الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

Special Functions الباب الأول ـ الدوال الخاصـــــة

Book · September 2018

Emil Shoukralla
Future University in Egypt

الباب 1

الـــــــــدوال الخاصــــــة
Special Functions

الدوال الخاصة هي دوال شائعة الظهور عند حل الكثير من مسائل الرياضيات والهندسة، وتلعب دوراً هاماً في نظرية تقريب الدوال. بالإضافة إلى ذلك فإن الدوال الخاصة تمتلك من المهارات والاليات الرياضية الفائقة القدرة على التبسيط والاختصار، فهي التي تسهم بطريقة رائعة في تسهيل الكثير من الحسابات العلمية الصعبة والمعقدة وتقدم طريقة ناجحة جداً لتوفير الوقت والجهد. في هذا الباب سنقوم بدراسة بعض هذه الدوال الخاصة مثل دوال بيتا ***(Beta Functions)***، ودوال جاما ***(Gamma Functions)***، وكذلك ندرس دوال بيسل ***(Bessel Functions)*** من النوع الأول والنوع الثاني، وأيضاً كثيرات حدود ليجندر ***(Legendre Polynomials)*** وغيرها.

سنلقي الضوء على بعض صفاتها وخصائصها وكيفية استخدامها في نظرية التقريب ***(Approximation Theory)***. في الواقع فإن دوال بيتا وجاما ما هي إلا تكاملات شاذة لايمكن حسابها باستخدام طرق التكامل في صيغ رياضية مغلقة ***(Closed Forms)***. بينما دوال بيسل وكثيرات حدود ليجندر هي عبارة عن دوال ناتجة عن حلول متسلسلات القوى لمعادلات بيسل وليجندر التفاضلية من الرتبة الثانية.

1.0 مقدمة

لكي نفهم أهمية الدوال الخاصة وفي نفس الوقت نكتشف كيفية الحصول عليها دعنا نقدم المثال التالي: لنتعتبر أننا بصدد حساب

التكامل المعتل $\int_0^\infty t\, e^{-t}dt$. بالطبع فإن دارس لعلم التكامل سيكتشف أن هذا التكامل يمكن الحصول على قيمته الجبرية باستخدام طريقة التكامل بالتجزيء مرة واحدة. فإذا أردنا حساب القيمة الجبرية للتكامل $\int_0^\infty t^2\, e^{-t}dt$ فسوف نكتشف أن هذا يتأتى باستخدام طريقة التكامل بالتجزيء مرتين. والآن عليك أن تتخيل الكم والكيف الحسابي والرياضي الكبير المطلوب لحساب التكامل $\int_0^\infty t^{100}\, e^{-t}dt$ ، بالإضافة إلى الوقت والجهد الذي سوف يستغرقه هذا العمل الشاق. في الحقيقة إن مفهوم الدوال الخاصة بالنسبة لهذا التكامل . كما سنرى . سوف تمكننا من حساب هذا التكامل الأخير في في سهولة ويسر ليس لهما مثيل، وفي لحظة واحدة فقط. في الواقع أن $\int_0^\infty t^{100}\, e^{-t}dt = 99\,!$ باستخدام مفهوم ما يسمى **"دالة جاما".**

تعريف 1.2

دالـــــــة جاما
Gamma Function

تُعرَّف دالة جاما، ويرمز لها بالرمز $\Gamma(x)$ على أنها التكامل الشاذ

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}dt \quad for \quad x > 0 \tag{1.1}$$

هذا التكامل الشاذ يسمى . أيضاً . تكامل أويلر من النوع الثاني (*Euler Integral of the Second Kind*).

✍.

1.1 خصائص دالة جاما
Properties of Gamma Function

أولاً:

دالة جاما $\Gamma(x)$ هي دالة تقاربية لكل $0<x<\infty$
وتباعدية لكل $x \le 0$.

بما أن دالة جاما تعرف على أنها التكامل الشاذ المعطى في (1.1)، وحيث أن هذا التكامل تقاربي *(Convergent Integral)* لكل x تنتمي إلى الفترة $0<x<\infty$ ، بمعنى أنه يعطي قيم حقيقية *(Real Values)* وليس مالانهاية لكل x ينتمي إلى الفترة $0<x<\infty$ ، بشرط وجودالنهاية $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R t^{x-1}e^{-t}dt$ ، إذن فإن $\Gamma(x)$ أيضاً تكون تقاربية لكل $0<x<\infty$. وبما أن التكامل $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ تباعدي *(Divergent Integral)* لكل $x \le 0$ ، إذن فإن الدالة $\Gamma(x)$ أيضاً تباعدية لكل $x \le 0$.

ثانياً:

نظرية 1.1

الصورة الاختزالية الأولى لدالة جاما
(First Recurrence Formula)

الصورة الاختزالية الأولى لدالة جاما في حالة أن $x>0$ تعطى في الصورة الرياضية

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad for \quad x>0 \tag{1.2}$$

البرهان

بما أن $\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$، إذن وبوضع $x+1$ بدلاً من x، نحصل على

$$\Gamma(x+1)=\int_{0}^{\infty} t^{x}e^{-t}dt=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} t^{x}e^{-t}dt$$

وبإجراء التكامل بالتجزيء نحصل على

$$\Gamma(x+1)=\lim_{R\to\infty}\left\{-\left[t^{x}\left(e^{-t}\right)\right]_{0}^{R}-\int_{0}^{R}-e^{-t}xt^{x-1}dt\right\}$$

وبما أن

$$\lim_{R\to\infty}\left\{-\left[t^{x}\left(e^{-t}\right)\right]_{0}^{R}\right\}=\lim_{R\to\infty}\left\{-\frac{R^{x}}{e^{R}}+\frac{0^{x}}{e^{0}}\right\}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left\{-\frac{R^{x}}{e^{R}}+0\right\}=0$$

إذن فإن

$$\Gamma(x+1)=x\left[\int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right]=x\,\Gamma(x)$$

ثالثاً:

نظرية 1.2

دالة جاما تسمى"دالة المضروب" (Factorial Function)

إذا كان n هو أي عدد صحيح موجب *(Positive Integer)*، إذن فإن

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (1.3)$$

البرهان

لنعتبر

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad for \quad x>0$$

فإذا وضعنا بدلاً من x أي عدد صحيح موجب n فإننا نحصل على

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$$

وحيث أن

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-1}dt=1$$

إذن فإن

$$\Gamma(n+1)=n!$$

رابعاً:

الصورة الاختزالية *(Recurrence Formula)* الثانية لدالة جاما في حالة ما يكون $x<0 \;;\; x\neq -1,-2,-3,-4,\ldots$ وبشرط أن x ليس عدداً صحيحاً هي

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1);\quad \forall\ x<0\ ;\ x\neq -1,-2,-3,-4,\ldots \qquad (1.4)$$

كيف !! **نحصل على الصيغة الاختزالية (1.4)**

بما أن دالة جاما تُعرَّف على أنها التكامل الشاذ $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$، وحيث أن هذا التكامل تباعدي إذا كان x عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً، أي إذا كان $x=0,-1,-2,-3,-4,\ldots$، إذن فلا يمكن تعريف دالة جاما في هذه الحالة. أما إذا كان x ليس عدداً صحيحاً سالباً، ولكنه أقل من الصفر، فهل يمكن إيجاد تعريف لدالة جاما $\Gamma(x)$ في هذه الحالة؟ للإجابة عن هذا التساؤل دعنا نبدأ كما يلي: بما أنه في حالة $x>0$ فإن $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$، إذن

يمكن القول أن هذه الصورة يجب أن تعكس في حالة $x<0$ لتصبح عل شكل الصورة الاختزالية $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$. بهذه الطريقة نجد أن

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{-1}{2}}\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

أيضاً نرى أن

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{-\frac{5}{2}}\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)=-\frac{2}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{-\frac{3}{2}}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)=-\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{15}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

خامسـا: للحصول على رسم منحنى دالة جاما، دعنا نبدأ أولاً بتفاضل الدالة $\Gamma(x)$ فنجد أن المشتقة الأولى، والمشتقة الثانية لدالة جاما هما على الترتيب

$$\Gamma'(x)=\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)e^{-t}dt \quad \& \quad \Gamma''(x)=\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}dt$$

أيضا يمكن الحصول على الخطوط التقاربية المختلفة عن طريق حساب النهايات

$$;\ \lim_{x\to 0^+}\Gamma(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\to\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\Gamma(x)=\lim_{x\to +\infty}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\to\infty$$

