الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الكهربية
والمغناطيسية

تأليف

الدكتور محمد بن علي أحمد آل عيسى

الأستاذ بقسم الفيزياء

كلية العلوم ـ جامعة الملك سعود

النشر والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

مقدمة الطبعة الرابعة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء وأشرف المرسلين سيدنا محمد النبي العربي الأمين.

بعون من الله وبتوفيق منه، أقدم هذا الكتاب «الكهربية والمغناطيسية» للطلاب في علم الفيزياء في مختلف دراساتهم الجامعية، وبصورة خاصة لطلاب المستوى الثاني، آملا أن يكون فيه ما ينفعهم ويعينهم على فهم القواعد الأساسية والمتقدمة في هذا العلم بلغتنا العربية الأصيلة.

ويحتوي هذا الكتاب على تسعة فصول. يتعلق الفصل الأول والثاني والثالث بدراسة الكهرباء الساكنة، والرابع خاص بالتيار المستمر، أما الخامس والسادس والسابع فتعالج الموضوعات المختلفة في المغناطيسية، ويختص الفصل الثامن بدراسة التيار المتردد ودوائره المختلفة، وأخيرا يختص الفصل التاسع بدراسة معادلات ماكسويل والموجات الكهرومغناطيسية. ولقد روعي في تأليف هذا الكتاب تقديم المادة العلمية المتكاملة في الموضوع، واختير النظام العالمي (S.I.) للوحدات أساسا لاشتقاق وبرهنة المعادلات الرياضية المصاحبة لأي موضوع فيزيائي وارد في هذا الكتاب، مع كتابة المعادلات النهائية بالنظام الجاووسي (C.G.S.) كلما أمكن ذلك. وكتبت المصطلحات العلمية باللغتين العربية والإنجليزية حفاظا على المعنى وتيسيرا على الطالب لعملية الاطِّلاع في المراجع الأجنبية التي سيحتاج إليها في المراحل التعليمية المتقدمة. كما كتبت

جميع معادلات الكتاب بالحروف اللاتينية. وقد ورد في كل فصل من فصول الكتاب الكثير من التطبيقات والتمرينات المحلولة وغير المحلولة وروعي فيها أن تكون شاملة للعديد من الأفكار المختلفة. كما يحتوي الكتاب على شرح لبعض الأجهزة الفيزيائية القياسية المستعملة في المختبرات. وأضيف في نهاية الكتاب بعض الملاحق التي تحتوي على بعض الجداول الفيزيائية والرياضية المهمة التي يحتاجها الطالب في دراسته لهذا الموضوع.

لقد بدأت فكرة تأليف هذا الكتاب بعد أن قمت بتدريس هذه المادة سنتين كاملتين متتاليتين، ولمست الصعوبات التي تواجه الطلاب عند الرجوع إلى المراجع المكتوبة باللغة الإنجليزية في هذا المستوى من مراحلهم التعليمية، مع عدم وجود المراجع العربية الكافية الوافية في المكتبة، وكذلك عدم وجود كل الموضوعات التي أقرت في منهاج المقرر ٢٢١ فيز في كتاب واحد. وإلى جانب ذلك فإن التعليم باللغة العربية في كلية العلوم هو الأساس حسب النظام الذي أُقرَّ للجامعة، وليس معنى ذلك أننا لا نحتاج إلى المصادر الأخرى باللغات الأجنبية، فالعلوم التقنية لا تفرض لغة معينة للتأليف، لذلك يجب الاستفادة من الكتاب الجيد بلغته التي كتب بها أو مترجما إلى أي لغة أخرى، واللغة العربية ليست أقل جمالا أو أصالة أو امتلاء بالتراث من غيرها، لذلك يجب التأليف والترجمة بلغتنا حتى تصل المعرفة إلى كل عربي.

ولما كان شرح المادة باللغة العربية وكتابة المعادلات وحلول المسائل بالحروف اللاتينية والأرقام العربية، روعي أن يكون الكتاب امتدادا للمحاضرة، وفي هذا تمكين للطالب من متابعة تفهم القواعد والنظريات دون الاصطدام بعقبة اللغة. وإضافة المصطلحات اللاتينية إلى جانب المصطلحات باللغة العربية تجعل الطالب بعد مرحلة التحصيل الأولى قادرا على متابعة الدراسة من الكتب الأجنبية إن شاء الله.

وتم في هذه الطبعة تصحيح الأخطاء المطبعية التي وردت في الطبعة الثالثة كما

ويسعدني أن أتوجه بالشكر والتقدير إلى إخواني الزملاء الأستاذ الدكتور محمد عبدالخالق محروس والأستاذ الدكتور عادل عباس محمد والأستاذ الدكتور عزالدين محمد محمد سيد الأعضاء السابقين بقسم الفيزياء، لمشاركتهم في قراءة الكتاب أثناء مراحله المختلفة وإبداء ملاحظاتهم ومناقشاتهم القيمة وآرائهم التي استفدت منها في تطوير الكتاب.

ويسعدني أن أتلقى ملاحظات وآراء الزملاء الأفاضل عما ورد في هذا الكتاب سواء بالتعديل أو الحذف أو الإضافة وذلك تحقيقا لمبدأ التطوير نحو الأفضل.

والله ولي التوفيق،،،

المــؤلــف

المحتويات

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

المـراجـع

ثبت المصطلحات

١

المجال الكهربي

Electrical Field

● مقدمة ● قانون كولوم ● المجال الكهربي ● المجال الكهربي لذي القطبين ● كثافة الشحنة ● المجال الناتج عن توزيع مستمر للشحنة الكهربية ● خطوط القوى الكهربية ● قانون جاوس ● تطبيقات على قانون جاوس ● شكل المعادلة التفاضلية لقانون جاوس ● شحنة نقطية في مجال كهربي ● قياس شحنة الإلكترونات بطريقة ميليكان ● مسائل.

(١-١) مقدمة

Introduction

عرفت الظواهر الطبيعية للكهرباء قبل القرن التاسع عشر مثل تكهرب الكهرمان (electrification of amber) والبرق (lightning) وصدمة ثعبان البحر (the shock of an electric eel). ففي عام ٦٠٠ قبل الميلاد اكتشفت ظاهرة جذب الكهرمان للأجسام الخفيفة كقطعة الورق بعد دلكها بقطعة من فرو الحيوانات. وبعد هذا الاكتشاف حتى ظهور كتاب العالم جلبرت (Sir W. Gilbert) عام ١٦٠٠م لم تكتشف ظواهر مهمة عن الكهرباء الساكنة حيث ثبت تجريبيا تكهرب معظم المواد بالاحتكاك وفي بداية القرن الثامن عشر توصل العلماء إلى صنع أجهزة لدراسة الظواهر الكهربية مثل جهاز الإلكتروسكوب الورقي وميزان الالتواء (torsion balance) وفي هذا القرن أيضا تم فصل الكهرباء إلى قسمين أحدهما كهرباء ساكنة والأخرى كهرباء

تيارية لاختلافهما من حيث الاتجاه وطرق الحصول عليهما حيث تفسر الكهرباء الساكنة ظاهرة جذب الكهرمان بينما الكهرباء التيارية توضح طبيعة البرق والكهرباء الناتجة عن بعض الحيوانات.

وتفسير ظاهرة الكهرباء الساكنة يعود إلى التركيب الذري للمادة (atomic structure of matter) حيث تتألف المادة من جزيئات (molecules) وذرات (atoms) وكل ذرة تحتوي على نواة (nucleus) بها بروتونات (protons) ونيوترونات (neutrons) وتدور حول هذه النواة إلكترونات (electrons). أما نوع شحنات هذه الجسيمات، فالإلكترون يحمل شحنة سالبة (negative charge) ويرمز لها بالرمز (e−) والبروتون يحمل شحنة موجبة (positive charge) ويرمز لها بالرمز (e+) أما النيوترون فهو متعادل الشحنة (neutral charge). وذرة أي عنصر في حالتها الطبيعية متعادلة الشحنة ولذلك فإن عدد الإلكترونات التي تدور حول النواة يكون مساويا لعدد البروتونات داخل النواة ويسمى هذا العدد بالعدد الذري (atomic number) أما العدد الكلي لمجموع البروتونات والنيوترونات فيسمى بالعدد الكتلي (mass number). وبالتالي فإن المادة لا تكون مشحونة ولكن الشحنة تظهر فقط عليها إذا تمكنا من فصل أحد نوعيّ الشحنة في ذرات هذه المادة عن النوع الآخر. ويتم هذا الفصل بواسطة الاحتكاك أو الدلك أو تعرض هذه المواد لطاقة ضوئية أو حرارية أو إشعاع ذري.

ولقد كان للاحتكاك الفضل الأول في كشف نوعيّ الشحنات فالكهرمان المدلوك بفرو الحيوان يكتسب إلكترونات من الفرو فتصبح شحنته سالبة بينما يفقد الفرو بعض إلكتروناته فتصبح شحنته موجبة، ومعنى هذا أن بعض الإلكترونات انتقلت بالدلك من الفرو إلى الكهرمان، وقد وجد أيضا أن الزجاج المدلوك بالحرير يكتسب شحنة موجبة بينما يكتسب الحرير شحنة سالبة، أي أن بعض الإلكترونات انتقلت بالاحتكاك من الزجاج إلى الحرير، ولقد أثبتت التجارب العملية وجود قوى تجاذب وتنافر بين الأجسام المشحونة فالشحنة الموجبة تتجاذب مع الشحنة السالبة وتتنافر مع الشحنة الموجبة. *حيث تتجاذب الشحنات المختلفة في النوع وتتنافر الشحنات المتشابهة*.

ومن الحقائق المهمة أن الشحنة الكهربية تظهر على هيئة أعداد صحيحة للشحنات الإلكترونية وأن شحنة الإلكترون هي أصغر شحنة سالبة موجودة في الطبيعة وشحنة البروتون هي أصغر شحنة موجبة وقيمتها هي :

$$(-e) = (+e) = 1.6029 \times 10^{-19}\ C$$

وتكون شحنات الجسيمات الأولية إما صفرا مثل النيوترونات أو أعدادا صحيحة لشحنة الإلكترون. كذلك فإن شحنات الإيونات (ions) أو النويات الذرية (atomic nuclei) عبارة عن أعداد صحيحة إما لشحنة الإلكترون أو البروتون.

والجدول (١-١) يوضح بعض الجسيمات الأولية والمكتشفة عمليا مع قيمة الشحنة وكذلك كتلة الجسيم. علما بأن كتلتي الإلكترون والبروتون هما :

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\ kg$$
$$M_p = 1.673 \times 10^{-27}\ kg$$

ومن الحقائق المهمة أيضا أن الشحنات لا تفنى (destroyed) ولا تستحدث (created) وقد اتضح ذلك مما تقدم ذكره وهو أن الشحنة تظهر على الدالك والمدلوك نتيجة لانتقال الإلكترونات من جسم إلى آخر، ويعرف هذا بقانون بقاء الشحنة (law of charge conservation) والذي ينص على أن :

«القيم الابتدائية والنهائية لمجموع الشحنة الكهربية الداخلة في التفاعل يجب أن تكون واحدة».

وهناك أمثلة أخرى منها

أ ـ انحلال البورون غير المستقر (unstable boron decay) إلى كربون مستقر حسب المعادلة

$$^{12}_{5}B \rightarrow {}^{12}_{6}C + e + v$$
$$5e \rightarrow 6e + \bar{e} + 0$$

جدول (١-١): أسماء بعض الجسيمات الأولية مع قيمة كتلتها وشحنتها

اسم الجسيم	Particle name	الرمـز	الشحنـة	الكتلـة
بـروتـون	Proton	P	e	$1.000 \times M_P$
نيوتـرون	Neutron	n	0	1.001 "
إلـكـترون	Electron	e^-	$-e$	0.000545 "
بوزتـرون	Positron	e^+	e	0.000545 "
مـيـون	Muon	μ^-, μ^+	$-e, +e$	0.1126 "
باي ميزون	Pi-meson	π^+, π^-, π^o	$+e, -e, o$	0.1438 "
فـوتـون	Photon	γ	0	0 "
نيوتـريـنـو	Neutrino	$\bar{v}$	0	0 "
ضديد النيوترينو	Antineutrino	v^-	0	0 "
لامـبـدا	Lambda	Λ^o	0	1.189 "
رومـيـزون	Rho meson	$\varrho^+, \varrho^o, \varrho^-$	$+e, o, -e$	0.82 "
اوميقا ميزون	Omega meson	ω	0	0.836 "

ب ـ **الحصول على كربون ١٤** *(carbon 14)* نتيجة لتصادم نيوترون مع ذرة نيتروجين

$$ {}^{14}_{7}N + n \rightarrow {}^{14}_{6}C + P $$
$$ 7e + 0 \rightarrow 6e + e $$

جـ ـ **الانحلال الاشعاعي لتصادم نيوترون مع اليورانيوم** ${}^{235}_{92}U$ والذي ينتج عنه ${}^{236}_{92}U$ الذي ينشطر (split) إلى زينون ${}^{140}_{54}Xe$ (xenon) واسترونشيوم ${}^{94}_{38}Sr$ (strontium) ونيوترونات وفوتونات.

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + 2n + \gamma$$

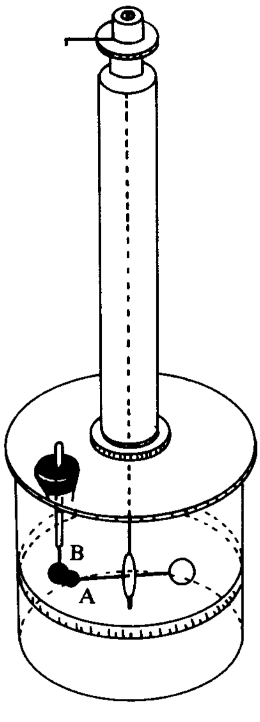
$$0 + 92e \rightarrow 92e \rightarrow 54e + 38e + 0 + 0$$

يدل العدد السفلي في المعادلات السابقة على العدد الذري أي عدد البروتونات الموجودة في النواة. وأما العدد العلوي فيدل على الوزن الذري (الكتلي). ويلاحظ أن مجموع الشحنات الداخلة في التفاعل تساوي مجموع الشحنات الخارجة منه، أي أن المجموع الجبري للعدد الذري قبل التفاعل يساوي المجموع الجبري للعدد الذري بعد التفاعل.

(١-٢) قانون كولوم
(Coulomb's Law)

أجريت في نهاية القرن الثامن عشر كثير من التجارب العملية لمعرفة خواص الكهرباء الساكنة، وقد ساهم العلماء بيرنو (D. Berno) ١٧٦٠ وبرستلي (J. Priestly)، كيفندش (H. Cavendish) ١٧٧٠ ببعض التجارب المتقدمة، إلى أن جاء العالم الفرنسي كولوم (Charles Augustin de Coulomb) ١٧٨٤ الذي أنهى كل التجارب المتعلقة بالقوى الكهربية الساكنة بين الشحنات باستعمال ميزان الالتواء الحساس (torsion balance) المبيّن في الشكل (١-١).

وقد استعمل كولوم شحنتين متشابهتين لدراسة القوى الناتجة بينهما على أساس:
ا - تغيير مقدار الشحنتين.
ب - تغيير المسافة بين الشحنتين.
إذا قربت الشحنة B ، شكل (١-١)، إلى الشحنة المشابهة A وكلتاهما حرة الحركة فإن A سوف تنافر B وتبتعد عنها مسافة معينة فإذا أعيدت التجربة مرة أخرى بجعل شحنة B نصف قيمة شحنتها السابقة «وذلك بجعل الكرة B تلامس كرة أخرى متعادلة الشحنة» فإن الشحنة A ستبتعد في هذه الحالة مسافة أقل من المسافة في الحالة الأولى



شكل (١-١): ميزان الالتواء لدراسة قانون كولوم

وهكذا . . . ونتيجة لإجراء سلسلة من هذه التجارب استنتج العالم كولوم القانون التالي المعروف باسمه:

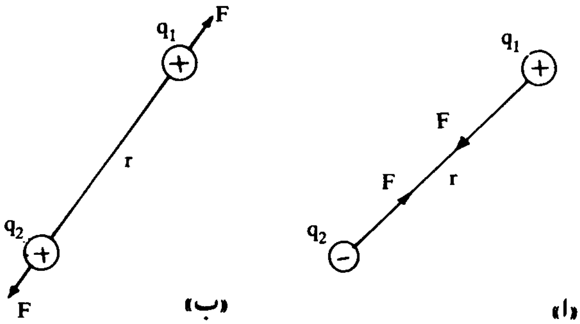
«تتناسب قوة التجاذب (attraction) أو التنافر (repulsion) التي يؤثر بها جسيم مشحون بشحنة q_1 على آخر شحنته q_2 طرديا مع حاصل ضرب شحنتيّ الجسيمين وعكسيا مع مربع المسافة التي تفصل بينهما r » كما في شكل (٢-١).

أي أن:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

أو:

$$F = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{. . . . .} \quad (١-١)$$



شكل (٢-١) : أ - قوة التجاذب بين جسيمين مختلفين من نوع الشحنة
ب - قوة التنافر بين جسيمين لهما نوع الشحنة نفسها.

حيث K_e ثابت التناسب وقيمته تعتمد على نظم الوحدات المستعملة والوسط الفاصل بين الشحنتين. ونظم الوحدات المستخدمة في علم الكهرباء الساكنة كثيرة وأكثرها استخداما النظامان العالمي the international system of units (S.I.) والجاووسي Gaussian system (انظر الملحق ١).

ففي النظام العالمي تكون القوة مقدرة بالنيوتن والمسافة بالمتر والشحنة بالكولوم. أما قيمة ووحدة ثابت التناسب K_e فتكتب عادة بالصورة التالية:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \;\; N \cdot m^2/C^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٢)$$

حيث تسمى ε_0 بسماحية الفراغ (permittivity of free space).
ونحصل من المعادلتين (١-١) و (٢-١) على:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣)$$

وفي النظام الجاووسي تكون القوة مقدرة بالداين والمسافة بالسنتيمتر والشحنة باستات كولوم أما قيمة الثابت K_e فهو الواحد حيث:

$$K_e = (1)\frac{\text{dyne . cm}^2}{(\text{stat.C})^2} \quad \dots\dots\dots \quad (١-٤)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (١-١) الصورة التالية :

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (١-٥)$$

وفي هذا النظام تعرف وحدة الشحنة الكهرواستاتيكية أو استات كولوم بأنها تلك الشحنة التي إذا وضعت على بعد ١ سم من شحنة مماثلة لها في النوع ومساوية لها في المقدار تنافرت معها بقوة قدرها ١ داين .

والعلاقة بين النظام العالمي والنظام الجاووسي يبينها الملحق (١) .
أما بالنسبة للعلاقة بين النظامين لهذه المقادير فهي :

$$F = 1\,N = 10^5\,\text{dyne}$$
$$q = 1\,C = 2.998 \times 10^9\,\text{stat . C}$$
$$r = 1\,m = 10^2\,\text{cm}$$

فإذا كان لدينا شحنتان متساويتان قيمة كل منهما كولوم واحد والمسافة بينهما متر واحد فإنه حسب المعادلة (١-٥) تكون قيمة القوة هي :

$$F = \frac{(2.998 \times 10^9) \times (2.998 \times 10^9)}{10^4} = 8.988 \times 10^{14}\,\text{dyne}$$
$$= 8.988 \times 10^9\,N$$

ولذلك إذا استخدم النظام العالمي (S.I) في المعادلة (١-١) فإن القيمة العددية لثابت التناسب K_e لابد أن تساوي المقدار 8.988×10^9 .
أي أن :

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \simeq 9 \times 10^9 \ \frac{N . m^2}{C^2} \qquad (١ - أ٦)$$

على ذلك فإن سماحية الفراغ ε_0 هي :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, C^2 / N\,.\,m^2 \qquad (\text{٦ب - ١})$$

والقوة الاستاتيكية بين الجسيمات هي كمية متجهة (vector quantity). فإذا كان لدينا جسيمان مشحونان فإن القوة المؤثرة على كل منهما تكون على الخط الواصل بينهما. فإذا فرضنا متجها لوحدة الأطوال رمزه i_r [حيث $i_r = \frac{\vec{r}}{r}$ وذلك حسب المعادلة (٦ب - ٢)]، الملحق (٢). فإن المعادلة (٣-١) تصبح كالتالي :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\ \vec{i_r}$$

أو

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\ \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{١-٧})$$

أما المعادلة (٥-١) فتصبح كالتالي :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\ \vec{i_r}$$

أو

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3}\ \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{١-٨})$$

أما إذا كان لدينا شحنات كثيرة فإن محصلة القوى المؤثرة على شحنة ما هي المجموع الاتجاهي لكل القوى الواقعة على هذه الشحنة.

فإذا أثرت الشحنات q_1 ، q_2 و q_3 على الشحنة q بقوى قدرها F_1 ، F_2 و F_3 على الترتيب، كما في شكل (٣-١) فإنه حسب المعادلة (٨-١) يكون لدينا :

$$\vec{F_1} = K_e\ \frac{q\,q_1}{r_1^3}\vec{r_1}\ ;$$

$$\vec{F_2} = K_e\ \frac{q\,q_2}{r_2^3}\vec{r_2}\ , \quad \text{and}$$

$$\vec{F_3} = K_e\ \frac{q\,q_3}{r_3^3}\vec{r_3}$$

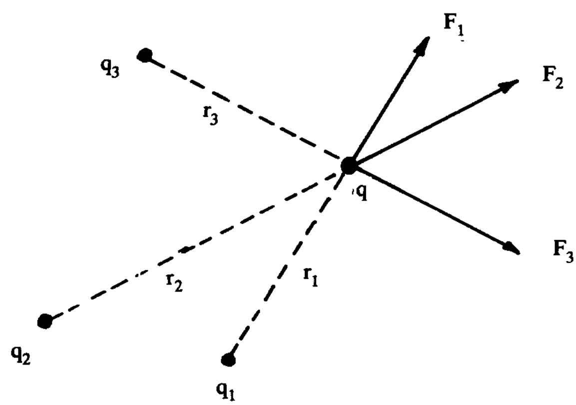
حيث r_1 ، r_2 و r_3 بعد q عن q_1 ، q_2 و q_3 على الترتيب.

وتكون القوة المحصلة هي المجموع الاتجاهي لهذه القوى أي أن:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = K_e q \left\{ \frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^3}\vec{r}_3 \right\} \quad \dots\dots \quad (١-٩)$$

وبصورة عامة فإن:

$$F = K_e q \sum_n \frac{q_n}{r_n^3}\vec{r}_n \quad \dots\dots\dots \quad (١-١٠)$$



شكل (١-٣): القوى الناشئة عن مجموعة من الشحنات

مـثـــال (١-١)

تتكون ذرة الهيدروجين من نواة تحتوي على بروتون واحد يدور حولها إلكترون واحد في مسار دائري نصف قطره 5.3×10^{-9} cm فإذا كان:

$(-e) = (+e) = 1.6 \times 10^{-19}$ C و $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg و ، $M_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg

فاحســـب:

أ ـ نسبة قوة الجذب الكهربي إلى قوة الجذب العام بين الإلكترون والبروتون.

ب ـ عدد مرات دوران الإلكترون حول النواة في الثانية الواحدة، إذا علمت أن قوة الجذب الكهربي تساوي القوة الطاردة المركزية.

الحـــل

أ ـ طبقا لقانون كولوم فإن قوة الجذب الكهربي الساكن بين الإلكترون السالب والبروتون الموجب هي :

$$F_e = 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.2 \times 10^{-8} N$$

وحسب قانون نيوتن للجذب العام بين كتلتين m_1 و m_2 المسافة بينهما r فإن قوة الجذب تعطى بالمعادلة

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (١\text{-}١١)$$

حيث تعرف γ بثابت الجذب العام وقيمته $6.67 \times 10^{-11} N . m^2 / kg^2$

$$\therefore F_g = 6.67 \times 10^{-11} \frac{(9.1 \times 10^{-31}) \times (1.67 \times 10^{-27})}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.7 \times 10^{-47} N$$

$$\therefore \frac{F_e}{F_g} = 2.216 \times 10^{39}$$

ويتضح من هذا المثال مدى الفرق الكبير بين قيمتي القوتين.

ب ـ من المعروف أنه لكي يتزن الإلكترون في مداره فلابد أن تكون :

قوة الجذب الاستاتيكي F_e = قوة الطرد المركزي F_C

$$\because F_C = m_e \omega^2 r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (١\text{-}١٢)$$

فإذا فرض أن n هي عدد الـدورات التي يعملهـا الإلكترون في الثانية الواحدة فإن $\omega = 2\pi n$ وبالتعويض في المعادلة (١-١٢) نحصل على :

$$n = 6.5 \times 10^{15} \text{ turns / s}$$

مـــثـــال (١-٢)

يحتوي جرام واحد من الهيدروجين على 6×10^{23} من الإلكترونات والعدد نفسه من الـبروتـونات، فإذا فصلت الإلكترونات عن البروتونات ووضعت البروتونات في

القـطب الشمالي للأرض والإلكترونات في القطب الجنوبي، فاحسب القوة الكهربية الساكنة بينهما.

الحـــــل

تحسب الشحنة الكلية للإلكترونات وذلك، بمعرفة شحنة إلكترون واحد.

$$\therefore q = (6 \times 10^{23}) \times (1.6 \times 10^{-19}) = 9.6 \times 10^4 \text{ C}$$

وقطر الأرض القطبي يساوي

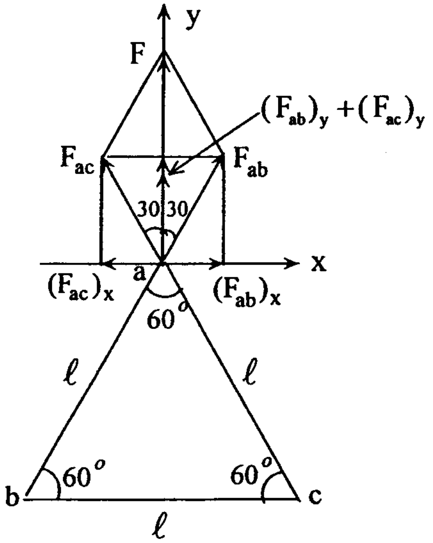
$$r = 2\,R_E = 2 \times 6.4 \times 10^6 = 1.28 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\therefore F = 9 \times 10^9 \; \frac{(9.6 \times 10^4)^2}{(1.28 \times 10^7)^2} = 5.06 \times 10^5 \text{ N}$$

ويتضح من هذا المقدار أن القوة الكهربية هائلة جدا.

مــثــال (٣-١)

ثلاث شحنات متساوية قيمة كل منها q+ وضعت على رؤوس المثلث كما في الشكل التالي. فاحسب قيمة واتجاه محصلة القوى على الشحنة الواقعة في النقطة a.



الحـــل

تخضع الشحنة q عند النقطة a لقوتين F_{ab} , F_{ac} قيمتهما

$$\therefore \vec{F}_{ab} = \frac{K_e}{l^2} q^2 \frac{\vec{r}_{ab}}{l}$$

$$\vec{F}_{ac} = \frac{K_e}{l^2} q^2 \frac{\vec{r}_{ac}}{l}$$

ومحصلتهما $\vec{F} = \vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ac}$ ، ولكن من الأنسب تحليل $\vec{F}_{ab}$, $\vec{F}_{ac}$ إلى مركبتيهما على x و y ، وواضح أن مجموع المركبتين المحمولتين على x تساوي الصفر لأنهما متعاكستان ومتساويتان، وتبقى المركبتان على y.

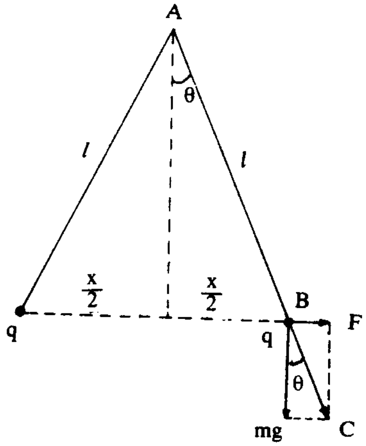
وبذلك تقع محصلة القوى على الجهة الموجبة لمحور y وقيمتها :

$$\therefore F = (F_{ab})_y + (F_{ac})_y$$

$$= \frac{K_e q^2}{l^3}(l \cos 30°) + \frac{K_e q^2}{l^3}(l \cos 30°) = 1.732\ \frac{K_e q^2}{l^2}$$

مــثــال (٤-١)

كرتان تزن كل منهما m جراما معلقتان بخيطين إلى نقطة واحدة طول كل منها l سم . ما هي الشحنة التي يجب أن تحملها بالتساوي كل من الكرتين لكي تبتعدا عن بعضهما البعض مسافة قدرها x سم .



الحـــل

لكي تكـون الكرتان في حالة اتزان يجب أن تكـون المحصلة C (لكل من قوة التنـافـر F والثقـل mg) على امتداد الخيط ويتحـقق ذلـك عنـدمـا تحـقق الـزاوية θ العلاقة

$$\tan\theta = \frac{F}{mg}$$

$$\because F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2 mg}$$

وإذا كانت θ صغيرة جدا بحيث يكون :

$$\tan\theta \cong \sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{x}{2l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2 mg}$$

$$\therefore \quad q = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 x^3 mg}{2l}\right)^{1/2}$$

يلاحظ أنه استخدمت قاعدة التجاذب والتنافر في تحديد اتجاه القوى الكهربية في جميع الأمثلة السابقة.

(١-٣) المجـــال الكـهـــربي

Electric Field

يصاحب أي جسم مشحون مجال كهربي يحيط به ويؤثر على أية شحنة توضع عند أي نقطة قريبة منه بقوة تنافر أو قوة تجاذب حسب نوعية الشحنات. وهذا يشبـه إلى حـد كبير وجود جسم ما في مجال جاذبية الأرض حيث تجذبه إليها ما لم يخرج عـن نطـاق أو مجال جاذبية الأرض. ويمكن الكشف عن وجـود مجال كهربي عند نقطة ما بوضـع جســم مشحون بشحنة q_0 ، وتسمى شحنة اختبار (test charge) ، فإذا تأثرت هذه الشحنة بقوة كهربية فيعني هذا وجود مجال كهربي عندها.

ولما كانت القوة كمية متجهة (أي ذات مقدار واتجاه) كان المجال الكهربي كمية متجهـة أيضا له مقدار واتجاه. فإن كان المجال الكهربي ناتجا عن شحنة قدرها q فإنه يؤثر على شحنة اختبار q_0 ، تبعد عنها مسافة r ، بقوة قدرها F . وتسمى القيمة $\frac{F}{q_0}$ بشدة المجال الكهربي E (intensity of electric field) أي أن :

$$E = \frac{F}{q_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١٣)$$

$$\because F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١٤)$$

أو

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{i}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad \ldots\ldots \quad (١-١٥)$$

حيث i_r متجه الوحدة (unit vector). ويتجه من الشحنة q ، الملحق ٢ ـ المعادلة (٦-٢)، ووحدات شدة المجال الكهربي في النظام العالمي (S.I.) والنظام الجاووسي هي :

$$E = \text{Newton / Coulomb (N/C)} \qquad \text{(S.I.)}$$

$$E = \text{dyne / stat . C}$$

فإذا كان هناك عدد من الشحنات $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n$ على مسافات قدرها $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ من شحنة اختبار قدرها q_0 فإن كل شحنة من هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنة q_0 بقوة معينة وتكون محصلة القوى على هذه الشحنة هي المجموع الاتجاهي لهذه القوى وحسب المعادلة (١-٨) يكون لدينا :

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n^2}\vec{i}_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-١٦)$$

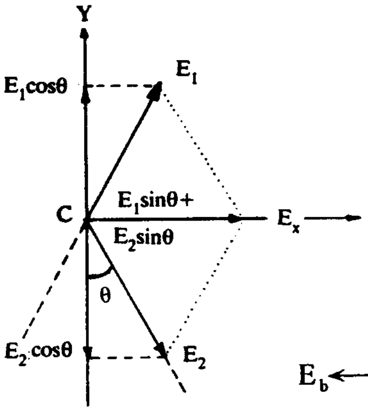
وتكون محصلة شدة المجال الكهربي عند هذه النقطة هي :

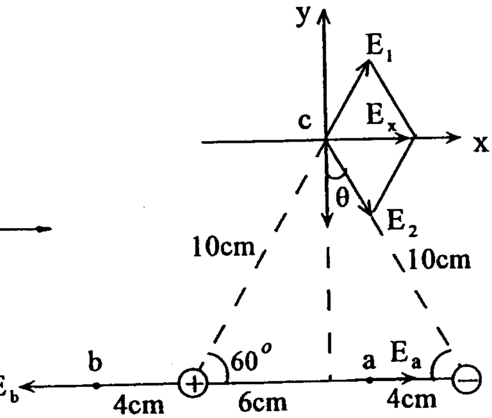
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n^2}\vec{i}_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-١٧)$$

مثـــال (١-٥)

شحنتان 12×10^{-9} C و -12×10^{-9} C البعد بينهما 10cm كما في الشكل التالي .

احسب شدة المجال الناتج من هاتين الشحنتين عند النقاط a, b, c.





الحـــل

لحل هذه المسألة نستخدم المعادلة (١٧-١).

أ - بالنسبة لشدة المجال عند النقطة a : متجه مجال الشحنة الموجبة يتجه نحو اليمين وقيمته:

$$E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.06)^2} = 3.0 \times 10^4 \, N/C$$

ومتجه مجال الشحنة السالبة يتجه أيضا نحو اليمين وقيمته:

$$E_2 = 6.75 \times 10^4 \, N/C$$

$$\therefore E_a = E_1 + E_2 = (3.0 + 6.75) \times 10^4 = 9.75 \times 10^4 \, N/C$$

ب - بالنسبة للنقطة b : فمتجه مجال الشحنة الموجبة يتجه نحو الشمال وقيمته:

$$E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.04)^2} = 6.75 \times 10^4 \, N/C$$

ومتجه مجال الشحنة السالبة يتجه نحو اليمين وقيمته:

$$E_2 = 0.55 \times 10^4 \, N/C$$

$$\therefore E_b = E_1 - E_2 = (6.75 - 0.55) \times 10^4 = 6.20 \times 10^4 \, N/C$$

جـ ـ ولحساب محصلة المجال عند النقطة c سوف نتبع طريقة تحليل المتجهات رأسيا وأفقيا ومنه نحصل على:

$$E_x = E_1 \sin\theta + E_2 \sin\theta \qquad E_y = E_1\cos\theta - E_2\cos\theta$$

ونظرا لأن $E_1 = E_2$ وكذلك $\theta = 30°$ فإن:

$$E_x = 2E_1 \sin 30 = 2 \times \frac{1}{2} E_1 = E_1$$

$$\therefore E_x = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.1)^2} = 1.08 \times 10^4 \, N/C$$

أما محصلة E_y فهي: $E_y = 0$

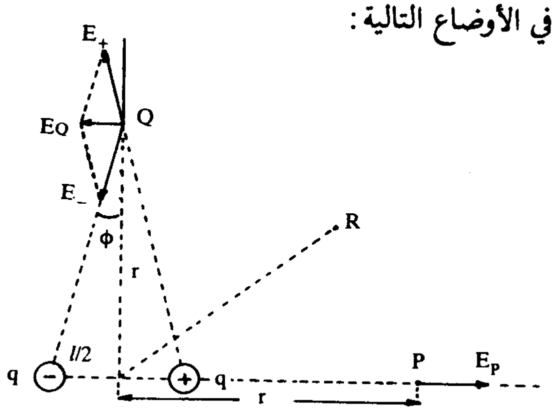
$$\therefore E_c = E_x = 1.08 \times 10^4 \, N/C$$

حُددت اتجاهات المجالات الكهربية في المثال باستخدام قاعدة اتجاه خطوط القوى الكهربية للشحنات الموجبة والسالبة والذي سيرد شرحها في البند (١ ـ ٧).

(١ـ٤) المجال الكهربي لذي القطبين

Electric Field of a Dipole

يتكون ذو القطبين من شحنتين متساويتين مقدارا ومختلفتين في النوع أي أن إحداهما شحنة موجبة والأخرى شحنة سالبة وتفصلهما مسافة معينة. وسيُدرس المجال الناشىء عن ذي القطبين في الأوضاع التالية:



شكل (٤ـ١): المجال الكهربي عند P على محور ذي القطبين و Q على العمودي على المحور

(١-٤-١) المجال عند نقطة ما على طول محور ذي القطبين

Field at any point on the prolonged axis of the dipole

يمثل شكل (٤-١) ذا قطبين شحنة كل من قطبية q والمسافة بينهما l. لإيجاد شدة المجال E_p عند النقطة p التي تقع على امتداد المحور وعلى بعد r من المنتصف تطبق المعادلة (١٧-١) فنجد أن:

$$\vec{E_p} = \vec{E_+} + \vec{E_-}$$

$$\therefore E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(r+l/2)^2-(r-l/2)^2}{(r^2-l^2/4)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2qrl}{(r^2-l^2/4)^2} \quad \text{(١٨أ - ١)}$$

فإذا كانت المسافة l صغيرة بالنسبة للمسافة r فإنه يمكن إهمال $\frac{l^2}{4}$ مقارنة مع قيمة r^2 وبذلك يمكن الحصول على:

$$\therefore E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2P}{r^3} \quad \text{(١٨ب - ١)}$$

حيث

$$P = ql \quad \text{(١-١٩)}$$

ويعرف P بالعزم الكهربي لذي القطبين (electric dipole moment) *وهو حاصل ضرب شحنة أحد القطبين في المسافة بينهما*، وتقع P على محور ذي القطبين ويتجه من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

(١-٤-٢) المجال عند نقطة ما على العمود المنصف لمحور ذي القطبين

Field at any point on the perpendicular bisector of the axis of the dipole

قيمة المجال الناتج عن كل من الشحنتين عند نقطة Q ، شكل (٤-١)، تساوي

$$E = E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q}{(r^2 + l^2/4)} \quad .\ .\ .\ . \qquad (١-٢٠)$$

وبتحليل E_+ و E_- في اتجاهين متعامدين فإن مركبتي المجالين على المحور العمودي لذي القطبين تلغي إحداهما الأخرى. أما المركبتان الأفقيتان فكل منهما تساوي $E \sin \phi$ وتكون بذلك محصلة شدة المجال عند النقطة Q تساوي :

$$E_Q = 2\,E \sin \phi$$

$$\therefore\ \sin \phi = \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}}$$

أي أن :

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{(r^2 + l^2/4)} \cdot \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}} \quad . \qquad (٢١أ - ١)$$

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

فإن كانت المسافة r كبيرة بالنسبة للمسافة l أمكن إهمال $l^2/4$ ونجد أن :

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{P}{r^3} \quad .\ .\ . \qquad (٢١ب - ١)$$

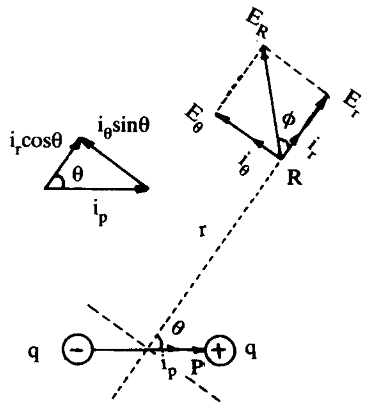
واضح من المعادلتين (١٨-١) و(٢١-١) أن شدة المجال الكهربي عند النقطتين P و Q تتناسب تناسبا طرديا مع العزم الكهربي لذي القطبين وعكسيا مع مكعب المسافة من منتصف ذي القطبين وذلك عندما تكون المسافة بعيدة بعدا كافيا لتبرير التقريبات المستخدمة.

(١ - ٤ - ٣) المجال عند أي نقطة (الحالة العامة)

Field at any point (general case)

إذا فُرض في هذه الحالة أن النقطة R تبعد مسافة r عن منتصف ذي القطبين ويصنع الخط الفاصل بينها وبين منتصف ذي القطبين زاوية مقدارها θ مع محور ذي القطبين، كما في الشكل (٥-١)، ولإيجاد شدة المجال نحلل العزم الكهربي P لذي القطبين إلى مركبتين إحداهما على استقامة r وتساوي $P\cos\theta$ والأخرى في الاتجاه العمودي على r وهي $P\sin\theta$ وشدة المجال E_r الناتج عن المركبة $P\cos\theta$ طبقا للمعادلة المقربة (١٨-١) يساوي

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P\cos\theta}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٢٢)$$



شكل (٥-١): المجال الكهربي عند R «الحالة العامة».

وبالمثل فإن شدة المجال E_θ الناتج عن المركبة $P\sin\theta$ طبقا للمعادلة (٢١-١) هي

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\sin\theta}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٢٣)$$

فإذا فُرض أن $\vec{i}_r$ ، $\vec{i}_\theta$ ، $\vec{i}_p$ متجهات الوحدة لكل من E_r و E_θ و P على التوالي، وبالاستعانة بالشكل (٥-١) فإن:

$$\vec{E}_R = E_r \vec{i}_r + E_\theta \vec{i}_\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٢٤)$$

$$\vec{i}_p = \vec{i}_r \cos\theta - \vec{i}_\theta \sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٢٥)$$

وبالتعويض عن $\vec{E}_r$ و $\vec{E}_\theta$ من المعادلتين (١-٢٢) و(١-٢٣) يمكن الحصول على:

$$\vec{E}_R = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\vec{i}_r + \sin\theta\,\vec{i}_\theta) \qquad (١\text{-}٢٦)$$

وبالتعويض عن $\vec{i}_\theta$ في المعادلة (١-٢٦) من المعادلة (١-٢٥) يكون:

$$\vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3P\cos\theta\,\vec{i}_r - P\,\vec{i}_P]$$

$$\therefore \vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\vec{P}\cdot\vec{i}_r)\vec{i}_r - \vec{P}] \quad \ldots \quad (١\text{-}٢٧)$$

حيث:

$$\vec{P}\cdot\vec{i}_r = P\cos\theta$$

أما القيمة المطلقة لـ E_R فهي:

$$E_R = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta)^{1/2}$$

$$E_R = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(1 + 3\cos^2\theta)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (١\text{-}٢٨)$$

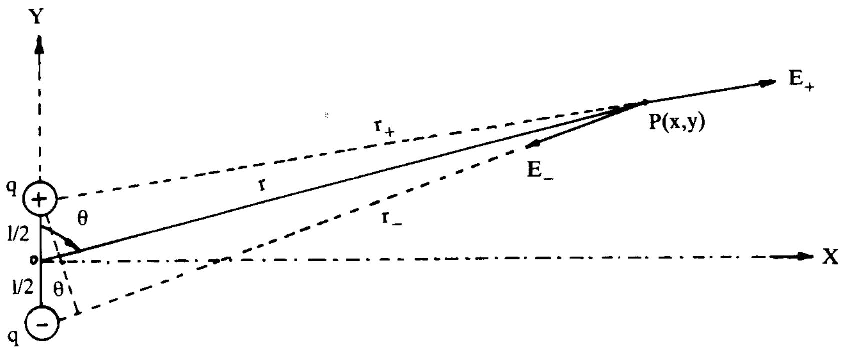
ويصنع شدة المجال E_R زاوية قدرها ϕ مع اتجاه E_r وبذلك فإن:

$$\tan\phi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{P\sin\theta}{2P\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta \quad \ldots \quad (١\text{-}٢٩)$$

ومن الواضح أن المعادلة (١-٢٨) تؤول إلى المعادلتين (١-١٨) و(١-٢١) عندما تقع النقطة R على المحور X أو المحور Y.

وهناك ملاحظة مهمة على المعادلة (١-٢٨) هو أن المجال الكهربي لذي القطبين يتناسب مع $1/r^3$ بينما أن المجال الناتج عن شحنة مفردة يتناسب مع $1/r^2$ وهذا يعني أن المجال يتناقص بصورة أسرع في حالة ذي القطبين عنها لشحنة مفردة.

ويمكن الوصول إلى المعادلة (١-٢٨) باستخدام الإحداثيات الديكارتية وسوف تدرس الآن، رغم التطويل في المعاني الرياضية البحتة، لأهمية الموضوع ولفهم المزيد عن ذي القطبين الذي يوجد بصورة طبيعية في كثير من الذرات أو الجزيئات التي لها شحنـات سالبة وأخرى موجبة تفصلها مسافة معينة، مثل جزيئات الماء، أو توجيه الشحنـات السالبة والموجبة نتيجة لتأثير مجال كهربي خارجي لبعض المواد العازلة أو ظاهرة الاستقطاب التلقائي (spontaneous polarization) للمواد العازلة الفروكهربية. «هذا الموضوع سيشرح في الفصل الثالث».



شكل (١-٦): المجال الناتج عن ذي القطبين في الحالة العامة باستخدام الإحداثيات الديكارتية

نستنتج من الشكل (١-٦) أن المجال E عند النقطة P هو محصلة المجالين E_+، من الشحنة الموجبة $+q$ التي تبعد r_+ عن P، و E_-، من الشحنة السالبة $-q$ التي تبعد مسافة r_- عن النقطة P.

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = K\frac{q\vec{r}_+}{r_+^3} + K\frac{(-q)\vec{r}_-}{r_-^3} \quad .. \quad (١\text{-}٣٠)$$

وبتحليل E_+ وE_- إلى مركبتين إحداهما E_x محمولة على x والأخرى E_y محمولة على y ، ومن الشكل (١-٦)، يمكن الحصول على :

$$\vec{r}_+ = x\vec{i} + (y - \frac{l}{2})\vec{j} \quad \& \quad \vec{r}_- = x\vec{i} + (y + \frac{l}{2})\vec{j}$$

$$\therefore r_+ = \left\{(y - \frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{1/2}, r_- = \left\{(y + \frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{1/2} \quad \ldots (١-٣١)$$

ومن المعادلتين (١-٣٠) و(١-٣١) ينتج :

$$E_x = K_e q \frac{x}{\left\{(y-\frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{3/2}} - K_e q \frac{x}{\left\{(y+\frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{3/2}}$$

$$E_y = K_e q \frac{y-(l/2)}{\left\{(y-\frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{3/2}} - K_e q \frac{y+(l/2)}{\left\{(y+\frac{l}{2})^2 + x^2\right\}^{3/2}} \quad \ldots (١-٣٢)$$

وإذا فرض أن l صغيرة جدا مقارنة بـ r فإن المركبتين E_x و E_y سوف تقترب قيمتهما من الصفر، وبصورة أخرى يمكن القول إنه إذا اقتربت الشحنة +q من الشحنة q - فإن المجالين الناتجين منهما عند النقطة p سوف يتلاشيان ولذلك يمكن إهمال $l^2/4$ من مفكوك المعادلتين (١-٣٢) أي أن :

$$\frac{1}{\left\{(y\pm\frac{l}{2})^2+x^2\right\}^{3/2}} \cong \frac{1}{[x^2+y^2 \pm yl]^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}\left(1\pm\frac{yl}{x^2+y^2}\right)^{3/2}}$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين (binomial expansion) على الحد الأخير، [انظر ملحق ٣ البند (٣-٦)].

$$(1 \pm b)^{3/2} = 1 \pm (-\frac{3}{2}b) + \frac{1}{2!}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})b^2 + \cdots$$

بحيث تبقى l وتهمل l^2 و l^3 و . . . . أي أن :

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}\left(1\pm\frac{yl}{x^2+y^2}\right)^{3/2}} \cong \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left\{1\mp\frac{3}{2}\,\frac{yl}{(x^2+y^2)}\right\} \quad (١\text{-}٣٣)$$

ويحصل من المعادلتين (١-٣٣) و(١-٣٢) على:

$$E_x = K_e q\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{yl}{(x^2+y^2)}\right)-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{yl}{(x^2+y^2)}\right)\right]$$

$$E_x = \frac{K_e P}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left[\frac{3xy}{x^2+y^2}\right]$$

وبالطريقة نفسها يكون لدينا:

$$E_y = \frac{-K_e P}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left[1-\frac{3y^2}{x^2+y^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad (١\text{-}٣٤)$$

وإذا أُستبدلت x و y بدلالة الإحداثيات θ و r فمن الشكل (١-٦) يمكن الحصول على:

$r^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = y/r$ and $\sin\theta = x/r$

$$\therefore E_x = \frac{K_e P}{r^3}(3\cos\theta\sin\theta)$$

$$E_y = \frac{-K_e P}{r^3}(1-3\cos^2\theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٣٥)$$

$$\because \vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

$$\therefore E = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \frac{K_e P}{r^3}(1+3\cos^2\theta)^{1/2}$$

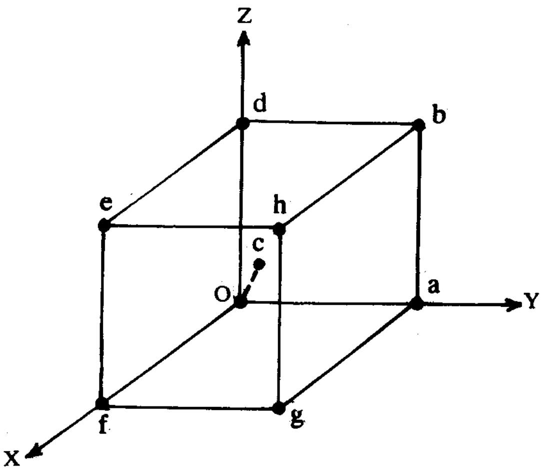
وهي المعادلة (١-٢٨) نفسها.

مـثـــال (٦ - ١)

وضعت أربع شحنات كهربية ومتساوية قيمة كل منها q عند أركان مكعب إحداثياتها (0,0,0) و (0,1,1) و (1,0,1) و (1,1,0). احسب:

(أ) شدة المجال الكهربي عند مركز المكعب.

(ب) شدة المجال الكهربي عند مركز المكعب إذا وضعت ثلاث شحنات كهربية أخرى من النوع نفسه عند بقية أركان المكعب ما عدا الركن f الذي إحداثياته (1,0,0).



الحـــل

(أ) شدة المجال الكهربي عند النقطة C(1/2,1/2,1/2) ، مركز المكعب، يكتب بالصورة التالية:

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 + \vec{E}_g + \vec{E}_b + \vec{E}_e$$

$$= K_e \frac{q}{r^3} (\vec{oc} + \vec{gc} + \vec{bc} + \vec{ec}) \quad A$$

حيث

$$r = |\vec{oc}| = |\vec{bc}| = |\vec{gc}| = |\vec{ec}|$$

$$\vec{oc} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \qquad \vec{bc} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{gc} = \frac{1}{2}(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \qquad \vec{ec} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

حيث $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ إحداثيات الوحدة على المحاور الإحداثية z,y,x على الترتيب.

بالتعويض في المعادلة A ثم جمع معاملات إحداثيات الوحدة، يحصل على:

$$E_c = K_e \frac{q}{r^3}(0) = 0$$

وهو المطلوب (أ). أما المطلوب (ب) فيمكن حساب شدة المجال الكهربي كالتالي:

$$\overrightarrow{dc}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}),\ \overrightarrow{ac}=\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}),\ \overrightarrow{hc}=\frac{1}{2}(-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$$

$$\therefore\ \vec{E}_c = K_e\frac{q}{r^3}(\overrightarrow{dc}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{hc})$$

$$=\frac{4K_eq}{3\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$$

(١-٥) كثافة الشحنة
Charge Density

عرف من البنود السابقة أن الجسم المشحون يحمل شحنات هي مضاعفات صحيحة من شحنة الإلكترون فإذا اعتُبِر الجسم المشحون يحمل عددا كبيرا جدا من الشحنات فإنه يمكن النظر إلى الشحنة الكهربية على أنها موزعة توزيعا مستمرا.

ويمكن بهذا تعريف ثلاثة أنواع من الكثافة الكهربية:

(١-٥-١) الكثافة الحجمية Volume charge density

ويرمز لها بالرمز ϱ وتساوي:

$$\varrho = \frac{dq}{dV} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣٦)$$

حيث dq عنصر الشحنة المحصورة داخل الحجم dV الذي يحيط بالنقطة المراد تقدير ϱ فيها ووحدة قياس الكثافة الحجمية هي C/m^3.

(١-٥-٢) الكثافة السطحية Surface charge density

ويرمز لها بالرمز σ وهي تعبر عن توزيع الشحنة على سطح بحيث يمكن إهمال

سمكه بالنسبة للأبعاد الأخرى.

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣٧)$$

حيث dq الشحنة الموزعة على السطح dS المحيط بالنقطة المراد تقدير σ فيها ووحدة قياس الكثافة السطحية هي C/m^2.

(١-٥-٣) الكثافة الطولية Linear charge density

ويرمز لها بالرمز λ وتمثل توزيع الشحنة على سلك مهمل المقطع بالقياس لأبعاده الأخرى.

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣٨)$$

حيث dq الشحنة الموزعة على الطول dl المحيط بالنقطة المراد قياس λ فيها ووحدة قياس الكثافة الطولية هي C/m.

(١-٦) المجال الناتج عن توزيع مستمر للشحنة الكهربية
Field due to a Continuous Distribution of Charge

سبق أن دُرس المجال الكهربي لشحنات كهربية ممثلة على هيئة نقطة أو نقط (point charges) ولدراسة المجال الناتج عن شحنات موزعة على أجسام ذات أحجام محدودة (finite size) فإن المعادلة (١-١٧) تصبح :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}\, \vec{i}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^3}\, \vec{r} \ldots \quad (١-٣٩)$$

حيث يجب حساب التكامل على كل الحجم أو السطح أو الطول الموزع عليه الشحنة، و $\vec{r}$ هي المسافة المتجهة من عنصر الشحنة dq إلى النقطة التي يحسب عندها المجال. ويجب الانتباه إلى أن هذا التكامل اتجاهي فهو عبارة عن مجموع عناصر لا متناهية في الصغر لكل منها كمية واتجاه مختلف.

وإحدى طرق تقدير مثل هذا التكامل يكون بالتعويض عن المتجهة $\vec{r}$ بمركباته الديكارتية، فتكتب، [ملحق ٢ بند (٢ - ٢)].

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ هي متجهـات الوحدة على المحاور الإحداثية x و y و z وتصبح المعادلة (١-٣٩) كالتالي:

$$\vec{E} = \frac{\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{x}{r^3}\,dq + \frac{\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{y}{r^3}\,dq + \frac{\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{z}{r^3}\,dq \cdot\cdot \quad (١-٤٠)$$

وبذلك أصبحت التكاملات غير متجهة لخروج متجهات الوحدة الثابتة المقدار والاتجاه خارج إشارة التكامل.

فإذا كان الجسم المشحـون رفيعـا وطـويلا، طوله l، وكانت λ كثافة الشحنة الطولية (شحنة وحدة الأطوال) فإن المجال الكهربي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من عنصر الطول dl يمكن الحصول عليه من المعادلتين (١-٣٨) و(١-٣٩) أي أن:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda dl}{r^3}\,\vec{r} \;\ldots\ldots \quad (١-٤١)$$

ويمكن الحصول على قيمة شدة المجال الكهربي E عند النقطة p، التي تبعد مسافة قدرها r من سلك طويل ورفيع يحمل شحنة موجبة وموزعة بانتظام على طوله،

بتقسيم السلك إلى أجزاء متناهية في الصغر طول كل جزء منها dl ويحمل شحنة قدرها dq كما في شكل (٧-١). وبذلك تحدد المعادلة (٤١-١) المجال الكهربي. وبتحليل مركبتي هذا المجال على استقامة المحورين x و y نحصل على:

$$dE_x = dE \sin\theta \quad \text{and} \quad dE_y = dE \cos\theta$$

ويمكن تطبيق ذلك على بقية الأجزاء المتماثلة من السلك. ويكون المجال الكهربي عند النقطة p والناشىء عن المركبات السينية يساوي المجموع الحسابي أو تكامل المجال الكهربي لجميع الأجزاء في اتجاه المحور x. ويعبر عن ذلك رياضيا بالمعادلة:

$$E_x = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} dE \sin\theta$$

وبالمثل فإن المجال الكهربي الناتج عن النقطة p من جميع الأجزاء في اتجاه Y:

$$E_y = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} dE \cos\theta$$

حيث θ_1 و θ_2 يحددان نهايتيّ السلك.

ويمكن الحصول من الشكل (٧-١) على:

$$a = r \sec\theta$$

$$l = r \tan\theta$$

$$\therefore dl = r \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\because dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dl}{a^2} \quad = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{r}$$

$$\therefore E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

... (٤٢أ - ١)

$$\therefore E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

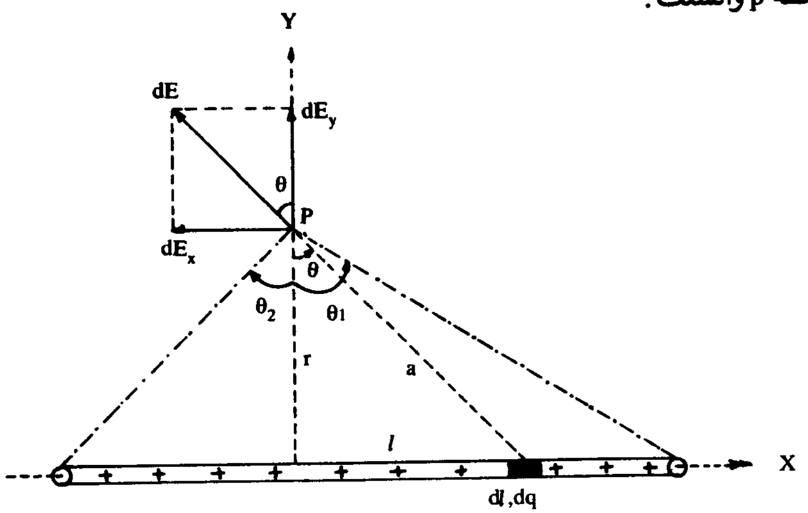
ويكون المجال المحصل عند النقطة p هو

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y \quad \text{or} \quad E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$$

فإذا كان السلك لانهائي الطول فإن حديّ التكامل يصبحان ($-\pi/2$ ، $\pi/2$) وتصبح المعادلتان (٤٢أ ـ ١) كالتالي:

$$\therefore E_x = \text{zero} \quad , \quad E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad \cdots \quad (\text{١ - ب٤٢})$$

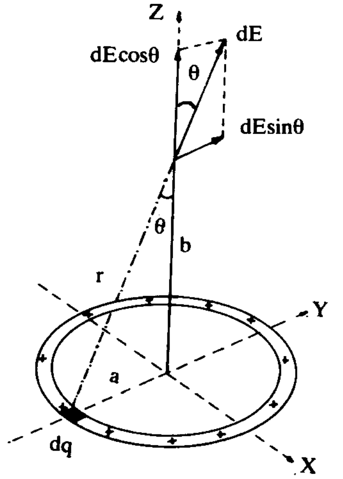
ومعنى ذلك تلاشي المركبة في الاتجاه السيني، وبقاء المركبة في الاتجاه الصادي. ونجد من المعادلة (٤٢ب ـ ١) أن المجال الكهربي يتناسب عكسيا مع المسافة الواقعة بين النقطة p والسلك.



شكل (١-٧): المجال الكهربي الناتج عن شحنة موزعة على موصل مستقيم طويل

وكمثال آخر سوف يدرس المجال الناتج عند النقطة p عن حلقة نصف قطرها a ومشحونة بشحنة موجبة قدرها q ، كما في الشكل (١-٨)، وتقع النقطة p على محور

الحلقة وتبعد مسافة b من مركز الحلقة .



شكل (٨-١): المجال الكهربي الناتج عن شحنة موزعة على حلقة دائرية

وبأخذ جزء صغير من الحلقة شحنته dq وعلى ذلك فإن شدة المجال الناشئة عن هذا العنصر عند النقطة p هو:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

وبتحليل dE إلى مركبتين إحداهما في اتجاه المحور Z وقيمتها $dE\cos\theta$ والأخرى في الاتجاه العمودي وقدرها $dE\sin\theta$. المركبة الأخيرة سوف تلتغي إذا أُخذ في الاعتبار جميع أجزاء الحلقة . وبذلك تصبح شدة المجال في اتجاه المحور Z.

$$\therefore E = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{r^2} \qquad (\text{٤٣أ - ١})$$

ولكن نجد من الشكل أن :

$$\cos\theta = \frac{b}{r} \quad , \quad r = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qb}{(a^2+b^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{١ - ب٤٣})$$

ويتضح من المعادلة أن شدة المجال في مركز الحلقة ينتهي إلى الصفر، أي عندما تكون $b = 0$ ، أما إذا كانت $a << b$ فإنه يمكن إهمال a^2 وتصبح المعادلة (٤٣ب - ١) كالتالي

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{b^2} \cdots\cdots\cdots \quad (\text{١ - ـ٤٣جـ})$$

أي أنه عند مسافات كبيرة من مركز حلقة مشحونة يتساوى المجال الكهربي مع المجال الناتج عن نقطة مشحونة بالشحنة نفسها.

أما إذا وُجد سطح مشحون مساحته S وكثافة الشحنة السطحية عليه σ (شحنة وحدة المساحة) فإنه يمكن الحصول على معادلة المجال الكهربي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من عنصر المساحة dS باستخدام المعادلتين (٣٧-١) و(٣٩-١) أي أن:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^3} \vec{r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{١-٤٤})$$

فلحساب المجال الكهربي لقرص دائري رفيع مشحون نصف قطره a وكثافة الشحنة الكهربية عليه σ ، عند النقطة p الواقعة على محور القرص كما في الشكل (٩-١) يؤخذ على القرص شريط دائري نصف قطره r فتكون مساحته:

$$dS = 2\pi\, r\, dr$$

وبتطبيق المعادلة (٤٤ - ١) على هذا الشريط الدائري فإن المجال المحصل واقع على المحور x وقيمته هي:

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{2\pi\, r\, dr\sigma}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \cos\theta$$

ولكن من الشكل (٩-١) لدينا:

$$L^2 = b^2 + r^2 \quad , \quad \cos\theta = \frac{b}{L}$$

$$\therefore dE_x = \frac{2r\,dr\,\sigma b}{4\varepsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}}$$

وحتى يُحصل على المجال الناتج عن القرص كاملا يكامل هذا المقدار بالنسبة لـ r التي حداها 0 و a أما b فهي ثابتة.

$$\therefore E = \int_0^a \frac{2r\,dr\,\sigma b}{4\varepsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{b\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^a \frac{2r\,dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}}$$

ويمكن إجراء هذا التكامل بإجراء تحويل المتغير بأن نعتبر أن :

$$u = b^2 + r^2$$

$$\therefore du = 2r\,dr$$

وبالتعويض نجد :

$$E = \frac{b\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^a u^{-3/2}\,du$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{b\sigma}{2\varepsilon_0 (b^2 + a^2)^{1/2}} \qquad (\text{٤٥أ - ١})$$

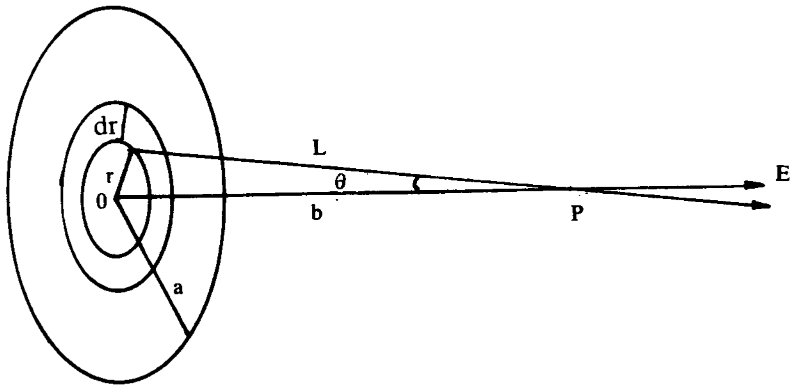
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [1 - \cos\theta]$$

وعندما يصبح القرص لانهائيا تكون عندها$(\theta = 90°)$ وينعدم بذلك الحد الثاني وتصبح المعادلة كالتالي :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٤٥ب - ١})$$

وأخيرا إذا كان الجسم المشحون له حجم قدره V وكانت ϱ كثافته الحجمية (شحنة وحدة الحجوم) فإنه يمكن الحصول على معادلة المجال الكهربي عند نقطة تبعد r من عنصر الحجم dV من المعادلتين (٣٦-١) و(٣٩-١) أي أن :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho dV}{r^3} \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٤٦)$$



شكل (٩-١): قرص دائري نصف قطره a ويحمل شحنة كهربية

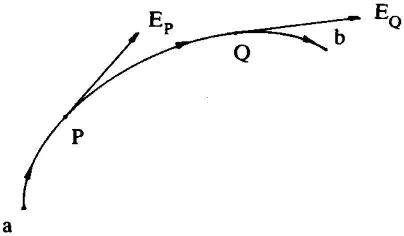
(١-٧) خطوط القوى الكهربية

Lines of Forces

يرجع أصل فكرة خطوط القوى إلى ميشيل فراداي Michael Faraday (١٧٩١ - ١٨٦٧م) وهي عبارة عن **خطوط وهمية تستخدم لوصف المجال الكهربي مقدارًا واتجاهًا**. ويبدأ خط القوى من الشحنة الموجبة وينتهي بالسالبة. وترسم هذه الخطوط عادة بحيث يتوفر فيها شرطان:

أ - أن يكون المماس لخط القوة الكهربي عند أي نقطة ممثلا لاتجاه المجال عند هذه النقطة. ويوضح الشكل (١٠-١) المجال E_p للنقطة p و E_Q للنقطة Q الواقعتين على المسار ab.

ب - أن يكون عدد خطوط القوى التي تقطع وحدة المساحة المحيطة بنقطة ما، وتكون عمودية عليها، مساويا عدديا شدة المجال عند هذه النقطة. وخط القوة الكهربي يمثل مسار وحدة الشحنة الموجبة داخل المجال الكهربي.



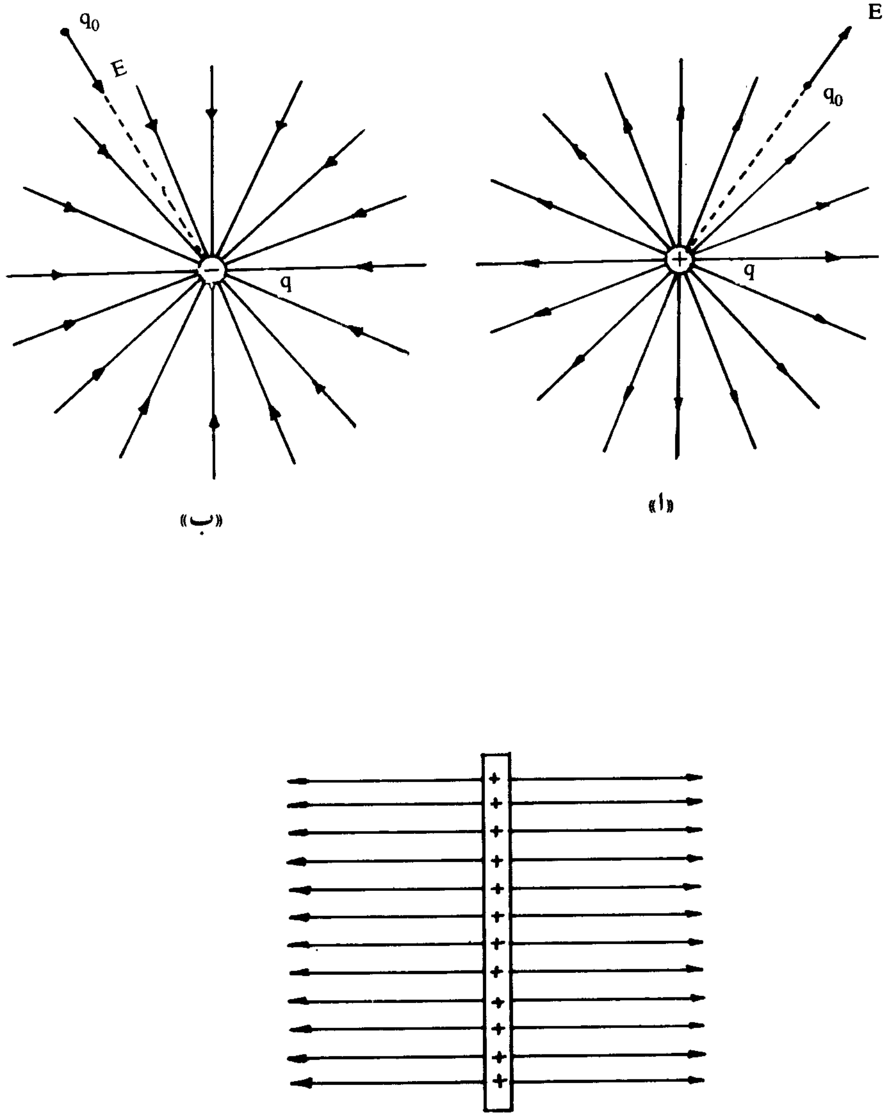
شكل (١٠ـ١): مسار خط قوة وقيمة المجال عند نقطتين مختلفتين عليه عند P و Q

يمثـل الشكـلان (١١أ ـ ١) و(١١ب ـ ١) بعض خطوط القوى حول شحنة موجبة وكذلك حول شحنة سالبة. وكما هو واضح تختلف قيمة المجال باختلاف بعد المسافة عن شحنة الاختبار q_0 ولكن للمجال قيمة واحدة عند أي نقطة حول q تقع على المسافة المعطاة نفسها. كما يبين الشكل (١١جـ ـ ١) خطوط القوى لصفيحة طويلة منتـظمـة الشكل مشحونة بشحنة موجبة وفي هذه الحالة تكون الخطوط متعامدة مع مستوى الصفيحة ومواز بعضها بعضا وتكون قيم E واحدة لكل النقاط القريبة من الصفيحة.

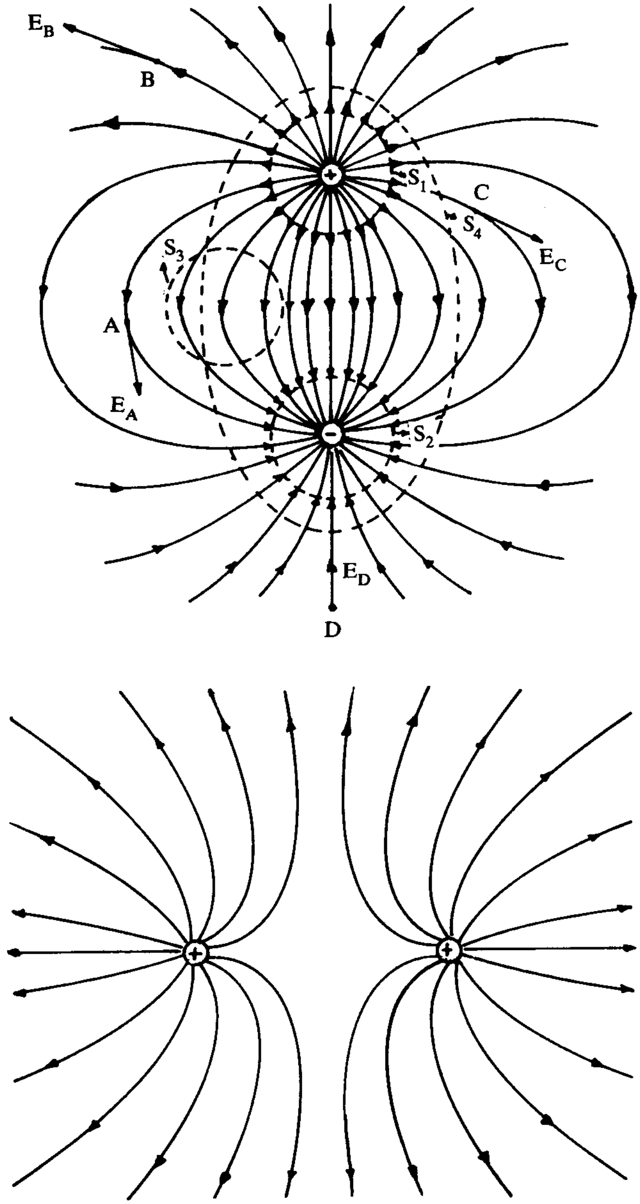
ويمثـل شكـل (١٢أ ـ ١) خطوط القـوى في حالـة شحنتـين إحداهما سالبة والأخرى موجبة. وفي هذه الحالة يمثل المجال عند أي نقطة محصلة المجالين الناشئين عن الشحنتين واتجاهه يمثل المماس لخط القوى الكهربي. والشكل يوضح أيضا المجال المحصل عند النقاط D و C و B و A كما يمثل شكل (١٢ب ـ ١) خطوط القوى حول شحنتين موجبتين.

وإذا حُددت بطريقة ما خطوط القوى فإنه يمكن استخدام هذه الخطوط للدلالة على شدة المجال فضلا عن اتجاهه. فإذا كانت E شدة المجال الكهربي ـ فإن عدد خطوط القوى في وحدة المساحة تكون متساوية على جميع نقط السطح العمودي على هذا المجال.

فإذا كانت مساحة السطح S ، شكل (١٣ـ١)، فإن العدد الكلي لخطوط القوى المارة خلال هذا السطح هو:



شكل (١١-١): خطوط القوى الناتجة عن:
أ ـ شحنة موجبة ، ب ـ شحنة سالبة
جـ ـ موصل مستقيم مشحون بشحنة موجبة.



«ا»

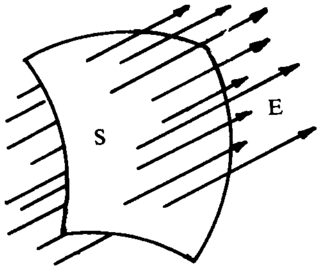
«ب»

شكل (١٢-١): خطوط القوة الناتجة عن:
ا ـ شحنتين مختلفتين في الإشارة ومتساويتين في القيمة.
ب ـ شحنتين متساويتين موجبتين.

$$N = ES \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤٧أ - ١)$$

وبذلك يمكن القول بأن :

شدة المجال عند نقطة ما تمثل عدد خطوط القوى الكهربية التي تقطع وحدة المساحة عموديا عند هذه النقطة .



شكل (١٣-١): حساب المجال الكهربي بمعرفة خطوط القوى N المارة من سطح مساحته S

وطبقا لهذا التعريف والاستعانة بشكل (١٤-١) فإن عدد الخطوط العمودية dN التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع في مركزه شحنة موجبة q تعطى بالمعادلة :

$$dN = E \,.\, dS$$

حيث E شدة المجال عند أي نقطة على سطح الكرة ويعطى بالمعادلة :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

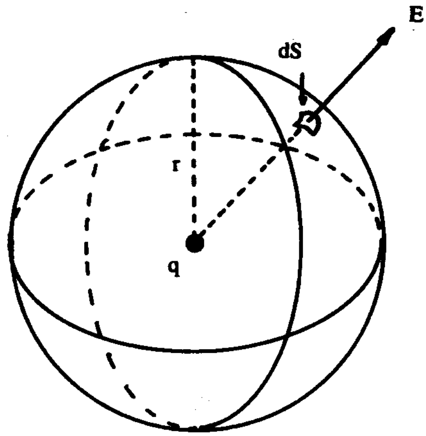
$$\therefore dN = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\, dS$$

$\therefore$ مجموع خطوط القوى N التي تقطع سطح الكرة كلها في اتجاه عمودي هى :

$$\therefore N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\int_0^{4\pi r^2} dS$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(4\pi r^2)$$

$$\therefore N = \frac{1}{\varepsilon_0}\, q \cdot\cdot \qquad (٤٧ب - ١)$$



شكل (١٤ ـ ١): عدد خطوط القوى dN التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع الشحنة q في مركزه.

(ومنها يتجه المجال عند أي مكان مبتعدا عن الشحنة في اتجاه نصف القطر أي عموديا على السطح الكروي).

وواضح أن عدد خطوط القوى لا تتوقف على نصف قطر الكرة مما يدل على تساوي عدد الخطوط المارة بجميع الكرات التي تقع في مركزها النقطة المشحونة.

وتعرف المعادلة (٤٧ب ـ ١) بنظرية جاوس (Gauss's Law) وسيأتي شرحها في البند (١ـ٩) كما يعرف N بالفيض (التدفق) الكلي في اتجاه عمودي (total normal flux).

والتدفق «في صورته العامة» لأي مجال كهربي يقاس بعدد خطوط القوى التي تمر خلال سطح افتراضي (hypothetical surface) قد يكون مغلقا أو مفتوحا ويرمز له بالرمز Φ وهذا التدفق يكون موجبا إذا كانت خطوط القوى خارجة من السطح المقفل وسالبا إذا كانت خطوط القوى آتية إليه. يمثل الشكل (١٢أ ـ ١) خطوط القوى لشحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة. وعندما تقطع الأسطح الافتراضية المحددة بالمنحنيات المغلقة S_1,S_2,S_3,S_4 فيكون التدفق موجبا بالنسبة للسطح S_1 وسالبا بالنسبة للسطح S_2.

وتتضح نظرية التدفق فيما لو وضع سطح غير منتظم الشكل في مجال كهربي E بحيث تكون خطوط القوى غير عمودية على كل أجزائه. وفي هذه الحالة يقسم السطح إلى أسطح صغيرة مساحتها $\triangle S$ واتجاهها يحدد بمتجه الوحدة العمودي عليه ويعطى التدفق لكل سطح صغير بالعلاقة التالية:

$$\triangle\Phi = E\triangle S\cos\theta \qquad \ldots\ldots \qquad (٤٨أ - ١)$$

حيث θ هي الزاوية بين العمودي على السطح وبين اتجاه المجال E. ولما كانت $E\cos\theta$ هي المركبة العمودية للمجال (أي المركبة في اتجاه العمودي على السطح) فإن التدفق الكلي للسطح يساوي مجموع التدفق لكل الأسطح الصغيرة وبصورة تقريبية فإن:

$$\Phi = \Sigma\, E\triangle S\cos\theta \qquad \ldots \qquad (٤٨ب - ١)$$

والتعـريف الدقيق للتدفق يمكن إيجاده في الصورة التفاضلية للمعادلة (٤٨ب - ١) بحيث يستبدل المجموع Σ بالتكامل على السطح كله.

$$\Phi = \oint E\,dS\cos\theta$$

أو

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad \ldots\ldots \qquad (٤٨جـ - ١)$$

هذا التكـامـل السطحي (surface integral) يحدد تقسيم السطح إلى عناصر متناهية في الصغر (infinitesimal elements) "dS" بحيث تعطى قيمة التدفق للعنصر بالعلاقة $E \cdot dS$.

وتشير الدائرة O المرسومة على علاقة التكامل أن السطح مغلق.

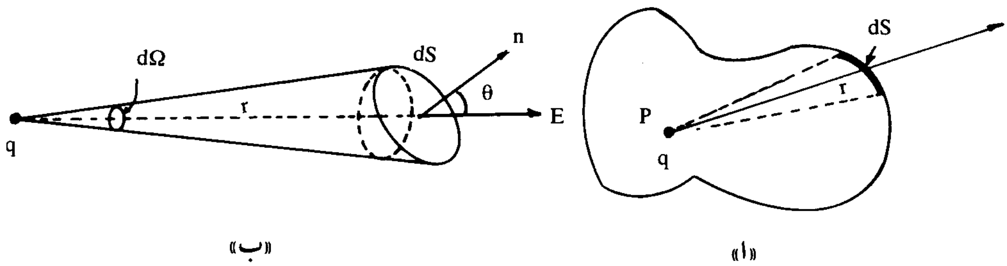
(١-٨) قـانـــون جـــاوس

Gauss's Law

وجد في البند (١-٧) أن المعادلة (٤٨جـ - ١) تمثل مجموع خطوط القوى العمودية والتي تمر بكل سطح كروي تقع الشحنة q في مركزه.

ويعمم جاوس هذه النتيجـة فهو يثبت أنه إذا تعرض أي سطح مقفل لمجال كهربي فإن عدد خطوط القوى التي تنفذ منه إلى الخارج تساوي $\frac{1}{\varepsilon_0}$ مضروبا في المجموع الجبري للشحنات المحصـورة داخـل هـذا السـطـح بصـرف النظـر عـن كـيفـيـة تـوزيع الشحنات داخل السطح . أو بقول آخر «***يتناسب الفيض الكهربي على سطح مغلق (closed surface) مع المجموع الجبري للشحنات داخل هذا السطح***» .

ولإثبـات هذه النظرية في الحالة العامة، يفترض وجود شحنة مقدارها q عند النقطة P. كما في شكل (١٥أ ـ ١)، داخل سطح مغلق غير منتظم الشكل . في هذه الحالة تكون شدة المجال مختلفة من نقطة إلى نقطة أخرى على السطح ، وإذا لم يكن السطح في جميع نقطه عموديا على المجال فإنه يمكن حساب عدد خطوط القوى المارة بالسطح بالطريقة التالية :



شكل (١٥-١): أ ـ سطح مغلق غير منتظم الشكل توجد بداخله شحنة قدرها q
ب ـ dS جزء صغـير من السـطح المغلق يمكننـا من حسـاب الفيض الكهـربي العمودي عليه ثم يعمم على السطح المغلق كاملا «قانون جاوس» .

يُفـرض أن سطحا صغيرا dS يمثل جزءا من السطح الكلي المحيط بالنقطة q حيث يبعـد مسـافة r عن q كما في شكل (١٥ب ـ ١) . ولتكن n هي متجه الوحدة العمودي على dS و E شدة المجال وحسب المعادلة (٤٨جـ ـ ١) يكون الفيض العمودي خلال المساحة dS هو:

$$d\Phi = E\,dS\cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (١-٤٩)$$

حيث θ هي الزاوية بين العمود n على السطح dS واتجاه المجال E وبهذا فإن $E\cos\theta$ هي المركبة العمودية للمجال E وحيث إن :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (١-٤٩) يُحصل على :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{r^2}\,dS$$

ولكن من المعروف هندسيا أن الزاوية المجسمة $d\Omega$ (solid angle) المقابلة للسطح dS تعطى بالمعادلة، [وذلك حسب المعادلة (٢-٤٧) الواردة في الملحق ٢].

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\therefore d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{r^2}\frac{r^2\,d\Omega}{\cos\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$$

ويكون الفيض الكلي Φ العمودي خلال السطح المغلق والذي يسمى بسطح جاوس (Gaussian surface) (أي عدد خطوط القوى التي تخترق عموديا السطح المغلق كله) محددا بالمعادلة :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots \quad (١-أ٥٠)$$

حيث إن $\oint d\Omega = 4\pi$ هو قيمة الزاوية المجسمة التي يصنعها السطح المغلق كله حول P، ويوضح ذلك الملحق ٢ البند (٢-٩).

وإذا كان هناك أكثر من شحنة داخل السطح المغلق فإنه بتطبيق المعادلة (٥٠أ - ١) على كل شحنة يمكن الحصول على :

$$\Phi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega_1 + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega_2 + \ldots\ldots$$

$$\therefore \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + \ldots) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n q_n \cdots \quad (\text{٥٠ب - ١})$$

ومن المعادلتين (٤٩-١) و(٥٠ب - ١) نجد أن :

$$\Phi = \oint E\cos\theta\, dS = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n q_n$$

$$\Phi = \oint E\cos\theta\, dS = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\sum_n q_n \quad (\text{٥١أ - ١})$$

وهذه هي معادلة جاوس في صورتها العامة وفي نظامي الوحدات العالمي والجاووسي على التوالي .

وإذا فرض أن E_n هي المركبة العمودية لشدة المجال على السطح dS بحيث يكون اتجاه العمود n إلى الخارج . فإن المعادلتين (٥١أ - ١) تصبحان كالتالي :

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n q_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٥١ب - ١})$$

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = 4\pi\sum_n q_n$$

ويمكن استبدال الـ Σq_n بإحدى التكاملات الخاصة $\int \varrho dV$ أو $\int \sigma dS$ أو $\int \lambda dl$ المختلفة باختلاف نوع توزيع الشحنة الحجمية أو السطحية أو الطولية، كما ورد في البند (١-٥).

ملاحظات

١ - إذا كان السطح ملتويا (convoluted surface) كما في شكل (١٦أ - ١) وأخذ في الاعتبار الأسطح S_3 و S_2 و S_1 المقابلة للزاوية المجسمة dΩ فإنه من الواضح أن توزيع الفيض لهذه الأسطح هو:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

وإشارة ناقص هنا تدل على أن العمودي على السطح S_1 يعاكس العمودي على السطح S_2 .

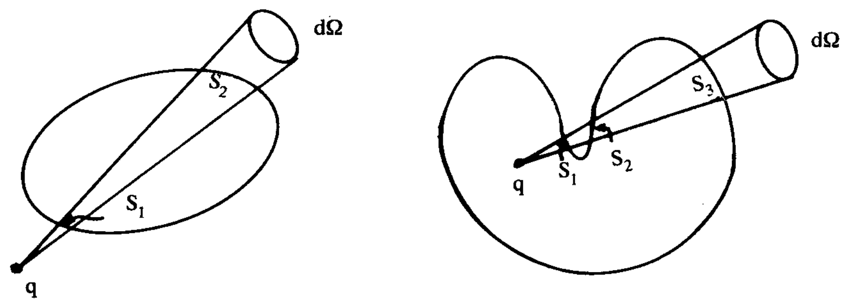
$$\therefore \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وهي المعادلة (٥٠أ ـ ١) نفسها التي تم الحصول عليها بالنسبة للسطح غير الملتوي .

٢ ـ إذا كانت الشحنة q واقعة خارج سطح مغلق كما في شكل (١٦ب ـ ١) فإن توزيع الفيض (the flux) بالنسبة للأسطح المقابلة للزاوية المجسمة $d\Omega$ هو:

$$d\Phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = 0$$

وهذه النتيجة تعني أن الفيض الكلي للسطح المغلق في وجود شحنة خارجة عنه يساوي صفر مهما كان شكله الهندسي .



شكل (١٦-١): ا ـ سطح مقفل متعرج بداخله شحنة قدرها q ثم تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربي من خلال الأسطح S_1 ، S_2 ، S_3.

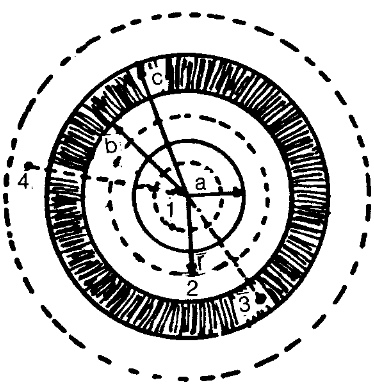
ب ـ سطح آخر مقفل بينما تقع الشحنة خارجه ومدى تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربي من خلال الأسطح S_1 ، S_2.

٣ ـ تتوقف سهولة حساب شدة المجال باستخدام قانون جاوس على حسن اختيار السطح المغلق المناسب لتوزيع الشحنات وشكل المجال. ويراعى في اختيار سطح جاوس ما يأتي:
أ ـ أن يمر السطح المغلق بالنقطة المراد حساب شدة المجال عندها.
ب ـ أن يكون السطح المغلق متلائما مع توزيع الشحنات وأن يكون منتظما على قدر الإمكان.
جـ ـ أن تسقط خطوط القوة عمودية على السطح أو موازية له أو تصنع معه زاوية ثابتة معلومة حتى يسهل حساب الفيض الكهربي.
د ـ أن تكون شدة المجال ثابتة على أجزاء السطح المختلفة.

مثال (٧ ـ ١)

كرة موصلة ومصمتة نصف قطرها a وشحنتها +2Q وتحيط بها كرة أخرى موصلة ومجوفة ومتحدة معها في المركز نصف قطرها الداخلي b والخارجي c وشحنتها −Q. استعمل قانون جاوس لحساب المجال الكهربي عند النقاط 4,3,2,1 كما في الشكل.

الحل



١ ـ بالنسبة للنقطة (1) التي توجد داخل الكرة المصمتة: نتصور سطحا جاووسيًّا نصف قطره r ويمر بالنقطة (1) حيث r<a. لا توجد شحنات في هذه المنطقة كما وضح ذلك في البند السابق أي أن:

$$E_1 = 0$$

وهذا يعني أن الشحنة موزعة على السطح الخارجي للكرة الداخلية.
٢ ـ بالنسبة للنقطة (2): نتصور أيضا سطحا جاووسيًّا نصف قطره r حيث a<r<b

ويلاحظ أن الشحنة الموجودة داخل هذا السطح هي 2Q الخاصة بالكرة الداخلية المصمتة. وتنبعث خطوط القوى من سطح الكرة المشحونة في اتجاه عمودي على سطحها أي تتلاقى عند مركزها وتقطع سطح جاوس في اتجاه عمودي وقيمتها ثابتة عنده وبتطبيق قانون جاوس يحصل على:

$$\int E_2 d\, S \cos\theta = E_2\, S = E_2(4\pi r^2) = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ E_2 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 2K_e \frac{Q}{r^2}$$

٣ - بالنسبة للنقطة (3) : تكون قيمة المجال الكهربي في هذه المنطقة مساوية للصفر. لأنه إذا تصورنا سطحًا جاووسيًا في هذه المنطقة فإن محصلة الشحنات تساوي الصفر نتيجة لتكون شحنة حثية مقدارها 2Q- داخل سطح الكرة المجوفة مساوية للشحنة على سطح الكرة الداخلية المصمتة 2Q+.

٤ - أما بالنسبة للنقطة (4) : نتصور سطحًا جاووسيًا يمر بهذه النقطة حيث $r>c$ فإن هذا السطح سيحيط بنوعين من الشحنات على السطح للكرة المصمتة والسطح الخارجي للكرة المجوفة الخارجية أي أن:

$$q = 2Q + (-Q) = Q$$

$$\Sigma E_4 \times S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K_e \frac{Q}{r^2}$$

(١-٩) تطبيقات على قانون جاوس

Applications of Gauss's Law

لكي تتضح فوائد قانون جاوس سوف يدرس فيما يلي شدة المجال الكهربي في بعض الحالات المعروفة بواسطة المعادلة (١-٥١).

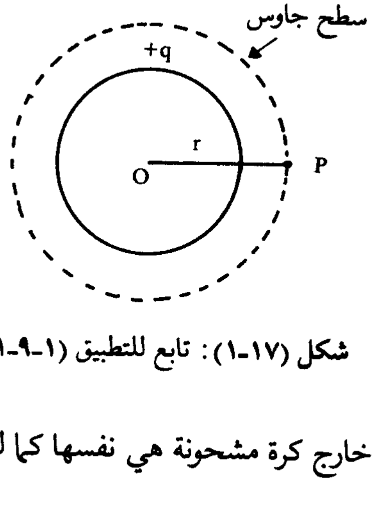
(١-٩-١) شدة المجال حول كرة مشحونة Electrical field around charged sphere

يمثل الشكل (١٧-١) كرة تحمل شحنة موجبة قدرها q. فلحساب شدة المجال عند النقطة P خارج الكرة. يُفرض وجود سطح جاوسي نصف قطره r ويمر بالنقطة P.

وحيث إن خطوط القوى تنبعث من سطح الكرة المشحونة في اتجاه عمودي على سطحها أي تتلاقى عند المركز. كما أنها تقطع سطح جاوس في الاتجاه العمودي.

فبتطبيق المعادلة (١-٥١) يكون:

$$E \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



ولأن: $\cos\theta = 1$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{.......} \quad (١-٥٢)$$

أو:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{i}_r$$

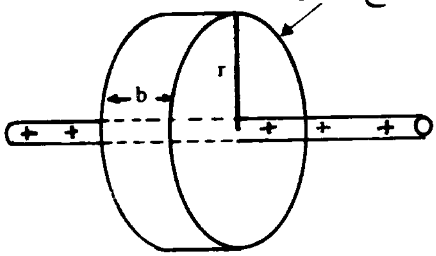
شكل (١٧-١): تابع للتطبيق (١-٩-١)

أي أن قيمة شدة المجال الكهربي عند النقطة P خارج كرة مشحونة هي نفسها كما لو كانت الشحنة عند المركز.

(٢-٩-١) المجال الناشيء عن سلك طويل مشحون Field of a long charged wire

سبق وأن درست هذه المسألة في البند (٦-١) حيث تم حساب شدة المجال E باستخدام المعادلة (٤٦-١) وستعالج المسألة نفسها بواسطة قانون جاوس.

لنتخيل سطحا جاوسيا على هيئة غلاف أسطواني طوله b ونصف قطره r ومتحد المحور مع السلك كما في شكل (١٨-١) . فإذا كانت λ شحنة وحدة الطول فإن الطول b من الإسطوانة المذكورة يحمل شحنة قدرها λb . وحيث إن خطوط القوى عمودية على سطح جاوس وبتطبيق نظرية جاوس [المعادلة (٥١-١)] يمكن الحصول على :



$$E\int_0^{2\pi rb} dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda b$$

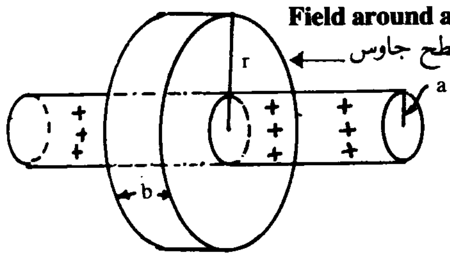
$$\therefore E\,.\,2\pi rb = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda b$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

وهي تمثل المعادلة (٤٢ب - ١) نفسها .

شكل (١٨-١) : تابع للتطبيق (١-٩-٢)

(١-٩-٣) المجال حول أسطوانة Field around a cylinder



شكل (١٩-١) : تابع للتطبيق (١-٩-٣)

يمثل شكل (١٩-١) اسطوانة طولية نصف قطرها a. نفرض أن الكثافة السطحية لشحنتها منتظمة ومقدارها σ ، ومعنى هذا أن الطول b يحمل شحنة قدرها :

$$q = 2\pi ab\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٥٣)$$

ولإيجاد شدة المجال E خارج الأسطوانة وعلى بعد r من محورها نتخيل سطحا جاوسيا على هيئة غلاف أسطواني طوله b ونصف قطره r ومتحد المحور مع الأسطوانة .

وباعتبار أن خطوط القوى عمودية على جدران سطح جاوس الأسطواني ، وبتطبيق نظرية جاوس ، نجد أن :

$$E\int_0^{2\pi rb} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi ab\sigma$$

$$\therefore E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sigma a}{r}$$

فإذا فرض أن λ شحنة وحدة الأطوال، فتكون الشحنة بالنسبة للطول b تساوي

$$q = \lambda b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٥٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلتين (١-٥٣) و(١-٥٤) على:

$$\lambda b = 2\pi ab\sigma$$

$$\therefore \sigma = \frac{\lambda}{2\pi a}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

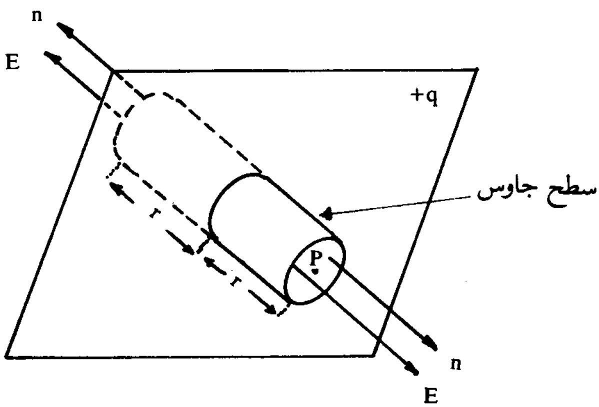
وهذا المجال هو المجال نفسه الناتج عن سلك طويل مشحون. أي أن المجال الكهربي حول أسطوانة مشحونة هو المجال نفسه الذي ينتج إذا تركزت شحنة الأسطوانة على طول محورها بصرف النظر عن نصف قطر الأسطوانة.

(١-٩-٤) شدة المجال خارج موصل مستوٍ لا نهائي الأبعاد مشحون

Field of an infinite plane sheet of charge

لتكن q شحنة موجبة موزعة على سطح مستوٍ غير محدود الأبعاد كما في الشكل (١-٢٠)، ولنفرض أن σ كثافته السطحية. فلإيجاد قيمة المجال عند P التي تقع خارج السطح المستوي وعلى مسافة قدرها r من هذا السطح، نتصور سطحا جاوسيا مارا بالنقطة P وعلى شكل غلاف أسطواني مساحة مقطعه S بحيث تمر إحدى قاعدتيه بالنقطة P بينما تظهر الأخرى في الجانب الآخر من الصفحة.

لما كانت خطوط القوى عمودية على سطح الصفحة كانت هذه الخطوط تخترق قاعدتي الغلاف الأسطواني.



شكل (١-٢٠): تابع للتطبيق (١-٩-٤)

ويتطبيق نظرية جاوس يكون:

$$ES + ES = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٥٥)$$

حيث $q = \sigma S$ يمثل الشحنة الكلية عند سطح جاوس.

ويتضح من هذه المعادلة أن شدة المجال E لا تتوقف على المسافة r ولكنها تتوقف فقط على كثافة الشحنة σ على اللوح. ويسمى مثل هذا المجال بالمجال المنتظم وهو المجال الذي لا يتغير بتغير المسافة ويمثل بخطوط قوى متوازية.

(١-٩-٥) المجال بين صفيحتين متوازيتين مشحونتين ومتقابلتين

Field between oppositly charged parallel plates

يمثل الشكل (١-٢١) صفيحتين متوازيتين لهما الخواص نفسها من حيث الطول والمادة والسمك وأعطيت لكل منها الشحنة نفسها ولكنها سالبة على إحداهما وموجبة على الأخرى. وباعتبار أن المسافة بين الشحنتين على سطحيْ الصفيحتين المتقابلتين مهملة بالنسبة لطولهما تكون شدة المجال في أي نقطة خارج أو داخل الصفيحتين عبارة عن محصلة مجالي الصفيحتين E_1 و E_2.

فعند النقطتين a , c مثلا تكون المركبتان E_1 و E_2 متساويتين في المقدار ومتضادين في الاتجاه أي عند كل نقطة من هذه النقط الخارجية يكون $E = 0$.

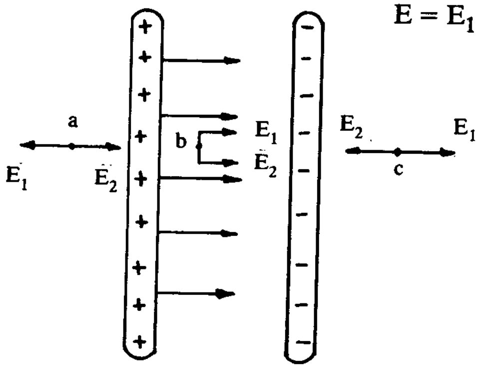
بينما عند نقطة ما بين الصفيحتين مثل b تكون المحصلة:

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{. . . . .} \quad (١\text{-}٥٦)$$

ولكن من المعادلة (١-٥٥) نجد أن:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad . . . \quad (١\text{-}٥٧)$$



شكل (٢١-١): تابع للتطبيق (١-٩-٥)

أي أن شدة المجال الكهربي عند أي نقطة بين الصفيحتين تعتمد على كثافة الشحنة σ فقط.

والمجال الكهربي بين الصفيحتين هو مجال منتظم (uniform) ولذلك يعرف بأنه ذلك المجال الذي تكون فيه خطوط القوى الكهربية متوازية وعلى أبعاد متساوية من بعضها، أي أن شدة المجال ثابتة في أي مكان داخل المجال مقدارا واتجاها.

(١-٩-٦) المجال والشحنة داخل وخارج موصل
Field and charge within and without a conductor

إذا تعرضت الشحنات الحرة داخل موصل ما لمجال كهربي فإنها ستتحرك وإذا استمر المجال الكهربي بطريقة أو بأخرى داخل الموصل حدثت حركة مستمرة للشحنات الحرة (هذه الحركة تسمى تيارا) أما إذا لم يكن هناك مجال بداخل الموصل فلن تتحرك الشحنات الحرة وهذا يعني أنه إذا كانت الشحنات الحرة بداخل الموصل ساكنة، فإن المجال بداخل الموصل يجب أن يساوي صفرا.

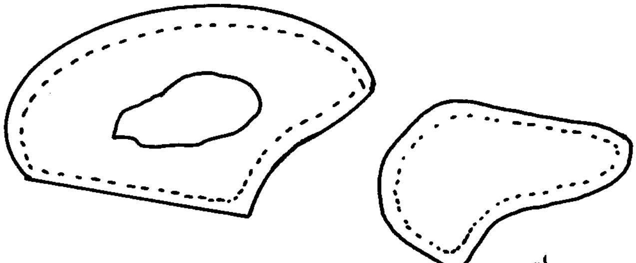
بالاستعـانـة بهذه النتيجـة وبقـانون جاوس يمكن إثبات أنه إذا كان الموصل مشحونا، فإن الشحنة تتركز كلها على سطح الموصل سواء كان مصمتا أو أجوفا.

يمثـل شكـل (٢٢أ ـ ١) موصلا مصمتا غير منتظم الشكل مشحونا بشحنـة قـدرهـا q ولنفرض أن بداخله سطحا جاوسيا (يمثله الخط المنقوط) ملاصق لسطح المـوصـل وطبقـا لقانون جاوس فإن عدد خطوط القوى التي تخترق هذا السطح إلى الخـارج تسـاوي $\frac{1}{\varepsilon_0}q$. فإذا كانت الشحنـات المـوجـودة بداخـل المـوصـل ساكنة، فإن شدة المجال الكهربي عند جميع النقط داخل الموصل تساوي صفر. ويكون عندئذ عدد خطوط القوى التي تنفذ من السطح المنقط تساوي صفرا.

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q = 0$$

$$\therefore q = 0$$

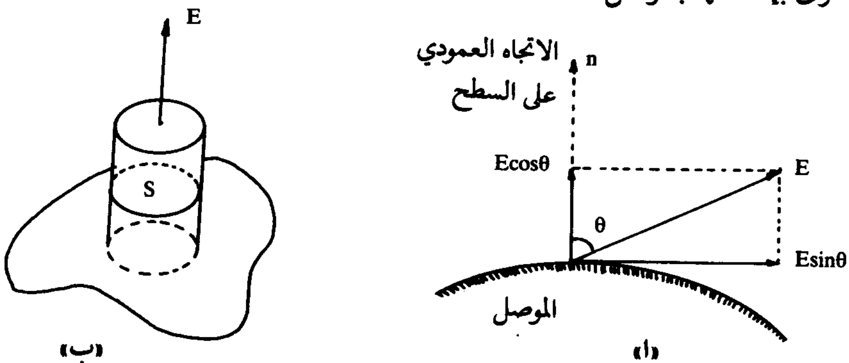
أي أن الشحنة داخل هذا السطح تساوي صفرا. وهذا يعني أن الشحنة توجد خارج السطح المنقوط لأن هذا السطح يقع على مسافة متناهية الصغر من سطح الموصل فإن كل الشحنة الزائدة الموجودة على الموصل توجد على السطح.



شكل (٢٢-١): أ ـ موصل مصمت غير منتظم الشكل.
ب ـ موصل أجوف غير منتظم الشكل.

وإذا لم يكن الموصل مصمتا بل أجوفا [شكل (٢٢ب ـ ١)] فستظل النتيجة السابقة صحيحة. وبتطبيق قانون جاوس على السطح المنقوط في الشكل ـ ينتج أنه لا يمكن أن توجد شحنة ما بداخل السطح، من ثم لا يجود مجال ولا توجد شحنة في التجويف ولـذلـك فإن ظاهرة تلاشي المجال داخل موصل مقفل هي أساس نتعارف على أنه

الاحتواء الكهربي أو التغليف الكهربي أو الحجب الكهربي (electrostatic shielding)، وصمام الراديو والمكشاف الكهربي (electroscope) يمكن عزلها عن تأثير الشحنات الأخرى بإحاطتها بموصل.



شكل (٢٣-١): أ ـ تحليل المجال إلى مركبتيه E sin θ و E cos θ على سطح الموصل.
ب ـ سطح جاوس لحساب قيمة المجال E باستخدام قانون جاوس.

وقد أثبتت التجارب العملية لكل من فرانكلين (M. Franklin) ١٧٥٥م، وبرستلي (J. Priestly) ١٧٦٧م، وفراداي (M. Faraday) وكذلك هنري كافندش (H. Cavendish) ١٧٣١ ـ ١٨١٠م وأخيرا بلمتون ولوتون (Plimpton & Lawton) ١٩٣٦م صحة استقرار الشحنة على السطح الخارجي للموصل وليس داخله.

ويتجه المجال الكهربي عند النقط الخارجية عن الموصل مباشرة في الاتجاه العمودي على سطح الموصل إذا كانت الشحنات التي على الموصل ساكنة.

ولإثبات ذلك يفترض بأن المجال على سطح الموصل يميل بزاوية قدرها θ عن الاتجاه العمودي على السطح كما في شكل (٢٣أ ـ ١)، فبتحليل المجال إلى مركبتين إحداهما أفقية بالنسبة لسطح الموصل. وتحت تأثير المركبة الأفقية E sin θ تتحرك الشحنات على سطح الموصل وهذا يتعارض مع الفرض بأن الشحنات ساكنة ولذلك يجب أن يتحقق الشرط ($E \sin \theta = 0$) وبذلك يكون المجال عموديا على السطح ولحساب قيمة هذا المجال نتبع ما يلي:

إذا شحن موصل غير منتظم الشكل [شكل (٢٣ب - ١)] فإن كثافة الشحنة السطحية تكون غير منتظمة، فإذا كانت σ هي كثافة الشحنة السطحية للمنطقة المظللة من السطح وكانت S هي مساحتها فإنها ستحمل شحنة قدرها σS . وهذه المنطقة المظللة من السطح تقع داخل الأسطوانة التخيلية الممثلة لسطح جاوس والتي تظهر إحدى قاعدتيها مباشرة خارج الموصل بينما تكون القاعدة الأخرى داخله.

وكما شُرح أعلاه فإن شدة المجال داخل السطح تساوي صفرا وبذلك فإن خطوط القوى سوف تخرج من السطح متعامدة ومخترقة القاعدة العليا فقط من الأسطوانة التخيلية لسطح جاوس.

وبتطبيق قانون جاوس:

$$E \,.\, S = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma S$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

وهذه هي المعادلة (٥٧-١) نفسها، مع ملاحظة أن شدة المجال في هذه الحالة سوف تتغير من نقطة إلى أخرى على سطح الموصل مادامت كثافة شحنته السطحية σ غير منتظمة كما أن شدة المجال سوف تقل كلما ابتعدنا عن سطح الموصل لأن خطوط القوى سيتباعد بعضها عن بعض تدريجيا.

(١-١٠) شكل المعادلة التفاضلية لقانون جاوس

Differential - Equation Form of Gauss's Law

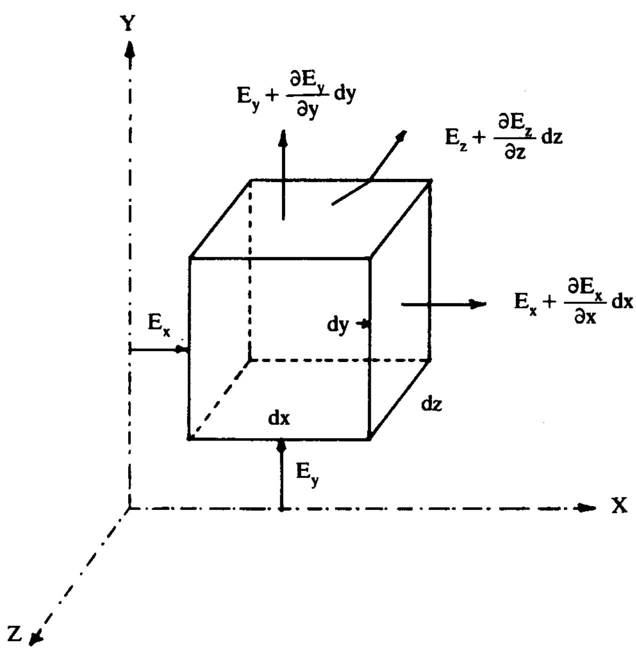
في حالة التوزيع الحجمي للشحنة يمكن تطبيق قانون جاوس على حجم غير متناهي في الصغر في حيز (space) معين. ثم الحصول على العلاقة بين التفاضل الجزئي لمركبات $\vec{E}$ بالنسبة للإحداثيات لنقطة تقع في ذلك الحجم وبين الكثافة الحجمية

لشحنة ϱ عند النقطة نفسها مع ملاحظة أن مركبات $\vec{E}$ يمكن أن تتغير مع المحاور الثلاثة.

لنفـترض وجـود شحنـة موزعـة في منطقة (حيز) بكثافة حجمية قدرها ϱ على الإحداثيات X, Y, Z وليكن لدينا متوازي المستطيلات الذي أطوال جوانبه متناهية في الصغر dx, dy, dz وأوجهه توازي سطوح الإحداثيات فيكون حجمه مساويا dx.dy.dz [شكل (٢٤-١)].

وبتطبيق قانون جاوس يكون:

$$\oint E\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\, dx\,.\,dy\,.\,dz \quad \ldots\ldots \quad (١-٥٨)$$



شكـل (٢٤-١): متـوازي مسـتطيلات لحساب معادلات بواسون ولابلاس

ويمكن تقدير التكامل $\oint E\,dS$ على dx, dy, dz بأخذ المركبات E_x, E_y, E_z للمجال E على السطوح الجانبية الستة للحجم ونحسب بذلك التدفق من خلال هذه السطوح.

تكون كثافة الشحنة للوجهين الموازيين للمستوي YZ ، تشبه هذه الحالة المهبط والمصعد في الصمامات المفرغة، دالة لـ X فقط وبالمثل تتغير شدة المجال الكهربي من نقطة إلى أخرى ولكنها تتوقف على المتغير X فإذا كانت dE_x/dx تمثل مقدار التغير في قيمة E_x بالنسبة إلى X فإن مقدار الزيادة في المجال عند قطع مسافة dx هو:

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx$$

فإذا كانت E_x تمثل شدة المجال على جميع نقط الوجه الأيسر فإن شدة المجال عند الوجه الأيمن:

$$E_x + dE_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx$$

ويكون التدفق من خلال الوجه الأيسر باعتبار مساحة سطحه dy . dz يساوي :

$$\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx\right) dydz$$

ومن خلال الوجه الأيمن يساوي $(-E_x\, dy\, dz)$ والسبب في الإشارة السالبة هو أن E تتجه إلى الداخل بالنسبة لهذا السطح وهكذا يكون مجموع التدفق العمودي على الوجهين يساوي :

$$\left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx\right) - E_x\right] dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dxdydz$$

وإذا أجريت العملية نفسها على الوجوه الأخرى لمتوازي المستطيلات لوجد أن التدفق الكلي على أوجهه يساوي :

$$\oint E \,.\, dS = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (١\text{-}٥٩)$$

وبموازنة هذه المعادلة بالمعادلة (١-٥٨) يُحصل على:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho \quad \cdots\cdots \quad (١\text{-}٦٠)$$

أو

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \,.\, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho \quad \cdots\cdots \quad (١\text{-}٦١)$$

وتساوي هذه المعادلة الصفر إذا كانت المنطقة خالية من الشحنة أي أن ($\varrho = 0$) ومنه فإن:

$$\nabla \,.\, \vec{E} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١\text{-}٦٢)$$

وكذلك إذا كانت الشحنة موزعة بانتظام فإن مركبات المجال E_x و E_y و E_z تكون ثابتة وبذلك فإن تفاضلها يساوي الصفر أيضا.

وتمثل المعادلة التفاضلية (١-٦١) شكلا للمعادلة الأولى من معادلات ماكسويل المشهـورة للإشعـاع الكهـرومغنـاطيسي (electromagnetic radiation) ويمكن من المعادلات (١-٤٨)، (١-٥٨) و(١-٥٩) الحصول على معادلة جديدة لقانون جاوس وهي:

$$\oint_V (\vec{\nabla} \,.\, \vec{E})\, dV = \oint_S \vec{E} \,.\, d\vec{S} = \Phi \cdots \quad (١ - ٦٣أ)$$

أي أن

$$\oint_V (\vec{\nabla} \,.\, \vec{E})\, dV = \oint_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\, dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad . \quad (١ - ٦٣ب)$$

$$\therefore \oint_S (\vec{E} \,.\, d\vec{S}) = \oint_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\, dV \quad \cdots\cdots \quad (١\text{-}٦٤)$$

حيث Q مجموع الشحنة المحصورة في الحجم dV والمحاطة بالسطح S.

ويمكن التعبير عن $\operatorname{div}\vec{E}$ بدلالة الإحداثيات الأخرى الكروية (spherical) أو الأسطوانية (cylindrical). ويلزم لذلك معرفة العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الأخرى كما سيرد في الملحق (٢) البند (٢-٦).

مثال (٨-١)

إذا كانت لدينا شحنة نقطية أو كرة متماثلة مشحونة احسب $\operatorname{div}\vec{E}$ ، عند نقطة تقع على مسافة قدرها r كما في شكل (١٧-١).

الحل

إن قيمة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند نقطة تقع على مسافة قدرها r من شحنة نقطية أو كرة مشحونة متماثلة، [(حسب ما ورد في البند (١-٩) التطبيق رقم ١]، يساوي :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{i}_r$$

ومنه فإن مركبات المجال على المحاور الإحداثية x ، y ، z هي :

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}x, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}y, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}z$$

$$\because r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\therefore E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right)$$

وبالطريقة نفسها مع المركبتين E_y , E_z نحصل على $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ومنه فإن :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)\right\} = 0$$

$$\therefore \operatorname{div}\vec{E} = 0$$

(١-١١) شحنة نقطية في مجال كهربي

A Point Charge in an Electric Field

إذا وضـع جسيم مشحون q في مجال كهربي فإنه سيتأثر بقوة قدرها [المعادلة (١-١١)] (F = qE) تكون سببا في حركته بعجلة (بتسارع) قدرها :

$$a = \frac{F}{m}$$

حيث m كتلة الجسيم وسوف تُدرس مثل هذه الحركة في الحالات التالية :

(١-١١-١) جسيم مشحون ينتقل في اتجاه خطوط قوى المجال الكهربي

A charged particle moves with the direction of the electric field

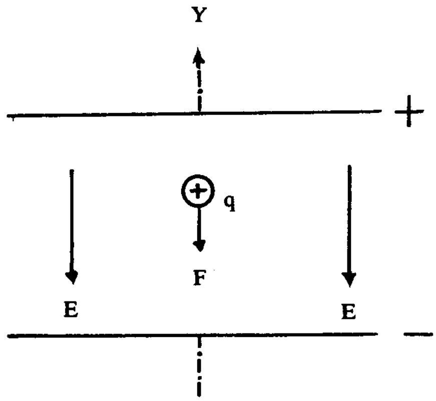
وضـع جسيم مشحـون كتلته m وشحنته q [شكل (١-٢٥)] في مجال كهربي منتظم E يؤثر على الجسيم بقوة قدرها (F = qE) وتكون العجلة (التسارع) المكتسبة للجسيم نتيجة تأثره بالمجال هي :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \quad \text{..........} \quad (١\text{-}٦٥)$$

وحيث إن هذه العجلة تعطى بالمعادلة :

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \therefore dv = a\,dt$$

$$\therefore \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \qquad \therefore v - v_0 = at$$



شكل (٢٥-١): شحنة تتحرك من السكون في مجال كهربي منتظم ناتج عن صفيحتين متوازيتين تحمل إحداهما شحنة موجبة والأخرى شحنة سالبة.

حيث v سرعة الجسيم عند الزمن t ، v_0 سرعته الابتدائية عندما $t = 0$ (في هذه الحالة $v_0 = 0$):

$$\therefore v = at = \frac{qEt}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٦٦)$$

وتكون المسافة المقطوعة y في زمن قدره t تساوي:

$$y = \int_0^t v\,dt = \int_0^t at\,dt = \frac{1}{2}at^2 \quad \ldots \quad (١ - ٦٧أ)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad \ldots\ldots \quad (١ - ٦٧ب)$$

ويُحصل من المعادلتين (٦٦-١) و(٦٧أ - ١) على:

$$v^2 = 2ay = \frac{2qE}{m}y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-٦٨)$$

ويكون الشغل المبذول في نقل الجسيم مسافة y والذي قد تتحول إلى طاقة حركة (kinetic energy) هو:

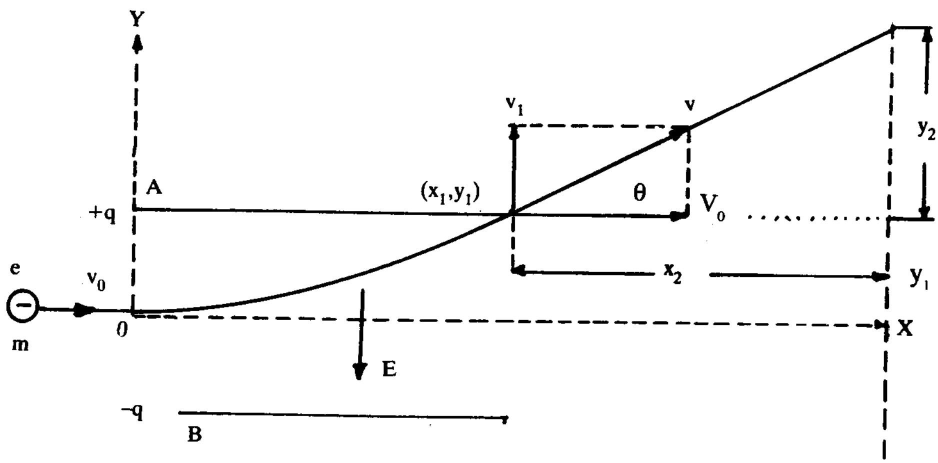
$$KE = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{2qE}{m} y = qEy \quad . . . \quad (١\text{-}٦٩)$$

(١-١١-٢) انحراف حزمة من الإلكترونات Deflection of an electron beam

يوضح شكل (١-٢٦) إلكترون كتلته m وشحنته e قُذف بسرعة أفقية مقدارها v_0 ويدخل عند النقطة 0 في مجال كهربي منتظم E وذلك في اتجاه عمودي على اتجاه المجال. يكتسب الإلكترون عجلة رأسية a نظرا لتأثره بقوة قدرها (F=eE) وذلك في اتجاه رأسي نتيجة وجوده في المجال الرأسي المنتظم حيث:

$$a = \frac{eE}{m}$$

أما في الاتجاه الأفقي فلن يتأثر الإلكترون لأن مركبة المجال الكهربي في الاتجاه الأفقي تساوي صفرا ولذلك سوف تظل السرعة الأفقية v_0 ثابتة ولن تتغير أثناء عبور الإلكترون داخل المجال الكهربي.



شكل (١-٢٦): حزمة من الالكترونات تسقط في مجال منتظم عمودي على اتجاه الحزمة

ونتيجة لحركته الأفقية داخل المجال فإن المسافة الأفقية المقطوعة في الاتجاه x بعد زمن قدره t هي:

$$x = v_0 t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٠)$$

وذلك نظرا لأن v_o في الاتجاه الأفقي منتظمة. وفي أثناء الفترة الزمنية t تكون المسافة الرأسية المقطوعة في الاتجاه العمودي هي:

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

وبالتعويض عن t^2 من المعادلة (١-٧٠) نحصل على:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧١)$$

وهـذه معـادلة قطع مكافىء تعطي الإزاحة الرأسية y بدلالة x أي تحدد مسار الإلكترون أثناء العبور داخل المجال الكهربي.

يتطبيق هذه المعادلة لحظة خروج الإلكترون من المجال أي عند النقطة (x_1,y_1)

$$\therefore y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٢)$$

حيث x_1 طول كل من اللوحين A و B.

وبعد الخروج من بين اللوحين يسير الإلكترون في خط مستقيم على صورة مماس للقـطع المكافىء وذلك لعدم تأثره بالمجال الكهربي حتى يصل إلى الشاشة C بسرعة رأسية قدرها:

$$v_1 = at \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٣)$$

حيث t زمن قطع المسافة بين اللوحين وتساوي x_1/v_0 . وبالتعويض عن t و a في المعادلة (١-٧٣) يمكن الحصول على:

$$v_1 = \frac{eE}{m} \frac{x_1}{v_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٤)$$

ولذلك فإن الإلكترون يخرج من بين اللوحين بسرعة محصلة قدرها:

$$v = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$$

ويصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الأفقي بحيث يكون:

$$\tan\theta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{eE}{mv_0^2}\, x_1 \quad \ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٥)$$

فإذا كانت x_2 هي المسافة التي قطعها الإلكترون حتى وصل إلى الشاشة فإن:

$$y_2 = x_2 \tan\theta$$

وبالتعويض عن $\tan\theta$ من المعادلة (١-٧٥) يمكن الحصول على:

$$y_2 = \frac{eE\, x_1 x_2}{mv_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٦)$$

وتكون الإزاحة الكلية الرأسية للإلكترون عند وصوله إلى الشاشة هي:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2 + \frac{eE\, x_1 x_2}{mv_0^2}$$

$$\therefore y = \frac{eE}{mv_0^2}\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)x_1 \quad \ldots\ldots \quad (١\text{-}٧٧)$$

فإذا كانت الشاشة فلورية (fluorescent) وتعاقبت الإلكترونات في المسار نفسه فسوف يشاهد مكانها على الشاشة على هيئة نقطة مضيئة يتوقف موضعها على شدة هذا المجال الكهربي E وهذا هو مبدأ عمل ظاهرة الكهرباء الاستاتيكية في أنبوب راسم الذبذبات الكاثودي (cathode-ray oscilloscope).

مـثـال (١-٩)

في أنبوب راسم الذبذبات الكاثودي كان المجال الكهربي 1.2×10^4 N/C فأوجد المسافة التي سينحرف بها الإلكترون عقب خروجه من المجال مباشرة. علما بأن

الإلكترون يدخل المجال الجارف بطاقة حركة قدرها 2000 electron Volt (eV) وذلك في اتجاه عمودي على المجال. وأن طول اللوح الجارف 1.5 cm.

الحـــل

لحل هذه المسألة نطبق المعادلة (١-٧٢) وهي :

$$y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2$$

وحيث إن طاقة الحركة تعطى بالمعادلة : $KE = \frac{1}{2} mv_0^2 = 2000\,eV$

$$\therefore y_1 = \frac{eE}{4(\frac{1}{2}mv_0^2)} . x_1^2 = \frac{eE}{4.KE} x_1^2$$

حيث KE طاقة الحركة.

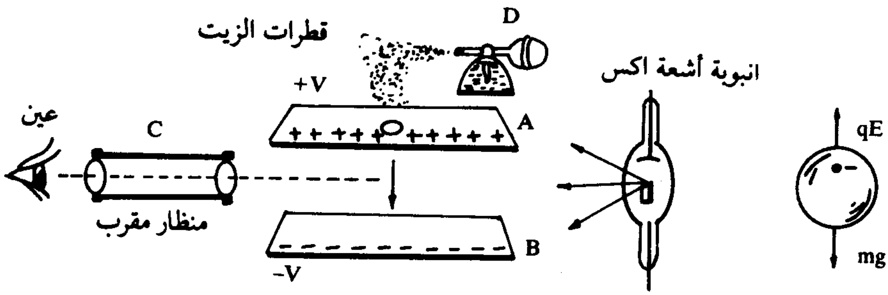
$$\therefore y_1 = \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times (1.2 \times 10^4)}{4\,(2000 \times 1.6 \times 10^{-19})} \times (0.015)^2 = 3.38 \times 10^{-4}\,m$$

(١-١٢) قياس شحنة الإلكترون بطريقة ميليكان (تجربة نقطة الزيت)

Measurement of Charge of Electron with Milikan Oil Drop Experiment

استخدم ميليكان عام ١٩٠٩م مجالا كهربيا منتظما في تعيين شحنة الإلكترون (e) وذلك لأول مرة وهي التجربة المعروفة باسم تجربة قطرة الزيت.

ويتركب جهاز ميليكان [شكل ١-٢٧)] من لوحين معدنيين متوازيين A و B وتوجد في اللوح العلوي منهما فتحة صغيرة تسمح بمرور قطرات دقيقة جدا من الزيت والتي يُحصل عليها باستخدام رذّاذ خاص (atomizer). يُمرر شعاع ضوئي بين اللوحين المتوازيين ويُستخدم منظار مقرب في اتجاه عمودي على اتجاه الشعاع الضوئي بحيث يمكن رؤية قطرات الزيت الدقيقة وهي تتساقط بين اللوحين تحت تأثير الجاذبية الأرضية. وتظهر قطرات الزيت هذه في مجال رؤية المنظار على شكل نقاط صغيرة مضيئة.



شكل (٢٧ـ١): جهاز ميليكان المكون من لوحين متوازيين A و B وتلسكوب C ورذاذ D. وتكتسب قطرات الزيت الإلكترونات عن طريق أشعة أكس

تلتقط قطرات الزيت أثناء تساقطها بعض الإلكترونات الحرة الموجودة في الحيز بين اللوحين A و B ويمكن زيادة عدد هذه الإلكترونات بإمرار أشعة سينية (X-ray) في الوسط المادي بين اللوحين، إذ تؤدي الأشعة إلى تأين الهواء، فتزداد كثافة الإلكترونات الحرة التي يمكن أن تلتقطها قطرة الزيت وبذلك تصبح مشحونة بشحنة سالبة ولتكن $(-q)$.

فإذا سُلط بعد ذلك مجال كهربي منتظم على الحيز الواقع بين اللوحين، بشحن اللوح العلوي بشحنة موجبة واللوح السفلي بشحنة سالبة، فسوف تكون القطرة المشحونة تحت تأثير ثلاثة قوى هي :

١ ـ القوة الكهروستاتيكية وتعمل إلى أعلى ومقدارها :

$$F_1 = qE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ـ٧٨)$$

٢ ـ الوزن ويعمل رأسيا إلى أسفل ومقداره :

$$F_2 = mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho \,.\, g \quad \ldots\ldots \quad (١ـ٧٩)$$

٣ ـ الدفع إلى أعلى، وهو يمثل دفع الهواء للقطرة إلى أعلى أثناء السقوط وطبقا لقاعدة أرشميدس يكون دفع الهواء للقطرة مساويا لوزن حجم من الهواء حجمه يساوي حجم القطرة أي أن :

$$F_3 = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho' . g \quad ..... \quad (١\text{-}٨٠)$$

حيث m كتلة قطرة الزيت، ϱ كثافة الزيت، ϱ' كثافة الهواء، g عجلة الجاذبية و a نصف قطر القطرة.

من المعادلتين (١-٧٩) و(١-٨٠) تكون القوة الفعلية المؤثرة إلى أسفل هي:

$$F_4 = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho g - \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho' g$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 g (\varrho - \varrho') \quad .... \quad (١\text{-}٨١)$$

ويمكن عن طريق التحكم في شدة المجال الكهربي E تغيير القوة المؤثرة على قطرة الزيت المشحونة بحيث يكون اتجاه حركتها إلى أعلى في حالة $F_1 > F_4$ أو إلى أسفل في حالة $F_4 > F_1$ وعندما تتساوى القوتان F_1 , F_4 تظل هذه القطرة بين اللوحين في حالة اتزان بين القوتين أي أن:

$$F_1 = F_4$$

$$\therefore qE = \frac{4}{3}\pi a^3 g (\varrho - \varrho') \quad ...... \quad (١\text{-}٨٢)$$

ولما كان نصف القطر a صغيرا جدا بحيث يصعب قياسه عمليا، استخدم ميليكان لتعيينه طريقة ستوك لقياس اللزوجة والتي تنص على أن:

«الجسم الساقط في وسط لزج يكتسب سرعة نهائية منتظمة (terminal velocity) عندما تكون القوة الفعلية المؤثرة على الجسم إلى أسفل مساوية تماما قوة اللزوجة».

أي أن:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (\varrho - \varrho') = 6\pi\eta v a \quad ...... \quad (١\text{-}٨٣)$$

حيث η معامل لزوجة الوسط و v سرعة الجسم

ولقياس سرعة السقوط الحر v للقطرة في الهواء بعد إزالة المجال الكهربي يستخدم خطان دقيقان متوازيان في مجال رؤية المنظار يحددان مسافة سقوط معلوم وبتسجيل زمن سقوط القطرة خلال هذه المسافة يمكن إيجاد سرعة السقوط الحر.

وبمعرفة كثافة الهواء (ϱ') ومعامل لزوجته (η) وكثافة قطرة الزيت (ϱ) يمكن حساب نصف القطر (a) للقطرة التي تحت التجربة وبالتالي يمكن حساب مقدار الشحنة q باستخدام المعادلة (٢٨-١) بعد معرفة شدة المجال الكهربي (E).

وقد وجد ميليكان أن الشحنة على القطرة q تكون دائما مضاعفا صغيرا لكمية شحنة ثابتة e وهي شحنة الإلكترون.

مثال (١٠ - ١)
تحرك إلكترون في مجال كهربي شدته 10^4 N/C واتجاهه الى أعلى مسافة قدرها 1 cm من حالة السكون. احسب السرعة وطاقة الحركة التي اكتسبها وكذلك الزمن اللازم لقطع هذه المسافة.

الحـــل
بما أن القوة التي تؤثر على الإلكترون ثابتة فالتسارع (العجلة) ثابت ويساوي:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times 10^4}{9.1 \times 10^{-31}} = 1.8 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$$

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times (1.8 \times 10^{15}) \times 10^{-2}} = 6.0 \times 10^6\ \text{m/s}$$

$$KE = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2} \times (9.1 \times 10^{-31}) \times (6.0 \times 10^6)^2 \simeq 16 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

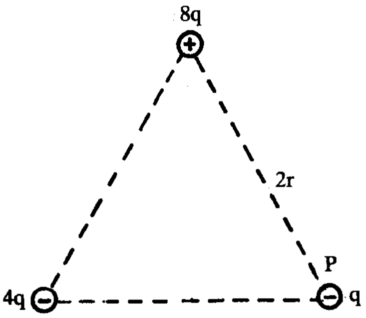
$$t = \frac{v}{a} = \frac{6.0 \times 10^6}{1.8 \times 10^{15}} = 3.3 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

(١-١٣) مسائل

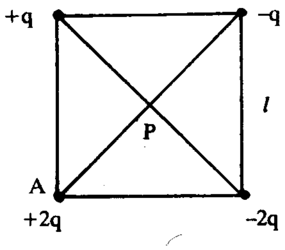
١ - احسب أدنى قيمة لقوة التنافر بين بروتونين في نواة الكربون إذا علمت أن نصف قطر النواة يساوي 3.8×10^{-13} سم.

٢ - شحنتان q_1 ، q_2 تحققان الشرط $(q_1 + q_2 = Q)$ ، حيث Q كمية ثابتة، فإذا وصلت القوة بينهما قيمتها العظمى عند قيمة ثابتة للمسافة بينهما فاحسب q_1 ، q_2.

٣ - يوضح الشكل ثلاث شحنات على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع 2r احسب القوة المؤثرة على الشحنة الواقعة عند النقطة P. وإذا كانت r=2mm و q=0.4μC احسب قيمة هذه القوة.



٤ - في الشكل التالي احسب محصلة القوى عند النقطة A ، علما بأن قيمة الشحنة q تساوي 1.0×10^{-7} كولوم وطول ضلع المربع l يساوي 5.0 سم. ثم احسب E عند النقطة P.



٥ - مكعب طول ضلعه l توجد على كل ركن من أركانه شحنة مقدارها q+ احسب وأثبت أن القوة المحصلة على كل شحنة تساوي:

$$F = \frac{0.261q^2}{\varepsilon_0 l^2}$$

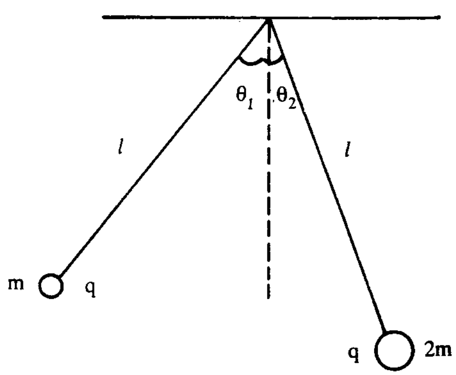
٦ - إذا فرض أن قانون كولوم يصلح لتقدير التأثيرات الكهربية الساكنة بين النويات

على مسافات صغيرة جدا فالمطلوب حساب القوة بين جسيمة α التي رقمها الذري (2) وبين نواة الذهب التي رقمها الذري (79) إذا كانت المسافة بينهما 3×10^{-12} سم مع العلم أن شحنة الإلكترون تساوي 1.6×10^{-19} كولوم .

٧ - كرة صغيرة كتلتها 0.1 جم علقت بخيط رفيع في مجال كهربي ثم شحنت بشحنة تعادل 10^{-9} كولوم فاتزنت في وضع يصنع زاوية قدرها (20°) مع العمودي . احسب قيمة المجال الكهربي عند هذه النقطة إذا علمت أن المجال في تلك النقطة أفقي وأن عجلة الجاذبية الأرضية تساوي 980 سم/ثانية .

٨ - كرتان صغيرتان متشابهتان كتلة كل منهما 10 جم علقتا بخيطين رفيعين من الحرير طول كل منهما 120 سم وشحنتا بشحنتين متساويتين q فانفرج الخيطان بحيث أصبحت الزاوية بين كل خيط والاتجاه الرأسي θ . فإذا فرض أن الزاوية θ صغيرة جدا بحيث يمكن اعتبار أن $\tan\theta = \sin\theta$

فاحسب قيمة q إذا كانت المسافة بينهما 5.0 سم .



٩ - كرتان من نخاع البيلسان Pith كتلة الأولى m والأخرى 2m علقتا بخيطين من الحرير طول كل منهما l. شحنت كل كرة بشحنة قدرها q فانفرجتا .

أثبت أن المسافة بين الكرتين d تساوي $(3q^2 l/8\pi\varepsilon_0 mg)^{1/3}$ مع افتراض أن الزاويتين θ_1 و θ_2 صغيرتان .

١٠ - ثلاث كرات كتلة كل منها 10 جرامات معلقة من نقطة مشتركة بثلاثة خيوط من الحرير طول كل منها متر واحد ثم شحنت الكرات بشحنات متساوية ومتشابهة فتنافرت بحيث أصبحت كل كرة عند ركن من أركان مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 0.1 متر. احسب الشحنة عل كل كرة بالكولوم .

١١ ـ جسيم كتلته m وشحنته Q- يدور حول شحنة q+ موضوعة في مركز المسار. أثبت أن $R^3 = qQt^2 / 16\pi^3\varepsilon_0 m$ حيث R نصف قطر المدار، t زمن الدورة الواحدة بالثانية، ε_0 سماحية الفراغ وذلك بفرض إهمال قوة الجذب العام.

١٢ ـ شحنتان نقطيتان قيمتهما 4.0 ميكروكولوم و 6.0 ميكروكولوم على الترتيب. وضعت إحداهما في مركز الإحداثيات والأخرى عند النقطة (0.5,0 م) في المستوى x,y. أوجد اتجاه وقيمة E عند النقاط (0.9 م , 0.5 م)، (1.0, 0 م) و (0.3 م، 1.0 م).

١٣ ـ احسب شدة المجال الكهربي E عند نقطة في الهواء تقع بين شحنتين q_1 و q_2 قيمتهما -20×10^{-8} كولوم و -5×10^{-8} كولوم والمسافة بينهما 10 سم. ما هي مقدار القوة F على شحنة ثالثة q_3 قيمتها 4×10^{-8} كولوم واقعة في منتصف المسافة بين q_1، q_2. وإذا كانت q_2 موجبة. فاحسب كلا من E و F مرة أخرى.

١٤ ـ احسب:

ا ـ شدة المجال الكهربي E عند نقطة في الهواء تقع على بعد 30 سم من جسيم مشحون بشحنة تساوي 5×10^{-9} كولوم.

ب ـ القوة F المؤثرة على جسيم آخر مشحون بشحنة تساوي 4×10^{-10} كولوم ويقع على بعد 30 سم من الشحنة الأولى.

١٥ ـ يتكون ذو قطبين من بروتون وإلكترون تفصلهما مسافة قدرها 4×10^{-8} سم يقع منتصفه عند نقطة الأصل ومحوره على المحور x ويقع الإلكترون على يسار نقطة الأصل، احسب مبينا بالرسم مركبات شدة المجال E_r , E_θ عند النقاط التالية:

$$\theta = 0 \quad , \quad r = 10^{-6}\,\text{cm}$$

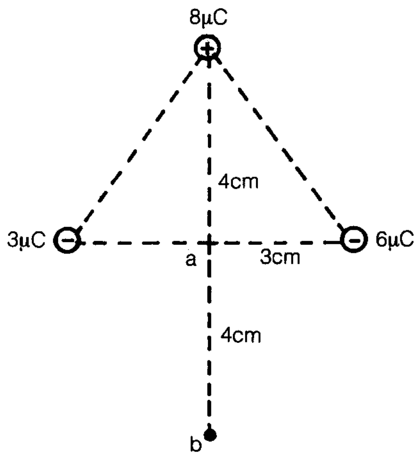
$$\theta = \pi/2 \quad , \quad r = 10^{-6}\,\text{cm}$$

$$\theta = \pi/6 \quad , \quad r = 10^{-6}\,\text{cm}$$

حيث r هو بعد النقطة عن منتصف ذي القطبين، θ هي الزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين النقطة والمنتصف.

١٦ ـ ثلاث شحنات كهربية $-1\mu C, 2\mu C, 1\mu C$ موضوعة عند النقط (0,0,1), (0,2,0), (1,0,0) على الترتيب. احسب شدة المجال الكهربي عند النقطة (1,1,1) ثم احسب القوة المؤثرة على شحنة رابعة وضعت عند هذه النقطة وقيمتها $-2\mu C$.

١٧ ـ يوضح الشكل ثلاث شحنات على رؤوس مثلث معلومة أبعاده احسب:



ا ـ المجال الكهربي عند النقطتين a وb.

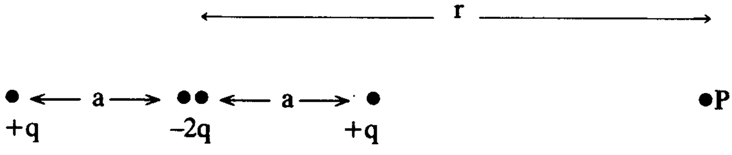
ب ـ محصلة القوة المؤثرة على شحنة مقدارها $0.1\mu C$ إذا وضعت عند النقطة a.

جـ ـ محصلة القوة المؤثرة على شحنة مقدارها $-0.1\mu C$ إذا وضعت عند النقطة b.

١٨ ـ رباعي الأقطاب الكهربي (electric quadrupole) ، يتألف من اثنين من ثنائي الأقطاب «ذي القطبين»، كما في الشكل، أثبت أن المجال الواقع على محور الرباعي عند النقطة p التي تبعد عن منتصفه بمقدار r ، حيث a ⟩⟩ r ، يساوي :

$$E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

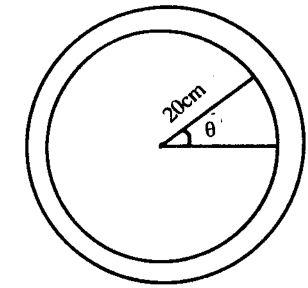
حيث $Q = 2qa^2$ ويسمى بعزم رباعي الأقطاب .



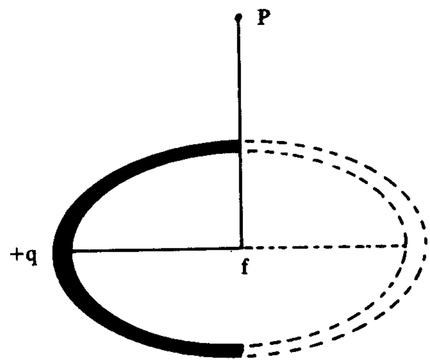
١٩ ـ حلقة دائرية نصف قطرها 5 سم ومشحونة بشحنة موجبة قدرها 100 استات كولوم . احسب:

أ ـ شدة المجال على محور الحلقة عند الأبعاد 0 ,2 ,3 ,4 ,6 ,10 سم من المركز مستخدما الوحدات العلمية الكهروستاتيكية وحدد اتجاه المجال، ثم ارسم رسما بيانيا يوضح العلاقة بين شدة المجال والمسافة.

ب ـ من المعادلة المستخدمة. أوجد تعبيرا للمسافة التي تكون عندها شدة المجال لها نهاية عظمى. ثم وازن التعبير المذكور بالنتيجة التي تحصل عليها من الرسم البياني.



٢٠ ـ حلقة دائرية رقيقة نصف قطرها 20 سم وكثافة الشحنة الخطية تعطى بالمعادلة $\lambda = 10^{-6}\cos\theta$ كولوم / سم، كما في الشكل، احسب الشحنة الكلية على الحلقة.



٢١ ـ موصل على شكل نصف حلقة كما في الرسم «الجزء الأسود» شحن بشحنة موجبة q+ . احسب المجال الكهربي عند النقطة P والنقطة f وإذا وضعت شحنة سالبة q - عند تلك النقطتين فما مقدار القوة على كل منهما.

٢٢ ـ احسب المجال الكهربي عند نقطة تقع على محور قرص دائري مشحون نصف قطره 20 سم ويحمل شحنة كهربية مقدارها 3×10^{-9} كولوم وتبعد مسافة قدرها 80 سم عن مركز القرص.

٢٣ ـ احسب المجال الكهربي عند أي نقطة تقع داخل كرة نصف قطرها (r_o) إذا كان $\varrho(r) = b\,r^2$ حيث b مقدار ثابت.

٢٤ ـ احسب كثافة الشحنة عند نقطة إحداثياتها (x, y, z) للمجالات الكهربية المحددة

بالمعادلات التالية:

ا ـ $E = b_1 (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

ب ـ $E = b_2 (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)$

حيث b_1 , b_2 مقادير ثابتة.

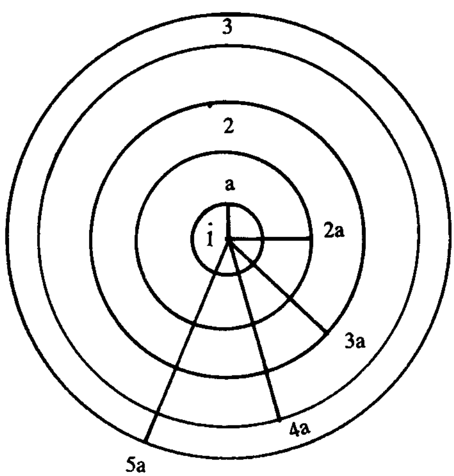
٢٥ ـ استخدم قانون جاوس لإيجاد قيمة المجال الكهربي الناتج عن كرة مشحونة بشحنة كثافتها الحجمية ϱ ونصف قطرها R في نقطة تبعد مسافة r عن مركزها. ابحث في الحالتين $r < R$ و $r > R$.

٢٦ ـ يوضح الشكل: ثلاث كرات موصلات، الداخلية منها مصمتة ولها شحنة مقدارها Q:

ا ـ أوجد توزيع الشحنات على الكرتين الخارجيتين وكثافة الشحنة على سطحيهما.

ب ـ استخدم قانون جاوس للحصول على المجال الكهربي في مناطق الفراغ بين الكرات.

جـ ـ ارسم العلاقة بين E و r من $r = 0$ إلى $r = \infty$.



٢٧ ـ قرص دائري نصف قطره 10 سم مشحون بشحنة قدرها 10^{-6} كولوم فإذا كانت الكثافة السطحية تتناسب تناسبا طرديا مع r من مركز القرص وكانت وحدات r بالسنتيمتر.

احسب قيمة ثابت التناسب وما هي قيمة الشحنة لدائرة نصف قطرها 5 سم.

٢٨ - يتحرك إلكترون بسرعة قدرها 5.0×10^8 سم/ثانية قذف باتجاه موازٍ لمجال كهربي شدته 1.0×10^3 نيوتن / كولوم فأعاق حركته.

ما هي أقصى مسافة يصل إليها الإلكترون قبل وقوفه وما هو الزمن اللازم لذلك.

٢٩ - اسطوانتان متحدتا المحور، نصف قطر الخارجية b وشحنتها موجبة والداخلية a وشحنتها سالبة، وكانت λ هي الشحنة لوحدة الأطوال لكل من الإسطوانتين. فإذا دارت رقيقة شحنتها موجبة q وكتلتها m في الحيز الموجود بين الإسطوانتين وذلك في مسار دائري نصف قطره r.

أثبت أن سرعة الرقيقة تساوي $v = (K\dfrac{2\lambda q}{m})^{1/2}$ حيث K ثابت الوحدات.

٣٠ - دخل إلكترون مجالا كهربيا بسرعة أفقية قدرها 10^9 سم/ ثانية بحيث كان اتجاهه عموديا على اتجاه المجال الناشىء بين لوحين المسافة بينهما 10 سم وفرق الجهد بينهما 100 فولت.

فإذا كان طول كل لوح 2 سم، فاحسب الزاوية التي ينحرف بها الإلكترون عن الأفقي عقب خروجه من بين اللوحين مباشرة.

٣١ - لوحان متوازيان ومشحونان بشحنتين متضادتين بينهما مجال كهربي منتظم فإذا تحرر إلكترون من اللوح المشحون بالسالب وبدأ حركته من السكون إلى أن اصطدم باللوح الآخر الذي يبعد مسافة قدرها 2 سم في زمن قدره 1.5×10^{-8} ثانية.

احسب: أ - شدة المجال الكهربي.

ب - سرعة الإلكترون عند اصطدامه باللوح الثاني.

٣٢ - تسقط قطرة زيت، في تجربة ميليكان قدرها 1 سم في زمن قدره 27.4 ثانية في حالة عدم وجود مجال كهربي. وعند تسليط مجال قيمته 2.37×10^4 نيوتن/كولوم اتزنت القطرة وأصبحت معلقة وساكنة.

احسب عدد الإلكترونات الموجودة على قطرة الزيت. علما بأن كثافة الزيت تساوي 8.24 كيلوجرام/م٣ وكثافة الهواء 1.29 كيلوجرام/م٣ ومعامل اللزوجة للهواء 180×10^{-7} نيوتن . وثانية/م٢.

٢

الجهد الكهربي

Electrical Potential

● طاقة الوضع الكهربية الاستاتيكية ● الجهد الكهربي ● العلاقة بين المجال والجهد الكهربي ● الجهد الناتج عن موصل كروي مشحون ● تقاسم الشحنات بين الموصلات ● السطوح متساوية الجهد ● معادلات بواسون ولابلاس ● طاقة الوضع والمجال الكهربي ● ذو قطبين في مجال كهربي خارجي منتظم ● مسائل.

(٢-١) طاقة الوضع الكهربية الاستاتيكية

Electrostatic Potential Energy

من المعروف أنه إذا رفع جسم عن سطح الأرض فإن شغلا سيبذل لرفعه حتى يمكن التغلب على قوة جذب الأرض ويكون الجسم في هذه الحالة قد اكتسب طاقة تعرف بطاقة الوضع (potential energy) التي تتحول إلى طاقة حركة إذا ترك الجسم يسقط حرا نحو الأرض عائدا إلى وضعه الأصلي.

وقياسا على ذلك فإن لكل جسم مشحون موجود في مجال كهربي طاقة كهربية تنتج عن الشغل المبذول واللازم لتحريك الجسم «كفصل شحنتين متجاذبتين وكتقريب شحنتين متنافرتين» في عكس اتجاه القوة الكهربية وهذا الشغل يتحول إلى طاقة حركة لو ترك الجسم المشحون حرا.

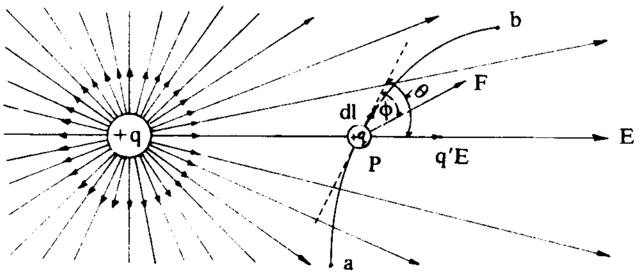
إذا وضعت شحنة موجبة قدرها $+q'$ في مجال كهربي شدته E ، كما في شكل (١-٢)، فإنها سوف تتحرك في اتجاه المجال تحت تأثير قوة كهربية قدرها $q'E$ ولكن إذا أثر على الشحنة بقوة أخرى خارجية F «غير كهربية» فإن الشحنة q' ستتحرك في اتجاه محصلة القوتين F و $q'E$. وحيث إن $q'E$ تختلف من نقطة لأخرى فإن الشحنة ستتخذ المنحنى ab مسارا لها (مثلا). فإذا كانت الزاوية بين $q'E$ والمماس لهذا المنحنى هي θ والزاوية بين F والمماس لها هي ϕ فإنه بتحليل هاتين القوتين في اتجاه عمودي وآخر مواز للمماس، كما هو موضح بشكل (١-٢)، يمكن الحصول على:

أ ـ المحصلة العمودية للقوى (resultant normal forces):

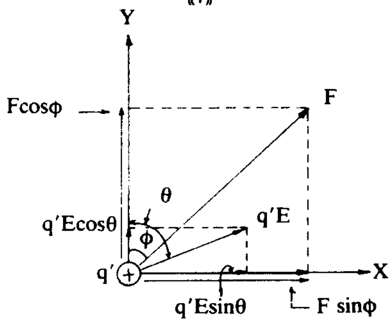
$$\Sigma F_n = F \sin\phi + q'E \sin\theta \qquad \ldots\ldots \quad (١-٢)$$

ب ـ ومحصلة القوى المماسية (resultant tangential forces)

$$\Sigma F_t = F \cos\phi + q'E \cos\theta \qquad \ldots\ldots \quad (٢-٢)$$



«أ»



«ب»

شكل (١-٢): أ ـ q' وقعت في مجال شدته E ناتج عن الشحنة $+q$ فتأثرت بقوة قدرها $q'E$ ثم خضعت الشحنة q' لقوة أخرى خارجية F فتحركت الشحنة في اتجاه محصلة القوتين فاتخذت المسار ab.

ب ـ تحليل القوتين $q'E$ ، F إلى مركباتهما.

فالقوى العمودية على المسار عبارة عن قوى جذب مركزي تغير من اتجاه سرعة الشحنة ولكن لا تغير من مقدارها. بينما القوى التماسية تزيد في عجلة الشحنة على طول مسارها ويتحدد مقدارها من قانون نيوتن الثاني (Newton's second law) وبذلك تكون محصلة القوى التماسية المعطاة بالمعادلة (١-٢) بالصيغة التالية:

$$F \cos \phi + q'E \cos \theta = ma \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣)$$

حيث m كتلة الشحنة، أما العجلة a فتعطى بالعلاقة التالية:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dv}{dl} = v \frac{dv}{dl}$$

حيث v سرعة الشحنة و dl عنصر طولي على المسار.

وبالتعويض في المعادلة (٢-٣) يمكن الحصول على:

$$F\cos\phi + q'E\cos\theta = mv \frac{dv}{dl}$$

أو

$$F \cos \phi \, dl + q'E \cos \theta \, dl = mvdv$$

أو

$$F \cos \phi \, dl = mvdv - q'E \cos \theta \, dl \quad (٢\text{-}٤)$$

وتوضح أهمية الحدود الثلاثة في هذه المعادلة المناقشة التالية:

١ - يمثل الحد الموجود في الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة ($F \cos \phi \, dl$) الشغل الذي تبذله القوة الخارجية F لنقل الشحنة مسافة dl فإذا رمز لهذا الشغل بالرمز dW فإن:

$$dW = F \cos \phi \, dl \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥)$$

٢ - يمكن كتابة الحد الثاني (mvdv) على الصورة $d(\frac{1}{2} m v^2)$ وهو يمثل الزيادة في طاقة الحركة للشحنة d(KE).

$$d(KE) = mvdv = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) \quad \cdots \quad (٢\text{-}٦)$$

٣ ـ أما الحد الثالث ($-q'E\cos\theta\, dl$) فهو الشغل المبذول ضد القوة $q'E$ التي تؤثر على الشحنة (الإشارة السالبة تعني أن الشغل يبذل ضد القوة الكهربية)، حيث إن الشغل الذي تبذله القوة $q'E$ يساوي ($+q'E\cos\theta\, dl$) أي أن هذا الحد يمثل زيادة طاقة الوضع للشحنة $d(PE)$.

$$d(PE) = -q'E\cos\theta\, dl \quad \cdots\cdots \quad (٢\text{-}٧)$$

لذلك فالمعادلة (٢-٤) تمثل العلاقة بين الشغل والطاقة لجسم مشحون يتحرك في مجال كهربي والتي يمكن كتابتها كالتالي:

$$dW = d(KE) + d(PE)$$

وبمكاملة المعادلة (٢-٤) على طول المسار من النقطة a إلى النقطة b نحصل على:

$$\int_a^b F\cos\phi\, dl = \int_{v_a}^{v} mvdv - \int_a^b q'\, E\cos\theta\, dl \quad \cdots\cdots \quad (٢\text{-}٨)$$

ومن الواضح أن التكامل الأول يساوي الشغل الكلي W الذي تبذله القوة الخارجية F على الشحنة ويعرف بالتكامل الخطي (line integral) ومعناه أنه عند كل عنصر طولي dl على المسار يوجد حاصل ضرب $F\cos\theta$ و dl ثم تجمع حواصل الضرب لكل عناصر المسار بين النقطتين a و b. وتختلف معنى النهايتين a و b عن حدود التكامل المعتادة، إذ أنهما يدلان هنا فقط على نقطتين على المسار. ومن الواضح أن هذا التكامل لا يمكن حساب قيمته إلا إذا علم كيف تتغير القوة الخارجية مقدارا واتجاها.

$$\therefore W = \int_a^b F\cos\phi\, dl \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢\text{-}٩)$$

أما التكامل الأول من اليمين في المعادلة (٢-٨) فمن الممكن حسابه بصرف النظر عن كيفية تغير القوى، وحدا هذا التكامل v_a و v_b هما سرعتا الشحنة عند النقطتين a و b أي أن:

$$\int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = KE_b - KE_a \quad . . . \quad (٢-١٠)$$

وهذا التكامل يمثل الزيادة الكلية في طاقة حركة الشحنة .

والتكامل الأخير تكامل خطي يمثل الشغل المبذول ضد القوة التي يؤثر بها المجال أو الزيادة الكلية في طاقة الوضع $PE_b - PE_a$

$$\therefore -\int_a^b q' E \cos\theta \, dl = PE_b - PE_a \quad . . . \quad (٢-١١)$$

وتمثل هذه النتيجة الفرق بين طاقتي الوضع للشحنة q' عند النقطتين a و b في مجال كهربي استاتيكي . ولحساب طاقتيّ الوضع عند نقطة واحدة فقط فإنه يجب الاتفاق على نقطة الإسناد التي تكون عندها طاقة الوضع مساوية للصفر.

هذه النقطة غالبا تختار في ما لا نهاية ولذلك فإن طاقة وضع الشحنة تساوي صفرا إذا ما ابتعدت كثيرا عن الشحنات التي تنتج المجال . وإذا ما انتقلت الشحنة من ما لا نهاية إلى نقطة ما فإن الشغل المبذول ضد القوى المؤثرة عليها بواسطة المجال يساوي طاقة وضعها عند هذه النقطة ، فإذا فرض أن النقطة q' تقع في ما لا نهاية وفرض أن $PE_a = 0$ فإن المعادلة (٢-١١) تصبح :

$$PE = -\int_{\infty}^{b} q' E \cos\theta \, dl \quad . . . . . . \quad (٢-١٢)$$

ولما كانت q' أي نقطة في المجال ، كان من الأنسب عدم كتابة حدود التكامل

$$PE = -\int q' E \cos\theta \, dl \quad . . . . . \quad (٢-١٣أ)$$

بحيث يفهم أن التكامل تكامل خطي على طول خط يصل من ما لا نهاية إلى النقطة تحت المناقشة .

وهكذا يمكننا تعريف طاقة الوضع عند نقطة ما في مجال كهربي بأنها الشغل الذي تبذله الشحنة q' ضد القوة الناتجة عندما تنتقل من ما لانهاية إلى هذه النقطة. ويرمز عادة لطاقة الوضع بالرمز U.

$$\therefore U = -\int q' E \cos\theta \, dl = -q' \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{١٣ب - ٢})$$

(٢-٢) الجـــهـــد
Potential

عرف في البنـد السـابق أنـه إذا وضعت شحنة q' في مجال كهربي ناتج عن شحـنـة أخـــرى q ثم أزيحت الشحنة q' من a إلى b كما في شكل (٢-٢) في المجال نفسه فإن شغـلاً قدره $(-q'E\cos\theta\, dl)$ قد بذل ضد القـوة $q'E$ وهو يمثل زيادة طاقة الوضع للشحنة $(PE_b - PE_a)$ وذلك حسب المعادلة (٢-١١).

وتعرف النسبة بين الزيادة في طاقة الوضع والشحنة q' التي تحركت من a إلى b بفرق الجهد (V_{ba}) potential difference بين هاتين النقطتين أي أن:

$$V_{ba} = V_b - V_a = \frac{PE_b - PE_a}{q'} = \frac{1}{q'}(U_b - U_a) \quad (\text{٢-١٤})$$

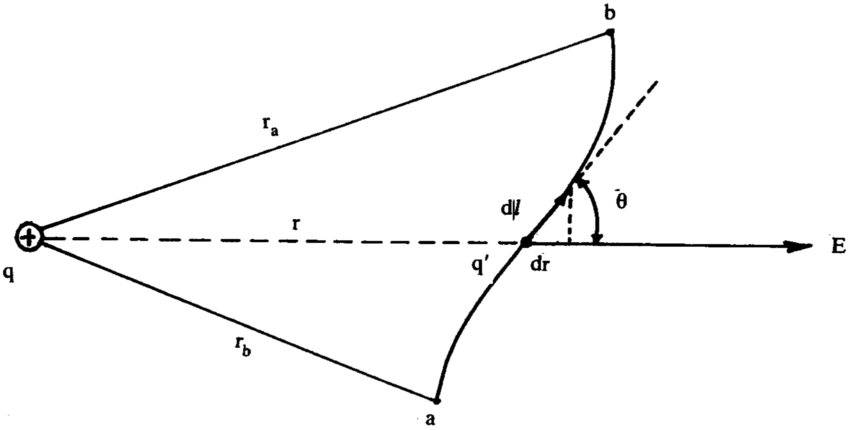
ولذلك يعرف فرق الجهد بين نقطتين بأنه الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة بين هاتين النقطتين ضد اتجاه المجال الكهربي.

وحسب المعادلة (٢-١٣) تصبح المعادلة (٢-١٤) كالتالي:

$$V_{ba} = -\int_a^b E\cos\theta\, dl = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \;\ldots \quad (\text{٢-١٥})$$

وإذا كانت r تمثل المسافة بين الشحنة q ونقطة ما على المسار بين النقطتين a و b ، فإن شدة المجال عند هذه النقطة تساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



شكل (٢-٢): ab مسار الشحنة q′ في المجال الكهربي E الناتج عن الشحنة q

فإذا كان قَطْع الشحنة q′ مسافة قدرها dl يؤدي إلى زيادة المسافة r بمقدار dr فإنه يسهل من الشكل (٢-٢) إيجاد:

$$dr = dl \cos\theta$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-١٥) نجد أن:

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b}$$

$$\therefore V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-١٦)$$

حيث r_a ، r_b هما بعدا النقطتين a و b عن q.

إذا كانت النقطة a تقع في ما لا نهاية فإن الجهد عند b يعطى بالمعادلة:

$$V_b = \frac{U_b}{q'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-١٧)$$

ولما كانت الطاقة كمية غير متجهة فإن الجهد أيضا كمية غير متجهة، وله مقدار وليس له اتجاه وهو يختلف في هذا المعيار عن شدة المجال إذ أن الكمية الأخيرة متجهة. وبالتعويض عن طاقة الوضع من المعادلة (٢-١٣) في المعادلة (٢-١٧) نُحصل على:

$$\therefore V = -\int E \cos\theta \, dl = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \ldots \quad (٢\text{-}١٨)$$

وقد اصطلح على تعريف الجهد الكهربي عند نقطة ما في مجال معين كما يلي:
«الجهد الكهربي عند نقطة ما هو الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة من ما لا نهاية إلى هذه النقطة ضد اتجاه المجال».

وبالتعويض عن $r_a = \infty$ في المعادلة (٢-١٦) يمكن الحصول على:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad \text{أو} \quad V_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b} \quad \ldots \quad (٢\text{-}١٩)$$

ويعرف هذا الجهد بالجهد المطلق (absolute potential).

وإذا كان المجال عند نقطة معينة ناتج عن عدة شحنات $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ وكانت المسافة بين هذه الشحنات وهذه النقطة على التتابع هي $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ فإن الجهد عند هذه النقطة يعطى بالمعادلة:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \ldots + \frac{q_n}{r_n}\right)$$

أو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٢٠)$$

وإذا توزعت الشحنات على خط مستقيم أو سطح أو بداخل حجم فإن المعادلة (٢-٢٠) تصبح:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٢١أ)$$

وإذا كانت λ و σ و ρ هي كثافة الشحنة الطولية والسطحية والحجمية على التوالي فإنه حسب المعادلات (٢١أ - ٢) و(١-٣٦) و(١-٣٧) و(١-٣٨) يكون لدينا:

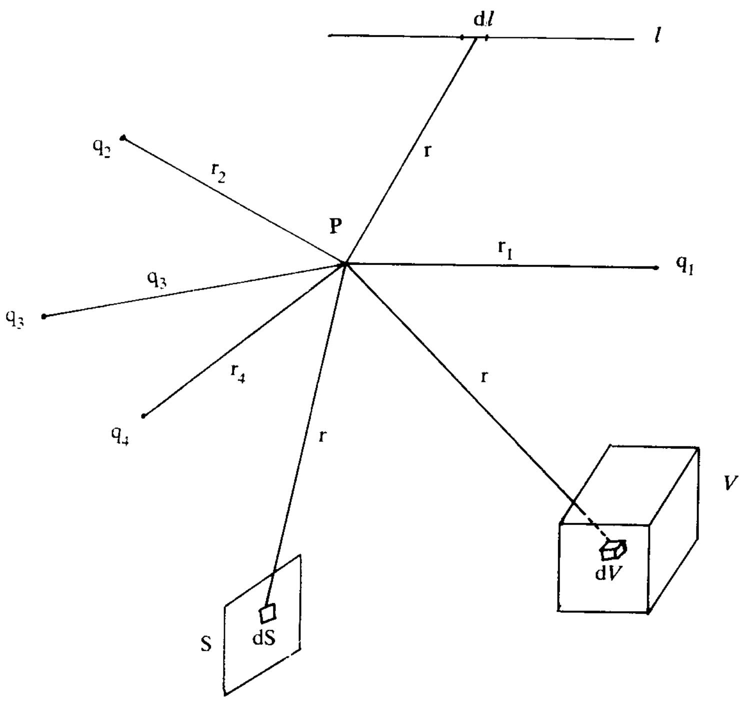
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda dl}{r} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٢١ب)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r} \quad \cdots\cdots \quad (٢١جـ - ٢)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho dV}{r} \quad \cdots\cdots \quad (٢١د - ٢)$$

ولحساب الجهد الكهربي عند نقطة ما والناتج عن نقطة مشحونة وخط مستقيم مشحون وسطح مشحون وحجم مشحون، الشكل (٣-٢)، تجمع الجهود جمعا جبريا لكل مصادر الجهد، وحسب المعادلات (٢٠-٢) و(٢١-٢) يكون:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + \int_l \frac{\lambda dl}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r} + \int_V \frac{\varrho dV}{r}\right\} \quad \cdots \quad (٢٢-٢)$$



شكل (٣-٢): حساب الجهد عند النقطة P الناتج عن الشحنات النقطية وتوزيع الشحنات الطولية والسطحية والحجمية.

ويتضح من المعادلات (٢-١٦)، (٢-٢٠) و(٢-٢١) أن الجهد عند نقطة في مجال كهربي استاتيكي يتوقف على مقدار الشحنات التي تُنتج المجال وعلى أبعادها عن النقطة المختارة، ولكنه لا يتوقف على المسار الذي يتبع من ما لانهاية إلى النقطة أثناء حساب التكامل الخطي لشدة المجال، على ذلك فالمجال الكهربي الاستاتيكي مجال محفوظ.

كما تدل المعادلة (٢-١٥) على التكامل الخطي لشدة المجال لمسار مغلق يساوي صفرا لأن طرفيه منطبق بعضهما على بعض ويتساوى جهد كل منهما وعلى ذلك يساوي الفرق في الجهد بينهما الصفر.

أي أن:

$$V_{ba} = -\oint_a^b E \cos\theta \, dl = 0$$

أو

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٢٣)$$

حيث تمثل C أي مسار مغلق.

وتتوقف وحدة الجهد على نظام الوحدات المستخدم. ففي نظام الـ (S.I.) تكون وحدة الجهد هي الفولت Volt حيث:

$$1\,V = 1\,J / 1\,C$$

أما في النظام الجاووسي فإن وحدة الجهد هي الاستات فولت stat Volt حيث:

$$1\text{ stat }V = 1\text{ erg} / 1\text{ stat }C$$

والعلاقة بين الفولت (Volt) والاستات فولت (stat Volt) هي:

$$\frac{V}{\text{stat }V} = \frac{J/C}{\text{erg}/\text{stat }C}$$

$$= \frac{J}{\text{erg}} \times \frac{\text{stat }C}{C}$$

$$= 10^7 \times (3 \times 10^9)^{-1} = \frac{1}{300}$$

$$\therefore 1 \text{ stat V} = 300 \text{ V}$$

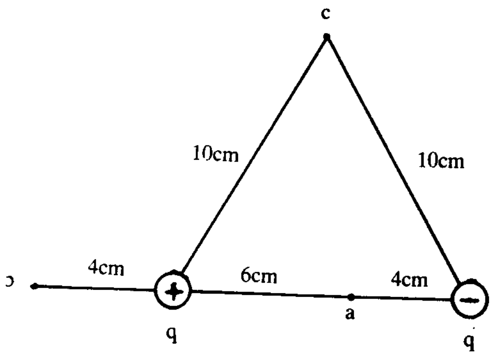
مثال (٢-١):

نقطتان شحنتاهما $+12 \times 10^{-9}$ C و -12×10^{-9} C تفصل بينهما مسافة قدرها 10cm احسب:

ا ـ الجهد عند النقاط a,b,c كما في الشكل.

ب ـ طاقة الوضع لشحنة موجبة قدرها $+4 \times 10^{-9}$ C إذا كانت موضوعة عند النقاط a,b,c.

جـ ـ فرق الجهد بين النقطتين (b,a) وكذلك بين (b و a) و (b و c) وما مقدار الشغل اللازم لنقل نقطة شحنتها 4×10^{-9} C وبدون زيادة طاقة حركتها، من a إلى b ومن c إلى a.



الحل

ا ـ حسب العلاقة (٢-٢٠) فإن الجهد الناتج عند النقطة (a) يعطى بالمعادلة:

$$V_a = 9 \times 10^9 \left[\frac{12 \times 10^{-9}}{0.06} - \frac{12 \times 10^{-9}}{0.04} \right] \simeq -900\text{V}$$

وبالطريقة نفسها يكون الجهد عند النقطتين b ، c:

$$V_b \simeq 1930 \text{ V} \quad \text{and} \quad V_c = 0$$

ب ـ طاقة الوضع لشحنة موضوعة في نقطة (a) تساوي:

$$PE = q\,V_a = (4 \times 10^{-9}) \times (-900) = -36 \times 10^{-7} \text{ J} = -36 \text{ ergs}$$

وفي نقطة (b) تساوي :

$$PE = q\,V_b = 4 \times 10^{-9} \times 1930 = 77 \times 10^{-7}\ \text{J}$$

وفي نقطة (c) تساوي :

$$PE = q\,V_c = 4 \times 10^{-9} = 0$$

جـ - نرمز لفرق الجهد بين النقطتين a و b بالرمز V_{ab} وللشغل اللازم لنقل الشحنة q من a إلى b بالرمز W_{ab} ومنه فإن :

$$V_{ab} = V_a - V_b = -900 - 1930 = -2830\ \text{V}$$

$$V_{ba} = V_b - V_a = 1930 - (-900) = 2830\ \text{V}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 1930 - 0 = 1930\ \text{V}$$

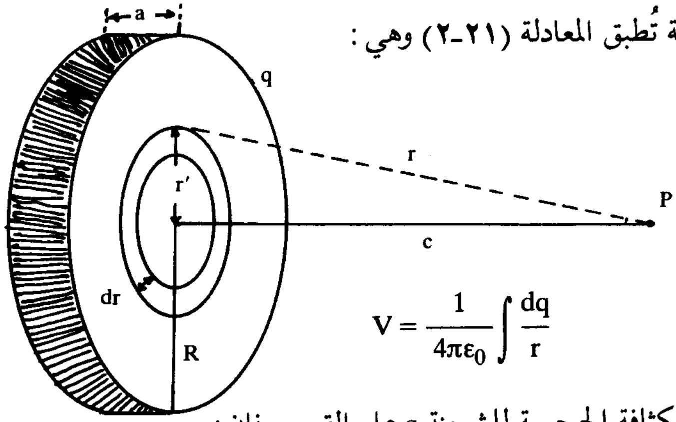
$$W_{ab} = q \times V_{ab} = (4 \times 10^{-9}) \times 2830 = 113 \times 10^{-7}\ \text{V}$$

$$W_{ca} = q \times V_{ca} = (4 \times 10^{-9}) \times (-900) = -36 \times 10^{-7}\ \text{J}$$

مـثـال (٢-٢)

احسب الجهد الناتج عن قرص دائري مشحون، بشحنة قدرها q ونصف قطره R وسمكه a عند نقطة تبعد مسافة قدرها c عن مركز القرص كما في الشكل المجاور.

الحـل



لحل هذه المسألة تُطبق المعادلة (٢١-٢) وهي :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

فإذا فرض أن ϱ هي الكثافة الحجمية للشحنة q على القرص فإن :

$$q = \varrho \pi R^2 a \qquad \text{.............. (A)}$$

وإذا قُسم القرص الدائري إلى حلقات دائرية صغيرة وأخذت حلقة منها نصف قطرها r' وعرضها dr' وسمكها a فإن الجهد الناتج عنها عند النقطة p هو:

$$\therefore dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

حيث

$$r = (r'^2 + c^2)^{1/2}\,,\ dq = 2\,\pi\, r' a dr' \varrho$$

$$\therefore dV = \frac{\varrho a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}} = \frac{\varrho a}{2\varepsilon_0}\frac{r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}}$$

وبذلك يكون الجهد الكلي الناتج عن القرص عند النقطة p هو:

$$V = \frac{\varrho a}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}}$$

ولإجراء هذا التكامل يُفرض أن $u = r'^2 + c^2$ ومنه $du = 2r' dr'$ وبالتعويض عن ϱ من المعادلة (A) يمكن الحصول على:

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\sqrt{R^2 + c^2} - c\right]$$

ويلاحظ من هذه المعادلة ما يلي:

أ - إذا فرض أن q و R ثابتان فإن المعادلة تؤول إلى:

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

عندما تكون $c = 0$ ، وتقل V كلما زادت قيمة c.

ب - وإذا فرض أن q و c ثابتان فإن قيمة V تنقص كلما زادت R وتقترب من الصفر إذا أصبحت R كبيرة جدا وذلك لأنه في هذه الحالة تقترب كثافة الشحنة من الصفر كما توضحه المعادلة (A).

(٢-٣) العلاقة بين المجال والجهد

The Relationship between Electric Field and Potential

إن التعبير العام لفرق الجهد بين نقطتين، المعادلة (٢-١٥)، هو:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E \cos \theta \, dl$$

فإذا كانت المسافة بين النقطتين متناهية الصغر فإن فرق الجهد يصبح dV وتصبح هذه المعادلة كالتالي:

$$dV = -E \cos \theta \, dl$$

$$\therefore E \cos \theta = \frac{-dV}{dl} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-٢٤)$$

وتسمى النسبة $\frac{dV}{dl}$ بتدرج الجهد (potential gradient) وهي عبارة عن معدل تغيير الجهد عند تغيير المسافة في اتجاه dl. ولما كانت θ تساوي الزاوية بين شدة المجال E وعنصر المسافة dl، فإن حاصل الضرب $E \cos \theta$ يساوي مركبة شدة المجال في الاتجاه dl، فإذا كان الاتجاه dl هو اتجاه شدة المجال نفسه فإن الزاوية θ تساوي صفرا، وجيب تمامها ($\cos \theta$) يساوي واحدا، ولذلك فإن شدة المجال الكهربي عكس مدرج الجهد في اتجاه المجال.

$$\therefore E = -\frac{dV}{dl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٢٥)$$

فإذا حُددت النقطتان a و b بالإحداثيات الديكارتية (x,y,z) (cartesian coordinates) فإن شدة المجال E والتغير في الجهد dV والتغير في المسافة dl تعطى بالمعادلات التالية:

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z$$

$$\vec{dl} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

$$\therefore -dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

ومنه فإن :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad .. \quad (٢\text{-}٢٦)$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ وحدة الأطوال على كل من X و Y و Z على التتابع .

ويمكن التعبير عن المعادلة (٢٦-٢) في التحليل الاتجاهي بالمعادلة :

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (٢\text{-}٢٧)$$

وحسب المعادلة (٢٣-٢) الواردة في الملحق (٢) فإن :

$$\text{curl } \vec{E} = \text{curl grad } V = \nabla \times (\nabla V) = 0 \quad .. \quad (٢\text{-}٢٨)$$

وتمثل هذه المعادلة الصيغة التفاضلية للمعادلة التكاملية (٢٣-٢). وإذا كان المسار المغلق C يحيط بسطح مغلق S فإنه حسب معادلة استوكس [(٤٥-٢ ملحق ٢] يُحصل على :

$$\oint_C \vec{E} \cdot dl = \int_S (\text{curl } \vec{E}) \cdot dS = \int \text{curl grad } V \cdot dS = 0$$

وهي تمثل المعادلة (٢٣-٢) نفسها.

ولذلك فإن المعادلتين (٢٣-٢) و(٢٨-٢) تعبران عن حقيقة فيزيائية واحدة وهو أن المجال الكهربي الاستاتيكي مجال محفوظ.

أما إذا حددت النقطتان a و b بالإحداثيات القطبية (r و θ) polar coordinate ، كما سيرد في الملحق (٢) فإن مركبات المجال E_r و E_θ هي :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{و} \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad ... \quad (٢\text{-}٢٩)$$

وأما إذا حددت النقطتان بالإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) spherical coordinates كما سيرد في الملحق (٢)، فإن مركبات المجال الكهربي في هذه الحالة تعطى بالمعادلات التالية :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣٠)$$

$$E_\phi = \frac{-1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

وباستخدام المعادلات (٢-٢٦) و (٢-٣٠) يمكن حساب شدة المجال الكهربي بطريقة أسهل من الطريقة العادية سابقة الذكر كما توضحه الأمثلة التالية .

(٢-٣-١) الجهد وشدة المجال لنقطة مشحونة

Potential and field for a point charge

حسب المعادلة (٢-١٩) فالجهد الكهربي الناتج عن نقطة مشحونة q هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

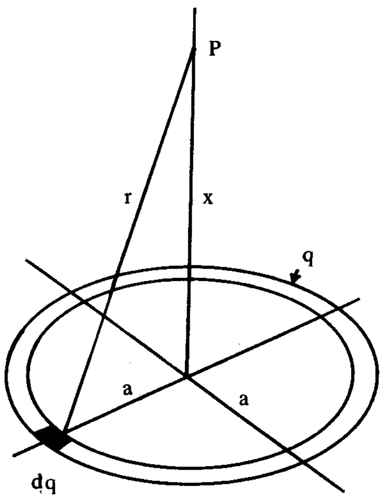
ومن التماثل ينتج أن مجال الشحنة مجال مركزي ومنه نجد أن :

$$E = -\frac{dV}{dl} = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

وهو التعبير نفسه المستنتج سابقا لشدة المجال الكهربي الناتج عن نقطة مشحونة، المعادلة (١-١٤) .

(٢-٣-٢) الجهد وشدة المجال على محور حلقة مشحونة

Potential and field on the axis of a ring of charge



شكل (٤-٢): حلقة دائرية مشحونة والمطلوب حساب E و V عند النقطة p.

سبق حل هذه الحالة في الفصل الأول، يلاحظ أنه على الرغم من أن الشحنة موزعة بانتظام على طول الحلقة فإن كل جزء من الشحنة يبعد بمقدار $(x^2 + a^2)^{1/2}$ عن النقطة P الواقعة على محور الحلقة، شكل (٤-٢)، لهذا فإن الجهد V عند النقطة P يساوي:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

ومن التماثل نجد أن المجال عند نقطة محورية يتجه في اتجاه المحور، وعندئذ فإن تدرج الجهد $\frac{dV}{dx}$ يساوي شدة المجال عند هذه النقطة.

$$\therefore E = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x^2 + a^2)^{1/2}}\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

وهي النتيجة نفسها التي حُصل عليها في الفصل الأول، معادلة (٤٣ب - ١)، وإن استنتجت بطريقة أكثر سهولة.

(٣-٣-٢) الجهد والمجال لذي القطبين

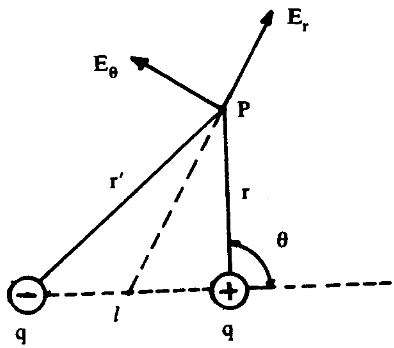
Potential and field of a dipole

يمثل الشكل (٥-٢) شحنتين متساويين ومختلفتين في الإشارة إحداهما q+ والأخرى q- والبعد بينهما l. فإذا كانت r هي المسافة بين q+ والنقطة P و r′ هي

المسـافـة بين q- و P فإن الجهـد عند P ، حسب المعادلة (٢-٢٠)، يعطى بالمعادلة :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \cdot \quad (٢\text{-}٣١)$$

ويمكن الحصول من المثلث (+q,– q,p) على :



شكل (٢-٥) : حساب المجال لذي القطبين عنـد النقـطة P باستخـدام العلاقة بين المجال والجهد.

$$r'^2 = r^2 + l^2 + 2l\,r\cos\theta$$

$$r'^2 = r^2\left(1 + \frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

$$\therefore r' = r\left(1 + \frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وباستعمال نظرية ذات الحدين binomial theory ، ملحق (٣-٦) الفقرة (1) ، فإن :

$$\left(1 + \frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right) + \ldots.$$

ولما كانت $\frac{l}{r}$ صغيرة فإن $\frac{l^2}{r^2}$ يمكن إهمالها وحينئذ تصبح هذه المعادلة كالتالي :

$$\left(1 + \frac{2l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{l}{r}\cos\theta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة يُحصل على :

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right) = \frac{1}{r} - \frac{l}{r^2}\cos\theta$$

وبالتعويض في علاقة الجهد (٢-٣١) نجد أن :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} + \frac{l}{r^2}\cos\theta\right)$$

$$\therefore V = \frac{q\,l\,\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢\text{-}٣٢)$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية فإن عنصر المسافة dl في الاتجاه الإشعاعي هو dr بينما يكون عنصر المسافة dl في اتجاه عمودي على r هو $r\,d\theta$. وحسب المعادلة (٢-٢٩) فإن :

$$E_r = -\frac{dV}{dl} = -\frac{dV}{dr} \quad , \quad E_\theta = -\frac{dV}{dl} = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}$$

ويمكن الحصول من هاتين المعادلتين والمعادلة (٢-٣٢) على :

$$\therefore E_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,l\,\cos\theta}{r^2}\right)$$

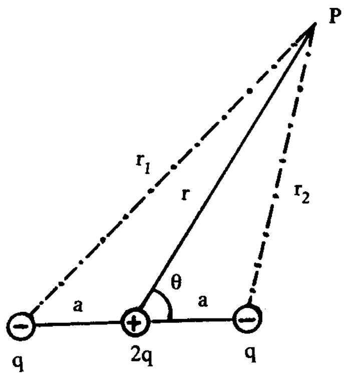
$$\therefore E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\,l\,\cos\theta}{r^3} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^3} \quad \cdots \quad (٢\text{-}٣٣)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,l\,\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,l\,\sin\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\sin\theta}{r^3} \quad (٢\text{-}٣٤)$$

وواضح أن المعادلتين (٢-٣٣) و(٢-٣٤) هما المعادلتان نفسهما اللتان حُصل عليهما في الفصل الأول وهما (١-٢٢) و(١-٢٣).

