الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

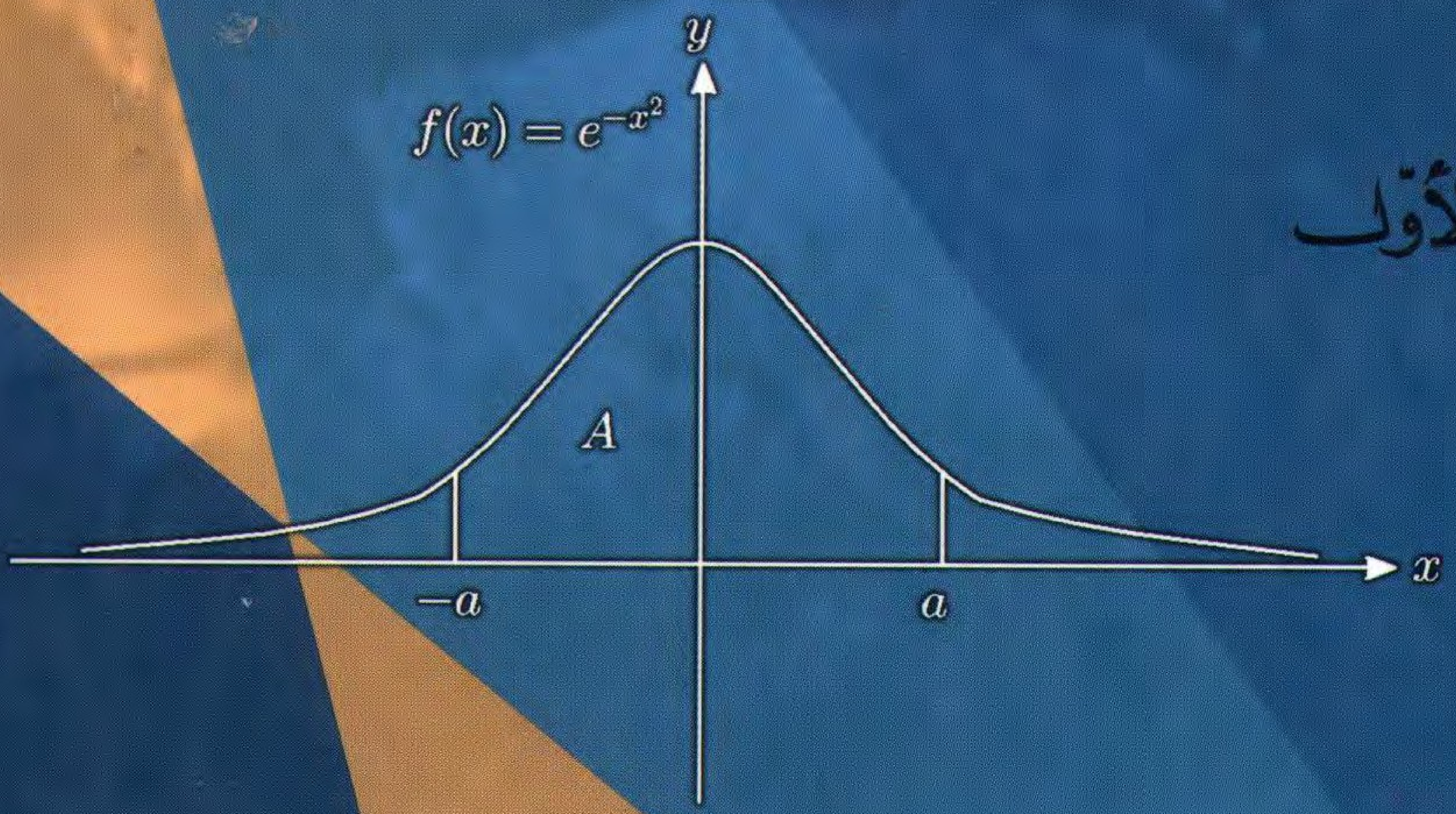
الطّبعة الثالثة

التّفاضل والتّكامل

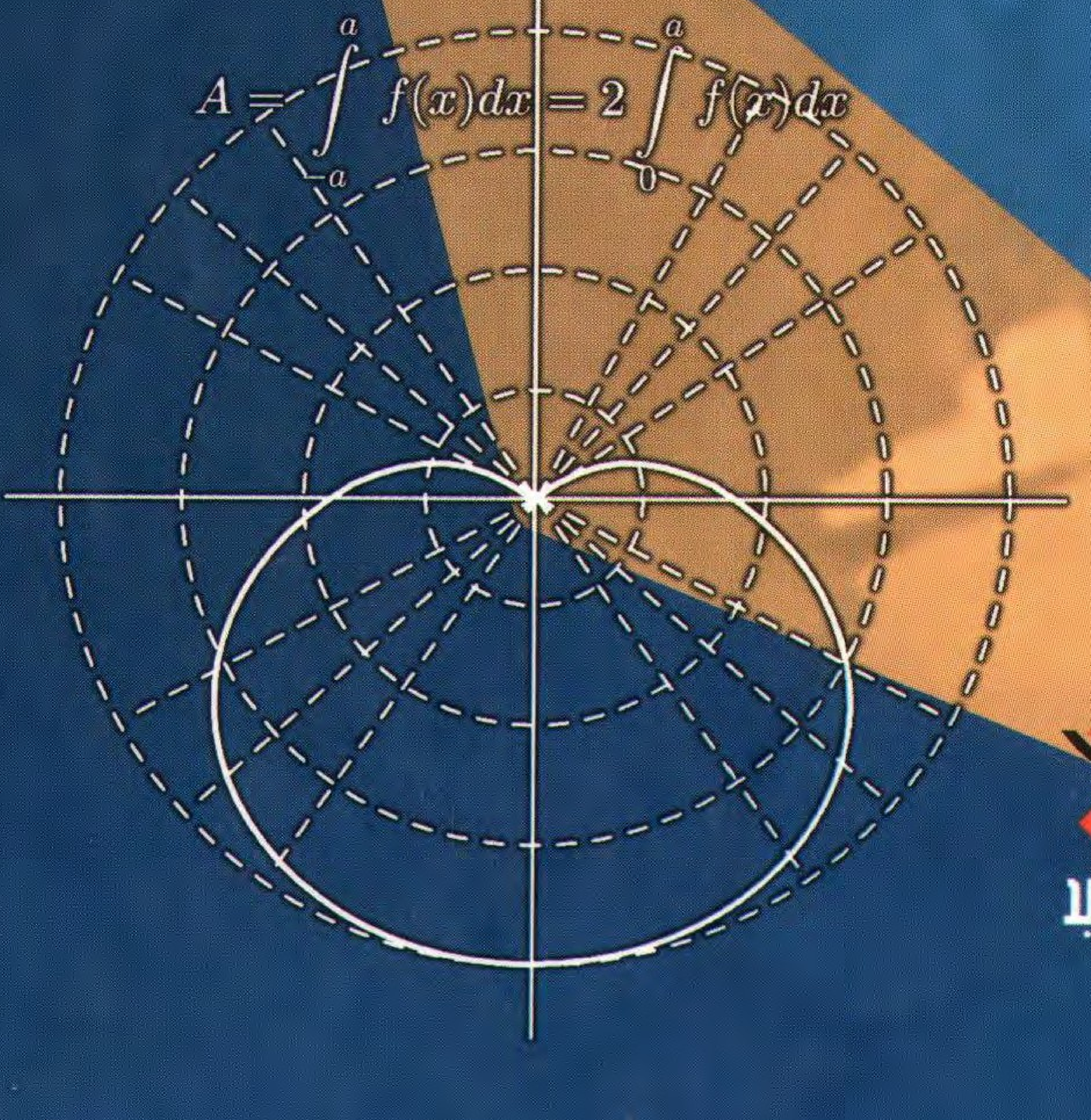
تأليف

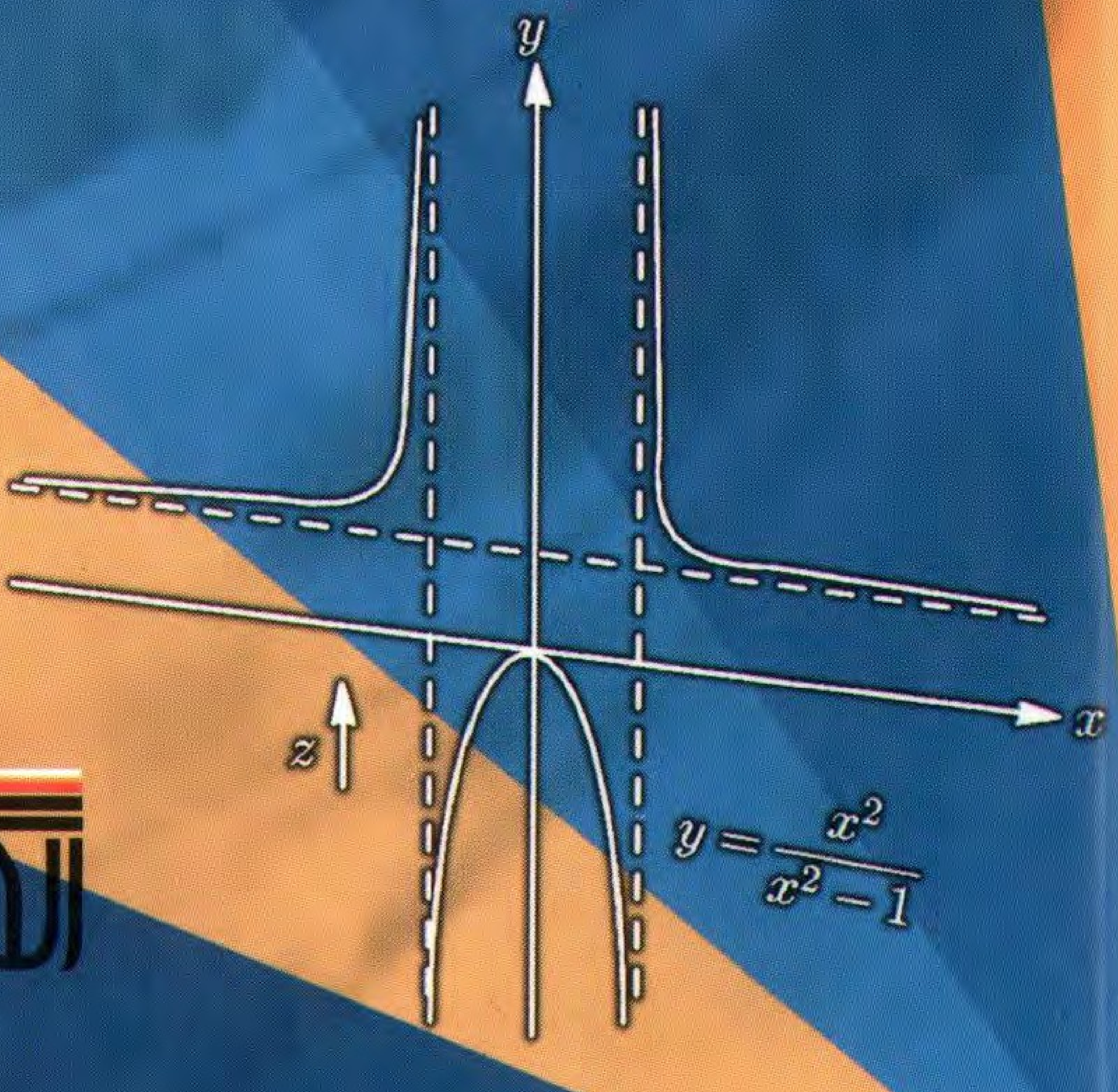
د. رمضان محمّد جهيمة
كلّية العلوم - جامعة الفاتح

د. أحمد عبد العالي هبّ الرّيح
كلّية العلوم بمصراتة - جامعة ناصر



الجزء الأول





الكتاب الجديد

التفاضل والتكامل

تأليف

د. رمضان محمد جهيمة
كلية العلوم - جامعة الفاتح

د. أحمد عبد العالي هب الريح
كلية العلوم بمصراتة - جامعة ناصر

الطبعة الثالثة

الجزء الأول

دار الكتاب الجديد المتحدة

الطبعة الأولى

كانون الثاني/يناير/أي النار 2002 إفرنجي

رقم الإيداع المحلي 4742/ 2001

ردمك (رقم الإيداع الدولي) ISBN 9959-29-030-1

دار الكتب الوطنية/ بنغازي ـ ليبيا

تصميم الغلاف: نقوش

دار الكتاب الجديد المتحدة

أوتوستراد شاتيلا ـ الطيونة، شارع هادي نصر الله ـ بناية فرحات وحجيج، طابق 5،
خليوي: 933989 ـ 03 ـ هاتف وفاكس: 542778 ـ 1 ـ 00961
بيروت ـ لبنان

توزيع دار أويــا للطباعة والنشر والتوزيع والتنمية الثقافية: زاوية الدهماني، السوق الأخضر، ص.ب: 13498، هاتف: 4448750 ـ 4449903 ـ 3338571. 21 . 00218 ـ فاكس: 4442758 . 21 . 00218، طرابلس ـ الجماهيرية العظمى

المحتويات

الفصل الثالث
النهايات والاتصال

الفصل الرابع
المشتقات

الفصل الخامس
تطبيقات على المشتقات

الفصل السادس
التكامل

الفصل السابع
الدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل الثامن
معكوس الدوال المثلثية

الفصل التاسع
الدوال الزائدية

الفصل العاشر
طرق التكامل

الفصل الحادي عشر
الإحداثيات القطبية

الفصل الثاني عشر
تطبيقات على التكامل

الفصل الثالث عشر
الأعداد المركبة

مقدمة الطبعة الأولى

يتعرض هذا الكتاب (التفاضل والتكامل) لدراسة مفصلة لموضوعي التفاضل والتكامل، كما يستدل على ذلك من عنوانه. وبالإضافة إلى ذلك تعرضنا لبعض المواضيع الأخرى التي تعتبر أساساً لابد من الاعتماد عليه.

إن الأسلوب المتبع في عرض المواضيع - في هذا الكتاب - هو اشتقاق القانون أو الصيغة، ثم التعود على استخدام ذلك في شكل أمثلة محلولة، وفي بعض الأحيان استخدام ما قد تم تعلمه في حل المسائل التطبيقية التي تظهر في العلوم المختلفة.

صمم الجزء الأول من هذا الكتاب لتغطية مقررات الفصلين: الأول والثاني (السنة الدراسية الأولى) للكليات الجامعية التالية: العلوم الأساسية، الهندسة، الزراعة، الصيدلة، والكليات الأخرى التي تدرس بها مادة التفاضل والتكامل بما في ذلك المعاهد المهنية.

أما الجزء الثاني من هذا الكتاب... فقد صمم لتغطية مقررات الفصل الثالث والرابع (السنة الثانية) للكليات والمعاهد المذكورة أعلاه.

هدفنا من تدريس هذا الكتاب هو التعود على الكتابة العلمية الدقيقة للأفكار العلمية، ووضع هذه الأفكار في قالب يساعد على تطبيقها في العلوم التطبيقية، حتى يتم توضيح العلاقة المتينة بين الرياضيات وباقي العلوم الأخرى؛ لاقتناعنا بأن للرياضيات الدور الأكبر في فهم ودراسة كل ما يدور في الطبيعة. وفي هذا الصدد ... قال جاليلو " كُتب كتاب الطبيعة برموز رياضية ". وأخذنا في

الاعتبار تغطية الموضوعات، التي يحتاجها الطالب في المقررات الجامعية المبنية على هذا المقرر.

حاولنا في البداية بقدر الإمكان مراجعة بعض الأفكار التي تكون ضرورية وذات علاقة بموضوعات هذا الكتاب، كما وضعنا بعين الاعتبار توضيح الأفكار بإعطاء القدر الكافي من الأمثلة التوضيحية، واستخدام الرسم للتوضيح كلما أمكن ذلك، بل خصصنا بعض الأجزاء من هذا الكتاب لكيفية الرسم باستخدام المعلومات التي درست في أجزاء سابقة من هذا الكتاب.

يشمل هذا الكتاب عديداً من التمارين، التي لها دور كبير في تعلم الموضوع المطروح؛ لأننا نؤمن إيماناً كاملاً بأن تعلم أي موضوع في الرياضيات لا يتم بعرض المحاضرة وحفظ القوانين فقط، بل لابد من التطبيق، وذلك بحل العديد من التمارين، فتعلم الرياضيات بدون تمارين يشبه - إلى حد ما - تعلم السباحة بدون الغطس في الماء، وبناءً على ذلك ... فقد أخذنا في الاعتبار تعلم الموضوع خطوة بخطوة، حتى نبني لدى القارئ الثقة بالنفس، وتعلم المواضيع الرياضية بطريقة علمية بعيدة عن الارتجال واتخاذ القرار السريع.

في النهاية ... نشكر كل الذين قدموا لنا يد العون والمساعدة، ونرجو أن يكون هذا الكتاب محاولة لإظهار المكتبة العربية في مجال الرياضيات في شكل أحسن.

يوليو 1991

المؤلفان

مقدمة الطبعة الثالثة

لقد سررنا بنفاد الطبعة الثانية من هذا الكتاب، مما يدل على أنه قد أدى الدور المطلوب منه في مساعدة الطالب على فهم مقررات التفاضل والتكامل المعروضة في الكليات الجامعية والمعاهد العليا.

شجعنا ذلك على أن نقدم الكتاب في طبعته الثالثة التي فيها تم الحفاظ على المواضيع الرئيسية في الكتاب، وإن كنّا قد أضفنا لها العديد من الأمثلة المحلولة والتمارين، كما أضفنا للفصل السابع بند 7.5 الخاص بالأشكال غير المحددة، وفي نهاية الجزء الأول من هذا الكتاب تمت إضافة فصل خاص بالأعداد المركبة لعله يساعد القارئ في هذا السياق، كما تم تعديل الرسوم البيانية الموجودة في هذا الكتاب بحيث تظهر في شكل أحسن وأكثر وضوحاً مما يساعد على عملية استيعاب المواضيع المطروحة.

شكرنا وتقديرنا للأخوة أعضاء هيئة التدريس في الجامعات والمعاهد العليا والمؤسسات العلمية العربية على اقتراحاتهم البناءة التي أخذت بعين الاعتبار، وعلى تبنيهم هذا الكتاب بجزئيه كتاباً منهجياً لتغطية مقررات التفاضل والتكامل المعروضة لدى مؤسساتهم العلمية.

أخيراً نشكر دار الكتاب الجديد المتحدة عل الاهتمام والعناية والمجهود الكبير في عملية الجمع المرئي وإخراجه بهذه الصورة.

نأمل أن يكون عملنا هذا إضافة إلى المكتبة العربية في مجال الرياضيات، وأن ينال رضا الأخوة المختصين.

المؤلفان

د. رمضان محمد جهيمة

د. أحمد عبد العالي هب الريح

1999 /9 /1

الفصل الأول

الأعداد الحقيقية

Real Numbers

1.1 خط الأعداد الحقيقية

الأعداد الطبيعية (Natural Numbers)

$$1, 2, 3, , ...$$

وهي التي تستخدم في العد، ويمكن الحصول على أي عدد منها بجمع العدد 1 إلى نفسه عدداً من المرات، وهي أول نظام عددي عرفه الإنسان، ويرمز لها عادة بالرمز $\mathbb{N}$، أي أن:

$$\mathbb{N}= \{1, 2, 3, ...\}$$

وهي مجموعة غير منتهية مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب.

الأعداد الصحيحة (Integer Numbers)

$$0, \pm 1, 2, \pm 3, ...$$

وهي الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر وسالب الأعداد الطبيعية. وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح.

ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز I، أي أن:

$$I = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$$

وهي كذلك مجموعة غير منتهية.

الأعداد القياسية (Rational Numbers):

وهي الأعداد التي على شكل $\frac{a}{b}$ حيث a, b يمثلان عددين صحيحين، و$b \neq 0$.
ويرمز لمجموعة الأعداد القياسية بالرمز $\mathbf{Q}$، أي أن:

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in I, b \neq 0\right\}$$

نلاحظ أن أي عدد صحيح a يكون العدد القياسي $\frac{a}{1}$.

العدد القياسي: إما أن يكون عدداً عشريّاً منتهياً مثل 0.243، أو عدداً عشريّاً غير منته ومتكرر المقاطع مثل:

$$\frac{2}{7} = 0.28571428571..., \frac{3}{11} = 0.272727..., \frac{1}{3} = 0.333...$$

الأعداد غير القياسية (Irrational Numbers):

العدد غير القياسي، هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{a}{b}$، حيث a وb يمثلان عددين صحيحين. أي أن الأعداد غير القياسية، هي الأعداد الحقيقية التي لا تكون أعداداً قياسية. يرمز لمجموعة الأعداد غير القياسية بالرمز $\mathbf{Q}^c$، أي أن:

$$\mathbf{Q}^c = \{r : r \neq \frac{a}{b}, a, b, \in I\}$$

بعض الأمثلة على الأعداد غير القياسية: $\pi = 3.14159265...$، $\sqrt{2} = 1.41421356...$ و $\sqrt{3} = 1.73205081$.

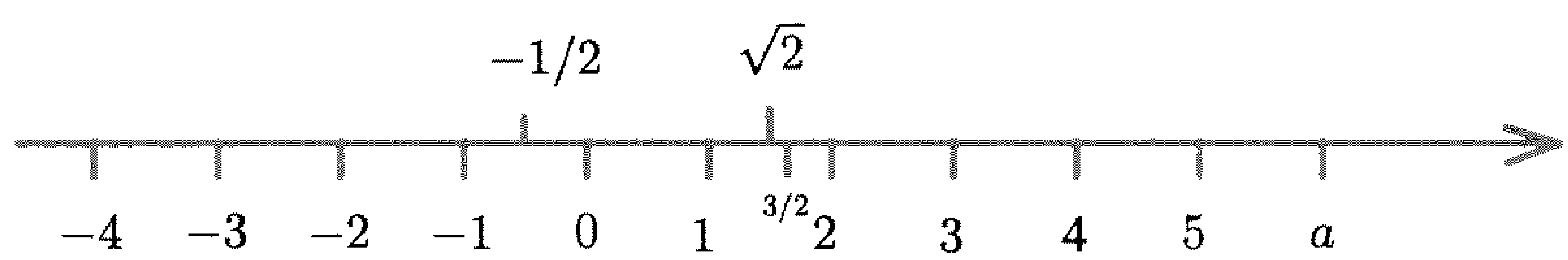
الأعداد الحقيقية (Real Numbers):

الأعداد الحقيقية هي كل الأعداد القياسية وغير القياسية، ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$، أي أن:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$$

تمثَّل الأعداد الحقيقية بنقط على خط أفقي، حيث تقابل كل عدد حقيقي نقطة واحدة فقط، والعكس صحيح كذلك، أي أن كل نقطة على الخط الأفقي يقابلها عدد حقيقي واحد فقط.

نتخير أولاً نقطة 0، يقابلها العدد صفر 0، وعلى يمينها ـ وبمسافات متساوية التباعد بعضها عن بعض ـ تمثِّل النقط الأعداد الصحيحة الموجبة، وعلى يسار النقطة 0 ـ وبمسافات متساوية التباعد بعضها عن بعض ـ تمثِّل النقط الأعداد الصحيحة السالبة، ويتم تمثيل باقي الأعداد الحقيقية. (أنظر اشكل 1.1).



الشكل 1.1

العدد a المناظر للنقطة A يسمى إحداثيّ (Coordinate) النقطة A، ويسمى هذا الخط الأفقي خط الأعداد الحقيقية (Real Line).

من الملاحظ أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحية I، وهي بدورها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد القياسية $\mathbb{Q}$، والأخيرة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، أي أن:

$$\mathbb{N} \subseteq I \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

وليس بين مجموعتي الأعداد القياسية وغير القياسية أي عدد مشترك. الشكل (2.1) يوضح هذه الفكرة.

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية، فإن:

1) $a+b$ عدد حقيقي.

2) $a.b$ عدد حقيقي.

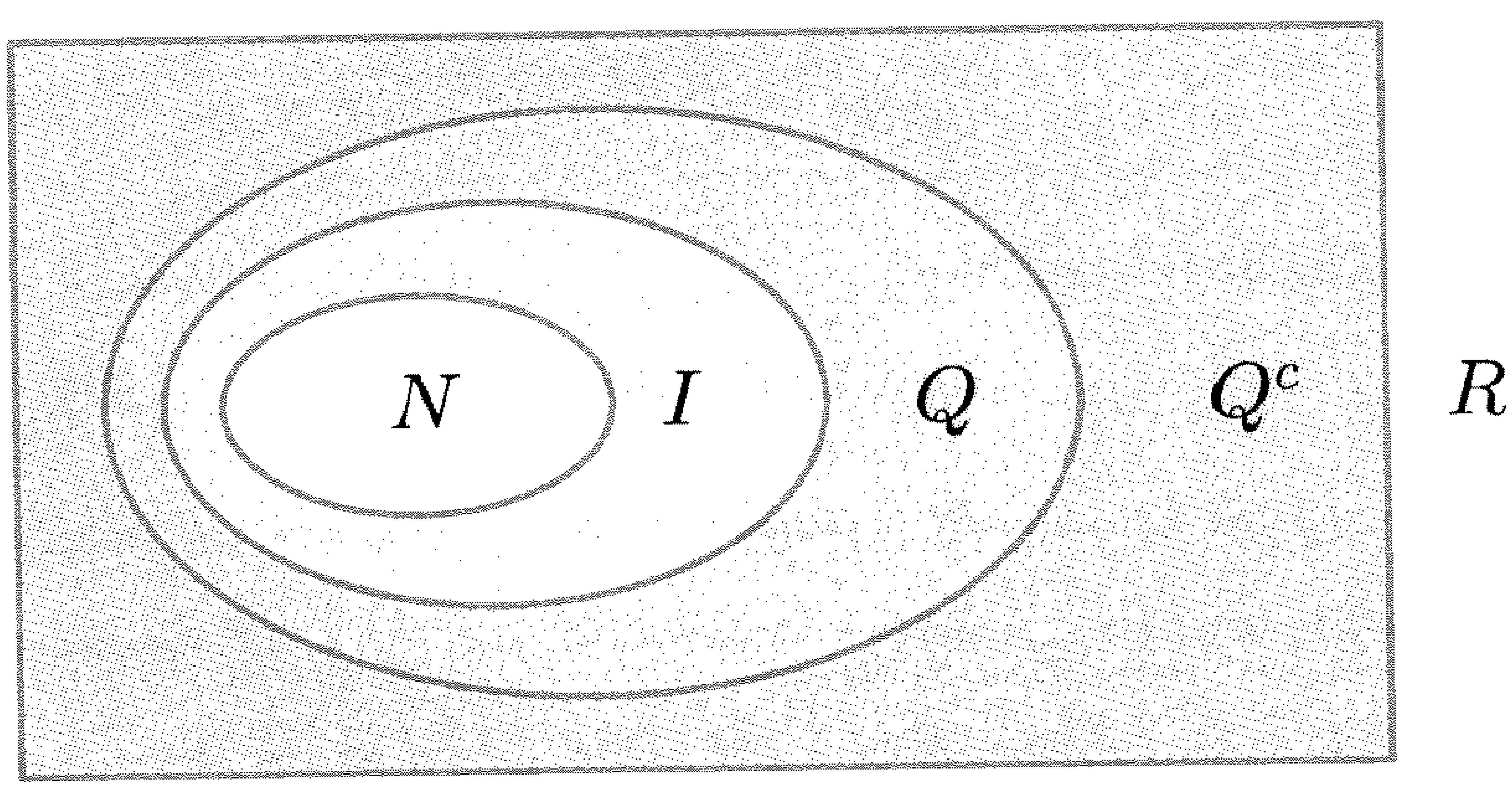
3) $\frac{a}{b}$ (حيث $b \neq 0$) عدد حقيقي.

4) 0 عدد حقيقي، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع.

5) 1 عدد حقيقي، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب.

6) لكل عدد حقيقي a معكوس جمعي $(-a)$.

7) لكل عدد حقيقي a لا يساوي الصفر معكوس ضربي $\left(\frac{1}{a}\right)$.



شكل 2.1

تمارين 1.1

في التمارين التالية، ضع علامة صح ($\surd$) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة خطأ ($\times$) أمام العبارة الخاطئة:

1) $\sqrt{2}$ عدد قياسي.

2) $1-\sqrt{3}$ عدد غير قياسي.

3) $\frac{10}{3}$ عدد غير قياسي.

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عدد غير قياسي.

5) العدد الحقيقي إما أن يكون عدداً قياسياً، وإما عدداً غير قياسي.

6) لكل عدد صحيح معكوس ضربي في مجموعة الأعداد الصحيحة.

7) لكل عدد طبيعي معكوس جمعي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

8) قد لا يكون العدد الحقيقي عدداً صحيحاً، ولكن لا بد أن يكون عدداً قياسياً.

9) بين كل عددين صحيحين متتالين عدد لانهائي من الأعداد القياسية.

10) لكل عدد صحيح غير صفري معكوس ضربي.

11) $\mathbb{Q}^c \supseteq \mathbb{N}$.

2.1 المتباينات (Inequalities)

إذا كان a,b عددين حقيقيين، وكانت النقطة المقابلة للعدد a تقع على يمين النقطة المقابلة للعدد b على خط الأعداد، فإننا نقول إن العدد a أكبر من العدد b، ونكتب ذلك على شكل $a > b$، ويكافىء ذلك قولنا إن العدد b أصغر من العدد a.

الجمل: $a > b$ ، $a \geq b$ (العدد a أكبر من أو يساوي العدد b) $a < b$ و$a \leq b$ تسمى متباينات، وتسمى الإشارات $>$، $\leq$، $<$ و$\geq$ إشارات المتباينات.

خواص المتباينات:

إذا كانت a,b,c أعداداً حقيقية، فإن:

1) $b < a$ أو $a < b$ أو $b = a$.

2) $b < a$ و$c < b$ يؤدي إلى أن $c < a$.

3) $b < a$ يؤدي إلى أن $b + c < a + c$ لأي عدد حقيقي c

4) $b < a$ و$c > 0$ يؤدي إلى أن $bc < ac$.

5) $b < a$ و$c < 0$ يؤدي وأن $bc > ac$.

الإشارة $\geq$ تعني أكبر من أو يساوي، والإشارة $\leq$ تعني أصغر من أو يساوي.

تكون كل الخواص السابقة صحيحة إذا وضعنا $\leq$ بدلاً من $<$.

مثال 1

أوجد حلول المتباينة $2x + 1 > 2$.

الحـــل

بإضافة (-1) للطرفين، يكون $2x + 1 - 1 > 2 - 1$، إذن $2x > 1$

وبالضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$، نحصل على $x > \frac{1}{2}$

أي أن أي عدد أكبر من $\frac{1}{2}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

مثـــال 2

إذا كان $1 - 3x > 2$، أوجد حلول هذه المتباينة.

الحـــل

بإضافة (-1) للطرفين، يكون $1 - 3x - 1 > 2 - 1$

إذن $-3x > 1$

وبالضرب في $\left(-\frac{1}{3}\right)$، يكون لدينا $x < -\frac{1}{3}$

(لاحظ أن إشارة المتباينة تغيرت في هذه الحالة)

أي أن أي عدد أصغر من $-\frac{1}{3}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

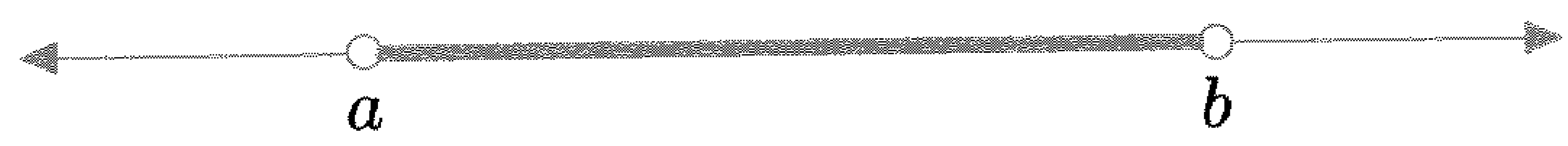
الفترات (Intervals)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ وكان $a < b$، فإن:

1) الفترة المفتوحة (a,b): هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بحيث لا يكون العددان a وb في هذه المجموعة.

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

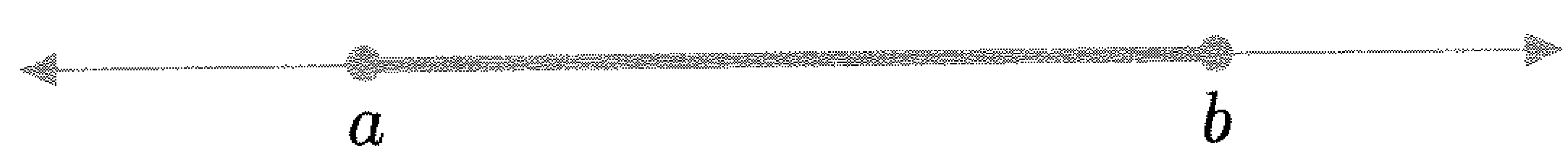
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



2) الفترة المغلقة $[a,b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك a وb.

$$[a,b]=\{x : a\leq x\leq b\}$$

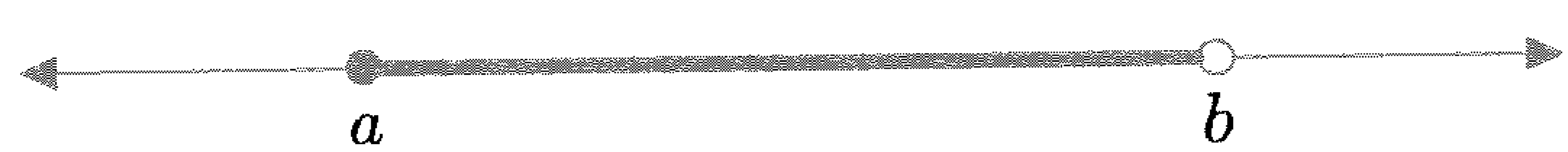
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



3) الفترة نصف المفتوحة $[a,b)$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك العدد a.

$$[a,b)=\{x : a\leq x< b\}$$

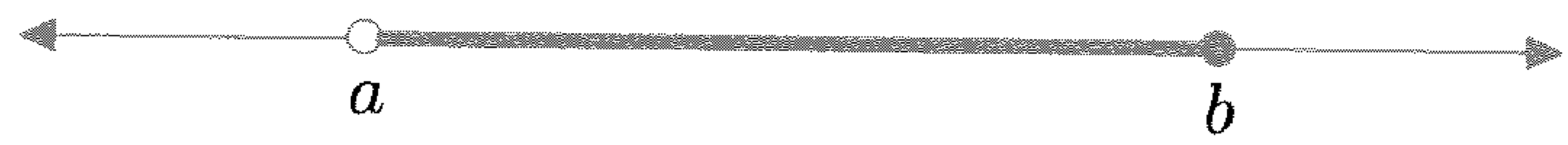
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



4) الفترة نصف المفتوحة $(a,b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك العدد b.

$$(a,b]=\{x : a< x\leq b\}$$

وتمثل على خط الأعداد كالآتي:

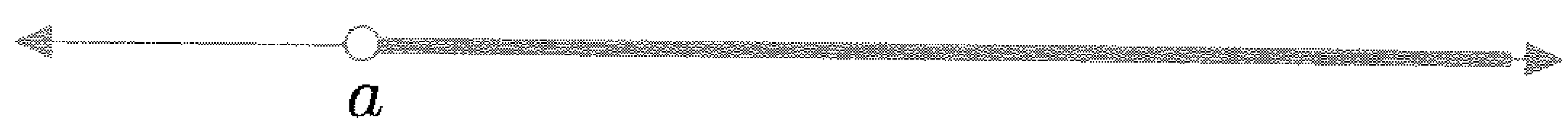


هذه الفترات تسمى الفترات المحدودة. أما الفترات غير المحدودة، فيمكن تصنيفها كالآتي:

1) $(a, +\infty)$ وهي كل الأعداد الحقيقية x، الأكبر من العدد a.

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}$$

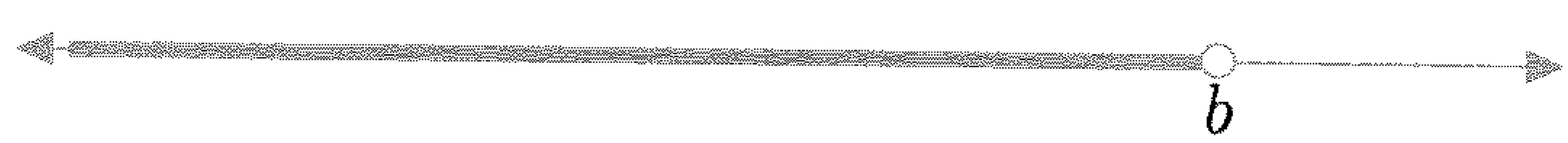
وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



2) $(-\infty, b)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأصغر من العدد b.

$$(-\infty, b) = \{x : x < b\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



3) $[a, +\infty)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأكبر من a أو تساويه.

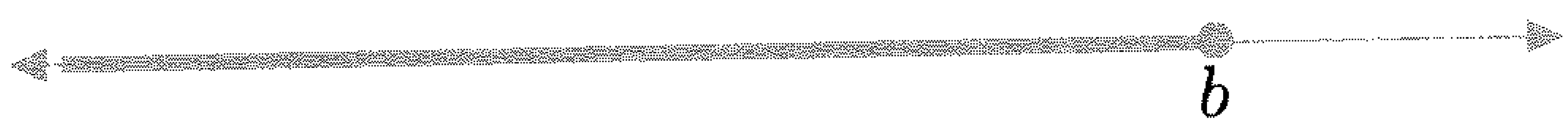
$$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:

4) $(-\infty, b]$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأصغر من b أو تساويه.

$$(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



يجب ملاحظة أن الرمزين $+\infty$ و$-\infty$ ليسا من ضمن الأعداد الحقيقية، ولهذا نستطيع كتابة الأعداد الحقيقية على الشكل: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

مثـــال 3

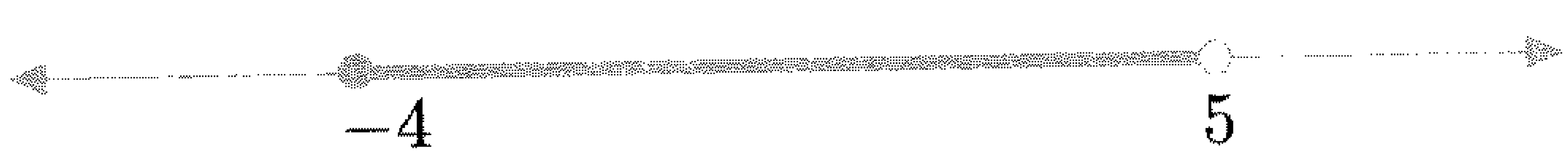
أوجد مجموعة الحل، ومثّلها بيانياً على خط الأعداد للمتباينة $-11 \le 2x - 3 < 7$.

الحـــل

بإضافة (3) إلى طرفي المتباينة، نحصل على: $-8 \le 2x < 10$

وبالقسمة على (2)، نحصل على $-4 \le x < 5$

وبذلك تكون مجموعة الحل الفترة $[-4, 5)$ (أنظر الشكل 3.1).



شكل 3.1

مثـال 4

أوجد حل المتباينة $\frac{1}{x} < 4$.

الحـل

الحالة الأولى: إذا كان $x > 0$

بضرب المتباينة في x، نجد أن: $1 < 4x$ أو $x > \frac{1}{4}$

الحالة الثانية: إذا كان $x < 0$

بضرب المتباينة في x، نجد أن: $1 > 4x$ أو $x < \frac{1}{4}$

ولكن $x < 0$، وبذلك يكون الحل في الحالة الثانية هو $x < 0$، إذن مجموعة الحل هي: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

مثـال 5

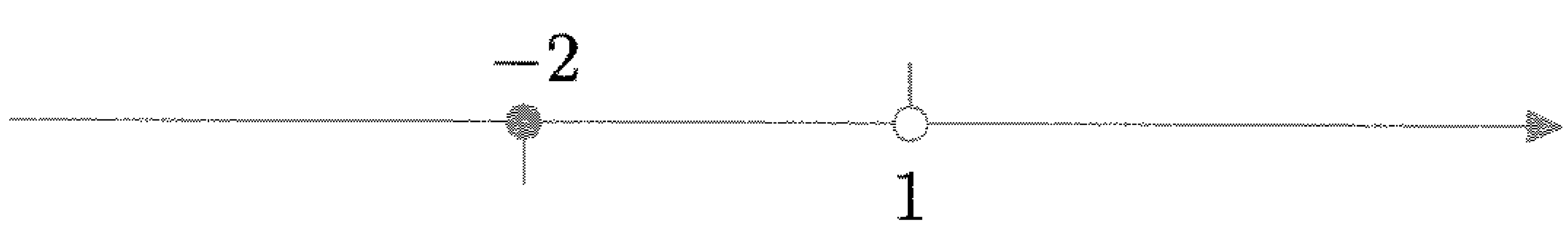
أوجد مجموعة الحل إذا كان $x^2 + x - 2 > 0$.

الحـل

يمكن كتابة $x^2 + x - 2$ على شكل $(x+2)(x-1)$

نلاحظ أن $(x+2)(x-1) > 0$ يعني أن المقدارين $(x+2)$ و$(x-1)$ إما أن يكونا موجبين معاً وإما سالبين معاً.

إشارة $(x-1)$ − − − − − − − − − − − − − − + + + + + + + + +



إشارة $(x+2)$ − − − − − − + + + + + + + + + + + + + +

من الرسم، يتضح أن لهما نفس الإشارة في الفترتين $(1,\infty)$ و$(-\infty,-2)$

إذن مجموعة الحل: $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

مثـــال 6

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{3x+2}{2x-7} \leq 0$.

الحـــل

الحالة الأولى: إذا كان $2x-7>0$، يعني ذلك أن $x > \frac{7}{2}$.

بضرب المتباينة في $2x-7$، فإن:

$3x+2 \leq 0$، وهذا يؤدي إلى أن $x \leq -\frac{2}{3}$

مما يؤدي إلى تناقض (لماذا؟).

الحالة الثانية: إذا كان $2x-7<0$، ومعنى ذلك أن $x < \frac{7}{2}$.

بضرب المتباينة في $2x-7$، فإن:

$3x+2 \geq 0$، وهذا يؤدي إلى أن $x \geq -\frac{2}{3}$

إذن مجموعة الحل هي: $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right)$

تمارين 2.1

في التمارين من 1 إلى 9، أوجد مجموعة الحل في كل حالة من الحالات التالية، ومثّلها على خط الأعداد:

1) $-2 < 3x + 4 < x^2$

2) $2 - 3x \geq 1$

3) $x^2 - 2x - 3 < 0$

4) $\dfrac{x-1}{2x+3} < 0$

5) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

6) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 5$

7) $x^2 + 6x + 1 \leq 0$

8) $3x + 4 < 6$

9) $11 < x^2 + 6x + 4 < 20$

في التمارين من 10 إلى 15، مثّل بيانيًّا المجموعات التالية:

10) $\{(x, y) : x > 0, y > 2\}$

11) $\{(x, y) : x^{-1} < 0, y < -1\}$

12) $\{(x, y) : x^2 \geq 0\}$

13) $\{(x, y) : x + 2y < -1\}$

14) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

15) $\{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$

3.1 القيمة المطلقة (Absolute Value)

يرمز للقيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x بالرمز $|x|$، ويعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$$

من التعريف، نلاحظ أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي، لا بد أن تكون أكبر من الصفر أو تساويه، أي أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي تكون موجبة أو صفراً.

هندسيا، القيمة المطلقة للعدد x، هي المسافة بين النقطة A التي إحداثيها x ونقطة الأصل 0.

إذا كانت A وB نقطتين على خط الأعداد بإحداثيات x وy على الترتيب، فإن $|x-y|$ هي المسافة بين A وB.

تعريف 1.1

إذا كان a عدداً حقيقيًا موجباً، وx أي عدد حقيقي فإن:

$|x| \leq a$ إذا وإذا كان فقط $-a \leq x \leq a$

خواص القيمة المطلقة

إذا كانت $a, x, y \in \mathbb{R}$، فإن:

1) $|x| = 0$ إذا وإذا كان فقط $x = 0$.

2) $|x||y| = |xy|$.

3) $|-x| = |x|$ وكذلك $|x| = \sqrt{x^2}$.

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ بشرط أن $y \neq 0$.

5) $|x+y| \le |x| + |y|$.

6) $|x|^2 = x^2$.

7) $|x| = y$ إذا وإذا كان فقط $x = y$ أو $x = -y$.

سوف نبرهن فقط الخاصية (5)، ونترك باقي الخواص للطالب كتمرينات.

نعرف جيداً أن $x \le |x|$ وكذلك $y \le |y|$.

ومن ذلك فإن: $x + y \le |x| + |y|$.

وكذلك $-x \le |x|$ و $-y \le |y|$ وبهذا يكون لدينا: $-(x+y) \le |x| + |y|$

أو $-(|x| + |y|) \le x + y$ (من خاصية الضرب في عدد سالب).

الآن حصلنا على: $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$

ومن التعريف 1.1 يكون لدينا: $|x + y| \le |x| + |y|$ وهو المطلوب.

من الخواص المهمة المستعملة كثيراً للقيمة المطلقة الخاصية التالية:

إذا كان $a > 0$ ، فإن:

$|x| \ge a$ إذا وإذا كان فقط $x \ge a$ أو $x \le -a$

مثال 7

حل المتباينة $|3x + 4| \le 2$.

الحل

$|3x+4| \le 2$ إذا وإذا كان فقط $-2 \le 3x + 4 \le 2$ ، وبطرح (4) من أطراف المتباينة، نجد أن: $-6 \le 3x \le -2$.

بالقسمة على (3)، يكون لدينا: $-2 \le x \le -\frac{2}{3}$

أي أن مجموعة الحل لهذه المتباينة، هي: $x \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right]$.

مثـــال 8

أوجد. الحل للمتباينة $|x+2| \ge 8$.

الحـــل

$|x+2| \ge 8$ إذا وإذا كان فقط $x+2 \ge 8$ أو $x+2 \le -8$.

في الحالة $x+2 \ge 8$ نطرح (2) من الطرفين فنحصل على: $x \ge 6$.

وفي الحالة الثانية $x+2 \le -8$، نحصل على x بطرح 2 من الطرفين، أي أن: $x \le -10$

من الحالتين، نجد أن مجموعة الحل هي: $(-\infty, -10] \cup [6, \infty)$.

تمارين 3.1

في التمارين من 1 إلى 13، أوجد مجموعة الحل في كل حالة من الحالات التالية، ومثّلها على خط الأعداد:

1) $|2x+1| \le 5$

2) $|3x-2| \ge |2x+1|$

3) $|x| - |2x+1| \ge 0$

4) $|3x-5| > 2$

5) $|2x-3| + |x-1| = 4$

6) $|x-5| = |3x-1|$

7) $|x-2| \ge 1$

8) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 4$

9) $\frac{|3x+1|}{x+5} < x$

10) $|x^2-4| \ge 5$

11) $|3x+5| \geq |4x|$

12) $|x^2+2x+3| \geq 5$

13) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 6$

14) برهن على أن: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ شرط أن $y \neq 0$.

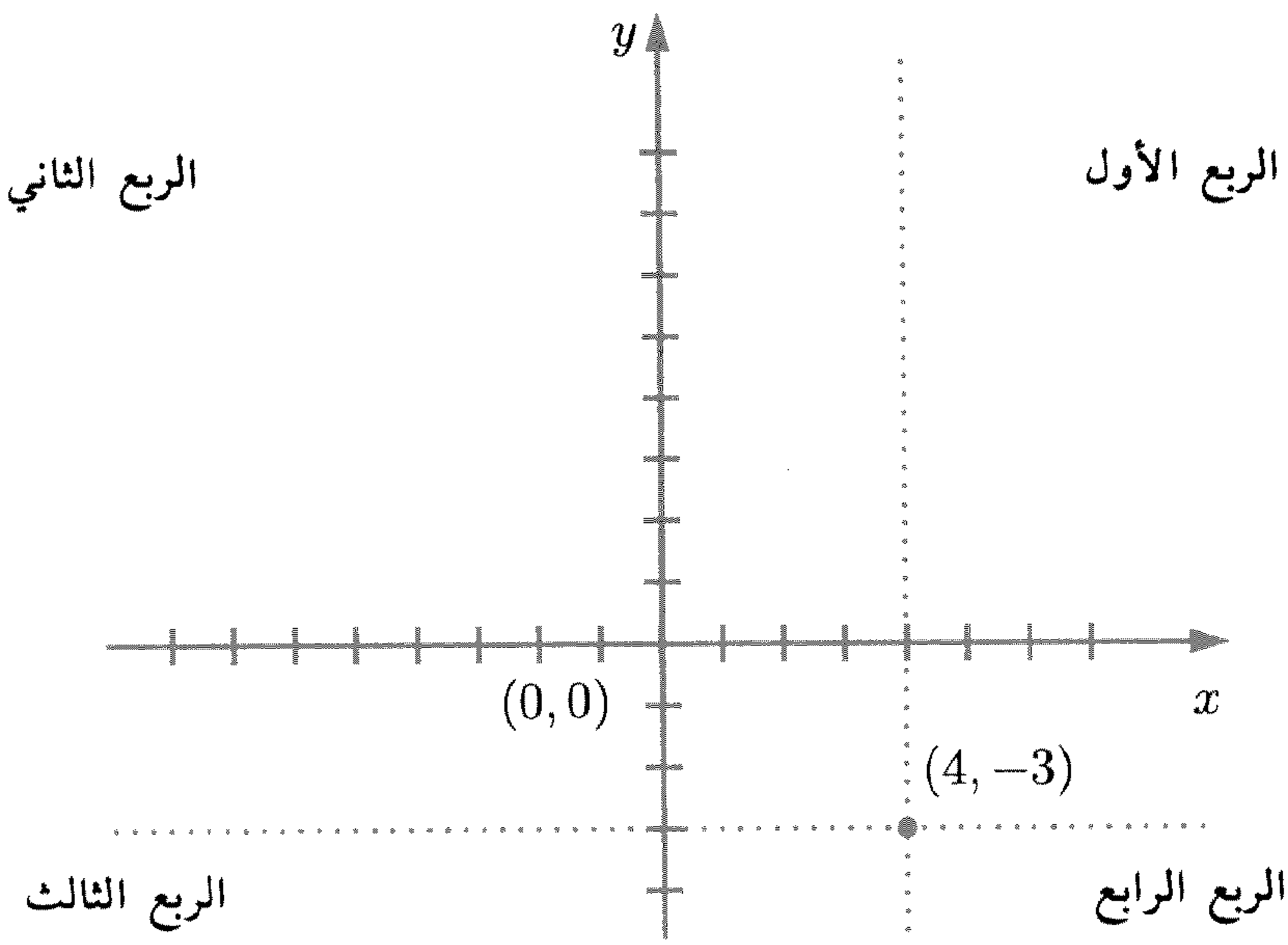
15) وضّح أن: $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases}$ شرط أن $x \neq 0$.

4.1 نظام الإحداثيات المتعامدة (أو الديكارتية) (Cartesian Coordinate System)

يتكوّن نظام الإحداثيات الديكارتية من خطي أعداد متعامدين، يسمى كل منهما محوراً، ويتقاطعان عند نقطة الأصل O.

يسمى المحور الأفقي المحور السيني X، ويسمى المحور العمودي المحور الصادي Y.

كل نقطة A في مستوى المحاور الديكارتية يمثلها زوج مرتب (x, y)؛ حيث يسمى x الإحداثي السيني أو الأول، ويسمى y الإحداثي الصادي أو الثاني للنقطة A.



الشكل 3.1

إذا كان (a, b) و(c, d) زوجين مرتبين، فإن:

$(a, b) = (c, d)$ إذا وإذا كان فقط $b = d$ و$a = c$.

تعريف 2.1

تسمى مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية بالمستوى الديكارتي، ويرمز له بالرمز $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

ينقسم المستوى الديكارتي إلى أربعة أقسام، ويسمى كل قسم منها بالربع.

الربع الأول يتكوّن من الأزواج المرتبة التي تكون إحداثياتها موجبة، ويتكون الربع الثاني من الأزواج المرتبة التي يكون إحداثيها الأول سالباً، وإحداثيها الثاني موجباً، بينما يتكون الربع الثالث من الأزواج المرتبة التي تكون إحداثياتها سالبة، ويتكون الربع الرابع من الأزواج المرتبة التي يكون إحداثيها الأول موجباً، وإحداثيها الثاني سالباً (أنظر الشكل 3.1).

لرسم النقطة $(4, -3)$ نتحرك أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات، وثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات، وعند التقاطع تكون النقطة $(4, -3)$.

المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي

(Distance Between Two Points)

إذا كانت $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$، فلإيجاد المسافة بين النقطتن A وB، نكوّن المثلث ABC قائم الزاوية في C.

نلاحظ أن إحداثيي النقطة C هما (x_2, y_1).

وبما أن A وC على خط أفقي واحد، فإن المسافة AC تساوي $|x_2 - x_1|$، وإن النقطتين B وC على خط عمودي واحد، فإن المسافة BC تساوي $|y_2 - y_1|$.

من نظرية فيثاغورس، نجد أن: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

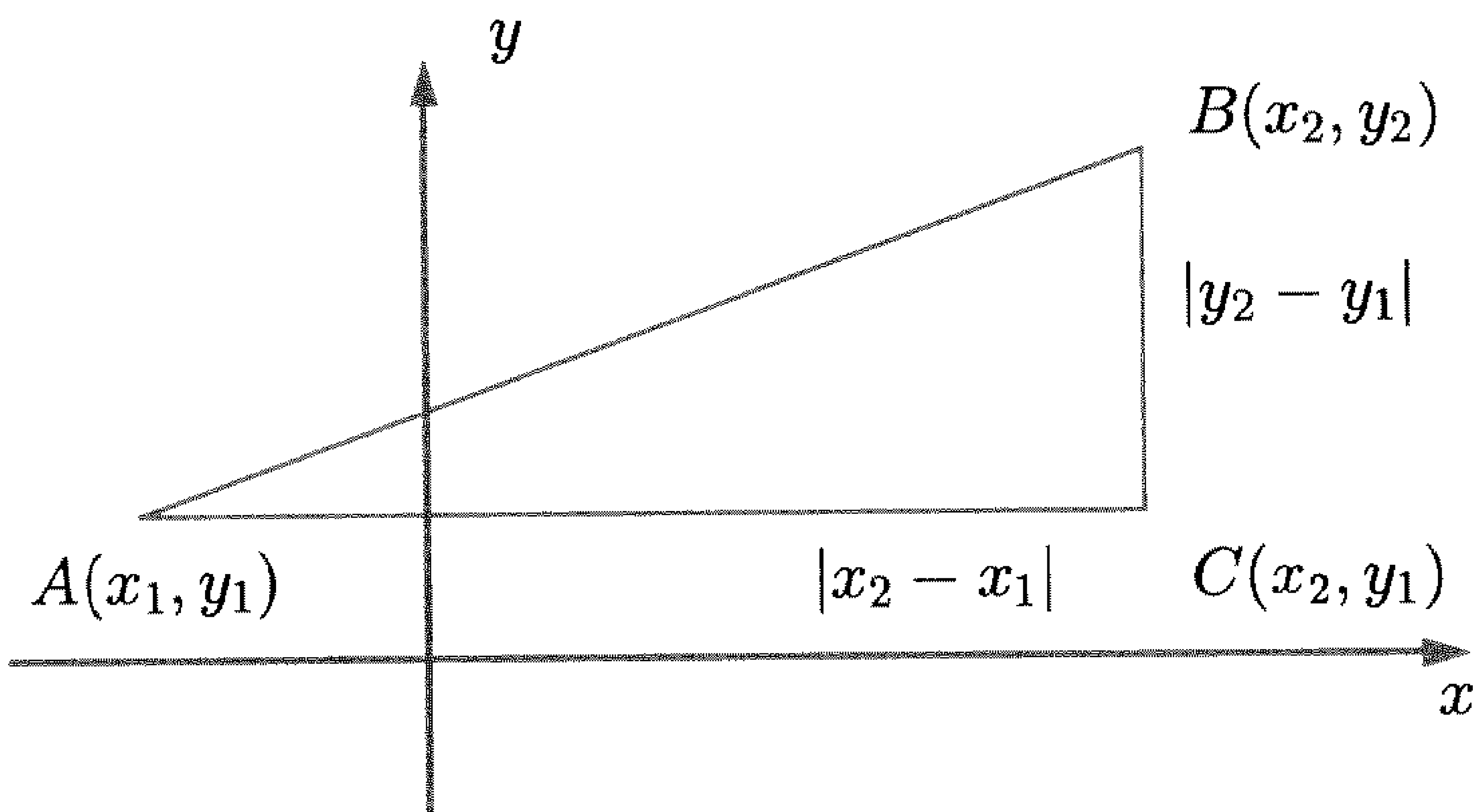
أي أن: $d = \sqrt{AB^2} = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

إذن: $d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + (y_2 - y_1)^2}$

وبما أن $|x|^2 = x^2$، فإن:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

تسمى هذه الصيغة صيغة المسافة.



الشكل 4.1

مثـــال 9

أوجد المسافة بين النقطتين $(2, 5)$ و$(-3, 7)$.

الحــل

لنقل إن $(x_1, y_1) = (2, 5)$ و$(x_2, y_2) = (-3, 7)$

إذن: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$d = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \approx 5.38516481$$

تمارين 4.1

في التمارين من 1 إلى 6، أذكر الربع الذي توجد فيه النقطة المذكورة، ومثلها في المستوى الديكارتي:

1) $(1,2)$ 2) $(-1,4)$

3) $(-3,-2)$ 4) $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

5) $\left(\frac{1}{4},\pi\right)$ 6) $(\sqrt{2},-\sqrt[3]{2})$

في التمارين من 7 إلى 10، أوجد المسافة بين النقطتين المذكورتين في كل حالة:

7) $(-2,3)$ و$(2,\sqrt{2})$ 8) $(0,4)$ و$\left(-\frac{1}{8},3\right)$

9) $(-3,-5)$ و$(-7,-8)$ 10) $(a+1,b)$ و$(a,b+1)$

11) وضح أن النقط $(-2,-3)$، $(3,-1)$، $(1,4)$ و$(-4,2)$ تكوّن رؤوس مربع.

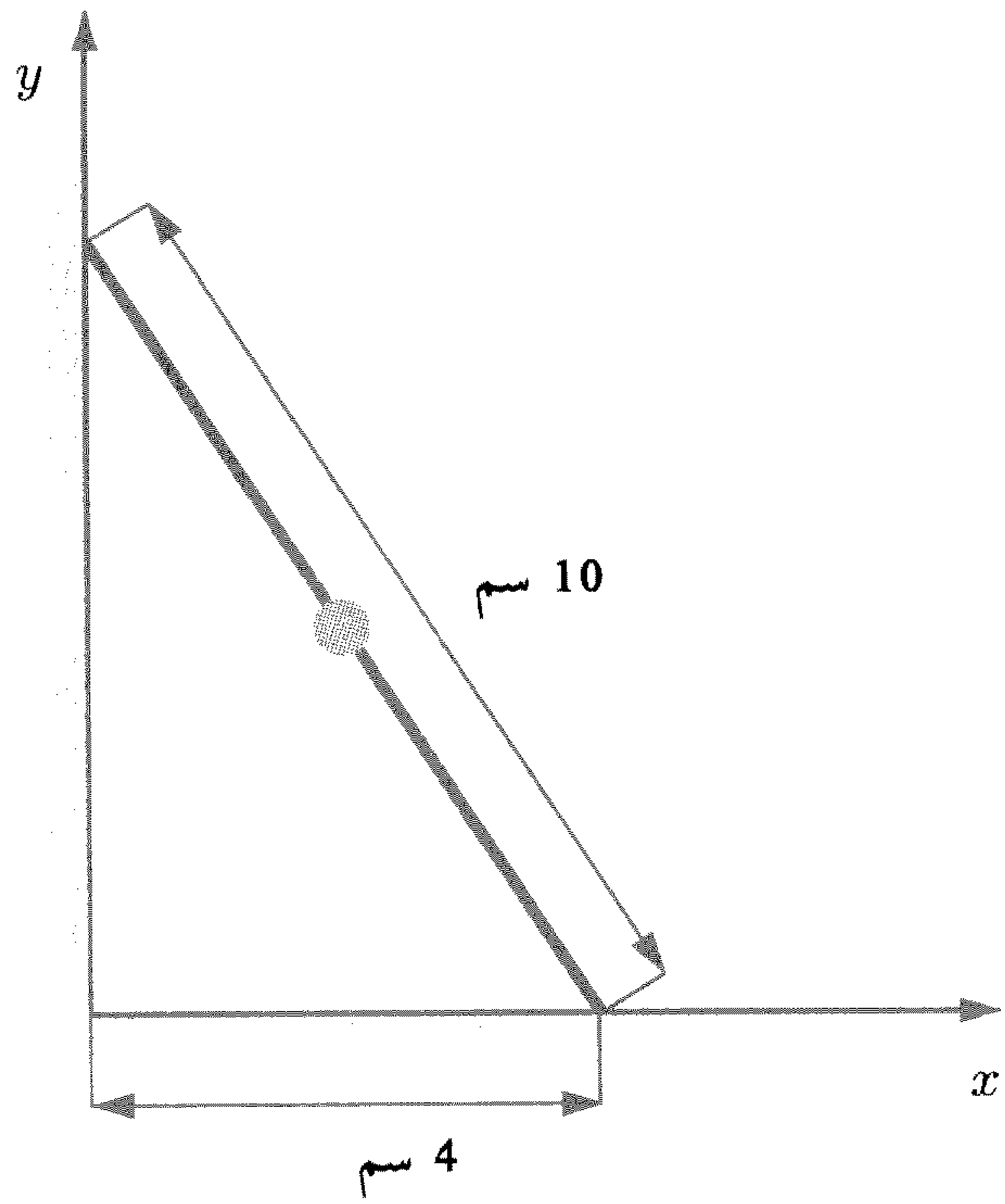
12) أوجد كل قيم x بحيث تكون المسافة بين $(-2,3)$ و(x,x) مساوية 5 وحدات.

13) حدّد ما إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط المعطاة مثلثاً قائم الزاوية:

أ) $A(2,9), B(-1,3), C(6,7)$

ب) $A(-1,4), B(3,6), C(1,1)$

14) وُضع سلم طوله 10 أمتار على حائط يبعد 4 أمتار من قاعدة الحائط (أنظر الشكل في الأسفل). إذا وقف رجل عند منتصف السلم، فما هي إحداثيات نقطة وقوفه؟



تمرين 14

15) تمّ اكتشاف حاملة طائرات على شاشة الرادار عند النقطة $A(55,76)$، وتمّ اكتشاف غواصة برادار بحري عند النقطة $B(48,84)$.

إذا قيست المسافة بالميل، فكم تكون المسافة بين حاملة الطائرات ونقطة على سطح الماء على خط عمودي على الغواصة.

5.1 معادلات الخط المستقيم (Equations of Straight lines)

من الموضوعات المهمة في التفاضل والتكامل موضوع المستقيمات، إذ نحتاج إلى ذلك في معظم الحالات التي نقابلها، خصوصاً في حالة المماسات.

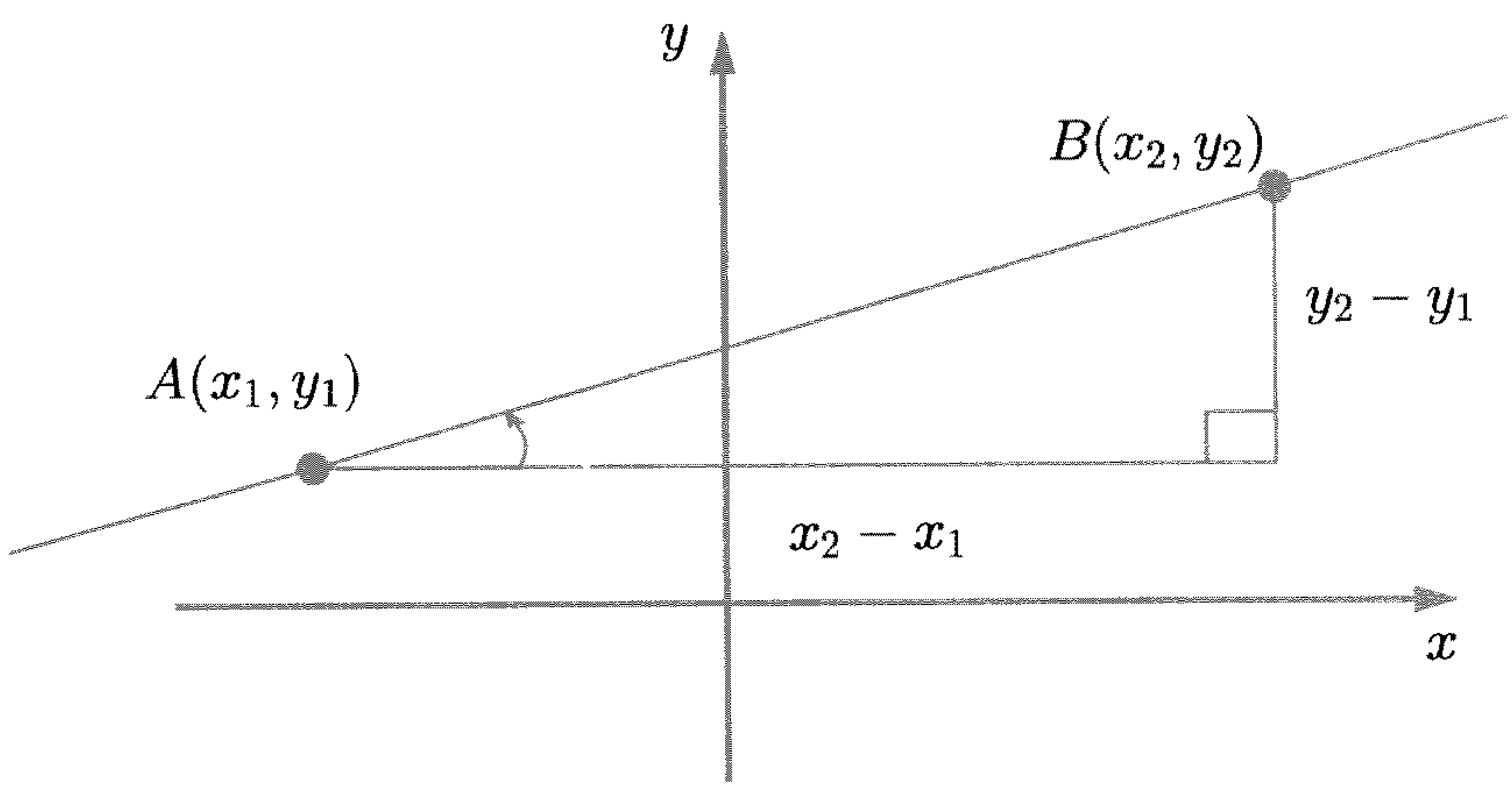
إن مَيْل (Slope) المستقيم هو قياس معدل التغير النسبي للإحداثيات x وy للنقطة (x, y)، كلما تحركنا على المستقيم.

تعريف 3.1

لنفرض أن L مستقيم غير عمودي، وأن $A(x_1, y_1)$ و$B(x_2, y_2)$ نقطتان عليه، ميل المستقيم L والذي سنرمز له بالرمز m يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ أن ميل المستقيم، هو حاصل قسمة فرق الصادات على فرق السينات لأي نقطتين عليه. ميل المستقيم العمودي يساوي ∞، أي أن المستقيم العمودي له ميل غير معرف.



الشكل 5.1

ملاحظات

1) إذا كان $m > 0$، فإن المستقيم يتجه إلى أعلى، كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين.

2) إذا كان $m < 0$، فإن المستقيم يتجه إلى أسفل، كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين.

3) ميل المستقيم m هو ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع محور السينات، أو المستقيم الموازي لمحور السينات؛ أي أن $m = \tan\theta$.

شرط توازي المستقيمين

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1، وميل المستقيم L_2 هو m_2، فإن $m_1 = m_2$ إذا وإذا كان فقط L_1 يوازي L_2.

شرط تعامد المستقيمين

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1، وميل المستقيم L_2 هو m_2، فإن $m_1 m_2 = -1$ إذا وإذا كان فقط L_1 عموديًّا على L_2.

مثال 10

إذا وقعت النقطتان $(1,-1)$ و$(2,1)$ على المستقيم L_1، ووقعت النقطتان $(-2,0)$ و$(0,4)$ على المستقيم L_2. حدِّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين.

الحل

$$m_2 = \frac{4-0}{0+2} = 2 \quad , \quad m_1 = \frac{1+1}{2-1}$$

إذن المستقيمان L_1 وL_2 متوازيان.

مثال 11

يمرّ المستقيم L_1 بالنقطتين $(2,-6)$ و$(1,4)$. أوجد ميل L_2، الذي يكون عموديًا على المستقيم L_1.

الحل

$m_1 = \dfrac{4+6}{1-2}$، وبما أن $L_1 \perp L_2$، فإن $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$

إذن $m_2 = \dfrac{-1}{-10} = \dfrac{1}{10}$.

إيجاد معادلة المستقيم

1) معادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه

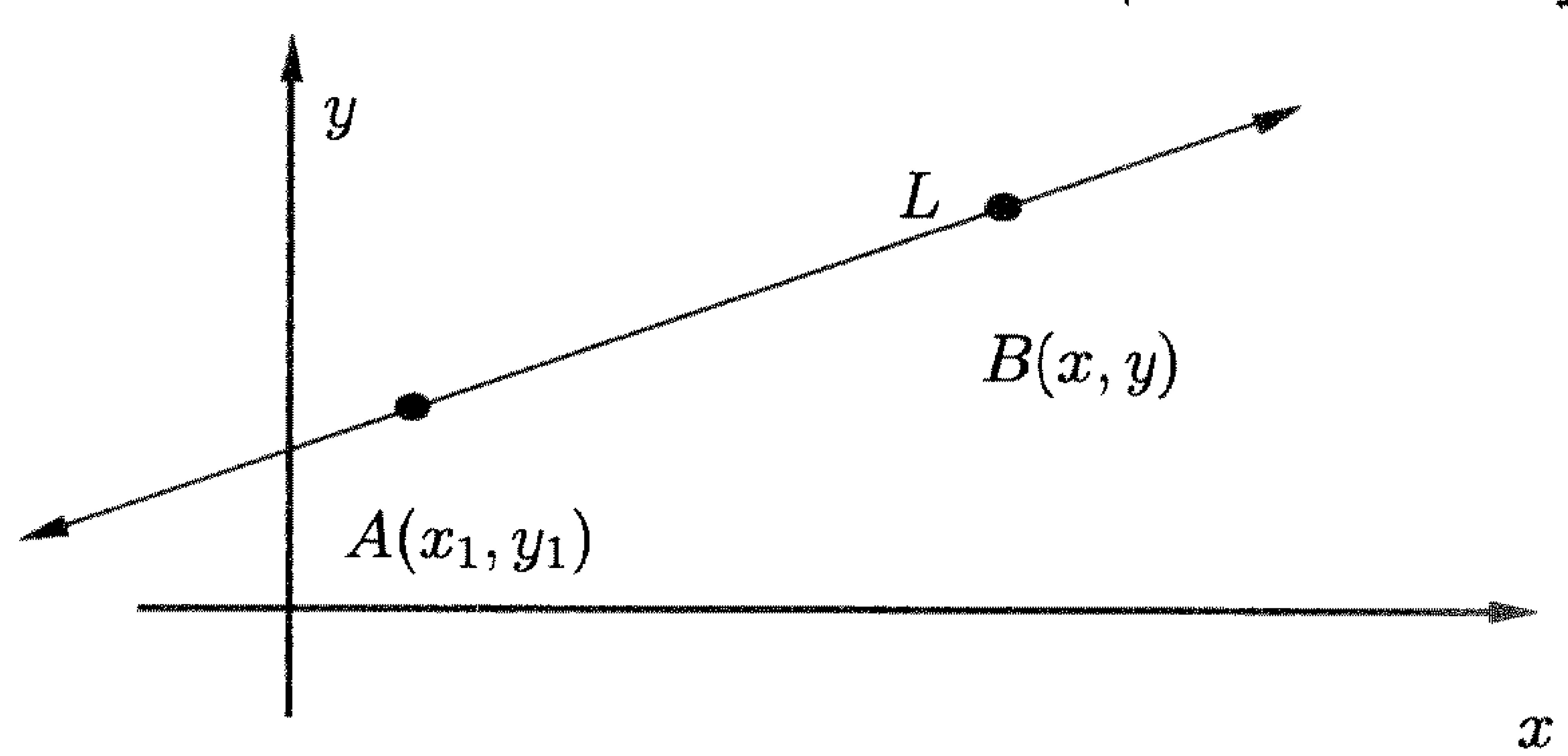
لنفرض أن المستقيم L (غير العمودي) يمرّ بالنقطة (x_1, y_1)، وأن ميله m.

نأخذ أي نقطة عامة $B(x,y)$ على المستقيم L.

من صيغة الميل، نجد أن $m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

وهذا يكافىء $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

وهذه هي معادلة المستقيم L بمعلومية ميله، ونقطة عليه.



الشكل 6.1

مثـــال 12

عيّن معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$، ويمر بالنقطة $(1,2)$.

الحـــل

معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه $y - y_1 = m(x - x_1)$

نعوض عن $m = \frac{1}{2}$ و$y_1 = 2$ و$x_1 = 1$، لنجد أن:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

أي أن المعادلة المطلوبة هي: $2y - x = 3$

2) معادلة المستقيم بدلالة نقطتين عليه

إذا كانت النقطتان $A(x_1, y_1)$ و$B(x_2, y_2)$ تقعان على المستقيم L، فإن ميله m هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

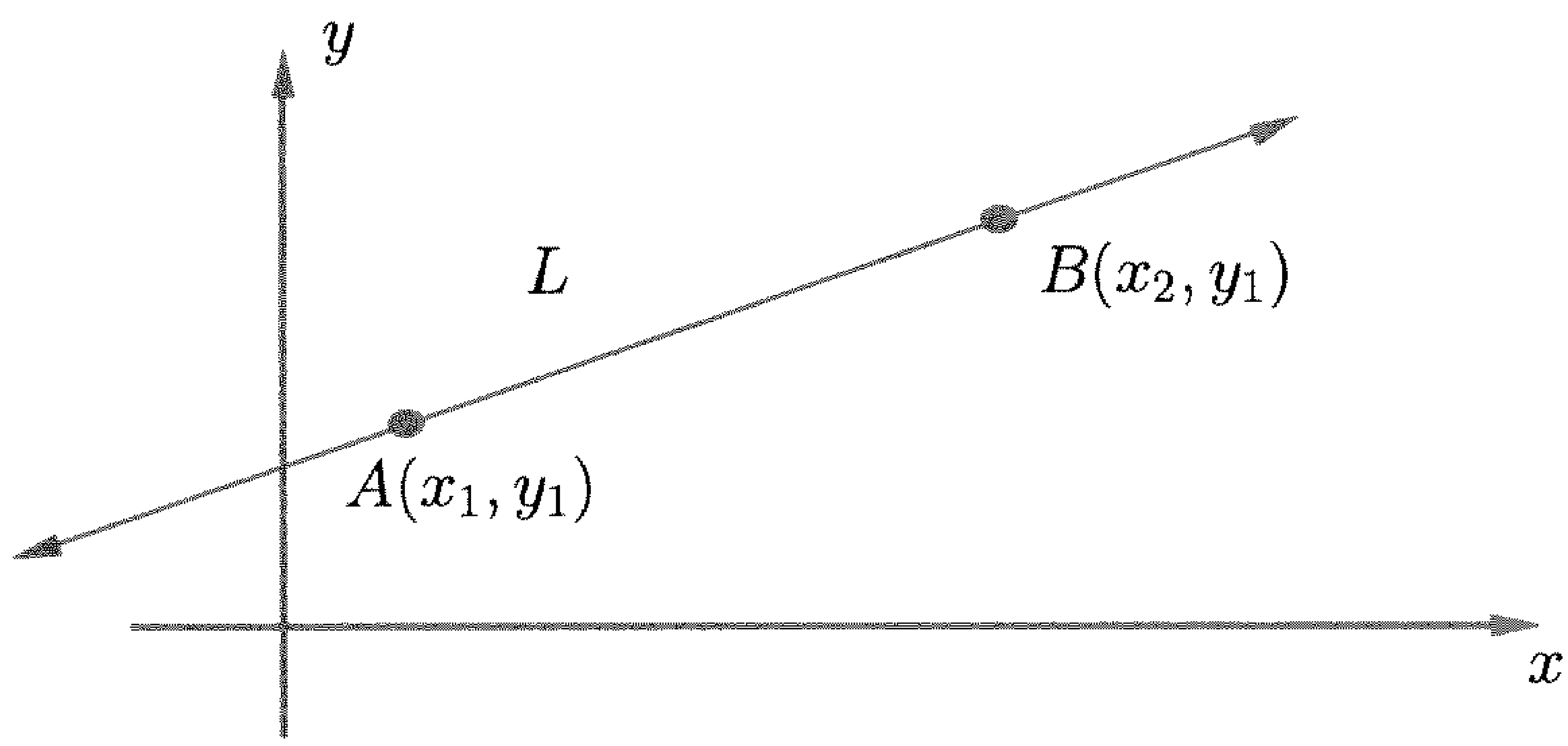
نتخير إحدى النقطتين، ولتكن $A(x_1, y_1)$، والميل الذي حصلنا عليه، ونستخدم الصيغة السابقة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أي أن

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

وهذه هي معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين $A(x_1, y_1)$ و$B(x_2, y_2)$.



الشكل 7.1

مثــال 13

عيِّن معادلة المستقيم المار بالنقطتين (2 ,3) و(4 ,1).

الحــل

باستخدام صيغة النقطتين

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

والتعويض عن $y_1 = -2$ و$x_1 = 3$ و$y_2 = 4$، $x_2 = 1$ نحصل على:

$$y + 2 = \frac{4 + 2}{1 - 3}(x - 3)$$

أي أن: $y + 3x = 7$

3) معادلة المستقيم بدلالة ميله والجزء الذي يقطعه من محور الصادات

لنفرض أن المستقيم L يقطع جزءاً من محور الصادات مقداره b، وأن ميله m، إذا استعملنا صيغة الميل ونقطة، نجد أن:

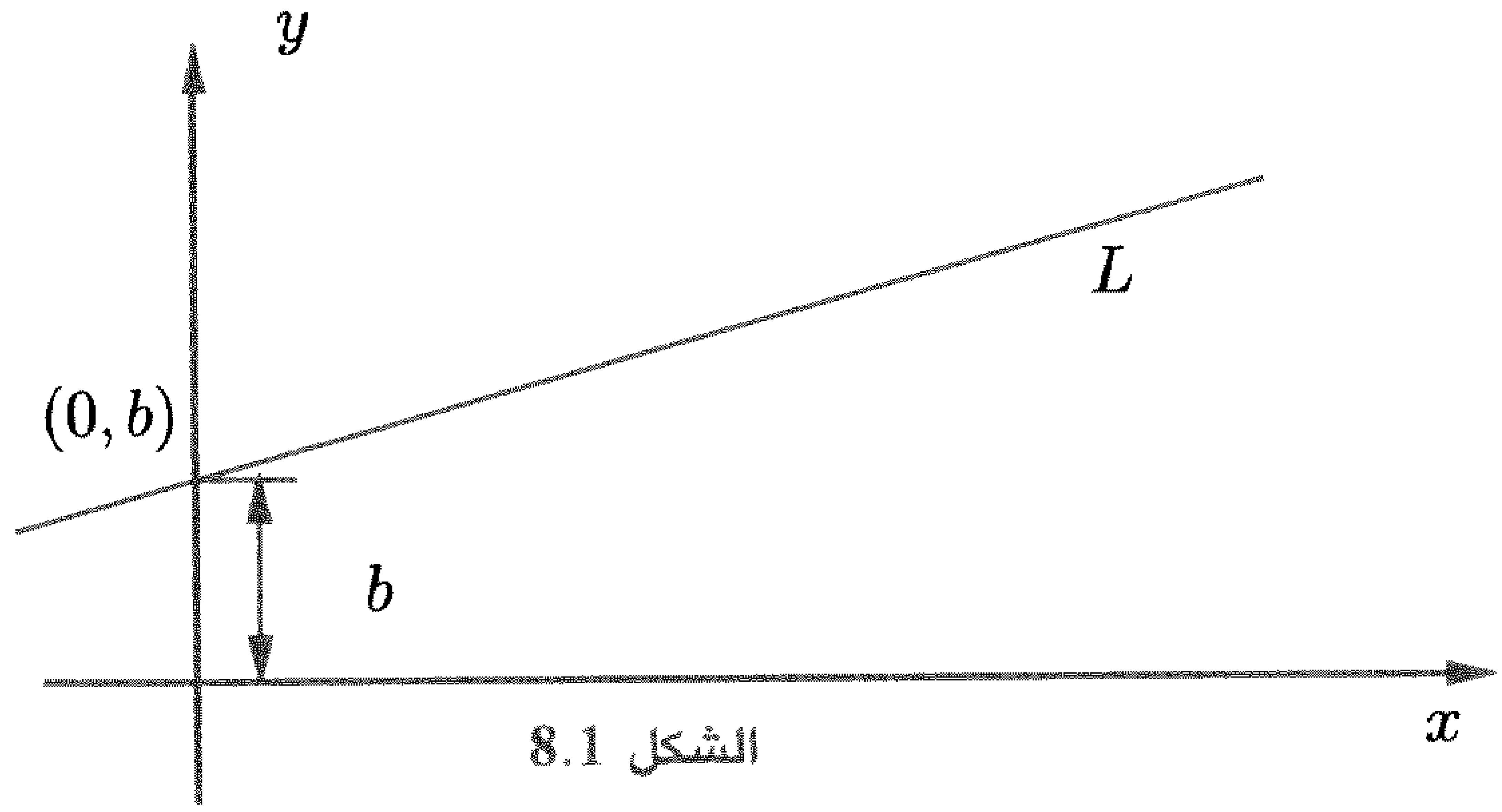
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

وهذا يكافىء

$$\boxed{y = mx + b}$$

وهي معادلة المستقيم الذي يقطع الجزء b من محور الصادات وميله m.



الشكل 8.1

مثال 14

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{1}{2}$ ويقطع محور الصادات عند $\frac{3}{4}$.

الحل

صيغة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات، هي:

$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

هذا يكافىء: $2x + 4y = 3$

4) إذا كان المستقيم L أفقيًا (أي يوازي محور السينات) ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$، فإن ميله $m = 0$، لأن الإحداثي الصادي لأي نقطة، هو y_1.

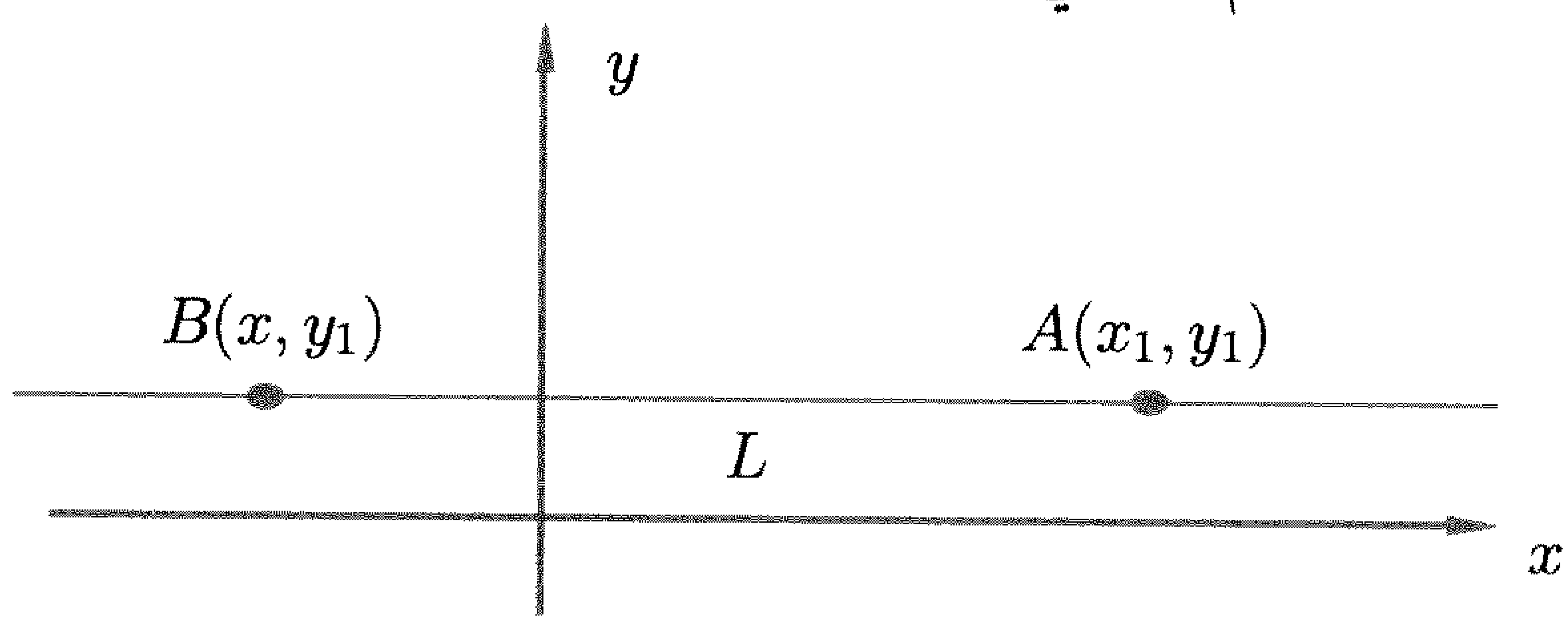
إذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L، فإن:

$$y - y_1 = 0$$

ومنها

$$\boxed{y = y_1}$$

وهي معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة $A(x_1, y_1)$.



الشكل 9.1

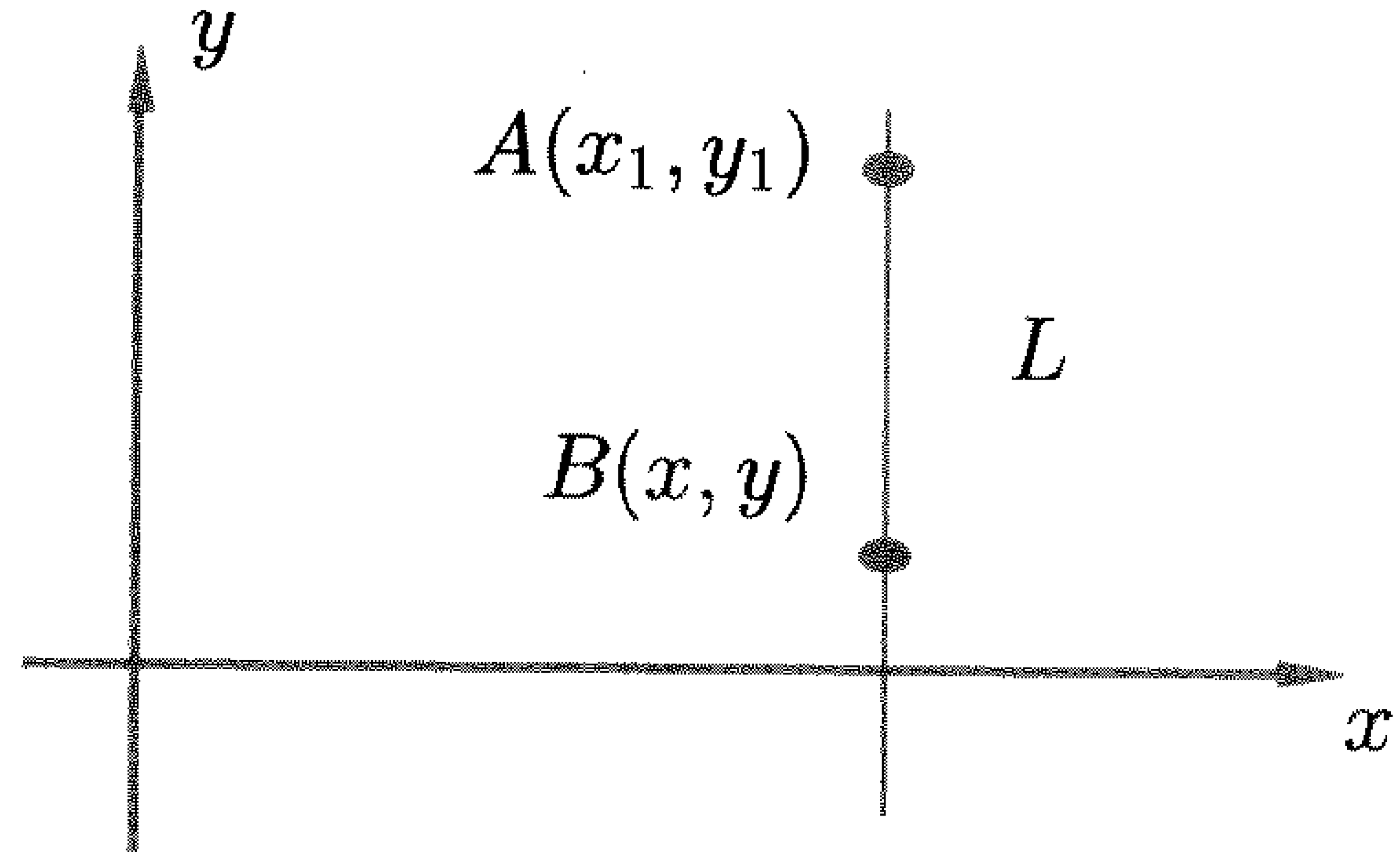
5) **إذا كان المستقيم L رأسيًا** (أي يوازي محور الصادات) ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$، فإن الإحداثي السيني لأي نقطة عليه، هو x_1.

إذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L، فإن:

$$x - x_1 = 0$$

وبذلك تكون معادلة المستقيم الرأسي المار بالنقطة $A(x_1, y_1)$

$$\boxed{x = x_1}$$



الشكل 10.1

مثـــال 15

أوجد معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (2, 1).

الحـــل

معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$، هي $y = y_1$

إذن، المعادلة المطلوبة هي: $y = 1$

مثـــال 16

أوجد معادلة المستقيم الرأسي، الذي يمر بالنقطة (3,0).

الحـــل

معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$، هي $x = x_1$

إذن، المعادلة المطلوبة هي: $x = 3$

الصورة العامة لمعادلة المستقيم

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي: $Ax + By + C = 0$، حيث A, B, C أعداد ويشترط ألا يساوي A وB الصفر في آن واحد.

دراسة الصورة العامة لمعادلة المستقيم

1) إذا كان $C = 0$، فإن: $Ax + By = 0$، ومنها:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل، وميله $-\frac{A}{B}$.

2) إذا كان $A \neq 0$، $B = 0$ فإن $Ax + c = 0$، ومنها:

$$x = -\frac{C}{A}$$

وهي معادلة مستقيم رأسي، يوازي محور الصادات، ويقطع جزءاً من محور السينات مقداره $-\frac{C}{A}$.

3) إذا كان $B \neq 0, A = 0$، فإن: $By + C = 0$، ومنها:

$$y = -\frac{C}{B}$$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات، ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره $-\frac{C}{B}$.

تمارين 5.1

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة المذكورة، مستخدماً الميل المعطى للمستقيم:

1) $m = 2, (5,4)$

2) $m = -4, (3,1)$

3) $m = 0, = (-5,1)$

4) $m = -3, (7,-2)$

5) $m = -\frac{2}{3}, (1,2)$

6) $m = 0, \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

في التمارين من 7 إلى 10، أوجد المسافة بين النقطتين المذكورتين في كل حالة:

7) $(7,11)$ و$(-1,1)$

8) $(3,2)$ و$(4,8)$

9) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و$(-\frac{2}{3}, \frac{3}{5})$

10) $(-1,-1)$ و$(2,2)$

11) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2,3)$ عموديًا على محور السينات.

12) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2,3)$ عموديًا على محور الصادات.

في التمارين من 13 إلى 18، أكتب معادلة المستقيم على الشكل $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، وb الجزء المقطوع من محور الصادات:

13) $3x - 2y = 5$

14) $x + 2y = 0$

15) $2y - 5x - 10 = 0$

16) $y - 1 = 0$

17) $x = -\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$

18) $\frac{1}{5}y - \frac{1}{3}x = 1$

19) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4,-4)$، ويكون عموديًا على المستقيم $2x - 5y + 3 = 0$.

20) أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة $(-2,3)$، ويكون موازياً للمستقيم $3x - 2y = -1$.

21) أوجد نقطة تقاطع المستقيمين $14x - 2y = 5$ و$3x + 10y = 12$.

22) أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $x + 2y = 15$ ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين $2x - y = 5$ و$x + y = 4$.

23) أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر أسفل نقطة تقاطع المستقيمين $x = y$ و$x + y = 4$ ويصنع مثلثاً مساحته 9 وحدات مع المستقيمن المذكورين.

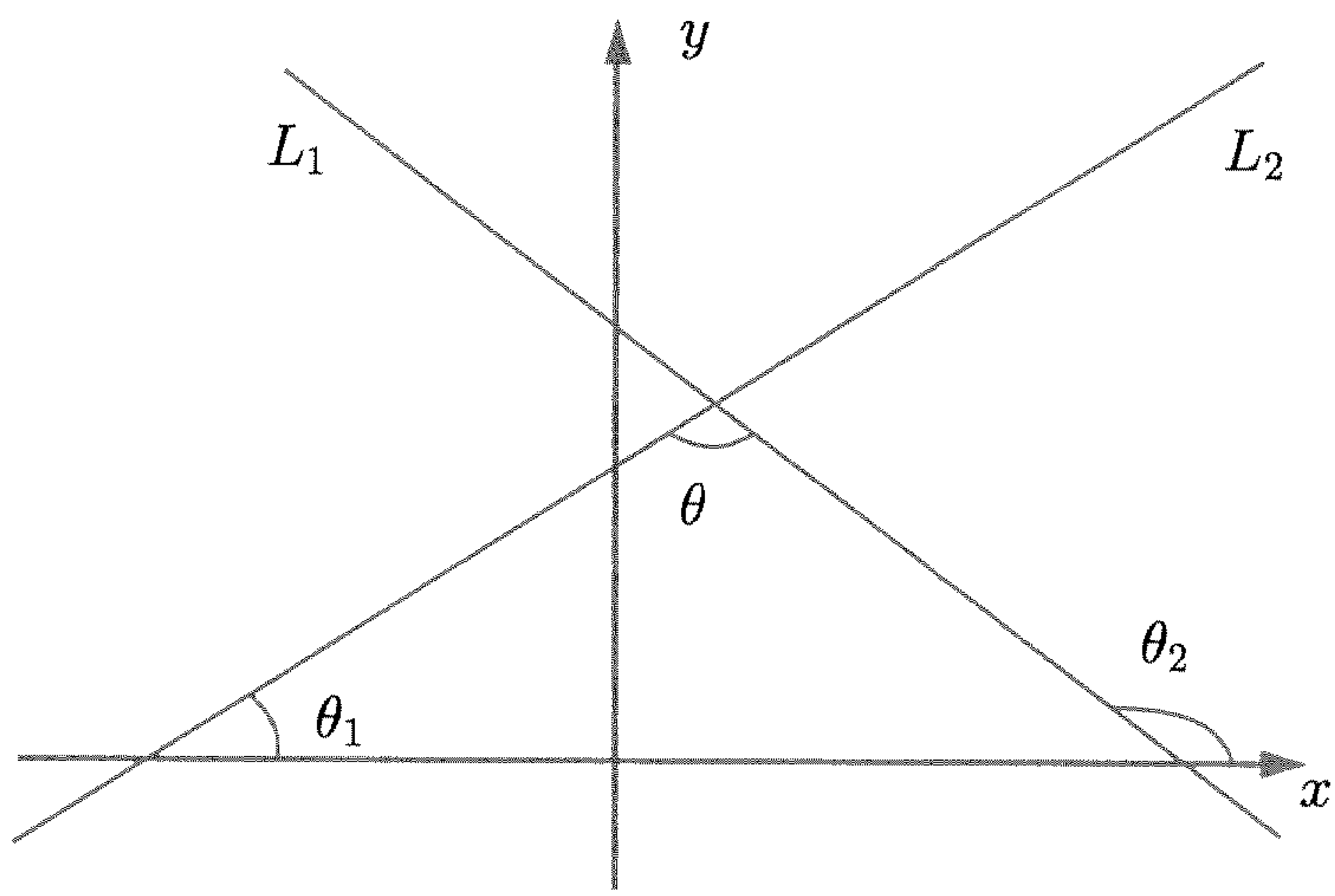
24) إذا كانت θ الزاوية بين المستقيمين L_1 وL_2 حيث m_1 ميل المستقيم L_1 وm_2 ميل المستقيم L_1 (أنظر الشكل في الأسفل)، وضح أن:

$$tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$$

25) أوجد نقطة وزاوية تقاطع المستقيمين

$8x + 5y + 2 = 0$ ،

$5x - 6y + 1 = 0$.



تمارين على الفصل الأول

في التمارين من 1 إلى 10، حلّل المتباينات، موضحاً إجابتك على خط الأعداد:

1) $x - 2 < 5$

2) $3x + 6 \geq -3$

3) $1 - 3x < -2$

4) $|2x + 4| < 3$

5) $\frac{4}{3}x - 2 \leq -2$

6) $-4 < \frac{2x - 4}{3} \leq 3$

7) $\left|\frac{8 - 3x}{2}\right| \leq 3$

8) $\left|\frac{3x + 17}{4}\right| \geq 12$

9) $\frac{1}{x - 2} > \frac{2}{x + 3}$

10) $\frac{1}{x} > 3$

11) برهن أن $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

12) برهن أن $|xy| = |x||y|$.

13) برهن أن $|-x| = |x|$.

في التمارين من 14 إلى 16، أوجد المسافة بين النقطتين المذكورتين:

14) $(1,3)$ و$(4,7)$

15) $(8,-1)$ و$(-2,0)$

16) $(-3,-7)$ و$(-1,-2)$

17) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-4,4)$ و$(-2,6)$.

18) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1,1)$، والموازي للمستقيم $2x + 5y = 6$.

19) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 1)$، والعمودي على المستقيم $2x + 5y = 6$

20) أوجد نقطة تقاطع المستقيمين $x - y = 7$ و$2x + 13y = 1$.

21) ما ميل المستقيم $x + 2y = 3$؟

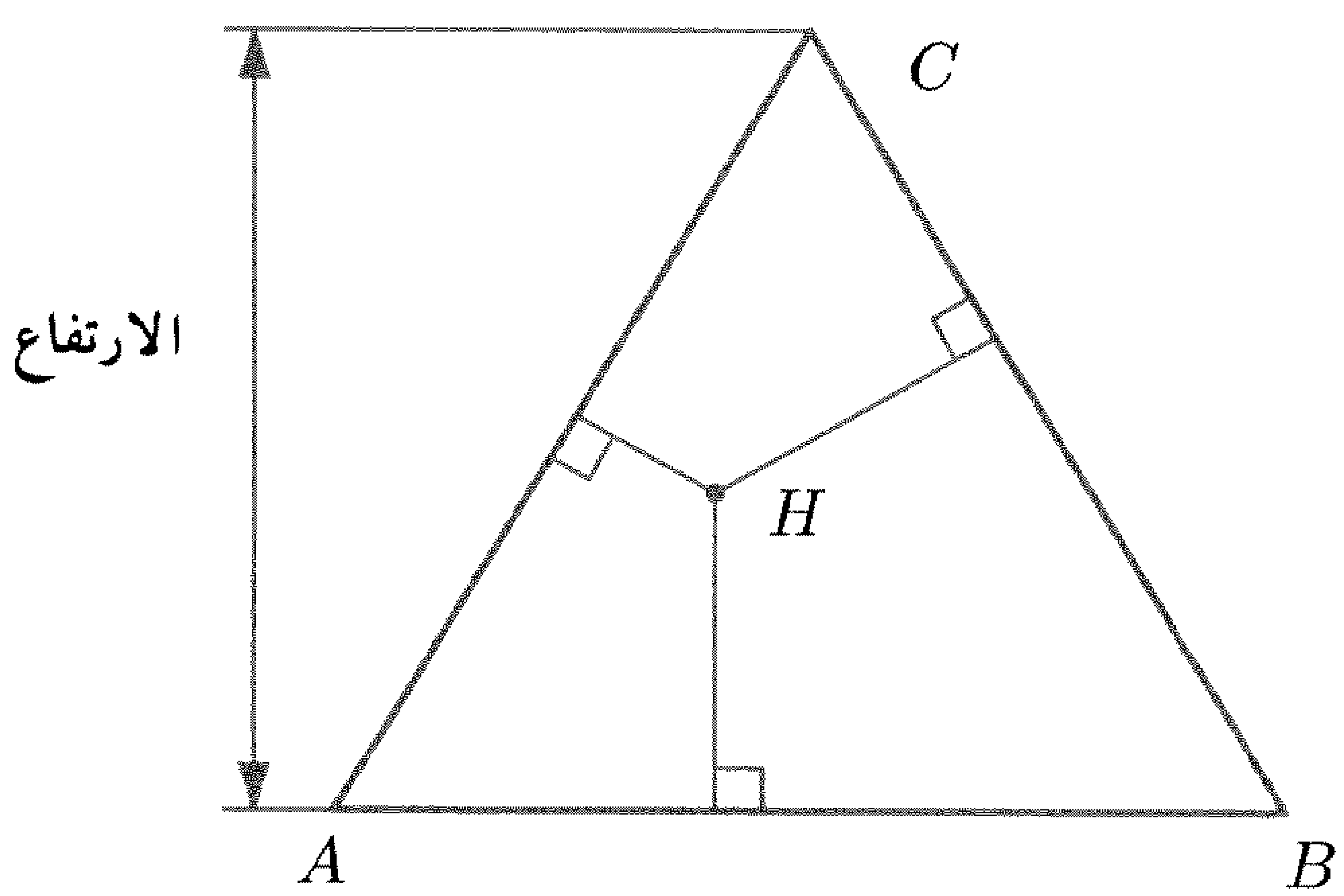
22) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2,3)$ و$(2,-1)$.

23) أوجد معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة $(-1,-3)$.

24) ما الجزء الذي يقطعه المستقيم $-2x + 3y = 1$ من محور الصادات؟

25) أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $4x + 3y = -6$، ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره 2.

26) إذا كانت H نقطة داخل مثلث متساوي الأضلاع، أوضح أن مجموع المسافات من النقطة H إلى أضلاع المثلث تساوي ارتفاع المثلث (أنظر الشكل).



27) أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر خلال النقطتين $(-2,1)$ و$(0,0)$ ويمر خلال نقطة نصف المسافة بين النقطتين $(1,3)$ و$(-1,5)$.

28) حل المتباينة $2 < \dfrac{x^2 - 14}{x - 3}$.

29) هل المثلث الذي رؤوسه $(1,3)$، $(2,-1)$، $(-2,-2)$ مثلث قائم الزاوية؟

30) برهن أن قطري المعين يتقاطعان في زاوية قائمة.

الفصل الثاني

المجموعات والدوال

Sets and Functions

1.2 المجموعات (Sets)

إن الإجابة عن السؤال: **ما المجموعة؟**، ليس بالشيء الهين الذي يمكن ولوجه بأسلوب مقنع في مثل هذه العجالة، التي نقدمها للقارىء هنا، ولكن نكتفي بالقول إن المجموعة هي تجمّع من الأشياء المتميزة، والمعرفة تعريفاً جيداً.

سوف نصطلح على استخدام الحروف الكبيرة $A, B, C, \ldots$ للتعبير عن المجموعات، وسوف نصطلح على استخدام الحروف الصغيرة $a, b, c, \ldots$ للتعبير عن الأشياء (العناصر) التي تتكون منها المجموعة.

يعبّر عن المجموعة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

1) كتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة، أو كتابة بعضها، على شرط أن يتم استنتاج بقيتها.

أمثلة:

1) $A = \{2, 3, 7, 11\}$

2) $N = \{a, b, g\}$

3) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

ترتيب العناصر في المجموعة ليس له أهمية، فمثلاً المجموعة $\{a, b, c\}$ هي نفسها المجموعة $\{b, c, a\}$.

2) إعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها.

فمثلاً $\{x : P(x)\}$ تمثل المجموعة التي عناصرها x، حيث x تتمتع بالخاصية P.

أمثلة:

4) $A = \{x : \text{عدد أولي بين 0 و12 } x\} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

5) $B = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 7\} = \{3, 4, 5, 6\}$

يستخدم الرمز ($\in$) للدلالة على أن العنصر (ينتمي) إلى المجموعة، ويستخدم الرمز (:) للدلالة على (حيث أن).

المجموعة الخالية (The Empty Set)

هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر.

يستخدم الرمز ϕ (فاي) للتعبير عن المجموعة الخالية، وقد يستخدم في بعض الأحيان الرمز $\{\}$ للدلالة على المجموعة الخالية.

أمثلة:

6) $A = \{x : \text{عدد زوجي بين الصفر والواحد } x\}$

7) $B = \{x : \text{طالب عمره يتجاوز 200 سنة } x\}$

المجموعات المنتهية وغير المنتهية (Finite And Infinite Sets)

تكون المجموعة **منتهية** (finite) إذا كانت خالية أو تحتوي على n من العناصر، حيث أن n عدد صحيح موجب.

تكون المجموعة **غير منتهية** (Infinite) إذا كانت ليست منتهية.

ملاحظة: تكرار العناصر في المجموعة لا يزيد من عدد عناصرها.

أمثلة:

8) مجموعة النقط الموجودة في مستقيم.

9) مجموعة المستقيمات المارة بنقطة معينة في المستوى.

10) مجموعة الأعداد الطبيعية.

11) مجموعة الطلبة المسجلين في السنة الأولى بكلية الهندسة (جامعة الفاتح).

تساوي مجموعتين

المجموعة A تساوي المجموعة B أو $(A = B)$، إذا تكوّنتا من العناصر نفسها، أي إذا كانتا اسمين لمجموعة واحدة.

مثـال 12

$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2 < x < 6\}$ ، $B = \{3, 4, 5\}$ و $A = B$.

الاحتواء (Set Inclusion):

المجموعة A **مجموعة جزئية** (Subset) من المجموعة B، إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى B. ويكتب $A \subseteq B$

مثـال 13

$B = \mathbb{N}$، $A = \{2, 9, 10\}$، إذن $A \subseteq B$.

تعريف

المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (Proper Subset) من المجموعة B، إذا كانت $A \subseteq B$ وهناك عنصر في B لا يوجد في A. ونكتب ذلك $A \subset B$ و$A \neq B$، وقد نكتبه في بعض الأحيان $A \subsetneq B$.

بعد تعريفنا للإحتواء، نستطيع أن نعرّف تساوي مجموعتين كما يلي:

$A = B$ إذا وإذا كان فقط $A \subseteq B$ وكذلك $B \subseteq A$.

معنى $A \not\subseteq B$ أنه يوجد على الأقل عنصر واحد في المجموعة A لا يوجد في B.

ملاحظات

1) المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أي مجموعة.

2) المجموعة الخالية وحيدة.

3) قد تكون عناصر المجموعة مجموعات في حد ذاتها.

تمارين 1.2

1) أوضح أيًّا من المجموعات التالية تكون مجموعة جزئية من الأخرى:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 12 = 0\}$

$B = \{6\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

2) إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، برهن على أن $A \subseteq C$.

في التمارين من 3 إلى 6 عبّر عن المجموعة على شكل عناصر محددة، بدلاً من الوصف المذكور.

3) $\{x \in \mathbb{N}: x \leq 5\}$

4) $\{x \in \mathrm{I} : x^2 \leq 9\}$

5) $\{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$

6) $\{x \in \mathbb{N}: 3 < x < 5\}$

2.2 عمليات على المجموعات (Operations On Sets)

1) الاتحاد (Union)

إذا كانت A وB مجموعتين، فإن المجموعة التي تتكوّن من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين، تسمى **اتحاد المجموعتين** A وB، ويرمز لها بالرمز $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{أو} \ x \in B\}$$

2) التقاطع (Intersection)

إذا كانت A وB مجموعتين، فإن المجموعة التي تتكوّن من العناصر المشتركة بين المجموعتين A وB، تسمى **تقاطع المجموعتين** A وB، ويرمز لها بالرمز $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{و} \ x \in B\}$$

3) المكمّلات (Complements)

إذا كانت A وB مجموعتين، فإن الفرق بين المجموعتين A وB، هو المجموعة التي تتكوّن من جميع العناصر، التي توجد في A ولا توجد في B، ويرمز لذلك بالرمز $A - B$.

$$A - B = \{x : x \in A \ \text{و} \ x \notin B\}$$

4) المكمّلة النسبية

إذا كانت $B \subseteq A$، فإن $A - B$ تسمى مكملة المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ويرمز لذلك بالرمز B_A^c.

على الرغم من أن المجموعة الشاملة ـ بالمعنى المطلق ـ غير موجودة، فإن كل حالة نتعامل فيها مع المجموعات تكون هناك مجموعة شاملة نسبية. فعلى سبيل المثال: عند التعامل مع مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، نستطيع أن نفترض بأن I (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة (ونرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز U، وبالتالي نستطيع القيام بعمليات مختلفة على المجموعة $\mathbb{N}$.

إذا كانت A هي المجموعتين الشاملة U، فإن $A - B = U - B$ تسمى مكمّلة B، ويرمز لها بالرمز B^c.

نستطيع تعريف B^c بطريقة أخرى، وهي: $B^c = \{x : x \notin B\}$

مثـال 14

إذا كانت $A = \{1, 2, 4, 8\}$، و$B = \{2, 3, 5, 6\}$ أوجد:

أ) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$

د) B^c عندما تكون $\mathbb{R}$ المجموعة الشاملة.

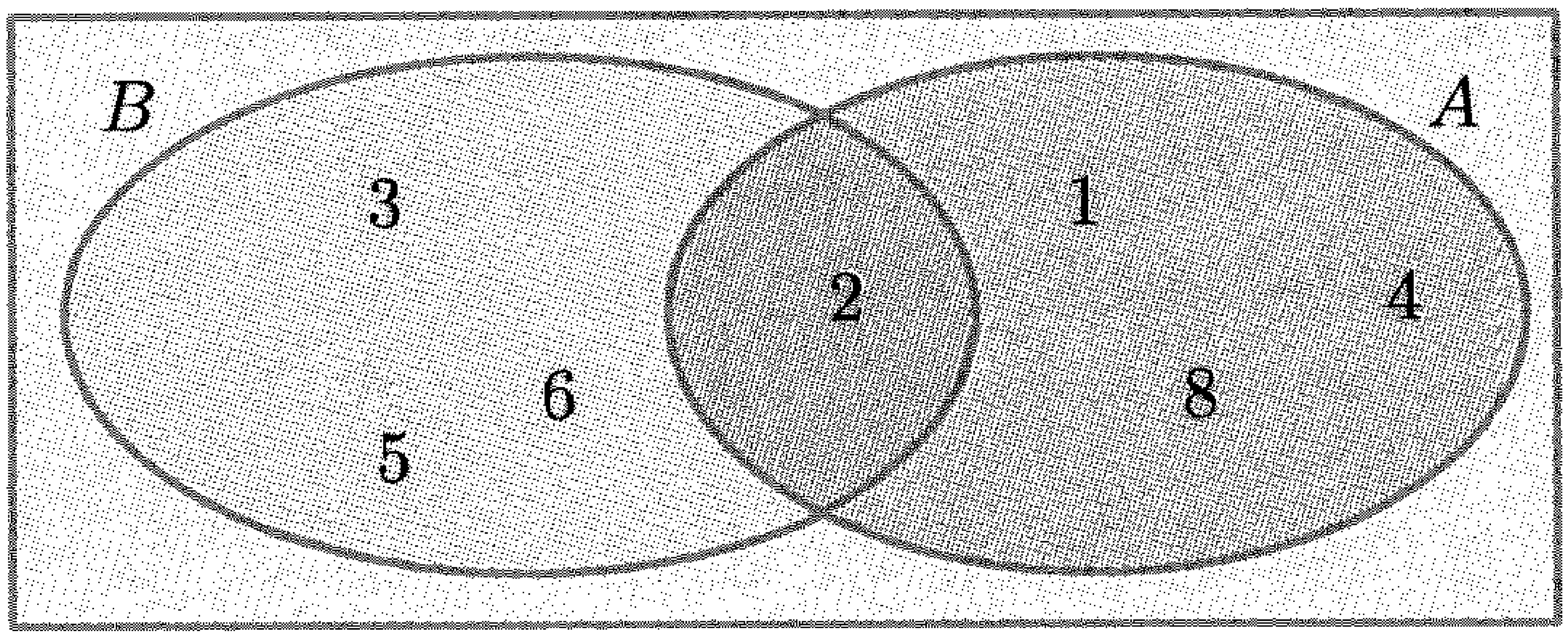
الحـل

أ) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

ب) $A \cap B = \{2\}$.

ج) $A - B = \{1, 4, 8\}$.

د) $B^c = \mathbb{R} - B$.



الشكل 1.2

تمارين 2.2

في التمارين من 1 إلى 3، أوجد كلاً من $A \cup B$ و$A \cap B$ و$A - B$ و $B - A$.

1) $A = \{x : x - 1 = 3\}$ و $B = \{x : x^2 - 5x + 4 = 0\}$

2) $A = \{x : |x| > 3\}$ و $B = \{x : x > 2\}$

3) $A = \{x : |x - 2| < 5\}$ و $B = \{x : |x - 2| > 1\}$

في التمارين من 4 إلى 13، برهن على ما يلي:

4) $A \subseteq B$ إذا وإذا كان فقط $A \cup B = B$

5) $A \subseteq B$ إذا وإذا كان فقط $A \cap B = A$

6) $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ فإن $A \cup B \subseteq C$

7) $A \cap B = A \cup B$ إذا وإذا كان فقط $A = B$

8) $A - B = A \cap B^C$

9) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

10) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

11) إذا كان $A_i \subseteq B$ لكل $i = 1, 2, ..., n$، فإن: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup Ay_n \subseteq B$

12) إذا كان $A \subseteq B_i$ لكل $i = 1, 2, ..., n$، فإن: $A \subseteq B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$

13) $B \subseteq A^C$ إذا وإذا كان فقط $A \cap B = \emptyset$

14) إذا كان n عدداً طبيعياً، أوجد:

أ) $\bigcap_{n \in N} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ب) $\bigcup_{n \in N} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ج) $\bigcup_{n \in N} [-n, n]$

15) إذا كانت A وB مجموعتين، أوضح بأشكال فن:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

3.2 العلاقات والدوال (Relations and Functions)

تعريف 1.2 (الضرب الديكارتي)
لنفرض أن A وB مجموعتان. المجموعة التي تتكون من الأزواج المرتبة (x,y)، حيث $x \in A$ و$y \in A$ تسمى الضرب الديكارتي للمجموعتين A وB، ويكتب $A \times B$.

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

مثال 15

إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ و$B = \{1,2\}$، أوجد $A \times B$ و$B \times A$.

الحل

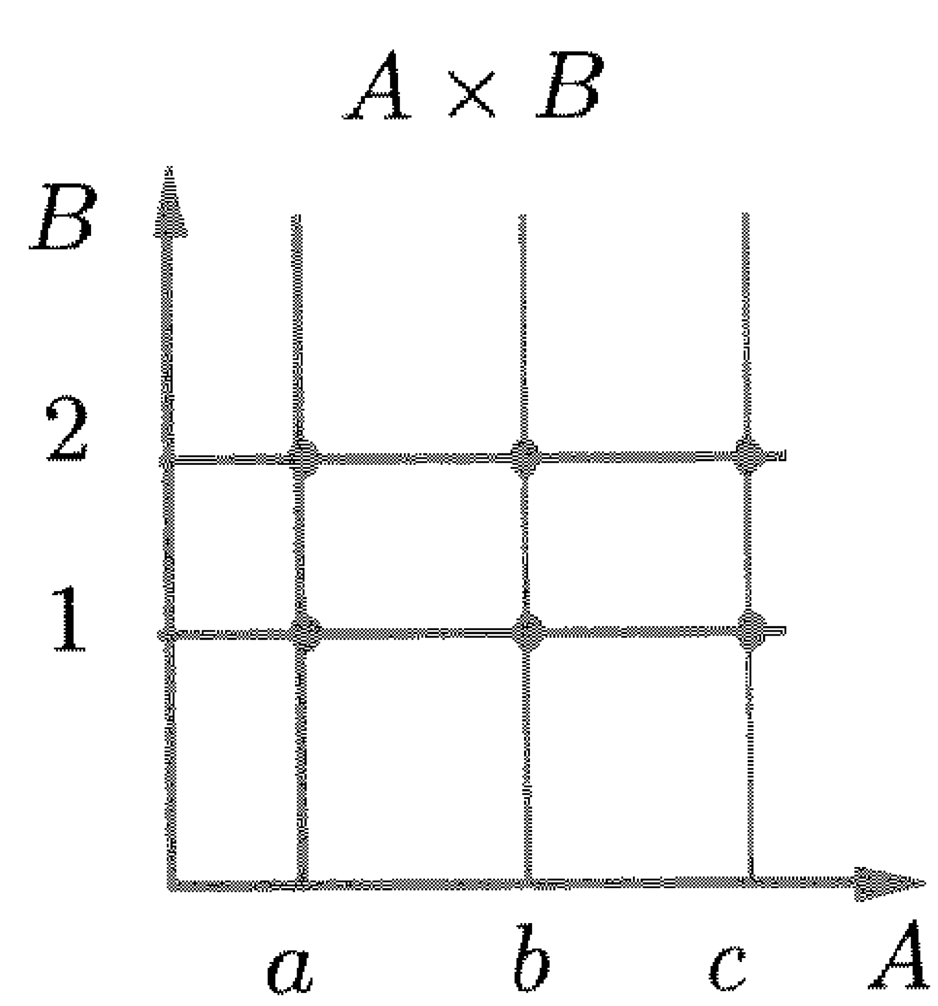
نمثّل إحدى المجموعتين بالمحور الأفقي والأخرى بالمحور الرأسي.