وبما أن $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ ، وذلك لأن

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{e^t}\Big|_0^\infty=1;$$

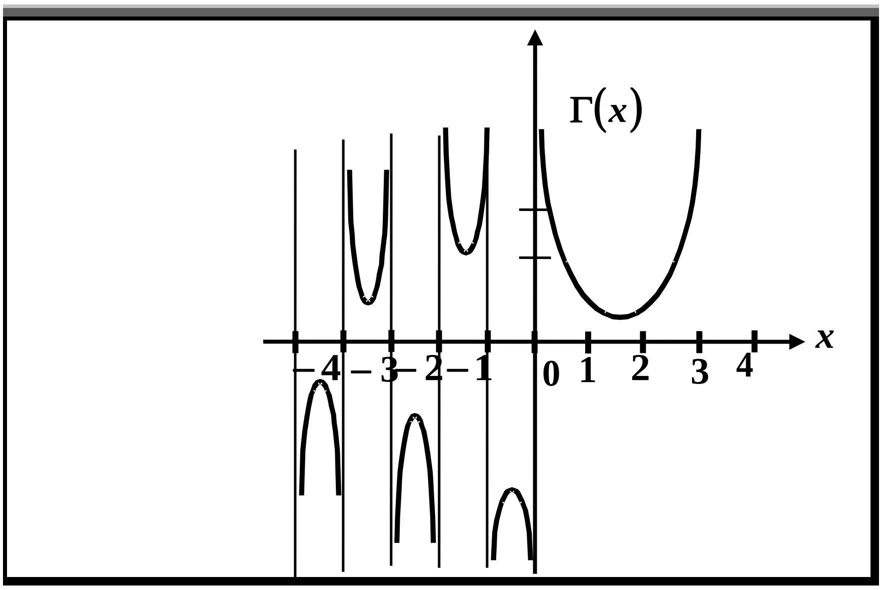
$$\Gamma(2)=\int_0^\infty t^{2-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty te^{-t}dt=-te^{-t}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

إذن، حسب نظرية رول *(Rolle's Theorem)* يوجد على الأقل العدد $x_0\approx 1.4616$ بحيث يكون $\Gamma'(x_0)=0$. في الواقع فإن $\Gamma(1.4616)=0.8856$ ، وبما أن

$$\begin{cases}\Gamma'(x)<0 & \forall\ \ x<x_0\\ \Gamma'(x)>0 & \forall\ \ x>x_0\end{cases}$$

كما أن $\forall\ x\in\left]\,0,\infty\,\right[\qquad \Gamma''(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\left(\ln(t)\right)^2e^{-t}dt>0$ إذن

فإن منحنى دالة جاما يحتوي على نقطة واحدة صغرى محلية (*LocalMinimum*) في الفترة $0<x<+\infty$ عند النقطة $x_0\approx 1.4616$ انظر شكل (1.1).



شكل 1.1

مثال 1.1 احسب $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

الحل بما أن $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. إذن وبوضع $x=\frac{1}{2}$ نحصل على $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$ ، ثم نفرض أن $t=y^2$ ، إذن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

أيضاً يمكن أن نعتبر أن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-z^2}dz$$

إذ أنه من الممكن تغيير متغير التكامل من الرمز y إلى z أو إلى أي رمز آخر، وذلك لأن متغير التكامل يفهم بالإنجليزية على أنه متغير حر *(Dummy Variable)*. إذن نجد أن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy\times2\int_0^\infty e^{-z^2}dz$$

أو

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=4\int_0^\infty e^{-y^2}dy\cdot\int_0^\infty e^{-z^2}dz=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(y^2+z^2\right)}dydz$$

باستخدام الإحداثيات القطبية *(Polar Coordinates)*

$$y=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta,\ dydz=rdrd\theta$$

نحصل على

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-r^2}rdr\right]d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)_0^R\right]d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\right)\right]d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi$$

وهكذا نجد أن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (1.5)$$

✍.

مثال 1.2 احسب $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$, $\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$

الحل من (1.3) ,(1.2) نجد أن

$$\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\frac{5!}{2\cdot 2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot2\cdot1}=30$$

✍.

مثال 1.3 احسب التكاملات الآتية

$$(1)\ \int_0^\infty t^3e^{-t}dt;\quad (2)\ \int_0^\infty t^6e^{-2t}dt;\quad (3)\ \int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy$$

الحل (1) نلاحظ أن التكامل $\int_0^\infty t^3e^{-t}dt$ ما هو إلا دالة جاما بحيث أن $x-1=3$ أو $x=4$ ، إذن فإن

$$\int_0^\infty t^3e^{-t}dt=\Gamma(4)=3!=6$$

(2) نلاحظ أن التكامل $\int_0^{\infty} t^6 e^{-2t} dt$ سيصبح على شكل دالة جاما

إذا وضعنا $2t = y$ أو $t = \frac{y}{2}$، إذن فإن

$$\int_0^{\infty} t^6 e^{-2t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y} \cdot \frac{1}{2} dy = \int_0^{\infty} \frac{y^6 e^{-y}}{2^7} dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{45}{8}$$

(3) نلاحظ أن التكامل $\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy$ سيصبح على شكل دالة جاما، إذا وضعنا $y^3 = x$. إذن

$$\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy = \int_0^{\infty} \sqrt{x^{\frac{1}{3}}} e^{-x} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

✍.

تعريف 1.2

دالـــــــة بيتـــــا
Beta Function

تُعرَّف دالة بيتا، ويرمز لها بالرمز $B(x,y)$ على أنها التكامل الشاذ

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \qquad for \quad p>0,\ q>0 \tag{1.6}$$

في الحقيقة فإن هذا التكامل يسمى تكامل أويلر من النوع الأول *(Euler Integral of the First Kind)*.

✍.

1.2 خصائص دالة بيتا
Properties of Beta Function

(1) دالة بيتا $B(p,q)$ المعطاة في (1.6) دالة تقاربية *(Convergent)* لكل $p>0, q>0$.

(2) دالة بيتا دالة متماثلة *(Symmetric Function)* بالنسبة إلى البارامترين p,q ، أي أن

$$B(p,q)=B(q,p) \tag{1.7}$$

البرهان

بوضع $x=1-t \Rightarrow 1-x=t, \ -dx=dt$ في دالة بيتا تتحول دالة بيتا إلى الشكل

$$B(p,q)=-\int_1^0 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$
$$=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx=B(q,p)$$

(3) يمكن تعريف دالة بيتا من خلال الدوال المثلثية *(Trigonometric Functions)* لتأخذ الشكل

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\phi)\cos^{2q-1}(\phi)\,d\phi \tag{1.8}$$

البرهان

نستخدم التعويضات

$$t=\sin^2(\phi), \quad dt=2\sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi \ , \ \phi:0\to\frac{\pi}{2}$$

في دالة بيتا $B(p,q)$ المعطاة في (1.6)، فتتحول إلى

$$B(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2(\phi)\right]^{p-1}\left(1-\sin^2(\phi)\right)^{q-1}2\sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2(\phi)\right]^{p-1}\left(\cos^2(\phi)\right)^{q-1}\left(2\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi\right)$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}(\phi)\cos^{2q-1}(\phi)d\phi$$

(4) يمكن تعريف دالة بيتا في شكل آخر هو

$$B(p,q)=\int_{0}^{\infty}\frac{(y)^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy \tag{1.9}$$

البرهان

نستخدم التعويضات

$$t=\frac{y}{1+y}\ ,\quad dt=\frac{dy}{(1+y)^2},\quad y:0\to\infty$$

في دالة بيتا $B(p,q)$ المعطاة في (1.6)، فتتحول إلى

$$B(p,q)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{q-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{(y)^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

(5) العلاقة الوطيدة بين دالة بيتا ودالة جاما يمكن وضعها في الشكل

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\qquad ;\ p,q>0 \tag{1.10}$$

البرهان

بوضع $t=y^2$ في دالة جاما $\Gamma(p)$، نحصل على

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty y^{2p-2}e^{-y^2}\cdot 2y\,dy=2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

بالمثل يمكن اعتبار أن

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty z^{2q-1}e^{-z^2}dz$$

الآن نجد أن حاصل الضرب $\Gamma(p)\times\Gamma(q)$ يأخذ الشكل

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty y^{2p-1}z^{2q-1}e^{-\left(y^2+z^2\right)}dydz$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية

$$y=\rho\cos\phi,\ z=\rho\sin\phi,\ dydz=\rho d\rho d\phi$$

نحصل على

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty(\rho\cos\phi)^{2p-1}(\rho\sin\phi)^{2q-1}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\rho^{2p+2q-2+1}e^{-\rho^2}\cos^{2p-1}(\phi)\sin^{2q-1}(\phi)d\rho d\phi$$

$$=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\phi)\sin^{2q-1}(\phi)d\phi\right)\left(\int_0^\infty\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)$$

إذا وضعنا $\rho^2=t$ في التكامل

$$\int_0^\infty\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

فإنه يتحول إلى

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{(p+q)-1}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$$

أيضا بما أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\phi)\sin^{2q-1}(\phi)d\phi=\frac{1}{2}B(p,q)$$

إذن فإن

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\cdot\frac{1}{2}B(p,q)\cdot\frac{1}{2}\Gamma(p+q)=B(p,q)\Gamma(p+q)$$

وهكذا نجد أن

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

✍.

