# الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

## الأكاديمية العربية الدولية

## المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

# الدوال

## تعريف الدالة: function

الدالة هي علاقة من المجموعة $A$ إلى المجموعة $B$ يقترن فيها كل عنصر في $A$ بعنصر واحد فقط في $B$

وتكتب على الصورة: $f:A\to B$ أو $A\xrightarrow{f}B$

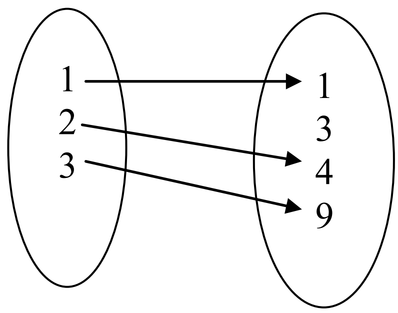
وتسمى المجموعة $A$ نطاق الدالة والمجموعة $B$ النطاق المصاحب .

والمجموعة الجزئية من $B$ التي تتألف من جميع صور عناصر $A$ بالدالة $f$ تسمى مدى الدالة ويرمز لها بالرمز $f(A)$ حيث: $f(A)=\{f(x):x\in A\}$

**مثال:**

إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{1,3,4,9\}$ فإن العلاقة: $f=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$

المتمثلة بالمخطط السهمي التالي تمثل الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2\ \ \forall x\in A$




واضح أن نطاق الدالة هو المجموعة $\{1,2,3\}$ ومدى هذه الدالة هو $\{1,4,9\}$

**مثال:**

الدالة $g:\Re\to\Re$ المعرفة بالقاعدة $\forall x\in\Re\quad g(x)=\sin x$ هي دالة نطاقها $\Re$ ونطاقها المصاحب $\Re$ ومداها الفترة $[-1,1]$

## تعريف: الدالة الأحادية (injective function) one to one function

الدالة $f:A\to B$ تسمى دالة أحادية (متباينة) إذا كان للعناصر المختلفة في $A$ صوراً مختلفة في $B$ أي أن لكل $x_1,x_2\in A$ فإن $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ **أو** $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

## تعريف: الدالة الفوقية ( surjective function ) onto function

الدالة $f:A\to B$ تسمى دالة فوقية (شاملة) إذا كان كل عنصر في $B$ هو صورة لأحد عناصر $A$ أي أن النطاق المصاحب يساوي المدى.

**تعريف: دالة التناظر الأحادي bijective function**

الدالة $f:A\to B$ تسمى دالة تناظر أحادي إذا كانت دالة أحادية وفوقية .

**مثال:**

إذا كانت الدالة $f:\Re\to\Re$ معرفة بالقاعدة $f(x)=2x+1 \quad \forall x\in A$ فإننا نلاحظ أن:

الدالة $f$ دالة أحادية لأن $\forall x_1,x_2\in\Re \quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

الدالة $f$ فوقية لأنه بفرض أن $y\in\Re$ وبوضع $x=\dfrac{y-1}{2}$ فإن $f(x)=2(\dfrac{y-1}{2})+1=y$

$\therefore$ كل عنصر $y\in\Re$ هو صوره للعنصر $x\in\Re$

**ملاحظة:**

لتكن كل من $A,B$ مجموعة. يرمز للمجموعة التي عناصرها جميع الدوال من $A$ إلي $B$ بالرمز $B^A$

**مبرهنة:**

إذا كانت المجموعة $A$ تحتوي على $m$ من العناصر والمجموعة $B$ تحتوي على $n$ من العناصر فإن المجموعة $B^A$ تحتوي على $n^m$ من العناصر.

**البرهان:**

نفرض أن $A=\{x_1,x_2,\dots\dots,x_m\}$ ، $B=\{y_1,y_2,\dots\dots,y_n\}$

لاحظ أن العنصر $x_1$ يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر $B$ وبما أن عدد عناصر $B$ يساوي $n$ فإن العنصر $x_1$ يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر $B$ بطرق عددها $n$ وكذلك العنصر $x_2$ يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر $B$ بطرق عددها $n$ أيضاً.

إذاً عدد الطرق التي يمكن بواسطتها ارتباط عناصر المجموعة $A$ مع عناصر المجموعة $B$ هي:

$$\overbrace{n.n.n..n}^{m\ \text{من المرات}}=n^m$$

**تساوي الدوال Equality of functions**

ليكن كل من $f:A\to B$ ، $g:C\to D$ دالة.

الدالتين تكونان متساويتين إذا وإذا كان فقط $B=D\ ,\ A=C\ ,\ f=g$

**مثال:**

إذا كان كل من $f,g$ دالة معرفة على $\Re$ كالآتي:

$$f=\{(x,y)\in\Re\times\Re:y=|x|\} \quad , \quad g=\{(x,y)\in\Re\times\Re:y=\sqrt{x^2}\}$$

فإن الدالتين $f,g$ متساويتين.