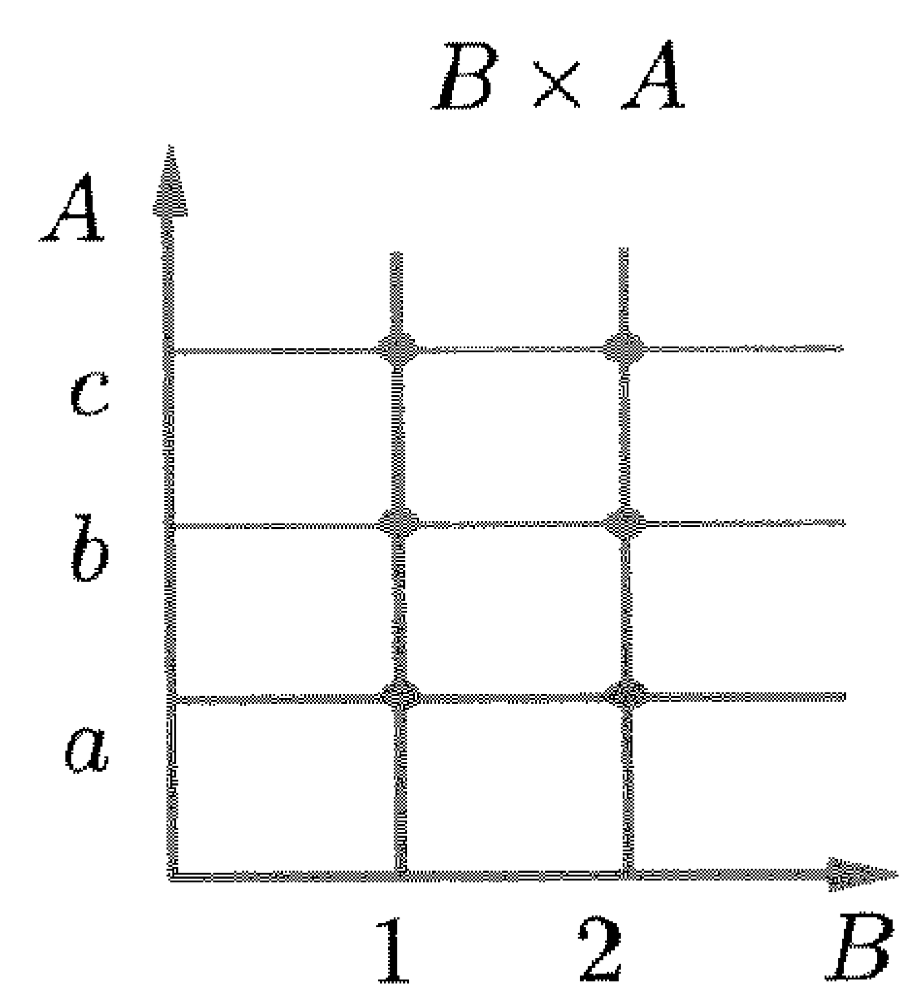
نقط التقاطع هي عناصر المجموعة $A \times B$، وكذلك المجموعة $B \times A$.

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),)c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

من المثال، نلاحظ $A \times B \neq B \times A$.





شكل 2.2

العلاقات (Relations)

تعريف 2.2

لنفرض أن A وB مجموعتان.

العلاقة $\mathcal{R}$ من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$.

من المعتاد أن نكتب $a\mathcal{R}b$ أو $(a,b) \in \mathcal{R}$، وتقرأ a مرتبطة بالعلاقة $\mathcal{R}$ مع b. عندما تكون $A = B$، فإننا نقول $\mathcal{R}$ علاقة على A بدلاً من $\mathcal{R}$ علاقة من A إلى B.

لنفرض أن $\mathcal{R}$ علاقة من A إلى B.

نطاق العلاقة $\mathcal{R}$: هو مجموعة كل العناصر $a \in A$ حيث $a\mathcal{R}b$ لبعض $b \in B$ ونكتب $\mathbf{Dom}(\mathcal{R})$.

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

مدى العلاقة $\mathcal{R}$: هو مجموعة كل العناصر $b \in B$ حيث $a\mathcal{R}b$ لبعض $a \in A$. ونكتب $\mathbf{Ran}(\mathcal{R})$.

$$\mathbf{Ran}(\mathcal{R}) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

مثــال 16

إذا كانت $A = \{2,3,5,6\}$ وكانت $\mathcal{R}$ تعني قاسماً، أوجد:

1) $A \times A$

2) العلاقة $\mathcal{R}$ على A.

الحـــل

$A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,5),(3,6),(5,2),(5,3),$
$(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,5),(6,6)\}$
$\mathcal{R} = \{(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(5,5),(6,6)\}$

تعريف 3.2

إذا كانت A وB مجموعتين و$\mathcal{R}$ علاقة من A إلى B، فإن معكوس العلاقة $\mathcal{R}$ هو علاقة $\mathcal{R}^{-1}$ من B إلى A؛ حيث أن $b\mathcal{R}^{-1}a$ عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$.

في المثال السابق

$\mathcal{R}^{-1} = \{(2,2),(6,2),(3,3),(6,3),(5,5),(6,6)\}$

تعريف 4.2

لنفرض أن $\mathcal{R}$ علاقة على A، نقول إن العلاقة $\mathcal{R}$ علاقة:

1) متعاكسة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}a$ لكل عنصر $a \in A$.
2) متماثلة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$ يؤدي إلى أن $b\mathcal{R}a$.
3) ناقلة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$ و$b\mathcal{R}c$ يؤدي إلى أن $a\mathcal{R}c$.
4) متكافئة عندما وفقط عندما تكون $\mathcal{R}$ علاقة متعاكسة ومتماثلة وناقلة.

مثـــال 17

لنفرض أن $A = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن:

1) $<$ علاقة ناقلة ولكنها ليست متعاكسة أو متماثلة.
2) $\leq$ علاقة ناقلة ومتعاكسة ولكنها ليست متماثلة.
3) $=$ علاقة متكافئة.

الدوال (Functions)

تعريف 5.2

لنفرض أن X وY مجموعتان.

الدالة f هي علاقة من X إلى Y، تحقق ما يلي:

1) $\mathbf{Dom}(f) = X$

2) إذا كان $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$، فإن $y = z$.

إذا كانت f دالة من X إلى Y، فإننا نكتب:

$$f : X \to Y$$

ونكتب $y = f(x)$ بدلاً من $(x, y) \in f$.

تعريف 6.2 (تعريف آخر للدالة)

الدالة هي علاقة من X إلى Y، تحدد لكل عنصر $x \in X$ عنصراً وحيداً $y \in Y$.

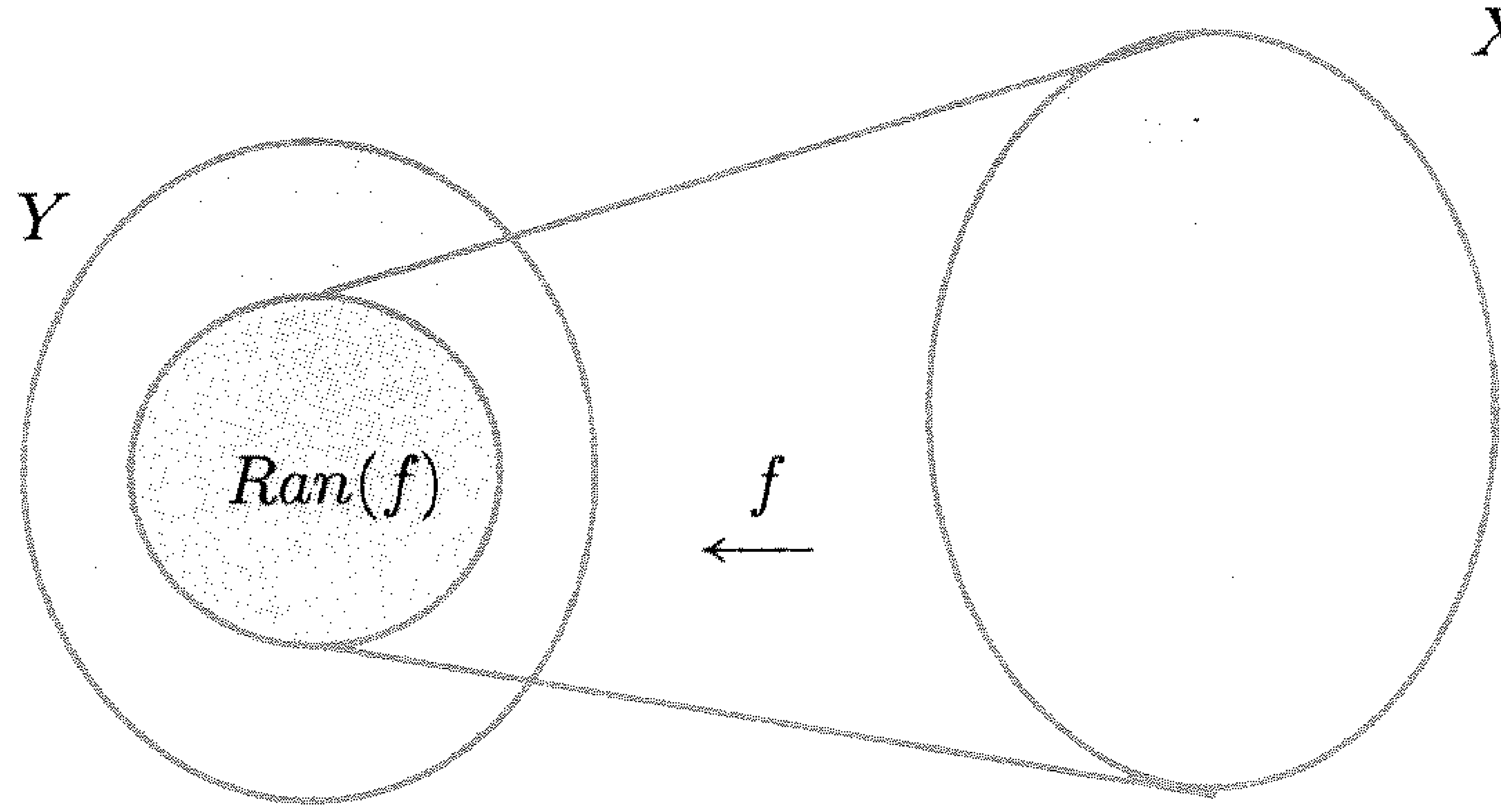
إذا كان $y = f(x)$، فإن y يسمى صورة (image) x تحت تأثير f.

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة، فإننا نلاحظ أن مجموعة كل الصور (صور النطاق) هي مدى الدالة f.

$$\mathbf{Ran}(f) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

نلاحظ أن $\mathbf{Ran}(f) \subseteq Y$.

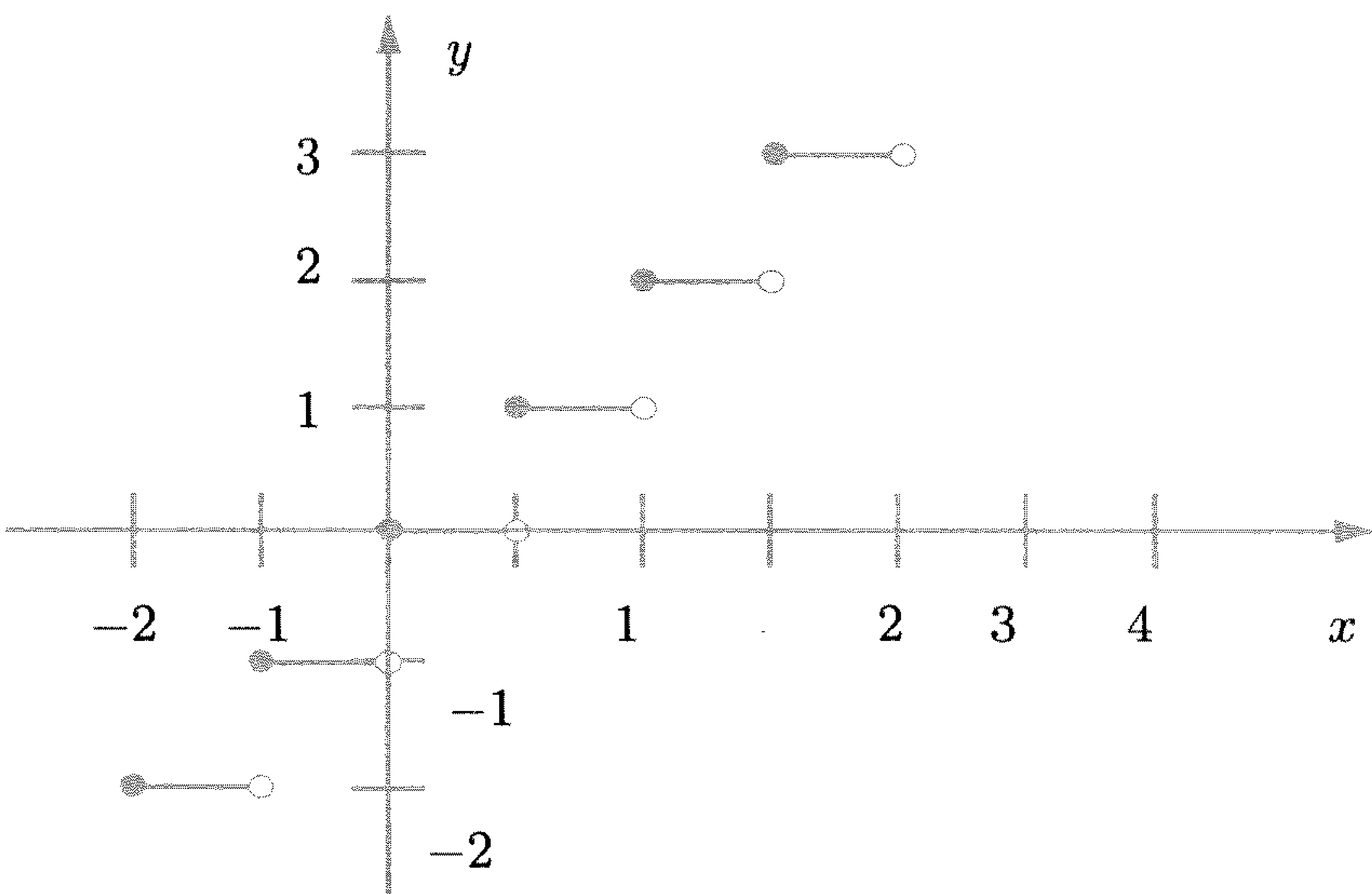
تسمى المجموعة Y النطاق المصاحب (Codomain) للدالة f، وليس من الضروري أن يساوي مدى الدالة نطاقها المصاحب.



الشكل 3.2

مثال 18

الدالة $f : I\!R \to R$ والمعرفة $f(x) = [x]$ حيث $[x]$ يعني أكبر عدد صحيح أصغر من x أو يساوي x.

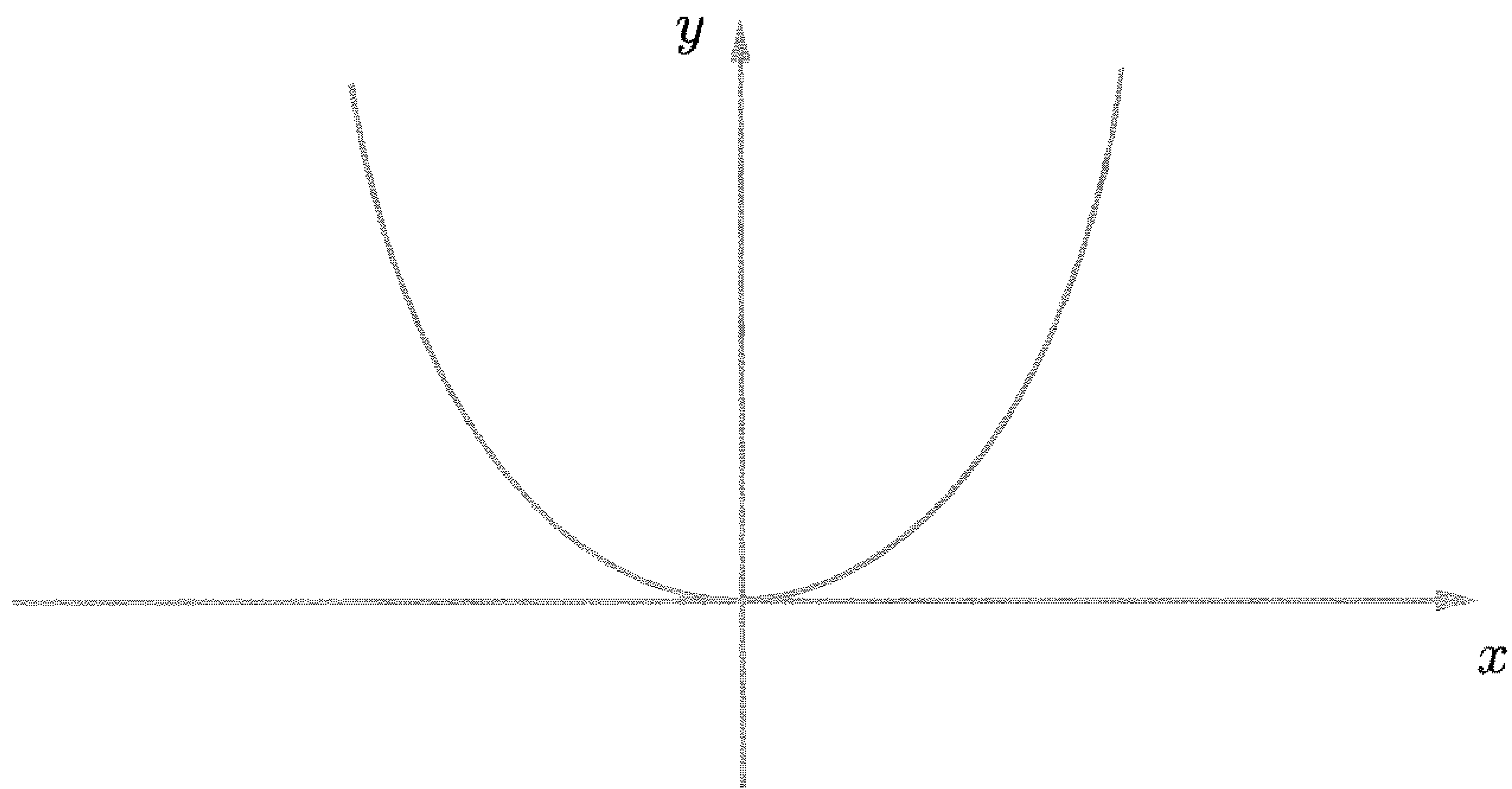


الشكل 4.2 الدالة $f(x) = [x]$

مثـال 19

الدالة $f : \mathbb{R} \to R$ والمعرفة $f(x) = x^2$.

$\mathbf{Dom}(f)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، ولكن $\mathbf{Ran}(f)$ هو الفترة $[0, \infty]$.

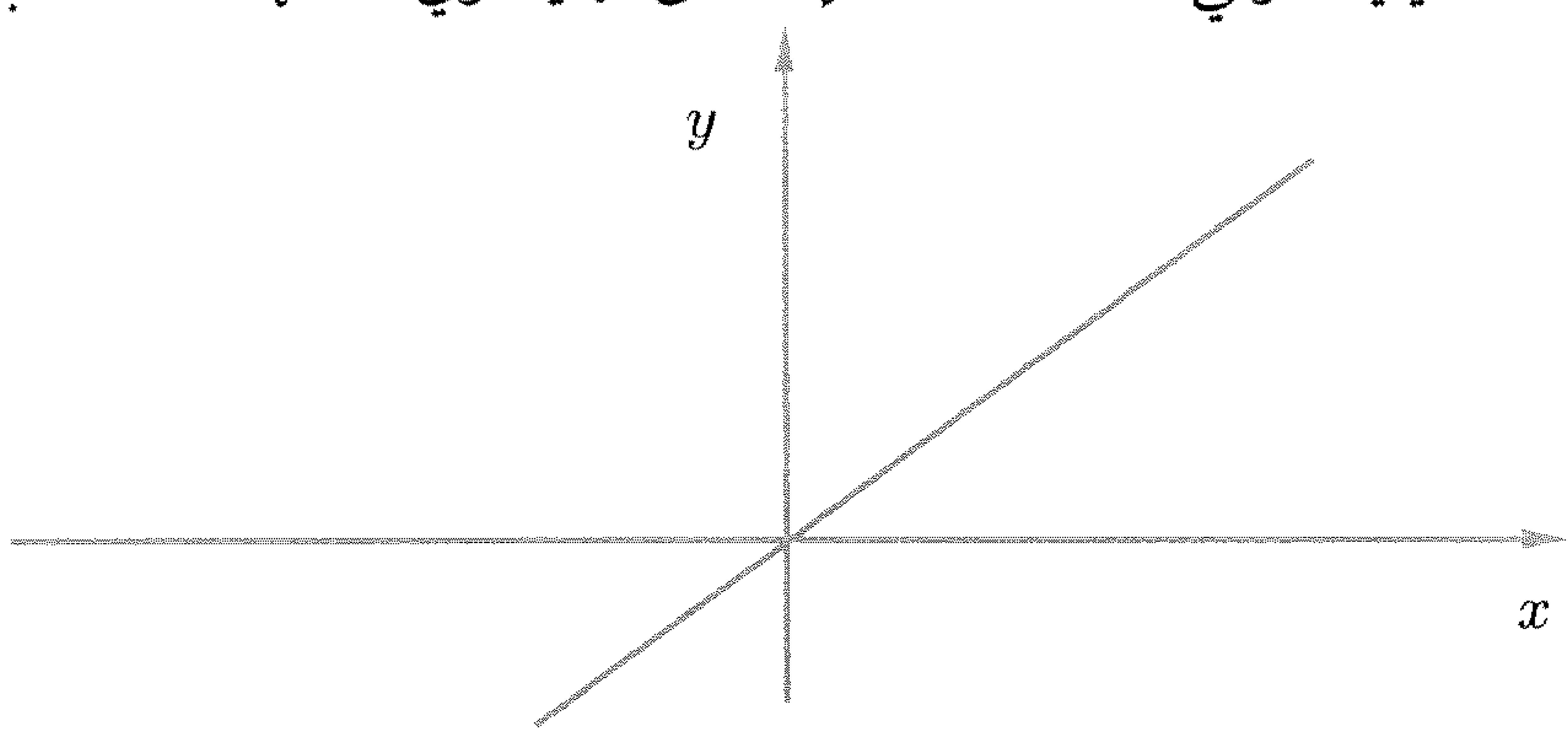


الشكل 5.2 الدالة $f(x) = x^2$

مثـال 20

الدالة $f : \mathbb{R} \to R$ والمعرفة $f(x) = x$.

النطاق $\mathbf{Dom}(f)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، ومداها أيضاً مجموعة الأعداد الحقيقية. وفي هذه الحالة، فإن مدى f يساوي نطاقها المصاحب.



الشكل 2.6 الدالة $f(x) = x$

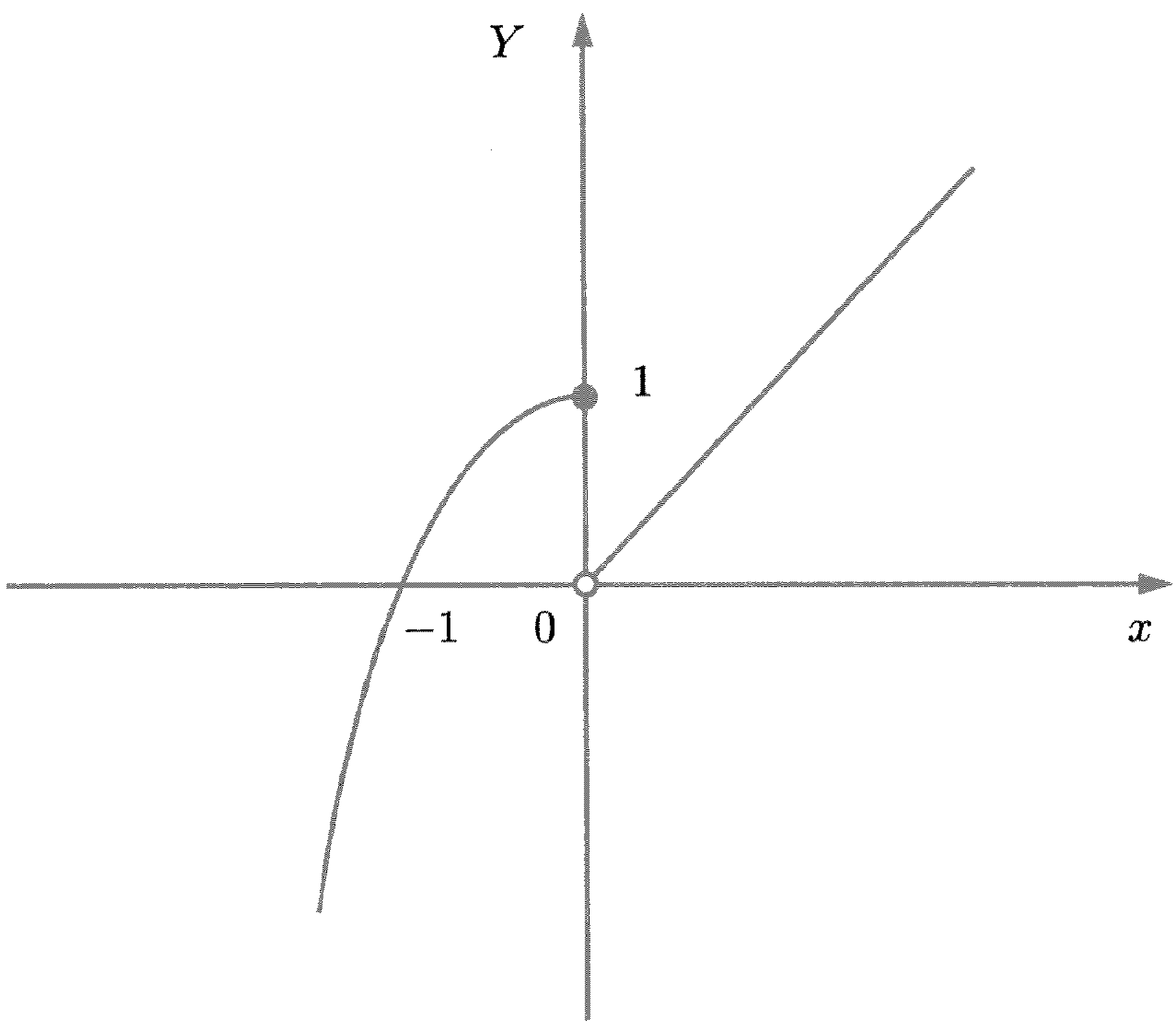
مثـــال 21

الدالة $f: I\!R \to R$ والمعرفة

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$$ (أنظر الشكل 7.2)

نطاق ومدى هذه الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

نلاحظ أيضاً أن المدى يساوي النطاق المصاحب لهذه الدالة.



الشكل 7.2

ملاحظة: عند بيان (رسم) أي معادلة، فإن هذا البيان يمثل دالة عندما وفقط عندما لا يمر أي خط عمودي بأكثر من نقطة واحدة.

تمارين 3.2

1) إذا كانت $A=\{a,b,c\}$، وكانت $\mathcal{R}$ علاقة على A بحيث تكون:

$$\mathcal{R}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(c,a),(a,c)\}$$

أ) أوجد مدى ونطاق العلاقة $\mathcal{R}$.

ب) أوضح أن $\mathcal{R}$ علاقة متعاكسة ومتماثلة، ولكنها ليست علاقة ناقلة.

2) إذا كانت $A=\{a,b\}$ و $B=\{x,y,z\}$، وكانت العلاقة:

$$\mathcal{R}=\{(a,x),(b,y)\}$$

أوجد معكوس العلاقة $\mathcal{R}$.

3) إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$، أوجد:

أ) $f(x+\Delta x)$ ب) $f(x)+f(\Delta x)$

ج) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ حيث أن $\Delta x\neq 0$

4) إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x}$، أوجد:

أ) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ب) $\dfrac{1}{f(x)}$ ج) $\left[f(x)\right]^2$

5) لنفرض أن $f:I\!R\to R$ معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x\in Q \\ -1 & , \quad x\in Q^c \end{cases}$$

أوجد:

أ) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ب) $f(7)$ ج) $f(\sqrt{2})$

6) إذا كانت $f:I\!R\to R$ معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}4x+3 & , \quad x>5\\ x^2-2 & , \quad 6\le x\le 5\\ 4-5x & , \quad x<-6\end{cases}$$

أوجد:

أ) $f(-7)$ ب) $f(3)$ ج) $f(0)$

د) $f(5)$ هـ) $f(6)$

7) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+7}$، أوجد:

أ) $f(-1)$ ب) $f(0)$

ج) $f(2)$ د) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

في التمارين من 8 إلى 17 أوجد نطاق الدالة المعطاة:

8) $f(x)=5-x$ 9) $f(x)=(x+2)^{-1}$

10) $f(x)=\dfrac{4-5x}{2}$ 11) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

12) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-4}$ 13) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

14) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 15) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$ 17) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$

في التمارين من 18 إلى 22 أوجد نطاق الدالة المعطاة:

18) $f(x)=x-1$ 19) $f(x)=2x-3$

20) $f(x)=x^2+1$ 21) $f(x)=x^3-4$

22) $$f(x)=\begin{cases}5-x & , \quad x<3\\ q-\dfrac{x}{3} & , \quad x>0\end{cases}$$

23) أرسم بيانيًّا الدالة $f(x)=|x^3+5|$

24) أرسم بيانيًّا الدالة $f(x) = x + |x|$

25) إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

ارسم بيانيًّا الدالتين f وg

4.2 عمليات جبرية على الدوال

إذا كانت f وg دالتين، فإن:

(1) $(kf)x = kf(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f)$ وحيث أن k مقدار ثابتة.

(1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$

(3) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$ بشرط أن: $g(x) \neq 0$.

مثـــال 22

إذا كانت $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = 3x + 1$، أوجد:

$f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$.

الحـــل

$\mathbf{Dom}(f) = \{(x : -2 \leq x \leq 2\}$ و $\mathbf{Dom}(g) = I\!R$

ومن ذلك، فإن: $\mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g) = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

إذن:

1) $(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3x + 1$ لكل x في النطاق المشترك.

2) $(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - 3x - 1$ لكل x في النطاق المشترك.

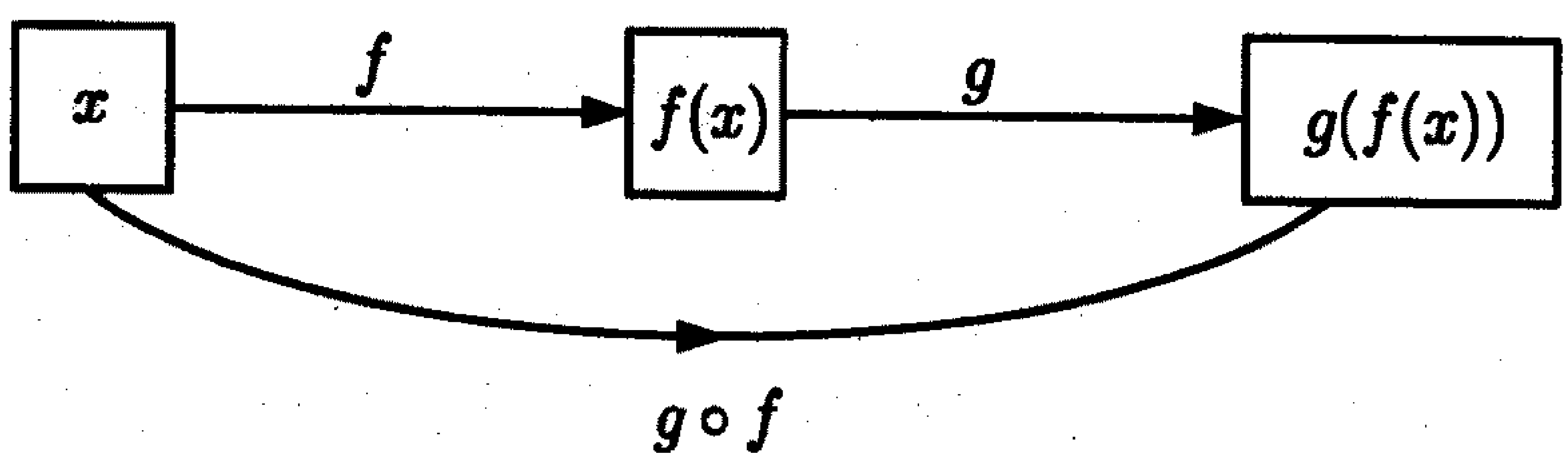
3) $(f.g)(x) = (\sqrt{4 - x^2}).(3x + 1)$ لكل x في النطاق المشترك.

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{3x-1}$ لكل x في النطاق المشترك و $x\neq-\frac{1}{3}$.

تعريف 7.2

إذا كانت $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$، فإن الدالة التركيبية (Composite Function)، هي:

$$g\circ f:X\to Z \text{ و } (g\circ f)(x)=g(f(x)) \text{ لكل } x\in X$$



شكل 8.2

مثـال 23

أوجد $g\circ f$ و $f\circ g$، إذا كانت $f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$.

الحـل

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$

تمارين 4.2

1) إذا كانت $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x+1$، أوجد:

أ) $f+g$ ب) $f-g$ ج) $f.g$ د) $\frac{f}{g}$

2) إذا كانت $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$، أوجد:

أ) $f+g$ ب) $f-g$ ج) $f.g$ د) $\frac{f}{g}$

3) إذا كانت $f(x)=x-1$ و $g(x)=2x+1$، أوجد:

أ) $f\circ g$ ب) $g\circ f$

4) إذا كانت $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$، أوجد:

أ) $f\circ g$ ب) $g\circ f$

5) أوضح بيان الدالة $f(x)=-3|x|+x$، وأوجد نطاقها ومداها.

6) أوضح بيان الدالة $f(x)=[x]-x$.

7) أوضح بيان الدالة $f(x)=[x]+x$

8) أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$.

9) أوجد مدى الدالة $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

10) أوضح بيان الدالة $f(x)=x^2-x$، وأوجد نطاقها.

11) إذا كانت $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=x^2$، فأوجد $f\circ g$ و $g\circ f$.

12) إذا كانت

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \quad x\le 0\\ \sqrt{-x} & , \quad x<0\end{cases}\quad , \quad f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x\ge 0\\ x^3 & , \quad x<0\end{cases}$$

أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$.

13) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$، أوجد:

أ) $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\dfrac{f}{g}$

ب) النطاق لكل حالة في (أ).

14) أرسم بيانياً الدالة $f(x)=-x^2-5x+5$.

15) أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{1+x}}$.

5.2 بعض أنواع الدوال

تعريف 8.2

الدالة $f : X \to Y$ تسمى دالة:

1) أحادية (One-To-One):

إذا وإذا كان فقط $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ يؤدي إلى أن $x_1 = x_2$.

2) فوقية (Onto):

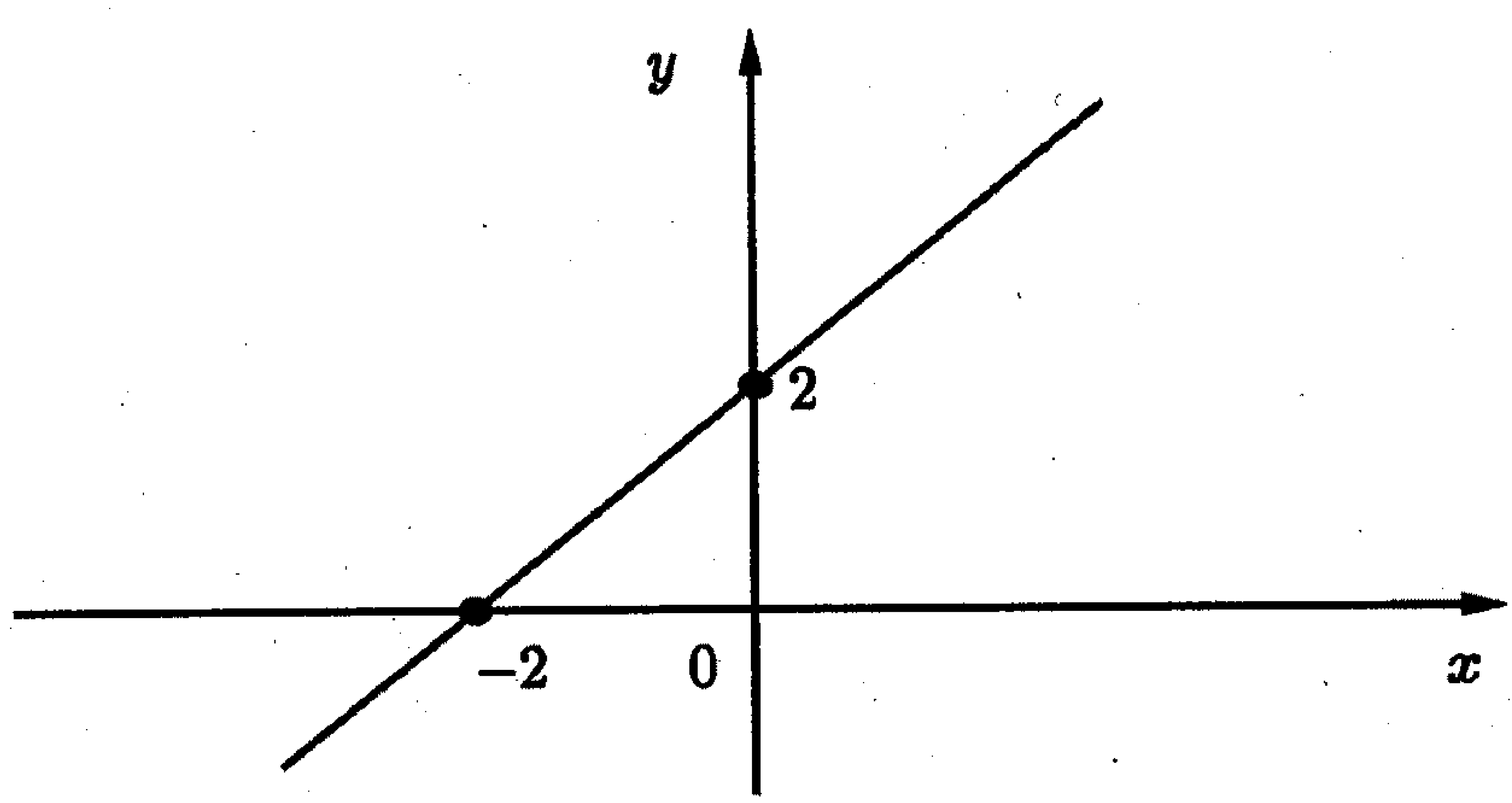
إذا وإذا كان فقط لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ حيث أن $f(x) = y$.

مثال 24

الدالة $f(x) = x + 2$ دالة أحادية من $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$، لأنه إذا كان:

$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$، و $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 + 2 = x_2 + 2$، ومنها $x_1 = x_2$.

وفوقية لأنه لأي $y \in \boldsymbol{R}$ يوجد $x \in \boldsymbol{R}$ ونستطيع الحصول عليه من $f(x) = y$ أي أن $x + 2 = y$، ومن ذلك فإن $x = y - 2$ حيث $f(x) = y$.

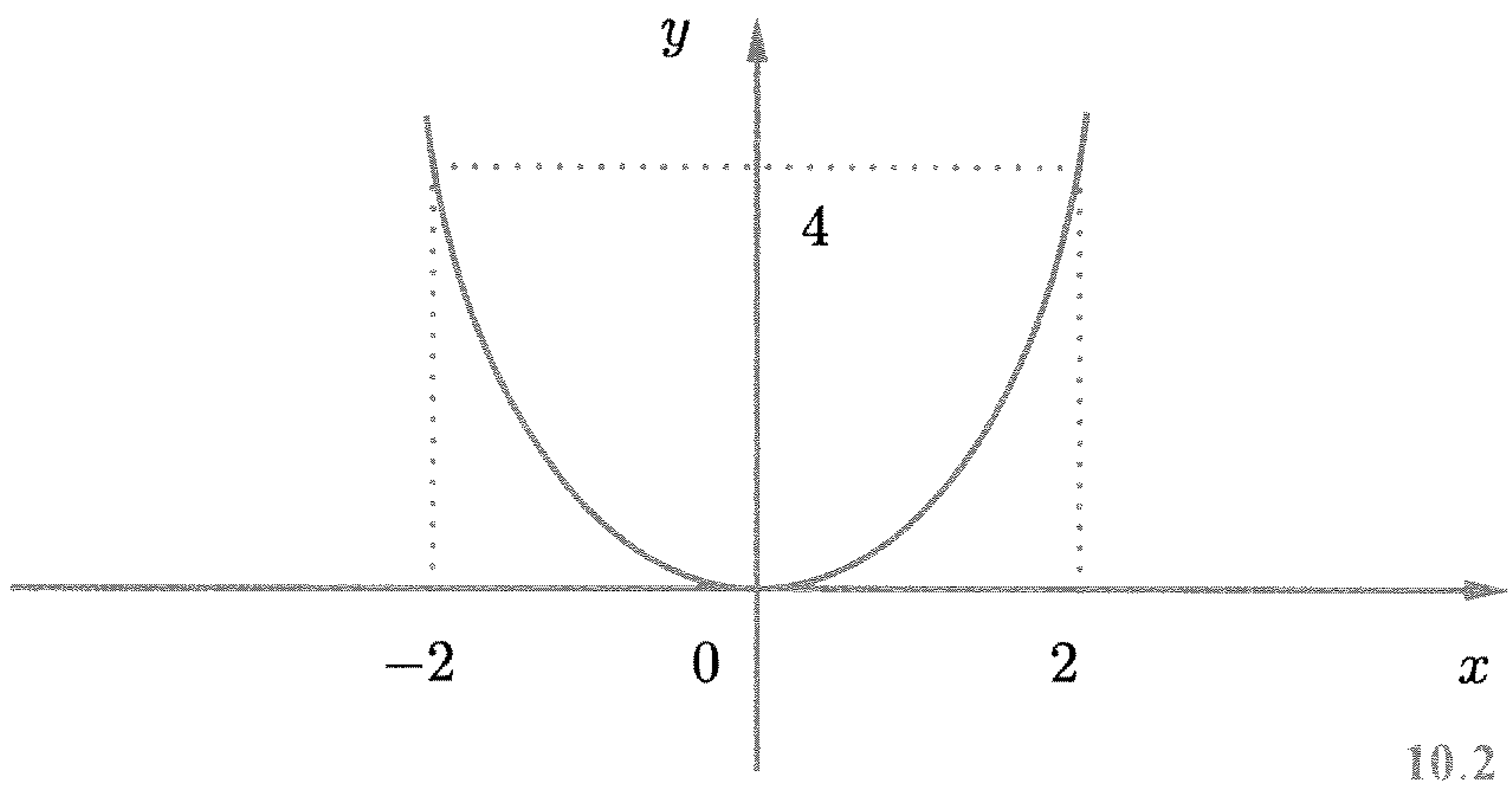


الشكل 9.2 الدالة $f(x) = x + 2$

مثـــال 25

الدالة $f(x) = x^2$ ليست دالة أحادية؛

لأن $2, -2 \in \mathbb{R}$ و $f(-2) = f(2)$، ولكن $2 \neq -2$.



الشكل 10.2

ملاحظة: عند بيان أي دالة، فإن هذا البيان يمثل دالة أحادية عندما وفقط عندما لا يمر أي خط أفقي بأكثر من نقطة واحدة.

الدالة $f(x) = x$ تسمى الدالة المحايدة (Identity Function)، ويرمز لها بالرمز I

تمارين 5.2

في التمارين من 1 إلى 5، حدِّد ما إذا كانت الدالة المعطاة دالة أحادية أم لا:

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = 2x^2 - x - 3$

3) $f(x) = 2x + 9$

4) $f(x) = |x + 1|$

5) $f(x) = x^4 + 2x + 1$

في التمارين من 6 إلى 10، حدِّد ما إذا كانت الدالة فوقية أم لا:

(6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x) = x^2$.

(7 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x) = x^3 + 1$.

(8 $f: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x) = \sqrt{x}$.

(9 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

(10 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x) = x^5$.

6.2 الدالة العكسية (Inverse Function)

تعريف 9.2

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة أحادية، تسمى الدالة $g: Y \to X$ الدالة العكسية للدالة f، بشرط أن $f \circ g = I_y$ و $g \circ f = I_x$، وفي هذه الحالة نكتب: $g = f^{-1}$.

لاحظ أنه إذا كانت f ليست أحادية، فإن f^{-1} لا تمثل دالة.

كيفية إيجاد الدالة العكسية

مثـــال 26

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 3x + 1$

الحــل

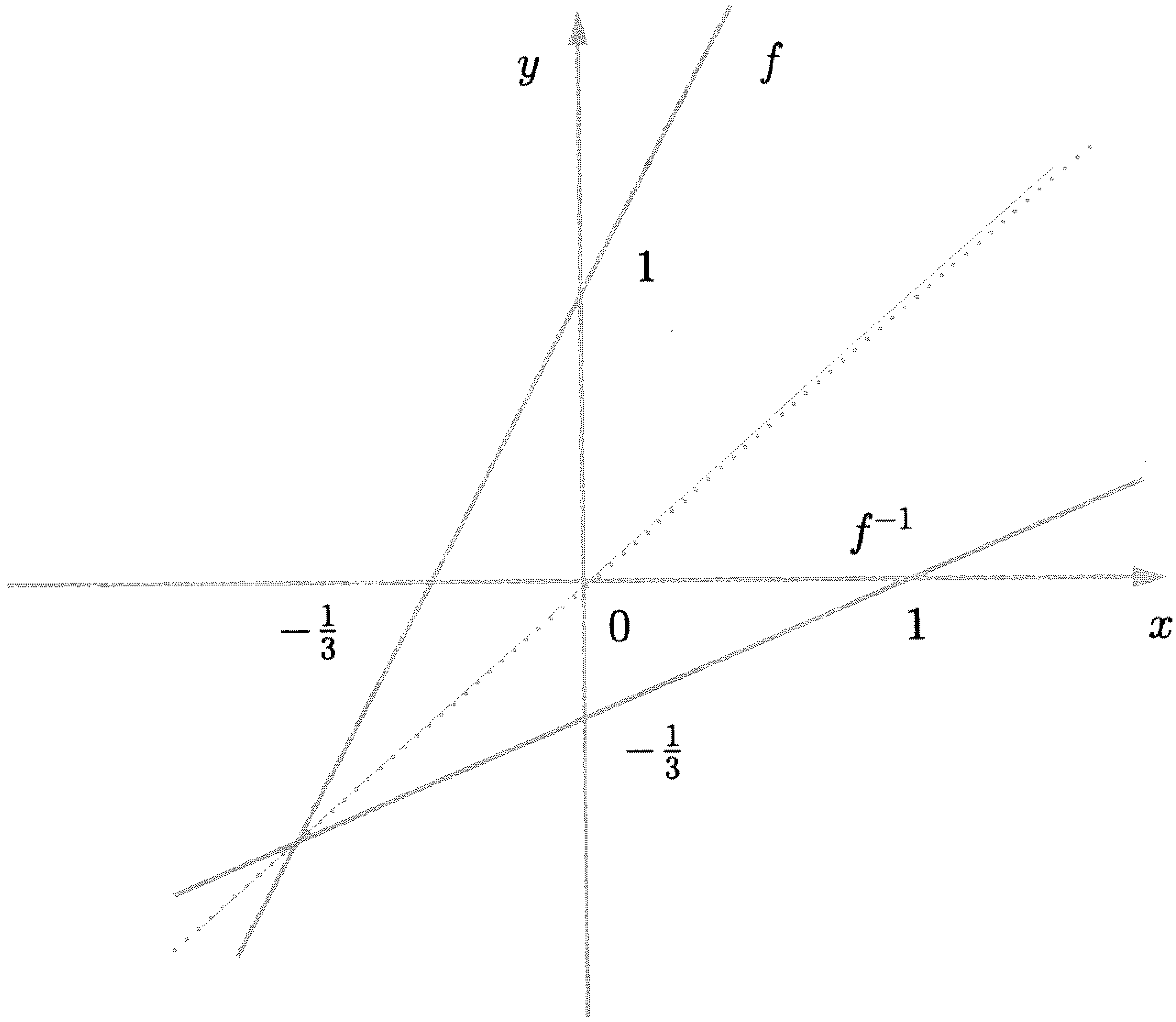
1) ضع y بدلاً من $f(x)$، أي أن $y = 3x + 1$.

2) أوجد x بدلالة y، أي أن $x = \dfrac{y-1}{3}$.

3) ضع $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$.

4) ضع $y = x$، أي أن $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

للتأكد من عملك، أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$، كلاهما يجب أن يساوي الدالة المحايدة I.



الشكل 11.2

مثـــال 27

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

الحـــل

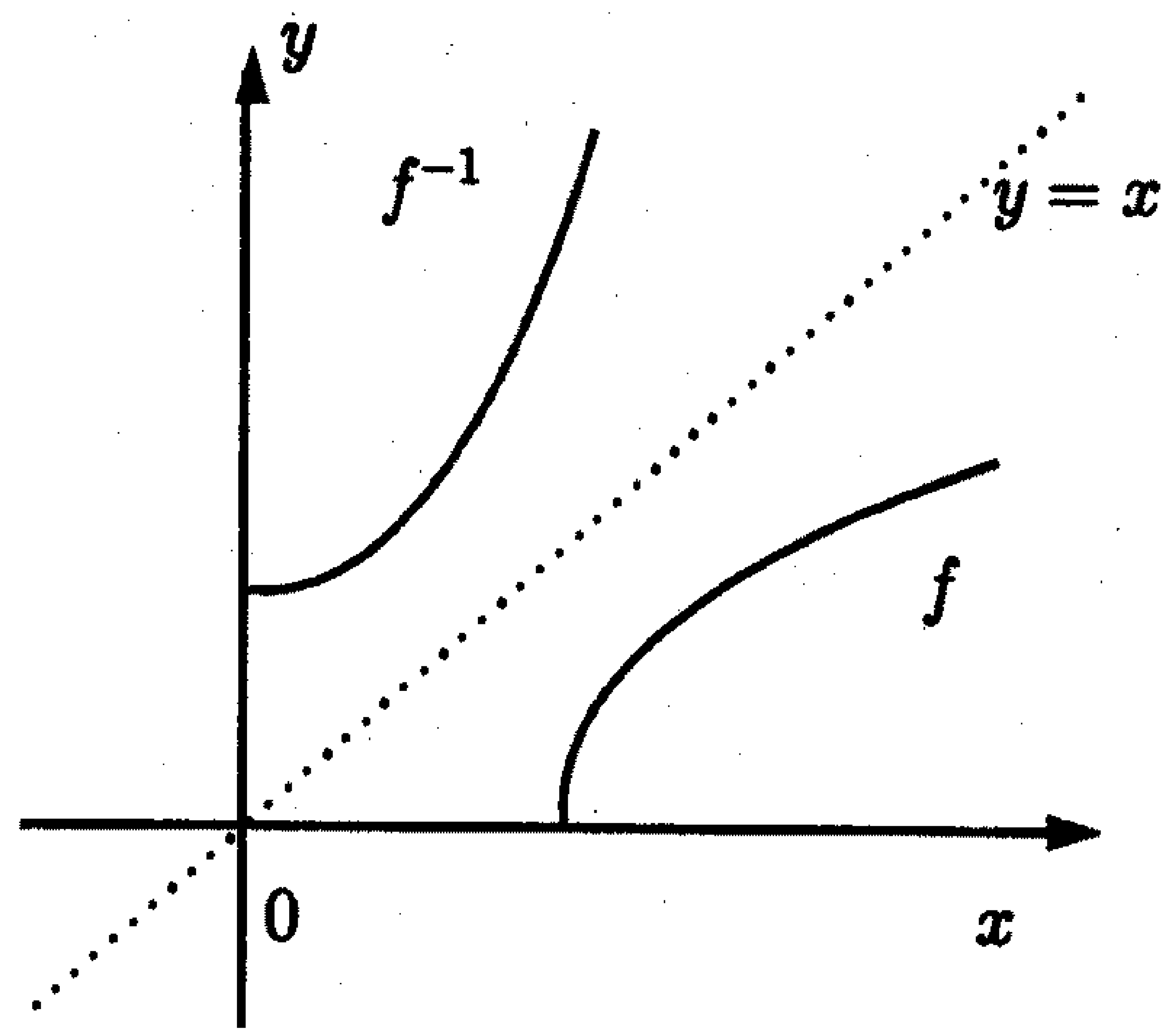
التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y = \sqrt{2x-3}$

التغيير يعطينا $x = \sqrt{2y-3}$

وبالتربيع، نجد أن $x^2 = 2y-3$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $y = \frac{x^2+3}{2}$

الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$



الشكل 12.2

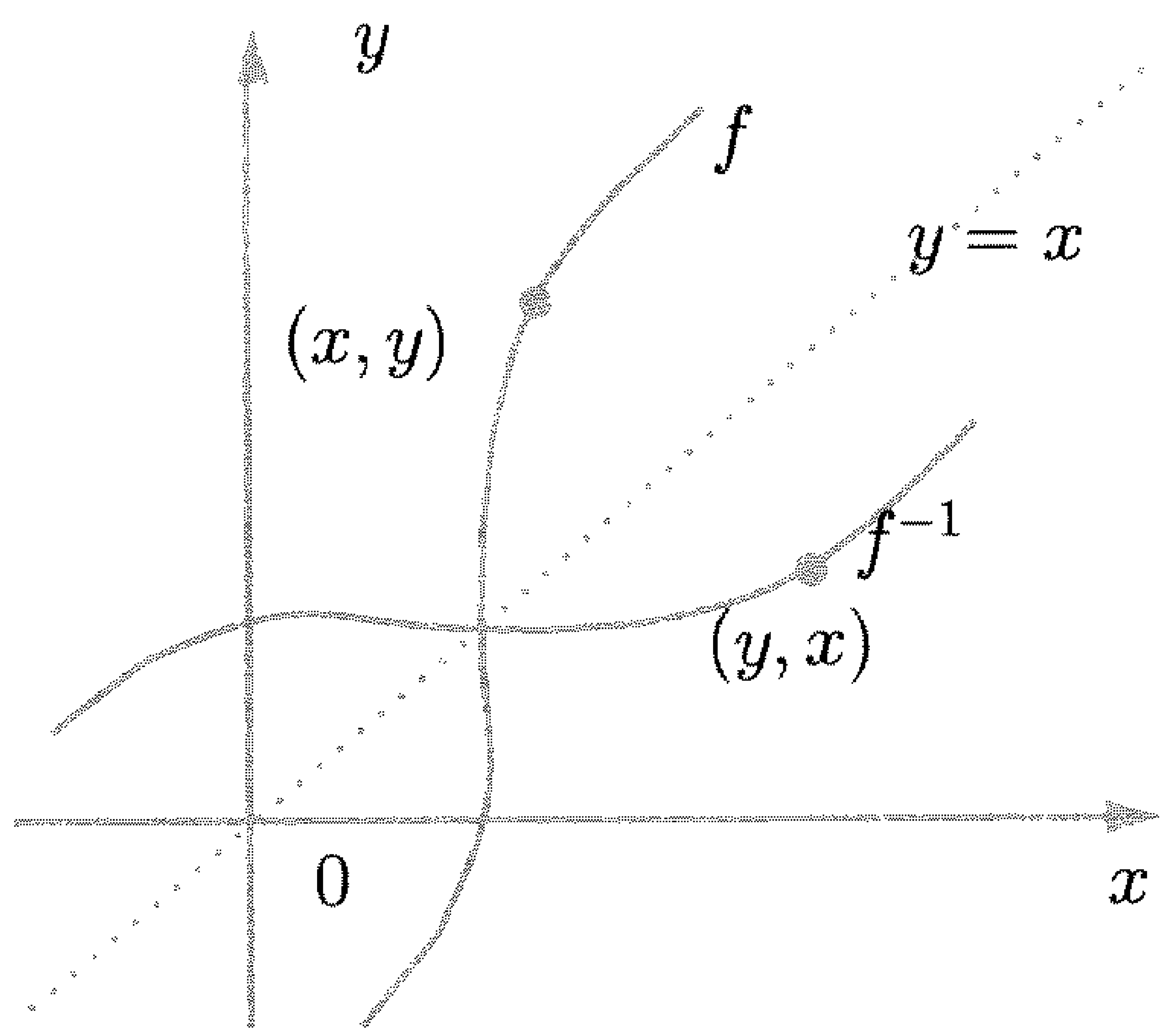
الشكل 13.2 بيان الدالة f^{-1}، هو صورة بيان الدالة f، في المستقيم $y = x$.

من المثالين السابقين، نستطيع استنتاج أن:

بيان (رسم) الدالة العكسية للدالة f، هو صورة بيان الدالة f في المستقيم (المرآة)

$x = y$

بعبارة أخرى: يحتوي بيان الدالة f على كل النقاط (x,y)، إذا وإذا كان فقط بيان الدالة f^{-1} يحتوي على جميع النقاط (y,x).



شكل 13.2

تمارين 6.2

في التمارين من 1 إلى 5، أوضح أن كلتا الدالتين f وg معكوس الأخرى:

1) $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

2) $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = x^3 - 8$ و $g(x) = \sqrt[3]{x+8}$.

5) $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 1$ لكل $x \geq 1$.

في التمارين من 6 إلى 10، أوجد معكوس الدالة المعطاة في كل حالة:

6) $f(x) = (x+3)^5 - 2$

7) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

8) $f(x) = -\dfrac{1}{x} - 1$

9) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x+1}$

10) $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$

تمارين على الفصل الثاني

1) إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{3,4,5\}$، أوجد $A \cup B$ و$A \cap B$ و$A - B$.

2) إذا كانت $A = \{x, \{y, z\}\}$، أوجد $P(A)$.

3) إذا كانت $A = \{a, b, c\}$، وكانت:

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (c,a), (a,c)\}$$

أوضح أن العلاقة $\mathcal{R}$ تكون متعاكسة ومتماثلة، ولكنها ليست ناقلة.

4) إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x + 2$، أوجد:

أ) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ب) $f(-1)$ ج) $f(0)$ د) $f(x + \Delta x)$

5) إذا كانت $f(x) = \frac{|x|}{x}$، أوجد:

أ) $f(2)$ ب) $f(-2)$ ج) $f(x-1)$

في التمارين من 6 إلى 12، أوجد نطاق ومدى الدالة f في كل حالة:

6) $f(x) = 4 - 2x$ 7) $f(x)x^3$

8) $f(x) = 9 - x^2$ 9) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

12) $f(x) = x^3 - 1$ 11) $f(x) = |x - 2|$

12) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

13) إذا كانت $f(x) = x^3 - x$، أوجد:

أ) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ب) $\frac{f(x) - 1}{x - 1}$

في التمارين من 14 إلى 20، حدِّد ما إذا كانت المعادلة المعطاة تحدد دالة، واذكر السبب إذا كانت لا تحدد دالة:

14) $x+y=1$ 15) $x^2+y^2=1$

16) $x^2+y=1$ 17) $x+y^2=1$

18) $xy=1$ 19) $x^2y-x^2+4y=0$

20) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$

في التمارين من 21 إلى 25، أوجد كلاً من:

أ) $f+g$ ب) $f.g$ ج) $\dfrac{f}{g}$ د) $f\circ g$ د) $g\circ f$

21) $f(x)=x+1$ ، $g(x)=x-1$

22) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=1-x$

23) $f(x)=x^2+5$ ، $g(x)=\sqrt{1-x}$

24) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ، $g(x)=x^3$.

25) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

في التمارين من 26 إلى 28، أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة، وأعط بياناً للدالة f ومعكوسها f^{-1}:

26) $f(x)=\sqrt{x}$

27) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ حيث $0\le x\le 2$

28) $f(x)=x^3+1$

في التمارين من 29 إلى 33، حدّد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا، وأوجد الدالة العكسية لهذه الدالة إذا كانت الدالة أحادية:

29) $f(x)=X^2$ 30) $f(x)=aX+b$

31) $f(x)=x-2$ 32) $f(x)=x-1$

33) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

في التمارين من 34 إلى 36، أوجد $g \circ f$ ،$f \circ g$:

34) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$.

35) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

36) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2-4}$.

37) أرسم بيانياً الدالة $f(x) = x^2 + |x| - 2$.

38) إذا كانت لدينا الدالة

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

فارسم بيانياً:

أ) الدالة $H(x)$.　　ب) الدالة $H(x-1)$.

39) أوجد نطاق الدالة

$$f(x) = \frac{x+4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

40) أوجد دالة نطاقها كل الأعداد الحقيقية x حيث $-1 \leq x \leq 2$.

الفصل الثالث

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

1.3 النهايات (Limits)

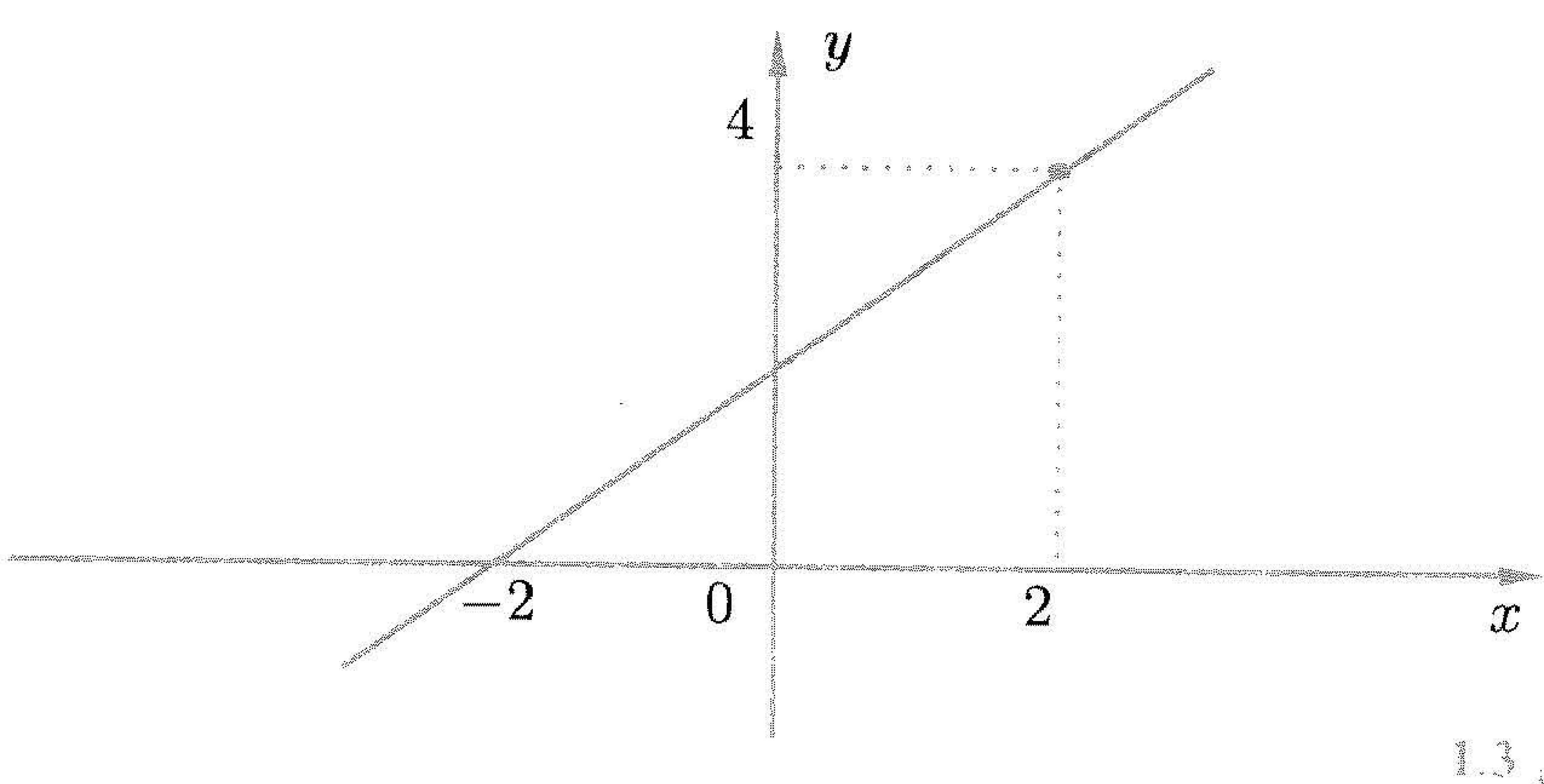
في هذا الفصل ندرس موضوع النهايات، وموضوع الدوال المتصلة لما لهذين الموضوعين من أهمية في دراسة التفاضل والتكامل.

مثال 1

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x + 2$ عندما تقترب x من 2.

الحل

عند رسم الدالة $f(x) = x + 2$، نلاحظ أن $x + 2$ تقترب من 4 كلما اقترب x من 2.



الشكل 1.3

والجدول التالي يوضح ذلك:

x	1.9	1.92	1.94	1.96	1.98	2	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1
$f(x)$	3.9	3.92	3.94	3.96	3.98	4	4.02	4.04	4.06	4.08	4.1

من ذلك، نستنتج أن نهاية الدالة f تساوي 4 عندما يقترب x من 2. ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال 2

أوجد نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ عندما يقترب x من 1.

الحل

نلاحظ أن $\sqrt{x}$ يقترب من 1 كلما اقترب x من 1، وأن $1+\sqrt{x}$ يقترب من 2 كلما اقترب x من 1، ولذلك نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

بصورة عامة، لا نستطيع تحديد نهاية الدالة دائماً بحسابات بسيطة كما رأينا سابقاً؛ لأنه قد تكون هذه الحسابات معقدة وغير واضحة، وقد لا تكون الدالة معرّفة عند النقطة المراد إيجاد النهاية عندها؛ فعلى سبيل المثال لإيجاد $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$، نقوم بالحسابات التالية:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1	2.5
$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	3.5	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1	4.5

ومنها نستطيع تخمين أن قيمة النهاية هي 4.

مثال 3

أوجد $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

الحل

نلاحظ أن x^2-4 و $x-2$ يؤولان إلى الصفر، كلما اقترب x من 2. ومن ذلك يظهر أن

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

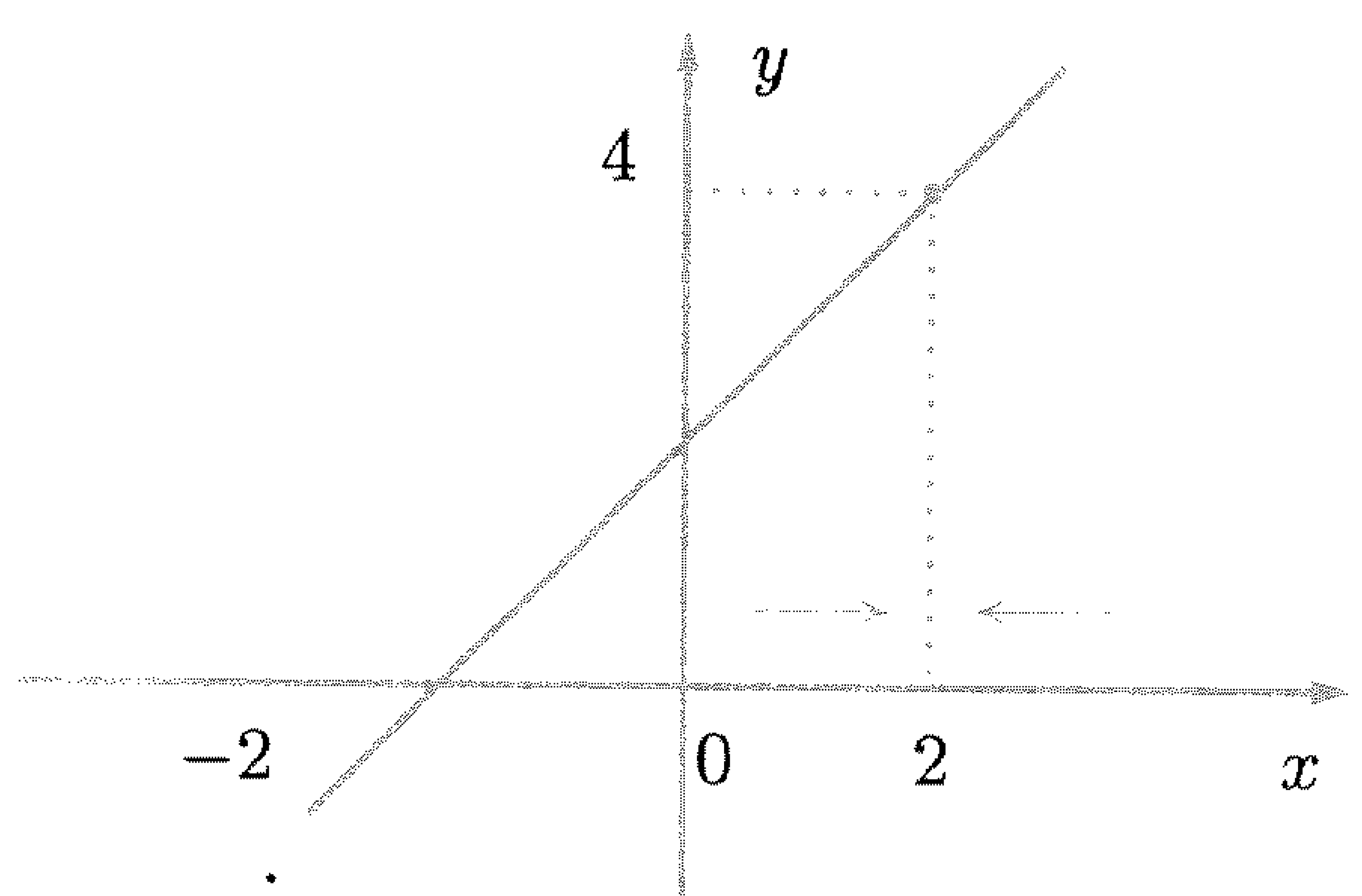
ولكن نعرف أن $\dfrac{0}{0}$ كمية غير معرّفة، ولهذا السبب لا بد من طريقة أخرى للحل. يتبادر إلى الذهن أن:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

عندما $x\neq 2$، وبذلك فإن:

$$\lim_{x\to 2}\tfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

لاحظ أن 2 لا يوجد في نطاق الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ولكن $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.



الشكل 2.3

مثــال 4

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

الحــل

عندما التعويض عن $x=1$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$

ولكن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

نحاول طريقة أخرى للحل.

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

من الأمثلة السابقة، نستطيع أن نعطي تعريفاً للنهاية.

تعريف 1.3

نقول إن العدد الحقيقي L نهاية للدالة f، عندما يؤول x إلى a، إذا كانت $f(x)$ تقترب من L، كلما اقترب x من a من الجانب الأيسر والأيمن.
ونكتب:

$$\lim_{x\to 2}f(x)==L$$

ملاحظة

الدالة f ليست من الضروري أن تكون معرّفة عند a (a ليس من الضروري أن يكون في نطاق الدالة f)، ولكن f لا بد أن تكون معرّفة حول a (أي في فترة مفتوحة تحتوي على a)، أنظر المثال 3.

مثـــال 5

أوجد $\lim_{x\to 4} f(x)$ إذا كانت $f(x)=\frac{1}{2}x-1$

الحـــل

من الجدول التالي:

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	0.95	0.995	0.9995	1	1.0005	1.005	1.05

نستنتج أن: $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=1$

في هذا المثال نلاحظ ما يلي:

إذا كان $3.9<x<4.1$، فإن $0.95<f(x)<1.05$،

وإذا كان $3.99<x<4.01$، فإن $0.995<f(x)<1.005$،

وإذا كان $3.999<x<4.001$، فإن $0.9995<f(x)<1.0005$.

بعبارة أخرى، إذا كان ε وδ عددين حقيقيين موجبين وصغيرين جداً، فإننا نستنتج مما سبق أنه إذا كان:

$4-\delta<x<4+\delta$ ، فإن $1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon$

في الحالة الأولى $\delta = 0.1$ و $\varepsilon = \delta/2$،

وفي الحالة الثانية $\delta = 0.01$ و $\varepsilon = \delta/2$،

وفي الحالة الثالثة $\delta = 0.001$ و $\varepsilon = \delta/2$،

ويمكن كتابته على الشكل:

إذا كان $-\delta < x - 4 < \delta$ ، فإن $-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$

وهذا يعني أنه إذا كان

$|x - 4| < \delta$ ، فإن $|f(x) - 1| < \varepsilon$

من المثال السابق، نستطيع إعطاء تعريف آخر للنهاية كما يلي:

تعريف 2.3

التعبير $\lim_{x\to a} f(x) = L$ يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أنه إذا كان $0 < |x - a| < \delta$، فإن $|f(x) - L < \varepsilon$.

مثال 6

أوضح أن $\lim_{x\to 4} \dfrac{7x - 2}{2} = 13$.

الحل

لكل $\varepsilon > 0$، نحاول إيجاد $\delta > 0$، حيث أنه إذا كان $0 < |x - a| < \delta$، فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{7x-2}{2}-13\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{7x-2-26}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{7(x-4)}{2}\right|<\varepsilon$$

أو
$$|x-4|<\frac{2}{7}\varepsilon$$

فإذا كان $\delta=\frac{2}{7}\varepsilon$، فإن:

$\delta > |x-4|$ يؤدي إلى أن $\left|\frac{7x-2}{2}-13\right|<\varepsilon$

في كل الأمثلة السابقة، استخدمنا كلمة الاقتراب من x، ولكن لم يتوضّح بعد: هل هذا الاقتراب من اليمين، أم من جهة اليسار. عند مناقشة موضوع ما، نحاول الابتعاد عن الالتباس، ومن هذه الأشياء موضوع النهاية، فمن أساسيات هذا الموضوع أن نهاية الدالة وحيدة.

المثال التالي يوضح هذه الفكرة.

مثـــال 7

أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ إذا كانت:
$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

الحــل

إذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليمين، نرى أن:

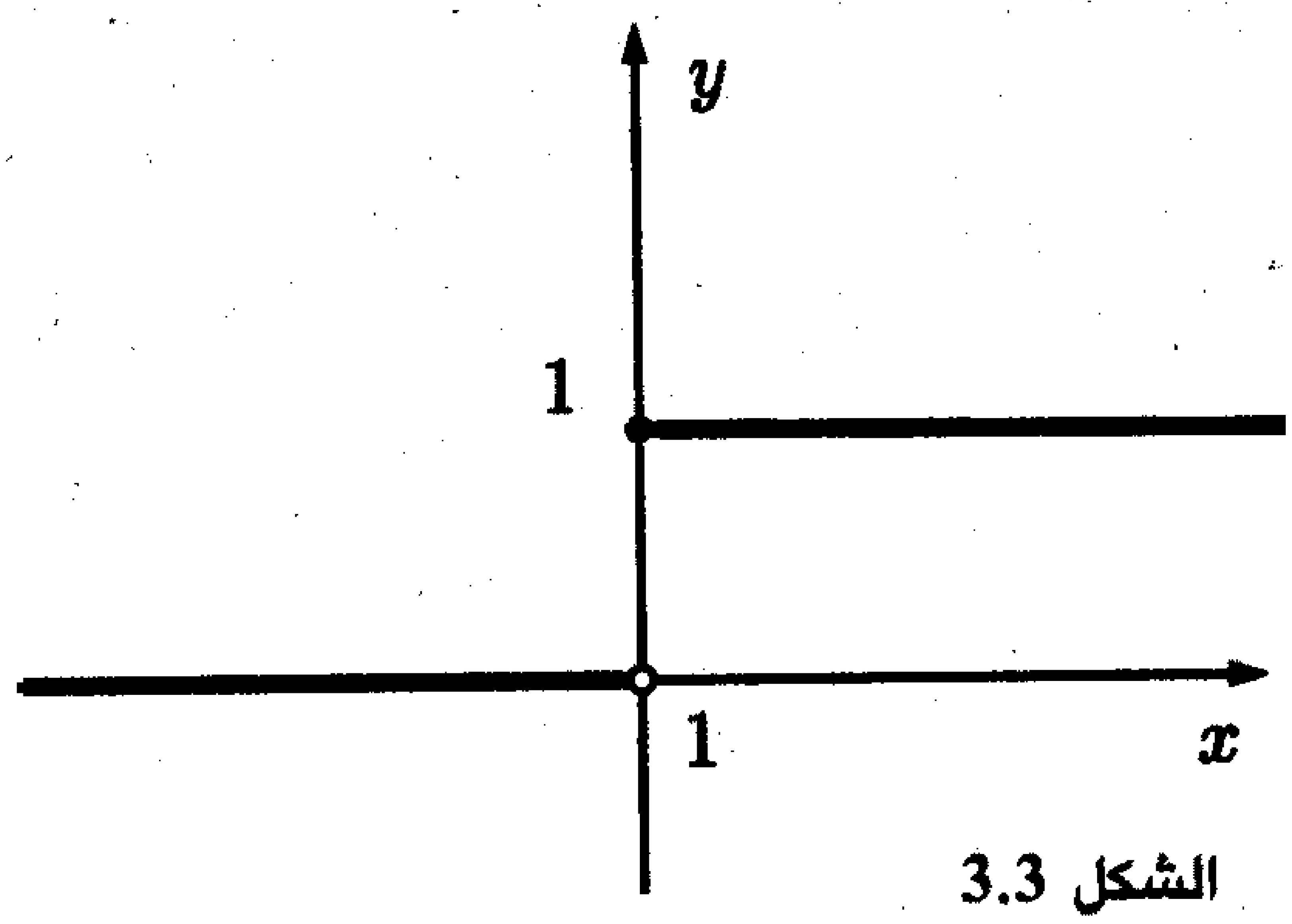
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

وإذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليسار، نرى أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

وبالتالي، فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة.

في هذه الحالة، نقول بأن نهاية الدالة غير موجودة، عندما يقترب x إلى الصفر.



الشكل 3.3

تعريف 3.3

لنفرض أن L عدد حقيقي؛

1) نقول إن L نهاية يمنى للدالة f، عندما يؤول x إلى a من الجانب الأيمن إذا كانت $f(x)$ تقترب إلى L كلما اقترب x إلى a من الجانب الأيمن. نكتب

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

هذا يعني أن لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أن $a < x < a+\delta$، يؤدي إلى $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2) نقول إن L نهاية يسرى للدالة f، عندما يؤول x إلى a من الجانب الأيسر إذا كانت $f(x)$ تقترب إلى L كلما اقترب x إلى a من الجانب الأيسر.

نكتب $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

هذا يعني أن لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أن $a-\delta < x < a$، يؤدي إلى $|f(x) - L| < \varepsilon$.

الرمز $x \to a^+$ يعني أن قيمة x تكون أكبر من a، والرمز $x \to a^-$ يعني أن قيمة x تكون أصغر من a.

لكي تكون نهاية الدالة موجودة، فلا بد أن تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى متساويتين:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$، أوجد $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

الحل

من تعريف القيمة المطلقة، نجد أن:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & , \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

أو

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & , \quad x < 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 1 \\ -1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

وبذلك فإن:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$$

و

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

ومما سبق، نستنتج أن النهاية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$ غير موجودة.

تمارين 1.3

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد النهاية المعطاة (يفضّل الاستعانة بالرسم كلما أمكن ذلك).

1) $\lim_{x\to 2} 3x$

2) $\lim_{x\to 1}(3x-4)$

3) $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{x}$

8) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3-x^2}{\sqrt{3}-x}$

9) $\lim_{x\to 4}(2x-5)$

10) $\lim_{x\to 2}|x-2|$

11) $\lim_{x\to 5^+}\frac{|x^2-25|}{x^2-25}$

12) $\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{x+2}}$

13) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+4}}$$ (14

(15 إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\le x<2 \\ 4 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$

أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ج) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ د) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

2.3 طرق إيجاد النهايات

نعطي في هذا البند بعض الطرق لإيجاد النهايات حتى يسهل علينا إيجاد نهاية معظم الدوال المعروفة.

1) إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود على الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

حيث $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ أعداد حقيقية، و n عدد صحيح موجب، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to b} f(x) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + ... + a_nb^n}$$

مثـــال 9

إذا كانت $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5$، أوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحـــل

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^4 - 2.1^3 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4$.

نتيجة

إذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة، أي أن $f(x)$ تساوي عدداً ثابتاً مهما تغير x، فإن نهايتها هي ذلك العدد الثابت.

على سبيل المثال إذا كانت $f(x) = 5$، فإن $\lim_{x\to a} f(x) = 5$.

2) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة، وكان c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)}$$

مثـــال 10

أوجد $\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3)$.

الحــل

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3) &= 6\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 3)\\ &= 6(2^2 - 2 + 3) = 6(5) = 30\end{aligned}$$

3) لنفرض أن $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجدتان، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)}$$

أي أن نهاية جمع أو طرح دالتين تساوي جمع أو طرح نهايتيهما.

مثـــال 11

إذا كانت $f(x) = x^3 - 5$ و $g(x) = x + 2$، أوجد: $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$

الحــل

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}(x^3 - 5) = 2^3 - 5 = 3\\ \lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$$

4) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)}$$

أي أن نهاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب نهايتيهما.

مثـــال 12

أوجد $\lim_{x\to 1}(x+1)(x-4)$.

الحــل

$$\lim_{x\to 1}(x-4) = -3 \quad , \quad \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

إذن

$$\lim_{x\to 1}(x-4)(x+1) = \lim_{x\to 1}(x-4).\lim_{x\to 1}(x+1) = 2(-3) = -6$$

5) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين و $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}}$$

بعبارة أخرى: أن نهاية خارج قسمة دالتين تساوي خارج قسمة نهايتيهما.

مثـــال 13

أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+3}{x^2-3x+1}$.

الحــل

$$\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3) = 3 \ , \ \lim_{x\to 0}(x^2-3x+1) = 1$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+3}{x^2-3x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3)}{\lim_{x\to 0}(x^2-3x+1} = \frac{3}{1} = 3$$

6) إذا تمّ التعويض المباشر وحصلنا على $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$ فلا بد من إجراء عمليات جبرية.

مثال 14

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

الحل

بالتعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

إذن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

مثال 15

أوجد $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

الحل

عند التعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

نظرية 1

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) > 0$، فإن هناك فترة مفتوحة تحتوي على a حيث $f(x) > 0$ لكل x في تلك الفترة.

البرهان

لنفرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$، من الفرض نجد أن $L > 0$ ومن ذلك يوجد $\delta > 0$ حيث أنه إذا كان $|x-a| < \delta$، فإن $|f(x) - L1 < \varepsilon$.

وهذا يعني أنه إذا كان $x \in (a-\delta, a+\delta)$، فإن $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

لاحظ أن الفترة المفتوحة التي تحتوي على a هي $(a-\delta, a+\delta)$، ومن الفرض $L > 0$ نستنتج أن $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ يحتوي على الأعداد الموجبة فقط (باختيار أي $\varepsilon < L$)، وهذا يعني أن $f(x) > 0$ على الفترة $(a-\delta, a+\delta)$.

وبالطريقة نفسها، يمكن برهنة النظرية التالية:

نظرية 2

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) < 0$، فإن هناك فترة مفتوحة تحتوي على a حيث $f(x) < 0$ لكل x في تلك الفترة.

مثال 16

أوجد $\lim_{x\to 8}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{3}$.

الحل

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{3}=\frac{(8)^{\frac{4}{3}}}{3}=\frac{[(8)^{\frac{1}{3}}]^4}{3}=\frac{16}{3}$$

نظرية 3

إذا كان $f(x)\le h(x)\le g(x)$، لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على a وإذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$، فإن $\lim_{x\to a}h(x)=L$.

البرهان

$\lim_{x\to a}f(x)=L$ تعني أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$، حيث أن

$|x-a|<\delta_1$ يؤدي إلى أن $|f(x)-L|<\varepsilon$

كذلك $\lim_{x\to a}g(x)=L$ تعني أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$، حيث أن

$|x-a|<\delta_2$ يؤدي إلى أن $|g(x)-L|<\varepsilon$.

نأخذ $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$، أي أن δ تكون الأصغر من δ_1,δ_2.

إذا كان $|x-a|<\delta$، فإن $f(x)$، $g(x)$ كليهما بين $L+\varepsilon$، $L-\varepsilon$، ولكن $f(x)\le h(x)\le g(x)$ يعطينا أن $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$، ومعنى ذلك أن $-\varepsilon<h(x)-L<\varepsilon$ أو $|h(x)-L|<\varepsilon$.

وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to a}h(x)=L$$

نظرية 4

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1$$

البرهان

بالتعويض المباشر عن $x=0$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$$

ونعرف جيداً أن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

في الشكل 4.3 دائرة نصف قطرها 1.

مساحة المثلث ODB = نصف القاعدة في الارتفاع

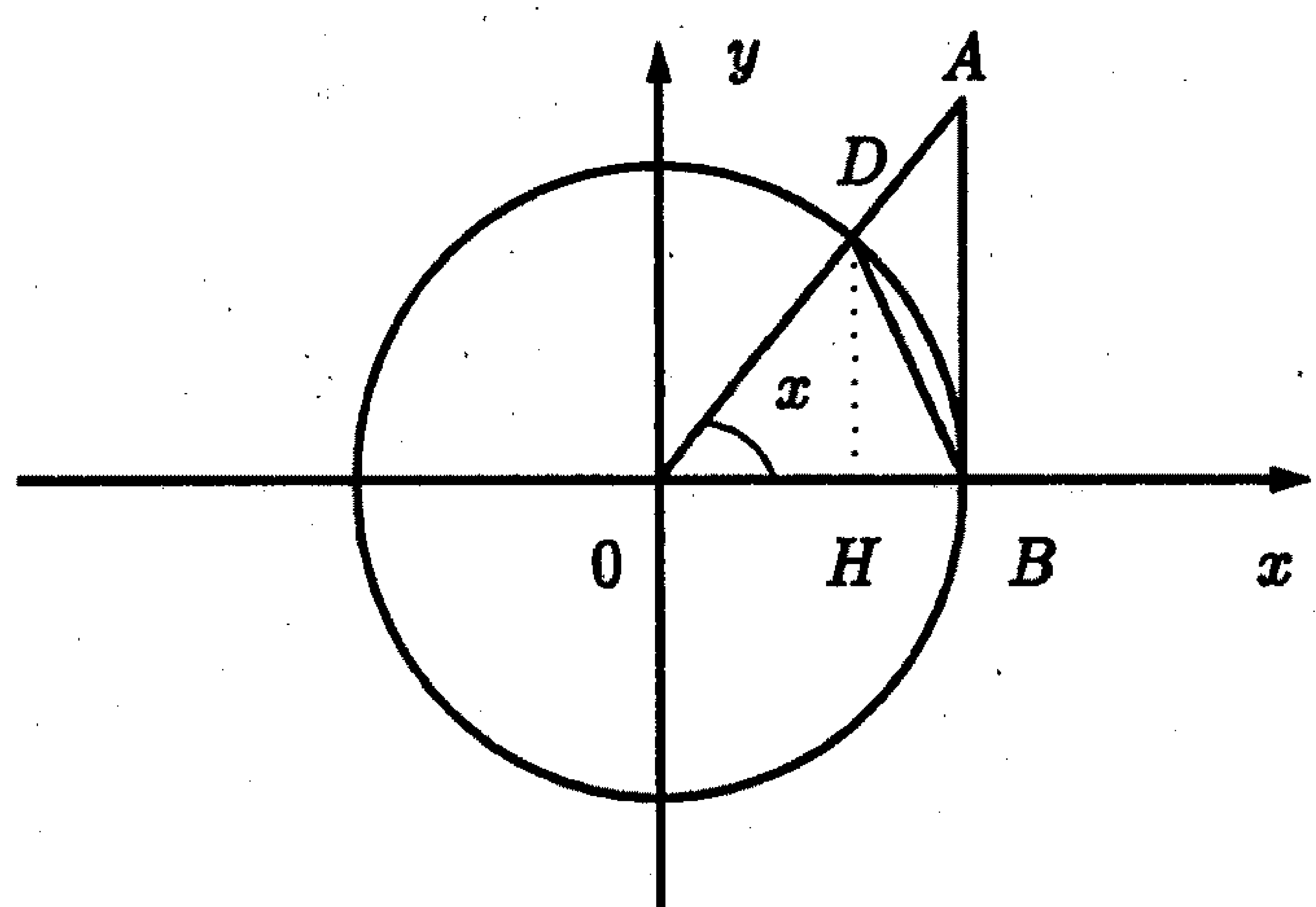
$$\frac{\sin x}{2}=(\sin x)(1)\frac{1}{2}=(HD)(OB)\frac{1}{2}=$$

مساحة المثلث OAB = نصف القاعدة في الارتفاع

$$\frac{\tan x}{2}=\tan x(1)\frac{1}{2}=(AB)(OB)\frac{1}{2}=$$

مساحة القطاع ODB = نصف الزاوية في مربع نصف القطر

$$\frac{x}{2}=(1)(x)\frac{1}{2}=$$



الشكل 4.3

من الشكل نلاحظ أن:

$$\text{مساحة المثلث } OAB \geq \text{مساحة القطاع } ODB \geq \text{مساحة المثلث } ODB$$

$$\frac{\tan x}{2} \geq \frac{x}{2} \geq \frac{\sin x}{2}$$

وبافتراض أن $0 < x \leq \pi/2$، نجد أن:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq 1$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

مثـــال 17

احسب $\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{\varphi}$.

الحــل

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{2\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$$

بما أن $\varphi \to 0$، فإن $2\varphi \to 0$

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2(1) = 2$$

إذن

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2$$

نظرية 5

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi}=0$$

البرهان

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{(\cos\varphi-1)(\cos\varphi+1)}{\varphi(\cos\varphi+1)}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos^2\varphi-1}{\varphi(\cos\varphi+1)}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{-\sin^2\varphi}{\varphi(\cos\varphi+1)}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{-\sin\varphi}{\varphi}.\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin}{\cos\varphi+1}$$

$$=-\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}.\frac{\lim\limits_{\varphi\to 0}\sin\varphi}{\lim\limits_{\varphi\to 0}(\cos\varphi+1)}=-1.\frac{0}{2}=0$$

تمارين 2.3

في التمارين من 1 إلى 39، أوجد النهايات المعطاة مستخدماً طرق هذا البند.

1) $\lim\limits_{x\to 1}4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\pi x$

3) $\lim\limits_{x\to 3}x(2x-1)$

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5-3x-x^2)$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x+5}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}}\sqrt{\frac{9x^2-64}{3x-8}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

9) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 5x}{x+3}$

10) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x-5}$

11) $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1-x}$

12) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

14) $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

15) $\lim_{x\to 2^+} [x]$

16) $\lim_{x\to 2^-} [x]$

17) $\lim_{x\to n^+} [x]$

18) $\lim_{x\to n^-} [x]$

19) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$

20) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x-3}{x^2-1}$

21) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x \sin x}{x^2}$

22) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sin(x-3)}$

23) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)}{2x}$

24) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(3x)}$

25) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5x+1}{3x^5-9x+2}$

26) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$

27) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2-1}$

28) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

29) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

30) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x}$

31) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{x}$

32) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x}$

33) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4}$

34) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(5x^2)}$

35) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3\sin^2(2x)}$

36) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ ، $ab \neq 0$

(37 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)}{x^2}$

(38 $\lim\limits_{x\to -3}\left|\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right|$

(39 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin\,(x-3)}$

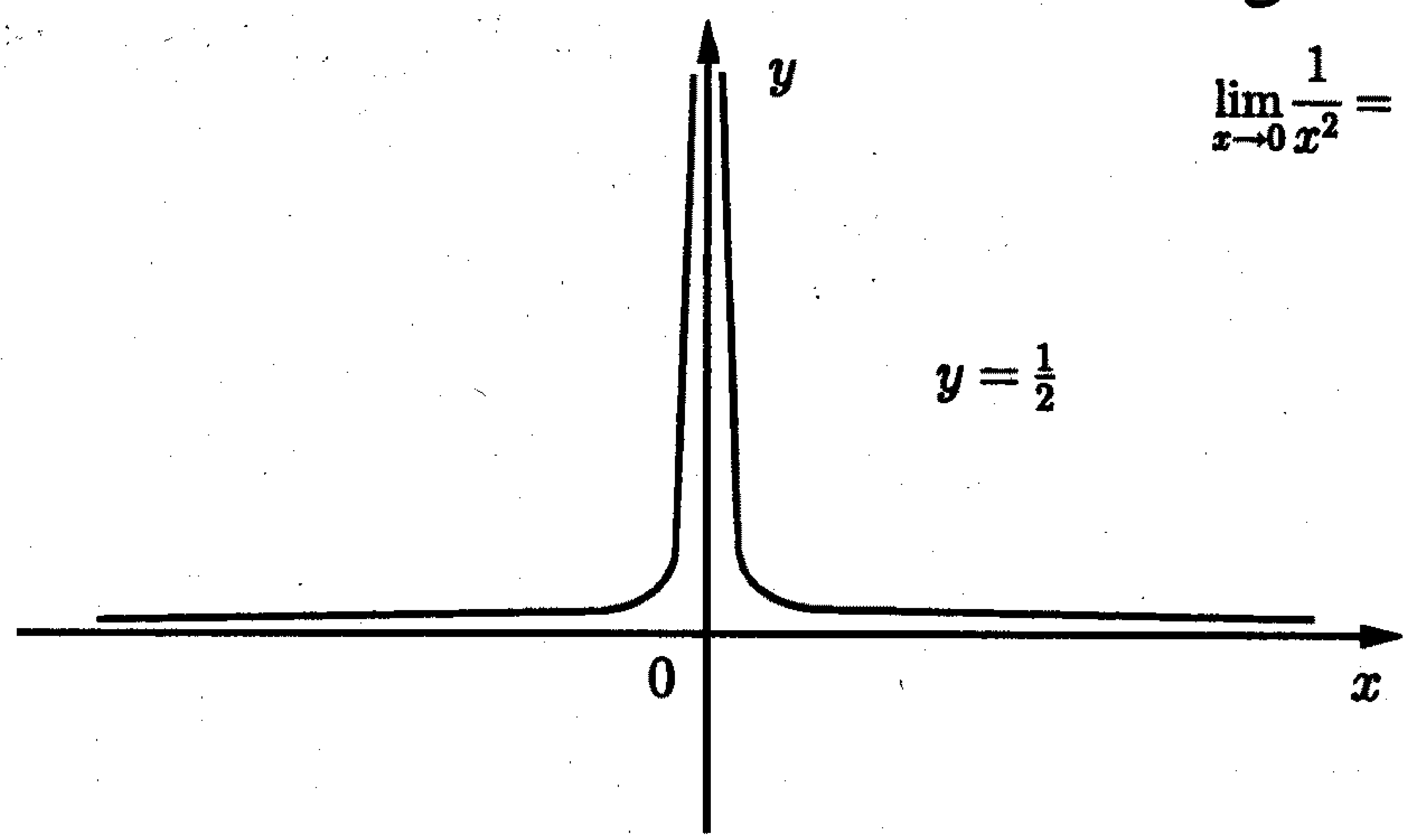
(40 أوجد $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ، إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}|x| & , \quad x\le 2\\ [x] & , \quad x>2\end{cases}$$

3.3 مالانهاية النهاية (Infinite Limit)

عندما نحاول إيجاد نهاية الدالة $\frac{1}{x^2}$، عندما يقترب x من الصفر، نجد أن $\frac{1}{x^2}$ تكبر دون حد أعلى.

أي أن: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$



الشكل 5.3

نؤكد هنا أن ∞ هي إشارة على سلوك الدالة، وليست رقماً على خط الأعداد.

تعريف 4.3

إذا كانت $f(x)$ تكبر دون حد أعلى في الاتجاه الموجب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $f(x)$ تقترب إلى ما لانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

إذا كانت $f(x)$ تصغر دون حد أدنى في الاتجاه السالب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $= f(x)$ تقترب إلى سالب مالانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

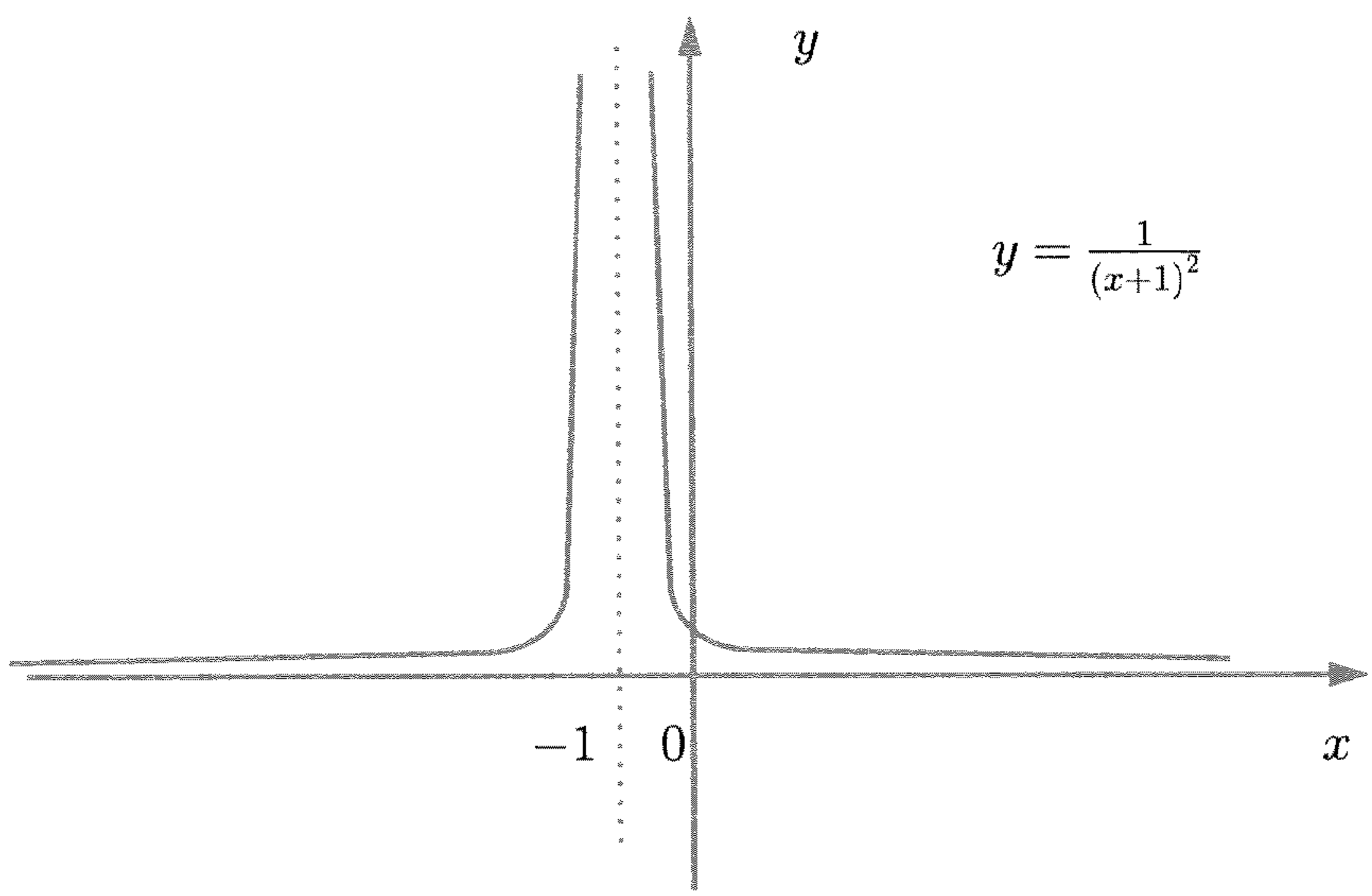
مثال 18

احسب $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}$.

الحـــل

نلاحظ أنه عندما يؤول x إلى -1 من الجانبين، فإن $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ تكبر دون حد أعلى.

إذن $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\infty$



الشكل 6.3

مثـــال 19

أوجد $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$ إن وجدت.

الحـــل

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

إذن $\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عندما $x\to0$ لأن:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}$$

تمارين 3.3

احسب النهاية المعطاة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{5x}{3x+1}$

2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$

3) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-2}$

5) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$

6) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2}$

7) $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x-2]}{2-x}$

8) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

9) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x-2}$

10) $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-2}$

11) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-\sqrt{x^2+1}}$

13) $\lim_{x\to 2} \frac{|4-x|}{x^2-8x+16}$

14) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{6x^2+7x-5}{2x-1}$

15) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-9}{x^2+x-2}$

16) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-9}{x^2+x-2}$

17) أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

ج) $\lim_{x\to (3/2)^+} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

د) $\lim_{x\to (3/2)^-} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

18) أوجد

أ) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-7x}$

ب) $\lim\limits_{x\to (7/2)^+} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-7x}$

19) أوجد

أ) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$

20) أوجد $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{25-x^2}}{5-x}$.

4.3 النهاية عند المالانهاية (Limit at Infinity)

1) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي العدد L، عندما يؤول x إلى ∞، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

2) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى سالب مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي L، عندما يؤول x إلى $-\infty$، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

مثال 20

أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

الحل

نلاحظ أنه كلما كبر x، صغرت الدالة $\dfrac{1}{x^2}$، وبذلك فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. أنظر الشكل 5.3.

ملاحظة: في حالة الدالة القياسية، فإن إيجاد النهاية عندما $x \to \pm\infty$ يتم بقسمة البسط والمقام على أكبر أس للمتغير x يظهر في الدالة.

مثال 21

أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$

الحل

بقسمة البسط والمقام على x^5، نجد أن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3+3x+6}{x^5}}{\dfrac{x^5+2x^2+9}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

مثـــال 22

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2}$

الحـــل

بقسمة عناصر البسط والمقام على x، ينتج:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

قاعدة

لنفرض أن: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

و $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

إذا كانت $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$، فإن: $\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty & , \; n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & , \; n = m \\ 0 & , \; n < m \end{cases}$

تمارين 4.3

احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+6x}{-2+x}$

(2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2+5x+1}$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{x}$

(4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

(5 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x-2+\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

(6 $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-\dfrac{1}{x})$

(7 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3}{2-3x^2}$

(8 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$

(9 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

(10 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2-9}$

(11 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4}}{x+5}$

(12 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{3+x}{x}}$

(13 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^3+7}}{2x+3}$

(14 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{2+4x^3}}$

(15 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x}}$

5.3 الاتصال (Continuity)

لبعض الدوال سلوك متوقع، فمثلاً هناك دوال إذا عرف سلوكها عند x في نطاقها، فقد نستطيع أن نتوقع قيمة الدالة عند أي نقطة في نطاقها تكون قريبة من x.

هذا النوع من الدوال يسمى الدوال المتصلة.

تعريف 5.3 (الدالة المتصلة)

الدالة f تكون متصلة عند النقطة a إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $f(a)$ قيمة محددة، أي أن الدالة f معرّفة عند a.

2) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة.

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

نقول إن الدالة f متصلة على نطاقها، إذا كانت f متصلة عند كل نقطة في نطاقها.

إذا كانت الدالة f غير متصلة عند a، فإننا نقول إن الدالة f منقطعة عند النقطة a

تعريف 6.3

الدالة f تكون متصلة على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقط الفترة (a,b)

تعريف 7.3

الدالة f تكون متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا كانت متصلة على الفترة المفتوحة (a,b)، وتكون الدالة معرّفة عند a و b بحيث يكون:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

مثال 23

إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$، ناقش اتصالية الدالة $p(x)$.

الحل

من الواضح أن الدالة $p(x)$ معرّفة لأي عدد حقيقي x.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b} p(x) &= \lim_{x\to b}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)\\ &= a_0 + a_1b + a_2b^2 + ... + a_nb^n = p(b)\end{aligned}$$

لأي عدد حقيقي b.

$p(x)$ تسمى دالة كثيرة الحدود (Polynomial). من هذا المثال نستطيع أن نستنتج:

أن أي دالة كثيرة الحدود تكون متصلة عند أي عدد حقيقي.

تعريف 8.3

إذا كانت $p(x)$ كثيرة الحدود في x، وكانت $q(x)$ كثيرة الحدود في x، فإن الدالة: $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ تسمى دالة قياسية (Rational Function).

إذا كان $q(a) \neq 0$، فإن: $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$.

ولذلك نستنتج أن:

أي دالة قياسية تكون متصلة عند كل النقط a، والتي يكون عندها المقام $q(a)$ لا يساوي صفراً.

مثال 24

ناقش اتصالية الدالة: $f(x) = \frac{x^5 + x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

الحل

من الواضح أن $f(x)$ دالة قياسية. إذن $f(x)$ دالة متصلة عند كل الأعداد الحقيقية، عدا الأعداد x التي تحقق المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$، أي $(x-3)(x-2) = 0$، وهذا يعني $x = 3, x = 2$.

قواعد عامة:

1) الدالة الكثيرة الحدود تكون متصلة على مجموعة كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2) الدالة القياسية دالة متصلة عند أي نقطة في نطاقها.

3) الدوال المثلثية $(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x)$ دوال متصلة عند أي نقطة، كل في نطاقها.

4) إذا كانت f و g دالتين متصلتين عند النقطة a، وكان c عدداً ثابتاً، فإن cf و $f.g$ و $f+g$، دوال متصلة عند a.

5) إذا كانت الدالة g متصلة عند النقطة a، والدالة f متصلة عند النقطة $g(a)$، فإن الدالة $f \circ g$ متصلة عند النقطة a.

نعطي الآن بعض الأمثلة على الدوال المتصلة.

مثـــال 25

أوجد الفترة أو الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$ متصلة.

الحـــل

حيث إن f دالة قياسية. فإن f تكون متصلة عند كل نقطة في نطاقها.

$x^2 - 9 = 0$، إذا كان $x = \pm 3$.

إذن نطاق f هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $3, 3-$. ونعبّر عن ذلك بالشكل:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

إذن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$ متصلة على $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

مثـــال 26

أثبت أن الدالة $f(x) = x \sin x + 1$ دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحـــل

نعلم أن الدالة $g(x) = x$ دالة متصلة عند أي عدد حقيقي، وكذلك الدالة $h(x) = \sin x$ دالة متصلة على نطاقها، وهو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، وكذلك الدالة $\ell(x) = 1$ دالة ثابتة، وهي دالة متصلة عند أي عدد حقيقي.

$$f(x) = g(x).h(x) + \ell(x)$$

أي أن $f(x)$ هي حاصل ضرب دالتين متصلتين، مضافاً إلى ذلك دالة متصلة.
إذن $f(x)$ دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثـــال 27

ناقش اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & ; \quad x<2 \\ 3x+4 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$

الحـــل

من تعريف هذه الدالة، نرى أن $f(x) = 3x - 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أصغر من 2.

لكن $3x - 4$ دالة كثيرة الحدود. إذن $3x - 4$ دالة متصلة عند أي عدد حقيقي أصغر من 2.

كذلك من التعريف نجد أن $f(x) = 3x + 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2، وهي أيضاً دالة كثيرة الحدود.

نستطيع القول إن $f(x)$ دالة متصلة لكل عدد حقيقي أصغر من 2، وكذلك دالة متصلة عند أي عدد حقيقي أكبر من 2. والآن نبحث اتصالية الدالة عندما $x = 2$.

1) $f(2) = 10$.

2) $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x+4) = 10$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x-4) = 2$$

وبما أن $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$، فإن $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة.

وبالتالي لم يتحقق الشرط الثاني من شروط الاتصال عند 2.

إذن الدالة متصلة عند أي عدد حقيقي عدا $x = 2$.

مثـــال 28

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} a & ، \quad x = -3 \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & ، \; -3 < x < 3 \\ b & ، \quad x = 3 \end{cases}$$

أوجد a, b بحيث تكون الدالة f متصلة على $[-3, 3]$.

الحـــل

لكي تكون الدالة f متصلة على $[-3,3]$ لا بد أن يكون

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = a$$

وكذلك

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = b$$

إذن

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \frac{0}{0}$$

ولهذا لا بد من القيام بعملية جبرية، وفي هذه الحالة تكون العملية الجبرية هي الضرب في مرافق المقام.

$$\lim_{x \to -3^+} = \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} . \frac{4 + \sqrt{x^2 + 7}}{4 + \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$= \lim_{x \to -3^+} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 8$$

إذن $a = 8$.

وكذلك نجد أن

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{9-x^2}{4\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} (4+\sqrt{x^2+7}) = 8$$

إذن ص8 $b = 8$

حالات الانقطاع

1) نلاحظ أن الدالة

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

غير معرّفة عندما $x = 1$ ولذلك فإنها غير متصلة (منقطعة)، عندما $x = 1$.

2) الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

غير متصلة عندما $x = 1$؛ لأن $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$، ولكن $f(1) = 1$.

الانقطاع الذي حصل في الحالتين يمكن علاجه وإزالته، بإعادة تعريف الدالة عند نقطة الانقطاع، ويسمى في هذه الحالة الانطاع الزائل (Removable Discontinuity). فمثلاً، يمكن إعادة تعريف الدالة السابقة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

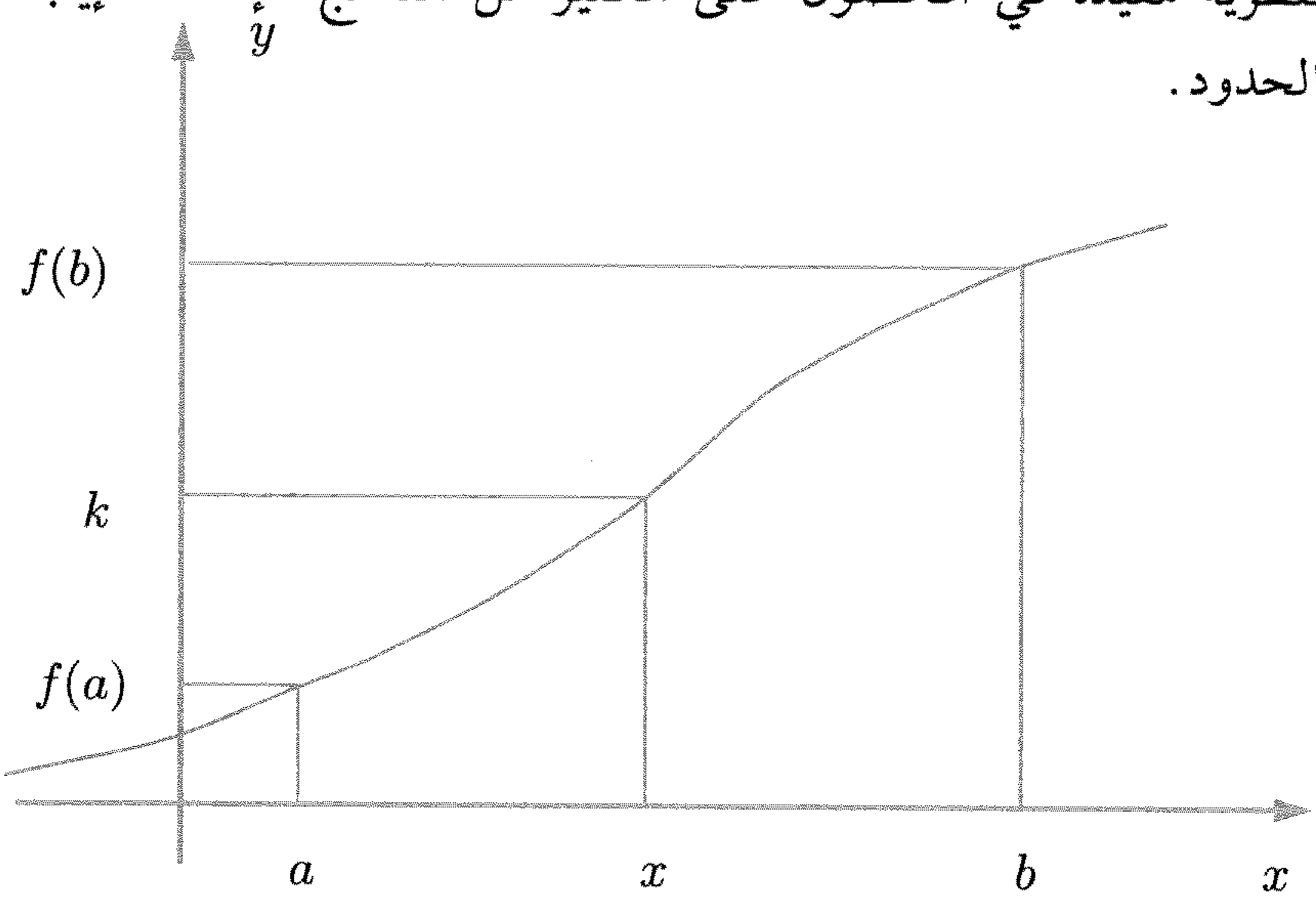
وبذلك نرى أن الشروط الثلاثة متحققة عندما $x = 1$. إذن الدالة الجديدة دالة متصلة عند $x = 1$.

3) إذا لم نستطع إعادة تعريف الدالة المنقطعة عند نقطة معينة، وجعلها دالة متصلة عند تلك النقطة، يسمى هذا النوع من الانقطاع الانقطاع الجوهري (Essential Discontinuity). مثال ذلك، الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تعتبر غير متصلة عندما $x = 0$، وأي تعريف جديد للدالة لا يزيل هذا الانقطاع.

نظرية 6 (القيمة المتوسطة)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، وكان k عدداً بين $f(a)$ و$f(b)$، فإن هناك x في (a,b) حيث أن $f(x)=k$.

هذه النظرية مفيدة في الحصول على الكثير من النتائج، إحداها إيجاد جذور كثيرة الحدود.



الشكل 8.3

يمكن الحصول على النتيجة التالية من هذه النظرية:

نتيجة

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ وكان $f(a)f(b)<0$، فإن هناك x في (a,b) حيث $f(x)=0$.

مثـــال 29

وضِّح أن هناك جذراً للمعادلة $p(x)=x^3+x^2+x-1=0$ في الفترة $[0,1]$.

الحـــل

حيث أن $p(x)$ متصلة على $[0,1]$، فإنه يوجد x في $(0,1)$؛ حيث أن $p(x)=0$ لأن $p(0)=-1$، و $p(10)=2$.

تمارين 3.5

في التمارين من 1 إلى 6، ارسم الدالة، وقرِّر ما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة عند النقطة المذكورة:

1) $f(x)=\begin{cases} 5+x & ; \quad x\le 3 \\ 9-x & ; \quad x>0 \end{cases}$ عند $x=3$.

2) $f(x)=\begin{cases} -1 & ; \quad x<0 \\ 0 & ; \quad x=0 \\ 1 & ; \quad x>0 \end{cases}$ عند $x=0$.

3) $f(x)=\begin{cases} x-5 & ; \quad x\ne 5 \\ 2 & ; \quad x=5 \end{cases}$ عند $x=5$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & ; \quad x\ne 2 \\ 1 & ; \quad x=2 \end{cases}$ عند $x=2$.

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & ; \quad x\ne 3 \\ 2 & ; \quad x=3 \end{cases}$ عند $x=3$.

6) $f(x)=[1-x]+[x-1]$ عند $x=1$.

7) حدد الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ متصلة.

8) حدد الفترات التي تكون عليها الدالة
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{2-|x|} & ; \quad x\neq 2\\ 1 & ; \quad x=2\end{cases}$$
متصلة.

9) إذا كانت
$$f(x)=\begin{cases}-x & ; \quad x\leq 0\\ x & ; \quad 0<x\leq 1\\ 2-x & ; \quad 1<x<2\\ 0 & ; \quad x\geq 2\end{cases}$$

ارسم الدالة f وناقش اتصالية الدالة f عند $2,1,0$.

10) ما قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x\neq 1\\ a & ; \quad x=1\end{cases}$ متصلة.

تمارين على الفصل الثالث

في التمارين من 1 إلى 12، احسب النهاية المذكورة . إن وجدت . وبيِّن السبب إذا لم تكن موجودة:

1) $\lim_{x\to 5}(x^2+6)$

2) $\lim_{x\to 2}(x^4-9)$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^5+6x+2}$

4) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}$

6) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-x}{x^3-1}$

7) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

8) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1-x/2}{1-\sqrt{x/2}}$

9) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x+2}{x^2+x+9}$

10) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{4-x^2}$

11) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

12) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^{-1}-1}{x-1}$

13) أوجد $\lim_{x\to 2}[x]$ حيث $[x]$ تعني دالة أكبر عدد صحيح أصغر من x أو يساويه.

في التمارين من 14 إلى 16، حدِّد ما إذا كانت الدالة متصلة عند النقطة المذكورة، وإذا كانت غير متصلة حدد نوع الانقطاع:

14) $f(x)=[x]$ عند الصفر حيث $[x]$ تعني دالة أكبر عدد صحيح أصغر من x أو يساويه.

15) $f(x)=\begin{cases} x^2+5 & ; \quad x>2 \\ x^3 & ; \quad x\le 2 \end{cases}$ عند 2.

16) $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ x^2 & ; \quad 0\le x<2 \\ 4 & ; \quad x\ge 2 \end{cases}$ عند 0 و 2.

17) أوضح أن الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & ; \quad x\neq 3\\ 3 & ; \quad x=3\end{cases}$ تكون متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

18) أوضح الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ متصلة.

19) أوجد الفترات التي تكون عندها الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ متصلة.

20) أوجد العدد أو الأعداد التي تكون عندها الدالة $f(x)=\sqrt{2x-3}+x^2$ غير متصلة.

21) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2} & ; \quad x\neq 2\\ 7 & ; \quad x=2\end{cases}$، هل الدالة f متصلة عند 2؟

22) هل الدالة $f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\neq 0\\ -1 & ; \quad x<0\end{cases}$ متصلة عند $x=0$؟ ولماذا؟

23) ارسم الدالة التالية وناقش اتصاليتها:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; \quad x<-1\\ 3 & ; \quad x=-1\\ 2-x & ; \quad -1<x\leq 1\\ x^2 & ; \quad x>1\end{cases}$$

24) ناقش اتصالية الدالة $f(x)=[x]$ عند الصفر، حيث $[x]$ تعني دالة أكبر عدد صحيح أصغر من x أو يساويه.

25) أوجد $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

26) أوجد $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x|x+2|}{x-1}$

27) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x-2 & ; \quad x>2\\ 0 & ; \quad x\leq 2\end{cases}$، أوجد $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

في المسائل من 28 إلى 36، أوجد قيمة النهايات التالية:

(28 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}$

(29 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+3}{(x-4)^2}$

(30 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{(x-5)^3}$

(31 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+1}$

(32 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x-x^2}{3x+x^2}$

(33 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x}{3x^3+4}$

(34 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}$

(35 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$

(36 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^{28}-17x^{14}+x^2-3}{x^{31}+x^{13}-23x^3+2}$

(37 أوجد الفترة أو الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ متصلة.

(39 ما قيمة a المطلوبة حتى تكون الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} & ; \quad x\neq 1\\ a & ; \quad x=1\end{cases}$$

متصلة عند $x=1$؟

في التمارين من 40 إلى 42، ناقش اتصالية الدوال المعطاة:

(40 $f(x)=[x]+|x-[x]|$

(41 $f(x)=[2x]$

(42 $$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad x<0\\ 2x & ; \quad 0\le x<1\\ 3x^3 & ; \quad x\ge 1\end{cases}$$

(43 إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2} & ; \quad x\neq 2\\ 8 & ; \quad x=2\end{cases}$$

ناقش اتصالية الدالة f عند $x=2$.

44) ناقش اتصالية الدالة $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$.

45) ناقش اتصالية الدالة $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$ عند نقطة الأصل.