مثال 1.4 احسب التكاملات

$$(1)\ \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx,\qquad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(\theta)\,d\theta,$$

$$(3)\ \int_0^{\pi}\cos^4(\theta)\,d\theta,\qquad (4)\ \int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

الحل (1) نلاحظ أن التكامل $\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$ ما هو إلا دالة بيتا $B(p,q)$، حيث نجد أن

$$\begin{cases}p-1=4\\ q-1=3\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}p=5\\ q=4\end{matrix}$$

إذن

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280}$$

(2) إذا تم وضع التكامل المعطى في الشكل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(\theta)\cos^0(\theta)\,d\theta$$

عندئذٍ يمكن مقارنته مع دالة بيتا في الصورة المثلثية (1.8) فنجد أن

$$\begin{cases} 2q-1=0 \\ 2p-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q=\dfrac{1}{2} \\ p=\dfrac{7}{2} \end{matrix}$$

إذن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(\theta)d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{5\pi}{32}$$

(3) هذا التكامل $\int_0^{\pi} \cos^4(\theta)d\theta$ بقليل من التصرفات الرياضية يمكن وضعه على صورة دالة بيتا المثلثية

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)d\theta$$

ولكن قبل عمل ذلك، و بما أن هذا التكامل متماثل حول $\theta = \frac{\pi}{2}$، إذن فإن

$$\int_0^{\pi} \cos^4(\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)\sin^0(\theta)d\theta$$

وبالمقارنة مع الصورة المثلثية لدالة بيتا (1.8) نجد أن

$$\begin{cases} 2q-1=4 \\ 2p-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q=\dfrac{5}{2} \\ p=\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

إذن

$$\int_0^{\pi} \cos^4(\theta)d\theta = B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \frac{3\pi}{8}$$

(4) هذا التكامل $\int_0^{2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$ بقليل من التصرفات الرياضية يمكن وضعه على صورة دالة بيتا (1.6)، فمثلاً بوضع $x=2t$ ، نجد أن

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx = 4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t}}\,dt = 4\sqrt{2}\int_0^1 t^2\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= 4\sqrt{2}B\left(3,\tfrac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(3\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

1.3 دوال بيسل
Bessel Functions

تُعرَّف دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة ν على أنها الحل الأول باستخدام متسلسلات القوىلمعادلة بيسل ***(Bessel Equation)*** التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة ν، والتي تأخذ الشكل

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \qquad , \quad \nu \geq 0 \tag{1.11}$$

بينما تُعرَّف دالة بيسل من النوع الثاني من الرتبة ν على أنها الحل الثاني باستخدام متسلسلات القوى لنفس المعادلة (1.11).

ملاحظة

يجب ملاحظة أن المعادلة (1.11) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، ومع ذلك لانقول أنها من الرتبة الثانية، ولكن نقول أنها من الرتبة ν، وذلك لأن في دراسة معادلة بيسل فإن البارامتر ν يلعب دوراً هاماً في شكل الحل.

هذا، وللحصول على حل معادلة بيسل (1.11) باستخدام طريقة متسلسلات القوى، نجد أن النقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة

(Regular Singular Point) **لمعادلة بيسل (1.11) ولذا يتم فرض حل فروبينياس على الشكل**

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

وبالتفاضل، للحصول على $y'(x),y''(x)$ **ثم التعويض في معادلة بيسل نجد أن**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

بإزاحة قوى x **في المتسلسلة الثالثة من الطرف الأيسر لتصبح** $n+r$ **بدلاً من** $n+r+2$ **، وذلك بوضع** $n-2$ **بدلاً من** n **نحصل على**

$$a_0\left[r(r-1)+r-\nu^2\right]x^r+a_1\left[(r+1)r+(r+1)-\nu^2\right]x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-\nu^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0 \qquad \textbf{(1.12)}$$

الآن، نساوي معاملات x^r **في (1.12) بالصفر مع فرض أن** $a_0\neq 0$ **فنحصل على ما يسمى** <u>**"معادلة تعريف البارامتر** r **"**</u> <u>***(Indicial Equation)***</u> **في الصورة**

$$r(r-1)+r-\nu^2=0 \;\;\Rightarrow\;\; r^2-\nu^2=0 \qquad \textbf{(1.13)}$$

إذن الجذران هما

$$r_1=\nu \quad \& \quad r_2=-\nu \qquad \textbf{(1.14)}$$

بمساواة معاملات x^{r+1} **بالصفر في (1.12) نحصل على**

$$a_1\left[(r+1)r+(r+1)-\nu^2\right]=0 \qquad (1.15)$$

بمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر في (1.12) نحصل على الصورة الاختزالية

$$a_n\left[(n+r)^2-\nu^2\right]+a_{n-2}=0\ ; \qquad n\geq 2 \qquad (1.16)$$

و للحصول على الشكل العام للمعاملات a_n، أو بالأحرى الشكل النوني نجد أنه يتوقف على طبيعة البارامتر ν. فبالنسبة للبارامتر ν توجد لدينا ثلاثة احتمالات. **الاحتمال الأول**: $\nu=0$، **الاحتمال الثاني**: $\nu=1,2,3,\cdots$. **الاحتمال الثالث**: ν ليس عدداً صحيحاً. الآن ندرس كل احتمال على حدة.

الاحتمال الأول

حالة الرتبة صفر $(\nu=0)$

بالتعويض عن $\nu=0$ في (1.14)، حيث $r_1=\nu,\ r_2=-\nu$، نجد أن $r_1=r_2=0$ وهذا يعني أننا في الحالة رقم (3) من نظرية فروبينياس (راجع كتاب المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس للدكتور إميل شكرالله ـ توزيع الأهرام) ويكون الحلان الأول والثاني هما

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=y_1\ln(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n \quad ; \quad x>0$$

بالتعويض عن $r=0,\ \nu=0$ في المعادلة رقم (1.15) نجد أن $a_1=0$. وبالتعويض في (1.16) نحصل على الصورة الاختزالية

$$a_n=\frac{-1}{n^2}a_{n-2} \quad ; \quad n=2,3,4,\ldots$$

الآن، إذا أطلقنا n تأخذ قيمها $n=2,3,4,\ldots$، نجد أن

$$a_2 = \frac{-1}{2^2} a_0; \quad a_3 = \frac{-1}{3^2} a_1 = 0; \quad a_4 = \frac{-1}{4^2} a_2 = \frac{-1}{4^2} \cdot \frac{-1}{2^2} a_0;$$

$$a_5 = \frac{-1}{5^2} a_3 = \frac{-1}{5^2} \cdot \frac{-1}{3^2} a_1 = 0; \quad \ldots$$

إذاً يمكن الحصول على الشكل النوني للمعاملات a_n، إذ نجد أن المعاملات الفردية صفرية، بينما المعاملات الزوجية تُعطى من الشكل

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n)^2} a_0; \; a_0 \neq 0 \; and \;\; n \geq 1 \qquad (1.17)$$

الآن، بما أن

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2) \times (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) = 2^n n!$$

إذاً فإن

$$2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdots (2n)^2 = \left(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)\right)^2$$

$$= \left(2^n n!\right)^2 = 2^{2n} (n!)^2$$

بالتعويض بهذه الصيغ الجبرية، فإن a_{2n} المعاملات الزوجية المعطاة في شكل (1.17) تتحول إلى

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n)^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0; \quad n \geq 1$$

إذاً الحل الأول هو

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} (x)^{2n+1}$$

بما أن المعاملات الفردية صفرية، إذاً فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = 0$ ، وبالتالي فالحل الأول يحتوي على المعاملات الزوجية فقط وُيختصر إلى الشكل

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$$

أو
$$y_1(x)=a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

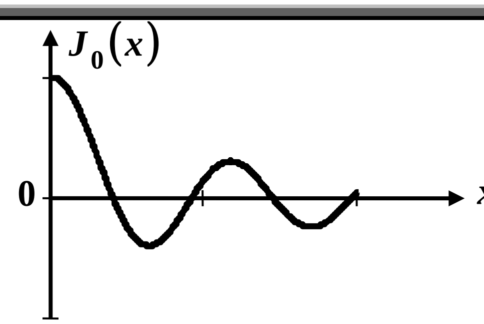
وبما أنه إذا كان $n=0$ ، فإن $\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}=1$ ، فالحل الأول يمكن أن تعاد كتابته على شكل متسلسلة واحدة تبدأ من $n=0$ وليس $n=1$ ، أي أن

$$y_1(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

وبما أن الثابت a_0 كمية قياسية اختيارية، إذاً يمكن فرض أن $a_0=1$. في هذه الحالة فإنه يرمز للحل $y_1(x)$ بالرمز $J_0(x)$ ، ويسمى <u>**"دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة الصفرية"**</u> ***(Bessel Function of the First Kind of Order Zero)***. أي أن

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{1.18}$$

انظر شكل (1.2) لدالة بيسل من النوع الأول من الرتبة الصفرية، $J_0(x)$ ، (لاحظ أن الرتبة صفرية لأن $\nu=0$).



دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة الصفرية

شكل 1.2

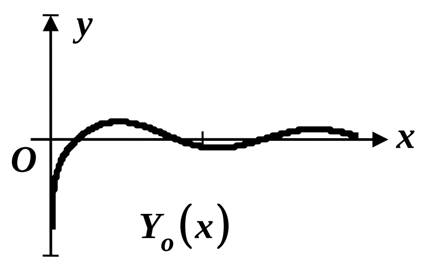
ويكون أن الحل الثاني $y_2(x)$ لمعادلة بيسل التفاضلية في حالة أن $\nu=0$ ويرمز له بالرمز $Y_0(x)$ هو

$$Y_0(x)=y_2(x)=J_0(x)\ln(x)+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots \qquad (1.19)$$

هذا، ويسمى الحل $Y_0(x)$ المعطى في (1.19) **"دالة نيمان - بيسل** *(Neumann - Bessel Function)* **من النوع الثاني من الرتبة الصفرية"**. انظر شكل (1.3) لدالة نيمان – بيسل من النوع الثاني من الرتبة الصفرية، $Y_0(x)$، (لاحظ أن الرتبة صفرية لأن $\nu=0$).

شكل 1.3



دالة نيمان ـ بيسل من النوع الثاني من الرتبة الصفرية

إذاً الحل العام *(General Solution)* لمعادلة بيسل التفاضلية من الرتبة الصفرية والتي تأخذ الشكل

$$x^2y''+xy'+x^2y=0$$

يعطى فى الصيغة

$$y=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x) \qquad (1.20)$$

حيث تُعطى الدالة $J_0(x)$ من الصورة رقم (1.18)، بينما الدالة $Y_0(x)$ تًعطى من الصورة رقم (1.19).

الاحتمال الثانى

ν عدداً صحيحاً موجباً $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$

إذا كانت ν عدداً صحيحاً موجباً فإن جذور معادلة تعريف r تعطي في هذه الحالة $r_1 = \nu\ ,\ r_2 = -\nu$، حيث ν عدد صحيح موجب ويكون الفرق بين الجذرين هو عدد صحيح موجب، أي أن $r_1 - r_2 = 2\nu = integer$، إذاً فنحن فى الحالة الثانية من نظرية فروبينياس. ويمكن أن نحصل على الحل الأول، والذي يرمز له بالرمز $J_\nu(x)$ ويسمى دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة ν.

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n} \qquad (1.21)$$

حيث ν هو عدد صحيح موجب، أي أن $\nu = 1, 2, 3, \ldots$، فإذا استخدمنا مفهوم دالة جاما فإن الحل الأول $J_\nu(x)$ في هذه الحالة يأخذ الشكل

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n} \qquad (1.22)$$

وطبقاً لنظرية فروبينياس، الحالة الثانية فإن الحل المستقل الثاني في هذه الحالة والذي نرمز اليه بالرمز $Y_\nu(x)$ ويسمى **"دالة نيمان - بيسل من النوع الثاني من الرتبة ν "** يأخذ الشكل

$$Y_\nu(x) = J_\nu(x)\ln(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}\left[\Phi(n)+\Phi(n+\nu)\right] \qquad (1.23)$$

حيث

$$, \ \Phi(m)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m} \ \Phi(0)=0$$

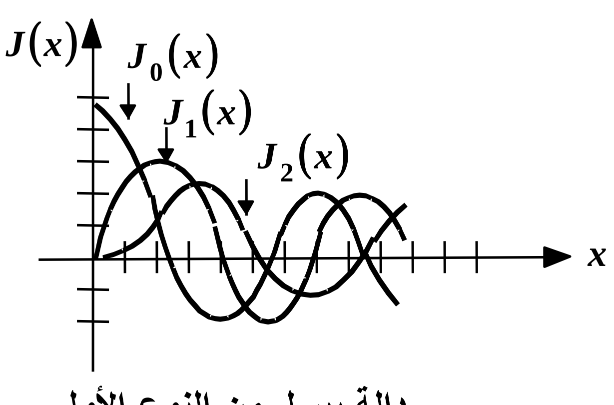
نلاحظ أنه تم التعويض في الحل $J_\nu(x)$ (الصورة (1.22))، والحل $Y_\nu(x)$ (الصورة (1.23)) عن $\nu=0$ فإننا نحصل على الحل $J_0(x)$، والحل $Y_0(x)$ على الترتيب، الأمر الذي يعني إمكانية ضم الحل $J_0(x)$ مع الحل $J_\nu(x)$ وضم الحل $Y_0(x)$ مع الحل $Y_\nu(x)$ للحصول على صورة موحدة للحلول في الحالتين الأولى والثانية. وبالتالي فإنه في حالة أن $\nu=0,1,2,3,\ldots$ فإن الحل العام لمعادلة بيسل التفاضلية الخطية من الرتبة ν هو

$$y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x) \qquad (1.25)$$

حيث $\nu=0,1,2,3,\ldots$.

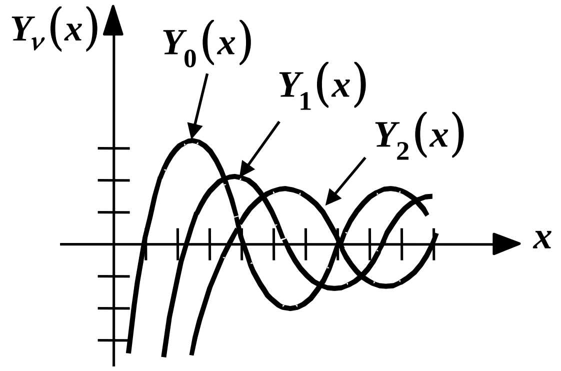
الدالة $J_\nu(x)$ تُعطى من الصورة (1.22). انظر شكل (1.4). أيضاً فإن الدالة $Y_\nu(x)$ تُعطى من الصورة (1.23). انظر شكل (1.5).

شكل 1.4



دالة بيسل من النوع الأول

شكل 1.5



دالة نيمان - بيسل من النوع الثاني

الاحتمال الثالث

ν ليس عدداً صحيحاً

في الحالة التي فيها يكون الفرق بين الجذرين $r_1 = \nu,\ r_2 = -\nu$ ليس عدداً صحيحاً، أي عندما يكون $r_1 - r_2 \neq integer$ ، إذاً فأنت في الحالة الأولى من نظرية فروبينياس، حيث الحلان المستقلان هما

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1},\ \ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد أنه في حالة ما كان $r_1 = \nu$ فإن الحل الأول، $y_1(x)$ ، هو نفسه دالة بيسل من النوع الأول، والرتبة ν، والمعطى في شكل (1.21) أو (1.22). بالنسبة إلى الحل الثاني $y_2(x)$ ، وغير المرتبط خطياً مع الحل الأول فيمكن الحصول عليه بالتعويض عن $r_2 = -\nu$ واتباع نفس طريقة الحصول على الحل $J_\nu(x)$. لاحظ أن

$$J_\nu(0) = 0 \neq J_{-\nu}(0) \to \infty$$

لنرمز للحل الثاني بالرمز $J_{-\nu}(x)$ ، إذاً فإن

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(-\nu+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n} \tag{1.25}$$

أو

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n} \tag{1.26}$$

إذاً في حالة أن رتبة معادلة بيسل التفاضلية هي ν، حيث ν هو عدد غير صحيح فإن الحل العام لمعادلة بيسل هو

$$y(x)=c_1J_{\nu}(x)+c_2J_{-\nu}(x) \tag{1.27}$$

1.4 بعض الصور الاختزالية والتقاربية لدوال بيسل

نقدم في هذا الفصل بعض الصور الاختزالية، والصور التقاربية *(Asymptotic Formulas)* لدوال بيسل من النوع الأول والنوع الثاني. فإذا كانت $J_{\nu}(x)$ هي دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة ν، حيث ν أي عدد حقيقى فإن

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu-1}(x) \tag{1.28}$$

البرهان

بما أن

$$J_{\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

إذاً

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n-1}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(-(n+\nu)+n\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}$$

$$=\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\nu}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\nu}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}$$

$$=\frac{2\nu}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

إذاً $$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)$$

في الواقـع فإنـه لقـيم x المختلفـة يمكـن حسـاب قيمـة دالـة بيسـل باسـتخدام العلاقـات السـابقة أو باسـتخدام جـداول معـدة خصيصـاً لذلك. أما في حالة قيم x الكبيرة فإن الصيغ التقاربية التالية تكون مناسبة لحساب دوال بيسل.

$$J_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right), \qquad (1.29)$$

$$Y_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right) \qquad (1.30)$$

تعريف 1.3

الدالة المولدة لدوال بيسل من النوع الأول
Generating Function for Bessel Functions

الدالة المولدة لدوال بيسل من النوع الأول، والتي من الرتبة v هي الدالة $e^{\frac{x}{2}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)}$، حيث نجد أن

$$e^{\frac{x}{2}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^v J_v(x) \qquad (1.31)$$

مثال 1.5 إذا كان v عدد صحيح موجب، فاثبت أن الدالتين $J_v(x),\ J_{-v}(x)$ مستقلتان خطياً، أي اثبت أن

$$J_{-v}(x) = (-1)^v\ J_v(x) \qquad (1.32)$$

الإثبات بما أن

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}$$

$$= \sum_{n=0}^{v-1} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}$$

$$+ \sum_{n=v}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}$$

نلاحظ أنه في حالة تغير n في المتسلسلة الأولى بحيث تأخذ القيم $n = 0,1,2,\ldots,v-1$ فإن دالة جاما $\Gamma(n-v+1)$ تعطي ما لانهاية.

