الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

البرمجة الخطية

Book · January 2002

صلاح رسول حمزة السلطاني
متقاعد

البرمجة الخطية

م / صلاح رسول حمزة

البرمجة الخطية

صلاح رسول حمزة

ص   صلاح رسول حمزة
البرمجة الخطية
تأليف صلاح رسول حمزة
دار الكتب للطباعة والنشر / جامعة بغداد
126 ص ، 24 سم
بحوث العمليات / البرمجة الخطية

م . و
409 ، 2002

المكتبة الوطنية (الفهرسة أثناء النشر)
رقم الايداع في دار الكتب والوثائق ببغداد 409 لسنة 2002

مقدمـة

يعد بحوث العمليات Operations Research من التخصصات العلمية الحديثة ، يهتم بحل المسائل الاقتصادية (على مستوى الاقتصاد القومي وعلى مستوى الوحدات الإنتاجية) باستخدام أساليب كمية . ولكون تلك المسائل معقدة وترتبط بنواحي عديدة ، فقد دعت الحاجة الى ان يكون تخصص بحوث العمليات جامعا لتخصصات عديدة منها ما يرتبط بالإدارة العلمية والاقتصاد القياسي ، وآخر يرتبط بالرياضيات والحاسوب ، ويستطيع بذلك وضع تفسيرات وحلول للمسائل تلك.

يعتبر موضوع البرمجة الخطية Linear Programming من أهم الموضوعات في بحوث العمليات ، ويتخصص بوضع موديلات رياضية للمسائل وحلها . وبرز هذا الموضوع عام 1947 عندما وضع Dantziq أسلوب Simplex في حل المسائل . وطور اقتصاديون ورياضيون أسلوب البرمجة الخطية بشكل امكن معه حل مسائل النقل ومسائل التخصيص .

جاء كتاب البرمجة الخطية كإضافةٍ مهمةٍ الى المصادر القليلة في موضوع بحوث العمليات المنشورة باللغة العربية . وهو يشتمل أربعة فصول يسبقها مدخل الى بحوث العمليات . اختص الفصل الأول فيه بموضوع البرمجة الخطية ، الصياغة الرياضية للمسائل وحلها بطريقة الرسم الهندسي . واقتصر الفصل الثاني على الطريقة الرياضية Simplex في حل مسائل البرمجة الخطية . اما الفصل الثالث فقد اشتمل موضوع مسائل النقل على اختلافها ، وطرق حلها الابتدائي والحل الأمثل . وجاء الفصل الأخير متناولا مسألة التخصيص وطريقة حلها .

وأخيرا ... أتقدم بالشكر لكل من تتاح له فرصة الاطلاع على الكتاب وابداء الملاحظات المهمة والمفيدة .

م / صلاح رسول حمزة

الفهرس

مدخل الى البرمجة الخطية

بحوث العمليات Operations Research تخصص علمي يهتم باستخدام وتطبيق أساليب كمية لحل المسائل الاقتصادية المختلفة سواء على مستوى الاقتصاد الكلي او على مستوى الوحدات يمكن مراكز اتخاذ القرار من اعتماد النتائج المتحصل عليها عند صياغة القرارات.

لقد كانت مسألة التوزيع الأمثل للموارد الاقتصادية ذات أهمية كبيرة بالنسبة للاقتصاديين. وقد استخدموا نماذج رياضية متعددة لوصف المسائل الاقتصادية. ففي عام 1758 وضع كيناي الجدول الاقتصادي، واستخدم فيه نماذج رياضية لوصف العلاقات الاقتصادية . وفي عام 1874 عرض فالراس نموذجه الرياضي للتوازن الاقتصادي، مستخدما فيه معادلات خطية. وأجرى نيومان واقتصاديون غيره ، تطويرا لنموذج التوازن الاقتصادي ، وشكل ذلك الأرضية المهمة التي تأسس عليها أسلوب البرمجة الخطية. واستخدم ليونتيف نموذج المستخدم المنتج، الذي يعتبر أول نموذج في البرمجة الخطية ، استخدم فيه معادلات خطية لتحليل العلاقات بين القطاعات الاقتصادية المختلفة في الاقتصاد القومي.

ولكون المسائل الاقتصادية الكلية ، مسائل معقدة ترتبط بنواحي عديدة، فعليه برزت مشاكل ندرة المستلزمات الحربية وصعوبة الاتصالات، ومشاكل النقل والتخزين خاصة في الحرب العالمية الثانية ، لذلك تطلبت الحاجة فريق عمل متكامل لدراسة تلك المسائل.

في عام 1947 وضع دانتزك مسألة توزيع الموارد الاقتصادية على استخداماتها المختلفة ، في نموذج رياضي متقدم هو أسلوب Simplex لحل مسائل البرمجة الخطية، حيث تكون المتغيرات المستخدمة في النموذج متغيرات من الدرجة الاولى . واستمر الاقتصاديون والرياضيون في وضع دراسات تعتمد اسلوب البرمجة الخطية .

ملاحظات حول المتباينات

اذا كانت

$$2<6$$

فأن

$$2+4<6+4$$
$$6<10$$

وكذلك فأن:

$$2-4<6-4$$
$$-2<2$$

وأيضا

$$2*3<6*3$$
$$6<18$$

لكن

$$2(-3)>6(-3)$$
$$-6>-18$$

فعند ضرب حدود المتباينة في مقدار سالب تعكس المتباينة فالأكبر تصبح أصغر وبالعكس .

واذا كان

$$3X+Y<5$$

فأن

$$Y<5-3X$$

وعندما يكون

$$2X_1+3X_2+X_3\geq 12$$

فأن المتباينة تتحول الى معادلة بأضافة متغير متمم

$$2X_1+3X_2+X_3-K_1=12$$

اما المتباينة

$$X_1+2X_2-X_3\leq 10$$

تصبح معادلة كالاتي:

$$X_1+2X_2-X_3+K_2=10$$

ملاحظات حول المعادلات الخطية

1) اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل ، فأن المعادلات لها عدد غير منته من الحلول.

مثال :

$X_1+X_2=10$
$aX_1=2$
$bX_2=5$

لدينا ثلاثة معادلات بأربعة مجاهيل، وعليه يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول.

2) اذا كان عدد المعادلات اكبر من عدد المجاهيل فأن منظومة المعادلات الخطية قد يكون لها حل، وقد لا يكون لها حل.

مثال :

$X-y=3$
$2X+y=12$
$X+y=4$

للمعادلتين الأولى والثانية حل هو

$X=5\ ,\ Y=2$

وهذا الحل لا يحقق المعادلة الثالثة ، لذا فأن منظومة المعادلات ليس لها حل .

3) اذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل ، أي تكون مصفوفة المعاملات مصفوفة مربعة ، فأن منظومة المعادلات الخطية لها حل وحيد، شرط ان لا تكون مصفوفة المعاملات مصفوفة منفردة Singular Matrix (أي يجب ان يكون لمصفوفة المعاملات معكوس) .

المصفوفة المربعة

هي مصفوفة عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة ، مثال

$A(n,n)\ ,\ b(3,3)\ ,\ c(5,5)$

تسمى المصفوفة المربعة مصفوفة قطرية Diagonal Matrix اذا كانت عناصرها غير القطرية مساوية للصفر، وكان للعناصر القطرية قيمة غير الصفر.

مثال : المصفوفة A(3,3) مصفوفة قطرية عناصرها

1	0	0
0	9	0
0	0	2

اما اذا كانت قيمة العناصر القطرية مساوية لـ 1 وقيمة العناصر الاخرى اصفارا ، فأن المصفوفة القطرية تسمى مصفوفة أحادية Identity Matrix .

مثال : المصفوفة B(3,3) مصفوفة أحادية

1	0	0
0	1	0
0	0	1

المصفوفة المثلثية :

هي مصفوفة عناصر المثلث فيها تساوي أصفارا . فإذا كانت عناصر المثلث الأسفل هي العناصر الصفرية ، فتسمى مصفوفة مثلث أعلى Upper triangular Matrix

المصفوفة c(3,3) مصفوفة مثلث أعلى وعناصرها

2	-1	2
0	9	5
0	0	3

اما اذا كانت عناصر المثلث الاعلى أصفارا فتسمى مصفوفة مثلث اسفل Lower triangular Matrix .

مثال : المصفوفة W(3,3) مصفوفة مثلث اسفل وعناصرها.

2	0	0
1	5	0
2	-1	9

ان ناتج ضرب المصفوفة المربعة في معكوسها يساوي مصفوفة أحادية .

$$A^{-1} * A = I$$

والمصفوفة المنفردة ، مصفوفة مربعة ليس لها معكوس ويكون قيمة محددها Determinant مساوياً للصفر.

التحويلات الابتدائية
Elementary transformations

يمكن أجراء بعض التحويلات الابتدائية على مصفوفة مربعة للحصول على مصفوفة مكافئة لها. وتشمل التحويلات الابتدائية

1- ضرب عناصر أي صف بكمية ثابتة غير الصفر.
2- الجمع الجبري لعناصر صف معين مع العناصر المناظرة لصف آخر.
3- تبديل صفين محل بعضهما.

على ان تجرى التحويلات الابتدائية على الصفوف فقط أو على الأعمدة فقط (غالباً ما تجرى على الصفوف) .

اذا كان لدينا n من المعادلات الخطية ، فهناك n من المتغيرات هي

$$X_1 , X_2 \ , X_3 , \ldots\ldots.. X_n$$

تكتب

$$X_i \qquad i= 1,2,\ldots\ldots. N$$

وتكون المعادلات كالآتي :

$$\begin{array}{l}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. +a_{1n} X_n = b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. +a_{2n} X_n = b_2 \\
\;.\qquad\qquad .\qquad\qquad\qquad\qquad .\qquad .\\
\;.\qquad\qquad .\qquad\qquad\qquad\qquad .\qquad .\\
\;.\qquad\qquad .\qquad\qquad\qquad\qquad .\qquad .\\
a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. +a_{nn} X_n = b_n
\end{array}$$

وتكون مصفوفة المعاملات :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nm} \end{matrix}$$

ان a_{ij} يمثل العنصر في الصف i والعمود j .

المصفوفة المزادة (الموسعة) Augment Matrix

وهي مصفوفة ناشئة من إضافة عمود الثوابت (القيم يمين علامة المساواة) الى مصفوفة المعاملات . وتكون أبعادها $A(n , n+1)$.

مثال:

المصفوفة المضخمة $A(3,4)$ وعناصرها:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 6 \end{matrix}$$

الفصل الاول
البرمجة الخطية
Linear programming

اسلوب في حل المسائل الاقتصادية (في الاقتصاد الكلي او الاقتصاد الجزئي)، يهدف الى ايجاد اكبر قيمة او اصغر قيمة لدالة خطية في متغيرات متعددة ، تحقق تلك المتغيرات شروطا خطية بشكل متباينات.