المسائل من 46 إلى 48 تتعلق بالدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} -2x & ; \quad x<-1 \\ 0 & ; \quad x=-1 \\ x^2+1 & ; \quad -1<x\leq 0 \\ \sqrt{x} & ; \quad 0<x\leq 1 \\ x^2-1 & ; \quad x>1 \end{cases}$$

46) ارسم بيانياً منحنى الدالة f .

47) ناقش النهايات التالية:

أ) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ هـ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ز) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ح) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ط) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

48) ناقش اتصالية الدالة عند كل من:

أ) $x=-1$ ب) $x=0$ جـ) $x=1$

د) ما هي نقط الانقطاع (زائلة، جوهرية) للدالة f؟

49) الدالة $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$ معرّفة عند كل عدد حقيقي عدا العدد $x=1$، عرّف الدالة f من جديد بحيث تعطى الدالة f قيمة عند 1 (أي $f(1)$) وتكون الدالة f متصلة عند $x=1$.

50) ناقش اتصالية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\in Q \\ 0 & ; \quad x\notin Q \end{cases}$$

الفصل الرابع

المشتقات

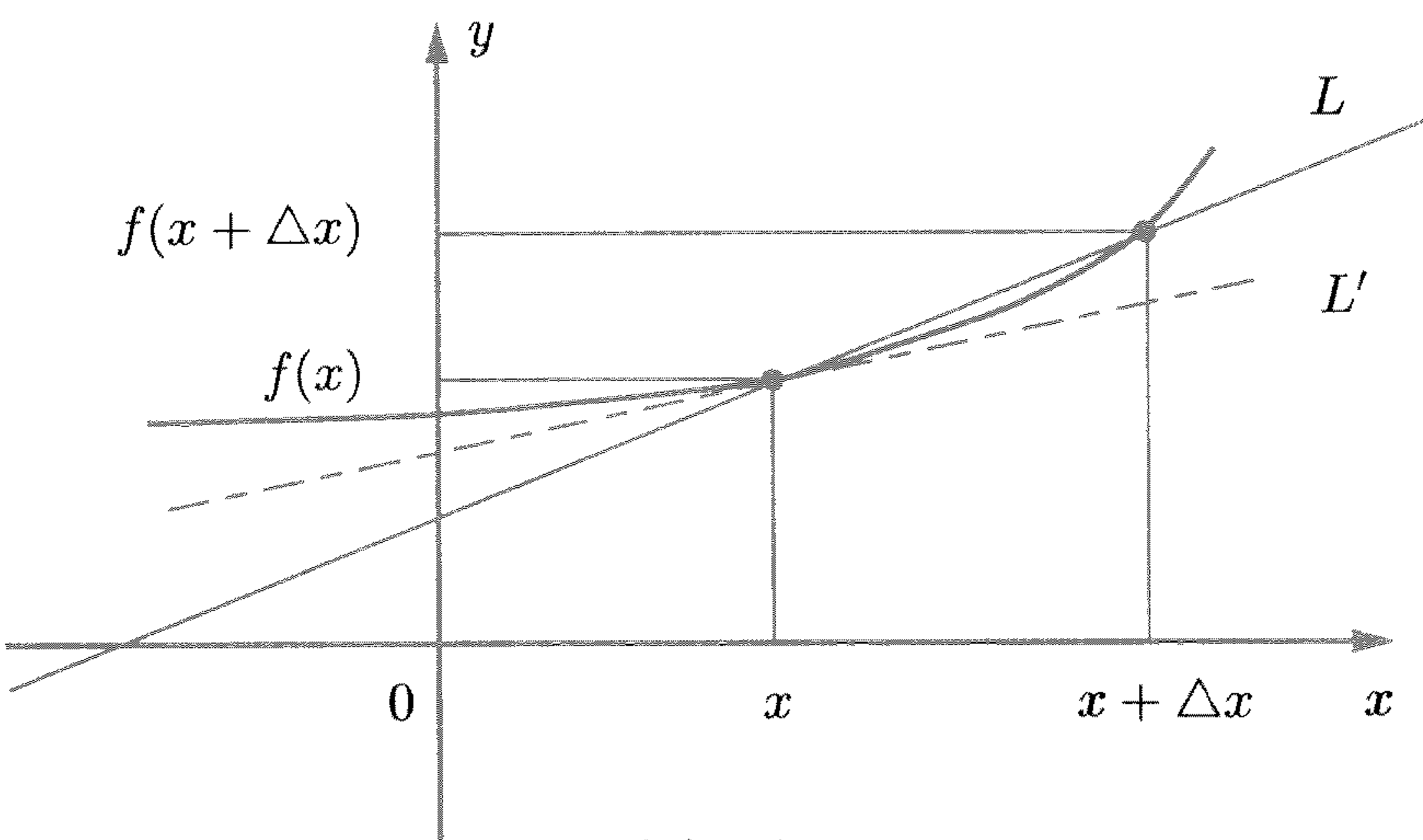
Derivatives

1.4 المشتقة الأولى (First Derivative)

لنفرض أن $(x, f(x))$ نقطة على رسم الدالة $y = f(x)$.

إذا كانت $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ نقطة أخرى على بيان الدالة $y = f(x)$، حيث Δx هو الفرق في الإحداثي السيني للنقطتين، فإن ميل المستقيم L المار بالنقطتين هو:

$$m_L = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



الشكل 1.4

لنترك النقطة $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ تتحرك على المنحنى $y=f(x)$؛ حيث تصغر Δx تدريجياً حتى تؤول إلى الصفر.

عندما تؤول Δx إلى الصفر، يمس المستقيم L' المنحنى في نقطة واحدة فقط، وبذلك يكون المستقيم L' مماساً للمنحنى $y=f(x)$. ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو:

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

ميل المنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$.

تعريف 1.4

لنفرض أن الدالة f معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x.

المشتقة الأولى f' عند x وتكتب $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

بشرط وجود النهاية.

إذا وجدت المشتقة الأولى $f'(x)$، فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتاق عند x (Differentiable at x)، أو لها مشتقة أولى عند x.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط (a,b).

ونقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)، وكانت النهايتان:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x},\ \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

موجودتين.

طريقة الخطوات الأربع لإيجاد المشتقة الأولى (من التعريف):

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x، استخدم طريقة الخطوات الأربع التالية:

1) أوجد $f(x+\Delta x)$.

2) أوجد $f(x+\Delta x)-f(x)$.

3) أوجد خارج قسمة الفرق

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ أوجد

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثـال 1

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x)=x^2+1$.

الحـل

(1 $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+1=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1$

(2 $f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+12x\Delta x+(\Delta x)^2+1-x^2-1$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

(3 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$$=\frac{\Delta x(2x-\Delta x)}{\Delta x}\ =\ 2x-\Delta x$$

(4 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x - \Delta x) - 2x$$

إذن $f'(x) = 2x$.

النظرية التالية توضح العلاقة بين القابلية للاشتقاق والاتصال، وهي العلاقة التي تؤكد أن القابلية للاشتقاق عند نقطة شرط أقوى من كون الدالة متصلة عند تلك النقطة.

نظرية 1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_1، فإن f متصلة عند x_1.

البرهان

إذا كان x في نطاق f وكان $x \neq x_1$، فيمكن كتابة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = f(x_1) + f(x) - f(x_1)$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}(x - x_1)$$

وبأخذ نهاية الطرفين، واستخدام نظريات النهايات، نجد أن:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1} f(x_1) + \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \lim_{x \to x_1} (x - x_1)$$

$$= f(x_1) + f'(x_1).0 = f(x_1)$$

إذن من تعريف الاتصال، نستنتج أن الدالة f متصلة عند x_1.

ننهي هذا البند ببعض الرموز، التي قد تستخدم للدلالة على المشتقة الأولى. لنفرض أن $y = f(x)$، الرموز التالية كلها تستخدم للدلالة على المشتقة الأولى f' بالنسبة للمتغير x:

$$f'(x) \text{ و } D_x[f(x)] \text{ و } \frac{d}{dx}f(x) \text{ و } y' \text{ و } \frac{dy}{dx} \text{ و } D_x y.$$

تمارين 1.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية مستخدماً طريقة الخطوات الأربع:

1) $f(x) = 2$

2) $f(x) = 12 - 6x$

3) $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$

4) $f(x) = x^3 + x$

5) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

6) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

7) $y = 2x^3 - 4x + 1$

8) $y = 8 - x^3$

9) $y = (x+5)^{-1}$

10) $y = (2x+3)^2$

11) بيّن أن الدالة $f(x) = |x-5|$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 5$.

12) بيّن أن الدالة $f(x) = [x]$ غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد صحيح n.

13) أوجد معدل تغيّر مساحة الدائرة A بالنسبة إلى نصف قطرها r.

14) أوجد معدل تغيّر حجم كرة V بالنسبة إلى نصف قطرها r.

15) أوجد معادل المماس للمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ عند النقطة $(1, \sqrt{2})$.

2.4 بعض القوانين لإيجاد المشتقة الأولى

لإيجاد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^4(2x^2+3)^5 + \dfrac{x^5}{(x+1)^4}$
بطريقة الأربع خطوات، تحتاج إلى عمليات جبرية طويلة ومملة (حاول إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة بطريقة الأربع خطوات).

لاحظنا أن طريقة الأربع خطوات قد تكون صعبة لبعض الدوال، لذلك من المطلوب إيجاد صيغ أبسط من هذه الطريقة.

نحاول في هذا البند إعطاء قوانين والبرهنة عليها حتى نطمئن إلى استخدامها.

1) إذا كانت f دالة ثابتة $f(x) = k$؛ حيث أن k مقدار ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

البرهان

نستخدم طريقة الخطوات الأربع للبرهنة على هذا القانون.

بما أن $f(x+\Delta x) = k$ فإن $f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0$

ومن ذلك

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

إذن

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

مثال 2

إذا كانت $f(x) = 2^6$، فإنه بناءً على هذا القانون $f'(x) = 0$.

2) إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث n عدد صحيح موجب، فإن:
$$f'(x) = nx^{n-1}$$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}.x + x^{n-3}.x^2 + \ldots + x.x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

وهنا جمع x^{n-1} عدد n من المرات، يكون nx^{n-1}.

إذن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثـــال 3

إذا كانت $f(x) = x^{18}$، فإن $f'(x) = 18x^{17}$.

3) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق، فإن الدالة kf تكون قابلة للاشتقاق أيضاً، حيث أن k مقدار ثابت، و $\frac{d}{dx}kf = k\frac{df}{dx}$.

البرهان

$$\frac{d}{dx}kf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x}$$

$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبناءً على نظرية النهايات $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$.

استخدمنا هنا خاصية النهاية، وهي:

$$\lim_{x\to a} kg(x) = k\lim_{x\to a} g(x)$$

مثـــال 4

أوجد $\frac{d}{dx}(9x^2)$.

الحـــل

حيث أن 9 مقدار ثابت، فإن

$$\frac{d}{dx}(9x^2) = 9\frac{dx^2}{dx} = 9(2x) = 18x$$

4) إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضاً و $\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$.

البرهان

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f+g)(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \quad \text{(من نظرية النهايات)}\\ &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

مثـــال 5

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = 2x^6 + x^5 + x^3$.

الحـــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^6+x^5+x^3) &= \frac{d}{dx}(2x^6)+\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(x^3)\\ &= 2\frac{d}{dx}(x^6)+5x^4+3x^2\\ &= 12x^5+5x^4+3x^2\end{aligned}$$

من استخدام القانون (3) ووضع $k=-1$، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(-f(x)) = -\frac{d}{dx}f(x)$$

إذن نستطيع إيجاد قانون لتفاضل الدالة $f-g$، وذلك باستخدام القانون (4).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f-g)(x) = \frac{d}{dx}(f+(-g))(x) = \frac{d}{dx}f(x) &+ \frac{d}{dx}(-g)(x))\\ = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

ومن هذا نستنتج القانون

(5 $$\frac{d}{dx}(f-g)(x) = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

مثـــال 6

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=x^3-2x-1$

الحـــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3-2x-1) &= \frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}(1)\\ &= 3x^2-2-0=3x^2-2\end{aligned}$$

نستطيع توسيع القانون (4) إلى أكثر من دالتين.

(6 إذا كانت $f_1, f_2, \ldots f_n$ دوال قابلة للاشتقاق.

الدالة $f_1+f_2+\ldots+f_n$ قابلة للاشتقاق و

$$\frac{d}{dx}(f_1+f_2+\ldots+f_n)(x) = \frac{d}{dx}f_1(x)+\frac{d}{dx}f_2(x)+\ldots+\frac{d}{dx}f_n(x)$$

مثــال 7

إذا كانت $g(t) = 17 - 4t^2 + 8t^3$، أوجد $g'(t)$

الحــل

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(17 - 4t^2 + 8t^3) = \frac{d}{dt}(17) - \frac{d}{dt}(4t^2) + \frac{d}{dt}(8t^3) \\ &= 0 - 4\frac{d}{dt}(t^2) + 8\frac{d}{dt}(t^3) = 0 - 8t + 24t^2 \\ &= -8t + 24t^2 \end{aligned}$$

مثــال 8

أطلقت مقذوفة إلى أعلى بسرعة 400 متر في الثانية وبعد t ثانية أصبحت تبعد عن الأرض بالمسافة $S(t) = -16t^2 + 400t$، أوجد:

أ) الزمن الذي تأخذه المقذوفة حتى تصطدم بالأرض.

ب) سرعة المقذوفة عندما تصطدم بالأرض.

ج) أعلى ارتفاع تصله المقذوفة.

الحــل

عندما تصطدم المقذوفة بالأرض تكون مسافتها عن الأرض صفراً، أي أن:

$S(t) = -16t^2 + 400t = 0$

ومن ذلك $t(400 - 16t) = 0$

وهذا يعني أن $t = 0$ أو $t = 25$ ثانية.

$t = 0$ يعني أن الجسم لم يتحرك بعد، ولهذا فإن $t = 25$ ثانية.

السرعة عند t هي: $V(t) = S'(t) = -32t + 400$

إذن متر/ثانية $V(25) = -32(25) + 400 = -400$

يمكن الحصول على أعلى ارتفاع للمقذوفة عندما تكون $V(t) = 0$ وهذا يعني أن: $-32t + 400 = 0$

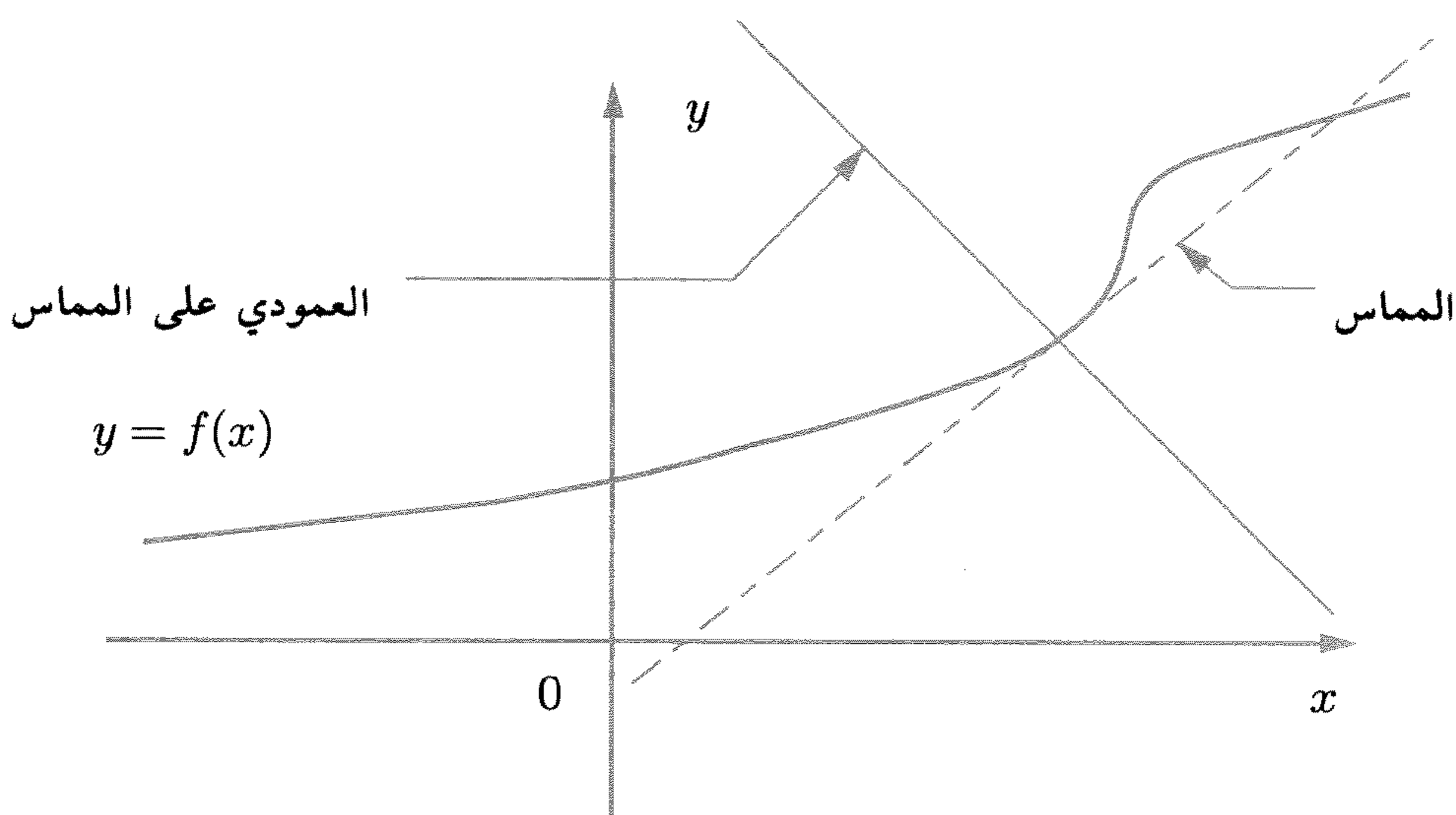
ومن ذلك $t = 25/2$ ثانية.

أعلى ارتفاع تصله المقذوفة بعد $25/2$ ثانية، أي أن:

متر $S(25/2) = -16(25/2)^2 + 400(25/2) = 2500$

تعريف 1.4: (العمودي على المماس)

العمودي على المماس لمنحنى عند نقطة، هو المستقيم الذي يكون عمودياً على المماس عند تلك النقطة. (أنظر الشكل 2.4).



الشكل 2.4

تمارين 2.4

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة.

1) $f(x) = x^5$ 2) $g(t) = t^{20} - t^2$

3) $f(x) = 16$ 4) $g(t) = 1 - t - t^4 - t^7$

5) $h(r) = -3r^2 + 12r^3$ 6) $f(x) = 3x^2 + 19x + 1$

في التمارين من 7 إلى 11، أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس، للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة.

7) $y = x^4$ ، $(1,1)$

8) $y = 6x^6 - 2x^4 + 2x^3$ ، $(1,6)$

9) $y = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$ ، $(1,3)$

10) $y = x^7 - 6x^5$ ، $(1,-5)$

11) $y = 6 + 3x^2 + 4x^{10}$ ، $(0,6)$

12) أوجد النقطة على بيان المنحنى $y = 4x^{10} + 3x^2 + 6$ والتي يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

13) أوجد معادلة المماسين للمنحنى $y = x^2 + 3$ واللذان يمران خلال النقطة $(1,0)$.

[إرشاد: لاحظ أن أي نقطة على المنحنى تكون على الشكل $(b, b^2 + 3)$].

14) إذا كانت المسافة التي تقطعها طائرة معطاة بالمعادلة $S = 1 + 4t + t^2$، كم تكون سرعة الطائرة (بالقدم في الثانية) بعد 10 ثوان؟ وكم تكون سرعتها بعد 20 ثانية؟

إرشاد: السرعة هي المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن).

15) ما هي النقط على بيان المنحنى $y = x^2$ حيث العمودي على المماس عند تلك النقط يمر خلال النقطة $(1,0)$؟

3.4 قانونا الضرب والقسمة

1) قانون الضرب

إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f.g$ تكون قابلة للاشتقاق و

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

قانون الضرب يوضح أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين، تساوي الدالة الأولى ضرب المشتقة الأولى للدالة الثانية مضافاً إلى ذلك الدالة الثانية ضرب المشتقة الأولى للدالة الأولى.

البرهان

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

بإضافة وطرح الحد $f(x)g(x+\Delta x)$ في البسط، نجد أن:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f.g)(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&\qquad + \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\Big) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\Big) \\
&\qquad + \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\Big)
\end{aligned}$$

باستخدام نظريات النهاية نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f.g)(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\\ &\quad + \lim_{\Delta x\to 0} f(x) \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\ &= g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

حيث أن g قابلة للاشتقاق، فإن g متصلة، ولهذا فإن:

$$\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

مثـــال 9

أوجد $h'(t)$ إذا كانت $h(t)=(t^2+2)(t^3-5)$.

الحـــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(t) &= \frac{d}{dt}((t^2+2)(t^3-5))\\ &= (t^2+2)\frac{d}{dt}(t^3-5)+(t^3-5)\frac{d}{dt}(t^2+2)\\ &= (t^2+2)(3t^2)+(t^3-5)(2t)\\ &= 3t^4+6t^2+2t^4-10t\\ &= 5t^4+6t^2-10t\end{aligned}$$

2) قانون القسمة:

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند x، وكان $g(x)\neq 0$، فإن الدالة $\frac{f}{g}$ تكون قابلة للاشتقاق عند x، وتكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

هذه القاعدة توضح أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين، تساوي المقام ضرب المشتقة الأولى للبسط مطروحاً من ذلك البسط ضرب المشتقة الأولى للمقام، وكل ذلك مقسوماً على مربع المقام.

البرهان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

بإضافة وطرح الحد $f(x)g(x)$ في البسط، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}$$

باستخدام نظريات النهايات نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)-f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

استخدامنا أيضاً $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$ ، وذلك من اتصالية g .

مثـال 10

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

الحـل

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\dfrac{d}{dx}x - x\dfrac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

عرفنا فيما تقدم أنه إذا كانت $f(x)=x^n$، عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، فإن $f'(x)=nx^{n-1}$.

بمساعدة قانون القسمة، نستطيع تعميم هذه القاعدة في حالة الأعداد الصحيحة السالبة أيضاً.

> 3) إذا كان $y=x^{-n}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:
> $$\frac{dy}{dx}=(-n)x^{-n-1}$$

البرهان

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

باستخدام قانون القسمة، نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n(0)-(1)(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= (-n)x^{n-1-2n} = (-n)x^{-n-1}$$

الآن نستطيع القول إنه إذا كانت $f(x)=x^n$، فإن $f'(x)=nx^{n-1}$ لكل عدد صحيح n.

مثـــال 11

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}$.

الحــل

بما أن $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$، فإن: $f'(x)=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$

تمارين 3.4

أوجد المشتقة الأولى في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x(x^2+1)$

2) $f(x)=(1+x+x^5)(2-x-x^6)$

3) $f(x)=\dfrac{2-x-x+x^6}{1+x+x^5}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+3x}$

5) $f(t)=(1+x+x^5)(2-x-x^6)$

في المسائل من 6 إلى 8، أوجد معادلة المماس للمنحنى الذي يمر خلال النقطة المعطاة.

6) $f(x)=4x(x^5+1)$ ، $(1,8)$

7) $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+2}$ ، $(0,1)$

8) $f(x)=\dfrac{1+x}{x^2}$ ، $(1,2)$

9) أوجد معادلة العمودي على المماس للمنحنى $y=\dfrac{1}{x^7}$ عند النقطة $(1,1)$.

10) إذا كان $f(x)=g(x)h(x)l(x)$، استخدم قانون الضرب للبرهنة على أن:

$$\frac{df}{dx}=gh\frac{dl}{dx}+gl\frac{dh}{dx}+hl\frac{dg}{dx}=ghl'+gh'l+g'hl$$

11) إذا كان $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$، برهن أن:

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

12) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-4}$.

13) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^{1/3}}{1-\sqrt{x}}$.

14) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=ax\left(\dfrac{x+b}{x+c}\right)$. حيث a,b,c ثوابت.

15) أوجد النقط على بيان المنحنى $f(x)=\dfrac{5-x}{6-x}$ التي يمرّ المماس عندها خلال نقطة الأصل.

4.4 المشتقة الأولى للدالة التركيبية

The Derivative of Composite Function

من دراسة الدوال تعرّفنا إلى الدالة التركيبية $f \circ g$، والآن نحاول الحصول على قانون لإيجاد المشتقة الأولى للدالة التركيبية.

قاعدة السلسلة (Chain Rule)

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، وكان $u = g(x)$، فإن الدالة التركيبية $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ تكون قابلة للاشتقاق ويكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

البرهان

نفترض أن $g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ لتسهيل البرهان.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x)) - g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

نلاحظ أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن $g(x + \Delta x) \to g(x)$؛ لأن g دالة قابلة للاشتقاق، وبالتال متصلة.

مثال 12

أوجد y' إذا كانت $y = \dfrac{1}{(x^3 + 1)^5}$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^3 + 1$، إذن $y = \frac{1}{u^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right).\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= -\frac{5}{u^6}.3x^2 = \frac{-5}{(x^3+1)^6}.3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$

القاعدة العامة للأس (General Power Rule)

إذا كانت $u(x)$ (دالة في x) قابلة للاشتقاق، وكان n عدداً صحيحاً، فإن:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

البرهان

إذا كان $y = u^n$ و u دالة في x، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

وذلك باستخدام قاعدة السلسلة.

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$$

مثـــال 13

إذا كانت $f(x) = (x^2-5)^4$، أوجد $f'(x)$.

الحـــل

$$f'(x) = 4(x^2-5)^3\frac{d}{dx}(x^2-5)$$
$$= 4(x^2-5)^3(2x) = 8x(x^2-5)^3$$

تمارين 4.4

في التمارين من 1 إلى 5، استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد المشتقة الأولى:

1) $f(x) = (x^2-1)^2$
2) $g(x) = (1-x^2+x^5)^3$
3) $h(t) = (t^2-t^3)^4$
4) $f(x) = (1-x^6)^6$
5) $f(x) = [(x+1)/(x-1)]^3$

في التمارين من 6 إلى 9، استخدم القاعدة العامة للأس لإيجاد المشتقة الأولى:

6) $f(x) = (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2$
7) $f(x) = (x^2-2)^5(x^4+3)^3$
8) $h(t) = (t^{-2}+t^{-3}+t^{-5}+t^{-7})^{-1}$
9) $f(x) = \left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-1}+4\right]^{-1}$

10) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، وكان $f(g(x)) = x$، برهن على أن: $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$.

11) إذا كان $(x-6)^2$ قاسماً للدالة $P(x)$، برهن على أن $(x-6)$ قاسم للدالة $P'(x)$.

12) أعطِ مثالاً لدالة f بحيث أن $f \circ f \neq f.f$.

13) أوجد ما يلي:

أ) $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

ب) $\dfrac{d}{dx}\left[[f(x)]^2+1\right]$

14) برهن أنه إذا كان $y = x^{-1}$، فإن $\dfrac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n n! x^{-n-1}$.

15) أوجد $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right]$

5.4 المشتقة الأولى لدالة القوى
The First Derivative of a Power Function

نحاول في هذا البند إيجاد المشتقة الأولى للدالة $y = x^r$، حيث r أي عدد قياسي. لقد أوضحنا أنه إذا كان r عدداً صحيحاً (موجباً أو سالباً)، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

ستثبت صحة هذه القاعدة في حالة أي عدد قياسي.

نظرية 2

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن المشتقة الأولى للدالة $y = x^{\frac{1}{n}}$، هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

البرهان

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{1/n} - x^{1/n}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}]^n - [x^{\frac{1}{n}}]^n}$$

ومن الجبر نعرف أن:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

إذن

$$\frac{b-a}{a^n - b^n} = \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}}$$

بوضع $a = (x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}$ و $b = x^{\frac{1}{n}}$ في آخر نهاية، نجد أن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{\left((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right)^{n}-\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left((x+\Delta x)^{n-1}\right)^{n-1}+\left((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2}x^{\frac{1}{n}}+\ldots+\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\ldots-x^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-2}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

مثـال 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y=x^{\frac{1}{5}}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$$

نظرية 3

إذا كانت $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$؛ حيث أن m و n عددان صحيحان، فإن:

$$f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

البرهان

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}}=\frac{d}{dx}[x^{\frac{1}{n}}]^{m}$$

نفترض أن $u=x^{\frac{1}{n}}$، ومن ذلك نجد أن $f(x)=u^m$.

باستخدام قاعدة السلسلة، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{du}f(x).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})^{m}=\frac{d}{dx}u^{m}=mu^{m-1}.\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}.\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}$$

$$= \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1+1-n} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n} = \frac{m}{n}x^{\frac{(m-n)}{n}}$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

مثـــال 15

إذا كان $s=(t^3+2t+3)^{\frac{11}{9}}$، أوجد $\frac{ds}{dt}$.

الحــل

نفترض أن $u=t^3+2t+3$، ومن ذلك نجد أن $s=u^{\frac{11}{9}}$

إذن

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}.\frac{du}{dt} = \frac{11}{9}u^{\frac{11}{9}-1}.(3t^2+2)$$

$$= \frac{11}{9}(3t^2+2)(t^3+2t+3)^{\frac{2}{9}}$$

لا نستطيع في هذ االمستوى البرهنة على أن هذه القاعدة صحيحة في حالة الأعداد غير القياسية. عندما يتقدم بنا المسار سنبرهن على ذلك، ولهذا نستطيع القول إنه إذا كانت $f(x)=x^\lambda$، حيث λ عدد حقيقي (قياسي أو غير قياسي)، فإن:

$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}$$

ملخص

	الدالة	المشتقة الأولى للدالة
(1	$f(x) = c$ ؛ c ثابت	$f'(x) = 0$
(2	$g(x) = cf(x)$ ؛ c ثابت	$g'(x) = cf'(x)$
(3	$f(x) + g(x)$	$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
(4	$f(x) = x^r$ ؛ r عدد حقيقي	$f'(x) = rx^{r-1}$.
(5	$f(x).g(x)$	$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
(6	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
(7	$y = [f(x)]^r$	$\frac{dy}{dx} = r[f(x)]^{r-1}\frac{d}{dx}f(x)$
(8	$(f \circ g)(x)$	$\frac{dy}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x)$

تمارين 5.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $f(x) = 5x^{-\frac{2}{9}}$

2) $f(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$

3) $f(x) = (x^3 + 1)^{\frac{3}{5}}$

4) $g(t) = (t^3 + t^2 + 1)^{\frac{5}{8}}$

5) $h(t) = (t^5 - 1)^{\frac{3}{4}}(t^3 + 2)^{\frac{6}{5}}$

6) $f(x) = (x^2 - x^3)^4$

7) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$، عند النقطة $(1,2)$.

8) أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

9) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $f(x) = (x-1)^{\sqrt{2}}$، عند النقطة $(1,0)$.

10) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $y = \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$، عند النقطة $(0,-8)$.

6.4 المشتقة الأولى للدوال المثلثية

The First Derivative of Trigonometric Functions

في هذا البند نحاول إيجاد صيغ المشتقة الأولى للدوال المثلثية، وحيث أن المشتقة الأولى معرّفة بالنهاية، فعلى الطالب مراجعة بعض النظريات التي تخص نهاية الدوال المثلثية في الفصل الثالث.

نذكر القارىء بأن الزاوية x أو θ مقيسة بالتقدير الدائري، وأن نطاق $\sin x$ ونطاق $\cos x$ هو كل الأعداد الحقيقية.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad (1)$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= \sin x.0+\cos x.1=\cos x
\end{aligned}$$

استخدمنا في هذا البرهان القانون $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

ملاحظة 1

لقد برهنا على أن الدالة القابلة للاشتقاق، تكون متصلة، وبذلك فإن الدالة $\sin x$ تكون دالة متصلة عند كل عدد حقيقي x.

بصفة عامة:

(2) إذا كان $y = \sin u$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$

البرهان

باستخدام قاعدة السلسلة، نعلم أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \cos x.\frac{du}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \cos x\frac{du}{dx}$$

مثـــال 16

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \sin\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$.

الحـــل

نفترض أن $u = \frac{x+1}{x^2-3}$، ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x^2-3)-2x(x+1)}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

إذن

$$\frac{du}{dx}\cos u\frac{du}{dx} = \cos u.\frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)\frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

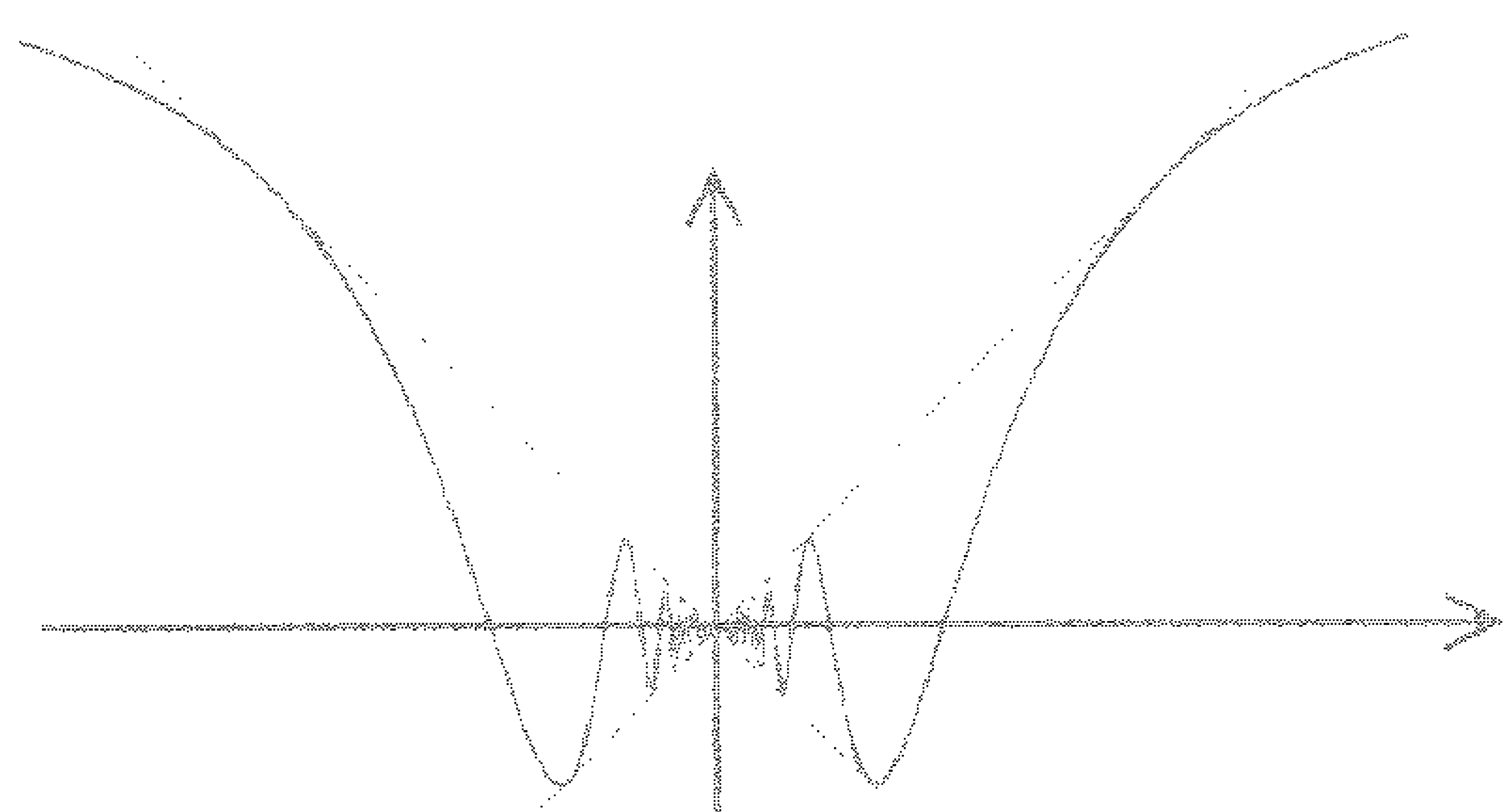
$$= \frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}\cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$$

مثال 17

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ ناقش اتصالية الدالة f، وقابليتها للاشتقاق.

الحل

من الواضح أن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$، وبالتالي تكون الدالة f متصلة عند $x = 0$.



إذا كان $x \neq 0$، فإن:

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

لاحظ أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

وهذه النهاية غير موجودة.

هذا يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

يوضح هذا المثال أن الاتصالية عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الاشتقاق عند تلك النقطة.

(3) إذا كان $y = \cos x$، فإن: $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

البرهان

من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos(x) &= \frac{d}{dx}\sin(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x)(-1) \\ &= -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x\end{aligned}$$

ملاحظة 2

كما في حالة $\sin x$، نجد أن $\cos x$ دالة متصلة، لأنها قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x.

بصفة عامة:

(4) إذا كان $y = \cos u$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

البرهان

باستخدام قاعدة السلسلة، نعلم أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=-\sin x.\frac{du}{dx}$$

مثـــال 18

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y=\cos\sqrt{x}$.

الحـــل

نفترض أن $u=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=-\sin u.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

وحيث أن باقي الدوال المثلثية تعطى بدلالة $\sin x$ و $\cos x$، من السهل على الطالب البرهنة على القوانين التالية:

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x \tag{8}$$

البرهان

5) من حساب المثلثات، نعلم أن: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\tan x$.

6) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\cot x$.

7) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\sec x$.

8) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\csc x$.

تمارين 6.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin (3x)$

2) $y = \cos (x-3)$

3) $y = \sin (x^2 - 2x + 6)$

4) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

5) $y = \sin (x^3)$

6) $y = \sin^2 x \cos^3 x$

7) $y = \tan \ x \cot \ x$

8) $y = \sqrt{\sin x + \tan x}$

9) $y = \dfrac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$

11) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

في التمارين 12 إلى 15، أوجد النهاية المذكورة.

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos (x^2) - 1}{x^4}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 (3x)}{4x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin (x/2)}{\sin (x/5)}$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos (2x) - 1}{x}$

16) برهن على القوانين من 5 إلى 8.

17) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x} \cot \ x$، أوجد $f'(x)$

18) إذا كانت $f(x) = \cos (\tan x)$، أوجد $f'(x)$.

19) إذا كانت $f(x) = \dfrac{1 + \tan^3 (3x^2 - 4)}{x^2 \sin x}$، أوجد $f'(x)$.

20) إذا كانت $f(x) = \sin \ nx \sin^n x$، أوجد $f'(x)$.

7.4 الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

تعطى الدالة ـ في معظم المسائل التي قابلناها ـ في صورة صريحة؛ أي y أو $f(x)$ بدلالة x، ولكن في بعض الأحيان تعطى المعادلة في صورة ضمنية، مثل:

$$x^2 + y^2 = 6xy^4 \quad (1)$$

$$xy = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x+y}{x^2-y^2} = 16y^5 \quad (3)$$

لإيجاد المشتقة الأولى لمثل هذه الدوال تؤخذ المشتقة الأولى لكل حد من حدود المعادلة بالنسبة للمتغير x.

مثـــال 19

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x^2 + y^2 = y + y^4$.

الحـــل

بأخذ المشتقة الأولى لكل حد، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}y^4$$

إذن

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

نضع كل الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في طرف، وبقية الحدود في الطرف الآخر:

$$2x = (1 + 4y^3 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 4y^3 - 2y}$$

مثـال 20

أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^4+y^4=17$ عند النقطة $(2,1)$.

الحـل

أولاً نجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}y^4=\frac{d}{dx}17$$

إذن

$$4x^3+4y^3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{y^3}$$

إذن ميل المماس عند النقطة $(2,1)$ هو: -8

ومعادلة المماس هي: $y-1=-8(x-2)$ أو $8x+y=17$

ملاحظة

الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)}$ يعني المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (x,y).

تمارين 7.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

2) $x^{-1}+y^{-1}=1$

3) $(4x^2y^2)^{\frac{1}{5}}=1$

4) $\cos\,(x^2+y^2)=2x$

5) $\dfrac{\sin\,x}{\cos\,y}=\sin\,(x-y)$

6) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}=1$

7) $y=\sin\ \ x\cos\ \ y$

8) $\sqrt{yx^2+xy^2}=0$

9) $(x+y)^{\frac{1}{2}}=(x^2+y)^{\frac{1}{3}}$

10) $(x+y)^2=x^2+y^2$

11) $x=y\sqrt{1-y^2}$

12) $\sqrt{1-xy}+3y=4$

13) $2xy+3y^2=2$

14) $xy-x^3+y^2=0$

15) $\dfrac{x^2}{y^3}-x=c$ حيث c عدد ثابت.

8.4 المشتقات من رتب أعلى (Higher-Order Derivatives)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق، فإن $y' = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ تكون دالة في x أيضاً، وهذه الدالة في x قد تكون أو لا تكون قابلة للاشتقاق. إذا كانت $f'(x)$ قابلة للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى للدالة f' هي المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f''.

هناك رموز أخرى مستعملة للدلالة على المشتقة الثانية، منها:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

بالمثل f'' دالة في x قد تكون أو لا تكون قابلة للاشتقاق.

إذا كانت $f''(x)$ قابلة للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى للدالة f'' تسمى المشتقة الثالثة للدالة f ويرمز لها بالرمز

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

نستطيع المواصلة بنفس الطريقة، ما دامت المشتقة الناتجة قابلة للاشتقاق، ونرمز لهذه المشتقات بالرموز $f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \ldots$

حيث أن
$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}, \ldots$$

مثال 21

إذا كان $f(x) = x^3$، فإن:

$$f'''(x) = 6, f''(x) = 6x, f'(x) = 3x^2$$

$f^{(n)}(x) = 0$ لكل $n \geq 4$.

مثال 22

إذا كان $f(x) = \dfrac{1}{x}$، فإن:

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}, f'''(x)=-\frac{6}{x^4}, f''(x)=\frac{2}{x^3}, f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

وبصفة عامة في هذه الحالة

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ لكل $n\geq 1$.

مثال 23

إذا كان $f(x)=\sin\ x$، فإن:

$$f^{(4)}(x)=\sin\ x\ ,\ f'''(x)=-\cos\ x\ ,\ f''=-\sin\ x\ ,\ f'(x)=\cos x$$

تمارين 8.4

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ في المسائل التالية:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

3) $y=\sqrt{x^2+1}$

4) $y=\cos\sqrt{x}$

5) $y=\sin\ x^2$

6) $y=x^3$

7) $y=\frac{x+1}{x-1}$

8) $y=ax^2+bx+c$

9) $y=ax^3+bx^2+cx+d$

10) يتحرك جسم بحيث يُعطى موضعه بعد زمن t بالمعادلة:

$$x=2t^3-4t^2+2t+3$$

أوجد:

أ) موضعه الابتدائي.

ب) سرعته الابتدائية.

ج) عجلة الجسم الابتدائية.

د) سرعته بعد 3 ثوان.

11) استخدم المشتقات من رتب عليا لبرهنة أن

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + .. + x^n$$

[إرشاد: ضع $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ وأوجد $a_0, a_1, a_2, ..., a^n$]

12) أوجد المشتقة التي رتبتها n للدالة $f(x) = \mathbf{cos}\ \ mx\ \mathbf{sin}\ \ kx$.

13) إذا كان $y = (a+bx)^n$، أوجد صيغة للمشتقة من الرتبة n.

14) إذا كان $y = \frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$، أوجد صيغة للمشتقة من الرتبة n.

15) أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ للدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 1 \\ 2x-1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

تمارين على الفصل الرابع

في التمارين من 1 إلى 14، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

2) $y = x^6 - \sqrt[3]{x}$

3) $y = (2x^2+1)\sqrt{x+1}$

4) $y = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^3-2)^{\frac{1}{3}}$

5) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+3}}$

7) $y = \dfrac{2}{x - \sqrt{x^2+1}}$

8) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

9) $y = \sqrt{x - \sqrt{1-x}}$

10) $y = \sin^2 x^2$

11) $y = \sqrt{1 + \cos\ x}$

12) $y = \cos\sqrt{1+x}$

13) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

14) $y = \dfrac{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}}$

في التمارين من 15 إلى 20، أوجد معادلة المماس للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة:

15) $y = x^3 - x + 4$ عند $(1,4)$

16) $xy^2 - yx^2 = 0$ عند $(1,1)$

17) $y = \cos\sqrt{x}$ عند $(\pi^2/9, 1/2)$

18) $y = \tan x$ عند $(\pi/4, 1)$

19) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x^2-6}$ عند $(4, 1/2)$

20) $y = \dfrac{1}{1+x}$ عند $(1, 1/2)$

في التمارين من 21 إلى 25، أوجد معادلة العمودي على المماس للمنحنى المعطى، عند النقطة المعطاة.

21) $y = x^2 - 4x + 2$ عند $(1, 1/2)$

22) $y = \dfrac{4}{x+1}$ عند $(2, 4/3)$

23) $y = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)$ عند $(1, 0)$

24) $y = \dfrac{x}{x - \sqrt{x}}$ عند $(4, 2)$

25) $y = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$ عند $(1/2, 3)$

في التمارين من 26 إلى 30، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

26) $y = \mathbf{sin}\ x^2$

27) $y = 8x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{4}{3}}$

28) $y = (x-1)(x+1)$

29) $y = x^2 \mathbf{sin}\ (3x)$

30) $y = (x^2 + 3)\mathbf{sin}\ (x/3)$

في التمارين من 31 إلى 35، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

31) $x^4 + 4x^2y^2 = 25$

32) $y\ \mathbf{tan}\ \ x^2 - xy^3 = 15$

33) $\mathbf{sin}\ \ y = \mathbf{cos}\ \ x$

34) $y + 1 = x\ \mathbf{cos}\ \ y$

35) $5x^2 + 8y^3 = 16\sqrt{x+1}$.

36) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $4y + x = 1$.

37) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمستقيم $y + x = 1$.

38) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ التي يكون عندها المماس أفقياً.

39) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \cos x$، حيث $0 \leq x \leq \pi/2$، التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $2x - y + 4 = 0$.

40) إذا كانت $y = \dfrac{1}{1-x}$، أوجد صيغة لإيجاد $f^{(n)}(x)$، حيث إن n عدد صحيح موجب.

الفصل الخامس

تطبيقات على المشتقات

Applications of Derivatives

في هذا الفصل، نستخدم الاشتقاق كأداة لحل بعض المسائل الفيزيائية مثل تعيين القيم القصوى لدالة، ومعرفة تقعّر بيان الدالة، ونقط الانقلاب حتى يساعدنا ذلك في تخطيط سريع لبيان الدالة.

5.1 نظرية رول ونظرية القيمة الوسطى

Rolle's Theorem & Mean Value Theorem

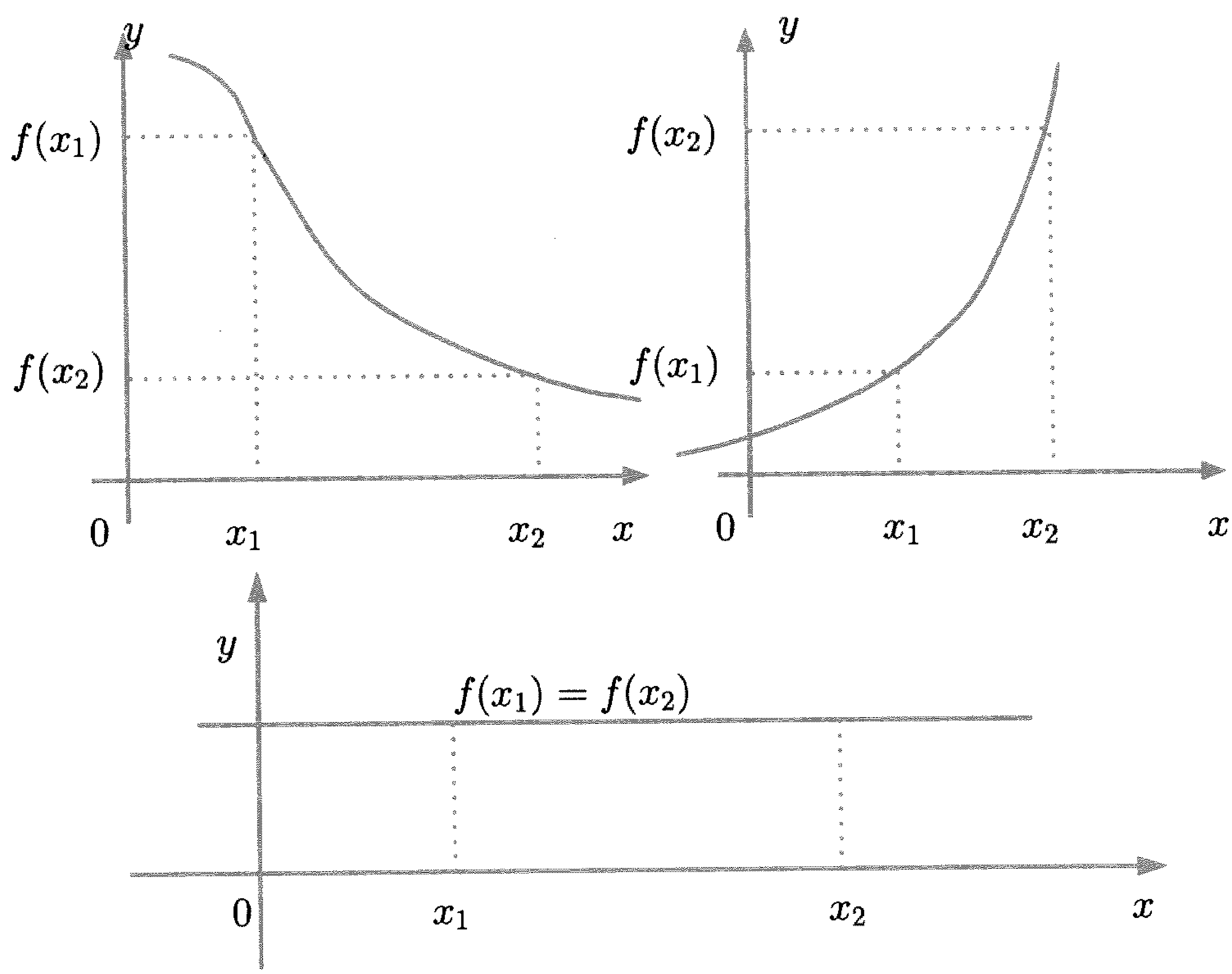
تعريف 1.5:

لنفرض أن الدالة f معرّفة على الفترة $[a,b]$ و x_1، x_2 في $[a,b]$:

1) الدالة f تزايدية على الفترة $[a,b]$، إذا كان $x_1 < x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) < f(x_2)$.

2) الدالة f تناقصية على الفترة $[a,b]$، إذا كان $x_1 < x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) > f(x_2)$.

3) الدالة f ثابتة على الفترة $[a,b]$، إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ لكل x_1، x_2 في الفترة $[a,b]$.



الشكل 1.5

نلاحظ من البيان أن بيان الدالة يصعد إلى أعلى، كما زاد x إذا كانت الدالة f تزايدية، ويهبط إلى أسفل كلما زاد x إذا كانت الدالة f تناقصية، ويبقى ثابتاً إذا كانت الدالة ثابتة.

نظرية 1 (نظرية رول) Rolle's Theorem:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$، وإذا كان $f(a) = f(b)$، فإن هناك على الأقل عنصراً واحداً c في (a,b)؛ حيث أن $f'(c) = 0$.

البرهان

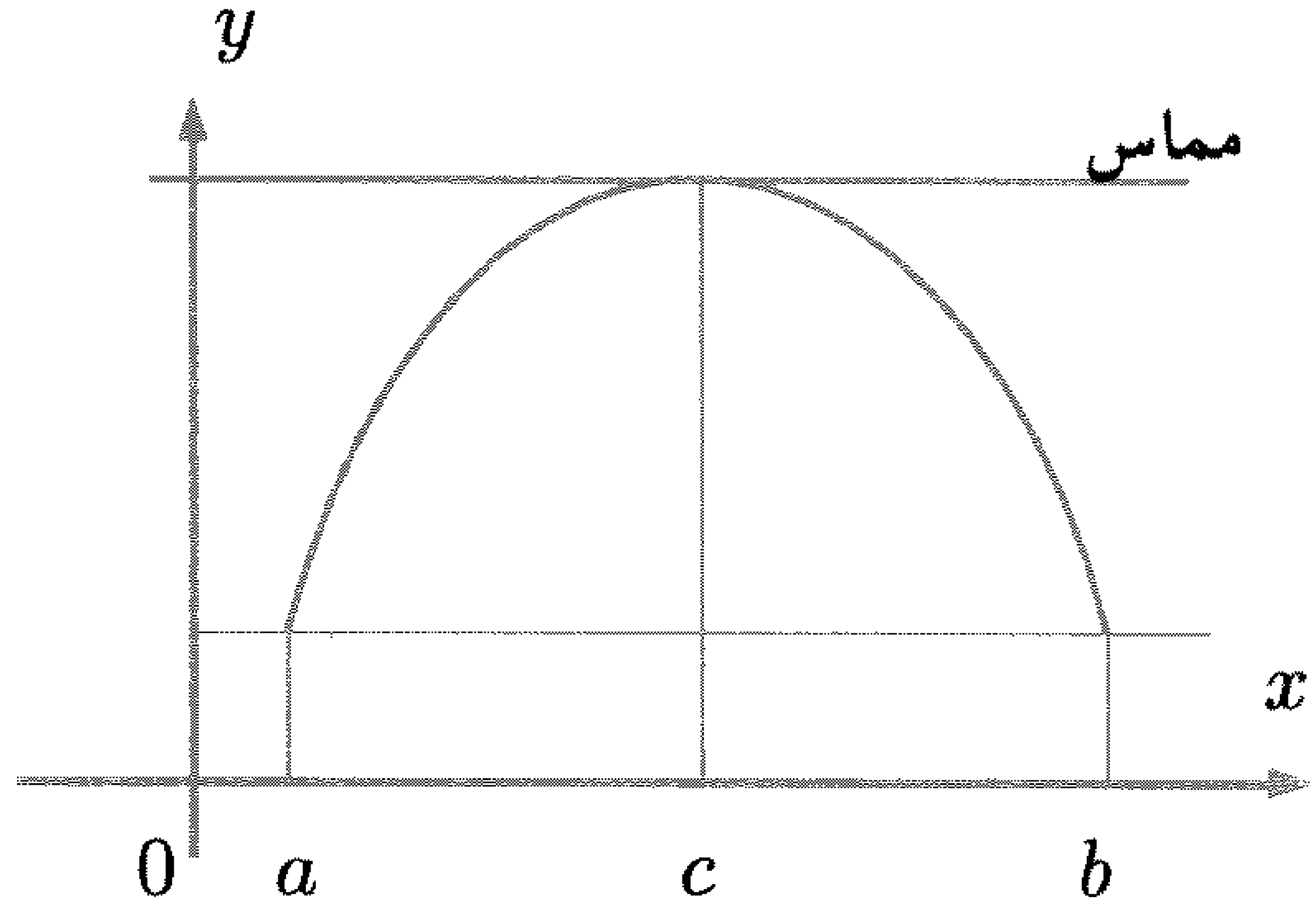
إذا كان $f(x) = f(a) = f(b)$ لكل $x \in (a,b)$.

فإن الدالة f تكون دالة ثابتة، وبالتالي فإن $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$.

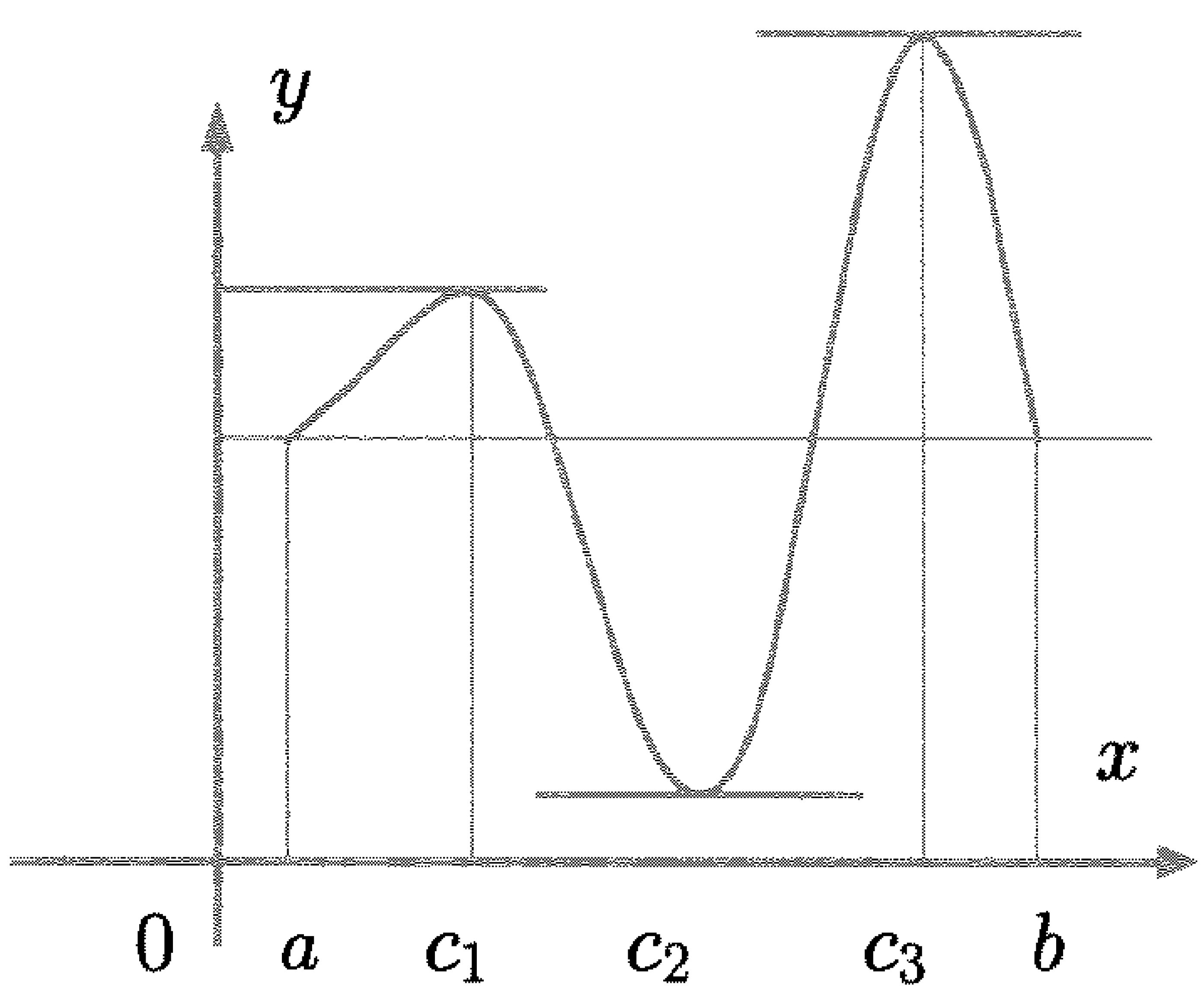
إذن أي عدد بين a وb يقوم بهذا العمل.

إذا كان هناك $x \in (a,b)$؛ حيث أن $f(x) \neq f(a)$، فإن:

$f(x) > f(a)$ أو $f(x) < f(a)$، لنأخذ الحالة $f(x) > f(a)$ (الحالة $f(x) < f(a)$ تقود إلى النتيجة نفسها).



الشكل 2.5



الشكل 3.5

هناك عدد c في (a,b) يحقق ما يلي $f(x) \leq f(c)$ لكل x في (a,b) لأن الدالة متصلة، ولهذا تكون لها قيمة عظمى.

إذن $f(x) - f(c) \leq 0$

إذا كان c على يمين العدد x، فإن $x - c < 0$، وبذلك فإن:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ومن ذلك...

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad (1)$$

وإذا كان c على يسار العدد x، فإن $x - c > 0$، وبذلك فإن:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ومن ذلك...

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $f'(c) = 0$.

تقول هذه النظرية إنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة وقابلة للاشتقاق على تلك الفترة المفتوحة، وقيمة الدالة عند بداية الفترة تساوي قيمة الدالة عند نهاية الفترة، فإنه يوجد على الأقل عنصر واحد c بين a وb، ويكون المماس عند النقطة $(c, f(c))$ موازياً لمحور السينات.

قد يكون هناك أكثر من c بين a وb، تكون عنده المشتقة الأولى صفراً.

مثال 1

أوجد العدد c في الفترة $[-2,2]$، الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x) = x^3 - 4x$.

الحل

حيث أن $f(-2) = f(2)$، والدالة متصلة على $[-2,2]$، وقابلة للاشتقاق على $(-2,2)$، فإنه يوجد c بين $-2,2$ حيث أن $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(c) = 3c^2 - 4$

$3c^2 - 4 = 0$

ومن ذلك $c = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $c=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ يحققان نظرية رول لهذه الدالة.

نظرية 2 (نظرية القيمة الوسطى **Mean Value Theorem**):

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$، فإن هناك على الأقل عنصراً واحداً c في (a,b)، حيث أن:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان

نعرّف الدالة

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

نلاحظ أن g تحقق شروط نظرية رول، حيث أن:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

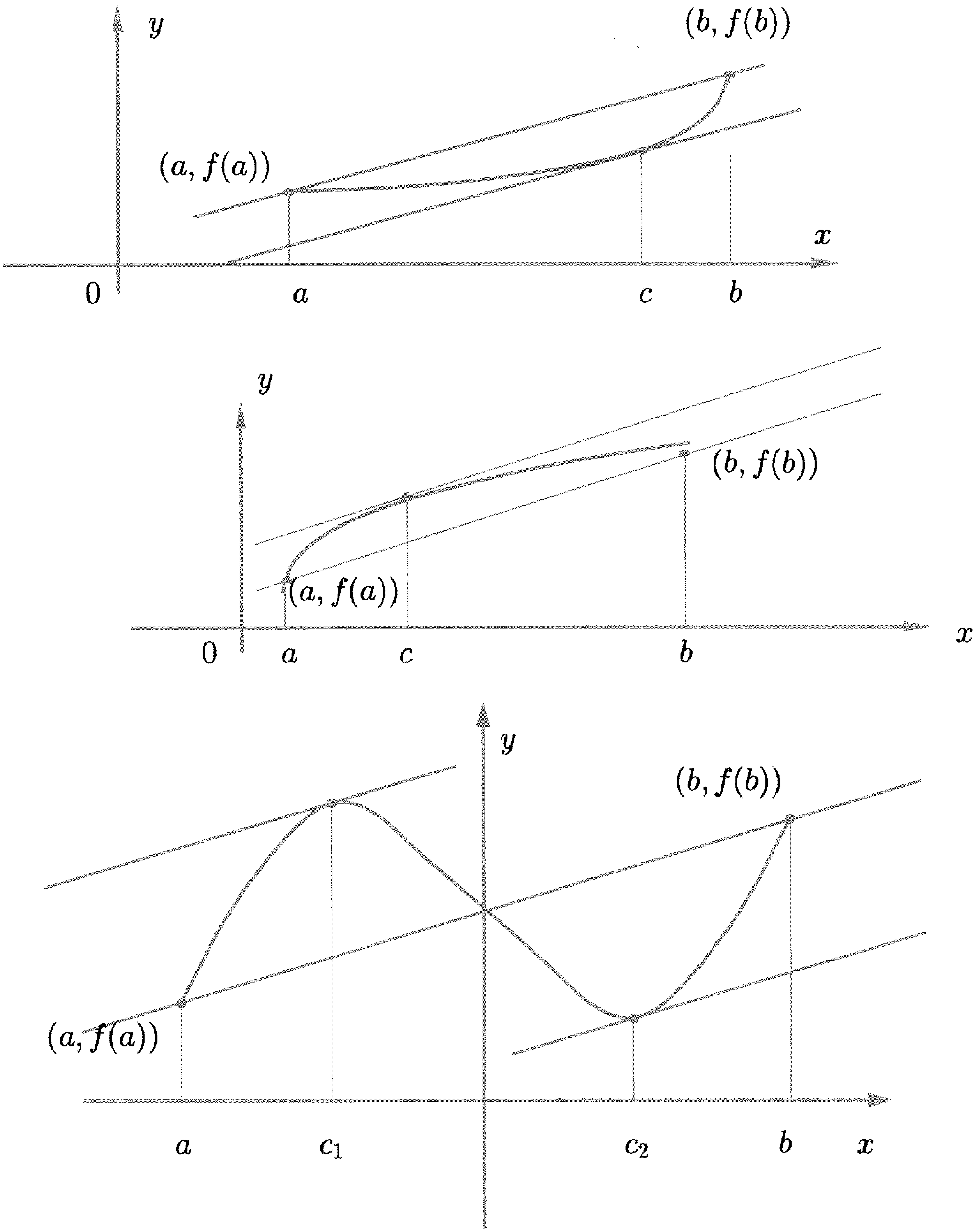
إذن هناك $c\in(a,b)$؛ حيث أن $g'(c)=0$

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ومن ذلك

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

توضح هذه النظرية أن لا ضرورة لأن تكون $f(a)=f(b)$ لوجود عدد c بين a وb يكون المماس عند النقطة $(c,f(c))$ موازياً للخط الواصل بين النقطتين $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$.



الشكل 4.5

مثـــال 2

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$، أوجد العدد c في الفترة $[0,3]$ الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى.

الحـــل

حيث أن الدالة $\frac{1}{3}x^3 + 2x$ متصلة (كثيرة حدود)، وقابلة للاشتقاق $f'(x) = x^2 + 2$، فإنه يوجد c بين 0، 3 حيث أن:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$
$$c^2 + 2 = \frac{15 - 0}{3 - 0}$$
$$c^2 = 3$$

ومن ذلك $c = \pm\sqrt{3}$ ولكن $-\sqrt{3}$ خارج الفترة $(0,3)$.

إذن العدد الوحيد الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة f هو $c = \sqrt{3}$

نظرية 3 (نظرية القيمة الوسطى المعمّمة)

لنفرض أن f وg دالتان متصلتان على $[a,b]$، وقابلتان للاشتقاق على (a,b).
إذا كان $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن هناك على الأقل عدداً واحداً c في الفترة (a,b)؛ حيث أن:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

البرهان

لاحظ أن $g(b)-g(a)\neq 0$، لأنه إذا كان $g(b)-g(a)=0$، فإن $g(b)=g(a)$ وبذلك يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة g ويكون هناك على الأقل عدد واحد c في (a,b) حيث أن $g'(c)=0$ وهذا يناقض الفرض.

لنفرض أن

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

من الملاحظ أن h دالة متصلة على $[a,b]$، وأن:

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

هذا يعني أن h قابلة للاشتقاق على (a,b).

عند التعويض المباشر نجد أن:

$$h(a)=h(b)=0$$

وبذلك يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة h، وهذا يوصلنا إلى الاستنتاج بأن هناك على الأقل عدد c في (a,b)، حيث أن:

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)}$$

تمارين 1.5

في التمارين من 1 إلى 5، تحقق من فروض نظرية رول في كل حالة، ثم أوجد العدد (أو الأعداد) c في الفترة المذكورة، حيث يكون $f'(c) = 0$

1) $f(x) = x^2 - 3x$ على $[0, 3]$

2) $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 1)$ على $[0, 1]$

3) $f(x) = \sin x$ على $[0, 4\pi]$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos\ x}$ على $[-\pi/2, \pi/2]$

5) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$ على $[0, 3]$

في التمارين من 6 إلى 11، تحقق من فروض نظرية القيمة الوسطى في كل حالة، ثم أوجد العدد (أو الأعداد) c في الفترة المذكورة، حيث يكون:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

6) $f(x) = 2x^3$ على $[0, 2]$

7) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ على $[0, 3]$

8) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ على $[3, 8]$

9) $f(x) = x\ \cos\ x$ على $(\pi/2, 5\pi/2]$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 4}$ على $[-1, 3]$

11) $f(x) = \cos\ (2x) - 2\cos^2 x$ على $[-\pi/2, \pi/4]$.

12) أوضح لماذا لا يوجد عدد c في $(-1, 3)$، يحقق استنتاج نظرية رول للدالة:

$$f(x) = |x - 1| - 2$$

13) أوضح لماذا لا يوجد عدد c في $(-1,2)$، يحقق استنتاج نظرية القيمة الوسطى للدالة.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

14) إذا كانت $f(x) = dx^2 + ex + h$ حيث d, e, h ثوابت، أوضح أن هناك c يحقق فروض نظرية القيمة الوسطى على الفترة (a, b) حيث $c = \dfrac{a+b}{2}$.

في التمارين من 15 إلى 19 تحقق من شروط نظرية القيمة الوسطى المعممة وطبّقها على الدوال المعطاة وعلى الفترة المعطاة، واذكر السبب في حالة عدم إمكانية تطبيقها:

15) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x$ ، $[1, 2]$.

16) $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ ، $[-1, 1]$.

17) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ، $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ، $[-3, -2]$.

18) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ ، $g(x) = x^3 + 2x$ ، $[-1, 1]$.

19) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ، $g(x) = x^3 + 5x + 4$ ، $[0, 2]$.

20) إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a, b]$، وإذا كان $f(a) = g(a)$، $f(b) = g(b)$، برهن أن هناك عدد c في (a, b) حيث أن $f'(c) = g'(c)$.

2.5 التزايد والتناقص (Increasing and Decreasing)

نظرية 3

نفرض أن f دالة قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$:

أ) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن f دالة تزايدية على $[a,b]$.

ب) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن f دالة تناقصية على $[a,b]$.

البرهان

أ) لنفرض أن $x_1, x_2 \in [a,b]$ حيث $x_1 < x_2$.

الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على الفترة $[x_1, x_2]$.

إذن يوجد c بين x_1, x_2 حيث أن

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

وحيث أن $f'(c) > 0$ ومن الفرض $x_2 > x_1$، فإن:

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ ، ومن ذلك $f(x_2) > f(x_1)$

إذن الدالة f تزايدية على $[a,b]$.

ب) وباتباع الطريقة نفسها مع استعمال الافتراض $f'(c) < 0$،تتم البرهنة على الجزء (ب) من النظرية.

مثال 3

أوجد الفترات التي تكون عليها $f(x) = x^4 - 16x^2$ تزايدية، وكذلك الفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

الحـــل

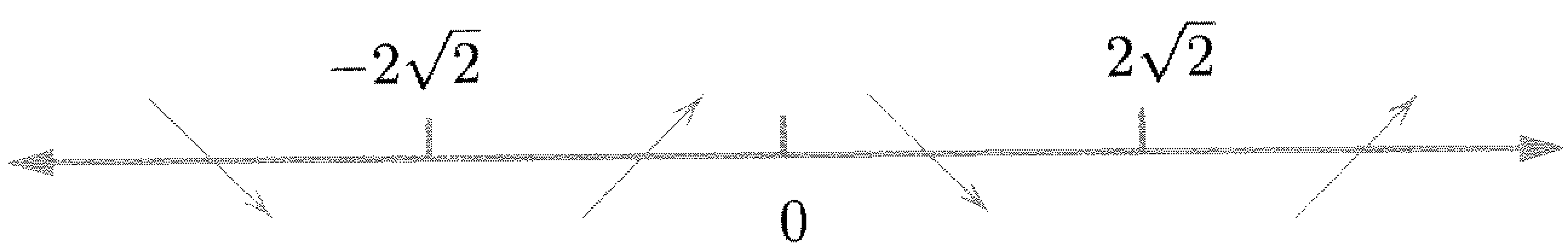
$$f'(x) = 4x^3 - 32x$$

نساوي المشتقة الأولى بالصفر

$$4x(x^2 - 8) = 0$$

ومن ذلك. . .

$$x = 0 \text{ أو } x = \pm 2\sqrt{2}$$



على الفترة $(-\infty, -2\sqrt{2})$ نجد أن $f'(x) < 0$، وذلك بأخذ أي قيمة في $(-\infty, -2\sqrt{2})$ وتعويضها في $f'(x)$، فعلى سبيل المثال

$$f'(-4) = 4(-4)^3 - 32(-4) = -128 < 0$$

وبذلك نستنتج أن f دالة تناقصية على $(-\infty, -2\sqrt{2})$.

على الفترة $(-2\sqrt{2}, 0)$ نجد أن $f'(x) > 0$، فعلى سبيل المثال

$$f'(-1) = 4(-1)^3 = 32(-1) = 28 > 0$$

ومن ذلك نستنتج أن f دالة تزايدية على $(-2\sqrt{2}, 0)$.

على الفترة $(0, 2\sqrt{2})$، نجد أن $f'(x) < 0)$، وبذلك تكون الدالة f تناقصية على $(0, 2\sqrt{2})$.

على الفترة $(2\sqrt{2}, \infty)$ نجد أن $f'(x) > 0$، وبذلك تكون الدالة f تزايدية على $(2\sqrt{2}, \infty)$.

ملاحظة

نعرف أنه إذا كانت الدالة ثابتة، فإن تفاضلها يساوي صفراً، ولكن هل العكس

صحيحاً؟، أي إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) و$f'(x)=0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن f تكون دالة ثابتة على (a,b).

لنفرض أن $x_1, x_2 \in (a,b)$ حيث $x_1 \neq x_2$

إذن يوجد $c \in (x_1, x_2)$؛ حيث أن

$$\frac{f(x)_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

هذا يؤدي إلى أن $f(x_1) = f(x_2)$ لكل $x_1, x_2 \in (a,b)$

إذن f دالة ثابتة.

تمارين 2.5

في التمارين من 1 إلى 9، أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

1) $f(x) = x^2 + x - 20$

2) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$

4) $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$

6) $g(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$

7) $g(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

8) $f(x) = x^{\frac{7}{5}} - 8x^{\frac{3}{5}}$

9) $f(x) = \mathbf{sin}\ \ x + \mathbf{cos}\ \ x$

10) لنفرض أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

أ) أوضح أن الدالة تناقصية على نطاقها.

ب) أوضح أنه لا توجد نقطة على بيان الدالة f، بحيث يكون $f'(x) = 0$.

ج) أوجد نقاط التقاطع مع محور السينات ومع محور الصادات.

د) أعط بياناً تخطيطياً للدالة f.

11) أوضح أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ تكون تناقصية على الفترة $(-1,1)$.

12) أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=|x^2-1|+1$ تناقصية والفترات التي تكون عليها تزايدية.

13) أوضح أن $\sin\ x<x$ لكل $0<x$.

[إرشاد: استخدم الدالة $f(x)=x-\sin\ x$].

14) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة

$$f(x)=\tan x-x(x+2)$$

15) أوضح أن $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ لكل $x>0$.

3.5 القيم القصوى للدالة (Extreme Values)

تعريف 2.5 (القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

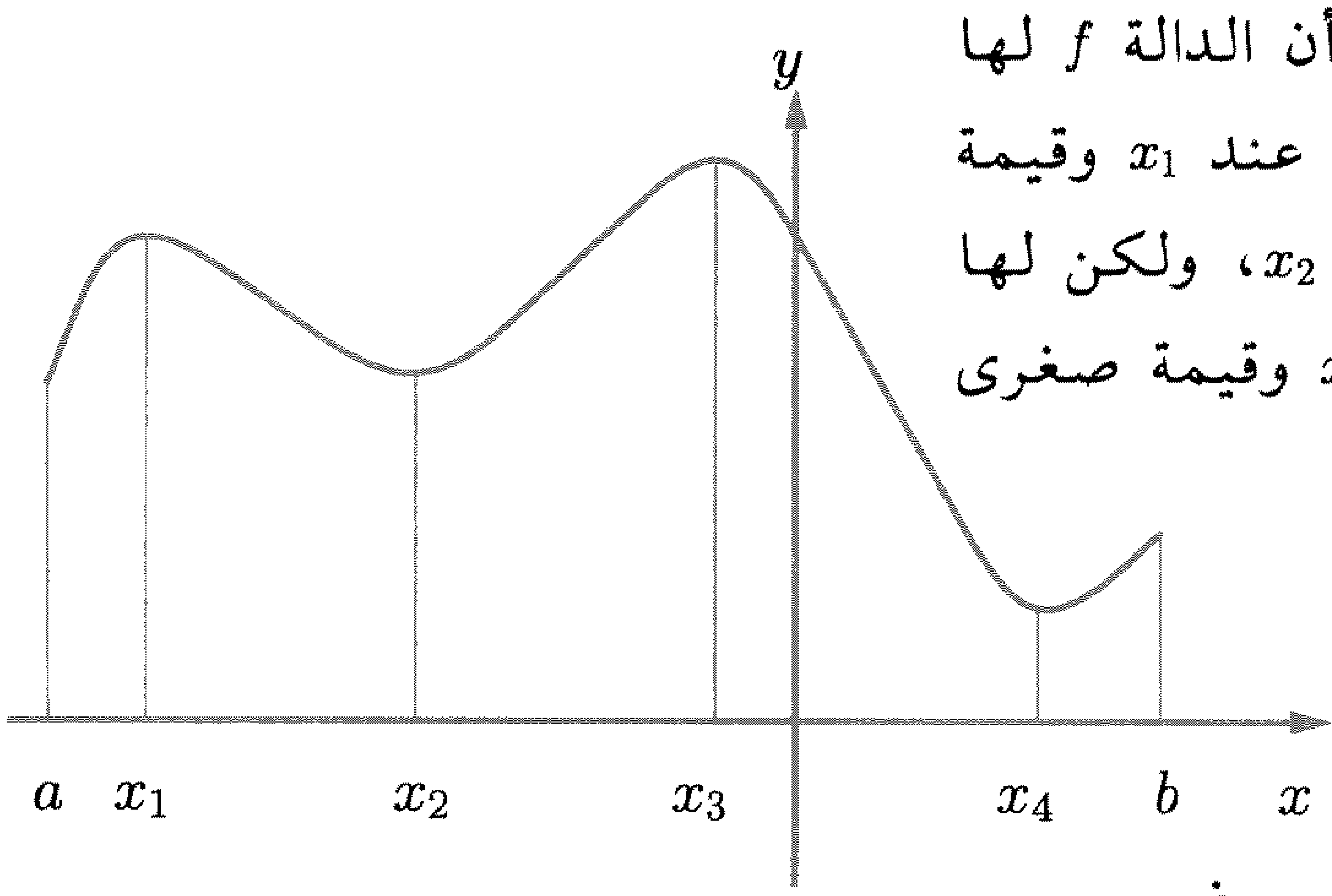
أ) الدالة f لها قيمة عظمى محلية (Local Maximum Value) عند x_0، إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)، تحتوي على x_0 حيث أن $f(x_0) \geq f(x)$ لأي x في الفترة (a,b)،

ب) الدالة f لها قيمة صغرى محلية (Local Minimum Value) عند x_0، إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)، تحتوي على x_0 حيث أن $f(x_0) \leq f(x)$ لأي x في الفترة (a,b).

ج) الدالة f لها قيمة عظمى عند x_0، إذا كان $f(x_0) \geq f(x)$ لأي x في نطاقها.

د) الدالة f لها قيمة صغرى عند x_0، إذا كان $f(x_0) \leq f(x)$ لأي x في نطاقها.

نلاحظ من الشكل أن الدالة f لها قيمة عظمى محلية عند x_1 وقيمة صغرى محلية عند x_2، ولكن لها قيمة عظمى عند x_3 وقيمة صغرى عند x_4.



الشكل 5.5

تسمى القيمة القصوى المحلية ـ في بعض الأحيان ـ القيمة القصوى النسبية.

تعريف 3.5 (النقطة الحرجة Critical Point)

لنفرض أن الدالة f معرّفة على الفترة $[a,b]$، تسمى النقطة x_0 النقطة الحرجة إذا كان $f'(x)=0$، أو $f'(x)$ غير موجودة.

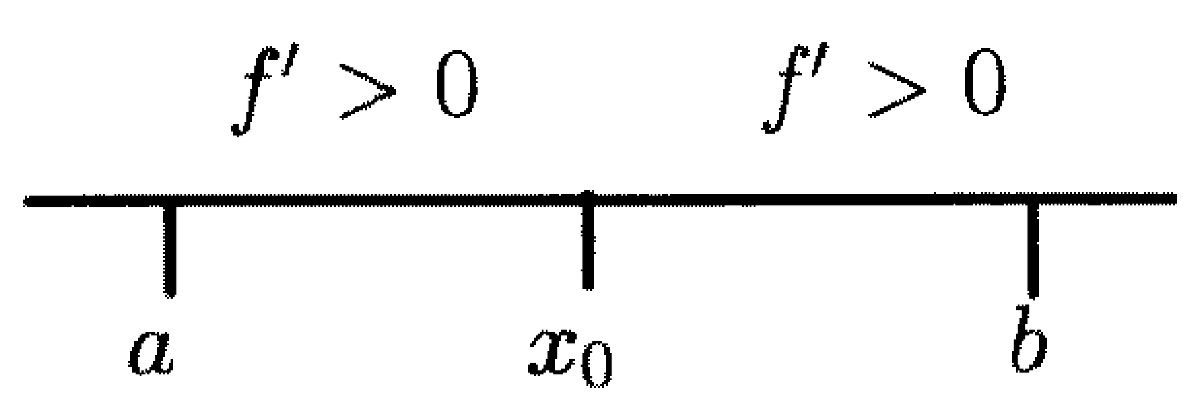
اختبار المشتقة الأولى

لنفرض أن $(x_0, f(x_0))$ نقطة حرجة للدالة f على الفترة (a,b)، ولنفرض أن f متصلة على $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b) (ليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق عند x_0).

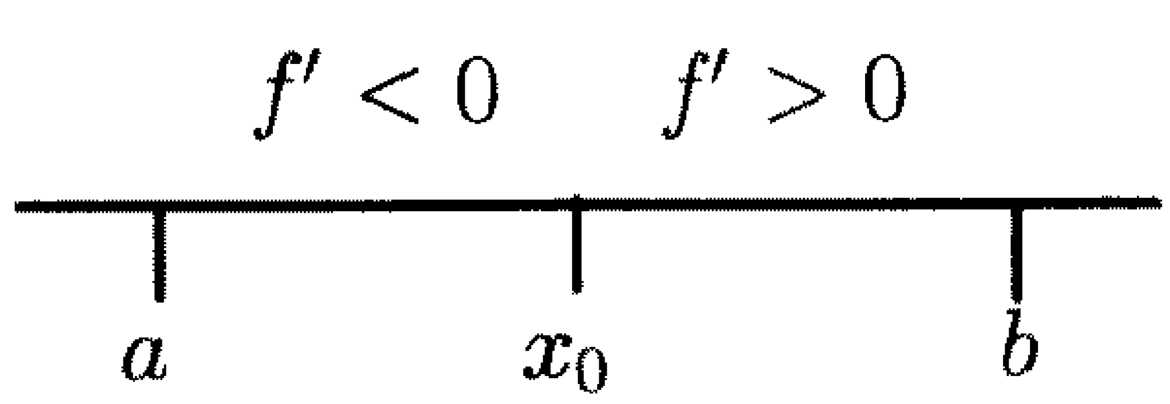
أ) إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)<0$ لكل $x\in(x_0,b)$ فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

ب) إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)>0$ لكل $x\in(x_0,b)$ فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

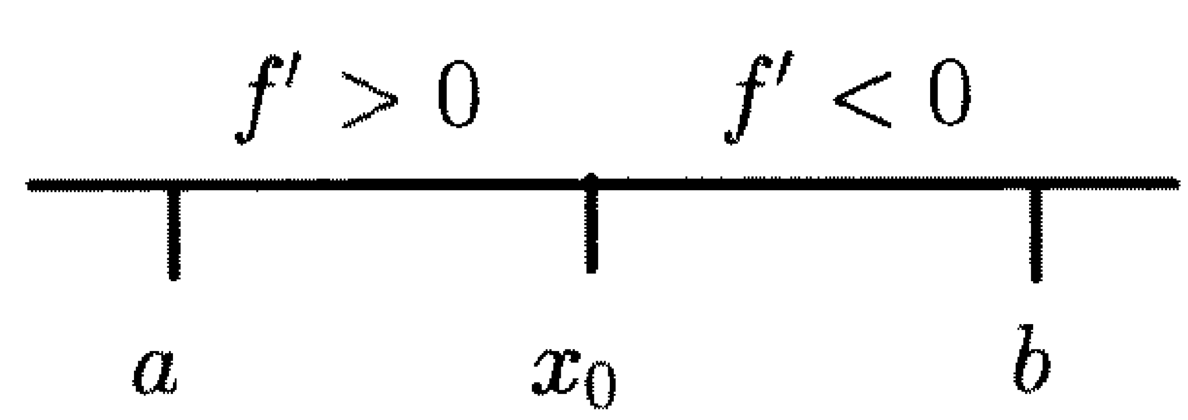
ج) إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ أو $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f ليس لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية.



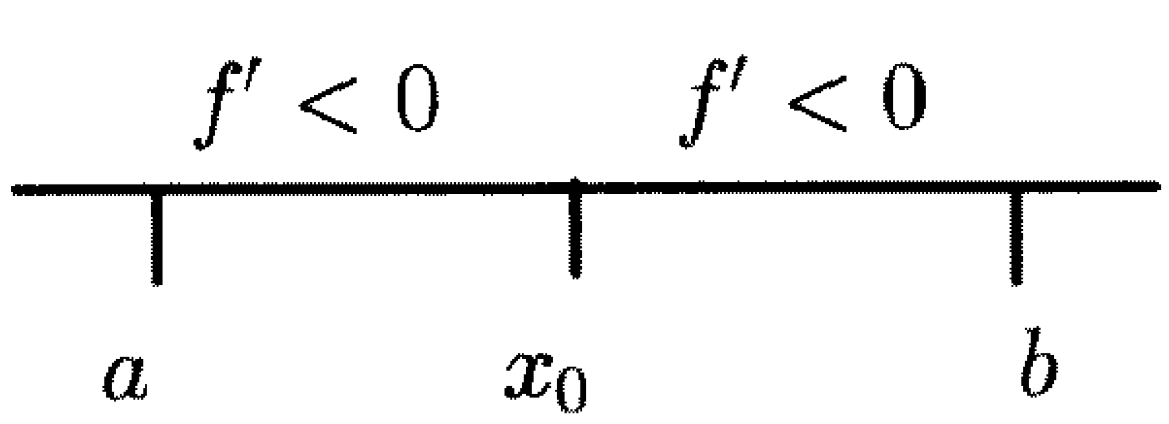
لا قيمة صغرى ولا قيمة عظمى



قيمة صغرى محلية



قيمة عظمى محلية



لا قيمة صغرى ولا قيمة عظمى

إذا قسمنا الفترة (a,b) إلى الفترتين (a,x_0) و(x_0,b)، فإن هذا الاختبار يقول:

1) إذا كانت f دالة تزايدية على (a,x_0)، وتناقصية على (x_0,b)، فإن لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

2) إذا كانت f دالة تناقصية على (a,x_0)، وتزايدية على (x_0,b)، فإن لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

3) إذا كانت الدالة f تزايدية على الفترة (a,b) كلها، أو تناقصية على الفترة (a,b) كلها، فإنه لن تكون لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية

مثال 4

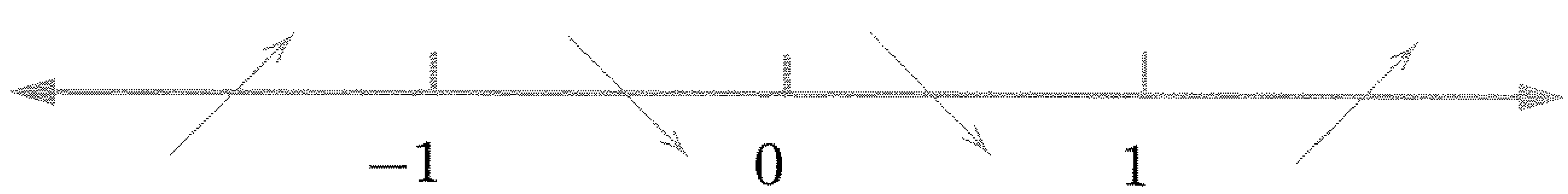
إذا كانت $f(x)=x+\frac{1}{x}$، أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f.

الحل

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

نلاحظ أن $f'(x)$ غير معرّفة عندما $x=0$ و$f'(x)=0$ عندما $x=\pm 1$. إذن، نقسم نطاق الدالة (وهو كل الأعداد الحقيقية عدا الصفر) إلى فترات.

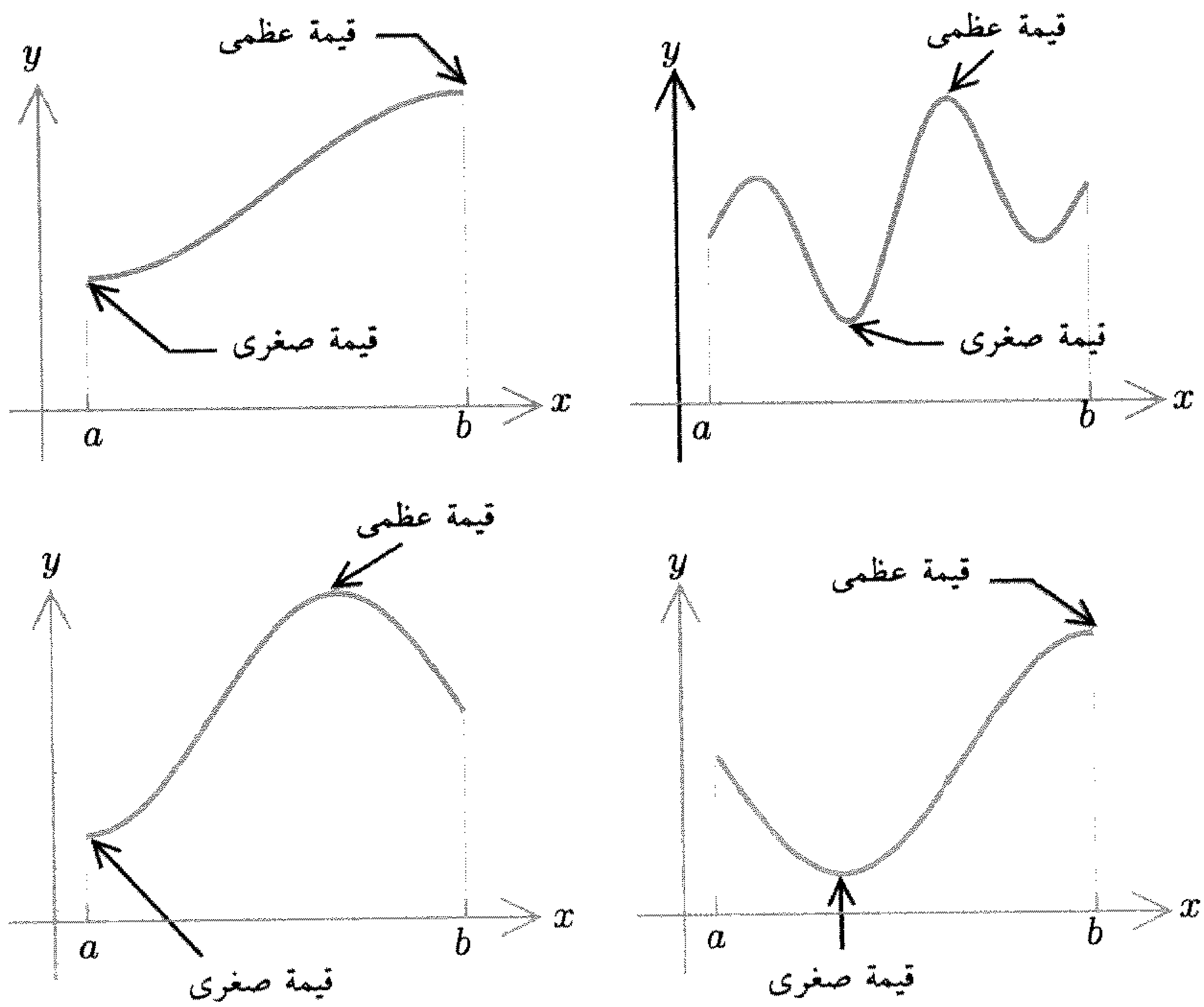
الفترات	إشارة f'	الدالة f	القيمة القصوى
$(-\infty,-1)$	$+$	تزايدية	$f(-1)$ قيمة عظمى محلية
$(-1,0)$	$-$	تناقصية	
$(0,1)$	$-$	تناقصية	$f(1)$ قيمة صغرى محلية
$(0,\infty)$	$+$	تزايدية	



نظرية 4

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$، فإن f تأخذ قيمة عظمى عند عدد في $[a,b]$، وتأخذ قيمة صغرى عند عدد في $[a,b]$.

هذه النظرية تقول إنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة، فلا بد أن تكون لها قيمة عظمى، وقد تكون هذه القيمة العظمى عند إحدى نقطتي النهاية، ولا بد أن تكون لها قيمة صغرى، وقد تكون هذه القيمة الصغرى عند إحدى نقطتي النهاية.



لاحظ في هذه الحالة أنه إذا كان موقع القيمة القصوى داخل الفترة، يمكن إيجادها بالطرق التي تعرفنا عليها سابقاً، لأنها ـ في هذه الحالة ـ تكون نقطة

حرجة، ولكن عندما يكون موضع القيمة القصوى عند إحدى نقطتي النهاية، فليس من الضروري أن تكون نقطة حرجة، وبالتالي نتبع الإجراء الآتي.

كيفية إيجاد القيم القصوى للدالة المتصلة على فترة مغلقة

لنفرض أن f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$، لإيجاد القيم القصوى لهذه الدالة على الفترة $[a,b]$ نتبع ما يلي:

1) أوجد النقطة الحرجة للدالة f على الفترة المفتوحة (a,b). أي أوجد القيم x التي تجعل $f'(x)=0$، أو التي تجعل $f'(x)$ غير موجودة.

2) أوجد قيم الدالة عند النقط التي حصلنا عليها من الخطوة (1).

3) أوجد قيم الدالة عند نقطتي نهاية الفترة، أي أوجد $f(a)$ و$f(b)$.

4) أكبر قيمة من القيم المحسوبة في الخطوتين (2) و(3) هي القيمة العظمى للدالة f على $[a,b]$، وأصغر قيمة من القيم المحسوبة في الخطوتين (2) و(3) هي القيمة الصغرى للدالة f على $[a,b]$.

مثـــال 5

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2-x$ على $[0,2]$.

الحــل

$$f'(x)=2x-1$$

إذن النقطة الحرجة الوحدة في الفترة $[0,2]$ هي $x=\frac{1}{2}$، التي حصلنا عليها من $2x-1=0$.

الآن
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

و
$$f(0)=(0)^2-0=0$$

و $$f(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

إذن (2) قيمة عظمى للدالة f على $[0,2]$ و$f\left(\frac{1}{2}\right)$ قيمة صغرى للدالة f على $[0,2]$.

مثـــال 6

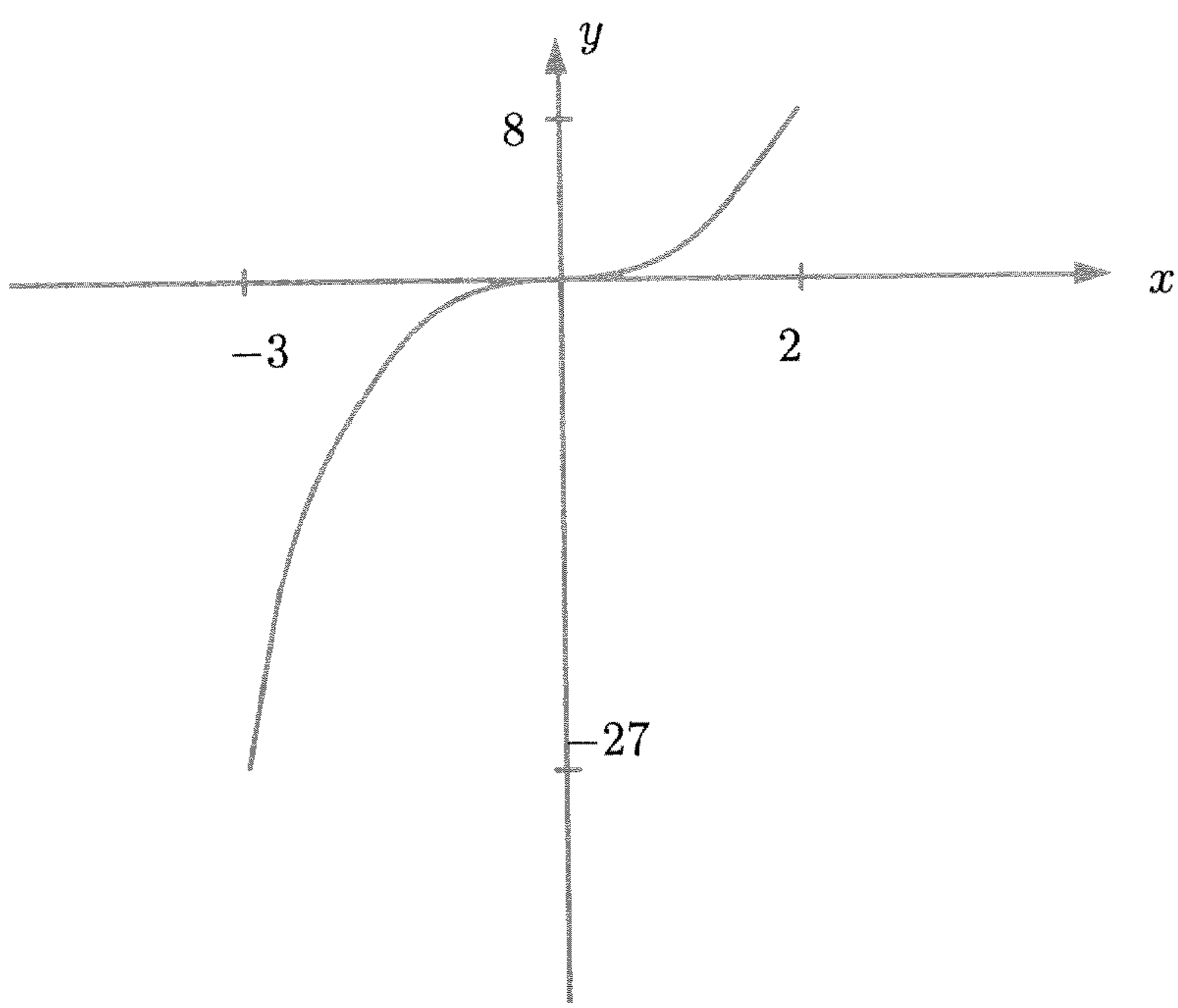
أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^3$ على $[-3,2]$.

الحــل

$$f'(x) = 3x^2$$

إذن النقطة الحرجة الوحيدة في الفترة $[0,2]$ هي $x = 0$، التي حصلنا عليها من $3x^2 = 0$.

الآن $f(0) = 0$ و $f(-3) = -27$ و$f(2) = 8$.



إذن $f(2)$ قيمة عظمى للدالة f على $[-3,2]$ و$f(-3)$ قيمة صغرى للدالة f على $[-3,2]$.

لاحظ في هذا المثال أن $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f، ولكن الدالة f ليس لها قيمة قصوى عندما $x=0$.

تمارين 3.5

في التمارين من 1 إلى 8، أوجد النقاط الحرجة كلها، وحدد القيم القصوى للدالة المعطاة.

1) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ 2) $f(x) = x^3 - x$

3) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ 2) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

5) $f(x) = \cos\ x$ 6) $f(x) = \sin\ x$

7) $f(x) = x^4$ 8) $f(x) = 4x^2 - 8x$

في المسائل من 9 إلى 13، أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة المعطاة على الفترات المعطاة.

9) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 5$ ، $[0,4]$.

10) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ، $[1,5]$،

11) $f(x) = -2x\sqrt{x+3}$ ، $[-2/5,5]$.

12) $f(x) = \dfrac{\sin\ (x+2)}{3}$ ، $[0,\pi]$.

13) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ، $[0,\pi]$.

14) إذا كان $f(x) = g(x)h(x)l(x)$ فاستخدم قانون الضرب للبرهنة على أن:

$$\frac{df}{dx} = gh\frac{dl}{dx} + gl\frac{dh}{dx} + hl\frac{dg}{dx} = ghl' + gh'l + g'hl$$

15) إذا كان $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ ، برهن أن:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

16) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-4}$.

17) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{x}}$.

18) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$ ، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f .

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f .

19) إذا كانت $f(x) = x^3 + \cos x$ ، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f .

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f .

20) إذا كانت $f(x) = |x^2 - 1|$ ، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f .

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f .

4.5 التقعّر واختبار المشتقة الثانية

Concavity and the Second Derivative Test

تعريف 4.5 (التقعر)

لنفرض أن $f''(x)$ موجودة على الفترة (a, b).

1) إذا كان $f''(x) > 0$ على (a, b)، فإن بيان الدالة يكون مقعراً إلى أعلى على (a, b).

2) إذا كان $f''(x) < 0$ على (a, b)، فإن بيان الدالة يكون مقعراً إلى أسفل على (a, b).

تعريف 5.5 (نقطة الانقلاب)

تسمى النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة f إذا تغير اتجاه تقعّر بيان الدالة f عند x_0.

قد تكون للدالة f نقطة انقلاب عند $(x_0, f(x_0))$ في إحدى الحالتين:

(1) $f''(x_0) = 0$ أو (2) $f''(x_0)$ غير موجود.

إذا كان $f''(x_0)$ موجوداً و $(x_0, f(x_0))$ نقطة انقلاب للدالة f، فمن الضروري أن يكون $f''(x_0) = 0$.

الجدير بالذكر أن عكس هذه الجملة غير صحيح، أي إذا كان $f''(x_0) = 0$، فإنه ليس من الضروري أن تكون نقطة انقلاب، والمثال على ذلك بيان $f(x) = x^2$.

مثـــال 7

أوجد نقطة الانقلاب، وناقش تقعّر الدالة $f(x) = x^3 - 2x$

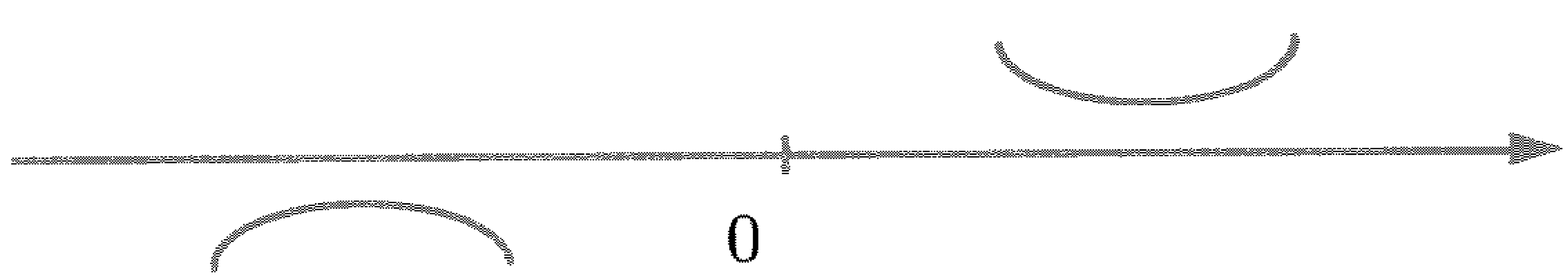
الحـــل

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 2 \\
f''(x) &= 6x
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن $f''(x)$ معرّف دائماً، وأن $f'''(x) = 0$ عندما $x = 0$.

إذن نقسم نطاق الدالة f (وهو الأعداد الحقيقية كلها) إلى فترات.

الفترات	$f''(x)$	بيان الدالة f
$(-\infty, 0)$	$-$	مقعر إلى أسفل
		النقطة $(0,0)$ نقطة انقلاب
$(0, \infty)$	$+$	مقعر إلى أعلى



اختبار المشتقة الثانية:

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، تحتوي على x_0.

إذا كان $f''(x_0)$ موجوداً، فإنه:

1) إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$، فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

2) إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$، فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

إذا كان $f''(x_0) = 0$، فإن هذا الاختبار لا ينفع لتحديد القيم القصوى للدالة، ولا بد من الرجوع إلى اختبار المشتقة الأولى.

مثــال 8

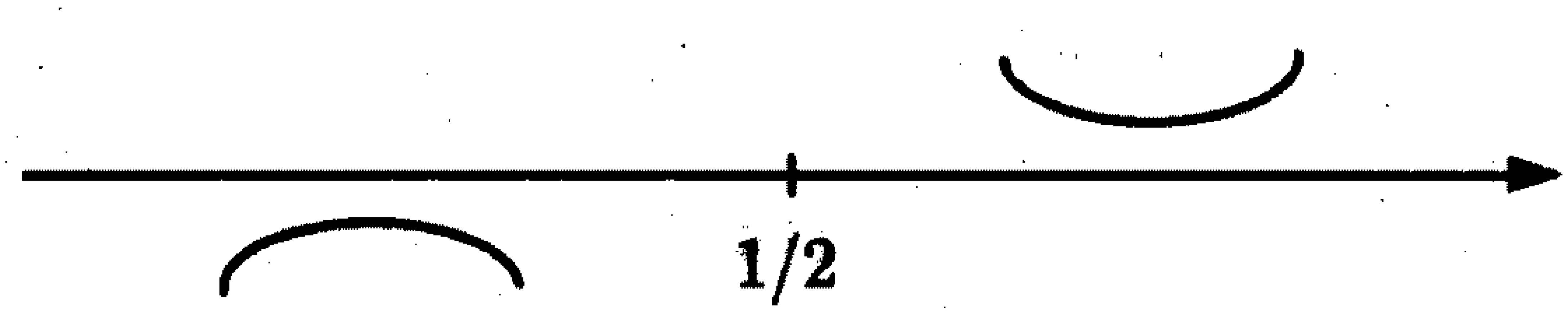
أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

الحــل

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ f''(x) &= 12x - 6 = 6(2x - 1) \end{aligned}$$

نلاحظ أن $f''(x)$ معرّف دائماً، وأن $f''(x) = 0$ عندما $x = 1/2$.

إذن نقسم نطاق الدالة f (وهو الأعداد الحقيقية كلها) إلى فترات.



النقطة $(1/2,3/2) = (1/2), f(1/2))$ هي نقطة الانقلاب.

$f'(x) = 0$ عندما $6x^2 - 6x - 12 = 0$ عندما $(x+1)(x-2) = 0$ ومعنى ذلك أن $x = 2$ أو $x = -1$.

وحيث أن $f''(2) = 18 > 0$، فإن $(2,-15)$ نقطة نهاية صغرى.

وحيث إن $f''(-1) = -24 > 0$، فإن $(-1,12)$ نقطة نهاية عظمى.

تمارين 4.5

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد نقط الانقلاب للدالة المعطاة، وناقش تقعّر بيان الدالة المعطاة.

1) $f(x) = x^3 - x - 6$

2) $f(x) = (x+1)^3$

3) $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

5) $g(x) = (x-1)^{\frac{8}{3}} + (x-1)^2$

6) $f(x) = 1 + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

7) $f(x) = x - \sqrt{x}$

8) $f(x) = \sin\,(2x)$

9) $f(x) = x\,\sin\ x$

10) $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

في التمارين من 11 إلى 15، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى للدالة المعطاة:

11) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

12) $f(x) = x(x-2)^2$

13) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}$

14) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

15) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12$

16) أوجد نقط الانقلاب للدالة $f(x) = x\sin x$.

17) إذا كانت $f(x) = \dfrac{k-x}{k^2+x^2}$ حيث k مقدار ثابت، أوضح أن نقط الانقلاب لهذه الدالة تقع على خط مستقيم.

18) إذا كانت f دالة تعكيبية وكان لها قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية، أوضح أن نقطة الانقلاب في منتصف المسافة بين النهايتين.

19) لنفرض أن الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، وبيان الدالة f مقعّر إلى أعلى على تلك الفترة. إذا كان a, b عددين مختلفين في الفترة المذكورة، برهن على أن:

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a)$$

20) إذا كانت $f(x) = x^2 - \sin x$، أوجد:

أ) نقط الانقلاب للدالة f .

ب) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أعلى.

ج) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أسفل.

5.5 خطوط التقارب (Asymptotes)

المستقيم $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ يسمى خط التقارب الأفقي (Horizontal Asymptote).

والمستقيم $x = a$ عند $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ يسمى خط التقارب العمودي (Vertical Asymptote).

مثال 9

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1/x)+1}$ و $y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x} = 1$.

$y = 1$ يسمى خط التقارب الأفقي للدالة $y = \frac{x}{1+x}$.

ومن $\lim_{x\to-1} \frac{1}{(1+x)^2} = \infty$ ، نجد أن $x = -1$ هو خط تقارب عمودي للدالة $y = \frac{1}{(1+x)^2}$.

بيان الدوال

لبيان الدالة $y = f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

1) نجد $y = f'(x)$ ونحدد أين تكون الدالة تزايدية، وأين تكون تناقصية، وكذلك كل النقط x، حيث $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة.

2) نجد $f''(x)$ ونحدد أين يكون البيان مقعّراً إلى أعلى، وأين يكون مقعّراً إلى أسفل.

3) نحدد القيم القصوى المحلية إما باختبار المشتقة الأولى، أو باختبار المشتقة الثانية.

4) نجد كل نقط الانقلاب.

5) نحدد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وإذا كانت أي من النهايتين محددة، فمنها نجد خطوط التقارب الأفقية.

6) نجد نقط التقاطع مع محور السينات، ونقط التقاطع مع محور الصادات، إذا كان ممكناً.

7) إذا كانت الدالة غير معرّفة عند x_0، فنجد: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ومن ذلك، نجد خطوط التقارب العمودية، وهي الخطوط التي على الشكل $x = x_0$ عندما يكون $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ و $f(x_0)$ غير معرّفة.

مثال 10

أعط بيانياً تقريبياً للدالة $y = \dfrac{x}{1+x}$.

الحل

نلاحظ أن الدالة $y = \dfrac{x}{1+x}$ غير معرّفة عند $x = -1$، وأن $y' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ ومن ذلك، نلاحظ أن الدالة تزايدية دائماً، إلا عند $x = -1$ الذي لا تكون الدالة معرّفة عنده، وبذلك $x = -1$ لا تكون نقطة حرجة للدالة f.

ندرس الآن $y'' = \dfrac{-2}{(1+x)^3}$

نلاحظ أن y'' غير معرّف عندما $x = -1$، ونلاحظ كذلك أن $y'' > 0$ إذا كان $x < -1$، وأن $y'' < 0$ إذا كان $x > -1$، وبذلك فإن بيان الدالة مقعّر إلى أعلى على $(-\infty, -1)$، ومقعّر إلى أسفل على $(-1, \infty)$.

نلاحظ أن: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$

إذن $y = 1$ هو خط التقارب الأفقي لبيان الدالة.

أيضاً: $\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{1+x}=-\infty$ و $\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{1+x}=\infty$

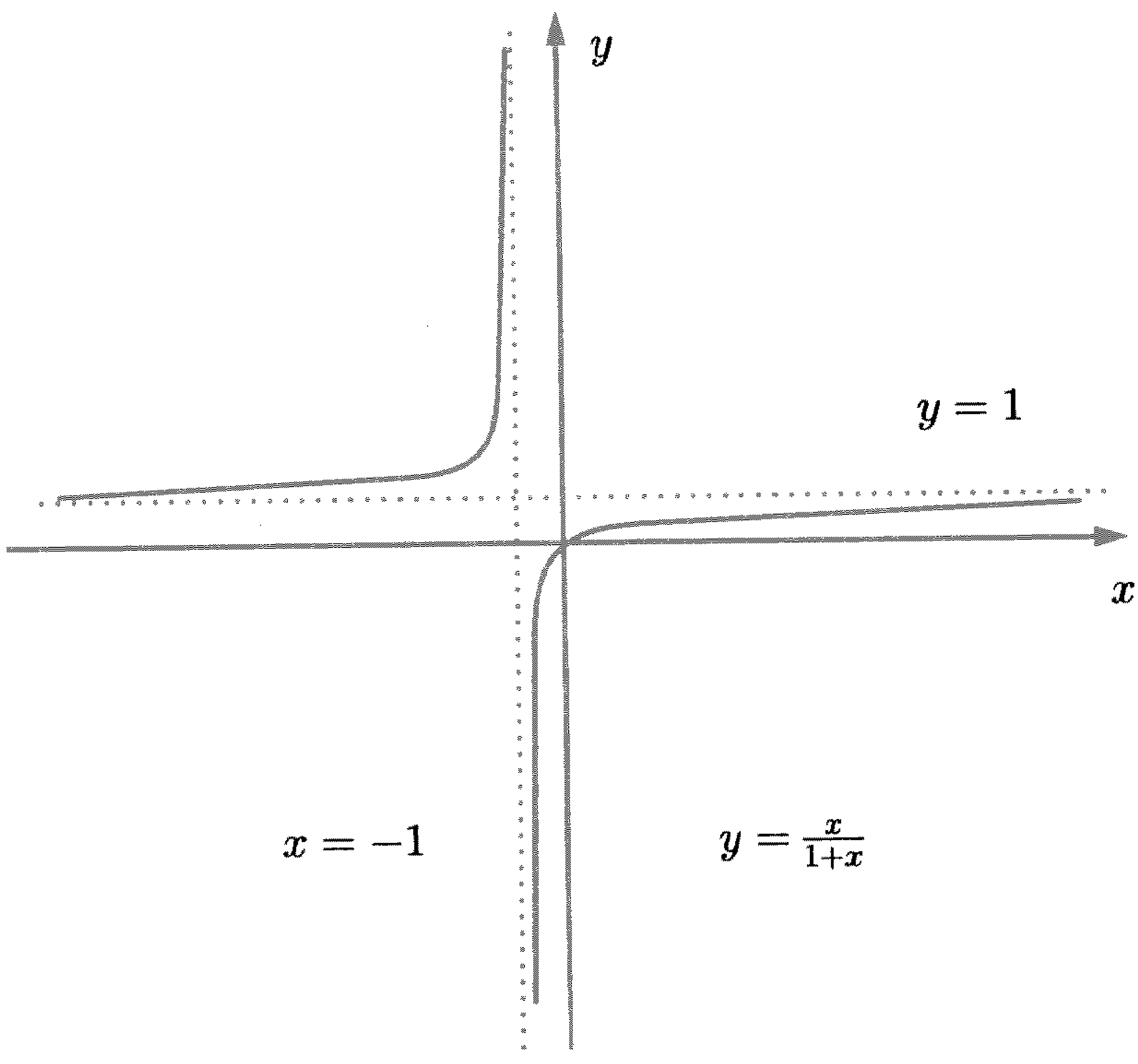
إذن $x=-1$ هو خط التقارب العمودي للدالة.

ملاحظة: نجد نقط التقاطع مع محور السينات، وذلك بوضع $y=0$. ومن ذلك نجد $x=0$، إذن $(0,0)$ هي نقطة التقاطع مع محور السينات.

وأيضاً نجد التقاطع مع محور الصادات، وذلك بوضع $x=0$. ومن ذلك نجد أن $y=0$.

عند $x=-2$، فإن $y=\dfrac{-2}{1+(-2)}$. وبذلك فإن البيان يقع أعلى المستقيم $y=1$ في الفترة $(-\infty,-1)$.

الآن... الشكل التالي يوضح بيان الدالة.



الشكل 6.5 بيان الدالة $y=\frac{x}{1+x}$

تمارين 5.5

في التماين من 1 إلى 10، أوجد خطوط التقارب العمودية، وخطوط التقارب الأفقية في كل حالة:

1) $f(x) = \dfrac{7x}{2x-5}$

2) $g(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{25-x^2}}{5-x}$

4) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+9}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

6) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

7) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

8) $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{1-x}}$

9) $f(x) = \cot\ x$

10) $f(x) = 3x - 2 - \dfrac{1}{x^2+1}$

11) إذا كانت $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$، أوضح أن $x = 0$ لا يكون خط تقارب عموديًا للدالة f، على الرغم من أن $x = 0$ يجعل مقام الدالة f مساوياً للصفر.

12) أوضح أن $x = 0$ لا يكون خط تقارب عموديًا للدالة $g(x) = \dfrac{1+\csc x}{1+x}$.

في المسائل من 13 إلى 24، تتبع الخطوات التي تعلمتها لبيان الدالة المعطاة:

13) $y = x^3 + 3$

14) $y = 4x^3 - 3x + 2$

15) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{2} - 2x + \dfrac{2}{3}$

16) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

17) $f(x) = x\sqrt{1+x}$

18) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{5}}$

19) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

20) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

21) $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{x-2}$

22) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

23) $f(x) = \dfrac{4x-4}{3x+6}$

24) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

25) إذا كانت $f(x) = x^5$، أوضح أن للدالة f نقطة حرجة عند $x = 0$، ولكن ليس لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية عند $x = 0$.

6.5 مسائل تطبيقية تعتمد على القيم القصوى

في التطبيقات السابقة للمشتقات، تعطى الدالة المراد إيجاد قيمتها القصوى، ولكن في هذا التطبيق، فإن جزءاً من المطلوب هو تكوين الدالة المراد إيجاد قيمتها القصوى، وذلك بناءً على معلومات معطاة في المسألة.

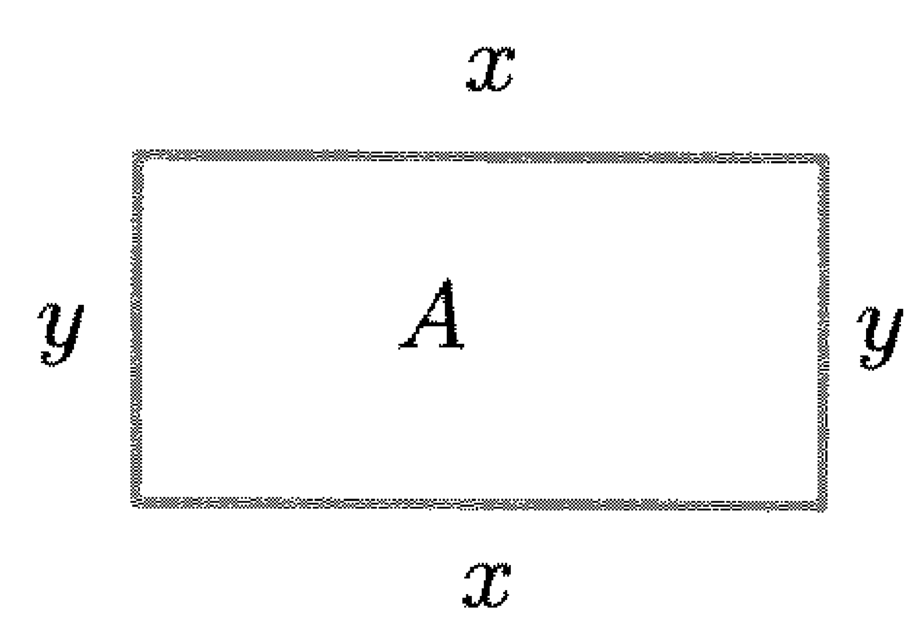
مثـال 11

قرر مزارع أن يبني مزرعة دواجن من الأسلاك الشائكة على شكل مستطيل. ما أبعاد المستطيل الذي يحوز أكبر مساحة إذا كان المزارع يملك 100 متر من الأسلاك الشائكة؟

الحـل

نفرض أن طول المستطيل x وعرضه y. إذا كانت مساحة المستطيل A، فإن:

$$A = xy$$



الشكل 7.5

لاحظ أن $2x + 2y = 100$

إذن $y = \dfrac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

إذن $A = (50 - x)x = 50 - x - x$

نريد الحصول على أكبر مساحة، وهذا يعني وجود قيمة x التي تبلغ عندها A قيمتها القصوى.

$$A' = 50 - 2x$$

إذن $50 - 2x = 0$ يعني أن $x = 25$

وبذلك يكون $y = 50 - 25$ وهذا يعني أن $y = 25$

إذن أبعاد المستطيل هي: الطول $= 25$ متر والعرض $= 25$ متر

مثال 12

رسم مستطيل داخل نصف دائرة نصف قطرها r. إذا كان أحد أضلاع المستطيل على قطر نصف الدائرة، أوجد أكبر مساحة لهذا المستطيل.