فمثلاً إذا كانت $\nu = 2$ فإن n تتغير بحيث تكون $n = 0,1$. وهكذا نجد أن

$$n = 0, \nu = 2 \to \Gamma(n-\nu+1) = \Gamma(0-2+1) = \Gamma(-1) \to \infty$$

$$n = 1, \nu = 2 \to \Gamma(n-\nu+1) = \Gamma(1-2+1) = \Gamma(0) \to \infty$$

وعلى هذا فإن

$$\sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} = 0$$

وبالتالي نجد أن

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

باستخدام التعويض $n=\nu+k$ في الشكل السابق مباشرة نجد أن

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+k}}{(\nu+k)!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x)$$

.

مثال 1.6 احسب $J_{\frac{1}{2}}(x), J_{-\frac{1}{2}}(x)$

الحل بما أن

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

إذاً بالتعويض عن $\nu = \frac{1}{2}$، نحصل على

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}-\cdots$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\cdots$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin(x)}{x}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$$

وبالتالي فإن

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x) \qquad (1.33)$$

أيضاً نجد أن

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}-\cdots=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$$

إذاً

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x) \qquad (1.34)$$

✍.

مثال 1.7 اثبت أن

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}\right) \qquad (1.35)$$

الإثبات بما أن

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu-1}(x)$$

وبوضع $\nu=\frac{1}{2}$ في هذه الصورة الاختزالية، وبمساعدة نتائج المثال السابق نحصل على

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}\right)$$

✍.

1.5 كثيرات حدود ليجندر Legendre Polynomial

في الباب الثاني قمنا بحل معادلة ليجندر التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التي على الصورة

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\lambda(\lambda+1)y=0$$

حيث تأخذ λ القيم $\lambda=0,1,2,3,...$. هذا، وقد حصلنا على الحل العام لهذه المعادلة باستخدام طريقة متسلسلات القوى حول النقطة العادية $x_0=0$. ووجدنا أن هذا الحل العام يُعطى في الشكل

$$y(x)=a_0F(x)+a_1G(x)$$

حيث

$$F(x)=1-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}x^2+\frac{6-\lambda(\lambda+1)}{12}\frac{-\lambda(\lambda+1)}{2}x^4+\ldots$$

$$G(x)=x+\frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^3$$

$$+\frac{12-\lambda(\lambda+1)}{20}\frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^5+\ldots$$

والآن، لنفرض أن λ تأخذ قيماً صحيحة موجبة، أي القيم $\lambda=0,1,2,3,\ldots$. فإذا أخذت λ قيماً صحيحة موجبة زوجية فإننا نجد $F(x)$ تصبح كثيرة حدود من الدرجة n وتحتوي على حدود في قوى x الزوجية فقط، بينما $G(x)$ تصبح متسلسلة لانهائية. فإذا أخذت λ قيماً صحيحة موجبة فردية فإن $G(x)$ تصبح كثيرة حدود من الدرجة n وتحتوي على حدود قوى في x الفردية فقط، بينما $F(x)$ تصبح متسلسلة لانهائية. الجدول التالي يبين هذه الملاحظات

جدول 1.1

λ	$F(x)$	$G(x)$
0	a_0	——
1	——	a_1x
2	$\left(1-3x^2\right)a_0$	——
3	——	$a_1\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$
4	$\left(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right)a_0$	——
....	....	....

وبما أن $a_0,\ a_1$ تأخذ قيماً اختيارية *(Arbitrary)*، نحاول أن نختار قيماً للعاملين $a_0,\ a_1$ بحيث تكون قيم الحلول $F(x), G(x)$ مساوية للواحد الصحيح عند $x=1$. وبكلمات أخرى نختر قيماً للعاملين $a_0,\ a_1$ بشرط أن يكون $F(1)=1,\ G(1)=1$.

فمثلاً عندما نختر $a_0 = 1$ فيكون في هذه الحالة $F(1) = 1$. عند $\lambda = 1$ نختر $a_1 = 1$ فيكون في هذه الحالة $G(1) = 1$. عند $\lambda = 2$ نختر $a_0 = \frac{-1}{2}$ فيكون في هذه الحالة

$$F(x) = \frac{-1}{2}\left(1 - 3x^2\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad F(1) = 1$$

وهكذا، وبالاستمرار في التعويض عن قيم a_0, a_1 بحيث يكون $F(1) = 1,\ G(1) = 1$ يمكن لنا أن نحصل من الحلين $F(x),\ G(x)$ على عدد لانهائي من كثيرات الحدود. تسمى كثيرات الحدود هذه كثيرات حدود ليجندر. إذاً، من الجدول السابق يمكن تعريف بعض كثيرات حدود ليجندر، وهي تقاربية لكل $|x| < 1$ لتأخذ الشكل

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),\ \ P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

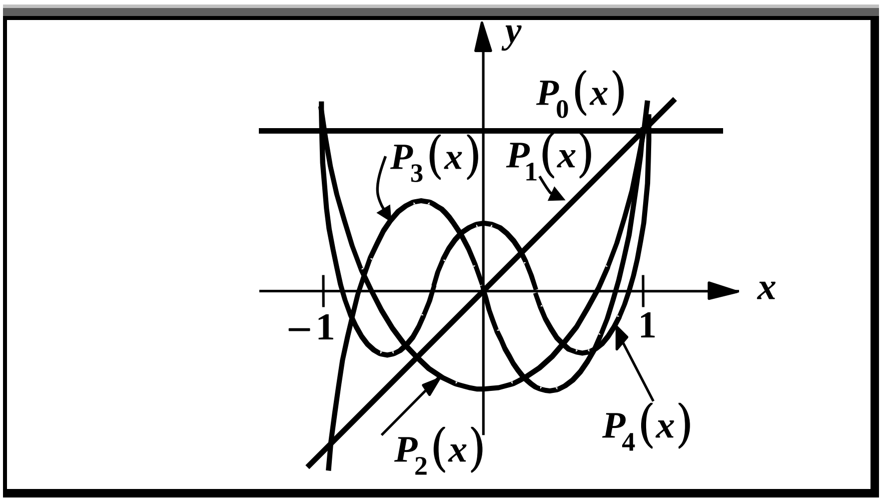
وبصفة عامة فإن الشكل العام لكثيرات حدود ليجندر (انظر شكل (1.6) لبعض كثيرات حدود ليجندر) والذي يرمز له بالرمز، $P_n(x)$ ومنه يمكن الحصول على أية كثيرة حدود ليجندر من أية درجة يمكن أن يأخذ الشكل

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\{n\}} \frac{(-1)^j\,(2n-2j)!}{j!(n-2j)!(n-j)!}\,x^{n-2j} \tag{1.36}$$

حيث

$$\{n\} = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & if \quad n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & if \quad n = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$$

شكل 1.6



1.6 شكل رودريج لكثيرات حدود ليجندر *Rodrigues's Formula*

يوجد شكل آخر لكثيرات حدود ليجندر يُستخّدم أكثر من الشكل السابق لسهوله تطبيقه، هذا الشكل يسمى شكل رودريج (*Rodrigues's Formula*)، نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي *(Rodrigues, B. O.* **1794 - 1851***)*. سنحاول الآن الحصول على هذا الشكل من الشكل الأصلي لكثيرات حدود ليجندر. **بما أن المشتقة النونية للدالة** $f(x)=x^{2n-2j}$ **تُعطى من العلاقة**

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2j}=\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}x^{n-2j} \qquad \text{(i)}$$

حيث $j=0,1,\ldots,\{n\}$ **. وحيث أن الشكل العام لكثيرات حدود ليجندر هو**

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{\{n\}}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot\frac{n!}{(n-j)!}\cdot\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}x^{n-2j} \qquad \text{(ii)}$$

إذاً يمكـن التعـويض بالعلاقـة (i) في الشـكل (ii) فتتحـول كثـيرات حدود ليجندر $P_n(x)$ إلى الشكل

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{\{n\}}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot\frac{n!}{(n-j)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2j}$$

$$=\frac{1}{2^n n\ !}\ \frac{d^n}{dx^n}\sum_{j=0}^{\{n\}}\frac{(-1)^j}{j\ !}\cdot\frac{n\ !}{(n-j)\ !}x^{2n-2j}$$

نستطيع الآن أن نجعل المتسلسلة الأخيرة تبدأ من العدد $j=0$ وإلى العدد $j=n$ وليس $j=\{n\}$ ، وذلك لأن الحدود الزائدة عن العدد $\{n\}$ تكون في قوى x الأقل من n، حيث تكون مشتقاتها صفرية.