وإذا كانت $h:Z\to\aleph$ دالة معرفة كالتالي $h(x)=\sqrt{x^2}$ فإن $h\neq f$ وكذلك $h\neq g$ لأن $Z\neq\Re$ ، $\aleph\neq\Re$

**مبرهنة:**

إذا كان كل من $g:A\to B$ ، $f:A\to B$ دالة فإن $f=g$ إذا وإذا كان فقط

$$f(x)=g(x)\ \forall x\in A$$

**البرهان:**

أولاً: نفرض أن $f=g$ ونبرهن أن $f(x)=g(x)\ \forall x\in A$

$$x\in A\Rightarrow \exists y\in B:(x,y)\in f\Leftrightarrow f(x)=y$$
$$\Rightarrow (x,y)\in g\Leftrightarrow g(x)=y\Rightarrow f(x)=g(x)$$

ثانياً: نفرض أن $f(x)=g(x)\ \forall x\in A$ ونبرهن أن $f=g$

$$(x,y)\in f\Leftrightarrow f(x)=y\Rightarrow g(x)=y\Rightarrow (x,y)\in g$$
$$\Rightarrow f\subseteq g\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(x,y)\in g\Leftrightarrow g(x)=y\Rightarrow f(x)=y\Rightarrow (x,y)\in f$$
$$\Rightarrow g\subseteq f\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

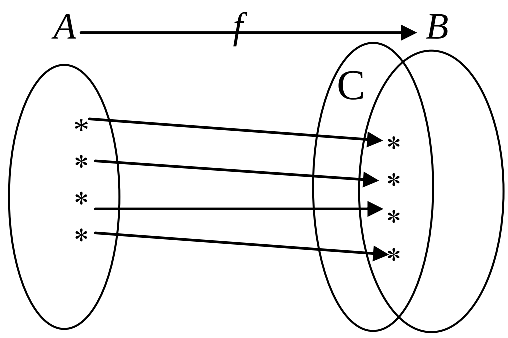
من $(1)$ و$(2)$ نستنتج أن $f=g$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $f=g$ إذا وفقط إذا كان $f(x)=g(x)\ \forall x\in A$

**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة و $ran\ f\subseteq C$ فإن $f:A\to C$ دالة أيضاً

**البرهان:**




نفرض أن $x\in A$

$\therefore$ يوجد $y\in ran\ f$ بحيث $(x,y)\in f$

بما أن $ran\, f \subseteq C$ فإن $y \in C$

إذاً $f: A \to C$ دالة

**تعريف:**

لتكن $f: A \to B$ دالة ، $b \in B$ .

تسمى $f$ بالدالة الثابتة constant function إذا وإذا كان فقط لكل عنصر $a \in A$ فإن $f(a) = b$

**مثال:**

ليكن $A = B = \Re$ وأن $f$ علاقة على $\Re$ معرفة كالتالي:

$f = \{(x, y) \in \Re \times \Re : y = 5\}$ أي أن $\forall x \in \Re, f(x) = 5$ فإن $f: \Re \to \Re$ تسمي دالة ثابتة

**ملاحظة:**

ليكن $f: A \to B$ دالة ثابتة

1) إذا كانت المجموعة $A$ تحتوي على أكثر من عنصر فتكون الدالة ليست أحادية.

2) إذا كانت المجموعة $B$ تحتوي على أكثر من عنصر فتكون الدالة غير فوقية.

**تعريف:**

لتكن $f: X \to Y$ دالة تسمى $f$ بالدالة المحايدة (الذاتية) identity function إذا وإذا كان فقط لكل $x \in X$ فإن $f(x) = x$ ويرمز لها بالرمز $I_X$

لاحظ أن $I_X$ دالة تقابلية "تناظر أحادي" (أحادية وفوقية) Bijenction function

**دالة الاحتواء: inclusion function**

لتكن $A$ مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة $B$ فتسمى الدالة $f: A \to B$ بدالة الاحتواء إذا فقط وإذا كان $\forall x \in A$ $f(x) = x$

**مثال**

إذا كانت $f$ دالة من $\aleph$ إلى $Z$ معرفة كالتالي:

$\forall x \in \aleph$ $f(x) = x$ فإن $f$ تكون دالة الاحتواء لأن $\aleph \subseteq Z$

**ملاحظة:**

ليكن $f: A \to B$ دالة الاحتواء.

1) إذا كان $A = B$ فإن $I_X = f$

2) دالة الاحتواء أحادية

3) إذا كان $A \subset B$ فإن دالة الاحتواء ليست فوقية

**الدالة المقيدة Restriction function**:

ليكن $f : A \to B$ دالة ولتكن $C$ مجموعة جزئية من $A$ .

