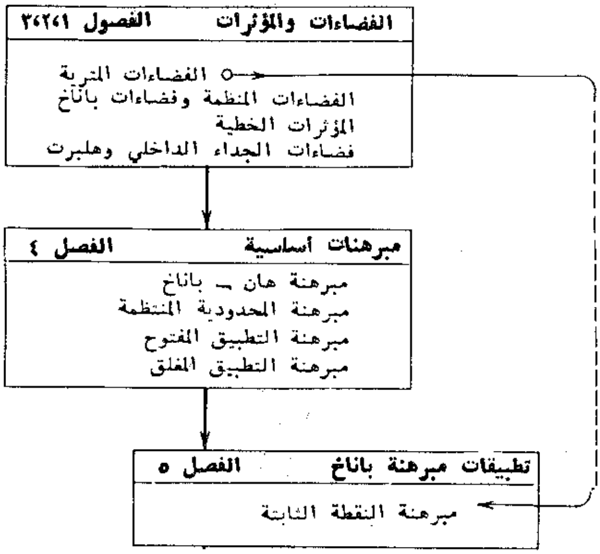
نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين • ورغم حداثة سنه نسبيا ، الا أنه يشغل حاليا مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة ، كما وأن تطبيقاته تغطي رقعة واسعة من ساحها • وليس من قبيل المبالغة القول بأن التحليل الدالي أحدث انعطافا في الفكر الرياضي ، شبيها بذاك الذي خلفه ادخال المتغيرات في علم الرياضيات في القرن السابع عشر ، والذي أدى الى نشوء الحساب التفاضلي والتكاملي • وبعد صدور كتاب الرياضي البولوني الكبير بانـاخ «Théorie des opérations linéaires» عام ١٩٣٢ ، أخذت أفكار ولغة التحليل الدالي طريقها الى العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها ، حتى ليكاد يتعذر الفصل أحيانا بين التحليل الدالي والمواضيع التي يطبق فيها •

ومفهوم « المؤثر » يشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي ،

وهو تعميم لمفهوم الدالة التي لولاها لما كان للتحليل الرياضي أن يكون • ودراسة النظرية العامة للمؤثرات تكمن في صلب التحليل الدالي • وفي حين يُعنَى التحليل الرياضي بدراسة مجموعة منتهية من الدوال والعلاقات التي تربط بينها ، فان التحليل الدالي يستعيض عن هذا بدراسة فضاءات الدوال والعمليات عليها • فالمؤثر التفاضلي مثلا لا يتناول كل دالة على حدة أو مجموعة منتهية من الدوال ، كما هو الحال في التحليل الرياضي التقليدي ، بل يتناول صفا كاملا من الدوال ، ويدرس فضاء الدوال الحاصل نتيجة إعمال هذا المؤثر • كذلك فقد لاحظ بعض علماء الرياضيات في باكورة هذا القرن ، وفي مقدمتهم باناخ Banach وريس Riesz أن معالجة بعض المسائل المختلفة في الرياضيات التقليدية من وجهة نظر أكثر عمومية وأشد تجريدا تمكننا من التوصل الى دراسة موحدة للعديد من هذه المسائل التي تبدو للوهلة الاولى وكأنها بعيدة كل البعد احداها عن الاخرى • فدراسة المعادلة $y = f(x)$ مثلا تسمح بتوحيد معالجة مسائل كانت تُبحث كل منها على حدة في نطاق أنظمة رياضية مختلفة • وبصورة أدق تحديدا ، فان هذه المعالجة للمعادلة السابقة أدت الى حل مسائل الوجود للمعادلات التفاضلية ، والمعادلات التكاملية والمعادلات الجبرية •

يهدف هذا الكتاب الى تعريف القارىء على المفاهيم والطرائق الاساسية المعتمدة في التحليل الدالي ؛ وهو ابتدائي في مضمونه إذ أن قراءته لا تتطلب سوى معرفة مبادىء الجبر الخطي والتحليل الرياضي • هذا وان **محتوى الكتاب يتناول ترجمة لخمسة فقط من فصول الكتاب الاحد عشر** ، وهو يغطي مفردات مقرر (التحليل التابعي) الذي يدرس في الصف الرابع لطلاب قسم الرياضيات في جامعة دمشق بمعدل أربع ساعات معتمدة أسبوعيا •

ويبين المخطط التالي الترتيب الذي أورده المؤلف للمواضيع التي يحتويها هذا الكتاب •



لدى النظر الى هذا المخطط نرى أن المؤلف أورد نظرية فضاءات باناخ (في الفصل الثالث) قبل ايراد المبرهنات الاساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ (في الفصل الرابع) • ويرى المؤلف أن السبب في هذا يعود الى أن هذه الفضاءات أبسط ، ولانها تساهم في رفد الفصل الرابع بأمثلة اضافية ، وأهم من هذا وذاك ، لانها تعطي الطالب احساسا أفضل بالصعوبات التي يجابهها لدى انتقاله من فضاءات هلبرت الى فضاءات باناخ العامة •

ان المترجم يدرك تماما العقبات التي تقف في سبيل القارىء العربي لدى دراسته لكتاب في الرياضيات معرب أو مؤلف في بلد

عربي آخر • وانني لا أرى وسيلة لتذليل هذه العقبات سوى التقيد قدر الامكان بالمصطلحات التي أقرها المكتب الدائم لتنسيق التعريب التابع للجامعة العربية ، وايراد ثبت للمصطلحات العربية المعتمدة في الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية • وفي هذا الصدد ، فقد أفدت كثيرا من المعجمين التاليين :

١ ــ **معجم الرياضيات المعاصرة** ، للدكاترة : صلاح أحمد وموفق دعبول والهام حمصي (مؤسسة الرسالة ١٩٨٣ م) •

٢ ــ **معجم الرياضيات** للدكاترة فوزي دنان وسعيد باقر وصابر العايدي وهاني فران (مؤسسة الكويت للتقدم العلمي ١٩٨٣ م) •

ان ترجمتي هذه لجزء من كتاب بلغة أجنبية هو جهد متواضع لاضافة مرجع جديد لطلابنا العرب في موضوع تعتبر أي ثقافة رياضية خالية منه فاقدة لركن أساسي فيها • وآمل أن لا يضن القراء الاعزاء بتنبيهي الى الاخطاء الواردة في الكتاب (والتي هي بالطبع من صنع المترجم وليس للمؤلف دخل فيها) كي يصار الى تصحيحها في طبعة قادمة باذن الله ، ولهم مني سلفا كل شكر وامتنان •

دمشق في ١ آذار ١٩٨٥

المترجم

الفصل الأول

الفضــاءات المترية

يمثل التحليل الدالي أحد الفروع المجردة مــن علم الرياضيات والمنبثقة عن التحليل الرياضي التقليدي • وقد بدأ هذا الفرع بالتطور منذ قرابة ثمانين عاما ، كما أن طرائقه ونتائجه هي اليوم على درجة كبيرة من الاهمية في الحقول المختلفة للعلوم الرياضية وتطبيقاتها • وقد كان الدافع لنشوء التحليل الدالي كل من الجبر الخطي ، والمعادلات التفاضلية الخطيــة العادية والجزئيــة ، وحساب التغيرات ، ونظرية التقريب ، وبوجه خاص نظرية المعادلات التكاملية الخطية التي كان لهــا أكبر الاثر في تطوير الافكار المعاصرة • وقد لاحظ الرياضيون أنه غالبا ما يكون للمسائل المنسوبة الى حقول مختلفة من علم الرياضيات مظاهر وخواص مرتبطة فيما بينها • وقد استغلت هذه الحقيقة بهدف التوحيد الفعال لمعالجة مثل هــذه المسائل ، وقد تم هذا التوحيد بأن حذفت التفاصيل غير الاساسية • لــذا فــان الفائدة التى تجنى من هذه **المعالجة المجردة** تكمــن في أنها تركز عــلى الحقائق الاساسية ، التي تغدو مرئية بوضوح ، لكون انتباه الباحث غير مشتت في خِضَم التفاصيل غير الهامة •

وفي هذا الصدد ، فان الاسلوب المجــرد هــو أبسط الاساليب وأكثرهــا اقتصادا لدى معالجة الانظمة الرياضية • وبما أنه يوجد لكل نظام مجرد في الحالة العامة تجسيدات محددة مختلفــة (تسمى **نمــاذج**) ، فاننا نــرى أن الاسلوب المجرد متعدد الاستعمالات لدى تطبيقه على حالات محددة • وهــو يساعد في

تحرير المسألة من عزلتها ، كما وأنه يوجد علاقات بين حقول لم يكن في السابق أي صلات فيما بينها •

وفي المعالجة المجردة ، فاننا ننطلق عادة من مجموعة مـن العناصر تحـقق مسلمات معينة • أما طبيعة العناصر فنترك دون تحديد ، وهذا أمر نفعله عن قصد • وعندئذ تتألف النظرية من نتائج منطقية تسمى مبرهنات نستخلصها من المسلمات • ويعني هذا أنه في سياق هذه المعالجة انطلاقا من المسلمات ، فاننا نحصل عـلى بنية رياضية ، نجد نظريتها بطريقة مجردة • وهذه المبرهنات العامة يمكن أن تطبق بعدئذ على مجموعات خاصة متنوعة تحقق المسلمات •

وعلى سبيل المثال ، ففي الجبر تستعمل هـذه المعالجة في الحقول والحلقات والزمـر • وفي التحليل الدالي ، فاننـا نستعملها في سياق **الفضاءات المجردة** • وهذه الفضاءات على غاية من الاهمية ، وسندرس بعضا منها بكثير من التفصيل (فضاءات باناخ وفضاءات هلبرت) • وسنرى أن مفهوم الفضاء هنا يستعمل بمعنى واسع جدا بصورة مدهشة • **فالفضاء المجرد** هو مجموعة عناصر (ذات طبيعـة كيفية) تحقق مسلمات معينة • وباختيارنا جملا مختلفة من المسلمات ، فاننا نجد أنماطا مختلفة من الفضاءات المجردة •

ان فكرة استعمال فضاءات مجردة بصورة منهجية يعزى الى م• فريشـيه (١٩٠٦ م)،وهذا مبرر بالنجاح الكبير الذي حققته هذه الفضاءات •

سندرس في هذا الفصل الفضاءات المتريـة ، وهذه الفضاءات أساسية في التحليل الدالي لكونها تلعب دورا مماثلا لذلك الذي يلعبه المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ في الحساب التفاضلي والتكاملي • وفي الحقيقة ، فان هذه الفضاءات تعميم لـ $\mathbf{R}$ ، وقد ابتدعت لتشكيل قاعدة لمعالجة موحدة لمسائل هامة تنتمي الى فروع مختلفة مـن التحليـل •

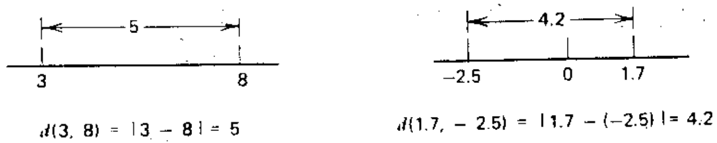
سنعرف أولا الفضاءات المترية ومفاهيم متعلقة بها ، كما وسنوضحها بأمثلة نموذجية • وسنناقش الفضاءات الخاصة ذات الاهمية العملية بصورة مفصلة • وسنولي كثيرا من الاهتمام لمفهوم التمام ، وهو خاصة قد يكون الفضاء المتـري متمتعا بها ، وقد لا يكون • ويلعب التمام دورا أساسيا في كتابنا هذا كله •

مفاهيم هامة . توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

الفضاء المتري (راجع ١ـ١ـ١) هو مجموعة X مزودة بمترك . ويقرن المترك بكل زوج من العناصر (**النقاط**) من X **مسافة** . ويعرف المترك بالمسلمات التي تحدده ، وقد اقترحت هذه المسلمات استنادا الى خواص بسيطة محددة للمسافة المألوفة بين نقاط المحور الحقيقي **R** والمستوي العقدي **C** . وتبين الامثلة الاساسية (كالمثالين ١ـ١ـ٢ و ١ـ١ـ٣) أن مفهوم الفضاء المتري هو عام بصورة ملفتة للنظر . ومن الخواص الاضافية ذات الاهمية البالغة التي يمكن أن يتسم بها الفضاء المتري ، خاصة **التمام** (راجع ١ـ٤ـ٣) التي سندرسها باسهاب في الفصلين ١ـ٥ و ١ـ٦ . وثمة مفهوم آخر ذو أهمية نظرية وعملية ، هو مفهوم **فصولية** الفضاء المتري (راجع ١ـ٣ـ٥) . والفضاءات المترية الفصولة أبسط من الفضاءات غير الفصولة .

١ـ١ الفضاء المتري

ندرس في الحساب التفاضلي والتكاملي الدوال المعرفة على المحور الحقيقي **R** . ولا يحتاج المرء للكثير من الجهد كي يرى في عمليات الانتقال الى النهاية وفي كثير من الاعتبارات الاخرى ، اننا نستعمل حقيقة وجود دالة مسافة على **R** ، ولنرمز لها بـ d ، بحيث يقابل كل زوج من النقاط x, y من **R** وفق هذه الدالة المسافة $d(x, y)=|x-y|$. ويوضح الشكل (٢) هذا الرمز . هذا ونجد وضعا مماثلا في المستوي وفي الفضاء « ثلاثي البعد » المألوف .



الشكل (٢) . المسافة على R

أما في التحليل الدالي ، فاننا ندرس « فضاءات » أعم و « دوال » معرفة على هذه الفضاءات . ونتوصل الى مفهوم عام ومرن بدرجة كافية لمفهوم « الفضاء »

على النحو التالي : نستعيض عن مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ بمجموعة **مجردة** X (وهي مجموعة عناصر ذات طبيعة غير محددة) ونحدد على X « دالة مسافة » تتمتع بقدر ضئيل من الخواص الاساسية جدا لدالة المسافة على $\mathbf{R}$ • ولكن ما الذي نعنيه بعبارة « الاساسية جدا » ؟ ان هذا السؤال بعيد عن أن يكون سؤالا تافها ، ذلك أن اختيار وصياغة المسلمات لدى ايراد تعريف ما أمر يحتاج دوما الى خبرة وإلفة مع المسائل العملية وفكرة واضحة عن الهدف الذي نسعى اليه • وفي حالتنا هذه ، فانه انقضى أكثر من ستين سنة قبل التوصل الى المفهوم التالي الذي يعتبر أساسيا وبالغ الاهمية في التحليل الدالي وتطبيقاته •

١-١-١ تعريف (الفضاء المتري ، المترك)

الفضاء المتري هو زوج (X, d)، حيث X مجموعة و d **مترك على** X (أو **دالة مسافة على** X) ، أي دالة معرفة* على $X \times X$ بحيث تحقق الخواص التالية أيا كان x, y, z من X :

(م١) d دالة حقيقية وغير سالبة •

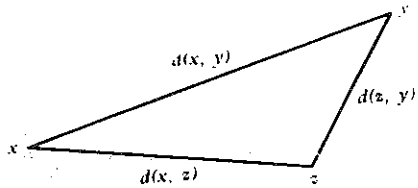
(م٢) الشرط اللازم والكافي كي يكون $d(x, y)=0$ هو أن يكون $x=y$

(م٣) $d(x, y)=d(y, x)$ **(التناظر)** •

(م٤) $d(x, y) \leqq d(x, z)+d(z, y)$ **(متباينة المثلث)** •

سنورد فيما يلي بعض المصطلحات • تسمى X عادة **مجموعة الرديف** للزوج (X, d) ، كما تدعى عناصرها **نقاطا** • ولدى تثبيت x ، y ، فاننا نسمي العدد غير السالب $d(x, y)$ **المسافة** من x الى y • وتشكل الخواص بدءا من (م١) حتى (م٤) **موضوعات المترك** • واسم «متباينة المثلث» الذي أطلقناه على الموضوعة(م٤) مأخوذ من الهندسة الابتدائية كما هو مبين في الشكل (٣) •

(*) يشير الرمز $\times$ الى **الجداء الديكارتي لمجموعتين** حيث $A \times B$ هو مجموعة كل الازواج المرتبة (a, b) ، حيث $a \in A$ و $b \in B$. لذا فان $X \times X$ هو مجموعة كل الازواج المرتبة من عناصر X •



الشكل (٢) • متباينة المثلث في المستوي

وباستعمال الاستقراء الرياضي ، فاننا نستنتج من الموضوعة (م٤) **متباينة المثلث المعممة** التاليـة :

$$d(x_1, x_n) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \qquad (1)$$

وبدلا من كتابة (X, d) يمكن أن نكتفي بكتابة X اذا لم يكن ثمة مجـال للالتباس •

ونحصل على **فضاء جزئي** $(Y, \tilde{d})$ من الفضاء (X, d) اذا أخذنا مجموعـة جزئية Y من X ، وقصرنا d على $Y \times Y$ • وهكذا ، فـان المترك على Y هـو المقصـور

$$\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$$

ويسمى $\tilde{d}$ المترك **المحدث** على Y بالمترك d (أو **المستخلص** من المترك d)

سنورد الآن أمثلة على الفضاءات المترية ، بعضها مألوف لـدى القارىء • ولاثبات أن هذه فضاءات مترية ، فمن الواجب التحقق في كل حالة مـن صحـة الموضوعات (م١) حتى (م٤) • وفي الأحوال العادية ، فان التحقق من صحة (م٤) يتطلب جهدا أكبر مما يلزم للموضوعات (م١) حتى (م٣) • بيد أن هذا لن يكون معقدا في الامثلة التي سنوردها ، الامر الذى يسمح لنا بترك مسألة التحقق للقارىء • أما الفضاءات المترية المعقدة التي يكون التحقق فيها من صحـة (م٤) ليس بالامر السهل ، فاننا سنوردها في الفصل القادم •

امثلة

١ـ١ـ٢ المحور الحقيقي

وهو مجموعة الاعداد الحقيقية المزودة بالمترك المعتاد المحدد بالمساواة

$$d(x, y)=|x-y|. \tag{2}$$

١ـ١ـ٣ المستوى الاقليدي $\mathbf{R}^2$

نحصل على الفضاء المتري $\mathbf{R}^2$ ، الذي يسمى **بالمستوى الاقليدي** ، اذا أخذنا مجموعة كل الازواج المرتبة من الاعداد الحقيقية ، مثل* $x=(\xi_1, \xi_2)$ و $y=(\eta_1, \eta_2)$ ، •• الخ ، وأخذنا **المترك الاقليدي** المعرف بالمساواة

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{3}$$

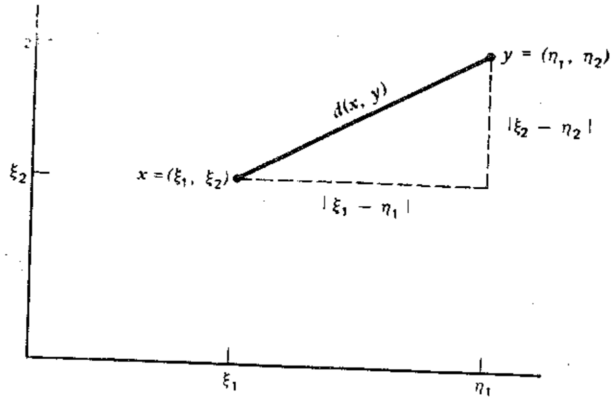
انظر الشكل (٤) •

ونحصل على فضاء متري آخر اذا أخذنا المجموعة نفسها كما سبق ، الا أننا سنختار متركا آخر d_1 معرفا بالدستور

$$d_1(x, y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|. \tag{4}$$

ان هذا يوضح حقيقة هامة ، وهي أنه يمكننا أن نحصل من مجموعة معطاة (تحوي أكثر من عنصر واحد) على فضاءات مترية مختلفة ، وذلك باختيار متارك مختلفة • (لا يوجد للفضاء المتري حيث المترك هو d_1 اسم متفق عليه • ويطلق على d_1 أحيانا اسم **مترك سيارة الاجرة** • لماذا ؟ ويرمز أحيانا الى $\mathbf{R}^2$ بالشكل E^2) •

(*) لم نكتب $x=(x_1, x_2)$ ، ذلك ان x_1 ، x_2 ستلزمنا في المستقبل (بدءا من البند ١ـ٤) عند دراستنا للمتتاليات •



الشكل (٤) • المترك الاقليدي على المستوي

١ـ١ـ٤ الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\mathbf{R}^3$

يتألف هذا الفضاء المتري من مجموعة الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ••• الخ ، المزودة **بالمترك الاقليدي** المعـرف كالتالـي :

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{5}$$

١ـ١ـ٥ الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ ، الفضاء الوَحْدي $\mathbf{C}^n$ ، المستوي العقدي $\mathbf{C}$

ان الامثلة السابقة ليست سوى حالات خاصة من **الفضاء الاقليدي** $\mathbf{R}^n$ ذي الابعاد n • ونجد هذا الفضاء اذا أخذنا مجموعة كل المرتّبات n من الاعداد الحقيقية، والتي نكتبها بالشكل

$$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n), \qquad y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$$

••• الخ ، والمزودة **بالمترك الاقليدي** المعرف بالدستور

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{6}$$

ويعرف **الفضاء الوَحْدِيّ C^n ذو البعد** n بأنه فضاء كل المرتبات n من الاعداد العقدية المزودة بالمترك التالي :

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2} \quad (\geqq 0) \tag{7}$$

وعندما $n = 1$ ، فان هذا الفضاء يغدو المستوي العقدي C المــزود بالمترك المعتاد المعــرف بالمساواة

$$d(x, y) = |x - y| \tag{8}$$

(يسمى C^n أحيانا **بالفضاء الاقليدي العقدي ذي البعد** n) .

١-١-٦ فضاء المتتاليات l^∞

ان هذا المثال والذي يليه يعطيان انطباعا أولا عن مدى العمومية التي ينطوي عليها مفهوم الفضاء المتري . سنأخذ X على أنها مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الاعداد العقدية ، أي أن كل عنصر من X هو متتالية عقدية

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$$

أو اختصارا

$$x = (\xi_j)$$

بحيث أنه أيا كان $j = 1, 2, \cdots$ ، فان

$$|\xi_j| \leqq c_x$$

بافتراض c_x عددا حقيقيا قد يتبع x ، الا أنه لا يتبع j . سنختار المترك محددا بالمســاواة

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbf{N}} |\xi_j - \eta_j| \tag{9}$$

حيث $y=(\eta_i)\in X$ ، $\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$ ، وحيث يرمز sup الى الحد الأعلى • ويرمز للفضاء المتري الذي نجده وفق الفروض السابقة بالشكل l^∞ • (سيبرر هذا الرمز الغريب الى حد ما في البند ١ــ٢ــ٣ من الفصل التالي) • ان l^∞ هو **فضاء متتاليات** ، ذلك أن كل عنصر من X (أي أن كل نقطة في X) متتالية •

١ــ١ــ٧ فضاء الدوال $C[a, b]$

نأخذ X هنا مجموعة كل الدوال الحقيقية x ، y ، ••• التي هي دوال لمتغير حقيقي مستقل t ، وهي معرفة ومستمرة على مجال مغلق معطى $J=[a, b]$ • وباختيار المترك وفق المساواة

$$d(x, y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|, \qquad (10)$$

حيث max تشير الى القيمة العظمى ، فاننا نجد فضاء متريا نرمز له ب $C[a, b]$ • (الحرف C يمثل الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "continuous." ، التي تعني « مستمر ») • ان هذا هو **فضاء دوال** لان كل نقطة من $C[a, b]$ هي دالة •

على القارىء أن يدرك الفرق الشاسع بين الحساب التفاضلي والتكاملي ، حيث ندرس دالة واحدة أو عددا قليلا من الدوال في آن واحد ، وبين التحليل الدالي حيث تغدو الدالة مجرد نقطة في فضاء واسع •

١ــ١ــ٨ الفضاء المتري المتقطع

لنأخذ أي مجموعة X ، ولنزودها بما يسمى **المترك المتقطع** المعرف كما يلي :

$$d(x, x)=0, \qquad d(x, y)=1 \qquad (x\neq y)$$

يسمى هذا الفضاء (X, d) **الفضاء المتري المتقطع** • ورغم أنه نادرا ما يرد في التطبيقات ، الا أننا سنستعمله في الامثلة بغية ايضاح بعض المفاهيم •

لدى النظر الى ١ــ١ــ١ ، فاننا نرى أن الفضاء المتري يعرف استنادا الــى موضوعات ، ونريد أن نذكر بأن التعاريف بالموضوعات تستعمل اليوم في العديد من فروع علم الرياضيات • وقد تــم الاعتراف بفائدتها عموما بعد أن نشر هلبرت بحثه حول أسس الهندسة ، ومن المهم ملاحظة أنه كان لدراسة الهندسة التي هي أحــد **اقــدم** وأبسط أقسام العلوم الرياضية أكبر وأهم الاثر في الرياضيات **المعاصرة** •

مســائل

١ ــ أثبت أن المحور الحقيقي هو فضاء متري •

٢ ــ هل تحدد المساواة $d(x, y) = (x-y)^2$ متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية ؟

٣ ــ بيّن أن $d(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ تحدد متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية •

٤ ــ أوجد كل المتارك علــى مجموعة X مؤلفة مــن نقطتين ، وعلــى مجموعة وحيــدة العنصــر •

٥ ــ ليكن d متركا على X • حدد كل الثوابت k بحيث يكون (i) kd (ii) $d+k$ متركــا عــلى X •

٦ ــ بيّن أن d في ١ــ١ــ٦ يحقق متباينة المثلث •

٧ ــ اذا كان A فضاء جزئيا من l^∞ مؤلفا من كل المتتاليات التي كل حد فيهــا اما 0 واما 1 ، فما هو المترك المحدث على A ؟

٨ ــ بيّن أنه يمكن تعريف مترك آخر $\tilde{d}$ على المجموعة X في ١ــ١ــ٧ بالمساواة

$$\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

٩ ــ أثبت أن d الوارد في ١ــ١ــ٨ هو مترك •

١٠ــ **(مسافة هامنغ)** لتكــن X مجموعة كل الثلاثيات المرتبة مــن الاصفار والواحدات • بيّن أن X تتألف من ثمانية عناصر ، وأنه يمكن تحديد مترك

d على X بالمساواة $d(x, y)$ = عدد المساقط المتقابلــة المختلفة للعنصرين x و y • (اذا كان $x = (x_1, x_2, x_3)$ ، فاننا نسمي x_i المسقط الـ i للعنصر • ان هذا الفضاء والفضاءات المماثلة التي عناصرها مرتبات n ترد فــي التحويل ونظرية الاوتوماتا وفي التصنيف • يسمى $d(x, y)$ **مسافة هامنغ** بــين x و y) •

١١ـــ أثبت صحة المتباينة (1) •

١٢ ـــ **(متباينة المثلث)** • لمتباينة المثلث نتائــج مفيدة عــدة • فمثلا ، أثبت استنادا الى (1) أن

$$|d(x, y)-d(z, w)| \leqq d(x, z)+d(y, w)$$

١٣ـــ أثبت استنادا الى متباينة المثلث أن

$$|d(x, z)-d(y, z)| \leqq d(x, y)$$

١٤ـــ **(موضوعات المترك)** • من الممكن الاستعاضة عن (م١) ـــ (م٤) بموضوعات أخرى (دون تغيير التعريف) • بيّن علــى سبيل المثال أن (م٣) و (م٤) تستنتجان من (م٢) ومن المتباينة

$$d(x, y) \leqq d(z, x)+d(z, y)$$

١٥ـــ بيّن أن كون المترك أكبر من الصفر أو يساويه تنتج من (م٢) ـــ (م٤) •

١ـــ٢ امثلة اخرى على الفضاءات المترية

سنورد الآن ثلاثة من الامثلة الاضافية ، بهدف ايضاح مفهوم الفضاء المتري وطريقة التحقق من موضوعات المترك ، وبصورة خاصة متباينة المثلث (م٤) •والمثال الاخير l^p هو أهمها من حيث تطبيقاته •

يتألف هذا الفضاء من مجموعة كل المتتاليات (المحدودة وغير المحدودة)التي حدودها أعداد عقدية ، ومن المترك d المعرف بالدستور

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

حيث $x=(\xi_i)$ و $y=(\eta_i)$ • لاحظ أن المترك في المثال ١ـ١ـ٦ لن يكون مناسبا في الحالة الراهنة • (لماذا ؟)

ان الموضوعات (م١) ــ (م٣) محققة ، الامر الذي يمكن رؤيته بكل بساطة• سنتحقق الآن من الموضوعة (م٤)•سنستعمل لهذا الغرض الدالة المساعدة f المعرفة على $\mathbf{R}-\{-1\}$ بالمساواة

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

وبالاشتقاق نجد أن $f'(t)=1/(1+t)^2$ ، وهو مقدار موجب • لذا فان f رتيبة متزايدة • وبالتالي فان

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$f(|a+b|) \leqq f(|a|+|b|)$$

نستنتج من هذا استنادا الى عبارة f والى متباينة المثلث بالنسبة للاعداد أن

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

سنضع في هــذه المتباينة $a=\xi_i-\zeta_i$ و $b=\zeta_i-\eta_i$ ، حيــث $z=(\zeta_i)$ ، اذن $a+b=\xi_i-\eta_i$ ، وبالتالــي فــان

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqq\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$

واذا ضربنا طرفي هذه المتباينة بـ $1/2^i$ ثم جمعنا من $j=1$ حتى ∞ ، فاننا نجد $d(x,y)$ في اليسار ومجموع $d(x,z)$ و $d(z,y)$ في اليمين ، أي :

$$d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)$$

وبذا نكون قد وجدنا (م٤) وأثبتنا أن s هو فضاء متري .

١-٢-٢ فضاء الدوال المحدودة $B(A)$

ان كل عنصر x من $B(A)$ هو بالتعريف دالة معرفة ومحدودة على مجموعة معطاة A ، والمترك يحدد بالمساواة

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$

حيث يشير sup الى الحد الاعلى . وفي الحالة $A=[a,b]\subset\mathbf{R}$ ، فاننا نشير الى $B(A)$ بالشكل $B[a,b]$.

سنبين الآن أن $B(A)$ فضاء متري.من الواضح مباشرة أولا صحة الموضوعتين (م١) و (م٣) . كذلك ، فــان المساواة $d(x,y)=0$ واضحة . وبالعكس ، فاذا كــان $d(x,x)=0$ فان $x(t)-y(t)=0$ أيا كان t من A ، وهذا يعني أن $x=y$. وبذا نكون قد أثبتنا صحة (م٢) كذلك . نلاحظ الآن أنه أيا كان t من A فان

$$|x(t)-y(t)|\leqq|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$\leqq\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|.$$

وهذا يبين أن $x-y$ دالة محددة على A • وبمـا أن العبارة الواردة في السطر الاخير ليست تابعة للمتغير t ، فانه يمكن أن نأخذ الحـد الاعلـى في اليسار ، ونجد بذلك (م٤) •

١-٢-٣ الفضاء l^p ، فضاء المتتاليات لهلبرت l^2 ، متباينتا هولدر ومنكوفسكي فـي المجاميـع

ليكن p عددا حقيقيا مثبتا أكبر من 1 أو يساويه • نعرف كل عنصر مـن الفضاء l^p بأنه متتاليه $x=(\xi_j)=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ من الاعداد بحيث تكون المتسلسلة $|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots$ متقاربة • اذن

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p<\infty \qquad (1)$$

(حيث p عدد مثبت أكبر من 1 أو يساويه) • ويعرف المترك بالمساواة

$$d(x, y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p} \qquad (2)$$

حيث $y=(\eta_j)$ و $\sum|\eta_j|^p<\infty$ • واذا أخذنا المتتاليات الحقيقية فقط [التي تحقق (1)] ، فاننا نجد **الفضاء الحقيقي** l^p • أما اذا أخذنا المتتاليات العقدية [التي تحقق (1)] ، فاننا نجد **الفضاء العقدي** l^p • (عنـدما يكون التمييز ضروريا ، فيمكن ان نضيف الى l^p الدليل السفلي $\mathbf{R}$ في الحالة الاولى أو الدليل السفلي $\mathbf{C}$ في الحالة الثانية) •

وفي الحالة $p=2$ ، فاننا نجد فضاء المتتاليات لهلبرت l^2 ، حيث يحـدد المتـرك بالمسـاواة

$$d(x, y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j-\eta_j|^2}. \qquad (3)$$

وقد أورد هذا الفضاء ودرسه ده هلبرت (١٩١٢) لدى بحثه للمعادلات التكاملية ، ويمثل هذا الفضاء أول الامثلة على ما نسميه الآن **بفضاء هلبرت** • (سنتناول فضاءات هلبرت بتفصيل زائد ، بدءا من الفصل الثالث) •

سنثبت الآن أن l^p هو فضاء متري • من الواضح أولا أن (2) تحقق الموضوعات من (م١) حتى (م٣) شريطة تقارب المتسلسلة في الطرف الايمن • سنثبت أن هذه المتسلسلة تتقارب فعلا ، وأن (م٤) محققة ، وسنقوم بهذا العمل خطوة خطوة ، وذلك بأن نستنتج

(آ) المتباينة المساعدة ،
(ب) متباينة هولدر من (آ) ،
(ج) متباينة منكوفسكي من (ب) ،
(د) متباينة المثلث (م٤) من (ج) •

والتفاصيل هي كالتالي :

(آ) ليكن p عددا أكبر من 1 ، ولنعرف q بالمساواة

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{4}$$

يسمى p و q عندئذ **اسين مترافقين** ، وهو مصطلح متعارف عليه • نستنتج من (4) أن

$$1=\frac{p+q}{pq}, \qquad pq=p+q, \qquad (p-1)(q-1)=1. \tag{5}$$

وبالتالي فان $1/(p-1)=q-1$ ، اذن

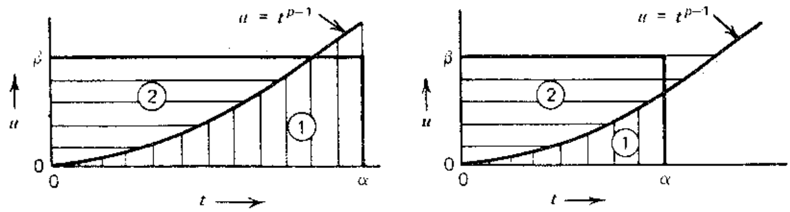
$$u=t^{p-1} \quad \text{تقتضي} \quad t=u^{q-1}$$

ليكن α و β أي عددين موجبين • لما كان $\alpha\beta$ هو مساحة المستطيل الوارد

في الشكل (٥) ، فاننا نجد بالمكاملة المتباينة

$$\alpha\beta \leqq \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{6}$$

لاحظ أن هذه المتباينة صحيحة وضوحا عندما $\alpha=0$ أو عندما $\beta=0$ •



الشكل (٥) • المتباينة (6) ، حيث ① يوافق التكامل الايسر في (6) ، و ② يوافق التكامل الايمن

(ب) لتكن $(\tilde{\xi}_j)$ و $(\tilde{\eta}_j)$ متتاليتين تحققان الشرطين

$$\sum |\tilde{\xi}_j|^p = 1, \qquad \sum |\tilde{\eta}_j|^q = 1. \tag{7}$$

اذا وضعنا $\alpha = |\tilde{\xi}_j|$ و $\beta = |\tilde{\eta}_j|$ ، فاننا نستنتج من (6) المتباينة

$$|\tilde{\xi}_j \tilde{\eta}_j| \leqq \frac{1}{p}|\tilde{\xi}_j|^p + \frac{1}{q}|\tilde{\eta}_j|^q.$$

وباجراء الجمع بالنسبة لـ j والافادة من (7) و (4) ، نجد المتباينة

$$\sum |\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8}$$

لنأخذ الآن أي متتاليتين غير صفريتين $x=(\xi_j)\in l^p$ و $y=(\eta_j)\in l^q$ ،

$$\tilde{\xi}_j=\frac{\xi_j}{\left(\sum|\xi_k|^p\right)^{1/p}}, \qquad \tilde{\eta}_j=\frac{\eta_j}{\left(\sum|\eta_m|^q\right)^{1/q}}. \tag{9}$$

عندئذ تكون (7) محققة ، وبالتالي مـن الممكن استخدام (8) • وبتعويض (9) في (8) وضرب المتباينة الناتجة بجداء المقامين في (9) ، فاننا نجـد **متباينة هولدر للمجاميع :**

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{1/q} \tag{10}$$

حيث $p>1$ و $1/p+1/q=1$ • وقد توصل هولدر الى هذه المتباينة عام ١٨٨٩ •
وفـي الحالـة $p=2$ ، يكـون $q=2$ ، وعنـدها تعطـى (10) **متباينة كوشي ـ شفارتز للمجاميع :**

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqq\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2}. \tag{11}$$

من السابق لأوانه الحديث المستفيض عن الحالة $p=q=2$ ، التي يساوي فيها p مرافقه الاسي q ، بيد أننا نود على الاقل ايراد ملاحظة مختصرة تفيد بأن هذه الحالة ستلعب دورا خاصا في بنود مـن الفصول القادمة ، وتقود الـى فضاء لهلبرت « أظرف » من تلك الفضاءات حيث يكون $p\neq 2$ •

(جـ) سنثبت الآن صحة **متباينة منكوفسكي للمجاميع :**

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{1/p} \tag{12}$$

حيث $x=(\xi_j)\in l^p$ و $y=(\eta_j)\in l^p$ و $p\geqq 1$ • وقد توصل منكوفسكي الى هذه المتباينة ، لكن في حالة المجاميع المنتهية ، في عام ١٨٩٦ •

في الحالة $p=1$ ، فان هذه المتباينة تنتج رأسا من متباينة المثلث بالنسبة للاعداد • لنفترض الآن $p>1$ •ولتبسيط الدساتير، سنفترض $\xi_j+\eta_j=\omega_j$ • ان متباينة المثلثفي حال الاعداد تعطي

$$|\omega_j|^p = |\xi_j+\eta_j||\omega_j|^{p-1}$$
$$\leqq (|\xi_j|+|\eta_j|)|\omega_j|^{p-1}.$$

وبالجمع بالنسبة الى j من 1 الى أي عدد مثبت n نجد أن

$$\sum |\omega_j|^p \leqq \sum |\xi_j||\omega_j|^{p-1} + \sum |\eta_j||\omega_j|^{p-1}. \qquad (13)$$

وبتطبيق متباينة هولدر على المجموع الاول فيالطرف الايمن نجد أن

$$\sum |\xi_j||\omega_j|^{p-1} \leqq \left[\sum |\xi_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum (|\omega_m|^{p-1})^q\right]^{1/q}$$

مع ملاحظة أنه يمكن أن نضع في المضروب الايمن p بدلا من جداء الاسين $p-1$ و q ، ذلك أن $pq=p+q$ كما هو واضح في (5) • واذا تعاملنا مع الطرف الايمن في (13) بصورة مماثلة ، فاننا نجد أن

$$\sum |\eta_j||\omega_j|^{p-1} \leqq \left[\sum |\eta_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum |\omega_m|^p\right]^{1/q}.$$

وبالتالي فاننا نستنتج أن

$$\sum |\omega_j|^p \leqq \left\{\left[\sum |\xi_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum |\eta_k|^p\right]^{1/p}\right\}\left(\sum |\omega_m|^p\right)^{1/q}.$$

وبالتقسيم على المضروب الاخير في الطرف الايمن من المتباينة وملاحظة أن $1-1/q=1/p$ ، فاننا نجد (12) لكن n ترد عوضا عن ∞. • لنجعل الآن $n \longrightarrow \infty$ • عندها نجد في اليمين متسلسلتين متقاربتين لان $x, y \in l^p$ • اذن فالمتسلسلة في اليسار تتقارب أيضا ، وبذا يتم اثبات (12) •

(د) يترتب على (12) أنه اذا كان x و y في l^p ، فان المتسلسلة في (2)

تتقارب • كذلك ، فان (12) تعطي متباينة المثلث ، ذلك أنه اذا كانت x و y و z من l^p ، وكتبنا $z=(\zeta_i)$ ، فاننا نجد بالاستعانة بمتباينة المثلث بالنسبة للاعداد وبالمتباينة (12) أن

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum [|\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|]^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum |\xi_i - \zeta_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\zeta_i - \eta_i|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

وبذا يكتمل اثبات أن l^p هو فضاء متري •

ان المتباينتين (10) و (12) اللتين وجدناهما فيسياق البرهان بالغتا الاهمية، كما وأنهما تشكلان أداتين لا غنى عنهما في العديد من المسائل النظرية والعملية ، وسنستخدمهما مرات عدة في أبحاثنا القادمة •

مسائل

١ ــ أثبت أنه يمكننا الحصول في 1.2-1 على مترك آخر عند الاستعاضة عن $1/2^i$ بالعدد $\mu_i>0$ بحيث تتقارب المتسلسلة $\sum \mu_i$ •

٢ ــ بيّن باستخدام (6) أن الوسط الهندسي لعددين موجبين لا يكبر وسطهما الحسابي •

٣ ــ أثبت أن متباينة كوشي ــ شڤارتز (11) تقتضي المتباينة

$$(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)^2 \leqq n(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2).$$

٤ ــ **(الفضاء l^p)** • أوجد متتالية تتقارب من 0 دون أن تكون منتمية الى أي فضاء l^p ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ •

٥ ــ أوجد متتالية x منتمية الى l^p ، حيث $p>1$ ، ولا تنتمي الى l^1 •

٦ ــ (**القطر ، المجموعة المحدودة**) • **ان القطر** $\delta(A)$ لمجموعة غير خالية A في فضاء متري (X, d) يعرف بأنه

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y).$$

ونقول عن A انها **محدودة** اذا كان $\delta(A)<\infty$ • بيّن أنه اذا كان $A\subset B$ فــان $\delta(A)\leqq\delta(B)$ •

٧ ــ بيّن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\delta(A)=0$ (راجع المسألة رقم ٦) هو أن تكون A مجموعة وحيدة العنصر •

٨ ــ (**المسافة بين المجموعات**) • تعرف المسافة $D(A, B)$ بين مجموعتين غــير خاليتين A و B في فضاء متري (X, d) بالمساواة

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a, b).$$

بيّن بأن D لا تعين متركا على مجموعة أجزاء X • (لهذا السبب استعملنا رمزا آخر D ، ولكنه رغم ذلك يذكرنا بالمترك d)•

٩ ــ اذا كان $A\cap B\neq\phi$ ، فبيّن أن $D(A, B)=0$ في المسألة ٨ • ماذا يمكن قوله عــن العكــس ؟

١٠ــ تعرّف المسافة $D(x, B)$ بين النقطة x والمجموعة غير الخالية B في (X, d) بالمســاواة

$$D(x, B) = \inf_{b\in B} d(x, b),$$

التي تتفق مع المسألة ٨ • بيّن أنه أيا كان العنصران x و y من X فان

$$|D(x, B)-D(y, B)|\leqq d(x, y).$$

١١ــ اذا كان (X, d) أي فضاء متري ، فأثبت أن المساواة

$$\tilde{d}(x, y)=\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$$

تحدد متركا آخر على X ، وأن X محدودة في المترك $\tilde{d}$ •

١٢ــ بيّن أن اجتماع مجموعتين محدودتين A و B في فضاء متري هو مجموعة محدودة (راجع التعريف الوارد في المسألة ٦) •

١٣ــ **(جداء فضاءين متريين)** • من الممكن جعل الجداء الديكارتي $X=X_1\times X_2$ لفضاءين متريين (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاء متريا (X, d) بأشكال مختلفة • فمثلا، برهن أن المساواة التالية تعين متركا d

$$d(x, y)=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2),$$

حيث $x=(x_1, x_2)$ و $y=(y_1, y_2)$ •

١٤ــ أثبت أنه يمكن تعريف مترك آخر على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\tilde{d}(x, y)=\sqrt{d_1(x_1, y_1)^2+d_2(x_2, y_2)^2}.$$

١٥ــ بيّن أنه يمكن تحديد مترك ثالث على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\tilde{\tilde{d}}(x, y)=\max\left[d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\right].$$

(ان للمتركين في المسألتين ١٣ و ١٥ أهمية تطبيقية ، كما أنه يمكن تزويد X بمتارك أخرى) •

١ــ٣ المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة ، الجوار

هنالك عدد لابأس به من المفاهيم المساعدة التي تلعب دورا فيما يتعلق بالفضاءات المترية • وقد ضمّنّا هذا الفصل تلك المفاهيم التي سنحتاج اليها •

لذا ، فان هذا الفصل يحوي مفاهيم كثيرة (أكثر من أي فصل آخر في الكتاب) ، لكن القارىء سيلاحظ أن العديد منها يغدو مألوفا تماما لدى تطبيقها على الفضاءات الاقليدية • وبالطبع فان هذا يناسبنا جدا ، كما وأنه يبين فائدة المصطلحات التي أوحت بها الينا الهندسة التقليدية •

سنورد أولا الأنماط الهامة من المجموعات الجزئية من فضاء متري معطى $X = (X, d)$ •

١ـ٣ـ١ تعريف (الكرة والقشرة الكروية)

لتكن x_0 نقطة ما من X ، وليكن r عددا حقيقيا موجبا ما • لنعرف الانماط الثلاثة التالية من المجموعات الجزئية :

(آ) $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ (**كرة مفتوحة**)

(ب) $\bar{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqq r\}$ (**كرة مغلقة**)

(جـ) $S(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ (**قشرة كروية**)

وفي هذه الحالات جميعا ، فان x_0 **هو المركز** و r هو **نصف القطر** •

نرى من هذا أن الكرة المفتوحة التي نصف قطرها r هي مجموعة كل النقاط من X التي تكون المسافة بين كل منها ومركز الكرة أصغر من r • كذلك ، فان التعريف السابق يقتضي مباشرة أن

$$S(x_0; r) = \bar{B}(x_0; r) - B(x_0; r). \tag{2}$$

تحذير :

عند البحث في الفضاءات المترية ، فان من المفيد جدا استعمال المصطلحات المشابهة لتلك التي ترد في الهندسة الاقليدية • بيد أن علينا الاحتراس من خطر افتراض أن الكرات والقشرات الكروية في فضاء متري كيفي تتمتع بنفس خواص الكرات والقشرات الكروية في $\mathbf{R}^3$ ، لان الامر ليس كذلك • فمثلا قد تكون

الكرة خالية • كذلك ، ففي الفضاء المتقطع ١ــ١ــ٨ لدينا $S(x_0; r)=\varnothing$ ، عندما $r\neq 1$ • (ماذا يمكن قوله عن القشرات الكروية التي نصف قطرها 1 في هذه الحالة ؟) هذا ، وسنورد خواص غير عادية أخرى في أبحاثنا اللاحقة •

سننتقل الآن الى مفهومين آخرين يرتبطان فيما بينهما •

١ــ٣ــ٢ تعريف (المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها **مفتوحة** اذا حوت كرة حول كل نقطة فيها • ونقول عن مجموعة جزئية K من X انها **مغلقة** اذا كانت متممتها (في X) مفتوحة ، أي اذا كانت المجموعة $K^c = X - K$ مفتوحة •

سيرى القارىء بوضوح استنادا الى هذا التعريف أن الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، وأن الكرة المغلقة هي مجموعة مغلقة •

وغالبا ما تسمى الكرة المفتوحة $B(x_0; \varepsilon)$ التي نصف قطرها ε **الجوار**-ε **للنقطة** x_0 • (هنا يكون $\varepsilon > 0$ وفق التعريف ١ــ٣ــ٣) • ونطلق اسم **الجوار** للنقطة x_0 على كل مجموعة جزئية من X تحوي جوارا -ε للنقطة x_0 •

نستنتج مباشرة من هذا التعريف أن أي جوار للنقطة x_0 يحوي x_0 ، وبعبارة أخرى ، فان x_0 هي نقطة من كل جوار لها • واذا كان N جوارا للنقطة x_0 ، وكان $N \subset M$ ، فان M جوار أيضا للنقطة x_0 •

نقول عن x_0 انها **نقطة داخلية** من المجموعة M في X اذا كان M جوارا للنقطة x_0 • ويعرف **داخل** M بأنه مجموعة كل النقاط الداخلية من M ، ونرمز له بـ M^0 أو $\mathrm{Int}(M)$ ، ولكن لا وجود لرمز متفق عليه تماما • ان $\mathrm{Int}(M)$ هي مجموعة مفتوحة ، وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في M •

وليس من العسير اثبات أن جملة كل المجموعات المفتوحة في X ، ولتكن $\mathcal{T}$ ، تحقق الخواص التالية :

(ط١) $\varnothing \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$ ،

(ط٢) اجتماع أي عناصر من $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$ ،

(ط٣) تقاطع أي عدد منته من عناصر $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$ •

البرهــان :

ان (ط١) تنتج بملاحظة أن $\varnothing$ مفتوحــة لان $\varnothing$ لاتحوي عناصر ، وإن X مفتوحة وضوحا • لنثبت صحة (ط٢) • ان كل نقطة من الاجتماع U لمجموعات مفتوحة تنتمي الى واحدة (على الاقل) من هذه المجموعات ، ولتكن M ، كما أن M تحوي كرة B حول x لكون M مفتوحة • لــذا فان $B \subset U$ وفــق تعريف الاجتماع • وهذا يثبت صحة (ط٢) • وأخيرا ، فاذا كانت y أي نقطة من تقاطع المجموعات المفتوحة $M_1, \cdots, M_n$ ، فان كلا من M_j تحوي كرة حول y ، وأصغر هذه الكرات محتواة في التقاطع ، الامر الذي يثبت صحة (ط٣) •

ونذكر هنا بأن الخواص (ط١) ــ (ط٣) هي جد أساسية ، حتى أننــا سنعيدها في اطار أوسع • ونعني بهذا أننا سنعرف **الفضاء الطبولوجي** $(X, \mathcal{T})$ بأنه مجموعة X مزودة بجماعة $\mathcal{T}$ من المجموعات الجزئية مــن X بحيث تحــقق $\mathcal{T}$ الموضوعات (ط١) حتى (ط٣) • تسمى الجماعة $\mathcal{T}$ **طبولوجيا على** X • نستنتج مــن هذا التعريف ما يلي :

الفضاء المتري هو فضاء طبولوجي •

وتلعب المجموعات المفتوحة دورا كذلك لــدى دراسة التطبيقات المستمرة ، حيث يشكل الاستمرار تعميما طبيعيا للاستمرار الذي قابلناه في بحوث الحساب التفاضلي والتكاملي ، والذي نعرفه كما يلي •

١ــ٣ــ٣ تعريف (التطبيقات المستمرة)

ليكــن $X=(X,d)$ و $Y=(Y,\tilde{d})$ فضاءين متريين • نقــول عــن تطبيــق $T\colon X \longrightarrow Y$ انه مستمر في النقطة x_0 من X اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد

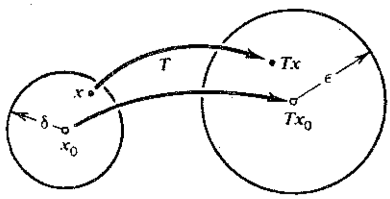
موجب δ بحيث يكون (انظر الشكل ٦)

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

أيا كانت النقطة x التي تحقق الشرط

$$d(x, x_0) < \delta.$$

ونقول عن T انه مستمر اذا كان مستمرا في كل نقطة من X •



الشكل (٦) • يوضح هذا الشكل المتباينتين السابقتين في الفضاءين الاقليديين
$Y = \mathbf{R}^2$ **و** $X = \mathbf{R}^2$

من المهم والمفيد معا معرفة أنه يمكن وصف التطبيقات المستمرة بدلالة المجموعات المفتوحة على النحو التالي :

١ـ٣ـ٤ مبرهنة (التطبيق المستمر)

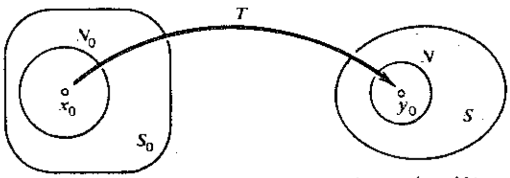
الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق T لفضاء متري X في فضاء متري Y مستمرا هو أن يكون الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y (وفق T) مجموعة مفتوحة في X •

البرهان :

(آ) لنفترض أن T مستمر ، وأن S مجموعة جزئية مفتوحة من Y ، وأن S_0 الخيال العكسي لـ S • فاذا كانت S_0 خالية ، فانها مفتوحة • لنفترض $S_0 \neq \varnothing$ • فاذا كان x_0 عنصرا من S_0 ، فاننا نضع $y_0 = Tx_0$ • وبما أن S مفتوحة

فانها تحوي جوارا ε ، وليكن N، للنقطة y_0 ، انظـر الشكل (٧) • وبما أن T مستمر فانه يوجد للنقطة x_0 جوار δ ، وليكن N_0 ، بحيث يكون خياله N • وبما أن $N \subset S$ ، فان $N_0 \subset S_0$ ، وبالتالي فـان S_0 مجموعة مفتوحة لان x_0 نقطـة اختياريـة في S_0 •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X • عندئذ يكون الخيال العكسي S_0 لكل كرة مفتوحة N مركزها Tx_0 ونصف قطرها ε مجموعة مفتوحة ، وذلك لكون N مجموعة مفتوحة ولكون S_0 حاوية لـ x_0 • لذا فان S_0 تحوي جوارا δ للنقطة x_0 وليكن N_0 خياله محتوى في N ، وذلك لان خيال S_0 محتوى في N •



الشكل (٧) •

وبالتالي ، فاننا نستنتج استنادا الى التعريف أن T مستمر في النقطة x_0 • ولمـا كانت النقطة x_0 اختيارية ، فان T تطبيق مستمر •

سنورد الآن مفهومين آخرين ، يرتبط أحدهما بالآخر • لتكن M مجموعـة جزئية من فضاء متري X • تسمى النقطة x_0 من X (التي قد تنتمي الى M وقد لا تنتمي اليهـا) **نقطة تراكم** للمجموعة M (أو **نقطة حديـة** للمجموعة M) اذا حوى كل جوار للنقطة x_0 نقطة واحدة على الاقل y مـن M مغايرة للنقطة x_0 • وتسمى المجموعة المؤلفة من نقاط M ومن نقاط التراكم للمجموعة M **لصاقـة** M ، ويرمز للصاقة بالشكل

$$\bar{M}.$$

وهذه المجموعة هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M •

سنورد كذلك خاصة أخرى غير مألوفة للكرات في فضاء متري • ففي حين

تكون اللصاقة $\overline{B(x_0;r)}$ للكـرة المفتوحة $B(x_0;r)$ في $\mathbb{R}^3$ هي الكرة المغلقـة $\bar{B}(x_0;r)$ ، فان هذا الامر قد لا يصح في الفضاءات المترية العامـة • وتترك للقارىء التحقق من صحة هذا الامر بايراده أحد الامثلة •

سنستخدم مفهـوم اللصاقة كـي نورد الآن تعريفا ذا أهمية خاصة فـي أبحاثنـا القادمـة •

١-٣-٥ تعريف (المجموعة الكثيفة ، الفضاء الفصول)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها كثيفة في X اذا كان

$$\bar{M} = X.$$

ونقول عن X انه **فصول** اذا حوى مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في X •

يترتب على هذا أنه اذا كانت M كثيفة في X ، فان أي كرة مهما كانت صغيرة في X ستحوي نقاطا من M • وبعبارة أخرى ، فلا يمكن في هذه الحالة أن توجد نقطة x في X لها جوار غير حاوٍ على نقاط من M •

سنرى فيما بعد أن الفضاءات الفصولة أبسط الى حد ما من الفضاءات غير الفصولة • وسنورد فيما يلي بعض الامثلة الهامة على فضاءات فصولة ، وأخرى غير فصولة ، وذلك بهدف ادراك بعض المفاهيم الاساسية بصورة أفضل •

أمثلـة

١-٣-٦ المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ • المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ فصول

البرهـان :

ان هذا ناتج عن أن مجموعة الاعداد العادية $\mathbf{Q}$ هي مجموعة عدودة وكثيفة فـي $\mathbf{R}$ •

١ــ٣ــ٧ المستوي العقدي C ∙ المستوي العقدي فصول .

البرهـــان :

يعود السبب في هذا الى أن مجموعة الاعداد العقدية التي أقسامها الحقيقية وأقسامها التخيلية أعداد عادية هي مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في C ∙

١ــ٣ــ٨ الفضاء المتري المتقطع

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتري المتقطع X فصولا هو أن تكـون X عـــدودة ∙

البرهـــان :

ان تعريف المترك المتقطع (١ــ١ــ٨) يقتضي بألا تكون أي مجموعة جزئية محتواة تماما في X مجموعة كثيفـــة في X ∙ وبالتالي فان المجموعة الكثيفـــة الوحيدة في X هي X نفسها ، الامر الذي يعني صحة الدعوى ∙

١ــ٣ــ٩ الفضاء l^{∞} ∙ الفضاء l^{∞} غير فصول (١ــ١ــ٦)

البرهـــان :

لتكن $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots)$ متتالية كل من عناصرها اما 1 واما 0 ∙ عندئـــذ يكون $y \in l^{\infty}$ ∙ لنقرن بالمتتالية y العدد الحقيقي $\hat{y}$ الذي تمثيله الثنائي هو

$$\frac{\eta_1}{2^1}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots .$$

فاذا أدخلنا في اعتبارنا أن مجموعة نقاط الفترة $[0,1]$ غير عدودة ، وأن لكـــل عدد $\hat{y}$ من $[0,1]$ تمثيلا ثنائيـــا ، وان للاعـــداد المختلفة $\hat{y}$ تمثيلات ثنائيـــة مختلفة ، فاننا نستنتج وجود مجموعة غير عدودة من المتتاليات التي عناصر كـــل منها اما 1 واما 0 ∙ ويبين المترك على l^{∞} أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من هذا الفضاء يجب أن تكون مساوية للواحد ∙ فاذا جعلنا كلا من هذه المتتاليات

مركزا لكرة صغيرة نصف قطرها $1/3$ مثلا ، فان هذه الكرات لا تتقاطع ، وبالتالي فاننا نجد مجموعة غير عدودة منها . واذا كانت M أي مجموعة كثيفة في l^∞ ، فان كلا من هذه الكرات المتقاطعة يحوي عنصرا مـن M، لذا فلا يمكن أن تكون M عدودة . وبما أن M مجموعة عدودة اختيارية ، فاننا نستنتج أن l^∞ لايمكن أن يحوي مجموعات كثيفة بحيث تكون هذه المجموعات عدودة . لذا فان l^∞ غـير فصـول .

١–٣–١٠ الفضاء l^p . الفضاء l^p ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ ، فصول (١–٢–٣)

البرهـان :

لتكن M مجموعة كل المتتاليات y التي هي من الشكل

$$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots)$$

حيث n أي عدد صحيح موجب ، وحيث الاعداد η_j عادية . من الواضح أن M عدودة . سنبين الآن أن M كثيفة في l^p . لهذا نفترض أن $x = (\xi_j) \in l^p$ عنصر ما . عندئذ يوجد لكل عـدد موجب تماما ε عـدد صحيح موجب n (تابع لـ ε) بحيـث يكـون

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

وذلك لان الطرف الايسر من هذه المتباينة هو باقي متسلسلة متقاربة . ولما كانت مجموعة الاعداد العادية كثيفة في $\mathbf{R}$ ، فانه يوجد لكل ξ_j عدد عادي η_j قريب منه . لذا فيمكننا ضمان وجود عنصر y من M يحقق الشرط

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

يترتب على هذا أن

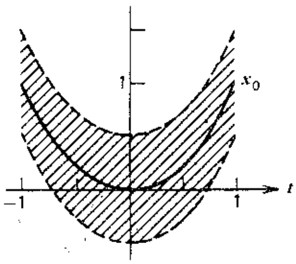
$$[d(x, y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p.$$

لـذا نجـد أن $d(x, y) < \varepsilon$ ، وبالتالي فاننا نرى أن M كثيفة في l^p •

مسـائل

١ ـ برز استعمالنا لمصطلحي « الكرة المفتوحة » و « الكرة المغلقة » وذلـك باثبات أن : (آ) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، (ب) كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة •

٢ ـ ما هي الكـرة المفتوحة $B(x_0; 1)$ في $\mathbf{R}$ ؟ وما هي في $\mathbf{C}$ ؟ (١ـ١ـ٥) • ما هي هذه الكرة في $C[a, b]$ ؟ (١ـ١ـ٧) • اشرح الشكل (٨) •



الشكل (٨) • المنطقة الحاوية على بيانات الدوال x المنتمية الى $C[-1, 1]$ والتي تشكل الجوار ε ، حيث $\varepsilon = 1/2$ ، للدالة x_0 من $C[-1, 1]$ ، بفرض أن $x_0(t) = t^2$

٣ ـ لنأخذ الفضاء $C[0, 2\pi]$ • عيّن أصغر عدد r بحيث يكون $y \in \tilde{B}(x; r)$ ، بفرض أن $x(t) = \sin t$ و $y(t) = \cos t$ •

٤ ـ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون كل مجموعة غير خالية A فـي فضاء متري (X, d) مفتوحة هو أن تكون اجتماعا لكرات مفتوحة •

٥ ـ من المهم أن ندرك بأن بعض المجموعات قد تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحـد • (آ) بين أن هذا صحيح دوما في المجموعتين X و $\varnothing$ • (ب) أثبت

أنه اذا أخذنا فضاء متريا متقطعا X (١ــ١ــ٨) فان كل مجموعة جزئية فيه مفتوحة ومغلقة معا .

٦ ــ اذا كانت x_0 نقطة تراكم في مجموعة $A\subset(X,d)$ ، فبين أن أي جوار للنقطة A تحوي عددا غير منته من نقاط A .

٧ ــ صف لصاقة كل من المجموعات الجزئية التاليــة : (آ) مجموعة الاعــداد الصحيحة في $\mathbf{R}$. (ب) مجموعة الاعداد العادية في . (جـ) مجموعــة الاعداد العقدية التي أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية . (د) القرص $\{z \mid |z|<1\}\subset\mathbf{C}$.

٨ ــ بيّن أن اللصاقة $\overline{B(x_0;r)}$ لكرة مفتوحة $B(x_0;r)$ في فضاء متري يمكــن أن تكون مختلفة عن الكرة المغلقة $\bar{B}(x_0;r)$.

٩ ــ أثبت أن $A\subset\bar{A},\ \bar{\bar{A}}=\bar{A},\ \overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B},\ \overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$

١٠ــ اذا كانت x نقطة ليست منتمية الــى مجموعة مغلقة M في (X,d) ، فــان المسافة بين النقطة والمجموعة لا تساوي الصفر . لاثبات هــذا ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x\in\bar{A}$ هو أن يكون $D(x,A)=0$ (راجع المسألة ١٠ من البند ١ــ٢) . ان A هنا هي أي مجموعة جزئية غير خالية فــي X .

١١ــ **(الجبهة او الحد)** . نقول عن نقطة x انها **نقطة جبهية** لمجموعة A في (X,d) اذا كانت x نقطة من X (قد تنتمي الى A أو لا تنتمي اليها) بحيث يحوي أي جوار لـ x نقاطا من A ونقاطا لا تنتمي الى A . وتسمى مجموعة النقاط الجبهية لـ A جبهة (أو حد) A . حدد جبهة كل مــن المجموعات التالية : (آ) الفترات $(-1,1)$ و $[-1,1)$ و $[-1,1]$ في $\mathbf{R}$. (ب) مجموعة الاعداد العادية في $\mathbf{R}$. (جـ) القرص $\{z \mid |z|<1\}\subset\mathbf{C}$ والقرص $\{z \mid |z|\leqq 1\}\subset\mathbf{C}$.

١٢ــ **(الفضاء $B[a,b]$)** . بيّن أن الفضاء $B[a,b]$ ، حيث $a<b$ ، غــير فصــول (١ــ٢ــ٢) .

١٣ـ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء متري X فصولا هو أن يوجد في X مجموعة جزئية عدودة Y تتمتع بالخاصة التالية : يوجد لكل عدد موجب تماما ε ولكل عنصر x من X عنصر y من Y بحيث يكون $d(x, y) < \varepsilon$ •

١٤ـ (**التطبيق المستمر**) • أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \longrightarrow Y$ مستمرا هو أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة M في Y مجموعة مغلقة في X •

١٥ـ بيّن أن صورة المجموعة المفتوحة وفق تطبيق مستمر ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة •

١ـ٤ التقارب ، متتالية كوشي ، التمام

نحن نعلم بأن متتاليات الاعداد الحقيقية تلعب دورا هاما في الحساب التفاضلي والتكاملي ، وأن المترك على $\mathbf{R}$ هو الذي يمكننا من تعريف المفهوم الاساسي لتقارب هذه المتتاليات • ان هذا الكلام يسري على متتاليات الاعداد العقدية كذلك ، ذلك أننا نستعمل في هذه الحالة المترك المعرف على المستوي العقدي • ان الامور تسير بصورة مماثلة في حالة الفضاءات المترية العامة $X=(X, d)$ ، أي أننا هنا نأخذ متتالية (x_n) من العناصر $x_1, x_2, \cdots$ في X ، ونستعمل المترك d بهدف تعريف التقارب بصورة مشابهة لما فعلناه في الحساب التفاضلي والتكاملي •

١ـ٤ـ١ تعريف (تقارب المتتاليات • النهاية)

نقول عن متتالية في فضاء متري $X=(X, d)$ انها **متقاربة** اذا وجد عنصر x من X بحيث يكون

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0.$$

تسمى x **نهايــة** المتتالية (x_n) ، ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

أو

$$x_n \longrightarrow x.$$

وعندئذ نقول بأن (x_n) **تتقارب** من x ، أو إن x **نهاية المتتالية** (x_n) • واذا لم تكن (x_n) متقاربة ، قلنا انها **متباعــدة** •

كيف يستعمل المترك d في هذا التعريف ؟ نحن نرى بأن d تعطي متتالية من الاعداد الحقيقية $a_n = d(x_n, x)$ ، بحيث أن تقاربها يعرف تقارب المتتالية (x_n) • يترتب على هذا أنه اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، وكان $\varepsilon > 0$ عددا معطى ، فانه يوجــد عدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن جميع العناصر x_n ، حيث $n > N$ ، تقع في الجوار ε للنقطة x (أي في $B(x; \varepsilon)$) •

ولتجنب سوء فهم قد يحدث ، فاننا نلاحظ أن نهايــة متتالية متقاربة يجب يجب أن يكون نقطة من الفضاء X في ١ــ٤ــ١ • لنفترض مثلا أن X هو الفترة المفتوحة $(0, 1)$ في $\mathbf{R}$ المزودة بالمترك المألوف المعرف بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$ • عندئذ لاتكون المتتالية $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$ متقاربة ، ذلــك أن النقطة 0 التي « تــود المتتالية أن تتقارب منها » ليست واقعة في X • وسنعود الى هذا الموضوع والى مواضيع مشابهة في البند الحالي •

لنبين أولا أن خاصتيين مألوفتين للمتتاليات المتقاربة (وهما وحدانية النهاية والمحدودية) تنتقلان من الفضاء $\mathbf{R}$ الى الفضاءات المترية العامة •

نقول عن مجموعة جزئية M في X انها مجموعة **محدودة** اذا كان **قطرها**

$$\delta(M) = \sup_{x, y \in M} d(x, y)$$

عددا منتهيا • ونقول عن متتالية (x_n) في X انهـا **متتالية محدودة** واذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في X •

ومن الواضح أنه اذا كانت M محدودة ، فان $M \subset B(x_0; r)$ ، حيث x_0 أي نقطة في X ، و r عدد حقيقي موجب (كبير بقدر كاف) ، والعكس صحيح •

١ــ٤ــ٢ تمهيدية (المحدودية ، النهاية)

اذا كان $X=(X, d)$ فضاء متريا ، فان :

(آ) كل متتالية متقاربة في X محدودة ، ونهايتها وحيدة •

(ب) اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ في X ، فان $d(x, y) \longrightarrow d(x_n, y_n)$ •

البرهـان :

(آ) لنفترض أن $x_n \longrightarrow x$ • لذا فانه اذا أخذنا $\varepsilon = 1$ ، فاننا نتمكن من ايجاد عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة $d(x_n, x) < 1$ ايا كان n الـذي يحقق الشرط $n > N$ • يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث (م٤) من البند ١ــ١ أنه أيا كان n ، فان $d(x_n, x) < 1 + a$ ، حيث

$$a = \max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}.$$

اذن فالمتتالية (x_n) محدودة • واذا افترضنـا أن $x_n \longrightarrow x$ و $x_n \longrightarrow z$ ، فاننـا نستنتج وفق (م٤) أن

$$0 \leqq d(x, z) \leqq d(x, x_n) + d(x_n, z) \longrightarrow 0 + 0$$

وعندئذ نجد الوحدانية $x = z$ للنهاية كنتيجة للخاصة (م٢) •

(ب) لدينا استنادا الى (1) من البند ١ــ١

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

لذا نجد المتباينة

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

ومتباينة مماثلة بالمبادلة ما بين x_n و x وما بين y_n و y ثم بالضرب بـ -1 • ويترتب على هاتين المتباينتين أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ • ∎

سنحدد الآن مفهوم التمام في الفضاءات المترية ، ذلك المفهوم الذي سيكون أساسيا في أبحاثنا القادمة • وسنرى أن التمام لا ينتج عن (م١) ـ (م٤) من البند ١ـ١ ، ذلك أن ثمة فضاءات مترية ليست تامة • وبعبارة أخرى فان التمام هو خاصة اضافية قد يتمتع أو لا يتمتع بها فضاء متري • ولهذه الخاصة نتائج مختلفة تجعل الفضاءات التامة « أجود وأبسط » من الفضاءات غير التامة • وسيغدو معنى هذا الكلام أوضح كلما تعمقنا في دراستنا لهذه الفضاءات •

لنذكر أولا أن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية الحقيقية أو العقدية (x_n) في المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbf{C}$ هو أن تحقق **معيار (أو رائز) تقارب كوشي** ، أي أن يوجد لكل عدد موجب تماما ε عدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n اللذان يحققان الشرط $m, n > N$ • ان العدد $|x_m - x_n|$ هنا يمثل المسافة $d(x_m, x_n)$ بين x_m و x_n على المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbf{C}$ • لذا فمن الممكن كتابة متراجحة معيار كوشي بالشكل

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

ويمكن تسمية كل متتالية (x_n) تحقق شرط معيار كوشي **متتالية كوشي** . عندئذ ينص معيار كوشي ببساطة على أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية من الاعداد الحقيقية أو الاعداد العقدية في **R** أو في **C** على الترتيب هو أن تكون هذه المتتالية هي متتالية كوشي. ان هذا الامر الذي يصح في **R** و **C** غير صحيح من سوء الحظ في فضاءات أعم ، اذ أنه قد توجد في بعض هذه الفضاءات متتاليات لكوشي دون أن تكون متقاربة . وهذه الفضاءات تعوزها خاصة هي من الاهمية لدرجة أنها تستحق ان تسمى بخاصة التمام . وقد اهاب هذا الاعتبار بفريشيه (١٩٠٦) لايراد التعريف التالي :

١-٤-٣ تعريف (متتالية كوشي ، التمام)

نقول عن متتالية (x_n) في فضاء متري $X=(X, d)$ انها **متتالية لكوشي (او متتالية اساسية)** اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N=N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon \tag{1}$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n>N$. ويقال عن الفضاء X انه **تام** اذا كانت كل متتالية لكوشي فيه متقاربة (أي اذا وجد لها نهاية منتمية الى X) . ∎

ويقتضي معيار تقارب كوشي معبرا عنه بدلالة التمام المبرهنة التالية :

١-٤-٤ مبرهنة (المحور الحقيقي ، المستوي العقدي)

ان المحور الحقيقي والمستوي العقدي هما فضاءان متريان تامان .

وبوجه أعم ، فاننا سنرى الآن مباشرة من التعريف أن الفضاءات المترية التامة هي بالضبط تلك الفضاءات التي يبقى فيها شرط كوشي (1) شرطا لازما وكافيا للتقارب .

هذا وسندرس بصورة نظامية في البند التالي تلك الفضاءات المترية التامة وغير التامة والتي تحظى بأهمية بالغة من حيث تطبيقاتها •

أما الآن فسنورد عددا قليلا من الفضاءات غير التامة البسيطة والتي يمكن الحصول عليها بسرعة • ان حذف نقطة a من المحور الحقيقي يعطينا الفضاء غير التام $\mathbf{R}-\{a\}$ • وبصورة أكثر تطرفا ، فاذا حذفنا كل الاعداد غير العادية فاننا نجد المحور العادي $\mathbf{Q}$ ،وهو فضاء غير تام • والفترة المفتوحة (a, b) المزودة بمقصور المترك المعرف على $\mathbf{R}$ توفر مثالا آخر لفضاء متري غير تام ، وهكذا •

يتضح من التعريف أن الشرط (1) في فضاء متري كيفي قد لا يكون كافيا للتقارب ذلك أن الفضاء قد يكون غير تام • ان الادراك الجيد لهذا الامر على غاية من الاهمية ، لهذا سنورد المثال البسيط التالي • لنأخذ المجموعة $X=(0, 1]$ المزودة بالمترك المألوف المعرف بالمساواة $d(x, y)=|x-y|$ ، ولنأخذ المتتالية (x_n) ، حيث $x_n=1/n$ و $n=1, 2, \cdots$ • ان هذه هي متتالية كوشي ، الا انها ليست متقاربة ، ذلك أن النقطة 0 (التي «تود المتتالية أن تتقارب منها») ليست نقطة من X • وهذا يوضح أيضا أن مفهوم التقارب ليس خاصة ذاتية للمتتالية نفسها ، بل انها تعتمد أيضا على الفضاء الذي تقع فيه المتتالية • وبعبارة أخرى ، فان المتتالية المتقاربة ليست متقاربة « كيفما اتفق » ، بل انها يجب أن تتقارب من نقطة في الفضاء •

ورغم أن الشرط (1) لا يكفي للتقارب ، فمن الجدير بالملاحظة أن يبقى شرطا لازما للتقارب ، الامر الذي تبينه المبرهنة التالية •

١ـ٤ـ٥ مبرهنة (المتتالية المتقاربة)

كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي •

البرهــان :

اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N=N(\varepsilon)$ بحيث أن

$$d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

أيا كان العدد الصحيح $n>N$ المحقق الشرط •

يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث أنه اذا كان $m, n>N$ فان

$$d(x_m, x_n) \leqq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

وهذا يثبت أن (x_n) هي متتالية كوشي • ∎

سنرى أن العديد من النتائج الاساسية (في نظرية المؤثرات الخطية مثلا) تعتمد على تمام الفضاءات الواردة آنذاك • وتمام المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ هو أيضا السبب الرئيسي الذي يجعلنا نستعمل $\mathbb{R}$ في الحساب التفاضلي والتكاملي بدلا من **المحور العادي** $\mathbb{Q}$ (وهو مجموعة الاعداد العادية المزودة بمقصور المترك المعرف على $\mathbb{R}$) •

لنختتم فصلنا هذا بثلاث مبرهنات ترتبط بالتقارب والتمام ، اذ أننا نحتاج اليها في الابحاث القادمة •

١-٤-٦ مبرهنة (اللصاقة ، المجموعة المغلقة)

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري (X, d) ، وكانت $\bar{M}$ لصاقتها المعرفة في البند السابق ، فان :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ •

(ب) الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو التالي : اذا كانت x_n أي متتالية من عناصر M متقاربة من x ، فان $x \in M$ •

البرهان :

(آ) لنفترض أن $x \in \bar{M}$ • فاذا كان $x \in M$ ، فان المتتالية $(x, x, \cdots)$ تتقارب من x • أما اذا كان $x \notin M$ ، فان x نقطة تراكم لـ M • لذا فان كل

كرة $B(x; 1/n)$ ، حيث $n=1, 2, \cdots$ ، تحوي عنصرا x_n من M • وبالتالي فان $x_n \longrightarrow x$ لان $1/n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ •

وبالعكس ، فاذا كانت (x_n) متتالية في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ ، فان $x \in M$ ، أو أن كل جوار للنقطة x يحوي نقاطا x_n مغايرة للنقطة x ، وعندها تكون x نقطة تراكم للمجموعة M • لذا فان $x \in \bar{M}$ استنادا الى تعريف اللصاقة•

(ب) لما كان الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو أن يكون $M=\bar{M}$ ، فان (ب) تنتج مباشرة من (آ) • ∎

١ــ٤ــ٧ (الفضاء الجزئي التام)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي M من فضاء متري تام X فضاء تاما هو أن تكون المجموعة M مغلقة في X •

البرهـان :

لنفترض الفضاء الجزئي M تاما • عندئذ نجد استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ أنه يقابل كل x من $\bar{M}$ متتالية (x_n) في M متقاربة من x • ولما كانت (x_n) متتالية كوشي وفق ١ــ٤ــ٥ وكان M تاما ، فانه يوجد للمتتالية (x_n) نهاية في M ، وهذه النهاية وحيدة استنادا الى ١ــ٤ــ٢ • اذن $x \in M$ ، الامر الذي يبين أن M مجموعة مغلقة لان النقطة x من $\bar{M}$ كانت كيفية •

وبالعكس ، لنفترض أن M مجموعة مغلقة ، وان (x_n) متتالية لكوشي في M • عندئذ نرى أن x_n تتقارب من نقطة x في X ، الامر الذي يقتضي أن $x \in \bar{M}$ استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ ، وان $x \in M$ لان $M=\bar{M}$ فرضا • نستنتج من هـذا أن متتالية كوشي الاختيارية (x_n) تتقارب في M ، الامـر الذي يثبت تمـام M •

ان هذه المبرهنة بالغة الاهمية ، وسنستخدمها كثيرا في أبحاثنا المقبلة • ويتضمن المثال ١ــ٥ــ٣ في البند التالي أول تطبيق نموذجي لها •

تبين المبرهنة الاخيرة من مبرهناتنا الثلاث الحالية أهمية تقارب المتتاليات لدى بحثنا في استمرار تطبيق •

١ــ٤ــ٨ مبرهنة (التطبيق المستمر)

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \longrightarrow Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(Y, \tilde{d})$ مستمرا في نقطة x_0 من X هو أن يقتضي الشرط $x_n \longrightarrow x_0$ الشرط $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ •

البرهــان :

لنفترض أن T مستمر في النقطة x_0 • (راجع التعريف ١ــ٣ــ٣) عندئذ يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ بحيث أن

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{يقتضي} \quad \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

لنفترض أن $x_n \longrightarrow x_0$ • عندئذ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه اذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n > N$ فان

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

لذا فاننا نجد ن

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

أيا كان العدد الصحيح n الذي يحقق المتباينة $n > N$ • وهذا يعني تعريفا أن $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ •

وبالعكس ، لنفترض أن الشرط $x_n \longrightarrow x_0$ يقتضي $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ، ولنثبت أن T يكون عندئذ مستمرا في x_0 • اذا لم نقبل بصحة هذا الامر ، فانه يوجد عدد موجب ε بحيث أنه يقابل كل عدد موجب δ عنصر x مغاير لـ x_0 بحيث يتحقق الشرط $d(x, x_0) < \delta$ ، ويكون في الوقت نفسه $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geqq \varepsilon$ •

وبوجه خاص ، فاذا اخترنا $\delta=1/n$ ، فيوجد x_n بحيث يتحقق الشرط $d(x_n, x_0)<\frac{1}{n}$ ، ويكون في الوقت نفسه $\bar{d}(Tx_n, Tx_0)\geqq\varepsilon$. ومن الواضح أنه عندئذ يكون $x_n\longrightarrow x_0$ ، الا أن (Tx_n) لا تتقارب من Tx_0 . ان هذا يناقض افتراضنا بأن $Tx_n\longrightarrow Tx_0$ ويثبت صحة المبرهنة . ∎

مسائل

١ ــ **(المتتالية الجزئية)** اذا كانت متتالية (x_n) في فضاء متري X متقاربة وكانت نهايتها x ، فبين أن كل متتالية جزئية (x_{n_k}) من (x_n) تكون متقاربة، كما تكون لها النهاية x نفسها .

٢ ــ اذا كانت (x_n) متتالية كوشي ووجد لها متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة من x ، فبين أن المتتالية (x_n) متقاربة وان لها النهاية x نفسها .

٣ ــ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n\longrightarrow x$ هو أن يقابل كل جوار V للنقطة x عدد صحيح n_0 بحيث يكون $x_n\in V$ أيا كان n المحقق للشرط $n>n_0$.

٤ ــ **(المحدودية)** أثبت أن كل متتالية لكوشي محدودة .

٥ ــ هل يكفي كون متتالية في فضاء متري محدودة كي تكون متتالية لكوشي ؟ وهل تكفي هذه المحدودية لتكون المتتالية متقاربة ؟

٦ ــ اذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي في فضاء متري (X, d) ، فبيّن أن (a_n) ، حيث $a_n=d(x_n, y_n)$ ، متتالية متقاربة . أعط أمثلة توضيحية .

٧ ــ قدم برهانا غير مباشر على الشق (ب) من التمهيد ١ــ٤ــ٢ .

٨ ــ اذا كان d_1 و d_2 متركين على مجموعة واحدة X ، ووجد عددان موجبان a و b بحيث تتحقق المتباينة

$$ad_1(x, y)\leqq d_2(x, y)\leqq bd_1(x, y),$$

أيا كان العنصران x و y من X ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية ما هي متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_1) هو أن تكون متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_2) •

٩ ـ أثبت بالافادة من التمرين ٨ أن الفضاءات المترية في المسألتين ١٣ و ١٥ من البند ١ــ٢ لها نفس متتاليات كوشي •

١٠ــ أثبت استنادا الى تمام الفضاء $\mathbf{R}$ أن الفضاء $\mathbf{C}$ هو فضاء تام كذلك •

١ــ٥ امثلة • براهين التمام

في العديد من التطبيقات ، تعطى أولا مجموعة X (كأن تكون مجموعة متتاليات أو مجموعة دوال أو غيرها) ، ومن ثم نصنع من هذه المجموعة فضاء متريا ، ويتم هذا بأن نختار متركا d على X • بعد هذا نبحث فيما اذا كان الفضاء الحاصل (X, d) يتمتع بخاصة كونه تاما • ولاثبات التمام ، فاننا نأخذ متتالية كيفية لكوشي (x_n) في X ، ثم نثبت أنها متقاربة في X • هذا وان البراهين تختلف في درجة تعقيدها ، بيد أننا نسلك فيها جميعا الخطوات العامة التالية :

(i) نوجد عنصرا x (يستعمل كنهاية للمتتالية) •

(ii) نثبت أن x واقع في الفضاء قيد الدرس •

(iii) نثبت أن $x_n \longrightarrow x$ (بالنسبة للمترك) •

سنقدم فيما يلي براهين التمام لبعض الفضاءات المترية التي ترد كثيرا في الابحاث النظرية والتطبيقية • وسيلاحظ القارىء أننا في هذه البراهين (كما سنرى في الامثلة بدءا من ١ــ٥ــ١ وحتى ١ــ٥ــ٥) نستعين بخاصة تمام المحور الحقيقي أو المستوي العقدي (المبرهنة ١ــ٤ــ٤) •

أمثلــة

١ـ٥ـ١ تمام $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ • الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ والفضاء الوحدي $\mathbf{C}^n$ تامان (١ـ١ـ٥) •

البرهــان :

لنأخذ أولا $\mathbf{R}^n$ • لقد سبق وعرفنا المترك علــى $\mathbf{R}^n$ (أي المترك الاقليدي) بالمســاواة

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2 \right)^{1/2}$$

حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$ (راجع (٦) مــن البند ١ـ١) • لنأخذ أيــة متتالية لكوشي (x_m) في $\mathbf{R}^n$ ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$ • لما كانت (x_m) متتالية لكوشي ، فانه يقابل كل عدد موجب ε عــدد صحيح موجب N بحيث يكــون

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \qquad (m, r > N). \tag{1}$$

ونجد بعد التربيع أنه عندما يكون $m, r > N$ و $j = 1, \cdots, n$ فان

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \qquad \text{و} \qquad |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon.$$

ويبين هذا أنه يقابل كلّ قيمة مثبتة لـ j $(1 \leqq j \leqq n)$ المتتالية $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ التي هي متتالية لكوشي من الاعداد الحقيقية • واستنادا الى المبرهنة ١ـ٤ـ٤ ، فان هذه المتتالية تتقارب ، ولنفترض مثــلا أن $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • سنعرف باستخدام هذه النهايات التي عددها n العنصر $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ • نلاحظ بوضوح أن $x \in \mathbf{R}^n$ وأنه يترتب على (1) عند جعل $r \longrightarrow \infty$ أن

$$d(x_m, x) \leqq \varepsilon \qquad (m > N).$$

يبين هذا أن x هي النهاية للمتتالية (x_m) ، وهذا يثبت تمام $\mathbf{R}^n$ لان (x_m) كانت متتالية كيفية لكوشي . أما تمام $\mathbf{C}^n$ ، فينتج عن المبرهنة ١ـ٤ـ٤ باتباع الاسلوب ذاته في البرهان .

١ـ٥ـ٢ تمام l^∞ . الفضاء l^∞ تام (١ـ١ـ٦)

البرهان :

لتكن (x_m) أي متوالية لكوشي في الفضاء l^∞ ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$ لما كان المترك على l^∞ محددا بالمساواة

$$d(x, y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j|$$

[حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$] ، وكانت (x_m) متتالية كوشي . فانه يقابل كل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$d(x_m, x_n) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon.$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $(m, n > N)$. يترتب على هذا مباشرة أنه اذا كان j أي عدد صحيح موجب مثبت ، فان

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \qquad (m, n > N). \tag{2}$$

لذا فان المتتالية $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ أيا كان العدد المثبت j هي متتالية عددية لكوشي. وبالتالي فانها تتقارب استنادا الى المبرهنة ١ـ٤ـ٤ . لنفترض مثلا أن $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$. وبأخذ هذه النهايات جميعا $\xi_1, \xi_2, \cdots$ فاننا سنعرف $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$. سنبين الآن $x \in l^\infty$ وأن $x_m \longrightarrow x$. نستنتج من (2) عندما $n \longrightarrow \infty$ أن

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqq \varepsilon \qquad (m > N). \tag{2*}$$

بما أن $x_m=(\xi_j^{(m)})\in l^\infty$ ، فيوجد عدد حقيقي k_m بحيث يكون $|\xi_j^{(m)}|\leqq k_m$ أيا كان j • لذا يترتب على متباينة المثلث أن

$$|\xi_j|\leqq|\xi_j-\xi_j^{(m)}|+|\xi_j^{(m)}|\leqq\varepsilon+k_m \qquad (m>N).$$

لما كانت هذه المتباينة صحيحة أيا كان j ، وكان الطرف الايمن لايحوي j ، فان (ξ_j) متتالية محدودة من الاعداد • وبالتالي فان $x=(\xi_j)\in l^\infty$ • كذلك ، فاننا نجد من (*2) أن

$$d(x_m, x)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqq\varepsilon \qquad (m>N).$$

وهذا يبين أن $x_m\longrightarrow x$ • وبما أن (x_m) متتالية كيفية لكوشي . فان l^∞ فضاء تام •

١ــ٥ــ٣ تمام الفضاء c •

يتألف الفضاء c من كل المتتاليات المتقاربة $x=(\xi_j)$ من الاعداد العقدية والمزودة بمقصور المترك المعرف على l^∞ •

ان الفضاء c تام

البرهان :

ان c فضاء جزئي من l^∞ • فاذا أثبتنا أن c مغلق في l^∞ ، فاننا نستنتج تمام c استنادا الى المبرهنة ١ــ٤ــ٧ •

لنأخذ عنصرا اختياريا $x=(\xi_j)\in\bar{c}$ ، حيث $\bar{c}$ لصاقة c • عندها نجد اعتمادا على الشق (آ) من ١ــ٤ــ٦ أن هنالك متتالية $x_n=(\xi_j^{(n)})\in c$ بحيث أن $x_n\longrightarrow x$ • وبالتالي فانه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان n الذي يحقق الشرط $n\geqq N$ وأيا كان j فان

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqq d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{3},$$

وبوجه خاص فان هذا يتحقق عندما $n=N$ أيا كان j • وبما أن $x_N \in c$ ، فان حدوده $\xi_j^{(N)}$ تشكل متتالية متقاربة ، وهذه المتتالية هـي متتالية كوشي • اذن هنالك عدد صحيح موجب N_1 بحيث يكون

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (j, k \geqq N_1).$$

وعندئذ يترتب على متباينة المثلث أنه اذا كان $j, k \geqq N_1$ ، فاننا نجد المتباينـة التاليـة

$$|\xi_j-\xi_k| \leqq |\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon.$$

وهذا يثبت أن المتتالية $x=(\xi_j)$ متقاربة ، الامر الذي يترتب عليه أن $x \in c$ • ولما كان العنصر $x \in \bar{c}$ اختياريا ، فان c مغلقة في l^∞ • وعندئذ نستنتج تمام الفضاء c بالعودة الى المبرهنة ١ــ٤ــ٧ • ∎

١ــ٥ــ٤ تمـام الفضاء l^p •

الفضاء l^p تام ، حيث نفترض p عددا مثبتا بحيث أن $1 \leqq p<+\infty$ (راجع ١ــ٢ــ٣) •

البرهـان :

لتكن (x_n) متتالية ما لكوشي في الفضاء l^p ، حيث $x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$ • عندئذ يوجد لكل عـدد موجـب ε عـدد صحيح موجب N بحيث تصـح المتباينـة

$$d(x_m, x_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon.$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n>N$ •

يترتب على هذا أنه أيا كان العدد الصحيح الموجب j ، فان

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \qquad (m, n > N). \tag{4}$$

لِنَخْتَر عددا مثبتا j • نستنتج من (4) أن$(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$متتالية عددية لكوشي، وبالتالي فانها متقاربة نظرا لكون الفضاءين $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ تامين (١ـ٤ـ٤) • لنفترض مثلا أن $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • عندئذ يمكننا ان نستخدم هذه النهايات لتعريف العنصر $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ ، ومن ثم اثبات أن $x \in l^p$ وان $x_m \longrightarrow x$ •

نستنتج من (3) أنه اذا كان m, n أي عددين صحيحين يحققان الشرط $m, n > N$ فــان

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

وبجعل $n \longrightarrow \infty$ ، فاننا نجد بفرض $m > N$ أن

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leqq \varepsilon^p \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

يمكننا الآن جعل $k \longrightarrow \infty$ • عندها نجد بفرض $m > N$ أن

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leqq \varepsilon^p. \tag{5}$$

ان هذا يبين أن $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in l^p$ • وبما أن $x_m \in l^p$ ، فانه يترتب عــلى متباينة منكوفسكي (12) من البند ١ــ٢ أن

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

وفضلا عن ذلك ، فان المتسلسلة في (5) تمثل $[d(x_m, x)]^p$ ، وهذا يعني أن(5)

تقتضي بأن يكون $x_m \longrightarrow x$ • ولما كانت (x_m) متتالية اختيارية لكوشي ، فان هذا يثبت تمام الفضاء l^p ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ • ∎

١ــ٥ــ٥ تمام الفضاء $C[a, b]$ •

ان الفضاء الدالي $C[a, b]$ تام ، حيث $[a, b]$ أي مجال مغلــق في $\mathbf{R}$ • (راجــع ١ــ١ــ٧) •

البرهــان :

لتكن (x_m) متتالية كيفية لكوشي فــي $C[a, b]$ • لذا فاذا أعطينا عددا موجبــا ε ، فانــه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان العــددان الصحيحان m, n اللذان يكبران N فاننا نجد

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{6}$$

حيث $J = [a, b]$ • لذا فاننا نجد عند تثبيت $t = t_0 \in J$ أن

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

وهذا يبين أن $(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots)$ هي متتالية عدديــة لكوشي • وبما أن $\mathbf{R}$ تــام (١ــ٤ــ٤) ، فــان هــذه المتتاليــة لابــد أن تتقــارب • لنفترض مثــلا أن $x_m(t_0) \longrightarrow x(t_0)$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • يمكننا بهذه الطريقة أن نقابل كــل عنصر $t \in J$ بعدد حقيقي وحيد $x(t)$ ، وهذا يقود الى تعريف دالة x (نقطيا) على J • سنبين الآن أن $x \in C[a, b]$ وأن $x_m \longrightarrow x$ •

نرى أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ في (6) فان

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leqq \varepsilon \qquad (m > N).$$

لذا نجد المتباينة التالية أيا كان $t \in J$

$$|x_m(t)-x(t)|\leqq \varepsilon \qquad (m>N).$$

وهذا يبين أن $(x_m(t))$ تتقارب من $x(t)$ بانتظا معلى J • ولما كانت الدوال x_m مستمرة على J وكان التقارب على J منتظما ، فان دالة النهاية x مستمرة على J ، كما هو معروف (راجع المسألة ٩) • اذن فان $x\in C[a, b]$ • واذا لاحظنا أن $x\in C[a, b]$ فاننا نكون قدبرهنا على تمام الفضاء $C[a, b]$ • ∎

لقد افترضنا هنا ، كما سبق وفعلنا في ١ــ١ــ٧ ، أن الدالة x حقيقية ،وذلك بقصد التبسيط • لذا يمكننا القول عن الفضاء $C[a, b]$ بأنه **حقيقي** • وبصورة مماثلة ، فاننا نجد الفضاء العقدي $C[a, b]$ اذا أخذنا الدوال العقدية المستمرة المعرفة على $[a, b]\subset \mathbb{R}$ • ان هذا الفضاء تام كذلك ، الامر الذي يمكن التثبت منه بالطريقة نفسها تقريبا •

وفضلا عن ذلك ، فان البرهان يبين صحة الحقيقة التالية :

١ــ٥ــ٦ مبرهنة (التقارب المنتظم)

ان التقارب $x_m \longrightarrow x$ في الفضاء $C[a, b]$ هو تقارب منتظم ، اي ان المتتالية (x_m) تتقارب بانتظام على $[a, b]$ من x •

لذا فان المترك على $C[a, b]$ يحدد تقاربا منتظما على $[a, b]$ ، ولهذا السبب فانه يطلق على هذا المترك أحيانا اسم **المترك المنتظم** •

وللتوصل الى فهم جيد للتمام ولمفاهيم أخرى ترتبط به ، فاننا سنورد في الختام بعض الامثلة •

امثلة على الفضاءات المترية غير التامة

١ــ٥ــ٧ الفضاء Q

وهو الفضاء المؤلف من مجموعة الاعداد جميعا Q المزودة بالمترك المألوف المحدد بالمساواة $d(x, y)=|x-y|$ ، حيث $x, y\in Q$ • يسمى هذا الفضاء **المحور العادي Q** وهو ليس تاما • (لماذا ؟)

١ــ٥ــ٨ الحدوديات

لتكن X مجموعة كل الحدوديات التي نعتبرها دوال للمتغير t على مجال مغلق محدود $J=[a, b]$ ، ولنعرف متركا على X بالمساواة

$$d(x, y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|.$$

ان هذا الفضاء (X, d) ليس تاما • وفي الحقيقة ، فان هـذا يتضح اذا أخذنا متتالية لكوشي عناصرها حدوديات بحيث تكون متقاربة بانتظام على J من دالة مستمرة ليست حدوديا ، وبالتالي لا تنتمي الى X •

١ــ٥ــ٩ الدوال المستمرة

لتكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $J=[0, 1]$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt.$$

سنثبت الآن أن هذا المترك غير تام •

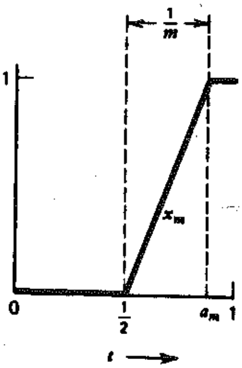
البرهــان :

ان الدوال x_m في الشكل (٩) تشكل متتالية كوشي ، ذلـك أن العـدد $d(x_m, x_n)$ ليس سوى مساحة المثلث في الشكل (١٠) ، وأنه اذا كان ε عـددا موجبـا فـان

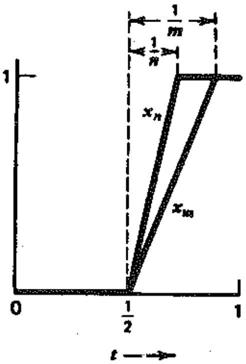
$$d(x_m; x_n)<\varepsilon \qquad \text{عندمـا} \qquad m, n>1/\varepsilon$$

لنبين أن متوالية كوشي هذه ليست متقاربة • لدينا

$x_m(t)=0$ عندما $t\in[0,\frac{1}{2}]$ ، $x_m(t)=1$ عندما $t\in[a_m, 1]$ •



الشكل ٩



الشكل ١٠

حيث $a_m = 1/2 + 1/m$ • لذا نجد أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^{1} |1 - x(t)|\, dt.$$

ولما كانت الدالتان المكاملتان سالبتين ، فان كلا من التكاملات الواردة في الطرف الايمن يكون كذلك • وبالتالي فان $d(x_m, x) \longrightarrow 0$ يقتضي أن يقترب كل من هذه التكاملات الى الصفر • وبما أن x مستمرة ، فيجب أن نجد

$x(t) = 0$ عندما $t \in [0, \frac{1}{2})$ و $x(t) = 1$ عندما $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ •

ولما كان هذا امرا غير ممكن بالنسبة لدالة مستمرة ، فان (x_m) ليست متقاربة ، أي أنه لايوجد لها نهاية في X • وهذا يثبت أن X غير تام • ∎

مسائل

١ ــ ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث يكون $a<b$ • أثبت أن الفترة

المفتوحة (a, b) هي فضاء جزئي غير تام من $\mathbb{R}$ ، في حين أن الفترة المغلقة $[a, b]$ تامــة •

٢ ــ ليكن X فضاء كل المرتبات n مــن الاعــداد الحقيقيــة $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$$

حيث $y = (\eta_i)$ • أثبت أن (X, d) فضاء تام •

٣ ــ ليكن M فضاء جزئيا من l^∞ مؤلفا من كل المتتاليات $x = (\xi_i)$ التي حدود كل منها أصفار جميعا باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الاكثر • أوجد متتالية لكوشي في M غير متقاربة في M ، الامر الذي يبين أن M غير تام •

٤ ــ أثبت أن الفضاء الجزئي M الوارد في المسألة ٣ غير تام ، وذلك بتطبيق المبرهنة ١ــ٤ــ٧ •

٥ ــ أثبت أن مجموعة كل الاعــداد الصحيحة X المزودة بالمتــرك d المعــرف بالمساواة $d(m, n) = |m - n|$ تشكل فضاء متريا تاما •

٦ ــ بيّن أن مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزودة بالمترك d المحدد بالمساواة

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

تشكل فضاء متريا غير تام •

٧ ــ لتكن X مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبــة و $d(m, n) = |m^{-1} - n^{-1}|$ • أثبت أن (X, d) فضاء غير تام •

٨ ــ (الفضاء $C[a, b]$) أثبت أن الفضاء الجزئي Y من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال $x \in C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a) = x(b)$ هو فضاء غير تام •

٩ ــ لقد ذكرنا في ١ــ٥ــ٥ المبرهنة التالية التــي ترد عادة في مبادىء التحليل

الرياضي : « اذا كان تقارب متتالية (x_m) من الدوال المستمرة المعرفة على $[a, b]$ تقاربا منتظما على $[a, b]$ من الدالة x ، فان دالة النهاية x هـذه مستمرة على $[a, b]$ » برهن على صحة هذه النظرية •

١٠ــ (**المترك المتقطع**) • أثبت أن الفضاء المتري المتقطع (١ــ١ــ٨) هـو فضـاء تـام •

١١ــ (**الفضاء** s) • •أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \longrightarrow x$ في الفضاء المتري s (١ــ٢ــ١) هــو أن يكون $\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j$ أيا كان العـدد الصحيح الموجب j ، وذلك بفرض أن $x_n = (\xi_j^{(n)})$ وان $x = (\xi_j)$ •

١٢ــ أفد من المسألة السابقة ١١ كي تثبت أن فضاء المتتاليات s في ١ــ٢ــ١ هو فضـاء تـام •

١٣ــ أثبت أنه اذا أخذنا الفضاء الوارد في ١ــ٥ــ٩ ، فان المتتالية (x_n) حيث

$$x_n(t) = n \quad \text{عندما} \quad 0 \leqq t \leqq n^{-2} \quad ، \quad x_n(t) = t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{عندما} \quad n^{-2} \leqq t \leqq 1$$

هي متتالية لكوشي في هذا الفضاء •

١٤ــ بيّن أن متتالية كوشي الواردة في المسألة ١٣ غير متقاربة •

١٥ــ ليكن X الفضاء المتري المؤلف من كل المتتاليات الحقيقية $x = (\xi_i)$ التـي حدود كل منها اصفار جميعا باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الاكثر ، بفرض أن $d(x, y) = \sum |\xi_i - \eta_i|$ حيث $y = (\eta_i)$ • لاحظ أن هذا مجموع منته الا أن عدد الحدود المجموعة يتعلق بـ x و y • أثبت أن المتتالية (x_n) حيث

$$\xi_j^{(n)} = j^{-2} \quad \text{عندما} \quad j = 1, \cdots, n \quad \text{و} \quad \xi_j^{(n)} = 0 \quad \text{عندما} \quad j > n$$

هي متتالية كوشي ، وهذه المتتالية ليست متقاربة •

١ــ٦ اتمام الفضاءات المترية

من المعلوم أن المحور العادي $\mathbf{Q}$ غير تـام (١ــ٥ــ٧) ، الا أنه يمكـن « توسيعه » الى المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ الذي هو فضاء تام ، بحيث أن هذا « الاتمام »

الى $\mathbb{R}$ يجري بصورة يكون بها $\mathbb{Q}$ كثيفا في $\mathbb{R}$ (١-٣-٥) • ومن المهم جدا معرفة أن أي فضاء متري غير تام يمكن « اتمامه » بصورة مماثلة ، الامر الذي سنراه الآن • واذا رغبنا في صياغة مناسبة ودقيقة لهذا « الاتمام » ، فاننا نورد تعريف المفهومين التاليين ، المرتبط أحدهما بالآخر ، واللذين لهما تطبيقات مختلفة أخرى •

١-٦-١ تعريف (التطبيق الايزومتري) (متساوي المسافة) ، الفضاءات الايزومترية (متساوية المسافة) •

ليكن $X=(X, d)$ و $\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$ فضاءين متريين عندئذ :

(أ) نقول عن تطبيق T للفضاء X في الفضاء $\tilde{X}$ انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** اذا حافظ على T على المسافة ، بمعنى أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\tilde{d}(Tx, Ty)=d(x, y),$$

حيث Tx و Ty خيالا x و y على الترتيب •

(ب) نقول عن الفضاء X انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** مع الفضاء $\tilde{X}$ ، إذا وجد تطبيق ايزومتري متباين وغامر من X على $\tilde{X}$ • وعندئذ نقول عن الفضاءين X و $\tilde{X}$ انهما **فضاءان ايزومتريان (متساويا المسافة)** • ∎

لذا فالفضاءان الايزومتريان قد يختلفان على الاكثر بطبيعة عناصرهما ، بيد أنه لا يمكن تمييز أحدهما عن الآخر من وجهة نظر المترك • وبالتالي ، فانه يمكن اعتبار الفضاءين الايزومتريين متطابقين في أي دراسة لا تدخل في اعتبارها طبيعة عناصرهما ، وكأن هذين الفضاءين نسختان من الفضاء « المطلق » نفسه •

بعد هذا يمكننا الآن صياغة واثبات المبرهنة التي تفيد بأن كل فضاء متري يمكن اتمامه • ويدعى الفضاء الناتج $\hat{X}$ في هذه المبرهنة **الاتمام** للفضاء المعطى X •

١-٦-٢ مبرهنة (الاتمام) ٠ يوجد لكل فضاء متري $X=(X, d)$ فضاء متري تام $\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$ يحوي فضاء جزئيا W ايزومتريا مع X وكثيفا في $\hat{X}$ ٠ ان هذا الفضاء $\hat{X}$ وحيد اذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الايزومترية معه ، بمعنى انه اذا كان $\tilde{X}$ اي فضاء متري تام يحوي فضاء جزئيا كثيفا $\tilde{W}$ ايزومتريا مع X ، فان الفضاءين $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ ايزومتريان ٠

البرهــان :

ان البرهان مطول لكن مباشر ، وسنجزئه الــى أربع خطوات على النحــو التــالي :

(آ) نجد الفضاء $\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$ ٠

(ب) ننشىء تطبيقا ايزومتريا لـ T على X ، حيث $\hat{W}=\hat{X}$ ٠

ومن ثم نبرهن على

(جـ) تمام الفضاء $\hat{X}$ ٠

(د) وحدانية $\hat{X}$ ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه ٠

وتتلخص مهمتنا تقريبا في تحديد نهايات مناسبة لمتتاليات لكوشي في X بحيث تكون هذه المتتاليات غير متقاربة ٠ هذا ، ولن نورد عددا « كبيرا جدا » من النهايات بل ندخل في اعتبارنا بــأن هنالك متتاليات معينة « قد ترغب في التقارب من النهاية نفسها » لان حدود هذه المتتاليات « تقترب بصورة كيفيــة احدها من الآخر » ٠

ان هذه الفكرة الحدسية يمكن أن يعبر عنها رياضيا بدلالة علاقــة تكافؤ مناسبة [انظر المساواة (1) في الاسفل] ٠ ان هذا الامر ليس بالمصطنع ، ولكننا نستوحيه من عملية اتمام المحور العادي التي أتينا على ذكرها في بداية هذا البند ٠ أما تفاصيل البرهان فهي كما يلي :

(آ) **ايجاد الفضاء** $\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$ لتكن (x_n) و (x_n') متتاليتين لكوشي في X ٠ سنقول ان (x_n) **تكافــىء** (x_n') ، ونكتب $(x_n) \sim (x_n')$ اذا تحقق الشرط

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = 0. \tag{1}$$

لتكن $\hat{X}$ مجموعة كل صفوف التكافؤ $\hat{x}$ ، $\hat{y}$ ، ... لمتتاليات كوشي الناتجة . سنعني بكتابتنا $(x_n)\in\hat{x}$ أن (x_n) عنصر من $\hat{x}$ (وهو ممثل للصف $\hat{x}$) . لنكتب الآن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{2}$$

حيث $(x_n)\in\hat{x}$ و $(y_n)\in\hat{y}$ ، وسنبين أن هذه النهاية موجودة . لدينا

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n);$$

لهذا فان

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leqq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

وبملاحظة أنه يمكننا الحصول على متباينة مماثلة بالمبادلة ما بين m و n ، فاننا نجد من هذه المتبانة والمتباينة (3) أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{3}$$

ولما كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن صغيرا بقدر ما نشاء ، الامر الذي يقتضي وجود النهاية (2) نظرا لكون الفضاء $\mathbb{R}$ تاما .