مـــثـــال (٣-٢)



يمثل الشكل المقابل شحنة قدرها +2q في الوسط وشحنة سالبة قدرها q – في جهة وشحنة أخرى سالبة أيضا قدرها q – وتقـع في الجهـة الأخـرى. وعلى البعد a نفسـه. (يسمى مثـل هذا النظام برباعي الأقطاب quadrupole) والمطلوب حساب الجهد عند النقطة P.

$$V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}\right) + 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right] \qquad \text{(A)}$$

$$\because \quad r_1 = r\left[1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$r_2 = r\left[1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

وحيث إن r>>a فإنه باستعمال نظرية ذات الحدين يُحصل على قيمة $\frac{1}{r_1}$ و $\frac{1}{r_2}$ كالتالي:

$$\left[1 \pm \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 \mp \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\frac{a^2}{r^2} \mp \ldots\right]$$

وبإهمال الحد r^{-4} والتعويض في معادلة الجهد (A) يُحصل على:

$$V = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\frac{a^2}{r^2}\right.$$

$$\left. + 1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\frac{a^2}{r^2}\right]$$

$$\therefore V = -\frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣٥)$$

وهو المطلوب.

وحيث إن العزم الكهربي لذي القطبين يساوي :

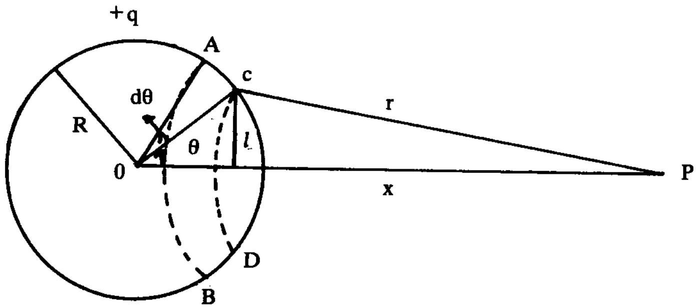
$$P = qa$$

$$V = -\frac{Pa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣٦)$$

(٢-٤) الجهد الناتج عن موصل كروي مشحون
Potential Due to a Charged Spherical Conductor

إذا شحنت كرة بشحنة قدرها +q ونصف قطرها R ، شكل (٢-٦)، فإن الكثافة السطحية للشحنة σ هي :

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣٧)$$



شكل (٢-٦): كرة نصف قطرها R مشحونة بشحنة قدرها +q والمطلوب حساب الجهد عند النقطة P.

ولإيجاد قيمة الجهد عند النقطة P نأخذ حلقة دائرية A B C D من الكرة، شكل (٢-٦) . فيكون الجهد الناتج عن هذه الحلقة عند النقطة P.

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

حيث dq شحنة الحلقة . وإذا كانت مساحة سطح الشريحة يساوي $(2\pi l) \times AC$ كما في الشكل (٦-٢)، فإن :

$$dq = \sigma\,(2\pi l)\,AC = \sigma\,(2\pi R \sin\theta)\,R\,d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2}{r}\sin\theta\,d\theta \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٣٨)$$

ومن الرسم يتضح أن :

$$r^2 = R^2 + X^2 - 2\,RX\cos\theta$$

وحيث إن r , θ متغيران فبتفاضل هذا المقدار يُحصل على :

$$2rdr = 2RX\sin\theta\,d\theta$$

$$\therefore \sin\theta\,d\theta = \frac{rdr}{RX}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٣٨) يُحصل على :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma Rdr}{X}$$

وبذلك يكون الجهد الكلي الناتج عن الكرة المشحونة عند النقطة P هو:

$$V = \int_{X-R}^{X+R}\frac{2\pi\sigma Rdr}{4\pi\varepsilon_0 X} = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 X}\Big[r\Big]_{X-R}^{X+R}$$

$$\therefore V = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 X}2R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{X} \quad \ldots \quad (٢\text{-}٣٩)$$

ومن المعادلة (٢-٣٧) والمعادلة (٢-٣٩) يُحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{X} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٤٠)$$

أي أن الجهد عند أي نقطة خارج الكرة المشحونة يساوي قيمته كما لو كانت هذه الشحنة مركزة عند مركز الكرة وبذلك فالمعادلة (٢-٤٠) تمثل الجهد كما لو كان ناتجا عن نقطة مشحونة ويكون المجال الناتج عن هذه الكرة يساوي :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{X^2}$$

وإذا كانت X = R فإن الجهد على سطح الكرة هو:

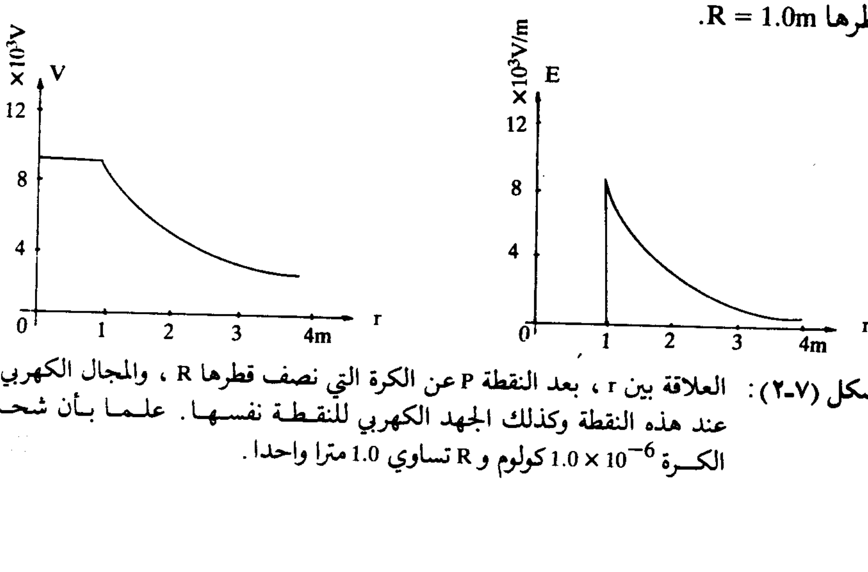
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}$$

أما بالنسبة للجهد داخل الموصل فإن حدود التكامل للمعادلة السابقة يكون (R+X) ، (R–X) ومنه فإن :

$$V = \int_{R-X}^{R+X} \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 X}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R} \quad \ldots\ldots \quad (٢-٤١)$$

أي أن الجهد عند جميع النقاط داخل السطح ثابت ويساوي الجهد على السطح ومن ذلك يتضح أن المجال داخل الكرة يساوي صفرا.

ويمكن تمثيل سلوك المجال والجهد داخل وخارج الكرة المشحونة بيانيا، حيث يمثل ذلك الشكل (٢-٧) لكرة مشحونة بشحنة موجبة قدرها 1.0×10^{-6} C ونصف قطرها R = 1.0m.



شكل (٢-٧) : العلاقة بين r ، بعد النقطة P عن الكرة التي نصف قطرها R ، والمجال الكهربي E عند هذه النقطة وكذلك الجهد الكهربي للنقطة نفسها. علما بأن شحنة الكرة 1.0×10^{-6} كولوم و R تساوي 1.0 مترا واحدا.

(٢-٥) تقاسم الشحنات بين الموصلات

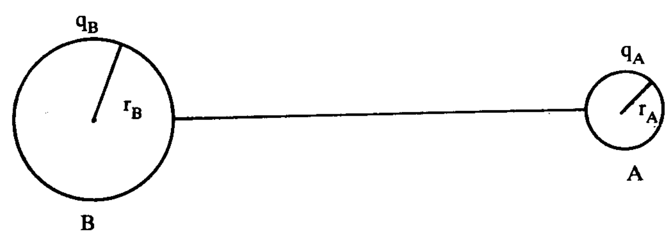
Sharing of Charge by Conductors

عندما يتصل موصل مشحون اتصالا كهربيا بموصل آخر غير مشحون فإن شحنة الموصل الأول تتوزع على الموصلين، ويحدث هذا التوزيع نتيجة لوجود قوى التنافر بين مركبات الشحنة الأصلية، ويتم التوزيع بحيث تصبح جميع نقط كل من الموصلين واقعة تحت الجهد نفسه.

وتتضح كيفية توزيع الشحنات بين موصلين متلامسين كالتالي:
إذا وصل موصل كروي A ، نصف قطره r_A ويحمل شحنة قدرها q ، بموصل كروي آخر B ، نصف قطره r_B حيث $r_B > r_A$ كما في الشكل (٨-٢)، بواسطة سلك رفيع، فإن الجهد سوف يتساوي بالنسبة للكرتين ومنه فإنه:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_B}$$

$$\therefore \frac{q_A}{q_B} = \frac{r_A}{r_B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-٤٢)$$



شكل (٨-٢): تقاسم الشحنات بين كرتين نصف قطر الأولى r_A والثانية r_B حيث $r_B > r_A$

حيث q_A و q_B شحنتا الكرتين بعد اتصالهما.
وتكون كثافة الشحنة السطحية σ ، أي الشحنة لوحدة المساحة من سطح الكرة، هي:

$$\sigma_A = \frac{q_A}{4\pi r_A^2} \quad \& \quad \sigma_B = \frac{q_B}{4\pi r_B^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{q_A \, r_B^2}{q_B \, r_A^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-٤٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٤٢) نُحصل على:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{r_B}{r_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٤٤)$$

أي أن كثافة الشحنة السطحية تتناسب عكسيا مع نصف القطر بمعنى أن σ تكون كبيرة عند الأسطح ذات نصف القطر الصغير (أي تحدبها كبير). وحيث إن شدة المجال بالقرب من أي موصل مشحون هي $E = \sigma/\varepsilon_0$ فإن كثافة الشحنة وشدة المجال تكون أكبر ما يمكن عند الأجزاء المدببة وأقل ما يمكن عند الأجزاء المستوية للموصل.

وتستخدم خاصية الأطراف المدببة في مانعة الصواعق، ذلك لأنه لو شحن جسم له طرف مدبب فإن شدة المجال الكهربي الكبيرة بالقرب من الطرف تصبح قادرة على تأيين الهواء المجاور فتنجذب من الهواء إلى الجسم الأيونات ذات الشحنة المخالفة فيفقد الجسم شحنته وتنجذب الصواعق.

مـــثـــال (٢-٤)

في شكـل (٢-٨) إذا كان نصف قطر الكرة A يساوي 1cm وشحنت بشحنة قدرها $10 \times 10^{-9}C$ ونصف قطر الكرة B يساوي 10cm وغير مشحونة. احسب شحنة كل منهما وجهدهما المشترك وكثافة الشحنة على كل منهما وذلك عند اتصالهما بسلك رفيع علما بأن المسافة بين مركزي الكرتين يساوي 50cm.

الحـــــل

عندما توصل الكرتان بسلك رفيع نجد أن شحنة الكرة A يجب أن تتوزع بين الكـرتـين بحيث يصبح جهداهما متساويين فإذا كانت q_A ، q_B شحنتي الكرتين بعد توصيلهما فإن الجهد عند مركز الكرة B (حسب المعادلة ٢-٢٠) يساوي

$$V_B = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5} \right)$$

وبالمثل فإن الجهد عند مركز الكرة A يساوي :

$$V_A = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5} \right)$$

وحيث إن $V_A = V_B$ نظرا لاتصال الكرتين بسلك توصيل فإن :

$$\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5} = \frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5}$$

ولما كان مجموع الشحنتين يساوي الشحنة الأصلية :

$$q_A + q_B = 10 \times 10^{-9}\ C$$

فـــإن :

$$q_B = 9.25 \times 10^{-9}\ C$$

$$q_A = 0.75 \times 10^{-9}\ C$$

وبالتعويض عن q_A ، q_B يكون :

$$V = 845\ V$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٤٣) يُحصل على كثافة الشحنة :

$$\sigma_B = \frac{9.25 \times 10^{-9}}{4\pi\,(0.1)^2} = 7.35 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

$$\sigma_A = \frac{0.75 \times 10^{-9}}{4\pi\,(0.01)^2} = 59.7 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

مـــثـــال (٢-٥)

في المثال السابق إذا فُرض أن الكرة A علقت في مركز الكرة الكبيرة كما في شكل (٢-٩) فإذا شحنت A بشحنة قدرها q_A و B بشحنة قدرها q_B فاحسب فرق الجهد بينهما في هذه الحالة .

الحـــل

جهد الكرة B يكون ناتجا عن شحنة B نفسها q_B زائدا المجال الناتج عن الشحنة q_A

$$\therefore V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_B}{r_B} + \frac{q_A}{r_B}\right)$$

أما جهد الكرة A فيساوي :

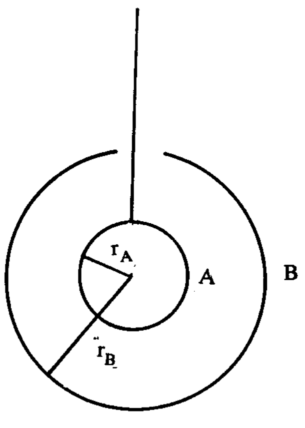
$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B}\right)$$

ويكون فرق الجهد بينهما:

$$V_A - V_B = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

وبالتعويض عن r_A و r_B نحصل على :

$$V_A - V_B = (9 \times 10^9) \times 90\, q_A$$



شكل (٩-٢): تقاسم الشحنات بين كرتين نصف قطر الأولى r_A والثانية r_B حيث $r_B > r_A$ وتقع r_A داخل الكرة r_B.

فإذا فرض أن الشحنة q_A موجبة فإن جهد الكرة الداخلية A دائما أكبر من جهد الكرة الخارجية B ، فإذا اتصلت الكرتان بسلك رفيع فإن الشحنة تسري من الكرة A إلى الكرة B حتى يصبح فرق الجهد $(V_A - V_B = 0)$ وهذا لا يحدث إلا إذا كانت q_A تساوي الصفر حسب المعادلة (٢-٤٥). ومعنى ذلك أنه عند التوصيل سوف تنتقل الشحنة q_A كلها إلى الكرة الكبرى B وقد استغلت هذه الحقيقة في تصميم مولد فان دي جراف (Van de Graaff generator). وهذه الحقيقة تنطبق بصفة عامة على أي موصل مهما كان شكله عندما يوضع داخل أي موصل أجوف حيث سيعطي الموصل الداخلي شحنته إلى الموصل الخارجي عند الاتصال.

(٢-٦) السطوح متساوية الجهد

Equipotential Surface

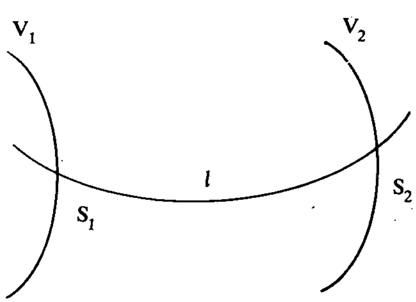
يمكن تمثيل المجال الكهربي بمجموعة خطوط وهمية تنطبق على جهة المجال وتسمى بخطوط القوى الكهربية [بند (١-٧) الفصل الأول] كذلك يمكن تمثيل الجهد برسم سطوح تدعى سطوح تساوي الجهد وهذه السطوح يجب أن تحقق العلاقة:

$$V = f(X, Y, Z) = \text{constant}$$

وهذه السطوح تكون عمودية على خطوط القوى وذلك لأن السطح المتساوي الجهد في جميع نقطة معناه أن الشحنة الموجودة على هذا السطح لن تتحرك لعدم وجود فرق في الجهد بين أي نقطتين على السطح، ولو لم يكن ذلك صحيحا لكان لشدة المجال مركبة تمس هذا السطح مما يجعل الجسم المشحون يبذل شغلا ضد القوى الكهربية كي يتحرك على هذا السطح.

ولا يمكن لسطحين من سطوح تساوي الجهد أن يتقاطعا لأن نقطة التقاطع لا يمكن أن يكون لها أكثر من اتجاه. والبعد بين سطحين على امتداد خط معين من خطوط القوى الكهربية يتناسب تناسبا عكسيا مع متوسط قيمة المجال على هذا الخط بين السطحين. ولذلك فإنه عندما تكون سطوح تساوي الجهد متقاربة فهذا يدل على أن المجال شديد في هذه المنطقة وبالعكس عندما تكون متباعدة.

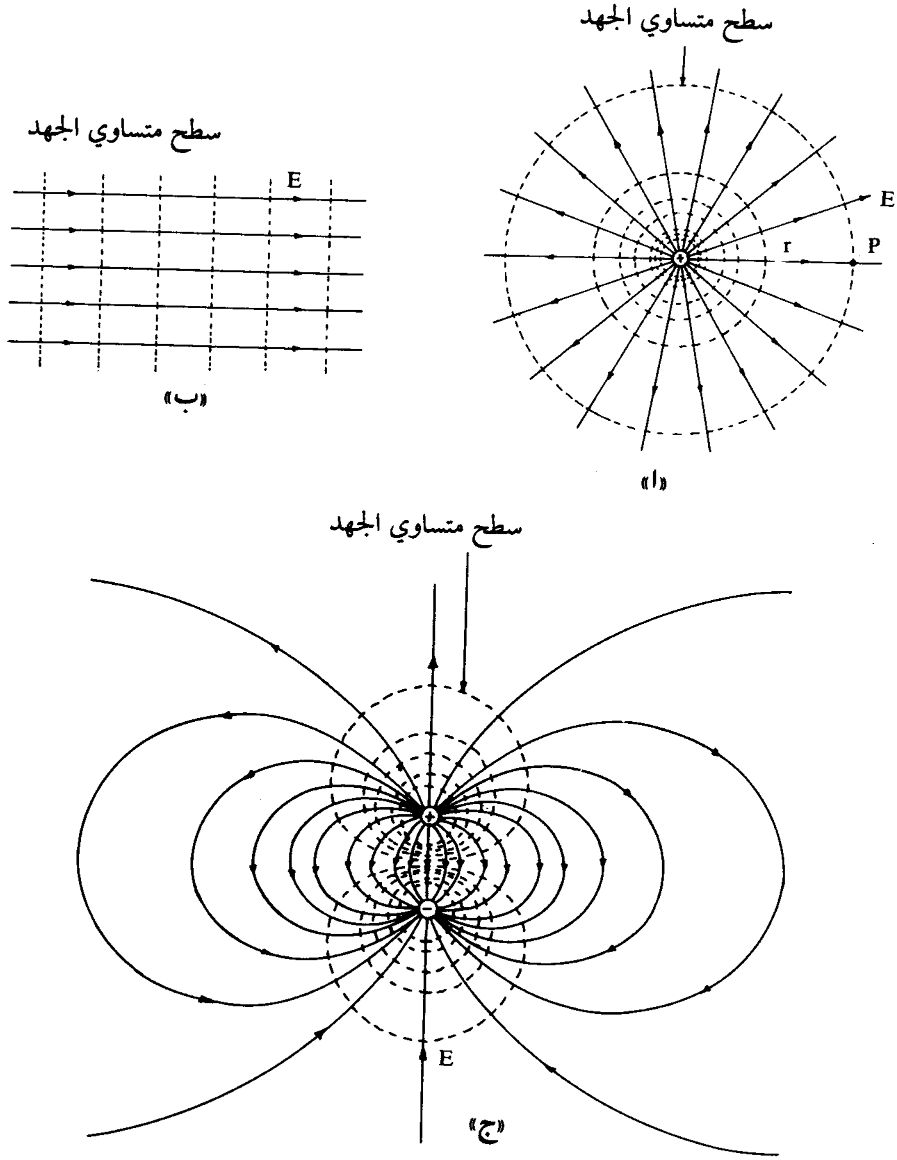
لتكن S إحداثي السطوح على طول خط القوة l [شكل (١٠-٢)] بين سطحين من سطوح تساوي الجهد V_1 و V_2. وبما أن المجال منطبق على هذا الخط في كل نقطة فيكون فرق الجهد بين النقطتين S_1، S_2 حسب المعادلة (١٥-٢) هو:



شكل (١٠-٢): سطحان من سطوح تساوي الجهد جهد الأول V_1 والثاني V_2.

$$V_2 - V_1 = -\int_{S_1}^{S_2} E \cdot dl \quad (٢-٤٦)$$

ولكن متوسط قيمة المجال E تعرف بالمعادلة:



شكل (١١-٢): سطوح تساوي الجهد.

«أ» حول نقطة كروية مشحونة بشحنة موجبة
«ب» مجال كهربي منتظم
«جـ» لذي القطبين
سطح متساوي الجهد

$$\bar{E} = \frac{1}{S_2 - S_1}\int_{S_1}^{S_2} E\,.\,dl \quad .... \quad (٢-٤٧)$$

ومن المعادلتين (٢-٤٦) و (٢-٤٧) نجد أن :

$$\bar{E}\,(S_1 - S_2) = V_2 - V_1$$

$$\therefore S_1 - S_2 = \frac{V_2 - V_1}{\bar{E}} \quad .... \quad (٢-٤٨)$$

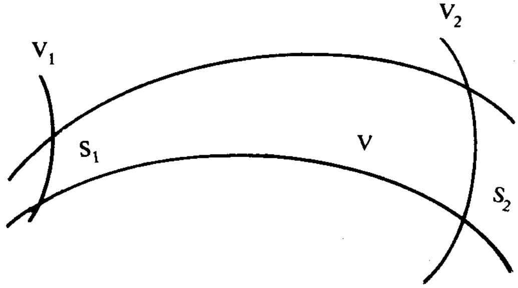
ويوضح شكل (١١أ - ٢) سطوح تساوي الجهد حول نقطة مشحونة كروية الشكل. وأما سطوح تساوي الجهد لمجال كهربي منتظم فتكون سطوح مستوية ومتوازية كما في شكل (١١ب - ٢). وأما سطوح تساوي الجهد لذي القطبين فتظهر بالشكل (١١جـ - ٢). وفي جميع الأشكال تظهر خطوط القوى متعامدة على السطوح المتساوية الجهد مع ملاحظة أن هذه السطوح مرسومة بخطوط منقطة، وأن السطح المتساوي الجهد يختلف عن السابق له أو التالي له في الجهد كما أن سطوح تساوي الجهد تتزاحم حيث تتزاحم خطوط القوى في المجال القوي وتتباعد حيث تتباعد خطوط القوى في المجال الضعيف.

ويمكن تعريف أنبوب القوة (tubes of force) بأنه المنطقة المحصورة من الجوانب بسطح يحتوي على خطوط القوة ولكنه لا يقطعها. فإذا قطع هذا الأنبوب سطحين من سطوح تساوي الجهد V_1 , V_2 بمساحتين S_1 , S_2 شكل (٢-١٢)، كان حجم الأنبوب V خاليا من أي شحنة كهربية فإن التدفق يكون ناتجا عن التدفق الواقع فقط على السطحين S_1 , S_2.

ليكن E_1 متوسط قيمة المجال على السطح S_1 , E_2 متوسط هذه القيمة على S_2 فيكون التدفق خلال S_1 هو $E_1\,S_1$ لأن E_1 عمودي على السطح في جميع نقاطه وهذا التدفق يجب أن يساوي قيمة التدفق من خلال السطح S_2 ويكون :

$$E_1\,S_1 = E_2\,S_2 \quad .... \quad (٢-٤٩)$$

$$\therefore \frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥٠)$$



شكل (٢-١٢): سطحان من سطوح تساوي الجهد بقطعهما أنبوب القوة بمساحتين S_1 ، S_2.

أي أن قيمة المجال المتوسطة تتناسب عكسيا مع سطح المساحة التي تقطعها أنبوب القوة على سطوح تساوي الجهد. فحيث يضيق الأنبوب تزداد شدة المجال وحيث يتسع الأنبوب يضعف المجال.

فإذا كانت لدينا شحنة نقطية موجبة q فإن الجهد عند النقطة p التي تبعد مسافة r عن هذه الشحنة، كما في الشكل (١١أ - ٢)، هو:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

وتكون بذلك معادلة السطح المتساوي الجهد المار بالنقطة p هي :

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = \text{constant}$$

وهذه هي معادلة كرة نصف قطرها r ومركزها الشحنة النقطية q. أي أن السطوح المتساوية الجهد هي سطوح كروية متحدة المركز وخطوط المجال الكهربي هي خطوط نصف قطرية وعمودية على السطوح المتساوية الجهد.

(٢-٧) معـادلات بواسون ولابـلاس

Poisson's and Laplace's Equations

لقد وردت طرق مختلفة لحل المسائل المتعلقة بالكهربية الساكنة . حيث أمكن حساب المجـال الكهـربي بتراكب superposing المجـالات لنقط مشحـونة [البند (١-٤)] أو باستعمال قانون جاوس [البند (١-٨)] أو حساب الجهد الكهربي ثم حساب التفاضل الجزئي له بالنسبة لـ z,y,x [البند (١-١١)] وكل هذه الطرق امتداد مباشر لقانون كولوم مقترنة بالقوى المحفوظة conservative والجهد الكهربي والفيض الكهربي .

وهنالك طرق أخرى مهمة تبحث في حلول مسائل الكهربية الساكنة منها ما يسمى بمعادلة بواسون Poisson's equation وهي تربط بين كثافة الشحنة عند أي نقطة في منطقة تحتوي على شحنات كهربية ومع الجهد الكهربي عند تلك النقطة .

ويمكن تحقيق ذلك بربط المعادلة (١-٦٠) والمعادلة (٢-٢٦) والمعادلة (٢-٢١) الواردة بالملحق رقم ٢ حيث يكون لدينا :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

وتكتب على الشكل :

$$\nabla^2 V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-٥١أ)$$

وهذه هي معادلة بواسون (Poisson's equation) في ثلاثة أبعاد . وإذا كانت الشحنة تساوي صفرا فإن $\varrho = 0$ ومنه يُحصل على :

$$\nabla^2 V = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٢-٥١ب)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس (Laplace's equation).

ويمكن كتابة المقدار $\nabla^2 V$ باستخدام الإحداثيات الاسطوانية $(r \,،\, \theta \,،\, z)$ وذلك حسب المعادلة (٢-٣٧) الواردة في البند (٢-٦) من الملحق رقم ٢ حيث يكون لدينا :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (٥٢أ-٢)$$

أما بالنسبة للإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) فإن قيمة $\nabla^2 V$ هي :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

(٥٢ب - ٢) . . . .

وذلك حسب المعادلة (٤٣-٢) الواردة في البند (٢-٧) من الملحق ٢ .

مـــثـــال (٦-٢)

إذا كان هناك شحنة كهربية موزعة بكثافة قدرها $\varrho(r)$ ومتناظرة بشكل كروي وكان الجهد دالة لـ r ، $V(r)$ ، فالمطلوب البرهان على أن معادلة بواسون تأخذ الشكل :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\varrho(r)}{\varepsilon_0}$$

استخدم العلاقة $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

الحـــــل

إن معادلة بواسون في الإحداثيات الديكارتية هي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad . . . .(A)$$

وذلك حسب المعادلة (٥١أ - ٢) .

لنحسب الآن كلا من المشتقات $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ بدلالة r .

بما أن التابع $V(r)$ متناظر بشكل كروي فقيمته تابعة لـ r ولا تتغير قيمته مع الزوايا ولذلك يمكن اعتبار $\frac{\partial V}{\partial r}$ هو المشتق الجزئي $\frac{dV}{dr}$ في هذه المسألة .

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \therefore 2r\partial r = 2x\partial x$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

ويكون المشتق الثاني:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\because x = (r^2 - y^2 - z^2)^{1/2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left[\frac{d^2V}{dr^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{dV}{dr}\frac{1}{x} - \frac{dV}{dr}\frac{x}{r^2}\right] \cdot \frac{x}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2V}{dr^2} \cdot x^2 + r\frac{dV}{dr} - \frac{x^2}{r}\frac{dV}{dr}\right]$$

وبالمـثـل:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2V}{dr^2} \cdot y^2 + r\frac{dV}{dr} - \frac{y^2}{r}\frac{dV}{dr}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2V}{dr^2} \cdot z^2 + r\frac{dV}{dr} - \frac{z^2}{r}\frac{dV}{dr}\right]$$

وبالجمع يمكن الحصول على:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2V}{dr^2}(x^2 + y^2 + z^2) + 3r\frac{dV}{dr} - \frac{(z^2 + y^2 + z^2)}{r}\frac{dV}{dr}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + 3r\frac{dV}{dr} - r\frac{dV}{dr}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + 2r\frac{dV}{dr}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (A) يكون :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

وهو المطلوب إثباته .

مــثــال (٧-٢)

أثبت أن مجال الجهد $V=20\ r^2 \cos 2\theta$ يحقق معادلة لابلاس .

الحــــل

واضح من هذه المعادلة أن الإحداثيات المستعملة هي الإحداثيات الأسطوانية ولذلك فإنه لحل هذا المثال تستعمل المعادلة (٥٢أ - ٢) وهي :

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\because\ \Delta^2 V = 80\cos 2\theta - 80\cos 2\theta + 0 = 0$$

$$\because\ \Delta^2 V = 0$$

وهذا تحقيق لمعادلة لابلاس .

(٢ـ٨) طاقة الوضع والمجال الكهربي

Potential Energy and Electric Field

إذا كانت r تمثل المسافة بين الشحنتين q و q' فإن الجهد عند النقطة q' تحدده المعادلة (١٩أ ـ ٢)، فإذا عوض في المعادلة (١٧ـ٢) يُحصل على :

$$U = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٣أ ـ ٢)$$

هذه الطاقة تمثل الشغل المبذول لنقل q' من اللانهاية إلى مكانها الذي يبعد r عن q عند ثبوت q. وتمثل هذه المعادلة أيضا الشغل اللازم لنقل q من اللانهاية إلى مكانها الذي يبعد r عن q' عند ثبوت q'. ولذلك يقال في هذه الحالة إن طاقة الوضع تبادلية لنظام يحتوي على شحنتين.

أما إذا كان عدد الشحنات مقداره N وكانت المسافة بين شحنة وأخرى معلومة ومُيِّز بين نوعين من الشحنات مثل q_i وq_j ، حيث i و j تأخذ الأعداد 1,2,3,......,N ، فإن الطاقة بين كل زوج منها تحدده المعادلة التالية ، وذلك حسب المعادلة (٥٣أ ـ ٢) .

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٣ب ـ ٢)$$

وبذلك فإن طاقة الوضع الكلية هي :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \quad (٥٤أ ـ ٢)$$

وتستبعد من هذا المجموع الحالة $i = j$.

وسبب كتابة النصف هو أن الطاقة حُسبت مرتين لكل زوج ، فمثلا U_{34} تساوي U_{43} لأن $r_{34} = r_{43}$ أي أن : $U_{34} + U_{43} = 2U_{34}$.

ويمكن كتابة المعادلة (٥٤أ ـ ٢) بالصورة التالية :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right). \quad (\text{٥٤ب - ٢})$$

وحسب المعادلة (٢٠-٢) فإن هذه المعادلة تصبح كالتالي :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٢-٥٥})$$

وإذا كانت الشحنة موزعة بصورة مستمرة فإن المجموع يغير إلى تكامل وحسب المعادلات (٣٦-١)، (٣٧-١) و(٣٨-١) فإن طاقة الوضع لتوزيع الشحنة الطولية أو السطحية أو الحجمية تحددها المعادلات التالية :

$$U = \frac{1}{2}\int_{l} \lambda(r)\, V\, dl \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥٦أ - ٢})$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{S} \sigma(r)\, V\, dS \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥٦ب - ٢})$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{V} \varrho(r)\, V\, dV \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥٦جـ - ٢})$$

ومن المعادلتين (٦١-١) و (٥٦جـ - ٢) يُحصل على :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int V(\nabla . E)\, dV \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥٧أ - ٢})$$

وحسب المعادلتين (٢٦-٢) الواردة بالملحق ٢ و (٢٦-٢) فإن :

$$V(\nabla . E) = -E\,.\,(\nabla V) + \nabla\,.\,(VE) = E^2 + \nabla\,.\,(VE)$$

وبالتعويض في المعادلة (٥٧أ - ٢) يُحصل على :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \nabla\,.\,(VE)\, dV \quad (\text{٥٧ب - ٢})$$

وباستخدام المعادلة (٤٦-٢) الواردة بالملحق رقم ٢ يمكن كتابة الحد الثاني من هذه المعادلة كتكامل سطحي بحيث تأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S (VE)\, dS$$

حيث S السطح المحيط بالمنطقة المعنية بالدراسة . فإذا احتوت كرة جميع الشحنات وكان نصف قطرها r فإنه حسب ما درس في البنود السابقة يكون

$$dS \propto R^2 ,\ V \propto R^{-1} ,\ E \propto R^{-2}$$

ولذلك فالتكامل السطحي للمعادلة يتناسب مع 1/R الذي ينتهي عندما تقترب من اللانهاية .

$$\therefore \oint (VE)\, dS \propto \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

وتصبح بذلك معادلة طاقة الوضع هي :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{all space}} E^2\, dV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥٨)$$

وهذه المعادلة تربط بين طاقة الوضع والمجال الكهربي E. وهذا التكامل مأخوذ على كامل الفراغ (whole of space).

أما كثافة الطاقة energy density (طاقة وحدة الحجوم) فتعطى بالمعادلة :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥٩)$$

$$\therefore U = \int_{\text{all space}} u\, dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦٠)$$

مثال (٢-٨)

احسب طاقة الوضع للكرة المشحونة الواردة في البند (٢-٤) .

الحل

وجد بالند (٢-٤) أن :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad at \quad r < R$$

$$E = 0 \quad at \quad r<a$$

حيث R نصف قطرة الكرة و r بعد النقطة، المراد حساب المجال عندها، عن الكرة.
وبالتعويض في المعادلة (٥٩-٢) نُحصل على كثافة الطاقة.

$$u = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \quad at \quad r \geqslant R$$

$$u = 0 \quad at \quad r<R$$

وهذا يعني أنه لا وجود للطاقة داخل حجم الكرة وأن الطاقة موزعة خارجها.

وباستخدام المعادلة (٣٩-٢) الواردة بالملحق رقم ٢ والتعويض في المعادلة (٦٠-٢) نُحصل على:

$$U = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

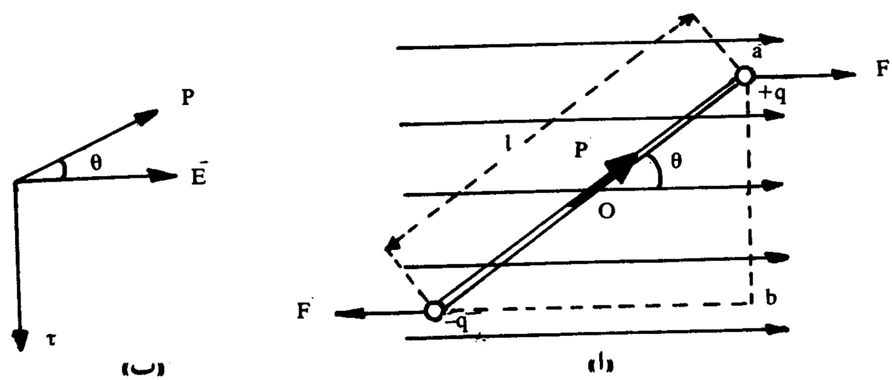
نظرا لأن تكامل الزوايا المجسمة يعطي 4π.

(٩-٢) ذو قطبين في مجال كهربي خارجي منتظم

A Dipole in a Uniform External Electric Field

يمكن عد العزم الكهربي لذي القطبي كمتجه $\vec{P}$ حيث تعطى قيمته بالمعادلة $P = lq$، انظر بند (١-٤)، ويتجه من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

يمثل شكل (١٣أ - ٢) ازدواجا كهربيا ناتجا عن الشحنتين +q و -q اللتين تفصلهما مسافة l موضوعا في مجال كهربي منتظم شدته E بحيث يصنع محوره زاوية قدرها



شكل (١٣-٢): أ - ذو قطبين في مجال كهربي خارجي
ب - التمثيل الاتجاهي للعزم الكهربي P وشدة المجال E والازدواج τ .

θ مع اتجاه المجال E ويلاحظ أن محصلة القوتين المتساويتين والمتضادتين في الاتجاه يساوي صفرا وكل منهما عبارة عن (F = qE). ولكن محصلة عزم الازدواج (عزم الدوران) torque الناتج حول O والذي يعطى بالعلاقة :

عزم الازدواج τ = إحدى القوتين × البعد العمودي بينهما.

$$\tau = ab \times F = l\,F \sin\theta = l \,.\, q \,.\, E \sin\theta$$

$$\therefore \tau = P \,.\, E .\, \sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢\text{-}٦١)$$

ويقوم عزم الازدواج بإدارة العزم الكهربي ليستقر ساكنا في اتجاه المجال المؤثر. ومن المعادلة (٢-٦١) يمكن تعريف العزم الكهربي P «بأنه عزم الازدواج اللازم لحفظ ذي القطبين عموديا على مجال كهربي شدته الوحدة».

وإذا أعيدت كتابة المعادلة (٢-٦١) على أساس المتجهات (vectors) فإنها تصبح :

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٢\text{-}٦٢)$$

والرسم الاتجاهي لهذه المعادلة يوضحه شكل (١٣ب - ٢).

وحتى يغير ذو القطبين اتجاهه في المجال الخارجي يجب بذل شغل work لإدارته من وضعه الابتدائي الذي يصنع زاوية قدرها θ_0 مع اتجاه المجال إلى الوضع النهائي والذي يصنع زاوية قدرها θ ، والشغل المبذول يعطى بالمعادلة :

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau \, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} P \, . \, E \sin\theta \, d\theta$$

$$= P \, . \, E \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta \, d\theta = P \, . \, E \, (-\cos\theta)_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\therefore W = P \, . \, E \, . \, (\cos\theta_0 - \cos\theta) \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦٣)$$

وهذا الشغل المبذول يُحفَظ على شكل طاقة وضع . ويرمز له بالرمز U حيث :

$$U = W = P \, . \, E \, (\cos\theta_0 - \cos\theta) \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦٤)$$

ولما كان الهدف هو دراسة التغير في طاقة الوضع فيمكن اختيار الحالة الابتدائية والتي تكون فيها $\theta_0 = 90°$ وتصبح المعادلة (٢ـ٦٤) على الصورة .

$$U = -P \, . \, E \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦٥)$$

وبوضع المعادلة (٢ـ٦٥) على صورة ضرب قياسي يُحصل على :

$$U = -\vec{P} \, . \, \vec{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦٦)$$

وإذا وضع ثنائي أقطاب P_1 في مجال كهربي E_2 ناتج عن ثنائي أقطاب آخر P_2 فإن طاقة الوضع تساوي :

$$U = -\vec{P}_1 \, . \, \vec{E}_2$$

وبالاستعانة بالمعادلة (١ـ٢٧) فإن متجه المجال E_2 هو:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{P}_2 \cdot \vec{i}_r)\,\vec{i}_r - \vec{P}_2\right]$$

$$\therefore U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - 3(\vec{P}_1 \cdot \vec{i}_r)\,(\vec{P}_2 \cdot \vec{i}_r)\right] \quad (٢\text{-}٦٧)$$

وتسمى الطاقة في هذه الحالة بتفاعل ثنائي ـ الثنائي (dipole - dipole interaction)

مـثـــال (٩-٢)

يتـألف ذو قطبين من شحنتين متساويتين ومختلفتين في النوع. شحنة كل من قطبيه $q = 1.0 \times 10^{-6}$ C والمسافة بينهما $l = 2$cm موضوعا في مجال كهربي خارجي منتظم شدته 10^5 N / C احسب:

أ ـ أقصى عزم ازدواج يؤثر به المجال على الازدواج.

ب ـ الشغل المبذول لإدارة الازدواج بحيث يصبح القطب الموجب مكان السالب.

الحـــل

أ ـ $\tau = ql\,E \sin\theta = (1.0 \times 10^{-6})\,(0.02)\,(1.0 \times 10^5)\,(\sin\theta)$

ولما كان أقصى عزم للازدواج يحدث عندما تكون $\theta = 90$ فإن:

$$\tau = 2.0 \times 10^{-3}\ \text{N . m}$$

ب ـ من المعلوم أن ذا القطبين يستقر في حالته الابتدائية في اتجاه المجال أي عندما $\theta_0 = 0$. ولكي نجعل القطب الموجب مكان السالب فإننا سنبذل شغلا لإدارة ذي القطبين $180°$ مقداره:

$$\therefore W = U_{180} - U_0 = (-\,PE\cos 180°) - (-\,PE\cos 0)$$

$$\therefore W = 2PE = 2qlE$$

$$\therefore W = 2 \times (1.0 \times 10^{-6})\,(0.02) \times (1.0 \times 10^5) = 4.0 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

(٢-١٠) مسائل

١ ـ شحنتان $q_1 = 5 \times 10^{-6}$ كولوم و $q_2 = -2 \times 10^{-6}$ كولوم تفصلهما مسافة قدرها 1.0 متر. احسب المجال والجهد عند نقطة تبعد 75 سم من q_1 و 25 سم من q_2.

٢ ـ إذا افترض أن الجهد في المالانهاية يساوي الصفر.

أ ـ ما هي قيمة الجهد الاستاتيكي عند نقطة تبعد 1.0 متر من شحنة نقطية مقدارها 1.0×10^{-6} كولوم.

ب ـ الجهد الاستاتيكي عند نقطة تبعد 0.10 متر من الشحنة نفسها.

جـ ـ ما هي قيمة الشغل المبذول لنقل شحنة قدرها 2.5×10^{-7} كولوم من مسافة قدرها 1.0 متر إلى 0.1 متر من الشحنة نفسها.

٣ ـ احسب الجهد الكهربي عند النقطة a ، الشكل التابع للمسألة ١٧ الواردة في الفصل الأول، ثم الجهد الكهربي عند النقطة b. ثم احسب فرق الجهد بينهما. وإذا انتقلت شحنة مقدارها $0.5\mu C$ من النقطة a إلى النقطة b احسب الشغل اللازم لذلك.

٤ ـ شحنة قيمتها $+8 \times 10^{-7}$ كولوم واقعة عند نقطة إحداثياتها $(x = 0.12m , y = 0.08m , z = 0)$ احسب فرق الجهد بين النقطتين $(x = 0.18m , y = z = 0)$ و $(x = 0.36m , y = z = 0)$.

٥ ـ ثنائي الأقطاب قيمة عزمه الكهربي 2.4×10^{-8} كولوم ـ متر ويصنع زاوية قدرها $60°$ مع اتجاه مجال كهربي خارجي قيمته 3.0×10^4 نيوتن كولوم.

احسب:

أ ـ عزم الازدواج المبذول على الثنائي نتيجة لتسليط المجال.

ب ـ ما هو الشغل المبذول حتى يصبح الثنائي موازيا لاتجاه المجال الخارجي.

٦ ـ جسيم صغير شحنته $+q_1$ وكتلته m قذف مباشرة في اتجاه مركز نواة شحنتها $+q_2$ فإذا كانت السرعة الابتدائية للقذيفة مقدارها v_0 وعلى بعد كبير من q_2 كما في الشكل.

أثبت أن أصغر مسافة يمكن الوصول إليها تعطى بالقيمة $D=2Kq_1q/mv_0^2$

٧ ـ وضعت شحنة قدرها $q_1 = +10^{-3}\,\mu C$ في نقطة الأصل ووضعت أخرى قدرها $q_2 = \frac{1}{2} \times 10^{-3}\,\mu C$ في نقطة إحداثياتها $x = 2m$ على محور x.

أ ـ أوجد تابع الجهد V للنقاط الواقعة على المحور x.

ب ـ أين تقع النقطة التي ينعدم فيها الجهد على محور x.

جـ ـ أين تقع النقطة التي ينعدم فيها المجال الكهربي على محور x.

٨ ـ أربع شحنات نقطية قيمة كل منها Q كولوم وضعت على رؤوس أركان مربع طول ضلعه l .

احسب الجهد الاستاتيكي في مركز المربع .

٩ ـ كرتان معدنيتان نصف قطر كل منها 10 سم، وضعتا بحيث تكون المسافة بين مركزيهما مترا واحدا، فإذا شحنت إحدى الكرتين بشحنة موجبة قدرها 30×10^{-9} كولوم والكرة الأخرى بشحنة سالبة قدرها -60×10^{-9} كولوم .

احسب جهد كل من الكرتين وكذلك فرق الجهد بينهما .

١٠ ـ كرتان نصفا قطريهما 1 سم و 2 سم على التوالي وشحنة كل منهما 10^{-8} كولوم . فإذا كان البعد بين مركزيهما 100 سم . فما هي الشحنة وجهد كل منهما عندما يعلقان بسلك رفيع .

١١ ـ إذا كان الجهد عند نقطة ما في مجال كهربي يمكن تمثيله بالمعادلة :

$$V = \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

حيث r ، θ هما الإحداثيان القطبيان للنقطة . و a و b ثابتان .

احسب عند أي نقطة قيمة مركبتي المجال الكهربي E_r, E_θ.

١٢ ـ شحنة مقدارها Q وضعت في مركز الإحداثيات بينما وضعت شحنتان أخريان

قيمة كل منهما $\frac{Q}{2}$ - على محور Z عند $Z = \pm a$.
اثبت أن الجهد الاستاتيكي عند أي نقطة في المستوى xy الناتج من هذا التوزيع يساوي :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r_0}\right)-\left(a^2+r_0^2\right)^{-1/2}\right\}$$

حيث r_0 المسافة بين المركز وأي نقطة من النقطتين.

١٣ - حسب المعادلة (٢-٤٠) وُجد أن الجهد عند أي نقطة خارج الكرة المشحونة يماثل الجهد كما لو كان ناتجا عن نقطة مشحونة ويكون الجهد متناسبا مع $\frac{1}{r}$ حسب قانون كولوم، أما إذا فرض أن الجهد لنقطة مشحونة يعطى بالعلاقة :

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-Br}}{r}$$

حيث β مقدار ثابت، q شحنة النقطة، r بعد المكان الذي يحسب فيه الجهد عن النقطة المشحونة.
أثبت أن الجهد خارج كرة مشحونة يعطى بالمعادلة :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{\beta R}-e^{-\beta R}}{2\beta R}$$

حيث R نصف قطر الكرة المشحونة.

١٤ - أوجد بالتكامل المجال الكهربي عند نقطة تبعد مسافة x عن المركز وواقعة على محور قرص دائري مشحون نصف قطره a وكثافة الشحنة الكهربية السطحية عليه σ . استنتج منها المجال الناتج عن صفيحة لانهائية في نقطة غير واقعة عليها وقارن هذه النتيجة فيما لو حسب المجال باستخدام قانون جاوس.

١٥ - صفيحة كبيرة دائرية وموصلة نصف قطرها R تحمل شحنة كثافتها السطحية غير منتظمة خاضعة للعلاقة :

$$\sigma = \sigma_0\left(1-\frac{R}{r}\right)$$

حيث r المسافة من مركز الصفيحة.

احسب الجهد والمجال عند أي نقطة تقع على المحور المتعامد مع الصفيحة والمار بمركزها.

١٦ - اسطوانتان متحدتا المحور جهد الاسطوانة الداخلية (400+) فولت ونصف قطرها 0.01 متر وجهد الاسطوانة الخارجية (400 -) فولت ونصف قطرها 0.1 متر. احسب

أ - نصف قطر السطوح الاسطوانية المتساوية الجهد عند القيم (200+) وصفر و (200 -) فولت.

ب - شدة المجال عند هذه السطوح الثلاثة وكذلك عند سطحي كل من الاسطوانتين.

١٧ - من العلاقة القائلة بأن المجال الكهربي هو سالب تدرج الجهد. أوجد المجال الكهربي إذا كان الجهد معطى بالعلاقة:

$$V = K / (x^2 + a^2)^{1/2} \quad , \quad V = K/r$$

حيث $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

كذلك احسب معادلة السطوح المتساوية الجهد في كلتا الحالتين وارسم رسما تخطيطيا مبينا عليه خطوط المجال والسطوح المتساوية الجهد.

١٨ - أوجد معادلة السطوح المتساوية الجهد لخط لا نهائي البعد مشحون بانتظام بكثافة خطية «شحنة وحدة الطول» λ كولوم / متر.

١٩ - خط مستقيم مشحون، λ وحدة شحنة الطول، يعطي جهدا يتناسب مع ln r حيث r المسافة من هذا الخط.

احسب ثابت التناسب مستخدما المعادلة $E = -dV/dr$.

٢٠ - منطقة في الفراغ تعطي جهدا كهربيا حسب المعادلة:

$$V(r) = V_0 \, e^{\mu/r}$$

حيث μ مقدار ثابت.

احسب المجال الكهربي في هذه المنطقة مستخدما المعادلات:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

٢١ ـ أي من معادلات الجهد التالية تحقق قانون بواسون :

a) $V = r\cos\theta + \Phi$

b) $V = r\cos\theta + 6$

c) $V = x^2 - y^2 - z^2$

٣

المكثفات والعوازل

Condensers and Dielectrics

● السعة ● المكثفات ● أشكال المكثفات ● توصيل المكثفات ● طاقة مكثف مشحون ● القوة بين لوحي المكثفة المستوية ● فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو مكثفين ● مقدمة عن المواد العازلة ● تأثير المجال الكهربي على المواد ● ثابت العزل ● العوازل ونظرية جاوس ● الاستقطاب والإزاحة الكهربية ● التأثرية الكهربية ● شدة العزل ● سعة مكثف مستوٍ وضع بين لوحيه عازلان مختلفان ● الشروط الحدودية ● معامل إزالة الاستقطاب ● المواد العازلة تلقائية الاستقطاب (فروكهربية) ● الإلكترومترات والقياسات الكهربية الساكنة ● مسائل.

(٣-١) السعة

Capacitance

تتم دراسة ظواهر الكهرباء الساكنة كميا (quantitatively) بمعرفة العلاقة بين الشحنات الواقعة على مجموعة من الموصلات والجهود الناتجة المعتمدة على الشكل الهندسي لهذه الموصلات.

فإذا أخذ موصل غير محدود الشكل ووضعت عليه شحنة معينة قدرها q فإن هذه الشحنة سوف توزع على سطح هذا الموصل بشكل متوازن (equilibrium). والجهد في أية نقطة في الحيز الذي يحيط بالموصل يمكن حسابه من المعادلة (٢١-٢) حيث:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣)$$

حيث σ كثافة الشحنة السطحية و dS عنصر السطح من الموصل وإذا علمت كيفية توزيع الشحنة على الجسم أمكن حساب جهد ذلك الجسم. وحسب ما ورد في البند (٢-٤) فإن الجهد على سطح الموصل الكروي المشحون بشحنة قدرها q ونصف قطره R تحدده المعادلة (٢-٤١) حيث:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

أو

$$q = 4\pi\varepsilon_0 RV = CV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢-٣)$$

حيـث

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣-٣)$$

وتسمى C بالسعة الكهربية للموصل (capacitance) وتتناسب تناسبا طرديا مع نصف القـطر. أي أن C تعتمد على أبعاد وشكل الموصل. وواضح من المعادلة (٣-٢) أنه يمكن زيادة الشحنـة الكهـربية على أي موصل فيرتفع تبعا لذلك جهده ولكن هذه الزيادة لابد أن تقف عند حد معين وإلا ارتفع الجهد إلى الدرجة التي يحدث عندها التفريغ الكهربي خلال الوسط المحيط بالموصل. ومن العوامل التي يمكن معها زيادة أو نقصان جهد موصل مشحون وجود جسم آخر بالقرب منه أو بعيدا عنه.

ووحدات السعة هي الفاراد (farad) في نظام الـ (S.I.) حيث:

$$1\ \text{farad (F)} = 1\ \text{C} / \text{V}$$

أما في النظام الجاووسي فوحدات السعة هي استات فاراد stat . farad

$$1\ \text{stat . F} = 1\ \text{stat C} / \text{stat . V}$$

والفاراد وحدة كبيرة للسعة لذلك فإن وحدات أصغر قيمة تستعمل كثيرا وهي الميكروفاراد والبيكوفاراد حيث

$$1\ \mu\text{F (microfarad)} = 10^{-6}\ \text{F}$$

$$1\ \text{pF (picofarad)} = 10^{-12}\ \text{F} = \mu\mu\text{F}$$

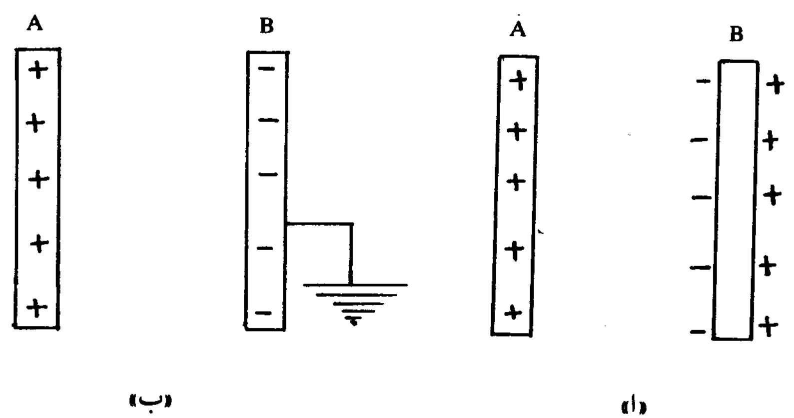
$$1\text{n F (nanofarad)} = 10^{-9}\ \text{F}$$

(٣-٢) المكثفــات

Condensers or Capacitors

إذا قرب موصلان مشحونان بعضهما من بعض فإن جهد كل موصل لا يتوقف فقط على الشحنة التي يحملها بل يتوقف أيضا على كمية الشحنة ونوعها الموجودة على الموصل المجاور وكذلك على شكل الموصل وحجمه ومكانه.

إذا فرض أن موصلا A معزولا وعليه شحنة موجبة فيكون جهد هذا اللوح هو الفـرق في الجهـد بينه وبين الأرض باعتبار الأرض موصلا للكهرباء، جهد الأرض يساوي الصفر، وإذا اقترب موصل آخر B معزول وغير مشحون من الموصل A فإن الموصل B يكتسب شحنة سالبة مقيدة على الوجه المقابل للموصل A وشحنة موجبة مطلقة على الوجه الآخر ونتيجة لذلك فإن جهد A يقل قليلا عن قيمته الأصلية وهذا يؤدي إلى زيادة سعته، أي أنه يحتاج إلى شحنة إضافية حتى يرتفع جهده إلى قيمته الأصلية.



شكل (١-٣): أ ـ الموصل A مشحون شحنة موجبة ثم اقترب منه موصل B غير مشحون فاكتسب شحنة سالبة مقيدة على الوجه المقابل للموصل A وشحنة موجبة مطلقة على الوجه الآخر.
ب ـ ثم وصل الموصل B بالأرض فتعادلت الشحنة الموجبة مع الأرضي.

وعند توصيل الموصل B بالأرض، شكل (١ب - ٣)، فإن إلكترونات تنتقل من الأرض لتعادل الشحنات الموجبة المطلقة على B وتكون النتيجة أن اللوح B يكتسب شحنة سالبة فقط وبهذا يصبح جهد الموصل A أقل بكثير من جهده الأصلي منفردا وبهذا تزداد سعته زيادة كبيرة ويحتاج بذلك إلى شحنة إضافية كبيرة حتى يعود الجهد إلى وضعه الأصلي وهذا يعني زيادة مقدرة الموصل A على تخزين الشحنات الكهربائية.

وتسمى المجموعة المكونة من موصل مشحون معزول وموصل آخر قريب متصل بالأرض بالمكثف وبصفة عامة فإن ***«أي مجموعة مكونة من موصلين مشحونين بشحنتين مختلفتين في النوع ومتساويتين في المقدار قريب بعضهما من بعض تسمى بالمكثف»***.

وتعرف سعة المكثف بالعلاقة التالية:

$$\text{سعة المكثف} = \frac{\text{شحنة أحد الموصلين}}{\text{فرق الجهد بينهما}}$$

$$C = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{q}{V_A - V_B} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤أ - ٣})$$

حيث V_A جهد لوح المكثف A و V_B جهد لوح المكثف B و V_{AB} فرق الجهد بين لوحي المكثف، ولذلك عادة يسمى بجهد المكثف ويرمز له بالرمز V وبذلك تكتب المعادلة (٤أ - ٣) بالصورة التالية:

$$C = \frac{q}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٤ب - ٣})$$

وتجدر الإشارة إلى أن المعادلة (٢-٣) تعتبر حالة خاصة للمعادلة (٤ب - ٣).

والمكثفات لها أهمية كبيرة في علم الفيزياء والهندسة الإلكترونية. فهي تستخدم كمخزن للطاقة الكهربية وكذلك في إحداث شرارة الاشتعال في السيارة وعملية التوليف أو الرنين في الراديو وتوليد الموجات الكهرومغناطيسية والتحكم الإلكتروني في الزمن وغير ذلك من التطبيقات العديدة.

(٣-٣) أشكال المكثفات
Forms of the Capacitors

(٣-٣-١) المكثف متوازي اللوحين Parallel plate capacitor

يتكون من لوحين موصلين متوازيين تفصلهما مسافة صغيرة بالنسبة لأبعادهما فإذا كانت S مساحة أي من السطحين و d المسافة بينهما و +q مقدار الشحنة على أحد اللوحين و −q الشحنة على اللوح الآخر [شكل (٣-٢)]. تكون قيمة شدة المجال E الذي يتجه من اللوح الموجب الشحنة إلى اللوح السالب الشحنة بين اللوحين [حسب المعادلة (١-٥٧)] هي:

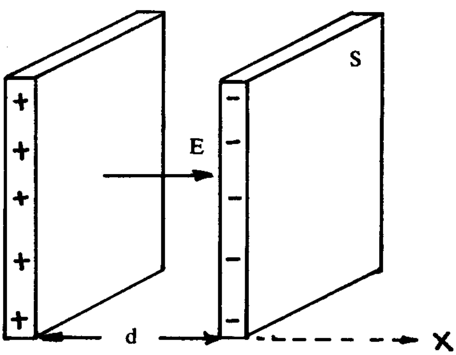
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

حيث σ الكثافة السطحية.

$$V = \int_0^d E\,dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 S} \qquad (٣-٥أ)$$

وتكون سعة المكثف المستوى هي:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (٣-٥ب)$$



شكل (٣-٢): مكثف مكون من لوحين موصلين متوازيين المسافة بينهما d ومساحة كل منهما S

وواضح من هاتين المعادلتين أنه كلما كانت المسافة بين لوحي المكثف صغيرة كان الجهد صغيرا. وتزيد تبعا لذلك سعة المكثف، كما تزيد السعة أيضا مع زيادة مساحة لوحي المكثف المستوى.

(٣-٣-٢) المكثف الكروي Spherical capacitor

يتكون من موصلين كرويين متحدين في المركز نصفا قطريهما a و b على الترتيب [شكل (٣-٣)] فإذا كانت شحنة الكرة الداخلية موجبة +q ووصلت الكرة الخارجية

بالأرض فإنه ينشأ عن هذا الترتيب شحنة تأثيرية على الكرة الخارجية q- وهي مساوية تماما للشحنة q+ بالقيمة المطلقة.

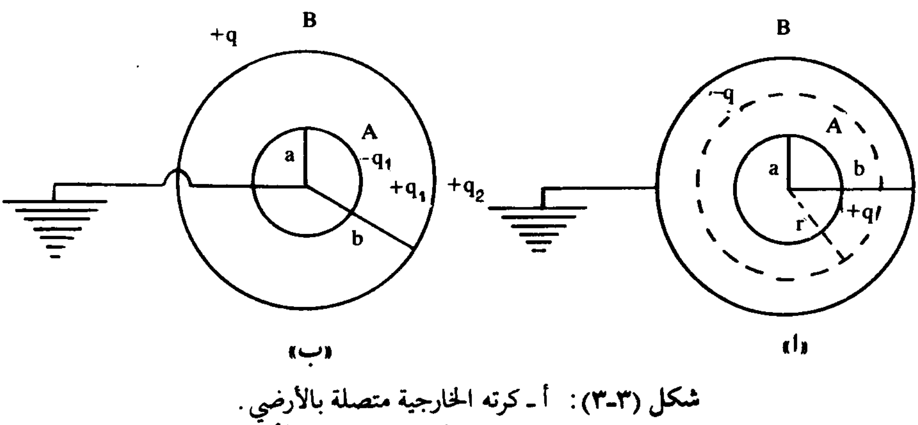
ويتطبيق قانون جاوس، نتصور سطحا جاوسيا نصف قطره r(a<r<b) فيكون:

$$\int E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وحيث إن خطوط القوى في هذه الحالة متعامدة على سطح جاوس فإن هذه المعادلة تصبح:

$$\therefore E\int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$



شكل (٣-٣): أ ـ كرته الخارجية متصلة بالأرضي.
ب ـ كرته الداخلية متصلة بالأرضي.

ويكون فرق الجهد بين الكرتين هو:

$$V = -\int_b^a E\,.\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

وتكون السعة لهذا المكثف هي:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} \qquad (٣\text{-}٦)$$

أما إذا كانت الشحنة على الكرة الخارجية $+q(B)$ والداخلية (A) متصلة بالأرض فإن الشحنة q تتوزع على كل من سطحي B. وإذا فُرض أن $+q_1$ هي الشحنة على السطح الداخلي للكرة B و q_2 بقية الشحنة على السطح الخارجي بحيث يكون: $q = q_1 + q_2$ ، كما في شكل (٣ب - ٣)، فإن الشحنة $+q_1$ الواقعة على السطح الداخلي من B تؤثر على السطح الخارجي من A بشحنة قدرها $-q_1$ والشحنة $+q_1$ تتسرب إلى الأرض. على هذا يتكون لدينا مكثفان أحدهما بين الكرة A والسطح الداخلي من B وسعته:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

والآخر بين السطح الخارجي من B والأرض وسعته حسب العلاقة (٣-٣) هي:

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 b$$

$$\therefore C = C_1 + C_2 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a} + b\right) = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{b^2}{b-a}\right) \qquad (٣\text{-}٧)$$

وهناك طريقة أخرى للوصول للنتيجة نفسها وهي:

يُفرض أن شحنة الكرة الخارجية هي $+q$ وبذلك تتولد شحنة تأثيرية $-q'$ تظل مقيدة على سطح الكرة الداخلية وأما الشحنة التأثيرية المطلقة فتتسرب إلى الأرض.

وحيث إن جهد الكرة الداخلية يساوي صفرا لاتصالها بالأرض.

$$\therefore \text{zero} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{q'}{a}\right)$$

$$\therefore q' = -q\,\frac{a}{b}$$

وجهد الكرة الخارجية هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{q'}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} - \frac{qa}{b^2}\right)$$

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{b^2}\right)$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{b^2}{b-a}\right)$$

(٣-٣-٣) المكثف الاسطواني Cylindrical capacitor

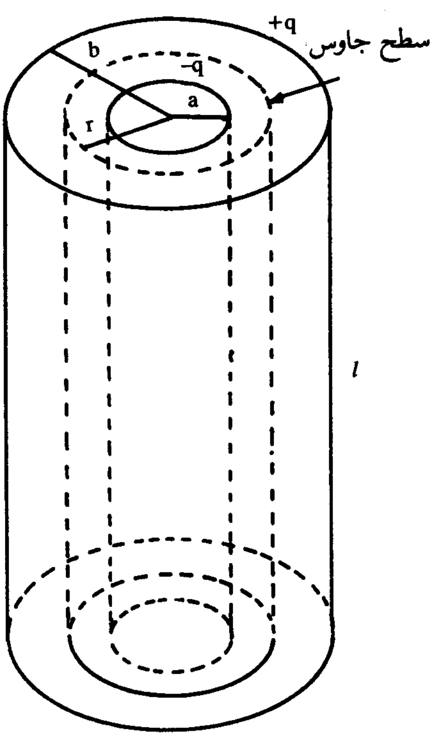
يتكون من اسطوانتين متحدتي المركز نصفا قطريهما a و b على الترتيب وطول كل منهما l ونفرض أن الشحنة على الاسطوانة الداخلية q− وعلى الاسطوانة الخارجية q+ [شكل (٤-٣)].

ولنفرض سطحا جاوسيا اسطوانيا نصف قطره r وطوله l ففي هذه الحالة يكون لدينا:

$$\int E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وحيث إن خطوط القوى متعامدة على سطح جاوس فإنه يمكن كتابة هذه المعادلة كالتالي:

$$\therefore E\int_0^{2\pi rl} dS = E\,2\pi rl = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



شكل (٤-٣): مكثف اسطواني.

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{q}{l}$$

$$\therefore V = -\int_b^a E\,dr = \int_a^b E\,dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\ln\frac{b}{a}$$

وبذلك فإن سعة المكثف الاسطواني هي :

$$\therefore C = \frac{q}{V} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln(b/a)} \quad \cdots\cdots \quad (٣\text{-}٨)$$

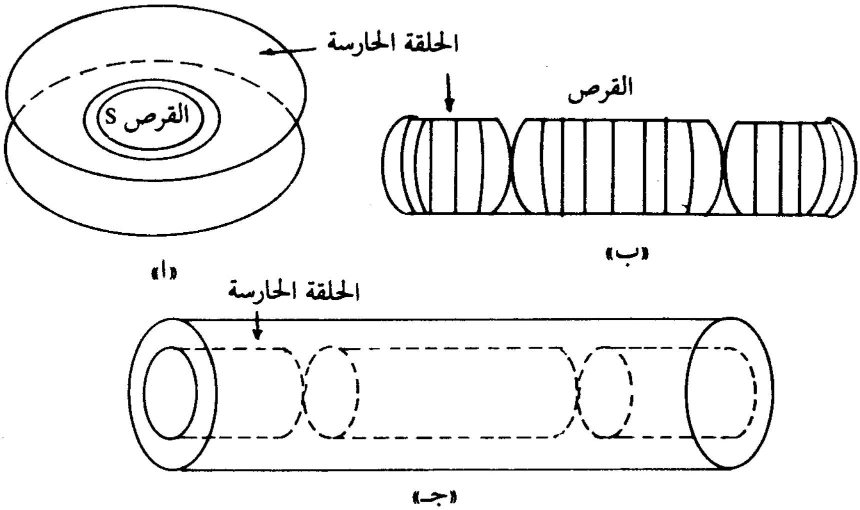
ونستنتج من المعادلات (٥ب ـ ٣)، (٧ـ٣) و (٨ـ٣) أن السعة الكهربية تعتمد على الشكل الهندسي لنوع المكثف.

(٣ـ٣ـ٤) المكثف ذو الحلقة الحارسة Guard ring capacitor

حسبت سعة المكثف المستوي السابق ذكره دون أن نأخذ بعين الاعتبار تأثير حواف المكثف على خطوط القوى وافترض أنها خطوط مستقيمة ومتوازية ولذلك فالمعادلات السابقة مقربة لأن خطوط القوى عند حواف المكثف غير منتظمة ولضمان انتظام المجال بين لوحي المكثف استعمل العالم لورد كلفن (Lord Kelvin) صفيحة دائرية على شكل قرص يحيط به حلقة دائرية تسمى بالحلقة الحارسة (guard ring) بحيث يكون مجموع مساحتيهما يساوي مساحة الصفيحة الدائرية الأخرى للمكثف [شكل (٥أ ـ ٣)] كما يوضح شكل (٥ب ـ ٣) مقطعا عرضيا لهذا المكثف.

ويشحن القرص والحلقة دائما بالجهد نفسه ويكون تفريغ القرص منفصلا عن الحلقة بحيث يمكن قياس شحنة القرص بصورة مستقلة ويوضح الشكل (٥ب ـ ٣) أن التهدب يصبح خارج حواف الحلقة الحارسة ويكون بذلك المجال E والكثافة

السطحية σ منتظمتين خلال مساحة القرص. كما تنطبق هذه الحالة على المكثف الاسطواني حيث يوضح الشكل (٥جـ ـ ٣) الحلقة الحارسة لهذا المكثف.



شكل (٥-٣): أ و ب ـ مكثف مستوى دائري ذو حلقة حارسة.
جـ ـ مكثف اسطواني ذو حلقة حارسة.

مثال (١-٣)

مكثف متوازي اللوحين مصنوع من مادة الألومنيوم، المسافة بين لوحيه 1mm ماذا يجب أن تكون مساحة (S) كل من اللوحين كي تكون سعته كالآتي:

.1 pF و 1 μF و 1 farad

الحل

$$\because S = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore S_1 = \frac{(10^{-12})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$S_2 = \frac{(10^{-6})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{2}\,m^2$$

$$S_3 = \frac{(1)(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{8}\,m^2$$

وواضح أن قيمة S_1 معقولة وحجم المكثف واقعيا بينما قيمة S_2 كبيرة بحيث لو فرض أن المكثف على شكل مربع فإن قيمة طول ضلعه تساوي 10.6m أما في الحالة الثالثة فإن قيمة S_3 غير معقولة ومستحيلة التطبيق، حيث يبلغ طول ضلع المكثف [لو كان مربعا] 1.06×10^4m أي حوالي عشرة كيلومترات أي يمثل المسافة بين موقع جامعة الملك سعود الجديد والقديم. ولذلك فإن قيمة السعات دائما صغيرة وفي حدود الـ pF أو جزء من الـ μF.

مـــثـــال (٢-٣)

ما هي القيمة العظمى للشحنة الواقعة على مكثف سعته $0.002\,\mu F$ ومساحة كل من لوحيه $100cm^2$ دون أن يحدث تأين للفراغ. علما بأن التأين يحدث إذا زادت قيمة المجال الكهربي عن $30000 V/cm$.

الحـــــل

إذا فرض أن q_{max} هي القيمة العظمى للشحنة و V_{max} هي الجهد المسلط بين طرفي المكثف الذي سعته C ومساحة كل من لوحيه S والمسافة بينهما d.

$$\therefore q_{max} = CV_{max}$$

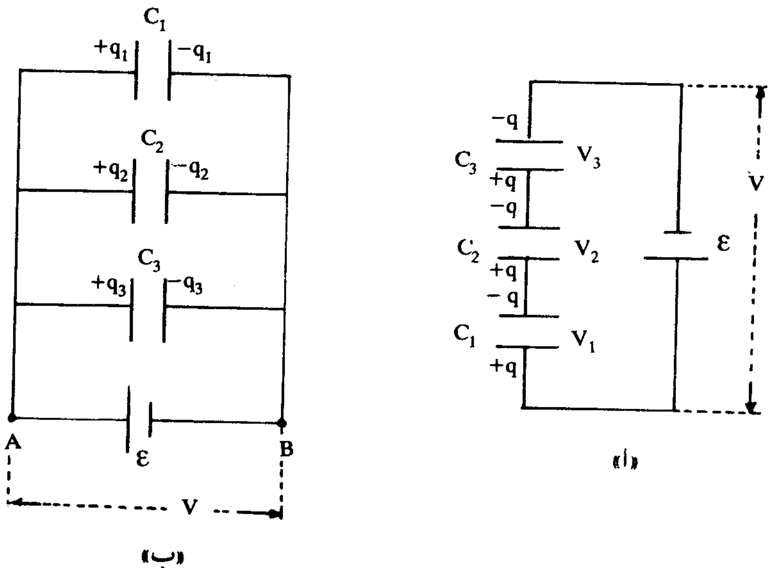
$$\because E_{max} = \frac{V_{max}}{d} \quad \& \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$\begin{aligned} \therefore q_{max} &= E_{max}\,\varepsilon_0 S \\ &= (3 \times 10^6)(8.85 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^{-2}) \\ &= 2.66 \times 10^{-7}\,C \end{aligned}$$

(٣-٤) توصيل المكثفات

Connection of Capacitors

يمكن توصيل المكثفات بعدة طرق مختلفة للحصول على سعات أكبر أو أصغر من القيم الأساسية لكل مكثف على حده. والقيمة الجديدة لسعة المكثفات المتصلة تمثل السعة المكافئة لها حسب نظام توصيل الدائرة.



شكل (٦-٣): ا ـ ثلاث مكثفات C_1 ، C_2 ، C_3 متصلة على التوالي.
ب ـ متصلة على التوازي.

(٣-٤-١) توصيل المكثفات على التوالي Capacitors in series

يوضح شكل (٦أ ـ ٣) ثلاث مكثفات سعاتها C_1 , C_2 , C_3 متصلة على التوالي كما يوضح الشكل أيضا توزيع الشحنة نفسها q على ألواح المكثفات الثلاثة والجهود V_1 , V_2 , V_3 على التوالي.

فإذا كان فرق الجهد الكلي بين طرفي المجموعة بين النهايتين A و B هو V فإنه من الواضح أن:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

ولـكـن:

$$V = \frac{q}{C}, \quad V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3} \quad ,.....$$

حيث C هي السعة المكافئة للمجموعة.

$$\therefore \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + ... + \frac{q}{C_n}$$

$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \quad (٣\text{-}٩)$$

ويلاحظ أن السعة الكلية دائما أقل من سعة أي من المكثفات المتصلة على التوالي.

(٣-٤-٢) توصيل المكثفات على التوازي Capacitors in parallel

وفي هذه الحالة فإن فرق الجهد بين لوحي كل من المكثفات له القيمة نفسها V. والشحنة الكلية q عند النقطتين A و B تساوي مجموع الشحنات التي على المكثفات.

فإذا كانت C هي السعة المكافئة و C_1 و C_2 و C_3 سعات المكثفات المتصلة على التوازي كما في شكل (٦ب - ٣) وكانت الشحنة على هذه المكثفات هي q_1 ، q_2 ، q_3 على الترتيب فإن:

$$q = CV, \quad q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V, \quad q_3 = C_3V$$

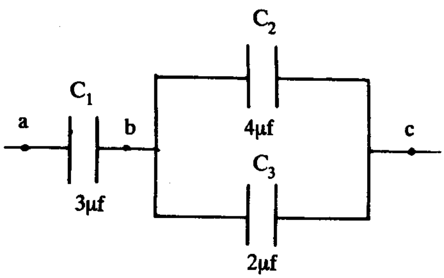
$$\because q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\therefore CV = C_1V + C_2V + C_3V = (C_1 + C_2 + C_3)\,V$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad .. \quad (٣\text{-}١٠)$$

أي أنـه إذا وصلت مجموعة من المكثفات على التوازي فإنه يمكن استبدالها بمكثف واحد سعته هي مجموع سعات مكثفات المجموعة.

مـثـال (٣-٣)



في الـدائـرة التالية احسب الشحنة على كل مكثف وكذلك احسب الجهد عند النقطة b علما بأن الجهد عند a يساوي 1200 فولت بينما النقطة C متصلة بالأرض.

الحـــل

المكثفان C_2 و C_3 متصلان على التوازي:

التوازي:

$$\therefore \quad C = C_2 + C_3 = 4 + 2 = 6\,\mu F$$

هذه السعة المكافئة متصلة على التوالي مع C_1 وبذلك تكون السعة المكافئة للمجموعة C_0 هي كالتالي:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore C_0 = 2\mu F$$

وتكون الشحنة على هذه المكثفة المكافئة هي:

$$Q = C_0 V = 2 \times 10^{-6} \times 1200 = 2.4 \times 10^{-3}\,C$$

وهذه الشحنة Q تساوي الشحنة Q_1 على المكثف C_1 وتساوي أيضا مجموع الشحنتين للمكثفين C_2 و C_3.

$$\therefore V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 800\,V$$

$$\therefore V_{ab} = V_a - V_b = 800\,V, \qquad \because V_a = 1200\,V$$

$$\therefore V_b = 400\,V$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 400 - 0 = 400\,V$$

وبذلك فإن:

$$Q_2 = C_2 V_{bc} = 4 \times 10^{-6} \times 400 = 1.6 \times 10^{-3}\,C$$

$$Q_3 = C_3 V_{bc} = 2 \times 10^{-6} \times 400 = 0.8 \times 10^{-3}\,C$$

$$\therefore Q_2 + Q_3 = (1.6 + 0.8) \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-3}\,C$$

مـثـــال (٤-٣)

ا) احسب السعة المكافئة لمجموعة المكثفات المتصلة و الواردة في الشكل (أ) .

ب) احسب شحنة وجهد كل مكثف إذا كان فرق الجهد بين النقطتين a و b هو .10V

الحـــــل

$$C_{gh}=3+5=8\mu F \ \& \ C_{ij}=20+10=30\mu F$$

وتصبح الدائرة كما في الشكل (ب)

$$\frac{1}{C_{eh}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8+4+3}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore C_{eh} = \frac{8}{5} = 1.6\,\mu C$$

$$\frac{1}{C_{il}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1+3+6}{30} = \frac{10}{30}$$

$$\therefore C_{il} = \frac{30}{10} = 3\,\mu C$$

وتصبح الدائرة كما في شكل (جـ)

$$C_{ab}=C_{eh}+C_{il}=1.6+3=4.6\mu F$$

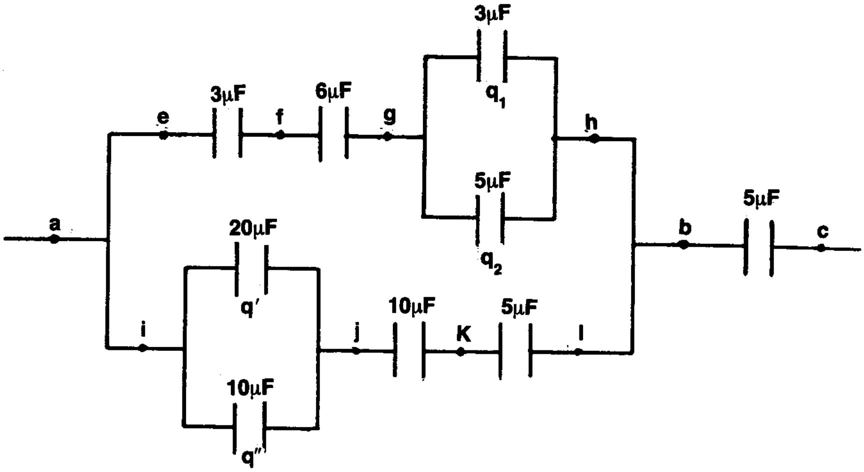
وتصبح الدائرة كما في شكل (د)

$$\frac{1}{C_{ac}} = \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5}$$

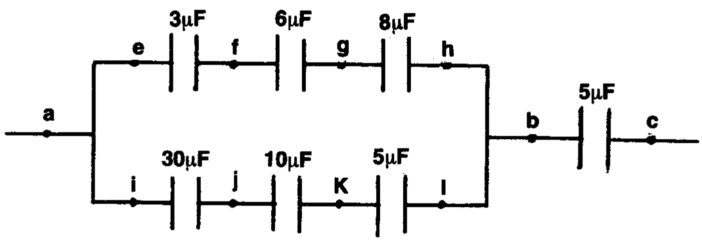
$$\therefore C_{ac} = 2.4\mu F$$

وتمثل هذه القيمة السعة المكافئة للدائرة (أ)، وتصبح الدائرة كما شكل (هـ) .

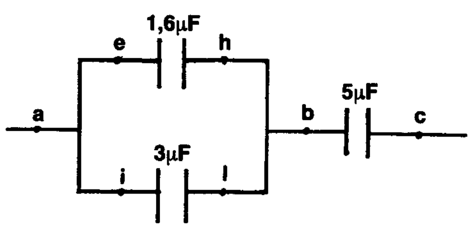
$$q_{ab}=C_{ab}\times V_{ab} = 4.6 \times 10^{-6} \times 10 = 4.6 \times 10^{-5}\,C$$



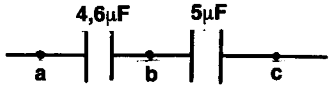
(أ)



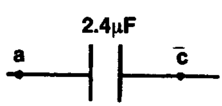
(ب)



(جـ)



(د)



(هـ)

تابع للمثال (٤-٣)

وحسب خاصية التوصيل على التوالي فهذه الشحنة نفسها بين طرفي المكثف الواقع بين النقطتين b و c والمكثف المكافىء بين النقطتين a و c.

$$V_{bc} = \frac{q_{ab}}{C_{bc}}$$

$$V_{bc} = \frac{4.6\times10^{-5}}{5\times10^{-6}} = 9.2\ V$$

$$V_{ac} = \frac{4.6\times10^{-5}}{2.4\times10^{-6}} = 19.2\ V$$

$$q_{eh}=C_{eh}\times V_{ab}=1.6\times10^{-6}\times10=1.6\times10^{-5}C$$

$$q_{il}=C_{il}\times V_{ab}=3\times10^{-6}\times10=3\times10^{-5}C$$

وواضح أن $q_{ab} = q_{eh} + q_{il}$ ، وشحنة كل مكثف متصل على التوالي في الفرع eh هي q_{eh} وكذلك شحنة كل مكثف متصل على التوالي في الفرع il هي q_{il}.

$$V_{ef}=\frac{1.6\times10^{-5}}{3\times10^{-6}}=\frac{16}{3}=5.33\ V$$

$$V_{fg}=\frac{1.6\times10^{-5}}{6\times10^{-6}}=\frac{16}{6}=2.67\ V$$

$$V_{gh}=\frac{1.6\times10^{-5}}{8\times10^{-6}}=2V$$

$$\therefore q_1=3\times10^{-6}\times2=6\times10^{-6}C$$

$$\therefore q_2=5\times10^{-6}\times2=10\times10^{-6}C$$

$$V_{jk}=\frac{3\times10^{-5}}{10\times10^{-6}}=3V$$

$$V_{kl}=\frac{3\times10^{-5}}{5\times10^{-6}}=6V$$

$$V_{il}=\frac{3\times10^{-5}}{30\times10^{-6}}=1V$$

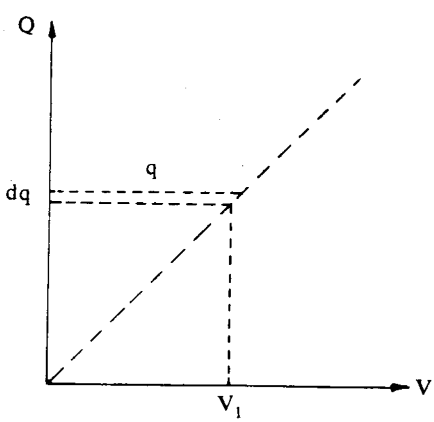
$$\therefore q'=20\times10^{-6}\times1=20\times10^{-6}C$$

$$\therefore q''=10\times10^{-6}\times1=10\times10^{-6}C$$

(٣-٥) طـاقة مكثف مشحون

Energy of a Charged Capacitor

عنـد تقـريب شحنـات من بعضهـا يجب بذل شغل ضد قوى التنافر الحاصلة بين الشحنات وهذا الشغل يختزن على شكل جهد.



شكل (٧-٣): العلاقة بين شحنة المكثف Q والجهد المسلط عليه.

وإذا فرض أن مكثفا ما قد اكتسب شحنـة قدرهـا q عند توصيله ببطارية فإن هذه الشحنـة يكتسبهـا عن طريق مرور الإلكترونات الحرة من الطرف الموجب إلى الطرف السالب للمكثف. وإذا افترض أن شحنـة المكثف تتنـاسب طرديا مع فرق الجهد بين طرفيه، أي أن العلاقة بين q و V تكون خطا مستقيما كما في شكل (٧-٣) فإنه عنـد وصـول الجهد بين طرفي المكثف إلى القيمة V_1 تكون شحنة المكثف قد وصلت إلى q_1 . . . الـخ وعـلى هذا فإن مقـدار الشغل المبذول لنقل شحنة قدرها dq من أحد الطرفين إلى الآخر يساوي:

$$dW = V_1 \, dq$$

وعند الشحنة q يحدد الجهد بالعلاقة:

$$q = C V_1$$

$$dW = \frac{1}{C} q dq \qquad \therefore W = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

وهذا الشغل المبذول يحفظ على شكل طاقة وضع U أي أن:

$$\therefore U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٣\text{-}١١)$$

$$\because V = \frac{Q}{C}$$

$$\therefore U = \frac{1}{2}QV \quad \text{or} \quad U = \frac{1}{2}CV^2 \dots \quad (٣\text{-}١٢)$$

وإذا كان المكثف متوازي اللوحين وكانت S مساحة اللوح و x المسافة بين اللوحين و σ الكثافة السطحية فإن: $\sigma = Q/S$ و $C = \varepsilon_0 S/x$

$$\therefore U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Sx}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S} \quad \dots\dots \quad (١٣\text{أ} - ٣)$$

وبما أن حجم الفراغ الذي فيه المجال الكهربي هو $V = Sx$ فإن المعادلة (١٣أ - ٣) تصبح كالتالي:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V \quad \dots\dots \quad (١٣\text{ب} - ٣)$$

والتي يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV \quad \dots\dots \quad (١٣\text{جـ} - ٣)$$

حيث dV عنصر الحجم، والتكامل على كل الفراغ.

وهذه المعادلة هي المعادلة نفسها (٥٨-٢). علما بأن $\sigma = \varepsilon_0 E$
أما الطاقة المختزنة في وحدة الحجم، حسب المعادلة (١٣ب - ٣) فهي:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad \dots\dots \quad (٣\text{-}١٤)$$

وهي المعادلة (٥٩-٢) نفسها.

(٣ – ٦)القوة بين لوحي المكثف المستوي
Force Between the Plates of a Capacitor

تتجاذب الشحنات السالبة والموجبة الموجودة على لوحي مكثف بقوة من الممكن حسابها بتطبيق قانون كولوم على عنصري شحنتين صغيرتين على اللوحين المتقابلين ثم يجرى بعـد ذلك تكاملان مزدوجان على كل من اللوحين، ويكون اللوحان في حالة توازن عندما تتعادل القوى الكهربية المحسوبة مع قوى ميكانيكية مصدرها القواعد المثبتة في حالة المكثف الهوائي، والعازل في حالة المكثف الورقي.

والقوة الكهربية بين الشحنات الموجودة على لوحي المكثف لا تتغير قيمتها إذا تغير نوع العازل بين اللوحين: فإذا كان بين اللوحين عازل فإن هذا العازل يجهد بواسطة المجال، وتعرف هذه الظاهرة بالانضغاط الكهربي (electrostriction) وينتج عن إجهاد العازل قوة ميكانيكية تؤثر على اللوحين اللذين يصبحان في حالة توازن نتيجة لتأثير عدة قوى بعضها كهربية والأخرى ميكانيكية.

فإذا كانت شحنة كل من اللوحين بعد شحنهما Q ، وكانت S مساحة كل من اللوحـين و x المسافة بينهما، وكانت F القوة التي يؤثر بها كل من الحاملين على اللوح المناظر، فإن الشغل dW الذي يبذل عند زيادة ضئيلة للمسافة بين اللوحين قدرها dx يساوي:

$$dW = -Fdx \qquad \text{........} \quad (٣\text{-}١٥)$$

وتعني الإشـارة السالبة أن القوة التي سببت في زيادة المسافة بين اللوحين بمقدار dx تعـاكس وتساوي القوة الكهربية بين اللوحين. وحيث إن الإزاحة dx تغير من قيمة الطاقة المخزنة بمقدار dU فإن القوة الكهربي يمكن معرفتها من المعادلة:

$$-Fdx = dU \qquad \text{........} \quad (٣\text{-}١٦)$$

ومعروف من المعادلة (٣-١٣) أنه عندما تكون الألواح معزولة تكون Q ثابتة وتكون الطاقة المختزنة:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S}$$

والتغيير الحادث نتيجة الانتقال مسافة صغيرة dx هو:

$$dU = \frac{1}{2}\frac{Q^2 dx}{\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}١٧)$$

وبمساواة (٣-١٦) و (٣-١٧) يكون:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}١٨)$$

(٣-٧) فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو مكثفين

Loss of Energy on Sharing of Charges between Two Conductors or Condensers

إذا فرض أن موصلا، أو لوح مكثف شحنته موجبة، سعته C_1 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_1 وصل بموصل آخر، أو بلوح مكثف آخر شحنته موجبة، سعته C_2 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_2 فإنهما سوف يتقاسمان الشحنة بحيث تصبح جميع نقط كل من الموصلين واقعة تحت الجهد نفسه، [بند (٢-٥)]. فإذا كان $V_1 > V_2$ وكان V هو الجهد المشترك فإن:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = V(C_1 + C_2)$$

$$\therefore V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

وتكون الطاقة قبل التوصيل هي:

$$\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

والطاقة بعد التوصيل هي :

$$\frac{1}{2}(C_1+C_2)V^2 = \frac{1}{2}\frac{(C_1V_1+C_2V_2)^2}{C_1+C_2}$$

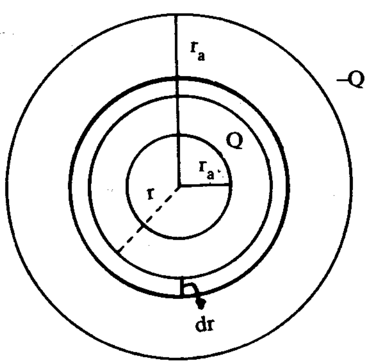
ولذلك فالفرق في الطاقة قبل وبعد التوصيل هي :

$$\frac{1}{2}C_1V_1^2+\frac{1}{2}C_2V_2^2-\frac{1}{2}\frac{(C_1V_1+C_2V_2)^2}{C_1+C_2}=\frac{C_1C_2(V_1-V_2)^2}{2(C_1+C_2)} \quad (٣\text{-}١٩)$$

وهذه الكمية موجبة ما لم يكن $V_1 = V_2$ ولذلك فالطاقة الكلية قبل التوصيل أكبر من الطاقة بعد التوصيل.

وبتعبير آخر إنه إذا كان $V_1 \neq V_2$ فلابد من فقد للطاقة نتيجة لتقاسم الشحنات ويظهر هذا الفرق على هيئة شرارة أو ارتفاع في درجة حرارة الموصلين المتصلين أو المكثفين المتصلين.

مثال (٣-٥)



مكثف كروي يتألف من كرة داخلية نصف قطرها r_a وكرة خارجية نصف قطرها r_b كما في الشكل المجاور.

فإذا كان المكثف يحمل شحنة قدرها Q فاحسب الطاقة الكلية (total energy) بالطريقتين التاليتين:

أ - باستخدام المعادلة (٣-١١).

ب - باستخدام المعادلة (٢-٥٨).

الحل

تنص المعادلة (٣-١١) على: $U=\frac{1}{2C}Q^2$. ولكن من المعروف أن سعة المكثف المكثف الكروي تعطى بالمعادلة (٣-٦).

$$\therefore U = \frac{Q^2(r_b - r_a)}{8\pi\varepsilon_0 r_a r_b}$$

وهو المطلوب «أ». أما المعادلة (٢-٥٨) فتنص على:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV$$

حيث E هو قيمة المجال بين الكرتين وقيمته هي [حسب ما ورد في البند (٢-١١ ب)] $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ حيث يمثل r نصف قطر سطح جاوس.
أما dV فهو عنصر الحجم الذي قيمة المجال فيه هي E والتكامل على كل الفراغ بين الكرتين. فإذا أخذت شريحة كروية سمكها dr ونصف قطرها r فيكون حجمها: $dV = 4\pi r^2 dr$ وبالتعويض في المعادلة (٢-٥٨) نحصل على:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2(r_b - r_a)}{8\pi\varepsilon_0 r_a r_b}$$

مثال (٦-٣)

وصل مكثفان على التوازي أولهما (A) وسعته $20\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 1000 V والآخر (B) وسعته $10\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 100 V. احسب الطاقة الكلية قبل التوصيل. ومقدار فقدان الطاقة بعد التوصيل والجهد العام (common potential).

الحل

$$q_A = C_1 V_1 = \frac{20}{10^6} \times 1000 = 0.02\,C$$

$$q_B = C_2 V_2 = \frac{10}{10^6} \times 100 = 0.001\,C$$

أما السعة الكلية، C، فهي:

$$C = \frac{30}{10^6} F$$

وتكون الطاقة الكلية قبل التوصيل هي :

$$U_B = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

$$\therefore U_B = \frac{1}{2} \frac{20}{10^6} \times (1000)^2 + \frac{1}{2} \frac{10}{10^6} \times (100)^2 = 10.05 \text{ J}$$

أما الطاقة بعد التوصيل فهي :

$$U_A = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(0.021)^2}{30 \times 10^{-6}} = 7.55 \text{ J}$$

وبذلك فإن الفقد في الطاقة هو:

$$U = U_B - U_A = 2.7 \text{ J}$$

أما الجهد العام فهو:

$$V = \frac{q}{C}$$

$$\therefore V = \frac{0.021}{30 \times 10^{-6}} = 700 \text{ V}$$

مـثـال (٧-٣)

مكثفان متوازيا اللوحين مساحة كل لوح للمكثف الأول $10 cm^2$ والثاني $20 cm^2$ والمسافة بين كل لوح لكل مكثف 1mm شحنا حتى أصبحت القوة بين لوحي كل مكثف 1gm. weight وصلا على التوازي .

ما هي الطاقة الحرارية المفقودة.

الحـــل

$$C_1 = \frac{10}{4\pi \times 0.1} = \frac{100}{4\pi} \text{ S.F} \quad , \quad C_2 = \frac{20}{4\pi \times 0.1} = \frac{200}{4\pi} \text{ S.F (C.G.S.)}$$

وإذا وصلا على التوازي يكون :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{300}{4\pi} S \,.\, F$$

وتكون القوة بالنسبة للمكثف الأول حسب المعادلة (١٨-٣) هي :

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} (\text{S.I.}) \quad \text{or} \quad F = \frac{2\pi Q^2}{S} (\text{C.G.S})$$

$$\therefore 980 = \frac{2\pi Q_1^2}{10} \qquad \therefore Q_1 = \left(\frac{980 \times 10}{2\pi}\right)^{1/2}$$

وبالنسبة للمكثف الثاني :

$$\therefore 980 = \frac{2\pi Q_2^2}{20} \qquad \therefore Q_2 = \left(\frac{980 \times 20}{2\pi}\right)^{1/2}$$

$$\therefore Q = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{980 \times 10}{2\pi}\right)^{1/2} \left(1 + \sqrt{2}\right)$$

∴ الطــاقــة قبـل التوصيل =

$$\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = 196 \text{ ergs}$$

والطــاقــة بـعـد التوصيل =

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 190.4 \text{ ergs}$$

∴ الفقد في الطــاقة =

$$196 - 190.4 = 5.6 \text{ ergs}$$

والتي تظهر على هيئة حرارة قيمتها :

$$\frac{W}{J} = \frac{5.6}{4.2 \times 10^7} = 1.33 \times 10^{-7} \text{ Calories}$$

حيث J ثابت جـول .

(٣-٨) مقدمة عن المواد العازلة

Introduction of Dielectrics

تنقسم المواد من حيث توصيلها للكهرباء إلى ثلاثة أقسام هي :

أ ـ المواد الموصلة (conductors)

ب ـ المواد العازلة (insulators or dielectrics)

جـ ـ المواد شبه الموصلة (semiconductors)

وجاء هذا التقسيم نتيجة لوضع الالكترونات الخارجية التي تحتل القشرة الأخيرة لذرات المادة، والتي تسمى بإلكترونات التكافؤ (valence electrons).

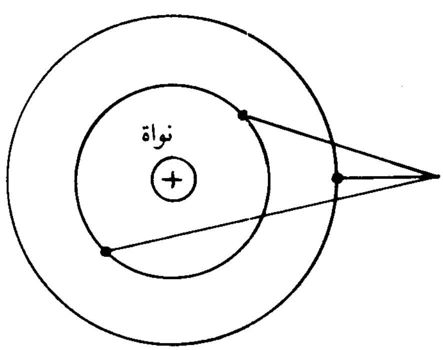
تتكون الذرة من نواة، تحتوي على بروتونات ونيوترونات، وإلكترونات تتحرك في قشر (shell) كروية معينة. تحتوي كل قشرة على عدد معين من الإلكترونات وأن كل قشرة تنقسم إلى قشيرات (subshell) كما في الشكل (٨-٣).

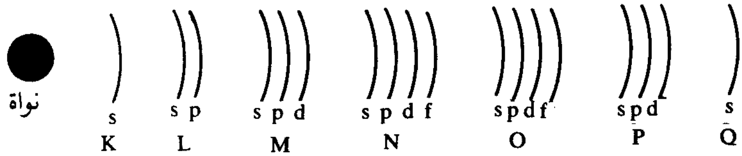
ويوضح الجدول (١-٣) توزيع الإلكترونات في الذرات حيث تحتوي كل ذرة على سبع قشر يرمز لها بالرموز K,L,M, N, O, P & Q وكل قشرة تنقسم إلى قشيرات يرمز لها بالرموز s,p,d&f فالقشرة K مثلا تحتوي على قشيرة s والقشرة L تحتوي على قشيرتين هما s, p والقشرة M تحتوي على ثلاث قشيرات هي s, p, d وهكذا.

ويوضح الجدول أيضا توزيع القشيرات لكل قشرة رئيسة وعدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشرة كما حددها العالم باولي (W.Pouli) الذي أوضح أن لكل قشرة عددا معينا من الإلكترونات التي تستطيع أن تشغلها ولا يمكن أن تزيد عليه. فالقشرة الأولى تتشبع بإلكترونين فقط والثانية بثمانية إلكترونات والثالثة بثمانية عشر إلكترونا . . . الخ، كما يوضح الجدول (١-٣) التوزيعات المحتملة للإلكترونات حول النواة للعناصر.

جدول (١-٣): التوزيعات المحتملة للإلكترونات حول النواة

رمز القشرة	K	L		M			N				O				P			Q
رمز القشيرة	s	s	p	s	p	d	s	p	d	f	s	p	d	f	s	p	d	s
عدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشــيرة	2	2	6	2	6	10	2	5	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2
عدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشرة	2	8		18			32				32				18			2





شكل (٨-٣): توزيع الإلكترونات حول النواة.

وحيث إن كل الإلكترونات في جميع الذرات متشابهة تماما في الكتلة والشحنة الكهربية وكذلك الحال بالنسبة للبروتونات وباقي محتويات الذرة فإن ما يميز عنصرا عن عنصر آخر هو العدد الذري.

وتعتبر **الإلكترونات الخارجية التي تحتل القشرة الأخيرة في الذرة مسئولة عن الخواص الكهربية والكيميائة للمادة وذلك لأن هذه الإلكترونات تكون بعيدة عن سلطان النواة عليها** ولذلك فهي واهية الترابط معها وبالتالي لديها الاستعداد لترك مكانها والشرود خارج ذرتها الأصلية والالتحاق بمكان آخر في ذرة أخرى. ولذلك فإن هذه الإلكترونات تعتبر حرة ومستعدة لترك ذراتها بسهولة. ومواد مثل هذه الذرات تكون موصلة للشحنات الكهربية. أما إذا كانت الإلكترونات مترابطة مع أنويتها ومن الصعب أن تترك مكانها فإن هذه المادة تصبح عازلة للكهرباء. وتتفاوت درجة التوصيل والعزل بتفاوت درجة ارتباط الإلكترونات الخارجية في الذرة مع أنويتها. وهنالك عناصر لا يمكن تصنيفها مع الموصلات لأنها رديئة التوصيل ولا يمكن في الوقت نفسه تصنيفها مع العوازل لأنه يمكن أن تنشط هذه المواد وتصبح موصلة تحت ظروف معينة مثل هذه المواد تسمى بأشباه الموصلات.

وتميل الذرة دائما إلى الوصول إلى حالة الاستقرار ولا تصل إلى هذه الحالة إلا بملء مدارها الأخير إن كان ناقصا بعض الإلكترونات، أو التخلي عن إلكترونات هذا المدار. فذرة **الهيدروجين** مثلا يدور في قشرتها الوحيدة إلكترون واحد، بينما يلزم إلكترونان لإشباع هذا المدار. لذلك تعتبر ذرة الهيدروجين نشطة تسعى دائما لضم إلكترون آخر إلى مدارها أو التخلي عنه إلى ذرة أخرى. ويحدث أن تتحد ذرتان من الهيدروجين الواحدة مع الأخرى فيشترك إلكترون الذرة الأولى في الدوران حول الذرة الثانية. وكذلك يشترك إلكترون الذرة الثانية في الدوران حول الذرة الأولى، وترتبط الذرتان على هذا الشكل ترابطا قويا مستقرا يسمى **الترابط الإسهامي** (covalent bonding) أو يسمى بالرابطة المشتركة.

وإذا أخذت ذرة **الفلورين** (Fluorine) حيث العدد الذري (atomic number) يساوي تسعة أي أن القشرة الأخيرة (*l*) تحوي سبعة إلكترونات في حين أن هذه القشرة

تستوعب ثمانية إلكترونات، لذلك تحتاج هذه القشرة إلى إلكترون واحد لكي يصل إلى حالة الإشباع والاستقرار وبالتالي فإن هذه الذرة تحاول دائما ضم إلكترون جديد إليها.

وإذا أخذت ذرة **الليثيوم** نجد أن عددها الذري ثلاثة: اثنان في القشرة الأولى والإلكترون الثالث في القشرة الثانية (L) التي تتسع لثمانية إلكترونات. لذلك فإن ذرة الليثيوم غير مستقرة ومن الصعب أن تصل إلى حالة الاستقرار بضم سبعة إلكترونات أخرى، ومن الأسهل أن تتخلص من الإلكترون الوحيد الذي يوجد في هذه القشرة.

فإذا أتيح لذرتي الفلورين والليثيوم، المذكورتين، الاتحاد فيتخلى الليثيوم عن الإلكترون الوحيد ويستولي عليه الفلورين الذي ينقصه إلكترون واحد في قشرته الثانية وترتبط الذرتان معاً لتكونا فلور الليثيوم وتصلان إلى حالة الاستقرار، يسمى هذا الترابط **بالترابط الإيوني** (ionic bonding) وذلك لكسب الفلورين إلكترونا سالبا وأصبحت بذلك ذرته إيونا سالبا أما بالنسبة لليثيوم فأصبحت ذرته إيونا موجبا وذلك لفقد الذرة إلكترونا سالبا (Li^+F^-) ويسمى هذا الترابط أيضا برابطة التكافؤ الكهربي (electrovalent bond) وإيون الفلورين وإيون الليثيوم يكونان ما يسمى بجزيء (molecule) الفلور والليثيوم. والترابط نفسه يحصل بين ذرتي الصوديوم Na «عدده الذري 11» أي أن قشرته الأخيرة K تحتوي على إلكترون واحد والكلورين Cl «عدده الذري 17» أي أن قشرته الأخيرة (K) تحتوي على سبعة إلكترونات ليكونا جزيء كلوريد الصوديوم (Na^+Cl^-).

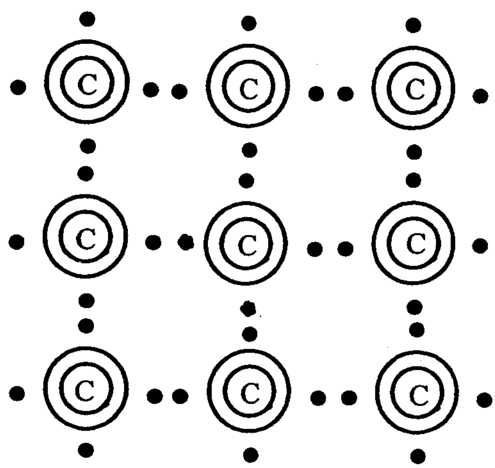
أما إذا اتحدت ذرتا البرومين Bromine (Br) (عدده الذري 35، حيث 28 منها في القشر K,L,M والسبعة الباقية في القشرة الرابعة موزعة على القشيرتين s, p أي أن هذه الذرة تحتاج إلى إلكترون واحد لكي تصل إلى حالة الاستقرار) والكلورين Chlorine (Cl) (عدده الذري 17، عشرة منها في القشرتين K, L والسبعة الباقية في القشرة الثالثة، أي أن هذه الذرة تحتاج أيضا إلى إلكترون واحد لكي تصل الذرة إلى حالة الاستقرار) فإن أحد إلكترونات ذرة البرومين سوف يشترك مع إلكترونات ذرة الكلورين وكذلك أحد إلكترونات ذرة الفلورين سوف يشترك مع إلكترونات ذرة البرومين أي أن الذرتين

سترتبطان ترابطا إسهاميا (covalent bond) ولكن هذا التقاسم للإلكترونين ليس متساويا لأن الإلكترونات السطحية لذرة البرومين تقع في القشرة الرابعة (N) بينما الإلكترونات السطحية لذرة الكلورين تقع في القشرة الثالثة (M). ولذلك فإن ذرة الكلورين تحتاج إلى طاقة عالية لتتخلى عن أحد إلكتروناتها الخارجية أكبر من الطاقة اللازمة لكي يتخلى البرومين عن أحد إلكتروناتها الخارجية ومن ثم فإن ذرة الكلورين ستكتسب أحد إلكترونات ذرة البرومين وتصبح إيونا سالبا، وتسمى هذه الظاهرة بخاصية اجتذاب الإلكترونات أو السالبية الكهربية (electronegativity) ، ويصبح البرومين إيونا موجبا أي أنه سيحدث أيضا ترابطا إيونيا (ionic bonding) إلى جانب الترابط الإسهامي.

أما ذرة الكربون (C) Carbon فعددها الذري ستة حيث تحتوي القشرة الثانية على أربعة إلكترونات وفي الحالة المستقرة (العازلة) ترتبط كل ذرة مع أربع ذرات أخرى مجاورة لها لتكون ترابطا إسهاميا فيما بينها، بحيث يشترك إلكترون من إلكترونات التكافؤ لذرة ما مع إلكترونات التكافؤ للذرة الأخرى، ليصبح في هذه القشرة ثمانية إلكترونات مما يؤدي بالذرة إلى حالة الاستقرار. والأمر نفسه يحصل تماما لذرات السليكون والجرمانيوم والسيلينوم.

ولتوضيح ذلك اعتبر الشكل (٩-٣) يمثل خمس ذرات متجاورة من مادة الكربون حيث تمثل كل دائرة صغيرة نواة الذرة وتمثل الدائرة الكبيرة الحيز الذي يحيط بالنواة وتشغل الإلكترونات القريبة منها والتي تسمى بالإلكترونات المقيدة (bound electrons) أما النقط فتمثل الإلكترونات الخارجية أو إلكترونات التكافؤ.

والحقيقة أن عنصري الجرمانيوم (Germanium) والسيليكون (Silicon) يصبحان في حالة الاستقرار التام (عازلين جيدين للكهرباء) إذا استطيع إنقاص حرارة كل منهما إلى درجة الصفر المطلق وهي 273 - درجة مئوية أما إذا ارتفعت درجة حرارة كل منهما،



شكل (٩ – ٣): يمثل الترابط التساهمي بين ذرات الكربون

أي إذا أعطي للإلكترون طاقة حركية (kinetic energy) ، فإن بعض هذه الإلكترونات ستكـون لها حرية الحـركـة وتصبـح هذه المـادة موصلة ولـذلـك فعنصرا الجرمانيوم والسيليكون أهم عناصر أشباه الموصلات .

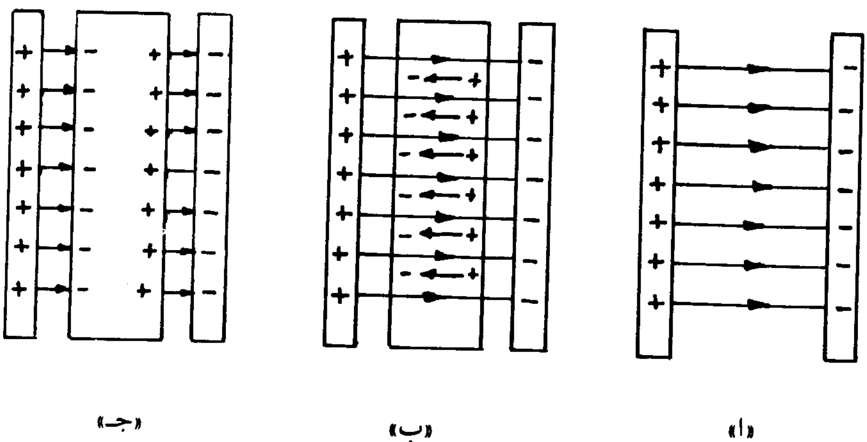
وخلاصة ما ذكر أن المواد التي لها خاصية الترابط الإيوني أو الترابط الإسهامي أو الاثنين معا هي عادة إما مواد عازلة أو مواد شبه موصلة ، وبوجه عام فإن العوازل تميل لأن يكـون الـترابط الإيوني هو السائد بينما أشباه الموصلات تميل لأن يكون الترابط الإسهامي هو السائد .

(٣-٩) تأثير المجال الكهربي على المــواد
Effect of the Electric Field on the Material

تتأثر جميع المواد إذا وضعت في مجال كهربي . فإذا وضع موصل معدني في مجال كهربي كما في شكل (١٠أ - ٣)، فإن الإلكترونات الحرة سوف تتأثر بهذا المجال وتتحرك ضد

اتجاه المجال حيث تتراكم هذه الإلكترونات السالبة عند أحد طرفي الموصل بينما تبقى شحنات موجبة عند الطرف الآخر كما في شكل (١٠ب - ٣):

ويستمر انتقال الإلكترونات تحت تأثير المجال الخارجي إلى أن تتساوى شدة المجال الناشيء بين الشحنتين السالبة والموجبة المتولدتين بالتأثير مع شدة المجال الخارجي المؤثر ويسمى انتقال الإلكترونات داخل الموصل بمجرد وجوده في المجال بتيار التوصيل conduction current ، كما أن محصلة المجال داخل الموصل تكون صفرا كما في شكل (١٠جـ - ٣).



شكل (١٠-٣): تأثير المجال الكهربي على المواد الموصلة
أ - قبل وضع المادة.
ب - بعد وضع المادة الموصلة.
جـ - تساوي المجال الناتج عن الشحنات التأثيرية مع المجال الخارجي.

أما المواد العازلة (dielectrics) فإن تأثير المجال الكهربي الخارجي عليها يتوقف على نوع المادة العازلة ومدى الترابط الموجود في تركيب الذرات. وبصورة عامة يمكن القول إن **المواد العازلة تنقسم من حيث تأثرها بالمجال الكهربي إلى نوعين هما:**

أ - عوازل غير مستقطبة (متعادلة) *Non polar (neutral) dielectic*

جزيئات (molecules) هذه المادة يمكن تمثيلها على أنها نواة موجبة الشحنة q+

ومحاطة بتوزيع متماثل لسحابة من الإلكترونات سالبة الشحنة $-q$. وفي هذه الحالة ينطبق مركز ثقل (centre of gravity) توزيع الشحنات الموجبة على مركز ثقل توزيع الشحنات السالبة كما في شكل (١١أ ـ ٣).

فإذا وضعت المادة في مجال كهربي خارجي E فإن الشحنات السالبة والموجبة ستكون خاضعة لقوى كهربية تسعى لإزاحتها قليلا (displaced) في اتجاه المجال الخارجي المؤثر مما يسبب انفصال مركز ثقل الشحنات السالبة عن مركز ثقل الشحنات الموجبة ونتيجة لذلك نحصل على عزوم كهربية نتيجة لتكون ثنائيات القطب كما في شكل (١١ب ـ ٣).

فإذا كانت المسافة بين الشحنتين لذي القطبين المستحث (induced dipole) (مركزي ثقل الشحنتين الموجبة والسالبة) هي dl ، فإن العزم يعطى بالمعادلة:

$$p_e = q_i\, dl \qquad \text{(٣-٢٠)}$$

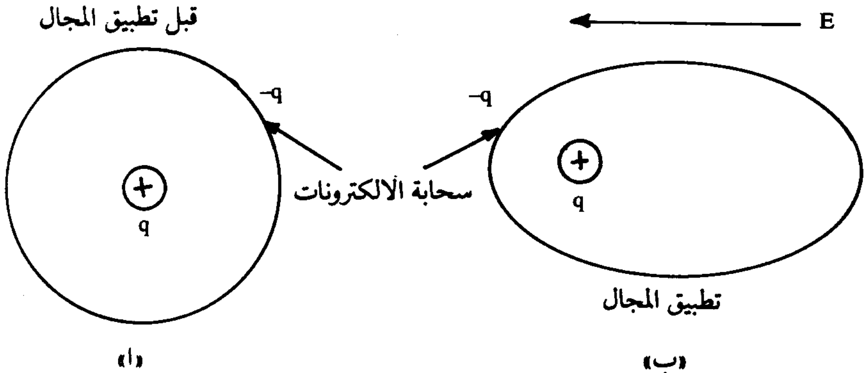
وتسمى هذه العزوم بالعزوم المستحثة (induced dipole moments) لأنها تنعدم وتعود إلى وضعها العادي بمجرد إزاحة المجال.

وتتوقف مقدار الإزاحة على شدة المجال الكهربي E ، فإذا فرض للسهولة أن عزوم ذي القطبين لجميع الذرات المستقطبة في العازل واحدة وأنه يوجد N جزيء مستقطب في وحدة الحجم (لها الاتجاه نفسه) فإن درجة استقطاب العازل يحددها حاصل ضرب كل جزيء في عدد الجزيئات في وحدة الحجم.

فإذا فرض أن $\triangle V$ عنصر الحجم فإن مجموع عزوم ذي القطبين لهذا العنصر هي:

$$\sum_{i=1}^{N\triangle V} (p_e)_i = Np_e \triangle V = P \triangle V$$

$$\therefore P = Np_e \qquad \text{(٣-٢١)}$$



شكل (٣-١١): تأثير المجال الكهربي على مادة عازلة غير مستقطبة
أ ـ حالة المادة قبل وجود المجال.
ب ـ أثناء وجود المجال.

وبصورة أخرى يمكن القول إنه إذا كان حجم المادة العازلة V فإن مجموع العزوم الموجودة في عنصر الحجم dV هي:

$$dp = P\,dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣-٢٢)$$

وبذلك فإن العزوم الكلية الموجودة داخل المادة التي حجمها V هي:

$$p = \int_V P dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣-٢٣)$$

حيث P مجموع العزوم لثنائيات القطبين في وحدة الحجوم وتسمى بالاستقطاب الكهربي (the electric polarization) أو الاستقطاب الإلكتروني الإزاحي (electronic displacement polarization). كما تسمى عملية الإزاحة بالتشوه (deformation) لأن الجزيئات تشوهت في المجال الكهربي وتحولت إلى ذي القطبين.

ب ـ عوازل مستقطبة *Polar (dipole) dielectric*

جزيئات العوازل المستقطبة، تتألف عادة من ذرتين مختلفتين أو أكثر، لها عزوم لثنائيات القطبين (dipole moments) حتى في غياب المجال الكهربي الخارجي وهذا يعني أن مراكز الثقل للشحنات السالبة والموجبة لا ينطبق بعضها على بعض. وهذه

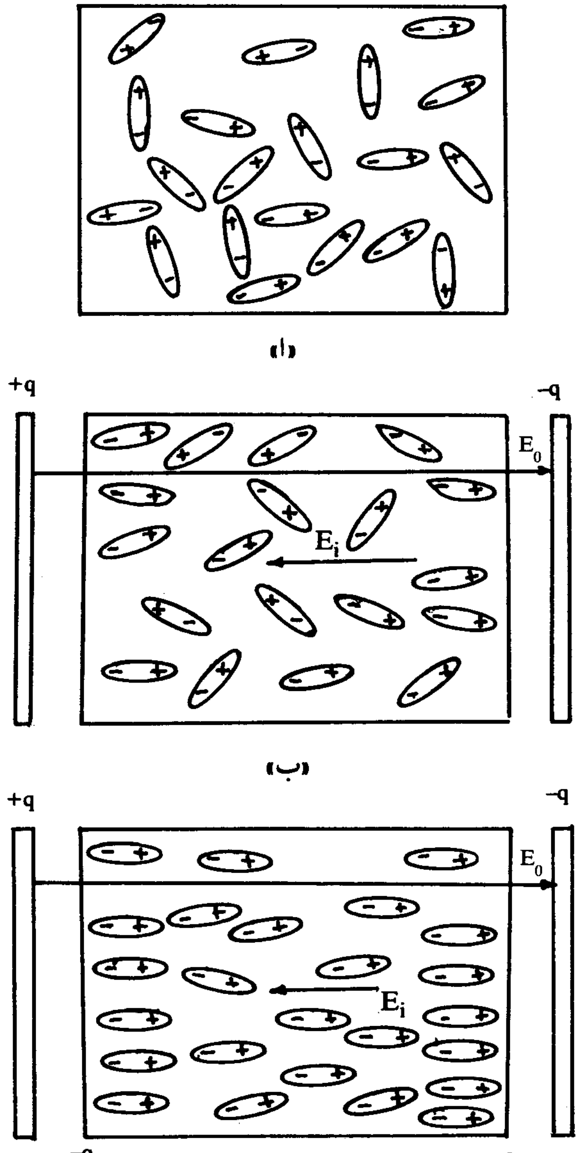
الجـزيـئـات المستقـطبـة متـجهـة اتجـاهـا عشـوائيا خـلال المـادة بسـبب التهـيج الحـراري (thermal agitation) ولذلك فمتوسط العزوم لعنصر الحجم تساوي الصفر.

أما إذا وضع العازل في مجال كهربي خارجي فإن الجزيئات المستقطبة تدور حول نفسها أو تُوجه نفسها (orientation) بحيث تصبح محاور الاستقطاب في اتجاه المجال الخـارجي كما في شكـل (١٢-٣) السابقة الذكر ويسمى الاستقطاب في هذه الحالة بالاستقطاب التوجيهي. في بعض المواد يمكن أن يحدث استقطاب تلقائي (عزوم لذي القطبين) حتى في غياب المجال الكهربي الخارجي، مثل هذه المواد تسمى بالمواد العازلة تلقائية الاستقطاب.

يتضح مما تقدم أن جزيئات العازل المستقطبة وغير المستقطبة ستصبح في النهاية مزدوجات قطبية محاورها في اتجاه المجال المؤثر. ونتيجة لهذا الترتيب تتولد شحنة تأثيرية على كل من طرفي العازل، ولن يختفي المجال داخل العازل كما هو الحال في الموصلات ولكنه سيقل عن حالة الفراغ.

ويأتي تولد الشحنات التأثيرية نتيجة لتعادل الكهربية المجاورة للجزيئات ويتبقى فقط الشحنات على الأطراف كما في شكل (١٢جـ - ٣). ويسمى التيار الناتج داخل العـازل بتيار الإزاحـة (displacement current) تمييزا له عن تيار التوصيل. وسنورد بعض الأمثلة على المواد العازلة المستقطبة وغير المستقطبة كمايلي:

فالمواد التي جزيئاتها أحادية الذرية monoatomic (He, Ne, Ar, Kr, Xe) وكذلك الجزيئات المؤلفة من ذرتين متماثلتين مترابطتين ترابطا متجانسا (تتوزع فيه الشحنات بالتساوي homopolar bond مثل (H_2, N_2, Cl_2... etc) تعتبر مواد غير مستقطبة بينما المواد التي جزيئاتها مؤلفة من ذرتين مختلفتين والمرتبطة فيما بينها ترابطا إيونيا مثل NaCl, KI هي مواد مستقـطبـة (وجـد أن قيمة العـزم الكـهربي لـذي القطبـين بالنسـبة لـ K^+I^- يسـاوي $p = 23 \times 10^{-30}$ C . m ومتجه من الشحنة الموجبة لإيون البوتاسيوم K^+ إلى الشحنة السالبة لإيون اليود I^-).

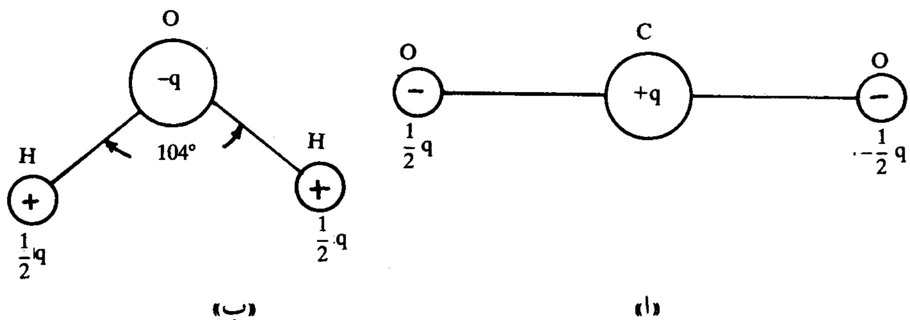


شكل (١٢-٣): ا - مادة عازلة مستقطبة في اتجاه عشوائي.

ب - وضعت هذه المادة في مجال كهربي E_0 ضعيف فاتجهت بعض الجزيئات مع المجال الكهربي فتكونت شحنات مستحثة (تأثيرية) q_i لها مجال كهربي تأثيري E_i يعاكس E_0 .

جـ - أصبح المجال الخارجي E_0 كبيراً فزادت الجزيئات المتجهة مع المجال وزادت بذلك q_i ، E_i .

أما بالنسبة للمواد التي جزيئاتها مكونة من أكثر من ذرتين فإن نوع الاستقطاب يتوقف على تركيب (structure) الذرات وترتيب (arrangement) الشحنات. فمثلا ثاني أكسيد الكربون (CO_2 – carbon dioxide) تركيبه متماثل مع محور التماثل كما في شكل (١٣أ ـ ٣) ولذلك نجد أن ذرة الكربون مشتركة مع ذرتين من الأكسيجين مكونة بذلك اثنين من ذي القطبين عزمهما متعاكسان بحيث يلغى كل منهما الآخر. وبذلك فإن عزم جزيء CO_2 يساوي الصفر وبذلك يعتبر CO_2 مادة عازلة غير مستقطبة وثابت عزلها ضعيف بينما جزيء الماء H_2O فإن تركيبه غير متماثل على شكل مثلث متساوي الساقين (isosceles triangle) كما في شكل (١٣ب ـ ٣) وبذلك فجزيء الماء له خاصية المواد العازلة المستقطبة وقيمة عزمه تساوي $p = 6.1 \times 10^{-30}\ C \cdot m$



شكل (٣-١٣): أ ـ يعتبر ثاني أكسيد الكربون CO_2 مادة عازلة غير مستقطبة لأن كل ذرة كربون تتحد مع ذرتين من الأكسيجين مكونة بذلك عزمين متساويين ومعاكسين.
ب ـ جزيء الماء H_2O له خاصية المواد العازلة المستقطبة. لأن تركيبه غير متماثل على شكل مثلث متساوي الساقين.

ومن المواد غير المستقطبة والمستعملة مادة عازلة البوليثيلين (ضرب من البلاستيك polyethylen-) والبرافين (paraffin) والمطاط (rubber) وزيوت البترول.

(٣-١٠) ثـابت العـزل
Dielectric Constant

أول من فكر في دراسة المادة العازلة بين صفيحتي مكثف هو العالم ميخائيل فراداي (Michael Faraday) عام ١٨٨٧ ميلادي حيث استعمل مكثفين متماثلين في الخواص

والأبعاد ووضع بين صفيحتي أحدهما مادة عازلة وسلط عليهما الجهد نفسه فوجد أن السعة في حالة وجود المادة العازلة أكبر منها في الحالة الأخرى. فإذا كانت C_0 سعة المكثف في الفراغ و C سعته بعد وضع المادة العازلة فإن المعامل:

$$K = \frac{C}{C_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٤)$$

يعرف بثابت العزل للمادة وليست له وحدات.

وتفسير ذلك، حسب ما ورد في الفقرة السابقة (٣-٩)، هو أنه نتيجة للاستقطاب تتولد شحنات تأثيرية (induced charges) على سطحيّ المادة العازلة في مواجهة لوحيّ المكثف وتعاكس نوع الشحنات على لوحيّ المكثف [كما في شكل (١٢جـ-٣)]، وتسمى الشحنات التأثيرية بالشحنات المقيدة (bound charges) بينما تسمى الشحنات على لوحيّ المكثف بالشحنات الحرة (free charges)، وينشأ عن الشحنات التأثيرية المقيدة مجال كهربي تأثيري E_i داخل المادة العازلة يعاكس اتجاه المجال الأصلي وتقلل من قيمته. فإذا فرض أن قيمة المجال قبل وضع المادة العازلة E_0 فإن قيمته بعد وضع المادة العازلة هي:

$$E = E_0 - E_i \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٥)$$

وواضح من هذه المعادلة أن E (محصلة المجالين المتعاكسين E_i, E_0) أصغر من E_0. فإذا فرض أن المسافة بين لوحيّ المكثف d فإن فرق الجهد بعد وضع المادة العازلة $(V=Ed)$ وقبل وضع المادة العازلة $(V_0=E_0d)$. وبما أن الشحنات الحرة على لوحي المكثف لم تتغير فإن السعة قبل وضع المادة العازلة هي:

$$C_0 = \frac{q}{V_0} = \frac{q}{E_0 d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٦أ)$$

وبعد وضع المادة العازلة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{Ed} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٦ب)$$

وبذلك يُحصل من المعادلتين (٣-٢٤) و (٣-٢٦) على:

$$\therefore \frac{C}{C_0} = \frac{E_0}{E} = K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٧)$$

$$\because E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٢٨)$$

وذلك حسب المعادلة (١-٥٧).

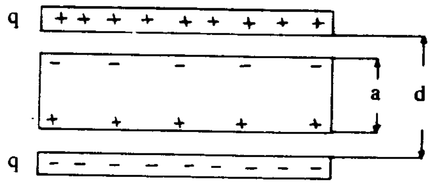
$$\therefore K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (٣ - ٢٩أ)$$

حيث σ كثافة الشحنة على لوحي المكثف. ولذلك يسمى K أيضا بالسماحية النسبية (relative permittivity) ويرمز لها بالرمز ε_r.

$$\therefore \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٢٩ب)$$

ويمكن قياس ثابت العزل K بالنسبة للغازات والسوائل بمعرفة السعة للمكثف في حالة الفراغ C_0 ووضع المكثف في السائل أو الغاز C ثم تطبيق المعادلة (٣-٢٧).

أما بالنسبة للمواد العازلة الصلبة فيمكن قياس الثابت K بمعرفة التغير في السعة للمكثف قبل وبعد وضع صفيحة المادة العازلة slap بين لوحيه حتى ولو كانت المادة العازلة لا تملأ الفراغ بين لوحيّ المكثف كما في شكل (٣-١٤).



شكل (٣-١٤): وضع مادة عازلة صلبة بين لوحي مكثف مستوي.

وبتطبيق المعادلتين (٣-٢٦) و (٣-٢٨) على الشكل (٣-١٤) فإن فرق الجهد بين الصفيحتين يعطى بالمعادلة:

$$V = E_0 (d - a) + Ea$$

حيث d المسافة الفاصلة بين لوحي المكثف و a سمك المادة العازلة.

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a) + \frac{\sigma}{\varepsilon} a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a) + \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} a$$

$$\therefore V = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\left[d - a\left(1 - \frac{1}{K}\right)\right]$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = \frac{S\varepsilon_0}{d - a(1 - 1/K)} \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٠)$$

وواضح أنه بدون المادة العازلة تكون $a=0$ و $K=1$ ، وتؤول المعادلة (٣٠-٣) إلى المعادلة (٥-٣).

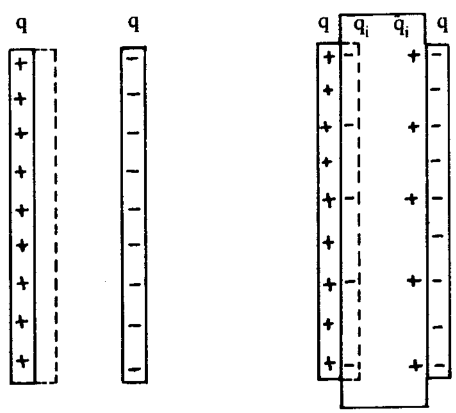
(١١-٣) العوازل ونظرية جــاوس

Dielectrics and Gauss's Law

وجد فيما سبق دراسته في الفصل الأول أن خطوط القوى التي تنفذ إلى الخارج من أي سطح مغلق [الفيض الكهربي على سطح مغلق] يساوي $1/\varepsilon_0$ في محصلة كمية الشحنة داخل السطح (قانون جاوس) وعُبر عن ذلك رياضيا بالمعادلة (٤٧-١).

$$\oint E \cos\theta \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma q$$

يمثل الشكل (١٥-٣) مكثفا في وجود مادة عازلة وآخر في عدم وجود هذه المادة والخط المنقوط يمثل سطح جاوس في الحالتين :



شكل (١٥-٣) : المواد العازلة وقانون جاوس :
أ ـ مكثف قبل وضع المادة العازلة .
ب ـ بعد وضعها .

فإذا كانت E_0 تمثل المجال في حالة عدم وجود المادة العازلة فإنه بتطبيق قانون جاوس يمكن الحصول على:

$$\oint E \cdot dS = E_0 S = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣١)$$

أما إذا كانت E هي شدة المجال في حالة وجود المادة العازلة، يحتوي (في هذه الحالة) سطح جاوس على نوعين من الشحنات هما q و q_i ، فإنه بتطبيق قانون جاوس على الشكل (١٥ب ـ ٣) يمكن الحصول على:

$$\oint E dS = ES = \frac{1}{\varepsilon_0}(q - q_i)$$

أو

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q_i}{\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٢)$$

حيث q الشحنات الحرة (free charges) و σ الكثافة السطحية لها. بينما q_i الشحنة السطحية التأثيرية (الحثية ـ induced surface charges) والتي تسبب في توليد مجال كهربي تأثيري (حثي) يعاكس المجال الكهربي الأصلي وتكون قيمته حسب المعادلة (٣ـ٣٢):

$$E_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٣)$$

حيث σ_i الكثافة السطحية للشحنة التأثيرية. وبالتعويض في المعادلة (٣ـ٣٢) من المعادلتين (٣ـ٣١) و (٣ـ٣٣) يُحصل على المعادلة (٣ـ٢٥) وهي:

$$E = E_0 - E_i$$

ولذلك يقل المجال الكهربي بين صفيحتي المكثف بعد وضع المادة العازلة وتزيد بذلك سعة المكثف.

ولكن من المعادلتين (٢٨-٣) و (٢٩-٣) يمكن الحصول على:

$$E = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \frac{q}{K\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٤)$$

ويكون من هذه المعادلة والمعادلة (٣٢-٣) المعادلة التالية:

$$\frac{q}{K\varepsilon_0 S} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q_i}{\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٥)$$

أو

$$q_i = q(1 - 1/K) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٦)$$

وتوضح هذه المعادلة أن q_i دائما أقل من q وتساوي صفرا في حالة عدم وجود المادة العازلة حيث $K = 1$.

ومما تقدم وحسب الشكل (١٥-٣) يمكن كتابة قانون جاوس في صورته العامة وفي وجود مادة عازلة K كالتالي:

$$\oint E \cos\theta \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(q - q_i) \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٧)$$

حيث تمثل $(q - q_i)$ محصلة الشحنات خلال سطح جاوس. وبالتعويض عن q_i من المعادلة (٣٦-٣) يُحصل على:

$$\oint K E \cos\theta \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٨)$$

وهذه المعادلة عامة ومهمة لقانون جاوس في حالة وجود مادة عازلة، وإن كانت اشتقت في حالة المكثف ذي اللوحين. ويلاحظ من هذه المعادلة ما يلي:

١ - يحتوي التكامل على المعامل K.

٢ - أن الشحنات التي يحتويها سطح جاوس أخذت على أنها الشحنات الحرة فقط

q ، وقد أهملت الشحنات السطحية المستحثة q_i من الجهة اليمنى للمعادلة وأخذت في الحسبان ضمن المعامل K في الجانب الأيسر للمعادلة. المعادلتان (٣-٣٧) و (٣-٣٨) متماثلتان تماما في الصياغة.

ويمكن كتابة المعادلة (٣-٣٨) بالصورة التالية:

$$\oint K\,\varepsilon_0\,E\cos\theta\,dS = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٣٩)$$

أو

$$\oint D\cos\theta\,dS = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤٠)$$

أو

$$\oint \vec{D}\,.\,d\vec{S} = q$$

حيث

$$D = K\,\varepsilon_0\,E = \varepsilon E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤١)$$

وتسمى D بالإزاحة الكهربية (electric displacement) وهي كمية متجهة ويمكن تمثيلها بعدد من الخطوط كما هو الحالة في المجال الكهربي E والإزاحة بتعريفها هذا ليس لها مدلول طبيعي معين كما هو الحال في تعريف شدة المجال E التي تدل على القوة المؤثرة على وحدة الشحنات. والسبب الوحيد لإدخال هذه الكمية هو فائدتها في تبسيط المعادلات. ولا يمكن اعتبار D سوى كمية رياضية تؤدي هذا الغرض. وأول من استخدمها ماكسويل صاحب النظرية الكهرومغناطيسية.

وبمقارنة المعادلة (٣-٤١) مع المعادلة (٣-٣٤) يكون:

$$D = q/S \qquad \therefore\ q = DS \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤٢)$$

حيث DS تساوي عدد خطوط الإزاحة المارة خلال سطح جاوس.

وواضح أنه في حالة عدم وجود المادة العازلة يكون:

$$D = \varepsilon_0 E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤٣)$$

ووحدة D في النظام العالمي (S.I) هو كولوم/متر٢.

وبالتعويض عن D في المعادلة (٦٤-١) من المعادلة (٤٣-٣) يُحصل على:

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \oint_V \varrho dV \quad \ldots\ldots \quad (٤٤أ - ٣)$$

وحسب المعادلة (٦١-١) فإن المعادلة التفاضلية للمعادلة (٤٠-٣) هي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤٤ب - ٣)$$

وهذه المعادلة تمثل شكلا آخر للمعادلة الأولى لماكسويل (٦١-١).

(٣-١٢) الاستقطاب والإزاحــة الكهربيـة

Polarization and Electric Displacement

تُعد الشحنات المستحثة على سطح عازل موضوع في مجال كهربي إحدى مظاهر تأثر العازل بالمجال الكهربي، وتظهر هذه الشحنات نتيجة لاستقطاب أو توجيه جزيئات العــازل (polarization or orientation of the molecules) لذلـك فإن تكـوين هذه الشحنات ليس بالظاهرة السطحية إنما هو ظاهرة حجمية كما ورد ذكر ذلك في البند (٣-٩). والمعادلة (٢٠-٣) تحدد عزم ذي القطبين لجزيء مستقطب، والمعادلة (٢١-٣) تحدد عزم ذي القطبين لوحدة الحجوم P. ومن هاتين المعادلتين نحصل على:

$$P = Nq_i\, dl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤٥-٣)$$

كما أنه يمكن التعبير عن P بطريقة أخرى.

فإذا فرض أن q_i هي الشحنات المستحثة على سطح شريحة مستقطبة من العازل مساحتها S وسمكها d واعتبرت الشريحة ذات قطبين كبيرين عزمه $q_i d$ فإن استقطاب العازل هو:

$$P = \frac{q_i d}{Sd} = \frac{q_i}{S} = \sigma_i \quad \ldots\ldots \quad (٤٦-٣)$$

وهذا يعني أن الاستقطاب يساوي عدديا الكثافة السطحية للشحنات المقيدة على سطح المادة العازلة، ووحدته تساوي C/m^2 ، وفي الفراغ تساوي صفرا. ولكن من المعادلة (٣٥-٣) يكون:

$$\frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{q}{K\varepsilon_0 S} + \frac{q_i}{\varepsilon_0 S}$$

أو

$$\frac{q}{S} = \varepsilon_0 \left(\frac{q}{K\varepsilon_0 S}\right) + \frac{q_i}{S} \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤٧)$$

وبالتعويض من المعادلات (٣٤-٣)، (٤٢-٣) و(٤٦-٣) نُحصل على:

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٤٨)$$

والشكل (١٦-٣) يوضح قيمة المتجهات الثلاثة P, D, E عند كل نقطة داخل المادة العازلة، وكذلك كل نقطة تقع في الفراغ.

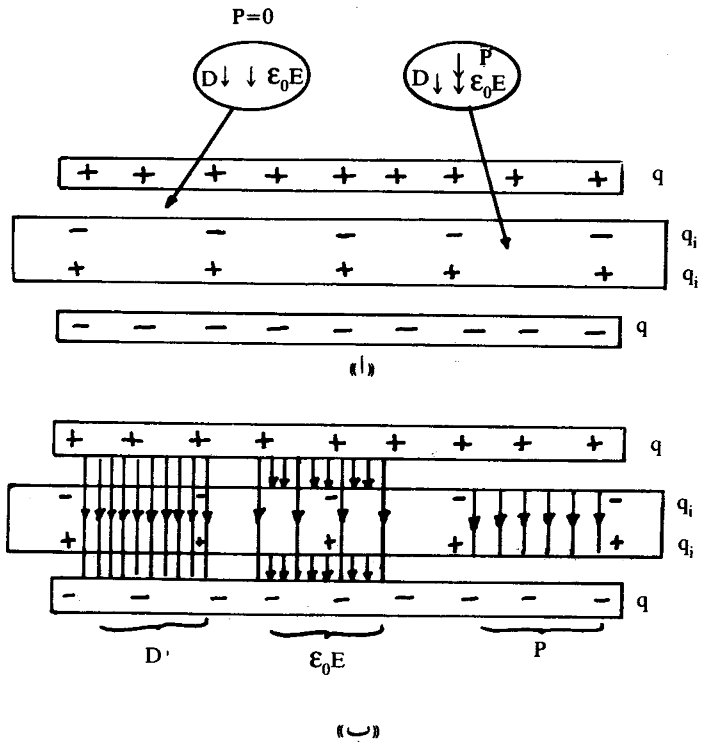
من التعريفات السابقة نستنتج ما يلي:

ا - يتضح من المعادلة (٤٢-٣) أن D تختص بالشحنات الحرة q وخطوط قوى الإزاحة يمكن تمثيلها بخطوط تماثل خطوط القوى للمجال الكهربي وكما يوضح ذلك الشكل (١١٦ - ٣) أن بداية ونهاية خطوط D هي الشحنات الحرة.

ب - يتضح من المعادلة (٤٦-٣) أن P تختص بالشحنات المستحثة (المستقطبة) فقط. ويوضح الشكل (١٦ب - ٣) أن بداية ونهاية خطوط P هي الشحنات المستقطبة q_i.

جـ - أما E فتختص بكل أنواع الشحنات سواء كانت حرة أو مستقطبة وخطوط القوى لـ E تمثل النوعين معا q و q_i كما يوضحه شكل (١٦-٣).

د - متجها $\vec{E}$ و $\vec{D}$ متوازيان إذا كان الوسط العازل منتظما أو متماثل المناحي (isotropic). أيَ لهذه المادة الخواص نفسها في كل الاتجاهات. بينما في المتباينة المناحي (anisotropic) تختلف خواصها باختلاف اتجاه المحور كالمواد العازلة المتبلورة (crystalline) فإن اتجاه الإزاحة D قد يختلف عن اتجاه شدة المجال E.



شكل (٣-١٦): العلاقة بين المتجهات الثلاثة الاستقطاب p والمجال الكهربي E والإزاحة D. عند كل نقطة تقع داخل المادة العازلة أو خارجها.

ولذلك فالمعادلة (٣-٤٨) هي تعريف عام للإزاحة عن المعادلة (٣-٤١). وصحيحة في جميع الأحوال إذا اعتبرت علاقة بين متجهات، أي أن:

$$D_x = \varepsilon_0 E_x + P_x$$

$$D_y = \varepsilon_0 E_y + P_y \quad \cdots\cdots \quad (٣\text{-}٤٩)$$

$$D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z$$

هـ - تكتب المعادلة (٣-٢٧) في النظام الجاووسي على الشكل التالي:

$$D = E + 4\pi P \quad \cdots\cdots \quad (٣\text{-}٥٠)$$

(٣-١٣) التـأثـرية الكـهـربـيـة

Electric Susceptibility

يمكن كتابة المعادلة (٣-٤٨) بدلالة E فقط وذلك بالتعويض عن D من المعادلة (٣-٤١) فيُحصل على:

$$P = K\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (K-1) E \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٥١)$$

وواضح من هذه المعادلة أن العلاقة بين E و P علاقة خطية (linear) أي أن P تتناسب مع E ويسمى ثابت التناسب بالتأثرية الكهربية ويرمز له بالرمز χ_e وبذلك يمكن كتابة المعادلة (٣-٥١) كالتالي:

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}أ٥٢)$$

ومن المعادلة (٣-٤٦) يمكن إيجاد تعريف آخر للتأثرية وهو:

$$\sigma_i = \varepsilon_0 \chi_e E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ب٥٢)$$

أي أن التأثرية هي نسبة الكثافة السطحية للشحنة المستحثة إلى شدة المجال الكهربي.

ويُحصل من المعادلتين (٣ - أ٥٢) و (٣ - ٤٧) على:

$$D = \varepsilon_0 (1+\chi_e) E = \varepsilon_0 K E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad \cdot\cdot \quad (٣ - ٥٣)$$

وينطبق التعريفان (٣-٥٢) و (٣-٥٣) في الحالة الخاصة التي يتخذ فيها العازل شكل شريحة رقيقة موضوعة في مجال كهربي عمودي على وجهيها، حيث يتساوى الاستقطاب P والكثافة السطحية للشحنة المستحثة σ_i ، أما في الحالة العامة فإن الشحنات المستحثة لا تكون كلها على السطح العازل. عند ذلك تتغير قيمة الاستقطاب من نقطة إلى أخرى وتعرف **التأثرية الكهربية** عند أي نقطة بأنها **نسبة *الاستقطاب إلى شدة المجال عند هذه النقطة***.

من المعادلتين (٣-٥١) و(٣-٥٢) يُحصل على:

$$\chi_e = K - 1$$

$$\because K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٥٤)$$

وهذه المعادلات الثلاث تربط بين التأثرية χ_e وثابت العزل K والسماحية (الإتاحية) ε ، وبمعرفة إحداهما يمكن معرفة العوامل الأخرى أي يمكن تحديد الخواص الكهربية للعازل.

اشتقت المعادلات (٣-٥١) و(٣-٥٤) على أساس وحدات النظام العالمي (S.I) أما بالنسبة للنظام الجاووسي فتصبح كالتالي:

$$P = \left(\frac{K-1}{4\pi}\right) E$$

$$\chi_e = \frac{K-1}{4\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٣\text{-}٥٥)$$

$$P = \chi_e E$$

وتوضح المعادلة (٣-٥١) أن $P = 0$ في حالة الفراغ (حيث $K = 1$) ومنه $\chi_e = 0$ أو عندما يكون $E = 0$ ، وقد لا تكون هذه المعادلة صحيحة لبعض المواد العازلة مثل المواد تلقائية الاستقطاب التي تحتفظ باستقطاب شحناتها حتى ولو كانت $E = 0$.

والجدول (٣-١) يوضح قيم ثابت العازل لبعض المواد العازلة.

وقد وجد، بالنسبة للمواد العازلة المستقطبة، أن الاستقطاب P يتناسب تناسبا عكسيا مع درجة الحرارة حسب العلاقة:

$$P = \frac{Np^2E}{3\,KT} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٣\text{-}٥٦)$$

حيث N عدد الجزيئات لوحدة الحجوم، p عزم ذي القطبين، T درجة الحرارة، K ثابت يسمى ثابت بولتزمان (Boltzmann's constant).
وبمقارنة هذه المعادلة مع المعدلة (٥٢أ - ٣) نحصل على:

$$\chi_e = \frac{Np^2}{3\,\varepsilon_0 KT} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٣\text{-}٥٧)$$

جدول (١-٣): ثابت العزل لبعض المـــواد

المـــواد	درجة الحرارة	ثابت العزل	المـــواد	ثابت العزل
أ ـ غـــازت Gases			**جـ ـ المواد الصلبة عند درجة حرارة الغرفة**	
الفـــراغ	25°C	1.00000	زجـــاج 0010	6.68
الهـــواء	25°C	1.000536	زجـــاج 0080	8.30
أرقـــون	25°C	1.000517	بيركس 7050	4.88
ثاني أكسيد الكربون	25°C	1.000922	بيركس 7070	4.00
هيليـــوم	25°C	1.000065	زجـــاج رغوي	90.00
هيدروجين	25°C	1.000254	مرور منصهر	3.75 - 4.1
أوكسيجين	25°C	1.000495	نيترات الباريوم	5.9
بخار الماء	100°C	1.0126	ألمـــاس	5.5
ب ـ الســـوائـــل Liquids			نيترات الرصاص	37.7
الأمونيا	25°C	16.9	نفتالين	2.85
بنزين	20°C	2.284	مـــيـــكا	2.5 - 70
كحول أثيلي	20°C	24.3	نيوبرين «نوع من	6.70
جليسرول	25°C	42.5	المطاط الاصطناعي»	
زيت الخروع	15°C	4.7	بوليستيرين	2.56
زيت بذور القطن	14°C	3.10	كهرمـــان	2.65
زيت محولات	25°C	2.22	شمع البرافين	2.10 - 2.5
مـــاء	25°C	78.54	ثاني أكسيد التيتانيوم	100.0

(٣-١٤) شـدة (مقـدرة) العـزل

Dielectric Strength

لا يمكن زيادة المجال الكهربي في أي مادة عازلة بشكل غير محدود، لأنه عند زيادة المجال عن قيمة معينة فستحدث شرارة كهربية ويقال في هذه الحالة إن المادة العازلة انهارت (break - down). وإذا كان المجال الكهربي منتظما تحصل الشرارة عندما يزيد المجال عن القيمة الحرجة (critical value) أما إذا كان المجال غير منتظم فيحصل أولا التفريغ التوهجي (glowing discharge) أو التفريغ الهالي (corona discharge).

والقيمة العظمى لشدة المجال التي يمكن للمادة العازلة تحملها دون أي انهيار لها تسمى بشدة (مقدرة) العزل. فإذا فرض أن فرق الجهد الذي يحدث عن الانهيار V_{br} وd عرض المادة العازلة (المسافة بين لوحي المكثف) فإن المجال الذي يحدث عنده الانهيار هو:

$$E_{br} = V_{br}/d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٥٨)$$

ولذلك من المهم عند تصنيع المكثفات معرفة أقصى قيمة للجهد الذي يتحمله المكثف بحيث يكون جهد التشغيل V_{op} أقل من جهد الانهيار V_{br}. وتسمى النسبة V_{br}/V_{op} بمعامل الأمان (safety factor) لشدة المجال في المادة العازلة.

وقيمة E_{br} تعتمد على عوامل أخرى مثل درجة الحرارة، والرطوبة، وتردد الجهد وغير ذلك. والجدول التالي يوضح قيم E_{br} لبعض العوازل.

جـدول (٣-٢) : مجال الانهيار لبعض المواد العازلة

شدة العزل MV/m	المـــــواد	شدة العزل MV/m	المـــــواد
25	خشب صناعي	3	الهـواء
30	صفائح زجاج	15	الزيـت
30	شمع معدني	15	ورق مشرب
30	مـرو	20	بروليستيرن
200	مـيكا	21	مطاط صلب

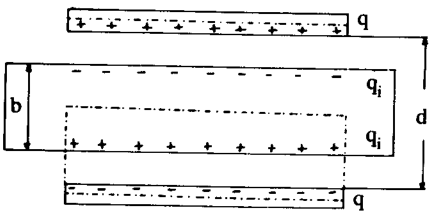
مـثـال (٨-٣)

وضعت مادة عازلة على شكل شريحة سمكها b وثابت عزلها K بين صفيحتي مكثف متوازي اللوحين المسافة بينهما d ومساحة كل منها S كما في الشكل الآتي. فإذا كان فرق الجهد بينهما V_0 بدون وجود المادة العازلة وكانت:

$$V_0 = 100\ V \quad , \quad K = 7.0 \quad , \quad d = 1.0cm \quad , \quad b = 0.50cm \quad , \quad S = 100cm^2$$

فاحسب:

أ - سعة المكثف C_0 قبل إدخال المادة العازلة.
ب - الشحنات الحرة q
جـ - المجال الكهربي E_0 بين اللوحين.
د - المجال الكهربي E بعد وضع المادة العازلة.
هـ - فرق الجهد بين اللوحين.
و - سعة المكثف بعد وضع المادة العازلة.



الحـــل

أ - $$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8.9 \times 10^{-12}\, C^2/N.m^2)\,(10^{-2}\, m^2)}{10^{-2}\, m} = 8.9\, \mu\mu F$$

ب - $$q = C_0 V_0 = (8.9 \times 10^{-12}\, F)\,(100\ V) = 8.9 \times 10^{-10}\, C$$

جـ - بتطبيق قانون جاوس يكون:

$$\varepsilon_0 \oint K \cos\theta\, dS = \varepsilon_0 E_0 S = q$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{8.9 \times 10^{-10}\, C}{(8.9 \times 10^{-12}\, C^2/N.m^2)\,(10^{-2}\, m^2)} = 1.0 \times 10^4\ V/m$$

وفي هذه الحالة $K = 1$ لأن المادة العازلة غير موجودة .

د ـ بتطبيق قانون جاوس مرة أخرى في وجود المادة العازلة يكون :

$$\varepsilon_0 K\,ES = q$$

$$\therefore E = \frac{q}{\varepsilon_0 KS} = \frac{E_0}{K} = \frac{1.0 \times 10^4\,V/m}{7.0} = 0.143 \times 10^4\,V/m$$

هـ ـ

$$\because V = -\int E \,.\, dL = E_0\,(d-b) + Eb$$
$$= (1.0 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-3}) + (0.14 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-3}) = 57\,V$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = \frac{8.9 \times 10^{-10}\,C}{57\,V} = 16\,\mu\mu F$$

واضح مما سبق أن الجهد نقص من $100\,V$ إلى $75\,V$ بعد إدخال المادة العازلة . أما السعة فارتفعت قيمتها من $8.9\mu\mu F$ إلى $16\mu\mu F$ بينما لو أن هذه المادة العازلة ملأت المكثف فإن السعة ستصبح $62\mu\mu F$ لأن $K = 7.0$.

مـــثـــال (٩-٣)

في المثال السابق احسب P و D في :

أ ـ وجود المادة العازلة .

ب ـ عدم وجود المادة العازلة .

الحـــــل

أ ـ

$$\because D = K\,\varepsilon_0\,E$$

$$\therefore D = (7.0)\,(8.9 \times 10^{-12})\,(1.43 \times 10^3) = 8.9 \times 10^{-8}\,C/m^2$$

معروف أن :

$$P = \varepsilon_0\,(K-1)\,E$$

$$\therefore P = (8.9 \times 10^{-12})\,(7.0-1)\,1.43 \times 10^3 = 7.6 \times 10^{-8}\,C/m^2$$

ب ـ

$$D_0 = K\,\varepsilon_0\,E_0$$

$$\therefore \quad D_0 = 1 \times 8.9 \times 10^{-12} \times 1.00 \times 10^4 = 8.9 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

$$P_0 = \varepsilon_0 (K-1) E_0 = 0$$

لأن $K = 1$

وواضح أن P تنعدم في عدم وجود المادة العازلة بينما D لها القيمة نفسها في وجود المادة العازلة أو عدم وجودها.

مــثــال (١٠-٣)

لوحان متوازيان مساحة كل منهما $1m^2$ وشحنة كل منهما متساوية ومختلفة في النوع وقدرها $30\mu C$ وضعت بينها مادة عازلة سماحيتها $15 \times 10^{-12}\ C^2/N\ .\ m^2$ شغلت الفراغ الموجود بين اللوحين.

احــســب:

ا ـ شدة المجال المحصل من المادة العازلة.

ب ـ الكثافة السطحية للشحنة المستحثة على أوجه المادة العازلة.

جـ ـ مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات الحرة.

د ـ مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات المستحثة.

الحــــل

ا ـ الكثافة السطحية للشحنات الحرة هي:

$$\sigma = \frac{q}{S} = 30 \times 10^{-6}\ C/m^2$$

$$\therefore E = \frac{1}{K\varepsilon_0}\ \frac{q}{S} = \frac{1}{\varepsilon}\ \sigma = \frac{1}{15 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6} = 2 \times 10^6\ V/m$$

ب ـ الكثافة السطحية للشحنات المستحثة هي:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \varepsilon_0\, \chi_e\, E = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, E \\ &= (15 \times 10^{-12} - 8.85 \times 10^{-12}) \times 2 \times 10^6 \\ &= 12.3 \times 10^{-6}\ C/m^2 \end{aligned}$$

جـ ـ مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات الحرة

$$E_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\ \sigma = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6} = 3.39 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

د ـ مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات المستحثة .

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\ \sigma_i = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \times 12.3 \times 10^{-6}$$

$$= 1.39 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

واتجاهه عكس اتجاه E_0

مما سبق يمكن حساب شدة المجال المحصل :

$$\because \qquad E = E_0 - E_i$$

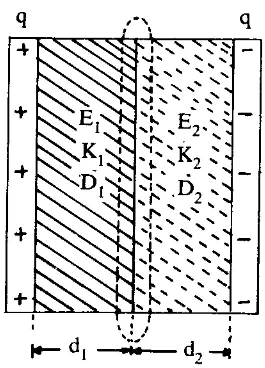
$$\therefore \qquad E = 3.39 \times 10^{6} - 1.39 \times 10^{6} = 2 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

وهي النتيجة نفسها التي حصل عليها في الفقرة «ا» .

(٣-١٥) سعة مكثف مستوٍ وضع بين لوحيه عازلان مختلفان

Capacitance of a Parallel-Plate Capacitor Filled with Two Different Dielectrics

يمثل الشكل المجاور مكثف مستوٍ شُحن لوحاه المتوازيان بشحنتين $+q$, $-q$ متساويتين في المقدار وملأ الفراغ بينهما بمادتين عازلتين سمكهما d_1 و d_2 وثابت عزلهما K_1 , K_2 فإذا كانت E_1 و E_2 شدتي المجال بداخل كل من العازلين فإن :



شكل (٣-١٧) : مكثف مستو وضعت بين لوحيه مادتان عازلتان مختلفتان .

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = K_1\, \varepsilon_0\, E_1 \qquad \text{(٣-٥٩)}$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = K_2\, \varepsilon_0\, E_2$$

ولنكون الآن سطحا جاوسيا بالطريقة المبينة بالخط المنقط في الشكل فنلاحظ أنه لا يحتوي بداخله على شحنات حرة، ولما كانت D تتجه من اليسار إلى اليمين في كل من العازلين، فإننا نجد أن:

$$\oint D\cos\theta\, dS = -D_1 S + D_2 S = 0$$

$$\therefore \quad D_1 = D_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٠)$$

أي أن الإزاحة واحدة في كل من العازلين.

وبمقارنة المعادلتين (٣-٥٩) و(٣-٦٠) نجد أن:

$$K_1 E_1 = K_2 E_2 \quad \therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{K_2}{K_1}$$

ولكن تعطى السعة بالمعادلة (٣-٤)، $C = q/V$ حيث:

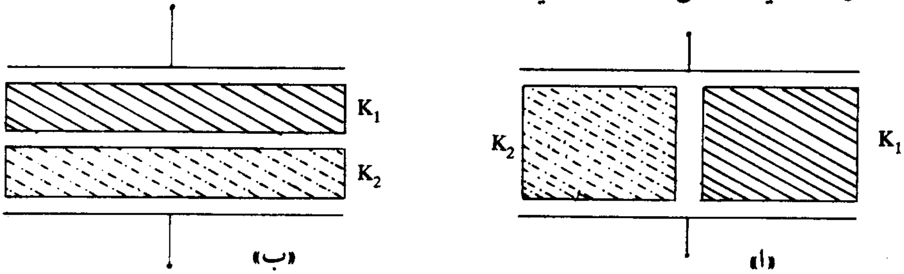
$$q = \sigma S \quad , \quad V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad \& \quad \sigma = D$$

$$\therefore C = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{K_1} + \dfrac{d_2}{K_2}} = \varepsilon_0 S \left(\frac{K_1 K_2}{K_2 d_1 + K_1 d_2}\right)$$

مـثـال (١١ - ٣)

قارن سعتي المكثفـين المتشابهين مع اختلاف وضع المادتين العازلتين بينهما كما يظهر ذلك في الشكل المجاور التالي:



في الحـالـة (ا) يمكن عـد المكثف مؤلفا من مكثفين مساحة كل منهما $\frac{1}{2}S$ إذا كانت مساحة اللوح كله S متصلين على التوازي وعازلهما مختلف فيكون :

سعة المكثف الأول $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \frac{S}{2} K_1}{d}$ والثاني $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \frac{S}{2} K_2}{d}$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(K_1 + K_2)$$

أمـا في الحالة (ب) فالعازل K_1 سمكه $\frac{1}{2}d$ و K_2 سمكه $\frac{1}{2}d$ أيضا وتكون بذلك سعة المكثف :

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d}{2K_1} + \dfrac{d}{2K_2}} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}\left\{\frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)}\right\} \therefore \frac{C'}{C} = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2}$$

(٣-١٦) الشـــروط الحـدوديـة

Boundary Conditions

يمثل الشكل (٣-١٧) وسطين عازلين (1) و (2) يفصلهما سطح فاصل $Y\,Y'$ ومعامل السماح لهما هو ε_1 و ε_2 على الترتيب وثابت العزل لهما K_1 و K_2 وبإدخالهما في مجال كهربي خارجي تصبح شدة المجال في الوسط الأول E_1 وفي الوسط الثاني E_2.

لقـد وضـح في البند (٣-١٥) أن الإزاحة الكهربية واحدة في عازلين مختلفين متجاورين وأن شدتي المجال وثابت عزلهما مرتبطان بالعلاقة :

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \quad , \quad K_1 E_1 = K_2 E_2$$

وفي هذه الحـالـة يتخـذ المتجهـان E, D الاتجـاه العمودي على السطح الفاصل بين العازلين. أما في الحالة العامة فإن كلا من المتجهين D و E قد يصنع زاوية مع السطح الفاصل بين العازلين، ويكون تغيير مقداري واتجاهي كل من E و D عبر الحدود بين العوازل تغييرا غير مستمر.

وباعتبار أن خطوط القوى في الوسط الأول ساقطة على السطح الفاصل بزاوية سقوط قدرها ϕ_1 ، وتنكسر خطوط القوى على هذا السطح ، فإن خطوط القوى تدخل إلى الوسط الثاني بزاوية قدرها ϕ_2 كما في شكل (١٧أ - ٣). وبتحليل شدة المجال في كل من الوسطين إلى مركبتين متعامدتين يمكن الحصول على :
$E_1 \cos \phi_1$ و $E_2 \cos \phi_2$ في الاتجاه العمودي على السطح الفاصل و $E_1 \sin \phi_1$ و $E_2 \sin \phi_2$ في اتجاه السطح الفاصل.

وبتطبيق التحليل نفسه على الإزاحة D كما في شكل (١٧ب - ٣) وباستخدام التكامل الخطي لشدة المجال الكهربي حول مسار مقفل حسب المعادلة (٢٣-٢) على مركبات E وقانون جاوس العام حسب المعادلة (٤٠-٣) على مركبات D فإنه يمكن معرفة العلاقة بين ثابتي العزل K_1 و K_2 وزاوية السقوط ϕ_1 وزاوية الانكسار ϕ_2 كما يلي :

إذا اعتبر المسار المغلق abcd الذي يقع في مستوى الرسم، فإن التكامل الخطي لشدة المجال الاستاتيكي حول مسار مقفل يساوي الصفر، فإذا أهمل طول الضلعين cd و ab لصغرهما واعتبر طول كل من الضلعين bc و ad يساوي l بحيث يقع الضلع bc في الوسط العازل K_2 و ad في الوسط العازل K_1 ، فإن التكامل الخطي للضلع ad يساوي :

$$l E_{t1} = l E_1 \sin \phi_1$$

والتكامل الخطي للضلع bc يساوي :

$$l E_{t2} = -l E_2 \sin \phi_2$$

وبذلك فإن التكامل الخطي الكامل يساوي :

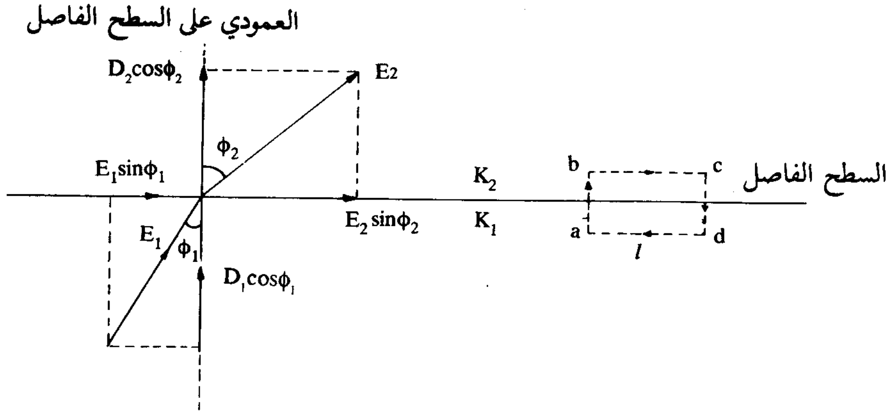
$$\oint E dl = l E_1 \sin \phi_1 - l E_2 \sin \phi_2 = 0$$

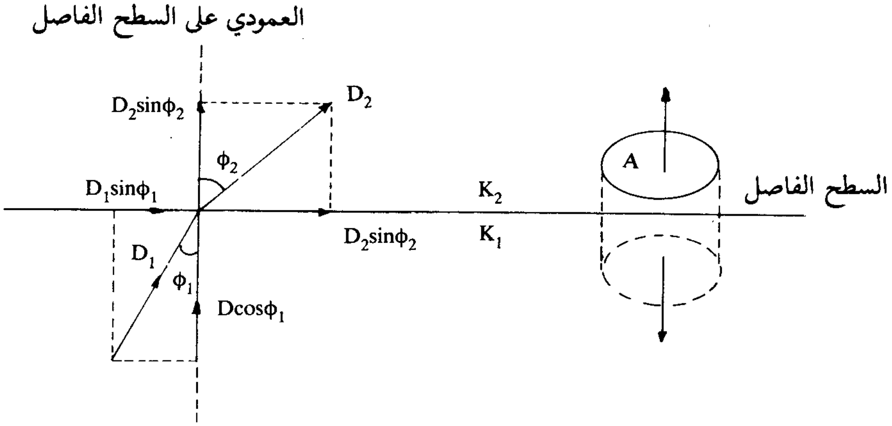
$$\therefore \quad E_1 \sin \phi_1 = E_2 \sin \phi_2 \qquad \ldots\ldots \qquad (٣\text{-}٦١)$$

أي أن مركبة شدة المجال المماسة (tangential component) $E \sin \phi$ مستمرة عبر الحدود.

وإذا اعتبر السطح الأسطواني المقفل كما في شكل (١٧ب - ٣)، مساحة كل من قاعدتيه تساوي S وأهمل طول الاسطوانة لقصرها، وحيث إنه لا توجد شحنات حرة

داخل هذا السطح وإن كانت هناك شحنات تأثيرية مقيدة على سطحيّ العازلين الملامسين للسطح الفاصل نتيجة لاستقطاب العازلين بتأثير المجال الكهربي، فإن التكامل السطحي لمركبة D العمودية على السطح يساوي صفرا.





شكل (١٧-٣): الشروط الحدودية

أ ـ لمادتين عازلتين مختلفتين. فإذا سقطت خطوط المجال على السطح الفاصل بزاوية معينة فإنها ستنكسر على هذا السطح وتدخل إلى الوسط الثاني بزاوية أخرى.

ب ـ وكذلك الحال بالنسبة للإزاحة D.

وبتطبيق قانون جاوس على السطح المقفل يُحصل على :

$$\oint D \cos\phi \, dS = SD_1 \cos\phi_1 - SD_2 \cos\phi_2 = 0$$

$$\therefore \quad D_1 \cos\phi_1 = D_2 \cos\phi_2 \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٢)$$

وقد أهمل التكامل السطحي على جوانب السطح المقفل.

وتدل المعادلة (٣-٦٢) على أن مركبة الإزاحة العمودية ($D \cos\phi$) مستمرة عبر الحدود الفاصلة بين العازلين.

وبقسمة المعادلة (٣-٦١) على المعادلة (٣-٦٢) يمكن الحصول على :

$$\frac{E_1 \sin\phi_1}{D_1 \cos\phi_1} = \frac{E_2 \sin\phi_2}{D_2 \cos\phi_2}$$

ولما كانت العلاقة بين D و E هي :

$$D_1 = K_1 \varepsilon_0 E_1 \quad , \quad D_2 = K_2 \varepsilon_0 E_2$$

$$\therefore \quad \frac{E_1}{D_1} \tan\phi_1 = \frac{E_2}{D_2} \tan\phi_2$$

$$\frac{1}{K_1} \tan\phi_1 = \frac{1}{K_2} \tan\phi_2$$

أو

$$\frac{\tan\phi_1}{\tan\phi_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٣)$$

وهذه المعادلة شبيهة بتعريف قانون سنل Snell's law لمعامل انكسار الضوء على الحد بين وسطين عازلين مختلفين لذلك تسمى المعادلة (٣-٦٣) **بقانون انكسار خطوط القوى لمجال كهربي في وسطين عازلين مختلفين**.

وإذا فرض أن أحد الوسطين العازلين هو الفراغ حيث $K_2 = 1$ فإن المعادلة (٣-٦٣) تصبح :

$$K_1 = \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٤)$$

حيث ϕ_1 زاوية الانكسار في الفراغ .

(٣-١٧) معامل إزالـة الاستقطاب

Depolarization Factor

عرف فيما سبق دراستـه أنه إذا وضعت مادة عازلة، على هيئة صفيحة كما في شكل (١٥ب - ٣)، في مجال كهربي خارجي E_0 ينتج عنه مجال داخلي E_i نتيجة للشحنات المستحثة q_i ، يعاكسه في الاتجاه ويعمل على نقصان المجال المحصل داخل المادة العازلة .

ولهذا فالمجال المستحث يعاكس الاستقطاب P ولذلك يسمى E_i بمجال إزالة الاستقطاب وحسبما ورد في البند (٣-١١) فإن المجال المحصل داخل هذه المادة يساوي :

$$E = E_0 - E_i$$

وبالتعويض عن E_0 من المعادلة (٣-٢٧)، $E_0 = KE$ ، نُحصل على :

$$E = K\,E - E_i$$

أو

$$E_i = (K - 1)\,E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٥)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٣-٥١) نُحصل على :

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0} P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٦)$$

وتكتب هذه المعادلة في حالتها العامة، حيث لا يكون العازل صفيحة، بالصورة التالية :

$$E_i = -\frac{\beta}{\varepsilon_0} P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٧)$$

حيث β معـامل إزالة الاستقطاب أما الإشارة السالبة فتدل على أن اتجاه E_i عكس اتجاه P. وتعتمد β على شكل المادة العازلة. فإذا كانت على شكل كرة كانت $\beta = \frac{1}{3}$ ، وإذا كانت على شكل قضيب طويل وكانت E توازي محوره فإن $\beta = 0$ أما إذا كانت متعامدة فإن $\beta = \frac{1}{2}$.

(٣-١٨) المواد العازلة تلقائية الاستقطاب (فروكهربية)

Spontaneous Polarization Dielectric Materials (Ferroelectric)

لبعض المواد العازلة خواص منفردة. فتكون لها عزوم كهربية نتيجة للكبس (الضغط compression) أو الشد (tension) أو القطع (shear) وبصورة أخرى يمكن القول إن لهذه المواد المتجه استقطاب P دون تسليط أي مجال كهربي، ناتج عن الانبعاج (عيب شكل deformation). مثل هذه المواد تسمى بالمواد ذات الانفعال الكهربي الاجهادي (piezoelectric) مثل بلّورة الكوارتز.

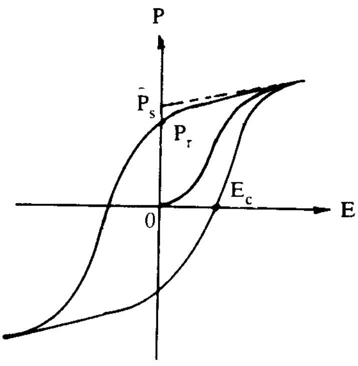
وتكون لبعض المواد متجه استقطاب P في غياب المجـال الكهربي الخـارجي E_0 وغياب الانبعاج مثل هذه المواد تعرف بالمواد الفروكهربية العازلة أو بالمواد العازلة تلقائية (عفوية) الاستقطاب.

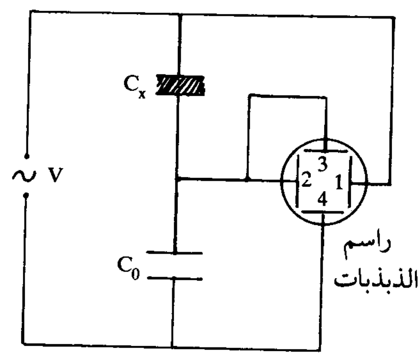
وتنتمي هذه المـواد إلى أسرة المـواد الكهربية الحرارية (pyro-electric family) ويمكن فيها عكس اتجاه الاستقطاب التلقائي بالمجال الكهربي أو اختلاف قيمته مع درجة الحرارة. والطريقة المتبعة للكشف عما إذا كانت المادة من المواد العازلة تلقائية الاستقطاب أو غيرها هي ما يلي:

إذا كانت المادة على هيئة بلّورة (crystal) فتقطع منها شريحة رقيقة بصورة عمودية على أحد اتجاهات محاورها الثلاثة المتبادلة، أما إذا كانت المادة على هيئة مسحوق فإنه يمكن ضغطها على شكل أقراص ويثبت على جانبيها قطبي اتصال وذلك بطلي الجانبين بطلاء معـدني مثـل الـذهب أو الفضـة بالطريقة العادية أو بطريقة الرش الكاثودي

(sputtring). وبهذه الطريقة فهي تماثل مكثفا مستويا به مادة عازلة سعته C_x ثم توصل بالدائرة البسيطة المبينة في شكل (١٨أ ـ ٣) حيث C_0 مكثف مقارنة ، و V منبع جهد متردد . ويكون V_x عبر المكثف C_x مساويا للجهد الواقع بين طرفي راســم الذبذبات 1 و 2 (الاسيلوسكوب oscilloscope).

ولما كانت سعة أقطاب راسم الذبذبات صغيرة كانت الشحنـات المخزونـة في C_x و C_0 متساوية . فإذا فرض أن q هي مقدار الشحنة فإن الجهد بين القطبين 3 و 4 هو q/C_0 على ذلك فإن الشكل الذي يظهر على الشاشة هو عبارة عن العلاقة بين q/C_0 و V .





شكل (١٨-٣) : أ ـ دائرة كهربية تستخدم لرسم دورة التخلف الكهربي على راسم الذبذبات ـ الاسيلوسكوب .
ب ـ شكل دورة التخلف الكهربي لمادة عازلة عفوية الاستقطاب .

فإذا كانت المادة العازلة للمكثف C_x تعطى شكلا كما في شكل (١٨ب ـ ٣) والـذي يسمى بدورة التخلف (hystresis loop) الكهـربي، [وهي تماثـل تمامـا دورة التخلف المغناطيسي للمواد الفرومغناطيسية الذي سيشرح في الفصل السابع]، فإن المادة تسمى بالمادة العازلة تلقائية الاستقطاب . وتتناسب الشحنة q المشار إليها سابقا مع الإزاحة الكهربية D في المادة . وكما هو معروف فإن العلاقة بين D و E و P تحدد بالمعادلة (٤٨-٣) .

وفي كثير من الحالات التي يلاحظ فيها دورة التخلف تكون قيمة P أكبر كثيرا من E ، ولذلك يمكن عد q/C_0 متناسبة مع P. ولذلك فإن العلاقة بين q/C_0 و V على راسم الذبذبات يمكن عدها علاقة بين P و E كما في شكل (١٨ب - ٣) والذي اصطلح على تسميته بمنحنى الاستقطاب. وفي هذا المنحنى تسمى P_r ، عندما تكون $E = 0$ ، بالاستقطاب التخلفي (المتبقي - remanence polarization) و P_s الاستقطاب التلقائي و E_c [عندما تكون $P = 0$] يسمى بالمجال القهري (coercive field).

وينقص عادة الاستقطاب التلقائي مع ارتفاع درجة الحرارة حتى يتلاشى تماما عند درجة حرارة معينة T_C وتسمى درجة التحول هذه بنقطة كيوري (Curie point) فإذا كانت درجة الحرارة أقل من T_C تكون المادة في طور الفروكهربية (ferroelectric phase) أما إذا كانت أعلى فتكون المادة في طور الكهربية المتسامتة (الباراكهربية) (paraelectric phase) ويكون ثابت عزل هذه المواد كبيرا يتراوح بين 10^2 و 10^5 إذا كانت درجة الحرارة قريبة من T_C. وقد وجد في هذه الحالة أن ثابت عزل المادة K يتبع القانون المعروف بقانون كيوري وفايس (Curie - Weiss law) لدرجات الحرارة الأعلى من نقطة كيوري :

$$K = B + \frac{C}{T - T_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٨)$$

حيث C ثابت كيوري وفايس و T درجة الحرارة و T_0 نقطة كيوري لطور النفاذية الكهربية، كما تسمى باستقراء (extrapolation) نقطة كيوري (درجة حرارة كيوري وفايس). وقد تمثل عمليا بدرجة التحول T_C وتسمى في هذه الحالة بدرجة حرارة كيوري للمواد عفوية الاستقطاب و B مقدار ثابت وقيمته صغيرة جدا مقارنة بقيمة K ولذلك يمكن إهماله وتصبح المعادلة (٦٨-٣) كالتالي :

$$K = \frac{C}{T - T_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٦٩)$$

والدراسة التفصيلية للمواد العازلة عفوية الاستقطاب صعبة ولا مجال لشرحها في هذا الكتاب. وقد أعطيت نبذة مبسطة عنها في هذا الفصل لإعطاء الدارس فكرة

عنهـا كمثـل للمواد العازلة غير الخطية (non-linear) للتمييز بينها وبين المواد العازلة الخطية (linear) السابق دراستها.

(٣ـ١٩) الإلكترومترات والقياسات الكهربية الساكنة
Electrometers & Electrostatic Measurements

إن العمل الأساسي لجهاز الإلكترومتر هو قياس فروق الجهد ويمكن استعماله أيضا في قياس الشحنـات الكهـربية وكذلك التيارات الضعيفة (feeble currents). ويتناسب انحراف الجزء المتحرك (في أي جهاز من الأجهزة) θ مع فرق الجهد المسلط V.

أي أن $(\theta = ZV)$ حيث Z ثابت الجهاز تحت الشروط المعطاة.

ومن ثم فنسبـة الانحـراف لفـرق الجهـد (Z) يعـطينـا الحسـاسية الجهـدية (potential sensitivity) لهذا الجهاز.

ومع ذلك فإن كانت Q هي الشحنة المعطاة لإلكترومتر سعته C فإن:

$$\theta = ZV = Z\,\frac{Q}{C} = Z'Q \qquad \cdots\cdots \qquad (٣ـ٧٠)$$

فإذا كانت $Q = 1$ فإن Z' تعطينا حساسية الجهاز في قياس الكمية الكهربية. وإذا كانت الشحنة متغيرة فسينتج عن ذلك تيار تعطى قيمته بالعلاقة:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\,\frac{dV}{dt} = \frac{C}{Z}\,.\,\frac{d\theta}{dt}$$

∴ معدل تغير الانحراف هو:

$$\frac{Z}{C}\,I = \frac{d\theta}{dt} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (٣ـ٧١)$$

أو

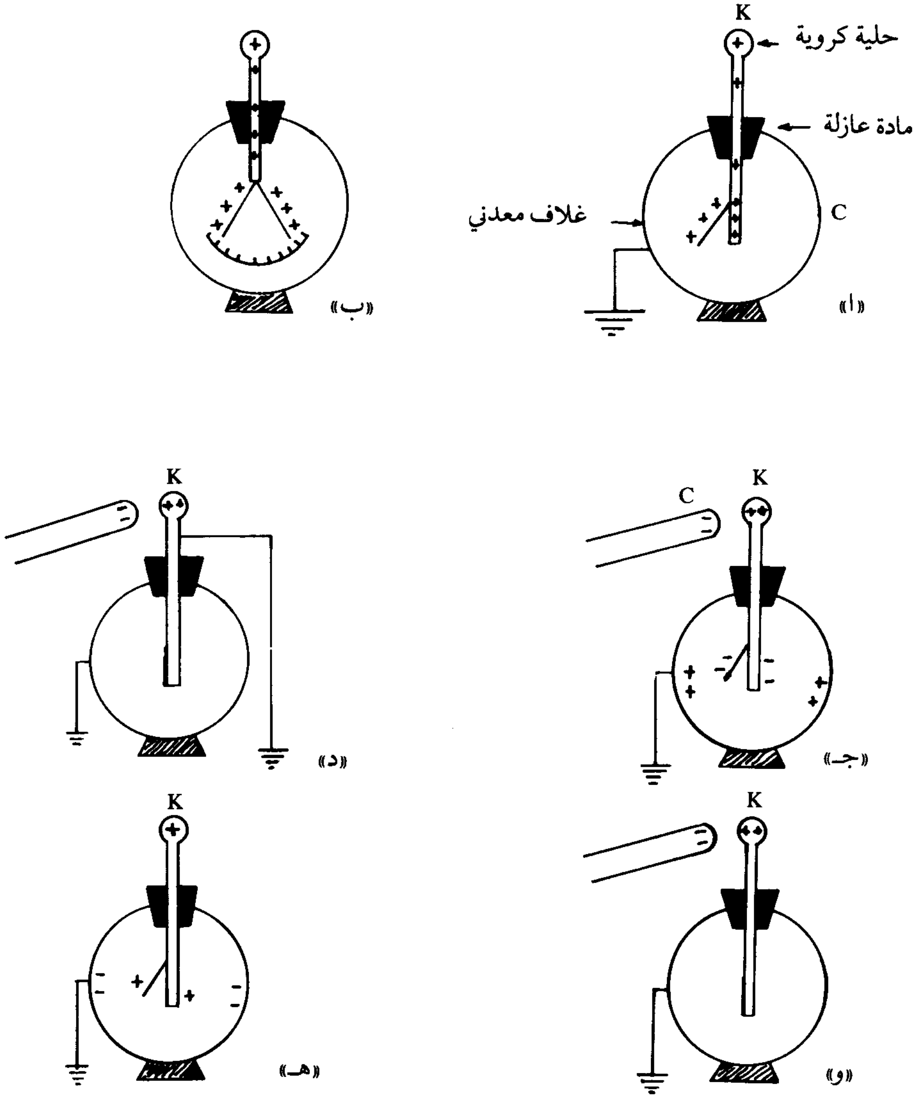
$$Z'I = \frac{d\theta}{dt}$$

حيث Z' هي حساسية الجهاز في قياس التيار الكهربي (current sensitivity) وستدرس الآن الأنـواع المختلفـة لأجهـزة الإلكترومترات وكيفية استعمالها لقياس الجهد وكمية الشحنة والتيارات الكهربية الضعيفة جدا.