الدالة $g : C \to B$ المعرفة بحيث $g(x) = f(x) \,, \forall x \in C$ تسمى بقيد $f$ على $C$ ونرمز لها بالرمز $f / C : C \to B$ أي أن: $g = f / C$

**مثال:**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقة $\Re$ كالآتي: $f = \{(x, y) \in \Re \times \Re : f(x) = x + 1\}$

ولتكن $g$ دالة من $\aleph$ إلى $\Re$ معرفة كالتالي: $g = \{(x, y) \in \aleph \times \Re : g(x) = x + 1\}$

بما أن $\aleph \subseteq \Re$ , $g(x) = f(x) \,, \forall x \in \aleph$ فإن الدالة $g$ هي تقييد $f$ على $\aleph$

**مبرهنة:**

إذا كان $f : B \cup C \to A$ فإن $f = f / B \cup f / C$

**البرهان:**

نفرض أن $(x, y) \in f$ أي أن $f(x) = y$ وهذا يعني أن $x \in B \cup C$ وبالتالي $x \in B \text{ or } x \in C$

فإذا كانت $x \in B$ فإن $(f / B)(x) = f(x) = y$ أي أن $(x, y) \in f / B$

وإذا كانت $x \in C$ فإن $(f / C)(x) = f(x) = y$ أي أن $(x, y) \in f / C$

مما سبق نستنتج أن $(x, y) \in f / B \cup f / C$ أي أن:

$$f \subseteq f / B \cup f / C \qquad .........(1)$$

نفرض أن $(x, y) \in f / B \cup f / C$ وهذا يعني أن $(x, y) \in f / B$ أو $(x, y) \in f / C$

فإذا كانت $(x, y) \in f / B$ فإن $(f / B)(x) = y = f(x)$ أي أن $(x, y) \in f$

وإذا كانت $(x, y) \in f / C$ فإن $(f / C)(x) = y = f(x)$ أي أن $(x, y) \in f$

مما سبق نستنتج أن $(x, y) \in f$ أي أن:

$$f / B \cup f / C \subseteq f \qquad .........(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $f = f / B \cup f / C$

**توسيع (تمديد) الدالة Extension or function**

ليكن $f : A \to B$ دالة وليكن $A \subseteq D$ .

الدالة $g : D \to B$ تسمى بتوسيع $f$ من $A$ إلى $D$ إذا تحقق الشرط التالي:

$g(x) = f(x) \,, \forall x \in A$ أي أن $g / A = f$

**مثال:**

الدالة $f : \Re \to \Re$ هي توسيع للدالة $g : \aleph \to \Re$ حيث $g(x) = x^2 \;,\; f(x) = x^2$

**دالة المسافة Distance function**

لنعتبر أن $\Re^* = \{x \in \Re : x \geq 0\}$ أي أن $\Re^*$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة وليكن $A$ مجموعة فإن الدالة: $d : A \times A \to \Re^*$ تسمى بدالة المسافة إذا تحققت الشروط التالية:

لكل $a, b, c \in A$

1) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

2) $d(a,b) = d(b,a)$ .

3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

$d$ يسمى قياس على $A$ (Metric on A ).

**مثال:**

إذا كانت $d$ دالة من $\Re \times \Re$ إلى $\Re^*$ معرفة بحيث: $d(x,y) = |x - y|$ فإن: $d$ هي دالة مسافة

**البرهان:**

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(x,y)$

3) $d(x,z) = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x,y) + d(y,z)$

أي أن $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\therefore$ $d$ دالة مسافة

**تمرين:**

لتكن $A$ مجموعة ولتكن $d$ دالة من $A \times A$ إلى $\Re^*$ معرفة بحيث:

$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$ برهن أن $d$ دالة مسافة

**ملاحظة:**

إذا كانت $d:A\times A\to\Re^{*}$ دالة مسافة فإن $(A,d)$ يسمى فضاء متري.

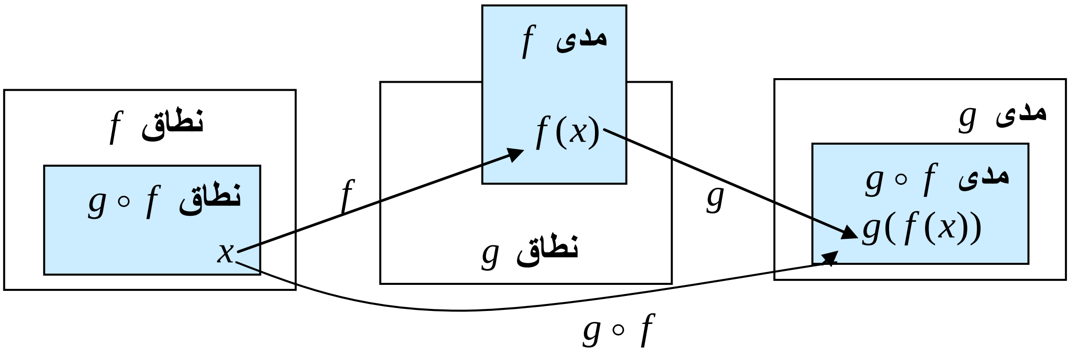
أي أن في المثال السابق $(\Re,d)$ تمثل فضاءً مترياً ،وسيتم دراسة الفضاءات المترية بتفصيل أكثر في مقرر التحليل الحقيقي.

## الدالة التركيبية Composite function

**تعريف:**

لتكن $f$ دالة نطاقها $dom\, f$، ومداها $ran\, f$، ولتكن $g$ دالة نطاقها $dom\, g$، ومداها $ran\, g$ .