يجب أيضا اثبات أن النهاية (2) مستقلة عن الاختيار الخاص للممثل . وفي الحقيقة ، فاذا كان $(x_n)\sim(x_n')$ و $(y_n)\sim(y_n')$ ، فاننا نجد اعتمادا على (1) أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leqq d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \longrightarrow 0$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n').$$

سنبرهن أن $\hat{d}$ الوارد في (2) هو مترك على $\hat{X}$ • مـن الواضح أن $\hat{d}$ يحقق الشرط (م١) من البند ١ــ١ والشرط $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0$ والشرط (م٣) • وبالاضافة الى هذا فان

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_n) \sim (y_n) \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} = \hat{y}$$

وبذا يتحقق الشرط (م٢) بكامله • أما الشرط (م٤) فانه ينتج من المتباينة

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

عندما نجعل $n \longmapsto \infty$ •

(ب) **انشاء التطبيق الايزومتري** $T: X \longrightarrow W \subset \hat{X}$ • لنقرن كل b من X بالصف $\hat{b}$ من $\hat{X}$ الذي يحوي متتالية كوشي الثابتة $(b, b, \cdots)$ • اننا بهـذا نعرف تطبيقا $T: X \longrightarrow W$ على الفضاء الجزئي $W = T(X) \subset \hat{X}$ ، وهذا التطبيق هـو $b \longmapsto \hat{b} = Tb$ ، حيث $(b, b, \cdots) \in \hat{b}$ • نـرى أن T ايزومتري لان (2) تغدو ببساطة كما يلي :

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c);$$

و $\hat{c}$ هنا هو صف (y_n) حيث $y_n = c$ أيا كان n • ان أي تطبيق ايزومتري متباين و $T: X \longrightarrow W$ غامر لان $T(X) = W$ • لذا فان W و X ايزومتريان (راجع (ب) من التعريف ١ــ٦ــ١) •

سنبين أن W كثيف في $\hat{X}$ • لنأخذ أي $\hat{x}$ من $\hat{X}$ ، ولنفترض أن $(x_n) \in \hat{x}$ • يوجد لكل عـدد موجب ε عـدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > N).$$

فاذا كان $\hat{x}_N \ni (x_N, x_N, \cdots)$ ، فان $\hat{x}_N \in W$ • فاذا لاحظنا أنه يترتب على (2) أن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

فاننا نكون قد أثبتنا أن كل جوار ε للعنصر الاختياري $\hat{x}$ و $\hat{X}$ يحوي عنصرا من ، الامر الذي يعني أن W كثيف في $\hat{X}$ •

(جـ) **تمام الفضاء** $\hat{X}$ • لتكن $(\hat{x}_n)$ متتالية ما لكوشي في $\hat{X}$ • لما كان W كثيفا في $\hat{X}$ ، دانه يوجد لكل $\hat{x}_n$ عنصر $\hat{z}_n$ من W بحيث أن

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{n}. \tag{4}$$

لذا فاننا نجد انطلاقا من متباينة المثلث أن

$$\begin{aligned}\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) &\leqq \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)\\ &< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

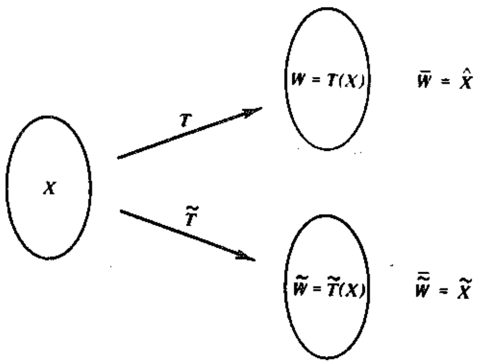
وهذا المقدار أصغر من أي عدد موجب ε عندما نأخذ m و n كبيرين بقدر كاف ، وذلك لكون $(\hat{x}_m)$ متتالية كوشي • لذا فان $(\hat{z}_m)$ متتالية لكوشي • وبما أن $T\colon X \longrightarrow W$ تطبيق ايزومتري ، وان $\hat{z}_m \in W$ ، فان المتتالية (z_m) ، حيث $z_m = T^{-1}\hat{z}_m$ هي متتالية كوشي في X • لنفترض أن $\hat{x}$ من $\hat{X}$ الصف الذي تنتمي اليه (z_m) ، ولنثبت أن $\hat{x}$ هو نهاية $(\hat{x}_n)$ • لدينا استنادا الى (4) ما يلي :

$$\begin{aligned}\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) &\leqq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x})\\ &< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}).\end{aligned} \tag{5}$$

ولما كان $(z_m) \in \hat{x}$ (الامر الذي ذكرناه قبل قليل) وكان $\hat{z}_n \in W$ ، فان $(z_n, z_n, z_n, \cdots) \in \hat{z}_n$ ، وعندئذ تصبح المتباينة (5) على الشكل

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \to \infty} d(z_n, z_m)$$

والطرف الايمن هنا أصغر من أي عدد موجب ε عند جعل n كبيرا بقدر كاف ، وبالتالي فانه يوجد لمتتالية كوشي $(\hat{x}_n)$ الاختيارية في $\hat{X}$ النهاية $\hat{x}$ في $\hat{X}$ ، الامر الذي يترتب عليه تمام الفضاء $\hat{X}$.



الشكل (١١) . الرموز المستعملة في الخطوة (د) من اثبات المبرهنة ١-٦-٢

(د) وحدانية $\hat{X}$ ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه . اذا كان $(\tilde{X}, \tilde{d})$ فضاء متريا تاما آخر يحوي فضاء جزئيا $\tilde{W}$ كثيفا في $\tilde{X}$ وايزومتريا مع X ، فانه يوجد لكل $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ من $\tilde{X}$ متتاليتان $(\tilde{x}_n)$ و $(\tilde{y}_n)$ في $\tilde{W}$ بحيث يكون $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x}$ و $\tilde{y}_n \longrightarrow \tilde{y}$. لذا فان المساواة

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

تنتج من كون

$$|\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leqq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \longrightarrow 0$$

[المتباينة هذه تشبه (3)] . ولما كان $\tilde{W}$ ايزومتريا مع W المحتوى من $\hat{X}$ ، وكان

$\hat{W}=\hat{X}$ ، فان المسافات على $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ يجب أن تكون واحدة ، وهــذا يعني أن الفضاءين $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ ايزومتريان • ∎

وسنرى في الفصلين التاليين (وبخاصة في ٢ــ٣ــ٢ و ٣ــ١ــ٥ و ٣ــ٢ــ٣) أن لهذه المبرهنة تطبيقات أساسية على فضاءات منفردة غير تامة ولصفوف كاملة من مثل هذه الفضاءات •

مســائل

١ ــ بين أنه اذا كان فضاء جزئي Y مــن فضاء متري مؤلفا من عدد منته مــن النقاط ، فان Y تام •

٢ ــ ما هو الاتمام للفضاء (X, d) ، حيث X هي مجموعة كل الاعداد العاديــة و $d(x, y)=|x-y|$ ؟

٣ ــ ما هو الاتمام لفضاء متري متقطع X ؟ (راجع ١ــ١ــ٨) •

٤ ــ اذا كان X_1 و X_2 ايزومتريين وكان X_1 تاما ، فأثبت أن X_2 تام •

٥ ــ (**الهوميومورفيزم أو التصاكـل**) **الهوميومورفيزم** هــو تطبيــق مستمر متباين وغامر $T: X \longrightarrow Y$ كمــا أن عكسه مستمر • ويقال عندئذ عــن الفضاءين المتريين X و Y انهما **هوميومورفيان** •(آ) أثبت أنه اذا كان X و Y ايزومتريين ، فانهما هوميومورفيان • (ب) بين بايراد أحد الامثلة أن الفضاء المتري التام والفضاء المتري غير التام قد يكونا هوميومورفيين •

٦ ــ أثبت أن الفضاءين $C[0,1]$ و $C[a, b]$ ايزومتريان •

٧ ــ اذا كان (X, d) فضاء تاما ، فبرهــن علــى أن الفضاء $(X, \tilde{d})$ ، حيــث $\tilde{d}=d/(1+d)$ ، فضاء تام كذلك •

٨ ــ أثبت أنه اذا كان الفضاء $(X, \tilde{d})$ في المسألة ٧ تاما ، فان (X, d) فضاء تــام كذلــك •

٩ ــ بين أنه اذا كانت (x_n) و (x_n') متتاليتين في (X, d) بحيث يتحقق الشرط (1) والشرط $x_n \longrightarrow l$ ، فان (x_n') تكون متقاربة ، كما تكون نهايتها l •

١٠ــ اذا كانت (x_n) و (x_n') متتاليتين متقاربتين في فضاء متري (X, d) ، وكان لهما نهاية واحدة l ، فأثبت عندئذ أنهما يحققان (1) •

١١ــ برهن على أن (1) يعرف علاقة تكا' على مجموعة كل متتاليات كوشي التي عناصرها في X •

١٢ــ اذا كانت (x_n) متتالية لكوشي في (X, d) ، وكانت (x_n') متتالية في X تحقق (1) ، فأثبت أن (x_n') تكون عندئذ متتالية لكوشي في X •

١٣ــ **(شبه المترك)** يعرف **شبه المترك المنتهي** علـى مجموعة X بأنـه دالـة $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق الشروط (م١) و (م٣) و (م٤) من البند ١ــ١ والشرط

$$d(x, x) = 0.$$

ما الفرق بين مترك وشبه مترك ؟ بيّن أن المساواة $d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$ تعـرف شبه مترك على مجموعة كل الازواج المرتبة مـن الاعداد الحقيقية حيـث $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$ • (تجدر بنا الاشارة الـى أن بعض المؤلفين يستعملون مصطلح **نصف مترك** بدلا من **شبه مترك**) •

١٤ــ هل تعرف المساواة

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$

متركا أو شبه مترك على X في كل الحالات التالية : (آ) X هي مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، (ب) X هي مجموعة كـل الدوال الحقيقية والكمولة ريمانيا على $[a, b]$ ؟

١٥ــ اذا كان (X, d) فضاء شبه متري ، فاننا ندعو المجموعة

$$B(x_0; r)=\{x \in X \mid d(x, x_0)<r\} \qquad (r>0)$$

كرة مفتوحة في X مركزها x_0 ونصف قطرها r • (لاحــظ الشبه بين هــذا التعريف والتعريف١ــ٣ــ١) • حدد الكرات المفتوحة التي نصف قطرها 1 فــي المســألة ١٣ •

* * *

الفصل الثاني

الفضاءات المنظمة • فضاءات باناخ

من الممكن الحصول على فضاءات مترية مفيدة وذات أهمية خاصة اذا أخذنا الفضاء المتجهي وعرفنا عليها متركا بواسطة **نظيم** ، وعندها يسمى الفضاء الناتج **فضاء منظما** • واذا كان هذا الفضاء فضاء متريا تاما ، فانه يدعى **فضاء باناخ** • ان نظرية الفضاءات المنظمة ، وبخاصة فضاءات باناخ ، ونظرية المؤثرات الخطية المعرفة عليها هي الاكثر تطورا بين أقسام التحليل الدالي • وهذا الفصل مكرس لدراسة الافكار الاساسية في هذه النظريات •

مفاهيم هامة • توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

الفضاء المنظم (٢ــ٢ــ١) هو **فضاء متجهي** (٢ــ١ــ١) معرف عليه مترك بواسطة نظيم (٢ــ٢ــ١) ، والنظيم هو تعميم لطول متجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد • و **فضاء باناخ** (٢ــ٢ــ١) فضاء منظم يشكل فضاء متريا تاما • ويوجد للفضاء المنظم اتمام هو فضاء باناخ (٢ــ٣ــ٢) • ويمكننا أيضا في الفضاء المنظم أن نعرف ونستعمل المتسلسلات غير المنتهية (٢ــ٣) •

يسمى كل تطبيق من فضاء منظم X الى فضاء منظم Y **مؤثرا** ، كما يسمى التطبيق من X الى الحقل العددي $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ **داليا** • وللمؤثرات المسماة **مؤثرات خطية محدودة** ، كما وللداليات المسماة **داليات خطية محدودة** ، أهمية

خاصة ، ذلك أنها جميعا مستمرة وتستثمر البنية الجبرية للفضاء المتجهي • وفي الحقيقة ، فان المبرهنة ٢ــ٧ــ٩ تنص على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي مستمرا هو أن يكون محدودا ، وهذه نتيجة أساسية • ان أهمية الفضاءات المتجهية هنا تعود بصورة رئيسية الى المؤثرات الخطية والداليات الخطية التي تحملها هذه الفضاءات •

ومن الامور الاساسية أن مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة من فضاء منظم معطى X الى فضاء معطى آخر Y يمكن جعلها فضاء منظما (٢ــ١٠ــ١) يرمز له بـ $B(X, Y)$ • كذلك فان مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X تصبح فضاء منظما يسمى الفضاء الثنوي X' للفضاء X (٢ــ١٠ــ٣) •

ان الفضاءات المنظمة غير منتهية الابعاد أكثر أهمية من الفضاءات منتهية الابعاد • والفضاءات الاخيرة أبسط من سابقتها (٢ــ٤ و ٢ــ٥) ، كما أن المؤثرات المعرفة عليها يمكن أن تمثل بمصفوفات (٢ــ٩) •

ملاحظة حول الرموز

سنرمز للفضاءين بـ X و Y ، وللمؤثرات بأحرف لاتينية كبيرة (ويفضل الحرف T) ، ولصورة عنصر x وفق T بـ Tx (دون قوسين) ، وللداليات بأحرف لاتينية صغيرة (ويفضل الحرف f) ، ولقيمة f في نقطة x بـ $f(x)$ (بقوسين) • وهذه الرموز تستعمل بصورة واسعة •

٢ــ١ الفضاء المتجهي

تشغل الفضاءات المتجهية مركزا مرموقا في العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها • وفي الحقيقة ، فاننا نستعمل في كثير من المسائل التطبيقية (والنظرية) مجموعة X قد تكون عناصرها متجهات في فضاء ثلاثي البعد أو دوال أو متتاليات عددية ، وهذه العناصر يمكن جمعها أو ضربها بثوابت (عددية) بطريقة طبيعية ، حيث تكون النتيجة عنصرا من X كذلك • ان مثل هذه الحالات توحي بمفهوم الفضاء المتجهي الذي سنعرفه في الفقرة التالية • وسيحوي التعريف حقلا عاما K ،

الا أن هذا الحقل يؤخذ في التحليل الدالي إمـا $\mathbf{R}$ واما $\mathbf{C}$ • وتسمى عناصر K **مقادير عددية** ، وبالتالي فانها في حالتنا هذه أعداد حقيقية أو أعداد عقدية •

٢ـ١ـ١ تعريف (الفضاء المتجهي)

الفضـاء المتجهـي (أو الفضـاء الخطـي) عـلى حقـل K هـو مجموعـة غـير خاليـة X من العناصـر x و y و •• (**تدعـى متجهـات**) . وهـذه المجموعـة مـزودة بعمليتـين جبريتـين • تدعـى هاتـان العمليتـان **جمعا متجهيا وضرب متجهات بأعداد** ، أي بعناصر من K •

ان **الجمع المتجهي** يقرن بكل زوج مرتب (x, y) من المتجهات متجها $x+y$ يدعى **مجموع** x و y بحيث يكون هـذا الجمـع تبادليا وتجميعيا ، أي بحيث تتحقق المساواتان

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

أيا كانت المتجهات x و y و z • كذلك يجـب أن يوجـد متجـه 0 يدعـى **المتجه الصفري** ، وأن يوجد لكل متجه x متجه $-x$ بحيث تتحقق المساواتان

$$x+0=x$$

$$x+(-x)=0.$$

أيا كان المتجه x •

أما **ضرب المتجه بعدد** ، فيقرن بكل متجه x متجها αx (يرمز له أيضا بـ $x\alpha$) ويدعى **جـداء** α و x بحيث تتحقق المساواتان

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$1x=x$$

وبحيث يصح القانونان التوزيعيان

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

أيا كان المتجهان x و y وأيا كان العددان α و β •

نرى من التعريف أن الجمع المتجه هــو تطبيق $X\times X\longrightarrow X$ ، في حين أن الضرب بعدد هو تطبيق $K\times X\longrightarrow X$ •

يسمى K الحقل **العددي** (أو حقل **المعاملات**) للفضاء المتجهي X، كما يسمى X **الفضاء المتجهي الحقيقي** اذا كان $K=\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ هــو حقل الاعداد الحقيقية) ، أو **الفضاء المتجهي العقــدي** اذا كان $K=\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ هو حقل الاعداد العقدية) •

ان استعمالنا للرمز 0 للدلالة على العدد 0 وعلى الشعاع الصفري في آن واحد ، يجب أن لا يؤدي الى ارباك في الحالة العامة • وإذا رغبنا فيوضوح أكبر، فيمكننا أن نرمز للصفر المتجه بـ θ •

ونترك للقارىء البرهان على صحة ما يلي أيا كان المتجه x وأيا كان العدد α

$$0x=\theta \tag{1a}$$

$$\alpha\theta=\theta \tag{1b}$$

and

$$(-1)x=-x. \tag{2}$$

امثلــة

٢ـ١ـ٢ الفضــاء $\mathbf{R}^n$

هذا الفضاء هو الفضاء الاقليدي الذي أوردناه في ١ـ١ـ٥ • وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات n مــن الاعــداد الحقيقيــة مثــل $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ، $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ ، الخ • وهذه المجموعة مزودة بالعمليتين الجبريتين المعرفتــين بالطريقة المألوفة التالية

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n) \qquad (\alpha\in\mathbf{R}).$$

من الواضح أن هذا الفضاء هو فضاء خطي حقيقي •

والامثلة التالية هي من طبيعة مماثلة ، ذلك أننا في كل منها سنعرف فضاء متجهيا انطلاقا من فضاء سبق ورأيناه •

٢ـ١ـ٣ الفضاء $\mathbf{C}^n$

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١ـ١ـ٥ ، وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات من الاعداد العقدية مثل $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ و $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ ، الـخ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان على هذه المجموعة كما فعلنا في المثال السابق ، الا أننا نفترض هنا أن $\alpha\in\mathbf{C}$ •

٢ـ١ـ٤ الفضاء $C[a,b]$

لقد سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١ـ١ـ٧ • ان كل نقطة مـن هذا الفضاء هي دالة حقيقية مستمرة على $[a,b]$ • ان مجموعة كل هذه الدوال تشكل فضاء متجهيا حقيقيا لدى تزويدها بعمليتين جبريتين معرفتين على النحو التالي

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad (\alpha\in\mathbf{R}).$$

وفي الحقيقة ، فإن $x+y$ و αx همـا دالتانحقيقيتان مستمرتان معرفتان عـلى $[a,b]$ عندما تكون x و y دالتين حقيقيتين ويكون α عددا حقيقيا •

من فضاءات الدوال المتجهية الهامة الاخرى نورد (آ) الفضاء المتجهي$B(A)$ في ١ـ٢ـ٢ ب (ب) الفضاء المتجهي لكـل الدوال الفضولة عـلى $\mathbf{R}$ ، (جـ) الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية على $[a,b]$ والكمولة ريمانيا أو بمعنى آخر •

أوردنا هـذا الفضاء في ١-٢-٣ ، وهـو فضاء متجهي عملياته الجبريتان معرفتان بالطريقة التالية

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots)+(\eta_1, \eta_2, \cdots)=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots)$$
$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \cdots)=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots).$$

وفي الحقيقة ، فاذا كان $x=(\xi_j)\in l^2$ و $y=(\eta_j)\in l^2$ ، فان $x+y\in l^2$ ، الامر الذي ينتج مباشرة من متباينة مينكوفسكي (12) في البنـد ١-٢ • كذلـك مـن الواضـح أن $\alpha x\in l^2$ •

من الفضاءات الاخرى التي نقاطها متتاليات الفضاء l^∞ الوارد في ١-١-٦ ، والفضاء l^p الوارد في ١-٢-٣ ، حيث $1\leqq p<+\infty$ ، والفضاء s في ١-٢-١ •

الفضاء الجزئي من فضاء متجهي X هو مجموعة جزئية غير خالية Y من X بحيث نجد أنه أيا كان $y_1, y_2\in Y$ وأيا كان العددان α و β ، فان $\alpha y_1+\beta y_2\in Y$ • لذا فان Y نفسه هو فضاء متجهي عملياته هما مقصورا العمليتين المعرفتين على X •

من الفضاءات الجزئية الخاصة من X هو **الفضاء الجزئي غير الفعلي** $Y=X$ • وكل فضاء جزئي آخر من $X\ (\neq\{0\})$ يسمى **فضاء جزئيا فعليا** •

كذلك ، فهنالك فضاء جزئي خاص آخر من أي فضاء متجهي X هو $Y=\{0\}$ •

يعرف **التركيب الخطي** للمتجهات $x_1, \cdots, x_m$ من الفضاء المتجهي X بأنـه عبارة من الشكل

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m$$

حيث تمثل المعاملات $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ أي أعداد •

واذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من X ، فان مجموعة كل التراكيب الخطية لمتجهات M تسمى مـوَلّد M ، ونرمز لها بالشكل

$$\text{span } M.$$

ومن الواضح أن هذا فضاء جزئي X من Y ، وعندئذ نقول بأن Y **مولد** بالمجموعة M •

سنقدم الآن مفهومين هامين مرتبط أحدهما بالآخر • وسنستعمل هذين المفهومين مرارا وتكرارا في أبحاثنا القادمة •

٢ـ١ـ٦ تعريف (الاستقلال الخطي ، الارتباط الخطي)

يعرف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة M من المتجهات $x_1, \cdots, x_r$ $(r \geqq 1)$ في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0, \tag{3}$$

حيث $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ أعداد • من الواضح أن المعادلة (3) صحيحة عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ • فاذا كانت هذه هي الاعداد الوحيدة التي تتحقق من أجلها المعادلة (3) ، فاننا نقول إن المجموعة M **مستقلة خطيا** • واذا لم تكن M مستقلة خطيا قلنا إنها **مرتبطة خطيا** ، أي أن M تكون مرتبطة خطيا اذا كانت (3) محققة من أجل مجموعة $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ من الاعداد ليست جميعها أصفارا •

ونقول عن مجموعة جزئية ما M من X إنها **مستقلة خطيا** اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية في M مستقلة خطيا • ويقال عن M إنها **مرتبطة خطيا** اذا لم تكن M مستقلة خطيا • ∎

ان ما يدعونا لايراد هذه المصطلحات ينبع من حقيقة أنه اذا كانت $M = \{x_1, \cdots, x_r\}$ مرتبطة خطيا ، فان واحدا على الاقل من متجهات M يمكن أن يكتب على شكل تركيب خطي للمتجهات الاخرى • فمثلا ، اذا تحققت (3) وكان $\alpha_r \neq 0$ ، فان M مرتبطة خطيا •ويمكن عندئذ حل (3) بالنسبة الى x_r ونجد

$$x_r = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{r-1} x_{r-1} \qquad (\beta_j = -\alpha_j/\alpha_r).$$

هذا ويمكن توظيف مفهومي الاستقلال والارتباط الخطي في تعريف بعد الفضاء المتجهي انطلاقا من التعريف التالي •

٢-١-٧ تعريف (الفضاءات المتجهية منتهية البعد وغير منتهية البعد)

نقول عن فضاء متجهي X انه **منتهي البعد** اذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي X جملة مستقلة خطيا من n من المتجهات في حين أن أي $n+1$ من المتجهات في X تكون مرتبطة خطيا . عندئذ يدعى n **بعد** X ، ونكتب $n = \dim X$. ونقول عن الفضاء $X = \{0\}$ بأنه منته وبعده $\dim X = 0$. واذا لم يكن X منتهي البعد ، فاننا نقول بأنه **غير منتهي البعد** . ∎

ان الفضاءات غير منتهية البعد أهم في علم التحليل الرياضي من الفضاءات منتهية البعد . وعلى سبيل المثال ، فان $C[a, b]$ و l^2 غير منتهيي البعد ، في حين أن $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ منتهيا البعد ، وبعد كل منهما n .

اذا كان $\dim X = n$ ، فان كل مرتبة n من المتجهات المستقلة خطيا في X تدعى **قاعدة** للفضاء X (أو **قاعدة في** X) . واذا كانت $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، فانه يوجد لكل عنصر x من X تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة :

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

وعلى سبيل المثال ، فان المتجهات التالية تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1). \end{aligned}$$

وتدعى هذه القاعدة أحيانا **القاعدة القانونية** لـ $\mathbf{R}^n$.

وبصورة أعم ، فاذا كان X أي فضاء متجهي ، ليس منتهي البعد بالضرورة ، وكانت B مجموعة جزئية مستقلة خطيا في X وتولد X ، فان B تدعى **قاعدة** (أو **قاعدة هامل**) لـ X . وبالتالي فاذا كانت B قاعدة لـ X ، فان لكل متجه

غير صفري x من X تمثيلا وحيدا على شكل تركيب خطي لعناصر (تؤلف مجموعة منتهية) من B وحيث تكون المعاملات أعداد غير صفرية معا •

سنبين الآن بأنه **يوجد لكل فضاء متجهي** $X \neq \{0\}$ **قاعدة** •

ان صحة هذه الدعوى واضحة للعيان في حال الفضاءات منتهية البعد • أما في حال الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، فان اثبات وجود القاعدة يستند الى تمهيدية زورن ، وسنقدم هذا الاثبات فيما بعد • وتمهيدية زورن المذكورة تحوي مفاهيم عديدة سنشرحها بعد فترة من الزمن ، ذلك أننا الآن سندرس أشياء أخرى تهمنا أكثر • لذا سنرجىء اثبات الوجود المذكور الى حين سردنا للبند ٤ــ١ ، حيث نورد تمهيدية زورن لغرض آخر •

ومن الجدير بالذكر أن لقواعد فضاء متجهي معطى X (منتهي البعد أو غير منتهي البعد) عددا أصليا واحدا • (ويلزم للبرهان على هذا أدوات اكثر تقدما من نظرية المجموعات • راجع الصفحة الثالثة من كتاب M. M. Day المنشور عام ١٩٧٣م) ويدعى هذا العدد **بعد** الفضاء X • لاحظ أن هذا يحوي ويوسع التعريف ٢ــ١ــ٧ •

٢ــ١ــ٨ مبرهنة (بعد الفضاء الجزئي) •

اذا كان X فضاء متجهيا بعده n ، فان لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعدا اصغر من n •

البرهان :

اذا كان $n=0$ فان $X=\{0\}$ ، وليس لهذا الفضاء فضاء جزئي فعلي • واذا كان $\dim Y=0$ ، فان $Y=\{0\}$ ، وبالتالي $X \neq Y$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $\dim X \geqq 1$ ، وواضح أن $\dim Y \leqq \dim X=n$ • أما اذا كان $\dim Y=n$، فانه يوجد لـ Y قاعدة مؤلفة من عناصر عددها n ، وهذه القاعدة لابد أن تكون قاعدة للفضاء X نظرا لان $\dim X=n$ ، وبالتالي يكون $X=Y$ • يبين هذا أن أي مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات في Y يجب أن تحوي من العناصر عددا أقل من n ، أي أن $\dim Y<n$ • ∎

مسـائل

١ ــ أثبت أن مجموعة كل الاعداد الحقيقية ، المزودة بعمليتي الجمع والضرب المألوفتين ، تشكل فضاء متجهيا حقيقيـا وحيد البعد ، وأن مجموعة كـل الاعداد العقدية تشكل فضاء متجهيا عقديا وحيد البعد •

٢ ــ أثبت صحة (1) و (2) •

٣ ــ حدد $\operatorname{span} M$ للمجموعة $M = \{(1,1,1),(0,0,2)\}$ في $\mathbf{R}^3$ •

٤ ــ حدد من بين المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{R}^3$ ما كان منها مشكلا لفضـاء جزئي من $\mathbf{R}^3$ •

[نفترض هنا أن $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$]

(آ) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 = \xi_2$ $\xi_3 = 0$ •

(ب) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 = \xi_2 + 1$ •

(جـ) مجموعة كل العناصر x حيث ξ_1, ξ_2, ξ_3 أعداد موجبة •

(د) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k$ (k ثابت) •

٥ ــ بيّن أن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ ، حيث $x_i(t) = t^i$ ، تشكل مجموعة مستقلة خطيا في الفضـاء $C[a,b]$ •

٦ ــ أثبت أنه اذا كان X اي فضاء متجهي بعده n ، فان تمثيل اي x على شكل تركيب خطي لمتجهات قاعدة معطاة $e_1, \cdots, e_n$ هو تمثيل وحيد •

٧ ــ لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لفضاء متجهي عقـدي X • أوجد قاعـدة في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا • عيّن بعد X في كل من الحالتين •

٨ ــ اذا كانت M مجموعة مرتبطة خطيا في فضاء متجهي عقدي X ، فهل مـن الضروري أن تكون M مرتبطة خطيا في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا ؟

٩ ــ لنأخذ الفترة المثبتة $[a,b]$ في $\mathbf{R}$ ،ولننظر في المجموعة X المؤلفة من كل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية والتي لاتزيد درجة كل منها عن عـدد معطى n ، ومن الحدودي $x = 0$ (الذي لا تعرف درجة له وفـق التعريف

المألوف للدرجة) • أثبت أن المجموعة X المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي المألوفتين تشكل فضاء متجهيا حقيقيا بعده $n+1$ • أوجد قاعدة لـ X ، ثم بين أنه يمكن الحصول على فضاء متجهي عقدي $\bar{X}$ بطريقة مماثلة وذلك لدى جعل المعاملات في الحدوديات عقدية • هل X فضاء جزئي من $\bar{X}$ ؟

١٠ـ اذا كان Y و Z فضاءين جزئيين من فضاء متجهي X ، فبين أن $Y \cap Z$ فضاء جزئي من X ، في حين أن $Y \cup Z$ ليس بالضرورة كذلك • اعط أمثلة على ذلك •

١١ـ اذا كانت $M \neq \varnothing$ أي مجموعة جزئية من فضاء متجهي X ، فبين أن $\text{span}\, M$ فضاء جزئي من X •

١٢ـ بيّن أن مجموعة كل المصفوفات المربعة المؤلفة من سطرين تشكل فضاء متجهيا • ما هو المتجه الصفري في X ؟ حدد $\dim X$ ، ثم أوجد قاعدة في X • أورد أمثلة على فضاءات جزئية من X • هل تشكل المصفوفات المتناظرة $x \in X$ فضاء جزئيا ؟ وهل تشكل المصفوفات الشاذة فضاء جزئيا أيضا ؟

١٣ـ (الجداء) أثبت ان الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$ لفضاءين متجهيين على حقل واحد يغدو فضاء متجهيا ان نحن عرفنا العمليتين الجبريتين كما يلي :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

١٤ـ (**فضاء حاصل القسمة ، البعد المرافق**) ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X • يرمز الى **المجموعه المشاركة** لعنصر x من X بالنسبة الى Y بالشكل $x+Y$ ، وتعرف هذه على أنها المجموعة (انظر الى الشكل ١٢) •

$$x + Y = \{v \mid v = x + y, y \in Y\}.$$

بيّن أن المجموعات المشاركة المختلفة تشكل تجزئه لـ X • ثم بين أنه اذا عرفنا عمليتين جبريتين بالمساواتين (انظر الى الشكلين ١٣ و ١٤) •

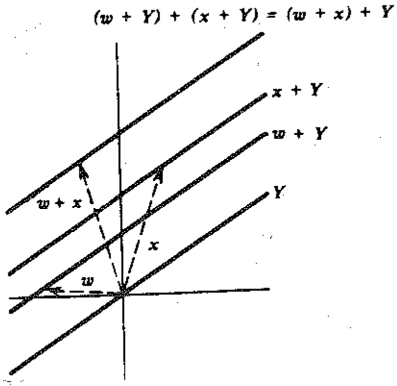
$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y$$

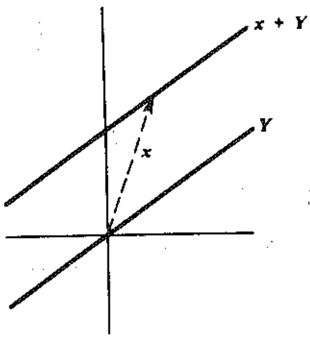
$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

فان هــذه المجموعات المرافقة تؤلف عناصر فضاء متجهي • يسمى هــذا الفضاء **فضــاء حاصــل قسمة** (وأحيانا **فضــاء عامــل**) X على Y ، ويرمز لــه بـ X/Y • ويدعى بعده **البعد المتمــم** لـ Y، ويرمز له بـ $\operatorname{codim} Y$ ، أي أن

$$\operatorname{codim} Y=\dim(X/Y).$$

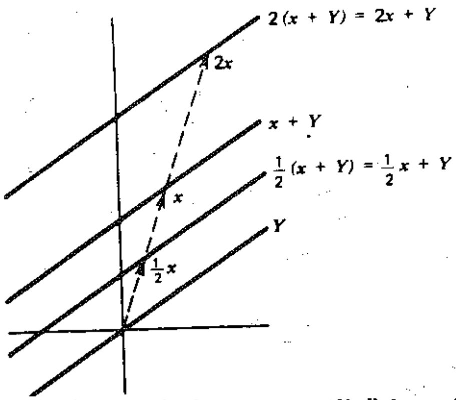
١٥ــ ليكن $X=\mathbb{R}^3$ و $Y=\{(\xi_1,0,0)\,|\,\xi_1\in\mathbb{R}\}$ • حدد كلا من الفضاءات X/Y و X/X و $X/\{0\}$ •





الشكل (١٣)•ايضاح جمع المتجهات في فضاء حاصل القسمة (المسالة ١٤)

الشكل (١٢)•ايضاح الرمــز $x+Y$ في المسالة ١٤



الشكل (١٤)•ايضاح عملية الضرب بعدد في فضاء حاصل القسمة (المسالة ١٤)

٢ـ٢ الفضاء المنظم . فضاء باناخ

ان الامثلة التي سقناها في البند السابق تبين أن الفضاء المتجهي قد يكون في كثير من الاحوال فضاء متريا في الوقت ذاته وذلك لان متركا d قد عرف على X . بيد أن عدم وجود رابطة بين البنية الجبرية والمترك يجعلنا لا نتوقع نظرية مفيدة وذات تطبيقات عملية تربط ما بين المفاهيم الجبرية والمترية . ولضمان مثل هذه الرابطة بين الخواص « الجبرية » و « الهندسية » لـ X ، فاننا نعرف على X متركا d بطريقة خاصة على النحو التالي : ندخل أولا مفهوما مساعدا ، هو النظيم (الذي نعرفه بعد قليل) بحيث نستعمل في هـذا التعريف العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي ، ومن ثم نوظف النظيم في سبيل الحصول على مترك d . ان هذه الفكرة تقود الى مفهوم **الفضاءات المنظمة**. وقد وجد أن هذه الفضاءات هي خاصة لدرجة تمكننا من ارساء قاعدة لنظرية هامة وواسعة ومستقلة ، ولكنها في الوقت ذاته عامة لدرجة أنها تحوي أنماطا عديدة من فضاءات ذات اهمية تطبيقية . وفي الواقع، فان عددا كبيرا من الفضاءات المترية في التحليل الرياضي يمكن اعتبارها على أنها فضاءات منظمة ، الامر الذي يهيب بنا الى القول بأن الفضاءات المنظمة ربما كانت من أهم أنواع الفضاءات في التحليل الدالي ، على الاقل من وجهة نظر التطبيقات المعاصرة . وسنورد فيما يلي التعاريف :

٢ـ٢ـ١ تعريف (الفضاء المنظم ، فضاء باناخ) .

الفضاء المنظم(*) X هو فضاء متجهي مزود بنظيم . اما **فضاء باناخ** فهو فضاء منظم تام (بالنسبة للمترك المحدد بالنظيم ، كما سنرى في (1) بعد قليل) . **والنظيم** على فضاء متجهي (حقيقي أو عقدي) هو دالة حقيقية على X يرمز

(*) يسمى هذا الفضاء أيضا **الفضاء المتجهي المنظم او الفضاء الخطي المنظم**. وقد أورد هذا التعريف (بصورة مستقلة) كل من باناخ (عام ١٩٢٢م) وهان (عام ١٩٢٢م) وفينير (عام ١٩٢٢م) . وقد تطورت النظرية بسرعة ، الامر الذي يمكن رؤيته من كتاب باناخ (١٩٣٢) الذي لم ينشر الا بعد ١٠ سنوات .

لقيمتها في نقطة x من X بالشكل

$$\|x\|$$

(ويقرأ « نظيم x ») بحيث تتحقق الخواص التالية :

(ن١) $\|x\| \geqq 0$

(ن٢) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ن٣) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(ن٤) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (متباينة المثلث)

ويمثل x و y هنا متجهين كيفيين في X ، أما α فتمثل عددا ما •

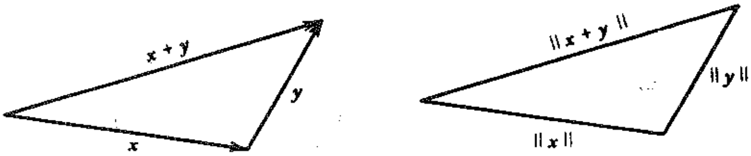
ويحدد النظيم على X متركا d على X وفق المساواة

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X) \tag{1}$$

يسمى هذا المترك **المترك المولد بالنظيم** • يرمز للفضاء المتري الذي عرفناه توا بالشكل $(X, \|\cdot\|)$ أو بـ X فقط • ∎

ان الدافع لادراج الخواص (ن١) ــ (ن٤) التي تعرف النظيم ينطلق من الطول $|x|$ لمتجه x الذي قابلناه في جبر المتجهات الابتدائي ، وبالتالي فيمكننا أن نكتب في هذه الحالة $\|x\| = |x|$ • وفي الحقيقة ، فان الخاصتين (ن١) و (ن٢) تنصان على أن لكل المتجهات أطوالا موجبة ، عدا المتجه الصفري الذي يساوي طوله الصفر • أما الخاصة (ن٣) فتعني أنه لدى ضرب متجه بعدد ، فان طول المتجه يضرب بالقيمة المطلقة للعدد • وأما الخاصة (ن٤) ، التي أوضحناها بالشكل (١٥) ، فانها تعني أن طول ضلع في مثلث لا يمكن أن يتجاوز مجموع طولي ضلعيه الآخرين •

هذا ، وليس من الصعب أن نستنتج من (ن١) ــ (ن٤) أن (1) تحدد متركا • لذا فان الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ هي فضاءات مترية •



الشكل (١٥) • ايضاح متباينة المثلث (٤)

وتكمن أهمية فضاءات باناخ في أنها تتمتع بخواص معينة (سنوردها في الفصل الرابع) لا تسري على الفضاءات المنظمة غير التامة •

هذا ومن الممكن ملاحظة أن الخاصة (ن٤) تقتضي الدستور

$$|\|y\| - \|x\|| \leqq \|y - x\|, \tag{2}$$

الامر الذي يمكن استخلاصه بيسر (راجع المسألة ٣) • ويترتب على المتباينة (2) الخاصة الهامة التالية للنظيم :

النظيم هو تطبيق مستمر ، اي أن $x \longmapsto \|x\|$ هو تطبيق مستمر للفضاء $(X, \|\cdot\|)$ في R • (١-٣-٣) •

من النماذج الابتدائية للفضاءات المنظمة الفضاءات المألوفة لكل المتجهات في المستوي وفي الفضاء ثلاثي البعد • ونجد أمثلة اخرى انطلاقا من البند ١-١ والبند ١-٢ ، لان بعض الفضاءات المترية في هذين البندين يمكن جعلها فضاءات منظمة بصورة طبيعية • ومع ذلك ، فسنبين في مكان آخر من هذا البند أن ليس كل مترك على فضاء متجهي يمكن ان يولد من نظيم •

أمثلة

٢-٢-٢ الفضاء الاقليدي R^n والفضاء الوحدي C^n

لقد سبق وعرفنا هذين الفضاءين في ١-١-٥ • انهما فضاءا باناخ حيث

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}. \tag{3}$$

وفي الحقيقة فان $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ تامان (١ــ٥ــ١) ، كما أن (3) يولد المترك (7) في البنـد ١ــ١ :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

ونلاحظ بوجه خاص أنه في حالة $\mathbf{R}^3$ يكون

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2}.$$

وهذا يؤكد ملاحظتنا السابقة بأن النظيم يعمم الفكرة الابتدائيةلطول المتجه $|x|$ •

٢ــ٢ــ٣ الفضـــاء l^p

لقد عرف هذا الفضاء في ١ــ٢ــ٣ • انه فضاء باناخ حيث النظيم

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \tag{4}$$

وسبب ذلك يعود الى أن هذا النظيم يولد المترك التالي (الذي ورد في ١ــ٢ــ٣)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p}$$

أما تمام هذا الفضاء فبيناه في ١ــ٥ــ٤ •

٢ــ٢ــ٤ الفضـــاء l^∞

سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١ــ١ــ٦ ، وهو فضاء باناخ لان المترك هنـــا مولد من النظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

أما تمام هذا الفضاء فسبق وبيناه في ١ــ٥ــ٢

٢ــ٢ــ٥ الفضـــاء $C[a, b]$

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١ــ١ــ٧ ، وهو فضاء باناخ حيث النظيم معطـــى بالمســـاواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \tag{5}$$

وحيث $J = [a, b]$ • أما تمام هذا الفضاء فسبق واثبتناه في ١ــ٥ــ٥ •

٢ــ٢ــ٦ الفضاءات المنظمة غير التامة

يمكن انطلاقا من الفضاءات المترية غير التامة في ١ــ٥ــ٧ و ١ــ٥ــ٨ أن نحصل مباشرة على فضاءات منظمة غير تامة • وعلى سبيل المثال ، فان المترك في ١ــ٥ــ ٩مولد من النظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt. \tag{6}$$

هل يمكن اتمام كل فضاء منظم غير تام ؟ لقد رأينا في ١ــ٦ــ٢ أن هــذا أمــر مؤكد فيما يتعلق بالفضاءات المترية • ولكن ماذا يمكن قوله عن توسيع عمليات الفضاء المتجهي والنظيم الى فضاء الاتمام ؟ سنرى في البند التالي أن هذا التوسيع ممكــن حقــا •

٢ــ٢ــ٧ مثال على فضاء منظم غير تام واتمامه $L^2[a, b]$

يشكل الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ فضاء منظما X نظيمه معطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2\, dt\right)^{1/2} \tag{7}$$

ان هذا فضاء غير تام ، فمثلا اذا كان $[a, b] = [0, 1]$ ، فان المتتالية في ١ــ٥ــ٩ هي متتالية لكوشي أيضا في الفضاء الحالي X ، ان هذا أمر واضح تقريبا بالنظر الى الشكل ١٠ من البند ١ــ٥ ، وينتج بالمكاملة ، ذلك أنه عندما يكون $n > m$ فــان

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [x_n(t) - x_m(t)]^2\, dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.$$

ان متتالية كوشي هذه لا تتقارب ، الامر الذي يمكن اثباته باتباع البرهان نفســه الوارد في ١ــ٥ــ٩ ، حيث يستعاض عن المترك في ١ــ٥ــ٩ بالمترك الحالي ، وفي حال الفترة $[a, b]$ العامة ، فيمكن انشاء متتالية لكوشي مماثلة بحيث تكــون غير متقاربة في X ،

يمكننا استنادا الى المبرهنة ١ــ٦ــ٢ اتمام الفضاء X ، وسنرمز الى هــذا الاتمام بالشكل $L^2[a, b]$ ، ان $L^p[a, b]$ هو فضاء باناخ ، ذلك أنه يمكن توسيع النظيم على X والعمليتين على الفضاء المتجهي الى اتمام X ، الامر الذي سنراه في البند التالي استنادا الى المبرهنة ٢ــ٣ــ٢ ،

وبوجه أعم ، فانه أيا كان العدد الحقيقي المثبت $p \geqq 1$ ، فان فضاء باناخ

$$L^p[a, b]$$

هو الاتمام للفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، كما في السابق ، والنظيم حينئذ معرف بالدستور

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{8}$$

وقد وضعنا الدليل السفلي p كي يذكرنا بأن هذا النظيم تابع لاختيارنا للعدد p الذي نبقيه مثبتا • لاحظ أنه عندما يكون $p = 2$ ، فاننا نجد (7) •

هذا ، ونذكر للقراء الذين لهم معرفة بتكامل لوبيك أنه يمكن الحصول أيضا على الفضاء $L^p[a, b]$ بطريقة مباشرة باستعمال تكامل لوبيك ودوال x القيوسة وفق لوبيك على $[a, b]$ ، بحيث يكون تكامل لوبيك للدالة $|x|^p$ على $[a, b]$ موجودا ومنتهيا • وعناصر $L^p[a, b]$ تكون عندئذ صفوف تكافؤ لهذه الدوال ، حيث x يكون مكافئا لـ y اذا كان تكامل لوبيك لـ $|x - y|^p$ على $[a, b]$ مساويا للصفر • [لاحظ أن هذا يضمن صحة الموضوعة (ن٢)] •

أما القراء الذين ليس لهم معرفة سابقة بتكامل لوبيك،فليس من داع لانزعاجهم، ذلك أن هذا المثال ليس ضروريا لمباحثنا القادمة • ومهما يكن من أمر ، فان أهمية هذا المثال تكمن في ان الاتمام قد يقودنا الى نوع جديد من العناصر ، وقد يكون لزاما علينا التوصل الى طبيعة هذه العناصر •

٢ــ٢ــ٨ الفضـــاء s

هل يمكن لكل مترك على فضاء متجهي أن يولد من نظيم ؟ ان الجواب عن هذا السؤال تتم بالنفي • ويشكل الفضاء s في ١ــ٢ــ١ مثالا على صحة مانقول• وفي الحقيقة ، فان s هو فضاء متجهي ، الا ان المترك d على s المعرف بالمساواة

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|}$$

لا يمكن أن يولد من نظيم ، الامر الذي ينتج مباشرة من التمهيد التالي الذي ينص على أن المترك d المولد من نظيم يجب أن يحـــقق خاصتين أساسيتين • ان أولى هاتين الخاصتين وهي الواردة في (9a) تسمى **لا تغير الانسحاب** للمترك d •

٢-٢-٩ تمهيدية (لا تغير الانسحاب)

كل مترك d مولد من نظيم على فضاء منظم X يجب أن يحقق الخاصتين التاليتـين

$$(9)\quad \begin{aligned} &(a) && d(x+a, y+a) = d(x, y) \\ &(b) && d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y) \end{aligned}$$

أيا كانت العناصر x و y و a من X وأيا كان العدد α •

البرهـان :

لدينـا

$$d(x+a, y+a) = \|x+a-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x, y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\, \|x-y\| = |\alpha|\, d(x, y). \quad ∎$$

مسـائل

١ ـ بيّن أن النظيم $\|x\|$ للعنصر x هو المسافة بين x و 0 •

٢ ـ تحقق من أن الطول المعروف لمتجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد يحقق خواص النظيم (ن١) ـ (ن٤) •

٣ ـ أثبت صحة (2) •

٤ ـ بيّن أنه يمكن الاستعاضة عن (ن٢) بالشرط

$$\|x\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

دون تغيير تعريف النظيم • أثبت أن شرط كون النظيم عددا غير سالب ينتج أيضا من (ن٣) و (ن٤) •

٥ ــ أثبت أن (3) يحدد نظيما •

٦ ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الازواج المرتبة $x=(\xi_1, \xi_2)$ و $y=(\eta_1, \eta_2)$ ••• من الاعداد الحقيقية • بيّن أن المساويات الثلاث التالية تعين نظائم على X :

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

٧ ــ أثبت أن (4) يحقق الشروط (ن١) ــ (ن٤) •

٨ ــ توجد نظائم مختلفة ذات أهمية تطبيقية على الفضاء المتجهي المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد (٢ــ٢ــ٢) وهي معرفة بالدساتير

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n|$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{1/p} \qquad (1 < p < +\infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|\}.$$

تحقق في كل من هذه الحالات أن الشروط (ن١) ــ (ن٤) محققة •

٩ ــ تحقق من أن (5) تحدد نظيما •

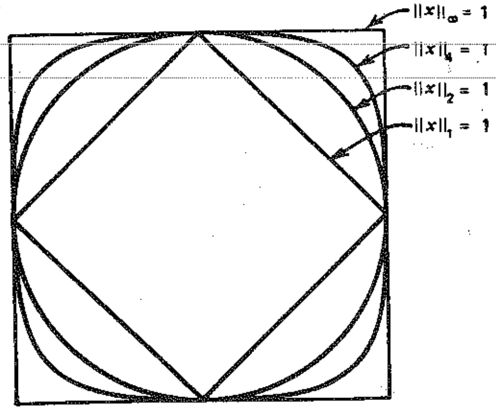
١٠ــ **الكرة الواحدية** • تدعى الكرة

$$S(0; 1) = \{x \in X \,|\, \|x\| = 1\}$$

في فضاء منظم **الكرة الواحدية** • بيّن أنه في حال النظائم الواردة في المسألة ٦ والنظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

فان الكرات الواحدية تبدو كما هو مبين في الشكل ١٦ •



الشكل (١٦)،الكرات الواحدية في المسالة ١٠

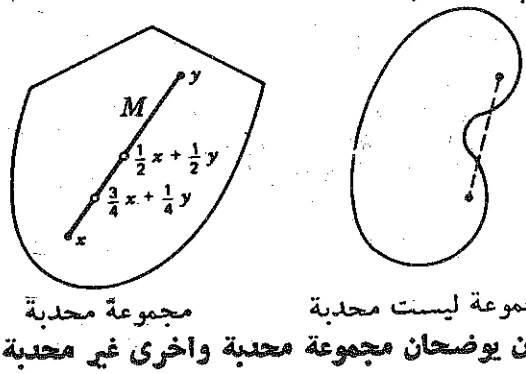
١١- **(المجموعة المحدبة ، القطعة المستقيمة)** يقال عن مجموعة جزئية A مـن فضاء متجهي X انها محدبة اذا اقتضى وقـوع أي نقطتين x و y مـن A تحـقق العـلاقة

$$M=\{z\in X \mid z=\alpha x+(1-\alpha)y,\quad 0\leqq\alpha\leqq 1\}\subset A.$$

تدعى M **قطعة مستقيمة مغلقة حداها النقطتان** x و y ، وتدعى كل نقطة أخرى من z نقطة داخلية في M ، بيّن أن **الكرة الواحدية المغلقة**

$$\bar{B}(0;1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqq 1\}$$

في فضاء منظم X محدبة.



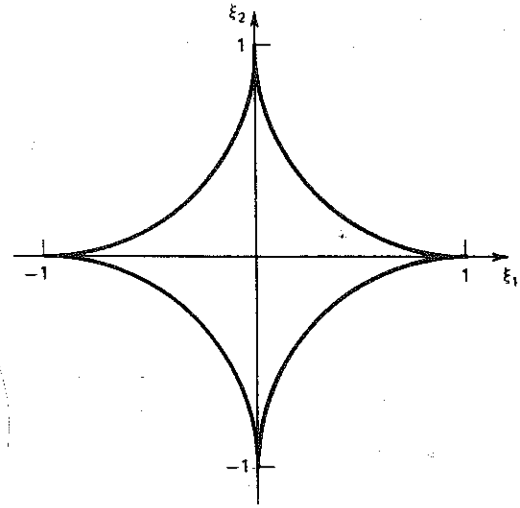
مجموعة محدبة   مجموعة ليست محدبة

الشكل (١٧) مثالان يوضحان مجموعة محدبة واخرى غير محدبة (المسالة ١١)

١٢ـ بين الافادة من المسألة ١١ أن المساواة

$$\varphi(x) = (\sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|})^2$$

لا تحدد نظيما على الفضاء المتجهي المؤلف من كل الازواج المرتبة$x = (\xi_1, \xi_2)$ ... من الاعداد الحقيقية • ارسم المنحني $\varphi(x) = 1$ وقارنه بالشكل ١٨



الشكل (١٨) المنحني $\varphi(x) = 1$ في المسألة ١٢

١٣ـ بين أن المترك المتقطع على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ لا يمكن أن يولد من نظيم (١ـ١ـ٨) •

١٤ـ اذا كان d متركا على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ مولدا من نظيم ، وكان $\tilde{d}$ معرفا على النحو التالي

$$\tilde{d}(x, x) = 0, \qquad \tilde{d}(x, y) = d(x, y) + 1 \qquad (x \neq y),$$

فبيّن أن $\tilde{d}$ لا يمكن أن يولد من نظيم •

١٥ـ **(المجموعة المحدودة)** • بين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة

جزئية M من فضاء منظم X محدودة هو أن يوجد عـدد موجب c بحيث تتحقق المتباينة $\|x\| \leq c$ أيا كان x من M • (لتعريف المجموعـة المحدودة عُد الى المسألة ٦ من البند ١ـ٢) •

٢ـ٣ خواص اخرى للفضاءات المنظمة

ان **الفضاء الجزئي** Y من فضاء منظم X هو تعريفا فضاء جزئـي مـن X باعتباره فضاء متجهيا ، نظيمه مقصور نظيم X على المجموعة الجزئية Y • ونقول عن نظيم Y هذا انه **مولـد** من النظيم على X • وفي حال كو ن Y مجموعة مغلقة في X ، فاننا نقول إن Y **فضاء جزئي مغلق** من X •

كذلك ، يعرف **الفضاء الجزئي** Y من فضاء باناخ X بأنه فضاء جزئي من X باعتبار X فضاء منظما • لذا فاننا لا نتطلب من Y أن يكون تاما (رغم أن بعض المؤلفين يعتبرونه كذلك • وهكذا فالحذر ضروري لدى مقارنة الكتب المختلفة)•

وفي هذا الصدد ، تكون المبرهنة ١ـ٤ـ٧ ذات فائدة لانها تقتضي مباشرة المبرهنـة التاليـة :

٢ـ٣ـ١ مبرهنة (الفضاء الجزئي من فضاء باناخ)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاما هـو ان تكون المجموعة Y مغلقة في X •

ان **التقارب** وبعض المفاهيم المرتبطة به في الفضاءات المنظمة تنتـج مباشرة من التعريفين ١ـ٤ـ١ و ١ـ٤ـ٣ الواردين في معرض الفضاءات المترية ،ومن كون $d(x, y)=\|x-y\|$ وعلى وجه التحديد ، نجد ما يلي :

(i) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم X **متقاربة** اذا وجد عنصر x في X بحيث أن

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

ونكتب عندئذ $x_n \longrightarrow x$ ، كما نسمي x نهايــة المتتالية (x_n) .

(ii) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم متتالية كوشي اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \qquad (1)$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$.

لقد تعاملنا مع المتتاليات حتى في الفضاءات المترية العامة . أما في الفضاءات المنظمة ، فاننا سنخطو خطوة هامة أخرى وذلك باستعمالنا للمتسلسلات كما يلي :

يمكن تعريف **المتسلسلة غير المنتهية** بصــورة مماثلــة لمــا فعلنــا فــي التحليل الحقيقي . وفي الواقع ، فاذا كانت (x_k) متتالية في فضاء منظم X ، فمن الممكن أن نقرن بها المتتالية (s_n) **للمجاميع الجزئية**

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

حيث $n = 1, 2, \cdots$. فاذا كانت (s_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن

$$s_n \longrightarrow s \quad \text{أي أن} \quad \|s_n - s\| \longrightarrow 0$$

قلنا إن **المتسلسلة غير المنتهية** ، أو اختصارا **المتسلسلة**

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \qquad (2)$$

متقاربة ،وان **مجموعها** يساوي s . وعندئذ نكتب

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots .$$

اذا كانــت المتسلسلة $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ متقاربة ، قلنــا إن المتسلسلة (2) **متقاربة بالاطلاق** . ويجدر بنا في هذا المقام تنبيــه القارىء بأن الشرط الــلازم

والكافي كي يقتضي التقارب المطلق لمتسلسلة تقارب هذه المتسلسلة في فضاء منظم X هو أن يكون X فضاء تاما (عد الى المسألتين ٧و٩) •

ان مفهوم التقارب يمكن توظيفه في تعريف « قاعدة » كما يلي : اذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) بحيث أنه يوجد لكل عنصر x في X متتالية وحيدة من الاعداد (α_n) يتحقق معها الشرط

$$\|x-(\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n)\| \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ، فان (e_n) تدعى **قاعدة شاودر** (أو **قاعدة**) للفضاء X • وتدعى عندئذ المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

التي مجموعها x **منشور** x بالنسبة لـ (e_n) ، ونكتب

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

وعلى سبيل المثال ، فانه يوجد لـ l^p في ٢ــ٢ــ٣ قاعدة شاودر (e_n) حيث $e_n=(\delta_{nj})$ ، أي أن e_n هي المتتالية التي حدها ذو الترتيب n يساوي 1 ، وكل حدودها الاخرى أصفار • وهكذا فان

$$\begin{aligned} e_1&=(1,0,0,0,\cdots)\\ e_2&=(0,1,0,0,\cdots) \qquad (4)\\ e_3&=(0,0,1,0,\cdots)\end{aligned}$$

وهكذا •

اذا وجد لفضاء منظم X قاعدة شاودر ، فانه X فَصول (راجع التعريف ١ــ٣ــ٥) • وبما أن البرهان على هذا أمر سهل ، فاننا نترك اقامته للقارىء (المسألة ١٠) • وبالمقابل،فهل يوجد لكل فضاء فصول لباناخ قاعدة لشاودر ؟ ان هذا سؤال شهير طرحه باناخ نفسه منذ قرابة ٥٠ سنة • لقد تم اثبات وجود قاعدة لشاودر في أغلب فضاءات باناخ الفصولة المعروفة • ورغم ذلك ، فان الاجابة

عن السؤال السابق تتم بالنفي ، ذلك أن إنفلو (١٩٧٣) تمكن منذ عهد قريب من انشاء فضاء فصول لباناخ دون أن يكون لهذا الفضاء قاعدة لشاودر •

لننقل أخيرا الى مسألة اتمـام الفضاء المنظم ، والتـي مررنا على ذكرهـا بسرعة في البند السابق •

٢ـ٣ـ٢ مبرهنة (الاتمام)

ليكن $X=(X,\|\cdot\|)$ فضاء منظما • عندئذ هنـاك فضاء لباناخ $\hat{X}$ وتطبيـق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من $\hat{X}$ كثيف في $\hat{X}$ • ان الفضاء $\hat{X}$ وحيد اذا غضضنا النظر عن الفضاءات الايزومترية معه ، (بمعنى انه اذا كان $\tilde{X}$ أي فضاء لباناخ يحوي فضاء جزئيا كثيفا $\tilde{W}$ ايزومتريا مع X ، فـان الفضاءين $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ ايزومتريان) •

البرهـان :

تقتضي المبرهنة ١ـ٦ـ٢ وجود فضاء متري تام $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ ووجود تطبيق ايزومتري $A:\ X\longrightarrow W=A(X)$ ، حيث W كثيف في $\hat{X}$ ، وحيث $\hat{X}$ وحيـد بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه • (نستعمل هنا الحرف A دون T ، كما في ١ـ٦ـ٢ ، وذلك لاننا سنستعمل الحرف T بمعنى آخر لدى دراسة بعض التطبيقات القادمة في البند ٨ـ٢) • وبالتالي ، فيجب علينا لاثبات هذه المبرهنة أن نجعل من $\hat{X}$ فضاء متجهيا ، ومن ثم نعرف على $\hat{X}$ نظيما مناسبا •

لتعريف عمليتي الفضاء المتجهي الجبريتين على $\hat{X}$ ، نأخذ أي عنصرين $\hat{x}$ و $\hat{y}$ من $\hat{X}$ وأي ممثلين (x_n) من $\hat{x}$ و (y_n) من $\hat{y}$ • وعلينا أن نذكر بأن $\hat{x}$ و $\hat{y}$ هما صفا تكافؤ لمتتاليات كوشي في X • فاذا فرضنا أن $z_n=x_n+y_n$ فان (z_n) هـي متتالية لكوشي في X لان

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|\leqq\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|.$$

سنعرف المجموع $\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$ لـ $\hat{x}$ و $\hat{y}$ بأنه صف التكافؤ الذي تشكل (z_n) ممثلا له • لذا فان $(z_n)\in\hat{z}$ • ان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لمتتاليتي

كوشي المنتميتين الى $\hat{x}$ و $\hat{y}$ ، ذلك أن (1) في البند ١ــ٦ تبين بأنه اذا كــان $(x_n)\sim(x_n')$ و $(y_n)\sim(y_n')$ ، فان $(x_n+y_n)\sim(x_n'+y_n')$ لأن

$$\|x_n+y_n-(x_n'+y_n')\|\leqq\|x_n-x_n'\|+\|y_n-y_n'\|.$$

ونعرف بصورة مماثلة الجداء $\alpha\hat{x}$ في $\hat{X}$ لعدد α بالعنصر $\hat{x}$ علــى أنــه صف التكافؤ الذي تمثله (αx_n) • ومرة ثانية ، فان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لممثل $\hat{x}$ • والعنصر الصفري في $\hat{X}$ هو صف التكافؤ الحاوي على كــل متتاليات كوشي المتقاربة من الصفر • ومن السهل التحقق بأن لهاتين العمليتين الجبريتين كل الخواص المطلوبة تعريفا كي يشكل $\hat{X}$ فضاء متجهيا • ويترتب على التعريف أن عمليتي الفضاء المتجهي على W المولدتين من $\hat{X}$ تنسجمان مع العمليتين المولدتين من X بواسطة A •

كذلك ، فان A يولد على W نظيما $\|\cdot\|_1$ قيمته في كل نقطة $\hat{y}=Ax$ من W هي $\|\hat{y}\|_1=\|x\|$ • والمترك الموافق على W هو مقصور $\hat{d}$ على W نظــرا لكون A تطبيقا ايزومتريا • ويمكننا تمديد النظيم $\|\cdot\|_1$ الى $\hat{X}$ بوضع $\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{0},\hat{x})$ أيا كان $\hat{x}$ من $\hat{X}$ ، ذلك أن من الواضح بأن $\|\cdot\|_2$ تحقق (ن١) و (ن٢) من البنــد ٢ــ٢ ، وأن الموضوعتين الاخريين (ن٣) و (ن٤) تنتجان من نظيرتيهما المتعلقتين بالنظيم $\|\cdot\|_1$ وذلك بالانتقال الى النهاية • ∎

مســائل

١ ــ اثبت ان $c\subset l^\infty$ يشكل فضاء متجهيا جزئيا من l^∞ (١ــ٥ــ٣) ، وكذلك c_0 المؤلف من كل متتاليات الاعداد المتقاربة من الصفر •

٢ ــ بيّن أن c_0 الوارد في المسألة ١ هو فضاء جزئي مغلــق في ، وبالتالي فان c_0 تام استنادا الى ١ــ٥ــ٢ و ١ــ٤ــ٧ •

٣ ــ لتكن المجموعة الجزئية Y من l^∞ مؤلفة من كل المتتاليات التي يوجــد في كل منها عدد منته فقط من الحدود غير الصفرية • بيّن أن Y فضاء جزئي من l^∞ ، الا أنه غير مغلق •

٤ ـــ (**استمرار عمليتي الفضاء المتجهي**) أثبت ان عمليتي الجمع المتجهي والضرب بعدد في فضاء منظم X عمليتان مستمرتان بالنسبة للنظيم ، أي أن التطبيقين $(x, y) \longmapsto x+y$ و $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ مستمران •

٥ ـــ برهن أنه اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ فان $x_n + y_n \longrightarrow x+y$ • أثبت أنه اذا كان $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ و $x_n \longrightarrow x$ فان $\alpha_n x_n \longrightarrow \alpha x$ •

٦ ـــ أثبت أن اللصاقة $\bar{Y}$ للفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X هي أيضا فضاء متجهي جزئي •

٧ ـــ (**التقارب المطلق**) • بيّن أن تقارب المتسلسلة $\|y_1\|+\|y_2\|+\|y_3\|+\cdots$ قد لا يقتضي تقارب المتسلسلة $y_1+y_2+y_3+\cdots$ • **إرشاد** • خذ Y الوارد في المسألة ٣ والمتتالية (y_n) حيث $y_n = (\eta_j^{(n)})$ و $\eta_n^{(n)} = 1/n^2$ و $\eta_j^{(n)} = 0$ عندما $j \neq n$ •

٨ ـــ اذا اقتضى التقارب المطلق لاي متسلسلة في فضاء منظم تقارب هذه المتسلسلة ، فبيّن أن X فضاء تام •

٩ ـــ أثبت أن كل متسلسلة متقاربة بالاطلاق في فضاء باناخ متقاربة •

١٠ ـــ (**قاعدة شاودر**) • بين أنه اذا وجدت قاعدة لشاودر في فضاء منظم ، فانه فصول •

١١ ـــ أثبت أن (e_n) ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ ، قاعدة شاودر للفضاء l^p ، بفرض أن $1 \leqq p < +\infty$ •

١٢ ـــ (**نصف النظيم**) يعرف **نصف النظيم** على فضاء متجهي X بأنه تطبيق $p: X \longrightarrow \mathbf{R}$ يحقق الشروط (ن١) و (ن٣) و (ن٤) من البند ٢ ـــ ٢ (ويسميه بعض المؤلفين **شبه النظيم**). أثبت أن

$$p(0) = 0,$$

$$|p(y) - p(x)| \leqq p(y-x).$$

(وبالتالي ، فاذا اقتضت المساواة $p(x) = 0$ أن $x = 0$ ، فان p نظيم) •

١٣ـ بين أن العناصر x من X في المسألة ١٢ والمحققة للمعادلة $p(x)=0$ تشكل فضاء جزئيا N من X ، كما أنه يمكن تعريف نظيم على X/N (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـ١) بالمساواة $\|\hat{x}\|_0=p(x)$ ، حيث $x\in\hat{x}$ و $\hat{x}\in X/N$ •

١٤ـ **(فضاء حاصل القسمة)** ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا من فضاء منظم $(X,\|\cdot\|)$ • بين أنه يمكن تعريف نظيم $\|\cdot\|_0$ على X/Y (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـ١) بالمساواة

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|$$

حيث $\hat{x}\in X/Y$ ، أي أن $\hat{x}$ أي مجموعة مرافقة لـ Y •

١٥ـ **(جداء الفضاءات المنظمة)** • اذا كان $(X_1,\|\cdot\|_1)$ و $(X_2,\|\cdot\|_2)$ فضاءين منظمين ، فبين أن فضاء الجداء المتجهي $X=X_1\times X_2$ (المسألة ١٣ من البند ٢ـ١) يغدو فضاء منظما عند وضع

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2) \qquad [x=(x_1,x_2)].$$

٢ـ٤ الفضاءات المنظمة والفضاءات الجزئية منتهية البعد

هل الفضاءات المنظمة منتهية البعد أبسط من الفضاءات غير منتهية البعد ؟ وفي أي صدد ؟ ان طرح مثل هذه الاسئلة أمر طبيعي ، وأهميتها تنبع من كون الفضاءات المنظمة وفضاءاتها الجزئية تلعب دورا بارزا في العديد من المواضيع (كنظرية التقريب والنظرية الطيفية مثلا) • ويمكن قول الكثير من الاشياء المهمة في هذا السياق• لذا فمن الاهمية بمكان تجميع بعض الحقائق حول هذه الفضاءات لكونها مهمة في حد ذاتها ، ولانها تشكل أدوات لابحاثنا القادمة • وهذا هو موضوعنا في البند الحالي ولاحقه •

ويشكل التمهيد التالي مصدرا لكثير من النتائج المتوخاة • وينص بصورة تقريبية على أنه في حال الاستقلال الخطي للمتجهات ، فمن غير الممكن ايجاد تركيب خطي يحوي أعدادا كبيرة ويمثل في الوقت نفسه متجها صغيرا •

٢ـ٤ـ١ تمهيدية (التراكيب الخطية)

لتكن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات من فضاء منظم X (أيا كان بعده) ، عندئـذ يوجد عـدد موجب c بحيث تتحـقق المتباينـة

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geqq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \qquad (c>0). \tag{1}$$

أيا كانت الاعداد $\alpha_1 \quad , \cdots, \quad \alpha_n$.

البرهـان :

سنرمز بـ s للمقدار $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. فاذا كان $s=0$ ، فان كلا من α_j يساوي الصفر ، وبالتالي فان (1) تكـون محققة أيا كانت c . لنفترض الآن أن $s>0$. عندئذ تكون (1) مكافئة للمتباينة الناتجة عن (1) بتقسيم طرفيها على s . فاذا فرضنا أن $\beta_j = \alpha_j / s$ ، فان (1) تكافىء المتباينة

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geqq c \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1\right). \tag{2}$$

لذا فانه يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكـون (2) محققـة أيا كانت المرتبة n من الاعداد $\beta_1, \cdots, \beta_n$ حيث $\sum |\beta_j| = 1$.

لنفترض مؤقتا عدم صحة هذا الامر . عندئذ توجـد متتالية (y_m) مـن المتجهـات

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1\right)$$

بحيث أن

$$\|y_m\| \longrightarrow 0 \quad \text{عنـدما} \quad m \longrightarrow \infty$$

ان محاكمتنا الآن ستكون على النحو التالي : لما كان $\sum |\beta_j^{(m)}| = 1$ ، فان $|\beta_j^{(m)}| \leqq 1$ لذا فان المتتالية

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \cdots)$$

تكون محدودة لدى تثبيت j • وبالتالي ، فانه يترتب علـى مبرهنة بولزانو ـ ڤيرشتراس أن المتتالية $(\beta_1^{(m)})$ تحوي متتالية جزئية متقاربة • لنرمز بـ β_1 لنهايـة هذه المتتالية الجزئية ، و بـ $(y_{1,m})$ لنهاية المتتالية الجزئية المقابلة مـن (y_m) • وباجراء مناقشة مماثلة ، فاننا نجد أن $(y_{1,m})$ تحوي متتالية جزئية $(y_{2,m})$ بحيث تكون المتتالية الجزئية المقابلة من الاعداد $\beta_2^{(m)}$ متقاربة ، ولنرمز بـ β_2 لنهايـة $\beta_2^{(m)}$ • فاذا واصلنا السير في هذه الطريق ، فاننا نجد بعد خطوات عددها n متتالية جزئية $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots)$ من (y_m) حدودها من الشكل

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1\right)$$

حيث تحقق الاعداد $\gamma_j^{(m)}$ الشرط $\gamma_j^{(m)} \longrightarrow \beta_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • لذا نجد أنـه عنـدما $m \longrightarrow \infty$ يكـون

$$y_{n,m} \longrightarrow y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

حيث $\sum |\beta_j| = 1$ ، وهذا يعني أنه لايمكن أن تكون الاعداد β_j أصفارا معا • وبما أن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا ، فـان $y \neq 0$ • ونجد من جهة أخرى أن $y_{n,m} \longrightarrow y$ يقتضي $\|y_{n,m}\| \longrightarrow \|y\|$ استنادا الى استمرار النظيم • ولما كـان $\|y_m\| \longrightarrow 0$ فرضا ، وكانت $(y_{n,m})$ متتالية جزئية من (y_m) ، فلا بد أن يكـون $\|y_{n,m}\| \longrightarrow 0$، وهذا يقتضي المساواة $\|y\| = 0$ وفق (ن٢) من البند ٢ـ٢ • وبمـا أن هذا يناقض كون $y \neq 0$ ، فاننا نكون قد أثبتنا صحة التمهيدية • ∎

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، سنورد المبرهنة الاساسية التالية :

٢ـ٤ـ٢ مبرهنة (التمام)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاما • وبوجه خاص ، فان كل فضاء منظم منتهي البعد تام •

البرهـان :

لتكن (y_m) متتالية ما لكوشي في Y ، ولنثبت أنها متقاربة في Y ، رامزين للنهاية بـ y . لنفترض أن $\dim Y = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ أي قاعدة لـ Y . عندئذ يكون لكل y_m تمثيل وحيد بالشكل

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت (y_m) متتالية كوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عـدد صحيح موجب N بحيث أن $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ عندما يكون $m, r > N$. يترتب على هذا وعلى التمهيدية ٢ـبـ٤ـ١ وجود عدد موجب c بحيث أن

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geqq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

عندما يكون $m, r > N$. وبالتقسيم على c نجد أن

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \qquad (m, r > N).$$

وهذا يبين أن كلا من المتتاليات الآتية (التي عددها n)

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \cdots) \qquad j = 1, \cdots, n$$

هي متتالية في $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$ ، وبالتالي فانها متقاربة ، وسنرمز لنهايتها بـ α_j . لنعرف بعد هذا (باستخدام النهايات α_1 و .... و α_n) العنصر y بالمساواة

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

من الواضح أن $y \in Y$ ، كما أن

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \, \|e_j\|.$$

لما كان $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$ في الطرف الايمن ، فان $\|y_m - y\| \longrightarrow 0$ ، أي أن $y_m \longrightarrow y$.

وهذا يبين أن (y_m) متقاربة في Y • وبما أن (y_m) متتالية اختيارية لكوشي في Y فـان Y تـام • ∎

نستنتج من هذه المبرهنة والمبرهنة ١ـ٤ـ٧ ما يلي :

٢ـ٤ـ٣ مبرهنة (الانغلاق)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون مغلقا في X •

سنحتاج الى هذه المبرهنة في عدة مناسبات في أبحاثنا القادمة •

ويجدر بنا توجيه النظر الى أنه ليس لزاما على الفضاءات الجزئية غير منتهية البعد أن تكون مغلقة •

مثـال :

ليكن $X = C[0, 1]$ و $Y = \text{span}(x_0, x_1, \cdots)$ حيث $x_i(t) = t^i$ ، أي أن Y هي مجموعة الحدوديات جميعا • ان Y ليس مغلقا في X • (لماذا ؟)

ثمة خاصة هامة أخرى للفضاء المتجهي منتهي البعد X تتلخص في أن جميع النظائم على X تولد الطبولوجيا نفسها على X (راجع البند ١ـ٣) ، أي أن كل المجموعات المفتوحة في X هي نفسها بغض النظر عن الاختيار الخاص لنظيم على X • أما تفصيل هذا الامر فهو وارد في ثنايا المبرهنة التالية :

٢ـ٤ـ٤ تعريف (النظائم المتكافئة)

نقول عن نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي X انه **مكافـىء** للنظيم $\|\cdot\|_0$ على X اذا وجد عددان موجبان a و b بحيث يتحقق الشرط

$$a\|x\|_0 \leqq \|x\| \leqq b\|x\|_0. \tag{3}$$ ∎

أيا كان x من X •

وتفسر الحقيقة التالية سبب تبنينا لهذا التعريف •

يحدد النظيمان المتكافئان على X طبولوجيا واحدة على X •

وفي الحقيقة ، فان هذا الامر ناتج من (3) ومـــن أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية هي اجتماع لكرات مفتوحة (راجع المسألة ٤ من البند ١ــ٣) • سنترك تفاصيل ايراد البرهـــان للقارىء (المسألة ٤) الذي يمكـــن أن يثبت أيضا بـــأن متتاليات كوشي في الفضاءين $(X, \|\cdot\|)$ و $(X, \|\cdot\|_0)$ واحدة (المسألة ٥) •
ويمكننا باستخدام التمهيدية ٢ــ٤ــ١ أن نثبت صحة المبرهنة التالية(التي لاتصح في حال الفضاءات غير منتهية البعد) •

مبرهنة (النظائم المتكافئة)

كل نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي منتهي البعد X لابد أن يكافىء اي نظيم آخـــر $\|\cdot\|_0$ على X •

البرهـــان :

لنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ أي قاعدة للفضاء X • عندئـــذ يكون لكل x من X تمثيل وحيد

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

ونجد استنادا الى التمهيدية ٢ــ٤ــ١ أن هنالك عددا موجبا c بحيـــث يكون

$$\|x\| \geqq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

كذلك ، فان متباينة المثلث تعطي

$$\|x\|_0 \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leqq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad k = \max_j \|e_j\|_0.$$

يترتب على ما سبق أن $a\|x\|_0 \leqq \|x\|$ حيث $a = c/k > 0$ • أما المتباينة الاخرى في (3) فنجدها بجعل كل من النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ يلعب دور الآخر في المناقشة الســـابقة • ∎

لهذه النظرية أهمية تطبيقية كبيرة • فهي تقتضي مثلا أن تقارب أو تباعـــد

متتالية في فضاء متجهي منتهي البعد لا يتعلق بالاختيار الخاص للنظيم الذي نزود بــه الفضـــاء •

مســائل

١ ــ أعط أمثلة على فضاءات جزئية غير مغلقة من l^∞ و l^2 •

٢ ــ ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد c في (1) في كل مما يلي : (آ) $X = \mathbb{R}^2$ و $x_1 = (1, 0)$ و $x_2 = (0, 1)$ ، (ب) $X = \mathbb{R}^3$ و $x_1 = (1, 0, 0)$ و $x_2 = (0, 1, 0)$ و $x_3 = (0, 0, 1)$ ؟

٣ ــ أثبت أن موضوعات علاقة التكافؤ تصح في التعريف ٢ــ٤ــ٤ •

٤ ــ بيّن أن النظائم المتكافئة على فضاء متجه X تولد طبولوجيا واحدة على X •

٥ ــ اذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمين متكافئين على X ، فبين أن متتاليات كوشي واحدة في الفضاءين $(X, \|\cdot\|)$ و $(X, \|\cdot\|_0)$ •

٦ ــ يترتب على المبرهنة ٢ــ٤ــ٥ أن النظيمين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ متكافئان • أعط برهانا مباشرا على صحة هذا الامر •

٧ ــ ليكن $\|\cdot\|_2$ نظيما كما في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ ، ولنفترض أن $\|\cdot\|$ أي نظيم على ذلك الفضاءالمتجهي، وليكن X • أثبت مباشرة (دون اللجوء الى ٢ــ٤ــ٥) وجود عــدد موجب b بحيــث يكــون $\|x\| \leqq b\|x\|_2$ أيــا كــان x •

٨ ــ بين أن النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ يحققان الشرط

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq \|x\|_1.$$

٩ ــ اذا كان النظيمان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ على فضاء متجهي X متكافئين ، فبين صحة ما يلي : (i) $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ تقتضي (ii) $\|x_n - x\|_0 \longrightarrow 0$ (وبالعكس طبعا) •

١٠ــ أثبت أن كل المصفوفات $A=(\alpha_{jk})$ من المرتبة $m\times n$ ، حيث m و n عددان مثبتان تشكل فضاء متجهيا Z بعده mn • بين بأن كل النظائم على Z متكافئة • ما هي مشابهات النظائم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ الواردة في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ في حالة الفضاء الحالي Z ؟

٢ــ٥ التراص والبعد المنتهي

هنالك خواص قليلة أساسية أخرى للفضاءات المنظمة منتهية البعد وللفضاءات الجزئية منها ترتبط بمفهوم التراص ، الذي نعرفه على النحو التالي •

٢ــ٥ــ١ تعريف (التراص)

نقول عن فضاء متري X انه متراص* اذا حوت كل متتالية في X متتالية جزئية متقاربة • ونقول عن مجموعة جزئية M من X انها متراصة اذا كانت M متراصة باعتبارها فضاء جزئيا من X ، أي اذا حوت كل متتالية في M متتالية جزئية نهايتها عنصر من M • ∎

وتقدم التمهيدية التالية سمة عامة للمجموعات المتراصة •

٢ــ٥ــ٢ تمهيدية (التراص)

كل مجموعة جزئية M من فضاء متري مغلقة ومحدودة •

البرهان :

من المعلوم استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ أنه اذا كان x عنصرا ما من $\bar{M}$

(*) وبصورة ادق ، إنه **متراص تتابعيا** • وهذا هو اهم نوع من انواع التراص في التحليل الرياضي • ومن الجدير بالذكر ان ثمة نوعين اخرين من التراص، بيد أن أنواع التراص الثلاثة المختلفة تتطابق في الفضاءات المترية ، وبالتالي فان التمييز بينها غير وارد في أبحاثنا •

فتوجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • ولما كانت M متراصة ، فان $x \in M$ ، الامر الذي يعني أن M مغلقة نظرا لكون العنصر x من $\bar{M}$ كيفيا • لننتقل الى اثبات محدودية M • اذا افترضنا مؤقتا أن M غير محدودة ، فلابد أن تحوي عندئذ متتالية غير محدودة (y_n) بحيث يكون $d(y_n, b) > n$ ، بافتراض b أي عنصر مثبت • ان هذه المتتالية لا يمكن أن تحوي متتالية جزئية متقاربة ، ذلك أن كل متتالية جزئية متقاربة يجب أن تكون محدودة وفق التمهيدية ١ــ٤ــ٢ • ∎

ان عكس هذه التمهيدية غير صحيح بعامة •

البرهــان :

لاثبات هذه الدعوى الهامة ، نأخذ المتتالية (e_n) في l^2 ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ متتالية حدها ذو الترتيب n يساوي 1 في حين تكون حدودها الاخرى جميعا مساوية 0 • (راجع (٤) من البند ٢ــ٣) • ان هذه المتتالية محدودة لان $\|e_n\| = 1$ ، كما تشكل حدودها مجموعة مغلقة لعدم وجود نقطة تراكم لها • كذلك ، فان هذه المجموعة ليست متراصة للسبب نفسه • ∎

أما في حال الفضاءات المنظمة المنتهية ، فنجد ما يلي :

٢ــ٥ــ٣ مبرهنة (التراص)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم منتهي البعد متراصة هو أن تكون M مغلقة ومحدودة •

البرهــان :

ان التراص يقتضي الانغلاق والمحدودية كما رأينا في التمهيدية ٢ــ٥ــ٢ ، وسنبرهن الآن على العكس • لتكن M مغلقة ومحدودة ، ولنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X • لنأخذ المتتالية (x_m) في M • عندئذ يوجد لكل x_m التمثيل

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت M محدودة ، فان (x_m) تكون كذلك ، ولنفترض مثلا أن $\|x_m\| \leqq k$ أيا كان m • لذا فانه يترتب على التمهيدية ٢ـ٤ـ١ أن

$$k \geqq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geqq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|$$

حيث c عدد موجب • نستنتج من هذا أن المتتالية العددية $(\xi_j^{(m)})$ (j مثبت) محدودة ، وانه استنادا الى مبرهنة بولزانو ـ ڤيرشتراس يوجد لها نقطة تراكم ξ_j (لدينا هنا $1 \leqq j \leqq n$) • نستخلص من هذا كما فعلنا في برهان التمهيدية ٢ـ٤ـ١ أن (x_m) تحوي متتالية جزئية (z_m) تتقارب من $z = \sum \xi_j e_j$ • وبما أن M مغلقة ، فان $z \in M$ ، وهذا يبين أنه يوجد لكل متتالية كيفية (x_m) في M متتالية جزئية تتقارب في M ، الامر الذي يقتضي كون M متراصة • ∎

تبين محاكمتنا السابقة أن المجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$ (أو في فضاء منظم آخر منتهي البعد) هي بالضبط تلك المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة، وبالتالي ، فان خاصة الانغلاق والمحدودية يمكن أن تسخر لتعريف التراص ، علما بأن هذا الامر لا يسري على حالة الفضاءات المنظمة غير منتهية البعد •

وتمدنا التمهيدية التالية التي تعزى الى ريس (عام ١٩١٨) بمعين آخر من نتائج هامة أخرى •

٢ـ٥ـ٤ تمهيدية ف• ريس

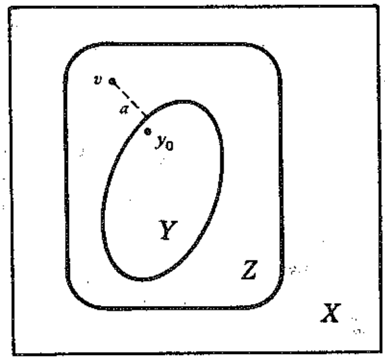
ليكن Z و Y فضاءين جزئيين من فضاء منظم X (أيا كان بعده) ، ولنفرض أن Y مغلق ومحتوى تماما في Z • عندئذ يوجد لكل عدد حقيقي θ من الفترة $(0,1)$ عنصر z من Z بحيث أن

$$\|z\| = 1 \quad ، \qquad \|z - y\| \geqq \theta \quad \text{لكل } y \in Y.$$

البرهـان :

ليكن $v \in Z - Y$ ، ولنرمز لبعد v عن Y بالعدد a ، أي أن (راجع الشكل ١٩)

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$



الشكل (١٩) . تبيان الرموز الواردة في تمهيدية ريس

من الواضح أن $a > 0$ لكون Y مغلقا . لنأخذ الآن أي θ من $(0, 1)$. عندئذ نجد وفق تعريف الحد الادنى أنه يوجد y_0 من Y بحيث أن

$$a \leqq \|v - y_0\| \leqq \frac{a}{\theta} \qquad (1)$$

(لاحظ أن $a/\theta > a$ نظرا لكون $0 < \theta < 1$) . لنفترض أن

$$c = \frac{1}{\|v - y_0\|} \quad \text{حيث} \quad z = c(v - y_0)$$

عندئذ يكون $\|z\| = 1$ ، وسنبين الآن أن $\|z - y\| \geqq \theta$ أيا كان y من Y . لدينا

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\,\|v - y_0 - c^{-1} y\| \\ &= c\,\|v - y_1\| \end{aligned}$$

حيث

$$y_1 = y_0 + c^{-1} y.$$

وبما أن عبارة y_1 تبين أن y_1 عنصر من Y ، فاننا نجد أن $a \geqq \|v-y_1\|$ استنادا الى تعريف a • ونجد بوضع c خارجا واستعمال (1) أن

$$\|z-y\| = c\,\|v-y_1\| \geqq ca = \frac{a}{\|v-y_0\|} \geqq \frac{a}{a/\theta} = \theta.$$

وبما أن y عنصر اختياري من Y ، فاننا نكون قد أكملنا البرهان • ∎

ان الكرات المغلقة الواحدية في فضاء منظم منتهي البعد متراصة وفق المبرهنة ٢ـ٥ـ٣ • وبالعكس ، فان تمهيدية ريس تمدنا بالمبرهنة الهامة والشهيرة التاليـة •

٢ـ٥ـ٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

اذا اتصف فضاء منظم X بان كانت الكرة الواحدية المغلقة $M = \{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ متراصة فيه ، فان X منتهي البعد •

البرهـان :

لنفترض أن M متراصة ، الا أن $\dim X = \infty$ ، ولنبين أن هـذا يؤدي الـى تناقض • لنختر أي عنصر x_1 نظيمه 1 • ان هذا العنصر يولـد فضاء جزئيا X_1 وحيد البعد في X ، وهذا الفضاء الجزئي مغلق وفق ٢ـ٤ـ٣ ، ومحتوى تماما في X نظرا لكون $\dim X = \infty$ • واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_2 من X نظيمه 1 بحيث يكون

$$\|x_2 - x_1\| \geqq \theta = \frac{1}{2}.$$

ان العنصرين x_1 و x_2 يولدان فضاء جزئيا X_2 ثنائي البعد مغلقا ومحتوى تماما في X • واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_3 من X نظيمه 1 بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من X_2 فان

$$\|x_3 - x\| \geqq \frac{1}{2}.$$

وبوجه خاص نجد أن

$$\|x_3 - x_1\| \geqq \frac{1}{2},$$

$$\|x_3 - x_2\| \geqq \frac{1}{2}.$$

واذا تابعنا هذا بالتدرج نجد متتالية (x_n) من عناصر M بحيث أن

$$\|x_m - x_n\| \geqq \frac{1}{2} \qquad (m \neq n).$$

ومن الواضح أن (x_n) لا يمكن أن تكون متتالية جزئية متقاربة ، وهذا يناقض حقيقة كون M متراصة . لذا فان افتراضنا بأن $\dim X = \infty$ غير صحيح ، وبالتالي فـان $\dim X < \infty$. ∎

لهذه المبرهنة تطبيقات متنوعة ، وسنستخدمها في الفصل الثامن كأداة أساسية لدى دراستنا لما يسمى بالمؤثرات المتراصة .

ان أهمية المجموعات المتراصة تعود الى « سلوكها الجيد » ، فان لها خواص أساسية عديدة مشابهة لخواص المجموعات المنتهية ، وهذه الخواص لا تتمتع بها المجموعات غير المتراصة . وفيما يتعلق بالتطبيقات المستمرة ، فان احدى الخواص الرئيسية تنص على أن صور المجموعات المتراصة هي مجموعات متراصة ، الامر الذي يشكل موضوع المبرهنة التالية .

٢-٥-٦ مبرهنة (التطبيق المستمر)

ليكن X و Y فضاءين متريين و $T\colon X \longrightarrow Y$ تطبيقا مستمرا (١-٣-٣) . عندئذ تكون صورة مجموعة جزئية متراصة M من X وفق T متراصة .