صياغة النموذج الرياضي

تعني وضع المسألة في صورة رياضية ، تحدد فيها دالة الهدف والمتغيرات الاساسية فيها . ويشمل الموديل الرياضي ايضا بيان القيود التي تضع اليها تلك المتغيرات وهذه القيود على شكل متباينات ويوضع قيد عدم السالبية باعتبار ان قيم المتغيرات يجب ان تكون موجبة .

في مسائل الإنتاج والأرباح والإيرادات يكون الهدف هو تعظيم قيمتها فيكون النموذج الرياضي لها كآلاتي :

دالة الهدف

$$Z = \sum_{J=1}^{N} C_i X_i$$

وتكون القيود بالشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i$$

i=1,2,……m

j=1,2,……n

$X_i \ge 0$

علماً بأن دالة الهدف والقيود هي دوال خطية .

وفي مسائل التكاليف حيث يكون الهدف هو تدنية التكاليف يكون النموذج الرياضي كالاتي :

دالة الهدف

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_i X_i$$

طبقا للشروط (القيود) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge b_i$

مثال 1 :

تنتج شركة المكائن الإلكترونية ، نوعين من المكائن الكهربائية A و B وتحقق ربحا مقداره (10) دينار في الوحدة الواحدة المنتجة من A وربحا مقداره (8) دينار في الوحدة الواحدة من المنتج B . وان كمية المواد الخام اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كلا النوعين هي 5 و3 وحدة من المادة الخام على التوالي . وعدد الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من النوعين هي 6 و 4 ساعة على التوالي كما وان كمية المواد الخام المتاحة 420 وحدة ، وعدد ساعات العمل 240 ساعة .

المطلوب : صياغة النموذج الرياضي للمسألة بحيث يحقق اكبر ربح ممكن ؟

الحل:

المواد المتاحة	B	A	
420	3	5	المواد الخام
240	0.4	0.6	ساعات العمل
	8	10	الربح في الوحدة المنتجة بالدينار

نفرض X_1 عدد الوحدات المنتجة من A

نفرض X_2 عدد الوحدات المنتجة من B

$$Max(z)=10X1 + 8\,X2$$

Subject to :

$5X1+3X2\leq420$ قيد المواد الخام

$6X1+4X2\leq240$ قيد ساعات العمل

$X1\ ,\ X2\geq0$ عدم سالبية قيم المتغيرات

مثال 2 :

تنتج شركة الفرات للأواني المنزلية السلع A و B و C ويبلغ الربح في الوحدة الواحدة من المنتجات المذكورة 150و 100 و 200دينار على التوالي. ويحتاج الانتاج الى ثلاثة مواد اولية M1 و M2 و M3 . كل وحدة منتجة تتطلب 7,4,5 وحدة من المادة M1 على التوالي و 20,8,10 وحدة من المادة M2 على التوالي 20,10,15وحدة من المادة M3 على التوالي وكانت المواد الاولية محددة بـ 1200 وحدة من المادة M1 و 1500 وحدة من المادة M2 و 2000 وحدة من المادة M3

المطلوب : وضع موديل رياضي يحقق اكبر ربح ممكن .

الحل :

المواد	A	B	C	الوحدات المتاحة
M1	5	4	7	1200
M2	10	8	20	1500
M3	15	10	20	2000
الربح/دينار	150	100	200	

نفرض

X1 = عدد الوحدات المنتجة من السلعة A

X2 = عدد الوحدات المنتجة من السلعة B

X3 = عدد الوحدات المنتجة من السلعة C

الموديل الرياضي

Max(z)=150X1+100X2+200X3

Subject to :

$5X1+4X2+7X3\leq1200$

$10X1+8X2+20X3\leq1500$

$15X1+10X2+20X3\leq2000$

$X1,X2,X3\geq0$

مثال 3 :

شركة التعليب تنتج ثلاثة أنواع من المربيات هي مربى التين ، مربى الرقي ومربى المشمش ويتطلب إنتاج وحدة واحدة من تلك الأنواع الى 60,40,50 وحدات من السكر على التوالي وكذلك يتطلب 7,3,8 دقائق عمل على التوالي . وكان الربح المتحقق من انتاج وحدة واحدة من تلك الانواع هو 2,3,3 وحدة نقد على التوالي . فاذا كانت الموارد المتاحة 300 كغم من السكر يوميا و 200 ساعة عمل .

المطلوب : وضع الموديل الرياضي الخاص بالمسالة

الحل :

الموارد المتاحة	المشمش	الرقي	التين	الموارد
300000	60	40	50	السكر/ غم
12000	7	3	8	الوقت / دقيقة
	2	3	3	الربح / وحدة نقد

نفرض X1 يمثل عدد الوحدات المنتجة يوميا من مربى التين

نفرض X2 يمثل عدد الوحدات المنتجة يوميا من مربى الرقي

نفرض X3 يمثل عدد الوحدات المنتجة يوميا من مربى المشمش

الموديل الرياضي

$$Max(z)=3X1 + 3X2+2X3$$

Subject to :

$$50X1+40X2+60X3\leq 300000$$

$$8X1+3X2+7X3\leq 12000$$

$$X1 , X2 , X3 \geq 0$$

مثال 4 : تنتج شركة الصناعات الإلكترونية الأجهزة التالية : التلفزيون ، الثلاجة ، الغسالة ، والمجمدة . وتشمل عملية الإنتاج لكل نوع ثلاثة مراحل هي . مرحلة التصنيع ومرحلة التجميع ومرحلة الأعمال النهائية يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من الأجهزة المذكورة الى 3,4,3,2 ساعات في مرحلة التصنيع على التوالي و 3,3,2,5 ساعات في مرحلة التجميع و 1,2,1,3 ساعة في مرحلة الأعمال النهائية .

والارباح المتحققة هي 50 دينار في التلفزيون و 80 دينار في الثلاجة و 70دينار في الغسالة و 100دينار في المجمدة .

وكان عدد الساعات المتاحة في مرحلة التصنيع 500 ساعة عمل وفي مرحلة التجميع 400 ساعة . اما في مرحلة الاعمال النهائية 300 ساعة

المطلوب : وضع موديل رياضي لمسألة البرمجة الخطية

الساعات المتاحة	المجمدة	الغسالة	الثلاجة	التلفزيون	المراحل الانتاجية
500	3	4	3	2	مرحلة التصنيع
400	3	3	2	5	مرحلة التجميع
300	1	2	1	3	مرحلة الاعمال النهائية
	100	70	80	50	الربح / دينار

نفرض :

X_1 = عدد التلفزيونات المنتجة

X_2 = عدد الثلاجات المنتجة

X_3 = عدد الغسالات المنتجة

X_4 = عدد المجمدات المنتجة

الموديل الرياضي :

$$Max(z)=50X1+80X2+70X3+100X4$$

Subject to :

$2X_1+3X_2+4X_3+3X_4 \leq 50$ قيد مرحلة التصنيع

$5X_1+2X_2+3X_3+3X_4 \leq 400$ قيد مرحلة التجميع

$3X_1+X_2+2X_3+X_4 \leq 300$ قيد مرحلة الاعمال النهائية

$X_1,X_2,X_3,X_4 \geq 0$

مثال 5 :

ورشة لانتاج اجزاء معدنية صغيرة ، فيها ماكنة خراطة وماكنة تفريز وماكنة تنعيم . تنتج نوعين من الاجزاء الصغيرة هما A و B . يتطلب انتاج وحدة من A الى 10 دقائق للخراطة و 15 دقيقة للتفريز و 5 دقائق للتنعيم . في حين يتطلب انتاج وحدة من B الى 4 دقائق للخراطة و 10 دقيقة للتغريز و 8 دقائق للتنعيم . وتبلغ الطاقة الانتاجية لماكنة الخراطة 70 عملية في اليوم وماكنة التفزيز 120عملية وماكنة التنعيم 100عملية . علما ان الربح المتحقق في القطعة A هو 3 دينار وفي القطعة B هو 2 دينار.

المطلوب :

تحديد عدد الوحدات المنتجة من A و B التي تحقق اكبر ربح ممكن في اليوم ؟

الماكنة	الجزء B	الجزء A	الموارد المتاحة
ماكنة الخراطة	10	4	70
ماكنة التنعيم	15	10	120
ماكنة التفريز	5	8	100
الربح / دينار	3	2	

نفرض

X_1 = عدد القطع المنتجة من A

X_2 = عدد القطع المنتجة من B

$$
\begin{aligned}
&Max(z)=3X1 + 2X2\\
&\text{Subject to :}\\
&10X1+4X2\le 70\\
&15X1+10X2\le 120\\
&5X1+8X2\le 100\\
&X1 , X2\ge 0
\end{aligned}
$$

مثال 6 :

شركة لتربية الماشية ، ترغب في اختيار توليفة من المواد الغذائية تحتوي البروتينات والمعادن والفيتامينات . حيث يحتاج الحيوان يوميا الى 70 غم بروتين و 3 غم معادن و 10 ملغم فيتامينات . وكان هناك ثلاث توليفات من الاغذية هي c3,c2,c1 يبلغ تكاليفها 10,8,12دينار على التوالي . وان كل كغم من كل توليفة يحتوي العناصر الغذائية كما في الجدول .

التوليفة	البروتينات/غم	المعادن/غم	الفيتامينات/ملغم	التكاليف
C1	4	0.1	0.2	12
C2	2	0.04	0.04	8
C3	3.6	0.1	0.16	10
الاحتاجات / وحدة	70	3	10	

الحل : نفرض

X_1 = كمية الاغذية بالكغم في التوليفة C_1

X_2 = كمية الاغذية بالكغم في التوليفة C_2

X_3 = كمية الاغذية بالكغم في التوليفة C_3

الموديل الرياضي

$$
\begin{aligned}
&Min(z)=12X1+8X2+10X3\\
&\text{Subject to :}
\end{aligned}
$$

$4X1+2X2+3.6X3 \geq 70$ قيد البروتينات

$0.1X1+0.04X2+0.1X3 \geq 3$ قيد المعادن

$0.2X1+0.04X2+0.16X3 \geq 10$ قيد الفيتامينات

$X1,X2,X3 \geq 0$

مثال 7 : مشغل خياطة يجهز شهريا بـ $200m^2$ من الاقمشة القطنية و $150m^2$ من الصوف و $100\ m^2$ من الحرير . فاذا كانت خياطة البدلة النسائية تتطلب $3m^2$ أقمشة قطنية و $2m^2$ اقمشة صوفية و $1.25m^2$ اقمشة حريرية . بينما يتطلب الفستان الى $2.5m^2$ أقمشة قطنية و $1m^2$ أقمشة صوفية و $1.5m^2$ أقمشة حريرية . وكان الربح في البدلة 40 دينار وفي الفستان 25 دينار فما هو عدد القطع من النوعين الذي يحقق اكبر ربح ممكن ؟

نوع الاقمشة	البدلة	الفستان	الكميات المتاحة
القطنية	3	2.5	200
الصوفية	2	1	150
الحريرية	1.25	1.5	100
الربح / دينار	40	25	

الحل: نفرض

X_1 = عدد البدلات

X_2 = عدد الفساتين

الموديل الرياضي :

$Max(z)=40X1 + 25X2$

Subject to :

$2X1+2X2 \leq 200$

$2X1+X2 \leq 150$

$0.5X1+2X2 \leq 100$

$X1 , X2 \geq 0$

حل مسائل البرمجة الخطية

هناك طريقتان لحل مسائل البرمجة الخطية :

1) طريقة الرسم الهندسي

تستخدم عندما يكون في المسألة متغيرات فقط.