نعرف تركيب $f$ مع $g$ بأنه الدالة $g\circ f$ التي نطاقها هو المجموعة $\{x: x\in dom\, f\ ,\ f(x)\in dom\, g\}$




**ملاحظة:**

لاحظ أنه إذا كان كل من $f:A\to B$ ، $g:C\to D$ دالة فإنه يمكن إيجاد $g\circ f:A\to D$ عندما يكون $ran\, f\bigcap dom\, g\neq\phi$ وكذلك يمكن إيجاد $f\circ g:C\to B$ بشرط أن $ran\, g\bigcap dom\, f\neq\phi$

وفي هذه الحالة يكون $dom(f\circ g)=\{x: x\in dom\, g\ ,\ g(x)\in dom\, f\}$

**مثال:**

إذا كان $f(x)=x^{2},\forall x\in\Re\quad,\quad g(x)=2x+3,\forall x\in\Re$ فإن:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^{2})=2x^{2}+3$$

**مثال:**

لا يمكن إيجاد $(g\circ f)(x)$ من الدالتين $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-1-x}}$ لأن $ran\, f\bigcap dom\, g=\phi$

حيث $ran\, f=[0,\infty)$ ، $dom\, g=(-\infty,-1)$

**مبرهنة:**

إذا كان كل من $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ دالة ،فإن $g\circ f:A\to C$ دالة أيضاً

**البرهان**

أولاً سنبرهن أنه لكل $a\in A$ يوجد $c\in C$ بحيث $(g\circ f)(a)=c$ ثم سنبرهن أن لكل عنصر صورة واحدة فقط.

نفرض أن $a\in A$ وهذا يعني أنه يوجد $b\in B$ حيث $(a,b)\in f$

بما أن $b\in B$ ،و $g$ دالة فإنه يوجد $c\in C$ حيث $(b,c)\in g$

بما أن $(a,b)\in f\ ,\ (b,c)\in g$ فإن $(a,c)\in g\circ f$ أي أن $(g\circ f)(a)=c$

الآن نفرض أن $(a,c_2)\in g\circ f$ ، $(a,c_1)\in g\circ f$ وهذا يعني أنه يوجد $b_1,b_2\in B$ حيث

$(a,b_1)\in f\,,(b_1,c_1)\in g$ وكذلك $(a,b_2)\in f\,,(b_2,c_2)\in g$

بما أن $f:A\to B$ دالة ،و $(a,b_1)\in f\,,(a,b_2)\in f$ فإن $b_1=b_2$

وبما أن $g:B\to C$ دالة ، و $(b_1,c_1)\in g\,,(b_1,c_2)\in g$ فإن $c_1=c_2$

**نتيجة:**

إذا كان كل من $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ دالة فإنه لكل $x\in A$ يكون $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

**البرهان:**

$$(g\circ f)(x)=z\ \Rightarrow (x,z)\in g\circ f\ \Rightarrow \exists y\in B:(x,y)\in f\,,(y,z)\in g$$

ولكن $(x,y)\in f\Leftrightarrow f(x)=y\ ,\ (y,z)\in g\Leftrightarrow g(y)=z$ وبالتالي $z=g(y)=g(f(x))$

أي أن $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

**مبرهنة:**

ليكن كل من $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ دالة:

1) إذا كان كل من $f,g$ دالة أحادية فإن $g\circ f$ دالة أحادية أيضاً.

2) إذا كان كل من $f,g$ دالة فوقية فإن $g\circ f$ دالة فوقية أيضاً.

3) إذا كان كل من $f,g$ دالة تقابلية فإن $g\circ f$ دالة تقابلية أيضاً.

**البرهان:**

1) نفرض أن $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ حيث $x_1,x_2\in A$

أي أن $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ وبما أن $g$ دالة أحادية فإن $f(x_1)=f(x_2)$

وبما أن $f$ دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$ وهذا يبرهن أن $g \circ f$ دالة أحادية أيضاً

2) نفرض أن $z \in C$ وبما أن $g$ دالة فوقية فإنه يوجد $y \in B$ بحيث $g(y) = z$

وبما أن $f$ دالة فوقية فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f(x) = y$

مما سبق نستنتج أن $g(f(x)) = z$ أي أن لكل $z \in C$ يوجد $x \in A$ بحيث $(g \circ f)(x) = z$

إذاً $g \circ f$ دالة فوقية

3) من (1) و(2) نستنتج أنه إذا كان كل من $f, g$ دالة تقابلية فإن $g \circ f$ دالة تقابلية أيضاً

**مبرهنة:**

ليكن كل من $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ دالة:

1) إذا كانت $g \circ f$ دالة أحادية فإن $f$ دالة أحادية أيضاً.

2) إذا كانت $g \circ f$ دالة فوقية فإن $g$ دالة فوقية أيضاً.

**البرهان:**

1) نفرض أن $x_1, x_2 \in A$ حيث $f(x_1) = f(x_2)$

بما أن $g$ دالة فإن $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ أي أن $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

بما أن $g \circ f$ دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$ وهذا يثبت أن $f$ دالة أحادية.

2) نفرض أن $z \in C$

بما أن $g \circ f$ دالة فوقية فإنه يوجد $x \in A$ حيث $(g \circ f)(x) = z$ أي أن $g(f(x)) = z$

وبما أن $f(x) \in B$ فإن $g$ دالة فوقية

**تمارين**

1) هل العلاقات التالية تمثل دوال أم لا؟ برهن صحة ما تقول؟

i) $f : \aleph \to \aleph$ حيث $f(x) = x - 7$

ii) $g : \Re \to \Re$ حيث $g(x) = \dfrac{1}{x}$

iii) $h : \Re \to \Re$ حيث $h(x) = \begin{cases} x+1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$

iv) $k : Q \to Z$ حيث $k(\frac{m}{n}) = m + n$ ، $0 \neq n, m \in Z$

2) ليكن $d: A\times A\rightarrow \Re^*$ دالة مترية "دالة مسافة".