البرهـان :

يكفي استنادا الى تعريف التراص أن نبين بأن كل متتالية (y_n) في الصورة $T(M) \subset Y$ تحوي متتالية جزئية تتقارب في $T(M)$. بما أن $y_n \in T(M)$ ، فبوجد

عنصر x_n من M بحيث يكون $y_n = Tx_n$ • ولما كانت M متراصة ، فـان (x_n) تحوي متتالية جزئية (x_{n_k}) تتقارب في M • ان صورة (x_{n_k}) هي متتالية جزئية من (y_n) ، وهذه المتتالية الجزئية لابد أ نتتقارب في $T(M)$ وفـق ١ــ٤ــ٨ نظرا لكون T مستمرا • لذا فان $T(M)$ متراصة • ∎

نستنتج من هذه المبرهنة أن الخاصة التاليـة ، والمعروفة في نظرية الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي ، تظل صحيحة في الفضاءات المترية •

٢ــ٥ــ٧ نتيجة (القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

ان التطبيق المستمر T لمجموعة جزئية متراصة M مـن فضاء متري X في الفضاء $\mathbf{R}$ يدرك قيمته العظمى وقيمته الصغرى في نقطتين من M •

البرهـان :

ان المجموعة $T(M) \subset \mathbf{R}$ متراصة وفق المبرهنة ٢ــ٥ــ٦ ، وهذه المجموعـة مغلقة ومحدودة استنادا الى التمهيدية ٢ــ٥ــ٢ [لدى تطبيقها على $T(M)$] • لذا فان $\inf T(M) \in T(M)$ ، $\sup T(M) \in T(M)$ ، كما أن الصورتين العكسيتين لهاتين النقطتين تتألفان من تلك النقاط في M التي يدرك فيها Tx قيمة صغرى أو قيمة عظمى على الترتيب • ∎

مسـائل

١ ــ بيّن أن $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ ليسا متراصين •

٢ ــ أثبت أن الفضاء المتري المنقطع (١ــ١ــ٨) المؤلف من عدد غير منته مـن النقاط ليس متراصا •

٣ ــ أورد أمثلة على منحنيات متراصة وأخرى غير متراصة في المستوي $\mathbf{R}^2$ •

٤ ــ أثبت أنه كي تكون مجموعة جزئية غير منتهية M في الفضاء s (٢ــ٢ــ٨)

متراصة ، فمن الضروري وجود أعداد γ_1 و γ_2 و ••• بحيث أنه اذا كان $x=(\xi_k(x))\in M$ ، فان $|\xi_k(x)|\leqq\gamma_k$ • (يمكن البرهان على أن هذا الشرط كافٍ أيضا كي تكون M متراصة) •

٥ ــ (**التراص الموضعي**) • نقول عن فضاء متري X انــه **متراص موضعيا** اذا وجد لكل نقطة من X جوار متراص • بين أن الفضاءين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بــل الفضاءين $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ متراصان موضعيا •

٦ ــ أثبت أن الفضاء المتري المتراص X متراص موضعيا •

٧ ــ اذا كان $\dim Y<\infty$ في تمهيدية ريس ٢ــ٥ــ٤ ، فأثبت أنــه يمكن حينئذ اختيــار $\theta=1$ أيضــا •

٨ ــ بيّن في المسألة ٧ من البند ٢ــ٤ بصورة مباشــرة (ودون اللجوء الــى ٢ــ٤ــ٥) أن هنالك عددا $a>0$ بحيث أن $a\|x\|_2\leqq\|x\|$ (استخدم ٢ــ٥ــ٧)•

٩ ــ اذا كان X فضاء متريا متراصا ، وكانت M مجموعة جزئية مغلقة في X ، فبين أن M متراصة •

١٠ــ ليكن X و Y فضاءين متريين و X فضاء متراصا • برهن أنه اذا كــان $T: X \longrightarrow Y$ تطبيقــا متباينا وغامــرا ومستمرا ، فــان T هوميومورفيزم (المسألة ٥ من البند ١ــ٦) •

٢ــ٦ المؤثــرات الخطيــة

ندرس في التحليل الحقيقي المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ والدوال الحقيقية عليه (أو على جزء من $\mathbb{R}$) • من الواضح أن كلا من هذه الدوال هو تطبيق ساحته في $\mathbb{R}$ • أما في التحليل الدالي فاننا ندرس فضاءات أعم ، مثل الفضاءات المتريــة والفضاءات المنظمة ، والتطبيقات لهذه الفضاءات •

وفي حالة الفضاءات المتجهية ، وبوجــه خاص ، الفضاءات المنظمة ، فــان التطبيق يدعى **مؤثــرا** •

ثمة مؤثرات ذات أهمية خاصة لكونها « تحفـظ » عمليتي الفضاء المتجهي الجبريتين ، الامر الذي يوضحه التعريف التالي ٠

٢ـ٦ـ١ تعريف (المؤثر الخطي)

المؤثر الخطي T هو مؤثر يحقق الشروط التالية :

(i) الساحة $\mathscr{D}(T)$ للمؤثر T فضاء متجهي ، والمدى $\mathscr{R}(T)$ يقع في فضاء متجهي على الحقل نفسه ٠

(ii) اذا كان x و y أي عنصرين من $\mathscr{D}(T)$ و α أي عدد فان

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx+Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{1}$$

∎

ويجدر بنا توجيه النظر الى **الرموز** المستعملة ٠ فاننا نكتب Tx عوضا عن $T(x)$ ، وهذا التبسيط متفق عليه في التحليل الدالي ٠كذلك، **فاننا سنستعمل فيما تبقى من الكتاب الرموز التالية :**

$\mathscr{D}(T)$ للدلالة على ساحة T ٠

$\mathscr{R}(T)$ للدلالة على مدى T ٠

$\mathscr{N}(T)$ للدلالة على الفضاء الصفري لـ T ٠

والفضاء الصفري لـ T هو بالتعريف مجموعة كل العناصر x مـن $\mathscr{D}(T)$ التي تحقق الشرط $Tx=0$ ٠ (وثمة كلمة أخرى تستعمل للدلالة عـلى الفضاء الصفري هي « النواة » ٠ الا أننا لن تتبنى هذه التسمية ، ذلك أننا سنحتفظ بها لغرض آخر في نظرية المعادلات التكاملية) ٠

علينا كذلك أن نقول شيئا عن استعمال الاسهم فيما يتعلق بالمؤثرات ٠ ليكن $\mathscr{D}(T)\subset X$ و $\mathscr{R}(T)\subset Y$ حيـث X و Y فضاءان متجهيان ، كلاهما حقيقي أو عقدي ٠ عندئذ يكون T مؤثـرا مـن $\mathscr{D}(T)$ (أي تطبيقـا لـ $\mathscr{D}(T)$) عـلى $\mathscr{R}(T)$ ، ونكتـب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{R}(T),$$

أو مؤثرا من $\mathfrak{D}(T)$ في Y ، ونكتب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y.$$

واذا كان $\mathfrak{D}(T)$ هو الفضاء الكلي X ، عندئذ (وعندئذ فقط) نكتب

$$T: X \longrightarrow Y.$$

ومن الواضح أن الشرطين (1) يكافئان الشرط

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{2}$$

فاذا أخذنا $\alpha = 0$ في (1) ، وجدنا الدستور التالي الذي نحتاج اليه مرارا في أبحاثنا المقبلة

$$T0 = 0. \tag{3}$$

يعبر الدستور (1) عن أن المؤثر الخطي T **هو مومورفيزم** (أو **تشاكل**)لفضاء متجهي (هو ساحة T) في فضاء متجهي آخـر ، أي أن T تحفظ عمليتي الفضاء المتجهي بالمعنى التالي: نجري أولا في اليسار من (1) عملية فضاء متجهي(عملية الجمع أو عملية الضرب بعدد) ، ومن ثم نأخذ صورة المتجه الناتج وفق T في Y ، في حين أننا في اليمين من (1) ، نأخذ أولا صورتي x و y وفق T في Y ، ومن ثم نجري عمليتي الفضاء المتجهي في Y ، وفي كلتا الحالين تكون النتيجة واحدة . ان هذه الخاصة تجعل المؤثرات الخطية تطبيقات هامــة . كذلك ، فان أهميــة الفضاءات المتجهية في التحليل الدالي تعزى بصورة أساسية للمؤثرات الخطيــة المعرفــة عليهــا .

سنورد الآن أمثلة أساسية على المؤثرات الخطية ، ونترك للقارىء التحــقق من خطية المؤثرات في كل حالة .

أمثلـة

٢ـ٦ـ٢ المؤثـر المطابق

يعرف **المؤثر المطابق** $I_X : X \longrightarrow X$ بالمساواة $I_X x = x$ أيا كان x من X •
سنكتب أيضا I فقط للدلالة على I_X ، وعندئذ يكون $Ix = x$ •

٢ـ٦ـ٣ المؤثر الصفري

يعرف **المؤثر الصفري** $0 : X \longrightarrow Y$ بالمساواة $0x = 0$ أيا كان x من X •

٢ـ٦ـ٤ المفاضلة

ليكن X الفضاء المتجهي لكل الحدوديات على $[a, b]$ • من الممكن أن نعرف مؤثرا خطيا T على X بأن نضع

$$Tx(t) = x'(t)$$

أيا كان x من X ، حيث تعني الفتحة فـوق x مشتق x بالنسبة الـى t •
والمؤثر T هنا هو تطبيق لـ X على X •

٢ـ٦ـ٥ المكاملـة

من الممكن تعريف مؤثر خطي T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau \qquad t \in [a, b].$$

٢ـ٦ـ٦ الضرب بـ t

يمكن تعريف مؤثر خطي آخر T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = tx(t).$$

ويلعب هذا المؤثر دورا في الفيزياء (نظريــة الكم) ، الامــر الذي سنراه في الفصل الحادي عشر •

٢ــ٦ــ٧ جبر المتجهات الابتدائي

يحدد **الجداء المتجهي** عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيــا $T_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ كذلــك فــان **الجداء العددي** يحدد عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيــا $T_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، كأن يكون مثلا

$$T_2 x = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$$

حيث $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ متجه مثبت •

٢ــ٦ــ٨ المصفوفات

تعرف **المصفوفة** الحقيقية $A = (\alpha_{jk})$ ، التي عدد أسطرها r وعدد اعمدتها n ، مؤثرا خطيا $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ عن طريق المساواة

$$y = Ax$$

حيث $x = (\xi_j)$ متجه ذو n من المركبات و $y = (\eta_j)$ متجــه ذو r من المركبات ، وحيث يكتب هذان المتجهان على شكل متجهين عموديين ، الامر الذي يتفق مع الاجماع المألوف في ضــرب المصفوفات • عندئذ يمكن كتابــة المساواة $y = Ax$ بالشـــكل

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

ان T خطي نظرا لكون عملية ضرب المصفوفات خطية • واذا كانت A عقدية ، فانها تعرف مؤثرا خطيا من $\mathbb{C}^n$ في $\mathbb{C}^r$ • هــذا وسنورد مناقشة مفصلة حــول دور المصفوفات فيما يتعلق بالمؤثرات الخطية في البند ٢ــ٩ • ∎

يمكننا التحقق بسهولة في هذه الامثلة بأن كلا من المدى والفضاء الصفري للمؤثرات الخطية الواردة هي فضاءات خطية . ان هذه حقيقة عامة ، ولا تقتصر على الامثلة السابقة ، وسنبرهن الآن على صحتها ، ونرى كيف يمكن الافادة من الخطية في البراهين البسيطة . أما المبرهنة نفسها ، فسيكون لها تطبيقات متنوعة في أبحاثنا المقبلة .

٢-٦-٩ مبرهنة (المدى والفضاء الصفري)

اذا كان T مؤثرا خطيا ، فاننا نجد ما يلي :

(آ) المدى $\mathscr{R}(T)$ هو فضاء متجهي .

(ب) اذا كان $\dim \mathscr{D}(T) = n < \infty$ ، فان $\dim \mathscr{R}(T) \leqq n$.

(جـ) الفضاء الصفري $\mathscr{N}(T)$ هو فضاء متجهي .

البرهـان :

(آ) نأخذ أي عنصرين y_1 و y_2 من $\mathscr{R}(T)$ ، ونبين أنه أيا كان العددان α و β فان $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)$. لما كان $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(T)$ ، فهنالك عنصران $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$ ، كما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathscr{D}(T)$ نظرا لكون $\mathscr{D}(T)$ فضاء متجهيا . ان خطية T تقتضي أن يكون

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

اذن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)$. وبما أن العنصرين y_1 و y_2 من $\mathscr{R}(T)$ كيفيـان ، وأن العددين α و β كيفيان ، فان $\mathscr{R}(T)$ فضاء متجهي حقا .

(ب) لنختر المتجهات y_1 و .... و y_{n+1} من $\mathscr{R}(T)$ ، التي عددها $n+1$ ، بصورة كيفية . عندها توجد عناصر x_1 و ... و x_{n+1} في $\mathscr{D}(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1$ و .... و $y_{n+1} = Tx_{n+1}$. ولما كان $\dim \mathscr{D}(T) = n$ ، فان المجموعة $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ لابد أن تكون مرتبطة خطيا . وبالتالي فان

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

حيث $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ أعداد أحدها على الأقل مغاير للصفر • وبما أن T خطي وأن $T0=0$ ، فاننا نجد بتطبيق T على طرفي المساواة السابقة أن

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

وهذا يبين أن $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ مجموعة مرتبطـة خطيا لان الاعـداد α_j ليست مساوية للصفر معا • واذا تذكرنا بأن هذه المجموعة الجزئية من $\mathscr{R}(T)$ اختيرت بصورة كيفية ، فاننا نستنتج أن $\mathscr{R}(T)$ لا يحوي مجموعة جزئية مستقلة خطيـا مؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر ، وهذا يعني تعريفا أن $\dim \mathscr{R}(T) \leqq n$ •

(جـ) لنأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $\mathcal{N}(T)$ • عندئذ يكون $Tx_1 = Tx_2 = 0$ وبما أن T خطي ، فاننا نجد أن

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0.$$

أيا كان العددان α و β ، وهذا يبين بأن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$ • وبالتالي فان $\mathcal{N}(T)$ فضـاء متجهـي • ∎

وتجدر بنا الاشارة الى النتيجة المباشرة التالية من القسم (ب) من البرهان :

ان المؤثرات الخطية تحفظ الارتباط الخطي •

لننتقل الى عكس مؤثر خطي • نحن نذكـر أولا بأنه يقال عـن تطبيـق $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ بأنه متبايـن اذا كان للنقاط المختلفة من ساحته صور مختلفة، أي أنه اذا كان $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$ ، فان

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2; \qquad (4)$$

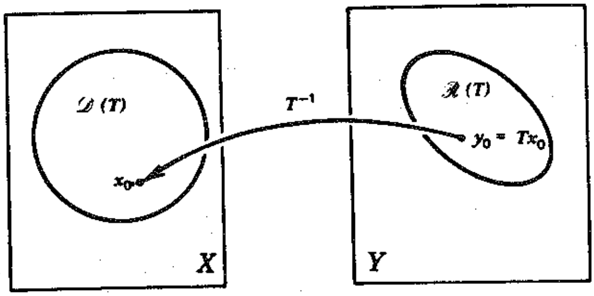
وهذا يكافىء قولنا أن

$$Tx_1 = Tx_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2. \qquad (4^*)$$

وفي هذه الحالة يوجد التطبيق

$$T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T) \tag{5}$$
$$y_0 \longmapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)$$

الذي ينقل كل نقطة y_0 في $\mathcal{R}(T)$ الى النقطــة x_0 في $\mathcal{D}(T)$ بحيث يكــون $Tx_0 = y_0$ (انظر الى الشكل ٢٠) • يسمى التطبيق T^{-1} **التطبيق العكسي** لـ T •



الشكل (٢٠) . الرموز المتعلقة بالتطبيق العكسي

من الواضح أن (5) تقتضي

$T^{-1}Tx = x$ أيا كان x من $\mathcal{D}(T)$

$TT^{-1}y = y$ أيا كان y من $\mathcal{R}(T)$

هذا ، ونقابل في صدد المؤثرات الخطية على الفضاءات المتجهية الوضع التالي: الشرط اللازم والكافي لوجود عكس مؤثر خطي هو أن يكون الفضاء الصفري للمؤثر مؤلفا من المتجه الصفري دون غيره • وبصورة أدق فانه يرد المعيار المفيد التالي الذي سنستعمله مرارا في أبحاثنا القادمة •

٢ـ٦ـ١٠ مبرهنة (المؤثر العكسي)

ليكن X و Y فضاءين متجهيين كلاهما حقيقي او عقدي ، وليكن $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ مؤثرا خطيا ساحته $\mathcal{D}(T) \subset X$ ومداه $\mathcal{R}(T) \subset Y$ • عندئذ نجد ما يلي :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: \mathfrak{R}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T)$ موجودا هو ان يكون

$$Tx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

(ب) اذا كان T^{-1} موجودا ، فانه مؤثر خطي .

(ج) اذا كـــان $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$ ، وكـــان T^{-1} موجـودا ، فـــان $\dim \mathfrak{R}(T) = \dim \mathfrak{D}(T)$.

البرهـــان :

(آ) لنفترض أن $Tx = 0$ تقتضي $x = 0$. عندئذ نجد نظـــرا لكون T خطيا أن المساواة $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

وبالتالي فان $x_1 - x_2 = 0$ استنادا الى الفرض . يترتب على هـــذا أن $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي $x_1 = x_2$ ، وأن T^{-1} موجود استنادا الى (*4) . وبالعكس ، فاذا كان T^{-1} موجودا ، فان (*4) صحيحة . نستنتج من (*4) عند وضع $x_2 = 0$ ومن (3) أن

$$Tx_1 = T0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0.$$

وبذا يكتمل اثبات (آ) .

(ب) سنفترض أن T^{-1} موجود ، ونبين أن T^{-1} يكون عندئذ خطيا . إن ساحة T^{-1} هي $\mathfrak{R}(T)$ ، وهي فضاء خطي استنادا الى الشـــق (آ) من المبرهنـــة ٢ــ٦ــ٩ . لنأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $\mathfrak{D}(T)$ وصورتيهما

$$y_1 = Tx_1 \qquad \text{و} \qquad y_2 = Tx_2$$

عندئـــذ يكـــون

$$x_1 = T^{-1}y_1 \qquad \text{و} \qquad x_2 = T^{-1}y_2$$

وبما أن T خطي ، فاننا نجد أنه أيا كان العددان α و β ، فان

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

ونظرا لكون $x_i = T^{-1} y_i$ ، فـان

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

وهذا يثبت أن T^{-1} خطي ٠

(جـ) لدينا اعتمادا على الشق (ب) من المبرهنة ٢ـ٦ـ٩ المتباينة $\dim \mathfrak{R}(T) \leqq \dim \mathfrak{D}(T)$ والمتباينة $\dim \mathfrak{D}(T) \leqq \dim \mathfrak{R}(T)$ اعتمادا على المبرهنة عينها لدى تطبيقها على T^{-1} ٠ ∎

سنورد الآن قاعدة مفيدة بشأن عكس مركب مؤثرين خطيين ٠ (لعل القارىء قد سبق وتعرف اليها في حال المصفوفات المربعة) ٠

٢ـ٦ـ١١ تمهيدية (عكس الجداء)

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ و $S: Y \longrightarrow Z$ مؤثرين خطيين متباينين وغامرين ، حيث X و Y و Z فضاءات متجهية (انظر الى الشكل ٢١) ٠ عندئذ يكون العكس $(ST)^{-1}: Z \longrightarrow X$ للجداء ST (اي للمركب ST) موجودا ، ويكون

$$(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}. \qquad (6)$$

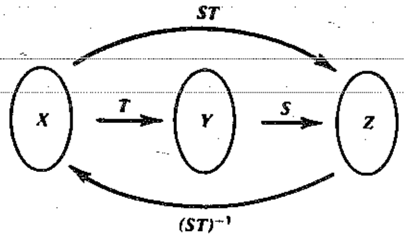
البرهـان :

لما كان المؤثر $ST: X \longrightarrow Z$ متباينا وغامرا ، فان $(ST)^{-1}$ موجود ٠ لذا فان

$$ST(ST)^{-1} = I_Z$$

حيث I_Z هو المؤثر المطابق علـى Z ٠ وبتطبيـق S^{-1} واستعمال $S^{-1}S = I_Y$ (حيث I_Y هو المؤثر المطابق على Y) ، فاننا نجد أن

$$S^{-1} ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1} I_Z = S^{-1}.$$



الشكل (٢١) ، الرموز الواردة في التمهيدية ٢ـ٦ـ١١

فاذا طبقنا T^{-1} وأفدنا من أن $T^{-1}T = I_X$ ، فاننا نجد النتيجة المبتغاة وهي

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

وبذا يكتمل البرهان ، ∎

مســائل

١ ــ بين أن المؤثرات الواردة في ٢ـ٦ـ٢ و ٢ـ٦ـ٣ و ٢ـ٦ـ٤ خطية ،

٢ ــ أثبت أن المؤثرات $T_1, \ldots, T_4$ من $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^2$ المعرفة كما يلي :

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1, 0)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (0, \xi_2)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_2, \xi_1)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2)$$

على التوالي ، هي مؤثرات خطية ، أعط تأويلا هندسيا لكل منها ،

٣ ــ حدد الساحة والمدى والفضاء الصفري لكل من المؤثرات $T_1, T_2,$ و في المسألة ٢ ،

٤ ــ ما هو الفضاء الصفري للمؤثر T_4 في المسألة ٢ ، وللمؤثرين T_1 و T_2 في ٢ـ٦ـ٧ ، وللمؤثر T في ٢ـ٦ـ٤ ؟

٥ ــ ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا • بين أن الصورة لفضاء جزئي V من X هي فضاء متجهي ، وأنه كذلك تكون الصورة العكسية لفضاء جزئي W من Y •

٦ ــ اذا كان جداء (مركب) مؤثرين خطيين موجودا ، فبين أنه خطي •

٧ ــ (**الخاصة التبديلية**) ليكن X فضاء متجهيا و $S: X \longrightarrow X$ و $T: X \longrightarrow X$ أي مؤثرين • نقول عن S و T انهما **تبديليان** اذا كان $ST = TS$ ، أي اذا كان $(ST)x = (TS)x$ أيا كان x من X • هل نستنتج من هذا التعريف أن T_1 و T_2 من المسألة ٢ تبديليان ؟

٨ ــ اكتب المؤثرين في المسألة ٢ مستعملا مصفوفات 2×2 •

٩ ــ اكتب $y = Ax$ في ٢ــ٦ــ٨ بدلالة المركبات ، وبين أن T خطي ، ثم أعط أمثلة على ذلك •

١٠ــ أورد صياغة للشرط الوارد في (آ) من ٢ــ٦ــ١٠ بدلالة الفضاء الصفري لـ T •

١١ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل المصفوفات العقدية 2×2 ، ولنعرف $T: X \longrightarrow X$ بالمساواة $Tx = bx$ ، حيث b عنصر مثبت في X ، وحيث نرمز بـ bx الى الجداء المألوف لمصفوفتين • بين أن T خطي • حدد شروط وجود T^{-1} •

١٢ــ هل عكس المؤثر T في ٢ــ٦ــ٤ موجود ؟

١٣ــ ليكن $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا عكسه موجود • فاذا كانت $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في $\mathscr{D}(T)$ ، فبين بأن المجموعة $\{Tx_1, \cdots, Tx_n\}$ تكون مستقلة خطيا •

١٤ــ اذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا وكان $\dim X = \dim Y = n < \infty$ ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون T^{-1} موجودا هو أن يكون $\mathscr{R}(T) = Y$ •

١٥ــ لنأخذ الفضاء المتجهي X المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$

والتي لها مشتقات من جميع المراتب في كل نقطة من $\mathbf{R}$ ، ولنعرف $T: X \longrightarrow X$ بالمساواة $y(t) = Tx(t) = x'(t)$ • أثبت أن $\mathscr{R}(T)$ يساوي X بأكمله ، الا أن T^{-1} ليس موجودا • قارن هذا بالمسألة ١٤ واعط التعليق المناسب •

٢ـ٧ المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة

لعل القارىء قد لاحظ أننا لم نستعمل النظائم في البند السابق كله • أما الآن فسندخل النظائم في اعتبارنا ، وذلك في التعريف الاساسي التالي •

٢ـ٧ـ١ تعريف (المؤثر الخطي المحدود)

ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا حيث $\mathscr{D}(T) \subset X$ • نقول عن المؤثر T انه **محدود** اذا وجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق المتباينة

$$\|Tx\| \leqq c\|x\|. \qquad (1)$$

أيا كان x من $\mathscr{D}(T)$ • ∎

ان النظيم الوارد في الطرف الايسر من (1) هو ذاك المعرف على Y ، كما أن النظيم في الطرف الايمن هو ذاك المعرف على X • وقد رمزنا لكلا النظيمين بصيغة واحدة $\|\cdot\|$ وذلك بقصد التبسيط ، ودون أن يكون ثمة أي خطر للبس • ان التمييز باستعمال الادلة الدنيا ($\|x\|_0$ و $\|Tx\|_1$ و •••) يبدو غير ضروري هنا • ويبين الدستور (1) أن المؤثر الخطي المحدود ينقل المجموعات المحدودة في $\mathscr{D}(T)$ الى مجموعات في محدودة Y ، وهذا ما حدا بالباحثين لتبني تسمية « المؤثر المحدود » •

تحذيـر :

تجدر الاشارة في هذا الصدد الى أن استعمالنا هنا للكلمة « محدود » مغاير لاستعمالنا لها في التحليل الحقيقي ، حيث نعني بالدالة المحدودة الدالة التـي يكون مداها مجموعة محدودة • ومن سوء الحـظ ، فكلا المصطلحين شـائع الاستعمال ، بيد أن خطر اللبس ليس بالكبير •

ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c بحيث تبقى (1) صحيحة أيا كان العنصر غير الصفري x من $\mathscr{D}(T)$ ؟ [مـن الممكن اهمال $x=0$ لان $Tx=0$ عنـدما يكون $x=0$ استنادا الى (3) من ٢ــ٦] • اذا قسمنا طرفي (1) على $\|x\|$ نجـد أن

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqq c \qquad (x \neq 0)$$

وهذا يبين أن كبر c يجب أن يكون على الاقل بقدر الحد الاعلى للعبارة الواردة في اليسار عندما تمسح x المجموعة $\mathscr{D}(T)-\{0\}$ • لذا فان الاجابة عن سؤالنا حول أصغر قيمةممكنة تأخذها c في (1) هي أنها الحد الاعلى• فاذا رمزنا لهذهالكمية بـ $\|T\|$ ، فـان

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

يسمى $\|T\|$ **نظيـم** المؤثر T • واذا كـان $\mathscr{D}(T)=\{0\}$ ، فاننا نكتـب $\|T\|=0$ تعريفا • وفي هذه الحالة (غير الهامة نسبيا) يكون $T=0$ لان $T0=0$ استنادا الى (3) من البند ٢ــ٦ •

لاحظ أن (1) يمكن أن تكتب بعد وضع $c=\|T\|$ بالشكل

$$\|Tx\| \leqq \|T\| \|x\|. \tag{3}$$

وسنستعمل هذه الصيغة مرارا في أبحاثنا المقبلة •

وبالطبع ، فمن الضروري تبرير استعمال كلمة « النظيم » في هذا الصدد ، الامر الذي تقوم به التمهيدية التالية •

٢–٧–٢ تمهيدية (النظيم)

ليكن T مؤثرا خطيا محدودا كما عرفناه في ٢–٧–١ • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) ثمة صيغة بديلة لنظيم T محددة بالدستور

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \tag{4}$$

(ب) يحقق النظيم المعرف بالمساواة (2) الشروط (ن١) ـ (ن٤) من البند ٢–٢ •

البرهان :

(آ) اذا افترضنا أن $a = \|x\|$ وأن $y = (1/a)x$ ، حيث $x \neq 0$ ، فاننا نجد أن $\|y\| = \|x\|/a = 1$ ، وأنه يترتب على (2) بسبب خطية T أن

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y \in \mathfrak{D}(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

واذا كتبنا x عوضا عن y في الطرف الايمن ، فاننا نجد (4) •

(ب) ان صحة (ن١) أمر واضح ، وكذلك صحة المساواة $\|0\| = 0$ • ويترتب على $\|T\| = 0$ أن $Tx = 0$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ ، وبالتالي فان $T = 0$ ، الامر الذي يبين صحة (ن٢) • وفضلا عن ذلك ، فان الشرط (ن٣) ينتج من

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\,\|Tx\| = |\alpha| \sup \|Tx\|$$

حيث $x \in \mathscr{D}(T)$ • وأخيرا فان (ن٤) هو نتيجة من

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x+T_2x\| \leqq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|;$$

حيث يكون x هنا عنصرا من $\mathscr{D}(T)$ • ∎

وقبل الشروع في دراسة الخواص العامة للمؤثرات الخطية المحدودة ، فاننا سنلقي نظرة على بعض الامثلة النموذجية ، الامر الذي يعطينا احساسا أفضل بمفهوم المؤثر الخطي المحدود •

أمثلـــة

٢ـ٧ـ٣ المؤثر المطابق

ان المؤثر المطابق $I: X \longrightarrow X$ على فضاء منظم $X \neq \{0\}$ محدود ونظيمه $\|I\|=1$ (٢ـ٦ـ٢) •

٢ـ٧ـ٤ المؤثر الصفري

ان المؤثر الصفري $0: X \longrightarrow Y$ على فضاء منظم X محدود ونظيمه $\|0\|=0$ (٢ـ٦ـ٣) •

٢ـ٧ـ٥ مؤثر المفاضلة

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الحدوديات على $J=[0,1]$ ، حيث النظيم معطى بالمساواة $\|x\|=\max|x(t)|$ و $t \in J$ • يعرف مؤثر المفاضلة T على بالمساواة

$$Tx(t)=x'(t)$$

حيث ترمز اشارة الفتح الـى المفاضلة بالنسبة الى t • هـذا المؤثر خطي وليس محدودا ، وذلك لانـه اذا أخذنا $x_n(t)=t^n$ ، حيث $n \in \mathbf{N}$ ، فان $\|x_n\|=1$ ، كمـا أن

$$Tx_n(t)=x_n'(t)=nt^{n-1}$$

وبالتالي ، فان $\|Tx_n\|=n$ و $\|Tx_n\|/\|x_n\|=n$ • ولما كان العدد الطبيعي n كيفيا ، فاننا نكون قد أثبتنا عدم وجود عـدد مثبت c بحيث يكـون $\|Tx_n\|/\|x_n\| \leqq c$ • نستنتج من هذا ومن (1) أن T ليس محدودا •

بما أن المفاضلة عملية هامة ، فان نتيجتنا تبين بأن المؤثرات غير المحدودة هي أيضا ذات أهمية تطبيقية • وسنرى حقيقة هذا الامر في الفصلين العاشر والحادي عشر ، وذلك بعد أن نقوم بدراسة تفصيلية لنظرية المؤثرات المحدودة ولتطبيقاتها ، والتي هي أبسط من المؤثرات غير المحدودة •

٢ـ٧ـ٦ المؤثر التكاملي

يمكننا تعريف مؤثر تكاملي $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ بالمساواة $y=Tx$ حيث

$$y(t)=\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

وحيث k هـي دالة معطاة ، تسمى **نـواة المؤثر** T ، ويفترض فيها أن تكـون مستمرة على المربع المغلق $G=J\times J$ في المستوي $t\tau$ ، حيـث $J=[0,1]$ • ان هذا المؤثر محدود •

لاثبات هذا نلاحظ أولا أن استمرار k على المربع المغلق يقتضي محدودية k ، ولنفترض مثلا أن $|k(t,\tau)| \leqq k_0$ أيا كان (t,τ) مـن G ، حيث k_0 عـدد حقيقي • وفضلا عن ذلك ، فان

$$|x(t)| \leqq \max_{t\in J}|x(t)|=\|x\|.$$

لـذا فـان

$$\begin{aligned}\|y\| = \|Tx\| &= \max_{t \in J} \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau)\, d\tau \right| \\ &\leqq \max_{t \in J} \int_0^1 |k(t, \tau)|\, |x(\tau)|\, d\tau \\ &\leqq k_0 \|x\|.\end{aligned}$$

وهذه النتيجة $\|Tx\| \leqq k_0 \|x\|$ ليست سوى (1) حيث $c = k_0$ • لذا فـان T محـدود •

٢ـ٧ـ٧ المصفوفـة

تعرف المصفوفة الحقيقية $A = (\alpha_{jk})$ التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n مؤثـرا $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^r$ عن طريق المساواة

$$y = Ax \tag{5}$$

حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$ متجهان عموديان عدد مركباتهما n و r على الترتيب ، وحيث استعملنا ضرب المصفوفات كما في ٢ـ٦ـ٨ • وتصبح المساواة (5) لدى استعمالنا للمركبات على النحو التالي

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \qquad (j = 1, \cdots, r). \tag{5'}$$

ان T خطي نظرا لكون ضرب المصفوفات عملية خطية •

ان T محدود كذلك •

لاثبات هذا ، نذكر أولا من ٢ـ٢ـ٢ أن النظيم على $\mathbf{R}^n$ يعطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m{}^2 \right)^{1/2};$$

ونجد نظيم y من $\mathbf{R}^r$ بصورة مماثلة • وهكـذا فانه يترتب على (5') وعلـى متباينة كوشي ـ شفارتز (11) من البند ١ـ٢ أن

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{r}\eta_j^{\,2}=\sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right]^2$$

$$\leqq\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{\,2}\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m^{\,2}\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=\|x\|^2\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{\,2}.$$

واذا لاحظنا أن المجموع المزدوج في السطر الاخير لا يتعلق بـ x ، فيمكن كتابة نتيجتنا بالشكل

$$\|Tx\|^2\leqq c^2\|x\|^2 \qquad \text{حيث} \qquad c^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{\,2}$$

وبذا نجد (1) ، الامر الذي يكمل البرهان على أن T محدود • ∎

هذا ، وسنعرض لدراسة دور المصفوفات في المؤثرات الخطية في بند منفصل (البند ٢ـ٩) • ان المحدودية خاصة نموذجية ، وهي تبسيط أساسي يرد في حالة البعد المنتهي كما نرى في المبرهنة التالية •

٢ـ٧ـ٨ مبرهنة (البعد المنتهي)

اذا كان الفضاء المنظم X منتهي البعد ، فان كل مؤثر خطي على X محدود •

البرهــان :

لنفترض أن $\dim X=n$ وأن $\{e_1,\cdots,e_n\}$ قاعــدة لـ X • لنأخذ أي عنصـر $x=\sum\xi_je_j$ ، ولننظر في أي مؤثر خطي T على X • لما كان T خطيا فان

$$\|Tx\|=\left\|\sum\xi_jTe_j\right\|\leqq\sum|\xi_j|\,\|Te_j\|\leqq\max_k\|Te_k\|\sum|\xi_j|$$

(يتم الجمع من 1 الى n) • وبتطبيق التمهيد ٢ـ٤ـ١ على المجموع الاخير مفترضين أن $\alpha_j=\xi_j$ و $x_j=e_j$ ، نجد أن

$$\sum|\xi_j|\leqq\frac{1}{c}\left\|\sum\xi_je_j\right\|=\frac{1}{c}\|x\|.$$

نستنتج مما سبق أن

$$\|Tx\| \leqq \gamma \|x\| \qquad \text{حيث} \qquad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

ويترتب على هذا وعلى (1) أن T محدود . ∎

ستتناول الآن بالدرس خواص عامة وهامة للمؤثرات الخطية المحدودة .

المؤثرات هي تطبيقات ، وبالتالي فان تعريف الاستمرار (١ــ٣ــ٣) ينطبق عليهـا .

ومن الحقائق الاساسية المتعلقة بالمؤثرات **الخطية** أن الاستمرار والمحدودية يغدوان مفهومين متكافئين ، وهاكم التفصيل .

ليكن $T:\mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ أي مؤثر ، ليس بالضرورة خطيـا ، حيث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ ، وحيث X و Y فضاءان منظمان . ان التعريف ١ــ٣ــ٣ يقتضي بأن المؤثر T يكون **مستمرا في النقطة** x_0 من $\mathfrak{D}(T)$ اذا وجد لكل عــدد موجب ε عدد موجب δ بحيث يكون

$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ المحقق للشرط $\|x - x_0\| < \delta$.

ويكون T **مستمرا** اذا كان T مستمرا في كل نقطة x من $\mathfrak{D}(T)$.

واذا كان T خطيا فاننا نجد المبرهنة الشهيرة التالية :

٢ــ٧ــ٩ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ **مؤثرا خطيا* ، حيــث** $\mathfrak{D}(T) \subset X$ **، وحيث** X **و** Y **فضاءان منظمان . عندئذ نجد التالي :**

* **تحذير** : مما يؤسف له أن بعض المؤلفين يطلقون على المؤثرات الخطية المستمرة اسم « المؤثرات الخطية » . اما نحن فلن نتبنى هذا المصطلح ، ذلك أن ثمـة مؤثرات خطية ذات اهمية من وجهة النظر التطبيقية دون أن تكــون هــذه المؤثرات مستمرة . وقد اوردنا مثالا على هــذا في ٢ــ٧ــ٥ ، كمـا سنورد مؤثرات اخرى في الفصلين العاشر والحادي عشر .

(آ) الشرط اللازم والكافي كي يكون T مستمرا هو ان يكون محدودا •

(ب) اذا كان T مستمرا في نقطة واحدة فقط ، فانه مستمر •

البرهـان :

(آ) ان هذه الدعوى واضحة للعيان في الحالة $T=0$ • لنفترض الآن أن $T\neq 0$ • عندئذ يكون $\|T\|\neq 0$ • سنفترض أولا أن T محدود ، ولنأخـذ أي عنصر x_0 من $\mathfrak{D}(T)$ • ليكن ε أي عدد موجب • عندئذ نجد بسبب كـون T خطيا أنه اذا كان x أي عنصر من $\mathfrak{D}(T)$ يحقق الشرط

$$\|x-x_0\|<\delta \qquad \text{حيث} \qquad \delta=\frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

فـان

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|\leqq\|T\|\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon.$$

وبما أن $x_0\in\mathfrak{D}(T)$ عنصر اختياري ، فاننا نستنتج أن T مستمر •

وبالعكس ، لنفترض أن T مستمر في نقطة اختيارية x_0 من $\mathfrak{D}(T)$ • عندئذ نجد أنه اذا كان $\varepsilon>0$ عددا معطى ، فيوجد عدد $\delta>0$ بحيث تتحقق المتباينة

$$\|Tx-Tx_0\|\leqq\varepsilon \tag{6}$$

أيا كان العنصر x من $\mathfrak{D}(T)$ الذي يحقق $\|x-x_0\|\leqq\delta$ • لنأخذ الآن أي $y\neq 0$ في $\mathfrak{D}(T)$ ، ولنضع $x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y$ • عندئذ يكون $\|x-x_0\|=\delta$ الامر الذي يسمح لنا باستعمال (6) • ولما كان T خطيا ، فاننا نجد

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

وعندئذ يترتب على (6) أن

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|\leqq\varepsilon \quad \text{• اذن فـان} \quad \|Ty\|\leqq\frac{\varepsilon}{\delta}\|y\| \text{ •}$$

فاذا لاحظنا أن المتباينة الاخـيرة تكتب بالشكل $\|Ty\| \leqq c\|y\|$ ، حيث $c = \varepsilon . \delta$ ، فاننا نستنتج أن T محدود .

(ب) ان استمرار T في نقطـة يقتضي محدودية T استنادا الى القسم الثاني من برهان (آ) ، وهذا بدوره يقتضي استمرار T وفق (آ) . ∎

٢ـ٧ـ١٠ نتيجة (الاستمرار ، الفضاء الصفري)

اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا فان :

(آ) $x_n \longrightarrow x$ [حيث $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$] يقتضي $Tx_n \longrightarrow Tx$.

(ب) الفضاء الصفري $\mathcal{N}(T)$ مغلق .

البرهـان :

(آ) ان هذا الشق ينتج مـن (آ) مـن المبرهنة ٢ـ٧ـ٩ ومـن المبرهنة ١ـ٤ـ٨ معا أو مباشرة من (3) ، ذلك أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ فاننا نجد أن

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqq \|T\| \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

(ب) يوجد لكل $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ متتالية (x_n) في $\mathcal{N}(T)$ بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ [راجع (آ) من ١ـ٤ـ٦] . لذا فان $Tx_n \longrightarrow Tx$ استنادا الى (آ) مـن هـذه النتيجة . كذلـك ، فـان $Tx = 0$ لان $Tx_n = 0$ ، وهـذا يقتضي أن يكـون $x \in \mathcal{N}(T)$. وبما أن x عنصر اختياري من $\overline{\mathcal{N}(T)}$ ، فان $\mathcal{N}(T)$ مغلق . ∎

وتجدر بنا ملاحظة أن مدى مؤثر خطي محدود قد لا يكون مغلقا . (راجع المسألة ٦) .

ونترك للقارىء تقديم برهان بسيط لدستور مفيد آخر ، ألا وهو

$$\|T_1 T_2\| \leqq \|T_1\| \|T_2\|, \qquad \|T^n\| \leqq \|T\|^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

حيث $T_2 \colon X \longrightarrow Y$ و $T_1 \colon Y \longrightarrow Z$ و $T \colon X \longrightarrow X$ مؤثـرات خطيـة محدودة ، وحيث X و Y و Z فضاءات منظمة .

المؤثرات هي تطبيقات ، وقد أوردنا لـدى بحثنا للمؤثرات بعض المفاهيـم الناتجة عن كون المؤثر تطبيقا ، نذكر منها الساحة ، والمدى ، والفضاء الصفري لمؤثر • وسنضيف الآن مفهومين آخرين (المقصور والممدد) • وكان بامكاننا فعل ذلك في مرحلة أبكر ، الا أننا فضلنا ارجاء ذلك الى الآن ، حيث يمكننا أن نورد مباشرة مبرهنة هامة (٢ــ٧ــ١١) • لنبتدىء بتعريف تساوي مؤثرين على النحو التالـي :

نقول عن مؤثرين T_1 و T_2 انهما **متساويان** ، ونكتب

$$T_1 = T_2,$$

اذا كان لهما ساحة واحدة ، أي اذا كان $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ ، وكان $T_1x = T_2x$ أيـا كـان x مـن $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ •

ان **مقصور** مؤثر $T:\ \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ على مجموعة جزئية B من $\mathfrak{D}(T)$ يرمز اليـه بالشكل

$$T|_B$$

وهو المؤثر المعرف بالشكل

$$T|_B.\ B \longrightarrow Y \quad \text{حيث} \quad T|_B x = Tx \quad \text{أيا كان } x \text{ من } B \text{ ،}$$

وممـدد مؤثر T الى مجموعة M تحوي $\mathfrak{D}(T)$ هو مؤثر

$$\tilde{T}:\ M \longrightarrow Y \qquad \text{بحيـث أن} \qquad \tilde{T}|_{\mathfrak{D}(T)} = T$$

أي أن $\tilde{T}x = Tx$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ • [لذا فان T مقصور $\tilde{T}$ على $\mathfrak{D}(T)$] •

اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية محتواة تمامـا في M ، فانه يوجد لمؤثـر معطى T عدة ممددات • ومن الممددات ذات الاهمية التطبيقية هي تلك التـي تحفظ خاصة أساسية محددة ، كخاصة الخطية مثلا (اذا اتفق وكان T خطيا) ،

أو خاصة المحدودية (اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ واقعة في فضاء منظم وكان T محدودا) • والمبرهنة الهامة التالية نموذجية في هذا الصدد ، اذ أنها تعنى بسمدد مؤثر خطي محدود T الى اللصاقة $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ للساحة ، بحيث يكون المؤثر الممـدد محدودا أو خطيا أيضا ، وحتى له النظيم نفسه • ان هذا يشمل حالة التمديد من مجموعـة كثيفة في فضاء منظم X الى الفضاء X كله • وهو يشمل أيضا حالة التمديد من فضاء منظم X الى اتمامه (٢ــ٣ــ٢) •

٢ــ٧ــ١١ مبرهنة (الممدد الخطي المحدود)

ليكـن

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$$

مؤثرا خطيا محدودا ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ واقعة في فضاء منظـم X ، وحيث Y فضاء باناخ • عندئذ يوجد للمؤثر T ممدد هو

$$\tilde{T}: \overline{\mathfrak{D}(T)} \longrightarrow Y$$

حيث $\tilde{T}$ مؤثر خطي محدود نظيمه

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

البرهـان :

ليكن x أي عنصر من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ • نرى استنادا الى (آ) من المبرهنة ١ــ٤ــ٦ أنـه توجد متتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ بحيـث أن $x_n \longrightarrow x$ • ولما كان T خطيـا ومحدودا ، فان

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية لكوشي ، نظرا لكون (x_n) متقاربة • وبما أن Y تام فرضا ، فان (Tx_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن

$$Tx_n \longrightarrow y \in Y.$$

لنعرف الآن مؤثرا $\bar{T}$ بالمساواة

$$\bar{T}x = y.$$

سنبين أن هذا التعريف مستقل عن الطريقة التي نختار بها المتتالية في $\mathfrak{D}(T)$ المتقاربة من x • لــذا نأخــذ متتاليتين x_n و z_n بحيــث أن $x_n \longrightarrow x$ و $z_n \longrightarrow x$ • عندئذ نلاحظ أن $v_m \longrightarrow x$ ، حيث (v_m) هي المتتالية

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots).$$

يترتب على هذا أن (Tv_m) تتقارب اعتمادا على (آ) من ٢ــ٧ــ١٠* ، وبالتالي ، فانه يجب أن يوجد للمتتاليتين الجزئيتين (Tx_n) و (Tz_n) مــن المتتالية (Tv_m) نهايةواحدة ، وهذا يثبت أنه توجد صورة وحيدة لكل عنصر x من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ وفق $\bar{T}$ •

ولما كان واضحا أن $\bar{T}$ خطي وأن $\bar{T}x = Tx$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ ، فــان $\bar{T}$ ممدد للمؤثر T • فاذا أفدنا الآن من المتباينة

$$\|Tx_n\| \leqq \|T\|\|x_n\|$$

وجعلنا $n \longrightarrow \infty$ ، فاننا نجد أن $Tx_n \longrightarrow y = \bar{T}x$ • وبما أن $x \longmapsto \|x\|$ يعــرف تطبيقا مستمرا (٢ــ٢) فاننا نجد أن

$$\|\bar{T}x\| \leqq \|T\|\|x\|.$$

لذا فان $\bar{T}$ محدود و $\|\bar{T}\| \leqq \|T\|$ • وبالطبع فان $\|\bar{T}\| \geqq \|T\|$ بسبب كون النظيم (المعرف على أنه الحد الاعلى) لا يمكن أن ينقص لدى تمديده • نخلص مــن كل هذا الى أن $\|\bar{T}\| = \|T\|$ • ∎

---

* لا يجوز هنا الحكم على تقارب (Tv_m) استنادا الى الشق (آ) من النتيجــة ٢ــ٧ــ١٠ ، ذلك أنه كي يصح تطبيق هذه النتيجة ، لابد أن تكون النهاية x للمتتالية (v_m) منتمية الى $\mathfrak{D}(T)$ ، في حين انها ليست كذلك بالضرورة لانتماء x الى $\overline{\mathfrak{D}(T)}$. لذا وجب هنا اتباع طريق آخــر في اثبات تقارب (Tv_m) ، وليكن مثلا ذاك الذي اتبعناه قبل قليل لــدى اثبات تقارب (Tx_n) من y • **(المترجم)**

مسـائل

١ ـ أثبت صحة (7) •

٢ ـ ليكن X و Y فضاءين منظمين • أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي $T: X \longrightarrow Y$ محدودا هـو أن تكون الصور المباشرة للمجموعات المحدودة في X وفق T هي مجموعات محدودة في Y •

٣ ـ اذا كان $T \neq 0$ مؤثرا خطيا محدودا ، فبين أنه اذا كان x أي عنصر مـن $\mathscr{D}(T)$ يحقق الشرط $\|x\| < 1$ ، فانه تصح المتباينة $\|Tx\| < \|T\|$ •

٤ ـ هاتِ برهانا مباشرا على صحة (ب) من ٢ـ٧ـ٩ دون الافادة من (آ) فـي ٢ـ٧ـ٩ •

٥ ـ بين أن المؤثر $T: l^\infty \longrightarrow l^\infty$ المعرف بالدستور $y = (\eta_j) = Tx$ ، حيث $\eta_j = \xi_j/j$ و $x = (\xi_j)$ ، هو مؤثر خطي ومحدود •

٦ ـ **(المـدى)** • أثبت أنه ليس من الضروري أن يكون المدى $\mathscr{R}(T)$ لمؤثر خطي ومحدود $T: X \longrightarrow Y$ مغلقا في Y • **إرشـاد** • استعمل T الوارد في المسـألة ٥ •

٧ ـ **(المؤثر العكسي)** • ليكن T مؤثرا خطيا محدودا من فضاء منظم X على فضاء منظم Y • فاذا وجد عدد موجب b بحيث أن

$$\|Tx\| \geqq b\|x\| \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X$$

فبين أن $T^{-1}: Y \longrightarrow X$ يكون عندئذ موجودا ومحدودا •

٨ ـ بيـن أن المؤثـر العكسي $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \longrightarrow X$ لمؤثـر $T: X \longrightarrow Y$ خطـي ومحدود ، ليس محـدودا بالضرورة • **إرشـاد** • استعمل T الوارد فـي المسـألة ٥ •

٩ ـ لنفترض أن $T: C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$ مؤثر معرف بالمساواة

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

حدد كلا من $\mathfrak{R}(T)$ و $T^{-1}: \mathfrak{R}(T) \longrightarrow C[0,1]$ ، ثم قرر ما اذا كان T^{-1} خطيا ومحـدودا •

١٠ـ لنعرف على $C[0,1]$ المؤثر S المحدد بالمساواة

$$y(s)=s\int_0^1 x(t)\, dt,$$

والمؤثر T بالمساواة $y(s)=sx(s),$

هل S و T تبديليان ؟ عين كلا من $\|S\|$ و $\|T\|$ و $\|ST\|$ و $\|TS\|$ •

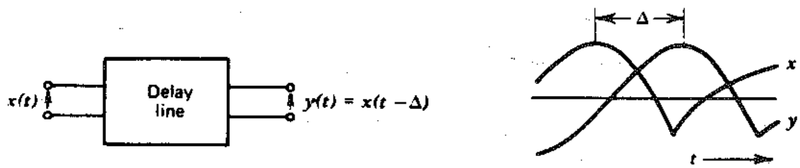
١١ـ ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من جميع الدوال الحقيقية والمحدودة على $\mathbb{R}$ ، حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|,$$

وليكن المؤثر $T\ \ X \longrightarrow X$ معرفا بالمساواة

$$y(t)=Tx(t)=x(t-\Delta)$$

حيث $\Delta>0$ ثابت • [ان هذا أنموذج (موديل) **لخط تاخير** ، وهو جهاز كهربائي مخرجه y متأخر عن المدخل x ، وزمن التأخر هو Δ ، انظر الى الشكل ٢٢] • هل T خطي ؟ هل هو محدود ؟



الشكل (٢٢) • خط التاخير الكهربائي

١٢ــ (**المصفوفات**) • رأينا في ٢ــ٧ــ٧ أن المصفوفة $A=(\alpha_{jk})$ من المرتبة $r\times n$ تعرّف مؤثرا خطيا من الفضاء المتجهي X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد في الفضاء المتجهي Y المؤلف من كل المرتبات r من الاعداد • لنفترض أننا عرفنا على X نظيما ما $\|\cdot\|_1$ وعلى Y نظيما ما $\|\cdot\|_2$ • نحن نذكر أن المسألة ١٠ من البند ٢ــ٤ تؤكد وجود نظائم مختلفة على الفضاء Z المؤلف من كل هذه المصفوفات (حيث ثبتنا r و n) • نقول عن نظيم $\|\cdot\|$ على Z انه **منسجم** مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ اذا كان

$$\|Ax\|_2 \leqq \|A\|\|x\|_1.$$

بين أن النظيم المعرف بالمساواة

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

منسجم مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ • وغالبا ما يطلق على هذا النظيم اسم **النظيم الطبيعي** المعرف بالنظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ • اذا اخترنا $\|x\|_1=\max_j|\xi_j|$ و $\|y\|_2=\max_j|\eta_j|$ ، فبين أن النظيم الطبيعي هو

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

١٣ــ بين أنه يمكننا في ٢ــ٧ــ٧ ، حيث $r=n$ ، أن نعرف نظيما منسجما بالمساواة

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} {\alpha_{jk}}^2\right)^{1/2},$$

الا أن هذا النظيم في الحالة $n>1$ **ليس** هو النظيم الطبيعي المعرف بالنظيم الاقليدي على $\mathbb{R}^n$ •

١٤ــ اذا اخترنا في المسألة ١٢

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|, \qquad \|y\|_2=\sum_{j=1}^{r}|\eta_j|.$$

فبين أنه يمكن تحديد نظيم منسجم بالمساواة

$$\|A\|=\max_k \sum_{j=1}^{r}|\alpha_{jk}|.$$

١٥ــ بين أنه في الحالة $r=n$ ، فان النظيم الوارد في المسألة ١٤ هــو النظيم الطبيعي المتوافق مع النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ المعرفين في المسألة المذكورة •

٢ــ٨ الداليات الخطيــة

الدالي هو مؤثر يقع مداه في المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbf{C}$ • ولم يكن التحليل الدالي في بداياته يـعنى بغير تحليل الداليات • ولما كانت الداليات ترد كثيرا في موضوعنا ، فاننا سنستعمل رموزا خاصة بهــا • سنرمز للداليات نفسها بأحرف لاتينية صغيرة f و g و h و ••• ، ولساحة الدالي f بـ $\mathscr{D}(f)$ ، ولمداه بـ $\mathscr{R}(f)$ ، ولقيمة f في نقطة x مــن $\mathscr{D}(f)$ بـ $f(x)$ ، حيث نضــع x بــين قوســين •

وبما أن الداليات هي مؤثرات ، فان كل التعاريف السابقة المتعلقة بالمؤثرات تسري على الداليات • وبوجه خاص ، فاننا سنحتاج الى التعريفين التاليين نظرا لكون أغلب الداليات التي سنتعامل معها في أبحاثنا المقبلة خطية ومحدودة •

٢ــ٨ــ١ تعريف (الدالي الخطي)

الدالي الخطي f هو مؤثر خطي ، تقع ساحته في فضاء متجهي X ، ومداه في الحقل العددي K للفضاء X • وهكذا فان

$$f:\ \mathscr{D}(f)\longrightarrow K,$$

حيث $K=\mathbb{R}$ اذا كان X حقيقيا ، و $K=\mathbf{C}$ اذا كا ن X عقديا • ∎

٢ــ٨ــ٢ تعريف (الدالي الخطي المحدود)

الدالي الخطي المحدود f هو مؤثر خطي محدود (٢ــ٧ــ١) ، يقع مـداه في الحقل العددي للفضاء المنظم X الذي تقع فيه الساحة $\mathfrak{D}(f)$ • لـذا فهنالك عدد حقيقي c بحيث أنه أيا كان x من $\mathfrak{D}(f)$ فان

$$|f(x)| \leqq c\,\|x\|. \tag{1}$$

وفضلا عن ذلك ، فان **نظيـم** f هو [راجع (2) من البند ٢ــ٧]

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2a}$$

أو

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(f) \\ \|x\| = 1}} |f(x)|. \tag{2b}$$

يقتضي الدستور (3) من البند ٢ــ٧ أن

$$|f(x)| \leqq \|f\|\,\|x\|, \tag{3}$$

ونجد كحالة خاصة من المبرهنة ٢ــ٧ــ٩ ما يلي :

٢ــ٨ــ٣ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي الخطـي f الذي ساحته $\mathfrak{D}(f)$ واقعة في فضاء منظم مستمرا هو ان يكون f محدودا •

أمثلـة

٢ــ٨ــ٤ النظيـم

النظيم $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ على فضاء منظم $(X, \|\cdot\|)$ هو دالي على X ، وهـذا النظيم غير خطي •

يعين **الضرب العددي** المألوف لدى تثبيت أحد العاملين داليا $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ وفق القاعدة

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3,$$

حيث $a = (\alpha_i) \in \mathbf{R}^3$ متجـه مثبت •

ان f خطي • كذلك ، فان f محدود • وفي الحقيقة ، فلدينا

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leqq \|x\|\|a\|,$$

وهكذا نجد أن $\|f\| \leqq \|a\|$ استنادا الى (2b) وذلك اذا أخذنا الحد الاعلى لكـل العناصر x التي نظيم كل منها يساوي 1 • ونجد من جهة ثانية عند أخذ $x = a$ واستخدام (3) أن

$$\|f\| \geqq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

لذا فان نظيم f هو $\|f\| = \|a\|$ •

٢ـ٨ـ٦ التكامل المحدد

التكامل المحدد هو عدد اذا أخذنا دالة واحدة ، كما نفعل غالبا في الحساب التكاملي الابتدائي • بيد أن الوضع يختلف تماما اذا أخذنا تكاملات كل الدوال في فضاء دالي معين ، اذ يغدو التكامل عندئذ داليا على ذلك الفضاء ، ولنرمز له بـ f • لنختر مثلا الفضاء $C[a, b]$ (٢ـ٢ـ٥)• عندئذ يعين f بالمساواة

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dt \qquad\qquad x \in C[a, b].$$

إن f خطي • سنثبت الآن أن f محدود ، وأن نظيمه هو $\|f\| = b - a$ •

في الحقيقة ، اذا كتبنا أن $J=[a, b]$ ، وتذكرنا صيغة النظيم على $C[a, b]$ ، فاننـا نجـد أن

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\, dt\right| \leqq (b-a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b-a)\, \|x\|.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما نأخذ كل العناصر x التي نظيم كل منها 1 ، وجدنا أن $\|f\| \leqq b-a$ • وللحصول على المتباينة $\|f\| \geqq b-a$ ، فاننا نختار العنصر الخاص $x = x_0 = 1$ الذي نظيمه $\|x_0\| = 1$ ، ونستعمل (3) فنجد

$$\|f\| \geqq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b-a.$$

٢ــ٨ــ٧ الفضـــاء $C[a, b]$

ثمة دالي ذو أهمية خاصة على $C[a, b]$ نجده اذا اخترنا عنصرا مثبتا t_0 من $J=[a, b]$ ، ووضعنا

$$f_1(x) = x(t_0) \qquad\qquad x \in C[a, b].$$

ان f_1 خطي • كذلك ، فان f_1 محدود ونظيمه $\|f_1\| = 1$ • وفي الحقيقة ، فان

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leqq \|x\|,$$

وهذا يقتضي المتباينة $\|f_1\| \leqq 1$ • كذلك ، فاذا اخترنا $x_0 = 1$ ، فان $\|x_0\| = 1$ ، ونجد عندئذ انطلاقا من (3) أن

$$\|f_1\| \geqq |f_1(x_0)| = 1.$$

٢ــ٨ــ٨ الفضـــاء l^2

يمكننا الحصول على دالي خطي f على فضاء هلبرت l^2 (١ــ٢ــ٣) وذلك باختيار عنصر مثبت $a = (\alpha_j) \in l^2$ ، وكتابة المساواة

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j$$

حيث $x=(\xi_j)\in l^2$ • ان هذه المتسلسلة تتقارب بالاطلاق و f محدود ذلك أنه يترتب على متباينة كوشي ـ شفارتز (11) من البند ١ـ٢ (حين يتم الجمع وفق j من 1 الى ∞) أن

$$|f(x)|=\left|\sum\xi_j\alpha_j\right|\leqq\sum|\xi_j\alpha_j|\leqq\sqrt{\sum|\xi_j|^2}\sqrt{\sum|\alpha_j|^2}=\|x\|\,\|a\|. \qquad ∎$$

من الامور البالغة الاهمية معرفة أن مجموعة كل الداليات الخطية المعرفة على فضاء متجهي X يمكن أن نحولها ذاتها الى فضاء متجهي • يرمز الى هذا الفضاء بـ X^* ، ويسمى **الفضاء الثنوي الجبري(*)** لـ X • وتعرف العمليتان الجبريتان عليه حينئذ بصورة طبيعيه على النحو التالي • ان **المجموع** f_1+f_2 لداليين f_1 و f_2 هو الدالي s الذي قيمته في كل نقطة x من X هي

$$s(x)=(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x);$$

والجداء αf لعدد α بدالي f هو الدالي p الذي قيمته في النقطة x من X هي

$$p(x)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

لاحظ أن هذا ينسجم والطريقة المعروفة في جمع الدوال وضربها بأعداد ثابتة •

لِنَسر خطوة أخرى الى الامام ، وذلك بأخذ الثنوي الجبري $(X^*)^*$ لـ X^* ، الذي عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على X^* • سنرمز لـ $(X^*)^*$ بـ X^{**} ، وسنطلق عليه اسم **الفضاء الثنوي الجبري الثاني** لـ X •

ان سبب ادخال الفضاء X^{**} في اعتبارنا يكمن في أنه يمكن الحصول على علاقة هامة بين X و X^{**} كما يلي • لنختر أولا الرموز

---

* لاحظ أن هذا التعريف لا يدخل فيه نظيم ، فالفضاء الذي يطلق عليه اسم **الفضاء الثنوي** X' ، والمؤلف من كل الداليات الخطية **والمحدودة** على X سنقابله في البند ٢ـ١٠ •

القيمة في نقطة	العنصر العام	الفضاء
—	x	X
$f(x)$	f	X^*
$g(f)$	g	X^{**}

من الممكن الحصول على $g \in X^{**}$ ، وهو دالي خطي معرف على X^* ، بأن نختار عنصرا مثبتا x من X وكتابة

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \quad (x \text{ عنصر مثبت من } X \text{ و } f \text{ متغير في } X^*) \tag{4}$$

ان وضع الدليل السفلي x هو تذكرة لنا بأننا حصلنا على g باستعمال عنصر معين x من X • وعلى القارىء أن يلاحظ بتأن؟ أن f هنا هو المتغير ، في حين أن x مثبت • واذا تذكرنا هذا ، فانــه يفترض فينا أن لا نجابه أي صعوبة في ادراك موضوعنا الحالي •

ان g_x كما عرفناه في (4) خطي ، وهذا أمر يمكن رؤيته مما يلي :

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2).$$

لذا فان g_x عنصر من X^{**} استنادا الى تعريف X^{**} •

بما أنه يقابل كل عنصر x من X عنصر g_x من X^{**} ، فانه يتحدد تطبيق هو

$$C: X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto g_x.$$

يدعى C **التطبيق القانوني** لـ X في X^{**} •

التطبيق C خطي لان ساحته هي فضاء متجهي ولان

$$\begin{aligned}(C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f)\\ &= f(\alpha x + \beta y)\\ &= \alpha f(x) + \beta f(y)\\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f)\\ &= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f).\end{aligned}$$

يدعى C أيضا **الطمر القانوني** لـ X في X^{**} • ولادراك الباعث على هذه التسمية ، فاننا سنشرح أولا مفهوم « الايزومورفيزم » الهام •

تتعامل في أبحاثنا مع فضاءات متنوعة ، والمشترك بين هذه الفضاءات جميعا هو أن كلا منها يتألف من مجموعة ، ولنرمز لها بـ X ، ومن « بنية » معرفة على X • وهذه البنية في الفضاءات المترية هي المترك • أما في الفضاءات المتجهية ، فان ما يشكل البنية هو العمليتان الجبريتان على هذه الفضاءات • وفي الفضاءات المنظمة ، فان البنية مؤلفة من العمليتين الجبريتين ومن النظيم •

لنفترض أن X و $\tilde{X}$ فضاءان من نوع واحد(فضاءان متجهيان مثلا) • من المهم معرفة ما اذا كان X و $\tilde{X}$ « متطابقين في جوهرهما » ، بمعنى أنهما مختلفان على الاكثر في طبيعة نقاطهما • فاذا تم ذلك ، فمن الممكن اعتبار X و $\tilde{X}$ متطابقين (وكأنهما نسختان لفضاء « مجرد » واحد) عندما تكون البنية هي الهدف الاساسي في دراستنا للفضاءين ، في حين تكون طبيعة عناصرهما ليست بذي بال • ان هذا الوضع يرد غالبا ، و هو ما أوحى بمفهوم **الايزومورفيزم** (أو **التماكل**) ، الذي يعرف بأنه تطبيق متباين وغامر لـ X على $\tilde{X}$ ويحفظ البنية •

لذا فان **الايزومورفيزم** T لفضاء متري $X=(X, d)$ على فضاء متري $\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$ هو تطبيق متباين وغامر يحفظ المسافة ، أي أنه اذا كان x, y أي عنصرين من X فان

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

ونقول عندئذ أن $\tilde{X}$ **ايزومورفي** (أو **متماكل**) مع X • ان هذا ليس بجديد علينا ، اذ هو مجرد تسمية أخرى للدالة المتباينة والغامرة والايزومترية التي أوردناها في التعريف ١ــ٦ــ١ • أما الجديد فهو التالي •

الايزومورفيزم T **لفضاء متجهي** X على فضاء متجهي $\tilde{X}$ على الحقل نفسه هو تطبيق متباين وغامر يحفظ العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي • وهكذا فانه اذا كان x, y أي عنصرين من X ، وكان α أي عدد فان

$$T(x + y) = Tx + Ty, \qquad T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

أي أن $T: X \longrightarrow \bar{X}$ هو مؤثر خطي متباين وغامر • يقال عن $\bar{X}$ عندئذ إنه **ايزومورفي** مع X ، ويدعى X و $\bar{X}$ **فضاءين متجهيين ايزومورفيين** •

ان الايزومورفيزمات للفضاءات المنظمة هي ايزومورفيزمات الفضاءات المتجهية والتي أيضا تحفظ النظائم • وسنتطرق الى التفاصيل في البند ٢ــ١٠ حيث سنتعامل مع هذه الايزومورفيزمات • أما في الوقت الحاضر ، فيمكن أن نطبق تعريف ايزومورفيزمات الفضاء المتجهي كما في التالي •

من الممكن الاثبات بأن التطبيق القانوني C متباين • ولما كان C خطيا (كما في السابق) ، فانه ايزومورفيزم لـ X على المدى $\mathscr{R}(C)$ المحتوى في X^{**} •

اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من فضاء متجهي Y ، فاننا نقول إن X **طمور** في Y • لذا فان X طمور في X^{**} ، ويدعى C أيضا **الطمر القانوني** لـ X في X^{**} •

واذا كان C غامرا (وبالتالي تقابلا) ، فان $\mathscr{R}(C)=X^{**}$ ، ويقال عندئذ عن X انه **انعكاسي جبريا** • وسنثبت في البند القادم أنه اذا كان X منتهي البعد، فان X انعكاسي جبريا •

هذا ، وسنقدم مناقشة مماثلة تتعلق بالنظائم وتقود الى مفهوم **الانعكاسية** في الفضاء المنظم فيما بعد (في البند ٤ــ٦) ، وذلك بعد تطوير أدوات مناسبة (وبوجه خاص ، مبرهنة هان ــ باناخ الشهيرة) •

مسائل

١ ــ أثبت أن الداليين الواردين في ٢ــ٨ــ٧ و ٢ــ٨ــ٨ خطيان •

٢ ــ بين بأن الداليين المعرفين $C[a, b]$ بالمساواتين

$$f_1(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,dt \qquad (y_0\in C[a,b])$$

$$f_2(x)=\alpha x(a)+\beta x(b) \qquad (\alpha, \beta \text{ fixed})$$

خطيان ومحدودان •

٣ — حدد النظيم للدالي الخطي f المعرف على $C[-1, 1]$ بالمساواة

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\, dt - \int_{0}^{1} x(t)\, dt.$$

٤ — بين بأن المساواتين

$$f_1(x) = \max_{t \in J} x(t)$$

$$J = [a, b]$$

$$f_2(x) = \min_{t \in J} x(t)$$

تحددان داليين على $C[a, b]$ • هل هما خطيان ؟ وهل هما محدودان ؟

٥ — بين بأنه يمكن أن نعرف على أي فضاء متتاليات X داليا خطيا f وذلك بوضع $f(x) = \xi_n$ (n مثبت) ، حيث $x = (\xi_j)$ • هل f محدود عندما يكون $X = l^\infty$ ؟

٦ — (**الفضاء $C'[a, b]$**) • الفضاء $C^1[a, b]$ أو $C'[a, b]$ هو الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة على $J = [a, b]$ ، حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)|.$$

بين بأن موضوعات النظيم محققة • أثبت أن $f(x) = x'(c)$ ، حيث $c = (a+b)/2$ ، يعرف داليا خطيا ومحدودا على $C'[a, b]$ • بين أنه اذا اعتبرنا f داليا على الفضاء الجزئي من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة ، فان f غير محدود •

٧ — اذا كان f داليا خطيا محدودا على فضاء منظم عقدي ، فهل يكون $\bar{f}$ محدودا ؟ وهل يكون خطيا ؟ (ان الخط ـ فوق f يرمز الى المرافق العقدي) •

٨ — (**الفضاء الصفري**) • **يعرف الفضاء الصفري** $N(M^*)$ لمجموعة M^*

محتواة في X^* بأنه مجموعة كل العناصر x من X بحيث يكون $f(x)=0$ أيا كان f من M^* . بين بأن $N(M^*)$ فضاء متجهي .

٩ — ليكن $f\neq 0$ أي دالي خطي على فضاء متجهي X ، وليكن x_0 أي عنصر مثبت من $X-N(f)$ ، حيث $N(f)$ هو الفضاء الصفري لـ f . بين بأنه يوجد لاي x من X تمثيل وحيد بالشكل $x=\alpha x_0+y$ ، حيث $y\in N(f)$.

١٠— بين أن الشرط اللازم والكافي كي ينتمي عنصران x_1 و x_2 من X الى نفس العنصر من فضاء حاصل القسمة $X/N(f)$ في المسألة ٩ هو أن يكون $f(x_1)=f(x_2)$. بين أن $\operatorname{codim} N(f)=1$. (راجع المسألة ١٤ من البند ٢—١) .

١١— أثبت أنه اذا كان $f_1\neq 0$ و $f_2\neq 0$ داليين خطيين معرفين على فضاء متجهي واحد ، ولهما فضاء صفري واحد ، فانهما متناسبان .

١٢— (**المستوي**) . اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X وكان $\operatorname{codim} Y=1$ ، (راجع المسألة ١٤ من البند ٢—١) ، فانه يقال عن كل عنصر من X/Y انه **مستو مواز** لـ Y . بين أنه اذا كان $f\neq 0$ أي دالي خطي على X ، فان المجموعة $H_1=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ تمثل مستويا موازيا للفضاء الصفري $N(f)$ لـ f .

١٣— اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X ، وكان f داليا خطيا على X بحيث أن $f(Y)$ ليس الحقل العددي الكلي لـ X ، فبين أن $f(y)=0$ أيا كان y من Y .

١٤— بين بأنه اذا كان $\|f\|$ نظيما لدالي خطي محدود $f\neq 0$ على فضاء منظم X ، فان $\|f\|$ يؤول هندسيا بأنه عكس المسافة $\tilde{d}=\inf\{\|x\| \mid f(x)=1\}$ الفاصلة بين المستوي $H_1=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ والمبدأ .

١٥— (**نصف الفضاء**) ليكن $f\neq 0$ داليا خطيا محدودا على فضاء منظم حقيقي X . عندئذ يوجد لكل عدد c مستو $H_c=\{x\in X \mid f(x)=c\}$ ، ويعرف H_c **نصفي الفضاء**

$$X_{c1}=\{x \mid f(x)\leqq c\} \qquad \text{و} \qquad X_{c2}=\{x \mid f(x)\geqq c\}.$$

بين بأن الكرة المغلقة الواحدية تقع في X_{c1} ، حيث $c=\|f\|$ ، في حين أنه لايوجد عدد موجب ε بحيث يحوي نصف الفضاء X_{c1} ، بفرض $c=\|f\|-\varepsilon$ ، الكرة المذكورة •

٢ــ٩ المؤثرات والداليات الخطية علىالفضاءات منتهية البعد

الفضاءات المتجهية منتهية البعد أبسط من الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، ومن الطبيعي أن تتساءل عن ماهية التبسيط الذي يصيب المؤثرات والداليات الخطية المعرفة على مثل هذه الفضاءات • هذا هو السؤال الذي سندرسه في هذا البند ، وسيوضح الجواب عنه دور المصفوفات (المنتهية) في صدد المؤثرات الخطية ، وأيضا بنية الثنوي الجبري X^* (البند ٢ــ٨) لفضاء متجهي منتهي البعد X •

من الممكن تمثيل المؤثرات الخطية على فضاءات متجهية منتهية البعد بدلالة المصفوفات ، كما سنرى بعد قليل • وبهذه الطريقة ، تغدو المصفوفات أهم أداة في دراسة المؤثرات الخطية في حالة البعد المنتهي • وفي هذا السياق ، علينا أيضا أن تتذكر المبرهنة ٢ــ٧ــ٨ إن نحن أردنا الاحاطة التامة بموضوعنا الحالي • والتفاصيل هي على النحو التالي :

ليكن X و Y فضاءين متجهين منتهيي البعد على الحقل نفسه ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا • لنختر قاعدة $E=\{e_1, \cdots, e_n\}$ لـ X وأخرى $B=\{b_1, \cdots, b_r\}$ لـ Y ، حيث المتجهات مرتبة بطريقة نبقيها ثابتة • عندئذ يوجد لكل x من X التمثيل الوحيد

$$x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n. \tag{1}$$

وبما أن T خطي ، فان صورة x هي

$$y=Tx=T\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} \xi_k Te_k. \tag{2}$$

ولما كان التمثيل (1) وحيدا ، فاننا نقع على النتيجة الاولى وهي :

يتحدد المؤثر T بصورة وحيدة اذا كانت الصور $y_k = Te_k$ لمتجهات القاعدة $e_1, \ldots, e_n$ معينة مسبقا .

وبما أن y و $y_k = Te_k$ واقعة في Y ، فانه يوجد لها تمثيلات وحيدة من النمط

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(a) \qquad y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j \\ &(b) \qquad Te_k = \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j. \end{aligned}$$

ونجد بعد التعويض في (2) أن

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Te_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \right) b_j.$$

و نظرا لكون المتجهات b_j تشكل مجموعة مستقلة خطيا ، فان معاملات كل من b_j في اليسار وفي اليمين يجب أن تكون واحدة ، أي أ ن

$$(4) \qquad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad j = 1, \cdots, r.$$

يترتب على هذا النتيجة الثانية وهي :

يمكن الحصول على الصورة $y = Tx = \sum \eta_j b_j$ للعنصر $x = \sum \xi_k e_k$ من المساواة (4) .

لاحظ الوضع غير العادي لدليل الجمع j لـ τ_{jk} في (3b) ، وهذا ضروري كي نصل الى الوضع العادي لدليل الجمع في (4) .

تشكل المعاملات في (4) المصفوفة

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n . واذا أعطيت قاعدة E لـ X وأخرى B

لـ Y ، حيث تكون العناصر في E و B مرتبة وفق نظام معين (اختياري لكن مثبت) فان المصفوفة T_{EB} تكون محددة بصورة وحيدة بالمؤثر الخطي T . ونقول ان المصفوفة T_{EB} تمثل المؤثر T بالنسبة لهاتين القاعدتين .

واذا استعملنا المتجهين العموديين $\bar{x}=(\xi_k)$ و $\bar{y}=(\eta_j)$ ، فانه يمكن كتابة (4) باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\bar{y} = T_{EB}\bar{x}. \tag{4'}$$

كذلك ، فمن الممكن كتابة (3b) باستخدام المصفوفات على النحو التالي

$$Te = T_{EB}{}^{\mathsf{T}} b \tag{3b'}$$

حيث Te المتجه العمودي الذي مركباته $Te_1, \ldots, Te_n$ (التي هي نفسها متجهات) ، وحيث b المتجه العمودي الذي مركباته $b_1, \ldots, b_r$ ، علما بأنه علينا استعمال المنقول $T_{EB}{}^{\mathsf{T}}$ لـ T_{EB} لاننا في (3b) نجمع وفق j ، وهو الدليل السفلي الاول ، في حين أننا في (4) نجمع وفق k ، هو الدليل السفلي الثاني .

نستنتج مما تقدم أن المؤثر الخطي T يحدد مصفوفة وحيدة ممثلة لـ T بالنسبة الى قاعدة معطاة لـ X وقاعدة معطاة لـ Y ، حيث يفترض في متجهات كل من هاتين القاعدتين أن تكون مرتبة وفق نظام مثبت . وبالعكس ، فان كل مصفوفة عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n تحدد مؤثرا خطيا تمثله بالنسبة لقاعدتين مفروضتين لـ X و Y . (راجع أيضا ٢ــ٦ــ٨ و ٢ــ٧ــ٧) .

لننتقل الآن الى الداليات الخطية على X ، بفرض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X كما في السابق . وجدنا في البند السابق أن هذه الداليات تشكل الفضاء الثنوي الجبري X^* لـ X . واذا كان f أي دالي من هذه الداليات ، وكان $x=\sum \xi_j e_j$ أي عنصر من X فان

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \tag{5a}$$

حيث يكون

$$\alpha_j = f(e_j) \qquad j=1,\cdots,n, \qquad \textbf{(5b)}$$

ويكون f محددا بصورة وحيـــدة بقيمه α_j في متجهات القاعدة لـ X التـــي عددهـــا n •

وبالعكس ، فان كل مرتبة n من الاعداد $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ تحدد داليا خطيا على X وفق (5) • لنأخذ بوجه خاص المرتبات n التالية :

$$\begin{array}{cccccc} (1, & 0, & 0, & \cdots & 0, & 0) \\ (0, & 1, & 0, & \cdots & 0, & 0) \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ (0, & 0, & 0, & \cdots & 0, & 1). \end{array}$$

ان هذه المرتبات تعطي استنادا الى (5) n من الداليات ، سنرمز لهـــا بـ $f_1, \cdots, f_n$ حيث تتحدد قيمها كما يلي :

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k; \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

أي أن قيمـــة f_k تساوي 1 في متجه القاعدة الذي ترتيبه k ، وتساوي 0 في متجهات القاعدة الباقية (التـــي عددها $n-1$) • يسمى δ_{jk} **دلتاكرونيكر** ، كما تسمى $\{f_1, \cdots, f_n\}$ **القاعـــدة الثنوية** لقاعدة X وهي $\{e_1, \cdots, e_n\}$ • وهذا مبرر بالمبرهنة التالية •

٢ـ٩ـ١ مبرهنة (بعد X^*)

اذا كان X فضـــاء متجهيا بعـــده n ، وكانـــت $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعـــدة لـ X ، فان $F = \{f_1, \cdots, f_n\}$ المحددة بالمساويات (6) تشكل قاعـــدة للثنـــوي الجبري X^* لـ X ، كما يكون $\dim X^* = \dim X = n$ •

البرهـان :

ان F مستقلة خطيا ذلك أن المساواة

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0 \qquad (x \in X) \qquad (7)$$

عندما $x = e_j$ تقتضي أن يكون

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{jk} = \beta_j = 0,$$

لذا فان كل المعاملات β_k في (7) أصفار • سنبين أن كل f من X^* يمكن تمثيله على شكل تركيب خطي لعناصر F بصورة وحيدة • لنكتب $f(e_j) = \alpha_j$ كما في (5b) • نجد استنادا الى (5a) أن

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j$$

أيا كان x من X • كذلك ، فاننا نجد استنادا الى (6) أن

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_j.$$

وبالتالي فان

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x).$$

لذا فان التمثيل الوحيد للدالي الخطي الكيفي f على X بدلالة الداليات $f_1 , \ldots , f_n$ هو

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n. \qquad \blacksquare$$

سنورد تطبيقا هاما لهذه المبرهنة ، ولهذا الغرض سنثبت أولا صحة التمهيد التالي • (سنقدم تمهيدا مماثلا يتعلق بالفضاءات المنظمة الاختيارية فيما بعد ، وعلى وجه التحديد في ٤ـ٣ـ٤) •

٢ــ٩ــ٢ تمهيدية (المتجه الصفري)

ليكن X فضاء متجهيا منتهي البعد . فاذا كان العنصر x_0 من X يحقق المساواة $f(x_0)=0$ أيا كان f من X^* ، فان $x_0=0$.

البرهان :

لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، وليكن $x_0=\sum \xi_{0j}e_j$. عندئذ تصبح (5) بالشكل

$$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n} \xi_{0j}\alpha_j.$$

وبما أن هذا المقدار مساو للصفر أيا كان f من X^* فرضا ، أي أنه مساو للصفر أيا كان اختيارنا للاعداد $\alpha_n, \cdots, \alpha_1$ ، فان كل المقادير ξ_{0j} يجب أن تساوي الصفر . ∎

يمكننا الآن أن نجد باستخدام هذه التمهيدية المبرهنة التالية :

٢ــ٩ــ٣ مبرهنة (الانعكاسية الجبرية)

كل فضاء متجهي منتهي البعد لابد وان يكون انعكاسيا جبريا .

البرهان :

ان التطبيق القانوني $C: X \longrightarrow X^{**}$ الذي أوردناه في البند السابق خطي . وتعني المساواة $Cx_0=0$ أنه أيا كان f من X^* فان

$$(Cx_0)(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0,$$

استنادا الى تعريف C . ولما كان هذا يقتضي أن يكون $x_0=0$ وفق التمهيدية ٢ــ٩ــ٢ ، فانه يترتب على المبرهنة ٢ــ٦ــ١٠ أنه يوجد للتطبيق C تطبيق عكسي $C^{-1}: \mathcal{R}(C) \longrightarrow X$ حيث $\mathcal{R}(C)$ مدى C . كذلك ، فانه يترتب على المبرهنة ذاتها

أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X$ • ونجد اعتمادا على المبرهنة ٢ــ٩ــ١ أن

$$\dim X^{**} = \dim X^{*} = \dim X.$$

نستنتج من كل ما تقدم أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$ • لذا فان $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ نظرا لكون $\mathcal{R}(C)$ فضاء متجهيا (٢ــ٦ــ٩) ، ويكون بعد كل فضاء جزئي تماما من X^{**} أقل من $\dim X^{**}$ استنادا الى المبرهنة ٢ــ١ــ٨ • وهذا يثبت تعريف الانعكاسية الجبرية المطلوبة • ∎

مسائل

١ ــ حدد الفضاء الصفري للمؤثر $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ الممثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢ ــ ليكن المؤثر $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ معرفا بـ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longmapsto (\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$ • حدد $\mathcal{R}(T)$ و $\mathcal{N}(T)$ ومصفوفة تمثل T •

٣ ــ عين قاعدة ثنوية للقاعدة $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ •

٤ ــ لتكن $\{f_1, f_2, f_3\}$ القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, e_2, e_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ ، حيث $e_1 = (1, 1, 1)$ و $e_2 = (1, 1, -1)$ و $e_3 = (1, -1, -1)$ • جد $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ ، حيث $x = (1, 0, 0)$ •

٥ ــ اذا كان f داليا خطيا على فضاء متجهي X بعده n ، فما هو البعد الذي يمكن أن يكون للفضاء الصفري $\mathcal{N}(f)$ ؟

٦ ــ جد قاعدة للفضاء الصفري للدالي f المعرف على $\mathbb{R}^3$ بالمساواة $f(x) = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$ حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ •

٧ ــ أعد نفس الطلب الوارد في المسألة ٦ وذلك بافتراض أن $f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$ حيث $\alpha_1\neq 0$.

٨ ــ اذا كان Z فضاء جزئيا بعده $(n-1)$ من فضاء متجهي X بعده n ، فبين أن Z هو الفضاء الصفري لدالي خطي مناسب f على X يتحدد بصورة وحيدة مقربا الى مضروب عددي .

٩ ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الحدوديات الحقيقية لمتغير حقيقي والتي درجة كل منها أصغر من عدد معطى n ، ومن الحدودي $x=0$ (الذي تترك درجته دون تحديد لدى تعريف الدرجة) . لتكن $f(x)=x^{(k)}(a)$ قيمة المشتق من المرتبة k (k مثبت) للعنصر x من X في نقطة a من $\mathbb{R}$. أثبت أن f دالي خطي على X .

١٠ــ ليكن Z فضاء جزئيا من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن x_0 عنصرا من $X-Z$. بين أن هنالك داليا خطيا f على X بحيث أن $f(x_0)=1$ ، وأن $f(x)=0$ أيا كان x من Z .

١١ــ اذا كان x و y متجهين مختلفين في فضاء متجهي منتهي البعد X ، فبين أنه يوجد دالي خطي f على X بحيث يكون $f(x)\neq f(y)$.

١٢ــ اذا كانت $f_1, \dots, f_p$ داليات خطية على فضاء متجهي X بعده n ، حيث $p<n$ ، فبين أن ثمة متجها $x\neq 0$ في X بحيث يكون $f_1(x)=0, \cdots, f_p(x)=0$. ما هي النتائج التي نستخلصها من هذا بالنسبة الى المعادلات الخطية ؟

١٣ــ (**المدد الخطي**) . ليكن Z فضاء جزئيا تماما من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن f داليا خطيا على Z . بين أنه يمكن تمديد f خطيا الى X ، أي أنه يوجد دالي خطي $\bar{f}$ على X بحيث يكون $\bar{f}|_Z=f$.

١٤ــ ليكن f داليا على $\mathbb{R}^2$ معرفا بالمساواة $f(x)=4\xi_1-3\xi_2$ ، حيث $x=(\xi_1, \xi_2)$. لننظر الى $\mathbb{R}^2$ على أنه فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ محدد بالمساواة $\xi_3=0$. عين كل الممدات الخطية $\bar{f}$ للدالي f من $\mathbb{R}^2$ الى $\mathbb{R}^3$.

١٥ـ ليكن $Z \subset \mathbf{R}^3$ فضاء جزئيا معرفا بالمساواة $\xi_2 = 0$ • وليكن f علـى Z محددا بالدستور $f(x) = (\xi_1 - \xi_3)/2$ • جد ممددا خطيا $\tilde{f}$ لـ f الى $\mathbf{R}^3$ بحيث يكون $\tilde{f}(x_0) = k$ (k عدد مثبت معطى) ، وذلك بفرض أن $x_0 = (1, 1, 1)$ • هـل $\tilde{f}$ وحيـد ؟

٢ـ١٠ الفضاءات المنظمة للمؤثرات • الفضاء الثنوي

لقد عرفنا في البند ٢ـ٧ المؤثر الخطي المحدود ، وأوضحناه بأمثلة أساسية خلفت لدى القارىء انطباعا أوليا عن أهمية هذا النوع من المؤثرات • أما في هذا البند فان هدفنا هو التالي : نأخذ أي فضاءين منظمين X و Y (كلاهما حقيقي أو كلاهما عقدي) ، وننظر في المجموعة

$$B(X, Y)$$

المؤلفة من كل المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y ، أي في المؤثرات التي كل منها معرف على X بأكمله ومداه واقـع في Y ، ونريد أن نبـين بأن المجموعـة $B(X, Y)$ يمكن أن تجعل نفسها فضاء منظما(*) •

ان هذا ليس بالامر العسير ، ذلك أننا أولا نحول المجموعة $B(X, Y)$ الـى فضاء متجهي بتعريف المجموع $T_1 + T_2$ لمؤثرين T_1 و T_2 من $B(X, Y)$ بطريقـة طبيعية بالمساواة

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

وتعريف الجداء αT لمؤثر T من $B(X, Y)$ بالعدد α بالمساواة

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

* ان B في $B(X, Y)$ تعني الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "bounded." ، اي « محدود » . ويستعمل رمز اخر أحيانا بدلا من $B(X, Y)$ هو $L(X, Y)$ ، حيث L تعني الحرف الأول من الكلمة الانجليزية "linear." أي « خطي » . ورغم أن كلا من المصطلحين شائع ، الا اننا سنتمسك بالمصطلح $B(X, Y)$ في كتابنا .

فاذا أعدنا الى الذاكرة مضمون الشق (ب) من التمهيد ٢ــ٧ــ٢ ، فاننا نجد رأسا النتيجة التالية :

٢ــ١٠ــ١ مبرهنة (الفضاء $B(X, Y)$)

ان الفضاء المتجهي $B(X, Y)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية والمحدودة من فضاء منظم X في فضاء منظم Y هو نفسه فضاء منظم ، حيث يعرف النظيم فيه بالمساواة

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \tag{1}$$

متى يغدو $B(X, Y)$ فضاء باناخ ؟ ان هذه مسألة مركزية في التحليل الدالي ، وترد الاجابة عنها في المبرهنة التالية • ومن الجدير ملاحظته في هذه المبرهنة أن شرط كون $B(X, Y)$ فضاء باناخ مستقل عن X ، أي أن X قد يكون تاما ، وقد لا يكون •

٢ــ١٠ــ٢ مبرهنة (التمام)

اذا كان Y فضاء باناخ ، فان $B(X, Y)$ يكون فضاء باناخ •

البرهان :

لتكن (T_n) متتالية اختيارية لكوشي في $B(X, Y)$ ، ولنثبت أن (T_n) تتقارب من مؤثر T في $B(X, Y)$ • لما كانت (T_n) متتالية لكوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

وهكذا فاننا نجد أنه أيا كان x من X وأيا كان m, n اللذان يكبران N ، فان [راجع (3) من البند ٢ــ٧] :

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \tag{2}$$

لنختر الآن لكل عنصر مثبت x وكل $\tilde{\varepsilon}$ معطى عددا ε مساويا لـ ε_x بحيث يكون $\varepsilon_x\|x\| < \tilde{\varepsilon}$. عندئذ نجد من (2) أن $\|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon}$ ، ونرى أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y . وبما أن Y تام ، فان $(T_n x)$ تتقارب ، ولنفترض مثلا أن $T_n x \longrightarrow y$. من الواضح أن النهاية y في Y تابعة للعنصر x الذي اخترناه في X . ونكون بهذا قد عرفنا مؤثرا $T: X \longrightarrow Y$ محددا بالمساواة $y = Tx$. هذا المؤثر خطي لان

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

سنثبت أن T محدود وأن $T_n \longrightarrow T$ ، أي أن $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

بما أن (2) صحيحة أيا كان m الذي يكبر N ، وأن $T_m x \longrightarrow Tx$ ، فمن الممكن جعل $m \longrightarrow \infty$. وباستخدام حقيقة كون النظيم مستمرا ، فاننا نجد عندئذ من (2) أنه أيا كان n الذي يكبر N وأيا كان x من X فان

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \leqq \varepsilon\|x\|. \qquad (3)$$

وهذا يبين أن $(T_n - T)$ عندما يكون $n > N$ ، هو مؤثر خطي محدود . وبما أن T_n محدود ، فان $T = T_n - (T_n - T)$ محدود ، أي أن $T \in B(X, Y)$. وفضلا عن ذلك ، فاذا أخذنا في (3) الحد الاعلى عندما تمسح x كل العناصر التي نظيم كل منها 1 ، فاننا نجد

$$\|T_n - T\| \leqq \varepsilon \qquad (n > N).$$

لذا فان $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. ∎

لهذه المبرهنة نتيجة هامة بالنسبة الى الفضاء الثنوي X' للفضاء X الذي نعرفه كما يلي :

٢-١٠-٣ تعريف (الفضاء الثنوي X')

ليكن X فضاء منظما . عندئذ تشكل مجموعة الداليات الخطية المحدودة

على X فضاء منظما حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{4}$$

[راجع (2) من البند ٢ــ٨] يدعى هذا الفضاء **الفضاء الثنوي**(*) للفضاء X ويرمز له بـ X' ∎ ٠

لما كان الدالي الخطي على X تطبيقـا لـ X في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ (أي في الحقـل العددي لـ X) وكان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ المزودان بالمترك المألوف تامين ، فاننا نستنتج أن X' هو $B(X, Y)$ حيث Y هو الفضاء التام $\mathbb{R}$ أو الفضاء التام $\mathbb{C}$ ٠ لـذا فانه يمكن تطبيق المبرهنة ٢ــ١٠ــ٢ في هذه الحالة ، ونجد ما يلي :

٢ــ١٠ــ٤ مبرهنة (الفضاء الثنوي)

الفضاء الثنوي X' لفضـاء منظـم X هو فضـاء بانـاخ (سـواء أكـان X فضاء باناخ أم لم يكن كذلك) ٠

من المبادىء الاساسية في التحليل الدالي أن تقصّي الفضاءات يقترن غالبا بتقصي الفضاءات الثنوية ٠ ولهذا نجد من المناسب أخذ بعض الفضاءات التـي نقابلها مرارا في التحليل الدالي والبحث عن شكل فضاءاتها الثنوية ٠ وفي هذا المقام ، فان مفهوم الايزومورفيزم يعيننا في تفهم المناقشة الحالية ٠ سنورد الآن التعريف التالي الذي يستند الى ما جاء في البند ٢ــ٨ ٠

إن **ايزومورفيزم** فضاء منظم X على فضاء منظم $\tilde{X}$ هو تطبيق متباين وغامر $T: X \longrightarrow \tilde{X}$ يحفظ النظيم ، بمعنى أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

---

* يدعى هذا الفضاء أحيانا الفضاء المرافق لـ X ٠ تذكر اننا عرفنا الفضاء الثنوي **الجبري** X^* لـ X في البند ٢ــ٨ بأنه الفضاء المتجهي المؤلف من جميع الداليات الخطيـة عـلى X ٠

(لذا فان T ايزومتري) • ونقول عندئذ عن X انه ايزومورفي مع $\tilde{X}$ ، ويسمى الفضاءان X و $\tilde{X}$ **فضاءين منظمين ايزمورفيين** • ومن وجهة نظر مجردة ، فاننا نعتبر الفضاءين الايزمورفيين X و $\tilde{X}$ متطابقين ، وكأن تأثير الايزومورفيزم لايعدو كونه اطلاق أسماء جديدة على العناصر (وذلك باضافة T الى كل منها) •

ان المثال الاول الذي سنسوقه الآن يبين أن الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ ايزومورفي مع $\mathbf{R}^n$ ، وهذا يعني بايجاز أن الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ هو $\mathbf{R}^n$ •

امثلـــة

٢ــ١٠ــ٥ الفضـــاء $\mathbf{R}^n$

الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ هو $\mathbf{R}^n$ •

البرهـــان :

نلاحظ أولا استنادا الى المبرهنة ٢ــ٧ــ٨ أن $\mathbf{R}^{n\prime}=\mathbf{R}^{n*}$ ، وأنه يترتب على (5) من البند ٢ــ٩ أن لكل f من $\mathbf{R}^{n*}$ التمثيل

$$f(x)=\sum \xi_k\gamma_k \qquad\qquad \gamma_k=f(e_k)$$

(الجمع يتم من 1 الى n) • واعتمادا على متباينة كوشي ــ شفارتز (البنـــد ١ــ٢) فـــان

$$|f(x)|\leqq\sum|\xi_k\gamma_k|\leqq\left(\sum \xi_j^2\right)^{1/2}\left(\sum \gamma_k{}^2\right)^{1/2}=\|x\|\left(\sum \gamma_k{}^2\right)^{1/2}$$

وبأخذ الحد الاعلى عندما تمسح x جميع العناصر التي نظيمها 1 ، فاننا نجد أن

$$\|f\|\leqq\left(\sum \gamma_k{}^2\right)^{1/2}$$

ومن جهة أخرى ، فمن السهل التحقق أنه اذا أخذنا العنصر $x=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ نجد

المتباينــة

$$\|f\| \geqq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

وبالتالي فان

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

ان هذا يثبت بأن نظيم f هو النظيم الاقليدي ، وأن $\|f\| = \|c\|$ ، حيث $c = (\gamma_k) \in \mathbf{R}^n$ لذا فان التطبيق من $\mathbf{R}^{n\prime}$ على $\mathbf{R}^n$ المحدد بالشكل $f \longmapsto c = (\gamma_k)$ ، حيث $\gamma_k = f(e_k)$ | يحفظ النظيم • وبما أنه خطي ومتباين وغامر أيضا ، فانه ايزومورفيزم • ∎

٢ــ١٠ــ٦ الفضاء l^1

الفضاء الثنوي لـ l^1 هو l^∞.

البرهــان :

ان قاعدة شاودر (البند ٢ــ٣) للفضاء l^1 هــي (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{kj})$ ، عندئذ يوجد لكل x من l^1 التمثيل الوحيد التالي

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{5}$$

لنأخذ أي f من $l^{1\prime}$ ، حيث $l^{1\prime}$ هــو الفضاء الثنوي لـ l^1 • بما أن f خطــي ومحدود فان

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k) \tag{6}$$

حيث تتحدد الاعداد $\gamma_k = f(e_k)$ بصورة وحيدة بواسطة f • وبما أن $\|e_k\| = 1$ وأن

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqq \|f\| \, \|e_k\| = \|f\|, \qquad \sup_k |\gamma_k| \leqq \|f\|. \tag{7}$$

أيضا ، فان $(\gamma_k) \in l^\infty$.

ومن جهة ثانية ، فمن الممكن أن نجد لكل $b = (\beta_k)$ من l^∞ داليـا خطيـا محدودا ، وليكن g على l^1 . وفي الحقيقة ، فانه يمكن تعريف g على l^1 بالدستور

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

حيث $x = (\xi_k) \in l^1$. من الواضح أن g خطي ، كما أن محدوديته تنتج من التالي

$$|g(x)| \leqq \sum |\xi_k \beta_k| \leqq \sup_j |\beta_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\beta_j|$$

(الجمع يتم من 1 الى ∞) . لذا فان $g \in l^{1'}$.