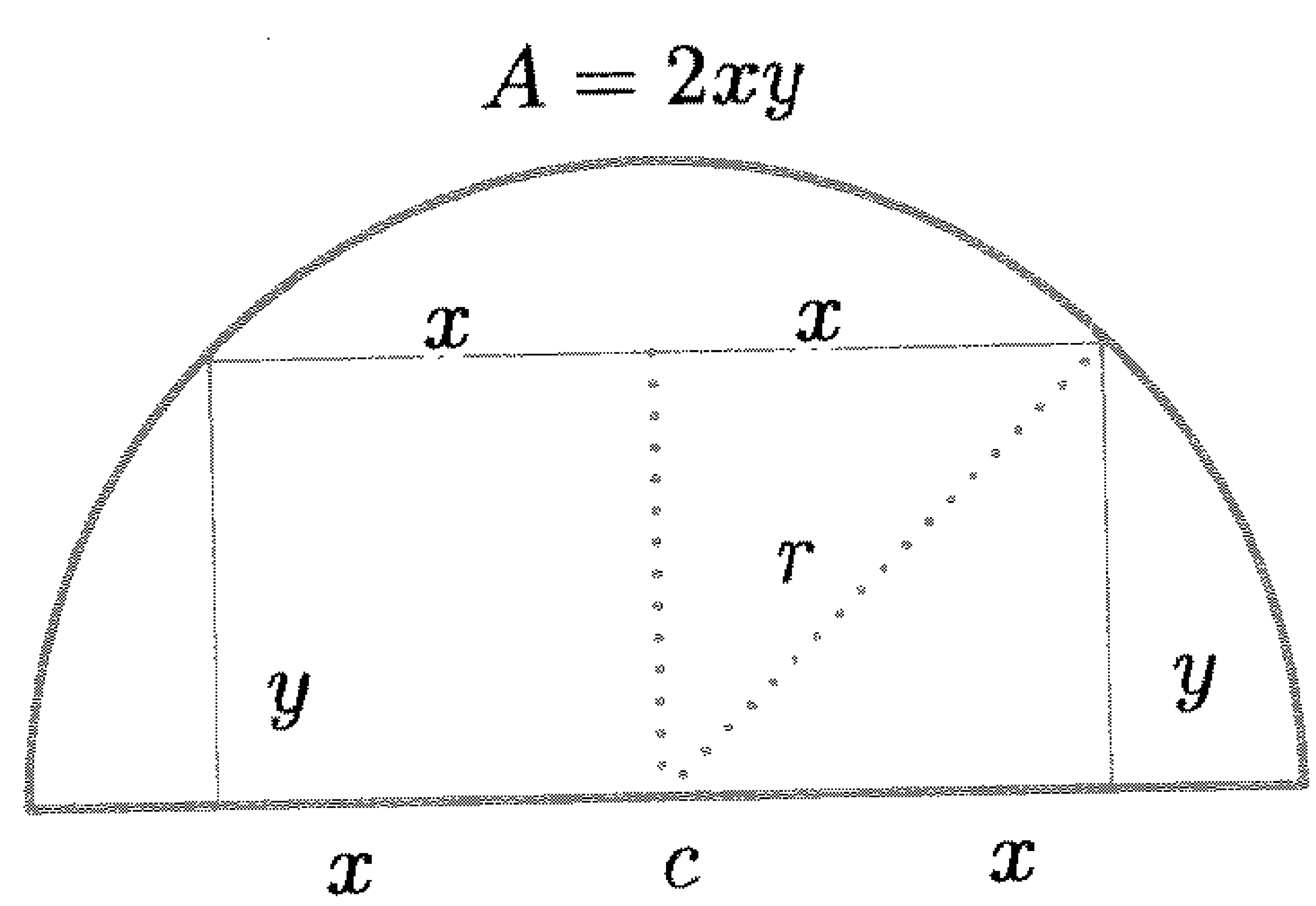
الحل

إذا كانت أطوال أضلاع المستطيل هي: $y, 2x$، فإن مساحة المستطيل A هي:

$$A = 2xy$$

نلاحظ أن $x^2 + y^2 = r^2$، ومنها $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

إذن $A = 2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$



الشكل 8.5

$$A' = 2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 2x(1/2)(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= 2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

نلاحظ أن A' غير موجود عندما $x = r$ وهذا مستحيل. (لماذا؟)

و$A' = 0$ عندما $x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$، ولكننا نبحث عن طول، إذن $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.
حيث أن $A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$، فإن أكبر مساحة لهذا المستطيل هي:

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\ \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}\ \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$$

مثـال 13

أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة رسمت داخل مخروط ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم، إذا كان محور الأسطوانة والمخروط متطابقين بحيث يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن.

الحـل

إذا رمزنا لحجم الأسطوانة بالرمز V، فإن:

$$V = \pi r^2 h$$

حيث h ارتفاع الأسطوانة وr نصف قطرها.

من تشابه المثلثين abd وdce نجد أن:

$$\frac{ab}{bd} = \frac{ec}{cd}$$

أي أن:
$$\frac{12}{4} = \frac{h}{4 - r}$$

وهذا يعني أن:
$$h = 3(4 - r)$$

إذن:
$$V = 3\pi r^2(4 - r) = 3\pi(4r^2 - r^3)$$

وهذا يعني أن:
$$\frac{dV}{dr} = 3\pi(8r - 3r^2)$$

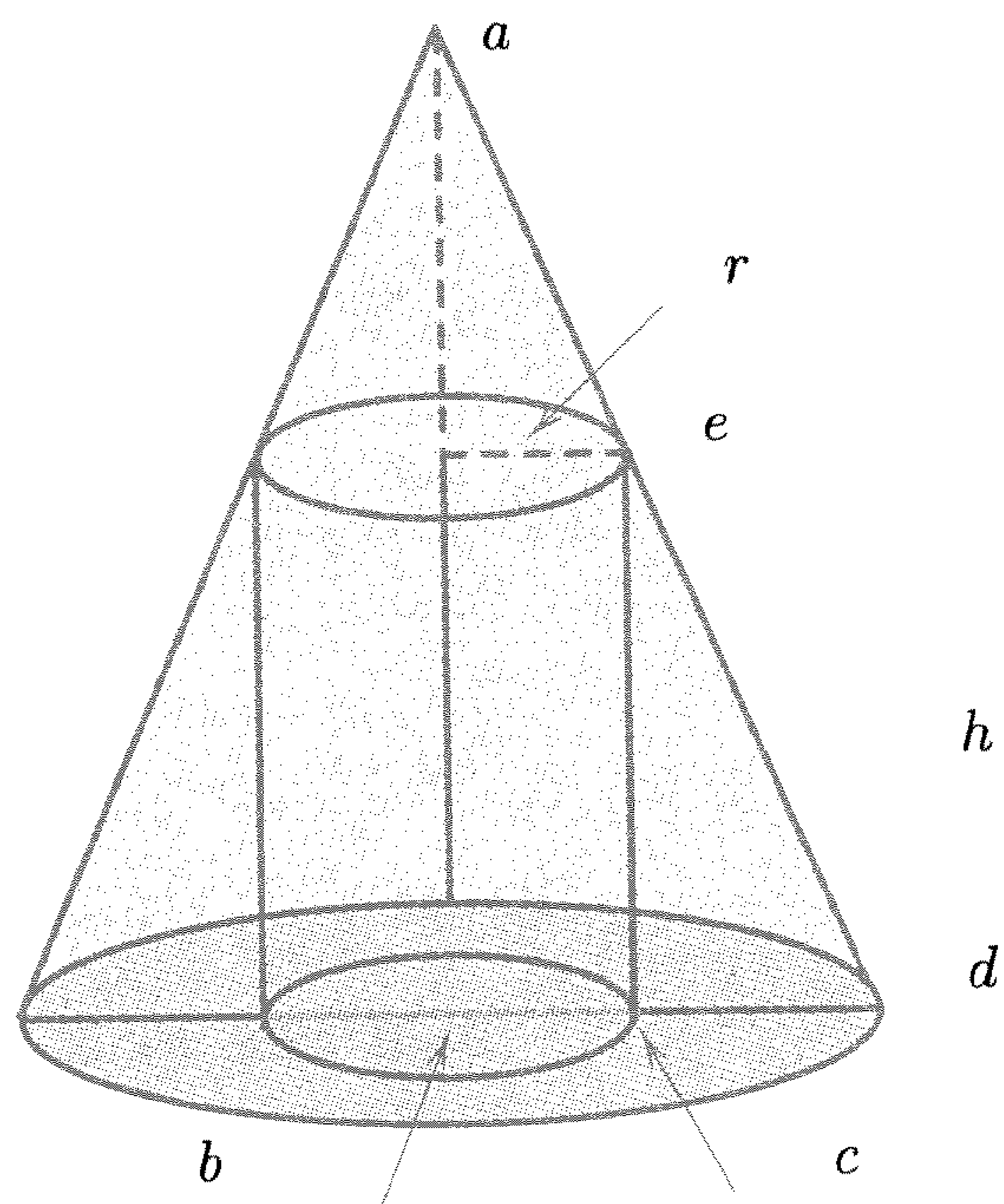
بمساواة المشتقة الأولى بالصفر تحصل على: $r = 0$ أو $r = 8/3$

الآن:
$$V''(r) = \frac{d^2V}{dr^2} = 3\pi(8-6r)$$

ولكن $V''(8/3) < 0$.

إذن أكبر حجم ممكن لهذه الأسطوانة هو:

$$V = 3\pi(8/3)^2(4-8/3) = 256\pi/9$$



تمارين 6.5

1) أوجد عددين موجبين حاصل جمعهما 18 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

2) أوجد النقط على المستقيم $y = 2x - 4$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(1,3)$.

3) أوجد النقط على القطع المكافئ $y = x^2 + 2x$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(-1,0)$.

4) طلب من أحد المصانع تصنيع براميل على شكل أسطوانة تتسع 32 متراً مكعباً من السائل. إذا كانت تكلفة الجوانب تساوي نصف تكلفة الغطاء والقاعدة السفلية، فما أبعاد البرميل بشرط أن يكلف تصنيعه أقل ما يمكن؟

5) إذا قطع خيط طوله 20 متراً إلى قطعتين، بحيث وضعت إحداهما لتشكل مثلثاً متساوي الأضلاع، ووضعت الأخرى لتشكل دائرة. كيف يجب قطع الخيط، بحيث تكون مساحة الشكلين أكبر ما يمكن.

6) مزارع يملك أسلاكاً شائكة طولها 1000 متر. يريد المزارع أن يضع هذه الأسلاك في شكل مستطيل، ما هي الأبعاد التي يوضع بها هذا الشكل المستطيل حتى يكون له أكبر مساحة ممكنة؟

7) يراد تصنيع صندوق من الورق المقوّى بقاعدة مربعة ومفتوحة من الأعلى من قطعة ورق مقوّى على شكل مربّع طول ضلعه 10 سم وذلك بقطع 1 سم من كل جانب من الجوانب الأربعة وتحريك الجوانب إلى أعلى. ما هي أبعاد الصندوق حتى يكون حجمه أكبر ما يمكن؟

8) وضع جسم متحرك وفق المعادلة $S(t) = 4t - 6t^2 + 6$، ما هي قيمة t التي تجعل سرعة الجسم أعلى ما يمكن؟

9) إذا كان معدل نمو السكان في مدينة يتم وفق $R = 400P^2 - \frac{1}{5}P^3$، حيث P عدد السكان. ما هو عدد السكان P الذي يجعل هذا المعدل أكبر ما يمكن؟

10) إذا كان مجموع عددين غير سالبين هو 3، أوجد العددين إذا كان مربع مضاعف أحدهما مطروحاً منه مضاعف مربع الثاني يكون أقل ما يمكن.

7.5 التقريب والتفاضل (Approximation and Differential)

لنفرض أن $y = f(x)$ ، $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(\Delta x)$

وحيث أن: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{(تقريباً)}$$

ومن ذلك

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x) \Delta x}$$

هذه الصيغة تخبرنا بأنه إذا زاد x بمقدار صغير Δx، فإن y يزداد بمقدار $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Δy تسمى الزيادة في y وتسمى Δx الزيادة في x.

المقدار $E_{\Delta x} = |\Delta y - f'(x)\Delta x|$ يسمى الخطأ المطلق للتقريب.

مثال 14

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد Δy على الفترات $[1, 1.05]$ و$[1, 1.1]$ و$[1, 1.5]$. وقارن ذلك بالنتيجة الفعلية.

الحل

على الفترة $[1, 1.05]$ ، $\Delta x = 0.05$ ، $f'(x) = 2x, f'(1) = 2$.

إذن $\Delta y = f'(x)\Delta x = f'(1)\Delta x = (2)(0.05) = 0.10$

القيمة الفعلية:

$$\Delta y = f(1 + 0.05) - f(1) = (1.05)^2 - 1 = 0.1025$$

على الفترة $[1, 1.1]$ ، $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = (2)(0.1) = 0.2$

القيمة الفعلية في هذه الحالة هي:

$$\Delta y = f(1 + 0.1) - f(1) = (1.1)^2 - 1 = 0.21$$

على الفترة $[1, 1.5]$ ، $\Delta x = 0.5$ ، $\Delta y = (2)(0.5) = 1$

القيمة الفعلية في هذه الحالة هي:

$$\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$$

نلاحظ أن التقريب أقرب إلى القيمة الفعلية، إذا كانت Δx أصغر.

مثـــال 15

أوجد تقريباً لـ $(2.01)^3$ وقارن ذلك بالنتيجة الفعلية.

الحـــل

$$y = f(x) = x^3$$

السؤال الآن، هو إيجاد $f(2.01)$.

$$f(2.01) - f(2) = \Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(2)(0.01)$$

بما أن $f'(x) = 3x^2$ ، فإن $f'(2) = 3(2)^2$ ، القيمة الفعلية: $f(2) = 8$

إذن $f(2.01) \approx f(2) + f'(2)(0.01) = 8 + 12(0.01) = 8.12$

القيمة الفعلية لـ $(2.01)^3$ هي 8.120601، أي أن التقريب 8.12 تقريب جيد.

تمارين 7.5

1) قرّب القيمة $\sqrt{16.2}$.

2) قرّب القيمة $\sqrt[3]{7.95}$.

3) أوجد القيمة التقريبية لـ $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.0175\right)$.

4) أوجد القيمة التقريبية لـ $\frac{1}{1.5}$.

5) أوجد القيمة التقريبية لـ $(0.79)^{\frac{5}{8}}$.

6) أوجد القيمة التقريبية لـ $(1.01)^2+(1.01)^4+(1.01)^6$.

7) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+0.1\right)^2$.

8) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\frac{1}{\sqrt{3.89}}$.

9) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{8.02}}$ باستخدام التفاضل.

10) باستخدام التفاضل، أوجد تقريباً للمقدار $\tan\left(\frac{11\pi}{4}+0.05\right)$.

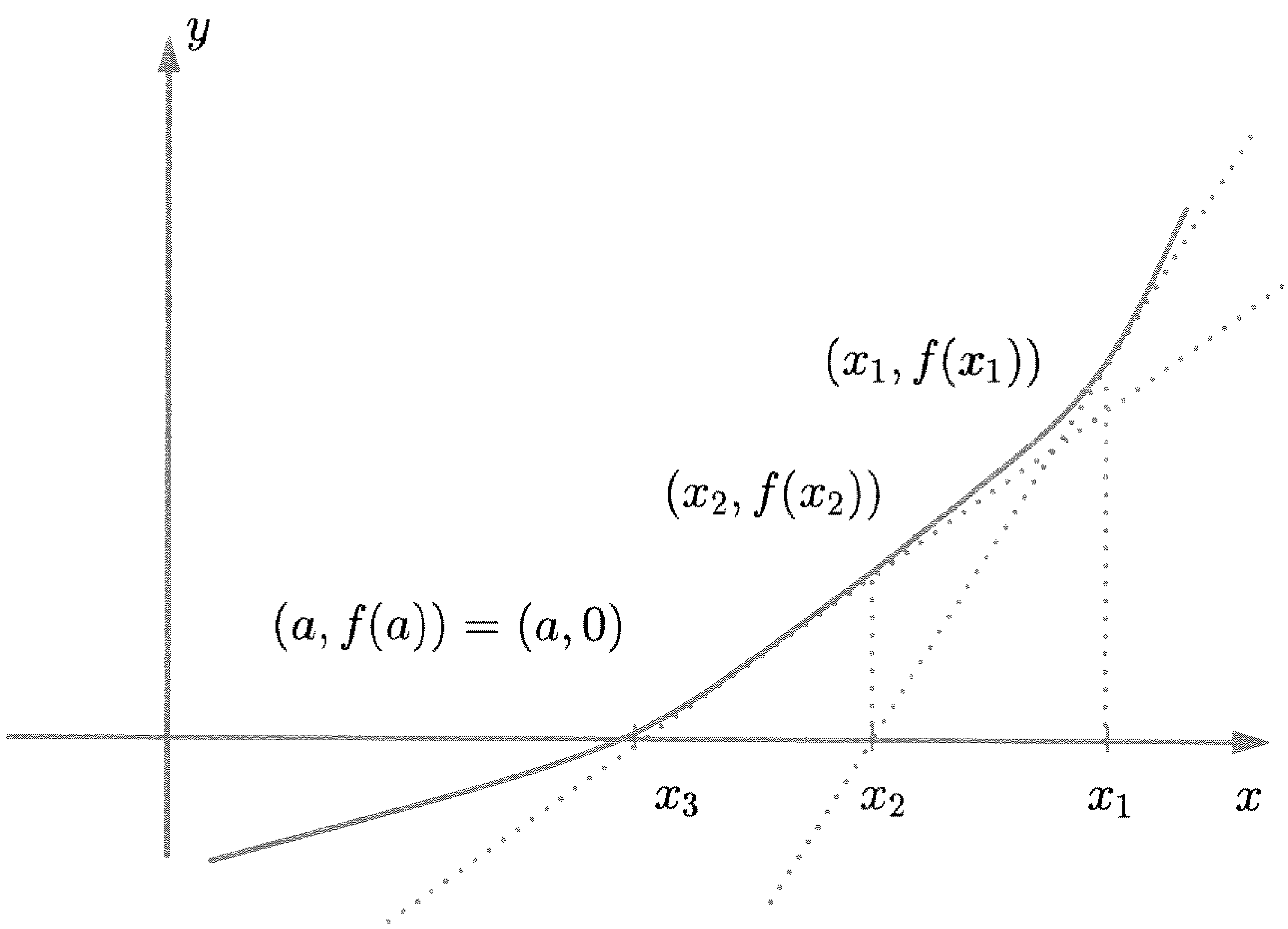
8.5 طريقة نيوتن (Newton's Method)

تصف لنا طريقة نيوتن هذه تقريباً لجذر حقيقي للدالة القابلة للتفاضل f (نعني بالجذر الحقيقي a للدالة f أن $f(a) = 0$).

نبدأ أولاً بأي تقريب، وليكن x_1 إلى الجذر a.

حيث أن الجذر a هو تقاطع رسم الدالة مع محور السينات، فإنه يمكن التخمين عن x_1 بحيث يكون قريباً من a.

نرسم المماس للدالة f عند النقطة $(x_1, f(x_1))$، الذي يقطع محور السينات في نقطة أخرى x_2، التي تكون أقرب إلى الجذر a.



الشكل 9.5

من معادلة المماس: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

وبالتعويض عن $y = 0$ عند نقطة التقاطع $(x_2, 0)$، ومراعاة أن $f(x_1) \neq 0$، فإن:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ومن ذلك نجد أن:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبالطريقة نفسها، نجد تقريباً آخر أقرب إلى a:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق، ولنفرض أن a جذر حقيقي للدالة f.

إذا كان x_n هو تقريب للجذر a، فإن التقريب التالي هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

بشرط أن $f'(x_n) \neq 0$.

مثـــال 16

أوجد تقريباً لـ $\sqrt{2}$ بطريقة نيوتن.

الحـــل

نحاول أن نجد $x = \sqrt{2}$ أو $x^2 = 2$ أو $x^2 - 2 = 0$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

نأخذ $x_1 = 1.5$ فنجد أن $x_2 = x_{1+1} = 1.141666667$

ثم نأخذ x_2 فنجد أن $x_3 = 1.414215686$

ثم نأخذ x_3 فنجد أن $x_4 = 1.414213562$

ثم نأخذ x_4 فنجد أن $x_5 = 1.414213562$

تمارين 8.5

في التمارين من 1 إلى 5 استخدم طريقة نيوتن لحل المعادلات التالية:

1) $15x^5 + 13x^3 = 1$

2) $x = \dfrac{\sin\ x}{x}$.

3) $x^5 + x = 17$

4) $x^3 + x = 3 - \sin\ x$

5) $\left(\dfrac{\sin\ x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

تمارين الفصل الخامس

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد الأعداد c في الفترة المذكورة، التي تحقق نظرية القيمة الوسطى.

1) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ، $[0,2]$.

2) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ ، $[-32,1]$.

3) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+4}$ ، $[0,4]$.

4) $f(x)=x+\sin^2 x$ ، $[0,2\pi]$.

في التمارين من 5 إلى 9، أوضح لماذا لا تطبق نظرية رول على الدالة المعطاة في الفترة المذكورة.

5) $f(x)=1-|x|$ ، $[-1,1]$.

6) $f(x)=|x-1|-2$ ، $[-1,3]$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $[-1,1]$.

8) $f(x)=1-(x-2)^{2/3}$ ، $[1,3]$.

9) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & ; \quad x<1 \\ 5-2x & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ ، $[-2,5/2]$.

في التمارين من 10 إلى 14، حدد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

10) $f(x)=x^3+3x^2-2$.

11) $g(x)=x^3+\dfrac{4}{x}$.

12) $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x$ حيث $0\leq x\leq 4\pi$.

13) $g(x)=x^3+6x^2+9x+3$.

14) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & ; \quad x<0\\ (x^2-1)^2 & ; \quad 0\le x\le 2\\ \dfrac{1}{x^3} & ; \quad x>2\end{cases}$$.

في التمارين من 15 إلى 19، استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى للدالة المعطاة.

15) $f(x)=x^3-x^2+1$

16) $g(x)=x^2-x^{-2}$

17) $f(x)=(x-3)^2(x+1)^2$

18) $g(x)=x\sqrt{x-1}$

19) $f(x)=\dfrac{16}{x^2+4}$

في التمارين من 20 إلى 24، أوجد نقط الانقلاب لبيان الدالة المعطاة، وناقش تقعّر بيان الدالة نفسها.

20) $f(x)=x^3-8x$

21) $f(x)=x+\tan x$

22) $g(x)=\dfrac{2x}{(x+3)^2}$

23) $g(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$.

24) $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

في التمارين من 25 إلى 29، أوجد القيم القصوى للدالة المعطاة على الفترة المغلقة المذكورة.

25) $f(x)=(x-1)^3$ على $[-1,2]$.

26) $g(x)=(x^2+x)^{\frac{2}{3}}$ على $[-2,3]$.

27) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

28) $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ على $[-3,0]$.

29) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$ على $[-1,1]$.

في التمارين من 30 إلى 34، أوجد خطوط التقارب العمودية، وخطوط التقارب الأفقية للدالة المعطاة:

(30 $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}$

(31 $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(32 $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$

(33 $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-x}$.

(34 $f(x) = \tan x$

في التمارين من 35 إلى 48، أعط بياناً للدالة المعطاة في كل حالة:

(35 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)$

(36 $g(x) = 2x^4 - 8x^3$

(37 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(38 $g(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

(39 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

(40 $g(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(41 $f(x) = -x(x-1)^3$

(42 $g(x) = |x^2-4|$

(43 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(44 $g(x) = x(x-1)(x-2)$

(45 $f(x) = \sin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

(46 $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(47 $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(48 $g(x) = \sec\ x$

في التمارين من 49 إلى 51، استخدم طريقة نيوتن لحساب:

(49 $\sqrt[3]{17}$.

(50 جذور المعادلة $\sin x = \dfrac{x}{2}$.

(51 جذور المعادلة $x^3 - 6x^2 - 15x + 4 = 0$.

(52 أوجد z إذا كانت $(z, f(z))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

53) إذا كان لبيان الدالة

$$f(x)=a\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}$$

نقطة انقلاب عند النقطة $(1,4)$، أوجد كلاً من a,b.

54) إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}-2x & ; \quad x<1\\ x-3 & ; \quad 1\le x\le 4\\ 5-x & ; \quad x>4\end{cases}$$

أوجد أ) النقط الحرجة للدالة f.

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f إن وجدت

55) ارسم بيانياً الدالة

$$f(x)=\frac{x}{(3x+1)^2}$$

الفصل السادس

التكامل

Integration

1.6 التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

إذا كانت $f(x) = 4x^3$، فإن الدالة $F(x) = x^4$ لها الخاصية وهي أن $F'(x) = 4x^3 = f(x)$.

لكن الدالة $x^4 - 3$ يكون تفاضلها أيضاً $4x^3$، وأكثر من ذلك أي دالة على الشكل $x^4 + c$، (حيث c أي مقدار ثابت) يكون تفاضلها $4x^3$.

إذن إذا كانت $F(x) = x^4 + c$، فإن $F'(x) = 4x^3 = f(x)$. تسمى F العملية العكسية لعملية تفاضل الدالة f، ويطلق عليها اسم التكامل غير المحدود.

تعريف 1.6

إذا كانت f معرّفة على $[a,b]$، وإذا وجدت دالة F، حيث F متصلة على $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b) و $F'(x) = f(x)$، فإن F تسمى العلاقة العكسية لتفاضل الدالة f أو تكامل f غير المحدود، ويرمز لذلك بالرمز

$$F(x) = \int f(x)dx$$

وتقرأ F هو تكامل الدالة f بالنسبة للمتغير x.

عندما توجد مثل هذه الدالة F، نقول إن الدالة f قابلة للتكامل.

نظرية 1

إذا كانت F وG دالتين قابلتين للاشتقاق ولهما التفاضل نفسه، فإنهما تختلفان بمقدار ثابت فقط.

أي أنه إذا كان $F'(x) = G'(x)$، فإن $F(x) - G(x) = C$.

البرهان

لنفرض أن $H(x) = F(x) - G(x)$

إذن $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ لكل x.

ومن ذلك نستنتج أن H دالة ثابتة.

هذا يعني أن $F(x) - G(x) = C$.

قواعد لإيجاد بعض التكاملات

(1) إذا كانت $f(x) = x^r$ حيث أن $r \neq -1$، فإن:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

مثـــال 1

أوجد $\int x^{10} dx$.

الحـــل

$$\int x^{10}dx = \frac{1}{10+1}x^{10+1} + C = \frac{1}{11}x^{11} + C$$

مثـــال 2

أوجد $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

الحـــل

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

2) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل، وكان k_1 و k_2 مقدارين ثابتين، فإن:

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

مثـــال 3

أوجد $\int (3x^3 + 2x^2)dx$.

الحـــل

$$\int (3x^3 + 2x^2)dx = 3\int x^3dx + 2\int x^2dx = 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + C$$

3) $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$ حيث أن C مقدار ثابت.

مثـال 4

أوجد $\int\left(x^2+\frac{3}{x}\right)$.

الحـل

$$\int\left(x^2+\frac{3}{x}\right)dx=\int x^2dx+3\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3+3\ln|x|+C$$

تمارين 1.6

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int kdx$ حيث أن k مقدار ثابت.

2) $\int(ax+b)dx$ حيث أن a وb مقداران ثابتان.

3) $\int\frac{4}{x^3}dx$.

4) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

5) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$.

6) $\int\frac{2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{5}}+x^{\frac{7}{5}}}{x^3}dx$.

7) برهن على أن $\int g(x)dx - \int f(x)dx = \int f(x)-g(x)dx$ عندما تكون f وg دالتين قابلتين للتكامل.

8) أوجد $\int(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx$.

9) أعط مثالاً توضح فيه أن:

$$\int f(x).g(x)dx\neq\left(\int f(x)dx\right).\left(\int g(x)dx\right)$$

10) إذا كان $f'(x)=2x^2+2$ والنقطة $(2,0)$ على بيان الدالة f، أوجد $f(x)$.

2.6 التكامل المحدود (The Definite Integration)

لنفرض أن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يرمز لها بالرمز A_a^b.

لنفرض أن P هو تجزيء منتظم للفترة $[a, b]$:

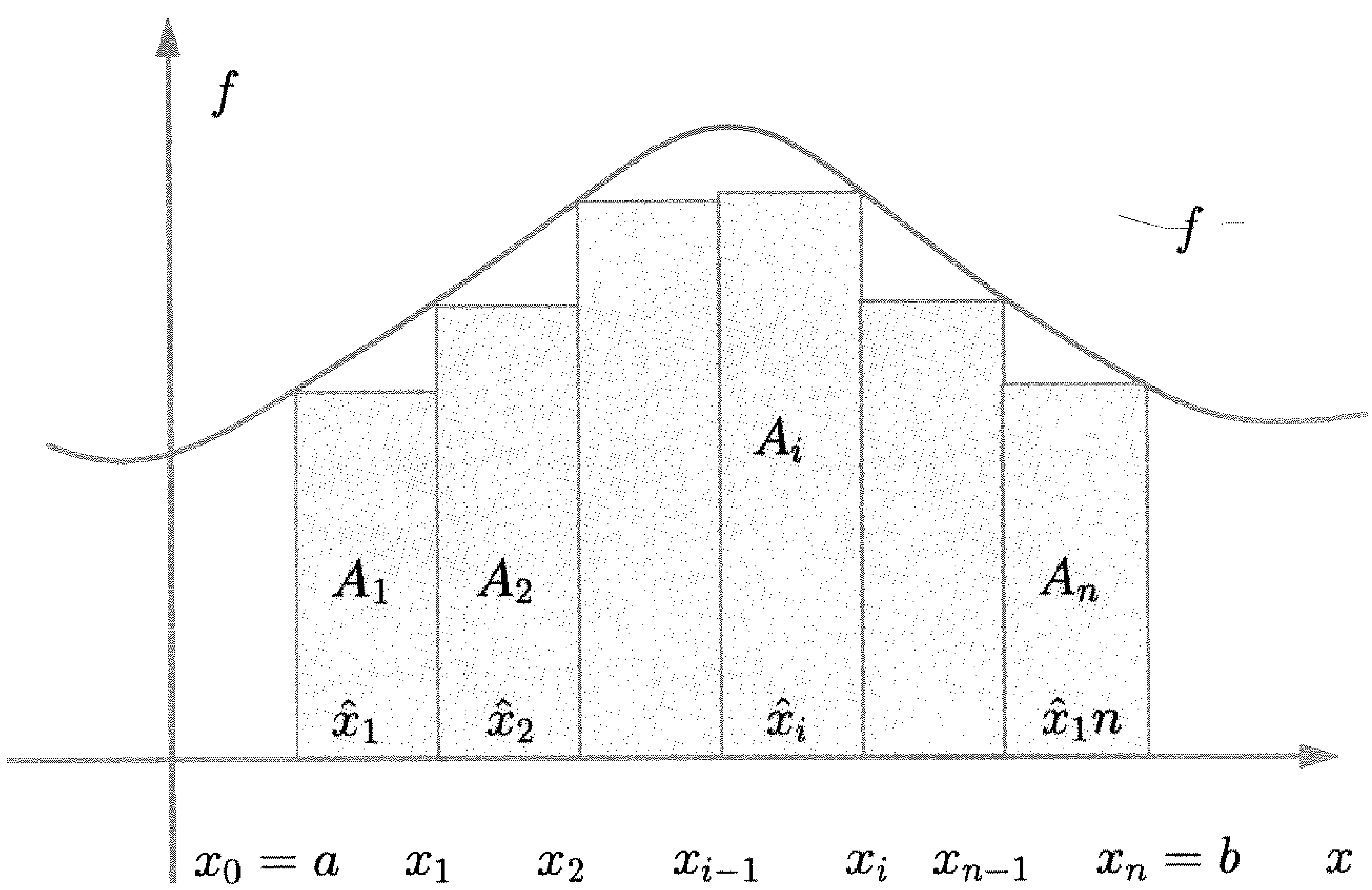
$$P : a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

إذن المساحة A_a^b هي تقريباً مجموع مساحة المستطيلات الموضحة بالشكل 1.6 وهي:

$$A_a^b = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

إذا كان $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$، فإن:

$$A_a^b = f(\hat{x}_1)\Delta x + f(\hat{x}_2)\Delta x + ... + f(\hat{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x$$



الشكل 1.6

تعريف 2.6

إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ و $a<b$، فإن التكامل المحدود على الفترة $[a,b]$ هو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$$

بشرط وجود النهاية.

إذا كانت النهاية موجودة، فإن الدالة f تسمى دالة قابلة للتكامل على $[a,b]$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$، فإن الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$.

أحد استخدامات التكامل المحدود هو إيجاد المساحة والتعريف التالي يوضح ذلك.

تعريف 3.6

المساحة A_a^b المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A_a^b = \int_a^b |f(x)|dx$$

إذا كان $a<b$ و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[a,b]$، فإن:

$$A_a^b = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$$

خواص التكامل المحدود

1) $\int_a^b k dx = k(b-a)$

2) إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، وكان k عدداً حقيقياً، فإن kf تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، ويكون:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3) إذا كانت f وg دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a,b]$، فإن $f+g$ و$f-g$ دالتان قابلتان للتكامل على الفترة $[a,b]$، ويكون:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4) إذا كان $a<c<b$، وإذا كانت f قابلة للتكامل على الفترتين $[a,c]$ و$[c,b]$، فإن f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، وإذا كانت $f(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

6) إذا كانت f وg دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a,b]$ و $f(x)\geq g(x)$ لكل $x\in[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

8) $\int_a^a f(x)dx = 0$

نظرية 3 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$، وكانت F أي دالة تحقق الشرط $F'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثــال 5

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$.

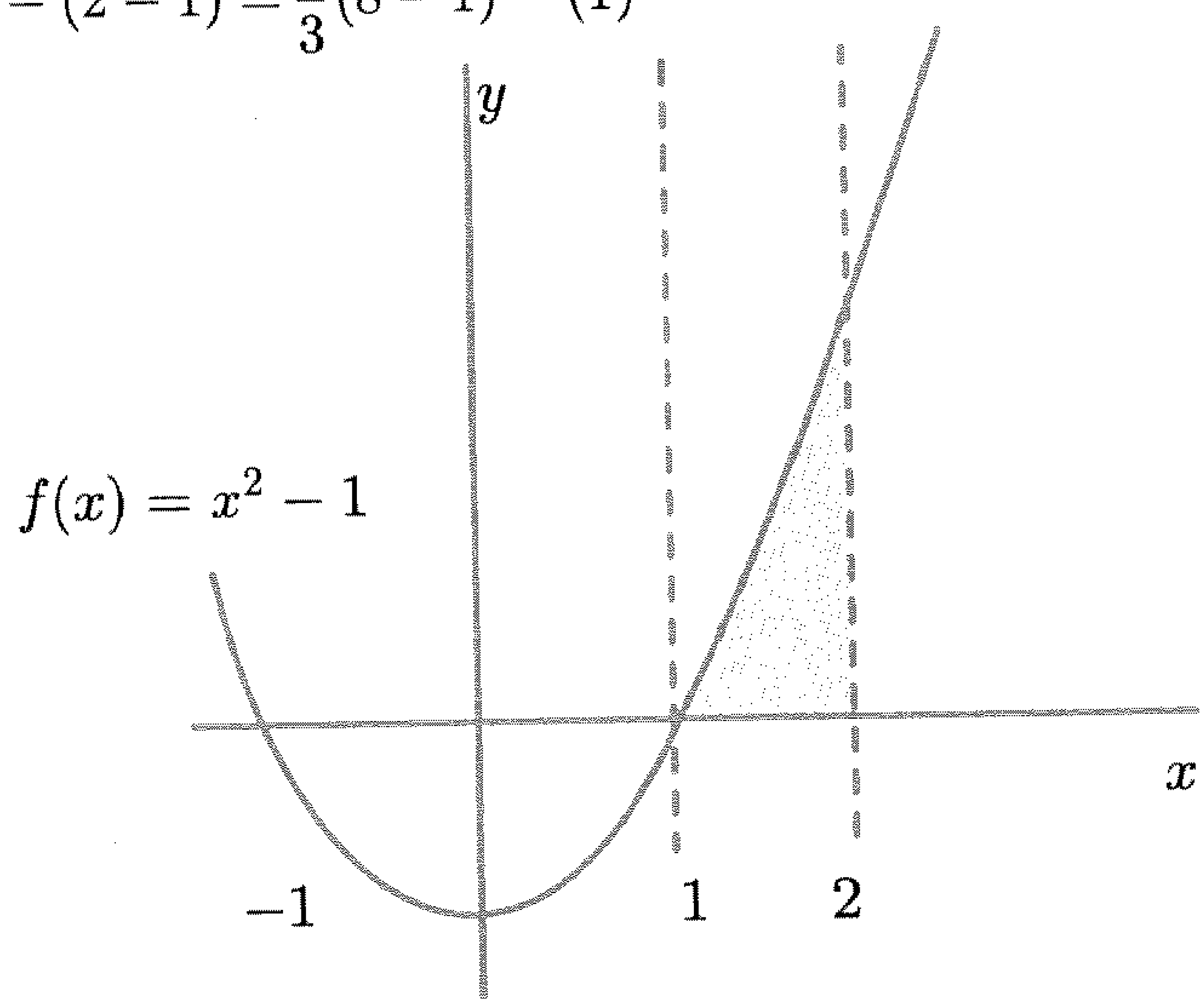
الحــل

لنفرض أن المساحة المطلوبة، والموضحة في الشكل 2.6، هي A، فإن:

$$\int_1^2 (x^2-1)dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 - x\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) - (2-1) = \frac{1}{3}(8-1) - (1)$$

$$= \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$



الشكل 2.6

مثــال 6

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |2x - 1|$، ومحور السينات، والمستقيمين $x = 0$ و$x = 2$.

الحــل

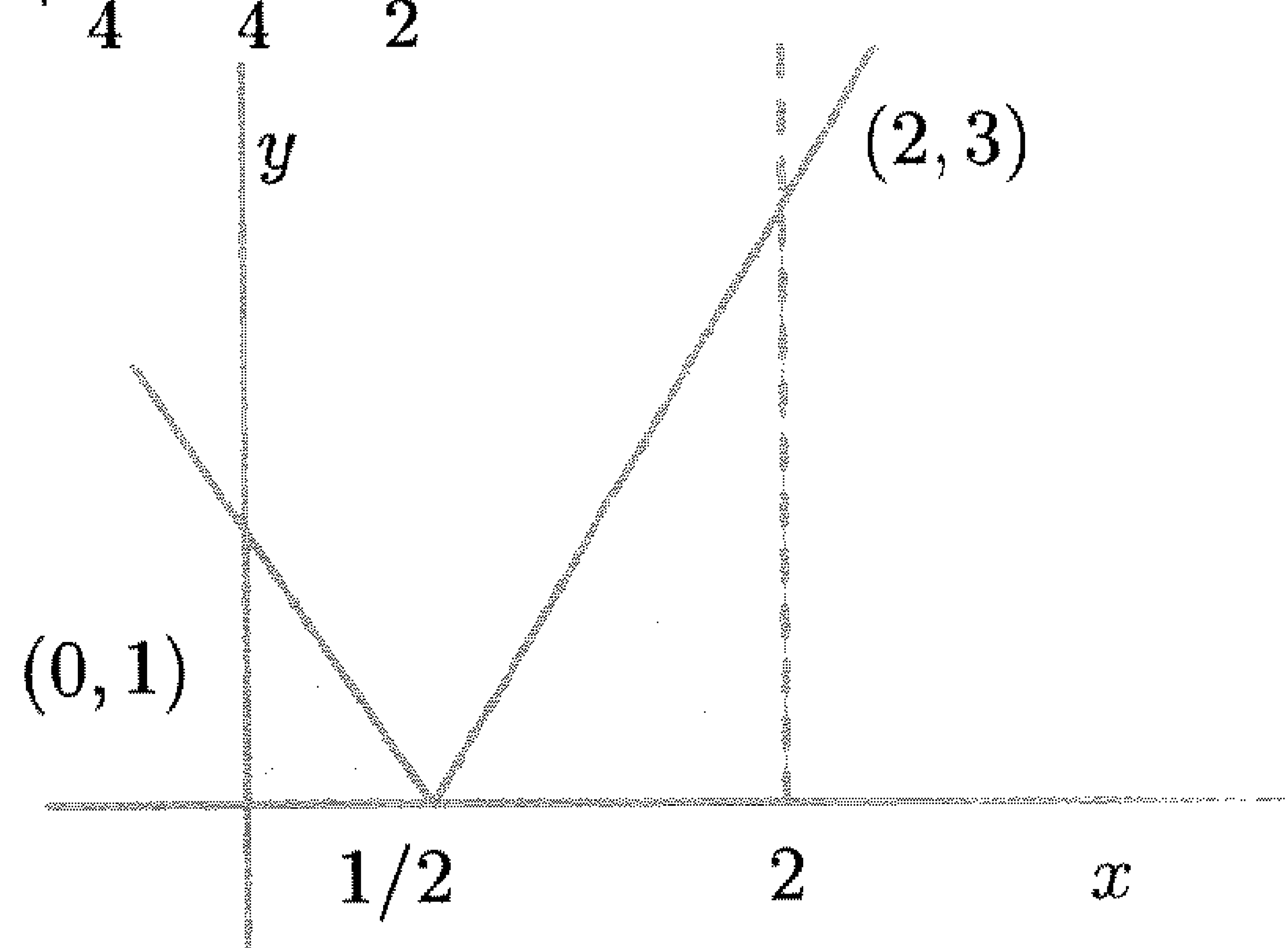
من تعريف الحد المطلق، نجد أن:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & , \quad x \geq 1/2 \\ -(2x-1) & , \quad x < 1/2 \end{cases}$$

للتوضيح، نبحث عن بيان الدالة $f(x) = |2x - 1|$ (أنظر الشكل 3.6) من البيان نجد أن:

$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$

$$\int_0^2 |2x-1|dx = (-x^2+x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^2$$
$$= \left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0-0)\right] + \left[(4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4} + \left(2+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$



الشكل 3.6

نظرية 4

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على $[a,b]$، وإذا كانت:

(أ) f دالة زوجية، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(ب) f دالة فردية، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

مثــال 7

أوجد $\int_{-2}^{2} x^2 dx$.

الحــل

حيث أن الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية، فإن:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 2\left[\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^2\right] = \frac{16}{3}$$

مثــال 8

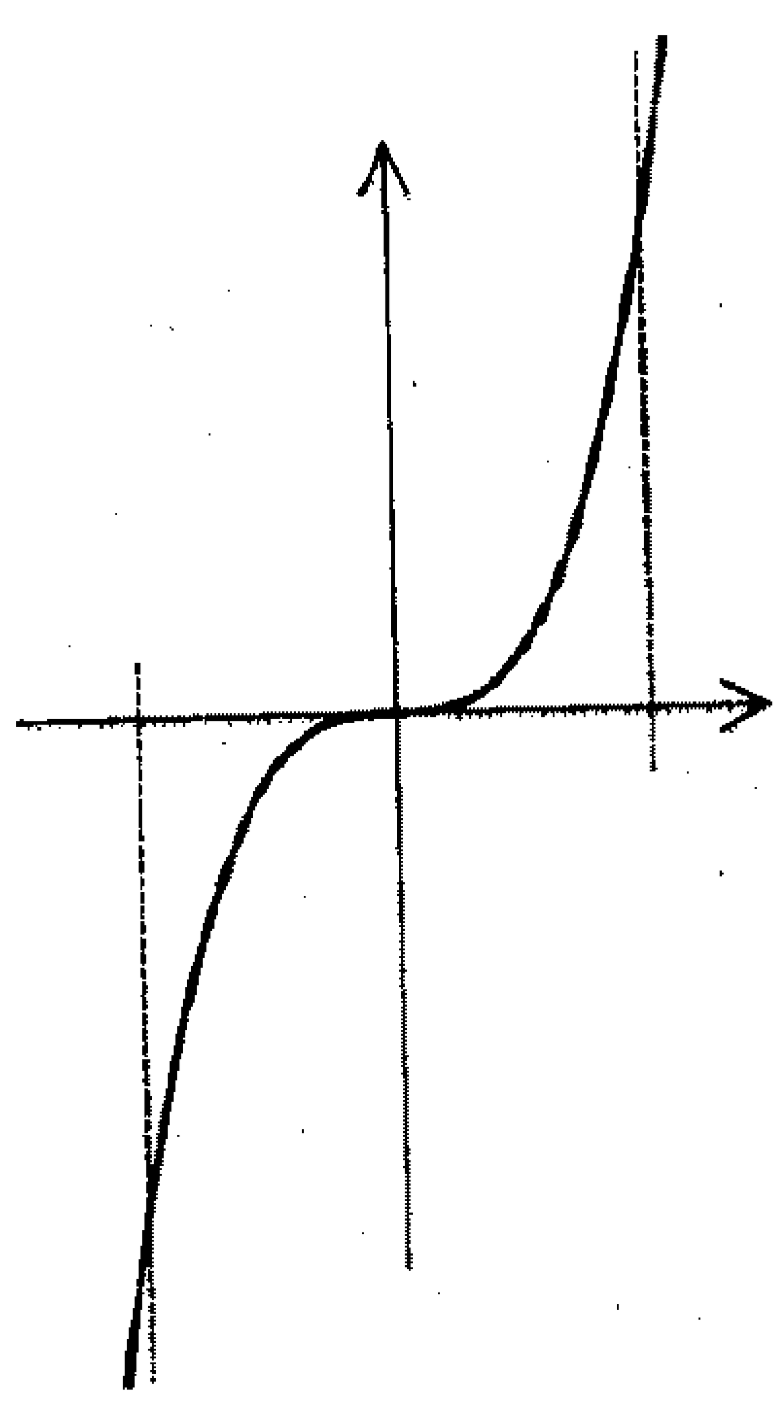
أوجد $\int_{-2}^{2} x^3 dx$.

الحــل

حيث أن الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية، فإن:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$$

السبب في أن ناتج التكامل يساوي صفراً هو أن نصف المساحة تقع تحت محور السينات، ونصفها الآخر فوق محور السينات، كما هو موضّح في الشكل 4.6.



شكل 4.6

مثـــال 9

أوجد $\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx$

الحـــل

حيث أن الدالة $f(x)=x-x^3$ دالة فردية، فإن:

$$\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx=0$$

مثـــال 10

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+3x$ ومحور السينات.

الحـــل

الدالة $f(x)=x^2+3x$ ليست دالة زوجية، وليست دالة فردية.

نحاول إيجاد نقط التقاطع مع محور السينات، وذلك بوضع $y=0$.

$$x^2+3x=0$$

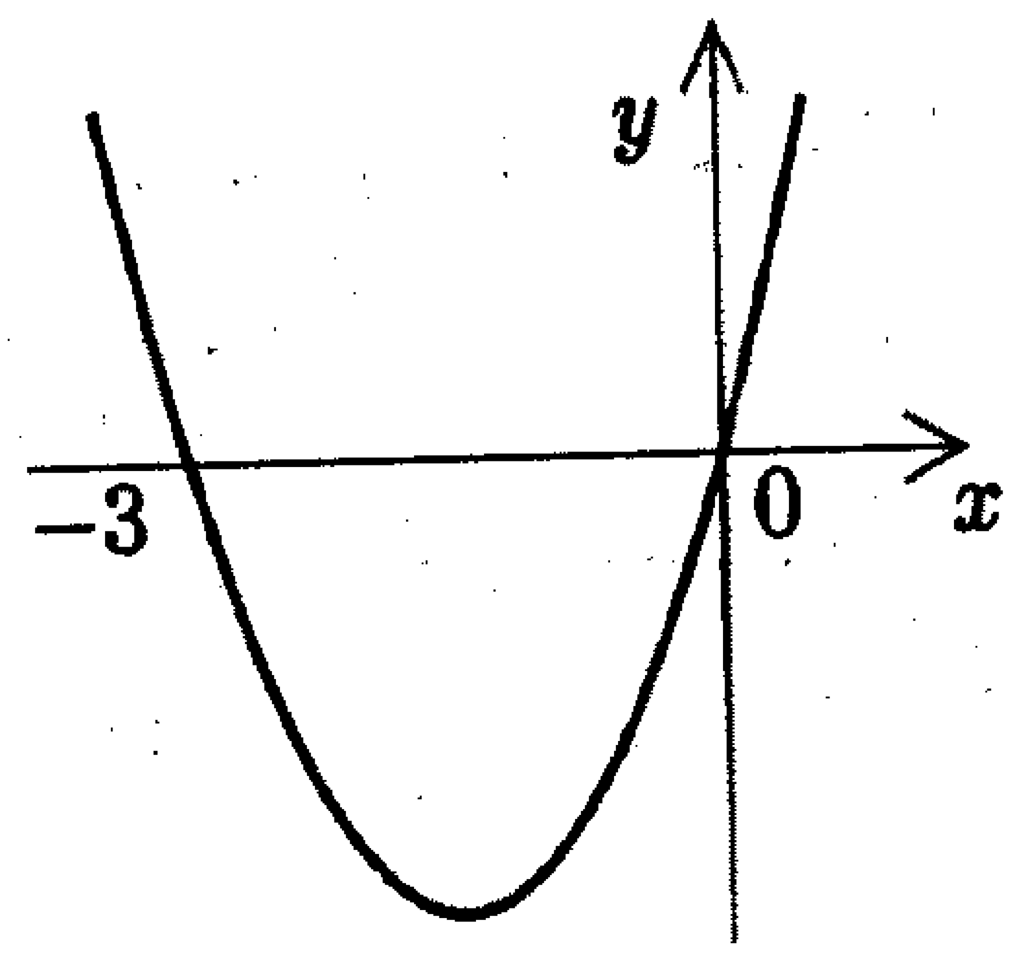
$$x(x-3)=0$$

وهذا يؤدي إلى أن $x=0$ أو $x=-3$

ومن ذلك نجد أن المساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}(x^2+3x)dx &= -\int_{0}^{-3}(x^2+3x)dx\\ &= -\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{-3}\\ &= -\left[\left(-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}\right)-(0+0)\right]\\ &= -\frac{27}{3}=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

الإشارة السالبة هنا تدل على أن المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات.



شكل 5.6

نظرية 5

إذا كانت الدالة $m \leq f(x) \leq M$ لكل $x \in [a,b]$، فإن:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

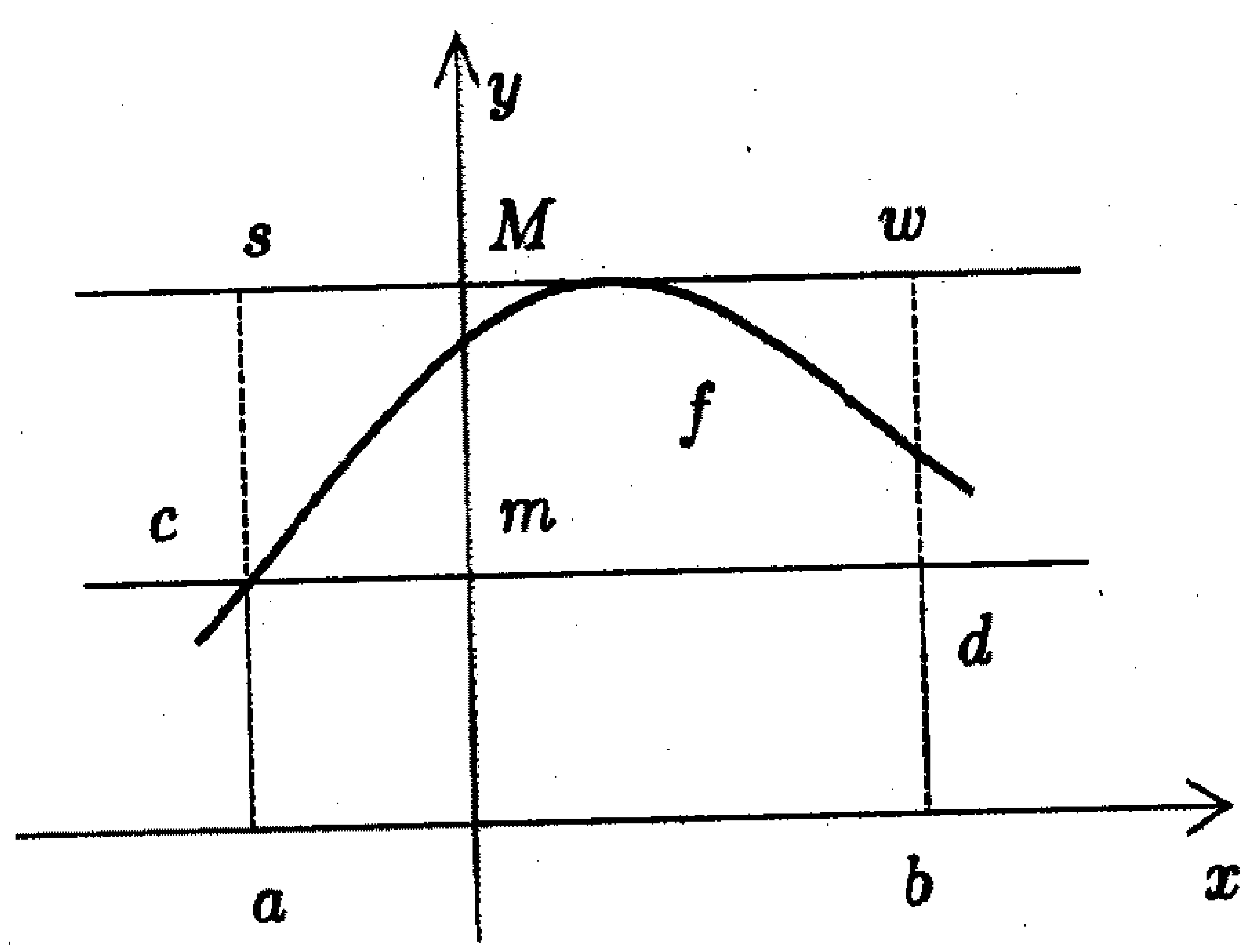
البرهان

$m \leq f(x) \leq M$ لكل $x \in [a,b]$.

بأخذ التكامل من a إلى b، نجد أن:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



الشكل 6.6

لاحظ أن $\int_a^b mdx$ هو مساحة المستطيل $acdb$، وأن $\int_a^b Mdx$ هو مساحة المستطيل $aswb$.

ولكن $\int_a^b f(x)dx$ هو المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ وص= b

مثـال 11

أوجد تقديراً للتكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 xdx$

الحـل

بما أن $0 = \sin 0 \leq \sin\ x \leq \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ عندما تكون $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

إذن $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

وبذلك فإن $0 \leq \sin^5 x \leq \frac{1}{32}$

إذن $m = 0$ و $M = 1/32$

ويكون $0 \leq \int_0^{\pi/6} \sin^5 xdx \leq \frac{1}{32}(\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{\pi}{192}$

تعريف 4.6 (الاتصال المقطعي) (Piecewise Continuity)

الدالة f متصلة مقطعياً على الفترة $[a, b]$، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في الفترة $[a, b]$، ما عدا عدد نهائي من النقط التي تكون الدالة عندها منقطعة بقفز.

على سبيل المثال الدالة $f(x) = [x]$، أنظر الشكل 4.2 في الفصل الثاني.

نظرية 6

إذا كانت f متصلة مقطعياً على $[a, b]$، فإن $\int_a^b f(x)dx$ يكون موجوداً.

تمارين 2.6

في التمارين من 1 إلى 14، استخدم خواص التكامل لحساب التكامل المعطى.

1) $\int_{2}^{2} 3dx$

2) $\int_{-1}^{4}(-x)dx$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} 2dx$

4) $\int_{-2}^{2}(2x+1)dx$

5) $\int_{2}^{2}(x+x^2)dx$

6) $\int_{2}^{0}\frac{x^2-5}{x-5}$

7) $\int_{-2}^{1}|x|dx$

8) $\int_{-2}^{2}|x^3|dx$

9) $\int_{0}^{\pi/2}(3\cos\ x-2\sin\ x)$

10) $\int_{0}^{1}(x^2+2)^2dx$

11) $\int_{2}^{2} xdx$

12) $\int_{0}^{3}|3-x^2|dx$

13) $\int_{-2}^{1} x^{4/5}dx$

14) $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ عندما تكون $f(x)=\begin{cases}1-x & , \quad -2\leq x\leq 0\\ 1+x & , \quad 0<x\leq 3\end{cases}$

15) إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$، برهن على أن:

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right|\leq\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

16) إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، برهن على أن $\int_{0}^{n}[x]dx=\frac{n(n+1)}{2}$

في التمارين من 17 إلى 24، أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى المعطى ومحور السينات والمستقيمات المعطاة.

17) $f(x) = 4 - x^2$، محور السينات.

18) $f(x) = x^4$ ، $x = -2$ ، $x = 4$، محور السينات.

19) $y = x^3 + -x^2 - x - 2$ ، محور السينات.

20) $y = 2\sin x$ ، $x = \pi/3$ و $x = -\pi/3$ ، محور السينات.

21) $y = x^2 - 15x - 34$ ، محور السينات.

22) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ ، محور السينات.

23) $y = |x|$ ، $x = 1$ ، $x = -1$.

24) $y = |x - 1|$ ، $x = 0$ ، $x = 4$.

25) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، $x = 0$ ، $x = 2$.

3.6 السماحة بين المنحنيات

إذا كانت f وg دالتين، حيث $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a,b]$، فإن المساحة المحصورة بين منحني الدالتين f وg، والمستقيمين $x = a$ و$x = b$ هي:

$$\text{المساحة} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

مثال 12

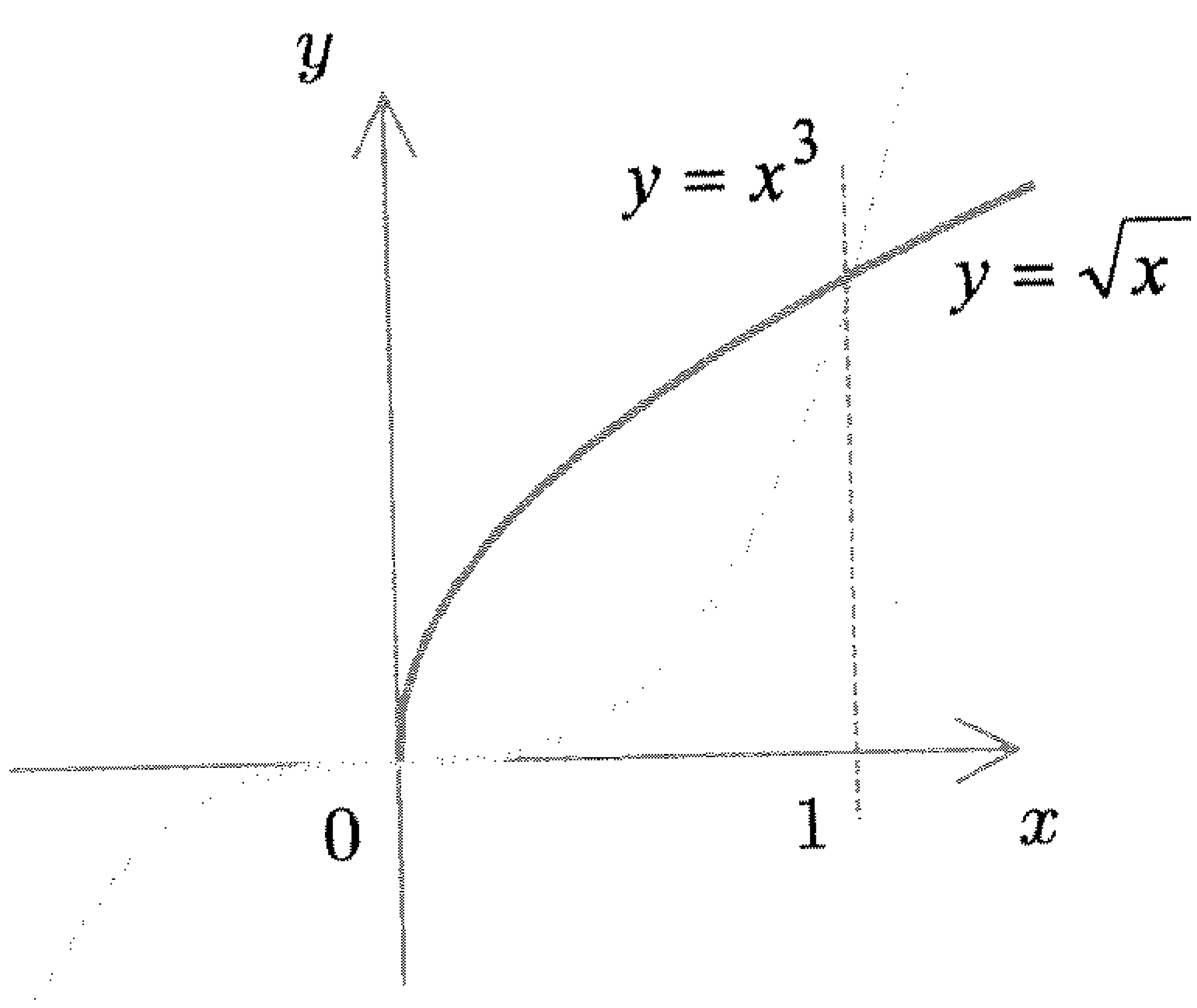
أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين $y = \sqrt{x}, y = x^3$.

الحل

حيث أن $y = \sqrt{x}, y = x^3$ ، فإن $\sqrt{x} = x^3$ أو $x^6 = x$

ومنها $x(x^5 - 1) = 0$ أو $x = 0$ ، $x = 1$

نلاحظ أن $\sqrt{x} \geq x^3$ على الفترة $[0,1]$.



الشكل 7.6

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^1 [\sqrt{x} - x^3]dx = \int_0^1 \left[x^{1/2} - x^3\right] dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right] - [0-0]$$

$$= \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

مثــال 13

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$y = -x^2 + 5x + 9$ و $y = x^2 + 3x + 5$

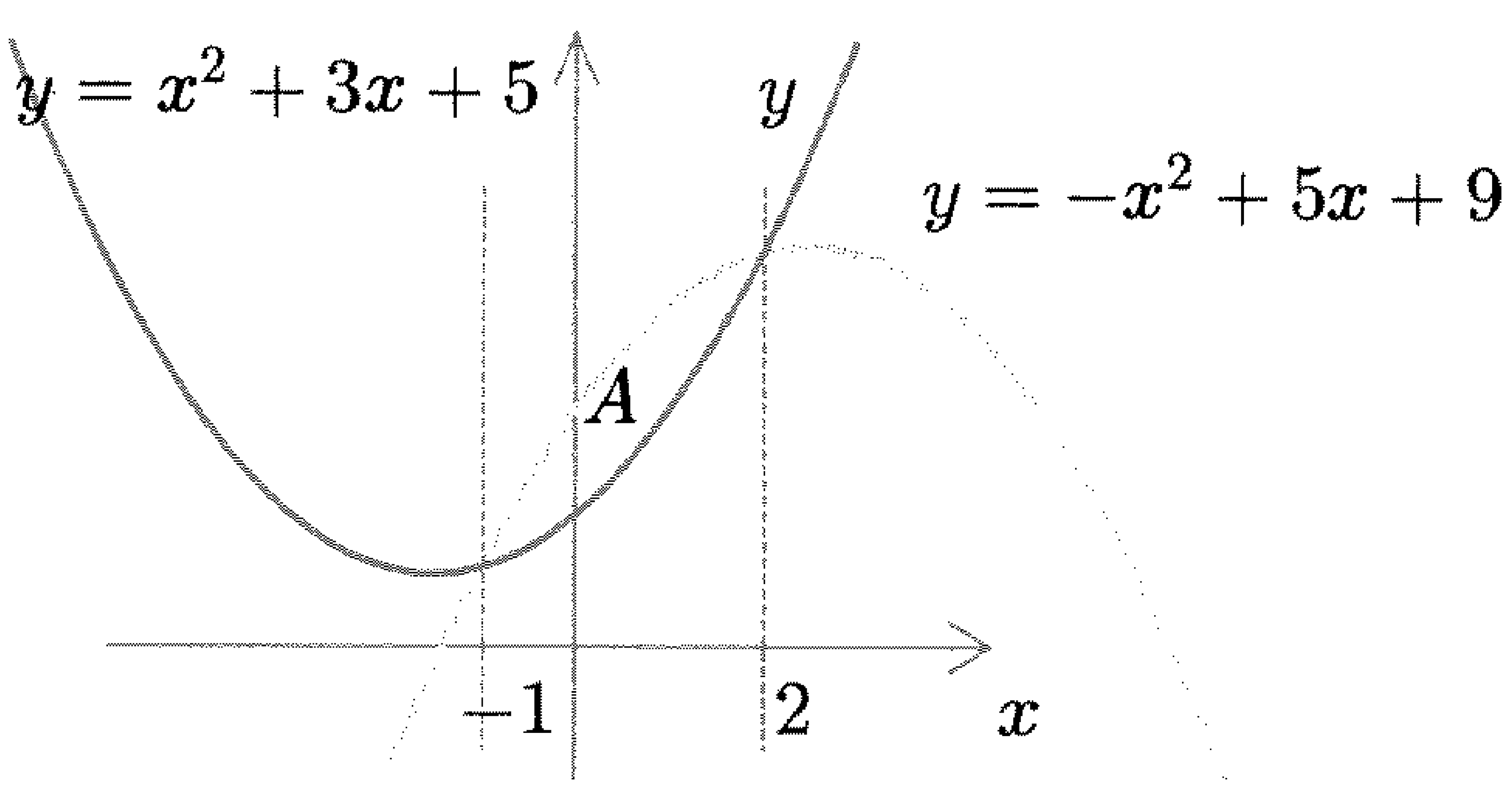
الحــل

حيث أن $y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$، فإن:

$$x^2 + 3x + 5 = -x^2 + 5x + 9$$

ومن ذلك $2x^2 - 2x + 4 = 0$ أو $x^2 - x + 2 = 0$

ومنها $(x-2)(x+1) = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $x = -1$ أو $x = 2$



الشكل 8.6

من الرسم نلاحظ أن $x^2 + 3x + 5 \leq -x^2 + 5x + 9$ على الفترة $[-1, 2]$

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$A = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 3x + 5)]dx$$

$$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + 4x \right] \Big|_{-1}^{2} = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right] \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{16}{3} + 4 + 8 \right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4 \right] = \frac{20}{3} + \frac{7}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

مثـال 14

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$ من $x = -1$ إلى $x = 4$.

الحـل

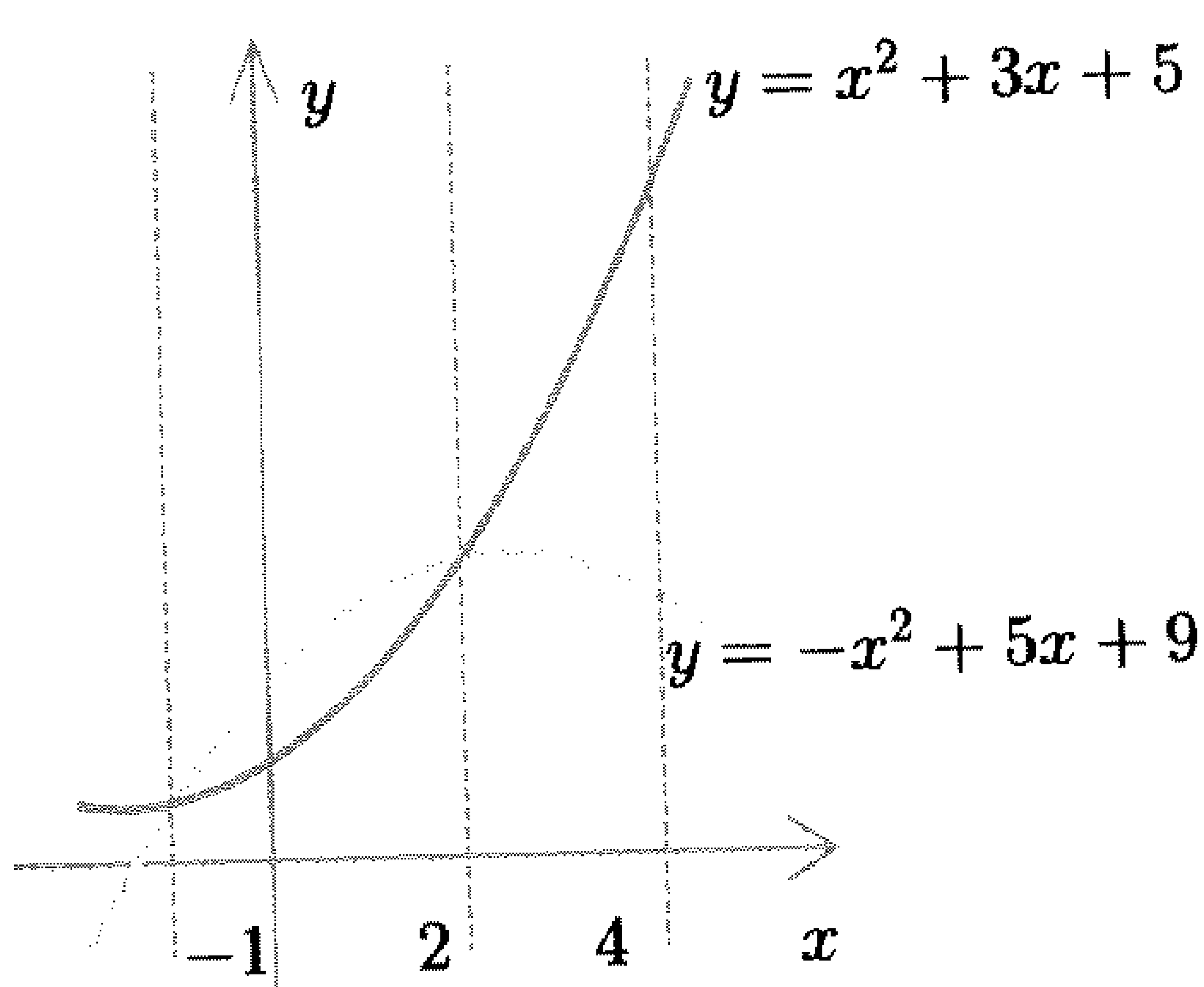
من الشكل 9.6 نلاحظ أن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 3x + 5)]dx$$

$$+ \int_{2}^{4} [(x^2 + 3x + 5) - (-x^2 + 5x + 9)]dx$$

وجدنا التكامل الأول في المثال السابق، ويساوي 9.

الآن نلاحظ من الرسم أن $x^2 + 3x + 5 \geq -x^2 + 5x + 9$ على الفترة $[2, 4]$ ولهذا فإن:



$$\int_{-1}^{2} [(x^2 + 3x + 5) - (-x^2 + 5x + 9)]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [2x^2 - 2x - 4]dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x \right] \Big|_{-1}^{2} = \frac{52}{3}$$

الشكل 9.6

إذن المساحة المطلوبة هي:

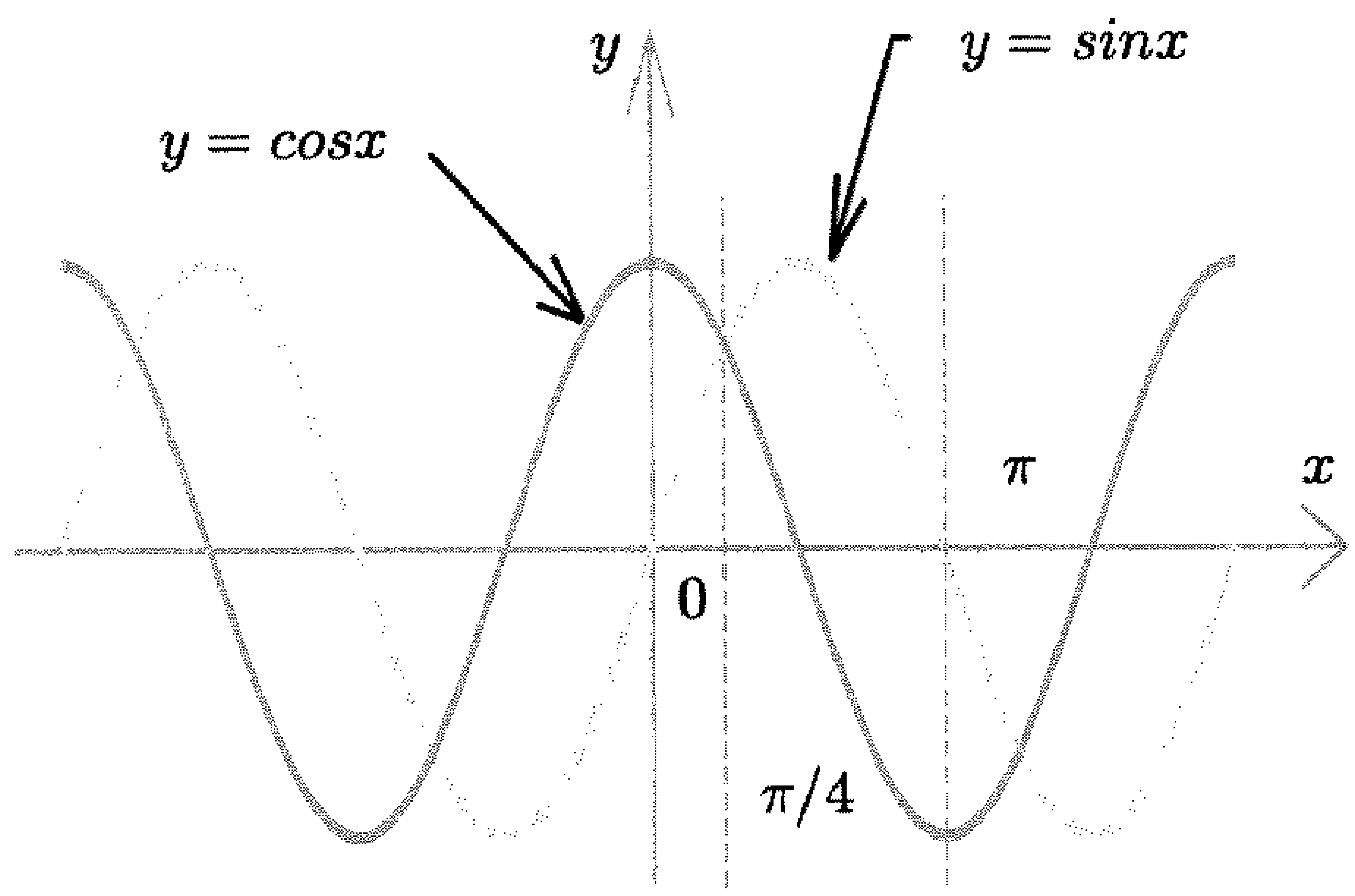
$$\frac{52}{3}+9=\frac{79}{3}$$

مثــال 15

أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين

$y=\sin x$ و $y=\cos x$ و $x=0$ و $x=\pi$

الحــل



الشكل 10.6

نلاحظ من البيان أن $\cos\ x \geq \sin\ x$ على الفترة $[0,\pi/4]$، وأن $\cos x < \sin x$ على الفترة $[\pi/4,\pi]$.

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^{\pi/4}[\cos\ x-\sin\ x]dx+\int_{\pi/4}^{\pi}[\sin\ x-\cos\ x]dx$$

$$=[\sin\ x+\cos\ x]\Big|_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$=\left[\left(\sin\ \frac{\pi}{4}+\cos\ \frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right]$$

$$+\left[(-\cos\pi-\sin\pi)-\left(-\cos\ \frac{\pi}{4}-\sin\ \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

مثال 16

أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين

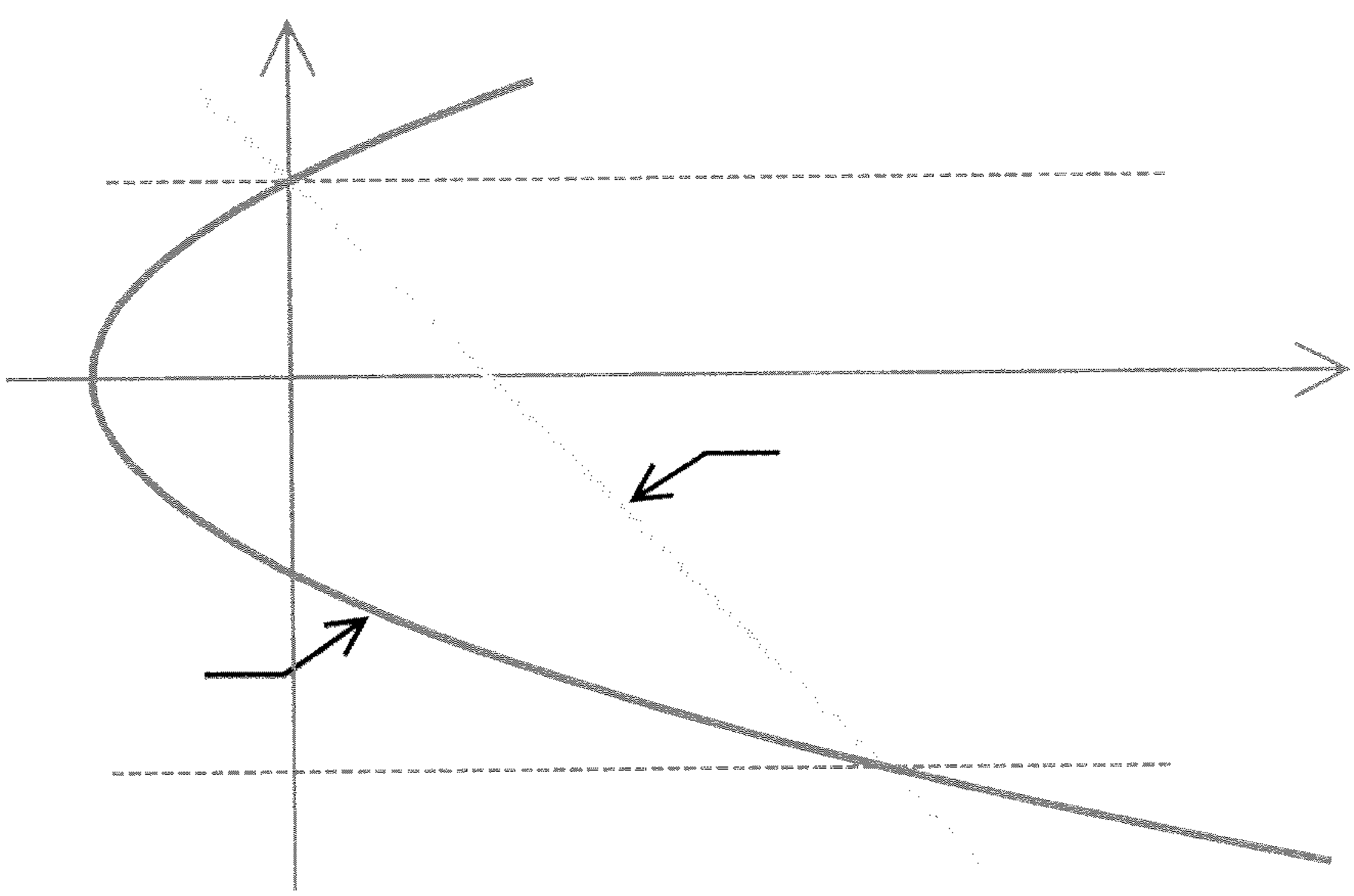
$$x + 2y = 4 \quad \text{و} \quad y^2 = 4 + x$$

الحل

$$x = 4 - 2y \quad \text{و} \quad x = y^2 - 4$$

بحل المعادلتين، نجد أن:

$$y^2 - 4 = 4 - 2y$$
$$y^2 + 2y - 8 = 0$$
$$(y - 2)(y + 4) = 0$$
$$y = -4 \quad \text{أو} \quad y = 2$$



الشكل 11.6

المساحة المطلوبة هي:

$$\int_{-4}^{2}[(4-2y)-(y^2-4)]dy = \int_{-4}^{2}[8-2y-y^2]dy$$

$$= [8y - y^2 - \frac{1}{3}y^3]\Big|_{-4}^{2}$$

$$= \left[16-4-\frac{8}{3}\right] - \left[-32-16+\frac{64}{3}\right]$$

$$= \frac{28}{3} + \frac{80}{3} = \frac{108}{3}$$

$$= 36$$

تكامل بعض الدوال المثلثية:

عرفنا أن:

1) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

2) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

4) $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

5) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

6) $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc \ + C$$

حيث إن C مقدار ثابت في كل حالة من الحالات السابقة.

تمارين 3.6

في التمارين التالية، أرسم المعادلتين، وأوجد نقاط تقاطعهما، ثم احسب المساحة المحصورة بين بيان المنحنيين.

1) $g(x) = 2x + \frac{5}{4}, f(x) = x^2$.

2) $g(x) = -8, f(x) = -x^2 - 4$.

3) $g(x) = x, f(x) = \sqrt{x}$.

4) $g(x) = x^2, f(x) = -x^2 + 4x$.

6) $g(x) = x, f(x) = (x-2)^2$.

7) $g(x) = x, x + y^2 = 8$.

8) $g(x) = x^2 + x + 1, f(x) = x^3 + x + 1$.

9) $g(x) = x - x^2, f(x) = x^2 - x$.

10) $g(x) = x^3, f(x) = x|x|$.

4.6 التكامل بالتعويض

إذا كان $u = g(x)$، ومن ذلك $du = g'(x)dx$، فإن:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

مثال 17

أوجد
$$\int_2^5 \frac{1}{5x-1}dx$$

الحل

نفرض أن $u = 5x - 1$ وبذلك $du = 5dx$ أو $dx = \frac{1}{5}du$

إذن

$$\int_2^5 \frac{1}{5x-1}dx = \frac{1}{5}\int_9^{24}\frac{du}{u} = \frac{1}{5}\mathbf{ln}\ u\Big|_9^{24} = \frac{3}{5}\mathbf{ln}\ |5x-1|\Big|_2^5$$

$$= \frac{1}{5}(\mathbf{ln}\ 24 - \mathbf{ln}\ 9) = \frac{1}{5}\mathbf{ln}\ \frac{24}{9} = \frac{1}{5}\mathbf{ln}\ \frac{8}{3}$$

مثال 18

أوجد
$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

الحل

نفرض أن $u = x^2 + 9$ وبذلك فإن $xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_9^{25} u^{-1/2}du$$

$$= \frac{1}{2}(2u^{1/2})\Big|_9^{25} = \sqrt{x^2+9}\Big|_0^4$$

$$= \sqrt{2}5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

مثـال 19

أوجد $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}\,dt$

الحـل

نفرض أن $u = 1-2t^2$ ومن ذلك يكون

$$tdt = -\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du$$

$$= -\frac{1}{4}(2u^{1/2}) + C = -\frac{1}{2}(1-2t^2)^{1/2} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-2t^2} + C$$

مثـال 20

أوجد $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt{x}}dx$

الحـل

نفرض أن $u = \sqrt{x}+4$ أو $u = x^{1/2}+4$ وبذلك فإن $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ومنه $2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt{x}}dx = 2\int u^4 du = \frac{2}{5}u^5 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x}+4)^5 + C$$

مثـال 21

أوجد $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$

الحـــل

نفرض أن $u = \sqrt{x} + 1$ وهذا يعني أن $u = x^{1/2} + 1$ إذن $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

الآن

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}dx = 2\int_2^3 \frac{du}{u^3} = 2\int_2^3 u^{-3}du = 2\Big(\frac{1}{-2}u^{-2}\Big)\Big|_2^3$$

$$= -(\sqrt{x}+1)^{-2}\Big|_1^4 = -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\Big|_1^4$$

$$= -\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{4-9}{36}\right) = \frac{5}{36}$$

مثـــال 22

أوجد المساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات للدالة
$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

الحـــل

المساحة المطلوبة هي: $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

نفرض أن $u = x^2 + 1$ نجد أن $xdx = \frac{1}{2}du$

إذن

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int_2^5 u^{-2}du$$

$$= -\frac{1}{2}u^{-1}\Big|_2^5 = \frac{3}{20}$$

أو يمكن تأجيل حدود التكامل إلى نهاية المسألة كما يلي:

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}u^{-1}\Big|_2^5 = \frac{1}{2(x^2+1)}\Big|_1^2$$

$$= -\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{2-5}{20}\right) = \frac{3}{20}$$

بالإضافة إلى استخدام التكامل لإيجاد المساحة، فإنه يستخدم لإيجاد القيمة المتوسطة للدالة على فترة ما.

تعريف 5.6

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإن القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[a,b]$ هي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

مثـــال 23

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x$ على الفترة $[1,4]$.

الحـــل

القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$ هي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

إذن القيمة المتوسطة للدالة f على $[1,4]$ هي:

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2-2x)dx = \frac{1}{3}(x^3-x^2)\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{3}[(64-16)-(1-1)]$$

$$= \frac{48}{3} = 16$$

تمارين 4.6

في التمارين من 1 إلى 10، احسب التكامل المعطى، مستخدماً طريقة التكامل بالتعويض.

1) $\int (4x+5)^4 dx$

2) $\int x\sqrt{x^2+10}\, dx$

3) $\int \cos\,(4x+1)\; dx$

4) $\int (x+2)\sqrt{4x+x^2}\; dx$

5) $\int \sqrt[4]{x^3+1}\; x^5 dx$

6) $\int (x^2-6x+9)^{7/3}(x-3)\; dx$

7) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\; dx$

8) $\int \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}$

9) $\int \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

10) $\int (1-x^{3/2})^{5/3}\sqrt{x}\; dx$

في التمارين من 11 إلى 14، احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات المعطاة والمستقيمات المعطاة:

11) $y=\dfrac{x+1}{x^3}$ ومحور السينات و $x=1/3$ و $x=1/2$.

12) $y=\sqrt{x^2+7}$ ومحور السينات ومحور الصادات و $x=3$.

13) $y=2x^2$ و $y=x^2+2x+3$.

14) $y=(1+x^3)\sqrt{4x+x^4}$ ومحور السينات و $x=1$ و $x=3$.

15) إذا كان ميل مماس المنحنى عند أي نقطة هو $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+1}$، أوجد معادلة المنحنى مع العلم أن المنحنى يمر خلال النقطة $(0,1)$.

تمارين على الفصل السادس

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int (3x+1)^5 dx$

2) $\int x(2x^2-3)^8 dx$

3) $\int x^3\sqrt{x^3-1}\, dx$

4) $\int x\sqrt{9-x^2}\, dx$

5) $\int x^2(3-x^3)^2 dx$

6) $\int x(x^2-1)^4 dx$

7) $\int \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

8) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

9) $\int \frac{[1+1/x^2]^{3/5}}{x^3}$

في التمارين من 10 إلى 15، احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات المعطاة والمستقيمات المعطاة:

10) $y=\sqrt{x+2}$ ومحور السينات ومحور الصادات و$x=7$.

11) $y=\frac{1+1/x}{x^2}$ ومحور السينات و $x=1/3$ و $x=1/2$.

12) $y=\cos x^2$ ومحور السينات و $x=0$ و $x=\sqrt{\pi/2}$.

13) $y=x^2$ و $y=x^3$ و $x=3$.

14) $y=x^4+x-81$ و $y=x$.

15) $y=2x^2+3x+5$ و $y=x^2+3x+6$.

في التمارين من 16 إلى 25 استخدم التكامل بالتعويض للحصول على التكامل المعطى.

(16 $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ (17 $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

(18 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2}$ حيث n عدد طبيعي. (19 $\displaystyle\int x(1+x)^2dx$

(20 $\displaystyle\int_1^2 (6-x)^{-3}dx$ (21 $\displaystyle\int (2ax+b)(ax^2+bx+c)dx$

(22 $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx$

(23 $\displaystyle\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx$ (24 $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}dx$.

(25 $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n}}$

26) إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق، وكانت f دالة متصلة، برهن أن:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)g'(x)$$

27) استخدم نتيجة التمرين (26) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x+t^2}}$$

28) إذا كانت g_1, g_2 دالتين قابلتين للاشتقاق، وكانت f دالة متصلة، برهن أن:

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$$

29) استخدم نتيجة التمرين (28) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{1+x} \frac{t-1}{t}dt$$

30) استخدم نتيجة التمرين (28) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

الفصل السابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية
The Exponential and Logarithmic Functions

1.7 معكوس الدالة

لنفرض أن $f(x) = 2x + 3$ ومعنى ذلك أن $y = 2x + 3$.

نستطيع كتابة x بدلالة y كالآتي: $x = \frac{y-3}{2}$.

الدالتان $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \frac{x+3}{2}$ إحداهما معكوسة الأخرى.

تعريف 1.7

الدالتان f وg كل منهما معكوس الأخرى إذا كان:

أ) لكل x في نطاق g يكون $(f \circ g)x = f(g(x)) = x$ و

ب) لكل x في نطاق f يكون $(g \circ f)x = g(f(x)) = x$.

في هذه الحالة نكتب $f = g^{-1}$ أو $g = f^{-1}$ ونقول إن g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g.

كيفية إيجاد الدالة العكسية

1) نكتب $y = f(x)$.
2) نكتب x دالة في y، وذلك بتغيير المتغيرين x وy.
3) نقوم بعملية تحليل للحصول على y كدالة في x.
4) $y = f^{-1}(x)$.

مثـــال 1

أوجد معكوس الدالة للدالة $f(x) = x^3$.

الحـــل

$x = y^3$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Longleftarrow y = \sqrt[3]{x} \Longleftarrow x = y^3$$

للتأكد من العمل، نتحقق من أن $(f \circ f^{-1})x = x$ ، $(f^{-1} \circ f)x = x$.

تعريف 2.7

الدالة f دالة أحادية (One-to-one)، على $[a,b]$ إذا كان x_1 وx_2 في الفترة $[a,b]$ و $f(x_1) = f(x_2)$ يؤدي إلى أن $x_1 = x_2$.

نستطيع صياغة هذا التعريف بصورة أخرى، وهي أن الدالة f دالة أحادية على الفترة $[a,b]$ إذا كان $x_1, x_2 \in [a,b]$ و $x_1 \neq x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

نظرية 1

إذا كانت الدالة f تزايدية أو تناقصية على $[a,b]$، فإن f تكون دالة أحادية.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a,b]$ ولها اشتقاق $f'(x) \neq 0$، لكل $x \in (a,b)$، فإن f تكون دالة أحادية.

البرهان

لنفرض أن $x_1, x_2 \in [a,b]$ حيث $x_1 \neq x_2$ ولكن $f(x_1) = f(x_2)$.

الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على $[x_1, x_2]$.

إذن يوجد $c \in (x_1, x_2)$؛ حيث إن:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

حيث إن $x_2 - x_1 \neq 0$، فإن $f'(c) = 0$، وهذا يناقض الفرض $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$.

إذن إذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$، وهذا يعني أن الدالة أحادية.

عكس هذه النظرية ليس صحيحاً: فهناك دوال أحادية لا تحقق الشرط $f'(x) \neq 0$، مثال ذلك $f(x) = x^3$ على $[-1,1]$ هي دالة أحادية، ولكن $f'(0) = 0$.

نظرية 3

إذا كانت الدالة f أحادية، فإن f^{-1} موجودة والعكس.

نظرية 4

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، فإن f^{-1} دالة متصلة على $[f(a),f(b)]$ أو على $[f(b),f(a)]$ إذا كان $(f(a)>f(b))$.

نظرية 5 (اشتقاق معكوس الدالة)

إذا كانت $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق على (a,b) و$f'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$، فإن f^{-1} موجودة وقابلة للاستقاق على (a,b) و

$$(f^{-1})'(x)=\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

لكل x في نطاق f^{-1}.

مثـــال 2

إذا كان $f(x)=\sqrt{x}$، فأوجد $(f^{-1})'(x)$.

الحــل

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

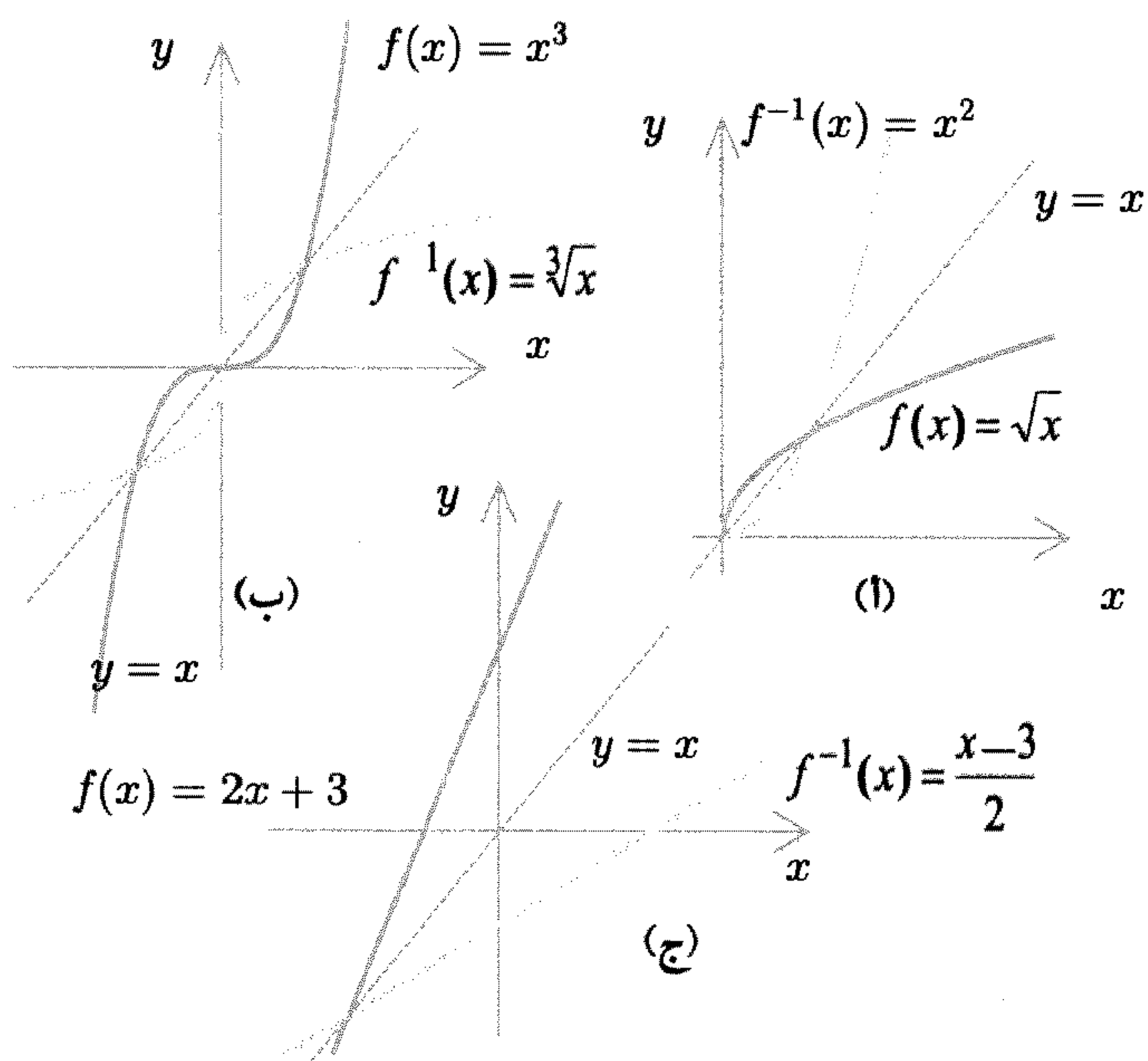
$$f^{-1}(x)=x^2$$

$$f'(f^{-1}(x))=f'(x^2)=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{1/(2x)}=2x$$

إذا كانت $y = f(x)$، وإذا وجدت f^{-1}، فإن $x = f^{-1}(y)$، ولهذا فإن النقطة (x, y) على بيان الدالة f إذا كانت (y, x) على بيان الدالة f^{-1}، والعكس.

رسم الدالتين f وf^{-1} يبيّن أن إحداهما انعكاس للأخرى حول المستقيم $x = y$.



الشكل 1.7

تمارين 1.7

في التمارن التالية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية، وإذا كانت غير ذلك، حدد الفترة التي تكون عليها أحادية، ثم أوجد معكوس الدالة والمشتقة الأولى لمعكوس الدالة:

1) $f(x) = 3x + 5$

2) $f(x) = \frac{1}{2}$

3) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

4) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

5) $f(x) = 1 - x^3$

6) $f(x) = (x+1)^2$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

8) $y = x^2 - 5x + 6$

9) $y = x^3 + x$

10) $y = x^2 + 2x + 2$

2.7 الدالة الأسية (Exponential Function)

لنفرض أن a عدد موجب.

الدالة الأسية هي الدالة التي على الشكل: $f(x) = a^x$ عندما $x \in \mathbb{R}$.

ملاحظات

1) $a^n = \underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{n \text{ مرة}}$

2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

4) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

5) إذا كان $a > 0$، فإن $a^x > 0$ لأي عدد حقيقي x.

6) $a^{x+y} = a^x . a^y$.

7) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

8) $a^0 = 1$.

9) $(a^x)^y = a^{ay}$.

10) إذا كان $a > 1$، فإن a^x دالة تزايدية.

11) إذا كان $0 < a < 1$، فإن a^x دالة تناقصية.

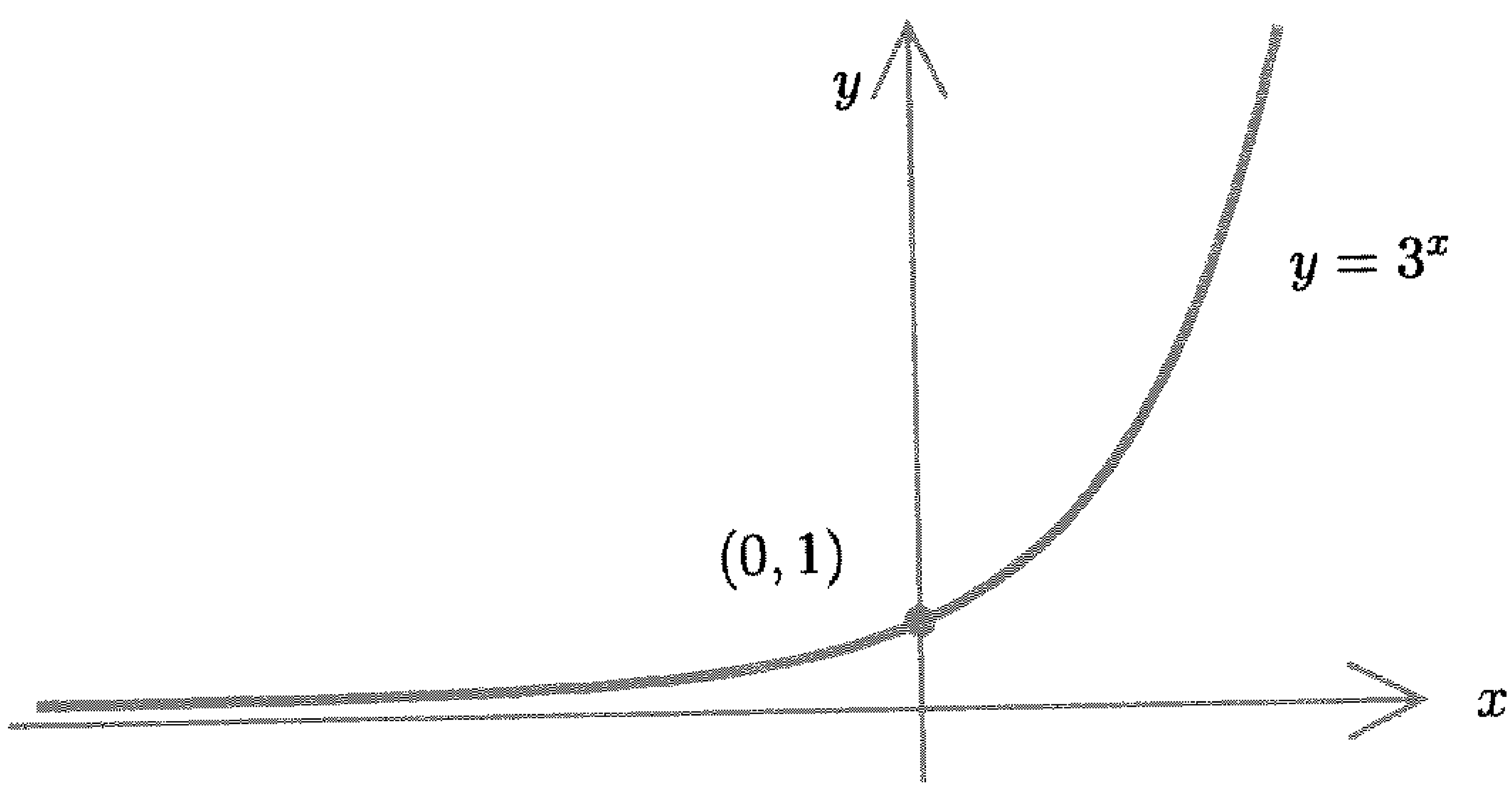
12) a^x دالة متصلة لأي x.

13) إذا كان $a = 1$، فإن $a^x = 1$ لكل x.

مثـــال 3

أعط بياناً للدالة $y = 3^x$.

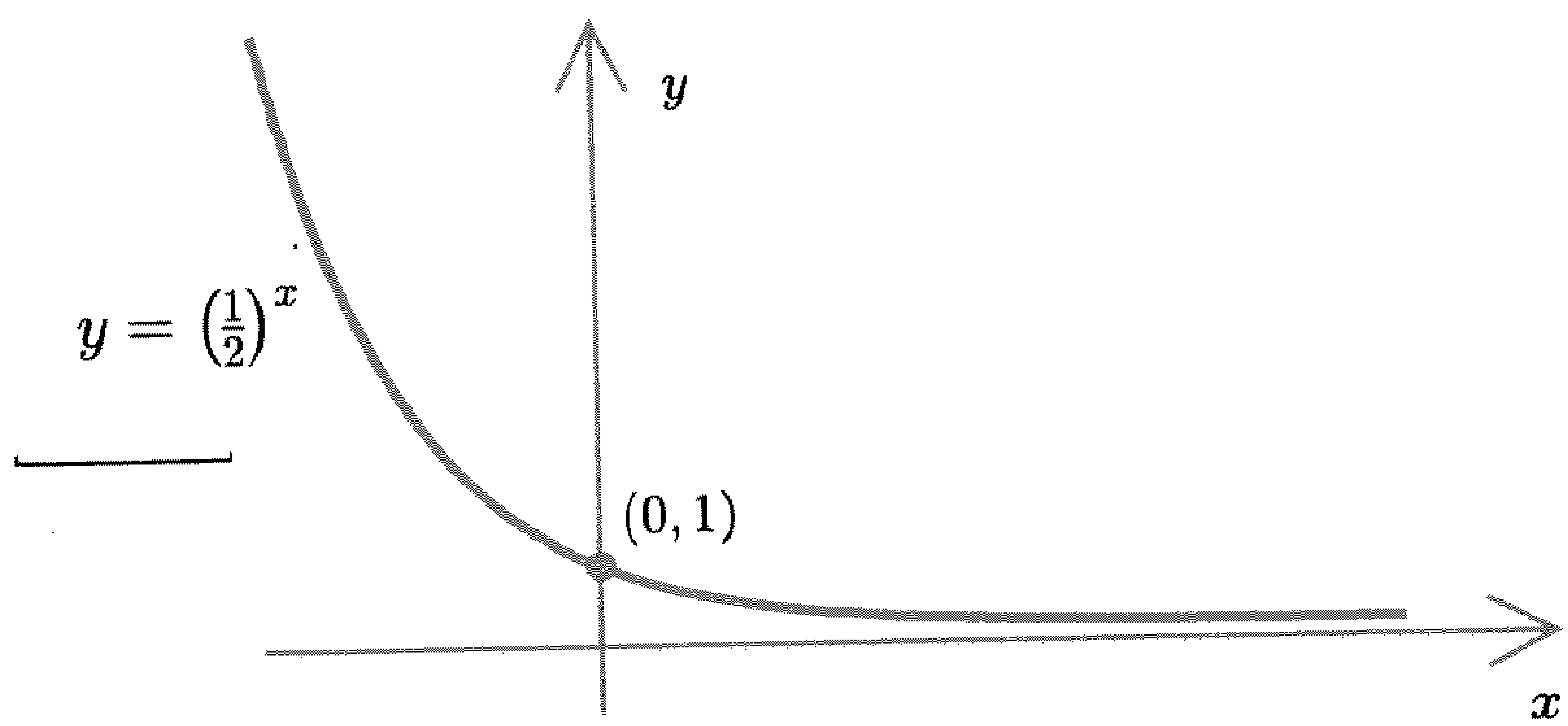
من البيان نلاحظ أن الدالة $y = 3^x$ دالة تزايدية.



الشكل 2.7

مثـــال 4

أعط بياناً للدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. من البيان نلاحظ أن الدالة $y\left(\frac{1}{2}\right)^x$ دالة تناقصية.



الشكل 3.7

من الملاحظات عرفنا أن الدالة $f(x) = a^x$ إما تزايدية $(a > 1)$، أو تناقصية $(0 < a < 1)$. ولـذلـك، فـإن الـدالـة $f(x) = a^x$ دالـة أحـاديـة إذا كـان $a \neq 1$ و$a > 0$.

نظرية 6

إذا كان $a \neq 1$ و$a > 0$، فإن الدالة $f(x) = a^x$ لها معكوس.

تمارين 2.7

في التمارين من 1 إلى 10 أعط بياناً للدوال التالية:

1) $y = 2^{-x}$

2) $y = 3^{x}$

3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

4) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^{x}$

5) $y = 2^{2x}$

6) $y = 2^{x} - 1$

7) $y = 2^{x-1}$

8) $y = 3^{x/2}$

9) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

10) $y = 3^{-2x/3}$

في التمارين من 11 إلى 20 أوجد قيمة x

11) $3^{x} = \frac{1}{9}$

12) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 8$

13) $2^{-x} = \frac{1}{4}$

14) $3^{-2x} = \frac{1}{81}$

15) $2^{x} = 8$

16) $2^{x} = 5$

17) $5^{2x-5} = 9$

18) $2^{-2x/3} = 4/5$

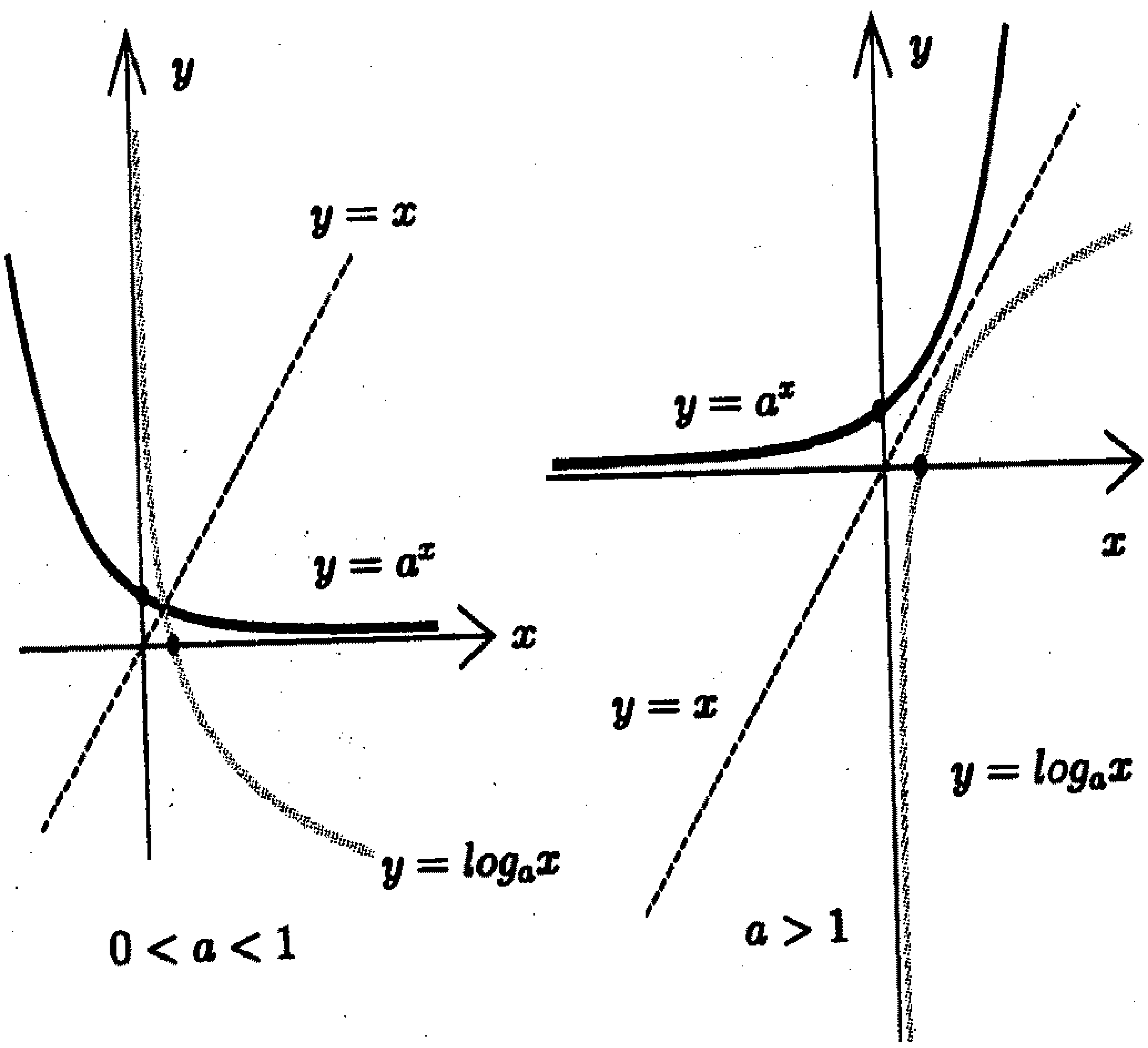
19) $4(5^{3-x}) - 7 = 2$

20) $8/(3x) = 4$

3.7 الدالة اللوغاريتمية (Logarithmic Function)

إذا كان $x = a^y$، فإن الدالة $y = \log_a x$ تسمى بالدالة اللوغاريتمية بالأساس a.

إذن نستطيع استنتاج العلاقة: $y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$



الشكل 4.7

وحيث أن بيان معكوس الدالة في المرآة $y = x$ لبيان الدالة، فإن بيان الدالة اللوغاريتمية موضح في الشكل (4.7).

نظرية 7

إذا كان $a \neq 1$ و $a > 0$ و x, y أعداداً موجبة، فإن:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

3) $\log_a 1 = 0$.

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

5) $\log_a a = 1$.

6) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$ حيث r أي عدد حقيقي.

7) $a^{\log_a x} = x$;

8) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

البرهان

1) لنفرض أن $u = \log_a x$ و $v = \log_a y$

من التعريف $u = \log_a x \iff x = a^u$

كذلك $v = \log_a y \iff y = a^v$

إذن $xy = a^u.a^v = a^{u+v}$، وبذلك:

$$\log_a(xy) = u + v \iff xy = a^{u+v}$$

إذن: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(x)$

2) $\frac{x}{y} = a^{u-v} \iff \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = u - v \iff$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

3) حيث إن $a^0 = 1 \iff \log_a 1 = 0$.

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$.

5) حيث إن $a^1 = a \iff \log_a a = 1$.

6) لنفرض أن $u = \log_a x \iff x = a^u \Longleftarrow x^r = (a^u)^r$

$x^r = a^{ru} \iff \log_a x^r = ru \iff \log_a x^r = r\log_a x$.

7) لنفرض أن $y = a^{\log_a x}$ إذن:

$$\log_a y - \log_a x = 0 \iff \log_a y = \log_a x$$

$$x = y \iff \frac{x}{y} = 1 \iff \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \iff$$

إذن $x = a^{\log_a x}$.

8) لنفرض أن $u = \log_a b \iff a^u = b$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس b نجد أن:

$$u \log_b a = 1 \Longleftarrow \log_a b a^u = \log_a b$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \Longleftarrow \log_b a = \frac{1}{u} \Longleftarrow$$

مثال 5

إذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a^x$، أوجد $(f \circ g)x$ و $(g \circ f)x$.

$$(f \circ g)x = f[g(x)] = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)x = g[f(x)] = g(a^x) = \log_a a^x = x\log_a a = x$$

إذن $g = f^{-1}$.

مثال 9

إذا كانت $f(x) = \ln \frac{x^4}{x-1}$، فأوجد:

أ) نطاق f.

ب) الفترات التي تكون عليها الدالة f تزايدية والفترات التي تكون عليها الدالة f تناقصية.

ج) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أعلى والفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أسفل.

د) نقط انقلاب بيان الدالة f.

هـ) ارسم بيان الدالة f.

الحل

حيث أن اللوغاريتم معرّف للأعداد الحقيقية الموجبة، فإن نطاق f هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 1.

لاحظ أنه يمكن كتابة الدالة f على الشكل:

$$f(x) = 4\mathbf{ln}\ x - \mathbf{ln}\ (x-1)$$

ويكون

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x(x-1)}$$

ويكون

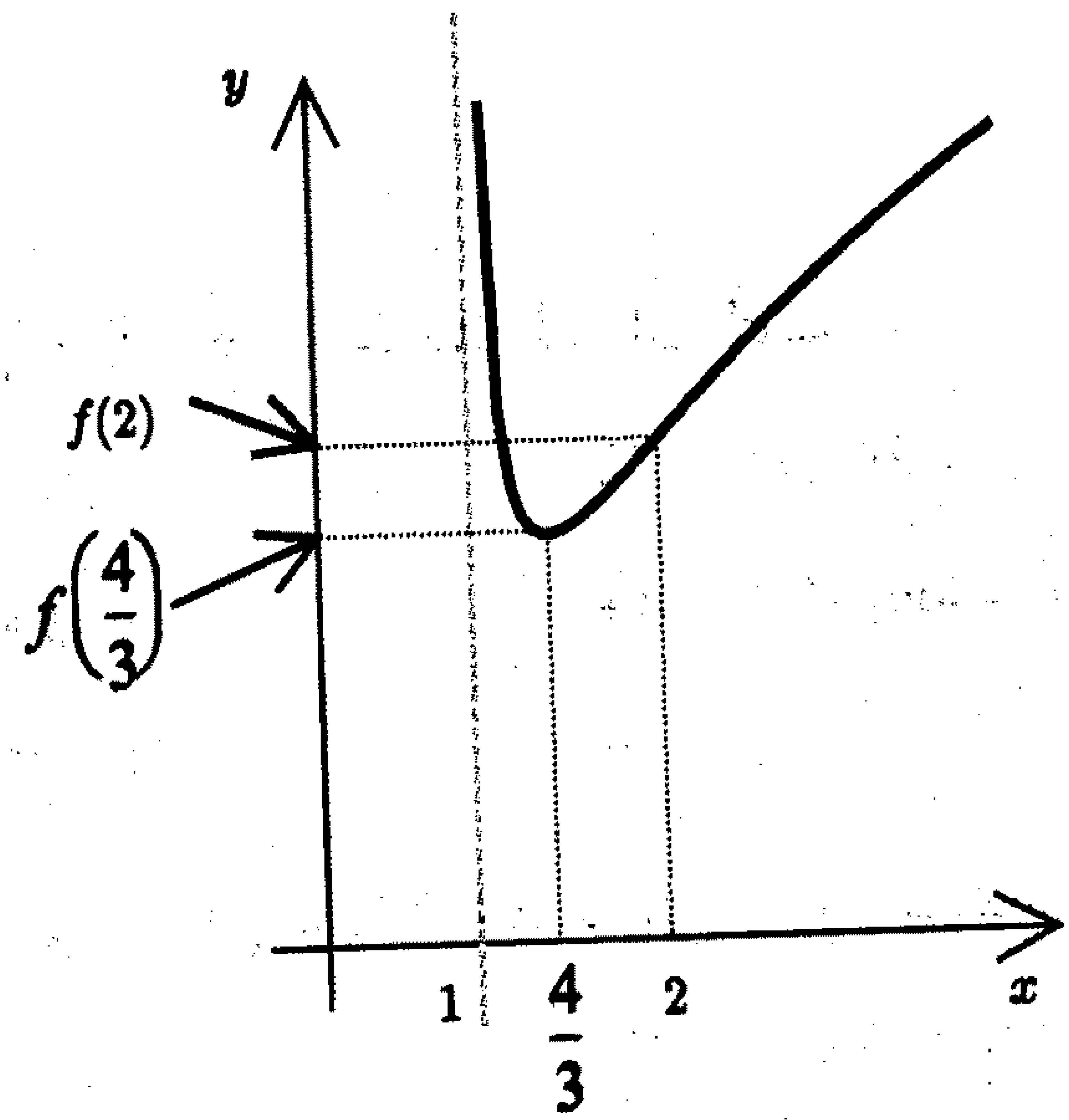
$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-2)(x-2)}{x^2(x-1)^2}$$

لاحظ أن f' سالب لكل $1 < x < 3/4$، وصفر عند $x = 3/4$، وموجب عندما يكون $x > 4/3$.

هذا يعني أن f تناقصية على $(1,4/3)$، وتزايدية على $(4/3,\infty)$، والنقطة $(4/3, f(4/3))$ هي نقطة نهاية صغرى للدالة f.

الآن $f''(x)$ لكل $1 < x < 2$، وصفر عند $x = 2$، وسالب عندما يكون $x > 2$. هذا يعني أن بيان الدالة f مقعّر إلى أعلى على $(1,2)$، ومقعّر إلى أسفل على $(2,\infty)$، والنقطة $(2, f(2))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة.

(أنظر الشكل 5.7)



شكل 5.7

ملاحظة

إذا كان الأساس $a = 10$، فإن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم العام أو الشائع ويكتب $\log x$.