2) الطريقة الرياضية Simplex method

قبل الخوض في طريقة الرسم البياني (رسم المتباينات) ، ناخذ مثالا عن اسلوب الرسم الهندسي للنقاط التي تحقق المعادلات والمتباينات

مثال :

اوجد النقاط التي تحقق كل من المتباينات التالية

الحل :

1) النقاط التي تحقق المتباينة

$$X+y \le 2$$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$X+y = 2$$

او اسفل منه

ولرسم المستقيم نستخرج نقطتان فيه

عندما $X=0$

$Y=2$

النقطة الاولى $(0,2)$

عندما $Y=0$

$X=2$

النقطة الثانية $(2 , 0)$

2) النقاط التي تحقق المتباينة

$$2X-5Y \geq 3$$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$2X-5Y = 3$$

أو أعلى منه

ولرسم المستقيم نستخرج نقطتان فيه

عندما $X=0$

$-5Y=3$

$Y= - 0.6$

النقطة الاولى $(0,-0.6)$

عندما $Y=0$

$2X =3$

$X=1.5$

النقطة الثانية $(1.5,0)$

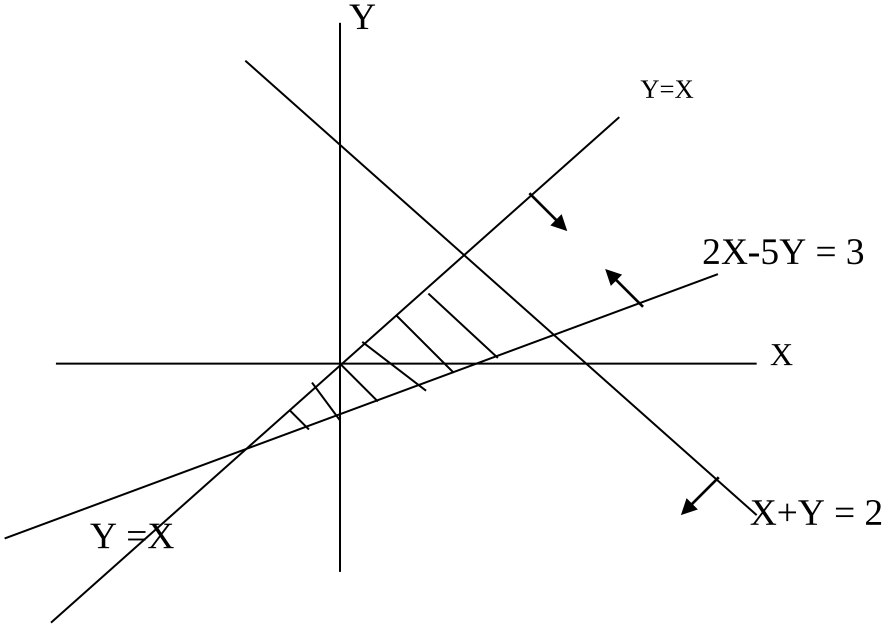
3) النقاط التي تحقق المتباينة

$$Y \leq X$$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y = X$$

أو أسفل منه



المنطقة التي تحقق المتباينات هي المساحة المضللة

ولو كان هناك قيد يتضمن عدم سالبية قيم المتغيرات لاستبعد جزء منها المساحة المضللة التي تكون فيها قيم X و Yسالبة ولانحصرت منطقة الحل في الربع الاول فقط .

طريقة الرسم الهندسي

لحل مسائل البرمجة الخطية ذات المتغيرين بالرسم الهندسي . نرسم النقاط X، Y في المستوي. وفي منطقة تقاطع القيود تنحصر منطقة الحل الامثل وهي تتحدد في الربع الاول فقط من المستوي حيث تكون قيم المتغيرات موجبة .

مثال 1 :

اوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي .

$$\text{Max }(Z) = 3X+4Y$$

Subject to :

$$X+Y \leq 12$$
$$X+2Y \leq 12$$
$$X, Y \geq 0$$

الحل

نحول المتباينات الى معادلات ونرسم المستقيمات الناتجة عنها .

$$2X+Y \leq 12$$
$$Y \leq 12-2X$$

فالنقاط التي تحقق المتباينة تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y = 12-2X$$

او اسفل منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X = 0$

$$Y = 12-0 = 12$$

النقطة الاولى $(0,12)$

عندما $Y = 0$

$$12-2X = 0$$
$$12 = 2X$$
$$X = 6$$

النقطة الثانية $(6,0)$

وبالنسبة للنقاط التي تحقق المتباينة

$$X+2Y \leq 12$$

فانها تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y = (12-X) / 2$$

أو اسفل منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X = 0$

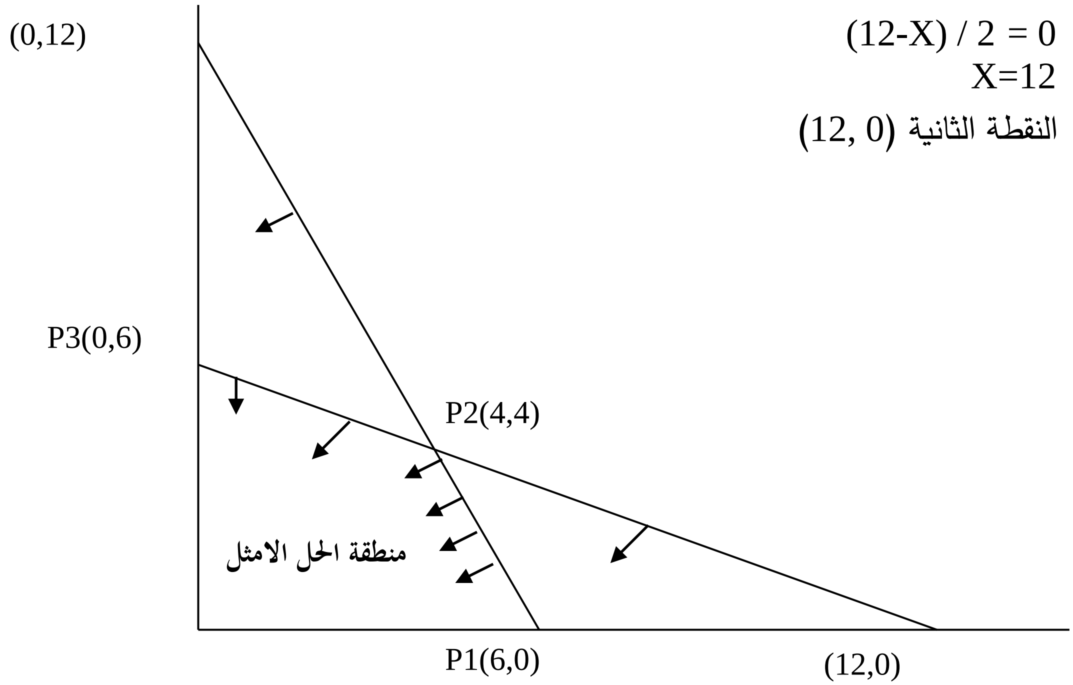
$$Y = (12-0) / 2$$
$$= 6$$

النقطة الاولى $(0,6)$

عندما $Y = 0$

$$(12-X) / 2 = 0$$
$$X=12$$

النقطة الثانية $(12, 0)$



لتحديد النقطة P_2 نحل المعادلتين :

$Y = 12-2X$
$Y = (12 - X) / 2$
$12-2X = (12 - X) / 2$
$24-4X = 12-X$
$24-12 = -X+4X$
$12=3X$
$X=4$
$Y= 12-2(4)$
$=12-8=4$

اذن النقطة $P_2(4,4)$

نستخرج قيم الدالة عند حدود منطقة الحل الامثل P_1,P_2,P_3

$ZP_1 = 3(6) = 4(0)$
$=18$
$ZP_2 = 3(4) +4(4)$
$= 12+16=28$
$ZP_3 = 3(0) + 4(6)$
$=24$

قيمة الدالة Z تكون اكبر ما يمكن عند النقطة P_2 أي عندما تكون قيمة

$X=4$
$Y=4$

مثال 2 :

اوجد حل مسالة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي

$\min (Z) = 200X + 300Y$
subject to
$X+2Y \geq 60$
$4X + 2Y \geq 120$
$6X + 2Y \geq 150$
$X,Y \geq 0$

الحل:

نحول المتباينات الى معادلات ونرسم المستقيمات الناتجة عنها

$X+2Y \geq 60$
$Y \geq (60-X) / 2$

فالنقاط التي تحقق المتباينة $X+2Y \geq 60$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$Y= (60-X) / 2$

أو أعلى منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X=0$

$Y = 60/2 = 30$

النقطة الاولى (0,30)

عندما $Y=0$

$(60-X) / 2 = 0$
$60-X=0$
$X = 60$

النقطة الثانية (60,0)

2) النقاط التي تحقق المتباينة

$$4X + 2Y \geq 120$$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y = (120-4X)/2$$

أو أعلى منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X=0$

$$Y = (120-0)/2 = 60$$

النقطة الاولى (0,60)

عندما $Y=0$

$$(120 - 4X)/2 = 0$$
$$120-4X = 0$$
$$4X = 120$$
$$X = 30$$

النقطة الثانية (30,0)