سنبين أخيرا أن نظيم f هو النظيم على الفضاء l^∞ . من (6) نرى أن

$$|f(x)| = \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leqq \sup_j |\gamma_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\gamma_j| .$$

واذا أخذنا الحد الاعلى عندما تمسح x كل العناصر التي نظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\| \leqq \sup_j |\gamma_j| .$$

ويترتب على هذه المتباينة ومن (7) المساواة

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j| , \tag{8}$$

التي ليست سوى النظيم على l^∞ . وبالتالي فمـن الممكن كتابة هـذه المساواة بالشكل $\|f\| = \|c\|_\infty$ ، حيث $c = (\gamma_j) \in l^\infty$ ، وهي تبين أن التطبيق الخطي المتباين والقاصر لـ $l^{1'}$ على l^∞ والمعرف بالدستور $f \longmapsto c = (\gamma_j)$ هو ايزومورفيزم . ∎

٢-١-٧ الفضاء l^p

الفضاء الثنوي لـ l^p هو l^q ، حيث $1 < p < +\infty$ و q هو مرافق p ، أي أن $1/p + 1/q = 1$.

البرهــان :

ان (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{kj})$ كما في المثال السابق تصلح لان تكون قاعــدة شاودر للفضاء l^p • عندئذ يكون لكل x من l^p التمثيل الوحيد التالي

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{9}$$

لنأخذ أي f من $l^{p'}$ ، حيث $l^{p'}$ هو الفضاء الثنوي لـ l^p • بما أن f خطــي ومحدود فــان

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k). \tag{10}$$

ليكن q مرافق p (١ـ٢ـ٣) ، ولنأخذ $x_n = (\xi_k^{(n)})$ ، بفرض أن

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\gamma_k|^q/\gamma_k & \text{اذا كان } \gamma_k \neq 0 \text{ و } k \leqq n \\ 0 & \text{اذا كان } \gamma_k = 0 \text{ أو } k > n \end{cases} \tag{11}$$

فاذا عوضنا هذا في (10) نجد أن

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q.$$

كذلك ، فلدينا استنادا الى (11) والى أن $(q-1)p = q$ ، ما يلي :

$$\begin{aligned} f(x_n) \leqq \|f\| \, \|x_n\| &= \|f\| \Big(\sum |\xi_k^{(n)}|^p \Big)^{1/p} \\ &= \|f\| \Big(\sum |\gamma_k|^{(q-1)p} \Big)^{1/p} \\ &= \|f\| \Big(\sum |\gamma_k|^q \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

(يتم الجمع من 1 الى n) • وبالتالي فان

$$f(x_n) = \sum |\gamma_k|^q \leqq \|f\| \Big(\sum |\gamma_k|^q \Big)^{1/p}.$$

وبالتقسيم على العامل الاخير ، فاننا نجد اعتمادا على المساواة $1-1/p=1/q$ ، أن

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\right)^{1-1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^q\right)^{1/q}\leqq\|f\|.$$

ولما كان n كيفيا ، فاننا نجد بجعل $n\longrightarrow\infty$ أن

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^q\right)^{1/q}\leqq\|f\|. \tag{12}$$

اذن $(\gamma_k)\in l^q$ •

وبالعكس ، فمن الممكن أن نجد لكل $b=(\beta_k)$ من l^q داليا خطيا محدودا مقابلا g على l^p • وفي الحقيقة ، فمن الممكن تعريف g على l^p بأن نضع

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k$$

حيث $x=(\xi_k)\in l^p$ • عندئذ يكون g خطيا ، ومحدوديته تنتج عن متباينة هولدر (10) من البند ١ــ٢ • لذافان $g\in l^{p'}$ •

سنبين أخيرا أن نظيم f هو النظيم على الفضاء l^q • لدينا انطلاقا من (10) ومن متباينة هولدر ما يلي

$$|f(x)|=|\sum\xi_k\gamma_k|\leqq\left(\sum|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum|\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$
$$=\|x\|\left(\sum|\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$

(يتم الجمع من 1 الى ∞) • لذا فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما يمسح جميع العناصر التي نظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\|\leqq\left(\sum|\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$

نستنتج من هذا ومن (12) المساواة

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^q\right)^{1/q} \tag{13}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل $\|f\|=\|c\|_q$ ، حيث $c=(\gamma_k)\in l^q$ ، و $\gamma_k=f(e_k)$ • ان التطبيق لـ $l^{p'}$ على l^q المعرف بالدستور $c \longmapsto f$ خطي ومتباين وغامر • وباضافة (13) الى هذا نستنتج أنه يحفظ النظيم ، وبالتالي فهو ايزومورفيزم •∎

ما هي أهمية هذه الامثلة والامثلة المشابهة لها ؟ من الاهمية بمكان في البحوث التطبيقية معرفة الشكل العام للداليات الخطية والمحدودة على فضاءات متداولة من الوجهة العملية ، ولقد تم فعلا دراسة العديد من الفضاءات بهذا الشكل • ان أمثلتنا تقدم التمثيلات العامة للداليات الخطية والمحدودة على $\mathbb{R}^n$ و l^1 و l^p ، حيث $p>1$ • أما الفضاء $C[a,b]$ ، فسنتناوله بالبحث فيما بعد (البند ٤ـ٤) ، وذلك بعد التعرف على أدوات اضافية لازمة لدراسة هذا الفضاء (وأهمها ما يسمى بمبرهنة هان ـ باناخ) •

كذلك ، فاذا أعدنا الى الذاكرة ما سبق وتمت مناقشته بصدد الفضاء الثنوي الجبري X^{**} في البند ٢ـ٨ ، فمن الممكن التساؤل عما اذا كان يجدر بنا دراسة الفضاء الثنوي الثاني $X''=(X')'$ للفضاء X • ومع أن الاجابة عن هذا التساؤل تتم بالايجاب ، فاننا سنرجيء هذه الدراسة الى البند ٤ـ٦ ، حيث نطور أساليب ملائمة للحصول على نتائج أساسية في ذلك الاتجاه • أما في الفصل القادم ، فسنتوجه الى أمور أبسط الى حد ما ، ونعني بها فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت • وسنرى أن هذه فضاءات منظمة خاصة تحظى بأهمية تطبيقية هائلة •

مسائل

١ ـ ما هو العنصر الصفري في الفضاء المتجهي $B(X,Y)$ ؟ وما هو عكس عنصر T من $B(X,Y)$ بالمعنى الوارد في التعريف ٢ـ١ـ١ ؟

٢ ـ لقد عرفنا المؤثرات والداليات التي درسناها حتى الآن على الفضاء X بكامله • أثبت أنه حتى لو استغنينا عن هذا الفرض ، فاننا نجد في حالة

الداليات المبرهنة التالية : « اذا كـان f و g داليـين خطيين محدوديـن ساحتاهما في فضاء منظم X ، فانه اذا افترضنا α و β عددين غير صفريين، فان التركيب الخطي $h=\alpha f+\beta g$ يكـون داليـا خطيـا محدودا ساحتـه $\mathfrak{D}(h)=\mathfrak{D}(f)\cap\mathfrak{D}(g)$ » .

٣ ــ عمـم المبرهنة الواردة في المسألة السابقة على المؤثرين الخطيين المحدودين T_1 و T_2 .

٤ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين ، ولتكن $T_n: X \longrightarrow Y$ $(n=1, 2, \cdots)$ مؤثرات خطية محدودة . بين أن التقارب $T_n \longrightarrow T$ يقتضي أن يوجد عـدد صحيح موجب N لكل عدد موجب ε ، بحيث أنه اذا كان n أي عدد طبيعي يحقق المتباينة $n>N$ ، واذا كان x أي عنصر منتم الى كرة مغلقة معطاة ، فاننـا نجد المتباينة $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$.

٥ ــ بين أن ٢ــ٨ــ٥ ينسجم مع ٢ــ١٠ــ٥ .

٦ ــ اذا كان X فضاء المرتبات n من الاعداد الحقيقية ، وكان $\|x\|=\max\limits_j|\xi_j|$ ، حيث $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ، فما هو النظيم المقابل للفضاء الثنوي X' ؟

٧ ــ ما هي النتيجة التي يمكن الحصول عليها من ٢ــ١٠ــ٦ في حالة الفضـاء X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد الحقيقية ؟

٨ ــ أثبت أن الفضاء الثنوي للفضاء c_0 هو l^1 (راجع المسألة ١ مـن البنـد ٢ــ٣) .

٩ ــ بين أن الدالي الخطي f على فضاء متجهي X يتحدد بصورة وحيدة لدى معرفة قيمه على قاعدة لهامل للفضاء X . (راجع البند ٢ــ١) .

١٠ــ ليكن X و $Y\neq\{0\}$ فضاءين منظمين ، حيث $\dim X=\infty$. أثبت أنه يوجد مؤثر خطي غير محدود واحد على الاقل $T: X\longrightarrow Y$. (استخدم قاعـدة هامـل) .

١١ــ اذا كان X فضاء منظما وكان $\dim X=\infty$ ، فبين أن الفضاء الثنوي X' لا يتطابق مع الفضاء الثنوي الجبري X^* .

١٢ـ (التمـام) • يمكن استخدام الامثلـة الواردة في البند السابق لاثبات تمام فضاءات معينة • كيف يتم هذا الامر ؟ وما هي هذه الفضاءات ؟

١٣ـ (العـادم) • لتكن M أي مجموعة جزئية غير خالية في فضاء منظم X • يعرف العادم M^a لـ M بأنه مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X المساوية للصفر في كل نقطة من M • وهـكذا فان M^a مجموعة جزئية مـن الفضاء الثنوي X' للفضاء X • بين أن M^a فضاء متجهي جزئي من X' ، وأن هذا الفضاء الجزئي مغلق • حدد X^a و $\{0\}^a$ •

١٤ـ اذا كان M فضاء جزئيا بعده m من فضاء منظم X بعده n ، فبين أن M^a هو فضاء جزئي من X' بعده $(n-m)$ • صغ هذا على شكل مبرهنة حول حلول جملة معادلات خطية •

١٥ـ لتكن $M=\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}\subset\mathbb{R}^3$ • أوجد قاعدة لـ M^a •

* * *

الفصل الثالث

فضاءات الجداء الداخلي • فضاءات هلبرت

من الممكن في كل فضاء منظم أن نجمع المتجهات وأن نضرب المتجهات بأعداد ، تماما كما نفعل في جبر المتجهات • وفضلا عن ذلك ، فان النظيم على الفضاء المنظم يعمم مفهوم طول المتجه • بيد أن الذي ما يزال ناقصا في الفضاء المنظم العام ، والذي نود ادراجه في هذا الفضاء إن أمكن ، هو شبيه للجداء الداخلي الذي عرفناه في جبر المتجهات في الفضاء $\mathbf{R}^3$ بالمساواة

$$a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

والذي أسفرعن عدة نتائج منها أن

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

وأن شرط تعامد متجهين هو

$$a \cdot b = 0$$

وقد وجدنا أن هذا التعريف وما ينتج عنه هي أدوات ذات فعالية كبيرة في العديد من التطبيقات • لذا فانه يرد السؤال عما اذا كان من الممكن تعميم الجداء الداخلي والتعامد على الفضاءات المتجهية العامة • وفي الحقيقة ، فقد وجد أن هذا أمر يمكن تنفيذه ، إذ تم التوصل الى ما يسمى **بفضاءات الجداء الداخلي** ، التي يطلق عليها حين تكون تامة اسم **فضاءات هلبرت** •

ان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة خاصة ، كما سنرى بعد قليل ، وهي في التسلسل التاريخي أقدم من الفضاءات المنظمة العامة ، كما أن نظرية هذه الفضاءات أغنى ، وتمتلك كثيرا من ملامح الفضاءات الاقليدية ، التي يشغل مفهوم التعامد فيها مركزا متميزا • وفي الحقيقة ، فان فضاءات الجداء الداخلي قد تكون أكثر التعميمات الطبيعية للفضاء الاقليدي ، وعلى القارىء أن يلاحظ التناسق الكبير والجمال الذي تتمتع به المفاهيم والبراهين في هذا المجال • وقد استوحيت النظرية بكاملها من بحوث د• هلبرت (١٩١٢ م•) في المعادلات التكاملية • أما الرموز والمصطلحات الهندسية المستعملة حاليا ، فهي مشابهة لتلك الواردة في الهندسة الاقليدية ، وقد اعتمدها شميت عام ١٩٠٨ م• بناء على اقتراح كاقاليفسكي (كما ذكر شميت في الصفحة ٥٦ من بحثه) • وقد تبين أن هذه الفضاءات أكثر الفضاءات أهمية في التطبيقات العملية للتحليل الدالي حتى وقتنا هذا •

مفاهيم هامة • توجيه موجز حول المحتوى الرئيسي

فضاء الجداء الداخلي X (٣ـ١ـ١) هو فضاء متجهي مزود **بجداء داخلي** $\langle x, y\rangle$ معرف عليه • والجداء الداخلي تعميم للجداء الداخلي لمتجهين في الفضاء ثلاثي البعد ، وهو يستعمل لتعريف ما يلي :

(I) النظيم $\|\cdot\|$ بالمساواة $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ •

(II) التعامد بالمساواة $\langle x, y\rangle = 0$ •

وفضاء هلبرت هو فضاء جداء داخلي تام • ونظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت أغنى من نظرية الفضاءات المنظمة العامة وفضاءات باناخ • ومن السمات المميزة لهذه الفضاءات ما يلي :

(i) تمثيلات الفضاء H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق **ومتممه المتعامد** (٣ـ٣ـ٤) •

(ii) **المجموعات والمتتاليات المتعامدة** والتمثيلات الموافقة لعناصر من H • (راجع البندين ٣ـ٤ و ٣ـ٥) •

(iii) تمثيل ريس ٣ــ٨ــ١ للداليات الخطية المحدودة بجداءات داخلية •

(iv) مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي محدود T (٣ــ٩ــ١) •

وتكون المجموعات والمتتاليات المتعامدة هامة فعلا فقط عندما تكون كلية (٣ــ٦) • ومن الممكن استعمال مؤثرات هلبرت المرافقة في تعريف صفوف من المؤثرات (المترافقة ذاتيا ، الواحدية ، الناظمية ، كما في البند ٣ــ١٠) والتي تنطوي على أهمية بالغة في التطبيقات •

٣ــ١ فضاءات الجداء الداخلي • فضاءات هلبرت

ان الفضاءات التي تتناولها في هذا الفصل تعرف على النحو التالي •

٣ــ١ــ١ تعريف (فضاء الجداء الداخلي ، فضاء هلبرت)

فضاء الجداء الداخلي هو فضاء متجهي X مزود بجداء داخلي معرف على X • أما **فضاء هلبرت** فهو فضاء جداء داخلي تام (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي ، كما في (2)) • **الجداء الداخلي** على X هنا هو تطبيق لـ $X \times X$ في الحقل العددي K لـ X ، بمعنى أنه يقابل كل زوج x و y من المتجهات عدد نشير اليه بالشكل

$$\langle x, y \rangle$$

ويسمى **الجداء الداخلي**(*) لـ x و y ، بحيث تتحقق الشروط التالية أيا كانت المتجهات x و y و z وأيا كان العدد α :

(*) يسمى الجداء الداخلي أحيانا **الجداء العددي** ، الا انه يجب عدم الخلط بينه وبين جداء متجه بعدد في الفضاء المتجهي • هذا وان الرمز $\langle , \rangle$ للجداء الداخلي شائع تماما • وفي الكتب الابتدائية ، ككتابنا هذا ، فان لهذا الرمز ميزة على الرمز $(,)$ المستعمل كثيرا ، ذلك انه يستبعد الخلط بينه وبين الزوج المرتب (الذي قد يدل على مركبتي متجه ، أو عنصرين من فضاء جداء ، أو مضمون دالة لمتغيرين ، أو غير ذلك) •

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \qquad \text{(جد ١)}$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \qquad \text{(جد ٢)}$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \qquad \text{(جد ٣)}$$

$$\langle x, x\rangle \geqq 0$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0. \qquad \text{(جد ٤)}$$

ويحدد الجداء الداخلي على X **نظيما** على X بالمساواة

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (\geqq 0) \tag{1}$$

كما يحدد متركا على X كما يلي :

$$d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}. \tag{2}$$

▮

لذا فان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة ، كما أن فضاءات هلبرت هي فضاءات باناخ .

وتعني الاشارة ـ الواردة في (جد ٣) المرافق العقدي . وبالتالي ، فاذا كان X فضاء متجهيا حقيقيا ، فاننا نجد ببساطة أن

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \text{(التناظر)}$$

إن الاثبات بأن (1) يحقق موضوعات النظيم (ن١) ـ (ن٤) الواردة في ٢ـ٢ ، يرد في بداية البند التالي .

ويترتب على الشروط من (جد ١) وحتى (جد٣) الدساتير

$$\text{(a)} \qquad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$$

$$\text{(3)} \quad \text{(b)} \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$$

$$\text{(c)} \qquad \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle$$

التي سنستعملها كثيرا . يبين (3a) أن الجداء الداخلي خطي في عامله الايسر . وبما أنه يرد في (3c) المرافقان العقديان $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ في اليمين ، فاننا نقول بأن

الجداء الداخلي **خطي مرافق** في عامله الايمن • واذا رغبنا في التعبير عن كــلا الخاصتين معا ، فاننا نقول بأن الجداء الداخلي « خطي مرة ونصف المرة » • وما يهيب بنا الى استحداث هذا المصطلح هو أن « الخطي المرافق » يعرف أيضا بأنه « نصف خطي » • ولما كان مصطلح « نصف الخطية » هذا ضعيف الدلالة ، فاننا لــن نستعمله •

ويمكن للقارىء أن يبين باجراء حسابات مباشرة وبسيطة أن النظيم عــلى فضاء جداء داخلي يحقق **مساواة متوازي الاضلاع** الهامة التالية

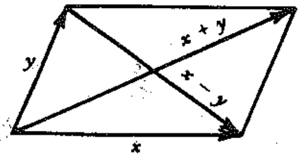
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{4}$$

وهذا المصطلح مستوحى من الهندسة الابتدائية ، كما نرى في الشكل ٢٣ ، وذلك اذا أعدنا الى الذاكرة بأن النظيم يعمم المفهوم الابتدائي لطول متجه (البند ٢ــ٢)• وانه لأمر جد هام أن نلاحظ بأن المعادلة (4) تظل سارية في الفضاءات التــي ندرسها حاليا ، والتي هــي أعــم بكثير مــن الفضاءات المستعملة في الهندسة الابتدائيــة •

وفي الختام ، فانه اذا لم يحقق نظيم المساواة (4) ، فلا يمكن الحصول على هذا النظيم من جداء داخلي باستعمال (1) • وفي الحقيقة ، فان مثل هذه النظائم موجود فعلا ، وسنورد أمثلة عليها بعد قليل • وهكذا فانه يمكننا أن نقول دون أن يكون ثمة مجال للالتباس ما يلي :

ليس كل فضاء منظم فضاء جداء داخلي بالضرورة •

وقبل البدء بايراد الامثلة ، فاننــا سنحدد مفهوم التعامد ، الــذي يشكل مفهوما رئيسيا في النظرية كلها • من المعلوم أنه اذا كان الجداء العددي لمتجهين في فضاء ثلاثي البعد صفرا ، فــان المتجهين متعامدان ، أي أن الزاوية بينهمــا تساوي $\frac{\pi}{2}$ ، أو أن أحدهما على الاقل هو المتجه الصفري • ان هــذا يوحي باقتراح التعريف التالي :



الشكل (٢٣) • متوازي أضلاع في المستوي ضلعاه x و y

٣ـ١ـ٢ تعريف (التعامد)

يقال عن عنصر x في فضاء جداء داخلي X انه **متعامـد** مع العنصر y مـن X اذا كان

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

ونقـول أيضـا **ان العنصرين x و y متعامدان** ، ونكتـب $x \perp y$ • وبصورة مماثلة ، فاذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من X ، فاننا نقول إن x يتعامد مع A ، ونكتب $x \perp A$ ، اذا كان $x \perp a$ أيا كان a من A ، كما نقول بأن A و B متعامدتان ، ونكتب $A \perp B$ ، اذا كان $a \perp b$ أيا كان a من A و b من B • ∎

أمثلـة

٣ـ١ـ٣ الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$

الفضاء $\mathbf{R}^n$ هو فضاء هلبرت ، حيث الجداء الداخلي معرف بالدستور

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n \tag{5}$$

وحيث

$$y = (\eta_j) = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \quad \text{و} \quad x = (\xi_j) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

وفي الحقيقة ، فانه يترتب على (5) أن

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ونحصل من هذا على المترك الاقليدي المعرف كما يلي :

$$d(x, y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2} = [(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2]^{1/2};$$

(راجع ٢ــ٢ــ٢) • هذا وقد أثبتنا التمام في ١ــ٥ــ١ •

واذا كان $n=3$ ، فان الدستور (5) يعطي الجداء العددي المألوف

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3$$

للمتجهين $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ، كما أن التعامد

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = 0$$

ينسجم مع المفهوم الابتدائي لتعامد متجهين •

٣ــ١ــ٤ الفضاء الوحدي C^n

ان الفضاء C^n المعرف في ٢ــ٢ــ٢ هو فضـاء هلبرت المـزود بالجـداء الداخلي المعرف بالدستور

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\bar{\eta}_1+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n. \tag{6}$$

وفي الحقيقة ، فاننا نستنتج من (6) أن النظيم هو

$$\|x\| = (\xi_1\bar{\xi}_1+\cdots+\xi_n\bar{\xi}_n)^{1/2} = (|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{1/2}.$$

ونرى هنا أيضا سبب وجوب أخذ المرافق العقـدي $\bar{\eta}_i$ في (6) ، اذ أنه يترتب على هذا أن $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ ، وهو الشرط (جد ٣) ، وبالتالي فان $\langle x, x\rangle$ عـدد حقيقـي •

٣ــ١ــ٥ الفضـاء $L^2[a, b]$

ان النظيم في المثال ٢ــ٢ــ٧ يعرف بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2\, dt\right)^{1/2}$$

ويمكن الحصول عليه من الجداء الداخلي المحدد بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{7}$$

لقد افترضنا في المثال ٢ـ٢ـ٧ أن الدوال حقيقية ، وذلك بقصد التبسيط . هذا وفيما يخص بعض التطبيقات العملية ، فانه من المفيد التحرر من هذا القيد باعتبار الدوال عقدية (وبافتراض أن t المنتمي الى $[a, b]$ حقيقي كما في السابق) . وتشكل هذه الدوال فضاء متجهيا عقديا ، يغدو فضاء جداء داخلي حيث

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt. \tag{7*}$$

ويعني الرمز ـــ هنا المرافق العقدي ، الذي يجعل الخاصة (جد ٣) محققة ، بحيث يكون $\langle x, x\rangle$ عددا حقيقيا . ونحتاج الى هذه الخاصة ثانية فيما يتعلق بالنظيم ، الذي يمكن أن نعرفه الآن بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

وذلك لان $x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$.

ان اتمام الفضاء المتري الموافق للمساواة (7) هو الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ (راجع ٢ـ٢ـ٧) . كذلك ، فان اتمام الفضاء المتري الموافق للمساواة (7*) يدعى **الفضاء العقدي** $L^2[a, b]$. وسنرى في البند القادم بأنه يمكن تمديد الجداء الداخلي من فضاء داخلي الى تمامه . فاذا أضفنا هذا الى ما ناقشناه الآن ، فاننا نستنتج أن $L^2[a, b]$ هو فضاء هلبرت .

٣ـ١ـ٦ فضاء متتاليات هلبرت l^2

ان الفضاء l^2 (٢ـ٢ـ٣) هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j. \tag{8}$$

وتقارب هذه المتسلسلة ناتج من متباينة كوشي ـ شفارتز (11) من البند ١ـ٢ ، ومن كون x و y عنصرين من l^2 فرضا • نرى هنا بأن (8) تعميم لـ (6) ، والنظيم محدد بالمساواة

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

أما التمام فقد سبق وأثبتناه في ١ـ٥ـ٤ •

ان l^2 هو عينة نموذجية لفضاءات هلبرت ، وقد قدمه ودرسه هلبرت عام ١٩١٢ لدى بحثه في المعادلات التكاملية • هذا ولم يعط تعريف فضاء هلبرت العام استنادا الى الموضوعات التي تحدده الا بعد فترة طويلة ، وذلك عندما أورده فون نويمان عام ١٩٢٧ في بحث له حول الاسس الرياضية لميكانيكا الكم • كذلك فقد تطرق لهذا التعريف ستون عام ١٩٣٢ • ومن الجدير بالذكر أن هذا التعريف قد تضمن قابلية الفصل ، الا أن هذا الشرط أسقط فيما بعد ، وذلك عندما بين كل من لوفيك وريش وريس عام ١٩٣٤ أنه في أغلب جوانب النظرية ، فان هذا الشرط قيد غير لازم •

٣ـ١ـ٧ الفضاء l^p

ان الفضاء l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فان l^p ليس فضاء هلبرت •

البرهان :

ان هذه الدعوى تعني أن النظيم على l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، لا يمكن أن يشتق من جداء داخلي • سنبرهن على هذا الامر باثبات أن النظيم لا يحقق

مساواة متوازي الأضلاع (4) • وفي الحقيقة ، اذا كان $x=(1,1,0,0,\cdots)\in l^p$ و $y=(1,-1,0,0,\cdots)\in l^p$ فان

$$\|x\|=\|y\|=2^{1/p}, \qquad \|x+y\|=\|x-y\|=2.$$

الامر الذي يبين بأن (4) ليست محققة في الحالة $p\neq 2$ •

لما كان l^p تاما (١ـ٥ـ٤) ، فان l^p ، حيث $p\neq 2$ ، هو **فضا عباناخ دون ان يكون فضاء هلبرت** • ويصح الامر نفسه في المثال القادم •

٣ـ١ـ٨ الفضاء $C[a,b]$

ان الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فانه ليس فضاء هلبرت •

البرهان :

سنبين بأن النظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a,b]$$

لا يمكن اشتقاقه من جداء داخلي لكونه لايحقق مساواة متوازي الاضلاع (4) • وفي الحقيقة ، فاذا أخذنا $x(t)=1$ و $y(t)=(t-a)/(b-a)$ ، فاننا نجد أن $\|x\|=1$ و $\|y\|=1$ ، وأن

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}.$$

لذا نجد أن $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ ، وأن

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5 \quad \text{في حين أن} \quad 2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$$

وبهذا يكتمل البرهان ▪ ▮

سنورد في انختام الحقيقة الهامة التالية ▪ نحن نعلم بأنه يقابل الجداء الداخلي نظيم محدد بالمساواة (1) ▪ وبالعكس فانه لأمر عظيم الشأن أن نعلم بأنه يمكن « اعادة اكتشاف » الجداء الداخلي من النظيم الموافق له ▪ وفي الحقيقة ، فيمكن للقارىء التحقق بالحساب المباشر أنه اذا كان الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي ، فان

$$\langle x, y\rangle=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{9}$$

وأنه اذا كان فضاء جداء داخلي عقدي ، فان

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle x, y\rangle&=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\\ \operatorname{Im}\langle x, y\rangle&=\tfrac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2).\end{aligned} \tag{10}$$

ويطلق أحيانا على الدستور (10) اسم **متطابقة الاستقطاب** ▪

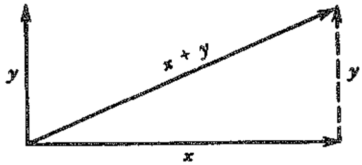
مسائل

١ ــ أثبت صحة (4) ▪

٢ ــ **(مبرهنة فيثاغورس)** ▪ اذا كان $x \perp y$ في فضاء جداء داخلي X ، فبين أن

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

(الشكل ٢٤) ▪ عمم هذا الدستور على m من المتجهات المتعامدة مثنى ▪



الشكل (٢٤) • ايضاح مبرهنة فيثاغورس في المستوي

٣ ــ اذا كان X في المسألة ٢ حقيقيا ، فبين صحة العكس ، أي أن العلاقة الواردة في المسألة المذكورة تقتضي أن يكون $x \perp y$ • أثبت أن هذا قد لا يصح عند كون X عقديا ، وأورد أمثلة على ذلك •

٤ ــ اذا كان فضاء جداء داخلي X حقيقيا ، فبين أن الشرط $\|x\|=\|y\|$ يقتضي أن يكون $\langle x+y, x-y\rangle = 0$ • ما هو المعنى الهندسي لهذا اذا كان $X=\mathbb{R}^2$ ؟ وما الذي يقتضيه هذا الشرط اذا كان X عقديا ؟

٥ ــ (**متطابقة ابولونيوس**) • تحقق بالحساب المباشر أنه أيا كانت العناصر x و y و z في فضاء جداء داخلي فان

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\tfrac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\tfrac{1}{2}(x+y)\|^2.$$

بين أنه يمكن كذلك الحصول على هذه المتطابقة انطلاقا من مساواة متوازي الاضلاع •

٦ ــ ليكن $x\neq 0$ و $y\neq 0$ • (آ) بين أنه اذا كان $x\perp y$ ، فان $\{x, y\}$ مجموعة مستقلة خطيا • (ب) عمم هذه النتيجة على المتجهات غير الصفرية والمتعامدة مثنى مثنى $x_1, \cdots, x_m$ •

٧ ــ اذا كان $\langle x, u\rangle=\langle x, v\rangle$ أيا كان x في فضاء جداء داخلي ، فبين أن $u=v$ •

٨ ــ برهن على صحة (9) •

٩ ــ برهن على صحة (10) •

١٠ــ ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين • بين بأن المساواة $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\bar{z}_2$ تعرف جداء

داخليا ، وهذا الجداء يولد المترك المألوف على المستوي العقدي • ما هو الشرط الذي يجب أن يتوفر كي يتم التعامد ؟

١١ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الازواج المرتبة من الاعداد العقدية• هل يمكن الحصول على النظيم المعرف على X بالمساواة

$$\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| \qquad [x = (\xi_1, \xi_2)]$$

انطلاقا من جداء داخلي ؟

١٢ــ عين $\|x\|$ في ٣ــ١ــ٦ اذا كان $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ ، حيث (آ) $\xi_n = 2^{-n/2}$ (ب) $\xi_n = 1/n$ ؟

١٣ــ تحقق بأنه في حالة الدوال المستمرة ، فان الجداء الداخلي الوارد في ٣ــ١ــ٥ يحقق الشروط (جد ١) ــ (جد ٤) •

١٤ــ بين أن النظيم على $C[a, b]$ لا متغير عند القيام بالتحويل الخطي $t = \alpha\tau + \beta$ • أفد من هذا في اثبات صحة الدعوى الواردة في ٣ــ١ــ٨ ، وذلك بتطبيق ينقل $[a, b]$ الى $[0, 1]$ ، ومن ثم بأخذ الدالتين المعرفتين كما يلي : $\tilde{x}(\tau) = 1$ و $\tilde{y}(\tau) = \tau$ حيث $\tau \in [0, 1]$ •

١٥ــ اذا كان X فضاء متجهيا منتهي البعد ، وكانت (e_j) قاعدة لـ X ، فبين أنه يمكن تعيين جداء داخلي على X تماما بقيمه $\gamma_{jk} = \langle e_j, e_k \rangle$ • هل يمكن اختيار الاعداد γ_{jk} هذه بصورة كيفية تماما ؟

٣ــ٢ خواص اخرى لفضاءات الجداء الداخلي

سنتحقق باديء ذي بدء من أن (١) من البند السابق تعرف نظيما :

إن (ن١) و (ن٢) في البند ٢ــ٢ نتيجتان من (جد ٤) • كذلك ، فاننا نحصل على (ن٣) بالافادة من (جد ٢) و (جد ٣) ، ذلك أن

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2.$$

وأخيرا فان (ن٤) ترد في ثنايا التمهيدية التالية •

٣-٢-١ تمهيدية (متباينة شفارتز ، متباينة المثلث) .

ان الجداء الداخلي والنظيم الناتج عنه يحققان متباينة شفارتز ومتباينة المثلث كما يلي :

(آ) لدينا

(متباينة شفارتز) $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\,\|y\|$ (1)

علما بأن الشرط اللازم والكافي كي ترد اشارة التساوي في (1) هو أن تكون $\{x, y\}$ مجموعة مرتبطة خطيا .

(ب) ان هذا النظيم يحقق ايضا المتباينة

(متباينة المثلث) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (2)

علما بأن الشرط اللازم والكافي(*) كي ترد اشارة التساوي هو ان يكون $y=0$ أو $x = cy$ (c عدد حقيقي كما أن $c \geqq 0$) .

البرهان :

(آ) اذا كان $y=0$ ، فان صحة (1) نابعة من أن $\langle x, 0\rangle = 0$. لنفترض أن $y \neq 0$. عندئذ نجد أنه أيا كان العدد α ، فان

$$0 \leqq \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle].$$

نلاحظ أن العبارة الواردة بين القوسين $[\cdots]$ تساوي الصفر اذا اخترنا $\bar{\alpha} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$. وما يتبقى من المتباينة هو

$$0 \leqq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2};$$

* لاحظ بأن شرط التساوي هذا « متناظر » تماما بالنسبة لـ x و y ، ذلك أن المساواة $x=0$ محتواة في المساواة $x=cy$ (عندما $c=0$) ، وكذلك فان المساواة $y=kx$ محتواة في المساواة $x=cy$ (عندما يكون $k=1/c$ و $c>0$) .

حيث أفدنا من المساواة $\langle y, x\rangle=\overline{\langle x, y\rangle}$ • فاذا ضربنا بـ $\|y\|^2$ ، ونقلنا الحد الاخير الى الطرف الايسر ، ومن ثم جذرنا ، فاننا نجد (1) •

ان الشرط اللازم والكافي كي ترد المساواة هنا هو أن يكون $y=0$ أو أن يكون $\|x-\alpha y\|^2=0$ ، وواضح أن المساواة الاخيرة تكافىء $x-\alpha y=0$ أو $x=\alpha y$ ، الامر الذي يثبت الارتباط الخطي •

(ب) سنثبت الآن صحة (2) •لدينا

$$\|x+y\|^2=\langle x+y, x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle+\|y\|^2.$$

واستنادا الى متباينة شفارتز فان

$$|\langle x, y\rangle|=|\langle y, x\rangle|\leqq\|x\|\,\|y\|.$$

نجد اعتمادا على متباينة المثلث بالنسبة للاعداد أن

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&\leqq\|x\|^2+2\,|\langle x, y\rangle|+\|y\|^2\\&\leqq\|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ، نجد (2) •

ان الشرط اللازم والكافي كي ترد اشارة التساوي هنا هو أن يكون

$$\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle=2\,\|x\|\,\|y\|.$$

من الواضح أن الطرف الايسر هو $2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$ ، حيث يعني الرمز Re القسم الحقيقي (والذي يشكل الحرفين الاولين من الكلمة الانجليزية real ، التي تعني بالعربية كلمة «حقيقي») • نستنتج من هذا ومن (1) أن

$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle=\|x\|\,\|y\|\geqq|\langle x, y\rangle|. \tag{3}$$

ولما كان القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يمكن أن يكبر قيمتَهُ المطلقة ، فمن الضروري أن نجد مساواة تقتضي الارتباط الخطي اعتمادا على (آ) ، ولنفترض مثلا أن $y = 0$ أو $x = cy$. سنبين أن c حقيقي وأنه أكبر من الصفر أو يساويه. نجد من (3) حيث نضع اشارة التساوي أن $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. بيد أنه اذا كان القسم الحقيقي من عدد عقدي مساويا لقيمته المطلقة ، فلابد أن يكون القسم التخيلي صفرا . لذا فان $\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \geqq 0$ وفق (3) ، كما أن $c \geqq 0$ ، وهذا ناتج من أن

$$0 \leqq \langle x, y\rangle = \langle cy, y\rangle = c\,\|y\|^2. \qquad \blacksquare$$

ان متباينة شفارتز (1) بالغة الاهمية ، وسنستعملها في البراهين اللاحقة مرارا وتكرارا . كذلك ، فثمة خاصة كثيرة الاستعمال ، ألا وهي استمرار الجداء الداخلي الامر الذي نورده في التمهيدية التالية :

٣-٢-٢ تمهيدية (استمرار الجداء الداخلي)

اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ في فضاء جداء داخلي ، فان $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$

البرهان :

اذا طرحنا وجمعنا الحد $\langle x_n, y\rangle$ ، واستعملنا متباينة المثلث المتعلقة بالاعداد، واذا استخدمنا أخيرا متباينة شفارتز ، فاننا نجد أن

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|\\ &\leqq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|\\ &\leqq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

وذلك لان $y_n - y \longrightarrow 0$ وكان $x_n - x \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$. $\blacksquare$

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، فسنثبت أنه يمكن اتمام كل فضاء جداء داخلي . ان هذا الاتمام هو فضاء هلبرت ، وهو وحيد اذا استثنينا

الايزومورفيزمات • وتعريف الايزومورفيزم في هذا السياق يتم على النحو التالي (كما سبق واقترحنا أثناء المناقشة الواردة في البند ٢ـ٨) :

إن **الايزومورفيزم** T لفضاء جداء داخلي X على فضاء داخلي $\tilde{X}$ على الحقل نفسه هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: X \longrightarrow \tilde{X}$ يحفظ الجداء الداخلي ، بمعنى أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

حيث رمزنا للجداءين الداخليين على X و $\tilde{X}$ بالرمز نفسه بقصد التبسيط • عندئذ يقال عن $\tilde{X}$ انه **ايزومورفي** مع X ، كما يقال عن X و $\tilde{X}$ انهما **فضاءا جداء داخلي ايزومورفيان** • لاحظ أن شروط التباين والغمر والخطية تضمن كون T ايزومورفيزم فضاء متجهي لـ X على $\tilde{X}$ ، بحيث أن T يحفظ البنية الكلية لفضاء الجداء الداخلي • ان T هو أيضا تطبيق ايزومتري (متساوي المسافة) لـ X على $\tilde{X}$ لان المسافات في X و $\tilde{X}$ تتحدد بالنظيمين المعرفين بالجداءين الداخليين على X و $\tilde{X}$ •

لهذا ، فان مبرهنة الاتمام لفضاء جداء داخلي يمكن أن ينص عليها على النحو التالي :

٣ـ٢ـ٢ مبرهنة (الاتمام)

يوجد لاي فضاء جداء داخلي X فضاء لهلبرت H وايزومورفيزم A من X على فضاء جزئي كثيف W في H • ان الفضاء H وحيد اذا ما استثنينا الايزومورفيزمات •

البرهان :

يوجد استنادا الى المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ فضاء لباناخ H وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من H كثيف في H • ولاسباب تعود الى الاستمرار ، فان المجاميع والمضاعفات العددية وفق هذا التطبيق لعناصر في X و W تتقابل

فيما بينها ، بحيث أن A هو ايزومورفيزم لـ X على W باعتبار كل منهما فضاء منظما • وتبين التمهيدية ٣ـ٢ـ٢ أنه يمكن تعريف جداء داخلي على H بأن نضع

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle,$$

حيث أوردنا الرموز نفسها كما في المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ (وفي ١ـ٦ـ٢) ، أي أن (x_n) و (y_n) ممثلان لـ $\hat{x}$ في H ولـ $\hat{y}$ في H أيضا على الترتيب • فاذا أدخلنا في اعتبارنا (9) و (10) من البند ٣ـ١ ، فاننا نرى بأن A ايزومورفيزم لـ X على W ، وذلك باعتبارهما فضاءي جداء داخلي •

ان المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ تضمن كذلك كون H وحيدا اذا ما استثنينا التطبيقات الايزومترية ، بمعنى أنه اذا كان H و $\tilde{H}$ إتمامين لـ X ، فانهما يرتبطان بتطبيق ايزومتري $T: H \longrightarrow \tilde{H}$ • واذا أجرينا محاكمة مماثلة لما فعلناه في حالة A ، فاننا نستخلص أن T يجب أن يكون ايزومورفيزما لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت $\tilde{H}$ • ∎

يعرف **الفضاء الجزئي** Y من فضاء جداء داخلي X بأنه فضاء جزئي متجهي من X (البند ٢ـ١) مزود بالمقصور على $Y \times Y$ للجداء الداخلي المعرف على X •

وبصورة مماثلة ، فان **الفضاء الجزئي** Y من فضاء هلبرت H يعرف بأنه فضاء جزئي من H باعتباره فضاء جداء داخلي • لاحظ بأنه ليس من الضروري أن يكون Y فضاء هلبرت ، ذلك أن Y قد لا يكون تاما • وفي الحقيقة ، فاننا نستنتج من المبرهنتين ٢ـ٣ـ١ و ٢ـ٤ـ٢ مباشرة الدعويين (آ) و (ب) الواردتين في المبرهنة التالية :

٣ـ٢ـ٤ مبرهنة (الفضاء الجزئي)

ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء هلبرت H • عندئذ تصح الدعاوى التالية :

(آ) Y الشرط اللازم والكافي كي يكون Y تاما هو أن يكون مغلقا في H •

(ب) اذا كان Y منتهي البعد ، فانه تام

(ج) اذا كان H فصولا ، فان Y يكون كذلك . وبوجه أعم ، فان كل مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي فصول فصولة .

هذا ، ونترك للقارئ القيام بسرد البرهان البسيط للشق (ج) .

مسائل

١ ـ ما هي متباينة شفارتز في $\mathbb{R}^2$ وفي $\mathbb{R}^3$. قدم برهانا آخر لها في هاتين الحالتين .

٢ ـ أورد أمثلة لفضاءات جزئية من l^2 .

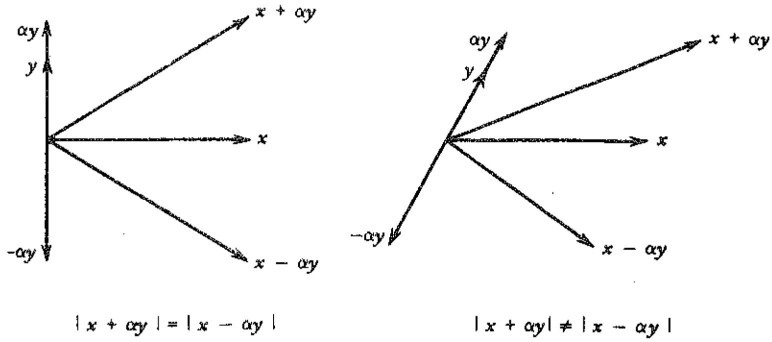
٣ ـ ليكن X فضاء جداء داخلي مؤلف من الحدودي $x=0$ (راجع الملاحظة الواردة في المسألة ٩ من البند ٢ـ٩) ومن كل الحدوديات الحقيقية في t التي درجة كل منها لاتتجاوز 2 ، والمعرفة على $[a, b]$ ، حيث الجداء الداخلي هو ذاك المعرف بالمساواة (7) من البند ٣ـ١ . أثبت أن X تام . ليكن Y مؤلفا من جميع العناصر x من X بحيث أن $x(a)=0$. هل يشكل Y فضاء جزئيا من X ؟ وهل تشكل كل العناصر x من X التي درجة كل منها 2 فضاء جزئيا من X ؟

٤ ـ بين أن الشرطين $y \perp x_n$ و $x_n \longrightarrow x$ معا يقتضيان أن $x \perp y$.

٥ ـ أثبت أنه اذا كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي ، فان الشرطين $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ و $\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$ معا يقتضيان التقارب $x_n \longrightarrow x$.

٦ ـ أثبت صحة الدعوى الواردة في المسألة ٥ وذلك في حالة المستوي العقدي .

٧ ـ برهن أنه في فضاء جداء داخلي ، فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المساواة $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$ أيا كان العدد α . (انظر الشكل ٢٥) .



الشكل (٢٥) • ايضاح المسالة٧ في المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$

٨ ــ أثبت أنه في فضاء جداء داخلي ، يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المتباينة $\|x+\alpha y\| \geqq \|x\|$ أيا كان العدد α •

٩ ــ ليكن V الفضاء المتجهي لجميع الدوال العقدية المستمرة على $J=[a, b]$ • لنفترض أن $X_1=(V, \|\cdot\|_\infty)$ حيث $\|x\|_\infty = \max_{t \in J} |x(t)|$ ، وأن $X_2=(V, \|\cdot\|_2)$ حيث

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

أثبت أن التطبيق المطابق $x \longmapsto x$ لـ X_1 على X_2 مستمر • (هــذا التطبيق ليس هوميومورفيزما ، نظرا لكون X_2 غير تام) •

١٠ــ **(المؤثر الصفري)** • ليكن $T: X \longrightarrow X$ مؤثرا خطيا محدودا على فضــاء جداء داخلي عقدي X • فاذا كان $\langle Tx, x\rangle = 0$ أيا كان x من X ، فأثبت أن $T=0$ •

بين أن هذا غير صحيح في حالة فضاء جداء داخلي حقيقي • **إرشاد** • خذ دورانا للمستوي الاقليدي •

٣ـ٣ المتممات العامدة والمجاميع المباشرة

تعرف المسافة δ بين عنصر x في فضاء متري X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنهـا

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y}) \qquad (M \neq \varnothing).$$

وتغدو هذه المساواة ، في فضاء منظم على الشكل التالي :

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| \qquad (M \neq \varnothing). \tag{1}$$

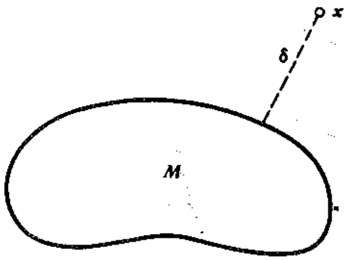
ويعطي الشكل ٢٦ مثالا ايضاحيا بسيطا •

وسنرى بأنه من المهم معرفة ما اذا كان هنالك عنصر y من M بحيث أن

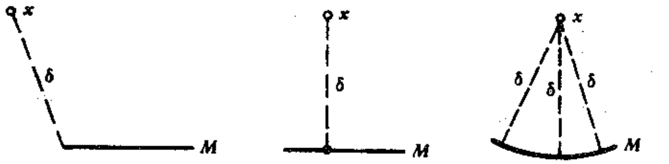
$$\delta = \|x - y\|, \tag{2}$$

وهذا يعني ببساطة وجود نقطة y من M هي أقرب ما يكون الى نقطة معطاة x ، واذا وجدت مثل هذه النقطة ، فهل هي وحيدة ؟ وواضح أننـا هنـا في سياق **مسألة وجود ووحدانية** • وهذه المسألة بالغة الاهمية مـن الوجهتين النظريـة والتطبيقية ، اذ أننا نقابلها مثلا في سياق دراستنا لموضوع تقريب الدوال •

ويشير الشكل ٢٧ الى أنه حتى في حالة جد بسيطة كحالة المستوي الاقليدي $\mathbb{R}^2$ ، فقد لانجد نقطة y تحقق (2) ، أو أنه توجد نقطة واحدة فقط y ، أو أنه يوجد أكثر من نقطة واحدة y • وقد تتوقع بأن الامر سيكون أعقد بدرجة كبيرة في فضاءات أخرى ، وبوجه خاص في الفضاءات غير منتهية البعد • وفعلا ، فان هذا هو الواقع في الفضاءات المنظمة العامة (كما سنرى في الفصل السادس) • في حين أن الوضع يبقى بسيطا نسبيا في فضاءات هلبرت • ان هذه الحقيقة مثيرة للدهشة ، ولها نتائج متنوعة من الوجهتين النظرية والتطبيقية ، وهي تشكل احدى الاسباب الرئيسية التي تعلل بساطة فضاءات هلبرت اذا ما قورنت بفضاءات باناخ العامـة •



الشكل (٢٦) • ايضاح (1) في حالة المستوي $\mathbb{R}^2$



(يوجد عدد غير منته من النقاط y) (توجد y وحيدة) (y غير موجودة)

الشكل (٢٧) • وجود ووحدانية نقاط y من M محققة للشرط (2) ، حيث M قطعه مستقيمة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ في الشكلين الايسر والاوسط وقوس دائرة في الشكل الايمن

ولحل مسألة الوجود والوحدانية في فضاءات هلبرت ، وصياغة المبرهنة الرئيسية ٣ـ٣ـ١ (الواردة بعد قليل) ، فانه يلزمنا مفهومان لهما أهمية كبيرة ، نوردهما فيما يلي :

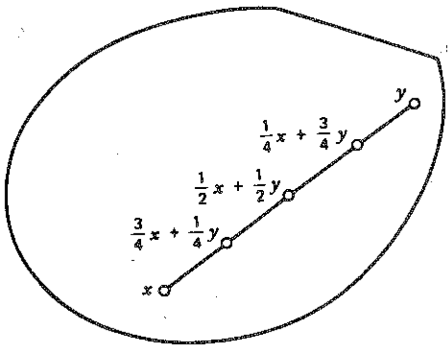
تعرف **القطعة المستقيمة** الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X بأنها مجموعة كل العناصر z من X من الشكل

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y \qquad (\alpha \in \mathbf{R}, 0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

ويقال عن مجموعة جزئية M من X انها **محدبة** اذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M • ويعطي الشكل ٢٨ مثالا بسيطا على مجموعة محدبة •

وعلى سبيل المثال ، فان كل فضاء جزئي Y من X محدب ، كما أن تقاطع مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة •

بعد هذا يمكننا أن نورد الاداة الرئيسية في هذا الفصل المتمثلة بالمبرهنة التاليـة :



الشكل (٢٨) • مثال ايضاحي لقطعة مستقيمة في مجموعة محدبة

٣-٣-١ مبرهنة (المتجه المصغر) •

ليكن X فضاء جداء داخلي ، ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية ومحدبه وتامة (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي) • عندئذ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y من M بحيث يكون

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in M} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|. \qquad (3)$$

البرهـان :

(آ) الوجـود • نجد استنادا الى تعريف الحد الادنى أن ثمـة متتالية (y_n) في M بحيث أن

$$\delta_n = \|x - y_n\|. \qquad \text{و} \qquad \delta_n \longrightarrow \delta \qquad (4)$$

سنبين أن (y_n) هـي متتالية كوشـي • فـاذا وضعنا $y_n - x = v_n$ ، نجـد أن $\|v_n\| = \delta_n$.

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\, \|\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geqq 2\delta$$

وذلك لكون M محدبة ، الامر الذي يقتضي أن $\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in M$ • كذلك ، فلدينا $y_n - y_m = v_n - v_m$ • لذا فانه يترتب على مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$
$$\leqq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n{}^2 + \delta_m{}^2),$$

وبالتالي فان (4) تقتضي أن تكون (y_n) متوالية كوشي • ولما كانت M تامة ، فان (y_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن $y_n \longrightarrow y \in M$ • وبما أن $y \in M$ ، فان $\|x-y\| \geqq \delta$ • كذلك ، فاننا نجد اعتمادا على (4) أن

$$\|x-y\| \leqq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \quad \longrightarrow \quad \delta.$$

وهذا يبين أن $\|x-y\| = \delta$ •

(ب) الوحدانية • سنفترض أن العنصرين y و y_0 في M يحققان المساواتين

$$\|x-y\| = \delta \qquad و \qquad \|x-y_0\| = \delta$$

ونبين من ثم أن $y_0 = y$ • نلاحظ استنادا الى مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\|y - y_0\|^2 = \|(y-x) - (y_0 - x)\|^2$$
$$= 2\,\|y-x\|^2 + 2\,\|y_0 - x\|^2 - \|(y-x) + (y_0 - x)\|^2$$
$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\,\|\tfrac{1}{2}(y+y_0) - x\|^2.$$

وبما أن المقدار $\frac{1}{2}(y+y_0)$ الموجود في الطرف الايمن ينتمي الى M ، فان

$$\|\tfrac{1}{2}(y+y_0) - x\| \geqq \delta.$$

يترتب على هذا أن الطرف الايمن أصغر من المقدار $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ أو يساويه • لذا فاننا نجد المتباينة $\|y - y_0\| \leqq 0$ • وبما أن لدينا دوما $\|y-y_0\| \geqq 0$ ، فانه يجب أن نقع على المساواة $\|y-y_0\| = 0$ ، التي تكافىء كون $y_0 = y$ • ∎

اذا انتقلنا من المجموعات المحدبة الكيفية الى فضاءات جزئية ، فاننا نجد تمهيدية تعمم الفكرة المألوفة في الهندسة الابتدائية والتي تنص على أنه يمكن ايجاد النقطة الوحيدة y في فضاء جزئي معطى Y والتي هي أقرب ما يكون الى نقطة ما x « باسقاط عمود من x على Y » .

٣-٣-٢ تمهيدية (التعامد)

لنفترض في المبرهنة ٣-٣-١ أن M فضاء جزئي تام Y وأن x نقطة مثبتة في X . عندئذ يكون $z = x - y$ عموديا على Y .

البرهان :

اذا لم يصح كون $z \perp Y$ ، لوجدت نقطة y_1 من Y بحيث أن

$$\langle z, y_1\rangle = \beta \neq 0. \tag{5}$$

من الواضح أن $y_1 \neq 0$ ، ذلك أنه اذا لم يتحقق هذا الامر لكان $\langle z, y_1\rangle = 0$. وفضلا عن ذلك ، نرى أنه اذا كان α عددا ما ، فان

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle\\ &= \langle z, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, y_1\rangle - \alpha[\langle y_1, z\rangle - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1\rangle]\\ &= \langle z, z\rangle - \bar{\alpha}\beta - \alpha[\bar{\beta} - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1\rangle].\end{aligned}$$

ان المقدار المحصور بين القوسين $[\cdots]$ يغدو صفرا اذا افترضنا أن

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1\rangle}.$$

يترتب على (3) أن $\|z\| = \|x-y\| = \delta$ ، وبالتالي فان معادلتنا تقتضي أن يكون

$$\|z-\alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1\rangle} < \delta^2.$$

ولما كان هذا أمرا غير ممكن لاننا نجد عندئذ أن

$$z-\alpha y_1 = x - y_2 \qquad \text{حيث} \qquad y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$$

فان $\|z-\alpha y_1\| \geqq \delta$ وفق تعريف δ • لذا لا يمكن أن تتحقق (5) ، والتمهيدية صحيحة • ∎

ان هدفنا هو تمثيل لفضاء هلبرت على شكل مجموع مباشر بسيط وملائم لانه يفيد من التعامد • ولاستيعاب هذا الوضع وفهم هذه المسألة ، سنقدم أولا مفهوم المجموع المباشر • ان هذا المفهوم ذو معنى في حالة أي فضاء متجهي ونورده على النحو التالي •

٢-٣-٣ تعريف (المجموع المباشر)

يقال عن فضاء متجهي X انه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ، ونكتب

$$X = Y \oplus Z,$$

اذا كان لكل عنصر x من X تمثيل وحيد بالشكل

$$x = y + z \qquad y \in Y,\ z \in Z.$$

وعندئذ يسمى Z **المتمم الجبري** لـ Y في X ، وبالعكس ، كما يقال عن Y و Z انهما **زوج متتام** من الفضاءات الجزئية من X • ∎

وعلى سبيل المثال ، ان $Y = \mathbf{R}$ فضاء جزئي من المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$ •ومن الواضح أنه يوجد لـ Y عدد غير منته من المتممات الجبرية في $\mathbf{R}^2$ ، كل منها محور حقيقي ، بيد أن أكثرها ملاءمة هو المتمم العمودي على Y • ويستفاد من هذا لدى اختيارنا جملة احداثية ديكارتية • كذلك ، فاننا نجد الوضع نفسه من وجهة المبدأ في $\mathbf{R}^3$ •

وبصورة مماثلة ، فان اهتمامنا الرئيسي في حالة فضاء هلبرت العام H ينصب على تمثيل H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق Y **ومتممه العامد**

$$Y^{\perp} = \{z \in H \mid z \perp Y\},$$

الذي يتألف من مجموعة كل المتجهات العمودية على Y • وهذا يمدنا بالنتيجة الرئيسية لهذا البند ، والتي تدعى أحيانا **مبرهنة الاسقاط** لاسباب سنقوم بشرحها بعد البرهان •

٣ـ٣ـ٤ مبرهنة (المجموع المباشر)

ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هلبرت H • عندئذ يكون

$$Z = Y^{\perp} \qquad H = Y \oplus Z \qquad (6)$$

البرهـان :

لما كان H تاما و Y مغلقا ، فان Y تام كما تبين المبرهنة ١ـ٤ـ٧ • وبما أن Y محدب ، فانه يترتب على المبرهنة ٣ـ٣ـ١ والتمهيدية ٣ـ٣ـ٢ أنه يوجد لكل x في H عنصر y من Y بحيث يكون

$$z \in Z = Y^{\perp}. \qquad x = y + z \qquad (7)$$

ولاثبات الوحدانية ، نفترض أن

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

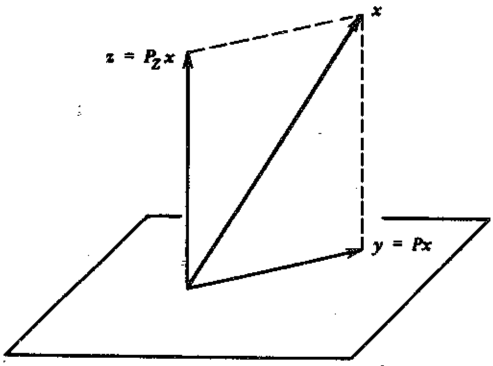
حيث y و y_1 عنصران من Y وحيث z و z_1 عنصران من Z • وعندئذ يكون $y - y_1 = z_1 - z$ • وبما أن $y - y_1$ عنصر من Y في حين أن $z_1 - z$ عنصر من Z الذي يساوي $Y^{\perp}$ ، فاننا نستنتج أن $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $y = y_1$ • لذا فان $z = z_1$ أيضا • ∎

يسمى العنصر y الوارد في (7) **المسقط العمودي** لـ x على Y • (أو اختصارا **مسقط** x على Y) • وقد استوحينا هذه التسمية من الهندسة الابتدائية • [وعلى سبيل المثال ، يمكن أن نأخذ $H = \mathbf{R}^2$ ونسقط أي نقطة $x = (\xi_1, \xi_2)$ على المحور ξ_1 ، الذي يلعب عندئذ دور Y ، ونجد حينئذ أن $y = (\xi_1, 0)$] •

تحدد المعادلة (7) التطبيق

$$P:\ H \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = Px.$$

ويسمى التطبيق P هذا **المسقط** (العمودي) ، أو **مؤثر الاسقاط** ، لـ H على Y • (انظر الى الشكل ٢٩) • من الواضح أن P مؤثر خطي محدود ، كما أنه تطبيق



الشكل (٢٩) • ايضاح يتعلق بالمبرهنة ٣-٣-٤ والدستور (9)

لـ H على Y ،
ولـ Y على Y نفسه ،
ولـ $Z = Y^{\perp}$ على $\{0\}$ •

وهو تطبيق **مراوح** ، أي أن

$$P^2 = P;$$

وهكذا ، فاننا نجد أيا كان x من H أن

$$P^2 x = P(Px) = Px.$$

وبالتالي فان $P|_Y$ هو التطبيق المطابق على Y • وفي الحالة $Z = Y^{\perp}$ ، فانه يترتب على هذه المناقشة التمهيدية التالية :

٣-٢-٥ تمهيدية (الفضاء الصفري)

ان المتمم المعامد $Y^{\perp}$ لفضاء جزئي مغلق Y في فضاء هلبرت H هو الفضاء الصفري $\mathcal{N}(P)$ للمسقط المعامد P لـ H على Y •

ان المتمم المعامد هو عادم خاص ، ونعني **بالعادم** $M^{\perp}$ لمجموعة غير خالية M في فضاء جداء داخلي X المجموعة

$$M^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp M\}.$$

وهكذا فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in M^{\perp}$ هو أن يكون $\langle x, v \rangle = 0$ أيا كان v في M • وهذا يفسر سبب اسم « العادم » •

لاحظ بأن $M^{\perp}$ فضاء متجهي ، ذلك أنه اذا كان x و y عنصرين من $M^{\perp}$ ، فاننا نستنتج أنه أيا كان v من M ، وأيا كان العددان α و β فان

$$\langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle = 0,$$

وبالتالي فان $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$ •

ان المجموعة $M^{\perp}$ مغلقة ، الامر الذي نترك اثباته للقارىء (المسألة ٨) •

سنرمز لـ $(M^{\perp})^{\perp}$ بـ $M^{\perp\perp}$ ، •• وهكذا • ونجد بوجه عام أن

$$M \subset M^{\perp\perp} \tag{8*}$$

لان

$$x \in M \implies x \perp M^{\perp} \implies x \in (M^{\perp})^{\perp}.$$

أما في حالة الفضاءات الجزئية المغلقة ، فاننا نجد النتيجة الاقوى التالية :

٣-٣-٦ تمهيدية (الفضاء الجزئي المغلق)

اذا كان Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هلبرت H ، فان

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{8}$$

البرهـــان :

ان $Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفق (8*) ، سنبين الآن أن $Y \supset Y^{\perp\perp}$ ، ليكن x عنصرا مـــن $Y^{\perp\perp}$ ، عندئذ يترتب على ٣-٣-٤ أن $x = y + z$ ، حيـــث $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفـــق (8*) ، ولما كان $Y^{\perp\perp}$ فضاء متجهيا وكان x عنصر من $Y^{\perp\perp}$ فرضا ، فاننا نجـــد أيضا أن $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ ، وبالتالي فان $z \perp Y^{\perp}$ ، وبما أن $z \in Y^{\perp}$ استنادا الـــى ٣-٣-٤ ، فاننا نجد مما سبق العلاقة $z \perp z$ التي تقتضي أن يكون $z = 0$ ، أي أن $x = y$ ، وهذا يعني أن $x \in Y$ ، ولما كان العنصر x المنتمي الى $Y^{\perp\perp}$ اختياريا، فان هذا يبين أن $Y \supset Y^{\perp\perp}$ ، ∎

ان المساواة (8) هي السبب الرئيسي في استعمالنا الفضاءات الجزئيـــة **المغلقـــة** في هذا السياق ، وبما أن $Z^{\perp} = Y^{\perp\perp} = Y$ ، فانـــه يمكن كتابة الدستور (6) بالشـــكل

$$H = Z \oplus Z^{\perp}.$$

يترتب على هذا أن $x \longmapsto z$ يحدد مؤثر الاسقاط (انظر الى الشكل ٢٩)

$$P_Z : H \longrightarrow Z \tag{9}$$

لـ H على Z ، وخواص هذا المؤثر شبيهة تماما بخواص المؤثر p الذي درسناه فيما سبق ،

تقتضي المبرهنة ٣-٣-٤ مباشرة صفة مميزة لتلك المجموعات M في فضاء هلبرت التي يكون $\operatorname{span} M$ لها مجموعة كثيفة ، الامر الذي تحدده التمهيدية التاليـــة :

٣-٣-٧ تمهيدية (المجموعة الكثيفة)

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H ، فان الشرط اللازم والكافي كي تكون $\operatorname{span} M$ مجموعة كثيفة في H هو أن يكون $M^{\perp} = \{0\}$ ،

البرهـان :

(آ) ليكن x عنصرا من $M^{\perp}$ ، ولنفترض أن $V = \text{span}\, M$ كثيفة في H • عندئذ يكون $x \in \bar{V} = H$ • واستنادا الى الشق (آ) من المبرهنة ١ــ٤ــ٦ ، فانـه توجد متتالية (x_n) في V بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • وبما أن $x \in M^{\perp}$ وأن $M^{\perp} \perp V$ ، فاننا نجد أن $\langle x_n, x\rangle = 0$ •نستنتج من هذا بناء على استمرار الجـداء الداخلي (التمهيدية ٣ــ٢ــ٢) أن $\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$ • لذا فان $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ ، الامـر الذي يقتضي المساواة $x = 0$ • وبما أن x عنصر اختياري من $M^{\perp}$ ، فاننا نجـد أن $M^{\perp} = \{0\}$ •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن $M^{\perp} = \{0\}$ • فاذا كان $x \perp V$ ، فان $x \perp M$ ، أي أن $x \in M^{\perp}$ ، وبالتالي فان $x = 0$ • لذا فان $V^{\perp} = \{0\}$ • واذا لاحظنـا أن V فضاء جزئي من H ، فاننا نجد أن $\bar{V} = H$ استنادا الى ٣ــ٣ــ٤ حيث نفتـرض أن $Y = \bar{V}$ • ∎

مسـائل

١ ــ ليكن H فضاء هلبرت و M مجموعة جزئية محدبة في H ، و (x_n) متتالية في M بحيث أن $\|x_n\| \longrightarrow d$ ، حيث $d = \inf_{x \in M} \|x\|$ • بين بأن (x_n) متقاربة في H • أورد مثالا يوضح هذا في $\mathbf{R}^2$ أو في $\mathbf{R}^3$ •

٢ ــ برهن أن المجموعة الجزئية $M = \{y = (\eta_j) \mid \sum \eta_j = 1\}$ في الفضاء العقدي $\mathbf{C}^n$ (راجع ٣ــ١ــ٤) تامة ومحدبة • أوجد متجه النظيم الاصغري في M •

٣ ــ (آ) بين أن الفضاء المتجهي X لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1, 1]$ هو المجموع المباشر لمجموعة كل الدوال المستمرة الزوجية ومجموعة كـل الدوال المستمرة الفردية على $[-1, 1]$ • (ب) أورد أمثلة لتمثيلات لـ $\mathbf{R}^3$ على شكل مجموع مباشر (i) لفضاء جزئي ولمتممه المعامد ، (ii) لزوج مـن الفضاءات الجزئية المتتامة •

٤ ــ (آ) بين بأن نتيجة المبرهنة ٣ــ٣ــ١ تظل سارية في حالة كون X فضاء هلبرت و M فضاء جزئيا مغلقا في X • (ب) كيف يمكن استخدام متطابقة ابولونيوس (الواردة في المسألة ٥ من البند ٣ــ١) في اثبات المبرهنة ٣ــ٣ــ١ ؟

٥ ــ ليكن $X=\mathbf{R}^2$ • أوجد $M^{\perp}$ في كل من الحالات التالية : (آ) $M=\{x\}$ ، حيث $x=(\xi_1, \xi_2)\neq 0$ ، (ب) $M=\{x_1, x_2\}$ ، حيث $\{x_1, x_2\}$ جملة مستقلة خطيا في X •

٦ ــ أثبت أن $Y=\{x \mid x=(\xi_j)\in l^2, \xi_{2n}=0, n\in\mathbf{N}\}$ فضاء جزئي مغلق في l^2 ، ثم جد $Y^{\perp}$ • حدد $Y^{\perp}$ اذا كان $Y=\operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}\subset l^2$ حيث $e_j=(\delta_{jk})$ •

٧ ــ لتكن A و $B\supset A$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين في فضاء جداء داخلي X • بين أن

(آ) $A\subset A^{\perp\perp}$ ، (ب) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$ ، (جـ) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$

٨ ــ بين بأن العادم $M^{\perp}$ لمجموعة غير خالية M في فضاء جداء داخلي X هو فضاء جزئي مغلق في X •

٩ ــ أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء هلبرت H مغلقا في H هو أن يكون $Y=Y^{\perp\perp}$ •

١٠ــ اذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من فضاء هلبرت H ، فبين بأن المجموعة $M^{\perp\perp}$ هي أصغر فضاء جزئي مغلق في H يحوي M ، أي أن $M^{\perp\perp}$ محتواة في كل فضاء جزئي مغلق Y من H يحقق الشرط $Y\supset M$ •

٣ــ٤ المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة

ان التعامد ، كما سبق وعرفناه في البند ٣ــ١ ، يلعب دورا أساسيا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت • وقد لمسنا هذه الحقيقة أولا في

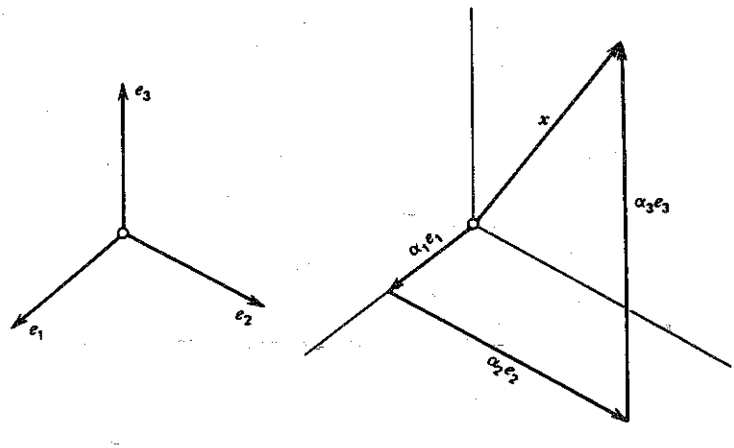
البند السابق • وتهمنا بوجه خاص تلك المجموعات التي عناصرها متعامدة مثنى • وكي تفهم ما يعنيه هذا ، سنعيد الى الذاكرة أمرا معروفا في الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^3$ • ففي الفضاء $\mathbf{R}^3$ ، تكون مجموعة من هذا النوع المجموعة المؤلفة من ثلاثة متجهات واحدية وفق الاتجاهات الموجبة للمحاور في جملة احداثية متعامدة ، ولنرمز لهذه المتجهات e_1, e_2, e_3 • تشكل هذه المتجهات قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$ ، وبالتالي فلكل عنصر x من $\mathbf{R}^3$ تمثيل وحيد من النمط

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

كما في الشكل ٣٠ • ونرى الآن فائدة جلى للتعامد • فاذا أعطينا x ، فانه يمكننا أن نعين مباشرة المعاملات المجهولة α_1 و α_2 و α_3 بأخذ الجداءات الداخلية • وفي الحقيقة ، فاننا نجد α_1 بضرب تمثيل x بـ e_1 ، أي أن

$$\langle x, e_1\rangle = \alpha_1\langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_2, e_1\rangle + \alpha_3\langle e_3, e_1\rangle = \alpha_1,$$

وهكذا • توجد في فضاءات الجداء الداخلي الاعم امكانات مماثلة أخرى لاستعمال المجموعات والمتتاليات المتعامدة والمتعامدة المنظمة ، الامر الذي



الشكل (٣٠) • المجموعة المتعامدة $\{e_1, e_2, e_3\}$ **في** $\mathbf{R}^3$ **والتمثيل** $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

سنوضحه بعد قليل . وفعلا فان استعمال مثل هذه المجموعات والمتتاليات يؤلف جزءا أساسيا من نظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت بأكملها . وسنبتدىء دراستنا لهذا الامر بادراج المفاهيم الضرورية .

٣ـ٤ـ١ (المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة)

المجموعة المتعامدة M في فضاء جداء داخلي X هي مجموعة جزئية M من X عناصرها متعامدة مثنى . أما **المجموعة المتعامدة المنظمة** M في X فهي مجموعة متعامدة في X نظيم كل من عناصرها يساوي 1 ، أي أنه اذا كان x و y أي عنصرين من M فان

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ 1 & \text{if } x = y. \end{cases} \tag{1}$$

واذا كانت مجموعة M متعامدة أو متعامدة منظمة وكانت M عدودة (أي قابلة للعد) ، فيمكننا أن نرتبها في متتالية (x_n) ندعوها **متتاليه متعامدة او متعامدة منظمة** على الترتيب .

وبوجه أعم ، فانه يقال عن مجموعة ذات أدلة ، أي عن **الجماعة** $(x_\alpha),\ \alpha \in I$ ، انها **متعامدة** اذا كان $x_\alpha \perp x_\beta$ أيا كان العنصران المختلفان α ، β من I . وتسمى هذه الجماعة **متعامدة منظمة** اذا كانت متعامدة وكان نظيم كل x_α يساوي 1 ، وعندئذ نجد أنه أيا كان α و β من I فان

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{if } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

ويرمز $\delta_{\alpha\beta}$ هنا الى دلتاكرونيكر ، كما سبق وذكرنا في البند ٢ـ٩ . ∎

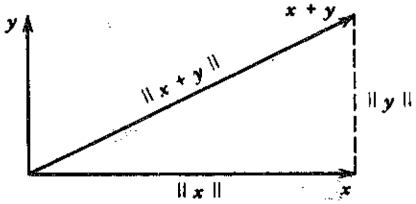
واذا احتاج القارىء الى المزيد من المعلومات حول الجماعات والمفاهيم المرتبطة بها ، فعليه أن يرجع الى A1.3 من الملحق 1 الوارد في آخر هذا الكتاب . وعندها سيلحظ أن المفاهيم الواردة في التعريف السابق قريبة أحدها

من الآخر • وسبب ذلك يعود الى أنه يمكن أن نجد دائما لكل مجموعة جزئية M من X جماعة من عناصر X بحيث تكون مجموعة عناصر الجماعة هي M • وبوجه خاص ، يمكن أخذ الجماعة المعرفة **بالتطبيق المتباين الطبيعي** لـ M في X ، أي المقصور على M للتطبيق المطابق $x \longmapsto x$ على X •

سنبحث الآن في بعض الخواص البسيطة للمجموعات المتعامدة والمتعامدة المنظمة كما سنورد أمثلة عليها •

اذا كان x و y عنصرين متعامدين ، فاننا نجد $\langle x, y\rangle = 0$ ، الامر الذي يعطي رأسا **علاقة فيثاغورس**

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{3}$$



الشكل (٣١) • علاقة فيثاغورس (3) **في** $\mathbf{R}^2$

ويبين الشكل ٣١ مثالا مألوفا • وبشكل أعم ، فاذا كانت $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة متعامدة ، فان

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2. \tag{4}$$

وفعلا ، فان $\langle x_j, x_k\rangle = 0$ اذا كان $j \neq k$ ، لذا فان

$$\left\|\sum_j x_j\right\|^2 = \left\langle \sum_j x_j, \sum_k x_k \right\rangle = \sum_j \sum_k \langle x_j, x_k\rangle = \sum_j \langle x_j, x_j\rangle = \sum_j \|x_j\|^2$$

(يتم الجمع من 1 حتى n) • كذلك ، فاننا نجد ما يلي :

٣-٤-٢ تمهيدية (الاستقلال الخطي)

المجموعة المتعامدة المنظمة مستقلة خطيا •

البرهـان :

لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ متعامدة منظمة ، ولننظر في المعادلة

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.$$

فاذا ضربنا بالمتجه المثبت e_j ، نجد أن

$$\left\langle \sum_k \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

وهذا يثبت الاستقلال الخطي لكل مجموعة متعامدة منظمة منتهية • ويقتضي هذا أيضا الاستقلال الخطي في حالة كـون المجموعة المتعامدة المنظمـة المعطاة غـير منتهية ، وذلك وفق تعريف الاستقلال الخطي الذي أوردناه في البند ٢-١ • ∎

امثلـة

٣-٤-٣ الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^3$

ان المتجهات الواحدية الثلاثة $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ باتجاه المحاور الثلاثة في جملة احداثية متعامدة في الفضاء $\mathbf{R}^3$ تشكل مجموعة متعامدة منظمة • (انظر الى الشكل ٣٠) •

٣-٤-٤ الفضـاء l^2

ان (e_n) ، بفرض أن $e_n = (\delta_{nj})$ (حيث العنصر الذي ترتيبه n يساوي 1 ، والعناصر الاخرى أصفار) ، تشكل متتاليـة متعامدة منظمة في الفضـاء l^2 • (راجع البند ٣-١-٦) •

٣ــ٤ــ٥ الدوال المستمرة

ليكن X فضاء الجداء الداخلي المؤلف من كل الدوال المستمرة على $[0, 2\pi]$ ، والمزودة بالجداء الداخلي المعرف بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt$$

(راجع ٣ــ١ــ٥) • إن (u_n) ، حيث

$$u_n(t) = \cos nt \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة في X • كذلك ، فان (v_n) ، حيث

$$v_n(t) = \sin nt \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة أخرى في X •

وفي الحقيقة ، فاننا نجد بعد المكاملة أن

$$(5) \qquad \langle u_m, u_n\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad \text{اذا كان} \\ \pi & m = n = 1, 2, \cdots \quad \text{اذا كان} \\ 2\pi & m = n = 0 \quad \text{اذا كان} \end{cases}$$

ونجد نتيجة مماثلة ل (v_n) • لذا فان (e_n) ، حيث

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة • ومن (v_n) نجد متتالية متعامدة منظمة $(\tilde{e}_n)$ ، حيث

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

لاحظ أننا نجد هنا أن $u_m \perp v_n$ أيا كان m و n (أورد البرهان على هذا) • وترد هذه المتتاليات في **متسلسلة فورييه** ، الامـر الذي سنناقشه في البنـد القادم • وهذه الامثلة كافية لاعطاء انطباع أولي عن هذا الموضوع • وسنورد متتاليات متعامدة منظمة أخرى ذات أهمية تطبيقية في البند ٣ــ٧ • ∎

ان المتتاليات المتعامدة المنظمـة تمتاز على المتتاليات الكيفية المستقلة خطيـا بالامر التالي : اذا علمنا بأن عنصرا ما x يمكن أن يمثل بتركيب خطي لبضعـة عناصر من متتالية متعامدة منظمة ، فان صفة التعامد والنظامية تجعل من التعيين الفعلي للمعاملات عملية بسيطة • وفي الحقيقة ، فاذا كانت $(e_1, e_2, \cdots)$ متتاليـة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان $x \in \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ ، حيث n مثبت ، فاننا نجد استنادا الى تعريف span (البند ٢ــ١) أن

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \tag{6}$$

واذا أخذنا الجداء الداخلي بضرب طرفي هذه المساواة بالمتجه المثبت e_j ، فاننا نجـد أن

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j.$$

وبالتالي فان (6) تغدو بالشكل

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{7}$$

وهذا يبين بأن تعيين المعاملات المجهولة في (6) أمر سهل • وثمة ميزة أخرى لصفـة التعامـد والنظامية تتلخص في أنـه اذا أردنا أن نضيف فـي (6) و (7) حدا آخر $\alpha_{n+1} e_{n+1}$ بهدف دراسة

$$\tilde{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1} \in \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_{n+1}\};$$

فاننا نحتاج عندئذ لحساب معامل واحد اضافي فقط ، ذلك أن المعاملات الاخرى تبقى على حالها .

وبوجه أعم ، اذا كان x عنصرا ما من X غير منتم بالضرورة الى $Y_n = \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ ، فمن الممكن تعيين y من Y_n بوضع

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \tag{8a}$$

حيث n عنصر مثبت ، كما في السابق ، ومن ثم تعيين z بوضع

$$x = y + z, \tag{8b}$$

أي أن $z = x - y$. سنبين أن $z \perp y$. ولفهم حقيقة ما يجري ، نلاحظ أن كل y من Y_n هو تركيب خطي

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

حيث $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$ ، الامر الذي ينتج باتباع أسلوب المناقشة الذي سلكناه قبل قليل . وما ندعيه هو أنه لكل اختيار خاص لـ $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle,\ k = 1, \cdots, n$ فاننا نجد y بحيث يكون $z = x - y \perp y$.

ولاثبات هذا نلاحظ أولا أنه يترتب على التعامد والنظامية أن

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k, \sum \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{9}$$

وبالافادة من هذا ، يمكننا الان أن نثبت بأن $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle = \langle x - y, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2 \\ &= \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

وبالتالي فان علاقة فيثاغورس (3) تعطي بالمساواة

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \tag{10}$$

ويترتب على (9) أن

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2. \tag{11}$$

ولما كان $\|z\| \geqq 0$ ، فاننا نجد لكل $n = 1, 2, \cdots$ أن

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2. \tag{12*}$$

ان الحدود المجموعة هنا غير سالبة ،وبالتالي فان المجاميع في الطرف الايسر تشكل متتالية رتيبة متزايدة • وهذه المتتالية متقاربة نظرا لكونها محدودة بالعدد $\|x\|^2$ • ولما كانت هذه المتتالية هي متتالية المجاميع الجزئية من متسلسلة غير منتهية ، فان هذه المتسلسلة متقاربة • وبالتالي فان (12*) تقتضي التالي :

٣ــ٤ــ٦ مبرهنة (متباينة بسل)

اذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، فاننا نجد انه أيا كان x من X المتباينة التالية

متباينة بسل

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2 \tag{12}$$

تدعى الجداءات الداخلية $\langle x, e_k\rangle$ في (12) **معاملات فوريية** للعنصر x بالنسبة للمتتالية المتعامدة المنظمة (e_k) •

لاحظ أنه اذا كان X غير منتهي البعد ، فان كل مجموعة متعامدة و منظمة في X يجب أن تكون منتهية نظرا لانها مستقلة خطيا استنادا الى ٣ــ٤ــ٢ • لذا فاننا نجد في (12) عندئذ مجموعا منتهيا •

رأينا أن المتتاليات المتعامدة و المنظمة هي من النوع الذي يسهل التعامل معه • وسنشرح الآن مسألة عملية تتعلق بكيفية الحصول على متتالية متعامدة ومنظمة عندما تعطى سلفا متتالية كيفية مستقلة خطيا • ويمكن القيام بهذا باجراء

انشائي يسمى طريقة جرام ـ شميت في تحويل متتالية مستقلة خطيا (x_i) في فضاء جداء داخلي الى متتالية متعامدة منظمة ، وللمتتالية المتعامدة المنظمة (e_i) الحاصلة خاصة تتلخص في أنه أيا كان n فان

$$\text{span}\,\{e_1, \cdots, e_n\} = \text{span}\,\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

وتتم الطريقة وفق الخطوات التالية :

الخطوة الاولى ، المتجه الاول من (e_k) هو

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}\, x_1.$$

الخطوة الثانيه ، يمكن كتابة x_2 بالشكل

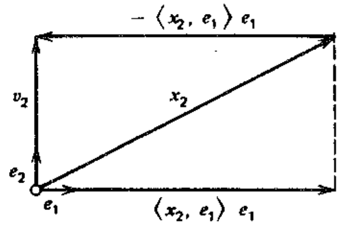
$$x_2 = \langle x_2, e_1\rangle e_1 + v_2.$$

عندها يكون (كما في الشكل ٣٢) المتجه

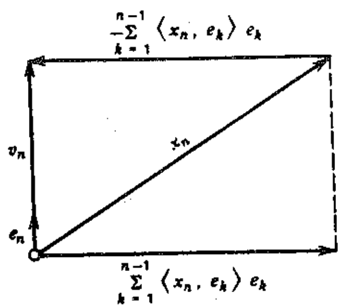
$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$$

مغايرا للمتجه الصفري لكون المتتالية (x_i) مستقلة خطيا ، كذلك فان $v_2 \perp e_1$ نظرا لكون $\langle v_2, e_1\rangle = 0$ وبالتالي فيمكننا أن نأخذ

$$e_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2.$$



الشكل (٣٢) ، الخطوة الثانية في طريقة جرام ـ شميت



الشكل (٣٣) ، الخطوة n في طريقة جرام ـ شميت

الخطوة الثالثة . المتجـه

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2$$

مختلف عن المتجه الصفري ، كما أن $v_3 \perp e_1$ و $v_3 \perp e_2$. نأخذ

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

الخطوة n . المتجه (انظر الشكل ٣٣)

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \tag{13}$$

مغاير للمتجه الصفري ، وهو عمودي على $e_1, \cdots, e_{n-1}$. ونجد منه المتجـه

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n. \tag{14}$$

ان هذه هي الدساتير العامة لطريقة جرام ـ شميت ، التي صممها شميت عام ١٩٠٧ م . وأيضا غرام عام ١٨٨٣ م . لاحظ بأن الحـد المطروح في الطرف الايمن من (13) هو مسقط x_n على $\text{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$. وبعبارة أخـرى ، فاننا في كل خطوة نطرح من x_n « مركباته » في اتجاهات المتجهات التي سبق وحولناها الى متجهات متعامدة ونظامية . وبذا نحصل على v_n ، الذي نضربه بعد ذلك بـ $1/\|v_n\|$ فنحصل على متجه نظيمه 1 . ان v_n لا يمكن أن يكون المتجه الصفري أيا كان n . وفعلا ، فاذا كان n أصغر دليل يكون من أجله $v_n = 0$ ، فان (13) تبين عندئذ أن x_n هو تركيب خطي لـ $e_1, \cdots, e_{n-1}$ ، وبالتالي تركيب خطي لـ $x_1, \cdots, x_{n-1}$ ، وهذا يناقض افتراضنا بأن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيـا .

مسائل

١ ــ بين بأنه يوجد لفضاء داخلي بعده منتــه ويساوي n قاعــدة $\{b_1, \cdots, b_n\}$ متجهاتها متعامدة ومنظمة • (سنتطرق الى حالة البعد غير المنتهي في البند ٣ــ٦) •

٢ ــ كيف يمكن تأويل (12*) هندسيا في $\mathbf{R}^r$ ، حيث $r \geqq n$ ؟

٣ ــ استخرج متباينة شفارتز الواردة في البند ٣ــ٢ انطلاقا من (12*) •

٤ ــ أورد مثالا على عنصر x في l^2 بحيث نجد متباينة تامة في (12) •

٥ ــ اذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان x عنصرا في X ، فبين أن $x-y$ ، حيث y معطى بالمساواة

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \qquad\qquad \alpha_k = \langle x, e_k \rangle$$

عمودي على الفضاء الجزئي $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \cdots e_n\}$ •

٦ ــ **(خاصة القيمة الصغرى لمعاملات فورييه)** • لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ مجموعــة متعامدة منظمة في فضاء جــداء داخلي X ، حيث n مثبت • ليكن x أي عنصر مثبت في X و $y = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ • عندئذ يكون $\|x-y\|$ تابعا لـ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ • بين بالحساب المباشر أن الشرط اللازم والكافي كي يكــون $\|x-y\|$ أصغريا هو أن يكون $\beta_j = \langle x, e_j \rangle$ حيث $j = 1, \cdots, n$ •

٧ ــ لتكن (e_k) أي متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X • بيــن أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leqq \|x\| \|y\|.$$

٨ ــ بين أنه لا يمكن أن يوجد لعنصر x في فضاء جداء داخلي X « عدد كبير » من معاملات فورييه $\langle x, e_k \rangle$ « الكبيرة » • نفترض هنا أن (e_k) متتالية

متعامدة منظمة معطاة • وبصورة أدق ، بين أن العدد n_m للمقادير $\langle x, e_k\rangle$ التي تحقق الشرط $|\langle x, e_k\rangle| > 1/m$ يجب أن يحقق المتباينة $n_m < m^2\|x\|^2$ •

٩ ــ حول الحدود الثلاثة الاولى من المتتالية $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$ الى متجهات متعامدة منظمة ، بفرض أن $x_j(t) = t^j$ على الفترة $[-1, 1]$ ، حيث

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\, dt.$$

١٠ــ ليكن $x_1(t) = t^2$ و $x_2(t) = t$ و $x_3(t) = 1$ • حول x_1 و x_2 و x_3 الى متجهات متعامدة منظمة بهذا الترتيب على $[-1, 1]$ بالنسبة الى الجداء الداخلي في المسألة ٩ • قارن مع المسألة ٩ ، وقدم التعليق على ذلك •

٣ــ٥ المتسلسلات المرتبطة بالمتتاليات والمجموعات المتعامــدة المنظمـة

ثمة حقائق وتساؤلات ترد حول متباينة بسل • وفي هذا الفصل ، سنجد أولا مبررا لتبني مصطلح « معاملات فورييه » ، ومن ثم ندرس المتسلسلات غير المنتهية المرتبطة بالمتتاليات المتعامدة المنظمة ، وأخيرا نلقي نظـرة أولى علـى المجموعات المتعامدة المنظمة غير العدودة •

٣ــ٥ــ١ مثال (متسلسلة فورييه)

المتسلسلة المثلثاتية هى متسلسلة من النمط

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \qquad (1^*)$$

ويقال عن دالة حقيقية x معرفة على $\mathbf{R}$ انها **دوريــة** اذا وجد عــدد موجب p (يدعى **دور** x) بحيث يكون $x(t+p) = x(t)$ أيا كان t من $\mathbf{R}$ •

لتكن x دالة دورية دورها 2π ومستمرة • نعرف **متسلسلة فورييه** للدوال

x بأنها المتسلسلة المثلثاتية (1*) التي معاملاتها a_k و b_k محـــددة **بمساتير اولر** التاليـــة :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt\, dt \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt\, dt \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

وتسمى هذه المعاملات **معاملات فورييه للدالة** x •

اذا كانت متسلسلة فورييه للدالة x متقاربة أيا كـــان t وكان مجموعهـــا $x(t)$ ، فاننا نكتب عندئذ

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{1}$$

وبما أن x دورية ودورها 2π ، فاننا يمكن أن نستعيض في (2) عن فترة المكاملة $[0, 2\pi]$ بأي فترة أخرى طولها 2π ، وعلـــى سبيل المثـــال ، بالفتـــرة $[-\pi, \pi]$ •

لقد برزت متسلسلة فورييه في أول الامر في سياق المسائل الفيزيائية التي عالجها برنويي (الاوتار المهتزة ، عام ١٧٥٣ م) ، وفورييه (التوصيل الحراري ، عام ١٨٢٢) • وتساعد هذه المتسلسلات في تمثيل الظواهر الدورية المعقـــدة بدلالة دوال دورية بسيطة (الجيب وجيب التمام) ، ولها تطبيقات فيزيائية متنوعة فيما يتعلـــق بالمعادلات التفاضلية (الاهتزازات ، التوصيل الحـــراري ، مسائل الكمون ، وغيرها) •

نرى لدى النظر الى (2) أن تعيين معاملات فورييه يتطلب اجراء عمليات مكاملة • وللاخذ بيد أولئك القراء الذين لم يسبق لهم أن رأوا متسلسلة فورييه من قبل ، فاننا نورد للايضاح الدالة (انظر الى الشكل ٣٤) :

$$x(t)=\begin{cases} t & \text{if } -\pi/2 \leqq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{if } \pi/2 \leqq t < 3\pi/2 \end{cases}$$

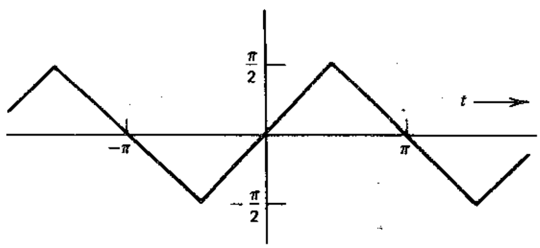
حيث نفترض أيضا أن $x(t+2\pi)=x(t)$ • نستنتج من (2) أن $a_k=0$ حيث $k=0, 1, \cdots$ ، وأنه اذا اخترنا $[-\pi/2, 3\pi/2]$ كفترة مناسبة للمكاملة ، فاننا نجد بالمكاملة بالتجزئة أن

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin kt\, dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi-t)\sin kt\, dt$$

$$=-\frac{1}{\pi k}[t\cos kt]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos kt\, dt$$

$$-\frac{1}{\pi k}[(\pi-t)\cos kt]\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}-\frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos kt\, dt$$

$$=\frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2}, \qquad k=1, 2, \cdots.$$



الشكل (٣٤) • بيان الدالة الدورية x ، التي دورها 2π ، والمعطاة بالمساواة $x(t)=t$ اذا كان $t\in[-\pi/2, \pi/2)$ ، وبالمساواة $x(t)=\pi-t$ اذا كان $t\in[\pi/2, 3\pi/2)$

لذا فان (1) تأخذ الشكل

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t-\frac{1}{3^2}\sin 3t+\frac{1}{5^2}\sin 5t-+\cdots\right).$$

ويمكن للقارىء رسم بيان المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى ومقارنتها ببيان الدالة x في الشكل ٣٤ •

وبالعودة الى متسلسلات فورييه العامة ، فمن الممكن السؤال عن ملاءمة هذه المتسلسلات للمصطلحات التي أوردناها في البند السابق • من الواضح أن دوال الجيب وجيب التمام في (1)هي حدودالمتتاليتين (u_k) و (v_k) في ٣ــ٤ــ٥، أي أن

$$u_k(t) = \cos kt, \qquad v_k(t) = \sin kt.$$

وبالتالي فمن الممكن كتابة (1) بالشكل

$$x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(t) + b_k v_k(t)]. \tag{3}$$

لنضرب (3) بعنصر مثبت u_j ، ومن ثم نكامل بالنسبة الى t من 0 الى 2π • ان هذا يعني أننا نأخذ الجداء الداخلي بـ u_j كما عرفناه في ٣ــ٤ــ٥ • سنفترض أنه يسمح بالمكاملة حدا حدا (ويكفي لهذا أن يكون التقارب منتظما) ، وسنفيد من تعامد (u_k) و (v_k) ومن أن $u_j \perp v_k$ أيا كان j و k • عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned} \langle x, u_j\rangle &= a_0\langle u_0, u_j\rangle + \sum [a_k\langle u_k, u_j\rangle + b_k\langle v_k, u_j\rangle] \\ &= a_j\langle u_j, u_j\rangle \\ &= a_j\,\|u_j\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0 & \text{if } j=0 \\ \pi a_j & \text{if } j=1,2,\cdots, \end{cases} \end{aligned}$$

(راجع (5) من البند ٣ــ٤) • وبصورة مماثلة ، فاذا ضربنا (3) بـ v_j وتابعنا كما في السابق ، فاننا نتوصل الى أن

$$\langle x, v_j\rangle = b_j\,\|v_j\|^2 = \pi b_j$$

حيث $j = 1, 2, \ldots$ • فاذا حللنا بالنسبة الى a_i و b_i وأفدنا من المتتاليتين المتعامدتين المنظمتين (e_j) و $(\tilde{e}_j)$ ، حيث $e_j = \|u_j\|^{-1} u_j$ و $\tilde{e}_j = \|v_j\|^{-1} v_j$ ،

فاننا نجد التالي :

$$a_j = \frac{1}{\|u_j\|^2}\langle x, u_j\rangle = \frac{1}{\|u_j\|}\langle x, e_j\rangle,$$
$$b_j = \frac{1}{\|v_j\|^2}\langle x, v_j\rangle = \frac{1}{\|v_j\|}\langle x, \tilde{e}_j\rangle. \qquad (4)$$

إن هذا يتطابق مع (2) ، وهو يبين أنه لدينا في (3)

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|}\langle x, e_k\rangle u_k(t) = \langle x, e_k\rangle e_k(t)$$

ونجد دستورا مماثلا لـ $b_k v_k(t)$ • وبالتالي فيمكننا كتابة متسلسلة فورييه (1) بالشـــكل

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle x, e_k\rangle e_k + \langle x, \tilde{e}_k\rangle \tilde{e}_k]. \qquad (5)$$

وهذا يبرر تبني مصطلح « معاملات فورييه » الذي أوردناه في البند السابق •

وللانتهاء من هذا المثال ، فاننا نذكر بأنه يمكن للقارىء أن يجد مقدمة لمتسلسلات فورييه في كل من الكتب التالية :

Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series.* 2nd ed. New York: Chelsea

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics.* 3rd ed. New York: Wiley

ان مثالنا يتعلق بالمتسلسلات غير المنتهية ويطرح السؤال عن كيفية تعميم ما ورد فيه على متتاليات متعامدة منظمة أخرى ، وعما يمكننا قوله حول تقارب المتسلسلات المقابلة •

اذا أعطينا أي متتالية متعامدة منظمة (e_k) في فضاء هلبرت H ، فيمكن

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{6}$$

حيث α_1, α_2, $\cdots$ أعداد اختيارية • وبناء على التعريف الوارد في البند ٢ـ٣ ، فان مثل هذه المتسلسلة تكون متقاربة ويكون مجموعها s اذا وجد s من H بحيث تكون المتتالية (s_n) التي حدودها المجاميع الجزئية

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

متقاربة من s ، أي اذا كان $\|s_n - s\| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ •

٣ـ٥ـ٢ مبرهنة (التقارب)

لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي تكون المتسلسلة (6) متقاربة (بالنسبة للنظيم على H) هو أن تتقارب المتسلسلة التالية :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2. \tag{7}$$

(ب) اذا كانت (6) متقاربة ، فان المعاملات α_k هي معاملات فورييه $\langle x, e_k \rangle$ ، حيث ترمز x الى مجموع (6) ، لذا ففي هذه الحالة يمكن كتابة (6) بالشكل

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{8}$$

(ج) أيا كان x من H ، فان المتسلسلة (6) ، حيث $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ ، تكون متقاربة (بالنسبة للنظيم المعرف على H) •

البرهــان :

(آ) لتكــن

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \qquad \text{و} \qquad \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

عندئذ يترتب على كون (e_k) متعامدة منظمة أنه اذا كان m أي عــدد طبيعي يحقق الشرط $n > m$ فان

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2$$
$$= |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

لذا فان الشرط اللازم والكافي كي تكون (s_n) متتاليــة لكوشي في H هو أن تكون (σ_n) متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ • وبما أن $\mathbb{R}$ تــام ، فاننا نستنتج صحــة الدعوى الاولى في المبرهنة •

(ب) اذا أخذنا الجداء الداخلي لـ s_n و e_j ، وأفدنا مــن كون (e_k) متعامدة منظمة ، فاننا نجد أن

$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$ عندما يكون $j = 1, \cdots, k$ ، حيث k مثبت ويحقق المتباينة $k \leqq n$

ولما كان $s_n \longrightarrow x$ فرضا ، وكان الجداء الداخلي مستمرا (راجــع التمهيدية ٣ــ٢ــ٢) فان

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j \rangle \longrightarrow \langle x, e_j \rangle \qquad (j \leqq k).$$

يمكننا هنا أن نأخذ k (الذي يحقق الشرط $k \leqq n$) كبيرا بقــدر ما نبغى لان $n \longrightarrow \infty$ ، لذا فاننا نجد أن $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ عندما $j = 1, 2, \cdots$ •

(جـ) يترتب على متباينة بسل في المبرهنة ٣ــ٤ــ٦ أن المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

متقاربة • نستنتج من هذا ومن (آ) أن (جـ) يجب أن تكون صحيحة • ∎

اذا كانت جماعة متعامدة منظمة (e_κ) , $\kappa \in I$ في فضاء جداء داخلي غير عدودة (نظرا لكون مجموعة الادلة I غير عدودة) ، فانه لا يزال بامكاننا تشكيل معاملات فورييه $\langle x, e_\kappa \rangle$ لعنصر x من X ، حيث $\kappa \in I$ • فاذا أفدنا الآن من (*12) الواردة في البند ٣ـ٤ ، فاننا نستنتج أنه أيا كان العدد المثبت $m = 1, 2, \cdots$ فان عدد معاملات فورييه التي تحقق الشرط $|\langle x, e_\kappa \rangle| > 1/m$ يجب أن يكون منتهيا • وهذا يثبت صحة التمهيدية الشهيرة التالية :

٣ـ٥ـ٣ تمهيدية (معاملات فورييه)

يمكن ان يكون لكل x في فضاء جداء داخلي X مجموعة عدودة على الاكثر من معاملات فورييه غير الصفرية $\langle x, e_\kappa \rangle$ بالنسبة لجماعة متعامدة منظمة (e_κ) , $\kappa \in I$ في X •

لذا يمكن أن نقرن بكل عنصر مثبت x من H متسلسلة مماثلة لـ (8) هي

$$\sum_{\kappa \in I} \langle x, e_\kappa \rangle e_\kappa \tag{9}$$

كما يمكن ترتيب المتجهات e_κ المحققة للشرط $\langle x, e_\kappa \rangle \neq 0$ في متتالية $(e_1, e_2, \cdots)$ بحيث تأخذ (9) الشكل (8) • ويترتب التقارب على المبرهنة ٣ـ٥ـ٢ • وسنبين أن المجموع لا يتعلق بالترتيب الذي تتبعه في ادراج تلك العناصر e_κ في متتالية •

البرهان :

لتكن (w_m) متتالية ناتجة عن تغيير ترتيب حدود المتتالية (e_n) • ان هذا يعني تعريفا وجود تطبيق متباين وغامر $n \longmapsto m(n)$ لـ $\mathbf{N}$ على $\mathbf{N}$ نفسها ، بحيث تكون الحدود المتقابلة في المتتاليتين متساوية ، أي بحيث يكون $w_{m(n)} = e_n$

لنضع

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle, \qquad \beta_m = \langle x, w_m \rangle$$

وكذلـك

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \qquad x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m.$$

عندئذ نجد اعتمادا على الشق (ب) من المبرهنة ٣ـ٥ـ٢ أن

$$\alpha_n = \langle x, e_n\rangle = \langle x_1, e_n\rangle, \qquad \beta_m = \langle x, w_m\rangle = \langle x_2, w_m\rangle.$$

ولما كان $e_n = w_{m(n)}$ ، فاننا نجد أن

$$\begin{aligned}\langle x_1 - x_2, e_n\rangle &= \langle x_1, e_n\rangle - \langle x_2, w_{m(n)}\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, w_{m(n)}\rangle = 0\end{aligned}$$

كما نجد بصورة مماثلة أن $\langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0$ • يقتضي هذا أن

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, \sum \alpha_n e_n - \sum \beta_m w_m\rangle \\ &= \sum \bar{\alpha}_n \langle x_1 - x_2, e_n\rangle - \sum \bar{\beta}_m \langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0.\end{aligned}$$

لذا فان $x_1 - x_2 = 0$ ، أي أن $x_1 = x_2$ • ولما كان تغيير الترتيب لحدود المتتالية (e_n) الذي أوصلنا الى المتتالية (w_m) كيفيـا ، فاننا نكون بذلك قـد أكملنا البرهـان • ∎

مسـائل

١ ـ اذا كانت (6) متقاربـة ومجموعها x ، فأثبت أن مجموع (7) هـو $\|x\|^2$ •

٢ ـ استنبط من (1) و (2) تمثيلا لدالة $\tilde{x}$ (دالة لـ τ) دورها p اختياري بتسلسلة فوريه •

٣ ـ بين بمثال أن ليس من الضروري بأن يكون لمتسلسلة متقاربة $\sum \langle x, e_k\rangle e_k$ المجموع x •

٤ ــ اذا كانت (x_j) متتالية في فضاء جداء داخلي X بحيث تكون المتسلسلة $\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$ متقاربة ، فبين أن (s_n) متتالية كوشي ، حيث $s_n=x_1+\cdots+x_n$ •

٥ ــ بين أن تقارب $\sum\|x_j\|$ في فضاء هلبرت H يقتضي تقارب $\sum x_j$ •

٦ ــ لتكن (e_j) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • بين بأنه اذا كان

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j,\qquad y=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j,$$

فــان

$$\langle x, y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\bar{\beta}_j,$$

حيث المتسلسلات الاخيرة متقاربة بالاطلاق •

٧ ــ لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • بيــن أنه اذا كان x أي عنصر من H ، فان المتجه

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

يكون موجودا في H ، كما يكون $x-y$ عموديا على كل e_k •

٨ ــ لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمــة في فضــاء هلبرت H ، وليكــن $M=\operatorname{span}(e_k)$ • بين أنه اذا كان $x\in H$ فان الشرط اللازم والكافي كــي يكون $x\in\bar{M}$ هو أن يكــون بالامكان تمثيل x بالمتسلسلة (6) حيــث المعاملات $\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$ •

٩ ــ لتكن (e_n) و $(\tilde{e}_n)$ متتاليتين متعامدتين منظمتين في فضاء هلبرت H ، وليكن $M_1=\operatorname{span}(e_n)$ و $M_2=\operatorname{span}(\tilde{e}_n)$ • بين بالافادة من المسألة ٨ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\bar{M}_1=\bar{M}_2$ هو أن يكون

$$(a)\quad e_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}\tilde{e}_m, \qquad (b)\quad \tilde{e}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn}e_m, \qquad \alpha_{nm} = \langle e_n, \tilde{e}_m\rangle.$$

١٠ـ قدم تفاصيل برهان التمهيدية ٣ـ٥ـ٣ •

٣ـ٦ المتتاليات والمجموعات المتعامدة المنظمة الكلية

ان المجموعات المتعامدة المنظمة الهامة فعلا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت هي تلك التي تحوي على عدد « كبير بقدر كاف » من العناصر ، بحيث يمكن أن يكون من الممكن تمثيل أي عنصر في الفضاء أو تقريبه بدقة كافية باستعمال هذه المجموعات المتعامدة المنظمة • ان الامر بسيط في الفضاءات منتهية البعد (التي بعدها n) ، اذ أن كل ما نحتاجه هو مجموعة متعامدة منظمة عدد عناصرها n • والسؤال الذي يطرح نفسه في هذا الصدد يدور حول ما يمكن فعله في حالة الفضاءات غير منتهية البعد أيضا • وسنورد فيما يلي بعض المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع •

٣ـ٦ـ١ تعريف (المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية)

المجموعة الكلية (أو المجموعة الاساسية) في فضاء منظم X هي مجموعة جزئية M من X بحيث يكون span M مجموعة كثيفة في X (راجع ١ـ٣ـ٥) • كذلك ، فان المجموعة (أو المتتالية أو الجماعة) المتعامدة المنظمة في فضاء جداء داخلي X والتي تكون كلية في X تدعى **مجموعة (او متتالية أو جماعة) متعامدة منظمة كلية**(*) في X • ∎

---

* وتدعى أحيانا مجموعة متعامدة منظمة **تامة** ، بيد اننا سنقتصر على استعمال مصطلح « التمام » بالمعنى الوارد في التعريف ١ـ٤ـ٣ ، وهذا أمر نستسيغه خشية استعمال كلمة واحدة لمفهومين مختلفين تماما . [وفضلا عن ذلك . فان بعض المؤلفين يعنون « بتمام » مجموعة متعامدة منظمة M الخاصة التي عبرنا عنها بالاقتضاء (1) الوارد في المبرهنة ٣ـ٦ـ٢ . الا اننا لن نتبنى هذا المصطلح كذلك] .