تعريف 3.7

يعرف العدد e كالآتي: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

العدد e هو عدد غير قياسي، $e = 2.718281828...$.

عندما يكون أساس اللوغاريتم e، فإن اللوغاريتم $\log_e x$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e x$.

تمارين 3.7

في التمارين من 1 إلى 6، أعط بياناً للدوال التالية:

1) $y = \log_2(x)$

2) $y = \log\ (x)$

3) $y = \ln\ (x)$

4) $y = \log_{1/2}(x)$

5) $y = \log_3(-x)$

6) $y = \ln\ |x|$

في التمارين من 7 إلى 20، أوجد ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

7) $y = \log_2(4)$

8) $\ln x = \ln\ (3x + 1) + 1$

9) $\log_x(64) = 3$

10) $\log\ (x + 2)^2 = 2$ ، $x > 0$

11) $2^{2x} = 64$

12) $\ln x^2 - \ln x = \ln 18 - \ln 6$

13) $\log_3(x + 2) = -2$

14) $\ln x^3 = 2\log 5 - 3\log 2$

15) $e^{2x-5} + 1 = 4$

16) $\log_4(2x + 4) - 3 = \log_4 3$

17) $y = \log_3(27)$

18) $\log_3(x + 1) = \log_3(x - 1) + 1$

19) $\log_x(32) = -5$

20) $\log x - \log\ (x - 1) = \log 4$

4.7 المشتقة الأولى للدوال الأسية واللوغاريتمية، وبعض التكاملات

نظرية 8

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

البرهان

إذا كان $y = \log_a x$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{x}{x(\Delta x)}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{1}{x}\ \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left\{\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\} = \frac{1}{x}\ \log_a e$$

$$= \frac{1}{x\log_e a} = \frac{1}{x\ln a}$$

وبصفة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

نظرية 9

إذا كان $y = a^x$، فإن: $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

البرهان

$$x = \log_a y \Longleftrightarrow y = a^x$$

بأخذ تفاضل الطرفين:

$$1 = \frac{1}{y \ln a} \cdot \frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a$$

ومن ذلك

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

وبصفة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

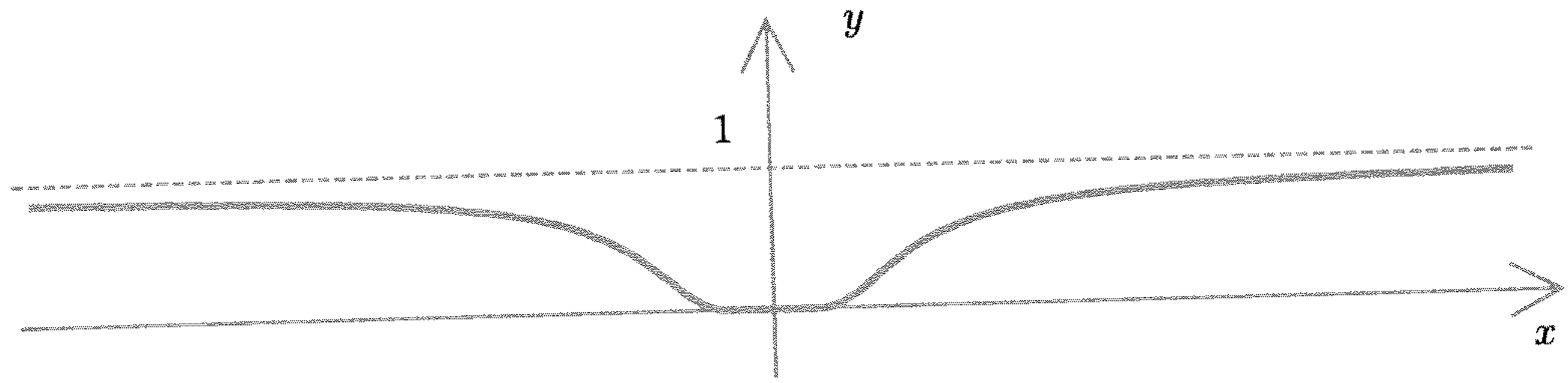
مثـــال 7

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

فارسم بيانياً منحنى الدالة f، وأوجد $f'(x)$.

الحل



الشكل 6.7

لاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

الآن إذا كان $x \neq 0$، فإن:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

وإذا كان $x = 0$، فإن:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

وهذا يعني أن:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

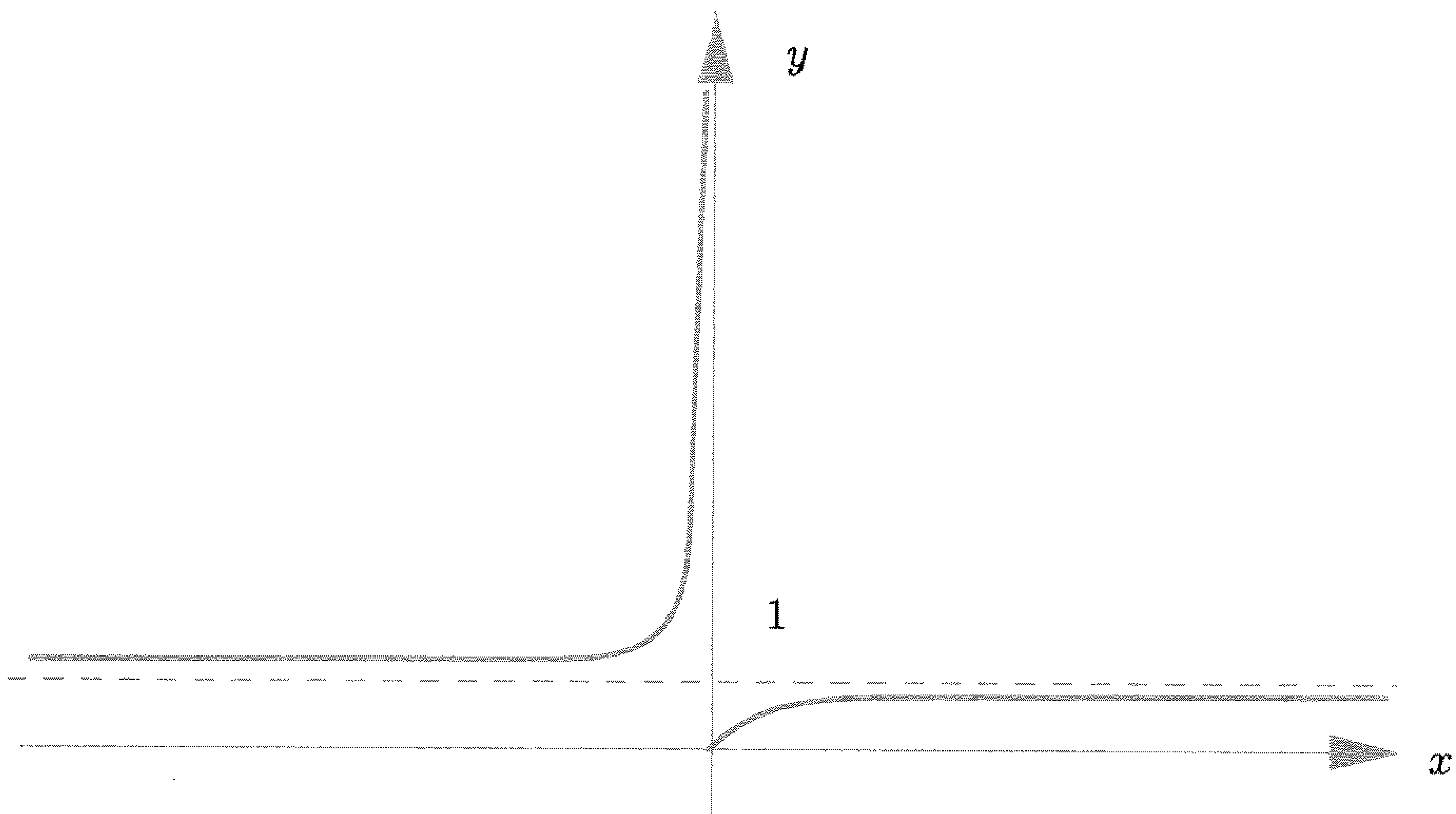
مثال 8

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ارسم بيانياً منحنى الدالة f، وناقش قابلية f للاشتقاق عند $x = 0$.

الحـل



الشكل 7.7

لاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

ولكن $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ غير موجودة.

هذا يعني أن:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

غير موجودة، ومن ذلك نستنتج أن الدالة f غير متصلة عنده $x = 0$، وهذا يعني أنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

بعض التكاملات المفيدة:

1) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

3) $\int e^x dx = e^x + C$.

تمارين 4.7

أوجد تفاضل الدوال الآتية:

1) $y = \log_5 x$

2) $y = 5^x$

3) $y = \log_a x^2$

4) $y = \pi^x$

5) $y = \log_\pi x$

6) $y = \ln\,(1 + x^5)$

7) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8) $y = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

9) $y = x^{\sqrt{x}}$.

أوجد تكامل الدوال التالية:

10) $y = \log\,(\log\, x)$

11) $y = (\ln\, x)^{x^2+2}$

12) $y = (x^2 + 2)^{\ln\, x}$

13) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

14) $y = x^2 e^x - x e^{x^2}$

15) $y = (1 - e^{4x})^2$

16) $y = \sqrt{x}\, \ln\,(\sqrt{x})$

17) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$

18) $y = (e^{2x} - e^{-2x})^2$

19) $y = (1 - x)e^x$.

20) $y = e^{\frac{1}{x}}$

21) $\displaystyle\int_1^4 2^x dx$

22) $\displaystyle\int_1^{\ln 4} e^x dx$

23) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x} dx$

24) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + 4x} dx$

25) $\displaystyle\int e^{2+3x} dx$

26) $\displaystyle\int 3x^2 e^x dx$

27) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

28) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x + 4}$

29) $\displaystyle\int_0^1 x(e^{x^2} + 2) dx$

30) $\int \frac{e^{2x}dx}{2e^{2x}+3}$

في التمارين من 31 إلى 40، أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها تناقصية، ونقط النهاية القصوى، وحدد تقعّر بيان الدالة المعطاة، ونقط انقلاب البيان، وارسم بيانياً الدالة المعطاة في كل حالة:

31) $f(x) = e^{x^2}$

32) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

33) $f(x) = x^2 e^x$

34) $f(x) = (1-x)e^x$

35) $f(x) = xe^x$

36) $f(x) = 10^{1-x^2}$

37) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$

38) $f(x) = \log\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

39) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

40) $f(x) = (2^x + x^2)^2$

5.7 قاعدة لوبيتال والأشكال غير المحددة
Indeterminate forms and L'Hopital's Rule

أ) الشكل غير المحدد $\frac{0}{0}$

عند دراستنا للنهايات واجهتنا مشكلة الشكل غير المحدد $\frac{0}{0}$، وقلنا في ذلك الوقت أنه لا بد من القيام بعمليات جبرية حتى لا يظهر هذا الشكل، ولكن في بعض الأحيان قد لا تسعفنا أي طريقة جبرية في التخلص من هذا الشكل.

قاعدة لوبيتال التالية تساعدنا في حساب مثل هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال (أ)

لنفرض أن g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b)، عدا عند النقطة c في الفترة (a,b)، ولنفرض أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في الفترة (a,b). إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ ، وإذا كان $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

البرهان

تعرّف الدالتان F وG كما يلي:

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & ; \quad x \neq c \\ 0 & ; \quad x = c \end{cases} \quad , \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \neq c \\ 0 & ; \quad x = c \end{cases}$$

لاحظ أن $F'(x) = f'(x)$ و $G'(x) = g'(x)$ عدا عند $x = c$، ولهذا فإن الدالتين F وG قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b) عدا عند c.

قابلية الدالتين F وG للاشتقاق تؤدي إلى اتصالية الدالتين F وG عدا عند $x = c$، ولكن:

$$\lim_{x\to c} F(x) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 = F(c)$$

و

$$\lim_{x\to c} G(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 = G(c)$$

وهذا يضمن اتصالية الدالتين F وG على كل الفترة (a, b).

يمكن الآن تطبيق نظرية القيمة الوسطى المعمّمة على الفترة $[c, x]$، وبذلك يكون هناك عدد k بين x و c حيث أن:

$$\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(k)}{G'(k)}$$

وحيث أن $F(c) = G(c) = 0$، فإن:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(k)}{G'(k)}$$

حيث أن k, x نقطتان في الفترة (a, b)، يمكن كتابة $F(x) = f(x)$ و$F'(k) = f'(k)$ و $G(x) = g(x)$ و $G'(k) = g'(k)$ ويصبح لدينا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(k)}{G'(k)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

عندما $x \to c$ ، $k \to c$ فإن ذلك يعني:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فإذا كان

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

فإن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

مثـــال 9

أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

الحـــل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=1$$

مثـــال 10

احسب $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.

الحـــل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا :

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

يمكن استخدام القاعدة السابقة عندما $x\to\pm\infty$ أو $x\to c^+$ أو $x\to c^-$

مثـــال 11

احسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

الحـل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = 2$$

ب) الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال عند الحصول على الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$، وذلك للحصول على $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

قاعدة لوبيتال (ب)

لنفرض أن g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b)، عدا عند النقطة c في الفترة (a,b)، ولنفرض أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في الفترة (a,b).

إذا كان $\lim_{x\to c}|f(x)| = \lim_{x\to c}|g(x)| = \infty$ ، وإذا كانت $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يمكن استخدام القاعدة السابقة عندما $x \to \pm\infty$ أو $x \to c^+$ أو $x \to c^-$.

مثـال 12

أوجد $\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7\tan x}{5+\sec x}$.

الحـل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$ ، ولكن عند تطبيق

قاعدة لوبيتال (ب) نجد أن:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7\tan x}{5+\sec x}=\lim_{\to(\pi/2)^+}\frac{7\sec^2 x}{\sec x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7}{\sin x}=7$$

ج) حالات أخرى للأشكال غير المحددة

قد تظهر عدة أشكال أخرى غير محددة، ولكن يمكن تحويلها إلى الشكل $\frac{0}{0}$ أو الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ومنها:

1) الشكل $0.\infty$

مثـــال 13

احسب $\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\sec x$.

الحـــل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل $0.\infty$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{-\sin x}=-1$$

2) الشكل $\infty-\infty$

مثـــال 14

احسب $\lim_{x\to0^+}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)$.

الحـــل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل $\infty-\infty$، ولكن تطبيق قاعدة لوبيتال

مرتين يعطي:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{2\cos x-\sin x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

3) الأشكال غير المحددة 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞

تظهر هذه الأشكال من التعبير $(f(x))^{g(x)}$، ولهذا لا بد من إجراء للحصول على $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^{g(x)}$، وهذا الإجراء هو:

(1) نفرض أن $y=(f(x))^{g(x)}$.

(2) $\ln y=g(x)\ln(f(x))$ وذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين في 1.

(3) إذا كان $\lim\limits_{x\to c}\ln y=L$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c}y=e^L$.

مثال 15

احسب $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$.

الحـــل

الشكل غير المحدد هنا هو 1^∞، ولذلك فإن:

$$y = (1+3x)^{\frac{1}{2x}} \quad (1)$$

$$\ln y = \frac{1}{2x}\ln\,(1+3x) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{2} \quad (3)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2(1+3x)} = \frac{3}{2}$$

ولهذا فإن $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0} y = e^{\frac{3}{2}}$

تمارين 5.7

استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin\,2x}{x-\sin\,2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2\sin\,x}{4x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln\,(\sin\,x)}{(\pi-2x)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\,x^{-1}}{\sin\,(2x^{-1})}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln\,(17+x)}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x+1}{x^4+x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty^+} xe^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln\,x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)^{\frac{x}{2}}$

11) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\sec x}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{x}$

14) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x\ln x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{x}\right)$

6.7 النمو والانحلال الأسي

إذا كانت y كمية معدل تغيرها بالنسبة للزمن، يتناسب مع الكمية المعطاة في الزمن t، فإن الشكل العام للكمية يكون:

$$y = ce^{kt}$$

حيث k ثابت تناسب النمو إذا $k > 0$، ويكون k ثابت تناسب الانحلال إذا كان $k < 0$.

مثال 6:

إذا كانت y هي كمية عنصر مشع، بحيث تبقى $\frac{1}{2}$ الكمية بعد 25 عاماً، فإذا كانت الكمية جراماً واحداً، كم يبقى منها بعد 10 سنوات؟

الحل:

نفترض أن الانحلال يتناسب مع y.

إذن: $y = ce^{kt}$

عند $y = 1$ يكون $t = 0$ وبذلك فإن:

$1 = ce^0 = c$ وهذا يؤدي إلى أن $c = 1$

وعندما $y = \frac{1}{2}$، فإن $t = 25$، وبالتالي، فإن:

$\frac{1}{2} = ce^{25k} = e^{25k}$ وهذا يعني أن $k = \frac{\ln\,(1/2)}{25} = -0.027$

إذن: $y = e^{-0.027t}$

وعند $t = 10$، فإن: $y = e^{-0.026(10)} = 0.66$

مثـــال 17

يقوم عالم بتجارب على مزرعة بكتيريا، التي تزداد بناءً على قانون النمو الأسي، فإذا كان عدد البكتيريا 100 في اليوم الثاني من التجربة، و300 في اليوم الرابع من التجربة، فما العدد الأصلي في المزرعة؟

الحـــل

حيث أن النمو أسي، فإن: $y = ce^{kt}$

العدد الأصلي يتم الحصول عليه عندما $t = 0$ وهو: $y = e^{k(0)} = c$

ومن المعطيات:

$$100 = ce^{2k} \quad (1)$$

$$300 = ce^{4k} \quad (2)$$

من المعادلة (1) $c = 100e^{-2k}$

والتعويض في (2) $300 = 100e^{2k}$ أو $e^{2k} = 3$

إذن $k = \dfrac{\ln 3}{2} = 0.549$

بالتعويض عن k في المعادلة (1)، نجد أن: $c = 33.33$

مثـــال 18

أودع مبلغ من النقود في مصرف بربح مركّب. إذا وصل المبلغ إلى الضعف في 6 سنوات، ما النسبة السنوية للربح؟

الحـــل

المبلغ الأصلي هو c حيث $t = 0$

$$y = ce^{kt}$$

من المعطيات، نجد أن $y = 2c$، عندما $t = 6$

إذن $2c = ce^{k6}$.

أو $k = \dfrac{\ln 2}{6} = 0.116$

إذن النسبة المئوية هي 11.6% في السنة.

تمارين 6.7

1) في تجربة على مزرعة بكتيرية، ارتفع عدد البكتيريا من 5000 إلى 10000 في 10 ساعات. بمعلومية أن التكاثر في هذه المزرعة يتم بناءً على قانون النمو الأسي، ضع قانوناً لتكاثر هذه البكتيريا بعد t ساعة. ما العدد بعد 20 ساعة؟

متى يصل العدد إلى 50000؟

2) إذا كان عدد السكان في دولة ما ينمو بناءً على قانون النمو الأسي. متى يتضاعف عدد السكان إذا كان ينمو بمعدل 1.1 في المائة لكل سنة؟

3) بلغ عدد سكان دولة صغيرة 10 مليون في سنة 1980 م. إذا كان عدد السكان ينمو بناءً على قانون النمو الأسي بنسبة 3% في السنة، فاكتب معادلة لتكاثر السكان بدلالة الزمن، وأوجد عدد السكان في سنة 2000م.

متى يتضاعف عدد السكان في هذه الدولة؟

4) إذا كانت الكمية q تنمو أو تنحل أسياً، فإذا كانت $q = q_1$ عندما $t = t_1$ و $q = q_2$ عندما $t = t_2$ وكان k ثابت النمو أو الانحلال، برهن أن:

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)$$

5) إذا كان هناك 100 جرام من مادة مشعة، وبعد 4 سنوات بقي منها 20 جراماً، أجب عن الأسئلة التالية:

أ) كم جراماً يبقى من هذه المادة بعد 8 سنوات؟

ب) كم جراماً يبقى من هذه المادة بعد 10 سنوات؟

ج) ما هو العمر النصفي لهذه المادة؟

تمارين على الفصل السابع

في التمارين من 1 إلى 3، أوجد f^{-1}:

1) $f(x) = 1 - \ln x$

2) $g(x) = e^x + e^{-x}$ لكل $x > 0$

3) $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

في التمارين من 4 إلى 6، حل المعادلة المعطاة:

4) $y = \log_3 9$

5) $\log x = 10^{-9}$

6) $4 = \log_x\left(\dfrac{1}{16}\right)$

7) $y = e^{\ln (7.2)}$

8) ارسم الدالة $f(x) = |x+1|$.

في التمارين من 9 إلى 18، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

9) $f(x) = \ln (1 + x^2)$

10) $f(x) = \ln [x + \ln (3+x)]$

11) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$

12) $f(x) = \log_3 2^{x+5}$

13) $f(x) = \ln \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

14) $f(x) = \ln \left(\dfrac{e^x + 2}{e^x - 2}\right)$

15) $f(x) = x^{\sin x}$

16) $f(x) = (3^{5x})(2^{4x})$

17) $f(x) = \sqrt{\log \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$

18) $f(x) = x^{x^3}$

19) $f(x) = (x^2+4)^{\ln x}$

في التمارين من 20 إلى 40، احسب التكامل المعطى:

20) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{4^{\ln x}}{x}\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx$

23) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{ex}}}\,dx$

24) $\int \frac{\pi^{1/x}}{x^2}dx$

25) $\int \frac{3x}{1+x^2}dx$

26) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

27) $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

28) $\int \frac{\mathbf{ln}\ x}{xdx}$

29) $\int \frac{1/x^2}{1+(1/x)}dx$

30) $\int xe^{x^2-4}dx$

31) $\int \frac{\mathbf{ln}\ (x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$

32) $\int (\mathbf{ln}\ x)^2 dx$

33) $\int \sqrt{x}\mathbf{ln}\ xdx$

34) $\int \frac{dx}{x(\mathbf{ln}\ x)^3}$

35) $\int x10^{1+x^2}dx$

36) $\int \frac{5a^{\sqrt{x+1}}dx}{\sqrt{x+1}}$

37) $\int \frac{dx}{x\mathbf{ln}\ x}$

38) $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}$

39) $\int 2^{x\mathbf{ln}\ x}(1+\mathbf{ln}\ x)dx$

40) $\int_0^{\pi/2} 3^{\sin x}\cos xdx$

في التماين من 41 إلى 50، احسب النهايات المعطاة مستخدماً قاعدة لوبيتال

41) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

42) $\lim_{x\to 0}[\mathbf{ln}\ (x+1)]^x$

43) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\tan x}$

44) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-x}$

45) $\lim_{x\to 0}\frac{8^x-2^x}{4x}$

46) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{2x}}{\mathbf{ln}\ x+e^{2x}}$

47) $\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$

48) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$

49) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{e^x-e^{-x}-x^2-2}$

50) $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{ln}\ x}{\sqrt{x}}$

الفصل الثامن

معكوس الدوال المثلثية

The Inverse Trigonometric Functions

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة أحادية، يكون لها معكوس كدالة $f^{-1} : X \to Y$؛ حيث إن $x = f^{-1}(y)$ إذا وإذا كان فقط $y = f(x)$.

بما أن الدوال المثلثية دوال غير أحادية، فإن الدوال المثلثية ليس لها معكوس إلا إذا قيدت نطاقاتها.

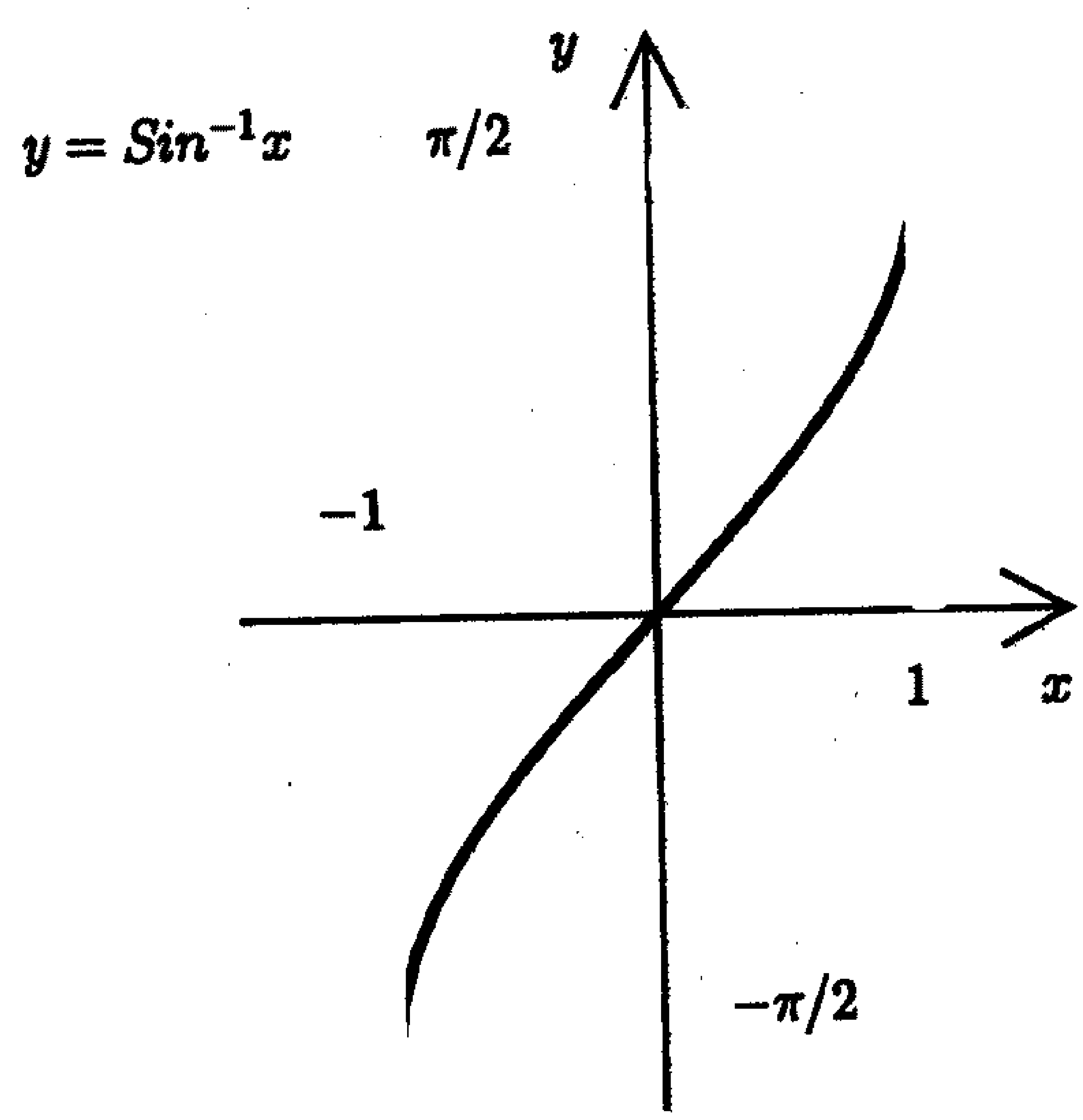
ندرس الآن دالة الجيب $\sin x$، التي يكون نطاقها المجموعة $I\!R$ ومداها الفترة $[-1,1]$. حيث إن دالة $\sin x$ ليست أحادية على $I\!R$، فمن الممكن إيجاد مجموعة جزئية من $I\!R$. بحيث تكون الدالة $\sin x$ دالة أحادية على تلك المجموعة. فمثلاً إذا اخترنا المجموعة $[-\pi/2, \pi/2]$، فإن دالة الجيب الجديدة الناشئة من تقييد نطاق $\sin x$ من $I\!R$ إلى $[-\pi/2, \pi/2]$ تكون دالة أحادية، وفي هذه الحالة يكون لها معكوس كدالة.

1.8 دالة معكوس الجيب والمشتقة الأولى لها

تعريف 1.8

تعرّف دالة معكوس الجيب $\mathrm{Sin}^{-1}x$ كالآتي:

$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $x = \sin y$، عندما يكون $-1 \le x \le 1$، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.



الشكل 1.8

مثـــال 1

أوجد $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحـــل

لنفرض أن

$$y = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } -\pi/2 \le y \le \pi/2$$

ومن ذلك $y = \pi/4$.

نظرية 1

الدالة $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ و $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

البرهان

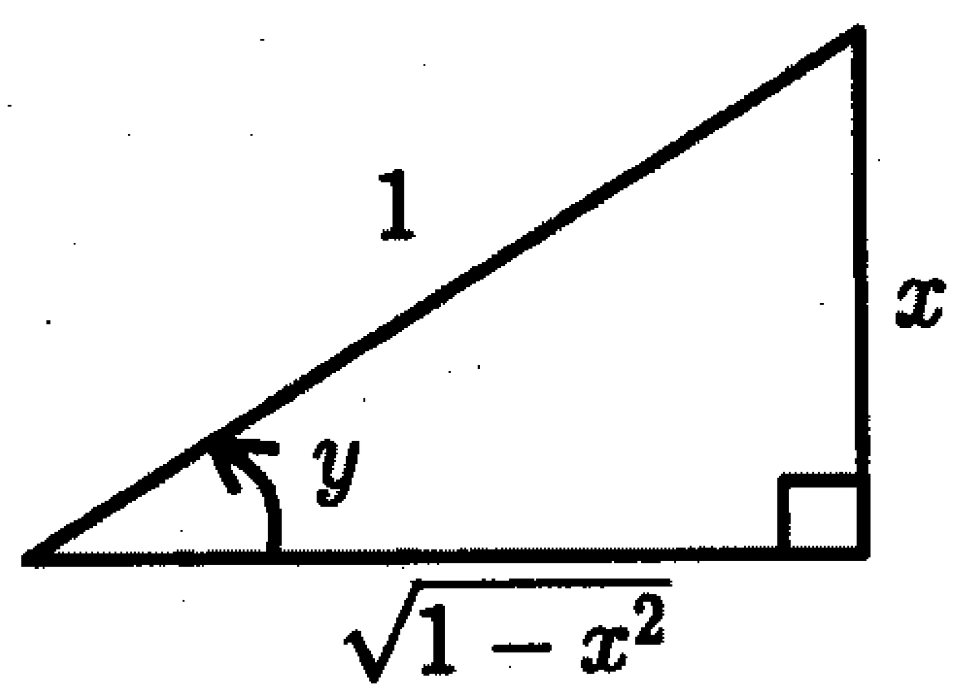
لنفرض أن $y=\mathrm{Sin}^{-1}x \Longleftrightarrow \sin y=x$ ، $-\pi/2\le y\le \pi/2$ ، $x\in(-1,1)$.

إذن $\frac{dy}{dx}\cos y=1$ ، وذلك بتفاضل الطرفين.

ومن ذلك $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$

الآن $x=\sin y,\ -\pi/2\le y\le \pi/2$

إذن $\cos y=\sqrt{1-x^2}$



ومن ذلك، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

تمارين 1.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1 $\mathbf{Sin}^{-1}(1)$

(2 $\mathbf{Sin}^{-1}(\sqrt{2})$

(3 $\mathbf{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(4 $\mathbf{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(5 $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

في التمارين من 6 إلى 10، استخدم الآلة الحاسبة، أو الجداول لإيجاد ما يلي:

(6 $\mathbf{Sin}^{-1}(0.64420)$

(7 $\mathbf{Sin}^{-1}(-0.5505)$

(8 $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

(9 $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{5}{11}\right)$.

(10 $\mathbf{Sin}^{-1}(-0.54950)$

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

(11 $y = \mathbf{Sin}^{-1}(3x)$

(12 $x\mathbf{Sin}^{-1}(y) = x + y$

(13 $y = \mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

(14 $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(15 $y = \mathbf{Sin}^{-1}(1+x^2)$

(16 $y = \ln\,(\mathbf{Sin}^{-1}x)$

(17 $y = \mathbf{Sin}^{-1}\sqrt{x}$

(18 $y = x\ \mathbf{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

(19 $y = \mathbf{Sin}^{-1}(\cos x\ )$

(20 $y = \mathbf{Sin}^{-1}(\ln x)$

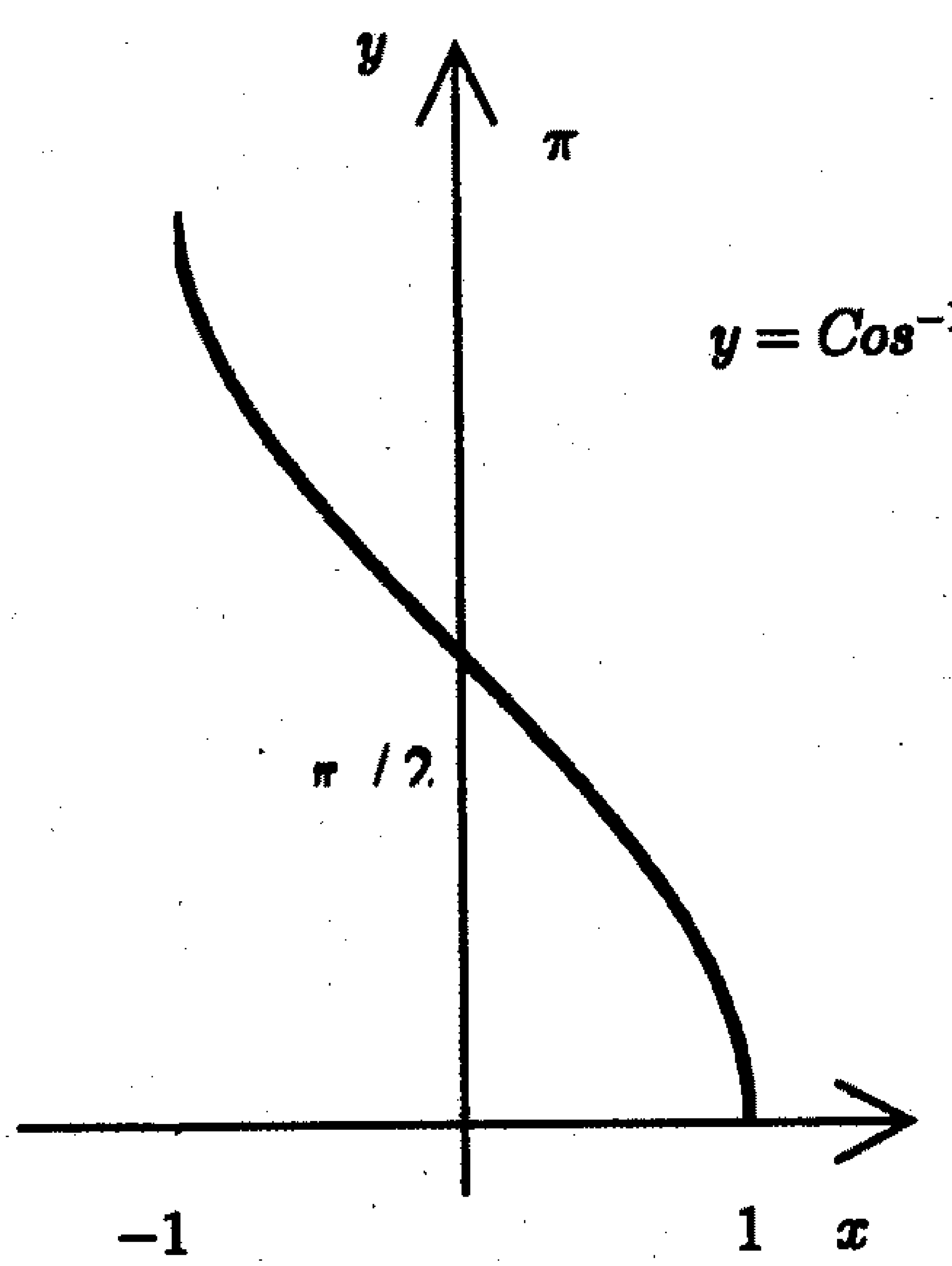
2.8 دالة معكوس جيب التمام والمشتقة الأولى لها

بالمناقشة السابقة نفسها التي أثيرت في البند السابق، يمكن تعريف دالة معكوس جيب التمام كالآتي:

تعريف 2.8

تعرّف دالة معكوس جيب التمام $Cos^{-1}x$ بأنها:

$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \cos y$ و $0 \leq y \leq \pi$.



الشكل 2.8

مثــال 2

أوجد $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

الحــل

لنفرض أن $y = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

معنى ذلك أن $\cos y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $0 \leq y \leq \pi$

إذن $y = \pi/6$.

نظرية 2

الدالة $y = \text{Cos}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ و

$$\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

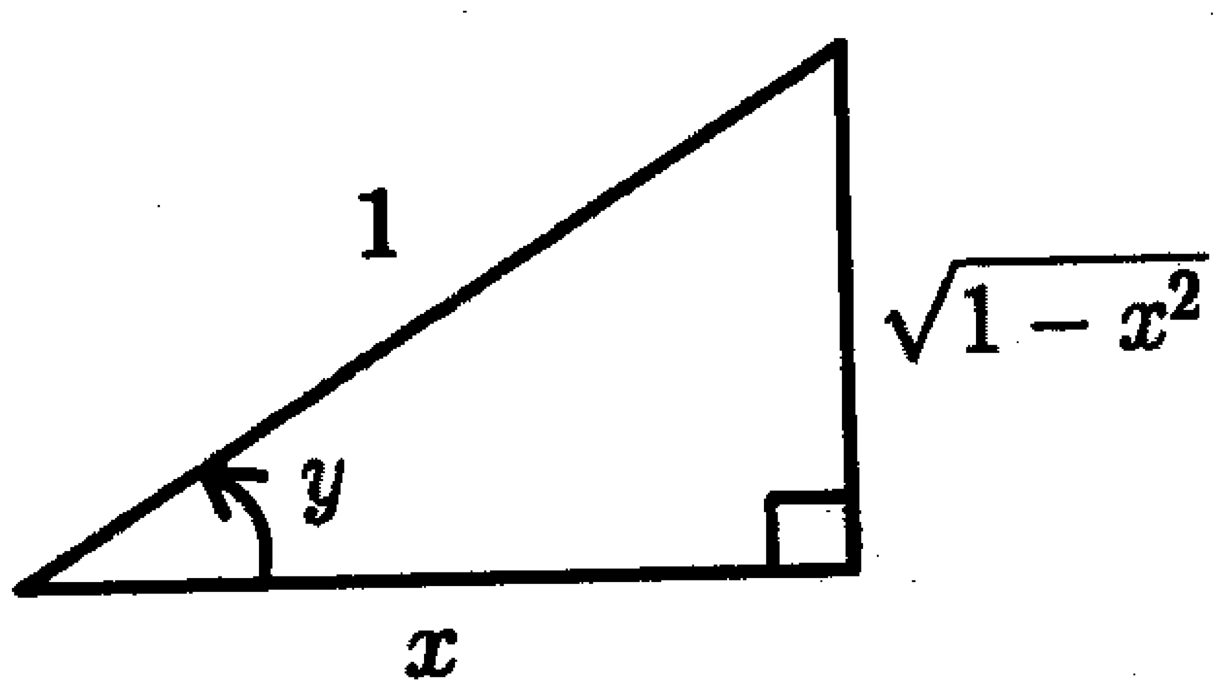
البرهان

لنفرض أن $y = \text{Cos}^{-1}x \iff \cos y = x$ ، $0 \le y \le \pi$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = -\sin y \dfrac{dy}{dx}$

أو $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$$

حيث إن $x = \cos y$



فإن $\sin y = \sqrt{1-x^2}$

إذن $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي أن: $$\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

مثـــال 3

أوجد $\dfrac{d}{dx}\text{Sin}^{-1}(\sqrt{x})$.

الحــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftarrow u=\sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

مثــال 4

أوجد $\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)$.

الحــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx}=3x^2+1\Leftarrow u=x^3+x$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}u=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}(3x^2+1)$$

$$=\frac{-(3x^2+1)}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$$

تمارين 2.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2 $\mathbf{Cos}^{-1}\left[\mathbf{cos}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

(3 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(4 $\mathbf{cos}\left[\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right]$

(5 $\mathbf{Cos}^{-1}(1)$

في التمارين من 6 إلى 10، استخدم الآلة الحاسبة، أو الجداول لإيجاد ما يلي:

(6 $\mathbf{Cos}^{-1}(0.6675)$

(7 $\mathbf{Cos}^{-1}(-0.9051)$

(8 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

(9 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right)$

(10 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

في التمارين من 11 إلى 18، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

(11 $y = x^2\mathbf{Cos}^{-1}(3x)$

(12 $\mathbf{Cos}^{-1}(xy) = \mathbf{Sin}^{-1}(x+y)$

(13 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(x^4)$

(14 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)$

(15 $y = x^2\mathbf{Cos}^{-1}(1-x)$

(16 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(\mathbf{sin}\ e^x)$

(17 $y = \mathbf{Cos}^{-1}\sqrt{x-1}$

(18 $y = x\mathbf{Cos}^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$

(19 إذا كان $0 \le x \le \pi$، فبرهن على أن: $\mathbf{Cos}^{-1}(\mathbf{cos}x) = x$.

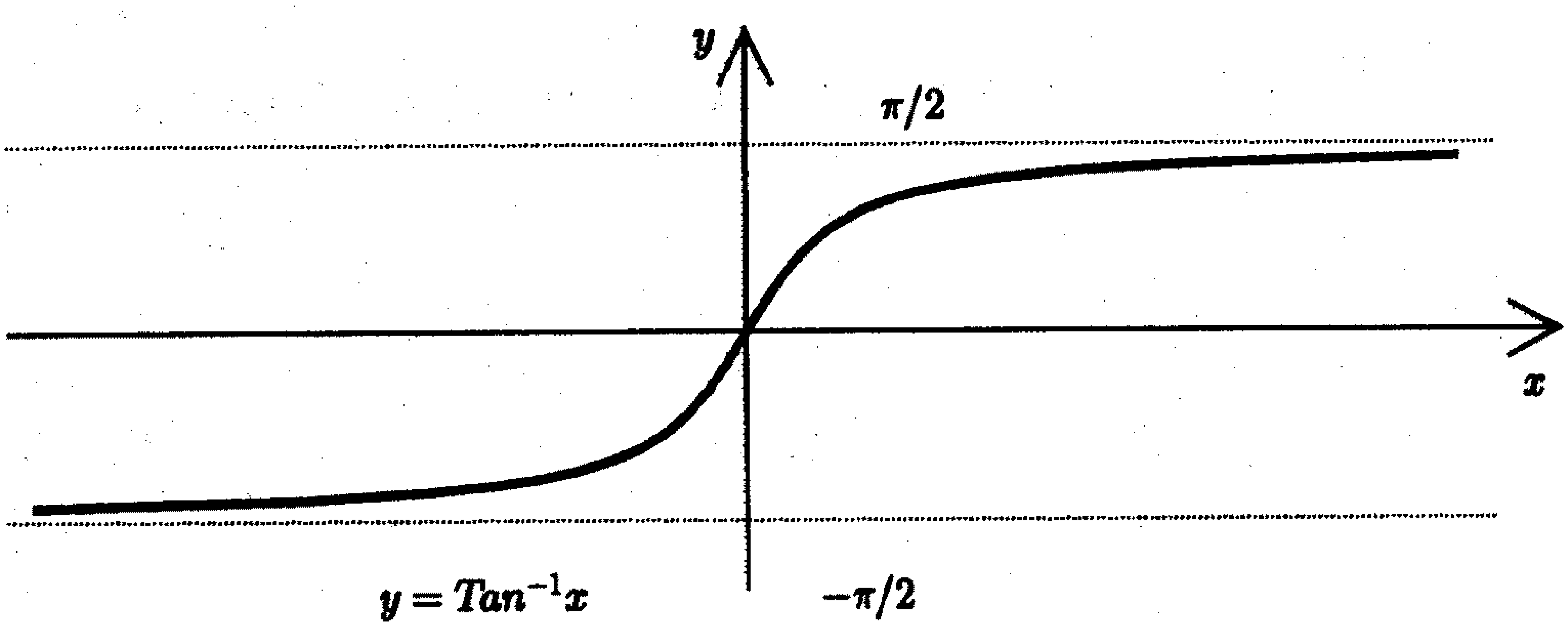
(20 إذا كان $-1 \le x \le 1$، فبرهن على أن: $\mathbf{cos}\ (\mathbf{Cos}^{-1}x) = x$.

3.8 دالة معكوس الظل والمشتقة الأولى لها

تعريف 8.3

تعرّف دالة معكوس الظل $\mathbf{Tan}^{-1}x$ كما يلي:

$y = \mathbf{Tan}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \tan y$ و $-\pi < y < \pi/2$.



الشكل 3.8

مثـــال 5

أوجد $\mathbf{Tan}^{-1}(-1)$.

الحـــل

لنفرض أن:

$$y = \mathbf{Tan}^{-1}(-1) \Longleftrightarrow \tan y = -1 \quad \text{و} \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

إذن $y = -\pi/4$ أي أن $\mathbf{Tan}^{-1}(-1) = -\pi/4$

نظرية 3

الدالة $y = \text{Tan}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

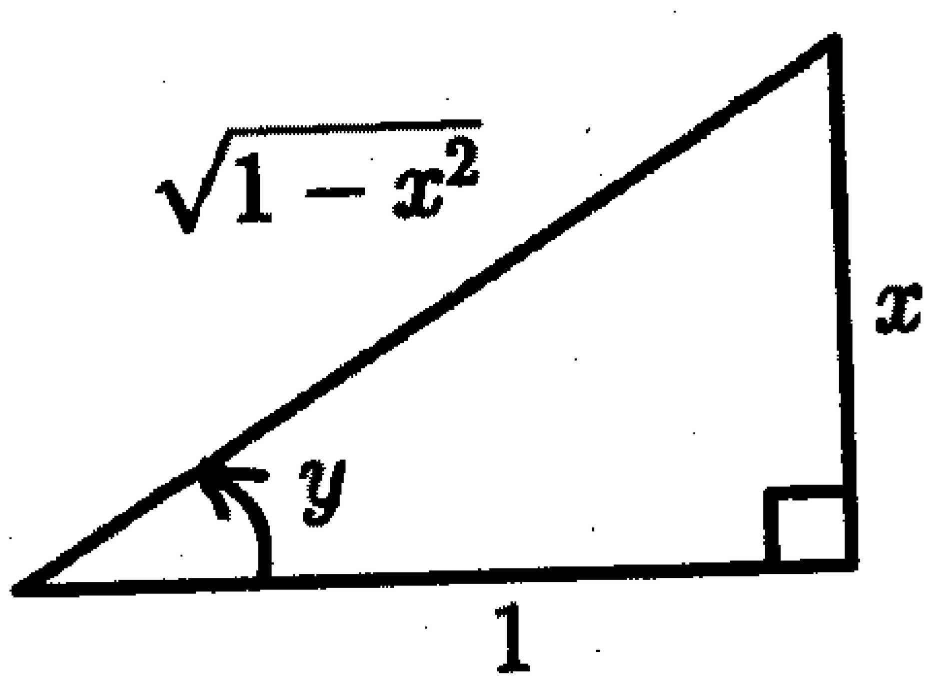
$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

البرهان

لنفرض أن $y = \text{Tan}^{-1} \iff \tan y = x$ ، $-\pi/2 < y < \pi/2$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = \sec^2 y\frac{dy}{dx}$

أو $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y}$



الآن $\sec y = \sqrt{1+x^2}$

إذن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

ومعنى ذلك أن:

$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

حيث u دالة في x.

مثـــال 6

أوجد $\dfrac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}(\dfrac{x}{2})$

الحــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Longleftarrow u=\frac{x}{2}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Tan}^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{1+(x/2)^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{4+x^2}$$

تمارين 3.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Tan}^{-1}(-1)$

2) $\mathbf{sin}\ (\mathbf{Tan}^{-1}(-5))$

3) $\mathbf{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4) $\mathbf{Tan}^{-1}\left[\mathbf{tan}\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

5) $\mathbf{Tan}^{-1}\left[\mathbf{tan}\ \left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

6) أوضح أن $\mathbf{Tan}^{-1}(\mathbf{tan}\ (x))=x$ لكل $-\pi/2<x<\pi/2$.

7) أوضح أن $\mathbf{tan}\ (\mathbf{Tan}^{-1}(x))=x$ لكل قيم x.

13) أوضح أن $\mathbf{tan}\ (\mathbf{Tan}^{-1}x+\mathbf{Tan}^{-1}y)=\dfrac{x+y}{1-xy}$ حيث أن $xy\neq 1$.

9) أوضح أن $\mathbf{tan}\ \left(\frac{1}{2}\mathbf{Cos}^{-1}x\right)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ لكل $-1<x<1$.

10) أوضح أن $\sin\left(\mathbf{Tan}^{-1}x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ لكل قيم x.

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

11) $f(x)=\mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

12) $g(x)=\mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x+2}{1-2x}\right)$

13) $f(x)=\tan\left(2\,\mathbf{Tan}^{-1}\dfrac{x}{2}\right)$

14) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

15) $f(x)=\mathbf{Tan}^{-1}(x-4)^2$

16) $g(x)=\mathbf{Tan}^{-1}(\ln x)$

17) $f(x)=\mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

18) $f(x)=\mathbf{Tan}^{-1}\sqrt{\cos x}$

19) $g(x)=xe^x\mathbf{Tan}^{-1}x$

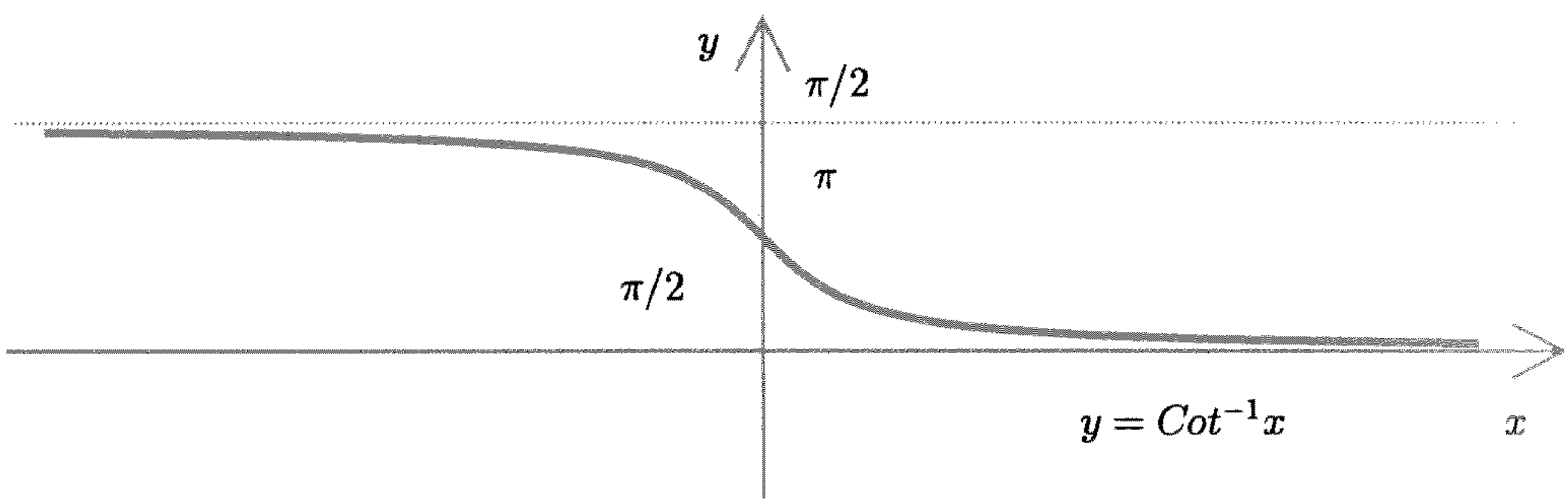
20) $g(x)=x\mathbf{Tan}^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

4.8 دالة معكوس ظل التمام والمشتقة الأولى لها

تعريف 4.8

تعرّف دالة معكوس ظل التمام $\mathrm{Cot}^{-1}x$ كما يلي:

$y = \mathrm{Cot}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \cot y$ و $0 < y < \pi$.



الشكل 4.8

مثـــال 7

أوجد $\mathbf{Cot}^{-1}(\sqrt{3})$.

الحـــل

لنفرض أن $y = \mathbf{Cot}^{-1}\sqrt{3} \iff \cot y = \sqrt{3}$ و $0 < y < \pi$

إذن $y = \pi/6$

نظرية 4

الدالة $y = \mathrm{Cot}^{-1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

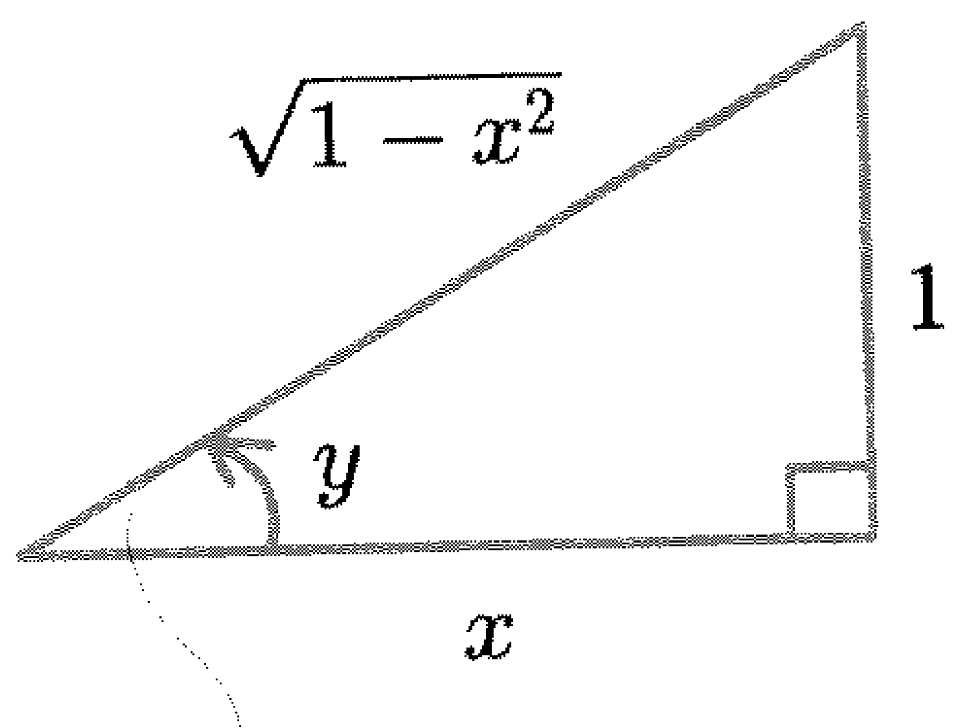
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

البرهان

لنفرض أن $y = \mathbf{Cot}^{-1}x \iff \mathbf{cot}\ y = x$ ، $0 < y < \pi$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = -\mathbf{csc}\ ^2 y \dfrac{dy}{dx}$

إذن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\mathbf{csc}^2 y}$



$$\mathbf{csc}\ y = \sqrt{1+x^2}$$

$$\mathbf{csc}\ ^2 y = 1 + x^2$$

إذن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

ومعنى ذلك أن:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cot}^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}u = -\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

بعض العلاقات التي تربط معكوس الدوال المثلثية:

(1)
$$\mathbf{Cot}^{-1}x = \begin{cases} \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x > 0 \\ \pi + \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

(2 $Csc^{-1}x = \mathbf{Sin}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ عندما $|x| \geq 1$.

3) $\mathbf{Sec}^{-1}x = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ عندما $|x| \geq 1$.

تستخدم هذه العلاقات في البرهنة على بعض الصيغ التالية:

بعض التكاملات

1) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathbf{Sin}^{-1}u + C$.

2) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\mathbf{Cos}^{-1}u + C$.

3) $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathbf{Tan}^{-1}u + C$.

4) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \mathbf{Sec}^{-1}|u| + C$.

5) $\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = Csc^{-1}|u| + C$.

6) $\int \frac{-du}{1+u^2} = \mathbf{Cot}^{-1}u + C$

تمارين 4.8

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد ما يلي:

1) $\mathbf{Cot}^{-1}(-1)$ 2) $\mathbf{Cot}^{-1}(0)$

3) $\mathbf{Cot}^{-1}(-\sqrt{3})$ 4) $\sin\left[\mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right]$

5) أوضح أن $\mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{cot}\ (x)) = x$ لكل $0 < x < \pi$.

6) أوضح أن $cot(\mathbf{Cot}^{-1}(x)) = x$ لكل x.

في التمارين من 7 إلى 12، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

7) $f(x) = \mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$

8) $g(x) = \mathbf{Sin}^{-1}\frac{2}{x} + \mathbf{Cot}^{-1}\frac{x}{2}$

9) $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}(e^{x})$

10) $g(x) = \mathbf{Sin}^{-1}[\mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{ln}\ x)]$

11) $f(x) = \mathbf{Cot}^{-1}(x^2 + 5)$

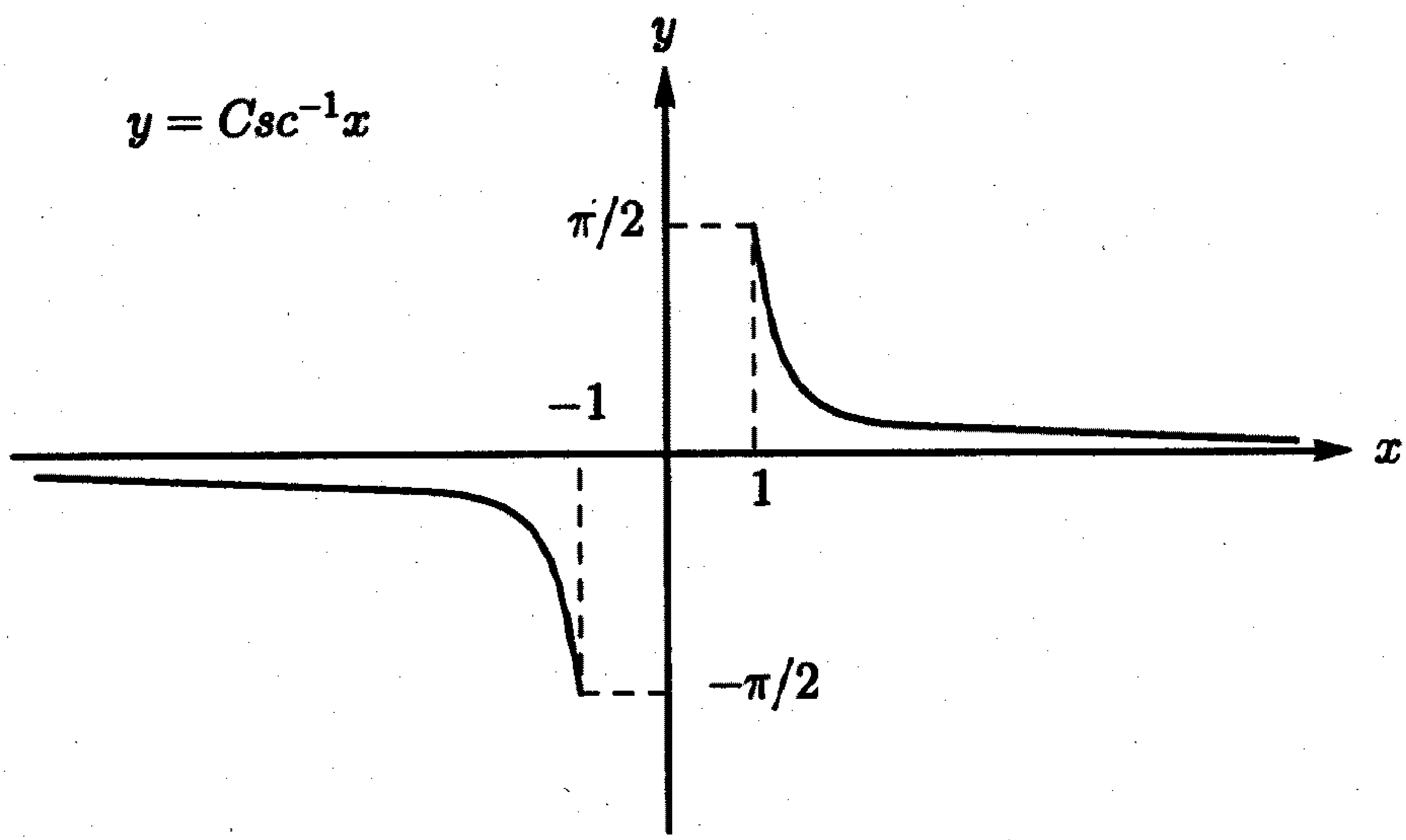
12) $g(x) = \mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

5.8 دالتا معكوس قاطع وقاطع التمام والمشتقة الأولى لهما

تعريف 5.8

تعرّف الدالة $Csc^{-1}x$ كما يلي:

$y = Csc^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \csc y$ و $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ ، $y \neq 0$، $|x| \ge 1$.



شكل 5.8

مثـــال 8

أوجد $Csc^{-1}(\sqrt{2})$.

الحـل

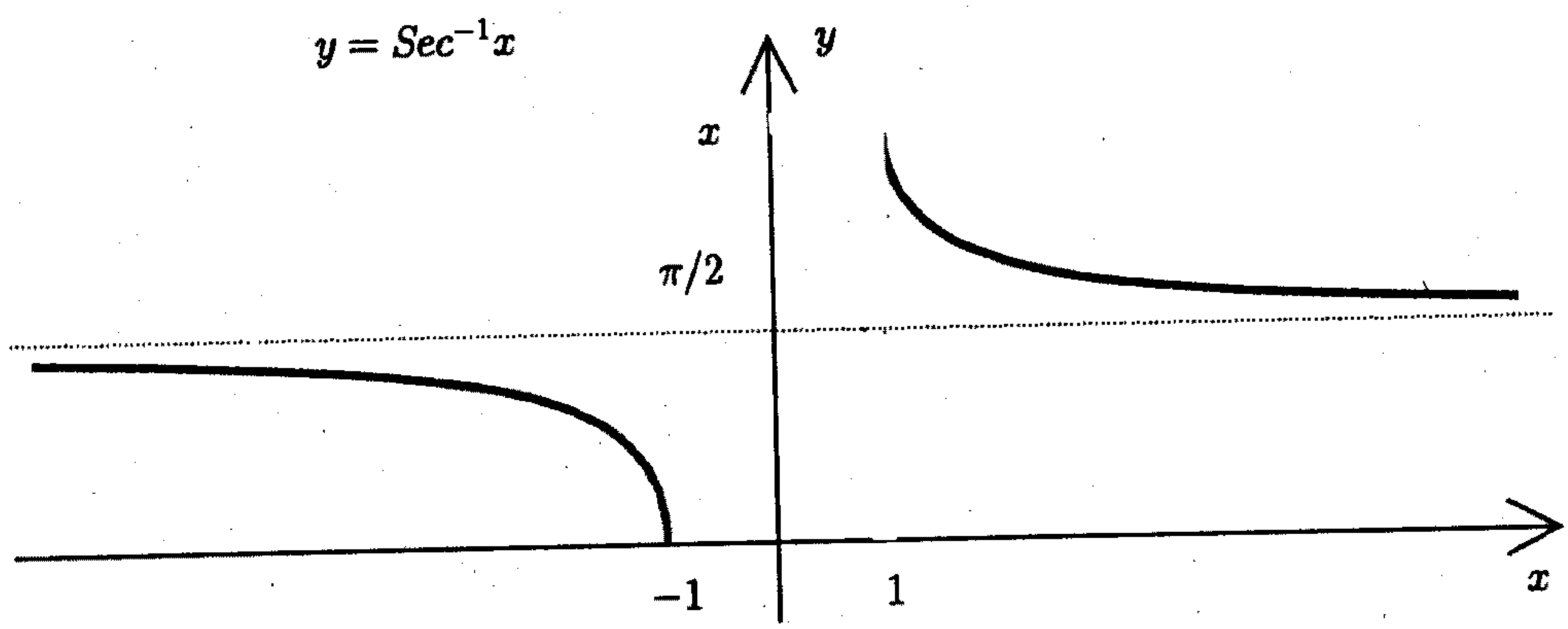
لـنـفـرض أن $y = Csc^{-1}\sqrt{2} \iff \csc y = \sqrt{2}$ و $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ و $y \neq 0$ إذن $y = \pi/4$.

تعريف 6.8

تعرّف الدالة $\mathrm{Sec}^{-1}x$ كما يلي:

$y = \mathrm{Sec}^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $x = \sec y$ و $0 \le y \le \pi$ ، $y \ne \pi/2$ ،

$|x| \ge 1$.



الشكل 6.8

مثال 9

أوجد $\mathrm{Sec}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

الحل

$y = \mathrm{Sec}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}} \iff \sec y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ و $0 \le y \le \pi$ و $y \ne \pi/2$.

إذن $y = \pi/6$.

المشتقة الأولى للدالتين Csc^{-1} و $\text{Sec}^{-1}u$

$$\frac{d}{dx}Csc^{-1}u=\frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}u=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

مثال 10

أوجد $\frac{d}{dx}Csc^{-1}\sqrt{x}$.

الحل

لنفرض أن $u=\sqrt{x} \Longrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن

$$\frac{d}{dx}Csc^{-1}\sqrt{x}=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

مثال 11

أوجد $\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}(4x+2)$.

الحل

لنفرض أن $u=4x+2 \Longrightarrow \frac{du}{dx}=4$

إذن

$$\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}(4x+2)=\frac{4}{|4x+2|\sqrt{4x+2)^2-1}}$$

مثـــال 12

أوجد $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

الحـــل

$$\int \frac{dx}{a^2[1+x^2/a^2]} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\mathbf{Tan}^{-1}(\frac{x}{a}) + C$$

مثـــال 13

أوجد $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^3 \Longrightarrow du = 3x^2dx$ أو $\frac{du}{3} = x^2dx$

إذن

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{Sin}^{-1}u + C = \frac{1}{3}\mathbf{Sin}^{-1}x^3 + C.$$

مثـــال 14

أوجد $\int \frac{e^{-x}dx}{4+e^{-2x}}$.

الحـــل

لنفرض أن $-du = e^{-x}dx \Longleftarrow u = e^{-x}$

إذن

$$\int \frac{e^{-x}dx}{4+e^{-2x}} = -\int \frac{du}{4+u^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{1+(u/2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{Tan}^{-1}\frac{u}{2}+C=-\frac{1}{2}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)+C$$

مثال 15

أوجد $\int_{-6}^{3\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

الحل

$$\int_{-6}^{-3\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{3}\int_{-6}^{-3\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{(x/3)^2-9}}=\frac{1}{3}\mathbf{Sec}^{-1}\left|\frac{x}{3}\right|\Big|_{-6}^{-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{3}[\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{2}-\mathbf{sec}^{-1}2]=\frac{1}{3}(-\frac{\pi}{12})=-\frac{\pi}{36}$$

مثال 16

أوجد $\int\frac{dx}{1+(3-x)^2}$.

الحل

لنفرض أن $du=-dx \Longleftarrow u=3-x$

الآن

$$\int\frac{dx}{1+(3-x)^2}=\int\frac{-du}{1+u^2}=\mathbf{Cot}^{-1}u+C=\mathbf{Cot}^{-1}(3-x)+C$$

تمارين 5.8

في التمارين من 1 إلى 15، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Sec}^{-1}(-2)$
2) $Csc^{-1}\sqrt{2}$
3) $Csc^{-1}(-\sqrt{2})$
4) $\mathbf{sec}\ (Csc^{-1}\sqrt{2})$
5) $\mathbf{sec}\left(2\mathbf{Sin}^{-1}\frac{1}{8}\right)$
6) برهن على أن $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{sec}\ x) = x$ حيث $x \neq \pi/2$ ، $0 \leq x \leq \pi$.
7) برهن على أن $\mathbf{sec}\ (\mathbf{Sec}^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.
8) برهن على أن $Csc^{-1}(\mathbf{csc}\ x) = x$ حيث $x \neq 0$ ، $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
9) برهن على أن $\mathbf{csc}\ (Csc^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.

في التمارين من10 إلى 17، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

10) $f(x) = Csc^{-1}(\mathbf{ln}\ x^2)$
11) $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{cot}\ x)$
12) $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(4x+2)$
13) $g(x) = x^2\mathbf{Sec}^{-1}x^2$
14) $f(x) = \dfrac{Csc^{-1}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$
15) $g(x) = \dfrac{\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{x}}{x^2+1}$
16) $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(x^2+9)$
17) $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

في التمارين من 18 إلى 20، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل حالة:

18) $\mathbf{Sec}^{-1}x + \mathbf{Csc}^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$
19) $\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{y} + x^2 = x - 1$
20) $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{ln}\ y) + \mathbf{ln}\ (x+1) = 1$

تمارين على الفصل الثامن

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\mathbf{Cos}^{-1}\Big(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)$

3) $\mathbf{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 4) $\mathbf{sin}\,\Big(\mathbf{Cot}^{-1}\dfrac{3}{5}\Big)$

5) $\mathbf{Tan}^{-1}\Big(\mathbf{sin}\,\dfrac{\pi}{3}\Big)$ 6) $\mathbf{sin}\,\Big(\mathbf{Cot}^{-1}\dfrac{1}{5}\Big)$

7) $\mathbf{sin}\,(\mathbf{Tan}^{-1}0)$ 8) $\mathbf{sin}\,(Csc^{-1}4)$

9) $\mathbf{Sec}^{-1}(-2)$ 10) $Csc^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

11) $y=\mathbf{Tan}^{-1}(x-4)^2$ 12) $y=\mathbf{Sin}^{-1}(3x)$

13) $y=x^2\mathbf{Cos}^{-1}(1-x)$ 14) $y=\mathbf{ln}\,(\mathbf{Sin}^{-1}(e^{-x}))$

15) $y=\mathbf{Cos}^{-1}\Big(\dfrac{x^3+1}{x^5}\Big)$ 16) $y=\mathbf{Tan}^{-1}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

17) $y=\mathbf{ln}\,(\mathbf{Tan}^{-1}x)$ 18) $y=\mathbf{Tan}^{-1}(\mathbf{ln}\,x)$

19) $y=Csc^{-1}(\mathbf{ln}\,x)$ 20) $y=\mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{sec}\,x)$

21) برهن على أن $\mathbf{Sec}^{-1}x=\mathbf{Cos}^{-1}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$، عندما يكون $|x|\geq 1$.

22) برهن على أن $Csc^{-1}x=\mathbf{Sin}^{-1}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$، عندما يكون $|x|\geq 1$.

23) برهن على أن $\dfrac{d}{dx}\mathbf{Sec}^{-1}x=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

24) برهن على أن $\dfrac{d}{dx}Csc^{-1}x=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

في التمارين من 25 إلى 40، أوجد التكاملات المذكورة:

25) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

26) $\int \frac{x^3}{x^8+1}dx$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

28) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx$

29) $\int \frac{e^{-x}}{4+e^{-2x}}dx$

30) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}dx$

31) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}dx$

32) $\int \frac{\cos(x/2)}{1+\sin^2(x/2)}dx$

33) $\int \frac{\csc x \cot x}{1+9\csc^2 x}dx$

34) $\int_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{8-x^2}}$

35) $\int \frac{du}{u\sqrt{9u^2-100}}$

36) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$

37) $\int \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

38) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\cot^2 x}}$

39) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{9+x^4}$

40) $\int \frac{\cot^{-1}x}{1+x^2}dx$

الفصل التاسع

الدوال الزائدية

The Hyperbolic Functions

تظهر في التطبيقات الفيزيائية دوال، هي تركيبة خطية للدالتين e^x و e^{-x}، وهناك تركيبات من هاتين الدالتين كثيرة الاستخدام، ولهذا أعطي لها اسم خاص.

1.9 دالتا الجيب وجيب التمام الزائدية

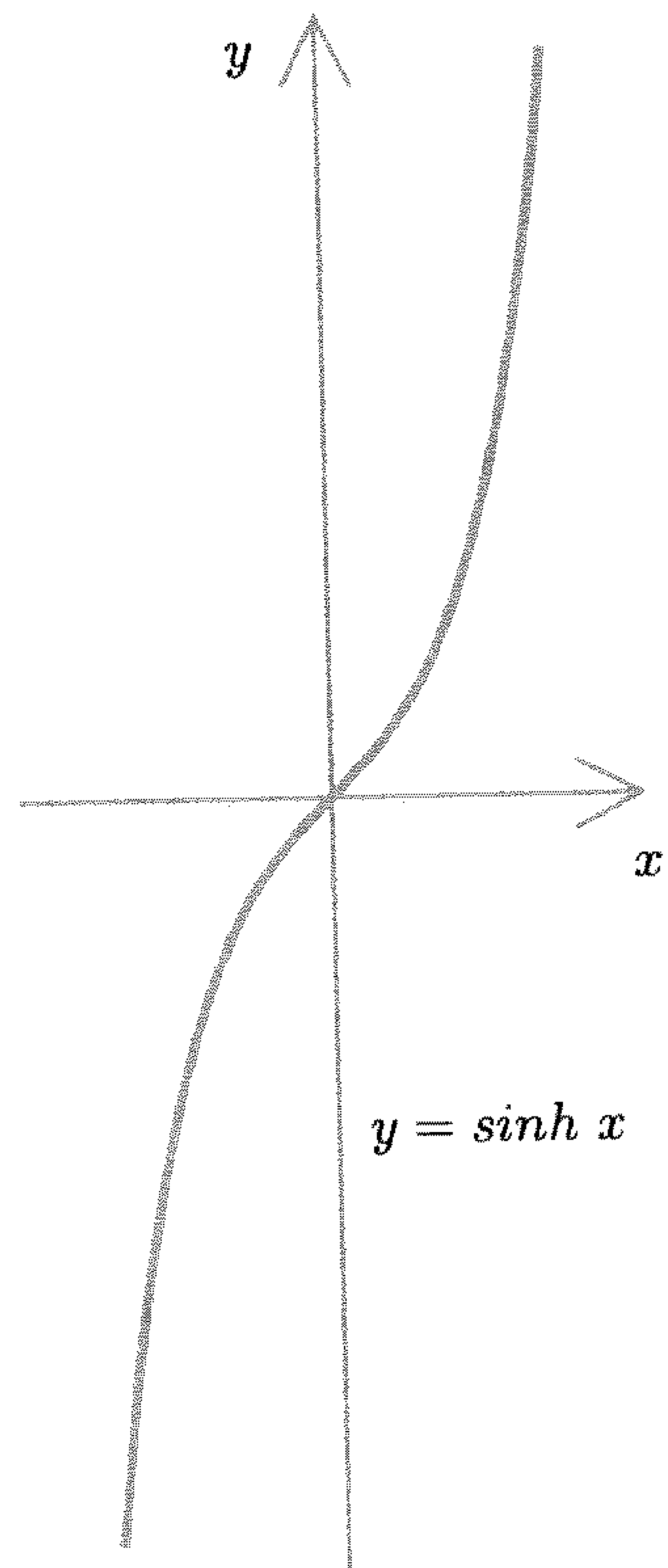
تعريف 1.9

1) دالة الجيب الزائدية: وهي الدالة

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) دالة جيب التمام الزائدية: وهي الدالة

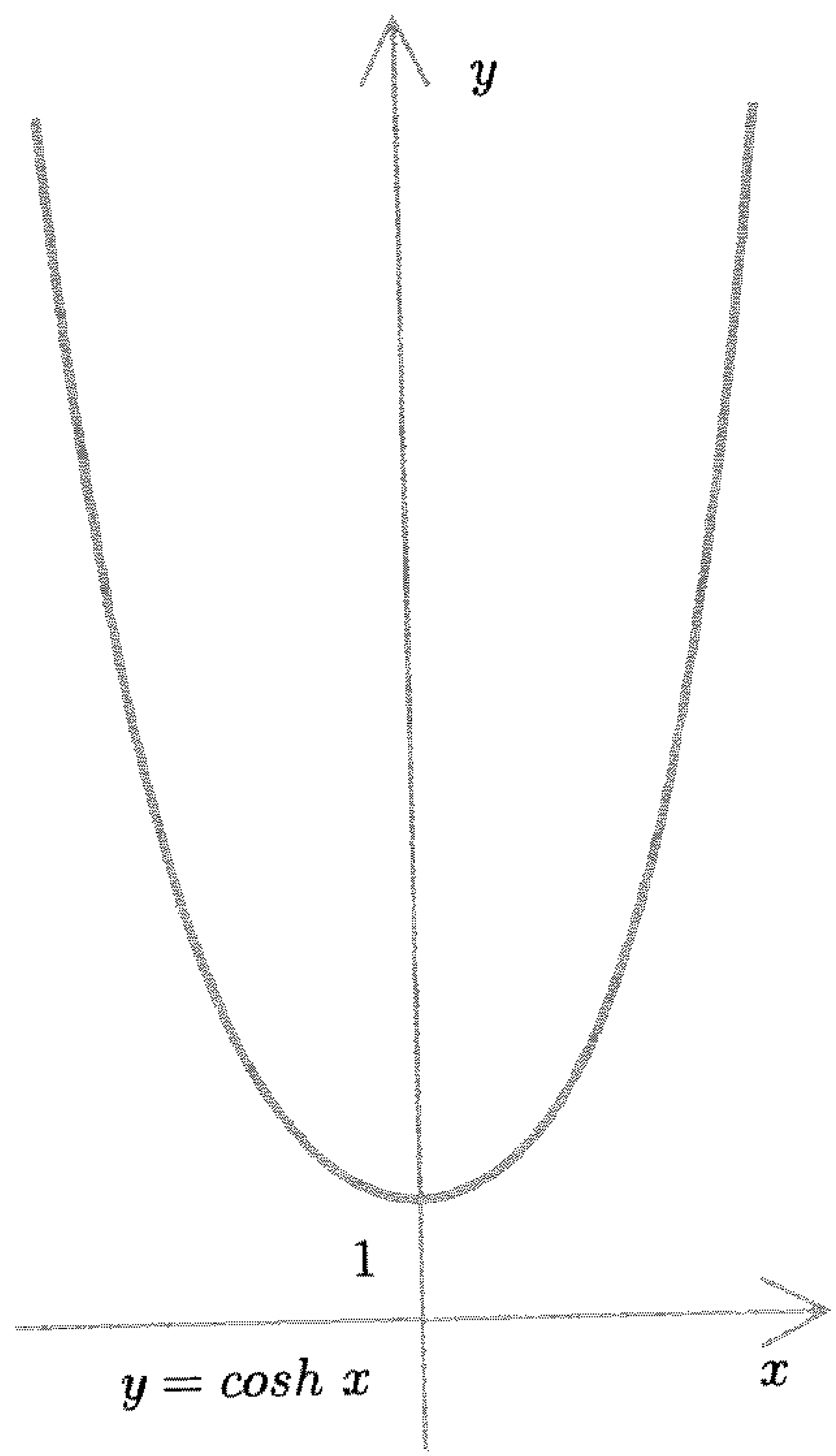
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



الشكل 1.9

نطاق $\sinh(x)$ هو $\mathbb{R}$

مدى $\sinh(x)$ هو $\mathbb{R}$



الشكل 2.9

نطاق $\cosh(x)$ هو $\mathbb{R}$

مدى $\cosh(x)$ هو $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$

تمارين 1.9

1) أثبت أن $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

2) أثبت أن $\cosh(-x) = \cosh(x)$

3) أثبت أن $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

4) أثبت أن $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

5) أثبت أن $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

6) أثبت أن $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$.

7) أثبت أن $\sinh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$

8) أثبت أن $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

9) أثبت أن $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$، حيث n عدد صحيح موجب.

10) أثبت أن $e^x = \sinh x + \cosh x$.

2.9 المشتقة الأولى لدالتي الجيب وجيب التمام الزائدية

نظرية 1

الدالة $y = \sinh(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$

البرهان

بما أن $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

فإن $$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

نظرية 2

الدالة $y = \cosh(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

البرهان

بما أن $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

فإن $$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\sinh(u) = \cosh(u).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(u) = \sinh(u).\frac{du}{dx}$$

من النظريتين السابقتين، نجد أن:

$$\int \textbf{sinh}\ (u)du = \textbf{cosh}\ (u) + C$$
$$\int \textbf{cosh}\ (u)du = \textbf{sinh}\ (u) + C$$

مثـــال 1

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \textbf{cosh}\ (x^3 - 1)$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^3 - 1$

إذن $\frac{du}{dx} = 3x^2$

الآن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\textbf{cosh}\ (u) = \textbf{sinh}\ (u).\frac{du}{dx} = \textbf{sinh}\ (x^3 + 1).3x^2$$

$$= 3x^2\textbf{sinh}\ (x^3 + 1)$$

مثـــال 2

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = x\textbf{sinh}\ (3x^2)$.

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\textbf{sinh}\ (3x^2) + \textbf{sinh}\ (3x^2)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 6x^2\textbf{cosh}\ (3x^2) + \textbf{sinh}\ (3x^2)$$

متطابقة

$$\textbf{cosh}^2(x) - \textbf{sinh}^2(x) = 1$$

البرهان

ضع $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

فإن

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

إذن

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

تمارين 2.9

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

1) $f(x) = \sinh(3x^2 + 5)$

2) $g(x) = \cosh(\ln x)$

3) $f(x) = \cosh \frac{1}{x}$

4) $g(x) = e^{\cosh(x)}$

5) $f(x) = \sin^{-1}(\cosh x)$

6) $g(x) = e^{\sinh(x)}$

في التمارين من 7 إلى 12، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل حالة:

7) $x^2 = \sinh y$

8) $\sinh y = \cosh x$

9) $\sin x = \cosh y$

10) $\sinh(\ln x) = y^2 - 1$

11) $y = \cosh(\ln x)$

12) $y = \ln(\sinh x^3)$

في التمارين من 13 إلى 20، احسب التكامل المعطى في كل حالة:

13) $\int \sinh \frac{2x}{3}\, dx$

14) $\int \frac{\sinh (3x)}{\cosh (3x)}\, dx$

15) $\int \sinh^{11}(2x)\cosh (2x)\, dx$

16) $\int \cosh^{3}(x)\sinh (x)\, dx$

17) $\int e^{\sinh (x)}\cosh (x)\, dx$

18) $\int x^{2}\sinh (x^{3})\, dx$

19) $\int \frac{\cosh (3x)}{1+\sinh (3x)}\, dx$

20) $\int \frac{\cosh (1/x^{4})}{x^{5}}\, dx$

3.9 بقية الدوال الزائدية

تعريف 2.9

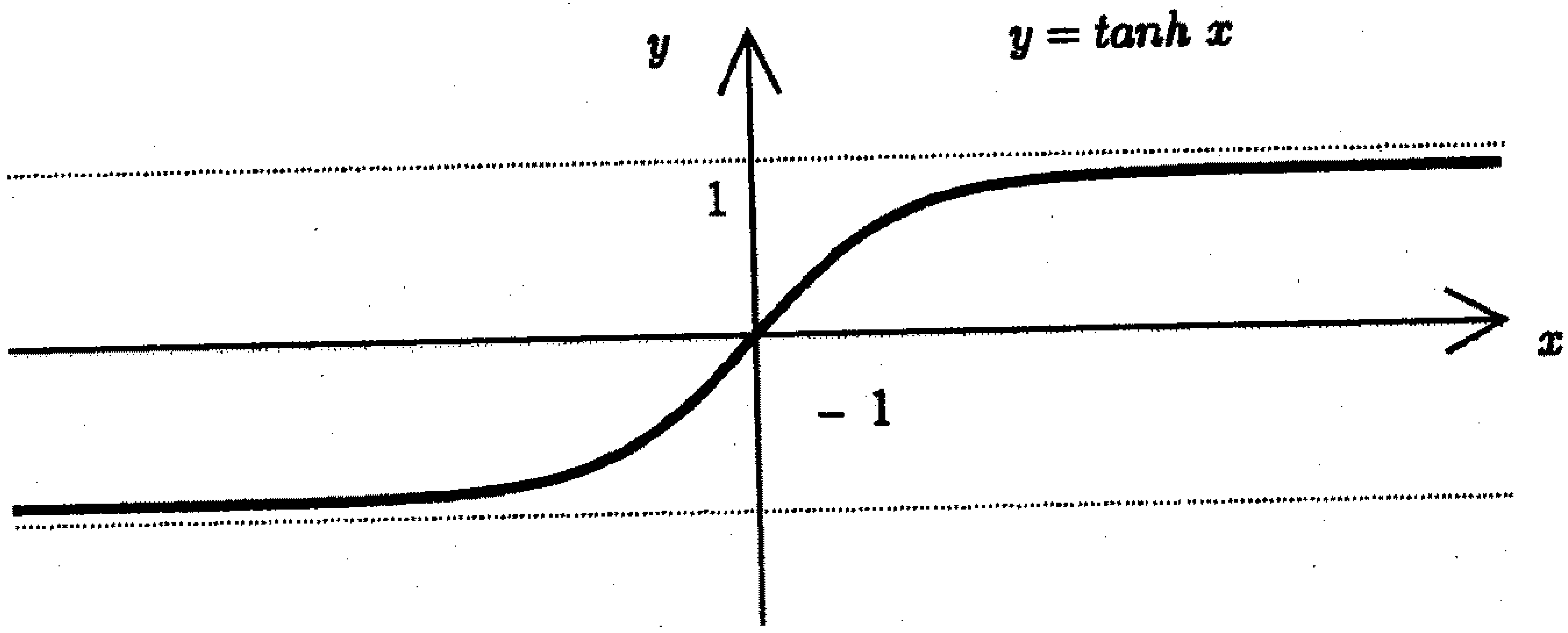
تعرّف بقية الدوال الزائدية كما يلي:

(1 $$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

(2 $$\coth(x)=\frac{1}{\tanh(x)}=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

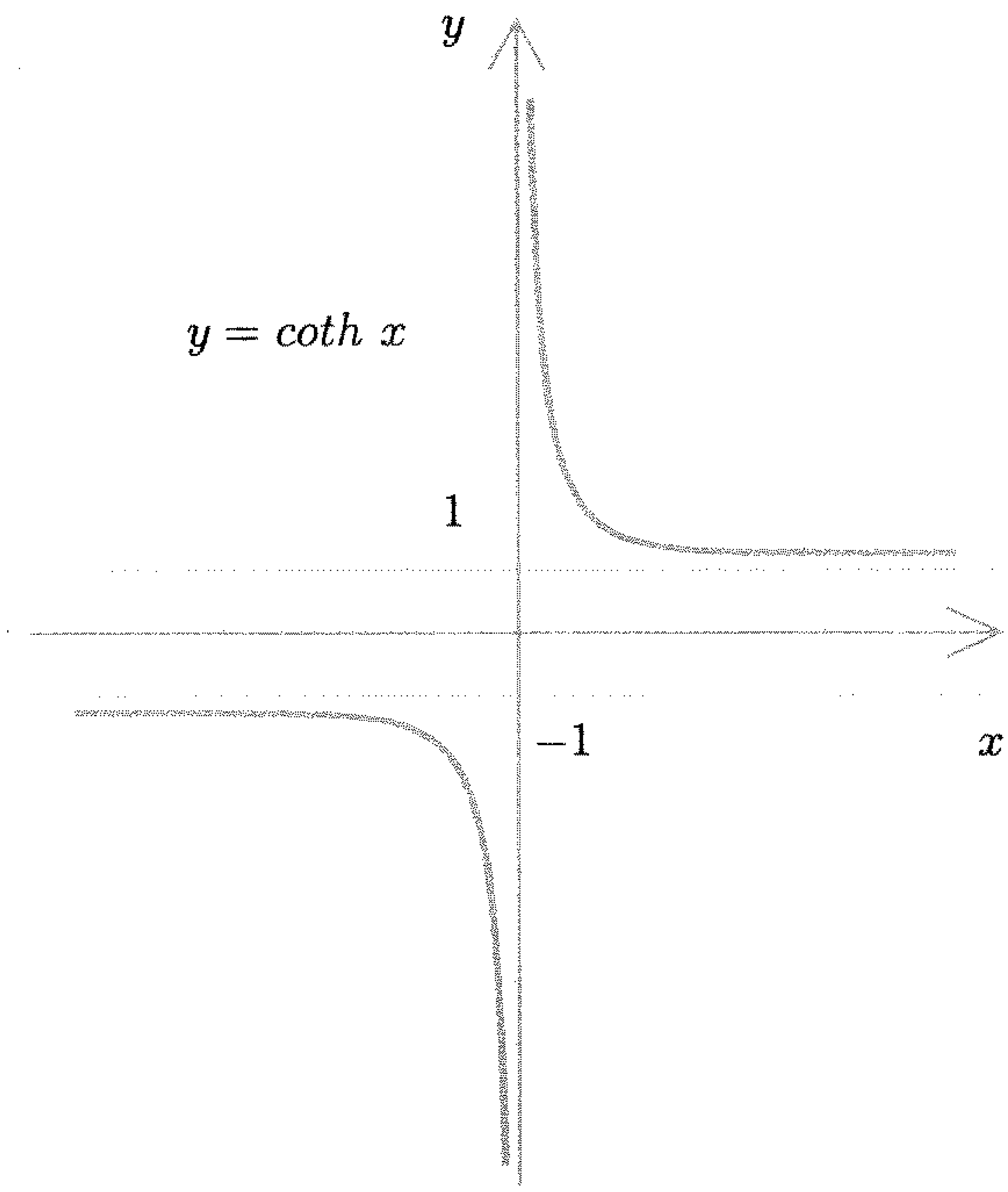
(3 $$\operatorname{sech}(x)=\frac{1}{\cosh(x)}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

(4 $$\operatorname{csch}(x)=\frac{1}{\sinh(x)}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$



الشكل 3.9

نطاق $\tanh(x)$ هو $\mathbb{R}$ مدى $\tanh(x)$ هو $(-1,1)$

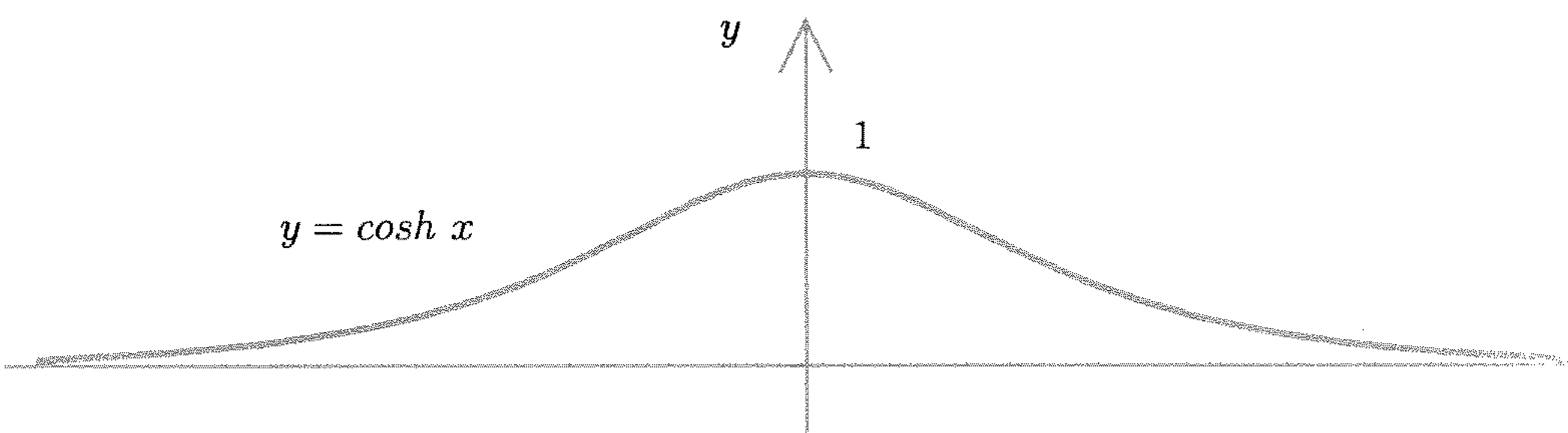


الشكل 4.9

نطاق $\coth(x)$ هو $\mathbb{R}-\{0\}$

مدى $\coth(x)$

هو $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

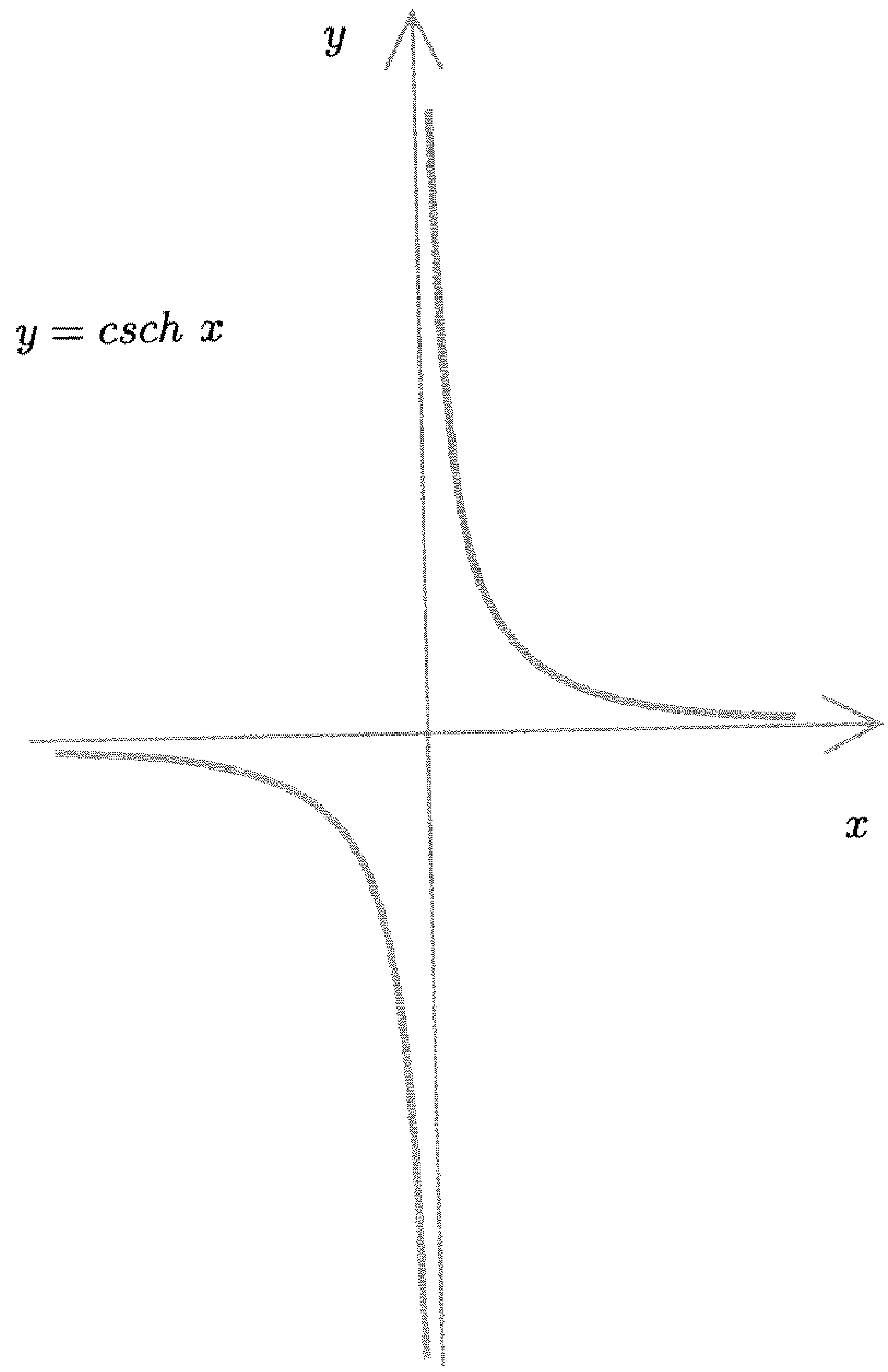


الشكل 5.9

نطاق $\operatorname{sech}(x)$ هو $\mathbb{R}$ مدى $\operatorname{sech}(x)$ هو $[0,1]$

نطاق $\mathbf{csch}(x)$ هو $I\!R-\{0\}$

مدى $\mathbf{csch}(x)$ هو $I\!R-\{0\}$



الشكل 6.9

تمارين 3.9

1) أثبت أن $1-\mathbf{tanh}^2x=\mathbf{sech}^2x$.

2) أثبت أن $\mathbf{coth}^2x-1=\mathbf{csch}^2x$.

3) أوجد $\mathbf{tanh}(x)$ إذا كان $\mathbf{sech}(x)=\dfrac{3}{8}$.

4) أوجد $\mathbf{csch}(x)$ إذا كان $\mathbf{coth}(x)=\dfrac{3}{2}$.

5) إذا كان $\mathbf{csch}(x)=5$، أوجد بقية الدوال الزائدية.

4.9 تفاضل وتكامل بقية الدوال الزائدية

1) $$\frac{d}{dx}\mathbf{tan}h(u) = \mathbf{sec}h^2(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك

$$\int \mathbf{sec}h^2(u)du = \mathbf{tan}h(u) + c$$

2) $$\frac{d}{dx}\mathbf{cot}h(u) = -\mathbf{csc}h^3(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك

$$\int \mathbf{csc}h^2(u)du = -\mathbf{cot}h(u) + c$$

3) $$\frac{d}{dx}\mathbf{sec}h(u) = -\mathbf{sec}h(u)\mathbf{tan}h(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك:

$$\int \mathbf{sec}h(u)\mathbf{tan}h(u)du = -\mathbf{sec}h(u) + C$$

4) $$\frac{d}{dx}\mathbf{csc}h(u) = -\mathbf{csc}h(u)\mathbf{cot}h(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك:

$$\int \mathbf{csc}h(u)\mathbf{cot}h(u)du = -esch(u) + C$$

مثــال 3

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x\mathbf{tan}h\dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ناقش اتصالية الدالة f وكذلك قابليتها للاشتقاق.

الحــل

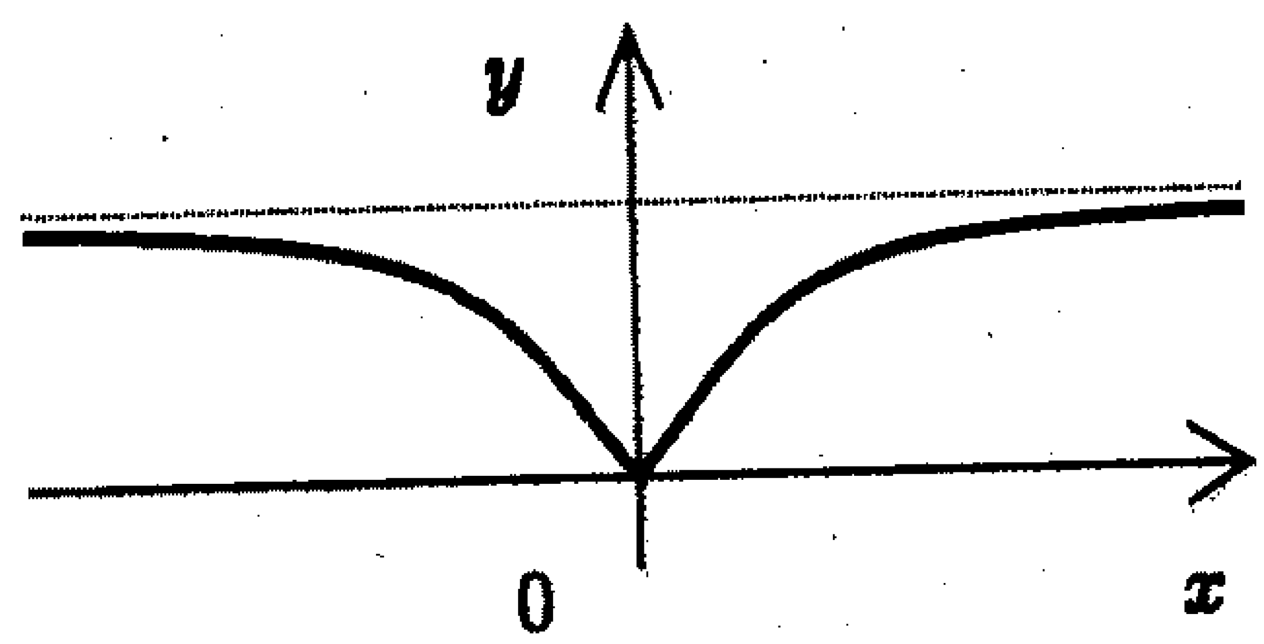
من بيان الدالة f نلاحظ أن الدالة f متصلة عند $x = 0$، وبالتالي تكون الدالة f

متصلة على $\mathbb{R}$.

لكن $f'(x)=\tanh\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\text{Sech}^2\frac{1}{x}$ حيث $x\neq 0$

من البيان نلاحظ أيضاً أن f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

هذا مثال آخر يوضح أن الاتصالية عند نقطة لا تؤدي للاشتقاق عند تلك النقطة.



تمارين 4.9

1) برهن على أن $\frac{d}{dx}\tanh(x)=\text{sech}^2(x)$.

2) برهن على أن $\frac{d}{dx}\coth(x)=-\text{csch}^2(x)$.

في التمارين من 3 إلى 10، أوجد التفاضل أو التكامل المعطى:

3) $\frac{d}{dx}d^{\tanh(x)}$

4) $\frac{d}{dx}\text{csch}(\ln x)$

5) $\frac{d}{dx}\sin(\sinh x)$

6) $\frac{d}{dx}\tan(\text{csch}x)$

7) $\int\frac{\text{sech}(1/x)dx}{x^2}$

8) $\int\frac{\text{csch}^2(x)dx}{\sqrt[3]{\coth(x)}}$

9) $\int\text{sech}^{11/3}(x)\tanh(x)dx$

10) $\int\frac{\text{sech}^2(\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}}$

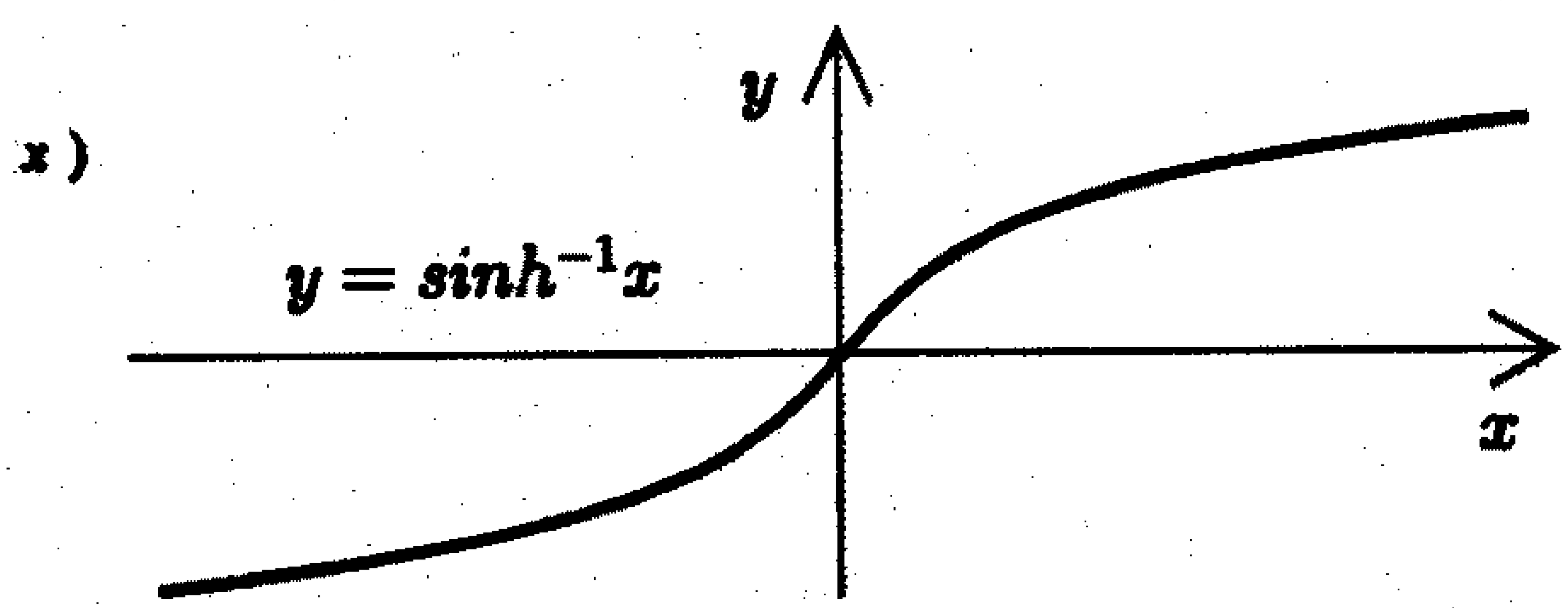
5.9 معكوس الدوال الزائدية Inverse Hyperbolic Functions

الدالة $y = \sinh x$ دالة أحادية، ولذلك فإن لها معكوساً.

تعريف 3.9

تعرّف دالة معكوس الجيب الزائدي بأنها:

$y = \sinh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \sinh(y)$.



الشكل 7.9

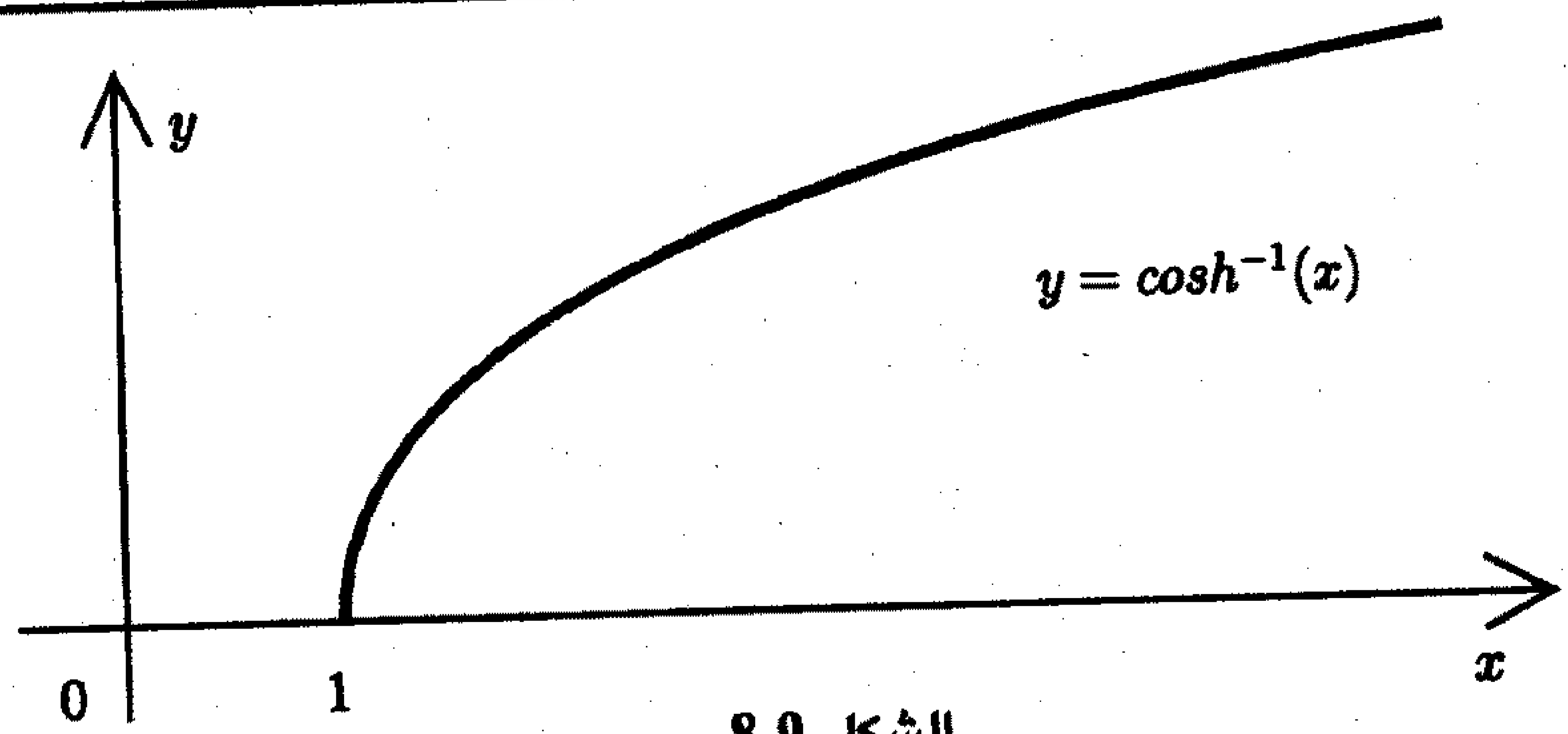
نطاق $\sinh^{-1}(x)$ هو $\boldsymbol{R}$ مدى $\sinh^{-1}(x)$ هو $\boldsymbol{R}$

بما أن الدالة $\cosh(x)$ ليست أحادية، فلا بد من تقييد نطاقها حتى يكون لها معكوس.

تعريف 4.9

تعرّف دالة معكوس الجيب التمام الزائدي بأنها:

$y = \cosh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \cosh(y)$ ، $y \geq 0$.



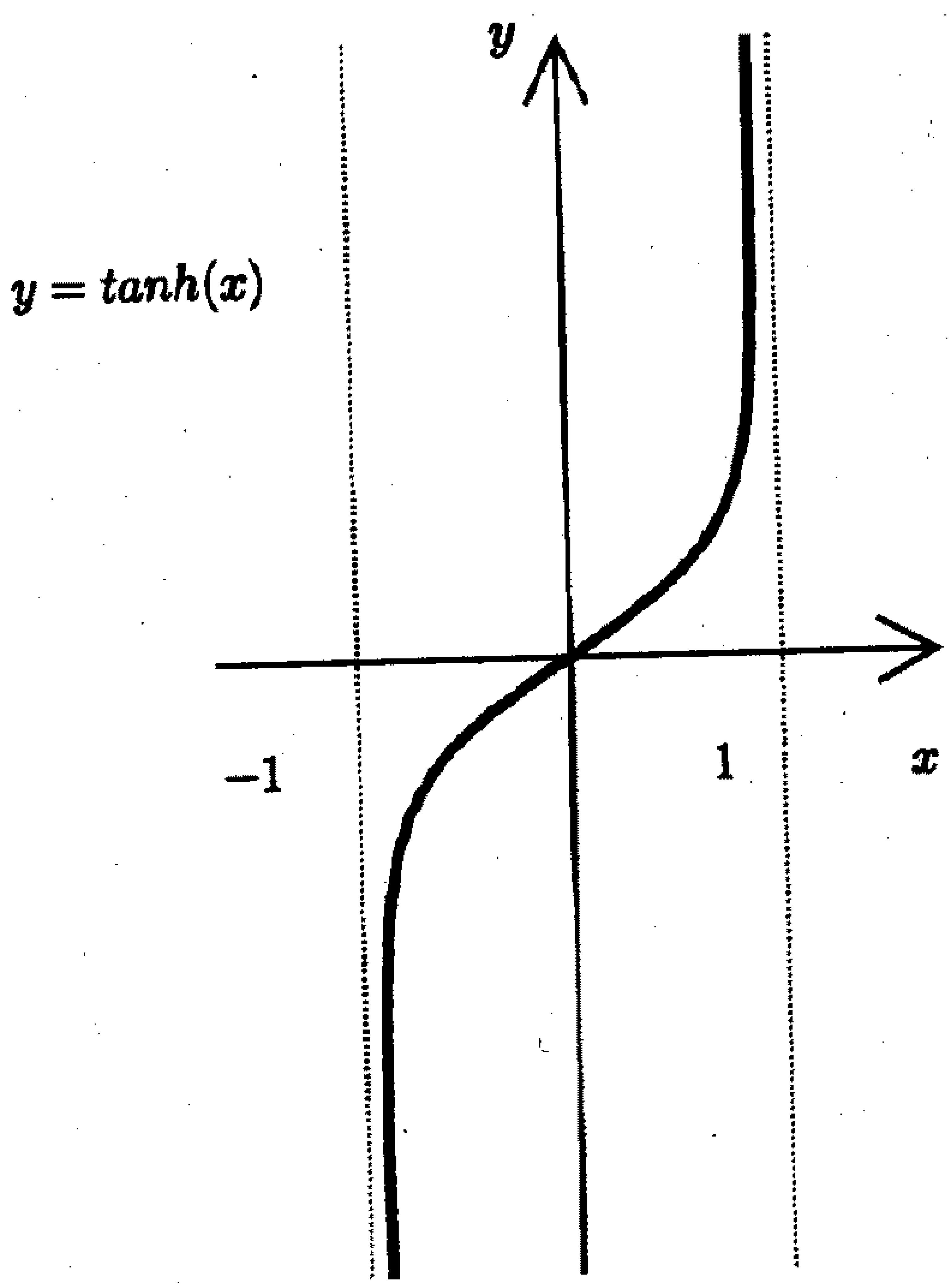
الشكل 8.9

نطاق $\cosh^{-1}(x)$ هو $[1,\infty)$ مدى $\cosh^{-1}(x)$ هو $[0,\infty)$

تعريف 5.9

تعرّف دالة معكوس الظل الزائدي بأنها:

$y = \tanh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \tanh(y)$.



الشكل 9.9

نطاق $\tanh^{-1}(x)$ هو $(-1,1)$

مدى $\tanh^{-1}(x)$ هو $\mathbb{R}$

تمارين 5.9

1) أوضح أن $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

2) برهن على أن $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

3) برهن على أن $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

4) أوجد ما يلي:

أ) $\sinh^{-1}(2)$ ب) $\cosh^{-1}(4)$ $\tanh^{-1}(1/2)$

5) ارسم بيانياً الدوال التالية:

أ) $y = -\cosh^{-1}x$ ب) $y = x - \cosh^{-1}x$

ج) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

6.9 المشتقة الأولى لمعكوس الدوال الزائدية

1) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ حيث $x>1$.

3) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{1-x^2}$ حيث $-1<x<1$.

البرهان

نبرهن (1) فقط ونترك البقية كتمارين.

$$x=\sinh(y) \iff y=\sinh^{-1}(x)$$

بتفاضل الطرفين، نجد أن:

$$1=\cosh(y)\frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh(y)}$$

عرفنا فيما سبق أن

$$\cosh^2(y)=\sinh^2(y)+1=x^2+1$$

$$\cosh(y)=\pm\sqrt{x^2+1}$$

ولكن $\cosh(y)\geq 0$

إذن $\cosh(y)=\sqrt{x^2+1}$

بالرجوع إلى $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh(y)}$، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال 4

أوجد $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x^2+e^x)$.

الحل

لنفرض أن $u = x^2+e^x \Longleftarrow \frac{du}{dx} = 2x+e^x$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x^2+e^x) &= \frac{1}{\sqrt{(x^2+e^x)^2-1}}(2x+e^x)\\ &= \frac{2x+e^x}{\sqrt{(x^2+e^x)^2-1}}\end{aligned}$$

مثال 5

أوجد $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(\tan x)$.

الحل

لنفرض أن $u = \tan x \Longleftarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

ولهذا فإن:

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(u) = \frac{1}{1-u^2}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-\tan^2 x}\sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{1-\tan^2 x}$$

مثال 6

أوجد $\frac{d}{dx}[\sinh^{-1}(x+1)\cosh^{-1}(x+2)]$.

الحــل

$$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1}(x+1)\cosh^{-1}(x+2)]$$
$$=\sinh^{-1}(x+1)\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x+2)$$
$$+\cosh^{-1}(x+2)\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x+1)$$
$$=\sinh^{-1}(x+1)\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$
$$+\cosh^{-1}(x+2)\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$
$$=\frac{\sinh^{-1}(x+1)}{\sqrt{x^2+4x+3}}+\frac{\cosh^{-1}(x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

تمارين 6.9

في التمارين من 1 إلى 7، أوجد المشتقة الأولى للدوال المعطاة:

1) $y=\cosh^{-1}(x)$

2) $y=\sinh^{-1}(\ln x)$

3) $y=\sinh^{-1}(\cosh x)$

4) $y=\tanh^{-1}(\ln x)$

5) $y=\sqrt[3]{\sinh^{-1}(x)}$

6) $y=\ln\sqrt{x^2-1}-x\tanh^{-1}(x)$

7) $y=\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

8) برهن على أن $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ إذا كان $x>1$.

9) برهن على أن $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{1-x^2}$ إذا كان $-1<x<1$.

في التمارين من 10 إلى 15، أوجد التكامل المعطى في كل حالة:

10) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-4}}dx$

11) $\int \frac{x}{4-x^4}$

12) $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{4-\sec^2 x}}dx$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-25}}$

14) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{-x}-9}}$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

تمارين على الفصل التاسع

في التمارين من 1 إلى 12، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

1) $f(x) = \ln\,(\sinh\, x^2)$

2) $g(x) = \sinh\,(x^3 + 2x^2)$

3) $f(x) = e^{\text{sech}(x)}$

4) $g(x) = \cos^{-1}(\text{sech}^7 x)$

5) $f(x) = \sinh^{-1}(\cos x\,)$

6) $g(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{\ln\, x})$

7) $f(x) = x\,\cosh^{-1}(e^x)$

8) $g(x) = \text{csch}^{-1}(\sin x\,)$

9) $f(x) = \tanh^{-1}(\sin\,(\ln\, x))$

10) $(\tanh^{-1} x)^{x^2}$

11) $f(x) = x^{\cosh\,(x)}$

12) $g(x) = \sinh\, x^{\cosh\,(x)}$

في التمارين من 13 إلى 20، أوجد التكامل المعطى:

13) $\displaystyle\int \frac{\text{sech}^2(\ln\, x)}{x}\,dx$

14) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{1+e^{10x}}\,dx$

15) $\displaystyle\int \coth(x)dx$

16) $\displaystyle\int e^x \text{sech}^2(x)dx$

17) $\displaystyle\int \frac{x}{4-x^4}\,dx$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{10-4x^2}}\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{1/x^2}{1+1/x}\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}\,dx$

الفصل العاشر

طرق التكامل

Methods of Integration

1.10 التكامل بالتجزيء Integration by Parts

من أهم طرق التكامل وأكثرها استعمالاً، هي طريقة التكامل بالتجزيء، ويتم اشتقاق هذه الطريقة من قانون المشتقة الأولى لحاصل الضرب.

$$d(uv) = u\,dv + vdu$$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

أو

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال 1

أوجد $\int xe^x dx$.

الحل

نضع $u = x$ ، $dv = e^x dx$

ومن ذلك نجد أن $du = dx$ و $v = \int e^x dx = e^x$

إذن

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

مثال 2

أوجد $\int \ln x dx$.

الحل

نضع $u = \ln x$ ، $dv = dx$ ومن ذلك نجد أن

$$v = \int dx = x\ ,\ du = \frac{1}{x} dx$$

إذن

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$
$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

في معظم الحالات التي تحتوي على $\log_a x$، نأخذ $u = \log_a x$.

لاختيار u وdv، نراعي ما يلي:

1) لا بد من وجود $\int dv$.

2) $\int v\, du$ يجب أن يكون أسهل من $\int u\, dv$.

مثال 3

أوجد $\int e^x \sin x\, dx$.