3) النقاط التي تحقق المتباينة

$$6X + 2Y \geq 150$$

تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y = (150-6X)/2$$

أو أعلى منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X = 0$

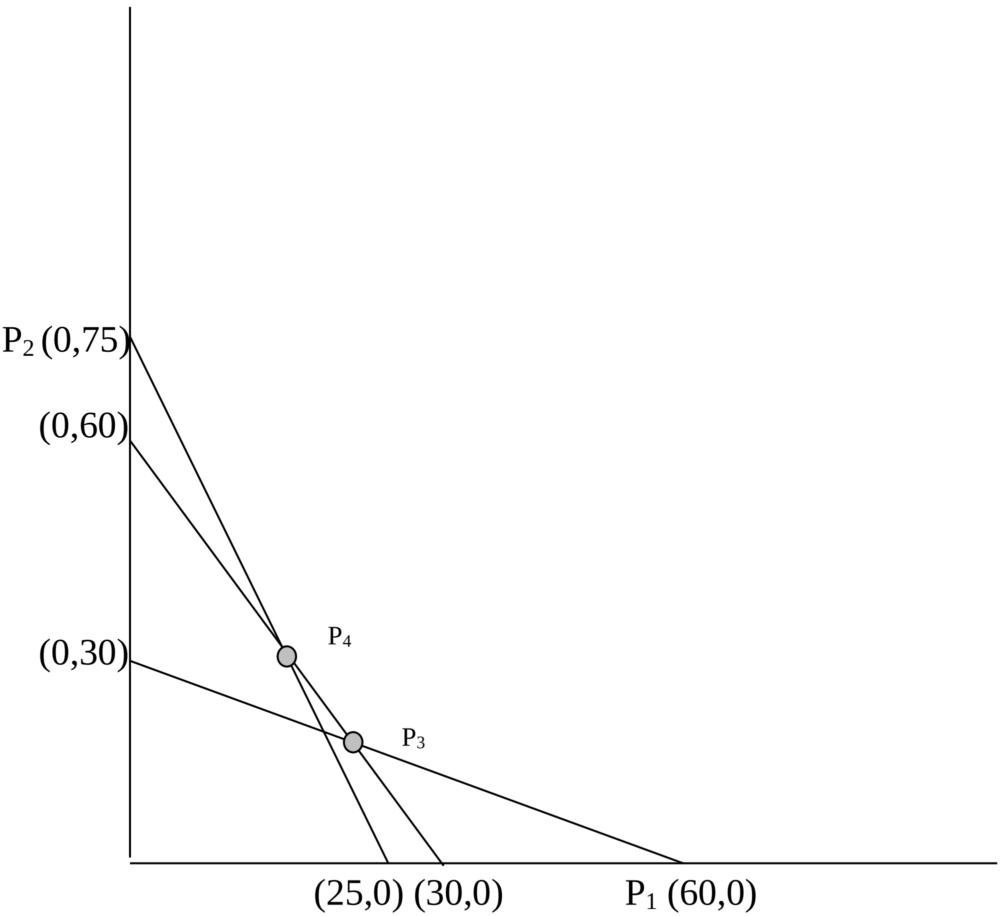
$$Y = 150/2 = 75$$

النقطة الاولى (0,75)

وعندما $Y=0$

$$(150-6X)/2 = 0$$
$$6X = 150$$
$$X = 25$$

النقطة الثانية (25, 0)



لتحديد النقطة P_3 نحل المعادلتين :

Y=(60-X) / 2
Y=(120 – 4X) / 2

$(60-X) / 2= (120 – 4X) / 2$
$4X – X = 120-60$
$3X = 60$
$X=20$
$Y=(60-20)/2$
$=20$
$P_3 (20,20)$

لتحديد النقطة P_4 نحل المعادلتين

$Y=(120 – 4X) / 2$
$Y=(150-6X)/2$
$(120 – 4X) / 2 = (150-6X)/2$
$120-4X = 150-6X$
$2X = 30$
$X= 15$
$Y = (120-4(15))/2$
$=(120-60) /2$
$Y= 30$
$P_4(15,30)$

نستخرج قيم دالة الهدف عند حدود (أركان) منطقة الحل الامثل

$\min (Z) = 200X + 300Y$
$ZP1 = 200 (60)+300(0)$
$ZP1 = 12000$
$ZP2 = 200(0) + 300(75)$
$=22500$
$ZP3 = 200(20) + 300(20)$
$4000+6000$
$=10000$

$ZP4 = 200(15) + 300(30)$
$3000+9000$
$=12000$

يكون قيمة الدالة اقل ما يمكن عند النقطة P3 وهي تساوي 1000عندما يكون قيم المتغيرات

$X= 20$
$Y=20$

مثال 3 : أوجد حل مسالة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي

$\max (Z) = 10X_1+8X_2$

subject to :

$5X_1+3X_2 \leq 420$

$6X_1+4X_2 \leq 240$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

نحول المتباينات الى معادلات ونرسم المستقيمات الناتجة عنها

1) المتباينة

$5X_1+3X_2 \leq 420$

$Y= (420-5X_1)/3$

المتغير X_1 يمثل المحور الأفقي X . والمتغير X_2 يمثل المحور العمودي Y

فالنقاط التي تحقق المتباينة ، تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$Y= (420-5X)/3$

أو أسفل منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X=0$

$Y=420/3=140$

النقطة الاولى (0,140)

وعندما $Y=0$

$(420-5X_1)/3=0$

$420-5X=0$

$5X=420$

$X=84$

النقطة الثانية (84,0)

2) المتباينة

$$6X+4Y\leq 240$$
$$4Y\leq 240-6X$$
$$Y\leq (240-6X)/4$$

النقاط التي تحقق المتباينة ، تشمل جميع النقاط الواقعة على المستقيم

$$Y=(240-6X)/4$$

أو أسفل منه

نرسم المستقيم بتحديد نقطتين عليه

عندما $X=0$

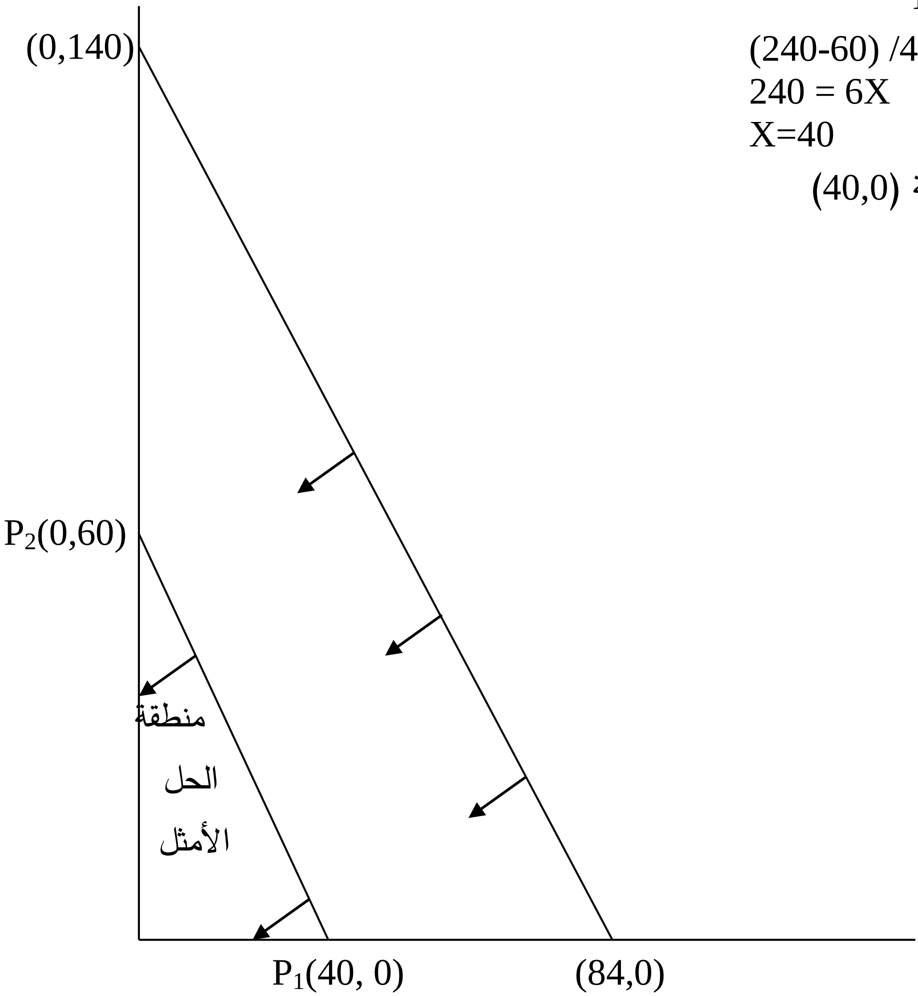
$$Y=240/4=60$$

النقطة الاولى (0,60)

وعندما $Y=0$

$$(240-60)/4=0$$
$$240=6X$$
$$X=40$$

النقطة الثانية (40,0)



نستخرج قيمة الدالة عند أركان منطقة الحل الأمثل

$$\max (Z)=10X_1+8X_2$$
$$ZP_1=10(40) +8(0)$$
$$=400$$
$$ZP_2=10(0)+8(60)$$
$$=480$$

النقطة P_2 تكون قيمة دالة الهدف فيها اكبر ما يمكن عندما

$$X=0$$
$$Y=60$$

نلاحظ في مسألة البرمجة الخطية في المثال 3 هذا . ان القيد

$$5X_1 + 3X_2 \leq 420$$

ليس له تاثير في الحل وتحديد منطقة الحل الامثل . لذا فهو قيد زائد لا ضرورة له ويجب إعادة صياغته النموذج الرياضي للمسألة في مثل تلك المسائل لان هذا يمثل قصور في الموديل الرياضي .

أسئلـة

س) حقل لزراعة الحبوب ، الحنطة والذرة والرز . كانت إنتاجية الدونم الواحد من الحنطة 700 كغم ومن الذرة 1000 كغم ومن الرز 800كغم . يحتاج الدونم الواحد من الحنطة الى 50 كغم من السماد و 5متر مكعب من المياه يوميا كمعدل ويحتاج الدونم الواحد من الذرة الى 70كغم من السماد و 4متر مكعب من المياه يوميا في حين يحتاج الدونم الواحد من الرز الى 60 كغم من السماد و 10 متر مكعب من المياه يوميا وكانت الحصة المائية المتوفرة للحقل 25 متر مكعب يومياً وكمية الاسمدة حسب المبلغ المخصص لها هي 4000 كغم . فاذا كان سعر الطن من الحنطة 200 الف وسعر الطن من الذرة 250 الف دينار وسعر الطن من الرز 500 الف دينار .

المطلوب : صياغة الموديل الرياضي الذي يحقق اكبر ايراد ممكن ؟

س2) اوجد حل مسالة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي .

$Max(Z) = 3X_1+2X_2$

Subject to :

$10X_1+4X_2 \leq 70$

$15X_1+10X_2 \leq 120$

$5X_1+8X_2 \leq 100$

$X_1, X_2 \geq 0$

س3) أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي ؟

$Max(z) = 40X_1 + 25X_2$

subject to :

$2X_1 + 2X_2 \leq 200$

$2X_1 + X_2 \leq 150$

$0.5X_1 + 2X_2 \leq 100$

$X_1,X_2 \geq 0$

س4) أوجد قيمتا $X1$ و $X2$ اللتين تحققان المتراجحات التالية :

$X1 \leq 3$

$X1 + X2 \leq 4$

$-X1 + 2X2 \leq 2$

$X1 , X2 \geq 0$

وتجعلان $F=X2-X1$ أعظمية ؟

س5) أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي ؟

$X1+X2 \leq 3$

$-X1+X2 \leq 1$

$X1+2X2 \leq 4$

$X1 , X2 \geq 0$

$F=X1-2X2$ قيمة أصغرية

س6) أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة الرسم الهندسي ؟

$Max(Z)=3X+5Y$

Subject to :

$X1 \leq 4$

$2y \leq 12$

$3x+2y \leq 18$

$x , y \geq 0$

الفصل الثاني

الطريقة الرياضية

Simplex Method

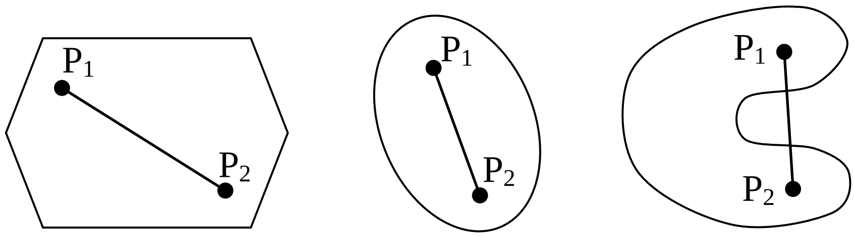
استخدم George Dantzig طريقة Simplex لحل مسائل البرمجة الخطية المشتملة على متغيرين او اكثر. ويعني Simplex الشكل الهندسي الذي تحده الخطوط المستقيمة من جميع الجوانب . وتعتبر منطقة الحل الامثل Simplex تتحدد حدودها الخارجية بخطوط مستقيمة ، ويكون الحل الامثل عند احد اركان منطقة الحل الامثل (تتكون نقاط الاركان من التقاء مستقيمان على حدود المنطقة).

نبدأ الحل من نقطة الاصل حيث تكون قيمة دالة الهدف صفراً. ومنها ننتقل الى اركان منطقة الحل الامثل ، حيث ستزداد قيمة دالة الهدف وسيكون الحل عند احد الاركان حيث يكون قيمة دالة الهدف اكبر ما يمكن وقيمة المتغيرات عند هذا الركن هي الحل الامثل . وان عدد المحاولات للوصول الى الحل الامثل سيكون اقل من عدد اركان منطقة الحل الامثل. حيث ليس ضروريا حساب قيمة الدالة عند كل نقطة من اركان منطقة الحل الامثل كما هي الحال في طريقة الرسم الهندسي. حيث سنتوقف عندما تصبح قيم المتغيرات في دالة الهدف موجبة او مساوية للصفر في حالة التعظيم الدالة او سالبة او مساوية للصفر في حالة تدنية الدالة.

تكتب المتباينات بشكل معادلات ، عن طريق اضافة المتغيرات المتممة Slack Variables ثم نكتب مصفوفة المعاملات ونضع معاملات دالة الهدف في الصف الاخير. نحدد المتغيرات الداخلة الى النموذج والمتغيرات الخارجة من النموذج. وتجري التحويلات الابتدائية بطريقة Jorden لتصفير عناصر الاعمدة التي تحتوي معامل المتغير الداخل. نجعل قيمة المعامل للمتغير الداخل والمقابل للمتغير الخارج مساوية للواحد. ونستخرج قيمة المتغيرات التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن في حالة التعظيم (Z) Max واقل ما يمكن في حالة التدنية (Z) Min تحت الشروط الموضوعة.

المجموعة المحدبة

تسمى المجموعة S مجموعة محدبة، اذا وقع الخط الواصل بين أي نقطتين فيها داخل المجموعة. وتعتبر المجموعة S غير محدبة اذا لم تكن جميع النقاط في الخط المستقيم الواصل بين اية نقطتين في المجموعة داخل المجموعة S .



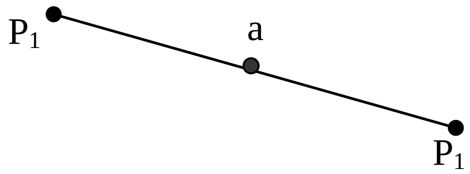
مجموعة محدبة   مجموعة محدبة   مجموعة غير محدبة

$$X=\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$$

لجميع قيم P_1 و P_2 التي تنتمي الى المجموعة S وحيث ان

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

وتعتبر النقطة a حيث $a \in S$ و S مجموعة محدبة، نقطة رأسية الى S اذا كان من غير الممكن التعبير عن a كتركيبة محدبة من اية نقطتين أخرتين لـ S



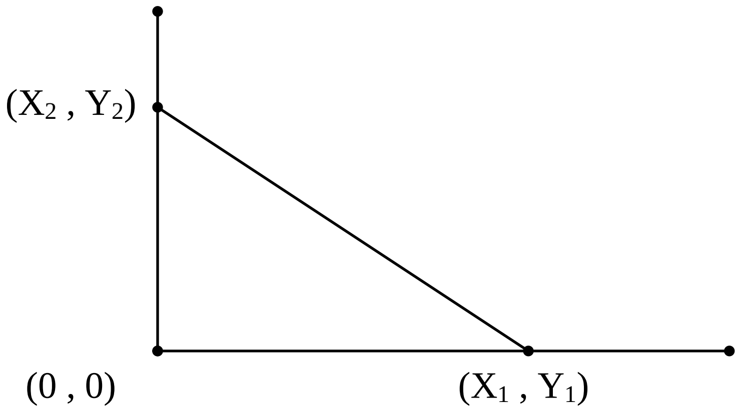
a تركيبة خطية بين P_1P_2 أي تقع داخل المستقيم الواصل بين P_1 و P_2 وكل ركن من اركان المجموعة المحدبة هو نقطة على حدود المجموعة المحدبة.

اذا كانت f دالة خطية معرفة على مجموعة مقيدة ، منطقة الحل S ومتعددة وجوه محدبة. فأن f تأخذ قيمتها العظمى او الصغرى في احد اركان (رؤوس) المنطقة S.

ومتعدد الحدود يمثل حدود المنطقة S وهي عبارة عن خطوط مستقيمة في الفضاء الثنائي البعد ، ومستويات Plan في حالة الفضاءات ثلاثية الابعاد.

Simplex

الشكل الهندسي المحدب الذي تحده الخطوط المستقيمة من جميع الجوانب والناتج من كل العلاقات المحدبة لـ n+1 من النقاط . في حالة وجود إحداثيات عددها ND شرط ان لا تقع هذه النقاط على Hyper Plan واحد.



النقاط الثلاثة لا تقع على خط مستقيم واحد، واذا استخرجت العلاقات المحدبة فيها فأن الشكل الناتج هو Simplex.

مثال 1 :

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية

Max (Z) = 2X+3Y
subject to :
$X+Y\leq 2$
$3X+2Y\leq 5$
$X ,Y \geq 0$

الحل :

نحول المتباينة الاولى الى معادلة ، باضافة المتغير المتمم K_1

$$X+Y+K_1 = 2$$

نحول المتباينة الثانية الى معادلة ، باضافة المتغير المتمم K_2

$$3X+2Y+K_2 = 5$$

وبالنسبة لدالة الهدف ، تصبح :

$$Z-2X-3Y = 0$$

نكتب المصفوفة:

X	Y	K_1	K_2	Bi	Basic variables
1	1	1	0	2	K_1
3	2	0	1	5	K_2
-2	-3	0	0	0	Z

لما كانت دالة الهدف هي دالة تعظيم ، لذلك نحاول التخلص من جميع القيم السالبة في معاملاتها .

نبدأ بأكبر قيمة سالبة في دالة الهدف وهي -3 وهو معامل المتغير Y أي ان المتغير Y سيدخل الى النموذج .

لتحديد المتغير الذي سيخرج من النموذج ، نستخرج النسب (نسب قسمة عناصر عمود الثوابت B_i الى عناصر العمود الثاني (عمود المتغير الداخل) المناظرة لها) .

$r_1=2/1=2$ النسبة الاولى

$r_2=5/2=2.5$ النسبة الثانية

أصغر نسبة موجبة هي 2، عنصر الارتكاز في العمود الثاني الذي تسبب في هذه النسبة هو a_{12}. نجعل قيمته تساوي 1 وذلك بقسمة عناصر الصف الذي يحتويه على قيمته (نلاحظ ان قيمته مساوية لـ 1 فلا حاجة للعملية) .

العنصر a_{12} يقابل المتغير K_1 في عمود المتغيرات Basic

العنصر الذي سيخرج من النموذج هو K_1 .

نجري التحويلات الابتدائية لتصفير عناصر العمود الثاني عدا عنصر الارتكاز . نستخرج معامل القسمة :

$d = a_{22}/a_{12} = 2/1=2$

$R_2 = R_2 - d*R_1$

$d*R_1 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 4$

$R_2 = \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 1$

نستخرج معامل القسمة

$d = a_{32}/a_{12} = -3/1=-3$

$R_3 = R_3 - d*R_1$

$d*R_1 = -3 \quad -3 \quad -3 \quad 0 \quad -6$

$R_3 = \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 6$

نكتب مصفوفة المعاملات

X	Y	K_1	K_2	Bi	Basic
1	1	1	0	2	Y
1	0	-2	1	1	K_2
1	0	3	0	6	Z

نلاحظ ان قيمة دالة الهدف تحسنت من (0) الى (6) . وان جميع معاملات دالة الهدف موجبة او اصفارا (أي تم التخلص من جميع القيم السالبة فيها) . لذلك لا يمكن زيادة قيمة دالة الهدف عن هذه القيمة .

في العمود Bi $Y=2$

$X=0$ (لم يدخل الى النموذج)

للتحقق من النتيجة ، نعوض عن قيم المتغيرات في دالة الهدف

$Z= 2X+3Y$

$=2(0) + 3(2)$

$=6$

مثال 2 :

تنتج شركة سمنت الجنوب ثلاث انواع من السمنت المكيس ، هي السمنت الاعتيادي والسمنت المقاوم للاملاح والسمنت الابيض ، في ثلاث مصانع لها فاذا كانت ساعات العمل المتاحة يوميا في كل مصنع والفترة الزمنية بالدقائق اللازمة لانتاج طن واحد من كل نوع والارباح المتحققة في الطن المنتج من الانواع الثلاثة هي كما في الجدول التالي :

الفترة بالدقائق لانتاج طن

الساعات المتاحة	سمنت ابيض	سمنت مقاوم للاملاح	سمنت اعتيادي	المصنع
8	15	12	10	مصنع البصرة
6	20	10	8	مصنع الكوفة
8	10	15	12	مصنع السماوه

	6	4	5	الربح / الف دينار – طن

المطلوب : حساب الانتاج الامثل الذي يحقق اكبر ربح ممكن للشركة ؟

الحل:

نفرض

X_1 = عدد الاطنان المنتجة من السمنت الاعتيادي

X_2 = عدد الاطنان المنتجة من السمنت المقاوم للاملاح

X_3= عدد الاطنان المنتجة من السمنت الابيض

$$Min\ (Z) = 5X_1+4X_2+6X_3$$

subject to :

نحول الزمن بالدقائق

قيد الزمن في مصنع البصرة $\mathbf{10X_1+12X_2+15X_3 \leq 480}$

قيد الزمن في مصنع الكوفة $8X_1+10X_2+20X_3 \leq 360$

قيد الزمن في مصنع السماوه $12X_1+15X_2+10X_3 \leq 480$

قيد عدم سالبية قيم المتغيرات $X_1,X_2,X_3 \geq 0$

نحول المتباينات الى معادلات ، بإضافة المتغيرات المتممة K_1 ، K_2 ، K_3.