يتضح من التعريف مباشرة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون M كليـــة هو أن يكون

$$\overline{\text{span}\, M} = X.$$

وتدعى الجماعــة المتعامدة المنظمــة في X أحيانا **قاعدة متعامدة منظمة** لـ X • بيد أنه من الاهمية بمكان ملاحظة أن هذه ليست قاعدة بالمعنى الوارد في الجبر للفضاء X باعتباره فضاء متجهيا ، الا اذا كان X منتهي البعد •

يوجد في كل فضاء لهلبرت $H \neq \{0\}$ مجموعة متعامدة منظمة كلية •

ان هذا أمر بَيّـِن" في حال كون H منتهي البعد • أما اذا كان H غير منتهي البعد وفصولا (راجع ١ــ٣ــ٥) ، فان هذا يترتب على طريقة جرام ــ شميت بالاستقراء (العادي) • واذا كان H غير فصول ، فمن الممكن ايراد برهان انطلاقا من تمهيدية زورن ،الامر الذي سنفعله في البند٤ــ١ حيث نقدم ونشرح التمهيدية لغرض آخـــر •

لكل المجموعات المتعامدة المنظمة في فضاء معطى لهلبرت $H \neq \{0\}$ عـــدد كاردينالي (أصلي) واحد .يسمى هذا العدد **بعد هلبرت** أو **البعد العمودي المنظـم** لـ H• (وفي حالة كون $H = \{0\}$ ، فاننا نعرف هذا البعد بأنه مساو للصفر) •

ان هذه الدعوى واضحة في حال كون H منتهي البعد ، ذلك أن بعد هلبرت عندئذ هو البعد بالمعنى الجبري • أما في حالة فضاء H فصول وغير منتهي البعد ، فان هذه الدعوى تنتج رأسا من المبرهنة ٣ــ٦ــ٤ • وفي حالة فضاء عـــام H ، يتطلب البرهان أدوات أكثر تقدما من نظرية المجموعات • راجع الصفحة ٢٤٦ من الكتاب التالي :

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer

تبين المبرهنة التالية أن المجموعة المتعامدة المنظمة لا يمكن أن تظل متعامدة منظمة باضافة عناصر جديدة اليها •

٣ـ٦ـ٢ مبرهنة (الكلية)

اذا كانت M مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي X فاننا نجد ما يلي :

(آ) اذا كانت M كلية في X ، فلا وجود لمتجـه غير صفري x في X ، بحيث يكون x عموديا على كل عنصر من M ، وباختصار فان

$$x \perp M \quad \Longrightarrow \quad x = 0. \tag{1}$$

(ب) اذا كان X تاما ، فان الشرط هو أيضا كاف كي تكون M كلية في X •

البرهـان :

(آ) ليكن H اتمام X (راجع ٣ـ٢ـ٣) • عندئذ يكـون X ، باعتباره فضاء جزئيا من H ، كثيفا في H • ان M مجموعة كلية في X فرضا ، لذا فـان span M كثيفة في X ، وبالتالي فهي كثيفة في H • وعندئذ تقتضي التمهيدية ٣ـ٣ـ٧ أن المتمم المعامد لـ M في H هو $\{0\}$ • ومن باب أولى ، فانه اذا كان x عنصرا من X وكان $x \perp M$ ، فان $x = 0$ •

(ب) اذا كان X فضاء هلبرت وكانت M محققة لذلك الشرط ، الامر الذي يترتب عليه أن $M^{\perp} = \{0\}$ ، فان التمهيدية ٣ـ٣ـ٧ تقتضي أن تكون M كلية في X • ∎

ان تمام X في (ب) شرط ضروري • فاذا لم يكن X تاما ، فقد لا توجـد أية مجموعة متعامدة منظمة M في X بحيث تكون M كلية في X • وقـد أورد ديكسمييه J. Dixmier عام ١٩٥٣ م• مثالا على ذلك • راجع كذلك الصفحة ١٥٥ من كتاب بورباكي لعام ١٩٥٥ (الوارد في قائمة المراجع) •

ثمة معيار هام آخر للكلية نجده انطلاقا من متباينة بسل (راجع ٣ـ٤ـ٦)• لهذا نأخذ أي مجموعة متعامدة منظمة M في فضـاء هلبرت H • مـن المعلوم استنادا الى التمهيدية ٣ـ٥ـ٣ أنه يوجد لكل عنصر x مثبت في H جملة عدودة على الاكثر من معاملات فورييه غـير الصفرية ، لـذا فمن الممكن ترتيب هـذه المعاملات في متتالية ولتكن $\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots$ • ان متباينة بسل هي (٣ـ٤ـ٦)

(2) $$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2$$ (متباينة بسل)

حيث الطرف الايسر يمثل متسلسلة غير منتهية أو مجموعا منتهيا • واذا أخذنا اشارة التساوي ، فانها تغدو بالشكل

(3) $$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$$ (علاقة بارسفال)

ونجد عندئذ معيارا آخر للكلية هو :

٣ـ٦ـ٣ مبرهنة (الكليــة)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة متعامدة منظمة M في فضاء هلبرت H كليةفي H هو أن تتحقق علاقة بارسفال (3) أيا كان x من H(يتــم الجمع وفق جميع معاملات فورييه غير الصفرية لـ x بالنسبة الى M) •

البرهــان :

(آ) اذا لم تكـن M كلية ، فانه يترتب على المبرهنة ٣ـ٦ـ٢ وجود عنصر غير صفري x في H بحيث يكون $x \perp M$ • وبما أن $x \perp M$ ، فاننا نجد في (3) أن $\langle x, e_k\rangle = 0$ أيا كان k ، وبالتالي فان الطرف الايسر من (3) يساوي الصفر ، في حين أن $\|x\|^2 \neq 0$ ، وهذا يبين أن (3) غير صحيحة • لذا فانه اذا صحت (3) أيا كان x في H ، وجب أن تكون M كلية في H •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن M كلية في H • لنأخذ أي عنصر x من H ومعاملات فورييه غير الصفرية لهذا العنصر (راجع ٣ـ٥ـ٣) التي نرتبها وفـق متتالية $\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots$ ، أو نكتبها بترتيب معين اذا كان عـددها منتهيا • لنعرف الآن y بالمساواة

(4) $$y = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k,$$

مع ملاحظة أنه في حالة كون الطرف الايمن متسلسلة غير منتهية ، فان تقاربها ينتج

من المبرهنة ٣ـ٥ـ٢ • لنبين أن $x-y \perp M$ • نرى انه اذا أفدنا مــن كون e_j متتالية متعامدة منظمة ، فانه يقابل كل e_j في (4) ما يلي :

$$\langle x-y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

ونجد لكل عنصر v من M غير محتوى في (4) المساواة $\langle x, v \rangle = 0$ ، وبالتالي فـــان

$$\langle x-y, v \rangle = \langle x, v \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle = 0-0=0.$$

لذا فان $x-y \perp M$ ، أي أن $x-y \in M^{\perp}$ • وبما أن M كلية في H ، فاننا نجد استنادا الى ٣ـ٣ـ٧ أن $M^{\perp}=\{0\}$ • نستخلص مما تقــدم أن $x-y=0$ ، أي أن $x=y$ • واعتمادا على (4) وعلى خاصة كون e_j متعامدة منظمة ، فاننا نستنتج (3) من

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}.$$

وبذا يكتمل البرهان • ∎

لننتقل الى فضاءات هلبرت الفصولة • يوجد لكل من هذه الفضاءات وفق التعريف ١ـ٣ـ٥ مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في الفضاء • ان فضاءات هلبرت الفصولة أبسط من الفضاءات غير الفصولة ، ذلــك أنها لا يمكن أن تحــوي مجموعات متعامدة منظمة غير عدودة ، كما تبين المبرهنة التالية :

٣ـ٦ـ٤ مبرهنة (فضاءات هلبرت الفصولة)

ليكن H فضاء هلبرت . عندئذ نجد أنه

(آ) اذا كان H فصولا ، فان كل مجموعة متعامدة منظمة في H عدودة •

(ب) اذا حوى H متتالية متعامدة منظمة وكلية في H فان H فصول ،

البرهـان :

(آ) ليكن H فصولا ، و B أي مجموعة كثيفة في H و M أي مجموعة متعامدة منظمة • عندئذ تكون المسافة بين أي عنصرين مختلفين x و y في M مساوية $\sqrt{2}$ ذلك أن

$$\|x-y\|^2=\langle x-y, x-y\rangle=\langle x, x\rangle+\langle y, y\rangle=2.$$

لذا فالجواران الكرويان N_x لـ x و N_y لـ y اللذان نصف قطر كل منهما $\sqrt{2}/3$ منفصلان • ولما كانت B كثيفة في H ، فيوجد عنصـر $b\in B$ في N_x وعنصـر $\tilde{b}\in B$ في N_y بحيث $b\neq\tilde{b}$ نظرا لكون $N_x\cap N_y=\varnothing$ • وبالتالي ، فاذا كانت M غير عدودة ، فاننا نجد جملة غير عدودة من الجوارات الكروية المنفصلة مثنى (حيث يقابل كل x من M أحد هذه الجوارات) ، وعندها تكون B غير عدودة • وبما أن B هي أي مجموعة كثيفة ، فان هذا يعني أن H لن يحوي مجموعة كثيفة غير عدودة ، وهذا يناقض كون H فصولا • يترتب عـلى هذا أن M لابـد أن تكـون عـدودة •

(ب) لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة كليه في H ، ولتكن A مجموعة كل التراكيب الخطية

$$\gamma_1^{(n)}e_1+\cdots+\gamma_n^{(n)}e_n \qquad n=1, 2, \cdots$$

حيث $\gamma_k^{(n)}=a_k^{(n)}+ib_k^{(n)}$ ، بفرض $a_k^{(n)}$ و $b_k^{(n)}$ أعدادا عادية و $b_k^{(n)}=0$ اذا كان H حقيقيا • من الواضح أن A عدودة • سنثبت أن A كثيفة في H وذلك بـأن نبين أنه يوجد لكل x من H ولكل عدد موجب ε عنصر v في A يحقق المتباينة $\|x-v\|<\varepsilon$ •

بما أن المتتالية (e_k) كلية في H ، فانه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي المجموعة $Y_n=\operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ نقطة بعدها عن x أصغر مـن $\varepsilon/2$ • وبوجه خاص ، فاذا كان y هو المسقط العمودي لـ x على Y_n والذي يعطـى بالمساواة (راجع (8) من البند ٣ـ٤)

$$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

فان $\|x-y\|<\varepsilon/2$ • لذا فاننا نجد أن

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

وبما أن مجموعة الاعداد العادية كثيفة على $\mathbf{R}$ ، فانه يوجد لكل $\langle x, e_k\rangle$ عدد $\gamma_k^{(n)}$ (قسماه الحقيقي والتخيلي عاديان) بحيث يكون

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}[\langle x, e_k\rangle-\gamma_k^{(n)}]e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا فان العنصر v من A المحدد بالمساواة

$$v=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k$$

يحقق ما يلي :

$$\begin{aligned}\|x-v\|&=\|x-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\|\\&\leqq\|x-\sum\langle x, e_k\rangle e_k\|+\|\sum\langle x, e_k\rangle e_k-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن A كثيفة في H • وبما أن A عدودة ، فان H فصول • ∎

لاستعمال فضاءات هلبرت في البحوث التطبيقية ، علينا أن نعرف المجموعة أو المجموعات المتعامدة المنظمة الكلية الواجب اختيارها في وضع محدد ، وأن نعرف كيفية تقصي خواص عناصر مثل هذه المجموعات • وفي حالة فضاءات دوال معينة ، فان هذه المسألة ستجري دراستها في البند اللاحق الذي يحوي دوال خاصة ذات أهمية تطبيقية سبق وأن درست بتفصيل كبير • وقبل الانتهاء من هذا البند ، سنبين أن لدراستنا الحالية نتائج أبعد ذات أهمية كبيرة،ويمكن صياغتها بدلالة ايزومورفيزمات فضاءات هلبرت • لهذا سنعيد الى الذاكرة أولا التعريف التالي الذي ورد في البند ٣ــ٢ :

الايزومورفيزم لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت $\bar{H}$ ، حيث الفضاءان معرفان على حقل واحد ، هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: H \longrightarrow \bar{H}$ يحقق الشرط

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle. \qquad (5)$$

أيا كان x و y من H • يدعى H و $\bar{H}$ عندئذ **فضاءين ايزومورفيين** • وبما أن T خطي ، فانه يحفظ بنيـة الفضاء المتجهي ، وتبين المساواة (5) أن T تطبيق ايزومتري • يترتب على هذا وعلى كون T متباينا وغامرا أنه لا يمكن التمييز بين H و $\bar{H}$ من وجهتي النظر الجبرية والمترية ، إذ إنهما في الحقيقة فضاء واحد ، اللهم باستثناء طبيعة عناصرهما ، وهذا يسمح لنا بالنظر الى $\bar{H}$ على أنه في جوهره H الذي نضع اشارة فوق كل من متجهاته • أو أنه يمكننا أن نعد H ، $\bar{H}$ نسختين (أنموذجين) لفضاء مجرد واحد ، الامر الذي غالبا ما نفعله في حالة الفضاءات الاقليدية التي بعدها n •

ان أكثر الحقائق اثارة في هذه المناقشة تكمن في أنه يوجد لكل بعد لهلبرت (راجع بداية هذا البند) فضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وحقيقي،وفضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وعقدي • وبعبارة أخرى ، فانه يمكن التمييز بين فضاءين مجردين لهلبرت على حقل واحد عن طريق بعد هلبرت لكل منهما فقط ، وهذا تعميم للتمييز بين الفضاءات الاقليدية ، وهذا ما تعنيه المبرهنة التالية :

٣ــ٦ــ٥ مبرهنة (الايزومورفيزم وبعد هلبرت)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءا هلبرت H و $\bar{H}$ الحقيقيان معا أو العقديان معا ايزومورفيين ، هو أن يكون بعد هلبرت لـ H مساويا بعد هلبرت لـ $\bar{H}$ •

البرهـان :

(آ) اذا كان H ايزومورفيا مع $\bar{H}$ وكان $T: H \longrightarrow \bar{H}$ ايزومورفيزما ، فان (5) تبين أن للعناصر المتعامدة المنظمة في H صورا متعامدة ومنظمة وفق

T • وبما أن T متباين وغامر ، فاننـا نستنتج أن صورة كـل مجموعة متعامدة منظمة كلية في H وفق T هي مجموعة متعامدة منظمة كلية في $\tilde{H}$ • لذا فان بعد هلبرت للفضاء H يساوي بعد هلبرت للفضاء $\tilde{H}$ •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن بعد هلبرت للفضاء H يساوي بعد هلبرت للفضاء $\tilde{H}$ • ان الحالة التي يكون فيها $H=\{0\}$ و $\tilde{H}=\{0\}$ تافهـة • لذلـك سنفترض أن $H\neq\{0\}$ • عندئذ يكون $\tilde{H}\neq\{0\}$ ، كمـا يكون لاي مجموعتين متعامدتين منظمتين كليتين M في H و $\tilde{M}$ في $\tilde{H}$ عدد كاردينالي واحد • لـذا فمن الممكن تذييل هاتين المجموعتين باستعمال مجموعة أدلـة واحـدة $\{k\}$ ، وبالتالي فاننا نكتب $M=(e_k)$ و $\tilde{M}=(\tilde{e}_k)$ •

لاثبـات أن H و $\tilde{H}$ ايزومورفيان ، سننشىء ايزومورفيزما لـ H على $\tilde{H}$ • فاذا كان $x\in H$ ، نجد أن

$$x=\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k \tag{6}$$

حيث الطرف الايمن مجموع منته أو متسلسلة غير منتهية (٣ــ٥ــ٣) ، وحيث $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2<\infty$ استنادا الى متباينة بسل • فاذا عرفنا

$$\tilde{x}=Tx=\sum_k \langle x, e_k\rangle \tilde{e}_k \tag{7}$$

فاننا نستنتج التقارب وفق ٣ــ٥ــ٢ ، وبالتالي فان $\tilde{x}\in\tilde{H}$ • ان المؤثر T خطي نظرا لكون الجداء الداخلي خطيـا بالنسبة للعامـل الاول • كذلك ، فـان T ايزومتري ، ذلك أنه اذا استعملنا أولا (7) ومن ثم (6) فاننا نجد التالي :

$$\|\tilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2=\|x\|^2.$$

يترتب على هذا وعلـى (9) و (10) في البنـد ٣ــ١ أن T تحفظ الجـداء الداخلي • وفضلا عن ذلك فان الايزومترية تقتضي التباين ، ذلك أنـه اذا كان $Tx=Ty$ فـان

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0,$$

وبالتالي فان $x=y$ و T متباين وفق ٢ــ٦ــ١٠ •

سنبين أخيرا أن T غامر • اذا كان

$$\tilde{x}=\sum_k \alpha_k \tilde{e}_k$$

عنصرا في $\tilde{H}$ ، فانه يترتب على متباينة بسل أن $\sum|\alpha_k|^2<\infty$ • وبالتالي فان

$$\sum_k \alpha_k e_k$$

مجموع منته أو متسلسلة تتقارب من عنصر x من H وفق ٣ــ٥ــ٢ ، كما يكون $\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$ استنادا الى المبرهنة نفسها • لذا فاننا نجد أن $\tilde{x}=Tx$ وفق (7) • ولما كان $\tilde{x}\in\tilde{H}$ اختياريا ، فان هذا يثبت أن T غامر • ∎

مسائل

١ ــ اذا كانت F قاعدة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، فهل يمكن تمثيل كل x من X على شكل تركيب خطي من عناصر في F ؟ (يتألف التركيب الخطي تعريفا من عدد منته من الحدود) •

٢ ــ أثبت أنه اذا كان البعد العمودي لفضاء هلبرت منتهيا ، فانه يساوي بعد H باعتباره فضاء متجهيا ، وبالعكس ، فاذا كان الفضاء H منتهيا فبين أن الفضاء السابق يكون كذلك •

٣ ــ ما هي المبرهنة من الهندسة الابتدائية التي نستنتج منها (3) في حالة فضاء اقليدي بعده n ؟

٤ ــ استنتج من (3) الدستور التالي (الذي غالبا ما يطلق عليه اسم **علاقة بارسفال**) :

$$\langle x, y\rangle=\sum_k \langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}.$$

٥ ــ بين أن الشرط اللازم والكافي كــي تكون الجماعــة المتعامدة المنظمــة $(e_\kappa),\ \kappa\in I$ في فضاء هلبرت H كلية هو أن تتحقق العلاقة الواردة فــي المسألة ٤ أيا كان x و y في H •

٦ ــ ليكن فضاء هلبرت H فصولا و M مجموعة جزئية كثيفة وعدودة في H • أثبت أن H تحوي متتالية متعامدة منظمة كلية يمكن الحصول عليها مــن M بطريقة جرام ــ شميت •

٧ ــ بين أنه اذا كان فضاء هلبرت H فصولا ، فمن الممكن اثبات وجود مجموعة متعامدة منظمة كلية في H دون اللجوء الى تمهيد زورن •

٨ ــ اذا كانت F أي متتالية متعامدة منظمــة في فضــاء هلبرت H الفصول ، فأثبت وجود متتالية متعامدة منظمة كلية $\tilde{F}$ تحوي F •

٩ ــ لتكن M مجموعة كلية في فضاء جداء داخلي X • فاذا كان $\langle v, x\rangle=\langle w, x\rangle$ أيا كان x من M، فأثبت أن $v=w$ •

١٠ــ لتكن M مجموعة جزئية من فضاء هلبرت H ، وليكن $v, w\in H$ • لنفترض أن المساواة $\langle v, x\rangle=\langle w, x\rangle$ الصحيحة أيا كان x من M تقتضي المساواة $v=w$ • بَيِّنْ أنه اذا تحقق هذا أيا كان v, w من H فان M كلية في H •

٣ــ٧ حدوديات لاكير وهرميت ولوجاندر

لنظرية فضاءات هلبرت تطبيقات في مواضيع مختلفة ومتطورة في التحليل الرياضي • وسنناقش في البنــد الحالي بعض المتتاليات المتعامدة الكلية وبعض المتتاليات المتعامدة المنظمــة الكليــة ، والتي كثيرا ما يرد استعمالها في سياق بعض المسائل العملية (في ميكانيكا الكم مثلا ، كما سنرى في الفصل ١١) • وقد درست خواص هذه المتتاليات بتفصيل كبير ، ويمثل الكتاب التالي مرجعــا جيدا في هذا الموضوع :

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions.* 3 vols. New York: McGraw-Hill

هذا البند اختياري •

٣ــ٧ــ١ حدوديات لوجاندر

ان فضاء الجداء الداخلي X المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1, 1]$ حيث الجداء الداخلي يعرف بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$$

يمكن اتمامه طبقا للبرهنة ٣ــ٢ــ٣ • عندئذ نجد فضاء هلبرت الذي نرمز له بـ $L^2[-1, 1]$ • راجع أيضا المثال ٣ــ١ــ٥ •

ان هدفنا هو الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[-1, 1]$ مؤلفة من دوال يسهل التعامل معها • وتمثل الحدوديات دوال هذا النمط • سننطلق من دوال القوة $x_0, x_1, x_2 \dots$ حيث

$$(1) \qquad x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t, \quad \cdots, \quad x_j(t) = t^j, \cdots \qquad t \in [-1, 1].$$

انهذه المتتالية مستقلة خطيا (أورد البرهان !) • وبتطبيق طريقة جرام ــ شميت (البند ٣ــ٤) ، نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) • كل e_n هو حدودي ، ذلك أننا نستعمل تركيبا خطيا للدوال x_j • ودرجة e_n هي n كما سنرى ان (e_n) كلية في $L^2[-1, 1]$ •

البرهان :

ان المجموعة $W = A(X)$ كثيفة في $L^2[-1, 1]$ اعتمادا على المبرهنة ٣ــ٢ــ٣ • لذا فانه يقابل كل عنصر مثبت x من $L^2[-1, 1]$ وكل عدد موجب ε دالة مستمرة y معرفة على $[-1, 1]$ بحيث أن

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ويقابل y هذه حدودي z بحيث تتحقق المتباينة

$$|y(t)-z(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

أيا كان t من $[-1,1]$ ؛ ان هذا ناتج من مبرهنة ڤير شتراس في التقريب التي سنثبتها في البند ٤ـ١١ ، ويترتب على هذا أن

$$\|y-z\|^2=\int_{-1}^{1}|y(t)-z(t)|^2\,dt<2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

وبالتالي فاننا نجد اعتمادا على متباينة المثلث أن

$$\|x-z\|\leqq\|x-y\|+\|y-z\|<\varepsilon.$$

ويبين تعريف طريقة جرام ـ شميت أن (1) يقتضي وجود عنصر $z\in\operatorname{span}\{e_0,\cdots,e_m\}$ عندما يكون m كبيرا بقدر كاف ؛ ولما كان العنصر $x\in L^2[-1,1]$ والعدد الموجب ε كيفيين ، فاننا نستنتج كلية (e_n) ؛ ∎

هذا ويحتاج المرء لاغراض عملية دساتير ظاهرة ؛ لذا ندعي بأن

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(t)\qquad n=0,1,\cdots\tag{2a}$$

حيث

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n].\tag{2b}$$

يدعى P_n **حدودي لوجاندر من المرتبة** n ، ويسمى الدستور (2b) **دستور رودريك** ؛ ومن نتائج الجذر التربيعي في الدستور (2a) الحصول على الخاصة $P_n(1)=1$ التي لن نتوقف عند اثباتها نظرا لعدم حاجتنا اليها ؛

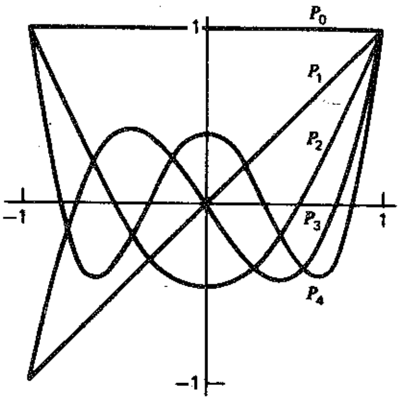
اذا طبقنا مبرهنة ثنائي الحد على $(t^2-1)^n$ واشتققنا النتيجة n من المرات حدا حدا ، فاننا نجد من (2b) أن

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!\,(n-j)!\,(n-2j)!}\,t^{n-2j}\tag{2c}$$

حيث $N=n/2$ اذا كان n زوجيا و $N=(n-1)/2$ اذا كان فرديا • لذا فان (راجع الشكل ٣٥)

$$
(2^*) \qquad
\begin{aligned}
&P_0(t)=1 && P_1(t)=t\\
&P_2(t)=\tfrac{1}{2}(3t^2-1) && P_3(t)=\tfrac{1}{2}(5t^3-3t)\\
&P_4(t)=\tfrac{1}{8}(35t^4-30t^2+3) && P_5(t)=\tfrac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)
\end{aligned}
$$

وهلم جرًّا •



الشكل (٣٥) • حدوديات لوجاندر

برهان (2a) و (2b) • سنبين في (آ) أن (2b) تقتضي

$$
(3) \qquad \|P_n\| = \left[\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(t)\,dt\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}
$$

وبالتالي فان نظيم e_n في (2a) يغدو 1 • أما في الشق (ب) فسنثبت أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1,1]$ • وهذا يكفي لاثبات (2a) و (2b) للسبب التالي : سنرمز للطرف الايمن من (2a) أولا بـ $y_n(t)$ • عندئذ يكـون y_n حدوديا درجته n ، ويقتضي الشقان (آ) و (ب) أن (y_n) متتالية متعامدة منظمة في $L^2[-1,1]$ • ليكـن

$$
Y_n=\operatorname{span}\{e_0,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_0,\cdots,x_n\}=\operatorname{span}\{y_0,\cdots,y_n\};
$$

ان اشارة المساواة الثانيـــة هنا ناتجة من دستور طريقة جرام ــ شميت ، واشارة المساواة الاخيرة ناتجة من $\dim Y_n = n+1$ والاستقلال الخطــي لـ $\{y_0, \cdots, y_n\}$ الذي نصَصْنا عليه في ٣ــ٤ــ٢ • لذا فانه يوجد لـ y_n التمثيل

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j. \tag{4}$$

واستنادا الى التعامد ، فان

$$y_n \perp Y_{n-1} = \operatorname{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\} = \operatorname{span}\{e_0, \cdots, e_{n-1}\}.$$

ان هذا يقتضي أنه اذا كانت $k = 0, \cdots, n-1$ فان

$$0 = \langle y_n, e_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k.$$

وبالتالي فان (4) تؤول الى المساواة $y_n = \alpha_n e_n$ • ان $|\alpha_n| = 1$ هنا ، ذلــك أن $\|y_n\| = \|e_n\| = 1$ • وفعلا فــان $\alpha_n = +1$ أو -1 α_n نظــرا لان y_n و e_n حقيقيان كلاهما • ان $y_n(t) > 0$ عندما تأخذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، ذلك أن معامل t^n في (2c) موجب • كذلك فــان $e_n(t) > 0$ عندما تأخــذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، الامر الذي يمكن رؤيته من $x_n(t) = t^n$ ومن (13) و (14) في البند ٣ــ٤ • لذا فان $\alpha = +1$ و $y_n = e_n$ ، وهذا يثبت (2a) ، حيــث P_n معطــاة بـ (2b) •

يبين هذا كله أنه بعد ايراد هذه المقدمة ، فان البرهان سيكون كاملا •

(آ) سنستنتج (3) من (2b) ؛ لذا نكتب $u = t^2 - 1$ • ان الدالة u^n ومشتقاتها $(u^n), \cdots, (u^n)^{(n-1)}$ اصفار عندما $t = \pm 1$ ، كما أن $(u^n)^{(2n)} = (2n)!$ • وباجراء المكاملة n مرة بالتجزئة ، فاننا نجد من (2b) أن

$$(2^n n!)^2 \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n)} (u^n)^{(n)} \, dt$$

$$= (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n+1)} \, dt$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} u^n \, dt$$

$$= 2(2n)! \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$$

$$= 2(2n)! \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \tau \, d\tau \qquad (t = \sin \tau)$$

$$= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

فاذا قسمنا الطرفين على $(2^n n!)^2$ ، فاننا نجد (3) •

(ب) سنبين أن $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ ، حيث $0 \leqq m < n$ • بما أن P_m حدودي ، فانه يكفي إثبات $\langle x_m, P_n \rangle = 0$ عندما $m < n$ حيث x_m معين بـ (1) ، وهذا ينتج باجراء المكاملة بالتجزئة m مرة كما يلي :

$$2^n n! \langle x_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} t^m (u^n)^{(n)} \, dt$$

$$= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} - m \int_{-1}^{1} t^{m-1} (u^n)^{(n-1)} \, dt$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-m)} \, dt$$

$$= (-1)^m m! \, (u^n)^{(n-m-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

وبهذا يكتمل برهان (2a) و (2b) • ∎

وتشكل حدوديات لوجاندر حلولا **لمعادلة لوجاندر التفاضلية** الهامة التالية

$$(1-t^2) P_n'' - 2t P_n' + n(n+1) P_n = 0, \qquad (5)$$

ويمكن الحصول على (2c) أيضا بتطبيق طريقة متسلسلات القوى على (5)

وفضلا عن ذلك ، فان (q_n) حيث

$$(6) \qquad q_n = \frac{1}{\|p_n\|} p_n, \qquad p_n(t) = P_n(s), \qquad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a}.$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة كلية في الفضاء $L^2[a, b]$. ونجد اثباتا لهذا اذا لاحظنا أن $a \leqq t \leqq b$ توافق $-1 \leqq s \leqq 1$ ، وأن التعامد يحفظ وفق هذا التحويل الخطي $t \longmapsto s$.

وهكذا فاننا نجد متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[a, b]$ أيا كانت الفترة المتراصة $[a, b]$. لهذا فان المبرهنة ٣ـ٦ـ٤ تقتضي التالي :

الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ فصول .

٣ـ٧ـ٢ حدوديات هرميت

هنالك فضاءات أخرى ذات أهمية عملية هي $L^2(-\infty, +\infty)$ و $L^2[a, +\infty)$ و $L^2(-\infty, b]$ ، وهي فضاءات لم نتطرق اليها في ٣ـ٧ـ١ . بما أن فترات المكاملة غير منتهية ، فان القوى $x_0, x_1, \cdots$ في ٣ـ٧ـ١ وحدها لن تساعدنا في شيء . الا أننا لو ضربنا كلا منها بدالة بسيطة تتناقص بسرعة كافية ، فيمكننا أن نأمل في الحصول على تكاملات منتهية . والدوال الاسية بأس مناسب تمثل اختيارا مناسبا لهذه الدوال .

لنأخذ الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$ ، ولنعين الجداء الداخلي بالدستور

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\, dt.$$

سنطبق طريقة جرام ـ شميت على متتالية الدوال المعرفة كما يلي :

$$w(t) = e^{-t^2/2}, \qquad tw(t), \qquad t^2 w(t), \cdots .$$

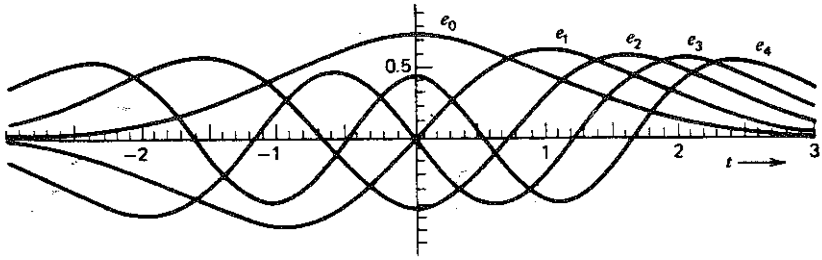
ان العامل 1/2 الوارد في الأس اصطلاحي تماما ، وليس له معنى أعمق .

هذه الدوال هي عناصر في $L^2(-\infty,+\infty)$ ، ذلك أنهـا محدودة على **R** ، ولنفترض مثلا أن $|t^n w(t)| \leqq k_n$ أيا كان t ، لذا فان

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2/2}\, t^n e^{-t^2/2}\, dt\right| \leqq k_{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = k_{m+n}\sqrt{2\pi}.$$

ان طريقة جرام ـ شميت تعطي متتاليـة متعامدة منظمـة (e_n) حيـث (الشـكل ٣٦)

$$e_n(t) = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}\, e^{-t^2/2}\, H_n(t) \tag{7a}$$



الشكل (٣٦) . الدوال e_n في (7a) الحاوية على حدوديات هرميت

وحيـث

$$H_0(t) = 1, \qquad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{7b}$$

يسمى H_n **حدودي هرميت من المرتبة** n .

وباجراء الاشتقاقات التي أشرنا اليها في (7b) نجد أن

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!\,(n-2j)!}\, t^{n-2j} \tag{7c}$$

حيث $N=n/2$ اذا كان n زوجيا و $N=(n-1)/2$ اذا كان n فرديا . لاحظ أن يمكن أيضا كتابة هذه المساواة بالشكل

$$H_n(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{j!}\,n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}. \tag{7c'}$$

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لحدوديات هرميت القليلة الاولى :

$$\begin{aligned}
&H_0(t)=1 && H_1(t)=2t\\
&H_2(t)=4t^2-2 && H_3(t)=8t^3-12t\\
&H_4(t)=16t^4-48t^2+12 && H_5(t)=32t^5-160t^3+120t.
\end{aligned} \tag{7*}$$

ان المتتالية (e_n) المعرفة ب (7a) و (7b) متعامدة منظمة .

البرهـــان :

يبين (7a) و (7b) أنه علينا اثبات أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,H_m(t)H_n(t)\,dt=\begin{cases}0 & \text{if } m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \text{if } m=n.\end{cases} \tag{8}$$

ونجد باشتقاق (7c') عندما $n\geqq 1$ أن

$$\begin{aligned}
H_n'(t)&=2n\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j}{j!}(n-1)(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-1-2j}\\
&=2nH_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

حيث $M=(n-2)/2$ اذا كان n زوجيا و $M=(n-1)/2$ اذا كان n فرديا . سنطبق هذا الدستور على H_m ، ونفترض أن $m\leqq n$ ، ونرمز للدالة الأسية في (8) بـ v بقصد التبسيط ، ونجري المكاملة m مرة بالتجزئة . عندئذ نجد اعتمادا على (7b) أن

$$
\begin{aligned}
(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t) v^{(n)}\, dt \\
&= H_m(t) v^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2m H_{m-1}(t) v^{(n-1)}\, dt \\
&= -2m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t) v^{(n-1)}\, dt \\
&= \cdots \\
&= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) v^{(n-m)}\, dt.
\end{aligned}
$$

وهنا $H_0(t)=1$ ، واذا كان $m<n$ ، فاننا اذا أجرينا المكاملة مرة أخرى ، نجد 0 ، ذلك أن v ومشتقاتها تقترب من الصفر عندما $t \longrightarrow +\infty$ أو عندما $t \longrightarrow -\infty$ ، وهذا يثبت تعامد (e_n) ، سنثبت صحة (8) عندما $m=n$ الامر الذي يترتب عليه أن $\|e_n\|=1$ وفق (7a) ، اذا كان $m=n$ ، ورمزنا للتكامل الاخير بـ J ، فاننا نجد

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt=\sqrt{\pi}.$$

وهذه نتيجة معروفة ، وللتحقق منها ، نأخذ J^2 ونستخدم الاحداثيين القطبيين r ، θ والمساواة $ds\, dt = r\, dr\, d\theta$ فنجد

$$
\begin{aligned}
J^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s^2+t^2)}\, ds\, dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

لذا فان الدستور (8) صحيح ، الامر الذي يقتضي كون (e_n) متعامدة منظمة . ∎

وغالبا ما يعبر عن (8) بالعبارة التقليدية القائلة بأن الحدوديات H_n تشكل متتالية متعامدة بالنسبة الى **دالة الوزن** w^2 ، حيث w دالة عرفناها في البداية ٠

يمكننا إثبات ان المتتالية (e_n) المعرفة ب (7a) و (7b) كلية في الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$ ٠ لذا فان هذا الفضاء فصول (راجع ٣ـ٦ـ٤) ٠

لنذكر أخيرا أن حدوديات هرميت H_n تحقق **معادلة هرميت التفاضلية**

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0. \tag{9}$$

تحذيــر : من سوء الحظ ألا تكون المصطلحات في الكتب المختلفة موحدة٠ وفي الحقيقة ، فان الدوال He_n المعرفة كالتالي

$$He_0(t) = 1, \qquad He_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2}) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

تسمى أيضا « حدوديات هرميت » ، والأسوء من ذلك ، فانه يشار اليها أحيانا بـ H_n ٠

سنورد تطبيقا لحدوديات هرميت في ميكانيكا الكم في البند ١١ـ٣ ٠

٣ـ٧ـ٣ حدوديات لاكير

من الممكن الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2(-\infty, b]$ أو في $L^2[a, +\infty)$ من متتالية من هــذا النوع في $L^2[0, +\infty)$ بالتحويلين $t = b - s$ و $t = s + a$ عــلى الترتيب ٠

لنأخذ $L^2[0, +\infty)$ ٠ اذا طبقنا طريقة جرام ـ شميت على المتتالية المعرفــة كالتــالي

$$e^{-t/2}, \qquad te^{-t/2}, \qquad t^2 e^{-t/2}, \qquad \cdots$$

فاننا نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) ٠ من الممكن اثبات أن (e_n) كليــة في

وانها تعطى بالدستور (الشكل ٣٧) $L^2[0,+\infty)$

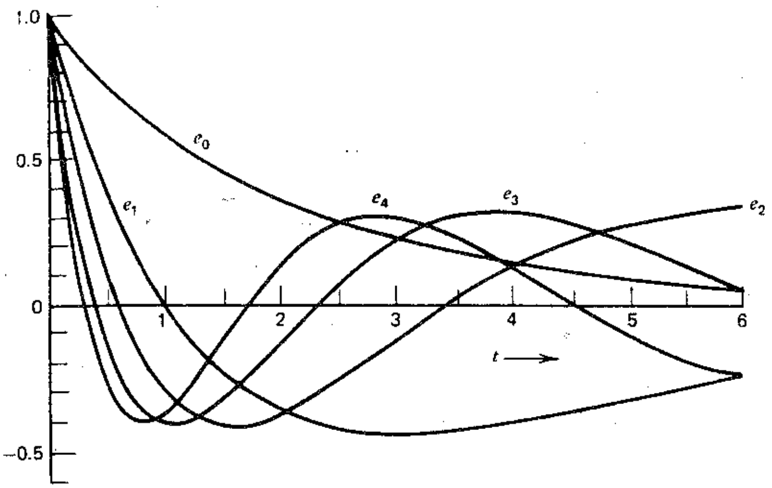
$$e_n(t) = e^{-t/2}L_n(t) \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{10a}$$

حيث يعرف حدودي لاكير من المرتبة n كما يلي

$$L_0(t) = 1, \qquad L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{10b}$$

أي أن

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}\binom{n}{j}t^j. \tag{10c}$$



الشكل (٣٧) ـ الدوال e_n في (10a) الحاوية على حدوديات لاكير

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لعدد قليل من حدوديات لاكير الاولى

$$(10^*) \qquad \begin{array}{ll} L_0(t) = 1 & L_1(t) = 1 - t \\ L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 & L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 \\ L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^4. & \end{array}$$

وتشكل حدوديات لاكير L_n حلولا لمعادلة لاكير التفاضلية

$$tL_n'' + (1-t)L_n' + nL_n = 0. \tag{11}$$

ولمزيد من التفاصيل ، على القارىء أن يعود الى الكتابين التاليين الموجودين في مسرد المراجع :

Courant, R., and D. Hilbert (1953–62), *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill

مسائل

١ ــ بين بأنه يمكن كتابة معادلة لوجاندر التفاضلية بالشكل

$$[(1-t^2)P_n']' = -n(n+1)P_n.$$

اضرب المعادلة بـ P_m ، اضرب المعادلة الموافقة لـ P_m بـ $-P_n$ ، ثم اجمع المعادلتين ، بين بمكاملة المعادلة الناتجة من -1 الى 1 أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1,1]$.

٢ ــ استنتج (2c) من (2b) .

٣ ــ **(الدالة المولدة)** . بين بأن

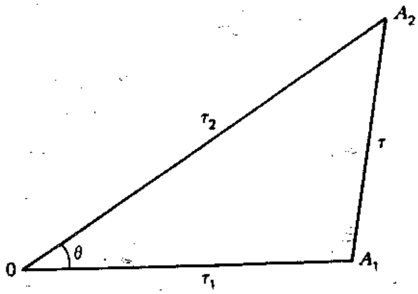
$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n.$$

تدعى الدالة في الطرف الايسر **الدالة المولدة** لحدوديات لوجاندر ، ان الدوال المولدة مفيدة فيما يتعلق بدوال خاصة متنوعة ، راجع الكتابين اللذين أوردناهما مباشرة قبل هذه المسائل .

٤ ــ بين بأن

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

حيث r هي المسافة بين نقطتين A_1 و A_2 في $\mathbf{R}^3$ كما هو مبين في الشكل ٣٨ و $r_2>0$. (ان هذا الدستور مفيد في نظرية الكمون) .



الشكل (٣٨) . المسألة ٤

٥ ــ أوجد حدوديات لوجاندر باستخدام طريقة متسلسلات القوى على النحو التالي : عوض $x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$ في معادلة لوجاندر ، وبين أنه بتعييننا للمعاملات ، فاننا نجد الحل $x=c_0x_1+c_1x_2$ حيث

$$x_1(t)=1-\frac{n(n+1)}{2!}t^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}t^4-+\cdots$$

وحيث

$$x_2=t-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}t^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}t^5-+\cdots.$$

بين أنه اذا كان n عددا صحيحا موجبا ، فان احدى هاتين الدالتين تؤول الى حدودي ، وهذا الحدودي يغدو P_n اذا اخترنا $c_n=(2n)!/2^n(n!)^2$ معاملا لـ t^n .

٦ ــ **(الدالة المولدة)** • بين بأن

$$\exp(2wt-w^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(t)w^n.$$

تدعى الدالة في الطرف الايسر **الدالة المولدة** لحدوديات هرميت •

٧ ــ بين باستعمال (7b) أن

$$H_{n+1}(t)=2tH_n(t)-H_n{}'(t).$$

٨ ــ بين باشتقاق الدالة المولدة في المسألة ٦ بالنسبة الى t أن

$$H_n{}'(t)=2nH_{n-1}(t) \qquad (n\geqq 1)$$

ثم بين باستعمال المسألة ٧ أن H_n يحقق معادلة هرميت التفاضلية •

٩ ــ حل المعادلة التفاضلية $y''+(2n+1-t^2)y=0$ بدلالة حدوديات هرميت •

١٠ــ بين باستعمال المسألة ٨ أن

$$(e^{-t^2}H_n{}')'=-2ne^{-t^2}H_n.$$

بين بالافادة من هذا ومن الطريقة المشروحة في المسألة الاولى أن الدوال المعرفة بـ (7a) متعامدة مع $\mathbf{R}$ •

١١ــ **(الدالة المولدة)** • بين باستعمال (10c) أن

$$\psi(t,w)=\frac{1}{1-w}\exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)w^n.$$

١٢ــ بين باشتقاق ψ في المسألة ١١ بالنسبة الى w أن

$$\text{(a)}\qquad (n+1)L_{n+1}(t)-(2n+1-t)L_n(t)+nL_{n-1}(t)=0.$$

ثم بين باشتقاق ψ بالنسبة الى t أن

$$L_{n-1}(t) = L'_{n-1}(t) - L'_n(t). \tag{b}$$

١٣ـ أثبت باستعمال المسألة ١٢ أن

$$tL'_n(t) = nL_n(t) - nL_{n-1}(t). \tag{c}$$

بين بالافادة من هذا ومن (b) في المسألة ١٢ أن L_n تحقق معادلة لاكير التفاضليـة (11) •

١٤ـ بين أن لكل من الدوال الواردة في (10a) النظيم 1 •

١٥ـ بين بأن الدوال في (10a) تشكل متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[0, +\infty)$.

٣ـ٨ تمثيل الداليات على فضاءات هلبرت

ان معرفة الصيغة العامة للداليات الخطية المحدودة على فضاءات متنوعة أمر هام من الوجهة العملية ، وقد سبق أن أشرنا الى هذا الموضوع وشرحناه في البند ٢ـ١٠ • أما في فضاءات باناخ العامة ، فان الدساتير وطرق الحصول عليها تكون أحيانا معقدة • بيد أن الوضع يكون أسهل بدرجة كبيرة في فضاء هلبرت ، كما تبين المبرهنة التالية :

٣ـ٨ـ١ مبرهنة ريس (الداليات على فضاءات هلبرت)

يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على فضاء هلبرت H بدلالة الجداء الداخلي على النحو التالي

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{1}$$

حيث z تابع لـ f ، ويتعين بصورة وحيدة بـ f ونظيمه هو

$$\|z\| = \|f\|. \tag{2}$$

البرهـان

سنثبت مايلي :

(آ) للدالي f التمثيل (1)

(ب) z الوارد في (1) وحيد

(جـ) الدستور (2) صحيح

أما التفاصيل فهي كما يلي :

(آ) اذا كان $f=0$ فان (1) و (2) صحيحان اذا أخذنا $z=0$ • لنفترض الآن أن $f\neq 0$ • لشرح فكرة البرهان ، سنطرح السؤال حول الخواص التي يجب أن يتمتع بها z اذا وجد التمثيل (1) • نلاحظ أولا أن $z\neq 0$ ، لانه اذا لم يتحقق ذلك لكان $f=0$ • ثانيا ، ان $\langle x, z\rangle=0$ أيا كان x التي تحقق الشرط $f(x)=0$ ، أي أيا كان x من الفضاء الصفري $\mathcal{N}(f)$ لـ f • لذا فان $z\perp\mathcal{N}(f)$ • ان هذا يوحي الينا بأخذ $\mathcal{N}(f)$ ومتممه المعامد $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ •

ان $\mathcal{N}(f)$ فضاء متجهي وفق ٢ـ٦ـ٩ وهو مغلق استنادا الى ٢ـ٧ـ١٠ • كذلك ، فان كون $f\neq 0$ يقتضي أن يكون $\mathcal{N}(f)\neq H$ ، وبالتالي فانه يترتب على مبرهنة الاسقاط ٣ـ٣ـ٤ أن $\mathcal{N}(f)^{\perp}\neq\{0\}$ • لـذا فان $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ يحوي عنصرا $z_0\neq 0$ • سنضع

$$v=f(x)z_0-f(z_0)x$$

حيث x عنصر اختياري من H • وبتطبيق f نجد

$$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0.$$

وهذا يبين أن $v\in\mathcal{N}(f)$ • ولما كان $z_0\perp\mathcal{N}(f)$ ، فان

$$\begin{aligned}0=\langle v, z_0\rangle&=\langle f(x)z_0-f(z_0)x, z_0\rangle\\&=f(x)\langle z_0, z_0\rangle-f(z_0)\langle x, z_0\rangle.\end{aligned}$$

وبملاحظة أن $\langle z_0, z_0\rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ ، فمن الممكن حل هذه المعادلة بالنسبة الى $f(x)$ ونجـد

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\langle x, z_0\rangle.$$

يمكن كتابة هذا بالصيغة (1) ، حيث

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0\rangle}z_0.$$

وبما أن x عنصر اختياري من H ، فاننا نكون قد أثبتنا (1) •

(ب) سنثبت أن z الوارد في (1) وحيد • لنفترض أنه أيا كان x مـن H فـان

$$f(x) = \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle.$$

عندئذ يكون $\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0$ أيا كان x • واذا اخترنا العنصر الخاص $x = z_1 - z_2$ فاننـا نجـد أن

$$\langle x, z_1 - z_2\rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

لذا فان $z_1 - z_2 = 0$ ، أو $z_1 = z_2$ ، وبذا نكون قد أثبتنا الوحدانية •

(جـ) سنثبت أخيرا (2) • اذا كان $f = 0$ فان $z = 0$ وتكـون (2) صحيحة • لنفترض أن $f \neq 0$ • عندئذ يكون $z \neq 0$ • ويترتب على (1) بفرض $x = z$ وعلى (3) من البند ٢ـ٨ أن

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leqq \|f\|\,\|z\|.$$

وبالتقسيم على $\|z\| \neq 0$ نجد أن $\|z\| \leqq \|f\|$ • ونجد مـن (1) ومن متباينـة

شقارتز (البند ٣ـ٢) أن

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leqq \|x\|\,\|z\|.$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z\rangle| \leqq \|z\|. \qquad \blacksquare$$

٣ـ٨ـ٢ تمهيدية (المساواة)

اذا كان $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ أيا كان w في فضاء جداء داخلي X ، فان $v_1 = v_2$ وبوجه خاص ، فاذا تحققت المساواة $\langle v_1, w\rangle = 0$ أيا كان w من X فان $v_1 = 0$.

البرهــان :

لدينا استنادا الى الفرض أنه أيا كان w فلن

$$\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle = 0.$$

اذا وضعنا $w = v_1 - v_2$ ، أعطت هذه المساواة $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$. لذا فان $v_1 - v_2 = 0$ أي أن $v_1 = v_2$. وبوجه خاص ، فان المساواة $\langle v_1, w\rangle = 0$ تعطي بوضع $w = v_1$ المساواة $\|v_1\|^2 = 0$ ، أي أن $v_1 = 0$. $\blacksquare$

ان فائدة الداليات الخطية المحدودة على فضاءات هلبرت تنبع الى حد كبير من بساطة تمثيل ريس (1) . كذلك ، فان (1) جد هام في نظرية المؤثرات على فضاءات هلبرت . ويتجلى هذا بخاصة في مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي محدود T ، والذي سنعرفه في البند التالي . ولهذا الغرض فلابد لنا من تأهيب لا يخلو من فائدة عامة بحد ذاته ، وسننطلق من التعريف التالي .

٣ـ٨ـ٣ تعريف (الصيغة الخطية مرة ونصف المرة)

ليكن X و Y فضاءين متجهين على حقل واحد K (يساوي $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$) . عندئذ

تكون **الصيغة الخطية مرة ونصف المرة (أو الدالي الخطي مرة ونصف المرة)** h على $X \times Y$ هي دالة

$$h: X \times Y \longrightarrow K$$

بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت x و x_1 و x_2 من X و y و y_1 و y_2 من Y وايا كان العددان α و β :

$$\text{(3)} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y) \\ \text{(b)} & h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2) \\ \text{(c)} & h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y) \\ \text{(d)} & h(x, \beta y) = \bar{\beta} h(x, y). \end{array}$$

لذا فان h **خطـي** في مضمونه الاول **وخطي مرافق (او قرين)** في مضمونه الثاني.
واذا كان X و Y حقيقيين $(K = \mathbb{R})$ ، فان (3d) تغدو ببساطة المساواة

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$$

وعندئذ يدعى h تطبيقا **ثنائي الخطية** نظرا لكونه خطيا في مضمونيه .

واذا كان X و Y فضاءين منظمين ووجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق المتباينة التالية أيا كان x و y

$$\text{(4)} \qquad |h(x, y)| \leqq c \, \|x\| \, \|y\|,$$

فاننا نقول إن h **محدود** ، كما نسمي العدد

$$\text{(5)} \qquad \|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \, \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} |h(x, y)|$$

نظيم h . ∎

وعلى سبيل المثال ، فان الجداء الداخلي خطي مرة ونصف المرة ومحدود .
لاحظ أنه يترتب على (4) و (5) المتباينة

$$|h(x, y)| \leqq \|h\| \|x\| \|y\|. \quad \textbf{(6)}$$

هذا وقد سبق وورد مصطلح « خطي مرة ونصف المرة » في البند ٣ــ١ . كذلك فان كلمتي « صيغة » و « دالي » الواردتين في التعريف ٣ــ٨ــ٢ شائعتا الاستعمال ، واستخدام الاولى أو الثانية أمــر يعود بدرجة كبــيرة الى الذوق الشخصي . وقد يكون من المستحسن استعمال كلمة « صيغة » في حال المتغيرين، والاحتفاظ بكلمة « دالي » لحالات المتغير الواحد . كما في المبرهنة ٣ــ٨ــ١ . وهذا ما سنفعله .

من الاهمية بمكان معرفة أنه يمكن انطلاقا من المبرهنة ٣ــ٨ــ١ الحصول على تمثيل عام للصيغ الخطية مرة ونصف المرة على فضاءات هلبرت على النحــو التالــي .

٣ــ٨ــ٤ مبرهنة (تمثيل ريس)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، ولتكن

$$h:\ H_1 \times H_2 \longrightarrow K$$

صيغة محدودة وخطية مرة ونصف المرة . عندئذ يكون لـ h التمثيل

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle \quad (7)$$

حيث $S:\ H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثر خطي محدود . ويتعين S هذا بصورة وحيدة بدلالة h . ونظيمه يعطى بالمساواة

$$\|S\| = \|h\|. \quad (8)$$

البرهـــان :

لنأخذ $\overline{h(x, y)}$ • نلاحظ أن هــذا خطــي بالنسبة الــى y بسبب اشارة اللصاقة ــــ • ولجعل المبرهنة ٣ــ٨ــ١ قابلة للتطبيق ، نبقي x مثبتا • عندها تعطي هذه المبرهنة تمثيلا يكون فيه y متغيرا • وليكن مثلا

$$\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle.$$

وبالتالي فــان

$$h(x, y) = \langle z, y \rangle. \tag{9}$$

ان z الذي ينتمي H_2 وحيد، ولكنه هو تابع بالطبع لعنصرنا x المثبت في H_1• يترتب على هذا أن المساواة (9) حيث المتغير هو x تحدد مؤثرا

$S\colon H_1 \longrightarrow H_2$ معرفا بالدستور $z = Sx$ •

وبتعويض $z = Sx$ في (9) ، فاننا نجد (7) •

ان S خطي ، ذلك أن ساحته هي الفضاء المتجهي H_1، وأننا نستنتج من (7) ومن خاصة الخطية مرة ونصف المرة أن

$$\begin{aligned}
\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y)\\
&= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)\\
&= \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle\\
&= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle
\end{aligned}$$

أيا كان y من H_2، وبالتالي فانه يترتب على التمهيدية ٣ــ٨ــ٢ أن

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

إن S محدود ، ذلك أنه اذا تجاوزنا الحالة التافهة $S = 0$ ، فاننا نجد أن

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \geqq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\|x\|\,\|Sx\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|.$$

وهذا يثبت محدودية S ، ويبين فضلا عن ذلك أن $\|h\| \geqq \|S\|$ •

وللحصول على المساواة (8) نلاحظ أن المتباينة $\|h\| \leqq \|S\|$ تنتج من تطبيق متباينة شفارتز كما يلي :

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leqq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} = \|S\|.$$

ان S وحيد ، ذلك أنه لو افترضنا وجود مؤثر خطي آخر $T: H_1 \longrightarrow H_2$ يحقق الشرط

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle,$$

أيا كان x من H_1 وأيا كان y من H_2 ، لوجدنا أن $Sx = Tx$ استنادا الى التمهيدية ٣ــ٨ــ٢ وذلك أيا كان x من H_1• لذا فان $S = T$ تعريفا • ∎

مسائل

١ ــ **(الفضاء $\mathbf{R}^3$)** • بين أنه يمكن تمثيل أي دالي خطي f على $\mathbf{R}^3$ بالجداء الداخلي :

$$f(x) = x \cdot z = \xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \xi_3\zeta_3.$$

٢ ــ **(الفضاء l^2)** • بين أنه يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على l^2 بالشكل

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\bar{\zeta}_j \qquad [z = (\zeta_j) \in l^2].$$

٣ ــ اذا كان z أي عنصر مثبت من فضاء جداء داخلي X ، فبين أن المساواة $f(x) = \langle x, z\rangle$ تحدد داليا خطيا محدودا f على X نظيمه هو $\|z\|$ •

٤ ــ لنأخذ المسألة ٣ ، فاذا كان التطبيق $X' \longrightarrow X$ المعرف بـ $z \longmapsto f$ غامرا ، فبين أن X يجب أن يكون فضاء هلبرت .

٥ ــ أثبت بأن الفضاء الثنوي للفضاء الحقيقي l^2 هو l^2 . (أفد من ٣ــ٨ــ١) .

٦ ــ بين بأن المبرهنة ٣ــ٨ــ١ تحدد تطبيقا ايزومتريا متباينا وغامرا $T: H \longrightarrow H'$ معرفا بـ $z \longmapsto f_z = \langle \cdot, z \rangle$. وهذا التطبيق ليس خطيا ولكنه خطي مرافق ؛ أي أن $\alpha z + \beta v \longmapsto \bar{\alpha} f_z + \bar{\beta} f_v$.

٧ ــ بين بأن الفضاء الثنوي H' لفضاء هلبرت H هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ المعرف كما يلي :

$$\langle f_z, f_v \rangle_1 = \overline{\langle z, v \rangle} = \langle v, z \rangle,$$

وحيث $f_z(x) = \langle x, z \rangle$. وهلم جرا .

٨ ــ بين بأن كل فضاء H لهلبرت ايزومورفي (راجع البند ٣ــ٦) مع فضائه الثنوي الثاني $H'' = (H')'$. (تدعى هذه الخاصة **انعكاسية** H . وسنتطرق اليها بمزيد من التفصيل في الفضاءات المنظمة في البند ٤ــ٦) .

٩ ــ **(العــادم)** . اشرح العلاقة بين M^a في المسألة ١٣ من البند ٢ــ١٠ وبين $M^\perp$ في البند ٣ــ٣ في حالة مجموعة جزئية غير خالية M في فضاء هلبرت H .

١٠ــ بين بأن الجداء الداخلي $\langle \cdot, \cdot \rangle$ على فضاء جداء داخلي X هو صيغة h خطية مرة ونصف المرة ومحدودة . ما هي $\|h\|$ في هذه الحالة ؟

١١ــ اذا كان X فضاء متجهيا وكانت h صيغة خطية مرة ونصف المرة على $X \times X$ ، فبين أن المساواة $f_1(x) = h(x, y_0)$ ، حيث y_0 مثبت ، تعين داليا خطيا f_1 على X . وكذلك الامر مع المساواة $f_2(y) = \overline{h(x_0, y)}$ ، حيث x_0 مثبت .

١٢ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين . بين بأن كل صيغة خطية مــرة ونصف المرة ومحدودة h على $X \times Y$ مستمرة بالنسبة لكلا المتغيرين .

١٣ـ (**الصيغة الهرميتية**) • ليكن X فضاء متجهيا علـى حقل K • تعـرف **الصيغة الهرميتية مرة ونصف المرة** ، أو ببساطة ، **الصيغة الهرميتية** h على $X \times X$ بأنها تطبيق $h: X \times X \longrightarrow K$ بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت العناصر x و y و z من X وأيا كان العدد α من K :

$$h(x+y, z) = h(x, z) + h(y, z)$$

$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$$

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}.$$

ما هو الشرط الاخير اذا كان $K = \mathbb{R}$ ؟ ما هو الشرط الواجب اضافته على h كي يغدو جداء داخليا على X ؟

١٤ـ (**متباينة شفارتز**) • ليكن X فضاء متجهيا و h صيغة هرميتية علـى $X \times X$ • يقال عن هذه الصيغة انها **نصف محددة موجبة** اذا كان $h(x, x) \geqq 0$ أيا كان x من X • بين بأنه عندئذ تتحقق **متباينة شفارتز** التالية

$$|h(x, y)|^2 \leqq h(x, x) h(y, y).$$

١٥ـ (**نصف النظيم**) • اذا حققت h الشروط الواردة في المسألة ١٤ ، فبين أن المساواة

$$p(x) = \sqrt{h(x, x)} \qquad (\geqq 0)$$

تحدد نصف نظيم على X •(راجع المسألة ١٢ من البند ٢ـ٣) •

٣ـ٩ مؤثر هلبرت المرافق

تمكننا الآن النتائج المستخلصة مـن البند السابق بأن نقـدم مؤثر هلبرت المرافق لمؤثر خطي محدود على فضاء هلبرت • وقد نبعت فكرة استحداث هذا

المؤثر من مسائل المصفوفات ومسائل المعادلات التفاضلية الخطية والمعادلات التكاملية الخطية • وسنرى أنه يساعدنا في تعريف ثلاثة أصناف مهمة من المؤثرات (تدعى المؤثرات **المترافقة ذاتيا والمؤثرات الواحدية والمؤثرات الناظمية**) • وقد درست هذه المؤثرات بصورة مستفيضة لكونها تشغل مركزا طليعيا في العديد من البحوث التطبيقية المتنوعة •

٣-٩-١ تعريف (مؤثر هلبرت المرافق T^*)

ليكن $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرا خطيا مرافقا ، حيث H_1 و H_2 فضاءان لهلبرت • عندئذ يكون **مؤثر هلبرت المرافق** T^* للمؤثر T هو المؤثر

$$T^*: H_2 \longrightarrow H_1$$

بحيث(*) تتحقق المساواة

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle. \qquad (1)$$

▮

أيا كان x من H_1 وأيا كان y من H_2 •

وبالطبع ، فعلينا أن نبين أولا أنه يوجد لهذا التعريف معنى ، أي أنه يجب البرهان على أنه اذا كان المؤثر T معطى ، فان T^* موجود فعلا •

٣-٩-٢ مبرهنة (الوجود)

ان مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T الوارد في التعريف ٣-٩-١ موجود ووحيد وهو مؤثر خطي محدود نظيمه يعطى بالمساواة

$$\|T^*\| = \|T\|. \qquad (2)$$

* من الممكن الدلالة على الجداءات الداخلية على H_1 و H_2 بالرمز نفسه نظرا لان العوامل تبين الى أي من الفضاءات يعود الجداء الداخلي .

البرهـان :

يعرف الدستور

$$h(y, x) = \langle y, Tx\rangle \tag{3}$$

صيغة خطية مرة ونصف المرة على $H_2 \times H_1$ ، ذلك أن الجداء الداخلي خطي مـرة ونصف المرة وأن T خطي • وفي الحقيقة ، فان كون الصيغة خطية مرافقة تـرى ممـا يلـي :

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle \\ &= \langle y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx_1\rangle + \bar{\beta}\langle y, Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta} h(y, x_2). \end{aligned}$$

إن h محدود ذلك أنه يترتب على متباينة شفارتز أن

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leqq \|y\|\,\|Tx\| \leqq \|T\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

يترتب على هذا أن $\|h\| \leqq \|T\|$ • ولما كان $\|h\| \geqq \|T\|$ أيضا لان

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|y\|\,\|x\|} \geqq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Tx \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\,\|x\|} = \|T\|.$$

فاننا نستنتج أن

$$\|h\| = \|T\|. \tag{4}$$

إن المبرهنة ٣ـ٨ـ٤ تعطي تمثيل ريس لـ h • فاذا وضعنا فيها T^* عوضا عن S نجـد أن

$$h(y, x) = \langle T^* y, x\rangle, \tag{5}$$

كذلك فان هذه المبرهنة تبـين بأن $T^*: H_2 \longrightarrow H_1$ مؤثر خطي ومحدود يتعـين

بصورة وحيدة ونطبسه [راجع (4)] هــو

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

وهذا يثبت صحة (2) • وبمقارنة (3) و نجد أن $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$ ، وبذا نجــد (1) بأخذ المرافقات . وبالتالي فاننا نرى بأن T^* هو فعلا المؤثر المنشود •∎

لدى دراستنا لخواص مؤثرات هلبرت المرافقة ، نجد من الملائم الافادة مــن التمهيدية التالية :

٢ـ٩ـ٢ تمهيدية (المؤثر الصفري)

ليكن X و Y فضاءي جداء داخلي و $Q: X \longrightarrow Y$ مؤثــرا خطيــا محدودا • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $Q=0$ هو أن يكون $\langle Qx, y\rangle = 0$ أيا كان x من X وايا كان y من Y •

(ب) اذا كان $Q: X \longrightarrow X$ ، حيث X عقدي ، وكان $\langle Qx, x\rangle = 0$ أيا كان x من X ، فان $Q=0$ •

البرهــان :

(آ) ان المســاواة $Q=0$ تعنــي أن $Qx=0$ أيا كان x ، وهــذا يقتضي التالــي :

$$\langle Qx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0\langle w, y\rangle = 0.$$

وبالعكس ، فان تحقق المساواة $\langle Qx, y\rangle = 0$ أيا كان x و y يقتضــي المســاواة $Qx=0$ أيا كان x وذلك استنادا الى ٣ـــ٨ـــ٢ • وبالتالي فان $Q=0$ تعريفا •

(ب) لدينا بالفرض أن $\langle Qv, v\rangle = 0$ أيا كان $v = \alpha x + y \in X$ ، أي أن

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle. \end{aligned}$$

ان الحدين الاولين في الطرف الايمن صفريان فرضا • فاذا كان $\alpha=1$ وجدنا أن

$$\langle Qx, y\rangle+\langle Qy, x\rangle=0.$$

واذا كان $\alpha=i$ ، فان $\bar{\alpha}=-i$ وعندئذ يكون

$$\langle Qx, y\rangle-\langle Qy, x\rangle=0.$$

وبجمع المساواتين الاخيرتين نجد أن $\langle Qx, y\rangle=0$ ، وعندئذ تنتج المساواة $Q=0$ مـن (آ) • ∎

من الضروري أن يكون X عقديا في الشق (ب) من هذه التمهيدية ، ذلك أن هذه النتيجة قد لا تصح في حال كون X حقيقيا • وكمثال عكسي نورد الدوران Q للمستوى $\mathbf{R}^2$ بزاوية قائمة • ان Q خطي و $Qx\perp x$ ، لذا فان $\langle Qx, x\rangle=0$ أيا كان x من $\mathbf{R}^2$ ، في حين أن $Q\neq 0$ • (ما هي الحال عنـدما يكون مثل هـذه الدوران في المستوي العقدي ؟) •

يمكننا الآن ادراج بعض الخواص العامة لمؤثرات هلبرت المرافقة واقامـة البرهان على صحة هذه الخواص التي سنستعملها مرارا وتكرارا لـدى تطبيق هذه المؤثرات •

٣ـ٩ـ٤ مبرهنة (خواص مؤثرات هلبرت المرافقة)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، وليكن $S: H_1\longrightarrow H_2$ و $T: H_1\longrightarrow H_2$ مؤثرين خطيين محدودين ، وليكن α عددا ما • عندئذ نجد التالي :

(a) $\langle T^*y, x\rangle=\langle y, Tx\rangle \quad (x\in H_1,\ y\in H_2)$

(b) $(S+T)^*=S^*+T^*$

(c) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$

(6) (d) $(T^*)^*=T$

(e) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$

(f) $T^*T=0 \iff T=0$.

(g) $(ST)^*=T^*S^*$ (بفرض أن $H_2=H_1$)

البرهــان :

(آ) إن (1) تنتج من (6a) :

$$\langle T^* y, x\rangle = \overline{\langle x, T^* y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

(ب) نستنتج من (1) أيا كان x و y فان

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^* y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle \\ &= \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle \\ &= \langle x, S^* y\rangle + \langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle x, (S^* + T^*)y\rangle.\end{aligned}$$

لذا فان $(S+T)^* y = (S^* + T^*)y$ أيا كان y استنادا الى ٣ــ٨ــ٢ ، وبذا نكون قــد وجدنا (6b) •

(جـ) يجب عدم الخلط بين الدستور (6c) والدستور $T^*(\alpha x) = \alpha T^* x$ • ونجد (6c) بالحسابات التالية وبتطبيق الشق (آ) من التمهيدية ٣ــ٩ــ٣ عــلى $Q = (\alpha T)^* - \bar{\alpha} T^*$ •

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T)^* y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T)x\rangle \\ &= \langle y, \alpha (Tx)\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle T^* y, x\rangle \\ &= \langle \bar{\alpha} T^* y, x\rangle.\end{aligned}$$

(د) ان $(T^*)^*$ تكتب بالشكل T^{**} وتساوي T ، ذلك أنه أيا كان x من H_1 و y من H_2 ، فانه يترتب على (6a) و (1) أن

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

وعندئذ نستنتج (6d) من الشق (آ) من التمهيدية ٣ــ٩ــ٣،حيث $Q=(T^*)^*-T$ •

(هـ) نرى أن $T^*T:\ H_1 \longrightarrow H_1$ في حين أن $TT^*:\ H_2 \longrightarrow H_2$ • ونجد بناء على متباينة شفارتز أن

$$\|Tx\|^2=\langle Tx, Tx\rangle=\langle T^*Tx, x\rangle \leqq \|T^*Tx\|\,\|x\| \leqq \|T^*T\|\,\|x\|^2.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى sup من أجل جميع العناصر x التـي نظيم كل منها 1 ، فاننا نجد أن $\|T\|^2 \leqq \|T^*T\|$ • وبالافادة من (7) من البند ٢ــ٧ ومن (2) فاننا نجــد أن

$$\|T\|^2 \leqq \|T^*T\| \leqq \|T^*\|\,\|T\|=\|T\|^2.$$

لذا فان $\|T^*T\|=\|T\|^2$ • ونجد أيضا لدى الاستعاضة عن T بـ T^* واستعمال (2) ثانيــة أن

$$\|T^{**}T^*\|=\|T^*\|^2=\|T\|^2.$$

أن $T^{**}=T$ هنا استنادا الى (6d) ، وبالتالي فانه يكتمل اثبات (6e) •

(و) إن (6f) تستنتج مباشرة من (6e) •

(ز) ان التطبيق المتكرر لـ (1) يعطي

$$\langle x, (ST)^*y\rangle=\langle (ST)x, y\rangle=\langle Tx, S^*y\rangle=\langle x, T^*S^*y\rangle.$$

لذا فان $(ST)^*y=T^*S^*y$ بناء على ٣ــ٨ــ٢ ، وما المساواة هذه الا (6g) تعريفا • ∎

مســائل

١ ــ أثبت أن $0^*=0$ و $I^*=I$ •

٢ ــ ليكن H فضاء هلبرت و $T:\ H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا متباينا وغامرا عكسه محدود • بين أن $(T^*)^{-1}$ موجود وأن

$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

٣ ــ اذا كانت (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على فضاءات هلبرت H وكان $T_n \longrightarrow T$ ، فبين أن $T_n^* \longrightarrow T^*$ •

٤ ــ ليكن H_1 و H_2 فضاءي هلبرت و $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرا خطيا محدودا • فاذا كانت $M_1 \subset H_1$ و $M_2 \subset H_2$ مجموعتين جزئيتين بحيث أن $T(M_1) \subset M_2$ ، فأثبت أن $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$ •

٥ ــ ليكن M_1 و M_2 في المسألة ٤ فضاءين جزئيين مغلقين • بين عندئذ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T(M_1) \subset M_2$ هو أن يكون $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$ •

٦ ــ اذا كان $M_1 = \mathcal{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}$ في المسألة ٤ ، فبين أن

$$(a)\quad T^*(H_2) \subset M_1^\perp, \qquad (b)\quad [T(H_1)]^\perp \subset \mathcal{N}(T^*), \qquad (c)\quad M_1 = [T^*(H_2)]^\perp$$

٧ ــ ليكن T_1 و T_2 مؤثرين خطيين محدودين على فضاء هلبرت العقدي H في الفضاء نفسه • فاذا كان $\langle T_1x, x\rangle = \langle T_2x, x\rangle$ أيا كان x من H ، فأثبت أن $T_1 = T_2$ •

٨ ــ ليكن $S = I + T^*T: H \longrightarrow H$ ، حيث T خطي ومحدود • بين أن $S^{-1}: S(H) \longrightarrow H$ موجود •

٩ ــ برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون للمؤثر الخطي المحدود $T: H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H مدى ذو بعد منته هو أن يكون بالامكان تمثيل T بالشكل

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j \qquad [v_j, w_j \in H]$$

١٠ــ **(مؤثر النقل الايمن)** • لتكن (e_n) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت الفصول H ، ولنعرف **مؤثر النقل الايمن** بأنه المؤثر الخطي $T: H \longrightarrow H$ بحيث أن $Te_n = e_{n+1}\ ,\quad n = 1, 2, \cdots$ • فسر مبرر التسمية • أوجد المدى والفضاء الصفري والنظيم ومؤثر هلبرت المرافق للمؤثر T •

٣ــ١٠ المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظمية

يمكن تحديد صفوف المؤثرات الخطية المحدودة ذات الاهمية العملية الكبيرة باستعمال مؤثر هلبرت المرافق على النحو التالي :

٣ــ١٠ــ١ تعريف (المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظمية)

يقال عن مؤثر خطي محدود $T\colon H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H إنه

مترافق ذاتيا (أو قرين ذاتيا) أو هرميتي اذا كان $T^* = T,$

واحــدي اذا كان T متباينا وغامرا وكان $T^* = T^{-1},$

ناظمــي اذا كان $TT^* = T^*T.$ •

ويعرف مؤثر هلبرت المرافــق T^* لـ T بالمساواة (1) من البند ٣ــ٩ ، أي بالمســاواة

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

واذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نرى بأن الدستور يغدو بالشكل

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{1}$$

اذا كان T مترافقا ذاتيا أو كان واحديا ، فانه ناظمي

يمكن أن نرى ذلك رأسا من التعريف • وبالطبع ، فليس لزاما على المؤثــر الناظمي أن يكون مترافقا ذاتيا أو واحديا • فمثلا ، اذا كان $I\colon H \longrightarrow H$ المؤثر المطابق ، فان $T = 2iI$ ناظمي لان $T^* = -2iI$ (راجع ٣ــ٩ــ٤) ، وبالتالي فــان $TT^* = T^*T = 4I$ ، في حين أن $T^* \neq T$ ، كما أن $T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI$ •

وتنتج المؤثرات غير الناظمية ببساطة من المثال التالي • ونورد في المسألة ١٠ من البند ٣ــ٩ مؤثرا آخر T ، الامر الذي نترك اثباته للقارىء •

هــذا ونستعمل المصطلحات الــواردة في التعريف ٣ــ١٠ــ١ في صــدد

المصفوفات كذلك ، ونود شرح سبب هذا ونورد ذكر بعض العلاقات الهامة فيما يلي :

٣ــ١٠ــ٢ مثال (المصفوفات)

لنأخذ C^n حيث الجداء الداخلي معرف بالمساواة (راجع ٣ــ١ــ٤)

$$\langle x, y\rangle = x^{\mathsf{T}}\bar{y}, \tag{2}$$

بفرض أن x و y يكتبان على شكل متجهين عموديين ، وأن T تعني المنقول ، لذا فان $x^{\mathsf{T}} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ كما أننا نستعمل ضرب المصفوفات العادي .

ليكن $T\colon C^n \longrightarrow C^n$ مؤثرا خطيا (وهو مؤثر محدود بناء على المبرهنة ٢ــ٧ــ٨) . فاذا أعطينا قاعدة لـ C^n ، فيمكن تمثيل T ومؤثر هلبرت المرافق له T^* بمصفوفتين مربعتين $n \times n$، وليكونا مثلاً A وB على الترتيب .

فاذا استعملنا (2) والقاعدة المعروفة $(Bx)^{\mathsf{T}} = x^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$ حول منقول الجداء ، نجد أن

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^{\mathsf{T}}\bar{y} = x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\bar{y}$$

وأن

$$\langle x, T^*y\rangle = x^{\mathsf{T}}\bar{B}\bar{y}.$$

نستنتج بناء على (1) من البند ٣ــ٩ أن الطرفين الايسرين متساويان أيا كان x و y من C^n ، لذا فيجب أن يكون $A^{\mathsf{T}} = \bar{B}$ ، وبالتالي يكون

$$B = \bar{A}^{\mathsf{T}}.$$

وبذا نتوصل الى النتيجة التالية :

اذا أعطيت قاعدة لـ C^n ، وكان مؤثر خطي على C^n ممثلا بمصفوفة معينة ، فان مؤثر هلبرت المرافق يمثل بالمرافق العقدي لمنقول المصفوفة .