(٣-١٩-١) المكشاف الكهربي Electroscope

وهـو أبسـط أنـواع الإلكـترومـترات ويسمى المكـشـاف ذو الورقـة الذهبـيـة gold leaf electroscope [شكـل (١٩أ - ٣)] وتم تركيب أول مكشـاف عام ١٧٨٧ ميلادية بواسـطة العالم بينيت (A. Bennett) ويتكون من قضيب موصل R تتصل به شريحة رقيقة من الذهب l. والقضيب والشريحة موضوعان داخل غلاف معدني اسطواني C يوجد على جوانبه زجاج شفاف، ويتصل هذا الغلاف بالأرض عن طريق مواسير الماء. والأرض عبارة عن موصل كبير تمتص أو تعطى كمية غير محدودة من الشحنة دون تغيير جهـدها الكهربي. وأي موصل يتصل بالأرض يقال عنه أرضي (grounding). ونقطة التوصيل بالأرض تسمى نقطة اتصال الموصل بالأرض، والقضيب مثبت بحلية صغيرة كروية K توجد في أعلى الجهاز لتخفض إلى الحد الأدنى من عملية التسرب (leakage) وكلها معزولة عن الغلاف المعدني بقطعة من مادة الكهرمان (amber) أو مادة الكبريت. وهناك مكشاف آخـر ممـاثـل يستعـمـل فيـه شريحتـان ذهبيتـان رقيقتـان (two thin strips of gold) كما في شكل (١٩ب - ٣).

ويستعمل هذا الجهاز لقياس الشحنات والجهد الكهربي ولكنه أكثر حساسية للشحنات لأن سعته صغيرة وفي حدود ميكروميكروفاراد $\mu\mu f$. فإذا أعطيت الشحنة للقضيب مبـاشرة يحدث تنافر بين الشحنات المتماثلة على كل من القضيب والشريحة الذهبية مما يسبب انحراف هذه الشريحة عن القضيب ويزداد أو ينقص هذا الانحراف بناء على مقدار الشحنة ونوعية الشحنات المتعاقبة.



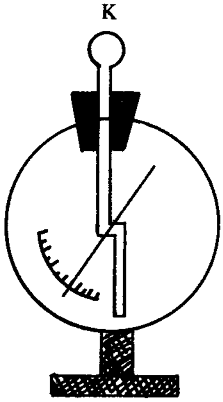
شكل (١٩-٣): ا ـ مكشاف كهربي ذو ورقة ذهبية.
ب ـ مكشاف كهربي ذو ورقتين ذهبيتين رقيقتين.
جـ، د، هـ، و ـ يوضح كيفية التحكم في كمية الشحنة التي يتلقاها المكشاف ذو الورقة الذهبية عن طريق شحنة بالطريقة الحثية.

وهـذا الانحراف يمكن قياسه باستعمال التدريج S المرسوم أمام الشريحة ومنه يمكن معرفة مقدار الشحنة أو قيمة الجهد المجهول وذلك بعد معايرة انحراف الشريحة بشحنة معروفة أو جهد معروف.

ولما كانت الشريحة الذهبية رقيقة جدا لذلك من المحتمل أو يصيبها بعض التلف نتيجة تتابع الشحنات الكهربية عليها ولتفادي مثل هذا التأثير يتم التحكم في كمية الشحنة التي يتلقاها الجهاز عن طريق شحنه بالطريقة الحثية (induction) وهي عبارة عن شحن موصل ما نتيجة لتقريب موصل آخر مشحون منه دون أن يتلامسا وتوجز هذه الطريقة فيما يلي:

إذا دلك قضيب من المطاط الصلد بقطعة من الصوف فإنه يكتسب شحنة سالبة فإذا قرب هذا القضيب من الحلية K للمكشاف [شكل (١٩جـ - ٣)] تولدت شحنة موجبـة عـلى الحلـيـة K القريـبـة من قضـيـب المطـاط (وتسمـى بالشحنـات المقيـدة bound charges) وشحنات مماثلة سالبة على القضيب المتصل بالحلية والشريحة الذهبية (وتسمى بالشحنات المتنافرة repelled charges) تسبب انفراج الشريحة الذهبية، فإذا أزيح القضيب المطاط فإن الوضع سيعود لحالته الأولى، أما إذا وصل قضيب المكشاف بالأرض مع بقاء المطاط قريبا من الحلية K فإن الشحنات المتنافرة سوف تتعادل مع الأرض (إذا كانت الشحنات المتنافرة موجبة فإن الإلكترونات تندفع من الأرض إلى القضيب، أمـا إذا كانت سالبـة فإن الإلكـترونات تندفع من القضيب إلى الأرض) وينتهي انفـراج الشريحـة كما في شكل (١٩د - ٣). فإذا أزيح القضيب المطاط فإن الشحنات المستحثة على K ستتعادل مع الأرض. ولمنع حدوث ذلك يجب إزالة الاتصال الأرضي كما في شكل (١٩هـ - ٣). فإذا أبعد القضيب المطاط كما في شكل (١٩و - ٣) فإن الشحنات المستحثة المقيدة تحبس وتتوزع في الحلية K والقضيب تحت تأثير التنافر المتبـادل للشحنـات المتشابهة وتنفرج الشريحة الذهبية وبذلك أمكن شحن المكشاف بشحنة موجبة بطريقة أكثر فعالية ودقة عن طريقة الاتصال المباشر.

ويوجـد مكـشـاف آخـر يسمى بمكشاف برون (Broun) وفيه تستخدم إبرة خفيفة من مادة الألومنيوم مرتكزة على محور على القضيب يمكنها من الدوران بسهولة في مستوي أفقي بدلا من الشريحة الذهبية كما في شكل (٢٠-٣) ويستعمل مثل هذا النوع لقياس الجهد الكهربي بحيث يسلط الجهد بين الحلية K والغلاف المعـدني. ونتيجـة للتنافر بين الإبرة والطرف السفلي للقضيب المعـدني يمكن تعيين الانحـراف للإبـرة بواسطة تدريج معين معاير وبواسطته يمكن معرفة الجهد المطبق.



شكل (٢٠-٣): مكشاف برون

ويمكن لهذا الجهاز أن يقيس فرق الجهد في حدود المئات إلى بضعة آلاف من الفولتات لا يزيد على عشرة آلاف فولت.

(٣-١٩-٢) الإلكترومتر المطلق أو ذو القرص المنجذب

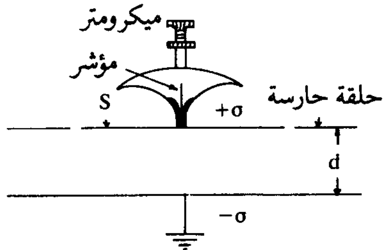
Absolute or attracted disc electrometer

ويتكون أساسا من مكثف متوازي اللوحين ذي الحلقة الحارسة، الذي شرح في البند (٣-٣)، إلى جانب بعض الأجهزة الميكانيكية لقياس قوة التجاذب بين اللوحين عند شحنهما.

إذا كانت σ [شكل (٢١-٣)] تمثل كثافة الشحنة السطحية على اللوحين فإن القوة على القرص الذي مساحته S هي:

$$F = S\,\sigma^2 / 2\,\varepsilon_0 \qquad \text{..} \quad (٣-٧٢)$$

وذلك حسب العلاقة (٣-١٨).



شكل (٢١-٣): أ - الالكترومتر المطلق أو ذو القرص المنجذب.

فإذا كان فرق الجهد بين اللوحين V

فإن:

$$V = \frac{Q}{C} = \sigma s \times \frac{d}{\varepsilon_0 S}$$

حيث d المسافة بين اللوحين. وقيمة السعة C مأخوذة من المعادلة (٥-٣):

$$\therefore V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

أو

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{d}$$

وبالتعويض في المعادلة (٧٢-٣) يمكن الحصول على:

$$\therefore F = S\frac{\varepsilon_0^2 V^2}{d^2} \times \frac{1}{2\varepsilon_0} = \frac{S\varepsilon_0 V^2}{2d^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧٣-٣)$$

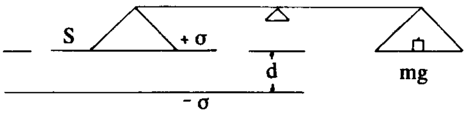
هذه القوة يمكن قياسها باستعمال النظام الزنبركي (spring system) كما هو مرسوم بالشكل (٢١-٣). قبل تسليط الجهد الكهربي بين اللوحين يجب أن يكون وضع القرص صحيحا في مستوى الحلقة الحارسة ويتم ذلك باستخدام الميكرومتر اللولبي وبالملاحظة من خلال المنظار المقرب ذي الشعرتين المتقاطعين. فإذا سلط جهد بين صفيحتي المكثف فإنه سوف يسبب في انخفاض القرص عن مستواه. بإرجاع القرص إلى وضعه السابق باستخدام الميكرومتر اللولبي والملاحظة من خلال منظار مقرب مرة أخرى فإن التغيير بين قراءتي الميكرومتر يمثل القوة بين الصفيحتين. وباستخدام المعادلة (٧٣-٣) يمكن قياس فرق الجهد.

ويمكن معايرة النظام وذلك بإضافة بعض الأوزان إلى القرص وإرجاع القرص في كل مرة إلى وضعه السابق لمعرفة القوة المطابقة لكل تغير في قراءة الميكرومتر.

ويمكن استخدام نظام آخر لمعرفة القوة F وذلك بأن يثبت القرص في كفة ميزان كما في شكل (٢٢-٣). فإذا انجذب القرص بمجرد تسليط فرق الجهد فإنه يمكن إعادته إلى الوضع السابق بإضافته أثقال كتلتها m في الكفة الأخرى للميزان كما يبينها الشكل (٢٢-٣) وعند هذا الوضع يكون لدينا:

$$F = m . g$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية. وبالتعويض في المعادلة (٣-٧٣) يمكن معرفة فرق الجهد V.



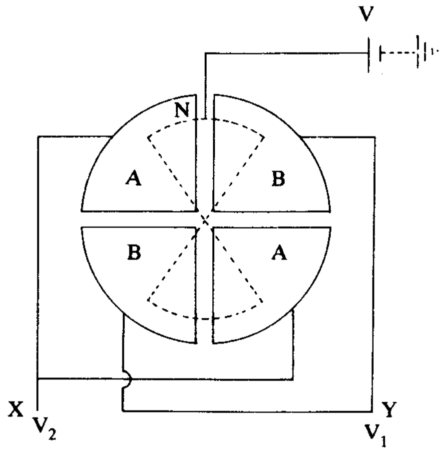
شكل (٣-٢٢): الإلكترومتر المطلق وطريقة معايرته.

(٣-١٩-٣) الإلكترومتر الربعي Quadrant electrometer

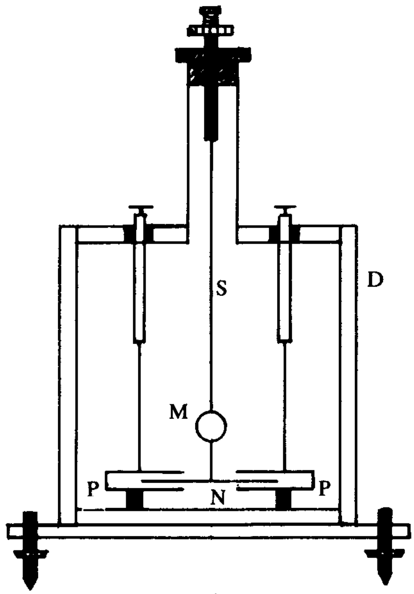
يستخدم جهاز الإلكترومتر الربعي لقياس القوى الدافعة الكهربية أو فروق الجهد دون سحب أي تيار كهربي من مصدر الجهد وهو أكثر دقة من الإلكترومترات السابق ذكرها وأول من شيده اللورد كلفن (Lord Kelvin) عام ١٨٦٠ ميلادية ثم جاء من بعده دوليزاليك (Dolezalek) وأجرى عليه بعض التحسينات، ويوضح الشكل (٢٣أ - ٣) تركيب الجهاز الذي يتألف من قرص أسطواني أجوف مقسم إلى أربعة أقسام متساوية، وكل ربع مثبت على عمود من الكهرمان "P" أو أي عازل جيد العزل. وينفصل كل ربع عن الآخر بمسافة واحد ملليمتر تقريبا ويتصل كل ربعين متقابلين AA و BB بسلك موصل. وداخل تجويف القرص المقسم تتدلى إبرة كبيرة رفيعة مسطحة N من مادة الألومنيوم، أو ورقة فضية، تتصل بها مرآة صغيرة M متصلة بسلك رفيع من البرونز الفوسفوري (phosphor bronze) أو من ألياف من المرو المطلية بالفضة (s. fiber of quartz) ويوجد هذا النظام داخل غلاف أسطواني معدني D يتصل بالأرض. والغرض من ذلك هو حجب النظام الداخلي من أي مجال كهربي خارجي.

ويكون عادة جهد الإبرة N عاليا عن جهد الأرض وليكن V. فعند وجود فرق في الجهد بين النقطتين X و Y ، المبينة في شكل (٢٣ب - ٣)، المتصلتين بـ AA و BB فإن الإبرة ستنحرف بزاوية معينة θ تعتمد على قيمة ذلك الفرق في الجهد. ويقاس الانحراف باستعمال ضوء يسقط على المرآة N ثم ينعكس على تدريج طويل أو باستعمال منظار مقرب وتدريج مناسب بحيث يمكن رؤيته بواسطة المنظار من خلال المرآة.

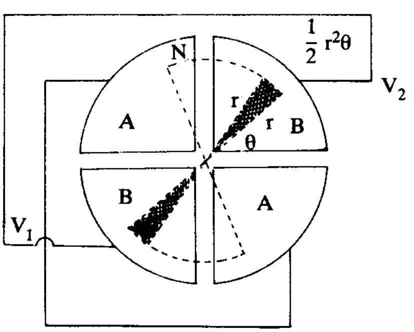
فإذا فرض أن جهد الإبرة V وجهد الربعين AA هو V_1 و BB هو V_2 ، وذلك بالنسبة للأرض، تكون الإبرة والربعان AA مكثفا مستويا فرق الجهد بينهما $(V - V_1)$.



«ب»



«أ»



«جـ»

شكل (٢٣-٣): أ ـ مكونات جهاز الإلكترومتر الربعي.
ب ، جـ ـ طريقة استخدام الجهاز وملاحظة انحراف الإبرة N.

كذلك تكون الإبرة مع الربعين الآخرين مكثفا مستويا آخرا فرق الجهد بينهما $(V - V_2)$. فإذا كان انحـراف الإبرة في اتجاه BB كما في شكل (٢٣جـ ـ ٣) فإن المساحة العـامة بين الإبرة BB سوف تزداد بمقدار $(S = 2 \times \frac{1}{2} r^2 d\theta)$ [حيث r نصف قطر الإبرة]. وفي اللحظة نفسها ستنقص المساحة العامة بين الإبرة و AA بمقدار:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

ويكون التغيير في السعة بين الإبرة و BB حسب المعادلة (٥ـ٣) هو:

$$\delta C = 2\,\frac{\varepsilon_0 S}{d} = 2\,\frac{\varepsilon_0 r^2 d\theta}{d} \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{ـ}٧٤)$$

حيث d هي المسـافـة بين الإبـرة و AA ، والعدد 2 ناتج عن أخذ السعة بين الإبرة والسطح العلوي والسفلي لـ AA.

وتكون الزيادة في الطاقة U_1 بعد دوران الإبرة بالنسبة لـ AA هي :

$$U_1 = \frac{1}{2}\,\delta C\,(V - V_2)^2$$

ويكون النقص في الطاقة U_2 بعد دوران الإبرة بالنسبة لـ BB هي [بند (٣ـ٥)]:

$$U_2 = \frac{1}{2}\,\delta C\,(V - V_1)^2$$

وبذلك يكون مجموع الزيادة في الطاقة هو:

$$U = U_1 - U_2 = \frac{1}{2}\,\delta C \left\{ (V - V_2)^2 - (V - V_1)^2 \right\}$$

$$= \delta C\,(V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \right\} (٣\text{ـ}٧٥)$$

إلى جانب هذه الطاقة الكهربية توجد طاقة أخرى تعمل على لي السلك فإذا كانت τ ثابت اللي الخاص بالسلك عند ليه درجة واحدة فإن الشغل الذي يبذل في لي السلك يساوي $\tau\theta d\theta$.

∴ مجموع الطاقة المكتسبة تساوي :

$$U + \tau\theta d\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧٦\text{-}٣)$$

هذه الطاقة تعطى من المصدر لإمداد الفرق في الجهد بين AA و BB وحيث إن التغير في السعة يصحبه تغير في سريان الشحنة من المصدر. وإذا تأملنا المكثف NBB فإن الزيادة في δC يصحبها زيادة في الشحنة قدرها $[\delta Q = \delta C\,(V - V_2)]$ وبذلك فالطاقة المستمدة من المصدر هي $\delta C\,(V - V_2)^2$. وكذلك فالنقص في السعة δC للمكثف NAA يتسبب في تخزين كمية من الطاقة للمصدر قدرها $\delta C\,(V - V_1)^2$ وتكون محصلة الطاقة الصادرة من المصدر تساوي :

$$\delta C\left\{(V - V_2)^2 - (V - V_1)^2\right\} =$$

$$2\delta C\,(V_1 - V_2)\left\{V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right\} \quad \ldots \quad (٧٧\text{-}٣)$$

وبالمقارنة مع المعادلة (٣ـ٧٥) فإن هذه المعادلة تساوي 2U وحيث إن هذه الطاقة تساوي الطاقة المكتسبة من المصدر

$$\therefore 2U = \tau\theta d\theta + U$$

أو

$$\tau\theta d\theta = \delta C\,(V_1 - V_2)\left\{V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right\}$$

وبالتعويض عن δC من المعادلة (٣ـ٧٤) وبعد الاختصار يُحصل على :

$$\therefore \theta = \frac{2\varepsilon_0 r^2}{\tau d}(V_1 - V_2)\left\{V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right\}$$

أو

$$\theta = C_q\,(V_1 - V_2)\left\{V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right\} \quad \ldots \quad (٧٨\text{-}٣)$$

حيث C_q ثابت يعتمد على الثوابت الهندسية للإلكترومتر.

(٣-١٩-٤) استعمال الإلكترومتر الربعي Use of quadrant electrometer

عند استعمال الجهاز يجب أولا توصيل الربعين AA والزبعين BB وكذلك الإبرة بالأرض وعندها يجب أن تكون القراءة على التدريج تساوي صفرا ثم يسلط جهد قدره (100 - 200) فولت على الإبرة وعندها يجب أيضا أن تكون القراءة ثابتة عند الصفر وإذا حصل انحراف معين فمعنى ذلك أن الإبرة ليست في مكانها الصحيح ولذلك يجب إعادة وضعها وذلك بتغيير مربط السلك المتصل بالإبرة وكذلك مستوى قاعدة الإلكترومتر عن طريق المسامير اللولبية المثبتة أسفل القاعدة. ثم يتكرر شحن الإبرة من جديد حتى يمكن الحصول على ثبات الإبرة وعندها يكون الجهاز جاهزا للقياس.

وتحدد العلاقة بين قراءة التدريج المستعمل مع الإلكترومتر الربعي وفرق الجهد المطابق المسلط على الجهاز باستعمال الدائرة المبينة في شكل (١٢٤ - ٣). وتتصل مقاومة متغيرة على التوازي مع بطارية، جهدها يساوي 80 فولت، لاختيار الجهد المسلط على الأرباع AA و BB ، والذي يقاس بمقياس الجهد V_m. وتتصل الإبرة المتحركة بالبطارية من خلال نقطة الاتصال D وبذلك يظل جهدها أعلى من جهد غلاف الإلكترومتر. وتستعمل المقاومة العالية HR لمنع أي تلف ينتج عن تلامس الإبرة مع الأرباع AA و BB.

هذا النوع من التوصيل يسمى بالتوصيل الهتروستاتيكي (heterostatic) لأن الجهود عند التوصيلات A و B و D مختلفة القيمة، أما إذا وصلت الإبرة بأحد الأرباع AA أو BB بدلا من البطارية فيسمى بتوصيل أيديوستاتيكي (idiostatic) لأن الإبرة لها جهد أحد الأرباع نفسه.

ويُحصل على منحنى المعايرة باستخدام قيم معينة للجهد مقروءة من خلال مقياس الجهد V_m وقراءة الانحراف θ المقابل له على التدريج. ويمثل الشكل (٢٤ب - ٣) ذلك. ومن الواضح أنه بالنسبة للجهود الصغيرة تكون العلاقة بين الانحراف والجهد علاقة خط مستقيم ثم ينحرف قليلا عند الجهود العالية.

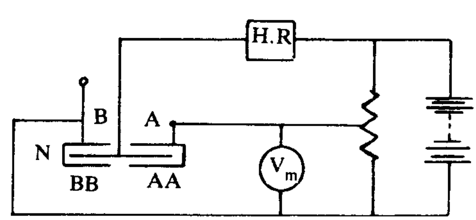
ويستعمل جهاز الإلكترومتر الربعي فيما يلي :

ا ـ قياس فرق جهد صغير مستمر Steady potential

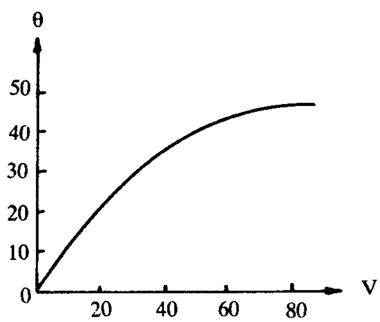
تصـل النقـطة الأولى بالربعين AA والنقطة الثانية بالربعين BB كما في شكل (٢٤جـ ـ ٣) ويحدد الانحراف المشاهد θ من المعادلة (٧٨ـ٣) ولما كان جهد الإبرة في حدود مائة فولت أي أن $V >> V_1$ فإنه يمكن إهمال المقدار $(V_1 + V_2)$ ومنه فإن :

$$\theta = C_q V (V_1 - V_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٧٩)$$

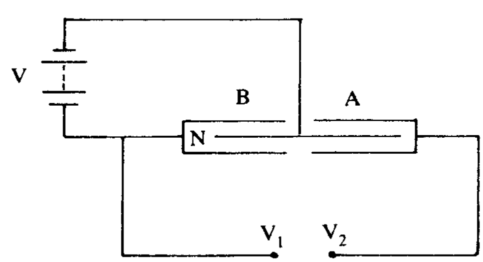
وحيث إن V و C_q مقداران ثابتان فإن θ تتناسب طرديا مع الفرق في الجهد بين AA ،



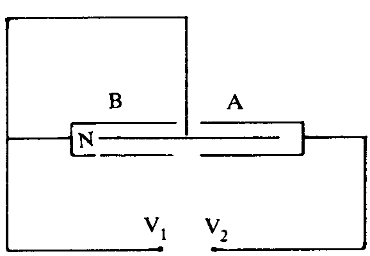
«ا»



«ب»



«جـ»



«د»

شكل (٢٤ـ٣) : ا ـ دائرة معايرة جهاز الإلكترومتر الربعي .
ب ـ العلاقة بين الانحراف θ والجهد المطابق لهذا الانحراف .
جـ ـ كيفية استخدام الجهاز لقياس فرق جهد صغيرة مستمر.
د ـ كيفية استخدام الجهاز لقياس فرق جهد متغير.

BB. أما إذا وصل الربعان BB بالأرض (أي أن $V_2 = zero$) فإن:

$$\theta = C_q V V_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٣\text{-}٨٠)$$

وفي هذه الحالة يمكن معرفة V_1 مباشرة.

ب ـ قياس فرق جهد متغير *Alternating potential (R.M.S.)*

ويستعان في هذه الحالة بتوصيل الإبرة بأحد الربعين وليكن الربعان AA كما في شكل (٢٤د ـ ٣) ومعنى ذلك أن $V = V_1$ وبالتعويض في المعادلة (٣-٧٩) يُحصل على:

$$\theta = C_q (V_1 - V_2)^2 \quad \dots\dots \quad (٨١أ ـ ٣)$$

أو

$$\theta = C_q (V - V_2)^2 \quad \dots\dots \quad (٨١ب ـ ٣)$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الانحراف يتناسب طرديا مع مربع فرق الجهد بين الربعين BB والإبرة.

وإذا وصل الربعان BB بالأرض فإن $V_2 = 0$ ومنه فإن:

$$\theta = C_q V_1^2 = C_q V^2 \quad \dots\dots\dots \quad (٣\text{-}٨٢)$$

وواضح من هذه المعادلة أن الانحراف يتناسب مع مربع الجهد على الربعين AA. كما يلاحظ أنـه عنـدما يتغير الجهد على الربعين AA حيث يكون موجبا مرة وسالبا مرة أخرى. ولا يؤثر هذا التغير على الانحراف ويأخذ دائما اتجاها واحدا وفي هذه الحالة وعند معايرة الجهاز (calibrated) فإنه يماثل مقياس الجهد العام (universal voltmeter). وبهذا الأسلوب من التوصيل يمكن أن يستعمل الجهاز لقياس V_1 أو V_2 أو الفرق بينهما إذا كان الجهد المراد قياسه كبيرا.

(٣-١٩-٥) الفولتمترات الكهربية الساكنة Electrostatic voltmeters

يستعـمـل هـذا النـوع من الأجهزة لقـيـاس الجـهـود ذات القـيـم المتوسطـة (medium voltage) ويبين الشكل (١٢٥ ـ ٣) مخطط الجهاز المؤلف من شريحة معدنية خفيفـة صلبة N ملتصقة بمحور الدوران المثبت به مؤشر P والشريحة موضوعة جزئيا

داخـل قطاع ربعي معـدني أجـوف، A. فإذا شحنت الشريحـة N والقطاع الربعي A بشحنتين مختلفتين نتيجة لاتصالها بفرق الجهد المراد قياسه فإن الشريحة تنجذب داخل القطاع مسببة دوران المحور S وبالتالي المؤشر P.

وعزم الدوران الناتج عن هذا الانحراف لهذا الجهاز صغير جدا (إلا إذا كان الجهـد عاليا جدا) ولكن يمكن مضاعفته باستعمال قطاعين ربعيين متقابلين وشريحة مزدوجة كما في شكل (٢٥ب ـ ٣) وقد تتعدد هذه القطاعات والشرائح كما في شكل (٢٥جـ ـ ٣) ويسـمى الفولتمـتر في هذه الحـالة بـاسم فولتمـتر متـعـدد الريـش (multi-cellular).

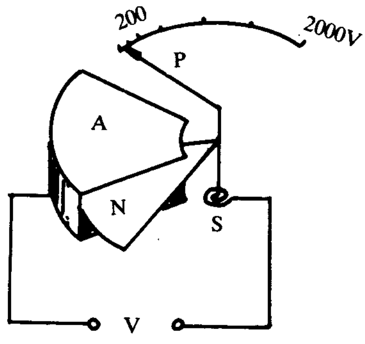
وينـظم عزم الدوران في هذه الأجهزة باستعمال زنبرك حلزوني أو الجاذبية إلى جانب محور الارتكـاز وقـد يستعمل سلك للتعليق من مادة البرونز الفوسفوري وقد يضاف بعض الأثقال مثل m_1 , m_2 أسفل الشريحة المتحركة كما في شكل (٢٥ب ـ ٣)، وفي حالة الفولتمتر متعدد الريش يثبت في أسفل الجهاز مروحة (vane) توضع في داخل وعاء مملوء بالزيت لتقليل الحركة أو لمنع الاهتزازات.

إذا سلط جهد قدره V بين القطاع الربعي A والشريحة N وتسبب في انحراف الشريحة زاوية قدرها θ ، وكانت C السعة بينهما بعد الانحراف، فإن مقدار الشحنة q تساوي CV.

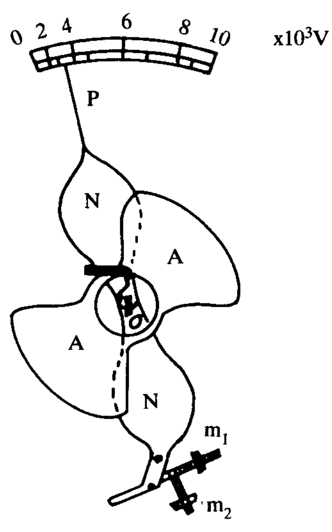
وإذا زاد الجهد بمقدار dV فإن السعة تزداد بمقدار dC وعندها تكون الزيادة في الطاقة المخزونة للمجال الكهربي الاستاتيكي هي :

$$\delta\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{1}{2}V^2\delta C + CV\delta V$$

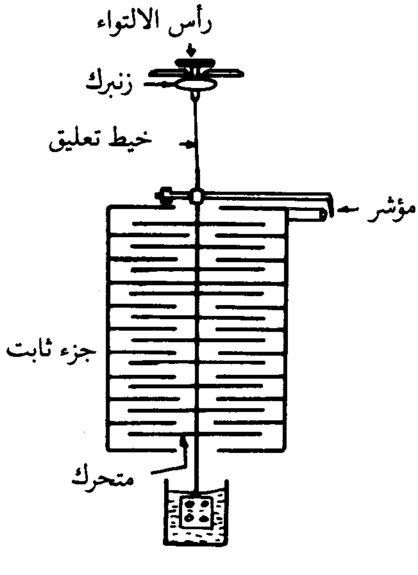
إلى جانب هذه الطاقة هناك طاقة أخرى نتيجة للأجهزة المنظمة لعزم الدوران قدرها $\tau\theta d\theta$ حيث τ ثابت اللي أي أن الطاقة المخزونة هي :



«أ»



«ب»



«جـ»

شكل (٢٥-٣): توضيح تركيب ومكونات الفولتمتر الكهربي الساكن.

$$\tau\theta d\theta + \frac{1}{2}V^2\delta C + CV\delta V$$

خلال هذا التغيير يمد المصدر الكهربي الجهاز بشحنة قدرها dq وتكون الطاقة الصادرة من المصدر هي :

$$Vdq = V\delta(CV) = V^2\,\delta C + CV\,\delta V$$

وحيث إن الطاقتين السابقتين متساويتان فإن :

$$\tau\theta d\theta + \frac{1}{2}V^2\delta C + CV\delta V = V^2\delta C + CV\delta V$$

أو

$$\tau\theta d\theta = \frac{1}{2}V^2 dC$$

$$\therefore \theta = C_v V^2 \frac{dC}{d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٨٣)$$

حيث C_v ثابت الجهاز (instrumental constant) وواضح من هذه المعادلة أن مقدار الانحراف θ يتناسب مع مربع الجهد V^2 ، لأن $\frac{dC}{d\theta}$ مقدار ثابت، وهذا يعني أن الجهاز يمكن استخدامه لقياس الجهد المستمر وكذلك الجهد المتردد.

ويعاير الجهاز بتسليط قيم مختلفة لجهد معلوم ويدرج التدريج بناء على ذلك بحيث يمكن بواسطة الجهاز قراءة قيمة الجهد مباشرة، مع العلم أنه في حالة الجهد المتردد تكون القراءة للقيمة الفعالة للجهد.

(٣-١٩-٦) المكشاف النابض (مكشاف وولف النابض)

Pulse electroscope (Wulf pulse electroscope)

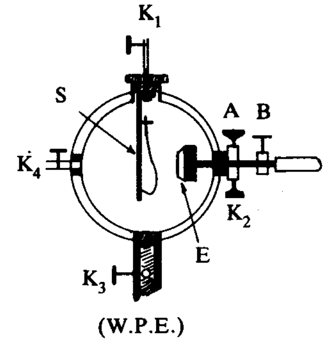
مكشاف وولف عبارة عن جهاز استاتيكي يستعمل لتعيين الشحنات والجهود وكذلك لقياس التيارات الكهربية، وقد طور من المكشاف ذو الورقة الذهبية وهو أكثر حساسية منه. ويوضح الشكل (١٢٦ - ٣) مكونات هذا الجهاز ويتألف من غلاف معدني يتصل بالأرض ومثبت في جهتيه الأمامية والخلفية صفيحتان زجاجيتان شفافتان

وفي أعلاه توجد فتحة مثبت فيها مادة عازلة ويمر من خلالها ساق معدني صلب "S". ويوجد بهذه الساق صفيحة رقيقة من الألومنيوم أحد طرفيها مثبت بالجزء العلوي للساق أما النهاية الأخرى فهي مربوطة بالساق بحلقة من زجاج الكوارتز المرن (elastic quartz glass ring). ويسمى هذا الجزء من الجهاز بالنظام الحساس (sensitive system) وهناك فتحة جانبية تمر خلالها صفيحة من الكربون تسمى بالقطب العداد (E. counter electrode). وهي معزولة عن الغلاف المعدني ويمكن تغيير موضع القطب أو تثبيته بواسطة المسمارين اللولبيين A و B. أما الفتحتان K_1 و K_2 فيمكن استعمالهما لربط المكشاف بالدائرة الخارجية ويمكن وصل الغلاف المعدني بالأرض عن طريق الفتحتين K_3 و K_4.

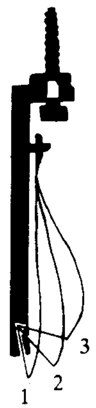
فإذا وصل جهد كهربي بين النظام الحساس والقطب العداد فإن شريحة الألومنيوم سوف تنحرف تدريجيا متجهة نحو القطب، وتعتمد درجة الانحراف على الجهد وعلى بعد المسافة بين الشريحة والقطب d. ويبين الشكل (٢٦ب ـ ٣) بعض مراحل تغيير موضع الشريحة كما يوضح الشكل (٢٦جـ ـ ٣) العلاقة بين الانحراف والجهد والمسافة d. فإذا تزايد انحراف الشريحة حتى وصل إلى موضع تكون فيه قوة كولوم بين الشريحة والقطب أكبر من قوة استعادة حلقة الكوارتز تقفز الشريحة عبر الفراغ بينها وبين القطب، كما في شكل (٢٦ب ـ ٣)، ثم تعود مرة أخرى بعد تفريغ شحنتها في القضيب عند تلامسه. فإذا كان الجهد كافيا لجعل الشريحة تنبض ضد القطب العداد فإن هذه العملية سوف تتكرر على فترات زمنية معينة. ومن هذه النبضات يمكن تقدير تيار التفريغ (discharge current).

ويجب أن يكون التيار المار خلال الشريحة عند تلامسها مع القطب محدودا لمنع تلف الشريحة ويتم ذلك بإضافة مقاومة قدرها 50MΩ في الدائرة الكهربية.

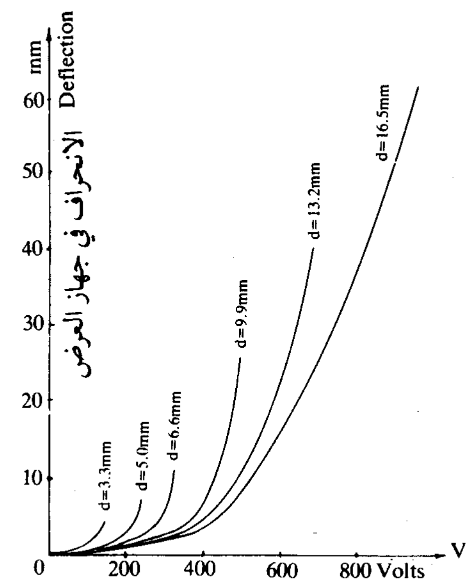
ويبين الشكل (٢٦د ـ ٣) الدائرة الكهربية لدراسة التيار بواسطة التفريغ المفرد (single discharge) فإذا فرض أن الجهد المسلط بين قطب العداد والشريحة عبر المقاومة R هو V_0، وكانت سعة المكشاف C والتي يمكن عدها ثابتة بصورة تقريبية فإن الجهد



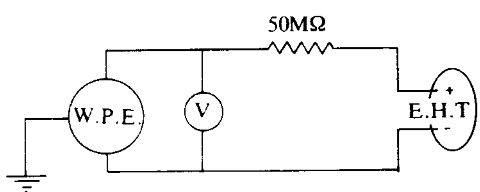
«أ»



«ب»



«جـ»



«د»

شكل (٢٦-٣): أ ـ مكونات المكشاف النابض.
ب ـ مراحل تغيير الشريحة أثناء الاستعمال.
جـ ـ العلاقة بين الانحراف والجهد عند قيم مختلفة للمسافة d الواقعة بين الشريحة والقطب.
د ـ توضح هذه الدائرة التوصيلة الكهربية لدراسة التيار بواسطة التفريغ المفرد.

$V(t)$ عند أي لحظة t يمكن حسابه من العلاقة (٤-٤٨) [التي سترد في البند (٤-٦) الفصل الرابع] وهي :

$$V(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٨٤)$$

وعندها تكون قيمة الشحنة هي :

$$q(t) = CV(t) = CV_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots. \quad (٣\text{-}٨٥)$$

فإذا فَرَّغت الشريحة شحنتها عند الجهد V' بعد مضي زمن قدره t' فإن الشحنة المفقودة المفرغة q' عند الملامسة الأولى بين الشريحة والقطب تعطى بالمعادلة :

$$q'(t') = CV'\ CV_0 (1 - e^{-t'/RC}) \quad \ldots. \quad (٣\text{-}٨٦)$$

ولإعادة شحن الورقة حتى تنبض مرة أخرى ضد القطب نحتاج لزمن قدرها t أيضا. ويكون التيار المار في الدائرة تيارا مستمرا نابضا (pulsating D.C.).

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٨٧)$$

فإذا تكررت عملية التفريغ كل t' من الثانية فإن متوسط تيار التفريغ هو:

$$I_{av} = \frac{1}{t'} \int_0^{t'} I dt = \frac{q'}{t'} = \frac{CV_0}{t'} \left(1 - e^{t'/RC}\right) \qquad (٣\text{-}٨٨)$$

وتُمثل هذه العلاقات بيانيا في الشكل (٣ - ١٢٧). وعند لحظة الانحراف تكون القيمة للتيار هي :

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

وبإهمال مدة التفريغ. فإن التيار يشحن النظام خلال انحلاله أُسِّيًّا (exponentially decaying) حتى إذا انقضى زمن قدره t تقوم الشريحة بتفريغ شحنتها مرة أخرى. ويعتمد هذا الزمن على معدل الجهد الموصل V_0 إلى جهد التفريغ V' حيث يكون لدينا من المعادلة (٣-٨٦) :

$$V' = V_0 (1 - e^{-t'/RC})$$

أو

$$t' = RC \ln \frac{V_0}{V_0 - V'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٨٩)$$

وبالتعويض في المعادلة (٣-٨٨) عن t' نحصل على :

$$I_{av} = \frac{V_0}{R} \frac{V'}{V_0 \ln \frac{V_0}{V_0 - V'}} = \frac{V_0}{R} f\left(\frac{V'}{V_0}\right) \quad . \quad (٣\text{-}٩٠)$$

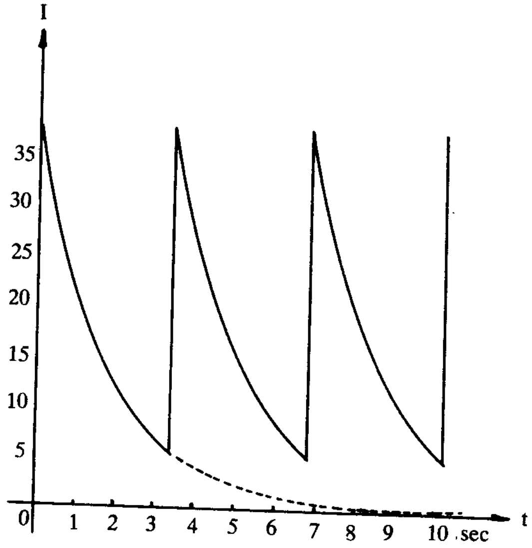
وتبين المعادلة (٣-٨٨) أن القيم المتوسطة للتيار I_{av} تتناسب مع $\frac{1}{t'}$ مادامت q المحمولة بواسطة الشريحة ثابتة وهذا يعني أنه لا حاجة لمعرفة كل من السعة C والمقاومة R .

ويمكن الاستفادة من تناسب I_{av} مع $\frac{1}{t'}$ $\left(I_{av} \propto \frac{1}{t'}\right)$ في مقارنة المقاومات عالية القيمة، وذلك باستخدام العلاقة (٣-٩٠)، إذا لم تتغير قيمة الجهد V' ولا V_0 أي أن $f\left(\frac{V'}{V_0}\right)$ تبقى ثابتة ففي هذه الحالة يكون معدل تغير أزمنة التفريغ t_{av} متناسبا مع معدل تغيير المقاومات .

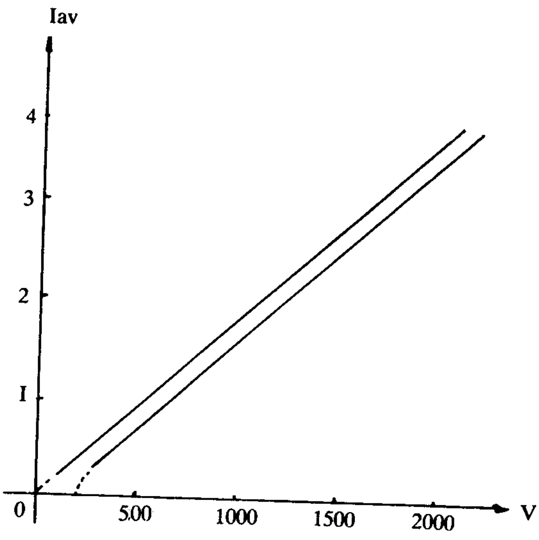
ويوضح الشكل (٢٧ب - ٣) العلاقة بين $\frac{1}{t'} \propto I_{av}$ و V_0 عند $R = 3 \times 10^{11}\ \Omega$.
وتحسب R إن كانت مجهولة بأخذ الميل بين V_0 ، I_{av} المتناسبة مع $\frac{1}{t'}$ مع ضرب I_{av} بمعامل التصحيح (correction factor) وهو $1/f\left(\frac{V'}{V_0}\right)$.

وكما هو واضح من الشكل (٢٧ب - ٣) فإنه يمكن استخدام المكشاف لتحقيق قانون أوم . وإذا وصل مكثف خارجي C_s على التوالي مع مكثف المكشاف C فإنه يمكن حساب أحدهما بمعرفة الآخر. فإذا فرض أن V_1' هو مقدار الجهد الذي سبب انحراف الشريحة قبل توصيل C_s وكانت V_2' بعد توصيلها فإن :

$$CV_1' = C_s (V_2' - V_1') \quad \ldots\ldots \quad (٣\text{-}٩١)$$



«أ»



«ب»

شكل (٢٧-٣): ا - العلاقة بين الزمن t ومتوسطة تيار التفريغ I_{ab}
ب - العلاقة بين الجهد المسلط من القطب العداد
والشريحة عبر المقاومة R و $I_{av} \propto t^{1/2}$.

مـلاحظـات

١ - للطريقة السابقة «طريقة النبض pulse method » دور مهم في قياس تيار التشبع في غرفـة التـأين (saturation current in an ionization chamber) والبحث عن مدى جسيمات ألفـا (range of Alpha particles) وقياس نصف عمـر الثـورون (half life of thoron) التي لا مجال لذكـرهـا في هذا الكتـاب وتجدر الإشارة أن القوانين السابق ذكرها أعلاه لا تكون صالحة في هذه الحالات لأن المقاومة غير ثابتة وتعتمد على الجهد.

٢ - ترصد حركات الشريحة على شاشة عرض وذلك لسهولة العد وقياس المسافة التي تتحـركها الشريحة وذلك باستعمال عدسات إضافية وإضاءة كافية أو يكون مع المكشاف جهاز عرض خاص به.

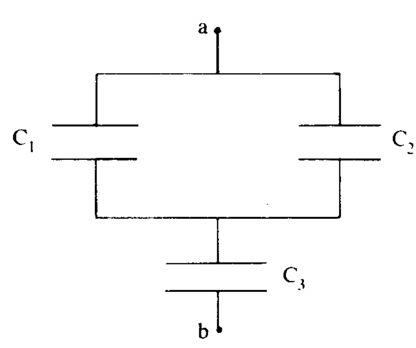
(٣-٢٠) مسـائـل

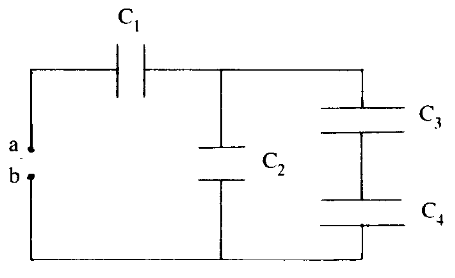
١ - أوجد سعة مكثف مؤلف من اسطوانتين معدنيتين متحدتين في المركز نصفا قطريهما a ، b وطولها l والاسطوانة الخارجية متصلة بالأرض.

٢ - أوجد السعة المكافئة لمجموع المكثفات الموصلة كما في الشكلين المبينين إذا كان:

ا) $C_1=C_2=C_3=C_4=C$

ب) $C_1=12\mu F, C_2=2\mu F, C_3=3\mu F, C_4=6\mu F$. وإذا كان فرق بين النقطتين a و b هو 12V فاحسب جهد وشحنة كل مكثف.



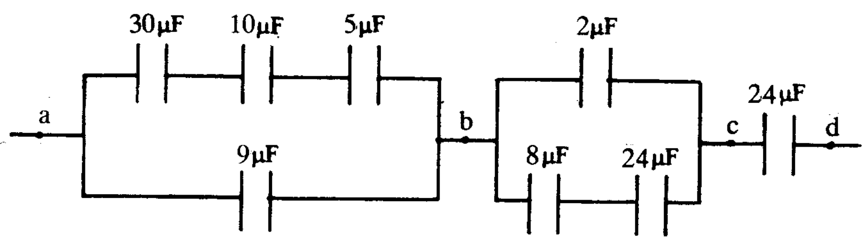


٣ - يوضح الشكل التالي مجموعة من المكثفات متصلة على التوالي والتوازي :

ا) احسب السعة المكافئة.

ب) احسب جهد وشحنة كل مكثف إذا كان فرق الجهد بين الطرفين a وb يساوي 12V.

جـ) إذا كان المكثف بين النقطتين c وd ومكثفا مستويا، المسافة بين لوحيه 1.77mm ، احسب مساحة كل من لوحي المكثف إذا كان المكثف مملوءا بمادة عازلة ثابت عزلها 100.



٤ - مكثف مستوٍ سعته C_1 والبعد الفاصل بين لوحيه d ومساحة كل من لوحيه S. أدخلنا بين هذين اللوحين صفيحة معدنية معزولة سمكها a. احسب سعتها الجديدة.

٥ - مكثفان سعتاهما 2 ميكروفاراد و 6 ميكروفاراد موصلان على التوالي سلط عليهما فرق جهد قدرها 200 فولت.

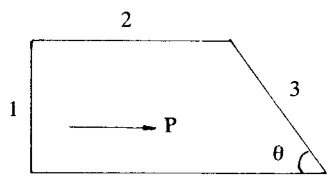
احسب فرق الجهد بين لوحي كل مكثف وشحنة كل منهما. ثم احسب طاقة التخزين لكل مكثف وكذلك للمكثف المكافىء وعلق على النتيجة.

٦ - كرة موصلة معزولة نصف قطرها R وشحنتها Q ما هي الطاقة الكلية المخزونة فيها وما هو نصف القطر r للحجم الذي يختزن نصف هذه الطاقة.

٧ - مكثفان أحدهما مشحون والآخر غير مشحون وصلا على التوازي. برهن أن الشحنة تتوزع عليهما بحيث تحوي كل منهما جزءا من الشحنة الأصلية بنسبة

$C_1/(C_1+C_2)$ ، وبرهن أن الطاقة الجديدة للجملة أقل من الطاقة الابتدائية . ثم أوجد علاقة لحساب فرق الطاقة هذا بدلالة الشحنة الأولية وسعة كل من المكثفين .

٨ - جسم عازل له الشكل المرسوم جانبا وهو مستقطب بشكل منتظم ومتجه الاستقطاب P. أوجد الكثافة الكهربية السطحية σ_P على كل من وجوهه الثلاثة 1 و 2 و 3.



٩ - مكثف مستوٍ فرق الجهد بين لوحيه V_1. وضع بين هذين اللوحين صفيحة من مادة عازلة تملأ الفراغ بينهما ثابت عزلها K_1.

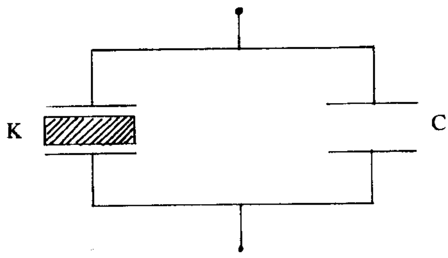
ا) احسب فرق الجهد V_2 الجديد بين لوحيه بعد وضع العازل .

ب) قارن بين قيمتين الطاقة المختزنة فيها قبل وضع العازلة وبعده .

جـ) استنتج من مقارنة قيمتي الطاقة أيمثل المكثف لجذب الصفيحة العازلة بين لوحيه أم لدفعها ومعاكسة إدخالها؟

د) وإذا فرض أن المكثف قد وصل ببطارية تجعله في جهد ثابت لا يتغير قبل وضع الصفيحة وبعده . وازن بين قيمتي الطاقة المختزنة في هذه الشروط .

١٠ - مكثفان متساويان في السعة كل منهما سعته C ، موصلان على التوازي ، وفرق جهد قدره V. فصلا عن المصدر وأدخل بين لوحي أحدهما مادة عازلة ثابت عزلها K ملأت الفراغ بين اللوحين كاملا .



احسب الشحنة الكهربية التي انتقلت من أحد المكثفين إلى الآخر واحسب كذلك فرق الجهد النهائي V_2 بعد إدخال العازل .

١١ ـ وضعت شحنة قدرها 30×10^{-6} كولوم على مكثف متوازي اللوحين فإذا كانت مساحة كل من لوحيه 5 سم٢ احسب المجال الكهربي بينهما.

١٢ ـ إذا كانت الشحنة على مكثف تساوي 2.5×10^{-6} كولوم عندما يكون الجهد بين طرفيه يساوي 125 فولت ما هي سعة هذا المكثف؟

١٣ ـ زادت شحنة مكثف بمقدار 6.0×10^{-6} كولوم عندما تغير الجهد بين طرفيه من 100 إلى 200 فولت ما هي سعة هذا المكثف.

١٤ ـ إذا كانت سعة مكثف متوازي اللوحين في الهواء تساوي 0.0025 ميكروفاراد (μF) وكانت مساحة كل من لوحيه تساوي 0.80 متر ٢.

ا ـ ما هي المسافة بين اللوحين؟

ب ـ ما هي أكبر قيمة للجهد يمكن وضعها بين طرفي المكثف إذا علمت أن الهواء بين الصفيحتين يتحمل مجالا كهربيا قدرها 3.0×10^{6} $\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$ قبل حدوث تأين له أو تفريغ للشحنة؟

١٥ ـ مكثف اسطواني يتألف من اسطوانتين متحدتي المركز فإذا كان نصف القطر الخارجي للاسطوانة الداخلة (r_a) يساوي 9.0 سم ونصف القطر الداخلي للاسطوانة الخارجية (r_b) 10.0 سم.

ما هي قيمة سعة هذا المكثف. وأعلى قيمة للجهد الذي يتحمله هذا المكثف إذا علمت أن تأين الفراغ أو حدوث الشرارة لا يحصل إلا إذا زاد المجال الكهربي بين طرفي الاسطوانتين عن 3.0×10^{6} فولت/متر.

ماذا تكون الاجابة لو كانت $r_a = r_b$؟

١٦ ـ مكثفان C_1 ، C_2 فإذا وصلا على التوالي كانت قيمة المحصلة تساوي $\frac{1}{3} C_1$ وإذا وصلا على التوازي كانت المحصلة 3 ميكروفاراد (μf).

ما قيمة C_1 ، C_2؟

١٧ ـ مكثفان قيمة كل منهما $3\mu F$ وصلا على التوالي ثم وصل بين طرفيهما جهد قدره 10 فولت .

احسب الطاقة المخزونة لهما ولكل منهما على حده. ما قيمة الطاقة لو وصلا على التوازي؟ فسر النتائج .

١٨ ـ مكثف كروي مكون من كرة داخلية نصف قطرها r_a وخارجية نصف قطرها r_b متحدتا المركز فإذا كان المكثف يحمل شحنة قدرها Q .

فاحسب الطاقة الكلية

ا ـ باستخدام المعادلة (١٣أ ـ ٣) .

ب ـ بإجراء التكامل الوارد في المعادلة (١٣ب ـ ٣) .

١٩ ـ مكثف مستوٍ مكون من صفيحتين متماثلتين. فإذا كانت المسافة بينهما 2 مم وسعته في الفراغ 10^{-12} فاراد فإذا فرض أن الجهد بين طرفيه يساوي 200 فولت ثم أدخلت مادة عازلة ثابت عزلها 49 فاحسب:

أ ـ القيمة الجديدة للسعة بعد وضع المادة العازلة .

ب ـ ما هي قيمة الشحنة المستحثة على سطحي المادة العازلة؟

جـ ـ الاستقطاب p للمادة العازلة .

د ـ ما هي قيمة الازاحة والمجال داخل المادة العازلة .

٢٠ ـ مكثف مستوٍ مكون من صفيحتين متماثلتين المسافة بينهما 5 مم وسعته في الفراغ $10^{-12} \times 2$ فاراد. شحن المكثف حتى بلغ الجهد بين طرفيه 50 فولت ثم أدخلت مادة عازلة سمكها 2mm في وسط الفراغ بين الصفيحتين. فإذا كانت القابلية الكهربية للمادة العازلة تساوي 15 فاحسب:

ا ـ المجال الكهربي داخل المادة العازلة وخارجها وكذلك الازاحة .

ب ـ الاستقطاب p.

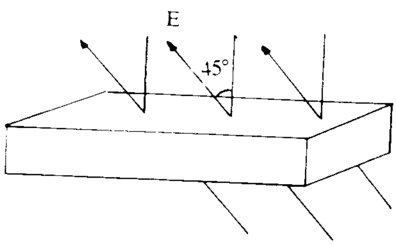
جـ ـ الشحنة المستحثة على سطحي المادة العازلة .

د ـ سعة المكثف .

٢١ - مائتا مكثف وصلت على التوازي فإذا كانت هذه المكثفات متماثلة وسعة كل منها $10\mu F$ وشحنت حتى بلغ الجهد 30,000 فولت. فإذا كانت قيمة الكيلووات - ساعة 3 قروش، فاحسب المبلغ الذي يمكن توفيره لخزن الطاقة فيها لو وصلت هذه المكثفات على التوالي.

٢٢ - موصل كروي نصف قطره r وشحنته Q مؤلف من جزئين نصف كرويين منفصلين. برهن أن القوة المطلوبة لتماسكهما تساوي $\frac{Q^2}{32\pi \varepsilon_0 r^2}$

٢٣ - قطعة من الكوارتز ثابت عزلها 3.8 وضعت في مجال كهربي قيمته 20.000 فولت/متر (كما في الشكل). بحيث يعمل متجه المجال الكهربي زاوية قدرها 45° مع أعلى وأسفل القطعة بينما يكون موازيا لأمام القطعة وخلفها.

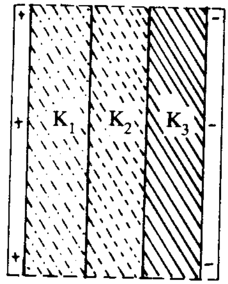


احسب كثافة الشحنة على كل أوجه القطعة.

٢٤ - مادة عازلة تحتوي على ثنائيات أقطاب كهربية ذرية دائمة قيمة عزم كل منها 3×10^{-26} كولوم - متر وكثافة الذرات 10^{20} ذرة/متر^2 فإذا كان المجال 10^4 فولت/متر يسبب في توجيه 25% من هذه الثنائيات مع اتجاه المجال.

فاحسب قابلية (التأثرية) هذه المادة العازلة .

٢٥ - مكثف متوازي اللوحين وضعت بين لوحيه ثلاث مواد عازلة K_1 و K_2 و K_3 فإذا كانت سعة المكثف قبل وضعها C_0. فاثبت أن سعة المكثف بعد وضع المادة العازلة تساوي :



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right)$$

٤

التيار الكهربي المستقر

Steady Electric Current

● التيار الكهربي ● التوصيل الكهربي والمقاومات ● الطاقة والقدرة وقانون جول في دوائر التيار المستمر ● القوة الدافعة الكهربية والمقاومة الداخلية ● الدوائر الكهربية المركبة ● تيارات الشحن والتفريغ للمكثف ● قنطرة ويتستون والقنطرة المترية ● قنطرة كاري فوستر ● قنطرة كلفين المزدوجة ● مقياس فرق الجهد واستعمالاته ● القوة الدافعة الكهربية الحرارية ● تأثيرات سيبك وبلتير وطومسون ● القوة الدافعة الحرارية والديناميكا الحرارية ● الازدواج الحراري ودرجة الحرارة ● مسائل.

(٤-١) التيار الكهربي

Electric Current

من المعروف أن الموصلات مواد بداخلها شحنات حرة تتحرك حركة عشوائية غير منتظمة ولكنها عند خضوعها لمجال كهربي تتحرك حركة منتظمة في اتجاه معين مكونة ما يسمى بالتيار الكهربي. والشحنات الحرة في حالة الموصلات المعدنية عبارة عن إلكترونات حرة (free electrons) أما في الموصلات السائلة والغازية فهي إيونات موجبة وإيونات سالبة.

وتعرف شدة التيار الكهربي I (ويرمز لها أيضا بالرمز i) بكمية الشحنة التي تمر خلال مقطع سلك في الثانية الواحدة. فلو مرت شحنة قدرها dq في زمن قدره dt خلال مقطع السلك فإن شدة التيار تعطى بالمعادلة:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١١ - ٤)$$

ووحدة التيار الأمبير (Ampere) في النظام العالمي (S.I) حيث :

$$1\,A = C/s$$

أما في النظام الكهرومغناطيسي (CGSemu) فيسمى بالأمبير المطلق (abAmpere) حيث :

$$1\,ab\,.\,A = 10\,A$$

وفي النظام الكهروستاتيكي (CGSesu) فيسمى بالاستات أمبير (state Ampere) حيث :

$$1\,stat\,.\,A = 3.335 \times 10^{-10}\,A$$

وأخيرا في النظام الجاووسي فيستعمل عادة النظام الكهرواستاتيكي للتعبير عن وحدة التيار وقليلا ما يستعمل النظام الكهرومغناطيسي (انظر الملحق ١).

ويعبر عن التيارات الصغيرة بالملّي أمبير (m.A) ويساوي 10^{-3} A وبالميكرو أمبير ويساوي 10^{-6} A واتجاه التيار المصطلح هو عكس اتجاه تحرك الشحنات السالبة في الموصلات. وإذا أخذ اتجاه التيار وعلاقته باتجاه هذه الشحنات فإن المعادلة (١١ - ٤) يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$I = -\frac{dq}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ب - ٤)$$

إذا تعرضت قطعة من سلك موصل منتظم الشكل [شكل (١-٤)] لمجال كهربي شدته E ومتجه إلى اليسار فإن الإلكترونات ستتحرك إلى اليمين. فإذا فرض أن كل إلكترون يسير بسرعة ثابتة مقدارها v فإنه سيقطع مسافة قدرها vdt في زمن قدره dt. فإذا كانت مساحة مقطع السلك S وكانت n عدد الإلكترونات الحرة في وحدة الحجم، فإن عدد الإلكترونات التي تمر من مقطع السلك في الزمن dt تساوي nSvdt. فإذا كانت e تمثل شحنة الإلكترون فإن الشحنة الكلية التي تمر في هذه المسافة في الزمن dt هي :

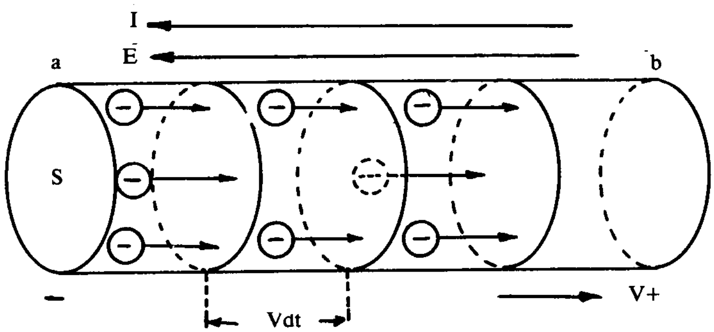
$$dq = nevSdt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٢ - ٤)$$

$$\therefore I = \frac{dq}{dt} = nevS \quad \cdots\cdots \quad (٢ب - ٤)$$

وتعرف **كثافة التيار** لموصل ما (current density) بأنها خارج قسمة التيار على مساحة مقطع الموصل أي أن :

$$J = \frac{I}{S} = nev \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢جـ - ٤)$$

وتسمى سرعة الإلكترون v بالسرعة الانسياقية ويرمز لها بالرمز $\bar{v}$ وسوف يأتي شرحها في البند (٤ـ٢ـ١) .



شكل (١ـ٤) : قطعة من سلك موصل منتظم الشكل مساحة مقطعه S يمر به تيار I يتجه إلى اليسار فتحركت الإلكترونات إلى اليمين، لدراسة كثافة التيار وعلاقته بالإلكترونات المتحركة .

وتحدد المعادلة (٢جـ - ٤) متوسط كثافة التيار في المساحة S. فإذا لم يكن التيار موزعا بانتظام فإنه يمكن اعتبار مرور التيار خلال مساحة متناهية في الصغر مقدارها dS وبذلك يمكن كتابة كثافة التيار بالصيغة التالية :

$$J = \frac{dI}{dS} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٣أ - ٤)$$

أي أن **كثافة التيار** عبارة عن ***التيار خلال وحدة المساحة العمودية على اتجاه سريان الشحنة*** . **ووحدة كثافة التيار أمبير/ متر٢** (A/m^2).

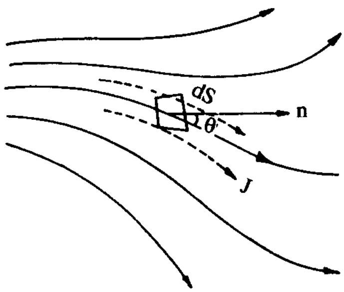
أما إذا كانت هناك زاوية قدرها θ بين J والعمودي n على dS فإن المساحة المتعامدة مع J كما في شكل (٢ـ٤) هي :

$$dS' = dS\cos\theta$$

$$\therefore dI = J\cos\theta\, dS$$

$$I = \int J\cos\theta\, dS$$

$$\therefore I = \int_S \vec{J}\,.\,d\vec{S} \cdot\cdot \quad (٣ب ـ ٤)$$



شكــل (٢-٤): المــوصـل غير منتـظم الشكل، حيث θ زاوية بين كثافة التيار J والعمودي على عنصر المساحة dS.

حيث يكـون التكـامـل على كامـل السـطح S وهـذه هي العلاقة العامة التي تربط بين التيار وكثافة التيار.

وإذا فرض أن ϱ هي الكثافة الحجمية للشحنة $(\varrho = ne)$ و V الحجم التي تتحرك فيه الشحنة $(dV = vSdt)$ فإن المعادلة (٢أ ـ ٤) تصبح :

$$dq = \varrho dV \qquad \therefore q = \int_V \varrho dV$$

$$\therefore I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \varrho dV = \int -\frac{\partial\varrho}{\partial t}\, dV \;\cdot\cdot \quad (٤\text{-}٤)$$

وسبب تغيير التفـاضـل $\frac{d}{dt}$ إلى $\frac{\partial}{\partial t}$ هو أن ϱ تابعة لكل من المكان والزمن وفي هذه الحالة هي تابعة للزمن فقط. وإذا أخذنا حجما V محاطا بسطح ثابت S فإن التيار يمثل التغير في الشحنة بالنسبة للحجم V عبر مقطع المساحة S وحسب قانون حفظ الشحنة فإن معدل نقصان الشحنة داخل حجم يساوي التيار الكلي المتدفق خارج السطح المحيط بالحجم.

وباستخدام المعادلتين (٣ب ـ ٤) و (٤-٤) يُحصل على :

$$\oint_V J.dS = -\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, dV \;\cdots\cdots \quad (١٥ ـ ٤)$$

وحسب المعادلة (٤٦-٢) ملحق ٢ تصبح المعادلة السابقة كما يلي :

$$\int_V (\text{div}\,\vec{J})\,dV = \int_V -\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV \quad \cdots \quad (\text{٥ب - ٤})$$

وحيث إن هذه المعادلة صحيحة لأي حجم .

$$\therefore \text{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{٤-٦})$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة الاستمرارية (equation of continuity).

مـثـال (٤-١)

مادة من الفضة كثافتها تساوي $10.50\ gm/cm^3$ والكتلة الذرية (atomic mass) لها تساوي 107.9 gm/mole ، ذات مقطع دائري منتظم نصف قطره 0.05 cm فإذا كانت هذه المادة تحمل تيارا منتظما قدره 1.0 A.

فاحسب كثافة الشحنة وسرعة الشحنات المتحركة داخل الموصل مع افتراض أن ذرة الفضة تعطي إلكترونا واحدا طليقا (حرا) .

الحـــل

كثافة التيار في هذه الحالة لها القيمة نفسها عند أي نقطة . وبذلك تستعمل المعادلة (٢جـ - ٤) حيث:

$$S = \pi r^2 = (3.1416)\,(0.05)^2 = 0.00785\ cm^2$$

$$J = \frac{I}{S} = 1.0 / 0.00785 = 127.40\ A/cm^2$$

$$= 1.274 \times 10^6\ A/m^2$$

وحيث إن الجزيء الجرامي (mole) لمادة الفضة (107.9 grams) يحتوي على 6.023×10^{23}atoms وكثافة الفضة $10.50 gm/cm^3$ فإن الجزيء الجرامي يشمل حجما قدرة :

$$107.9 / 10.50 = 10.28\ cm^3$$

أي أن كل سم٣ من الفضة يحتوي على :

$$\frac{6.023 \times 10^{23}}{10.28} = 5.86 \times 10^{22} \text{atoms/cm}^3$$

وحيث إن كل ذرة تعطي إلكترونا طليقا واحدا فإن عدد الإلكترونات لوحدة الحجوم تساوي :

$$n = 5.86 \times 10^{22} \text{ electrons / cm}^3$$
$$= 5.86 \times 10^{28} \text{ electrons / m}^3$$

وباستخدام المعادلة (٢جـ - ٤) نحصل على :

$$v = \frac{J}{ne} = \frac{1.274 \times 10^6}{(5.86 \times 10^{28})(1.602 \times 10^{-19})}$$

$$= 1.357 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

(٤-٢) التوصيلية الكهربية والمقاومات

Electrical Conductivity and Resistances

تختلف المواد الموصلة بعضها عن بعض في مقدار كثافة التيار الذي يتكون نتيجة لمجال كهربي E. وتسمى نسبة كثافة التيار إلى شدة المجال بالتوصيل الكهربي للمادة ويرمز له بالرمز σ أي أن :

$$\sigma = \frac{J}{E} \qquad \therefore J = \sigma E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧)$$

وكلما زادت توصيلية مادة ما زادت كثافة التيار لها عند قيمة معينة لشدة المجال الكهربي E. ووحدات σ هي أمبير/فولت. متر (A / V . m) وتبلغ قيمتها بالنسبة للموصلات في حدود 10^8 A / V . m أما بالنسبة للعوازل الجيدة في حدود 10^{-13} A / V . m أو أقل من ذلك .

ويسمى مقلوب توصيلية المادة **بالمقاومة النوعية** للمادة (resistivity) ويرمز لها بالرمز ρ أي أن :

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \qquad \therefore \varrho = \frac{ES}{I} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨)$$

ووحدتها فولت . متر / أمبير (V . m / A) في النظام العالمي .

(٤-٢-١) المقاومة وقانون أوم Resistance and Ohm's law

ينتج التيار عن حركة الشحنات في الموصل (الإلكترونات في المعادن) . فإذا كان لدينا موصلا اسطوانيا معدنيا كما في شكل (٤-١) وفرض أن n عدد الإلكترونات في وحدة الحجوم من هذا الموصل وإن e شحنة الإلكترون فإن كل إلكترون يتأثر بقوة نتيجة لتسليط المجال E قدرها :

$$F = e\,.\,E = am \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٩)$$

حيث a تسارع (عجلة) الإلكترون و m كتلته .

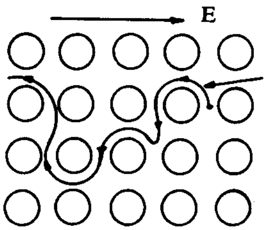
ويتسارع الإلكترون نتيجة لتسليط المجال E ويفقد سرعته عند تصادمه بإيونات الموصل وبعد كل تصادم يبدأ الإلكترون حركته من وضع السكون ويتسارع مرة أخرى وتكون لدينا نتيجة لذلك سرعة يطلق عليها السرعة الانسياقية (drift velocity) وتزداد متوسط السرعات الانسياقية للإلكترونات الحرة المشتركة في سريان التيار طرديا مع زيادة المجال الكهربي E أي أن :

$$\bar{v} \propto E \qquad \therefore \bar{v} = \mu E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}١٠)$$

وتسمى μ **بحركية الإلكترونات** (mobility of the electrons) وهي خاصية من خواص المواد وتكون كبيرة بالنسبة للموصلات الجيدة التوصيل وصغيرة بالنسبة للموصلات ضعيفة التوصيل . وتختلف السرعة $\bar{v}$ عن السرعة العشوائية التي يتحرك بها الإلكترون داخل الموصل قبل تأثره بالمجال الكهربي .

ويمثل الشكل (٤-٣) مسارا لأحد الإلكترونات الحرة لموصل معدني .

ويسـمـى متـوسط الـزمـن بين اصطدامين متتابعين بمتوسط الزمن الحر (mean free time). ويسمى متوسط المسافة بـين اصطدامـين بمتوسط المسـار الحر (mean free path).



شكل (٣-٤): مسـار أحـد الإلكـترونـات داخل موصل معدني.

ويعتـبر هذا التصادم بمثابة قوة تعوق حركة الإلكترونات ينتج عنها مايسمى **بمقاومة الموصل** (resistance).

فإذا كان الموصل منتظما، طوله l ومساحة مقطعه S ، وكان فرق الجهد بين طرفيه a و b ، كما في شكل (١-٤)، هو V_{ab} والتيار المار هو I فإنه حسب المعادلتين (٢٥-٢) و(٨-٤) يكون:

$$\varrho = -\frac{S}{I}\frac{dV}{dx} \qquad \therefore Idx = -\frac{S}{\varrho}dV$$

$$\therefore I\int_0^l dx = -\frac{S}{\varrho}\int_{V_a}^{V_b} dV$$

أو

$$Il = -\frac{S}{\varrho}(V_b - V_a) = \frac{S}{\varrho}(V_a - V_b) = \frac{S}{\varrho}V_{ab}$$

$$\therefore I = \frac{V_{ab}}{l\varrho/S} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤\text{-}١١)$$

ويسمى المقدار $l\varrho/S$ بالمقاومة ويرمز لها بـ R.

$$\therefore I = \frac{V_{ab}}{R} \quad \dots\dots\dots \quad (٤\text{-}١٢أ)$$

$$R = \varrho \frac{l}{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{١٢ب - ٤})$$

وقد استنتج العالم الألماني جيورج سيمون أوم (١٧٨٩ - ١٨٥٤م) العلاقة (١٢أ - ٤) ولذلك فهي تعرف بقانون أوم. ووحدة المقاومة في نظام (S.I) هي فولت/ أمبير (V / A) وتسمى بالأوم Ω ، وهكذا نرى أن مقاومة موصل ما تساوي أوما واحدا عندما يكون فرق الجهد بين طرفيه فولتا واحدا إذا مر به تيار مقداره أمبير واحد.

وواضح من المعادلة (١٢-٤) أن R تعتمد على شكل الجسم الموصل فهي تتناسب طرديا مع طوله وعكسيا مع مساحة مقطعه بينما تعتمد المقاومة النوعية ϱ على عدد الإلكترونات المتنقلة وسلوكها ولمعرفة ذلك يُتبع ما يلي:

نرمز للزمن المتوسط بين اصطدامين متتابعين بالرمز 2τ فتكون السرعة في أول الحركة صفرا وفي نهاية الزمن تمثلها المعادلة التالية:

$$v_1 = v_0 + a\,(2\tau) = a\,(2\tau) \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤-١٣})$$

وبالتعويض عن a من المعادلة (٩-٤) يمكن الحصول على:

$$v_1 = \frac{eE}{m} 2\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٤-١٤})$$

تسمى τ بزمن التراخي (relaxation time) ومتوسط هذه السرعة خلال الزمن 2τ هو:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} 2\tau = \frac{eE}{m} \tau \quad \ldots \quad (\text{٤-١٥})$$

وحيث إن:

$$I = ne\bar{v}S \quad \& \quad E = V_{ab}/l$$

$$\therefore I = \frac{\tau n e^2 S}{m l} V_{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٤-١٦})$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (١١-٤) يُحصل على:

$$R = \frac{ml}{ne^2S\tau} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{٤-١٧})$$

ثم بقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٤-١٢) يُحصل على:

$$\varrho = \frac{m}{ne^2\tau} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{١١٨ - ٤})$$

أو

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{١٨ب - ٤})$$

وتتراوح قيمة τ بين 10^{-12} و 10^{-14} ثانية. فمثلا إذا أخذت مادة النحاس (copper) عند درجة حرارة الغرفة حيث $(\sigma = 5.91 \times 10^7 \, A/V.m)$ ، $(e = 1.602 \times 10^{-19} C)$ ، $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg و $n = 8.47 \times 10^{28}$ electrons/m^3 وعوض في المعادلة (٤-١٨) يُحصل على: $\tau = 2.475 \times 10^{-14}$ s

وواضح من المعادلتين (١١٨ - ٤) و(١٨ب - ٤) أن σ ، ϱ لا تعتمدان على شكل الموصل.

ويوضح الجدول (٤-١) قيم ϱ ، α لبعض الموصلات حيث α المعامل الحراري للمقاومة وسيأتي شرحه في البند (٤-٢-٢).

ويمكن حساب قابلية التحرك للإلكترونات μ (حركية الإلكترونات ـ mobility) من المعادلات (٤-١٠)، (٤-١٥) و(٤-١٨) فيُحصل على:

$$\mu = \frac{\sigma}{ne} = \frac{1}{ne\varrho} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{٤-١٩})$$

مـثـال (٤-٢)

احسب قابلية التحرك للإلكترونات الحرة داخل معدن النحاس، الذي مقاومته النوعية $1.7 \times 10^{-6} \, \Omega \, . \, cm$ ووزنه الذري 63.6 وكثافة مادته 8.9 gm/cm^3.

جدول (١-٤): المقاومة النوعية ϱ والمعامل الحراري α لبعض المواد

المـــواد	$\varrho(\Omega.m)$	α
ألـــومنيوم	0.282×10^{-7}	0.0039
بـــيزموثت	12.5×10^{-7}	0.004
نحـــاس أصفر	0.719×10^{-7}	0.002
كـــربون 0°	349.65×10^{-7}	-0.0005
كـــربون 500°	270.3×10^{-7}	-0.0005
كـونستنتان	4.9×10^{-7}	0.00001
نحـــاس ملدن	0.172×10^{-7}	0.00393
نحـــاس صلب مسحوب	0.176×10^{-7}	0.00382
حـــديد نقي 99.98%	1.0×10^{-7}	0.005
رصـــاص	2.22×10^{-7}	0.004
مـنـقتين (Cu84%, Mn12%, Ni4%)	4.35×10^{-7}	0.000002
زئـبـق	9.62×10^{-7}	0.00089
نـيـكروم	10.00×10^{-7}	0.0004
فـضـة	0.162×10^{-7}	0.0038
صـوديوم «صلب» 0°	0.43×10^{-7}	0.0044
صـوديوم «سائل» 1161°	1.02×10^{-7}	0.0033
فـــولاذ	6.21×10^{-7}	0.0008
ولـفرام «تنجستن»	0.552×10^{-7}	0.0045
زنـــك	0.58×10^{-7}	0.0037
كـهـرمان	5.0×10^{14}	
شـمـع الختم	8.0×10^{13}	
مطـــاط صلب	$2\times10^{13} - 1\times 10^{16}$	
زجـــاج عادي	9×10^{11}	
خـشـب المهاقوني	4×10^{11}	
صفـائح زجاج تجاري	2×10^{11}	
خـشـب الاسفندان	3×10^{8}	
أليـــاف حمراء	5×10^{7}	
رخـــام	1×10^{5}	
بـاكلـيـت	$2\times10^{5} - 2\times10^{14}$	
زيـت البرافين	1×10^{14}	
إثـايل الكحول	3×10^{3}	
مـــاء مقطر	5×10^{3}	
مـحلول كلوريد الصوديوم	8.33×10^{-2}	
كـلوريد الصوديوم المنصهر	2.94×10^{-3}	

الحـــل

لحل هذه المسألة نطبق المعادلة (١٩-٤) حيث يمكن حساب عدد الإلكترونات من المعادلة:

$$n = \frac{\text{كثافة المعدن} \times \text{عدد أفوجادرو}}{\text{الوزن الذري}}$$

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 8.9}{63.6} = 8.42 \times 10^{22}\ \text{electrons/cm}^3$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{8.42 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.7 \times 10^{-8}} = 43 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{C}.\Omega$$

مـثـال (٣-٤)

ملف من النحاس عدد لفاته 381 لفة وقطر مقطع السلك 0.0254 cm ومتوسط قطر الملف 1.0 cm فإذا كانت مقاومته النوعية عند درجة 20°C تساوي $1.692 \times 10^{-6}\ \Omega\,.\,\text{cm}$ فاحسب مقاومة الملف عند درجة الحرارة نفسها. وإذا كان فرق الجهد بين طرفي السلك 20V فاحسب التيار الكهربي وكثافة التيار والمجال الكهربي والسرعة الانسياقية للإلكترونات.

الحـــل

$$l = 2\pi r'n = 2 \times (3.1416)(0.5)(381) = 1197\ \text{cm}$$

$$S = \pi r^2 = (3.1416)(0.0127)^2 = 5.067 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2$$

حيث n عدد لفات الملف، r′ نصف قطر الملف، r نصف قطر مقطع السلك

$$\because R = \varrho \frac{l}{S} \qquad \therefore R = 3.997\Omega$$

$$I = \frac{20}{3.997} = 5\text{A},\ J = \frac{I}{S} = \frac{5}{5.067 \times 10^4} = 10^4\ \text{A/m}^2$$

$$E = \frac{V}{l} = \frac{20}{11.97} = 1.67\ \text{V/m}$$

أما السرعة الانسياقية فيمكن حسابها من المعادلة (٢جـ - ٤) حيث:

$$\bar{v}=\frac{I}{n\,e\,S}=\frac{5}{8.42\times10^{28}\times1.6\times10^{-19}\times5.067\times10^{-8}}=7.32\times10^{-3}\text{m/s}$$

هذه السرعة اكتسبها الإلكترون نتيجة لتطبيق المجال الكهربي E ، وللإلكترون سرعة أخرى تسمى بالسرعة الحرارية العشوائية random thermal velocity ، v_r ، وقيمتها أكبر كثيرا من السرعة $\bar{v}$. للمقارنة بين السرعتين، حيث قيمة السرعة v للنحاس كما وردت في المثال تساوي 7.32×10^{-3}m/s بينما قيمة السرعة v_r تساوي 1.6×10^{6}m/s ، فإن الفرق بينهما كبيرا جدا في حدود 2.2×10^{8} ولذلك فإن:

$$v_r+\bar{v}=v_r$$

ولذلك إذا رمز للمسار الحر بالرمز λ فإن:

$$\lambda=v_r\times\tau$$

وإذا استعملت قيم τ و v_r الخاصة بالنحاس فإن قيمة المسار الحر λ تساوي:

$$\lambda=1.6\times10^{6}\times2.475\times10^{-14}=3.96\times10^{-8}\text{m}\simeq40\text{nm}$$

أي أن المسافة بين كل تصادمين تكون 200 مرة أكبرمن المسافة الذرية atomic spacing ، إذا فرض أن المسافة الذرية بين ذرتين تساوي 0.2nm ، ومعنى ذلك أن الإلكترون سوف يسير 200 مرة قدر المسافة الذرية حتى يصطدم بأي ذرة أخرى. ونتيجة لهذا التباين في النتائج فإنه يمكن معالجتها بصورة أكثر دقة باستخدام النظرية الكمية quantum theory الخارجة عن نطاق هذا الكتاب.

(٤-٢-٢) تغير المقاومة بتغير درجة الحرارة Resistance varies with temperature

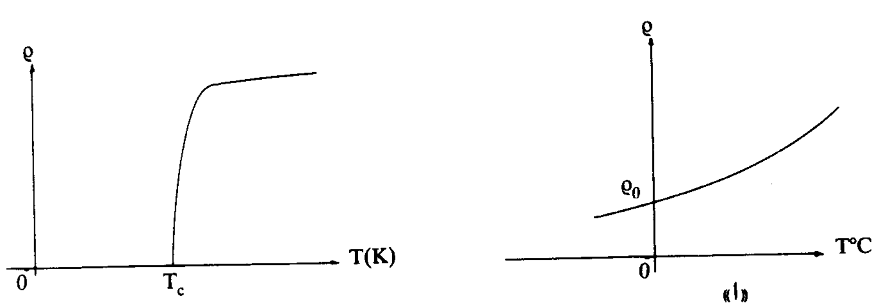
تعبر المعادلة (٤-١٢) عن مقاومة موصل منتظم وهي تتناسب طرديا مع طول الموصل وعكسيا مع مساحة مقطعة، فإذا كان طول الموصل هو الوحدة وكانت مساحة مقطعه هي الوحدة أيضا، كانت مقاومته تساوي عدديا مقاومته النوعية.

ومن الواضح من تعريف المقاومة النوعية أن الموصل ذا المقاومة النوعية الكبيرة موصل رديء وعازل جيد وبالعكس فإن الموصل ذا المقاومة النوعية الصغيرة موصل جيد.

ولكل مادة نقية عند درجة حرارة معينة قيمة ثابتة للمقاومة النوعية. فإذا تغيرت هذه الحالة نتيجة لمعاملة المادة حراريا أو لسحبها أو طرقها أو إذا أضيفت إليها شوائب فإنها تتغير بدرجة ملحوظة. كذلك تتغير المقاومة النوعية لجميع الموصلات بتغير درجة الحرارة، لأن المقاومة النوعية تتوقف على قابلية تحرك الإلكترونات الحرة μ (mobility) للموصلات كما ورد ذلك في المعادلة (٤-١٨) حيث إن μ تقل بارتفاع درجة الحرارة نظرا لازدياد فرص التصادم بسبب اتساع سعة اهتزاز الإيونات الموجبة للموصل. وبذلك تؤدي زيادة درجة الحرارة إلى زيادة المقاومة النوعية. ويمثل شكل (٤-٤) تغير المقاومة النوعية لموصل معدني بتغير درجة حرارته، ويمكن التعبير عن هذا المنحنى بالمعادلة الآتية:

$$\varrho = \varrho_0 + aT + bT^2 + cT^3 + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث ϱ_0 ترمز للمقاومة النوعية للموصل عند درجة حرارة الصفر و a و b و c ثوابت تختلف قيمتها باختلاف الموصل و T درجة الحرارة بالتدريج المئوي وعند درجات الحرارة العالية جدا، يمكننا إهمال الحدود التي تتناسب مع T^2 ، T^3 إلخ . . . والاكتفاء بالحدين الأولين أي أن:



شكل (٤-٤): ا - العلاقة بين المقاومة النوعية ϱ ودرجة الحرارة T للموصلات.
ب - العلاقة بين المقاومة النوعية ϱ ودرجة الحرارة للمواد فائقة التوصيل.

$$\varrho = \varrho_0 + aT \quad \ldots\ldots \quad (٤-١٢٠)$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\varrho_0}{\varrho_0} aT$$

أو

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_0 \alpha T = \varrho_0(1 + \alpha T) \quad . \quad (٤-٢٠ب)$$

حيث

$$\alpha = \frac{a}{\varrho_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤-٢١)$$

حيث تسمى α بمعامل الحرارة للمقاومة النوعية (temperature coefficient of resistivity)

ووحدته $\frac{١}{\text{درجة الحرارة}}$.

ولما كانت المقاومة R لموصل ما تتناسب مع ϱ ، وذلك حسب المعادلة (٤-١٢)، فإنه يمكن كتابة المعادلة (٤-٢٠) كالتالي:

$$R = R_0 (1 + \alpha T) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤-٢٢)$$

حيث R_0 هي قيمة المقاومة عند درجة حرارة الصفر المئوي، و R هي قيمة المقاومة عند درجة الحرارة T.

وهذه العلاقة تصلح فقط للمعادن وأما في حالة السوائل الموصلة فإن المقاومة تنخفض بارتفاع درجة الحرارة نتيجة انخفاض لزوجة المحلول بارتفاع الحرارة مما يؤدي إلى زيادة سرعة حركة الإيونات، ولهذا فإن معامل الحرارة للمقاومة يكون سالبا. وفي حالة أشباه الموصلات تقل المقاومة بارتفاع درجة الحرارة بسبب زيادة عدد الإلكترونات الحرة. ويلاحظ أن هناك طائفة من المعادن تسمى بالموصلات فائقة (مفرطة) التوصيل (super-conductor) والتي فيها تختفي المقاومة تماما عند درجات حرارة أقل من 10 درجات مطلقة. وقد تم الحصول خلال العام الماضي ١٤٠٧هـ على مواد تختفي مقاومتها عند درجة حرارة ١٠٠ درجة مطلقة (T_c) شكل (٤ب - ٤) ولذلك سميت بالمواد فائقة التوصيل مرتفعة الحرارة وصنعت هذه المواد من مواد خزفية ceramic materials.

مـثـال (٤-٤)

مقاومة سلك في درجة °20 مئوية 5.4 أوم ومقاومته في درجة °100 مئوية 7 أوم . احسب مقاومته في درجة الصفر وكذلك معامل الحرارة للمقاومة ودرجة الحرارة التي تصل فيها مقاومته إلى 8.6 أوم .

الحـــل

نفرض أن R_1 هي مقاومة السلك في درجة T_1 , R_2 مقاومته في درجة T_2 , R_0 مقاومته في درجة الصفر وبتطبيق العلاقة : $R = R_0(1 + \alpha T)$ يكون :

$$R_1 = R_0(1 + \alpha T_1)$$

و

$$R_2 = R_0(1 + \alpha T_2)$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2} \quad \text{or} \quad \frac{5.4}{7} = \frac{1 + 20\alpha}{1 + 100\alpha}$$

$$\therefore \alpha = 0.004\ C^{-1}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى عن α يكون :

$$5.4 = R_0(1 + 20 \times 0.004) \quad \therefore R_0 = 5\ \Omega$$

وبتطبيق العلاقة نفسها لإيجاد درجة الحرارة المجهولة T أي أن :

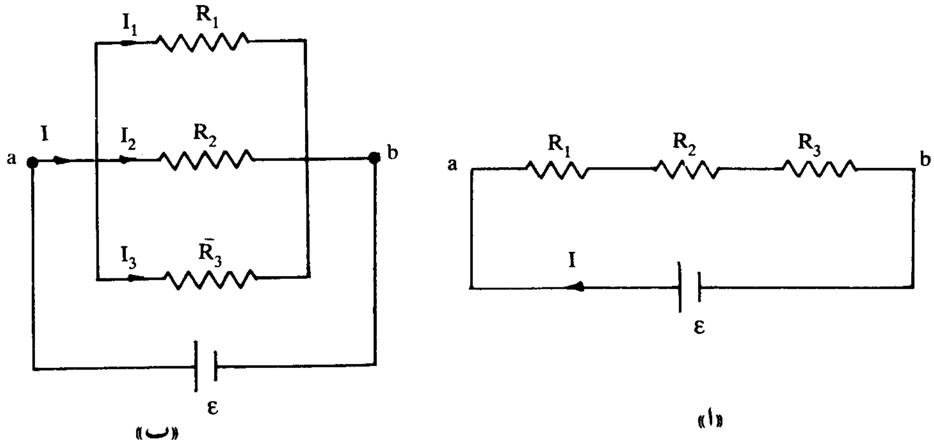
$$8.6 = 5(1 + 0.004T) \qquad \therefore T = 180°\ C$$

(٤-٢-٣) توصيل المقاومات Connection of resistors

ا ـ توصيل المقاومات على التوالي *Series connection of resistors*

وصلت المقاومات $(R_1 , R_2, R_3 ..., R_n)$ على التوالي كما في شكل (١٥ ـ ٤) فإذا كان فرق الجهد بين طرفي كل مقاومة $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ على الترتيب يكون فرق الجهد الكلي بين b , a هو:

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n \quad .... \quad (٤-٢٣)$$



شكل (٥-٤): ا ـ توصيل ثلاث مقاومات R_1 و R_2 و R_3 على التوالي.
ب ـ توصيلها على التوازي.

ولكن حسب قانون أوم فإن:

$$V_1 = IR_1\ ,\ V_2 = IR_2, \ldots, V_n = IR_n$$

وبالتعويض في المعادلة (٢٣-٤) نحصل على:

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \ldots + IR_n$$

$$= I(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n)$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٢٤)$$

أي أن المقاومة الكلية للمقاومات الموصلة على التوالي تساوي المجموع الكلي لها.

ب ـ توصيل المقاومات على التوازي *Parallel connection of resistors*

إذا وصلت المقاومات على التوازي كما في شكل (٥ب ـ ٤)، وفرض أن تيارا كهربيا قد مر بها نتيجة لتوصيل البطارية ε ، فإن الجهد الكهربي بين طرفي المقاومات يكون مشتركا لجميع المقاومات أي أن كل مقاومة عليها الجهد نفسه.

يتجزأ التيار الكلي (I) على المقاومات عند الطرف الموجب ثم يجمع مرة أخرى عند الطرف السالب أي أن:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$$

حيث $I_1, I_2, \ldots, I_n$ التيارات المارة بالمقاومات $R_1, R_2, \ldots, R_n$ على الترتيب.

إذا فرض أن الجهد على كل مقاومة قيمته V_{ab} فإنه بتطبيق قانون أوم على كل قيمة للتيار نحصل على:

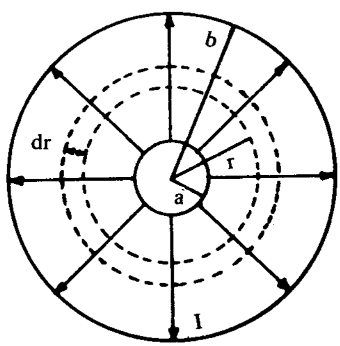
$$\frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \ldots + \frac{V_{ab}}{R_n}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \quad \ldots . \quad (٤\text{-}٢٥)$$

أي أن معكوس المقاومة الكلية يساوي مجموع معكوس المقاومات الموصلة على التوازي. ويلاحظ أن المقاومة الكلية أقل من أصغر مقاومة في المجموعة.

(٤-٢-٤) مقاومة قرص دائري Resistance of a round disc

فيما سبق حسبت مقاومة موصل منتظم المقطع حيث تكون كثافة التيار متساوية في مختلف المقاطع ووجد أن $R = \varrho \frac{l}{A}$ ولكن عندما يصبح الموصل غير ثابت المقطع ويختلف سطح مقطعه من نقطة إلى أخرى على طول الموصل فإن كثافة التيار تصبح كذلك مختلفة ويصبح الحساب معقدا.



شكل (٤-٦): مقاومة قرص دائري سمكه t ونصف قطره b يمر به تيار كهربي I.

ويمكن في حالات خاصة تقدير مقاومة موصل ما. مثلا لو أخذ قرص معدني دائري سمكه d وتوصيليته σ ونصف قطره b كما في شكل (٤-٦)، فإذا كان هناك تيار كهربي يجري فيه في اتجاه أنصاف الأقطار ـ من محيط دائرة فيه نصف قطرها a إلى الجوانب حتى b.

فلحساب مقاومة هذا القرص نتصور مقطعا دائريا عنصريا فيه نصف قطره r وعـرضه dr فيكون محيطه $2\pi r$ ويكون سطحه العمودي على التيار $2\pi rd$ وتكون قيمة التيار هي :

$$I = JS = \sigma ES = -\sigma 2\pi rd \frac{dV}{dr}$$

$$\therefore dV = -\frac{I}{2\pi d\sigma}\frac{dr}{r}$$

يمكن الحصول على فرق الجهد بين a و b بتكامل طرفي هذه المعادلة أي أن :

$$\int_a^b dV = V_b - V_a = -\frac{I}{2\pi d\sigma}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi d\sigma} \ln \frac{a}{b} \quad (\text{٢٦أ - ٤})$$

وتكون مقاومة الموصل هي :

$$R = \frac{V_b - V_a}{I} = \frac{1}{2\pi d\sigma} \ln \frac{a}{b} \quad .. \quad (\text{٢٦ب - ٤})$$

ولقد اختير عنصر السطح عموديا على التيار ولذلك استعملنا $I = JS$ ولكن في ا لحالات الأخـرى التي لا يكـون فيها عنصر السطح عموديا على التيار يجب استعمال المعادلة الاتجاهية (٣ب - ٤).

(٤-٣) الطاقة والقدرة وقانون جول في دوائر التيار المستمر

Energy, Power and Joule's Law in D.C. Circuit

عند مرور تيار كهربي قدره I في موصل مقاومته R فإن طاقة كهربية تتحول إلى طاقة حرارية تعمل على رفع درجة حرارة المقاومة. فإذا كان الجهد بين طرفي هذا الموصل هو V فإن شحنة قدرها dq تمر في زمن قدره dt تعطى بالمعادلة :

$$dq = Idt$$

وتكون الطاقة التي تكتسبها هذه الشحنة، طبقا للمعادلة (٢٤-٢)، هي :

$$dU = Vdq = IVdt \quad .... \quad (٤\text{-}٢٧)$$

$$\therefore U = IVt$$

وتكون النسبة بين الطاقة إلى الزمن وهي القدرة (الاستطاعة ـ power) تساوي :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{IVdt}{dt} = IV \quad .... \quad (٤\text{-}٢٨)$$

أي أن القـدرة الكهربية P تعطى قيمتها من شدة التيار وفرق الجهد. وإذا كانت I بالأمبير و V بالفولت فتكون P بالجول في الثانية أي :

$$P = IV = A\,.\,V = \frac{C}{s} \times \frac{J}{C} = \frac{J}{s} = W$$

$$\because V = IR \quad \therefore P = I^2R \quad ..... \quad (٤\text{-}٢٩)$$

وهـذه المعادلات تطبق في حالة انطباق قانون أوم فالطاقة التي تكسبها الإلكترونات بالتسـارع تفقـدها بالاصطدام مع ذرات الموصل وتزداد بذلك طاقة اهتزاز الذرات وترتفع درجة حرارة الموصل وهذه الحرارة تمثل تحول الطاقة الكهربية إلى طاقة حرارية وترتبطان فيما بينهما بالمعادلة التالية :

$$P = \frac{dH}{dt} \quad .... \quad (٤\text{-}٣٠)$$

حيث dH هي الطاقة الحرارية الناتجة في زمن قدره dt. وبمساواة المعادلتين (٢٩ـ٤) و(٣٠ـ٤) يُحصل على :

$$\frac{dH}{dt} = I^2R$$

$$\therefore \; dH = I^2R\,dt \quad .... \quad (٤\text{-}٣١أ)$$

$$\therefore H = I^2Rt$$

فإذا كانت R ثابتة فيكون معدل تغير الحرارة الناتجة في زمن قدره dt متناسبا طرديا مع مربع التيار. وهذه العلاقة اكتشفها العالم جول (Joule) ولذلك فالمعادلة (٣١ـ٤) تعرف بقانون جول.

ووحدة الطاقة الحرارية حسب المعادلة (٣١أـ٤) هي الجول. والمعروف أن كمية الحرارة تقاس بالسعر ولذلك يمكن كتابة كمية الحرارة بالصورة التالية :

$$dh = \frac{1}{J} I^2R\,dt = \frac{dU}{J} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٣١ب - ٤})$$

$$\therefore h = \frac{1}{J} I^2Rt = \frac{U}{J}$$

حيث تمثِّل h كمية الحرارة. ويسمى J بثابت جول ووحدته جول/ سعر (Joule/calorie) وقيمته ٤,٢ تقريبا. وتتحول كل الطاقة الكهربية إلى طاقة حرارية إذا كان الموصل عبارة عن كاوية كهربية أو سخانة كهربية وخلافه. أما إذا كان الموصل عبارة عن موتور كهربي فإن معظم الطاقة المستمدة من مصدر الجهد تتحول إلى طاقة ميكانيكية ويتحول الجزء الباقي إلى حرارة في الموتور حسب قانون حفظ الطاقة.

مـثـال (٥-٤)

وصلت سخانة كهربية بمصدر كهربي فكان التيار المار بها 5 A فإذا كانت مقاومتها 20Ω فاحسب القدرة الكهربية، وبعد مضي نصف شهر من التوصيل احسب الطاقة الكهربية وكمية الحرارة وما تكاليف هذه الحرارة إذا كان الثمن KW.hr/ هللة 9.

الحـــل

تحسب القدرة الكهربية من المعادلة:

$$P = I^2R = 5^2 \times 20 = 500\ \mathrm{W}$$

أما الطاقة الكهربية فتحسب من المعادلة:

$$U = Pt = 500 \times 15 \times 24 \times 60 \times 60 = 6.48 \times 10^8 \mathrm{J}$$

$$h = \frac{U}{J} = \frac{6.48 \times 10^8}{4.186} = 1.55 \times 10^8\ \mathrm{Cal}$$

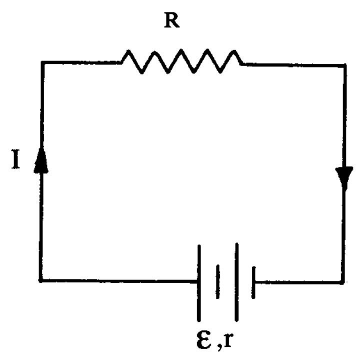
$$\mathrm{Cost} = 6.48 \times 10^8 \times \frac{1\mathrm{KW.hr}}{10^3 \times 60 \times 60} \times \frac{9\ \mathrm{Halalah}}{\mathrm{KW.hr}}$$

$$= 1620\ \mathrm{Halalah} = 16.20\ \mathrm{Riyal}$$ ريال

(٤-٤) القــوة الدافعة الكهربية والمقاومة الداخلية

Electromotive Force (E.M.F.) and Internal Resistance

يستمد التيار المار في دائرة طاقته من منبع للطاقـة الكهربية. وتنتج هذه الطاقة عن تحول الـطاقــة المختلفــة كالكيميائية أو الميكـانيكية أو الحرارية أو غيرها إلى طاقة كهـربية فقـد يكـون المصدر الكهربي على شكـل بطارية مكـونـة من أعمدة كهربية (تحويل الطاقة الكيميائية إلى طاقة كهربية) أو مـولـد كـهــربـي (تحـويـل الـطـاقـة الميكـانيكـية إلـى طـاقة كـهربي) أو ازدواج حــراري (thermocouple) (تحويل الطاقة الحرارية إلى طاقة كهربية).



شكل (٤-٧): بطارية مقـاومتها الداخلية r وقـوتهـا الـدافعة الكهربي ε متصلة بين طرفي مقــاومــة خارجية R.

وهذا المصدر يعطي قوة دافعة كهربية ε تعطى بالمعادلة:

$$P = \frac{dU}{dt} = \varepsilon I = \varepsilon \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{dU}{dq} = J/C = V \quad \cdots\cdots \quad (٤\text{-}٣٢)$$

أي أن القـوة الـدافعة الكهربية للمصدر هي الطاقة التي تزود بها كل وحدة شحنات تخرج من هذا المصدر وفي حالة دائرة مؤلفة من بطارية قوتها الدافعة ε ومن مقـاومـة خارجية R يمكن تقسيم الجهـد الكهـربي الكلي الذي تمثله القوى الدافعة الكهربية إلى قسمين:

ا ـ **الجهد الخارجي**: وهو جزء الجهد الكهربي الكلي الذي يدفع التيار في الأجهزة الخارجية المتمثلة في المقاومة R وتضيع طاقة قدرها I^2R في هذا الجزء من الدائرة.

ب ـ الجهد الداخلي: وهو جزء الجهد الكهربي الكلي الذي يدفع التيار داخل المصدر الكهربي نفسه وهو المتمثل في المقاومة الداخلية r. ولذلك يضيع جزء آخر من الطاقة قدره I^2r داخل المصدر ذاته.

وتكون الطاقة الكلية المتولدة من المصدر مساوية للطاقة الكلية المفقودة (المبددة) خارجه وداخله.

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r$$

$$\therefore \varepsilon = IR + Ir \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٣٣)$$

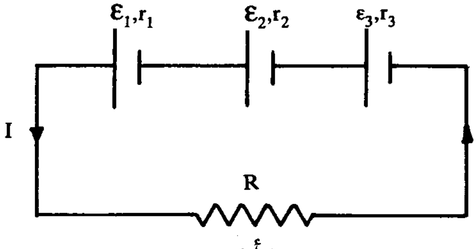
حيث $V = IR$. تمثل فرق الجهد بين قطبي المصدر أي أن:

$$V = \varepsilon - Ir \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٣٤)$$

وفي بعض الحالات يمكن إهمال قيمة r بالنسبة لـ R ويكون $V = \varepsilon$.

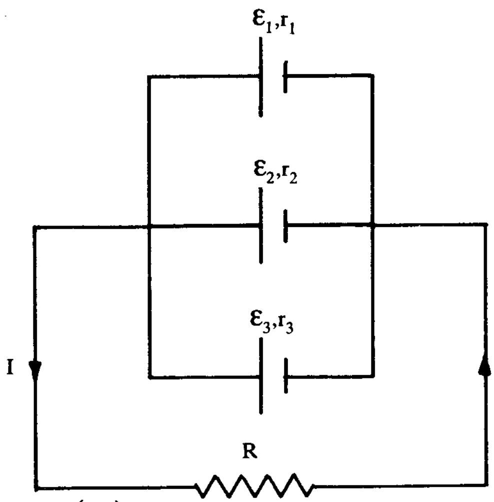
ويمثل المصدر الكهربي في حالة التيار المستمر بطرفين، يرمز لأحدهما بالعلامة السالبة (−)، ويعتبر جهده صفرا ويرمز للآخر بالعلامة الموجبة (+) ويعتبر جهده مساويا للقوة الدافعة الكهربية للمصدر. ويكون مرور التيار في الدائرة الخارجية من الطرف عالي الجهد إلى الطرف منخفض الجهد، كما أن مروره داخل المصدر (لكي يكمل المسار الدائري) في الاتجاه المضاد أي من الطرف منخفض الجهد إلى الطرف عالي الجهد. وإذا وصلت عدة بطاريات جهودها $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ على التوالي كما في شكل (١٨ ـ ٤) فإن القوة الدافعة للمجموعة وكذلك المقاومة الداخلية تساوي:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n \\ r &= r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٣٥)$$



(أ)

أما إذا كانت البطاريات متساوية الجهد فإن مجموعها يساوي $n\varepsilon$ ومقاومتها الداخلية الكلية تساوي nr. وإذا كان I هو مقدار التيار المار في الدائرة فإن



(ب)

شكل (٨-٤): أ ـ توصيل ثلاث قوى دافعة كهربية ε_3 ، ε_3 وε_1 على التوالي.
ب ـ توصيلها على التوازي.

$$n\varepsilon_1 = IR + Inr$$

$$\therefore I = \frac{n\varepsilon_1}{R+nr} \quad .. \quad (٤\text{-}٣٦)$$

أما إذا وصلت البطاريات المختلفة القيمة على التوازي فإن حساب محصلة الجهود وجمع المقاومات الداخلية فيه قليل من الصعوبة ولكن إذا كانت البطاريات متساوية الجهد ε فإن القوة الدافعة الكهربية للمجموعة تساوي القوة الدافعة لأي عمود ε. وإذا كانت r هي المقاومة الداخلية لأي من البطاريات فإن المقاومة الداخلية للمجموعة تساوي $\frac{r}{n}$ حيث n عدد البطاريات ومنه يكون:

$$\varepsilon = IR + I\frac{r}{n} \qquad \therefore I = \frac{\varepsilon}{R+\frac{r}{n}} \quad .... \quad (٤\text{-}٣٧)$$

مثال (٦-٤)

لتكن الدائرة الممثلة في شكل (٩أ ـ ٤) احسب التيار الكلي I وكذلك التيارات I_1 ، I_2 ، I_3.

الحـــل

المقاومات $2.5\Omega, 3\Omega, 0.5\Omega$ متصلة على التوالي، الفرع cd ، فيكون مجموعها هو:

$$2.5 + 3 + 0.5 = 6\Omega$$

ويصبح بذلك شكل الفرع cd كما في شكل (٩ب ـ ٤)، وهذه المقاومة متصلة على التوازي مع المقاومة 1.5Ω أي أن

$$\frac{1}{6} + \frac{10}{15} = \frac{5}{6} \qquad \therefore R_{cd} = \frac{6}{5} = 1.2\Omega$$

كما يوضحه الشكل (٩جـ ـ ٤) الفرع cd.

المقاومتان 5Ω , 4Ω متصلتان على التوازي، الفرع bc ، أي أن:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \qquad \therefore R_{ef} = \frac{20}{9} = 2.222\Omega$$

هذه المقاومة متصلة على التوالي مع المقاومة 2Ω فتصبح مقاومة هذا الفرع 4.222Ω وهذه المقاومة متصلة على التوازي مع $6\Omega, 4\Omega$ كما في شكل (٩ب ـ ٤).

$$\therefore \frac{1}{4.222} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = 0.654 \qquad \therefore R_{bc} = 1.53\Omega$$

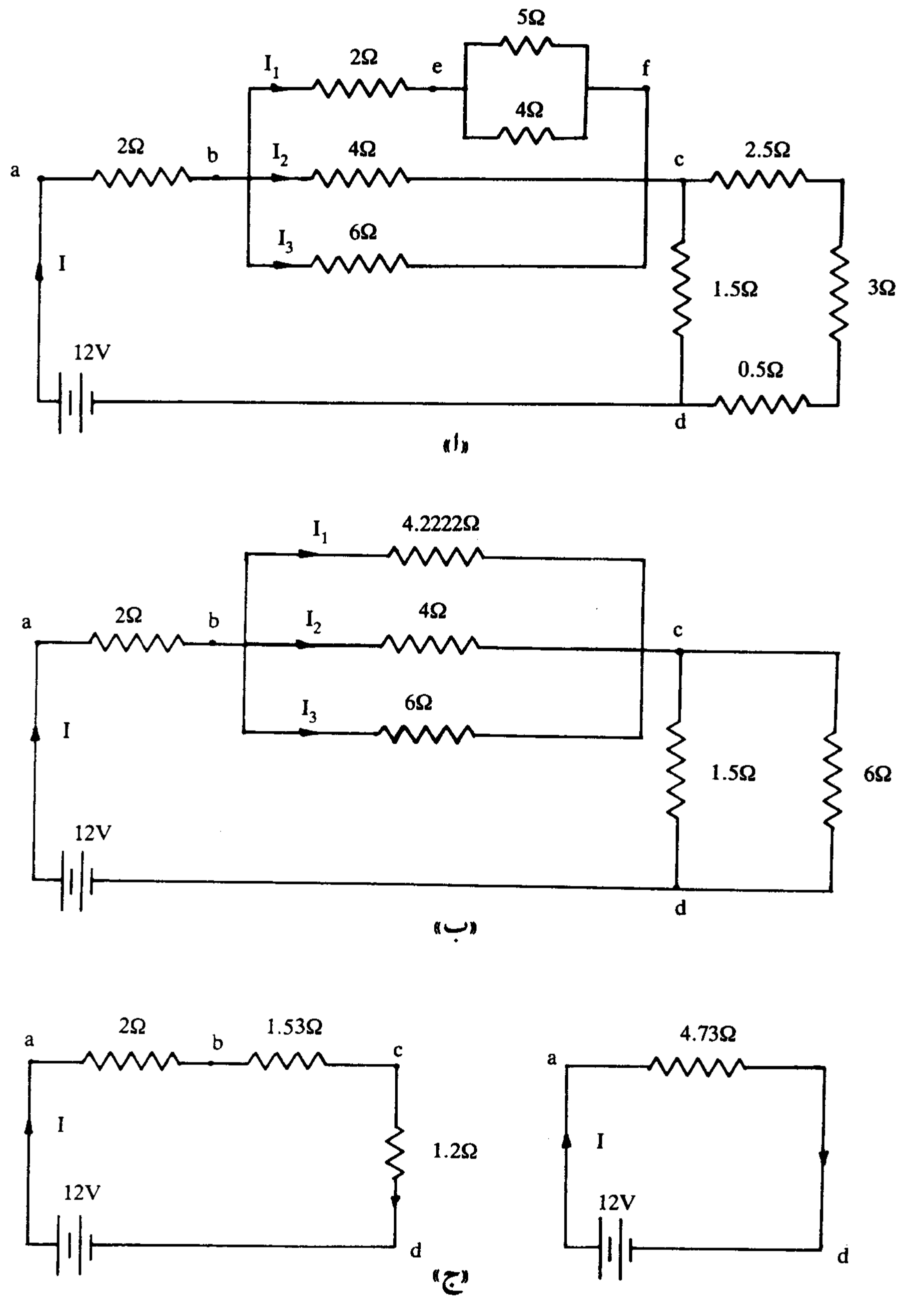
ويوضح الشكل (٩جـ ـ ٤) المقاومات R_{cd}, R_{bc}, R_{ab} المتصلة على التوالي أي أن المقاومة الكلية المكافئة لجميع المقاومات تساوي:

$$R = R_{ab} + R_{bc} + R_{cd}$$

$$R = 2 + 1.53 + 1.2 = 4.73\Omega$$

إذن التيار الكلي المار في الدائرة المكافئة، شكل (٩د ـ ٤)، يساوي:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{4.73} = 2.54\ A$$



شكل (٩-٤): دائـرة بسيطة تحتـوي على بطارية وسلسلة من المقـاومات متصلة على التوالي وعلى التوازي [تابعة لمثال (٥-٤)].

أما بالنسبة للتيارات I_1 ، I_2 ، I_3 فيمكن حسابها كالتالي :

$$V_{bc} = I\,R_{bc} = 2.54 \times 1.53 = 3.886\ V$$

$$\therefore I_1 = \frac{V_{bc}}{4.222} = \frac{3.886}{4.222} = 0.920\ A$$

$$I_2 = \frac{V_{bc}}{4} = \frac{3.886}{4} = 0.972\ A$$

$$I_3 = \frac{V_{bc}}{6} = \frac{3.886}{6} = 0.648\ A$$

مـــثـــال (٤-٧)

احسب عدد الالكـترونـات التي تمر في الدقيقة الواحدة بمقطع فتيلة مصباح كهـربي قدرته 100 W وفرق الجهد بين طرفيه 220 V علما بأن شحنة الالكترون تساوي 1.6×10^{-19} C .

الحـــــل

$$\because P = IV$$

$$\therefore I = \frac{P}{V} = \frac{100}{220} = 0.455\ A$$

$$dq = I\,dt = 0.455 \times 60 = 27.27\ C$$

$$\therefore n\ (\text{عدد الإلكترونات}) = \frac{27.27}{1.6\times10^{-19}} = 17 \times 10^{19}\ \text{electrons}$$

مـــثـــال (٤-٨)

احسب مقاومة فتيلة مصباح قدرته 60W والجهد بين طرفيه 117V ثم احسب التيار المار في الفتيلة . وإذا استعمل المصباح لمدة شهر كامل بصورة مستمرة فاحسب الطاقة الكهربية المستنفذة مقدرة بالجول J و KW.hr .

الحـــــل

$$\because P = \frac{V^2}{R} \qquad \therefore R = \frac{V^2}{P} = \frac{(117)^2}{60} = 228.2\Omega$$

وللحصول على التيار I نطبق قانون أوم :

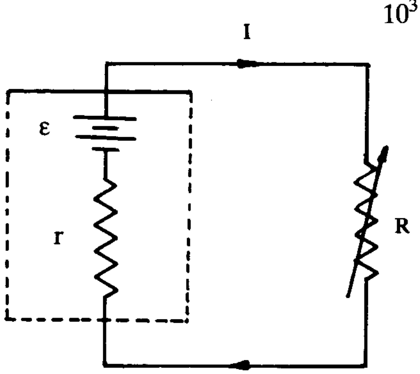
$$I = \frac{V}{R} = \frac{117}{228.2} = 0.513\,A$$

$$U = Pt = 60\times30\times24\times60\times60 = 1.56\times10^{8} J$$

$$= \frac{60\times30\times24}{10^{3}} = 43.2\ KW.hr$$

مـثـال (٩-٤)

ما هي قيمة R التي تعطينا أكبر قيمة للقدرة المبددة فيها وما هي قيمة هذه القدرة العظمى في الدائرة (شكل ١١٠ - ٤).



شكل (١١٠ - ٤): دائرة بسيطة تحتوي علة مقاومة متغير R وبطارية لها مقاومة داخلية r

الحـــل

يمكن من المعادلة (٣٣-٤) كتابة ما يلي:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \quad \text{........ (A)}$$

أما القدرة المتحولة إلى حرارة في المقاومة الخارجية R فهي:

$$P = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2} \quad \text{........ (B)}$$

وللحصول على قيمة R التي تعطينا أعلى قيمة لـ P لابد من تفاضل المعادلة بالنسبة لـ R ثم مساواة النتيجة بالصفر فيُحصل على:

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2\left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3}\right] = \varepsilon^2\,\frac{r-R}{(R+r)^3} = \text{zero}$$

$$\therefore R = r$$

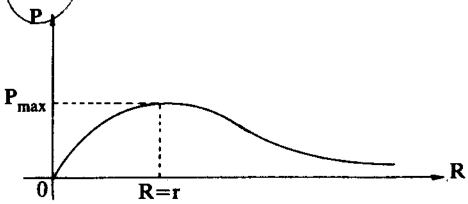
أي أنه يمكن الحصول على أكبر قيمة للقدرة المبددة (dissipated) عندما تكون المقاومة الخارجية مساوية للمقاومة الداخلية للبطارية (r) وإذا عوض في المعادلة B يُحصل على:

$$P_{max} = \varepsilon^2/4r \quad \text{....... (C)}$$

أما الجهد بين طرفي المقاومة R عند هذا الوضع، حسب المعادلة (٣٧-٤) هو:

$$\varepsilon = IR + Ir = IR + IR = 2IR = 2V$$

$$\therefore V = \frac{\varepsilon}{2}$$



شكل (١٠ب ـ ٤): العلاقة بين المقاومة والقدرة

وهو يمثل نصف جهد البطارية والنصف الآخر يكون بين طرفي المقاومة الداخلية r ويوضح الشكل (١٠ب ـ ٤) العلاقة بين P و R حسب العلاقة B

(٤ـ٥) الدوائر الكهربية المركبة

Complicated Electric Circuits

يستخدم قانون أوم عادة في حل الدوائر البسيطة، وهي الدوائر التي تحتوي على مصدر كهربي واحد ومجموعة المقامات والتي يمكن اختزالها في النهاية إلى الدائرة المبينة في شكل (٩د ـ ٤) أما في حالة الدوائر المركبة، والتي تسمى بالشبكات الكهربية وتتكون من مجموعة من الدوائر البسيطة المحتوية في العادة على أكثر من مصدر كهربي واحد، فتستخدم عدة قوانين أهمها:

(٤ـ٥ـ١) قاعدتا كيرشوف Kirchhoff's rules

ا ـ القاعدة الأولى

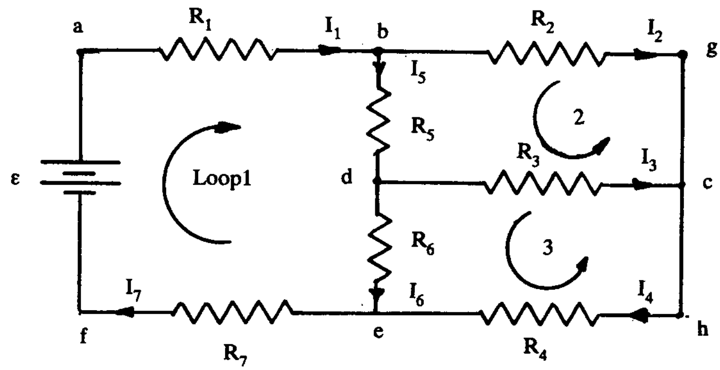
في حالة الشبكات الكهربية يكون مجموع التيارات الداخلة لنقطة (junction point) وتسمى بالعقدة (node) مساويا مجموع التيارات الخارجة منها.
أي أن المجموع الجبري للتيارات الكهربية عند أي عقدة ما يساوي صفرا.

$$\Sigma I_{in} = \Sigma I_{out} \qquad \text{or } \Sigma I_{in} - \Sigma I_{out} = \text{zero} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤\text{-}٣٨)$$

ففي الشكل (١١ـ٤) يمكن تطبيق القاعدة الأولى كالتالي:

العقدة b : $I_1 = I_2 + I_5$ العقدة d : $I_5 = I_3 + I_6$

العقدة c : $I_2 + I_3 = I_4$ العقدة e : $I_4 + I_6 = I_7 = I_1$



شكل (٤-١١): دائـرة مركبـة من عدد من المقـاومـات ومتصلة بقوة دافعة كهربية لدراسة قانونا كيرشوف المتعلقة بتوزيع الجهد والتيار.

ب ـ *القاعدة الثانية*

في أي دائـرة مغلقـة (loop) يكون المجموع الجبري للقوى الدافعة الكهربية مساويا للمجموع الجبري لحاصل ضرب التيار في المقاومة في جميع أجزاء الدائرة المغلقة.

$$\therefore \Sigma \varepsilon = \Sigma IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٤\text{-}٣٩)$$

وبتطبيق القاعدة الثانية على الدوائر المغلقة للدائرة المركبة (٤-١١) يُحصل على:

أ ـ بالنسبة للدائرة المغلقة abefa إذا بدأنا من a ، ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{abefa}$ يُحصل على:

$$\varepsilon = I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_6 R_6 + I_7 R_7$$

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_6 R_6 - I_7 R_7 = \text{zero}$$

ب ـ وبالطريقة نفسها يُحصل من الدائرتين المغلقتين $\overrightarrow{bgcdb}$ و $\overrightarrow{dched}$ على:

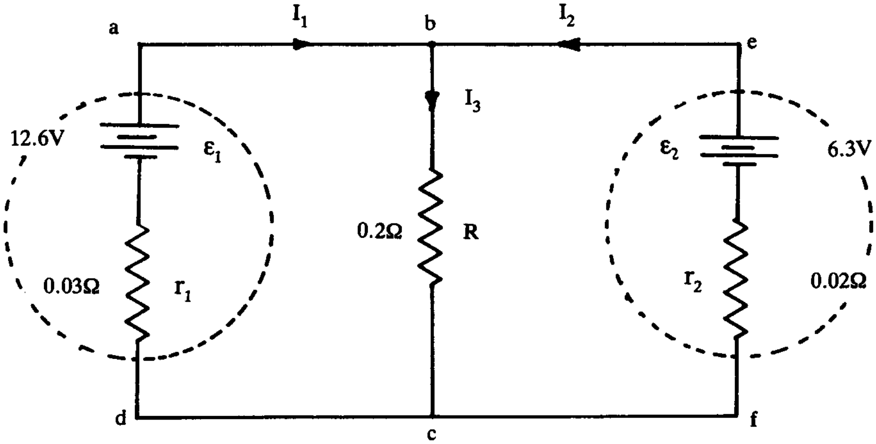
$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_5 R_5 = \text{zero}$$

$$-I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_6 R_6 = \text{zero}$$

وتسمى القاعدتان باسم كيرشوف نسبة إلى العالم الفيزيائي الألماني جوستاف كيرشوف (Gustaf Kirchhoff) الـذي بنى نظريتـه على أسـاس بقـاء (conservation) الشحنة والتيار، وعلى الحقيقة الثابتة عن الجهد بأنه دائما يعود إلى قيمته الأصلية بعد اكتمال دورته لأي مسار مغلق.

مـــثـــال (١٠-٤)

في الدائرة التالية احسب I_1 , I_2 , I_3



الحـــــل

إن اتجاه التيارات I_1 , I_2 , I_3 الموضحة على الدائرة هو اتجاه فرضي قد يكون اتجاها صحيحا أو خاطئا. وعند الحصول على قيمة سالبة للتيار في النهاية فإن هذا معناه أن التيار الفعلي يسري في الاتجاه المعاكس غير المفروض.

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرتين abcd , befc نُحصل على :

ا - بالنسبـة للدائرة abcd إذا بدأنا من النقطة a ، ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{abcd}$ نحصل على المعادلة :

$$12.6 = 0.2\, I_3 + 0.03\, I_1 \qquad \text{........ (A)}$$

$$\therefore\ 12.6 - 0.2\, I_3 - 0.03\, I_1 = 0$$

ب - بالنسبة للدائرة befc إذا بدأنا من النقطة b ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{befc}$ نُحصل على المعادلة :

$$-6.3 = -0.02\, I_2 - 0.2\, I_3 \qquad \text{.............. (B)}$$

$$\therefore\ -6.3 + 0.02\, I_2 + 0.2\, I_3 = 0$$

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الأولى على النقطة "b" أو النقطة "c" نحصل على معادلة ثالثة للمجاهيل I_1 , I_2 , I_3 بحيث يمكن حسابها بحل المعادلات الثلاث.

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad ....\ (C)$$

بحل المعادلات الثلاث (A) ، (B) و (C) نحصل على قيم التيارات I_1 ، I_2 و I_3 وهي :

$$I_1 = 142.64\ A$$

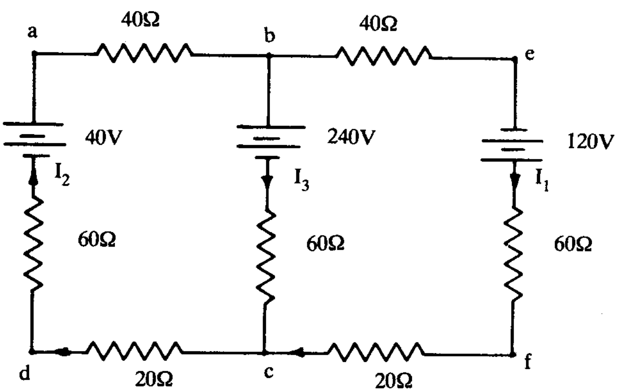
$$I_2 = -\ 101.0\ A$$

$$I_3 = 41.62\ A$$

والإشارة السالبة للتيار I_2 تعني أن الاتجاه المفروض غير صحيح ولذلك فالاتجاه الصحيح للتيار هو عكس الاتجاه المفروض أي من b إلى e. مع العلم أن r_1 ، r_2 تمثل المقاومتين الداخليتين لـ ε_1 ، ε_2 على الترتيب.

مثال (١١-٤)

احسب I_1 ، I_2 ، I_3 في الدائرة التالية :



الحل

$\overrightarrow{abcda}$ $\qquad -240 + 40 = 40\ I_2 + 60\ I_3 + 20\ I_2 + 60\ I_2$

$$\therefore\ 10 + 6\ I_2 + 3\ I_3 = 0 \quad ....\ (A)$$

$\overrightarrow{befcb}$ $\qquad 120 + 240 = 40\ I_1 + 60\ I_1 + 20\ I_1 - 60\ I_3$

$$360 = 120\ I_1 - 60\ I_3$$

$$\therefore\ 6 - 2\ I_1 + I_3 = 0 \quad ....\ (B)$$

ويتطبيق القاعدة الأولى على العقدة b أو c يُحصل على :

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \;..........\; (C)$$

وبحل المعادلات (A) ، (B) و (C) نحصل على قيم التيارات I_1 ، I_2 و I_3 التالية :

$$I_1 = 1\frac{5}{6}\,A$$

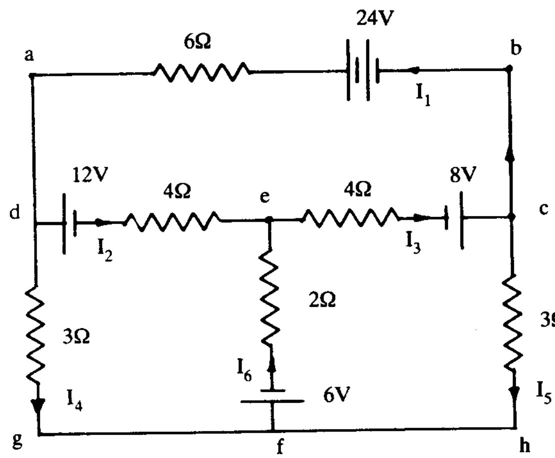
$$I_2 = -\frac{1}{2}\,A$$

$$I_3 = -2\frac{1}{3}\,A$$

ويتضح من هذه القيم أن الاتجاه الصحيح للتيار I_2 والتيار I_3 هو الاتجاه المعاكس للاتجاه المفروض.

مـــثـــال (١٢-٤)

في الدائرة التالية احسب I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 ، I_6



الحـــل

بتطبيق القاعدة الثانية نحصل على :

$\overrightarrow{abcda}$: $\quad -24 - 8 + 12 = -6\,I_1 - 4\,I_3 - 4\,I_2$

$$-20 = -6\,I_1 - 4\,I_3 - 4\,I_2$$

$$\therefore\; 10 = 3\,I_1 + 2\,I_3 + 2\,I_2 \quad .... (A)$$

$$\overrightarrow{defgd}: \quad -12 + 6 = 4\,I_2 - 2\,I_6 - 3\,I_4$$

$$\therefore -6 = 4\,I_2 - 2\,I_6 - 3\,I_4 \quad .... (B)$$

$$\overrightarrow{echfe}: \quad 8 - 6 = 4\,I_3 + 3\,I_5 + 2\,I_6$$

$$\therefore 2 = 4\,I_3 + 3\,I_5 + 2\,I_6 \quad .... (C)$$

وبتطبيق القاعدة الأولى على العقد d , e , c نحصل على :

$$d: \quad I_1 = I_2 + I_4 \qquad \therefore I_1 - I_2 - I_4 = 0 \quad .... (D)$$

$$e: \quad I_3 = I_2 + I_6 \qquad \therefore I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad .... (E)$$

$$c: \quad I_3 = I_1 + I_5 \qquad \therefore I_3 - I_1 - I_5 = 0 \quad .... (F)$$

بحل المعادلات الست نحصل على قيمة التيارات المطلوبة وهي :

$$I_1 = \frac{26}{11}\,A, \quad I_2 = \frac{4}{11}\,A, \quad I_3 = \frac{12}{11}\,A$$

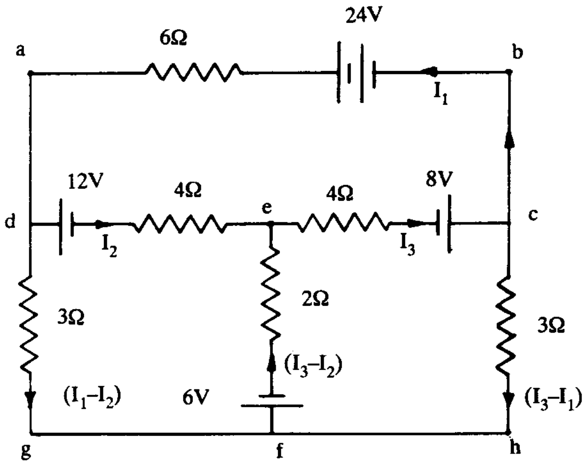
$$I_4 = 2\,A, \qquad I_5 = -\frac{14}{11}\,A, \quad I_6 = \frac{8}{11}\,A$$

(٤-٥-٢) طريقة ماكسويل Maxwell's method

وهذه طريقة أخرى لاختصار الحل عن طريق الاستغناء عن المعادلة الناشئة عن تطبيق قاعـدة كيرشوف الأولى، وذلك بعدم فرض تيارات جديدة في بعض الفروع ووضعهـا بدلالة التيارات المفترضة في الفروع الأخرى، وهذا يؤدي إلى تقليل عدد المجاهيل، وبالتالي عدد المعادلات اللازمة للحصول على قيم هذه المجاهيل، مما يؤدي بها إلى تبسيط الحل الرياضي في نهاية الأمر ويمكن توضيح هذه الطريقة بحل المثال السابق بطريقة ماكسويل كالآتي :

ففي دائرة المثال (٤-١١) نجد أن التيار I_1 يتفرع عند النقطة d إلى فرعين أحدهما I_2 والثاني I_4 ولذلك يمكن استبدال I_4 بـ $(I_1 - I_2)$ وكذلك التيار I_3 عند النقطة c يتفرع

إلى I_1 ، I_5 وتستبدل I_5 بالتيار $(I_3 - I_1)$ وكذلك يستبدل I_6 بـ $(I_3 - I_2)$. وتصبح الدائرة كالشكل التالي.



وواضح أن عدد المجاهيل أصبحت ثلاثة وهي I_1 ، I_2 ، I_3 وبذلك يكتفى بثلاث معادلات لتحديد ثلاثة مجاهيل بينما يحتاج الوضع الأول في المثال السابق إلى ست معادلات لمعرفة ستة مجاهيل.

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية نحصل على:

$$\overrightarrow{abcd}: \quad -24 - 8 + 12 = -6\,I_1 - 4\,I_2 - 4\,I_3$$

$$\therefore\ 10 = 3\,I_1 + 2\,I_3 + 2\,I_2 \quad \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\overrightarrow{defg}: \quad -12 + 6 = 4\,I_2 - 2\,(I_3 - I_2) - 3\,(I_1 - I_2)$$

$$\therefore\ -6 = 9\,I_2 - 2\,I_3 - 3\,I_1 \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\overrightarrow{echf}: \quad 8 - 6 = 4\,I_3 + 3\,(I_3 - I_1) + 2\,(I_3 - I_2)$$

$$\therefore\ 2 = 9\,I_3 - 3\,I_1 - 2\,I_2 \quad \ldots\ldots\ldots (C)$$

بحل هذه المعادلات الثلاث (1) ، (2) ، (3) نحصل على

$$I_1 = \frac{26}{11}\,A, \quad I_2 = \frac{4}{11}\,A, \quad I_3 = \frac{12}{11}\,A$$

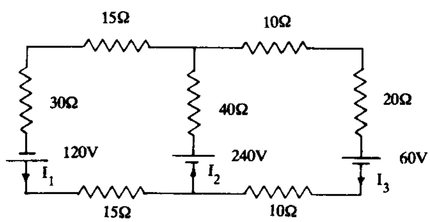
وبعد معرفة هذه التيارات يمكن معرفة بقية التيارات في الأفرع الأخرى.

(٤-٥-٣) نظرية التراكم Super-position theorem

هذه طريقة أخرى لحل الدوائر الكهربية المركبة وتتم بحساب تأثير كل مصدر كهربي على حدة، مع حذف المصادر الكهربائية الأخرى في الدائرة، ثم جمع النتائج معا جمعا جبريا للحصول على النتيجة النهائية.

مـــثـــال (١٣-٤)

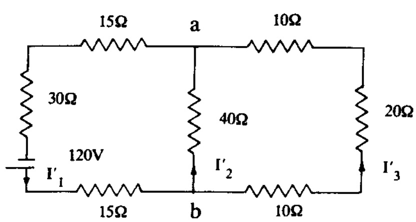
أوجد التيار الذي يمر في كل بطارية من البطاريات الموجودة في الشكل التالي:



الحـــــل

لحل هذه المسألة بطريقة التراكم نفرض وجود مصدر كهربي واحد ونحذف المصدرين الآخرين ونحسب التيارات في الفروع المختلفة. وبعد تكرار هذه العملية لكل مصدر نقوم بجمع التيارات الناتجة في كل فرع للحصول على التيارات المطلوبة:

ا - المصدر الكهربي (120 V) كما في شكل (ا).



«ا»

لحساب I'_1 نحسب المقاومة الكلية للدائرة

$$R' = 10 + 20 + 10 = 40\Omega$$

وهذه المقاومة متصلة مع المقاومة الأخرى

$$\therefore \frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} \quad \therefore R_{ab} = 20\Omega$$

وتكون المقاومة الكلية هي:

$$R = 20 + 15 + 15 + 30 = 80\Omega$$

$$\therefore I'_1 = 120/80 = 1.5\ A$$

ولحساب I_2' ، I_3' نحسب فرق الجهد بين الطرفين a ، b.

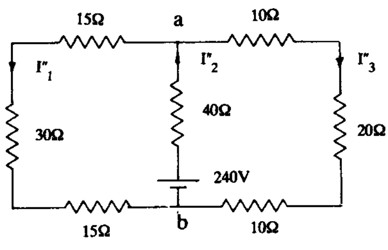
$$V_{ab} = I_1' \times R_{ab} = 1.5 \times 20 = 30\ V$$

$$I_2' = 30/40 = 0.75\ A$$

$$I_3' = 30/40 = 0.75\ A$$

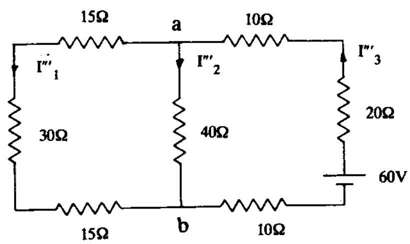
ب ـ المصدر الكهربي (240V) في شكل (ب) باتباع الطريقة السابقة نفسها نحصل على:

$.I_1'' = 1.5\ A\ , I_2'' = 3.75\ A\ , I_3'' = 2.25\ A$



«ب»

جـ ـ المصدر الكهربي (60 V) كما في شكل (جـ) باتباع الطريقة نفسها نحصل على:



«ج»

$$I_1''' = 0.375\ A\ , \quad I_2''' = 0.562\ A\ , \quad I_3''' = 0.937\ A$$

للحصول على التيارات في الفروع الثلاثة يجب جمع التيارات الجزئية الثلاثة في كل فرع جمعا جبريا.

$$\therefore I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = 1.5 + 1.5 + 0.375 = 3.375\ A$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 0.75 + 3.75 - 0.562 = 3.938\ A$$

يلاحظ أن I_2''' أُعتبر سالبا لأنه في عكس اتجاه التيارين I_2' و I_2'' اللذين اعتبرا موجبين، كما أن التيار الكلي I_2 في اتجاه التيارين I_2' و I_2''

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = -\,0.75 + 2.25 - 0.937 = +\,0.563\ A$$

ولما كانت القيمة التي حصل عليها للتيار I_3 سالبة، كان معنى هذا أنه في اتجاه الجزء الذي اعتبر سالبا وهو I_3'.

(٤-٥-٤) نظرية ثيفنين Thevenin theorem

يسهل تحليل بعض الدوائر الكهربية باستبدال الشبكة الكهربية المعقدة (network) التي تحتوي على مجموعة من مصادر الجهد وعلى مجموعة من المقاومات بدائرة مكافئة (equivalent circuit) لها المميزات الأصلية نفسها.

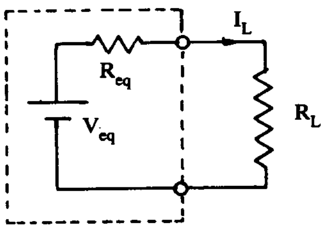
ومن أشهر الدوائر المكافئة الدائرة المستنتجة من نظرية ثيفنين والتي تنص على أن:

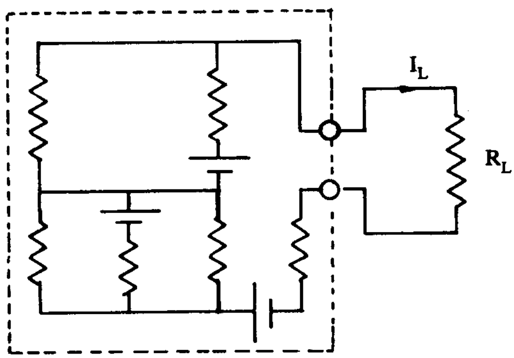
***«أي شبكة كهربية مكونة من عدة مقاومات وبطاريات يمكن استبدالها بمقاومة واحدة وبطارية مكافئة متصلتين على التوالي»*.**

وبناء على ذلك فإن الدائرة المكافئة للدائرة المعقدة [شكل (١٢١ - ٤)] يمثلها الشكل (١٢ب - ٤) ويتضح من هذا الشكل أن:

$$V_{eq} = (R_L + R_{eq})\, I_L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٠)$$

ولمعرفة نظرية ثيفنين نتابع المثال التالي:

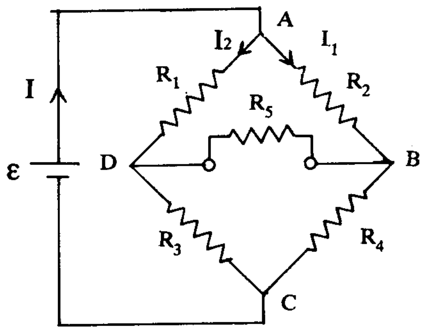




شكل (١٢-٤): ا ـ شبكة كهربية لها طرفان.
ب ـ الدائرة المكافئة للشبكة ا.

مـثــال (٤-١٤)

احسب التيار المار في المقاومة R_5 في الدائرة التالية:



«أ»

الحـــل

لحل هذه المسألة نتبع الخطوات التالية:

١ - انزع المقاومة R_5 بين الطرفين D و B.

٢ - يعد الفرعان ABC و ADC متصلين على التوازي مع البطارية ε وبذلك فإن التيار في كل فرع هو:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3}$$

ويكون هبوط الجهد عبر المقاومة R_2 هو:

$$V_2 = I_1 R_2 = \frac{\varepsilon R_1}{R_2 + R_4}$$

أما هبوط الجهد عبر المقاومة R_1 هو:

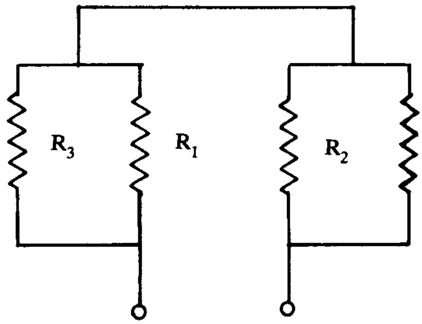
$$V_1 = I_2 R_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_3}$$

وبذلك فإن الجهد المكافىء V_{eq} يمثل الجهد عبر النقطتين D ، B وقيمته هي:

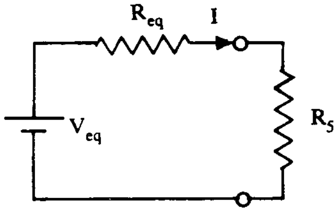
$$V_{eq} = \frac{\varepsilon R_2}{R_2 + R_4} - \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_3}$$

٣ - للحصول على المقاومة المكافئة بين النقطتين D ، B نقصر البطارية، حيث عدت مقاومتها الداخلية صغيرة، فنحصل على الشكل (ب) الذي يعطينا المقاومة المكافئة أي أن:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$



«ب»



«ج»

وبذلك فإن الدائرة المكافئة للدائرة (أ) يمثلها الشكل (جـ) ومنها نحصل على التيار المار في المقاومة (R_5) حيث:

$$I = V_{eq} / (R_{eq} + R_5)$$

(٤-٦) تيارات الشحن والتفريغ للمكثف

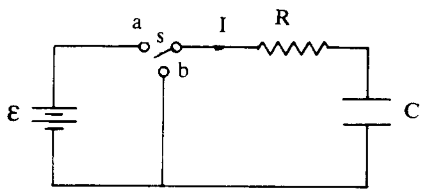
Charge and Discharge Currents of a Capacitor

سبق أن نوقشت الدوائر الكهربية المحتوية على بطاريات ومقاومات أو مكثفات فقط. يتضمن هذا البند دراسة دوائر كهربية تحتوي على مكثف سعته C ومقاومة مقدارها R متصلة على التوالي، خلال مفتاح S، ببطارية قوتها الدافعة الكهربية ثابتة ومقدارها ε كما في الشكل (١٣-٤).

بعد غلق الدائرة وانقضاء زمن قدره t تكون قيمة شدة التيار المار في المقاومة I، مثلا، وقيمة الشحنة على المكثف q. وعندها تصبح قيمتا الجهد بين طرفي المقاومة وطرفي المكثف كالتالي:

$$V_R = IR \quad \text{و} \quad V_C = \frac{q}{C}$$

وتكتب معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصيغة التالية:



شكل (١٣-٤): دائرة كهربية تحتوي على مكثف سعته C ومقاومة قدرها R متصلة ببطارية قوتها الدافعة الكهربية ε

$$\varepsilon = V_R + V_C = IR + (q/C) \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤١)$$

بضرب طرفي المعادلة في Idt ينتج أن :

$$\varepsilon Idt = RI^2dt + (q/C)\, Idt$$

$$\because I = dq/dt$$

$$\therefore \varepsilon Idt = RI^2dt + (q/C)\, dq \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٢)$$

حيث يمثـل المقدار εIdt الطاقة المستمدة من البطارية بعد زمن قدره dt ويمثل المقـدار RI^2dt الـطاقـة المبددة على شكل طاقة حرارية في الدائرة أما المقدار $\frac{q}{C}dq$ فيمثل الطاقة المستخدمة في تخزين الشحنات على المكثف.

ويستمر شحن المكثف حتى يأخذ شحنته العظمى ، q_0 ، بعد انقضاء زمن معين تعتمد قيمته على قيمتي السعة C والمقاومة R ، عندها يقف التيار تماما وتؤول قيمته إلى الصفر وتصبح المعادلة (٤-٤١) كالتالي :

$$\varepsilon = \frac{q_0}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٣)$$

لمعرفة قيمة الشحنة على المكثف عند أي لحظة t خلال فترة شحن المكثف يتبع ما يلي :
يمكن إعادة كتابة المعادلة (٤-٤١) لتصبح :

$$\varepsilon = R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

أو

$$CR\,\frac{dq}{dt} = \varepsilon C - q$$

هذه معادلة تفاضلية يفترض لحلها أن يكون $y = \varepsilon C - q$ وبذلك تصبح كالتالي :

$$-CR\,\frac{dy}{dt} = y \quad \therefore \frac{dy}{y} = -\frac{1}{CR}\,dt$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{CR}\int dt \quad \therefore \ln y = -\frac{t}{RC} + \text{constant}$$

$$\therefore \ln(\varepsilon C - q) = -\frac{t}{RC} + \text{constant}$$

ويمكن معرفة قيمة ثابت التكامل من الشروط الابتدائية حيث تكون قيمة $q = 0$ عندما $t = 0$ أي عند ابتداء الشحن. وبذلك فإن قيمة الثابت تساوي : $\ln\varepsilon C$.

$$\therefore \ln(\varepsilon C - q) = -\frac{t}{RC} + \ln \varepsilon C$$

$$\therefore q = \varepsilon C\,(1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤ - ٤٤أ})$$

وعندما يتم الشحن سوف يمتنع سريان التيار وتصبح النهاية العظمى للشحنة q_0 وحسب المعادلة (٤-٤٣) فإن المعادلة (٤٤أ - ٤) تصبح :

$$q = q_0\,(1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤ - ٤٤ب})$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن $q = q_0$ في زمن قدره ما لا نهاية أي عند $t = \infty$ ، أما من الناحية التجريبية فإن الشحنة تبلغ قيمتها العظمى بعد زمن قصير جدا.

يمكن الحصول على التيار الكهربي المار في الدارة بمفاضلة المعادلة (٤٤-٤) أي أن :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC}\,e^{-t/RC}$$

أو

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\,e^{-t/RC} = I_0\,e^{-t/RC} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤-٤٥})$$

حيث تمثل I_0 القيمة العظمى للتيار التي يتم الحصول عليها عند لحظة غلق الدائرة. ويلاحظ من المعادلتين (٤٤-٤) و(٤٥-٤) أن الشحنة والتيار يسلكان طريقين متعاكسين حيث تتزايد الشحنة، من الصفر إلى قيمتها العظمى، ويتناقص التيار، من قيمته العظمى إلى الصفر، ويوضح الشكل (١٤-٤) بيانيا ما ورد في المعادلتين (٤٤-٤) و(٤٥-٤).

والمقدار RC له وحدات الزمن لأن :

$$RC = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = \frac{C.s}{C} = s$$

ولهذا يسمى المقدار RC بثابت الزمن (time constant) فإذا وضع t = RC وعوض عنه في المعادلة (٤-٤) يكون :

$$q = q_0 (1 - e^{-1})$$

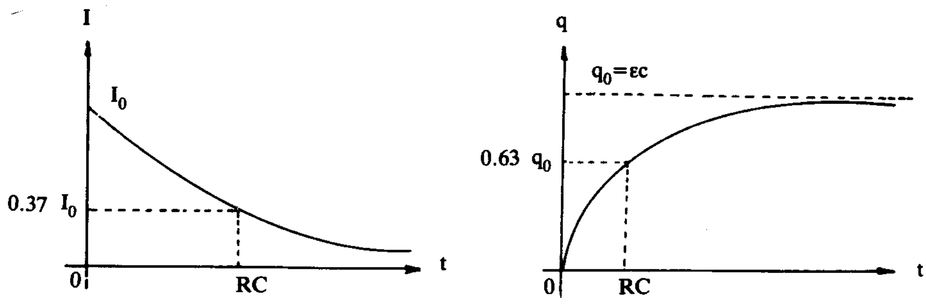
$$q = q_0 (1 - 0.37) = 0.63\, q_0$$

أي أن ثابت الزمن RC هو الزمن اللازم لنمو الشحنة على المكثف من الصفر إلى 0.63 من قيمتها العظمى q_0.

وإذا عُوِّض عن t = RC في المعادلة (٤٥-٤) يكون :

$$I = I_0 e^{-1} = 0.37\, I_0$$

ولذلك فهناك تعريف آخر لثابت الزمن "RC" بأنه الزمن اللازم لكي يصل تيار الشحن إلى 0.37 من قيمته I_0.



شكل (٤-١٤): العلاقة بين التيار I المار في الدائرة الواردة في شكل (٤-١٣) وعلاقتها بالزمن t وكذلك العلاقة بين الشحنة الواقعة على المكثف وعلاقتها بالزمن t ، في حالة شحن المكثف.

وعلى ذلك فإن ثابت الزمن لدائرة تحتوي على مقاومة قدرها R = 1 megaOhm ومكثف سعته C = 1 μF هو:

$$\therefore RC = 10^6 \times 10^{-6} = 1\ s$$

ومعنى هذا أن المكثف في هذه الدائرة يحتاج لزمن قدره 1 ثانية لتصل شحنته إلى 0.63 من شحنته النهائية أو بمعنى آخر ليصل تيار الشحن في الدائرة إلى 0.37 من قيمته الابتدائية.

أما إذا فرغ المكثف بعد شحنه، أي بتوصيل المفتاح S بالطرف b. فإن المكثف الـذي سعته C وشحنته الابتدائية q_0 سوف يبدأ في تفريغ شحنته خلال المقاومة R. ويفرض أنه بعد زمن t من بدء التفريغ أصبحت الشحة على المكثف q وتيار التفريغ I وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية مع ملاحظة عدم وجود بطارية نجد أن:

$$RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$\therefore R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

وبالتكامل نُحصل على:

$$\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$\therefore \ln q = -\frac{t}{RC} + \text{constant}$$

ولكن عند $t = 0$ يكون $q = q_0$

$$\therefore \ln q_0 = \text{constant}$$

$$\therefore \ln q - \ln q_0 = -\frac{t}{RC}$$

$$\therefore q = q_0\, e^{-t/RC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٦)$$

فإذا كانت $t = RC$ فإن $q = q_0 e^{-1}$ أي أن $q = 0.37\, q_0$ أما قيمة التيار خلال التفريغ فيمكن حسابه من اشتقاق المعادلة (٤-٤٦) أي أن:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

$$\therefore I = -I_0 e^{-t/RC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٧)$$

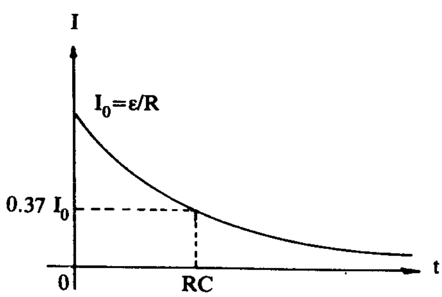
والإشارة السالبة تدل على أن تيار التفريغ ضد اتجاه تيار الشحن. مع ملاحظة أن فرق الجهد عند الشحن، من العلاقة (٤-٤٤)، هو:

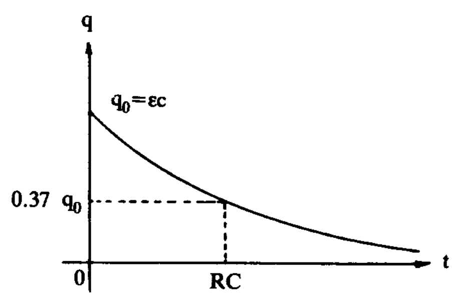
$$V = \frac{1}{C} q = \varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٨)$$

وفي حالة التفريغ يكون فرق الجهد من المعادلة (٤-٤٦) هو:

$$V = \frac{1}{C} q = \varepsilon e^{-t/RC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٤٩)$$

ويوضح الشكل (٤-١٥) العلاقة بين q , t حسب المعادلة (٤-٤٦) كذلك العلاقة بين I و t حسب المعادلة (٤-٤٧).





شكل (٤-١٥): العلاقة بين التيار I المار في الدائرة الواردة في شكل (٤-١٣) وعلاقتها بالزمن t وكذلك العلاقة بين الشحنة الواقعة على المكثف وعلاقتها بالزمن t «في حالة تفريغ المكثف»

وبواسطة الدائرة (٤-١٣) يمكن حساب المقاومات عالية القيمة (100 M) وذلك عند تفريغ شحنة المكثف خلال المقاومة. فباستخدام العلاقة (٤-٤٩) يمكن الحصول على:

$$\frac{t}{RC} = \ln(\mathcal{E}/V)$$

$$\therefore R = t / [C \ln(\mathcal{E}/V)] \quad \cdots\cdots \quad (٤\text{-}٥٠)$$

مـثـال (٤-١٥)

بعد كم من الزمن يمكن للمكثف المبين في الشكل (٤-١٣) أن يحتفظ بطاقة تساوي نصف قيمته العظمى للطاقة؛ علماً بأن $C = 0.2\,\mu F,\ R = 100\,M\Omega$

الحـــل

$$\therefore U = \frac{1}{2C} q^2$$

وبالتعويض عن q من المعادلة (٤-٤٤) نُحصل على:

$$U = \frac{1}{2C}(q_0^2)(1 - e^{-t/RC})^2 = U_0(1 - e^{-t/RC})^2$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} U_0 \qquad\qquad \therefore \frac{1}{2} = (1 - e^{-t/RC})^2$$

وبحل هذه المعادلة نُحصل على:

$$t = 1.22\,RC = 1.22 \times 100 \times 10^6 \times 0.2 \times 10^{-6} = 24.4\,s$$

مـثـال (٤-١٦)

بطارية قوتها الدافعة $\mathcal{E}$ تتصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي فإذا اتصل مصباح نيون على التوازي بالمكثف وكان جهد إضاءة المصباح V_2 وجهد انطفائه V_1. فاثبت أن الزمن الذي يمضي بين ومضتين متتاليتين لهذا المصباح هو:

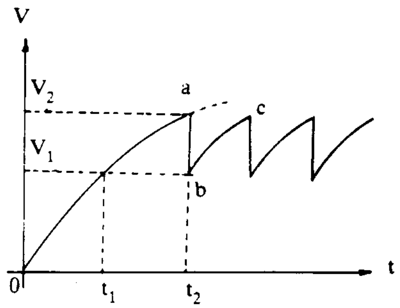
$$T = RC \ln \frac{\mathcal{E} - V_1}{\mathcal{E} - V_2}$$

الحـــل

$$\because q = q_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

بالقسمة على C

$$V = \varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$



وعند تمثيل الجهد V مع الزمن كما في الشكل المقابل نجد أن V يزداد حتى يصل قيمته عند النقطة a إلى جهد الإضاءة V_2 وعندئذ يضيء المصباح وتفرغ شحنة المكثف في هذا المصباح وينخفض الجهد حتى يصل إلى النقطة b وتصل قيمته إلى جهد الانطفاء V_1 فينطفىء المصباح ويبدأ الشحن من النقطة الأخيرة إلى أن يصل إلى نقطة c حيث يضيء المصباح مرة أخرى وتتكرر العملية. وبالتعويض في المعادلة (2) مرتين يُحصل على

$$V_1 = \varepsilon(1 - e^{-t_1/RC}) \quad \text{أو} \quad \varepsilon - V_1 = \varepsilon e^{-t_1/RC}$$

وكذلك:

$$V_2 = \varepsilon(1 - e^{-t_2/RC}) \quad \text{أو} \quad \varepsilon - V_2 = \varepsilon e^{-t_2/RC}$$

وبالقسمة يُحصل على:

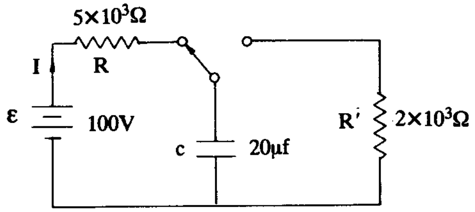
$$\frac{\varepsilon - V_1}{\varepsilon - V_2} = e^{(t_2 - t_1)/RC} = e^{T/RC}$$

حيث $T = t_2 - t_1$ وهو الزمن الذي يمضي بين ومضتين متتاليتين.

$$\therefore T = RC \ \ln\left(\frac{\varepsilon - V_1}{\varepsilon - V_2}\right)$$

وتستخدم هذه الطريقة فيما يسمى بالقاعدة الزمنية (time base) التي تطبق في مصابيح الإعلانات والأجهزة الإلكترونية.

مـثـــال (١٧-٤)



في الـدائـرة المقـابلة احسب الزمن اللازم لشحن المكثف $C = 20\mu F$ من خلال المقاومة $R = 5 \times 10^3 \Omega$ حتى يصل الجهد بين طرفيه إلى 99% من جهد البطارية.

وإذا فـرغ المـكـثـف في المـقـاومـة $R' = 2\times10^3\Omega$ ما هي قيمة التيار بعد مرور زمن قدره 0.15 ثانية.

الحـــل

يعطى فرق الجهد بين طرفي المكثف أثناء الشحن من المعادلة (٤٣-٤) حيث:

$$V = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad \therefore \frac{V_c}{\varepsilon} = 1 - e^{-t/RC}$$

وحيث إن الجهد بين طرفين C يساي 99% من ε .

$$\therefore \frac{99}{100} = 1 - e^{-t/RC}$$

$$\therefore 0.01 = e^{-t/RC}$$

$$\therefore t = -RC \ln 0.01 = 0.461 \text{ s}$$

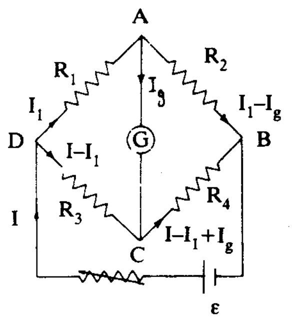
وهو المطلوب، أما حساب التيار أثناء التفريغ في المقاومة R′ فيمكن حساب قيمته من المعادلة (٤٥-٤) حيث:

$$I' = I'_0 e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R'} e^{-t/RC}$$

$$\therefore I' = \frac{100}{2 \times 10^3} e^{-0.15/2\times10^3\times20\times10^{-6}} = 1.18 \times 10^{-3} \text{ A}$$

(٤-٧) قنطرة ويتستون والقنطرة المترية

Wheatston's Bridge and the Metre Bridge



شكل (٤-١٦): قنطرة ويتستون

يمثل شكل (٤-١٦) قنطرة ويتستون ومبين عليها اتجاه التيارات في فروع القنطرة وإذا فرض أن R_g هي مقاومة الجلفانومتر G فإنه بتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرة المغلقة ACDA يُحصل على:

$$I_1 R_1 + I_g R_g - (I - I_1) R_3 = 0$$

أو

$$I_1 (R_1 + R_3) + I_g R_g - IR_3 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (٤\text{-}٥١)$$

وبصورة مماثلة بالنسبة للدائرة المغلقة ABCA يُحصل على:

$$(I_1 - I_g) R_2 - (I - I_1 + I_g) R_4 - I_g R_g = 0$$

أو

$$I_1 (R_2 + R_4) - I_g (R_g + R_2 + R_4) - IR_4 = 0 \quad (٤\text{-}٥٢)$$

وبضرب المعادلة (٤-٥١) بمقدار $(R_2 + R_4)$ والمعادلة (٤-٥٢) بمقدار $(R_1 + R_3)$ ثم الطرح يُحصل على:

$$I_g [R_g (R_2 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_g + R_2 + R_4)] + I [R_4 (R_1 + R_3) - R_3 (R_2 + R_4)] = 0$$

$$\therefore \frac{I_g}{I} = \frac{R_3 R_2 - R_4 R_1}{R_g (R_2 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_g + R_2 + R_4)}$$

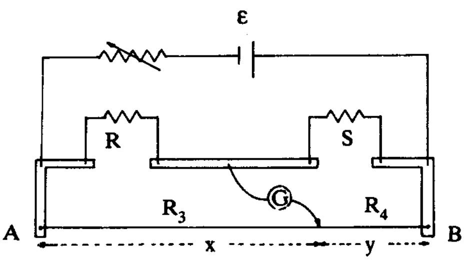
وفي هذه الحالة يكون $I_g = 0$ عندما يكون $R_3 R_2 = R_4 R_1$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٤\text{-}٥٣)$$

وبهذه الشروط تكون القنطرة متزنة وينعدم مرور تيار خلال الجلفانومتر. هذه القنطرة تستخدم لقياس المقاومات ذات القيم المتوسطة أو للمقارنة بينها وقد استخدمها لأول مرة العالم شارل ويتستون في عام ١٨٤٣ ميلادية ولذلك عرفت باسمه.

والقنطرة المترية هي صورة أخرى لقنطرة ويتستون. حيث يستعمل عوضا عن المقـاومتـين R_3 و R_4 سلك معدني يمكن تغيير طول جزئيه، وبذلك تتغير قيمة كل من R_3 و R_4 تبعا لطول جزئي السلك.

فإذا فرض أن الـدائـرة [شكـل (٤-١٧)] في حالـة اتـزان وكـانت مقاومة الطول x هي R_3 ومقاومة الطول y هي R_4 فإن:



شكل (٤-١٧): القنطرة المترية

$$\frac{R}{S} = \frac{R_3}{R_4} \quad .. \quad (٤-٥٤)$$

وحسب المعادلة (٤-١٢) نجد أن:

$$R_3 = \varrho \frac{x}{S} \qquad , \qquad R_4 = \varrho \frac{y}{S}$$

حيث ϱ هي المقاومة النوعية لمادة السلك، وهو عادة من مادة المنقنين أو الكونستنتان، و S مساحة مقطع السلك. وبالتعويض في المعادلة (٤-٥٤) يُحصل على:

$$\frac{R}{S} = \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤-٥٥)$$

أي أنه بقياس الطولين x و y «علما بأن $x + y = 100\ cm$» يمكن تعيين قيمة المقاومة المجهولة R إذا علمت S.

ويمكن الوصول إلى العلاقة (٤-٥٥) بطريقة أخرى وهي:

إذا فرض أن r هي مقاومة وحدة الأطوال فإن:

$$R_3 = rx \quad , \quad R_4 = ry$$

وبالتعويض في المعادلة (٤ـ٥٤) نحصل على المعادلة (٤ـ٥٥).

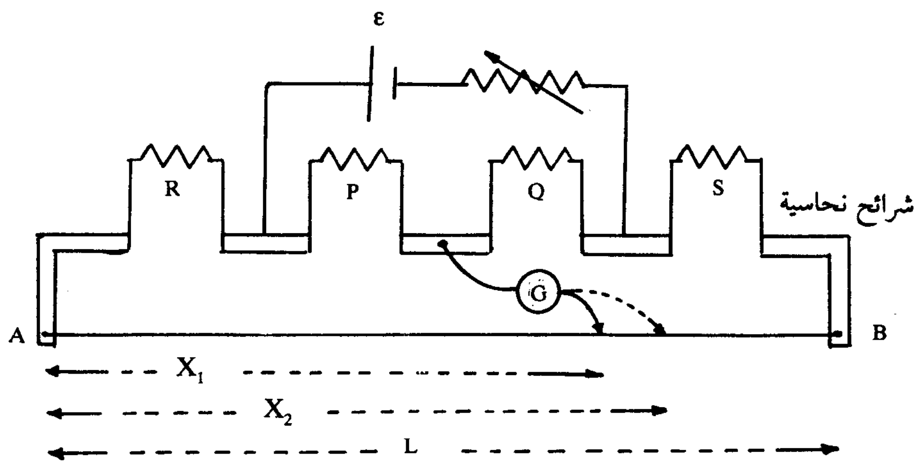
وللقنطرة المترية خطأ واحد يعرف بالخطأ الطرفي (end correction) والذي ينتج عن جزء السلك الملتحم مع مسماري التوصيل B و A والذي أهمل حسابه عند قياس كل من الطولين x و y وهذا الخطأ يتطلب معرفته في حالة دقة قياس مقاومة مجهولة.

لنفرض أن هذا الخطأ عند مسمار التوصيل A مقداره α أوم وعند مسمار التوصيل B هو β أوم فعند توفر شرط الاتزان نجد أن:

$$\frac{R}{S} = \frac{rx \pm \alpha}{ry \pm \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{ـ}٥٦)$$

ويلزم في حالة القياس الدقيق تعيين كل من α و β ويستخدم لذلك جهاز يعرف بقنطرة كاري فوستر.

(٤ـ٨) قنطرة كـاري فوسـتر
The Carey - Foster Bridge



شكل (٤ـ١٨): قنطرة كاري فوستر.

يمثـل شكـل (٤ـ١٨) قنطرة كاري فوستر، وهي تعديل لقنطرة ويتستون حيث إنه بواسطتها يمكن تعيين أو تلافي الخطأ الطرفي، حيث P ، Q مقاومتان متساويتان في

القيمة تقريبا ولا حاجة لمعرفة قيمتها الفعلية. R و S مقاومتان أخريان «تكونان بمثابة ازدياد الطول لسلك القنطرة L مما يزيد حساسيتها للمقاومة بين المقاومات المتقاربة» وقيمتها أيضا متقاربة ويجب معرفة القيمة الفعلية للمقاومة S.

فإذا فرض أن الخطأ الطرفي عند A و B هما α و β أوم على التوالي فإنه عند حالة الاتزان يكون:

$$\frac{P}{Q} = \frac{R + rx_1 + \alpha}{S + r + (L - x_1) + \beta}$$

أو

$$\frac{P}{P + Q} = \frac{R + rx_2 + \alpha}{R + S + rL + \alpha + \beta} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٥٧)$$

حيث r مقاومة وحدة الأطوال للسلك.

وإذا استبدلت المقاومتان R و S كل مكان الأخرى فإنه عند حالة الاتزان يُحصل على:

$$\frac{P}{Q} = \frac{S + rx_2 + \alpha}{R + r + (L - x_2) + \beta}$$

أو

$$\frac{P}{P + Q} = \frac{S + rx_2 + \alpha}{R + S + rL + \alpha + \beta} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٥٨)$$

وبمساواة المعادلتين (٤-٥٧) و(٤-٥٨) ينتج أن:

$$R + rx_1 + \alpha = S + rx_2 + \alpha$$

$$\therefore R - S = r(x_2 - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٥٩)$$

ومن هذه المعادلة يمكن حساب الفرق بين المقاومتين المتقاربتين. وذلك بمعرفة r التي يمكن تعيينها بتجربة أخرى وذلك باستبدال S بمقاومة معلومة ولتكن S′ بحيث

$S'<Lr$ وجعل $R=0$ وبعد إعادة الخطوات السابقة نُحصل على :

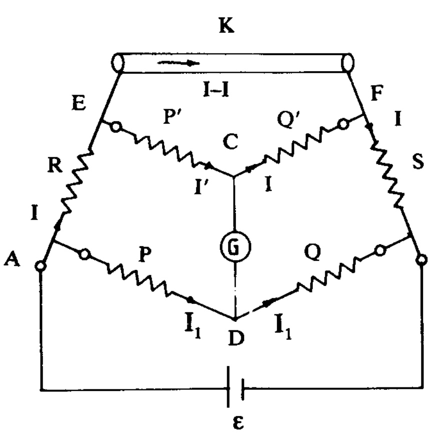
$$S' = r(x'_1 - x'_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٠)$$

وبمعرفة مقاومة وحدة الأطوال r للسلك وبأخذ مقاومات معلومة في القنطرة يمكن استخدام المعادلتين (٤-٥٧) و(٤-٥٨) لحساب الخطأ الطرفي α و β .

(٤-٩) قنطرة كلفين المزدوجة

The Kelvin Double Bridge

لا تصلح قنطرة ويتستون السابق شرحها [بند (٤-٧)] لإيجاد المقاومات ذات القيم الصغيرة $0.001\ \Omega \simeq$ مثل القضيب المعدني (metal rod) بسبب مقاومة التوصيل ومقاومة أسلاك التوصيل والتي تعد مقاوماتها أكبر من المقاومة الصغيرة التي يراد قياسها لذلك استخدمت قنطرة كلفين المزدوجة لهذا الغرض كما يبينها شكل (٤-١٩) . حيث R هي المقاومة الصغيرة غير المعروفة القيمة و S مقاومة صغيرة عيارية وقيمتها تقارب قيمة R والمقاومات P , Q , P′ , Q′ مقاومات معلومة ذات قيم عادية و K مقاومة صغيرة متصلة بحيث يمكن حذفها بسهولة .



شكل (٤-١٩) : قنطرة كلفين المزدوجة

وفي حالة اتزان الدائرة (التيار المار في الجلفانومتر يساوي الصفر) تتخذ التيارات المارة في أفرع الدائرة الاتجاهات الموضحة في شكل (٤-١٩) وبتطبيق قاعدة كيرشوف الأولى على الدوائر المغلقة في الشكل (٤-١٩) نُحصل على :

$$EKFCE : I'Q' + I'P' - (I - I')K = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦١)$$

$$AECDA : I'P' + IR - I_1P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٢)$$

$$CFBDC : IS + I'Q' - I_1Q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٣)$$

من المعادلتين (٤-٦٢) و(٤-٦٣) نحصل على:

$$\frac{I'P' + IR}{I'Q' + IS} = \frac{I_1P}{I_1Q} = \frac{P}{Q}$$

$$\therefore Q(I'P' + IR) = P(I'Q' + IS)$$

أو

$$I'(P'Q - Q'P) = I(PS - QR) \cdots\cdots \quad (٤\text{-}٦٤)$$

ويمكن كتابة المعادلة (٤-٦١) لتصبح:

$$I = [I'(P' + Q')/K] + I'$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٦٤) نحصل على:

$$I'(P'Q - Q'P) = I'[((P' + Q')/K) + 1](PS - QR) \quad (٤\text{-}٦٥)$$

وهذه المعادلة تمثل شرطا يجب أن يكون صحيحا عند حالة الاتزان.

وإذا كان الاتـزان لا يعتمد على المقاومة K (أي إذا حذفت K وبقيت الدائرة متزنة) فإن:

$$P'Q - Q'P = 0$$

$$PS - QR = 0$$

وفي هذه الحالة يكون شرطا الاتزان هما:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٦)$$

ونحصل على وضع الاتزان كالتالي:

ا ـ اختر قيما مناسبة للمقاومتين P و Q.

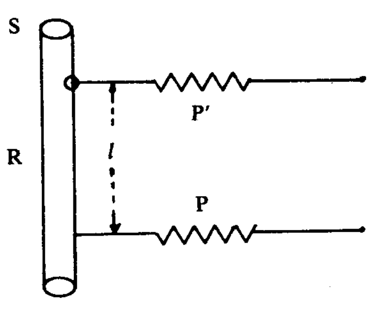
ب ـ احذف المقاومة K وابحث عن وضع الاتزان وفي هذه الحالة يتحقق الشرط $P/Q = P'/Q'$ (تهمل كل من R و S لأنها متصلة على التوالي مع P' و Q').

جـ ـ أعد المقاومة K إلى وضعها الأول فإذا كان $P/Q = R/S$ فإن القنطرة ستبقى متزنة، وإذا كان الأمر غير ذلك احذف K مرة أخرى وكرر العملية.

(عند حالة الاتزان وفي وضع عدم الاعتماد على K فإن $P/Q = R/S$. وبذلك يكون معدل المقاومات الصغيرة معطى بدلالة المقاومات الكبيرة التي يمكن أخذها من صندوق المقاومات ويمكن معرفة S المجهولة القيمة بمعرفة R).

ملاحظة (١)

يطلب غالبا قياس التوصيل الكهربي (electrical conductivity) لمعدن على شكل قضيب أو سلك. ويمكن عمل ذلك بتوصيل القضيب المعدني أو السلك بقنطرة كلفين المزدوجة كما في شكل (٢٠-٤) حيث يكون أحد طرفيه مثبتا والآخر وصلته متحركة «منزلقة» بحيث يمكن تغيير طوله بسهولة والفائدة من ذلك هو سهولة الوصول إلى وضع الاتزان الذي نحصل عليه كما يلي:



شكل (٢٠-٤): توصيل القضيب المعدني أو السلك الذي مقاومته R لقنطرة كلفين المزدوجة.

١ ـ تتبع الخطوتان ا، ب كما ورد ذكره أعلاه.

٢ ـ أعد المقاومة K واحصل على وضع الاتزان مرة أخرى وذلك بتغيير طول القضيب عن طريق الطرف المتحرك (وهذا بالطبع يغير قيمة المقاومة R وحينئذ يكون لدينا $P/Q = R/s$. فإذا كانت S معلومة أمكن معرفة R. وإذا كان طول القضيب أو السلك المقابل لـ R هو l ومساحة مقطعة S فإنه حسب العلاقتين (٨-٤) و(١٢-٤) يمكن معرفة التوصيل الكهربي σ حيث:

$$\sigma = \frac{l}{RS}$$

مــلاحـظـة (٢)

إذا كانت المقاومة K في موضعها فإن التيار المار خلال المقاومتين R و S يمكن أن يكون في حدود بضع أمبيرات وهذا أمر ضروري لتكون الحساسية جيدة ولذلك يجب استعمال البطاريات المشحونة حديثا في قنطرة كلفين المزدوجة.

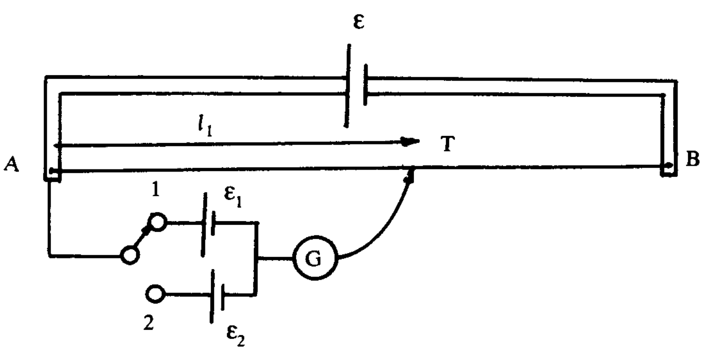
(٤-١٠) مقياس الجهد واستعمالاته

The Potentiometer and Its Uses

يعتبر مقياس فرق الجهد من أهم الوسائل الدقيقة لقياس فرق الجهد لعناصر الدوائر الكهربية ولمصادر القوى الدافعة الكهربية (E. M. F.).

(٤-١٠-١) مقياس فرق الجهد الأساسي The basic potentiometer

يتكـون مقياس فرق الجهـد في أبسط صورة له من سلك منتظم المقطع AB مصنوع من مادة ذات مقاومة نوعية عالية ومعامل مقاومته الحراري صغير كما في شكل (٤-٢١) حيث تعطى البطارية ε تيارا ثابتا I خلال السلك AB الذي يكون طوله في العادة مترا واحدا فإذا فرض أن r هي مقاومة وحدة الأطوال للسلك يكون فرق الجهد



شكل (٤-٢١): مقياس فرق الجهد الأساسي.

عبر الجزء AT هو rl_1I وتتعدل نقطة الاتصال T ، ويتبع ذلك l_1 ، حتى يتساوى rl_1I مع ε_1 (القـوة الدافعة للخلية 1) ، ويحدث ذلك عندما لا يكون هناك فرق للجهد عبر

الجلفانومتر (G) أي لا يمر تيار وعندئذ يكون :

$$\varepsilon_1 = r l_1 I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٧)$$

تستبدل الخلية 1 بالخلية 2 في الدائرة ويتبع ذلك تغيير موضع النقطة T بحيث يكون $AT = l_2$ عندما لا يمر تيار في الجلفانومتر وعندها يكون :

$$\varepsilon_2 = r l_2 I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٨)$$

من المعادلتين (٤-٦٧) و(٤-٦٨) يُحصل على :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{l}{l_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٦٩)$$

مــلاحـظــات

١ ـ للحصول على انعدام التيار خلال الجلفانومتر مع الخليتين يجب أن يكون :

- اتصال قطبي الخليتين اتصالا صحيحا بحيث يوصل القطب الموجب لكل من البطارية ε و الخليتين ε_1 و ε_2 بالنقطة A.
- فرق الجهد ε_1 و ε_2 أقل من فرق الجهد الأساسي عبرالسلك AB.

٢ ـ جرت العادة أن تكون الخلية 1 خلية الكادميوم العيارية (standard cadmium cell) والتي قوتها الدافعة الكهربية تساوي 1.01864 V عند 20°C وبمعرفتها يمكن معرفة ε_2 .

٣ ـ قد يكون هناك خطأ طرفي عند نقطة الاتصال A وليكن α متر من طول السلك وفي هذه الحالة يجب إضافته لتصبح المعادلة (٤-٦٩) كما يلي :

$$\varepsilon_1/\varepsilon_2 = (\alpha + l_1)/(\alpha + l_2) \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٠)$$

وعادة تكون α صغيرة ولذلك يمكن إهمالها .

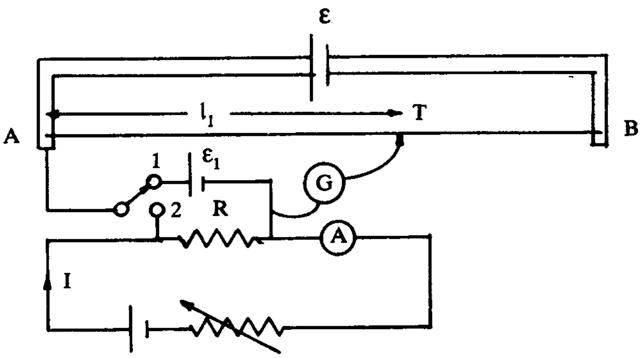
٤ ـ لحماية الجلفانومتر يجب توصيل مجزىء للتيار (shunt) إلا في حالة التيارات الصغيرة .

(٤-١٠-٢) استعمالات مقياس فرق الجهد Uses of the potentiometer

ا ـ قياس شدة التيار The measurement of current

إذا كانت شدة التيار I الـذي يمر خلال المقاومة R فإن فرق الجهد عبر هذه المقاومة هو IR والذي يمكن قياسه بواسطة مقياس فرق الجهد كما يبينه شكل (٤-٢٢)

وذلك بدون سحب للتيار، وعند معرفة قيمة R يمكن معرفة I.



شكل (٤-٢٢): استخدام مقياس الجهد في قياس شدة التيارI

وباتباع الخطوات السابق ذكرها في الفقرة (٤-١٠-١) يُحصل على:

$$l_1/l_2 = \varepsilon_1/IR$$

أو

$$I = l_2\,\varepsilon_1/l_1R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧١)$$

حيث ε_1 خلية عيارية معلومة القيمة.

مع ملاحظة أن الدائرة في شكل (٤-٢٢) تستعمل أيضا لمعايرة الأمبير «جهاز لقياس شدة التيار الكهربي بطريقة مباشرة». ويمكن استخدام المعادلة (٤-٧١) لحساب R إذا كانت I معلومة.

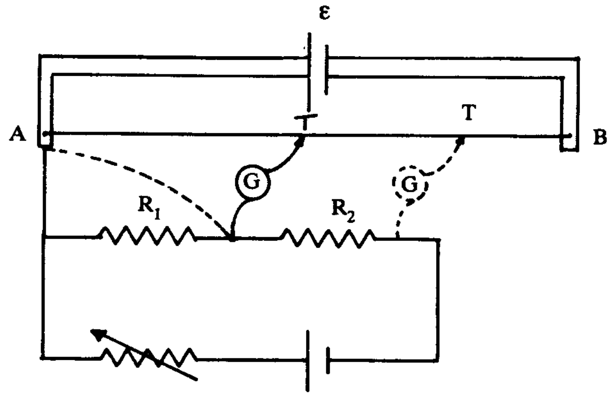
ب ـ مقارنة المقاومة *The comparison of resistance*

لتكن R_1 و R_2 مقاومتان متصلتان على التوالي يمر بهما تيار شدته I فيكون الجهد عبرهما V_1 و V_2 وللمقارنة بينهما يستعمل مقياس فرق الجهد كما يوضحه شكل (٤-٢٣).

وبتطبيق الخطوات السابق ذكرها في الفقرة (٤-١٠-١) يُحصل على:

$$l_1/l_2 = IR_1/IR_2 = R_1/R_2 \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٢)$$

ولذلك إذا عرفت إحداهما عرفت الأخرى.



شكل (٤-٢٣): كيفية استخدام مقياس الجهد للمقارنة بين المقاومات.

ويلاحظ مما تقدم أنه يمكن استعمال هذه الطريقة لمعرفة الخطأ الطرفي الذي تحدثنا عنه في الفقرة (٤-١٠-١). حيث نقيس l_1 و l_2 وكذلك l_3 المطابق لقياس فرق الجهد عبر المقاومتين مجتمعتين. ولذلك فالخطأ الطرفي لابد أن يضاف للأطوال الثلاثة. ومعروف أن:

$$V_{R_1R_2} = V_{R_1} + V_{R_2}$$

وحسب المعادلة (٤-٦٤) يكون:

$$rI\,(\alpha+l_3) = rI\,(\alpha+l_1) + rI\,(\alpha+l_2)$$

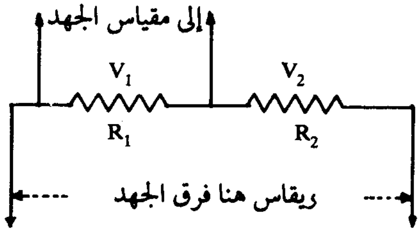
$$\therefore \alpha + l_3 = \alpha + l_1 + \alpha + l_2$$

$$\therefore \alpha = l_3 - l_2 - l_1 \qquad \text{(٤-٧٣)}$$

حيث r مقاومة وحدة الأطوال.

جـ - قياس فرق الجهد العالي *The measurement of a large P.D.*

إذا كان فرق الجهد أو القوة الدافعة الكهربية التي يراد قياسها يساوي أو أكبر من جهد البطارية ε الموصلة بين طرفي AB سلك مقياس فرق الجهد فلابد من استعمال موزع للجهد (potential divider) كما يبينه شكل (٤-٢٤).



شكل (٤-٢٤): استخدام مقياس الجهد لقياس فرق الجهد العالي.