إذاً

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot\frac{n!}{(n-j)!}x^{2n-2j}$$

وبما أنه من نظرية ذات الحدين *(Binomial Theorem)*، نجد أن

$$\left(x^2-1\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j\ !}\cdot\frac{n\ !}{(n-j)\ !}\left(x^2\right)^{(n-j)}$$

إذاً، وبالتعويض نحصل على شكل رودريج لكثيرات حدود ليجندر

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\ ,\ \ for\ \ n=0,1,2,\ldots \tag{1.37}$$

تعريف 1.4

الدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر
Generating Function for Legendre Polynomials

الدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر تأخذ الشكل $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$

حيث نجد أن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\ t^n \qquad (1.38)$$

1.7 بعض الصور الاختزالية لكثيرات حدود ليجندر Recurrence Formulas

سنحاول الآن إثبات بعض الصور الاختزالية لكثيرات حدود ليجندر مثل:

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x) \qquad (1.39)$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \quad for \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (1.40)$$

الإثبات

لإثبات الصورة الاختزالية *(1.39)* نحاول إيجاد علاقة بين كثيرات حدود ليجندر $P_n(x),P_{n-1}(x),P_{n+1}(x)$. لنبدأ بشكل رودريج لكثيرات حدود ليجندر. بوضع $n+1$ بدلاً من n، ثم وضع $n-1$ بدلاً من n في شكل رودريج رقم *(1.37)* نحصل بالترتيب على

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)\ !}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n+1}\right] \qquad (1.41)$$

$$P_{n-1}(x)=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)\ !}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n-1}\right] \qquad (1.42)$$

من *(1.41)* نجد أن

$$2^{n+1}(n+1)\ !P_{n+1}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n+1}\right]$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^{n+1}\right]\right) \qquad (1.43)$$

وبما أن

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^{n+1}\right]=\frac{d}{dx}\left[(n+1)\left(x^2-1\right)^n(2x)\right]$$

$$=2(n+1)\left\{\left(x^2-1\right)^n+2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right\} \qquad (1.44)$$

إذاً، وبالتعويض من *(1.44)* في *(1.43)* نجد أن

$$2^{n+1}(n+1)\ !P_{n+1}(x)=$$

$$=2(n+1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\left(x^2-1\right)^n+2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right\}$$

أو

$$2^n(n)\ !P_{n+1}(x)=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\left(x^2-1\right)^n+2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left\{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)^{n-1}+2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right\}\right) \qquad (1.45)$$

بأخذ $\left(x^2-1\right)^{n-1}$ عاملاً مشتركاً ثم إضافة وطرح 2n للطرف الأيمن نجد أن

$$2^n(n)\ !P_{n+1}(x)=$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^{n-1}\left\{\left(x^2-1\right)+2nx^2-2n+2n\right\}\right)$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^{n-1}\left\{\left(x^2-1\right)(2n+1)+2n\right\}\right)$$

$$=(2n+1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n}\right]+2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n-1}\right]$$

وبالقسمة على ! $2^n(n)$ نجد أن

$$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)}{2^n(n)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n}\right]=$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left\{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)^{n-1}+2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right\}\right) \qquad (1.46)$$

وبما أن الحد الأخير من الطرف الأيمن في المعادلة *(1.46)* هو نفسه كثيرات حدود ليجندر $P_{n-1}(x)$ المعطاة في شكل *(1.42)*، إذ أن

$$\frac{2n}{2^n(n)\ !}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)\ !}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n-1}\right]=P_{n-1}(x)$$

إذاً، فإن *(1.46)* تتحول إلى

$$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)}{2^n(n)\ !}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n}\right]+P_{n-1}(x) \qquad (1.47)$$

أو

$$P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)=\frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^{n}\right] \qquad (1.48)$$

وبما أن

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\frac{d}{dx}$$

إذاً يمكن وضع الدالة $P_{n+1}(x)$ المعطاة في *(1.41)* في الشكل الجديد

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)\;!}\frac{d^n}{dx^n}\left[2x(n+1)\left(x^2-1\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2^n(n)\;!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x\left(x^2-1\right)^n\right] \qquad (1.49)$$

وبما أنه من نظرية ليبينز (Leibniz's rule) لدينا

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)g(x)\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\left[\frac{d^j}{dx^j}f(x)\right]\left[\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}g(x)\right]$$

إذاً، بتطبيق نظرية ليبينز على كثيرات حدود ليجندر $P_{n+1}(x)$ المعطاة في *(1.49)* نجد أن

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2^n n\;!}\left\{x\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\right\}$$

$$=x\frac{1}{2^n n\;!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n+\frac{n}{2^n n\;!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n \qquad (1.50)$$

وأيضاً باستخدام شكل رودريج لكثيرات حدود ليجندر $P_n(x)$ (معادلة *(1.37)*) نجد أن *(1.50)* تتحول إلى

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)+\frac{n}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n$$

ومنها نحصل على

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]=\frac{2^n n!}{n}\left(P_{n+1}(x)-xP_n(x)\right) \qquad (1.51)$$

بالتعويض عن الصورة *(1.51)* في الصورة *(1.48)* نحصل على الصورة *(1.39)*. لإثبات الصورة الاختزالية رقم *(1.40)* نبدأ بتفاضل الدالة

المولدة لكثيرات حدود ليجندر (المعطاة في *(1.38)* بالنسبة إلى المتغير x ، ثم المتغير t فنحصل على

$$-\frac{1}{2}\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n$$

أو

$$\frac{t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)\ t^n \qquad (1.52)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$-\frac{1}{2}\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

أو

$$\frac{(x-t)}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} \qquad (1.53)$$

بقسمة *(1.52)* على (1.53) نجد أن

$$t\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)t^n$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^n=x\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)t^{n+1}$$

وبوضع $n-1$ بدلاً من n في المتسلسلة الأخيرة من الطرف الأيمن حتى يكون المتغير t في قوى n وليس قوى $n+1$، وذلك حتى يتسنى لنا مقارنة معاملات t^n في الطرفين. إذاً

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^n=x\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}{}'(x)t^n \qquad (1.54)$$

وبما أن

$$P_0(x)=1\to P_0{}'(x)=0$$

إذاً فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n{}'(x)t^n = P_0{}'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n{}'(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n{}'(x)t^n$$

كما أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n$$

وبالتالي فإن الصيغة الرياضية في (1.54) تتحول إلى

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n = x\sum_{n=1}^{\infty} P_n{}'(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}{}'(x)t^n$$

وبمقارنة معاملات t^n في الطرفين، نجد أن

$$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) \quad , \quad n \geq 1 \tag{1.55}$$

الآن، وبتفاضل الصورة الاختزالية (1.39) لكثيرات حدود ليجندر بالنسبة إلى المتغير x نحصل على

$$(n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) \tag{1.56}$$

وبالتعويض عن $xP_n{}'(x)$ من المعادلة (1.55) في المعادلة (1.56)، نجد أن

$$(n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x)$$

$$= (2n+1)P_n(x) + (2n+1)\left[nP_n(x) + P_{n-1}'(x)\right]$$

وبعد الاختصار نجد أن

$$(n+1)P_{n+1}'(x) + \left[n - (2n+1)\right]P_{n-1}'(x)$$

$$= \left[(2n+1) + n(2n+1)\right]P_n(x)$$

أو

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(n+1)P'_{n-1}(x)=[n+1](2n+1)P_n(x)$$

بقسمة الطرفين على $(n+1)$ نحصل على الصورة الاختزالية **(1.40)**.