وبالتالي ، فان المصفوفة الممثّلة

هرميتيــة اذا كان T مترافقا ذاتيا (هرميتيا)
واحديــة اذا كان T واحديا
ناظميــة اذا كان T ناظميا •

وبصورة مماثلة ، فاذا كان $T: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ مؤثرا خطيا ، فــان المصفوفة الممثّلــة

حقيقية متناظرة اذا كان T مترافقا ذاتيا
متعامــدة اذا كان T واحديا •

ومن المفيد في هذا الصدد أن نعيد الى الذاكرة بعض التعاريف • نقول عن مصفوفة مربعة $A = (\alpha_{jk})$ انهــا :

هرميتية اذا كان $\bar{A}^T = A$ (اذن $\bar{\alpha}_{kj} = \alpha_{jk}$)
هرميتية تخالفية اذا كان $\bar{A}^T = -A$ (اذن $\bar{\alpha}_{kj} = -\alpha_{jk}$)
واحديــة اذا كان $\bar{A}^T = A^{-1}$
ناظميــة اذا كان $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$

ونقول عن مصفوفة حقيقية $A = (\alpha_{jk})$ انها

(حقيقية) متناظرة اذا كان $A^T = A$ (اذن $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$)
(حقيقية) متناظرة تخالفية اذا كان $A^T = -A$ (اذن $\alpha_{kj} = -\alpha_{jk}$)
متعامــدة اذا كان $A^T = A^{-1}$ •

لذا فان المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة (حقيقية) ، والمصفوفة الحقيقية الهرميتية التخالفية هي مصفوفة (حقيقية) متناظرة تخالفية ، والمصفوفة الحقيقية الواحدية هي مصفوفة متعامدة • (ينسب اسم المصفوفات الهرميتية الى الرياضي الفرنسي شارل هرميت ١٨٢٢ ـ ١٩٠١ م) • ∎

لننتقل الى المؤثرات الخطية على فضاء هلبرت الكيفية لايراد معيار هــام وبسيط للترافق ذاتيا •

٣ـ١٠ـ٢ مبرهنة (الترافق ذاتيا)

ليكن $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا على فضاء هلبرت H • عندئذ نجـد مـا يلـي :

(آ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فان $\langle Tx, x\rangle$ حقيقي أيا كان x من H •

(ب) اذا كان H عقديا وكان $\langle Tx, x\rangle$ حقيقيا أيا كان x من H ، فان المؤثر T مترافق ذاتيا •

البرهـان :

(آ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نجد أن

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle.$$

أيا كان x • وبالتالي فان $\langle Tx, x\rangle$ حقيقي لكونه مساويا لمرافقه العقدي •

(ب) اذا كان $\langle Tx, x\rangle$ حقيقيا أيا كان x فان

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle.$$

لـذا فـان

$$0 = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = \langle (T - T^*)x, x\rangle$$

ويترتب على هذا أن $T - T^* = 0$ بناء على الشق (ب) من التمهيدية ٣ـ٩ـ٣ وذلك لكون H عقديا • ∎

من الضروري أن يكون الفضاء H عقديا في الشق (ب) من المبرهنة ؛ وهذا أمر بيّن ذلك أنه اذا كان H حقيقيا ، فان الجداء الداخلي عدد حقيقي ، وعندئذ يكون $\langle Tx, x\rangle$ حقيقيا دون فرض أي شروط أخرى على المؤثر الخطي T •

ان مركب مؤثرين مترافقين ذاتيا غالبـا ما يرد في التطبيقات ، لذا فـان المبرهنة التالية لاتخلو من فائدة في هذا الصدد •

٣ــ١٠ــ٤ مبرهنة (الترافق ذاتيا لمركب مؤثرين)

الشرط اللازم والكافي كي يكون مركب مؤثرين خطيين مترافقين ذاتيا ومحدودين S و T على فضاء هلبرت H مترافقا ذاتيا هو أن يكون هذان المؤثران تبادليين (قابلين للمبادلة) ، أي أن يكون

$$ST = TS.$$

البرهــان :

لدينا استنادا الى (6g) من البند السابق والى الفرض ما يلي

$$(ST)^* = T^* S^* = TS.$$

لــذا فــان

$$ST = (ST)^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad ST = TS.$$

وبذا يكتمل البرهان ∙ ∎

ان متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا ترد في مسائل متنوعة ، ونسوق في هذا الصدد المبرهنة التالية :

٣ــ١٠ــ٥ مبرهنة (متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا)

لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة والمترافقة ذاتيا $T_n : H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H ∙ لنفترض أن (T_n) متقاربة من T ، أي أن $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ ، حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم على الفضاء $B(H, H)$ (راجع البند ٢ــ١٠) ∙ عندئذ تكون النهاية T مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا على H ∙

البرهــان :

يجب اثبات أن $T^* = T$ ، وهذا ناتج من $\|T - T^*\| = 0$ ∙ ولاثبات المساواة الاخيرة ، نرى أنه بناء على ٣ــ٩ــ٤ و ٣ــ٩ــ٢ يكون

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

ثم نجد استنادا الى متباينة المثلث في $B(H, H)$ أن

$$\begin{aligned}\|T-T^*\| &\leqq \|T-T_n\|+\|T_n-T_n^*\|+\|T_n^*-T^*\| \\ &= \|T-T_n\|+0+\|T_n-T\| \\ &= 2\,\|T_n-T\| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \longrightarrow \infty).\end{aligned}$$

لذا فان $\|T-T^*\|=0$ ، أي أن $T^*=T$ • ∎ •

ان هذه المبرهنات تمدنا بفكرة بسيطة عـن الخواص الاساسية للمؤثرات الخطية المترافقة ذاتيا • وهي تقدم لنا العون كذلك في أبحاثنا المقبلة ، وبخاصة في النظرية الطيفية لهذه المؤثرات (الفصل التاسع) ، حيـث سنسوق خواص أخـرى •

سننتقل الآن الـى المؤثرات الواحدية ونتعرف الى بعض مـن خواصها الرئيسـية •

٣ـ١٠ـ٦ مبرهنة (المؤثر الواحدي)

ليكن $U: H \longrightarrow H$ و $V: H \longrightarrow H$ مؤثرين واحديين ، حيث نفترض هنا H فضاء هلبرت • عندئذ نجد التالي :

(آ) U ايزومتري (راجع ١ـ٦ـ١) ، وبالتالي يكون $\|Ux\|=\|x\|$ أيا كان x مـن H ،

(ب) $\|U\|=1$ ، شريطة أن يكون $H \neq \{0\}$ ،

(جـ) المؤثر U^{-1}(الذي يساوي U^*)واحدي ،

(د) UV واحـدي ،

(هـ) U ناظمـي •

وفضلا عن ذلك فان

(و) الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي محدود T على فضاء هلبرت العقدي H واحديا هو ان يكون T ايزومتريا وغامرا •

البرهـــان :

(آ) يمكن أن نرى هذا الشق من كون

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$$

(ب) هذا الشق ينتج مباشرة من (آ) •

(جـ) لما كان U متباينا وغامرا ، فان U^{-1} يكون كذلك ، وبالتالي نجد وفق ٣ــ٩ــ٤ أن

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}.$$

(د) ان UV متباين وغامر ، وعندها تعطى ٣ــ٩ــ٤ و ٢ــ٦ــ١١ ما يلي :

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

(هـ) ان صحة هــذا الشــق تنتــج مــن كــون $U^{-1} = U^*$ ومــن أن $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ •

(و) لنفترض T ايزومتريا وغامرا • بما أن الايزومترية تقتضي التباين ، فان T متباين وغامر • سنبين أن $T^* = T^{-1}$ • لدينا استنادا الى الايزومتريــة مــا يلــي :

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle.$$

وبالتالي فان

$$\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$$

إذن $T^*T - I = 0$ وفق التمهيدية ٣ــ٩ــ٣ ، أي أن $T^*T = I$ • ينتج مــن هذا أن

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

يترتب على ما سبق أن $T^*T = TT^* = I$ ، وبالتالي يكون $T^* = T^{-1}$ ، الامر الذي يعني أن T واحدي • أما العكس فواضح نظرا لكون T ايزومتريا بناء على (آ) وغامرا تعريفا • ∎

لاحظ بأن المؤثر الايزومتري ليس واحديا بالضرورة ، ذلك أنه قد لايكون

عامــرا • وكمثال نورد مؤثر النقل الايمن $T:\ l^2 \longrightarrow l^2$ المحدد بالدستور

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \quad \longmapsto \quad (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

حيــث $x = (\xi_j) \in l^2$

مســائل

١ ــ اذا كان S و T مؤثرين خطيين محدودين ومترافقين ذاتيا على فضاء هلبرت H ، وكان α و β عددين حقيقيين ، فبين أن $\tilde{T} = \alpha S + \beta T$ مترافق ذاتيا •

٢ ــ كيف يمكن استعمال المبرهنة ٣ــ١٠ــ٣ في اثبات المبرهنة ٣ــ١٠ــ٥ في حالة فضاء هلبرت العقدي H ؟

٣ ــ بين أنه اذا كان $T:\ H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، فان T^n يكون كذلك ، حيث n عدد صحيح موجب •

٤ ــ بين بأنه اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا على H ، فان المؤثرين

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \qquad و \qquad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

مترافقان ذاتيا • بين أن

$$T = T_1 + iT_2, \qquad\qquad T^* = T_1 - iT_2.$$

أثبت خاصة الوحدانية ، أي أن $T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$ تقتضي $S_1 = T_1$ و $S_2 = T_2$ نفترض هنا أن S_1 و S_2 مترافقان ذاتيا •

٥ ــ ليكن $T:\ \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ مؤثرا معرفا بالمساواة $Tx = (\xi_1 + i\xi_2, \xi_1 - i\xi_2)$ ، حيــث $x = (\xi_1, \xi_2)$ • (لتعريف $\mathbf{C}^2$ راجــع ٣ــ١ــ٤) • أوجــد T^* • بــين أن $T^*T = TT^* = 2I$ • أوجد T_1 و T_2 المعرفين في المسألة ٤ •

٦ ــ اذا كان $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، وكان $T \neq 0$ ، فان $T^n \neq 0$ • أثبت صحة هذا القول في كل مـــن الحالتين التاليتين : (آ) عندما يكون $n = 2, 4, 8, 16, \cdots$ ، (ب) عندما يكون $n \in \mathbf{N}$ •

٧ ــ بين بأن المتجهات العمودية في مصفوفة واحـــدية تشكل مجموعة متعامدة منظمة بالنسبة للجداء الداخلي على $\mathbf{C}^n$ •

٨ ــ أثبت أن المؤثر الخطي الايزومتري $T: H \longrightarrow H$ يحقق المساواة $T^*T = I$ ، حيث I هو المؤثر المطابق على H •

٩ ــ بين بأن المؤثر الخطي الايزومتري وغير الواحدي $T: H \longrightarrow H$ ينقل فضاء هلبرت H على فضاء جزئي تماما من H •

١٠ــ ليكن X فضاء جداء داخلي و $T: X \longrightarrow X$ مؤثرا خطيـــا ايزومتريا • فاذا كان $\dim X < \infty$ ، فبين أن T واحدي •

١١ــ (**التكافؤ الواحدي**) • ليكن S و T مؤثرين خطيين على فضاء هلبرت H • نقول عن المؤثر S أنه **مكافىء واحديا** للمؤثر T اذا وجد مؤثر واحدي U على H بحيث يكون

$$S = UTU^{-1} = UTU^*.$$

فاذا كان T مترافقا ذاتيا ، فبين أن S مترافق ذاتيا •

١٢ــ بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون T ناظميا هو أن يكون T_1 و T_2 الواردان في المسألة ٤ تبادليين • اشرح قسما من هذا بالاستعانة بمصفوفات ناظمية ذات سطرين •

١٣ــ اذا كانت $T_n: H \longrightarrow H \, (n = 1, 2, \cdots)$ مؤثرات خطية ناظمية ، وكان $T_n \longrightarrow T$ ، فبين بأن T مؤثر خطي ناظمي •

١٤ــ اذا كان S و T مؤثرين خطيين ناظميين يحققان المساواة $ST^* = T^*S$ ، وكان $TS^* = S^*T$ ، فبين بأن مجموعهما $S+T$ وجداءهما ST ناظميان •

١٥ ــ بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي محدود $T: H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت العقدي H ناظميا هو أن يكون $\|T^*x\| = \|Tx\|$ أيا كان x من H • أثبت بالاستعانة بهذا أنه اذا كان T مؤثرا خطيا ناظميا فان

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

* * *

الفصل الرابع

مبرهنات اساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ

يمكننا القول بأن هذا الفصل يحوي أسس النظرية المتقدمة للفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ ، والتي لولاها لكانت الفائدة التي نجنيها من هذه الفضاءات وتطبيقاتها جد محدودة • والمبرهنات الهامة الواردة في هذا الفصل هي نظرية هان ــ باناخ ، ونظرية المحدودية المنتظمة ، ونظرية التطبيق المفتوح ، ونظرية البيان المغلق • وتشكل هذه المبرهنات حجر الزاوية في نظرية فضاءات باناخ (علما بأن المبرهنة الاولى تسري على أي فضاء منظم) •

توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

١ ــ مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٢ــ١ (وشكلاها الآخران ٤ــ٣ــ١ و ٤ــ٣ــ٢) ، تدور حول تمديد الداليات الخطية على الفضاءات المتجهية • وهي تكفل كون الفضاء المنظم ذا مخزون وفير من الداليات الخطية ، بحيث اننا نجد نظرية ملائمة للفضاءات الثنوية ونظرية مرضية للمؤثرات المرافقة (البندان ٤ــ٥ و ٤ــ٦) •

٢ ــ مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤ــ٧ــ٣ لباناخ وشتاينهاوس • تعطينا هذه المبرهنة الشروط الكافية كي تكون المتتالية $(\|T_n\|)$ محدودة ، حيث T_n مؤثرات خطية محدودة من فضاء باناخ في فضاء منظم • ولها تطبيقات متنوعة (بعضها بسيط وبعضها عميق) في التحليل ، وبخاصة فيما يتعلق بمتسلسلات فورييه (٤ــ٧ــ٥) ، والتقارب الضعيف (البندان ٤ــ٨ و ٤ــ٩) ، وجموعية المتتاليات (البند ٤ــ١٠) ، والمكاملة العددية (البند ٤ــ١١) ، وغيرها •

٣ ــ **مبرهنة التطبيق المفتوح** ٤ــ١٢ــ٢ • تنص هذه المبرهنة على أن كل مؤثر خطي محدود T من فضاء باناخ على فضاء باناخ هو تطبيق مفتوح ، أي أن صور المجموعات المفتوحة وفق T هي مجموعات مفتوحة • لذا فانه اذا كان T متباينا وغامرا ، كان T^{-1} مستمرا (**((مبرهنة العكس المحدود))**) •

٤ ــ **مبرهنة البيان المغلق** ٤ــ١٣ــ٢ • تعطي هذه المبرهنة الشروط التي تجعل من مؤثر خطي مغلق (راجع ٤ــ١٣ــ١) محدودا • وتتمتع المؤثرات الخطية المغلقة بأهمية كبيرة في التطبيقات الفيزيائية وغيرها •

٤ــ١ تمهيدية زورن

سنحتاج الى تمهيدية زورن في اثبات مبرهنة هان ــ باناخ الاساسية ، والتي هي مبرهنة حول تحديد الداليات الخطية ، وهي هامة لاسباب سنأتي على ذكرها لدى صياغتنا للمبرهنة • ويوجد لتمهيدية زورن تطبيقات متنوعة ، سنعرض لاثنين منها في موضع لاحق من هذا البند • ودعامة هذه التمهيدية مجموعة مرتبة جزئيا نعرفها فيما يلي :

٤ــ١ــ١ تعريف (المجموعة المرتبة جزئيا ، السلسلة)

المجموعة المرتبة جزئيا هي مجموعة M عرفنا عليها **ترتيبا جزئيا** ، وهو علاقة ثنائية نرمز لها بـ $\leqq$ وتحقق الشروط التالية :

(ت ج۱) $a \leqq a$ أيا كان a من M **(خاصة الانعكاس)**

(ت ج۲) اذا كان $a \leqq b$ و $b \leqq a$ ، فان $a = b$ **(خاصة التخالف)**

(ت ج۳) اذا كان $a \leqq b$ و $b \leqq c$ ، فان $a \leqq c$ **(خاصة التعدي)**

ان كلمة « جزئيا » تؤكد بأن M قد تحوي عنصرين a و b بحيث أنه لا تتحقق أي من العلاقتين $a \leqq b$ و $b \leqq a$ • وفي هذه الحالة نقول عن a و b انهما عنصران غير متقارنين (أو **غير قابلين للمقارنة**) • وبالمقابل ، فاننا نقول عن عنصرين a و b انهما متقارنان (أو **قابلان للمقارنة**) اذا تحققت العلاقة $a \leqq b$ أو العلاقة $b \leqq a$ (أو كلاهما) •

المجموعة المرتبة كليا (أو السلسلة) هي مجموعة مرتبة جزئيا كل عنصرين فيها قابلان للمقارنة • وبعبارة أخرى ، فان السلسلة هي مجموعة مرتبة جزئيا غير حاوية على عناصر غير قابلة للمقارنة •

العنصر الراجح لمجموعة جزئية W من مجموعة M مرتبة جزئيا هو عنصر u من M بحيث أن

$$x \leqq u \quad \text{أيا كان } x \text{ من } W$$

(ان u تابع لـ M و W ، وهو قد يكون موجودا ، وقد لا يكون) • ويعرف **العنصر الاعظمي** لـ M بأنه عنصر m من M بحيث أن

$$m \leqq x \quad \text{تقتضي} \quad m = x$$

(ومرة أخرى نقول بأن M قد تحوي عناصر أعظمية ، وقد لا تحوي مثل هذه العناصر • لاحظ أيضا ان العنصر الاعظمي ليس بالضرورة عنصرا راجحا) •■

أمثلة

٤ـ١ـ٢ الاعداد الحقيقية •

لتكن M مجموعة كل الاعداد الحقيقية ، ولنفترض أن للعلاقة $x \leqq y$ معناها المعتاد • ان M مرتبة كليا ، ولا يوجد لها عنصر أعظمي •

٤ــ١ــ٣ مجموعة القــوة

لتكن $\mathcal{P}(X)$ **مجموعة قــوة** (أي مجموعة أجــزاء) مجموعة معطاة X ، ولنفرض أن $A \leqq B$ تعني $A \subset B$ ، أي أن A جزء من B • عندئذ تكون $\mathcal{P}(X)$ مرتبة جزئيا • ان العنصر الاعظمي الوحيد لـ $\mathcal{P}(X)$ هو X •

٤ــ١ــ٤ المرتبات n من الاعداد

لتكن M مجموعة كل المرتبات n $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ ... مــن الاعداد الحقيقية ، وليكن $x \leqq y$ يعني أن $\xi_j \leqq \eta_j$ أيا كان $j = 1, \cdots, n$ ، حيث للمتباينة $\xi_j \leqq \eta_j$ معناها المألوف • ان هذا يحدد ترتيبا جزئيا على M •

٤ــ١ــ٥ الاعداد الصحيحة

لتكن $M = \mathbf{N}$ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة • فاذا افترضنا أن $m \leqq n$ تعني بأن m تقسم n ، فاننا نكون قد عرفنا ترتيبا جزئيا على $\mathbf{N}$ •

هنالك أمثلة أخرى أوردناها في مجموعة المسائل •

وباستعمال المفاهيم الواردة في ٤ــ١ــ١ ، فمن الممكن صياغة تمهيدية زورن التي نعتبرها موضوعة(*) ، على النحو التالي :

٤ــ١ــ٦ تمهيدية زورن

لتكن M مجموعة غير خالية مرتبة جزئيا • فاذا افترضنا أن لكل سلسلة C في M عنصرا راجحا ، فانه يوجد لـ M عنصر اعظمي واحد على الاقل •

تطبيقــات

٤ــ١ــ٧ قاعــدة هامــل

لكل فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ قاعدة هامل • (راجع البند ٢ــ١) •

---

* تستعمل التسمية «تمهيدية» لاسباب تاريخية . ويمكن استنتاج تمهيدية زورن من **موضوعة الاختيار** ، التي تنص على أنه يوجد لكل مجموعة معطاة E تطبيق c (هو «تطبيق الاختيار») معرف على $\mathcal{P}(E)$ ويأخذ قيمة في E ، بحيث أنه اذا كان $B \subset E$ و $B \neq \varnothing$ ، فان $c(B) \in B$. وبالعكس ، فــان هــذه الموضوعة تنتج من تمهيدية زورن ، وبالتالي فان تمهيدية زورن وموضوعــة الاختيار يمكن اعتبارهما موضوعتين متكافئتين •

البرهــان :

لتكن M مجموعة كــل المجموعات الجزئية المستقلة خطيا في X • بمــا أن $X\neq\{0\}$ ، فهنالك عنصر $x\neq 0$ بحيث $\{x\}\in M$ ، وبالتالي فان $M\neq\varnothing$ • ان علاقة الاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M (راجع ٤ــ١ــ٣) ، ولكل سلسلة C محتواة في M عنصــر راجــح ، ألا وهــو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C •• اذا استندنا الى تمهيدية زورن ، فاننا نرى أنه يوجد لـ M عنصر أعظمي B ، وسنبين الآن أن B هو قاعدة هامل لـ X • ليكن $Y=\operatorname{span} B$ • عندئذ يكون Y فضاء جزئيا من X ، كما أن $Y=X$ لانه اذا لم يتحقق هذا لكانت $B\cup\{z\},\ z\in X,\ z\notin Y$ جملة مستقلة خطيا تحوي تماما B كمجموعة جزئيــة، وهذا يناقض كون B عنصرا أعظميا • ∎

٤ــ١ــ٨ المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية

توجد في كل فضــاء لهلبرت $H\neq\{0\}$ مجموعــة متعامــدة منظمــة كليــة (راجع البند ٣ــ٦) •

البرهــان :

لتكن M مجموعة كل المجموعات الجزئية المتعامــدة المنظمة في H • بمــا أن $H\neq\{0\}$ فانه يحوي عنصرا $x\neq 0$ ، كما تشــكل $\{y\}$ مجموعة جزئية متعامدة منظمةفي H ،حيث $y=\|x\|^{-1}x$ • لذا فان $M\neq\varnothing$ •ان علاقةالاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M • ولمــا كــان لكــل سلسلة C محتواة فــي M عنصر راجــح ، الا وهو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C ، فانه يترتب على تمهيدية زورن انه يوجد لـ M عنصــر أعظمي F • وعندئذ نرى استنادا الــى المبرهنة ٣ــ٦ــ٢ أنه يوجد عنصر غير صفري z في H بحيث أن $z\perp F$ • وبالتالي فان المجموعة $F_1=F\cup\{e\}$ ، حيث $e=\|z\|^{-1}z$ متعامدة منظمة ، و F مجموعــة جزئية محتواة تماما في F_1 ، وهذا يناقض كون F عنصرا أعظميا •∎

مســائل

١ ــ تحقق من صحة الدعاوى في المثال ٤ــ١ــ٣ •

٢ ـ لتكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة x علـى الفترة $[0,1]$ ، ولنفترض أن $x \leqq y$ تعني $x(t) \leqq y(t)$ أيا كان t من $[0,1]$ • بين أن هذا يعرف ترتيبا جزئيا • هل هو ترتيب كلي ؟ وهل يوجد لـ X عناصر أعظمية ؟

٣ ـ بين بأن مجموعة كل الاعـداد العقدية $z=x+iy$ و $w=u+iv$ ... يمكـن ترتيبها جزئيا بافتراض أن $z \leqq w$ تعني أن $x \leqq u$ و $y \leqq v$ ، حيث تعنـي الاشارة $\leqq$ المعرفة على مجموعة الاعـداد الحقيقية اشارة التباين المألوفة عـلى R •

٤ ـ أوجد العناصر الاعظمية في M بالنسبة للترتيب الجزئي في المثال ٤ـ١ـ٥ ، حيـث M هـي :

(آ) $\{2, 3, 4, 8\}$ ، (ب) مجموعة كل الاعداد الاولية •

٥ ـ برهن بأنه يوجد للمجموعة A المرتبة جزئيا والمنتهية عنصر أعظمي واحـد على الاقل •

٦ ـ **(العنصر الاصغر ، العنصر الاكبر)** بين بأن كل مجموعة مرتبة جزئيا M يمكن أن يوجد فيها عنصر واحد على الاكثر a بحيث يكون $a \leqq x$ أيا كان x من M ، وعنصر واحد على الاكثر b بحيث يكون $x \leqq b$ أيا كان x من M• [اذا وجد العنصـر a (أو b) ، فاننـا نسميه **عنصرا أصغر** (أو **عنصرا أكبر** ، على الترتيب) للمجموعة M] •

٧ ـ **(العنصر القاصـر)** يعـرف **العنصـر القاصـر** لمجموعـة جزئيـة غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيا M ، بأنه عنصر x من M بحيث يكون $x \leqq y$ أيـا كـان y من A • أوجد العناصـر الراجحـة والقاصـرة للمجموعة $A=\{4,6\}$ في المثال ٤ـ١ـ٥ •

٨ ـ يعرف **الحد الادنى** لمجموعة جزئية غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيا M بأنـه عنصر قاصـر x للمجموعـة A بحيث يكـون $l \leqq x$ أيـا كـان العنصـر القاصـر l للمجوعـة A ، وتكتب عـادة $x = \text{g.l.b.} A = \inf A$• كذلك ، فاننا نعرف **الحد الاعلى** لـ A الذي نرمز اليه بـ $y = \text{l.u.b.} A = \sup A$

بأنه عنصر راجح y لـ A بحيث يكون $y \leqq u$ أيا كان العنصر الراجح u لـ A • (آ) اذا وجد للمجموعة A حد أدنى ، فبين أنه وحيد • (ب) حدد كلا من $\text{g.l.b.}\{A, B\}$ و $\text{l.u.b.}\{A, B\}$ في المثال ٤ــ١ــ٣ •

٩ ــ (**الشبكية**) • **الشبكية** هي مجموعة مرتبة جزئيا M بحيث يوجد لكل عنصرين x و y فيها g.l.b. (نرمز له بـ $x \wedge y$) و l.u.b. (نرمز له بـ $x \vee y$) • بين بأن المجموعة المرتبة جزئيا في المثال ٤ــ١ــ٣ هي شبكية ، حيث $A \wedge B = A \cap B$ ، $A \vee B = A \cup B$ •

١٠ــ يعرف **العنصر الاصغري** لمجموعة مرتبة جزئيا M بأنه عنصر x من M بحيث أن $y \leqq x$ تقتضي ان يكون $y = x$ • حدد كل العناصر الاصغرية في الشق (آ) من المسألة ٤ •

٤ــ٢ مبرهنة هان ــ باناخ

ان مبرهنة هان ــ باناخ هي مبرهنة في تحديد الداليات الخطية • وسنرى في البند القادم أن هذه المبرهنة تكفل وجود عدد وفير من الداليات الخطية المحدودة على فضاء منظم ، بحيث أننا نجد نظرية مناسبة للفضاءات الثنوية التي تشكل قسما أساسيا من النظرية العامة للفضاءات المنظمة • وفي هذا السياق تغدو مبرهنة هان ــ باناخ واحدة من أهم المبرهنات المتعلقة بالمؤثرات الخطية المحدودة• وفضلا عن ذلك ، فان دراستنا ستبين بأن هذه النظرية تحدد المدى الذي يمكن لقيم دالي خطي ادراكه • وقد تم اكتشاف هذه المبرهنة من قبل هـ• هان (١٩٢٧ م•) ، ثم أعاد اكتشافها ، ولكن بصفتها العامة الحالية ، س• باناخ (١٩٢٩ م•) ، ومن ثم عممها هـ بونتبلاست وزوبشيك على الفضاءات المتجهية العقدية (١٩٣٨ م•) •

وبوجه عام ، ففي **مسائل التمديد** ، نأخذ شيئا رياضيا (تطبيقا مثلا) معرفا

على مجموعة جزئية Z من مجموعة معطاة X ، ومن ثم نمدد هذا الشيء من Z الى المجموعة X بأكملها بحيث تظل بعض الخواص الرئيسية للشيء سارية على الشيء الممـدد •

والشيء الذي تعالج مبرهنة هان ـ باناخ مسألة تمديده هو دالي خطي f معرف على فضاء جزئي Z من فضاء متجهي X ، بفرض أن f يتمتع بخاصة المحدودية التي سنعرفها بدلالة **الدالي الخطي جزئيا** ، وهو دالي حقيقي p معرف على فضاء متجهي X بحيث يتحقق الشرط (الذي يسمى شرط **الجمعية جزئيا**) •

أيا كان $x, y \in X$ $\quad p(x+y) \leqq p(x)+p(y) \quad$ **(1)**

والشرط (الذي يسمى شرط **التجانس ايجابا**) •

أيا كان $\alpha \geqq 0$ في $\mathbb{R}$ وأيا كان $x \in X$ $\quad p(\alpha x)=\alpha p(x) \quad$ **(2)**

(لاحظ بأن **النظيـم** على فضاء منظم هو دالي من هذا النوع) •

سنفترض أن قيم الدالي المعرف على Z الذي يطلب تمديده لا تتجاوز قيم دالي p معرف على X ، وسنحدد f من Z الى X دون أن يفقد صفة الخطيـة ودون أن يتجاوز قيم p ، وبالتالي سنمدد f الى دالـي $\tilde{f}$ على X خطي وقيمه لا تتجاوز قيم p ، وهـذا هو جوهر المبرهنـة • سنفترض الآن أن X حقيقي ، وسنعالج في البند التالي تعميما للمبرهنة حين نفترض X فضاء متجهيا عقديا •

٤ـ٢ـأ مبرهنة هان ـ باناخ (تمديد الداليات الخطية)

ليكن X فضاء متجهيا حقيقيا و p داليا خطيا جزئيا على X • لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

أيا كان x من Z $\quad f(x) \leqq p(x) \quad$ (3)

عندها يوجد لـ f ممدد خطي $\tilde{f}$ من Z الى X يحقق الشرط

أيا كان x من X $\quad \tilde{f}(x) \leqq p(x) \quad$ (3*)

اي أن $\tilde{f}$ هو دالي خطي على X يحقق (3*) على X ويحقق المساواة $\tilde{f}(x)=f(x)$ ايـا كـان x مـن Z •

البرهــان :

سننجز البرهان وفق الخطوات التالية :

(آ) نأخذ المجموعة E المؤلفة من كل المُمددات الخطية g للدالي f والمحققة للشرط $g(x) \leqq p(x)$ على ساحتها $\mathfrak{D}(g)$ ، ونبين أن E يمكــن ترتيبها جزئيا وأن تمهيدية زورن تكفل وجود عنصر أعظمي $\tilde{f}$ لـ E ٠

(ب) نثبت أن $\tilde{f}$ معرف على الفضاء X بأكمله ٠

(جـ) نتحقق من علاقة مساعدة استخدمناها في (ب) ٠

لننتقل الآن الى اثبات الشق الاول ٠

(آ) لتكن E مجموعة كل الممددات الخطية g لـ f المحققة للشرط

$$g(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathfrak{D}(g)$$

من الواضح أن $E \neq \varnothing$ ، ذلك أن $f \in E$ ٠ يمكننا أن نعرف على E ترتيبا جزئيا حيــث

$$g \leqq h \qquad \text{تعني أن} \qquad h \text{ هو ممدد لـ } g$$

أي أن لدينا تعريفا $\mathfrak{D}(h) \supset \mathfrak{D}(g)$ و $h(x) = g(x)$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(g)$ ٠

لنعرف من أجل أي سلسلة C محتواة في E الدالي $\hat{g}$ بالشــكل

$$\hat{g}(x) = g(x) \qquad \text{اذا كان } x \in \mathfrak{D}(g) \qquad (g \in C).$$

ان $\hat{g}$ هو دالي خطي وساحته

$$\mathfrak{D}(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathfrak{D}(g),$$

هي فضاء متجهي ، ذلك أن C سلسلة ٠ ان تعريفنا $\hat{g}$ خال من الغموض ، ذلك أنه اذا كان $x \in \mathfrak{D}(g_1) \cap \mathfrak{D}(g_2)$ ، حيث $g_1, g_2 \in C$ ، فان $g_1(x) = g_2(x)$ نظرا لكون

C سلسلة ، وهذا يقتضي أن يكون $g_1 \leqq g_2$ أو $g_2 \leqq g_1$ • من الواضح أن $g \leqq \hat{g}$ أيا كان g من C • لذا فان $\hat{g}$ عنصر راجح لـ C • ولما كان $C \subset E$ اختياريا ، فان تمهيدية زورن تقتضي أن يوجد لـ E عنصر أعظمي $\bar{f}$ • واستنادا الى تعريف E ، فان $\bar{f}$ ممدد خطي لـ f يحقق الشرط

$$\bar{f}(x) \leqq p(x) \qquad x \in \mathfrak{D}(\bar{f}). \tag{4}$$

(ب) سنبين الآن أن $\mathfrak{D}(\bar{f})$ تساوي X بأكمله • لنفترض مؤقتا أن هذا غير صحيح • عندئذ يمكن أن نختار عنصرا y_1 من $X - \mathfrak{D}(\bar{f})$ ونأخذ الفضاء الجزئي Y_1 من X المولد بـ $\mathfrak{D}(\bar{f})$ و y_1 • لاحظ أن $y_1 \neq 0$ لان $0 \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ • من الممكن كتابة أي عنصر x من Y_1 بالشكل

$$x = y + \alpha y_1 \qquad y \in \mathfrak{D}(\bar{f}).$$

ان هذا التمثيل وحيد ، ذلك أن المساواة $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ حيث $\tilde{y} \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ تقتضي المساواة $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$ ، حيث $y - \tilde{y} \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ ، في حين أن $y_1 \notin \mathfrak{D}(\bar{f})$ ، وبالتالي فان الحل الوحيد هو $y - \tilde{y} = 0$ ، وهذا يقتضي المساواة $\beta - \alpha = 0$ ، التي تعني الوحدانية •

سنعرف الدالي g_1 على Y_1 بالمساواة

$$g_1(y + \alpha y_1) = \bar{f}(y) + \alpha c \tag{5}$$

حيث c أي عدد حقيقي ثابت • من السهل اثبات خطية g_1 • كذلك ، فاذا كان $\alpha = 0$ ، فاننا نجد أن $g_1(y) = \bar{f}(y)$ • لذا فان g_1 هو **ممدد فعلي** لـ $\bar{f}$ بمعنى أنه ممدد بحيث تكون $\mathfrak{D}(\bar{f})$ هي مجموعة جزئية تماما من $\mathfrak{D}(g_1)$ • يترتب على هذا أنه اذا تمكنا من اثبات أن $g_1 \in E$ بالبرهان على أن

$$g_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathfrak{D}(g_1) \tag{6}$$

فان هذا يناقض كون $\bar{f}$ عنصرا أعظميا ، وتكون الدعوى $\mathfrak{D}(\bar{f}) \neq X$ باطلة ، أي تكون الدعوى $\mathfrak{D}(\bar{f}) = X$ صحيحة •

(جـ)   وهكذا يجب علينا في الختام اثبات أن g_1 ، لدى اختيار مناسب لـ c في (5) يحقق (6) •

لنأخذ أي y و z في $\mathfrak{D}(\bar{f})$ • نستنتج عندئذ من (4) و (1) أن

$$\begin{aligned}\bar{f}(y)-\bar{f}(z)=\bar{f}(y-z) &\leqq p(y-z)\\ &= p(y+y_1-y_1-z)\\ &\leqq p(y+y_1)+p(-y_1-z).\end{aligned}$$

وبنقل الحد الاخير الى اليسار والحد $\bar{f}(y)$ الى اليمين نجد أن

$$-p(-y_1-z)-\bar{f}(z)\leqq p(y+y_1)-\bar{f}(y), \tag{7}$$

حيث y_1 مثبت • وبما أن y لا يظهر في الطرف الايسر و z لا يظهر في الطرف الايمن ، فان اللامساواة تظل سارية اذا أخذنا الـ sup عندما تمسح z المجموعة $\mathfrak{D}(\bar{f})$ في الطرف الايسر (ولنطلق على العنصر الناتج m_0) ، واذا أخذنا الـ inf عندما تمسح y المجموعة $\mathfrak{D}(\bar{f})$ في الطرف الايمن ، ولنطلق علـى الناتج m_1 • وهكذا فان $m_0\leqq m_1$ ، واذا كان c يحقق الشرط $m_0\leqq c\leqq m_1$ ، فاننـا نستنتج مـن (7) أن

$$-p(-y_1-z)-\bar{f}(z)\leqq c \qquad \text{أيا كان } z \text{ من } \mathfrak{D}(\bar{f}) \tag{8a}$$

$$c\leqq p(y+y_1)-\bar{f}(y) \qquad \text{أيا كان } y \text{ من } \mathfrak{D}(\bar{f}) \tag{8b}$$

سنثبت (6) أولا عندما يكون α سالبا في (5) ، ثم عندما يكون α موجبا • فاذا كان $\alpha<0$ فاننا نستعمل (8a) حيث نعوض z بالمقدار $\alpha^{-1}y$:

$$-p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\bar{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\leqq c.$$

ونجد بعد الضرب بـ $-\alpha>0$ أن

$$\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\bar{f}(y)\leqq -\alpha c.$$

نستنتج من هذا ومن (5) باستعمال $y+\alpha y_1=x$ (الواردة قبل قليل) صحة المتباينة المنشودة التالية

$$g_1(x)=\bar{f}(y)+\alpha c\leqq -\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)=p(\alpha y_1+y)=p(x).$$

واذا كان $\alpha=0$ نجد أن $x\in\mathfrak{D}(\bar{f})$ ، وعندئذ لا يوجد ما يحتاج الى برهان . أما اذا كان $\alpha>0$ ، فاننا نجد باستخدام (8b) بعد تعويض y بـ $\alpha^{-1}y$ أن

$$c\leqq p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\bar{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

ونجد بعد الضرب بـ $\alpha>0$ أن

$$\alpha c\leqq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\bar{f}(y)=p(x)-\bar{f}(y).$$

نستنتج من هذا ومن (5) أن

$$g_1(x)=\bar{f}(y)+\alpha c\leqq p(x).$$ ▮

لنطرح السؤال عما اذا كان من الممكن اثبات المبرهنة السابقة دون اللجوء الى تمهيدية زورن . ان هذا السؤال هام، وبخاصة لان هذه التمهيدية لا تمدنا بطريقة في الانشاء . اذا أخذنا في (5) f بدلا من $\bar{f}$ ، فاننا نجد لكل عدد حقيقي c ممددا خطيا g_1 لـ f الى الفضاء الجزئي Z_1 المولد بـ $\mathfrak{D}(f)\cup\{y_1\}$ ، ويمكننا اختيار c بحيث أن $g_1(x)\leqq p(x)$ أيا كان x من Z_1 ، كما نرى من الشق (جـ) من البرهان عند استبدال $\bar{f}$ بـ f . فاذا كان $X=Z_1$ فالمشكلة تكون قد حلت . أما اذا كان $X\neq Z_1$ ، فيمكن أخذ $y_2\in X-Z_1$ ، وتكرار الطريقة لتمديد f الى Z_2 المولد بـ Z_1

و y_2 ، وهلم جرًا • وبذا نتوصل الى متتالية من الفضاءات الجزئية Z_j ، كل منها يحوي سابقه ، وهي بحيث يمكن تمديد f خطيا من كل منها الى الذي يليه ، كما أن الممدد g_j يحقق الشرط $g_j(x) \leqq p(x)$ أيا كان x من Z_j • فاذا كان

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j,$$

فان المسألة تكون قد حلت بعد n من الخطوات ، واذا كان

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j,$$

فمن الممكن استعمال الاستقراء العادي • بيد أنه اذا لم يوجد لـ X مثل هـذا التمثيل ، فلا مناص لنا من الاستعانة بتمهيدية زورن في البرهان الذي أوردناه •

وبالطبع ، فقد يكون الوضع بكامله أبسط في الحالات الخاصة • وفضاءات هلبرت من هذا النمط بسبب تمثيل ريس ٣ــ٨ــ١ ، وسندرس هذا في البنـد التالـي •

مســائل

١ ــ بين بأن القيمة المطلقة للدالي الخطي تتمتع بالخواص المعبر عنها بـ (1) و (2) •

٢ ــ بين بأن النظيم على فضاء متجهي X هو دالي خطي جزئيا على X •

٣ ــ بين بأن $p(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \xi_n$ حيث $x = (\xi_n) \in l^\infty$ و ξ_n حقيقي ، يحدد داليا خطيـا جزئيـا عـلى l^∞ •

٤ ــ بين بأن الدالي الخطي جزئيا p يحقق الشرطين $p(0) = 0$ و $p(-x) \geqq -p(x)$ •

٥ ــ **(المجموعة المحدبة)** اذا كان p داليا خطيا جزئيا علـى فضاء خطي X ،

فبين أن $M=\{x \mid p(x) \leqq \gamma,\ \gamma>0$ } مثبت مجموعة محـــدبة (راجـع البنـد ٣ــ٣) •

٦ ــ اذا كان p داليــا وجمعيا جزئيــا على فضاء منظم X ، وكان p مستمرا في النقطة 0 و $p(0)=0$ ، فبين أن p مستمر في كل x من X •

٧ ــ اذا كان p_1 و p_2 داليين خطيين جزئيا على فضاء متجهي X ، وكـــان c_1 و c_2 ثابتين موجبين ، فبين أن $p=c_1p_1+c_2p_2$ خطي جزئيا على X •

٨ ــ اذا كان دالي جمعيا جزئيا على فضاء منظـم X وغـير سالب خارج الكـرة $\{x \mid \|x\|=r\}$ فبين أنه غير سالب في كل x من X •

٦ ــ ليكن p داليا خطيا جزئيا على فضاء متجهي حقيقي X • لنفترض f معرفا على المجموعة $Z=\{x \in X \mid x=\alpha x_0,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ بالدستور $f(x)=\alpha p(x_0)$ حيث x_0 عنصر مثبت من X • بين أن f دالي خطي على Z يحقق المتباينة $f(x) \leqq p(x)$ •

١٠ــ اذا كان p داليا خطيا جزئيا على فضاء متجهي حقيقي X ، فبين أن ثمة داليا خطيا $\tilde{f}$ على X بحيث أن $-p(-x) \leqq \tilde{f}(x) \leqq p(x)$ •

٤ــ٣ مبرهنة هان ــ باناخ في الفضاءات المتجهية العقدية والفضاءات المنظمــة

تتعلق مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٢ــ١ بالفضاءات المتجهية الحقيقية • وقـــد توصل ف• بو ننبلاست و أ• زوبشيك عام ١٩٣٨ م• الى تعميم يحوي الفضاءات المتجهيـــة العقـــدية •

٤ــ٣ــ١ مبرهنة هان ــ باناخ (المعممة)

ليكن X فضاء متجهيا حقيقيا أو عقديا ، وليكن p داليا خطيا حقيقيا على X ، ولنفترض أن p جمعي جزئيا ، أي انه أيا كان x و y من X فان

$$p(x+y) \leqq p(x)+p(y) \tag{1}$$

(كما في المبرهنة ٤ـ٢ـ١) ، ولنفترض كذلك أنه أيا كان العدد α فان

$$p(\alpha x)=|\alpha|\, p(x). \qquad (2)$$

لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

$$|f(x)|\leqq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } Z \qquad (3)$$

عندئذ يوجد لـ f ممدد خطي $\tilde{f}$ من Z الى X يحقق الشرط

$$|\tilde{f}(x)|\leqq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X \qquad (3^*)$$

البرهـــان :

(آ) حالة الفضاءات الحقيقية . اذا كان الفضاء X حقيقيا ، فان المسألة سهلة . عندئذ تقتضي (3) أن يكون $f(x)\leqq p(x)$ أيا كان x من Z . وبالتالي نجد اعتمادا على مبرهنة هان ـ باناخ ٤ـ٢ـ١ وجود ممدد خطي $\tilde{f}$ من Z الى X بحيـث يكـون

$$\tilde{f}(x)\leqq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X \qquad (4)$$

نستنتج من هذا ومن (2) أن

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqq p(-x)=|-1|\, p(x)=p(x),$$

أي أن $\tilde{f}(x)\geqq -p(x)$. يترتب على هذا وعلى (4) صحة (3^*) .

(ب) حالة الفضاءات العقدية . ليكن X عقديا ، عندئذ يكون Z فضاء متجهيا عقديا كذلك . وبالتالي فان قيم f عقدية ، ويمكن كتابة المساواة

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x) \qquad x\in Z$$

حيث f_1 و f_2 حقيقيان . لننظر مؤقتا الى X و Z بأنهما فضاءان متجهيان حقيقيان، ولنرمز لهما بـ X_r و Z_r على الترتيب ، ان هذا يعني ببساطة أننا نقصر الضرب بالأعداد على الاعداد الحقيقية (بدلا من الاعداد العقدية) . وبما أن f خطـــي

على Z ، وأن لـ f_1 و f_2 قيما حقيقية فان f_1 و f_2 داليان خطيان على Z_r • كذلك فان $f_1(x) \leqq |f(x)|$ نظرا لكون القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يتجاوز قيمته المطلقة • لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$f_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } Z_r$$

واعتمادا على مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٢ــ١ ، فانه يوجد ممدد خطي $\bar{f}_1$ لـ f_1 من Z_r الى X_r بحيث يكون

$$\bar{f}_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } X_r \tag{5}$$

لننتقل الى f_2 بعد أن درسنا f_1 • فاذا عدنا الى Z باستعمال $f = f_1 + if_2$ ، فاننا نجد المساواة التالية أيا كان x من Z

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

وبمطابقة القسمين الحقيقيين في الطرفين نجد أن

$$f_2(x) = -f_1(ix) \qquad x \in Z. \tag{6}$$

لذا ، فاننا اذا وضعنا المساواة أيا كان x من X

$$\bar{f}(x) = \bar{f}_1(x) - i\bar{f}_1(ix) \qquad x \in X, \tag{7}$$

فاننا نجد من (6) أن $\bar{f}(x) = f(x)$ على Z ، وهذا يبين أن $\bar{f}$ ممدد لـ f من Z الى X • بقي علينا اثبات ما يلي :

(i) $\bar{f}$ دالي خطي على الفضاء المتجهي **العقدي** X •

(ii) $\bar{f}$ يحقق (3*) على X •

أما صحة (i) ، فأمر يمكن رؤيته من الحسابات التالية التي تعتمد على (7) وعلى خطية $\bar{f}_1$ على الفضاء المتجهي الحقيقي X_r ، ونفترض هنا أن $a+ib$ أي عدد

عقدي حيث a و b حقيقيان :

$$\begin{aligned}\bar{f}((a+ib)x) &= \bar{f}_1(ax+ibx) - i\bar{f}_1(iax-bx)\\ &= a\bar{f}_1(x) + b\bar{f}_1(ix) - i[a\bar{f}_1(ix) - b\bar{f}_1(x)]\\ &= (a+ib)[\bar{f}_1(x) - i\bar{f}_1(ix)]\\ &= (a+ib)\bar{f}(x).\end{aligned}$$

سنثبت الآن صحة (ii) • نلاحظ أنه أيا كان x الـذي يحقق المساواة $\bar{f}(x)=0$ ، فان (ii) صحيحة لكون $p(x)\geqq 0$ وفق (1) و (2) ، راجع كذلك المسألة ١ • لنفترض الآن x الذي يحـقق الشرط $\bar{f}(x)\neq 0$ • عندئذ يمكـن أن نكتب مستعملين الصيغة القطبية للمقادير العقدية ما يلي :

$$\bar{f}(x) = |\bar{f}(x)|e^{i\theta} \quad \text{وهكـذا فـان} \quad |\bar{f}(x)| = \bar{f}(x)e^{-i\theta} = \bar{f}(e^{-i\theta}x)$$

وبما أن $|\bar{f}(x)|$ حقيقي ، فـان العبارة الاخيرة حقيقية ، وهـي بالتالي تساوي قسمها الحقيقي • لذا يترتب على (2) أن

$$|\bar{f}(x)| = \bar{f}(e^{-i\theta}x) = \bar{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|\,p(x) = p(x).$$

وبذا يكتمل البرهان •■

وعلى الرغم من أن مبرهنة هان ـ باناخ لا تنص مباشرة على الاستمرار ، فثمة تطبيق رئيسي لهذه المبرهنة يتعلق بالداليات الخطية والمحدودة• وهذا يعيدنا الى الفضاءات المنظمة التي تقع في مركز اهتمامنا • وفعلا ، فان المبرهنة ٤ـ٣ـ١ تقتضي المبرهنة الاساسية التالية :

٤ـ٣ـ٢ مبرهنة هان ـ باناخ (الفضاءات المنظمة)

ليكن f داليا خطيا ومحدودا على فضاء جزئي Z من فضاء منظم X • عندئذ يوجد دالي خطي محدود $\tilde{f}$ على X يشكل ممددا لـ f الى X وله النظيم نفسه

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \qquad (8)$$

حيــث

$$\|\bar{f}\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\bar{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(**وحيث** $\|f\|_Z = 0$ **في الحالة التافهة** $Z=\{0\}$) .

البرهــان :

اذا كان $Z=\{0\}$ ، فان $f=0$ ، ويكون الممدد $\bar{f}=0$. لنفترض الآن أن $Z\neq\{0\}$. اذا أردنا الاستعانة بالمبرهنة ٤ــ٣ــ١ ، فلا بد لنا مــن اكتشاف p مناسب . لدينا أيا كان x من Z المتباينة

$$|f(x)| \leqq \|f\|_Z \|x\|.$$

وهي من النمط (3) ، حيث

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|. \tag{9}$$

من الواضح أن p معرفة على X بأكمله . كذلك ، فــان p تحقق (1) على X ، ذلك أنه يترتب على متباينة المثلث أن

$$p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leqq \|f\|_Z (\|x\|+\|y\|) = p(x)+p(y).$$

ان p تحقق أيضا (2) على X لان

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha|\, \|f\|_Z \|x\| = |\alpha|\, p(x).$$

وبالتالي فمن الممكن تطبيق المبرهنة ٤ــ٣ــ١ واستنتاج وجود دالي خطي $\bar{f}$ على X هو ممدد لـ f ويحقق التالي :

$$|\bar{f}(x)| \leqq p(x) = \|f\|_Z \|x\| \qquad x\in X.$$

وبأخذ الـ sup عندما يمسح x كل عناصر X التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |\tilde{f}(x)| \leqq \|f\|_Z.$$

ولما كان النظيم لا يمكن أن يتناقص لدى التمديد ، فاننا نجد أيضا أن $\|\tilde{f}\|_X \geqq \|f\|_Z$ • نستنتج من هذه المتباينة وسابقتها أن (8) صحيحة ، وبهذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة • ∎

هذا وقد يغدو الوضع سهلا جدا في بعض الحالات الخاصة ، وفضاءات هلبرت هي واحدة من هذه الحالات • وفعلا ، فاذا كان Z فضاء جزئيا مغلقا من فضاء هلبرت $X = H$ ، فانه يوجد لـ f تمثيل ريس ٣ـ٨ـ١ ، وليكن

$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad\qquad z \in Z$$

حيث $\|f\| = \|z\|$ • وبالطبع ، فلما كان الجداء الداخلي معرفا على H بأكمله ، فان هذا يعطي حالا ممددا خطيا $\tilde{f}$ لـ f من Z الى H ، ويكون لـ $\tilde{f}$ النظيم نفسه الذي لـ f ، ذلك أن $\|\tilde{f}\| = \|z\| = \|f\|$ استنادا الى المبرهنة ٣ـ٨ـ١ • لذا فان التمديد في هذه الحالة مباشر •

سنشتق الآن من المبرهنة ٤ـ٣ـ٢ نتيجة مفيدة أخرى يمكن القول بأنها تبين بأن الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X يتألف من عدد كبير بقدر كاف من الداليات الخطية المحدودة للتمييز بين نقاط X • ان هذا يغدو أساسيا فيما يتعلق بالمؤثرات المترافقة (البند ٤ـ٥) وما يسمى بالتقارب الضعيف (البند ٤ـ٨) •

٤ـ٣ـ٣ مبرهنة (الداليات الخطية المحدودة)

ليكن X فضاء منظما ، وليكن $x_0 \neq 0$ أي عنصر من X • عندئذ يوجد دالي خطي وحيد $\tilde{f}$ على X بحيث يكون

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

البرهــان :

سنأخذ الفضاء الجزئي Z من X المؤلف من جميع العناصر $x = \alpha x_0$ بفرض عددا ما ، لنعرف على Z داليا خطيا f كما يلي :

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|. \tag{10}$$

ان f محدود ونظيمه $\|f\| = 1$ لان

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\,\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

ان المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ تقتضي وجود ممدد خطي $\tilde{f}$ لـ f من Z الى X نظيمــه $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$ ، ونرى بالنظر الى (10) أن $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ ، ∎

٤ــ٣ــ٤ نتيجة (النظيم ، المتجه الصفري)

أيا كان x من الفضاء المنظم X فان

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{11}$$

لذا فانه اذا كان x_0 محققا للمساواة $f(x_0) = 0$ أيا كان f من X' فان $x_0 = 0$ ،

البرهــان :

نستنتج من المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ لدى كتابة x بدلا من x_0 أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|,$$

كما نستنتج من المتباينة $|f(x)| \leqq \|f\|\,\|x\|$ أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqq \|x\|. \qquad ∎$$

مسائل

١ ــ **(نصف النظيم)** • بين بأن (1) و (2) يقتضيان $p(0)=0$ و $p(x)\geqq 0$ ، أي أن p هو نصف نظيم (راجع المسألة ١٢ من البند ٢ــ٣) •

٢ ــ بين بأن (1) و (2) يقتضيان $|p(x)-p(y)|\leqq p(x-y)$ •

٣ ــ لقد بينا أن $\tilde{f}$ المحدد بـ (7) هو دالي خطي على الفضاء المتجهي **العقدي** X • أثبت أنه يكفي للوصول الى هذا البرهان على أن $\tilde{f}(ix)=i\tilde{f}(x)$ •

٤ ــ ليكن p معرفا على فضاء متجهي X ويحقق الشرطين (1) و (2) • بين بأنه اذا كان x_0 أي عنصر معطى في X ، فهنالك دالي خطي $\tilde{f}$ على X بحيث أن $\tilde{f}(x_0)=p(x_0)$ وأن $|\tilde{f}(x)|\leqq p(x)$ أيا كان x من X •

٥ ــ اذا كان X في المبرهنة ٤ــ٣ــ١ فضــاء منظما وكان $p(x)\leqq k\|x\|$ حيث k عــدد موجــب ، فبين أن $\|\tilde{f}\|\leqq k$ •

٦ ــ لايضاح المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ نأخذ داليا f على الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^2$ معرفــا بالمساواة $f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ حيث $x=(\xi_1, \xi_2)$ • أوجد ممدداته $\tilde{f}$ الى $\mathbf{R}^3$ والنظائــم الموافقــة •

٧ ــ قدم برهانا آخر للمبرهنة ٤ــ٣ــ٣ في حالة فضاء هلبرت •

٨ ــ ليكن X فضاء منظما و X' فضاءه الثنوي • فاذا كان $X\neq\{0\}$ ، بــين أن X' لا يمكن أن يكون $\{0\}$ •

٩ ــ بين أنه في حالة فضاء منظم فصول X ، فمن الممكن اثبات المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ مباشرة دون اللجوء الى تمهيدية زورن (التي استعملناها بصورة مباشرة ، وذلك في اثبات المبرهنة ٤ــ٢ــ١) •

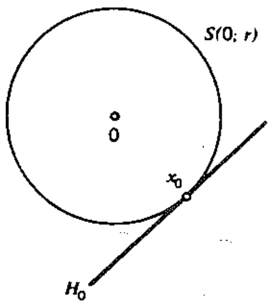
١٠ــ توصل الى الدعوى الثانية في ٤ــ٣ــ٤ مباشرة من ٤ــ٣ــ٣ •

١١ــ اذا كان $f(x)=f(y)$ أيا كان الدالي الخطي المحدود f على فضاء منظم X ، فبين أن $x=y$ •

١٢ــ لايضاح المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ ، افترض أن X المستوي الاقليدي $\mathbb{R}^2$ ، وأوجد الدالــي f ٠

١٣ــ أثبت أنه في حدود الافتراضات في المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ ، فانه يوجد دالــي خطي محدود $\tilde{f}$ على X بحيث أن $\|\tilde{f}\|=\|x_0\|^{-1}$ وأن $\tilde{f}(x_0)=1$ ٠

١٤ــ (**فوق المستوي**) ٠ بــين بأنــه لكل قشرة كروية $S(0;r)$ في فضـــاء منظم X وكل نقطة $x_0\in S(0;r)$ يوجد فوق مستوٍ H_0 يحوي x_0 بحيث تقع الكرة $\tilde{B}(0;r)$ بكاملها في واحد مــن نصفي الفضاء المحددين بـ H_0 ٠ (راجــع المسألتين ١٢ و ١٥ من البند ٢ــ٨) ٠ ويعطي الشكل ٣٩ ايضاحا بسيطا لهــذا الامــر ٠



الشكل (٣٩) ٠ ايضاح المسالة ١٤ في حالة المستوي الاقليدي $\mathbb{R}^2$

٤ــ٤ تطبيق على الداليات الخطية المحدودة على $C[a,b]$

لمبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٣ــ٢ تطبيقات هامة عديدة ، قدمنا واحدا منها في البند السابق ؛ وسنورد تطبيقا آخر في هذا البند ٠ وسنستعين بالمبرهنة ٤ــ٣ــ٢ للحصول على دستور يتعلق بالتمثيل العام للداليات الخطية المحدودة على $C[a,b]$ ، حيث $[a,b]$ فترة متراصة مثبتة ٠ وقد سبق وشرحنا في نهاية البند ٢ــ١٠ أهمية

التمثيلات العامة للداليات على فضاءات خاصة • وبما أن التمثيل الذي نعنى به الآن سيكون بدلالة تكامل ريمان ـ ستيلجس ، فاننا نجد من المناسب التذكير بتعريف عدد قليل من خواص هذا التكامل ، الذي هو تعميم لتكامل ريمان المعروف • سنبتدىء بالمفهوم التالي :

نقول عن دالة w معرفة على $[a, b]$ انها **تغير محدود** على $[a, b]$ اذا كان **تغيرها الكلي** $\mathrm{Var}(w)$ على $[a, b]$ منتهيا ، حيث

$$\mathrm{Var}(w) = \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})|, \tag{1}$$

حيث يؤخذ الـ sup على كل **التجزئات**

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{2}$$

للفترة $[a, b]$ • ان n هنا هو كيفي ، وكذلك اختيار القيم $t_1, \ldots, t_{n-1}$ في $[a, b]$ التي يجب عليها أن تحقق (2) •

من الواضح أن كل الدوال ذات التغير المحدود على $[a, b]$ تشكل فضاء متجهيا ، ويعرف النظيم على هذا الفضاء بالدستور

$$\|w\| = |w(a)| + \mathrm{Var}(w). \tag{3}$$

ويرمز للفضاء المنظم المعرف بهذا الشكل بـ $BV[a, b]$ ، حيث يمثل B الحرف الاول من كلمة bounded (أي محدود) ، و V الحرف الاول من كلمة variation (أي تغير) •

سنجد الآن مفهوم تكامل ريمان ـ ستيلجس على النحو التالي : ليكن $x \in C[a, b]$ و $w \in BV[a, b]$ • لنفترض أن P_n تجزئة ما لـ $[a, b]$ معطاة بـ (2) ، ولنرمز بـ $\eta(P_n)$ الى طول أكبر فترة $[t_{j-1}, t_j]$ ، أي أن

$$\eta(P_n) = \max(t_1 - t_0, \cdots, t_n - t_{n-1}).$$

لنقابل كل تجزئة P_n لـ $[a, b]$ بالمجموع

$$s(P_n)=\sum_{j=1}^{n} x(t_j)[w(t_j)-w(t_{j-1})]. \tag{4}$$

يوجد عدد $\mathcal{J}$ يتمتع بخاصة أنه اذا كان ε عددا موجبا ما ، فثمة عدد موجب δ بحيث أن

$$\eta(P_n)<\delta \tag{5}$$

تقتضي أن يكون

$$|\mathcal{J}-s(P_n)|<\varepsilon. \tag{6}$$

يدعى $\mathcal{J}$ تكامل **ريمان ـ ستيلجس** لـ x على $[a, b]$ بالنسبة الى w ويرمز له بـ

$$\int_a^b x(t)\,dw(t). \tag{7}$$

لذا فمن الممكن الحصول على (7) كنهاية المجاميع (4) لمتتالية (P_n) من تجزئات $[a, b]$ التي تحقق $\eta(P_n)\longrightarrow 0$ عندما $n\longrightarrow\infty$ •

لاحظ أنه اذا كان $w(t)=t$ فان التكامل (7) هو تكامل ريمان المعروف لـ x على $[a, b]$ •

كذلك ، فاذا كانت x مستمرة ، ووجد لـ w مشتق كمول على $[a, b]$ فان

$$\int_a^b x(t)\,dw(t)=\int_a^b x(t)w'(t)\,dt \tag{8}$$

حيث تعني ' الاشتقاق بالنسبة الى t •

ان التكامل (7) دالة خطية لـ $x\in C[a, b]$ ، أي أنه اذا كان $x_1, x_2\in C[a, b]$ و α و β أي عددين فان

$$\int_a^b [\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\,dw(t)=\alpha\int_a^b x_1(t)\,dw(t)+\beta\int_a^b x_2(t)\,dw(t).$$

ان التكامل دالة خطية أيضا لـ $w \in BV[a,b]$ ؛ أي أنه اذا كان $w_1, w_2 \in BV[a,b]$ وكان γ و δ أي عددين فان

$$\int_a^b x(t)\, d(\gamma w_1+\delta w_2)(t)=\gamma\int_a^b x(t)\, dw_1(t)+\delta\int_a^b x(t)\, dw_2(t).$$

سنحتاج أيضا الى المتباينة

$$\left|\int_a^b x(t)\, dw(t)\right| \leqq \max_{t\in J}|x(t)|\, \mathrm{Var}(w), \tag{9}$$

حيث $J=[a,b]$ ، نلاحظ بأن هذا يعمم دستورا معروفا في علم التفاضل والتكامل. وفي الحقيقة ، فاذا كان $w(t)=t$ فان $\mathrm{Var}(w)=b-a$ ، وعندئذ تغدو (9) بالشكل

$$\left|\int_a^b x(t)\, dt\right| \leqq \max_{t\in J}|x(t)|\,(b-a).$$

يمكن بعد هذا صياغة مبرهنة التمثيل للداليات الخطية المحدودة على $C[a,b]$ التي توصل اليها ريس عام ١٩٠٩ على النحو التالي :

٤ـ٤ـ١ مبرهنة ريس (الداليات على $C[a,b]$)

كل دالي خطي محدود f على $C[a,b]$ يمكن تمثيله بتكامل ريمان–ستيلجس

$$f(x)=\int_a^b x(t)\, dw(t) \tag{10}$$

حيث w ذو تغير محدود على $[a,b]$ وتغيره الكلي هو

$$\mathrm{Var}(w)=\|f\|. \tag{11}$$

البرهـان :

نرى من مبرهنة هان ـ باناخ ٤ـ٣ـ٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة أنه يوجد لـ f ممدد $\bar{f}$ من $C[a,b]$ الى الفضاء المنظم $B[a,b]$ المؤلف من كل الدوال المحدودة على $[a,b]$ حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\|=\sup_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a,b].$$

وفضلا عن ذلك ، فانه يترتب على هذه المبرهنة أن الدالي الخطي $\bar{f}$ محدود وله نظيم f نفسه ، أي أن

$$\|\bar{f}\| = \|f\|.$$

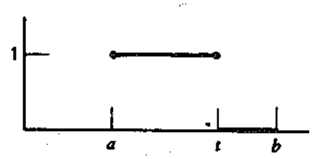
سنعرّف دالة w نحتاجها في (10) • ولهذا نأخذ الدالة x_t المبينة في الشكل (٤٠) • هذه الدالة معرفة على $[a, b]$ وقيمتها تساوي 1 على $[a, t]$ وتساوي 0 فيما عدا ذلك ، ومن الواضح أن $x_t \in B[a, b]$ • تسمى x_t **الدالة المميزة** للفترة $[a, t]$ • وبالاستعانة بـ x_t والدالي $\bar{f}$ ، فاننا نعرف w على $[a, b]$ بالشكل

$$w(a) = 0 \qquad w(t) = \bar{f}(x_t), \qquad t \in (a, b].$$

سنبين أن هذه الدالة w ذو تغير محدود وأن $\mathrm{Var}(w) \leqq \|f\|$ •

سنستعمل للمقادير العقدية الصيغة القطبية • وفي الحقيقة ، فاذا وضعنا $\theta = \arg \zeta$ فانه يمكننا كتابة التالي

$$\zeta = |\zeta|\, e(\zeta) \qquad \text{حيث} \qquad e(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta = 0 \\ e^{i\theta} & \text{if } \zeta \neq 0. \end{cases}$$



الشكل (٤٠) • الدالة x_t

نلاحظ أنه اذا كان $\zeta \neq 0$ ، فان $|\zeta| = \zeta/e^{i\theta} = \zeta e^{-i\theta}$ • وبالتالي فانه أيا كان ζ ، سواء أكان صفريا أم لم يكن ، نجد

$$|\zeta| = \zeta\, \overline{e(\zeta)}, \tag{12}$$

حيث يرمز ــ الى المرافق العقدي كما هو مألوف • وبقصد تبسيط الدساتير اللاحقة فاننا سنفترض أيضا أن

$$\varepsilon_j = \overline{e(w(t_j) - w(t_{j-1}))}$$

وأن $x_{t_j} = x_j$ ، الامر الذي يجنبنا كتابة أدلة الادلة • عندئذ يترتب على (12) أنه أيا كانت التجزئة (2) فاننا نجد أن

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| &= |\bar f(x_1)| + \sum_{j=2}^{n} |\bar f(x_j) - \bar f(x_{j-1})| \\ &= \varepsilon_1 \bar f(x_1) + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [\bar f(x_j) - \bar f(x_{j-1})] \\ &= \bar f\left(\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}]\right) \\ &\leqq \|\bar f\| \left\|\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}]\right\|.\end{aligned}$$

إن $\|f\| = \|\bar f\|$ في الطرف الايمن (راجع ما سبق) ، كمـا أن العامل $\|\cdots\|$ يساوي 1 ذلك أن $|\varepsilon_j| = 1$ ، وأننا نستنتج من تعريف x_j أنه اذا كان $t \in [a, b]$ فان واحدا فقط من الحدود x_1 و $x_2 - x_1$, ... غير صفري (ونظيمه يساوي 1) • يمكننا الآن أن نأخذ الى sup في الطرف الايسر علـى كـل تجزئات $[a, b]$ ، وعندئذ نجد أن

$$\mathrm{Var}(w) \leqq \|f\|. \tag{13}$$

لذا فان w ذو تغير محدود على $[a, b]$ •

سنثبت الآن صحة (10) ، حيث $x \in C[a, b]$ • لنعرف لكل تجزئة P_n لـ (2) دالة ؛ نرمز اليها اختصارا بـ z_n [بدلا من $z(P_n)$ أو z_{P_n} مثلا] ، محتفظين في ذاكرتنا أن z_n تعتمد على P_n ، وليس على n فقط • ان دستور التعريف هو

$$z_n = x(t_0)x_1 + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[x_j - x_{j-1}]. \tag{14}$$

عندئذ يكون $z_n \in B[a, b]$. ونجد استنادا الى تعريف w أن

$$\bar{f}(z_n) = x(t_0)\bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})]$$

$$= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \tag{15}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})],$$

حيث تنتج المساواة الاخيرة من أن $w(t_0) = w(a) = 0$. نختار الآن أي متتالية (P_n) من التجزئات لـ $[a, b]$ بحيث أن $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ ، [راجع (5)] . (لاحظ أن الأعداد t_j في (15) تعتمد على P_n ، وهذه حقيقة تحتفظ بها في ذاكرتنا دون التعبير عنها برموز أكبر ، مثل الرمز $t_{j,n}$) . نرى أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ فان المجموع في الطرف الايمن من (15) يقترب من التكامل الوارد في (10) ، وبالتالي فان (10) صحيحة شريطة أن يكون $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$ ، حيث $\bar{f}(x)$ يساوي $f(x)$ لان $x \in C[a, b]$.

سنبين بأن $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$. فاذا أعدنا الى الذاكرة تعريف x_t (أنظر الى الشكل ٤٠) ، فاننا نرى بأنه يترتب على (14) أن $z_n(a) = x(a) \cdot 1$ نظرا لكون المجموع في (14) صفرا عندما $t = a$. اذن $z_n(a) - x(a) = 0$. وفضلا عن ذلك ، فانه يترتب على (14) أنه اذا كان $t_{j-1} < t \leqq t_j$ فاننا نجد عندئذ أن $z_n(t) = x(t_{j-1}) \cdot 1$ أنظر الى الشكل ٤٠ . وبالتالي فاننا نجد لهذه الاعداد t أن

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|.$$

لذا فانه اذا كان $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ ، فان $\|z_n - x\| \longrightarrow 0$. لان x مستمرة على $[a, b]$ ، وبالتالي منتظمة الاستمرار على $[a, b]$ نظرا لكون $[a, b]$ متراصة . اذن فان استمرار $\bar{f}$ يقتضي الآن أن $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$ ، وبالتالي فان $\bar{f}(x) = f(x)$ ، ونكون بذلك قد أثبتنا صحة (10) .

سنثبت أخيرا صحة (11) • نستنتج من (10) و (9) أن

$$|f(x)| \leqq \max_{t \in J} |x(t)| \operatorname{Var}(w) = \|x\| \operatorname{Var}(w).$$

وبأخذ الـ sup على كل الدوال x في $C[a, b]$ التي نظيمها ، فاننا نجـد أن $\|f\| \leqq \operatorname{Var}(w)$ • وبضم هذه المتباينة الى (13) نجد (11) • ∎

نلاحظ أن w في المبرهنة ليست وحيدة ؛ الا أنه يمكن جعلها وحيدة بفرض شروط تجعل من w صفرا في النقطة a ومستمرا من اليمين :

$$w(a) = 0, \qquad w(t+0) = w(t) \qquad (a < t < b).$$

لمزيد من التفاصيل : راجع الصفحات من 197 -'200 من كتاب

Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis*. New York: Wiley

والصفحة 111 من كتاب

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis*. New York: Ungar

ومن الطريف أن مبرهنة ريـس ساهمت فيما بعـد كنقطة انطلاق للنظرية الحديثة في المكاملة • ولمزيد من الملاحظات التاريخية راجع الصفحة 169 من كتاب

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann

٤ــ٥ المؤثر المرافق

يمكننا أن نقرن بكل مؤثر خطي ومحدود $T: X \longrightarrow Y$ على فضاء منظم X ما يسمى بالمؤثر المرافق $T^{\times}$ لـ T • ومن دواعي الاهتمام بـ $T^{\times}$ استعمالاته في حل معادلات تحوي مؤثرات ، الامر الذي سنراه في البند ٨ــ٥ ، وتبرز مثل هـذه المعادلات على سبيل المثال في الفيزياء وفي تطبيقات أخرى • سنعرف في هـذا البند المؤثر المرافق $T^{\times}$ ونبحث في بعض خواصه ، بما فيها علاقته بمؤثـر هلبرت

المرافق(*) T^* الذي سبق وعرفناه في البند ٣ــ٩ • ومن المهـم الملاحظة بـأن دراستنا الحالية تعتمد على مبرهنة هان ــ باناخ (من خلال المبرهنة ٤ــ٣ــ٣) ، وأننا لن تتمكن من المضي بعيدا بمعزل عنها •

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمـان ، ولنحدد المؤثر المرافق $T^\times$ لـ T • لهذا ننطلق من أي دالي خطي محدود g على Y • من الواضح أن g معرف أيا كان y من Y • فاذا وضعنا $y = Tx$ ، فاننـا نجـد داليا على X ، نرمز له بـ f :

$$f(x) = g(Tx) \qquad x \in X. \tag{1}$$

ان f خطي نظرا لكون g و T خطيين • كذلك ، فان f محدود لان

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leqq \|g\| \, \|Tx\| \leqq \|g\| \, \|T\| \, \|x\|.$$

فاذا أخذنا الـ sup على كل العناصر x من X التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|f\| \leqq \|g\| \, \|T\|. \tag{2}$$

وهذايبين أن $f \in X'$ ، حيث X' هو الفضاء الثنوي لـ X المعرف في ٢ــ١٠ــ٣ • ولما كان $g \in Y'$ فرضا ، فان الدستور (1) يعرف **للمتغير** g من Y' مؤثرا من Y' في X' يسمى **المؤثر المرافق** لـ T ، ويرمز له بـ $T^\times$ • لذلك نجد أن

---

* في حالة فضاءات هلبرت ، فان المؤثـر المرافق $T^\times$ **ليس** مطابقا لمؤثـر هلبرت المرافق T^* لـ T (رغم أنه عندئذ يكون $T^\times$ و T^* مرتبط احدهما بالآخر كمـا سنرى فيما بعد في هذا البند) . ان النجمـة * التي نشير بها الى مؤثـر هلبرت المرافق تستعمل في جميع الكتب تقريبا للدلالة على هذا المؤثر . لذا **فلا** يجوز الدلالة على المؤثر المرافق بـ T^* لانه أمر مزعج أن نستعمل رمزا يـدل على شيء في فضاء هلبرت وعلى شيء آخر في نظرية الفضاءات المنظمة العامة. لذا سنستعمل $T^\times$ للدلالة على المؤثر المرافق ، ونفضله على الرمز الاقل دلالة T' والمستعمل ايضا في بعض الكتب .

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$X' \xleftarrow{T^\times} Y' \qquad (3)$$

لاحظ بامعان أن $T^\times$ مؤثر معرف على Y' ،في حين أن المؤثـر المعطى T معـرف عـلى X • سنلخص ما سبق فيما يلي :

٤ــ٥ــ١ تعريف (المؤثر المرافق $T^\times$)

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمان • عندئذ نعرف المؤثر المرافق $T^\times: Y' \longrightarrow X'$ بالشكل

$$f(x) = (T^\times g)(x) = g(Tx) \qquad (g \in Y') \qquad (4)$$

حيث X' و Y' الفضاءان الثنويان لـ X و Y على الترتيب •

إن أول أهدافنا يكمن في اثبات أن للمؤثر المرافق نظيم المؤثر نفسه ، وهذه خاصة رئيسية كما سنرى فيما بعد • سنحتاج في البرهان الى المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ التي نتجت من مبرهنة هان ــ باناخ • وهكذا فان مبرهنة هان ــ باناخ حيوية في صدد انشاء نظرية مرضية للمؤثرات المرافقـة ، التي تشكل بدورها جـزءا أساسيا من النظرية العامة للمؤثرات الخطية •

٤ــ٥ــ٢ مبرهنة (نظيم المؤثر المرافق)

ان المؤثر المرافق $T^\times$ في التعريف ٤ــ٥ــ١ خطي ومحدود ، كما ان

$$\|T^\times\| = \|T\|. \qquad (5)$$

البرهــان :

ان المؤثر $T^\times$ خطي لان ساحته Y' فضاء متجهي ولاننا نجد مباشرة أن

$$
\begin{aligned}
(T^\times(\alpha g_1+\beta g_2))(x) &= (\alpha g_1+\beta g_2)(Tx)\\
&= \alpha g_1(Tx)+\beta g_2(Tx)\\
&= \alpha (T^\times g_1)(x)+\beta (T^\times g_2)(x).
\end{aligned}
$$

سنثبت صحة (5) . لدينا استنادا الى (4) أن $f=T^\times g$ ، وعندئذ يترتب على (2) أن

$$\|T^\times g\|=\|f\|\leqq \|g\|\,\|T\|.$$

وبأخذ الـ sup على كل العناصر g من Y' التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|T^\times\|\leqq \|T\|. \tag{6}$$

لذا فانه للحصول على (5) ، علينا أن نثبت الآن أن $\|T^\times\|\geqq\|T\|$. ان المبرهنة ٤ـ٣ـ٣ تقتضي أنه يوجد لكل عنصر x_0 من X عنصر g_0 من Y' بحيث يكون

$$\|g_0\|=1 \qquad \text{و} \qquad g_0(Tx_0)=\|Tx_0\|.$$

لدينا هنا $g_0(Tx_0)=(T^\times g_0)(x_0)$ وفق تعريف المؤثر المرافق $T^\times$. فاذا افترضنا أن $f_0=T^\times g_0$ ، نجد أن

$$
\begin{aligned}
\|Tx_0\| = g_0(Tx_0) &= f_0(x_0)\\
&\leqq \|f_0\|\,\|x_0\|\\
&= \|T^\times g_0\|\,\|x_0\|\\
&\leqq \|T^\times\|\,\|g_0\|\,\|x_0\|.
\end{aligned}
$$

ولما كان $\|g_0\|=1$ ، فاننا نجد لكل x_0 من X المتباينة

$$\|Tx_0\|\leqq \|T^\times\|\,\|x_0\|.$$

(وهذا يشمل الحالة $x_0=0$ لان $T0=0$) • لكن لدينا دوما

$$\|Tx_0\| \leqq \|T\|\,\|x_0\|,$$

كما أن $c=\|T\|$ هو هنا اصغر ثابت c بحيث تكون المتباينة $\|Tx_0\| \leqq c\|x_0\|$ صحيحة أيا كان x_0 من X • لذا فلا يمكن أن يكون $\|T^\times\|$ أصغر من $\|T\|$ ، أي أنه يجب أن يكون $\|T^\times\| \geqq \|T\|$ • يترتب على هذا بالاضافة الى (6) صحة (5) • ∎

لنشرح هذه المناقشة بالاستعانة بالمصفوفات الممثلة للمؤثرات • ان هذا سيعين القارىء أيضا في ايراد أمثلة من عنده •

٤ــ٥ــ٣ مثال (المصفوفة)

من الممكن في الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ تمثيل المؤثر الخطي $T: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ بمصفوفة (راجع البند ٢ــ٩) حيث تعتمد هذه المصفوفة $T_E=(\tau_{jk})$ على اختيار القاعدة $E=\{e_1, \cdots, e_n\}$ لـ $\mathbf{R}^n$ التي نرتب عناصرها وفق ترتيب معين نبقيه مثبتا • سنختار قاعدة E ، ونعتبر $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ متجهين عموديين، ونستخدم الرمز المعتاد في ضرب المصفوفات • عندئذ يكون

$$y = T_E x \qquad \text{، وباستعمال المركبات :} \qquad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk}\xi_k \tag{7}$$

حيث $j=1, \cdots, n$ • لتكن $F=\{f_1, \cdots, f_n\}$ القاعدة الثنوية لـ E (راجع البند ٢ــ٩) • ان F قاعدة لـ $\mathbf{R}^{n\prime}$ (الذي هو أيضا فضاء اقليدي بعده n استنادا الى ٢ــ١٠ــ٥) • عندئذ يكون لـ g في $\mathbf{R}^{n\prime}$ تمثيل من الشكل

$$g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

واعتمادا على تعريف القاعدة الثنوية لدينا $f_j(y) = f_j(\sum \eta_k e_k) = \eta_j$ • لذا فاننا نجد استنادا الى (7) أن

$$g(y)=g(T_E x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\tau_{jk}\xi_k.$$

وبتغيير ترتيب الجمع ، فمن الممكن كتابة هذا بالشكل

$$g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k \quad \text{حيث} \quad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j. \tag{8}$$

يمكننا اعتبار هذا على أنه تعريف لدالي f على X بدلالة g ، أي أن

$$f(x)=g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k.$$

واذا أعدنا الى الذاكرة تعريف المؤثر المرافق ، فيمكننا كتابة ما يلي :

$$f=T_E{}^{\times}g, \quad \text{وباستعمال المركبات} \quad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j.$$

وبملاحظة أننا في β_k نجمع بالنسبة الى الدليل الايسر (وبالتالي فاننا نجمع وفق كل عناصر **عمود** من T_E) ؛ فاننا نجد النتيجة التالية :

اذا كان T ممثلا بمصفوفة T_E ، فان المؤثر المرافق $T^{\times}$ يمثل بمنقول T_E •

ومن الجدير بالذكر بأن هذا يصح أيضا اذا كان T مؤثرا خطيا من $\mathbf{C}^n$ في $\mathbf{C}^n$ • ∎

ولدى التعامل مع المؤثر المرافق ، فلا تخلو الدساتير من (9) وحتى (12) من الفائدة ، وسنترك اقامة البراهين الموافقة للقارىء • ليكن $S, T\in B(X, Y)$ ، راجع البند ٢ــ١٠ • عندها يكون

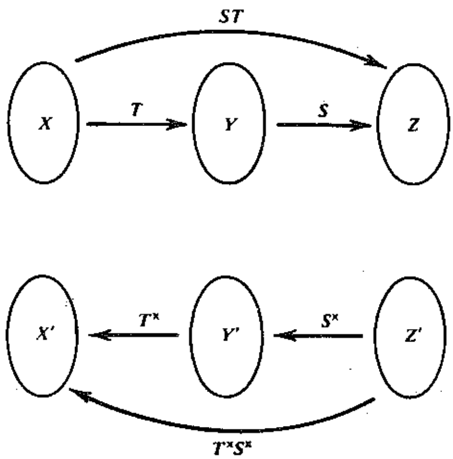
$$(S+T)^{\times}=S^{\times}+T^{\times} \tag{9}$$

$$(\alpha T)^{\times}=\alpha T^{\times}. \tag{10}$$

لنفترض أن $Z,\ Y,\ X$ فضاءات منظمة ، وأن $T\in B(X, Y)$ و $S\in B(Y, Z)$ •

عندئذ نجد الدستور التالي للمؤثر المرافـق لمركب المؤثرين ST (أنظـر الـى الشـكل ٤١) •

$$(ST)^{\times} = T^{\times} S^{\times}. \tag{11}$$



الشكل (٤١) • ايضاح الدستور (11)

اذا كان $T \in B(X, Y)$ و T^{-1} موجودا ، وكان $T^{-1} \in B(Y, X)$ ، فان $(T^{\times})^{-1}$ يكون موجودا أيضا ويكون $(T^{\times})^{-1} \in B(X', Y')$ ، وأيضا

$$(T^{\times})^{-1} = (T^{-1})^{\times}. \tag{12}$$

العلاقة بين المؤثر المرافق $T^{\times}$ ومؤثر هلبرت المرافق T^* • (راجع البند ٣ـ٩)

سنبين أن مثل هذه العلاقةموجـودفي حالة مؤثر خطي محدود $T: X \longrightarrow Y$ حينما يكون X و Y فضاءي هلبرت ، مثلا $X = H_1$ و $Y = H_2$ • في هذه الحالة ، نجد أولا (الشكل ٤٢)

$$\begin{gathered} H_1 \xrightarrow{T} H_2 \\ H_1' \xleftarrow{T^{\times}} H_2' \end{gathered} \tag{13}$$

حيث يعرف المؤثر المرافق $T^{\times}$ للمؤثر المعطى T كما في السابق على النحو التالي .

$$(14) \quad \begin{aligned} &(a) \qquad T^{\times}g = f \\ &(b) \qquad g(Tx) = f(x) \end{aligned} \qquad (f \in H_1', \; g \in H_2').$$

ان السمة الجديدة تتلخص في أنه لما كان f و g داليين على فضاءي هلبرت ، فانه يوجد لهما تمثيلان لريس (راجع البند ٣ــ٨ــ١) ؛ ولنفترض مثلا أن

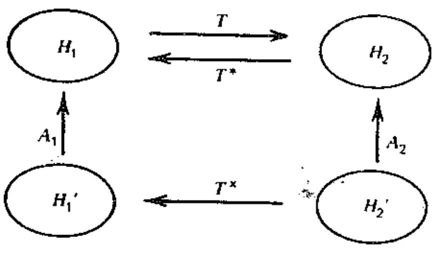
$$(15) \quad \begin{aligned} &(a) \qquad f(x) = \langle x, x_0 \rangle \qquad (x_0 \in H_1) \\ &(b) \qquad g(y) = \langle y, y_0 \rangle \qquad (y_0 \in H_2), \end{aligned}$$

وعندما نعلم أيضا من المبرهنة ٣ــ٨ــ١ أن x_0 و y_0 يتعينان بصورة وحيدة بـ f و g على الترتيب . ان هذا يعين المؤثرين

$$A_1: H_1' \longrightarrow H_1 \qquad \text{و} \qquad A_1 f = x_0,$$

$$A_2: H_2' \longrightarrow H_2 \qquad \text{و} \qquad A_2 g = y_0.$$

ونرى استنادا الى المبرهنة ٣ــ٨ــ١ أن A_1 و A_2 متباينان وغامران وايزومتريان نظرا لأن $\|A_1 f\| = \|x_0\| = \|f\|$ ، ولوجود علاقة مماثلة لـ A_2 . كذلك فان المؤثرين A_1 و A_2 مترافقان خطيا (راجع البند ٣ــ١) . وفعلا فاذا كتبنا



الشكل (٤٢) . المؤثرات في الدستورين (13) و (17)

$f_1(x)=\langle x, x_1\rangle$ و $f_2(x)=\langle x, x_2\rangle$ ، فاننا نجد أنه أيا كان x وأيا كان العددان α ، β فـــان

$$(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x) \\ =\alpha\langle x, x_1\rangle+\beta\langle x, x_2\rangle \\ =\langle x, \bar{\alpha}x_1+\bar{\beta}x_2\rangle. \tag{16}$$

ان هذا يبين استنادا الى تعريف A_1 الترافق الخطي

$$A_1(\alpha f_1+\beta f_2)=\bar{\alpha}A_1f_1+\bar{\beta}A_1f_2.$$

وفي حالة A_2 ، فاننا نجد برهانا مماثلا •

ونجد بالتركيب المؤثر (انظر الى الشكل ٤٢)

$$T^*=A_1T^{\times}A_2^{-1}:\ H_2\longrightarrow H_1 \quad \text{المعرف بالقاعدة} \quad T^*y_0=x_0 \tag{17}$$

إن T^* خطي ذلك أنه يحوي على تطبيقين اثنيــن مترافقين خطيا ، بالاضافة الـــى المؤثر الخطي $T^{\times}$ • سنثبت أن T^* هو حقا مؤثر هلبرت المرافق لـ T • ان هـــذا أمر سهل ؛ ذلك أننا نستنتج مباشرة من (14) أو (16) أن

$$\langle Tx, y_0\rangle=g(Tx)=f(x)=\langle x, x_0\rangle=\langle x, T^*y_0\rangle,$$

وهذا ليس الا (1) من البند ٣ـــ٩ باستثناء الرموز • وهكذا فاننا نجد النتيجة التاليـــة :

ان الدستور (17) يمثل مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي T على فضـــاء هلبرت بدلالة المؤثر المرافق $T^{\times}$ لـ T •

لاحظ كذلك بأن المساواة $\|T^*\|=\|T\|$ (المبرهنة ٣ـــ٩ـــ٢) تستنتج رأسا من (5) ومن ايزومترية A_1 و A_2 • ∎

لاكمال هذه المناقشة ، علينا أيضا ادراج بعض الفروق الرئيسية بين المؤثر المرافق $T^{\times}$ للمؤثر $T: X \longrightarrow Y$ ومؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر $T: H_1 \longrightarrow H_2$ ، حيث X و Y فضاءان منظمان ، وحيث H_1 و H_2 فضاءا هلبرت •

ان $T^{\times}$ معرف على الفضاء الثنوي للفضاء الحاوي لمدى T ، في حين أن T^* معرف رأسا على الفضاء الحاوي لمدى T • وقد مكنتنا هذه الخاصة لـ T^* من تعريف صنوف هامة من المؤثرات باستعمال مؤثرات هلبرت المرافقة لها (راجع ٣ــ١٠ــ١) •

واستنادا الى (10) فاننا نجد لـ $T^{\times}$ الخاصة التالية

$$(\alpha T)^{\times} = \alpha T^{\times}$$

في حين أننا نجد لـ T^* استنادا الى ٣ــ٩ــ٤ أن

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*.$$

يمثّل $T^{\times}$ في الفضاءات منتهية البعد بمنقول المصفوفة الممثّلة لـ T ، في حين أن T^* يمثل بالمرافق العقدي لمنقول تلك المصفوفة (لمزيد من التفصيل ، راجع ٤ــ٥ــ٣ و ٣ــ١٠ــ٢) •

مسائل

١ ــ بين بأن الدالي المعرف بـ (1) خطي •

٢ ــ ما هما مرافقا المؤثر الصفري 0 والمؤثر المطابق I ؟

٣ ــ أثبت صحة (9) •

٤ ــ أثبت صحة (10) •

٥ ــ أثبت صحة (11) •

٦ ـــ بين بأن $(T^a)^\times=(T^\times)^a$ •

٧ ـــ ما هي صيغ المصفوفات التي نحصل عليها بدمج (11) مع المثال ٤ــ٥ــ٣ ؟

٨ ـــ أثبت صحة (12) •

٩ ـــ **(العـادم)** ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T: X \longrightarrow Y$ مؤثـرا خطيـا محدودا ، ولنفترض أن $M=\overline{\mathscr{R}(T)}$ لصاقة مدى T • أثبت أن (راجع المسألة ١٣ من البند ٢ــ١٠)

$$M^a=\mathscr{N}(T^\times).$$

١٠ـــ **(العـادم)** لتكن B مجموعة جزئية من الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X • يعرف **العادم** ^aB لـ B بأنه

$$^aB=\{x\in X \mid f(x)=0 \text{ for all } f\in B\}.$$

بين أنه في المسألة ٩ يكون

$$\mathscr{R}(T)\subset {}^a\mathscr{N}(T^\times).$$

ماذا يعني هذا بالنسبة لعملية حل المعادلة $Tx=y$ ؟

٤ـــ٦ الفضاءات الانعكاسية

لقد سبق وبحثنا في الانعكاسية **الجبرية** للفضاءات **المتجهية** في البند ٢ـــ٨، أمـا **انعكاسية** الفضاءات **المنظمة** فسيكون موضوع بحثنا في هذا البند • لكننا أولا سنعيد الى الذاكرة ما فعلناه في البند ٢ـــ٨ • نذكر بأنه يقال عن فضـاء متجهي X انه **انعكاسي جبريا** اذا كان التطبيق القانوني غامرا • ان $X^{**}=(X^*)^*$ هنا هو الفضاء الثنوي الجبري الثاني لـ X ، وحيـث نعـرف التطبيق C بأنـه $x\longmapsto g_x$ بفـرض أن

$$g_x(f)=f(x) \qquad (1)$$

بمعنى أن صورة أي عنصر x من X هو دالي خطي g_x معرف بالمساواة (1) • واذا كان X منتهي البعد ، فان X انعكاسي جبريا ؛ وهـذا أمر أثبتناه في المبرهنـة ٢ــ٩ــ٣ •

لننتقل الآن الى مهمتنا الاصلية • لنأخذ فضاء منظما X وفضاءه الثنوي ، كما عرفناه في ٢ــ١٠ــ٣ ، وأيضا الفضاء الثنوي $(X')'$ للفضاء X' • يرمز لهذا الفضاء بـ X'' ، ويطلق عليه اسم **الفضاء الثنوي الثاني** لـ X •

سنعرف داليا g_x على X' باختيار عنصر مثبت x من X وكتابة أن

$$g_x(f) = f(x) \qquad \text{متغير } f \in X' \qquad (2)$$

ان هذه المساواة تشبه (1) ، الا أنه تجدر بنا الاشارة الى أن f هنـا محدود • كذلك فقد تبين أن g_x محدود أيضا ، الامر الذي يبينه التمهيدية الاساسية التالية :

٤ــ٦ــ١ تمهيدية (نظيـم g_x)

اذا كان x عنصـرا مثبتـا في فضاء منظم X ، فان الدالي g_x المعرف بـ (2) هو دالي خطي محدود على X' ، كما أن لهذا الدالي g_x المنتمي الى X'' النظيم

$$\|g_x\| = \|x\|. \qquad (3)$$

البرهـان :

ان خطية g_x سبق ووجدناها في البند ٢ــ٨ • أما (3) فتنتج من (2) ومن النتيجـة ٤ــ٣ــ٤ :

$$\|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \qquad (4) \quad \blacksquare$$

يقابل كل x من X دالي خطي محدود وحيد $g_x \in X''$ محدد بالمساواة (2) • ان هذا يحدد تطبيقا هو التالي

$$C: X \longrightarrow X'' \qquad (5)$$
$$x \longmapsto g_x.$$

يسمى C **التطبيق القانوني** لـ X في X'' • سنبين أن C خطي ومتباين ويحفظ النظيم ، وهذا أمر يعبر عنه بدلالة ايزومورفيزم فضاءين منظمين كما سبق وذكرنا في البند ٢ــ١٠ :

٢ــ٦ــ٤ تمهيدية (التطبيق القانوني)

التطبيق القانوني C المعرف ب (5) هو ايزوموفيزم للفضاء المنظم X على الفضاء المنظم $\mathcal{R}(C)$ ($\mathcal{R}(C)$ هو مدى C) •

البرهـــان :

ان خطية C تستنتج من البند ٢ــ٨ ذلك أن

$$g_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y) = \alpha g_x(f)+\beta g_y(f).$$

وبوجه خاص ، فان $g_x - g_y = g_{x-y}$ • لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x-y\|.$$

وهذا يبين أن C ايزومتري ، اذن فهو يحفظ النظيم •ان الايزومترية تقتضي التباين• الامر الذي يمكن رؤيته مباشرة من دستورنا • وفي الحقيقة ، فاذا كان $x \neq y$ ، فان $g_x \neq g_y$ وفق الموضوعة (ن٢) من البند ٢ــ٢ • لذا فان C متباين وغامر باعتباره تطبيقا على مداه •∎

يقال عن X انه **طمــور** في فضاء منظم Z اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من Z • ان هذا مماثل لما أوردناه في البنــد ٢ــ٨ ، الا أنه يجدر بنــا ملاحظة أننا نتعامــل هنــا مــع ايزومورفيزمات لفضاءات منظمــة ، أي مــع

ايزومورفيزمات لفضاءات متجهية تحفظ النظيم (راجـع البند ٢ــ١٠) • تبـين التمهيدية٤ــ٦ــ٢أن X طمور في X'' ، ويدعى C الطمر القانوني لـ X في X'' •

إن C ليس عامرا في الحالة العامة ، وبالتالي فـان المدى $\mathcal{R}(C)$ هــو فضاء جزئي تماما من X'' • ان الحالة التي يكون فيها $\mathcal{R}(C)$ مساويا لـ X'' بأكمله هامــة لدرجة تستدعي اعطاءها اسما كما يلي :

٤ــ٦ــ٣ تعريف (الانعكاسية)

نقول عن فضاء منظم X انه **انعكاسي** اذا كان

$$\mathcal{R}(C) = X''$$

حيث $C: X \longrightarrow X''$ هو التطبيق القانوني المعرف بـ (5) و (2) • ∎

لقد قدم هذا المفهوم هان عام ١٩٢٧ م• ، أما اسم «الانعكاسية» فقد أطلقه لورش عام ١٩٣٩ م • لقد أدرك هان أهمية الانعكاسية خلال دراسته للمعادلات الخطية في الفضــاءات المنظمــة ، تلــك الدراسة التــي أدى اليهــا موضوع المعادلات التكاملية •

اذا كــان X انعكاسيا ، فانــه ايزومورفي (وبالتالي ايزومتري) مــع X'' استنادا الىالتمهيدية ٤ــ٦ــ٢ • ومن المهم معرفــة أن العكس ليس صحيحا في الحالة العامة ، كما بين جيمس في عامي ١٩٥٠ م و ١٩٥١ م •

كذلك ، فان التمام لايقتضي الانعكاسية ، الا أننا نجد أن العكس صحيح كما تبين المبرهنة التالية :

٤ــ٦ــ٤ مبرهنة (التمــام)

اذا كان الفضاء المنظم X انعكاسيا ، فانه تام (وبالتالي فضاء باناخ) •

البرهــان :

بما أن X'' هو الفضاء الثنوي لـ X'، فانه تام وفق المبرهنة ٢ــ١٠ــ٤ • ان

انعكاسية X تعني أن $\mathscr{R}(C)=X''$ • وبالتالي فان تمام X ينتج من كون X'' تامــا استنادا الى التمهيدية ٤ـ٦ـ٢ • ∎

الفضاء $\mathbf{R}^n$ انعكاسي ، وهذا ناتج مباشرة عــن ٢ـ١٠ـ٥ • والانعكاسية صفة يتمتع بها كل فضاء منظم منتهي البعد X • وفعلا ، فاذا كان $\dim X<\infty$ ، فان كل دالي خطي على X محدود (راجع ٢ـ٧ـ٨) وبالتالي فان $X'=X^*$ • وهكذا فان الانعكاسية الجبرية لـ X (راجع ٢ـ٩ـ٣) تقتضي ما يلي :

٤ـ٦ـ٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

كل فضاء منظم منتهي البعد انعكاسي •

إن l^p ، حيث $1<p<+\infty$ ، فضاء انعكاسي ؛ وهذا ناتج مــن ٢ـ١٠ـ٧ • كذلك ، فان $L^p[a, b]$ ، حيث $1<p<+\infty$ ، انعكاسي ؛ وهو أمر يمكن اثباتــه • ويمكن أيضا الاثبات بأن الفضاءات التالية غــير انعكاسية : الفضــاء $C[a, b]$ (راجع ٢ـ٢ـ٥) ، والفضاء l^1 (سنورد البرهان بعد قليل) ، والفضاء $L^1[a, b]$ (راجع ٢ـ٢ـ٤) ؛ والفضاءان الجزئيان c و c_0 من l^∞ ، حيث c هو فضــاء كل المتتاليات المتقاربة من الاعداد و c_0 هو فضاء كــل المتتاليات العددية المتقاربة مــن الصفــر •

٤ـ٦ـ٦ مبرهنة (فضاء هلبرت)

كل فضاء H لهلبرت انعكاسي

البرهــان :

سنثبت أن التطبيق القانوني $C: H \longrightarrow H''$ غامر وذلك بتبيان أنه يوجد لكل g من H'' عنصر x مــن H بحيث يكــون $g=Cx$ • لهــذا الغــرض سنعرف $A: H' \longrightarrow H$ بالدستور $Af=z$ ، حيث z معطى بتمثيل ريــس $f(x)=\langle x, z\rangle$ الوارد في ٣ـ٨ـ١ • نحن نعلم من ٣ـ٨ـ١ أن A متباين وايزومتري • كذلك فان A خطي مرافق كمانرى من (16) مــن البند ٤ـ٥ • ان H' تام استنادا الــى

٢-١٠-٤ وهو فضاء لهلبرت مزود بالجداء الداخلي المعرف كالتالي :

$$\langle f_1, f_2\rangle_1 = \langle Af_2, Af_1\rangle.$$

لاحـظ الترتيـب الذي يرد وفقه f_1 و f_2 في كلا الطرفين • من الممكن التحقق ببساطة من (جد ١) ـ (جد ٤) الواردة في البنـد ٣-١ • وبوجه خاص ، فـان (جد ٢) ناتج من كون A خطيا مرافقا :

$$\langle \alpha f_1, f_2\rangle_1 = \langle Af_2, A(\alpha f_1)\rangle = \langle Af_2, \bar{\alpha} Af_1\rangle = \alpha\langle f_1, f_2\rangle_1.$$

ليكن $g \in H''$ اختياريا ، ولنفترض أن تمثيل ريس له هو

$$g(f) = \langle f, f_0\rangle_1 = \langle Af_0, Af\rangle.$$

نحن نذكر الآن بأن $f(x) = \langle x, z\rangle$ ، حيث $z = Af$ • واذا كتبنا $Af_0 = x$ ، نجد أن

$$\langle Af_0, Af\rangle = \langle x, z\rangle = f(x).$$

لذا فاننا نجد أن $g(f) = f(x)$ ؛ أي أن $g = Cx$ استنادا الى تعريف C • ولما كان $g \in H''$ اختياريا ، فان C غامر ، وبالتالي فان H انعكاسي •∎

ان الفصولية أو عدم الفصولية أمـر يمكنه أحيانا أن يلعب دورا ما في البرهان على أن فضـاء ما ليس انعكاسيا • وهـذه الصلة بيـن الانعكاسية والفصولية طريفة وجد بسيطة ، وتمثل المبرهنة ٤-٦-٨ (التي سنوردها الآن) أهم مبرهنة في هذا الصدد ، وهي تنص على أن كون X' فصولا يقتضي أن يكون X كذلك (أما العكس فغير صحيح بعامة) • لذا فاذا كان فضـاء منظـم X انعكاسيا ، فان X'' ايزومورفي مع X استنادا الى ٤-٦-٢ ؛ بحيث أن فصولية X في هذه الحالة تقتضي فصولية X'' ، وبالتالي فان ٤-٦-٨ تقتضي أن يكـون الفضاء X' فصولا كذلك ، نستنتج من هذا النتيجة التالية :

لا يمكن أن يكون الفضاء المنظم الفصول X الذي فضاؤه الثنوي X' غـير فصـول انعكاسيا •

مثــال :

الفضاء l^1 غير انعكاسي ٠

البرهــان :

الفضاء l^1 فصول استنادا الى ١ــ٣ــ١٠ ، في حين أن $l^{1\prime}=l^{\infty}$ ليس كذلك٠ راجع ٢ــ١٠ــ٦ و ١ــ٣ــ٩ ٠

ان المبرهنة المنشودة ٤ــ٦ــ٨ يمكن ايجادها من التمهيدية التالية ٠ ويقدم الشكل (٤٣) ايضاحا بسيطا للتمهيدية ٠

٤ــ٦ــ٧ تمهيدية (وجود الدالي)

ليكن Y فضاء جزئيا تماما ومغلقا في فضاء منظم X ٠ ليكن العنصر $x_0 \in X-Y$ اختياريا ، ولتكن

$$\delta = \inf_{\tilde{y}\in Y} \|\tilde{y}-x_0\| \tag{6}$$

المسافة بين x_0 و Y ، عندئذ يوجد $\tilde{f} \in X'$ بحيث أن

$$\|\tilde{f}\|=1, \qquad \tilde{f}(y)=0 \text{ أيا كان } y\in Y \qquad \tilde{f}(x_0)=\delta. \tag{7}$$

البرهــان :

إن فكرة البرهان بسيطة ٠ لنأخذ الفضاء الجزئي Z من X المولد بـ Y و x_0 ، ولنعرف على Z الدالي الخطي المحدود f على النحو

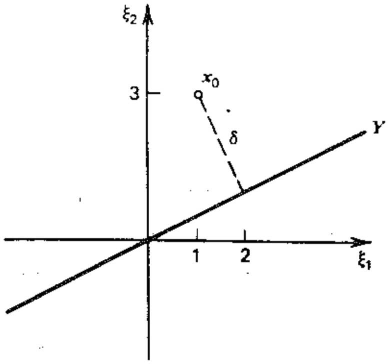
$$f(z)=f(y+\alpha x_0)=\alpha\delta \qquad y\in Y, \tag{8}$$

سنبين أن f يحقق (7) وسنمدد f الى X وفق ٤ــ٣ــ٢ ٠ أما التفاصيل فهي كمــا يلــي :

يوجد لكل z من $Z=\operatorname{span}(Y\cup\{x_0\})$ التمثيل الوحيد

$$z=y+\alpha x_0 \qquad y\in Y.$$

وهذا مستعمل في (8) • ان خطية f واضحة للعيان • كذلك لما كان مغلقا ، فان $\delta>0$ ، وبالتالي فان $f\neq 0$ • اذا افترضنا أن $\alpha=0$ ، فان $f(y)=0$ أيـا كـان y مـن Y • واذا افترضنا أن $\alpha=1$ و $y=0$ ، فاننا نجد $f(x_0)=\delta$ •



الشكل (٤٣)• ايضاح التمهيدية ٤ـ٦ـ٧ في حالة الفضاء الاقليدي $X=\mathbf{R}^3$ ، حيث Y ممثل بـ $\xi_2=\xi_1/2,\ \xi_3=0$ و $x_0=(1,3,0)$ ، وبالتالي يكون $\delta=\sqrt{5}$ ، $Z=\operatorname{span}(Y\cup\{x_0\})$ هو المستوي $\xi_1\xi_2$ و $f(z)=(-\xi_1+2\xi_2)/\sqrt{5}$

سنبين أن f محدود • اذا كان $\alpha=0$ فان $f(z)=0$ • لنفترض أن $\alpha\neq 0$ • عندئذ نجد استنادا الى(6) وبملاحظة أن $-(1/\alpha)y\in Y$ مـا يلـي :

$$|f(z)|=|\alpha|\,\delta=|\alpha|\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|$$

$$\leqq|\alpha|\left\|-\frac{1}{\alpha}y-x_0\right\|$$

$$=\|y+\alpha x_0\|,$$

أي أن $|f(z)|\leqq\|z\|$ • لذا فان f محدود و $\|f\|\leqq 1$ •

سنبين أن $\|f\|\geqq 1$ • يحوي Y وفق تعريف الحد الادنى متتالية (y_n) بحيث

أن $\delta \longrightarrow \|y_n - x_0\|$ • لنفترض أن $z_n = y_n - x_0$ • عندئذ نجد اعتمادا على (8) أن $f(z_n) = -\delta$ ؛ حيث $\alpha = -1$ • كذلك فـان

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geqq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta} = 1$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ • لذا فان $\|f\| \geqq 1$ ، وبالتالي فان $\|f\| = 1$ • واستنادا الى مبرهنة هان ـ باناخ ٤ـ٣ـ٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة ، فيمكن تمديد f الى X دون زيـادة النظيـم •∎

وبالاستعانة بهذه التمهيدية ، يغدو من الممكن الآن اثبات المبرهنة المنشودة التاليـة :

٤ـ٦ـ٨ مبرهنـة (الفصولية)

اذا كان الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X فصولا ، فان X نفسه فصول •

البرهـان :

ليكن X' فصولا • عندئذ تحوي الكـرة الواحدية $U' = \{f \mid \|f\| = 1\} \subset X'$ مجموعة جزئية كثيفة وعدودة أيضا ، ولتكن (f_n) • وبمـا أن $f_n \in U'$ ، فاننـا نجـد أن

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1.$$

واستنادا الى تعريف الحد الاعلى ؛ فمن الممكن العثور على نقاط x_n من X نظيمها 1 بحيـث أن

$$|f_n(x_n)| \geqq \frac{1}{2}.$$

لتكن Y لصاقة المجموعة $\operatorname{span}(x_n)$ • عندئذ يكون Y فصـولا لان Y يحـوي

مجموعة جزئية كثيفة وعدودة ، ونعني بها مجموعة كل التراكيب الخطية للحدود x_n بمعاملات أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية .

سنبين أن $Y=X$. لنفترض مؤقتا أن $Y\neq X$. عندئذ نجد استنادا الى التمهيدية ٤ــ٦ــ٧ نظرا لكون Y مغلقا أنه يوجد $\bar{f}$ من X' يحقق المساواة $\|\bar{f}\|=1$ ، والشرط $\bar{f}(y)=0$ أيا كان y من Y . وبما أن $x_n\in Y$ ، فاننا نجد أن $\bar{f}(x_n)=0$ ، وأنه لدينا أيا كان n

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\leqq|f_n(x_n)|&=|f_n(x_n)-\bar{f}(x_n)|\\&=|(f_n-\bar{f})(x_n)|\\&\leqq\|f_n-\bar{f}\|\,\|x_n\|,\end{aligned}$$

حيث $\|x_n\|=1$. لذا فان $\|f_n-\bar{f}\|\geqq\frac{1}{2}$. لكــن هذا مناقض للفرض القائل بأن (f_n) كثيفة في U' لأن $\bar{f}$ نفسه في U' ، وفعلا فان $\|\bar{f}\|=1$. ∎

مســائل

١ ــ عين الداليين f و g_x في (2) اذا كان $X=\mathbf{R}^n$.

٢ ــ قدم برهانا أبسط على التمهيدية ٤ــ٦ــ٧ للحالة التي يكون فيها X فضاء هلبــرت .

٣ ــ اذا كان فضاء منظم X انعكاسيا ، فبين بأن X' انعكاسي .

٤ ــ بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء باناخ X انعكاسيا ، هو أن يكون فضاؤه الثنوي X' انعكاسيا . (**ملاحظــة** : من الممكن اثبات أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء باناخ الانعكاسي انعكاسي أيضا . أفد من هذه الدعوى دون اثباتها) .

٥ ــ أثبت انطلاقا من افتراضات التمهيدية ٤ــ٦ــ٧ ، أنه يوجد دالــي خطــي

محدود h على X بحيث يكون $\|h\| = 1/\delta$ و $h(y) = 0$ أيا كان y مـــن Y و $h(x_0) = 1$ ∴

٦ ــ بين أنه يوجد لاي فضاءين جزئيين مغلقين ومختلفين Y_1 و Y_2 من فضاء منظم X عادمان مختلفان (راجع المسألة ١٣ من البند ٢ــ١٠) •

٧ ــ ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء منظم X بحيث يكون كـــل f من X' مساو للصفر حيثما كان على Y صفريا حيثما كان على الفضاء X بأكمله • برهـــن أن $Y = X$ •

٨ ــ لتكن M أي مجموعة جزئية من فضاء منظم X • برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_0 \in X$ عنصراً من $A = \overline{\operatorname{span} M}$ هـــو أن يكون $f(x_0) = 0$ أيا كان f من X' الذي يحقق الشرط $f|_M = 0$ •

٩ ــ **(المجموعة الكلية)** • بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M في فضاء منظم كلية في X هو التالي : أيا كان $f \in X'$ الذي يساوي الصفر حيثما كان على M ، فان f يساوي الصفر حيثما كان على X •

١٠ــ بين أنه اذا وجد لفضاء منظم X مجموعة جزئية مستقلة خطيا مؤلفة مـــن n من العناصر ، فان الفضاء الثنوي X' يكون كذلك •

٤ــ٧ مبرهنة الفئة • مبرهنة المحدودية المنتظمة

إن مبرهنة المحدودية المنتظمة (أو **مبدأ المحدودية المنتظمة**) التي تعود لباناخ وشتاينهاوس (١٩٢٧ م•) ذات أهمية بالغة • وفعلا فان كثيرا من الامثلة والنتائج التي ترد في التحليل الرياضي ترتبط بهذه المبرهنة ، أولها بحثه لوبيـــغ (١٩٠٩ م) •وغالبا ما تعتبر مبرهنـــة المحدودية المنتظمة واحدة مـــن الاركـــان الاساسية التي يستند اليها التحليل الدالي في الفضاءات المنظمة ، أمـــا الاركان الاخرى فهي مبرهنة هان ــ باناخ (البندان ٤ــ٢ و ٤ــ٣) ، ومبرهنة التطبيق المفتوح (البند ٤ــ١٢) ، ومبرهنة البيان المغلق (البنـــد ٤ــ١٣) • وخلافـــا

لمبرهنة هان ــ باناخ ، فان المبرهنات الثلاث الاخرى من هذه المبرهنات الاربع تتطلب شرط التمام • وفعلا ، فانها تجسد بعضا من أهم خواص فضاءات باناخ التي قد لا تتمتع بها الفضاءات المنظمة في الحالة العامة •

ومن الاهمية بمكان ملاحظة أننا سنتوصل الى المبرهنات الثلاث جميعا من منطلق واحد • وبعبارة أدق ، فاننا سنثبت ما يسمى مبرهنة بير في الفئات ؛ ومن ثم نشتق منها مبرهنة المحدودية المنتظمة (في هذا البند) ، وأيضا مبرهنة التطبيق المفتوح (في البند ٤ــ١٢) • أما مبرهنة البيان المغلق (في البند ٤ــ١٣) فتستنتج انطلاقا من المبرهنة الاخيرة •

ويوجد لمبرهنة بير في الفئات تطبيقات أخرى في التحليل الدالي ، وهي السبب الاساسي في دخول الفئة في براهين عديدة ، راجع مثلا الكتابين التاليين :

Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis.* New York: Holt, Rinehart and Winston

Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces.* New York: Van Nostrand

سندرج في التعريف ٤ــ٧ــ١ المفاهيم اللازمة لمبرهنة بير ٤ــ٧ــ٢ • ولكل من هذه المفاهيم اسم حديث وآخر قديم نورده بين قوسين • والاسم القديم في طريقه الى الزوال ، ذلك أن كلمة «فئة» تستعمل الآن لغرض رياضي مختلف تماما (لن يرد في هذا الكتاب) •

٤ــ٧ــ١ تعريف (الفئة)

يقال عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها

(أ) **نادرة (او غير كثيفة في اي مكان)** في X اذا لم تحتو لصاقتها $\bar{M}$ نقاطا داخلية (راجع البند ١ــ٣) ،

(ب) **هزيلة (او من الفئة الاولى)** في X اذا كانت M اجتماعا عدودا لجماعة من المجموعات كل منها نادر في X •

(جـ) غير هزيلـة (أو من الفئة الثانية)في X اذا لم تكن M هزيلة في X .