فإذا كان الجهد الذي يراد قياسه هو V فإن $V = V_1 + V_2$. وبقياس V_1 بواسطة مقياس الجهد يمكن معرفة V من العلاقة:

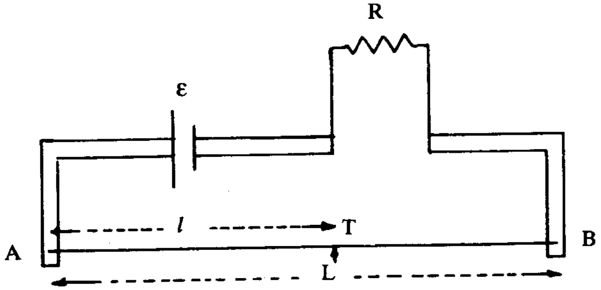
$$V/V_1 = (R_1 + R_2) / R_1$$

$$\therefore V = V_1 (R_1 + R_2) / R_1 \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٤)$$

موزع الجهـد المعبر عنه بالمقاومتين R_1 ، R_2 يوجد غالبا في صندوق مقفل يصمم بحيث يعـطى قيما ثابتة صحيحة لفرق الجهد V_1 مقارنة بفرق الجهد V بحيث تكون قيم V_1 $\frac{1}{10}$ أو $\frac{1}{100}$ أو $\frac{1}{1000}$ من قيمـة V. ولذلك يسمى هذا الصندوق بصندوق الجهد مع ملاحظة أنه يجب أن تكون قيمة $(R_1 + R_2)$ كبيرة لدرجة كافية بحيث لا تكون قيمة التيار المار من خلالها كافية للتأثير على قيمة الجهد V.

د ـ مقارنة فروق الجهود الصغيرة *The comparison of small P.D.*

إذا استعمل مقياس فرق الجهد للمقارنة بين فرقي جهد صغيرين فإنه باتباع الطريقة السابقة للمقارنة في الفقرة (ا) يكون l_1 ، l_2 صغيرين جدا بالنسبة لطول السلك AB وتكـون تبعـا لذلـك الدقة في عملية المقارنة ضعيفة جدا. وإذا أضيف للدائرة الأساسية لمقياس فرق الجهد مقاومة قدرها R كما في شكل (٢٥-٤) فإنها سوف تنقص



شكل (٢٥-٤): استخدام مقياس الجهد لمقارنة فروق الجهد الصغيرة.

من قيمة فرق الجهد عبر السلك ويكون التيار المار في هذه الدائرة ممثلا بالمعادلة التالية:

$$I = \mathcal{E}/(R + rL) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٥)$$

حيث L طول السلك AB و r مقاومة وحدة الأطوال.

ويمكن تغيير قيمة المقاومة R حتى نحصل على قيم معقولة من الطولين l_1 ، l_2 وتكون بذلك عملية المقارنة أكثر دقة من الوضع الأول.

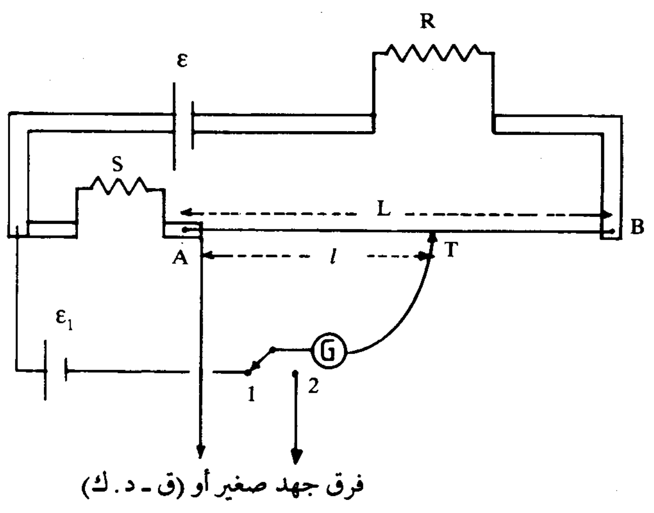
وفي أبسط عمليات المقارنة يمكن تغير قيمة المقاومة R لكي نحصل على قيمة مثل l الموضحة في شكل (٤-٢٥)، لأعلى فرق جهد صغير يراد قياسه بهذه الطريقة.

هـ - قياس فرق جهد صغير *The measurement of a small P.D.*

عند قياس فرق جهد صغير أو قوة دافعة كهربية صغيرة مباشرة كطريقة أفضل من عملية المقارنة السابق ذكرها فإنه لابد من استعمال خلية عيارية معروفة القيمة قدرها ε_1 فإذا كان الجهد المراد قياسه أصغر من ε_1 فإن مقياس فرق الجهد الأساسي يجب تغييره ليصبح كالوضع المبين في شكل (٤-٢٦) ويكون التيار I المار في الدائرة الأساسية هو:

$$I = \varepsilon/(R + S + rL) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٦)$$

تتغير قيمة التيار مع تغيير المقاومتين R و S. ويمكن تغيير قيمته حتى يصبح فرق الجهد بين طرفي السلك AB يساوي 1 mV أو 10 mV . . . الخ.



شكل (٤-٢٦): استخدام مقياس الجهد لقياس فرق جهد صغير.

وتوضع قيمة S للمقاومة بحيث يكون فرق الجهد بين طرفيها الناتج عن مرور التيار I مساويا لجهد الخلية العيارية ε_1 وفي هذه الحالة تكون نقطة الاتصال T ملامسة للطرف A من السلك، ويمكن تغيير المقاومة R حتى يصبح التيار المار في الجلفانومتر مساويا للصفر. وبهذه الطريقة يكون:

$$\varepsilon_1 = IS \qquad \therefore I = \varepsilon_1/S$$

ويكون فرق الجهد لوحدة الأطوال للسلك AB هو:

$$Ir = (\varepsilon_1/S)r$$

ومن ثم يمكن إدخال الجهد الصغير المراد قياسه V في الدائرة كالمتبع سابقا فإذا كانت l هي الطول المقابل لهذا الجهد، في حالة الاتزان أي انعدام تيار الجلفانومتر يكون:

$$V = Irl = (\varepsilon_1/S)rl \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٧٧)$$

ويلاحظ أنه إذا كان جهد السلك AB الذي يساوي طوله مترا واحدا هو 1 mV أو 10 mV فإنه يمكن قراءة مقياس فرق الجهد مباشرة لقيمة الجهد المجهول. كذلك قد يزيد طول السلك عن متر واحد ويصل إلى أحد عشر مترا.

مقياس الجهد البسيط وبعض تطبيقاته لا تستعمل الآن إلا في الأغراض التعليمية والتدريبية لمعرفة القواعد الأساسية الفيزيائية والرياضية فقط وذلك بسبب كبر حجمه غير المناسب مقارنة بمقياس الجهد العادي (voltmeter) إلى جانب عدم الدقة في قياساته لذلك صممت أجهزة قياس للجهد أكثر ملاءمة ودقة وفعالية.

(٤-١١) القوة الدافعة الكهربية الحرارية

Thermal Electromotive Force

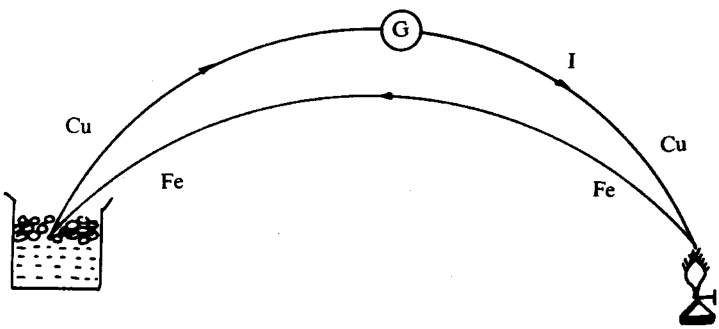
ذكر في البند (٤-٤) أن أحد مصادر القوة الدافعة الكهربية (E.M.F) هو تحويل الطاقة الحرارية إلى طاقة كهربية (thermoelectric) وقد توالت عدة نظريات لشرح وتفسير هذه الظاهرة وهي كما يلي:

(٤-١١-١) ظاهرة «تأثير» سيبك Seebeck effect

اكتشف سيبـك عام ١٨٢١ م طريقة لتوليد قوة دافعة كهربية بالحرارة فقط. حيث وجد أنه عند توصيل معدنين مختلفين على التوالي بجلفانومتر حساس كما في شكل (٢٧-٤) فإن تيارا يمر في الجلفانومتر بدون وجود قوة دافعة كهربية خارجية في الدائرة ويحتـاج الأمر فقط لرفع درجة حرارة أحد موضعي الاتصال عن درجة حرارة موضع الاتصال الآخر. ويسمى هذا التيار الناتج عن اختلاف درجة الحرارة بالتيار الكهربي الحـراري (thermoelectric current) والقـوة الـدافعة التي نشأ عنها هذا التيار بالقوة الكهربية الحرارية (thermoelectric force) وتتوقف القوة الدافعة الكهربية الحرارية على:

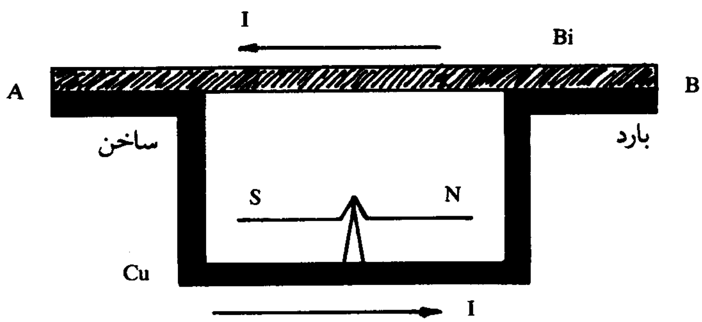
ا ـ نوعي المعدنين.
ب ـ درجة حرارة طرفي اتصال المعدنين.

وتسمى الدائرة المبينة في الشكل (٢٧-٤) بالازدواج الحراري (thermocouple) ويوضح الشكل (٢٨-٤) كيفية تعيين اتجاه التيار وعلاقته بدرجة الحرارة ونوعي المادتين المستعملتين.



شكل (٢٧-٤): توصيل معدنين مختلفين "Fe, Cu" على التوالي بجلفانومتر حساس G ووضع وصلتي الاتصال أحدهما في الثلج والثانية فوق موقد بنزن لتوليد قوة دافعة كهربية.

يبين الشكل (٢٨-٤) اتصال قضيبين من مادتين النحاس Cu والبزمث Bi وفي المنتصف توجد إبرة مغناطيسية. فإذا سخن الطرف A فإن القطب الشمالي N للإبرة



شكل (٢٨-٤): اتصال قضيبين من مادتين النحاس Cu والبزمث Bi لتبين اتجاه التيار وعلاقته بدرجة الحرارة باستخدام إبرة مغناطيسية N ، S.

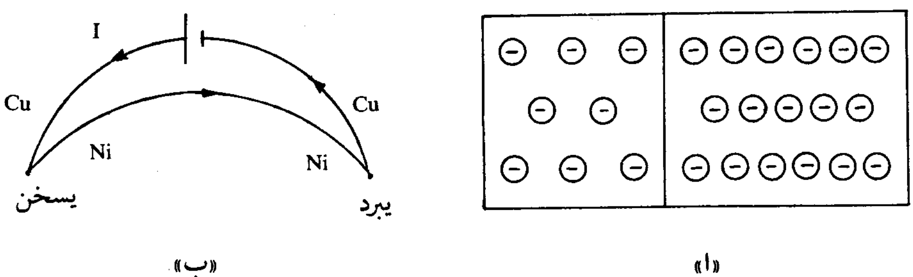
المغناطيسية سيتحرك إلى الشرق وهذا يعني أن التيار يسري من النحاس إلى البزمث خلال الوصلة الباردة B والعكس خلال الوصلة الساخنة A. وبعد تجارب عديدة على أنواع مختلفة من المعادن أمكن ترتيب بعض منها بحيث إذا تكون ازدواج حراري من اثنين منها فإن التيار يمر من المعدن إلى المعدن الذي يليه في الترتيب عند الطرف الساخن وتزداد القوة الدافعة الكهربية الحرارية كلما بعد المعدن عن الآخر في الترتيب مثل المجموعة التالية على الترتيب.

بزمث Bi ← نيكل Ni ← كوبلت Co ← بلاديوم Pd ← بلاتين Pt ←
نحاس Cu ← مانجنيز Mn ← تيتانيوم Ti ← زئبق Hg ← رصاص Pb ←
قصدير Sn ← كروميوم Cr ← موليبدنم Mo ← روديوم Rh ← اريديوم Ir ←
ذهب Au ← فضة Ag ← زنك Zn ← تنجستن W ← كادميوم Cd ←
حديد Fe ← انتيمون Sb

وتستخدم ظاهرة سيبك لقياس درجة الحرارة، حيث يترك أحد موضعي الاتصال معرضا للجو أو يوضع في جليد نقي آخذ في الانصهار (درجة الصفر المئوي) أو في سائل النيتروجين بحيث تظل درجة حرارته ثابتة وتسمى بدرجة حرارة الاسناد (reference temperature) في حين يعرض موضع الاتصال الآخر للشيء المراد قياس درجة حرارته وبقياس التيار الناتج يمكن الاستدلال على درجة الحرارة المجهولة.

(٤-١١-٢) ظاهرة «تأثير» بلتير The Peltier effect

إذا اتصل معدنان مختلفان فسوف يتولد عند موضع تلامسهما قوة دافعة كهربية تسمى بالقوة الدافعة البلتيرية نسبة إلى جان بلتير (Jean Peltier ١٨٣٤م). وتتوقف قيمة القوة الدافعة الكهربية المتولدة على نوع المعدنين المتلامسين ودرجة الحرارة المطلقة لموضع الاتصال. وسبب هذه القوة الدافعة الكهربية هو انتشار (diffusion) الإلكترونات الحرة من أحد الموصلين إلى الموصل الآخر طالما كان ضغط الغاز الإلكتروني (electron gas) أكثر تركيزا في أحد الموصلين عن الآخر كما في شكل (١٢٩ - ٤).



شكل (٢٩-٤): أ - انتشار الإلكترونات الحرة من أحد الموصلين إلى الآخر مادام ضغط الغاز أكثر تركيزا في أحدها.
ب - تبريد أحد وصلة الازدواج الحراري وتسخين الأخرى وذلك بمرور تيار كهربي I.

وعند مرور تيار كهربي قدره I في دائرة تتكون من سلكين من معدنين مختلفين كالنحاس Cu والنيكل Ni مثلا متصلين كما في شكل (٢٩ب - ٤) فإن أحد موضعي الاتصال بين المعدنين ترتفع درجة حرارته في حين تنخفض درجة حرارة موضع الاتصال الآخر، وسبب ذلك أن التيار يعزز القوة الدافعة البلتيرية الناتجة عند أحد موضعي الاتصال وفي هذه الحالة تنخفض الطاقة الكهربية مسببة برودة هذا الموضع، بينما في الموضع الآخر يعاكس التيار الكهربي I القوة الدافعة البلتيرية مسببا ارتفاع درجة حرارته.

وإذا عُدت مقاومة الموصلين مهملة فإن الطاقة الحرارية الممتصة (heat absorbed) والمتحررة (heat liberated) عند أي من الموضعين نتيجة لمرور التيار I في زمن قدره t هي:

$$H' = \pi It \quad .... \quad (٤\text{-}٧٨)$$

حيث π هو معامل بلتير (Peltier coefficient) أو ما يسمى بقوة دافعة بلتير ووحدتها الفولت.

أما إذا كان للموصلين مقاومة قدرها R فإنه نتيجة لمرور التيار خلال المقاومة ستتولد طاقة حرارية تتسبب في ارتفاع درجة الحرارة عند كل من موضعي الاتصال. ولكن نتيجة لوجود القوة الدافعة البلتيرية يحدث انخفاض في درجة حرارة أحد الموضعين وارتفاع في درجة حرارة الموضع الآخر وفي هذه الحالة تعطى كمية الحرارة في زمن قدره t بالمعادلة:

$$JH = I^2 Rt \pm \pi It \quad .... \quad (٤\text{-}٧٩)$$

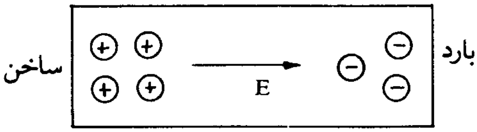
حيث J ثابت جول (المكافىء الميكانيك لجول).

ويلاحظ أن ظاهرة بلتير ظاهرة انعكاسية أي إذا عكس اتجاه التيار يصبح موضع الاتصال البارد ساخن والعكس بالعكس مقارنة بالوضع الأول السابق ذكره. كما أن قيمة القوة الدافعة البلتيرية لا تزيد عن عدة ملّي فولت mV . واكتشفت ظاهرة بلتير عام ١٨٣٤م.

(٤-١١-٣) ظاهرة «تأثير» طومسون Thomson effect

أثبت العالم وليام طومسون (S. W. Thomson) بالتجربة أنه إذا كانت هناك نقطتان على قضيب معدني تختلف درجتا حرارتهما، بحيث يكون الفرق بينهما dT ، تنشأ قوة دافعة كهربية بينهما تتناسب مع الفرق في درجة الحرارة dT.

إذا سخن أحد طرفي قضيب معدني ويرد الطرف الآخر كما في شكل (٣٠-٤) بحيث يتوفر في القضيب تدرج حراري معين فإنه ينشأ في القضيب مجال كهربي E نتيجة لتراكم الإلكترونات الحرة في أحد طرفي القضيب وهو الطرف البارد وقلت كثافتها عند الطرف الساخن. وفي هذه الحالة يصبح جهد الطرف البارد سالبا وجهد الطرف الساخن موجبا.



شكل (٣٠-٤): التدرج الحراري لموصل سخن أحد طرفيه بينما الطرف الآخر بارد.

وقد وجد أن هذا المجال يتناسب طرديا مع التدرج الحراري (temperature gradient) «معدل تغير درجة الحرارة dT بالنسبة للمسافة dx على طول القضيب المعدني» أي أن:

$$E \propto \frac{dT}{dx} \quad \therefore E = \sigma \frac{dT}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨٠)$$

$$\because E = \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

$$\therefore d\mathcal{E} = \sigma\, dT$$

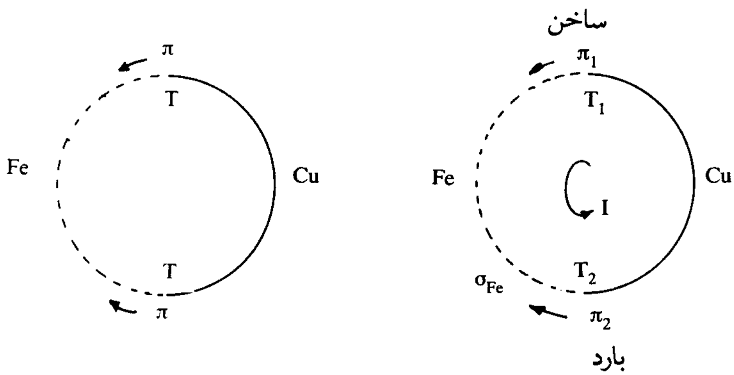
$$\therefore \mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \sigma\, dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨١)$$

حيث T_1 و T_2 درجتا الحرارة عند طرفي الموصل، وتسمى σ بمعامل طومسون (Thomson coefficient)، بينما تسمى القوة الدافعة الكهربية الحرارية بالقوة الدافعة الطومسونية (Thomson E.M.F.) ومن الملاحظ أن القوة الدافعة الكهربية الحرارية لطومسون لا تبلغ قيما كبيرة بل إن قيمتها لا تزيد على بعض كسور الألف من الفولت.

(٤-١٢) تأثيرات سيبك وبلتير وطومسون

The Seebeck, Peltier and Thomson Effects

مما تقدم يتضح أن ظاهرة سيبك تجمع بين ظاهرتي بلتير وطومسون فإذا أُخذ مثلا معدني الحديد Fe والنحاس Cu ووصلا كما في شكل (٤-٣١) وكانت درجة حرارة الطرفين متساوية فإنه عند نقطة تلامس المعدنين (عند كل طرف) تنشأ قوة دافعة بلتيرية تساوي تلك الناشئة عند الطرف الآخر. أما إذا اختلفت درجة حرارة الطرفين، ولتكن T_1 ، T_2 ، بحيث كانت $T_1 > T_2$ فإنه ينتج في كل منهما تدرج حراري تنشأ عنه قوة دافعة كهربية طومسونية في الموصلين إلى جانب القوة الدافعة البلتيرية عند كل من نقطتي التلامس. ولما كانت نقطتا التلامس تحت درجتين مختلفتين فإن القوة الدافعة البلتيرية التي تنشأ عند النقطة الأولى لا تساوي القوة الدافعة الناشئة عند النقطة الثانية.



شكل (٤-٣١): ازدواج حراري من مادتي النحاس والحديد لتفسير ظاهرتي بلتير وطومسون.

أي أن القوة الدافعة المتولدة (المحصلة) في هذه الحالة هي مجموع زوج من القوة الدافعة البلتيرية وزوج من القوة الدافعة الطومسونية ويتولد في الدائرة تيار كهربي I تختلف قيمته باختلاف درجة الحرارة ونوع المعدنين.

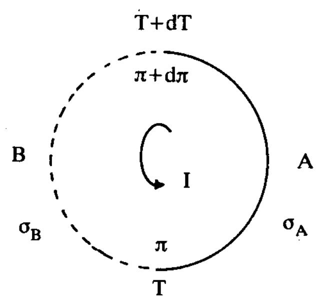
$$\therefore \varepsilon = \pi_2 - \pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{cu}\, dT - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{Fe}\, dT \quad \ldots \quad (٤-٨٢)$$

وإذا فرض أن درجة حرارة الوصلتين (الطرفين) T و T + dT بدلا من T_1 و T_2 فإن جهدي بلتير يصبحان π و π + dπ. أي أنه لأي تغيير بسيط في درجة حرارة الطرفين يكون :

$$d\mathcal{E} = d\pi + (\sigma_{cu} - \sigma_{Fe})\, dT \cdots\cdots \quad (٤\text{-}٨٣)$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{d\pi}{dT} + (\sigma_{cu} - \sigma_{Fe})$$

حيث $\frac{d\mathcal{E}}{dT}$ هو مقدار التغيير في القوة الدافعة الكهربية الحرارية مع درجة الحرارة ويسمى بالطاقة الكهربية الحرارية (thermoelectric power) ويرمز لها بالرمز P كما يسمى بمعامل سيبك النسبي (relative Seebeck coefficient). المعادلتان (٤-٨٢) و(٤-٨٣) صحيحتان لأي معدنين وصلا بالطريقة نفسها. ولذلك يمكن إعادة كتابتها بافتراض أن المعدنين هما A ، B ، كما في شكل (٤-٣٢)، بالصورة التالية :



شكل (٤-٣٢): ازدواج حراري من مادتين مختلفتين A ، B وظاهرتي بلتير.

$$\mathcal{E} = \pi_2 - \pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A\, dT - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B\, dT \quad (٤\text{-}٨٤)$$

أو

$$d\mathcal{E} = d\pi + (\sigma_A - \sigma_B)\, dT$$

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{d\pi}{dT} + (\sigma_A - \sigma_B) \quad (٤\text{-}٨٥)$$

(٤-١٣) القوة الدافعة الحرارية والديناميكا الحرارية

Thermoelectric and Thermodynamic

يمثل الشكل (٤-٣٢) ازدواجا حراريا لمعدنين A ، B فإذا كانت درجة حرارة الطرفين البارد والساخن هما T و T + dT على التوالي فإن معامل بلتير عند الطرف البارد π والطرف الساخن π + dπ وكذلك معامل طومسون للمعدن A هو σ_A وللمعدن B هو

σ_B. فإذا فرض أنه نتيجة لذلك نتج تيار كهربي شدته وحدة كهرومغناطيسية لمدة ثانية واحدة فإنه حسب المعادلة (٤ـ٧٨) يكون :

كمية الحرارة الممتصة عند الطرف الساخن بتأثير بلتير = $\pi + d\pi$

كمية الحرارة المنبعثة عند الطرف البارد بتأثير بلتير = π

كمية الحرارة الممتصة في الموصل A بتأثير طومسون = $\sigma_A\, dT$

كمية الحرارة المنبعثة في الموصل B بتأثير طومسون = $\sigma_B\, dT$

ولما كان تأثير بلتير وطومسون معكوسين، يمكن تبديل درجة حرارة الطرفين. فإنه يمكن عد الازدواج الحراري كآلة انعكاسية وتبعا للديناميكا الحرارية تنص نظرية كارنوت (Carnot) على :

«النسبة بين كمية الحرارة الممتصة أو المنبعثة ودرجة الحرارة المطلقة ثابتة» .

أي أن :

$$\frac{\text{كمية الحرارة المنبعثة}}{\text{درجة الحرارة المطلقة عند الطرف الذي يحصل فيه الانبعاث}} = \frac{\text{كمية الحرارة الممتصة}}{\text{درجة الحرارة المطلقة عند الطرف الذي يحصل فيه الامتصاص}}$$

$$\frac{\pi + d\pi}{T + dT} + \frac{\sigma_A dT}{T} = \frac{\pi}{T} + \frac{\sigma_B dT}{T}$$

أو

$$\frac{\pi + d\pi}{T + dT} - \frac{\pi}{T} + \frac{\sigma_A dT}{T} - \frac{\sigma_B dT}{T} = 0$$

أو

$$d\left(\frac{\pi}{T}\right) + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{T}\right) dT = \frac{d}{dT}\left(\frac{\pi}{T}\right) + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{T}\right) = 0$$

أو

$$\frac{1}{T}\frac{d\pi}{dT} - \frac{1}{T^2}\pi + \frac{\sigma_A - \sigma_B}{T} = 0$$

$$\therefore \frac{d\pi}{dT} - \frac{\pi}{T} + (\sigma_A - \sigma_B) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (\text{٤ـ٨٦})$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٤ـ٨٥) يُحصل على :

$$\pi = T\,\frac{d\varepsilon}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨٧)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤ـ٨٦) يُحصل على :

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{\pi}{T} - \frac{d\pi}{dT} = \frac{d\varepsilon}{dT} - \frac{d}{dT}\left(T\,\frac{d\varepsilon}{dT}\right)$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{d\varepsilon}{dT} - \left(\frac{d\varepsilon}{dT} + T\,\frac{d^2\varepsilon}{dT^2}\right)$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -T\,\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨٨)$$

ولكن يمكن الحصول من المعادلة (٤ـ٨٧) على :

$$P = \frac{\pi}{T}$$

$$\therefore \frac{\pi}{T} - \frac{d\pi}{dT} = T\,\frac{dP}{dT} = \sigma_A - \sigma_B$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$\frac{dP_{AB}}{dT} = \frac{1}{T}(\sigma_A - \sigma_B) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٨٩)$$

ويتضح من هذه المعادلة أن P_{AB} تمثل المعدنين معا بينما في الطرف الآخر كل حد يمثل معدنا بعينه .

$$P_{AB} = P_A - P_B = \int_0^T \frac{\sigma_A}{T}\,dT - \int_0^T \frac{\sigma_B}{T}\,dT \quad \ldots \quad (٤\text{-}٩٠)$$

حيث يسمى P_A بمعامل سيبك المطلق (absolute Seebec coefficient) ، وكذلك الحال بالنسبة لـ P_B . ويرمز له عادة بالرمز α.

(٤-١٤) الازدواج الحراري ودرجة الحرارة
The Thermocouple and Temperature

ذكر في البند (٤-١١) أن الازدواج الحراري شكل (٤-٢٧) يستخدم لقياس درجة الحرارة غير المعروفة بحيث يوضع أحد الطرفين عند درجة حرارة ثابتة بينما يوضع الطرف الآخر في درجات حرارة مختلفة.

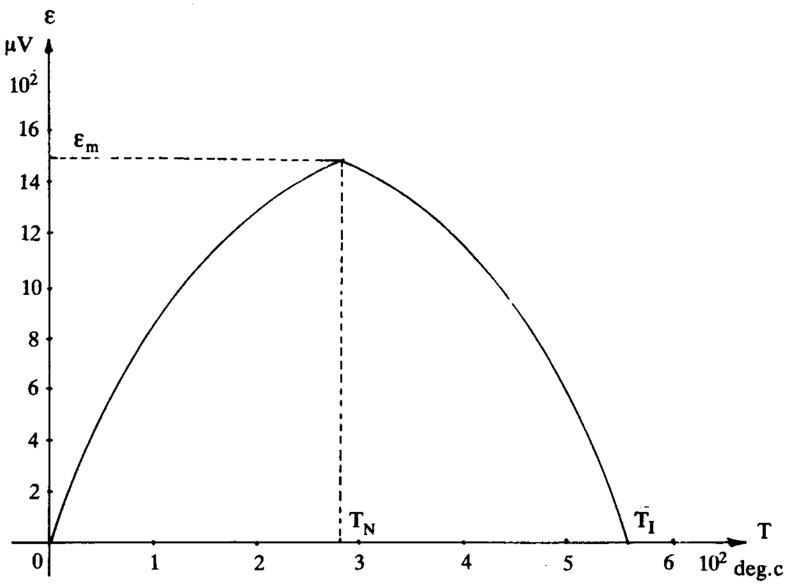
وقد وُجد أن العلاقة بين القوة الدافعة الكهربية الحرارية والفرق بين درجتي حرارة الوصلتين للازدواج الحراري ليست علاقة خطية وإنما على شكل قطع مكافىء (parabola) كما يمثله شكل (٤-٣٣).

وقد أخذت نتائج الشكل (٤-٣٣) لازدواج حراري لمعدنيّ الحديد والنحاس بحيث وضع أحد الطرفين في درجة الصفر المئوي وقيست القوة الدافعة الكهربية ε بوضع الطرف الآخر في درجات حرارة مختلفة. وواضح أنه كلما ارتفعت درجة الحرارة زادت القوة الدافعة الكهربية ε حتى تصل إلى أعلى قيمة عند درجة الحرارة 280°C وتعرف هذه النقطة بالنقطة المحايدة (neutral point (T_N)) وبعد هذه النقطة تتناقص قيمة القوة الدافعة الكهربية رغم الارتفاع في درجة الحرارة حتى تنعدم تماما عند درجة الحرارة 560°C وتسمى هذه النقطة بنقطة الانقلاب (inversion point (T_I)). وإذا تغيرت درجة حرارة الإسناد فإن النقطة المحايدة (T_N) لن تتغير بينما تتغير نقطة الانقلاب. ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى الحراري الكهربي (thermoelectric curve).

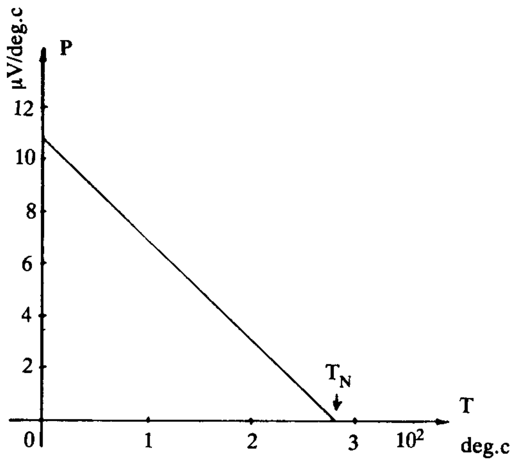
وبصورة عامة إذا فرض أن الازدواج الحراري يتألف من معدنين A ، B فإن المنحنى الحراري الكهربي يمكن تمثيله بالمعادلة الافتراضية التالية:

$$\varepsilon_{AB} = \alpha_{AB}(T - T_0) + \frac{1}{2}\beta_{AB}(T - T_0)^2 \quad .. \quad (٤\text{-}٩١)$$

حيث T_0 درجة حرارة الإسناد لأحد طرفي الازدواج، و T درجة حرارة الطرف الآخر المتغيرة، α_{AB} ، β_{AB} ثوابت تعتمد على مميزات المعدنين A ، B والجدول (٤-٢) يمثل



«ا»



«ب»

شكل (٣٣-٤): ا ـ العلاقة بين القوة الدافعة الكهربية الحرارية ودرجة الحرارة لازدواج حراري.
ب ـ العلاقة بين القدرة P ودرجة الحرارة للازدواج نفسه.

قيما لهذين الثابتين لبعض العناصر على أساس أن مادة Pb هي العنصر الثاني للازدواج حيث :

$$\alpha_{AB} = \alpha_{A.Pb} - \alpha_{B-Pb} \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٩٢)$$
$$\beta_{AB} = \beta_{A.Pb} - \beta_{B-Pb}$$

ويمكن الحصول على الطاقة الحرارية الكهربية بتفاضل المعادلة (٤-٩١) حيث :

$$P_{AB} = \frac{d\varepsilon_{AB}}{dT} = \alpha_{AB} + \beta_{AB}(T - T_0) \quad \ldots \quad (٤\text{-}٩٣)$$

جدول (٤-٢) : ثوابت الازدواج الحراري α , β Thermocouple const.

Metal	المعدن	$\alpha(\mu V/deg\,C)$	$\beta(\mu V/deg^2.C)$
Antimony Sb	أنتيمون	35.58	0.146
Bismuth Bi	البزموث	– 74.42	0.032
Cadmium Cd	كادميوم	3.06	0.029
Copper Cu	نحاس	2.76	0.012
Gold Au	ذهب	2.90	0.009
Iron (Soft) Fe	حديد	16.65	– 0.030
Mercury Hg	زئبق	– 8.81	– 0.033
Molybdenum Mo	موليبدنوم	5.89	0.043
Nickel Ni	نيكل	16.30	– 0.027
Platinum Pt	بلاتين	– 3.04	– 0.033
Silver Ag	فضة	3.34	0.008
Tin Sn	قصدير	0.23	– 0.001
Tungsten W	ولفرام	1.59	0.034
Zinc Zn	زنك	3.10	– 0.032
Constantan	سبيكة من النحاس والنيكل	– 37.76	– 0.079
Manganin	سبيكة من النحاس والمنجنيز والنيكل	1.37	0.001
Pt(90%) – Rh(10%)	سبيكة من بلاتين 90% وروديوم 10%	7.00	0.0064

والشكل (٣٣-٤) يوضح العلاقة بين P_{AB} و T. وإذا فرض أن $T = 0$ فإن :

$$\varepsilon_{AB} = \alpha_{AB} T + \frac{1}{2} \beta_{AB} T^2 \quad \& \quad P_{AB} = \alpha_{AB} + \beta_{AB} T . \quad (٤\text{-}٩٤)$$

وتبلغ ε_{AB} قيمتها العظمى ε_m ، كما في شكل (٣٣أ- ٤)، عند الدرجة المحايدة T_N وعندها تكون قيمة P_{AB} تساوي الصفر أي أن :

$$P_{AB} = \alpha_{AB} + \beta_{AB} T_N = 0$$

$$\therefore \beta_{AB} = -\frac{\alpha_{AB}}{T_N}$$

$$\therefore T_N = -\frac{\alpha_{AB}}{\beta_{AB}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٩٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٩٤-٤) عند هذه الدرجة نُحصل على :

$$\varepsilon_m = \alpha_{AB} T_N + \frac{1}{2} \beta_{AB} T_N^2 = \frac{1}{2} \alpha_{AB} T_N$$

$$\therefore \alpha_{AB} = \frac{2\varepsilon_m}{T_N} \ \& \ \beta_{AB} = -\frac{2\varepsilon_m}{T_N^2} \quad \ldots \quad (٤\text{-}٩٦)$$

وتنعدم ε_{AB} عند درجة الانقلاب T_I أي :

$$\varepsilon_{AB} = \alpha_{AB} T_I + \frac{1}{2} \beta_{AB} T_I^2 = 0$$

$$\therefore \alpha_{AB} = -\frac{1}{2} \beta_{AB} T_I$$

$$\therefore T_I = -\frac{2\alpha_{AB}}{\beta_{AB}} = 2T_N \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}٩٧)$$

ويتضح مما تقدم أن لكل ازدواج حراري مجال محدد لقياس درجة الحرارة يختلف باختلاف الفلزين المكونين للازدواج وكذلك درجة الإسناد. ويبين الجدول (٣-٤) بعض الازدواجات الحرارية المستعملة وأدنى وأقصى درجة حرارة يمكن قياسها وأدنى وأقصى جهد مقابل لذلك.

وإذا كان لدينا ازدواج حراري مكون من ثلاثة عناصر M, B, A كما في شكل (٣٤-٤) متصلة بحيث يكون طرفان منهم عند درجة حرارة T_1 والطرف الثالث درجة حرارته T_2 بحيث $T_2 > T_1$ وحسب المعادلة (٨٤-٤) يكون:

$$\varepsilon_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_B \, dT + [\pi_{BM}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_1} \sigma_M \, dT$$

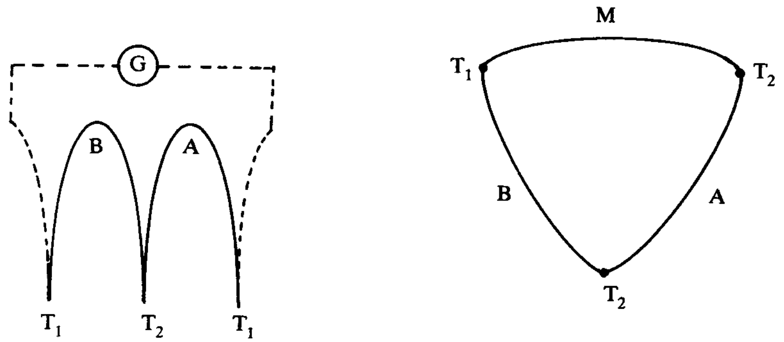
$$+ [\pi_{MA}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A \, dT \quad \ldots\ldots \quad (٤\text{-}٩٨)$$

ومن المعروف أن $\int_{T_1}^{T_2} \sigma_M dT = 0$ وبذلك تصبح المعادلة (٩٨-٤) كالتالي:

$$\varepsilon_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} + [\pi_{BM} + \pi_{MA}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) \, dT \cdot\cdot \quad (٤\text{-}٩٩)$$

جدول (٣-٤): بعض أنواع الازدواجات الحرارية المستعملة

Thermo-couple الازدواج الحراري	T°C مجال قياس درجة الحرارة	in millivolts مليفولت mV	R.T. درجة حرارة الإسناد
(Au 0.2% Fe)/Cu	(− 273) → (− 193)	0.684 → (0.017)	− 196°C (77K)
Cu/Constantan	(− 200) → 600	(− 5.70) → 34.31	0°C
(Ni-chrome)/const.	(− 200) → 1000	(− 8.71) → 76.45	0°C
Fe/Const.	(− 200) → 900	(− 8.15) → 53.14	0°C
(Ni-chrome)/Ni	0 → 1300	0.00 → 52.40	0°C
(Pt 10% Rh)/Pt	0 → 1600	0.000 → 16.716	0°C
(Pt 13% Rh)/Pt	0 → 1700	0.000 → 20 090	0°C
(Pt 30% Rh)/(Pt 6% Rh)	0 → 1800	0.000 → 13.583	0°C



شكل (٤-٣٤): ازدواج حراري مكون من ثلاثة عناصر

وهذه المعادلة صحيحة لأي درجة حرارة فإذا فرض أنه في لحظة ما يكون $(T_1 = T_2)$ ففي هذه الحالة يصبح الحد الأخير من المعادلة مساويا الصفر وكذلك $(\varepsilon_{ABM} = 0)$ أي :

$$\pi_{AB} + \pi_{BM} + \pi_{MA} = 0$$

أو

$$\pi_{AB} = \pi_{AM} + \pi_{MB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}١٠٠)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٩٩) نُحصل على :

$$\varepsilon_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} - [\pi_{AB}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B)\, dT \;\cdot \quad (٤\text{-}١٠١)$$

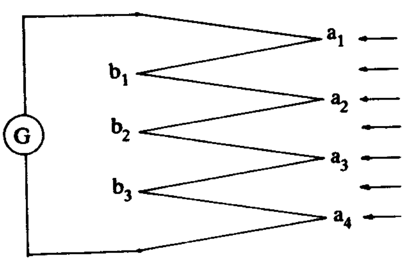
وهذه المعادلة تماثل تماما المعادلة (٤-٨٤) والخاصة بالازدواج الحراري للمعدنين B, A ومعنى ذلك أن :

$$\varepsilon_{ABM} = \varepsilon_{AB} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤\text{-}١٠٢)$$

ويستنتج من ذلك أن إضافة معدن وسيط M (intermediate metal) بحيث يقع بين معدنين آخرين B, A ، وتكون نهايتا الوسيط واقعة عند الدرجة نفسها، لا يؤثر على القوة الدافعة الكهربية للازدواج الحراري .

وهـذه النتيجـة مهمـة جدا لأنها تمكننا من استعمال أي عدد من التوصيلات والأجهزة الكهربية مهما كان عددها مع الازدواج الحراري دون أن تؤثر على القوة الدافعة الكهربية بشرط أن تكون نهايات هذه التوصيلات والأجهزة الكهربية في درجة الحرارة نفسها.

ولـلحصـول عـلى حساسية أكبـر لتغيـيرات صغـيرة فـي درجـات الحـرارة النـاتجـة عـن الإشعـاعـات الحـراريـة أو الإشـعـاعـات ذات الأمـواج الطويـلـة (long wavelength radiations) تُوصّل مجموعة من الازدواجات «كل مزدوج مكون من فلزي الأنتيمون والبزموث» معا على التوالي لتكون ما يسمى بعمود الحرارة أو ثرموبيل (thermopile) حيث تغطى الوصلات a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 بطبقة من السناج وتعرض للإشعاع المراد قياس درجة حرارته بينما تعزل الوصلات b_1 ، b_2 ، b_3 لتبقى باردة. وتوصل نهايتا الثرموبيل بجلفانومتر حساس كما في شكل (٣٥-٤).



شكـل (٣٥-٤): مجمـوعـة مـن الازدواجات كل ازدواج مكون من فلزي الأنتيمـون والبـزموث متصلة على التوالي «عمود الحرارة، ثرموبيل».

ويراعى أن تكون مقاومة الثرموبيل مساوية لمقاومة الجلفانومتر لنحصل على أكبر قدرة وبـالتـالي على أكبر تيار كهروحراري والـذي تتنـاسب قيمته مع شدة الإشعاع الحـراري المـراد قياسـه. وبـواسـطة هذه المجموعة من الازدواجات يمكن قياس تغير في درجة الحرارة قدره 0.001 بسهولة.

مـثـال (١٨ - ٤)

ازدواج حراري من مادتي الحديد والنحاس وضع أحد طرفيه عند درجة الصفر المئوي. احسب نقطة التعادل (T_N) ونقطة الانقلاب (T_I) ، والقوة الدافعة الكهربية عندما تكون درجة حرارة الطرف الثاني تساوي 200°C مستعملا الجدول (٢-٤).

الحــــل

$$\alpha_{Fe-Cu} = \alpha_{Fe-Pb} - \alpha_{Cu-Pd} = 16.7 - 2.7\dot{1} = 14.0 \mu V/deg°C$$

$$\beta_{Fe-Cu} = \beta_{Fe-Pb} - \beta_{Cu-Pd} = -0.0297 - 0.0079 = -0.0376 \mu V/deg°C$$

$$\therefore T_N = -\frac{14.0}{-0.0376} = 372°C \quad \&$$

$$T_1 = 2T_N = 2 \times 372 = 744°C$$

$$\therefore \varepsilon_{Fe-Cu} = \alpha_{Fe-Cu}(T - T_0) + \frac{1}{2}\beta_{Fe-Cu}(T^2 - T_0^2)$$

$$= 14.0(200 - 0) - \frac{1}{2} \times 0.0376[(200)^2 - 0] = 2.05\,mV$$

وحيث إن قيمة ε_{AB} موجبه فهذا يعني أن اتجاه التيار من الحديد إلى النحاس عند الوصلة الساخنة.

مــثـــال (٤-١٩)

احسب معـامـل بلتـير ومعامل طومسون للازدواج الحراري من مادتي الحديد والنحاس عندما يكون طرفا الاتصال عند 0°C , 200°C.

الحــــل

في حالة درجات الحرارة بالدرجات المئوية تصبح العلاقة (٤-٨٧) بالشكل التالي:

$$\because \pi_{Fe-Cu} = (T + 273)\frac{d\varepsilon_{Fe-Cu}}{dT} = (T + 273)(\alpha_{Fe-Cu} + \beta_{Fe-Cu}T)$$

$$\therefore (\pi_{Fe-Cu})_{200°C} = (200 + 273)(14.0 - 0.0376 \times 200) = 3070\,\mu V$$

$$\therefore (\pi_{Fe-Cu})_{0°C} = (0 + 273)(14.0 - 0.0376 \times 0) = 3820\,\mu V$$

أما معامل طومسون فيمكن حسابه كالتالي:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} = \frac{d}{dT}(a + bT) = b$$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_{Fe} - \sigma_{Cu})\, dT = \int_{T_1}^{T_2} -T \frac{d^2\varepsilon_{Fe-Cu}}{dT^2} dT$$

$$= \int_{T_1}^{T_1} -bTdT = \frac{1}{2} b(T_1^2 - T_2^2)$$

$$= -\frac{0.0376}{2}[(273+0)^2 - (273+200)^2] = 2800\, \mu V$$

وبذلك تكون المحصلة «قوة دافعة سيبك»

$$\varepsilon_{Fe-Cu} = 3070 - 3820 + 2800 = 2050\, \mu V$$

وهذه النتيجة متفقة مع القيمة التي حُصل عليها في المثال السابق.

مـثـال (٤-٢٠)

احسب π_{Bi-Ag} وكذلك $\sigma_{Bi} - \sigma_{Ag}$ لازدواج حراري لمادتي البزموث والفضة عند درجة حرارة الصفر المئوي مستعملا الجدول (٤-٢)

الحـل

$$\varepsilon_{Pb-Bi} = [-74.42\, T + \frac{1}{2}(0.032T^2)]$$

$$\varepsilon_{Pb-Ag} = [3.34\ \ T + \frac{1}{2}(0.008T^2)]$$

$$\therefore \varepsilon_{Bi-Ag} = \varepsilon_{Bi-Pb} - \varepsilon_{Ag-Pb} = \varepsilon_{Pb-Ag} - \varepsilon_{Pb-Bi}$$

$$\therefore \varepsilon_{Bi-Ag} = [77.76\, T - \frac{1}{2}(0.024\, T^2)]\ \mu V$$

وحسب المعادلة (٤-٩٣) يكون :

$$\frac{d\varepsilon_{Bi-Ag}}{dT} = 77.76 - 0.024\,T$$

$$\therefore [\pi_{Bi-Ag}]_{T=273} = 273 \left(\frac{d\varepsilon}{dT}\right)_{T=0} = (273 \times 77.76)\,\mu V$$

$$= 2.12 \,.\, 10^{-2} V$$

$$\sigma_{Bi} - \sigma_{Ag} = -(\sigma_{Pb} - \sigma_{Bi}) + (\sigma_{Pb} - \sigma_{Ag})$$

$$= T\left[\frac{d^2\varepsilon_{Pb-Cu}}{dT^2} - \frac{d^2\varepsilon_{Pb-Ag}}{dT^2}\right]$$

$$\therefore \sigma_{Bi} - \sigma_{Ag} = 273\,(0.032 - 0.008) = 6.6\,\mu V/deg°C$$

مثـــال (٤-٢١)

ازدواج حراري معين، وضع أحد طرفيه عند درجة الصفر المئوي ويعبر عن القوة الدافعة الكهربية لهذا الازدواج بالمعادلة

$$\varepsilon = [87.276\,T - 14.527\,\{1 - \exp(-\,0.00253\,T)\}]\,\mu V$$

بين أن الفرق بين معاملي طومسون ثابت في نطاق صغير لدرجة الحرارة قريب من درجة الحرارة ١٢٢ درجة مئوية ثم احسب معامل بلتير عند درجة حرارة الصفر المئوي .

الحـــل

$$\sigma_A - \sigma_B = -(273 + T)\,\frac{d^2\varepsilon}{dT^2}$$

حيث إن :

$$\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} = [14.527\,(0.00253)^2 \exp(-0.00253T)]$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -\,(273 + T)\,[14.527\,(0.00253)^2 \exp(-0.00253T)]$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -(273 + T)\,C \exp(-0.00253T) \quad \text{say}$$

$$\therefore \frac{d}{dT}(\sigma_A - \sigma_B) = -\,C \exp(-0.00253T)\,[1 - 0.00253\,(273 + T)]$$

وهذه المعادلة تساوي الصفر، تناظر القيمة الثابتة لـ $(\sigma_A - \sigma_B)$ إذا كان :

$$1 - (273 + T)\,(0.00253) = 0 \qquad \therefore\ T = 122°C$$

$$[\pi]_{T=0} = \left\{(273 + T)\,\frac{d\varepsilon}{dT}\right\} = 273\,[87.276 - 14.527 \times 0.00253 \exp(0)]$$

$$\therefore\ [\pi]_{T=0} = 273\,[87.28 - 36.76] = 1.38 \times 10^{-2} V$$

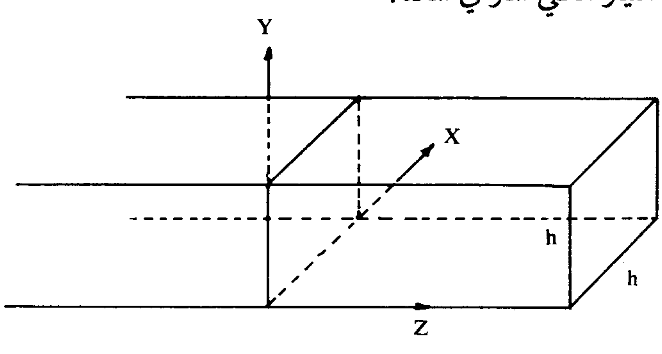
وقد ورد هذا المثال على أساس أنه قد تكون هناك صيغة أخرى تربط العلاقة بين درجة الحرارة T والقوة الدافعة الحرارية لبعض الازدواجات الحرارية الأخرى غير التي وردت في هذا الفصل.

(٤-١٥) مسـائـل

١ - قضيب من مادة شبه موصلة متبلورة مثل مادة الجرمانيوم منتظم الشكل كما في الشكل التالي مقطعه العرضي رباعي الشكل طول ضلعه 0.1 سم. نتيجة للخواص شبه الموصلة لهذه المادة فإن كثافة التيار J ليست منتظمة عبر مقطعه العرضي للمادة ولكنه يختلف من نقطة إلى أخرى حسب المعادلة :

$$J = J_0\left(\sin\frac{\pi x}{h}\ \sin\frac{\pi y}{h}\right)\vec{i}_z$$

احسب التيار الكلي المار في المادة.



٢ ـ كثافة النحاس تساوي 9.0 جم/سم٣ وللمادة إلكترون واحد موصل لكل ذرة فإذا مر تيار قدره 50 أمبيرا في سلك مقطعه الدائري منتظم قطره 0.1 سم.
ما هي كثافة التيار وكذلك السرعة المتوسطة للإلكترونات؟

٣ ـ المقاومة النوعية لمادة النحاس تساوي 1.7×10^{-8} أوم ـ متر عند درجة حرارة 20 درجة مئوية.
ما هي مقاومة سلك طوله 5 متر وكان مقطعه الدائري منتظم قطره 0.1 سم؟

٤ ـ كثافة التيار J لسلك طويل مقطعه الدائري منتظم ونصف قطره R ، تتغير مع المسافة من مركز السلك حسب العلاقة $J = \lambda r$ حيث λ ثابت التناسب.
برهن أن التيار المار خلال السلك هو $I = 2\pi\lambda R^3/3$

٥ ـ إذا كان التيار المار خلال سلك يتغير مع الزمن t حسب المعادلة التالية:

$$I = 4 + 2t^2$$

احسب الشحنة المارة عبر الموصل خلال الفترة الزمنية الواقعة بين t=10s & t=55s وكذلك t=0 & t=20s.

٦ ـ إذا فرض أن التيار المار خلال موصل يتغير مع الزمن t تبعا للمعادلة:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

حيث τ مقدار ثابت ووحدته وحدة الزمن، I_0 قيمة التيار الكهربي عندما تكون t=0. احسب الشحنة الكهربية المارة خلال نقطة معينة في الفترات الزمنية التالية:

$$a - t = 0 \;\&\; t = \tau$$

$$b - t = \;\&\; t = 10\tau$$

$$c - t = 0 \;\&\; t = \infty$$

٧ ـ قضيب حديدي مساحة مقطعه 30 سم٢ فإذا كانت المقاومة النوعية لمادة

الحديـد (steel) 6.0×10^{-7} أوم ـ متر.

احسب مقاومة قضيب طوله 6 كيلومتر.

٨ ـ قضيب من الفضـة طوله 12 مترا يحتوي على 5.86×10^{28} electrons/m^3 فإذا كان التيار المار في القضيب يساوي 10 أمبير ما هي سرعة الانسياق (drift velocity) للإلكترونات إذا كان فرق الجهد بين طرفيه 2V.

٩ ـ كثافة مادة الألومنيوم تساوي 2.7 جم/سم٣ والكتلة الذرية له 27 جم/جزيء. لهذه المادة ثلاثة إلكترونات موصلة لكل ذرة.

احسب عدد إلكترونات التوصيل لكل سم٣. وإذا كان التيار المار في سلك منتظم مساحة مقطعه 1 سم٢ هو 10^{-3} أمبير ما هي سرعة الانسياق (drift) للإلكترونات؟

١٠ ـ سطح موصل مساحة مقطعة 1 مم٢ يخترقه تيار شدته 10 أمبير والمطلوب حساب سرعة انتقال الشحنات الكهربية فيه إذا علمت أن عدد الشحنات الحرة المتنقلة في وحدة الحجم هو 10^{27}.

١١ ـ سلك منتظم المقطع طوله 5 أمتار ومقاومته 2 أوم فإذا كانت المقـاومة الـنوعية له 1.6×10^{-6} أوم ـ متر ما هي مساحة المقطع؟

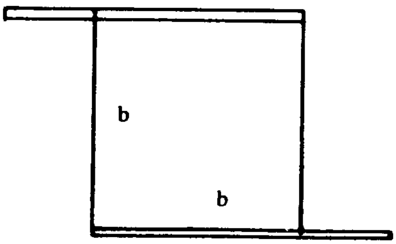
١٢ ـ احسب مقاومة متوازي مستطيلات من النحاس طوله 20 سم وسطح مقطعه 2 سم٢ وناقلتيه «موصلتيه» تساوي $(\Omega \,.\, m)^{-1}$ $0.59\times10^{+8}$.

١٣ ـ قضيب من الكـربون ذو مقطع دائري منتظم نصف قطره 1.5mm. سلط بين طرفيه جهد كهربي قيمته 15V فكان التيار المار فيه 5×10^{-3} A. احسب مقاومته وطوله.

١٤ ـ أسطوانة مجوفة نصف قطرها الداخلي r_A والخارجي r_B وطولها L ومقاومتها النوعية

ϱ . وصل طرفيها بمصدر جهد كهربي فمر بها تيار كهربي مواز لمحورها . احسب قيمة مقاومة الأسطوانة بدلالة أبعادها ومقاومتها النوعية . وإذا كان $r_A=6mm$, $L=10cm$, $r_B=12mm$ و $\varrho = 3.5\times10^5 \Omega.m$ فما قيمة المقاومة .

١٥ ـ صفيحة رقيقة مربعة الشكل من مادة متجانسة لحمت من جانبيها بموصلين، مقاومتها منخفضة. كما يظهر في الشكل المجاور. عندما يكون طول ضلع الصفيحة 10 سم تكون مقاومتها واحد أوم والمطلوب جساب مقاومة هذه الصفيحة إذا أصبح طول ضلعها 20 سم .



١٦ ـ إذا كانت المقاومة النوعية وكذلك المعامل الحراري لمادة النحاس والفضة عند درجة حرارة 20 درجة مئوية هي :

$$\varrho_{cu} = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\ .\ m \qquad \alpha_{cu} = 3.9 \times 10^{-3}\ C^{\circ -1}$$

$$\varrho_{Ag} = 1.6 \times 10^{-8}\ \Omega\ .\ m \qquad \alpha_{Ag} = 3.8 \times 10^{-3}\ C^{\circ -1}$$

ا ـ احسب درجة حرارة الفضة إذا كانت مقاومته النوعية تساوي مقاومة النحاس النوعية .

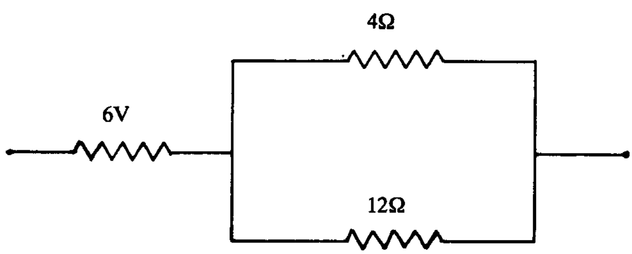
ب ـ وإذا كان قضيب نحاسي مقاومته 12.00 أوم عند درجة حرارة 40 درجة مئوية . ما هي قيمة مقاومته عند درجة حرارة 100 درجة مئوية مع إهمال أي تمدد طولي للقضيب؟

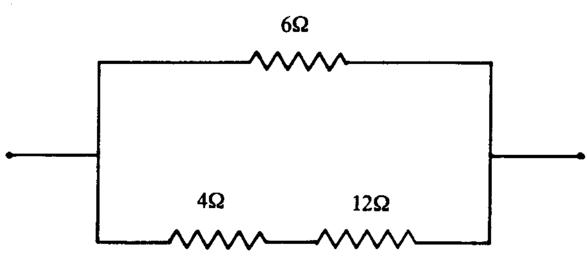
١٧ ـ مقاومة سلك من البلاتين 1Ω عند درجة حرارة $20°C$ ، غمر السلك في سائل النيتروجين الذي درجة حرارته $77K(-196°C)$ ماذا تكون قيمة المقاومة عند هذه الدرجة ، علما بأن المعامل الحراري للبلاتين هو: $\alpha = 3.5X10^{-3}\ /^{o}\ C$

١٨ ـ مصباح قدرته 100 وات وصل بجهد قدره 110 فولت.
احسب التيار المار في الفتيلة وكذلك مقاومة الفتيلة.

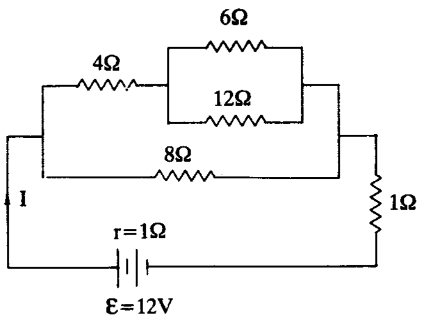
١٩ ـ مجفف كهربي قدرته 5KW فإذا وصل بمصدر كهربي جهده 220V احسب:
ا ـ التيار الكهربي المار في المجفف ومقاومته.
ب ـ الطاقة الكهربية المستنفدة مقدرة بالجول والـ KW.hr إذا استعمل المجفف لمدة عشر ساعات.
جـ ـ كمية الحرارة الناتجة عن هذا الاستعمال.
د ـ تكاليف هذا الاستعمال إذا فرض أن ثمن الـ KW.hr عشر هللات.

٢٠ ـ في الدائرتين التاليتين احسب المقاومة الكلية لكل دائرة:





٢١ - لدينا الدائرة المبينة في الشكل المجاور:



ا - احسب التيار المار في البطارية.

ب - احسب التيار المار في كل مقاومة.

جـ - احسب القدرة «الاستطاعة» الضائعة في كل مقاومة.

د - احسب الاستطاعة المتولدة عن القوى الكيميائية داخل المولد.

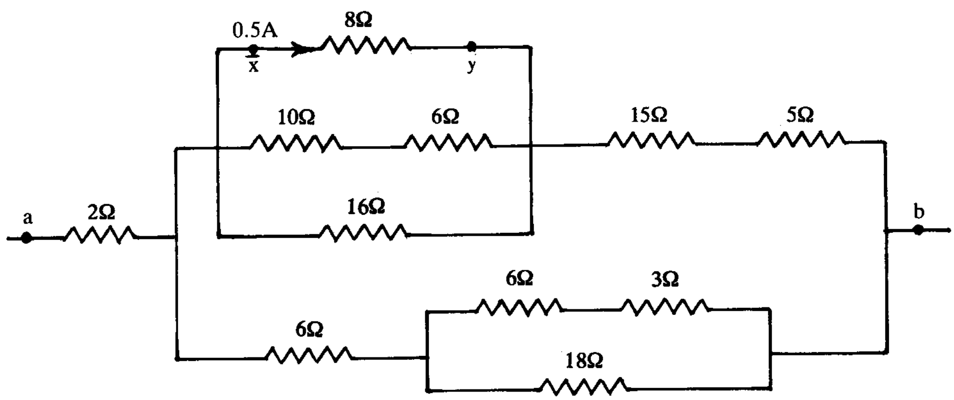
هـ - احسب فرق الجهد بين قطبي المولد.

٢٢ - احسب في الدائرة التالية ما يلي:

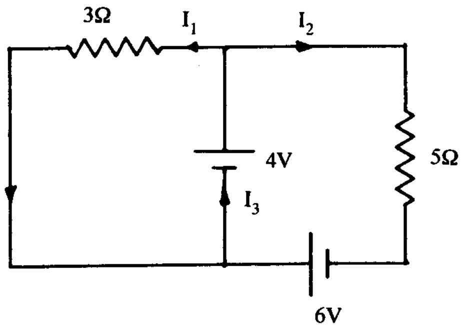
ا - المقاومة المكافئة. ب - فرق الجهد بين طرفي كل مقاومة إذا كان لتيار المار خلال المقاومة الواقعة بين y و x يساوي 0.5A.

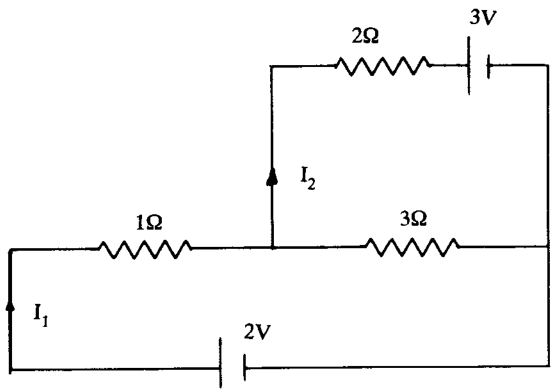
جـ - فرق الجهد بين لنقطتين a و b.

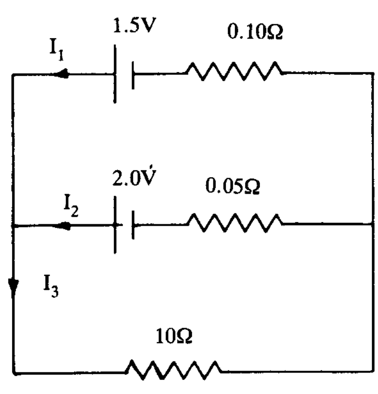
د - إذا كان مصدر الجهد بين النقطتين a و b بطارية مقاومتها الداخلية 0.5 Ω فما قيمة القوة الدافعة الكهربية للبطارية.



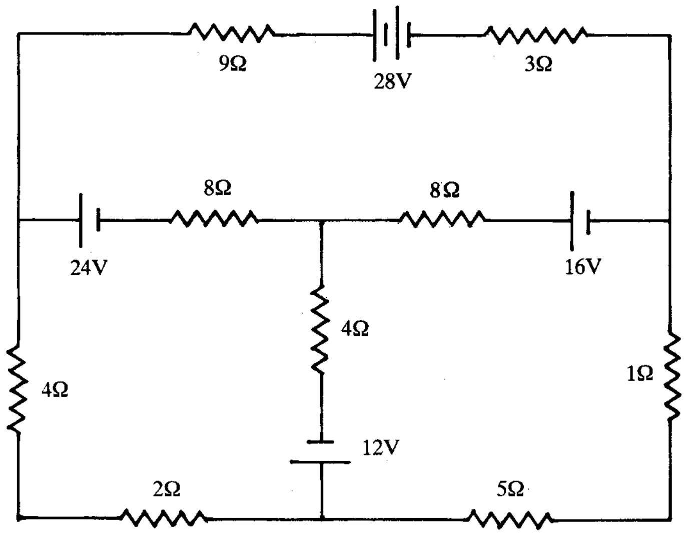
٢٣ ـ احسب I_1 ، I_2 ، I_3 في الدوائر التالية :







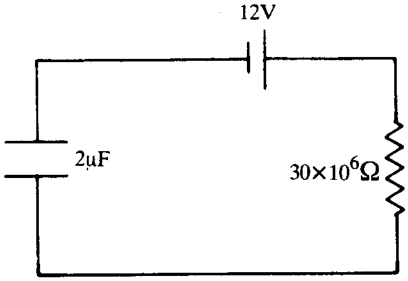
٢٤ ـ احسب بطريقتين مختلفتين تيارات أفرع الدائرة الكهربية التالية :



٢٥ ـ مكثف سعته C شحن حتى وصل جهده V ثم وصل طرفاه عند $t = 0$ بمقاومة قدرها R فكانت قيمة الشحنة على المكثف هي $q = q_0 e^{-t/RC}$.

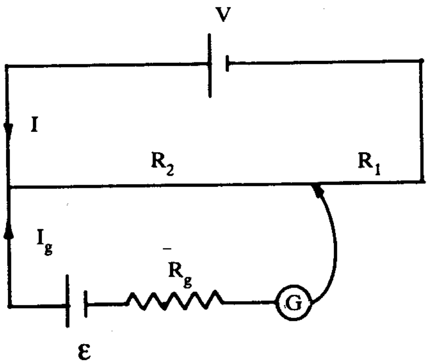
احسب القدرة الكلية (total power) المبددة في المقاومة وبرهن أنها تساوي القدرة الأولى المخزونة بواسطة المكثف.

٢٦ ـ في الدائرة التالية احسب : :



ا ـ ثابت الزمن.

ب ـ ما هي قيمة شحنة المكثف إذا بلغت قيمتها نصف القيمة العظمى؟



٢٧ ـ يراد قياس ق . د . ك مجهولة بمقياس الجهد فتوصلت الدائرة المبينة بالشكل جانبا. برهن أنه عندما تكون الدائرة غير متزنة تكون شدة التيار المارة خلال الجلفانومتر هي :

$$I_g = \frac{\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) V - \varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2}$$

٢٨ ـ ازدواج حراري من مادتي النحاس وكنستنتان. حفظت إحدى وصلتيه في 20 درجة مئوية.

احسب نقطة التعادل T_N ونقطة الانقلاب T_I. وإذا حفظت الوصلة الثانية في درجة 300 درجة مئوية فاحسب القوة الدافعة الكهروحرارية المتولدة. هل تظل القوة نفسها كما هي لو حفظت إحدى الوصلتين في °120 والأخرى في 400 درجة مئوية، مستعملا الجدول (١ـ٤).

٢٩ ـ وصلة من مادتي البلاتين Pt وسبيكة (Pt90 – Rh10) احسب $\pi_{Pt,\ Pt90-Rh10}$ وكذلك $\sigma_{pt} - \sigma_{pt90-Rh10}$ عند درجة الصفر المئوي و 100 و 1000 درجة مئوية.

٣٠ ـ إذا كان لدينا ازدواج حراري من مادتي Pt و (Pt90–Rh10) احسب نقطة التعادل T_N ونقطة الانقلاب مستعملا الجدول (١ـ٤). وإذا حفظت إحدى وصلتيه عند درجة الصفر المئوي فما هي قيمة القوة الدافعة الكهروحرارية عند وضع الوصلة الثانية في درجات الحرارة المختلفة التالية 100 درجة مئوية ، 200 درجة مئوية ، 500 درجة مئوية ، 1000 درجة مئوية.

٣١ ـ وصلة من مادتي الأنتيمون Sb والبزموث Bi.

ا ـ احسب القوة الدافعة البلتيرية عندما تكون درجة حرارة الوصلة تساوي 20 درجة مئوية.

ب ـ إذا مر تيار شدته 20 أمبير خلال هذه الوصلة احسب معدل تحول الطاقة الحرارية إلى طاقة كهربية وبالعكس. وما هو اتجاه التيار عند هذه الوصلة حتى يحدث التبريد.

٣٢ ـ إذا كانت القوة الدافعة الكهروحرارية لازدواج حراري تعطى بالمعادلة:

$$\varepsilon = \alpha\,\theta + \frac{1}{2}\beta\,\theta^2 \qquad \ldots (٤\text{-}٨٦)$$

حيث $\theta = T - T_0$ و T_0 درجة حرارة الإسناد و T درجة حرارة متغيرة وكانت العلاقة بين θ و ε يحددها الجدول:

θ °C	10	30	60	100
$\varepsilon(\mu V)$	98	282	528	800

فاحسب β و α .

٥

المجالات المغناطيسية للتيار الكهربي

Magnetic Fields of Electric Current

● مقدمة ● قانون بيوت وسافارت ● التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي ● قانون أمبير الدوائري ● تطبيقات لحساب المجال المغناطيسي ● الجهد المغناطيسي ● القوة بين دائرتين كاملتين ● القوة وعزم الازدواج على دائرة كهربية تحمل تيارا ● جلفانومترا الظل وهيلمهولتز ● الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية ● مسائل.

(٥-١) مقدمة

Introduction

بالرغم من أن نظريات المجال المغناطيسي لم تتطور حتى نهاية القرن الثامن عشر وخلال القرن التاسع عشر إلا أن الظاهرة المغناطيسية اكتشفت منذ أمد بعيد حيث اكتشف علماء الاغريق الحجر المغناطيسي (lodestones) أو ما يسمى بالمغناطيس الطبيعي (natural magnet) في مدينة مغنيسيا في آسيا الصغرى والذي كان يتميز بجذب القطع الصغيرة من الحديد الصلب إليه. وأول دراسة للخواص المغناطيسية للمواد تمت بدلك قضيب من الحديد بقطعة من المغناطيس الطبيعي حيث اكتسب القضيب الخاصية المغناطيسية وسمي المغناطيس في هذه الحالة بالمغناطيس الصناعي الدائم.

كانت الظاهرة المغناطيسية تدرس على أنها مستقلة عن التأثيرات الكهربية وأنها من الخواص التي تتمتع بها بعض المواد كالحديد. وقد استطاع العالم الدانماركي هانز

أورستد (Hans C. Oersted) عام ١٨١٩م أن يلاحظ علاقة بين الكهرباء والمغناطيسية بعد أن اكتشف أن الإبرة المغناطيسية (magnetic needle) تنحرف إذا ما اقتربت من سلك يمر به تيار كهربي.

بعد هذا الاكتشاف تم معرفة أن المجالات المغناطيسية تحدث نتيجة لسريان التيار الكهربي حتى بالنسبة للمغناطيس الدائم لأن مغناطيسيته نتجت عن تيارات صغيرة سببها حركة داخل ذرات المادة، وسيشرح هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل السابع.

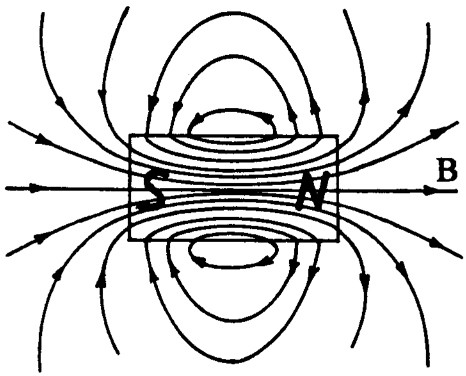
يمكن فهم الخواص المغناطيسية بنظرية المجال الكهربي التي درست في الفصول السابقة حيث تعد المنطقة التي تحيط بالمغناطيس أو الأسلاك أو الدوائر التي تمر فيها تيارات كهربية منطقة مجال مغناطيسي (magnetic field) ويمكن تخطيط المجال المغناطيسي كما في شكل (١-٥) بواسطة خطوط تأثير مغناطيسي (induction lines) تشبه خطوط القوى الكهربية ويدل اتجاه المماس لخط التأثير المغناطيسي على اتجاه المجال عند نقطة التماس - كما تتخذ كثافة خطوط التأثير المغناطيسي دلالة على شدة المجال H (magnetic field intensity) أو كثافة الفيض المغناطيسي (الحث المغناطيسي) B (magnetic induction) تسمى عدد خطوط الفيض التي تنفذ من خلال سطح dS بالتدفق المغناطيسي Φ (magnetic flux) وهو العدد الكلي لخطوط التأثير (القوى) التي تخترق سطحا ما أي أن:

$$\Phi = \int B.\cos\theta \, dS = \int \vec{B}.d\vec{S} \quad \ldots . \quad (١١ - ٥)$$

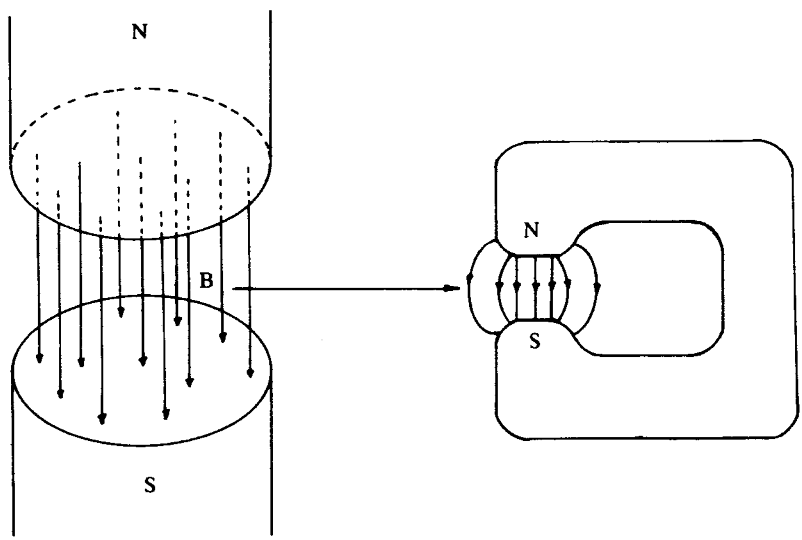
حيث θ هي الزاوية بين العمودي على dS وخطوط القوى، وإذا كان الحث المغناطيسي B منتظما وعموديا على سطح مساحته S فإن:

$$\Phi = B \, . \, S \qquad \ldots \quad (١ب - ٥)$$

ويكون الحث المغناطيسي منتظما إذا ثني المغناطيس الدائم ليصبح على الشكل (٢-٥) بحيث يكون القطبان N و S متقابلين.



شكل (١ـ٥) : خطوط التأثير (القوى) للمغناطيسية لمغناطيس دائم (permanent magnet).



شكل (٢ـ٥) : ثني مغنـاطيس دائم حتى تقابل قطبه الشمالي N مع قطبه الجنوبي S ولذلك يكون المجال المغناطيسي بينهما منتظما.

والعلاقة بين H و B في الفراغ تحدد بالمعادلة التالية :

$$B = \mu_0 H \qquad \ldots (٥-٢)$$

حيث μ_0 نفاذية الفراغ Permeability of free space.

وحدات هذه المعاملات في النظامين العالمي (S.I) والجاووسي (C.G.S) هي :

الكمية	النظام العالمي (S.I)	النظام الجاووسي (C.G.S)
B	ويبر/متر٢ = تسلا $Wb/m^2 = T$	جـــاوس Gauss
H	أمبير/مــتر A/m	آب أمبير/سم = أورستد Oersted
Φ	ويـــبر Wb	ماكسـويـل Maxwell
μ_0	ويبر/أمبير متر Wb/A . m	جاوس / أورستد Gauss/Oersted

حيث ويبر/متر٢ = ١٠٤ جـاوس.

أو ويبر/ ١٠٤ سم٢ = ١٠٤ جاوس ومنه فإن :

ويـبر = ١٠٨ جاوس . سم٢

وكذلك ١٠ أورستد = ١ آب أمبير/ ٤π . سم ومنه فإن :

∴ ١٠ أورستد = ٧٩٦ . ٦ أمبير/مــتر

ويوضح الملحق (١) العلاقة بين النظامين العالمي (S.I) والجاووسي (C.G.S) لوحدات بعض الكميات الفيزيائية physical quantities.

(٥-٢) قانون بيوت وسافارت

The Biot - Savart Law

إذا كان dl تمثل عنصرا طوليا متناهيا في الصغر (infinitesimal) من سلك يحمل تيارا كهربيا قدره I فإن عنصر الحث المغناطيسي dB عند النقطة P ، كما في شكل (٥-٣) التي تبعد مسافة r من dl ، يتناسب تناسبا طرديا مع التيار I وعنصر الطول dl و sinθ وعكسيا مع مربع المسافة الواقعة بين dl والنقطة P التي يراد قياس الحث المغناطيسي عندها أي أن :

$$dB \propto \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

أو

$$dB = K_m \frac{Idl \sin\theta}{r^2} = K_m \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٣)$$

حيث تمثل θ الزاوية بين dl و r.

وقد استنتجت هذه المعادلة نتيجة للتجارب والقياسات المعملية التي قام بها العالمان بيوت Jean Baptiste Biot وسافارت Felix Savart عام ١٨٢٠م ولذلك سميت باسميهما، قانون بيوت وسافارت، أما K_m فهو ثابت التناسب وتعتمد قيمته على اختيار وحدات القياس وقيمته في النظام العالمي (S.I.) هو:

$$K_m = \frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7}\ \text{Wb/A . m} \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٤)$$

$$\therefore \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A . m}$$

ويُحصل من المعادلتين (٥-٣) و(٥-٤) على:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥)$$

وتكتب هذه المعادلة في النظام الجاووسي بالصورة التالية:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

c سرعة الضوء (انظر الملحق ١)

ولكي يحسب الحث المغناطيسي B الكلي لدائرة مغلقة C عند نقطة P يؤخذ تكامل المقدار dB لكامل الدائرة المغلقة، كما في الشكل (٥-٣).

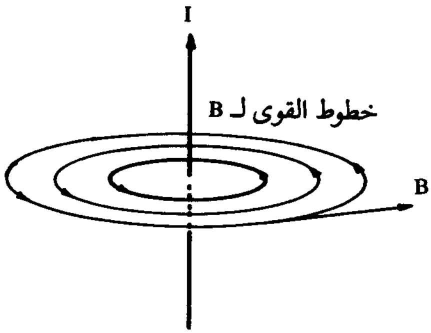
$$\therefore B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٦)$$

ويمكن التعبير عن الحث المغناطيسي B بدلالة كثافة التيار J. فحسب المعادلة (٤-٤) يكون:

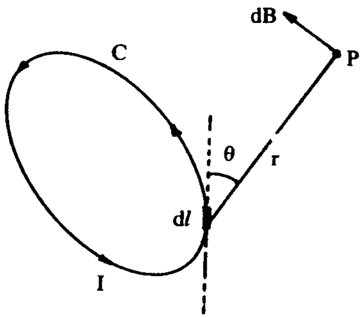
$$\mathrm{I}dl = \mathrm{JS}dl = \mathrm{J}dV \qquad \ldots (٥\text{ـ}٧)$$

حيث S مساحة مقطع السلك و dV الحجم. وبالتعويض في المعادلة (٥ـ٦) نُحصل على:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}\,dV \quad \ldots\ldots\ldots (٥\text{ـ}٨)$$



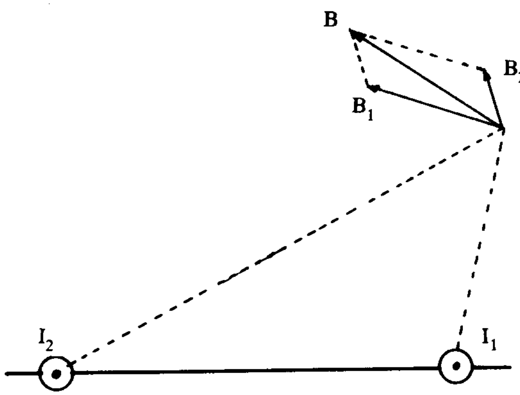
شكل (٥ـ٤): موصل مستقيم يمر به تيار شدته I فينشأ عنه مجال مغناطيسي تكون خطوط القوى له عبارة عن دوائر مغلقة مركزها الموصل.



شكل (٥ـ٣): تابع لقانون بيوت وسافارت.

وبدراسة المجال المغناطيسي حول موصل مستقيم يمر به تيار كهربي I بواسطة إبرة مغناطيسية صغيرة نجد أن خطوط القوى المحيطة بالموصل عبارة عن دوائر مغلقة مركزها الموصل وفي مستوى عمودي عليه واتجاهها يعين بقاعدة اليد اليمنى، بحيث يشير الإبهام إلى اتجاه التيار ويشير اتجاه الأصابع الأخرى حول السلك إلى اتجاه خطوط القوى المغناطيسية، كما في شكل (٥ـ٤)، بينما يمثل المماس عند أي نقطة على خط القوة اتجاه الحث المغناطيسي B.

إذا كان هناك مجالات مغناطيسية ناتجة عن مصادر تيارية (current sources) فإنه يمكن جمعها جمعا اتجاهيا للحصول على محصلة المجالات، كما حصل ذلك بالنسبة للمجال الكهربي الناتج عن شحنات مختلفة كما ورد في البند (٤ـ١).



شكل (٥-٥): مستقيمان موصلان يمر في أحدهما تيار قيمته I_1 وفي الآخر I_2 فنحصل على مجالين مغناطيسيين حثهما B_1 ، B_2 ومحصلتهما B بحيث يكون $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

ولذلك إذا كان لدينا دوائر مغلقة تمر بها التيارات $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n$ بحيث تعطى كل دائـرة مجالا مغنـاطيسيا قيمها على التوالي $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n$ فإن محصلة هذه المجالات، كما في شكل (٥-٥)، هي :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots . + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \quad \cdot\cdot \quad (٥-٩)$$

وحسب المعادلة (٥-٦) فإن :

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \int \frac{d\vec{l}_i \times \vec{r}_i}{r_i^3} \quad \ldots\ldots \quad (٥-١٠)$$

(٥-٣) التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي B

Divergence of Magnetic Induction B

يشكل الحث المغناطيسي B مجالا متجها (vector field) له تفرق اتجاهي يمكن حسابه كالتالي :

حسب المعادلة (١٨-٢)، ملحق ٢، يمكن كتابة المعادلة (٦-٥) بالصورة التالية:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int -Id\vec{l} \times \text{grad}(1/r)$$

وباستخدام المعادلة (٢٧-٢)، ملحق ٢، نحصل على:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int [I\,\text{curl}(dl/r) - I\,\text{curl}(dl)] \quad \ldots \quad (٥\text{-}١١)$$

الحد الثاني يساوي الصفر لأن dl دالة لـ r ولا تعتمد على إحداثيات الحث المغناطيسي وبذلك تصبح المعادلة (١١-٥) كالتالي:

$$\vec{B} = \text{curl}\left(\oint \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}١٢)$$

ونحصل من المعادلتين (٧-٥) و(١٢-٥) على:

$$\vec{B} = \text{curl}\left(\oint_V \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi r} dV\right) \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}١٣)$$

وبذلك فإن التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي يساوي:

$$\text{div}\,\vec{B} = \text{div}\,\text{curl}\left(\int_V \frac{\mu_0 J}{4\pi r}\, dV\right)$$

وحسب المعادلة (٢-٢٣) في المحلق ٢، فإن div curl دائما يساوي الصفر.

$$\therefore \text{div}\,\vec{B} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}١٤)$$

هذه المعادلة مهمة وهي إحدى معادلات ماكسويل (Maxwell's equation) وبمقارنتها بالمعادلة (٦١-١)، وهي $\nabla.\vec{E} = \varrho/\varepsilon_0$ الخاصة بالمجال الكهربي E، نجد أن ϱ تمثل كثافة الشحنة الكهربية لشحنة منفردة سواء كانت موجبة أو سالبة وهذا الوضع لا يمكن حدوثه في المغناطيسية لأنه لا يمكن الحصول على وحدات منفردة لشحنة مغناطيسية تماثل الشحنة الكهربية. مثل هذه الشحنات المغناطيسية تسمى بالمغناطيس أحادي

القطب (magnetic monopoles). والأبحاث التجريبية لم تنجح بعدُ في إثبات وجوده ولذلك ستبقى $\nabla.B = 0$ ما لم يتم اكتشاف مغناطيسي أحادي القطب.

يستنتج من المعادلتين (١-٥) ، (١٤-٥) والمعادلة (٤-٢) الملحق ٢ ، أن الفيض المغناطيسي خلال أي سطح مقفل "S" يساوي الصفر أي أن:

$$\Phi = \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١٥)$$

أي أن عدد خطوط القوى المغناطيسية الداخلة إلى السطح S يساوي عدد الخطوط الخارجة منه. وتناظر المعادلة (١٥-٥) معادلة جاوس (١٥١ - ١) ولذلك تسمى باسمه، وهي تمثل المعادلة الثانية من معادلات ماكسويل.

(٥-٤) قانون أمبير الدوائري

Amperes Circuital Law

ينص هذا القانون على أن التكامل الخطي (line integral) للحث المغناطيسي حول مسار مغلق اختياري يساوي مجموع التيارات داخل هذا المسار مضروبا في معامل نفاذية الفراغ μ_0 أي أن:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B \cos\theta \, dl = \mu_0 \Sigma I \quad \cdots \quad (٥\text{-}١٦)$$

وصيغة هذه المعادلة في النظام الجاووسي هي:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \Sigma I$$

حيث dl عنصر الطول من المسار المغلق C و θ الزاوية بين dl و B.

~~ولإثبات هذا القانون نتبع ما يلي:~~

بفرض أن الحث المغناطيسي B ناتج عن تيار I مار في دائرة مغلقة C' ، كما في شكل (٦-٥)، وحسب المعادلة (٦-٥) فإن قيمة B هي:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

وبضرب طرفي المعادلة في dl يُحصل على:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{(d\vec{l}' \times \vec{r}) \cdot d\vec{l}}{r^3} \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}١٧)$$

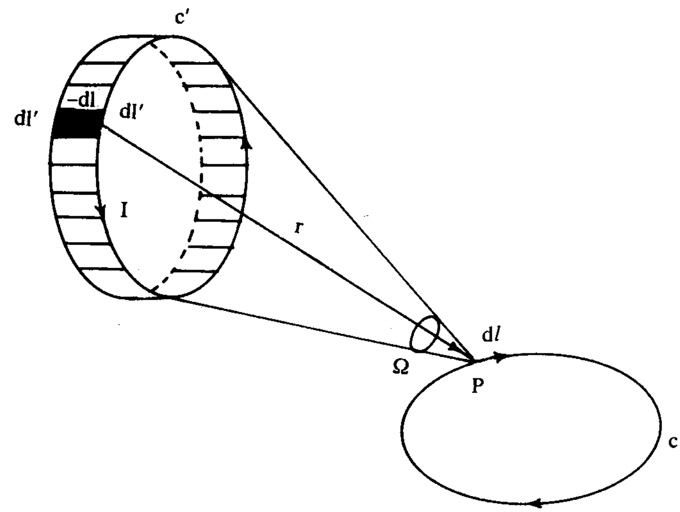
حيث dl عنصر من مسار اختياري C كما في الشكل (٥-٦). وبإجراء التكامل حول المسار C ، وإجراء التبديل بين $d\vec{l}$ و $d\vec{l}'$ و $\vec{r}$ ، حسب المعادلة (٢-١٦) ملحق ٢ ، يُحصل على:

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C}\oint_{C'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \ldots \quad (٥\text{-}١٨)$$

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C}\oint_{C'} \frac{(-d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \ldots \quad (٥\text{-}١٩)$$

وحسب ما ورد في البنـد (٢-٣) ملحق ٢ فإن $dl' \times dl$ تمثـل مساحة متوازي مستطيلات، إضافة إلى ما ورد في البند (٢-٩) ملحق ٢ ، فإنه يمكن معالجة المعادلة (٥-١٩) على أساس الزوايا المجسمة.

إذا فرض أن النقطة P ، شكل (٥-٦)، تقع على المسار المغلق C ، فإن مسار دائرة المصدر C' (source circuit) ستقابله (subtend) زاوية مجسمة عند تلك النقطة فإذا أجري التكامل على المسار C فإن النقطة P ستحصل على مجموعة متتالية من الإزاحات، كل إزاحة تساوي dl ، فإذا أزيحت P مسافة قدرها dl فإن مسار الدائرة C' ستتكون له مناظر (aspects) مختلفة حسب الرؤية عند النقطة P ولذلك فإن الزاوية المجسمة المقابلة لـ C' عند وضع جديد لـ P ستتغير إلى قيمة جديدة قدرها $\Omega' = \Omega + d\Omega$ ولذلك فإن $d\Omega$ تمثل التغير في قيمة الزاوية المجسمة المقابلة لـ C' عند النقطة P الناتج عن إزاحة النقطة P بـ dl.



شكل (٦ـ٥): حساب التغير في الزاوية المجسمة المقابلة عند النقطة الناتجة عن إزاحة الدائرة C′.

يمكن الحصول على التغير نفسه إذا تُخيل أن النقطة P ثابتة وأزيحت كل نقطة من مسار الدائرة C′ مسافة قدرها dl – ولذلك يمكن القول إن $d\Omega$ تمثل التغير في قيمة الزاوية المجسمة الناتج عن ثبوت النقطة P وإزاحة كل نقطة من C′ بـ dl –. وبالرجوع إلى الشكل (٦ـ٥) نجد أن الجزء المخطط يمثل مساحة قدرها:

$$dS = -d\vec{l} \times d\vec{l}\,'$$

وحسب ما ورد في البند (٢ـ٩)، ملحق ٢، فإن المقدار الموجود تحت التكامل في المعادلة (٥ـ١٩) يمثل زاوية مجسمة مقدارها $d\vec{S}\,.\,\vec{r}\,/\,r^3$ مقابلة للمساحة dS عند النقطة P وتساوي التغير في الزاوية المجسمة عند النقطة P الناتجة عن إزاحة dl' مسافة قدرها dl –. ولذلك إذا أجري التكامل على المسار C′ في المعادلة (٥ـ١٩) فالنتيجة تمثل مجموع توزيع dl' للمسار C′ كاملا ومنه فإن:

$$d\Omega = \oint_{c'} \frac{(-d\vec{l} \times d\vec{l}\,')\,.\,\vec{r}}{r^3} = \oint \frac{dS\cos\theta}{r^2} \quad . \quad (٥ـ٢٠)$$

وذلك حسب تعريف الزاوية المجسمة بالمعادلة (٢ـ٤٧) ملحق ٢ .

وبالتعويض في المعادلة (١٩ـ٥) من المعادلة (٢٠ـ٥) يُحصل على:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\Omega \quad \cdots\cdots \quad (٢١ـ٥)$$

وحسب المعادلة (٥٠ـ٢) ملحق ٢، فإن قيمة هذا التكامل، للزاوية المجسمة، يساوي 4π.

وبذلك تصبح المعادلة (٢١ـ٥) بالصورة التالية:

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \cdots\cdots \quad (٢٢أ ـ ٥)$$

تسمى المعادلة (٢٢ـ٥) **بقانون أمبير الدوائري** أو **بقانون أمبير**. والاشارة السالبة أو الموجبة التي تسبق $\mu_0 I$ تعتمد على اتجاه المسار والتيار I المار بالدائرة C. فإذا اختير اتجاه التكامل للمسار C بحيث يمثل العمودي عليه n الاتجاه الموجب كما في الشكل (٧ـ٥) وكان اتجاه التيار في الدائرة C مع اتجاه n فإن قيمة $\mu_0 I$ موجبة. أما إذا كان ضده فإن قيمة $\mu_0 I$ سالبة.

إذا كان هناك أكثر من تيار داخل المسار المغلق C فإن المعادلة (٢٢أ ـ ٥) تصبح:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I \quad \cdots\cdots \quad (٢٢ب ـ ٥)$$

وهو المطلوب.

ويمكن التعويض عن I بدلالة كثافة التيار J حسب المعادلة (٤ـ٤) فنحصل على:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot dS \quad \cdots\cdots \quad (٢٣ـ٥)$$

وحسب المعادلة (٤٥ـ٢) ملحق ٢، فإن:

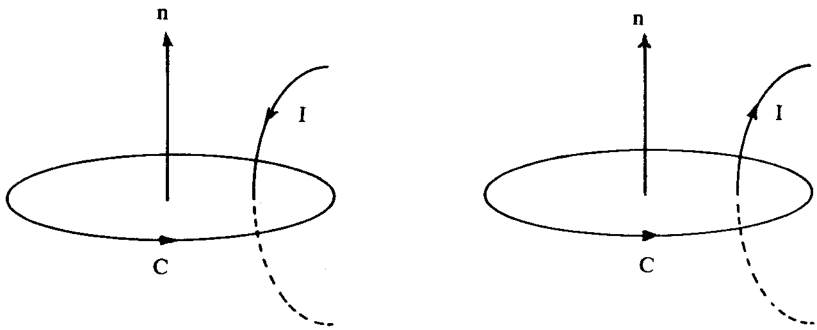
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot dS \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٢٤)$$

حيث S المساحة المحاطة بالمسار المقفل C.

ويُحصل من المعادلة (٢٣ـ٥) و (٢٤ـ٥) على :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٢٥)$$

وهـذه المعـادلة تدل عـلى أن الحـث المغـنـاطيسي ليـس مجـالا محـافظا (conservative) لأن $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ لا تساوي دائما الصفر وهذه النتيجة تخالف حالة المجال الكهربي الساكن.



شكل (٧ـ٥): الاتجاه المصطلح للتيار وعلاقته بالتكامل حول المسار C حسب قانون أمبير الدائري.

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٢١ـ٥) بالصيغة التالية :

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٢٦)$$

وباستعمال المعادلة (٢٩ـ٢) ملحق ٢ ، يُحصل على :

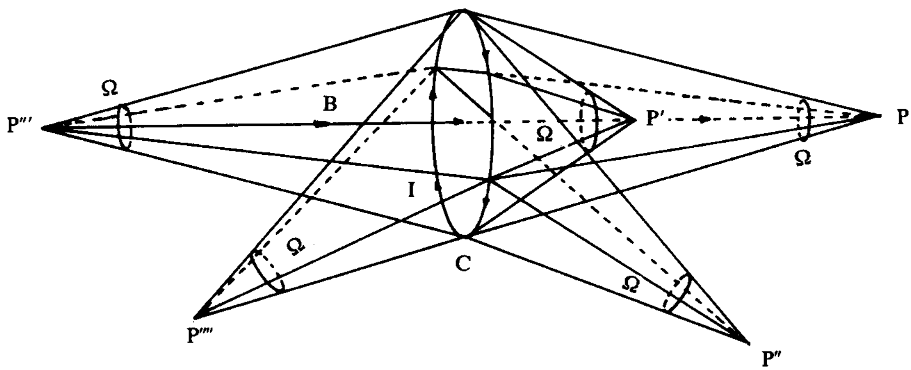
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla\Omega \cdot d\vec{l} \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٢٧)$$

وحيث إن هذه المعادلة صحيحة لكل قيم $d\vec{l}$ ، $d\vec{l} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$ ، فإن B تتناسب مع $\nabla\Omega$ أي أن :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٢٨)$$

يمكن باستخدام هذه المعادلة حساب الحث المغناطيسي B بدلالة الدالة العددية Ω عند النقطة P والناتج عن مرور تيار كهربي قدره I في دائرة كهربية كما في شكل (٥-٨).

الإشارة السالبة تدل على أن موضع النقطة P بالنسبة للدائرة التي يمر بها التيار تقع في الجهة الموجبة للدائرة وذلك حسب اتجاه التيار فيها. ويوضح الشكل (٥-٨) بعض المواضع المختلفة لـ P فتكون الزاوية المجسمة Ω موجبة للنقاط P و 'P و ''P بينما تكون سالبة للنقاط '''P و ''''P.



شكل (٥-٨): مواضع مختلفة للزاوية المجسمة Ω حول دائرة كهربية C يمر بها تيار قدره I

(٥-٥) تطبيقات لحساب المجال المغناطيسي

Applications of Magnetic Field

(٥-٥-١) المجال المغناطيسي الناتج عن تيار يمر في موصل مستقيم

Magnetic field due to a current in a straight conductor

يتضح من البنود السابقة أن الحث المغناطيسي B يمكن حسابه بطرق مختلفة ستُطبق لبعض الدوائر الكهربية البسيطة كلما كان ذلك ممكنا.

لحساب الحث المغناطيسي B الناتج عن مرور تيار كهربي I في سلك رفيع مستقيم عند نقطة تقع خارجه مثل النقطة P شكل (٩ـ٥) نتبع ما يلي:

ا ـ باستعمال قانون بيوت وسافارت

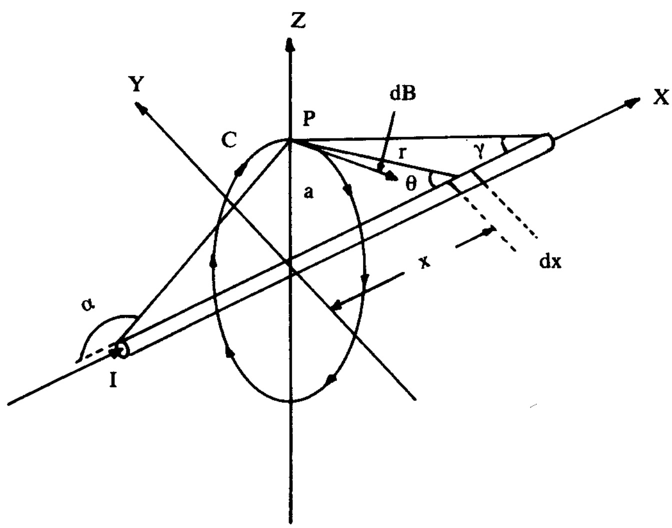
يقسم السلك إلى أجزاء صغيرة طول كل جزء dx فيكون الحث المغناطيسي عند النقطة P الناتج عن مرور التيار I في هذا الجزء هو dB ويعطى بالمعادلة (٣ـ٥) حيث:

$$dB = K_m \frac{I dx \sin\theta}{r^2}$$

ويكون الحث الناتج عن كامل السلك هو:

$$B = K_m \int \frac{I dx \sin\theta}{r^2} \qquad \ldots\ldots \quad (٥ـ٢٩)$$

حيث r المسافة بين dx و P ، θ الزاوية بين dx و r ، كما في الشكل (٩ـ٥).



شكل (٩ـ٥): حساب الحث المغناطيسي B ، عند النقطة P الناتج عن مرور تيار كهربي I في موصل مستقيم، باستخدام قانون بيوت وسافارت.

فإذا استعملت المحـاور الـديكـارتية لتحـديد اتجـاه عنصر الحث المغناطيسي dB بحيث يقع التيار I على محور x ويأخذ الاتجاه الوارد في الشكل (٩ـ٥) وتقع P على محور z فـإن dB يقع في المستوى yz ويتخذ الاتجاه العمودي على المستوى xz ، الذي يقع فيه كل من r و dx ، ومماس لخط القوة C.

ولتسهيل حسـاب التكامل يُستبدل المتغير x بالزاوية θ ، وبالعودة إلى الشكل (٩ـ٥) يمكن الحصول على :

$$r = a \csc\theta \quad , \quad x = a \cot\theta$$

$$\therefore dx = -a \csc^2\theta \, d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة (٢٩ـ٥) يكون :

$$B = -K_m \frac{I}{a} \int_{\alpha}^{\gamma} \sin\theta \, d\theta = K_m \frac{I}{a} [\cos\theta]_{\alpha}^{\gamma}$$

$$\therefore B = K_m \frac{I}{a} (\cos\gamma - \cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{ـ}٣٠)$$

فإذا كان السلك طويلا جدا بالمقارنة إلى المسافة a ، ولم تكن النقطة P قريبة من أي من طرفي السلك فإن :

$$\gamma = 0 \quad , \quad \alpha = \pi$$

$$\therefore B = 2K_m \frac{I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{ـ}٣١)$$

يمكن الـوصـول إلى النتيجـة (٣١ـ٥)، وذلك بإجراء التكامل في المعادلة (٢٩ـ٥) باستبدال الزاوية θ بالمتغير x كالتالي :

من الرسم يمكن الحصول على :

$$r = (x^2 + a^2)^{1/2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{a}{r}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢٩ـ٥) يُحصل على :

$$B = K_m I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

هذا النوع من التكامل خاص ويمكن إجراؤه بتطبيق المعادلة (٢٥) بند (٣ـ٨) ملحق ٣.

$$\therefore B = K_m \frac{I}{a}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 2K_m \frac{I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}$$

ب ـ باستعمال قانون أمبير الدوائري

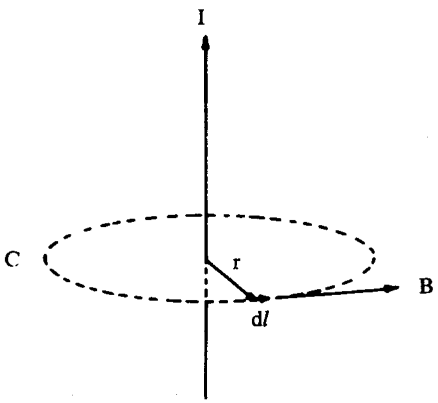
إذا مر تيار كهربي I في موصل مستقيم فإن خطوط القوى المغناطيسية حول الموصل عبارة عن دوائر مركزها الموصل نفسه. فإذا أعتبر أن إحدى هذه الدوائر تمثل مسارا مغلقا حول التيار وكان نصف قطر هذا المدار r ، كما في الشكل (١٠ـ٥)، فإن اتجاه $\vec{B}$ هو اتجاه $d\vec{l}$ نفسه، مماس لخطوط القوى. وبتطبيق المعادلة (٢٢ـ٥) يُحصل على:

$$B\int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I$$

$$\therefore B\,2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

وهي المعادلة (٣١ـ٥) نفسها.



شكل (١٠ـ٥): حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربي في سلك مستقيم باستخدام قانون أمبير.

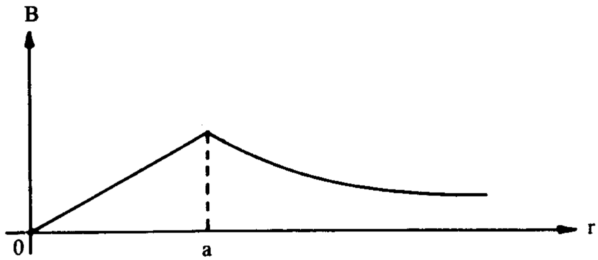
إذا كان للسلك سمك نصف قطره a وكانت كثافة التيار J منتظمة خلال مقطعه الداخلي فإن التيار داخل الأسطوانة (حيث r<a)، سيكون $\pi r^2 J = I(\pi r^2/\pi a^2)$.

وبتطبيق قانون أمبير داخل الاسطوانة يُحصل على:

$$B\,2\pi r = \mu_0 I\,\frac{r^2}{a^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad , \quad r \leq a \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٣٢)$$

ويوضح الشكل (٥ـ١١) العلاقة بين B ، r داخل الاسطوانة وخارجها.



شكل (٥ـ١١): العلاقة بين B و r داخل الاسطوانة وخارجها.

مــثــال (٥ـ١)

يمر تيار كهربي I في سلك رفيع وطويل نتج عنه مجال مغناطيسي قيمة حثه 10^{-4}T عند نقطة تبعد 5cm من منتصف السلك:

ا ـ ما قيمة هذا التيار.

ب ـ بقيمة التيار نفسها الواردة في الفقرة (ا) ماذا تكون قيمة الحث المغناطيسي عند النقطتين 0.1m و 0.2m.

جـ ـ ما قيمة شدة المجال المغناطيسي في الحالات السابقة.

د ـ إذا كانت قيمة التيار 10A ما هو بعد النقطة التي يكون عندها الحث المغناطيسي مساوياً لـ 10^{-4}Wb/m^2.

الحـــل

$$\because B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi r B}{\mu_0} = \frac{2\times\pi\times5\times10^{-2}\times10^{-4}}{4\times\pi\times10^{-7}} = 25\ \text{A}$$

$$B_1 = \frac{4\times\pi\times10^{-7}}{2\times\pi}\frac{25}{0.1} = 5\times10^{-5}\ \text{T}$$

$$B_2 = \frac{4\times\pi\times10^{-7}}{2\times\pi}\frac{25}{0.2} = 2.5\times10^{-5}\,T$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{5\times10^{-5}}{4\times\pi\times10^{-7}} = 39.79\ A/m$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{2.5\times10^{-5}}{4\times\pi\times10^{-7}} = 19.89\ A/m$$

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{4\times\pi\times10^{-7}\times10}{2\times\pi\times10^{-4}} = 0.02\ m$$

مـثـال (٥-٢)

سلكان طويلان ومتوازيان يمر بكل منهما تيار كهربي قيمته I فإذا كانت المسافة بينهما 2a احسب متجه الحث المغناطيسي B في منتصف المسافة بينهما في الحالات التالية :

ا ـ للتيارين الاتجاه نفسه. ب ـ التياران متعاكسان في الاتجاه.

جـ ـ السلكان متعامدان. د ـ السلكان متعامدان وقيمة التيارين مختلفتان I_1 و I_2.

الحـــل

تطبق المعادلة (٥-٩) لحل هذا المثال وهي :

$$B_T = B_1 + B_2$$

حيث B_1 و B_2 متجها الحث الناتج عن مرور التيارين I_1 و I_2 في السلكين كل على حده. ففي الحالات الثلاث الأولى أ و ب و ج يكون $B_1=B_2=B$ لأن النقطة التي يراد حساب الحث المغناطيسي عندها تقع في منتصف المسافة بين السلكين وكذلك $I_1=I_2=I$. وحسب المعادلة (٥-٣١) فإن قيمة B عند هذه النقطة لأي من السلكين هي :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}$$

ويمكن تحديد اتجاه المجال المغناطيسي باستخدام قاعدة اليد اليمنى.

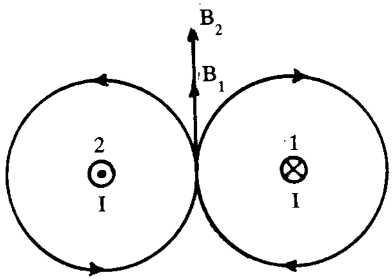
ا ـ المتجهان B_1 و B_2 متعاكسان في الاتجاه، شكل (أ)، ومتساويان في المقدار أي أن

$$B_T = B - B = 0$$

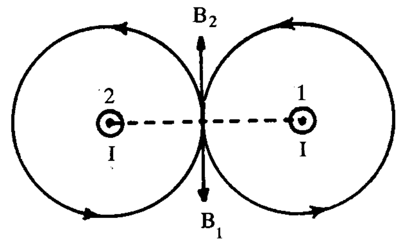
ب - نتيجة لتعاكس التيارين فإن الحث المغناطيسي للسلكين لهما الاتجاه نفسه، شكل (ب)، ولهما أيضا القيمة نفسها:

$$B_T = B_1 + B_2$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}+\frac{\mu_0 I}{2\pi a}=\frac{\mu_0 I}{\pi a}$$



شكل (ب)



شكل (أ)

جـ - المتجهان B_1 وB_2 متعامدان، شكل (جـ)، ومتساويان في المقدار أي أن:

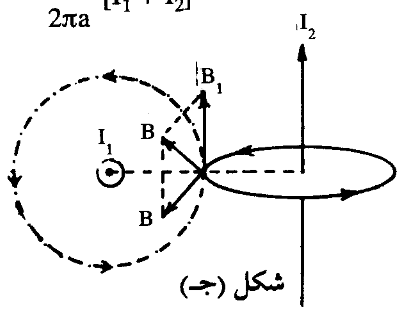
$$B=(B_1^2+B_2^2)^{1/2}=\sqrt{2}\,B=\sqrt{2}\,\frac{\mu_2 I}{2\pi a}$$

د - المتجهان B_1 وB_2 متعامدان، شكل (جـ)، وغير متساويين في المقدار أي أن:

$$B = \{B_1^2 + B_2^2\}^{1/2}$$

$$= [(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a})^2 + (\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a})^2]^{1/2}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi a}[I_1^2 + I_2^2]^{1/2}$$



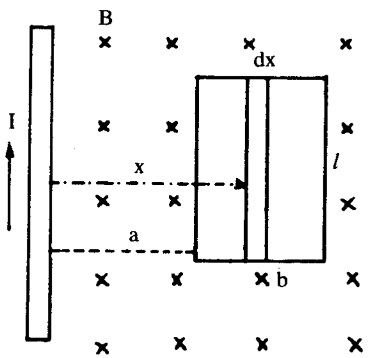
شكل (جـ)

مـثـــال (٣-٥)

حلقة مستطيلة الشكل، طولها l وعرضها b ، وضعت موازية لسلك طويل يمر به تيار كهربي مقداره I. احسب التدفق المغناطيسي خلال هذه الحلقة.

الحـــل

الحث المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة مقدارها x عن سلك طويل يمر به تيار كهربي تحدد المعادلة (٣١-٥) حيث:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

هذا الحث يتجه حسب قاعدة اليد إلى الداخل، كما في الشكل، وقيمته تختلف من نقطة إلى أخرى حسب قيمة x أي أن المجال المغناطيسي غير منتظم ولذلك فقيمة التدفق المغناطيسي يمكن حسابه باستعمال المعادلة (١١ - ٥) بالصورة التالية:

$$\Phi = \int B\, dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\, dS$$

$$\because\ dS = l\, dx$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln x]_a^{a+b}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \{\ln (a+b) - \ln (a)\}$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \{\frac{a+b}{a}\}$$

(٥-٥-٢) المجال المغناطيسي لموصل دائري

Magnetic field of circular conductor

يمثـل الشكـل (٥-١٢) حلقة دائرية من سلك نصف قطرها a ويمر بها تيار كهربي I. ولحساب الحث المغناطيسي B عند النقطة P نتبع ما يلي:

ا - باستعمال قانون بيوت وسافارت

تقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة طول كل عنصر dl ، وتوضع النقطة P على محور الحلقة المحمول على محور x ، بحيث تكون x المسافة بين مركز الحلقة و P ، r المسافة بين dl و P ويتضح من الشكل (٥-١٢) ما يلي:

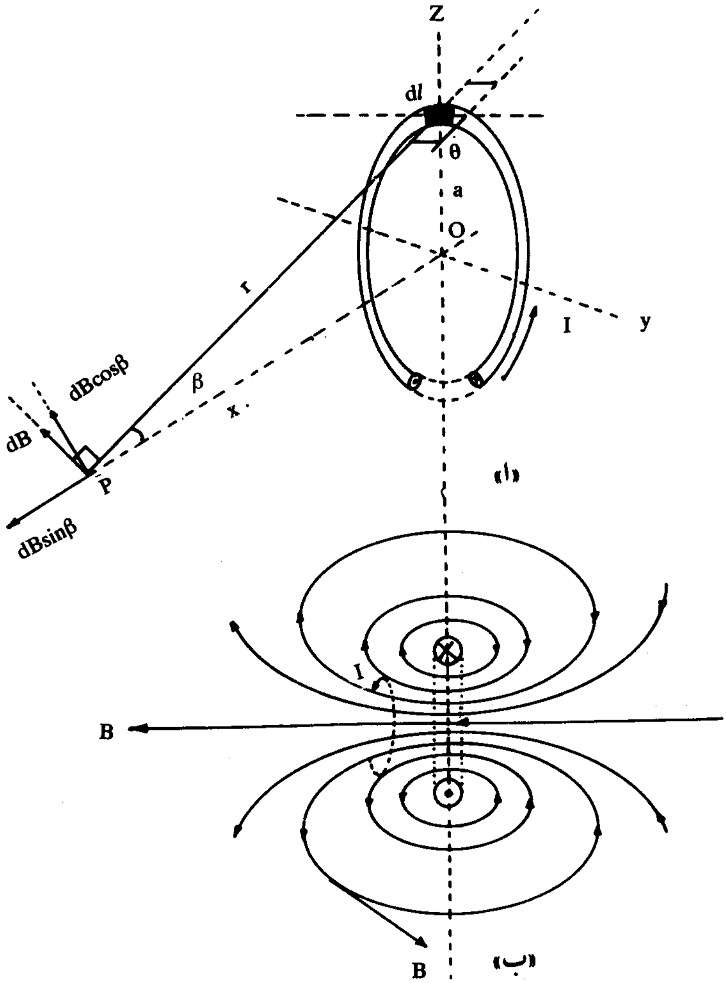
تقع الحلقة في المستوى yz بينما يقع الخطان r و x في المستوى xz العمودي على محور العنصر الـطولي dl وكذلك المستوى yz فتكون الزاوية θ المحصورة بين محور dl والمسافة r تساوي $90°$.

وطبقـا للرموز المستخدمة في الشكل فإن الحث المغناطيسي dB عند النقطة P تحدده المعادلة (٥-٣) بعد وضع $\theta = 90°$ بحيث يكون:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I dl}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٣٣)$$

ويكون اتجاه المجال المغناطيسي عند النقطة P عموديا على r وفي المستوى xz. وبتحليل dB إلى مركبتـين متعـامـدتـين إحداهما رأسية على امتداد المحور z وقيمتها $dB\cos\beta$ والأخرى أفقية على امتداد المحور x وقيمتها $dB\sin\beta$ فإن المركبات الرأسية العمودية على محور الملف والناتجة عن جميع عناصر الملف يلغي بعضها بعضا لأن لكل عنصر نظيرا مضادا يقابله في الطرف الآخر من الملف أي أن $\int dB\cos\beta = 0$.

وبذلك فإن كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن مرور التيار في الملف كله تكون على استقامة المحور x وتساوي:



شكل (١٢-٥): ا- موصل دائري يحمل تيارا قدره I فينشأ عنه مجال مغناطيسي حثه B المطلوب حسابه عند النقطة P.
ب- توضيح خطوط القوى المغناطيسية للموصل نفسه.

$$B = \int dB \sin\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin\beta \int_0^{2\pi a} dl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \sin\beta$$

ويكتب من الشكل (٥ـ١٢) ما يلي :

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad , \quad \sin\beta = \frac{a}{r}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots \quad (٥ـ٣٤)$$

وبوضع $x = 0$ في المعادلة (٥ـ٣٤) يُحصل على قيمة الحث المغناطيسي في مركز الملف :

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdot \quad (٥ـ٣٥)$$

ويكون اتجاه B واقع على محور x.

يلاحظ من المعادلة (٥ـ٣٤) أن الحث المغناطيسي عند النقطة P يقل كلما بعدت النقطة عن مركز الموصل الدائري ، وينعدم عندما تكون $x = \infty$.

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بالمنحنى المبين في شكل (٥ـ١٣) والذي يمثل العلاقة بين x و B ويتضح من هذا المنحنى أن معدل تغير المجال مع المسافة يكاد يكون خطيا . أي يمثله خط مستقيم ، في المنطقة $x = a/2$ وفيها يكون :

$$\therefore dB/dx = \text{constant} \quad \cdots\cdots\cdot \quad (٥ـ٣٦)$$

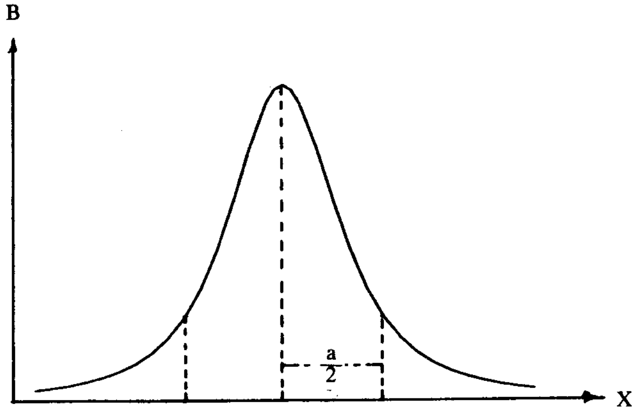
$$\therefore \frac{d^2B}{dx^2} = 0$$

وبتفاضل المعادلة (٥ـ٣٤) مرتين يحصل على $x = \frac{a}{2}$.

وإذا كان الموصل الدائري مكونا من عدد N من اللفات لها نصف القطر نفسه متلاصق بعضها ببعض فإن المعادلتين (٥ـ٣٤) و(٥ـ٣٥) تصبحان :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots\cdot \quad (٥ـ٣٧)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdot \quad (٥ـ٣٨)$$



شكل (١٣ـ٥): العلاقة بين الحث المغناطيسي B وبعد النقطة P ، على المحور x ، عن مركز الحلقة الدائرية في الشكل (١٢ـ٥).

ب ـ باستعمال الزاوية المجسمة

يقسم السطح S المحاط بالحلقة C إلى حلقات صغيرة مساحة كل حلقة dS ، فإذا أخذت حلقة نصف قطرها R كما في الشكل (١٤ـ٥) وسمكها dR .

فحسب المعادلة (٤٧ـ٢) ملحق ٢ ، فإن الزاوية المجسمة المقابلة لهذا السطح dS عند النقطة P هي :

$$d\Omega = -\frac{\vec{r}\cdot dS}{r^3}$$

وحيث إن $d\Omega$ واقعة على محور x فإن :

$$d\Omega = -\frac{xdS}{r^3}$$

ويُحصل من الشكل (١٤ـ٥) على :

$$dS = 2\pi RdR \quad , \quad r^2 = R^2 + x^2$$

$$\therefore d\Omega = -\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} 2\pi R dR$$

$$\therefore \Omega = -2\pi x \int_0^x \frac{RdR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

وحسب المعادلة (٢٤) البند (٣-٨) من الملحق ٣، يُحصل على:

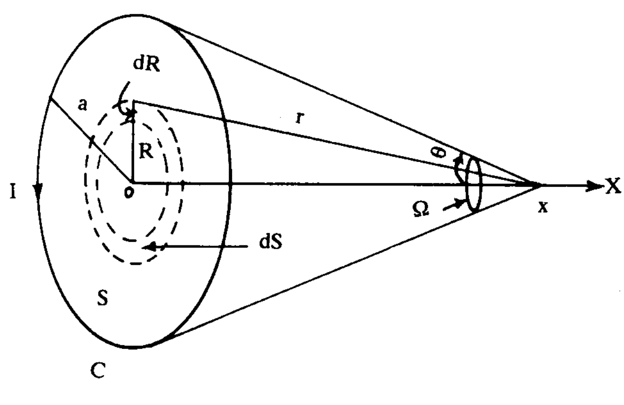
$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right) = 2\pi(1-\cos\theta) \quad \cdot\cdot \quad (٥\text{-}٣٩)$$

وباستخدام المعادلة (٥-٢٨) وتطبيقها على محور x فقط يُحصل على:

$$B_x = B = \frac{-\mu_0}{4\pi} NI \frac{\partial\Omega}{\partial x} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}٤٠)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

وهي المعادلة (٥-٣٧) نفسها.



شكل (٥-١٤): حساب B بمعرفة الزاوية المجسمة Ω لحلقة دائرية

مـــثـــال (٥-٤)

ملف دائري عدد لفاته 200 لفة ومتوسط نصف قطره 20cm ويمر به تيار كهربي قيمته 3.5A احسب:

ا ـ شدة المجال المغناطيسي والحث المغناطيسي والعزم المغناطيسي في مركز الملف.

ب ـ الحث المغناطيسي على بعد 8cm من مركز الملف.

الحـــــل

$$H=\frac{NI}{2\,a}=\frac{200\times 3.5}{2\times 20\times 10^{-2}}=1.75\times 10^{3}\ \text{A/m}$$

$$B=\mu_0 H=4\pi\times 10^{-7}\times 1.75\times 10^{3}=2.2\times 10^{-3}\ \text{Wb/m}^2$$

$$P_m=N\pi a^2 I=200\pi(20\times 10^{-2})\times 3.5=88\ \text{Am}^2$$

$$B=\frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$B=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times 200\times 3.5\times(20\times 10^{-2})^2}{2\times\{(20\times 10^{-2})^2+(8\times 10^{-2})^2\}^{3/2}}$$

$$\therefore B=1.78\times 10^{-3}\ \text{Wb/m}^2$$

(٥-٥-٣) المجال المغناطيسي لملف حلزوني Magnetic field of a solenoid

ا ـ استعمال بيوت وسافارت

يسمى التيار المار في سلك ملفوف لفا متلاصقا حول اسطوانة بالتيار الحلزوني. ويبين شكل (١٥ا ـ ٥) ملفا حلزونيا يمر به تيار كهربي حيث يعمل الملف كما لو كان مغناطيسا له قطبان أحدهما قطب شمالي N والآخر قطب جنوبي S. ويتوقف نوع القطب واتجاه المجال على اتجاه التيار في الملف، ويمثل الشكل (١٥ب ـ ٥) مرور التيار في سلك ملفوف لفا مفكوكا «غير متلاصق».

لإيجاد قيمة الحث المغناطيسي عند النقطة P كما في شكل (١٥جـ ـ ٥) يفرض

أن الملف يمر به تيار شدته I وطوله l وعدد لفاته N فتكون عدد اللفات في وحدة الأطوال $\frac{N}{l}$ وبذلك فإن عدد اللفات في عنصر الطول dx هي :

$$n = \frac{N}{l} dx$$

بالعودة إلى المعادلة (٣٧-٥) فإن قيمة الحث الناتج عن التيار I المار لعنصر الطول dx ، والذي يمثل ملفا دائريا نصف قطره a وعدد لفاته n ، عند النقطة P هو:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

وباستبدال ϕ بالمتغير x ، وبالعودة إلى شكل (١٥جـ - ٥)، يكون :

$$x = a \cot \phi \quad , \quad dx = -a \operatorname{cosec}^2 \phi \, d\phi$$

$$\therefore dB = \frac{-\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \frac{a^3 \operatorname{cosec}^2 \phi \, d\phi}{(a^2 + a^2 \cot^2 \phi)^{3/2}} = - \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \sin \phi \, d\phi$$

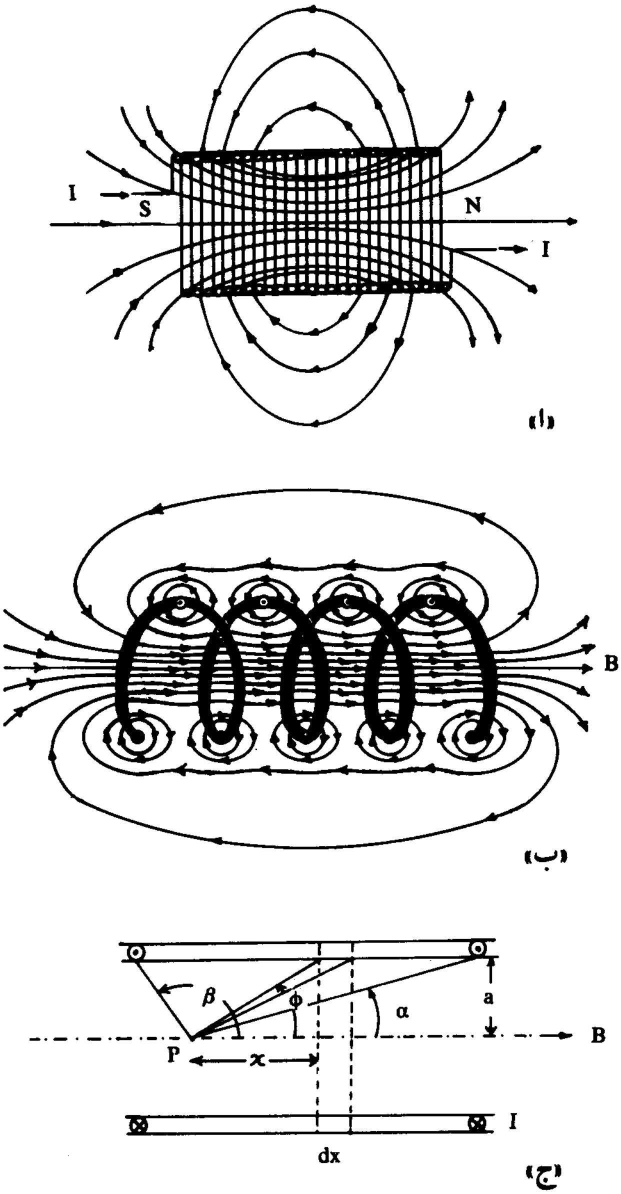
تكون قيمة الحث المغناطيسي B الناتج عن التيار المار في الملف الحلزوني عند النقطة P تساوي مجموع قيمة الحث المغناطيسي dB الناتجة عن كل لفة من لفات الملف عند هذه النقطة أي أن :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 IN}{2l} \int_{\beta}^{\alpha} \sin \phi \, d\phi$$

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta) \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٤١)$$

وهذه هي المعادلة العامة لشدة المجال عند أية نقطة على محور الحلزوني سواء أكانت بداخله أم بخارجه.

إذا كان الملف الحلزوني طويلا وكانت النقطة P بعيدة عن أي من الطرفين فإن



شكل (٥-١٥): ا ـ ملف حلزوني ملفوف لفا متلاصقا يمر به تيار كهربي I بحيث يعمل كما لو كان مغناطيسا له قطبان شمالي N وجنوبي S.

ب ـ ملف حلزوني ملفوف لفا مفكوكا «غير ملاصق» ويمر به تيار كهربي I.

جـ ـ كيفية حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور التيار الكهربي I في الملف الحلزوني عند نقطة مثل P.

الزاويتين $\beta = 180^\circ$ و $\alpha = 0^\circ$. عندئذ تصبح B عند هذه النقطة مساوية للقيمة التالية :

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٤٢)$$

وإذا كانت النقطة P تقع عند أحد أطرافه وكان الحلزون طويلا فإن $\alpha=0^\circ$ و $\beta=90^\circ$ وتصبح B:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٤٣)$$

ـ باستعمال قانون أمبير الدائري

يرسم مسار مغلق على هيئة مستطيل كما في الشكل (٥-١٦) الخط المنقوط، بحيث يكون ضلعه ab ، الذي طوله l ، منطبقا على محور الملف ويكون الضلع dc بعيدا عن تأثير الملف. أما الضلعان ad و cb فهما متعامدان على المجال أي أن $\theta = 90^\circ$ وبتطبيق قانون أمبير على الأضلاع الأربعة يمكن الحصول على :

$$\int_a^b B\cos 0^\circ\, dl + \int_b^c B\cos(90^\circ)\, dl + \int_c^d B\cos(180^\circ)\, dl + \int_d^a B\cos(90^\circ)\, dl$$

$$= \int_a^b B\,.\,dl - \int_c^d B\,.\,dl = \mu_0\,.\,\Sigma I$$

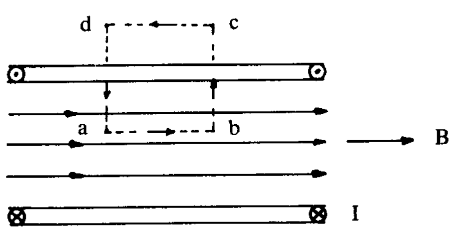
وحيث إن قيمة التكامل $\int_c^d B\,.\,dl$ صغيرة جدا :

$$\therefore \int_a^b B\, dl = B\int_0^l dl = \mu_0 \Sigma I$$

أو

$$B\, l = \mu_0 n l I$$

$$\therefore B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{l}$$



شكل (٥-١٦): حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربي في ملف حلزوني باستخدام قانون أمبير.

وهي المعادلة (٤٢ ـ ٥) نفسها.

حيث nI هو مجموع التيارات الكهربية داخل المسار لأن n هي عدد اللفات لوحدة الأطوال من الحلزون. وتظهر اللفات على هيئة دوائر صغيرة على أن التيار يدخل عموديا على مستوى الشكل إلى الداخل ⊗ ويخرج عموديا على مستوى الشكل إلى الخارج ⊙ .

جـ ـ استعمال الزاوية المجسمة

نحصل من المعادلتين (٤٠ـ٥) و(٤١ـ٥) والشكل (١٧ـ٥) على :

$$dB = dB_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{N}{l}\ dx\ \frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

ويمثل المقدار ($\frac{d\Omega}{\partial x}dx$) الفرق بين الزوايا المجسمة المقابلة للجانبين الأمامي والخلفي لمجموعة اللفات المحصورة في عنصر الطول dx.

وإذا فرض أن Ω_1 و Ω_2 تحددان طول الملف l المحتوي على اللفات N فإن قيمة الحث المغناطيسي لطول الملف عند النقطة P هو:

$$B = -\frac{\mu_0 IN}{4\pi l}\int_{\Omega_2}^{\Omega_1}\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx$$

$$\therefore B = -\frac{\mu_0 IN}{4\pi l}(\Omega_1 - \Omega_2)\quad \cdots\cdots \quad (٤٦ـ٥)$$

إذا فرض أن الملف طويل ورفيع والنقطة P واقعة في المنتصف داخل الملف فإن Ω_1 تساوي تقريبا الصفر و Ω_2 تساوي 4π وبالتعويض في المعادلة (٤٦ـ٥) يمكن الحصول على المعادلة التالية :

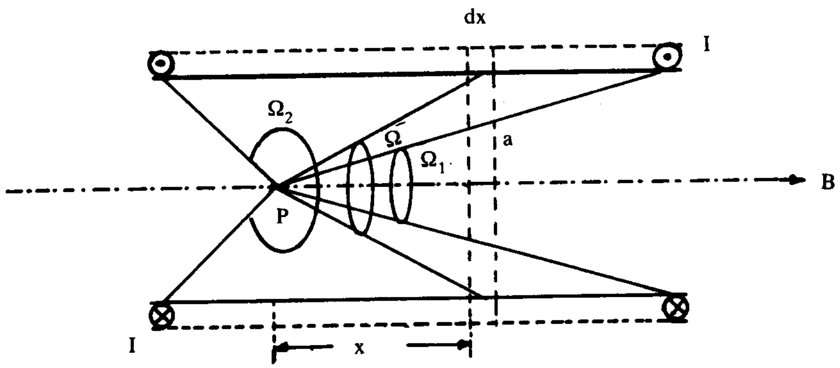
$$B = \frac{\mu_0 IN}{l}$$

وهي المعادلة (٤٢ ـ ٥) نفسها.

أما إذا كانت النقطة P واقعة عند أحد الأطراف بحيث كان $\Omega_1 = 2\pi$ و $\Omega_2 = 4\pi$ فإن المعادلة (٥-٤٦) تصبح كما يلي:

$$B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 IN}{l}$$

وهي المعادلة (٥ - ٤٣) نفسها.



شكل (٥-١٧): حساب B لملف حلزوني طويل باستخدام الزاوية المجسمة Ω

وحسب المعادلة (٥-٣٩) فإن:

$$\Omega_1 = 2\pi\,(1 - \cos\alpha) \quad , \quad \Omega_2 = 2\pi\,(1 - \cos\beta)$$

$$\therefore\ \Omega_1 - \Omega_2 = 2\pi\,(\cos\beta - \cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٤٧)$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٤٦) يُحصل على المعادلة (٥-٤١) وهي:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

مـثـال (٥ـ٥)

ملف حلزوني طوله 50cm ونصف قطره 3cm يحتوي على 1000 لفة/متر يمر به تيار كهربي قيمته 5A. احسب الحث المغناطيسي في منتصفه وعند حافته وعند نقطة تقع على محور الملف على 20cm من منتصفه.

الحـــل

الحث المغناطيسي في منتصف الملف يساوي :

$$B=\mu_0 nI=4\pi 10^{-7}\times 1000\times 5=6.283\times 10^{-3}\ Wb/m^2(T)$$

أما عند حافته فالحث المغناطيسي يساوي نصف قيمته عند منتصفه أي أن :

$$B=\frac{6.283\times 10^{-3}}{2}=3.142\times 10^{-3}\ Wb/m^2$$

ويحسب المجال عند P باستعمال المعادلة (٤١ـ٥) وهي :

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha-\cos\beta)$$

والزاويتان α و β فيمكن حسابهما من الشكل (١٥جـ ـ ٥) حيث :

$$\tan\alpha=\frac{3}{45}\qquad \therefore \alpha = 3.814^\circ$$

$$\tan(180-\beta)=\frac{3}{5}\qquad \therefore \beta = 149.04^\circ$$

$$\therefore B = 2\pi\times 10^{-7}\times 1000\times 5(\cos 3.814-\cos 149.04)$$
$$= 3.142\times 10^{-3}\{0.998-(-0.858)\}=5.828\times 10^{-3}\ Wb/m^2$$

(٥-٥-٤) المجال المغناطيسي لملف حلزوني حلقي Magnetic field of a toriod

إذا مر تيار كهربي I في ملف حلزوني حلقي عدد لفاته في وحدة الأطوال n وطول محيطه l ، كما في الشكل (٥-١٨) يمكن حساب الحث المغناطيسي باستخدام قانون أمبير كالآتي:

إذا فرض أن الطول l هو طول المسار المغلق رقم (١)، المبين في الشكل (٥-١٨)، الذي يمثل خط قوة على هيئة دائرة مغلقة في محور الملف فإنه بتطبيق قانون أمبير الدوائري على هذا المسار يُحصل على:

$$\int B\, dl = \mu_0 \Sigma I$$

$$\therefore Bl = \mu_0 n l I \qquad \therefore B = \mu_0 n I \quad \cdots \quad (٥ - ٤٨أ)$$

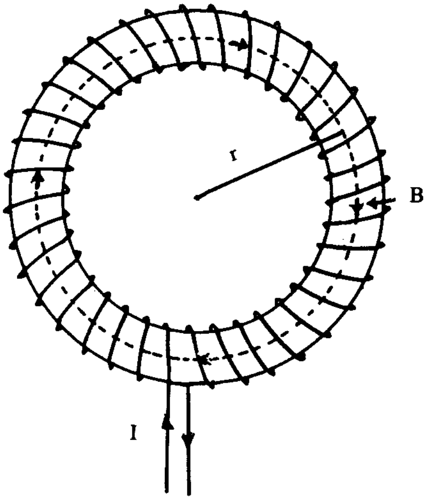
فإذا فرض أن N عدد لفات الملف و r نصف قطره فإن:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{N}{2\pi r}$$

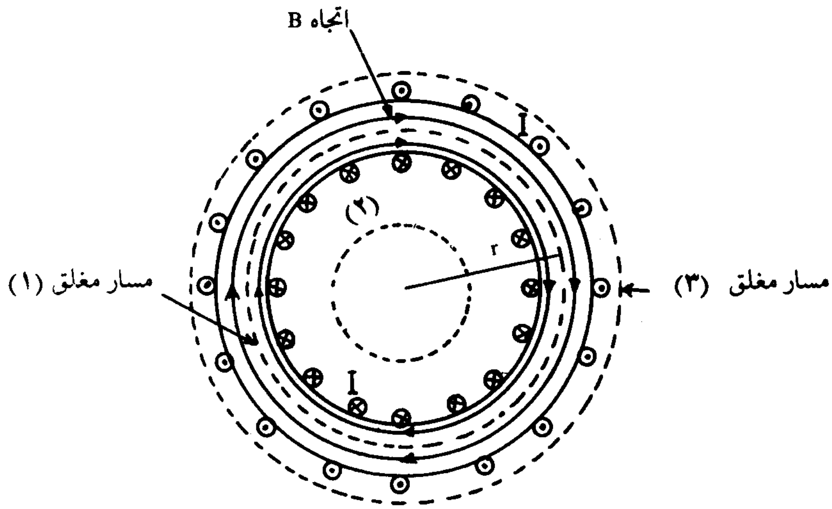
$$\therefore B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad \cdots\cdots \quad (٥ - ٤٨ب)$$

إذا عُد المسار رقم (٢) فإنه يلاحظ عدم وجود تيارات داخل هذا المسار المغلق أي أن $\Sigma I = 0$ ويستنتج من ذلك أنه طبقا لقانون أمبير فإن: $B = 0$.

أما بالنسبة للمسار (٣) فإنه يلاحظ وجود تيارات داخل هذا المسار المغلق إلا أن مجموعها يساوي صفرا لأن كل لفة تمر داخل هذا المسار مرتين مرة إلى الداخل ومرة إلى الخارج وفي كل مرة تحمل اللفة تيارا متساويا وله اتجاهان متعاكسان وبهذا فإن $B = 0$ على طول هذا المسار. ومعنى هذا أن المجال لمثل هذا الملف الحلزوني الحلقي يوجد فقط في داخل المنطقة الملفوف عليها الملف.



«أ»



«ب»

شكل (١٨-٥): أ ـ ملف حلزوني حلقي نصف قطره r ويمر به تيار شدته I.
ب ـ كيفية حساب المجال المغناطيسي لهذا الملف باستخدام قانون أمبير.

مــثــال (٦-٥)

ملف حلزوني حلقي عدد لفاته 1500 لفة ونصف قطراه الداخلي والخارجي 5cm و 10cm على الترتيب ويمر به تيار كهربي قيمته 5A. احسب الحث المغناطيسي في وسطه وعند حافتيه الداخلية والخارجية.

الحــــل

إذا فرض أن r الواردة في المعادلة (٤٨ب - ٥) تمثل متوسط نصف قطر الملف:

$$\therefore r = \frac{1}{2}(10\times10^{-2} + 5\times 10^{-2}) = 7.5\times10^{-2}\,\text{m}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times1500\times5}{2\pi\times7.5\times10^{-2}} = 20\times10^{-3}\,(\text{T})$$

أما إذا كانت r تمثل نصف القطر الداخلي للملف فإن الحث المغناطيسي على هذا المسار:

$$B = \frac{4\pi\times10^{-7}\times1500\times5}{2\pi\times5\times10^{-2}} = 30\times10^{-3}\,\text{Wb/m}^2$$

وإذا كانت r تمثل نصف القطر الخارجي للملف فإن B على هذا المسار:

$$B = \frac{4\pi\times10^{-7}\times1500\times5}{2\pi\times10\times10^{-2}} = 15\times10^{-3}\,\text{Wb/m}^2$$

(٥-٦) الجـهـد المغنـاطيسي

Magnetic Potential

أحـد مظاهر الاختلاف بين المجال المغناطيسي وبين المجال الكهربي يكمن في وجود شكلين مختلفين تماما للجهد المغناطيسي وهما:

(٥-٦-١) الجهد المغناطيسي العددي Magnetic scalar potential

تبين المعادلة (٥-٢٨) أنه يمكن حساب الحث المغناطيسي B بدلالة الزاوية المجسمة Ω وهي دالة عددية، وهذه الحالة تماثل حساب المجال الكهربي E بمعرفة دالة عددية وهي الجهد الكهربي V حسب المعادلة (٢-٢٧). ولذلك وبصورة مماثلة للمجال الكهربي يمكن أن يكتب الحث المغناطيسي B في النظام العالمي (S.I) بدلالة دالة جديدة V_m بالصورة التالية:

$$B = -\mu_0 \,\text{grad}\, V_m = -\mu_0 \nabla V_m \qquad \ldots (٥\text{-}٤٩)$$

حيث V_m تسمى بالجهد المغناطيسي العددي وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٥-٢٨) يُحصل على:

$$V_m = \frac{I\Omega}{4\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥٠)$$

ووحدة الجهد المغناطيسي العددي V_m في النظام العالمي هو الأمبير. ويمكن كتابة المعادلة (٥-٥٠) بالصورة التالية:

$$\therefore dV_m = \frac{1}{4\pi} I d\Omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥١)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٥-٢٦) يُحصل على:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \, dV_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥٢)$$

$$\therefore V_m = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\infty}^{P} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥٣)$$

قيمة V_m ليست واحدة، كما هو الحال بالنسبة للجهد الاستاتيكي، بل له قيم مختلفة فإذا ابتعدت P عن الحلقة شكل (٥ـ٨)، إلى ما لا نهاية (∞) في الجانب الموجب تغيرت Ω من قيمة موجبة أقل من 2π إلى الصفر، وتصبح قيمتها 2π إذا كانت P داخل الحلقة، فإذا مرت P داخل الحلقة واستمرت إلى الجانب الآخر فإن Ω ستصل قيمتها إلى 4π عندما تصل P إلى (∞).

أما إذا تحركت P حول الحلقة كما في الشكل (٥ـ٨) فستكون لـ Ω قيم سالبة وقيم موجبة ولذلك يمكن القول إنه إذا تحركت P في الجانب الآخر للحلقة ستصل قيمة Ω إلى الصفر عندما تكون P في اللانهاية وتصبح قيمتها (-2π) إذا كانت داخل الحلقة وهذا يعني أن لـ Ω قيم متعددة وتبعا لذلك تكون لـ V_m قيم متعددة أيضا. ويسمى الجهد المغناطيسي العددي بالجهد المغناطيسي الاستاتيكي (magnetostatic potential).

فإذا مر تيار كهربي I في حلقة دائرية صغيرة فإن الجهد المغناطيسي عند النقطة P كما في الشكل (٥ـ١٩) يحسب كالتالي:

قيمة الزاوية المجسمة Ω عند النقطة P المقابلة للسطح S المحاط بالحلقة الدائرية تحدده المعادلة (٢ـ٤٧) ملحق ٢، حيث:

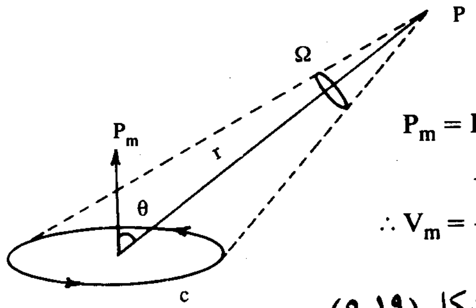
$$\Omega = \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٥٤)$$

وبالتعويض في المعادلة (٥ـ٥٠) يُحصل على:

$$V_m = \frac{I\,\vec{S} \cdot \vec{r}}{4\pi\, r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٥٥)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٢ـ٣٢) الخاصة بالجهد الاستاتيكي يمكن القول إن المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من تيار حلقي (current loop) صغير يماثل رياضيا المجال الكهربي الناتج عن ذي القطبين لأن كلا منهما تدرج للجهد الذي له التغير نفسه في الفراغ.

والمقدار I.S في المعادلة (٥-٥٥) يسمى بالعزم المغناطيسي للتيار الحلقي ويرمز له بالرمز P_m حيث:



شكل (٥-١٩): حساب V_m عند النقطة P التي تبعد مسافة r من حلقة صغيرة يمر بها تيار كهربي.

$$P_m = IS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥٦)$$

$$\therefore V_m = \frac{\vec{P}_m \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{P_m \cos\theta}{4\pi r^2} \quad \ldots \quad (٥\text{-}٥٧)$$

حيث θ هي الزاوية بين r و P_m كما في الشكل (٥-١٩).

وبالتعويض في المعادلة (٥-٤٩) يُحصل على:

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \frac{P_m \cos\theta}{4\pi r^2} \quad \ldots \quad (٥\text{-}٥٨)$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية حسب المعادلة (٢-٣٤) ملحق ٢، يُحصل على:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\, \vec{i}_r + \sin\theta\, i_\theta) \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٥٩)$$

(٥-٦-٢) الجهد المغناطيسي الاتجاهي **Magnetic vector potential**

المعادلة (٥-١٤) صحيحة لكل المجالات المستقرة (steady fields) ولذلك يمكن التعبير عن B بالمعادلة التالية:

$$B = \text{curl}\, A = \nabla \times A \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٦٠)$$

حيث A يسمى بالجهد المغناطيسي الاتجاهي ولموازنة هذه المعادلة بالمعادلتين (٥-١٢) و(٥-١٣) يُحصل على:

$$A = \oint \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٦١)$$

$$A = \oint \frac{\mu_0 J}{4\pi r} dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٦٢)$$

ولو أن المعادلتين (٥ـ٦١) و(٥ـ٦٢) تمكن من حساب A إذا عرف توزيع التيار إلا أنه من المفيد أن يحصل على المعادلة التفاضلية التي تحقق A ويتم ذلك كما يلي :

بالاستعانة بالمعادلة (٢ـ٢٦) ملحق ٢ ، يمكن كتابة $\nabla \cdot A$ للمعادلة (٥ـ٦١) بالصورة التالية :

$$\nabla \cdot A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla \cdot \left(\frac{dl}{r}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left[dl \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} (\nabla \cdot dl) \right]$$

والحد الأخير يساوي الصفر.

أما تكامل الحد الثاني فيمكن كتابته كالتالي :

$$-\oint_c \nabla \left(\frac{1}{R}\right) \cdot dl = -\oint_S \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R}\right) \cdot dS = 0$$

وذلك حسب المعادلتين (٢ـ٣٢) و(٢ـ٤٥) ملحق ٢ .

$$\therefore \nabla \cdot A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٦٣)$$

ويمكن كتابة المعادلة (٥ـ٦٠) بالصورة التالية :

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A)$$

وحسب المعادلة (٢ـ٢٤) الملحق ٢ ، يُحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad \ldots\ldots \quad (٥ـ٦٤)$$

ويُحصل من المعادلات (٥ـ٦٠)، (٥ـ٦٣)، (٥ـ٦٤) و(٥ـ٢٥) على :

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٦٥)$$

وإذا استخدمت الاحداثيات الديكارتية (x, y, z) فإن مركبات هذه المعادلة هي :

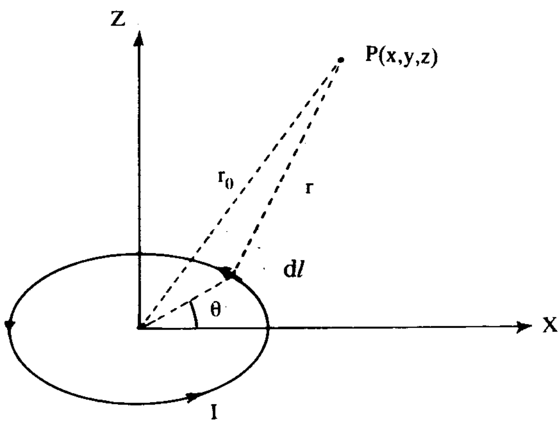
$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad و \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \; ، \; \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad .. \quad (٥ـ٦٦)$$

بمقارنة هذه المعادلة بمعادلة بواسون (٢ـ٥١) الخاصة بالجهد الكهربي نجد أن أيا من المعادلات (٥ـ٦٦) تحقق معادلة بواسون.

إذا مر تيار كهربي (I) في حلقة دائرية نصف قطرها a فإنه بتطبيق المعادلة (٥ـ٦١) يمكن حساب الجهد المغناطيسي الاتجاهي A عند النقطة P كالتالي :

نفرض أن $r_0\,(x, y, z)$ هي المسافة بين نقطة الأصل (مركز الحلقة) والنقطة P ، r المسافة بين العنصر dl و P وبمعرفة الزاوية θ كما في الشكل (٥ـ٢٠) فإن مركبات dl هي :

$$(-a d\theta \sin\theta\ ,\ a d\theta \cos\theta\ ,\ 0)$$



شكل (٥ـ٢٠): حساب الجهد المغناطيسي الاتجاهي $\vec{A}$ عند النقطة P.

وحيث إن :

$$r^2 = (x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\cos\theta - 2ay\sin\theta + a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\therefore r^2 = r_0^2 - 2ax\cos\theta - 2ay\sin\theta + a^2$$

$$\because a << r$$

$$\therefore r^2 = r_0^2 - 2ax\cos\theta - 2ay\sin\theta$$

$$\therefore r^2 = r_0^2\left\{1 - \frac{(2ax\cos\theta + 2ay\sin\theta)}{r_0^2}\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left\{1 - \frac{(2ax\cos\theta + 2ay\sin\theta)}{r_0^2}\right\}^{-1/2}$$

وبتطبيق نظرية ذات الحدين (٣) البند (٣-٦) ملحق ٣ نُحصل على:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\theta + ay\sin\theta}{r_0^3}$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٦١) نُحصل على:

$$A_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-a\sin\theta\, d\theta}{r}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\theta + ay\sin\theta}{r_0^3}\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$\therefore A_x = \frac{\mu_0(\pi a^2 I)}{4\pi}\left(\frac{y}{r_0^3}\right)$$

وبالمثل يكون:

$$A_y = \frac{\mu_0(\pi a^2 I)}{4\pi}\left(\frac{x}{r_0^3}\right) \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}٦٧)$$

$$A_z = 0$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi r_0^3}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right) \quad . \quad (٥\text{-}٦٨)$$

وحيث إن πa^2 مساحة الجزء المحاط بالمسار الدائري وحسب تعريف العزم المغناطيسي بالمعادلة (٥-٥٦) يكون:

$$P_m = \pi a^2 I$$

$$\therefore \vec{P}_m = \pi a^2 I\vec{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}٦٩)$$

حيث يتجه m مع محور z.

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{P}_m \times \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٧٠)$$

أما الحث المغناطيسي فيمكن حسابه باستخدام المعادلات (٥-٦٠) و(٥-٦٧) ومعادلة (٢-٢٠) ملحق ٢، حيث نحصل على:

$$B_x = \frac{3\mu_0 P_m}{4\pi} \frac{z}{r^5} x$$

$$B_y = \frac{3\mu_0 P_m}{4\pi} \frac{z}{r^5} y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٧١)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

كذلك يمكن كتابة قيم B باستخدام الاحداثيات القطبية.

(٥-٧) القوة بين دائرتين كاملتين

The Force between Two Complete Circuits

إذا مر تياران كهربيان I و I′ في دائرتين كهربيتين كاملتين C و C′ على التوالي كما في الشكل (٥-٢١) فإن القانون الأساسي التجريبي الذي يعطي القوة على الدائرة C الناتج عن الدائرة C′ يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$F_m = F_{C' \to C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I\, dl \times (I' dl' \times \vec{r})}{r^3} \quad \ldots \quad (٥\text{-}٧٢)$$

حيث $I dl$ و $I' dl'$ عنصري التيار في الدائرتين C و C′ على التوالي و r هي المسافة بين الدائرتين، وتسمى هذه المعادلة بقانون أمبير Ampere's law وهي تناظر قانون كولوم (٥-١) الخاص بالقوة بين شحنتين الوارد في الفصل الأول.

إذا كان هناك أكثر من دائرة تؤثر على الدائرة C فإن القوة على C تساوي المجموع الاتجاهي لكل القوى المؤثرة على الدائرة C أي أن:

$$F_C = F_{1\to C} + F_{2\to C} + \dots + F_{n\to C} = \sum_{C'=1}^{n} F_{C'\to C} \quad (٥\_٧٣)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (٥_٧٢) لتصبح :

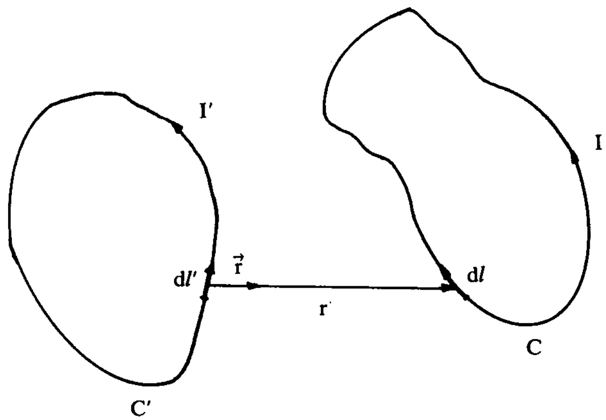
$$F_{C'\to C} = \oint_C I dl \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' dl' \times \vec{r}}{r^3} \right) \dots \quad (٥\_٧٤)$$

وبمقارنة الحد الأخير، الموجود بين القوسين، بالمعادلة (٥_٦) فإن المعادلة (٥_٧٤) تصبح :

$$F_{C'\to C} = \oint I dl \times B \quad \dots\dots\dots \quad (٥\_٧٥)$$

حيث B الحث المغناطيسي الناتج عن الدائرة C'. وتمثل المعادلة (٥_٧٥) القوة على كامل الدائرة C الناتجة عن تأثير الحث المغناطيسي B للدائرة C' ، ويرمز عادة للقوة المغناطيسية بالرمز F_m. وإذا أخذ بالاعتبار التأثير على العنصر الطولي dl فإن القوة عليه هي :

$$dF_m = I dl \times B \quad \dots \quad (٥\_٧٦)$$



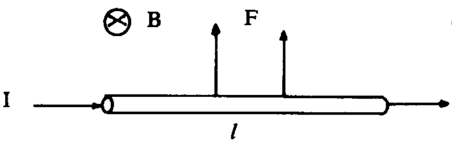
شكل (٥_٢١) : دائرتان كهربيتان C و C' تحملان تيارين كهربيين I و I' على التوالي.

وإذا وضع موصل طويل طوله l يمر به تيار I في مجال مغناطيسي حثه B كما في الشكل (٥-٢٢) فإن المعادلة (٥-٧٥) تصبح :

$$F_m = Il \times B = Il\,B \sin\phi \quad . . \ (٥\text{-}٧٧)$$

حيث ϕ الزاوية بين اتجاه B والموصل، وإذا كان الموصل عموديا على المجال فإن المعادلة (٥-٧٧) تصبح :

$$F_m = Il\,B \quad . . . \ (٥\text{-}٧٨)$$

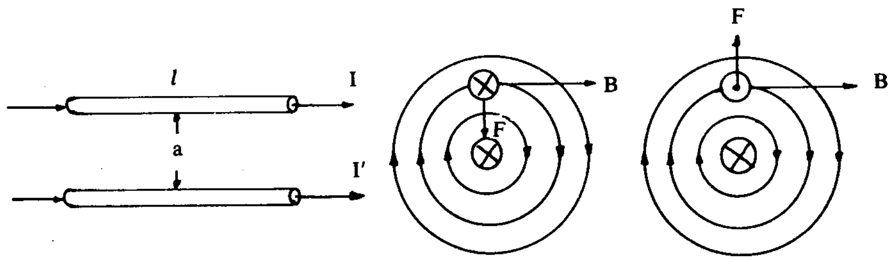


شكل (٥-٢٢): موصل معدني طوله l يمر به تيار I وواقع تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي حثه B الذي أكسبه قوة قدرها F تسببت في حركته.

ويتحدد اتجاه هذه القوة التي يتعرض لها الموصل باستعمال قاعدة اليد اليسرى، (الابهام والسبابة والوسطى متعامدة مع بعضها البعض كتمثيل المحاور الاحداثية المتعامدة x,y,z) ، حيث تشير السبابة إلى اتجاه المجال المغناطيسي والوسطى إلى اتجاه التيار أما الإبهام فتشير إلى اتجاه القوة.

وعند حساب القوة المؤثرة بين موصلين متوازيين يتبع ما يلي :

يبين شكل (٥-٢٣) جزءا من موصلين طويلين مستقيمين ومتوازيين تفصل بينهما المسافة a ويمر بهما التياران I ، 'I في الاتجاه نفسه فلما كان كل من الموصلين يقع في المجال المغناطيسي للموصل الآخر فإن التيار المار بأحد السلكين يحدث مجالا يؤثر بقوة ما على السلك الآخر.



شكل (٥-٢٣): تمثيل للقوة المؤثرة بين موصلين مستقيمين متوازيين يمر بكل منهما تيار شدته I و 'I.

ويبين الشكل (٥ـ٢٣) أيضا بعض خطوط القوى للموصل السفلي، ولما كان الحث المغناطيسي B عند السلك العلوي، حسب المعادلة (٥ـ٣١)، يساوي :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}$$

تكون القوة على السلك العلوي الذي طوله l نتيجة وجوده في مجال السلك السفلي هي :

$$F = I'Bl = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,I'}{a}l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٧٩)$$

وذلك حسب المعادلة (٥ـ٧٨) وتكون القوة المؤثرة على وحدة الأطوال هي :

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi a}I\,I' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٨٠)$$

وبالمثل يمكن إثبات صحة المعادلتين الأخيرتين بالنسبة للقوة المؤثرة على السلك السفلي نتيجة وجوده في مجال السلك العلوي ولهذا فإن القوة الناتجة قوة متبادلة بين السلكين وتكون قوة تجاذب إذا كان التيار يمر في السلكين في اتجاه واحد أما إذا اختلف اتجاه التيار في السلكين فإن القوة لها القيمة نفسها ولكنها قوة تنافر.

طبقا للمعادلة (٥ـ٨٠) فقد تم تعريف الأمبير في نظام (S.I) كالآتي :

(هو شدة ذلك التيار الذي إذا مر في سلكين متوازيين طويلين المسافة بينهما متر واحد حدثت قوة متبادلة قدرها 2×10^{-7} نيوتن لكل متر طولي من كل من السلكين) لأن القوة المؤثرة على وحدة الأطوال من كل منهما هي :

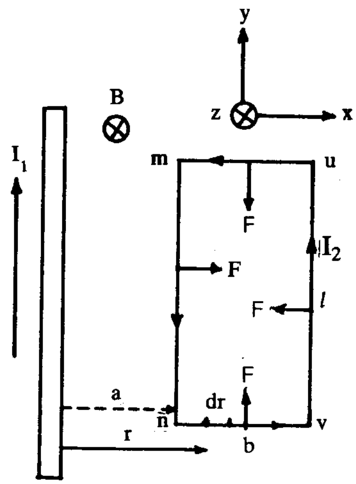
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}I\,I' = 2\times10^{-7}\times1\times1 = 2\times10^{-7}\ \text{N/m}$$

مــثــال (٥ـ٧)

حلقة موصلة ومستطيلة، طولها l وعرضها b ، ويمر بها تيار كهربي قيمته I_2. ما هي محصلة القوى المؤثرة عليها نتيجة وجودها قرب سلك طويل يمر به تيار كهربي مقداره I_1 وواقع في مستواه كما في الشكل التالي.

الحـــل

استخـدمت قاعـدة اليد اليمنى لتحـديد اتجـاه المجـال المغنـاطيسي B ، كما استخدمت قاعدة اليد اليسرى لتحديد اتجاه القوى المغناطيسية على أطوال الحلقة كما في الشكل.



لحساب القوة المؤثرة على الضلعين mn و vu نطبق المعادلة (٧٨ـ٥) وهي :

$$F = I\,l\,B$$

وتكون القوة بالنسبة للضلع mn على الصورة التالية :

$$\vec{F}_{mn} = I_2 l\, B_{mn} \vec{i} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{i} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}$$

أما بالنسبة للضلع vu فتكون :

$$\vec{F}_{vu} = I_2 l\, B_{vu}(-\vec{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(a+b)}(-\vec{i})$$

أما القوة المؤثرة على الضلع nv فلحسابها يُقسم هذا الضلع إلى أجزاء صغيرة طول كل جزء dr فتكون القوة المؤثرة على هذا الجزء:

$$dF = I_2\, dr\, B$$

$$\therefore \vec{F} = \int_a^{a+b} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\, dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{c} \vec{j}$$

وبالطريقة نفسها يمكن حساب F_{um} أي أن:

$$\vec{F}_{um} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{c} (-\vec{j})$$

وبذلك فإن محصلة القوى المؤثرة المطلوبة هي:

$$\vec{F} = (\vec{F}_{mn} + \vec{F}_{vu}) + (\vec{F}_{nv} + \vec{F}_{um})$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l\, b}{2\pi a\,(a+b)} \vec{i}$$

(٥ـ٨) القوة وعزم الازدواج على دائرة كهربية تحمل تيارا «ذو القطبين المغناطيسي»

Force and Torque on a Current Circuit (Magnetic Dipole)

إذا مر تيار كهربي قيمته I في لفة دائرية نصف قطرها a ، كما في الشكل (١٢٤ ـ ٥)، بحيث تقع الحلقة في المستوى x,z وسلط عليها مجال مغناطيسي حثه B في اتجاه المحور x فـإن القوة المؤثرة على العنصر dl هي:

$$dF_m = I\,dl\,B \sin\phi$$

وتكون في الاتجاه العمودي على الصفحة في اتجاه القارىء:

$$\because dl = a\,d\phi$$

$$\therefore dF_m = IBa \sin \phi \, d\phi \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٨١)$$

وتبين الأسهم في شكل (٢٤ب ـ ٥) كيفية تغير القوى المؤثرة على عناصر الطول dl من نقطة إلى أخرى على اللفة .

ويبلغ عزم الدوران حول المحور z نتيجة لتأثير القوة dF المقدار التالي :

$$d\tau = dFa \sin \phi = IBa^2 \sin^2 \phi \, d\phi$$

ويكون العزم الإجمالي :

$$\tau = \int d\tau = IBa^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi$$

وهذا التكامل الخاص يحسب باستخدام المعادلة (٣٧ـ٣) البند (٣ـ٧) الملحق ٣، أي أن :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\therefore \tau = IB\pi a^2 = ISB \quad \ldots\ldots \quad (٨٢\text{أ} - ٥)$$

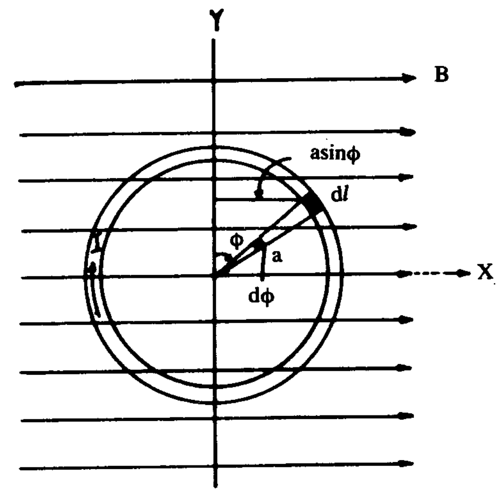
لأن مساحة الإطار هي $S = \pi a^2$.

وهـذه العـلاقة صحيحة مهما كان شكل الإطار ومادام مستويا وموازيا لكثافة التدفق المغناطيسي. أما إذا كان العمودي على الإطار يصنع زاوية قدرها θ مع المجال فإن المعادلة (٨٢أـ٥) تصبح كالتالي :

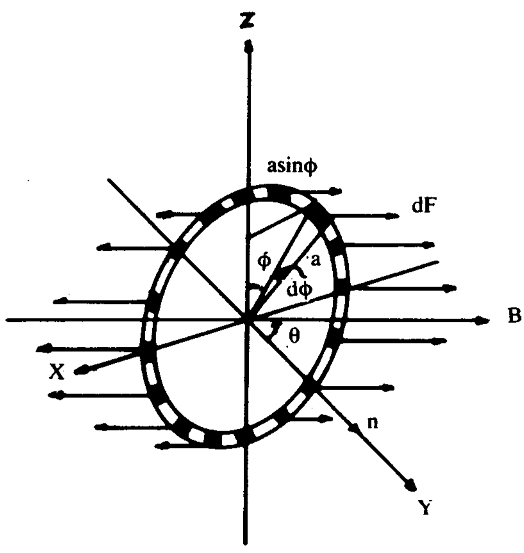
$$\tau = ISB \sin \theta = IS \times B \quad \ldots \quad (٨٢\text{ب} - ٥)$$

وهذا الازدواج يحرك أو يدير الملف .

وحسب المعادلة (٥٦ـ٥) فإن IS يسمى بالعزم المغناطيسي (magnetic moment) للتيار I وبذلك يمكن كتابة المعادلة (٨٢ب ـ ٥) كالتالي :



«أ»



«ب»

شكل (٢٤-٥): ا - لفة دائرية نصف قطرها a ويمر بها تيار شدته I يقع في المستوى XZ موضوعة في مجال مغناطيسي خارجي منتظم حثه B يتجه مع محور Z.
ب - تأثير المجال على الحلقة.

$$\tau = P_m B \sin\theta = P_m \times B \quad \ldots \quad (٨٢جـ - ٥)$$

وهذه المعادلة تناظر المعادلة (٦٢-٢) المتعلقة بعزم الازدواج لذي القطبين في مجال كهربي خارجي منتظم E.

كما يمكن بصورة مماثلة حساب طاقة الوضع من المعادلة (٨٢جـ - ٥) فيكون:

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} P_m B \sin\theta \, d\theta = P_m B(\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot\cdot \quad (١٨٣ - ٥)$$

وحيث إن طاقة الوضع تساوي الصفر عندما تكون $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ نجد أن:

$$U = -P_m B \cos\theta = -\vec{P}_m \cdot \vec{B} \quad .. \quad (٨٣ب - ٥)$$

وهي تناظر المعادلة (٦٦-٢) في حالة المجال الكهربي.

ويستنتج من المعادلتين (٨٢جـ - ٥) و(٨٣ب - ٥) أن حركة الملف تعتمد على العزم المغناطيسي P_m وعلى المجال المغناطيسي الخارجي الذي حثه B.

فإذا فرض أن P_m ثابتة، أي أن التيار I ثابت، وحدثت إزاحة صغيرة للملف قدرها dr فإن الشغل اللازم لهذه الإزاحة هو:

$$dU = Fdr$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (٨٣ب - ٥) يُحصل على:

$$Fdr = d(\vec{P}_m \cdot \vec{B}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨٤-٥)$$

وإذا استخدمت الاحداثيات الديكارتية للتعبير عن الإزاحة فإن:

$$dr = idx + jdy + kdz$$

$$Fdr = F_x dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

$$\therefore d\left(\vec{P}_m \cdot \vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(P_m \cdot B\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(P_m \cdot B\right) dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(P_m \cdot B\right) dz$$

ويُحصل من هذه المعادلة والمعادلة (٥ـ٨٤) على :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(P_m \cdot B\right) = P_{m_x}\frac{\partial B_x}{\partial x} + P_{m_y}\frac{\partial B_y}{\partial x} + P_{m_z}\frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \text{(٥ - ٨٥أ)}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(P_m \cdot B\right) = P_{m_x}\frac{\partial B_x}{\partial y} + P_{m_y}\frac{\partial B_y}{\partial y} + P_{m_z}\frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \text{(٥ - ٨٥ب)}$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(P_m \cdot B\right) = P_{m_x}\frac{\partial B_x}{\partial z} + P_{m_y}\frac{\partial B_y}{\partial z} + P_{m_z}\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{(٥ - ٨٥جـ)}$$

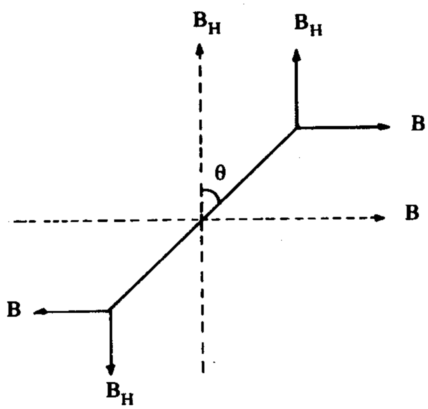
(٥ـ٩) جلفانومترا الظل وهيلمهولتز
Tangent and Helmholtz Galvanometers

(٥ـ٩ـ١) جلفانومتر الظل Tangent galvanometer

يستخدم جهاز جلفانومتر الظل لقياس شدة التيار الكهربي. ويقوم أساس عمله على التـأثير المغناطيسي للتيار الكهربي. ويتركب من ملف دائري من مادة النحاس المعزول عدد لفاته N لفة وإبرة مغناطيسية قصيرة في منتصف الملف، ترتكز على محور بحيث تتحرك أفقيا بسهولة في مستوى عمودي على مستوى الملف. ومثبت بالإبرة مؤشر خفيف من الألومنيوم عمودي على الإبرة ويبلغ طوله من ثلاثة إلى أربعة أمثال طول الإبـرة المغناطيسية ويتحرك طرفاه على تدريج دائري لقياس زوايا الانحراف ويوجد المؤشر داخل علبة أفقية تشبه علبة مغناطومتر الانحراف.

وتقوم نظرية الجلفانومتر على أساس أن كثافة الفيض المغناطيسي B الناتج عن مرور التيار I في الملف تكون منتظمة في حيز صغير جدا حول مركز الملف ولذلك يجب أن تكون الإبرة المغناطيسية صغيرة ما أمكن حيث يشملها المجال المنتظم.

وقبل استعمال الجلفانومتر يجب أن يوجه مستوي ملفه رأسيا في اتجاه الزوال المغناطيسي أي في اتجاه الإبرة التي تخضع لتأثير المركبة الأفقية لمجال الأرض B_H كما في شكل (٥-٢٥).



شكل(٥-٢٥): طريقة عمل جلفانومتر الظل.

وعند إمرار التيار I تصبح الإبرة خاضعة لمجالين متعامدين أحدهما المجال الأرضي B_H والآخر المجال B الناتج عن التيار فتنحرف الإبرة بزاوية قدرها θ كما في شكل (٥-٢٥) وطبقا لقانون الظل يكون ويستنتج من الشكل (٥-٢٥) ما يلي:

$$B = B_H \tan\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}٨٦)$$

وبالتعويض عن B من المعادلة (٥-٣٨) نحصل على:

$$\frac{\mu_0}{2}\,\frac{NI}{a} = B_H \tan\theta$$

$$\therefore I = \frac{2a\,B_H}{\mu_0 N}\tan\theta$$

$$I = C_g \tan\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}٨٧)$$

حيث C_g ثابت يعرف بمعامل اختزال الجلفانومتر (reduction factor) ويتوقف على تركيب الجلفانومتر والمكان المستخدم فيه. ونتيجة لظهور tanθ في المعادلات السابقة سُمي الجلفانومتر بجلفانومتر الظل.

ويزود الجلفانومتر عادة بعدد من الملفات وهي غالبا ما تكون لفتين أو ٥٠ لفة أو ٥٠٠ لفة ونهاياتها متصلة بمسامير توصيل مثبتة في قاعدة الجلفانومتر.

ويستعمل مع الجلفانومتر مفتاح عاكس ليعكس اتجاه التيار بحيث يمكن قياس انحـراف الإبـرة المغنـاطيسية θ مرتـين وفي اتجاهين مختلفين لكل قيمة واحدة للتيار والغرض من ذلك هو تفادي الأخطاء في زاوية الانحراف التي قد تنشأ عن :

ا ـ عدم انطباق مركز الإبرة على مركز المؤشر أو مركز التدريج .

ب ـ عدم انطباق مستوى الملف على مستوى الزوال المغناطيسي تماما .

جـ ـ وجود أي احتكاك عند نقطة ارتكاز الإبرة .

وحيث إن تقدير قيمة التيار تعتمد على مقدار زاوية الانحراف فإنه يراعى أن تكون قيمة θ في حدود $45°$ لأن الخطأ في $\tan\theta$ يكون كبيرا نتيجة أي خطأ صغير في زاوية الانحراف عندما تكون θ أكبر من $70°$.

ويقدر الخطأ النسبي بتفاضل المعادلة (٥ـ٨٧) فيحصل على :

$$dI = C_g \sec^2\theta \, d\theta$$

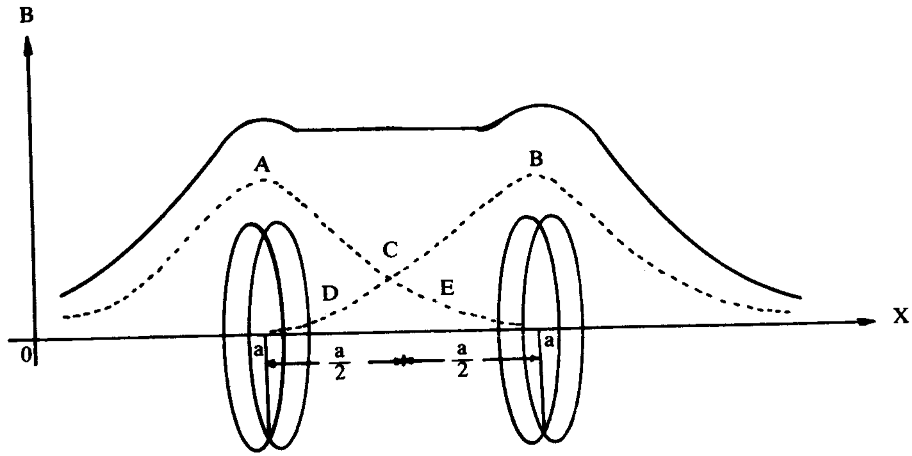
$$\therefore \quad \frac{dI}{I} = \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\tan\theta} = \frac{2\, d\theta}{\sin 2\theta} \qquad \ldots . \quad (٥ـ٨٨)$$

ويكـون الخـطأ النسبي $\frac{dI}{I}$ أصغـر ما يمكن عندما يكون $\frac{2\, d\theta}{\sin 2\theta}$ أصغر ما يمكن ، أي عندما يكون $\sin 2\theta = 1$ ومن ذلك نجد أن :

$$2\theta = 90° \quad \therefore \theta = 45°$$

(٥ـ٩ـ٢) جلفانومتر هيلمهولتز Helmholtz galvanometer

يتكون من ملفين متشابهين ومتساويين في نصف القطر وعدد اللفات ومتوازيين والمسافة بين مركزيهما تساوي نصف قطر أي منهما . توضع إبرة الجلفانومتر المغناطيسية عنـد منتصف المسـافـة بين المـركـزين حيث تقع في المنطقة التي يكون فيها المجال المغناطيسي منتظما . ويتصل سلكا الملفين على التوالي لكي يكون مرور التيار فيهما في اتجاه واحد وبذلك تكون محصلة مجالهما عند الإبرة مساوية ضعف التأثير الناتج عن الملف الواحد .



شكل (٥-٢٦): ملفا هيلمهولتز وثبوت المجال المغناطيسي بينها

وحسب المعادلة (٥-٣٧) فإن الحث المغناطيسي عند نقطة تبعد x من مركز ملف دائري نصف قطره a وعدد لفاته N ويمر به تيار I يعطى بالمعادلة:

$$B = \frac{\mu_0}{2} N . I \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}٨٩)$$

وقد وجد أن المنطقة التي يكون عندها معدل تغير المجال المغناطيسي بالنسبة للمسافة على امتداد المحور الأساسي للملف ثابتا هي $x = \frac{a}{2}$ وفي هذه المنطقة لابد وأن يكون:

$$\frac{dB}{dx} = \text{constant} \quad \& \quad \frac{d^2B}{dx^2} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}٩٠)$$

وبتفاضل المعادلة (٥-٨٩) مرتين يُحصل على:

$$\frac{dB}{dx} = K \frac{d}{dx} (a^2 + x^2)^{-3/2} = K \left\{ -\frac{3}{2} (a^2 + x^2)^{-5/2} 2x \right\}$$

$$\therefore \frac{dB}{dx} = -3Kx (a^2 + x^2)^{-5/2} = \text{constant}$$

حيث :

$$K = \frac{1}{2}\mu_0 N I a^2$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -3K \frac{d}{dx}\left\{x\,(a^2 + x^2)^{-5/2}\right\} = 0$$

$$-3K\left\{(a^2 + x^2)^{-5/2} - 5x^2\,(a^2 + x^2)^{-7/2}\right\} = 0$$

ومنه يُحصل على :

$$\therefore 5x^2 = a^2 + x^2$$

$$\therefore x = \pm\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٩١)$$

وبذلك يكون المجال المغناطيسي منتظما عند منتصف المسافة بين الملفين .

ويتضح من الشكل (٥ـ٢٦) أنه عند النقطة C التي تبعد مسافة $\frac{a}{2}$ من مستوى الملف يكون معدل تغير المجال على امتداد المحور الأساسي ثابتا ويعوض نقص المجال بالنسبة لأحد الملفين على صورة زيادة في المجال بالنسبة للملف الآخر حيث يمثل ACE المجال بالنسبة للملف A ويمثل BCD المجال بالنسبة للملف B كما يمثل المنحنى المستمر محصلة المجال المغناطيسي في الحيز بين الملفين ويشير الجزء المستقيم إلى انتظام المجال فوق منطقة كبيرة نسبيا .

بوضع $x = \frac{a}{2}$ في المعادلة (٥ـ٨٩) يُحصل على محصلة كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن الملفين أي أن :

$$B = 2\,.\,\frac{\mu_0}{2}\,NI\,\frac{a^2}{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\therefore B = \mu_0 \frac{8NI}{5\sqrt{5}\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٩٢)$$

ولقياس شدة التيار يوجه مستوى الملفين في اتجاه الزوال المغناطيسي وعندئذ يمر التيار فيهما فتتحرك الإبرة زاوية قدرها θ ويكون :

$$B = B_H \tan\theta \quad \ldots (٥\text{-}٩٣)$$

حيث B_H المركبة الأفقية للمجال المغناطيسي للأرض وبتساوي المعادلتين (٥-٩٢)، (٥-٩٣) يُحصل على :

$$B_H \tan\theta = \mu_0 \frac{8NI}{5\sqrt{5}\,a}$$

$$I = \frac{5\sqrt{5}\,a\,B_H}{8\,\mu_0 N} . \tan\theta = C_g \tan\theta \quad \ldots (٥\text{-}٩٤)$$

حيث C_g ثابت يعرف بمعامل اختزال الجلفانومتر ويتوقف على تركيب وأبعاد الملفين المتماثلين وعلى المكان المستخدم فيه .

ويفضل جلفانومتر هلمهولتز عن جلفانومتر الظل للأسباب التالية :

١ - كثافة الفيض المغناطيسي عند إبرة جلفانومتر هلمهولتز تفوق كثيرا نظيرتها عند إبرة جلفانومتر الظل .

٢ - يغطى المجال المنتظم مسافة أكبر في جلفانومتر هلمهولتز عنها في جلفانومتر الظل ولذلك لا يستوجب استخدام إبرة مغناطيسية صغيرة .

مـــثـــال (٥-٨)

يحتوي كل ملف في جلفانومتر هلمهولتز على 50 لفة نصف قطرها في المتوسط 16 سم . فإذا مر تيار شدته 0.1 أمبير في الجلفانومتر انحرفت الإبرة °45 أوجد قيمة B_H.

الحـــــل

$$I = \frac{5\sqrt{5}\,a}{8\,\mu_0 N} B_H \tan\theta$$

$$0.1 = \frac{5\sqrt{5} \times 8 \times 10^{-2} \times 7}{8 \times 4 \times 22 \times 10^{-7} \times 50} B_H \tan 45°$$

$$B_H = 2.81 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$$

(٥-١٠) الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية
Charged Particles in Magnetic Fields

(٥-١٠-١) الشحنات النقطية المتحركة Moving point charges

ذكر في البند (٤-١) أنه يمكن التعبير عن التيار الكهربي بدلالة الشحنات المتحركة داخل الموصل. فإذا كانت n عدد الشحنات المتحركة في وحدة الحجوم و q شحنة كل منها و v سرعتها فإن:

$$I = n\,q\,v\,S$$

حيث S مساحة مقطع الموصل. فإذا كان dl عنصر الطول من الموصل فإن:

$$I\,dl = n\,q\,v\,S\,dl = vQ \qquad \ldots (٥\text{-}٩٥)$$

حيث Q الشحنة الكلية المتحركة داخل الموصل. وبالتعويض في المعادلة (٥-٦) نحصل على:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \Sigma \frac{Q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \Sigma \frac{Qv \sin\theta}{r^2} \ldots \quad (٥\text{-}٩٦)$$

حيث θ الزاوية بين r و v. أما B فيتجه في الاتجاه العمودي على المستوى المحدد بالكميتين r و v.

وتسمى هذه المعادلة بقاعدة بيوت (Biots rule) وهي تعد أحيانا نقطة البداية في دراسة المجال المغناطيسي الناتج حول الشحنات المتحركة (التيار) ويمكن اتخاذها وسيلة لتعريف الحث المغناطيسي بدلا من المعادلة (٥-٦).