برهن أن $m(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ لكل $x,y\in A$ تمثل دالة مترية "دالة مسافة " حيث

$$m: A\times A\rightarrow \Re^*$$

3) ليكن $d:\Re\times\Re\rightarrow\Re^*$ دالة مترية. برهن أن $m:\Re\times\Re\rightarrow\Re^*$ دالة مترية حيث

$m(x,y)=h.d(x,y)$ لكل $x,y\in\Re$، و $h$ عدد حقيقي موجب.

## الدالة العكسية inverse function

إذا كان $f: A\rightarrow B$ دالة فإن العلاقة العكسية $f^{-1}$ من $B$ إلى $A$ قد تحقق شروط الدالة أو لا تحققها كما أنه إذا كان $f^{-1}: C\rightarrow D$ دالة فليس من الضروري أن تكون $f: D\rightarrow C$ دالة والأمثلة التالية توضح ذلك:

**مثال:**

إذا كانت $f=\{(1,4),(2,4),(3,5)\}$ علاقة من $A=\{1,2,3\}$ إلى $B=\{4,5\}$ فإن:

$$f^{-1}=\{(4,1),(4,2),(5,3)\}$$

واضح أن $f: A\rightarrow B$ دالة ولكن $f^{-1}: B\rightarrow A$ ليست دالة.

**مثال:**

إذا كانت $f=\{(1,2),(1,3)\}$ علاقة من $A=\{1\}$ إلى $B=\{2,3\}$ فإن: $f^{-1}=\{(2,1),(3,1)\}$

واضح أن $f: A\rightarrow B$ ليست دالة بينما $f^{-1}: B\rightarrow A$ دالة.

**تعريف:**

يقال أن الدالة $f: A\rightarrow B$ لها معكوس إذا كانت العلاقة $f^{-1}: B\rightarrow A$ دالة ،وتسمى العلاقة $f^{-1}$ بالدالة العكسية للدالة $f$

**مبرهنة:**

يكون للدالة $f: A\rightarrow B$ دالة عكسية إذا وإذا كان فقط $f: A\rightarrow B$ دالة تقابلية

**البرهان:**

أولاً: نفرض أن الدالة $f: A\rightarrow B$ لها معكوس وليكن $f^{-1}: B\rightarrow A$ ونبرهن أن $f: A\rightarrow B$ دالة تقابلية

ولإثبات أن $f$ دالة أحادية نفرض أن: $x_1,x_2\in A$: $f(x_1)=f(x_2)=y$ وهذا يعني أن

$(x_2,y)\in f$ , $(x_1,y)\in f$ وبالتالي $(y,x_2)\in f^{-1}$ , $(y,x_1)\in f^{-1}$

وبما أن $f^{-1}$ دالة فإن $x_1=x_2$ وهذا يثبت أن $f$ دالة أحادية

ولإثبات أن $f$ دالة فوقية نفرض أن $y\in B$ وبما أن $f^{-1}$ دالة فإنه يوجد $x\in A$ بحيث $f^{-1}(y)=x$

أي أن $(y,x)\in f^{-1}$ وهذا يعني أن $(x,y)\in f$ أي أن $f(x)=y$

إذاً $f$ دالة فوقية

ثانياً: نفرض أن $f:A\to B$ دالة تقابلية ونبرهن أن لها معكوس وليكن $f^{-1}:B\to A$

أي أننا سنبرهن أن $f^{-1}:B\to A$ تحقق شروط الدالة ،لذلك نفرض أن $y\in B$ وبما أن $f$ دالة فوقية

فإنه يوجد $x\in A$ بحيث $f(x)=y$ وهذا يعني أن $(x,y)\in f$

إذاً $(y,x)\in f^{-1}$ أي أن $f^{-1}(y)=x$ أي كل عنصر في $B$ له صورة في $A$ وسنبرهن الآن أن صورة كل عنصر تكون وحيدة تحت تأثير العلاقة $f^{-1}$

نفرض أن $(y,x_1)\in f^{-1}$, $(y,x_2)\in f^{-1}$ وهذا يعني أن $(x_1,y)\in f$ , $(x_2,y)\in f$

وبما أن $f$ دالة أحادية فإن $x_1=x_2$

إذاً $f^{-1}:B\to A$ دالة

**تمرين:**

برهن أنه إذا كانت $f:A\to B$ دالة تقابلية فإن $f^{-1}:B\to A$ دالة تقابلية

**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة لها معكوس فإن:

1) $f\circ f^{-1}=I_B$ 2) $f^{-1}\circ f=I_A$

**البرهان:**

1) نفرض أن $(x,z)\in f\circ f^{-1}$ ،هذا يعني أنه يوجد $y\in A$ بحيث $(x,y)\in f^{-1}$ ، و $(y,z)\in f$