ثم نكتب مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Bi	b. v.
10	12	15	1	0	0	480	K_1
8	10	20	0	1	0	360	K_2
12	15	10	0	0	1	480	K_3
-5	-4	-6	0	0	0	0	Z

القيمة الاكثر سالبية في دالة الهدف هي –6

اذن المتغير الداخل الى النموذج هو X_3

نستخرج النسب لتحديد المتغير الخارج من النموذج

$$r_1= 32\ ,\ r_2 = 18\ ,\ r_3 = 48$$

اذن المتغير الخارج هو K_2 (يقابل اصغر نسبة موجبة)

نجعل العنصر a_{23} (المقابل للمتغير الداخل والمتغير الخارج) مساويا لـ 1 فتصبح المصفوفة :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	b. v.
10	12	15	1	0	0	480	K_1
0.4	0.5	1	0	0.05	0	18	K_2
12	15	10	0	0	1	480	K_3
-5	-4	-6	0	0	0	0	Z

نجري التحويلات الابتدائية بطريقة Jorden لتصفير عناصر العمود الثالث (عمود المتغير الداخل) عدا عنصر الارتكاز a_{23} فتصبح المصفوفة :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	b. v.
4	4.5	0	1	-0.75	0	210	K_1
0.4	0.5	1	0	0.05	0	18	K_2
8	10	0	0	-0.5	1	300	K_3
-2.6	-1	0	0	0.3	0	108	Z

نلاحظ ازدياد دالة الهدف الى 108 (بعد ان كانت صفر) ، وهناك قيم سالبة في دالة الهدف يجب التخلص منها وذلك لتحسين قيمة الدالة ونبدأ بالقيمة الاكثر في السالبية وهي -2.6

اذن المتغير الداخل الى النموذج هوX_1

نستخرج النسب لتحديد المتغير الخارج .

$r_1 = 52.5\ ,\ \ r_2 = 45\ ,\ \ r_3 = 37.5$

اذن المتغير الخارج هو K_3 (يقابل اصغر نسبة موجبة)

عنصر الارتكاز هو a_{31} يقابل المتغيرين الداخل والخارج .

نجعل قيمة عنصر الارتكاز مساوية لـ 1 وتكتب المصفوفة الناتجة :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	b. v.
4	4.5	0	1	-0.75	0	210	K_1
0.4	0.5	1	0	0.05	0	18	X_3
1	1.25	0	0	-1/16	1/8	75/2	X_1
-2.6	-1	0	0	0.3	0	108	Z

نجري التحويلات الابتدائية لتصفير عناصر العمود الاول عدا عنصر الارتكاز a_{31} وتصبح المصفوفة :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	b. v.
0	-0.5	0	1	-0.5	-0.5	60	K_1
0	0	1	0	0.075	-0.05	3	X_3
1	5/4	0	0	-1/16	1/8	75/2	X_1
0	9/4	0	0	13.75	13/40	411/2	Z

نلاحظ تحسن قيمة الهدف الى 205.5 = 411/2 الف دينار الارباح المتحققة يوميا . ولعدم وجود قيمة سالبة للمتغيرات الاساسية في دالة الهدف ، فعليه لا يمكن زيادة قيمة الدالة عن تلك القيمة .

قيم المتغيرات الاساسية (كما في العمود Bi)

X_1=75/2

X2 = 0 لم يدخل الى النموذج

X_3 = 3

وهذه القيم تحقق دالة الهدف

$$\text{Max } (Z) = 4X_1 + 5X_2 + 6X_3$$
$$= 5(75/2) + 4(0) + 6(3)$$
$$= 187.5 + 18$$
$$= 205.5$$

اذن على الشركة لكي تحقق اكبر ربح ممكن ان تنتج 37.3 طن من السمنت الاعتيادي يوميا . و 3 أطنان من السمنت الابيض و تتوقف عن انتاج السمنت المقاوم للاملاح .

المتغيرات المرشحة للدخول الى النموذج والمرشحة للخروج منه

اذا كانت مسألة البرمجة الخطية هي مسألة تعظيم max (Z) فاننا نحاول التخلص من القيم السالبة في دالة الهدف ، نبدأ بالمتغير ذو القيمة الاكثر سالبية وهو الذي سيدخل النموذج اولا . واذا تساوت قيمة عدة متغيرات في السالبية فنختار ايا منها دونما قاعدة .

اما لتحديد المتغير الخارج من النموذج فيتم استخراج النسب في عمود المتغير الداخل . ويكون المتغير المرشح للخروج هو المتغير المقابل للعنصر الذي تسبب باصغر نسبة موجبة . اما اذا تساوت عدة نسب فيتم اختيار المتغير الخارج حسب طريقة charnes & copper والتي تتضمن اعتماد نسب قسمة معاملات اول عمود في المصفوفة الاحادية الى يمين عمود المتغير الداخل على معاملات عمود المتغير الداخل . ونختار المتغير المقابل لاصغر نسبة موجبة ، كمتغير للخروج من النموذج . واذا ما حصل تساوي في النسب ثانية فنقوم باستخراج نسب جديدة بقسمة عناصر العمود الثاني في المصفوفة الاحادية على عناصر المتغير الداخل ونحدد المتغير المرشح للخروج الذي يقابل اصغر نسبة .

ان تساوي النسب باستمرار يتسبب في مشكلة عدم إمكانية تحديد المتغير الخارج من النموذج .

مثال 2 :

X_1	X_2	K_1	K_2	K_3	Bi	b. variables
2	1	1	0	0	6	K_1
1	2	0	1	0	12	K_2
3	0	0	0	1	15	K_3
4	7	0	0	0	0	Z

المتغير الداخل هو التغير X_2

لتحديد المتغير الخارج نستخرج النسب:

النسبة الاولى $r_1 = 6/1 = 6$

النسبة الثانية $r_2 = 12/2 = 6$

النسبة الثالثة $r_3 = 15/0 =$ كمية غير معلومة

هناك نسبتان متساويتان وهما اصغر النسب الموجبة .

اذن نستخرج النسب الجديدة

النسبة الاولى $r_1 = 0/1 = 0$

النسبة الثانية $r_2 = 0/2 = 0$

النسبة الثالثة $r_3 = 1/0 =$ كمية غير معلومة

وأيضا هناك نسبتان متساويتان وكلاهما اصغر النسب الموجبة نستخرج النسب الجديدة

النسبة الاولى $r_1 = 0/1 = 0$

النسبة الثانية $r_2 = 1/2 = 0.5$

النسبة الثالثة $r_3 = 0/0 =$ كمية غير معلومة

اذن اصغر نسبة موجبة هي الصفر وهي تقابل المتغير K_1 الذي سيخرج من النموذج .

تحويل مسألة دالة ذات قيمة دنيا الى مسألة دالة ذات قيمة عظمى.

$$\min f = -\max(-f)$$

مثال:

$f = [2,5,7]$
$\min f = 2$
$\max f = 7$

وأيضا فان

$-f = [-2,-5,-7]$

$\max(-f) = [-2,-5,-7]$

$= -2$

$-\max(-f) = 2$

$= \min f$

مثال 3 :

تنتج شركة الكبريت الوطنية نوعين من الكبريت ، الاعتيادي والكبريت عالي الجودة في ثلاثة مناجم لها . وكما مبين في الجدول:

كمية الانتاج بالاطنان / يوم

الكميات المطلوب تجهيزها	منجم 3	منجم 2	منجم 1	نوع الانتاج
600	3	5	2	الكبريت الاعتيادي
1000	6	4	4	الكبريت عالي الجودة
	400	300	200	

وكانت تكلفة الانتاج في اليوم ، 200 الف دينار في المنجم الاول و 300 الف دينار في المنجم الثاني و 400 الف دينار في المنجم الثالث . وقد تلقت الشركة طلبا لتجهيز 600 طن كبريت اعتيادي و 1000 طن كبريت عالي الجودة .

فكم يوم يجب ان يشتغل كل منجم لتصبح نفقات الانتاج اقل ما يمكن ؟

الحل:

نفرض عدد الايام التي يجب ان يشتغل فيها المنجم الاول = X_1

نفرض عدد الايام التي يجب ان يشتغل فيها المنجم الثاني = X_2

نفرض عدد الايام التي يجب ان يشتغل فيها المنجم الثالث = X_3

$\min(Z) = 200X_1+300X_2+400X_3$

subject to

$2X_1+5X_2+3X_3 \geq 600$

$4X_1+4X_2+6X_3 \geq 1000$

لتحويل المسألة الى مسألة دالة ذات قيمة عظمى نجعل :

$$\min(Z) = -\max(-Z)$$

$W = -Z$ نفرض

$$\min(Z) = -\max(W)$$
$$\min(Z) = 200X_1+300X_2+400X_3$$
$$-\max(W) = 200X_1+300X_2+400X_3$$
$$200X_1+300X_2+400X_3+W=0$$

الآن نحول المتباينات إلى معادلات ، بإضافة المتغيرات المتممة

$$2X_1+5X_2+3X_3-K_1 = 600$$
$$4X_1+4X_2+6X_3-K_2 = 1000$$

نكتب مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	B_i	b. variables
2	5	3	-1	0	600	**K_1**
4	4	6	0	-1	1000	k_2
200	300	400	0	0	0	Z

نحاول التخلص من القيم الموجبة في دالة الهدف . ونبدأ بأكبر قيمة موجبة وهي 400. وعليه سيدخل المتغير X_3 الى النموذج

ولتحديد المتغير الذي يخرج من النموذج نستخرج النسب :

النسبة الاولى = 600/3 =200

النسبة الثانية = 1000/6 166.67

اصغر نسبة هي 166.67 وهي تقابل المتغير K_2 الذي سيخرج من النموذج.