ولنفترض الآن أن شحنتين Q و Q′ تتحركان بالسرعتين v ، v′ وتفصل بينهما

المسافة r عندئذ يبلغ المجال الناتج عن الشحنة Q عند النقطة التي تشغلها الشحنة Q' المقدار:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}٩٧)$$

أما القوة على الشحنة Q' فيمكن حسابها من المعادلتين (٥-٧٥) و(٥-٩٥) حيث:

$$F_m = \left[Q'v'\right]\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}\right] \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٩٨)$$

ويُحصل من المعادلتين (٥-٩٧) و(٥-٩٨) على:

$$F_m = Q'\vec{v}'\times\vec{B} = Q'v'B\sin\phi \quad \ldots\ldots \quad (٥\text{-}٩٩)$$

حيث ϕ الزاوية بين v' و B' أما القوة المغناطيسية F_m فتتجه في المستوى العمودي على المستوى الذي يحتوي على v' و B. ومركبات F_m على المحاور الديكارتية هي:

$$\begin{aligned} F_{m_x} &= Q'\,(v_y B_z - v_z B_y) \\ F_{m_y} &= Q'\,(v_z B_x - v_x B_z) \quad \ldots\ (٥\text{-}١٠٠) \\ F_{m_z} &= Q'\,(v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned}$$

ويمكن مقارنة المعادلة (٥-٩٨) بقانون كولوم الذي يعبر عن القوى الكهربية بين الشحنتين Q و Q' حيث نجد من المعادلتين (٥-١) و(١-١١) أن:

$$F_e = \left[Q'\right]\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,.\,\vec{r}}{r^3}\right] = Q'E \quad \ldots\ (٥\text{-}١٠١)$$

فالقوس الأول في المعادلتين (٥-١٠١) و(٥-٩٨) يمثل الشحنة Q' بينما يمثل القوس الثاني المجال الناتج عن الشحنة Q.

ولذلك إذا وجدت شحنة في مجال كهربي E فإنها ستتحرك متأثرة بقوة استاتيكية مقدارها F_e ، حسب المعادلة (٥-١٠١). وإذا تحركت في مجال مغناطيسي فإنها تتأثر بقوة

مغناطيسية مقدارها F_m ، حسب المعادلة (٥ـ٩٩). أما إذا وجدت في مجالين كهربي ومغناطيسي فإن القوى المؤثرة عليها تساوي محصلة القوة الكهربية والقوة المغناطيسية أي أن :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q'E + Q'v\,B\sin\theta = Q'[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (٥ـ١٠٢)$$

أما في النظام الجاووسي فإن المعادلة (٥ـ١٠٢) يمكن كتابتها كالتالي :

$$F = Q'\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right) \quad \ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٣)$$

هذه المعادلة مهمة وتسمى بقوة لورنتز (Lorentz force).

(٥ـ١٠ـ٢) مدارات الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية

Orbits of charged particles in magnetic fields

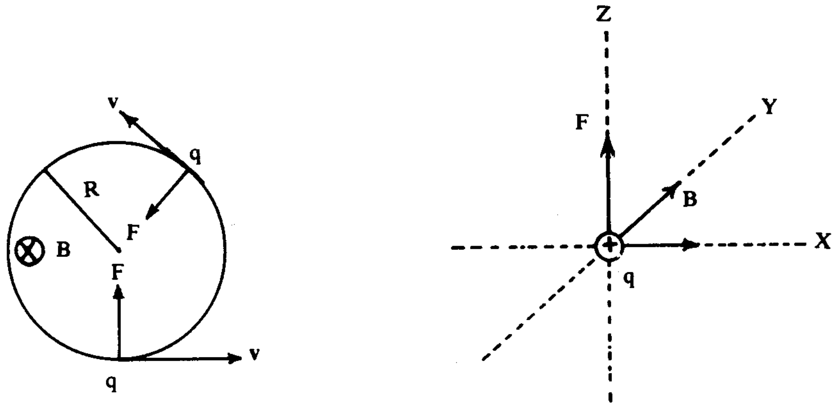
إذا وضع جسيم مشحون بشحنة موجبة (+q) في مجال مغناطيسي منتظم B وكانت سرعته v في اتجاه عمودي على المجال، كما في شكل (٥ـ٢٥)، فإنه سيتأثر بقوة، حسب المعادلة (٥ـ٩٩)، مقدارها :

$$F = q\,v\,B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٤)$$

ويكون اتجاهها إلى أعلى طبقا لقاعدة اليد اليسرى. ولما كانت القوة عمودية على السرعة فإنها لا تغير من مقدار هذه السرعة ولكنها تغير من اتجاهها فيتغير موضع الجسيم واتجاه القوة المؤثرة عليه بينما تظل مقادير الكميات q ، v ، B ثابتة.

وهكذا فإن الجسيم يتحرك بتأثير قوة ثابتة المقدار وتتجه دائما في الاتجاه العمودي على اتجاه السرعة. ولذا فإن مسار هذا الجسيم يكون على شكل دائرة نصف قطرها R، ونتيجة لهذه الحركة الدورانية تخضع الشحنة q لقوتين متعاكستين إحداهما القوة المغناطيسية F متجهة إلى مركز الدوران. والأخرى قوة طرد مركزية F' مقدارها :

$$F = ma = m\,\frac{v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٥)$$



شكل (٢٧ـ٥): شحنة موجبة q+ متحركة سرعتها v وضعت في مجال مغناطيسي منتظم حثه B بحيث كان اتجاه v عمودي على اتجاه B.

وتبقى الشحنـة q متحـركة في مسارها الدائري إذا تساوت F و F′ ولذلك يُحصل من المعادلتين (٥ـ١٠٤) و(٥ـ١٠٥) على:

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{Bq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٦)$$

$$\because\ v = \omega R$$

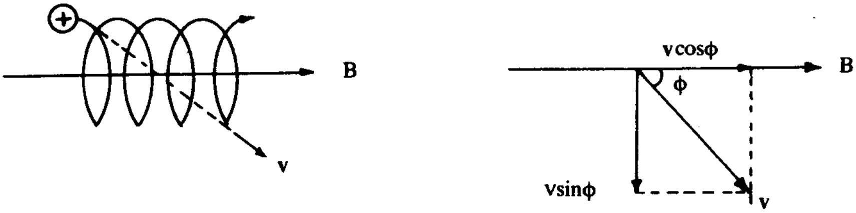
$$\therefore\ \omega = \frac{qB}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٧)$$

حيث m كتلة الجسيم و ω سرعته الزاوية (angular velocity).

وإذا كان اتجاه السرعة غير متعامد على اتجاه المجال ولكنه يصنع زاوية φ فإن هذا سيؤدي إلى دوران الشحنة في مسار حلزوني محوره متفق مع اتجاه المجال كما في شكل (٢٨ـ٥) ويكون نصف قطر مقطع الحلزون:

$$R = \frac{mv \sin\phi}{Bq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ١٠٨)$$

حيث v sin φ تمثل المركبة العمودية للسرعة والتي تؤدي إلى المسار الدائري أما المركبة الأخرى v cos φ فلن تتأثر بهذا المجال ويظل اتجاهها ثابتا في اتجاه المجال أي في اتجاه المحور الحلزوني. وهذه المركبة هي التي تؤدي إلى جعل شكل المسار حلزونيا.



شكل (٢٨ـ٥): يماثل الشكل (٢٧ـ٥) عدا أن اتجاه السرعة v ليس متعامدا على اتجاه المجال ولكنه يصنع زاوية قدرها Ø

مـثـال (٩ـ٥)

يتحـرك إلكـترون على المحـور x بسرعـة قدرهـا 1.00×10^{7} m/s سلط مجال مغناطيسي قيمة حثه B تساوي 2.50×10^{-4}N/A.m في اتجاه المحور z ·

ا ـ احسب قيمـة واتجـاه القـوة المغنـاطيسية على الإلكـترون ومـا هي قيمـة المجال الاستاتيكي الذي تحتاجه للحصول على قوة استاتيكية مساوية للقيمة نفسها.

ب ـ احسب نصف قطر المدار.

جـ ـ احسب السرعة الزاوية.

الحـــل

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,(v_x\,\vec{i} \times B_z\,\vec{k}) = q\,v_x\,B_z\,(\vec{i} \times \vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = -q\,v_x\,B_z\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = -(-1.602 \times 10^{-19})\,(1.00 \times 10^{7})\,(2.5 \times 10^{-4})j = (4.0 \times 10^{-16}\text{N})\,\vec{j}$$

ومعنى ذلك أن قيمة القوى تساوي 4.0×10^{-16} نيوتن واتجاهها على محور y وفي الاتجاه الموجب. أما المجال الكهربي الناتج عن مقدار القوة نفسه فهو:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{4 \times 10^{-16}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.50 \times 10^{3}\text{V/m}$$

$$R = \frac{mv^2}{F_m} = \frac{9.11\times10^{-31}\times10^{14}}{4\times10^{-16}} = 2.28\times10^{-1}\text{m} = 0.228\text{m}$$

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{1.602\times10^{-19}\times2.5\times10^{-4}}{9.11\times10^{-31}} = 4.4\times10^{7}\ \text{rad/s}$$

مثال (١٠-٥)

جسم مشحون بشحنة قيمتها $q = 3.00 \times 10^{-8}$ C يسير بسرعة v مركباتها هي $v_z = 0$ ، $v_y = 50$ m/s و $v_x = 20$ m/s وفي مجال مغناطيسي منتظم B فكانت مركبات القوة F المصاحبة لذلك هي $F_x = 37.5 \times 10^{-8}$ N ، $F_y = -15.0 \times 10^{-8}$ N و $F_z = -60.0 \times 10^{-8}$ N . أما إذا وضعت هذه الشحنة في المجال نفسه وبسرعة v' مركباتها $v'_y = 30$ m/s ، $v'_x = 10$ m/s و $v'_z = 0$ وكانت مركبات القوة F' هي $F'_y = 7.5 \times 10^{-8}$ N ، $F'_x = 22.5 \times 10^{-8}$ N و $F'_z = 36.0 \times 10^{-8}$ N.

احسب قيمة المجال المغناطيسي واتجاهه.

الحل

(١)	$F'_x = q\, v'_y\, B_z$	$F_x = q\, v_y\, B_z$
(٢)	$F'_y = -\, q\, v'_x\, B_z$	$F_y = -\, q\, v_x\, B_z$
(٣)	$F'_z = q\,(v'_x B_y - v'_y B_x)$	$F_z = q\,(v_x B_y - v_y B_x)$;

وواضح من هذه المعادلات أنه يمكن حساب B_z من المعادلات ١ و٢ أما المركبتين B_x ، B_y فيمكن حسابها من المعادلتين (٣).

$$\therefore B_z = \frac{F_x}{qv_y} = \frac{37.5\times10^{-8}}{(3.0\times10^{-8})(50)} = 0.25\ \text{N/A . m}$$

وكذلك :

$$20\,B_y - 50\,B_x = -20$$

$$10\,B_y - 30\,B_x = -12$$

$$\therefore B_x = 0.4\ \text{N/A . m} \quad \& \quad B_y = 0$$

$$\therefore B = \left(B_x^2 + B_z^2\right)^{1/2} = \left\{(0.4)^2 + (0.25)^2\right\}^{1/2} = 0.472\ \text{N/A . m}$$

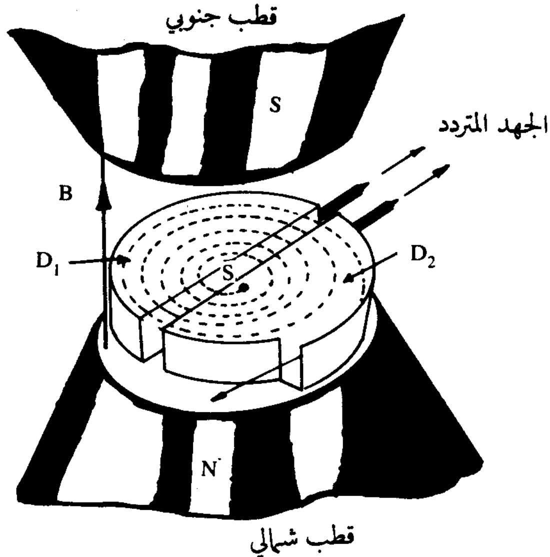
(٥-١١) تطبيقات على حركة الشحنة في مجال مغناطيسي

(٥-١١-١) السيكلوترون *Cyclotron*

جهاز السيكلوترون يعتبر من الوسائل المستخدمة لكي تكتسب الجسيمات المشحونة سرعة عالية جدا وبالتالي طاقة عالية جدا يستفاد منها في قذف الذرة لإجراء تفاعلات نووية صناعية. وتم صنعه لأول مرة عام ١٩٣١م صنعه كل من الدكتور ارنست لورنس (Ernest O. Lawrence) والدكتور استانلي لفنجستون (Stanley Livingston) في جامعة كاليفورنيا. وتقوم نظريته على تعجيل البروتونات بواسطة مجال كهربي قوي وجعل مسارها في شكل دائري بواسطة مجال مغناطيسي منتظم شديد.

ويتركب هذا الجهاز من حجرتين منفصلتين معدنيتين D_1 و D_2 على شكل حرف D ، شكل (٥-٢٩)، يسلط بينهما فرق جهد متردد V ويوضع منبع الجسيمات المشحونة S في مركز الجهاز وهذه الجسيمات عبارة عن إيونات موجبة مثل البرتون والديوترون (deuterons) ويسلط مجال مغناطيسي،حثه المغناطيسي B،عموديا على مستوي الرسم فتبدأ الإيونات الموجبة في السير (بتأثير المجال المذكور) في مسار دائري نصف قطره R ، فإذا فرض أن m كتلة الإيون الموجب الذي شحنته q وسرعته v ، فإن R تحدد من المعادلة (٥-١٠٦).

ويضبط تردد مصدر الجهد V بحيث ينعكس اتجاهه في اللحظة التي ينتقل فيها الإيون الموجب من D_1 إلى D_2 وبالعكس. ومعنى هذا أنه لو كان D_1 سالب الجهد، D_2 موجب الجهد فإن الإيون الموجب الشحنة سيتجه أثناء دورانه إلى D_1 وحينما يتم نصف دورة داخل D_1 يدخل إلى D_2 التي يتغير جهدها عند هذه اللحظة إلى جهد سالب وبهذا يظل الإيون في دورانه منطلقا بسرعة أكبر، وهكذا يتم تعجيل الإيون بوساطة فرق الجهد V بين الحجرتين وذلك في كل مرة ينتقل فيها الإيون بين الحجرتين وبهذا تزداد السرعة v تدريجيا وبالتالي يزداد نصف قطر المسار R ، طبقا للعلاقة السابقة، تدريجيا حتى يخرج الإيون في النهاية بطاقة عالية جدا قد تصل إلى عشرة ملايين إلكترون فولت أو أكثر رغم أن فرق الجهد المسلط لا يتعدى عشرة كيلوفولت.



شكل (٢٩ـ٥): السيكلوترون

والسرعة الزاوية للإيون الموجب داخل جهاز السيكلوترون طبقا للمعادلة (١٠٧ـ٥) هي:

$$\omega = B \frac{q}{m}$$

ويلاحظ هنا أن السرعة الزاوية التي يتحرك بها الإيون الموجب لا تعتمد على كل من نصف قطر المسار R وسرعة v ولكن تعتمد فقط على الحث المغناطيسي B والنسبة بين شحنة الإيون وكتلته q/m.

بفرض أن أقصى سرعة وصل إليها الإيون الموجب عندما كان بالقرب من حافة نصف العلبة D_1 وقبل خروجه من الفتحة الجانبية المخصصة لذلك هي v_{max}. وطبقا للعلاقة (١٠٦ـ٥) نجد أن هذه السرعة القصوى تعطى بالمعادلة:

$$v_{max} = BR' \frac{q}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٠٩)$$

حيث R' في هذه الحالة تساوي نصف قطر D_1.

ولكن متوسط الطاقة الحركية للإيون الموجب تعطى بالعلاقة:

$$W_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

وبالتعويض من المعادلة (٥-١٠٩) عن v_{max} نُحصل على:

$$W_{max} = \frac{1}{2} m \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 R'^2$$

ولكن هذه الطاقة الحركية القصوى يمكن معادلتها بالطاقة المكتسبة للإيون الموجب نتيجة لعملية التعجيل.

أي أن:

$$\because W_{max} = qV$$

$$\therefore V = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B^2 . R'^2 \quad ...... \quad (٥\text{-}١١٠)$$

وهذا هو فرق الجهد المطلوب لإنتاج طاقة الحركة نفسها في دفعة واحدة. فإذا كانت الإيونات عبارة عن بروتونات فإن:

$$\frac{q}{m} = 9.6 \times 10^7 \text{ C/kg}$$

وكانت قيمة الحث المغناطيسي B ونصف القطر هما:

$$B = 1.3 \text{ Wb/m}^2$$

$$R' = 0.48 \text{ m}$$

فبالتعويض في المعادلة (٥-١١٠) نُحصل على الجهد التالي:

$$V = \frac{1}{2} \times 9.6 \times 10^7 \times (1.3)^2 \times (0.48)^2$$

$$\therefore V = 19 \times 10^6 \text{ V}, \qquad \text{or} \qquad 19 \text{ million V}$$

وهـذا يبـين أنـه يلزم لتعجيل الإيونـات للحصول على الطاقة الحركية نفسها للإيونات المندفعة خارج الجهاز فرق جهد يساوي تسعة عشر مليونا من الفولت وهذا الجهد العالي لا يمكن الحصول عليه إلا بواسطة بعض الأجهزة الحديثة مثل جهاز فان دي جراف (Van de Graaf generator) الذي يمكنه توليد جهد يصل إلى حوالي ١٠ مليون فولت فقط.

ملـحوظـة

حيث إن الإيون لابـد وأن تكـون سرعته الزاوية ثابتة حتى يصل الإيون إلى مدخل كل حجرة في اللحظة نفسها التي ينعكس عندها جهد الحجرتين. فإن معنى هذا أن تظل m, q, B حسب العـلاقـة (٥ـ١٠٧) ثابتة ولكن m سوف تزداد بازدياد السرعـة (v) أثنـاء التعجيل المتـواصل، طبقا للنظرية النسبية لأينشتين مما يؤدي إلى التعارض مع نظرية عمل الجهاز.

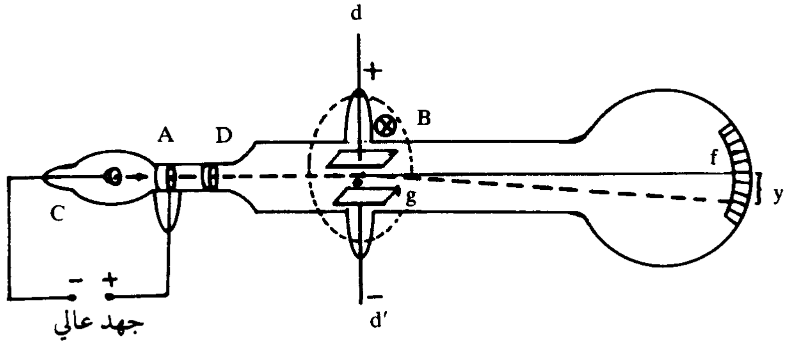
وهـذا التغيير في الكتلة يكون واضحا في حالة الإلكترونات ولهذا لا يستخدم الجهاز في تعجيل الإلكترونات.

(٥ـ١١ـ٢) *قياس الشحنة إلى الكتلة (q/m) للالكترون*

Measurement of (q/m) of the electron

السـير طومسـون (Sir J. J. Thomson) عام ١٨٩٧م اكتشف الإلكترون أثناء دراسة لأشعة المهبط واستخدم الجهاز المبين بالشكل (٥ـ٣٠) لتعيين نسبة الشحنة إلى الكتلة للالكترون. ويتركب هذا الجهاز من أنبوبة مفرغة تحتوي على مهبط C ومصعد مثقوب A مسلط بينهما فرق جهد V يصل إلى بضعة آلاف فولت. وبهذا تتجه الإيونات الموجبة (المتكونة في الغاز المتبقي في الأنبوبة بفعل الأشعة الكونية أو تأثير عامل مشع) إلى المهبط A بسرعة كبيرة لتأثرها بالمجال الكهربي المسلط بين المهبط والمصعد، وحينما تصطدم هذه الإيونات الموجبة بالمهبط فإنها سوف تعمل على تحرير الإلكترونات من مادة المهبط وهذه الإلكترونات تنطلق متجهة إلى المصعد A بسرعة عالية نتيجة تأثرها بالمجال الناشىء عن فرق الجهد V وتنفذ من المصعد إلى قرص آخر D مثقوب وبذلك تسير على

هيئة شعاع إلكتروني مستقيم (يطلق عليه شعاع المهبط cathode ray). وهذه العملية الميكـانيكية لتحـرير الإلكـترونـات من سطح المهبط تسمى بالانبعـاث الثـانـوي (secondary emission) وهذا الشعاع يمر خلال لوحين d, d′ مسلط بينهما مجال كهربي رأسي شدته E يؤدي إلى انحراف الشعاع إلى أسفل.



شكل (٥-٣٠): جهاز طومسون لتعيين النسبة q/m للإلكترون.

وبتسليط مجال آخر مغناطيسي منتظم كثافة فيضه B في الاتجاه المبين بالشكل (٥-٣٠) فإن الشعاع سينحرف إلى أعلى.

فإذا أمكن التحكم في قيمـة المجالين الكهربي والمغناطيسي بحيث لا ينحرف الشعاع الإلكتروني أثناء مروره في منطقة نفوذ المجالين بين اللوحين d, d′ فإن الشعاع سوف يسير مستقيما دون أي انحراف متجها إلى شاشة ومضية حيث يصطدم بها عند النقطة f وفي هذه الحالة تكون:

$$F_e = F_m$$

$$qE = q\,v\,B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}١١١)$$

$$\therefore v = \frac{E'}{B}$$

وبهذا تحسب سرعة الإلكترونات v وهي السرعة التي خرج بها من ثقب المصعد ودخل بها في منطقة النفوذ بين اللوحين.

وإذا حذف الآن المجال الكهربي E وترك المجال المغناطيسي B فقط يؤثر وحده على الشعاع الإلكتروني فإن هذا الشعاع ينحرف إلى أعلى متخذا مسارا على هيئة قوس من دائرة نصف قطرها R تعطى قيمته من المعادلة (٥ـ١٠٦).

وبالتعويض عن v من المعادلة (٥ - ١١١) في المعادلة (٥ - ١٠٦) يُحصل على:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2} \quad .... \quad (٥\text{ـ}١١٢)$$

حيث B, E معلومتان أما R فيمكن معرفته من المعادلة التالية:

$$R = \frac{(l/2 + l')\,l}{y}$$

حيث $gf=l', og=l/2$ و y مقدار الإزاحة على الشاشة كما في شكل (٥ـ٣٠) وبهذا يمكن حساب R. وبالتعويض بقيمتها في المعادلة (٥ـ١١٢) تحسب النسبة بين شحنة الإلكترون وكتلته (e/m). وطبقا لأحدث التجارب لايجاد هذه النسبة بطريقة طومسون وجد أن هذه النسب تساوي:

$$\frac{e}{m} = 1.7592 \times 10^{11}\ C/kg$$

حيث غالبا يرمز لشحنة الإلكترون بالرمز e.

ملاحظات على تجربة طومسون

ا ـ يمكن حذف المجال المغناطيسي «بعد الانتهاء من تعيين v» بدلا من حذف المجال الكهربي ولهذا فإن الشعاع الالكتروني سوف يتأثر فقط بالمجال الكهربي E وينحرف إلى أسفل بمسافة معينة تعطى بالعلاقة (١ـ٧٧) حيث:

$$y = \frac{e}{m}\,\frac{El}{v^2}\left(\frac{1}{2}l + l'\right) \quad ..... \quad (٥\text{ـ}١١٣)$$

وبالتعويض عن v يمكن حساب $\frac{e}{m}$.

ب ـ يمكن اعتبار أن الشغل المبذول على الإلكترونات بواسطة تسليط فرق الجهد V بين المهبط والمصعد يتحول كله إلى طاقة حركة يصل بها الإلكترون إلى ثقب المصعد بسرعة v.

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 \quad \therefore \frac{e}{m} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{V} \quad \ldots \quad (٥\text{-}١١٤)$$

جـ ـ لقد تم تطوير أنبوبة أشعة المهبط لتأخذ شكلا حديثا يستخدم في أجهزة التليفزيون وراسم الذبذبات الكاثودي (cathode ray oscillograph) وتتميز عن أنبوبة طومسون بأن الإلكترونات تنبعث بتسخين المهبط لدرجة حرارة عالية وهذا الانبعاث يسمى بالانبعاث الحراري (thermo-ionic emission).

ويمثل الشكل (٣١ـ٥) طريقة جديدة لقياس e/m وباتباع طريقة طومسون نفسها ولكن باستعمال صمام إلكتروني ثلاثي والذي يحتوي على مدفع إلكترونات (electron gun) يتكون من :

١ ـ مهبط cathode (C) يعمل على انبعاث الإلكترونات بطريقة تسخين الفتيلة (F).

٢ ـ الشبكة grid (G) جهدها موجب صغير وتعمل على تركيز شعاع الإلكترونات.

٣ ـ المصعد plate (P) جهده موجب عالٍ مقداره V ، يعمل على تسارع الإلكترونات.

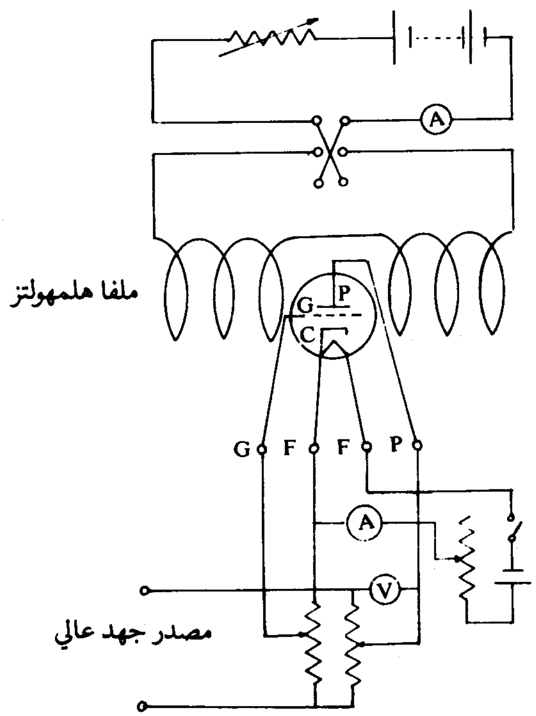
يوجد أعلى المدفع قرص دائري مثبت أفقيا يخرج من خلال ثقب في منتصفه شعاع الإلكترونات بشكل عمودي على القرص. وفي السطح العلوي للقرص توجد حول الثقب أربع دوائر مركزها الثقب وأنصاف أقطارها R=0.5cm, 1.0cm, 1.5cm and 2.0cm ويحتوي الصمام على غاز خامل يسبب رؤية شعاع الإلكترونات.

ويوجد حول الصمام ملفا هلمهولتز لتوليد مجال مغناطيسي حثه B تتوقف قيمته

على شدة التيار I ، بند (٥-٢)، يعمل على ثني شعاع الإلكترونات ليكون نصف دائرة نصف قطرها R وتكون قيمته إحدى القيم الأربع السابقة الذكر. (يعتمد مقدار انحناء شعاع الإلكترونات على قيمة B و V).

يمكن حساب e/m بتطبيق العلاقتين (٥-١٠٦) و(٥-١١٤) حيث يُحصل على :

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥\text{-}١١٥)$$



شكل (٥-٣١): صمام إلكتروني ثلاثي وملفا هلمهولتز لتعيين النسبة e/m.

(٥-١١-٣) تأثير هول *Hall effect*

يستخدم تأثير هول في تعيين درجة تركيز الإلكترونات الحرة (free electrons) في المعادن وأشباه الموصلات.

صفيحة معدنية رقيقة سمكها d وعرضها a يمر بها تيار شدته I في اتجاه x كما في شكل (٣٢ـ٥). فإذا قيس الجهد V في الاتجاه y فإنه يكون صفرا ولكن إذا سلط مجال مغناطيسي حثه B في الاتجاه z ينشأ فرق جهد في الاتجاه y يسمى جهد هول (Hall voltage) وذلك لأن الإلكترونات التي تتحرك بسرعة انسياقية v ستتأثر بالمجال B بقوة قدرها $F_m = q\,v\,B$ في الاتجاه y فتنحرف وتتراكم على أحد جوانب الصفيحة الذي يصبح سالبا بينما يصبح الجانب المقابل له موجبا وينشأ فرق جهد بينهما V_H يطلق عليه جهد هول يؤدي إلى تولد مجال كهربي E_y في الاتجاه y [شكل (٣٢ـ٥)].

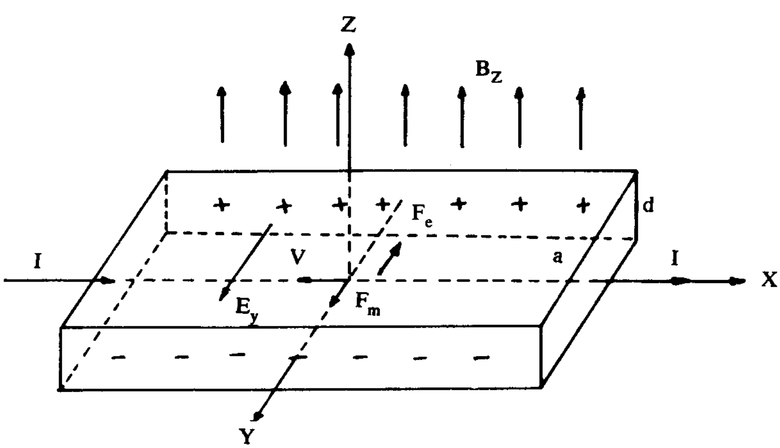
ويقف تراكم الإلكترونات في الجانب المذكور عندما تصبح القوة F_m المؤثرة على الإلكترونات بواسطة المجال المغناطيسي B مساوية ومضادة للقوة F_e المؤثرة على الإلكترونات بواسطة المجال الكهربي الجديد E_y الناشىء عن تولد فرق جهد هول وفي هذه الحالة المتزنة يكون:

$$q\,v\,B = -\,qE_y$$

$$\therefore\ v = -E_y/B \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١١٦)$$

$$\because\ V_H = -a\,E_y = a\,v\,B \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}١١٧)$$

والاشارة السالبة في المعادلة (١١٦ـ٥) تدل على تعاكس القوتين F_m و F_e في الاتجاه.



شكل (٣٢ـ٥) : صفيحة معدنية سمكها d وعرضها a يمر بها تيار I في اتجاه محدد x وضعت في مجال مغناطيسي حثه B «تحقيق تأثير هول».

إذا فرض أن معـدن الصفيحة يحتوي على n إلكترون حر (free electron) في وحدة الحجوم، ومساحة مقطع الصفيحة S فإن التيار المار في الصفيحة [بند (٤-١)] هو:

$$I = n\,e\,v\,S$$

وبالتعويض عن v في المعادلة (٥-١١٧) نحصل على:

$$V_H = \frac{aBI}{n.e.S} = \frac{IB}{n.e.d} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{-}١١٨)$$

حيث S = ad والمقدار $\frac{1}{ne}$ يسمى بمعامل هول (Hall coefficient) ويرمز له بالرمز R_H

$$\therefore V_H = \frac{1}{d} IBR_H \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١١٩)$$

ويمكن تعيين تركيز الإلكترونات الحرة n عمليا، ويمكن مقارنتها نظريا في حالة المعادن من المعادلة:

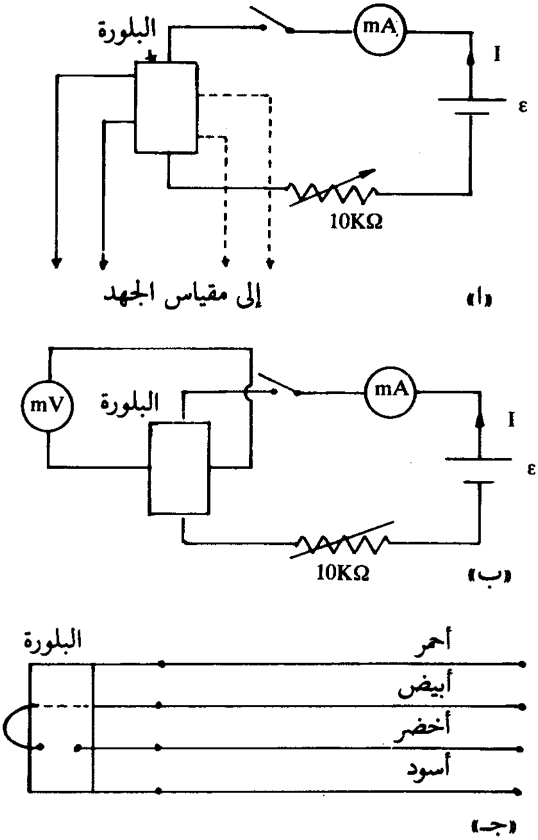
$$n = \frac{(\text{كثافة المعدن}) \times (\text{عدد أفوجادرو})}{(\text{الوزن الـــذري})} \quad ..(٥\text{-}١٢٠)$$

فإذا كانت n كبيرة بالنسبة لموصل ما، فإن معامل هول R_H يكون صغيرا جدا ويصعب قياسه ولذلك فإن مادة الصفيحة غالبا تكون مادة شبه موصلة مثل الجرمانيوم حيث n صغـيرة، وليس معنى هذا أن الأمـر مقتصر فقط على أشباه الموصلات فقد يستعمل النحاس والحديد والبزموث ولكن يشترط لذلك أن تكون سماكة الصفيحة في حدود 0.00038 cm للنحـاس والحـديد وفي حدود 0.00005 cm للبـزمـوث، كما يجب استعمال أجهزة حساسة لقياس الجهد ومجال مغناطيسي عالٍ.

ويُحصل من المعادلتين (٤-٧) و(٥-١١٩) على:

$$R_H = \frac{E_y}{B\sigma E} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١٢١)$$

ويُحصل من المعادلتين (١٠ - ٤) و (١١٧ - ٥) على:



شكل (٣٣-٥): (ا، ب) الدوائر المستخدمة لقياس جهد هول.
جـ- مجس هول، وهو عبارة عن بلورة معدنية
ووضع توصيل الأسلاك لجهاتها الأربع.

$$\mu = \frac{E_y}{BE} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١٢٢)$$

حيث E المجال الكهربي للتيار I، ومن المعادلتين (٥-١٢١) و(٥-١٢٢) يُحصل على:

$$\mu = \sigma R_H = \frac{\sigma}{ne} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{-}١٢٣)$$

وهذه المعادلة هي المعادلة (٤-١٩) نفسها.

ويمكن قياس التوصيلية للمادة بإمرار تيار كهربي I بين طرفي الصفيحة وقياس فرق الجهد لأي نقطتين على جانب المادة كما في شكل (٣٣أ ـ ٥)، قبل تسليط المجال المغناطيسي الذي حثه B ، باستخدام مقياس الجهد.

كما يمكن حساب معامل هول R_H إذا عرفت B بصورة دقيقة وقيست V_H كما في شكل (٣٣ب ـ ٥) وكذلك I.

إذا عرفت R_H لهذه المادة فإنه يمكن استعمالها بعد ذلك لمعرفة شدة أي مجال مغناطيسي مجهول. وتجهز المادة «على شكل صفيحة رقيقة جداً» مع توصيل الأسلاك الموصلة لجهاتها الأربع، كما في شكل (٣٣جـ ـ ٥)، وتسمى بمجس هول (Hall probe).

مثال (١١-٥)

استعمل مجس هول لقياس مجال مغناطيسي، صمم هذا الجهاز على أساس أنه إذا مر به تيار كهربي قيمته 120 mA ووضع في مجال مغناطيسي معلوم قيمة حثه $0.08\ Wb/m^2$ كان جهد هول $0.7\mu V$

أ ـ وضع هذا المجس في مجال مغناطيسي مجهول فكانت قيمة جهد $0.33\mu V$ ما قيمة حث هذا المجال المغناطيسي.

ب ـ احسب تركيز الإلكترونات الحرة، n ، لمادة المجس إذا كان سمك المادة 2mm.

الحـــل

$$V_H = 0.70\ \mu V \rightarrow B = 0.08 T$$

$$V'_H = 0.33\ \mu V \rightarrow B' = ?$$

$$B' = \frac{0.33 \times 0.08}{0.70} = 0.0377\ T$$

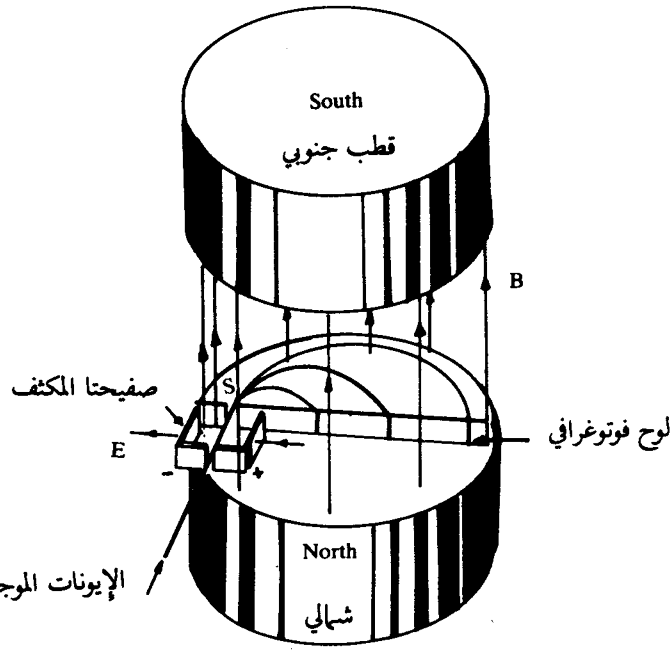
$$R_H = \frac{V_H d}{I B} = \frac{0.7 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3}}{120 \times 10^{-3} \times 0.08} = 1.458 \times 10^{-7}\ m^3/C$$

$$n = \frac{1}{eR_H} = \frac{1}{1.602\times10^{-19}\times1.458\times10^{-7}}$$

$$\therefore n = 4.281 \times 10^{25} \text{ electrons / m}^3$$

(٥-١١-٤) مطياف الكتلة *Mass spectrograph*

يستعمل مطياف الكتلة لقياس الكتل الذرية (atomic masses) بدرجة كبيرة من الدقة ويوضح الشكل (٣٤-٥) مكوناته. ويعمل كالآتي:



شكل (٣٤-٥): مطياف الكتلة.

تمر الذرات المتأينة (ionic atoms) من مصدرها وتمر بمنتقي السرعة (selectors velocity) والمكون من لوحي مكثف مسلط بينهما مجال كهربي E ومجال مغناطيسي B متعامد مع E. وبعد الخروج من الفتحة S تدخل الإيونات في حجرة تقع تحت تأثير مجال مغعناطيسي منتظم فقط قد يختلف عن B وقد يساويه.

ففي منطقة نفوذ المجالين B و E يمكن التحكم في قيمة E بحيث لا تنحرف الإيونات وتسير في خط مستقيم وبذلك يمكن معرفة سرعتها حسب المعادلة (٥-١١٦) أي أن :

$$v = E/B$$

ثم تؤثر القوى المغناطيسية على الجسيمات ذات السرعات المحدودة v العمودية على المجال مما يجعل حركة الإيونات في مسار دائري نصف قطره R. وبعد إتمام نصف دورة كاملة (١٨٠°) تصل الإيونات إلى الكاشف (detector) وهو عبارة عن فيلم فوتوغرافي أو وسائل أخرى. فإذا كانت q هي شحنة الإيون المتحرك في المجال B بسرعة قدرها v فإن القوة المؤثرة عليه هي :

$$F = q\,v\,B$$

وهذه القوى تساوي القوة الطاردة المركزية أي أن :

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$m = q\,B\,R / v \quad \dots\dots\dots\dots (٥\text{-}١٢٤)$$

وحيث إن v, B, q معروفة فإنه بمعرفة R يمكن معرفة m للإيون، وقد وجد بالتجربة أنه إذا كانت سرعة الذرات أحادية التأين (singly ionized atoms) تساوي 2.1×10^5 m/s في مجال مغناطيسي قدره 0.13 Tesla فإن نصف القطر الملاحظ يساوي 0.2 m ومنه نجد أن :

$$\frac{q}{m} = \frac{2.1 \times 10^5\ \mathrm{m/S}}{(1.3 \times 10^{-1}\mathrm{T})\,(2 \times 10^{-1}\mathrm{m})} = 8 \times 10^6\ \mathrm{C/kg}$$

وإذا كانت شحنة الإيون هي :

$$q = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

تكون كتلته هي :

$$m = 2.0 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

ويستخدم مطياف الكتلة أيضا للكشف عن النظائر، وهي تلك النويات التي لها العدد نفسه من البروتونات ولكن تختلف في عدد النيوترونات.

(٥-١٢) مســـائــل

١ ـ مجال مغناطيسي حثه B يساوي ٢ وبر/متر٢ ويتجه مع المحور z.
احسب كثافة التدفق Φ المار خلال سطح مربع مساحته ٢ متر٢ إذا كان مستوى السطح يعمل زاوية قدرها °١٥ مع المحور z.

٢ ـ مجال مغناطيسي يتجه مع المحور z وتتغير قيمته، B ، مع اتجاه x حسب العلاقة:

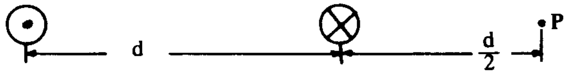
$$B = B_0 \{1 + (z/x_0)^2\}$$

حيث B_0 ، x_0 ثابتان. (لا تتغير B مع y أو z)
أثبت أن كثافة التدفق Φ المارة خلال مستطيل يقع في المستوى xy طوله a وعرضه b ومركزه يقع في النقطة x=c و y=0 تساوي:

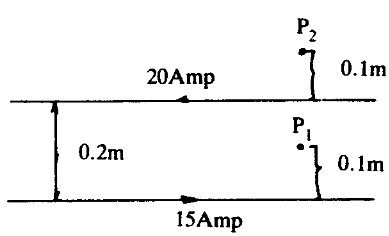
$$\Phi = AB(c) + AB_0\, b^2/12x_0^2$$

حيث B(c) قيمة الحث عند مركز المستطيل. افترض أن جهة المستطيل التي طولها b توازي محور x.

٣ ـ سلكان طويلان متوازيان يحمل كل منهما تيارا قدره I في اتجاهين متعاكسين كما في الشكل. احسب قيمة المجال عند النقطة P.

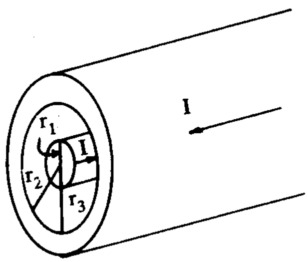


٤ ـ سلكان طويلان متوازيان المسافة بينهما ٢, ٠ متر يحمل أحدهما تيارا قدره ٢٠ أمبير والآخر ١٥ أمبير كما في الرسم. احسب المجال المغناطيسي عند النقطتين P1 ، P2.

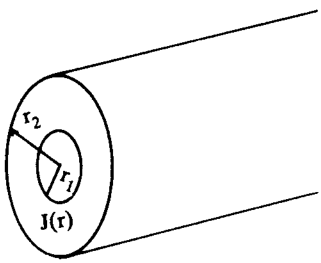


٥ ـ سلك طوله l يمر به تيار قدره I ، هذا السلك سهل الثني يمكن أن يأخذ الشكل الدائري أو المربع أو المستطيل أي هذه الأشكال يكون المجال المغناطيسي في مركزه أكبر.

٦ ـ كابـل ذو موصلين متحـدي المحـور (coaxial cable) طويل نصف قطر الموصل الـداخـلي r_1 أمـا الموصل الخارجي فنصف قطره الخارجي r_3 والداخلي r_2 كما في الشكـل. يحمـل أحد الموصلين تيارا كهـربيا قيمته I ويحمل الموصل الثاني التيار نفســه ولكنـه في اتجاه معاكس كثـافة التيار للموصلين منتظم. ضع تعبيرا رياضيا يوضح العلاقة بين B و r حيث تأخذ r قيمتها من $r=0$ إلى $r=\infty$ وارسم علاقة بين B و r.



٧ ـ موصـل اسطواني أجوف نصف قطره الـداخلي r_1 والخارجي r_2 ويحمل تيارا قدره I وكثافة التيار J غير منتظمة على الموصل احسب المجال المغناطيسي B عنـدمـا تكون $r < r_1$ و $r_1 < r < r_2$ و $r > r_2$ في الحالات التالية:



ا ـ تتغـير J خطيا (linearly) مع المســافـة في المنـطقـة الـواقعـة بين r_1 و r_2 ، $(r_1 < r < r_2)$ حسب $J(r) = \alpha r$ حيث α مقدار ثابت.

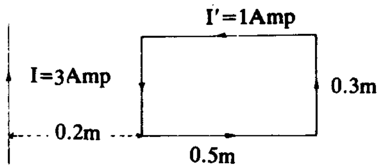
ب ـ تتغير J مع المسافة في المنطقة نفسها حسب المعادلة $J(r) = \beta r^2$

جـ ـ ما قيمة α و β.

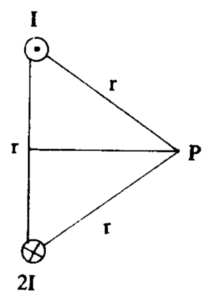
٨ ـ يحمل ملف دائري تيارا شدته I فإذا كانت N عدد لفاته و r نصف قطره فاحسب الشغـل المبـذول لإدارة الملف في مجال مغناطيسي كثافة فيضه «حثه المغناطيسي

B » ، وذلك من الوضع الذي تكون فيه $\theta_0 = 0$ إلى $\theta = 180°$ حيث θ هي الزاوية بين اتجاه المجال المغناطيسي المؤثر والعمود على مستوى الملف فإذا كان $I = 0.1$ أمبير ، $N = 100$ لفة ، $r = 5cm$ ، $B = 1.5$ وبر/ متر^2 فاحسب الشغل .

٩ ـ ملف مستطيل يحمل تيارا قدره أمبـير واقع قرب سلك طويل كما في الشكل يحمل تيارا قدره ٣ أمبـير احسب مقدار واتجاه القوة المؤثرة على الملف .

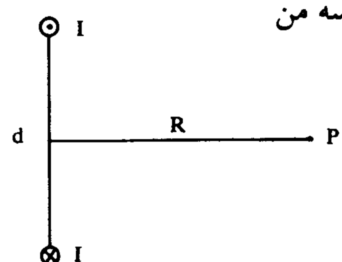


١٠ ـ ليكن لدينا سلكان طويلان المسافة بينهما r يجري في أحدهما تيار مقداره I والأخرى ضعف I ولكن يضاده في الاتجـاه. احسب كثـافـة الفيض المغناطيسي عند النقطة P.



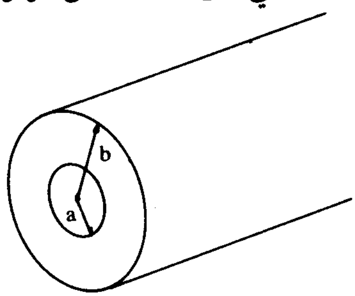
١١ ـ باستخـدام قانـون أمبـير لكثـافـة الفيض المغنـاطيسي احسب كثـافة الفيض المغناطيسي لسلك يمر به تيار I عند نقطة تبعد r من السلك .

١٢ ـ ليكن لدينـا سلكـان طويلان المسافة بينهما d ويجري في أحدهما تيار مقداره I والآخر التيار نفسه ولكن يضاده في الاتجاه . أثبت أن كثافة الفيض B عند النقطة P التي تكـون على البعـد نفسه من السلكين هي :

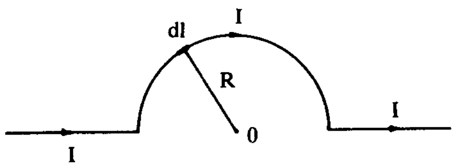


$$B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi (4R^2 + d^2)}$$

١٣ - بتطبيق قانون أمبير احسب كثافة الفيض المغناطيسي على مسافة r من مركز موصل اسطواني أجوف نصف قطره الداخلي a والخارجي b وشدة التيار المار فيه I. علما بأن التيار موزع بانتظام خلال سطح الموصل.



١٤ - يصنع سلك طويل تحدبا نصف دائري ويمر به تيار كهربي مقداره I. احسب الحث المغناطيسي في مركز نصف الدائرة.



١٥ - قرص دائري معزول نصف قطره a مشحون بشكل منتظم بكثافة سطحية σ وهو يدور حول مركزه بسرعة زاوية (ω) والمطلوب:

ا - إيجاد المجال المغناطيسي الناتج عند مركز القرص.

ب - إيجاد المجال المغناطيسي عند نقطة تقع على محوره وتبعد عن مركزه بمقدار b حيث b >>a.

١٦ - صفيحة طويلة ورقيقة جدا «مهملة السماكة» من مادة النحاس عرضها a. احسب المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة R من مركز الصفيحة والمتعامد معها.

١٧ - ملف طويل يتألف من عدد من اللفات الدائرية المتلاصقة، نصف قطر الملف 3.0 سم ويحمل تيارا قدره 1.0 أمبير فإذا كان الحث المغناطيسي B عند مركز الملف يساوي 1.4×10^{-4} وبر/متر٢. فاحسب عدد لفات الملف.

١٨ - سلك طويل يحمل تيارا شدته 50 أمبيرا. وضع في مجال مغناطيسي منتظم قيمة حثه

B 0.200 بر/متر^2 ويصنع السلك زاوية قدرها 30° مع اتجاه المجال.
احسب القوة الواقعة على وحدة الأطوال للسلك.

١٩ - ملف مستطيل الشكل طوله 0.12 مترا وعرضه 0.18 مترا يتألف من 240 لفة من سلك رفيع ما هو عزم ثنائي القطب (dipole monent) لهذا الملف حينما يحمل تيارا قيمته 60 أمبيرا، عزم الازدواج إذا وضع المستطيل في مجال مغناطيسي منتظم قيمة حثه B = 0.24 وبر/متر^2 ويصنع زاوية قدرها 30° مع مستوى الملف.

٢٠ - شحنة نقطية مقدارها 1.8×10^{-6} كولوم تتحرك في اتجاه محور السينات بسرعة قدرها 800 متر/ثانية. يوجد مجال مغناطيسي في المستوى yz ويعمل زاوية قدرها ٤٥° مع محور y فإذا كان الحث المغناطيسي B يساوي 0.72 نيوتن/أمبير - متر فاحسب قيمة القوة المغناطيسية على الشحنة وحدد اتجاهها.

٢١ - مجال كهربي قيمته 200 فولت/متر ومجال مغناطيسي قيمة حثه 0.80 نيوتن/أمبير - متر يؤثران على إلكترون فكانت محصلتها تساوي الصفر. فإذا كان المجالان متعامدين ما هي قيمة سرعة الإلكترون؟ وما هو اتجاهها؟

٢٢ - ديوترون deuteron (كتلته $2M_p$ وشحنته +e) سورع من حالة السكون خلال جهد كهربي قيمته 500 فولت فاكتسب سرعة قدرها v ، ما هو نصف قطر مداره إذا وضع في مجال مغناطيسي قدره 0.5 وبر/متر^2؟

٢٣ - شحنة قيمتها 6×10^{-6} كولوم تتحرك بسرعة قدرها 1500 متر/ثانية في اتجاه محور x وفي مجال مغناطيسي قدره 80 نيوتن/أمبير - متر واقع في المستوى xy ويصنع زاوية قدرها 30° مع x
احسب قيمة واتجاه القوة المؤثرة على هذه الشحنة.

٢٤ ـ جسيم α يسير في مسار دائري نصف قطره 0.45 متر وذلك في مجال مغناطيسي كثافة فيضه 1.2 وبر/متر٢. احسب:

ا ـ سرعة الجسيم.

ب ـ زمن الدورة الواحدة.

جـ ـ طاقة الحركة بالإلكترون فولت.

د ـ فرق الجهد اللازم لإكسابه هذه الطاقة.

٢٥ ـ تستعمل ظاهرة هول لحساب عدد الشحنات الحرَّة لوحـدة الحجم (n) للمواد. فإذا كانت المادة عبارة عن شريحة سمكها 15mm ويمر بها تيار كهربي مقداره 12A ثم وضعت في مجال مغناطيسي حثه $1.8 Wb/m^2$ فكان مقدار جهد هول $0.122 \mu V$ ما قيمة n لهذه المادة.

٢٦ ـ إذا كانت سرعة إلكترون تساوي 10^7 متر/ثانية وكان اتجاه السرعة متعامدا مع مجال مغناطيسي، ما هي شدة هذا المجال إذا كان قطر مدار الإلكترون يساوي مترا واحدا؟

٢٧ ـ بروتون وديوترون ودقيقة α تم تعجيلها جميعا بواسطة جهد معين ثم أدخلت في مجال مغناطيسي منتظم عمودي على اتجاه حركتها. قارن بين طاقة حركتها. وإذا كان نصف قطر مدار البروتون 10cm فاحسب أنصاف أقطار مداري الديوترون ودقيقة α.

٢٨ ـ في مطياف الكتلة كانت شدة المجال الكهربي E بين لوحي المكثف 150 فولت/سم والحث المغناطيسي B لكل من المجالين المغناطيسيين 0.5 وبر/متر٢. فإذا كانت الايونات الداخلة للجهاز هي النظائر الثلاثة للمغنسيوم ^{24}Mg ، ^{25}Mg ، ^{26}Mg وشحنة كل منهم موجبة ومساوية لشحنة الإلكترون. فأوجد المسافة بين الخطوط المتكونة على اللوح الفوتوغرافي بواسطة النظائر الثلاثة مع اعتبار أن الوزن الذري لكل نظير يساوي عدده الكتلي مضروبا في وزن ذرة الهيدروجين وهو $(1.673 \times 10^{-24} gm)$.

٦

الحث الكهرومغناطيسي

Electromagnetic Induction

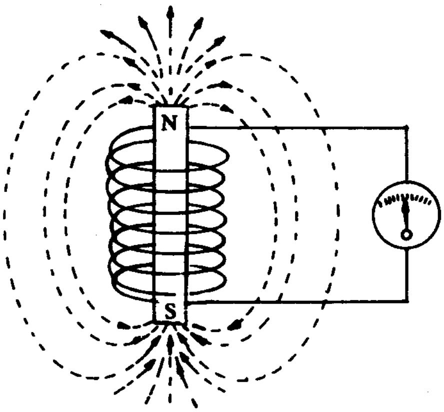
● مقدمة ● حركة موصل في مجال مغناطيسي ● قانون فاراداي ● الحث والحركة النسبية ● الحث الذاتي ● الحث المتبادل ● توصيل ملفات الحث ● سريان التيار في دائرة حثية ● طاقة الحث ● شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي ● المولدات ● المحرك الكهربي ● المحول ● البيتاترون ● طريقة ملف الاستكشاف لقياس التدفق المغناطيسي ● مسائل.

(٦-١) مقدمة

Introduction

اكتشف العالم أمبير وعلماء آخرون، مثل أراقو (F. Arago) وبيوت (J. B. Biot)، خلال العشر سنوات التي تلت عام ١٨٢٠م، اكتشافات عديدة ومهمة حول المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربي في الموصلات كما ورد في الفصل الخامس. وأعقب ذلك دراسة للقوى بين موصلين يحملان تيارين كهربائيين وكذلك بين المغناطيسات (magnets) والموصلات التي تمر بها تيارات كهربية. وفي خلال العامين ١٨٣٠م و١٨٣١م اكتشف العالم فاراداي (M. Faraday) من بريطانيا وهنري (J. Henry) من الولايات المتحدة ولنز (H. Lenz) من روسيا إمكانية الحصول على تيار كهربي باستعمال المجالات المغناطيسية وكان للعالم فاراداي الأسبقية في اكتشاف الحقائق عن هذه الظاهرة.

يمثل الشكل (١-٦) تجربة فاراداي وهو عبارة عن ملف يتصل طرفاه بجلفانومتر، لقياس شدة التيار، وقضيب مغناطيسي فإذا كان الملف والقضيب المغناطيسي مستقرين فلا يمر تيار في الجلفانومتر أما إذا تحرك أحدهما فإنه سيمر تيار كهربي حثي، ناتج عن قوة دافعة كهربية حثية، يتحدد اتجاهه حسب اتجاه الحركة.



شكل (١-٦): ملف يتصل طرفاه بجلفانومتر وقضيب مغناطيسي بداخله، لتحقيق قانون فاراداي الكهرومغناطيسي عند حركة الملف أو المغناطيس.

وكان لاكتشاف فاراداي أهمية كبرى في الحياة العملية فهو الأساس في تشغيل كل مولدات الكهرباء التي تمد بالقوة الكهربية. ولقد تحقق فاراداي من أهمية اكتشافه فركب مولدا ينتج تيارا صغيرا وكان لا يتجاوز عمله المختبرات فقط. وتطورت وسائل تشييد المولدات حتى أنتج أول مولد كهربي تجاري في عام ١٨٨٠ ميلادية.

ويضيف هذا الاكتشاف لونا جديدا ومهما لإنتاج الطاقة وهو تحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربية.

(٦-٢) حركة موصل في مجال مغناطيسي

Motion of a Conductor in a Magnetic Field

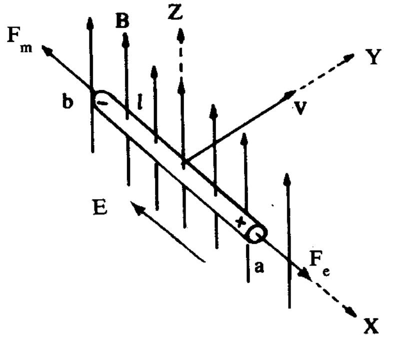
لقد درس في الفصل الخامس بند (٥-٧) حركة موصل طوله l موضوع في مجال مغناطيسي حثه B ويمر به تيار كهربي I ووجد أن القوة الواقعة عليه تتناسب طرديا مع طوله l ومع التيار المار به I وكذلك الحث المغناطيسي B حسب المعادلة (٥-٧٨) وهي:

$$F_m = I\,l\,B \qquad \text{(٦-١)}$$

إذا تحرك قضيب موصل طوله l بسرعة قدرها v في الاتجاه العمودي على l في مجال مغنـاطيسي منتظم حثه B واتجاهه عمودي على كل من v و l كما في الشكل (٢-٦)، وحيث إن الموصل يحتوي على إلكترونات حرة، فإنه حسب البند (٥-١٠) تكون هذه الإلكترونات خاضعة لقوة قدرها:

$$F_m = q\,v\,B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٦)$$

نتيجة تحركها بسرعة v في اتجاه عمودي على B. ويكون اتجاه هذه القوة واقع على امتداد السلك ab صوب الطرف b. ونتيجة لذلك فإن الإلكترونات الحرة q ستندفع وتتراكم عند الطرف b الذي يصبح سالبا وفي الوقت نفسه يصبح الطرف a موجبا وينشأ بذلك مجال كهربي يتجه من a إلى b. ويستمر تراكم الإلكترونات الحرة حتى تتعادل القوة الكهربية مع القوة المغناطيسية وعند ذلك يتوقف تراكم الإلكترونات.



شكل (٢-٦): قضيب موصل طوله l يتحرك في مجال مغنـاطيسي منتـظم يتجـه عمـوديا مع سرعـة القضيب و l.

وحسب المعادلة (٢-٦) تكون قيمة المجال الكهربي الحثي هو:

$$E' = \frac{F}{q} = vB \quad \ldots \quad (٣أ - ٦)$$

أمـا إذا كان المجال غير متعامد مع السرعة فإن:

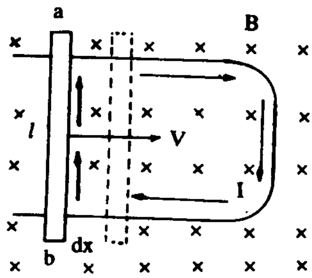
$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \quad \ldots \quad (٣ب - ٦)$$

وتكون القوة الدافعة الكهربية الحثية بين طرفي الموصل الذي طوله l هي:

$$\varepsilon = E'\,l = Blv \qquad (٤-٦)$$

وبذلك يعد الموصل مصدرا لقوة دافعة كهربية تعرف بالقوة الدافعة التأثيرية ε تؤدي إلى مرور تيار كهربي I. وإذا وصلت الدائرة المبينة في الشكل (٣-٦) والذي ينزلق فيها الموصل ab دون احتكاك على ضلعي سلك آخر ثابت يتخذ شكل الحرف U قاطعا خطوط القوى للمجال المغناطيسي العمودي على الورقة إلى الداخل تتولد ق. د. ك.

ولحساب القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين طرفي السلك ab نتبع ما يلي:



شكل (٣-٦): ينزلق قضيب موصل طوله l على قضيب آخر يتخذ شكل الحرف U في مجال مغناطيسي.

تؤدي حركة السلك إلى اليمين إلى مرور تيار تأثيري I من a إلى b خارج السلك ومن b إلى a داخل السلك شكل (٣-٦). وطبقا لقاعدة فلمنج لليد اليسرى فإن السلك ab (الذي أصبح يمر به تيار تأثيري I نتيجة حركته إلى اليمين) سوف يتأثر بقوة قدرها F إلى اليسار أي في اتجاه مضاد لاتجاه حركته طبقا للمعادلة (١-٦).

ولهذا فإنه لابد أن يبذل شغل ضد هذه القوة لكي يحافظ على استمرار الحركة إلى اليمين أي على استمرار تولد القوة الدافعة التأثيرية والتيار التأثيري. فإذا فرض أن السلك سيتحرك مسافة قدرها dx في زمن قدرها dt بسرعة v فإن عنصر الشغل المبذول في تحريك السلك هو:

$$dW = Fdx$$

$$\because \quad dx = vdt$$

$$\therefore \quad dW = Fvdt$$

وبالتعويض عن F من المعادلة (١-٦) يُحصل على:

$$dW = IlBvdt$$

ولما كان المقدار I.dt هو الشحنة التأثيرية التي تحركت في الزمن dt فإن:

$$dW = Blvdq$$

وقد سبق أن عرف أن القوة الدافعة الكهربائية لمصدر بأنها النسبة بين الشغل المبذول لتحريك الشحنة وبين كمية هذه الشحنة.

$$\therefore \varepsilon = \frac{dW}{dq} = Blv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٥)$$

وهي تمثِّل المعادلة (٦-٤) نفسها.

وإذا كانت R مقاومة السلك فإنه ينشأ عن هذه القوة الدافعة المستحثة تيار تأثيري قيمته:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٦)$$

ولقد ورد في الفصل الرابع بند (٤-٣) أن القدرة الضائعة في المقاومة R هي:

$$P = \varepsilon I = B^2 l^2 v^2 / R \quad (W) \quad \cdots\cdots \quad (٦\text{-}٧)$$

وقد بذلت مقابل ذلك طاقة ميكانيكية لتحريك القضيب الخاضع لقوة F تعطى بالعلاقة (٦-١) وتكون القدرة المبذولة هي:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = Fv = BlvI$$

وبالتعويض من المعادلة (٦-٦) عن I يُحصل على:

$$P = \frac{dW}{dt} = B^2 l^2 v^2 / R$$

وهي القيمة نفسها السابقة للقدرة الضائعة [معادلة (٦-٧)] بشكل كهربي مما يدل على أن الطاقة المتولدة قد صرف مقابلها طاقة ميكانيكية مساوية لها.

فإذا قيست B بوحدات (ويبر/متر ٢ Wb/m^2)، l بالمتر و v (بالمتر/ثانية ...m/S) فإن القوة الدافعة الكهربائية [(ق. د. ك) (E.M.F.)] تقاس بوحدات (جول/كولوم . . . J/C أو الفولت ...V).

وقد استنتجت المعادلة (٦-٥) للحالة الخاصة التي يكون فيها المجال منتظما (uniform) والتي يكون فيها طول القضيب وسرعته واتجاه المجال متعامدة، أما في الحالة العامة فإن:

$$d\mathcal{E} = Bvdl \sin\theta \cos\phi \ldots \quad (٨أ - ٦)$$

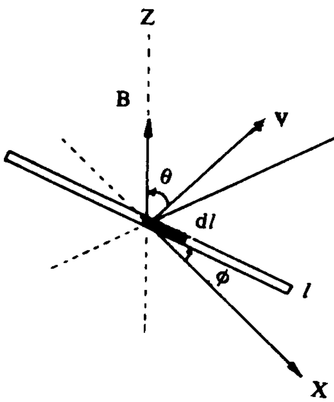
$$\therefore d\vec{\mathcal{E}} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \vec{\mathcal{E}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (٨ب - ٦)$$

وحسب المعادلة (٣ب - ٦) يكون:

$$\mathcal{E} = \int E' \cdot dl \quad \ldots (٩-٦)$$

حيث dl عنصر الطول من الموصل الذي طوله l والذي يتحرك بسرعة v في مجال مغناطيسي حثه B. وθ الزاوية بين v و B. وϕ الزاوية بين l والعمود على المستوى المحدد بوساطة v و B كما في شكل (٤-٦).



شكل (٤-٦): يتحرك عنصر الطول dl من موصل طويل، بسرعة v في مجال مغناطيسي B ، بحيث تكون v و dl و B غير متعامدة (الحالة العامة).

مثال (١-٦)

إذا كان الحث B في المنطقة ما بين قطبي مغناطيس كهربي يساوي $0.5\ Wb/m^2$ فاحسب القوة الدافعة الكهربية المستحثة في موصل مستقيم طوله 10cm وعمودي على B ويتحرك في الاتجاه العمودي على طوله وعلى B بسرعة 1m/s.

الحل

القوة الدافعة الكهربية المستحثة تعطى بالمعادلة:

$$\mathcal{E} = Blv \sin\theta \cos\phi$$

$$\therefore \theta = 90° \quad , \quad \phi = 0$$

$$B = 0.5\ Wb/m^2 \quad , \quad l = 0.1m \quad , \quad v = 1m/s$$

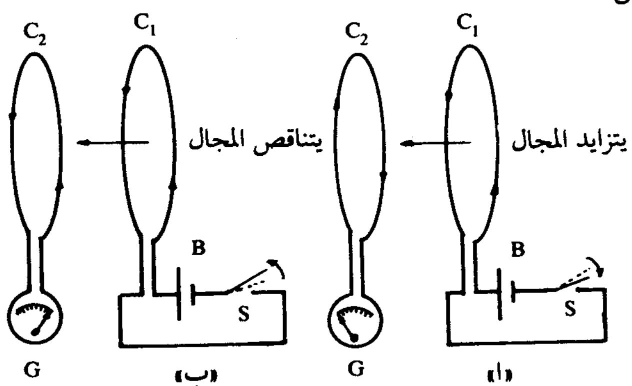
$$\therefore \mathcal{E} = 0.5 \times 0.1 \times 1 = 0.05\ V$$

(٦-٣) قـانون فارادای
Faraday's Law

تابع فارادای تجاربه، إلى جانب تجربته التي ذكرت في البند (٦-١)، حيث استبدل المغناطيس بدائرة كهربية مكونة من ملف ابتدائي C_1 وبطارية B ومقاومة متغيرة ومفتاح S كما في الشكل (٦-٥) بينما أبقي على الدائرة الأخرى المكونة من ملف ثانوي C_2 يتصل طرفاه بجلفانومتر G.

فإذا مر تيار في الملف الابتدائي C_1 فإنه لا يصحبه مرور تيار في الملف الثانوي C_2 لأنه لا توجد حركة نسبية (relative motion) ولكن عند لحظة غلق الدائرة وفتحها يحدث تيار مفـاجىء في الملف C_2 وفي هذه الحـالة تتكون الحركة النسبية من نمو أو اضمحلال (growth or decay) للمجال المغناطيسي الناتج عن التيار المار في الملف C_1.

ويمثـل الشكل (٦-٥١) وضع غلق الدائرة الابتدائية، فنمو التيار في الملف C_1 ينتج زيادة في المجال المغناطيسي من اليمين إلى الشمال داخل الملفين، فكلما زاد الفيض المغناطيسي الناتج من الملف C_1 يتولد تيار ينتج مجالا مغناطيسيا في الملف C_2 يعاكس اتجاه المجال المغناطيسي في الملف C_1 وحيث إن اتجاه المجالين متعاكسان فإن اتجاه التيارين متعاكسان.



شكل (٦-٥): ملفان أحدهما يتصل ببطارية والآخر بجلفانومتر:
ا - غلق دائرة الملف الابتدائي.
ب - فتح دائرة الملف الابتدائي.

بينما يمثل الشكل (٥ب ـ ٦) وضع فتح الدائرة الابتدائية فكلما تناقص التيار في C_1 يصحبه تناقص في الفيض المغناطيسي ويصحب ذلك مرور تيار حثي في الملف C_2 بحيث يمنـع (prevents) اتجـاهـه تقليل المجـال المغناطيسي أي أنه سينتج مجالا مغناطيسيا في الملف C_2 له الاتجاه نفسه وهذا يعني أن اتجاه التيار الحثي في الملف C_2 له اتجاه التيار نفسه في C_1.

وتحـدث ظواهر مماثلة عند بقاء الدائرة الابتدائية مغلقة وزيادة شدة التيار في الملف C_1 أو انقاصه بواسطة المقاومة المتغيرة أو تحريك أحد الملفين بالنسبة للآخر.

ويمكن تلخيص اتجاه التيار التأثيري في الملف الثانوي كالتالي :

يكـون اتجاه التيار التأثيري عكس اتجاه التيار الابتدائي في حالة الاقتراب أو ازدياد التيار الابتدائي أو غلق الدائرة الابتدائية . بينما يكون اتجاه التيار التأثيري في اتجاه التيار الابتدائي في حالة الابتعاد أو نقص شدة التيار الابتدائي أو فتح الدائرة الابتدائية .

لقد استنتج فاراداي من مجموع تجاربه أن التغير في الفيض المغناطيسي Φ الذي يخترق الملف C_2 هو العامل المؤثر في إنتاج القوة الدافعة الكهربية الحثية «التأثيرية» بغض النظر عن كون هذا التغير يحدث بواسطة مغناطيس أو بواسطة ملف آخر متحرك أو ثابت .

ولذلك فقانون فاراداي ينص علي :

«تتناسب القوة الدافعة الكهربية التأثيرية ε المتولدة في دائرة مغلقة مع معدل التغير في الفيض المغناطيسي $d\phi/dt$ خلال هذه الدائرة» .

ولاثبات ذلك فعند تحريك السلك ab ، شكل (٣ـ٦)، مسافة قدرها dx إلى اليمين فإن مساحة المقطع abdc للدائرة المغلقة سوف تنقص بمقدار:

$$dS = l\,dx$$

عند ذلك يتغير التدفق المغناطيسي خلال الدائرة بالمقدار:

$$d\Phi = BdS = Bl dx$$

بقسمة طرفي المعادلة على dt نجد أن:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}١٠)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٥-٦) نُحصل على قيمة القوة الدافعة الحثية ε :

$$\therefore \varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}١١أ)$$

أما اتجاه التيار الحثي والقوة الدافعة ~~الكهربية الحثية~~ فيحددهما قانون لينز (Lenz's law) الذي ينص على:

«يكون للتيار الحثي اتجاه بحيث يعطي فيضا مغناطيسيا له اتجاه يعاكس التغير في الفيض المغناطيسي الأصلي المسبب له».

أي أن القوة الدافعة الكهربية الحثية ε عكسية بحيث تكون موجبة عندما تكون $d\Phi/dt$ سالبة وتكون سالبة عندما تكون $d\Phi/dt$ موجبة.

وتصبح المعادلة (١١أ - ٦) كالتالي:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}١١ب)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (١-٥) في الفصل الخامس، فإن التدفق المغناطيسي يعطى بالمعادلة:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}١١جـ)$$

وإذا كانت ε ناتجة عن حركة ملف، عدد لفاته N ، في مجال مغناطيسي فإن :

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

وإذا كانت R هي مقاومة الملف، فإن قيمة التيار التأثيري المار فيه يعطى بالمعادلة :

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (\text{١٣أ} - \text{٦})$$

أما الشحنة التأثيرية فتعطى من المعادلة التالية :

$$dq = Idt = -\frac{N}{R}d\Phi \quad \ldots \quad (\text{١٣ب} - \text{٦})$$

مـثـال (٢-٦)

ملف حلزوني طويل عدد لفاته 200 لفة في السنتيمتر. يحمل تيارا شدته 1.5 A وقطر الملف 2cm وضع عند مركزه ملف مكون من عشر لفات بحيث يكون المجال المغناطيسي موازيا لمحور الملف الأخير، فإذا انقص التيار في الملف الحلزوني إلى الصفر ثم زيد في الاتجاه المضاد ليصل إلى 1.5 A بمعدل مرة كل 0.05 من الثانية، فما مقدار القوة الدافعة الكهربية التأثيرية في الملف الصغير أثناء تغير التيار؟

الحـــل

تحسب أولا قيمة الحث المغناطيسي داخل الملف الحلزوني B.

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = 4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 10^2 \times 1.5 = 3.8 \times 10^{-2}\ \mathrm{Wb/m^2}$$

ثم تحسب مساحة مقطع الملف الصغير وهي تساوي مساحة مقطع الملف الكبير S.

$$S = \pi r^2 = \pi\,(1.0 \times 10^{-2})^2 = 3.1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$$

$$\Phi = BS = 3.8 \times 10^{-2} \times 3.1 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

هذا الفيض يتغير إلى 1.2×10^{-5} Wb - في خلال $\frac{5}{100}$ من الثانية

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{(-1.2 \times 10^{-5}) - (1.2 \times 10^{-5})}{0.05} = -4.8 \times 10^{-4}\ \mathrm{V}$$

$$\therefore \varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -10\times(-4.8\times10^{-4})$$

$$= 4.8\times10^{-3}\,V$$

ويلاحظ أن ε موجبة في حين أن $d\Phi/dt$ سالبة.

مـثـال (٣-٦)

ملف عدد لفاته 1000 لفة ومقاومته 400Ω ملفوف على عصا خشبية نصف قطرها 1.0 سم فإذا وضع الملف في مجال مغناطيسي قيمته 9000 أمبير لفة/متر وكان موازيا لطول العصا ثم انخفض المجال فجأة إلى الصفر فاحسب مقدار الشحنة المارة خلال جلفانومتر قذفي مقاومته 200 أوم متصل مع الملف، وما قيمة الشحنة لو انخفض المجال إلى النصف.

الحـــل

حسب المعادلتين (١٣أ - ٦) و (١٣ب - ٦) يُحصل على:

$$IR = N\frac{\Phi}{t} = N\frac{BS}{t} = N\frac{\mu_0 HS}{t}$$

$$\therefore q = It = \frac{N}{R}\mu_0 HS$$

حيث S مساحة الملف، N عدد لفاته و R المقاومة الكلية للدائرة.

$$\therefore q = \frac{1000}{(200+400)}\times4\pi\times10^{-7}\times9000\times\pi(0.01)^2 = 5.92\times10^{-6}\,C$$

$$dq = -\frac{N}{R}d\Phi$$

$$\therefore q = -\frac{N}{R}\int d\Phi = -\frac{N}{R}\int_{H_2}^{H_1}\mu_0 S\,dH = \frac{N}{R}\mu_0 S\,(H_2-H_1)$$

$$\therefore q = \frac{1000}{600}\times4\pi\times10^{-7}(0.01)^2\pi\,(9000-4500) = 2.96\times10^{-6}C$$

مـثـال (٤-٦)

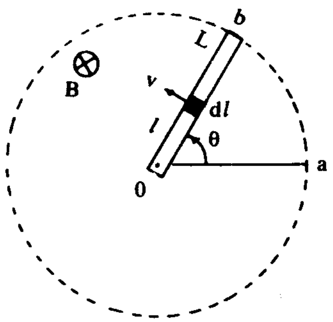
قضيب من النحاس طوله l يدور بسرعة زاوية قدرها ω في مجال مغناطيسي منتظم حثه B كما في الشكل التالي. احسب القوة الدافعة الكهربية المتولدة بين طرفي القضيب.

الحـل

إذا تحرك عنصر صغير طوله dl من القضيب بسرعة قدرها v عمودية على المجال المغناطيسي فإن القوة الدافعة الكهربية حسب المعادلة (٨-٦) هي:

$$d\mathcal{E} = Bv\,dl$$

وبذلك تكون القوة الدافعة بين طرفي القضيب هي:



$$\mathcal{E} = \int_0^L Bv\,dl$$

$$= \int_0^L B(\omega l)\,dl$$

$$\therefore \mathcal{E} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

وهناك طريقة أخرى للحل

فإذا فرض أنه عند لحظة ما كان الفيض المحاط بالقطاع aob يعطى بالمعادلة:

$$\Phi = BS = B\left(\frac{1}{2}L^2\theta\right)$$

حيث $\frac{1}{2}L^2\theta$ مساحة القطاع.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}BL^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

وهذه قيمة $\mathcal{E}$ محققة بذلك قانون فاراداي.

(٦-٣-١) قانون فاراداي والمجال الكهربي الحثي

Faraday's law and induced - electric field

لقد وجد في البند السابق (٦-٣)، وحسب الشكل (٦-٥)، أن التغير في الفيض المغناطيسي للملف الأول بالنسبة للزمن $\frac{d\Phi}{dt}$ تصحبه قوة دافعة كهربية في الملف الثاني. ولذلك إذا وضعت حلقة دائرية (loop) في مجال مغناطيسي متغير بالنسبة للزمن تنشأ قوة دافعة كهربية حثية نتيجة لتكون شحنات ناقلة (carrier) متحركة تعطى تيارا حثيا.

وبصورة أخرى يمكن القول إن التغير في الحث المغناطيسي B ولّد مجالا كهربيا حثيا يختلف من نقطة إلى أخرى على الحلقة. هذا المجال الكهربي الحثي يشبه المجالات الكهربية الحقيقية الناتجة عن شحنات ساكنة حيث يمكن أن يؤثر على شحنة اختبار q_0 بقوة قدرها $F = q_0 E'$ ولذلك ينص قانون فاراداي في هذه الحالة على:

«المجال المغناطيسي المتغير ينتج مجالا كهربيا»

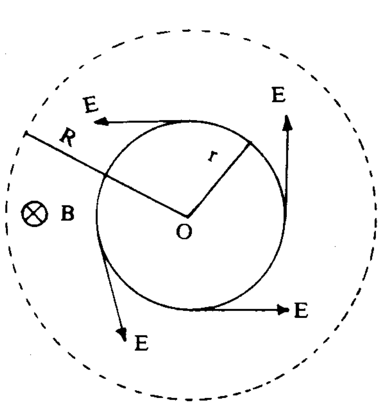
(A changing magnetic field produces an electric field)

يمثل الشكل (٦-٦) حلقة دائرية نصف قطرها r وضعت في مجال مغناطيسي منتظم B تتزايد قيمته بنسبة ثابتة، أي:

$$\left(\frac{dB}{dt} = \text{constant}\right)$$

عند كل نقطة. ولذلك تنشأ قوة دافعة كهربية حثية قيمتها، حسب المعادلة (١١ب - ٦)، هي:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$



شكل (٦-٦): حلقة دائرية نصف قطرها r وضعت في مجال مغناطيسي منتظم تتزايد قيمته بنسبة ثابتة.

وإذا فرض أن شحنة اختبار q_0 تتحرك حول الحلقة فإن الشغل الواقع على هذه الشحنة لكـل دورة يساوي εq_0 . وبصورة أخرى إذا كانت القوة على الشحنة q_0 هي q_0E' والـطول الذي يقع عليه تأثير القوة هو $2\pi r$ فإن الشغل يساوي $q_0E'2\pi r$ وبمساواة المقدارين يُحصل على:

$$q_0\varepsilon = E'\, q_0\, 2\pi r$$

$$\therefore \varepsilon = E'\, 2\pi r$$

وبصورة عامة يمكن أن تُكتب هذه المعادلة بالصورة:

$$\varepsilon = \oint E' \cdot dl \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٤أ - ٦)$$

$$\oint E' \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (١٤ب - ٦)$$

$$\oint E' \cdot dl = -\int_s \frac{dB}{dt} \cdot dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}١٥)$$

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه المجال الكهربي يعاكس اتجاه الحث المغناطيسي B. وذلك حسب المعادلة (١١ب - ٦).

وتسمى المعـادلـة (٦-١٥) التكاملية بمعادلة ماكسويل (Maxwell equation) المشتقة من معادلة فاراداي.

أما إذا حُركت الحلقة بسرعة قدرها v بينما كان الحث المغناطيسي B ثابتا فإن القوة الدافعة الكهربية الحثية تعطى بالمعادلة التالية:

$$\varepsilon = \oint (v \times B) \cdot dl \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}١٦)$$

وذلك حسب المعادلة (٨ب - ٦).

ولذلك فالمعادلة (٦-١٥) تمثل القوة الدافعة الحثية في دائرة مغلقة نتيجة لتغير الحث المغناطيسي بالنسبة للزمن بينما تمثل المعادلة (٦-١٦) القوة الدافعة الكهربية الحثية في دائـرة مغلقـة تتحـرك في مجال مغناطيسي ثابت "B" بسرعة قدرها v. وإذا حصل

التغييران بشكل تتابعي بحيث يتغير B مع الزمن وتتحرك الدائرة المغلقة بسرعة قدرها v ، فإن القوة الدافعة الكهربية تعطى في هذه الحالة بالمعادلة:

$$\mathcal{E} = \oint (v \times B) \cdot dl - \int_s \frac{dB}{dt} dS \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}١٧)$$

وهذه هي الحالة العامة.

ويمكن الحصول على المعادلة (٦-١٥) عند ثبوت B (أي $\frac{dB}{dt} = 0$) بينما يمكن الحصول على المعادلة (٦-١٦) بثبوت الحلقة المغلقة (أي $v = 0$).

المجال الكهربي الحثي الناتج عن عملية الحث له علاقة بمعدل تغير المجال المغناطيسي وليست له علاقة بالشحنات. وعلى الرغم من أن لكل منهما تأثير على الشحنات إلا أنه توجد بينهما فوارق.

خطوط القوى الكهربية الناتجة عن الحث المغناطيسي يمكن أن تكون على شكل حلقة مقفلة كما في شكل (٦-٦) بينما خطوط القوى للمجال الناتج عن الشحنات الساكنة دائما ترسم لتبدأ من شحنة موجبة وتنتهي بشحنة سالبة.

سبق أن وجد في الفصل الثاني أن فرق الجهد بين نقطتين يعطى بالمعادلة:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E \cdot dl \quad \ldots\ldots \quad (٦ - ١٨\text{ا})$$

فإذا انطبقت a على b فمعنى ذلك أن المسار مغلق ويكون فرق الجهد مساويا للصفر أي أن:

$$\oint E \cdot dl = \text{zero} \quad \ldots \quad (٦ - ١٨\text{ب})$$

ولكن في حالة المجال الحثي الناتج عن تغير المجال المغناطيسي فالحال غير ذلك حيث إن المقدار $\oint Edl$ لا يساوي الصفر بينما يساوي $d\Phi/dt$. وذلك حسب المعادلة (١٤ب - ٦).

ولـذلـك فالمجـال الكهـربي النـاتج عن الشحـنات المـستقرة يكـون محفـوظا (conservative) بينـما المجـال الحثي الآخـر غير محفـوظ (non conservative) ولذلك فالجهد الكهربي الذي يعرف فقط بالقوة المحفوظة (conservative force) ليس له معنى بالنسبة للمجالات الكهربية الناتجة عن الحث المغناطيسي.

مـثـــال (٥-٦)

إذا فرض أن الحث المغناطيسي B يتزايد بمعدل $\frac{dB}{dt}$ فإذا كانت R نصف قطر الدائرة المحيطة بالمجال المغناطيسي الكلي، ما هي قيمة المجال الكهربي الحثي عند أي قيمة لنصف القطر r ؟ كما في شكل (٦-٦) مع افتراض أن :

$$R = 10\,\text{cm} \quad , \quad \frac{dB}{dt} = 0.1\ \text{Wb/m}^2\,.\,\text{s}$$

الحـــــل

إذا كان $r < R$ فإن الفيض المغناطيسي Φ خلال الحلقة هو:

$$\Phi = B\,(\pi r^2)$$

$$\because \oint E\,.\,dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(A)$$

$$\therefore E\,(2\pi r) = -\frac{d\Phi}{dB}\,.\,\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\,\frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}\,r\,\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}(5\times10^{-2})\,(0.1) = 2.5\times10^{-3}\ \text{V/m}$$

بافتراض أن $r = 5\text{cm}$

أمـــا إذا كان $r \geqslant R$ فإن الفيض المغناطيسي في هذه الحالة يساوي :

$$\Phi = \int B dl = B\,(\pi R^2)$$

وبتطبيق المعادلة (A) نحصل على :

$$(E)\,(2\pi r) = -\frac{d\Phi}{dB}\,.\,\frac{dB}{dt} = -\pi R^2\,\frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{r} \cdot \frac{dB}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

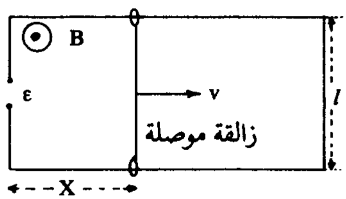
وهـذه المعـادلـة تؤول إلى المعـادلـة (A) بوضـع $r = R$ ، أمـا إذا كان $r > R$ فإن $\int B\, dl = zero$ لأن الحلقة في هذه الحالة خارج نطاق المجال المغناطيسي.

مـثـال (٦-٦)

حلقة مستطيلة الشكل عرضها l وطولها x يتغير بانتظام مع الزمن باستخدام زالقة موصلة تتحرك بسرعة منتظمة قدرها v. فإذا كان الحث المغناطيسي عموديا على مستوى الحلقة ومنتظم وقيمته تتغير توافقيا (vary harmonically) مع الزمن ويعطى بالمعادلة.

$$B = B_0 \cos \omega t$$

احسب القوة الدافعة الكهربية الحثية الكلية.



الحـــل

لحل هذه المسألة نطبق المعادلة (١٥-٦)، فالقوة الدافعة الكهربية الحثية الناتجة عن تغيير B هي :

$$\varepsilon_m = \oint (v \times B) \cdot dl = vBl = vlB_0 \cos \omega t$$

والقوة الدافعة الكهربية الحثية الناتجة عن تغيير v هي :

$$\varepsilon_t = -\int_S \frac{dB}{dt} \cdot dS = \omega \times l B_0 \sin \omega t$$

وبذلك فإن القوة الدافعة الكهربية الحثية الكلية هي :

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_t = vl B_0 \cos \omega t + \omega l B_0 \sin \omega t$$

(٦-٣-٢) المعادلة التفاضلية من قانون فاراداي

Differential equation from Faraday's law

حسب قاعدة استوكس (٤٥-٢) ملحق ٢، فإن المعادلة (٦ - ١١٤) تصبح :

$$\oint_C E' . dl = \int_S (\nabla \times E') . dS$$

حيث S سطح مقفل محاط بمسار مقفل C.

ويمساواة هذه المعادلة مع المعادلة (٦-١٥) نحصل على:

$$\int_S (\nabla \times E') . dS = -\int_S \frac{dB}{dt} . dS \quad \ldots . \quad (٦\text{-}١٩)$$

أو

$$\nabla \times E' = -\frac{dB}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٢٠)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التفاضلية المشتقة من قانون فاراداي .

(٦-٤) الحث والحركة النسبية

Induction and Relative Motion

يعطي قانون فاراداي ($\varepsilon = - d\Phi / dt$) قيمة صحيحة للقوة الدافعة الكهربية التأثيرية مهما كان سبب حدوثها سواء أكان التغير في Φ ناتج عن حركة الملف أو حركة المغناطيس أو التغير في قوة المجال المغناطيسي أو تغيير شكل الحلقة الموصلة أو أي طريقة أخرى. ومع ذلك فالراصدون (observers) الذين يتابعون الحركة النسبية لكل منها سيعطون أوصافا ميكروسكوبية (microscopic) مختلفة لعملية الحث.

يوضح الشكل (٦ - ١٧) حلقة مستطيلة مقفلة تسير بسرعة قدرها v بالنسبة لمغناطيس يعطي مجالا مغناطيسيا منتظما "B". ويعتبر المراقب S مستقرا بالنسبة

للمغنـاطيس الـذي يعطي المجال. القوة الدافعة الحثية تسمى في هذه الحالة بالقوة الدافعة الحركية (motional E.M.F.) لأن الحلقة الموصلة تتحرك بالنسبة للمراقب S.

وتكون الشحنة الموجبة الناقلة q والواقعة في منتصف الجهة اليسرى مجبرة على الحركة إلى اليمين مع الحلقة التي تسير بسرعة V وفي المجال B أي أن الشحنة ستكون خاضعة لقوة مغناطيسية جارفة قدرها ($\vec{F} = \vec{q} \times \vec{B}$). هذه القوة أيضا تكون سببا في تحريك الشحنـة إلى أعلى الحلقة بسرعة v_d تسمى بسرعة الانسياق (drift velocity) وبذلك تكون الشحنة خاضعة لسرعة قدرها v تساوي المجموع الاتجاهي لـ v ، v_d كما في شـكـل (٧ب ـ ٦) وبذلـك فـإن القـوة المغـنـاطيسية الحـارفة (deflecting) F_m هي $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$. وبتحليل هذه القوة إلى مركبتين إحداهما $F_m \cos\theta$ والأخـــــرى $F_m \sin\theta$ كما في شكل (٧ب ـ ٦) فإن المركبة $F_m \cos\theta$ تتلاشى مع القوة الناتجة عن الشحنات المتحركة إلى أعلى في مجال مغناطيسي B وتبقى المركبة العمودية F_n التي تساوي $F_m \sin\theta$. وبذلك فإن الشغل اللازم لنقل الشحنات خلال زمن قدره dt:

$$dW = F_n\,(v\,dt)$$

حيث v dt المسافة التي قطعتها الحلقة المستطيلة (والشحنات) في زمن قدره dt.

$$\therefore\ dW = F_m \sin\theta\ .\ (v\ .\ dt)$$

$$\therefore\ dW = (q\,v\,B)\,(v_d/v)\,(v\,dt)$$

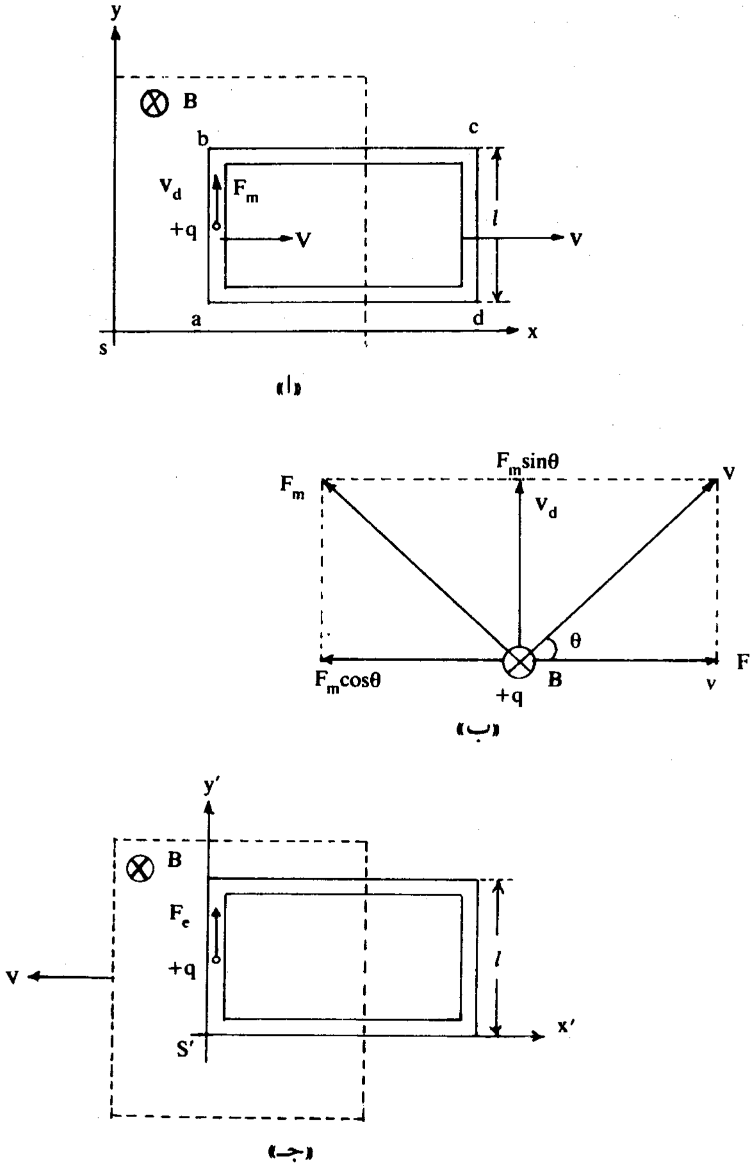
$$\therefore\ dW = (q\,B\,v)\,(v_d\,dt) = qBv\,dl$$

حيث dl المسافة التي قطعتها الشحنات المتنقلة على طول الموصل في زمن قدره dt.

وبذلك فإن الشغل اللازم لنقل الشحنات خلال الحلقة المستطيلة كاملة تساوي :

$$W = \oint dW = qB\,vl$$

حيث l هو الطول ab. أما محصلة الشغل على الطولين da ، bc فهي تساوي الصفر لتعاكسهما. أما بالنسبة للطول cd فهو خارج عن المجال المغناطيسي.



شكل (٧-٦): ا - حلقة على شكل مستطيل تتحرك بسرعة v في مجال مغناطيسي حثه B متعامد مع السرعة.
ب - تحليل القوى الواقعة على شحنة من شحنات الحلقة المستطيلة.
جـ - حركة المجال المغناطيسي وثبوت الحلقة.

وبذلك فإن القوة الدافعة الكهربية هي :

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = Bvl$$

وهي المعادلة (٦ـ١٠) نفسها التي حُصل عليها من تعريف فاراداي مباشرة.

أما الشكل (٧جـ ـ ٦) فإن المراقب S' الذي يعتبر مستقرا بالنسبة للحلقة المستطيلة يتحرك المغناطيس بالنسبة له من اليسار إلى اليمين ويلاحظ أن الشحنات تنحرف باتجاه عقرب الساعة حول الحلقة. ويمكن إجراء حساباته على أساس افتراض أن المجال الكهربي E' المستحث في الحلقة يكون نتيجة لحركة المغناطيس ويؤثر على الشحنات q بقوة قدرها $F_e = qE'$.

هذا المجال الحثي E' يرتبط بالقوة الدافعة الكهربية الحثية ε وكذلك التيار المتولد في الحلقة المقفلة حيث إن :

$$\varepsilon = El \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ـ٢١)$$

هذه المعادلة مماثلة للمعادلة (٦ـ١٤) لأنهما ناتجتان عن الحركة النسبية للحلقة والمغناطيس المتماثلين وفي هذه الحالة يكون :

$$E'l = Blv$$

أو

$$E' = vB$$

أو

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ـ٢٢)$$

وقد يأتي مراقب ثالث S'' فيرى حركة المغناطيس والحلقة المستطيلة معا والقوة المثلة على الشحنات لا هي كهربية فقط ولا مغناطيسية فقط وإنما الاثنتان معا وبذلك يكون :

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦ـ٢٣)$$

مـثـال (٧ـ٦)

في الشكل (٧ـ٦) إذا فرض أن $B = 2.0 Wb/m^2$ و $l = 10cm$ و $v = 1.0m/s$.

احسب:

ا ـ المجال الكهربي الحثي بالنسبة للمراقب 'S.

ب ـ القوة الدافعة الكهربية الحثية في الحلقة المستطيلة.

الحـــل

ا ـ بالنسبة للمراقب 'S يكون لدينا:

$$E' = v B = (1.0)(2.0) = 2.0 \text{ V/m}$$

ب ـ القوة الدافعة الكهربية الحثية بالنسبة لـ S

$$\varepsilon = Blv = 2.0 \times 1.0 \times 10^{-1} \times 1.0 = 0.20 \text{ V}$$

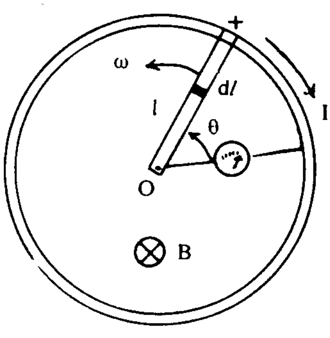
وبالنسبة لـ 'S

$$\varepsilon = E'l = 2.0 \times 1.0 \times 10^{-1} = 0.20 \text{ V}$$

مـثـال (٨ـ٦)

في الشكـل الـوارد في المثال (٤ـ٦) احسب المجال الكهربي الناتج عن حركة القضيب في المجال المغناطيسي B وإذا كانت نهايةالطرف الخارجي تنزلق على قضيب دائري ووصل الطرف المركزي بسلك مع القضيب كما في الشكل التالي فاحسب القوة الدافعة الكهربية للدائرة.

الحـــل



محصلة القوى على الشحنات حسب المعادلة (٢٣ـ٦) هي:

$$\vec{F} = qE + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{.................. (A)}$$

وإذا أخذ عنصر الطول dl وكانت كتلته m ويسير بسرعة قدرها v وعلى بعد l من مركز الدوران فإن محصلة القـوى في هذه الحال عبـارة عـن قـوة جـاذبية مـركـزيـة (centriptal force).

$$\therefore F = qE + ql\omega B = -ml\omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\therefore E' = -l\,\omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right)$$

وبتطبيق المعادلة (٦ - ١١٤) فإن القوة الدافعة الكهربية بين طرفي القضيب تساوي :

$$\varepsilon = \int_0^L E'dl = \int_0^L l\omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right)dl = \omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right)\frac{L^2}{2}$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{2}B\,\omega\,L^2 + \frac{1}{2}\frac{m\omega^2L^2}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

حيث L طول القضيب كاملا .

$$\therefore \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

وإذا قورنت هذه النتيجة بالمعادلة (A) في المثال (٤-٦) فإن الفرق بينهما هو المقدار:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2L^2}{q}$$

وهذا المقدار صغير جدا بالمقارنة بالمقدار ε_1 . وتتضح هذه الموازنة إذا عوض عن الرموز الواردة في قيمتي ε_1 و ε_2 بقيم حسابية ، فإذا فرض أن :

$$\omega = 6280 \text{ radians / s} \quad , \quad q = 1.60^2 \times 10^{-19}\,C$$

$$L = 0.3m \qquad\qquad , \quad B = 0.5 \times 10^{-4}\,Wb/m^2$$

$$\therefore \varepsilon_1 = \frac{1}{2}B\omega L^2 = (0.5)\,(0.5 \times 10^{-4})\,(6.28 \times 10^3)\,(9 \times 10^{-2})$$

$$= 1.41 \times 10^{-2}\,V$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2L^2}{q} = \frac{(9.11 \times 10^{-31})\,(6.28 \times 10^3)^2\,(9 \times 10^{-2})}{(2)\,(-1.602 \times 10^{-19})}$$

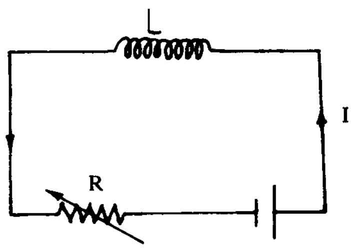
$$= -1.01 \times 10^{-5}\,V$$

(٦-٥) الحـث الـذاتي

Self Inductance

يمر تيار شدته I في ملف عدد لفاته N لفة . فإذا كان التيار ثابتا ثم تغيرت شدته بواسطة مقاومة متغيرة، شكل (٦-٨)، فإن هذا التغير في التيار يؤدي إلى تغير الفيض المغناطيسي Φ داخل هذا الملف نفسه وبهذا تتولد في الملف ذاته قوة دافعة تأثيرية عكسية ذاتية ε تقاوم التغير المسبب لها طبقا لقاعدة لنز، فإذا زاد التيار الأصلي I فإن ε الذاتية تتولد في اتجاه مضاد له وإذا نقص التيار الأصلي فإن ε الذاتية تتولد في اتجاهه نفسه .

ويتوقف عدد خطوط الحث المتصلة بالدائرة والناتجة عن التيار المار بهذه الدائرة على الخواص الهندسية للدائرة، أي على شكلها ومساحتها وعدد لفاتها. . . الخ، ولكن بصرف النظر عن هندسة الدائرة فإن كثافة التدفق عند أي نقطة تتناسب طرديا مع التيار الذي ينتجه، ولذا فإن التدفق أيضا يتناسب مع التيار.



شكل (٦-٨) : مرور تيار في ملف عدد لفاته N ، أما R فهي عبارة عن مقاومة متغيرة «ريوستات» وضعت لتغيير قيمة التيار.

$$\Phi \propto I$$

$$\therefore \Phi = KI \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٢٤)$$

حيث K ثابت يتوقف على العوامل الهندسية للدائرة إذا كانت N عدد لفات الملف فإن القوة الدافعة التأثيرية تعطى بالعلاقة التالية المعروفة بقانون فاراداي :

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dI}\cdot\frac{dI}{dt} = -NK\frac{dI}{dt} \cdot \quad (٦\text{-}٢٥)$$

فإذا رمز لحاصل الضرب NK برمز واحد وليكن L فإن :

$$\therefore \varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٢٦)$$

ويسمى الثابت L معامل الحث الذاتي (coefficient of self inductance) أو باختصار الحث الذاتي (self inductance).

ويعرف الحث الذاتي أنه ***«القوة الدافعة التأثيرية الذاتية المتولدة في ملف عندما تتغير شدة التيار في الملف نفسه بمعدل وحدة شدة التيار في الثانية»***. ومن المعادلة (٢٦-٦) يتضح أن الوحدات في النظام العالمي (.S.I) للحث الذاتي هي (L = V/(A/s) أو ما يسمى بالهنري (Henry) وهو الوحدة الخاصة بمعامل الحث الذاتي لدائرة تتولد فيها قوة دافعة تأثيرية ذاتية قدرها 1 فولت عندما تتغير شدة التيار في الدائرة بمعدل 1 أمبير/ثانية.

من المعادلتين (٢٥-٦) و(٢٦-٦) يمكن أن يوجد تعبير آخر لمعامل الحث الذاتي. حيث يلاحظ أن:

$$N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

وبتكامل الطرفين:

$$N \int d\Phi = L \int dI$$

$$N\Phi = LI + \text{constant}$$

وبما أن Φ تساوي صفرا عندما يتلاشى التيار، فإن ثابت التكامل يساوي صفرا.

$$\therefore L = \frac{N\Phi}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٢٧)$$

ويسهل فهم معنى الحث الذاتي إذا فُهم أن كل لفة من لفات الملف تعمل بمثابة ملف ثانوي بالنسبة للفة التي تجاورها فينتج في هذه اللفة تيار مضاد عند غلق الدائرة. فزيادة شدة التيار يعمل على تأخير الوقت الذي ينمو فيه التيار حتى يبلغ قيمته الثابتة

«أوالعظمى». وبالمثل إذا نقصت شدة التيار أو انقطع التيار فإن كل لفة في الملف تتولد فيها قوة دافعة كهربية حثية تعمل على تأخير اضمحلال التيار ووصوله إلى قيمته الثابتة «الصغرى أو الصفر».

(٦ـ٥ـ١) معامل الحث الذاتي لملف حلزوني طويل

Self inductance of a long solenoid

إذا مر تيار كهربي شدته I في ملف حلزوني لفاته متقاربة وعددها n وطوله l ومساحة مقطعه S تكون قيمة الحث المغناطيسي B في داخل الملف الحلزوني، حسب المعادلة (٥ـ٤٤)، هي:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \ \text{Wb/m}^2 \quad \ldots\ldots \quad (١٢٨ - ٦)$$

وإذا لف الملف على مادة نفاذيتها المغناطيسية μ فإن المعادلة (١٢٨ - ٦) تصبح كالتالي:

$$B = \mu \frac{nI}{l} \ \text{Wb/m}^2$$

ويكون الفيض المغناطيسي Φ الناتج عن التيار I هو:

$$\Phi = BS = \frac{\mu n I S}{l}$$

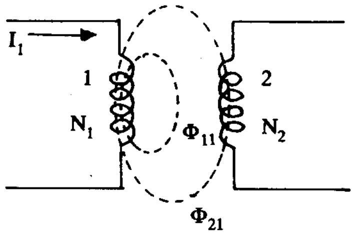
وبالتعويض في المعادلة (٦ـ٢٧) يمكن الحصول على:

$$L = \frac{\mu . n^2 S}{l} \quad \ldots\ldots \quad (٢٨ب - ٦)$$

وهذه المعادلة تبين مدى تأثير نفاذية الوسط μ على مقدار معامل الحث الذاتي L في الدائرة إذ باستخدام مادة مثل الحديد يمكن الحصول على ملف ذي حث ذاتي كبير.

(٦-٦) الحـــث المتبـــادل

Mutual Inductance



شكل (٦-٩): دراسة الحث المتبادل بين ملفين.

إذا فرض كما في شكل (٦-٩) أن الملف رقم (1) ملف ابتدائي عدد لفاته N_1 ويمر به تيار شدته I_1 ، وأن الملف رقم (2) ملف ثانوي مجاور عدد لفاته N_2. إذا تغيرت شدة التيار الابتدائي I_1 فإنه تتولد في الملف الثانوي قوة دافعة تأثيرية ε_2 يتوقف مقدارها طبقا لقانون فاراداي على معدل تغير الفيض المخترق للملف (2) نتيجة تغير التيار Φ_{2-1} في الملف (1) :

$$\because \Phi_{2-1} \propto I_1 \quad \therefore \Phi_{2-1} = KI_1$$

وطبقا لقانون فاراداي فإن :

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dI_1} \times \frac{dI_1}{dt} \quad .. \quad (٦\text{-}٢٩)$$

$$\therefore \varepsilon_2 = -N_2 K \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad .... \quad (٦\text{-}٣٠)$$

حيث M ثابت يسمى معامل الحث المتبادل (coefficient of mutual inductance) أو باختصـار الحث المتبـادل (mutual inductance) ويعرف بأنه ***«القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في دائرة ما عندما يتغير التيار في دائرة مجاورة بمعدل وحدة شدة التيار في الثانية»*** ووحدته الهنري (H) (Henry) ، أي وحدات الحث الذاتي نفسها.

ويمكن استنتاج تعبير آخر للحث المتبادل كما يلي :

من المعادلتين (٦-٢٩) و(٦-٣٠) يكون :

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٣١)$$

بحذف dt وإجراء التكامل يُحصل على:

$$N_2 \Phi_{2-1} = MI_1 + \text{const.}$$

وحيث إن $\Phi_{2-1} = 0$ عندما $I_1 = 0$.

$$\therefore N_2 \Phi_{2-1} = MI_1 \quad \therefore M = \frac{N_2 \Phi_{2-1}}{I_1} \quad \ldots \quad (٦\text{-}٣٢)$$

وبالمثل عندما يمر تيار I_2 في الملف (2) فإنه سيؤثر بدوره في الملف رقم (1) وبهذا فإن المعادلتين (٣١-٦) و(٣٢-٦) يمكن كتابتهما كما يلي:

$$M = \frac{N_1 \Phi_{1-2}}{I_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٣٣)$$

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{1-2}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٣٤)$$

وإذا فرض أن الحث الذاتي لكل من الملفين هما L_1 و L_2 فإن المعادلتين (٣١-٦) و(٣٤-٦) تصبحان:

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}١٣٥)$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \quad \ldots \quad (٦\text{-}٣٥ب)$$

والإشارة التي تسبق M قد تكون موجبة أو سالبة فهي تعتمد على اتجاه التيار المار في الملفين فقد يؤدي التيار في أحد الملفين إلى زيادة أو نقص الفيض المُغناطيسي خلال الملف الآخر.

وبأسلوب آخر تعتمد الإشارة قبل M على محصلة المجالين المغناطيسيين الناتجين عن الملفين فقد تكون ناتجة عن جمعهما أو الفرق بينهما.

وحيث إن $M = \sqrt{L_1 L_2}$ وذلك حسب المعادلة (٤٢-٦) [سيأتي برهان ذلك].

$$\therefore \varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2}\ \frac{dI_2}{dt} \quad \cdots \quad (١٣٦ - ٦)$$

$$\therefore \varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2}\ \frac{dI_1}{dt} \quad \cdot \quad (٣٦ب - ٦)$$

وإذا حسبت dI_1 / dt من المعادلة الأولى (١٣٦ - ٦) وعوض في المعادلة الثانية (٣٦ب - ٦) يمكن الحصول على:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٣٧)$$

مـثـال (٩-٦)

احسب معامل الحث الذاتي لملف حلزوني بداخله هواء طوله l متر ومساحة مقطعه 6×10^{-4} متر٢ وعدد لفاته 1000 لفة ثم أوجد معامل حثه الذاتي إذا لف على قضيب من الحديد نفاذيته النسبية 500 ، ثم احسب القوة الدافعة الذاتية المتولدة فيه إذا تغير التيار الأصلي المار فيه بمعدل 15 أمبيرا/ثانية.

الحـــل

من العلاقة (٦-٢٣) يكون:

$$L = \frac{\mu_0 . N^2 . S}{l}$$

$$\therefore L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^6 \times 6 \times 10^{-4}}{1} = 75.4 \times 10^{-5}\,H$$

وفي حالة لف الملف الحلزوني على قضيب من الحديد:

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

$$\therefore L = 500 \times 4\pi \times 10^{-7} \frac{10^6 \times 6 \times 10^{-4}}{1} = 0.377\,H$$

$$\mathcal{E} = -L\,\frac{dI}{dt} = 0.377 \times 15 = 5.655\ \text{V}$$

مـثـال (١٠-٦)

ملف حلزوني طويل طوله l ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N_1 التف حول منتصفه ملف آخر صغير عدد لفاته N_2 كما في الشكل. احسب:

١ - الحث المتبادل بين الملفين إذا كان $N_1 = 10^3$ turns ، $N_2 = 20$ turns ، و $S = 10\text{cm}^2, l = 1\text{m}$.

٢ - ما قيمة القوة الدافعة الحثية في الدائرة الثانية نتيجة تغيير التيار في الدائرة (1) بمقدار ١٠ أمبير/ثانية.

الحـل

١ - في الملف (1) تكون كثافة الفيض المغناطيسي في اتجاه محوره نتيجة مرور تيار قيمته I

$$B = \mu_0\,\frac{N_1 I}{l}\ \text{Wb/m}^2$$

عندئذ يساوي التدفق المار بالمقطع المركزي المقدار:

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N_1 IS}{l}$$

ولما كان هذا التدفق يتصل بالملف (2) فإن معامل الحث المتبادل:

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I} = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S}{l}$$

$$\therefore M = \frac{12.57 \times 10^{-7} \times 10^{-3} \times 10^3 \times 20}{1} = 25.1\ \mu\text{H}$$

٢ - القوة الدافعة الحثية في الدائرة (2) تعطى بالمعادلة:

$$\mathcal{E}_2 = -M\,\frac{dI_1}{dt}$$

$$\therefore \mathcal{E}_2 = -25.1 \times 10^{-6} \times 10 = -251\ \mu\text{V}$$

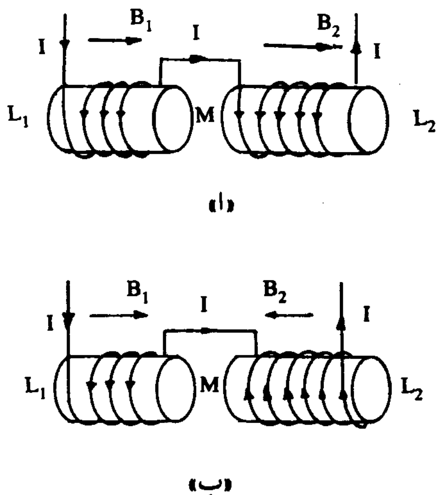
(٦-٧) توصيل ملفات الحث
Inductors Connection

(٦-٧-١) على التوالي Inductors in series

توصل ملفات الحث، كما توصل غيرها من عناصر الدوائر الكهربائية، إما على التوالي أو التوازي أو في شبكات أكثر تعقيدا. ولكي نستطيع مناقشة توصيل الملفات نبدأ بتعريف الحث الذاتي المكافىء كما يلي:

«الحث الذاتي المكافىء للشبكة هو نسبة الـ ق. د. ك. الكلية (ذاتية وتبادلية) المستحثة بين طرفي الشبكة إلى معدل تغيير التيار المسبب لتوليد هذه الـ ق د. ك».

إذا فرض كما في شكل (٦-١٠) وجود ملفين أحدهما حثه الذاتي L_1 والثاني حثه الذاتي L_2 ومعامل الحث المتبادل M واتصل هذان الملفان على التوالي ومر بهما التيار I بحيث تكون كثافة الفيض المغناطيسي لهما B_1 و B_2 في اتجاه واحد كما في شكل (٦-١٠ا).



شكل (٦-١٠): توصيل الملفات على التوالي:
ا ـ ينتج عن توصيلهما ومرور التيار فيهما مجالان مغناطيسيان لهما الاتجاه نفسه.
ب ـ متعاكسان في الاتجاه.

إذا تغيرت شدة التيار المار فيهما فإن القوة الدافعة الكهربية التأثيرية الذاتية والمتبادلة في كل من الملفين تكون في اتجاه واحد أيضا.

وتكون القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في الملف (1) تساوي:

$$\mathcal{E}_1 = L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

أما الـ ق.د.ك. المتولدة في الملف (2) فتساوي :

$$\mathcal{E}_2 = L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

وبذلك تكون القوة الدافعة التأثيرية الكلية :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \mathcal{E} = L' \frac{dI}{dt}$$

وهكذا فإن الحث الذاتي المكافىء L' يساوي :

$$L' = L_1 + L_2 + 2M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٣٨)$$

وإذا مر التيار I بحيث يؤدي إلى أن تكون B_1 و B_2 في اتجاه مضاد كما هو موضح بالشكل (١٠ب ـ ٦) فإن محصلة القوة الدافعة التأثيرية الذاتية والمتبادلة المتولدة (نتيجة تغير شدة التيار) في الملفين هي :

$$\mathcal{E} = \left(L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}\right) + \left(L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}\right)$$

$$\mathcal{E} = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt} = L'' \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore L'' = L_1 + L_2 - 2M \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٣٩)$$

ملاحظـات مهمـة

١ ـ إذا كان الفيض الناشىء في أحد الملفين لا يقطع الملف الآخر نظرا لابتعاد بعضهما عن بعض فإن $M = 0$ ويكون الحث الذاتي المكافىء طبقا للمعادلتين (٦-٣٨) و(٦-٣٩) :

$$L = L_1 + L_2 \quad .... \quad (٦\text{-}٤٠)$$

٢ ـ بطرح المعادلة (٦ـ٣٩) من المعادلة (٦ـ٣٨) ينتج أن الحث المتبادل بين الملفين هو:

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'') \quad ..... \quad (٦\text{-}٤١)$$

٣ ـ أما إذا كان الملفان ملفوفين على قلب حديدي، كما هو الحال في محول التيار، أو إذا كان الملفان متلاصقين فإن التدفق الناتج عن أحد الملفين يتصل كله (عمليا) بالملف الآخر، عندئذ يمكن الحصول من تعريف الحث الذاتي، معادلة (٦ـ٢٧)، والحث المتبادل، معادلة (٦ـ٣٢) والمعادلة (٦ـ٣٣)، على ما يلي:

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} \quad , \quad L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{I_2}$$

$$M = \frac{N_1\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2\Phi_1}{I_1}$$

$$\therefore M^2 = \frac{N_1\Phi_2 \times N_2\Phi_1}{I_2 \times I_1} = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} \times \frac{N_2\Phi_2}{I_2} = L_1 \times L_2$$

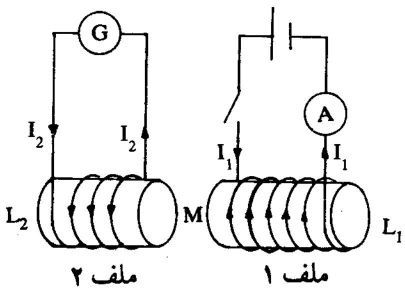
أي أن:

$$\therefore M = \sqrt{L_1 \times L_2} = (L_1 \times L_2)^{1/2} \quad (٦\text{-}٤٢)$$

أي أن الحث المتبادل بين ملفين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب حثهما الذاتي وذلك عند تلاصق الملفين.

٤ ـ يقاس الحث الذاتي والحث المتبادل عمليا باستخدام دوائر التيار المتردد كما سيأتي بعد. وذلك باستخدام قنطرة ويتسون المحورة (modified wheatstone bridge). ولكن يمكن أيضا قياسهما باستخدام التيار المستمر. ويسيشرح كيفية تعيين الحث المتبادل بين ملفين باستخدام جلفانومتر قذفي (ballistic galvanometer) بطريقة مبسطة كما يلي:

إذا فرض كما في شكل (١١-٦) أن الملف الابتدائي (1) متصل بمفتاح وبطارية وأمبيرومتر وبجواره ملف ثانوي (2) متصل بجلفانومتر قذفي. عند غلق المفتاح سوف يمر التيار في (1) مبتدئا بالصفر ويزداد بسرعة إلى قيمته المستمرة I_1 التي يسجلها الأمبيرومتر A. وأثناء نمو هذا التيار تتولد قوة دافعة تأثيرية ε_2 في الملف (2) وبهذا يمر فيه تيار تأثيري قمته في أية لحظة هو:



شكل (١١-٦): ملفان متجاوران حثهما الذاتي L_1 ، L_2 والمتبادل بينهما M ودراسة تأثير أحدهما على الآخر.

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2}$$

حيث R_2 مقاومة الدائرة (2) أي مقاومة الملف الثانوي والجلفانومتر.

$$\because \varepsilon_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = M\frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$\therefore I_2 = \frac{N_2}{R_2}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{M}{R_2}\frac{dI_1}{dt} + \frac{L_2}{R_2}\frac{dI_2}{dt}$$

أو

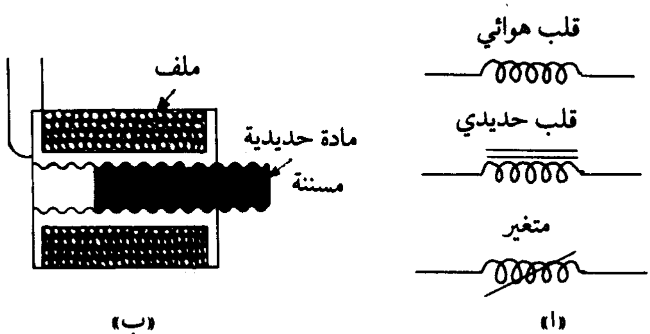
$$I_2 dt = \frac{N_2}{R_2} d\Phi = \frac{M}{R_2} dI_1 + \frac{L_2}{R_2} dI_2$$

$$q = \int_0^{\infty} I_2 dt = \frac{N_2}{R_2}\int_0^{\Phi 21} d\Phi = \frac{M}{R_2}\int_0^{I1} dI_1 + \frac{L_2}{R_2}\int_0^{0} dI_2$$

$$\therefore q = \frac{N_2}{R_2}\Phi_{21} = \frac{M}{R_2}.I_1 \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤٢ب - ٦})$$

حيث Φ_{21} هو التدفق الذي يتصل بالدائرة (2) عندما يصل التيار I_1 إلى نهايته العظمى I_1. وقد اختيرت كل من نهايتي التكامل الأخير لتساوي صفرا لأن التيار الابتدائي والتيار النهائي في الدائرة (2) يساويان الصفر. وهكذا فبمعرفة النهاية العظمى لزاوية انحراف الجلفانومتر يمكن حساب كل من Φ_{21} و M.

يمثل الشكل (١٢١ - ٦) الرموز المستعملة في الدوائر الكهربية للدلالة على نوع الملف المستخدم. ويتم تغيير المحاثة (inductance) إما بتغيير عدد لفات الملف أو بتحريك كتلة من مادة فرومغناطيسية (ferromagnetic) إلى داخل الملف أو إلى خارجه كما يوضحه شكل (١٢ب - ٦).



شكل (١٢-٦): ا ـ الرموز المستعملة للدلالة على نوع الملف المستخدم.
ب ـ ملف بداخله مادة حديد ومغناطيسية.

(٦-٧-٢) على التـوازي Inductors in parallel

إذا فرض أن الملفين، شكل (١٠-٦)، متصلان على التوازي ففي هذه الحالة يتفرع التيار I بين الملفين ويكون التيار الكلي مساويا إلى:

$$I = I_1 + I_2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٦\text{-}٤٣)$$

حيث I_1 التيار المار في الملف الذي حثه الذاتي L_1 و I_2 التيار المار في الملف الذي حثه الذاتي L_2.

ويكون معدل تغير التيار الكلي بالنسبة للزمن مساويا لمجموع معدل التغير لكل من I_1 ، I_2 ويتم ذلك بتفاضل المعادلة (٤٣-٦) بالنسبة للزمن:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٤٤)$$

ولكن من المعادلة (٢٦-٦) يكون:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\varepsilon}{L}, \quad \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\varepsilon_1}{L_1}, \quad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\varepsilon_2}{L_2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٤-٦)، مع ملاحظة أن $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ ، نجد أن:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

وإذا كان هناك عدد من الملفات n يزيد على اثنين فإن العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٤٥)$$

ويتم هذا على شرط أن تقوم باتخاذ احتياطات معينة تمنع تأثير المجالات المغناطيسية لهذه الملفات بعضها على بعض حتى لا يحدث ارتباط مغناطيسي بينهما نتيجة للتأثير المتبادل.

(٦-٨) سريان التيار في دائرة حثية
Current in an Inductive Circuit

(٦-٨-١) نمو التيار Growth of current

عند توصيل مصدر كهربي جهده ثابت ومقداره V فولت إلى دائرة بها مقاومة R أوم وليس لها حث ذاتي (بمعنى أن أجزاء الدائرة المختلفة لا تنتج أي مجال مغناطيسي) فإن قيمة التيار الذي يمر بالدائرة يخضع لقانون أوم أي أن:

$$I = \frac{V}{R}$$

ويبلغ التيار هذه القيمة في اللحظة نفسها التي تقفل فيها الدائرة، أي أنه لا يستغرق أي وقت في نموه، وذلك لعدم وجود أي عائق يعوق هذا النمو.

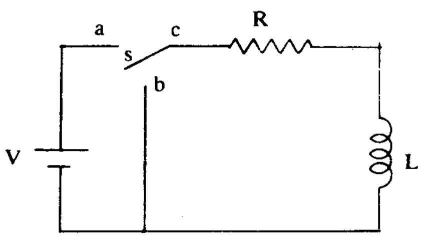
أما إذا كانت الدائرة تحتوي على ملف، له حث ذاتي L ، ومقاومة R فإن المجال المغناطيسي الذي ينشأ في الملف، شكل (١٣-٦)، ينمو مع التيار ومن ثم تتولد قوة دافعة كهربية مضادة تتوقف قيمتها على معامل الحث الذاتي L ومعدل نمو التيار $\frac{dI}{dt}$ حيث I هي قيمة التيار المار في الدائرة عند اللحظة t اعتبارا من وقت قفل الدائرة. ويجب أن يكون للجهد V في هذه الحالة مركبتان، إحداهما للتغلب على هبوط الجهد IR في المقاومة والأخرى لموازنة القوة الدافعة الكهربية المضادة $L\frac{dI}{dt}$. ومن ثم فإن معادلة توزيع الجهد هي:

$$V = IR + L\frac{dI}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٤٦)$$

وبضرب طرفي المعادلة في Idt يمكن الحصول على:

$$VIdt = I^2R\,dt + L\,Idt\left(\frac{dI}{dt}\right) \quad \cdots\cdots \quad (٦\text{-}٤٧)$$

يمثل المقدار VIdt كمية الطاقة (energy) التي تأخذها الدائرة الكهربية من المصدر في الزمن dt ، ويمثل $I^2R\,dt$ الطاقة التي تتبدد في الدائرة على شكل طاقة حرارية في المقاومة R ، كما أن الحد $LIdt(\frac{dI}{dt})$ يمثل الطاقة التي تستخدم في بناء المجال المغناطيسي في الزمن dt وتختزن فيه. وتظل الأمور تسير على هذا النحو حتى يبلغ التيار قيمته النهائية فيقف نموه عند قيمة ثابتة



شكل(١٣-٦): مصدر كهربي ثابت متصل بمقاومة R وملف L.

(I_{max}) وتصبـح قيمة $\frac{dI}{dt}$ مساوية للصفر عندئذ يقف نمو المجال المغناطيسي وتصبح الطاقة التي يعطيها المصدر الكهربي للدائرة كلها مساوية للطاقة الحرارية التي تتبدد في المقاومة وتخضع الدائرة لقانون أوم أي أن:

$$V = I_{max} R$$

$$V I_{max} dt = I_{max}^2 Rdt$$

ويحل المعادلة التفاضلية (٦-٤٦) يُحصل على قيمة التيار I عند أية لحظة t خلال فترة نموه بعد قفل الدائرة، اتصال s بـ a ، شكل (٦-١٣)، ويتم ذلك كما يلي:

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٦-٤٦) على الصورة التالية:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} + \left(I - \frac{V}{R}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٤٨)$$

وبوضع $y = I - \frac{V}{R}$ يمكن الحصول على:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٤٨) يكون:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{R}{L} dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\ln \ y = \frac{R}{L} t + \text{constant}$$

$$\therefore \ln \left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L} t + \text{constant}$$

ويحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية :

فعند البداية يكون $I = 0$ عندما $t = 0$ ومن ذلك يمكن الحصول على :

$$\ln\left(-\frac{V}{R}\right) = \text{constant}$$

$$\therefore \ln\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + \ln\left(-\frac{V}{R}\right)$$

أو

$$\ln\left(\frac{I - \frac{V}{R}}{-\frac{V}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t$$

أو

$$\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\therefore I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \ldots\ldots (٦ - ٤٩)$$

أو

$$I = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (٦\text{-}٥٠)$$

حيث I_{max} هي القيمة النهائية الثابتة للتيار الذي يمر في الدائرة . ويبين شكل (٦-١٤) المنحنى الذي يربط I بـ t طبقا للمعادلة (٦-٥٠). ويلاحظ أنه من الناحية النظرية البحتة تصبح $I = I_{max}$ في زمن مقداره ما لا نهاية أي $t = \infty$ أما من الناحية العملية فإن التيار يبلغ قيمته النهائية بعد زمن قصير.

بمفاضلة المعادلة (٦-٥٠) بالنسبة للزمن للحصول على معدل تغير التيار يمكن الحصول على :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥١)$$

ويكون معدل تغير التيار لحظة قفل الدائرة أي عند $t = 0$ هو:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{V}{L}$$

وهذا هو أكبر معدل لتغير التيار ويكون الجهد على ا لجزء الحثي في الدائرة عند لحظة قفل الدائرة هو:

$$V = L\left(\frac{dI}{dt}\right)_0$$

أي أن الجهد على المقاومة في هذه اللحظة يساوي صفر.

ويلاحظ أن المقدار $\frac{L}{R}$ له أبعاد الزمن لأن:

$$\frac{L}{R} = \frac{H}{\Omega} = \frac{V/(A/s)}{V/A} = s$$

وإذا عوض في المعادلة (٦ـ٥٠) بالقيمة $t = \frac{L}{R}$ يُحصل على قيمة التيار بعد زمن مقداره $\frac{L}{R}$ ثانية، ويرمز إليه بالرمز T كما يطلق عليه اسم ثابت الزمن (time constant) وتكون قيمة التيار المطلوبة هي :

$$I = I_{max}(I - e^{-1}) = 0.632 \quad I_{max}$$

ويعرف ثابت الزمن عندئذ بأنه الزمن الذي يستغرقه التيار لكي يصل إلى 0.632 من قيمته النهائية الثابتة.

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (٦ـ٥١) على الصورة التالية :

$$L\frac{dI}{dt} = Ve^{-\frac{R}{L}t}$$

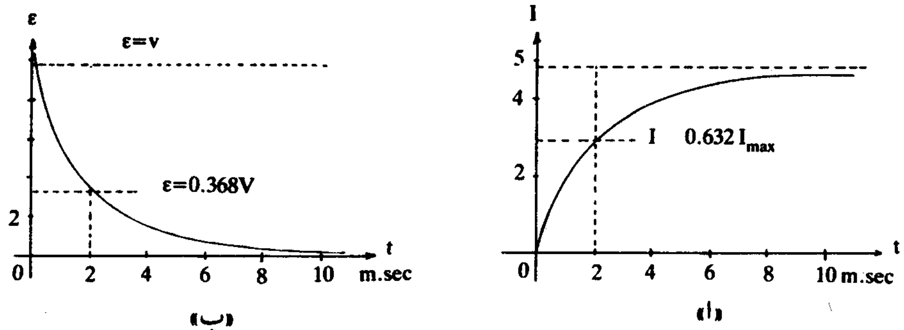
أو

$$\varepsilon = Ve^{-\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥٢)$$

حيث ε القوة الدافعة المستحدثة.

والشكل (١٤١ - ٦) يوضح تغير التيار I بالنسبة للزمن t حسب العلاقة (٦-٥٠) والشكل (١٤ب - ٦) يوضح تغير ε مع t وقد أخذت هذه النتائج عندما V=10Volt ، R = 2000Ω ، L = 4 Henrys ومن ثم يكون ثابت الزمن:

$$T = \frac{L}{R} = 2.0 \times 10^{-3}\,\text{sec.}$$



شكل (٦-١٤): ا - العلاقة بين التيار المار في الدائرة (٦-١٣) والزمن حسب المعادلة (٦-٥٠).
ب - العلاقة بين الجهد ε والزمن t حسب المعادلة (٦-٥٢).

(٦-٨-٢) اضمحــلال التيار Decay of the current

بفرض أنه بعد وصول التيار إلى قيمته الثابتة النهائية (I_{max}) فُتح المفتاح s كما في شكـل (٦-١٣) من النقطة a ووصل بالنقطة b ، أي أن القوى الدافعة V للبطارية أصبحت مستبعدة وبذلك تؤول المعادلة (٦-٤٦) إلى:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥٣)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\therefore \ln I = -\frac{R}{L}t + \text{constant} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥٤أ-٦})$$

ويحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية:

فعندما $t = 0$, $I = I_{max}$، أي لحظة بدء انقطاع التيار:

$$\therefore \ln I_{max} = \text{constant}$$

وبالتعويض في المعادلة (٥٤ب - ٦) يُحصل على:

$$\therefore I = I_{max}\, e^{-\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٥٤ ب - ٦})$$

وهـذه هي معـادلة اضمحلال التيار في دائرة حث ومقاومة ويسمى المقدار $\frac{L}{R}$ بثابت الزمن كما ذكر سابقا وإذا عوض عن $t = \frac{L}{R}$ في المعادلة (٥٤-٦) فإن:

$$I = I_{max}\, e^{-1} = 0.368\, I_{max}$$

وبهذا يمكن تعريف ثابت الزمن بأنه (الزمن اللازم لوصول التيار إلى 0.37 من قيمته الأصلية).

ويضرب طرفي المعادلة (٥٣-٦) في Idt نحصل على معادلة الطاقة:

$$L\, I \left(\frac{dI}{dt}\right) dt + I^2 R\, dt = 0$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الطاقة التي تبددها المقاومة على شكل طاقة حرارية مستمدة من الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي، ولذلك فإن الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي تكون قد استنفذت عن آخرها وتصبح قيمتها صفرا عندما تصبح قيمة التيار صفرا.

(٦-٩) طـاقــة الحــث

Energy Associated with a Inductor

تتحول الطاقة المبذولة بواسطة البطارية، في حالة بناء التيار في الدائرة المبينة في الشكل (٦-١٣) المذكورة في البند (٦-٨)، إلى :

ا ـ طاقة يختزنها الملف وتظهر فيه على هيئة مجال مغناطيسي.

ب ـ طاقة تستهلك في المقاومة R وتظهر على هيئة حرارة.

بضرب طرفي المعادلة (٦-٤٦) بشدة التيار يمكن الحصول على :

$$IV = I^2R + L\,I\,\frac{dI}{dt}$$

حيث IV يمثل معدل بذل الطاقة «أي القدرة .... power» بواسطة البطارية و I^2R يمثل معدل تولد الطاقة الحرارية أي القدرة المستهلكة في المقاومة و $LI\frac{dI}{dt}$ يمثل القدرة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي للملف التي تمثل معدل بذل الطاقة لبناء المجال فترة نمو التيار، وعندما يصل التيار إلى قيمته النهائية (I) فإن $\frac{dI}{dt} = 0$ ويقف إمداد الملف بالطاقة التي سنرمز لها بالرمز "W".

ويكون معدل بذل الطاقة (القدرة) لبناء التيار أي لبناء المجال المغناطيسي هي :

$$P = \frac{dW}{dt} = L\,I\,\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore dW = L\,I\,dI$$

ويُحصل على الشغل الكلي لبناء التيار من الصفر إلى I بتكامل هذه المعادلة :

$$\therefore W = \int dW = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{1}{2}L\,I^2 \cdots \qquad (\text{٥٥أ} - ٦)$$

وهذه الطاقة تختزن في الملف على هيئة مجال مغناطيسي ويرمز لها عادة بالرمز U.

هذا وقد افترض أن الملف والمقاومة هما عنصران منفصلان في الدائرة المبينة في شكل (١٣-٦) ولكن القوانين التي استنتجت صحيحة أيضا في الحالة التي يمر فيها التيار في ملف له مقاومة R وحث ذاتي L.

وإذا كانت لدينا دائرتان، كما في شكل (٩-٦)، فإن الطاقة المطلوبة لبناء التيارين I_1 و I_2 يمكن الحصول عليها من المعادلة (٣٥-٦) حيث:

$$dU = L_1I_1dI_1 \pm MI_1dI_2 + L_2I_2dI_2 \pm MI_2dI_1$$

$$\because\ d(MI_1I_2) = MI_1dI_2 + MI_2dI_1$$

$$\therefore\ dU = L_1I_1dI_1 + L_2I_2dI_2 \pm d(MI_1I_2)$$

$$\therefore\ U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm MI_1I_2 \cdots \quad (\text{٥٥ب - ٦})$$

(١-٩-٦) كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي Energy density of a magnetic field

توضح المعادلة (١٥٥ - ٦) الطاقة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي في ملف. فإذا فرض أن طول الملف l ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N وكان الملف طويلا بحيث يمكن إهمال المجال المغناطيسي خارجه واعتبارا أن الفيض المغناطيسي كله يخترق بانتظام محور الملف فإن الطاقة كلها ستكون مخزونة في حجم يساوي (Sl) وتكون الطاقة في وحدة الحجوم، كثافة الطاقة (energy density)، هي:

$$u = \frac{L\,I^2}{2\,l\,S} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{٥٦-٦})$$

ومعروف من المعادلتين (٢٨-٦) و (٤٢-٥) أن:

$$B = \frac{\mu_0.N.I}{l} \quad \text{و} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

وبالتعويض في المعادلة (٥٦-٦) عن L ، I يمكن الحصول على:

$$u = \frac{1}{2\mu_0} . B^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥٧)$$

وحيث إن $B = \mu_0 H$ (H شدة المجال المغناطيسي).

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥٨)$$

وإذا كان الملف ملفوفا حول مادة معامل نفاذيتها $\mu = \mu_0 \mu_r$ حيث μ_r معامل النفاذية النسبية.

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٥٩)$$

تعتبر المعادلة (٦-٥٨) معادلة عامة وتعطى كثافة الطاقة أي الطاقة لوحدة الحجوم في أي مجال مغناطيسي مهما كان شكل هذا المجال ومصدره.

مثال (٦-١١)

ملف حثه الذاتي 3 هنري ومقاومته 6 أوم متصل على التوالي ببطارية قوتها الدافعة 12 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة.

احسب:

ا ـ معدل نمو التيار بمجرد غلق الدائرة.

ب ـ معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى 1 أمبير.

جـ ـ شدة التيار بعد انقضاء زمن قدره 0.2 ثانية على غلق الدائرة.

د ـ الطاقة المخزونة في هذا الملف بعد وصول التيار إلى قيمته المستقرة.

الحل

يمكن كتابة المعادلة (٦-٤٦) بالصورة التالية:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} I$$

ولايجاد المطلوب «ا» فإنه بمجرد غلق الدائرة يكون $I = \text{zero}$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{12}{3}=4 \quad A/s$$

ولايجاد المطلوب «ب» فإن :

$$\frac{dI}{dt}=\frac{12}{3}-\frac{6}{3}\times 1=2 \quad A/s$$

ولايجاد المطلوب «جـ» تطبق المعادلة :

$$I=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$I=\frac{12}{6}\left(1-e^{-\frac{6}{3}\times 0.2}\right)=0.65\ A$$

ولايجاد المطلوب «د» تطبق المعادلة :

$$U=\frac{1}{2}\ L I_{max}^{2}=\frac{1}{2}\times 3\times\left(\frac{12}{6}\right)^{2}=6 \quad J$$

مـثـال (١٢-٦)

ملف حثه الذاتي 3 هنري يتصل على التوالي بمقاومة 10 أوم وبطارية قوتها الدافعة 3 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة والمطلوب حساب ما يلي بعد انقضاء زمن قدره 0.3 ثانية على غلق هذه الدائرة.

ا ـ القدرة المبذولة من البطارية.

ب ـ القدرة المستهلكة في المقاومة.

جـ ـ القدرة اللازمة لبناء التيار في الملف.

الحـــل

$$\because I=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

$$\therefore I = \frac{3}{10}\left(1-e^{-\frac{10}{3}\times 0.3}\right) = 0.189 \quad A$$

من المعادلة التالية :

$$IV = I^2R + L\,I\,\frac{dI}{dt}$$

يكون :

$$P = P_R + P_L$$

حيث P القدرة المبذولة من البطارية «المطلوب ا» .

$$P = IV = 0.189 \times 3 = 0.567 \quad W$$

و P_R القدرة المستهلكة في المقاومة R على هيئة حرارة «المطلوب ب» .

$$P_R = I^2R = (0.189)^2 \times 10 = 0.357 \quad W$$

و P_L القدرة المبذولة في الملف «المطلوب جـ» .

$$P_L = L\,I\,\frac{dI}{dt}$$

ولمعرفة P_L يتطلب حساب $\frac{dI}{dt}$ باشتقاق المعادلة A نحصل على :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{v}{L}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{3}{3}e^{-1} = 0.37 \quad A/s$$

$$\therefore P_L = 3 \times 0.189 \times 0.37 = 0.21 \quad W$$

ويلاحظ أنه يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بمعلومية P ، P_R حيث :

$$P_L = P - P_R = 0.567 - 0.357 = 0.21 \quad W$$

(٦-١٠) شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي

Charging and Discharging a Capacitor Through Inductive Coil

يمثل الشكل (١٥-٦) دائرة مكونة من ملف L ومقاومة R ومكثف C وبطارية جهدها V متصلة فيما بينها على التوالي. فيتم الشحن بتوصيل الدائرة (١٥ا - ٦) ويتم التفريغ بتوصيل الدائرة (١٥ب - ٦) بعد شحن المكثف .

بتطبيق قانون كيرشوف الخاص بتوزيع الجهد على الدائرتين نُحصل على :

١ ـ في حالة الشحن يكون توزيع الجهد كالتالي :

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad \ldots\ldots \quad (\text{٦ - ٦٠أ})$$

$$\because I = \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L} \cdot \quad (\text{٦ - ٦٠ب})$$

٢ ـ أما في حالة التفريغ فيحذف جهد البطارية من المعادلة (٦٠ـ٦) ومنه فإن :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\text{٦-٦١})$$

وواضح أن المعادلتين (٦٠ـ٦) و(٦١ـ٦) معادلتان تفاضليتان تحتاجان إلى حل مناسب لمعرفة سلوك الشحنة مع الزمن وكذلك التيار وسنبدأ أولا بحل المعادلة (٦١ـ٦) في حالة التفريغ .

أولا : التفريـــغ

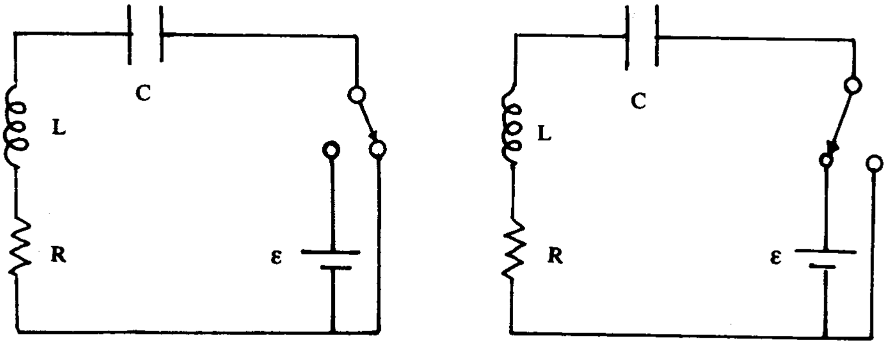
تحل المعادلة (٦١ـ٦) بافتراض حل خاص لها «بنى هذا الافتراض على ما سبقت دراسته في البندين (٦ ـ ٨ ـ ١) و(٦ ـ ٨ ـ ٢) في هذا الفصل وكذلك البند (٤ ـ ٦) في الفصل الرابع» وهو:

$$q = Ae^{\lambda t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٦-٦٢})$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \lambda Ae^{\lambda t} \qquad \& \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦١ـ٦) نُحصل على :

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \frac{R}{L}\lambda Ae^{\lambda t} + \frac{1}{LC}Ae^{\lambda t} = 0$$



(ب) (ا)

شكل (١٥-٦): دائرة تحتوي على مكثف C وملف L ومقاومة R متصلة على التوالي ببطارية
أ - حالة الشحن ب - حالة التفريغ.

$$\therefore \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{L\,C} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (٦٣-٦)$$

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية، والمعاملان $\beta = \frac{1}{LC}$ و $\alpha = \frac{R}{L}$ يعرفان بثابتي التوهين (attenuation constants)، وجذرا هذه المعادلة هما:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\alpha - (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \qquad (٦٤-٤)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن الحل للمعادلة (٦١-٦) يكون على الشكل التالي:

$$q = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_1 t} \qquad \ldots (١٦٥ - ٦)$$

و

$$I = A_1\, \lambda_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, \lambda_2\, e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots (٦٥ب - ٦)$$

أما الشكل النهائي لقيمة الشحنة اللحظية وكذلك التيار فإنه يعتمد على قيمة المقدار الذي يقع تحت الجذر فقد يكون موجبا أو صفرا أو سالبا أي $4\frac{L}{C} < = > R^2$ وسنميز كلا منها كالتالي:

ا ـ بافتراض أن $R^2 > \frac{4L}{C}$

في هذه الحالة تكون قيم λ_1 ، λ_2 حقيقية .

ويمكن معرفة A_1 ، A_2 من الشروط الابتدائية حيث :

$$t = 0\,, I = 0 \;\&\; q = q_0$$

وبالتعويض في المعادلتين (٦٥-٦) نُحصل على :

$$A_1 + A_2 = q_0$$

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$$

$$\therefore A_1 = \frac{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} q_0 \;,\text{و}\; A_2 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} q_0 \qquad (٦٦\text{-}٦)$$

وبالتعويض عن A_1 في المعادلة (١٦٥ ـ ٦) والمعادلة (٦٥ب ـ ٦) نُحصل على :

$$q = \frac{\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{L\,C}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}} \; q_0 \, e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\} t}$$

$$+ \frac{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}} q_0 \, e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\} t}$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{R}{L} t} \left\{ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t} \right\} \qquad (٦٧\text{-}٦)$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} \; e^{-\frac{1}{2}\frac{R}{L} t} \cosh \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t \;\cdots\cdots \qquad (٦٨\text{-}٦)$$

ب ـ بافتراض أن $R^2 = \frac{4L}{C}$

ويكون الجذران في هذه الحالة متساويين أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad .... \quad (٦\text{ـ}٦٩)$$

ومع ذلك سيفترض أن الجذرين غير متساويين بحيث تكون قيمتهما $\lambda + h$ و λ حيث $h \to 0$ وبذلك يمكن أن يكون الحل للمعادلة (٦١ـ٦) على الصورة:

$$q = (A + Bt)\, e^{\lambda t}$$

و

$$I = (A + Bt)\, \lambda\, e^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية يُحصل على قيمتي A و B حيث:

$$A = q_0 \quad , \quad B = \frac{1}{2}\alpha\, q_0$$

$$\therefore q = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right) q_0\, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \quad .. \quad (٦ - أ٧٠)$$

و

$$I = \frac{R^2 t}{4L^2}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \quad ..... \quad (٦ - ب٧٠)$$

جـ ـ بافتراض أن $R^2 < \frac{4L}{C}$

تكون في هذه الحالة R صغيرة وبذلك يكون كل جذر λ_1 ، λ_2 عبارة عن عدد مركب. الجزء الأول حقيقي والجزء الذي تحت الجذر التربيعي عدد تخيلي، الملحق ٢، وبذلك تصبح المعادلة (٦٤ـ٦) كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}. \quad (٦\text{ـ}٧١)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$

وبذلك تصبح المعادلة (٦ - أ٦٥) بعد التعويض عن λ_1 و λ_2 من المعادلتين (٦ـ٧١) كالآتي:

$$\therefore q = A_1 e^{\frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t}$$

أو

$$q = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[A_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2 t}} + A_2 e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2 t}}\right]$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$q = Ae^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}\ \ t-\Phi\right)$$

$$q = Ae^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\omega t-\Phi) \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٧٢)$$

حيث

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad , \ \alpha = \frac{R}{L}$$

أما التيار فيحسب بتفاضل المعادلة (٦ـ٧٢) أي :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha Ae^{-\frac{1}{2}\alpha t}\cos(\omega t-\Phi) - \omega\sin(\omega t-\Phi)\,Ae^{-\frac{1}{2}\alpha t}$$

$$\therefore I = -Ae^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[\frac{1}{2}\alpha\cos(\omega t-\Phi) + \omega\sin(\omega t-\Phi)\right] \quad (٦\text{-}٧٣)$$

ويمكن معرفة الثابتين A و Φ من الشروط الابتدائية، فعندما تكون $t = 0$ يكون :

$$q = q_0 \, , I = 0$$

وبالتعويض في المعادلتين (٦ـ٧٢) و(٦ـ٧٣) نُحصل على :

$$q_0 = A\cos\Phi \quad \ldots\ldots \quad (٦ - ١٧٤)$$

و

$$\frac{1}{2}\alpha\cos\Phi + \omega\sin\Phi = 0$$

أو

$$\tan\Phi = \frac{\alpha}{2\omega} \quad \cdots\cdots \quad (\text{٧٤ب - ٦})$$

ومنه فإن:

$$\sin\phi = \frac{\alpha}{2r} \quad , \quad \cos\phi = \frac{\omega}{r} \qquad (\text{٧٤جـ - ٦})$$

حيث:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{٧٤د - ٦})$$

من المعادلتين (١٧٤ - ٦) و(٧٤جـ - ٦) نُحصل على:

$$A = \frac{r\,q_0}{\omega}$$

وبالتعويض في المعادلتين (٧٢-٦) و(٧٣-٦) نُحصل على:

$$q = q_0\frac{r}{\omega}\,e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\omega t - \Phi)$$

وكذلك:

$$I = -A\,r\,e^{-\frac{1}{2}\alpha t}\sin\omega t = -q_0\frac{r^2}{\omega}\,.\,e^{-\frac{\alpha}{2}t}\sin\omega t$$

والإشارة السالبة تدل على أن التيار في اتجاه معاكس لاتجاه التيار أثناء الشحن.

وأخيرا بالتعويض عن α ، r ، ω نُحصل على:

$$q = q_0\frac{(1/\sqrt{L\,C})}{\sqrt{(1/L\,C)-(R^2/4L^2)}}\,e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{L\,C}-\frac{R^2}{L^2}}\,t-\Phi\right) \quad (\text{١٧٥ - ٦})$$

$$I = \frac{(V/L)}{\sqrt{(1/L\,C)-(R^2/4L^2)}}\,e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}\,t\right) \cdot \quad (\text{٧٥ب - ٦})$$

وهذه العلاقة علاقة تذبذبية سعتها متناقصة على النمط الأسي وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة (١٧٥ - ٦) كما في شكل (١٦جـ - ٦). والتردد الطبيعي (natural frequency) للدائرة يعطى من العلاقة التالية :

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad .. \quad (\text{١٧٦أ - ٦})$$

أما إذا كانت المقاومة R صغيرة جدا فإن المعادلة (١٧٦ - ٦) تصبح :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}} \quad ...... \quad (\text{١٧٦ب - ٦})$$

حيث تسمى f_0 بتردد الذبذبات الحرة (free oscillation) فإذا فرض أن q_1 ، q_2 هي أعلى قيمتين متتاليتين خلال فترة زمنية قدرها T فإن :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{e^{-\frac{1}{2}\alpha(t+T)}} = e^{\frac{1}{2}\alpha T}$$

و

$$\ln\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}\alpha T = \frac{2\pi\left(\frac{R}{2L}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad .. \quad (\text{٦-٧٧})$$

ويرمز للمقدار $\ln\frac{q_1}{q_2}$ بالرمز δ ويعرف بالتناقص اللوغاريثمي لكل دورة للدائرة (logarithmic decrement per cycle) وإذا كانت مقاومة الدائرة صغيرة فإن :

$$\delta = \frac{\pi R}{L}\sqrt{L\,C} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{L\,\omega_0} = \pi\frac{R}{\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)} \quad (\text{٦-٧٨})$$

أي أن δ تساوي π مضروبا في النسبة بين المقاومة R والمفاعلة الحثية (inductive reactance) أو المفاعلة السعوية (capacitive reactance) للدائرة في حالة الرنين.

والشكل (٦-١٦) يوضح طبيعة التفريغ الحادث لثلاث قيم لمقاومة الدائرة عندما يكون $C = 1\mu f$ و $L = 1H$ أما الجهد فيمثل عددا بسيطا من الفولت.

ثانيا: الشحن

يمكن كتابة المعادلة (٦-٦٠) بالصورة التالية:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٧٩)$$

وحسب ما شرح في «أولا» فإن حل هذه المعادلة التفاضلية يمكن أن يكون على الشكل التالي:

$$I = A_1 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cos(\omega' t - \Phi_1) \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٨٠)$$

حيث Φ_1 ، A_1 ثوابت يمكن معرفتها من الشروط الابتدائية حيث:

عندما تكون $t = 0$ يكون $I = 0$ ومنه فإن $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore I = A_1 e^{\left(\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \sin \omega t \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٨١)$$

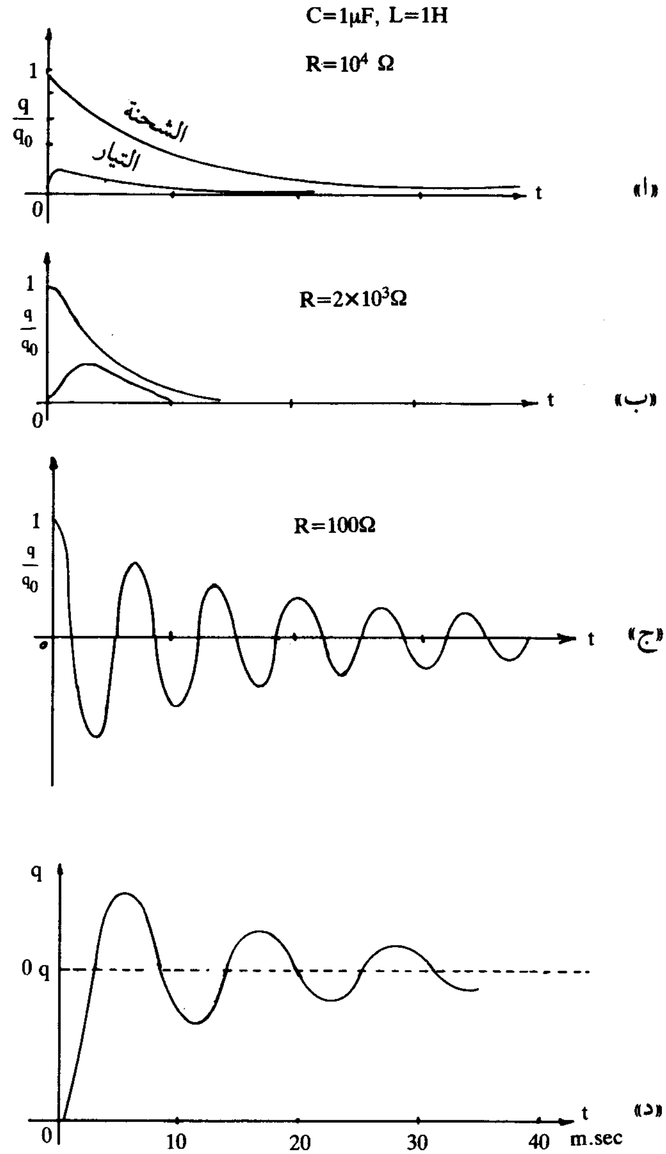
$q = 0$ $\because$ عندما تكون $t = 0$

يمكن الحصول من المعادلة (٦-٦٠) على:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V}{L}$$

وبمفاضلة المعادلة (٦-٨١) يُحصل على:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = A_1 \omega' = A_1 \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$



شكل (١٦-٦): ا، ب، جـ- تفريغ مكثف سعته $1\mu f$ خلال ملف له حث، فقط، ذاتي قيمته 1H لقيم مختلفة لـ R (($10^4\Omega$ و $2 \times 10^3\Omega$ و 100Ω)).

د- تغير الشحنة q على مكثف أثناء عملية الشحن، خلال ملف L بحيث إن قيم R ، L ، C تجعل العلاقة متذبذبة، مع الزمن t.

وبمساواة المعادلتين السابقتين يُحصل على :

$$A_1 = \frac{V}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$\therefore I = \frac{V}{\sqrt{(L/C)-(R^2/4)}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}t\right) \quad (١٨٢ - ٦)$$

$$\ldots\ldots \quad (٨٢ب - ٦)$$

$$q = q_0\left[1 - \frac{(1/\sqrt{LC})}{\sqrt{(1/LC)-(R^2/4L^2)}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}t - \Phi\right)\right]$$

فإذا كانت $R^2 = \frac{4L}{C}$ *فإن :*

$$I = \frac{V}{L} t e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \quad \ldots\ldots \quad (١٨٣ - ٦)$$

أما إذا كانت $R^2 > \frac{4L}{C}$ *فإن :*

$$I = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \sinh\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\, t \quad (٨٣ب - ٦)$$

والشكل (١٦د - ٦) يوضح تغير الشحنة بالنسبة للزمن أثناء شحن المكثف وقد وضعت قيم ثوابت الدائرة L و C بحيث يكون الشكل متذبذبا .

ومن الملاحظ أن القيمة العظمى للشحنة، عند لحظة البداية، تكون أكبر كثيرا من قيمة الشحنة النهائية على المكثف . ولذلك إذا شحن المكثف من مصدر جهد عال خلال مقاومة صغيرة ومحاثه كبيرة فإن عزل المكثف سيحدث وميضا ولمنع حدوث ذلك لابد أن يتم شحن المكثف من خلال مقاومة كبيرة .

ثالثا: حـــل خـــاص

إذا رُجع مرة أخرى إلى الحل المفترض (٦٢-٦) لحل المعادلة (٦٠ب - ٦) واعتبر أن $A = A_1 = A_2$ في الحل (١٦٥ - ٦) فإن:

$$q = A\,(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية فإنه عندما تكون $t = 0$ تكون $q = q_0$ ومنه فإن:

$$A = \frac{1}{2} q_0$$

$$\therefore q = \frac{1}{2} q_0 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \left\{ e^{\sqrt{(R^2/4L^2)-(1/L\,C)}.t} + e^{\sqrt{(R^2/4L^2)-(1/L\,C)}.t} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (١٨٤ - ٦)$$

فإذا كان $\frac{R^2}{4L} > \frac{1}{LC}$

فإن المقدار تحت الجذر موجب ومنه فإن:

$$q = q_0 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cosh \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{L\,C}}\, t$$

أما إذا كان $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ فإن:

$$q = q_0 e^{-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots \quad (٨٤ب - ٦)$$

وأخيرا إذا كان $\frac{1}{4L} \langle \frac{R^2}{LC}$ فإن:

يكون المقدار تحت الجذر تخيليا ومنه فإن:

$$q = \frac{1}{2} q_0 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \left(e^{i\sqrt{(1/L\,C)-(R^2/4L^2)t}} + e^{-i\sqrt{(1/L\,C)-(R^2/4L^2)t}} \right)$$

أو

$$q = q_0 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) t \quad \ldots \quad (٨٥-٦)$$

وهي المعادلات السابقة نفسها مع اختلاف في مقدار الثوابت.

(٦-١١) المولدات
Generators

(٦-١١-١) طريقة توليد جهد متردد Generation of alternating voltage

إشارة لما درس في البنود السابقة من هذا الفصل فإن كل جهاز يولد تيارا كهربيا نتيجة لحركة نسبية بين الموصل والمجال المغناطيسي يسمى مولدا (generator). وأنواع المولدات كثيرة يتألف الشائع منها من ملف معدني يدور في مجال مغناطيسي ناتج عن قطبي مغناطيس كهربي (electromagnet) ويسمى هذا المولد بالدينامو (dynamo) بينما يسمى المولد ذو المغناطيس الدائم (parmanent magnet) بالمغنيط (magneto).

فالأجزاء الرئيسة للمولد هي:

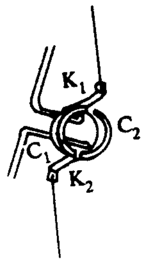
١ - مجال مغناطيسي ناتج عن مغناطيس كهربي أو دائم.

٢ - ملف دوار (rotating coil) وهو عضو الانتاج الكهربي (armature).

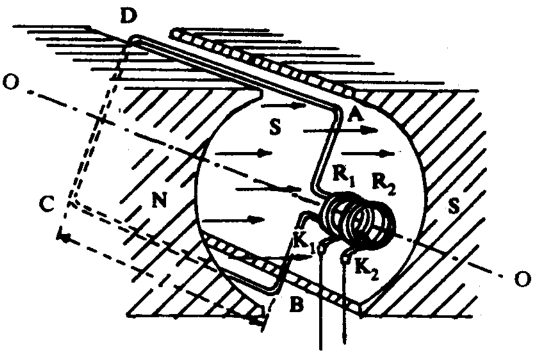
٣ - جهاز لتوصيل الملف الدوار بالدوائر الخارجية مثل الحلقات الزالقة (slip rings) أو مبدل (عاكس للتيار commutator) ويلف الملف الدائر بصورة عملية حول قلب حديدي (iron core) للحصول على مجال منتظم قوي.

ويبين الشكل (١٧-٦) طريقة عمل الدينامو، فهو يتكون من ملف مستطيل الشكل ABCD عدد لفاته N ومساحة وجهه S يدور حول محوره O–O في مجال مغناطيسي منتظم كثافة فيضه B ويتصل طرفا الملف بحلقتين زالقتين R_1 ، R_2 بحيث يمر محور الدوران بمركز هاتين الحلقتين، وتدور الحلقتان بدوران الملف ويمس محيط كل حلقة فرشـاة (brush) K_1 , K_2 وهاتان الفرشاتان تصلان الملف بالدائرة الخارجية، وتعدان مصدرين للقوة الدافعة الكهربية التأثيرية ε التي ستتولد بين طرفي الملف عند الدوران.

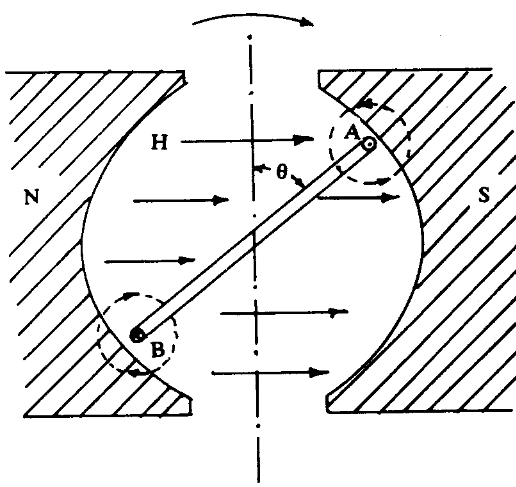
وتستخدم الآلات الحرارية أو التوربينات المائية (hydraulic turbines) مثلا لإدارة الملف سالف الذكر.



«ب»



«ا»



«ج»

شكل (١٧-٦): ا ـ ملف مستطيل يتحرك في مجال مغناطيسي (طريقة عمل الدينامو) يتصل طرفاه بحلقتين زالقتين R_1 ، R_2 ويمس محيط كل حلقة فرشاه K_1 ، K_2.
ب ـ استخدام معدلين C_1 ، C_2 بدلا من الحلقتين R_1 ، R_2 للحصول على تيار أحادي الاتجاه.
جـ ـ منظر خلفي للشكل ا يوضح طريقة لحساب القوة الدافعة الكهربية الحثية «التأثيرية» الناتجة عن حركة الملف في المجال المغناطيسي.

ومن الشكل (١٧جـ ـ ٦) والذي يمثل المنظر الخلفي للشكل (١١٧ ـ ٦) يمكن حساب القوة الدافعة التأثيرية ε الناتجة كما يلي :

إذا فرض أنه في لحظة ما أثناء الدوران كان مستوى الملف يصنع مع العمودي على المجال B زاوية قدرها θ كما في شكل (١٧جـ ـ ٦) .

∴ الفيض المغناطيسي الكلي Φ العمودي المخترق للملف يساوي :

$$\Phi = NSB\cos\theta$$

حيث $B\cos\theta$ هي مركبة B العمودية على مستوى الملف الذي عدد لفاته N ، ومساحة وجهه S.

وحسب المعادلة (١١١ ـ ٦) تكون القوة الدافعة الكهربية المستحثة في الملف هي :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -NSB\frac{d}{dt}\cos\theta$$

$$\therefore \varepsilon = -NSB\frac{d}{d\theta}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= NSB\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٨٦)$$

وإذا كانت ω هي السرعة الزاوية (angular velocity) للملف فإن الزاوية θ التي دارها الملف في زمن قدره t هي :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad , \qquad \theta = \omega t$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٨٦) نحصل على :

$$\varepsilon = NSB\,\omega\sin(\omega t) \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٨٧)$$

وحسب هذه المعادلة فإن $\sin(\omega t)$ يتغير من $(+1)$ عندما تكون $\theta = \omega t = 90°$ إلى (-1) عندما تكون $\theta = \omega t = 270$ وبهذا فإنه في خلال دورة كاملة تتغير القوة الدافعة التأثيرية المتولدة ε كما يلي:

١ ـ تكون $\varepsilon = 0$ عندما $\theta = \omega t = 0$

٢ ـ تزداد ε بازدياد θ إلى أن تصبح $\theta = 90°$ وعندها تكون ε نهاية عظمى ε_{max} حيث $\varepsilon_{max} = NSB\omega$

٣ ـ تقل ε إلى أن تصل إلى الصفر عند $\theta = 180°$

٤ ـ تزداد ε في الاتجاه المعاكس إلى أن تصل θ إلى $270°$ وعندها تكون نهاية عظمى ε_{max} حيث $\varepsilon_{max} = -NSB\omega$

٥ ـ تقل ε إلى أن تعود إلى الصفر مرة أخرى عند $\theta = 360°$

وبالتعويض عن النهاية العظمى للقوة الدافعة الكهربية في المعادلة (٦ـ٨٧) نحصل على:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max} \sin \omega t. \qquad (٦\text{ـ}٨٨)$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة منحنى الجيب (sine curve) أو معادلة الحركة التوافقية البسيطة (simple harmonic motion) وهذه القوة الدافعة الحثية هي الواقعة بين طرفي الفرشاتين K_1 ، K_2

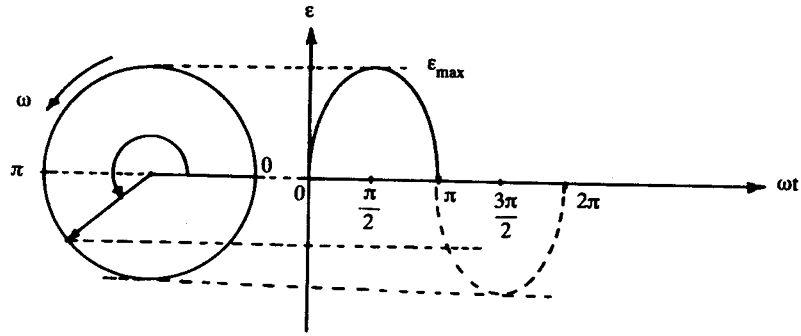
وإذا كانت T تمثل الزمن بالثانية لدورة كاملة للملف حول محوره O–O وتعرف بزمن الدورة، f عدد الدورات الكاملة للملف في الثانية وتعرف بالتردد (frequency) فيمكن التعبير عن السرعة الزاوية ω بالمعادلة:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{rad/s}$$

$$\therefore \varepsilon = \varepsilon_{max} \sin 2\pi f t \qquad (٦\text{ـ}٨٩)$$

ويمكن تمثيل منحنى الجيب بيانيا للقوة الدافعة الحثية، المعادلة (٦ـ٨٨)، كما هو مبين بالشكل (٦ـ١٨).

ويلاحظ من الشكل (١٨-٦) أن قيمتها تتغير من لحظة إلى أخرى وتكون موجبة في النصف الأول للدورة وسالبة في النصف الثاني للدورة أي أنها قوة دافعة مترددة (alternating E.M.F.).



شكل (١٨-٦): منحنى جيبي يمثل العلاقة بين القوة الدافعة الحثية والزاوية $\theta = \omega t$ الناتجة عن حركة الملف كما في شكل (١٧-٦).

ولذلك فالجهد المتردد هو جهد يتغير مقداره تغيرا دوريا مع الزمن ويتغير اتجاهه بانتظام كل زمن معين.

مـثـال (٩-٦)

يدور ملف لمولد كهربي، (A.C.) ، بسرعة ثابتة وبمعدل 1800 دورة في الدقيقة في مجال مغناطيسي منتظم كثافة فيضه 0.85 ويبر لكل متر مربع فإذا كانت مساحة الملف 0.06 مترا مربعا، احسب:

ا ـ أقصى قيمة للقوة الدافعة الحثية المتولدة في الملف المحتوي على 25 لفة.

ب ـ القوة الدافعة الكهربية اللحظية المتولدة في الملف عند دورانه زاوية قدرها 30° من وضعه الرأسي.

الحـل

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi \times 1800}{60}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 60\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\therefore \mathcal{E}_{max} = n.S.B.\omega = 25 \times 0.06 \times 0.85 \times 60 \times \pi = 240\ V$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} . \sin(30^\circ) = 240 \times 0.5 = 120\ V$$

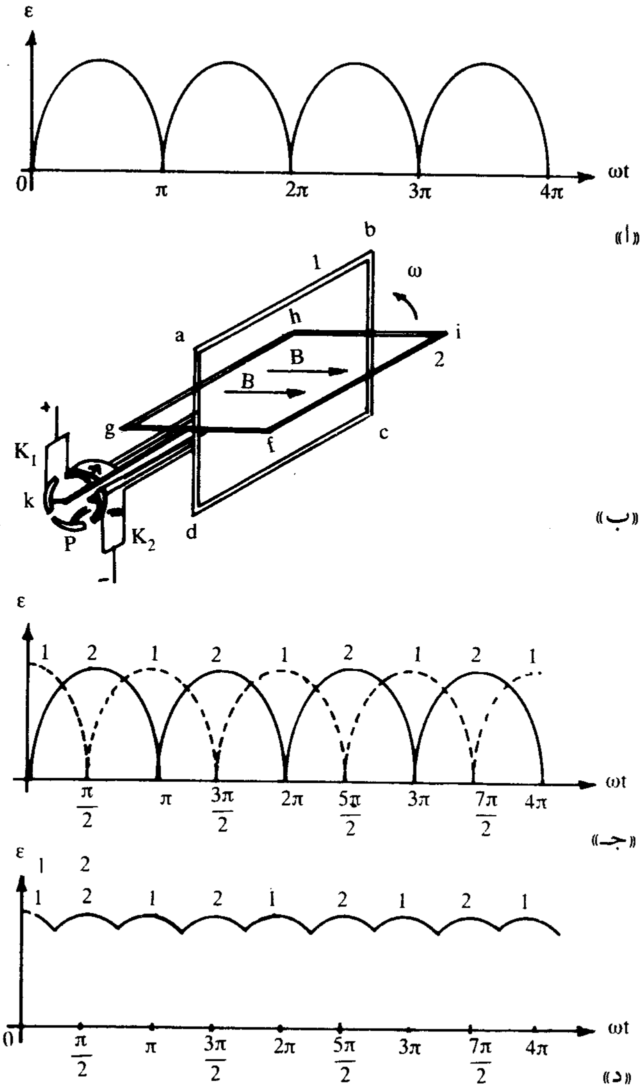
(٦-١١-٢) مولد التيار المستمر D. C. generator

يتضح من البند السابق (٦-١١-١) أن القوة الدافعة الكهربية في الملف تعكس اتجاهها مرتين كل دورة كاملة كما في شكل (١٧ب - ٦) إذا كانت أطراف الملف متصلة بالدائرة الخارجية من خلال الحلقتين المنزلقتين R_1 ، R_2 والفرشتين K_1 ، K_2 ويسمى الدينامو في هذه الحالة بدينامو التيار المتردد (A.C. dynamo).

ولكن استبـدال الحلقتين المنزلقتين بمبدلين C_1 ، C_2 عاكسين للتيار المبين في شكل (١٧ - ٦) يمكّن من الحصول على تيار أحادي الاتجاه (unidirectional current) والمبدل هو عبارة عن حلقة من النحاس منقسمة إلى نصفين بينهما مادة عازلة.

يتصل المبدلان C_1 ، C_2 بطرفي الملف «كل طرف بمبدل» وتتلامس الفرشاتان K_1 ، K_2 معهما بحيث يمر كل مبدل من فرشاة إلى الأخرى عند لحظة انعكاس القوة الدافعة الكهربية في الملف أي عندما يكون مستوى الملف متعامدا مع المجال. وبذلك يكون اتجاه القوة الدافعة الكهربية بين طرفيّ الملف متغيرا بينما تكون في الدائرة الخارجية أحـادية الاتجـاه ويتكـون من مجمـوعـة من نبضات (series of pulses) كما في شكل (١٩أ - ٦). مثل هذا المولد يسمى بمولد التيار المستمر (D.C. generator) ويلاحظ من الشكل (١٩أ - ٦) أن القوة الدافعة رغم أنها أصبحت في اتجاه واحد إلا أنها ليست ثابتة القيمة أي أنها تبدأ من الصفر ثم تزداد إلى قيمتها العظمى ثم تتناقص إلى الصفر وتبدأ مرة أخرى وهكذا.

ويمكن الحصول على قوة دافعة ثابتة باستعمال بضعة ملفات وتقسيم المبدلين إلى عدة قطاعـات بحيث يتصـل كل قطاعين بطرفيّ ملف. وتوضع الملفات حول محور الدوران المشترك بحيث يحدث اتصال الفرشاتين K_1 ، K_2 مع طرفيّ كل ملف حينما تكون القوة الدافعة الكهربية بين طرفيه نهاية عظمى. وفي هذه الحالة فإن محصلة القوة



شكل (١٩-٦): ا ـ العلاقة بين القوة الدافعة الكهربية الحثية أحادية الاتجاه مع ωt الناتجة عن استخدام مبدلين مع الملف المتحرك في المجال المغناطيسي كما في شكل (١٧-٦).

ب ـ حركة ملفين في مجال مغناطيسي.

جـ و د ـ العلاقة بين القوة الدافعة الكهربية الحثية و ωt الناتجة عن حركة الملفين.

الـدافعـة الكهربية المتولدة بين طرفي الفرشاتين تكون في اتجاه واحد تقريبا والشكل (١٩ب ـ ٦) يمثل دائرة القوة الدافعة الكهربية نتيجة استخدام ملفين (أحدهما abcd والآخر متعامد عليه ghid وينقسم المبدلان إلى أربعة أجزاء k,m,n,p يتصل كل اثنين بملف ويلاحظ أن الفرشاة K_1 تتصل بالجزئين k,n المتصلة بالملفين بينما تتصل K_2 بالجزء m المتصل بالملف ghid فقط) حيث نحصل على منحنيين كما في شكل (١٩جـ ـ ٦) متداخل بعضهما ببعض لتعطي قوة دافعة ثابتة القيمة كما في شكل (١٩د ـ ٦) . وكلما زادت عدد الملفات زاد معها ثبوت (استمرار) القوة الدافعة الكهربية الناتجة .

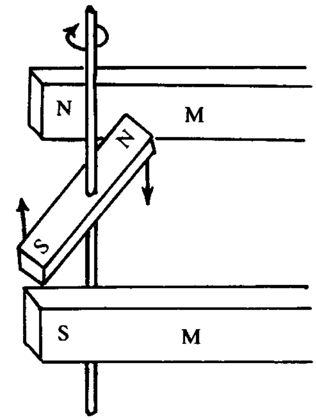
(٦-١٢) المحرك الكهربي
Electric Motor

تتحـول الـطاقة الكهربية في المحرك الكهربي إلى طاقة ميكانيكية بينما تتحول الطاقة الحركية في المولد إلى طاقة كهربية مع العلم أن مكوناتهما الأساسية واحدة حيث يتألف المحرك الكهربي من مجال مغناطيسي وعضو الإنتاج الكهربي والفرش وجهاز التوصيل الخارجي . وتنقسم المحركات إلى نوعين هما :

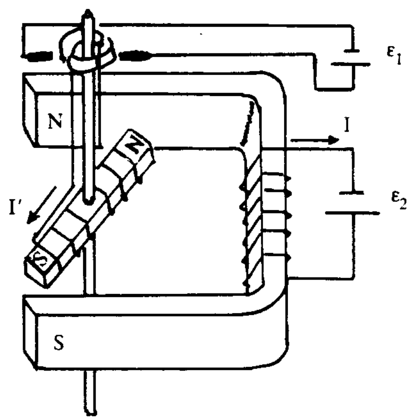
(٦-١٢-١) محرك التيار المستمر D.C. motors

إذا وضع قضيب مغناطيسي معلق بين قطبيّ مغناطيس كما في شكل (٢٠-٦) فإن قوة التنافر والتجاذب بين الأقطاب المختلفة ستحدث عزما ازدواجيا يكون سببا في إدارة المغنـاطيس المعلق $180°$ درجـة تقـريبـا ويستقـر المغناطيس عندما يكون وضع الأقطاب N – S , N – S.

ويبـين الشكل (٢١-٦) محرك التيار المستمر وتعتمد نظرية عمله على النظرية السابقة الذكر حيث قد استبدل المغناطيس الدائم بمغناطيس كهربي يتصل بالبطارية ε_2 والقضيب المغناطيسي بعضو الإنتاج الكهربي المتصل بالبطارية ε_1 التي تمد الملف بالتيار الكهربي من خلال المبدل والفرش. فإذا كان عضو الانتاج الكهربي في موضع كما في شكـل (٢١-٦) فإن قوة المجال المغناطيسي ستحدث عزما ازدواجيا تسبب في



شكل (٢٠-٦): حركة قضيب مغناطيسي معلق بين قطبي مغناطيس.



شكل (٢١-٦): استبدال المغانط الطبيعية «الدائمة» كما في شكل (١٢-٦) بمغانط كهربية.

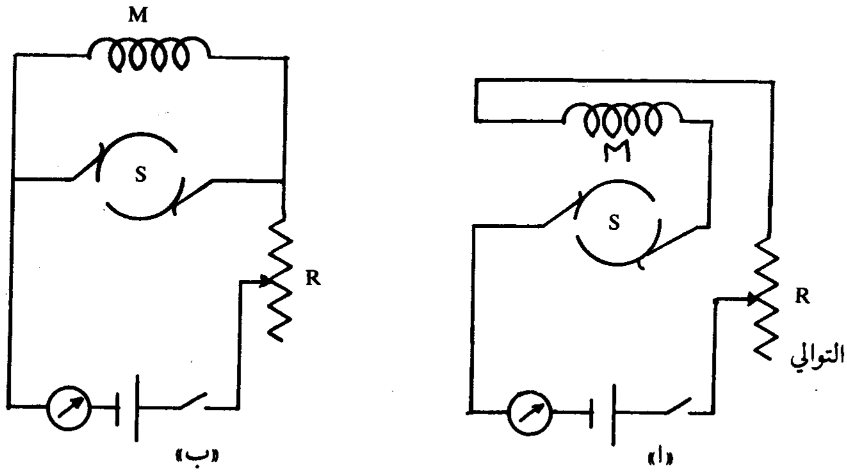
دورانه نصف دورة كاملة. فإذا انعكس اتجاه التيار فإن الملف سيعود إلى الوضع الابتدائي وسوف تؤثر القوى المغناطيسية على دورانه ليكمل الدورة وعندها ينعكس اتجاه التيار ويبدأ الدوران من جديد وهكذا يستمر دوران الملف، وكما هو معروف أن عملية انعكاس التيار تحدث بسبب وجود المبدل.

ويلاحظ من الشكل (٢١-٦) أن مصدر تيار الملف الدوار ε_1 يختلف عن مصدر تيار المجال المغناطيسي ε_2. ولكن في العادة يكون المصدر واحدا وقد يكون التوصيل بين الملف الدورا وملف المجال المغناطيسي على التوالي ويسمى المحرك في هذه الحالة محرك بلفائف متوالية التوصيل (series-wound motor) كما في شكل (٢٢أ - ٦) أو على التوازي ويسمى محرك بلفائف موصلة على التوازي (shunt-wound motor) كما في شكل (٢٢ب - ٦).

وجدير بالملاحظة أيضا أن دوران الملف الدوار نفسه في المجال المغناطيسي تنشأ عنه قوة دافعة تأثيرية تعاكس اتجاه المسبب للحركة «حسب قاعدة لنز» وهذه القوة تعمل على إبطاء حركة الملف. فإذا فرض أن ε القوة الدافعة الكهربية المستخدمة في الدائرة

الخـارجية للمحـرك و′ε القـوة الدافعة التأثيرية وكانت R هي مقاومة الملف والمقاومة الداخلية للبطارية فإن التيار المار في الدائرة يعطى بالمعادلة :

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٩٠)$$



شكل (٢٢-٦) : المغناطيس الكهربي المتحرك والمغناطيس الكهربي الثابت متصلان
ا ـ على التوالي .
ب ـ على التوازي .

وحسب المعادلة (٨١-٦) من الفصل الخامس فإن عزم الدوران يصبح :

$$\tau = I\,S\,B\,N \sin\alpha$$

$$\therefore \tau = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R} SBN \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٩١)$$

حيث S مساحة وجه الملف و B كثافة الفيض المغناطيسي و α الزاوية بين العمود على مستوى الملف واتجاه المجال المغناطيسي و N عدد لفات الملف .

وواضح من المعادلة (٩١-٦) أن القوة الدافعة الكهربية للبطارية ε_1 يجب أن تكون أكبر من القوة الدافعة التأثيرية ′ε الناتجة في الملف الدوار.

(٦-١٢-٢) محرك التيار المتردد A.C. motor

عندما يكون مصدر التيار المتردد مُوصل بين طرفي الملف الدوار. أي استبدال البطارية ε_1 بمصدر تيار متردد. فإن انقلاب التيار ينتج عنه تغيير القطبين N و S بطرفي قلب الملف الدوار. وفي هذه الحالة تستعمل الحلقات الزالقة بدلا من المبدل. وواضح أن سرعة الدوران لابد أن تتزامن (synchronize) مع سرعة انقلاب مصدر التيار المتردد حتى يكون عزم الدوران مستمرا في اتجاه ذلك الدوران نفسه.

ويمكن استبدال البطاريتين ε_1 ، ε_2 بمصدر واحد للتيار المتردد وفي هذه الحالة تتغير القطبية (polarity) لكل من الملف الدوار والمجال المغناطيسي في الوقت نفسه.