أي أن $(y,x)\in f$ ، و $(y,z)\in f$ وبما أن $f$ دالة فإن $x=z$

إذاً $(x,z)=(x,x)=(z,z)\in I_B$ ولذلك فإن: (1)..................... $f\circ f^{-1}\subseteq I_B$

نفرض أن $(b,b)\in I_B$ أي أن $b\in B$ وبما أن $f$ دالة فإنه يوجد $a\in A$ بحيث $f(a)=b$ أي أن

$(a,b)\in f$ ،ولكن $f^{-1}$ دالة وبالتالي فإنه يوجد $x\in A$ بحيث $f^{-1}(b)=x$ أي أن $(b,x)\in f^{-1}$

أي أن $(x,b)\in f$ وبما أن $f$ دالة أحادية ،و $(a,b)\in f$ ، $(x,b)\in f$ فإن $x=a$

الآن لدينا $(b,a)\in f^{-1}$ ، $(a,b)\in f$ ومن ذلك نستنتج أن $(b,b)\in f\circ f^{-1}$ أي أن:

$$I_B\subseteq f\circ f^{-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $I_B=f\circ f^{-1}$

2) نفرض أن $(x,z)\in f^{-1}\circ f$ ،هذا يعني أنه يوجد $y\in B$ بحيث $(x,y)\in f$ ،و $(y,z)\in f^{-1}$
أي أن $(x,y)\in f$ ،و $(z,y)\in f$ وبما أن $f$ دالة أحادية فإن $x=z$
إذاً $(x,z)=(x,x)=(z,z)\in I_A$ ولذلك فإن: $f^{-1}\circ f\subseteq I_A\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
نفرض أن $(a,a)\in I_A$ أي أن $a\in A$ وبما أن $f$ دالة فإنه يوجد $b\in B$ بحيث $f(a)=b$ أي أن $(a,b)\in f$ ،ولكن $f^{-1}$ دالة وبالتالي فإنه يوجد $x\in A$ بحيث $f^{-1}(b)=x$ أي أن $(b,x)\in f^{-1}$
أي أن $(x,b)\in f$ وبما أن $f$ دالة أحادية ،و $(a,b)\in f$ ، $(x,b)\in f$ فإن $x=a$
الآن لدينا $(b,a)\in f^{-1}$ ، $(a,b)\in f$ ومن ذلك نستنتج أن $(a,a)\in f^{-1}\circ f$ ولذلك فإن:

$$I_A\subseteq f^{-1}\circ f\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $I_A=f^{-1}\circ f$

**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة لها معكوس فإن $f^{-1}:B\to A$ تكون دالة أحادية فوقية

**البرهان:** يترك تمرين للطالب

**مبرهنة:**

ليكن $f:A\to B$ ، $g:B\to A$ دالتين.

إذا كان $g\circ f=I_A$ ، $f\circ g=I_B$ فإن $f$ دالة أحادية فوقية و $g=f^{-1}$

**البرهان:** يترك تمرين للطالب

## الصورة المباشرة والصورة العكسية بفعل الدوال

**تعريف:**

ليكن $f : A \to B$ دالة وليكن $C$ مجموعة جزئية من $A$ .

المجموعة المتكونة من عناصر المجموعة $B$ التي كل عنصر فيها هو صورة على الأقل لأحد عناصر المجموعة $C$ تسمي صورة مباشرة للمجموعة $C$ بفعل الدالة $f : A \to B$ ويرمز لها بالرمز $f(C)$ .

أي أن $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C, f(x) = y\}$

**مثال:**

إذا كانت $f : Z \to Z$ دالة بحيث $f(x) = x^2$ ،و $C = \{-2,-1,0,1,2\}$ فإن $f(C) = \{0,1,4\}$

**مثال:**

إذا كانت $f : \Re - \{0\} \to \Re$ دالة بحيث $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، و $C = (0، 1]$ فإن:

$$f(C) = \{y \in \Re : 1 \le y \le \infty\}$$

**مبرهنة:**

ليكن $f : X \to Y$ دالة وليكن كل من $A, B$ مجموعة جزئية من المجموعة $X$ .

إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $f(A) \subseteq f(B)$

**البرهان:**

نفرض أن $y \in f(A)$

من تعريف الصورة المباشرة نستنتج أنه يوجد $x \in A$ بحيث $y = f(x)$

وبما أن $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ ولذلك فإن $f(x) \in f(B)$ أي أن $y \in f(B)$

وهذا يؤدي إلى أن $f(A) \subseteq f(B)$

**مبرهنة:**

ليكن $f : X \to Y$ دالة وليكن كل من $A, B$ مجموعة جزئية من المجموعة $X$ .

إذا كانت $A = B$ فإن $f(A) = f(B)$

**البرهان:**

يترك تمرين للطالب.