عنصر الارتكاز هو العنصر a_{23} في نفس العمود وهو الذي تسبب في حدوث اصغر نسبة . نجعل قيمته مساوية لـ 1 وذلك بقسمة عناصر الصف الاول على قيمته 6 فتصبح مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	Bi	b. variables
2	5	3	-1	0	600	K_1
2/3	2/3	1	0	-1/6	500/3	X_3
200	300	400	0	0	0	Z

نجري التحويلات الابتدائية لتصفير عناصر العمود الثالث (عدا عنصر الارتكاز) فتصبح مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	Bi	b. v.
0	3	0	-1	1/2	100	K_1
2/3	2/3	1	0	-1/6	500/3	X_3
-200/3	100/3	0	0	200/3	-200000/3	Z

نلاحظ وجود قيمة موجبة وحيدة في صف دالة الهدف ، لذا يجب التخلص منها.

اذن سيدخل المتغير X_2 الى النموذج .

نستخرج النسب لتحديد المتغير الخارج من النموذج :

r1=100/3=33.33

r2=(500/3)/(2/3)=250

اصغر نسبة موجبة هي 250 وهي تقابل المتغير K_1 لذلك سيخرج المتغير K_1 من النموذج .

ونعتبر العنصر a_{12} عنصر ارتكاز وسنجعل قيمته مساوية لـ 1 وذلك بضرب عناصر الصف الاول بـ 1/3 فتصبح مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	B_i	b. v.
0	1	0	-1/3	1/6	100/3	X_2
2/3	2/3	1	0	-1/6	500/3	X_3
-200/3	100/3	0	0	200/3	-200000/3	Z

نجري التحويلات الابتدائية لتصفير عناصر العمود الثاني (عدا عنصر الارتكاز) وستصبح مصفوفة المعاملات كالاتي :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	B_i	b. v.
0	1	0	1/3	-1/6	100/3	X_2
2/3	0	1	-2/9	5/18	1300/9	X_3
-200/3	0	0	100/9	550/9	-610000/9	

الان تم التخلص من جميع القيم الموجبة في دالة الهدف

$W= -610000/9= -67777$

$Z= -W =67777=67.77$

مليون دينار اقل تكلفة ممكنة للانتاج . وهي تتحقق عندما يتوقف المنجم الاول عن الانتاج .

$X_1 =0$

ويشتغل المنجم الثاني 33.33 يوم

$X_2 =33.33$

ويشتغل المنجم الثالث 144.4

$X_3 =144.4$

وهذه القيم تحقق دالة الهدف :

$\min (Z) = 200X_1+300X_2+400X_3$

$200(0) +300(100/3) +400(1300/9)$

$=30000/3+520000/9=90000/9+520000/9=610000/9$

مثال 4 :

اوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية

$$\text{Min } (Z) = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$
Subject to :
$$80X_1 + 60X_2 + 100X_3 \geq 1000$$
$$40X_1 + 50X_2 + 30X_3 \geq 300$$
$$10X_1 + 20X_2 + 25X_3 \geq 400$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل:تحول المتباينات الى معادلات ، وذلك بإضافة المتغيرات المتممة، ثم تكتب مصفوفة المعاملات.

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	Basic variable
80	60	100	-1	0	0	1000	K_1
40	50	30	0	-1	0	300	K_2
10	20	25	0	0	-1	400	K_3
3	4	5	0	0	0	0	Z

نلاحظ ان اكبر قيمة موجبة في دالة الهدف هي 5 . لذلك فأن المتغير X_3 سيدخل الى النموذج.

نستخرج النسب لتحديد المتغير الذي سيخرج من النموذج (نقسم عناصر عمود الثوابت B_i الى عناصر عمود المتغير الداخل المناظرة لها)

النسبة الاولى $r_1 = 1000/100 = 10$

النسبة الثانية $r_2 = 300/30 = 10$

النسبة الثالثة $r_3 = 400/25 = 8$

النسبة الاصغر هي 8 وهي تقابل المتغير غير الأساسي K_3

اذن سيخرج المتغير K_3 من النموذج.

العنصر الذي تسبب في النسبة الصغرى هو a_{33} سيكون عنصر ارتكاز ونجعل قيمته مساوية لـ 1 وذلك بقسمة عناصر الصف الذي يحتويه على 25 (قيمته) .

وتكتب مصفوفة المعاملات

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Bi	b. variable
80	60	100	-1	0	0	1000	K_1
40	50	30	0	-1	0	300	K_2
0.4	0.8	1	0	0	-0.04	8	X_3
3	4	5	0	0	0	0	Z

نجري التحويلات الابتدائية بطريقة Jorden لتصفير عناصر العمود الثالث عدا عنصر الارتكاز . فتصبح مصفوفة المعاملات كالاتي :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	B_i	b. v.
40	-20	0	-1	0	4	200	K_1
28	26	0	0	-1	1.2	60	$\mathbf{K_2}$
0.4	0.8	1	0	0	-0.04	8	X_3
1	0	0	0	0	0.2	-40	Z

لازال هناك قيمة موجبة في دالة الهدف ينبغي التخلص منها وهي 1

اذن سيدخل المتغير X_1 الى النموذج

نستخرج النسب لتحديد المتغير الذي سيخرج من النموذج

النسبة الاولى $r_1 = 200/40 = 5$

النسبة الثانية $r_2 = 60/28 = 2.143$

النسبة الثالثة $r_3 = 8/0.4 = 20$

النسبة الاصغر تقابل المتغير K_2 الذي سيخرج من النموذج . وعنصر الارتكاز في العمود الاول هو a_{21} سنجعل قيمته مساوية لـ 1 وذلك بقسمة عناصر الصف الثاني على قيمته 28 ونكتب مصفوفة المعاملات.

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Z	B_i	b. v.
40	-20	0	-1	0	4	0	200	K_1
1	13/14	0	0	-1/28	3/70	0	15/7	$\mathbf{X_1}$
0.4	-0.8	1	0	0	-0.04	0	8	X_3
1	0	0	0	0	0.2	1	-40	Z

نجري التحويلات الابتدائية لتصفير عناصر العمود الأول عدا عنصر الارتكاز a_{21} فتصبح مصفوفة المعاملات :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Z	B_i	b. v.
0	-400/7	0	-1	10/7	16/7	0	800/7	K_1
1	13/14	0	0	-1/28	3/70	0	15/7	$\mathbf{X_1}$
0	3/7	1	0	1/70	-4/70	0	50/7	X_3
0	-13/14	0	0	1/28	11/70	1	-295/7	Z

نلاحظ عدم وجود قيم موجبة للمتغيرات الاساسية في دالة الهدف . مما يعني ان قيمة الدالة تكون عند نهايتها .

$W=-295/7$

$Z=295/7$

$X_1= 15/7$

$X_2= 0$

$X_3= 50/7$

$\min (Z) = 3(15/7) +0+5(50/7)$

$=45/7+250/7=295/7$

طريقة Gamory

في عام 1958 وضع R .Gamory طريقته في ايجاد قيم صحيحة موجبة للمتغيرات . وفي هذه الطريقة يتم اضافة قيد جديد يؤدي الى عدم حصول معاملات كسرية في دالة الهدف .

مثال:

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\text{Max } (Z) = 15X_1+12X_2+20X_3$$
subject to
$$4X_1+3X_2+6X_3 \le 1200$$
$$6X_1+4X_2+2X_3 \le 1000$$
$$2X_1+4X_2+2X_3 \le 600$$
$$X_1,X_2,X_3 \ge 0$$

ومصفوفة الحل هي

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Bi	Basic
0	0	1	2/9	-5/36	-1/36	1000/9	X_3
1	0	0	0	¼	-1/4	100	X_1
0	1	0	-1/9	-1/18	7/18	400/9	X_2
0	0	0	28/9	11/36	13/36	38300/9	Z

$$X_1=100$$
$$X_2 = 400/9$$
$$X_3= 1000/9$$
$$\text{Max } (Z) = 15(100)+12(400/9)+20(1000/9)$$
$$=1500+4800/9+20000/9$$
$$=13500/9+4800/9+20000/9=38300/9$$

الحل:

$$400/9 = X_2 - K_1/9-K_2/18 + 7K_3/18$$

نعبر عن المعادلة بصورة ارقام صحيحة واخرى كسور كالاتي :

$$44+4/9= X_2 +[-1+8/9]K_1+[-1+17/18]K_2+[0+7/18]K_3$$

نجعل C تساوي الكسور الموجبة في المعادلة :

$C=8/9K_1+17/18K_2+7/18K_3$

بطرح C من المعادلة السابقة ينتج :

$44+4/9 - C = X_2 - K_1 - K_2$

$4/9-C = X_2- K_1-K_2-44$

ولكون المتغيرات ستكون موجبة أي ان المقدار يمين المساواة سيكون عددا صحيحا ، عليه فان المقدار في يمين المعادلة سيكون صفر او مقدار سالب.

أي ان C تكون مقدار موجب واكبر من 4/9

$8/9K_1+17/18K_2+7/18K_3 \geq 4/9$

نستخرج قيم K_1, K_2, K_3 من النموذج

$K_1= 1200-4X_1-3X_2-6X_3$

$K_2= 1000-6X_1-4X_2-2X_3$

$K_3= 600-2X_1-4X_2-2X_3$

$8/9[1200-4X_1-3X_2-6X_3] +17/18[1000-6X_1-4X_2-2X_3]+7/18[600-2X_1-4X_2-2X_3] \geq 4/9$

$19200/18-32/9X_1-24/9X_2-48/9X_3+17000/18-51/9X_1-34/9X_2-17/9X_3+4200/18-7/9X_1-14/9X_2-7/9X_3 \geq 4/9$

$40400/18-90/9X1-72/9X_2-72/9X_3 \geq 4/9$

$-10X_1-8X_2-8X_3 \geq -20196/9 \geq -2244$

$10X_1-8X_2-8X_3 \leq 2244$

اذن القيد الذي يجب إضافته الى الموديل الرياضي كي نحصل علي قيم موجبة غير كسرية في الحل هو :

$$10X_1-8X_2-8X_3 \leq 2244$$

النموذج الثنائي
Duality Model

اذا اعتبرنا مسألة البرمجة الخطية ، تمثل النموذج الاصلي Primal. فانه يمكن وضع النموذج الثنائي (المقابل) للمسألة نفسها . ويتم حل النموذج المقابل بطريقة Simplex ايضا . ويكون له حلاً امثل مثلما للنموذج الاصلي حلاً امثل . ان اكثر من اسهم في وضع النموذج المقابل هو توكر A. Tucker . ومن مزايا النموذج الثنائي هو اهمية البيانات التي يقدمها عند تحليل حساسية النموذج . وايضا فان بعض النماذج الثنائية تتطلب عمليات حسابية اقل تعقيدا مما هو عليه في حل النموذج الاصلي.