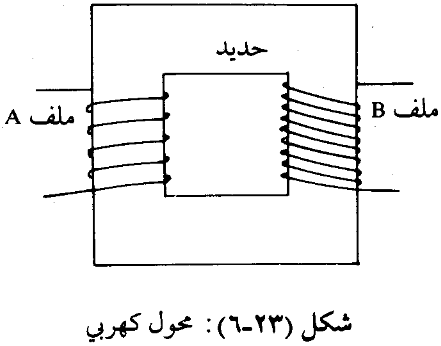
ومحركات التوصيل على التوازي هي المستعملة بصورة تجارية. ويسمى المحرك بالمحرك الشامل (universal motor) إذا كان يعمل بالتيار المستمر والمتردد.

(٦-١٣) المحـــول

Transformer

تعتمد دراسة المحولات على العلاقات التبادلية بين الكهرباء والمغناطيسية التي درست في الفصل الخامس وفي هذا الفصل ومن أهمها ما أثبته العالم هانز أورشيد (Oersted) من أن المجال المغناطيسي يحيط دائما بالتيار المحمول في الموصلات وكذلك اكتشاف فارادای المشهور في الحث الكهرومغناطيسي الذي يبين بصورة عملية أنه إذا تغيرت خطوط القوى المغناطيسية الواصلة إلى ملف معدني تتولد فيه قوة دافعة كهربية حثية.

والمحـــول ذو القـلب الحـــديدي (iron-core transformer) المبـين في شكل (٦-٢٣) يستخـدم في دوائر التيار المتردد، ونـظرية عمله تعتمـد على ما ذكر أعلاه، بحيث يمكن بواسطته تغيير الجهد والتيار من قيم منـخـفضـــة إلى قيم مرتفعـــة أو العكس. ويعتبر التحويل في كلتا الحالتين



شكل (٦-٢٣): محول كهربي

في غاية الأهمية فيحياتنا العملية. ويتكون المحلو أساسا من ملفين A و B ملفوفين على قلب حديدي يعمـل على توجيه المجـال المغنـاطيسي الناتج عن التيار المار في الملف الابتدائي A إلى الملف الثانوي B.

فتغيير التدفق المغناطيسي خلال الملف B يولد قوة دافعة كهربية مترددة فيه لها تردد المصدر نفسه الموصل للملف A.

وحسب المعـادلـة (٦-١٢) تكـون القـوة الـدافعة الحثية ε_p المتولدة في الملف الابتدائي نتيجة لمرور التيار المتردد I_p هي :

$$\varepsilon_p = -N_p \frac{d\Phi}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٩٢)$$

حيث N_p عدد لفـات الملف الابتـدائي و $\frac{d\Phi}{dt}$ معدل تغيير الفيض المغناطيسي الذي تسبب في حدوث قوة دافعة كهربية ε_s بين طرفي الملف الثانوي تساوي :

$$\varepsilon_s = -N_s \frac{d\Phi}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٩٣)$$

يُحصل من المعادلتين (٦-٩٢) و(٦-٩٣) على :

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٩٤)$$

وهـذه المعـادلة صحيحة لأي تردد. وحيث إن القيمة الفعالة للجهد V تتناسب مع القيمة العظمى للقوة الدافعة الكهربية حسب المعادلة (١٠ - ٨) :

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٩٥)$$

فهذه المعادلة تدل على أنه إذا كانت عدد لفات الملف الابتدائي قليلة بالنسبة لعدد لفات الملف الثانوي فإن فرق الجهد بين طرفيّ الملف الثانوي سيكون أكبر من الجهد الداخل للملف الابتدائي بمعدل المقدار N_s/N_p ويسمى المحول في هذه الحالة باسم

المحول الرافع (step-up transformer) أما إذا كان عدد لفات الملف الابتدائي أكبر من عدد لفات الملف الثانوي فإن الجهد بين طرفي الثانوي سيكون أقل من الجهد الداخل في الملف الابتدائي ويسمى المحول بالمحول الخافض (step-down transformer).

ويكون فقد الطاقة للمحول المثالي (ideal transformer) مساويا الصفر وبذلك فإن الطاقة الكهربية للملف الابتدائي تساوي الطاقة الكهربية للملف الثانوي أي :

$$P_p = P_s$$

أو

$$V_p I_p \cos \theta_p = V_s I_s \cos \theta_s$$

حيث θ هي زاوية الطور بين I و V ، وسيأتي شرح ذلك في الفصل الثامن، وحيث إن $\theta_s = \theta_p$

$$\therefore V_p I_p = V_s I_s$$

أو

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{V_s}{V_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٩٦)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٦-٩٥) يُحصل على :

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦\text{-}٩٧)$$

وهذا يعني أن معدل التغير في التيار يتناسب عكسيا مع معدل عدد لفات الملفين . ولما كان الفقد الحراري نتيجة لمقاومة الأسلاك يتناسب مع مربع التيار حسب المعادلة (I^2R) لذلك فمن الأفضل عند نقل الطاقة الكهربية استعمال الجهد العالي والتيار المنخفض. ومن أجل ذلك توجد محولات ضخمة لرفع الجهد وخفض شدة التيار في أماكن توليد الطاقة عند استخراجها من المولد وقبل نقلها إلى أماكن استعمالها.

والمحولات التجارية تعاني من فقد الطاقة إذ أن الطاقة المستمدة من الملف الثانوي أقل من الطاقة الداخلة في الملف الابتدائي بمقدار لا يزيد عن 5% حيث تعطى فعالية (efficiency) المحول بالمعادلة :

$$\text{Eff} = \frac{\text{output power}}{\text{input power}} = \frac{P_s}{P_p} \quad \ldots\ldots \quad (٦\text{-}٩٨)$$

وهذا الفقد في الطاقة كان نتيجة للعوامل التالية :

ا ـ مقاومة أسلاك الملفين الابتدائي والثانوي بحيث يعطي الفقد الحراري من العلاقة $I_p^2 R_p + I_s^2 R_s$. فكلما زاد الحمل الخارجي زادت قيمة التيار ومن ثم تزيد الطاقة الحرارية وتقل فعالية المحول. وهذا النوع من الفقد يسمى بالطاقة المفقودة في النحاس (copper loss).

ب ـ التيارات الدوامية (eddy currents) في قلب المحول. ويحدث ذلك بسبب تغيير الفيض المغناطيسي الذي يؤدي إلى حدوث قوة دافعة كهربية حثية والذي يعطي تيارات كهربية تعتمد على مقاومة القلب. ويمكن تقليل هذا النوع من الفقد بوجود شرائح الحديد المعزولة.

جـ ـ كما يوجد فقد في الطاقة يستهلك في مغنطة الحديد، وهو ما يسمى بالفقد التخلفي (hysteresis loss) ، وهذا النوع من الفقد يرتبط بالشغل المبذول في تكرار تمغنط أو إزالة تمغنط القلب الحديدي ويمكن التقليل من هذا الفقد باختيار أنواع معينة من ا لحديد يصنع منها قلب المحول وتكوّن القلوب المستخدمة في المحولات التجارية عادة مصنوعة من فولاذ السليكون (silicon steel).

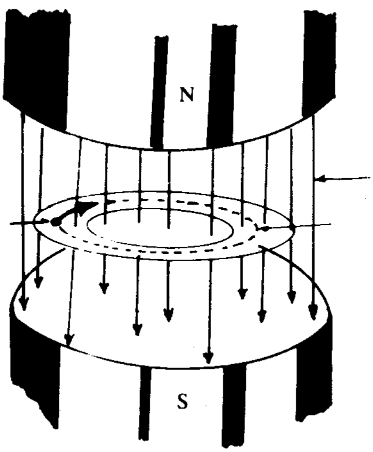
(٦ـ١٤) البيتـاتـرون
Betatron

يستعمـل البيتاترون لتعجيل إلكترونات بسرعات فائقة حيث تصل طاقتها إلى مائة مليون إلكترون فولت (Mev) ويعتمد في عمله على الحث المغناطيسي ولذلك يسمى بمسارع الحث المغناطيسي (magnetic induction accelerator). ويتكون كما في شكل (٦ـ٢٤) من أنبوب على هيئة حلقة مفرغة (an evacuated toroidal tube) تدفع إليها

إلكترونات من مدفع إلكتروني (electron gun) ، بطاقة ابتدائية حوالي 50000 فولت، ويوضع هذا الأنبوب بين قطبي مغناطيس كهربي ويسير في مسار دائري نظرا لتأثرها بمجال مغناطيسي عمودي على مستوى الأنبوب. وحيث إن هذا المجال المغناطيسي متغير فإن الأنبوب يعمل كما لو كان ملفا ثانويا لمحول يتولد فيه قوة دافعة تأثيرية قدرها:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}$$

حيث N هنا عدد دورات الإلكترون، S مساحة مقطع المدار، $\frac{dB}{dt}$ معدل تغير كثافة الفيض المغناطيسي، ε القوة الدافعة التأثيرية التي تقوم بتعجيل «تسارع» الإلكترونات فتكسبها الطاقة النهائية بعد دورانها N مرة.



شكل (٢٤-٦): البيتاترون

ونظرا لتغير السرعة عقب كل دورة فلابد أن يتغير المجال المغناطيسي بالمعدل نفسه حتى يظل نصف قطر المدار ثابتا، حسب العلاقة المذكورة في الفصل الثالث، $R = \frac{mv}{Be}$ حيث R نصف قطر المدار، v سرعة الإلكترون، m كتلته، e شحنته. ويخرج الإلكترون في النهاية بطاقة هائلة تستخدم في توليد أشعة إكس X-Rays ذات الموجات القصيرة والنفاذية العالية والتي تستخدم في الصناعات والأبحاث وعلاج السرطان.

ويلاحظ أن الإلكترون يدور حوالي 250,000 دورة (لكي يحصل على طاقة قدرها 100 إلكترون فولت) في زمن يساوي الزمن اللازم لكي تتغير كثافة الفيض المغناطيسي من صفر إلى نهاية عظمى. وبذلك ينتهي التعجيل قبل أن يعكس الفيض المغناطيسي اتجاهه. وبهذا فإن مشكلة تغير كتلة الإلكترون بازدياد سرعته لا أثر لها هنا بعكس جهاز السيكلوترون.

(٦-١٥) طريقة ملف الاستكشاف لقياس التدفق المغناطيسي
Search Coil Method of Measuring Magnetic Flux

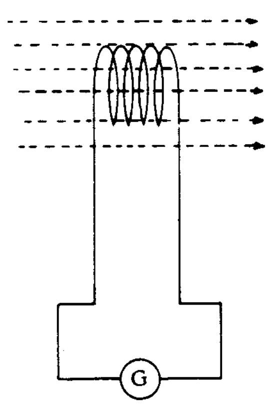
تقاس كثافة التدفق عند أي نقطة في مجال مغناطيسي بواسطة جهاز مكون من جلفانومتر قذفي (ballistic galvanometer) موصل بواسطة أسلاك قابلة للانثناء بطرفي ملف صغير كثيف يسمى ملف استكشــاف (search coil). إذا وضع ملف الاستكشاف في مجال مغنــاطيسي حثه B وكان مستواه متعامدا على هذا المجال كما في شكل (٦-٢٥) فإن التدفق خلال هذا الملف تحدده المعادلة (١ب - ٥) حيث:

$$\Phi = BS$$

حيث S مساحة وجه الملف. فإذا دار الملف ربع دورة وبسرعة حول أحد أقطاره بحيث يصبح مستواه موازيا للمجال، فإن التدفق يتنــاقص بسرعة تتغير من BS إلى الصفر، وفي الوقت الذي يتناقص فيه التدفق تنشأ ق. د. ك. قصيرة الأجل (لحظية) تسبب حركـة الجلفـانـومتر القذفي. ولما كان تيار الجلفانومتر في أي لحظة يساوي:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

ملف الاستكشاف



شكل (٦-٢٥): ملف الاستكشاف

حيث R المقاومة الكلية للجلفانومتر وملف الاستكشاف و ε هي الـ ق. د. ك اللحظية المحددة بالمعادلة:

$$\varepsilon = -N\, d\Phi / dt$$

و I التيار الذي يمكن تحديده من المعادلة:

$$\therefore I = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

ويمكن بذلك الحصول على:

$$q = \int_0^t I dt = -\frac{N}{R}\int_{\Phi}^{0} d\Phi = \frac{N\Phi}{R}$$

أو:

$$\Phi = \frac{R}{N}\, q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}٩٩)$$

وكذلك:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{Rq}{NS} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٦\text{-}١٠٠)$$

حيث R ، S ، N معلومة وبذلك يمكن تعيين قيمة B بمعرفة q التي تعطي انحرافا في الجلفانومتر.

مـــثـــال (٦-١٣)

يتكـون ملف استكشـاف من 200 لفة نصف قطرها المتوسط 0.5 سم ويتصل الملف بجلفـانومتر قذفي حساسيته 5 أقسام للميكروكولوم وقد وضع الملف بين قطبيّ مغناطيس كهربي قوي بحيث كان مستواه عموديا على المجال ثم قذف الملف بعيدا عن المجال فسجل الجلفانومتر 314 قسما فإذا كانت المقاومة الكلية في دائرة الملف 1000 أوم فاحسب كثافة الفيض لهذا المجال.

الحـــــل

بإهمال التخميد في الجلفانومتر فإن الشحنة المارة هي:

$$q = \frac{314}{5} = 62.8 \times 10^{-6}\,C$$

وهذه الشحنة تأثيرية ومتولدة في الملف الباحث نتيجة تغير الفيض خلال مقطعه عند إبعاده فجأة عن المجال. وبتطبيق المعادلة (٦-١٠٠) يكون:

$$B = \frac{R.q}{N.S} = \frac{1000 \times 6.2 \times 10^{-6}}{200 \times 3.14\,(0.005)^2}$$

$$B = 4\ Wb/m^2$$

(٦-١٦) مسـائـل

١ - يدور قضيب موصل طوله L بسرعة زاوية ω حول إحدى نهايتيه في مجال مغناطيسي منتظم متعامد عليه شدته B.

احسب القوة الدافعة الكهربية الحثية في القضيب باستخدام قانون فاراداي ومن ثم بالطريقة المباشرة من حركة القوة.

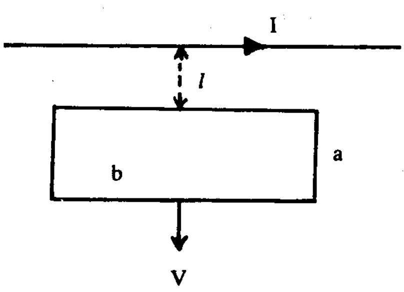
٢ - سلك مثني على شكل نصف دائرة نصف قطرها b وهو قابل للدوران بذراع خاصة وموصول بدائرة فيها مقياس للتيار مقاومته R تعادل 1000Ω. فإذا دار السلك بحيث يكون عدد دوراته f دورة في الثانية وكانت الدائرة في مجال مغناطيسي منتظم B فالمطلوب حساب:

ا - القوة الدافعة الحثية العظمى التي تتولد في الدائرة.

ب - قيمة التيار العظمى الذي يمر فيها.

جـ - تردد القوة الدافعة الحثية الناتجة.

٣ - دائرة على شكل مستطيل ضلعاه a و b موضوعة موازية لسلك يمر به تيار شدته I. تحرك المستطيل باتجاه عمودي على ضلعه b بسرعة منتظمة v فإذا كان ضلعه الأقرب إلى السلك يبعد عن السلك عند بدء الحركة بمسافة l فالمطلوب حساب القوة الدافعة الحثية المتولدة في المستطيل.



٤ - كتلة من النحاس قدرها m سحبت وصنعت بشكل سلك نصف قطره r ثم ثني هذا السلك حتى أصبح بشكل دائرة نصف قطرها R. وضعت عمودية في مجال مغناطيسي يتغير بشكل منتظم ومستمر بحيث تكون $\frac{dB}{dt}$ ثابتة.

برهن أن التيار المستحدث في الدائرة لا يتوقف على أبعاد السلك والدائرة وإنما يتوقف فقط على الكتلة ويعطى بالمعادلة:

$$I = \frac{m}{4\pi\varrho\delta}\frac{dB}{dt}$$

حيث ϱ المقاومة النوعية للنحاس، δ كثافته.

٥ ـ موصل طوله 50 سم ينزلق دون احتكاك على ضلعي سلك آخر ثابت يتخذ شكل الحرف U كما في شكل (٣ـ٦) بسرعة قدرها 400 سم/ث، قاطعا مجالا مغناطيسيا عموديا قيمة B تساوي 500 ملّي وبر/متر^{٣}.

احسب:

ا ـ القوة الدافعة التأثيرية ε المتولدة في الموصل.

ب ـ القوة الميكانيكية اللازمة لتحريك السلك بفرض أن مقاومة الدائرة المغلقة ثابتة وقدرها 0.2 أوم.

جـ ـ معدل بذل الشغل الميكانيكي اللازم لتحريك السلك ومعدل تولد الحرارة في الدائرة وقارن بين هاتين القدرتين.

د ـ القوة الدافعة التأثيرية ε في الموصل إذا جُعل المجال المغناطيسي يميل على مستوى الدائرة بزاوية قدرها $60°$.

٦ ـ شُكِّل سلك على شكل مستطيل طوله 12.0 سم وعرضه 8.0 سم وضع بين قطبيّ مغناطيس كهربي بحيث يكون المجال المغناطيسي في المنطقة التي وضع فيها السلك منتظما.

عند البداية كان المجال المغناطيسي صفرا ثم تزايد بصورة منتظمة حتى وصلت قيمته 1.25 وبر/متر^{٣} في زمن قدره 0.15 ثانية.

ا ـ ما هي قيمة القوة الدافعة الكهربية الحثية «التأثيرية» المتولدة خلال هذه الفترة.

ب ـ إذا استبـدل السلك المستـطيل بملف مستطيل عدد لفاته 250 لفة لها الأبعاد نفسها. ما هي القوة الدافعة المتولدة في الملف؟

٧ ـ قضيب نحاسي طوله 20 سم متعامد مع مجال مغناطيسي منتظم حثه 0.5 وبر/متر٢ حُرك هذا القضيب فأعطى قوة دافعة حثية بين طرفيه قيمتها 0.10 فولت. ما هي سرعة هذا القضيب؟

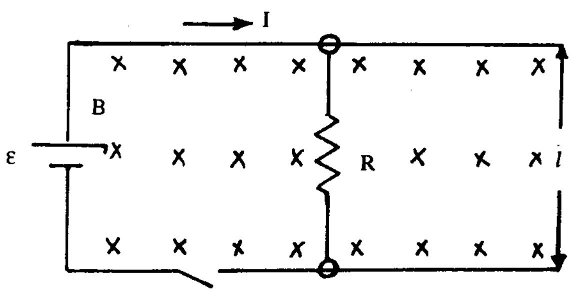
٨ ـ سلك طوله 100 سم مثبت أفقيا في سيارة تسير في طريق أفقي مستقيم بسرعة 60 كيومتر في الساعة. لوحظ أنه إذا اتصل طرفا السلك بجلفانومتر مقاومته 95 أوم يمر به تيار تأثيري شدته 3 ميكروأمبير.

احسب كثافة الفيض المغناطيسي للمركبة الرأسية لمجال الأرض علما بأن مقاومة السلك 5 أوم واتجاهه عمودي على اتجاه السيارة.

٩ ـ دائرة كهربية تتألف من بطارية ε ومقاومة R طولها l وكتلتها m حرة الحركة (كما في الشكل). وضعت الدائرة في مجال مغناطيسي منتظم حثه B فإذا أغلقت الدائرة برهن أنه في زمن قصير قدره t تكون قيمة التيار الحثي هي:

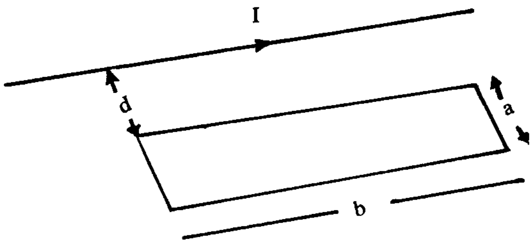
$$I = \varepsilon l^2 B^2 t / (mR^2)$$

علما بأن التيار الكهربي الناتج عن البطارية قيمته $\frac{\varepsilon}{R}$ عندما $t = 0$.



١٠ ـ لفـة واحـدة مـن سلـك على هيـئـة مستـطيل وضعت بالقـرب من سلـك مستقـيم طويـل يـمر بـه تـيار يتغـير مـع الزمـن حسـب المعادلة $I = \alpha t$، كما في الشكل:

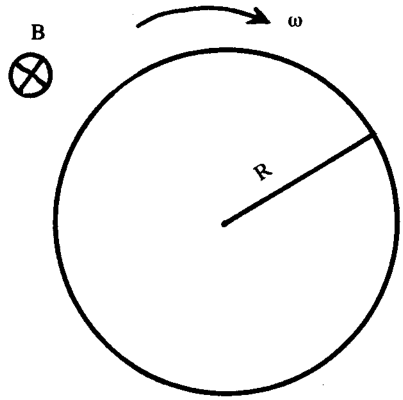
ا ـ احسب الفيض المغناطيسي خلال الحلقة.
ب ـ القوة الدافعة الكهربية الحثية الناتجة في الحلقة.



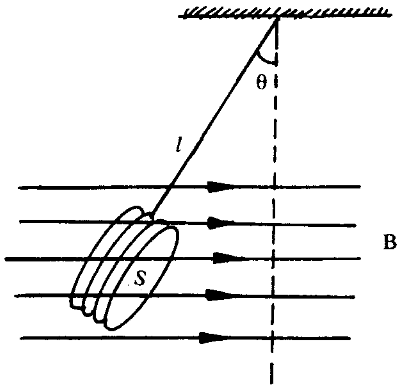
١١ ـ ملف حلزوني طويل عدد لفاته 500 لفة لكل متر. مساحة مقطعه 0.05 م٢ ويحمل تيارا قدره 2 أمبير. لُفَّ عليه ملف ثانوي مقاومته 4 أوم. وُجد أنه إذا عكس التيار المار في الملف الحلزوني الابتدائي كل 0.05 ثانية فإن القوة الدافعة الحثية بين طرفي الملف الثانوي تساوي 4 فولتات.
أ ـ ما هو عدد لفات الملف الثانوي؟
ب ـ ما هي قيمة الشحنة في الملف الثانوي أثناء عكس التيار في الملف الابتدائي؟

١٢ ـ ملف باحث عدد لفاته 100 لفة ومساحة مقطعه 3 سم٢ ومقاومة الملف الكلية تساوي 40 أوما وموصل بجلفانومتر قذفي، وضع الملف في مجال مغناطيسي متعامد مع مستوى الملف ثم أدير الملف فأعطى شحنة قدرها 2×10^{-5} كولوما ما قيمة المجال المغناطيسي؟

١٣ ـ ملف حلزوني ابتدائي عدد لفاته 500 لفة وطوله 0.5 متر ونصف قطره 4 سم. يوجد ملف ثانوي حول منتصفه، عدد لفاته 20 لفة ومقاومته 2 أوم ومتصل بجلفانومتر قذفي مقاومته 23 أوما.
احسب الشحنة المارة في الجلفانومتر عندما يتغير التيار فجأة في الملف الابتدائي من 3 أمبير إلى 1 أمبير.



١٤ ـ قرص معدني رفيع نصف قطره 20 سم يدور حول محوره بسرعة قدرها 50 دورة في الثانية وذلك في مجال مغناطيسي قيمته B تساوي 0.5 وبر/متر٢ ومتجه مع اتجاه المحور.
احسب فرق الجهد المتولد بين مركز القرص ومحيطه.



١٥ ـ ملف عدد لفاته N ومساحة مقطعه S ، عومل كما يعامل البندول البسيط كما في الشكل، حيث يتذبذب الملف بحركة توافقية بسيطة $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ في مجال مغناطيسي كما في الشكل.
أوجد تعبيرا رياضيا يوضح العلاقة بين القوة الدافعة الكهربية الحثية ε والزمن t.

١٦ ـ إذا علم أن الحث الذاتي لملف صغير عدد لفاته 400 لفة هو 8 ملي هنري.
فاحسب B للملف عندما يمر به تيار شدته 5×10^{-3} أمبير.

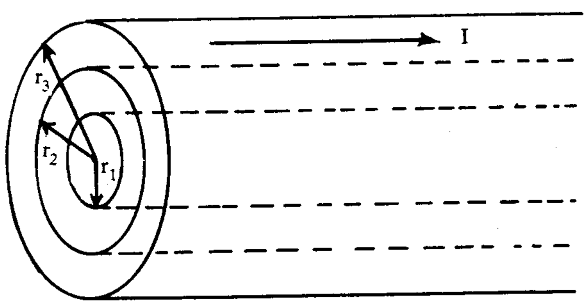
١٧ ـ ملف حلزني طويل طوله 50 سم عدد لفاته 500 لفة ومساحة مقطعه 10 سم٢.
احسب الحث الذاتي للملف.
وإذا تناقص تيار الملف من 10 أمبير إلى الصفر خلال زمن قدره 0.1 ثانية ما هي القيمة المتوسطة للقوة الدافعة الكهربية الحثية خلال هذه الفترة الزمنية.

١٨ ـ كابل ذو موصلين متحدي المحور (coascial cable) الموصل الداخلي أسطواني الشكل نصف قطره r_1 والموصل الخارجي أسطواني الشكل أجوف نصف قطره الداخلي r_2 والخارجي r_3 كما في الشكل.

برهن على أن الحث الذاتي لوحدة الأطوال للكابل تعطى بالمعادلة:

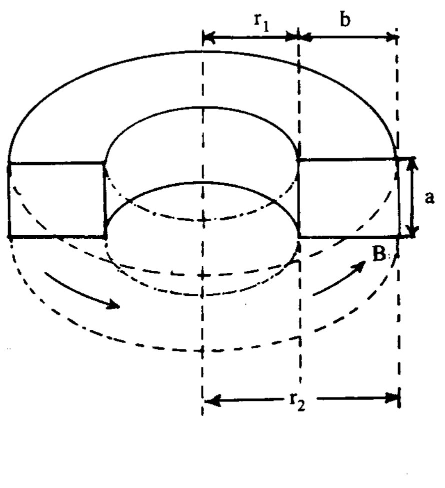
$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

ثم احسب الفيض الكلي المار خلال الشكل المستطيل المنقط (كما في الشكل) إذا مر في الاسطوانتين تياران متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه قيمة كل منهما I.



١٩ ـ ملف حلزوني حلقي (toroid) مقطعه مستطيل الشكل، كما في الشكل، نصف القطر الداخلي r_1 والخارجي r_2 وعرض كل حلقة a. وعدد اللفات N.

أوجد تعبيرا رياضيا للحث الذاتي L لهذا الملف ثم احسب قيمته إذا كانت $N = 800$ ، $a = 2cm$ ، $r_1 =$ 4cm ، $r_2 = 8cm$.



٢٠ ـ ملف حلزوني مقاومته 40 أوما وثابت الزمن (time constant) له 0.08 ثانية ما قيمة الحث الذاتي L.

٢١ ـ ملف مقاومته 65 أوما وحثه الذاتي 25 هنريا وصل ببطارية جهدها 50 فولتا. ما هو الزمن اللازم لكي يصل التيار في الملف إلى نصف قيمته العهظمى، وما هو معدل تغير التيار بالنسبة للزمن خلال هذه الفترة.

٢٢ ـ ملف حثه الذاتي 20 هنريا ومقاومته 150 أوما، عند $t = 0$، وصل جهد قيمته 30 فولتا بين طرفي الملف.

احسب:

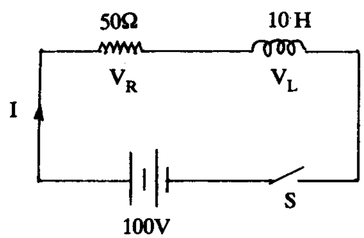
ا ـ ثابت الزمن للملف.

ب ـ شدة التيار المستقر الذي يجري في وضع متزن بعد مضي فترة طويلة من الزمن.

جـ ـ الزمن اللازم للوصول إلى 95% من قيمة التيار العظمى.

د ـ معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى نصف قيمته العظمى.

٢٣ ـ دائرة تحتوي على $R = 50\Omega$، $L = 10H$ وصلا بجهد ثابت قيمته 100 فولت عند $t = 0$.



ا ـ اكتب المعادلة التي تربط بين I، V_R، V_L

ب ـ ما هي قيمة التيار بعد مضي 0.5 ثانية.

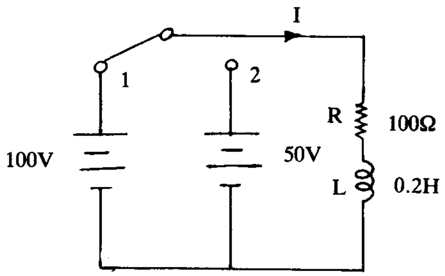
جـ ـ الزمن الذي تكون فيه $V_R = V_L$.

د ـ احسب القدرة P_R، P_L وكذلك المحصلة.

هـ ـ برهن أن الطاقة التي اكتسبها الملف أثناء زيادة التيار تستنفد في بناء مجال مغناطيسي.

٢٤ ـ ملف نصف قطره 5 سم يتكـون من لفة واحدة ويحمل تيارا شدته 100 أمبير. احسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي عند مركز الملف.

٢٥ ـ في الدائرة التالية:



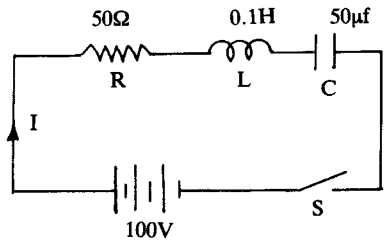
عند $t = 0$ وصلت RL عند الطرف 1 ببـطارية جهدها 100 فولت وعـنـد $t = 500\mu s$ وصـــل RL بالـطرف 2 ببطارية جهدها 50 فولتا.

ما هي قيمة التيار في الحالتين؟

٢٦ ـ وإذا عكس الأمر في السؤال السابق بحيث وصلت RL عند $t = 0$ بالطرف 2 وعند $t = 500\mu s$ بالطرف 1.

ما هي قيمة التيار في الحالتين في هذا الوضع؟

٢٧ ـ في الدائرة التالية:



عند $t = 0$ وصلت الدائرة عن طريق المفتاح S. احسب قيمة التيار المار في الدائرة مفترضا أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوي الصفر.

٢٨ ـ ملفان حلزونيان حثهما الذاتي $L_1 = 5 \times 10^{-6}$ H ، $L_2 = 8 \times 10^{-6}$ H منفصل بعضهما عن بعض.

احسب محصلة الحث عنـد توصيلهما على التوالي مرة وعلى التوازي مرة أخرى. وإذا كانت مقاومتهما $R_1 = 50\Omega$ ، $R_2 = 100\Omega$ ، فاحسب ثابت الزمن في الحالتين السابقتين.

٧

الخواص المغناطيسية للمواد

Magnetic Properties of Materials

● مقدمة ● تصنيف المواد ● شدة التمغنط ● التأثرية المغناطيسية ● كمية الحركة الزاوية والعزم المغناطيسي للإلكترون ● الدايامغناطيسية ● البارامغناطيسية ● المواد الحديدية المغناطيسية ● دورة التخلف المغناطيسي ● الدوائر المغناطيسية ● المغانط الكهربية ● القوة المغناطيسية للفجوة الهوائية ● قياس التأثرية المغناطيسية الصغيرة ● الجلفانومتر ذو الملف المتحرك ● الجلفانومتر القذفي ● مقياس التدفق المغناطيسي ● مسائل.

(٧-١) مقدمة

Introduction

تعرض الفصلان الخامس والسادس للمجالات المغناطيسية التي تولدها الشحنات المتحركة أو التيارات المارة في الموصلات عندما تكون الشحنة أو تلك الموصلات موجودة في الفراغ كما ذكرت أيضا بعض الأجهزة الكهربية مثل المحولات والمحركات والمولدات التي تعتمد على المجالات المغناطيسية المتولدة بالتيارات الكهربية والتي كانت تحتوي دوما على الحديد أو أحد مركباته في داخل بنيتها وكانت أهمية ذلك زيادة التدفق المغناطيسي وحصره في المنطقة المطلوبة.

جميع المواد على اختلاف أنواعها سواء الغازات أو السوائل أو المواد الصلبة لها خواص مغناطيسية، نتيجة لتأثرها بالمجال المغناطيسي، ولكن بدرجات متفاوتة فبعض

المـواد لها خواص مغناطيسية ضعيفة وبعضها متوسطة وبعضها قوية. كما أن لدرجة الحـرارة أثرا كبيرا على هذه الخواص كذلك توجد مواد أخرى لها خواص مغناطيسية عكسية أي أن اتجاه المجال فيها يعاكس المجال المسبب.

ونـظرا لاستعـمال المـواد المغنـاطيسية في كثير من الأجهزة، مثل الميكروفونات والسـماعات ووسائل الاتصالات اللاسلكية وكذلك استعمالها في ذاكرات الحاسبات الآلية (computer memory) والدوائر المنطقية (logic circuity) وتطبيقات الفتح والقطع عالي السرعـة للدوائر (high speed switching application) أصبح مهما دراسة بعض القواعد الأساسية لهذه المواد. وقد أجريت دراسات كثيرة لمعرفة الخواص المغناطيسية للمـواد وفُهمت بصـورة تفصيلية سواء أكـانت نظرية أم تجريبية وتعتمد بعض هذه الدراسات على نظرية الكم الميكانيكي (quantum mechanics) وهذا خارج عن نطاق هذا الكتاب ولذلك سنتعرض للمواضيع بصورة مبسطة.

(٧-٢) تصنيف المـواد

Classification of Materials

ذكر في البند السابق أن المواد على اختلاف أنواعها تتأثر بالمجال المغناطيسي الخارجي ولكن بدرجـات متفـاوتـة وللتبسيط يمكن أن نقسم هذه المـواد من حيث خواصهـا المغناطيسية إلى قسمين رئيسين هما:

(٧-٢-١) مواد متسامتة التمغنط (بارامغناطيسية) Paramagnetic

هذه تميل للحركة من المناطق الضعيفة في المجال المغناطيسي إلى المناطق القوية وبمعنى آخر فإنها تنجذب نحو المغناطيس، وإذا كانت حرة الدوران اتجهت أطوالها اتجاها يوازي المجال. ومن هذه المواد الألومنيوم والتيتانيوم والأكسيجين (O,Ti,Al) وأما الحديد والنيكل والكوبالت (Ni,Co,Fe) وسبائكها ومركباتها فإنها مواد بارامغناطيسية قوية جدا لهذا يطلق عليها المواد الحديدومغناطيسية (Ferromagnetic) التي تتميز بكبر معامل النفاذية، والتأثيرية المغناطيسية لها موجبة.

(٧-٢-٢) مواد دايامغناطيسية Diamagnetic

وهذه تميل إلى الابتعاد عن المجال المغناطيسي مهما كان اتجاهه، وإذا أتيحت لها حرية الدوران فإنها تجعل أطوال محاورها متعامدة على خطوط القوى. ومن هذه المواد البزموت والنحاس وتتميز بأن معامل نفاذيتها أقل من الواحد والقابلية المغناطيسية لها سالبة.

وللتمييز بين هذه المواد يمرر تيار كهربي في ملف حلقة رولاند (Rowland ring) [حلقة رولاند ملف حلقي (toroidal coil) بداخله مادة مغناطيسية، كما في شكل (٧-١)]. وتقاس كثافة الفيض المغناطيسي، الحث المغناطيسي، B باستخدام ملف ثانوي باحث (search coil) متصل بجلفانومتر قذفي في محور جسم الحلقة الذي يكون فراغا أو هواء.

ثم تتغير مادة جسم حلقة رولاند أي يستبدل الهواء بمادة ما وتقاس كثافة الفيض المغناطيسي B الجديد، فنجد أن هناك ثلاثة احتمالات هي:

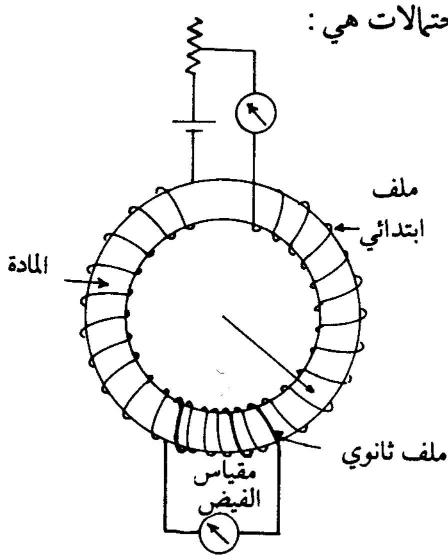
١ - تزداد قيمة B زيادة كبيرة في حالة المواد الحديد ومغناطيسية.

٢ - تزداد قيمة B زيادة طفيفة جدا في حالة المواد البارامغناطيسية.

٣ - تقل قيمة B في حالة المواد الدايامغناطيسية.

ويرجع تغيير كثافة الفيض بتغير مادة المحور إلى ما يلي:

تتألف جميع المواد من ذرات بها نواة موجبة الشحنة تدور حولها إلكترونات سالبة الشحنة فحركة هذه الشحنات السالبة



شكل (٧-١): حلقة رولاند لدراسة الخواص المغناطيسية للمواد المختلفة.

تُكوِّن تيارات كهربية صغيرة (microscopic electric current) مما يتسبب في إحداث مجال مغناطيسي ذري (atomic magnetic current) له عزم مغناطيسي ذري (atomic magnetic moment).

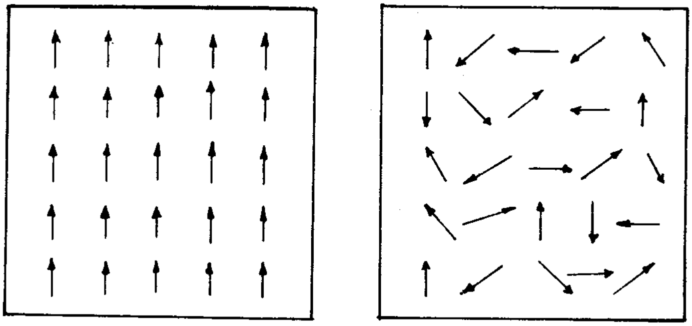
ففي حالة عدم وجود أي مجال مغناطيسي خارجي تكون التيارات الصغيرة في اتجاهات مختلفة عشوائية (random orientation) كما في شكل (٢-٧) مما يسبب في إحداث مجالات مغناطيسية ذرية محددة في حجم الذرة ومحصلة التيارات والعزوم المغناطيسية (magnetic moments) في المادة تلغي بعضها بعضا وبذلك لا يظهر أي أثر للمجال المغناطيسي. ويشذ عن هذه الحالة المغناطيس الدائم (permanent magnet).

أما إذا وضعت المادة في مجال مغناطيسي خارجي (external magnetic field)، حثه B، فإن القوة المغناطيسية المؤثرة على الشحنات المتحركة تغير من اتجاه مدار الإلكترونات في الذرات ومسار التيار للإلكترونات الحرة في المعادن ولذلك يتولد مجال مغناطيسي يكون اتجاهه مع اتجاه المجال الخارجي كما في حالة المواد البارامغناطيسية كما في شكل (٢ب-٧) أو عكس اتجاه المجال الخارجي كما في حالة المواد الدايامغناطيسية.

والمجالات المغناطيسية الذرية في محيط الذرة تحدث لسببين هما:

(١) الحركة المدارية (orbital motion) للإلكترون حول النواة تسبب تيارا له عزم مغناطيسي.

(٢) للإلكترون عزم مغناطيسي ذاتي (intrinsic magnetic moment) مقترن بالعزم الحركي الزاوي الذاتي (intrinsic angular moment) وهو ما يسمى بغزل الإلكترون (electron spin) حيث يدور الإلكترون حول نفسه كما تدور الأرض حول محورها. وحركة هذه الإلكترونات تشبه حركة تيار كهربي في ملف، وفي هذه الحالة يكون الملف على هيئة مغناطيس ذي قطب شمالي في جهة وقطب جنوبي في جهة أخرى.



«ب» «أ»

شكل (٢-٧): ا ـ العزوم المغناطيسية في اتجاهات مختلفة عشوائية وذلك قبل وضعها في المجال المغناطيسي الخارجي.
ب ـ العزوم بعد وضعها في المجال الخارجي.

وقد وجد أن قيمة العزم المغناطيسي الذاتي يساوي $9.204 \times 10^{-24}\ A\,.\,m^2$ كما سيأتي حسابه في ما بعد، والعزم الناتج عن دورانه حول النواة يأخذ القيمة نفسها أيضا.

وكما هو معروف من البند (٣-٨) تدور الإلكترونات في الذرات في قشرات معينة (shells) لها أقطار مختلفة، ففي معظم العناصر كل الإلكترونات، ما عدا إلكترونات التكافؤ تكون قشرات مملوءة حيث تتوزع الإلكترونات على القشرة حسب العلاقة $2n^2$ (حيث $n = 1,2,3,4,...$) وبالتالي فالقشرة الأولى تأخذ إلكترونين فقط. ويسمى (K-shell) والثانية تأخذ ثمانية إلكترونات وتسمى (L-shell) . . . وهكذا كما يبينه الجدول (١-٣) وأن كل قشرة تنقسم إلى قشيرات (subshell) فإذا أخذت القشرة كل إلكتروناتها المسموح بها أصبحت مملوءة ويكون بذلك المجموع الاتجاهي للعزوم المغناطيسية للإلكترونات مساويا للصفر وبذلك فمحصلة المجال المغناطيسي الذري تساوي صفرا ولا تتأثر هذه الإلكترونات بأي مجال مغناطيسي خارجي. وقد فسر باولي (Pauli) ذلك بأن كل قشرة مملوءة تحتوي على عدد زوجي من الإلكترونات لها حركتها الدورانية والمغزلية. وأنه لا يجوز لاثنين من الإلكترونات في الذرة أن يوجدا بالحالة نفسها (وهذه القاعدة معروفة بقاعدة باولي للاستبعاد Paulis exclusion principle) أي

أن كل إلكترونين متفاعلين يكون لكل واحد منهما حركة تعاكس حركة الآخر وبذلك فمحصلة العزوم المغناطيسية تساوي صفرا. وهذا يعني أن إلكترونات التكافؤ هي التي تتأثر بأي مجال مغناطيسي خارجي فتتغير اتجاهها مسببة مجالا مغناطيسيا ذريا.

ولكن في الحالة الصلبة والسائلة فإلكترونات التكافؤ تلعب دورا مهما في الرابطة التماسكية (cohesive binding) لتماسك ذرات المادة وبالتالي لا تساهم كثيرا في إنتاج مجال مغناطيسي كبير. وفي المعادن فهذه الإلكترونات حرة تنتقل من ذرة إلى ذرة أخرى وبذلك فليس لها أي دوران حول النواة ومنه فإن العزم المغناطيسي المداري يساوي صفرا أما العزوم المغناطيسية الغزلية الناتجة عن دوران الإلكترونات حول نفسها ستكون محصلتها صفرا وذلك حسب مبدأ باولي ولذلك فإنه عند تسليط أي مجال مغناطيسي خارجي يحدث تأثير بسيط لإلكترونات التكافؤ ليعطي بارامغناطيسية (paramagnetism) صغيرة أو دايامغناطيسية (diamagnetism). إذن كيف يمكن الحصول على الفرومغناطيسية (ferromagnetism) إذا لم يمكن الحصول عليها من إلكترونات التكافؤ أو من القشرة المملوءة بالإلكترونات فهذا يعني أنه لابد أن تكون هناك إلكترونات أخرى تختلف عن النوعين السابقين. مثل هذه الإلكترونات توجد في عناصر الأرض النادرة (rare earth elements) حيث القشيرة (4f) غير الكاملة محجوبة (screened) بوساطة القشيرتين (5s) ، (5p) أما العناصر الانتقالية (transition elements) فتتميز بوجود قشيرتين غير كاملتين الداخلية منها لا تساهم في الرابطة التماسكية ولذلك فهي المسؤولة عن التأثيرات المغناطيسية.

والجدول (١-٧) يوضح التوزيع الإلكتروني للحديد (Fe) والكوبلت (Co) والنيكل (Ni). وحسب قاعدة باولي فإن إلكترونات القشيرتين (p,s) المملوءة لا تعطي أي خاصية مغناطيسية لأنه في القشيرة s يتحرك إلكترونان في وضعين متعاكسين ولذلك تكون محصلة العزم المغناطيسي صفرا. أما بالنسبة للقشيرة p فإن كل ثلاثة إلكترونات تتحرك في اتجاه يخالف اتجاه حركة الإلكترونات الثلاثة الأخرى ولذلك فمحصلة العزم المغناطيسي تساوي صفرا. أما القشيرة d من المدار M فعدد الإلكترونات المسموح بها 10 إلكترونات خمسة منها تتحرك عكس اتجاه الإلكترونات الخمسة الأخرى. ولكن في

مادة الحديد (Fe) توجد ستة إلكترونات فقط في القشيرة (d) وتوجد 4 إلكترونات غير معـادلـة (uncompensated spins) ولـذلك فهذه القشيرة هي المسؤولة عن التغيرات المغناطيسية وينطبق الشيء نفسه على حالة الكوبلت (Co) والنيكل (Ni).

جدول (١-٧) التوزيع الإلكتروني لـ Ni, Co, Fe

Symbol for the spin of the electron ↑ or ↓ رمز غزل الإلكترون ↓ أو ↑							
Shell قشـــرة	K	L		M			N
Subshell قشـــيرة	s	s	p	s	p	d	s
(26) Iron (Fe) حـــديد	↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↑↑↑	↑↓
(27) Cobalt (Co) كـــوبلت	↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↓↑↑↑	↑↓
(28) Nickel (Ni) نيـكل	↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↓↑↓↑↑	↑↓

(٧-٣) شـــدة التمغنط

Magnetization

يمكن أن نعتـبر المواد القابلة للتمغنط مصدرا من مصادر المجالات المغناطيسية لأن لذرات هذه المـادة عزوم مغنـاطيسية، وكـما ذكـر في البنـد السـابق أن هذه العزوم المغناطيسية الذرية كانت نتيجة لتيارات دائرية نتجت عن حركتي الإلكترون الدائرية والمغـزلية فإذا أخـذت مادة ممغنـطة فإن التيارات الإلكـترونية (electronic current) الداخلية سيلاشي بعضها بعضا وتبقى التيارات السطحية.

ويسمى التيار في هذه الحالة بمحصلة التيار المغناطيسي السطحي ويرمز له بالرمز "I_m" (net surface magnetization current) ويسري حول سطح المادة في الاتجاه المبين

في الشكل (١٣ ـ ٧) ويعد هذا التيار مصدر المجال المغناطيسي للمادة وكأن المجال ناتج عن عزم مغناطيسي لذي القطبين (dipole magnetic moment) P_m حيث

$$P_m = I_m S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}١)$$

حيث S هو مساحة مقطع المادة.

وكما وجد في الفصل الثالث أن شدة المجال الكهربي للمواد العازلة المستقطبة يمكن تمثيلها بمتجه الاستقطاب (polarization vector) الذي يمثل العزوم الكهربية لذي القطبين بالنسبة لوحدة الحجوم، فإنه بصورة مماثلة يمكن تمثيل المجال المغناطيسي للمادة الممغنطة بمتجه يسمى بمتجه التمغنط (magnetization vector) ويرمز له بالرمز M حيث:

$$M = \frac{P_m}{V} \quad \text{or} \quad M = \frac{dP_m}{dV} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٢)$$

حيث V هو حجم المادة الممغنطة و dV عنصر الحجم للمادة الممغنطة.

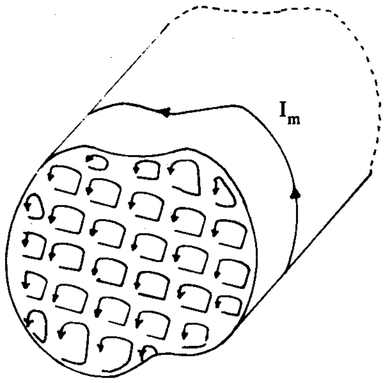
فإذا مر تيار I في ملف حلقة رولاند، كما في شكل (٣ب ـ ٧) وكان عدد لفات الملف N ونصف قطر الحلقة r وكانت المادة داخل الملف من مادة بارامغناطيسية، فإن التيار السطحي I_m الناتج يؤدي إلى مغنطة المادة.

فإذا أخذ جزء من الحلقة مساحة مقطعه S وسمكه $rd\theta$ كما في شكل (٣جـ ـ ٧)، حيث $d\theta$ الزاوية المركزية، فإن متجه التمغنط M هو:

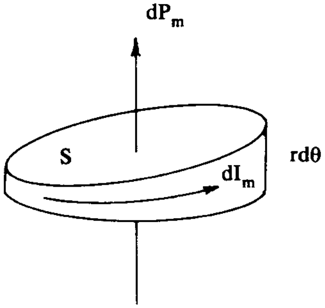
$$M = \frac{dP_m}{dV} = \frac{SdI_m}{S(rd\theta)} = \frac{dI_m}{rd\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٣)$$

حيث dI_m هو جزء من التيار السطحي I_m وحيث إن أعلى قيمة لـ $d\theta$ هو 2π فإنه يمكن أن نكتب ما يلي:

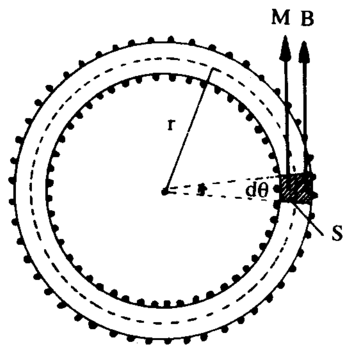
$$dI_m = I_m \frac{d\theta}{2\pi}$$



«أ»



«جـ»



«ب»

شكل (٣-٧): أ ـ التيارات الالكترونية «الذرية» الداخلية تتلاشى وتبقى التيارات السطحية التي تعطي تيارا سطحيا I_m حول السطح الخارجي للمادة.

ب ـ العلاقة بين التيار المار في الملف وشدة التمغنط M والحث المغناطيسي B لمادة ممغنطة داخل حلقة رولاند.

جـ ـ مقطع الجزء القاتم في الشكل ب.

وبالتعويض في المعادلة (٣-٧) يُحصل على:

$$M = I_m \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{r d\theta} = \frac{I_m}{2\pi r}$$

أو

$$I_m = 2\pi r M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٤)$$

وواضح من المعادلة (٢-٧) أن M لها اتجاه dP_m نفسه وأنه دائماً مماس للمنحنى الدائري كما في شكل (٣ب - ٧) [كما هو الحال بالنسبة لـ B]. ويمكن الوصول إلى النتيجة (٤-٧) بتكامل المقدار $M.dl$ حول المسار المغلق C فنحصل على:

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \oint M \cdot dl = M \oint_0^{2\pi r} dl = 2\pi r M$$

وبذلك يمكن أن نكتب بصورة عامة أن:

$$I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥)$$

وبالرجوع إلى الفصل الخامس وطبقا لقانون أمبير، المعادلة (٢٢ب - ٥)، فإن:

$$\oint B \cos\theta \, dl = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I \cdot\cdot \quad (٧ - ١٦)$$

وفي حالة وجود مادة مغناطيسية فإن المعادلة (١٦ - ٧) تصبح:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (NI + I_m) = \mu_0 NI + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (٧ - ٦ب)$$

أو

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) . dl = NI \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٧)$$

أو

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

وهـذه هي معادلة أمبير في وجود مادة مغناطيسية والمقدار $(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})$ يمثل شدة المجال المغناطيسي H أي أن :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \qquad \text{(S.I)} \quad \cdots\cdots \quad (٧\text{-}٨)$$

وهذه المعادلة صحيحة بين B و M لأي وسط مادي وهي تماثل المعادلة (٢٦-٣) التي تربط بين الإزاحـة D وشدة المجال الكهربي E $[E = \frac{1}{\varepsilon_0}(D - P)]$ حيث E تناظر B و D تناظر H.

أما في النظام الجاوسي فإن العلاقة (٨-٧) تصبح :

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧\text{-}٩)$$

وواضـح مما سبق ذكـره أن B لها علاقة بالتيار الحقيقي I إضافة إلى التيارات الذرية السطحية I_m بينما H لها علاقة بـ I فقط . إذا قورنت هذه الحالة بما وجد بالنسبة للكهرباء الاستاتيكية فإن شدة المجال الكهربي E كان نتيجة لتوزيع كل الشحنات المستقطبة الناتجة عن استقطاب المواد العازلة وكذلك الشحنات الحرة بينما الإزاحة D تختص فقط بالشحنات الحرة كما ورد في البند (٣-٥) .

(٤-٧) التأثرية المغناطيسية

Magnetic Susceptibility

يتناسب متجه شدة التمغنط M مع شدة المجال المغناطيسي H تناسبا طرديا في معظم المواد حسب المعادلة :

$$M = \chi_m H \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧\text{-}١٠)$$

ويسمى معـامل التناسب χ_m بالتأثرية المغناطيسية، وهي تمثل أحد العوامل الرئيسة المميزة للمادة المدروسة وكلما كانت قيمة χ_m كبيرة كانت المادة أكثر قابلية للتمغنط في أي مجال مغنـاطيسي خارجي. وهـذا التناسب واضح في المواد الدايامغناطيسية وكذلك البارامغناطيسية ما لم يكن المجال المغناطيسي الخارجي كبيرا ودرجة الحرارة منخفضة، كما سيرد في البند (٧-٧). أما المواد الحديد ومغناطيسية فليس هناك تناسب طردي بين M و H كما سيرد ذلك في البند (٧-٨). ويكون اتجاه M هو اتجاه H نفسه في المواد المتجانسة.

ومن المعادلتين (٧-٨) و(٧-١٠) يمكن الحصول على:

$$B = \mu_0 (H + \chi_m H) = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad \ldots \quad (٧\text{-}١١)$$

أو

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}١١٢)$$

حيث

$$\therefore \mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}١٢ب)$$

$$\because \mu_r = \mu/\mu_0$$

$$\therefore \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}١٣)$$

حيث μ_r النفـاذية المغنـاطيسية النسبية (relative magnetic permeability) و μ نفاذية الوسط و μ_0 نفاذية الفراغ.

أما في النظام الجاووسي فتصبح المعادلتان (٧-٩) و(٧-١٠) بالصورة التالية:

$$B = H + 4\pi \chi_m H = (1 + 4\pi \chi_m)H = \mu H \quad \ldots \quad (٧\text{-}١٤)$$

حيث

$$\therefore \mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}١١٥)$$

$$\therefore \chi_m = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1) \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}١٥ب)$$

والقيمة التقريبية لـ μ في الفراغ تساوي الواحد ومنه $\chi_m = 0$ و $M = 0$

والجدول (٢-٧) يبين بعض قيم χ_m . والاشارة السالبة التي تسبق بعض قيم χ_m ، تدل على أن المادة دايامغناطيسية لأنه كما هو معروف أن التمغنط لهذه المواد يعاكس المجال المغناطيسي الخارجي . ولذلك يمكن القول (إنه بحسب إشارة التأثرية المغناطيسية وقيمتها يمكن تصنيف الأنواع المختلفة للمواد الممغنطة) .

وحسب المعادلة (٧-١٣) فإن χ_m لا وحدات لها وبذلك فإن وحدات M هي وحدات H نفسها أي أن وحدات M هي :

$$M = A / m$$

وفي النظام الجاووسي :

$$M = 10^{-3}\,Oe$$

أما μ_0 أو μ فإنه حسب المعادلة (٧-١٢) تكون وحداتها .

$$\mu \text{ or } \mu_0 = \frac{B}{H} = \frac{Wb}{m^2} \div \frac{A}{m} = \frac{Wb}{A\,.\,m}$$

$$= H / m$$

$$\therefore \mu_0 = \frac{10^4\,G}{4\pi \times 10^{-3}\,Oe} = \frac{1}{4\pi} \times 10^7\,G / Oe$$

وإذا كانت

$$B = 1\,.\,G = 10^{-4}\,\text{tesla (T)}$$

$$H = \frac{1}{4\pi \times 10^{-3}}\,A / m$$

$$\therefore \mu_0 = 10^{-4} \times 4\pi \times 10^{-3} = 4\pi \times 10^{-7}\,H / m$$

ويوضح الملحق (١) العلاقة بين أنظمة الوحدات المختلفة للمقادير المغناطيسية .

جدول (٢-٧) بعض قيم التأثرية المغناطيسية لبعض المواد.

المـادة Substance	التأثرية المغناطيسية χ_m
ألومنيـوم Al	2.3×10^{-5}
بزمـوت Bi	-1.7×10^{-4}
نحـاس Cu	-1.0×10^{-5}
ذهـب Au	-3.6×10^{-5}
رصـاص Pb	-1.7×10^{-5}
ماغنيسيوم Mg	-1.2×10^{-4}
بلاتـين Pl	2.9×10^{-4}
فـضـة Ag	-2.6×10^{-5}
مـاء H_2O	-0.88×10^{-5}
فلوريد المنجنيز MnF_2	4.59×10^{-4}
كلوريد الكوبالت $Co\,Cl_2$	3.38×10^{-4}
كلوريد الحديديك $Fe\,Cl_2$	3.10×10^{-4}
كلوريد الحديدوز $Fe\,Cl_3$	2.40×10^{-9}
كلوريد النيكل $Ni\,Cl_2$	1.71×10^{-4}
حديد مطاوع Fe - (soft)	5000.
جرمانـيوم Ge	-1.5×10^{-5}
تنجستن W	$+6.8 \times 10^{-5}$
زجـاج Glass	-1.1×10^{-4}
كوارتز منصهر Fused Quartz	-6.2×10^{-5}
كلوريد الصوديوم $Na\,Cl$	-1.38×10^{-5}
كبريتات البوتاسيوم والكروميوم $Cr\,K(SO_4)_2.12H_2O$	2.32×10^{-5}
كبريتات النحاس $Cu\,(SO_4).5H_2O$	1.43×10^{-5}
كبريتات القادولينيوم $Gd_2\,(SO_4)_3.8H_2O$	2.21×10^{-4}

مـثـال (١-٧)

ملف حلقي رفيـع (thin toroidal coil) متوسط نصف قـطـره 10 cm ومساحـة مقطعه 30 cm^2 وعـدد لفـاته 3412 لفة (بحيث يكون 50 لفة لكل سم) فإذا لُف حول مادة بارامغناطيسية تأثيريتها تساوي 4.59×10^{-4} والتيار المار في الملف يساوي 3.5 أمبير. احسب:

ا ـ شدة المجال H داخل الملف.

ب ـ شدة التمغنط M.

جـ ـ الحث المغناطيسي B.

د ـ مجموع التيار المغناطيسي السطحي I_m.

هـ ـ ما هي قيمة B في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية.

و ـ ما هي قيمة B إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بمادة حديد ومغناطيسية قيمة التأثرية المغناطيسية لها تساوي 1200 ، علما بأن سلوك المغناطيسية خطية.

الحـــل

ا ـ يمكن الحصول على H وذلك بتطبيق قانون أمبير المعادلة (٧ـ٧).

$$\oint H dl = H\int_0^{2\pi r} dl = 2\,\pi\, r\, H = NI$$

$$\therefore H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{(3412)\,(3.5)}{(2\pi)\,(0.1)} = 1.9\times 10^4 \text{A/m}$$

ب ـ شدة التمغنط يمكن حسابها من المعادلة

$$M = \chi_m H = (4.59 \times 10^{-4})\,(1.9 \times 10^4) = 8.721 \text{ A/m}$$

جـ ـ أما B فيمكن حسابها من

$$B = \mu H = \mu_0\,(1 + \chi_m)\,H = (4\pi\times 10^{-7})\,(1.000459)\,(1.9 \times 10^4)$$
$$= 0.0238871 \text{ W/m}^2$$

كما يمكن حساب B من المعادلة (٦ب ـ ٧).

د ـ تحسب I_m من المعادلة (٢ـ٧) حيث:

$$M = \frac{P_m}{V} = \frac{I_m S}{Sl} = \frac{I_m}{l}$$

$$\therefore I_m = Ml = 2\pi rM$$

$$\therefore I_m = (2\pi)(0.1)(8.71) = 5.48 \text{ A}$$

وهذا المقدار صغير جدا مقارنة بالحد NI ولذلك يمكن إهماله من المعادلة (٦ب - ٧)

$$\therefore B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = 0.0238761 \text{ Wb/m}^2$$

وهذه القيمة تساوي القيمة الواردة في الفقرة (جـ).

هـ - يكون قيمة المجال في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية مساويا تقريبا لقيمته في حالة وجودها لأن النفاذية النسبية تساوي تقريبا الواحد أي:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m = 1.000459$$

و - في حالة استبدال المادة البارامغناطيسية بحديد ومغناطيسية خطية فإن:

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 1200 - 1 = 1199$$

وهي القيمة نفسها

$$H = 19000 \text{ A/m}$$

$$M = \chi_m H = (1199)(19000) = 2.28 \times 10^7 \text{ A/m}$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = (4\pi \times 10^{-7})(1200) = 1.508 \times 10^{-3} \text{ Wb/A . m}$$

$$B = \mu H = (1.508 \times 10^{-3})(19000) = 28.7 \text{ Wb/m}^2$$

$$I_m = 2\pi rM = (2\pi)(0.1)(2.28 \times 10^7) = 1.43 \times 10^7 \text{ A}$$

وهذا المقدار كبير جدا ويزيد من قيمة B إلى جانب زيادة في قيمة حثاثية الملف في حالة وجود المادة الحديدية المغناطيسية عنها في الفراغ. وجدير بالملاحظة أن سلوك التمغنط لبعض المواد الحديدية المغناطيسية لا يمكن (وحتى ولو بصورة تقريبية) أن يخضع للمعادلة الخطية (١٠-٧) التي افترض تطبيقها في هذه المسألة، وافتراضنا في هذه المسألة هو لتوضيح الفرق لبعض القيم في حالتي البارامغناطيسية والفرومغناطيسية.

(٧-٥) العلاقة بين كمية الحركة الزاوية والعزم المغناطيسي المداري للإلكترون

The Relation between the Angular Momentum and the Orbital Magnetic Moment of the Electron

إذا فرض أن إلكترونا واحدا يدور حول نواة تحتوي على بروتون واحد ونيوترون بسرعة زاوية قدرها ω وعلى بعد قدره r ، كما في حالة ذرة الهيدروجين [كما في شكل (٧-٤)]، ولكي يبقى الإلكترون في مداره لابد أن تكون القوة الطاردة المركزية (centrifugal force) الناتجة عن الحركة الدائرية تساوي قوة الجذب الاستاتيكي المركزي لكولوم الناتجة من تجاذب الإلكترون الذي شحنته (e−) مع البروتون والذي شحنته (e+).

$\therefore$ electrostatic attraction force = centrifugal

القوة الطاردة المركزية = (قوة الجذب الاستاتيكي)

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m r \omega^2$$

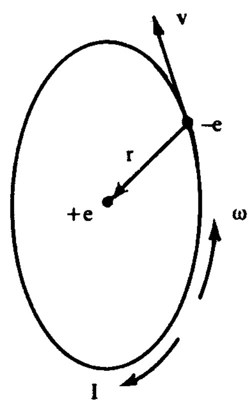
$$\therefore \omega = \frac{e}{(4\pi\varepsilon_0 m r^3)^{1/2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٧-١٦)$$

حيث m كتلة الإلكترون و ε_0 سماحية الفراغ وبما أن دوران الإلكترون ينتج عنه تيار شدته I وهو عبارة عن معدل مرور الشحنة e في الثانية الواحدة:

$$\therefore I = \frac{e}{T} = e\,.\,f = e\frac{\omega}{2\pi}. \quad (٧-١٧)$$

حيث f هو التردد ويمثل عدد الدورات في الثانية الواحدة وبالتعويض عن ω من المعادلة (٧-١٦) نحصل على:

$$I = \frac{e^2}{2\pi(4\pi\varepsilon_0 m r^3)^{1/2}} \cdots \quad (٧-١٨)$$



شكل (٧-٤): حركة إلكترون حول نواة تحتوي على بروتون واحد ونيوترون بسرعة زاوية قدرها ω .

وإذا اعتبرت الحركة الدائرية للإلكترون تماثل مرور تيار في لفة دائرية مساحة مقطعها S ونصف قطرها r فإن العزم المغناطيسي الدائري للذرة يساوي، حسب المعادلة (٥-٥٦):

$$P_m = IS = I\pi r^2 = \frac{e^2}{4}\left(\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}١٩)$$

وبالتعويض عن m و e و ε_0 بقيمها المعروفة، وعن r بالقيمة 5.28×10^{-11}m كما في ذرة الهيدروجين في حالتها الطبيعية نُحصل على:

$$P_m = \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{4}\left\{\frac{5.28 \times 10^{-11}}{\pi(8.853 \times 10^{-12})(9.11 \times 10^{-31})}\right\}^{1/2}$$

$$\therefore P_m = 9.27 \times 10^{-24}\ \mathrm{A\,.\,m^2} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٢٠)$$

وهذه القيمة تمثل أقل عزم للإلكترون في مداره، ويسمى هذا الثابت بمغنيتون بوهر (Bohr-magneton) وهي وحدة العزم المغناطيسي للإلكترون. ويرمز له بالرمز μ_B.

والعزم الحركي الزاوي المداري للإلكترون يعطى بالمعادلة:

$$L = mvr = mr^2\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٢١)$$

ولكن من المعادلتين (٧-١٧) و(٧-١٩) نُحصل على:

$$P_m = IS = \frac{e\omega}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}e\omega r^2 \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٢٢)$$

من هذه المعادلة والمعادلة (٧-٢١) نُحصل على:

$$P_m = L\frac{e}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٢٣)$$

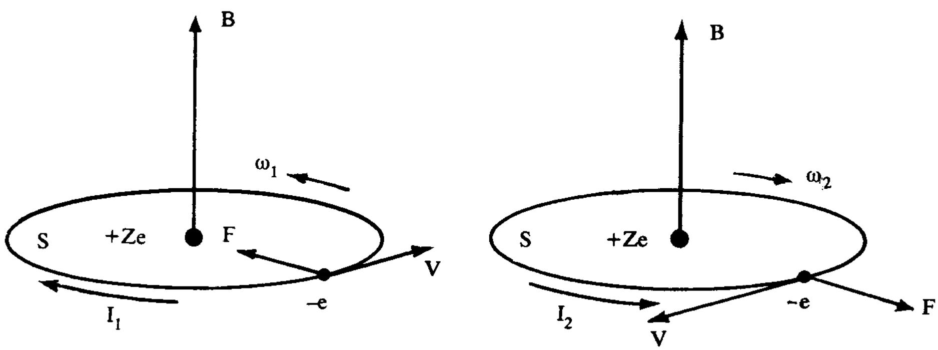
وواضح أن العزم المغناطيسي المداري P_m يتناسب تناسبا طرديا مع كمية الحركة الزاوية L وثابت التناسب هو النسبة بين شحنة الالكترون (e−) إلى كتلته (m).

(٧-٦) الدايامغناطيسية

Diamagnetism

اكتشف ميخائيل فاراداي، في عام ١٨٤٦م، أن مادة البزمث bismuth (Bi) تتنافر إذا وضعت في مجال مغناطيسي قوي وسمى هذه المادة باسم الدايامغناطيسية، وهي ظاهرة توجد في كل المواد بتأثير ضعيف وتختفي تقريبا في المواد التي تتميز ذراتها بعزوم مغناطيسية كمواد البارامغناطيسية والفرومغناطيسية.

وظاهرة الدايامغناطيسية الضعيفة الناتجة عن التيارات الإلكترونية الدائرية تعرف بظاهرة لارمر (Larmar diamagnetism) نسبة لمكتشفها السير جوزف لارمر (Sir Joseph Larmar) العالم الانجليزي. ويوضح الشكل (٧-٥) الطريقة التي اتبعها لارمر لحساب الدايامغناطيسية. نجد في هذا الشكل إلكترونين يدور كل منهما في مسار دائري ثابت نصف قطره r حول نواة شحنتها Ze+ حيث Z عدد صحيح، وبسرعة قدرها v، وسرعة زاوية قدرها ω ومتعاكسين في الاتجاه.



شكل (٧-٥): إلكترونان يتحركان في اتجاهين متعاكسين ومسلط عليهما مجال مغناطيسي حثه B.

فإذا لم يسلط مجال مغناطيسي خارجي عليهما فإن حركة كل منهما تخضع للمعادلة (٧-١٦) في البند (٧-٥) أي أن:

$$-mr\omega_0^2 = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{or} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{mr^3} \cdot\cdot \quad (٧\text{-}٢٤)$$

وحسب المعادلة (١٩-٧) يكون العزم المغناطيسي لكل منهما:

$$P_{m1}(0) = \frac{(-e)\,\omega_0}{2\pi}(\pi r^2) = -\frac{1}{2}e\omega_0 r^2 . . . \quad (٧-١٢٥)$$

$$P_{m2}(0) = \frac{(-e)\,(-\omega_0)}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}e\omega_0 r^2 \cdot \quad (٧-ب٢٥)$$

والإشارة السالبة التي تسبق ω_0 تعني أن الاتجاه للإلكترون الثاني يعاكس الاتجاه للإلكترون الأول. وواضح من هاتين المعادلتين أن محصلة العزم المغناطيسي في غياب المجال الخارجي يساوي الصفر، ويمكن بصورة مماثلة افتراض أن العزوم المغناطيسية الناتجة عن الغزل الإلكتروني للإلكترونين متعاكسين وتكون المحصلة مساوية للصفر. ولا تظهر أية صفة مغناطيسية للمادة.

أما إذا سُلط مجال مغناطيسي خارجي B ، كما في شكل (٥-٧)، فإن الإلكترونين سوف يتأثران بقوة مغناطيسية قدرها $(-e(v \times B) = F_m)$[كما ورد في البند (٥-١٠-١) الفصل الخامس] ويوضح الشكل (٥-٧) اتجاه هذه القوة لكل من الإلكترونين.

وتضاف هذه القوة إلى القوة الاستاتيكية بين الإلكترون والنواة بالنسبة للإلكترون الأول، شكل (١٥ - ٧)، وتزداد معها القوة الطاردة المركزية بحيث تزداد السرعة الزاوية للإلكترون لتصبح ω_1 ، بينما يحصل العكس من ذلك بالنسبة للإلكترون الثاني، شكل (٥ب - ٧)، بحيث تضعف القوة المغناطيسية القوة الاستاتيكية وتنقص تبعا لذلك القوة الطاردة المركزية بحيث تنقص السرعة الزاوية لتصبح ω_2.

∴ معادلة القوة الواقعة على الإلكترون الأول هي:

$$-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - evB = -mr\omega_1^2$$

وحيث إن $v = r\omega_1$ ، وحسب المعادلة (٢٤ - ٧) يكون:

$$-mr\omega_0^2 - er\omega_1 B = -mr\omega_1^2 \quad . . \quad (٧-١٢٦)$$

وبصورة مماثلة تكون معادلة القوى الواقعة على الإلكترون الثاني هي :

$$-mr\omega_0^2 + er\omega_2 B = -mr\omega_2^2 \quad . . . \quad (٢٦ب - ٧)$$

ويقسمة طرفي المعادلتين (١٢٦ - ٧) و(٢٦ب - ٧) على mr يُحصل على :

$$-\omega_0^2 - 2\omega_1 \frac{eB}{2m} = -\omega_1^2 \quad . . . . \quad (١٢٧ - ٧)$$

$$\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_L - \omega_0^2 = 0 \quad . . . \quad (٢٧ب - ٧)$$

$$\omega_2^2 + 2\omega_2 \omega_L - \omega_0^2 = 0 \quad . . . . . . \quad (٧\text{-}٢٨)$$

حيث

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}$$

وتسمى ω_L بتردد لارمر (Larmar frequency)

وإذا أضيف لطرفي المعادلتين (١٢٧ - ٧) و(٢٧ب - ٧) ω_L^2 يُحصل على :

$$\begin{aligned}(\omega_1 - \omega_L)^2 &= \omega_0^2 + \omega_L^2\\ (\omega_2 + \omega_L)^2 &= \omega_0^2 + \omega_L^2\end{aligned} \quad . . . . \quad (٧\text{-}٢٩)$$

وواضح من المعادلتين (٢٤-٧) و(٢٨-٧) أن قيمة ω_L صغيرة جدا بالنسبة لـ ω_0 مهما كبرت قيمة B ولذلك يمكن إهمال ω_L^2 مقارنة بـ ω_0^2 ، وبذلك يحصل على :

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_L \quad . . . . \quad (١٣٠ - ٧)$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \omega_L \quad . . . \quad (٣٠ب - ٧)$$

وبذلك يكون العزم المغناطيسي لكل من الإلكترونين في وجود مجال مغناطيسي B هو:

$$P_{m1}(B) = I_1 S = \frac{-e\,\omega_1}{2\pi}(\pi r^2) = -\frac{er^2}{2}(\omega_0 + \omega_L) \quad (١٣١ - ٧)$$

$$P_{m2}(B) = I_2 S = \frac{-e(-\omega_2)}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{er^2}{2}(\omega_0 - \omega_L) \quad (٣١ب - ٧)$$

ومحصلتهما تساوي :

$$P_m(B) = P_{m1}(B) + P_{m2}(B)$$

$$P_m(B) = -\frac{1}{2} er^2 (\omega_0 + \omega_L) + \frac{1}{2} er^2 (\omega_0 - \omega_L)$$

$$\therefore P_m(B) = -e r^2 \omega_L = -e r^2 \frac{eB}{2m} = -\frac{e^2 r^2 B}{2m} \quad .... \quad (٧\text{-}٣٢)$$

أي أن المحصلة في حالة وجود مجال مغناطيسي خارجي B لا تساوي الصفر والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه محصلة العزوم تعاكس اتجاه المجال B ، وبهذا يقل الفيض المغنـاطيسي عنـد تسليطه على مواد دايامغنـاطيسية وأصبح واضحا سبب تنافر المواد الدايامغناطيسية في وجود مجال خارجي B.

وحيث إن العزم المغناطيسي لوحدة الحجوم (شدة التمغنط M) هو عبارة عن العزم المغناطيسي للذرة مضروبا في عدد الذرات في وحدة الحجوم N أي أن

$$M = N P_m$$

$$\because \chi_m = \frac{M}{H} \quad \& \quad H = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\therefore \chi_m = \frac{\mu_0}{B} N P_m \quad .... \quad (٧ - ٣٣أ)$$

وبالتعويض عن P_m من المعادلة (٧-٣٢) نحصل على :

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 N e^2 r^2}{2m} \quad ..... \quad (٧ - ٣٣ب)$$

وإذا أخـذت ذرة نموذجية يتفق تركيبها مع الافتراضات السابقة لحساب χ_m حسب المعادلة (٧ - ٣٣ب) وكان $r = 1.3 \times 10^{-10}m$ و $N = 6 \times 10^{28}$ per m^3 فإن قيمة χ_m تساوي :

$$\chi_m = -\frac{(4\pi \times 10^{-7})(6.0 \times 10^{28})(1.6 \times 10^{-19})^2 (1.3 \times 10^{-10})^2}{2(9.11 \times 10^{-31})} = -1.8 \times 10^{-5}$$

وهـذه القيمـة ضعيفـة ولكنه يمكن قياسها وهي في حدود القيم الواردة في الجدول (٧-٢) لمواد دايا مغنـاطيسية نمـوذجية، كما توضـح المعادلة (٧-٣٣) أن χ_m مستقلة (independent) لا تعتمد على درجة الحرارة وهذا يتفق مع النتائج التجريبية لهذه المواد.

ويلاحظ أنه افترض في النموذج السابق أن الإلكترونات تدور في مدارات دائرية بحيث يكون الإلكترون دائما على البعد نفسه من النواة ولكن الواقع أن الإلكترونات لا تدور كذلك وليست دائما على البعد نفسه.

ولذلك إذا أخذ إلكترون واحد فإنه حسب المعادلة (٣٢-٧) يكون العزم المغناطيسي مساويا

$$P_m = -\frac{e^2 r^2}{4m} B \quad \cdots\cdots \quad (٧-١٣٤)$$

وإذا أخذت ذرة عددها الذري Z (atomic number) فتكون عدد إلكتروناتها Z. ويكون لهذه الإلكترونات مدارات مختلفة في أنصاف أقطارها وفي اتجاهها أيضا ويكون تأثير المجال المغناطيسي مختلفا من مدار إلى مدار آخر. فإذا أخذ متوسط توزيعات كل الإلكترونات فإن محصلة العزوم لكل ذرة وجدت مساوية لـ:

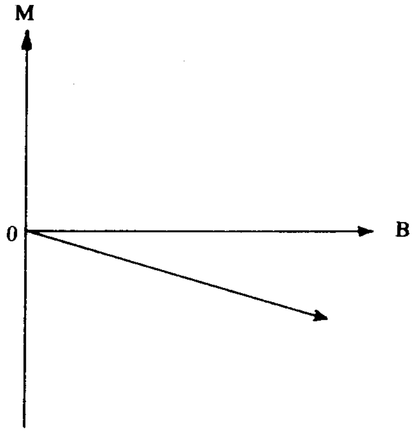
$$\bar{P}_m = -\frac{e^2}{6m} Z r_0^2 B \quad \cdots\cdots \quad (٧-٣٤ب)$$

حيث r_0^2 متوسط مربع أنصاف الأقطار (mean square radius) لمدارات الإلكترونات، وبذلك فإن قيمة M بالنسبة للمواد الدايامغناطيسية هي

$$M = N\bar{P}_m = -\frac{Ne^2}{6m} Z r_0^2 B \quad \cdots\cdots \quad (٧-١٣٥)$$

$$\therefore \chi_m = \frac{\mu_0 M}{B} = -\frac{\mu_0 N e^2}{6m} Z r_0^2 \quad \cdot \quad (٧-٣٥ب)$$

وواضح أن M و χ_m لا تعتمدان على درجة الحرارة ويوضح الشكل (٦-٧) العلاقة بين M و B للمواد الدايامغناطيسية.



شكل (٦-٧): العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمغنط M للمواد الدايامغناطيسية

(٧-٧) التمغنط المتسامت (البارامغناطيسية)

Paramagnetism

هناك بعض الذرات والجزيئات لها عزوم مغناطيسية دائمة تكون موزعة عشوائيا وعند تسليط مجال مغناطيسي خارجي توجه هذه العزوم لتكون في وضع موازٍ للمجال المغناطيسي ويعطي ما يسمى بالظاهرة البارامغناطيسية (paramagnetic effect) وتسمى المواد بالمواد البارامغناطيسية.

وقد ينتهي هذا التوجيه للعزوم بسبب تأثير الطاقة الحرارية العشوائية للذرات ويكون لدينا بذلك عزوم ذرية عشوائية (مرتبة بشكل فوضوي - disordered arrangement). ففي الغازات ترتبط الطاقة الحرارية غالبا بالطاقة الحركية (kinetic energy) ويحدث التوزيع الفوضوي للعزوم نتيجة للتصادم بين الجزيئات. أما في الحالة الصلبة فإن الطاقة الحرارية تظهر على شكل طاقة اهتزازية (vibrational energy) للنظام التشابكي البلّوري (crystal lattice) وهذه الطاقة مسؤولة عن التوزيع الفوضوي للعزوم أما في حالة السوائل فقد يحدث التأثيران معا.

وفي كل الحالات هناك تنافس بين التأثير الاتجاهي للمجال المغناطيسي الخارجي وبين التوزيع العشوائي للعزوم الناتج عن الطاقة الحرارية. وينتج عن ذلك توجيه جزئي (partial alignement) للعزوم الذي يعتمد على شدة المجال المغناطيسي وعلى درجة الحرارة.

فإذا استعملت الاحداثيات الديكارتية فإن محصلة العزوم المتجهة مع محور Z مثلا تساوي الصفر في حالة عدم تسليط أي مجال مغناطيسي خارجي. أما إذا سلط المجال المغناطيسي الذي حثه B بحيث يكون اتجاهه مع محور Z فإن العزوم المغناطيسية ستتجه مع اتجاه المجال بزوايا مختلفة وسيكون لمعظمها مركبات مع محور Z في الاتجاه الموجب.

فإذا أخذ العزم المغناطيسي P_m بحيث تكون مركبته على المحور Z [كما في شكل (١٧ ـ ٧)] هي:

$$P_{mz} = P_m \cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (٧ - ١٣٦)$$

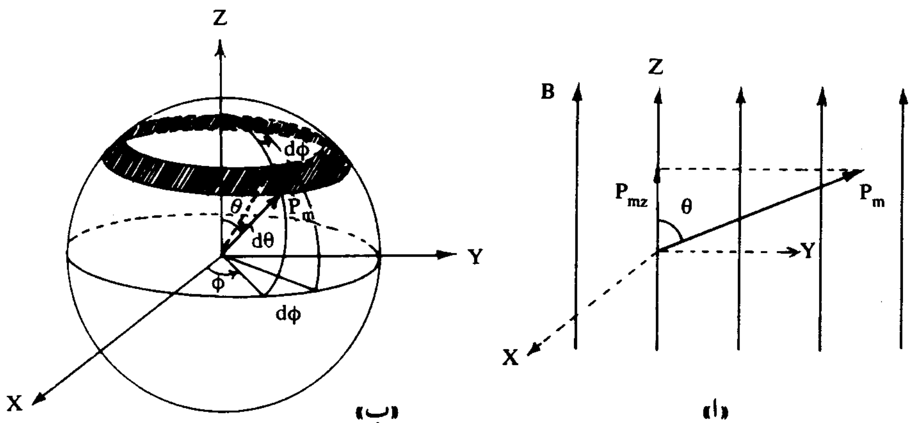
وحسب ما ورد في البند (٥ ـ ٨) فإن طاقة الوضع المغناطيسي لهذا العزم هي:

$$W = P_m B \cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (٧ - ٣٦ب)$$

حيث θ هي الزاوية بين B و P_m.

ولحساب الشدة المغناطيسية للمواد البارامغناطيسية نفرض أن N هي عدد الذرات الموجودة بوحدة الحجوم لمادة بارامغناطيسية، وضعت في مجال مغناطيسي حثه B وعند درجة حرارة قدرها T. فإذا فرض أن dn عدد العزوم المغناطيسية في وحدة الحجوم والواقعة بين θ و $\theta + d\theta$ مع اتجاه المجال B والموضحة بالشريط المخطط كما في شكل (٧ب ـ ٧). فتكون الزاوية المجسمة المقابلة للشريط هي:

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٣٧)$$



شكل (٧-٧): ا ـ عزم مغناطيسي P_m في مجال مغناطيسي خارجي.
ب ـ غلاف كروي لحساب العزوم المغناطيسية المختلفة المتأثرة بالمجال المغناطيسي الخارجي.

وحسب قانون ماكسويل وبولتزمان للاحتمالات النسبية لتوزيع الطاقة (relative probability of Maxwell - Boltzman energy distribution law) فإن التوزيع $dn/d\Omega$ يعطى بالمعادلة:

$$\frac{dn}{d\Omega} = N_0 e^{(-W/KT)} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٧ - ١٣٨})$$

حيث N_0 ثابت التناسب ويمثل عدد الجزيئات (molecules) لوحدة الزاوية المجسمة (solid angle) عندما تكون $W = 0$ أي أن:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \cos\theta = 0$$

وبالتعويض عن W من المعادلة (٣٦ب ـ ٧) في المعادلة (١٣٨ ـ ٧) نحصل على:

$$\frac{dn}{d\Omega} = N_0 e^{\{(-P_m B \cos\theta)/KT\}}$$

أو

$$dn = N_0 e^{\{(-P_m B \cos\theta)/KT\}} d\Omega \ldots \quad (\text{٧ - ب٣٨})$$

وبالتعويض عن $d\Omega$ من المعادلة (٧-٣٧) ووضع $P_m B/KT = a$ نحصل على :

$$dn = N_0 e^{-a\cos\theta} 2\pi \sin\theta \, d\theta \cdots \quad (٧-١٣٩)$$

$$\therefore n = \int dn = 2\pi N_0 \int_0^{\pi} e^{-a\cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$

$$\therefore n = (4\pi N_0/a) \sinh a \;.\;.\;.\;. \quad (٧-٣٩ب)$$

ويكون مجموع العزوم ضمن الشريط المخطط داخل الزاوية المجسمة $d\Omega$ هو:

$$dM = P_{mz} \cdot dn$$

وحسب المعادلة (٧-٣٥) والمعادلة (١٣٩-٧) فإن :

$$\therefore dM' = P_m \cos\theta \, dn = P_m \cos\theta \, 2\pi N_0 e^{a\cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$

$$\therefore M' = 2\pi P_m N_0 \int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore M' = (4\pi N_0 P_m/a^2) \{a \coth(a) - \sinh(a)\} \quad (٧-٤٠)$$

ومن هذه المعـادلة والمعادلة (٣٩ب-٧) تكون قيمة العزم المغناطيسي المتوسط لكل جزيء والمتجهة مع اتجاه المجال المغناطيسي على محور Z هي :

$$\therefore \overline{P}_{mz} = \frac{M'}{n} = P_m \left\{ \coth(a) - \frac{1}{a} \right\}$$

وبذلك فإن قيمة الشدة المغناطيسية M (magnetization) هي :

$$M = N \overline{P}_{mz}$$

حيث N عدد الذرات لوحدة الحجوم .

$$M = N P_m \left\{ \coth(a) - \frac{1}{a} \right\} = N P_m L(a) \;.\;. \quad (٧-٤١)$$

حيث

$$L(a) = \coth(a) - \frac{1}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \;.\;. \quad (٧-٤٢)$$

وتكون قيمة التأثرية المغناطيسية هي :

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 N P_m L(a)}{B} \quad \ldots \quad (٤٣-٧)$$

والمقدار L(a) يعرف بتابع لانقفن (Langevin function) والشكل (٨-٧) يمثل العلاقة بين a و L(a). وواضح أنه بالنسبة للقيم الصغيرة لـ a حينما يكون المجال المغناطيسي صغيرا نسبيا أو درجة الحرارة مرتفعة نسبيا، فإن الدالة تكون دالة خطية بالنسبة للمتغير a ولها ميل قيمته $\frac{1}{3}$. وهذا ليس واضح مباشرة من المعادلة (٤٢-٧) ولكن من مفكوك الدالة L(a) نحصل على

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \cdots \quad (٤٤-٧)$$

وحيث إن a صغيرة جدا فإنه يمكن إهمال الحد الثاني وما بعده.

وبالتعويض عن الدالة L(a) في المعادلتين (٤١-٧) و (٤٢-٧)، يُحصل على :

$$M = \frac{N P_m^2 B}{3KT} \quad \ldots \quad (٤٥أ - ٧)$$

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 N P_m^2}{3KT} \quad \ldots \quad (٤٥ب - ٧)$$

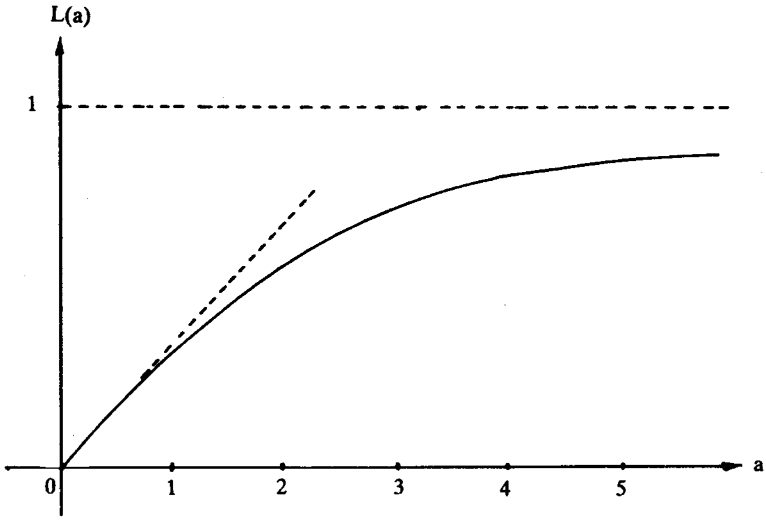
أو

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \ldots \quad (٤٦أ - ٧)$$

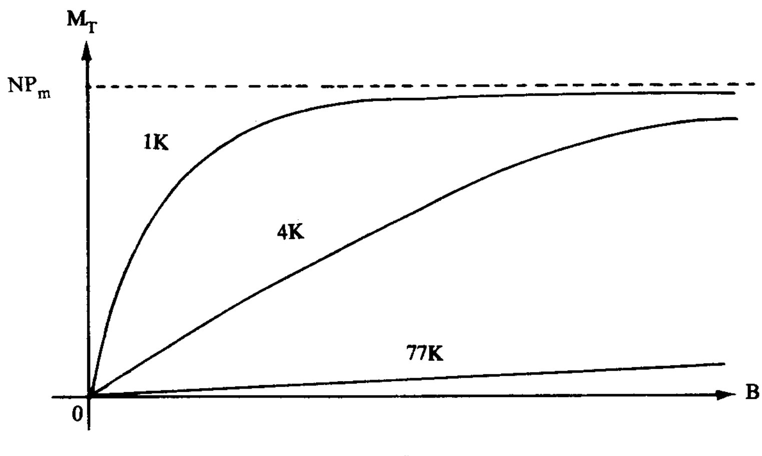
حيث

$$C = \frac{\mu_0 N P_m^2}{3K} \quad \ldots \quad (٤٦ب - ٧)$$

ويسمى C بثابت كيوري (Curie) والمعادلة (٤٦أ - ٧) تسمى بمعادلة كيوري. وتحت هذه الظروف فإن التأثرية المغناطيسية لا تعتمد على المجال المغناطيسي ولكنها تتناسب



«أ»



«ب»

شكل (٨-٧): ا ـ العلاقة بين a ($a = \frac{P_m B}{KT}$) وتابع لانقفن. حسب المعادلة (٣٤-٧).
ب ـ العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمغنط اللحظي M_T ، عند درجات الحرارة 1K, 4K, 77K حسب المعادلة (٤٥ا-٧).

عكسيا مع درجة الحرارة، وسبب هذا الاعتماد أنه كلما زادت درجة الحرارة كلما زادت الطاقة الحرارية الداخلية العشوائية للذرات أو الجزيئات التي تكون سببا في نقصان درجة التوجيه للعزوم الذرية عند أي قيمة للمجال المغناطيسي.

ومن الملاحظ أن الطاقة الحرارية أكبر من طاقة الوضع. فإذا حسبت طاقة الوضع لعزم مغناطيسي قيمته وحدة العزم المغناطيسي، حسب المعادلتين (٣٩ـ٧) و(٢٠ـ٧)، وضع في مجال مغناطيسي قيمة حثه 10 T وكانت العزوم متجهة مع المجال، وبتطبيق المعادلة (٣٦ب ـ ٧)، نحصل على:

$$W = P_m B = 9.273 \times 10^{-24} \times 10$$

$$W = P_m B = 9.273 \times 10^{-23} J = 5.796 \times 10^{-4}\, eV$$

بينما تكون قيمة الطاقة الحرارية عند درجة حرارة الغرفة تساوي:

$$KT = 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 4.14 \times^{-21} J$$

$$KT = 2.588 \times 10^{-2}\, eV$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٤١ـ٧) والشكل (٨ـ٧) نجد أن شدة التمغنط M تصل إلى قيمتها العظمى $N P_m$ عندما تكون قيمة L(a) الوحدة تقريبا، وعندما تكون كل العزوم متجهة مع المجال المغناطيسي، أي أن المعادلة (٤١ـ٧) يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$M_T = M_s\, L(a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ـ٤٧)$$

حيث M_T شدة التمغنط عند درجة الحرارة T و M_s القيمة العظمى «التشبع» لشدة التمغنط (saturation value). ويوضح الشكل (٨ب ـ ٧) العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمغنط عند قيم مختلفة لدرجة الحرارة. وإذا عوض بقيم نموذجية في المعادلة (٤٥ب ـ ٧) بحيث كان $N = 6 \times 10^{28}\, m^{-3}$ و $P_m = 9.27 \times 10^{-24}\, A\,.\,m^2$ و $T = 300K$ فإنه يمكن الحصول على:

$$\chi_m = 5.2 \times 10^{-4}$$

وهذه القيمة متفقة مع قيم χ_m الواردة في الجدول (٢ـ٧) للمواد البارامغناطيسية.

مـثـال (٧-٢)

ما هي قيمة B التي تمكن من الحصول على العزم المغناطيسي في حالة التشبع لمادة بارامغناطيسية يكون أقصى حد لها لشدة التمغنط M_T هو 80% من قيمة $N P_m$ عندما تكـون $T = 1.0K$ ، $T = 77K$ و $T = 300K$ علما بأن $P_m = 9.27 \times 10^{-24}\ A \cdot m^2$.

الحــــل

واضح من المعادلة (٧-٤٦) أن M_T تتناسب مع $L(a)$. كما هو واضح أيضا من الشكل (٧ - ١٨) أن قيمة $L(a)$ تصل الوحدة عندما تكون a كبيرة جدا وحسب المعادلة (٧-٢٤) فإن في هذه الحـالة تكون e^a كبيرة جدا بينما e^{-a} صغيرة جدا. ولذلك فإن المعادلة (٧-٢٤) يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$L(a) \cong 1 - \frac{1}{a}$$

$$\because L(a) = \frac{M_T}{M_S} = 0.80 \quad , \quad \therefore 0.80 = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\therefore a = 5$$

وحيث إن

$$a = \frac{P_m B}{KT}$$

$$B = a\frac{KT}{P_m} = 5\frac{KT}{P_m}$$

فعندما تكون $T = 1.0\,K$

$$\therefore B = 5\frac{(1.38 \times 10^{-23})(1.0)}{(9.27 \times 10^{-24})} = 7.44\ Wb/m^2$$

وهذا المجال كبير ولكن يمكن الحصول عليه في المختبرات بسهولة.

وعندما تكون $T = 77K$ يكون $B = 572.88\ Wb/m^2$

وعندما تكون $T = 300\,K$ يكون $B = 2232\ Wb/m^2$

ومعنى ذلـك أن نحتاج إلى مجال مغناطيسي حثه 572.88 Wb/m للحصول على حالة التشبـع نفسهـا في درجـة 77°k وكـذلـك نحتاج مجالا مغناطيسيا حثه $2232\ Wb/m^2$ للحصـول على حالة التشبع نفسها عند درجة حرارة 300°k وهذا مستحيل ويصعب تحقيقه تجريبيا ولذلك لا يمكن أن نصل إلى حالة التشبع عندما تكون درجة الحرارة 77°k أو أعلى ولذلك يمكن عد التناسب خطيا لمنحنى شدة التمغنط عندما تكون $a<<1$.

ومن هذا المثال وما ورد في البند (٧ـ٧) يلاحظ أن العلاقة بين M و H للمواد البارامغناطيسية علاقة خط مستقيم ميله يمثل التأثرية المغناطيسية χ_m وذلك حسب المعـادلـة (٤٥ب ـ ٧). كما تناقص χ_m مع درجة الحرارة ويمكن تمثيل مقلوبها بخط مستقيم كما في شكل (١٩ ـ ٧).

(٨ـ٧) المـواد الحديدية المغناطيسية

Ferromagnetic Material

يوجد في المواد الحديدية المغناطيسية مثل الحديد (Fe) والنيكل (Ni) والكوبالت (Co) تفاعل (interaction) قوي بين العزوم المغناطيسية للذرات المتجاورة فيما بينها بحيث يمكن للعـزوم الذرية من توجيه نفسها بصورة متوازية تحت تسليط مجال مغناطيسي خارجي بسيط أو بدونه. ولذلك فالمواد الحديدية المغناطيسية لها نفاذية مغناطيسية كبيرة جدا ويمكن أن تتمغنط بصورة دائمة. وطالما أن العزوم المغناطيسية تكون جميعها تقريبا في اتجاه واحد بمجرد تسليط مجال خارجي بسيط فإن قيمة التشبع يمكن الوصول إليها عند قيم صغيرة للشدة المغناطيسية وفي هذه الحالة فإن العلاقة بين التمغنط M والمجال الخـارجي المسلط H ليست علاقـة خطية. وبـالتـالي فإن التـأثـرية المغنـاطيسية χ_m للمواد الحديدية المغناطيسية ليست ثابتة ولكنها تتغير مع شدة المجال الخارجي H.

ويمكن القول كمحاولة أولى لتفسير هذه الظاهرة إن القوى التي أعطت التوجيه المغناطيسي للمواد الحديدية المغناطيسية هي تأثير القوى المغناطيسية الثنائية للمغانط

الـذرية الأحادية بعضها على بعض ولكن هذه القوى ليست أكبر في المواد الحديدية المغناطيسية منها في المواد البارامغناطيسية وكما وُجد سابقا فهي ضعيفة حتى إنها غير قادرة على مقاومة التأثيرات العشوائية الناشئة على حركات الجزيئات أو الذرات المثارة حراريا «التهيج الحراري»، ولذلك تكون العزوم الذرية في المواد الحديدية المغناطيسية ضعيفة جدا وغير قادرة على توجيه نفسها.

في عام ١٩٠٧م افترض العالم بيير فايس (Pierre Weiss) أن التفاعل القوي للعزوم المغناطيسية في المواد الحديدية المغناطيسية المذكور أعلاه يعطي مجالا مغناطيسيا داخليا قويا سماه المجال الجزيئي (molecular field) وأنه يتناسب مع شدة التمغنط M.

فإذا فرض أن H_m قيمة المجال المغناطيسي الجزيئي عند درجة الحرارة T فإن:

$$H_m \propto M \qquad \therefore H_m = \lambda M$$

حيث λ ثابت التناسب ويسمى بمعامل المجال الجزيئي (molecular field factor) وإذا فرض أن المجال المغناطيسي الخارجي شدته H فإن المجال المغناطيسي الفعال هو:

$$H' = H + \lambda M \qquad \text{.......... (٧-٤٩)}$$

وإذا فرض أن λ صغيرة بحيث يمكن اعتبار أن شدة التمغنط مازالت تتناسب مع شدة المجال المغناطيسي الفعال فإنه يمكن كتابة المعادلة (١٠ - ٧) بالصورة التالية:

$$M = \chi_m (H + \lambda M)$$

$$\therefore M = \frac{\chi_m H}{1-\lambda \chi_m}$$

وبالتعويض عن χ_m من المعادلة (٤٥أ-٧) نُحصل على:

$$M_T = \frac{\mu_0 N P_m^2 H}{3K\left(T - \frac{\lambda \mu_0 N P_m^2}{3K}\right)}$$

أو

$$M_T = \frac{\mu_0 N P_m^2 H}{3K\,(T - T_C)} \qquad \text{.......... (٥٠أ-٧)}$$

$$M_T = \frac{CH}{T - T_C} \qquad \text{.......... (٥٠ب-٧)}$$

وحيث إن M تتغير مع درجة الحرارة T فإنها تكتب عادة M_T ، وتصبح التأثرية المغناطيسية في هذه الحالة كالتالي:

$$\chi_m = \frac{M_T}{H} = \frac{C}{T - T_C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥١)$$

حيث C ثابت كيوري وذلك حسب المعادلة (٤٦ب ـ ٧)، أما T_c فتسمى بدرجة كيوري (Curie temperature) وقيمتها هي:

$$T_C = \frac{\lambda \mu_0 N P_m^2}{3K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥٢)$$

أما المعادلة (٥١-٧) فتسمى بقانون كيوري وفايس (Curie-Weiss law) ويُحصل من المعادلتين (٤٦ب ـ ٧) و(٥٢-٧) على:

$$\lambda = \frac{T_C}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥٣)$$

وبالرغم من أن نظرية فايس تشرح منشأ وأساس (origin) المجال الجزيئي إلا أنها توضح علاقة التمغنط M مع درجة الحرارة وكذلك تغير التأثرية المغناطيسية χ_m مع درجة الحرارة T. وتسمى درجة حرارة كيوري بدرجة حرارة التحول (transition temperature) لأن المادة الحديدية المغناطيسية تفقد خواصها الحديدية المغناطيسية وتتحول إلى خواص المواد البارامغناطيسية.

وقد وجد أنه عند قيمة معينة لـ B ، قد تكون صغيرة جدا، فإن المادة الحديدية المغناطيسية تكون ممغنطة مادامت درجة الحرارة أقل من درجة التحول T_c وفي هذه الحالة فإن النتائج التجريبية بين M_T و T للمواد الحديدية المغناطيسية تحققها المعادلة:

$$M_T \propto (T_c - T)^{\beta} \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥٤)$$

حيث تتراوح قيمة β بين 0.33 و 0.37 ، أما إذا كانت $T > T_c$ فإن المادة تصبح بارامغناطيسية ويمكن تطبيق المعادلة (١٤٥ ـ ٧) بين M_T و T.

أما التأثرية المغناطيسية χ_m فإن النتائج التجريبية لها مع درجة الحرارة T تحقق المعادلة :

$$\chi_m \propto (T - T_c)^{-\alpha} \qquad (٧\text{-}٥٥)$$

إذا كانت $T < T_c$ ، حيث تتراح قيمة α بين 1.3 و 1.4.

أما إذا كانت $T > Tc$ فإن χ_m تتناسب عكسيا مع T حسب المعادلة (٧-٤٧) .

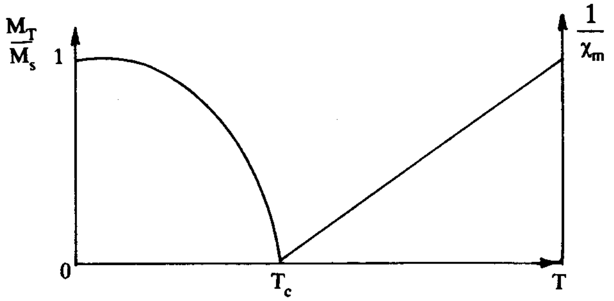
والجدول (٧-٣) يعطي قيم α و β لبعض المواد.

جدول (٧-٣) قيم α و β لبعض المواد الحديدية المغناطيسية

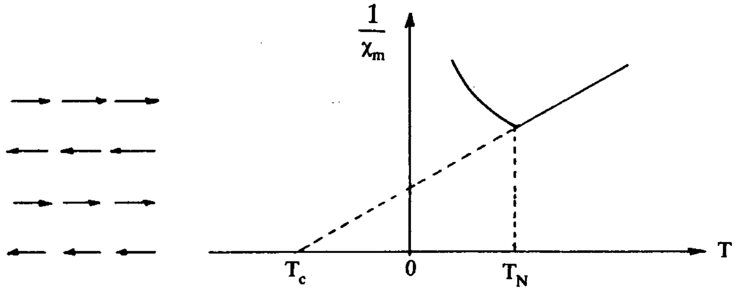
المـــادة		α	β
Fe	حـديـد	1.33 ± 0.015	0.34 ± 0.04
Co	كوبالت	1.21 ± 0.04	----
Ni	نيكل	1.35 ± 0.02	0.42 ± 0.07
Gd	جادولينيوم	1.3 ± 0.1	----
CrO_2		1.63 ± 0.02	----
$CrBr_3$		1.215 ± 0.02	0.368 ± 0.005
EuS		----	0.33 ± 0.015

ويوضح الشكل (١٩ ـ ٧) تغير شدة التمغنط مع درجة الحرارة حيث تتناقص قيمته مع زيادة درجة الحرارة T ، وكذلك بالنسبة للعلاقة بين مقلوب التأثرية ودرجة الحرارة في حالة البارامغناطيسية أي عندما تكون $T > Tc$.

وهنـاك نظريات أخرى وضعت لشرح وتفسير ظاهرة التمغنط القوي في المواد الحديدية المغناطيسية وتعتمد جميعها على قواعد النظرية الكمية (quantum) وهو خارج عن نطاق الكتاب. وسيذكر هنا تفسير واحد من التفسيرات المهمة دون اللجوء إلى المعادلات الرياضية وهو:



«ا»



«ب»

شكل (٩-٧): ا ـ العلاقة بين $\frac{M_T}{M_s}$ (M_T شدة التمغنط اللحظي ، M_s القيمة العظمى «التشبع» للتمغنط) ودرجة الحرارة وكذلك مقلوب التأثرية $\frac{1}{\chi_m}$ مع درجة أما T_c فهي درجة حرارة كيوري لمادة حديدية ومغناطيسية .

ب ـ $\frac{1}{\chi_m}$ مع درجة الحرارة T لمادة ضد الحديدية المغناطيسية، T_N درجة حرارة نيل .

يوجد في المواد الحديدية المغناطيسية تفاعل خاص يسمى بالتقارن التبادلي، الترابط التبادلي، (exchange coupling) بين الذرات المتجاورة (adjacent atoms) يكون سببا في توجيه العزوم المغناطيسية بصورة متوازية (parallel) بعضها بعضا وأنه ذو طبعية كمية. وقد يؤدي هذا الترابط إلى توازٍ متضاد في الاتجاه (antiparallel) للعزوم وتسمى المواد في هذه الحالة باسم ضد الحديدية المغناطيسية (antiferromagnetic material). وهي مواد ضعيفة التغمنط وتماثل البارامغناطيسية من حيث إظهار تأثرية مغناطيسية صغيرة موجبة. والعلاقة بين درجة الحرارة T والتأثرية χ_m تتميز بوجود التواء (kink) في

المنحنى كما في شكل (٩ب - ٧) وعنده تسمى درجة الحرارة بدرجة نيل (Neel temperature) ويرمز لها بالرمز T_N وسبب ذلك أنه قبل هذه الدرجة تكون العزوم المغناطيسية، الناتجة عن غزل (spin) الإلكترونات، المتوازية والمتضادة في الاتجاه مع نفسها بحيث تلغي العزوم الموجبة العزوم السالبة تماما كما في شكل (٩ب - ٧) ونتيجة لهذا الترتيب الضد الحديدية المغناطيسية بين العزوم فإن اتجاه التمغنط بواسطة المجال الخارجي سيعاكس بمجال ناتج عن التفاعل القوي بين العزوم الموجبة والسالبة، ومنه تتناقص التأثرية المغناطيسية مع نقصان درجة الحرارة وهذا السلوك يتناقض مع سلوك البارامغناطيسية، وفوق درجة حرارة نيل T_N تترتب العزوم نفسها عشوائيا وعندها تتناقص القابلية مع زيادة درجة الحرارة.

ويعطي الجدول (٤-٧) قيم درجة حرارة كيوري T_c وشدة التمغنط في حالة التشبع M_s وكذلك العزم المغناطيسي P_m لبعض المواد الحديدية المغناطيسية.

جدول (٤-٧)
T_c و P_m و M_s لبعض المواد الحديدية المغناطيسية

Material المـــواد	T_c (K°)	P_m (μ_B)	M_s(O°K) Gauss
Fe	1043	2.22	1752
Co	1388	1.72	1446
Ni	622	0.606	510
Gd	293	7.10	1980
Tb	218	9.00	----
Dy	85	10.00	3000
$CrBr_3$	37	----	270
Au_2MnAl	200	----	323
Cu_2MnAl	630	4.0	726
Cu_2MnIn	500	----	613
EuO	77	6.8	1910
EuS	16.5	----	1184
MnAs	318	3.4	870
MnBi	620	3.52	675
$GdCl_3$	2.2	----	650

(٧-٩) دورة التخلف المغناطيسي
Hysteresis Loop

من دراسة البنود السابقة يمكن القول إنه إذا وضعت مادة في مجال مغناطيسي خارجي فإن شدة التمغنط M تتوقف قيمتها على نوع المادة وشدة المجال المغناطيسي H وكذلك درجة الحرارة T.

وتنقسم المواد الحديدية المغناطيسية من حيث تأثير المجال المغناطيسي الخارجي عليها إلى قسمين رئيسين نستعرضهما فيما يلي:

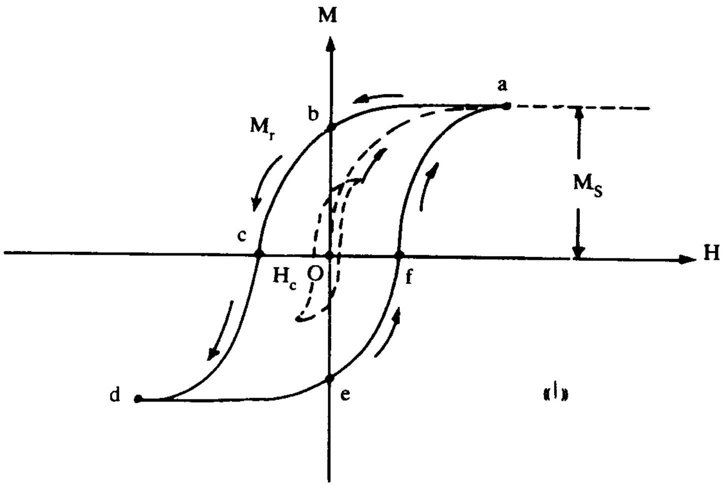
(٧-٩-١) مواد حديدية مغناطيسية صلبة Hard ferromagnetic material

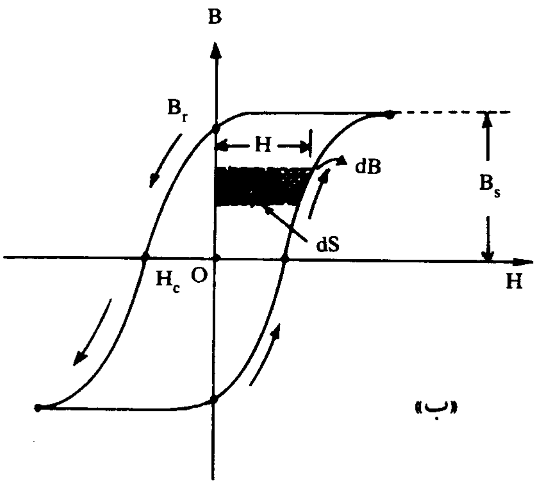
وهي نوع من أنواع الفولاذ (steel) فإذا سلط عليها مجال مغناطيسي خارجي فإنها تحتفظ ببعض مغناطيسيتها حتى بعد زوال المجال الخارجي.

فإذا وضعت مادة حديدية مغناطيسية صلبة في مجال مغناطيسي H، كما في شكل (٧-١)، ناتج عن تيار كهربي مار في ملف حلقي (terroidal coil) فإن العلاقة بين شدة التمغنط M للمادة والمجال المغناطيسي H المسلط عليها يوضحها الشكل (١١٠ - ٧). وبتتبع سلوك التمغنط من البداية حيث تكون $M = 0$ عندما $H = 0$ نجد أنه إذا زاد المجال المغناطيسي فإن العزوم الذرية ستوجه نفسها مع المجال المغناطيسي وتزداد هذه العزوم مع زيادة H ويزداد تبعا لذلك شدة التمغنط M حتى نصل إلى قيمة معينة لـ H عند النقطة (a) حيث تصبح كل العزوم متجهة مع المجال المغناطيسي ولا يمكن بعدها زيادة M بزيادة H وتسمى هذه الحالة بالتشبع المغناطيسي (saturation magnetization) M_s حيث $M_s = N P_m$.

فإذا نقصت H فإن M تنقص ولكن على خط عودة آخر. فإذا أصبحت $H = 0$ نجد أن هناك مغنطة متبقية ممثلة بالنقطة b. أي أنه رغم زوال المجال المغناطيسي فإن المادة مازالت ممغنطة بمغناطيسيتها وهذا يعني أن بعض العزوم الذرية مازالت باقية على

اتجاهها، ويتولد ما نسميه بالمغناط الدائمة (permanent magnets) وتسمى شدة المغنطة في هذه الحالة بالمغنطة المتبقية «المتخلف» "M_r" (remanent magnetization). ولإزالته يجب تسليط مجال مغناطيسي معاكس حتى تصل إلى النقطة c وعندما تنعدم المغنطة M رغم وجود مجال مغناطيسي يسمى المجال في هذه الحالة بالمجال القاهر





شكل (١٠-٧): أ ـ دورة مغنطة كاملة بين H و M «دورة التخلف المغناطيسي لمادة حديدية مغناطيسية صلبة».
ب ـ دورة تخلف كاملة بين H و B.

"H_c" (coercive field) الذي يزيل المغنطة. وبزيادة المجال المغناطيسي الخارجي H في الاتجاه المعاكس يمكن الوصول إلى حالة الشبع d وإذا عكس المجال مرة أخرى فإنه يمكن الحصول على النقطتين e و f المناظرتين لـ b و c ثم إلى النقطة a مرة أخرى.

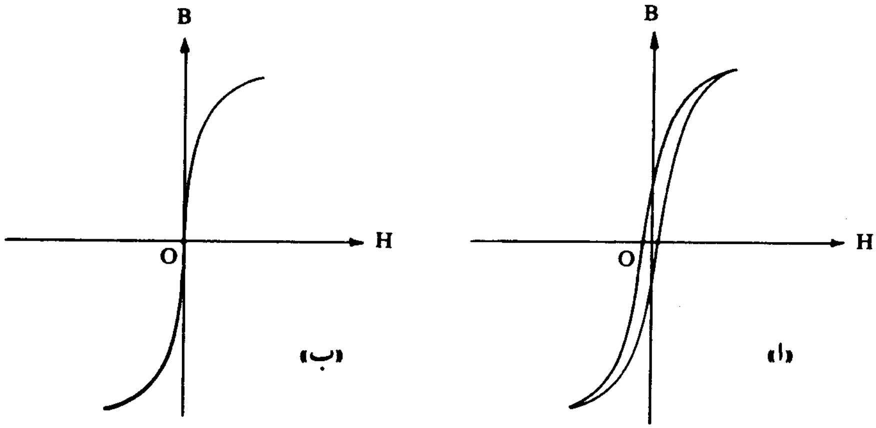
وتسمى هذه الظاهرة بالتخلف المغناطيسي (magnetic hysteresis) وتسمى الدورة الكاملة المغلقة بدورة التخلف المغناطيسي (hystereris loop) ويعتمد حجمها على نوع المادة وشكلها والقيمة العظمى للمجال المغناطيسي كأن تختار قيمة لـ H بحيث يعطينا الدورة الكاملة الصغيرة الممغنطة المبينة في شكل (١١٠ ـ ٧).

أما إذا درست العلاقة بين B و H فإن دورة التخلف المغناطيسي ستكون مماثلة للدورة السابقة بين M و H وسبب ذلك أن B تابعة للتيار الحقيقي I المار في الملف وكذلك التيارات الذرية I_m حسب ما ورد في المعادلة (٧ـ٨). وكما ورد في المثال (٧ـ١) المعادلة (٧ـ٨) الصورة: $B \cong \mu_0 M$، أي أن الفرق بين الشكلين (١١٠ ـ ٧) الخاص بـ H و M و(١٠ب ـ ٧) الخاص بـ H و B هو المعامل الثابت μ_0. وقد تكون لبعض المواد الحديدية المغناطيسية الصلبة دورة مغناطيسية ضيقة كما في شكل (١١١ ـ ٧).

(٧ـ٩ـ٢) مواد حديدية مغناطيسية رخوة (مطاوع) Soft Ferromagnetic material

مثل الحديد المطاوع (soft iron)، وهذه المواد تتمغنط بسهولة في المجال المغناطيسي الخارجي ولكنها تفقده بسهولة عند زواله أي لا تبقي أي أثر للمغناطيسية بعد زوال المسبب.

أما المواد الحديدية المغناطيسية الرخوة، مطاوعة، فإن السلوك المثالي للدورة المغناطيسية يمثلها الشكل (١١ب ـ ٧) ولكن لا يمكن الحصول على ذلك بصورة عملية ولكن يمكن القول إن دورة التخلف المغناطيسية للمواد الحديدية المغناطيسية الرخوة تكون ضيقة جدا.



شكل (٧-١١): ا ـ دورة تخلف مغناطيسية لمادة حديد ومغناطيسية صلبة تختلف عن المادة التي وردت دورة تخلفها في الشكل (٧-١٠).
ب ـ دورة التخلف لمادة حديد ومغناطيسية رخوة مثالية.

(٧-٩-٣) الطاقة اللازمة لمغنطة المواد الحديدية المغناطيسية

لحساب الطاقة (energy) اللازمة لمغنطة المواد الحديدية المغناطيسية نفرض أن طول الملف l ومساحة مقطعه S وأن التيار المار به I فإنه حسب المعادلة (٥-٤٢) يكون:

$$H = \frac{nI}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥٦)$$

حيث n عدد لفات الملف.

فإذا زاد التيار زيادة مقدارها dI في زمن قدره dt فإن المجال يزيد مقدارا قدره dH وكذلك الحث المغناطيسي dB وبذلك تكون الزيادة في الفيض المغناطيسي (flux) هي:

$$d\Phi = SdB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٥٧)$$

وحيث إن التغير في الفيض يصحبه قوة دافعة كهربية حثية تكون قيمتها حسب المعادلة (٦-١٢) هي:

$$\varepsilon = -n\frac{d\Phi}{dt}$$

وبالتعويض عن $d\Phi$ من المعادلة (٥٧-٧) يُحصل على :

$$\therefore \varepsilon = -nS\frac{dB}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٧\text{-}٥٨)$$

وتكـون الطاقة المغناطيسية المبددة (dissipated) في زمن قدره dt هي ، حسب قانون حفظ الطاقة :

$$dU + \varepsilon I\, dt = 0$$

أو

$$dU = -\varepsilon I dt \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٧\text{-}٥٩)$$

ومن المعادلتين (٥٨-٧) و(٥٩-٧) يُحصل على :

$$dU = nSIdB$$

وبالتعويض عن nI من المعادلة (٥٦-٧) يُحصل على :

$$dU = SlHdB$$

$$dU = VHdB$$

حيث $V = Sl$ حجم الملف .

$$\frac{U}{V} = \int H\, dB \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٧\text{-}٦٠)$$

والتكامل في المعادلة (٦٠-٧) يمثل التغيير في الطاقة المغناطيسية (magnetic energy) لوحدة الحجوم داخل المادة الممغنطة الناتج عن أي تغير في مغناطيسيتها . وواضح من الشكل (١٠ب - ٧) أن التكامل (٦٠-٧) يمثل المساحة الموجودة داخل نطاق دورة التخلف المغنـاطيسية بين B و H وهـذه الـطاقـة تختـزن جزئيا كطاقـة وضـع (potential energy) والجزء الآخر يتبدد طاقة حرارية تتولد داخل المادة الممغنطة .

وتتحول الطاقة كاملة إلى حرارة إذا أُخذت الدورة كاملة بحيث تشمل المساحة الكلية داخل دورة التمغنط . وفي هذه الحالة تكتب المعادلة (٦٠-٧) بالصورة التالية :

$$\frac{U_h}{V} = \oint H\, dB$$

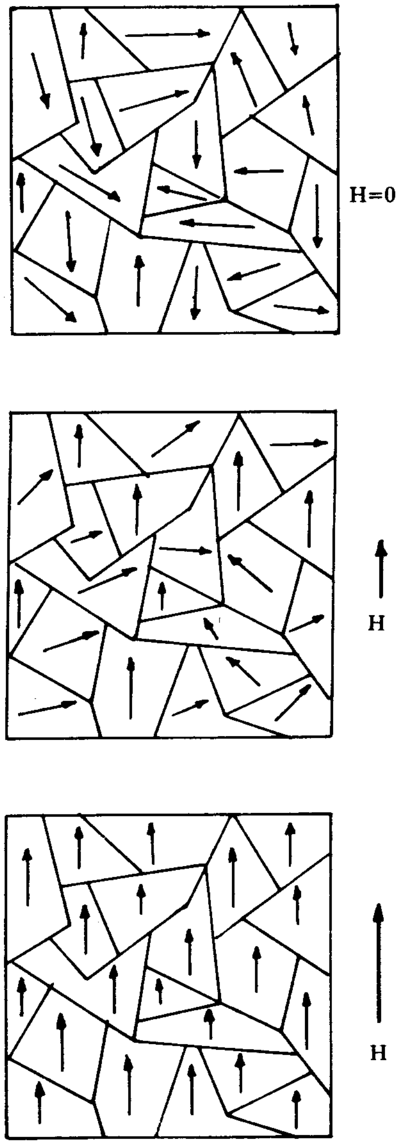
حيث U_h الطاقة الحرارية. وبذلك يمكن القول إن:

الحرارة لوحدة الحجوم لدورة كاملة = المساحة الكلية داخل دورة الممغنطة.

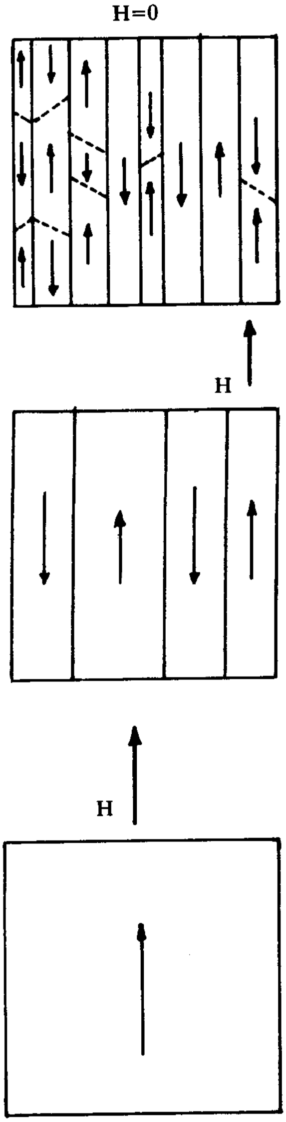
لذلك تجد أن المواد التي تستخدم في قلب المحولات والمولدات هي من المواد الحديدية المغناطيسية الرخوة (soft) لأن نفاذيتها عالية والمجال القاهر H_c صغير وفقدان الطاقة الناتج عن دورة التخلف (الطاقة الحرارية) صغيرة (small hysteresis loss). أما المواد الحديدية المغناطيسية الصلبة فتستعمل كمغانط دائمة في أجهزة القياسات الكهربية والسماعات وأجهزة أخرى تتطلب مجالا قاهرا كبيرا ومغناطيسية متبقية عالية (high remanence) وفقدانا في الطاقة كبيرا.

وتوجد ظاهرة أخرى مهمة في المواد الحديدية المغناطيسية تسمى بمناطق التكوين (domain formation) وهي مناطق متباينة (discrete regions or domain) داخل المادة بحيث تكون عزوم كل منطقة لها الاتجاه نفسه أي تكون في حالة تشبع مغناطيسي بصورة منعزلة أي يمكن تمثيل مجموعة العزوم لكل منطقة بمتجه واحد. وتكون هذه المتجهات «العزوم» لكل المناطق في حالة عشوائية، أي أن محصلتها تساوي الصفر، إذا كانت المادة غير ممغنطة كما في شكل (١٢أ ـ ٧).

وقد تحدث تغيرات مختلفة للمناطق عندما توضع العينة في مجال مغناطيسي خارجي فإذا كان المجال ضعيفا فإن التغير ينحصر في دوران اتجاهات تمغنط المناطق بحيث تتخذ الاتجاه الأقرب إلى اتجاه المجال كما في (١٢ب ـ ٧) ويزداد هذا الاتجاه كلما زاد المجال الخارجي كما في شكل (١٢جـ ـ ٧). وقد يتضمن التغير في تحرك حدود المناطق (domain boundaries)، وتسمى أيضا بجدر المناطق (domain walls)، فتكبر المناطق التي يكاد اتجاه تمغنطها يوازي المجال الخارجي على حساب المناطق الأخرى كما في شكل (١٣-٧).

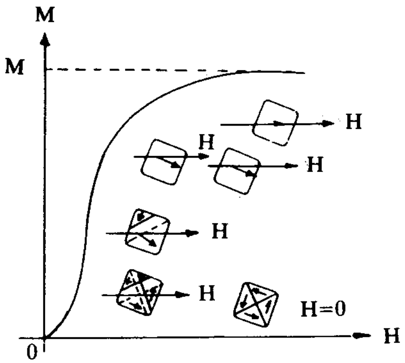


شكل (٧-١٢): تغير اتجاهات تمغنط المناطق مع زيادة المجال المغناطيسي.



شكل (٧-١٣): تغـير حدود المنـاطق بحيث تكبر الجدر كلما زاد المجال المغناطيسي.

وتختلف أحجام المناطق بحيث تكون أبعادها تتراوح بين 10^{-4} سم إلى حدود المليمترات بل أحيانا إلى السنتيمترات . ويوضح الشكل (٧-١٤) العلاقة بين توجيه المناطق وشدة التمغنط M مع تغيير المجال المغناطيسي الخارجي .



شكل (٧-١٤): العلاقة بين توجيه المناطق وشدة التمغنط M كلما زاد المجال المغناطيسي .

(٧-١٠) الدوائر المغناطيسية

Magnetic Circuit

فكرة الدوائر المغناطيسية تماثل الدوائر الكهربية (electric circuit) المعروفة . فقد وجد في الفصل الخامس ، بند (٥-٩-٢) أن خطوط القوى المغناطيسية داخل الملف الحلقي تمثل بمسار مغلق ، يشبه تماما مرور تيار كهربي في دائرة مغلقة ، وأنه بتطبيق قانون أمبير على هذا المسار فإن الحث المغناطيسي B داخل الملف الحلقي ، حسب المعادلة (٦-٤٨)، يساوي :

$$B = \mu_0 NI/l$$

حيث N عدد لفات الملف و l طول المسار و I التيار المار في الملف وμ_0 نفاذية الفراغ . وإذا وضعت مادة قابلة للتمغنط فإن :

$$B = \mu NI/l$$

وإذا فرض أن S مساحة مقطع الملف الحلقي فإن التدفق المغناطيسي العمودي على S يعطى ، حسب المعادلة (٥-٢)، كالتالي :

$$\Phi = B S$$

$$\therefore \Phi = \mu N I S / l$$

أو

$$\Phi = \frac{NI}{l / \mu S} \quad \text{..........} \quad (٧\text{-}٦١)$$

وبمناظرة هذه المعادلة مع معادلة قانون أوم (١١-٤) والخاصة بالدوائر الكهربية وهي :

$$I = \frac{V}{l\varrho/S}$$

حيث l سلك المقاومة و ϱ المقاومة النوعية و S مساحة مقطع السلك ؛ نجد تشابها كبيرا بينهما حيث يلاحظ أن المقدار NI يقابل القوة الدافعة الكهربية والمقدار $l/\mu S$ يقابل المقاومة $l\varrho/S$ ولهذا السبب فإن المقدار NI يسمى بالقوة الدافعة المغناطيسية (magneto-motive force) ويسمى المقدار $l/\mu S$ بالممانعة (نفور) المغناطيسية (reluctance) وتسمى المعادلة (٦١-٧) بمعادلة الدائرة المغناطيسية .

وإذا رمز للممانعة المغناطيسية بالرمز $\mathscr{R}$ حيث :

$$\mathscr{R} = l/\mu S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦٢\text{-}٧)$$

فإن المعادلة (٦١-٧) تصبح :

$$\Phi = \frac{NI}{\mathscr{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦٣\text{-}٧)$$

وإذا فرض أن الدائرة المغناطيسية تحتوي على أجزاء مختلفة الانفاذية والطول والمساحة فإن الممانعة المكافئة تساوي مجموع الممانعات وتحسب بالطريقة نفسها التي تجمع المقاومة الأومية فإذا كانت الممانعات متصلة على التوالي فإن :

$$\therefore \Phi = \frac{NI}{\Sigma \mathscr{R}_n} = \frac{NI}{\Sigma\, l_n / \mu_n S_n} \quad \ldots\ldots \quad (٦٤\text{-}٧)$$

وحدة الممانعة هي $\frac{\text{أمبير}}{\text{ويبر}} \quad \frac{A}{Wb} = \frac{١}{\text{هنري (H)}}$

مثال (٣-٧)

إذا كان طول المسار المغلق المتوسط لحلقة رولاند يساوي 50 سم ومساحة مقطع الحلقة 4 سم٢ .

فاحسب الممانعة المغناطيسية وكذلك القوة الدافعة المغناطيسية لتكوين فيض قدره 4.1×10^{-4} ويبر داخل الحلقة المصنوعة من الحديد.

وما هي شدة التيار اللازم إمراره في ملف الحلقة إذا كان عدد لفاته 200 لفة علما بأن نفاذية الحديد عند كثافة الفيض المطلوب 65×10^{-4} هنري/متر.

الحـــل

$$\mathscr{R} = \frac{l}{\mu S} = \frac{0.5}{65 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-4}} = 1.92 \times 10^{5}\ \mathrm{A/Wb}$$

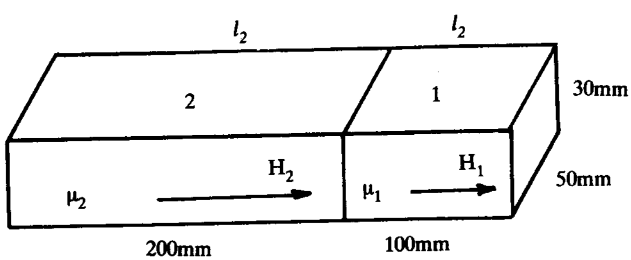
$$\because \mathrm{m.m.f} = \mathscr{R}\Phi = (1.92 \times 10^{5}) \times (4.1 \times 10^{-4}) = 78.72\ \mathrm{A}$$

$$\because \mathrm{m.m.f} = NI$$

$$\therefore I = \frac{\mathrm{m.m.f}}{N} = \frac{78.72}{200} = 0.3936\ \mathrm{A}$$

مـثـال (٤-٧)

احسب الممانعة المغناطيسية بين نهايتي مستطيلين متصلين على التوالي كما في الشكل التالي. إذا فرض أن B منتظم خلالهما وعمودي على نهايتيهما وكذلك النفاذية منتظمة لكل مستطيل حيث $\mu_1 = 500\mu_0$ ، $\mu_2 = 2000\mu_0$



الحــــل

بالنسبة للمستطيل 1 فإن :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = \frac{0.1}{500 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4}} = 1.06 \times 10^5 \, H^{-1}$$

بالنسبة للمستطيل 2 فإن :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{L_2}{\mu_2 S_2} = \frac{0.2}{2000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4}} = 0.53 \times 10^5 \, H^{-1}$$

∴ الممانعة الكلية تساوي مجموع الممانعتين .

$$\therefore \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = (1.06 + 0.53) \times 10^5 = 1.59 \times 10^5 \, H^{-1}$$

(٧-١١) المغـانط الكهربية

Electromagnets

معـظم المغـانط الكهـربية عبارة عن دوائر مغناطيسية لمواد حديدية مغناطيسية رخوة (مطاوع) بها ثغرة (فجوة) هوائية (air gap) كما في الشكل (٧-١٥) . وسندرس للسهولة أبسط أنواع المغانط الكهربية وهو حلقة رولاند بها فجوة هوائية عرضها، g ، وبذلك فإن الممانعة الكلية لهذه الدائرة المغناطيسية عبارة عن مجموع ممانعة الحلقة وممانعة الثغرة لاتصالهما على التوالي :

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 S} \quad , \quad \mathcal{R}_i = \frac{l - g}{\mu S}$$

حيث $\mathcal{R}_g$ ممانعة الثغرة، $\mathcal{R}_i$ ممانعة بقية حلقة رولاند ولنفرض بأن طول المسار للحلقة الكاملة l ، S مساحة مقطع الحلقة .

$$\therefore \mathcal{R} = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_g = \frac{l - g}{\mu S} + \frac{g}{\mu_0 S}$$

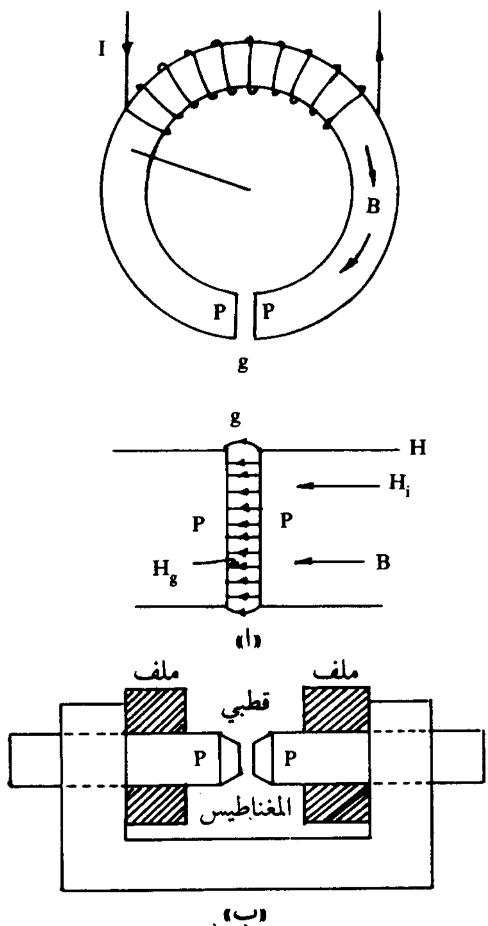
$$\because \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\therefore \mathcal{R} = \frac{1}{\mu S}\{(l-g) + \mu_r g\} \quad \cdots\cdots \quad (٦٥\text{-}٧)$$

وبتطبيق المعادلة (٦٤-٧) يُحصل على :

$$\Phi = \frac{NI\mu S}{\{(l-g) + \mu_r g\}}$$

$$\therefore B = \frac{\Phi}{S} = \frac{NI\mu}{\{(l-g) + \mu_r g\}} \quad \cdots\cdots \quad (٦٦\text{-}٧)$$



شكل (١٥-٧): ا - حلقة رولاند بها فجوة.
ب - رسم توضيحي لمغناطيس كهربي.

وقيمة B في هذه الحالة واحدة داخل الحلقة أو في الفجوة ومع ذلك فإن شدة المجال داخل الحلقة وفي الفجوة تساوي، كما في الشكل (١١٤ - ٧).

$$H_g = \frac{B}{\mu_0} = \mu_r \frac{NI}{\{(l-g) + \mu_r g\}} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٦٧)$$

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{NI}{\{(l-g) + \mu_r g\}} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٦٨)$$

من المعادلتين (٦٧-٧) و(٦٨-٧) يُحصل على:

$$H_g = \mu_r H_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٦٩)$$

والمغـانط الكهربية شائعة الاستعمال تأخذ الشكل (١٥ب - ٧) حيث يمكن تغيير g لتنـاسب ظروف التجربة فيكون قطبا المغناطيس "P,P" على شكل مخروطي لتركيز الفيض على مساحة صغيرة.

مـثـال (٥-٧)

حلقة حديدية مساحة مقطعها S يســاوي 1000 مم٢ وعرض الفجوة g يســاوي 2 مم وطول المسار l يساوي 600 مم بما في ذلك الفجوة الهوائية. احسب NI التي تعطي مجالا مغناطيسيا حثه B يساوي 1 تسلا.

الحـــل

مـن المعـروف أن النفـاذية النسبيـة μ_r لحلقـة الحديـد عنـدما يكـون B = 1T تساوي 795.

من المعادلة (٦٦-٧) يكون:

$$NI = \frac{B}{\mu}\{(l-g) + \mu_r g\}$$

$$NI = \frac{1}{795 \times 4\pi \times 10^{-7}}\{(0.6-0.002) + 795 \times 0.002\}$$

$$NI = 2188 \text{ A.turns}$$

(٧-١٢) القوة المغناطيسية للفجوة الهوائية
Magnetic Air Gap Force

تتجاذب أقطاب المغانط الكهربية الشمالية والجنوبية على جانبي الفجوة الهوائية بقوة قد تقفل هذه الفجوة. ويكون القطبان في حالة توازن عندما تتعادل القوى المغناطيسية مع القوى الميكانيكية الناتجة من تثبيت هذين القطبين.

وجد في الفصل السادس البند (٦-٩-١) أن كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي تحدد بالمعادلة (٧-٥٧) وهي:

$$\text{Energy density} = \frac{1}{2\mu_0} . B^2 \quad J/m^3$$

فإذا وُجد مجال مغناطيسي في فجوة هوائية صغيرة حثه B ، فإن الطاقة الكلية المخزونة في الفجوة تساوي:

$$U_m = \text{energy density} \times \text{volume}$$

$$\therefore U_m = \frac{1}{2\mu_0} . B^2 \times S g \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٧-٧٠)$$

حيث S مساحة الفجوة و g اتساع الفجوة.

فإذا فرض أن مادة الحديد للحلقة الواردة في شكل (١١٥ - ٧) مرنة فحتى تبقى الفجوة ثابتة الاتساع لابد من إعطاء قوة معاكسة تعاكس القوة المغناطيسية وتساويها، فإذا زادت هذه القوة بحيث سببت في زيادة اتساع الفجوة بمقدار dg فإنه يجب زيادة تيار ملف الحلقة حتى تبقى B ثابتة. وبذلك تزداد الطاقة المغناطيسية المخزونة في الفجوة زيادة قدرها:

$$dU = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S\, d g \quad \cdots\cdots \quad (٧-١٧١)$$

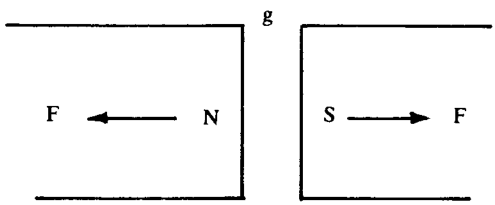
وكما هو معروف أن هذه الطاقة يمكن التعبير عنها بضرب القوة في المسافة حيث:

$$dU = Fdg \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٧١ب - ٧})$$

حيث F قوة التجاذب بين قطبي المغناطيس وبمساواة المعادلتين السابقتين [كما في الشكل (١٦-٧)] نحصل على:

$$Fdg = \frac{1}{2\mu_0}B^2 S dg$$

$$\therefore F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٧-٧٢})$$



شكل(١٦-٧): القوى الواقعة على الفجوة.

وتلعب القوة المغناطيسية دورا مهما في كثير من الأجهزة الميكانيكية الكهربية التي لها أثر كبير في حياتنا اليومية مثل الجرس الكهربي وغيره.

(٧-١٣) قياس التأثيرية المغناطيسية الصغيرة

Measurement of a Small Susceptibility

تعتمد وسائل قياس التأثيرية المغناطيسية للمواد المغناطيسية على قياس القوة المسلطة على هذه المواد في مجال مغناطيسي غير منتظم (non-uniform).

فإذا أخذت قطعة صغيرة من مادة قابلة للتمغنط حجمها ΔV وتأثيريتها المغناطيسية χ_m ووضعت في مجال مغناطيسي غير منتظم فإن عزوما مغناطيسية سوف تستحدث داخل المادة P_m خاضعة لقوة سببها المجال المغناطيسي تعطى من المعادلة (١٨٥ - ٥) [كما ورد ذلك في الفصل الخامس] قيمتها:

$$F_x = P_m \frac{\partial B}{\partial x}$$

وبصورة عامة إذا فرض أن P_{mx} و P_{my} و P_{mz} وكذلك B_x و B_y و B_z مركبات العزوم والحث المغناطيسي على المحاور x و y و z فإن :

$$F_x = P_{m_x}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) + P_{m_y}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) + P_{m_z}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

وحسب المعادلتين (٧-٢)، (٧-١٠) فإن :

$$P_{m_x} = \triangle V \chi_m B_x/\mu_0$$

$$P_{m_y} = \triangle V \chi_m B_y/\mu_0$$

$$P_{m_z} = \triangle V \chi_m B_z/\mu_0$$

$$F_x = \frac{\triangle V \chi_m}{\mu_0}\left[B_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) + B_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\right]$$

أو

$$F_x = \frac{\triangle V \chi_m}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٧٣)$$

يمكن من هذه المعادلة حساب F_x باستخدام ميزان دقيق (micro-balance) تتصل به العينـة كما في شكل (١١٧ - ٧). كما يستخدم مغناطيس كهربي بحيث يكون شكل قطبيه مناسبا لتكون $\frac{\partial B}{\partial X}$. B ثابتا ومعلوما وبذلك يمكن حساب χ_m .

وهناك طريقة أخرى تعتمد على قياس القوة لعينة اسطوانية الشكل طويلة (0.1m) بحيث يقع أحد طرفيها بين قطبي مغناطيس والآخر بعيدا عنه بحيث يكون المجال المغناطيسي ضعيفا. وفي هذه الحالة يكون تمغنط المادة غير منتظم. فإذا أخذ عنصر صغير من هذه الأسطوانة طوله dx ومساحة مقطعه S فإن :

$$dF_x = \frac{S\,dx\,\chi_m}{\mu_0}\left[B_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) + B_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$\because B_x = B_z = 0$$

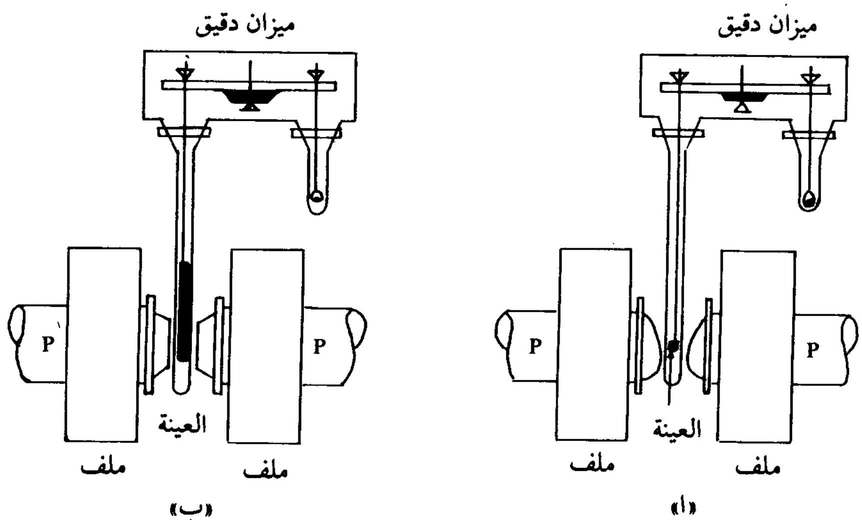
$$\therefore dF_x = \frac{S\,dx\,\chi_m}{\mu_0}\left[B_y\left(\frac{dB_y}{dx}\right)\right]$$

$$\therefore dF_x = \frac{S\,\chi_m}{\mu_0}.\,B_y\,dB_y$$

$$\therefore F_x = \frac{S\,\chi_m}{\mu_0}\int_{B_2}^{B_1} B_y\,dB_y = \frac{S\,\chi_m}{2\mu_0}\left[B_y^2\right]_{B_2}^{B_1}$$

$$\therefore F_x = \frac{S\,\chi_m}{2\mu_o}\left(B_1^2 - B_2^2\right) \quad \cdots\cdots \quad (٧\text{-}٧٤)$$

وبصورة عملية فإن $B_2^2 << B_1^2$ ولذلك يمكن إهمال B_2 ، وبمعرفة مساحة مقطع العينة S والمجال المغناطيسي المسلط على العينة وكذلك القوة F باستخدام ميزان دقيق كما في الشكل (١٧ب ـ ٧) يمكن معرفة القابلية المغناطيسية .



شكل (١٧-٧) : قياس التأثيرية المغناطيسية .
ا ـ طريقة فاراداي .
ب ـ طريقة قوى .

فالطريقة الأولى، المعادلة (٧-٧٣)، تسمى بطريقة فاراداي (Faraday method) وهي تصلح لقياس التأثيرية المغناطيسية للمواد الحديدية المغناطيسية بينما الطريقة الثانية، المعادلة (٧-٧٤)، تسمى بطريقة قوى (Gouy method) وهي تصلح لقياس المواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية كما تصلح أيضا لقياس المواد السائلة البارامغناطيسية والدايامغناطيسية، ويوضح ذلك الشكل (١٧جـ - ٧)، فإذا كان مستوى السائل في الذراع الواقع بين قطبي المغناطيس يتغير مسافة قدرها $\triangle x$ عند تسليط المجال أو حذفه فإن القوة تساوي وزن عمود السائل $\triangle x$ أي أن:

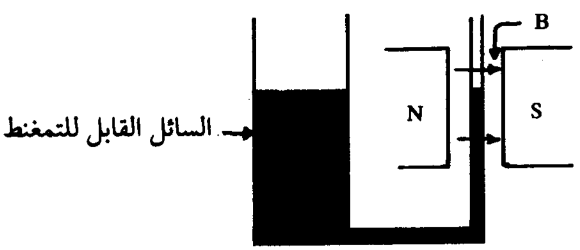
$$F_x = \varrho g \triangle x S \quad \text{..........} \quad (٧\text{-}٧٥)$$

حيث ϱ كثافة السائل، g الجاذبية الأرضية، $\triangle xS$ حجم العينة وبذلك تصبح المعادلة (٧-٧٤)، بعد حذف B_2 وبعد التعويض عن F_x من المعادلة (٧-٧٥) كالتالي:

$$\frac{S\chi_m}{2\mu_0}B^2 = \varrho\, g \triangle x S$$

أو

$$\chi_m = 2\mu_o\, \varrho\, g \triangle x / B^2 \quad \text{.......} \quad (٧\text{-}٧٦)$$



شكل (١٧جـ - ٧): قياس التأثرية لسائل قابل للتمغنط

(٧-١٤) الجلفانومتر ذو الملف المتحرك

Moving Coil Galvanometer

يتركب، كما في شكل (٧-١٨)، من ملف على شكل مستطيل مكون من عدد من اللفات N من سلك نحاسي رفيع معزول، يلتف حول مادة مصنوعة من الخشب أو

البـــلاستيك، يلتحم طرفـــه العلوي بسلك مرن (elastic) رفيع من مادة الـــبرونـــز الفوسفوري (phosphor bronze) ويتصل طرفه الآخر بزنبرك حلزوني من مادة السلك المرن نفسه. ويتدلى الملف بين قطبي مغناطيس قوي NS على شكل نعل الفرس. كما توجد اسطوانة من الحديد المطاوع (soft iron) مثبتة داخل الملف.

يبنى عمل الجهاز على أنه إذا مر تيار كهربي I في ملف موجود في مجال مغناطيسي فإن الملف سيكون خاضعا لازدواج يعمل على دورانه حول محور ثابت يتناسب مع شدة التيار ولقد بحث هذا الموضوع في البند (٥ – ٨) حيث وجد أنه إذا وضع ملف دائري في مجال مغناطيسي حثه B وكان يمر به تيار قدره I فإن عزم الدوران هو «حسب المعادلة (٥ـ٨١)».

$$\tau_1 = I\,S\,BN \sin\theta \quad .... \quad (٧\text{ـ}٧٧)$$

حيث S مساحة الملف الدائري، θ هي الزاوية بين العمودي على الملف واتجاه المجال. وهذه المعادلة صحيحة مهما كان شكل الملف طالما كان مستويا موازيا لكثافة التدفق المغناطيسي ويمكن برهنة صحته بالنسبة للملف المستطيل كالتالي:

يوضح الشكل (١١٨ ـ ٧) ملفا طوله l وعرضه b وعدد لفاته N يمر به تيار I واقع في مجال مغناطيسي حثه B فعند حالة الاتزان نجد أن الضلعين الذين طول كل منهما l يكون كل منهما خاضعا لقوة قدرها، حسب المعادلة (٥ـ٧٨):

$$F = NI\,B\,l$$

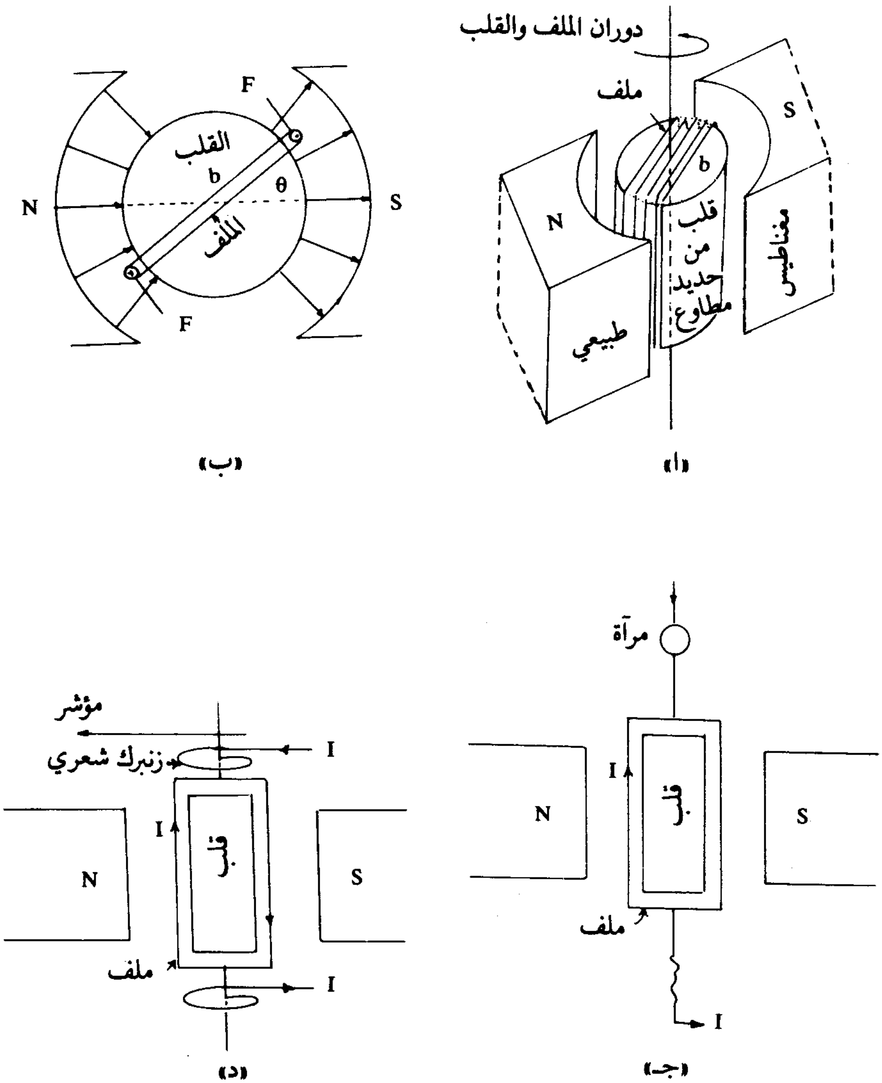
أما الضلعان الآخران فمحصلتهما تساوي صفرا.

وحسب الشكل (١٨ب ـ ٧) فإن عزم الازدواج يساوي:

$$\tau_1 = F\,.\,b\sin\theta = NIBl\,.\,b\sin\theta = NIBS\sin\theta$$

وهي المعادلة (٧ـ٧٧) نفسها.

هذا الدوران الناتج عن هذا الازدواج يعاكس ازدواج اللّيّ الناتج عن سلك التعليق المرن وكذلك الزنبرك ومعنى ذلك أنه عند مرور تيار في الملف فإنه يخضع لازدواجين



شكل (١٨-٧): ا ـ ملف لجلفانومتر متحرك ومعلق بين قطبي مغناطيس طبيعي.
ب ـ مقطع يوضح تأثير القوة المغناطيسية على الملف.
جـ ـ استخدام المرآة لتبين انحراف الملف عند مرور التيار.
د ـ استخدام المؤشر للقراءة.

أحدهما ناتج عن مرور التيار الذي يسبب تحريكه. والآخر الازدواج المرن الناتج عن سلك التعليق والزنبرك ويحاول إرجاع الملف فإذا تساوت قيمة الازدواجين استقر الملف.

وطبقا لقوانين المرونة فإن عزم الازدواج المرن يتناسب طرديا مع زاوية الانحراف ولتكن ϕ أي أن:

$$\tau_2 \propto \phi$$

$$\therefore \tau_2 = -C\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٧٨)$$

حيث C ثابت يسمى بثابت اللي (torsional constant) وتدل الاشارة السالبة على أن τ_2 تعاكس حركة الملف. ويبقى الملف مستقرا إذا كان:

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 = 0$$

$$\therefore N\,I\,B\,S \sin\theta - C\,\phi = 0$$

$$\therefore I = \frac{C\phi}{N B S \sin\theta} = \frac{C_g}{\sin\theta}.\phi \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٧٩)$$

حيث C_g ثابت الجلفانومتر وتساوي:

$$C_g = \frac{C}{N B S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٨٠)$$

ويلاحظ أن التيار لا يتناسب مع الانحراف ϕ بل مع معامل آخر وهو $\sin\theta$ ولذلك اختير أن يكون سطحا قطبي المغناطيس NS اسطواني الشكل. لذلك وضعت اسطوانة الحديد المطاوع داخل الملف بحيث تجعل التأثير المغناطيسي «خطوط القوى» في اتجاه أنصاف الاقطار ومستوى الملف في أي وضع موازٍ للمجال أي أن $\theta = 90°$ دائما أينما كان وضع الملف أثناء الدوارن.

$$\therefore \sin\theta = \sin 90° = 1$$

وبذلك تصبح المعادلتان (٧-٧٧) و(٧-٧٩) كالتالي:

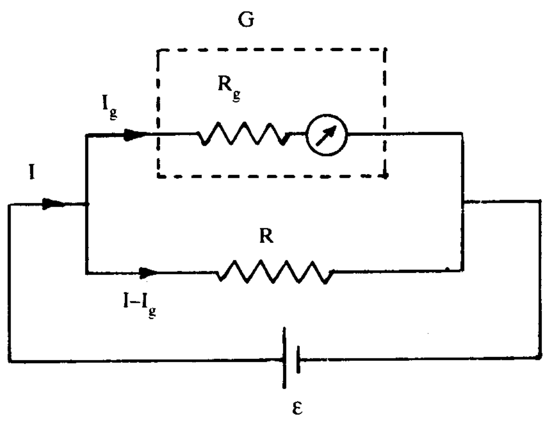
$$\tau_1 = NBSI = aI \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٨١)$$

$$I = C_g\,\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٨٢)$$

ويمكن ملاحظة الدوران الناتج عن مرور التيار I باستخدام مصباح مثبت مع الملف أو انعكاس شعاع ضوئي من خلال مرآة مثبتة في الملف أيضا وقد يستخدم مؤشر مثبت مع الملف ويقرأ الانحراف مباشرة من خلال تدريج يصاحب المؤشر كما في الشكلين (١٨جـ - ٧) و(١٨د - ٧).

(٧-١٤-١) قياس تيار كهربي كبير Measurement of large current I

يمكن استخـدام الجلفـانومتر ذي الملف المتحرك لقياس تيارات عالية الشدة ويستخدم لذلك مقاومة R (shunt) توصل بنهايتي الجلفانومتر كما في شكل (١٩-٧)، ويتوقف قيمة R على النهاية العظمى للتيار الذي يمكن أن يمر بالجلفانومتر I_g ويمكن أن تُكتب النهاية العظمى للتيار المراد قياسه كالتالي:



شكل (١٩-٧): استخـدام الجلفـانومـتر لقياس تيار كهربي كبير

$$R(I-I_g) = I_g R_g$$

$$\therefore R = R_g \frac{I_g}{(I-I_g)}$$

$$\therefore I = I_g\left(1+\frac{R_g}{R}\right) \quad (٧\text{-}٨٣)$$

وواضح أن R تتوقف على قيمة I لأن I_g ، R_g قيمتان ثابتتان لأي جلفانومتر معين، فإذا كان الجلفانومتر يقيس في حالة الانحراف الكلي 100 ميكروأمبير وكان $R_g=100\Omega$ ويراد أن يحول الجهاز ليقيس 1 Amp لكامل التدريج فإن:

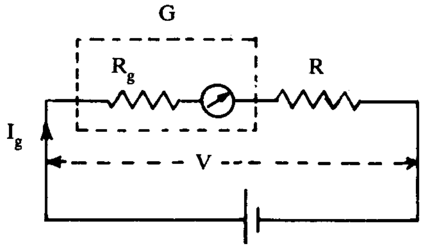
$$R = 100\left(\frac{100\times10^{-6}}{1-100\times10^{-6}}\right) \simeq 10^{-2}\,\Omega$$

وفي هذه الحالة يستخدم الجلفانومتر كجهاز لقياس التيار (ammeter).

(٧-١٤-٢) قياس جهد كهربي كبير Measurement of large V

توصل في هذه الحالة مقاومة كبيرة R على التوالي مع الجلفانومتر الذي مقاومة R_g كما في شكل (٧-٢٠). فإذا كانت I_g القيمة العظمى للتيار المار في الجلفانومتر، حتى يتسنى لنا قياس القيمة العظمى لفرق جهد قدره V فولت، فإن :

$$\therefore V = I_g (R + R_g) \cdot\cdot \quad (٧-٨٤)$$



شكل (٧-٢٠): استخدام الجلفانومتر لقياس جهد كهربي كبير

وواضح أن قيمة R تتوقف على V فإذا استخدم الجلفانومتر نفسه الوارد في الفقرة (٧-١٤-١) وأردنا قياس 100 فولت «لكامل التدريج» فإن :

$$100 = 100 \times 10^{-6} (R + 100)$$

$$\therefore R = 1\,M\Omega$$

ولذلك يمكن استخدام الجلفانومتر مقياسا للجهد (voltmeter).

(٧-١٤-٣) حساسية الجلفانومتر Galvanometer sensitivity

تعرف حساسية الجلفانومتر بالزاوية التي ينحرفها ϕ عندما يمر به تيار شدته الوحدة، فإذا رمز للحساسية بـ β فإن :

$$\beta = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{C_g} = \frac{NBS}{C} \quad \cdots\cdots \quad (٧-٨٥)$$

كما تعرف الحساسية عمليا بأنها قيمة التيار الذي يمر في الملف حين تنحرف البقعة الضوئية، المنعكسة من المرآة مسافة قدرها مترا واحدا.

فإذا كان انحراف البقعة مساويا d مم وبعد التدريج مساويا l مم فإن :

$$\frac{d}{l} = \tan\phi \simeq 2\phi$$

وبالتعويض عن ϕ في المعادلة (٧-٨٢) فإن :

$$I = C_g \frac{d}{2l} = C_g \frac{d}{2000} = C_g' d \quad \cdots\cdots \quad (٧\text{-}٨٦)$$

ويسمى C_g' بمعامل الجدارة (figure of merit).

(٧-١٤-٤) التخميد (كبت) Damping

إذا مر تيار في ملف الجلفانومتر فإنه سينحرف بزاوية معينة تتناسب مع I ولقد لوحظ أن الملف يظل يتذبذب فترة من الزمن عند نقطة الانحراف حتى يستقر. كذلك إذا سحب التيار فإن الملف يتذبذب أيضا حول نقطة الصفر حتى يستقر بعد قضاء فترة من الزمن وحيث إن هذا يسبب إزعاجا عند إجراء التجارب لذلك يجب التقليل من هذه الذبذبات وهو ما يسمى بالتخميد أو الكبت وهو ناتج عن :

١ - تولد قوة دافعة كهربية حثية في الملف نتيجة حركته في المجال المغناطيسي وحسب المعادلة (٧-٨٦) فإن قيمة ε' تساوي :

$$\varepsilon' = N S B \sin\theta \frac{d\phi}{dt} = N S B \frac{d\phi}{dt} \quad \cdot\cdot \quad (٧\text{-}٨٧)$$

حيث ϕ زاوية الانحراف و θ الزاوية بين مستوى الملف والعمودي على اتجاه المجال.

٢ - تولد تيارات دوامية (eddy currents) في الحديد المطاوع تعمل بدورها على توقف الحركة التذبذبية للملف تبعا لقاعدة لنز.

٣ - مقاومة الهواء (air resistance) للملف يعطي تأثيرا ملموسا لإعاقة الملف من التذبذب أيضا.

وقد وجد أن العزم الناتج عن قوة التخميد تتناسب مع السرعة الزاوية للملف أي أن :

$$\tau_3 \propto \frac{d\phi}{dt} \qquad \therefore \tau_3 = -b \frac{d\phi}{dt} \quad \cdots\cdots \quad (٧\text{-}٨٨)$$

حيث يسمى الثابت b بمعامل التخميد (dampling coefficient) وحسب قانون نيوتن الثاني فإن العزم الكلي الناتج عن حركة الملف يساوي :

$$\tau = J\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٨٩)$$

حيث يعرف J عزم القصور الذاتي (the moment of incretia) للمف .

وحيث إن مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة إلى محور التعليق يساوي العزم الكلي فإن معادلة حركة الملف هي :

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau$$

أو

$$aI - C\phi - b\frac{d\phi}{dt} = J\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

أو

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} + b\frac{d\phi}{dt} + C\phi = aI \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٠)$$

وعند وضع الاتزان تكون قيمة ϕ ثابتة وتؤول هذه المعادلة إلى المعادلة (٧-٨٢) أما إذا فرض أن معامل التخميد b يساوي الصفر وأن القوة الدافعة الكهربية الخارجية أزيحت من الدائرة بعد انحراف الجلفانومتر فإن الجلفانومتر سيتذبذب حول الصفر وأن معادلة الحركة هي :

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} + C\phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩١)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة ويكون الحل الذي يحقق هذه المعادلة هو:

$$\phi = \phi_0 \sin\left[\left(\frac{C}{J}\right)^{1/2} t + \psi\right] \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٢)$$

حيث ψ و ϕ_0 ثابتان يتم تعيينهما من الشروط الابتدائية. أما زمن دورة الحركة فتُعطى قيمته من المعادلة التالية:

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{J}{C}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٣)$$

أما السرعة الزاوية ω_0 للحركة فهي :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\frac{C}{J}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٤)$$

ولذلك إذا لم يوجد تخميد وليست هناك قوة دافعة كهربية خارجية، فإن حركة الملف سوف تستمر في التذبذب بزمن دوري قدره T_0.

(٧-١٥) الجلفانومــتر القذفي

The Ballistic Galvanometer

يستخدم الجلفانومتر العادي، السابق دراسته في البند (٥-٩)، في قياس التيار المستمر في حين يستخدم الجلفانومتر القذفي في قياس الشحنة الكلية التي تمر خلاله في زمن معين وتقاس هذه الشحنة ليست كتيار مستمر بل كتفريغ شحنة مفاجىء أشبه بتفريغ مكثف أو الشحنات التأثيرية الكهرومغناطيسية.

ولذلك يجب أن تتوفر في الجلفانومتر القذفي ما يلي:

أ - يجب أن تكون حركة الملف بالنسبة لموضع سكونه محدودة في الفترة التي يتم فيها تفريغ الشحنة خلال الملف ويترتب على ذلك أن يهيىء الملف بحيث يكون زمن ذبذبته T_0، المعادلة (٧-٩٣)، ولذلك يجب أن يكون عزم القصور الذاتي J للملف كبيرا و C صغيرا.

ب - يعاني الملف انحرافا من جراء الدفع عند مرور الشحنة بأكملها وفي هذه الحالة تكون قراءة المؤشر عند أول انحراف للملف. ويتناسب الانحراف مع الشحنة المارة في الملف ولذلك يراعى عند تصميم الجهاز أن يكون الكبت صغيرا جدا ولكي يتحقق ذلك يجب أن يكون الاطار الذي يلف حول الملف غير معدني ويستخدم لذلك إطار من العـاج أو الأبونيت وكذلك عدم استخدام الاسطوانة من الحديد المطاوع داخل الملف التي تعتبر عاملا من عوامل الكبت كما ذكر ذلك في البند السابق.

إذا فرض أن الملف يتألف من N عدد من اللفات ومساحة وجهه S ، B الحث المغناطيسي للمجال الذي يوجد فيه الملف وأن I التيار المار عند لحظة ما، فإنه طبقا للمعادلة (٧-٨١) يكون عزم الازدواج الذي يؤثر على الملف يساوي :

$$\tau = N I B S$$

وإذا فرض أن هذا الازدواج سيؤثر على الملف لمدة قدرها dt وهو زمن مرور التيار الذي أدى إلى مرور عنصر الشحنة dq «حيث dq = Idt » فإن الدفع الزاوي (angular impulse) الذي يمنحه التيار يساوي :

$$\int \tau dt = NBS \int Idt = NBSq$$

ولما كان الدفع الزاوي يساوي كمية التحرك الزاوي :

$$\therefore N B S q = J\omega_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٥)$$

حيث ω_0 السرعة الزاوية لدوران الملف، وتكون طاقة الحركة (kinetic energy) المطابقة لذلك هي $\frac{1}{2}J\omega_0^2$ والتي استخدمت في ليّ سلك التعليق زاوية قدرها ϕ (زاوية انحراف الملف). ويكون بذلك عزم الازدواج الناتج عن ليّ السلك هذه الزاوية يساوي $C\phi$.

$\therefore$ عنصر الشغل المبذول لإحداث زيادة في الانحراف قدره $d\phi$ يساوي $C\phi d\phi$

و الشغل الكلي المبذول في ليّ التعليق من صفر إلى ϕ يساوي :

$$\int_0^{\phi} C\phi\, d\phi = \frac{1}{2}C\phi^2$$

وهذا الشغل يساوي طاقة الحركة الدورانية .

$$\therefore \frac{1}{2}C\phi^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

من هذه المعادلة والمعادلتين (٧-٩٤) و(٧-٩٥) يُحصل على :

$$q = \frac{CT_0}{2\pi NBS}\phi = C_g\phi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٦)$$

حيث :

$$C_g = \frac{CT_0}{2\pi NBS} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٧)$$

حيث C_g ثابت الجلفانومتر المستخدم .

أي أن الشحنة تتناسب طرديا مع الانحراف ϕ. مع ملاحظة أن الانحراف ϕ هو أقصى انحراف يصل إليه الملف عقب انتهاء تفريغ الشحنة .

وإذا أخذ في الاعتبار تخميد الملف فإنه يجب تصحيح مقدار الانحراف بحيث تصبح المعادلة (٧-٩٦) كالتالي :

$$q = C_g \phi \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٨)$$

حيث δ تسمى بالتناقص اللوغاريثمي لكل دورة (logarithmic decrement per cycle) فإذا فرض أن ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 . . . . . هي الانحرافات الحادثة في نهاية الاندفاعات المتعاقبة في جهة واحدة من صفر التدريج فإن :

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\phi_2}{\phi_3} = \varrho$$

حيث ϱ مقدار ثابت .

$$\therefore \ln \phi_1 - \ln \phi_2 = \ln \varrho = \delta$$

$$\therefore \delta = \ln (\phi_1/\phi_2) \qquad \therefore \frac{\phi_1}{\phi_2} = e^{\delta} \quad \ldots\ldots \quad (٧\text{-}٩٩)$$

وبصورة عملية فإن δ صغيرة جدا .

(٧-١٦) مقياس التدفق المغناطيسي
Fluxemeter

جهاز يستعمل لقياس التدفق المغناطيسي (magnetic flux) المكتشف بواسطة ملف الاستكشاف. والدائرة المستخدمة معه تشابه الدائرة (٦-٢٥) الواردة في البند (٦-١٥). ووجه الاختلاف ينحصر في استخدام ملف آخر بدلا من الجلفانومتر

القذفي. وهذا الملف يشبه إلى حد كبير جلفانومتر الملف المتحرك ذا المؤشر كما في الشكل (١٨د ـ ٧) مع استبدال الزنبرك الشعري (hair springs) الذي يستخدم لتوصيل التيار وكذلك الحصول على عزم اللّيّ المرجع (restoring torque) للملف المتحرك، بموصل آخر للتيار بحيث يعطي أدنى قيمة لعزم اللّيّ المرجع، كذلك يلف الملف على إطار غير موصل.

والغرض من هذا التغيير عدم عودة الملف بعد انحرافه إلى موضع الصفر وهذا لا يحصل إلا إذا كان عزم اللّيّ المرجع يساوي الصفر وهذا لن يكون مطلقا ولذلك يحصل انحراف بسيط في اتجاه البداية، ولسهولة الحساب سيفترض أن عزم اللّيّ يساوي الصفر.

ملف جهاز مقياس التدفق والملف الباحث مقاومتهما منخفضة ولذلك فالملف المتحرك شديد التخامد (heavily damped) ويقف مباشرة بعد انتهاء التغير في الفيض في الملف الباحث وحتى يعود الملف إلى موضع الصفر لابد من إمرار تيار كهربي من بطارية إضافية خارجة عن دائرة القياس حيث يستفاد منها فقط في إرجاع الملف. والدائرة المستعملة لذلك يمثلها الشكل (٢١ـ٧) ومنها تحسب كيفية عمل الجهاز.

تتكون الدائرة من ملفي الاستكشاف ومقياس التدفق و R، وهي المقاومة الكلية لعناصر الدائرة، أما I فهو التيار المار في الدائرة نتيجة لتغير الفيض المغناطيسي على الملف الباحث على افتراض أن Φ_0 الفيض الابتدائي و Φ_1 الفيض النهائي.

ونتيجة لذلك تكون لدينا ثلاث قوى دافعة كهربية وهي:

١ ـ القوة الدافعة الكهربية المتولدة في ملف الاستكشاف وقيمتها تساوي، حسب المعادلة (١٢ـ٦):

$$\varepsilon_{sc} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

N عدد لفات الملف.

ب ـ القوة الدافعة الكهربية المتولدة في ملف مقياس الفيض نتيجة لحركته، بسبب مرور التيار I ، في المجال المغناطيسي المحيط به B وقيمتها تساوي، حسب المعادلة (٧ـ٨٧).

$$\varepsilon_F = N'SB\omega = N'SB\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots. \quad (٧\text{ـ}١٠٠)$$

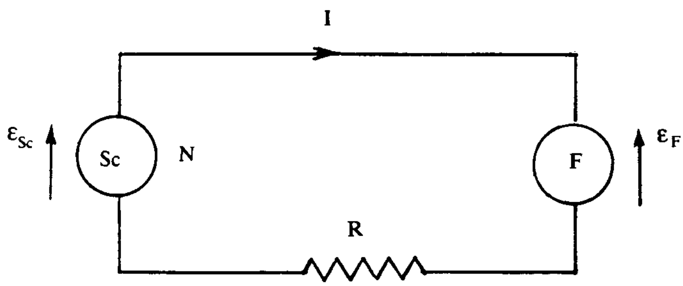
حيث 'N عدد لفات الملف و S مساحته، θ انحراف الملف.

جـ ـ القوة الدافعة الكهربية المتولدة في ملف مقياس الفيض نتيجة لحثه الذاتي L وقيمتها تساوي، حسب المعادلة (٢٦ـ٦):

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt}$$

وبتطبيق قانون كيرشوف لتوزيع الجهد على هذه الدائرة يُحصل على:

$$N\frac{d\phi}{dt} - L\frac{dI}{dt} - N'SB\frac{d\theta}{dt} = IR \quad \ldots \quad (٧\text{ـ}١٠١)$$



شكل (٢١ـ٧): دائرة توضح عمل مقياس الفيض المغناطيسي "F" وعلاقته بملف الاستكشاف (sc).

ولكن عزم اللّيّ اللحظي τ على ملف مقياس الفيض نتيجة لمرور التيار I تساوي، حسب المعادلة (٨١ـ٧):

$$\tau = N'IBS$$

أو

$$I = \frac{\tau}{N'BS}$$

وبالتعويض عن I في المعادلة (٧-١٠١) نُحصل على :

$$\tau = \frac{N'SB}{R}\left\{N\,\frac{d\Phi}{dt} - L\,\frac{dI}{dt} - N'SB\,\frac{d\theta}{dt}\right\}$$

ولكن كما هو معروف أنه حسب قوانين الميكانيكا فإن عزم الدوران للملف، ملف مقياس الفيض، نتيجة لحركته الدورانية حول محوره تساوي :

$$\tau = J\,d\omega / dt$$

حيث J عزم القصور الذاتي و ω السرعة الزاوية، بمساواة المعادلتين السابقتين نُحصل على :

$$N'SB(Nd\phi - L\,dI - N'SB\,d\theta) = Jd\omega$$

وبتكامل هذا المقدار نُحصل على :

$$N'SB\left\{N\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi - L\int_0^0 dI - N'SB\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta\right\} = J\int_0^0 d\omega$$

حيث ω=0 لأنه كما أوضحنا أن حركة الملف متخامدة، I=0 عند البداية أو النهاية .

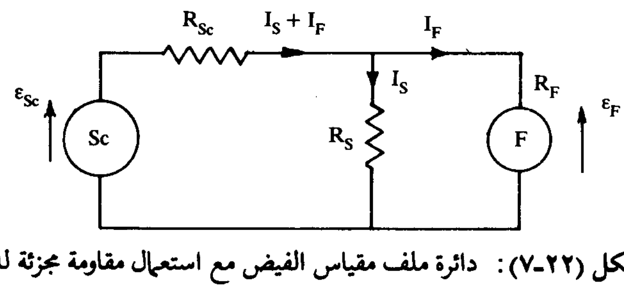
$$\therefore N(\Phi_1 - \Phi_0) = N'SB(\theta_1 - \theta_0) \quad \ldots\ldots \quad (٧-١٠٢)$$

وهـذه هي معـادلة عمل مقياس التدفق المغناطيسي، وتعني أن التغير في الانحراف يتناسب طرديا مع التغير في قيمتي الفيض المغناطيسي .

وقد يكون الجهاز متعدد التدريج (multirange) ولذلك تستخدم مقاومة إضافية تسمى بمقاومة مجزىء التيار وتتصل على التوازي كما في الشكل (٧-٢٢) وتصبح معادلة المقياس كالتالي :

$$N(\phi_1 - \phi_0) = N'SB\,(1 + (R_{sc}/R_s))\,(\theta_1 - \theta_0) \quad \ldots \quad (٧-١٠٣)$$

حيث R_{sc} مقاومة الملف الباحث، R_s المقاومة الإضافية .



شكل (٧-٢٢) : دائرة ملف مقياس الفيض مع استعمال مقاومة مجزئة للتيار.

(٧-١٧) مسـائـل

١ - مادة قابلة للتمغنط صغيرة الحجم على شكل مكعب طول ضلعه 1.0 مم والعزم المغناطيسي لها 1.0×10^{-3} أمبير/متر٢ .

احسب:

ا - شدة التمغنط M للمادة على افتراض أنها منتظمة الشكل.

ب - التيار السطحي مفترضا أن متجه العزم المغناطيسي عمود على أحد أوجه المكعب.

٢ - مادة مغناطيسية منتظمة الشكل تأثريتها 2.4×10^{-4}.

احسب:

ا - نفاذيتها المغناطيسية.

ب - النفاذية النسبية.

٣ - قضيب مغناطيسي طوله 20 سم وقطره 6 مم مصنوع من مادة حديدية تأثيريتها 5000 . الحث المغناطيسي يساوي 0.85 ويبر/متر عند مركز القضيب، إذا افترض انتظام التمغنط للحديد فاحسب:

ا- شدة المجال المغناطيسي للقضيب عند المركز.

ب - العزم المغناطيسي للقضيب.

جـ - ما هو عدد الإلكترونات المطلوبة للحصول على العزم الوارد في الفقرة (ب) إذا كان عزم كل إلكترون يعطي القيمة الواردة في المعادلة (٧-٢٠)؟

٤ - ملف حلزوني ملفوف حول مادة حديدية تأثيريتها المغناطيسية 200 ، فإذا كان عدد لفات الملف 750 لفة لكل متر والتيار المار 2 أمبير.

فاحسب :

ا - شدة المجال المغناطيسي H داخل الملف الحلزوني.

ب ـ الحث المغناطيسي B.

جـ ـ شدة التمغنط M.

د ـ العزم المغناطيسي لوحدة الأطوال على افتراض أن مساحة المقطع 8 سم^{2}
عند الحل يفترض أن التمغنط منتظم وكذلك الحث المغناطيسي.

٥ ـ حلقة رولاند لفت حول مادة بارامغناطيسية تأثيريتها تساوي 3.10×10^{-4} فإذا كان نصف القطر الداخلي للحلقة 8 سم ونصف القطر الخارجي 12 سم وعدد لفاتها 2500 لفة والتيار المار في ملف الحلقة يساوي 3.5 أمبير.
فاحسب:

ا ـ شدة المجال H داخل الملف.

ب ـ شدة التمغنط M.

جـ ـ الحث المغناطيسي B.

د ـ مجموع التيار المغناطيسي السطحي I_m.

هـ ـ ما هي قيمة B في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية؟

٦ ـ أعد الحسابات الواردة في السؤال (٥) إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بمادة دايامغناطيسية تأثيريتها -1.0×10^{-5}.

٧ ـ أعد الحسابات الواردة في السؤال (٥) إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بمادة فرومغناطيسية تأثيريتها 5000.

٨ ـ الحث المغناطيسي B داخل ملف حلزوني ملفوف حول مادة حديدية يساوي 0.28 ويبر/متر^{2} عندها كانت شدة المجال المغناطيسي 205 أمبير/متر. ما هي نفاذية المادة الحديدية. على افتراض أن التمغنط خطيا وأن شدة التمغنط والحث المغناطيسي منتظمان داخل المادة؟

٩ ـ ما قيمة شدة التمغنط M للمواد في الحالات التالية:

ا ـ كل ذرة لها عزم مغناطيسي 1.7×10^{-33} أمبير/متر٢ وعددها 9.4×10^{28} ذرة/م٣ والعزوم متوازية تبادليا (mutually parallel)؟

ب ـ التأثيرية المغناطيسية χ_m تساوي -3×10^{-6} و B يساوي 3.6×10^{-5} ويبر/م٢؟

جـ ـ H تساوي 0.40 أمبير/متر والنفاذية النسبية تساوي 1.00041؟

١٠ ـ جزيئات بارامغناطيسية عزمها المغناطيسي يساوي 5.0×10^{-24} أمبير/متر٢ وضعت هذه المادة في مجال مغناطيسي قيمة حثه 3.6 ويبر/متر٢ عند درجة حرارة قدرها 4.0 كلفينات.

ا ـ ما هو متوسط الزاوية بين العزوم المغناطيسية للمادة ومتجه الحث المغناطيسي B؟

ب ـ ماذا يكون الجواب في الفقرة (ا) عندما تكون درجة الحرارة 40°K، 400°K؟

١١ ـ لو كان لدينا 7.2×10^{28} جزيء/متر٣ في المسألة (١٠) فاحسب التأثيرية المغناطيسية في الفقرتين ا، ب.

١٢ ـ مادة بارامغناطيسية نموذجية تكون شدة التمغنط لها M عند درجة حرارة 2°K مساوية 75% من القيمة العظمى لشدة التمغنط.

ما قيمة الحث المغناطيسي لها إذا كان $P_m = 9.27 \times 10^{-29}\ A \cdot m^2$.

١٣ ـ التأثيرية المغناطيسية لمادة بارامغناطيسية تساوي 4.5×10^{-4} عند درجة حرارة 300°K. فإذا كان عدد الذرات لوحدة الحجوم 5.5×10^{28} ذرة لكل m^3.

احسب العزوم المغناطيسية المتوسطة لكل ذرة.

١٤ - تعطى التأثيرية المغناطيسية لأحد المركبات وزنه الجزيئي 400 وكثافته 2×10^3 كيلوجرام/م٣ بالمعادلة:

$$\chi = \frac{7.3 \times 10^{-2}}{T}$$

حيث T درجة الحرارة المطلقة.

احسب العزوم المغناطيسية المتحدة مع كل جزيء.

١٥ - النيكل مادة حديدية مغناطيسية عند درجات الحرارة العادية، وتصل مغناطيسيته إلى حالة التشبع إذا وضعت في مجال مغناطيسي H قيمته 5×10^5 أمبير/متر، والحث المغناطيسي B له 1.25 تسلا.

احسب العزم المغناطيسي للنيكل مستخدما وحدات مغنيتون بوهر، علما بأن كثافة النيكل 9×10^3 كيلوجرام/متر٣.

١٦ - الحديد مادة حديدية مغناطيسية فإذا كان العزم المغناطيسي يساوي $P_m = 2.2\mu_B$ وعدد الذرات لوحدة الحجوم تساوي 8.54×10^{28} /متر٣ ودرجة حرارة كيوري تساوي 1063°K.

فاحسب:

ا - ثابت كيوري.

ب - معامل المجال الجزيئي.