**ملاحظة:**

إذا كان $f(A)=f(B)$ فليس من الضروري أن يكون $A=B$ كما هو موضح بالمثال التالي:

**مثال:**

إذا كانت $f:Z\to\Re$ دالة حيث $f(x)=x^2+1$ ، $A=\{-3,0,2\}$ ، $B=\{-2,0,3\}$ فإن:

$$f(A)=\{10,1,5\}\ ,\ f(B)=\{5,1,10\}$$

لاحظ أن $f(A)=f(B)$ بينما $A\neq B$

**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة ، وكل من $C,D$ مجموعة جزئية من $A$ فإن:

1) $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$

2) $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$

3) $f(C)-f(D)\subseteq f(C-D)$

**البرهان:**

1) نفرض أن $y\in f(C\cup D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x\in C\cup D$ بحيث $y=f(x)$

$$\Rightarrow \exists x\in C\, or\, \exists x\in D: y=f(x)$$

فإذا كان $x\in C$ فإن $f(x)\in f(C)$ وبالتالي فإن $y\in f(C)$ وهذا يعني أن $y\in f(C)\cup f(D)$

وإذا كان $x\in D$ فإن $f(x)\in f(D)$ وبالتالي فإن $y\in f(D)$ وهذا يعني أن $y\in f(C)\cup f(D)$

وهذا يثبت أن $f(C\cup D)\subseteq f(C)\cup f(D)$ ............(1)

الآن نفرض أن $y\in f(C)\cup f(D)$ وهذا يعني أن $y\in f(C)$ أو $y\in f(D)$

فإذا كان $y\in f(C)$ فإنه يوجد $x_1\in C$ بحيث $f(x_1)=y$

وبما $x_1\in C\subseteq C\cup D$ فإن $f(x_1)\in f(C\cup D)$ وبالتالي فإن: $y\in f(C\cup D)$

أما إذا كان $y\in f(D)$ فإنه يوجد $x_2\in D$ بحيث $f(x_2)=y$

وبما $x_2\in D\subseteq C\cup D$ فإن $f(x_2)\in f(C\cup D)$ وبالتالي فإن: $y\in f(C\cup D)$

وهذا يثبت أن $f(C)\cup f(D)\subseteq f(C\cup D)$ ............(2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$

2) نفرض أن $y\in f(C\cap D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x\in C\cap D$ بحيث $y=f(x)$

$$\Rightarrow x\in C\ and\ x\in D: y=f(x)$$

أي أن $f(x)\in f(C)$ و $f(x)\in f(D)$ وبالتالي فإن $y=f(x)\in f(C)\cap f(D)$

وهذا يثبت أن $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$

**لاحظ أن** $f(C)\cap f(D)\not\subseteq f(C\cap D)$ كما هو موضح بالمثال التالي:

**مثال**

ليكن $f:A\to B$ دالة معرفة بالقاعدة $f(x)=5$ حيث $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{5\}$ وبفرض أن $C=\{1,2\}$ ، $D=\{3\}$ فإن $f(C\cap D)=f(\phi)=\phi$ بينما $f(C)=f(D)=\{5\}$

أي أن $f(C)\cap f(D)=\{5\}$

نلاحظ أن $f(C)\cap f(D)\not\subseteq f(C\cap D)$

3) نفرض أن $y\in f(C)-f(D)$ وهذا يعني أن $y\in f(C)$ ،و $y\notin f(D)$

وبما أن $y\in f(C)$ فإنه يوجد $x\in C$ بحيث $y=f(x)$

وبما أن $y\notin f(D)$ فإن $f(x)\notin f(D)$ وعليه $x\notin D$

أي أن $\exists x\in C, x\notin D: y=f(x)$ أي أن $y\in f(C-D)$ وهذا يبرهن أن:

$$f(C)-f(D)\subseteq f(C-D)$$

**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة أحادية وكل من $C,D$ مجموعة جزئية من $A$ فإن:

$$f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$$

**البرهان:**

أولاً: بنفس الطريقة في المبرهنة السابقة يمكن برهنة أن: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$

ثانياً: لبرهنة أن $f(C)\cap f(D)\subseteq f(C\cap D)$ نفرض أن $y\in f(C)\cap f(D)$ أي أن:

$y\in f(C)$ ،و $y\in f(D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x_1\in C$ , $x_2\in D$ حيث $f(x_1)=y=f(x_2)$

وبما أن $f$ دالة أحادية فإن $x_1=x_2$

إذاً $x_1\in C\cap D$ وبالتالي فإن $f(x_1)\in f(C\cap D)$ أي أن $y\in f(C\cap D)$

وهذا يبرهن أن $f(C)\cap f(D)\subseteq f(C\cap D)$

من أولاً وثانياً نستنتج أن: $f(C)\cap f(D)=f(C\cap D)$

**مبرهنة:**

ليكن كل من $X,Y$ مجموعة وليكن $f:X\to Y$ دالة وليكن $f^*$ علاقة من $P(X)$ إلى $P(Y)$ معرفة كالتالي: $f^*=\{(A,B)\in P(X)\times P(Y): f(A)=B\}$ فإن $f^*:P(X)\to P(Y)$ تكون دالة.