٤ـ٧ـ٢ مبرهنة بير في الفئات (الفضاءات المترية التامة)

اذا كان الفضاء المتري غير الخالي X تاما ، فانه هزيل في نفسه .

لذا فاذا كان X غير الخالي تاما وكان

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (1)$$

مغلقة A_k

فان واحدة على الاقل من المجموعات A_k تحوي مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية .

البرهـان :

ان فكرة البرهان سهلة . لنفترض أن الفضاء المتري التام غير الخالي X هزيل في نفسه . عندئذ يكون

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \qquad (1^*)$$

حيث M_k نادرة في X . سننشيء متتالية كوشـي (p_k) بحيث تكون نهايتها p (التي نحكم بوجودها بسبب التمام) غير موجودة في أي مـن المجموعات M_k ، وهذا يناقض التمثيل (1^*) .

ان M_1 نادرة في X فرضا ، وبالتالي فان $\bar{M}_1$ تعريفا لا تحوي مجموعة مفتوحة غير خالية ، في حين أن X تحوي مثل هذه المجموعة (المجموعة X نفسها مثلا) . وهذا يقتضي أن يكون $\bar{M}_1 \neq X$. لذا فان المتممة $\bar{M}_1^{C} = X - \bar{M}_1$ لـ $\bar{M}_1$ ليسـت خالية ومفتوحة . وبالتالي فيمكن اختيار نقطة p_1 في $\bar{M}_1^{C}$ وكرة مفتوحة حولها ، ولتكـن مثـلا

$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subset \bar{M}_1^{C} \qquad \varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}.$$

ان M_2 هـي فرضـا نادرة في X ، وبالتالي فـان $\bar{M}_2$ لاتحوي مجموعة مفتوحة غير خالية . لذا ، فانها لاتحوي الكـرة المفتوحة $B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$. وهـذا يقتضي أن

تكون المجموعة $\bar{M}_2^c \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ ليست خالية ومفتوحة ، وبالتالي فيمكن اختيار كرة مفتوحة في هذه المجموعة ، ولتكن مثلا

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subset \bar{M}_2^c \cap B(p_1; \tfrac{1}{2}\varepsilon_1) \qquad \varepsilon_2 < \tfrac{1}{2}\varepsilon_1.$$

واستنادا الى طريقة الاستقراء الرياضي ، فاننا نجد متتالية من الكرات

$$B_k = B(p_k; \varepsilon_k) \qquad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

بحيث أن $B_k \cap M_k = \varnothing$ وأن

$$B_{k+1} \subset B(p_k; \tfrac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

ولما كان $\varepsilon_k < 2^{-k}$ ، فان متتالية المراكز (p_k) هي متتالية كوشي ، وبالتالي فانها تتقارب من عنصر وليكن p مثلا في X ؛ ذلك لكون X تاما فرضا • كذلك ، فانه اذا كان m عددا ما و n عددا آخر بحيث يكون $n > m$ ، فان $B_n \subset B(p_m; \frac{1}{2}\varepsilon_m)$ ، وبالتالي فان

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leqq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p) \longrightarrow \tfrac{1}{2}\varepsilon_m \end{aligned}$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ • لذا فان $p \in B_m$ أيا كان m • ولما كان $B_m \subset \bar{M}_m^c$ ، فاننا نرى أن $p \notin M_m$ أيا كان m ، واذن نجد أن $p \notin \bigcup M_m = X$ ، وهذا يناقض كون $p \in X$ وبذا يكتمل إثبات مبرهنة بير • ∎

وتجدر بنا الاشارة الى أن عكس مبرهنة بير ليس صحيحا بعامة • وقد ورد مثال على فضاء منظم غير تام دون أن يكون هزيلا في نفسه • وهذا المثال وارد في الصفحتين ٣ و ٤ من كتاب :

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann

سنشتق الآن من مبرهنة بير مباشرة مبرهنة المحدودية المنتظمة المنشودة •

وتنص هذه المبرهنة على أنه اذا كان X فضاء باناخ ؛ وأنه اذا كانت متتالية من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ محدودة في كل نقطة x من X ، فان هذه المتتالية محدودة بانتظام • وبعبارة أخرى ، فان المحدودية النقطية تقتضي محدودية بمفهوم أقوى ، ألا وهي المحدودية المنتظمة • (ان العدد الحقيقي c_x في المتباينة (2) الواردة بعد قليل ، سيتغير في الحالة العامة مع x ، ونعبر عن هذا بوضع الدليل في أسفل x ، والمهم في الامـــر هو أن c_x غير تابعة لـ n) •

٤ــ٧ــ٣ مبرهنة المحدودية المنتظمة

لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة $T_n: X \to Y$ من فضاء باناخ X الى الفضاء المنظم Y بحيث تكون المتتالية $(\|T_n x\|)$ محدودة أيا كان x من X ، كـان يكـون مثـلا

$$n = 1, 2, \cdots, \qquad \|T_n x\| \leqq c_x \qquad (2)$$

حيث c_x عدد حقيقي • عندئذ تكون متتالية النظائم $\|T_n\|$ محدودة ، بمعنى أنـه يوجد عدد c بحيث يكون

$$n = 1, 2, \cdots. \qquad \|T_n\| \leqq c \qquad (3)$$

البرهـان :

لنقابل كل عدد k من $\mathbf{N}$ بالمجموعة $A_k \subset X$ المؤلفة كل من العناصـر x المحققة للمتباينة

$$\text{أيا كان } n \qquad \|T_n x\| \leqq k$$

ان A_k مغلقة ، ذلك أنه اذا كان x عنصرا ما من $\bar{A}_k$ ، فثمـة متتالية (x_j) في A_k تتقارب من x • وهذا يعني أنه يقابل كل عـدد مثبت n المتباينـة $\|T_n x_j\| \leqq k$ ، ونحصل بالتالي على المتباينة $\|T_n x\| \leqq k$ ، ذلك أن T_n مستمر ، وكذلك النظيـم (راجع البند ٢ــ٢) • لذا فان $x \in A_k$ ، وبالتالي فان A_k مغلقة •

نلاحظ من (2) أن كل x من X ينتمي الى مجموعة ما A_k وبالتالي فان

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

وبما أن X تام ، فانه يترتب على مبرهنة بير أن احدى المجموعات A_k تحوي كرة مفتوحة ، كأن يكون مثلا

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0}. \tag{4}$$

ليكن x عنصرا اختياريا غير صفري من X • لنضع

$$z = x_0 + \gamma x \qquad \gamma = \frac{r}{2\|x\|}. \tag{5}$$

عندئذ يكون $\|z - x_0\| < r$ ، وبالتالي فان $z \in B_0$ • وهكذا فاننا نجد انطلاقا من (4) ومن تعريف A_{k_0} أن $\|T_n z\| \leqq k_0$ أيا كان n • كذلك ، فان $\|T_n x_0\| \leqq k_0$ نظرا لكون $x_0 \in B_0$ • ونجد من (5) أن

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0).$$

وبالتالي فاننا نجد أيا كان n ما يلي :

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \leqq \frac{1}{\gamma}(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leqq \frac{4}{r}\|x\|\, k_0.$$

يترتب على هذا أنه أيا كان n فان

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leqq \frac{4}{r}\, k_0,$$

وهذا ليس سوى (3) بعد تعويض $c = 4k_0/r$ • ∎

تطبيقـــات

٤–٧–٤ فضاء الحدوديات

ان الفضاء المنظم X لكل الحدوديات المزودة بالنظيم المعرف بـ

$$\|x\| = \max_i |\alpha_i| \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \cdots \text{ هي معاملات } x) \tag{6}$$

ليس تاما .

البرهـان :

لنشكل متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على X تحقق (2) دون (3) ، وبالتالي فان X لايمكن أن يكون تاما .

يمكننا كتابة حدودي $x \neq 0$ درجته N_x بالصيغة

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \qquad (\alpha_j = 0 \text{ عندما } j > N_x).$$

(في الحالة $x = 0$ ، فان الدرجة لا تتحدد بالتعريف العادي للدرجة ، الا أن هذا أمر ليس بذي بال هنا) . وسنأخذ كمتتالية للمؤثرات علـى X متتالية الداليات $T_n = f_n$ المعرفـة كمـا يلـي :

$$T_n 0 = f_n(0) = 0, \qquad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}. \tag{7}$$

إن f_n خطي . كذلك فان f_n محدود ذلك أن $|\alpha_j| \leqq \|x\|$ وفق (6) ؛ وبالتالي فان $|f_n(x)| \leqq n\|x\|$. وفضلا عن ذلك ، فان المتتالية $(|f_n(x)|)$ تحقق (2) أيـا كـان العنصر المثبت x في X ، ذلك أنه يوجـد في الحدودي x الـذي درجته N_x معاملات عددها $N_x + 1$ ، وبالتالي فاننـا نجد استنادا الى (7) أن

$$|f_n(x)| \leqq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x$$

وهي من الصيغة (2) .

سنبـين الآن (f_n) لا تحـقق (3) ، أي أنـه لا يوجـد c بحيث يكون $\|T_n\| = \|f_n\| \leqq c$ أيا كان n . ان هذا أمر نقوم به باختيار حدوديات غير مؤاتية . ونختار لـ f_n الحدودي x المعرف كالتالي

$$x(t) = 1 + t + \cdots + t^n.$$

عندئذ يكون $\|x\| = 1$ وفق (6) ونجد أن

$$f_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = n\|x\|.$$

لذا فان $\|f_n\| \geqq |f_n(x)|/\|x\| = n$ ، وبالتالي فان $(\|f_n\|)$ غير محدودة ∎

٤ــ٧ــ٥ متسلسلات فوربيه

من المعلوم ، كما سبق ورأينا في ٣ــ٥ــ١ ، أن متسلسلة فوربيه لدالة دورية معطاة x دورها 2π هي من الشكل

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \tag{8}$$

وأن معاملات فوربيه لـ x تعطى بدستوري أولر التاليين

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos mt\, dt, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin mt\, dt. \tag{9}$$

[كتبنا $a_0/2$ في (8) كي نجد دستورين فقط في (9) ، في حين أنه عندما كتبنا في ٣ــ٥ــ١ ، فاننا احتجنا الى ثلاثة دساتير] •

من المعلوم أن المتسلسلة (8) قد تتقارب حتى في نقاط تكون فيها x غير مستمرة (راجع المسألة ١٥ التي تمدنا بمثال بسيط عن هذا) • وهـذا يبين أن الاستمرار ليس شرطا لازما للتقارب • ومن المدهش هنا أن يكون شرط الاستمرار غير كاف كذلك(*) • وفي الحقيقة ، فانه اذا استخدمنا مبرهنة المحدودية المنتظمة فانه يمكن اثبات ما يلي :

ثمة دوال حقيقية مستمرة بحيث أن متسلسلات فوربيه لهذه الدوال تتباعد في نقطة معطاة t_0 •

البرهـان :

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة التي دورها

* إن شرط الاستمرار ووجود مشتق ايمن ومشتق ايسر في نقطة t_0 كاف للتقارب في t_0 . راجع الصفحة ٧٠ من كتاب W. Rogosinski (١٩٥٩) •

2π، حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max |x(t)|. \tag{10}$$

ان X هو فضاء باناخ استنادا الى ١ــ٥ــ٥ حيث $a=0$ و $b=2\pi$ • من الممكن أخذ $t_0=0$ دون مس العمومية • لاثبات دعوانا ، سنطبق مبرهنــة المحدوديــة المنتظمة ٤ــ٧ــ٣ على $T_n = f_n$ ، حيث $f_n(x)$ هــو القيمة في $t=0$ للمجموع الجزئي للحدود الاولى التي عددها n من متسلسلةفورييه لـ x • وبما أنهعندما $t=0$ تكون الحدود الجيبية صفرية وتكون حدود جيوب التمام واحدية ، فاننا نستنتج من (8) و (9) أن

$$f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt\right] dt.$$

سنعين الدالة الممثلة بالمجموع الوارد تحت اشارة المكاملة • لهذا نحسب

$$2\sin\tfrac{1}{2}t \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \sum_{m=1}^{n} 2\sin\tfrac{1}{2}t\cos mt$$

$$= \sum_{m=1}^{n} [-\sin(m-\tfrac{1}{2})t + \sin(m+\tfrac{1}{2})t]$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}t + \sin(n+\tfrac{1}{2})t,$$

حيث نجد العبارة الاخيرة بملاحظة أن أكثر الحدود تحذف أزواجا • وبالتقسيم على $\sin\frac{1}{2}t$ واضافة 1 الى الطرفين ، فاننا نجد أن

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

وبالتالي ، فان الدستور الذي يعطــي $f_n(x)$ يمكــن أن يكتب بالصيغة البسيطة التاليــة

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)\,dt; \qquad q_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}. \tag{11}$$

ويمكننا بالاستعانة بهذا أن نبين بأن الدالي الخطي f_n محدود • وفعلا فانه يترتب على (10) و(11) أن

$$|f_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt = \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt.$$

ونرى من هنا أن f_n محدود • وفضلا عن ذلك ، فانه اذا أخذنا الـ sup عندما تمسح x جميع العناصر التي نظيمها 1 ، فاننا نجد أن

$$\|f_n\| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt.$$

سنبين الآن أن الاشارة في هذه العلاقة هي اشارة التساوي • ولهذا نكتب

$$|q_n(t)| = y(t) q_n(t)$$

حيث $y(t) = +1$ في كل نقطة t يكون فيها $q_n(t) \geqq 0$ ، وحيث $y(t) = -1$ فيما عدا ذلك • ان y ليست مستمرة ، بيد أنه اذا كان ε عددا موجبا معطى ، فانه يمكن ربطه بدالة مستمرة x نظيمها 1 بحيث أنه من أجل x هذه يكون

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] q_n(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

وبكتابة هذا على شكل مجموع تكاملين ، والاستعانة بـ (11) نجد أن

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t)\, dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t)\, dt \right| = \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt \right| < \varepsilon.$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختياري وأن $\|x\| = 1$ ، فاننا نجد الدستور المنشود

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt. \tag{12}$$

سنبين أخيرا أن المتتالية $(\|f_n\|)$ غير محدودة • فاذا عوضنا في (12) عبارة q_n من (11) ، وأفدنا من أن $|\sin \frac{1}{2}t|<\frac{1}{2}t$ عندما يكون $t\in(0,2\pi]$ ، ووضعنا $(n+\frac{1}{2})t=v$ فاننا نجد ما يلي :

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt$$

$$>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$\geqq\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|\,dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\quad\longrightarrow\quad\infty\qquad\text{عندما } n\longrightarrow\infty$$

لكون المتسلسلة التوافقية متباعدة • لذا فالمتتالية $(\|f_n\|)$ غير محدودة ؛ وبالتالي فان (3) (حيث $T_n=f_n$) غير صحيحة • وبما أن X تام ، فاننا نستنتج أن (2) لا يمكن أن تصح من أجل جميع العناصر x ، وبالتالي فلابد من وجود x من X بحيث تكون$(|f_n(x)|)$ غير محدودة • وهذايعني استنادا الى تعريف f_n أن متسلسلة فورييه للدالة x هذه متباعدة في النقطة $t=0$ • ∎

لاحظ أن برهاننا للوجود هذا لا ينبئنا عن كيفية ايجاد مثل هذه الدالة المستمرة x بحيث تتباعد متسلسلة فورييه لـ x في نقطة $t=t_0$ • وقد أورد أمثلة على مثل هذه الدوال كل من فيجير Fejér (١٩١٠ م) وروغوزينسكي Rogosinski (١٩٥٩ م) •

مسائل

١ ــ ما هي فئة مجموعة كل الاعداد العادية (آ) في $\mathbf{R}$ ، (ب) في نفسها (حيث المجموعة مزودة بالمترك المألوف) ؟

٢ ــ ما هي فئة مجموعة كل الاعداد الصحيحة (آ) في $\mathbf{R}$ ، (ب) في نفسها (حيث المترك هو مقصور مترك القيمة المطلقة) ؟

٣ ــ أوجد المجموعات النادرة في فضاء متري متقطع X (راجع ١ــ١ــ٨) .

٤ ــ أوجد مجموعة جزئية كثيفة وهزيلة في $\mathbf{R}^2$.

٥ ــ بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء متري X نادرة هو أن تكون $(\bar{M})^c$ كثيفة في X .

٦ ــ بين بأن المتممة M^c لمجموعة جزئية هزيلة M في فضاء متري تام X غير هزيلة.

٧ ــ **(الرنيـــن)** ليكن X فضاء باناخ و Y فضـــاء منظمـــا و $T_n \in B(X, Y)$ ، $n = 1, 2, \cdots$ مؤثرات بحيث يكون $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. بين أنه توجد نقطة $x_0 \in X$ بحيث يكون $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$. [تسمى غالبا النقطة x_0 **نقطة الرنين** ، ومسألتنا توحي باستعمال مصطلح **مبرهنة الرنين** لمبرهنة المحدودية المنتظمة].

٨ ــ بين بأن تمام الفضاء X ضروري في المبرهنة ٤ــ٧ــ٣ ولا يمكن حذفه . [خذ الفضاء الجزئي X من l^∞ المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_j)$ بفرض أن $\xi_j = 0$ عندما $j \geqq J \in \mathbf{N}$ ، حيث J يتعلق بـ x ، ولنفترض أن T_n معرف كمـــا يلـــي : $T_n x = f_n(x) = n\xi_n$] .

٩ ــ ليكن $T_n = S^n$ ، حيث يعرف المؤثر $S: l^2 \longrightarrow l^2$ كما يلي :

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \longmapsto (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \cdots).$$

أوجد حدا لـ $\|T_n x\|$ ، أوجد $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|$ و $\|T_n\|, \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$.

١٠ــ **(الفضاء** c_0 **)** لتكن $y = (\eta_j)$ و $\eta_j \in \mathbf{C}$ بحيث أن $\sum \xi_j \eta_j$ تتقارب أيا كان

$x=(\xi_j)\in c_0$ ، حيث $c_0\subset l^\infty$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من كـل المتتاليات العقدية المتقاربة من الصفر • بين بأن $\sum|\eta_j|<\infty$ (استعن بـ ٤ــ٧ــ٣) •

١١ــ ليكن X فضاء باناخ و Y فضاء منظما و $T_n\in B(X,Y)$ متتالية بحيث تكون (T_nx) متتالية كوشي في Y أيا كان x من X • بين أن $(\|T_n\|)$ محدودة •

١٢ــ اذا كان Y في المسألة ١١ تاما أيضا ، فبين أن $T_nx\longrightarrow Tx$ ، حيث $T\in B(X,Y)$ •

١٣ــ اذا كانت (x_n) متتالية في فضاء باناخ X بحيث أن $(f(x_n))$ محدودة أيا كان f من X' ، فبين أن $(\|x_n\|)$ محدودة •

١٤ــ اذا كان X و Y فضاءي باناخ وكان $T_n\in B(X,Y)$ ، $n=1,2,\cdots$ ، فبين بأن الدعاوي التالية متكافئة :

(آ) $(\|T_n\|)$ محدودة ،

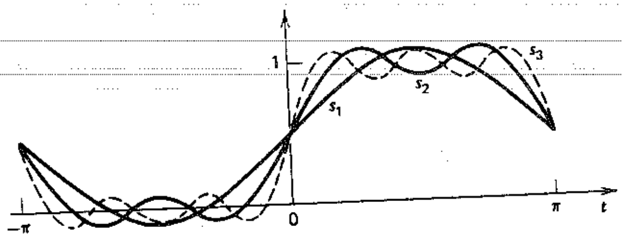
(ب) $(\|T_nx\|)$ محدودة أيا كان x من X ؛

(جـ) $(|g(T_nx)|)$ محدودة أيا كان x من X وأيا كان g من Y' •

١٥ــ لتبيان أن متسلسلة فورييه لدالة x قد تتقارب في نقطة تكون فيها x غير مستمرة ، أوجد متسلسلة فورييه للدالة

$$x(t)=\begin{cases}0 & -\pi\leqq t<0 \quad \text{اذا كان}\\ 1 & 0\leqq t<\pi \quad \text{اذا كان}\end{cases}\qquad x(t+2\pi)=x(t).$$

ارسم بيان x وبيانات المجاميع الجزئية s_0, s_1, s_2, s_3 ، وقارن بالشكل (٤٤) • بين بأن قيمة المتسلسلة في النقاط $t=\pm n\pi$ هي $1/2$ ، وهو الوسط الحسابي للنهايتين اليمنى واليسرى لـ x ، إن هـذا سلوك نموذجي لمتسلسلات فورييـه •



الشكل (٤٤) • المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى s_1 و s_2 و s_3 في المسالة ١٥

٤ــ٨ التقارب القوي والتقارب الضعيف

لقد سبق وعرفنا في التحليل الرياضي الابتدائي أنماطا مختلفة من التقارب (تقارب عادي ، وشرطي ، ومطلق ، ومنتظم) • وكان من نتيجة هذا أن نظرية المتتاليات والمتسلسلات وتطبيقاتها تمتعت بقدر كبير من المرونة • ان الوضع مماثل في التحليل الدالي ، بل اننا هنا أمام تنوع أكبر للامكانات ذات الاهمية العملية • وفي هذا البند ، سنعنى في المقام الاول « بالتقارب الضعيف » ، الذي يشكل واحدا من المفاهيم الرئيسية • وتقديمنا له الآن يعود الى أن نظريته تفيد الى درجة كبيرة من مبرهنة المحدودية المنتظمة التـي بحثناها في البند السابق • وفعلا فان التقارب الضعيف واحد من أهم تطبيقات هذه المبرهنة •

لقد سبق وعرفنا تقارب متتاليات عناصرها تنتمي الى فضاء منظم في البند ٢ــ٣ ، وسنسمي هذا التقارب من الآن فصاعدا **التقارب القوي** بهدف تمييزه عن « التقارب الضعيف » الذي سنورد تعريفه بعد قليل • لذا فاننا نورد أولا ما يلي :

٤ــ٨ــ١ تعريف (التقارب القوي)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها **متقاربة بقوة (او متقاربة في النظيم)** اذا وجد x من X بحيث يكون

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

ونعبر عن هذا بأن نكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

أو أن نكتب بشكل أبسط

$$x_n \longrightarrow x.$$

تسمى x **النهاية القوية** للمتتالية (x_n) ، ونقول إن (x_n) **تتقارب بقوة من** x • ∎

أما التقارب الضعيف ، فانه يعرف بدلالة الداليات الخطية المحدودة على X كما يلي :

٤ــ٨ــ٢ تعريف (التقارب الضعيف)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها **متقاربة بضعف** اذا وجد x من X بحيث أنه أيا كان f من X' فان

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

ونكتب هذا بالشكل

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

أو بالشكل $x_n \longrightarrow x$ • يسمى العنصر x **النهاية الضعيفة** لـ (x_n) ، ونقول إن (x_n) **تتقارب بضعف من** x • ∎

لاحظ أن التقارب الضعيف يعني تقارب المتتاليات العددية $a_n = f(x_n)$ أيا كان f من X' •

للتقارب الضعيف تطبيقات عدة في التحليل الرياضي (في حساب التغيرات وفي النظرية العامة للمعادلات التفاضلية مثلا) • ويوضح هذا المفهوم مبدأ

أساسيا في التحليل الدالـي • ونعني به حقيقـة أن دراسة الفضاءات غالبا ما ترتبط بدراسة فضاءاتها الثنوية •

لتطبيق التقارب الضعيف ، فانه يلزمنا التعرف على بعض خواصه الاساسية التي سننص عليها في التمهيدية التالية • سيلاحظ القارىء أننا نستعمل في الاثبات مبرهنة هان ــ باناخ (مـن خلال ٤ــ٣ــ٤ و ٤ــ٦ــ١) ومبرهنـة المحدودية المنتظمة • ان هذا يبين أهمية هاتين المبرهنتين فيما يخص التقارب الضعيف •

٤ــ٨ــ٣ تمهيدية (التقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضـاء منظـم X ، كان يكـون مثـلا $x_n \xrightarrow{w} x$ • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) النهاية الضعيفة x لـ (x_n) وحيـدة •

(ب) كل متتالية جزئية من (x_n) تتقارب بضعف من x •

(جـ) المتتالية $(\|x_n\|)$ محـدودة •

البرهـان :

(آ) لنفتـرض أن $x_n \xrightarrow{w} y$ وأيضـا $x_n \xrightarrow{w} x$ • عندئـذ يكـون $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ وأيضا $f(x_n) \longrightarrow f(y)$ • ولما كانت $(f(x_n))$ متتالية عددية ، فـان نهايتها وحيدة • اذن $f(x)=f(y)$ ، أي أنه أيا كان f من X' فان

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=0.$$

وهذا يقتضي أن يكون $x-y=0$ استنادا الى النتيجة ٤ــ٣ــ٤ ، وبالتالي فـان النهاية الضعيفة وحيدة •

(ب) ان هذا ينتج من كون $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، وبالتالي فان كل متتالية جزئية من $(f(x_n))$ متقاربة ولها نهاية المتتالية نفسها •

(جـ) بما أن $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، فانها محدودة ، وليكن

مثلا $|f(x_n)| \leqq c_f$ أيا كان n ، حيث c_f ثابت يتعلق بـ f وليس بـ n • وباستعمال التطبيق القانوني $C: X \longrightarrow X''$ (البند ٤ــ٦) فيمكن تعريف g_n من X'' كما يلي :

$$g_n(f) = f(x_n) \qquad f \in X'.$$

(نكتب g_n بدلا من g_{x_n} لتجنب كتابة أدلة للادلة) • عندئذ نجد لكل n أن

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leqq c_f,$$

أي أن المتتالية $(|g_n(f)|)$ محدودة أيا كان f من X' • بما أن X' تام وفق ٢ــ١٠ــ٤، فان مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤ــ٧ــ٣ قابلة للتطبيق وتقتضي ان تكون $(\|g_n\|)$ محدودة • وبما أن $\|g_n\| = \|x_n\|$ استنادا الى ٤ــ٦ــ١ فان (جـ) صحيح •∎

قد يعجب القارىء لكون التقارب الضعيف لا يلعب دورا في التحليل الرياضي ، ان السبب البسيط لهذا يعود الى أن التمييز بين التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاءات المنتظمة منتهية البعد يزول تماما • سنثبت الآن صحة هذا الكلام ، كما نبرر مصطلحي « القوي » و « الضعيف » •

٤ــ٨ــ٤ مبرهنة (التقارب القوي والتقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) ان التقارب القوي يقتضي التقارب الضعيف ، والنهاية واحدة •

(ب) ان عكس (آ) ليس صحيحا بعامة •

(جـ) اذا كان $\dim X < \infty$ ، فان التقارب الضعيف يقتضي التقارب القوي •

البرهــان :

(آ) ان $x_n \longrightarrow x$ تعني تعريفا أن $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ ، وهذا يقتضي أنه أيا كان f من X فان

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqq \|f\| \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

وبالتالي فان $x_n \xrightarrow{w} x$

(ب) يمكن التحقق من هذا عن طريق متتالية متعامدة منظمــة (e_n) في فضاء هلبرت H • وفعلا ، فانه يوجد لكل f مــن H' تمثيل ريس $f(x)=\langle x, z\rangle$ • لذا فان $f(e_n)=\langle e_n, z\rangle$ • كذلك ، فان متباينة بسل هي (راجع ٣ـ٤ـ٦)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z\rangle|^2 \leqq \|z\|^2.$$

لذا فان المتسلسلة الواردة في الطرف الايسر متقاربة ؛ وبالتالي فان حدودها يجب أن تتقارب من الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون

$$f(e_n)=\langle e_n, z\rangle \longrightarrow 0.$$

وبما أن $f \in H'$ اختياري ، فاننــا نرى أن $e_n \xrightarrow{w} 0$ ، في حين أن (e_n) لا تتقارب بقوة نظرا لكون

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle = 2 \qquad (m \neq n).$$

(جـ) لنفترض أن $x_n \xrightarrow{w} x$ وأن $\dim X = k$ • لتكن $\{e_1, \cdots, e_k\}$ أي قاعدة لـ X ، وليكن مثلا

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k$$

و

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k.$$

لدينا فرضــا $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ أيا كان f من X' • لنأخذ بشكل خاص الداليات f_1 , $\ldots$, f_k المعرفة كما يلي :

$$f_j(e_j)=1, \qquad f_j(e_m)=0 \qquad (m \neq j).$$

(نذكر بأن هذه هي القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, \cdots, e_k\}$ ، راجع البند ٢ـ٩) عندئذ يكــون

$$f_j(x_n)=\alpha_j^{(n)}, \qquad f_j(x)=\alpha_j.$$

لذا فان $f_j(x_n) \longrightarrow f_j(x)$ تقتضي أن يكـون $\alpha_j^{(n)} \longrightarrow \alpha_j$ • نستنتج مـن هـذا مباشـرة أن

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \, \|e_j\| \quad \longrightarrow \quad 0$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ؛ الامر الذي يبين بأن (x_n) متقاربة بقوة من x • ∎

ومن الطريف أن نلاحظ بأنه توجد أيضا فضاءات غير منتهية البعد يكون فيها مفهوما التقارب القوي والتقارب الضعيف متكافئين • وقد بين شور Schur (١٩٢١ م•) أن l^1 هو أحد هذه الفضاءات •

أمثلـة

٤ـ٨ـ٥ فضـاء هلبرت

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في فضاء هلبرت هو أن يكـون $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$ ايا كان z في هذا الفضاء •

البرهـان :

هذا أمر واضح استنادا الى ٣ـ٨ـ١ •

٤ـ٨ـ٦ الفضـاء l^p

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في الفضاء l^p ، حيث $1 < p < +\infty$ ، هـو أن يتحقق الشرطان التاليان :

(آ) أن تكـون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •

(ب) اذا كان j عددا طبيعيا مثبتا ، فان $\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j$ عنـدما $n \longrightarrow \infty$ •

لدينـا هنـا $x_n = (\xi_j^{(n)})$ $\quad x = (\xi_j)$

البرهـــان :

الفضاء الثنوي لـ l^p هو l^q ، راجع ٢ــ١٠ــ٧ • وكقاعدة لشاودر في l^q نورد المتتالية (e_n) ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ متتالية جميع حدودها أصفار عدا الحد النوني• ان $\text{Span}\,(e_n)$ كثيفة في l^q ، وبالتالي فاننا نصل الى ما نبغي استنادا الى التمهيدية التاليـــة :

٤ــ٨ــ٧ تمهيدية (التقارب الضعيف)

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في فضاء منظم X هو أن يتحــقق الشــرطان التاليــان :

(آ) ان تكون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •

(ب) اذا كان f أي عنصر مــن مجموعــة جزئية كليــة M مــن X' ، فــان $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ •

البرهـــان :

في حالة التقارب الضعيف ، فان (آ) ينتج من التمهيدية ٤ــ٨ــ٣ ؛ ويكون (ب) تافهــا •

وبالعكس ، لنفترض تحقق (آ) و (ب) • لنأخذ أي f من X' ، ولثبت أن $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ ، الامر الذي يعني تعريفا ان التقارب ضعيف •

لدينا استنادا الى (آ) أن $\|x_n\| \leqq c$ أيا كان n ، وهكذا فان $\|x\| \leqq c$ حيث c عدد كبير بقدر كاف • وبما أن M كلية في X' ؛ فانــه يوجد لكــل f في X' متتالية (f_j) في $\text{span}\, M$ بحيث أن $f_j \longrightarrow f$ • وبالتالي ، يمكننا أن نجد لكــل عدد موجب ε عددا طبيعيا j بحيث يكون

$$\|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وفضلا عن ذلك ، فلما كان $f_j \in \text{span}\, M$ وفق الفرض (ب) ، فيوجد عدد طبيعي N بحيث أنه اذا كان n أي عدد طبيعي يحقق الشرط $n > N$ فان

$$|f_j(x_n)-f_j(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

وباستخدام هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فاننا نجد عندما $n>N$ أن

$$|f(x_n)-f(x)| \leqq |f(x_n)-f_j(x_n)|+|f_j(x_n)-f_j(x)|+|f_j(x)-f(x)|$$

$$<\|f-f_j\|\,\|x_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_j-f\|.\|x\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3c}\,c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\,c=\varepsilon.$$

ولما كان $f\in X'$ اختياريا ، فان هذا يثبت أن المتتالية (x_n) تتقارب بضعف من x • ∎

مسائل

١ ــ **(التقارب النقطي)** اذا كان $x_n\in C[a,b]$ وكان $C[a,b]$ $x_n \xrightarrow{w} x$ ، فبين أن (x_n) متقاربة نقطيا على $[a,b]$ ، أي أن $(x_n(t))$ متقاربة أيا كان t مــن $[a,b]$ •

٢ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T\in B(X,Y)$ ، ولتكــن (x_n) متتالية في X • فاذا كان $x_n \xrightarrow{w} x_0$ ، أثبت أن $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$ •

٣ ــ اذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين في فضاء منظم واحد X ، فبين أن $x_n \xrightarrow{w} x$ و $y_n \xrightarrow{w} y$ يقتضيــان أن $x_n+y_n \xrightarrow{w} x+y$ وأيضــا أن $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x$ حيــث α أي عــدد •

٤ ــ أثبت أن $x_n \xrightarrow{w} x_0$ يقتضي أن يكون $\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\| \geqq \|x_0\|$ • (أفد من المبرهنة ٤ــ٣ــ٣) •

٥ ــ اذا كان $x_n \xrightarrow{w} x_0$ في فضــاء منظــم X ، فبــين أن $x_0\in\bar{Y}$ ، حيــث حيــث $Y=\text{span}\,(x_n)$ • (استخدم التمهيدية ٤ــ٦ــ٧) •

٦ ــ لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضــاء منظــم X ، ولنفترض أن

$x_n \xrightarrow{w} x_0$ • برهن على وجود متتالية (y_m) حدودها تراكيب خطية لعناصر من (x_n) بحيث تتقارب هذه المتتالية بقوة من x_0 •

٧ ــ بين أن أي فضاء جزئي مغلق Y من فضاء منظم X يحوي نهايات كل المتتاليات المتقاربة بضعف من عناصر Y •

٨ ــ **(متتالية كوشي الضعيفة)** • **متتالية كوشي الضعيفة** في فضاء منظم حقيقي أو عقدي X هي متتالية (x_n) في X بحيث أنه اذا كان f أي عنصر من X' ، فان المتتالية $(f(x_n))$ تكون متتالية كوشي في $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$ على الترتيب• (لاحظ أ ن $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ تكون عندئذ موجودة) • بيــن أن متتالية كوشــي الضعيفة محدودة •

٩ ــ لتكن A مجموعة في فضاء منظم X بحيث تكون كل مجموعة جزئية غــير خالية في A حاوية على متتالية ضعيفة لكوشي • بين أن A محدودة •

١٠ــ **(التمام الضعيف)** يقال عن فضاء منظم X انه **تام بضعف** اذا كانت كــل متتالية ضعيفة لكوشي في X متقاربة بضعف في X • فاذا كان X انعكاسيا، بين عندئذ أن X تام بضعف •

٤ــ٩ تقارب متتاليات المؤثرات والداليات

ان متتاليات المؤثرات والداليات الخطية والمحدودة تنشأ مرارا لدى الصياغة المجردة لمواضيع معينة ، مثــل مسائل تقارب متسلسلات فوريــه ، أو متتاليات حدوديات الاستكمال interpolation ، أو طرائق المكاملة العددية ، وغيرها • وفــي مثل هذه الحالات نكون عادة معنيين بتقارب تلك المتتاليات للمؤثرات أو الداليات التي تكون متتالية النظائم المقابلة لها محدودة أو تحقق خواص مماثلة •

وتبين التجربة أنه في حال المتتاليات التي حدودها **عناصر** من فضاء منظــم ، ان التقارب القوي والتقارب الضعيف كمــا عرفناهما في البند السابق همــا

مفهومان مفيدان • وفي حال المتتاليات التي حدودها **مؤثرات** $T_n \in B(X, Y)$ ، فقد تبين أن ثمة ثلاثة أنماط من التقارب ذات قيمة نظرية وعملية كذلك ، وهي :

(١) التقارب في النظيم على $B(X, Y)$ ،

(٢) التقارب القوي لـ $(T_n x)$ في Y ،

(٣) التقارب الضعيف لـ $(T_n x)$ في Y •

وفيما يلي نورد التعاريف والمصطلحات الضرورية ، وكان قد اقترحها فون نويمان J. von Neumann (١٩٢٩ ــ ١٩٣٠ م) •

٤ــ٩ــ١ تعريف (تقارب متتاليات المؤثرات)

ليكن X و Y فضاءين منظمين •

نقول عن متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ انها :

(١) **متقاربة بانتظام**(*) اذا كانت (T_n) متقاربة في النظيم على $B(X, Y)$ •

(٢) **متقاربة بقوة** اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y أيا كان x من X •

(٣) **متقاربة بضعف** اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بضعف في Y أيا كان x من X •

واذا أردنا استعمال الدساتير ، فان هذا يعني وجود مؤثر $T: X \longrightarrow Y$ بحيث أن

(١) $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

(٢) $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ أيا كان x من X

(٣) $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$ أيا كان x من X وأيا كان f من Y'

على الترتيب • يسمى T **النهاية المنتظمة** ، **والقوية** ، **والضعيفة** لـ (T_n) على الترتيب • ∎

---

* يطلق بعض المؤلفين على هذا التقارب اسم **«التقارب المنتظم بالنسبة للمؤثرات»** وذلك زيادة في التحديد . الا اننا سنكتفي بتسمية « التقارب المنتظم » بقصد الاختصار . وترد ملاحظتان مماثلتان في (٢) و (٣) من هذا التعريف .

(المترجم)

لقد سبق وأشرنا في البند السابق أنه حتى في التحليل الرياضي ، وهو الموضوع الابسط من التحليل الدالي ، فان استعمال مفاهيم متنوعة للتقارب يعطي نظرية المتتاليات والمتسلسلات قدرا أكبر من المرونة . ومع ذلك ، فقد يضيع القارىء في خضم المفاهيم العديدة التي أوردناها توا . وقد يسأل عن سبب لزوم التعامل مع ثلاثة أنواع من التقارب لمتتاليات المؤثرات . والاجابة تتلخص في أن كثيرا من المؤثرات التي ترد في المسائل العملية تعطى على أنها نوع معين من النهاية لمؤثرات أبسط . ومن المهم معرفة ماذا نعني بـ « نوع معين » ، ومعرفة أي من الخواص لمؤثر النهاية تقتضيها خواص المتتاليات . كذلك ، فاننا عند البدء بدراسة ما ؛ لا نعلم دوما بأي معنى توجد النهايات ، لذلك فانه لأمر مفيد أن تكون لدينا جملة من الامكانات .وقد يكون المرء في مسألة محددة قادرا على اثبات التقارب بمعنى « معتدل » جدا فقط ، بحيث يكون لديه على الاقل شيء ينطلق منه ، وبعد ذلك يطور أدوات لاثبات التقارب بمعنى أقوى ، الامر الذي يكفل خواص « أفضل » لمؤثر النهاية . وهذا أمر نموذجي في حالة المعادلات التفاضلية مثلا .

ليس من العسير اثبات أن

$$(1) \implies (2) \implies (3)$$

(حيث النهاية واحدة) ؛ الا أن العكس ليس صحيحا بعامة . كما يمكن أن نراه من الامثلة التالية .

أمثلة

٤-٩-٢ (الفضاء l^2)

لنأخذ في الفضاء l^2 المتتالية (T_n) ، حيث المؤثرات $T_n\colon l^2 \longrightarrow l^2$ معرفة كالتالي :

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n\ \text{zeros})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \cdots);$$

حيث $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)\in l^2$ • ان هذا المؤثر خطي ومحدود • ومن الواضح أن T_n متقاربة بقوة مـن الصفر • ذلـك أن $T_n x \longrightarrow 0 = 0x.$ • الا أن (T_n) ليسـت متقاربة بانتظام ذلك أن $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$ •

٤ــ٩ــ٣ (الفضـاء l^2)

لنأخذ متتالية أخرى (T_n) من المؤثرات $T_n: l^2 \longrightarrow l^2$ معرفة كالتالي

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

حيث $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)\in l^2$ • ان هذا المؤثر خطـي ومحـدود • سنبين أن T_n متقاربة بضعف من الصفر ، دون أن تتقارب بقوة •

لكل من الداليات الخطية المحدودة f على l^2 تشيل ريس ٣ــ٨ــ١ ، أي أنه لدينا وفق ٣ــ١ــ٦

$$f(x) = \langle x, z\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

حيث $z=(\zeta_j)\in l^2$ • لذا ، فاذا وضعنا $j=n+k$ واستعملنا تعريف T_n نجـد أن

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z\rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n}\bar{\zeta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\zeta}_{n+k}.$$

واستنادا الى متباينة كوشي ــ شفارتز من ١ــ٢ــ٣ ، فان

$$|f(T_n x)|^2 = |\langle T_n x, z\rangle|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |\zeta_m|^2.$$

ان المتسلسلة الاخيرة هي باقي متسلسلة متقاربة • لذا فان الطرف الايسن يقترب من 0 عندما $n \longrightarrow \infty$ ، وبالتالي فان $f(T_n x) \longrightarrow 0 = f(0x)$ ، وهذا يعني أن (T_n) متقاربة بضعف مـن 0 •

بيد أن (T_n) ليست متقاربة بقوة ؛ ذلك أنــه اذا أخذنا $x=(1,0,0,\cdots)$ ، فانــه يكــون

$$\|T_mx - T_nx\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad (m \neq n). \quad \blacksquare$$

ان **الداليات الخطية** هي مؤثرات خطية (مداها في الحقل العددي **R** أو **C**)، وبالتالــي فــان (١) و (٢) و (٣) يمكــن تطبيقهــا مباشــرة • إلا أن (٢) و (٣) يغدوان متكافئين الآن للسبب التالي • كان لدينا من قبل $T_nx \in Y$ ، لكن لدينا الآن $f_n(x)$ ينتمي الى **R** (أو **C**) • لذا فان التقارب في (٢) و (٣) يتم الآن في الفضاء منتهي البعد (بل ووحيد البعد) **R** (أو **C**) ، وبالتالي فان (٢) و (٣) متكافئان استنادا الى (جـ) مــن المبرهنة ٤ــ٨ــ٤ • ويدعى المفهومان الباقيان **التقارب القوي والضعيف*** (الذي نقرأه « التقارب الضعيف نجمة ») :

٤ــ٩ــ٤ تعريف (تقارب متتاليات الداليات القوي والضعيف*)

لتكن (f_n) متتالية من الداليات الخطية المحدودة على فضاء منظم X • عندئذ :

(آ) يعني **التقارب القوي** لـ (f_n) أن ثمة داليــا $f \in X'$ بحيث يكــون $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ • ونكتب هذا بالشكل

$$f_n \longrightarrow f.$$

(ب) يعني **التقارب الضعيف*** لـ (f_n) أن ثمة داليــا f مــن X' بحيث يكون $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ أيا كان x من X •ونكتب[1] هذا بالشكل

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

يسمى f في(آ) و (ب) **النهاية القوية والنهاية الضعيفة*** لـ (f_n) تباعا • ∎

---

(١) هذا المفهوم اهم الى حد ما من مفهوم التقارب الضعيف لـ (f_n) الذي يعني ، كما سبق ورأينا في ٤ــ٨ــ٢ ، أن $g(f_n) \longrightarrow g(f)$ أيا كان g من X'' . هــذا ويقتضي التقارب الضعيف التقارب الضعيف* ، الامــر الذي يمكــن رؤيتــه باستعمال التطبيق القانوني المعرف في البند ٤ــ٦ (راجع المسألة ٤) .

وبالعودة الى المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، فيمكننا السؤال عما يمكن قوله حول مؤثر النهاية $T: X \longrightarrow Y$ في (١) و (٢) و (٣) •

فاذا كان التقارب منتظما فان $T \in B(X, Y)$ ، وفيما عدا ذلك لا يكون ل $\|T_n - T\|$ معنى • واذا كان التقارب قويا أو ضعيفا ، فان T يظل خطيا ، الا أنه قد يكون غير محدود اذا كان X غير تام •

مثال :

ان الفضاء X المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_j)$ في l^2 التي كل حد فيها صفري باستثناء عدد منته من الحدود ، والمزودة بالمترك المعرف على l^2 ، ليس فضاء تاما • سنعرف متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة T_n على X بالمساواة

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots),$$

وبالتالي فان حدود $T_n x$ من الشكل $j\xi_j$ اذا كان $j \leqq n$ ، ومن الشكل ξ_j اذا كان $j > n$ • ان هذه المتتالية تتقارب بقوة من مؤثر خطي غير محدود T معين بالمساواة $Tx = (\eta_j)$ ، حيث $\eta_j = j\xi_j$ •

بيد أنه اذا كان X تاما ، فلا يمكن أن يحدث الوضع الذي ورد في المثال السابق ، نظرا لانه عندئذ ترد التمهيدية الاساسية التالية :

٤ــ٩ــ٥ تمهيدية (التقارب القوي)

ليكن $T_n \in B(X, Y)$ حيث X فضاء باناخ و Y فضاء منظم • فاذا كانت المتتالية (T_n) متقاربة بقوة ، وكانت نهايتها T ، فان $T \in B(X, Y)$

البرهان :

ان خطية T تستخلص مباشرة من خطية T_n • وبما أن $T_n x \longrightarrow Tx$ أيا كان x من X ، فان المتتالية $(T_n x)$ محدودة أيا كان x ، راجع ١ــ٤ــ٢ • ولما كان X تاما ، فان $(\|T_n\|)$ محدودة استنادا الى مبرهنة المحدودية المنتظمة ، وليكن مثلا

$\|T_n\| \leqq c$ أيا كان n • يترتب على هذا أن $\|T_n x\| \leqq \|T_n\| \|x\| \leqq c\|x\|$ ، وهذا يقتضي أن يكـــون $\|Tx\| \leqq c\|x\|$ • ∎

سنورد الآن معيارا مفيدا للتقارب القوي من خلال المبرهنة التالية :

٤ـ٩ـ٦ مبرهنة (التقارب القوي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X و Y فضاء باناخ ، متقاربة بقوة هو أن يتحقق التالي :

(آ) ان تكون المتتالية $(\|T_n\|)$ محدودة

(ب) أن تكون المتتالية $(T_n x)$ متتالية كوشي في Y أيا كان x من مجموعــة جزئية كليــة M من X •

البرهـــان :

اذا كان $T_n x \longrightarrow Tx$ أيا كان x من X ، فـــان (آ) ينتج مـــن مبرهنـــة المحدودية المنتظمة (نظرا لكون X تاما) ، ويكون (ب) تافها •

وبالعكس ، لنفترض أن (آ) و (ب) محققان ، وليكن مثلا $\|T_n\| \leqq c$ أيا كان n • لنأخذ أي x من X ولنثبت أن $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y • ليكن ε عددا موجبا معطى • لما كانت $\operatorname{span} M$ كثيفة في X ؛ فانه يوجد y في $\operatorname{span} M$ بحيث أن

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وبما أن $y \in \operatorname{span} M$ ، فان $(T_n y)$ هي متتالية كوشي وفق (ب) ، وبالتالي يوجد N بحيث أن

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (m, n > N).$$

وباستعمال هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فاننا نرى مباشرة أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y ، ذلك أنه اذا كان m و n أي عددين طبيعيين يحققان الشرط $m, n > N$ فـــان

$$\|T_nx - T_mx\| \leqq \|T_nx - T_ny\| + \|T_ny - T_my\| + \|T_my - T_mx\|$$

$$< \|T_n\| \, \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \, \|x - y\|$$

$$< c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

وبما أن Y تام ، فان (T_nx) متقاربة في Y • ولما كان x عنصرا اختياريا في X ، فاننا نكون قد أثبتنا التقارب القوي للمتتالية (T_n) • ∎

٤ــ٩ــ٧ نتيجة (الداليات)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (f_n) من الداليات الخطية المحدودة على فضاء باناخ ضعيفة* التقارب ، حيث يفترض ان النهاية دالي خطي محدود على X ، هو ان يتحقق التالي :

(آ) ان تكون المتتاليه $(\|f_n\|)$ محدودة •

(ب) ان تكون المتتالية $(f_n(x))$ متتالية كوشي ايا كان x من مجموعة جزئية كليــة M من X •

لهذه النظرية تطبيقات هامة ، سنورد اثنين منها في البنود اللاحقة •

مســائل

١ ــ بين بأن التقارب المنتظــم $T_n \longrightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$ ، يقتضي التقارب القوي ، كما تكون النهاية واحدة •

٢ ــ اذا كان $S_n, T_n \in B(X, Y)$ ؛ وكانت المتتاليتان (S_n) و (T_n) متقاربتين بقــوة من النهايتين S و T تباعا ، فبين أن $(S_n + T_n)$ متقاربة بقوة من النهاية $S+T$ •

٣ ــ بين بأن التقارب القــوي في $B(X, Y)$ يقتضي التقارب الضعيف ، كمــا تكــون النهايــة واحــدة •

٤ ــ بين بــأن التقارب الضعيف في الحاشية السفلى الواردة في الصفحة٣٤٢ تقتضي التقارب الضعيف* • بين بأن العكس يصح اذا كان X انعكاسيا •

٥ ــ لا يقتضي التقارب القوي التقارب المنتظم • بين صحة هذه الدعوى بأخذ $T_n = f_n : l^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ حيث $f_n(x) = \xi_n$ و $x = (\xi_n)$ •

٦ ــ ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث $n = 1, 2, \cdots$ • كي ندرك الحافز على استخدام مصطلح « منتظم » الوارد في التعريف ٤ــ٩ــ١ ، بيــن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T_n \longrightarrow T$ هو أن يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N، **تابع لـ** ε **فقط** ، بحيث أنــه اذا كــان n أي عــدد طبيعــي يحقق الشرط $n > N$ ، وكان x أي عنصر من X نظيمه 1 ،فان

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

٧ ــ ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X فضاء باناخ • فاذا كانت (T_n) متقاربة بقوة ، فبين أن $(\|T_n\|)$ محدودة •

٨ ــ لنفترض أن $T_n \longrightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$ • بين أنه يوجد لكل عدد موجب ε ولكــل كــرة مغلقة K محتواة في X عدد صحيح موجب N بحيــث تتحقق المتباينة $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$ أيا كان العــدد الطبيعي n المحقق للمتباينــة $n > N$ وأيا كان x في K •

٩ ــ بين أن $\|T\| \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$ في التمهيدية ٤ــ٩ــ٥ •

١٠ــ ليكن X فضاء فصولا لباناخ ، ولتكن M مجموعة جزئية محدودة في X' • بين بأن كل متتالية من عناصر M تحوي متتالية جزئية تتقارب بضعف* من عنصــر في X' •

٤ــ١٠ تطبيق على جموعية المتتاليات

للتقارب الضعيف* تطبيقات هامــة في نظــرية المتتاليات (والمتسلسلات)

المتباعدة • من المعلوم أنه لايوجد لمتتالية متباعدة نهاية بالمعنى المعتاد ، وما ترمي اليه نظرية المتتاليات المتباعدة هو أن نقــرن بمتتاليات متباعدة معينة « نهايــة » بمفهوم معمم•ويسمى الاجراء المتبع لادراك هذا الهدف « **طريقة في الجموعية** » •

وعلى سبيل المثال ، فاذا كانت $x=(\xi_k)$ متتالية معطاة ، فمن الممكن حساب المتتالية $y=(\eta_n)$ التي حدودها المتوسطات الحسابية التالية

$$\eta_1=\xi_1, \qquad \eta_2=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2), \quad \cdots, \quad \eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n), \quad \cdots .$$

وهذا مثال على طريقة في الجموعية • فاذا تقاربت y من نهاية η (بالمعنى المعتاد) ، فاننانقول بأن x جموعة وفق الطريقة السابقة وأن لها **نهاية معممة** هي η • فمثلا اذا كـان

$$x=(0, 1, 0, 1, 0, \cdots) \quad \text{فـان} \quad y=(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}, \cdots)$$

وعندئذ يوجد لـ x النهاية المعممة $\frac{1}{2}$ •

تسمى طريقة في الجموعية **طريقة مصفوفية** اذا أمكن تمثيلها بالشكل

$$y=Ax$$

حيث نكتب $x=(\xi_k)$ و $y=(\eta_n)$ على شكل متجهين عموديين غير منتهيين ؛ وحيث $A=(\alpha_{nk})$ مصفوفة غير منتهية ، وهنا $n, k=1, 2, \cdots$ • ونستعمل في الدستور $y=Ax$ ضرب المصفوفات ، أي أن حدود y هي

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k \qquad n=1, 2, \cdots . \tag{1}$$

ويوضح المثال السابق طريقة مصفوفية • (ما هي المصفوفة ؟) •

هنالك مصطلحات متعلقة بهذا الموضوع نوردها فيما يلي • تدعى الطريقــة المعطاة بـ (1) اختصارا **بالطريقة** -A ، ذلك أنه يرمز الى المصفوفة الموافقة •

A • واذا كانت المتسلسلات في (1) متقاربة جميعا ، وكانت $y=(\eta_n)$ متقاربة بالمعنى المعتاد ، فاننا نسمي نهايتها **النهاية** -A لـ x ، ونقول عن x انها **جموعة** -A • وتدعى مجموعة كل المتتاليات الجموعة -A **مدى** الطريقة -A •

يقال عن طريقة-A انها **منتظمة (او دائمة)** اذا حوى مداها كل المتتاليات المتقاربة واذا كانت النهاية -A لكل متتالية منها مساوية للنهاية المعتادة ؛ أي أنه اذا كانت

$$\xi_k \longrightarrow \xi \quad \text{تقتضي} \quad \eta_n \longrightarrow \xi$$

من الواضح أن الانتظام متطلب طبيعي ، ذلك أن كل طريقة لا يمكن تطبيقها على متتاليات متقاربة معينة أو كانت تغير نهاية هذه المتتاليات لن تكون ذات فائدة عملية • ونورد فيما يلي معيارا أساسيا للانتظام •

٤-١٠-١ مبرهنة النهاية لطوبلتز (طرق الجموعية المنتظمة) •

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة في الجموعية -A مصفوفتها $A=(\alpha_{nk})$ منتظمة هو أن يتحقق ما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0 \qquad k=1,2,\cdots \quad \text{عندما} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqq \gamma \qquad n=1,2,\cdots \quad \text{عندما} \tag{4}$$

حيث γ ثابت لا يتعلق بـ n •

البرهان :

سنبين أن

(آ) الشروط (2) و (3) و (4) لازمة للانتظام

(ب) الشروط (2) و (3) و (4) كافية للانتظام •

أما التفاصيل فهي التالية :

(آ) لنفترض أن الطريقة -A منتظمة ، ولتكن x_k متتالية بحيث أن الحد الذي ترتيبه k يساوي 1 ، وباقي الحدود أصفار • ونجد لـ x_k أن $\eta_n = \alpha_{nk}$ في (1) • بما أن x_k متقاربة ونهايتها 0 ، فان هذا يبين بأن (2) لابد أن تكون صحيحة •

كذلك ، فانه يوجد للمتتالية $x = (1, 1, 1, \cdots)$ النهاية 1 ، ونرى من (1) أن η_n تساوي الآن المتسلسلة الواردة في (3) • لذا فان (3) يجب أن تكون صحيحة •

سنبين أن (4) لازمة للانتظام • ليكن c فضاء باناخ المؤلف من كل المتتاليات المتقاربة حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|,$$

راجع ١ـ٥ـ٣ • سنورد الداليات الخطية f_{nm} على c المعرفة كالتالي :

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}\xi_k \qquad m, n = 1, 2, \cdots. \tag{5}$$

إن كلا من f_{nm} محدود لان

$$|f_{nm}(x)| \leqq \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}|\right)\|x\|.$$

ان الانتظام يقتضي تقارب المتسلسلات في (1) أيا كان x في c • لذا فان (1) تعرف داليات خطية f_1 و f_2 و ••• على c محددة كالتالي :

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

نستنتج من (5) أن $f_{nm}(x) \longrightarrow f_n(x)$ عندما $m \longrightarrow \infty$ أيا كان x من c • ان

هذا تقارب ضعيف* ، وبالتالي فان f_n محدودة وفق التمهيدية ٤ــ٩ــ٥ (عند وضع $T=f_n$) • كذلك ، فان $(f_n(x))$ متقاربة أيا كان x من c ، وبالتالي فان $(\|f_n\|)$ محدودة استنادا الى النتيجة ٤ــ٩ــ٧ ، وليكن مثلا

$$\|f_n\| \leqq \gamma \qquad \text{أيا كان } n \tag{7}$$

لنعرف ما يلي ، حيث $m \in \mathbf{N}$ اختياري

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} |\alpha_{nk}|/\alpha_{nk} & \text{اذا كان } k \leqq m \text{ و } \alpha_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{اذا كان } k > m \text{ أو } \alpha_{nk} = 0 \end{cases}$$

عندئذ يكون $x_{nm} = (\xi_k^{(n,m)}) \in c$ • كذلك فــان $\|x_{nm}\| = 1$ اذا كان $x_{nm} \neq 0$ وان $\|x_{nm}\| = 0$ اذا كان $x_{nm} = 0$ • وفضلا عن ذلك فان

$$f_{nm}(x_{nm}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk} \xi_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}|$$

أيا كان m • لذا فان

$$(8) \quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = f_{nm}(x_{nm}) \leqq \|f_{nm}\| && \text{(a)} \\ &\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqq \|f_n\|. && \text{(b)} \end{aligned}$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة الواردة في (4) متقاربة • وهكذا فان (4) تنتج مــن (7) •

(ب) سنبين الآن بأن (2) و (3) و (4) شروط كافية للانتظام • سنعين داليا خطيا f على c كما يلي :

$$f(x) = \xi = \lim_{k \to \infty} \xi_k$$

حيث $x=(\xi_k)\in c$ • يمكن رؤية محدودية f من كون

$$|f(x)|=|\xi|\leqq\sup_j|\xi_j|=\|x\|.$$

لتكن $M\subset c$ مجموعة كل المتتاليات التي تتساوى حدودها بدءا من حد معين ، ونعني بذلك أنه اذا كانت $x=(\xi_k)$ مثلا ، فان

$$\xi_j=\xi_{j+1}=\xi_{j+2}=\cdots=\xi,$$

و j يعتمد على x • عندئذ يكون $f(x)=\xi$ كما في السابق ، ونجد في (1) و (6) أن

$$\begin{aligned}\eta_n=f_n(x)&=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}\xi_k+\xi\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_{nk}\\&=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}(\xi_k-\xi)+\xi\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}.\end{aligned}$$

لذا نجد استنادا الى (2) و (3) أن

$$\eta_n=f_n(x)\longrightarrow 0+\xi\cdot 1=\xi=f(x)\tag{9}$$

أيا كان x من M •

سنستعمل النتيجة ٤ـ٩ـ٧ ثانية ، وسنبين من ثم أن المجموعة التي عرفنا عليها التقارب المعبر عنه بـ (9) كثيفة في c • لتكن $x=(\xi_k)\in c$ ، وليكن $\xi_k\longrightarrow\xi$ • عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

عندما $k\geqq N$ $\qquad |\xi_k-\xi|<\varepsilon$

من الواضح أن

$$\tilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_{N-1},\xi,\xi,\xi,\cdots)\in M$$

وأن

$$x-\bar{x}=(0,\cdots,0,\xi_N-\xi,\xi_{N+1}-\xi,\cdots).$$

يترتب على هذا أن $\|x-\bar{x}\|\leqq\varepsilon$ • ولما كان $x\in c$ اختياريا ، فان هذا يبين أن M كثيفــة في c •

وأخيرا ، فاننا نستنتج من (4) أن

$$|f_n(x)|\leqq\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqq\gamma\|x\|$$

أيا كان $x\in c$ ، وأيا كان n • لــذا فان $\|f_n\|\leqq\gamma$ ، أي أن $(\|f_n\|)$ محدودة • وفضلا عن ذلك ، فان (9) تعني التقارب $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ أيا كان x في المجموعة الكثيفة M، وهذا يقتضي بناء على النتيجة ٤ــ٩ــ٧ التقارب الضعيف* $f_n\xrightarrow{w^*}f$• وهكذا نكون قد بينا أنه اذا كانت $\xi=\lim\xi_k$ موجودة ، فان $\eta_n\longrightarrow\xi$ • وهذا يعني تعريفا الانتظام ، ونكون بهذا قد أثبتنا صحة المبرهنة •∎

مسـائل

١ ــ تعرف طريقة شيزارو C_1 في الجموعية بالدستور

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)\qquad\qquad n=1,2,\cdots,$$

أي أننا نأخذ المتوسطات الحسابية • أوجد المصفوفة الموافقة A •

٢ ــ طبق الطريقة C_1 في المسألة ١ على المتتاليتين

$$(1,0,1,0,1,0,\cdots)\quad و \quad\left(1,0,-\frac{1}{4},-\frac{2}{8},-\frac{3}{16},-\frac{4}{32},\cdots\right).$$

٣ ــ عبر عن (ξ_n) في المسألة ١ بدلالة (η_n) • أوجد المتتالية (ξ_n) بحيث يكون $(\eta_n)=(1/n)$ •

٤ ــ استخدم الدستور الوارد في المسألة ٣ للتوصل الى متتالية غير جموعة بالطريقة C_1 •

٥ ــ تعرف **طرق هولدر H_p في الجموعية** كما يلي : H_1 مطابقة للطريقة C_1 في المسألة ١ • أما الطريقة H_2 فتتألف من تطبيقين متتاليين لـ H_1 ، أي أننا نأخذ أولا المتوسط الحسابي ، ثم نأخذ ثانية المتوسطات الحسابية لتلك المتوسطات • وأما H_3 فيتألف من ثلاث تطبيقات متتالية لـ H_1 ، وهكذا • طبق H_1 و H_2 على المتتالية $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots)$ وقدم التعليق المناسب •

٦ ــ **(المتسلسلات)** نقول عن متسلسلة غير منتهية أنها جموعة -A اذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية جموعة -A ، وتسمى النهاية -A لتلك المتتالية **المجموع** -A للمتسلسلة • بين أن $1+z+z^2+\cdots$ جموعة -C_1 وأن $|z|=1$ و $z\neq 1$ ، وأن المجموع -C_1 هو $1/(1-z)$. •

٧ ــ **(طريقة -C_k لشيزارو)** • لنفترض أن (ξ_n) متتالية ، وأن $\sigma_n^{(0)}=\xi_n$ وأن

$$\sigma_n^{(k)}=\sigma_0^{(k-1)}+\sigma_1^{(k-1)}+\cdots+\sigma_n^{(k-1)} \qquad (k\geqq 1, n=0, 1, 2, \cdots).$$

فاذا أوجدنا لعنصر مثبت k من $\mathbf{N}$ أن $\eta_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}/\binom{n+k}{k}\longrightarrow\eta$ قلنا إن (ξ_n) جموعة -C_k وأن η هي **النهاية** -C_k لها • بين بأن هذه الطريقة تفيد في أنه يمكن تمثيل $\sigma_n^{(k)}$ بدلالة الحدود ξ_j بصورة جد بسيطة ، ونعني بها

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-1-\nu}{k-1}\xi_\nu.$$

٨ ــ إن **طريقة أولر** للمتسلسلات تقرن بمتسلسلة معطاة

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j \qquad \text{المتسلسلة المحولة} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

حيث

$$\Delta^0 a_j=a_j, \qquad \Delta^n a_j=\Delta^{n-1}a_j-\Delta^{n-1}a_{j+1}, \qquad j=1, 2, \cdots,$$

وحيث أوردنا $(-1)^j$ كي نبين بأن a_j ليست موجبة بالضرورة • يمكـن الاثبات بأن الطريقة منتظمة ، وبالتالي فان تقارب المتسلسلة المعطاة يقتضي تقارب المتسلسلة المحولة ، والمجموع واحـد • بين بأن الطريقة تعطـي الدسـتور

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots=\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots.$$

٩ ــ بين بأن طريقة أولر في المسألة ٨ تعطي الدستور

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

١٠ـ بين أن طريقة أولر تعطي النتيجة التالية ، واعط التعليق المناسب

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

٤ــ١١ المكاملة العددية والتقارب الضعيف*

للتقارب الضعيف* تطبيقات مفيدة في المكاملة العددية والمفاضلة والاستكمال • وسنعنى في هذا البند بالمكاملة العددية ؛ أي بمسألة الحصول على القيم التقريبية لتكامل معطى

$$\int_a^b x(t)\,dt.$$

ونظرا لكون المسألة هامة في التطبيقات ، فقد تم تطوير طرق متنوعة لهذا الغرض ، كقاعدة شبه المنحرف ، وقاعدة سمبسون ، ودساتير أخرى أكثر تعقيدا مثل دساتير نيوتن ــ كوتس وغوص • (لمراجعة بعض الحقائق الاولية ، راجع مجموعة المسائل في نهاية البند) •

ان السمة المشتركة بين هذه الطرق وغيرها هي أننا نختار أولا نقاطا في $[a, b]$ ، تسمى **عقدا** ، ثم نقرب القيمة المجهولة للتكامل باستخدام تركيب خطي لقيم x في العقد . وتعتمد العقد ومعاملات التركيب الخطي على الطريقة المستخدمة ، وليس على الدالة المكاملة x . وبالطبع ، فان الفائدة التي نجنيها من تطبيق طريقة ما تتحدد الى حد كبير بدقتها ، وقد تتطلب ازدياد الدقة كلما ازداد عدد العقد .

سنرى في هذا البند أنه يمكن للتحليل الدالي أن يقدم عونا في هذا المجال . وفعلا ، فاننا سنشرح الخلفية العامة لتلك الطرق ، ثم نبحث في مسألة التقارب عند ازدياد عدد العقد .

سنُعنَى هنا بالدوال المستمرة ، وهذا يوحي باستعمال فضاء باناخ $X = C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال الحقيقية على $J = [a, b]$ والمزود بالنظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|.$$

عندئذ يعرف التكامل الذي أوردناه في بداية البند داليا خطيا f على X معرفا بالمساواة

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dt. \tag{1}$$

وللحصول على دستور للمكاملة العددية ، فقد ننهج أسلوبا مماثلا للاسلوب المتبع في الطرائق المذكورة آنفا . وبالتالي فاننا نختار لكل عدد صحيح موجب n الاعداد الحقيقية التالية

$$t_0^{(n)}, \cdots, t_n^{(n)}$$

التي تسمى **عقدا** ، والتي عددها $n+1$ ، بحيث أن

$$a \leqq t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqq b. \tag{2}$$

بعدئذ نختار الاعداد الحقيقية

$$\alpha_0^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$$

التي تسمى **معاملات** ، والتي عددها $n+1$ ، ومن ثم تعرف الداليات f_n على X بالمساواة

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

ان هذه طريقة عددية في المكاملة ، وتمثل قيمة $f_n(x)$ تقريبا لـ $f(x)$ ، حيث x معطى • وللتعرف على دقة هذه الطريقة ؛ فاننا ندرس الداليات f_n على النحو التالــي •

ان كل f_n محدود لان $|x(t_k^{(n)})| \leqq \|x\|$ وفق تعريف النظيم • لذا فان

$$|f_n(x)| \leqq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \leqq \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \right) \|x\|. \tag{4}$$

سنبين الآن أمرا يفيدنا فيما بعد ، وهو أن نظيم f_n يعطى بالمساواة

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|. \tag{5}$$

وفعلا ، فان (4) تبين بأن قيمة $\|f_n\|$ لا يمكنها أن تتجاوز الطرف الايمن مــن (5) ، وبالتالي فان المساواة تنتج اذا أخذنا x_0 من X بحيث أن $|x_0(t)| \leqq 1$ عــلـى J وأن

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \alpha_k^{(n)} \geqq 0 \text{ اذا كان } \\ -1 & \alpha_k^{(n)} < 0 \text{ اذا كان } \end{cases}$$

وذلك لانه يكون عندئذ $\|x_0\| = 1$ ، ويكون

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|.$$

اذا كان x عنصرا معطى من X فان الدستور (3) يعطي قيمة تقريبية $f_n(x)$ لـ $f(x)$ في (1) • وبالطبع ، فاننا معنيون بالدقة كما ذكرنا قبل قليل ، ونحن نبغي أن تزيد هذه الدقة مع تزايد n • ان هذا يوحي بالمفهوم التالي :

٤ــ١١ــ١ تعريف (التقارب)

يقال عن الطريقة العددية في المكاملة المعرفة بـ (3) انهـا **متقاربة** من أجـل عنصر $x \in X$ اذا كان

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (n \longrightarrow \infty), \tag{6}$$

حيث f معرف بـ (1) • ∎

كذلك ، لما كانت المكاملة التامة للحدوديات سهلة ، فمن الطبيعي أن نعمل التالـي :

٤ــ١١ــ٢ متطلب

اذا كان n عددا طبيعيا ما ، وكان f حدوديا درجته لا تتجاوز n ، فان

$$f_n(x) = f(x). \tag{7}$$

∎

لما كانت الداليات f_n خطية ، فيكفي أن تتطلب (7) للقوى $n+1$ المعرفة كمـا يلـي

$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = t, \qquad \cdots, \qquad x_n(t) = t^n.$$

وفعلا ، فاننا نجد عندئذ للحدودي من الدرجة n المعطى بالمساواة $x(t) = \sum \beta_j t^j$ أن

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f_n(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_j) = f(x).$$

نرى بأننا هكذا نحصل على الشروط الـ $n+1$ التالية

$$f_n(x_j)=f(x_j) \qquad j=0,\cdots,n. \tag{8}$$

سنبين أنه يمكن تحقيق هذه الشروط • بما أن الوسطاء $2n+2$ متيسرة ، ونعني بها $n+1$ من العقد و $n+1$ من المعاملات ، فمن الممكن اختيـار بعضهـا بصورة كيفية • لنختر العقد $t_k^{(n)}$ ، ولنثبت أنه يمكننا عندئذ تعيين تلك المعاملات بصورة وحيدة •

لدينا في (8) الآن $x_j(t_k^{(n)})=(t_k^{(n)})^j$ ، وبالتالي فان (8) تأخذ الشكل

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)}(t_k^{(n)})^j=\int_a^b t^j\,dt=\frac{1}{j+1}(b^{j+1}-a^{j+1}) \tag{9}$$

حيث $j=0,\cdots,n$ • واذا كان n عددا مثبتا ما ، فان هذا هو جملة غير متجانسة من $n+1$ من المعادلات الخطية في $n+1$ مـن المجاهيل هـي $\alpha_0^{(n)},\cdots,\alpha_n^{(n)}$ • ويوجد حل وحيد اذا كان للجملة المتجانسة الموافقة

$$\sum_{k=0}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_k=0 \qquad (j=0,\cdots,n)$$

الحل التافه فقط $\gamma_0=0\,,\cdots,\,\gamma_n=0$ أي اذا تحقق الشيء نفسه للجملة

$$\sum_{j=0}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_j=0 \qquad (k=0,\cdots,n) \tag{10}$$

التي مصفوفة معاملاتها هي منقول مصفوفة المعاملات للجملة السابقة • ان هـذا صحيح نظرا لكون (10) تعني أن الحدودي

$$\sum_{j=0}^{n}\gamma_j t^j$$

الذي هو من الدرجة n ، صفر في العقد التي عددها $n+1$ ، وبالتالي فانه يجب أن يطابق الصفر ، أي أن تكون كل معاملات γ_j أصفارا • ∎

وهكذا فان النتيجة التي خلصنا اليها تنص على أنه يوجد لكل اختيار للعقد

يحقق (2) معاملات تتحدد بصورة وحيدة بحيث يكون المتطلب ٤ـ١١ـ٢ محققا. لذا فان الطريقة الموافقة متقاربة من أجل جميع الحدوديات . لنطرح الآن السؤال حول الشروط الاضافية التي يجب فرضها كي تكـون الطريقة متقاربة أيا كانت الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$. وقد توصل پوليـا عام ١٩٣٣ م. في هـذا الصدد الى المبرهنة التالية :

٤ـ١١ـ٣ مبرهنة بوليا في التقارب (التكامل العددي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة المكاملـة العددية (3) التـي تحـقق ٤ـ١١ـ٢ متقاربة أيا كانت الدوال الحقيقية المستمرة علـى $[a, b]$ هو أن يوجـد عـدد c بحيث أن

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leqq c \qquad \text{أيا كان } n \qquad (11)$$

البرهـان :

ان المجموعة W لكل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء الحقيقي $X = C[a, b]$ استنادا الى مبرهنة ڤير شتراس في التقريب (التي سنورد برهانها بعد قليل) ، ونجد أنه أيا كان x من W فان التقارب حاصل استنادا الى ٤ـ١١ـ٢ . ويترتب على (5) أن الشرط اللازم والكافي كـي تكـون $(\|f_n\|)$ محدودة هو أن تتحقق المتباينة (11) من أجل عـدد حقيقي ما c . ان صحـة مبرهنتنا تستخلص الآن من النتيجة ٤ـ٩ـ٧ نظرا لكون التقارب $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ أيا كان x من X تقاربا ضعيفا* $f_n \xrightarrow{w^*} f$. ∎

من الواضح جدا أنه يمكننا في هذه المبرهنة الاستعاضة عن الحدوديات بأي مجموعة أخرى كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

وفضلا عن ذلك ، ففي أغلب طرق المكاملة تكون المعاملات غير سالبة جميعا. وبأخذ $x = 1$ ، فاننا نجد استنادا الى ٤ـ١١ـ٢ أن

$$f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| = f(1) = \int_a^b dt = b - a,$$

لذا فان (11) صحيحة ، وهذا يثبت ما يلي :

٤ــ١١ــ٤ مبرهنة ستيكلوف (المكاملة العددية)

ان طريقة المكاملة العددية (3) التي تحقق ٤ــ١١ــ٢ والتي لها معاملات غير سالبة $\alpha_k^{(n)}$ تتقارب أيا كانت الدالة المستمرة .

استخدمنا في برهان ٤ــ١١ــ٣ المبرهنة التالية :

٤ــ١١ــ٥ مبرهنة فيرشتراس في التقريب (الحدوديات)

ان مجموعة كل الحدوديات W ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

لذا فانه يوجد لكل x من $C[a, b]$ ولكل عدد موجب ε حدودي p يحقق المتباينة $|x(t)-p(t)|<\varepsilon$ أيا كان t من $[a, b]$.

البرهان :

كل x من $C[a, b]$ منتظمة الاستمرار على $J=[a, b]$ نظرا لكون J متراصة . لذلك فانه يوجد لاي عدد موجب ε دالة y بيانها قوس من مضلع بحيث أن

$$\max_{t \in J} |x(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

سنفترض أولا أن $x(a)=x(b)$ و $y(a)=y(b)$. لما كانت y مؤلفة من دوال خطية ومستمرة ، فان معاملات فورييه لها ذات حدود من الشكل

$$|a_0|<k, \ |a_m|<k/m^2, \ |b_m|<k/m^2.$$

ويمكن رؤية هذا بتطبيق المكاملة بالتجزئة على الدستورين اللذين يعطيان a_m و b_m (راجع ٣ــ٥ــ١ حيث لدينا $[a, b]=[0, 2\pi]$) . (راجع أيضا المسألة ١٠ في نهاية هذا البند) . لذا فاننا نجد لمتسلسلة فورييه لـ y (الممثلة للتمديد الدوري لـ y ، بدور يساوي $b-a$) ، لدى كتابة $\kappa=2\pi/(b-a)$ للبساطة أن

$$(13)\quad \left| a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \kappa m t + b_m \sin \kappa m t) \right| \leqq 2k\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) = 2k\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2\right).$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة تتقارب بانتظام على J • وبالتالي فاننا نجد أن المجموع الجزئي الـ n ، وهو s_n ، حيث n كبير كفاية ، يحقق المتباينة

$$(14)\qquad \max_{t \in J} |y(t) - s_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ان متسلسلات تايلور لدوال الجيوب وجيوب التمام في s_n تتقارب بانتظام أيضا على J ، وبالتالي فهناك حدودي p (نجده مثلا من مجاميع جزئية مناسبة لهذه المتسلسلات) بحيث أن

$$\max_{t \in J} |s_n(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

يترتب على هذا وعلى (12) و (14) وعلى

$$|x(t) - p(t)| \leqq |x(t) - y(t)| + |y(t) - s_n(t)| + |s_n(t) - p(t)|$$

أن

$$(15)\qquad \max_{t \in J} |x(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

وهذا يصح أيا كانت x في $C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a) = x(b)$ • أما اذا كان $x(a) \neq x(b)$ ، فاننا نأخذ $u(t) = x(t) - \gamma(t-a)$ ، ونأخذ γ بحيث يكون $u(a) = u(b)$ • عندئذ نجد لـ u حدوديا q يحقق المتباينة $|u(t) - q(t)| < \varepsilon$ على J • لذا فان $p(t) = q(t) + \gamma(t-a)$ تحقق (15) لان $x - p = u - q$ • ولما كان العدد الموجب ε اختياريا ، فاننا نكون قد بينا أن W كثيفة في $C[a, b]$ • ∎

ان أول اثبات لهذه المبرهنة قدمه ڤير شتراس عام ١٨٨٥ م• ، وثمة براهين

عديدة أخرى ، احدها أتى به بير نشتاين عام ١٩١٢م• ، وهو يعطي متتالية متقاربة باتنظام من الحدوديات (« حدوديات بير نشتاين ») بصورة ظاهرة بدلالة x • ويمكن العثور على برهان بير نشتاين في الصفحتين 8 و 9 من كتاب :

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis.* 3rd ed. Berlin: Springer

مسـائل

١ ــ ان **قاعدة المستطيل** هي (الشكل ٤٥)

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h[x(t_1^*)+\cdots+x(t_n^*)], \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

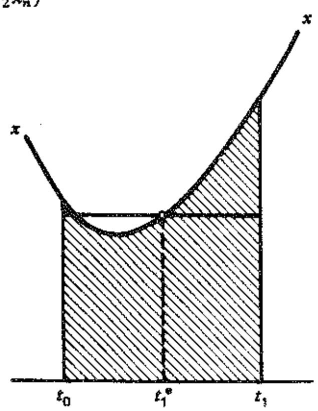
حيث $t_k^* = a+(k-\frac{1}{2})h$ • كيف يمكن الحصول على هذا الدستور ؟ ما هي العقد وما هي المعاملات ؟ كيف يمكن الحصول علـى حدي الخطأ للقيمـة التقريبية المحسوبة بهذا الدستور ؟

٢ ــ **إن قاعدة شبه المنحرف** هى (الشكل ٤٦)

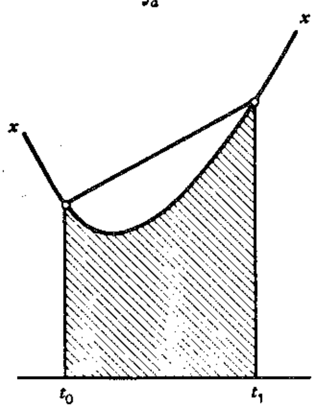
$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \approx \frac{h}{2}(x_0+x_1), \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

أو

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h(\tfrac{1}{2}x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}+\tfrac{1}{2}x_n)$$



الشكل (٤٥) • قاعدة المستطيل



الشكل (٤٦) • قاعدة شبه المنحرف

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • اشرح كيفية الحصول على الدساتير اذا قربنا x بدالة مؤلفة من أجزاء خطية •

٣ ـ ان **قاعدة سمبسون** هي (الشكل ٤٧) •

$$h = \frac{b-o}{n} \qquad \int_{t_0}^{t_2} x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + x_2)$$

أو

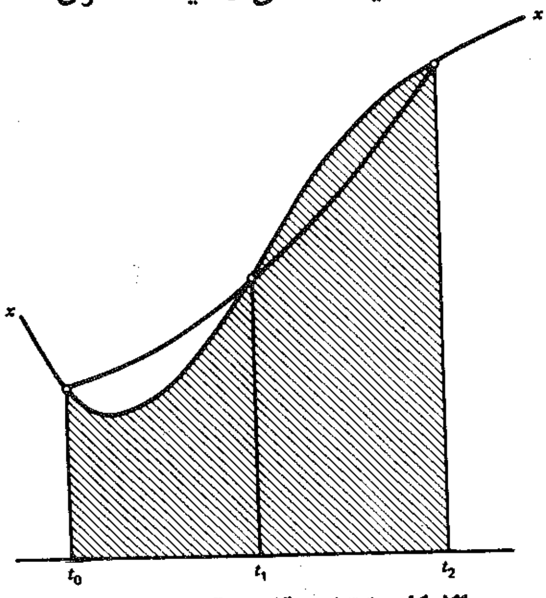
$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + 2x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n)$$

حيث n زوجي و $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • بين بأننا نجد هذه الدساتير اذا قربنا x على $[t_0, t_2]$ بحدودي من الدرجة الثانية قيمه في النقاط t_0 ، t_1 ، t_2 تساوي قيم x في هذه النقاط • ونجد نتيجة مماثلة في $[t_2, t_4]$ ، وهكذا •

٤ ـ ليكن $f(x) = f_n(x) - \varepsilon_n(x)$ ، حيث f_n هو التقريب الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة شبه المنحرف • بأنه اذا كانت x أي دالة مشتقاها من المرتبة الاولى والثانية مستمران ، فان حدي الخطأ هما

$$k_n m_2^* \leqq \varepsilon_n(x) \leqq k_n m_2 \qquad \text{حيث} \qquad k_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

حيث m_2 و m_2^* هما القيمة العظمى والقيمة الصغرى لـ x'' على $[a, b]$ •



الشكل (٤٧) قاعدة سمبسون

٥ ـ تستعمل قاعدة سمبسون بصورة واسعة في التطبيقات. وكي نشعر بزيادة الدقة ، فاننا نطبق كلا من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون في الحالة $n = 10$ على التكامل

t	e^{-t^2}
0	1.000 000
0.1	0.990 050
0.2	0.960 789
0.3	0.913 931
0.4	0.852 144
0.5	0.778 801
0.6	0.697 676
0.7	0.612 626
0.8	0.527 292
0.9	0.444 858
1.0	0.367 879

$$I = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt$$

ونقارن القيمتين

0.746211 و 0.746825

بالقيمة الحقيقية 0.746824 (مقربة الى ستة أرقام عشرية) .

٦ ـ بين باستعمال المسألة ٤ أن حدي الخطأ في 0.746 211 في المسألة ٥ هما $-0.001\,667$ و $0.000\,614$ ، بحيث أن

$$0.745\,597 \leqq I \leqq 0.747\,878.$$

٧ ـ إن **قاعدة الثمانيات الثلاث** هي

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t)\, dt \approx \frac{3h}{8}(x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$. بين أنه يمكن الحصول على هذا الدستور اذا قربنا x على $[t_0, t_3]$ بحدودي من الدرجة الثالثة يساوي x في العقد t_0 ، t_1 ، t_2 ، t_3 . (ان القواعد الواردة في المسائل ٢و٣و٧ هي الحدود الاولى في متتالية دساتير نيوتن ـ كوتس) .

٨ ـ لننظر في دستور المكاملة

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt = 2hx(0) + r(x)$$

حيث r هو الخطأ . لنفرض أن $x \in C^1[-h, h]$ ، أي أن x دالة ذات مشتق

مستمر على $J=[-h,h]$ • بين أنه يمكن تقدير الخطأ بالمتباينة

$$|r(x)| \leqq h^2 p(x)$$

حيــث

$$p(x) = \max_{t\in J} |x'(t)|.$$

بين بأن p هو نصف نظيم على الفضاء المتجهي لتلك الدوال (راجع المسألة ١٢ من البند ٢ــ٣) •

٩ ــ اذا كانت x دالة حقيقية تحليلية ، فبين أن

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt = 2h\left(x(0) + x''(0)\frac{h^2}{3!} + x^{\mathrm{IV}}(0)\frac{h^4}{5!} + \cdots\right). \tag{16}$$

خذ للتكامل عبارة تقريبية من الشكل $2h(\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0 x(0)+\alpha_1 x(h))$ وعــين α_{-1}, α_0, α_1 بحيث أن أكبر قدر ممكن من القوى h, h^2, و ••• يتفق مع (16)• بين بأن هذا يعطي قاعدة سمبسون

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt \approx \frac{h}{3}(x(-h)+4x(0)+x(h)).$$

لماذا تبين هذه الطريقة بأن القاعدة تامة للحدوديات من الدرجة الثالثة •

١٠ــ في برهاننا لمبرهنة ڤير شتراس في التقريب ، استخدمنا حــدود معاملات فورييه لدالة مستمرة ممثلة بدوال خطية • كيف يمكن الحصول على هذه الحــدود ؟

٤ــ١٢ مبرهنة التطبيق المفتوح

بحثنا في هذا الفصل في مبرهنة هان ــ باناخ ومبرهنة المحدودية المنتظمة . وسننتقل الآن الى دراسة المبرهنة « الكبيرة » الثالثة في هذا الفصل ، ألا وهي مبرهنة التطبيق المفتوح • تُعنَى هذه المبرهنة بالتطبيقات المفتوحة ؛ وهي التطبيقات

التي تكون صورة أي مجموعة مفتوحة وفقها مجموعة مفتوحة (التعريف وارد بعد قليل) • واذا أعدنا الى الذاكرة ما سبق وقلناه حـول أهميـة المجموعات المفتوحة (في البند ١ــ٣) ، فاننا ندرك بأن التطبيقات المفتوحة تتمتع بأهمية بالغة• وبصورة أكثر تحديدا ، فان مبرهنة التطبيق المفتوح تقدم الشروط التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المحدود تطبيقا مفتوحا • وكما هي الحال في مبرهنة المحدودية المنتظمة ، فاننا نحتاج ثانية الى التمام ، وتقدم المبرهنة الحالية سببا آخر لكون فضاءات باناخ أنجع من الفضاءات المنظمة غير التامة • كذلك ، فان المبرهنة تحدد الشروط التي لو توفرت لكان عكس مؤثر خطي محدود محدودا أيضا • هذا ، وان اثبات مبرهنة التطبيق المفتوح يستند الى مبرهنة بـير في الفئات التي سبق وأوردنا نصها واثباتها في البند ٤ــ٧ •

سنبتدىء بتقديم مفهوم التطبيق المفتوح •

٤ــ١٢ــ١ تعريف (التطبيق المفتوح)

ليكن X و Y فضاءين متريين • عندئذ يسمى التطبيق $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ الذي ساحته $\mathscr{D}(T)$ جزء من X **تطبيقا مفتوحا** اذا كانت صورة أي مجموعة مفتوحة في $\mathscr{D}(T)$ مجموعة مفتوحة في Y • ∎

لاحظ أنه اذا كان التطبيق غير غامر ، فانه يلزم التمييز بين قولنا بأن التطبيق مفتوح كتطبيق من $\mathscr{D}(T)$

(آ) في Y ،

(ب) عـلى مـداه •

إن (ب) أضعف من (آ) • وعلى سبيل المثال ، فاذا كان $X \subset Y$ ، كـان الشـرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $x \longmapsto x$ لـ X في Y مفتوحا هو أن تكون X مجموعة جزئية مفتوحة في Y ، في حين أن التطبيق $x \longmapsto x$ لـ X على مـداه (الذي هو X) مفتوح في كل الحالات •

هذا ، وللتخلص من اللبس ، علينا أن نذكر استنادا الى المبرهنة ١ــ٣ــ٤ ،

أن التطبيق المستمر $T: X \longrightarrow Y$ يتمتع بخاصة كون الصورة العكسية لاي مجموعة مفتوحة في Y وفق T هي مجموعة مفتوحة في X ؛ وهذا لا يقتضي أن تكـون صورة المجموعة المفتوحة في X وفق T مجموعة مفتوحـة في Y • فمثلا ، ان التطبيق $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ المحدد بالقاعدة $t \longmapsto \sin t$ مستمر ، ومع ذلك فـان صورة $(0, 2\pi)$ وفقـه هـي $[-1, 1]$ •

٤ــ١٢ــ٢ مبرهنة التطبيق المفتوح ومبرهنة العكس المحدود

ان المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y هـو تطبيق مفتوح • وهكذا فاذا كان T متباينا وغامرا ، فان T^{-1} مستمر ومحدود •

ان البرهان ينتج مباشرة من التمهيدية التالية :

٤ــ١٢ــ٣ تمهيدية (الكرة الواحدية المفتوحة)

يتمتع المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y بخاصـة كون الصورة $T(B_0)$ للكرة الواحدية المفتوحة $B_0 = B(0; 1) \subset X$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •

البرهـان :

سنقدم الاثبات وفق الخطوات التالية :

(آ) نثبت بأن لصاقة صورة الكـرة المفتوحة $B_1 = B(0; \frac{1}{2})$ تحوي كـرة مفتوحـة B^* •

(ب) نبين بأن $\overline{T(B_n)}$ تحوي كـرة مفتوحة V_n حول النقطة 0 في Y ، حيـث $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$ •

(جـ) نبرهن على أن $T(B_0)$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •

أما التفاصيل فهي على النحو التالي :

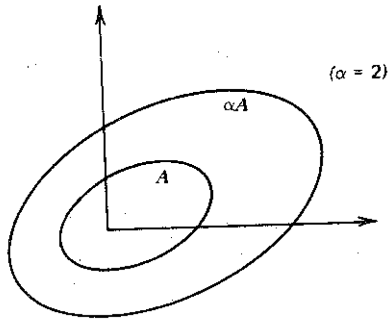
(آ) فيما يتعلق بالمجموعات الجزئية A من X ، فاننا سنستعمل الرمزين

αA (حيث α عدد) و $A+w$ $(w\in X)$ اللذين يعنيان أن

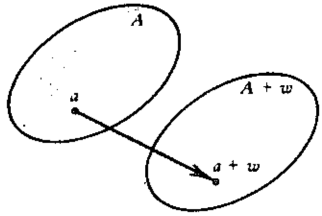
$$\alpha A=\{x\in X \mid x=\alpha a,\ a\in A\} \tag{1}$$

$$A+w=\{x\in X \mid x=a+w,\ a\in A\} \tag{2}$$

ونستعمل رمزين مماثلين للمجموعات الجزئية من Y .



الشكل (٤٨)، ايضاح الدستور (1)



الشكل، (٤٩) ايضاح الدستور (2)

لنأخذ الكرة المفتوحة $B_1=B(0;\frac{1}{2})\subset X$. ان كل عنصر مثبت x من X موجود في kB_1 ، حيث k عدد حقيقي كبير بقدر كاف $(k>2\|x\|)$. لذا فان

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

ولما كان T غامرا وخطيا فان

$$Y=T(X)=T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1)=\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)}. \tag{3}$$

لاحظ أنه عندما أخذنا اللصاقات لم نضف نقاطا أخرى للاجتماع ، ذلك أن هذا الاجتماع سبق وساوى الفضاء Y بأكمله . وبما أن Y تام ، فانه ليس هزيلا في نفسه ، استنادا الى مبرهنة بير في الفئات ٤ـ٧ـ٢ . وبالتالي ، فاذا لاحظنا أن (3) مماثلة لـ (1) في ٤ـ٧ـ٢ ، فاننا نستنتج أن $\overline{kT(B_1)}$ يجب أن

تحوي كرة مفتوحة ما . وهذا يقتضي أن $\overline{T(B_1)}$ تحوي أيضا كـرة مفتوحة ، ولكن $B^* = B(y_0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$. يترتب على هذا أن

$$B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0. \tag{4}$$

(ب) سنبرهن بأن $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$ ، حيث B_0 واردة في نص المبرهنة . سنقوم بهذا باثبات أن [راجع (4)]

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)}. \tag{5}$$

ليكن $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$. عندئذ يكون $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$ ، ونذكر أن $y_0 \in \overline{T(B_1)}$ أيضا . واستنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ فهنالك

$$u_n = Tw_n \in T(B_1) \quad \text{بحيث أن} \quad u_n \longrightarrow y + y_0$$

$$v_n = Tz_n \in T(B_1) \quad \text{بحيث أن} \quad v_n \longrightarrow y_0$$

وبما أن w_n و z_n ينتميان الى B_1 ، وأن نصف قطر B_1 هو $\frac{1}{2}$ ، فان

$$\|w_n - z_n\| \leqq \|w_n\| + \|z_n\| < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

وبالتالي فان $w_n - z_n \in B_0$. ونرى من

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \quad \longrightarrow \quad y$$

أن $y \in \overline{T(B_0)}$. ولما كان $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ اختياريا ، فان (5) صحيحة . وهكذا فانه يترتب على (4) أن

$$B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)}. \tag{6}$$

ليكن $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$. بما أن T خطي ، فان $\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$. لذا فاننا نستنتج من (6) أن

$$V_n = B(0; \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}. \tag{7}$$

(ج) سنبرهن أخيرا بأن

$$V_1 = B(0; \tfrac{1}{2}\varepsilon) \subset T(B_0)$$

وذلك باثبات أن كل y من V_1 ينتمي الى $T(B_0)$ • وهكذا لنفرض أن $y \in V_1$ • نستنتج من (7) بفرض $n = 1$ أن $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$ • لذا فان $y \in \overline{T(B_1)}$ • واعتمادا على (آ) من ١ـ٤ـ٦ ، فلابد من وجود عنصر v في $T(B_1)$ قريب من y،ولنفرض مثلا أن $\|y - v\| < \varepsilon/4$ • وبما أن العلاقة $v \in T(B_1)$ تقتضي المساواة $v = Tx_1$ ، حيث x_1 عنصر من B_1، فان

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

يترتب على هذا وعلى (7) بفرض $n = 2$ ، أن $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$ • وكما في السابق ، فاننا نستنتج أن ثمة عنصرا x_2 في B_2 بحيث أن

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

لذا فان $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$ ، وهكذا • وفي الخطوة ذي الترتيب n ، يمكننا اختيار عنصر x_n من B_n بحيث يكون

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

ليكن $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ • بما أن $x_k \in B_k$ ، فان $\|x_k\| < 1/2^k$ • وينتج من هذا بفرض $n > m$ أن

$$\|z_n - z_m\| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$$

عندما $m \longrightarrow \infty$ • لذا فان (z_n) هي متتالية كوشي ، وبالتالي ، ولما كان X تاما ، فان هذه المتتالية متقاربة ؛ ولنفترض مثلا أن $z_n \longrightarrow x$ • كذلك ، فان $x \in B_0$ لأن نصف قطر B_0 هو 1 وأن

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{9}$$

وبما أن T مستمر ، فان $Tx \longrightarrow Tz_n$ ، ويبين (8) عندئذ أن $Tx = y$ • لذا فان $y \in T(B_0)$ • ∎

اثبات المبرهنة ٤ــ١٢ــ٢

سنبرهن بأنه اذا كانت A أي مجموعة مفتوحة في X ، فان صورتها $T(A)$ مفتوحة في Y • سنفعل هــذا باثبات أنــه أيا كان العنصر $y = Tx \in T(A)$ ، فان المجموعة $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حول $y = Tx$ •

ليكن $y = Tx \in T(A)$ • لما كانت A مفتوحة ، فهي تحوي كرة مفتوحة مركزها x • لذا فان $A - x$ تحوي كرة مفتوحة مركزها 0 ، ليكــن r نصف قطر الكرة ، ولنضع $k = 1/r$ ، الامر الذي يعني أن $r = 1/k$ • عندئذ تحوي $k(A - x)$ الكرة المفتوحة الواحدية $B(0;1)$ • تقتضي التمهيدية ٤ــ١٢ــ٣ الآن أن المجموعــة $T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$ تحوي كرة مفتوحة حول 0 ، وكذلك تفعل المجموعة $T(A) - Tx$ • لذا فان $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حــول $Tx = y$ • وبمــا أن العنصر y من $T(A)$ كان اختياريا فان $T(A)$ مفتوحة •

وأخــيرا ، فاذا كان $T^{-1}: Y \longrightarrow X$ موجودا ، فانه مستمر اعتمادا عــلى المبرهنة ١ــ٣ــ٤ لان T مفتوح • وبما أن T^{-1} خطي استنادا الى المبرهنة ٢ــ٦ــ١٠ فانه محدود بناء على المبرهنة ٢ــ٧ــ٩ • ∎

مســائل

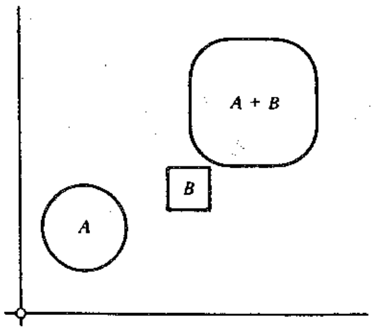
١ ــ بين بــأن $T: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ المعرف بالقاعــدة $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1)$ مفتوح • هــل التطبيق $\mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}^2$ المحدد بالقاعدة $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1, 0)$ تطبيق مفتوح ؟

٢ ــ بين بأن صور المجموعات المغلقة وفــق تطبيق مفتــوح ليست بالضرورة مجموعات مغلقة •

٣ ــ اذا وسعنا (1) و (2) ، فيمكن تعريف

$$A+B=\{x \in X \mid x=a+b, a \in A, b \in B\},$$

حيث A و B مجموعتان جزئيتان من X • وكي يصبح هـذا الرمز مألوفا لديك جد αA و $A+w$ و $A+A$ ، بفـرض أن $A=\{1,2,3,4\}$ • اشـرح الشـكل ٥٠ •



الشكل (٥٠) • المجموعات A و B و $A+B$ في المستوي

٤ ــ بين بأن المتباينة الواردة في (9) تامة (أي أنه لايمكن أن نضع عوضا عن $<$ الرمز $\leqq$) •

٥ ــ ليكن X فضاء منظما نقاطه متتاليات من الاعداد العقدية $x=(\xi_j)$ بحيـث تكون حدود كل متتالية أصفارا باستثناء عدد منته من هذه الحدود ، وحيث النظيم معرف بالمساواة $\|x\|=\sup_j |\xi_j|$ • ليكن $T: X \longrightarrow X$ معرفا كما يلي :

$$y=Tx=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots\right).$$

أثبت أن T خطي ومحدود ، في حين أن T^{-1} ليس محدودا • هل هـذا يناقض ٤ــ١٢ــ٢ ؟

٦ ــ ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثــرا خطيــا محدودا متباينا وغامرا • بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \longrightarrow X$ محدودا هو أن يكون $\mathscr{R}(T)$ مغلقا في Y •

٧ ــ ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءا باناخ • فاذا كان T متباينا وغامرا ، فأثبت وجود عددين حقيقيين موجبين a و b بحيث أن $a\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq b\|x\|$ أيا كان x من X •

٨ ــ (**النظائم المتكافئة**) • ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين على فضاء متجهي X بحيث يكون الفضاءان $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ تامين • فاذا اقتضى $\|x_n\|_1 \longrightarrow 0$ دوما أن $\|x_n\|_2 \longrightarrow 0$ ، فبين أن التقارب في X_1 يقتضي التقارب في X_2 ، وبالعكس • بين وجود عددين موجبين a و b بحيث أنه أيــا كــان x مــن X فــان

$$a\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq b\|x\|_1.$$

(لاحظ أن هذين النظيمين متكافئان ، راجع التعريف ٢ــ٤ــ٤) •

٩ ــ ليكن $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ فضاءي باناخ • فاذا وجــد ثابت c بحيث أن $\|x\|_1 \leqq c\|x\|_2$ أيا كان x من X ، فبين وجــود ثابــت k بحيث أن $\|x\|_2 \leqq k\|x\|_1$ أيا كان x من X (وبالتالي فان النظيمين متكافئان ، راجــع التعريف ٢ــ٤ــ٤) •

١٠ــ نعلم من البند ١ــ٣ أن المجموعة $\mathscr{T}$ الحاوية المجموعات الجزئية المفتوحة في فضاء متري X تسمى **طبولوجيا** على X • وبالتالي فكل نظيم عــلى فضاء متجهي X يعين طبولوجيا على X • فاذا كان لدينا نظيمان علــى X بحيث يكون $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ فضــاءي باناخ ، وكانت الطبولوجيا $\mathscr{T}_1$ المعرفة بـ $\|\cdot\|_1$ تحــوي الطبولوجيا $\mathscr{T}_2$ المعرفــة بـ $\|\cdot\|_2$ ، فبــين أن $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$ •

٤ــ١٣ المؤثرات الخطية المغلقة
مبرهنة البيان المغلق

ليست كل المؤثرات الخطية الهامة من الوجهة التطبيقية محدودة • وعلى سبيل المثال ، فان المؤثر التفاضلي في ٢ــ٧ــ٥ غير محدود ، كما أننا كثيرا ما تتعامل في ميكانيكا الكم وفي تطبيقات أخرى مع مؤثرات غير محدودة • هذا ، وان كل المؤثرات الخطية التي يمكن للباحثين التحليليين استعمالها في الواقع هي تلك المسماة بالمؤثرات الخطية المغلقة • وسنعرف في هذا البند المؤثرات الخطية المغلقة على الفضاءات المنظمة ، وندرس بعضا من سماتها ، وبخاصة ما يتعلق بمبرهنة البيان المغلق الهامة ، والتي تبحث في الشروط الكافية التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المغلق على فضاء باناخ محدودا •

هــذا وسنورد في الفصل العاشر دراسة أكثر تفصيلا للمؤثرات المغلقة ومؤثرات أخرى غير محدودة في فضاء هلبرت ، كما سنورد في الفصل الحادي عشر تطبيقات لهذه المؤثرات في ميكانيكا الكم •

لنبتدىء بالتعريف التالي •

٤ــ١٣ــ١ تعريف (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن X و Y فضاءين منظمين وليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية من X • عندئذ يسمى T **مؤثرا خطيا مغلقا** اذا كان **بيانه**

$$\mathscr{G}(T) = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{D}(T),\ y = Tx\}$$

مغلقا في الفضاء المنظم $X \times Y$ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان للفضاء المتجهي في $X \times Y$ بالطريقة المألوفة ، أي أن

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

(α عدد) ، وحيث يعرف النظيم على $X\times Y$ بالمساواة*

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|. \tag{1}$$

ما هي الشروط التي لو تحققت لكان المؤثر الخطي المغلق محدودا ؟ ان الاجابة عن هذا السؤال تقدمه المبرهنة الهامة التالية .