الحـــل

لنفرض أن $du = e^x dx \Leftarrow u = e^x$

و $v = -\cos x \Leftarrow dv = \sin x\, dx$

إذن $\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$

الآن نجد

$\int e^x \cos x\, dx$ بطريقة التجزيء مرة أخرى، بفرض أن $u = e^x$ و $dv = \cos x\, dx$

وبالتالي

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

إذن $$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

إذن $$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

مثـــال 4

أوجد $\int \sec^3 x dx$.

الحـــل

لنفرض أن $du = \sec x \tan x\, dx \Leftarrow u = \sec x$

و $v = \tan x \Leftarrow dv = \sec^2 x dx$

إذن

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ &= \tan x \sec x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x\, dx\end{aligned}$$
$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\tan x \sec x + \int \sec x dx) + C$$

تمارين 1.10

أوجد التكاملات التالية:

(1 $\int xe^{3x}dx$

(2 $\int x^2 \ln x dx$

(3 $\int_0^{\pi/2} x\sin x \, dx$

(4 $\int x^{5x}dx$

(5 $\int e^{3x}\sin(2x)dx$

(6 $\int \sin^4 x dx$

(7 $\int x \sinh(x)dx$

(8 $\int \cos(\ln x)dx$

(9 $\int x^3e^{2x}dx$

(10 $\int e^{-x}\cos(2x)dx$

2.10 تكامل بعض الدوال المثلثية

(أ) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ عندما يكون m أو n عدداً صحيحاً فردياً.

1) عندما يكون m عدداً فردياً، فإننا نعوض عن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

2) عندما يكون n عدداً فردياً، فإننا نعوض عن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

مثــال 5

أوجد $\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx$.

الحــل

حيث أن m عدد فردي فإن التعويض المطلوب هو $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^{1/2} x dx$$

$$= \int \sin x \cos^{1/2} x dx - \int \sin x \cos^{5/2} x dx$$

لنفرض أن $u = \cos x$

إذن $\frac{du}{dx} = -\sin x$

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = -\int u^{1/2} du + \int u^{5/2} du$$

$$= -\frac{2}{3} u^{3/2} + \frac{2}{7} u^{7/2} + C$$

$$= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + \frac{2}{7} \cos^{7/2} x + C$$

ملاحظة:

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = \int \sin^2 x \cos^{1/2} x \, d(\cos x)$$
$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{\frac{1}{2}} x \, d(\cos x)$$

$$= -\int \cos^{\frac{1}{2}} x\, d(\cos x\,) + \int \cos^{\frac{5}{2}} x\, d(\cos x\,)$$

$$= -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + \frac{2}{7}\cos^{7/2} x + C$$

(ب) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ عندما يكون m و n عددين زوجيين.

في هذه الحالة، نعوض عن

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثال 6

أوجد $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

الحل

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 2x dx - \int \cos^2 2x dx - \int \cos^3 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right.$$

$$\left. - \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

(ج) $\int \tan^n x dx$.

لإيجاد هذا التكامل، نستخدم التعويض التالي:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

مثـــال 7

أوجد $\int x\tan^2 x dx$.

الحـــل

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$
$$= \tan x \ + x + C$$

مثـــال 8

أوجد $\int \tan^3 x dx$.

الحـــل

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan x \ \tan^2 x dx = \int \tan x \ (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int \tan x \ \sec^2 x dx - \int \tan x \ dx$$

لإيجاد $\int \tan^2 x \ \sec^2$ ، نفترض أن $u = \tan x$ ، ومنها $du = \sec^2 x dx$

إذن $\int \tan x \ \sec^2 x dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C_1 = \frac{1}{2} \tan^2 x + C_1$

ولإيجاد $\int \tan x \ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ ، نقوم بالتعويض التالي $u = \cos x$ ، ومنها $du = -\sin x \ dx$

$$\int \tan x \ dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C_2 = -\ln |\cos x \ | + C_2$$

إذن $\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x \ | + C$

حيث $C = C_1 + C_2$.

(د) $\int \sec^n x dx$.

لإيجاد هذا التكامل، نستخدم التعويض التالي:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

مثـال 9

أوجد $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx$.

الحـل

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x(1 + \tan^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x \, dx$$

$$= \tan x \Big|_0^{\pi/4} + \tfrac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0\right) + \frac{1}{3}\left(\tan^3 \frac{\pi}{4} - \tan^3 0\right)$$

$$= (1 - 0) + \frac{1}{3}(1 - 0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x d(\tan x) = \frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4}$$

(هـ) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ حيث إن n عدد زوجي.

استخدم التعويض التالي: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

مثـال 10

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x \, dx$.

الحـــل

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x (1+\tan^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/3} \tan^7 x \sec^2 x \, dx$$

نفترض أن $u = \tan x$، ومن ذلك $du = \sec^2 x dx$.

إذن

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \frac{1}{6}\tan^6 x\Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\sqrt{3})^6 - 0\right] + \frac{1}{8}\left[(\sqrt{3})^8 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{6}(27) + \frac{1}{8} = \frac{9}{2} + \frac{81}{8} = \frac{117}{8}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x (1+\sec^2 dx(\tan x)$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x (1+\tan^2 x) d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{6}\tan \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

(و) $\int \tan^m x \sec^n$ حيث أن n و m عددان فرديان.

استخدم الحد $\sec x \tan x$ لأن $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

وعوّض عن $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

مثــال 11

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^3 x \sec^5 x dx$.

الحــل

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \tan x \sec x (\sec^2 x - 1) \sec^4 x dx$$
$$= \int \sec^6 x \tan x \sec x dx - \int \sec^4 x \tan x \sec x dx$$

نفترض أن $u = \sec x$، ومن ذلك $du = \sec x \tan x \, dx$.

إذن

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

تمارين 2.10

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

2) $\int \sin^{1/2} x \cos^3 x dx$

3) $\int \sec^3 5x dx$

4) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

5) $\int_0^{\pi/6} \sec^3 2x \tan 2x dx$

6) $\int_0^{\pi/4} \sec^3 2x \tan^3 2x dx$

7) $\int_0^{\pi/8} \tan^2 2x dx$.

8) $\int (\sec (3x) + \tan (3x))^2 dx$.

9) $\int \sqrt{\tan (7x)} \sec^4 (7x) dx$.

10) $\int x^2 \tan^5 (x^4) \sec^7 (4x) dx$.

3.10 تكامل الدالة القياسية (طريقة الكسور الجزئية)

إذا كانت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ عندما تكون $p(x)$ و$q(x)$ كثيرتي حدود، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة قياسية.

من أجل تكامل مثل هذه الدوال، نفترض الحالتين الآتيتين، وهما:

1) إذا كانت درجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$، نقوم بعملية قسمة مطولة للحصول على $\dfrac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\dfrac{t(x)}{q(x)}$

حيث $s(x)$ كثيرة حدود بدرجة أقل من درجة $q(x)$.

مثال 12

أوجد $\displaystyle\int \frac{x^4-x^5+4x-2}{x-2}\,dx$.

الحل

بالقسمة المطولة نجد أن

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+x^2+2x+8 \\
\hline
x-2 & x^4-x^3+4x-2 \\
 & \underline{x^4-2x^3} \\
 & x^3+4x \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & 2x^2+4x \\
 & \underline{2x^2-4x} \\
 & 8x-2 \\
 & \underline{8x-16} \\
 & 14
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-x^3+4x-2}{x-2}=x^3+x^2+2x+8+\frac{14}{x-2}$$

إذن

$$\int\frac{x^4-x^3+4x-2x-2dx}{x-2}=\int(x^3+x^2+2x+8)dx+\int\frac{14dx}{x-2}$$
$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+8x+14\ \mathbf{ln}\ |x-2|+C$$

2) إذا كانت درجة $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$، نحلل $q(x)$ إلى عوامل خطية $x-a$، أو عوامل تربيعية x^2+bx+c.

إذا كان $q(x)$ على شكل $(x-a)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ولكل عامل تربيعي على شكل $(x^2+bx+c)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x^2+bx+c)^k}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}+$$
$$...+\frac{A_kx+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

مثال 13

إذا كانت $q(x)$ دالة خطية، مثل $q(x)=ax+b$، فإن $\int\frac{dx}{ax+b}$ يمكن حسابه بالتعويض عن $u=ax+b$:

وبذلك يكون

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{3}\mathbf{ln}\ |ax+b|+C.$$

مثـال 14

احسب $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

الحـل

أولاً
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

بالضرب في $(x-1)(x-2)(x-3)$، نجد أن:

$$1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)$$

بوضع $x = 1$، نجد أن $A = 1/2$،

بوضع $x = 2$، نجد أن $B = -1$،

بوضع $x = 3$، $C = 1/2$.

إذن
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{ln}\,|x-1| - \mathbf{ln}\,|x-2| + \frac{1}{2}\mathbf{ln}\,|x-3| + C$$

$$= \mathbf{ln}\left|\frac{[(x-1)(x-3)]^{1/2}}{(x-2)}\right| + C$$

مثـال 15

احسب $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

الحــل

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

بوضع $x=0$ ، نجد أن $A=1$ ،

بوضع $x=1$ ، نجد أن $C=1$.

الآن نضع $x=2$

$$1=A+2B+2C$$

$$1=1+2B+2$$

إذن $B=-1$.

إذن

$$\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

حيث أن C مقدار ثابت.

مثــال 16

احسب $\int\frac{dx}{x^3+x}$

الحــل

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}1&=A(x^2+1)+x(Bx+C)\\&=Ax^2+A+Bx^2+C^x\\&=(A+B)x^2+Cx+A\end{aligned}$$

$$A + B = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$C = 0, A = 1 \implies B = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

$$\ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

تمارين 3.10

أوجد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

2) $\int \frac{x}{(x-4)^3} dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

4) $\int \frac{x^3}{(x-1)^3} dx$

5) $\int \frac{x}{x^4 - 1} dx$

6) $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2} dx$

7) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 + 4x} dx$

8) $\int \frac{5x^2 + 11x + 17}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20} dx$

9) $\int \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^4 + 9x^2} dx$

10) $\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 3}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$

4.10 إكمال المربع

مثـال 17

احسب $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}$.

الحـل

$$x^2-4x+1=x^2-4x+4-4+1=(x-2)^2-3$$

لنفرض أن $u=x-2$ وبذلك فإن $du=dx$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1}=\int \frac{dx}{(x-2)^2-3}=\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^3}$$

باستخدام الكسور الجزئية

$$\frac{1}{u^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})}=\frac{A}{u-\sqrt{3}}+\frac{B}{u+\sqrt{3}}$$

$$A+B=0\ ,\ A-B=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\ B=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1}=\int \frac{Adu}{u-\sqrt{3}}+\int \frac{Bdu}{u+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u-\sqrt{3}|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u+\sqrt{3}|+C$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C$$

تمارين 4.10

احسب التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-2x-3}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-4x+6}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^4+4x^2+5}}{x^2+2}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$

10) $\displaystyle\int (x^2-6x)dx$

5.10 التكاملات المعتلة

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a,-\infty)$.

نستطيع إيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن b عدد أكبر من a، عندما يؤول b إلى ∞ وتكون النهاية

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (1$$

موجودة، وعندها نسمي $\int_a^\infty f(x)dx$ التكامل المعتل، ونقول إن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب. إذا كانت النهاية في (1) غير موجودة، يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً. التكامل المعتل على الشكل $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ يعني:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad (2$$

ويكون متقارباً إذا كانت النهاية (2) موجودة، ومتباعداً إذا كانت النهاية (2) غير موجودة

مثال 18

احسب $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

الحل

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}\right)+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e}$$

$$= 0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

مثـال 19

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

الحـل

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln |x|]\Big|_1^b$$

إذن يكون $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ متباعداً.

مثـال 20

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ حيث $n \neq 1$.

الحـل

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right)\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{-n+1}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right) \\ &= \frac{1}{1-n} \lim_{b\to\infty} (b^{-n+1} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & , \quad n > 1 \\ \infty & , \quad n \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

من المثالين السابقين، نستطيع استنتاج أن:

> $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ يكون متقارباً إذا كان $n > 1$، ويكون متباعداً إذا كان $n \leq 1$.

قد يكون من الصعب تحديد تقارب أو تباعد التكامل المعتل بالطرق العادية، ولكن هناك اختباراً لمعرفة تقارب أو تباعد تكامل بعض الدوال، وذلك بمقارنة تكاملها مع تكامل بعض الدوال المعروف تكاملها المعتل.

اختبار المقارنة للتكامل المعتل.

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على الفترة $[a,\infty)$، و $0 \leq f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in [a,\infty)$، فإذا كان:

أ) $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارباً، فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون متقارباً.

ب) $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً، فإن $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متباعداً.

مثال 21

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

الحل

حيث إن $\frac{1}{\sqrt{x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ لكل $x \in 1,\infty)$، ومن الملاحظة السابقة نستطيع استنتاج أن $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ يكون متقارباً؛ لأن $n = 3/2 > 1$، وبذلك $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ يكون متقارباً، وذلك من اختبار المقارنة.

مثال 22

احسب $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

الحل

حيث إن $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$ لكل $x \in [2,\infty)$، فإن $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x+1}$

ولكن $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x}$ يكون متباعداً، إذن $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ يكون متباعداً.

نظرية 1

إذا كانت f دالة متصلة على $(-\infty,\infty)$، فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً، إذا كانت $\int_a^{\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ كلاهما متقاربين لأي عدد حقيقي a ويكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

مثـال 23

احسب $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

الحـل

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1}(b+1) - \tan^{-1}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

كذلك

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to\infty} \int_a^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(a+1)] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

إذن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

قد يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ معتلاً، حتى على فترة $[a,b]$، ولكن في هذه الحالة يكون للدالة f خط تقارب عمودي عند $x=a$ أو عند $x=b$ أو كليهما.

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة (a,b)، وغير معرّفة عند $x=a$، فإن:

(3 $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

فإذا كانت النهاية في (3) موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً، وإذا كانت النهاية في (3) غير موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متباعداً.

بالكيفية نفسها، نستطيع تعريف:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

إذا كانت الدالة f غير معرّفة عند $x = b$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ عدا عند $x = c$ حيث $a < c < b$، الذي يكوّن خط تقارب عمودياً للدالة f، فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً بشرط تقارب $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

مثـال 24

احسب $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

الحـــل

للدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ خط تقارب عمودي عند $x=0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_2^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}] = 2$$

مثــال 25

احسب $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

الحـــل

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbf{sin}^{-1}(x/3)\Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\mathbf{sin}^{-1}\left(\frac{3-\varepsilon}{3}\right) - \mathbf{sin}^{-1}0] = \frac{\pi}{2}$$

مثــال 26

احسب $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

الحـــل

نلاحظ أن $x=1$ هو خط تقارب عمودي للدالة f.

إذن

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

الآن

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(3\sqrt[3]{x-1})\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3[\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}] = 3$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3\sqrt[3]{x-1})\Big|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{3}] = 3$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3=6$$

تمارين 5.10

في التمارين من 1 إلى 20، حدّد ما إذا كان التكامل المعطى متقارباً أو متباعداً، واحسب التكامل المتقارب:

(1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

(2 $\displaystyle\int_0^\infty e^{x/2}dx$

(3 $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$

(4 $\displaystyle\int_e^\infty (x-1)e^{-x}dx$

(5 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\log x}dx$

(6 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$

(7 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(8 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+1}\log x}$

(9 $\displaystyle\int_{-\infty}^9 \frac{dx}{(9-x)^2}$

(10 $\displaystyle\int_{-\infty}^9 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(11 $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

(12 $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$

(13 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$

(14 $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sec x\, dx$

(15 $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{2x-6}{x^2-6x+5}\, dx$

(16 $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{2-x}$

(17 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-1/x}\,dx}{x^2}$

(18 $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{16-x^2}$

(19 $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(20 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x+1)}$

6.10 تكاملات تحتوي على $\sqrt{a^2 \pm u^2}$ أو $\sqrt{u^2 - a^2}$

التعويض بالدوال المثلثية في الأشكال التي تحتوي على جذور أو مقلوب $a^2 \pm u^2$ أو $u^2 - a^2$؛ حيث أن a عدد موجب، يفيد في حساب بعض التكاملات.

وهذه التعويضات تختلف من حالة إلى أخرى، ونستطيع تلخيص هذه التعويضات فيما يلي:

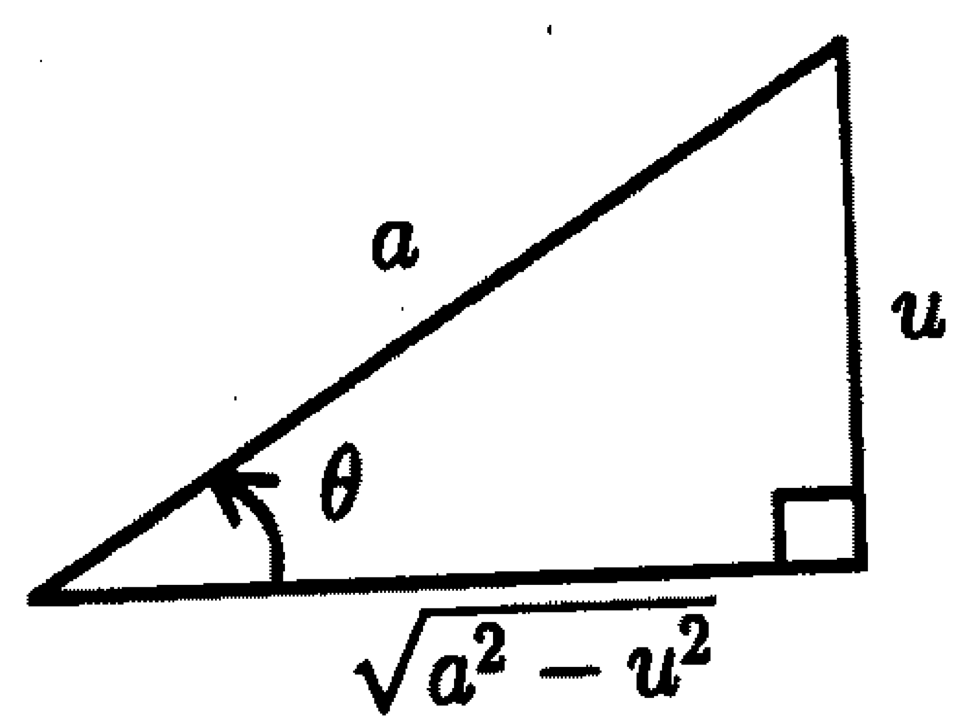
1) إذا احتوى التكامل على $\sqrt{a^2 - u^2}$، نقوم بالتعويض:

$u = a \sin \phi$ ومعنى ذلك $\sin \phi = \dfrac{u}{a}$

وبذلك نحصل على

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\phi} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2\phi)}$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2\phi} = a \cos \phi$$



إذن

$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \phi$ ، إذا كان $u = a \sin \phi$

مثـــال 27

احسب $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$.

الحـــل

في هذه الحالة $a = 2$ ومن الفرض $x = 2 \sin \phi$، نجد أن:

$$dx = 2\sin\phi\, d\phi \text{ وكذلك } \sqrt{4-x^2} = 2\cos\phi$$

وبالتالي

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 4\cos^2\phi\, d\phi$$

نلاحظ أن $x=0$ يؤدي إلى أن $\phi=0$، وعندما $x=2$، فإن $\phi=\pi/2$

إذن

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\, d\phi = 2\int_0^{\pi/2}(\cos 2\phi + 1)d\phi$$

$$= [\sin 2\phi + 2\phi]_0^{\pi/2} = [(0+\pi)-(0+0)] = \pi$$

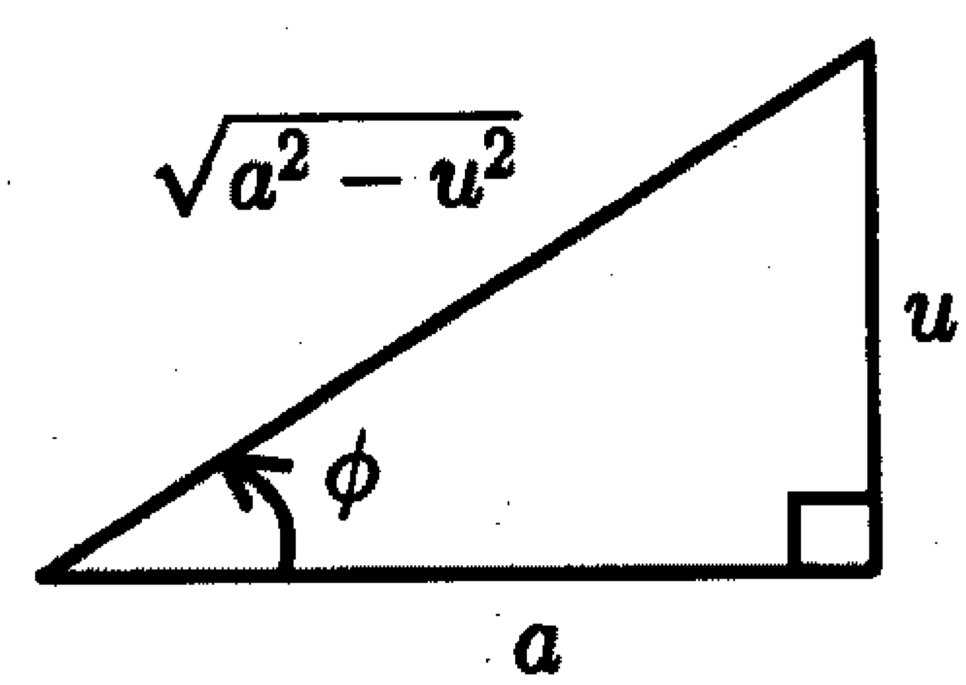
2) إذا احتوى التكامل على $\sqrt{a^2+u^2}$، نقوم بالتعويض:

$u = a\tan\phi$ ومعنى ذلك أن $\tan\phi = \frac{u}{a}$

ويكون

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\phi} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\phi)}$$

$$= \sqrt{a^2\sec^2\phi} = a\sec\phi$$



أي إن

$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\phi$ ، إذا كان $u = a\tan\phi$

مثـــال 28

احسب $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

الحـــل

من التعويض $x = a \tan \phi$، بحيث $a = 3$، نجد أن:

$\sqrt{4+x^2} = 3 \sec \phi$ وكذلك $dx = 3 \sec^2\phi d\phi$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3 \sec^2\phi}{(9 \tan^2\phi)(3 \sec \phi)} d\phi$$

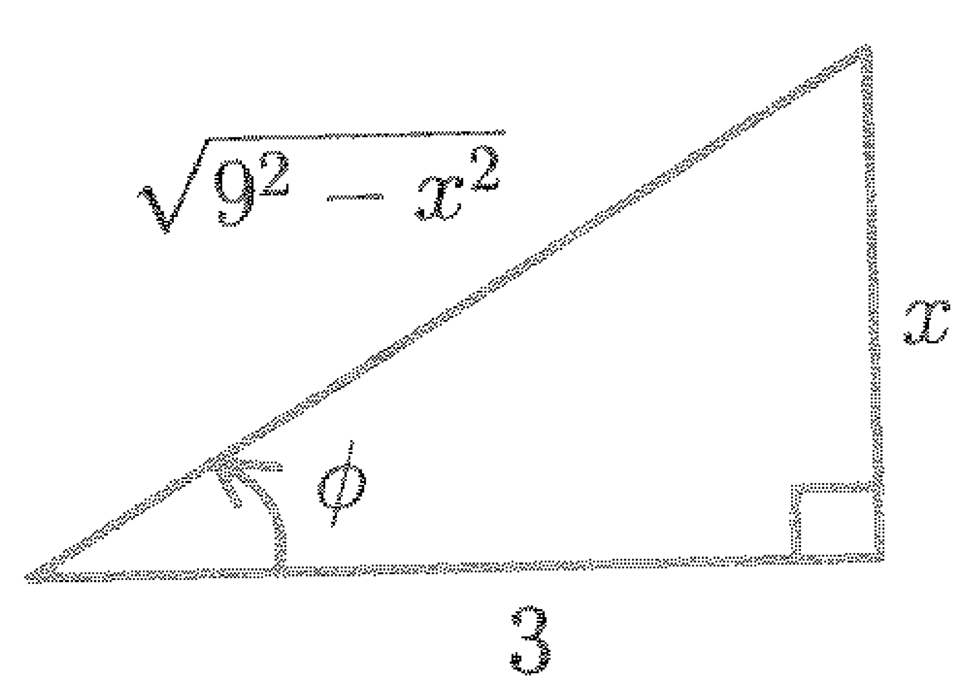
$$= \frac{1}{9}\int \frac{\sec \phi}{\tan^2\phi} d\phi = \frac{1}{9}\int \frac{\cos \pi}{\sin^2\phi}$$

لنفرض أن $t = \sin \phi$ ومن ذلك $dt = \cos \phi \, d\phi$

$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos \phi}{\sin^2\phi} d\phi = \frac{1}{9}\int t^{-2}dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) + C = -\frac{1}{9t} + C$$

$$= -\frac{1}{9 \sin \phi} + C = -\frac{1}{9} \csc \phi + C$$

من الشكل نلاحظ أن $\csc \phi = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$



إذن

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{9}\frac{1\sqrt{x^2+9}}{x} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$$

3) لإيجاد التكامل الذي يحتوي على $\sqrt{u^2 - a^2}$ نقوم بالتعويض التالي:

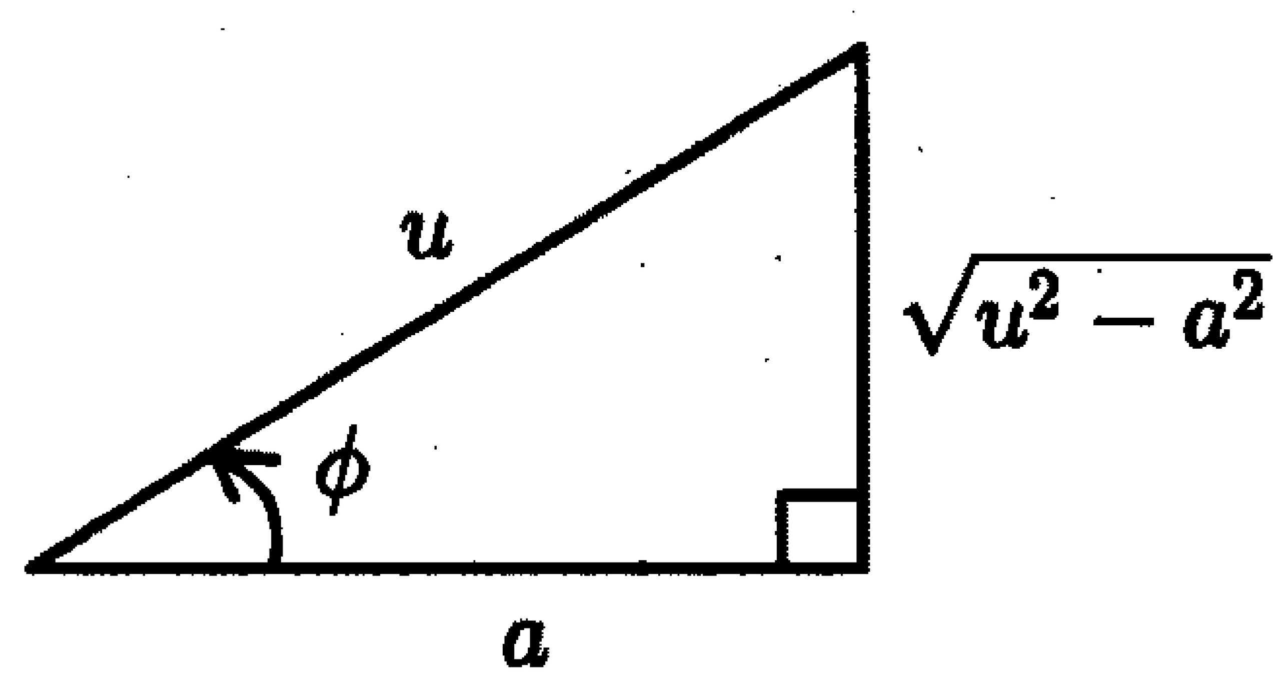
$u = a \sec \phi$، ومعنى ذلك أن

$$du = a \sec\phi \tan \phi \, d\phi \quad \text{و} \quad \sec \phi = \frac{u}{a}$$

الآن

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2\phi + a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\phi - 1}$$

$$= \sqrt{a^2 \tan^2\phi} = a \tan \phi$$



وبذلك، فإن:

$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \phi$، إذا كان $u = a \sec \phi$

مثـال 29

احسب $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 25}}$.

الحـل

من التعويض $x = 5 \sec \phi$، نجد أن:

$$dx = 5 \sec\phi \tan\phi \, d\phi \quad \text{وكذلك} \quad \sqrt{x^2 - 25} = 4 \tan \phi$$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{5\ \sec\phi\ \tan\phi}{(125\ \sec^3\phi)(5\ \tan\phi)}d\phi = \frac{1}{125}\int \frac{d\phi}{\sec^2\phi}$$

$$= \frac{1}{125}\int \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{250}\int (1+\ \cos 2\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{250}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{250}(\phi + \frac{2\ \sin\phi\ \cos\pi}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{250}(\phi +\ \sin\phi\ \cos\pi) + C$$

من الشكل وملاحظة أن $\phi = \csc^{-1}(x/5) + C$، نجد أن:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{250}\left(\sec^{-1}(x/5) + \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}(5/x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{250}\left(\sec^{-1}(x/5) + \frac{5\sqrt{x^2-25}}{x^2}\right) + C$$

مثــال 30

احسب $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$.

الحــل

بإكمال المربع، نجد أن:

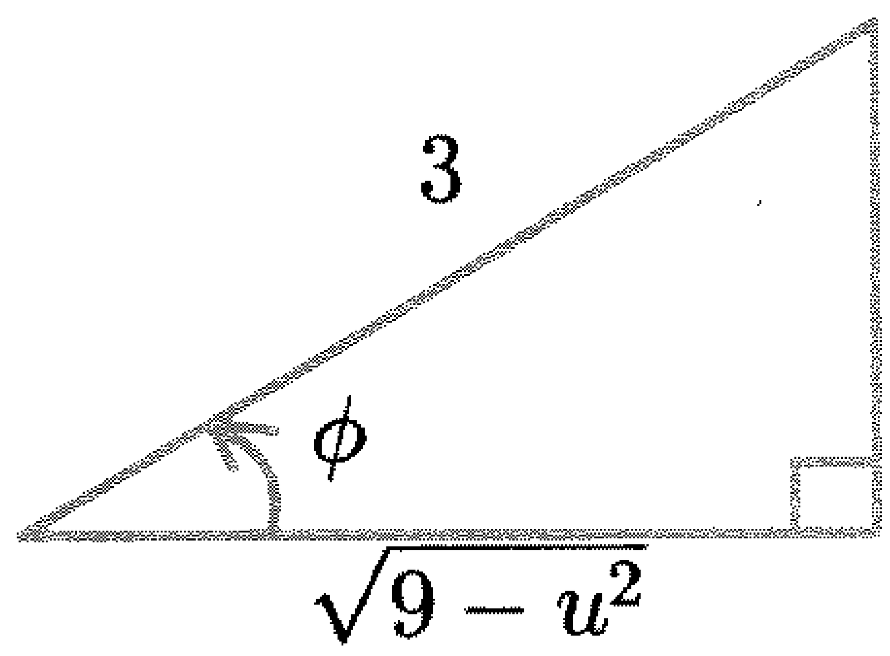
$$5-4x-x^2 = 5-(x^2+4x+4)+4 = 9-(x+2)^2$$

إذا كان $u = x+2$، فإن $du = dx$ و $5-4x-x^2 = 9-u^2$

وبذلك، فإن:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(9-u^2)^3}}$$

والتكامل الأخير ينفع معه التعويض



$x = 3 \sin \phi$، ولهذا يكون $dx = 3 \sin\phi \, d\phi$ ومن الشكل نجد أن:

$$\sqrt{(9-u^2)^3} = 27 \cos^3\phi$$

إذن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(9-u^2)^3}} = \int \frac{3 \cos \phi}{27 \cos^3\phi} = \frac{1}{9}\int \frac{d\phi}{\cos^2\phi}$$

وإذن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \frac{1}{9}\int \sec^2\phi \, d\phi = \frac{1}{9} \tan \phi + C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\right) + C$$

$$= \frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

تمارين 6.10

في التمارين من 1 إلى 10، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل المعطى في كل حالة:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}$

9) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{(\tan^2 x+9)^3}}dx$.

10) $\displaystyle\int (3x+2)\sqrt{9x^2+12x+3}\, dx$

7.10 التكامل العددي (Numerical Integration)

يمكن التفكير في التكامل المحدد على أنه مساحة، عندما يكون هذا التكامل محدد القيمة، ولكن توجد دوال بسيطة مثل $\frac{\sin x}{x}$، لا نستطيع إيجاد قيمة محددة لتكاملها؛ لذلك نلجأ إلى طرق عددية تقريبية، تعطي نتائج ذات دقة جيدة.

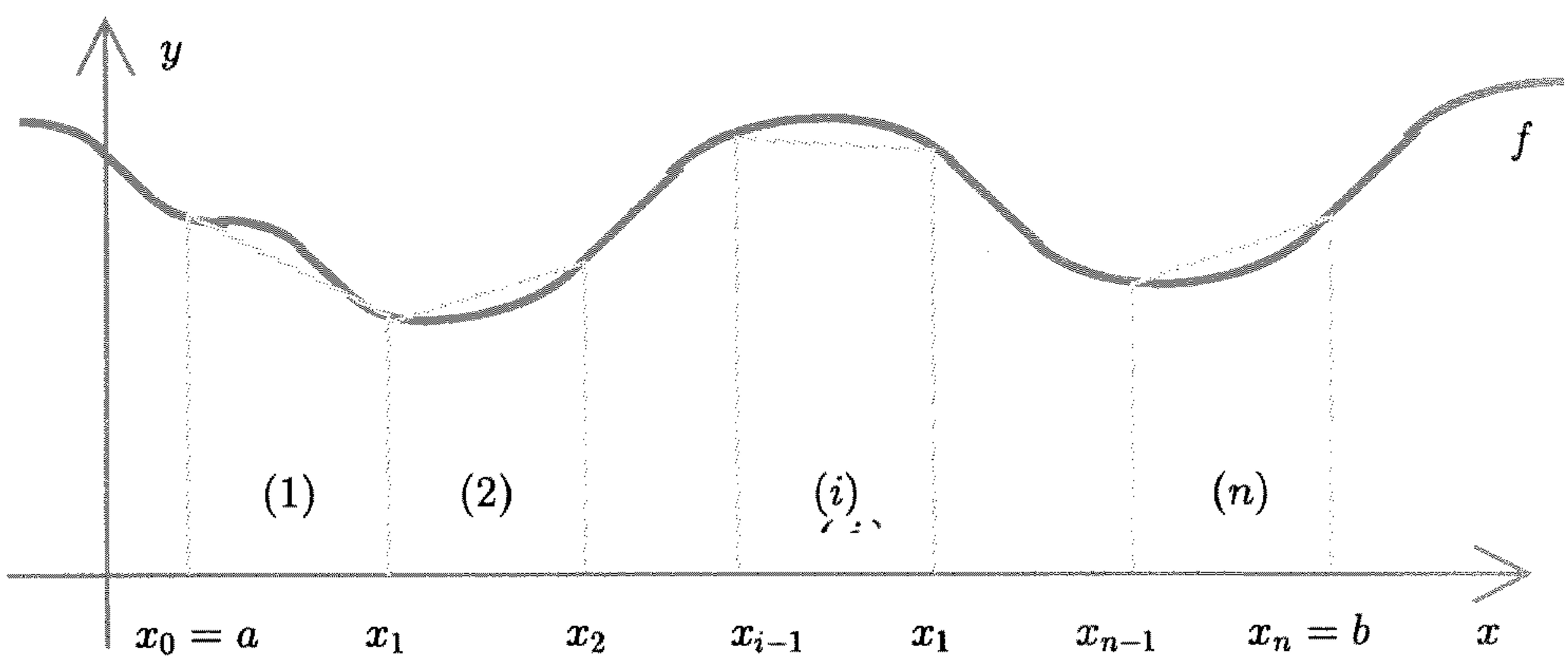
نناقش في هذا البند طريقتين من طرق التكامل العددي، هما:

أ) طريقة شبه المنحرف (Trapezoid Methoh)

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$

نقسم الفترة $[a, b]$ إلى n من الأجزاء المتساوية التباعد.

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots$$
$$x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = b$$



شكل 1.10

طول كل جزء من هذه الأجزاء $h = \frac{b-a}{n}$.

التكامل من a إلى b يساوي مجموع التكاملات من a إلى x_1، ومن x_1 إلى x_2، . . . ، ومن x_{n-1} إلى b.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

التكامل $\int_a^{x_1} f(x)dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف (1).

مساحة شبه المنحرف (1) $= \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$$= \frac{1}{2}f((x_1) + f(x_0)) \times h$$

وبالكيفية نفسها، نستطيع إيجاد مساحة شبه المنحرف (2) و . . . و(i) و . . . و(n).

الآن وبذلك

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + ...$$

$$+\frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ...$$

$$+2f(x_{n-1} + f(x_n)]$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{b-a}{n})[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ...$$

$$+2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

وبذلك، نصل إلى قاعدة شبه المنحرف، التي تنص على أن:

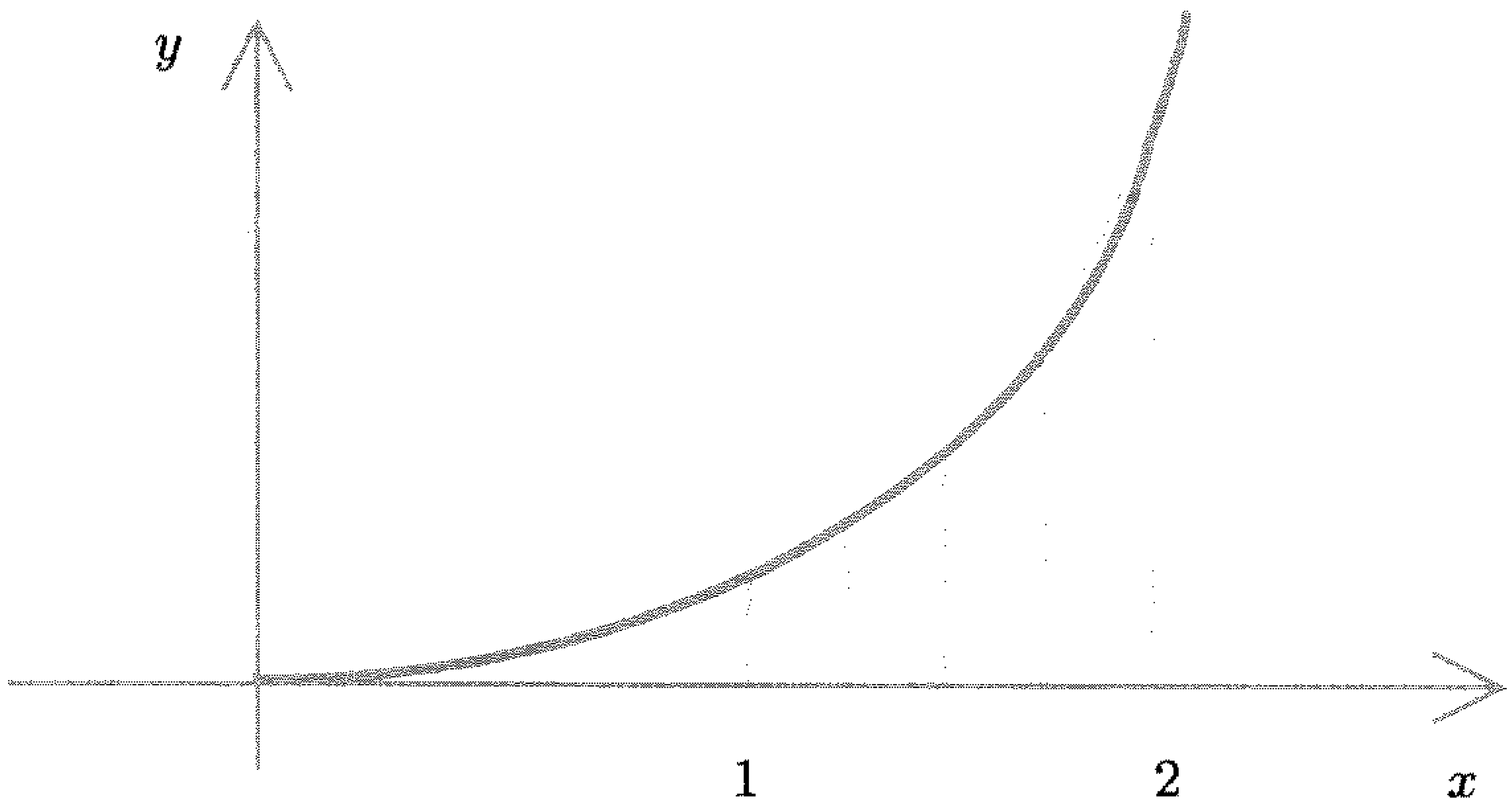
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

مثـــال 31

استخدم قاعدة شبه المنحرف لإيجاد التكامل $\int_1^2 x^2 dx$ وقارن ذلك بالقيمة الفعلية للتكامل. استخدم $n = 4$.

الحـل

القيمة الفعلية للتكامل، هي: $\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.3333$



شكل 2.10

الآن

$$a = 1, b = 2, n = 4$$

$$f(x_0) = f(1) = 1$$

$$f(x_1) = f(5/4) = 25/16$$

$$f(x_2) = f(6/4) = 36/16$$

$$f(x_3) = f(7/4) = 49/16$$

$$f(x_4) = f(2) = 4$$

إذن

$$\int_1^2 x^2dx \approx \frac{2-1}{2(4)}[1 + \frac{50}{16} + \frac{72}{16} + \frac{98}{16} + 4]$$
$$= \frac{1}{8}(5 + \frac{220}{16}) = \frac{300}{128} = 2.34375$$

دقة طريقة شبه المنحرف:

كلما كبر العدد n، صغر العدد h، وتكون نتيجة التكامل أقرب إلى القيمة الفعلية.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})]+\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+f(x_n)]$$

لاحظ أن $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+f(x_n)]=0$

وهذا يعني أنه كلما كان n عدداً كبيراً جداً، فإن الفرق بين $\int_a^b f(x)dx$ و $\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})]$ يكون صغيراً جداً.

ملاحظة

ينتج خطأ في طريقة شبه المنحرف، وهو: $E=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c)$

وبذلك، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+...$$
$$+2f(x_{n-1})+f(x_n)]+\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c)$$

حيث إن c عدد يقع بين a و b.

ففي المثال السابق

$f(x)=x^2$، ومنها $f''(x)=2$

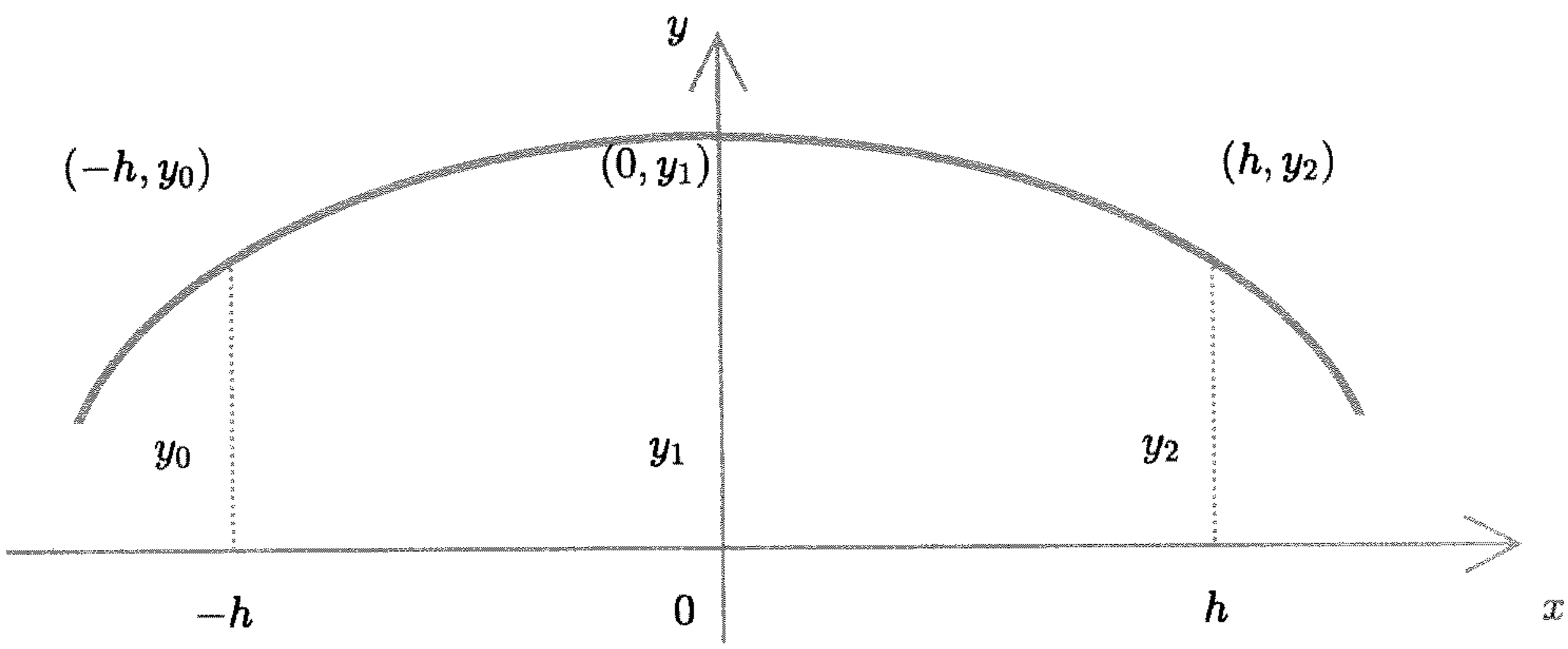
$$\int_1^2 x^2dx=\frac{75}{32}-\frac{2}{(12)(16)}=\frac{75}{32}-\frac{1}{96}=\frac{7}{3}$$

ب) طريقة سمسون (Simpson's Method)

هناك طريقة أخرى، تستخدم لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)dx$، تسمى طريقة سمسون، وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد المساحة التي تحت القطع المكافىء

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

حيث إن $A \neq 0$ بين $x = -h$ و $x = h$



الشكل 3.10

$$A_0 = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = [\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx]_{-h}^{h}$$
$$= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch$$

حيث أن المنحنى يمر بالنقط $(-h, y_0)$ و $(0, y_1)$ و (h, y_2)، فإن:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

وبحل هذه المعادلات، نجد أن: $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$

إذن A_0 بدلالة y_0، y_1، y_2، هي:

$$A_0 = \frac{h}{3}[2Ah^2 + 6C]$$

أو $A_0 = \frac{h}{3}[y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1]$

إذن

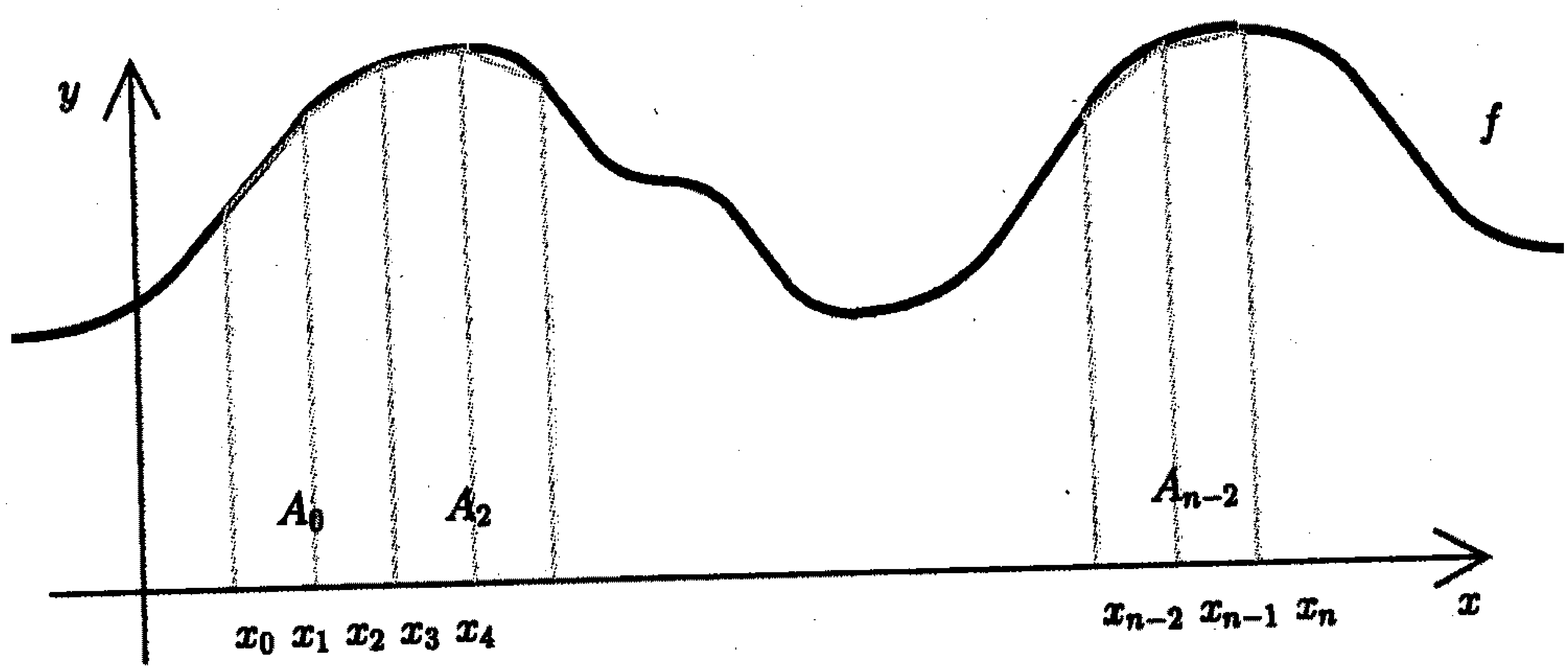
$$\boxed{A_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة على (a,b).

نقسم الفترة $[a,b]$ إلى n من الأجزاء متساوية الطول، وطول كل منها يساوي h حيث إن n عدد صحيح موجب زوجي.

$$x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$$

$\int_a^b f(x)dx$ هو مجموع المساحات A_0، A_1، . . . ، A_{n-2}



الشكل 4.10

إذن

طريقة سمسون لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل هي

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+ \\ \dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

حيث إن n عدد صحيح زوجي.

يقدر الخطأ عند استخدام طريقة سمسون، كما يلي:

$$E=\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(c)$$

حيث إن c عدد بين a وb.

مثـــال 32

استخدم طريقة سمسون لحساب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ مستخدماً $n=8$.

الحــل

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$$

$f(x_0)=1$ ، $f(x_1)=8/9$ ، $f(x_2)=8/10$ ، $f(x_3)=8/11$ ، $f(x_4)=8/12$ ، $f(x_5)=8/13$ ، $f(x_6)=8/14$ ، $f(x_7)=8/15$ ، $f(x_8)=1/2$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{24}[1+4(\frac{8}{9})+2(\frac{8}{10})+4(\frac{8}{11})+2(\frac{8}{12}) \\ +4\left(\frac{8}{13}\right)+2(\frac{8}{14})+4(\frac{8}{15})+\frac{1}{2}]=0.6932$$

تمارين 7.10

في التمارين من 1 إلى 5، احسب التكامل المعطى، مستخدماً طريقة شبه المنحرف حسب قيمة n المعطاة:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ، $n=4$

2) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ ، $n=3$

3) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{x}$ ، $n=4$

4) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+x}$ ، $n=5$

5) $\int_0^1 e^x dx$ ، $n=9$

في التمارين من 6 إلى 10، احسب التكامل المعطى، مستخدماً طريقة سمسون وقيمة n المعطاة:

6) $\int_0^8 \frac{dx}{x^3+x+1}$ ، $n=4$

7) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+1}$ ، $n=8$

8) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ، $n=2$

9) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ ، $n=4$

10) $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ ، $n=4$

تمارين على الفصل العاشر

احسب التكامل المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\int \cos^2(2x)dx$

2) $\int \sin^3(4x)\cos^2(4x)dx$

3) $\int \sqrt{\cos x}\ \cos^5 x dx$

4) $\int \sin^2(2-3x)dx$

5) $\int \frac{\cos^2(3x/2)}{\sqrt{\sin(3x/2)}}dx$

6) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$

7) $\int x\tan^3(5x^2)dx$

8) $\int \sec^4(1-2x)dx$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+64}}$

10) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{81-x^2}}$

11) $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-8x+41}}$

12) $\int x^2 e^{-2x}dx$

13) $\int \sqrt{x}\ \ln(2x)dx$

14) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+4}dx$

15) $\int \frac{e^{4x}}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}\ dx}$

16) $\int \frac{\cot x}{\cot x + \ \csc x}dx$

17) $\int^2 (lnx)^2 dx$

18) $\int x^5 \sin x^2 dx$

19) $\int_0^1 x\tan^{-1}x dx$

20) $\int \frac{dx}{x^3(1+x)}$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{3/4}}$

22) $\int \frac{dx}{x\ln x(\ln x+5)}$

23) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$

24) $\int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x^4+2x^2+1}dx$

25) $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{(x^2+1)^2}$

26) $\int_0^{1/3} \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(x/3)}\,dx \quad (27$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}} \quad (28$$

$$\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}dx \quad (29$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x}dx \quad (30$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx \quad (31$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-1}} \quad (32$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} \quad (33$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \quad (34$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (35$$

$$\int x^{\alpha}(\ln x)^m dx \quad (36$$

$$\int e^{\alpha x}\cosh(\beta x)dx \quad (37$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (38$$

$$\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx \quad (39$$

$$\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n dx \quad (40$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx \quad (41$$

$$\int_0^1 x^m\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n dx \quad (42$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^m dx}{(\sin x)^n} \quad (43$$

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx \quad (44$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x} \quad (45$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x}\ln(\sin x)dx \quad (46$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{1+x^{\beta}\sin^2 x} \quad (47$$

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx \quad (48$$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^7(3x)\sin^4(3x)dx \quad (49$$

$$\int x^n e^{ax}\cos(bx)dx \quad (50$$

الفصل الحادي عشر

الإحداثيات القطبية

Polar Coordinates

تعرّفنا في الفصل الأول إلى الإحداثيات المتعامدة أو الديكارتية، وكان تمثيلنا للنقط في المستوى بهذا النظام من الإحداثيات.

توجد أنظمة أخرى لتمثيل النقط، أهمها النظام القطبي أو الإحداثيات القطبية.

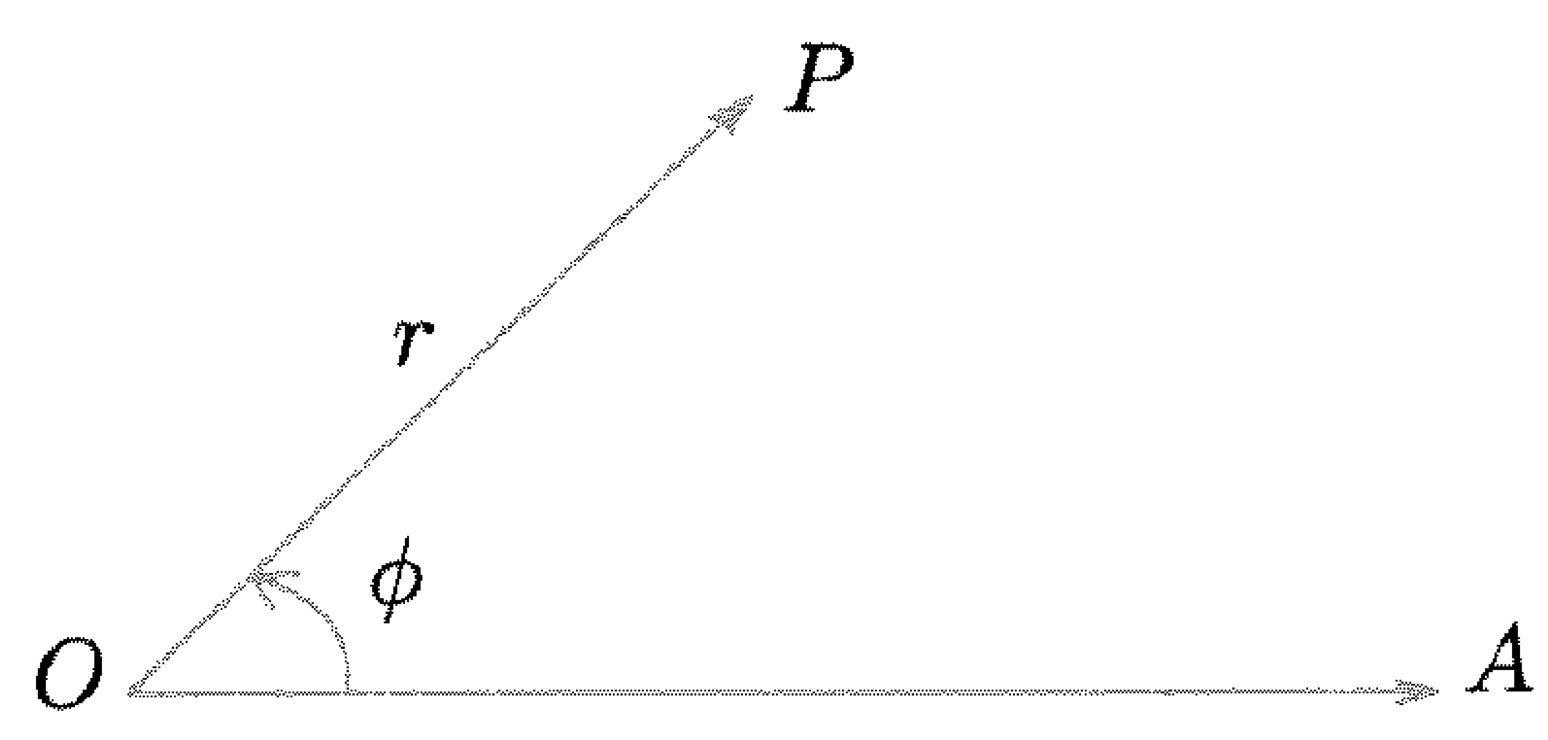
1.11 نظام الإحداثيات القطبية

لنفرض أن O نقطة ثابتة.

نمدّ خطّاً مستقيماً من النقطة O في اتجاه واحد وليكن OA.

لنفرض أن P هي أي نقطة أخرى في المستوى، تبعد r من O.

لنفرض أن ϕ هي الزاوية المحصورة بين OA وOP، مقيسة بالتقدير الدائري، ويكون القياس عكس اتجاه عقارب الساعة من OA.



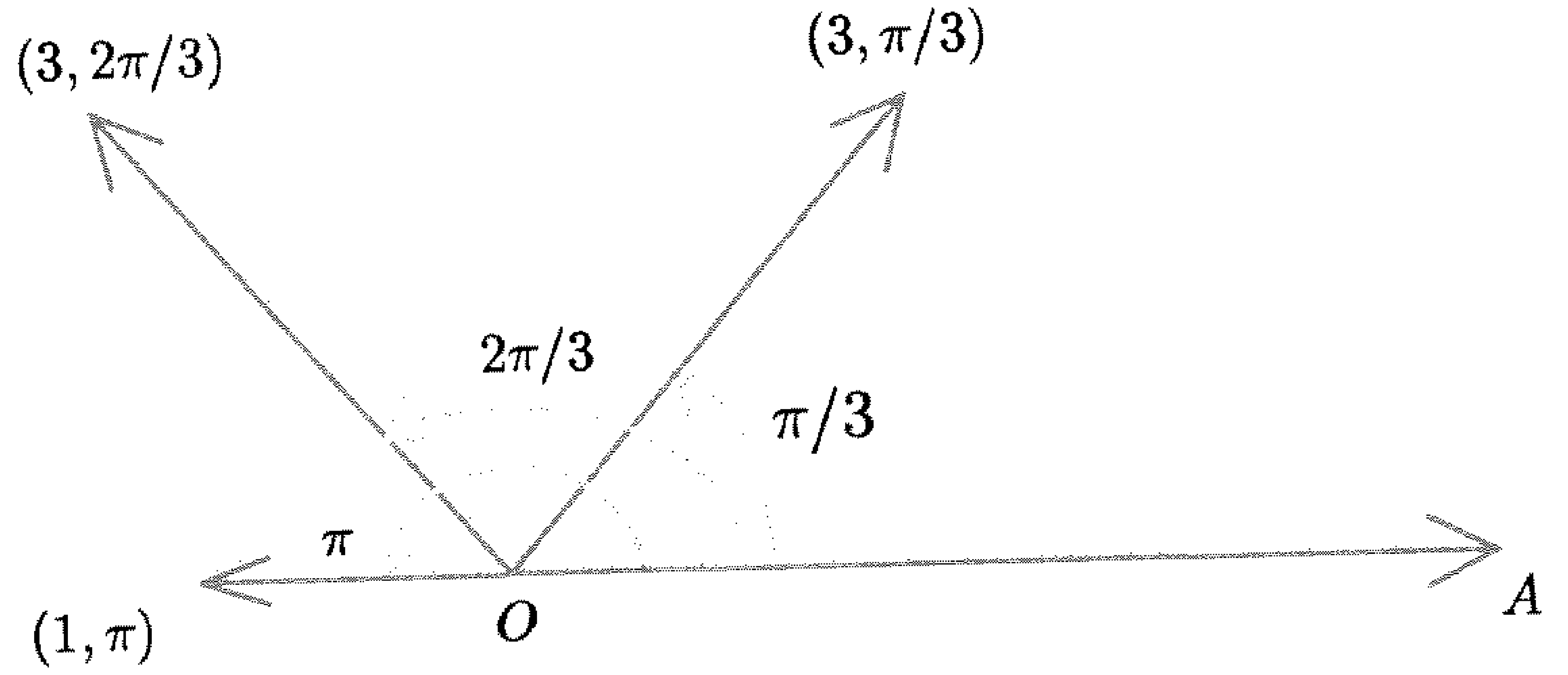
تسمى النقطة O القطب (نقطة الأصل)، ويسمى المستقيم OA المحور القطبي.

يعبَّر عن أي نقطة في المستوى كزوج مرتب (r, ϕ)، حيث يمثل الإحداثي الأول المسافة من نقطة الأصل أو القطب، ويمثل الإحداثي الثاني الزاوية التي يصنعها المستقيم الواصل من النقطة إلى القطب، مع المحور القطبي

مثـــال 1

ارسم بيان النقط التالية في الإحداثيات القطبية:

$$(1, \pi), (3, \tfrac{2\pi}{2}), (3, \tfrac{\pi}{3})$$



الشكل 1.11

إذا كان r عدداً سالباً، فإن رسم النقطة (r, ϕ) **يتم كما يلي**:

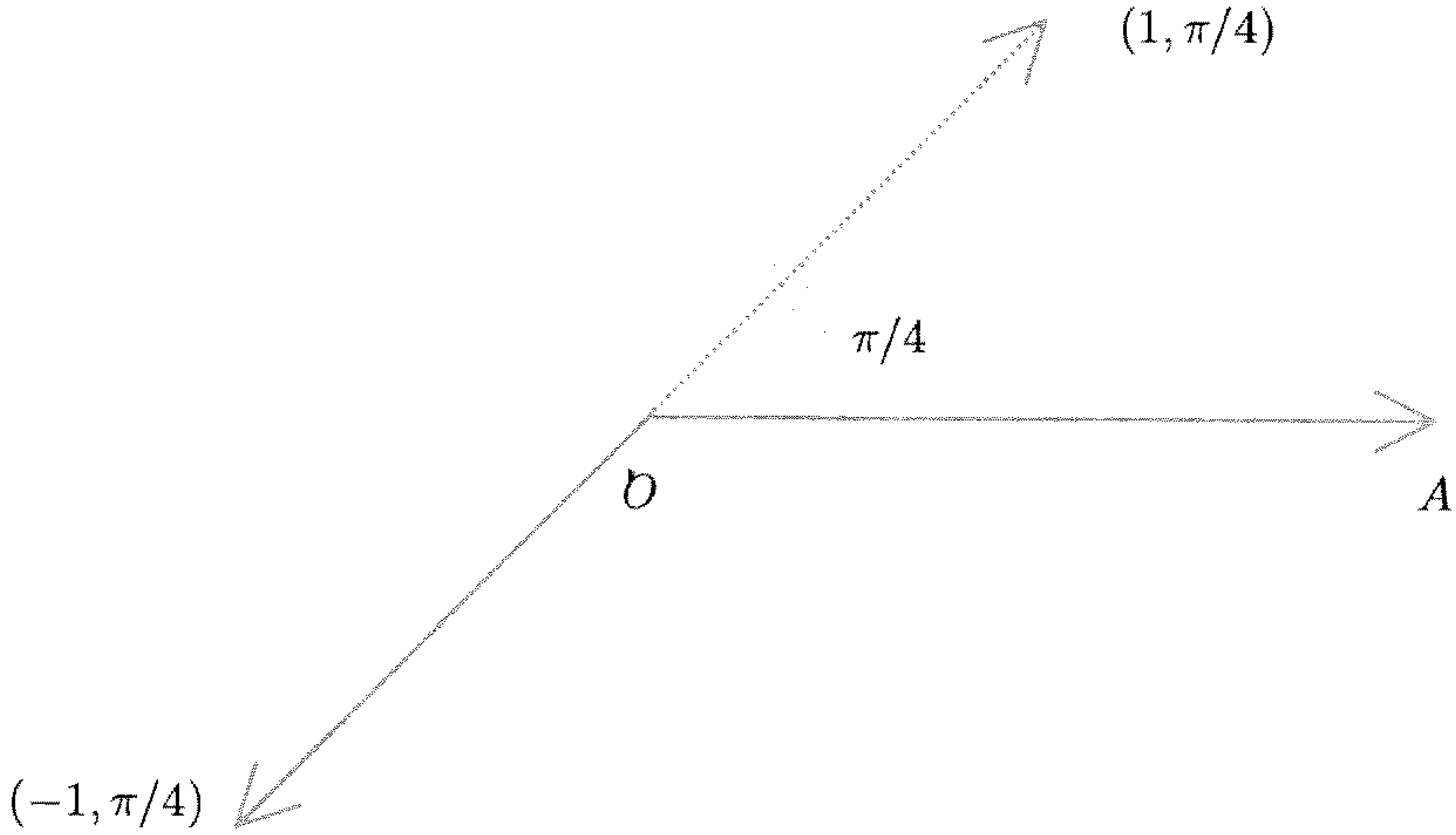
نرسم بيان النطة، وكأن r عدد موحب، ثم نمد الخط الواصل من القطب إلى (r, ϕ) في الاتجاه المعاكس؛ بحيث يكون بعده من القطب r وحدة، وبذلك نحصل على (r, ϕ) في حالة أن يكون r عدداً سالباً.

مثـــال 2

ارسم بيان النقطة $(-1, \pi/4)$ في الإحداثيات القطبية.

الحـــل

أنظر الشكل 2.11



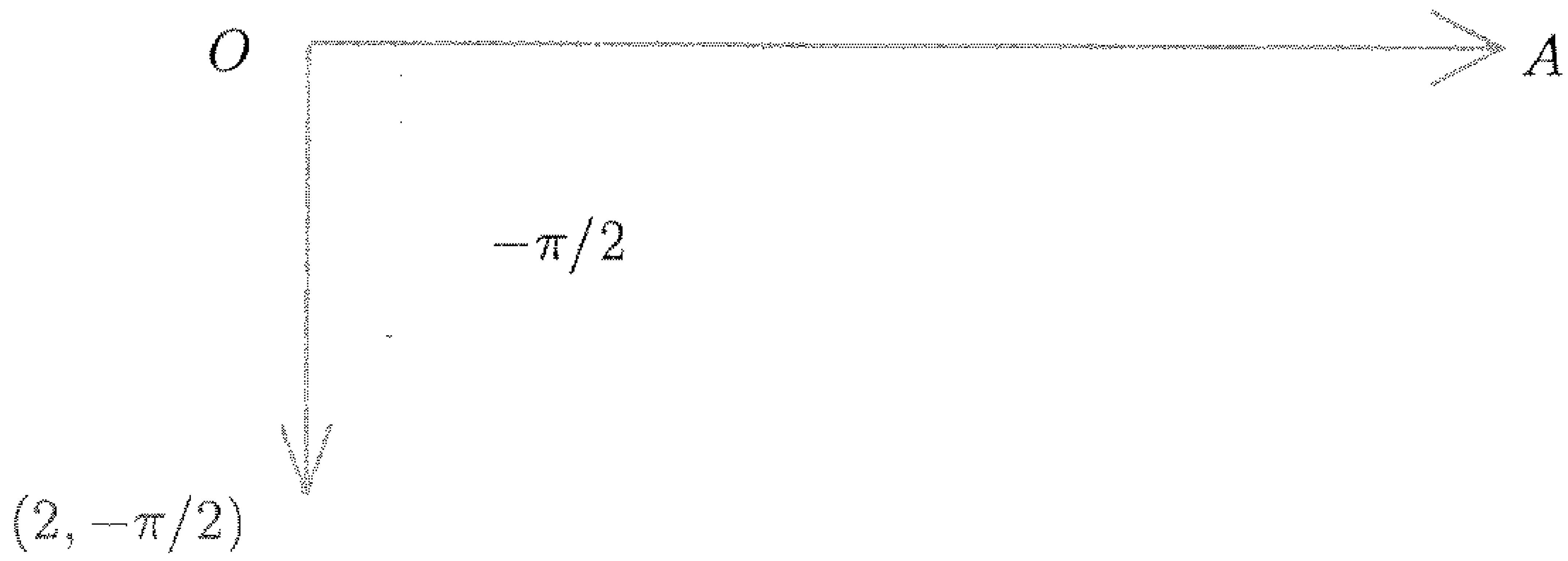
شكل 2.11

إذا كانت ϕ عدداً سالباً، يتم رسم بيان النقطة في الاتجاه السالب (في اتجاه عقارب الساعة).

مثال 3

ارسم بيان النقطة $(2,-\pi/2)$ في الإحداثيات القطبية.

الحل



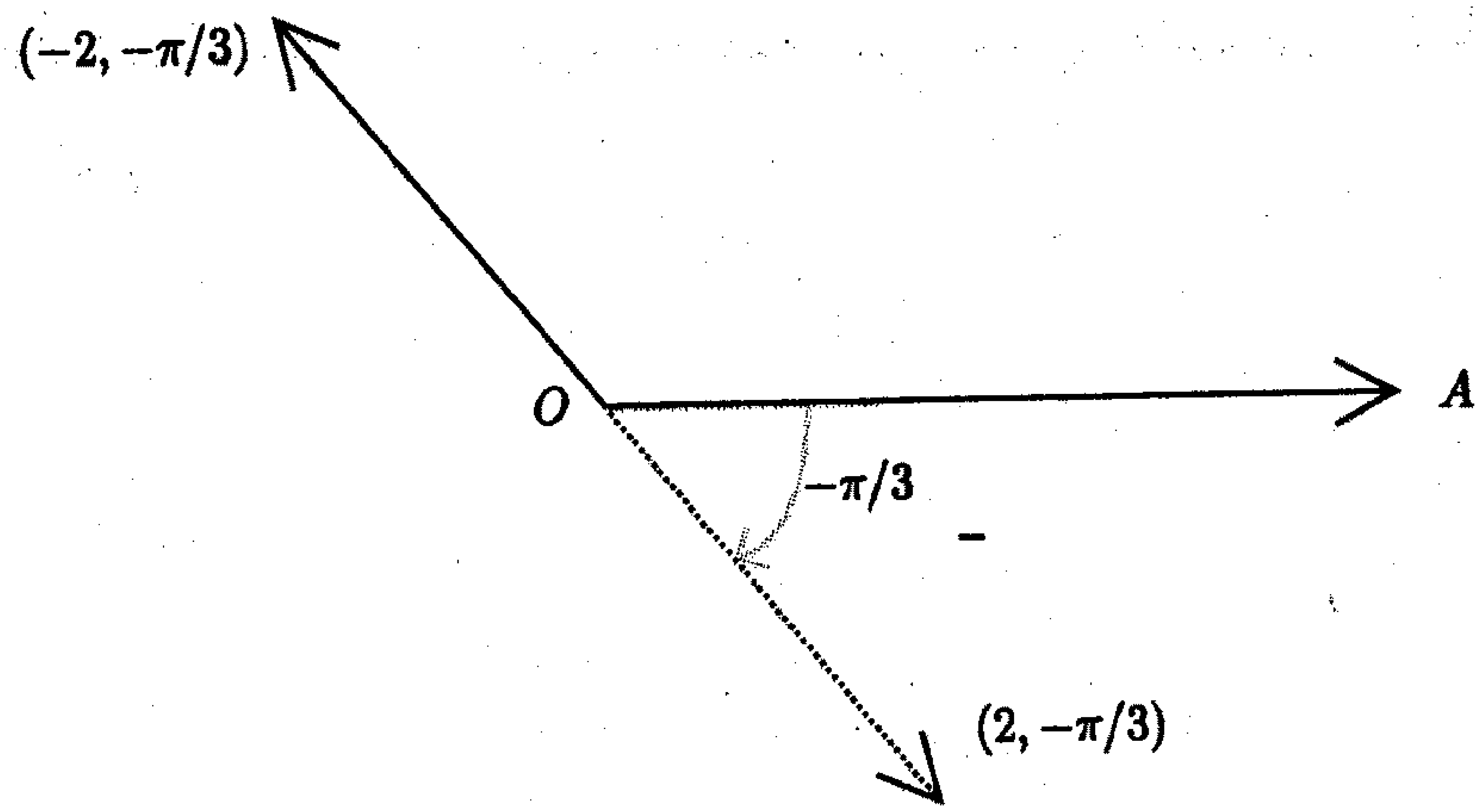
الشكل 3.11

مثال 4

ارسم بيان النقطة $(-2,-\pi/3)$ في الإحداثيات القطبية.

الحل

أولاً الدوران باتجاه عقارب الساعة $\pi/3$، ثم ارسم بيان النقطة بحيث تبعد 2 عن القطب، ولكن $r=-2$ وهذا يعني أن النقطة في الاتجاه المعاكس وتبعد 2 عن القطب.



الشكل 4.11

لاحظ من المثال السابق أن $(2, 5\pi/3)$ لها الموضع نفسه الذي فيه النقطة $(-2, \pi/3)$، ولاحظ أن $5\pi/2 = 2\pi + (-\pi/3)$.

كذلك النقطة $(2, 11\pi/3)$ لها موضع النقطتين نفسه $(-2, \pi/3)$ و $(-2, 5\pi/3)$، ولاحظ أن $11\pi/2 = 4\pi + (-\pi/3)$.

في الحقيقة أي نقطة على الشكل $(-2, -\pi/3 + 2n\pi)$، حيث إن n عدد صحيح، يكون لها موضع النقطة $(-2, \pi/3)$، وبذلك نصل إلى القاعدة التالية:

$$(r, \phi) = (r, \phi + 2n\pi)$$

حيث إن n عدد صحيح، أي أن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

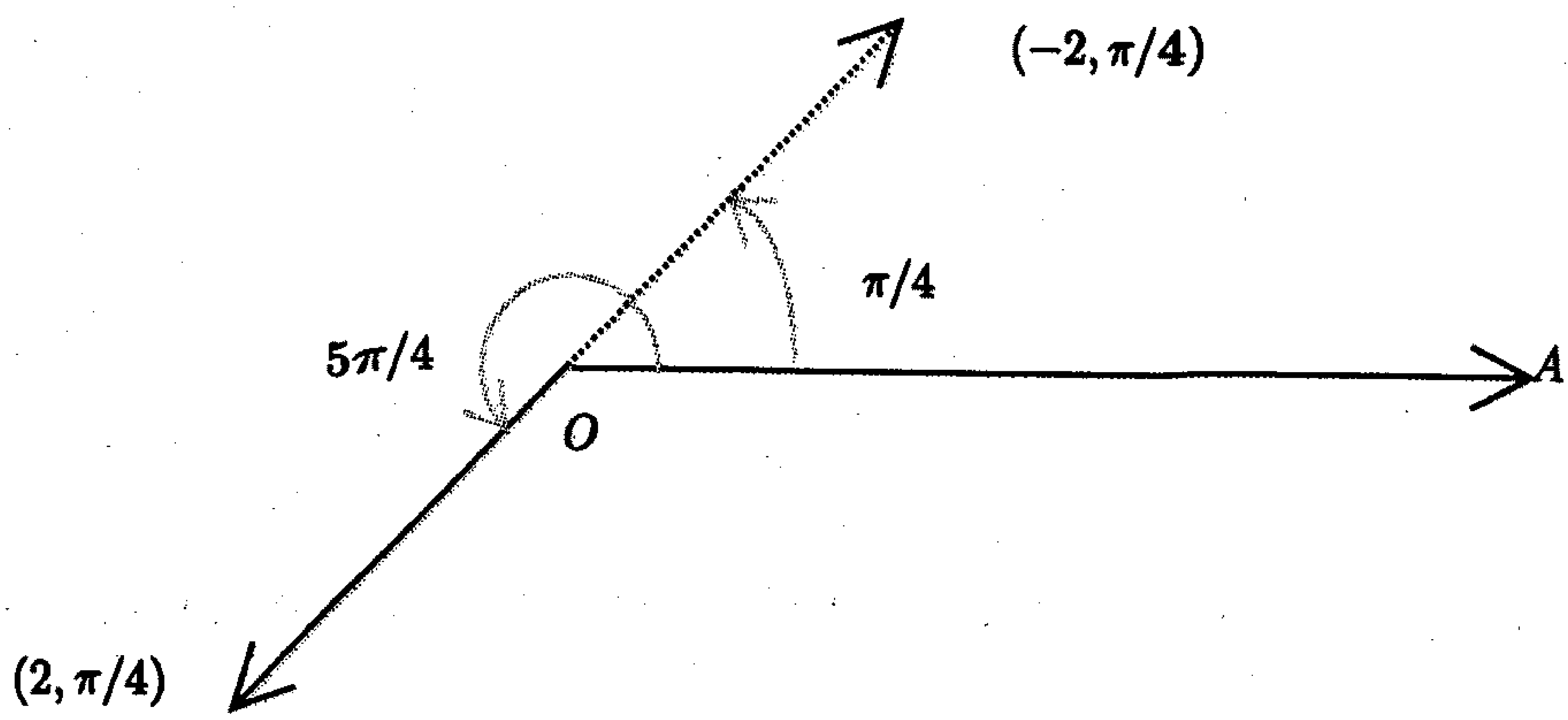
مثال 5

ارسم النقطتين $(2, \pi/4)$ و$(-2, 5\pi/4)$ في المستوى القطبي.

الحل

عند بيان $(-2, 5\pi/4)$ ندور في الاتجاه الموجب $5\pi/4$، ثم نرسم بيان النقطة $(2, 5\pi/4)$.

النقطة المطلوبة $(-2, 5\pi/4)$ هي النقطة التي تبعد وحدتين في الاتجاه المعاكس من القطب.



الشكل 5.11

أي أن $(-2, 5\pi/4) = (2, \pi/4)$

لاحظ أن $5\pi/4 = \pi/4 + \pi$.

في الحقيقة $(2, \pi/4) = (-2, 5\pi/4)$ ناتج من القاعدة التالية:

$$(r, \phi) = (-r, \phi + \pi)$$

ملاحظة

كل إحداثي قطبي يمثل بنقطة واحدة في المستوى، ولكن النقطة الواحدة في المستوى قد يكون لها أكثر من إحداثي قطبي واحد.

تمارين 1.11

ارسم بيان النقط التالية في الإحداثيات القطبية:

1) $(3,0)$ 2) $(-2,0)$ 3) $(5,\pi)$

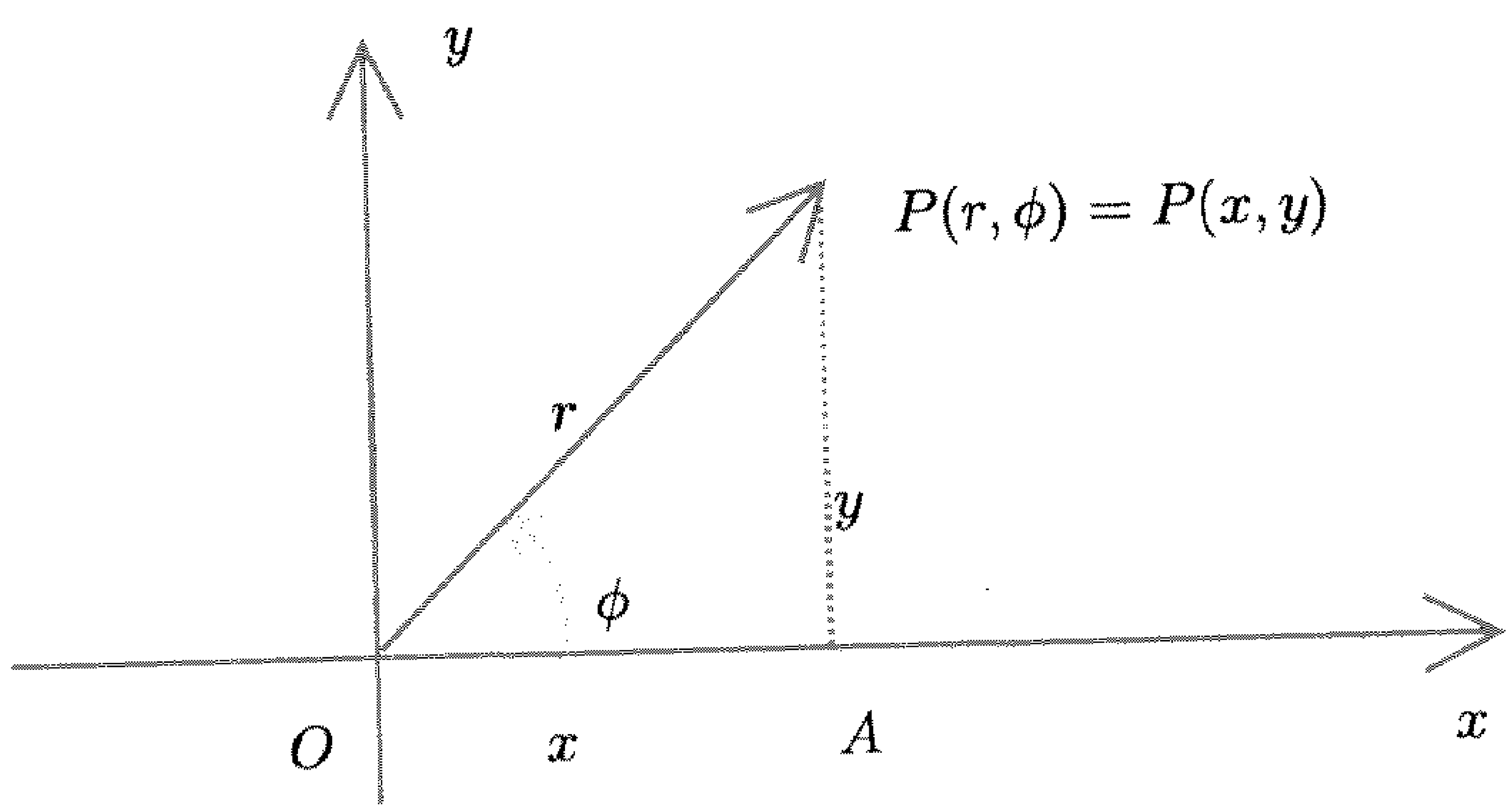
4) $(-3,\pi/6)$ 5) $(1,3\pi/2)$ 6) $(-1,\pi/6)$

7) $(6,7\pi/6)$ 8) $(2,3\pi/4)$ 9) $(-6,\pi/4)$

10) $(1,-\pi)$

2.11 العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية

لنفرض أن النقطة P لها الإحداثيات القطبية (r,ϕ)، ولها أيضاً الإحداثيات الديكارتية (x,y).



الشكل 6.11

من الشكل 6.11 نلاحظ أن المثلث OAP قائم الزاوية في A.

إذن $\frac{y}{r} = \sin\phi$ أو $y = r\sin\phi$

و $\frac{x}{r} = \cos\phi$ أو $x = r\cos\phi$

و $x^2 + y^2 = r^2$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

و $\tan\phi = \frac{y}{x}$ ، بشرط أن $x \neq 0$ أو $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

تستخدم هذه العلاقات للتحويل من النظام القطبي إلى النظام الديكارتي وبالعكس.

للتحويل من نظام قطبي إلى نظام ديكارتي، نستخدم:

$$x = r\cos\phi \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi$$

وللتحويل من نظام ديكارتي إلى نظام قطبي، نستخدم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{و} \quad x \neq 0$$

مع ملاحظة أن تحديد ϕ لا يتم باستخدام $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ فقط، ولكن تؤخذ إشارتا x وy في الحسبان كذلك.

مثـال 6

حوّل الإحداثيات القطبية التالية إلى إحداثيات ديكارتية:

أ) $(4, \pi/6)$ ب) $(-3, -\pi/3)$ ج) $(-2, 3\pi/4)$

الحـل

أ)

$$x = r\cos\phi \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi$$

$$x = 4\cos(\pi/6) \quad \text{و} \quad y = 4\sin(\pi/6)$$

$$x = 4(\sqrt{3}/2) \quad \text{و} \quad y = 4(1/2)$$

$$x = 2\sqrt{3} \quad \text{و} \quad y = 2$$

إذن النقطة $(4, \pi/6)$، تقابلها الإحداثيات الديكارتية $(2\sqrt{3}, 2)$.

ب)

$$x = r\cos\phi \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi$$

$$x = -3\cos(-\pi/3) \quad \text{و} \quad y = -3\sin(-\pi/3)$$

$$x = -3\cos(\pi/3) \quad \text{و} \quad y = -[-\sin(\pi/3)]$$

$$x = -3(1/2) \quad \text{و} \quad y = 3(\sqrt{3}/2)$$

$$x = -3/2 \quad \text{و} \quad y = 3(\sqrt{3}/2)$$

إذن النقطة $(-3,-\pi/3)$ تقابلها الإحداثيات الديكارتية $(-3/2, 3\sqrt{3}/2)$

ج) $x = r \cos \phi$ و $y = r \sin \phi$

$x = -2 \cos (3\pi/4)$ و $y = -2 \sin (3\pi/4)$

$x = -2 \cos (\pi - \pi/4)$ و $y = -2 \sin (\pi - \pi/4)$

$x = -2[- \cos (\pi/4)]$ و $y = -2 \sin (\pi/4)$

$x = -2[- \cos (\pi/4)]$ و $y = -2 \sin (\pi/4)$

$x = 2(1/\sqrt{2})$ و $y = -2(1/\sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}$ و $y = -\sqrt{2}$

إذن النقطة $(-2, 3\pi/4)$ تقابلها الإحداثيات الديكارتية $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

مثال 7

حوّل الإحداثيات الديكارتية التالية إلى إحداثيات قطبية:

أ) $(1,1)$ ب) $(-2, 2\sqrt{3})$ ج) $(-2\sqrt{3}, -2)$

الحل

أ) $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

و $\phi = \textbf{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \textbf{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \textbf{Tan}^{-1}(1)$

إذن $\phi = \pi/4$ وحيث أن x وy موجبان، فإن $\phi = \pi/4$.

إذن النقطة $(1,1)$ يقابلها في الإحداثيات القطبية النقطة $(\sqrt{2}, \pi/4)$ وبصفة عامة $(\sqrt{2}, \pi/4 + 2n\pi)$ حيث إن n عدد صحيح.

ب) $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

و $\phi = \textbf{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \textbf{Tan}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \textbf{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

إذن ϕ تكون إما $2\pi/3$ أو $5\pi/3$.

ولكن إشارة x سالبة وإشارة y موجبة، وهذا يكون في الربع الثاني.

إذن $\phi = 2\pi/3$.

إذن النقطة $(-2, 2\sqrt{3})$ يقابلها في الإحداثي القطبي النقطة $(4, 2\pi/3)$ أو بصفة عامة $(4, 2\pi/3 + 2n\pi)$ حيث أن n عدد صحيح.

ج)
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

و
$$\phi = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right) = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبذلك فإن

ϕ تكون إما $\pi/6$ أو $7\pi/6$ ولكن $\pi/6$ في الربع الأول.

إذن $\phi = 7\pi/6$.

إذن النقطة $(-2\sqrt{3}, -2)$ يقابلها في الإحداثي القطبي النقطة $(4, 7\pi/6)$، أو بصفة عامة $(4, 7\pi/6 + 2n\pi)$ حيث إن n عدد صحيح.

تمارين 2.11

1) حوّل النقط القطبية الآتية إلى نقط ديكارتية:

أ) $(-1, -\pi)$ ب) $(2, 0)$ ج) $(-1, -3\pi/2)$

د) $(5, -\pi)$ هـ) $(-3, \pi/6)$ و) $(1, 3\pi/4)$

2) حوّل النقط الديكارتية الآتية إلى نقط بدلالة الإحداثيات القطبية:

أ) $(-3, 0)$ ب) $(1, -1)$ ج) $(-2, 2\sqrt{3})$

د) $(2, 2\sqrt{2})$ هـ) $(-1, -1)$ و) $(-1, 1)$

في التمارين من 3 إلى 6، حوّل المعادلة القطبية المعطاة إلى معادلة ديكارتية في كل حالة.

3) $r = -3 \cos \phi$ 4) $r = \sec \phi$

5) $r^2 \sin 2\phi = 2$ 6) $r^2 = \cos 2\phi$

في التمارين من 7 إلى 10، حوّل المعادلة الديكارتية المعطاة إلى معادلة قطبية في كل حالة.

7) $x^2 + y^2 = 25$ 8) $x^2 + y^2 = 4x$

9) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4xy$ 10) $xy = 1$

3.11 البيان في الإحداثيات القطبية

في الإحداثيات الديكارتية عرّفنا بيان المعادلة $y = f(x)$ بأنه النقط (x, y) التي تحقّق المعادلة $y = f(x)$.

في حالة الإحداثيات القطبية، لا يتماشى هذا التعريف مع بيان المعادلة $r = f(\phi)$؛ لأن كل نقطة في المستوى، يكون لها عدد لانهائي من الإحداثيات القطبية، وبذلك نعرّف بيان المعادلة $r = f(\phi)$ كما يلي:

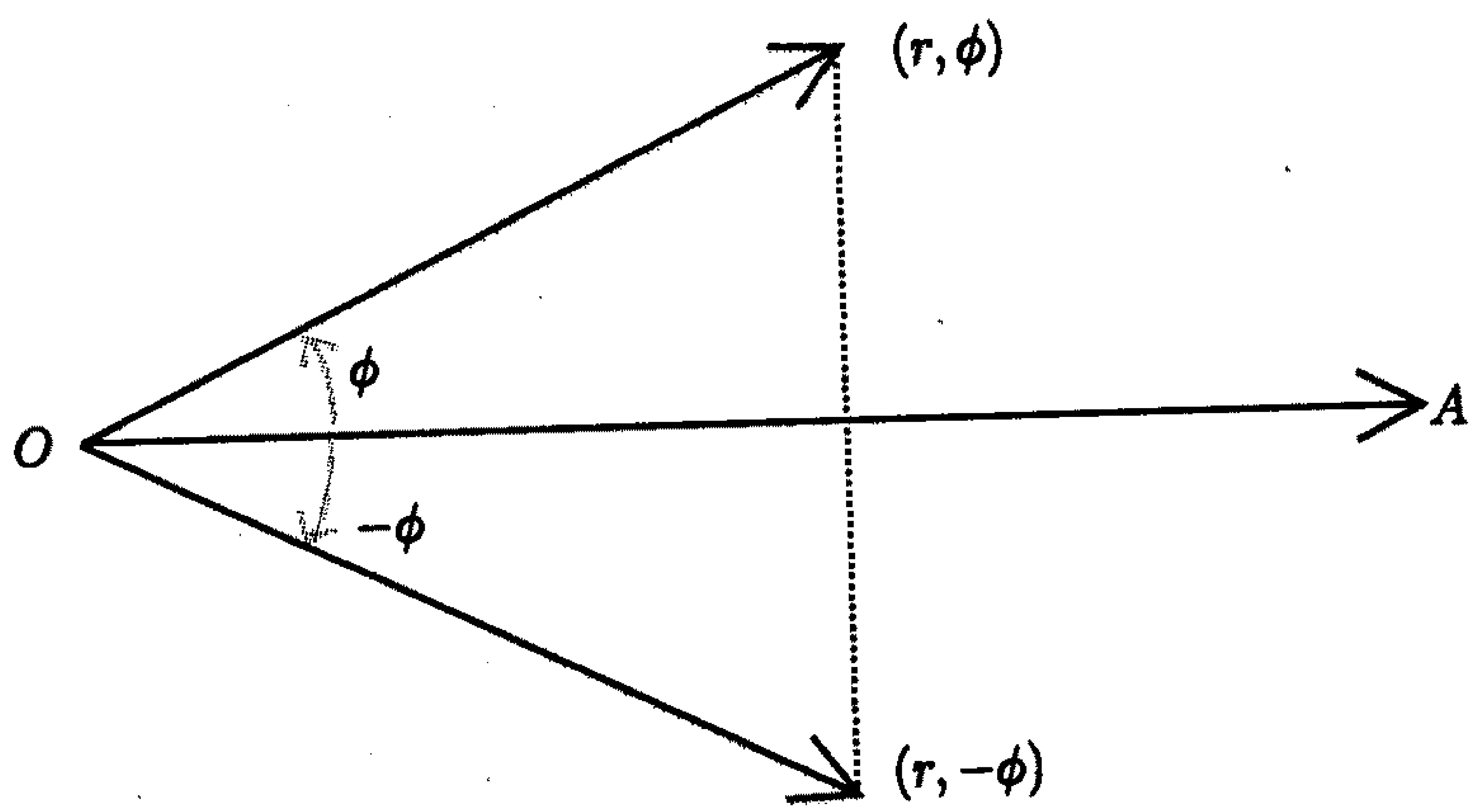
تعريف 1.11

يتكوّن بيان المعادلة القطبية من كل النقط في المستوى، التي لها على الأقل زوج مرتّب واحد (r, ϕ) يحقق هذه المعادلة.

قبل إعطاء بعض الأمثلة لبيان المعادلات القطبية، نلفت انتباه القارىء إلى القواعد التالية:

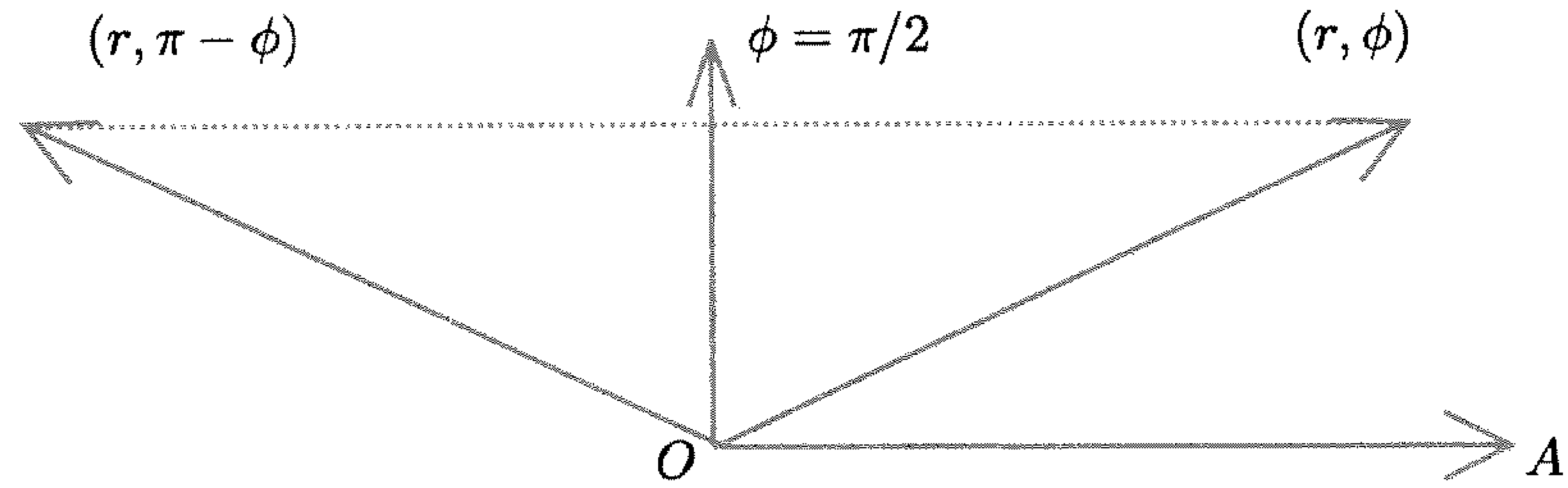
قواعد التماثل

1) إذا لم تتغيّر المعادلة بوضع $(-\phi)$ بدلاً من ϕ، فإن البيان يكون متماثلاً حول المحور القطبي.



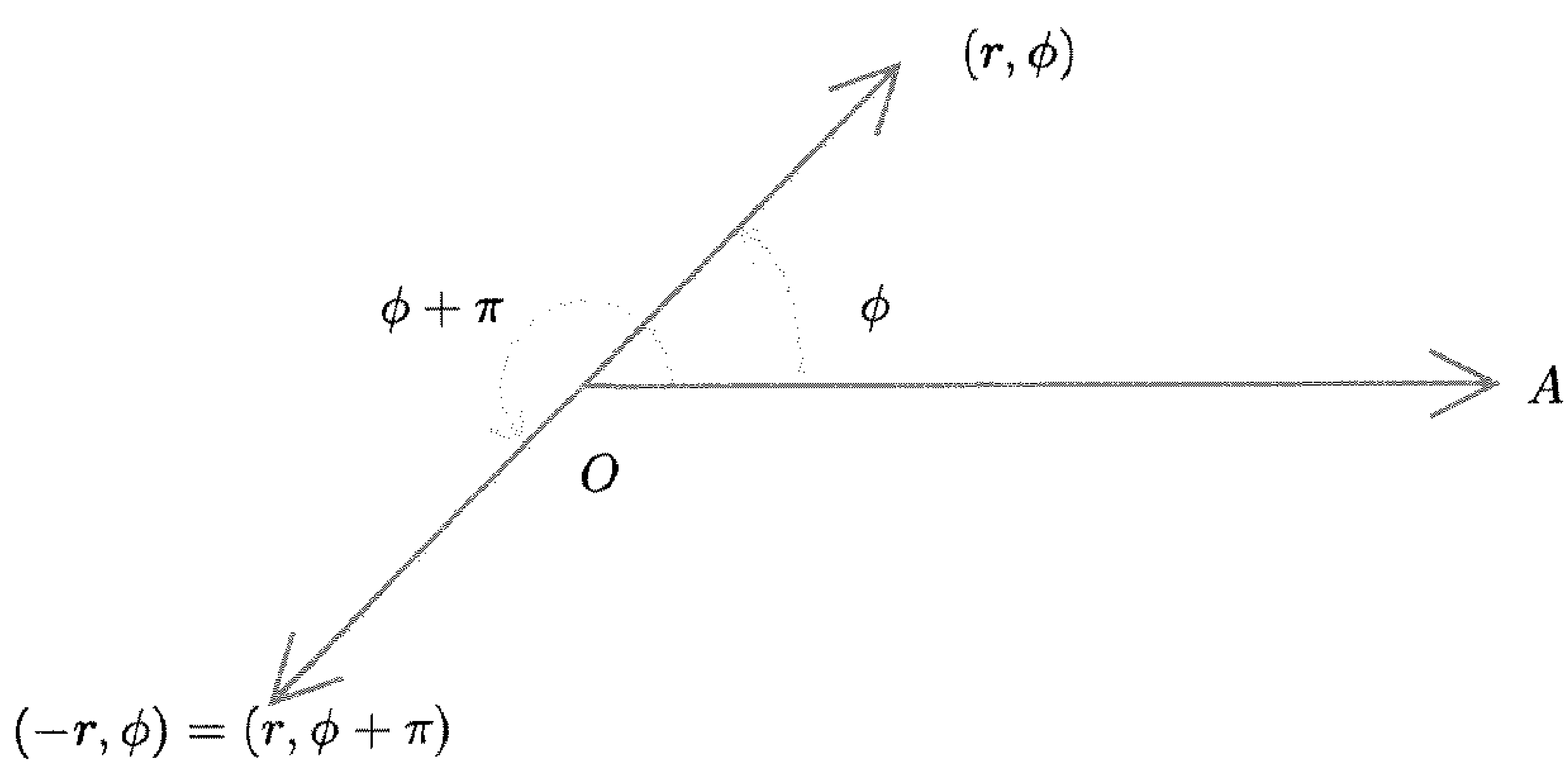
الشكل 7.11

2) إذا لم تتغيّر المعادلة بوضع $(\pi - \phi)$ بدلاً من ϕ، فإن البيان يكون متماثلاً حول المستقيم $\phi = \pi/2$.



الشكل 8.11

3) إذا لم تتغيّر المعادلة بوضع $(-r)$ بدلاً من r (هذا يكافىء وضع $(\phi + \pi)$ بدلاً من ϕ)، فإن البيان يكون متماثلاً حول القطب.



الشكل 9.11

مثـــال 8

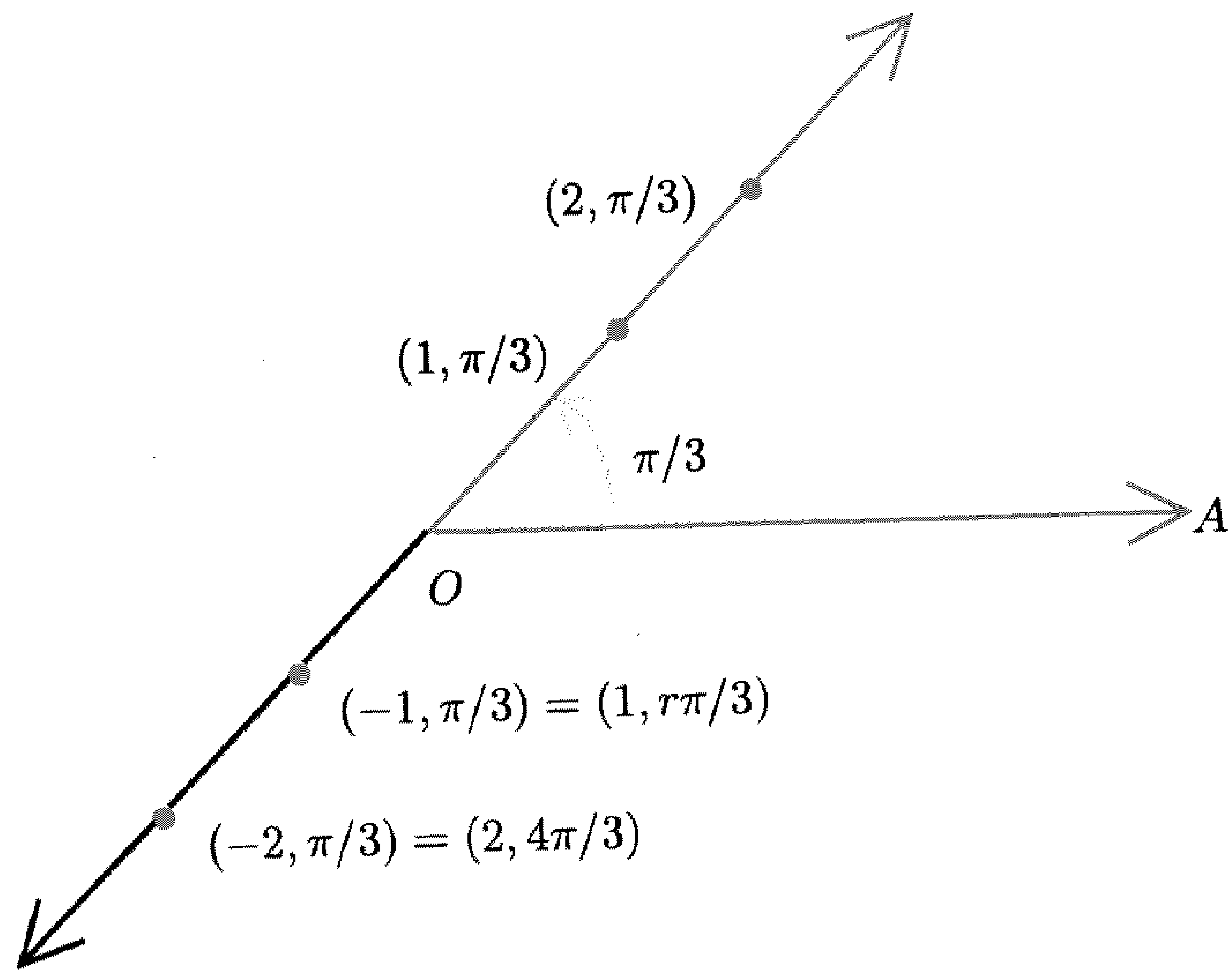
ارسم بيان المنحنى $\phi = \pi/3$.

الحــل

المنحنى $\phi = \pi/3$ هو مستقيم يمر خلال القطب، ويصنع زاوية $\pi/3$ مع المحور

القطبي، يمتد من الجهتين، لأنه يحتوي على النقط $(-r, \pi/3)$، التي تساوي

$$(r, 4\pi/4) = (-r, \pi/3)$$



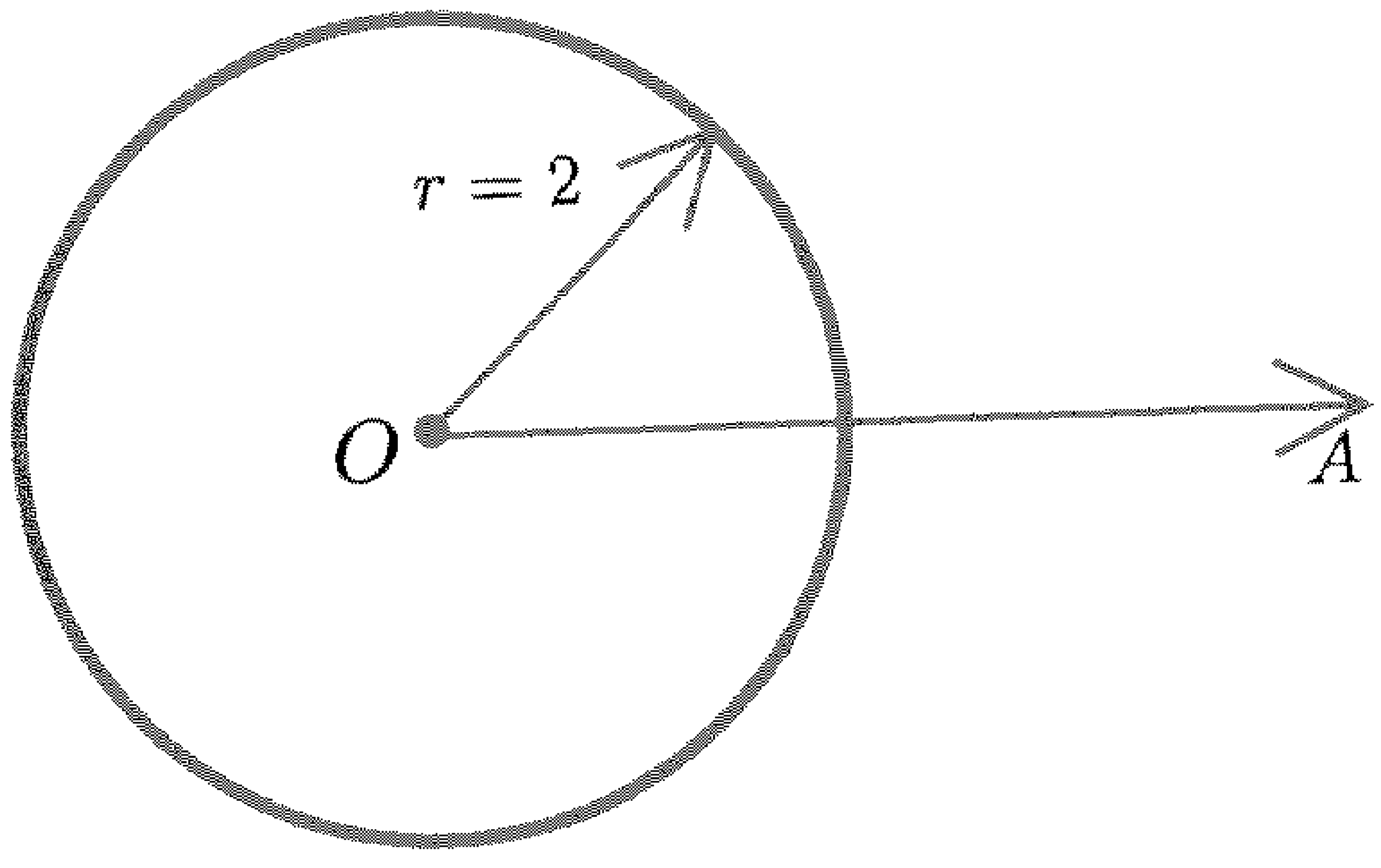
الشكل 10.11

مثـال 9

ارسم بيان المنحنى $r = 2$.

الحـل

بيان المنحنى $r = 2$ هو مجموعة كل النقط التي تبعد عن القطب بمقدار 2، هذه النقط تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.



الشكل 11.11

مثـــال 10

ارسم بيان المنحنى $r = 2 \cos \phi$.

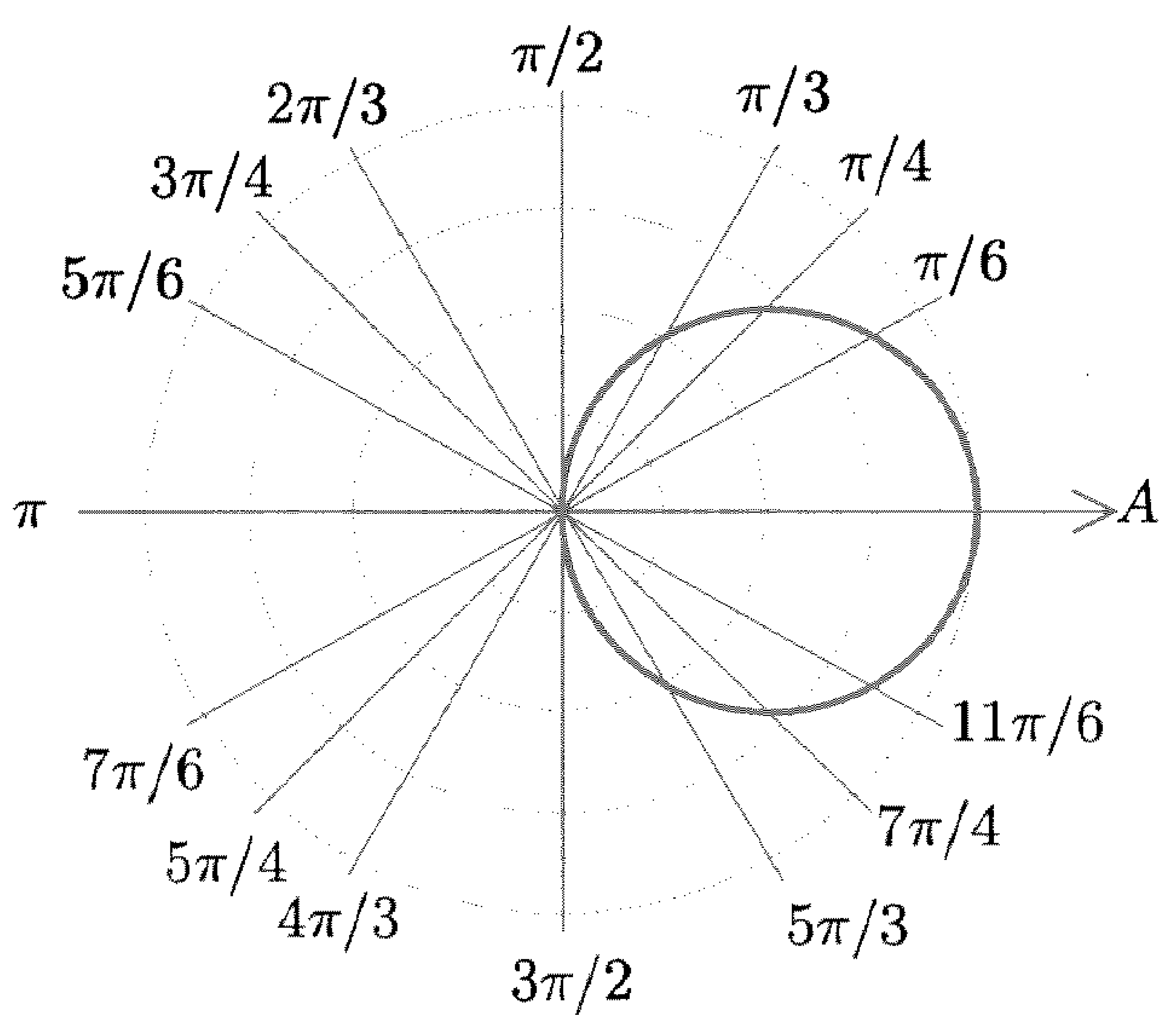
الحــل

حيث إن $\cos \phi = \cos (-\phi)$ ، فإن البيان يكون متماثلاً حول المحور القطبي، وبذلك نحتاج إلى قيم ϕ بين الصفر وπ.

نكوّن الجدول التالي:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 2 \cos \phi$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2

لاحظ في رسم المنحنى $r = 2 \cos \phi$، أننا قد استخدمنا $(-r, \phi) = (r, \phi + \pi)$ مثل $(1, 5\pi/3) = (-1, 2\pi/3)$ و $(\sqrt{2}, 3\pi/4) = (-\sqrt{2}, 3\pi/4)$، ... إلخ.



الشكل 12.11

قد يساعد التحويل إلى إحداثيات ديكارتية في عملية الرسم، ففي المثال السابق، نجد أن: $r^2 = 2r\ \mathbf{cos}\ \phi$، حيث $r \neq 0$

لأنه إذا كان $r = 0$، فإن ذلك يمثل نقطة الأصل، وهي دائرة:

إذن
$$x^2 + y^2 = 2x$$

وبذلك
$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

وبإكمال المربع، نجد أن: $(x-1)^2 + y^3 = 1$

وهذه المعادلة تمثّل دائرة مركزها $(1,0)$، ونصف قطرها 1.

مثـــال 11

ارسم بيان المنحنى $r = -5\ \mathbf{cos}\ \phi + 5\ \mathbf{sin}\ \phi$.

الحـــل

تستطيع رسم هذه المعادلة بالطريقة السابقة، ولكن من الأسهل تحويل هذه المعادلة إلى معادلة ديكارتية، ثم رسم بيانها.

بضرب المعادلة $r = -5\ \mathbf{cos}\ \phi + 5\ \mathbf{sin}\ \phi$ في r، نجد أن:
$$r^2 = -5r\ \mathbf{cos}\ \phi + 5r\ \mathbf{sin}\ \phi$$

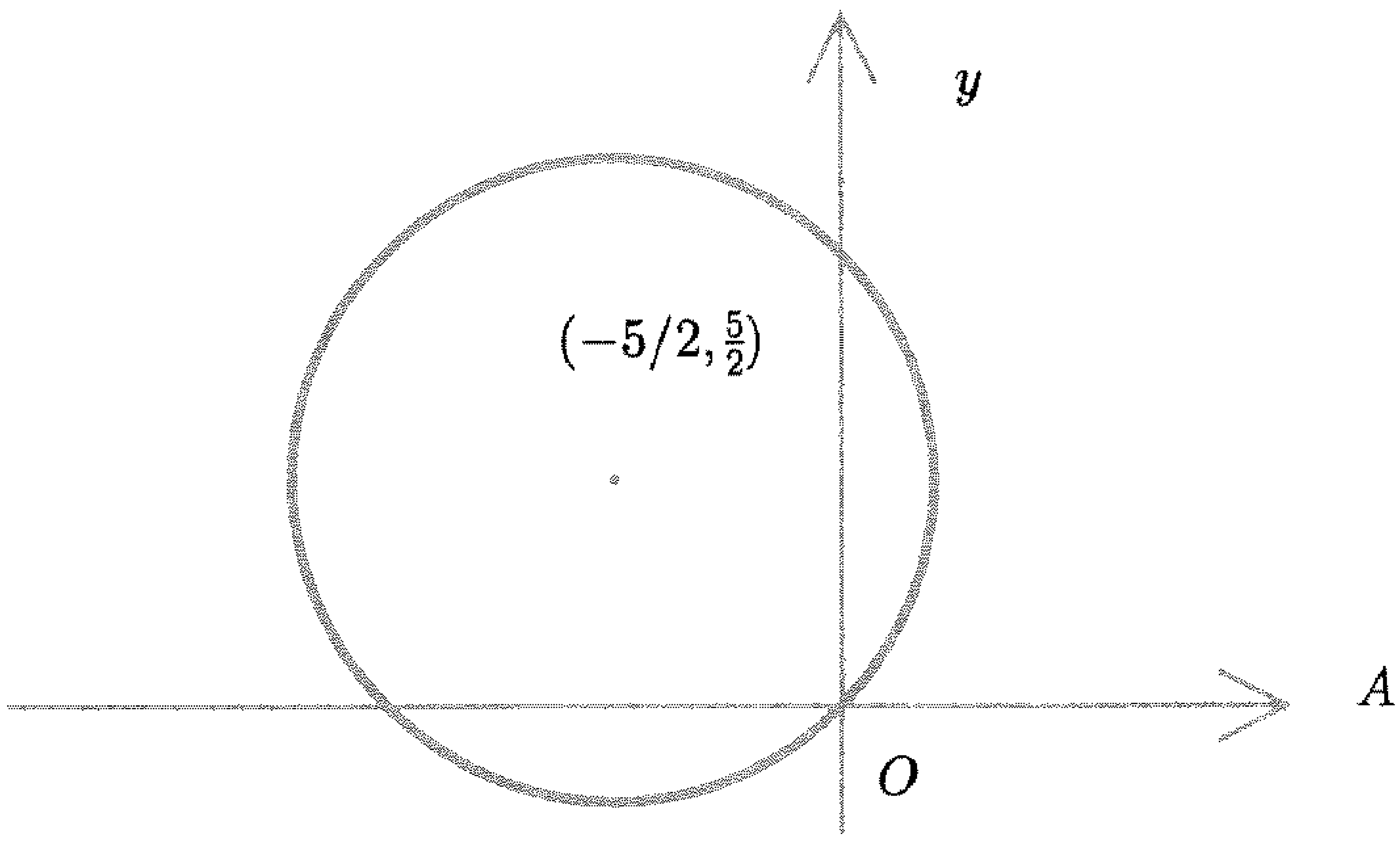
وحيث إن $x = r\ \mathbf{cos}\ \phi$ و $y = r\ \mathbf{sin}\ \phi$، $r^2 = x^2 + y^2$

فإن المعادلة الديكارتية هي:
$$x^2 + y^2 = -5x + 5y$$

أو
$$x^2 + 5x + y^2 - 5y = 0$$

وبإكمال المربع، نجد أن: $(x + 5/2)^2 + (y - 5/2)^2 = 50/4$

وهذه المعادلة تمثل دائرة مركزها $(-5/2, 5/2)$، ونصف قطرها $5\sqrt{2}/2$.