**البرهان:**

أولاً سنبرهن أن لكل عنصر $A$ في $P(X)$ توجد صورة في $P(Y)$

من تعريف الصورة المباشرة نستنتج أنه إذا كان $A\subseteq X$ فإن $f(A)\subseteq Y$ وهذا يعني أن $f(A)\in P(Y)$

وبفرض أن $f(A)=B$ فإنه لكل $A\in P(X)$ يوجد $B\in P(Y)$ بحيث $(A,B)\in f^*$

ثانياً سنبرهن أن صورة العنصر $A$ تكون وحيدة

نفرض أن $(A,B_1)\in f^*$ ، و $(A,B_2)\in f^*$ أي أن $f(A)=B_1$ , $f(A)=B_2$

ولكن المجموعة $f(A)$ تتعين بصورة وحيدة لأن $f$ دالة ولذلك فإن $B_1=B_2$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $f^*:P(X)\to P(Y)$ تكون دالة

**تمرين:**

ليكن $f:X\to Y$ دالة ،وليكن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مفهرسة جزئية من $X$ برهن أن:

1) $f(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ 2) $f(\bigcap_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}f(A_i)$

**تعريف:**

ليكن $f:A\to B$ دالة ولتكن $D$ مجموعة جزئية من $B$ فإن مجموعة جميع العناصر في $A$ التي تنتمي صورة كل عنصر منها إلى $D$ تسمى المجموعة العكسية لـ $D$ بفعل الدالة $f:A\to B$ ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(D)$ أي أن $F^{-1}(D)=\{x\in A \ni f(x)\in D\}$

**مثال:**

إذا كانت $f:\Re\to\Re$ دالة بحيث $f(x)=x^2+2$ فإن $f^{-1}(11)=\{x\in\Re: x^2+2=11\}=\{-3,3\}$

وكذلك $f^{-1}(\{17,38\})=\{x\in\Re: f(x)\in\{18,38\}\}=\{x\in\Re: x^2+2=18 \text{ or } x^2+2=38\}$

أي أن $f^{-1}(\{17,38\})=\{-4,4,-6,6\}$

**مبرهنة:**

ليكن $f:X\to Y$ دالة وليكن كل من $C,D$ مجموعة جزئية من $Y$ .

إذا كان $C=D$ فإن $f^{-1}(C)=f^{-1}(D)$

**البرهان:**

نفرض أن $C=D$ ونفرض أن $x\in f^{-1}(C)$

من تعريف الصورة العكسية نستنتج أن $f(x)\in C$

وبما أن $C=D$ فإن $f(x)\in D$ أي أن: $x\in f^{-1}(D)$

وبالتالي فإن (1)................. $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$

وبالعكس نفرض أن $C=D$ ونفرض أن $x\in f^{-1}(D)$

من تعريف الصورة العكسية نستنتج أن $f(x)\in D$ وبما أن $C=D$ فإن $f(x)\in C$ أي أن: $x\in f^{-1}(C)$

وبالتالي فإن (2)................. $f^{-1}(D)\subseteq f^{-1}(C)$

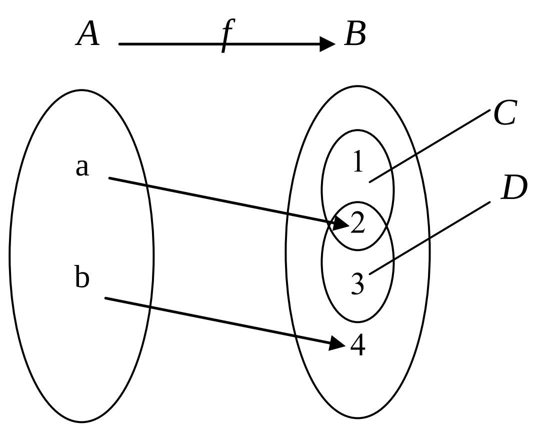
من (1) و(2) نستنتج أنه إذا كان $C=D$ فإن $f^{-1}(C)=f^{-1}(D)$

**ملاحظة:**

إذا كان $f^{-1}(C)=f^{-1}(D)$ فليس من الضروري أن يكون $C=D$ كما في المثال التالي:

**مثال:**

الشكل التالي يوضح الدالة $f:A\to B$ حيث $f^{-1}(C)=f^{-1}(D)$ ولكن $C\neq D$



**مبرهنة:**

إذا كانت $f:A\to B$ دالة وكلا من $C,D$ مجموعة جزئية من $B$ فإن:

1) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

2) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

3) $f^{-1}(C)-f^{-1}(D)=f^{-1}(C-D)$

**البرهان:**

1) نفرض أن $x\in f^{-1}(C\cup D)$ وهذا يعني أن $f(x)\in C\cup D$ أي أن $f(x)\in C$ أو $f(x)\in D$

وهذا يؤدي إلى أن $x\in f^{-1}(D)$ أو $x\in f^{-1}(C)$ أي أن $x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

وبالتالي نستنتج أن (1)............ $f^{-1}(C\cup D)\subseteq f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

وبالعكس نفرض أن $x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$ أي أن $x\in f^{-1}(D)$ أو $x\in f^{-1}(C)$

وهذا يؤدي إلى أن $f(x)\in C$ أو $f(x)\in D$ أي أن $f(x)\in C\cup D$ وبالتالي فإن $x\in f^{-1}(C\cup D)$

وبالتالي نستنتج أن (2)............ $f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\subseteq f^{-1}(C\cup D)$

من (1) و(2) نجد أن: $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

برهان الفقرتين 2) ، 3) يترك تمرين للطالب.