جـ - المجال الجزيئي.

١٧ - حلقة حديدية منتظمة الشكل مساحة مقطعها 150 سم٢ ومتوسطة نصف قطرها 200 مم، الحلقة بها فجوة هوائية اتساعها 1.0 مم.

احسب NI المطلوبة للحصول على $B = 0.5T$ في الفجوة الهوائية «حيث I التيار المار في الملف حول الحلقة والذي عدد لفاته N»، علما بأنه عندما تكون $B = 0.5T$ للحديد يكون $\mu_r = 250$.

١٨ ـ حلقة مساحة مقطعها 200 مم[٢] ومتوسط طول مسارها 350 مم مكونة من مادتين بحيث يكون $\frac{2}{3}$ من طول مسار الحلقة من مادة الحديد الخام (ferrite) ($\mu_r = 1000$) والثلث الباقي من الحديد الطري (mild steel).

احسب الفيض المغناطيسي في الحلقة إذا لُفَّت بملف عدد لفاته 750 لفة ويحمل تيارا قدره 100 ملّي أمبير. علما بأن الفراغات بين التحام المادتين يكافىء فجوة هوائية اتساعها 100 ميكرومتر.

١٩ ـ حلقة حديدية مغناطيسية مساحة مقطعها 0.02 سم[٢] ونصف قطرها 300 مم بها فجوة هوائية اتساعها 1 سم وعدد لفات الملف 1200 لفة، فإذا كان تيار الملف 6 أمبيرات.

ما هو مقدار القوة التي تحاول في قفل الفجوة علما بأن $\mu_r = 1000$ للحديد.

٨

التيارات المترددة

Alternating Currents

● مقدمة ● مقاومة أومية في دائرة مترددة ● مكثف في دائرة مترددة ● ملف ذو حث ذاتي فقط في دائرة مترددة ● التوصيل على التوالي في دائرة مترددة ● دائرة التيار المتردد المتوازية ● دوائر الرنين ● استخدام الأعداد المركبة وتطبيقات عليه ● قناطر التيار المتردد ● مسائل.

(٨-١) مقدمة

Introduction

سبق أن ذكر في الفصل السادس، البند (٦-١١-١)، كيفية توليد القوة الدافعة الكهربية المترددة، الجهد المتردد، وحسب المعادلة (٦-٨٨) فإن قيمته تساوي:

$$V = V_m \sin(\omega t) = V_m \sin(2\pi f t) \quad ..... \quad (٨\text{-}١)$$

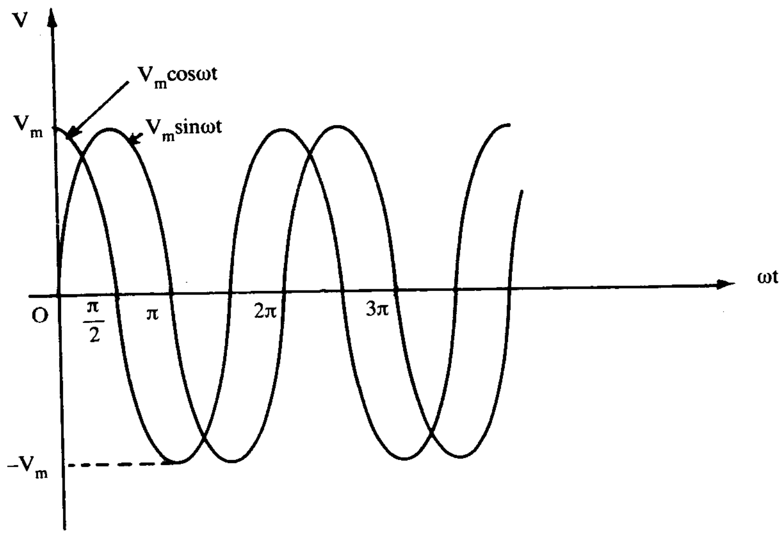
حيث V فرق جهد جيبي يتغير مع الزمن t ويسمى فرق الجهد اللحظي و V_m قيمته العظمى و f التردد الذي يتراوح ما بين ٥٠ و٦٠ دورة في الثانية بالنسبة لمعظم المولدات الاقتصادية. ويقاس التردد بعدد الذبذبات لكل ثانية وهو ما يسمى بالهيرتز (Hertz) نسبة للعالم الفيزيائي هيرتز حيث:

$$1 \text{ Hertz} = 1\text{Hz} = 1 \text{ cycle per second}$$

كما يمكن التعبير عن الجهد المتردد بالمعادلة التالية:

$$V = V_m \cos(\omega t) \quad .... \quad (٨\text{-}٢)$$

وهذه المعادلة تمثل أيضا موجة جيبية. ولما كان $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ فإن موجة الـ $\cos(\omega t)$ تماثل موجة الـ $\sin(\omega t)$ مع إزاحة مقدارها $\frac{\pi}{2}$ كما في شكل (٨ـ١).



شكل (٨ـ١): العلاقة بين $\cos(\omega t)$ و $\sin(\omega t)$ حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٢).

وتعالج نظرية التيار المتردد (alternating current) أو باختصار .A.C ، الجهود والتيارات الناتجة في دوائر كهربية تحتوي على مقاومات وملفات ومكثفات ومحولات وأي دوائر أخرى كهربية عند تسليط قوة دافعة كهربية مترددة.

وسنقتصر في دراسة هذا الموضوع فقط على تأثير تسليط قوة دافعة كهربية مترددة على الدوائر الكهربية المختلفة المكونة من مقاومات، ومكثفات وملفات فقط.

(٨ـ٢) مقاومة أومية في دائرة مترددة

Resistance in A.C. Circuit

يمثل الشكل (٨ـ٢) قوة دافعة مترددة V متصلة بمقاومة أومية، أي ليس لها حث، فإذا كانت المعادلة (٨ـ١) تمثل V فإنه حسب قانون أوم نكون القيمة اللحظة للتيار الكهربي المار في الدائرة هي:

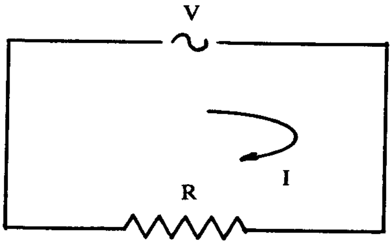
$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) \ldots \quad (٨\text{-}٣)$$

$$\therefore I = I_m \sin(\omega t)$$

حيث:

$$I_m = V_m / R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{-}٤)$$

وتمثل I_m القيمة العظمى للتيار عندما يأخذ V قيمته العظمى Vm.



شكل (٨-٢): دائرة تيار متردد تحتوي على مقاومة أومية فقط.

ويستنتج من المعادلات (٨-١)، (٨-٣) و(٨-٤) ما يلي:

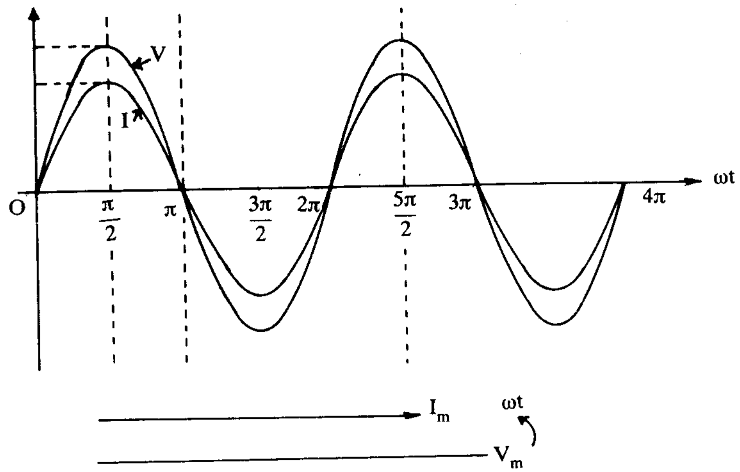
١ - تتناسب قيمة التيار، المعادلة (٨-٣)، مع قيمة الجهد الكهربي، المعادلة (٨-١)، بمعامل ثابت هو 1/R. لذلك يلاحظ من الشكل (٨-٣) أن منحنى التيار هو منحنى جيبي يماثل تماما المنحنى الجيبي لفرق الجهد، أي أنهما يمران بنقطة الصفر معا كما أنهما يمران بقيمتي النهاية العظمى في كل من الجهتين الموجبة والسالبة معا، ولذلك يقال إن فرق الجهد والتيار متفقان في الطور In phase وتتوقف قيمة النهاية العظمى للتيار I_m على قيمة المقاومة R.

٢ - إذا مثل كل من التيار وفرق الجهد بمتجهين كما في شكل (٨-٣) فإنهما ينطبقان معا ويدوران بالزاوية نفسها. يسمى هذا التمثيل بمخطط ضابط الطور (phasor diagram) أو بمخطط المتجهات (vector diagram) وهو يمثل الجهد والتيار عند لحظة معينة والغرض من ذلك هو معرفة الفرق في الطور (phase difference) بينهما.

٣ - حسب تعريف القدرة الكهربية الواردة في الفصل الرابع، البند (٤-٣)، فإن القيمة اللحظية للقدرة (instant power) P عند أي لحظة t هي:

$$P = IV = I^2R = I_m^2 R \sin^2 \omega t \quad \ldots \quad (٨\text{-}٥)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \cos 2\omega t)$$



شكل (٣ـ٨): ا ـ العلاقة بين فرق الجهد المسلط V و ωt وكذلك التيار المار في الدائرة I و ωt حسب المعادلتين (١ـ٨) و(٣ـ٨).
ب ـ مخطط ضابط الطور بين V و I للدائرة (٢ـ٨).

$$\therefore P = \frac{1}{2}V_m I_m - \frac{1}{2}V_m I_m \cos 2\omega t = P_1 + P_2 \qquad (٨ـ٦)$$

تدل المعادلة (٥ـ٨) على أن القدرة اللحظية P دائما موجبة عندما تكون V و I معا موجبتين أو سالبتين وهذا يعني أن الطاقة تعطى للمقاومة عند أي لحظة مهما كان اتجاه التيار.

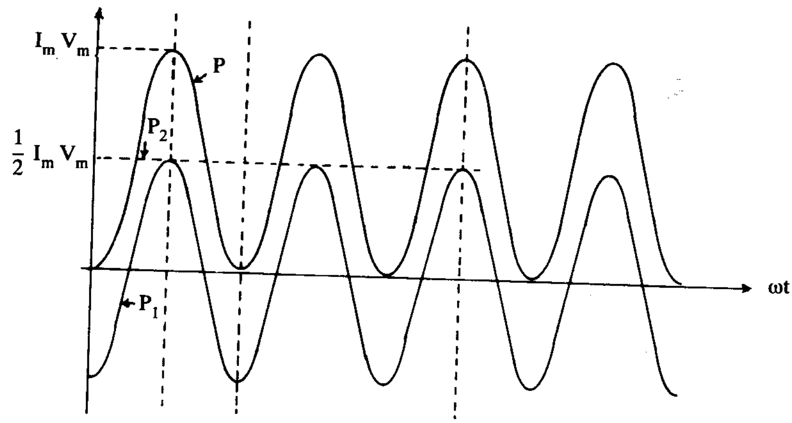
كما يتضح من المعادلة (٦ـ٨) أن القدرة اللحظية P تتكون من حدين هما:

ا ـ حد ثابت P_1 ، يكن كتابته بالصورة التالية:

$$P_1 = \frac{1}{2}V_m I_m = (V_m/\sqrt{2}) \times (I_m/\sqrt{2}) = V_{eff} \cdot I_{eff} \qquad (٨ـ٧)$$

تماثل هذه المعادلة تماما المعادلة (٢٨ـ٤) الخاصة بالقدرة في حالة التيار المباشر (D.C). تسمى V_{eff} بالجهد الفعّال و I_{eff} بالتيار الفعّال وهما مقياس للجهد المباشر المكافىء أو التيار المباشر (المستمر) الذي يسبب الحرارة نفسها في المقاومة.

ب ـ حد يتغير مع الزمن t بضعف التردد للجهد والتيار (2ω بدلا من ω). ويبين الشكل (٨ـ٤) العلاقة بين ωt والقدرة اللحظية P حسب المعادلة (٨ـ٥) كما يبـين أيضا حديّ المعادلة (٨ـ٦)، حيث يمثل الحد الأول بخط مستقيم مع المحور الأفقي بينما يمثل الحد الثاني بالمنحنى الجيبي الذي قيمة ذروته $\frac{1}{2} V_m I_m$. واضح من الشكل أن القدرة اللحظية هي مجموع هذين الحدين.



شكل (٨ـ٤): العلاقة بين القدرة اللحظة P و ωt حسب المعادلتين (٨ـ٥) و(٨ـ٦) للدائرة (٨ـ٢).

٤ ـ تعني المعادلة (٨ـ٥) أن معدل إنتاج الطاقة الحرارية في المقاومة R يكون متغيرا نظرا لتغير P. ولكن يمكن الحصول في خلال فترة زمنية T على معدل متوسط لإنتاج الحرارة يمكن مساواته بالمعدل الناشيء عن تيار مستمر مكافيء. وتكون قيمة هذا التيار المستمر المكافيء هي القيمة الفعالة للتيار المتردد (effective value) وتعرف بأنها قيمة ذلك التيار المستمر الذي يولد معدل الحرارة نفسها في مقاومة معينة.

إذا كانت الطاقة الحرارية المتولدة في مقاومة R نتيجة لمرور تيار متردد I لفترة زمـنية متنـاهية في الصـغـر dt هي ($dU = Pdt$) فإن الطاقة المتولدة خـلال دورة كاملة T هي:

$$U = \int_0^U dU = \int_0^T I^2 R dt$$

وإذا كانت شدة التيار المستمر الذي يعطي الطاقة الحرارية نفسها في الفترة T هو I' فإن القدرة المفقودة $P = I'^2R$ وهي ثابتة لا تعتمد على الزمن.
إذن فالطاقة الحرارية نتيجة التيار المستمر هي I'^2RT.

ومن تعريف القيمة الفعالة للتيار ينتج أن:

$$I'^2RT = \int_0^T I^2 R\,dt \quad \therefore I'^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt$$

∴ القيمة الفعالة للتيار المتردد I' ، ويرمز لها غالبا بالرمز $I_{r.m.s}$ وأحيانا I_{eff} حيث r.m.s هي (root mean square) جذر متوسط مربع التيار، هي:

$$I_{r.m.s} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt\right]^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨)$$

وبالتعويض عن I من المعادلة (٨-٣) نحصل على:

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t\, dt\right]^{1/2}$$

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta\right]^{1/2} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{2\pi}\right]^{12}$$

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi}\times\pi\right]^{1/2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707\, I_m \quad (٨\text{–}٩)$$

ولذلك فالقيمة الفعالة لأي موجة جيبية هي 0.707 من القيمة العظمى وهذه قيمة التيار الفعال I_{eff} التي وردت في المعادلة (٨-٧).

وتستخدم هذه القيمة الفعالة للتيار المتردد في أية حسابات وهي التي تقيسها أجهزة القياس العادية مثل (ammeter) آلة قياس التيار المتردد. كذلك بالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن القيمة الفعالة للجهد المتردد تعطى بالمعادلة:

$$V_{r.m.s} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707\, V_m \quad \cdots \quad (٨\text{–}١٠)$$

ولـذلـك حينما يقال إن الجهد الكهربي المتردد في المنزل 127V فهذه القيمة تمثّل الـ V_{rms} وهذا يعني أن القيمة العظمى لهذا الجهد 170V ولذلك صنعت أجهزة القياس لقراءة V_{rms} مباشرة.

وبذلك يمكن كتابة المعادلات (٨ـ١)، (٨ـ٣) و(٨ـ٦) بالصورة التالية:

$$V = \sqrt{2}\, V_{r.m.s} \sin \omega t \qquad \ldots \quad (٨ـ١١)$$

$$I = \sqrt{2}\, I_{r.m.s} \sin \omega t \qquad \ldots \quad (٨ـ١٢)$$

$$P = V_{r.m.s} I_{r.m.s} - V_{r.m.s} I_{r.m.s} \cos 2\omega t \ . \quad (٨ـ١٣)$$

٥ ـ القيمـة المتوسطة (average value) للتيار المتردد خلال دورة كاملة يساوي صفرا وذلك بسبب القيمة الموجبة والسالبة للتيار أما القيمة المتوسطة للتيار خلال نصف دورة يمكن حسابها كما يلي:

$$I_{av} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I dt$$

وبالتعويض عن I من المعادلة (٨ـ٣) يمكن الحصول على:

$$I_{av} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$\therefore I_{av} = (2/\pi)\, I_m = 0.637\, I_m \quad \ldots \quad (٨ـ١٤)$$

وبالطريقة نفسها يمكن حساب القيمة المتوسطة للجهد خلال نصف دورة أي أن:

$$V_{av} = \frac{2}{\pi} V_m = 0.637\, V_m \qquad \ldots \quad (٨ـ١٥)$$

أما القيمة المتوسطة للقدرة خلال دورة كاملة في زمن قدره T فيمكن الحصول عليها من المعادلة:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^{T} P dt$$

وبالتعويض عن P من المعادلة (٨ـ١٣) يمكن الحصول على :

$$P_{av} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V_{r.m.s} I_{r.m.s} (1 - \cos 2\omega t)\, d(\omega t)$$

$$= \frac{V_{r.m.s} I_{r.m.s}}{\pi}\int_0^\pi (1 - \cos 2\omega t)\, d(\omega t)$$

$$= \frac{V_{r.m.s} I_{r.m.s}}{\pi}\left[\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t\right]_0^\pi$$

$$P_{av} = V_{r.m.s} I_{r.m.s} = I^2_{r.m.s} R = \frac{V^2_{r.m.s}}{R} \quad .. \quad (٨ـ١٦)$$

حيث

$$V_{r.m.s} = I_{r.m.s} R$$

ويستفاد من هذه المعادلة أن القيمة المتوسطة للقدرة تساوي مقدارا ثابتا وهو $V_{r.m.s} I_{r.m.s}$. أي أن القدرة المتوسطة المفقودة في مقاومة R تساوي حاصل ضرب القيمة الفعالة للجهد في القيمة الفعالة للتيار الكهربي . تماثل هذه المعادلة المعادلة (٨ـ٧) .

وحدات المقادير الفيزيائية الواردة في هذا البند وردت في الفصول السابقة .

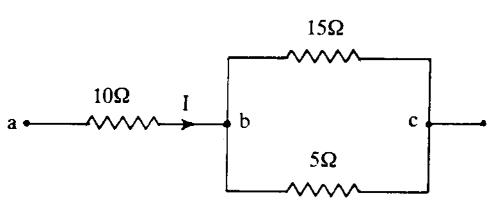
مـــثـــال (٨ـ١)

إذا كان قيمة التيار المار في المقاومة 5Ω من الدائرة التالية يعطى بالمعادلة :

$$I = 6 \sin \omega t$$

ا ـ احسب التيار المار في المقاومتين 10Ω و 15Ω وفرق الجهد بين ab و bc

ب ـ احسب القدرة اللحظية والمتوسطة في كل مقاومة .



الحــــل

ا ـ فرق الجهد

فرق الجهد V_{bc} عبر المقاومة 5Ω يساوي فرق الجهد عبر المقاومة 15Ω

$$V_{bc} = I_5 R_5 = 6 \sin \omega t \times 5 = 30 \sin \omega t \quad V$$

$$I_{15} = V_{bc}/R_{15} = 2 \sin \omega t \;\&\; I_{10} = I_{15} + I_5 = 8 \sin \omega t \quad A$$

$$V_{ab} = I_{10} R_{10} = 80 \sin \omega t \quad V$$

ب ـ القدرة اللحظية

$$P_5 = I_5 V_5 = 6 \sin \omega t \times 30 \sin \omega t = 180 \sin^2 \omega t \quad W$$

$$P_{15} = I_{15} V_{15} = 2 \sin \omega t \times 30 \sin \omega t = 60 \sin^2 \omega t \quad W$$

$$P_{10} = I_{10} V_{10} = 8 \sin \omega t \times 80 \sin \omega t = 640 \sin^2 \omega t \quad W$$

أما القدرة المتوسطة فهي :

$$P_{av}^{5} = \frac{I_m^5 \times V_m^5}{2} = \frac{6 \times 30}{2} = 90\,W$$

$$P_{av}^{15} = \frac{I_m^{15} \times V_m^{15}}{2} = \frac{2 \times 30}{2} = 30\,W$$

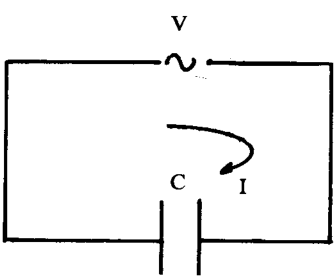
$$P_{av}^{10} = \frac{I_m^{10} \times V_m^{10}}{2} = \frac{8 \times 80}{2} = 320\,W$$

(٨ـ٣) مكثف في دائرة مترددة

Capacitance in A.C. Circuit

يمثـــل شكـل (٨ـ٥) قوة دافعـة كهـربية مترددة، $V = V_m \sin \omega t$ ، متصلة بدائـرة تحتوي على مكثف سعته C فاراد. فإذا كان التيار المـار في الدائرة عند أي لحظة هو I أمبير فإن الشحنة على المكثف عند اللحظة t هي q كولوم قيمتها :

$$q = CV = CV_m \sin \omega t$$



شكل (٥ ـ ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف سعته C فقط.

حيث V الجهد بين طرفي المكثف عند أي لحظة ويساوي جهد المصدر عند تلك اللحظة.

$$\therefore I = \frac{dq}{dt} = C\omega V_m \cos \omega t = \left(\frac{V_m}{X_C}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore I = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{–}١٧)$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_C} \quad , \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad \cdots \quad (٨\text{–}١٨)$$

ويستنتج من المعادلات (٨ـ١)، (٨ـ١٧) و(٨ـ١٨) ما يلي:

١ - يسمى المقدار X_c بالرد السعوي (capacitive reactance) أو المفاعلة السعوية ووحدته الأوم ويمثل مقاومة المكثف للتيار المتردد.

٢ - يتضح من المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ١٧) ومن الشكل (٨ـ٦) أن منحنى التيار غير متفق في الطور مع منحنى الجهد وإنما يتقدم عنه بزاوية مقدارها $\pi/2$ ويقال في هذه الحالة إن التيار يتقدم الجهد بزاوية مقدارها $\pi/2$. أي أن كل نقطة (ωt) على منحنى الجهد تناظرها $(\omega t + \frac{\pi}{2})$ على منحنى التيار.

٣ - يوضح رسم مخطط ضابط الطور بين V_m و I_m أن التيار I_m متقدم بزاوية مقدارها $\pi/2$ على الجهد V_m، شكل (٨ـ٦).

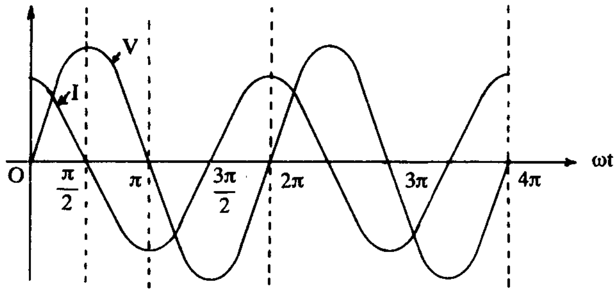
٤ - يتناسب الرد السعوي X_c عكسيا مع تردد التيار f وذلك حسب المعادلة (٨ـ١٨) ولهذا فإن مقاومة المكثف للتيار المستمر (DC) تساوي مالانهاية عندما يكون التردد مساويا للصفر، أي أن المكثف لا يمرر التيار المستمر.

٥ - تكون القدرة P التي يعطيها المصدر عند أية لحظة هي:

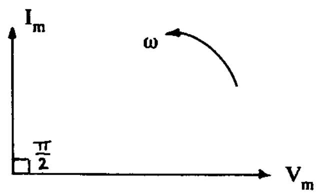
$$P = IV = V_m \sin \omega t \, . \, C\omega V_m \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} V_m^2 C\omega \sin 2\omega t \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{–}١٩)$$

أ ـ



ب ـ



شكل (٨ـ٦): أ ـ العلاقة بين الجهد V و ωt وكذلك العلاقة بين التيار I و ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و (٨ ـ ١٧).
ب ـ مخطط ضابط الطور بين الجهد V والتيار I للدائرة (٨ـ٥).

ويتضح من المعادلة (٨ـ١٩) أن منحنى القدرة مع الزمن هو منحنى جيبي تردده ضعف تردد التيار والجهد.

وتحدد الطاقة (energy) بين المكثف والمصدر من العلاقة:

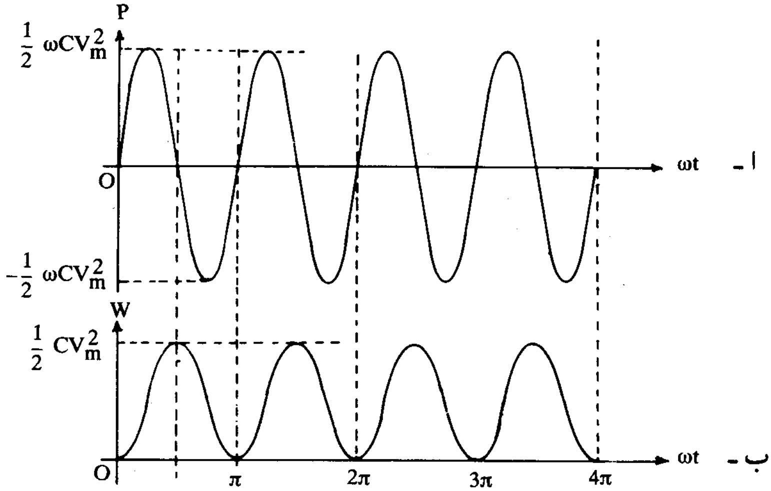
$$U = \int_0^t P\,dt = \int_0^t \frac{1}{2} V_m^2 C\omega \sin(2\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4} C V_m^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2} C V_m^2 \sin^2 \omega t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ٢٠)$$

$$= \frac{1}{2} C V^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ٢١)$$

يتضح من المعادلتين (٨ـ١٩) و(٨ـ٢٠) والتمثيل البياني لهما، شكل (٨ـ٧)، أن الطاقة المختزنة في المكثف تزداد مع زيادة الجهد خلال الربع الأول للذبذبة وتكون القدرة في هذه الحالة موجبة أي أن المكثف يأخذ طاقة من المصدر الكهربي.



شكل (٧ـ٨): ا ـ العلاقة بين القدرة P و ωt حسب المعادلة (١٩ـ٨).
ب ـ العلاقة بين الطاقة W و ωt حسب المعادلة (٢٠ـ٨).

أما خلال الربع الثاني فإن الجهد يتناقص وتتناقص تبعا لذلك الطاقة حتى تصل قيمتها الصفر. وتكون القدرة سالبة أي أن المكثف يعيد الطاقة المختزنة ثانية إلى المصدر وهكذا. ويقال إن الطاقة تتأرجح ذهابا وإيابا بين المصدر والمكثف. ومعنى هذا أن القدرة التي تمتص في الدائرة تساوي صفرا لعدم وجود مقاومة أومية تبدد فيها القدرة أثناء تبادل الطاقة بين المصدر والمكثف. وتبلغ الطاقة قيمتها العظمى $\frac{1}{2}CV_m^2$ مرتين في كل دورة للمنحنى الجيبي للجهد.

مـثـال (٢ـ٨):

إذا كانت سعة المكثف في الدائرة المبينة بالشكل (٥ـ٨) تساوي ٢ ميكروفاراد وكانت قيمة الجهد بين طرفي المكثف تحدده المعادلة التالية:

$$V = 100 \sin 1000\, t$$

فاحسب الرد السعوي والقيمة اللحظية لكل من التيار والشحنة والقدرة.

الحـــل

$$X_C = 1/\omega C = 1/(10^3 \times 2 \times 10^{-6}) = 5 \times 10^2\ \Omega$$

$$I_m = V_m/X_C = 10^2/(5 \times 10^2) = 0.2\ A$$

$$\therefore I = 0.2 \sin(1000t + \pi/2)\ A$$

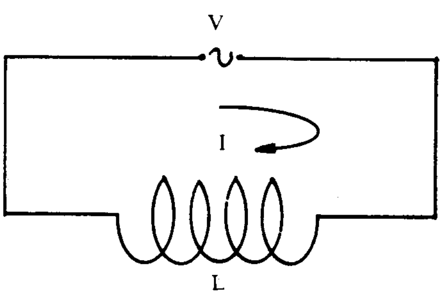
$$q = CV_m \sin 1000t = 2 \times 10^{-4} \sin 1000t\ C$$

$$P = \frac{1}{2} V_m^2 C\omega \sin 2\omega t = 10 \sin 2000t\ W$$

(٨ـ٤) ملف ذو حث ذاتي فقط في دائرة مترددة

Inductance in A.C. Circuit

يمثل الشكل (٨ـ٨) قوة دافعة كهربية مترددة V ، حسب المعادلة (٨ـ١)، متصلة بملف حثه الذاتي L ومقاومته الأومية مهملة. فإذا كان التيار المار في الدائرة عند أي لحظة هو I أمبير فإن الفيض المغناطيسي المتردد الناتج عن مرور هذا التيار ينتج قوة دافعة كهربية تأثيرية عكسية، المعادلة (٢٦ ـ ٦)، مقدارها:



شكل (٨ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف حثي L فقط.

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرة (٨ـ٨) يجب أن يكون $V + \varepsilon = 0$

$$\therefore V - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨ـ٢٢)$$

وبالتعويض عن V من المعادلة (٨ـ١) يمكن الحصول على:

$$dI = (V_m/L) \sin \omega t\ dt$$

وبمكاملة الطرفين يمكن الحصول على:

$$\therefore I = \frac{V_m}{L}\int \sin \omega t\, dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t + C$$

ويعتبر ثابت التكامل C مساويا للصفر وذلك لأنه يمثل جزء التيار الذي يظهر في حالة الزوال (transient condition).

$$\therefore I = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t = -\frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right) = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore I = I_m \sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٢٣)$$

$$I_m = V_m/\omega L = V_m/X_L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٢٤)$$

$$X_L = \omega L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٢٥)$$

يستنتج من المعادلات (١ـ٨)، (٢٣ـ٨) و(٢٤ـ٨) ما يلي:

١ ـ تمثل X_L معاوقة الملف للتيار المتردد وهي تختلف عن المقاومة الأومية رغم أن وحداتها الأوم ويسمى بالرد الحثي (inductive reactance) أو المفاعلة الحثية.

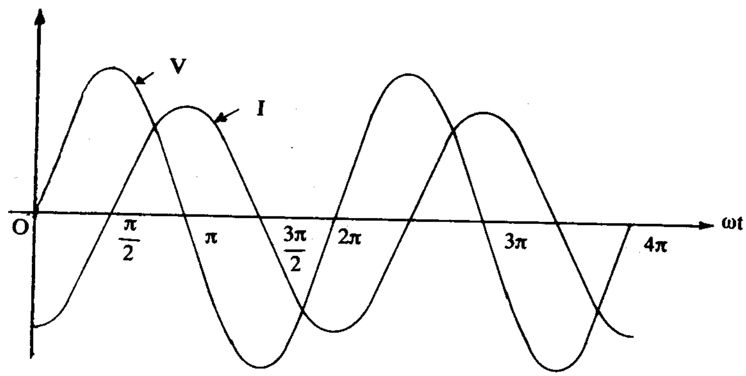
٢ ـ يتضح من المعادلتين (١ـ٨) و(٢٣ـ٨) ومن الشكل (٩ـ٨) أن منحنى التيار غير متفق في الطور مع منحنى فرق الجهد وإنما يتأخر عنه بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ أي أن كل نقطة لـ (ωt) على منحنى الجهد تناظرها ($\omega t - \pi/2$) على منحنى التيار ويقال في هذه الحالة إن التيار متأخر عن الجهد بزاوية مقدارها $\pi/2$.

٣ ـ يوضح رسم مخطط ضابط الطور بين I_m و V_m ، شكل (٩ـ٨)، أن هناك زاوية بين متجهي الجهد والتيار مقدارها $\pi/2$ وأن التيار متأخر عن الجهد بمقدار هذه الزاوية.

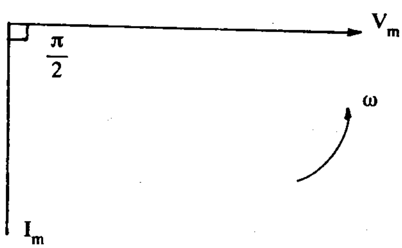
٤ ـ إذا أعطي التيار بالمعادلة:

$$I = I_m \sin \omega t \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٢٦)$$

واستعملت المعادلة (٢٢ـ٨) لحساب الجهد فإنه يمكن الحصول على:



ا ـ



ب ـ

شكل (٨ـ٩): ا ـ العلاقة بين الجهد V و ωt وكذلك العلاقة بين التيار I و ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٢٣).
ب ـ مخطط ضابط الطور بين الجهد والتيار للدائرة (٨ـ٨).

$$V = L\frac{dI}{dt} = \omega L\, I_m \cos \omega t = \omega L\, I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\therefore V = V_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٢٧)$$

ويقال في هذه الحالة إن الجهد يتقدم التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$.

٥ ـ يمكن الحصول على القدرة اللحظية P كما يلي:

$$P = VI = V_m \sin \omega t \, . \, I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$P = -\frac{V_m I_m}{2}\sin 2\omega t = -\frac{1}{2}\omega L\, I_m^2 \sin 2\omega t$$

$$\therefore P = -V_{rms}\, I_{rms} \sin 2\omega t \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٢٨)$$

يتضـح من هذه المعـادلـة أن منحنى القـدرة هو أيضـا منحنى جيبي تردده ضعف تردد الجهـد والتيار واتسـاعـه عبـارة عن $\frac{1}{2} V_m I_m$ ولـذلـك فإن القيمـة المتـوسـطة لمنحنى القدرة تساوي الصفر.

أما الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي للملف الحثي للفترة الزمنية t فيمكن حسابها كالتالي:

$$U = \int_0^t P dt = -\frac{1}{2} V_m I_m \int_0^t \sin 2\omega t\, dt$$

$$U = -\frac{1}{2} V_m I_m \left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^t = \frac{1}{4\omega} V_m I_m (\cos 2\omega t - 1)$$

$$U = \frac{-1}{2\omega} V_m I_m \sin^2 \omega t$$

$$\therefore U = -\frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t = -\frac{1}{2} L I^2 \quad \ldots \quad (٨\text{ـ}٢٩)$$

وردت الإشارة السالبة في معادلتي القدرة والطاقة بسبب ورودها في المعادلة (٨ـ٢٣) للدلالة على تأخر التيار على الجهد.

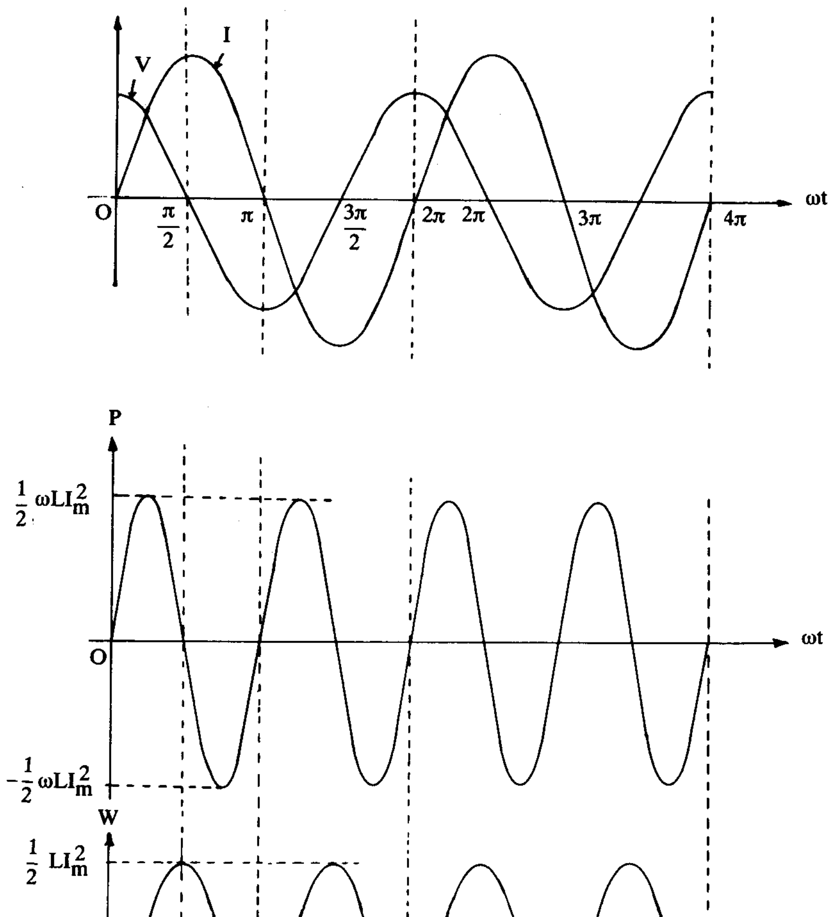
إذا حسبت القـدرة والـطاقـة باستخدام المعادلتين (٨ـ٢٦) و(٨ـ٢٧) فيمكن الحصول على:

$$P = \frac{1}{2}\omega L I_m^2 \sin 2\omega t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٣٠)$$

$$U = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L I^2 \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٣١)$$

وهما تمثلان المعادلتين (٨ـ٢٨) و(٨ـ٢٩) نفسيهما بدون الإشارة السالبة.

يمثل الشكل (٨ـ١٠) منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨ـ٢٦)، (٨ـ٢٧)، (٨ـ٣٠) و(٨ـ٣١).



شكل (٨ـ١٠): منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨ـ٢٦)، (٨ـ٢٧)، (٨ـ٣٠) و(٨ـ٣١).

ويستنتج من ذلك أنه إذا كانت القدرة P موجبة فسريان الطاقة يكون متجها إلى الملف من المصدر وتزداد بذلك طاقة التخزين المغناطيسية، أما إذا كانت القدرة سالبة فإن الطاقة ستعود من المجال المغناطيسي في الملف إلى المصدر الكهربي. إذا كان الملف نقيا، أي مقاومته الأومية مهملة، فإن الطاقة لا تتبدد (consume) خلال تبادل الطاقة بين المصدر الكهربي والمجال المغناطيسي.

يتم هذا التبادل خلال نصف الدورة للتيار الكهربي أي بين $\omega t = 0$ و $\omega t = \pi$ وتتكرر العملية نفسها خلال النصف الثاني السالب أي بين $\omega t = \pi$ و $\omega t = 2\pi$ وبذلك تصل الطاقة إلى نهايتها العظمى مرتين بقيمة قدرها $\frac{1}{2} LI_m^2$ خلال كل دورة عندما تكون $\omega t = \pi/2$ و $\omega t = \frac{3}{2}\pi$. وهكذا تستمر العملية.

مـثـال (٣-٨)

سلطت قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = 150 \sin 1000\, t$ على ملف حثه $L = 0.02\ H$ في الدائرة المبينة في شكل (٢٣-٨).

ا - احسب شدة التيار I وكذلك القدرة اللحظية P والمتوسطة P_{av}

ب - إذا فرض أن الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي (stored energy in magnetic field) تساوي الصفر عند $t = 0$. احسب قيمة هذه الطاقة بعد زمن قدره t ثانية.

الحـــل

من العلاقة (١٣-٨) يكون:

$$I = \frac{V}{X_L} = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t = -7.5 \cos (1000t)\ A$$

$$P = V.I = 150 \sin 1000\, t \times [-7.5 \cos (1000t)]$$

$$= -1125 \times \frac{1}{2} \sin 2000\, t$$

$$= -562.5 \sin 2000\, t$$

أما بالنسبة للقيمة المتوسطة فواضح أن قيمتها تساوي الصفر.

ب ـ تحسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي بالطريقة التالية:

$$U = \int_0^t p\,dt = -\int_0^t 562.5 \sin 2000\,t$$

$$= 562.5 \left[\frac{\cos 2000\,t}{2000} \right]_0^t$$

$$= 0.28\,(\cos 2000\,t - 1) \quad J$$

$$= -\,0.28 \times 2 \sin^2 1000\,t \quad J$$

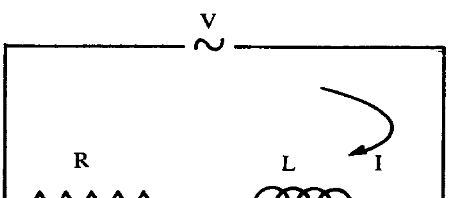
$$\therefore U = -\,0.56 \sin^2 1000\,t \quad J$$

(٨ـ٥) التوصيل على التوالي في دائرة مترددة

Conduction in Series in A.C. Circuit

(٨ـ٥ـ١) مقاومة وملف متصلان على التوالي — Resistance and inductance in series

يمثل الشكل (٨ـ١١) قوة دافعة مترددة V يتصل بها على التوالي ملف حثه الذاتي L ومقاومة أومية R (هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية للملف أو تكون مقاومة مستقلة إذا كان الملف مقاومته مهملة).



شكل (٨ـ١١): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومقاومة R على التوالي.

وهناك ثلاث طرق لدراسة هذه الدائرة والدوائر المماثلة التي ستأتي فيما بعد وهي:

أولا: طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات).

ثالثا: طريقة الحساب باستخدام الأعداد المركبة، وسوف يخصص البند (٨ـ٨) لهذه الدراسة.

أولا : طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

تكتب معادلة الدائرة بالصورة التالية :

$$V = L\frac{dI}{dt} + IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٢)$$

فإذا فرض أن جهد المصدر V تمثله المعادلة (١ـ٨) فإن التيار المار في هذه الدائرة سوف يكون متخلفا عن الجهد بزاوية مقدارها α حيث :

$$I = I_m \sin(\omega t - \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٣)$$

تسمى α بزاوية الطور وتتراوح قيمتها بين الصفر و$\frac{\pi}{2}$ ، كما هو معروف من دراسة البندين (٨ـ٢) و(٨ـ٤) فإن قيمتها تساوي الصفر في حالة المقاومة فقط و$\frac{\pi}{2}$ في حالة الملف فقط .

بالتعويض عن قيمتي V و I من المعادلتين (١ـ٨) و(٣٣ـ٨) في المعادلة (٣٢ـ٨) يمكن الحصول على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + L I_m \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \{\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \, . \sin \alpha\} + L I_m \omega \{\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha\}$$

أو:

$$\sin \omega t \{I_m R \cos \alpha + L I_m \omega \sin \alpha - V_m\} + \cos \omega t \{L I_m \omega \cos \alpha - I_m R \sin \alpha\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون

$$\cos \omega t = 1 \, , \sin \omega t = 0$$

عندما تكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$\cos \omega t = 0 \, , \sin \omega t = 1$$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$L \omega \cos \alpha = R \sin \alpha \quad \cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٤)$$

$$V_m = I_m R\cos\alpha + L I_m \omega \sin\alpha \qquad .. \quad (٨\text{ـ}٣٥)$$

فمن المعادلة (٨ـ٣٤) يمكن الحصول على زاوية الطور أي أن:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L}{R} \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad ... \quad (٨\text{ـ}٣٦)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٣٦) على:

$$\sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \& \quad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٣٥) يمكن الحصول على:

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad ...... \quad (٨\text{ـ}٣٧)$$

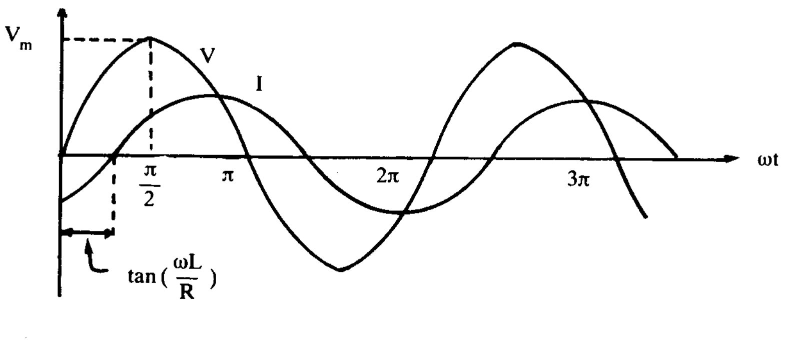
$$V_m = I_m Z$$

حيث:

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad .... \quad (٨\text{ـ}٣٨)$$

حيث يعرف المقدار Z بالممانعة الحثية (inductive impedance) وهي تقاس بالأوم أيضا، وتمثل نوعا من أنواع المقاومة في الدائرة.

ويبين الشكل (٨ـ١٢) العلاقة بين الجهد V والتيار I وزاوية الطور α .



شكل (٨ـ١٢): العلاقة بين V ، ωt و I ، ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٣٣) ويوضح الشكل قيمة α بين V و I.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور

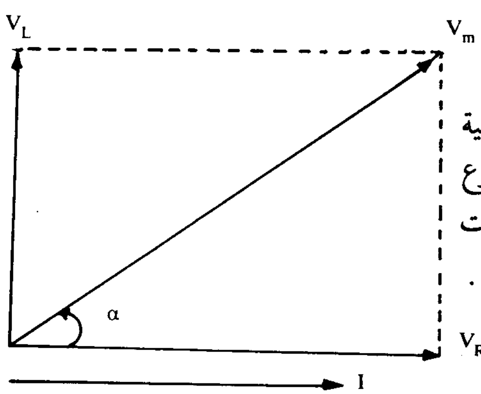
يمكن استخدام مخطط ضابط الطور لحساب الممانعة الحثية Z وزاوية الطور α كما يلي:

لكي يمر التيار الكهربي في الدائرة الموضحة بالشكل (٨ـ١١) يجب أن يكون للقوة الدافعة الكهربية V_m مركبتان هما:

ا ـ جهد المقاومة V_R ومقداره I_mR وهو لازم لتمرير التيار في المقاومة R وكما هو معروف من دراسة البند (٨ـ٢) أن هذا الجهد متفق في الطور مع التيار.

ب ـ جهد الملف الحثي V_L ومقداره $I_m\omega L$ وهو لازم لتمرير التيار في الملف ذي الحث الذاتي L وهذا الجهد متقدم على التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$ ، البند (٨ـ٤).

وبذلك يمكن رسم مخطط ضابط الطور كما في شكل (٨ـ١٣) حيث أخذ التيار I_m كخط إسناد لأنه مشترك بين R و L.



شكل (٨ـ١٣): مخطط ضابط الطور للدائرة (٨ـ١١) يوضح اتجاه V_R و V_L والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α .

وتكون بذلك القوة الدافعة الكهربية V_m اللازمة لتمرير التيار I_m هي مجموع الجهدين V_R و V_L نظرا لأن الكميات الداخلة في الحساب كلها كميات متجهة.

$$\therefore \vec{V}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

أو

$$V_m = (V_R^2 + V_L^2)^{1/2}$$

$$V_m = [I_m^2 R^2 + I_m^2 (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$V_m = I_m (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} = I_m Z$$

$$\therefore Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٨) نفسها. يمكن الحصول على زاوية الطور α من الشكل (٨ـ١٣)، وواضح أنها موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر $(\omega L = 0)$ و $\frac{\pi}{2}$ $(R = 0)$ ، حيث:

$$\tan\alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_m\omega L}{I_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٦) نفسها.

وبهذا يتضح صحة وسهولة فكرة مخطط ضابط الطور في دوائر التيار المتردد.

لإيجاد متوسط القدرة خلال دورة كاملة في هذه الدائرة نتبع ما يلي:

$$P = IV = I_m \sin(\omega t - \alpha)\, V_m \sin\omega t$$

$$P = I_m V_m \sin(\omega t - \alpha)\sin\omega t$$

$$p = \frac{1}{2} I_m V_m \{\cos\alpha - \cos(2\omega t - \alpha)\}$$

$$\therefore\ P = I_{rms} V_{rms}\cos\alpha - I_{rms} V_{rms}\cos(2\omega t - \alpha).\ .\quad (٨ـ٣٩)$$

أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين أحدهما $I_{rms} V_{rms}\cos\alpha$ وهو ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني $I_{rms} V_{rms}\cos(2\omega t - \alpha)$ وهو كمية مترددة فقيمتها المتوسطة خلال دورة كاملة تساوي صفرا. وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة، وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة، هي:

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms}\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٤٠)$$

وهذا القانون عام لجميع دوائر التيار المتردد، ويسمى المقدار $\cos\alpha$ **بمعامل القدرة** (power factor) إذ أنـه يمثـل المعامل الذي تتوقف عليه قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة. فإذا كانت الدائرة تحتوي على مقاومة فقط فإن $\alpha = 0$ وتكون $\cos\alpha = 1$ ومـنـه $P = I_{rms} V_{rms}$ وهي المعادلة (٨ـ١٦)، وإذا اشتملت الدائرة على مقاومة وحث ذاتي فإن قيمة α تقع بين الصفر، $\pi/2$ ، كما أن معامل القدرة يتراوح بين الوحدة والصفر، وكلما ازدادت قيمـة الحث الـذاتي بالنسبـة للمقـاومة قلت قيمة معامل القدرة حتى يصبح صفرا: وعندها تكون $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ وذلك عندما تحتوي الدائرة حثا ذاتيا فقط.

مــثــال (٤ـ٨)

يتصل جهد متردد قيمته العظمى 100 V وتردده 25 Hz على التوالي بمقاومة قيمتها 1.5 Ω وملف حثه الذاتي 0.01 H.

احسب تيار الدائرة وزاوية فرق الطور وفرق الجهد بين طرفي كل من المقاومة والملف.

الحــل

$$\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 25 = 157 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 157 \times 0.01 = 1.57\ \Omega$$

$$Z = \{ (1.5)^2 + (1.57)^2\}^{1/2} = (4.71)^{1/2} = 2.17\Omega$$

$$I_m = \frac{100}{2.17} = 46 \text{ A}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{1.57}{1.5} = 44° \, 19'$$

$$V_R = I_m R = 46 \times 1.5 = 69 \text{ V}$$

$$V_L = I_m \omega L = 46 \times 1.57 = 72 \text{ V}$$

واضح أن الجمع الجبري للمقدارين V_R و V_L يساوي 141 فولت وهي أكبر من القيمة الأصلية والتي تساوي 100 فولت ولهذا فلابد وأن يكون:

$$V_m^2 = V_L^2 + V_R^2$$

مــثــال (٥ـ٨)

تتألف دائرة من عنصرين أساسيين متصلين على التوالي وكان الجهد بين طرفيهما هو $V = 150 \sin (500t + 10)$ V والتيار المار هو $I = 13.42 \sin (500t - 53.4)$A تعرف على هذين العنصرين.

الحــل

واضح أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $53.4 + 10 = 63.4°$

وهذا يعني أن الدائرة يجب أن تحتوي على مقاومة R وملف L. ولمعرفة كل منهما نتبع ما يلي:

$$\tan\alpha = \tan 63.4 = 2 = \omega L/R$$

$$V_m/I_m = \{(R^2 + (\omega L)^2\}^{1/2}$$

$$150/13.42 = \{R^2 + (2R)^2\}^{1/2} = \sqrt{5}R$$

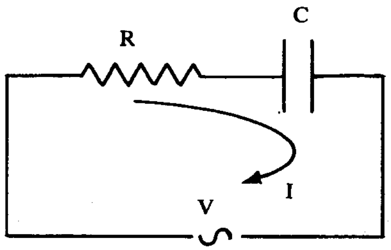
$$\therefore R = 5\Omega \ \ \& \ \ L = \frac{2R}{\omega} = \frac{2\times 5}{500} = 0.02\,\mathrm{H}$$

(٨ـ٥ـ٢) مقاومة ومكثف متصلان على التوالي

Resistance and capacitance in series

يمثل الشكل (٨ـ١٤) دائرة مترددة تحتوي على مصدر متردد V متصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي. فإذا مثل جهد المصدر بالمعادلة (٨ـ١) فإن التيار يسبق الجهد، في هذه الحالة، بزاوية طور قدرها α أي أن:

$$I = I_m \sin(\omega t + \alpha) \quad .. \quad (٨ـ٤١)$$



شكل (٨ـ١٤): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف ومقاومة متصلين على التوالي.

أولا: كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

يمكن كتابة معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصوة التالية:

$$V = IR + \frac{q}{C}$$

حيث q شحنة المكثف و C سعته و R قيمة المقاومة و I و V القيم اللحظية لكل من التيار وجهد المصدر ويمكن كتابة المعادلة (٨ـ٤١) على الصورة

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$q = I_m \int \sin(\omega t + \alpha)\, dt$$

$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + C$$

وقيمة الثابت C في هذه الحالة تساوي الصفر لأن التيار متردد منتظم أي أن :

$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٨\text{-}٤٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٤٢) عن I و V و q نحصل على :

$$V_m \sin\omega t = I_m R \sin(\omega t + \alpha) - \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\therefore V_m \sin\omega t = I_m R\,\{\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha\}$$
$$- \frac{I_m}{\omega C}\{\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha\}$$

$$\therefore \cos\omega t\,\{I_m R\sin\alpha - \frac{I_m}{\omega C}\cos\alpha\}$$
$$+ \sin\omega t\,\{I_m R\cos\alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin\alpha - V_m\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون $\cos\omega t = 1\ ,\ \sin\omega t = 0$

وعندما يكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون $\cos\omega t = 0\ ,\ \sin\omega t = 1$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$R\sin\alpha = \frac{1}{\omega C}\cos\alpha \quad \dots\dots \quad (٨\text{-}١٤٤)$$

$$V_m = I_m R\cos\alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin\alpha \quad \dots \quad (٨\text{-}٤٤ب)$$

يمكن الحصول من المعادلة (١٤٤ - ٨) على زاوية الطور حيث :

$$\tan\alpha = \frac{1}{\omega CR} = \frac{X_c}{R} \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR} \quad . \quad (٨\text{-}٤٥)$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-٤٥) على :

$$\sin\alpha = \frac{X_c}{\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{R}{\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٤ب ـ ٨) يُحصل على :

$$V_m = I_m\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} = I_m Z$$

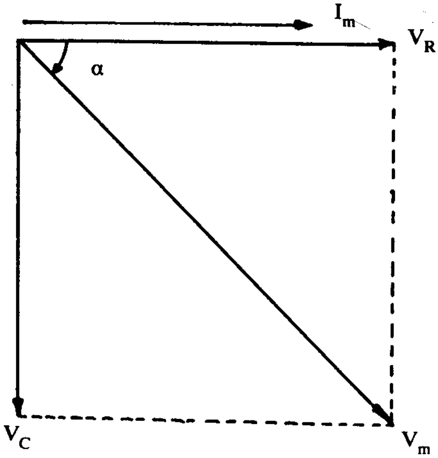
حيث :

$$Z = \left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٤٦)$$

حيث Z هي الممانعة السعوية (capacitive impedance) وتقاس بالأوم .

ثانيا : رسم مخطط ضابط الطور

ويمكن الحصول على معادلتي الممانعة السعوية (٤٧ـ٨) وزاوية الطور (٤٦ـ٨) بطريقة رسم مخطط ضابط الطور، شكل (١٥ـ٨)، كالتالي :



شكل (١٥ـ٨) : رسم مخطط ضابط الطور بين V_R و V_C والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α التي تتراوح قيمتها بين $-\pi/2$ و 0

يلاحظ أن للجهد V_m مركبتين هما :

ا ـ المركبة V_R وهي التي تعمل على تمرير التيار I_m في المقاومة R وقيمة هذه المركبة I_mR وهي متفقة في الطور مع التيار.

ب ـ المركبة V_C وهي التي تعمل على تمرير التيار في المكثف C وقيمة هذه المركبة

$$V_C = I_m X_C = I_m/\omega C$$

وهي مختلفة في الطور مع التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$.

بجمع هاتين المركبتين جمعا اتجاهيا يمكن الحصول على قيمة الجهد أي أن :

$$V_m = (V_R^2 + V_C^2)^{1/2}$$

$$= \left\{I_m^2 R^2 + I_m^2\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$= I_m\left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\therefore Z = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

وهي المعـادلـة (٨ـ٤٧) نفسهـا. كما يمكن حساب زاوية الطور من الشكل (٨ـ١٥) حيث:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٦) نفسها.

والقيمة اللحظية للقدرة في الدائرة هي:

$$P = VI$$

$$P = V_m \sin \omega t\, I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos\alpha - \cos(2\omega t + \alpha))$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos\alpha - V_{rms} I_{rms} \cos(2\omega t + \alpha) \qquad (٨ـ٤٧)$$

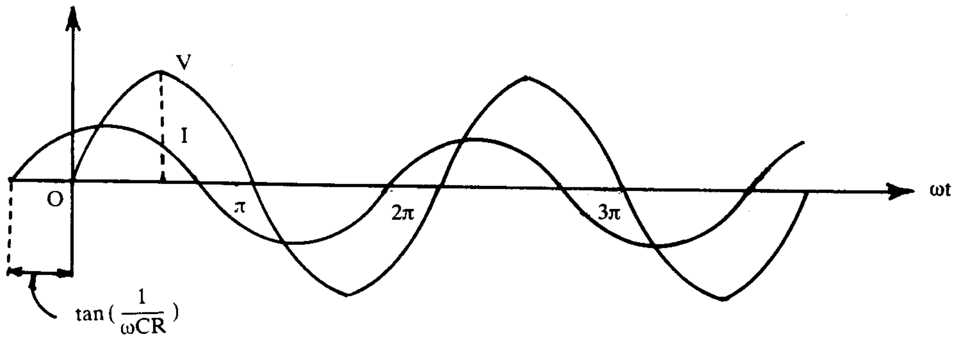
أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين، الحد الأول منهما ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني كمية مترددة وقيمتها المتوسطة صفر.

وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة هي:

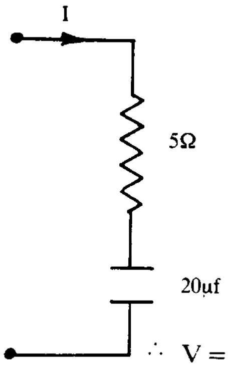
$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\alpha$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٠) نفسها.

ويبين شكل (٨ـ١٦) منحنى التيار والجهد في دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف



شكل (١٦ـ٨) : العلاقة بين V ، ωt حسب المعادلة (١ـ٨) و I ، ωt حسب المعادلة (٤١ـ٨) ويوضح الشكل قيمة α بين V ، I.



مـثـــال (٦ـ٨)

يمر في الدائرة التالية تيار قيمته I = 2 cos 5000t A.

احسب الجهد V المسلط عليها .

الحـــل

$$V = V_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore \quad V = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} I_m \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$V = 22.4 \cos(5000\,t - 63.4)\ V$$

حيث

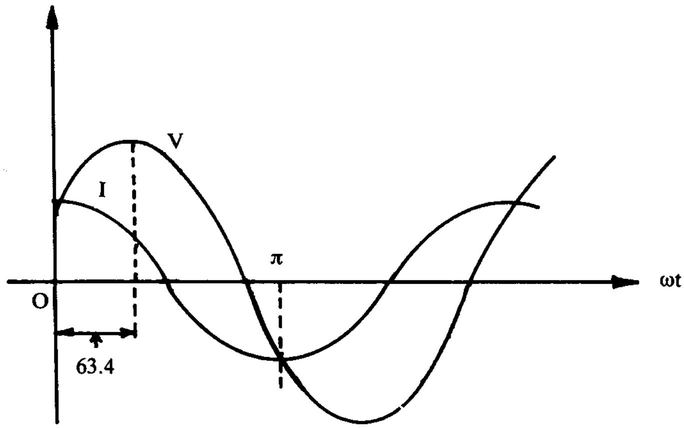
$$R = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}} = 10\Omega$$

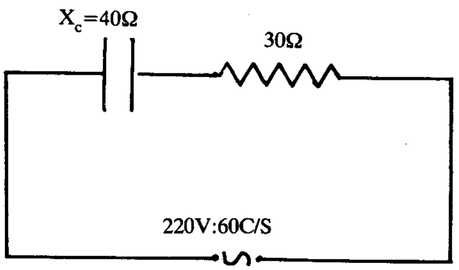
$$\& \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = \tan^{-1}\frac{10}{5} = 63.4^\circ \quad , \quad I_m = 2\,A$$

$$Z = 11.18\ \Omega$$

ويسبق التيار الجهد بزاوية طور مقدارها 63.4°.

والشكل التالي يوضح منحنى التيار والجهد لهذه الدائرة .





مـثــال (٨-٧)

في الدائرة التالية احسب:

ا ـ التيار المار في الدائرة.

ب ـ زاوية الطور بين التيار والجهد.

جـ ـ معامل القدرة.

الحـــل

ا ـ
$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50\Omega$$

$$I_m = V_m/Z = 220/50 = 4.4 \text{ A}$$

ب ـ
$$\tan \alpha = X_c/R = -40/30 = -1.33$$

$$\therefore \quad \alpha = -53°$$

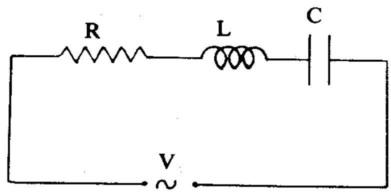
والإشارة السالبة تعني أن الجهد يتأخر عن التيار بزاوية قدرها 53°.

جـ ـ
$$\cos \alpha = \cos(-53°) = \cos 53 = 0.60$$

(٨-٥-٣) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي R. L. C. in series

يبين الشكل (٨-١٧) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$ موصلة في دائرة تحتوي على مقاومة (R)، هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية

للملف أو مجموع المقاومات الموجودة في الدائرة، ورد حثي $(X_L = \omega L)$ ورد سعوي $(X_C = \frac{1}{\omega C})$ موصلة معا على التوالي، فإذا كانت القيمة العظمى للتيار المار في الدائرة هو I_m أمبير يلزم ثلاث مركبات للجهد لإمرار التيار في الدائرة هي:



شكل (١٧-٨): دائرة مترددة تحتوي على مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي.

ا ـ المركبة $V_R = I_m R$ لتمرير التيار في المقاومة وتكون في اتفاق طوري مع التيار.

ب ـ المركبة $V_L = I_m \omega L$ لتمرير التيار في الملف وتكون متقدمة على التيار بزاوية $\pi/2$.

جـ ـ المركبة $V_C = \frac{I_m}{\omega C}$ لتمرير التيار في المكثف وتكون متخلفة على التيار بزاوية $\pi/2$.

والمجموع الاتجاهي لهذه المركبات الثلاثة تعطى الجهد V_m كما في شكل (١٨-٨).

$$\therefore \quad V_m = \{V_R^2 + (V_L - V_C)^2\}^{1/2}$$

$$V_m = I_m \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٤٨\text{-}٨)$$

حيث

$$V_m = I_m Z$$

$$Z = \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٤٩\text{-}٨)$$

وكما هو واضح من الشكل (١٨-٨) أن زاوية الطور تساوي:

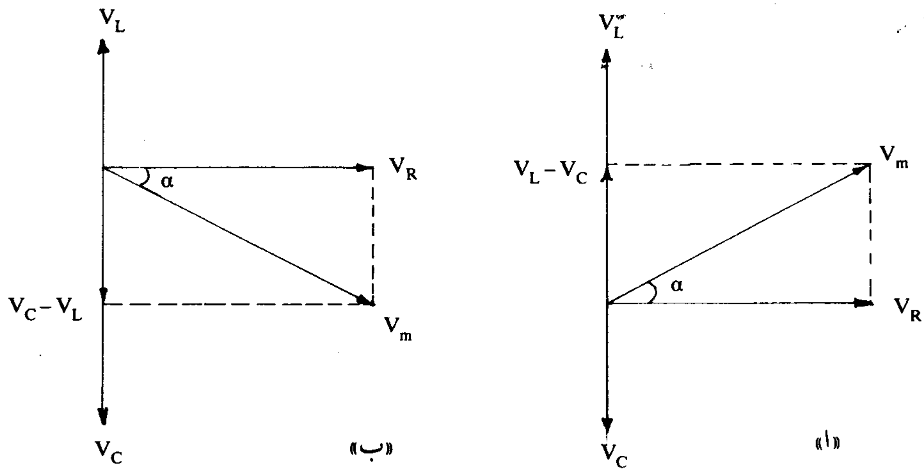
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \ldots\ldots \quad (٥٠\text{-}٨)$$

توجد ثلاث حالات مختلفة بالنسبة للنتيجة التي نحصل عليها من كل من المعادلتين (٤٨-٨) و(٥٠-٨) وهي:

ا ـ عنـدما يكون الرد الحثي X_L أكبر من الرد السعوي X_C ($\omega L > \frac{1}{\omega C}$) يكون التيار متأخرا عن الجهد، ويقال للدائرة إنها ذات معاوقة حثية.

ويمكن أن تعـد ممانعـة مكافئة فقط في الدائرة مقدارها $(X_L - X_C)$ مع اختفاء X_C ويتضح ذلك من شكل (١٨أ ـ ٨).

ب ـ عندما يكون الرد السعوي X_C أكبر من الرد الحثي X_L أي أن $(1/\omega C) > \omega L$ يكون التيار متقدما على الجهد، ويتضح ذلك من الشكل (١٨ب ـ ٨)، ويقال في هذه الحالة إن الدائرة ذات معاوقة سعوية ويمكن أن تعتبر وجود ممانعة سعوية مكافئة مقدارها $(X_C - X_L)$ مع اختفاء X_L من الدائرة.



شكل (١٨ـ٨): مخطط المتجهات بين V_R و V_L و V_c عندما
ا - $V_L > V_C$
ب - $V_C > V_L$ وفي كلتا الحالتين يوضح الشكل علاقتها مع المحصلة V_m وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (١٧ـ٨).

جـ ـ عندما تتساوى كل من X_L ، X_C تكون المقاومة في هذه الحالة أصغر ما يمكن $(X_C - X_L = 0)$ ، وتكون قيمتها مساوية لقيمة المقاومة R فقط. وتكون قيمة التيار الذي ينتج في الدائرة أكبر ما يمكن $I = \frac{V}{R}$ كما أن التيار يصبح متفقا في الطور مع الجهد $(\alpha = \tan^{-1} 0 = \text{zero})$ ، ويقال للدائرة في هذه الحالة إنها في

حالة رنين (resonnance) ، وتكون القدرة الفعّالة في الدائرة أكبر ما يمكن وذلك لأن قيمة التيار أكبر ما يمكن كما أن معامل القدرة $\cos \alpha$ يساوي الوحدة، وهذه هي قيمة النهاية العظمى له وتكون قيمة القدرة غير الفعّالة مساوية للصفر.

ويلاحظ أن هبوط الجهد على الملف (I_mX_L) يساوي الهبوط على المكثف (I_mX_c) بينما هبوط الجهد على المقاومة يكون (I_mR) مساويا لجهد المصدر V_m. ونظرا لأن الجهد على طرفي الملف (I_mX_L) يساوي الجهد على المكثف (I_mX_C) ويضاده في الاتجاه، فإن كلا منهما يلاشي الآخر، وقد تكون قيمة كل منهما في هذه الحالة كبيرة جدا بالنسبة لجهد المصدر.

وتستخدم هذه الطريقة في دوائر الراديو للحصول على جهود كبيرة على أطراف الملفات والمكثفات باستخدام مصادر ذات جهود محدودة القيمة.

مما سبق يتضح أن شرط الرنين لابد أن يكون:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٥١)$$

وتعرف f_r هنا بالتردد الذاتي (self frequency) للدائرة وتستخدم خاصية الرنين في عملية التوليف (tuning process) في أجهزة الاستقبال حيث تتكون دائرة الايريال من ملف ومكثف على التوالي وتتولد في هذه الدائرة قوى دافعة بواسطة الموجات المنتشرة من محطات الإذاعة المختلفة وحينما نغير سعة المكثف C حتى يصبح التردد f_r مساويا لتردد الإذاعة المطلوب سماعها فإن التيار التأثيري المتولد يكون أكبر ما يمكن بالنسبة لهذا التردد دون غيره ونتمكن بذلك من سماع الإذاعة المطلوبة.

ويمكن تحقيق الشرط الوارد في المعادلة (٨ـ٥١) بتغير قيمة التردد للمصدر، أو بتغيير قيمة كل من L أو C أو كليهما معا .

ويمكن أن تحقق العلاقتين (٨ـ٤٩) و(٨ـ٥٠) رياضيا كالتالي :
بتطبيق قانون كيرشوف على الدائرة (٨ـ١٧) فإن القوة الدافعة المترددة في أية لحظة هي :

$$V = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad \dots\dots\dots \quad (٨ـ٥٢)$$

حيث $V = V_m \sin(\omega t)$, q الشحنة اللحظية للمكثف، $I = I_m \sin(\omega t \pm \alpha)$ حيث α فرق الطور وبالتعويض في العلاقة (٨ـ٥٢) يُحصل على :

$$V_m \sin\omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m \omega L \cos(\omega t - \alpha) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin\omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin wt = I_m R \left\{\sin\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \sin\alpha\right\} + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \times \{\cos\omega t \cos\alpha + \sin\alpha \sin\omega t\}$$

$$\therefore \sin\omega t \left\{I_m R \cos\alpha + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\alpha - V_m\right\} + \cos\omega t \left\{I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\alpha - I_m R \sin\alpha\right\} = 0$$

وهي صحيحة لكل قيم (ωt) وبذلك :

عندما $\omega t = 0$ فإن $\sin\omega t = 0 , \cos\omega t = 1$

عندما $\omega t = \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin\omega t = 1, \cos\omega t = 0$

ومن هذين الشرطين يُحصل على :

$$V_m = I_m R \cos\alpha + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\alpha \quad \dots \quad (٨ـ٥٣)$$

$$\& \qquad I_m\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\cos\alpha = I_m R\sin\alpha \quad \ldots \quad (٨\text{ـ}٥٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٥٣) على زاوية الطور حيث:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{or} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٥٠) نفسها ومنها يمكن الحصول على:

$$\sin\alpha = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٥٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٥٤) يمكن الحصول على الممانعة الكلية Z حيث:

$$V_m = I_m\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \qquad \therefore Z = \left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٩) نفسها.

وأما متوسط القدرة فتخضع للعلاقة (٨ـ٤٠) نفسها حيث:

$$P_{av} = I_{rms}\, V_{rms} \cos\alpha$$

وأخيرا نستطيع القول إنه يمكن استنتاج معادلات جميع الحالات التي سبق دراستها من المعادلات (٨ـ٤٨)، (٨ـ٤٩) و(٨ـ٥٠).

مـثـــال (٨ـ٨)

وصلت مقاومة مقدارها 30 Ω وملف حثه الذاتي 0.5 H ومكثف سعته 30μ . F على التوالي بمصدر متردد جهده الفعال 220V وتردده 50 c/s.

احسب الممانعة الكلية للدائرة والتيار المار ومعامل القدرة ومتوسط القدرة المستهلكة.

الحـــــل

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.5 = 157\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 30 \times 10^{-6}} = 106\,\Omega$$

وطبقا للمعادلة (٨ـ٤٨) فإن الممانعة الكلية :

$$Z = \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} = [30^2+(156-106)^2]^{1/2} = 58.3\Omega$$

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{220}{58.3} = 3.74\ A$$

مع ملاحظة أن القيمة المعطاة للجهد والقيمة الناتجة للتيار هي القيمة الفعالة . وحسب المعادلة (٨ـ٥٥) فإن :

$$\cos\alpha = \frac{R}{Z} = \frac{30}{58.3} = 0.514$$

متوسط القدرة الفعالة

$$P_{av} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}}\cos\alpha \;= I_{rms}V_{rms}\cos\alpha$$

$$P_{av} = 3.74 \times 220 \times 0.514 = 422.9W$$

مـــثـــال (٨ـ٩)

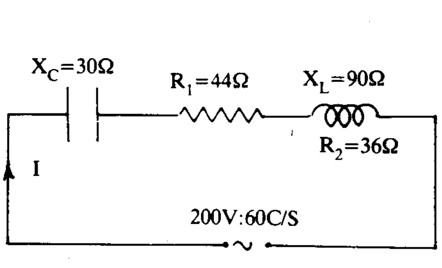
في الدائرة التالية احسب :

ا ـ التيار المار في الدائرة .

ب ـ فرق الجهد بين طرفي كل من المكثف والمقاومة والملف .

جـ ـ معامل القدرة للدائرة .

د ـ القدرة الممتصة بواسطة الدائرة .



الحـــل

أ -

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_c)^2}$$

$$Z = \sqrt{(44 + 36)^2 + (90 - 30)^2} = 100\ \Omega$$

$$\therefore \quad I_m = V_m/Z = 200/100 = 2\ A$$

ب -

$$V_C = I_m X_c = 2 \times 30 = 60\ V$$

$$V_{R1} = I_m R_1 = 2 \times 44 = 88\ V$$

$$V_L = I_m \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 2 \times 97 = 194\ V$$

جـ -

$$\cos\alpha = R/Z = 80/100 = 0.8$$

د -

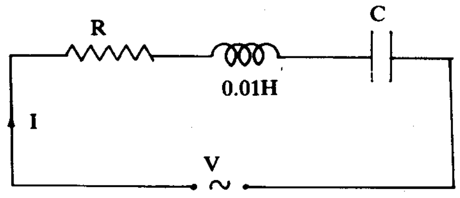
$$P_{av} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\alpha = \frac{200 \times 2 \times 0.8}{2} = 160W$$

مـثـال (١٠-٨)

احسب R و C في الدائرة التالية إذا كان:

$$V = 353.5 \cos(3000t - 10)\ V$$

$$I = 12.5 \cos(3000t - 55)\ A$$



الحـــل

التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها:

$$55 - 10 = 45°$$

$$\therefore \tan 45 = 1 = (\omega L - 1/\omega C)/R \quad \therefore (\omega L - 1/\omega C) = R$$

$$\&\ V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{2R^2} = 353.5/12.5$$

$$\therefore R = 20\ \Omega$$

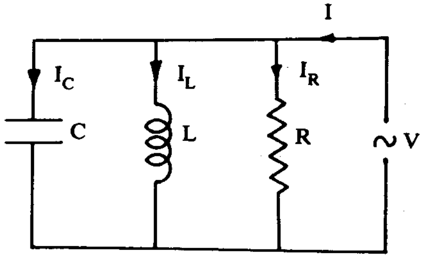
ومن المعادلة $(\omega L - 1/\omega C) = R$ يمكن معرفة C حيث:

$$C = 3.33 \times 10^{-5}\ F = 33.3\ \mu F$$

(٨ـ٦) دائرة التيار المتردد المتوازية «أو المتفرعة»
Parallel or Branched A.C. Circuit

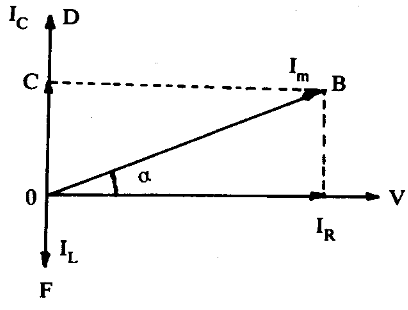
(٨ـ٦ـ١) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوازي R,C and L in Parallel

في دوائر التيار المتردد السابقة الذكر كانت المقاومة والملف والمكثف متصلة على التوالي وكان التيار له القيمة نفسها في جميع نقاط الدائرة ولكنها إذا وصلت على التوازي فإن كل تيار يمر بفرع معين يتوقف على قيمة المقاومة أو الممانعة بهذا الفرع والمجموع الاتجاهي (vector sum) لكل التيارات المارة بكل فرع يساوي التيار الكلي للدائرة.



شكل (٨ـ١٩): دائرة تيار متردد تحتوي على مقاومة R وملف L ومكثف C متصلة على التوازي.

توجد في الدائرة شكل (٨ـ١٩) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$ موصلة إلى دائرة تحتوي على مقاومة R أوم ورد حثي قيمته $X_L = \omega L$ أوم ورد سعوي قيمتـــه $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ أوم موصلة معـــا على التوازي. فإذا كان I هو التيار الكلي فإن:



شكل (٨ـ٢٠): مخطط المتجهات بين I_R ، I_L و I_C وعلاقتها بالمحصلة I وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (٨ـ١٩).

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad \cdot\cdot \quad (٨ـ٥٦)$$

بإهمال المقاومة الأومية لكل من L ، C يمكن الحصول على:

$$I_R = \frac{V}{R} \quad , \quad I_L = \frac{V}{\omega L} \quad , \quad I_C = VC\omega \quad (٨ـ٥٧)$$

ويتضح من الشكل (٨ـ٢٠) أن I_L متخلف (lags) عن V بزاوية قدرها π/2 و I_C متقدم (leads) عن V بزاوية قدرها π/2.

كذلك يوضح الشكل نفسه أن التيار المار في الملف يسري في عكس اتجاه التيار المار في المكثف C وأن التيار المار في المقاومة R متفق في الطور مع V. فإذا كان OD يمثل التيار خلال C و OF يمثل التيار خلال L فإن محصلتها يمثلها OC وهذه المحصلة مع I_R تعطي المحصلة I_m والممثلة بالمتجه OB ومما تقدم نجد أن:

$$I_m = \left\{I_R^2 + (I_C - I_L)^2\right\}^{1/2}$$

$$I_m = V\left\{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٨-٥٨})$$

ومن تعريف المانعة (impedance) يصبح:

$$Z = \frac{1}{\left\{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad \ldots \quad (\text{٨-٥٩})$$

ومقلوب Z يسمى بالقبولية (admittance) ويرمز لها بالرمز Y حيث:

$$Y = \frac{1}{Z} = \left\{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right\}^{1/2} \ldots\ldots \quad (\text{٨-٦٠})$$

ويسمى المقدار $(\omega C - 1/\omega L)$ بالتأثرية (susceptance) وهو معكوس المانعة.

ويسبق التيار الجهد أو يتخلف عنه بزاوية قدرها α حيث:

$$\tan\alpha = \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

$$\tan\alpha = \frac{V\omega C - \frac{V}{\omega L}}{\frac{V}{R}} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad \ldots\ldots \quad (\text{٨-٦١})$$

ومن المعادلات (٨ـ٥٨)، (٨ـ٥٩) و(٨ـ٦١) يمكن استنتاج الحالات الآتية :

ا ـ إذا كان التيار $I_L = 0$

أي أن الدائرة تحتوي على مقاومة ومكثف فقط، فإن تيار الدائرة يعطى، حسب المعادلة (٨ـ٥٨)، بالمعادلة التالية :

$$I_m = \left(I_R^2 + I_C^2\right)^{1/2} = V\left\{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٢)$$

حيث تصبح المهانعة :

$$Z = \frac{1}{\left\{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٣)$$

وزاوية الطـــور:

$$\tan\alpha = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = R\omega C \quad (٨ـ٦٤)$$

ب ـ إذا كان التيار $I_C = 0$

أي أن الدائرة تحتوي مقاومة وملف، فإن تيار الدائرة، حسب المعادلة (٨ـ٥٨)، يأخذ القيمة التالية :

$$I_m = \left(I_R^2 + I_L^2\right)^{1/2} = V\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٥)$$

حيث تصبح المهانعة :

$$Z = \frac{1}{\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{R^2\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٦)$$

وزاوية الطــور:

$$\tan\alpha = -\frac{R}{\omega L} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٨\text{–}٦٧)$$

والإشارة السالبة هنا تدل على أن التيار المحصل متخلف عن الجهد V.

جـ ـ إذا كان التيار $I_R = 0$

أي أن الـدائرة تحتوي على مكثف وملف فقط كما في الشكل (٢١ـ٨)، فإنه حسب مخطط المتجهات الواردة في الشكل (٢٢ـ٨) يكون التيار I_L متخلفا عن الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ بينما يتقدم التيار I_C الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ وتكون قيمة التيار المحصل:

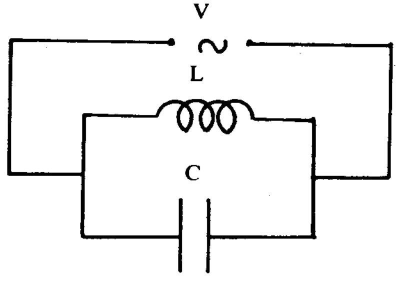
$I_m = I_L - I_C$ إذا كان $I_L > I_C$

أو

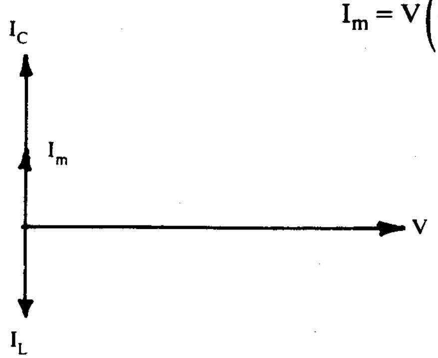
$I_m = I_C - I_L$ إذا كان $I_C > I_L$

وإذا أخذ في الاعتبار الحالة الأخيرة فإن شدة التيار المحصل:

$$I_m = V\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (٨\text{–}٦٨)$$



شكل (٢١ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومكثف C متصلة على التوازي.



شكل (٢٢ـ٨): مخطط المتجهات بين I_C و I_L للدائرة الواردة في شكل (٢١ـ٨) وعلاقتها بالمحصلة I

وهذا التيار يتقدم الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$. ويتضح من المعادلة (٨ـ٦٨) أن ممانعة هذه الدائرة هي :

$$Z = \frac{1}{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\omega L}{\omega^2 CL - 1} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٦٩)$$

وواضح من المعادلتين (٨ـ٦٨)، (٨ـ٦٩) أن التيار الكلي يصبح صفرا والممانعة تصبح لانهائية وذلك عند توفر شرط الرنين أي أن :

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L} \qquad \therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL}$$

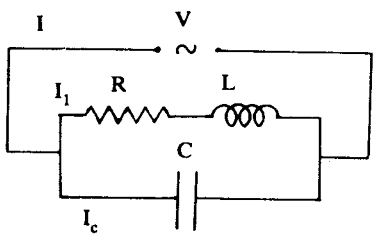
$$\therefore \omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}} \qquad \therefore f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \quad \ldots \quad (٨ـ٧٠)$$

حيث f_r هو تردد الرنين الذاتي للدائرة والذي عنده يكون التيار المحصل صفرا والمقاومة الكلية ما لانهاية وتعرف الدائرة في هذه الحالة بالدائرة الخانقة (rejector circuit) تمييزا لها عن دائرة رنين التوالي التي يكون فيها التيار نهاية عظمى والتي تسمى بالدائرة القابلة (acceptor circuit).

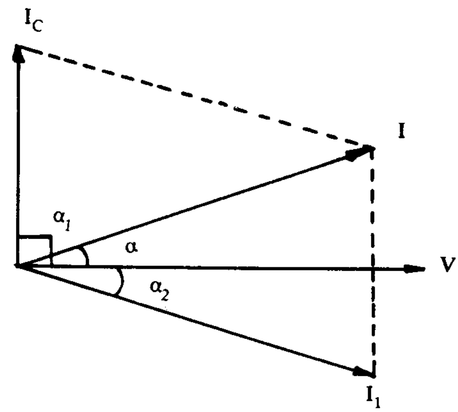
ويلاحظ أن التيار المحصل يختفي في حالة رنين الدائرة الخانقة بينما لا يختفي I_L ، I_C ويستفاد بالدائرة الخانقة في استبعاد الإشارة غير المرغوب فيها في الاستقبال اللاسلكي .

(٨ـ٦ـ٢) قوة دافعة كهربية على التوازي مع مكثف وملف حثي ذو مقاومة أومية
R L and C in Parallel

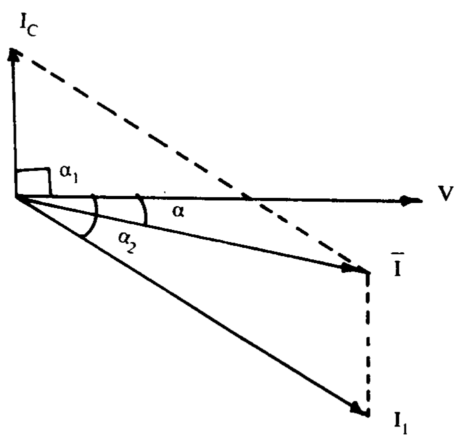
بالنظر إلى الدائرة (٨ـ٢٣) وإلى رسم مخطط المتجهات (٨ـ٢٤) يمكن القول بأن : التيار I_1 المار في الملف الذي حثه L ومقاومته R يتخلف عن الجهد بزاوية قدرها α_2 كما درس من قبل، في الشكل (٨ـ١١)، وأما التيار I_C المار في المكثف



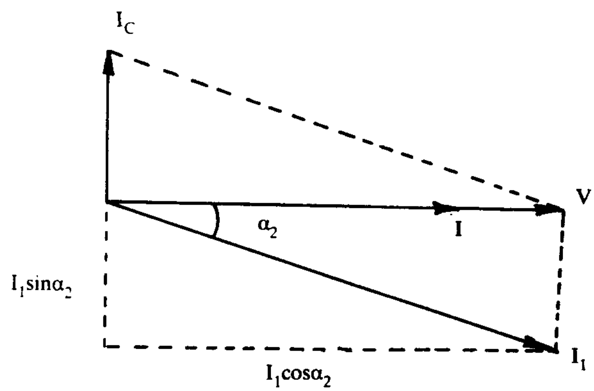
شكل (٨ـ٢٣): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L له مقاومة R يتصل على التوازي مع مكثف C



«ا»



«ب»



«ج»

شكل (٨ـ٢٤): مخطط المتجهات بين I_c ، I_1 و V للدائرة (٨ـ٢٢).

الـذي سعتـه C فيكون متقدما عن الجهد بزاوية $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ حيث:

$$I_C = V\omega C \qquad \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٧١)$$

وطبقا للمعادلة (٨ـ٣٧) يكون:

$$I_1 = \frac{V}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \;,\; \tan\alpha_2 = \frac{\omega L}{R} \quad \ldots \quad (٨\text{–}٧٢)$$

ويكون التيار المحصل:

$$I = \{I_C^2 + I_1^2 + 2\, I_c I_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\}^{1/2} \ldots \quad (٨\text{–}٧٣)$$

وهو متقدم أو متخلف عن الجهد بزاوية α حيث:

$$\tan\alpha = \frac{I_1 \sin\alpha_2 - I_C}{I_1 \cos\alpha_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٧٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٧٢) على:

$$\sin\alpha_2 = \frac{\omega L}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}} \;,\; \cos\alpha_2 = \frac{R}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}}$$

وبالتعويض عن I_c ، I_1 من المعادلتين (٨ـ٧١) و(٨ـ٧٢) وكذلك عن $\sin\alpha_1 , \cos\alpha_2$ في المعادلة (٨ـ٧٤) يمكن الحصول على:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٧٥)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٨ـ٧٣) يكون:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\ \cos\alpha_2 - \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha_2 = -\sin\alpha_2$$

وبالتعويض عن هذه القيمة و I_1 ، I_C في المعادلة (٨ـ٧٣) يمكن الحصول على:

$$I_m = V\left\{\omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 CL}{R^2+\omega^2 L^2} + \frac{1}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I_m = V\left\{\frac{\omega^2 C^2 (R^2+\omega^2 L^2) - 2\omega^2 CL + 1}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I_m = V\left\{\frac{\omega^2 C^2\left(R^2+\omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I = V\left\{\frac{\omega^2 C^2\left[R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2} \quad \ldots \quad (٧٦\text{ـ}٨)$$

وبذلك تكون قيمة الممانعة الكلية:

$$Z = \left\{\frac{R^2+\omega^2 L}{\omega^2 C^2\left[R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}\right\}^{1/2} \quad \ldots \quad (٧٧\text{ـ}٨)$$

وبالرجوع إلى الرسم الاتجاهي شكل (٢٤جـ ـ ٨) نجد أنه عندما يكون $I_C = I_1 \sin\alpha_2$ فإن:

$$I = I_1 \cos\alpha_2 = \frac{VR}{(R^2+\omega^2 L^2)} \quad \ldots\ldots \quad (٧٨\text{ـ}٨)$$

وذلك حسب المعادلة (٧٣ـ٨).

وهذا هو أقل تيار ممكن بالنسبة لهذه الدائرة في حالة الرنين الخانق ويصبح التيار المحصل متفقا في الطور مع الجهد V أي أن:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \tan\alpha = 0$$

وبالرجوع إلى معادلة (٧٥ـ٨) فإنه في حالة الرنين نجد أن:

$$L - C(R^2 + \omega_r^2 L^2) = 0$$

أو

$$L - CR^2 - C\omega_r^2 L^2 = 0$$

أو

$$- C\omega_r^2 L^2 = CR^2 - L$$

$$\therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٧٩)$$

وبالتعويض من (٨ـ٧٩) في معادلة (٨ـ٧٨) نُحصل على :

$$I = \frac{V \times RC}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨٠)$$

أي أن الممانعة تصبح في هذه الحالة مكافئة لمقاومة أومية قدرها :

$$Z_r = \frac{L}{RC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨١)$$

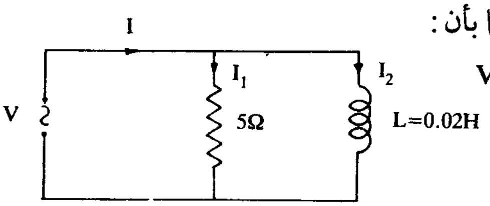
وتكون الدائرة في حالة رنين وخانقة أيضا .

وتعرف ممانعة الدائرة عند الرنين، المعادلة (٨ـ٨١)، بالمقاومة الديناميكية (dynamic resistance) للدائرة . وتكون ممانعة الدائرة حثية عند تردد أقل من تردد الرنين وقيمتها أقل من L/RC ، في حين عند تردد أكبر من تردد الرنين تصبح الممانعة سعوية وقيمتها أقل من L/RC أيضا .

مـثـال (٨ـ١١)

في الدائرة المجاورة احسب I علما بأن :

$V = 100 \sin (1000t + 50°)$



الحـل

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V dt$$

$$I = 20 \sin(1000t + 50°) - 5\cos(1000t + 50°) \quad \ldots - (\text{ا})$$

أو

$$I = A' \sin(1000t + 50°)\cos\alpha + A'\cos(1000t + 50°)\sin\alpha \ldots - (\text{ب})$$

من المعادلتين (ا) و (ب) نحصل على:

$$20 = A'\cos\alpha \quad \text{و} \quad -5 = A'\sin\alpha$$

$$\therefore \tan\alpha = -0.25 \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}(-0.25) = -14.04°$$

$$\& \; A' = \frac{20}{\cos\alpha} = 20.6$$

وبالتعويض في المعادلة (ب) نحصل على:

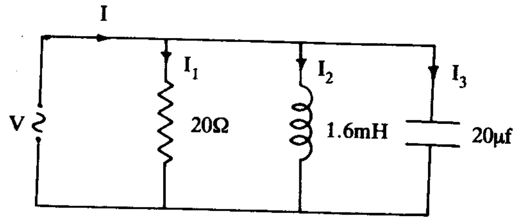
$$I = 20.6 \sin(1000t + 50° - 14.05) = 20.6\sin(1000t + 35.95) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها 14.05°.

مثـــال (١٢ـ٨)

في الدائرة المجاورة احسب I علما بأن:

$$V = 50\sin(5000t + 45°)$$



الحـــل

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V dt + C\frac{dV}{dt}$$

$$I = 2.5\sin(5000t + 45°) - 6.25\cos(5000t + 45°)$$
$$+ 5\cos(5000t + 45)$$

$$\therefore \quad I = 2.5\sin(5000t + 45°) - 1.25\cos(5000t + 45°)$$

وباتباع الطريقة السابقة نفسها في المثال (١١ـ٨) نحصل على:

$$I = 2.8\sin(5000t + 18.4°) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها:

$$45° - 18.4° = 26.6°$$

(٨-٧) دوائر الرنين المتوالية والمتوازية ومعامل النوعية
Series, Parallel Resonance and Quality Factor

(٨-٧-١) دائرة الرنين المتوالية Series resonance

وجد في البند (٨-٥-٣) أن الدائرة الكهربية المكونة من مقاومة ومكثف وملف والمتصلة على التوالي كما في شكل (٨-١٧) تكون في حالة رنين عندما يكون التيار والجهد في توافق طوري وأن قيمة الممانعة الكلية تساوي قيمة المقاومة R فقط ومنه فإن:

$$V_m = I_m R$$

$$X_L = X_C \quad \text{or} \quad \omega_r = 1/\sqrt{LC}$$

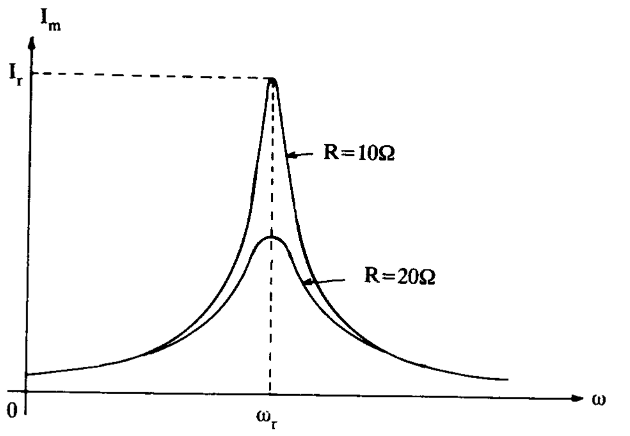
وحيث إن $\omega = 2\pi f$ فإن قيمة التردد الرنيني في هذه الحالة تعطى بالمعادلة (٨-٥١) أي أن:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٨-٨٢)$$

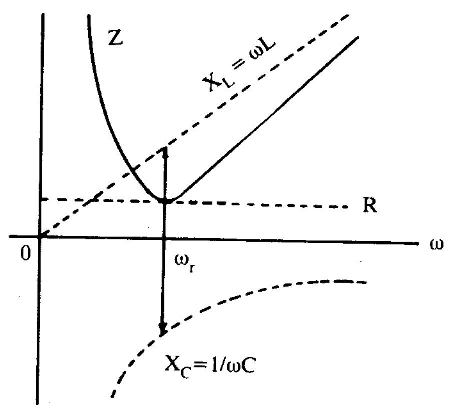
وحسب المعادلة (٨-٤٨) فإن العلاقة البيانية بين التيار المار في الدائرة I_m وتردد مصدر الجهد ω يمثلها المنحنى المبين في الشكل (٢٥ - ٨) والذي يسمى بمنحنى الرنين (resonance curve) للدائرة. وتؤخذ حدة (sharpness) منحنى الرنين كمقياس للدائرة على اختيار إحدى الإشارات الموجية التي يتساوى ترددها مع التردد الذاتي f_r للدائرة. ويلاحظ من الشكل (١٢٥ - ٨) أن الدائرة التي تحتوي على مقاومة صغيرة تكون أكثر قدرة على الاختيار من الدائرة التي تحتوي على مقاومة كبيرة.

ويبين الشكل (٢٥ب - ٨) العلاقة بين القيمة المطلقة للممانعة Z ومركباتها R ، X_L ، X_C وبين تردد مصدر الجهد ω ويلاحظ أنه عندما $\omega = \omega_r$ تتساوى الرادة السعوية مع الحثية.

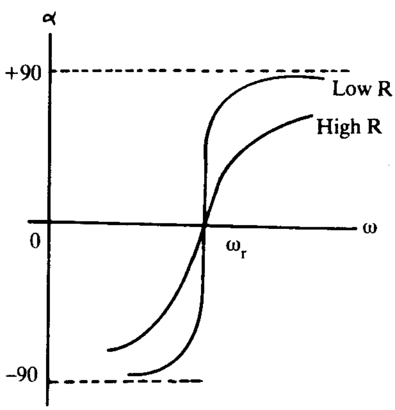
والعلاقة بين زاوية الطور α وتردد المصدر يمثلها الشكل (٢٥جـ - ٨) وواضح أنه إذا كان التردد ω أقل من التردد الرنيني ω_r فإن الرادة السعوية تكون أكبر من الرادة



«ا»



«ب»



«ج»

شكل (٨-٢٥): ا ـ العلاقة بين التيار I_m والسرعة الزاوية ω للدائرة المتوالية RCL الواردة في الشكل (٨-١٧) لقيمتين مختلفتين لـ R ولتوضيح حالة الرنين ω_r.

ب ـ العـلاقة بين القيمة المطلقة للمانعة Z ومركباتها R و X_L و X_C وبين السرعة الزاوية ω لتردد المصدر.

جـ ـ العلاقة بين زاوية الطور وتردد المصدر.

الحثية، وزاوية الطور للممانعة تكون سالبة، وكلما اقتربت ω إلى الصفر كلما اقتربت الزاوية α إلى $-90°$. أما إذا كانت ω أكبر من ω_r فإن الرادة الحثية تكون أكبر من الرادة السعودية وزاوية الطور موجبة وتقترب α من $90°$ كلما كانت $\omega >> \omega_r$.

ويعرف معامل النوعية (quality factor) للملفات والمكثفات والدوائر بالمعادلة:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energy stored in circuit (الطاقة المخزونة في الدائرة)}}{\text{energy dissipated per cycle (الطاقة المبددة لكل دورة)}} \quad \ldots \quad (٨\text{–}٨٣)$$

فالطاقة المبددة لكل دورة في الدائرتين الكهربيتين (٨–١١) و(٨–١٤) تمثل حاصل ضرب متوسط القدرة للمقاومة $(I_m/\sqrt{2})^2R$ في زمن الدورة وقدره T أو $1/f$. وتكون الطاقة المخزونة، في الدائرة المكونة من ملف ومقاومة متصلين على التوالي، تساوي $\frac{1}{2}L\,I_m^2$ وبذلك فإن معامل النوعية يساوي:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}L\,I_m^2}{(I_m^2/2)\,R(1/f)} = \frac{2\pi f L}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad \ldots \quad (٨\text{–}٨٤)$$

أما بالنسبة للدائرة المكونة من مكثف ومقاومة متصلين على التوالي فإن الطاقة المخزونة تساوي $\frac{1}{2}C\,V_m^2$ أو $\frac{1}{2}I_m^2/\omega^2C$ وبذلك فإن معامل النوعية يساوي:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_m^2/\omega^2 C}{(I_m^2/2)\,R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨٥)$$

أما في الدائرة RLC المتوالية وفي حالة الرنين يكون:

$$\frac{1}{2}C\,V_m^2 = \frac{1}{2}L\,I_m^2$$

ومنه يُحصل على:

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨٦)$$

وكما هو واضح أن حدة الرنين، لمنحنى الرنين، تعتمد على R فهي أيضا تعتمد على Q_r ويعطى فرق الجهد بين طرفي الملف والمكثف من المعادلتين التاليتين:

$$V_C = \frac{I_m}{\omega_r C} \quad , \quad V_L = I_m \omega_r L$$

$$V_C = \frac{I_m R}{\omega_r C R} \quad , \quad V_L = I_m R \frac{\omega_r L}{R} \quad \ldots \quad (٨\text{–}٨٧)$$

وبالتعويض من المعادلتين (٨–٨٤) و(٨–٨٥) في المعادلتين (٨–٨٧) يمكن الحصول على:

$$V_C = Q_r V_m \quad \text{و} \quad V_L = Q_r V_m \; \ldots\ldots \quad (٨\text{–}٨٨)$$

وتبين هاتان المعادلتان أن الجهد V_L و V_C أكبر من القيمة العظمى لجهد المصدر V_m وهذا يفسر تعريف الكمية Q_r بالتكبير (magnification). وبالتعويض في إحدى المعادلتين (٨–٨٨) من العلاقتين (٨–٨٤) و(٨–٨٥) يُحصل على:

$$V_L = \frac{\omega_r L}{R} V_m = \frac{L}{R\sqrt{LC}} V_m = \frac{V_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \; . \quad (٨\text{–}٨٩)$$

وتبين هذه المعادلة أن فرق الجهد بين طرفي الملف عند الرنين ولقيمة معينة لجهد المصدر يمكن زيادته إما بإنقاص R أو بزيادة النسبة L/C.

كذلك يستخدم المعامل Q للتعبير عن ترددين عندهما يقل التيار إلى $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من قيمته عند الرنين ويعرف هذان الترددان بنقطتي نصف القوة (hafl-power points) ويعطى التيار عند أي تردد، حسب المعادلة (٨–٤٨)، بالمعادلة:

$$I_m = \frac{V_m}{\left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} = \frac{V_m}{R} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{\omega_r L}{R}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

حيث $\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$. وباعتبار أن تيار الدائرة عند الرنين يساوي $I_r = V_m/R$ فإن معادلة التيار السابقة تصبح:

$$I_m = \frac{I_r}{\left\{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad \ldots . \quad (٨-٩٠)$$

وتمثل هذه المعادلة تيار الدائرة عند أي قيمة للتردد والذي يعرف بالتيار البعيد عن الرنين (off-resonance) وباستخدام بعض التقريب الذي ينطبق في الحالات العملية يمكن اعتبار أن:

$$\omega \simeq \omega_r$$

$$\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \cdot \frac{\omega + \omega_r}{\omega}$$

واعتبار أن:

$$\frac{\omega + \omega_r}{\omega} \simeq 2$$

وبالتالي تؤول معادلة تيار الدائرة إلى الصيغة:

$$I_m \simeq \frac{I_r}{\left\{1 + (2Q)^2\left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

وبوضع:

$$\omega - \omega_r = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

حينئذ:

$$\frac{I_m}{I_r} = 1\Big/\left\{1 + (2Q)^2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\frac{I_m}{I_r} = 1\Big/\left\{1 + (2Q)^2\left(\frac{\Delta f}{f_r}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots . \quad (٨-٩١)$$

فإذا وضعت النسبة $\Delta f/f_r$ مساوية إلى $(\frac{1}{2Q})$ فإنه يمكن الحصول على:

$$\frac{I_m}{I_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨-٩٢)$$

وبالتالي تعطى نقطتا نصف القوة على المنحنى الرنيني بالمعادلة:

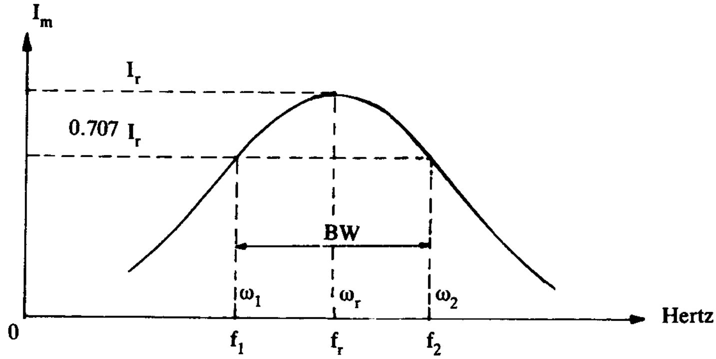
$$\frac{\Delta f}{f_r} = \pm \frac{1}{2Q} \qquad \text{(٨-٩٣)}$$

ويبين الشكل (٨-٢٦) مدى التردد بين نقطتي نصف القوة $2\Delta f$ والذي يعرف بالاتساع الشريطي (band width – BW) ويعطى بالمعادلة :

$$BW = f_2 - f_1 = 2\Delta f = f_r / Q \qquad \text{(٨-٩٤)}$$

من ذلك فإن العلاقة بين التكبير Q والاتساع الشريطي تعطى بالمعادلة :

$$\frac{1}{Q} = \frac{f_2 - f_1}{f_r} \qquad \text{(٨-٩٥)}$$



شكل (٨-٢٦) : العلاقة بين التيار I_m وتردد المصدر لتوضيح التردد الرنيني f_r للدائرة RCL المتوالية ولمعرفة الاتساع الشريطي $2\Delta f$ ونقطتي نصف القوة f_1 و f_2.

وتعرف f_1 ، f_2 بنقطتي نصف القوة على منحنى الاستجابة . وتمثل f_1 التردد الأدنى لتردد نصف القوة (lower half-power frequency) وتمثل f_2 التردد الأعلى لتردد نصف القوة (upper half-power frequency).

ويمكن معرفة قيمة كل من f_1 ، f_2 من المعادلتين (٨-٤٨) و(٨-٩٢) كالتالي :

١ ـ *بالنسبة للتردد f_2*

يكون $X_L > X_C$ وتصبح المعادلة (٨-٤٨) كالتالي :

$$\frac{V_m}{R} = I_m \left\{ 1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2} \right\}^{1/2}$$

أو

$$\frac{I_r}{I_m} = \left\{1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2}\right\}^{1/2}$$

حيث $I_r = \frac{V_m}{R}$. وحسب المعادلة (٨ـ٩٢) تصبح هذه المعادلة كالتالي :

$$2 = 1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2}$$

أو

$$\therefore R = X_L - X_C = 2\pi f_2 L - \frac{1}{2\pi f_2 C} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٩٦)$$

ومنه فـإن :

$$f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٩٧)$$

٢ ـ بالنسبة للتردد f_1

يكون $X_C > X_L$ وتصبح المعادلة (٨ـ٤٨) كالتالي :

$$\frac{V_m}{R} = I_m \left\{1 + \frac{(X_C - X_L)^2}{R^2}\right\}^{1/2}$$

وباتباع الطريقة السابقة نفسها يمكن الحصول على :

$$R = X_C - X_L = \frac{1}{2\pi f_1 C} - 2\pi f_1 L \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٩٨)$$

ومنه فـإن :

$$f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٩٩)$$

ومن المعادلتين (٨ـ٩٧) و(٨ـ٩٩) يمكن الحصول على :

$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} = 2\Delta f \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ١٠٠)$$

كما هو واضح من الشكل (٨ـ٢٦) والمعادلة (٨ـ١٠٠) فإن :

$$\Delta f = f_r - f_1$$

و

$$\Delta f = f_2 - f_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ١٠١)$$

$$\therefore \quad R = 4\pi(f_r - f_1)L = 4\pi(f_2 - f_r)L \quad \ldots \quad (٨ـ١٠٢)$$

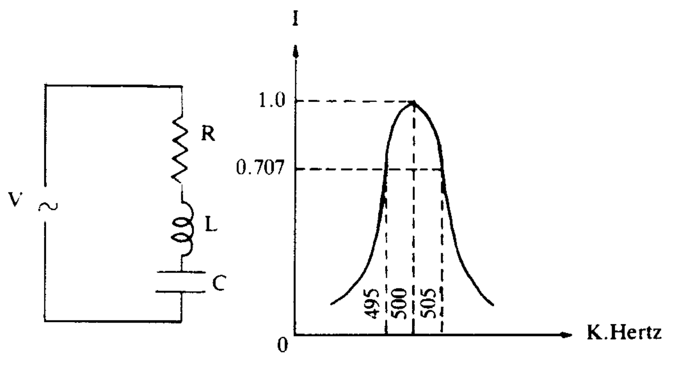
وجدير بالذكر أن R تمثل المقاومة الكلية لدائرة الرنين المتصلة على التوالي بما فيها المقاومة الداخلية لمصدر الجهد إن وجد في الدائرة .

مما تقدم أمكن الحصول على حالة الرنين بتغيير تردد المصدر مع بقاء قيم R ، L ، C ثابتة ويسمى المنحنى ، شكل (٨ـ٢٦) ، بين تيار الدائرة وتردد المصدر بمنحنى الرنين (resonance curve).

كذلك يمكن الحصول على حالة الرنين بتغيير قيم L أو قيم C (عادة تتغير قيم C) مع بقاء تردد المصدر ثابت عند قيمة معينة ويسمى المنحنى بين تيار الدائرة وقيم C بمنحنى الاستجابة (response curve).

مثال (٨ـ١٣)

يبين الشكل دائرة تحتوي على مكثف C وملف L له مقاومة أومية R متصلة على التوالي بمصدر جهد متغير التردد حيث جهده الفعال $3\,V_{rms}$ وبرسم منحنى الرنين للدائرة وجد أنه ينطبق على المنحنى المبين بالشكل .



احسب قيمة كل من الحث الذاتي للملف وسعة المكثف والمقاومة وكذلك الجهد الواقع على طرفي هذه المكونات الثلاثة عند تردد 500 kc/s.

الحـــل

حيث إن الاتساع الشريطي للدائرة يساوي

$$f_r / Q = 505000 - 495000 = 10000$$

$$Q = \frac{500000}{10000} = 50$$

وحيث إن التيار عند الرنين يساوي 1A وجهد المصدر يساوي 3V

$$R = \frac{V}{I_r} = 3\,\Omega$$

وباستخدام معادلة عامل النوعية حيث:

$$Q = 2\pi f_r L/R$$

يمكن إيجاد معامل الحث الذاتي للملف L. أي أن:

$$L = QR / 2\pi f_r = (50 \times 3) / (6.28 \times 500000)$$

$$L = 47.77 \times 10^{-6}\,H = 47.77\,\mu H$$

وحيث إن:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 L} = \frac{1}{(6.28 \times 500000)^2 \times 47.77 \times 10^{-6}}$$

$$C = 0.00212\,\mu F = 2120\,pF$$

عند الرنين يُحصل على:

$$\text{Voltage across } R = I_r R = 1 \times 3 = 3V$$

$$\text{Voltage across } L = Q_r V = 50 \times 3 = 150\,V$$

$$\text{Voltage across } C = Q_r V = 150\,V$$

مـثـال (١٤ـ٨)

احسب معامل النوعية Q_r لدائرة متوالية تحتوي على :

$$C = 1\mu f \quad , \quad L = 0.05H \quad , \quad R = 20\Omega$$

مستعملا الصيغ التالية :

$$Q_r = \omega_r L/R = 1/\omega_r CR = f_r / BW$$

الحـــل

$$\omega_r = 1 / \sqrt{LC} = 1 / \sqrt{0.05 \times 10^{-6}} = 4470 \text{ rad/s}$$

$$\therefore \; f_r = \omega_r / 2\pi = 712 \text{ Hz}$$

$$\therefore \; Q_r = \omega_r L/R = 4470\,(0.05) / 20 = 11.2$$

$$Q_r = 1 / \omega_r CR = 1 / (4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11.2$$

$$\therefore \; \frac{1}{2\pi f_1 C} - 2\pi f_1 L = R$$

$$\& \quad 2\pi f_2 L - \frac{1}{2\pi f_2 C} = R$$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين عن L, C, R نحصل على :

$$f_1 = 681 \text{ Hz} \quad \& \quad f_2 = 745 \text{ Hz}$$

$$\therefore \; BW = (745 - 681) \text{ Hz} = 64 \text{ Hz}$$

$$\therefore \; Q_r = \frac{f_r}{BW} = \frac{712}{64} = 11.1 \text{ Hz}$$

(٨ـ٧ـ٢) دائرة الرنين المتوازية Parallel resonance

إذا كان L ، C و R ثابتة في الدائرة المبينة في شكل (١٩ـ٨) وكان جهد المصدر ثابتا وتردده متغيرا فإن العلاقة بين التيار الكلي، المعادلة (٥٨ـ٨)، وتردد المصدر يمثلها الشكل (١٢٧ ـ ٨).

ويتضح من هذا الشكل ما يلي :

١ ـ يكون التيار أقل ما يمكن عند حالة الرنين وفيه تكون الرادة السعوية تساوي الرادة الحثية، $X_C = X_L$ ويلغي التيار I_C المار في المكثف التيار المار في الملف I_L والمختلف معه في الطور ولا يبقى إلا التيار المار في المقاومة فقط ولذلك تعتمد قيمة التيار على

قيمة المقاومة R ، فإذا كانت R كبيرة يكون التيار صغيرا والعكس إذا كانت R صغيرة يكون التيار كبيرا .

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٥٨) على :

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L}$$

أو

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \cdots\cdots \quad (٨ـ١٠٣)$$

و

$$\therefore \quad I_r = \frac{V_r}{R} \quad \cdots\cdots \quad (٨ـ١٠٤)$$

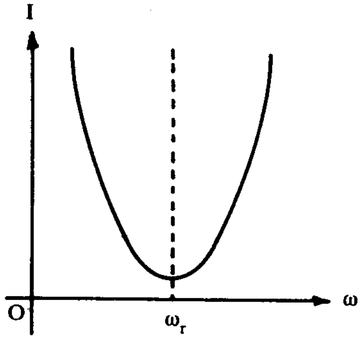
٢ ـ إذا كان التردد أقل من التردد الرنيني يكون التيار المار في الملف L أكبر من التيار في المكثف C وذلك بسبب أن الرادة الحثية تكون صغيرة في حالة التردد المنخفض بينما تكون الرادة السعوية كبيرة ويحصل في هذه الحالة إلغاء جزئي بين I_C و I_L ويكون التيار الكلي أكبر منه في حالة الرنين .

٣ ـ إذا كان التردد أعلى من التردد الرنيني تكون الحالة عكسية حيث يكون التيار I_C أكبر من I_L ويزداد بذلك التيار الكلي .

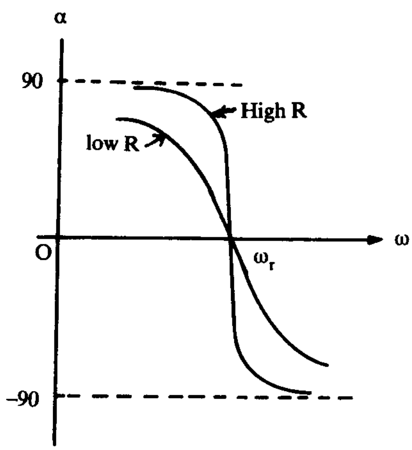
وبدراسة مماثلة لدائرة الرنين المتوالية فإن التيار البعيد عن الرنين وعلاقته بـ ω يمكن الحصول عليه من المعادلة (٨ـ٥٨) حيث يكون :

$$I = I_r \Big/ \left\{1 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2\right\}^{1/2} . \quad (٨ـ١٠٥)$$

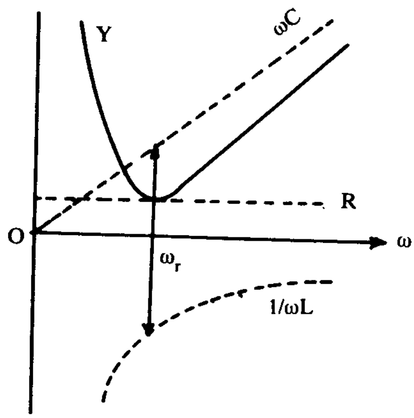
ويوضح الشكل (٢٧ب ـ ٨) العلاقة بين Y وبين ω للمصدر كما يوضح الشكل (٢٧جـ ـ ٨) العلاقة بين زاوية الطور α و ω وذلك حسب المعادلتين (٨ـ٦٠) و(٨ـ٦١) .



«ا»



«جـ»



«ب»

شكل (٢٧ـ٨): ا ـ العلاقة بين التيار I للدائرة المتوازية RCL الواردة في الشكل (١٩ـ٨) وتردد المصدر f «حيث $\omega = 2\pi f$» لتوضيح حدوث الرنين ω_r
ب ـ العلاقة بين السماحية Y ومركباتها R ، X_L و X_c وبين تردد المصدر.
جـ ـ العلاقة بين زاوية الطور α وتردد المصدر أيضا.

وإذا درست الـدائـرة الـواردة في الشكل (٢٣ـ٨) وكانت المقاومة الأومية (R) للملف أقـل كثـيرا من الممانعة الحثية ($X_L = \omega L$) ، فإن المعادلة (٧٩ـ٨) تؤول إلى الصيغة التقريبية التالية :

$$\omega_r^2 = 1/LC$$

$$\therefore f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨ـ١٠٦})$$

حيث f_r يمثل تردد الرنين الخانق المقابل للممانعة L/CR. وفي هذه الحالة يمكن صياغة المعادلة (٨١ـ٨) لتصبح على الصورة :

$$Z_r = \frac{L}{CR} = \frac{\omega_r L}{\omega_r CR} = \frac{Q}{\omega_r C} = Q\,\omega_r L \quad \ldots \quad (\text{٨ـ١٠٧})$$

حيث عامل النوعية :

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR}$$

وذلك عند حالة الرنين الخانق .

ويمكن استنتاج نقطتي نصف القوة بطريقة مماثلة للدائرة المتصلة على التوالي وذلك باعتبار الممانعة البعيدة عن الرنين (off-resonance) الممثلة بالمعادلة (٧٧ـ٨) حيث

$$Z = \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$Z = \frac{L}{RC} \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 \left[1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$Z = \frac{L}{RC} \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 \left[1 + \frac{\omega_r^2 L^2}{R^2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

وباعتبار أن : $\omega \simeq \omega_r$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \cdot \frac{\omega + \omega_r}{\omega}$$

و

$$\frac{\omega + \omega_r}{\omega_r} = 2$$

$$\therefore Z = \frac{L}{RC}\left\{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2\left[1 + (2Q)^2\left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2\right]}\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{L}{RC}\left\{\frac{(1/Q^2) + 1}{1 + (2Q)^2\left(\frac{\Delta f}{f_r}\right)^2}\right\}^{1/2} \quad \ldots \quad (٨\text{-}١٠٨)$$

حيث اعتبر أن :

$$\omega - \omega_r = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

و

$$\omega_r = 2\pi f_r$$

وحيث إنه فرض مسبقا أن $R << X_L$ فإن : $\frac{1}{Q_r} << 1$

$$Z = Z_r \frac{1}{\left\{1 + (2Q)^2\left(\frac{\Delta f}{f_r}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$\frac{Z}{Z_r} = 1 \Big/ \left\{1 + (2Q)^2\left(\frac{\Delta f}{f_r}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{-}١٠٩)$$

فإذا كانت النسبة $\Delta f/f_r$ تساوي $\frac{1}{2Q}$ فإن النسبة بين الممانعة البعيدة عن الرنين إلى الممانعة عند الرنين تؤول إلى الصيغة :

$$\frac{Z}{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{-}١١٠)$$

وتكـون نقطتا نصف القوة لهذه الدائرة مماثلتين لحالة دائرة متصلة على التوالي ولذلك فإن :

$$\frac{\Delta f}{f_r} = \pm \frac{1}{2Q}$$

أي أن الاتساع الشريطي للدائرة يعطى بالمعادلة :

$$f_2 - f_1 = 2\Delta f = \frac{f_r}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{–}١١١)$$

حيث f_1 ، f_2 هما نقطتا نصف القوة على العلاقة البيانية بين ممانعة الدائرة والتردد .

(٨ـ٨) استخدام الأعداد المركبة وتطبيقات عامة

Complex Numbers Usage

(٨ـ٨ـ١) استخدام الأعداد المركبة في دوائر التيار المتردد

Complex numbers in A.C. circuits

طريقــة التحليل هذه لدوائــر التيار المـتردد تعـرف بمتجـه الـطور الجـبري (phasor algebra) أو في بعض الأحيان بالمتجـه الجـبري (vector algebra) أو بالجبر المركب (complex algebra) أو الأعداد المركبة .

وتستخـدم هذه الطريقة في حالة الدوائر المركبة التي تحتوي على مصادر جهد متردد وممـانعات ثابتة تعمل تحت ظروف مستقرة ، بمعنى أن التغير في الجهد والتيار يتكرر بانتظام مثل التغير الدوري الحادث للأشكال الموجبة الجيبية .

لقـد درس في البنود السابقة حساب الممانعة الكلية وزاوية الطور لدوائر التيار المتردد بطريقتين إحداهما طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها والثانية طريقـة رسم مخطط ضابط الـطور (مخـطط المتجهـات) . ويصعب استعـمال هاتـين الطريقتين كلما تعقدت الدائرة الكهربية المراد دراستها . وقد وجد أنه باستعمال طريقة

الأعداد المركبة يمكن دراسة دوائر التيار المتردد المعقدة بسهولة كما يمكن دراسة الدوائر التي درست في البنود السابقة بسهولة أكثر من الطريقتين السابقتين.

يتكون العدد المركب، كما هو معروف، من معادلة رياضية تشتمل على كميات حقيقية وكميات تخيلية، سيرد تفصيل ذلك في الملحق (٢)، ويكتب بالصورة التالية:

$$Z = x + iy \;\; ; \;\; i = \sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}١١٢)$$

ويمكن تمثيل هذا العدد بيانيا كما في الشكل (٨ـ٢٨) حيث يمثل المحور x الجزء الحقيقي (real part) بينما يمثل المحور y الجزء التخيلي (imaginary part).

إذا مثلت المقاومة الأومية R والرد الحثي $X_L = \omega L$ والرد السعوي $X_C = 1/\omega C$ بيانيا، مع أخذ التيار I_m كخط إسناد، كما في الشكل (٨ـ٢٩) ووُزن بالشكل (٨ـ٢٨) فإنه يمكن القول إن R تمثل الجزء الحقيقي بينما X_L تمثل الجزء التخيلي الموجب و X_C تمثل الجزء التخيلي السالب.

لذلك إذا احتوت الدائرة الكهربية على مقاومات أومية وملفات ومكثفات متصلة على التوالي فإن الممانعة الكلية المركبة يمكن حسابها بجمع المقاومات الأومية، تمثل الجزء الحقيقي، وجمع الردود الحثية X_L والردود السعوية X_C، تمثل الجزء التخيلي بحيث تصبح معادلة الممانعة الكلية المركبة Z كالتالي:

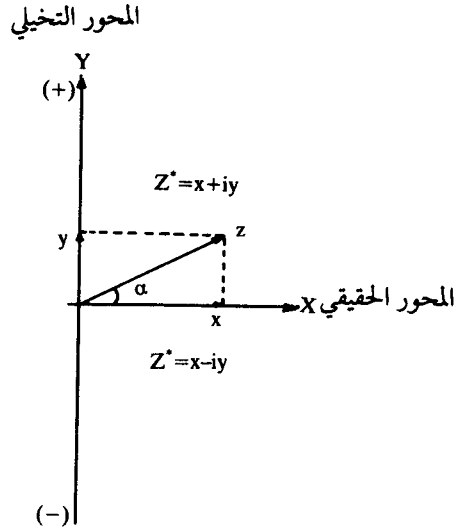
$$Z = (\text{العدد الحقيقي} = \text{مقاومات}) + i\{(\text{العدد التخيلي} = (\text{الردود السعوية} - \text{الردود الحثية})\} \quad (٨\text{ـ}١١٣)$$

فإذا كانت نتيجة الجزء التخيلي موجبة يمكن القول بأن الممانعة المركبة تكافىء دائرة مكونة من مقاومة وملف وتكون القيمة المطلقة للممانعة هي:

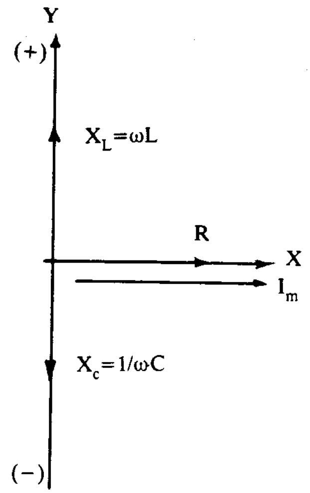
$$Z = \left\{(\text{العدد الحقيقي})^2 + (\text{العدد التخيلي})^2\right\}^{1/2} \ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}١١٤)$$

ويصنع اتجاهها مع الاتجاه الحقيقي الموجب زاوية α، تسمى بزاوية الطور، مقدارها

$$\tan\alpha = \frac{\text{التخيلي}}{\text{الحقيقي}} \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}١١٥)$$



شكل (٢٨ـ٨): تمثيل العدد المركب Z على محوري X «الحقيقي» و Y «التخيلي».



شكل (٢٩ـ٨): تمثيل المقاومة الأومية R «كجزء حقيقي» والرد الحثي X_L «كجزء تخيلي موجب» والرد السعوي X_C «كجزء تخيلي سالب».

أما إذا كانت نتيجة الجزء التخيلي سالبة فإن الممانعة المركبة تكافىء ممانعة دائرة مكونة من مقاومة ومكثف. قيمتها المطلقة وزاوية الطور في هذه الحالة تماثل الحالة السابقة.

فإذا احتوت الدائرة الكهربية على فروع مختلفة وكل فرع يحتوي على مقاومات وملفات ومكثفات فإن الممانعة الكلية المركبة تحسب بحساب ممانعة كل فرع ثم تجمع ممانعات الفروع حسب الطريقة المتبعة لجمع المقاومات الأومية المعروفة على التوازي والتوالي.

بعد حساب الممانعة الكلية المركبة يمكن حساب زاوية الفرق في الطور باستعمال المعادلة (١١٥ـ٨).

كما يمكن معرفة أن المقاومة الأومية R تمثل الجزء الحقيقي والرد الحثي يمثل الجزء التخيلي الموجب والرد السعوي يمثل الجزء التخيلي السالب مما يلي:

ا ـ ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف على التوالي

نفرض أن مصدرا مترددا قوته الدافعة الكهربية V حيث:

$$V = V_m e^{i\omega t} \quad .... \quad (٨\text{ـ}١١٦)$$

يدفع تيارا مترددا قدره I في مقاومة R وملف حثه الذاتي L متصلة على التوالي كما في شكل (٨ـ١١). كما هو واضح من المعادلتين (٢ـ٥٥) و(٢ـ٥٦) ملحق ٢ أن الدالة $e^{i\omega t}$ تشمل $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$. وبتطبيق قاعدة كيرشوف لتوزيع الجهد على الدائرة المبينة بالشكل (٨ـ١١) يمكن الحصول على:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = V_m e^{i\omega t} \quad ...... \quad (٨\text{ـ}١١٧)$$

وهذه هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها هو أن يكون $I = Ke^{i\omega t}$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ١١٧) يُحصل على:

$$RKe^{i\omega t} + i\omega L\, Ke^{i\omega t} = V_m e^{i\omega t}$$

ويمكن الحصول من هذه المعادلة على:

$$K = \frac{V_m}{R + i\omega L} \qquad \therefore I = \frac{V_m}{R + i\omega L} e^{i\omega t}$$

$$\therefore Z = \frac{V}{I} = \frac{V_m e^{i\omega t}}{\dfrac{V_m}{R + i\omega L} e^{i\omega t}} = R + i\omega L \quad . \quad (٨\text{ـ}١١٨)$$

وبذلك فالممانعة المركبة لهذه الدائرة تحتوي على جزء حقيقي R وتخيلي $i\omega L$.

ب ـ ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف على التوالي

بفرض أن المصدر نفسه متصل على التوالي مع مقاومة R ومكثف سعته C وبتطبيق قاعدة كيرشوف على الدائرة شكل (٨ـ١٤) تكتب معادلتها بالصورة التالية:

$$RI + \frac{1}{C}\int I dt = V_m e^{i\omega t}$$

وإذا فرض أن $I = Ke^{i\omega t}$ وبالتعويض في هذه المعادلة يكون:

$$R\,Ke^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C}\,Ke^{i\omega t} = V_m\,e^{i\omega t}$$

ويمكن الحصول من هذه المعادلة على :

$$K = \frac{V_m}{R + (1/i\omega C)} = \frac{V_m}{R - i(1/\omega C)}$$

$$\therefore I = \frac{V_m}{R - i(1/\omega C)}\,e^{i\omega t}$$

$$\therefore Z = \frac{V_m\,e^{i\omega t}}{\dfrac{V_m}{R - i(1/\omega C)}\,e^{i\omega t}} = R - i(1/\omega C) \cdot\cdot \quad (\text{٨ـ١١٩})$$

وهذه الممانعة تحتوي على جزء حقيقي R وتخيلي $-i(1/\omega C)$.

من المعـادلتين (٨ـ١١٨) و(٨ـ١١٩) يتضح أنه عند حساب ممانعة أي دائرة مترددة أن الممانعة عدد مركب Z يحتوي على جزء حقيقي R إذا كانت هناك مقاومات وجزء تخيلي $i\omega L$ للملف و $-i(1/\omega C)$ للمكثف .

ومن المعادلة (٨ـ١١٨) والمعادلتين (٢ـ٥٣) و(٢ـ٥٤) ملحق ٢ تكون القيمة المطلقة للممانعة للدائرة [شكل (٨ـ١١)] هي :

$$|Z| = \left\{(R^2 + (\omega L)^2\right\}^{1/2}$$

وزاوية فرق الطور هي :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

وهما المعادلتان (٨ـ٣٦) و(٨ـ٣٨) نفسيهما اللتان تم الحصول عليهما في البند (٨ـ١٥) . ويمكن بالطريقة نفسها الحصول من المعادلة (٨ـ١١٩) على قيمتي الممانعة وزاوية الطور والمماثلة للمعادلتين (٨ـ٤٦) و(٨ـ٤٧) أي أن :

$$|Z| = \left\{(R^2 + (1/\omega C)^2\right\}^{1/2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

والإشارة السالبة تدل على تأخر الجهد عن التيار بزاوية طور مقدارها α.

مما سبق دراسته في هذا البند وما سيرد في الملحق ٢ عن خواص الأعداد المركبة يمكن بسهولة دراسة الدوائر الكهربية المترددة ويتضح ذلك من التطبيقات والأمثلة المحلولة التالية.

(٨ـ٨ـ٢) تطبيقات على استعمال الأعداد المركبة

ا ـ ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف ومكثف على التوالي

تعطى ممانعة الدائرة المبينة في شكل (٨ـ٣٠)، البند (٨ـ٥ـ٣) بالمعادلة:

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

$$= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

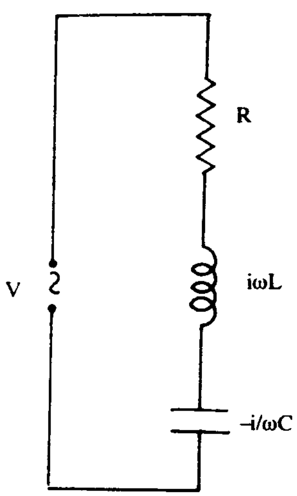
وقيمة هذه الممانعة هي:

$$\therefore |Z| = \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٩) نفسها.

فيما تعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

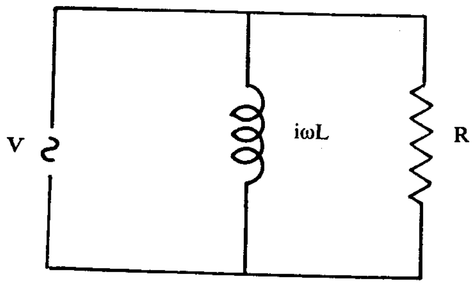


شكل (٨ـ٣٠): الدائرة المتوالية RCL باستخدام رموز الأعداد المركبة لممانعة عناصر الدائرة.

ب ـ ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف على التوازي

تعطى قبولية هذه الدائرة المبينة في شكل (٨ـ٣١) بالمعادلة:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}$$



شكل (٨ـ٣١): الـدائـرة المتـوازية R و L والأعداد المركبة.

وتكون الممانعة الكلية للدائرة هي:

$$Z = \frac{iR\omega L}{R + i\omega L}$$

وبضرب البسط والمقام بالمرافق نحصل على:

$$Z = \frac{iR\omega L}{R + i\omega L} \times \frac{R - i\omega L}{R - i\omega L}$$

$$\therefore Z = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

وتكون قيمة الممانعة هي:

$$\therefore |Z| = \left\{ \frac{\omega^4 L^4 R^2 + \omega^2 R^4 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\omega^2 L^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٦٦) نفسها.

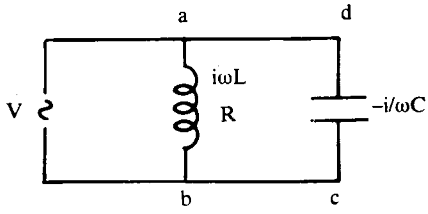
وتعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

وهذه هي المعادلة (٨ـ٦٨) نفسها.

جـ ـ ممانعة دائرة تحتوي على ملف حثي ذي مقاومة أومية ومتصل على التوازي بمكثف

يمثل هذه الحالة الشكل (٣٢ـ٨)
بفرض أن ممانعة الفرع ab هي Z_1 والفرع cb هي Z_2 فتكون القبولية الكلية للفرعين هي :



شكل (٣٢ـ٨): الدائرة المتوازية (L و R) و C والأعداد المركبة.

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$$

أي أن ممانعة الدائرة هي :

$$Z=\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$\because Z_1=R+i\omega L \quad , \quad Z_2=\frac{-i}{\omega C}$$

$$\therefore Z=\frac{(R+i\omega L)\left(-\frac{i}{\omega C}\right)}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

وبضرب بسط ومقام هذه المعادلة في المرافق $\{R-i(\omega L-\frac{1}{\omega C})\}$ نحصل على الممانعة الكلية للدائرة على الصورة:

$$Z=\frac{\left(\frac{RL}{C}-\frac{R}{\omega C}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right)-i\left(\frac{R^2}{\omega C}+\frac{L}{C}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

وتكون قيمة هذه الممانعة هي :

$$|Z|=\left\{\frac{R^2+\omega^2 L^2}{\omega^2 C^2\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}}\right\}^{1/2}$$

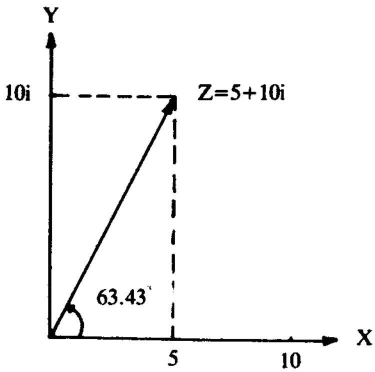
وتعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة :

$$\alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{\omega L - \omega C(R^2+\omega^2 L^2)}{R}\right\}$$

وهما المعادلتان (٨ـ٧٥) و(٨ـ٧٦) نفسيهما.

مـثـال (٨ـ١٤)

دائرة مكونة من ملف حثه الذاتي $L = 2mH$ ومقاومة قدرها 5Ω متصلة على التوالي ويتـصل بهما قوة دافـعة كهربية مترددة قـدرها $V = 150\sin 5000t$. احسب المانعة المركبة Z وزاوية الطور.



الحـــل

$$X_L = \omega L = 5000 \times 2 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

$$Z = 5 + 10\,i$$

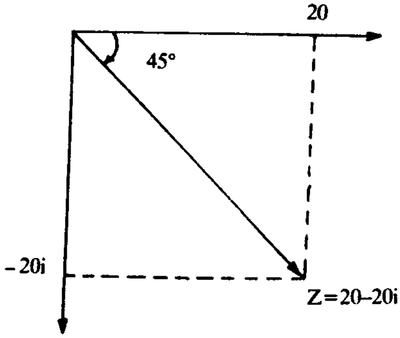
والقيمة المطلقة لهذا العدد المركب هو:

$$|Z| = \sqrt{25+100} = 11.18\Omega$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{10}{5} = 63.43°$$

وبـاستخـدام النمـوذج القـطبي ، معـادلة (٢ـ٥٧) ملحق ٢ يكون :

$$Z = 11.18 \;\underline{|63.43°}\;\Omega$$



مـثـال (٨ـ١٥)

دائــرة مكــونـة من مكثف سعتـه $C=5\mu F$ ومقـاومـة قدرهـا $R=20\Omega$ متصلة على التـوالي ويتصل بهما قوة دافعة كهربية مترددة قدرها $V=150\cos 10{,}000t$ احسب المانعة المركبة وزاوية الطور.

الحـــل

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10{,}000 \times 5 \times 10^{-6}} = 20\Omega$$

$$Z = 20 - i20$$

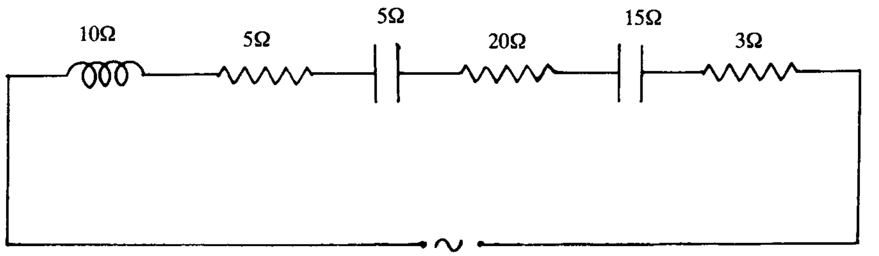
$$\therefore |Z| = \sqrt{400 + 400} = 28.28\ \Omega$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{-20}{20} = -45°$$

وباستخدام النموذج القطبي يكون لدينا $Z = 28.28 \angle{-45}$

مــثــال (١٦ـ٨)

احسب الممانعة الكلية وقيمة الجهد V ومعامل القدرة في الدائرة المبينة بالشكل (المجاور) علما بأن المقاومات والممانعات الحثية والسعوية معطاة بالأوم وأن التيار المار بالدائرة تساوي قيمته العظمى 7 A.



الحـــل

يمكن كتابة الممانعة الكلية للدائرة على الصورة التالية:

$$Z = 10i + 5 - 5i + 20 - 15i + 3 = 28 - 10i$$

أي أن الممانعة الكلية تكافىء مقاومة أومية قدرها 28Ω ومكثف رده السعوي قدره 10Ω متصلان على التوالي.

$$\therefore |Z| = \{(28)^2 + (10)^2\}^{1/2} = 29.7\ \Omega$$

$$\therefore \tan\alpha = -\frac{10}{28} \qquad \because V = IZ$$

$$\therefore V = 7 \times 29.7 = 207.9\ V$$

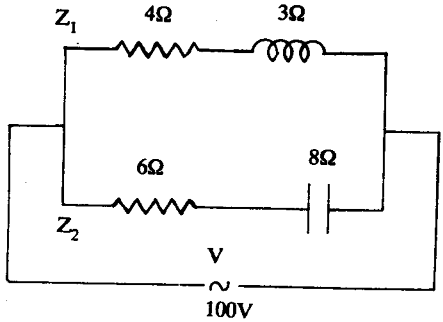
ولـو اعتـبر التيار ممثلا على الجهة الموجبة للمحور الحقيقي فإن الجهد سوف يتخلف عنه بزاوية ظلها $\frac{10}{38}$. وبهذا فإن معامل القدرة

$$\cos\alpha = \frac{28}{29.7} = 0.943$$

مـثـال (١٧-٨)

احسب الممانعة الكلية للدائرة المبينة بالشكل (المجاور) ثم احسب التيار الكلي وكذلك القدرة المعطاة للدائرة علماًبأن الرد الحثي والسعوي والمقاومات مكتوبة بالأوم.

الحـــل



$$\therefore \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\therefore Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z = \frac{(4+3i)(6-8i)}{(4+3i)+(6-8i)} = \frac{48-14i}{10-5i}$$

وبالضرب في المرافق نُحصل على:

$$\therefore Z = \frac{(48-14i)(10+5i)}{(10-5i)(10+5i)} = 4.4 + 0.8i$$

أي أن الممانعة الكلية للدائرة تكافيء ممانعة متكونة من مقاومة أومية قدرها 4.4 أوم وملف رده الحثي قدره 0.8 أوم.

$$|Z| = \{(4.4)^2 + (0.8)^2\}^{1/2} = 4.47\ \Omega$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{0.8}{4.4} \quad \& \quad \cos\alpha = 0.984 \quad \therefore \alpha = 10.3^\circ$$

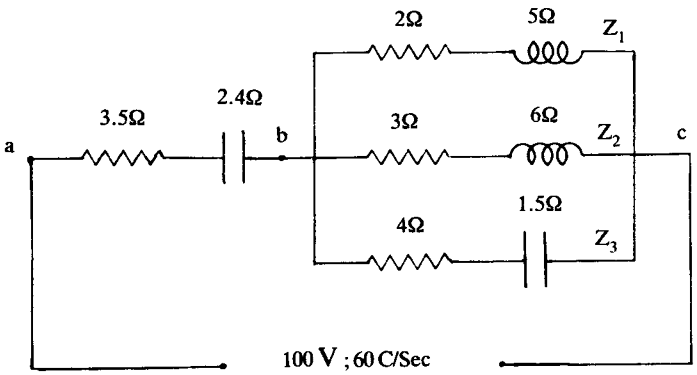
$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{4.46} = 22.4\ A$$

ويتخلف هذا التيار عن الجهد بمقدار الزاوية α وتكون القدرة:

$$\therefore \quad P = IV\cos\alpha = 22.4 \times 100 \times 0.984 = 2204\ W$$

مــثــال (١٨ـ٨)

احسب الممانعة الكلية والتيار المار في كل فرع وفرق الجهد بين ab و bc وكذلك القـدرة الكلية للدائـرة المبينـة بالشكـل (الآتي) علما بأن الـرد الحثي والرد السعوي والمقاومات معطاة بالأوم.



الحـــل

ممانعة المقاومة والمكثف بين النقطتين a و b تعطى بالمعادلة:

$$Z_{ab} = 3.5 - 2.4i$$

أما قبولية كل فرع من الفروع المتوازية فهي كالتالي:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} = 0.069 - 0.172i$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{3+6i} \times \frac{3-6i}{3-6i} = 0.0667 - 0.134i$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{4-1.5i} \times \frac{4+1.5i}{4+1.5i} = 0.22 + 0.082i$$

$$\therefore Y_{bc} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.356 - 0.224i$$

$$\therefore Z_{bc} = \frac{1}{0.356 - 0.224i} = 2.01 + 1.27i$$

وبذلك فإن الممانعة المركبة الكلية تساوي :

$$Z_{ac} = Z_{ab} + Z_{bc} = 3.5 - 2.4i + 2.01 + 1.27i = 5.51 - 1.13i$$

وقيمتها المطلقة هي :

$$|Z| = \{(5.51)^2 + (1.13)^2\}^{1/2} = 5.62\ \Omega$$

وإذا فرض أن الجهد الكلي V يمثله على الجانب الموجب لمحور الكميات الحقيقية علماً بأن هذا التمثيل اختياري

$$\therefore V = 100 + \text{zero} \times i$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{5.51 - 1.13i} = 17.4 + 3.56i$$

$$V_{bc} = I\,Z_{bc} = (17.4 + 3.56i)\,(2.01 + 1.27i)$$

$$= (30.5 + 29.3i)$$

$$\therefore \quad I_1 = (30.5 + 29.3i)\,(0.069 - 0.172i)$$

$$\therefore \quad I_1 = 7.15 - 3.22i$$

وبالمثل فإن

$$I_2 = 5.97 - 2.14i$$

$$I_3 = 4.29 + 8.95i$$

وللتأكد من صحة الجواب فلابد أن يكون

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

وهذا إثبات لقاعدة كيرشوف الأولى بشرط التعبير بالأعداد المركبة .

$$V_{ab} = I\,Z_{ab} = (17.4 + 3.56i)\,(3.5 - 2.4i)$$

$$= 69.5 - 29.3i$$

وللتأكد من صحة الجواب فلابد أن يكون الجهد الكلي :

$$V = V_{ab} + V_{bc}$$

وهذا إثبات لقاعدة كيرشوف الثانية بشرط التعبير بالأعداد المركبة. ولذلك فإن القيم المطلقة لفروق الجهد والتيار هي:

$$|V_{ab}| = \{(69.5)^2 + (29.3)^2\}^{1/2} = 75.4V$$

$$|V_{bc}| = \{(30.5)^2 + (29.3)^2\}^{1/2} = 42.3\ V$$

$$|I_1| = \{(7.15)^2 + (3.22)^2\}^{1/2} = 7.84\ A$$

$$|I_2| = \{(5.97)^2 + (2.14)^2\}^{1/2} = 6.35\ A$$

$$|I_3| = \{(4.29)^2 + (8.95)^2\}^{1/2} = 9.92\ A$$

$$|I| = \{(17.4)^2 + (3.56)^2\}^{1/2} = 17.7\ A$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{3.56}{17.4} \quad \& \quad \cos\alpha = \frac{17.4}{17.7} = 0.983$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ\ 15'$$

وهي الزاوية التي يسبق التيار بها الجهد.

وأما القدرة فهي:

$$P = I\,V\cos\alpha$$

$$\therefore\ P = 17.7 \times 100 \times 0.980 = 1740\ W$$

ويمكن حسابها أيضا بطريقة أخرى كما يلي:

$$\therefore\ Z_{ac} = 5.51 - 1.13i$$

ومعنى هذا أن المقاومة الأومية المكافئة للدائرة كلها 5.62Ω وهذه هي التي تستهلك القدرة على هيئة حرارة وأما المكثفات والملفات بالدائرة فلا تستهلك شيئا.

$$\therefore \quad P = Z\,I^2 = 5.62 \times (17.76)^2 = 1740W$$

مثال (٨ـ١٩)

باستخدام ضابط الطور (phasor) الوارد في المعادلة (٢ـ٥٧) ملحق ٢.

احسب:

١ ـ التيار المار في دائرة تحتوي على $R = 10\Omega$ و $C = 4\mu f$ متصلة على التوالي وعليها جهد قدره $V=500\cos(250t-20)V$ ، كما في شكل (١٤ ـ ٨).

ب ـ التيار المار في دائرة تحتوي على $R = 8\Omega$ و $L = 0.02H$ متصلة على التوالي وعليها جهد قدره $V=283 \sin (300+90)$ V ، كما في شكل (١١ ـ ٨).

جـ ـ الممانعة الكلية لدائرة الجهد عليها والتيار المار فيها تحدده المعادلتان :

$$V = 150 \sin (500t + 45) \quad V$$

$$I = 3 \sin (500t - 15) \quad V$$

وما هي مكونات الدائرة؟

الحـــل

ا ـ

$$X_C = 1/\omega C = 1/(2500)(40 \times 10^{-6}) = 10\,\Omega$$

$$Z = 10 - i10 = 10\sqrt{2}\,\underline{\lfloor -45^\circ}\,\Omega$$

$$V = 500\,\underline{\lfloor -20}$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{500\,\underline{\lfloor -20}}{10\sqrt{2}\,\underline{\lfloor -45}} = 25\sqrt{2}\,\underline{\lfloor 25}\ A$$

$$\therefore I = 25\sqrt{2} \cos (2500t + 25^\circ)\ A$$

ب ـ

$$X_L = \omega L = 300\,(0.02) = 6\,\Omega$$

$$\therefore Z = 8 + i6 = 10\,\underline{\lfloor 36.9}\,\Omega$$

$$V = 283\,\underline{\lfloor 90}$$

$$\therefore I = \frac{283\,\underline{\lfloor 90}}{10\,\underline{\lfloor 36.9}} = 28.3\,\underline{\lfloor 53.1}$$

$$\therefore I = 28.3 \sin (300t + 53.1)\ A$$

جـ ـ

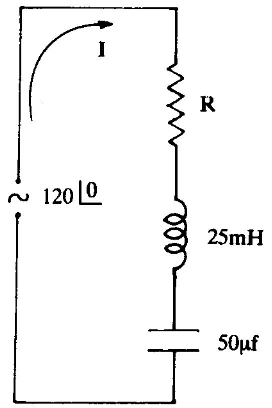
$$V = 150\,\underline{\lfloor 45}\,V \quad , I = 3\,\underline{\lfloor -15}\,A$$

$$\therefore Z = \frac{V}{I} = \frac{150\,\underline{\lfloor 45}}{3\,\underline{\lfloor -15}} = 50\,\underline{\lfloor 60} = 25 + i43.3\,\Omega$$

مـثـال (٢٠-٨)

في الدائـرة التالـيـة احسب R والجهد على كل عنصـر علمـا بأن السرعـة الزاوية $\omega = 400$ rad/s والتيار يتقدم الجهد بزاوية قدرها $63.4°$.

الحـــل



$$X_L = \omega L = 400\,(25 \times 10^{-3}) = 10\ \Omega$$

$$X_C = 1/\omega C = 1/400\,(50 \times 10^{-6}) = 50\ \Omega$$

$$Z = R + i(X_L - X_C) = R - 40i$$

$$\therefore Z = |Z|\ \underline{|-63.4}$$

$$\tan(-63.4) = R/(X_L - X_C)$$

$$\therefore R = -40 \tan(-63.4) = 20\ \Omega$$

$$\therefore Z = 20 - i40 = 44.7\ \underline{|-63.4}\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120\ \underline{|0}}{44.7\ \underline{|-63.4}} = 2.68\ \underline{|63.4}\ \text{A}$$

$$\therefore V_R = 53.6\ \underline{|63.4}\ \text{V}$$

$$V_L = 26.8\ \underline{|153.4°}\ \text{V}$$

$$V_C = 134\ \underline{|-26.6}\ \text{V}$$

مـثـال (٢١-٨)

دائرة على التوالي مكونة من RLC حيث $R = 100\Omega$ و $L = 0.5H$ و $C = 40\mu f$.

احسب التردد عند وضع الرنين والتردد الأدنى والأعلى لتردد نصف القوة.

الحـــل

$$\omega_r = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.5\,(40 \times 10^{-6})} = 224\ \text{rad/s}$$

$$\therefore f_r = \omega_r/2\pi = 35.7\ \text{Hz}$$

عند تردد نصف القوة الأدنى ω المفاعلة السعوية تزيد عن المفاعلة الحثية وكذلك التيار يساوي 0.707 قيمته عند وضع الرنين ولما كان $I = \frac{V}{Z}$ فإن $|Z|$ يساوي 1.414 ضرب قيمته عند وضع الرنين وحيث إن $Z = 100\Omega$ عند وضع الرنين فإن $|Z|$ عند ω_1 تساوي:

$$|Z| = 1.414 \times 100 = 141.4\Omega$$

$$\therefore Z = 100 - i(X_C - X_L) = 141.4 \angle \theta$$

$$\therefore \cos\theta = R/Z = 100/141.4 \qquad \therefore \theta = -45°$$

$$\therefore X_C - X_L = R \quad \text{or} \quad \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R$$

وبالتعويض في هذه المعادلة يحصل على:

$$\omega_1 = 145 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f = 145/2\pi = 23.1 \text{ Hz}$$

أما بالنسبة لتردد نصف القوة الأعلى ω_2 فإن $|Z| = 141.4$ أيضا و $\theta = 45°$ وبالتعويض في المعادلة:

$$X_L - X_C = R \quad \text{or} \quad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$$

يحصل على:

$$\omega_2 = 345 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_2 = 345/2\pi = 55 \text{ Hz}$$

وبمعرفة ω_1 ، ω_2 يمكن أيضا معرفة ω_0 حيث:

$$\omega_0 = (\omega_1 \omega_2)^{1/2} = (145 \times 345)^{1/2} = 224 \text{ rad/s}$$

مثال (٢٢-٨)

احسب قيمة L في الدائرة التالية عند حالة الرنين الذي يحدث عندما تكون $\omega = 5000$ rad/s.

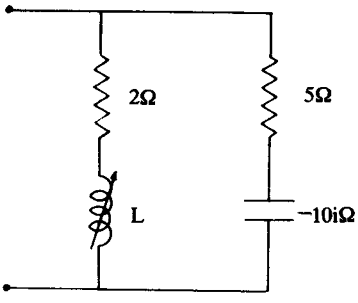
الحل

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2 + iX_L} + \frac{1}{5 - 10i} \text{ Siemens}$$

(سيمن : اسم لوحدة القبولية «المعروفة بالموء»)

$$\therefore Y = \left(\frac{2}{4+X_L^2} + \frac{5}{125}\right) + i\left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4+X_L^2}\right)$$

بوضع الجزء التخيلي مساويا للصفر عند وضع الرنين.



$$\therefore \frac{10}{125} = \frac{X_L}{(4+X_L^2)}$$

$$\text{or} \quad X_L^2 - 12.5\,X_L + 4 = 0$$

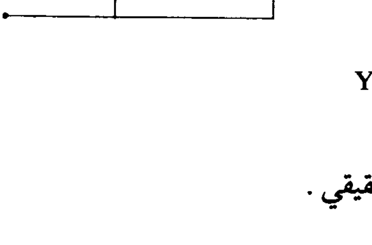
$$\therefore X_L = 12.17\,\Omega \quad \text{or} \quad X_L = 0.33\,\Omega$$

$$\because X_L = 2\pi f_r L$$

$$\therefore L = 2.43\text{ mH} \quad \text{or} \quad L = 0.066\text{ mH}$$

مـثـال (٢٣ـ٨)

احسب C في الدائرة التالية عند وضع الرنين الذي يحدث إذا كانت $\omega = 5000$ rad/s.



الحـل

$$Y = \frac{1}{8+6i} + \frac{1}{8.34 - iX_C} \text{ Siemens}$$

$$Y = \left(\frac{8}{100} + \frac{8.34}{69.5+X_C^2}\right) + i\left(\frac{X_C}{69.5+X_C^2} - \frac{6}{100}\right)$$

عند وضع الرنين فإن القبولية المركبة تمثل العدد الحقيقي.

$$\therefore \frac{X_C}{69.5+X_C^2} - \frac{6}{100} = 0$$

$$X_C^2 - 16.7\,X_C + 69.5 = 0' \quad \therefore X_C = 8.35\,\Omega$$

$$\therefore X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \therefore C = 24\mu f$$

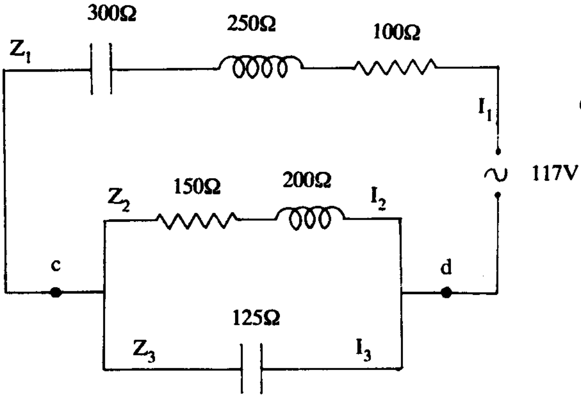
مـــثـــال (٢٤ـ٨)

في الدائرة المبينة بالشكل الآتي احسب:

ا ـ الممانعة الكلية للدائرة.

ب ـ شدة التيار الكلي.

جـ ـ شدة التيار في كل فرع.



الحـــــل

$$Z_1 = 100 + i\,(250 - 300) = 100 - 50i$$

$$\therefore\ |Z_1| = \{(100)^2 + (50)^2\}^{1/2} = 10\sqrt{125} = 112$$

وباستخدام معادلة (٥٦ـ٢) ملحق ٢ كطريقة أخرى للتعبير في حل هذه المسألة:

$$Z_1 = |Z_1|\, e^{i\alpha} = 112\, e^{-26.6^\circ i}$$

حيث:

$$\tan\alpha = \frac{50}{100} \qquad \therefore \alpha = 26.6^\circ$$

وبالمثل:

$$Z_2 = 150 + 200\,i = 250\, e^{53.1^\circ i}$$

و

$$Z_3 = -125i = 125\, e^{-90^\circ i}$$

وحيث إن:

$$\frac{1}{Z_{cd}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{150 + 200i} - \frac{1}{125i}$$

$$\frac{1}{Z_{cd}} = \frac{150 - 200i}{(150)^2 + (200)^2} + \frac{i}{125} = 0.0024 - 0.0032i + 0.008i$$

$$\therefore \frac{1}{Z_{cd}} = 0.0024 + 0.0048i$$

$$\therefore Z_{cd} = \frac{0.0024 - 0.0048i}{(0.0024)^2 + (0.0048)^2}$$

$$\therefore Z_{cd} = 83.3 - 167i = 186\, e^{-63.4° i}$$

مقاومة الفرعين الثاني والثالث هي 186 أوم وتتخلف بزاوية قدرها 63.4°.

∴ الممانعة الكلية:

$$Z = Z_{cd} + Z_1 = 183.3 - 217i = 284\, e^{-49.8° i}$$

أي أن الممانعة الكلية للدائرة Z = 284 أوم وتتخلف بزاوية قدرها 49.8° ولإيجاد شدة التيار الكلي I فإنه بفرض أن الجهد الكلي ممثل على الجانب الموجب للمحور الحقيقي .

$$\therefore V = 117\, e^{\text{zero}\, i}$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{117}{284} e^{49.8i} = 0.412\, e^{49.8i}$$

∴ التيار I = 0.412 أمبير ويسبق الجهد بزاوية قدرها 49.8 وبهذا فإن معامل القدرة

$$\cos 49.8 = 0.645$$

$$\therefore \quad P = 117 \times 0.412 \times 0.645 = 31.1 \text{ W}$$

ويمكن إيجاد فرق الجهد بين النقطتين d و c.

$$\therefore V_{cd} = Z_{cd}\, I = 186\, e^{-63.4° i} \times 0.412\, e^{49.8° i}$$

$$\therefore V_{cd} = 76.6\, e^{-13.6° i}$$

أي أن فرق الجهد V_{cd} = 76.6 فولت ويتخلف عن الجهد الأصلي بزاوية قدرها 13.6°.

$$\therefore I_2 = \frac{V_{cd}}{Z_2} = 0.37\, e^{-66.7i}$$

∴ I_2 = 0.37 أمبير ويتخلف عن الجهد الأصلي بزاوية قدرها 66.7°.

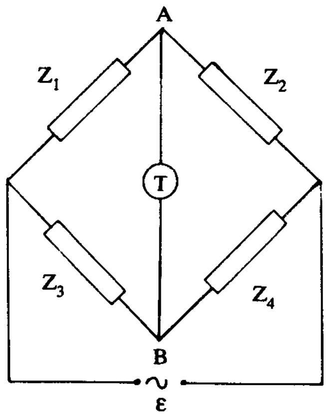
$$I_3 = 0.613\, e^{76.4i}$$

ومنه I_3 = 0.613 أمبير ويسبق الجهد الأصلي بزاوية قدرها 76.4°.

(٨-٩) قناطر التيار المتردد A.C. Bridges

(٨-٩-١) قنطرة ويتستون العامة The generalized Wheatston bridge

سبق أن درست قنطرة ويتستون في الفصل الرابع بند (٤-٧) في حالة تعيين مقاومة مجهولة بمعلومية المقاومات الأخرى في الدائرة وباستعمال جهد ثابت . ولكن عند استعمال الجهد المتردد فلابد من تعديل هذه القنطرة بحيث تحتوي أذرع القنطرة على ممانعات وتيارات مركبة كما في شكل (٨-٣٣).



شكل (٨-٣٣): قنطرة ويتستون

وللكشف عن وضع الاتزان يستخدم كاشف تليفوني (telephone detector) مثل وحدة سماعة أذن عالية المقاومة (high resistance ear-phone unit) إذا كان تردد مصدر الجهد المتردد في حدود 100 C/S إلى 1000 C/S أما إذا كان تردد المصدر عاليا فتستخدم أجهزة إلكترونية كاشفة لمعرفة وضع الاتزان ومنها جهاز راسم الذبذبات الكاثودي (cathode ray oscilloscope).

ويحدث الاتزان إذا كان الجهد عند النقطتين A و B له قيمة واحدة أي أن السعة (amplitude) والطور (phase) للجهود المترددة عند A و B يجب أن تكون متساوية وفي هذه الحالة يكون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad \text{.........} \quad (٨-١٢٠)$$

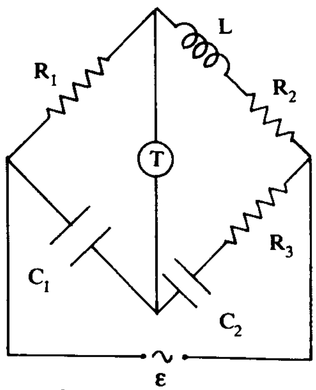
للقيم التخيلية والحقيقية منفصلة. وتستخدم مثل هذه القنطرة لقياس الحث الذاتي والسعة والتردد.

(٨-٩-٢) قنطرة أويــن Owen bridge

تستخدم قنطرة أوين لقياس الحث الذاتي بمعرفة السعات العيارية (standard capacitance) ويمثل الشكل (٨-٣٤) هذه القنطرة التي تتألف من مصدر متردد، تردده حوالي 1000 دورة في الثانية، وملف حثي، يراد قياس حثه الذاتي L ، ومكثفان عياريان C_1 و C_2 وثلاث مقاومات أومية R_1 ، R_2 و R_3 «R_1 ثابتة القيمة و R_2 ، R_3 متغيرة القيمة».

وبمقارنة هذه الدائرة مع الشكل (٨-٣٣) يمكن الحصول على:

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = i\omega L + R_2, \quad Z_3 = \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_4 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_2}$$



شكل (٨-٣٤): قنطرة أويــن

وعند وضع الاتزان يكون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

أو

$$\frac{R_1}{R_2 + i\omega L} = \frac{1/i\omega C_1}{R_3 + (1/i\omega C_2)}$$

$$\therefore R_1\, i\omega C_1 = \frac{R_2 + i\omega L}{R_3 + (1/i\omega C_2)} = \frac{R_2\, i\omega C_2 + \omega^2 LC_2}{R_3\, i\omega C_2 + 1}$$

$$\therefore R_1\, i\omega C_1\, [R_3\, i\omega C_2 + 1] = R_2\, i\omega C_2 - \omega^2 LC_2$$

أو

$$R_1 i\omega C_1 - R_1 R_3\, \omega^2 C_1 C_2 = R_2 i\omega C_2 - \omega^2 LC_2$$

وحيث إنه إذا تساوى عددان مركبان تتاسوى المقادير الحقيقية للعددين وتتساوى المقادير التخيلية لهما:

$$\therefore\ R_1 R_3 \omega^2 C_1 C_2 = \omega^2 LC_2$$

أو

$$L = R_1R_3C_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨ـ١٢١})$$

وكذلك

$$R_1\omega C_1 = R_2\omega C_2$$

$$\therefore \frac{C_1}{C_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨ـ١٢٢})$$

وتمثل المعادلتان (٨ـ١٢١) و(٨ـ١٢٢) شرطا الاتزان المطلوب للقنطرة «وعندها ينعدم الصوت في السماعة» والذي يتحقق بتغير المقاومتين R_2 و R_3 ويجب ملاحظة ما يلي في هذه القنطرة:

١ ـ كل المقاومات يجب أن لا يكون لها حث ذاتي، وهذا هو الحال في كل قناطر التيار المتردد.

٢ ـ لا تعتمد حالات الاتزان على تردد المصدر في قنطرة أوين.

٣ ـ تشمل المقاومة R_2 مقاومة الملف المجهول ولذلك فإذا عرفت المقاومة الخارجية وحسبت من المعادلة (٨ـ١٢٢) أمكن حساب مقاومة الملف.

(٨ـ٩ـ٣) قنطرة ماكسويل Maxwell bridge

تبين الدائرة المبينة بالشكل (٨ـ٣٥) قنطرة ماكسويل والتي تستعمل لقياس الحث الذاتي L أيضا. وتتكون من مصدر متردد ε تردده حوالي 1000 دورة في الثانية وملف حثي L «المراد قياس حثه الذاتي L» ومكثف متغير من مادة الميكا C يتصل على التوازي مع مقاومة متغيرة R_1 ومقاومتين ثابتتي القيمة «كل المقاومات R_1، R_2، R_3 و R_4 أومية لا حثية لها».

وبالمقارنة بالدائرة (٨ـ٣٣) يكون:

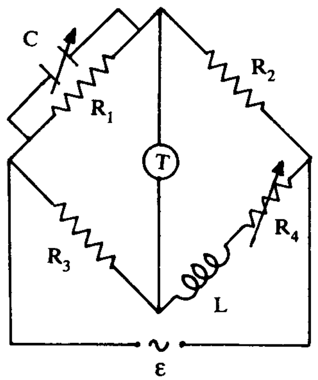
$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C, \qquad Z_2 = R_2, \qquad Z_3 = R_3, \qquad Z_4 = i\omega L + R_4$$

وعند الاتزان يكون :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \qquad \text{or} \qquad \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

$$\therefore\ R_2\,((1/R_1) + i\omega C) = (i\omega L + R_4)\,/\,R_3$$

$$\therefore\ (R_2/R_1) + i\omega CR_2 = (R_4/R_3) + i\omega LR_3$$



شكل (٨ـ٣٥) : قنطرة ماكسويل

وبمساواة المقادير الحقيقية والمقادير التخيلية يمكن الحصول على :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ١٢٣)$$

$$\omega CR_2 = \frac{\omega L}{R_3}$$

أو

$$L = CR_2R_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ١٢٤)$$

ويمكن الوصول لحالة الاتزان بتغيير كل من C و R_4 وبذلك يمكن حساب L. ويلاحظ في هذه القنطرة أن الاتزان لا يعتمد على التردد كذلك يمكن معرفة مقاومة الملف كما حُسبت في قنطرة أوين.

(٨ـ٩ـ٤) قنطرة شيرنج Shering bridge

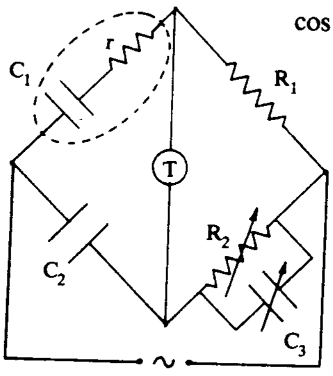
هذه القنطرة من أحسن القناطر التي صممت لقياس سعة مكثف مجهول C ، كما في شكل (٨ـ٣٦)، وكذلك معامل القدرة له والفكرة من قران معامل القدرة بنتائج المكثف أتت من حقيقة فقدان الطاقة (energy losses) في المواد العازلة نتيجة لسريان التيار المتردد خلال المكثف والذي كان سببا في أن التيار لا يتقدم الجهد بزاوية الطور $\pi/2$ تماما كما بيناه في البنود السابقة. ونتيجة لهذا الفقد يمكن أن نقول إن المكثف يكافىء مكثفا نقيا متصلا على التوالي مع مقاومة قدرها r.

وتعطى زاوية الطور (α) بين التيار والجهد من معامل القدرة القيمة التالية :

$$\cos\alpha = r / \{r^2 + (1/\omega^2C^2)\}^{1/2} \quad .... \quad (٨ـ١٢٥)$$

وإذا كان $r^2 << 1/\omega^2C^2$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى :

$$\cos\alpha = \omega C r$$



شكل (٨ـ٣٦): قنطرة شيرنج

وهذه القنطرة يمكن أن تستعمل لقياس C و r. وباتباع الطرق السابقة نفسها يكون :

$$Z_1 = r + \frac{1}{i\omega C_1}, \qquad Z_2 = R_1$$

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C_2} \qquad , \qquad \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_2} + i\omega C_2$$

وعند الاتزان ومساواة القيم الحقيقية والتخيلية يحصل على :

$$C_1/C_2 = R_2/R_1 \, , \, C_2 r = C_3 R_1 \quad ... \quad (٨ـ١٢٦)$$

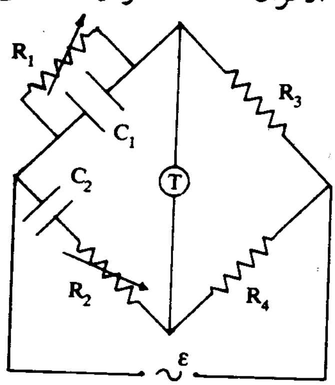
ويمعرفة r و C_1 يمكن حساب معامل القدرة أي أن :

$$\cos\alpha = \omega C_1 r = \omega(R_2C_2/R_1)\,(C_3R_1/C_2)$$

$$\cos\alpha = \omega R_2 C_3 \quad .... \quad (٨ـ١٢٧)$$

(٨ـ٩ـ٥) قنطرة روبنسون المترددة The Robinson frequency bridge

ويبين الشكل (٨ـ٣٧) هذه القنطرة. وشروط الاتزان لهذه القنطرة يعتمد على تردد المصدر ويمكن استعمال هذه القنطرة لتعيينه .



شكل (٨ـ٣٧): قنطرة روبنسون المترددة

وعند الاتزان يكون :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

حيث :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \qquad , \qquad Z_2 = R_3 ,$$

$$Z_3 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \qquad \text{and} \qquad Z_4 = R_4$$

$$\therefore \frac{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1\right)^{-1}}{\left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}\right)} = \frac{R_3}{R_4}$$

أو

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1\right)\left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}\right)} = \frac{R_3}{R_4}$$

أو

$$\frac{R_2 R_3}{R_1} + i\omega C_1 R_2 R_3 + \frac{R_3}{i\omega C_2 R_1} + \frac{C_1}{C_2} R_3 = R_4$$

وبمساواة القيم الحقيقية وكذلك القيم التخيلية يمكن الحصول على:

$$\frac{R_2 R_3}{R_1} + R_3 \frac{C_1}{C_2} = R_4 \quad \cdots\cdots \quad (\text{٨ـ١٢٨})$$

و

$$iR_2 R_3 C_1 \omega = -\frac{R_3}{iR_1 C_2 \omega}$$

أو

$$\omega^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{٨ـ١٢٩})$$

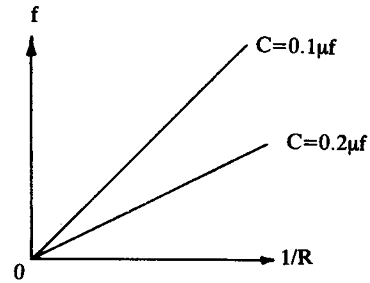
وتمثـل المعادلتان (٨ـ١٢٨) و(٨ـ١٢٩) شرطي الاتزان. وحينما نستعمل هذه القنطرة نضع عادة $C_1 = C_2 = C$ وكذلك $R_1 = R_2 = R$ وهذا الوضع يتطلب أن يكون $R_4 = 2R_3$ وهذا وضع خاص من المعادلة (٨ـ١٢٩) والتي تصبح كالتالي:

$$\omega = \frac{1}{CR} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{١٣٠-٨})$$

وبذلك يمكن الحصول على وضع الاتزان بتغيير R_1 و R_2 ومساواتها دائما. ويعطى تردد الدائرة من المعادلة:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi CR}$$

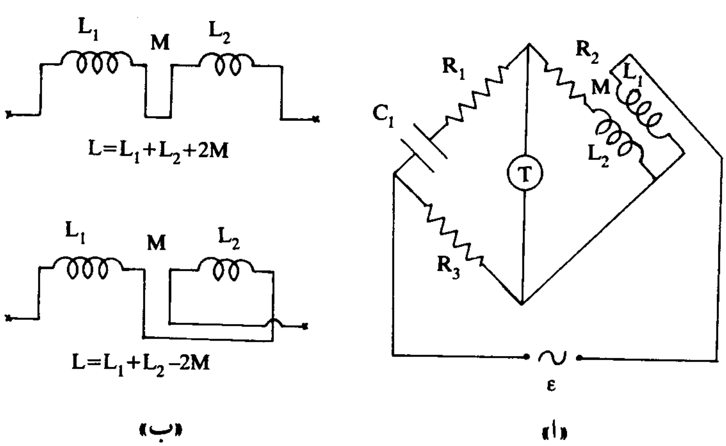
واضح من هذه المعادلة أنه عند أي قيمة لـ C فإن f تتغير مع R ويبين الشكل (٣٨-٨) العلاقة بين f و 1/R لقيمتين مختلفتين لـ C ومن هذا الرسم يمكن معرفة أي تردد مجهول بمعرفة R.



شكل (٣٨-٨): العلاقة بين التردد f ومقلوب المقاومة 1/R للدائرة (٣٧-٨) لقيمتين مختلفتين لـ C.

(٨-٩-٦) قناطر الحث المتبادل Mutual inductance bridges

يمكن قياس الحث المتبادل M بما يسمى بقنطرة كاري فوستر (Carey-Foster bridge) كما في شكل (١٣٩ - ٨).



شكل (٣٩-٨): ا ـ قنطرة الحث المتبادل M وتسمى بقنطرة كاري فوستر.
ب ـ الملفان متصلان على التوالي.
جـ ـ الملفان متصلان على التوازي.

وباتباع الخطوات السابقة نفسها يكون شرطا الاتزان هما:

$$M = R_2R_3C_1 \quad .... \quad (٨\text{-}١٣١)$$

$$L_2 = M(R_1 + R_3)/R_3 \quad ..... \quad (٨\text{-}١٣٢)$$

ويمكن قياس الحث المتبادل بالطرق العادية لحساب الحث الذاتي L بقنطرة ماكسويل وأوين إذا كانت الملفات متصلة على التوالي كما في شكل (٣٩ب ـ ٨) وشكل (٣٩جـ ـ ٨).

ففي الحالة الأولى يكون الحث الذاتي الفعلي للملفين معا [معادلة (٣٨-٦)] هو:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

حيث L_1 و L_2 الحث لكل من الملفين على انفراد و M الحث المتبادل بينهما.

وفي الحالة الثانية يكون [معادلة (٣٩-٨)]:

$$L' = L_1 + L_2 - 2M$$

فإذا حسبت L و L' بقنطرة مناسبة أمكن حساب M حيث:

$$L - L' = 4M \quad .... \quad (٨\text{-}١٣٣)$$

(٨-١٠) مسائل

١ ـ ملف حثه الذاتي 0.10 هنري ومقاومته 12Ω وصل بجهد متردد قيمته 110 فولت وتردده 60c/s. احسب:

ا ـ الرد (reactance) الحثي للملف.

ب ـ الممانعة (impedance) الحثية للملف.

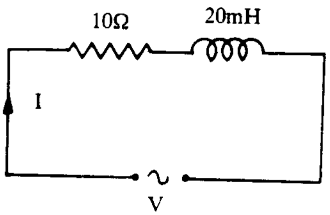
جـ ـ التيار المار في الملف.

د ـ زاوية الطور بين التيار والجهد.

هـ ـ معامل القدرة.

٢ ـ في الدائرة التالية احسب الجهد الكلي المطبق على هذه الدائرة علما بأن:

$$I = 2 \sin 500\, t$$



٣ ـ مكثف سعته 10µf وصل على التوالي بمقاومة قدرها 40Ω وصلا بجهد متردد قدره 110 فولت وتردده 60c/s.

احسب:

ا ـ الرد السعوي للمكثف.

ب ـ ممانعة الدائرة.

جـ ـ التيار المار بالدائرة.

د ـ زاوية الطور بين التيار والجهد.

هـ ـ معامل القدرة.

٤ ـ دائرة تحتوي على مقاومة 9.0Ω وملف رده 28Ω ومكثف رده 16Ω متصلة على التوالي ثم وصلت بجهد متردد قيمته 110 فولت.

احسب:

ا ـ ممانعة الدائرة.

ب ـ التيار المار بالدائرة.

جـ ـ زاوية الطور بين التيار والجهد.

د ـ معامل القدرة.

٥ ـ مقاومة قدرها 11Ω ، ملف رده الحثي 120Ω ومكثف رده السعوي 120Ω وصلت على التوالي ووصلت بجهد متردد قيمته 110 فولت.

احسب الجهد بين طرفي كل عنصر من عناصر الدائرة.

٦ ـ دائرة RL متصلة على التوالي حيث $L = 0.02H$ وقيمة ممانعة الدائرة 17.85Ω وصلت بجهد متردد وكان التيار متأخرا عن الجهد بزاوية قدرها $63.4°$.
احسب السرعة الزاوية ω والمقاومة R.

٧ ـ تتكون دائرة من $L = 0.06H$ و $R = 5\Omega$ متصلة على التوالي ووصلت بجهد متردد قدره V فإذا كان الجهد بين طرفي الملف يساوي :

$$V_L = 15 \sin 200\, t$$

فاحسب الجهد الكلي V وزاوية الطور بين التيار المار في الدائرة و V.
وكذلك قيمة الممانعة الكلية.

٨ ـ السؤال السابق نفسه عدا أن الجهد بين طرفي المقاومة معلوم ويساوي :

$$V_R = 15 \sin 200\, t$$

٩ ـ دائرة تتكون من عنصرين ووصلت بجهد متردد قدره :

$$V = 2.55 \sin (300\, t + 45)\ V$$

فكان التيار المار $I = 8.5 \sin (300\, t + 15)\ A$

احسب قيمة العنصرين، وما قيمتهما لو كان لدينا :

$$V = 150 \cos (200t - 30)$$

$$I = 4.48 \cos (200t - 56.6)$$

١٠ ـ مقاومة قيمتها $R = 27.5\Omega$ ومكثف سعته $C = 66.7\mu f$ وصلت على التوالي ووصلا بجهد متردد فكان الجهد بين طرفي السعة يساوي :

$$V_C = 50 \cos 1500t$$

احسب قيمة الجهد الكلي وكذلك الممانعة.

١١ ـ دائرة تتكون من RLC متصلة على التوالي فإذا كان التيار المار في الدائرة متأخر عن الجهد بـ $30°$ وكان أقصى قيمة للجهد بين طرفي الملف تساوي ضعف

القيمة العظمى للجهد بين طرفي المكثف فإذا كان :

$$V_L = 10 \sin 1000t \text{ V}$$

وكانت $R = 20\Omega$.

احسب قيمة كل من L و C.

١٢ - دائرة تتكون من $R = 5\Omega$ و $L = 0.02H$ و $C = 80\mu f$ متصلة على التوالي ومتصلة بجهد متردد.

احسب قيمة السرعة الزاوية ω في الحالات الآتية :

ا - إذا كان التيار يسبق الجهد بزاوية قدرها $45°$.

ب - إذا كان التيار والجهد متفقين في الطور.

جـ - إذا كان التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $45°$.

١٣ - ملف حثه الذاتي $L = 0.05H$ متصل على التوازي مع مكثف سعته $C = 0.667\mu F$ متصلان على التوازي مع جهد قدره $V = 100 \sin 5000t$.

احسب التيار الكلي للدائرة.

١٤ - ملف حثه $L = 0.005H$ متصل على التوازي مع مقاومة قدرها $R = 10\Omega$ ومع جهد متردد، فإذا كان التيار المار في الملف يساوي :

$$I_2 = 5 \sin (2000\,t - 45) \text{ A}$$

احسب التيار الكلي وزاوية الطور بينه وبين الجهد.

١٥ - مقاومة $R = 5\Omega$ متصلة على التوازي مع عنصر مجهول وجهد متردد. ما هو هذا العنصر وما قيمته إذا كان قيمة الجهد والتيار المار بالدائرة هما :

$$V = 10 \cos (50t + 60°) \text{ V}$$

$$I = 5.38 \cos (50t - 8.23°) \text{ A}$$

١٦ ـ دائرة RLC متصلة على التوازي حيث $R = 300\Omega$ ، $L = 0.5H$ و $C = 10\mu F$ متصلة مع جهد متردد قيمته :

$$V = 200 \sin 1000t \ V$$

احسب :

ا ـ الممانعة الكلية .

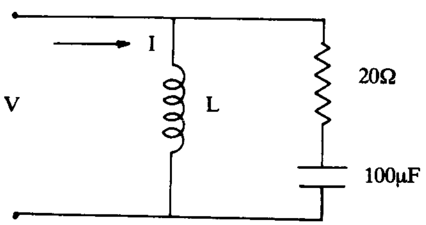
ب ـ زاوية الطور بين التيار والجهد .

جـ ـ التيار الكلي .