شكل 11.13

بصفة عامة، يكوّن بيان المعادلة $r = a\cos\phi + b\sin\phi$، حيث إن a وb عددان حقيقيان، دائرة معادلتها الديكارتية:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

وبذلك يكون مركزها $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

ونصف قطرها $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

مثال 12

ارسم بيان المنحنى $r = 1 - \sin\phi$.

الحل

حيث إن $\sin\phi = \sin(\pi-\phi)$ ، فإن البيان يكون متماثلاً حول المستقيم $\phi = \pi/2$.

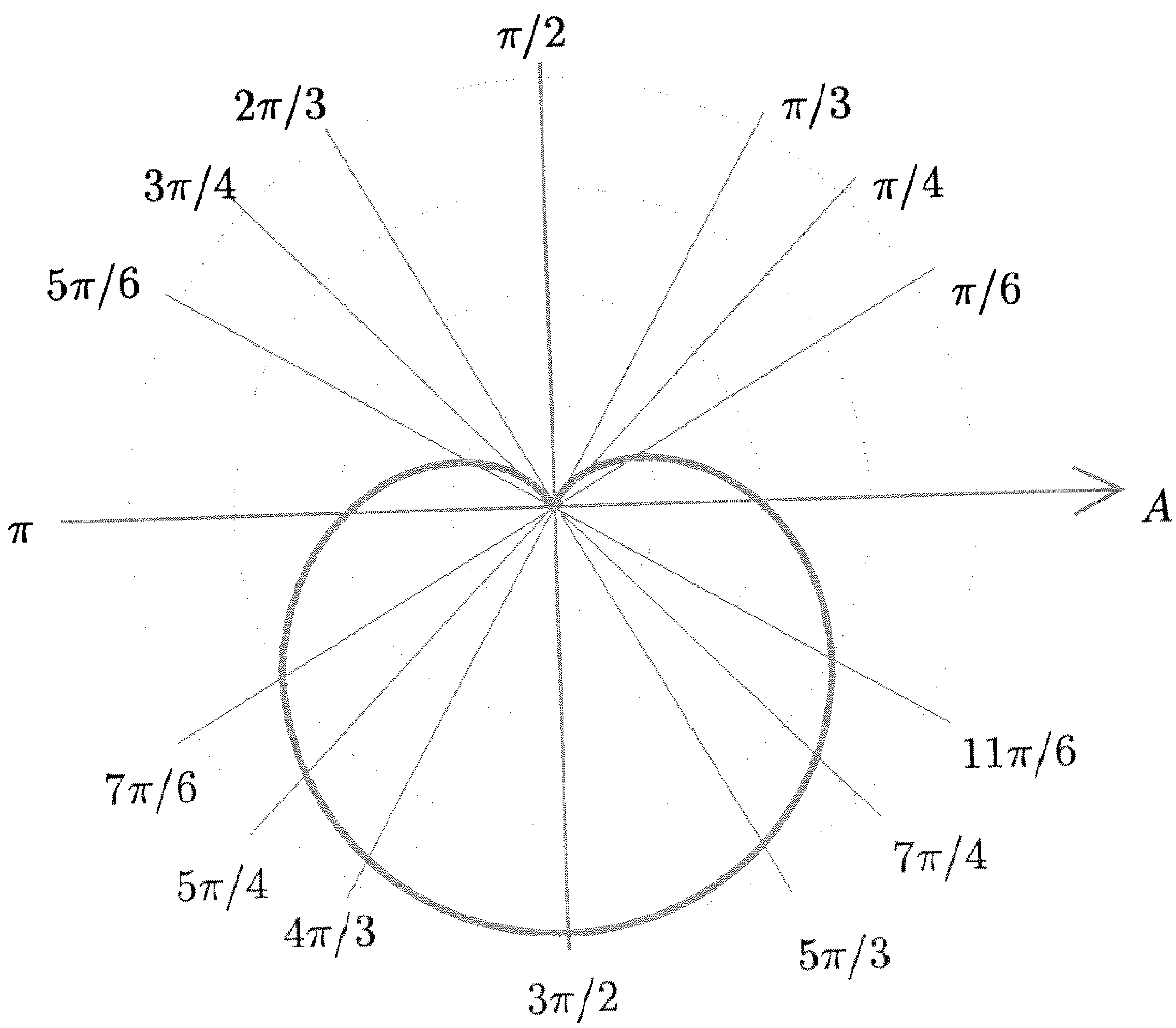
إذن نستخدم قيم ϕ التي بين الصفر و$\pi/2$ وقيم ϕ التي بين $3\pi/2$ و2π والتماثل حول المستقيم $\phi = \pi/2$.

الجدول التالي يوضح ذلك:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = 1 - \sin\phi$	1	$1/2$	$1 - 1\sqrt{2}$	$1 - s = /2$	0

ϕ	$3\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$r = 1 - \sin\phi$	2	$1 + \sqrt{3}/2$	$1 + 1/\sqrt{2}$	$3/2$	1

الموضح في الشكل 14.11



$r = 1 - \sin\phi$

الشكل 14.11

هذا الشكل يسمى منحنى القلب (Cardioid).

مثـــال 13

ارسم بيان المنحنى $r = 3 + 2\cos\phi$.

الحـــل

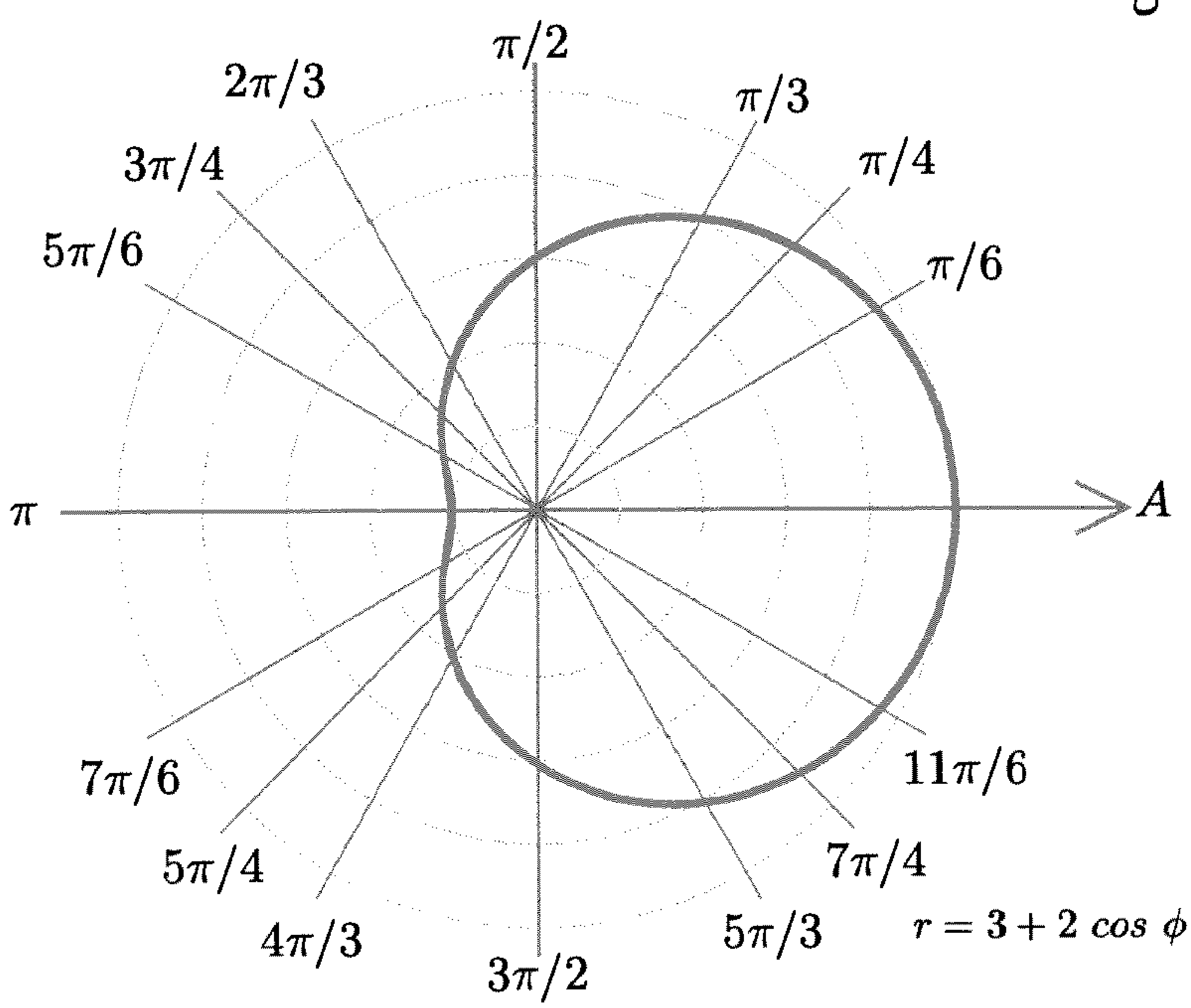
حيث إن $\cos\phi = \cos(-\phi)$ ، فإن البيان متماثل حول المحور القطبي.

الجدول التالي يوضح ذلك:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = 3 + 2\cos\phi$	5	$3+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{2}$	4	3

ϕ	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 3 + 2\cos\phi$	2	$3-\sqrt{2}$	$3-\sqrt{3}$	1

الموضح في الشكل 15.11



شكل 15.11

هذا الشكل يسمى منحنى الحلزون (Limacon).

مثـال 14

ارسم بيان المنحنى $r = 3 - 4 \sin \phi$.

الحـل

بما أن $\sin (\pi - \phi) = \sin \phi$ ، فإن البيان متماثل حول المستقيم $\phi = \pi/2$.

إذن، نتعامل مع قيم ϕ التي بين الصفر و$\pi/3$ وقيم ϕ التي بين $3\pi/2$ و2π ثم نستخدم خاصية التماثل حو المستقيم $\phi = \pi/2$.

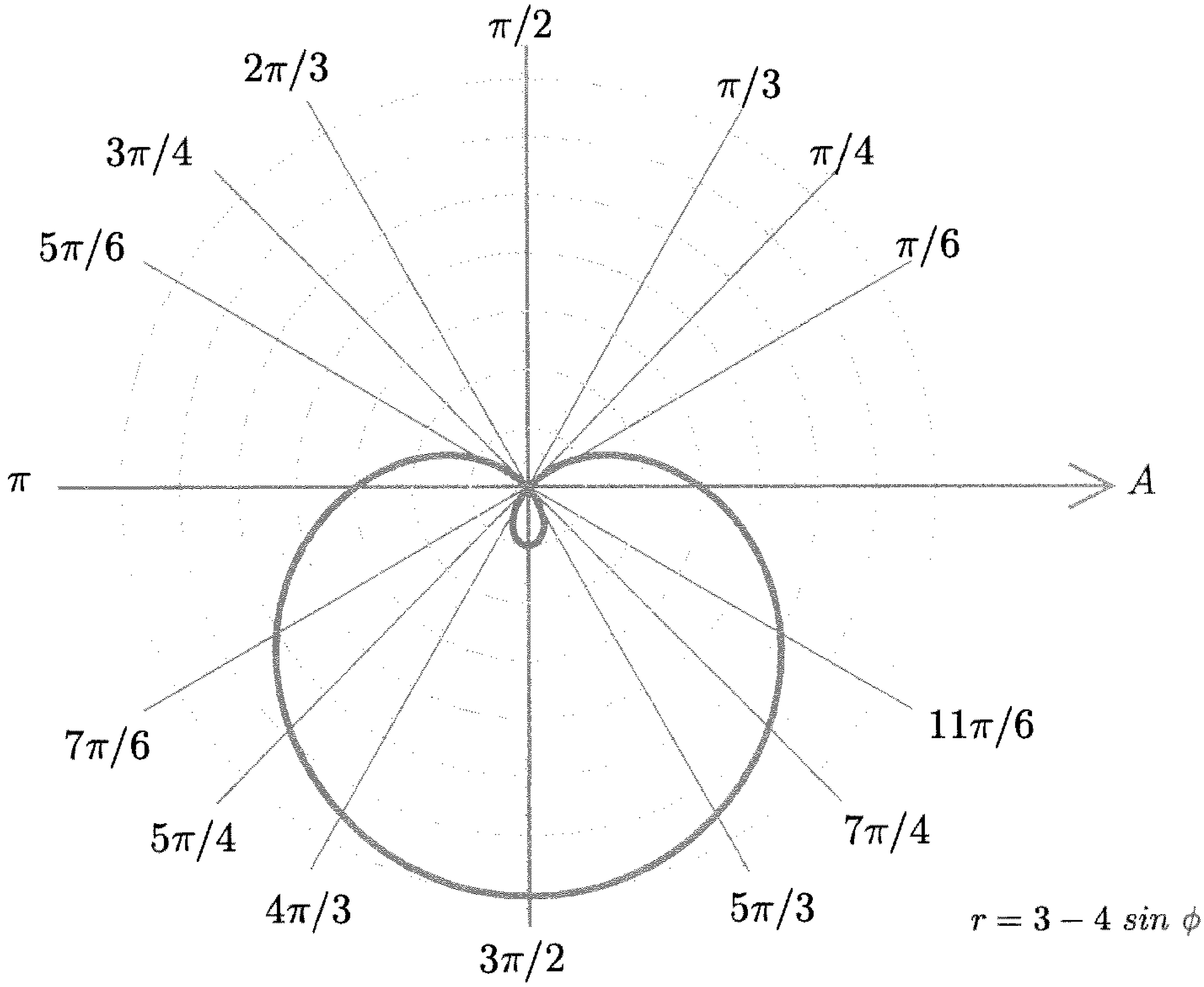
الجدول التالي يوضح ذلك:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = 3 - 4 \sin \phi$	3	1	$3 - 2\sqrt{2}$	$3 - 2\sqrt{3}$	-1

ϕ	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$r = 3 - 4 \sin \phi$	7	$\sqrt{33} + 2$	$3 + 2\sqrt{2}$	5	3

الموضح في الشكل 16.11

هذا الشكل يسمى منحنى الحلزون بعروة أو حلقة (Limacon with a loop).



الشكل 16.11

من الأمثلة السابقة، نستطيع تعميم ما يلي:

بيان المعادلات:

$r = a + b \cos \phi$ أو $r = a + b \sin \phi$

حيث a وb عددان حقيقيان، يكون له الشكل:

1) القلب، إذا كان $a = b$ (أنظر المثال 12).

2) الحلزون، إذا كان $a > b$ (أنظر المثال 13).

3) الحلزون بعروة، إذا كان $a < b$ (أنظر المثال 14).

مثـال 15

ارسم بيان المنحنى $r = -3\cos(2\phi)$.

الحـل

حيث إن $\cos(-2\phi) = \cos(2\phi)$ ، فإن البيان متماثل حول المحور القطبي.
كذلك $\cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2(\pi - \phi)$ ، وهذا يعني أن البيان متماثل حول المستقيم $\phi = \pi/2$.

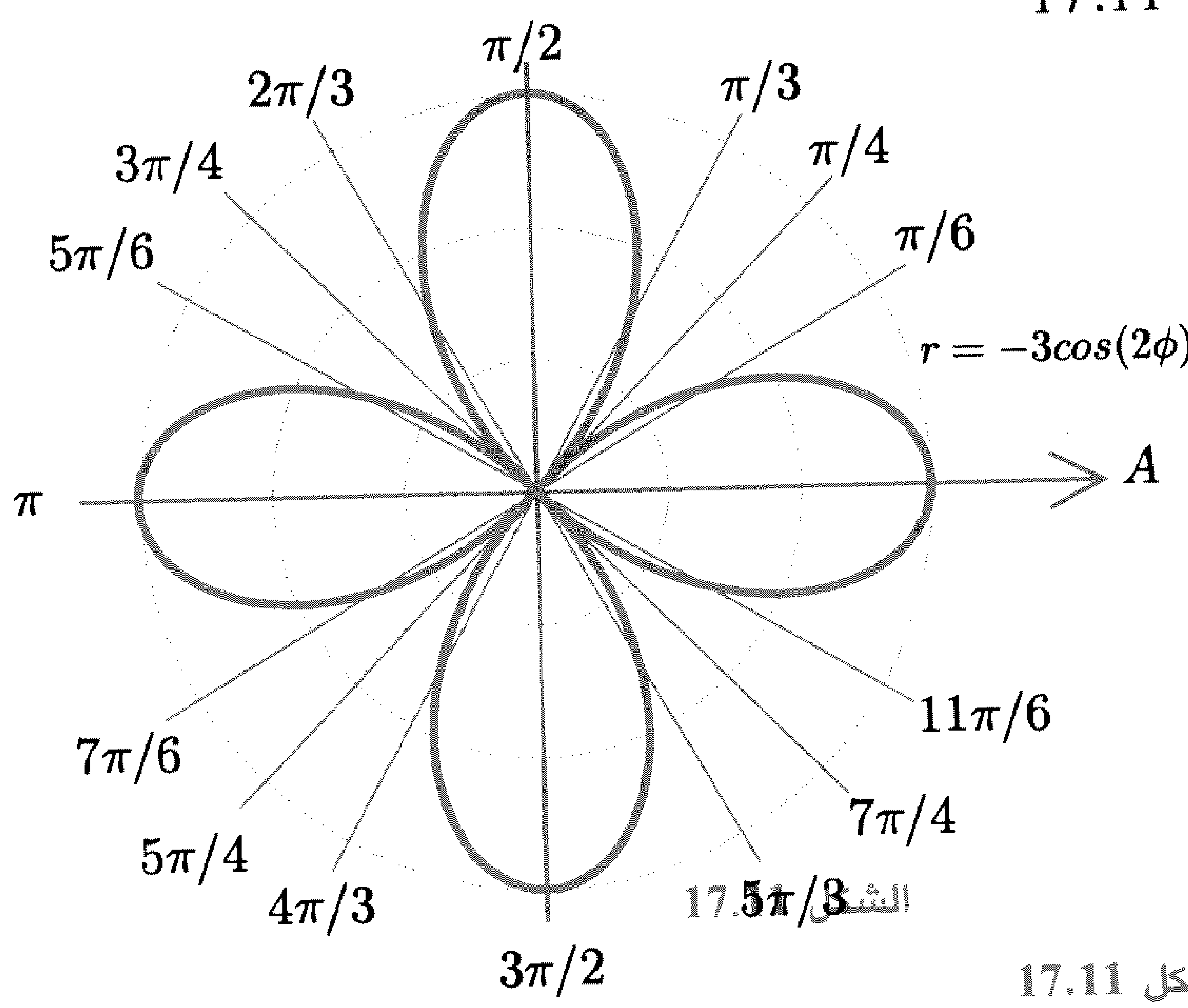
نلاحظ كذلك أن $\cos(2\phi) = \cos(2\phi + 2\pi) = \cos 2(\phi + \pi)$ وهذا يعني أن البيان متماثل حول القطب.

إذن، نتعامل مع قيم ϕ التي بين الصفر و$\pi/2$.

الجدول التالي يوضح ذلك:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = -3\cos(2\phi)$	-3	$-3/2$	0	$3/2$	3

الموضح في الشكل 17.11



شكل 17.11

هذا الشكل يسمى منحنى الزهرة ذات الورقات الأربع (Four-leafed Rose).

مثـــال 16

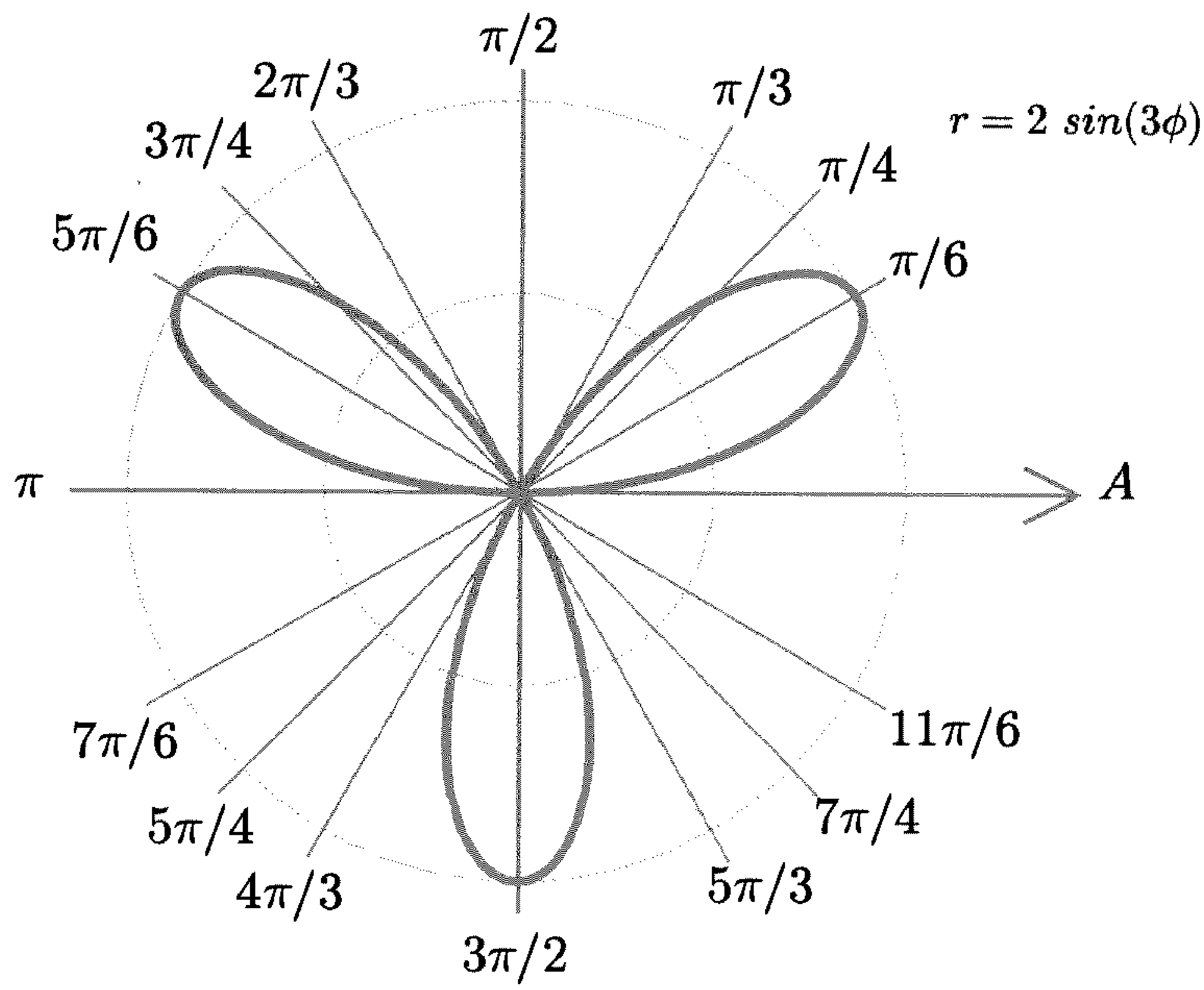
ارسم بيان المنحنى $r = 2 \sin (3\phi)$.

الحـــل

حيث إن $\sin \phi = \sin (\pi - \phi)$ ، فإن البيان متماثل حول المستقيم $\phi = \pi/2$.

نكوّن الجدول التالي:

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$r = 2 \sin (3\phi)$	0	2	$\sqrt{2}$	0	-2	2	0	$-\sqrt{2}$	-2	0



الشكل 18.11

هذا الشكل يسمى منحنى الزهرة ذات الورقات الثلاث (Three-leafed Rose).
من المثالين السابقين، نستطيع تعميم النتيجة التالية:

بيان المعادلات:

$$r = a\cos(n\phi) \text{ أو } r = a\sin(n\phi)$$

حيث إن a عدد حقيقي، يكون:

1) زهرة ذات n من الورقات، إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً.

2) زهرة ذات $2n$ من الورقات، إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً.

مثال 17

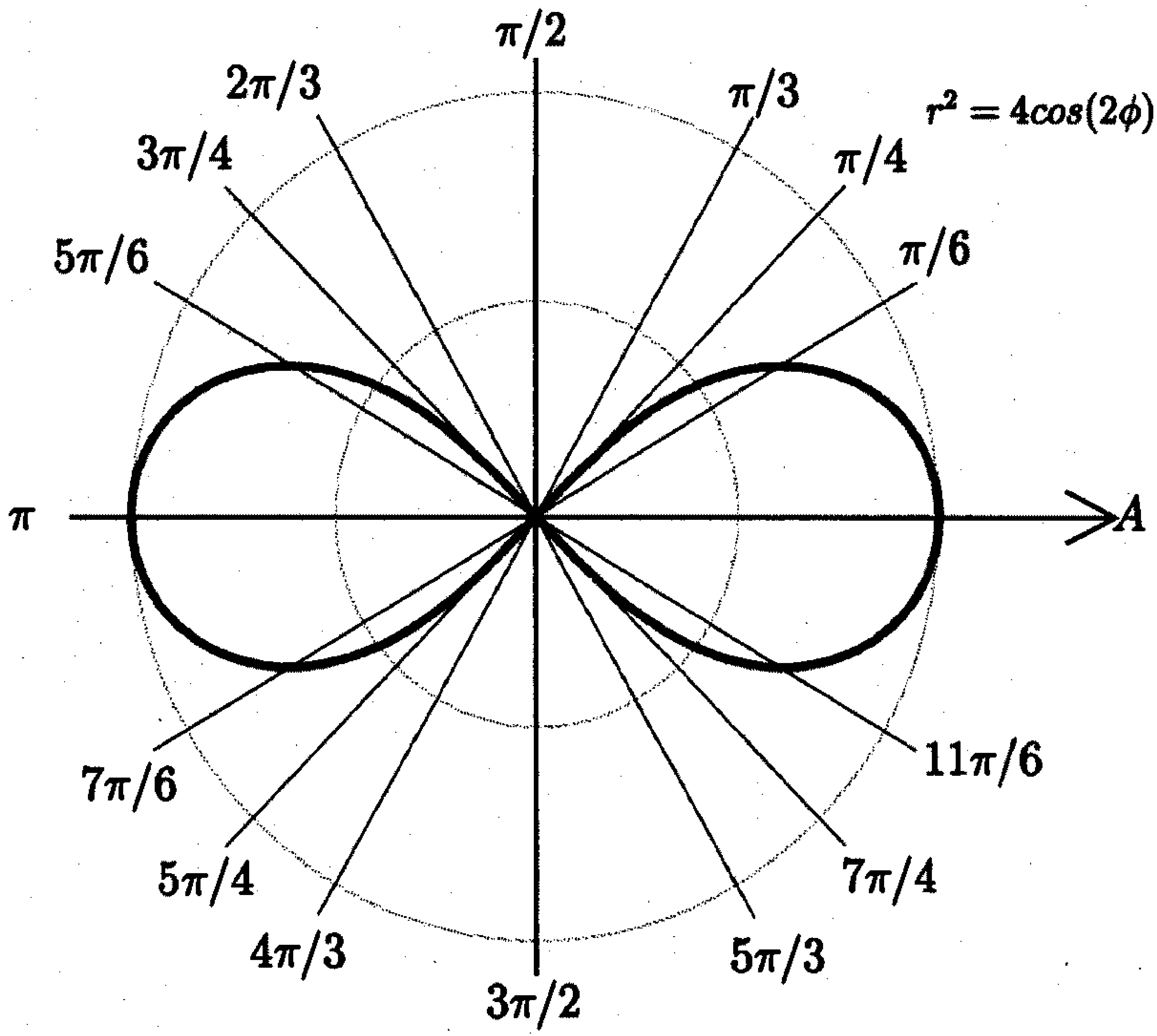
ارسم بيان المنحنى $r^2 = 4\cos(2\phi)$.

الحل

حيث إن $\cos(2\phi) = \cos(-2\phi)$ ، وبذلك يكون البيان متماثلاً حول المحور القطبي.

لاحظ أن $r = \pm\sqrt{\cos(2\phi)}$ و $\sqrt{\cos(2\phi)}$ معرّف فقط لقيم ϕ حيث $\cos(2\phi) \geq 0$ ، وهذا يعني أن $\phi \in [0, \pi/4]$ أو $\phi \in [3\pi/2, \pi]$.

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	2π
$r = \pm\sqrt{\cos(2\phi)}$	± 2	$\pm\sqrt{2}$	0	0	$\pm\sqrt{2}$	± 2



الشكل 19.11

من المثال السابق، نستنتج أن بيان المعادلتين:

$$r^2 = a^2 \cos(n\phi) \text{ أو } r^2 = a^2 \sin(n\phi)$$

يعطي منحنى ذا عروتين (Lemniscate).

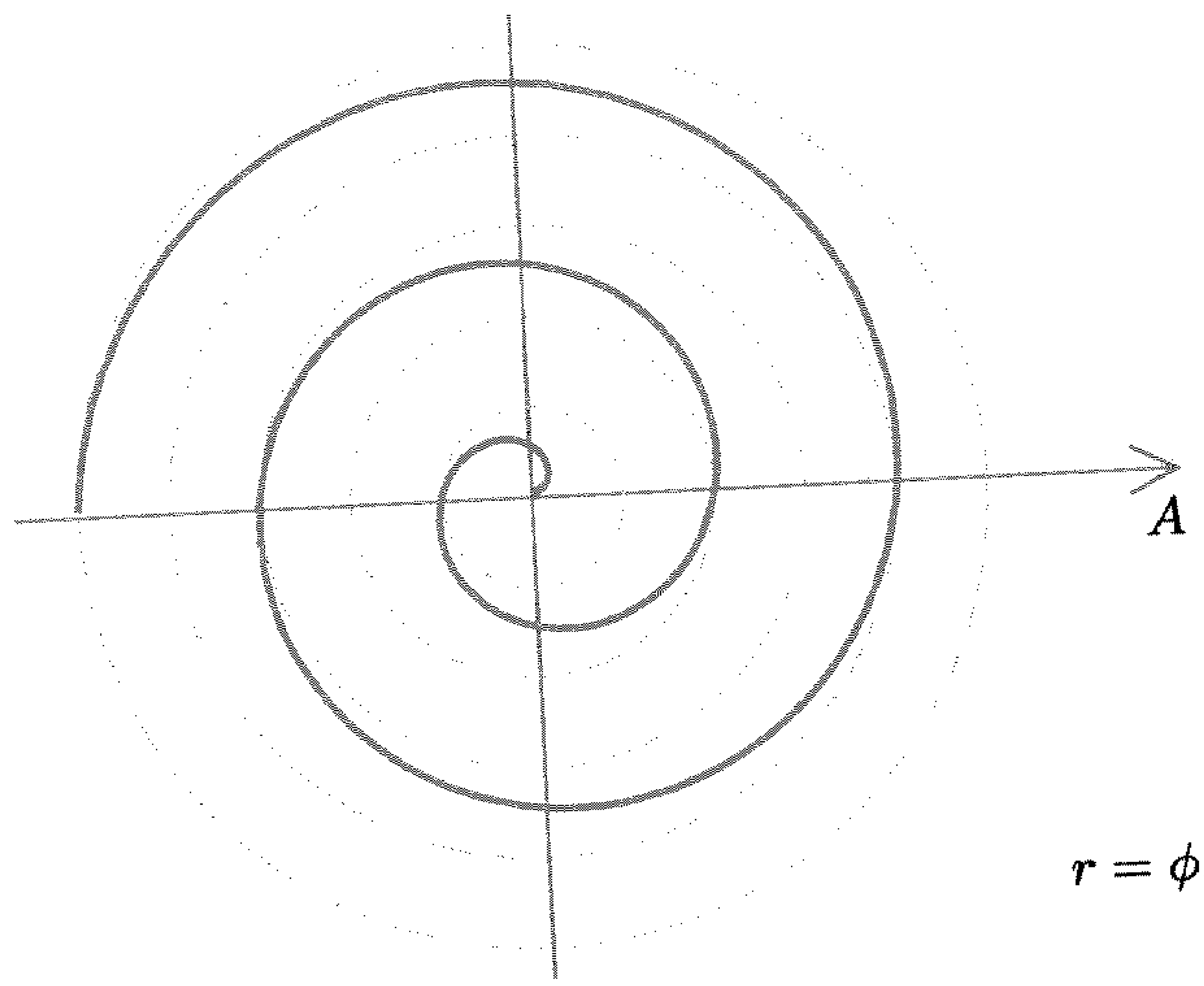
مثـــال 18

ارسم بيان المنحنى $r = \phi$ حيث إن $\phi \geq 0$.

الحـــل

نلاحظ أن r يزداد بزيادة ϕ.

منحنى $r = \phi$ يقطع المحور القطبي عند $\phi = 2n\pi$؛ حيث إن n عدد صحيح، ويقطع $\phi = \pi/2$ عند $\phi = (2n+1)\pi/2$؛ حيث إن n عدد صحيح.



الشكل 20.11

هذا الشكل يسمى الشكل اللولبي لأرخميدس (Archimedean Spiral).

تمارين 3.11

في التمارين من 1 إلى 19، ارسم بيان المعادلة المعطاة مع توضيح التماثل:

1) $r=-4$

2) $\phi=-\pi/6$

3) $r=5\sin\phi$

4) $r=-5\cos\phi$

5) $r=2\cos\phi-2\sin\phi$

6) $r=-5\cos\phi+5\sin\phi$

7) $r=2-2\sin\phi$

8) $r=4-2\cos\phi$

9) $r=3+\cos\phi$

10) $r=1+3\sin\phi$

11) $r=\sin(2\phi)$

12) $r=5\sin(3\phi)$

13) $r = 2\ \textbf{cos}\ (4\phi)$

14) $r = \phi/2$ ، $\phi \geq 0$

15) $r = e^{\phi}$

16) $r^2 = \textbf{sin}\ (2\phi)$

17) $r^2 = -25\ \textbf{cos}\ (2\phi)$

18) $r = |\ \textbf{sin}\ \phi|$

19) $r = 4 + 2\ \textbf{sec}\ \phi$

20) أوضح أن المعادلة $r\ \textbf{sin}\ \phi = a$ تمثل مستقيماً أفقياً، حيث إن a أي عدد حقيقي.

21) أوضح أن المعادلة $r\ \textbf{cos}\ \phi = a$ تمثل مستقيماً عمودياً، حيث إن a أي عدد حقيقي.

22) أوجد ميل المماس لبيان المنحنى $r = 2(1 - \textbf{sin}\ \phi)$ عند النقطة $(1, \pi/6)$.

23) أوجد كل النقط التي يكون عندها المماس لبيان المنحنى $r = 4 + 3\ \textbf{sin}\ \phi$ أفقياً.

24) ارسم بيانياً المعادلة $\textbf{ln}\ r = 9\phi$.

25) ارسم بيانياً المعادلة $r = \dfrac{1}{\phi}$ حيث $\phi > 0$.

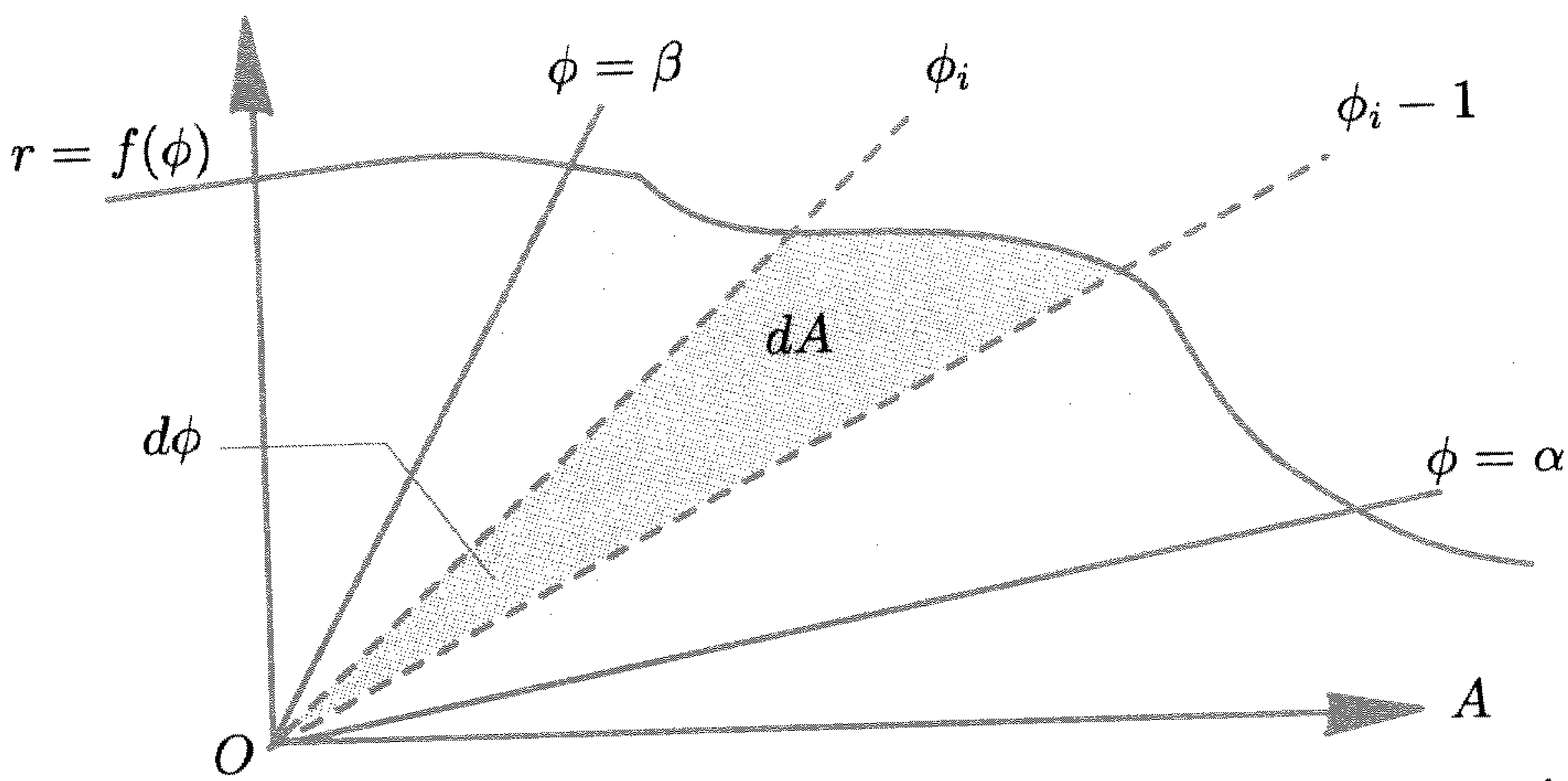
4.11 المساحة في الإحداثيات القطبية

لإيجاد المساحة المحصورة بين المنحنى $r = f(\phi)$ والمستقيمين $\phi = \alpha$ و$\phi = \beta$، نقسّم القوس من α إلى β إلى n من الأجزاء المتساوية.

$$\alpha = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{n-1} < \phi_n = \beta$$

نحاول إيجاد مساحة القطاع i التي نرمز لها بالرمز dA_i.

لنفرض أن $d\phi = \phi_i - \phi_{i-1}$.



نعلم أن

مساحة القطاع $= \frac{1}{2}$ (مربع نصف قطر الدائرة التي فيها القطاع) × (زاوية القطاع)

$= \frac{1}{2}(r^2)(\phi)$

الآن مساحة القطاع $i = dA = \frac{1}{2}(r^2)(d\phi)$

المساحة المحصورة بين المنحنى $r = f(\phi)$ والمستقيمين $\phi = \alpha$ و $\phi = \beta$، هي مجموع مساحة القطاع، أي أن:

المساحة المطلوبة هي: $A = \int_\alpha^\beta dA = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\phi)]^2 d\phi$

إذن

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\phi)]^2 d\phi$$

مثـــال 19

أوجد المساحة المحصورة بين $r = 1 + \cos\phi$ و $\phi = 0$ و $\phi = \pi$.

الحـــل

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\phi)]^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 + \cos\phi)^2 d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(1 + 2\cos\phi + \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2}\right)\right) d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi\right) d\phi \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\phi + 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin 2\phi\right)\Big|_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{3}{2}\pi + 2(0) + \frac{1}{4}(0)\right] - [0 + 0 + 0]\right) = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

تمارين 4.11

في التمارين من 1 إلى 3، أوجد المساحة المحصورة داخل المنحنى القطبي المعطى مستخدماً قيم الزاوية المعطاة:

1) $r = 4\phi$ من $\phi = \pi/4$ إلى $\phi = 5\pi/4$.

2) $r = 4/\phi$ من $\phi = \pi/4$ إلى $\phi = 5\pi/4$.

3) $r = 2\ \sec^2\phi$ من $\phi = 0$ إلى $\phi = \pi/3$.

في التمارين من 4 إلى 7، أوجد المساحة المحصورة داخل المنحنى القطبي، ثم أوجد حدود التكامل في كل حالة:

4) $r = 4\ \sin\phi$

5) $r = 2(1 + \cos\phi)$

6) $r = 2 - 2\ \sin\phi$

7) $r = 3\ \cos\phi + 4\ \sin\phi$

في التمارين من 8 إلى 10، ارسم المنحنى وأوجد المساحة المحصورة داخل المنحنى والقيم المذكورة للزاوية ϕ:

8) $r = \sin^2(\pi/6)$ ، $\phi = 0$ ، $\phi = \pi$.

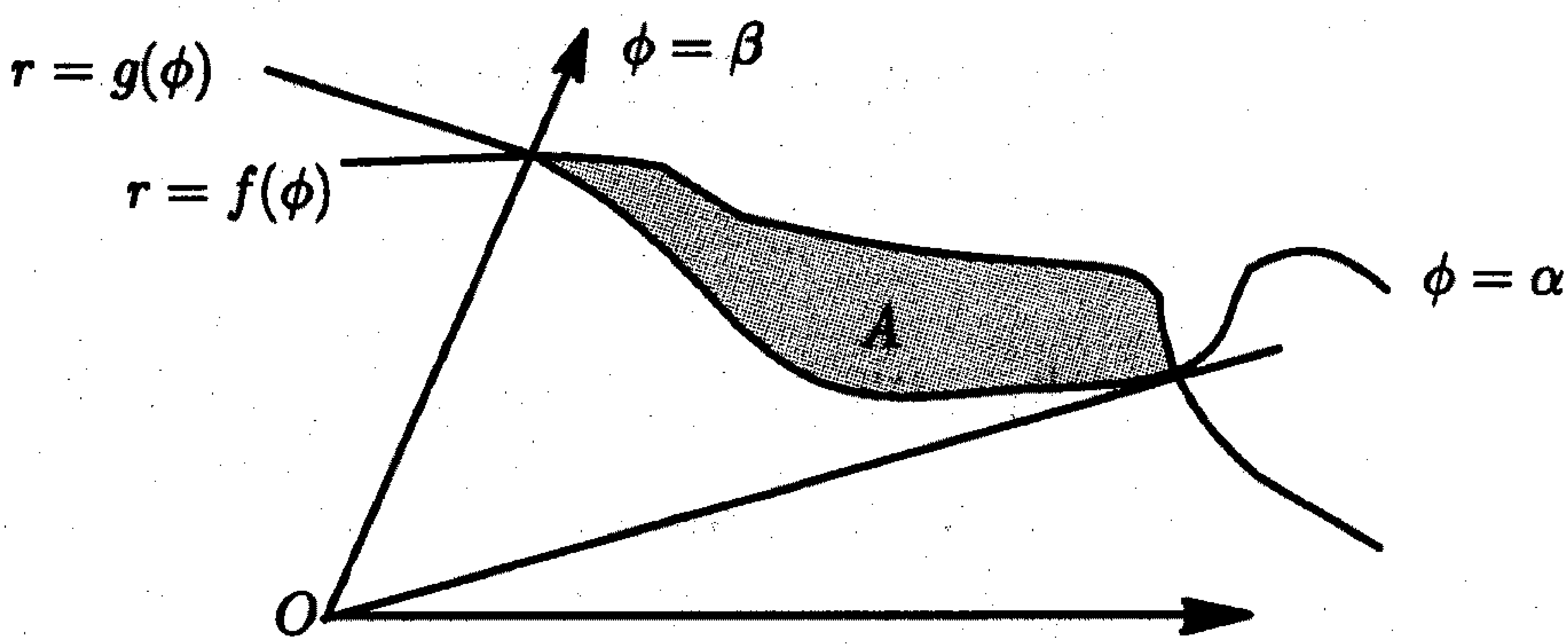
9) $r = 3\ \sec\phi$ ، $\phi = \pi/2$ ، $\phi = 5\pi/6$.

10) $r = 4/\phi$ ، $\phi = \pi/4$ ، $\phi = 5\pi/4$.

5.11 المساحة بين منحنيين في الإحداثيات القطبية

إذا كانت المنطقة المحصورة بين $r = g(\phi)$، $\phi = \alpha$، $\phi = \beta$ محصورة داخل المنطقة المحصورة بين $r = f(\phi)$، $\phi = \alpha$، $\phi = \beta$، فإن المساحة المحصورة بين الدالتين $f(\phi)$ و $g(\phi)$ تكون:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left([f(\phi)]^2 - [g(\phi)]^2\right)d\phi$$



النقطة غير الواضحة هنا، هي تحديد نقط التقاطع بين $r = f(\phi)$ و$r = g(\phi)$، والصعوبة هنا تنشأ من أن النقطة الواحدة، قد يكون لها أكثر من تمثيل قطبي على خلاف التمثيل الديكارتي، الذي يعطي للنقطة تمثيلاً ديكارتياً واحداً.

للحصول على نقط التقاطع بين $f(\phi)$ و$g(\phi)$، تتبع الخطوات التالية:

1) تحقق مما إذا كانت نقطة القطب تحقق المعادلتين، فتعتبر نقطة القطب O نقطة تقاطع.

2) حل المعادلتين $r = f(\phi)$ و$r = g(\phi + 2n\pi)$؛ حيث إن n عدد صحيح، $r \neq 0$.

3) حل المعادلتين $r = f(\phi)$ و $r = -g(\phi + [2n+1]\pi)$؛ حيث إن n عدد صحيح، $r \neq 0$.

النقط التي حصلنا عليها في (1) و(2) و(3) تعتبر نقط تقاطع الدالتين $f(\phi)$ و$g(\phi)$.

مثـــال 20

أ) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل القلب $r = 2 + 2\cos\phi$ وخارج الدائرة $r = 3$.

ب) أوجد مساحة القلب.

ج) أوجد المساحة الواقعة خارج القلب وداخل الدائرة.

الحـــل

نقاط التقاطع يمكن تحديدها بحل معادلتي القلب والدائرة معاً.

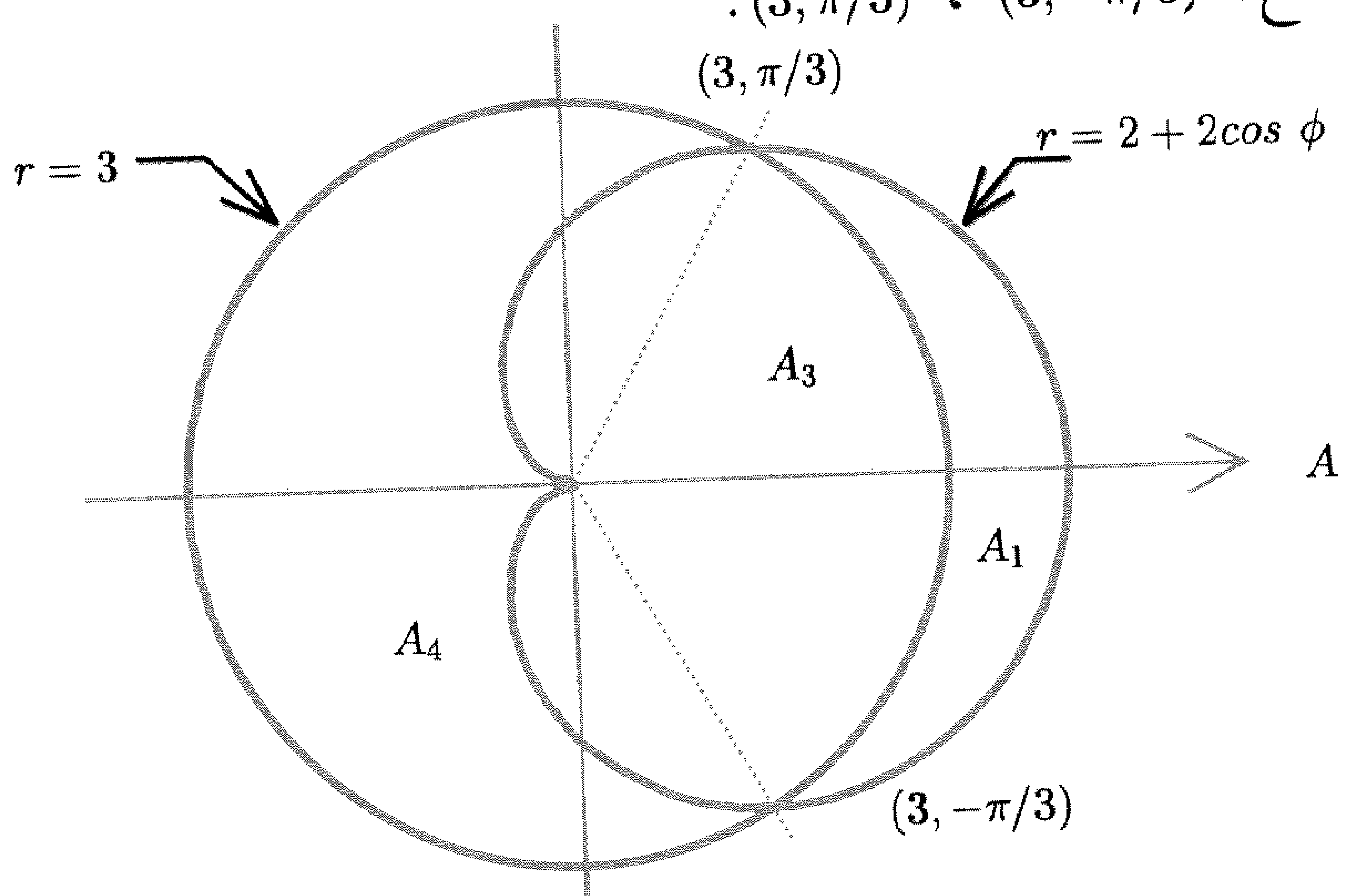
$$3 = 2 + 2\cos\phi$$

أو

$$2\cos\phi = 1$$

ومنها $\phi = \pm\pi/3$.

أي أن نقاط التقاطع: $(3, -\pi/3)$ ، $(3, \pi/3)$.



الشكل 21.11

أ) المساحة الواقعة داخل رسم القلب وخارج الدائرة:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\pi/3}[(2+2\,\mathbf{cos}\,\phi)^2-(3)^2]d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(8\,\mathbf{cos}\,\phi+4\,\mathbf{cos}^2\phi-5)d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\Big[8\,\mathbf{sin}\,\phi+2(\phi+\frac{1}{2}\,\mathbf{sin}\,2\phi)-5\phi\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[8\,\mathbf{sin}\,\phi+\,\mathbf{sin}\,2\phi-3\phi\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2}[8\sqrt{3}+\sqrt{3}-3(2\pi/3)] = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{2} = 4.652636$$

ب) مساحة القلب:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+2\,\mathbf{cos}\,\phi)^2 d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+6\,\mathbf{cos}\,\phi+4\,\mathbf{cos}^2\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+8\,\mathbf{cos}\,\phi+2+2\,\mathbf{cos}\,2\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{2}[8\,\mathbf{sin}\,\phi+\,\mathbf{sin}\,2\phi+6\phi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[12\pi] = 6\pi$$

ج) المساحة الواقعة خارج رسم القلب وداخل الدائرة يمكن تحديدها من الرسم كما يلي:

أولاً المساحة الواقعة بين القلب والدائرة تساوي:

مساحة القلب ـ المساحة الواقعة خارج الدائرة وداخل القلب

أو باستخدام الرموز:

$$A_3 = A_2 - A_1 = 6\pi\Big(\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{2}\Big) = 7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

المساحة المطلوبة ولتكن A_4 تساوي:

مساحة الدائرة $-A_3$

أو
$$A_4 = 9\pi - A_3 = 9\pi - \left(7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

هل يمكن إيجاد A_4 مباشرة؟ حاول ذلك.

تمارين 5.11

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد نقاط التقاطع في كل حالة (الرسم يساعد على ذلك):

1) $r = -3\ \sin\phi$ ، $r = 2 + \sin\phi$.

2) $r = 1$ ، $r = 2\cos(3\phi)$.

3) $r = \sin\phi$ ، $r = \sin(2\phi)$.

4) $r = 1 + \cos\phi$ ، $r = (1+\sqrt{2})\cos\phi$.

5) $r = \phi$ ، $r = -\phi$ ، $\phi \geq 0$.

في التمارين من 6 إلى 10، أوجد المساحة المطلوبة:

6) داخل $r = 6\sin\phi$ وخارج $r = 3$

7) داخل $r = 6\cos\phi$ وخارج $r = 6(1 - \cos\phi)$.

8) داخل $r^2 = 8\cos(2\phi)$ وخارج $r = 2$.

9) داخل الدائرتين $r = 2\cos\phi$ ، $r = 2\sin\phi$.

10) داخل الدائرة $r = \cos\phi$ وداخل الزهرة ذات الورقات الثلاث $r = \cos(2\phi)$.

تمارين على الفصل الحادي عشر

في التمارين من 1 إلى 5، حول الإحداثيات الديكارتية المعطاة إلى إحداثيات قطبية؛ حيث $r \geq 0$، $-\pi \leq \phi < \pi$:

1) $(2,3)$ 2) $(-\sqrt{3},-1)$

3) $(2,-2\sqrt{3})$ 4) $(0,-1)$

5) $(-8,8)$

في التمارين من 6 إلى 10، حوّل الإحداثيات القطبية المعطاة إلى إحداثيات ديكارتية:

6) $(8,\pi)$ 7) $(-3,\pi/6)$ 8) $(-3,-\pi/6)$

9) $(11,3\pi/4)$ 10) $(1/2,\pi/2)$

في التمارين من 11 إلى 15، حوّل المعادلة القطبية المعطاة إلى معادلة ديكارتية:

11) $r \cos(2\phi) = 1$.

12) $r = 3 \sin\phi + 4 \cos\phi$.

13) $r = 3$.

14) $r = \dfrac{1}{3\cos\phi - 4\sin\phi}$.

15) $r = \sin(2\phi)$.

في التمارين من 16 إلى 20، حوّل المعادلة الديكارتية المعطاة إلى معادلة قطبية:

16) $y^2 = 4x$.

17) $(x-1)^2+(y-3)^2$.

18) $x+y=3$.

19) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

20) $x^2+y^2=1$.

21) أوجد المساحة التي داخل المنحنى القطبي $r=4\sin\phi$ من $\phi=0$ إلى $\phi=\pi$.

22) أوجد المساحة التي داخل المنحنى القطبي $r=e^{\phi}$ من $\phi=0$ إلى $\phi=\pi$.

23) أوجد المساحة التي داخل الدائرة $r=4\sin\phi$ وتحت المستقيم $r=\csc\phi$.

24) أوجد المساحة التي داخل شكل القلب $r=4(1+\cos\phi)$ وخارج الدائرة $r=4$.

25) أوجد المساحة التي داخل كل من $r=3\cos\phi$ و $r=1+\cos\phi$.

الفصل الثاني عشر

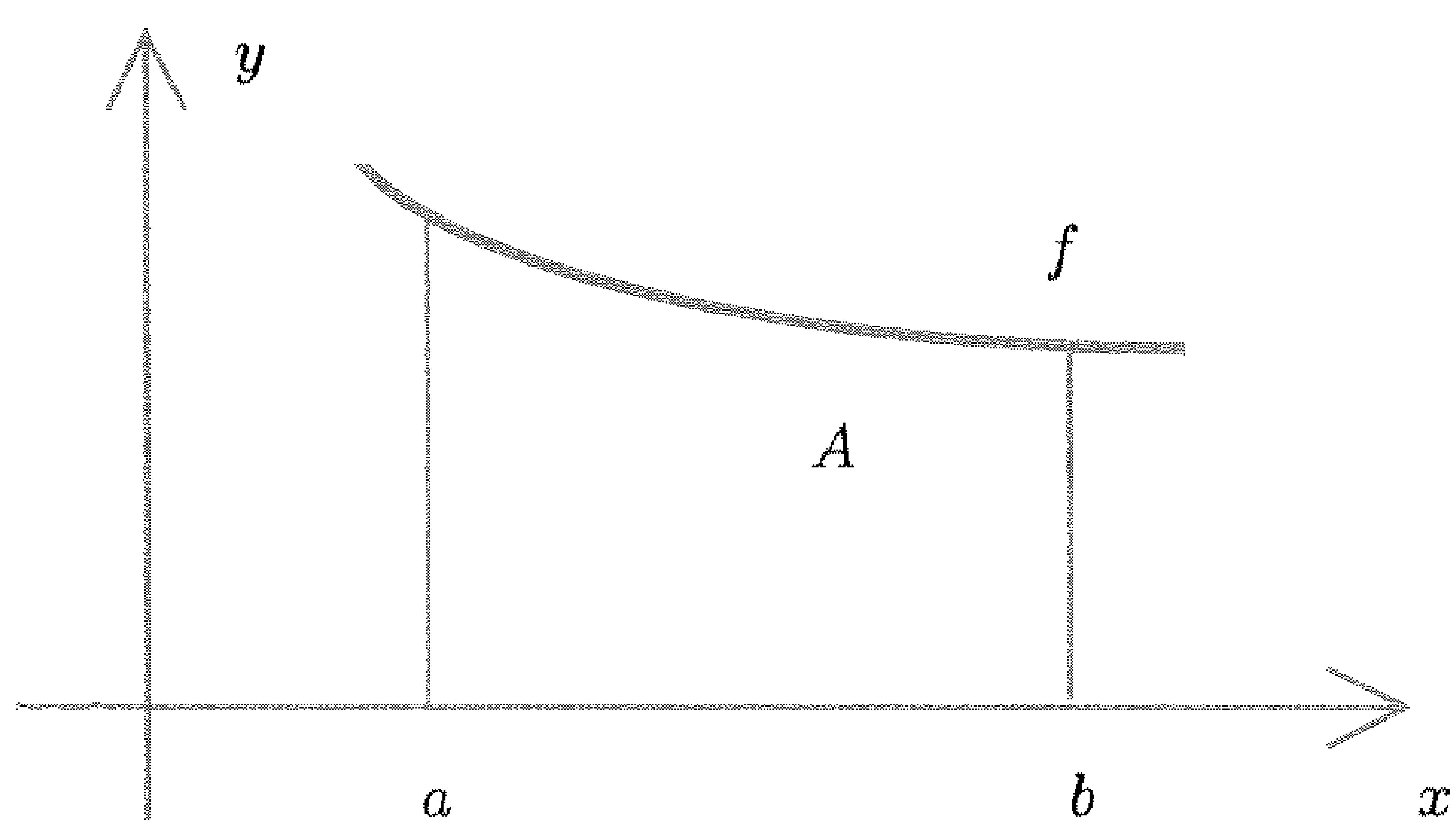
تطبيقات على التكامل

Applications of Integration

1.12 الحجوم الناشئة من الدوران

يمكن استخدام التكامل لإيجاد حجوم الأجسام الناتجة من دوران مساحة معينة حول محور ما.

إذا كانت A هي المساحة المحصورة بين منحنى الدالة المتصلة وغير السالبة f والمستقيمين $x = a$ و$x = b$، فإن الحجم الناشىء من دوران هذه المساحة حول محور السينات يمكن الحصول عليها كما يلي:



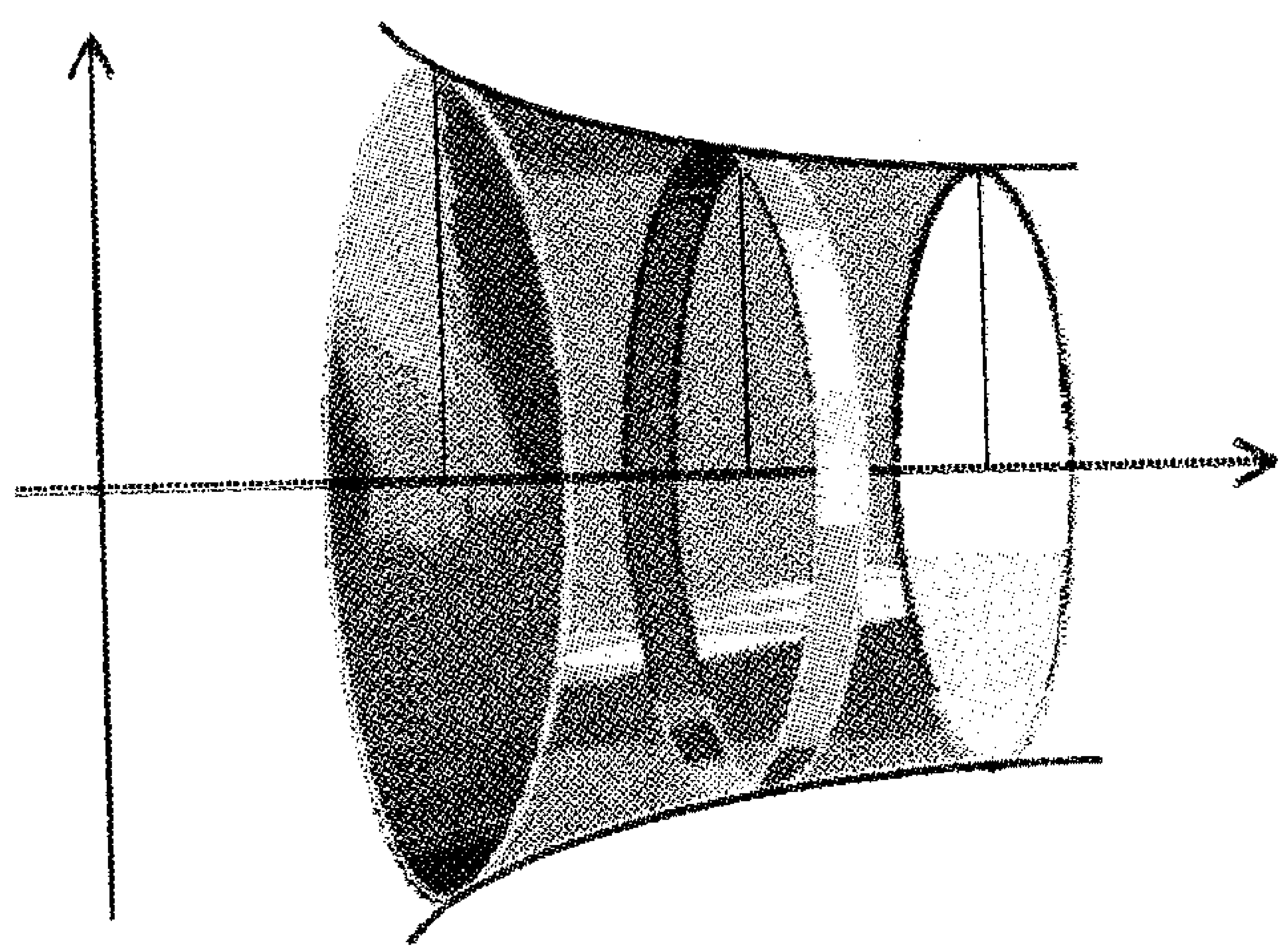
شكل 1.12

أ) طريقة الأقراص الدائرية:

لنفرض أننا أخذنا مقطعاً عمودياً في هذا المجسم، الذي يكون على شكل قرص دائري، سمكه dx ويساوي نصف قطر الدائرة التي تشكل قاعدة هذا القرص r.

لنفرض أن حجم هذا القرص الدائري هو dV.

إذن $dV = \pi r^2 dx = \pi[f(x)]^2 dx$



شكل (2.12)

حجم المجسم الناشئ من دوران المساحة، يساوي مجموع أحجام الأقراص الدائرية التي تشكل هذا المجسم.

هذا يعني أن حجم المجسم يساوي حجم هذا القرص من $x = a$ إلى $x = b$.

لنفرض أن الحجم الناشئ من الدوران هو V.

إذن

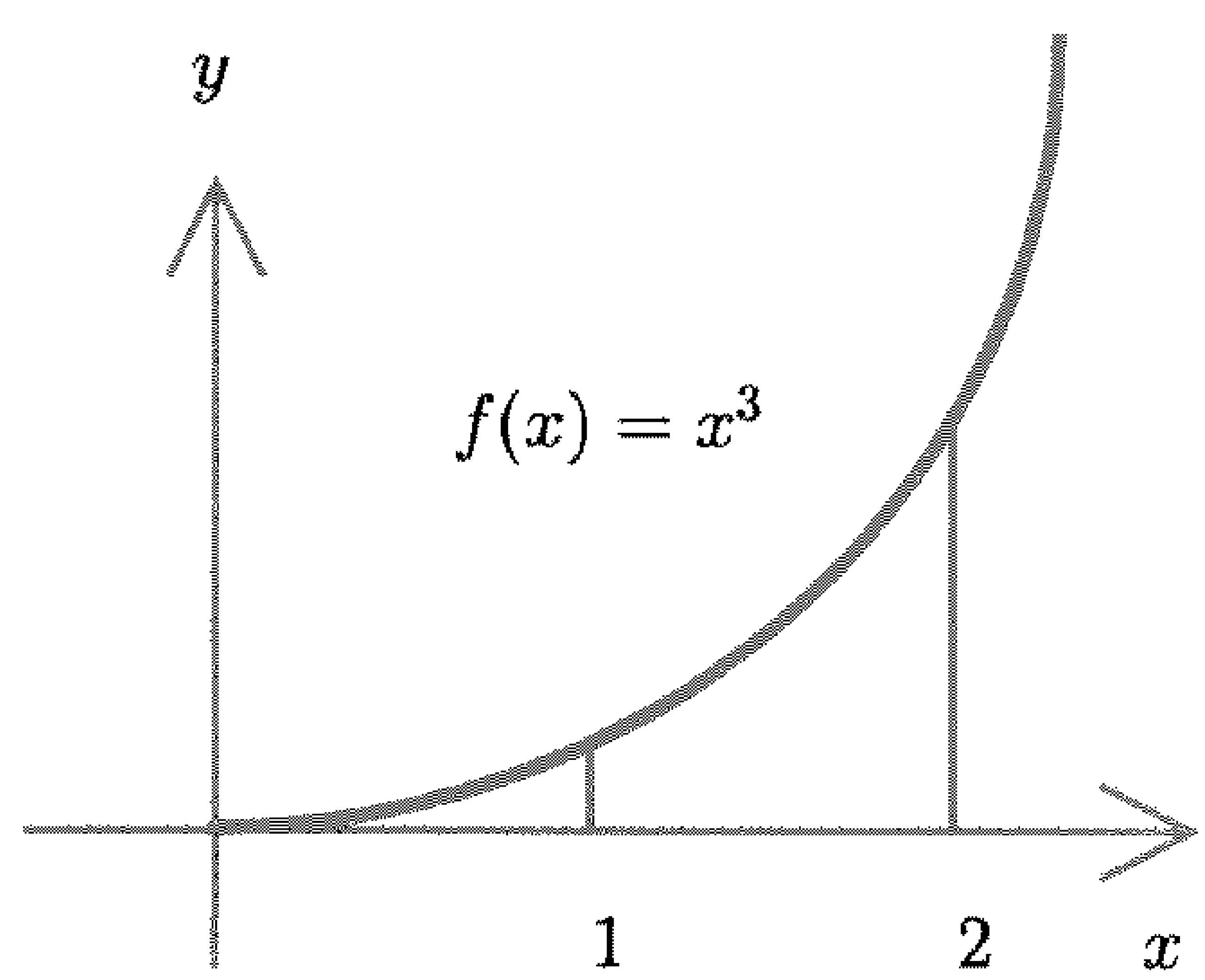
$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

مثــال 1

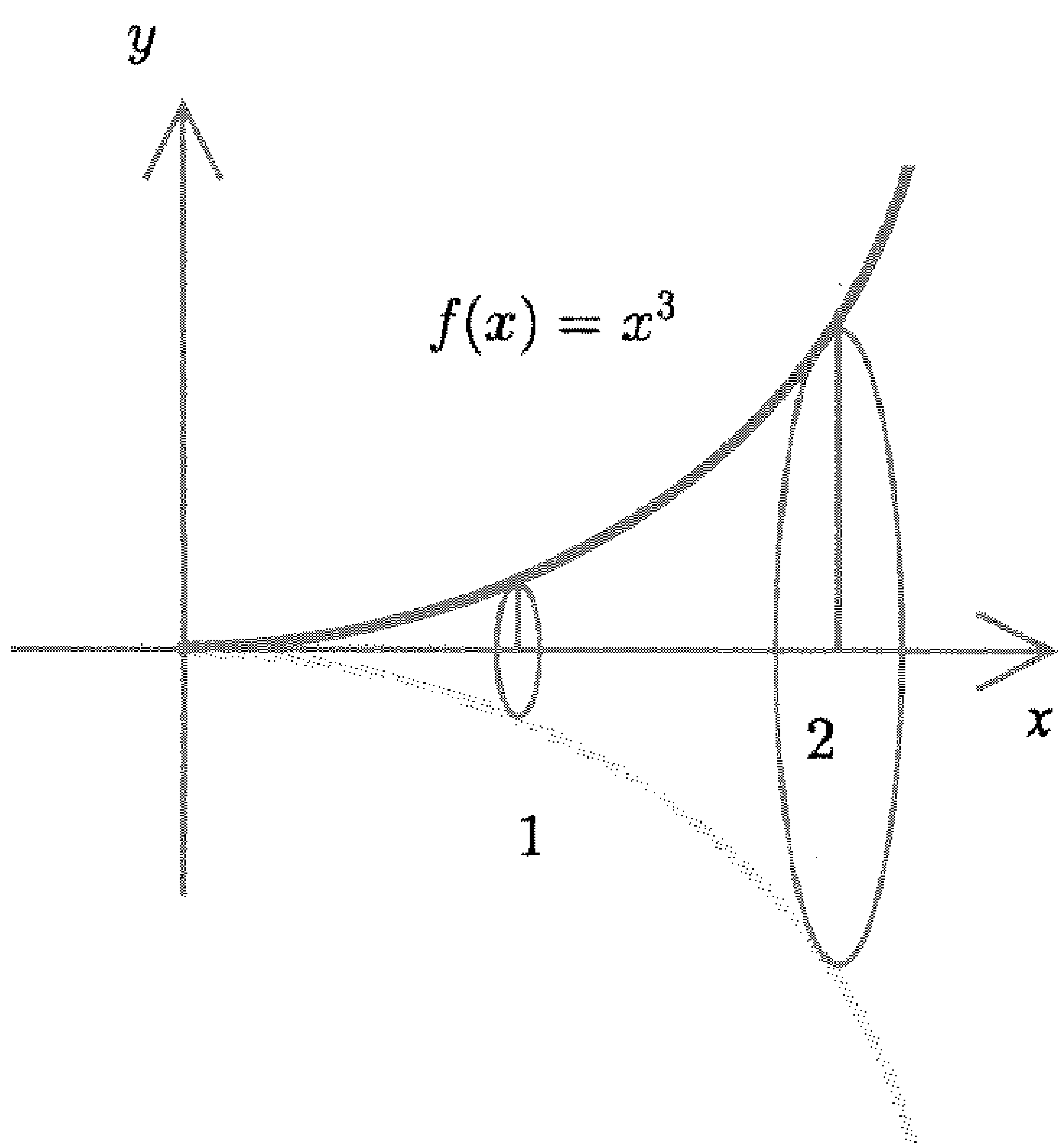
أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^3$، والمستقيمين $x = 1$، $x = 2$.

الحــل

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx$$
$$= \pi \frac{1}{7} x^7 \Big|_1^2 = \pi\Big(\frac{128}{7} - \frac{1}{7}\Big) = \frac{127}{7}\pi$$



الشكل 3.12



الشكل 4.12

ب) طريقة الأسطوانة:

الحجم الناشىء من دوران المساحة A والمستقيمين $x = a$ و$x = b$ حول محور الصادات، ينتج من تقسيم المجسم إلى أسطوانات.

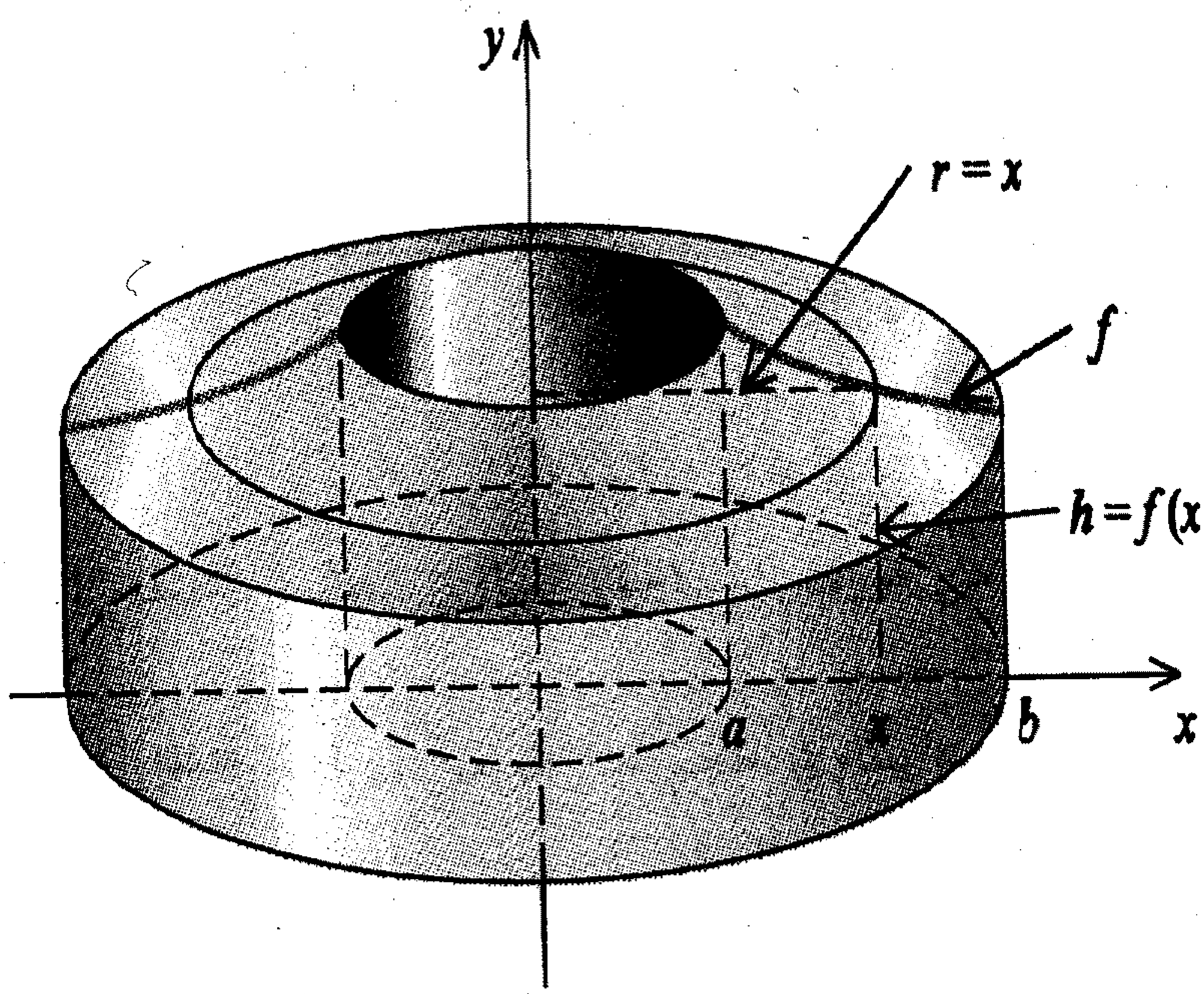
إذا أخذنا مقطعاً أسطوانياً ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r، فإن حجم الأسطوانة هو:

$$dV = \pi r^2 h = \pi x^2 h$$

$$dV = 2\pi h x dx = 2\pi x f(x) dx$$

إذن

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx}$$



الشكل (5.12)

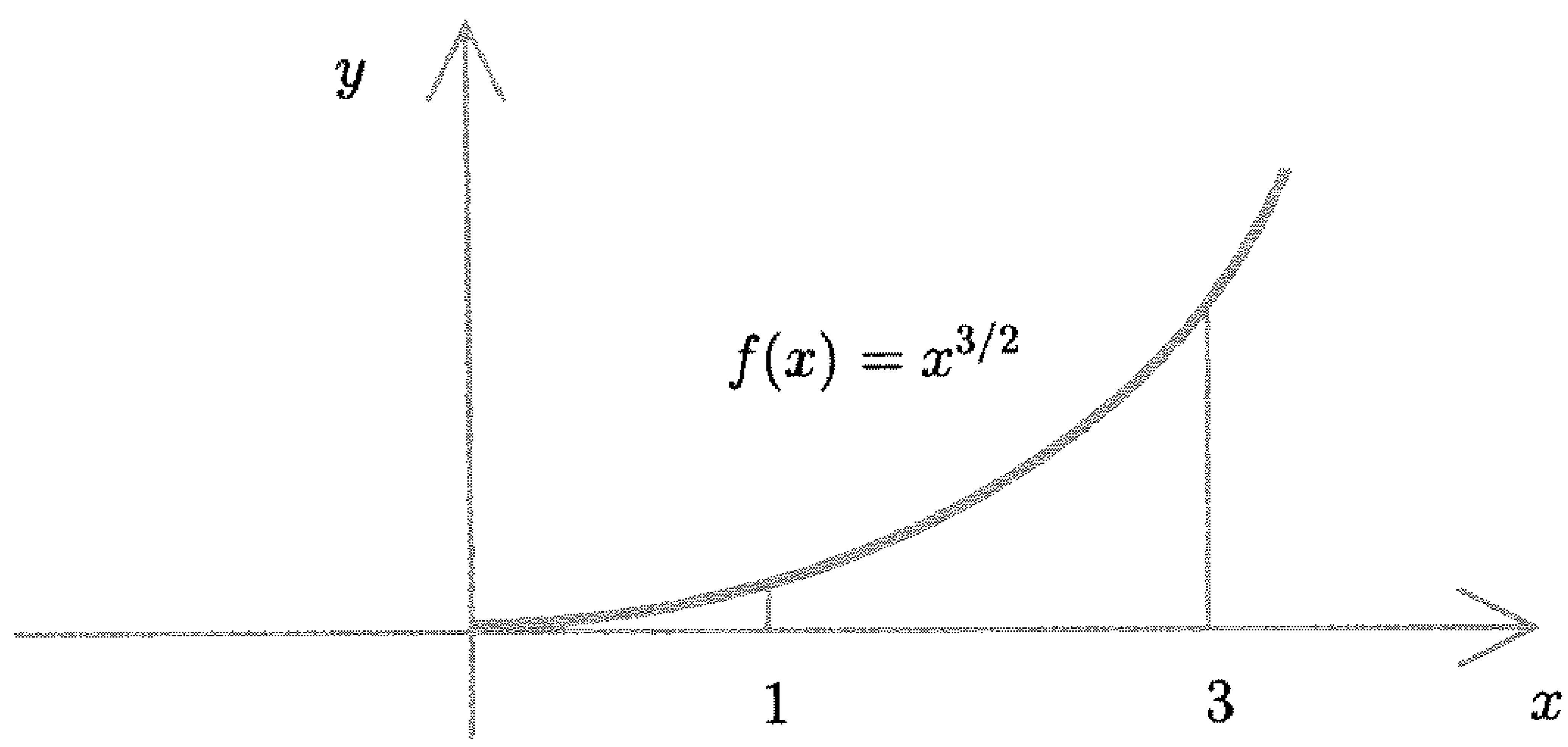
مثـــال 2

استخدم طريقة الأسطوانات لإيجاد حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^{3/2}$ ، والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$.

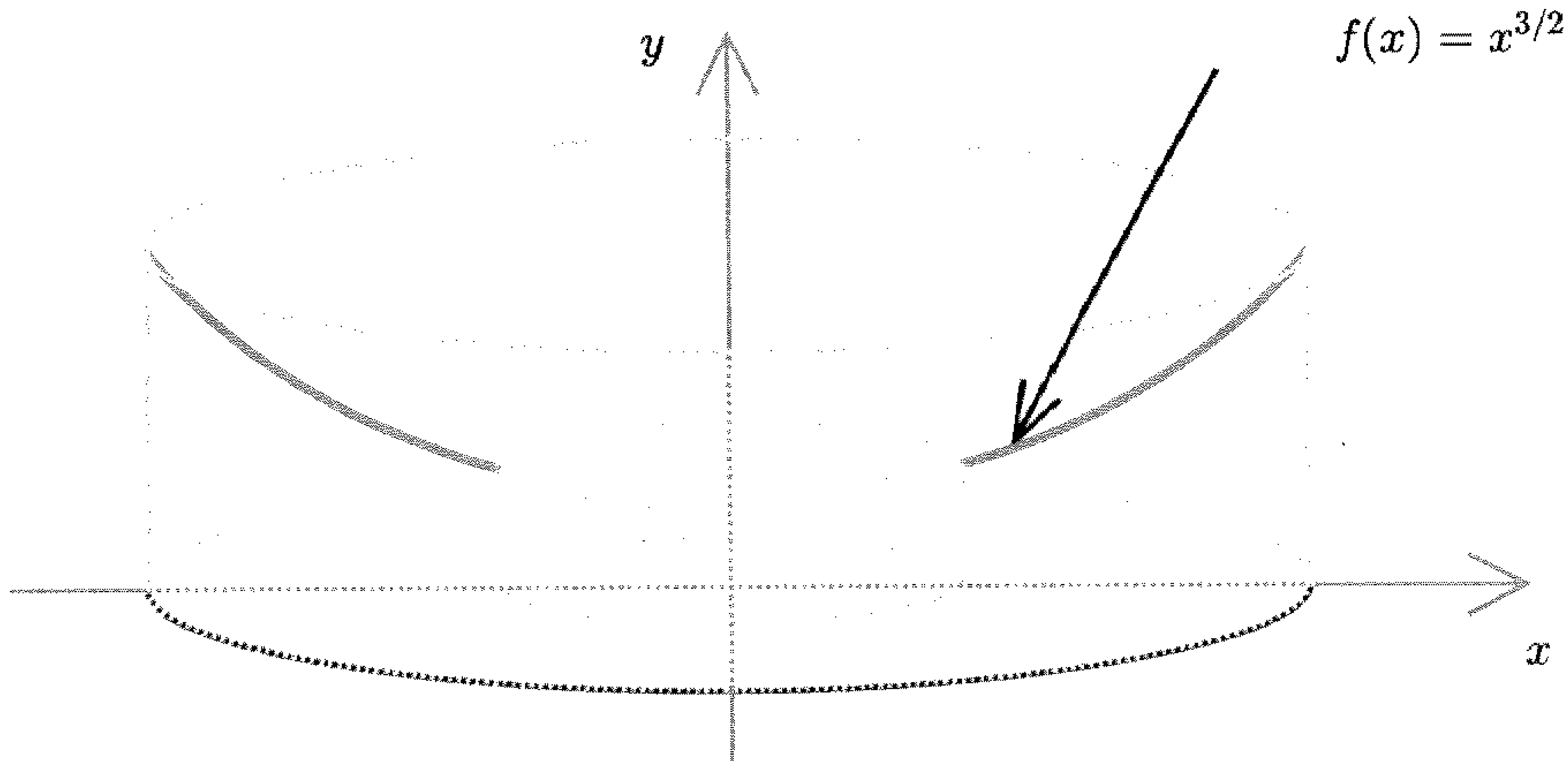
الحــل

$$V = 2\pi \int_a^b xf(dx) = 2\pi \int_1^3 x(x^{3/2})dx = 2\pi \int_1^3 x^{5/2}dx$$

$$= 2\pi\Big(\frac{2}{7}x^{7/2}\Big)\Big|_1^3 = 2\pi\Big(\frac{2}{7}\sqrt{x^7}\Big)\Big|_1^3 = \frac{4\pi}{7}(8\sqrt{2} - 1)$$



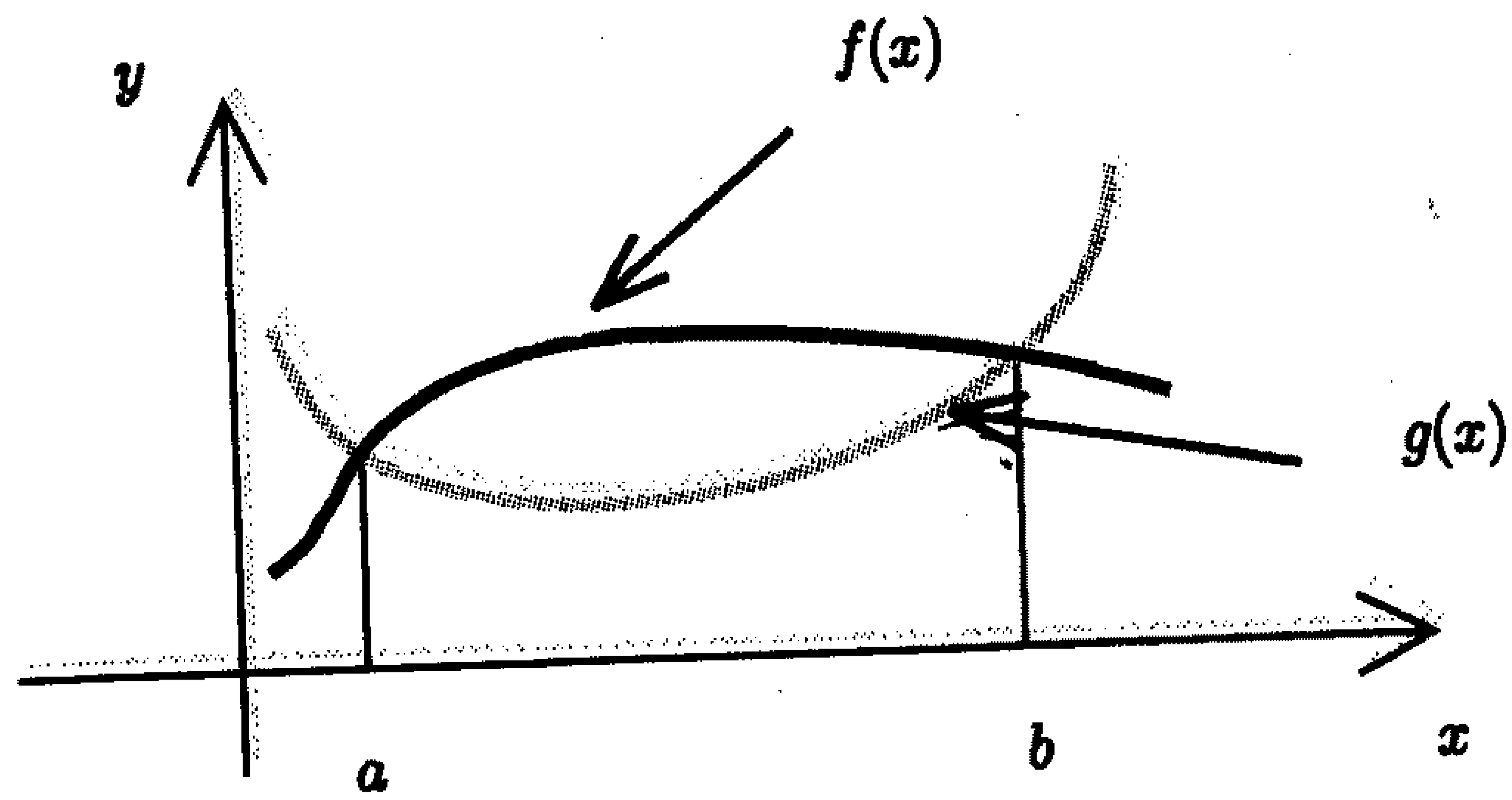
الشكل 6.12



الشكل 7.12

حـ) طريقة الحلقات الدائرية:

لنفرض أن A هي المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين $f(x)$ و$g(x)$، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$.



الشكل 8.12

عند دوران هذه المساحة حول محور السينات، نلاحظ أن الحجم الناشىء يتكوّن من حلقات دائرية سمكها dx.

حجم هذه الحلقة الدائرية = حجم القرص الدائري المتكون من الدالة f– حجم القرص المتكوّن من الدالة g.

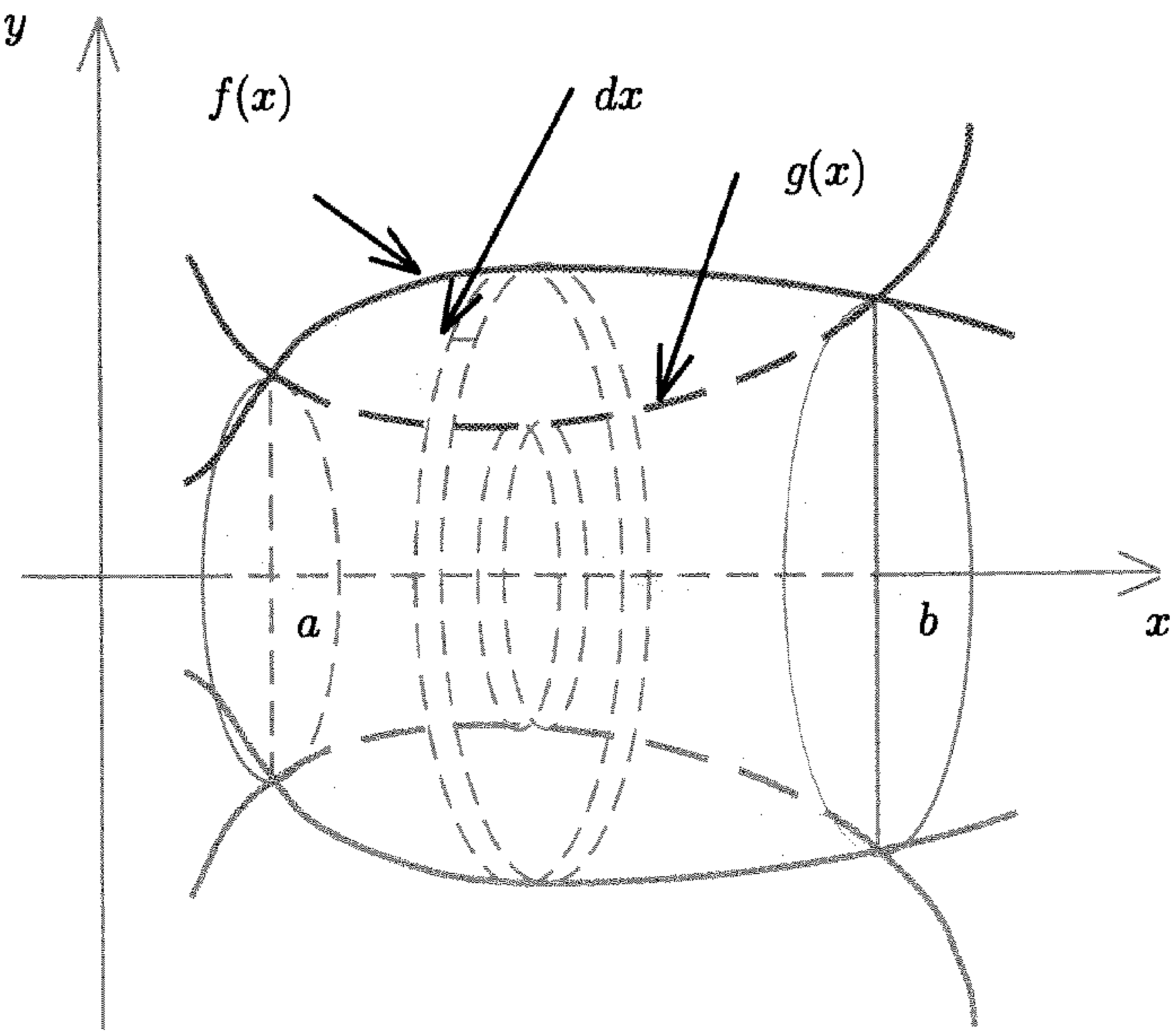
لنفرض أن حجم هذه الحلقة الدائرية هو dV.

إذن
$$dV = dV_f - dV_g = \pi\Big[f(x)\Big]^2 dx - \pi\Big[g(x)\Big]^2 dx$$

وبذلك يكون حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة A، هو:
$$V = \int_a^b dV$$

أو

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx}$$



شكل (9.12)

مثـال 3

أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين $f(x)=x^2+2$ و $y=x+8$ حول محور السينات.

الحـل

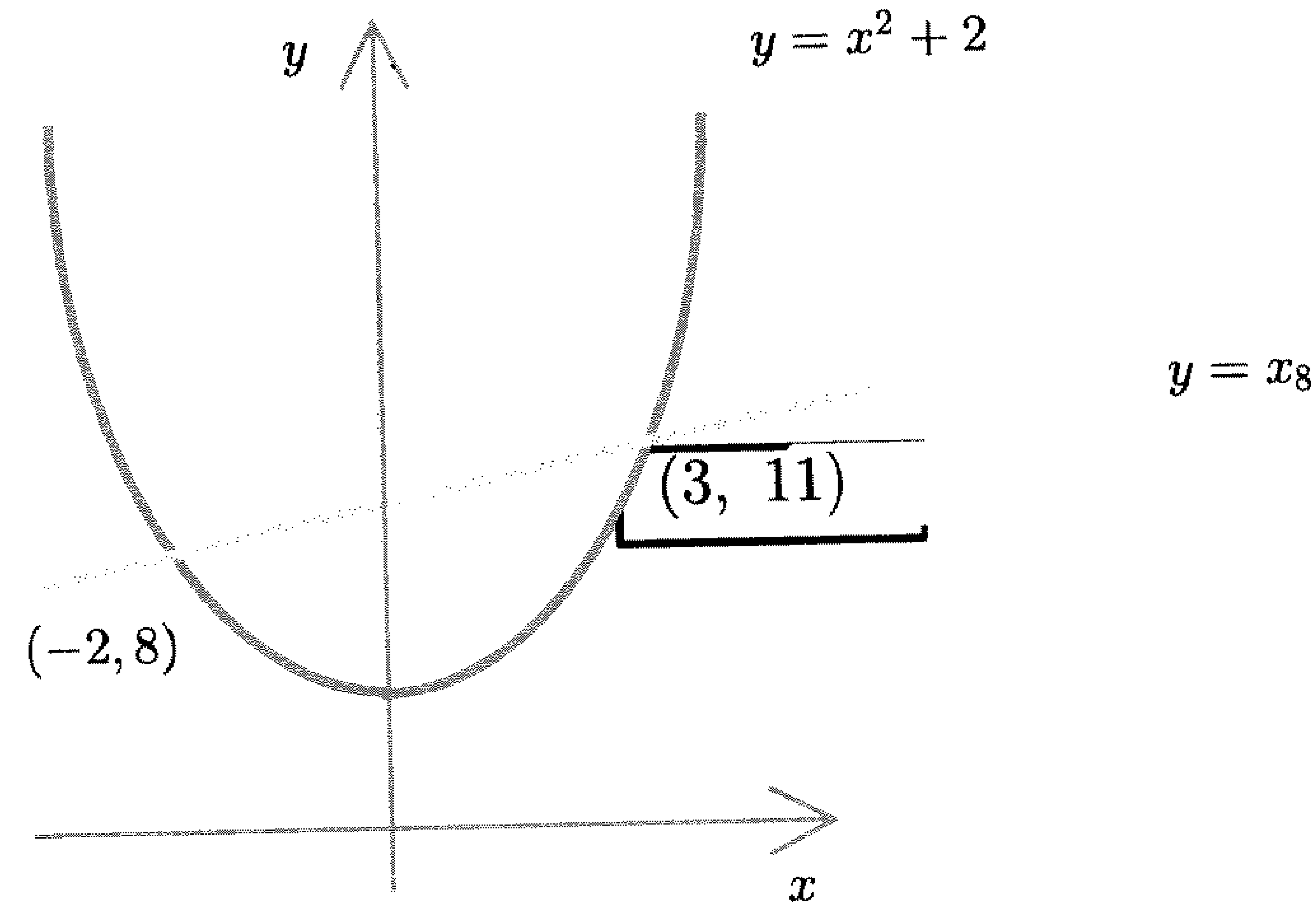
$$V=\pi\int_a^b\Big\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\Big\}dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}[(x+8)^2-(x^2+2)^2]dx$$

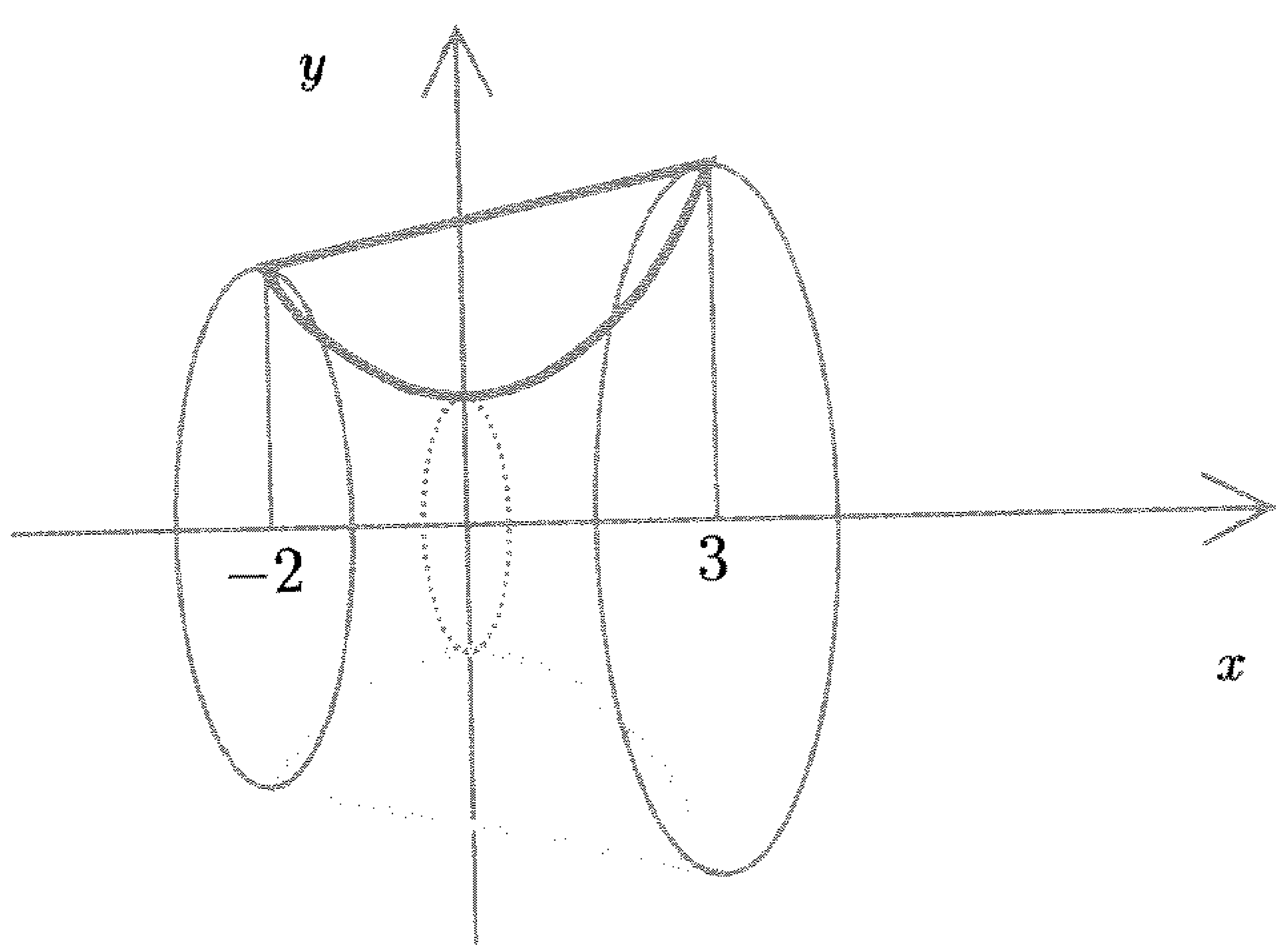
$$=\pi\int_{-2}^{3}(x^2+16x+64-x^4-4x^2-4)dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}(-x^4-3x^2+16x+60)dx$$

$$=\pi\Big(\frac{1}{5}x^5-x^3+8x^2+60x\Big)\Big|_{-2}^{3}=250$$



الشكل 10.12



الشكل 11.12

تمارين 1.12

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد الحجم الناشىء من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيات والمستقيمات المعطاة حول محور السينات.

1) $y = x$ ، $y = 0$ ، $x = 2$.

2) $y = 4 - x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$.

3) $y = x^3$ ، $y = x^2$.

4) $y = \sqrt{1 - x^2}$ ، $y = 0$ ، $x = 0$.

5) $y = \frac{1}{x}$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 2$.

6) $y = \tan x$ ، $x = 0$ ، $x = \pi/3$.

7) $y = 3\sqrt{x}$ ، $x = 1$ ، $x = 4$.

8) $y = |x|$ ، $x = -2$ ، $x = 1$.

9) $y = \sec x$ ، $x = 0$ ، $x = \pi/4$.

10) $y = \sqrt{9 - x^2}$ ، $x = -1$ ، $x = 3$.

في التمارين من 11 إلى 20 أوجد الحجم الناشىء من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيات والمستقيمات المعطاة حول محور الصادات.

11) $y = \ln(x)$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 3$.

12) $x = y^2 + 1$ ، $x = 2$.

13) $y = \frac{1}{2}x^2$ ، $y = 0$ ، $x = 1$.

14) $y = \cos x^2$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = \sqrt{\pi/6}$.

15) $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ ، $x = 0$ ، $x = \pi/4$.

16) $y^2 = x$ ، $y = 4$ ، $x = 0$.

17) $x = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)}$ ، $y = 0$ ، $y = 1$.

18) $x = \cos\left(\frac{\pi}{6}y\right)$ ، $y = 1$ ، $y = 2$.

19) $y = 2x^3$ ، $y = 8$ ، $x = 0$.

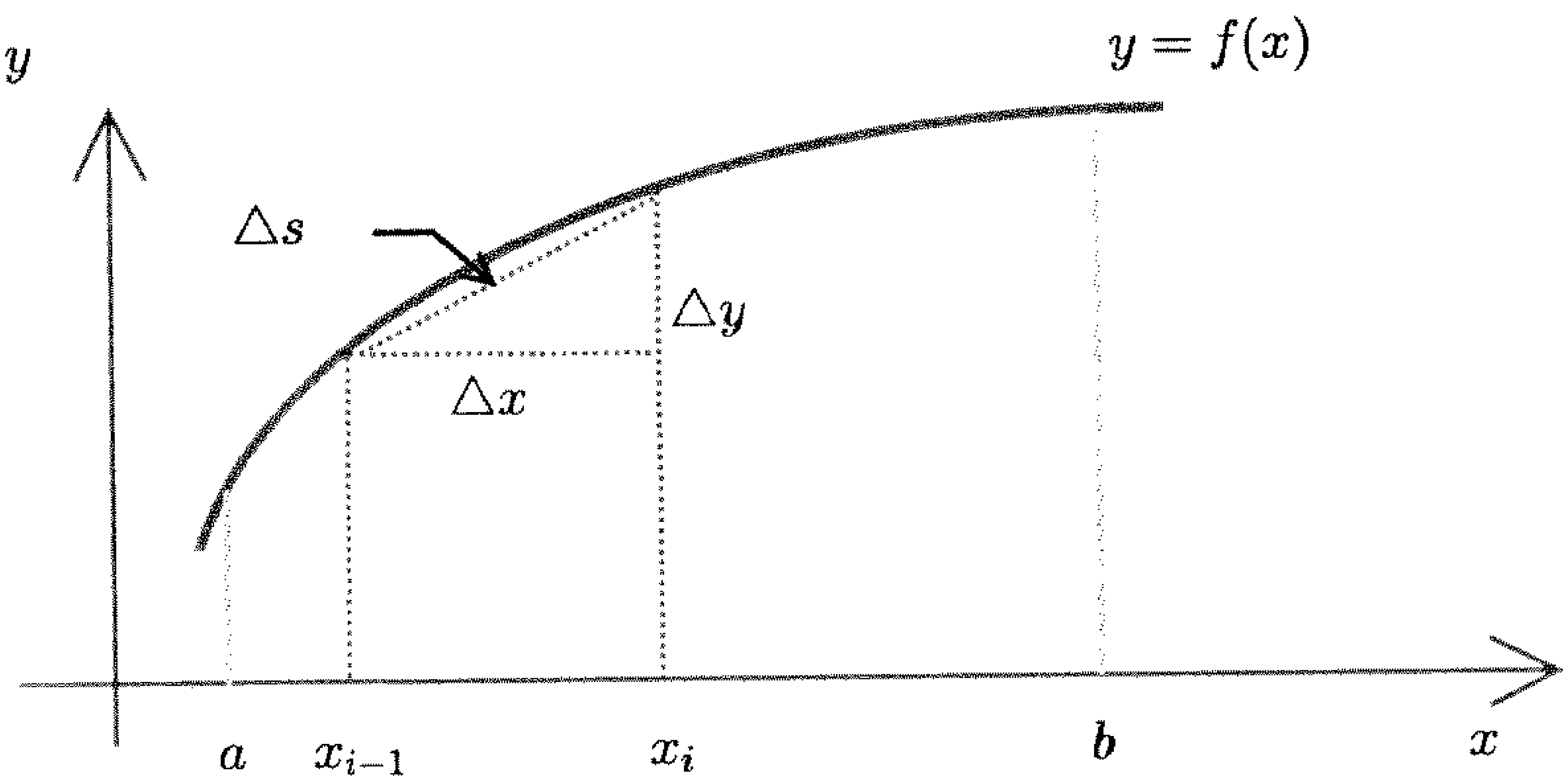
20) $y^2 = 4x$ ، $y = 4$ ، $x = 0$.

2.12 طول القوس

لإيجاد طول منحنى الدالة $f(x)$، نقسم الفترة $[a,b]$ إلى n من الأجزاء المتساوية الطول.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

لنفرض أن $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ وأن $\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1})$.



الشكل 12.12

نلاحظ من الشكل أن طول القوس المقابل للفترة $[x_{i-1}, x_i]$، هو:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{(نظرية فيثاغورس)}$$

نفترض أن الدالة f متصلة على $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b)، وبذلك نستنتج من نظرية القيمة الوسطى وجود عدد x_i؛ حيث:

$$\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i)\Delta x$$

وبالتعويض نصل إلى:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i - x_{i-1})\Delta x)^2}$$

$$= \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\ \Delta x$$

طول المنحنى هو مجموع أطوال الأقواس المقابلة للفترات المجزّئة للفترة $[a,b]$.

إذا رمزنا لطول القوس بالرمز s وافترضنا أن f متصلة على $[a,b]$، فإن:

$$s=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

إذن

$$\boxed{\text{طول المنحنى } s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}$$

مثـــال 4

أوجد طول المنحنى $y=3x+4$ على الفترة $[1,5]$.

الحــل

$$f'(x)=3 \Longleftarrow f(x)=3x+4$$

إذن

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)]^2}dx=\int_1^5\sqrt{1+3^2}dx=\sqrt{10}\int_1^5 dx$$
$$=\sqrt{10}x\Big|_1^5=4\sqrt{10}$$

وإذا كانت معادلة المنحنى على الشكل $x=g(y)$، حيث g و g' دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$، فإن طول القوس هو:

$$\boxed{s=\int_a^b\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy}$$

تمارين 2.12

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد طول القوس وارسم المنحنى المعطى بين النقطتين المذكورتين:

1) $y = x^{2/3}$ ، $(8,3)$ ، $(27,8)$.

2) $4y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ ، $(1,2/3)$ ، $(3,14/3)$.

3) $6x = \dfrac{1}{4}y^{2/3}$ ، $(0,0)$ ، $(1,8)$.

4) $12xy = 4x^4 + 3$ ، $(1,7/12)$ ، $(3,109/12)$.

5) $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}$ ، $(3/8,1)$ ، $(33/16,2)$.

6) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2}$ ، $(1,2/3)$ ، $(3,14/3)$.

7) $y = 1 - x^{2/3}$ ، $(1/8,3/4)$ ، $(1,0)$.

8) $24y = x^4 + 48$ ، $(2,\dfrac{4}{3})$ ، $(3,\dfrac{43}{24})$.

9) $x = \dfrac{y^5}{5} + \dfrac{1}{12y^3}$ ، $(7/60,1)$ ، $(67/24,2)$.

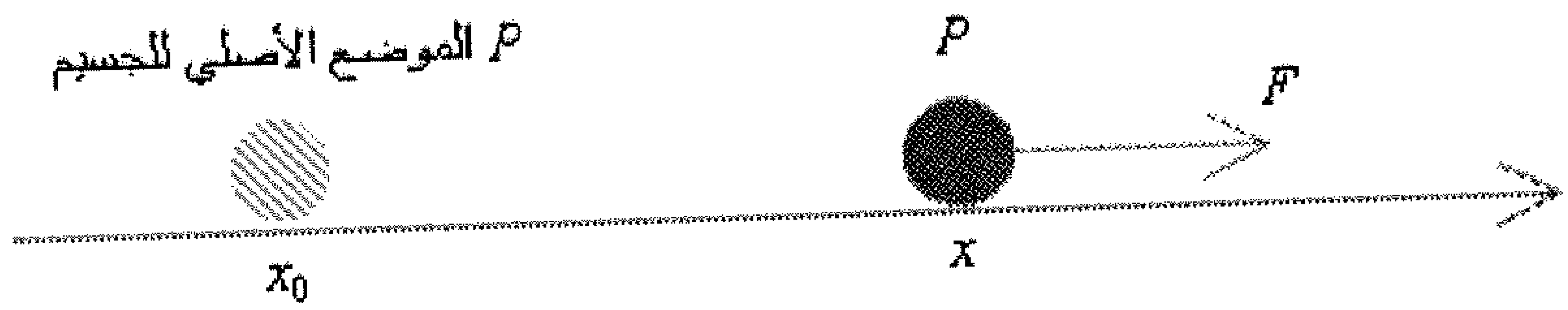
10) $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^4 + t^2 + 1}\, dt$ ، $(3, \displaystyle\int_1^4 \sqrt{t^4 + t^2 + 1}\, dt)$.

3.12 الشغل والقوة والطاقة (Work, Force and Energy)

لنفرض أن قوة ثابتة F تؤثر على جسيم P في اتجاه يوازي محور x.

إذا كان موضع الجسيم P عند x_0، وتحرك بفعل القوة الثابتة F إلى الموضع x، فإن الشغل المبذول على الجسيم P بفعل القوة F، هو:

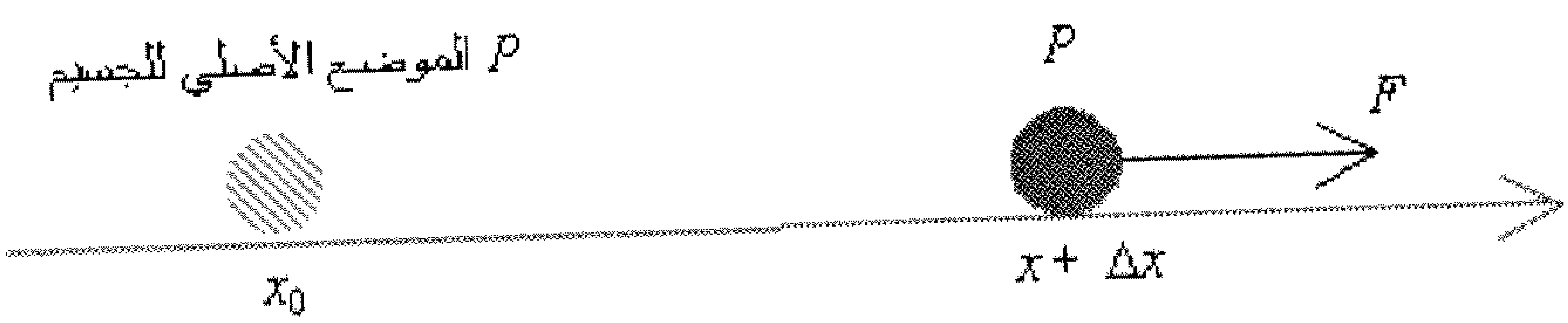
$$W = F.(x - x_0)$$



الآن، نبحث في مسألة الشغل المبذول بالقوة F، التي قد تكون غير ثابتة ولكن في اتجاه المحور x.

لنفرض أن الجسيم بدأ في الحركة من الموضع الأصلي x بفعل القوة غير الثابتة F، ووصل إلى الموضع $x+\Delta x$، ولنفرض أن الشغل المبذول بهذه القوة قد تغيّر من W إلى ΔW.

ΔW هو الشغل المبذول بواسطة القوة F لحركة الجسيم من x إلى $x + \Delta x$.



على الرغم من أن القوة F قد تتغير أثناء الحركة، ولكن يجب أن يكون هذا التغيّر صغيراً جداً، كلما كان x صغيراً جداً.

إذن

$$\Delta W \approx F\Delta x$$

أو

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} \approx F$$

عندما يؤول Δx إلى الصفر، نحصل على:

$$\frac{dW}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = F$$

وبذلك نحصل على المعادلة:

$$\boxed{dW = F\,dx}$$

عندما يكون $W = 0$ عند الموضع الأصلي.

مثـال 5

لنفرض أن القوة المؤثرة على جسيم P هي $F = \frac{1}{x^2}$.

ما الشغل المبذول بهذه القوة لتحريك هذا الجسيم من $x = 1$ إلى $x = 4$؟

الحـل

الجسيم يخضع للمعادلة

$$dW = Fdx = \frac{1}{x^2}dx$$

إذن

$$W = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$$

الآن، نعرف أن $W = 0$ عندما $x = 1$

وبذلك نجد أن

$$0 = -\frac{1}{1} + C$$

وهذا يعني أن $C = 1$

إذن

$$W = 1 - \frac{1}{x}$$

إذن الشغل المبذول لتوصيل الجسيم P إلى الموضع $x = 4$، هو:

$$W = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$ وحدة شغل

حيث إن الشغل المبذول بواسطة القوة المتغيرة F على جسيم P، يحقق المعادلة التفاضلية

$$dW = Fdx$$

فإن الشغل المبذول لتحرك الجسيم p، من الموضع a إلى الموضع b على محور الحركة، ينتج من التكامل المحدد

$$\int_a^b dW = \int_a^b Fdx$$

أي أن:

$$\boxed{\int_a^b dW = \int_a^b Fdx = W\Big|_a^b}$$

مثـــال 6

إذا كنت القوة المؤثرة على جسيم P لتحريكه من $x = 2$ إلى $x = 5$ أقدام، هي $F = x^2 + 1$ باوند، أوجد الشغل المبذول بهذه القوة.

الحـل

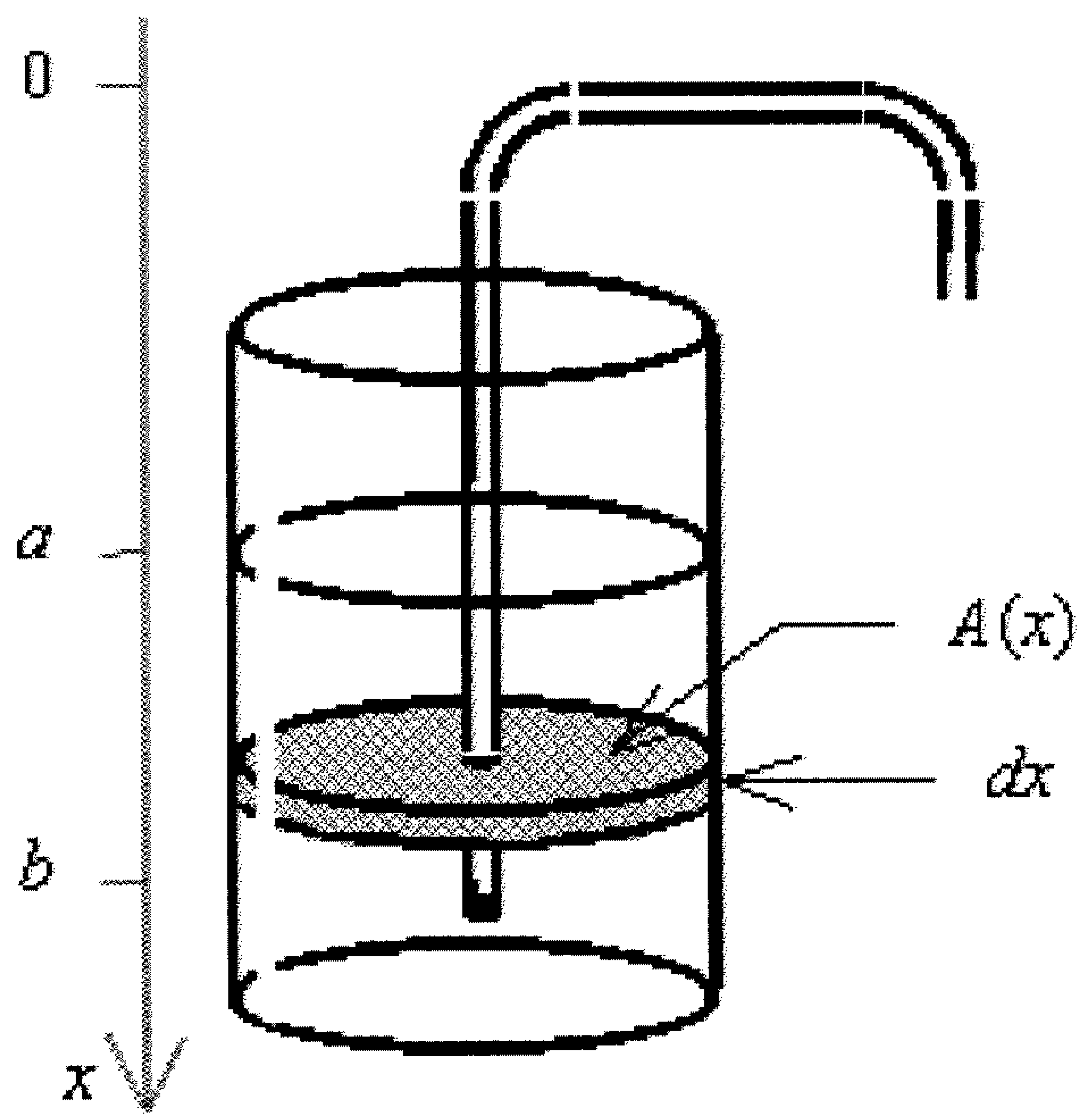
$$W = \int_a^b F dx = \int_2^5 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_2^5$$
$$= (125/3+5) - (8/3+2) = (140-14)/3 = 42$$

أي أن الشغل المبذول هو 42 قدماً/ باوند.