1.8 تقريب الدوال باستخدام كثيرات حدود ليجندر

من المعروف أن كثيرات حدود ليجندر تكوّن فئة ***(Set)*** من الدوال المتعامدة **(Orthogonal Functions)** في الفترة $[-1,1]$. والمعنى الرياضي لخاصية تعامد كثيرات حدود ليجندر هو:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0 & ; \; n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & ; \; n=m \end{cases} \tag{1.57}$$

هذا، وسوف نستخدم الآن هذه الخاصية في تقريب الدوال. اعتبر الدالة $f(x)$ المتصلة هي ومشتقاتها على الفترة $[-1,1]$. لنفرض أن الدالة قد تم وضعها (تمثيلها) في الشكل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{1.58}$$

حيث $P_n(x)$ هي كثيرات حدود ليجندر. فيكون المطلوب هو معرفة قيم المعاملات a_n. لتحقيق ذلك الهدف يتم ضرب طرفي المعادلة **(1.58)** في الدالة $P_m(x)$، حيث **m** ثابت، وإجراء عملية التكامل من $x=-1$ إلى $x=1$، نجد أن

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

ومن خاصية التعامد المعطاة في (1.57) نجد أن كل حدود المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx$ هي أصفار اللهم إلا إذا كانت $m=n$ وفي هذه الحالة نحصل على

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\,dx = a_m \int_{-1}^{1} \left[P_m(x)\right]^2 dx = a_m \left[\frac{2}{2m+1}\right]$$

وبالتالي فإن

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\,dx$$

أو

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx \qquad \forall n \geq 0 \tag{1.59}$$

مثال 1.8 استخدم كثيرات حدود ليجندر في الحصول على صورة تقريبية للدالة $f(x) = x^2$.

الحل نضع

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots$$

هذا، ويمكن حساب بعض المعاملات $\{a_n\}_{n\geq 0}$ باستخدام العلاقة (1.59)، حيث نجد أن

$$; a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 P_0(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3}$$

$$; a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^2 P_1(x)\,dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^2 (x)\,dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]dx = \frac{2}{3}$$

وهكذا نجد أن الدالة $f(x)=x^2$ يمكن وضعها في الصورة التقريبية

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \cdots$$

حيث

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad \ldots$$

1.9 بعض الدوال المتعامدة الأخرى

توجد الكثير من الدوال الخاصة المتعامدة الأخرى بخلاف دوال جاما، ودوال بيتا، ودوال بيسل، ودوال ليجندر، وهي ـ أيضا ـ تلعب دوراً هاماً في تبسيط وإيجاد حلول الكثير من المسائل العلمية. سنقدم في هذا الفصل الشكل العام لبعض هذه الدوال وفترات تعريف تعامدها والصور الاختزالية لها. وها هي بعض هذه الدوال:

كثيرات حدود هيرميت (Hermite Polynomials)

يرمز لها بالرمز $H_n(x)$ وتأخذ الشكل

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{1.60}$$

ويمكن الحصول عليها من حل معادلة هيرميت التفاضلية

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{1.61}$$

والدالة المولدة لها هي

$$e^{\left(2xt - t^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \tag{1.62}$$

وبعض الصور الاختزالية لدوال هرميت تأخذ الشكل

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{1.63}$$

$$H_n{}'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{1.64}$$

هـذا، ودوال هيرميت متعامـدة على الفـترة]$-\infty,\infty$[بالنسبة لدالـة التوازن $w(x) = e^{-x^2}$ ، حيث نجد أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & ; m = n \end{cases} \tag{1.65}$$

كما يمكن استخدام دوال هيرميت في تقريب الدوال. فالدالة $f(x)$ مـثلاً يمكـن وضـعها في الشـكل $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$ ، حيـث المعاملات A_k يمكن الحصول عليها من الصورة الرياضية

$$A_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx \tag{1.66}$$

مثال 1.9 اسـتخدم الدالـة المولـدة لـدوال هرميـت للحصـول علـى $H_0(x)$, $H_1(x)$.

الحل بتمثيل الدالة $e^{\left(2xt-t^2\right)}$ المعطاة في الدالة المولدة لدوال هيرميت (1.62) أو تقريبها في متسلسلة ماكلورين نحصل على

$$e^{\left(2xt-t^2\right)}=1+\left(2xt-t^2\right)+\frac{\left(2xt-t^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2xt-t^2\right)^3}{3!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)=H_0(x)+H_1(x)t+\frac{H_2(x)}{2!}t^2+\cdots$$

بمقارنة معاملات المتغير t في قوى 0,1 فقط للطرفين، نجد أن

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x$$

✍.

كثيرات حدود لاجير (Laguerre Polynomials)

والتي يرمز لها بالرمز $L_n(x)$ وتأخذ الشكل

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right) \tag{1.67}$$

ونحصل عليها من حل معادلة لاجير التفاضلية

$$xy''+(1-x)y'+ny=0 \tag{1.68}$$

والدالة المولدة لها هي

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) \tag{1.69}$$

وبعض الصور الاختزالية لدوال لاجير تأخذ الشكل

$$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x) \tag{1.70}$$

$$nL_{n-1}(x)=nL_{n-1}'(x)-L_n'(x) \tag{1.71}$$

كما أن دوال لاجير متعامدة على الفترة $]-\infty,\infty[$ بالنسبة لدالة التوازن $w(x)=e^{-x}$ ، حيث نجد أن

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx=\begin{cases}0 & ;\ m\neq n\\ (n!)^2 & ;\ m=n\end{cases} \tag{1.72}$$

.

1.10 مسائل

احسب التكاملات الآتية

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty J_1(x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}}(x)\cos^{\frac{3}{2}}(x)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{x}J_1(x)dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n(x)dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)\cos(x)}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{5}{2}}}dt$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0\left[x\sin^2(\phi)\right]d\phi$

(11) $\displaystyle\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$

(12) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx$

(14) $\displaystyle\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$

(15) $\int \frac{J_2(3x)}{x^2}dx$

(16) $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$

(17) $\int x^4 J_1(x)dx$

(18) $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx$

(19) $\int_0^{\infty} 3^{-4x^2}dx$

(20) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(x)}}$

(21) $\int J_3(x)dx$

(22) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

اثبت أن

(19) $\frac{d\left[x^n Y_n(x)\right]}{dx} = x^n Y_{n-1}(x)$

(20) $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$

(21) $\frac{d\left[x^{-n} Y_n(x)\right]}{dx} = -x^{-n} Y_{n+1}(x)$

(22) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)};0<p<1$

(23) $J_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos(x)+\frac{3}{x}\sin(x)\right]$

(24) $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

(25) $\frac{d\left[xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)\right]}{dx} = x\left[J_\nu^2(x)-J_{\nu+1}^2(x)\right]$

(26) $\cos x = J_0(x)-2J_2(x)+2J_4(x)-\cdots$

(27) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0\left(x\cos(\varphi)\right)\cos(\varphi)\ d\varphi = \frac{\sin x}{x}$$

(28) $$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin(x) - \frac{3}{x}\cos(x)\right]$$

****

حلول المسائل الفردية

1

بإعادة صياغة التكامل ليأخذ شكل دالة بيتا كما في شكل (1.9) نحصل على

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx = B(p,q)$$

حيث $p\text{-}1 = \frac{1}{4}\ ,p+q=2 \ \Rightarrow\ p=\frac{5}{4},\ \ q=\frac{3}{4}$

وعندئذٍ فإن

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx = B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

3

بوضع التكامل ليأخذ شكل دالة بيتا كما في شكل (1.8) نجد أن

$$2p-1=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ p=\frac{7}{4},\ 2q-1=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ q=\frac{5}{4}$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}}(x)\cos^{\frac{3}{2}}(x)dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos(x)\right)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{1}{2}B(p,q)$$

حيث

$$2p-1=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; p=\frac{3}{4},\; 2q-1=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; q=\frac{1}{4}$$

وعندئذٍ فإن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos(x)\right)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)}$$

7

و $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)\cos(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}B(p,q)$$

بما أن

$$2p-1=\frac{1}{2} \Rightarrow\; p=\frac{3}{4},\; 2q-1=\frac{1}{2} \Rightarrow\; q=\frac{3}{4}$$

إذن فإن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)\cos(x)}dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

9

بوضع التكامل ليأخذ شكل دالة بيتا كما في شكل (1.9) نحصل على

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{5}{2}}}dt = B(p,q)$$

حيث

$$p\text{-}1=\frac{1}{2}, p+q=\frac{5}{2} \Rightarrow \quad p=\frac{3}{2} \quad , q=1$$

إذن

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{5}{2}}}dt = B\left(\frac{3}{2},1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

11

نضع $y = a\sin(\theta)$ ، إذن

$$0 = a\sin(\theta) \Rightarrow \theta = 0 \ , \ a = a\sin(\theta) \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{2}$$

وعندئذٍ فإن

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin(\theta))^4 \sqrt{a^2-a^2\sin^2(\theta)}(a\cos(\theta)d\theta)$$

$$= a^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^4 (\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{a^6}{2} B(p,q)$$

حيث

$$2p-1=4 \ \Rightarrow \ p=\frac{5}{2}, \ 2q-1=2 \ \Rightarrow \ q=\frac{3}{2}$$

إذن

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{a^6}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^6}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

13

بما أن

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

إذن

$$\int\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx=\int x^{-n}J_{n+1}(x)dx$$

$$=-\int\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right)dx=-x^{-n}J_n(x)+C$$