١٧ ـ في الدائرة التالية احسب قيمة L علما بأن :

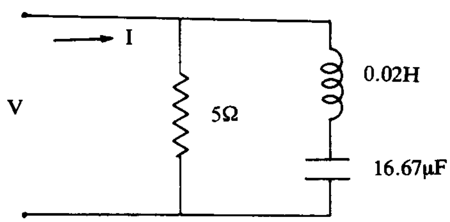
$$V = 100 \sin 500t \ V$$

$$I = 2.5 \sin 500t \ A$$



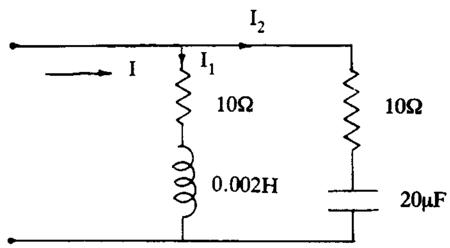
١٨ ـ في الدائرة التالية احسب قيمة التيار الكلي علما بأن :

$$V = 50 \sin (2000t - 90) \ V$$



١٩ ـ في الدائرة التالية احسب I ، I_1 ، I_2 علما بأن :

$$V = 100 \sin 5000t \ V$$



٢٠ ـ وضح بالرسم العلاقة بين X_L و ω وكذلك X_C و ω إذا تغيرت ω بين 400 و 4000 راديان لكل ثانية علما بأن :

$C = 25\mu F$ و $L = 400 \ nH$

٢١ ـ باستخدام ضابط الطور (phasor) الوارد في المعادلة (٦٤ـ ٢)، الملحق ٢ .
احسب الممانعة الكلية وكذلك مكونات الدوائر التي يكون الجهد عليها والتيار المار فيها تحدده المعادلات التالية :

a: $V=50\sin(2000t-25°)$ V , $I=8\sin(2000t+5°)$ A

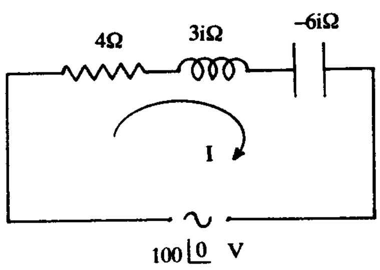
b: $V=80\sin(1000t+45°)$ V , $I=8\sin(1000t-90°)$ A

c: $V=424\cos(2000t+30°)$ V , $I=28.3\cos(2000t+83.2°)$ A

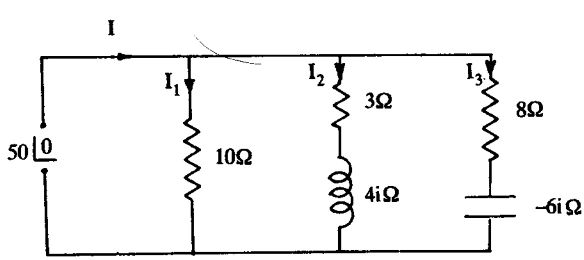
d: $V=283\cos(800t+150°)$ V , $I=11.3\cos(800t+140°)$ A

٢٢ ـ مقاومة $R = 8\Omega$ متصلة على التوازي مع مكثف سعته $C = 30\mu f$ ما هو التردد اللازم لكي يتقدم التيار عن الجهد بزاوية قدرها 30°.

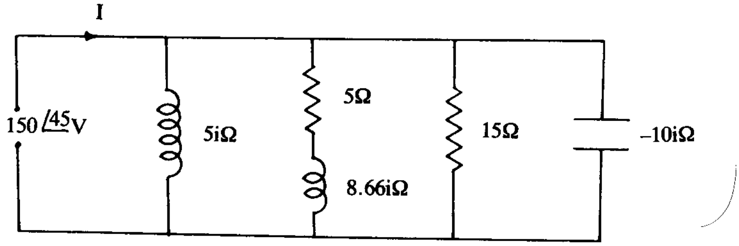
٢٣ ـ في الدائرة المجاورة أثبت أن مجموع الجهد على كل عنصر يساوي الجهد المسلط المطور (phasor voltage)



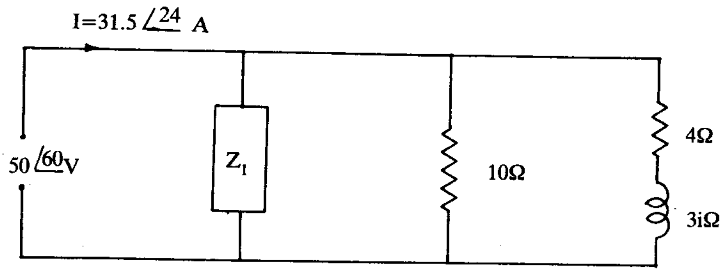
٢٤ ـ في الدائرة التالية احسب التيار الكلي وكذلك الممانعة الكلية ثم ارسم الدائرة المكافئة



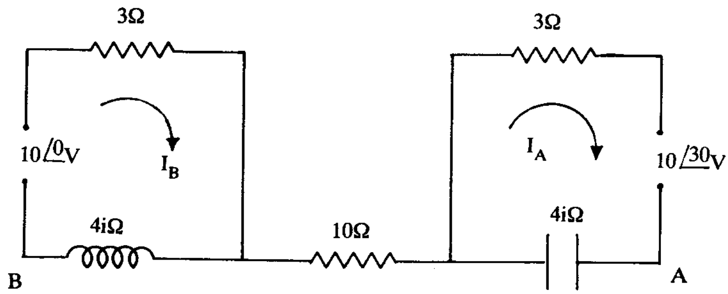
٢٥ ـ في الدائرة التالية احسب التيار الكلي والممانعة الكلية .



٢٦ ـ في الدائرة التالية احسب Z_1.



٢٧ ـ في الدائرة التالية احسب الجهد بين A ، B.



٢٨ ـ دائرة على التوالي مكونة من RLC حيث $R = 10\Omega$ و $L = 0.15H$ ، $C = 2.0\mu f$.

احسب التردد عند وضع الرنين والتردد الأدنى والأعلى لتردد نصف القوة .

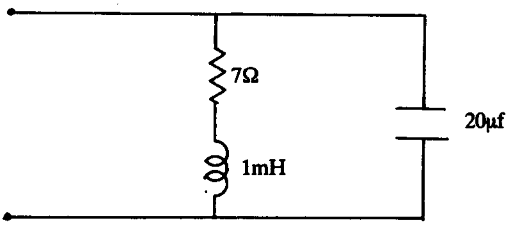
٢٩ ـ دائـرة متـوالية RLC حيث $L = 0.5H$ والجهد عليهما والتيار المار فيها تحددهما المعادلتان التاليتان :

$$V = 70.7 \sin (500t + 30°) \quad V$$

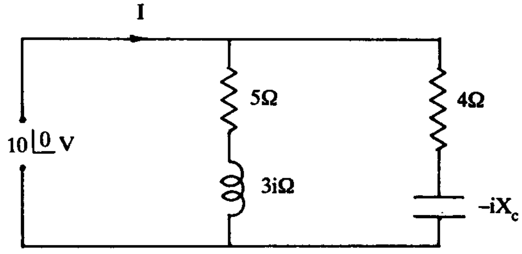
$$I = 1.5 \sin 500t \quad A$$

احسب قيمة C ، R وما قيمة ω_r ثم احسب معامل النوعية Q و Q_r.

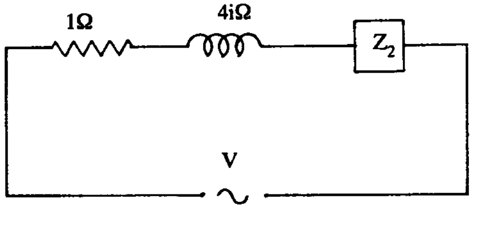
٣٠ ـ في الدائرة التالية احسب التردد الرنيني f_r.



٣١ ـ يحدث الرنين في الدائرة التالية عند $X_C = 9.68\Omega$ أو $X_C = 1.65\Omega$ احسب التيار المطور (phasor current) عند هاتين القيمتين .



٣٢ ـ احسب قيمة الممانعة Z_2 في الدائرة التالية إذا كان :



$$V = 50 \sin (\omega t + 45) \, V$$

$$I = 11.2 \sin (\omega t + 108.4) \, A$$

٩

معادلات ماكسويل والموجات الكهرومغناطيسية

Maxwell's Equations and Electromagnetic Waves

● مقدمة ● تيار الإزاحة ● معادلات ماكسويل ● الموجات الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ ● الموجات المستوية في وسط عازل متماثل الخواص ● طاقة الموجات الكهرومغناطيسية ● امتصاص الموجات المستوية في الموصلات والتأثير السطحي ● طيف الموجات الكهرومغناطيسية ● مسائل.

(٩-١) مقدمة
Introduction

دُرست في الفصول السابقة الحقائق الأساسية عن الكهربية والمغناطيسية وستدرس في هذا الفصل نظريات جيمس ماكسويل (James C. Maxwell) الذي ربط بين هذين الموضوعين.

دُرس في الفصل السادس اكتشاف فاراداي للمجال الكهربي الحثي الناتج عن تغيير المجال المغناطيسي وكان تفسيره في حدود خطوط القوى الذي لم يكن مرضيا بصورة كافية لمعاصريه بينما نجح ماكسويل في وضع معادلة رياضية مشتقة من قانون فاراداي

الحثي لتفسير ذلك إلى جانب التنبؤ بالحصول على مجال مغناطيسي حثي نتيجة لتغير المجال الكهربي مع الزمن وذلك باكتشافه لتيار الإزاحة (displacement current) الذي ربط بين النظريات الكهربية والنظريات المغناطيسية.

ربط ماكسويل هذه النظريات بأربع معادلات رياضية تشتمل على المجالات الكهربية والمجالات المغناطيسية وتوزيع الشحنات وكثافة التيار والتي يشار إليها بمعادلات ماكسويل.

كما تنبأ ماكسويل نظريا بوجود الموجات الكهرومغناطيسية ووحد بين موضوعي الضوء والكهرومغناطيسية حيث أوضح أن الموجات الكهرومغناطيسية تسير بسرعة تساوي تقريبا سرعة الضوء وأن الضوء موجات كهرومغناطيسية.

ثم جاء هيرتز (H. Hertz) الذي استطاع أن يثبت نظريات ماكسويل باكتشافه عمليا توليد واستقبال الموجات الكهرومغناطيسية.

(٩-٢) تيار الإزاحة

Displacement current

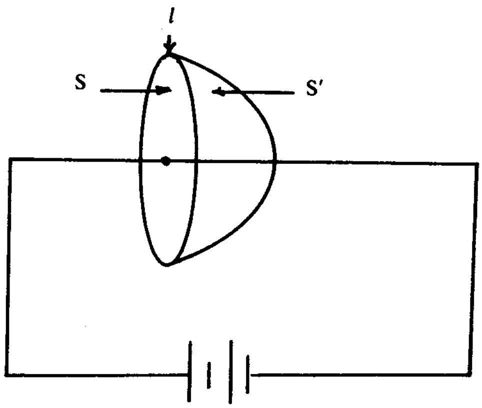
ينتج عن حركة الشحنات الحرة في أي موصل مجال مغناطيسي يظهر أثره في المنطقة المحيطة بالموصل كما ورد ذلك في الفصل الخامس، تسمى الشحنات المتحركة بإلكترونات التوصيل (conduction electrons) والتيار الذي يظهر نتيجة للحركة يسمى بتيار التوصيل وسيرمز له في هذا البند بالرمز I_c. ويحسب الحث المغناطيسي بمعرفة تيار التوصيل باستعمال قانون أمبير الدوائري، معادلة (٢٢-٥)، وهو:

$$\oint B.dl = \mu_0 I_c = \mu_0 \int_S J_c \, ds \qquad \ldots\ldots \quad (٩\text{-}١)$$

حيث إن التكامل الخطي مأخوذ حول مسار مغلق وأن التكامل السطحي مأخوذ على أي سطح محاط بمسار التكامل الخطي. والتكامل السطحي لكثافة التيار J هو عبارة عن مجموع التيار المار خلال المسار للتكامل الخطي. فإذا اختير المسار فإن قيمة الحث

المغناطيسي B يكون ثابتا ويتجه موازيا للمسار. وقد عرف استخدام قانون أمبير لحساب الحث المغناطيسي في البند (٥-٥).

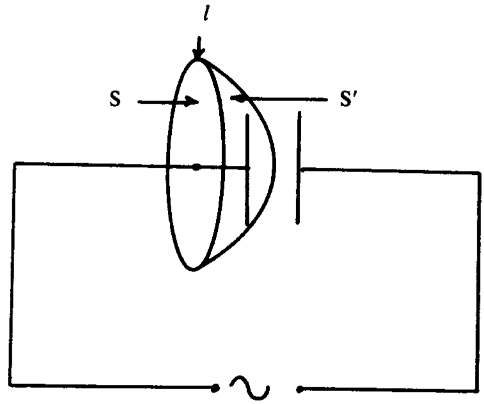
يوضح الشكل (١-٩) أن أي سطح محاط بمسار مغلق للتكامل الخطي يعطي النتيجة نفسها حيث إن المستويين السطحي S أو نصف الكروي S′ محاطان بالمسار المغلق نفسه.



شكل (١-٩): مساحتان S و S′ محاطتان بخط مقفل l. والتكامل $\mu_0 \int J.ds$ له القيمة نفسها على أي مساحة محاطة بالخط نفسه.

وإذا استبدلت البطارية بمصدر جهد متردد ووضع مكثف مستو في الدائرة كما في الشكل (٢-٩) فإن التيار المتردد سيمر خلال المكثف دون انتقال للشحنات بين صفيحتي المكثف. وقد اختار ماكسويل السطحين الواردين في الشكل (٢-٩) والسبب في ذلك هو أنه بالنسبة للسطح المستوي S يمكن تطبيق المعادلة (١-٩) ولكن بالنسبة للسطح نصف الكروي S′ فإن قيمة التكامل تساوي الصفر. وعالج ماكسويل هذا التناقض فافترض وجود حد آخر في المعادلة (١-٩) بحيث أن التغير في المجال الكهربي الحاصل في المكثف ينتج عنه تيار حقيقي يعطي مجالا مغناطيسيا.

إضافة لتغيير الصيغة الرياضية فإن افتراض ماكسويل يوضح أنه إذا تغير المجال الكهربي مع الزمن في أي منطقة ينتج عن ذلك مجال مغناطيسي هذا الافتراض لا يعطي



شكل (٢-٩): استبدلت البطارية الواردة في الشكل (١-٩) بمصدر جهد متردد كما أضيف للشكل مكثف مستو. التكامل $\int B.dl$ للسطح S يساوي I بينما للسطح نصف الكروي S′ يساوي الصفر ما لم يؤخذ في الحسبان تيار الإزاحة.

فقط المعنى المزدوج للمعادلة (١-٩) في حالة التيار المتردد بل إنه يقترح مصدرا آخر جديدا للحصول على مجال مغناطيسي.

التيار المار خلال المكثف المستوي الذي سعته C ومساحة كل من لوحيه S هو:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\because q = S\sigma \quad , \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\therefore I = S\varepsilon_0\frac{dE}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٩)$$

هذا المقدار هو الذي يمكن إضافته للمعادلة (١-٩) ويسمى بتيار الازاحة ويرمز له بالرمز I_d وبذلك فإن كثافة تيار الازاحة هو:

$$J_d = \varepsilon_0\frac{dE}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣\text{-}٩)$$

وكثافة التيار الكلية هي :

$$J = J_d + J_c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٩\text{-}٤)$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \int (J_d + J_c) \,.\, dS$$

$$= \mu_0 \int J_d \,.\, dS + \mu_0 \int J_c \,.\, dS$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{dE}{dt} \,.\, dS + \mu_0 \int J_c \,.\, dS \quad \cdots \quad (٩\text{-}٥)$$

وحسب المعادلة (٣ـ٤٣) فإن قيمة الإزاحة هي :

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \int \frac{dD}{dt} \,.\, dS + \mu_0 \int J_c \,.\, dS \quad \cdots \quad (٩\text{-}٦)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل للحث المغناطيسي.

ويمكن كتابة المعادلة (٦ـ٩) بدلالة المجال المغناطيسي H والازاحة D حيث:

$$\oint H.dl = \int \frac{dD}{dt} \,.\, dS + \int J \,.\, dS \quad \cdots\cdots \quad (٩\text{-}٧)$$

وحسب المعادلة (٥ـ٢٥) فإن المعادلتين التفاضليتين للمعادلتين (٦ـ٩) و(٧ـ٩) هما:

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \mu_0 J \quad \cdots\cdots \quad (١٨ - ٩)$$

$$\nabla \times H = \frac{dD}{dt} + J \quad \cdots\cdots \quad (٨ب - ٩)$$

ويحذف غالبا حرف c الدالة على تيار التوصيل بحيث يعرف ضمنا أن J يقصد بها تيار التوصيل.

مــثـــال (٩-١)

إذا كانت الشحنة المعطاة على مكثف مستو دائري تمثلها المعادلة:

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

حيث C سعـة المكثف، R مقـاومة خارجية في الدائرة وكانت r_0 نصف قطر القرص الدائري فاحسب:

ا - مجموع تيار الإزاحة بين صفيحتي المكثف إذا فرض أن المجال الكهربي بينهما منتظما.

ب - الحث المغناطيسي بين الصفيحتين كتابع للمسافة في المحور المركزي الذي يوصل بينهما.

جـ - علاقة التغير الحيزي للمجال المغناطيسي مع التغير الزماني للمجال الكهربي.

الحـــل

مجموع تيار الإزاحة يعطى من المعادلة:

$$I_d = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

لحساب المجال المغناطيسي بين الصفيحتين نستعمل المعادلة (٩-٥) مع اعتبار $J_c = 0$ وكذلك اعتبار نصف قطر المسار المغلق r الذي يحسب عنده المجال:

$$\therefore \oint_c B.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{dE}{dt} dS = \mu_0 I'_d$$

$$\therefore 2\pi r B = \mu_0 I'_d$$

حيث I'_d هو مقدار تيار الإزاحة المار خلال المسار المغلق الذي نصف قطره r والعلاقة التي تربط بين I'_d و I_d هي:

$$I'_d = I_d \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{r^2}{r_0^2}\left(-\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC} \qquad (١)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2}\left(-\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC} \qquad (٢)$$

وتدل المعادلة السالبة على اتجاه B كما في الشكل (٣أ ـ ٩).

إذا فرض أن المجال الكهربي يتجه مع محور Z فإن تيار الإزاحة يمكن التعبير عنه بالمعادلة (٢-٩) حيث:

$$I'_d = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{٣}$$

وبمقارنة المعادلتين (١) و(٣) نُحصل على:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \pi r_0^2}\left(-\frac{q}{RC}\right)e^{-t/RC} \tag{٤}$$

ويمكن الحصول على علامة التغير الحيزي للقيمة B باشتقاقه بالنسبة لـ r وباستعمال المركبات الديكارتية للحث المغناطيسي. فالشكل (٣ب ـ ٩) يوضح اتجاه E وكذلك B فإذا نقصت E فإن اتجاه B يكون معاكسا لحركة عقرب الساعة.

وتصبح قيمة B الواردة في المعادلة (٢) كالتالي:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{r_0^2}\frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC} \tag{٥}$$

أما مركبات B فهي:

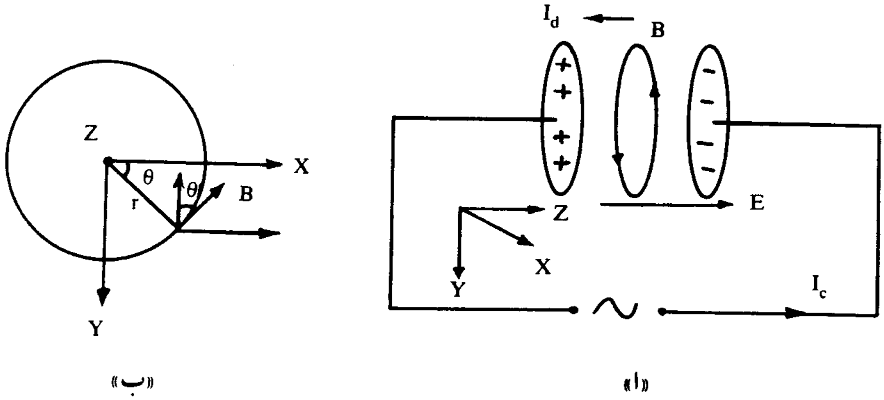
$$B_x = B\sin\theta = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{r_0^2}\frac{q}{RC}\, e^{-t/RC}\right]\frac{y}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi r_0^2}\frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC} \tag{٦}$$

$$B_y = -B\cos\theta = -\frac{\mu_0 x}{2\pi r_0^2}\frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC} \tag{٧}$$

من المعادلات (٤) و(٦) و(٧) نحصل على:

$$B_x = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} y \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad , \quad B_y = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} x \frac{\partial E_z}{\partial t}$$



شكل (٣-٩): تابع للمثال (١-٩) ويوضح المجال المغناطيسي الذي حثه B والذي نتج عن تغير المجال الكهربي بين صفيحتي المكثف الدائري.

وحيث إن E_z وكذلك $\partial E_z/\partial t$ ليست تابعة للمكان فإن:

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (٨)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (٩)$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = -\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (١٠)$$

وهذه النتيجة تبين أنه عند أي نقطة في الفراغ إذا تغير المجال الكهربي مع الزمن فإن تغيرا حيزيا يحدث للمجال المغناطيسي عند تلك النقطة.

(٩-٣) معادلات ماكسويل

Maxwell's Equations

(٩-٣-١) معادلات ماكسويل في شكلها العام

لقد أشير إلى معادلات ماكسويل في أماكن مختلفة في هذا الكتاب وستظهر مجتمعة في هذا البند. تتألف معادلات ماكسويل من أربع معادلات رياضية مشتقة من

قانـون أمبـير الدوائري وقانون فاراداي وقانون جاوس. هذه المعادلات مهمة وتمثل القواعد الأساسية لتحليل معظم مسائل الكهرومغناطيسية.

١ ـ *المعادلات التكاملية:*

هي عبارة عن المعادلات (١٤٤ ـ ٣)، (١٥ـ٥)، (١٥ـ٦) و(٧ـ٩) التي وردت في البنود (٣ـ١١)، (٥ـ٣)، (٦ـ٣ـ١) و(٩ـ٢) على الترتيب. وهذه المعادلات هي:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \varrho dV \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٩ـ١٠)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال الكهربي المشتقة من قانون جاوس.

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٩ـ١١)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال المغناطيسي المشتقة من قانون جاوس.

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \cdots\cdots \quad (٩ـ١٢)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون فاراداي.

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S} \quad \cdots\cdots \quad (٩ـ١٣)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون أمبير الدوائري.

٢ ـ *المعادلات التفاضلية*

وهي تمثـل الصيغ التفـاضلية للمعـادلات السـابقـة الذكر. وهي عبارة عن المعادلات (٤٤ب ـ ٣)، (١٤ـ٥)، (٢٠ـ٦) و(٨ـ٩) التي وردت في البنود (٣ـ١١) و(٥ـ٣) و(٦ـ٣ـ٢) و(٩ـ٢) على الترتيب. وهذه المعادلات هي:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٩ـ١٤)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}١٥)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}١٦)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}١٧)$$

٣ ـ *معادلات مكملة (إضافية)*

تحتاج معادلات ماكسويل إلى معادلات أخرى (وردت في الكتاب) تعتبر مهمة لحل مشكلات الكهرومغناطيسية منها :

● المعادلة (٧ـ٤) وهي :

$$J = \sigma E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}١٨)$$

● معادلة الاستمرارية (٦ـ٤) وهي :

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}١٩)$$

● معادلات القوى (١٣ـ١)، (١٠٢ـ٥) و (٧٦ـ٥) وهي :

$$F = qE \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٠)$$

$$F = qE + qv \times B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢١)$$

$$dF = (I \times B) \cdot dl \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٢)$$

● المعادلة (٤٨ـ٣) التي تربط بين المجال الكهربي E والإزاحة D وكذلك المعادلة (٧ـ٨) التي تربط بين الحث المغناطيسي B والمجال المغناطيسي H.

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P \quad \ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٣)$$

$$B = \mu H = \mu_0 (H + M) \quad \ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٤)$$

(٩-٣-٢) معادلات ماكسويل في حالات خاصة

Maxwell's equation in special cases

ا ـ معادلات ماكسويل في الحيز الفارغ Free space

وردت معادلات ماكسويل في البند السابق في شكلها العام، أما بالنسبة لقيمها في الحيز الفـارغ، أي عندما تكون كثافة التيار J وكثافة الشحنة الحجمية ϱ تساوي الصفر فإن معادلات ماكسويل تصبح كالتالي:

١ ـ المعادلات التكاملية

$$\oint_S D \cdot dS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٥)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٦)$$

$$\oint_c E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٧)$$

$$\oint H \cdot dl = \int \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٨)$$

٢ ـ المعادلات التفاضلية

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٢٩)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣٠)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣١)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣٢)$$

ب ـ معادلات ماكسويل والزمن Maxwell's equation and the time

إذا كانت المجـالات الكهـربية والمغناطيسية لا تتغير مع الزمن فإن معادلات ماكسويل تؤول إلى المعادلات الاستاتيكية (الساكنة) للكهرباء والكهرومغناطيسية التي سبق دراستها في الفصول السابقة. هذه المعادلات هي:

١ ـ المعادلات التكاملية

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \varrho dV \quad , \quad \oint_S B \cdot dS = 0 \qquad . \text{(٩-٣٣)}$$

$$\oint_c E \cdot dl = 0 \quad , \quad \oint_c H \cdot dl = \int_S J \cdot dS$$

٢ ـ المعادلات التفاضلية

$$\nabla \cdot D = \varrho \quad \text{و} \quad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times H = J \quad \ldots\ldots \quad \text{(٩-٣٤)}$$

أما إذا كان التغير بطيئا جدا فيمكن إهمال تيار الازاحة وتعرف هذه الحالة باسم شبـه الاستـاتيكية (quasi-static) والمعادلات تشبه المعادلات السابقة ما عدا المعادلة الرابعة فإنه يستبدل بها قانون فاراداي أي أن :

$$\oint_c E \cdot dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad \ldots\ldots \quad \text{(٣٥أ ـ ٩)}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad \text{(٣٥ب ـ ٩)}$$

أما إذا كان التغير كبيرا مع الزمن (عندما يزيد التردد على 100 كيلوهيرتز) فإنه لابد من الأخـذ بعـين الاعتبار تيار الإزاحة وهذا يعطي حلا لمعادلات ماكسويل بالنسبة للإشعاعات الكهرومغناطيسية .

وأبسط مثال لتكوين الأمواج الكهرومغناطيسية المنبعثة من المصادر المختلفة هو حدوث الوميض (spark) الحادث بين كرتين مشحونتين . فالتيار العالي التردد، ذو الزمن القصير يولد مجالا مغناطيسيا مترددا ينتج عنه مجال كهربي متردد قرب الكرتين . ولكن هذا المجـال الكهـربي ينتـج عنـه تيار يسمى بتيار الإزاحـة الذي بدوره ينتج مجالا مغنـاطيسيا جديدا . وقبل معرفة تيار الإزاحة ، الذي أضيف إلى المعادلة (١٧-٩)، يمكن الاعتقاد بأن المجال الكهربي والمجال المغناطيسي يؤولان إلى الصفر.

وبتكرار هذه العملية بصورة مستمرة تتكون الأمواج الكهرومغناطيسية من مجال كهربي متردد ومجال مغناطيسي متردد أيضا ينتشران في الفراغ بعيدا عن الكرتين بسرعة، يمكن تحديد قيمتها من المعادلتين (١٤-٩) و(١٧-٩)، في اتجاه متعامد على كل منهما.

وأول مكتشف للإشعاع الكهرمغناطيسي الناتج عن الكرتين المشحونتين هو هيرتز (١٨٨٧م) وذلك بمحاثة مجال كهربي في دائرة كهربية تبعد مسافة معينة عن الكرتين ووجد أن سرعة هذه الموجات تساوي 3×10^8 متر/ثانية ولها خواص الضوء المرئي مثل الانعكاس والانكسار والاستقطاب.

مثال (٢-٩)

إذا فرض أن المجالات الكهربية والمغناطيسية تتغير توافقيا مع الزمن. ما هي صيغ معادلات ماكسويل إذا كان:

$$D = D_0 e^{j\omega t}$$

الحل

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i\omega D_0 e^{i\omega t} = i\omega D$$

وتكون بذلك معادلات ماكسويل هي:

$$\oint H.dl = (\sigma + j\omega\varepsilon \int E.dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times H = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, E$$

$$\oint E.dl = -j\omega\mu \int_S H.dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times E = -j\omega\mu)\, H$$

$$\oint_S D.dS = \int_V \varrho.dV \quad \text{أو} \quad \nabla . D = \varrho$$

$$\oint_S B.dS = 0 \quad \text{أو} \quad \nabla . B = 0$$

(٩-٤) الموجات الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ
Electromagnetic Waves in Free Space

ذكر في البند السابق طريقة لتوليد الموجات الكهرومغناطيسية باستخدام التفريغ الوميضي. وبصورة عملية فإن المجالات المشعة الناتجة عن التيارات المتغيرة لا تكون مهمة ما لم يكن التردد أعلى من 100 كيلوهيرتز وهو أقل تردد مستخدم في أجهزة النقل الاقتصادية.

وسيتناول هذا البند الصيغ الرياضية لحلول معادلات ماكسويل للموجات الكهرومغناطيسية التي تسير بسرعة الضوء c في الفراغ.

فأي مجال كهرومغناطيسي يجب أن يحقق جميع معادلات ماكسويل. لنفترض وجود شحنة متغيرة وتوزيع للتيار في منطقة معينة في الفراغ، ولنتأمل المجالات الناتجة عن هذا المصدر الإشعاعي، خارج هذه المنطقة وفي الفراغ، تكون الشحنة وكثافات التيار مساوية للصفر في أي مكان وبذلك فإن العلاقات التي تربط بين E و D وبين B و H هي:

$$D = \varepsilon_0 E \quad \text{و} \quad H = B/\mu_0$$

وتصبح معادلات ماكسويل (١٤-٩)، (١٥-٩)، (١٦-٩) و(١٧-٩) كالتالي:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{أو} \quad \nabla \times B = E_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \text{(٣٦أ - ٩)}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \ldots \qquad \text{(٣٦ب - ٩)}$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \text{أو} \quad \nabla \cdot E = 0 \ldots \qquad \text{(٣٦جـ - ٩)}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(٣٦د - ٩)}$$

ويمكن الحصول من المعادلتين (٣٦أ - ٩) و(٣٦ب - ٩) على معادلات تحتوي على المجالين E و B بصورة منفصلة ويتم ذلك كالتالي.

يمكن كتابة طرفي المعادلة (٣٦أ - ٩) كالتالي:

$$\nabla \times \nabla \times B = \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{\partial E}{\partial t}$$

وحيث إن المعامل ∇ لا تشمل التغير في الزمن فإنه يمكن كتابة $\nabla \times (\partial E/\partial t)$ بالصورة $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E)$.

$$\therefore \nabla \times \nabla \times B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E)$$

وبالتعويض عن $\nabla \times E$ من المعادلة (٣٦ب ـ ٩) نحصل على:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣٧)$$

وحسب المعادلة (٢٤-٢) الواردة في الملحق ٢ فإن:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla (\nabla \,.\, B) - \nabla^2 B$$

وحسب المعادلة (٣٦د ـ ٩) فإن المعادلة (٣٧-٩) تصبح كالتالي:

$$\nabla^2 B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣٨)$$

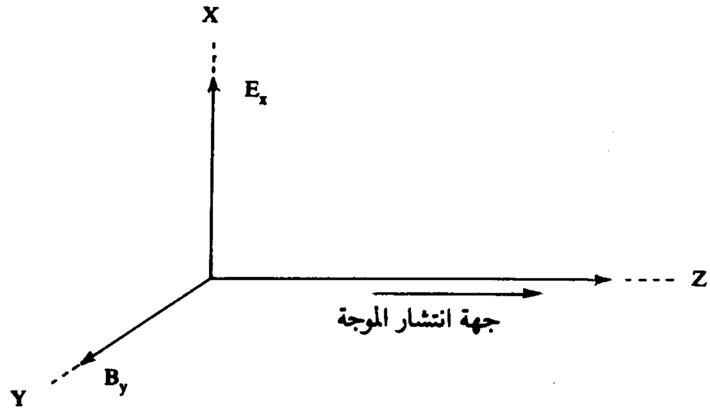
ويمتثل المجال المغناطيسي الذي حثه (B) لهذه المعادلة في أي مكان في الحيز الفارغ حيث الشحنة وكثافات التيار تساوي الصفر.

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$$\nabla^2 E = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٣٩)$$

صحيحة في أي مكان في الحيز الفارغ حيث لا شحنة ولا تيار.

وتسمى المعادلتان (٣٨-٩) و(٣٩-٩) بمعادلتي الموجة (wave equations) للمجالين الكهربي والمغناطيسي.



شكل (٤-٩): مركبتا المجال الكهربي والمجال المغناطيسي لموجة مستوية وعلاقتهما بالاحداثيات الديكارتية.

فإذا فرض أنـه من الممكن توليد موجات كهرومغناطيسية بحيث يكون لمركبة المجال الكهربي اتجاه واحد فقط في اتجاه محور x ومنتظمة في المستوى xy وكذلك للمجال الكهربي اتجاه واحد فقط في اتجاه محور y ويكون منتظما أيضا في المستوى xy. فهذا يعني أن المجالين E و B يعتمدان فقط على الزمن t و Z ولا يتغيران مع الاتجاهين x و y أي أن:

$$E(x,y,z,t) = E(z,t)\,\vec{i} \quad .... \quad (\text{٤٠أ} - \text{٩})$$

$$B(x,y,z,t) = B(z,t)\,\vec{j} \quad ... \quad (\text{٤٠ب} - \text{٩})$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجها الوحدة على المحورين x و y. ويوضح الشكل (٤-٩) المجالين و وجهة انتشارهما.

وتصبح المعادلتان (٣٨-٩) و(٣٩-٩) كالتالي:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad ...... \quad (\text{٤١أ} - \text{٩})$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad ..... \quad (\text{٤١ب} - \text{٩})$$

وتسمى المعادلة (٤١أ ـ ٩) بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد للمجال المغناطيسي وتتضمن أن المجال المغناطيسي $B(z,t)$ ينتشر كموجة ذات بعد واحد بسرعة قدرها

$$v = c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots \quad (٩\text{-}٤٢)$$

كما تسمى المعادلة (٤١ب ـ ٩) بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد للمجال الكهربي وتتضمن أن المجال الكهربي $E(z,t)$ ينتشر كموجة ذات بعد واحد بسرعة المجال المغناطيسي نفسها.

وقد اتضح في الملحق ١، البند (١ـ أ) أن هذه القيمة تماثل قيمة سرعة الضوء في الفراغ c.

وقبل اكتشاف ماكسويل كان الفيزيائيون يفصلون الضوء عن الكهرباء والمغناطيسية ولكن إنجازات ماكسويل تتضمن حقيقة انتشار الضوء التي لا يمكن شرحها إلا على أساس أن الضوء عبارة عن موجات كهرومغناطيسية. كذلك أوضح ماكسويل أن الموجات الكهرومغناطيسية تتولد لمجرد تسارع شحنات كهربية أو تشع من أي دائرة كهربية تحتوي على مصدر تيار متردد ذي ذبذبات عالية التردد. وهذه نتيجة بسيطة للحقيقة التي تنص على أن الشحنات الحرة في الموصلات في دوائر التيار المتردد تصدر حركة توافقية بسيطة ذات تسارع مستمر.

وعند انتشار موجة كهرومغناطيسية، تعطي مركبتي المجال الكهربي والمجال المغناطيسي بالمعادلتين (٤٠أ ـ ٩) و(٤٠ب ـ ٩) وتكون منتظمة في المستوى xy وتعتمد فقط على z و t بحيث تقود إلى المعادلتين (٤١أ ـ ٩) و(٤١ب ـ ٩) وتحت هذه الشروط يسمى هذا النوع من الموجات بالموجات الكهرومغناطيسية المستوية (plane wave). وليست كل الموجات الكهرومغناطيسية مستوية ولكن الاختيار وقع على هذا النوع لبساطة فهمه من الناحية الرياضية والفيزيائية.

وتنتشر الموجات الكهرومغناطيسية المستوية بحيث يكون مجالاها الكهربي والمغناطيسي دائما متعامدين (perpendicular) أو مستعرضين (transverse) مع اتجاه الانتشار.

وحل المعادلة (٤١ب ـ ٩) يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$E_x = E_0 f(z - ct) \quad .... \quad (٤٣أ ـ ٩)$$

حيث E_0 مقدار ثابت و f أي دالة أما قيمة c فتمثلها المعادلة (٤٢ـ٩).

وتمثل المعادلة (٤٣ـ٩) موجة متحركة بسرعة قدرها c في الاتجاه z وتتغير مع الزمن t ولا تتغير مع الاتجاهين x و y. أما إذا كانت الحركة في الاتجاه السالب للمحور z فإن الحل سيكون كالتالي:

$$E_x = E_0 f(z + ct) \quad ... \quad (٤٣ب ـ ٩)$$

وقد تنتشر طاقة كهرومغناطيسية بحيث تنتقل موجاتها بصورة عشوائية في حين يكون مجالاهما الكهربي والمغناطيسي دائما في مستوى عمودي على اتجاه الانتشار يقال لهذا النوع من الموجات الموجات غير المستقطبة (unpolarized) بينما يقال للموجات أحادية التغير السابق ذكرها بالموجات المستقطبة خطيا (linearly polarized).

فإذا تذبذبت موجة كهرومغناطيسية مستوية جيبية باستمرار بحيث تكون قيمة ذروتها (amplitude) ثابتة وبسرعة زاوية ثابتة ω ، مثل هذه الموجات تسمى بالموجات أحادية الطول الموجي (monochromatic) يعبر عنها بالمعادلتين التاليتين:

$$E_x = E_0 \cos(Kz - \omega t) \quad .... \quad (٤٤أ ـ ٩)$$

$$B_x = B_0 \cos(Kz - \omega t) \quad ... \quad (٤٤ب ـ ٩)$$

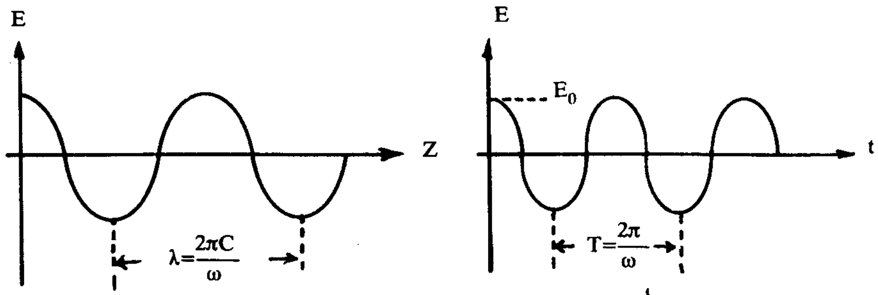
حيث E_0 و B_0 القيم العظمى لكل من المجال الكهربي والمجال المغناطيسي وهما ثابتان. ويعتبران حلين للمعادلتين (٤١أ ـ ٩) و(٤١ب ـ ٩) أما سرعة الانتشار للموجة فهي:

$$c = \frac{\omega}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٤٤جـ - ٩})$$

حيث تسمى K بالعدد الموجي (wave number) ووحدته ١/متر.

ويوضح الشكل (٥أ - ٩) تغير المجال مع الزمن عند ثبوت z (z = 0). كما يوضح الشكل (٥ب - ٩) تغير المجال مع الموقع عند ثبوت الزمن (t = 0). واضح أن التغير مع المسافة جيبي والمسافة بين نقطتين متكافئتين لنبضتين متتابعتين تسمى بالطول الموجي ويرمز له بالرمز λ حيث:

$$\lambda = 2\pi/K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٩-٤٥})$$



شكل (٥-٩): ا - يمثل مركبة المجال الكهربي التابع للمعادلة (٤٣أ - ٩) وتغيرها مع الزمن عندما تكون z = 0.
ب - يمثل التغير للتابع نفسه مع z عند t = 0.

ويحصل من المعادلتين (٤٤-٩) و(٤٥-٩) على:

$$\lambda = 2\pi c/\omega \qquad \because\ \omega = 2\pi f$$

$$\therefore\ \lambda = c/f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٩-٤٦})$$

وبالتعويض عن هذه المقادير في المعادلتين (١٤٤ - ٩) و(٤٤ب - ٩) يُحصل على:

$$E_x = E_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}\,(z-ct) \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤٧أ - ٩})$$

$$B_x = B_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \quad \ldots \quad (٤٧ب - ٩)$$

وباشتقاقهما نُحصل على :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{2\pi}{\lambda} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \quad \ldots \quad (٤٨أ - ٩)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{2\pi c}{\lambda} B_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \right) \cdot \quad (٤٨ب - ٩)$$

وحيث إن المعادلة (٣٦ب - ٩) يمكن كتابتها بالنسبة للإحداثيات الديكارتية كالتالي :

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \quad \ldots \quad (٤٩أ - ٩)$$

وحيث إن المجالين المتغيرين هما E_x و E_y تابعان لـ z و t فإن هذه المعادلة تصبح :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (٤٩ب - ٩)$$

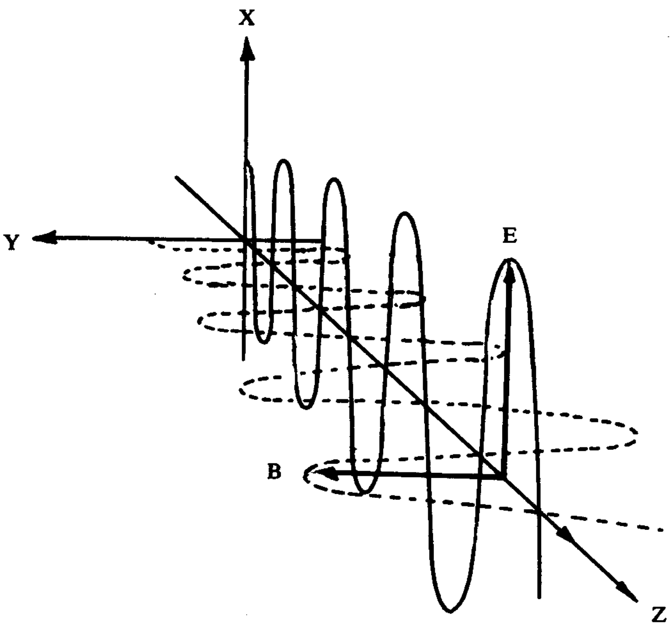
من المعادلات (٤٨أ - ٩)، (٤٨ب - ٩) و(٤٩ب - ٩) نُحصل على :

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٥٠)$$

ومن الملاحظات المهمة أن المجالين الكهربي والمغناطيسي يتذبذبان بالطور نفسه (inphase). ويوضح الشكل (٦-٩) انتشار موجة كهرومغناطيسية مستوية في اتجاه z موضحا عليها اتجاه المجال الكهربي E والمجال المغناطيسي B .

والتعبير العام لحل الموجة المستوية المستقطبة خطيا للمعادلة (٣٩-٩) يكون على الصورة التالية :

$$E = E_0 \exp\ i (\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \ldots \quad (٩\text{-}٥١)$$



شكل (٦-٩): التناسب الاتجاهي للمجالين الكهربي والمغناطيسي لموجة مستوية مستقطبة خطيا ويتذبذب متجه المجال الكهربي على محور x بينما يتذبذب المجال المغناطيسي على محور y ومتحد في الطور مع المجال الكهربي. وتنتشر الموجة في اتجاه محور z.

حيث يمثل $\vec{K}$ اتجاه انتشار الموجة الكهرومغناطيسية ويكون المتجه E_0 عموديا على $\vec{K}$. وتكون العلاقة بين B و E للموجة المستوية في هذه الحالة وعلى ضوء المعادلة (٥٠-٩) هي:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{K} \wedge \vec{E}) \quad \text{(٩-٥٢)}$$

ويمثل الحل الوارد بالمعادلة (١٤٤ - ٩) الجزء الحقيقي في المعادلة (٥١-٩) وفي اتجاهZ.

وقيمة المجال المغناطيسي B_0 من الموجات المستوية في الفراغ تكون عادة صغيرة حيث تبلغ نسبة المجال الكهربي E_0 إلى المجال المغناطيسي B_0 ، كما هو واضح من المعادلة (٥٠-٩)، سرعة الضوء فإذا فرض أن E_0 تساوي 0.1 فولت/متر. فإن قيمة B_0 تساوي 3.3×10^{-10} تسلا .

(٩ـ٥) الموجات المستوية في وسط عازل متماثل الخواص

Plance Waves in Isotropic Insulating Media

إذا تحركت موجة في وسط عازل سماحيته النسبية ε_r ونفاذيته النسبية μ_r فإن معادلتي الموجة للمجالين الكهربي والمغناطيسي E و B يمكن اشتقاقهما من معادلات ماكسويل بالطرق السابقة نفسها مع الأخذ في الحسبان ε_r و μ_r حيث تصبح المعادلتان (٣٨ـ٩) و(٣٩ ـ ٩) كالتالي:

$$\nabla^2 B = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \ldots \quad (٩ـ٥٣)$$

$$\nabla^2 B = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \ldots \quad (٩ـ٥٤)$$

وحل هاتين المعادلتين يمثل موجات تنتقل بسرعة قدرها:

$$v = (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0)^{-1/2} = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٩ـ٥٥)$$

حيث μ , ε نفاذية وسماحية الوسط.

ويمكن أن يكون الحل ممثلا بالمعادلتين (١٤٣ ـ ٩) و(٤٣ب ـ ٩) الأحادية الطول الموجي كما حصل ذلك في الفراغ مع الأخذ بالحسبان أن العدد الموجي K تمثله المعادلة:

$$K = \omega/v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩ـ٥٦)$$

بدلا من $K = \omega/c$ وكذلك الطول الموجي يعبر عنه بالمعادلة:

$$\lambda = v/f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩ـ٥٧)$$

حيث إن الطول الموجي لموجات ثابتة التردد تختلف قيمته إن تحركت الموجة في الوسط أو في الفراغ. فإذا كان حاصل ضرب μ_r و ε_r للوسط أكبر من الوحدة فإن السرعة v للموجة في الوسط أقل من السرعة c في الفراغ. ويقل بذلك الطول الموجي λ.

أما العلاقة بين B و E ومتجه الوحدة K فتحدده المعادلة (٩-٥٢) مع استبدال سرعة الضوء c بسرعة الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط أي أن:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\vec{K} \wedge \vec{E}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٥٨)$$

والنسبة بين سرعة الموجات الكهرومغناطيسية المتنقلة في الفراغ إلى سرعتها في الوسط يسمى بمعامل الانكسار (refractive index) ويرمز له بالرمز n حيث:

$$n = \frac{c}{v} = (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٥٩)$$

ولذلك فإن معامل الانكسار يتغير مع التردد كما يتغير μ_r و ε_r مع التردد وذلك حسب المعادلة (٩-٥٣). والتغير في التردد نتيجة لمعامل الانكسار لمنشور (prism) من الزجاج يعطي ما يسمى بالتشتت (dispersion).

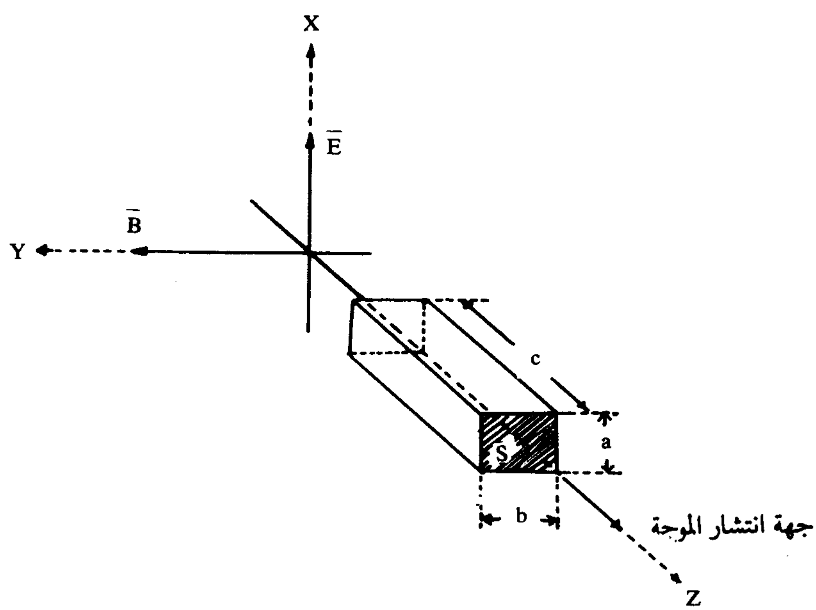
(٩-٦) طاقة الموجات الكهرومغناطيسية

Energy in Electromagnetic Waves

الموجات أحادية الطول الموجي غير موجودة في الطبيعة ولقد اعتمد عليها في دراسة البند السابق لسهولة معالجتها الرياضية ولفهم الكثير عن الخواص المهمة عن انتشار الموجات الكهرومغناطيسية. والواقع أن الموجات الموجودة فعلا تتكون من موجات ذات ترددات متعددة وتشكل ما يسمى بالمجموعة الموجية (wave group). ويقال عن مجموعة موجية إنها تقريبا أحادية الطول الموجي إذا كانت الترددات في المجموعة متقاربة في منطقة ضيقة حول تردد أساسي. إذا انتقلت مجموعة موجية في وسط مشتت فإن كل تردد سينتقل بسرعة مختلفة قليلا عن الآخر حيث تعطى السرعة وعلاقتها بالتردد الزاوي والعدد الموجي من المعادلتين (٩-٥٥) و(٩-٥٦) وتسمى هذه السرعة بالسرعة الموجية (wave velocity) أو سرعة الطور (phase velocity). وطاقة المجموعة الموجية تنتقل بسرعة تسمى سرعة المجموعة (group velocity).

أمـا بالنسبة للفراغ فلا وجود للتشتت وتكون للسرعات الموجية لكل مركبات الـتردد المختلفة القيمة نفسها وتساوي سرعة الضوء c. وكذلك الحال بالنسبة لسرعة مجموعة الأمواج والطاقة المتحدة مع أي مركبة لتردد موجة متحركة مع اتجاه الموجة تتحرك أيضا بالسرعة نفسها. وسنحسب معدل تدفق الطاقة عبر وحدة المساحة ا لمرتبطة مع مركبة التردد الزاوي ω. إذا تحركت الموجة مع اتجاه المحور فإن الطاقة المتدفقة تكون في اتجاه المحور z ولها القيمة نفسها على كل نقاط المحور z. وحيث إن المجالين الكهربي والمغناطيسي يتذبذبان آنيا فإن الطاقة المتدفقة اللحظية تتذبذب أيضا. ومع ذلك فإن متوسط الطاقة المتدفقة اللحظية لفترة زمنية تذبذبية كاملة للمجالين لها قيمة ثابتة.

ويوضح الشكل (٧-٩) صندوقا مستطيل الشكل طوله c موضوعا في اتجاه المحور z وأطوال مساحة مقطعه a و b. والطاقة المحتواة في الصندوق هي الطاقة التي تخترق المساحة S في الثانية، وحيث إن الموجات تنتقل بسرعة الضوء c.



شكل (٧-٩): حينما تنتشر موجة مستوية في الاتجاه z في الفراغ فإن متوسط الطاقة التي تَعْـبر المساحة S في الثـانية تسـاوي متوسط الطـاقة المخـزونة في المجالـين الكهربي والمغـناطيسي خلال صندوق طوله يساوي سرعة الضوء c.

وطبقا للمعادلة (٥٩ـ٢) فإن كثافة الطاقة في المجال الكهربي هي :

$$\mu_e = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٦٠أ} - ٩)$$

وطبقا للمعادلة (٥٨ـ٩) فإن كثافة الطاقة في المجال المغناطيسي هي :

$$\mu_m = \frac{1}{2}\,\mu_0 H^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٦٠ب} - ٩)$$

وحيث إن كثافة الطاقة هنا هي الطاقة لوحدة الحجوم فإن الطاقة الكهرومغناطيسية لأي حجم معطى [حجم الصندوق الوارد في الشكل (٧ـ٩)، عند الزمن t] هي

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \quad \ldots\ldots \quad (\text{٩ـ٦١})$$

فإذا فرض أن قيمتي المجالين هما :

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kz - \omega t)\, i \quad \text{و} \quad B = B_0 \cos(Kz - \omega t)$$

وعُوض في المعادلة (٦١ـ٩) فإن مجموع الطاقة داخل الصندوق عند زمن قدره t هي :

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left[\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(KZ - \omega t)\, dz\, dy\, dx \right]$$

أما متوسط الطاقة في الصندوق فهي :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2T}\int_0^T\int_0^c \left[\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(Kz - \omega t)\, dz\, dt \right]$$

حيث T زمن دورة التذبذب وتساوي $2\pi/\omega$ ومنه فإن :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2}\int_0^c \left(\frac{1}{2}\ \varepsilon_0 E_0^2 + \ \frac{1}{2}\ \mu_0 H_0^2 \right) dz$$

$$\bar{U} = \frac{ab}{4} c(\varepsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2) \quad \cdots\cdots \quad (٩\text{-}٦٢)$$

وباستعمال المعادلتين (٥٠-٩) و ($B = \mu_0 H$) تصبح هذه المعادلة كالتالي :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2} c\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0 ab$$

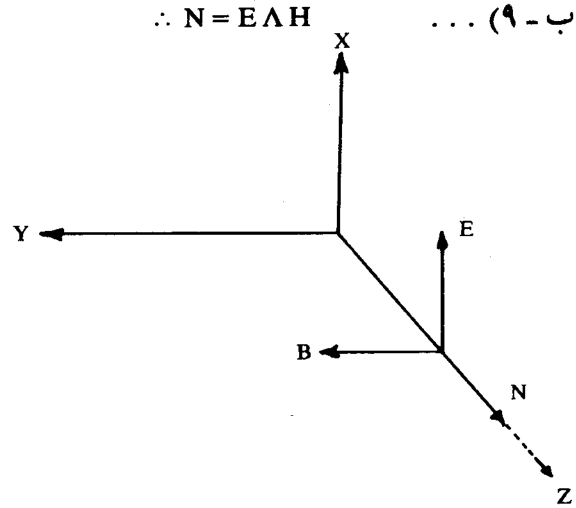
وبـذلك فإن متوسط الطاقة المارة على وحدة المساحة في وحدة الزمن عند أي نقـطة في السـطح المـوجي هي $\frac{1}{2} E_0 H_0$ واتجـاهها مع محور z. ويسمى هذا المقدار المقدار بمتجه بوينتنج (Poyting vector) وسنرمز له بالرمز N حيث

$$N = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{K} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٩\text{-}٦٣)$$

وهذه النتيجة يمكن الحصول عليها إذا كانت القيمة اللحظية لانتقال الطاقة بواسطة الموجة الكهرومغناطيسية خلال وحدة المساحة العمودية على اتجاه الانتشار أي إذا كانت قيمة متجه بوينتنج يساوي

$$N = E H \vec{K} \quad \ldots \quad (\text{٦٤أ} - ٩)$$

$$\therefore N = E \wedge H \quad \ldots \quad (\text{٦٤ب} - ٩)$$



شكل (٨-٩): العلاقة بين متجه بوينتج والمجال الكهربي E والحث المغناطيسي B حسب المعادلة (٦٥-٩).

ويوضح الشكل (٨ـ٩) العلاقة بين هذه المعاملات الثلاثة.

فإذا تحركت موجة مستوية في اتجاه متجه الوحدة $\vec{k}$ في وسط متجانس الخواص سماحيته النسبية ε_r ونفاذيته النسبية μ_r فإن متجه بوينتنج يصبح كالتالي:

$$N = E \wedge H = E \wedge \frac{B}{\mu_r \mu_0} = E \wedge \frac{B}{\mu} \quad \ldots \quad (٩\text{-}٦٥)$$

وحسب المعادلات (٩ـ٥٥)، (٩ـ٥٨) و(٩ـ٦٥) نحصل على:

$$N = E \wedge (K \wedge E)\, \frac{(\varepsilon\mu)^{1/2}}{\mu}$$

$$N = KE^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٦٦)$$

و

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \vec{K} E_0^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٦٧)$$

(٩ـ٧) امتصاص الموجات المستوية في الموصلات والتأثير السطحي «الجلدي»

Absorption of Plane Waves in Conductors and the Skin Effect

إذا انتشرت موجة كهرومغناطيسية في وسط موصل فإن المجال الكهربي المتذبذب في الموجة سيولد تيارات كهربية نتيجة لبذل شغل من أجل توليدها، وبعض من طاقة الموجات تتبدد كحرارة في ذلك الوسط وهذا يعني توهين الموجة المستوية خلال مرورها في وسط موصل.

لنتأمل المواد الموصلة التي كثافة التيار لها J وتتناسب مع المجال الكهربي E أي أن:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٦٨)$$

حيث σ يمكن عدُّه مساويا للتوصيلية الكهربية للتيار المستقر. هذه العلاقة صحيحة تقريبا لمعظم المواد التي تخضع لقانون أوم للتيارات المباشرة وللتيارات عالية التردد حيث يمكن تطبيق النظريات الكلاسيكية أما إذا كان التيار الكهربي يتغير بسرعة عالية فإن هذا التقريب قد لا يكون مناسبا.

وباستعمال معادلات ماكسويل لاشتقاق المعادلات التي تمثل الموجات الكهرومغناطيسية التي تنتشر في وسط موصل واعتماد المعادلة (٩-٦٨) فإنه يُحصل من المعادلات (٩-١٧)، (٩-٢٣) و(٩-٦٨) على:

$$\frac{1}{\mu_r\mu_0}\nabla\times B=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}+\sigma\vec{E} \quad \ldots\ldots \quad (٩-٦٩)$$

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩-٧٠)$$

حيث ε_r و μ_r السماحية النسبية والنفاذية النسبية على التوالي ويمكن الحصول من هاتين المعادلتين على معادلة يحتوي طرفاها على المجال الكهربي فقط بصورة مماثلة لم اتبع في حالة الموجات في الفراغ.

فحسب المعادلة (٢-٢٤) الواردة في الملحق (٢) فإن:

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla(\nabla.E)-\nabla^2E$$

وحيث إن الموجة تنتشر خلال وسط لموصل فإن كثافة الشحنة J ستبقى صفرا في أي مكان ولذلك فإن $\nabla . E$ تساوي الصفر.

$$\therefore \quad \nabla\times(\nabla\times E)=-\nabla^2E$$

يمكن كتابة المعادلة (٩-٧٠) على الصورة التالية:

$$\nabla\times(\nabla\times E)=-\nabla\times\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B)$$

$$\therefore \nabla^2E=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B)$$

وحسب المعادلة (٩ـ٦٩) فإن هذه المعادلة تصبح كالتالي:

$$\nabla^2 E = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} \quad (٩ـ٧١)$$

وبصورة مماثلة يمكن إيجاد مركبة المجال المغناطيسي.

فإذا انتقلت موجة كهرومغناطيسية مع الاتجاه z وكانت مركبة المجال الكهربي تتغير مع الزمن t وتتجه مع الاتجاه z ومحمولة على x ، أي $E_x = E(z,t)i$ فإن المعادلة التفاضلية (٩ـ٧١) تصبح كالتالي:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \ldots . \quad (٩ـ٧٢)$$

وإذا فرض أن حل هذه المعادلة يكون على الشكل التالي:

$$E_x = E_0 \exp i(Kz - \omega t) \quad \ldots\ldots \quad (٩ـ٧٣)$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} = i K E_0 \exp i(Kz - \omega t) = i K E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i K \frac{\partial E_x}{\partial z} = -K^2 E_x$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial t} = -i \omega E_0 \exp i(Kz - \omega t) = -i \omega E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -i \omega \frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega^2 E_x$$

وبالتعويض في المعادلة (٩ـ٧٢) فإن العلاقة بين K و ω تربطها علاقة التشتت التالية:

$$K^2 = j\omega\mu\sigma - \varepsilon_0 \mu \omega^2 \quad \ldots . \quad (٩ـ٧٤)$$

وحيث إن الطرف الثاني لهذه المعادلة يحتوي على عدد حقيقي وعدد تخيلي وهذا لن يتأتى إلا إذا كان الطرف الأول على الصورة التالية:

$$K = \pm (\beta + j\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٧٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٧٤) يمكن الحصول على :

$$\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta = j\omega\mu\sigma - \varepsilon\mu\omega^2$$

ومنه فإن :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \varepsilon_0\, \mu\, \omega^2 \quad \ldots\ldots \quad (٧٦\text{أ} - ٩)$$

$$2\,\alpha\,\beta = \omega\mu\sigma \quad \ldots\ldots \quad (٧٦\text{ب} - ٩)$$

حيث α و β عددان حقيقيان وموجبان. وإذا عُوض عن K من المعادلة (٩-٧٥) في المعادلة (٩-٧٣) فإنه يُحصل على :

$$E_x = E_0 \exp i(\beta z - \omega t) \exp(-\alpha z) \quad \ldots \quad (٩\text{-}٧٧)$$

وتسمى مثل هذه الدالة بالموجات المسافرة المتخامدة (damped travelling wave) حيث تتناقص ذروتها مع المسافة، ليست ثابتة، في اتجاه انتشار الموجة وذلك بسبب المعامل $\exp(-\alpha z)$ الذي جاء نتيجة للتوصيلية الكهربية التي لها علاقة بفقد في طاقة الموجة بسبب تبدد الطاقة المقاومية إلى حرارة.

وبالنسبة لمعظم المواد الموصلة يكون المقدار $\omega\varepsilon_0$ الوارد في المعادلة (٧٦أ - ٩) صغيرا جدا بالنسبة لقيمة التوصيلية الكهربية σ الواردة في المعادلة (٧٦ب - ٩) ولذلك يمكن إهمال المقدار $\varepsilon_0\, \mu\, \omega^2$ ، ويُحصل من ذلك على أن :

$$\alpha = \beta = (\omega\mu\sigma/2)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٧٨)$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٧٧) يمكن الحصول على :

$$E_x = E_0 \exp i\left[(\omega\mu\sigma/2)^{1/2} z - \omega t\right] \exp\left[-(\omega\mu\sigma/2)^{1/2} z\right] \ldots \quad (٩\text{-}٧٩)$$

ويمكن بالطريقة نفسها حساب مركبة المجال المغناطيسي B_y. كما يمكن إيجاد العلاقة بين المجالين B_y و E_x باستخدام المعادلة (٩-٧٠) والحصول على نتيجة تماثل المعادلات (٩-٥٠)، (٩-٥٢) و(٩-٥٨) حيث يكون :

$$B_y = \frac{E_x}{v'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{-}٨٠)$$

حيث v' سرعة الموجة داخل المادة الموصلة.

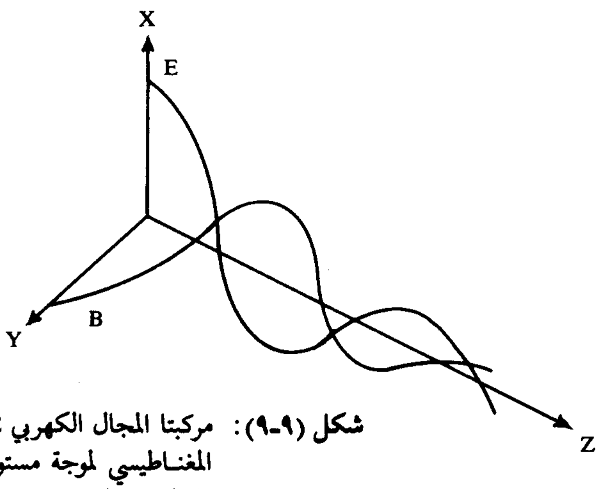
وقد وجد أنه إذا سقطت موجة كهرومغناطيسية مستوية على سطح موصل فإن معظم الموجة ستنعكس وأن الموجة التي تدخل عند حدود السطح تكون صغيرة جدا. ولذلك فالمقدار $\exp[-(\omega\mu\sigma/2)^{1/2}]$ يجعل E_x تتناقص أسيا مع العمق داخل الموصل. ويمثل الشكل (٩-٩) المجالين الكهربي والمغناطيسي لموجة موهنة داخل موصل وعند زمن معين. ويسمى المقدار $(2/\mu\omega\sigma)^{1/2}$ بعمق الاختراق «الجلد» (skin depth) أو بمسافة التوهين (attenuation distance) ويرمز له بالرمز δ حيث:

$$\delta = (2/\mu\omega\sigma)^{1/2} \qquad \ldots\ldots (٨١أ - ٩)$$

$$\delta = (2/\mu_r \mu_0 \omega\sigma)^{1/2} \qquad \ldots\ldots (٨١ب - ٩)$$

وقيمة δ للنحاس مثلا عند التردد 50Hz هي:

$$\delta = (2/4\pi \times 10^{-7} \times 5.9 \times 10^{7} \times 100\pi)^{1/2} \simeq 1\text{cm}$$



شكل (٩-٩): مركبتا المجال الكهربي E والمجال المغناطيسي لموجة مستوية موهنة داخل موصل عند زمن معين.

بينما قيمة δ للنحاس أيضا عند التردد 50MHz تساوى تقريبا 10^{-3}، علما بأن قيمة μ_r تساوي تقريبا الواحد.

أي أنه كلما زادت ω نقصت قيمة عمق الاختراق δ.

ولـذلـك فإن التيار الكهربي عالي التردد يجري خلال الطبقة الرقيقة الخارجية للموصل وتسمى هذه الظاهرة بالظاهرة القشرية «الجلدية» (skin effect).

وإذا كان لدينا موصل مقاومته R عند الترددات العالية وكانت أطواله أكبر من عمق الاختراق δ وكان الموصل اسطواني الشكل طوله l ونصف قطر مقطعه r فإن قيمة المقاومة R تساوي تقريبا المقدار التالي :

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot 2\pi r B} = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٩\text{–}٨٢)$$

وإذا فرض R_0 مقاومة الموصل في حالة التيار المستمر فإن

$$R = rR_0 / 2\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{–}٨٣)$$

ومن المعروف أن مقاومة سلك النحاس التي نصف قطر مقطعه 5 سم تساوي 8×10^{-4} أوم لكل متر بينما قيمة مقاومته تساوي 0.1 أوم لكل متر إذا كان التيار مترددا بتردد قدره 50mHz.

(٩ـ٨) طيف الموجات الكهرومغناطيسية

The Electromagnetic Spectrum

تطبق نظريات ماكسويل على كل أنواع الموجات الكهرومغناطيسية الموجودة عند أي تردد أو عند أي طول موجي .

يوضح الشكل (١٠ـ٩) موجات الطيف المدروسة والمستخدمة قبل عام ١٨٠٠م كانت الموجات المرئية هي المعروفة والمدروسة فقط وخلال القرن التاسع عشر اتسع الطيف في الاتجاهين التردد العالي والتردد المنخفض وتمت أول دراسة على الطيفين فوق البنفسجي (ultraviolet) وتحت الأحمر (infrared).

واكتشفت الأشعـة السينية (X-ray) عام ١٨٩٥م بواسـطة العـالم رونتجن (Rentgen) بعد عدد من التجارب لدراسة احتمال اختراق (penetration) الإلكترونات المعجلة خلال الجدار الزجاجي لأنبوبة أشعة المهبط .

والإشعاعات ذات الترددات المنخفضة عن تردد الضوء المرئي لها مدلول تكنولوجي مهم وخصوصا في مجال الهندسة الكهربية. أما الموجات الطويلة والقصيرة فلها استخدامات واسعة في مجال الاتصالات اللاسلكية. ويستخدم الرادار (موجات لا يتعدى طولها بضع سنتيمترات وقد اكتشف عام ١٩٤٠م) للكشف عن الطائرات والسفن والسيارات حيث يحدد مكانها وسرعتها بانعكاس موجاته عن هذه الأجسام. والاستخدام المكثف لموجات الراديو والرائي والأمواج الدقيقة والرادار يعكس أهمية اكتشاف ماكسويل وهيرتز.

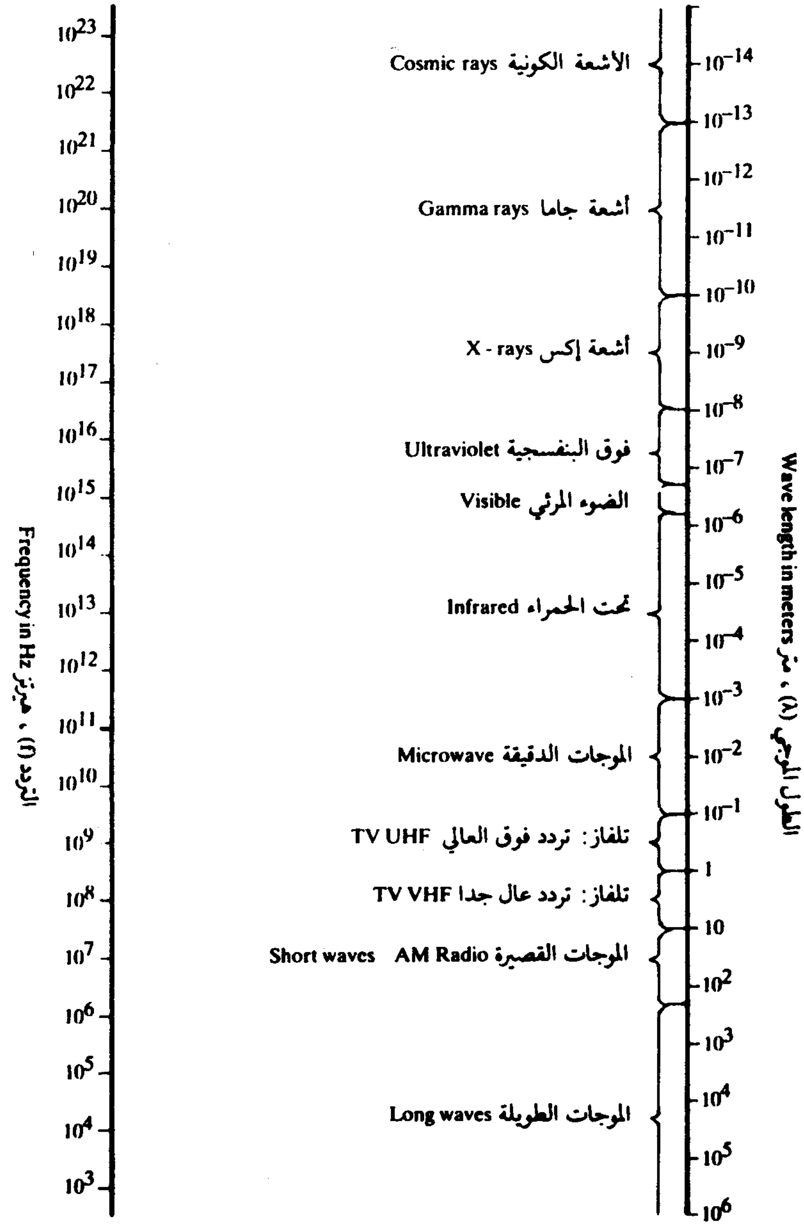
وطيف الموجات الكهرومغناطيسية ليست محدودة من الناحية النظرية ولكن بالنسبة للناحية العملية فهي محدودة بالنسبة للترددات سواء أكان ذلك بالنسبة لتردد المصدر أو الكاشف لهذه الموجات.

توجد مصادر للموجات الكهرومغناطيسية حيث جزيئات مشحونة متسارعة ينتج عنها طاقة مشعة ويرتبط غالبا الطول الموجي لهذه الإشعاعات مع الحجم المميز للنظام المشع. فالطول الموجي لأشعة جاما (gama) يتراوح بين 10^{-10} إلى 10^{-13} متر ومنشأه نواة الذرة. والأشعة السينية، والفوق بنفسجية والضوء المرئي وتحت الحمراء والموجات الدقيقة يمكن أن تنبعث من الذرات أو الجزيئات التي تفقد بعض طاقتها أثناء توليدها.

ويمكن الحصول على الموجات اللاسلكية بتسارع الإلكترونات من دوائر التيار المتردد، فهوائي الإرسال يشع الموجات التي تتراوح أطوالها في حدود أبعاد الهوائي نفسها، ويتم ذلك بإنتاج تيار متردد بين الأرض والهوائي بتردد مناسب.

وحيث إن الموجات الكهرومغناطيسية تتألف من مجالين كهربي ومغناطيسي فإن أجهزة الكشف ينبغي عملها على أساس أن المجالين المتذبذبين يقومان بدورهما بتسارع الشحنات التي تُنْتِج مرة أخرى تيارات متذبذبة يمكن عن طريقها معرفة الموجات

أنواع الموجات الكهرومغناطيسية



شكل (١٠-٩): طيف الموجات الكهرومغناطيسية

الأصلية. وأجهزة الكشف أصبحت متنوعة وكثيرة حسب تعدد الموجات المشعة ونوع مصادرها وأخيرا يمكن القول:

هناك طرق مختلفة وعديدة لإنتاج وكشف الموجات الكهرومغناطيسية. والأساليب التقنية التي تستعمل في كل الحالات تعتمد على نوع تردد هذه الموجات. وفي كل الأحوال فإن مصدر الموجات الكهرومغناطيسية هو تسارع الشحنات، فيتذبذب المجالان الكهربي والمغناطيسي ويتحركان بعيدا عن الشحنات بسرعة تساوي سرعة الضوء ويتم كشفها بملاحظة استجابة شحنات أخرى.

(٩-٩) مسائل

١ ـ مكثف متوازي اللوحين مساحة كل من لوحيه الدائريين 0.25 متر٢. إذا كان التغير في المجال الكهربي بين لوحيه يتغير بمعدل (dE/dt)، 2×10^{11} فولت/ متر ـ ثانية.
احسب تيار الإزاحة على افتراض أن المنطقة بين لوحي المكثف تحتوي على هواء.

٢ ـ مكثف متوازي اللوحين مساحة كل من لوحيه 0.6 متر٢ والمسافة بينهما 0.12 مم. فإذا وضعت بين طرفي المكثف قوة دافعة كهربية جيبية قيمة ذروتها 360 فولت وترددها 400 هيرتز.
احسب:
ا ـ قيمة تيار التوصيل.
ب ـ معدل تغير قيمة المجال مع الزمن داخل المكثف.
جـ ـ كثافة تيار الإزاحة.
د ـ تيار الإزاحة الكلي.

٣ ـ مكثف كروي متصل بجهد متردد قيمته $V = V_0 \cos \omega t$. أثبت وجود تيار إزاحة قدره $I_d = - C \omega V_0 \sin \omega t$ بين قطبيه حيث C سعة المكثف.

٤ ـ بين أن $E(z,t) = E(z + ct)\vec{i}$ حل للمعادلة الموجبة ذات البعد الواحد وفيها يكون متجه المجال ينتقل في الجهة السالبة لـ z.

٥ ـ إذا كان متجه المجال لموجة كهرومغناطيسية تنتشر في الجهة الموجبة لمحور z ويعطي القيمة التالية :

$$E = E_0 \cos 5000\,[z - (3 \times 10^{10})t]\,\vec{i}$$

حيث أعطيت الأرقام بوحدات الـ (سم. جم. ثانية). احسب الطول الموجي وتردد الموجة. وما هي مركبة الحث المغناطيسي $B(z,t)$.

٦ ـ تذيع محطة إرسال بتردد قدره 750,000 هيرتز. احسب الطول الموجي للموجات الكهرومغناطيسية المرسلة.

٧ ـ موجة كهرومغناطيسية تنتشر في الفضاء بطول موجي قدره 25×10^{-6} متر وشدتها 4.24 وات/م٢. مركبة المجال الكهربي تتجه مع محور z بينما مركبة المجال المغناطيسي مع محور y.

ا ـ احسب قيمة المجال الكهربي الناتج عن هذه الموجة.

ب ـ اكتب المعادلة الرياضية لقيمة المجال الكهربي اللحظي المتجه مع الموجة عند أي نقطة من الفراغ وفي أي زمن.

جـ ـ ما قيمة متجه بونتج.

٨ ـ إذا كانت كثافة الطاقة لموجة كهرومغناطيسية معينة لتردد واحد هي 10^{-7} جول/متر٣ ما هي قيمة المجالين الكهربي والمغناطيسي.

٩ ـ موجات كهرومغناطيسية سطحية سقطت عمودية على سطح الأرض. افترض أن قيمة E_0 هي 500 فولت/متر.

ا ـ ما قيمة B_0.

ب ـ احسب القيمة المتوسطة لمتجه بوينتج .

١٠ ـ موجة كهرومغناطيسية لوحظت لتبني مجال مغناطيسي قيمته 2.5×10^{-8} ويبر/متر٢ (القيمة الفعالة RMS).

ا ـ ما قيمة الطاقة لوحدة الزمن التي تنتشر عبر مساحة قدرها ١ متر٢ عمودية على اتجاه الانتشار.

ب ـ ما هي القيمة الفعالة لشدة المجال الكهربي .

جـ ـ ما هي كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية .

١١ ـ إذا علم أن متوسط القدرة الصادرة من محطة إذاعة 10 كيلووات فإذا فرض أن المحطة توزع إشعاعها للموجات بانتظام على سطح غلاف تخيلي نصف كروي تكون المحطة في مركزه .

احسب :

ا ـ قيمة متجه بوينتج عند السطح التخيلي إذا كان نصف القطر 10 كم .

ب ـ النهاية العظمى لكل من المجالين الكهربي والمغناطيسي على السطح المذكور.

١٢ ـ التوصيلية الكهربية لماء البحر تساوي تقريبا 4 (1 /أوم متر) . ما هي قيمة عمق الاختراق لموجات كهرومغناطيسية ذات تردد منخفض طولها الموجي 3000 متر.

الملاحق

Appendices

- ملحق (١): الوحـــدات
- ملحق (٢): المتجهات والأعداد المركبة
- ملحق (٣): معادلات رياضية

الملحق (١) : الوحـــدات

Appendix (1): Units

(١ ـ ١) نظم الوحدات

Systems of Units

يستخدم المؤلفون في الكتب الحديثة لعلم الكهرباء والمغناطيسية بصورة واسعة النظام العـالمي وكـذلك النظام الجاووسي الناشىء من نظامي الوحدات الكهرومغناطيسية والوحدات الكهروستاتيكية.

واستخدم النظام العالمي بصورة رئيسة في صيغ واشتقاق المعادلات الرياضية الواردة في هذا الكتاب مع إعادة كتابة بعض المعادلات الأساسية والنهائية بالنظام الجاووسي.

وتختلـف الأنظمـة في مـا بينهـا باختـلاف ثابـتي التناسب K_e و K_m الواردين في المعـادلة (١ـ١) الخـاصة بقانـون كولوم للقـوى بين شحنتين q_1 و q_2 تفصـلهما مسافة

قدرها r والمعادلة (٨٠ـ٥) الخاصة بقانون القوى بين موصلين طويلين متوازيين طول كل منهما l ويمر بأحدهما تيار قيمته I_1 وبالآخر تيار قيمته I_2 وبينهما مسافة قدرها r.
وهاتان المعادلتان هما:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١)$$

$$F_m = K_m \frac{2 I_1 I_2}{r} l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٢)$$

وحيث إن K_e ارتبط بالشحنة q و K_m ارتبط بالتيار الكهربي I المرتبطين في ما بينهما بالمعادلة (١-٤) $[(I = dq/dt)]$ فإن لـ K_e ارتباط بـ K_m تحدده النسبة بينهما وهي:

$$\frac{K_e}{K_m} = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٣)$$

حيث (c) مقدار ثابت ووحدته المسافة / الزمن وهي وحدة السرعة. وقد حسبت هذه النسبة عدة مرات، وكذلك النتائج التجريبية، فوجد أن قيمتها تساوي:

$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

وهي تماثل سرعة الضوء في الفراغ وأحسن قيمة لـ c هي:

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(١ - ٢) النظام العالمي للوحدات

The International System of Units

يكتب باختصار (S.I) وهذه التسمية وردت من (systimé internationalé) ويعتمد بصورة عامة على سبع وحدات أساسية يبينها الجدول (١ - ١) ويماثل نظام الوحدات المنطقية (rationalized system of units) المعتمد على المتر والكيلوجرام والثانية والأمبير للتعبير عن الطول والكتلة والزمن والتيار (م . كجم . ثانية . أمبير) (MKSA). وقيمتا K_e و K_m في هذا النظام هما:

$$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٤)$$

$$K_m = \mu_0/4\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٥)$$

جدول (١ - ١): الوحدات الأساسية للنظام العالمي

الكمية Quantity		الوحدة Unit		Symbol الرمز
الطول	length	متر	metre	m
الكتلة	mass	كيلوجرام	kilogram	kg
الزمن	time	ثانية	second	s
التيار الكهربي	electric current	أمبير	ampere	A
درجة الحرارة	temperature	كلفين	kelvin	K
شدة الإضاءة	luminous intensity	شمعة	candela	cd
كمية المادة	amount of substance	جزيىء جرامي	mole	mol

وبالتعويض في المعادلة (٣-١) نُحصل على:

$$\mu_0 \, \varepsilon_0 = 1/c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٦)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-١) و(٢-١) على الصورة التالية:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٧)$$

و

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{r} l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-٨)$$

ووحدات المقادير الفيزيائية في هذا النظام واردة في الجدولين (٢-١) و(٣-١).

(١ - ٣) الوحدات الكهروستاتيكية

Electrostatic (e.s) Units

يعرف هذا النظام بإعطاء الثابت K_e الوارد في المعادلة (١ - ١) القيمة (١) في الفراغ. وحسب المعادلات (٤-١)، (٥-١) و(٦-١) يكون:

$$\varepsilon_0 = 1/4\pi \qquad و \qquad \mu_0 = 4\pi/c^2 \ldots\ldots \quad (١-٩)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-٧) و(١-٨) على النحو التالي:

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١٠)$$

$$F_m = \frac{1}{c^2}\frac{2 I_1 I_2}{r} l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١-١١)$$

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى النظام الكهرواستاتيكي (e.s.u.) تستبدل بقيمتي ε_0 و μ_0 حيثما وردتا في النظام العالمي قيمتاهما الواردتان في المعادلتين (١-٩).

كما يعرف النظام (e.s.u) بـ (C.G.S.esu) لاعتماده على النظام الميكانيكي (سم. جم. ثانية) (CGS) في الطول والكتلة والزمن حيث تكون وحدة الطول السنتيمتر ووحدة الكتلة الجرام ووحدة الزمن الثانية. والجدول (١-٢) يمثل الوحدات الميكانيكية في النظامين العالمي والـ (سم. جرام . ثانية).

ووحدة الشحنة q استات كولوم (stat Coul) والتيار استات أمبير (stat Amp.) وهكذا بالنسبة لبقية الكميات الأخرى حسب الجدول (١-٣).

(١ - ٤) الوحدات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic (e.m) Units

يعرف هذا النظام بإعطاء الثابت K_m القيمة (١) في الفراغ. وحسب المعادلات (١-٤)، (١-٥) و(١-٦) يكون لدينا:

$$\mu_0 = 4\pi \quad \text{و} \quad \varepsilon_0 = 1/4\pi c^2 \quad \ldots \quad (١-١٢)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-٧) و(١-٨) على النحو التالي:

$$F_e = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١٣)$$

$$F_m = 2\frac{I_1 I_2}{r} l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١-١٤)$$

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى نظام الوحدات الكهرومغناطيسية (e.m.u.) تستبـدل بقيمتي ε_0 و μ_0 حيثما وردتا في النظام العالمي قيمتاهما الواردتان في المعادلة (١٢-١).

وتكون وحدات التيار I آب أمبير (abAmpere) وتعني القيمة المطلقة (absolute) للتيار والشحنة q آب كولوم وهكذا بالنسبة لبقية الكميات الأخرى حسب الجدول (١-٣).

كما يعرف هذا النظام أيضا بـ (CGSemu) لاعتماده على النظام الميكانيكي (سم . جرام . ثانية).

(١ ـ ٥) النظام الجاووسي
The Gaussian System

يجمع بين النظامين الكهروستاتيكي (CGSesu) والكهرومغناطيسي (CGSemu) بحيث يستعمـل النـظام الكهـروستـاتيكي للكميات الكهـربية والنـظام الكهـرومغناطيسي للكميات المغناطيسية.

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى النظام الجاووسي تستبدل رموز الكميات الكهربية والمغناطيسية في معادلات النظام العالمي بما يقابلها في النظام الجاووسي حسب الجدول (١-٤).

ويستعمـل النظام الكهروستاتيكي للتعبير عن وحدة التيار الكهربي في النظام الجاووسي بحيث تكون وحدته استات أمبير وكذلك وحدة الشحنة استات كولوم وقليلا ما يعبر عن وحدة التيار بالنظام الكهرومغناطيسي الذي وحدته الآب أمبير مع بقاء وحدة الشحنة باستات كولوم في النظام الجاووسي. وإذا عمل هذا التغيير فإنه في هذه الحالة يجب استبدال cI في النظام الجاووسي بالتيار I في النظام العالمي وكذلك cJ بـ J.

فمثلا معادلة ماكسويل (١٧ـ٩) ومعادلة الاستمرارية (٦ـ٤) تصبحان كتالي :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi J + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (١٥أ - ١)$$

و

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (١٥ب - ١)$$

وأخيرا يوجد نظام آخر يسمى بنظام هيفيسايد لورنتز (Heaviside - Lorentz) وهو يماثل النظام الجاووسي المنطق أي تحذف 4π حيثما وجدت في المعادلات بحيث تصبح قيمتها الواحد في هذا النظام.

ويمثل الجدول (٥ـ١) بعض المعادلات التي وردت في الكتاب مكتوبة بصيغ مختلفة حسب نوع نظام الوحدات المستخدم والتي وردت في البنود السابقة.

(١ ـ ٦) الأبعـــاد
Dimensions

وحتى نعـطي فكرة مبسطة عن العمود الأخير في الجدولين (٢ـ١) و(٣ـ١) والخاص بالأبعاد نتبع ما يلي:

يعتمد النظام العالمي في دراسة الكهربية والمغناطيسية على أربع وحدات أساسية هي الطول (L) والكتلة (M) والزمن (T) والتيار (I). ولذلك فأبعاد أي كمية فيزيائية أخرى تدخل في إطار هذه الكميات الأربع فمثلا:

السرعة = الطول / الزمن $\quad v = \frac{L}{T}$

والقوة = الكتلة × العجلة $\quad F = \frac{ML}{T^2}$

والشغل = القوة × المسافة $W = (M L T^{-2}) L$

$W = M L^2 T^{-2}$

والشحنة = التيار × الزمن $Q = I T$

والجهد = الشغل / الشحنة $V = W/Q = ML^2T^{-2}/IT$

$V = ML^2T^{-3}I^{-1}$

أما الفيض المغناطيسي Φ فحسب تعريف القوة الدافعة الكهربية يساوي :

$$\Phi = VT = (ML^2T^{-3}I^{-1}]T = ML^2T^{-2}I^{-1}$$

والحث المغناطيسي يساوي :

$$B = \Phi/A = ML^2T^{-2}I^{-1}/L^2 = MT^{-2}I^{-1}$$

وهكذا بالنسبة لبقية الكميات .

(١ - ٧) الثوابت الفيزيائية
Physical Constants

يوضح الجدول (٦ـ١) الثوابت الأساسية لبعض المقادير الفيزيائية في نظامي الوحدة العالمي والجاووسي .

جدول (٢-١): نظام الوحدات الميكانيكي
العلاقة بين النظام العالمي (S.I)
والنظام الـ(سم . جم . ثانية) (C.G.S)

الكمية الفيزيائية Physical quantity	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	وحدة نظام الـ(سم . جم . ثانية) (C.G.S.) unit	الأبعاد Dimensions
الكتلة Mass(M)	كيلوجرام kg	10^3 جم (g)	M
الطول Length (L,l)	متر m	10^2 سم (cm)	L
الزمن Time (T,t)	ثانية s	ثانية (s)	T
التردد Frequency (f)	هيرتز Hz = ١/ثانية s^{-1}	هيرتز (Hz)	I/T
السرعة Velocity (v)	متر/ثانية m/s	10^2 سم/ثانية cm/s	L/T
الكثافة Density (ϱ)	كيلوجرام/متر٣ kg/m^3	10^{-3} جم/سم٣ (g/cm^3)	M/L^2
القوة Force (F)	نيوتن = كجم . متر/ثانية٢ $N = kg.m/s^2$	10^5 داين (dyne)	ML/T^2
(الشغل والطاقة) (Work, and energy) (W,U)	جول J	10^7 ارج (erg)	ML^2/T^2
القدرة Power (P)	وات W	10^7 ارج/ثانية (erg/s)	ML^2/T^3
كمية التحرك الزاوي Angular momentum	كيلوجرام . متر٢/ثانية $kg . m^2/s$	10^7 جم - سم٢/ثانية ($g/cm^3/s$)	ML^2/T
عزم اللي (عزم الدوران) Torque (τ)	نيوتن . متر N . m	10^7 داين . سم (dyne . cm)	ML^2/T^2
كمية التحرك الخطي Linear momentum (p)	كيلوجرام . متر/ثانية kg . m/s	10^5 جم . سم/ثانية g . cm/s	ML/T
عزم القصور الذاتي Moment of inertial (I_m)	كيلوجرام . متر٢ $kg . m^2$	10^7 جم . سم٢ $g . cm^2$	$M.L^2$
الضغط Pressure (p)	باسكال (نيوتن/متر٢) Pascal Pa (N/m^2)	10 داين / سم٢ $dyne/cm^2$	M/LT

جدول (٣-١) : العلاقة بين النظام العالمي (S.I) والنظام الكهروستاتيكي والنظام الكهرومغناطيسي للكميات الكهربية والمغناطيسية مع ذكر أبعادها. والنجمة تشير إلى قيمة هذه الكميات في النظام الجاووسي

الكمية الفيزيائية Physical quantity	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	الوحدة الكهروستاتيكية (C.G.S.e.m.u.) unit	الوحدة الكهرومغناطيسية (C.G.S.e.m.u.)	الأبعاد Dimensions
الشحنة Charge (Q,q)	كولوم = أمبير . ثانية C = A.S	c/10 استات كولوم *	10^{-1} آب كولوم	IT
التيار Current (I)	أمبير A	c/10 استات أمبير *	10^{-1} آب أمبير	I
كثافة الشحنة الحجمية (ϱ) Volume charge density	كولوم/متر٣ C/m^3	$c\times10^{-7}$ استات كولوم/سم٣ *	10^{-7} آب كولوم/سم٣	IT/L^3
كثافة الشحنة السطحية (σ) Surface charge density	كولوم/متر٢ C/m^2	10^{-5} استات كولوم/سم٢ *	10^{-5} آب كولوم/سم٢	IT/L^2
كثافة الشحنة الطولية (λ) Linear charge density	كولوم/متر C/m	10^{-3} استات كولوم/سم٢ *	10^{-3} آب كولوم/سم	IT/L
كثافة التيار Current density (J)	أمبير/متر٢ A/m^2	10^{-5} استات أمبير/سم٢ *	10^{-5} آب أمبير/سم٢	I/L^2
شدة المجال الكهربي (E) Electric field intensity	نيوتن/كولوم = فولت/متر V/m = N/C	$10^6/c$ استات فولت/سم *	10^6 آب فولت/سم	ML/IT^3
كثافة الفيض الكهربي Φ Electric field flux	نيوتن - متر٢/كولوم $N.m^2/C$	$10^{10}/c$ داين سم٢/كولوم *	10^{10} داين سم٢/آب كولوم	ML^3/IT^3
ق. د. ك. والجهد الكهربي (ε,V) Electromotive force & Potential	فولت V	$10^8/c$ استات فولت *	10^8 آب فولت	ML^2/IT^3
السعة Capacitance (C)	فاراد = كولوم/فولت F = C/V	$10^{-9}.c^2$ استات فاراد *	10^{-9} آب فاراد	I^2T^2/ML^2
العزم الكهربي Electric dipole moment P_e	كولوم - متر C.m	10.c استات كولوم . سم *	10 آب كولوم . سم	ITL
الاستقطاب الكهربي Electric polarization P	كولوم/متر C/m^2	$10^{-5}.c$ استات كولوم/٢ *	10^{-5} آب كولوم/سم٢	IT/L^2

تابع جدول (٣-١)

الكمية الفيزيائية Physical quantity	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	الوحدة الكهروستاتيكية (C.G.S.e.m.u.) unit	الوحدة الكهرومغناطيسية (C.G.S.e.m.u.)	الأبعاد Dimensions
السماحية Permittivity ($\varepsilon_0, \varepsilon$)	كولوم/نيوتن . متر٢ $C^2/N.m^2$	$4\pi \times 10^{-11} c^2$ استات كولوم٢/ داين . سم٢	$4\pi\times10^{-11}$ آب كولوم٢/داين . سم٢	I^2T^4/ML^3
الإزاحة Displacement (D)	كولوم/متر٢ C/m^2	$4\pi \times 10^{-5} c$ استات كولوم/ سم٢	$4\pi\times10^{-5}$ آب كولوم/سم٢	IT/L^2
المقاومة Resistance (R)	أوم (Ω) = فولت/أمبير $\Omega = V/A$	$10^9/c^2$ استات أوم	10^9 آب أوم	ML^2/I^2T^3
الممانعة Impedance (Z)	أوم (Ω) = فولت/أمبير $\Omega = V/A$	$10^9/c^2$ استات أوم	10^9 آب أوم	ML^2/I^2T^3
الرد Reactance (X_c, X_L)	أوم (Ω) = فولت/أمبير $\Omega = V/A$	$10^9/c^2$ استات أوم	10^9 آب أوم	ML^2/I^2T^3
المواصلة Conductance (G)	مو (℧) = فولت/أمبير ℧ = A/V	$10^{-9}.c^2$ استات مو	10^{-9} آب مو	I^2T^3/ML^2
المساحة Admittance (y)	مو (℧) = فولت/أمبير ℧ = A/V	$10^{-9}.c^2$ استات مو	10^{-9} آب مو	I^2T^3/ML^2
المقاومة النوعية Resistivity (p)	متر . أوم $m\Omega$	$10^{11}/c^2$ استات أوم . سم	10^{11} آب أوم . سم	ML^3/I^2T^3
التوصيلية Conductivity (σ)	مو/متر ℧/m أو $1/m\Omega$	$10^{-11}/c^2$ استات مو/سم	10^{-11} آب مو/سم	I^2T^3/ML^3
العزم المغناطيسي Magnetic moment(Pm)	أمبير . متر٢ $A.m^2$	$10^3/c$ استات أمبير . سم٢	10^3 آب أمبير ـ سم٢ *	IL^2
الفيض المغناطيسي Magnetic fluxΦ	ويبر = فولت . ثانية Wb = V.S	$10^8/c$ استات فولت . ثانية	10^8 جاوس . سم٢ * 10^8 ماكسويل	ML^2/IT^2
الحث المغناطيسي Magnetic induction (B)	تسلا = ويبر/متر٢ $T = Wb/m^2$ = نيوتن/أمبير . متر N/A.m	$10^4/c$ داين/استات أمبير . سم	10^4 جاوس *	M/IT^2
شدة المجال المغناطيسي (H) Magnetic field intensity	أمبير/متر A/m	$10^9/c$ استات أمبير/سم	$4\pi\times10^{-3}$ أورستد *	I/L
شدة التمغنط Magnetization (M)	أمبير/متر A/m	$c \times 10^{-3}c$ استات أمبير/سم	10^{-3} أورستد *	I/L

تابع جدول (٣-١)

الكمية الفيزيائية Physical quantity	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	الوحدة الكهروستاتيكية (C.G.S.e.m.u.) unit	الوحدة الكهرومغناطيسية (C.G.S.e.m.u.)	الأبعاد Dimensions
الحث Inductance (L,M)	هنري = ويبر/أمبير H = Wb/a	$10^9/c^2$ استات فولت . ثانية / استات أمبير	10^9 ماكسويل / آب أمبير *	ML^2/I^2T^2
النفاذية Permeability (μ_0,μ)	ويبر/أمبير. متر = نيوتن / أمبير٢ $N/m^2 = Wb/A.m^2$	10^{-4} داين / استات أمبيرم٢	$10^7/4\pi$ جاوس / أورستد *	ML/I^2T^2
الجهد الموجه Vector potential (A)	ويبر/متر Wb/m	$10^6/c$ استات فولت . ثانية/سم	10^6 جاوس . سم *	ML/IT^2
الجهد المغناطيسي العددي (V_m) Magnetic scalar potential	أمبير (أمبير. دوره) A(A.turn)	$10^{10}/c$ استات أمبير	$4\pi\times10^{-1}$ أورستد . سم (جلبرت) *	I

جدول (٤-١): تحويل رموز الكميات الكهربية والمغناطيسية في المعادلات من النظام العالمي إلى النظام الجاووسي

الكمية الفيزيائية	النظام العالمي	النظام الجاووسي
الشحنة	q	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}q$
التيار	I	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}I$
كثافة الشحنة	$\varrho(\sigma,\lambda)$	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\varrho(\sigma,\lambda)$
كثافة التيار	J	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}J$
شدة المجال الكهربي	E	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}E$
السعــة	C	$4\pi\varepsilon_0 C$
العزم الكهربي	P_e	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}P_e$
الاستقطاب	P	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}P$
القابلية	$\chi_e(\chi_m)$	$4\pi\chi_e(\chi_m)$
الإزاحــة	D	$(\varepsilon_0/4\pi)D$
المقاومة	R	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}R$
المقاومة النوعية	ϱ	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}\varrho$
الموصلية	σ	$4\pi\varepsilon_0\sigma$
العزم المغناطيسي	P_m	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}P_m$
الفيض المغناطيسي	Φ	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}\Phi$
الحث المغناطيسي	B	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}B$
المجال المغناطيسي	H	$(4\pi\mu_0)^{-1/2}H$
شدة التمغنط	M	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}M$
الحــث	L	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}L$
الجهد الموجه	A	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}A$
الجهد العددي	V_m	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}V_m$

جدول (٥-١) : صيغ بعض المعادلات التي وردت في الكتاب مكتوبة بأنظمة الوحدات المختلفة

الأنظمة Systems	هيفيسايد لورنتز Heaviside-L.	الجاووسي Gaussian	الكهرومغناطيسي (CGSemu)	الكهرواستاتيكي (CGSesu)	العالمي (S.I)
(٢٩د-٩)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(٢٩ب-٩)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
(١٢-٩)	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
(٣١ج-٩)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$
(٢٤-٩)	$\vec{F}/q = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$
(٢٧-٩)	$\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = c^2 \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$
(٢٦-٩)	$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \frac{1}{c^2}\vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

جدول (٦-١): الثوابت الفيزيائية

Quantity الكمية	Value القيمة	الجاووسي	(S.I)
Electron charge	1.60219 x	-	10^{-19} coul.
شحنة الإلكترون	4.80324 x	10^{-10} esu	
Electron rest mass (m_e)	9.1095 x	10^{-28} gm	10^{-31} kg
كتلة الإلكترون الثابتة			
Proton rest mass (M_p)	1.6726 x	10^{-24} gm	10^{-27} kg
كتلة البروتون الثابتة			
e/m	1.7589 x		10^{11} C/kg
	5.2728 x	10^{17} esu/gm	
M_p/m_e	1.8361 x	10^{3}.	10^{3}.
Speed of light	2.997925 x	10^{10} cm/s	10^{8} m/s
سرعة الضوء			
Avogadro's constant N	6.022 x	10^{23} mol^{-1}.	10^{23} mol^{-1}.
ثابت أفوجادرو			
Plank's constant	6.6262 x	10^{-27} erg sec	10^{-34} J.s
ثابت بلانك			
Boltzmann's constant	1.3807 x	10^{-16} erg. K^{-1}.	10^{-23} J.K^{-1}.
ثابت بلتزمان			
Electron volt (eV)	1.60219 x	10^{-12} erg.eV^{-1}.	10^{-19} J.eV^{-1}.
إلكترون فولط			
Bohr magneton	9.2741 x	10^{-21} erg.G^{-1}.	10^{-24} J.T^{-1}.
بور ماجنتون			

الملحق (٢) : المتجهات والأعداد المركبة
Appendix (2): Vectors and Complex Numbers

يحتوي هذا الملحق على موضوعين مهمين أولهما المتجهات والكميات العددية وثانيهما الأعداد المركبة.

(٢-١) المتجهات والكميات العددية
Vectors and Scalars

تميز بعض المقادير الفيزيائية بقيمتها واتجاهها معا مثل الإزاحة والسرعة والمجال والقوة. ويذلك يستعمل مبدأ المتجهات لوصف مثل هذه المقادير وهناك كميات أخرى فيزيائية تميز بقيمتها فقط مثل الكتلة والزمن وتسمى بالكميات العددية.

(٢-١-١) متجهات الوحدة المتعامدة Rectangular unit vectors

يرمز لها بالرموز $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ وهي تمثل متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية المتعامدة x و y و z على الترتيب.

(٢-١-٢) متجهات الوحدة Unit vectors

تُمثِّل متجهات طولها الوحدة، فإذا كانت قيمة المتجه $\vec{A}$ هو A فإن $\vec{A}/A$ يسمى بمتجه الوحدة ويرمز له بالرمز i_A وله اتجاه $\vec{A}$ حيث:

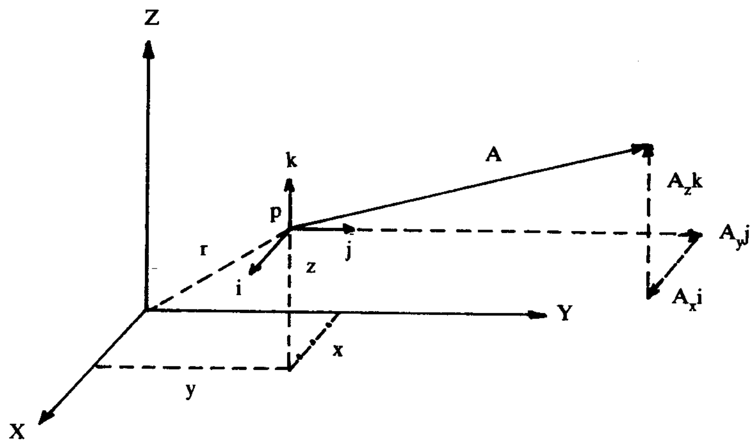
$$\vec{i}_A = \frac{\vec{A}}{A} \quad \text{. . . . .} \quad (٢\text{-}١)$$

وإذا كانت A_x ، A_y و A_z مركبات A على المحاور x ، y ، z فإن:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad \text{. . . . .} \quad (٢\text{-}٢)$$

$$\vec{i}_A = (A_x/A)\vec{i} + (A_y/A)\vec{j} + (A_z/A)\vec{k} \quad \text{. . .} \quad (٢\text{-}٣)$$

$$A = |A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad \text{. . .} \quad (٢\text{-}٤)$$



شكل (٢-١)

وأبسط أنواع المتجهات هو المتجه الذي يبدأ من نقطة الأصل للإحداثيات إلى أي نقطة معطاة، مثل P كما في الشكل (٢-١)، ويسمى بالبعد القطبي أو الشعاع الموجه (radius vector) ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ أو $\vec{R}$ وفي هذه الحالة فإن:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥)$$

$$\therefore \vec{i}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٦)$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٧)$$

حيث $\vec{i}_r$ متجه الوحدة.

(٢-١-٣) جمع أو محصلة المتجهات The sum or resultance of vectors

إذا كانت $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاثة متجهات و m و n كميتين عدديتين فإن:

(1)- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(2)- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

(3)- $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A} = n(m\vec{A})$

(4)- $(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

(5)- $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

(٢-١-٤) الضـــرب Product

أ ـ الضرب العددي scalar product

الضرب العددي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ينتج عنه كمية عددية أي أن :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \ldots \quad (٢\text{-}٩)$$

حيث θ الزاوية بينهما .

والقواعد التالية صحيحة في حالة الضرب العددي :

$$\begin{aligned}
&(1)\text{-}\ \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \\
&(2)\text{-}\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \\
&(3)\text{-}\ m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٠) \\
&(4)\text{-}\ \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0
\end{aligned}$$

وإذا كانت $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ و $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

فـــإن :

$$\begin{aligned}
&(1)\text{-}\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
&(2)\text{-}\ \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}١١) \\
&(3)\text{-}\ \vec{B} \cdot \vec{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2
\end{aligned}$$

ب ـ الضرب المتجهي vector product

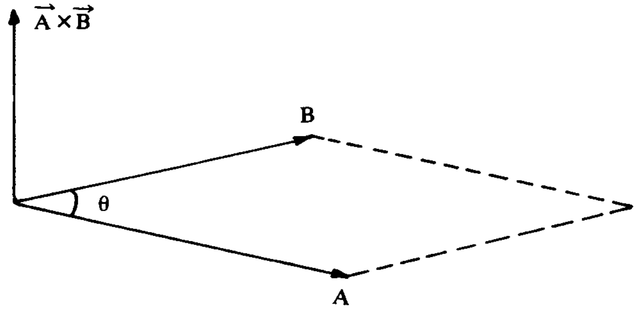
إذا كان لدينا المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فإن حاصل الضرب المتجهي لهما هو:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٢)$$

واتجاه حاصل الضرب للمتجهين هو الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ولذلك يوضع عادة متجه الوحدة بجانب مقدار حاصل الضرب مثل $\vec{l}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\vec{l} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٣)$$

وواضح من الشكل (٢-٢) أن الضرب الاتجاهي يساوي مساحة متوازي المستطيلات حيث تمثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ جانبيه .



شكل (٢-٢)

والقواعد التالية صحيحة في حالة الضرب المتجهي :

$$\begin{aligned}
&(1)\text{-}\ \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}\\
&(2)\text{-}\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}\\
&(3)\text{-}\ m(\vec{A}\times\vec{B}) = (m\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(m\vec{B})\\
&(4)\text{-}\ \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0,\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}
\end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٤)$$

$$(5)\text{-}\ \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j}$$

$$+ (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٥)$$

وإذا كان $\vec{A}$ يوازي $\vec{B}$ فإن :

$$\vec{A}\times\vec{B} = 0$$

$$(6)\text{-}\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٦)$$

$$(7)\text{-}\ A\times(B\times C) = B(A.C) - C(A.B)$$

(٢-١-٥) التدرج والتفرق والالتفاف Gradient, divergence & curl

هذه المقـادير تمثل أنواع أخرى من معاملات الاشتقاق ويمكن الحصول على قيمتها باستعمال المعامل الاتجاهي ∇ (vector operator) (del. المشتق من delta) وقيمته في المحاور الديكارتية تساوي :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٧)$$

فإذا فرض أن u(x,y,z) و v(x,y,z) دالتان عدديتان و $\vec{A}(x,y,z)$ و B(x,y,z) متجهان فإن :

$$(1)\text{ - grad}\, u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) u$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٨)$$

$$(2)\text{ - div}\vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} = \nabla \bullet (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}١٩)$$

$$(3)\text{ - curl}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢\text{-}٢٠)$$

$$(4)\text{ - div grad}\, u = \nabla \,.\, (\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (٢\text{-}٢١)$$

وتسمى بلابلاس u ويسمى المعامل ∇^2 بمعامل لابلاس (Laplacian operator) حيث:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \ldots\ldots \quad (٢-٢٢)$$

(5)- curl grad u $= \nabla \times (\nabla u) = 0$ . . . . (٢-٢٣)

(6)- div curl $\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(7)- curl curl $\vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ . . . (٢-٢٤)

(8)- grad uv $= \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ . . . (٢-٢٥)

(9)- div u $\vec{A} = \nabla \cdot u\vec{A} = u\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla u$ . . . (٢-٢٦)

(10)- curl u$\vec{A} = \nabla \times u\vec{A} = u\nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla u$ . . . (٢-٢٧)

(11)- div $(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$ . . . (٢-٢٨)

وإذا أزيحت $u(x,y,z)$ مسافة قدرها dl من النقطة (x,y,z) إلى النقطة $(x+dx,y+dy,z+dz)$ فإن قيمتها ستكون $(u+du)$ وحسب المعادلة (٢-١٨) فإن:

$$du = \nabla u \cdot dl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٢٩)$$

(٢-١-٦) العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية والأسطوانية

The relation between the cartesian & cylindrical coordinates

الاحداثيات الأسطوانية هي $(r، \theta، z)$ وحسب الشكل (٣-٢) فإن العلاقة بينها وبين الاحداثيات الديكارتية (x,y,z) هي:

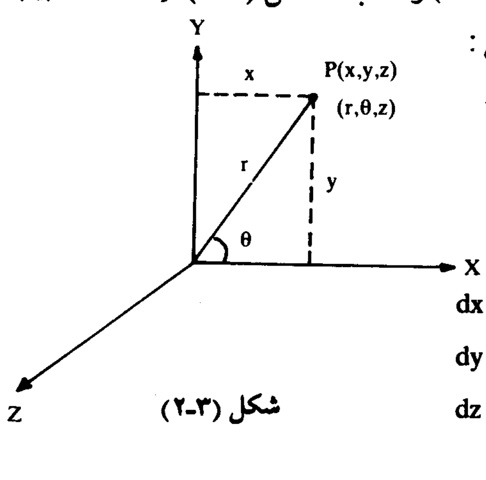
$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z$$

وبتفاضل هذه المقادير نحصل على:

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr$$

$$dy = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr$$

$$dz = dz$$



شكل (٣-٢)

أما عنصر الطول dl فتحدده المعادلة :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \ldots\ldots \quad (٢-٣٠)$$

وبـالتعـويض عن dx ، dy و dz من المعـادلات السـابقة نُحصل على قيمة dl بالإحداثيات الاسطوانية وهي :

$$dl^2 = dr^2 + r(d\theta)^2 + dz^2 \quad \ldots\ldots \quad (٢-٣١)$$

فكأن dx تناظرها dr و dy تناظرها $rd\,\theta$.

أما عنصر الحجم في الاحداثيات الديكارتية فهو:

$$dV = dx\,dy\,dz \quad \ldots\ldots \quad (٢-٣٢)$$

أما الاحداثيات الأسطوانية فإن عنصر الحجم هو:

$$dV = r dr\,d\theta\,dz \quad \ldots\ldots \quad (٢-٣٣)$$

$$\text{grad}\,u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \quad . \quad (٢-٣٤)$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\vec{A}_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{A}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z} \quad \ldots \quad (٢-٣٥)$$

$$\text{curl}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{i}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (٢-٣٦)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \quad (٢-٣٧)$$

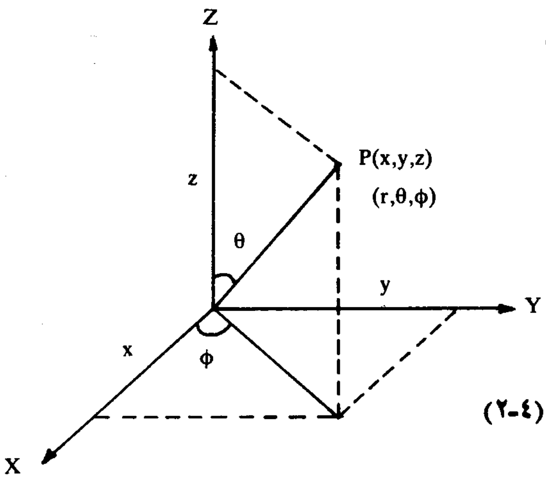
حيث i_r و i_θ و k متجهات الوحدة على الاحداثيات الأسطوانية و (A_r, A_θ, A_z) إحداثيات المتجه $\vec{A}$ على هذه المحاور.

وإذا كانت $z = 0$ فإن الاحداثيات تسمى بالاحداثيات القطبية (polar coordinates).

(٢-١-٧) العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية والكروية

The relation between the cartesian and spherical coordinates

الاحداثيات الكروية هي (r,θ,ϕ) وحسب الشكل (٤-٢) فإن العلاقة بينها وبين الاحداثيات الديكارتية (z,y,x) هي



$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

شكل (٤-٢)

$$\therefore \quad dx = -r \sin\theta \sin\phi \, d\phi + r \cos\theta \cos\phi \, d\theta + \sin\theta \cos\phi \, dr$$

$$dy = r \sin\theta \cos\phi \, d\phi + r \cos\theta \sin\phi \, d\theta + \sin\theta \sin\phi \, dr$$

$$dz = -r \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, dr$$

أما عنصر الطول dl فتحدده المعادلة (٢-٣٠)، وبالتعويض عن dx ، dy و dz من المعادلات السابقة نحصل على متجه dl بالاحداثيات الكروية :

$$dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta \, (d\phi)^2 \quad .. \quad (٢-٣٨)$$

فكأن dx تناظرها dr ، dy تناظرها $r d\theta$ ، dz تناظرها $r \sin\theta \, d\phi$ أما عنصر الحجم فهو:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad ...... \quad (٢-٣٩)$$

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{i}_\phi \quad .. \quad (٢-٤٠)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (٢\text{-}٤١)$$

$$\operatorname{curl}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right\}\vec{i}_r$$

$$+\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right\}\vec{i}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\vec{i}_\phi \quad (٢\text{-}٤٢)$$

$$\nabla^2u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2} \quad (٢\text{-}٤٣)$$

حيث $\vec{i}_r$ و $\vec{i}_\theta$ و $\vec{i}_\phi$ متجهات الوحدة على الاحداثيات الكروية. أما (A_θ ، A_ϕ ، A_r) فهي إحداثيات المتجه $\vec{A}$ على هذه المحاور.

(٢-١-٨) العلاقات التكاملية Integral relations

لو فرض أن المسار C يبدأ بنقطة اختيارية ابتدائية $P_i(x_i,y_i,z_i)$ وينتهي بنقطة $P_f(x_f,y_f,z_f)$ كما في الشكل (٢-٥)، وكان $\vec{A}(x,y,z)$ متجه على نقاط هذا المسار فإن:

$$\int_i^f A\cos\theta\, dl = \int_c A\cos dl = \int_c \vec{A}\cdot d\vec{l} \quad \cdots \quad (٢\text{-}٤٤)$$

حيث dl عنصر الطول من المسار.

وإذا فرض أن سطحا مقفلا S. محاطا بمسار مقفل C فإن:

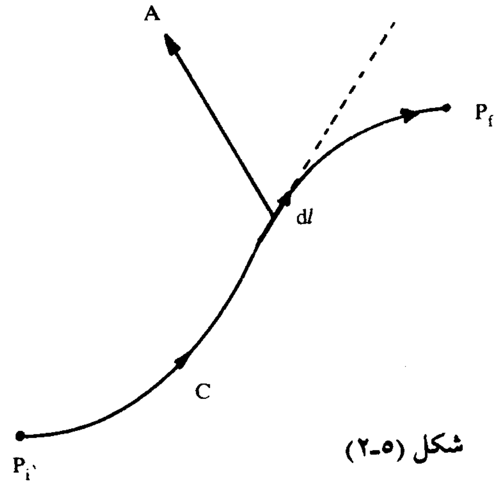
$$\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla\times A)\cdot dS = \int_s (\operatorname{curl}\vec{A})\cdot dS \quad \cdots \quad (٢\text{-}٤٥)$$

وتعرف هذه المعادلة بنظرية استوكس (Stokes's theory) حيث dS عنصر المساحة من مساحة السطح S.

وإذا كان لدينا حجم V ، محاطا بسطح S فإن :

$$\oint_s \vec{A} . d\vec{S} = \int_V \nabla \bullet \vec{A}\, dV = \int_V \text{div}\, \vec{A}\, dV \cdot\cdot \quad (٢-٤٦)$$

حيث dV عنصر الحجم.



شكل (٢-٥)

(٢-١-٩) الزاوية المجسمة Solid angle

هي الزاوية المقابلة للسطح dS والواقعة في نقطة الأصل كما في شكل (٢-٦) أو هي زاوية الجزء المخروطي الذي قمته تقع في نقطة الأصل وقاعدته المساحة dS ويرمز لها بالرمز $d\Omega$ حيث :

$$d\Omega = \frac{\vec{r} . dS}{r^3} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad (٢-٤٧)$$

حيث θ هي الزاوية بين اتجاه r والعمودي على dS ، وإذا كانت dS جزء من كرة نصف قطرها r فإن :

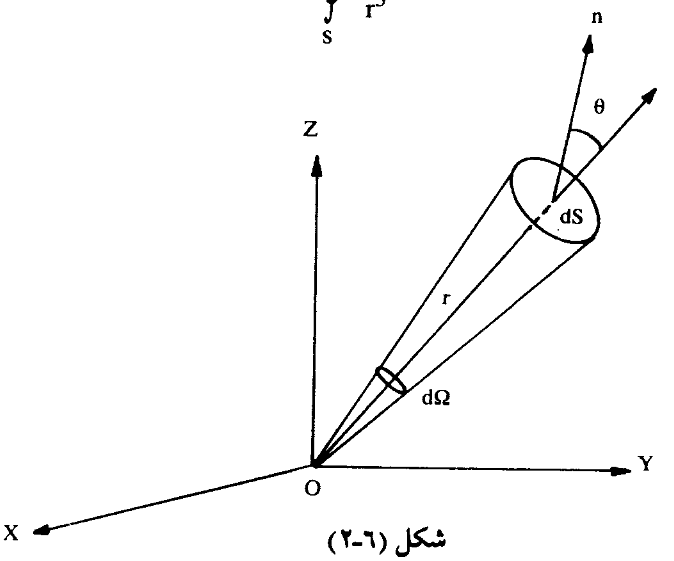
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٤٨)$$

وتكون الزاوية المقابلة للسطح الكروي هي :

$$\Omega = \oint d\Omega = \frac{1}{r^2}\int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad \cdot\cdot \quad (٢-٤٩)$$

وبصورة عامة يمكن القول إن الزاوية المجسمة لأي سطح مقفل حول أي نقطة بداخله تساوي 4π ومنه فإن :

$$\oint_S \frac{\vec{r} \cdot dS}{r^3} = 4\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥٠)$$



شكل (٢-٦)

(٢-٢) مقدمة عن الأعداد المركبة

Introduction to Complex Numbers

يتكـون العـدد المركب، كما هو معروف، من معادلات رياضية تشتمل على كميات حقيقية وكميات تخيلية (imaginary). ولمعـرفـة السبب في اختيار هذين اللفـظين، لنستعرض ذلك باختصار.

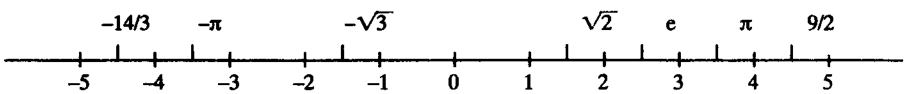
يبـين الشكل (٢-٧) كيفية تمثيل الأعداد الصحيحة والكسور والكميات غير المألوفة مثل π ، $\sqrt{2}$ عند وضعها على استقامة خط مستقيم في حين وضعت الأعداد السالبة على الخط المستقيم نفسه عند امتداده على يسار نقطة الأصل (0) ويطلق على أي عدد يمكن وضعه على هذا الخط، سواء أكان موجبا أو سالبا، بأنه عدد حقيقي .

وفي القرن الثامن عشر حاول الرياضيون الحصول على حل للمعادلة

$$x^2 + 1 = 0$$

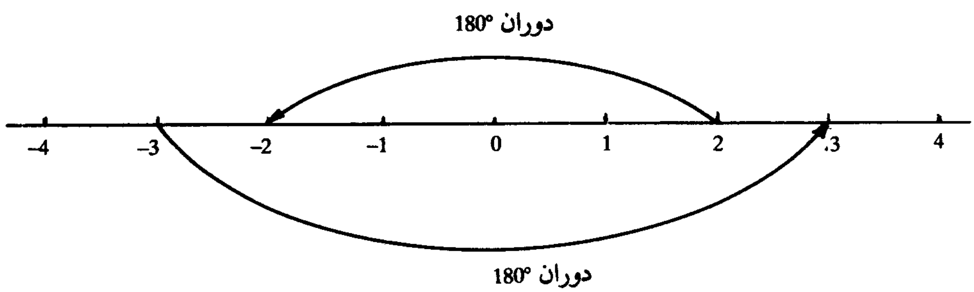
وبالرغم من أن الحل يمكن التعبير عنه بالمعادلة $x = \sqrt{-1}$ إلا أن هذا العدد لا يمكن تمثيله على الخط المبين في الشكل (٧-٢) لذلك أطلق على هذا العدد لفظ «تخيلي» لأنه لا يتلاءم مع الأعداد الحقيقية. ومن هنا جاء لفظيْ «حقيقي، وتخيلي» للتمييز بين الأعداد المختلفة ويعبر الرياضيون عن الكمية $\sqrt{-1}$ بالحرف i حيث:

$$i = \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢\text{-}٥١)$$



شكل (٧-٢): تمثيل الأعداد الحقيقية على استقامة خط مستقيم.

وبالإشارة إلى خط الأعداد الحقيقية، المبين في الشكل (٨-٢) نجد أن ضرب الرقم (2+) × (1–) ينتج الرقم (2–) وهو يمثل دوران الرقم (2+) بزاوية مقدارها 180° حول نقطة الأصل (0).



شكل (٨-٢): دوران الأعداد الحقيقية زاوية قدرها 180° حول نقطة الأصل 0 إذا ضرب العدد بـ 1–.

والمثل 3– = (3+) ، 180° ليساوي (3–) أي أن:

$$+2\,(-1) = -2 \quad \text{and} \quad (-3)\,(-1) = +3$$

وبأخذ الدوران الزاوي (angular rotation) في الاعتبار، تؤول المعادلة السابقة إلى

الصيغة التالية :

$$+2 \underline{|180^\circ} = -2 \quad \text{and} \quad -3 \underline{|180^\circ} = +3$$

ويمكن التعبير عن المعادلة السابقة، بدلالة العامل i كما هي :

$$+2\,(\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1}) = -2 \quad \text{و} \quad -3\,(\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1}) = +3$$

أو $+2\,(i)\,(i) = -2 \quad \text{و} \quad -3\,(i)\,(i) = +3$

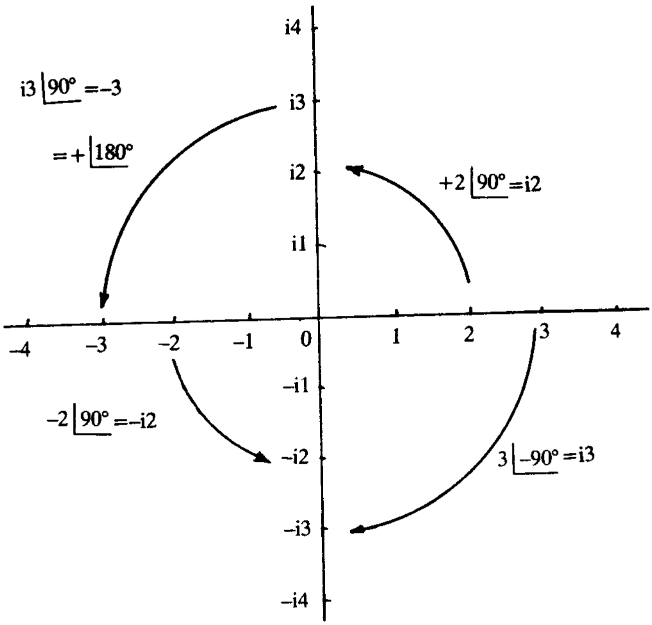
وحيث إن الدوران خلال 180° يستدعي الضرب مرتين بالعامل i ، فإننا نستنتج من ذلـك أنـه بضرب كمية بالعـامل i مرة واحدة، يعني دوران الكمية خلال زاوية مقدارها 90°. وبضرب الكمية مرة أخرى بالعامل i ، يعني استكمال زاوية الدوران إلى 180° وبكتابة هذا المفهوم باختصار، نُحصل على :

$$+2\,(i)\,(i) = (+2\underline{|90^\circ}) \times (+1\underline{|90^\circ}) = +2\underline{|180^\circ} = -2$$

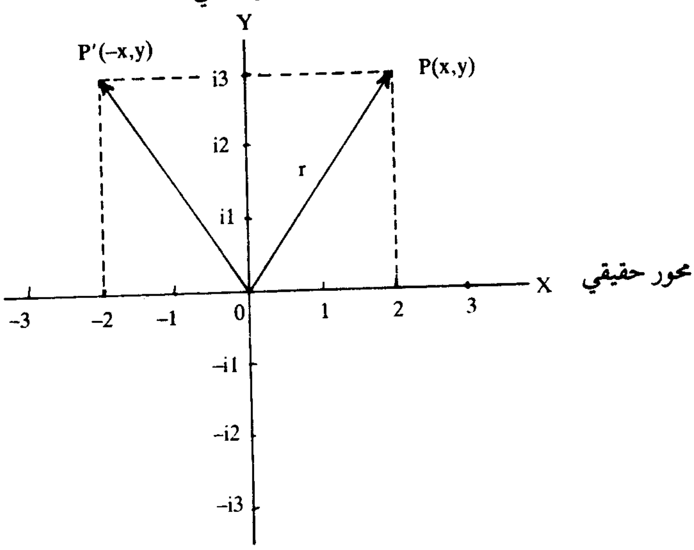
حيث المقدار $+1\underline{|90^\circ}$ يمثل العامل i. يتضح من ذلك أن أي عدد حقيقي يتم تشغيله بالعامل (i) ، فإنه يدور حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها 90° وبالمثل أي عدد تخيلي يتم تشغيله بالعامل (i) ، فإنه يدور أيضا بزاوية مقدارها 90° ليصبح عددا حقيقيا ويبين الشكل (٩ـ٢) الدوران بواسطة العامل i ، حيث المحور الرأسي للعامل i يقطع خط الأعداد الحقيقية عند مروره بنقطة الأصل (O).

وحيث إن الأرقام الحقيقية تدور بزاوية مقدارها 90° لتصبح أرقاما تخيلية، فمن الأفضل تمثيل كل من الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية بيانيا كما هو مبين في الشكل (١٠ـ٢) حيث يُكـوِّن المحـوران المتقاطعان مستوى تكون الأعداد الحقيقية فيه على استقـامـة المحـور الأفقي والأعداد التخيلية على المستوى الرأسي. ويعرف مثل هذا المستوى بالمستوى المركب (complex plane) للأعداد.

وتعرف أي نقطة داخل هذا المستوى بدلالة كميتين، إحداهما حقيقية والأخرى تخيلية.



شكل (٩-٢): الدوران كل 90° درجة إذا ضرب العدد $i = \sqrt{-1}$



شكل (١٠-٢): مستويات تمثيل الأعداد المركبة «الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية».

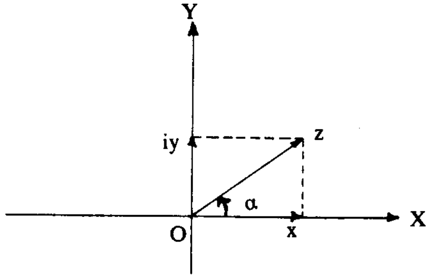
ونستنتج من ذلك أن العدد المركب z يأخذ الشكل الرياضي التالي:

$$z = x + iy \quad .... \quad (٢\text{-}٥٢)$$

حيث يمثل x الجزء الحقيقي و iy الجزء التخيلي وتكون القيمة المطلقة (absolute value) لهذا العدد وهي:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z| \quad (٢\text{-}٥٣)$$

ويصنع اتجاهه مع الاتجاه الحقيقي الموجب زاوية α كما في شكل (٢-١١) حيث:



شكل (٢-١١): تمثيل العدد المركب $z = x + \vec{i}y$ بيانيا على المستوى xy.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Imaginary} \quad \text{التخيلي}}{\text{Real} \quad \text{الحقيقي}} = \frac{y}{x} \quad .... \quad (٢\text{-}٥٤)$$

ويمكن تحليل z إلى مقدار حقيقي قيمته $x = r\cos\alpha$ ومقدار تخيلي قدره $iy = ir\sin\alpha$.

ويهذا يكتب العدد المركب في هذه الحالة على الصورة:

$$z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad .... \quad (٢\text{-}٥٥)$$

ويسمى هذا النموذج للعدد المركب بالنموذج المثلثي (trigonometric form) وإذا فاضلنا المعادلة (٢-٥٥) بالنسبة للزاوية α فإن:

$$\frac{dz}{d\alpha} = r(-\sin\alpha + i\cos\alpha) = r(i^2\sin\alpha + i\cos\alpha)$$

$$= ir(i\sin\alpha + \cos\alpha) = iz$$

أو

$$\frac{dz}{z} = i\,d\alpha$$

ويتكامل هذه المعادلة نحصل على:

$$\ln z = i\alpha + C$$

$$z = e^{i\alpha + c} = e^{i\alpha} . e^{c}$$

ولكن من المعادلة (٢-٥٥) نجد أنه إذا كانت $\alpha = 0$ فإن $z = r$

$$z = re^{i\alpha} \quad .... \quad (٢\text{-}٥٦)$$

ويسمى هذا النموذج بالنموذج الأسي (exponential form) وهناك نموذج آخر للعدد المركب تحدثنا عنه في بداية هذا البند ويسمى نموذج استينميتز (Steinmetz form) أو النموذج القطبي (polar form) ويأخذ الشكل:

$$z = r\underline{|\theta} \quad .... \quad (٢\text{-}٥٧)$$

وهناك أسس جبرية تراعى عند تداول الأعداد المركبة نوجزها فيما يلي:

١ - تتساوى الأعداد المركبة إذا تساوت مقاديرها الحقيقية وتساوت مقاديرها التخيلية فإذا كان لدينا العدد المركب $z_1 = a+ib$ والعدد المركب $z_2 = c+id$ فإن $z_1 = z_2$ إذا كان

$a=c , b=d$

٢ - إذا كان لدينا $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_1 = x_1 + iy_1$ فإن:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad ..... \quad (٢\text{-}٥٨)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad ..... \quad (٢\text{-}٥٩)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) ... \quad (٢\text{-}٦٠)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (٢\text{-}٦١)$$

٣ - إذا كان لدينا $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ و $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ فإن:

$$z_1 z_2 = (r_1 \ e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} ... \quad (٢\text{-}٦٢)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad .. \quad (٢\text{-}٦٣)$$

٤ ـ إذا كان $z_2 = r_2 \underline{|\theta_2}$ و $z_1 = r_1 \underline{|\theta_1}$

$$z_1 z_2 = (r_1 \underline{|\theta_1})(r_2 \underline{|\theta_2}) = r_1 r_2 \underline{|\theta_1+\theta_2} \quad . \quad (٢\text{-}٦٤)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \underline{|\theta_1}}{r_2 \underline{|\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \underline{|\theta_1-\theta_2} \quad ... \quad (٢\text{-}٦٥)$$

٥ ـ العدد المرافق (conjugate) للعدد المركب z هو z^* حيث:

$$z = x + iy \quad \& \quad z^* = x - iy$$

$$z = r\underline{|\theta} \quad \& \quad z^* = r\underline{|-\theta} \quad ... \quad (٢\text{-}٦٦)$$

$$z = re^{i\theta} \quad \& \quad z^* = re^{-i\theta}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \& \quad z^* = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

٦ ـ جذور الأعداد المركبة (roots of complex number): يمكن كتابة العدد المركب $z = re^{i\theta}$ بالصورة $z = re^{i(\theta+2\pi n)}$ حيث $n = 0, \pm1, \pm2..$ وبصورة مماثلة يمكن كتابة العدد المركب $z = r\underline{|\theta}$ بالصورة $z = r\underline{|(\theta+n\,360°)}$ ومنه فإن:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi n)} \quad .... \quad (٢\text{-}٦٧)$$

$$\sqrt[K]{z} = \sqrt[K]{r}\, e^{i(\theta+2\pi n)/K} \quad .... \quad (٢\text{-}٦٨)$$

$$z = r\underline{|\theta} = r\underline{|(\theta+n\,360°)} \quad .. \quad (٢\text{-}٦٩)$$

$$\sqrt[K]{z} = \sqrt[K]{r}\,\underline{|(\theta+n\,360)/K} \quad ... \quad (٢\text{-}٧٠)$$

٧ ـ لوغاريثم الأعداد المركبة

$$\ln z = \ln r\, e^{i(\theta+2\pi n)} \quad ... \quad (٢\text{-}٧١)$$

$$\ln z = \ln r + i(\theta+2\pi n)$$

الملحــق (٣): معادلات رياضية
Appendix (3): Mathematical Formulae

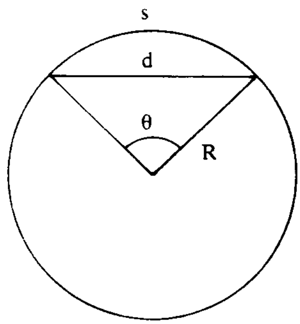
لقد استخدمت في هذا الكتاب بعض المعادلات والقوانين الرياضية والأشكال الهندسية أو العلاقات المثلثية أو التفاضل والتكامل وغيرها لبرهنة القوانين الفيزيائية أو لحل بعض الأمثلة والمسـائـل التي وردت خلال كل فصـل. لذلك سترد بعض هذه المعادلات والقوانين المهمة التي يحتاج إليها كل دارس فيزيائي، في هذا الملحق.

(٣-١) أبعاد بعض الأشكال الهندسية
(الدائرة، الأسطوانة والمخروط والكرة)

(٣-١-١) الدائــرة (circle)

إذا فرض أن R نصف القطر، D القطر، C المحيط، S المساحة، d طول وتر في دائرة و s طول القوس المقابل لهذا الوتر.

فإن:



$$C = 2\pi R = \pi D$$

$$S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$$

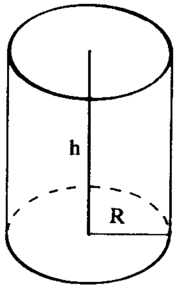
$$C = 2\sqrt{\pi S} = 2S / R$$

$$S = C^2 / 4\pi = \frac{1}{2} CR$$

$$d = 2R \sin\frac{\theta}{2}\ ,\quad s = R\theta$$

(٣-١-٢) الأسطوانة والمخروط (Cylinder and Cone)

إذا فرض أن h طول الأسـطوانـة، S السـطح الجانبي، T السطح الكلي، V الحجم، R نصف قطر القاعدة:

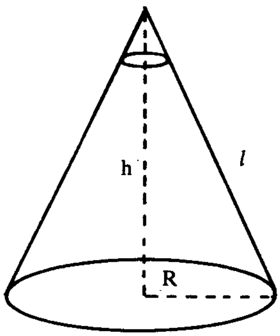


$$S = 2\pi Rh$$

$$T = 2\pi R\,(R+h)$$

$$V = \pi R^2 h$$

وإذا فرض أن l الارتفاع الجانبي للمخروط فإن :



$$l = (R^2 + h^2)^{1/2}$$

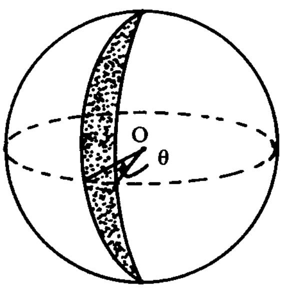
$$S = \pi\, R\, l = \pi\, R\, \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$T = \pi\, R\, (R + l) = \pi\, R\, (R + \sqrt{R^2 + h^2})$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, R^2 h$$

(٣-١-٣) الكـــرة (Sphere)

إذا فرض أن R نصف قطر الكرة، D القطر، S مساحة السطح، V الحجم فإن :



$$S = 4\,\pi\, R^2 = \pi\, D^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\, R^3 = \frac{1}{6}\pi\, D^3$$

ومساحة الجزء المخطط.

$S = 2R^2\theta$ (θ: in radian)

(٣-٢) العلاقات اللوغاريثمية

Logarithmic Relations

إذا كان $x = a^y$ فإن $y = \log_a x$

بعض قوانين اللوغاريثمات

(1)- $\log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$

(2)- $\log_a(x/z) = \log_a x - \log_a z$

(3)- $\log_a x^n = n \log_a x$

(4)- $\log_a x = \log_b x/\log_b a = (\log_b x) . (\log_a b)$

(5)- $\log_{10} x = \log_e x/\log_e 10 = (\log_{10} e) (\log_e x) = 0.4329 \log_e x$

أو:

$\log_{10} x = 0.4329 \ln x$

(6)- $\log_e x = \log_{10} x/\log_{10} e = (\log_e 10) (\log_{10} x) = 2.3026 \log_{10} x$

أو:

$\ln x = 2.3026 \log_{10} x$

وتسمى $\log_{10} x$ باللوغاريثم العشري .

وتسمى $\log_e x$ باللوغاريثم الطبيعي ويكتب عادة $\ln x$

(٣-٣) العلاقات المثلثية

Trigonometric relations

(٣-٣-١) الدوال المثلثية

(1)- sine $\alpha = \sin \alpha$ — جيب الزاوية α (جا α)

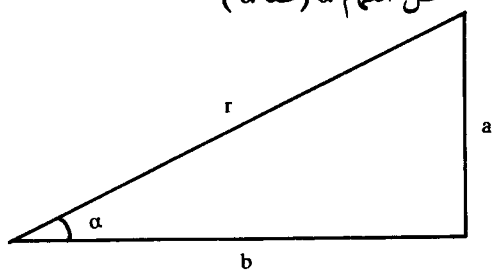
(2)- cosine $\alpha = \cos \alpha$ — جيب التمام α (جتا α)

(3)- tangent $\alpha = \tan \alpha$ — مماس ـ ظل الزاوية α (ظا α)

(4)- cosecant $\alpha = \csc\alpha$ — قاطع التمام α (قتا α)

(5)- secant $\alpha = \sec\alpha$ — قـــاطع α (قـــا α)

(6)- cotangent $\alpha = \cot\alpha$ — ظل التمام α (ظتا α)



(7) $\sin\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

(8) $\cos\alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

(9) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(10)- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

(11)- $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

(12)- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

(13)- $\sin\alpha = \cos(90°-\alpha) = \sin(180°-\alpha)$

(14)- $\cos\alpha = \sin(90°-\alpha) = -\cos(180°-\alpha)$

(15)- $\tan\alpha = \cot(90°-\alpha) = -\tan(180°-\alpha)$

(16)- $\cot\alpha = \tan(90°-\alpha) = -\cot(180°-\alpha)$

(17) $\csc\alpha = \cot\dfrac{\alpha}{2} - \cot\alpha$

(٣-٣-٢) جمع وطرح زوايا الدوال المثلثية

(18)- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\alpha \pm \cos\alpha\sin\beta$

(19)- $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

(20) $\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$, $\cot(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\cot\beta\cot\alpha \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

(٣-٣-٣) علاقات ضعف الزاوية

(21) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(22) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(23) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(24) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$

(٣-٣-٤) علاقات حاصل ضرب دالتين

(25) $\sin \alpha \sin \beta = \dfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \dfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$

(26) $\cos \alpha \cos \beta = \dfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \dfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$

(27) $\sin \alpha \cos \beta = \dfrac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \dfrac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$

(28) $\cos \alpha \sin \beta = \dfrac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) - \dfrac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$

(٣-٣-٥) علاقات حاصل جمع دالتين

(29) $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \dfrac{1}{2} (\alpha \pm \beta) \cos \dfrac{1}{2} (\alpha \mp \beta)$

(30) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \dfrac{1}{2} (\alpha - \beta)$

(31) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \dfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \dfrac{1}{2} (\alpha - \beta)$

(32) $\tan \alpha \pm \tan \beta = \dfrac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$, $\cot \alpha \pm \cot \beta = \dfrac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(٣-٣-٦) علاقات نصف الزاوية

(33) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}}$, $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}$

(34) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

(35) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

(٣-٣-٧) العلاقات للدوال ذوات القوة

(36) $\sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$, $\sin^3 \alpha = \dfrac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$

(37) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$, $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$

(٣-٣-٨) العلاقات للدوال الأسية

(38) $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ where $i = \sqrt{-1}$

(39) $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$

(40)- $\tan\alpha = -i\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}\right) = -i\left(\frac{e^{2i\alpha} - 1}{e^{2i\alpha} + 1}\right)$

(٣-٤) الدوال الزائدية

Hyperbolic Functions

(1) $\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$

(2) $\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$

(3) $\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$

(4) $\coth\alpha = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} = \frac{1}{\tanh\alpha}$

(5) $\sinh(\alpha \pm i\beta) = \sinh\alpha\cos\beta \pm i\cosh\alpha\sin\beta$

(6) $\cosh(\alpha \pm i\beta) = \cosh\alpha\cos\beta \pm i\sinh\alpha\sin\beta$

(7) $\cosh(i\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \cos\alpha$

(8) $\sinh(i\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = i\sin\alpha$

(9) $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

(10) $e^{\pm\alpha} = \cosh\alpha \pm \sinh\alpha$

(11) $\cosh\alpha = \cos i\alpha$, $i\sinh\alpha = \sin i\alpha$

$$(12)\quad \tanh(\alpha \pm i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta} \pm i\,\frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$(13)\quad \coth(\alpha \pm i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta} \pm i\,\frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}$$

(٣-٥) المعادلات التقريبية للكميات الصغيرة

Approximation Formulae for Small Quantities

إذا فرض أن δ كمية صغيرة موازنة بالوحدة فإن:

$$(1)\quad (1 \pm \delta)^2 = 1 \pm 2\delta \quad , \quad (1 \pm \delta)^n = 1 \pm n\delta$$

$$(2)\quad (1 + \delta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\delta \quad , \quad (1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta$$

$$(3)\quad e^{\delta} = 1 + \delta \quad , \quad \ln(1 + \delta) = \delta$$

(٣-٦) المسلسلات Series

(٣-٦-١) ذات الحدين Binomial

$$(1)\text{-}\ (x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots;\ (y^2 < x^2)$$

$$(2)\quad (1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots; \qquad (x^2 < 1)$$

$$(3)\quad (1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \ldots; \qquad (x^2 < 1)$$

(٣-٦-٢) الدوال الأسية Exponential

$$(4)\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$(5)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(6)\quad e^{\pm ix} = 1 \pm ix - \frac{x^2}{2!} \mp \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

(٣-٦-٣) الدوال المثلثية Trigonometric

$$(7)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(8)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(9)\quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

$$(10)\quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

$$(11)\quad \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$$

$$(12)\quad \csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \dots$$

(٣-٦-٤) الدوال الزائدية Hyperbolic

$$(13)\quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(14)\quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(15)\quad \tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

$$(16)\quad \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

(17) $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \dots$

(18) $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 + \dots$

(٣-٧) التفاضل «المشتقات»

Derivatives

في المعادلات التالية u ، v ، w تمثل دوال ثابتة لـ x و n ، c ، b ، a تمثل أعدادا ثابتة حقيقية .

(1) $\frac{d}{dx}(a) = 0$

(2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

(3) $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$

(4) $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

(5) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$; $\frac{d}{dx}(u^n v^m) = u^{n-1} v^{m-1}\left(nv\frac{du}{dx} + mu\frac{dv}{dx}\right)$

(6) $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

(7) $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$

(8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{u^n}{v^m}\right) = \frac{u^{n-1}}{v^{m+1}}\left(nv\frac{du}{dx} - mu\frac{dv}{dx}\right)$

$$(9)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{-1}{u^2}\frac{du}{dx}\quad ;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^n}\right)=-\frac{n}{u^{n+1}}\frac{du}{dx}$$

$$(10)\quad \frac{d}{dx}(\log_a u)=(\log_a e)\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\quad ;\quad \frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$(11)\quad \frac{d}{dx}(a^u)=a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$$

$$(12)\quad \frac{d}{dx}(e^u)=e^u\frac{du}{dx}$$

$$(13)\quad \frac{d}{dx}(u^v)=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+(\ln u)u^v\frac{dv}{dx}$$

$$(14)\quad \frac{d}{dx}(\sin u)=(\cos u)\frac{du}{dx}$$

$$(15)\quad \frac{d}{dx}(\cos u)=-(\sin u)\frac{du}{dx}$$

$$(16)\quad \frac{d}{dx}(\tan u)=(\sec^2 u)\frac{du}{dx}$$

$$(17)\quad \frac{d}{dx}(\cot u)=-(\csc^2 u)\frac{du}{dx}$$

$$(18)\quad \frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$$

$$(19)\quad \frac{d}{dx}(\csc u)=\csc u\,.\,\cot u\frac{du}{dx}$$

$$(20)\quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$(21)\quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

(22) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}u)=\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

(23) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}u)=-\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

(24) $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}u)=\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

(25) $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}u)=-\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

(٨-٣) التكامل Integrals

في المعادلات التالية u ، v ، w تمثل دوال ثابتة لـ x و p ، n ، m ، c ، b ، a تمثل أعدادا ثابتة حقيقية .

(1) $\int a dx = ax$

(2) $\int (u+v)\,dx = \int u dx + \int v dx$

(3) $\int u dv = u\int dv - \int v du = uv - \int v du$

(4) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(5) $\int \dfrac{dx}{x} = \log_e x = \ln x$

(6) $\int e^x\,dx = e^x \quad ; \quad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

(7) $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax}$

(8) $\int xe^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

(9) $\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax}\,dx$

(10) $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

(11) $\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$

(12) $\int \frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}}\,dx = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})$

(13) $\int \frac{xe^{ax}}{(1+ax)^2}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} \text{ or } = -\cos^{-1}\frac{x}{a}$ $\quad ; (a^2 > x^2)$

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

(16) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$

(17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

(18) $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}$

(19) $\int x^m (a+bx^n)^P\,dx = \frac{1}{an(p+1)}[-x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} + (m+1+np+n)$

$\int x^m (a+bx^n)^{p+1}\,dx]$

$$(20)\quad \int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$$

$$(21)\quad \int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\ \ln\frac{c+x}{c-x}\quad (c^2>x^2)$$

$$(22)\quad \int \frac{xdx}{c^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln(c^2\pm x^2)$$

$$(23)\quad \int \frac{xdx}{(c^2\pm x^2)^{n+1}} = \mp\frac{1}{2n(c^2\pm x^2)^n}$$

$$(24)\quad \int \frac{dx}{(c^2\pm x^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)}\left[\frac{x}{(c^2\pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int\frac{dx}{(c^2\pm x^2)^{n-1}}\right]$$

$$(25)\quad \int \frac{dx}{(x^2-c^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)}\left[-\frac{x}{(x^2-c^2)^{n-1}} - (2n-3)\int\frac{dx}{(x^2-c^2)^{n-1}}\right]$$

$$(26)\quad \int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}]$$

$$(27)\quad \int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}$$

$$(28)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$(29)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$(30)\quad \int (\sin ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$(31)\quad \int (\cos ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$(32)\quad \int (\tan ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ \ln\cos ax = \frac{1}{a}\ln\sec ax$$

$$(33)\quad \int (\cot ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln \sin ax = -\frac{1}{a}\ln \csc ax$$

$$(34)\quad \int (\sec ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

$$(35)\quad \int (\csc ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln \tan \frac{ax}{2}$$

$$(36)\quad \int (\sin^2 ax)\,dx = -\frac{1}{2a}\cos ax \sin ax + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$(37)\quad \int (\sin^n ax)\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int (\sin^{n-2} ax)\,dx$$

$$(38)\quad \int (\cos^2 ax)\,dx = \frac{1}{2a}\sin ax \cos ax + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$(39)\quad \int (\cos^n ax)\,dx = \frac{1}{na}\cos^{n-1} ax \sin ax + \frac{n-1}{n}\int (\cos^{n-2} ax)\,dx$$

$$(40)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \int (\csc^2 ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$(41)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \int (\sec^2 ax)\,dx = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$(42)\quad \int (\tan^2 ax)\,dx = \frac{1}{a}\tan ax - x$$

$$(43)\quad \int (\cot^2 ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x$$

$$(44)\quad \int (\tan^n ax)\,dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int (\tan^{n-2} ax)\,dx$$

$$(45)\quad \int (\cot^n ax)\,dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int (\cot^{n-2} ax)\,dx$$

$$(46)\quad \int (\sin^{-1} ax)\,dx = x \sin^{-1} ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$(47)\quad \int (\cos^{-1} ax)\,dx = x \cos^{-1} ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$(48)\quad \int (\tan^{-1} ax)\,dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)$$

$$(49)\quad \int (\cot^{-1} ax)\,dx = x \cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)$$

$$(50)\quad \int (\sec^{-1} ax)\,dx = x \sec^{-1} ax - \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})$$

$$(51)\quad \int (\csc^{-1} ax)\,dx = x \csc^{-1} ax + \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})$$

المـــراجـــع
References

أولا : المراجع العربيـة

- أبوطالب، نعيم مصطفى؛ زكي، آسر علي والبدوي، السيد عبدالمعطي. *أسس الهندسية الكهربية (الجزء الأول)*. منشأة المعارف، الاسكندرية (١٩٧٥).
- أحمد، ناظم حسون والراشد، راشد عبدالرزاق. *الكهرباء والمغناطيسية (الجزء الأول)*. مطابع جامعة البصرة، البصرة بالعراق (١٩٧٨).
- حسب النبي، منصـور محمد. *الكهرباء والمغناطيسية*. مكتبة النهضة المصرية، القاهرة (١٩٧٢).
- داخـل، عقيـل عزيـز. *مقـدمـة في الكهربائية والمغناطيسية*. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر (١٩٨٥م).
- قمر، محمد أحمد. *هندسة الآلات الكهربية*. منشأة المعارف، الاسكندرية (١٩٧٢).
- النـادي، محمد وأبوالمجد، عادل (مترجمين). *الكهرباء والمغناطيسية لسيرز*. دار النهضة العربية، القاهرة (١٩٧٠).

ثانيا: المراجـع الأجنبيـة

Chikazumi, **S.** and **Charap, S.H.** *Physics of Magnetism.* John Wiley, New York (1964).

Duffin, W.J. *Advanced Electricity and Magnetism.* McGraw-Hill, London (1980).

Edminister, J.A. *Electric Circuits.* McGraw-Hill, New York (1972).

Gillam, E. and **King, R.M.** *College Physics.* MacDonald and Evans, London (1971).

Grant, I.S. and **Phillips, W.R.** *Electromagnetism.* John Wiley, New York (1975).

Kraus, J.D. and **Carver, K.R.** *Electromagnetics.* McGraw-Hill, New York (1973).

Lnman, F.W. and **Miller, C.** *Contemporary Physics.* MacMillan, New York, London (1975).

Mackelvey, J. and **Grotch, H.** *Physics for Science and Engineering.* Harper & Row, New York (1978).

Mitsui, T.; Tatsuraki, L. and **Nakamura, E.** *An Introduction to the Physics of Ferroelectric.* Gordon and Breach, New York, London (1976).

Peck, E.R. *Electricity and Magnetism.* McGraw-Hill, New York (1953).

Raymond, A. Serway. *Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics.* Savnders , London (1992).

Resnick, R. and **Halliday, D.** *Physics.* John Wiley, New York (1978).

Romanowitz, H.A. and **Pukett, R.E.** *Introduction to Electronic.* John Wiley, New York (1976).

Scott, W.T. *The Physics of Electricity and Magnetism.* John Wiley, New York (1959).

Sears, F.W. *Electricity and Magnetism.* Addison Wesley, London (1974).

Selby, S.M. *Standard Mathematical Table.* The Chemical Rubber Co., Ohio (1969).

Smith, C.J. *Electricity and Magnetism.* Edward Annold Ltd., London (1963).

Tareev, B. *Physics of Dielectric Material.* Mir, Moscow (1975).

Wangsness, R.K. *Electromagnetic Fields.* John Wiley, New York (1979).

Winch, R.P. *Electricity and Magnetism.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963).

Zilberman, G. *Electricity and Magnetism.* Mir, Moscow (1973).

ثبت المصطلحات العلمية

أولاً : عربي - إنجليزي

أ

اتساع شريطي	Band width
أحادي الطول الموجي، (أحادي اللون)	Monochromatic
احتمال	Probability
إحداثيات اسطوانية	Cylindrical coordinates
ديكارتية	Cartesian coordinates
كروية	Spherical coordinates
اختلاف في الطور	Phase difference
ارتخاء	Relaxation
إزاحة	displacement
إزالة الاستقطاب	depolarization
التمغنط	demagnetization
ازدواج حراري	Thermocouple
استجابة	Response
استقطاب	Polarization
عفوي (تلقائي)	Spontaneous polarization
استمرارية	Continuity
أسّي	Exponential
إشعاع	Radiation
أشعة	Rays
سينية	X-rays
أعداد مركبة	Complex numbers
التفاف (نوع من أنواع الاشتقاق)	Curl
التواء	Kink
الكترومتر (مقياس الكهرباء)	Electrometer
ربعي	Quadrant electrometer
الكترون	Electron
الكترونات التوصيل	Conduction electrons
مقيدة	Bound electrons
أمان	Safety
أمبير (وحدة التيار الكهربي)	Ampere
امتصاص	Absorption
انتشار	diffusion
انحدار (تدرج)	Gradient
انحراف (انعطاف)	deflection
انحفاظ، حفظ	Conservation
انحلال (اضمحلال - تناقص)	decay
انسياق (انجراف)	drift
انعكاس	Reflection
انكسار	Refraction
انهيار	Break down

ب

باراكهربي (متسامت الكهربية)	Paraelectric
بارامغناطيسي (متسامت المغناطيسية)	Paramagnetic
بروتون	Proton
بُعد	Dimension
بلّورة	Crystal

بوصلة	Compass
بيتاترون	Betatron

ت

تأثرية	Susceptibility
كهربية	Electric susceptibility
مغناطيسية	Magnetic susceptibility
تأثير (فعالية)	Effect
سطحي (قشري، جلدي)	Skin effect
تبدد	Dissipation
تجاذب	Attraction
تحريض (حث أو تأثير)	Induction
تحويل (تبديل)	Conversion
تخلف	Hysteresis
تدفق مغناطيسي (فيض)	Magnetic flux
ترابط إسهامي	Covalent bonding
أيوني	Ionic bonding
متجانس القطبية	Homopolar bond
تراصف في اتجاه واحد (توجيه)	Alignment
ترتيب	Configuration
تردد	Frequency
تركيب (بنية)	Structure
ذري	Atomic structure
تسارع (عجلة)	Acceleration
تسرب	Leakage
تشبع	Saturation
تشتت	Dispersion
تفاعل	Interaction
تفرق (تباعد)	Divergence
تفريغ توهجي	Glowing discharge
الشحنة	Discharge
تقاسم الشحنة	Sharing of charge
تقبض كهربي (انضغاط كهربي) تغير أبعاد العازل بتأثير المجال الكهربي	Electrostriction
تكافؤ	Valence
تكامل خطي	Line integral
تكهرب	Electrification
تمغنط (مغنطة)	Magnetization
تنافر	Repulsion
تناقص لوغاريثمي	Logarithmic decrement
تهيج حراري	Thermal agitation
تواز (مواز أو متوازي)	Parallel
توازي متضاد في الاتجاه	Antiparallel
توافقي	Harmonic
توالي (متسلسل)	Series
توتر (شد)	Tension
توزيع	Distribution
توصيل أرضي	Earthing
المكثفات	Connection of capacitor
توصيلية كهربية	Electrical conductivity
توهين	Attenuation
تيار	Current
تيارات دوامية	Eddy current
تيار التوصيل	Conduction current
ضعيف	Feeble current
فعال	Effective current
مستقر	Steady current
مستمر	Direct current

ث

ثابت	Constant
بولتزمان	Boltzmann's constant
الزمن	Time constant
ثعبان البحر	Eel
ثغرة هوائية (فجوة)	Air gap
ثوابت فيزيائية	Physical constant

ج

جدر المناطق	Domain wall
جذب مغناطيسي	Magnetic attraction
جذر تربيعي	Square root
متوسط المربع	Root mean square
جزء تخيلي	Imaginary part
جزيء	Molecule

جسيم	Particle
جلفانومتر	Galvanometer
الظل	Tangent galvanometer
قذفي	Ballistic galvanometer
جهاز راسم الذبذبات المهبطي	Cathode-ray oscilloscope
جهد (كمون)	Potential
مغناطيسي	Magnetic potential

ح

حث ذاتي	Self inductance
متبادل	Mutual inductance
مغناطيسي	Magnetic induction
حجر مغناطيسي	Lodestone
حدة	Sharpness
حدود المناطق	Domain boundary
حديد مطاوع	Soft iron
حرارة	Heat
مفقودة	Heat librated
ممتصة	Heat absorbed
حرّض (حث، أثر)	Induce
حركة توافقية بسيطة	Simple harmonic motion
مدارية	Orbital motion
حركية	Mobility
حلقة حارسة	Guard ring
حمل	Load

خ

خارج عن الطور	Out of phase
خطوط القوى	Lines of forces

د

دائرة	Circle
خانقة (رافضة)	*Rejector circuit*
كهربية	Circuit
كهربية مكافئة	Equivalent circuit
مغناطيسية	Magnetic circuit
مفتوحة	Open circuit
دالة زائدية	Hyperbolic function
دايامغناطيسية	Diamagnetic
درجة حرارة الاسناد	Reference temperature
دفع زاوي	Angular impulse
دوائري	Circular
دوران	Rotation
زاوي	Angular rotation

ذ

ذبذبة متخامدة	Damped oscillation
ذرات متجاورة	Adjacent atoms
ذرة	Atom
ذروة (قمة)	Peak
ذو حدين (ثنائي الحد)	Binomial
ذو قطبين (ثنائي القطب)	Dipole

ر

رابطة	Binding
التكافؤ الكهربي	Electrovalent bond
تماسكية	Cohesive binding
راسم الذبذبات	Oscillograph
رباعي الأقطاب	Quadrupole
رد (مفاعلة)	Reactance
رذاذ	Atomizer
رنين	Resonance

ز

زامن (تزامن)	Synchronize
زاوي	Angular
زاوية	Angle
الطور	Phase angle
مجسمة	Solid angle
زمن دوري	Cycle time
زنبرك	Spring

س

ساكن	Static
سالبية كهربية	Electronegativity

سرعة	Velocity
انسياقية	Drift velocity
زاوية	Angular velocity
نهائية منتظمة	Terminal velocity
سطح	Surface
افتراضي	Hypothetical surface
ملتو	Convoluted surface
سطوح متساوية الجهد	Equipotential surface
سعة (ذروة)	Amplitude
كهربية للمكثف	Capacitance
سعر	Calorie
سماحية	Permittivity
سيكلوترون	Cyclotron

ش

شبكة كهربية	Network (electric)
شبه ساكن	Quasi - static
موصل	Semi conduction
شحنات حرة	Free charges
شحنة	Charge
اختبار	Test charge
الكترونية	Electronic charge
تأثرية (مستحثة)	Induced charge
سالبة	Negative charge
مقيدة	Bound charge
موجبة	Positive charge
شدة	Intensity
المجال المغناطيسي	Magnetic field strength
شديد التخامد	Heavily damped
شروط حدودية	Boundary conditions
شغل	Work

ص

صفيحة رقيقة	Lamina

ض

ضابط الطور (مطاور)	Phasor
ضد المغناطيسية الحديدية	Antiferromagnetic

ط

طاقة	Energy
اهتزازية	Vibrational energey
الحركة	Kinetic energy
الوضع (طاقة الكمون)	Potential energy
طور	Phase
عكسي	Anti-phase
طول الموجة	Wave length
طيف	Spectrum

ع

عابر، مؤقت	Transient
عازل كهربي	Dielectric (insulator)
عدد ذري	Atomic number
مرافق	Conjugate
موجي	Wave number
عزم	Moment
كهربي	Electric moment
اللي (عزم الدوران، عزم الازدواج)	Torque
اللي المرجع	Restoring torque
مغناطيسي	Magnetic moment
عضو الإنتاج الكهربي	Armature
عقدة	Node
علاقات مثلثية	Trigonometric relations
علم الحركة (ديناميكا)	Dynamic
عمق قشري (عمق الاختراق)	Skin depth
عمود كهروحراري	Thermopile
عمودي (متعامد)	Perpendicular
عناصر الأرض النادرة	Rare earth elements
انتقالية	Transition elements
عياري (قياسي)	Standard
عيب (تشوه)	Deformation

غ

غزل (لف)	Spin
غير مستقر	Unstable
مستقطب	Unpolorized

ف

فائق التوصيل (فوق التوصيل، مفرط التوصيل)	Super conductor
فجوة	Gap
فرق الجهد	Potential differnce
فضاء (حيز، فراغ)	Space
فـقـد	Loss
فوق البنفسجي	Ultraviolet
فيض (تدفق)	Flux

ق

قابل	Acceptor
قبولية (مسامحة)	Admittance
قدرة (استطاعة)	Power
لحظية	Instant power
مبددة (ضائعة)	Dissipated power
قشرة	Shell
قطبي	Polar
قطع (قص)	Shear
قنطرة	Bridge
قوة	Force
دافعة كهربية	Electromotive force (E.M.F)
دافعة مغناطيسية	Magnetomotive force (M.M.F)
طاردة مركزية	Centrifugal force
قيمة حرجة	Critical value
متوسطة للتيار	Average current
متوسطة للقدرة	Average power

ك

كاشف الذبذبات	Oscilloscope
كامل (تام)	Whole
كتلة	Mass
ذرية	Atomic mass
كثافة	Density
التيار	Current density
الشحنة	Charge density
الشحنة الحجمية	Volume charge density
الشحنة السطحية	Surface charge density
الشحنة الطولية	Linear charge density
كرة (جسم كروي)	Sphere
فعالية	Efficiency
كمي (مقداري)	Quantitative
كمية الحركة الزاوية	Angular momentum
كهربي	Electric
كهربية إجهادية	Piezoelectric
ساكنة	Electrostatic
كهرمان	Amber
كهروحراري	Thermoelectric

م

مؤثر (فعال)	Effective
مؤشر (دليل)	Indicator
مادة	Substance
مبدِّل	Commutator
متباين الخواص (المناحي)	Anisotropic
متبقي (متخلف)	Remanence
متبلور	Crystalline
متجه	Vector
متردد (متناوب)	Alternating
متعادل (محايد)	Neutral
متوسط المسار الحر	Mean free path
مثلث القوى	Triangle of force
مجال	Field
أرضي	Earth's field
جزيئي	Molecular field
قهري	Coercive field
مجزء التيار (مفرع التيار)	Shunt
محجوب (مستور)	Screened
محرك	Motor
محصلة	Resultant
محول	Transformer
خافض	Step-down transformer

رافع	Step-up transformer
مخروط	Cone
مخطط المتجهات	Vector diagram
مخمد (متخامد، متضائل)	Damped
مدار	Orbit
مراقب (راصد)	Observer
مركبة مماسية	Tangential component
مركز الثقل	Centre of gravity
مرن	Elastic
مزدوج (ازدواج)	Couple
مسار	Path
مسرِّع (معجِّل)	Accelerator
مطلق	Absolute
مطياف كتلي	Mass spectrograph
معادلة تفاضلية	Differential equation
معامل	Coefficient
الانكسار	Refractive index
التخميد	Damping coefficient
التصحيح	Correction factor
القدرة	Power factor
النوعية	Quality factor
معدن وسيط	Intermediate metal
معقول، منطقي	Rational
معلق (متدلي)	Suspended
مغناطيس	Magnet
ثنائي القطب	Magnetic dipole
دائم	Permanent magnet
طبيعي	Natural magnet
مغناطيسية	Magnetism
متبقية (متخلفة)	Remanent magnetism
تلقائية (عفوية)	Spontaneous magnetism
مفاعلة (رد)	Reactance
حثية (رد حثي)	Inductive reactance
سعودية (رد سعوي)	Capacitive reactance
مقاومة	Resistance
متغيرة	Rheostat

نوعية	Resistivity
مقياس التدفق المغناطيسي	Fluxemeter
التيار الكهربي	Ammeter
الجهد	Voltmeter
مكثف	Capacitor (condensor)
مكثفات على التوازي	Condensers in parallel
على التوالي	Condensers in series
مكشاف كهربي	Electroscope
ملف	Coil
ابتدائي	Primary coil
استكشاف	Search coil
ثانوي	Secondary coil
حلزوني	Solinoidal coil
حلقي	Toroidal coil
دوار	Rotating coil
ممانعة	Impedance
سعوية	Cpacitive impedance
مغناطيسية (نفور، إحجام)	Reluctance
مناطق (مقاطعات)	Domains
التكوين	Domains formation
منتظم	Uniform
منحفظ (محافظ)	Conservation
منصف زوايا أو أضلاع	Bisector
مواد حديدومغناطيسية	Ferromagnetic materials
عازلة تلقائية الاستقطاب	Ferroelectric materials
موجات مخمدة (متضائلة)	Damped waves
موجة	Wave
جيبية	Sine wave, sinusoidal wave
كهرومغناطيسية	Electromagnetic wave
مستعرضة	Transversive wave
مستوية	Plane wave
موحد الخواص الاتجاهي (متماثل المناحي)	Isotropic
موصل (ناقل)	Conductor
مولد	Generator
التيار المستمر	D.C. generator
كهربي	Dynamo

Torsion balance	ميزان الالتواء (اللي)

ن

Conductance	ناقلية
Relative	نسبي
Radius	نصف قطر
Superposition theorem	نظرية التراكم
Permeability	نفاذية
Half power points	نقطتا نصف القوة
Inversion point	نقطة انقلاب
Curie point	كيوري
Growth	نمـــو
Qualitative	نوعي (كيفي)
Atomic nuclei	نويات ذرية

هـ

Corona	هالة

و

Units	وحدات
Unidirectional	وحيد الاتجاه
Insulating media	وسط عازل
Thermo-junction	وصلة حرارية (ملتقى حراري)
Spark	ومضة (شارة)

ي

Lag	يتأخر
Lead	يتقدم

ثانيًا : إنجليزي عربي

A

Absolute	مطلق
Absorption	امتصاص
Acceleration	تسارع
Accelerator	مسرع ، معجل
Acceptor	قابل
Adjacent atoms	ذرات متجاورة
Admittance	قبولية ، مساحة
Air gap	ثغرة هوائية (فجوة)
Alignment	تراصف في اتجاه واحد «توجيه»
Alternating	متردد ـ متناوب
Amber	كهرمان ـ كهرب
Ammeter	مقياس للتيار الكهربي
Ampere	أمبير «وحدة التيار الكهربي في النظام العالمي»
Amplitude	سعة ، ذروة
Angle	زاوية
Angular	زاوي
impulse	الدفع الزاوي
momentum	كمية الحركة الزاوية
rotation	الدوران الزاوي
velocity	السرعة الزاوية
Anisotropic	متباين الخواص «المناحي»
Anti-ferromagnetic	ضديد المغناطيسية الحديدية
Anti-parallel	توازي متضاد في الاتجاه
Armature	عنصر الانتاج الكهربي
Atom	ذرة
Atomic mass	الكتلة الذرية
nuclei	النويات الذرية
number	العدد الذري
structure	التركيب الذري
Atomizer	رذاذ
Attenuation	توهين
Attraction	تجاذب
Average current	القيمة المتوسطة للتيار
power	القدرة المتوسطة

B

Ballistic galvanometer	الجلفانومتر القذفي
Band width	الاتساع الشريطي
Betatron	بيتاترون
Binding	رابطة
Binomial	ذو حدين ، ثنائي الحد
Bisector	منصف زوايا أو «أضلاع»
Boltzmann's constant	ثابت بولتزمان
Boundary conditions	الشروط الحدية
Bound electrons	الكترونات مقيدة
charges	شحنات مقيدة
Break down	انهيار
Bridge	قنطرة

منحفظ	Conservative
ثابت	Constant
استمرارية	Continuity
تحويل، تبديل	Conversion
سطح ملتو	Convoluted
هالة	Corona
معامل التصحيح	Correction factor
مزدوج، ازدواج	Couple
الترابط الإسهامي	Covalent bonding
قيمة حرجة	Critical value
مبلورة	Crystal
متبلور	Crystalline
نقطة كيوري	Curie point
التفاف «نوع من أنواع الاشتقاق»	Curl
تيار	Current
كثافة التيار	density
زمن دورة	Cycle time
سيكلوترون	Cyclotron
إحداثيات اسطوانية	Cylindrical coordinates

D

مخمد، متخامد، متضائل	Damped
ذبذبة متخامدة	oscillation
موجات مخمدة أو متضائلة	waves
معامل التخميد	Damping coefficient
مولد التيار المستمر	D.C. generator
انحلال، اضمحلال، تناقص	Decay
انحراف، انعطاف	Deflection
عيب، تشوه	Deformation
إزالة التمغنط	Demagnetization
كثافة	Density
إزالة الاستقطاب	Depolarization
دايا مغناطيسية	Diamagnetic
عازل	Dielectric
معادلة تفاضلية	Differential equation
انتشار	Diffusion
بُعد (أبعاد)	Dimension (s)

C

سعر	Calorie
سعة	Capacitance
المانعة السعرية	capacitive impedance
المفاعلة أو الرد، السعري	reactance
مكثفة	Capacitor
الاحداثيات الديكارتية	Cartesian coordinates
جهاز راسم الذبذبات الكاثودي «المهبطي»	Cathode-ray oscilloscope
مركز الثقل	Centre of gravity
قوة طاردة مركزية	Centrifugal force
شحنة	Charge
كثافة الشحن	density
دائرة	Circle
دائرة كهربية	Circuit
دوائري	Circular
معامل	Coefficient
المجال القهري	Coercive field
رابطة تماسكية	Cohesive binding
ملف	Coil
مبدل	Commutator
بوصلة	Compass
الأعداد المركبة	Complex numbers
مكثفات	Condensers (capacitors)
مكثفات على التوازي	in parallel
مكثفات على التوالي	in series
ناقلية، مواصلة	Conductance
تيار التوصيل	Conduction current
الكترونات التوصيل	electrons
الناقلية النوعية، التوصيلية الكهربية	Conductivity
موصل، ناقل	Conductor
مخروط	Cone
توزيع	Configuration
العدد المرافق	Conjugate
توصيل المكثفات	Connection of capacitors
انحفاظ، حفظ	Conservation

Dipole	ذو قطبين، ثنائي القطب
Direct current (D.C)	التيار المستمر
Discharge	تفريغ اللشحنة
Discrete regions	مناطق منفصلة
Dispersion	تشتت
Displacement	إزاحة
Dissipated power	القدرة المبددة
Dissipation	تبدد
Distribution	توزيع
Divergence	تفرق، تباعد
Domains	مناطق، مقاطعات
boundary	حدود المناطق
formation	مناطق التكوين
walls	جدار المناطق
Drift	انسياق ـ انجراف
velocity	السرعة الانسياقية
Dynamic	علم الحركة، ديناميكا
Dynamo	مولد كهربائي (دينامو)

E

Earth's field	المجال الأرضي
Earthing	التوصيل بالأرض
Eddy current	تيارات دوامية
Eel	ثعبان البحر
Effect	تأثير، فعالية
Effective	مؤثر، فعال
current	التيار الفعال
Efficiency	كفاءة
Elastic	مرن
Electric	كهربية
Electrical charge	شحنة كهربية
conductivity	التوصيلية الكهربية
Electrification	تكهرب
Electromagnetic wave	موجة كهرومغناطيسية
Electrometer	الكترومتر، مقياس الكهرباء
Electromotive force (E.M.F.)	قوة دافعة كهربية
Electron	الكترون
Electronegativity	السالبة الكهربية
Electronic charge	الشحنة الألكترونية
Electroscope	مكشاف كهربي
Electrostatic	كهربية ساكنة
Electrostriction	تقبض كهربي، انضغاط كهربي
Electrovalent bond	رابطة التكافؤ الكهربي
Energy	طاقة
Equipotential surfaces	سطوح متساوية الجهد
Equivalent circuit	دائرة مكافئة
Exponential	أسي

F

Feeble current	تيار ضعيف
Ferroelectric materials	مواد عازلة تلقائية الاستقطاب
Ferromagnetic	مواد حديد ومغناطيسية
Field	مجال
Flux	فيض، تدفق
Fluxmeter	مقياس التدفق المغناطيسي
Force	قوة
Free charges	شحنات حرة
Frequency	تردد

G

Galvanometer	جلفانومتر
Gap	فجوة (ثغرة)
Generator	مولد
Glowing discharge	التفريغ التوهجي
Gradient	انحدار «تدرج»
Growth	نمو
Guard ring	الحلقة الحارسة

H

Half-power points	نقطتا نصف القوة
Harmonic	توافقي
Heat absorbed	الحرارة الممتصة
librated	الحرارة المفقودة

حمل	Load
الحجر المغناطيسي	Lodestone
التناقص اللوغاريثمي	Logarithmic decrement
فقد	Loss

M

مغناطيس	Magnet
جذب مغناطيسي	Magnetic attraction
دائرة مغناطيسية	circuit
مغناطيس ثنائي القطب	dipole
شدة المجال المغناطيسي	field strength
التدفق المغناطيسي	flux
القوة المغناطيسية	force
الحث المغناطيسي	induction
العزم المغناطيسي	moment
الجهد المغناطيسي	potential
التأثرية المغناطيسية	susceptibility
المغناطيسية	Magnetism
تمغنط، مغنطة	Magnetization
القوة الدافعة المغناطيسية	Magnetomotive force
المطياف الكتلي	Mass spectrograph
متوسط المسار الحر	Mean free path
حركية	Mobility
المجال الجزئي	Molecular field
جزئي	Molecule
عزم	Moment
أحادي الطول الموجي، أحادي اللون	Monochromatic
محرك	Motor
حث متبادل	Mutual inductance

N

مغناطيس طبيعي	Natural magnet
شحنة سالبة	Negative charge
شبكة كهربائية	Network (electric)
متعادل، محايد	Neutral
عقدة	Node
نواة	Nucleus

شديد التخامد	Heavily damped
ترابط متجانس القطبية	Homopolar bond
دالة زائدية	Hyperbolic function
سطح افتراضي	Hypothetical surface
تخلف	Hysteresis

I

الجزء التخيلي	Imaginary part
ممانعة	Impedance
معامل الانكسار، أو قرينة الانكسار	Index of refraction
مؤشر، دليل	Indicator
حرض، حث، أثر	Induce
شحنة تأثرية، شحنة مستحثة	Induced charge
تحريض، حث، تأثير	Induction
مفاعلة حديثة أو رد حثي	Inductive reactance
القدرة اللحظية	Instant power
وسط عازل	Insulating media
عازل	Insulator
شدة	Intensity
تفاعل	Interaction
معدن وسيط	Intermediate metal
نقطة الانقلاب	Inversion point
الترابط الأيوني	Ionic bonding
موحد الخواص الاتجاهية، متماثل المناحي	Isotropic

K

طاقة الحركة	Kinetic energy
التواء	Kink

L

يتباطأ	Lag
صفيحة رقيقة	Lamina
يتقدم	Lead
تسرب	Leakage
كثافة الشحنة الطولية	Linear charge density
تكامل خطي	Line integral
خطوط القوى	Lines of forces

O

Observer	مراقب، راصد
Open circuit	دائرة مفتوحة
Orbit	مدار
Orbital motion	حركة مدارية
Oscillograph	راسم الذبذبات
Oscilloscope	كاشف الذبذبات
Cut of phase	خارج عن الطور

P

Paraelectric	باراكهربية، متسامت الكهربية
Parallel	توازٍ، موازٍ، متوازٍ
Paramagnetic	بارامغناطيس، متسامت المغناطيسية
	بارامغناطيسية، المغناطيسية
Paramagnetism	المتسامتة
Particle	جسيم
Path	مسار، مسير
Peak	ذروة، قمة
Permanent magnet	مغناطيس دائم
Permeability	نفاذية
Permittivity	سماحية
Perpendicular	عمودي، متعامد
Phase angle	زاوية الطور
Difference	الاختلاف في الطور
Phasor	ضابط الطور، مطاور
Physical constants	ثوابت فيزيائية
Piezoelectric	الكهربية الاجهادية
Plane wave	موجة مستوية
Polar	قطبي
Polarizability	الاستقطابية «قابلية الاستقطاب»
Polarization	استقطاب
Positive charge	شحنة موجبة
Potential	جهد، كمون
difference	فرق الجهد، فرق الكمون
energy	طاقة الكمون، طاقة الوضع
Power	قدرة، استطاعة
factor	معامل القدرة
Primary coil	ملف ابتدائي
Probability	احتمال

Q

Quadrant electrometer	الكترومتر ربعي
Quadrupole	رباعي الأقطاب
Qualitative	نوعي - كيفي
Quality factor	معامل النوعية
Quantitative	كمي - مقداري
Quasi-static	شبه ساكن «شبه استاتيكي»

R

Radiation	إشعاع
Radius	نصف قطر
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرة
Rational	معقول، منطقي
Rays	أشعة
Reactance	مفاعلة، رد
Reaction	تفاعل
Reactor	مفاعل
Real part	الجزء الحقيقي
Reference temperature	درجة حرارة الإسناد
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار
Refractive index	معامل الانكسار
Rejector circuit	الدائرة الخالفة «الرافضة»
Relative	نسبي
Relaxation	ارتخاء
Reluctance	ممانعة، نفور، إحجام
Remanence	متبقي، متخلف
	المغناطيسية المتبقية
Remanent magnetization	«المتخلفة»
Repulsion	تنافر
Resistance	مقاومة
Resistivity	مقاومة نوعية

مغنطة تلقائية «عفوية»	Spontaneous magnetization
استقطاب عفوي «تلقائي»	polarization
زنبرك	Spring
جذر تربيعي	Square root
عياري ، قياسي	Standard
ساكن	Static
تيار مستقر	Steady current
محول خافض	Step-down transformer
محول رافع	Step-up transformer
تركيب، بنية	Structure
مادة	Substance
فائق التوصيل، فوق التوصيل، مفرط التوصيل	Superconductor
نظرية التراكم	Superposition theorem
كثافة الشحنة السطحية	Surface charge density
التأثرية الكهربية	Susceptibility
معلق، متدلي	Suspended
زامن، تزامن	Synchronize

T

جلفانومتر الظل	Tangent galvanometer
مركبة مماسية	Tangential component
حرارة	Temperature
توتر ، شد	Tension
سرعة نهائية منتظمة	Terminal velocity
شحنة اختبار	Test charge
التهيج الحراري	Thermal agitation
ازدواج حراري	Thermocouple
كهروحراري	Thermo-electric
وصلة حرارية، ملتقى حراري	-junction
عمود كهروحراري	Thermopile
ثابت الزمن	Time constant
ملف حلقي	Toroidal coil
عزم اللي، عزم الدوران، عزم الازدواج	Torque
ميزان الالتواء «اللي»	Torsion balance
محول	Transformer
عابر، مؤقت	Transient

رنين	Resonance
استجابة	Response
عزم اللي المرجع	Restoring torque
محصلة	Resultant
مقاومة متغيرة	Rheostat
جدر متوسط المربع	Root mean square (r.m.s.)
الملف الدوار	Rotating coil
دوران	Rotation

S

أمان	Safety
تشبع	Saturation
محجوب ، مستور	Screened
ملف الاستكشاف «الباحث»	Search coil
ملف ثانوي	Secondary coil
الحث الذاتي، محاثة الذاتية	Self inductance
شبه موصل	Semi-conductor
توالي، متسلسل	Series
تقاسم الشحنة	Sharing of charge
حدة	Sharpness
قطع، قص	Shear
قشرة	Shell
مجزء التيار، مفرع التيار	Shunt
حركة توافقية بسيطة	Simple harmonic motion
موجة جيبية	Sine wave, sinu-soidal wave
عمق قشري، عمق الاحتراق	Skin depth
تأثير سطحي «قشري» «جلدي»	effect
حديد مطاوع	Soft iron
زاوية مجسمة	Solid angle
ملف حلزوني	Solinoidal coil
فضاء، حيز، فراغ	Space
ومضة، شارة	Spark
طيف	Spectrum
كرة، جسم كروي	Sphere
الإحداثيات الكروية	Spherical coordinate
غزل، لف	Spin

Transition elements	العناصر الانتقالية
Transverse wave	موجة مستعرضة
Triangle of force	مثلث القوى
Trigonometric relations	العلاقات المثلثية

U

Ultraviolet	فوق البنفسجي
Unidirectional	وحيد الاتجاه
Uniform	منتظم
Units	الوحدات
Unpolarized	غير مستقطب
Unstable	غير مستقر

V

Valence	تكافؤ
Vector	متجهة، متجه
diagram	مخطط المتجهات
Velocity	سرعة
Vibrational energy	طاقة اهتزازية
Voltameter	مقياس الجهد
Volume charge density	كثافة الشحنة الحجمية

W

Wave	موجة
length	طول الموجة
number	العدد الموجي
Whole	كامل، تام، صحيح

X

X-ray	الأشعة السينية

كشاف الموضوعات

ث

ج

ح

س

ش

ض

ط

ع

ن

انتهى الكتاب

فلله الحمد والشكر والثناء وأسأله أن ينفع به المسلمين