لنفرض أن إناءً يحتوي على سائل وزنه M وحدة قوة، لكل وحدة حجم مكعبة.

يضخ السائل إلى ارتفاع معين، لحساب الشغل المبذول بقوة الضخ، نعتبر المحور عمودياً بنقطة بداية عند مستوى الضخ. نفرض أن الاتجاه الموجب رأسياً إلى الأسفل في اتجاه محور x.

نفرض أن مستوى السائل في الإناء عند بداية الضخ هو a، وأن مستوى السائل عند نهاية الضخ هو b.



إذا كان مقطع مساحة السائل عند المستوى x هو $A(x)$ وحدة مربعة، وحجم السائل في المقطع هو $A(x)dx$ وحدة مكعبة، فإن وزن السائل هو $MA(x)dx$ وحدة قوة.

الآن، الشغل المبذول لضخ x وحدة من السائل إلى مستوى الضخ، هو:

$$dW = xMA(x)dx$$

الآن نحصل على الشغل المبذول لضخ السائل بداية من المستوى a، حتى المستوى b من التكامل المحدود:

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b xMA(x)dx = M\int_a^b xA(x)dx$$

هذا يعني أن:

$$\boxed{W = M\int_a^b xA(x)dx}$$

مثـــال 7

إناء أسطواني قطره 12 قدماً، وارتفاعه 20 قدماً مملوء بالماء. أوجد الشغل المبذول لضخ هذا الماء من الإناء، مع العلم بأن كثافة الماء 62.4 باوند/ قدم مكعب.

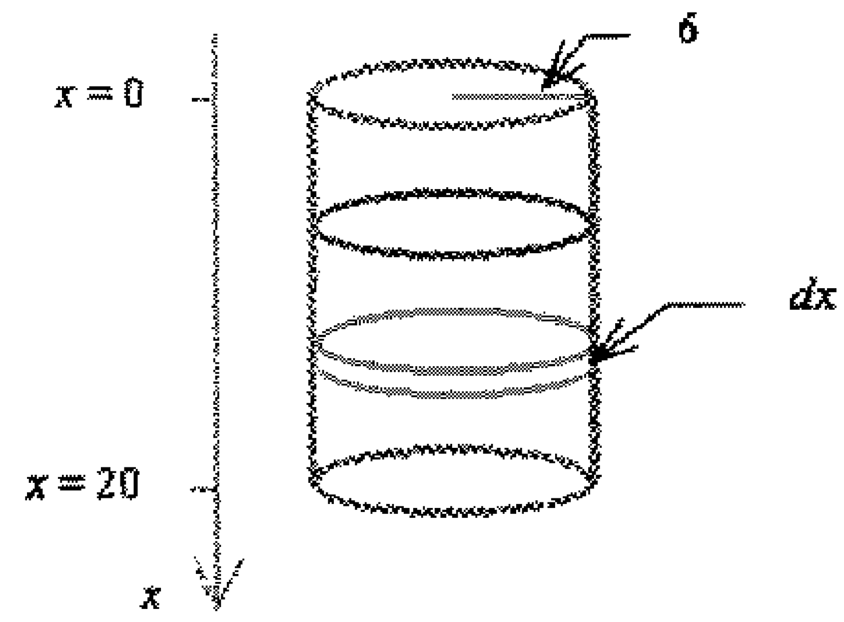
الحـــل

$$W = M\int_a^b xA(x)dx$$

الآن $A(x) = \pi\, r^2$

حيث إن r نصف القطر

$$A(x) = \pi(6)^2 = 36\pi$$



حجم الماء في الارتفاع dx، هو $36\pi dx = A(x)dx$

وبذلك يكون وزن الماء في هذا الارتفاع:

$$(26.4)(36\pi dx) = 2246.4\pi dx$$

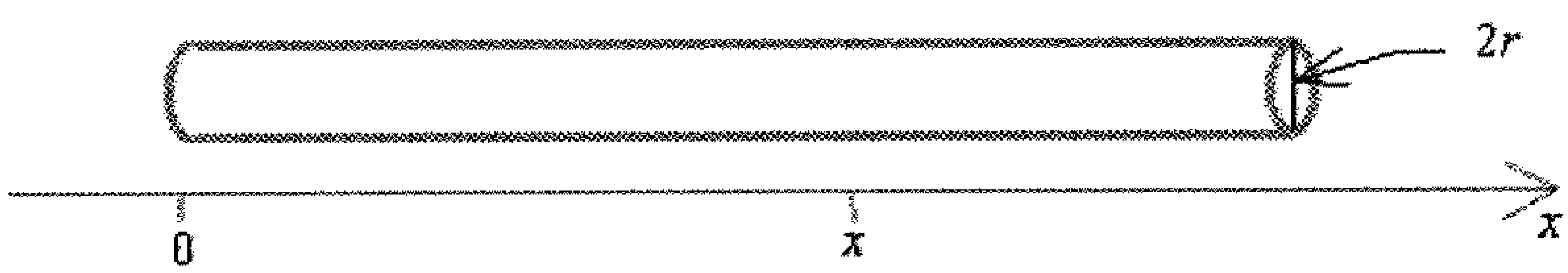
الشغل المبذول هو:

$$W = \int_0^{20} (2246.4)\pi x dx = \frac{(2246.4)\pi x^2}{2}\Big|_0^{20} = 449280\pi$$

إذن الشغل المبذول لضخ الماء هو تقريباً

$(3.1416)(449280) = 141154.7$ قدم/ باوند.

لنفرض أن أسطوانة بها غاز حجمه V وحدة مكعبة، تحت ضغط P وحدة قوة لكل وحدة مساحة.



الشغل اللازم لضخ حجم من الغاز من الحجم الأصلي V_0 إلى الحجم المطلوب V_1 هو:

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} PdV$$

أي أن

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_0} PdV}$$

إذا كان المطلوب هو الشغل المبذول لتمدّد الغاز من الحجم V_0 إلى الحجم V_1، فإن:

$$\boxed{W = \int_{V_0}^{V_1} PdV}$$

مثــال 7

أربع أقدام مكعبة من الهواء تحت ضغط 60 باونداً لكل إنش (بوصة) مربع، تمدّدت إلى الحجم الأخير وهو 7 أقدام مكعبة؛ وفقاً لقانون الغاز، وهو $P = kV^{-1.4}$، عندما يكون k مقداراً ثابتاً، P الضغط، وV الحجم، ما هو الشغل اللازم؟

الحــل

إذا كان الضغط هو P، فإن $P = (60)(144)$ عندما يكون $V = 4$

إذن

$$(60)(144) = k4^{-1.4}$$

ومن ذلك

$$k \approx 60172.5$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} PdV \approx \int_4^7 60172.5V^{-1.4}dV \approx \frac{60172.5}{-0.4}[V^{-0.4}]\Big|_4^7 \\ &\approx -150431(7^{-0.4} - 4^{-0.4}) \\ &\approx -150431(0.4592 - 0.5743) \approx 17312.5 \end{aligned}$$

إذن الشغل 17312.5 قدم لكل باوند.

الطاقة

لنفرض أن جسماً يتحرك في حركة خطية بحيث تكون كتلته m؛ نعرف من القانون الثاني لنيوتن أن:

القوة تساوي الكتلة ضرب العجلة

$$F = ma$$

حيث F تمثل القوة وm كتلة الجسم وa عجلة الحركة.

نعرف أيضاً أن $a = \frac{dv}{dt}$ (العجلة هي المشتقة الأولى للسرعة بالنسبة للزمن)، وبذلك، فإن:

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{1}$$

كذلك نعلم أن $v = \frac{dx}{dt}$ (السرعة هي المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن)، أي أن:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

من المعادلة (1)، نستطيع الحصول على:

$$\int F dt = m\int dv = mv + C \tag{3}$$

والآن من (3) نستطيع إيجاد:

$$\int F dx = m\int \frac{dv}{dt}dx = m\int \frac{dx}{dt}dv = m\int v\ dv = \frac{1}{2}mv^2 + C \tag{4}$$

تسمى الكمية $\frac{1}{2}mv^2$ (طاقة الحركة للجسيم Kinetic Energy)

عرفنا من (4) أن

$$W = \int_a^b F dx = \frac{1}{2}mv_0^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}nv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

حيث v_b سرعة الجسم، عندما تكون $x = b$ وv_a سرعة الجسم عندما تكون $x = a$.

تعرّف طاقة الوضع (Potential Energy) بأنها الشغل المبذول لتحريك جسم من الوضع الحالي $x = b$ إلى وضع عام x.

نرمز لطاقة الوضع بالرمز E_p.

إذن

$$E_p = \int_x^b F dx = -\int_b^x F dx$$

ومن ذلك

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

الطاقة الكلية للجسم = طاقة الحركة + طاقة الوضع

أي أن:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p}$$

حيث E الطاقة الكلية وE_p طاقة الوضع.

تمارين 3.12

1) إذا كانت القوة المؤثرة على جسيم في اتجاه أفقي، هي $F(x) = \ln(x)$، ما مقدار الشغل المبذول لهذه القوة لتحريك الجسيم من الموضع $x = 1$ إلى $x = 2$؟

2) إناء أسطواني قطره 10 أقدام وارتفاعه 15 قدماً مملوء بالماء.

أوجد الشغل المبذول لضخ هذا الماء من الإناء، مع العلم بأن كثافة الماء هي 62.4 باوند/ قدم مكعب.

3) ما هو الشغل المبذول لسحب بندول بسيط طوله 12 إنشاً من وضع 15 إنشاً إلى 18 إنشاً إذا كانت قوة السحب النهائية 25 باونداً.

4) خزان ماء على شكل نصف كرة قطرها 3 أمتار وضع به ماء مالح يزن

10110 نيوتن لكل متر مكعب. ما هو الشغل المبذول لسحب كل الماء المالح خارج حافة الخزان؟

5) سقط وزن مقداره طن متري واحد (1000 كيلو جرام) من ارتفاع h قدم، وكان اصطدامه بالأرض يساوي طاقة الحركة التي تملكها سيارة كتلتها 1.2 طن متري تتحرك بسرعة 88 كيلومتراً في الساعة. أوجد h.

تمارين على الفصل الثاني عشر

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد الحجم الناشىء من دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات المعطاة حول المحور المعطى:

1) $y = 3x + 2$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 2$ حول محور السينات.

2) $y = x^{1/4}$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ حول محور الصادات.

3) $(x-2)^2 + y^2 = 1$ حول محور الصادات.

4) $y = x$ ، $y = 0$ ، $x = 8$ حول محول السينات.

5) $y = \sin(2x)$ ، $x = 0$ ، $x = \pi/4$ حول محور السينات.

6) $y = 4x$ ، $x = 4$ حول $x = -2$.

في التمارين من 7 إلى 12، أوجد طول القوس في كل حالة:

7) $y = \ln(x^2 - 1)$ ، $x \in [2, 3]$.

8) $y = (x+1)^{3/2} + 2$ ، $x \in [3, 8]$.

9) $x = \frac{2}{3}(y+1)^{3/2}$ ، $y \in [3, 8]$.

10) $y = \sqrt{4 - x^2}$ ، $x \in [-2, 2]$.

11) $x^3 = (y-8)^2$ ، $x \in [0, 1]$.

12) $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ، $x \in [0, 4]$.

13) إناء على شكل مخروط دائري قائم، رأسه على الأرض، مملوء بالماء. إذا كان ارتفاع المخروط هو 20 قدماً، وقطر قاعدته هو 5 أقدام، فأوجد الشغل المبذول لضخ هذا الماء من أعلى نقطة على هذا المخروط.

14) جسيمان P_1 وP_2 كتلتاهما m_1 وm_2 على الترتيب، يتحركان على المحور x حيث سرعتاهما المتغيرتان v_1 وv_2 على الترتيب.

هناك قوة جذب متغيّرة بين الجسيمن بحيث أن القوة المبذولة من الجسيم P_2 على الجسيم P_1 هي F_1 والقوة المبذولة من الجسيم P_1 على الجسيم P_2 هي F_2، مع العلم بأن $F_2 = -F_1$. برهن أن $m_1v_1 + m_2v_2$ يظل ثابتاً خلال الحركة.

15) إذا تحرّك جسيم P في الاتجاه الموجب لمحور السينات x تحت تأثير القوة F بحيث تكون الطاقة الكلية للجسيم P صفراً، وطاقة الوضع للجسيم P $v = -\frac{1}{x}$، أوجد:

أ) سرعة الجسيم بدلالة x.

ب) إذا كان $x = 25$ متر وكانت السرعة v سالبة عندما يكون $t = 0$، أوجد معادلة الحركة للجسيم P.

جـ) إذا كان $x = 25$ متر وكانت السرعة v موجبة عندما $t = 0$، أوجد معادلة الحركة للجسيم P.

الفصل الثالث عشر

الأعداد المركّبة

Complex Numbers

1.13 نظام الأعداد المركّبة

على الرغم من أن نظام الأعداد الحقيقية مناسب لحل الكثير من المسائل الفيزيائية والعملية المختلفة، إلاّ أنه نظام به بعض العيوب وخصوصاً عندما يتعلق الأمر بحل بعض المعادلات مثل:

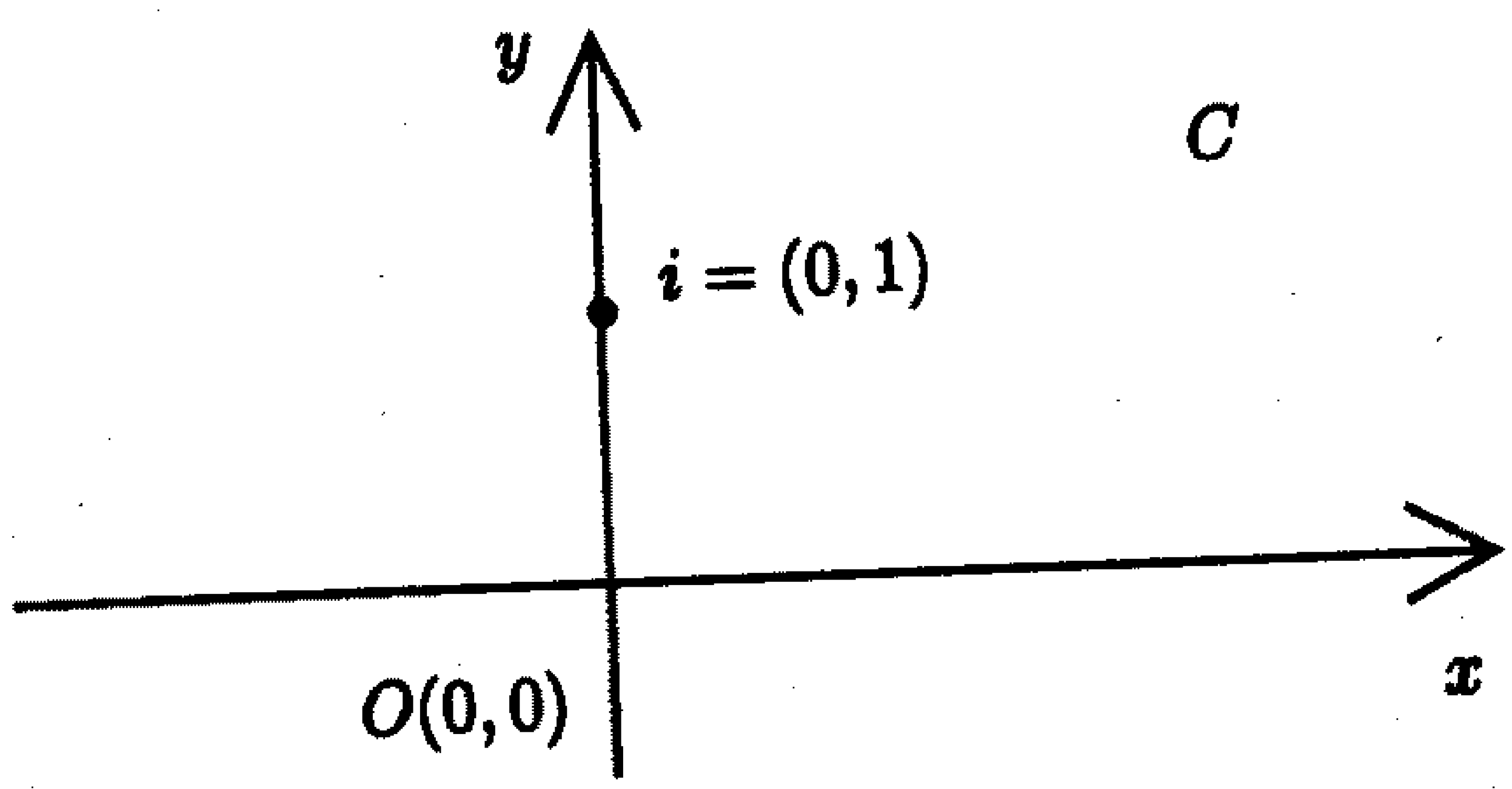
$$x^2+1=0$$

لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربّعه سالب، لذلك نحتاج إلى نظام يحتوي على نظام الأعداد الحقيقية وله خاصية وجود حل المعادلات مثل المعادلة المذكورة سابقاً. هذا النظام هو نظام الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، وفي الحقيقة هو المجموعة $\mathbb{R}^2$ مع قانوني جمع المتجهات وضرب عدد في متجه.

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$$

لاحظ أن كل عدد حقيقي x هو النقطة $(x,0)$ على المحور x وبذلك يكون نظام الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$، ويسمى المحور السيني x المحور الحقيقي (Real Axis)، والنقطة على المحور الصادي y تمثل بالنقطة $(0,y)$، ويسمى المحور الصادي المحور التخيلي (Imaginary Axis).

النقطة $(0,1)$ على المحور الصادي تسمى نقطة الوحدة، ويرمز لها بالرمز $i = (0,1)$.



الشكل 1.13

2.13 عمليات على الأعداد المركّبة

بعد التعرّف إلى نظام الأعداد المركّبة نحاول تعريف عمليات جبرية على هذا النظام بحيث تكون هذه العمليات متوافقة مع العمليات المعروفة على نظام الأعداد الحقيقية، ومن بين هذه العمليات:

أ) تساوي عددين مركّبين

العددان المركّبان (x_1,y_2) و (x_1,y_2) متساويان ونكتب $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ إذا وإذا كان فقط $y_1 = y_2$ و $x_1 - x_2$.

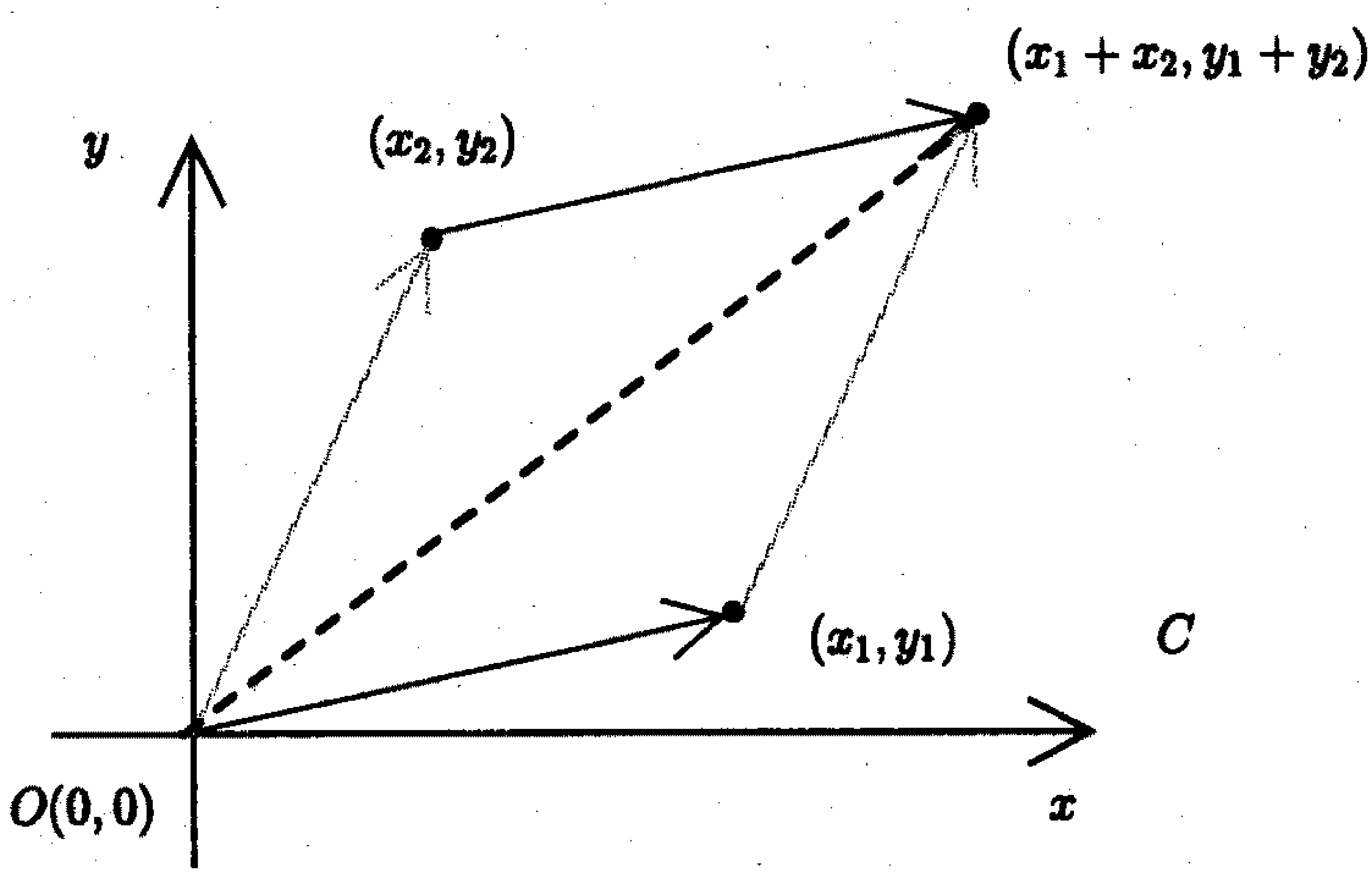
ب) جمع الأعداد المركبة

إذا كان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) عددين مركّبين، فإن حاصل جمعهما هو العدد المركّب (x_1+x_2, y_1+y_2)، أي أن:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

لاحظ أن تعريف الجمع بهذه الطريقة يحافظ على عملية جمع الأعداد الحقيقية، فالعدد الحقيقي $x_1 + x_2$ الناتج من جمع العددين الحقيقيي x_2, x_1 ينتج كما يلي:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$



الشكل 2.13

ج) ضرب الأعداد المركبة

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عددين مركّبين، فإن حاصل ضربهما هو العدد المركّب الذي ينتج كما يلي:

$$\boxed{(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

لاحظ كذلك أن تعريف ضرب الأعداد المركّبة بهذه الطريقة يحافظ على عملية ضرب الأعداد الحقيقية.

يمكن التعبير عن العدد المركب (x, y) بطريقة أخرى وذلك باستخدام العدد

$i=(0,1)$ كما يلي:

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)y=x+iy$$

إذن يمكن التعبير عن العدد المركّب (x,y) على الشكل $x+iy$ وهو الشكل المستخدم على نطاق واسع للتعبير عن العدد المركّب، وفي هذه الحالة، فإن تساوي عددين مركّبين x_1+iy_1 و x_2+iy_2 ينتج كما يلي:

$x_1+iy_1=x_2+iy_2$ إذا وإذا كان فقط $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$

يسمى العدد x في العدد المركّب $z=x+iy$ الجزء الحقيقي للعدد المركب z، ويرمز له بالرمز $\mathbf{Re}(z)$، أي أن: $\mathbf{Re}(z)=x$.

يسمى العدد y في العدد المركّب $z=x+iy$ الجزء التخيلي للعدد المركب x، ويرمز له بالرمز $\mathbf{Im}(z)$، أي أن: $\mathbf{Im}(z)=y$.

نستطيع الآن القول إن $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ إذا وإذا كان فقط يتساوى جزءاهما الحقيقيان، ويتساوى جزءاهما التخيليان.

جمع العددين المركبين x_1+iy_1 و x_2+iy_2 بهذا التعبير هو:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

أما ضرب العددين المركبين x_1+iy_1 و x_2+iy_2 بهذا التعبير هو:

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

نلاحظ كذلك أن:

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$$

وذلك يعني أن $i^2=-1$، ومن ذلك:

$$i^3=i.i^2=-i$$

وهكذا $i^4 = 1$ و $i^5 = 1$ . . . . إلخ . . .

مثـــال 1

إذا كان $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - 4i$، فأوجد:

أ) $z_1 + z_2$ ب) $z_1.z_2$ ج) z_1^2

الحـــل

أ) $z_1 + z_2 = 3 - i$

ب) $z_1.z_2 = [(1)(2) - (3)(-4) + i[(1)(3) + (2)(-4)] = 15 - 5i$

ج) $z_1^2 = (2+3i)(2+3i) = (4-9) + i(6+6) = -5 + 12i$

لاحظ أن المحايد الجمعي في الأعداد المركّبة هو العدد $0 = 0 + i0$.

والمحايد الضربي في الأعداد المركّبة هو العدد $1 = 1 + i0$.

إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركّباً، فإن العدد المركب $-z = -x - iy$ هو المعكوس الجمعي للعدد المركب z لأن:

$$z + (-z) = 0 + i0$$

تُعرف عملية طرح عددين مركّبين z_1, z_2، أي $z_1 - z_2$ بأنها عملية جمع العدد المركّب z_1 إلى المعكوس الجمعي للعدد المركب z_2، أي أن:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

إذا كان k عدداً حقيقياً و $z = x + iy$ عدداً مركّباً، فإن:

$$kz = k(x + iy) = kx + iky$$

مثـــال 2

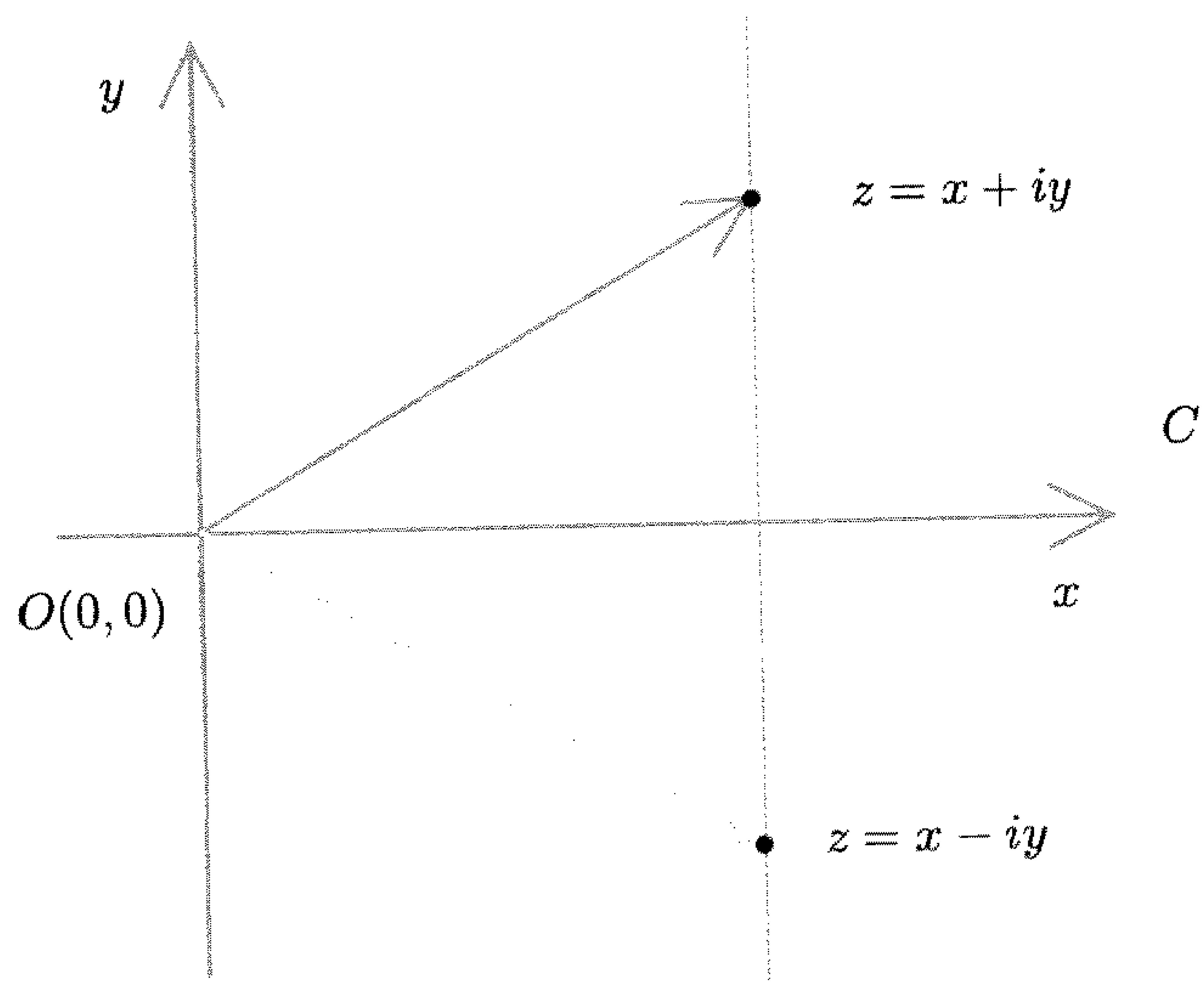
إذا كان $z_1 = 2 + 5i$ و $z_2 = 3 - 4i$ ، فأوجد $4z_1 - z_2$.

الحـــل

$$4z_1 + z_2 = 4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$$

د) مرافق العدد المركّب

إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركّباً، فإن مرافق العدد z هو العدد المركب $\bar{z} = x - iy$، أي أن مرافق العدد المركّب z هو صورته في المرآة وهي محور السينات في هذه الحالة.



الشكل 3.13

إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركّباً غير صفري، فإن معكوسه الضربي هو العدد:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

أي أن:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}}$$

مثـال 3

أوجد أ) $\frac{1}{1+i}$ ب) $\frac{1}{i}$

الحـل

أ) $\frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

ب) $\frac{1}{i} = i^{-1} = (0+i)^{-1} = -i$

خواصّ مرافق العدد المركّب

إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركّباً، فإن:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (x+iy) + (x-iy) = 2x + i0 \\ &= 2x = 2\mathbf{Re}(z) \end{aligned}$$

أي أن:

$$\boxed{z + \bar{z} = 2Re(z)}$$

كذلك

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (x+iy) - (x-iy) \\ &= 2iy = 2\ \mathbf{Im}(z) \end{aligned}$$

أي أن:

$$\boxed{z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)}$$

ضرب العدد المركّب z في مرافقه $\bar{z}$ يعطينا عدداً حقيقياً، أي أن:

$$z.\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

أي أن:

$$\boxed{z.\bar{z}=x^2+y^2}$$

إذا كان $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$، فإن:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}.\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

هذا يعني أن:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}}$$

نلاحظ أن:

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$$

وبذلك يكون:

$$\overline{z_1+z_2}=x_1+x_2-i(y_1+y_2)$$

$$=x_1-iy_1+x_2-iy_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

وبذلك نستنتج أن:

$$\boxed{\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}}$$

كذلك:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

نفس الاستنتاج يمكن الحصول عليه في حالة الضرب، أي أن:

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

والآن:

$$\bar{z}_1.\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1.z_2}$$

أي أن:

$$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

كذلك يمكن استنتاج أن:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

بشرط أن $z_2 \neq 0$.

إذا كان $z = \bar{z}$، فإن $x + iy = x - iy$، وهذا يعني أن $y = 0$، وبذلك يكون z عدداً حقيقياً.

أما إذا كان z عدداً حقيقياً، فإنه على الشكل $z = x + i0$ وبذلك يكون $\bar{z} = x - i0$، أي أن:

$$z = \bar{z}$$

وهذا يوصلنا إلى الاستنتاج التالي:

z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $z = \bar{z}$

لاحظ أن $z = x + iy$ يعطي $\bar{z} = x - iy$ وبذلك يكون $\bar{\bar{z}} = x + iy = z$.

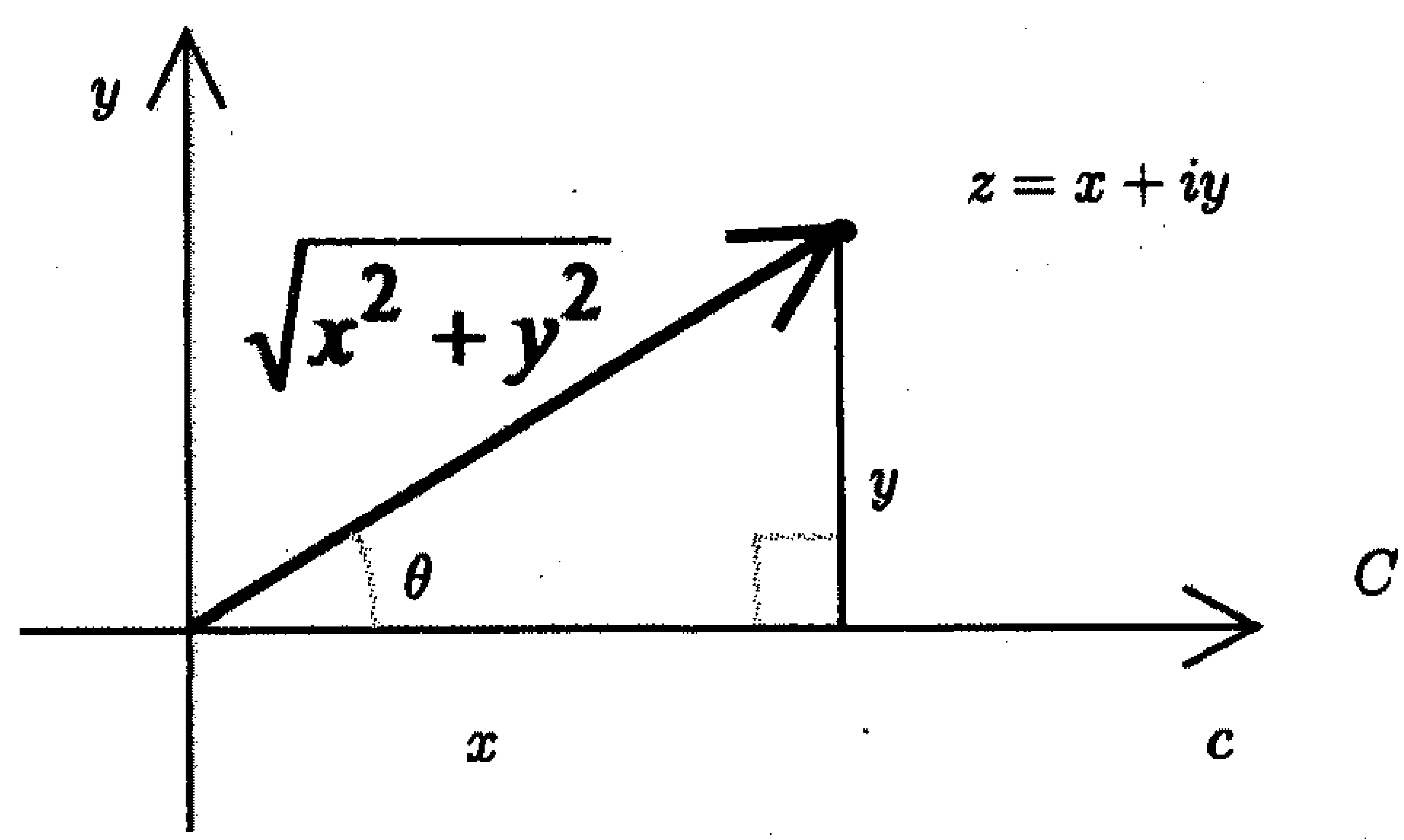
أي أن:

$$\bar{\bar{z}} = z$$

هـ) القيمة المطلقة للعدد المركّب

القيمة المطلقة للعدد المركّب $z = x + iy$ هي طول المتجه z، ويرمز لذلك بالرمز $|z|$ وهي المسافة من نقطة الأصل حتى العدد z.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



الشكل 4.13

الزاوية θ التي يصنعها المتجه z مع محور السينات تسمى اتجاه أو اتساع z، وتكتب $\theta = \arg(z)$.

لاحظ أن:

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

وبذلك فإن:

$$\boxed{|\bar{z}| = |z|}$$

عرفنا فيما سبق أن:

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

أي أن:

$$\boxed{z.\bar{z} = |z|^2}$$

إذا كان $z_1.z_2$ عددين مركّبين، فإن:

$$|z_1.z_2| = \sqrt{(z_1.z_2)\overline{(z_1.z_2)}} = \sqrt{(z_1.z_2)(\bar{z}_1.\bar{z}_2)}$$

$$= \sqrt{(z_1.\bar{z}_1)(z_2.\bar{z}_2)} = \sqrt{z_1.\bar{z}_1}\sqrt{z_2.\bar{z}_2} = |z_1|.|z_2|$$

وهذا يعني أن:

$$\boxed{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|}$$

ونستطيع توضيح أن:

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

بشرط أن $z_2 \neq 0$.

مثـــال 4

أوجد $\left|-i + \frac{3+i}{1-i}\right|$.

الحــل

$$\frac{3+i}{1-i}=\frac{3+i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=1+2i$$

وبذلك فإن:
$$-i+\frac{3+i}{1-i}=1+i$$

هذا يعني أن:
$$\left|-i+\frac{3+i}{1-i}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$$

مثــال 5

أوجد $\left|\frac{(2+3i^4}{1+i\sqrt{2}}\right|$.

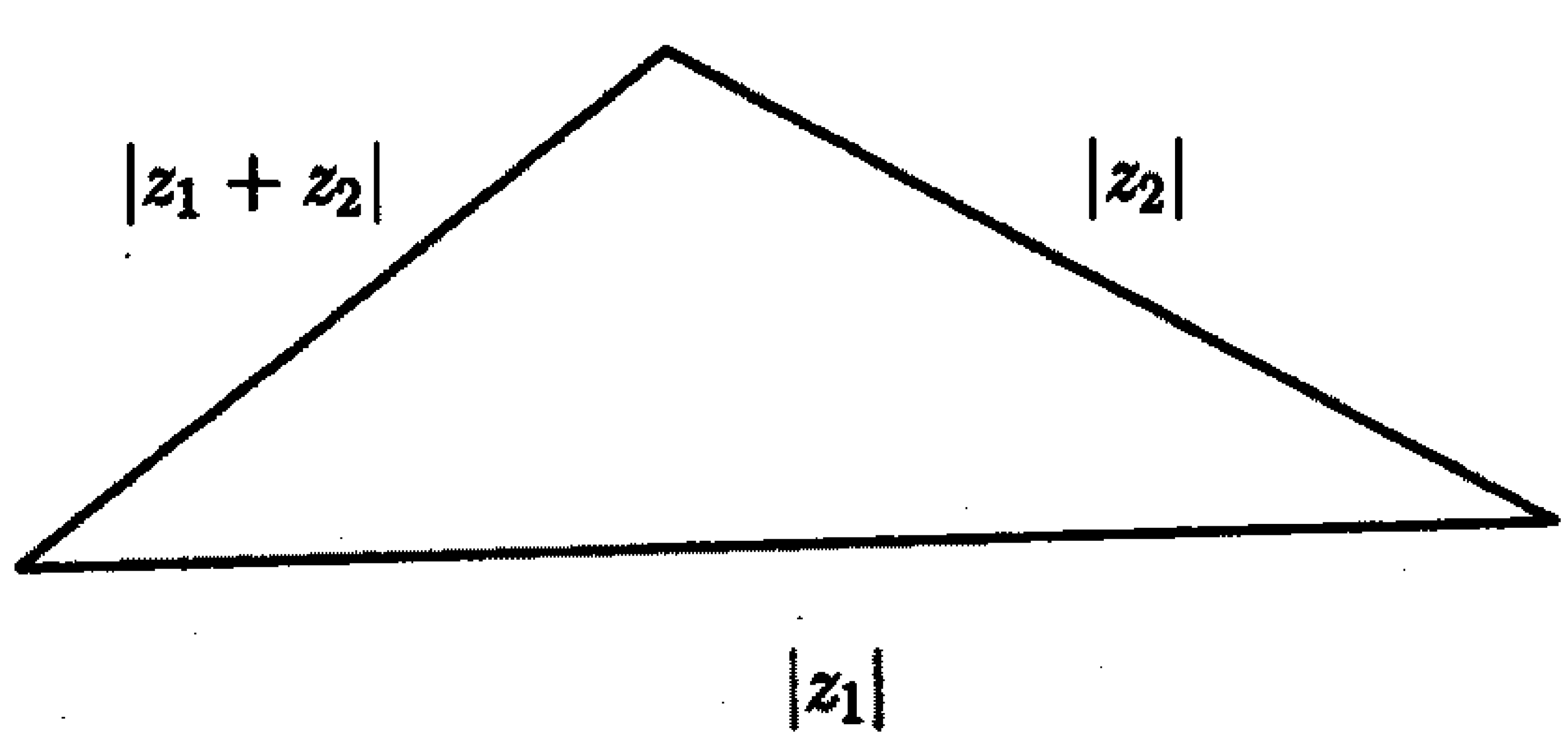
الحــل

لدينا

$$\left|\frac{(2+3i)^4}{1+i\sqrt{2}}\right|=\frac{|(2+3i)^4|}{|1+i\sqrt{2}|}=\frac{|2-3i|^4}{|1+i\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{(4+9)4}}{\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}}$$
$$=\frac{13^2}{\sqrt{3}}=\frac{169}{\sqrt{3}}=\frac{169\sqrt{3}}{3}$$

لاحظ من المثلث أدناه أن:

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$



الشكل 5.13

نلاحظ أن طول المتجة z هو طول المتجه $-z$، أي أن:

$$\boxed{|-z| = |z|}$$

من هذه الملاحظة يمكننا اشتقاق متباينة هامة:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| \leq_1 | + |z_1| + |z_2|$$

أي أن:

$$\boxed{|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

إذا لاحظنا أن:

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$

أي أن:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \qquad (1)$$

وإذا غيّرنا z_1 مكان z_2 في المتباينة (1) نحصل على:

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 + z_1|$$

أو

$$-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 + z_2|$$

وهذا يعني أن

$$|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 + z_2| \qquad (2)$$

من (1) و(2) نحصل على:

$$\boxed{\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|}$$

يمكننا وضع المتباينات السابقة في متباينة واحدة على الشكل:

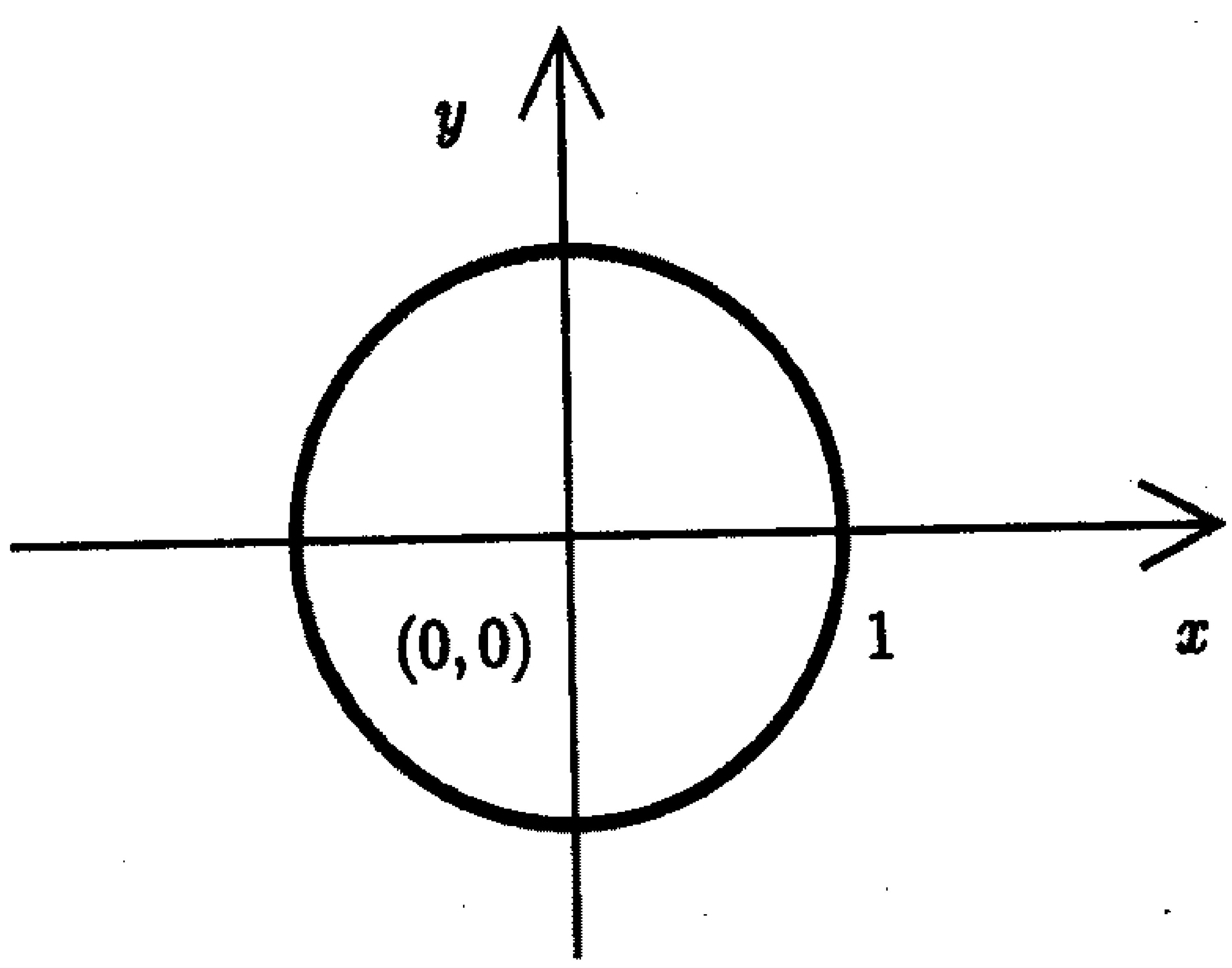
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

مثـال 6

أوجد كل النقط في المستوى التي تناظر العدد المركّب z حيث $|z| = 1$.

الحـل

من الرسم أدناه نلاحظ أن مجموعة الحل هي مجموعة كل الأعداد المركّبة التي تناظر النقط التي تقع على الدائرة التي نصف قطرها 1 ومركزها نقطة الأصل.



الشكل 6.13

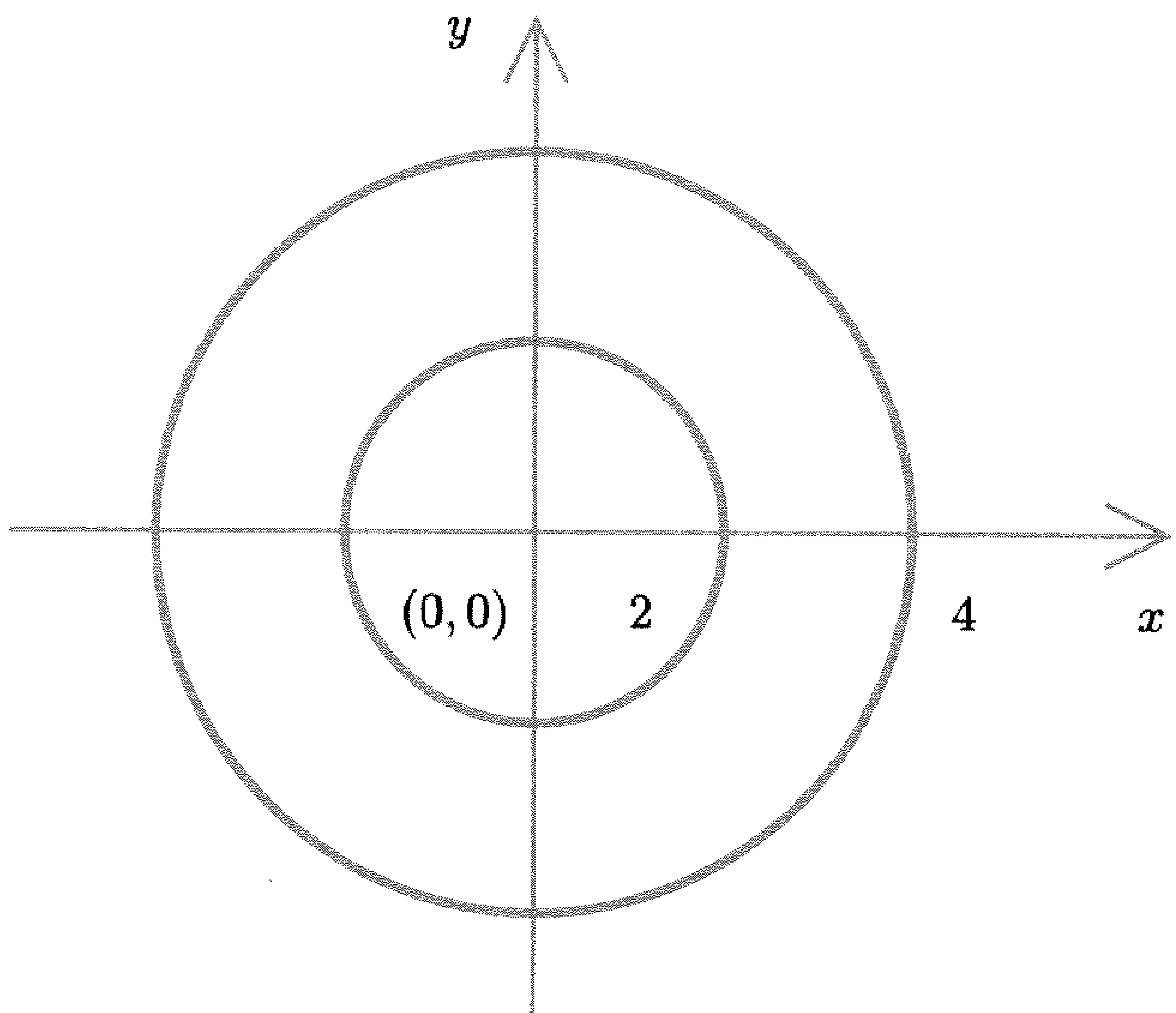
مثـال 7

أوجد كل النقط في المستوى التي تناظر العدد المركّب z حيث أن $2 \leq |z| \leq 4$.

الحـل

من الرسم أدناه نلاحظ أن مجموعة الحل هي مجموعة كل الأعداد المركّبة التي تناظر النقط التي داخل الدائرة التي نصف قطرها 4 ومركزها نقطة الأصل، بما

في ذلك محيطها وخارج الدائرة التي نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل، مع العلم بأن محيط الدائرة الأخيرة ضمن مجموعة الحل.



الشكل 7.3

تمارين 2.13

في التمارين من 1 إلى 5، أنجز العمليات المذكورة:

1) $(3+4i)(1+2i)$.

2) $(3+4i)+(1-2i)$.

3) $\mathbf{Re}[(3+4i)(1-2i)]$.

4) $\mathbf{Re}[(1+2i)(3-4i)]$.

5) $(3-4i)^2(3+4i)^2$

6) أوضح أن $\mathbf{Re}(z) = \mathbf{Im}(iz)$.

7) حل المعادلة $x^2 - y^2 + 2ixy = -ix + y$.

8 أوجد $\dfrac{2+i}{1-i}$.

9) أوجد $\left[(1+i) + \dfrac{1}{1+i}\right]^2$.

10) أوضح أن $\mathbf{Re}(z_1.z_2) = \mathbf{Re}(\bar{z}_1.\bar{z}_2)$.

11) أوضح أن $\overline{z_1.(z_2+z_3)} = \bar{z}_1.\bar{z}_2 + \bar{z}_1.\bar{z}_3$.

12) أوجد $(3+4i)(1+2i)$.

13) أوجد $\left|i + \dfrac{(3+4i)(1+i)}{(3-4i)}\right|$.

14) أوجد $\left|\dfrac{(3+4i)(1-i)}{(3-4i)}\right|$.

3.13 التمثيل القطبي للأعداد المركّبة

إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركّباً، فإن:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

فإذا كان $\theta = \arg z$، فإن:

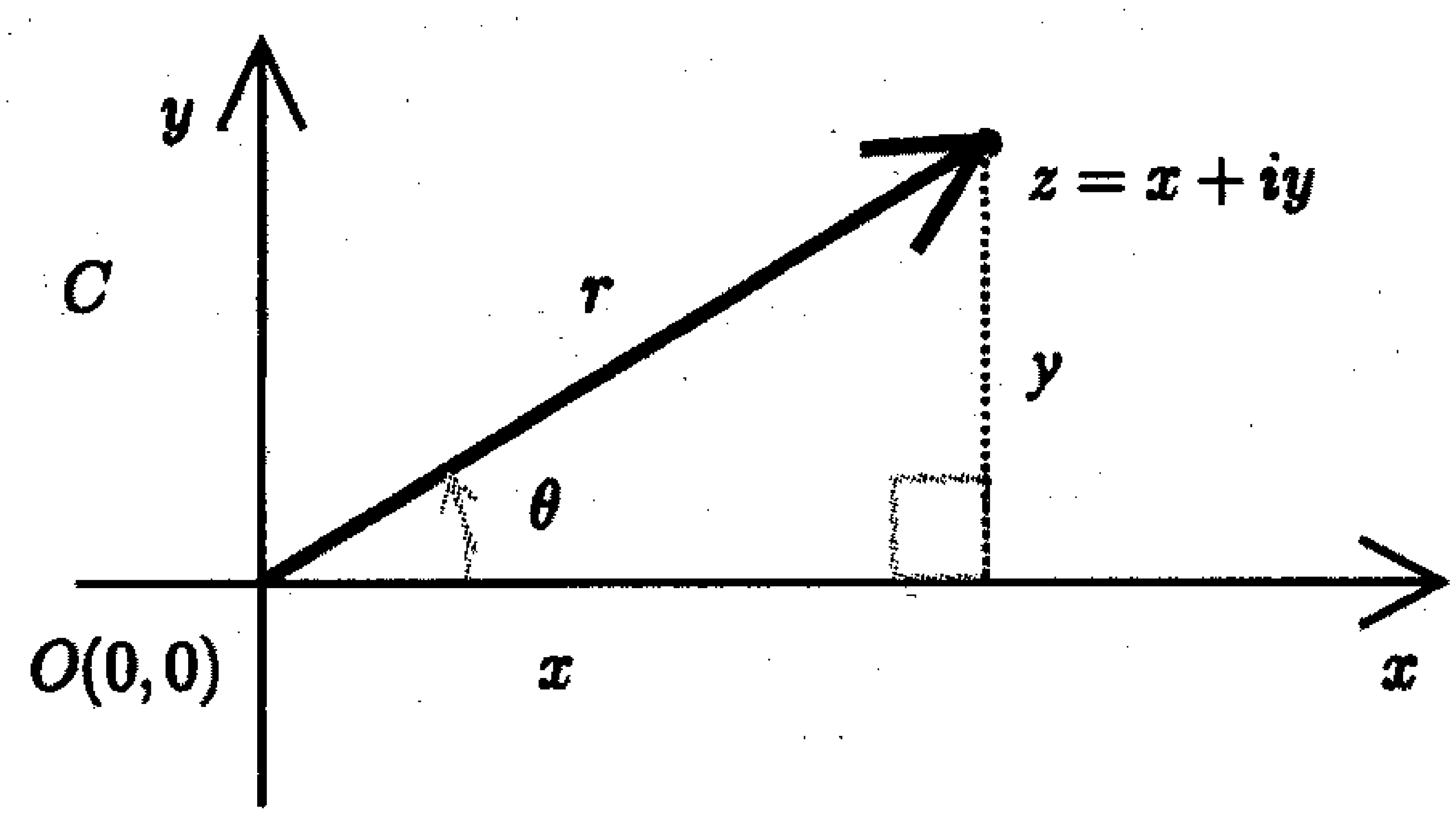
$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

وبذلك فإن:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

أي أن التمثيل القطبي للعدد المركّب $z = x + iy$ هو:

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$



الشكل 8.13

لاحظ أن

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

وأن للزاوية θ عدة قيم، فإذا وجدنا قيمة للزاوية θ وأضفنا لها مضاعفات صحيحة للزاوية 2π نحصل على قيمة أخرى للزاوية θ، فإذا كانت θ_0 أي قيمة للزاوية θ، فإن قيمة θ بصفة عامة هي:

$\theta = \theta_0 + 2n\pi$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

القيمة الرئيسية للزاوية θ هي القيمة التي تقع بين π و $-\pi$، أي أن القيمة الرئيسية للزاوية θ هي:

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

يمكن القيام بالعمليات الأساسية على الأعداد المركّبة في شكلها القطبي:

إذا كان

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

و

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$+(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

وهذا يعني أن:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

حيث استخدمنا قانوني حساب المثلثات:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$

إذا كان

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فإن:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} . \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{r} . \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

أي أن:

$$\boxed{\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$$

ومن ذلك يمكن استنتاج أن:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

أي أن:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))}$$

مثـال 8

أوجد $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

الحـل

إذا كان $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$، فإن $\theta_1=\pi/4$ و $\theta_2=\pi/6$ وكذلك $z_1=\sqrt{2}$ و $z_2=2$ وبذلك يكون:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

إذا كان $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، فإن:

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

وكذلك

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

وبصفة عامة:

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ حيث n عدد صحيح موجب

كما في حالة الأعداد الحقيقية، فإن $z^0 = 1$ في حالة الأعداد المركّبة.

إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً، وليكن $n = -m$ حيث m عدد صحيح موجب، فإن:

$$z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{r^m[\cos m\theta + i \sin m\theta]}$$

وبالضرب بسطاً ومقاماً في $\cos m\theta - i \sin m\theta$ نجد أن:

$$z^{-m} = \frac{\cos m\theta + i \sin m\theta}{r^m[\cos^2 m\theta + i \sin^2 m\theta]}$$

حيث أن $\cos(m\theta) = \cos(-m\theta)$ و $-\sin(m\theta) = \sin(-m\theta)$، فإن:

$$z^{-m} = r^{-m}[\cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)]$$

وبذلك يكون:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

صحيحاً لكل الأعداد الصحيحة.

مثـال 9

أوجد $(1+i)^{20}$

الحـل

$$\theta = \pi/4 \text{ و } r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$

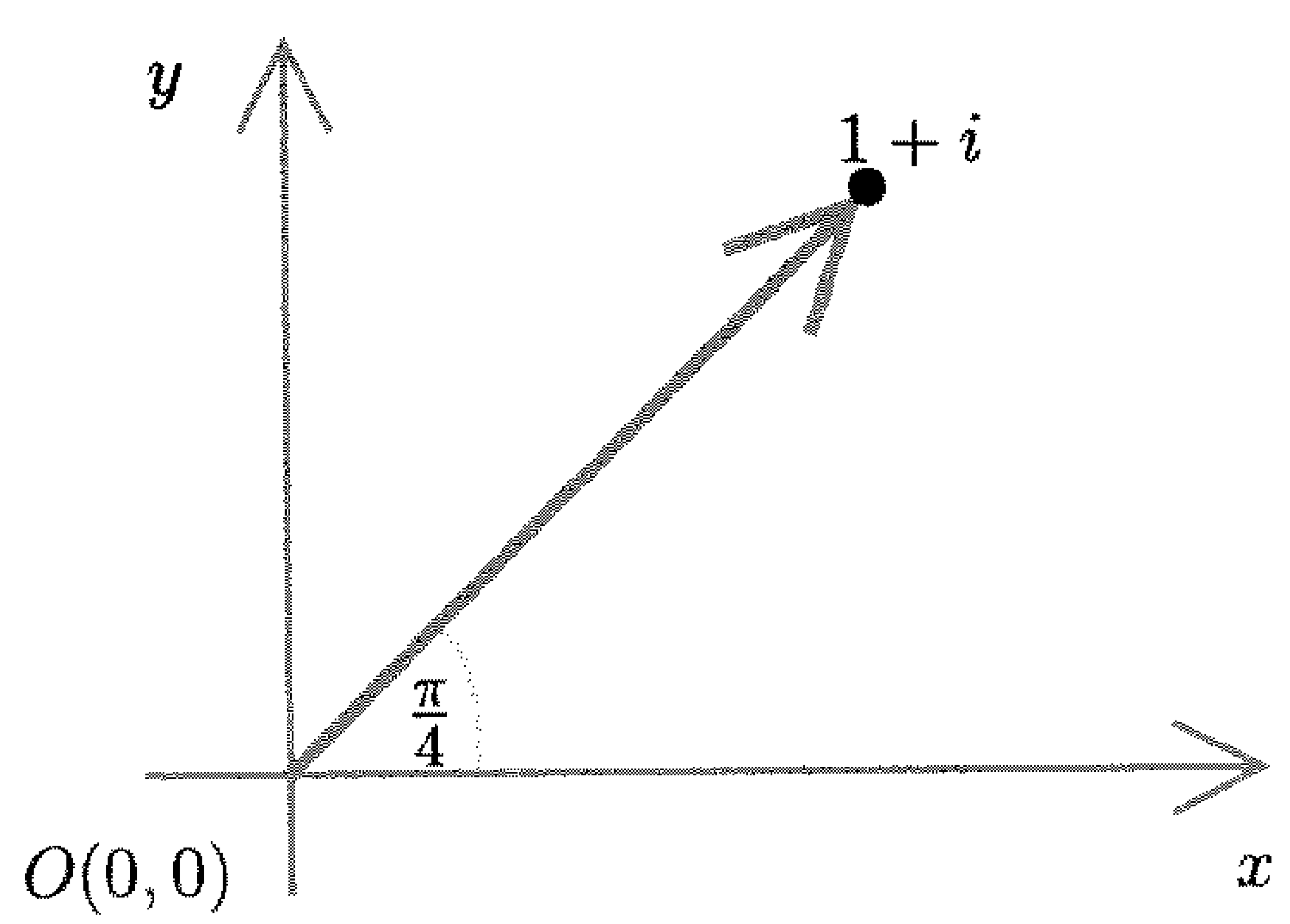
إذن

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$(1+i)^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left[\cos\left(\frac{20\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{20\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{10}[\cos 5\pi + i \sin 5\pi] = 2^{10}[\cos \pi + i \sin \pi]$$

$$= 2^{10}(-1 + i0) = -1024$$



الشكل 9.13

لنفرض أن:

$$\omega = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

وأن:

$$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

الآن لحل المعادلة:

$$z = \omega^n$$

يعني أن:

$$r(\cos\theta + i \sin\theta) = [\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n$$

$$= \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

وهذا يعني أن $r = \rho^n$ ومن ذلك $\rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$، وحيث أن الدالتين sin و cos

لهما نفس الدورة 2π، فإن $n\varphi = \theta + 2k\pi$ حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$، ومن ذلك:

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

وبذلك نصل إلى القانون التالي لحل المعادلة:

$$z = \omega^n$$

$$\boxed{\omega = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

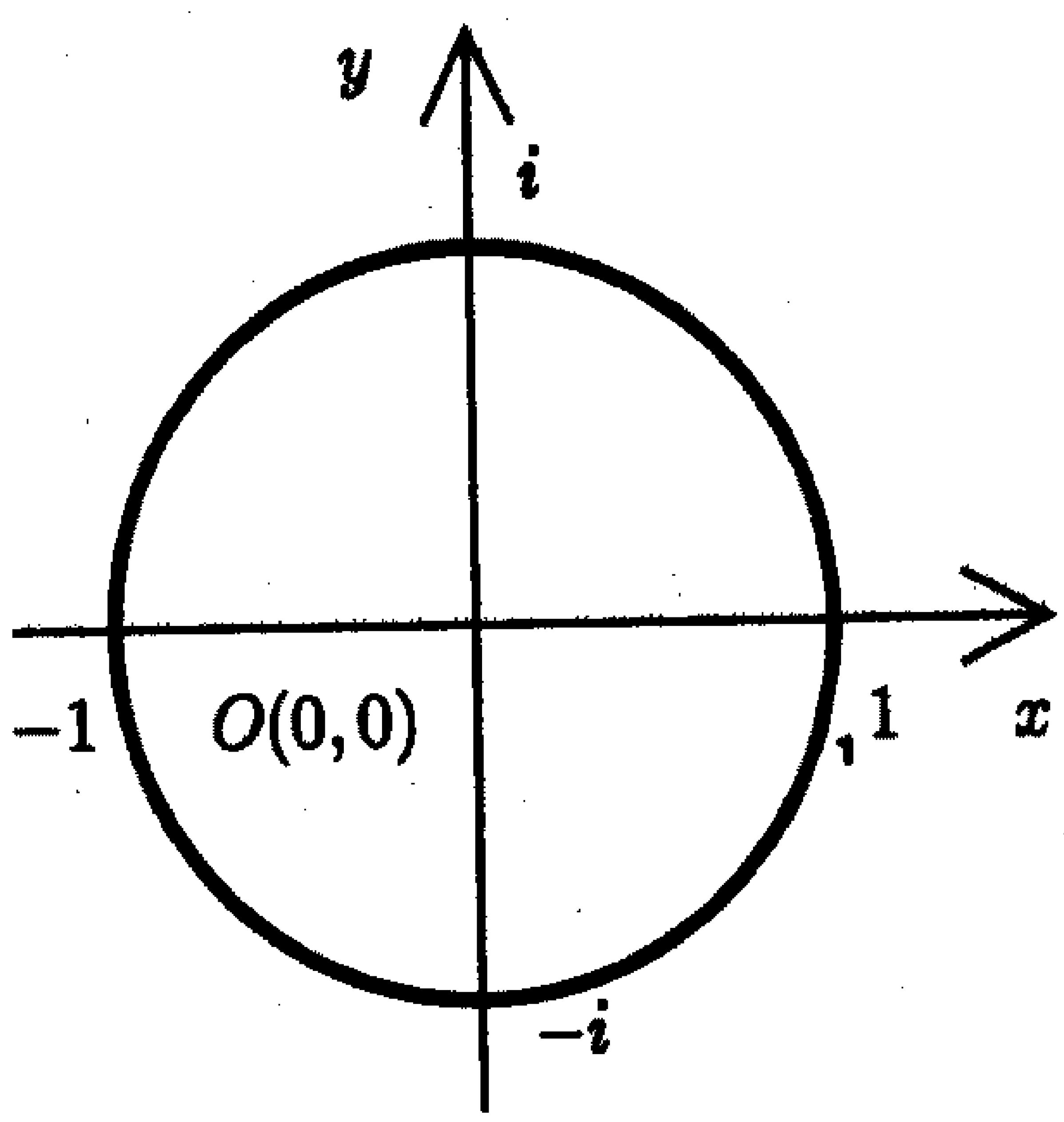
حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

مثـــال 10

أوجد $(-1)^{1/2}$.

الحــل

لاحظ أن $r = 1$ ، $\theta = \pi$ ومن ذلك:



الشكل 10.13

$$(-1)^{1/2} = \sqrt{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

لاحظ أن $k = 0, 1$.

عندما $k = 0$، فإن $(-1)^{1/2} = i$.

عندما $k = 1$، فإن $(-1)^{1/2} = -i$.

من المناقشة السابقة نستطيع الوصول إلى:

$$z^{\frac{n}{m}} = (z^{1/m})^n = (\sqrt[m]{r})^n\left[\cos\left(\frac{n\theta + 2kn\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta + 2kn\pi}{m}\right)\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, ..., m-1$.

مثـــال 11

أوجد $(-2i)^{3/4}$.

الحـــل

لاحظ أن $n = 4$ ، $m = 3$ و $k = 0,1,2,3$ ، $r = 2$ ، $\theta = -\pi/2$

إذن:

$$(-2i)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{8} + \frac{6k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{8} + \frac{6k\pi}{4}\right)\right]$$

عندما $k = 0$، فإن

$$(-2i)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{8}\right)\right]$$

عندما $k = 1$، فإن

$$(-2i)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$$

عندما $k = 2$، فإن

$$(-2i)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{21\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{8}\right)\right]$$

عندما $k = 3$، فإن

$$(-2i)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{33\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{33\pi}{8}\right)\right]$$

تمارين 13.3

في التمارين من 1 إلى 4 حوّل إلى الشكل القطبي:

1) $\sqrt{3}+i$ 2) $-\sqrt{3}-i$ 3) $(3+4i)(1+i)$

4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+2i$

في التمارين من 5 إلى 10 أوجد ما يلي:

5) $(-\sqrt{3+i})^9$ 6) $(3+4i)^{12}(1+i)^{-12}$ 7) $(1+2i)^{19}$

8) $(1-i)^{1/2}$ 9) $(-i-\sqrt{3}i)^{-1/3}$ 10) $(16i)^{1/4}$

4.13 المعادلات والأعداد المركّبة

المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ لها الحل:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويكون لها الجذر الواحد المتكرر مرتين إذا كان $b^2 - 4ac = 0$، ولها جذران حقيقيان مختلفان إذا كان $b^2 - 4ac > 0$، أما إذا كان $b^2 - 4ac < 0$، فإن الجذرين مركّبان مختلفان.

مثال 12

أوجد حلول المعادلة $x^3 - 1 = 0$.

الحل

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

نلاحظ من المعادلة التربيعية أن $b^2 - 4ac = -3 < 0$ ولذلك، فإن:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

وهذا يعني أن:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

ولذلك تكون مجموعة الحل للمعادلة $x^3 - 1 = 0$ هي:

$$\left\{1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

كثيرة الحدود هي دالة على الشكل:

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_n x^n$$

حيث k_i أعداد مركبة.

إذا كان $k_n \neq 0$، فإن درجة كثيرة الحدود هي n.

إذا كان $f(x) = k_0$، فإن $f(x)$ لها الدرجة صفر، وليس للدالة الصفرية درجة.

تمّ اللجوء إلى نظام الأعداد المركّبة للحصول على حلّ للمعادلات مثل المعادلة $x^2 + 1 = 0$، ومن ذلك تم الحصول على حل لكل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد، والآن يمكن أن نسأل السؤال التالي:

هل نظام الأعداد المركبة يحتوي على حلول لكل معادلة حدودية بمعاملات من الأعداد الحقيقية أو المركّبة؟

إذا كانت الإجابة [لا] لا بد من تكبير نظام الأعداد المركّبة للحصول على حلّ لمثل هذه المعادلات، ولكن لحسن الحظ، فإن الإجابة عن هذا السؤال [نعم] وتتضمنها المبرهنة التالية:

> **المبرهنة الأساسية للجبر**
>
> كل حدودية غير ثابتة بمعاملات من أعداد مركّبة لها جذر في نظام الأعداد المركّبة.

برهان هذه المبرهنة يحتاج إلى أفكار رياضية لا يتعرض لها هذا الكتاب، لهذا فإننا لن نتعرض لبرهانها في هذا الكتاب، وهناك بعض النتائج للمبرهنة الأساسية في الجبر يحتاج إليها الطالب في تحليل وفهم المسائل، نتعرض لها فيما يلي:

أول هذه النتائج هي المبرهنة الأساسية بشكل آخر.

بعض الحقائق حول الحدوديات

1) إذا كانت درجة حدودية بمعاملات من أعداد مركّبة $f(x)$ أكبر من الصفر، فإن للحدودية $f(x)$ على الأقل جذراً مركّباً واحداً.

2) الحدودية $f(x)$ بمعاملات من أعداد مركبة ودرجة أكبر من الصفر يكون لها العامل $(x-c)$ حيث c مقدار ثابت.

إذا كانت درجة $f(x)$ تساوي n، فإن:

$$f(x) = (x-c)f_1(x)$$

حيث درجة $f_1(x)$ هي $n-1$.

3) إذا كانت الحدودية $f(x)$ بمعاملات من أعداد مركبة لها الدرجة n حيث $n > 0$، فإنه يكون لها n من الجذور المركّبة $c_1, c_2, ..., c_n$

و $f(x) = k(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_{n-1})(x-c_n)$

حيث k عدد ثابت.

4) إذا كان للحدودية $f(x)$ الدرجة n حيث $n > 0$ ولها معاملات حقيقية، فإنه إذا كان العدد المركّب z جذراً للحدودية $f(x)$، فإن مرافقه $\bar{z}$ هو أيضاً جذر للحدودية $f(x)$.

مثـــال 13

أوجد جذور المعادلة $z^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

الحـــل

عند النظر إلى العدد المركّب $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ نجد أن:

$\theta = \pi/4$ ، $r = 2$ ، $n = 3$، وبذلك يكون $k = 0, 1, 2$.

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

عندما $k = 0$، فإن:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

عندما $k = 1$، فإن:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

عندما $k = 2$، فإن:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

مثـال 14

أوجد جذور المعادلة $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$،

الحـل

إذا كان $y = x^2$، فإن المعادلة $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ تتحول إلى:

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

يمكن الحصول على حل المعادلة الأخيرة باستخدام الصيغة التربيعية:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهذا يعطي:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

إذن

$$y = \frac{2 + 4}{2} = 3 \quad \text{أو} \quad y = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

وحيث أن $y = x^2$، فإن $x = \pm\sqrt{y}$.

وهذا يعني أن $x = \pm\sqrt{3}$ أو $x = \pm\sqrt{-1}$

إذن جذور المعادلة $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ هي:

$$\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i, -i\}$$

الدالة الأسية e^z:

يُعطى التعريف التالي للدالة e^z مع الاعتبار بأن $z = x + iy$:

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

نلاحظ من التعريف أن:

$$\mathbf{Re}(e^z) = e^x \cos y$$

و $\mathbf{Im}(e^z) = e^x \sin y$

و $|e^z| = e^x$

و $\arg(e^z) = y + 2k\pi$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots$.

هذا يوضح أن e^z دالة دورية ودورتها $2\pi i$.

ما يهمنا من الدالة الأسية هو سلوك $e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي ومن التعريف نجد أن:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

وهذه الصيغة تسمى صيغة أويلر (Euler).

التعبير القطبي للعدد المركب z هو:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta = re^{i\theta}$$

وبذلك يمكن كتابة العدد المركّب على الشكل:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

كذلك

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$$

يمكن ضرب وقسمة الأعداد المركّبة في الشكل القطبي وذلك كما يلي:

إذا كان

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن:

$$\boxed{z_1.z_2 = r_1.r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

مثـال 15

ضع العدد المركّب $1 + i\sqrt{3}$ على الشكل القطبي.

الحـل

حيث أن $r = 2$ ، $\theta = \pi/3$، فإن:

$$z = 2e^{i\pi/3}$$

تمارين 13.4

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد مجموعة الحل في كل حالة:

1) $x^2 - 6x + 18 = 0$.

2) $x^4 = 1$.

3) $x^6 - 64 = 0$.

4) $4x^4 + 19x^2 + 12 = 0$

5) $-4x^2 + 3x - 5 = 0$.

6) أوجد حدودية بمعاملات من أعداد حقيقية ولها درجة تساوي 3 ولها الجذران $-3, -4i$.

7) أوجد معادلة تربيعية لها الجذران $4 - i, 4 + i$.

8) أوجد جذور المعادلة $z^4 + 1 = 0$.

9) حل المعادلة $z^2 + (2i - 3)z + -i = 0$.

10) حل المعادلة $z^4 + 4 = 0$.

في التمارين من 11 إلى 13 أوجد ما يلي:

11) $(2 + 2i)^{10}$.

12) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$.

13) $(-i + \sqrt{3}i)^{18}$.

14) حلّ المعادلة $x^5 - 4x^4 + 13x^2 = 0$.

15) حل المعادلة $\omega^3 - i = -\sqrt{3}$.

16) حل المعادلة $z^4 - 2\sqrt{2}z^2 + 4 = 0$.

17) حل المعادلة $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

تمارين على الفصل الثالث عشر

في التمارين من 1 إلى 10، ضع على الصورة $x+iy$:

1) $(3+2i)(-2+5i)$.

2) $(-4+i)(-7+2i)$.

3) $-(-2+5i)+(-3+3i)$.

4) $\dfrac{2+7i}{3-4i}$.

5) $\dfrac{17-5i}{2i}$.

6) $\dfrac{1}{3-2i}$.

7) $-\dfrac{1}{i}-\dfrac{2}{4-i}$.

8) $5i-i(4+2i)$.

9) $(i)^{59}$.

10) $(1+i)^4+(4i+6)$

في التمارين من 11 إلى 15، أوجد حل المعادلة المعطاة:

11) $3x^4-2x^3+12x^2-8x=0$.

12) $4z^2+4z+i=0$.

13) $z^2-i=-1$.

14) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

15) $z^4-64=0$.

16) أوجد $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{30}$

17) أوجد $(2+2\sqrt{3}i)^{15}$

18) أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها هما $i, 1-i$.

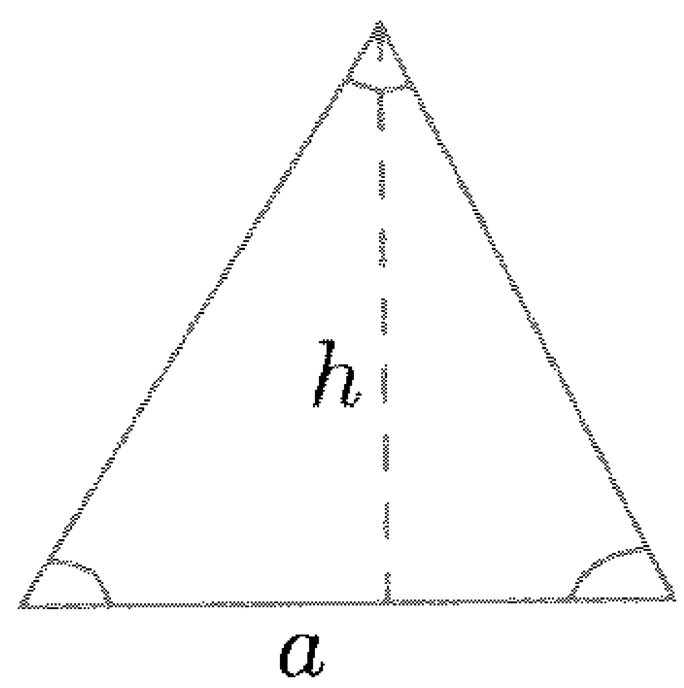
19) أوجد حدودية من الدرجة الثالثة بمعاملات من أعداد حقيقية ولها الجذران $-2, 1+2i$.

20) ضع الأعداد المركّبة التالية في الصورة القطبية:

أ) $2+2\sqrt{3}i$ ب) $-5+\sqrt{5}i$ ج) $-3i$

بعض الأشكال والقواعد الهندسية

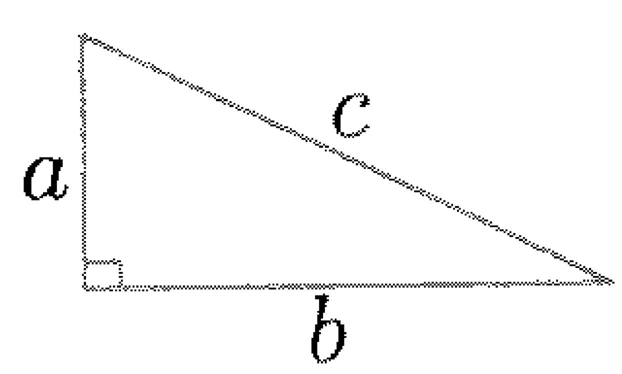
1) المثلثات



أ) مجموع زوايا المثلث $= 180$ درجة.

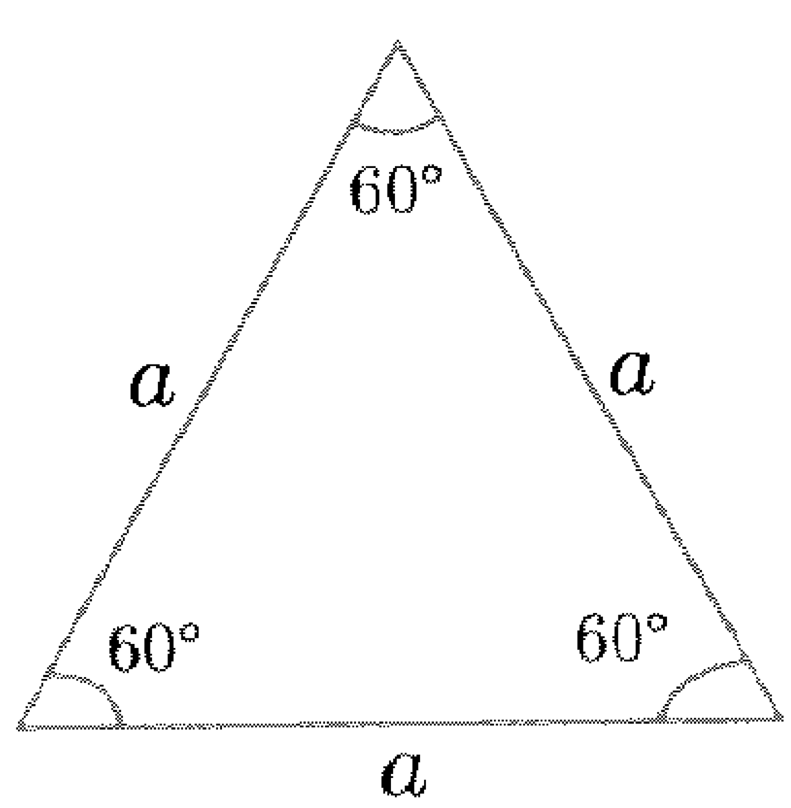
ب) مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع $= \frac{ah}{2}$

ج) المثلث القائم الزاوية:



مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

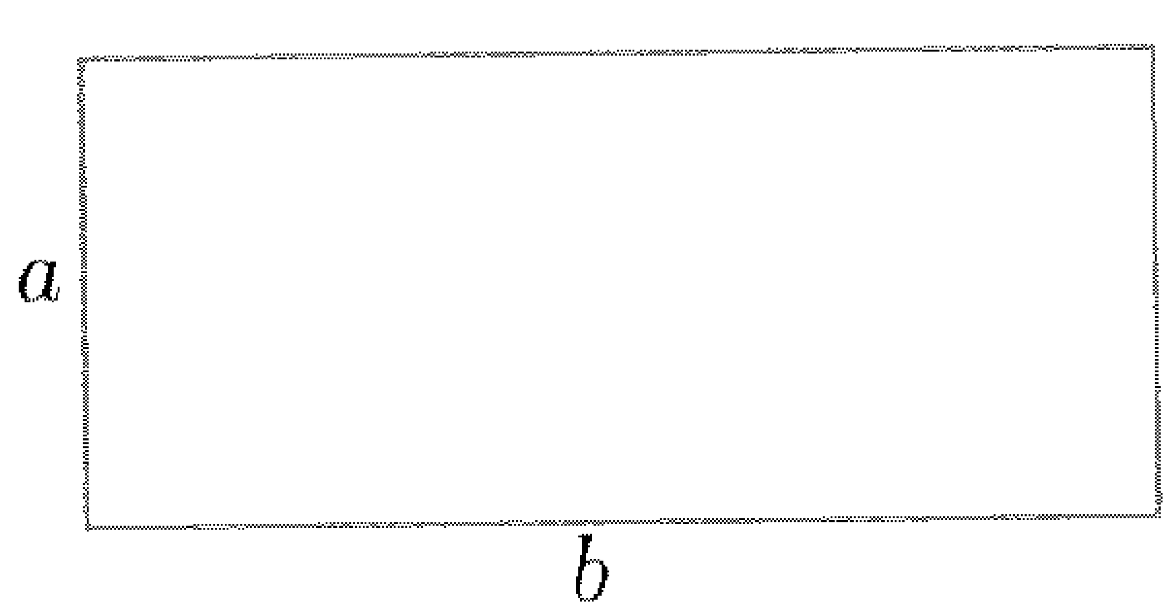
$$a^2 + b^2 = c^2$$



د) المثلث المتساوي الأضلاع:

المساحة $= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

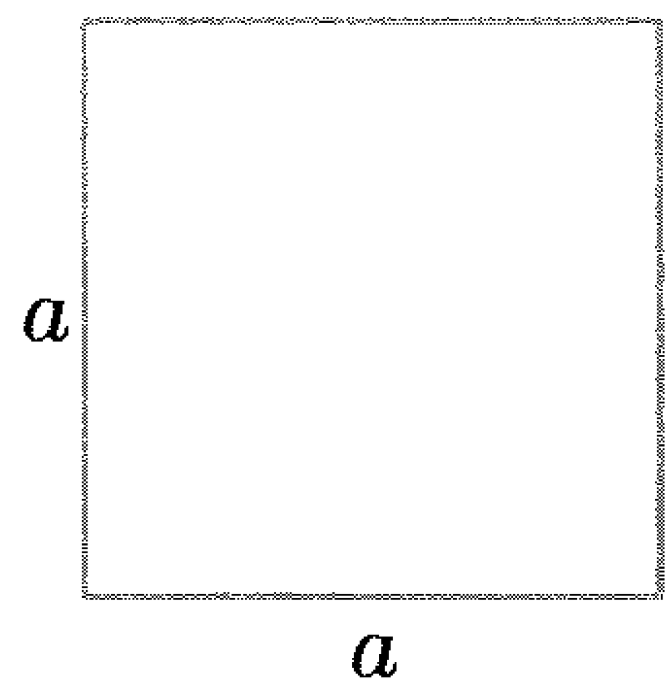
2) الأشكال الرباعية



أ) المستطيل

المساحة $= ab$

المحيط $= 2a + 2b$

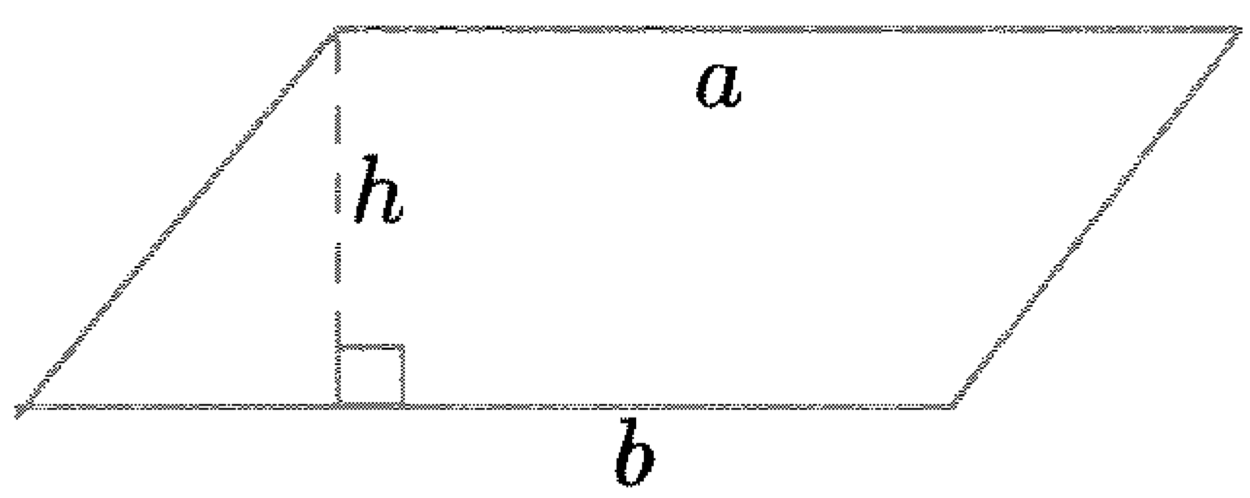


ب) المربع:

المساحة $= a^2$

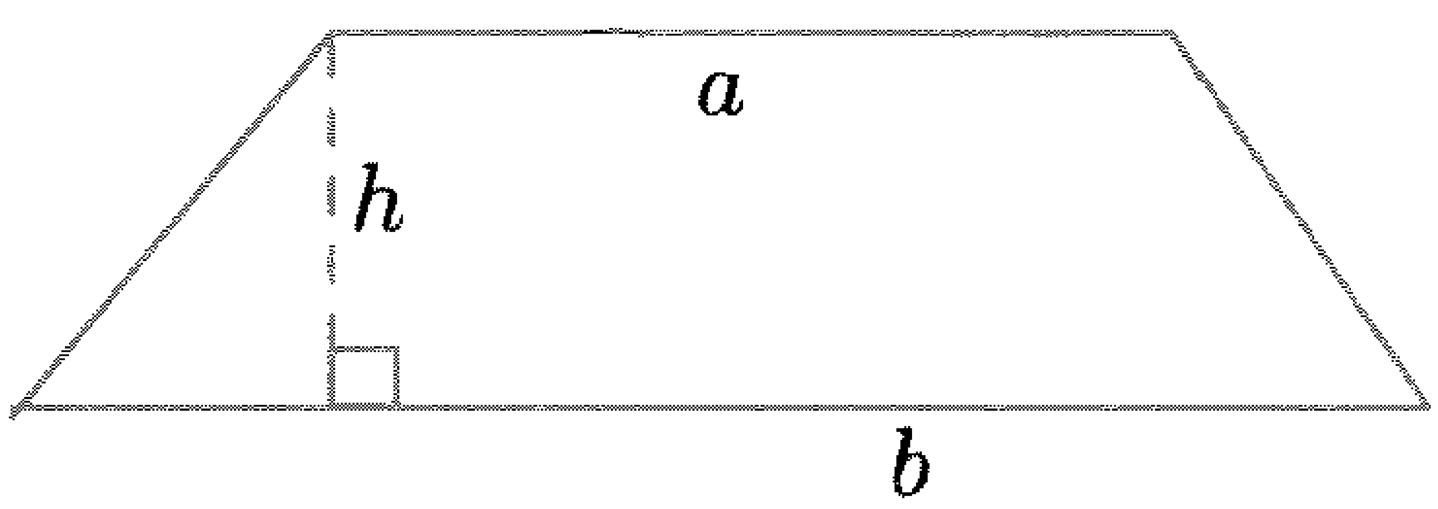
المحيط $= 4\,a$

ج) متوازي الأضلاع:



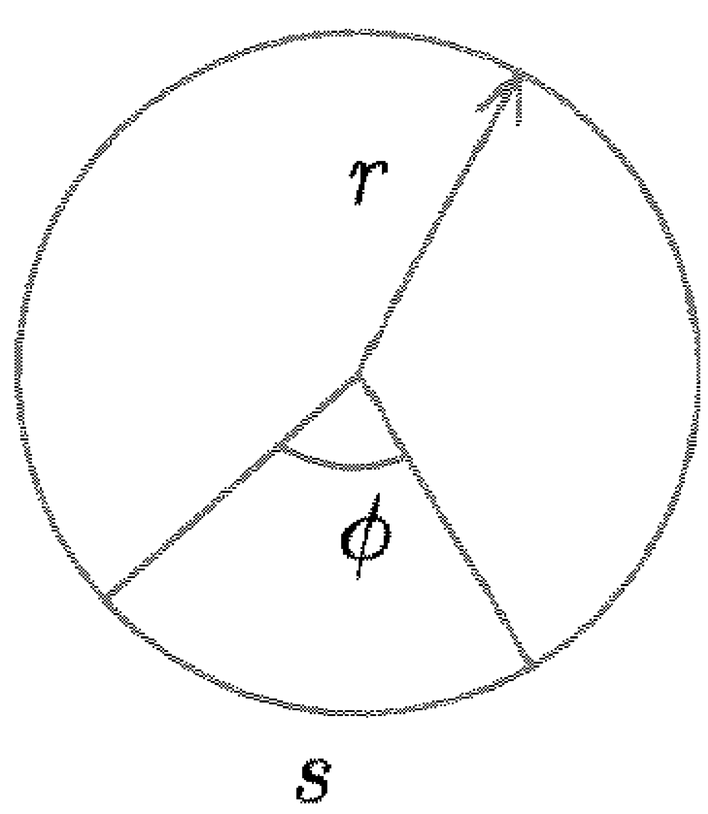
المساحة $= a\,h$

المحيط $= 2\,a + 2\,b$



د) شبه المنحرف:

المساحة $= \frac{1}{2}(a+b)h$



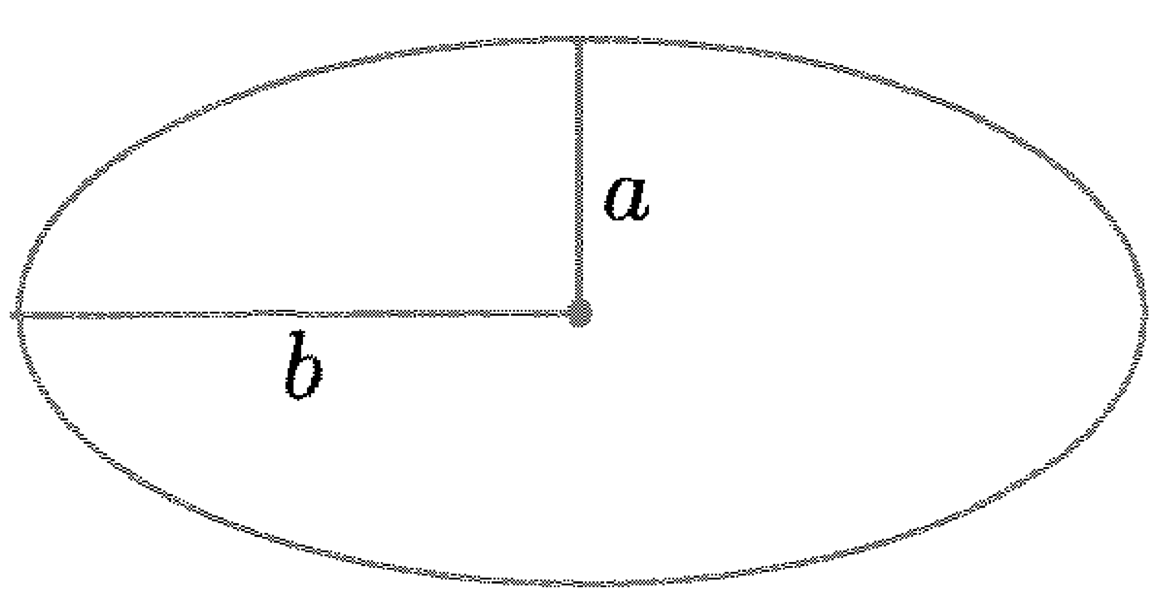
3) الدائرة

المساحة $= \pi\, r^2$

المحيط $= 2\,\pi\, r$

مساحة القطاع الدائري المقابل للزاوية $\phi = \frac{r^2\phi}{2}$

طول القوس المقابل للزاوية $\phi = r\phi$

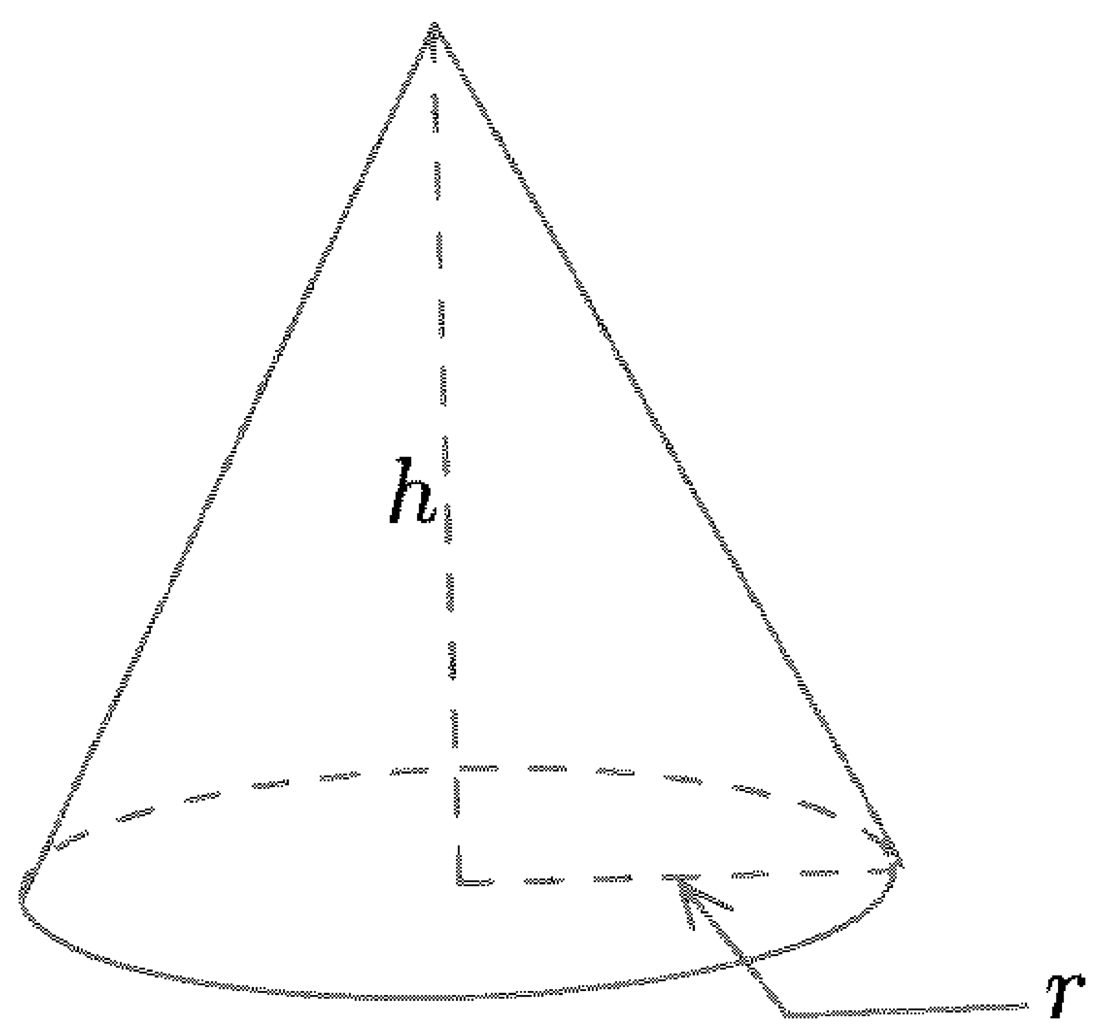


4) القطع الناقص

المساحة $= \pi ab$

المحيط $= 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5) المخروط



أ) إذا كان نصف قطر القاعدة هو a، فإن:

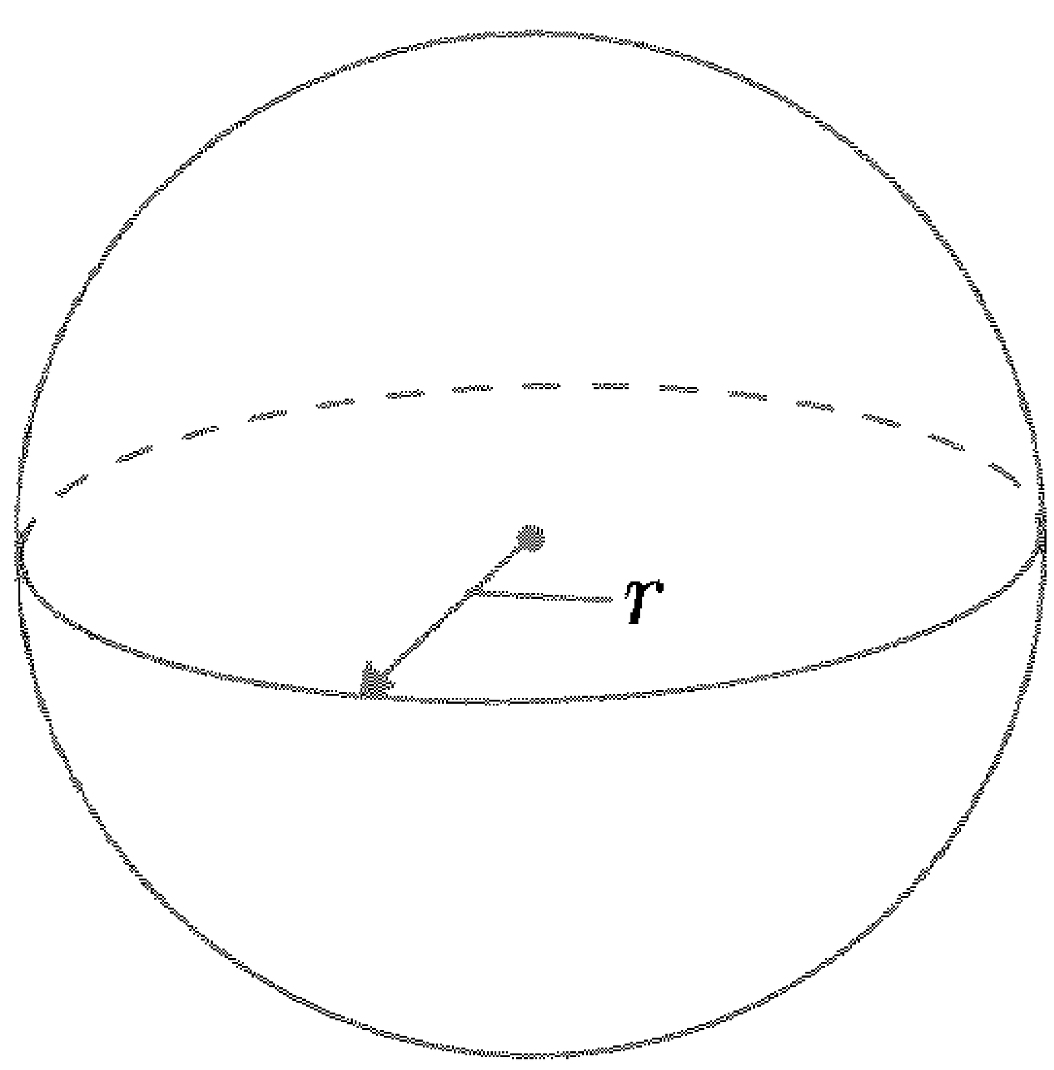
$$\text{حجم المخروط} = \frac{ah}{3}$$

ب) المخروط القائم:

$$\text{الحجم} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\text{مساحة السطح الخارجي} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

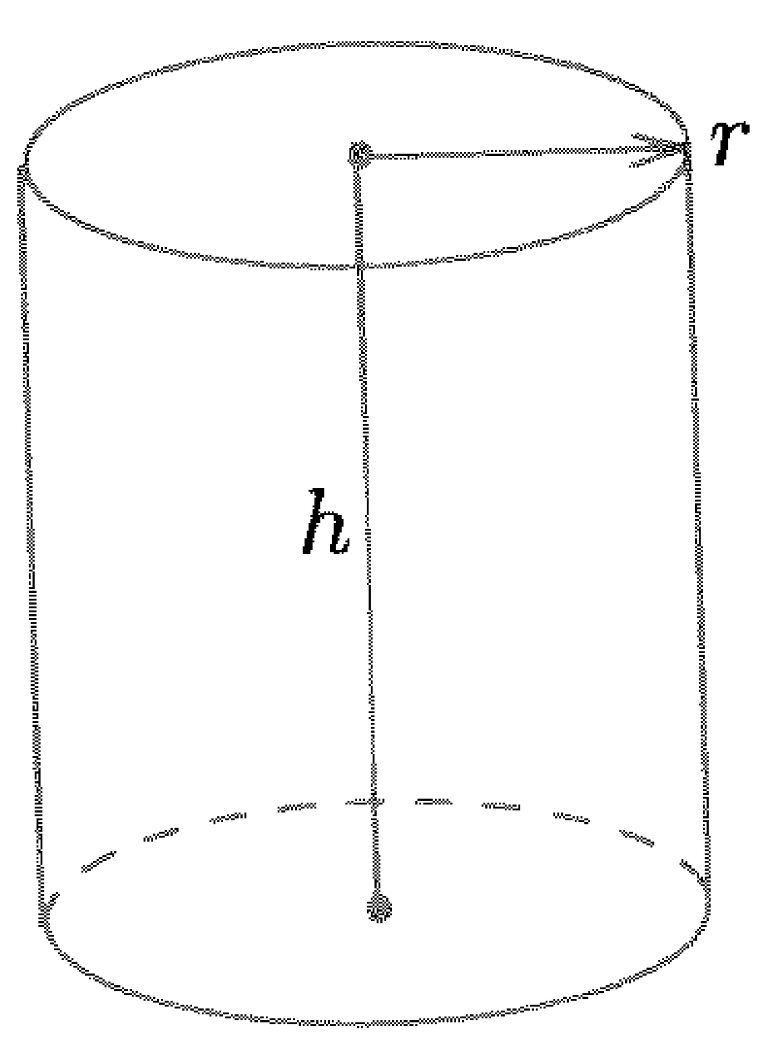
6) الكرة



$$\text{الحجم} = \frac{4}{3}\pi r^2$$

$$\text{مساحة السطح} = 4\pi r^2$$

7) الأسطوانة



$$\text{الحجم} = \pi\, r^2 h$$

$$\text{مساحة السطح الخارجي} = 2\pi r h$$

جدول رقم 1: الدوال الأسية:

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.05	1.0513	0.9512
0.10	1.1052	0.9048
0.15	1.1618	0.8607
0.20	1.2214	0.8187
0.25	1.2840	0.7788
0.30	1.3499	0.7408
0.35	1.4191	0.7047
0.40	1.4918	0.6703
0.45	1.5683	0.6376
0.50	1.6487	0.6065
0.55	1.7333	0.5769
0.60	1.8221	0.5488
0.65	1.1955	0.5220
0.70	2.0138	0.4966
0.75	2.1170	0.4724
0.80	2.2255	0.4493
0.85	2.3396	0.4274
0.90	2.4596	0.4066
0.95	2.5827	0.3867
1.0	2.7183	0.3679
1.1	3.0042	0.3329
1.2	3.3201	0.3012
1.3	3.6693	0.2725
1.4	4.0552	0.2466

x	e^x	e^{-x}
3.0	20.086	0.0498
3.1	22.198	0.0450
3.2	25.533	0.0408
3.3	27.113	0.0369
3.4	29.964	0.0334
3.5	33.115	0.0302
3.6	36.598	0.0273
3.7	40.447	0.0247
3.8	44.701	0.0224
3.9	49.402	0.0202
4.0	54.598	0.0183
4.1	60.340	0.0166
4.2	66.686	0.0150
4.3	73.700	0.0136
4.4	81.451	0.0123
4.5	90.017	0.0111
4.6	99.484	0.0101
4.7	109.95	0.0091
4.8	121.51	0.0082
4.9	134.29	0.0074
5.0	148.41	0.0067
5.1	164.02	0.0061
5.2	181.27	0.0055
5.3	200.34	0.0050
5.4	221.41	0.0045

تابع جدول رقم 1

5.5	244.69	0.0041
5.6	270.43	0.0037
5.7	298.87	0.0033
5.8	330.30	0.0030
5.9	365.04	0.0027
6.0	403.43	0.0025
6.5	665.14	0.0015
7.0	1096.6	0.0009
7.5	1808.0	0.0006
8.0	2981.0	0.0003
8.5	4914.8	0.0002
9.0	8103.1	0.0001
9.5	13.360	0.00007
10.0	22.026	0.00005
10.5	36.316	0.00003

1.5	4.4817	0.2231
1.6	4.9530	0.2019
1.7	5.4739	0.1827
1.8	6.0496	0.1653
1.9	6.6859	0.1496
2.0	7.3891	0.1353
2.1	8.1662	0.1225
2.2	9.0250	0.1108
2.3	9.9742	0.1003
2.4	11.023	0.0907
2.5	12.182	0.0821
2.6	13.464	0.0743
2.7	14.880	0.0672
2.8	16.445	0.0608
2.9	18.174	0.0550

جدول رقم 2: اللوغاريتم الطبيعي

	$\ln x$
0.0	- -
0.1	-2.3026
0.2	-1.6094
0.3	-1.2040
0.4	-0.9163
0.5	-0.6931
0.6	-0.5108
0.7	-0.3567
0.8	-0.2231
0.9	-0.1054
1.0	0.0000
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.3	0.6931
2.1	0.7419
2.2	0.7885
2.3	0.8329
2.4	0.8755

x	$\ln x$
4.5	1.5071
4.6	1.5261
4.7	1.5476
4.8	1.5686
4.9	1.5892
5.0	1.6094
5.1	1.6292
5.2	1.6487
5.3	1.6677
5.4	1.6864
5.5	1.7047
5.6	1.7228
5.7	1.7405
5.8	1.7579
5.9	1.7750
6.0	1.7918
6.1	1.8083
6.2	1.8245
6.3	1.8405
6.4	1.8563
6.5	1.8718
6.6	1.8871
6.7	1.9021
6.8	1.9169
6.9	1.9315

x	$\ln x$
9.0	2.1972
9.1	2.2083
9.2	2.2192
9.3	2.2300
9.4	2.2407
9.5	2.2513
9.6	2.2618
9.7	2.2721
9.8	2.2824
9.9	2.2925
10	2.3026
11	2.3937
12	2.4849
13	2.5649
14	2.6391
15	2.7081
16	2.7726
17	2.8332
18	2.8904
19	2.9444
20	2.9957
25	3.2189
30	3.4012
35	3.5553
40	3.6889

تابع جدول رقم 2

2.5	0.9163	7.0	1.9459	45	3.8067
2.6	0.9555	7.1	1.9601	50	3.9120
2.7	0.9933	7.2	1.9741	55	4.0073
2.8	1.0296	7.3	1.9879	60	4.0943
2.9	1.0647	7.4	2.0015	65	4.1744
3.0	1.0986	7.5	2.0149	70	4.2458
3.1	1.1314	7.6	2.0281	75	4.1375
3.2	1.1632	7.7	2.0412	80	4.3820
3.3	1.1939	7.8	2.0541	85	4.4427
3.4	1.2238	7.9	2.0669	90	4.4998
3.5	1.2528	8.0	2.0794	95	4.5539
3.6	1.2809	8.1	2.0919	100	4.6052
3.7	1.3083	8.2	2.1041	200	5.2983
3.8	1.3350	8.3	2.1163	300	5.7038
3.9	1.3610	8.4	2.1282	400	5.9915
4.0	1.3863	8.5	2.1401	500	6.2146
4.1	1.4110	8.6	2.1518	600	6.3969
4.2	1.4351	8.7	2.1633	700	6.5511
4.3	1.4586	8.8	2.1748	800	6.6846
4.4	1.4816	8.9	2.1861	900	6.8024

جدول رقم 3: الدوال الزائدية

x	$sn\ h\ x$	cosh x	cosh x
0.0	0.0000	1.0000	0.0000
0.1	0.10017	1.0050	0.09967
0.2	0.20134	1.0201	0.19738
0.3	0.30452	1.0453	0.29131
0.4	0.14075	1.0811	0.37995
0.5	0.52110	1.1276	0.46212
0.6	0.63665	1.1855	0.53705
0.7	0.75858	1.2552	0.60437
0.8	0.88811	1.3374	0.66404
0.9	1.0265	0.4331	0.71630
1.0	1.1752	0.5431	0.76159
1.1	1.3356	1.6685	0.80050
1.2	1.5095	1.8107	0.83365
1.3	1.6984	1.9709	0.86172
1.4	1.9043	2.1509	0.88535
1.5	2.1293	2.3524	0.90515
1.6	2.3756	2.5775	0.92167
1.7	2.6456	2.8283	0.93541
1.8	2.9422	3.1075	0.94681
1.9	3.2682	3.4177	0.95624
2.0	3.6269	3.7622	0.96403
2.1	4.0219	4.1443	0.97045
2.2	4.4571	4.5679	0.97574
2.3	4.9370	5.0372	0.98010
2.4	5.4662	5.5569	0.98367
2.5	6.0502	6.1323	0.98667
2.6	6.6947	6.7690	0.98903
2.7	7.4063	7.4735	0.99101
2.8	8.1919	8.2527	0.99263
2.9	9.0596	9.1146	0.99396

	sinh x	cosh x	tanh x
3.0	10.018	10.068	0.99505
3.1	11.076	11.122	0.99595
3.2	12.246	12.287	0.99668
3.3	13.538	13.575	0.99728
3.4	14.965	14.999	0.99777
3.5	16.543	16.573	0.99818
3.6	18.285	18.313	0.99851
3.7	20.211	20.236	0.99878
3.8	22.239	22.362	0.99900
3.9	24.691	24.711	0.99918
4.0	27.290	27.308	0.99933
4.1	30.162	30.178	0.99945
4.2	33.336	33.351	0.99955
4.3	36.843	36.857	00.99963
4.4	40.719	40.732	0.99970
4.5	45.003	45.014	0.99975
4.6	49.737	49.747	0.99980
4.7	54.969	54.978	0.99983
4.8	60.751	60.759	0.99986
4.9	67.141	67.149	0.99989
5.0	74.203	74.210	0.99991
5.1	82.008	82.014	0.99993
5.2	90.633	90.639	0.99994
5.3	100.17	100.17	0.99995
5.4	110.70	100.71	0.99996
5.5	122.34	122.35	0.99997
5.6	135.21	135.22	0.99997
5.7	149.43	149.44	0.99998
5.8	165.15	165.15	0.99998
5.9	182.52	182.52	0.99998

قائمة المصطلحات الرياضية

List of Mathematical Terms

A

Absolute	مطلق
Absolute Error	خطأ مطلق
Absolute Value	قيمة مطلقة
Add	يجمع، يضيف
Addition	عملية الجمع
Addition Inverse	معكوس جمعي
Application	تطبيق
Approximate	يقرب
Approximation	تقريب
Area	مساحة
Associative	تنسيقي
Asymptotes	خطوط تقارب
Average	متوسط

B

Belong to	ينتمي إلى
Bijection	تناظر (أحادي ـ فوقي)
Bounded	محدودة
Bounded Function	دالة محدودة
Bounded Set	مجموعة محدودة

C

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Cartesian Coordinates System	نظام الإحداثيات الديكارتية
Cartesian Product	ضرب ديكارتي
Circle	دائرة
Codomain	نطاق مصاحب
Common	مشترك
Complement	مكملة
Complement Set	مجموعة مكملة
Complex Number	عدد مركّب
Composite Function	الدالة التركيبية
Concave	مقعّر
Concavity	تقعّر
Continuity	اتصال
Continuous	متصل
Continuous Function	دالة متصلة
Coordinate	إحداثي
Critical Point	نقطة حرجة
Curve	منحنى

D

Decrease	ينقص، يقل
Definite Integral	تكامل محدود
Derivative	مشتقة
Differentiable	القابلية للاشتقاق
Differentiable Function	دالة قابلة للاشتقاق

Differential	تفاضل
Discontinuity	انقطاع
Discontinuous	منقطع
Distance	مسافة
Divide	يقسم
Division	عملية القسمة
Domain	نطاق

E

Element	عنصر
Empty Set	مجموعة خالية
Equal	يساوي
Equality	تساوٍ
Equation	معادلة
Essential	جوهري
Essential Discontinuity	انقطاع جوهري
Even	زوجي
Even Function	دالة زوجية
Even Number	عدد زوجي
Exponent	أس
Exponential Function	الدالة الأسية
Extreme Values	قيم قصوى

F

Finite	منتهٍ
Finite Set	مجموعة منتهية
First Derivative	المشتقة الأولى

Function	دالة

G

Geometry	هندسة
Graph	رسم (بيان)
Group	زمرة (مجموعة)

H

Horizontal	أفقي
Horizontal Asymptote	خط تقارب أفقي
Horizontal Line	خط أفقي
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic Function	دالة زائدية
Hypotenuse	وتر

I

Identity	متطابقة
Image	صورة
Implicit	ضمني
Implicit Differentiation	تفاضل ضمني
Implicit Function	دالة ضمنية
Inclusion	احتواء
Increase	يزيد
Increasing Function	دالة تزايدية
Indefinite Integral	التكامل غير المحدود
Inequality	متباينة

Infinite	غير منته
Infinite Set	مجموعة غير منتهية
Infinity	مالانهاية
Inflection	نقطة انقلاب
Integer Numbers	الأعداد الصحيحة
Integrable	القابلية للتكامل
Integrable Function	دالة قابلة للتكامل
Integration	تكامل
Integration by Parts	التكامل بالتجزيء
Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Inverse	معكوس
Inverse Function	معكوس الدالة
Irrational Numbers	الأعداد غير القياسية

K

Kinetic Energy	طاقة الحركة

L

Law	قانون
Limit	نهاية
Line	خط
List	قائمة
Local Maximun Value	قيمة عظمى محلية
Local Minimum Value	قيمة صغرى محلية
Logarithmic Function	دالة لوغاريتمية

M

Mathematics	علم الرياضيات
Mean Value	القيمة الوسطى
Multiplication	عملية الضرب
Multiply	يضرب

N

Natural Numbers	الأعداد الطبيعية
Normal	العمودي على المماس

O

Odd	فردي
Odd Function	دالة فردية
Odd Number	عدد فردي
One-Sided Limit	النهاية من جانب واحد
One-to-One	أحادية
Onto	فوقية
Operation	عملية
Ordered Pairs	أزواج مرتبة

P

Pair	زوج
Parallel	يوازي
Perpendicular	عمودي
Piecewise Continuous	متصل مقطعياً

Plane	مستوٍ
Point	نقطة
Polar	قطبي
Polar Equation	معادلة قطبية
Potential Energy	طاقة الوضع
Proof	برهان
Proper Subset	مجموعة جزئية فعلية
Prove	يبرهن

Q

Quarter	ربع
Quotient	خارج قسمة

R

Radian	زاوية نصف قطرية
Range	مدى
Rate of Change	معدل التغير
Rational Numbers	الأعداد القياسية
Real	حقيقي
Real Line	خط الأعداد الحقيقية
Real Numbers	الأعداد الحقيقية
Reflex	متعاكس
Reflexive Relation	علاقة متعاكسة
Relation	علاقة
Remainder	باقٍ
Remark	ملاحظة
Removable	قابل للإزالة

Result	نتيجة
Rule	قاعدة

S

Second Derivative	المشتقة الثانية
Set	مجموعة، نظام
Slope	ميل
Straight	خط مستقيم
Subset	مجموعة جزئية
Surface	سطح
Symmetric	متماثل
System	نظام

T

Table	جدول
Tangent	مماس
Term	حد، مصطلح
Test	اختبار
Theorem	نظرية
Trigonometry	حساب المثلثات

U

Unbounded	غير محدود
Union	اتحاد
Unique	وحيد

V

Value	قيمة

Vertical	عمودي
Vertical Asymptote	خط تقارب عمودي

W

Word	كلمة
Work	شغل
Write	يكتب

X

x-Axis	محور السينات
x-Coordinate	الإحداثي السيني

Y

y-Axis	محور الصادات
y-Coordinate	الإحداثي الصادي

Z

Zero	صفر
Zero Function	الدالة الصفرية
Zero of Function	صفر الدالة

المراجع

1) *E.W. Swokowski:* ,**Calculus with Analytic Geometry**, Third Edition.

2) *E.W. Swokowski:* **Graphs and Functions,** Third Edition.

3) *G.B. Thomas:* **Calculus with Analytic Geometry,** Fourth Edition.

4) *M.A. Aumen and D.J. Foulis:* **Calculus with Analytic Geometry,** Second Edition.

5) *R.E. Larson and R.P. Hostetler:* **Brief Calculus with Application,** Second Edition.

6) *R. Ellis and Gulick:* **Calculus with Analytic Geometry**, Third Edition.