15

بوضع $\nu=-\frac{1}{2}$ **في (1.28) نجد أن**

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)$$

وبالتعويض من (1.34) ,(1.33) نجد أن

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x+x\sin x}{x}\right)$$

17

بما أن

$$\int x^4J_1(x)dx=\int x^2\left[x^2J_1(x)\right]dx$$

إذن، للتكامل بالتجزيء نضع

$$u=x^2 \qquad dv=\left[x^2J_1(x)\right]dx$$
$$du=2xdx \qquad v=x^2J_2(x)$$

وذلك لأن

$$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)dx=x^{\nu}J_{\nu}(x)+C$$

إذن

$$\int x^2\left[x^2J_1(x)\right]dx = x^4J_2(x)-2\int x^3J_2(x)dx$$
$$= x^4J_2(x)-2x^3J_3(x)+C$$

للحصــول علــى $J_2(x),\ J_3(x)$ نضــع $\nu=1,\ \nu=2$ علــى الترتيب في الصورة الاختزالية (1.28) فنحصل على

$$\int x^4J_1(x)dx = x^4\left[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right]$$
$$-2x^3\left[\frac{4}{x}\left(\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right)-J_1(x)\right]+C$$
$$=\left(8-x^2\right)x^2J_0(x)+4x\left(x^2-4\right)J_1(x)+C$$

19

بما أن

$$Y_n(x)=\frac{\cos(n\pi)J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

إذن بالضرب في x^n والتفاضل نجد أن

$$\frac{d\left[x^nY_n(x)\right]}{dx}=\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n\pi)}\frac{d\left[x^nJ_n(x)\right]}{dx}$$
$$-\frac{1}{\sin(n\pi)}\frac{d\left[x^nJ_{-n}(x)\right]}{dx}$$

وبما أن

$$\frac{d\left[x^nJ_n(x)\right]}{dx}=x^nJ_{n-1}(x);$$
$$\frac{d\left[x^{-n}J_n(x)\right]}{dx}=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

إذن

$$\frac{d\left[x^nY_n(x)\right]}{dx}=\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n\pi)}\left[x^nJ_{n-1}(x)\right]$$
$$-\frac{1}{\sin(n\pi)}\left[-x^nJ_{-(n-1)}(x)\right]$$

ولكننا نعلم أن

$$;\cos(n\pi)=-\cos((n-1)\pi)$$
$$\sin(n\pi)=-\sin((n-1)\pi)$$

عندئذٍ فإن

$$\frac{d\left[x^n Y_n(x)\right]}{dx}=x^n\left[\frac{\cos(n-1)\pi J_{n-1}(x)-J_{-(n-1)}(x)}{\sin(n-1)\pi}\right]$$
$$=x^n Y_{n-1}(x)$$

21

بما أن

$$Y_n(x)=\frac{\cos(n\pi)J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

بالضرب في x^{-n} والتفاضل، نجد أن

$$\frac{d\left[x^{-n}Y_n(x)\right]}{dx}=\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n\pi)}\frac{d\left[x^{-n}J_n(x)\right]}{dx}$$
$$-\frac{1}{\sin(n\pi)}\frac{d\left[x^{-n}J_{-n}(x)\right]}{dx}$$

وبما أن

$$\frac{d\left[x^n J_n(x)\right]}{dx}=x^n J_{n-1}(x);$$
$$\frac{d\left[x^{-n}J_n(x)\right]}{dx}=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

إذن

$$\frac{d\left[x^{-n}Y_n(x)\right]}{dx}=\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n\pi)}\left[-x^{-n}J_{n+1}(x)\right]$$
$$-\frac{1}{\sin(n\pi)}\left[x^{-n}J_{-(n+1)}(x)\right]$$

وبما أن

$$\sin(n\pi) = -\sin((n+1)\pi);$$

$$\cos(n\pi) = -\cos((n+1)\pi)$$

إذن

$$\frac{d\left[x^{-n}Y_n(x)\right]}{dx} = -x^{-n}\left[\frac{\cos(n+1)\pi J_{n+1}(x) - J_{-(n+1)}(x)}{\sin(n+1)\pi}\right]$$

$$= -x^{-n}Y_{n+1}(x)$$

23

بما أن

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

$$, J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

إذن بالتعويض عن $\nu = \frac{3}{2},\ \nu = -\frac{3}{2}$ نجد أن

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = -\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{x}J_{-\frac{3}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$= -\frac{3}{x}\left[-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)\right] - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

وبالتعويض عن $J_{-\frac{1}{2}}(x),\ J_{\frac{1}{2}}(x)$ نجد أن

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x + \frac{3}{x}\sin x\right]$$

أيضاً فإن

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{x}J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$=\frac{3}{x}\left[\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)\right]-J_{\frac{1}{2}}(x)$$

وبالتعويض عن $J_{\frac{1}{2}}(x),\ J_{-\frac{1}{2}}(x)$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right]$$

25

بتفاضل الطرف الأيسر نجد أن

$$\frac{d\left[xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)\right]}{dx}=J_\nu(x)J_{\nu+1}(x)+xJ_\nu'(x)J_{\nu+1}(x)$$
$$+xJ_\nu(x)J_{\nu+1}'(x)$$

وبالتعويض عن $xJ_\nu'(x),\ xJ_{\nu+1}'(x)$ من العلاقات

$$J_\nu'(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x);$$
$$J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$

نحصل على

$$\frac{d\left[xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)\right]}{dx}=J_\nu(x)J_{\nu+1}(x)$$
$$+J_{\nu+1}(x)\left[\nu J_\nu(x)-xJ_{\nu+1}(x)\right]$$
$$+J_\nu(x)\left[xJ_\nu(x)-(\nu+1)J_{\nu+1}(x)\right]$$

$$=x\left[J_\nu^2(x)-J_{\nu+1}^2(x)\right]$$

27

نعيد كتابة التكامل في الشكل

$$\int J_3(x)dx=\int x^2\left[x^{-2}J_3(x)\right]dx$$

للتكامل بالتعويض نضع

$$u = x^2,\ dv = \left[x^{-2}J_3(x)\right]dx$$

$$du = 2x dx,\quad v = -x^{-2}J_2(x)$$

إذن فإن

$$\int x^2\left[x^{-2}J_3(x)\right]dx = -J_2(x) + 2\int x^{-1}J_2(x)dx$$
$$= -J_2(x) - 2x^{-1}J_1(x)$$

حيث استخدمنا الصورة

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu}J_\nu(x) + C$$

وبما أن

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

إذن

$$\int J_3(x)dx = -\left[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\right] - 2x^{-1}J_1(x) + C$$
$$= J_0(x) - \frac{4}{x}J_1(x) + C$$

29

نعيد كتابة التكامل في الشكل

$$I = \int \frac{J_2(3x)}{x^2}dx = 9\int (3x)^2 J_2(3x)\frac{1}{(3x)^4}dx$$

نضع $y = 3x \ \Rightarrow\ dy = 3dx$

إذن

$$I = 3\int y^2 J_2(y)\frac{dy}{y^4}$$

للتكامل بالتجزيء نضع

$$u = y^2 J_2(y) \qquad dv = \frac{dy}{y^4}$$

$$du = y^2 J_1(y)dy \quad v = -\frac{1}{3y^3}$$

حيث

$$\frac{d\left[x^n J_n(x)\right]}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$$

فنحصل على

$$I = -\frac{1}{3y} J_2(y) + \frac{1}{3}\int yJ_1(y)\frac{dy}{y^2}$$

وللتكامل بالتجزيء **مرة أخرى نضع**

$$u = yJ_1(y) \qquad dv = \frac{dy}{y^2}$$

$$du = yJ_0(y)dy \quad v = -\frac{1}{y}$$

إذن

$$I = -\frac{1}{3y} J_2(y) + \frac{1}{3}\left[-J_1(y) + \int J_0(y)dy\right]$$

أو

$$I = -\frac{1}{3y}\left[\frac{2}{y}J_1(y) - J_0(y)\right]$$

$$+\frac{1}{3}\left[-J_1(y) + \int J_0(y)dy\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{2}{(3x)^2} + 1\right]J_1(3x) + \frac{1}{9x}J_0(3x) + \int J_0(3x)dx$$

في البداية دعنا نستبدل $J_0(x\cos\varphi)$ بالمتسلسلة اللانهائية المكافئة لها ثم نجري بعد ذلك عملية التكامل، لنحصل على

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0\left(x\cos(\varphi)\right)\cos(\varphi)\ d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\left(x\cos(\varphi)\right)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right]\cos(\varphi)d\varphi$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k(x)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+1}(\varphi)d\varphi$$

وبما أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+1}(\varphi)d\varphi=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}=\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

إذن

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k(x)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k(x)^{2k}}{(2k+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k(x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]=\frac{\sin x}{x}$$

****
******