٤-١٣-٢ مبرهنة البيان المغلق

ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ، حيث $\mathscr{D}(T)$ جزء من X . عندئذ اذا كانت $\mathscr{D}(T)$ مغلقة في X ، فان المؤثر T يكون محدودا .

البرهان :

سنبين أولا أن المجموعة $X\times Y$ المزودة بالنظيم (1) تشكل فضاء تاما . لتكن (z_n) متتالية كوشي في $X\times Y$ ، حيث $z_n=(x_n, y_n)$. عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح N بحيث يكون

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \qquad (m, n > N). \tag{2}$$

لذا فان كلا من (x_n) و (y_n) متتالية لكوشي في X و Y تباعا ، كما أن هاتين المتتاليتين متقاربتان ، وليكن مثلا $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$، لان X و Y تامان . وهذا يقتضي أن يكون $z_n \longrightarrow z=(x, y)$ ، ذلك أنه يترتب على (2) عندما $m \longrightarrow \infty$ أن $\|z_n - z\| \leqq \varepsilon$ حيث $n>N$. وبما أن متتالية كوشي (z_n) كانت اختيارية ، فان $X\times Y$ تام .

ان البيان $\mathscr{G}(T)$ مغلق في $X\times Y$ فرضا و $\mathscr{D}(T)$ مغلقة في X ، لذا فان $\mathscr{G}(T)$ و $\mathscr{D}(T)$ تامان وفق ١-٤-٧ . لنأخذ الآن التطبيق

$$P: \mathscr{G}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T)$$

$$(x, Tx) \longmapsto x.$$

---

* لمزيد من النظائم ، انظر الى المسألة ٢ .

ان P خطي . كذلك فان P محدود لان

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leqq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|.$$

ان P متباين وغامر أيضا ؛ وفعلا فان التطبيق العكسي هو

$$P^{-1}: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{G}(T)$$
$$x \longmapsto (x, Tx).$$

بما أن $\mathfrak{G}(T)$ و $\mathfrak{D}(T)$ تامان ، فيمكننا تطبيق مبرهنة العكس المحدود ٤ــ١٢ــ٢ . ونجد أن P^{-1} محدود ، ولنكتب مثلا أن $\|(x, Tx)\| \leqq b\|x\|$ ، حيث b عدد ما و x أي عنصر من $\mathfrak{D}(T)$. لذا فان T محدود لان

$$\|Tx\| \leqq \|Tx\| + \|x\| = \|(x, Tx)\| \leqq b\|x\|$$

آيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$. ∎

وبالتعريف ، فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $\mathfrak{G}(T)$ مغلقا هو أن تقتضي العلاقة $z = (x, y) \in \overline{\mathfrak{G}(T)}$ أن يكون $z \in \mathfrak{G}(T)$. نستنتج من الشق (آ) من المبرهنة ١ــ٤ــ٦ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $z \in \overline{\mathfrak{G}(T)}$ هو أن توجد $z_n = (x_n, Tx_n) \in \mathfrak{G}(T)$ بحيث أن $z_n \longrightarrow z$ ، وبالتالي يكون

$$x_n \longrightarrow x, \qquad Tx_n \longrightarrow y; \tag{3}$$

ويكون الشرط اللازم والكافي كي تتحقق العلاقة $z = (x, y) \in \mathfrak{G}(T)$ هو أن يكون $x \in \mathfrak{D}(T)$ و $y = Tx$. وهذا يثبت المعيار المفيد التالي الذي يعبر عن خاصة غالبا ما تؤخذ كتعريف لانغلاق مؤثر خطي .

٤ــ١٣ــ٣ مبرهنة (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا ، حيث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ وحيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون T مغلقا هو أن تتحقق

الخاصة التالية : اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، حيث $x_n \in \mathscr{D}(T)$ وكان $Tx_n \longrightarrow y$ ، فان $x \in \mathscr{D}(T)$ و $Tx = y$.

لاحظ جيدا أن هذه الخاصة تختلف عـن الخاصة التالية للمؤثر الخطـي المحدود : اذا كان مؤثر خطي T محـدودا ، وبالتالي مستمرا ، وكانـت (x_n) متتالية في $\mathscr{D}(T)$ متقاربة في $\mathscr{D}(T)$ ، فان (Tx_n) تكون أيضا متقاربة ، راجـع ١ـ٤ـ٨ . ليس من الضروري أن تكون هذه الخاصة صحيحة في حال مؤثـر خطي مغلق ، الا أنه اذا كان T مغلقا وكانت متتاليتان (x_n) و $(\tilde{x}_n)$ في ساحة T متقاربتين ولهما نهاية واحدة ، واذا كانـت المتتاليتان الموافقتان (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ متقاربتين كلاهما ، فان للمتتاليتين الاخيرتين نهاية واحدة . (راجع المسألة ٦) .

٤ـ١٢ـ٤ مثال (المؤثر التفاضلي)

ليكن $X = C[0, 1]$ ، وليكن

$$T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x'$$

حيث ترمز الفتحة الى عملية الاشتقاق ، وحيث $\mathscr{D}(T)$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من الدوال x في X التي مشتقاتها مستمرة . عندئذ يكون T غـير محدود . ولكنه مغلـق .

البرهـان :

نرى من ٢ـ٧ـ٥ أن T غير محدود . سنثبت أن T مغلق بتطبيق المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ . لتكن (x_n) متتالية في $\mathscr{D}(T)$ بحيث تكون المتتاليتان (x_n) و (Tx_n) متقاربتين ، وليكن مثلا

$$x_n \longrightarrow x \qquad \text{و} \qquad Tx_n = x_n' \longrightarrow y.$$

بما أن التقارب في نظيم $C[0, 1]$ هو تقارب منتظم على $[0, 1]$ ، فاننـا نستنتج من $x_n' \longrightarrow y$ أن

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(\tau)\,d\tau = x(t) - x(0),$$

أي أن

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

ويبين هذا أن $x \in \mathfrak{D}(T)$ وأن $x' = y$ • بعد هـذا تقتضي المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ أن T مغلـق • ∎

وتجدر الاشارة في هذا المثال الى أن $\mathfrak{D}(T)$ ليست مغلقة في X ، لانها لو كانت مغلقة ، لكان T محدودا بناء على مبرهنة البيان المغلق •

الانفلاق لا يقتضي محدودية مؤثر خطي . وبالعكس ، فان المحدودية لاتقتضي الانفـلاق •

البرهـان :

الدعوى الاولى موضحة بالمثال ٤ـ١٣ـ٤ • أما الدعوى الثانية ، فنوضحها بالمثال التالي : ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T) \subset X$ المؤثر المطابق على $\mathfrak{D}(T)$ ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ فضاء جزئي تماما وكثيف في فضاء منظم X • عندئذ فان كون T خطيـا ومحدودا أمر واضح للعيان • الا أن T ليس مغلقا ، وهذا ينتج مباشرة مـن المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ اذا أخذنا عنصرا x من $X - \mathfrak{D}(T)$ ومتتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ تتقارب مـن x • ∎

ان مناقشتنا الحالية تشير الى أنه فيما يتعلق بالمؤثرات غير المحدودة ، فان تحديد الساحات ومسائل التمديد تلعب دورا أساسيا • وفعلا ، فان هذا صحيح . وسنراه بمزيد من التفصيل في الفصل العاشر • وتجدر بنا ملاحظة أن الدعوى التي أثبتناها توا سلبية في جوهرها ، أما في الجانب الايجابي ، فانه ترد التمهيدية التاليـة :

٤ــ١٣ــ٥ تمهيدية (المؤثر المغلق)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X ،حيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد ما يلي :

(آ) اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X ، فان T مغلق .

(ب) اذا كان T مغلقا و Y تاما ، فان $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X .

البرهـــان :

(آ) اذا كانت (x_n) متتالية في $\mathfrak{D}(T)$ ومتقاربة مـــن x مثـــلا ، وبحيث تكون المتتالية (Tx_n) متقاربة كذلك ، فـــان $x \in \overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{D}(T)$ ذلـــك أن $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة ، كما أن $Tx_n \longrightarrow Tx$ لكون T مستمرا . ان T هنا مغلق بناء على المبرهنة ٤ــ١٣ــ٣ .

(ب) يوجد لكل x مـــن $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ متتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ بحيث يكـــون $x_n \longrightarrow x$ ، راجع ١ــ٤ــ٦ . وبما أن T محدود ، فان

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية كوشي . ولما كان Y تاما ، فـــان (Tx_n) تتقارب وليكن مثلا $Tx_n \longrightarrow y \in Y$. وبما أن T مغلق ، فـــان $x \in \mathfrak{D}(T)$ استنادا الـــى ٤ــ١٣ــ٣ (كما أن $Tx = y$) . لذا فان $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة لان النقطة x من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ اختياريـــة . ∎

مســـائل

١ ــ برهن بأن (1) تحدد نظيما على $X \times Y$.

٢ ــ ثمة نظائم أخرى تعرف على الجـــداء $X \times Y$ للفضاءين المنظمين X و Y ، نذكـــر منهـــا

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

و

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}.$$

تحقق من أن هاتين المساواتين تحددان نظيمين •

٣ ــ أثبت أن البيان $\mathscr{G}(T)$ لمؤثر خطي $T: X \longrightarrow Y$ هــو فضاء خطــي جزئي مــن $X \times Y$ •

٤ ــ اذا كان X و Y في التعريف ٤ــ١٣ــ١ فضاءي باناخ ، فبين أن الجــداء $V = X \times Y$ المزود بالنظيم المعرف في (1) هو فضاء باناخ •

٥ ــ **(العكس)** اذا كان العكس T^{-1} لمؤثر خطي مغلق موجودا ، فبين أن T^{-1} مؤثر خطي مغلق •

٦ ــ ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا • فاذا كانت المتتاليتان (x_n) و $(\tilde{x}_n)$ في $\mathscr{D}(T)$ متقاربتين من نهاية واحدة x ، وكان كل من (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ متقاربة ؛ فبين أن للمتتاليتين (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ نهاية واحدة •

٧ ــ أثبت صحة الدعوى الثانية من المبرهنة ٤ــ١٢ــ٢ انطلاقا على مبرهنــة البيــان المغلــق •

٨ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقــا •
(آ) بين أن الصورة A لمجموعة جزئية متراصة C في X مغلقــة في Y •
(ب) بين بأن الصورة العكسية B لمجموعة جزئية متراصة K في Y مغلقة في X • (راجع التعريف ٢ــ٥ــ١) •

٩ ــ اذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ، حيث X و Y فضاءان منظمان و Y متراص ، فبين أن T محدود •

١٠ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين و X متراصا • فاذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا متباينا وغامرا ؛ فبين أن T^{-1} محدود •

١١ــ **(الفضاء الصفري)** بين بأن الفضاء الصفري $N(T)$ للمؤثر الخطي المغلق $T: X \longrightarrow Y$ هو فضاء جزئي مغلق في X •

١٢ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين • فاذا كان $T_1: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا و $T_2 \in B(X, Y)$ ، فبين أن $T_1 + T_2$ مؤثر خطي مغلق •

١٣ــ ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء مــن فضاء باناخ X ومداه $\mathfrak{R}(T)$ جزء من فضاء منظم Y • فاذا كان T^{-1} موجودا ومحدودا ، فبين أن $\mathfrak{R}(T)$ مغلــق •

١٤ــ لنفترض أن حدود المتسلسلة $u_1 + u_2 + \cdots$ دوال مشتقاتها مستمرة على الفترة $J = [0, 1]$ ، وان المتسلسلة متقاربة بانتظام على J ومجموعها x • لنفترض أيضا أن $u_1' + u_2' + \cdots$ تتقارب بانتظام أيضا على J • برهن عندئذ أن للدالة x مشتقا مستمرا على $(0, 1)$ ، وأن $x' = u_1' + u_2' + \cdots$ •

١٥ــ **(التمديد المغلق)** ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا بيانه $\mathscr{G}(T)$ ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X ، وحيث X و Y فضاءا باناخ • بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يوجد لـ T ممدد $\tilde{T}$ ، حيث $\tilde{T}$ مؤثر خطي مغلق بيانه $\overline{\mathscr{G}(T)}$ ، هو أن لا يحوي $\overline{\mathscr{G}(T)}$ عنصرا من الشكل $(0, y)$ ، حيث $y \neq 0$ •

الفصل الخامس

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

لاستيعاب مضمون هذا الفصل يكفي قراءة الفصل الاول (دون الفصلين الثاني والرابع) ، وبالتالي فمن الممكن دراسة الفصل الحالي بعد الفصل الاول مباشرة ان شاء القارىء •

ان أهمية مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تكمن في أنها تشكل مصدرا لمبرهنات الوجود والوحدانية في العديد من فروع التحليل • وبهذا المعنى ، فان هذه المبرهنة توضح الى حد بعيد القوة الموحدة لاساليب التحليل الدالي والفائدة المترتبة على مبرهنات النقطة الثابتة في التحليل •

توجيه مختصر حول المضمون الرئيسي

ان **مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ** او **مبرهنة التقليص** ٥–١–٢ تتعلق بتطبيقات معينة (تسمى تقليصات ، راجع ٥–١–١) لفضاء متري تام في نفسه • وهي تورد الشروط الكافية لوجود ووحدانية **نقطة ثابتة** (وهي النقطة التي تكون صورتها وفق التطبيق هي النقطة نفسها) • وتمدنا هذه المبرهنة كذلك بطريقة تكريرية يمكننا بواسطتها الحصول على تقريبات للنقطة الثابتة وعلى

حدود الخطأ (راجع ٥ـ١ـ٣) • وسنتناول في هذا الفصل ثلاثة حقول هامة لتطبيق هذه المبرهنة ، ألا وهي :

المعادلات الجبرية الخطية (البند ٥ـ٢) ،

والمعادلات التفاضلية العادية (البند ٥ـ٣) ؛

والمعادلات التكاملية (البند ٥ـ٤) •

وثمة تطبيقات أخرى (في المعادلات التفاضلية الجزئية مثلا) والتي نحتاج لدراستها متطلبات أخرى •

٥ـ١ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

النقطة الثابتة لتطبيق $T: X \longrightarrow X$ لمجموعة X في نفسها هي نقطة x من X تكون صورتها وفق التطبيق النقطة x ذاتها (بمعنى أن x « تبقى ثابتة » وفق T) ، أي أن

$$Tx = x,$$

الامر الذي يعني بأن الصورة Tx تتطابق والعنصر x •

وعلى سبيل المثال ، فلا يوجد للانسحاب نقاط ثابتة ، أما دوران المستوى فله نقطة ثابتة وحيدة (هي مركز الدوران) ، وأما التطبيق $x \longmapsto x^2$ للمجموعة $\mathbf{R}$ في نفسها فله نقطتان ثابتتان (0 و 1) ، وأما الاسقاط $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto \xi_1$ لـ $\mathbf{R}^2$ على المحور ξ_1 فله عدد غير منته من النقاط الثابتة (هي نقاط المحور ξ_1 جميعا) •

ان مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ، والتي سندرجها بعد قليل ، هي مبرهنة حول وجود ووحدانية نقاط ثابتة لتطبيقات معينة ، وهي ، فضلا عن ذلك . تمدنا بالاجراءات اللازمة للحصول على تقريبات أفضل للنقطة الثابتة (أي حل المسألة العملية) • يدعى هذا الاجراء **تكريرا** ويعرف بأنه الطريقة التي تتم بأن نختار عنصرا كيفيا x_0 في مجموعة معطاة ، ونحسب بالتدريج متتالية $x_0, x_1, x_2, \cdots$ من علاقة بالشكل

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

أي أننا نختار عنصرا كيفيا x_0 ، ونعين على التوالي العناصر $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$ و .....

ان الاجراءات التكريرية تستعمل في كل فرع تقريبا من فروع الرياضيات التطبيقية ، كما أن براهين التقارب وتقديرات الخطأ تتم على الاغلب باستعمال مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (أو مبرهنات أعقد في النقطة الثابتة) . وتعطي مبرهنة باناخ الشروط الكافية لوجود (ووحدانية) نقطة ثابتة لصف من التطبيقات تسمى تقليصات ، نعرفها على النحو التالي .

٥-١-١ تعريف (التقليص)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا . يدعى التطبيق $T: X \longrightarrow X$ **تقليصا على** X اذا وجد عدد حقيقي موجب α وأصغر من 1 بحيث أنه اذا كان x, y عنصرين من X فان

$$d(Tx, Ty) \leqq \alpha d(x, y) \qquad (\alpha < 1). \tag{1}$$

ويعني هذا هندسيا أن لاي نقطتين x و y صورتين أقرب احداهما الى الاخرى من قرب النقطتين x و y من بعضهما ، وبعبارة أدق ، فان النسبة $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ لا يمكن أن تتجاوز عددا ثابتا α أصغر من 1 .

٥-١-٢ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (مبرهنة التقليص)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا ، حيث $X \neq \varnothing$. فاذا كان X تاما وكان $T: X \longrightarrow X$ تقليصا على X ، فانه يوجد لـ T نقطة ثابتة واحدة بالضبط .

البرهان :

سننشيء متتالية (x_n) ونبين بأنها متتالية كوشي ، الامر الذي يعني أنها متقاربة نظرا لكون X فضاء تاما ؛ وبعدئذ نبرهن بأن نهايتها x نقطة ثابتة لـ T وأنه لا يوجد لـ T نقاط ثابتة أخرى . أما فكرة البرهان فهي كما يلي :

نختار أيِ عنصر x_0 من X ، ونعرف « المتتاليـــة التـكريرية » (x_n) علـــى النحو التالي :

$$(2) \qquad x_0, \qquad x_1 = Tx_0, \qquad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \cdots, \quad x_n = T^n x_0, \quad \cdots.$$

من الواضح أن هذه هي متتالية صور x_0 وفق الاستعمال المتكرر لـ T • سنبين أن (x_n) هي متتالية كوشي • لدينا استنادا الى (1) و (2) التالي

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leqq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leqq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \cdots &\leqq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

وبالتالي فاننا نجد استنادا الى متباينة المثلث والى الدستور الذي يعطي مجموع الحدود الاولى من متسلسلة هندسية أنه اذا كان $n > m$ فان

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

وبما أن $0 < \alpha < 1$ ، فاننا نجد في البسط أن $1 - \alpha^{n-m} < 1$ ، ويكون بالتالي

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad (n > m). \tag{4}$$

ولما كان $0 < \alpha < 1$ وكان $d(x_0, x_1)$ عددا ثابتا ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن من المتباينة السابقة صغيرا بقدر ما نشاء لدى أخذ m كبيرا بقدر كاف (وأخـــذ $n > m$) • وبالتالي فان (x_m) هي متتالية كوشي • وبما أن X تام ، فـــان (x_m) متقاربة ؛ وليكن مثلا $x_m \longrightarrow x$ • سنبين الآن أن هذه النهاية x هي نقطة ثابتة للتطبيق T •

يترتب على متباينة المثلث وعلى (1) أن

$$d(x, Tx) \leqq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$
$$\leqq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

وبما أنه يمكن جعل المجموع الوارد في السطر الثاني أصغر من أي عدد موجب ε معطى سلفا ، لان $x_m \longrightarrow x$ ، فاننا نستنتج أن $d(x, Tx) = 0$ ، الامر الذي يترتب عليه أن $x = Tx$ استنادا الى (م٢) من البند ١ـ١ • لذا فان x نقطة ثابتة لـ T •

ان x هي النقطة الثابتة الوحيدة للتطبيق T ، ذلك أنه يترتب على $Tx = x$ و $T\bar{x} = \bar{x}$ استنادا الى (1) أن

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leqq \alpha d(x, \bar{x})$$

وهذا يقتضي أن يكون $d(x, \bar{x}) = 0$ نظرا لان $\alpha < 1$ • وبالتالي فان $x = \bar{x}$ استنادا الى (م٢) ، وبذا يكتمل اثبات المبرهنة •∎

٥ـ١ـ٣ نتيجة (التكرير ، حدا الخطا)

اذا روعيت شروط المبرهنة ٥ـ١ـ٢ فان المتتالية التكريرية (2) ، بفرض x_0 عنصرا اختياريا من X ، تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة x لـ T • اما تقديرا الخطا فهما التقدير السابق

$$d(x_m, x) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad (5)$$

والتقدير اللاحق •

$$d(x_m, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m). \qquad (6)$$

البرهان :

ان الدعوى الاولى جلية من البرهان السابق ، ذلك أن المتباينة (5) تنتج من (4) بجعل $n \longrightarrow \infty$ • لننتقل الآن الى استنتاج (6) • اذا أخذنا $m = 1$

واستعضنا عن y_0 بـ x_0 وعن y_1 بـ x_1 فاننا نجد انطلاقا من (5) أن

$$d(y_1, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

فاذا وضعنا $y_0 = x_{m-1}$ ، فاننا نجد $y_1 = Ty_0 = x_m$ ونحصل على (6) • ∎

ان حد الخطأ السابق (5) يمكن أن يستعمل في بداية حساب تقدير عـدد الخطوات الضرورية للحصول على دقة معطاة • أمـا (6) فيمكن أن يستعمل في المراحل المتوسطة أو في نهاية الحساب ، ودقته تساوي على الاقل دقة (5) ، وقد تكون أفضل ، راجع المسألة ٨ •

ان هذا الوضع من وجهة نظر الرياضيات التطبيقية لا يزال غير مرض تماما ، ذلك أنه كثيرا ما يحدث أن يكون التطبيق T تقليصا ليس على الفضاء X بأكمله ، وانما على مجموعة جزئية Y من X • بيد أنه اذا كانت Y مغلقة ، فهي تامة (وفق المبرهنة ١ـ٤ـ٧) وبالتالي يوجد لـ T نقطة ثابتـة x في Y ، كما أن $x_m \longrightarrow x$ كما في السابق ، شريطة فرض قيد مناسب على اختيار x_0 بحيث تبقى الحدود x_m في Y • ونورد في هذا الصدد نتيجة نموذجية ومفيدة من الوجهة العملية على النحو التالي •

٥ـ١ـ٤ مبرهنة (التقليص على كرة)

ليكن T تطبيقا لفضاء متري تام $X = (X, d)$ في نفسه ، لنفترض ان T تقليص على كرة مغلقة $Y = \{x \mid d(x, x_0) \leqq r\}$ ، اي ان T يحقق (1) أيا كان x و y من Y • لنفترض فضلا عن ذلك ان

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r. \tag{7}$$

عندئذ تتقارب المتتالية التكريرية (2) من نقطة x في Y • ان x هذه هي نقطة ثابتـة لـ T ، كما أنها النقطة الثابتة الوحيدة لـ T في Y •

البرهـان :

علينا فقط اثبات أن كل الحدود x_m والنقطة كذلك تقع في Y • اذا وضعنا

$m=0$ في (4) وغيرنا n الى m واستعملنا (7) ، فاننا نجد أن

$$d(x_0, x_m) \leqq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r.$$

لذا فان كل الحدود x_m واقعة في Y •كذلك فان $x \in Y$ ذلك أن $x_m \to x$ وأن Y مغلقة • وهكذا فان صحة المبرهنة تترتب الآن من برهان مبرهنة باناخ ٥ـ١ـ٢ •∎

ويمكن للقارئ ايراد برهان بسيط للتمهيدية التالية التي سنستعملها في أبحاثنا القادمة •

٥ـ١ـ٥ تمهيدية (الاستمرار)

ان التقليص T على فضاء متري X هو تطبيق مستمر

مسائل

١ ـ أعط أمثلة أخرى على تطبيقات في الهندسة الابتدائية لها (آ) نقطة ثابتة وحيدة ، (ب) عدد غير منته من النقاط الثابتة •

٢ ـ ليكن $X=\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqq 1\} \subset \mathbf{R}$ ، وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيقا معرفا بالمساواة $Tx = x/2 + x^{-1}$ • بين أن T تقليص ، وأوجد أصغر قيمة ممكنة لـ α •

٣ ـ بين بايراد مثال أن التمام في المبرهنة ٥ـ١ـ٢ شرط ضروري ولا يمكن حذفه •

٤ ـ من المهم في مبرهنة باناخ ٥ـ١ـ٢ أن الشرط (1) لا يمكن الاستعاضة عنه بالمتباينة $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$ • وللتأكد من هذا الامر نأخذ المجموعة $X=\{x \mid 1 \leqq x < +\infty\}$ المزودة بمقصور المترك المألوف على المحور الحقيقي ، والتطبيق $T: X \longrightarrow X$ المعرف بالشكل $x \longmapsto x + x^{-1}$ • بين أن $|Tx - Ty| < |x - y|$ عندما يكون $x \neq y$ ، في حين أنه لا يوجد للتطبيق نقاط ثابتة •

٥ ــ اذا حقق التطبيق $T: X \longrightarrow X$ الشرط $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$ ، وكان لـ T نقطة ثابتة ، فبين أن النقطة الثابتة وحيدة • ان (X, d) هنا هــو فضاء متري •

٦ ــ اذا كان T تقليصا ، فبين أن T^n (حيث $n \in \mathbf{N}$) تقليص • أثبت أنه اذا كان T^n تقليصا (حيث $n > 1$) ، فليس من الضروري أن يكون T تقليصا •

٧ ــ أثبت صحة التمهيدية ٥ــ١ــ٥ •

٨ ــ بين بأن حدود الخطأ المعطاة بـ (5) تشكل متتالية رتيبة متناقصة تمامــا • أثبت أن جودة (6) هي على الاقل مثل جودة (5) •

٩ ــ بين أنه في حالة المبرهنة ٥ــ١ــ٤ ، فاننا نجــد تقــدير الخطــأ السابق $d(x_m, x) < \alpha^m r$ وتقدير الخطأ اللاحق (6) •

١٠ــ هنالك شرط كاف مألوف في التحليل لتقارب تكرير $x_n = g(x_{n-1})$ هــو أن يكون لـ g مشتق مستمر وأن يكون

$$|g'(x)| \leqq \alpha < 1.$$

تحقق من هذا الامر باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ •

١١ــ للحصول على حلول عددية تقريبية لمعادلة معطاة $f(x) = 0$ ، يمكن تحويــل المعادلة الى الشكل $x = g(x)$ ، واختيار قيمة ابتدائية x_0 وحساب

$$x_n = g(x_{n-1}) \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

لنفترض أنه يوجد لـ g مشتق مستمر على فترة ما $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ ، وأنــه يحقق الشرط $|g'(x)| \leqq \alpha < 1$ على J وكذلك الشرط

$$|g(x_0) - x_0| < (1 - \alpha) r.$$

بين عندئذ أنه يوجد للمعادلة $x = g(x)$ حل وحيد x على J ، وأن المتتالية التكريرية (x_m) تتقارب من هذا الحل ، وأننا نجــد تقديري الخطأ التاليين

$$|x - x_m| < \alpha^m r, \qquad |x - x_m| \leqq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_m - x_{m-1}|.$$

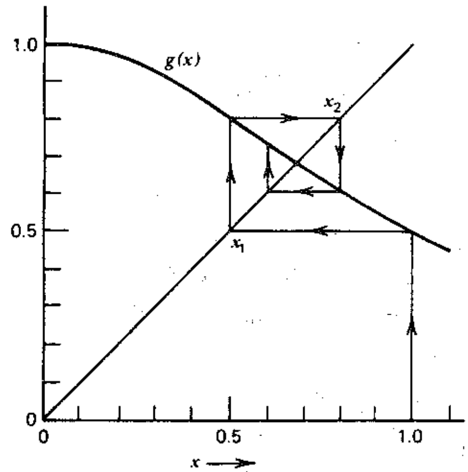
١٢ــ أنشــىء طريقة تكريرية لحل المعادلة $f(x)=0$ بالافادة مــن مبرهنــة باناخ ٥ــ١ــ٢ اذا وجد مشتق مستمر لـ f علــى الفتــرة $J=[a,b]$ ، وكــان $f(a)<0$ و $f(b)>0$ و $(x\in J)$ $0<k_1\leqq f'(x)\leqq k_2$ • استعمل $g(x)=x-\lambda f(x)$ بقيمة مناسبة لـ λ •

١٣ــ سنورد طريقة تكريرية في حل $f(x)=x^3+x-1=0$ على النحو التالي :

(آ) بين أن احد الامكانات هو

$$x_n=g(x_{n-1})=(1+x_{n-1}^2)^{-1}.$$

اختر $x_0=1$ وانجز ثلاث خطوات • هل $|g'(x)|<1$ ؟ (راجع المسألة ١٠) • بين أنه يمكن شرح التكرير بالشكل ٥١ • (ب) قدر الاخطاء باستعمال (5) • (جـ) يمكن كتابة $f(x)=0$ بالشكل $x=1-x^3$ • هل هــذه الصيغة مناسبة للتكرير ؟ جرب $x_0=1$ و $x_0=0.5$ و $x_0=2$ ، وانظر فيما يحدث •



الشكل (٥١) • التكرير في الشق(آ) من المسألة ١٣

١٤ــ بين أن ثمة طريقة تكرير أخرى للمعادلة الواردة في المسألة ١٣ هي

$$x_n=x_{n-1}^{1/2}(1+x_{n-1}^2)^{-1/2}.$$

اختر $x_0=1$ • عين x_1 و x_2 و x_3 • ما هو سبب التقارب السريع ؟ (الجذر الحقيقي هو $0.682\,328$ مقربا الى ستة أرقام عشرية) •

١٥ــ **(طريقة نيوتن)** لتكن f دالــة حقيقية مشتقاها الاول والثاني مستمران على الفترة $[a, b]$ ، وليكن $\hat{x}$ صفرا بسيطا لـ f في (a, b) • بين بــأن طريقة نيوتن المعرفة كالتالي

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هي تقليص في جوار ما للنقطة $\hat{x}$ (بحيث تتقارب المتتالية التكريرية من $\hat{x}$ أيا كانت x_0 القريبة بقدر كاف من $\hat{x}$) •

١٦ــ **(الجذر التربيعي)** • أثبت أن

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

هو تكرير لحساب الجذر التربيعي لعدد موجب معطى c ، حيث $n=0, 1, \cdots$ • ما هو الشرط الذي نجده من المسألة ١٠ ؟ واذا انطلقنا من $x_0=1$ ، فاحسب التقريبات $x_1, \cdots, x_4$ لـ $\sqrt{2}$ •

١٧ــ ليكن $T\colon X \longrightarrow X$ تقليصا على فضاء متري تام ، بحيث تتحقق المتباينة (1) • وبسبب أخطاء التدوير وأسباب أخرى ، فاننا غالبا ما نأخذ بــدلا مــن T تطبيقا $S\colon X \longrightarrow X$ بحيث تتحقق المتباينة

$$d(Tx, Sx) \leqq \eta \quad (\text{عدد مناسب } \eta > 0)$$

أيا كان x من X •أثبت باستعمال طريقة الاستقراء الرياضي أنه عندئذ يكون أيا كان x من X :

$$d(T^m x, S^m x) \leqq \eta \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

١٨ــ قد لا يوجد للتطبيق S الوارد في المسألة ١٧ نقطة ثابتة • ولكن قد يحدث

غالبا أن توجد نقطة ثابتة y لـ S^n من أجل عدد ما n • بين بالافادة من المسألة ١٧ أن المسافة بين y والنقطة الثابتة x تكون عندئذ هي

$$d(x, y) \leqq \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

١٩ــ لنفترض في المسألة ١٧ أن $x = Tx$ و $y_m = S^m y_0$ • بين باستعمال (5) والمسألة ١٧ أن

$$d(x, y_m) \leqq \frac{1}{1-\alpha}[\eta + \alpha^m d(y_0, Sy_0)].$$

ما هي أهمية هذا الدستور في التطبيقات ؟

٢٠ــ **(شرط ليبشتز)** تقول عن تطبيق $T: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ انه يحقق **شرط ليبشتز بثابت ليبشتز** k على $[a, b]$ اذا وجد عدد ثابت k بحيث يتحقق الشرط

$$|Tx - Ty| \leqq k\,|x - y|.$$

أيا كان x و y من $[a, b]$ • (آ) هل T تقليص ؟ (ب) اذا وجد لـ T مشتق مستمر على $[a, b]$ ، فبين أن T يحقق شرط ليبشتز • (جـ) هل عكس (ب) صحيح ؟

٥ــ٢ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات الخطية

لمبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تطبيقات هامة في طرق التكرير المتعلقة بحل جمل المعادلات الجبرية الخطية ، وهي تقدم شروطا كافية لتقارب حدود الخطأ •

ولفهم الموضوع ، نعيد أولا الى الذاكرة أن ثمة **طرقا مباشرة** عدة لحل مثل هذه الجملة (وهذه الطرق تعطي الحل التام بعد القيام بعدد منته من العمليات

الحسابية اذا كانت الدقة ــ طول الكلمة في الآلة الحاسبة ــ غير محدودة) ، ومن الامثلة المألوفة طريقة الحذف لغوص (الطريقة النظامية التي تعلم في المدارس) • بيد أن التكرير ؛ أو **الطريقة غير المباشرة** ، قد يكون أكثر فعالية اذا كانت الجملة من نمط خاص ، كأن تكون **غير كثة** ، أي أنها تتألف من عدد كبير من المعادلات الا أن عدد معاملاتها غير الصفرية قليـــل • (ان مسائل الاهتزازات والشبكات وتقريبات الفضل للمعادلات التفاضلية الجزئية غالبا ما تقود الى جملة غير كثة) • وفضلا عن ذلك ، فان الطرق المباشرة المعتادة تتطلب قرابة $n^3/3$ مـــن العمليات الحسابية (n =عدد المعادلات = عدد المجاهيل) ، وقد تصبح أخطاء التدوير كبيرة جدا عندما تأخذ n قيما كبيرة ، في حـــين أنه في التكرير ؛ فـــان الاخطاء الناشئة عن التدوير تتلاشى في نهاية المطاف • وفي الحقيقة ، فان طرق التكرير تستعمل غالبا لتحسين «الحلول» التي نجدها باستخدام الطرق المباشرة •

لتطبيق مبرهنة باناخ ، فاننا نحتاج الى فضاء متري تام وتطبيق تقليص عليه • لنأخذ المجموعة X لجميع المرتبات n من الاعداد الحقيقية التي نكتبها بالشكل

$$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n), \qquad y=(\eta_1, \cdots, \eta_n), \qquad z=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n),$$

وهكذا • لنعين على X متركا d معرفا بالمساواه

$$d(x, z)=\max_j |\xi_j-\zeta_j|. \tag{1}$$

ان $X=(X, d)$ تام ، وهذا أمر يمكن اثباتـــه بصورة مماثلة لما فعلناه في المثـــال ١ــ٥ــ١ •

سنعرف على X التطبيق $T\colon X \longrightarrow X$ بالدستور

$$y=Tx=Cx+b \tag{2}$$

حيث $C=(c_{jk})$ مصفوفة حقيقية مثبتة $n\times n$ ، وحيث b متجه مثبت في X • ان كل المتجهات هنا وحيثما وجدت في هذا البند هـــي **متجهات عمودية** ، بسبب الاصطلاحات المألوفة في ضرب المصفوفات •

ما هي الشروط الواجب توفرها كي يكون T تقليصا ؟ اذا كتبنا (2) بدلالة المركبات ، فاننا نجـد

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j \qquad\qquad j = 1, \cdots, n,$$

حيث $b = (\beta_j)$ • فاذا وضعنا $w = (\omega_j) = Tz$ ، فاننا نجد من (1) و (2) أن

$$\begin{aligned} d(y, w) = d(Tx, Tz) &= \max_j |\eta_j - \omega_j| \\ &= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k - \zeta_k) \right| \\ &\leqq \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \\ &= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \end{aligned}$$

نرى بأنه يمكن كتابة هذا بالشكل $d(y, w) \leqq \alpha d(x, z)$ ، حيث

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \tag{3}$$

وهكذا فانه يترتب على مبرهنة باناخ ما يلي •

٥-٢-١ مبرهنة (المعادلات الخطية)

اذا كانت الجملة

$$x = Cx + b \qquad\qquad (C = (c_{jk}) \text{ معطى}) \tag{4}$$

المؤلفة من n من المعادلات الخطية في n مـن المجاهيـل $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (مركبات x) تحقق الشرط

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, n), \tag{5}$$

فلها حل واحد بالضبط x • يمكن الحصول على هذا الحل بايجاد نهاية المتتالية التكريرية $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$ ، حيث $x^{(0)}$ كيفي وحيث

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \qquad m = 0, 1, \cdots. \tag{6}$$

اما حدود الخطأ فهي [راجع (3)]

$$d(x^{(m)}, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \tag{7}$$

ان (5) شرط كاف للتقارب ، وهو **معيار مجموع الاسطر** ذلك أنـه يحوي مجاميع سطرية نجدها بجمع القيم المطلقة لعناصر سطر في C • واذا استعضنا عن (1) بمتارك أخرى ، فاننا نجد شروطا أخرى • ونورد في المسألتين ٧و٨ حالتين هامتين من الوجهة التطبيقية •

كيف تكون المبرهنة ٥-٢-١ مرتبطة بالطرق المستعملة في التطبيقات العملية ؟ ان الجملة المؤلفة من n من المعادلات والحاوية على n من المجاهيل تكتب عادة بالشكل

$$Ax = c, \tag{8}$$

حيث A مصفوفة مربعة عدد أسطرها n • والعديد من الطرق التكريرية في حل (8) حيث $\det A \neq 0$ تتم بأن نكتب $A = B - G$ حيث B مصفوفة غير شاذة مناسبة • عندئذ تغدو (8) بالشكل

$$Bx = Gx + c$$

وبالتالي نجد أن

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

وهذا يوحي بالتكرير (6) حيث

$$C = B^{-1}G, \qquad b = B^{-1}c. \tag{9}$$

لنوضح هذا بطريقتين معياريتين ، هما طريقة جاكوبي في التكرير ذات الاهمية النظرية البالغة ، وطريقة غوص ـ سيدل في التكرير المستعملة بصورة واسعة في الرياضيات التطبيقية •

٥ـ٢ـ٢ تكرير جاكوبي

تعرف طريقة التكرير هذه كما يلي :

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{10}$$

حيث $c = (\gamma_j)$ في (8) ، ونفترض أن $a_{jj} \neq 0$ عندما $j = 1, \cdots, n.$ • ويقترح هذا التكرير بحل المعادلة ذات الترتيب j في (8) بالنسبة الى ξ_j • من السهل التحقق بأن (10) يمكن كتابتها بالشكل (6) حيث

$$C = -D^{-1}(A - D), \qquad b = D^{-1}c \tag{11}$$

بفرض أن $D = \text{diag}\,(a_{jj})$ هي المصفوفة القطرية التي عناصرها غير الصفرية هي عناصر القطر الرئيسي لـ A •

ان الشرط (5) المطبق على C في (11) كاف لتقارب تكرير جاكوبي • وبما أن C في (11) بسيطة نسبيا ، فانه يمكن التعبير عن (5) مباشرة بدلالة عناصر A ، وتكون النتيجة هي معيار مجموع الاسطر لتكرير جاكوبي

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1 \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{12}$$

أو

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}| \qquad j = 1, \cdots, n. \tag{12*}$$

ويمكن القول بأن هذا يبين أن التقارب يكون مضمونا اذا كانـت العناصر في القطر الرئيسي لـ A كبيرة بقدر كاف •

لاحظ بأنه في تكرير جاكوبي ، فقد تكون بعض المركبات لـ $x^{(m+1)}$ متوفرة في لحظة معينة ، الا أنها لا تستعمل أثناء تقدم عملية حساب المركبات الباقية ، أي ان جميع المركبات لتقريب جديد تقدم في آن واحد في نهاية الدورة التكريرية • ونعبر عن هذه الحقيقة بقولنا ان تكرير جاكوبي هو طريقة **للتصحيحات الآنية** •

٥–٢–٣ تكرير غوص ـ سيدل

ان هذه طريقة **للتصحيحات المتتابعة** ، التي تستعمل فيها كل المركبات المعروفة أخيرا في كل لحظة • وتعرف الطريقة كما يلي :

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right). \tag{13}$$

حيث $j = 1, \cdots, n$ ، ونفترض ثانية أن $a_{jj} \neq 0$ أيا كان j •

ونحصل على مصفوفة من (13) بأن نكتب (الشكل ٥٢)

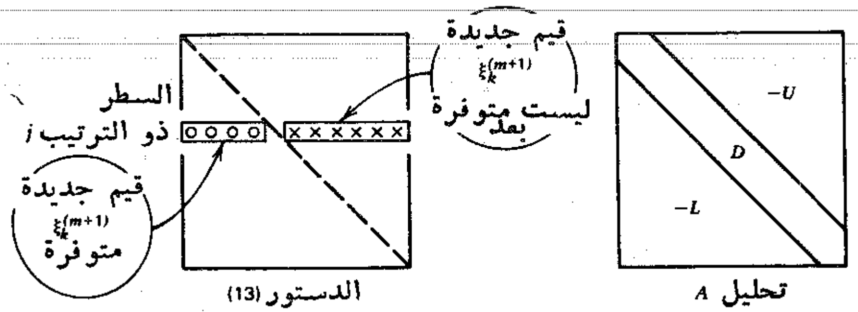
$$A = -L + D - U$$

حيث D هو كما عرفناه في تكرير جاكوبي ؛ وحيث L و U مصفوفتان مثلثتان سفلى وعليا على الترتيب ، عناصرهما في القطر الرئيسي أصفار جميعا ، واشارتا الناقص الواردتان أمر اصطلاحي ومتفق عليه • لنتخيل الآن أن كل معادلة في (13) ضربت بـ a_{jj} • عندئذ يمكننا كتابة الجملة الناتجة بالشكل

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

أو

$$(D-L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}.$$



الشكل (٥٢) • ايضاح دستوري غوص ــ سيدل (13) **و** (14)

واذا ضربنا بـ $(D-L)^{-1}$ ، فاننا نجد (6) حيث

$$C=(D-L)^{-1}U, \qquad b=(D-L)^{-1}c. \tag{14}$$

ان الشرط (5) المطبق على C في (14) كاف لتقارب تكرير غوص ــ سيدل• ولما كانت C معقدة ، فان المسألة العملية الباقية تتلخص في ايجاد شروط أبسط كي تكون (5) صالحة • ونذكر دون برهان أن (12) كاف ، الا أن ثمة شروطا أفضل يمكن أن يجدها القارىء المهتم بهذا الموضوع في الصفحات 494 و 495 و 500 من كتاب :

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill

مســائل

١ ــ تحقق من صحة (11) و (14) •

٢ ــ لنأخذ الجملة

$$5\xi_1 - \xi_2 = 7$$
$$-3\xi_1 + 10\xi_2 = 24.$$

(آ) حدد الحل التام • (ب) طبق تكرير جاكوبي • هل تحقق C الشرط (5) ؟

واذا انطلقنا من المتجه $x^{(0)}$ الذي مركبتاه 1, 1 ، فاحسب $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ وحدود الخطأ (7) لـ $x^{(2)}$ • قارن هذه الحدود بالخطأ الفعلي لـ $x^{(2)}$ • (ج) طبق تكرير غوص ــ سيدل ، وذلك باجراء نفس الخطوات كما في (ب) •

٣ ــ لنأخذ الجملة

$$\begin{aligned}
\xi_1-0.25\xi_2-0.25\xi_3 \qquad\qquad &= 0.50\\
-0.25\xi_1+\xi_2 \qquad\qquad -0.25\xi_4 &= 0.50\\
-0.25\xi_1 \qquad +\xi_3-0.25\xi_4 &= 0.25\\
-0.25\xi_2-0.25\xi_3+\xi_4 &= 0.25.
\end{aligned}$$

(تنشأ المعادلات من هذا النمط في الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية) • (آ) طبق تكرير جاكوبي منطلقا من $x^{(0)}$ ذي المركبات 1, 1, 1, 1 باجراء ثلاث خطوات • قارن التقريبات بالقيم الحقيقية $\xi_1=\xi_2=0.875$ و $\xi_3=\xi_4=0.625$ • (ب) طبق تكرير غوص ــ سيدل باجراء نفس ما فعلناه في (آ) •

٤ ــ تنص **مبرهنة كيرشكورين** على أنه اذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $C=(c_{jk})$ ، فاننا نجد من أجل عدد ما j ، حيث $1\leqq j\leqq n$ ، أن

$$|c_{jj}-\lambda|\leqq\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|c_{jk}|.$$

(**القيمة الذاتية** لـ C هي عدد λ بحيث تتحقق المساواة $Cx=\lambda x$ من أجل عنصر ما غير صفري x) • (آ) بين أنه يمكن كتابة(4) بالشكل $Kx=b$ ، حيث $K=I-C$ وعندئذ تقتضي مبرهنة كيرشكورين و(5) معا أنه لا يمكن أن يوجد لـ K قيمة ذاتيه 0 (وبالتالي تكون K غير شاذة ، أي أن يكون $\det K\neq 0$ ويكون للمعادلة $Kx=b$ حل وحيد) • (ب) بين بأن (5) ومبرهنة كيرشكورين تقتضيان بأن يكون لـ C في (6) نصف قطر طيفي أصغر من 1 • (يمكن الاثبات بأن هذا لازم وكاف لتقارب التكرير • **ونصف القطر الطيفي** لـ C هو $\max_j|\lambda_j|$ ، حيث $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية لـ C) •

٥ ــ يبين المثال التالي جملة يتباعد من أجلها تكرير جاكوبي في حــين يتقارب تكرير غوص ــ سيدل :

$$2\xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3=4$$
$$\xi_1+2\xi_2+\ \xi_3=4$$
$$\xi_1+\ \xi_2+2\xi_3=4.$$

فاذا انطلقنا من $x^{(0)}=0$ ، تحقق من تباعد تكرير جاكوبي وانجز الخطوات القليلة الاولى في تكرير غوص ــ سيدل لتحصل على الانطباع بأن التكرير يبدو متقاربا من الحل التام $\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$ •

٦ ــ من المقبول ظاهريا الظــن بــأن تكرير غوص ــ سيدل أفضل من تكريــر جاكوبي في كل الاحوال • وواقع الامر ، فان الطريقتين غير قابلتين للمقارنة، وهذا أمر يدعو للدهشة • وعلى سبيل المثال ، ففي حالة الجملة

$$\xi_1\qquad+\ \xi_3=2$$
$$-\xi_1+\ \xi_2\qquad=0$$
$$\xi_1+2\xi_2-3\xi_3=0$$

يكون تكرير جاكوبي متقاربا ، في حين أن تكرير غوص ــ سيدل متباعد • استنتج هاتين الحقيقيتين انطلاقا من الشروط اللازمــة والكافية المنصوص عنها في الشق (ب) من المسألة ٤ •

٧ ــ **(معيار مجموع الاعمدة)** يقابــل المترك َ في (1) الشرط ُ (5) • فــاذا زودنــا X بالمتــرك d_1 المعرف بالمساواة

$$d_1(x, z)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\zeta_j|,$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{jk}|<1 \qquad (k=1,\cdots,n). \tag{15}$$

٨ — **(معيار مجموع المربعات)** يقابـل المتـرك في (1) الشرط (5) . فـاذا زودنـا X بالمترك الاقليدي d_2 المعرف بالمساواة

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \zeta_j)^2\right]^{1/2},$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}{}^2 < 1. \tag{16}$$

٩ — **(تكرير جاكوبي)** بين أنه في حالة تكريـر جاكوبي ، فـان الشروط الكافية للتقارب (5) و (15) و (16) تأخذ الشكل

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \qquad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \qquad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}{}^2}{a_{jj}{}^2} < 1.$$

١٠— أوجد المصفوفة C التي تحقق (5) دون أن تحقق (15) أو (16) .

٥—٣ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التفاضلية

ان أهم تطبيقات مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ترد في سياق فضاءات الدوال ، وعندئذ تمدنا المبرهنة بمبرهنات في وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية ، كما سنرى في هذا البند .

سنأخذ فـي هـذا البنـد **معادلة تفاضلية عادية ظاهرة من المرتبة الاولى**

$$x' = f(t, x) \qquad (' = d/dt). \tag{1a}$$

وتتألف **مسالة القيمة الابتدائية** لهذه المعادلة مـن المعادلة نفسها ومـن الشرط الابتـدائي

$$x(t_0) = x_0 \tag{1b}$$

حيث t_0 و x_0 عددان حقيقيان معطيان .

سنستخدم مبرهنة باناخ لاثبات مبرهنة بيكار الشهيرة ، التي على الرغم من كونها ليست الاقوى بين المبرهنات المماثلة المعروفة ، الا أنها تلعب دورا حيويا في نظرية المعادلات التفاضلية العادية . وفكرة المعالجة جد بسيطة ، اذ أننا سنحول (1) الى معادلة تكاملية تعرف تطبيقا T ، وشروط المبرهنة ستقتضي أن يكون T تقليصا بحيث تغدو نقطته الثابتة هي الحل لمسألتنا .

٥-٣-١ مبرهنة بيكار في الوجود والوحدانية (المعادلات التفاضلية العادية)

لتكن f دالة مستمرة على المستطيل

$$R=\{(t, x) \mid |t-t_0| \leqq a, |x-x_0| \leqq b\}$$

وبالتالي فان f محدودة على R ، ولنفترض مثلا ان

$$|f(t, x)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, x) \in R \tag{2}$$

لنفترض أن f تحقق شرط ليبشتز على R بالنسبة للمتغير الثاني x ، اي انـه يوجد عدد ثابت k (هو ثابت ليبشتز) بحيث أنه اذا كان (t, x) و (t, v) عنصرين مـن R فـان

$$|f(t, x)-f(t, v)| \leqq k\,|x-v|. \tag{3}$$

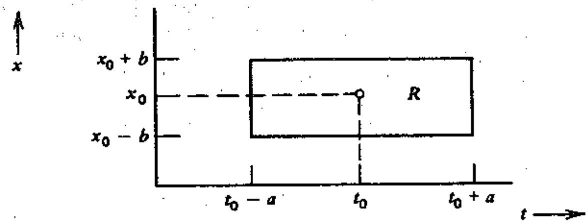
عندئذ يكون لمسألة القيمة الابتدائية (1) حل وحيد . وهـذا الحل موجود علـى الفترة $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ ، حيث*

$$\beta<\min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{4}$$

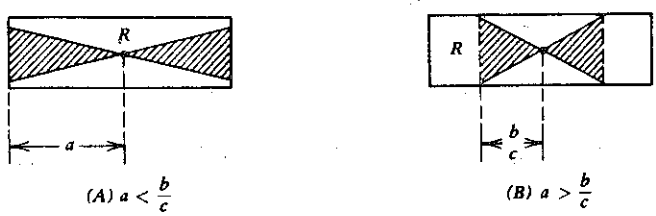
---

* في البرهان التقليدي يكون $\beta<\min\{a, b/c\}$ وهذا افضل . ويمكـن الحصول على هذا أيضا بتعديل للبرهان الحالي (وذلك باستخدام مترك اعقد) ، راجع الكتاب التالي :

Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4**, 261–268



الشكل (٥٣) ، المستطيل R



الشكل (٥٤) ، الايضاح الهندسي للمتباينة (2) عندما يكون c صفيرا نسبيا في (A) ، وكبيرا نسبيا في (B) ، ويجب أن يبقى منحنى الحل في المنطقة المظللة المحدود بمستقيمين ميلاهما $\pm c$ ،

البرهـان :

ليكن $C(J)$ الفضاء المتري المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة علـى الفترة $J=[t_0-\beta, t_0+\beta]$ وحيث المترك d معرف بالمساواة

$$d(x, y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|.$$

إن $C(J)$ تام ، الامر الذي نعرفه من ١ـ١ـ٥ ، ليكن $\tilde{C}$ الفضاء الجزئي مـن $C(J)$ المؤلف من كل الدوال x في $C(J)$ التي تحقق الشرط

$$|x(t) - x_0| \leqq c\beta. \tag{5}$$

من السهل أن نرى بأن $\tilde{C}$ مغلق في $C(J)$ (راجع المسألة ٦) ، وبالتالي فان $\tilde{C}$ تام استنادا الى ١ـ٤ـ٧ ،

وباجراء المكاملة ، نرى أن (1) يمكن أن يكتب بالشكل $x = Tx$ ، حيث $T: \bar{C} \longrightarrow \bar{C}$ معرف كما يلي

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{6}$$

وفعلا ، فان T معرف أيا كان x من $\bar{C}$ ، ذلك أن $c\beta < b$ استنادا الى (4) ، وبالتالي فاذا كان $x \in \bar{C}$ ، فان $\tau \in J$ و $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، ويكون التكامل الوارد في (6) موجودا نظرا لكون f مستمرة على R • وكي نرى أن صورة T وفق $\bar{C}$ هي نفسها ، يمكن استعمال (6) و (2) وعندئذ نجد أن

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right| \leqq c\, |t - t_0| \leqq c\beta.$$

سنبين أن T تقليص على $\bar{C}$ • يترتب على شرط ليبشتز (3) أن

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]\, d\tau \right| \\ &\leqq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k\, |x(\tau) - v(\tau)| \\ &\leqq k\beta\, d(x, v). \end{aligned}$$

ولما كانت العبارة الاخيرة مستقلة عن t ، فمن الممكن أخذ القيمة الاكبر max في الطرف الايسر فنجد أن

$$d(Tx, Tv) \leqq \alpha d(x, v) \qquad \text{حيث} \qquad \alpha = k\beta.$$

نرى من (4) أن $\alpha = k\beta < 1$ ، وبالتالي فان T هو تقليص على $\bar{C}$ حقا • وهكذا فان المبرهنة ٥ــ١ــ٢ تقتضي بأنه يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة x في $\bar{C}$ ، أي دالة مستمرة x على J تحقق المساواة $x = Tx$ • وبوضع $x(t)$ بدلا من $Tx(t)$ في (6) نجد أن

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{7}$$

ولما كان $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، حيث f مستمرة ، فمن الممكن اشتقاق (7) • لذا فان x زوجية ولها مشتق وتحقق (1) • وبالعكس ، فكل حل لـ (1) يجب أن يحقق (7) • وبذا يكتمل البرهان •∎

وتقتضي مبرهنة باناخ أيضا أن الحل x لـ (1) هو نهاية المتتالية $(x_0, x_1, \cdots)$ التي نحصل عليها **بتكرير بيكار**

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \tag{8}$$

حيث $n = 0, 1, \cdots$ • الا أنه تجدر بنا الاشارة الى أن الفائدة العملية لهذه الطريقة في الحصول على تقريبات لحل (1) وحدود الخطأ المقابلة ذات فائدة محدودة بسبب المكاملات الواردة •

وفي الختام نورد ما يلي • يمكن اثبات أن استمرار f كاف (وليس لازما) لوجود حل للمسألة (1) ، ولكنه ليس كافيا للوحدانية • وشرط ليبشتز كاف (كما تبين مبرهنة بيكارد) وليس لازما • لمزيد من التفصيل راجع الكتاب التالي :

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover

ويحوي هذا الكتاب أيضا ملاحظات تاريخية حول مبرهنة بيكارد (الصفحة ٦٣) وبرهانا تقليديا ، بحيث يتمكن القارىء من مقارنة معالجتنا الحالية بالمعالجة التقليدية •

مسائل

١ ــ اذا كان المشتق الجزئي $\partial f/\partial x$ للدالة f موجودا ومستمرا على المستيطل R (مبرهنة بيكار) فبين أن f تحقق شرط ليبشتز على R بالنسبة للمتغير الثاني x •

٢ ــ بين أن الدالة f المحددة بالمساواة $f(t, x) = |\sin x| + t$ تحقق شرط ليبشتز

على المستوي tx بأكمله بالنسبة للمتغير الثاني x ، في حين أن $\partial f/\partial x$ ليس موجودا عندما $x=0$ • ما هي الحقيقة التي يوضحها هذا ؟

٣ ــ هل تحقق الدالة f المعرفة بالمساواة $f(t,x)=|x|^{1/2}$ شرط ليبشتز ؟

٤ ــ أوجد كل الشروط الابتدائية بحيث أن مسألة القيمة الابتدائية $tx'=2x$ و $x(t_0)=x_0$ (آ) ليس لها حلول ، (ب) لها أكثر من حل واحد ، (جـ) لها حل واحد بالضبط •

٥ ــ اشرح أسباب الشرطين $\beta<b/c$ و $\beta<1/k$ في (4) •

٦ ــ بين أن $\bar{C}$ في برهان مبرهنة بيكار هي مجموعة مغلقة في $C(J)$ •

٧ ــ أثبت أنه يمكننا في مبرهنة بيكار أن نأخذ بدلا من الثابتة x_0 أي دالة أخرى $y_0\in\bar{C}$ ، $y_0(t_0)=x_0$ كدالة ابتدائية للتكرير •

٨ ــ طبق تكرير بيكار (8) على $x'=1+x^2$ و $x(0)=0$ • تحقق أنه بالنسبة الى x_3 ، فان الحدود الحاوية على $t, t^2, \cdots, t^5$ هي تماما مثل حدود الحل التام•

٩ ــ بين أنه يوجد للمسألة $x'=3x^{2/3}$ و $x(0)=0$ عدد غير منته من الحلول x معطـاة كمـا يلـي :

$$x(t)=0 \text{ عندما } t<c, \qquad x(t)=(t-c)^3 \text{ عندما } t\geqq c$$

حيث $c>0$ أي ثابت • هل يحقق $3x^{2/3}$ في اليمين شرط ليبشتز ؟

١٠ــ بين بأن حلول مسألة القيمة الابتدائية

$$x'=|x|^{1/2}, \qquad x(0)=0$$

هي $x_1=0$ و x_2 ، حيث $x_2(t)=t\,|t|/4$ • هل يتناقض هذا مع مبرهنة بيكار ؟ أوجد حلولا أخرى •

٥ـ٤ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التكاملية

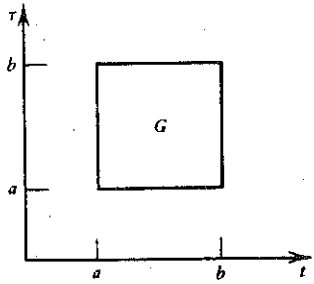
سنفيد في الختـام من مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ كمنهل لمبرهنات الوجود والوحدانية للمعادلات التكاملية • تسمى المعادلة التكاملية من النمط

$$x(t)-\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=v(t) \tag{1}$$

معادلة فريدهولم من النوع الثاني* • ان $[a,b]$ هنا هي فترة معطاة ، و x دالة على $[a,b]$ وهي مجهولة ،و μ وسيط • ان **النـواة** k للمعادلة هي دالة معرفة على المربع $G=[a,b]\times[a,b]$ ، كما أن v هي دالة معطاة على $[a,b]$ •

يمكن دراسة المعادلات التكاملية على فضاءات دوال مختلفة • وفي هـذا البند ، فاننا ندرس (1) على $C[a,b]$ ، أي على فضاء الدوال المستمرة المعرفة على الفترة $J=[a,b]$ حيث المترك d يعطى بالدستور

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|; \tag{2}$$



الشكل (٥٥) • ساحة التعريف G للنواة k
في المعادلة التكاملية (1) في حالة عددين موجبين a و b •

---

* ان ورود الحد $x(t)$ يمكننا من تطبيق التكرير كما تبين المبرهنة ٥ـ٤ـ١ . واذا لم تحو معادلة هذا الحد ، فتكون من الشكل

$$\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=v(t)$$

ويقال عنها انها من **النوع الاول** •

(راجع ١ــ٥ــ٥) • ومن المهم أن نلاحظ لدى تطبيقنا الحالي لمبرهنة باناخ أن $C[a, b]$ تام • سنفترض أن v المنتمية الى $C[a, b]$ و k مستمرتان على G •
عندئذ تكون k دالة محدودة على G ،وليكن مثلا

$$|k(t, \tau)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, \tau) \in G \tag{3}$$

من الواضح أنه يمكن كتابة (1) بالشكل $x = Tx$ ، حيث

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

بما أن v و k مستمرتان ، فان الدستور (4) يحدد مؤثرا $T: C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ •
سنفرض الآن قيدا على μ بحيث يغدو T تقليصا • نستنتج من (2) و (4) أن

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \\ &\leqq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)|\, |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \\ &\leqq |\mu|\, c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau \\ &= |\mu|\, c\, d(x, y)(b - a). \end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذا بالشكل $d(Tx, Ty) \leqq \alpha\, d(x, y)$ ، حيث

$$\alpha = |\mu|\, c(b - a).$$

نرى أن T يمكن أن يصبح تقليصا $(\alpha < 1)$ اذا كان

$$|\mu| < \frac{1}{c(b - a)}. \tag{5}$$

لذا فان مبرهنة النقطة الثابتة ٥ــ١ــ٢ تعطينا الآن المبرهنة التالية :

٥-٤-١ مبرهنة (معادلة فريدهولم التكاملية)

لتكن الدالتان k و v في (1) مستمرتين على $J\times J$ و $J=[a,b]$ على الترتيب ، ولنفترض أن μ يحقق (5) حيث c معرفة في (3) . عندئذ يوجد لـ (1) حل وحيد x على J . ان هذه الدالة x هي نهاية المتتالية التكريرية $(x_0, x_1, \cdots)$ حيث x_0 أي دالة مستمرة على J ،وحيث

$$x_{n+1}(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x_n(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

عندما $n=0,1,\cdots$.

هذا وسندرس النظرية الشهيرة للمعادلات التكاملية في الفصل الثامن .

لننتقل الآن الى **معادلة فولتيرا التكاملية**

$$x(t)-\mu\int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=v(t). \tag{7}$$

ان الفرق بين (1) و (7) يكمن في أن الحد الاعلى للتكامل في (1) هو عدد ثابت b ، في حين أنه في (7) متغير . وهذا أمر أساسي ، فاننا دون فرض أي قيد على μ نجد مبرهنة الوجود والوحدانية التالية .

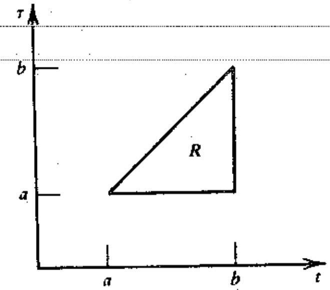
٥-٤-٢ مبرهنة (معادلة فولتيرا التكاملية)

لنفترض أن v الواردة في (7) مستمرة على $[a,b]$ ، وأن النواة k مستمرة على المنطقة المثلثة R في المستوي $t\tau$ المحددة بالمتباينات $a\leqq\tau\leqq t$ و $a\leqq t\leqq b$ (أنظر الى الشكل ٥٦) . عندئذ يوجد لـ (7) حل وحيد x على $[a,b]$ أيا كان μ .

البرهـان :

نرى أن المعادلة (7) يمكن أن تكتب بالشكل $x=Tx$ حيث $T\colon C[a,b]\longrightarrow C[a,b]$ معرف بالمساواة

$$Tx(t)=v(t)+\mu\int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$



الشكل (٥٦) ، المنطقة المثلثة R في المبرهنة ٥ـ٤ـ٢ في حالة عددين موجبين a و b

بما أن k مستمرة على R وأن R مغلقة ومحدودة ، فان k محدودة علـــى R ، ولـيكن مثلا

$$|k(t, \tau)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, \tau) \in R$$

وهـكذا ، فاننا نجد استنادا الى (2) أنه أيا كان x و y من $C[a, b]$ فان

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \\ &\leqq |\mu|\, c\, d(x, y) \int_a^t d\tau \qquad (9) \\ &= |\mu|\, c(t-a)\, d(x, y). \end{aligned}$$

سنبين بالاستقراء الرياضي أن

$$(10) \qquad |T^m x(t) - T^m y(t)| \leqq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y).$$

ان هذه المتباينة في الحالة $m = 1$ ليست سوى (9) ، فـاذا افترضنا أن (10) صحيحة من أجل m ، فاننا نجد من (8) أن

$$\begin{aligned} |T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)]\, d\tau \right| \\ &\leqq |\mu|\, c \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau - a)^m}{m!}\, d\tau\, d(x, y) \end{aligned}$$

$$= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y),$$

لذا فاننا نكون قد استنتجنا صحــة (10) أيا كان m بتطبيــق طريقــة الاستقراء الرياضـــي •

وبالافادة من $t-a \leqq b-a$ في الطرف الايمن من (10) ، ومن ثم بأخذ القيمة الاكبر max في الطرف الايسر عندما تمسح t المجموعة J ، فاننا نستنتج مــن (10) أن

$$d(T^m x, T^m y) \leqq \alpha_m d(x, y)$$

حيــث

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

نلاحظ أنه أيا كان μ المثبت ، وأيا كان العدد m الكبير بقدر كاف ، فان $\alpha_m < 1$ • لذا فان T^m المقابل يكون تقليصا على $C[a, b]$ ، وعندها نستنتج صحة مبرهنتنا من التمهيدية التالية :-

٥ـ٤ـ٣ تمهيدية (النقطة الثابتة)

ليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيقا مستمرا (راجع ١ـ٣ـ٣) على فضاء متري تام $X = (X, d)$ ، ولنفترض أن T^m تقليص على X ، حيث m عــدد صحيح موجب . عندئذ يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة •

البرهــان :

ان $B = T^m$ هو فرضا تقليص على X ، أي أن $d(Bx, By) \leqq \alpha d(x, y)$ أيا كان x, y من X ، وهنا $\alpha < 1$ • لذا فاننا نجد أيا كان x_0 من X أن

$$\begin{aligned} d(B^n Tx_0, B^n x_0) &\leqq \alpha d(B^{n-1} Tx_0, B^{n-1} x_0) \\ &\cdots \leqq \alpha^n d(Tx_0, x_0) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \end{aligned} \tag{11}$$

ان مبرهنة باناخ ٥ـ١ـ٢ تقتضي أن يوجد لـ B نقطة ثابتة وحيدة ، سنرمز لها بـ

x ، و $x \longrightarrow B^n x_0$ • وبما أن التطبيق T مستمر ، فان هذا يقتضي أن يكـون $B^n Tx_0 = TB^n x_0 \longrightarrow Tx$ • لذا فاننا نجد وفق (ب) من ١ــ٤ــ٢ أن

$$d(B^n Tx_0, B^n x_0) \longrightarrow d(Tx, x),$$

وبالتالي فان $d(Tx, x)=0$ وفق (11) • ويبين هذا أن x نقطة ثابتة لـ T • ولما كانت كل نقطة ثابتة لـ T ثابتة لـ B كذلك ، فاننا نرى أنه لا يمكن أن يوجد لـ T أكثر من نقطة ثابتة واحدة •∎

نلاحظ في الختام أنــه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا معادلة فريدهولم خاصة نواتها k صفرية في ذلك الجزء من المربع $[a, b]\times[a, b]$ حيث يكون $\tau > t$ (انظر الى الشكلين ٥٥و٥٦) ، وقد تكون k غير صفرية في نقاط من القطر $(\tau = t)$ •

مســائل

١ ــ حل المعادلة التالية باستخدام التكرير ، وباختيار $x_0 = v$:

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau)\, d\tau = v(t) \qquad (|\mu| < 1).$$

٢ ــ **(المعادلة التكاملية غير الخطية)** اذا كانت v و k مستمرتين على $[a, b]$ و $C=[a, b]\times[a, b]\times \mathbb{R}$ على الترتيب ، وكانت k محققة على G لشرط ليبشتز مــن النمــط

$$|k(t, \tau, u_1) - k(t, \tau, u_2)| \leqq l\, |u_1 - u_2|,$$

فبين بأنه يوجد للمعادلة التكاملية غير الخطية

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau, x(\tau))\, d\tau = v(t)$$

حل وحيد x أيا كان μ المحقق للشرط $|\mu| < 1/l(b-a)$ •

٣ ــ من المهم أن ندرك بأن المعادلات التكاملية تنشأ أيضا من مسائل في المعادلات التفاضلية • (آ) اكتب مثلا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \qquad x(t_0)=x_0$$

على شكل معادلة تكاملية ، وحدد نوع المعادلة هذه • (ب) بين أن مسألة القيمــة الابتدائيــة

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t, x), \qquad x(t_0)=x_0, \qquad x'(t_0)=x_1$$

الحاوية على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية يمكن أن تحول الى معادلة فولتيرا التكامليــة •

٤ ــ **(متسلسلة نويمان)** اذا عرفنا مؤثرا S بالمساواة

$$Sx(t)=\int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau$$

ووضعنا $z_n=x_n-x_{n-1}$ ، فبين أن (6) تقتضي أن يكون

$$z_{n+1}=\mu S z_n.$$

واذا اخترنا $x_0=v$ ، فبين أن (6) تعطي **متسلسلة نويمان**

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n=v+\mu Sv+\mu^2S^2v+\mu^3S^3v+\cdots.$$

٥ ــ حل المعادلة التكاملية التالية (آ) بالافادة من متسلسلة نويمان ، (ب) بطريقة مباشــرة

$$x(t)-\mu\int_0^1 x(\tau)\, d\tau=1.$$

٦ ــ حل المعادلة التكاملية

$$x(t)-\mu \int_a^b cx(\tau)\, d\tau = \bar{v}(t)$$

حيث c ثابت ، وبين كيف يمكن استعمال متسلسلة نويمان الموافقة للحصول على شرط التقارب (5) لمتسلسلة نويمان للمعادلة (1) •

٧ ــ **(النواة التكريرية • النواة الحالّة) • أثبت أن متسلسلة نويمان الواردة في المسألة (٤) يمكن أن تكتب بالشكل**

$$(S^n v)(t) = \int_a^b k_{(n)}(t, \tau) v(\tau)\, d\tau \qquad n = 2, 3, \cdots,$$

حيث تعطى **النواة التكريرية** $k_{(n)}$ كما يلي

$$k_{(n)}(t, \tau) = \int_a^b \cdots \int_a^b k(t, t_1) k(t_1, t_2) \cdots k(t_{n-1}, \tau)\, dt_1 \cdots dt_{n-1}$$

وبالتالي يمكن كتابة متسلسلة نويمان بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) v(\tau)\, d\tau + \mu^2 \int_a^b k_{(2)}(t, \tau) v(\tau)\, d\tau + \cdots$$

أو أنه يمكننا باستخدام النواة الحالّة $\tilde{k}$ المعرفة بالدستور

$$\tilde{k}(t, \tau, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j k_{(j+1)}(t, \tau) \qquad (k_{(1)} = k)$$

أن نكتب المتسلسلة المذكورة بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b \tilde{k}(t, \tau, \mu) v(\tau)\, d\tau.$$

٨ ــ من المفيد معرفة أنه يمكن أيضا الحصول على متسلسلة نويمان الواردة في المسألة ٤ بأن نعوض متسلسلة القوى التالية

$$x(t)=v_0(t)+\mu v_1(t)+\mu^2 v_2(t)+\cdots$$

في (1) ،ثم بالمكاملة حدا حدا ، ومن ثم بمقارنة المعاملات • بين بأن هذا يعطي

$$v_0(t)=v(t), \qquad v_n(t)=\int_a^b k(t,\tau)v_{n-1}(\tau)\,d\tau, \qquad n=1,2,\cdots.$$

وبفرض أن $|v(t)|\leqq c_0$ و $|k(t,\tau)|\leqq c$ ، بين أن

$$|v_n(t)|\leqq c_0[c(b-a)]^n,$$

وبالتالي فان (5) تقتضي التقارب •

٩ ــ حل (1) باستخدام المسألة ٧ ، حيث $a=0$ و $b=2\pi$ و

$$k(t,\tau)=\sum_{n=1}^{N} a_n \sin nt \cos n\tau.$$

١٠ــ لنفترض في (1) أن $a=0$ و $b=\pi$ و

$$k(t,\tau)=a_1\sin t\sin 2\tau+a_2\sin 2t\sin 3\tau.$$

اكتب الحل بدلالة النواة الحالّة (راجع المسألة ٧) •

* * *

ثبت المصطلحات

ـ أ ـ

إتمـام	completion
ارتباط خطي	linear dependence
أس	exponent
أسان مترافقان	conjugate exponents
استقراء رياضي	mathematical induction
استقلال خطي	linear independence
استكمال	interpolation
اسقاط (مسقط)	projection
الحد الادنى	infimum
الحد الاعلى	supremum
انعكاسية	reflexivity
انغلاق	closedness
انموذج	model
ايزومورفيزم	isomorphism

ـ ب ـ

dimension	بُعـد
codimension	ـ متمم

ـ ت ـ

complete	تـام
partition	تجزئة
compactness	تراص
sequential —	ـ تتابعي
local —	ـ موضعي
linear combination	تركيب خطي
mapping	تطبيـق
isometric —	ـ ايزومتري (متسـاوي المسافة)
bilinear —	ـ ثنائي الخطية
linear —	ـ خطي
conjugate linear —	ـ خطي مرافق
natural —	ـ طبيعي
inverse —	ـ عكسي
surjective —	ـ غامـر
canonical —	ـ قانوني
injective —	ـ متباين
bounded —	ـ محدود
idempotent —	ـ مراوح
continuous —	ـ مستمر
open —	ـ مفتوح

variation	تغـير
total —	ـ كلي
bounded —	ـ محدود
convergence	تقارب
operator —	ـ بالنسبة للمؤثرات
weak —	ـ ضعيف
weak* —	ـ ضعيف*
strong —	ـ قوي
uniform —	ـ منتظم
pointwise —	ـ نقطي
estimate	تقديـر
proior —	ـ سابق
posterior —	ـ لاحق
contraction	تقليص
equivalence	تكافـؤ
unitary —	ـ واحدي
integral	تكامـل
Riemann - Stieltjes —	ـ ريمان ـ ستيلجس
iteration	تكريـر
weak completeness	تمام ضعيف
representation	تمثيـل
extension	تمديد (ممدد)
proper —	ـ فعلي
closed —	ـ مغلق
lemma	تمهيدية
symmetry	تناظـر

- ج -

frontier (boundary)	جبهة (حد)
product	جـداء
inner —	ـ داخلي
cartesian —	ـ ديكارتي
conjugate linear —	ـ خطي مرافق
sesquilinear —	ـ خطي مرة ونصف
scalar —	ـ عـددي
vector —	ـ متجهي
halflinear —	ـ نصف خطي
neighbourhood	جـوار
system	جملـة
sparse —	ـ غير كثة

- ح -

limit	حـد
infimum (g.l.b.)	ـ ادنـى
supremum (l.u.b.)	ـ أعـلى
polinomials	حدوديات
Bernstein —	ـ بيرنشتاين
Laguerre —	ـ لاكـير
Legendre —	ـ لوجاندر

- خ -

property	خاصة

ـ تبديلية	commutative —
ـ الانعكاس	reflexivity
ـ التخالف	antisymmetry
ـ التعدي	transitivity
ـ القيمة الصغرى	minimum —
خط تأخير كهربائي	electric delay line
خطـي	linear

ـ د ـ

دالــة	function
ـ مسافة (مترك)	distance — (metric)
ـ مميزة	characteristic —
ـ مولّدة	generating —
ـ هامنغ	Hamming —
دالــي	functional
ـ خطي	linear —
ـ خطي جزئيا	sublinear —
ـ متجانس ايجابا	positive homogeneous —
ـ محدود	bounded —
دستور	formula
ـ رودريك	Rodrigue's —
دلتاكرونيكر	Kronecker delta

ـ ر ـ

رنــين	resonance

— س —

domain	ساحة
row	سطر
chain	سلسلة

— ش —

lattice	شبكية
pseudometric	شبه مترك
pseudonorm	شبه نظيم
condition	شرط
positive homogeneous —	ـ التجانس ايجابا
subadditive —	ـ الجمعية جزئيا
Lipschitz —	ـ ليبشتز

— ص —

class	صف (صنف)
form	صيغة
linear —	ـ خطية
sesquilinear —	ـ خطية مرة ونصف المرة

— ض —

multiplication	ضرب
inner —	ـ داخلي
scalar —	ـ عددي
vector —	ـ متجهي

ـ ط ـ

method	طريقــه
— of simultaneous corrections	ـ التصحيحات الآنية
regular summability —	ـ في الجموعية المنتظمة
Euler's —	ـ اولــر
permanent —	ـ دائمــة
Cesàro's sunmability —	ـ شيزارو C_1 في الجموعية
Cesàro's C_n - method —	ـ C_n لشيزارو
Gram - Schmidt process	ـ غرام ـ شميت
sparse —	ـ غير كثة
a summability —	ـ في الجموعية
a matrix —	ـ مصفوفية
a regular —	ـ منتظمة
Hölder summability —	ـ هولدر في الحموعية
A - method	ـ A
embedding	طمــر
canonical —	ـ قانوني
embeddable	طمــور

ـ ع ـ

annihilator	عــادم
number	عــدد
cardinal —	ـ أصلي (كاردينالي)
real —	ـ حقيقي
rational —	ـ عادي

node	عقـدة
relation	علاقـة
Parseval —	ـ بارسفال
column	عمـود
element	عنصـر
minimal —	ـ أصغري
maximal —	ـ أعظمي
upper bound	ـ راجح
lower bound	ـ قاصر
comparable elements	عنصران متقارنان

ـ غ ـ

nonlinear	غير خطي

ـ ف ـ

category	فئـة
space	فضـاء
euclidean —	ـ اقليدي
reflexive —	ـ الـدوال
Hilbert sequence —	ـ المتتاليات لهلبرت
reflexive —	ـ انعكاسي
complete —	ـ تام
weakly complete —	ـ تام بضعف
dual —	ـ ثنوي
second dual	ـ ثنوي ثاني

ـ ثنوي جبري	algebraic dual —
ـ جداء داخلي	inner product —
ـ جزئي	subspace
ـ جزئي غير فعلي	improper subspace
ـ جزئي فعلي	proper subspace
ـ حقيقي	real —
ـ طبولوجي	topological —
ـ طمـور	embeddable —
ـ عدود	countable —
ـ عقدي	complex —
ـ غير عدود	uncountable —
ـ غير منتهي البعد	infinite dimensional —
ـ فصول	separable —
ـ متتاليات	sequence —
ـ متجهي	vector —
ـ متري	metric —
ـ متقطع	discrete —
ـ مجرد	abstract —
ـ مرافق	conjugate —
ـ منتهي البعد	finite dimensional —
ـ منظم	normed —
ـ هزيـل	meager —
ـ وحدي (واحدي)	unitary —
فوق المستوي	hyperplane

ـ ق ـ

قاعدة (قانون)	rule

the three-eights —	ــ الثمانيات الثلاث
the rectangular —	ــ المستطيل
Simpsons —	ــ سمبسون
the trapezoidal —	ــ شبه المنحرف
basis	قاعدة (أساس)
dual —	ــ ثنوية
Schauder —	ــ شاودر
canonical —	ــ قانونية
Hamel —	ــ هامل
sphere	قشرة كروية
diameter	قطــر
— of a set	ــ مجموعة
segment	قطعة مستقيمة
value	قيمــة
eigenvalue	ــ ذاتية
minimum	ــ صغرى
maximum	ــ عظمى

ـ ك ـ

ball	كــرة
colsed —	ــ مغلقة
open —	ــ مفتوحة
unit —	ــ واحدية

ـ ل ـ

invariance	لاتغــير
translation —	ــ الانسحاب

principle	مبـدأ
— of uniform boundedness	ـ المحدودية المنتظمة
theorem	مبرهنة
finite dimension —	ـ البعد المنتهي
closed graph —	ـ البيان المغلق
open mapping —	ـ التطبيق المفتوح
bounded inverse —	ـ العكس المحدود
contraction —	ـ التقليص
category —	ـ الفئـة
uniform boundedness —	ـ المحدودية المنتظمة
closed linear operator —	ـ المؤثر الخطي المغلق
fixed point —	ـ النقطة الثابتة
Banach fixed point —	ـ النقطة الثابتة لباناخ
Bolzano-wierstrass —	ـ بولزانو ـ ڤيرشتراس
Pólya —	ـ بوليـا
Baire category —	ـ بير في الفئات
Steklov's —	ـ ستيكلوف
Wierstrass approximation —	ـ ڤيرشتراس في التقريب
Gershgorin's —	ـ كيرشكورين
inequality	متباينـة
triangle —	ـ المثلث
generalized triangle —	ـ المثلث المعممة
Cauchy - Schwarz — for sums	ـ كوشي ـ شفارتز للمجاميع
Minkowski — for sums	ـ منكوفسكي للمجاميع

Hölder — for sums	ـ هولدر للمجاميع
sequence	متتاليــة
fundamental —	ـ أساسية
iterative —	ـ تكريرية
subsequence	ـ جزئيــة
— of interpolation polynomials	ـ حدوديات الاستكمال
monotone —	ـ رتيبة
weak Cauchy —	ـ كوشي الضعيفة
divergent —	ـ متباعدة
convergent —	ـ متقاربة
orthogonal —	ـ متعامدة
orthonormal —	ـ متعامدة منظمة
total orthonormal —	ـ متعامدة منظمة كلية
uniformly convergent —	ـ متقاربة بانتظام
weakly convergent —	ـ متقاربة بضعف
strongly convergent —	ـ متقاربة بقوة
limit of a —	ـ نهايــة
vector	متجــه
zero —	ـ اصفري
column —	ـ عمودي
minimizing —	ـ مصغر
metric (distance function)	مترك (دالة مسافة)
taxicab —	ـ سيارة الاجرة
induced —	ـ محدث (مستخلص ، مولد)
discrete —	ـ متقطع
uniform —	ـ منتظم

series	متسلسلة
infinite —	— غير منتهية
absolutely convergent —	— متقاربة بالاطلاق
Neumann —	— نويمان
identity	متطابقة
Appolonius —	— ابولونيوس
polarization —	— الاستقطاب
prerequisite	متَطلَّب
variable	متغير
complement	متمم
algebraic —	— جبري
orthogonal —	— معامد
sum	مجموع
partial —	— جزئي
direct —	— مباشر
set	مجموعة
underlying —	— الرديف
power —	— القوة
countable —	— عدودة
nowhere dense —	— غير كثيفة في اي مكان
nonmeager —	— غير هزيلة
dense —	— كثيفة
total —	— كلية
total orthonormal —	— متعامدة منظمة كلية
convex —	— محدبة
bounded —	— محدودة

linearly dependent —	ـ مرتبطة خطيا
linearly independent —	ـ مستقلة خطيا
ordered —	ـ مرتبة
partially ordered —	ـ مرتبة جزئيا
totally ordered — (chain)	ـ مرتبة كليا (سلسلة)
coset	ـ مشاركة
— of the first category	ـ من الفئة الاولى
— of the second category	ـ من الفئة الثانية
rare —	ـ نادرة
meager —	ـ هزيلة
n - tuple	مرتّبـة
initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
parallelogram equality	مساواة متوازي الاضلاع
complex plane	مستوي عقدي
projection	مسقط (اسقاط)
differential	مشتق
matrix	مصفوفة
(real) symmetric —	ـ (حقيقية) متناظرة
skew - symmetric —	ـ متناظرة تخالفية
orthogonal —	ـ متعامدة
normal —	ـ ناظمية
Hermitian —	ـ هرميتية
skew - Hermitian —	ـ هرميتية تخالفية
unitary —	ـ واحدية (وحدية)
equation	معادلـة
differential —	ـ تفاضلية

partial differential —	ـ تفاضلية جزئية
ordinary differential —	ـ تفاضلية عادية
integral —	ـ تكاملية
Fredholm —	ـ فريدهولم
Fredholm — of the first kind	ـ فريدهولم من النوع الاول
Fredholm — of the second kind	ـ فريدهولم من النوع الثاني
Volterra —	ـ فولتيرا
coefficient	معامل
criterion	معيار
Cauchy convergence —	ـ تقارب كوشي
row sum —	ـ مجموع الاسطر
column sum —	ـ مجموع الاعمدة
square sum —	ـ مجموع المربعات
restriction	مقصور
representative	ممثل
extension	ممدد (تمديد)
proper —	ـ فعلي
expansion	منشور
transpose	منقول
operator	مؤثر
projection —	ـ الاسقاط
left shift —	ـ النقل الايسر
right shift —	ـ النقل الايمن
integral —	ـ تكاملي
bounded linear —	ـ خطي محدود
conjugate linear —	ـ خطي مرافق

ـ صفري	zero —
ـ عكسي	inverse —
ـ قرين ذاتيا (مترافق ذاتيا)	self - adjoint —
ـ مطابقة	identity —
ـ مفاضلة	differentiation —
ـ ناظمي	normal —
ـ هلبرت المرافق	Hilbert - adjoint —
ـ واحدي (وحدي)	unitary —

ـ ن ـ

نصف القطر الطيفي	spectral radius
نصف النظيم	seminorm
نصف فضاء	half space
نصف مترك	semimetric
نظائم	norms
ـ متكافئة	equivalent —
نظيم	norm
ـ اقليدي	euclidean —
ـ طبيعي	natural —
ـ منسجم مع نظيم	a — compatible with a —
نقطة	point
ـ تراكم (تجمع)	accumulation —
ـ ثابتة	fixed —
ـ حدية (جبهية)	boundary —
ـ داخلية	interior —

closure —	ـ ملاصقة
pointwise	نقطيـا
limit	نهايـة
A - limit	A ـ
weak —	ـ ضعيفة
weak* —	ـ ضعيفة*
strong —	ـ قويـة
generalized —	ـ معممة
kernel	نــواة
iterated —	ـ تكريرية
resolvent —	ـ حالـة
— of an operator	ـ مؤثـر

ـ هـ ـ

homomorphism	هومومورفيزم (تشاكل)
homeomorphism	هوميومورفيزم (تصاكل)

ـ و ـ

unitary	واحدي (وحدي)

مسرد المراجع

Banach, S. (1922), Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Math.* **3**, 133–181

Banach, S. (1929), Sur les fonctionnelles linéaires II. *Studia Math.* **1**, 223–239

Banach, S. (1932), *Théorie des opérations linéaires.* New York: Chelsea

Banach, S., et H. Steinhaus (1927), Sur le principe de la condensation de singularités. *Fundamenta Math.* **9**, 50–61

Berberian, S. (1961), *Introduction to Hilbert Space.* New York: Oxford University Press

Bernstein, S. N. (1912), Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* **13**, 1–2

Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4**, 261–268

Birkhoff, G. (1967), *Lattice Theory.* 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **25**. Providence, R. I.: American Mathematical Society

Birkhoff, G., and S. Mac Lane (1965), *A Survey of Modern Algebra.* 3rd. ed. New York: Macmillan

Bohnenblust, H. F., and A. Sobczyk (1938), Extensions of functionals on complex linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 91–93

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. III à V. Paris: Hermann

Bourbaki, N. (1970), *Éleménts de mathématique, Algèbre.* Chap. 1 à 3. Paris: Hermann

Cheney, E. W. (1966), *Introduction to Approximation Theory.* New York: McGraw-Hill

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Courant, R., and D. Hilbert (1953–62), *Methods of Mathematical Physics.* 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Cramér, H. (1955), *The Elements of Probability Theory and Some of its Applications.* New York: Wiley

Day, M. M. (1973), *Normed Linear Spaces.* 3rd ed. New York: Springer

Dieudonné, J. (1960), *Foundations of Modern Analysis.* New York: Academic Press

Dixmier, J. (1953), Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. *Acta Math. Szeged* **15**, 29–30

Dunford, N., and J. T. Schwartz (1958–71), *Linear Operators.* 3 parts. New York: Interscience/Wiley

Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis.* New York: Holt, Rinehart and Winston

Enflo, P. (1973), A counterexample to the approximation property. *Acta Math.* **130**, 309–317

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions.* 3 vols. New York: McGraw-Hill

Fejér, L. (1910), Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. *Journal Reine Angew. Math.* **137**, 1–5

Fréchet, M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 1–74

Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* **27**, 365–390

Friedrichs, K. (1935), Beiträge zur Theorie der Spektralschar. *Math. Annalen* **110**, 54–62

Gantmacher, F. R. (1960), *The Theory of Matrices.* 2 vols. New York; Chelsea

Gelfand, I. (1941), Normierte Ringe. *Mat. Sbornik* (*Recueil mathématique*) N. S. **9**, (51), 3–24

Gram, J. P. (1883), Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *Journal Reine Angew. Math.* **94**, 41–73

Haar, A. (1918), Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Annalen* **78**, 294–311

Hahn, H. (1922), Über Folgen linearer Operationen. *Monatshefte Math. Phys.* **32**, 3–88

Hahn, H. (1927), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *Journal Reine Angew. Math.* **157**, 214–229

Halmos, P. R. (1958), *Finite-Dimensional Vector Spaces.* 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold

Hamming, R. W. (1950), Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. Journal* **29**, 147–160

Hellinger, E., und O. Toeplitz (1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Math. Annalen* **69**, 289–330

Helmberg, G. (1969), *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.* New York: American Elsevier

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer

Hilbert, D. (1912), *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Repr. 1953. New York: Chelsea

Hille, E. (1973), *Analytic Function Theory.* Vol. I. 2nd ed. New York: Chelsea

Hille, E., and R. S. Phillips (1957), *Functional Analysis and Semi-Groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31.** Rev. ed. Providence, R. I.: American Mathematical Society

Hölder, O. (1889), Über einen Mittelwertsatz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 38–47

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover

James, R. C. (1950), Bases and reflexivity of Banach spaces. *Annals of Math.* (2) **52,** 518–527

James, R. C. (1951), A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **37,** 174–177

Kelley, J. L. (1955), *General Topology.* New York: Van Nostrand

Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces.* New York: Van Nostrand

Kreyszig, E. (1970), *Introductory Mathematical Statistics.* New York: Wiley

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics.* 3rd ed. New York: Wiley

Lebesgue, H. (1909), Sur les intégrales singulières, *Ann. de Toulouse* (3) **1,** 25–117

Lorch, E. R. (1939), On a calculus of operators in reflexive vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **45,** 217–234

Lorch, E. R. (1962), *Spectral Theory.* New York: Oxford University Press

Löwig, H. (1934), Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl. *Acta Sci. Math. Szeged* **7,** 1–33

McShane, E. J. (1944), *Integration.* Princeton, N. J.: Princeton University Press

Merzbacher, E. (1970), *Quantum Mechanics.* 2nd ed. New York: Wiley

Minkowski, H. (1896), *Geometrie der Zahlen.* Leipzig: Teubner

Murray, F. J. (1937), On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 138–152

Naimark, M. A. (1972), *Normed Algebras.* 2nd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff

Neumann, J. von (1927), Mathematische Begründung der Quantenmechanik. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1–57

Neumann, J. von (1929–30), Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Annalen* **102**, 49–131

Neumann, J. von (1929–30b), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Annalen* **102**, 370–427

Neumann, J. von (1936), Über adjungierte Funktionaloperatoren. *Annals of Math.* (2) **33**, 294–310

Poincaré, H. (1896), La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20**, 59–142

Pólya, G. (1933), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschr.* **37**, 264–286

Rellich, F. (1934), Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Annalen* **110**, 342–356

Riesz, F. (1909), Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **149**, 974–977

Riesz, F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Math.* **41**, 71–98

Riesz, F. (1934), Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. *Acta Sci. Math. Szeged* **7**, 34–38

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis.* New York: Ungar

Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series.* 2nd ed. New York: Chelsea

Royden, H. L. (1968), *Real Analysis.* 2nd ed. New York: Macmillan

Sard, A., and S. Weintraub (1971), *A Book of Splines.* New York: Wiley

Schauder, J. (1930), Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. *Studia Math.* **2**, 1–6

Schiff, L. I. (1968), *Quantum Mechanics.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill

Schmidt, E. (1907), Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Annalen* **63**, 433–476

Schmidt, E. (1908), Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **25**, 53–77

Schur, I. (1921), Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journal Reine Angew. Math.* **151**, 79–111

Sobczyk, A. (1941), Projections in Minkowski and Banach spaces. *Duke Math. Journal* **8**, 78–106

Stone, M. H. (1932), *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **15.** New York: American Mathematical Society

Szegö, G. (1967), *Orthogonal Polynomials.* 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **23.** Providence, R. I.: American Mathematical Society

Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis.* New York: Wiley

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis.* New York: McGraw-Hill

Wecken, F. J. (1935), Zur Theorie linearer Operatoren. *Math. Annalen* **110**, 722–725

Weierstrass, K. (1885), Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 633–639, 789–805

Wiener, N. (1922), Limit in terms of continuous transformation. *Bull. Soc. Math. France* (2) **50**, 119–134

Wilks, S. S. (1962), *Mathematical Statistics.* New York: Wiley

Wintner, A. (1929), Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. *Math. Zeitschr.* **30**, 228–282

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis.* 3rd ed. Berlin: Springer

Zaanen, A. C. (1964), *Linear Analysis.* Amsterdam: North-Holland Publ.

Zakon, E. (1973), *Mathematical Analysis.* Part II. Lecture Notes. Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor, Ont.

الفهرس