يتم وضع النموذج الثنائي كالاتي :

1. اذا كان النموذج الأصلي للمسألة يهدف الى تعظيم الدالة Max (z) فان النموذج الثنائي يهدف الى تدنية قيمة الدالة Min(z)
2. ان الثوابت في قيود النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي . اما معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي ، فتصبح ثوابت في قيود النموذج الثنائي .
3. تبديل علامات الترجيح في المتباينات بشكل معاكس بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي ، فالاكبر من تصبح اصغر من وبالعكس .
4. يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساوياً لعدد القيود في النموذج الأصلي .

مثال 1 :

ورشة تنتج يوميا الاجزاء الاحتياطية A , B. تحتاج القطعة A الى 0.5 كغم من سبيكة المواد الاحتياطية وربع ساعة عمل . بينما تحتاج القطعة B الى 400 غم من سبيكة المواد الاحتياطية و 18 دقيقة عمل وان الربح في القطعة A هو 1000 دينار وفي القطعة B 900 دينار . وكانت الموارد المتاحة 15 كغم من سبيكة المواد الأولية يومياً و 8 ساعات عمل .

المطلوب :

1. ايجاد الموديل الرياضي للمسألة الذي يحقق اكبر ربح ممكن ؟
2. ايجاد النموذج الثنائي للموديل الرياضي ؟

الحل :

الموارد المتاحة	القطعة B	القطعة A	
15	0.4	0.5	المواد الاولية
8	0.3	0.25	ساعات العمل
	900	1000	الربح في الوحدة

نفرض

X_1 = عدد الوحدات المنتجة من القطعة A

X_2 = عدد الوحدات المنتجة من القطعة B

الموديل الرياضي :

$$Max(z) = 1000X_1 + 900X_2$$

Subject to :

$0.5 X_1+0.4X_2 \leq 15$ قيد المواد الاولية

$0.25X_1 +0.3X_2 \leq 8$ قيد ساعات العمل

$X_1, X_2 \geq 0$

النموذج الثنائي

$Min(z) = 15Y_1 + 8Y_2$

Subject to :

$0.5Y_1+ 0.25Y_2 \geq 1000$

$0.4Y_1+ 0.3Y_2 \geq 900$

$Y_1 , Y_2 \geq 0$

القيمة الحدية لقيمة واحدة من المواد الاولية = Y_1

القيمة الحدية لساعة عمل واحدة = Y_2

وان حل الموديل الرياضي الاصلي للمسألة هو :

X_1	X_2	K_1	K_2	Bi	Basic
1	0	6	-8	26	X_1
0	1	-5	10	5	X_2
0	0	1500	1000	30500	z

وحل الموديل الرياضي الثنائي هو :

X_1	X_2	K_1	K_2	Bi	Basic
1	0	-6	5	1500	X_1
0	1	8	-10	1000	X_2
0	0	26	5	-30500	w

حيث ان

$X_1 =26$

$X_2 = 5$

في الموديل الرياضي الاصلي $Z = 30500$

في الموديل الثنائي $Z = -w = 30500$

امـا المقـداران 1500 ,1000 فـي الموديـل الثنـائي فيمـثلان اسـعار الظـل Shadow Price للمتغيرات الاساسية .

مثال 2 :

اكتب النموذج الثنائي لمسألة البرمجة الخطية التالية :

$$Max(z) = 2000X_1 + 3000X_2 + 4000X_3$$

subject to :

$$0.25X_1+0.3X_2 + 0.5X_3 \leq 480$$
$$0.4X_1+0.25X_2 + 0.4X_3 \leq 420$$
$$0.3X_1+0.4X_2 + 0.3X_3 \leq 400$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل :

النموذج الثنائي

$$Min(z) = 480Y_1 + 420Y_2 + 400Y_3$$

subject to :

$$0.25Y_1 +0.4Y_2 +0.3Y_3 \geq 2000$$
$$0.3Y_1 +0.25Y_2 +0.4Y_3 \geq 3000$$
$$0.5Y_1 +0.4Y_2 +0.3Y_3 \geq 400$$
$$Y_1,Y_2,Y_3 \leq 0$$

حساسية النموذج
Sensitivity of Model

نقصد بحساسية الموديل الرياضي مدى استجابة الموديل للتغيرات التي تطرأ على المتغيرات الاساسية في دالة الهدف وفي القيود الموضوعة على المسالة. وكذلك مدى استجابة للتغيرات في قيم الثوابت المتمثلة بساعات العمل او كميات المواد الخام المستخدمة في الانتاج .

ومعلوم ان معظم المتغيرات الاقتصادية تميل الى التغير باتجاه الزيادة باستمرار عبر الزمن . فالأسعار والأجور والتكاليف والارباح والايرادات تتغير باستمرار خلال الزمن وغالبا ما تتزايد . ونتيجة لتلك التغيرات فان الموديل الرياضي يبقى مقبولا ويستجيب لتلك التغيرات في حدود معينة . لكن اذا ما تجاوز التغير تلك الحدود فان الموديل الرياضي يفشل في عرض المسائل ونضطر الى إعادة صياغة جديدة لموديل رياضي يأخذ بنظر الاعتبار التغيرات الجديدة في المتغيرات .

ولتوضيح ذلك ناخذ المثال التالي :

مثال1 :

الجدول التالي يوضح كمية المواد الاولية اللازمة لانتاج وحدة واحدة من القطعتين B , A وكذلك الوقت اللازم لانتاج وحدة واحدة منهما . وكمية المواد الاولية المتاحة وساعات العمل . والربح في الوحدة المنتجة من كل منهما .

الموارد المتاحة	القطعة B	القطعة A	
15	0.4	0.5	المواد الاولية
8	0.3	0.25	ساعات العمل
	900	1000	الربح في الوحدة

وكانت كمية الإنتاج من القطعتين التي تحقق اكبر ربح ممكن للورشة هي كما في الجدول التالي :

X_1	X_2	K_1	K_2	Bi	Basic
1	0	6	-8	26	X_1
0	1	-5	10	5	X_2
0	0	1500	1000	30500	Z

المطلوب : بيان حساسية النموذج للتغيرات المحتملة ؟

الحل :

التغيرات في الثوابت

$K_1 =$ 1500 يعني ان أي تغير مقداره وحدة واحدة في الكمية المنتجة من القطعة A يؤدي الى تغير في الارباح مقداره 1500 دينار.

$K_2 =$ 1000 يعني ان أي تغير مقداره وحدة واحدة في الكمية المنتجة من القطعة B يؤدي الى تغير في الارباح مقداره 1000 دينار .

المتغيرات الأساسية

1) التغير في الربح في الوحدة المنتجة من القطعة A

نستخرج نسب قسمة عناصر دالة الهدف الى عناصر صف المتغير X_1 المناظرة لها

$$r_1 = 1500/6 = 250$$
$$r_2 = 1000/-8 = -125$$

نضيف اصغر نسبة في السالبية (وليس اصغر نسبة سالبة) ونطرح اصغر نسبة موجبة من الربح في الوحدة المنتجة من القطعة A

الحد الاعلى $1000+125 = 1125$

الحد الادنى $1000-250 = 750$

Range 750 - 1125

أي ان الربح في الوحدة المنتجة من القطعة A اذا انخفض الى 750 دينار او اذا ازداد الى 1125 فان الموديل الرياضي يستجيب لتلك التغيرات . واما خارج مدى هذا التغير فيفشل الموديل الرياضي .

2) التغير في الربح في الوحدة المنتجة من القطعة B

نستخرج نسب قسمة عناصر دالة الهدف الى عناصر صف التغيير X_2 المناظرة لها .

$$r_1 = 1500/-5 = -300$$
$$r_2 = 1000/10 = 100$$

نضيف اصغر نسبة في السالبية ونطرح اصغر نسبة موجبة الى الربح المتحقق في القطعة المنتجة B

الحد الادنى 900-100 =800

الحد الاعلى 900+300 = 1200

Range 800 - 1200 دينار

أي انه اذا انخفض الربح في الوحدة المنتجة من القطعة B الى 800 دينار أو إذا ازداد الى 1200 دينار فان الموديل الرياضي يستطيع تفسير تلك التغيرات . لكن خارج مدى هذا التغير يفشل الموديل الرياضي للمسألة .

التغير في الموارد المتاحة

لاستخراج مدى التغير في الموارد المتاحة (قيم الثوابت) نستخرج نسب قسمة عناصر عمود الثوابت Bi الى عناصر أعمدة المتغيرات الغير اساسية K_i .

1) مدى التغير في المواد الاولية

نقسم عناصر عمود الثوابت الى عناصر عمود K_1 المناظرة لها

$$r_1 = 26/6 = 4.333$$
$$r_2 = 5/-5 = -1$$

نطرح اصغر نسبة موجبية ونضيف النسبة الاكبر في السالبية

الحد الادنى $15-4.333 = 10.667$

الحد الاعلى $15+1 = 16$

Range 10.667- 16

أي ان المواد الاولية اذا ما تغيرت ضمن هذا المدى فان الموديل الرياضي يستطيع تفسير المسألة اما اذا كان التغير خارج هذا المدى فيفشل الموديل الرياضي ونضطر لصياغة موديل رياضي جديد للمسألة .

2) مدى التغير في ساعات العمل المتاحة

نقسم عناصر عمود الثوابت الى عناصر عمود K_2 المناظرة لها :

$$r_1 = 26 / -8 = -3.25$$

$$r_2 = 5/10 = 0.5$$

ساعات الحد الادنى $8 - 0.5 = 7.5$

ساعات الحد الاعلى $8 + 3.25 = 11.25$

Range 7.5 - 11.25

أي انه اذا ما تغيرت ساعات العمل المتاحة ضمن هذا المدى ، انخفاضا الى 7.5 ساعة او ازديادا الى 11.25 ساعة فان الموديل الرياضي يبقى صالحاً .اما اذا كانت التغيرات في الوقت المتاح خارج هذا المدى فيفشل الموديل الرياضي .

مثال 2 :

تنتج شركة سمنت الجنوب ، ثلاثة انواع من السمنت المكيس هي السمنت الاعتيادي، السمنت المقاوم للاملاح والسمنت الابيض في ثلاثة مصانع له .فاذا كانت ساعات العمل المتاحه يوميا في كل مصنع والفترة الزمنيه بالدقائق اللازمه لانتاج طن واحد من كل نوع والارباح المتحققة في الطن المنتج من الانواع الثلاثة هي كما في الجدول التالي :

المصنع	اعتيادي	مقاوم	ابيض	الساعات المتاحة
مصنع البصرة	10	12	15	8=480دقيقة
الكوفة	8	10	20	6=360دقيقة
السماوة	12	15	10	8=480دقيقة
الربح /الف دينار– طن	5	4	6	

وكانت الكميات المنتجة المثلى التي تحقق افضل ربح للشركة هي كما في الجدول التالي :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	K_3	Bi	Basic
0	-0.5	0	1	-0.5	-0.5	60	K_1
0	0	1	0	0.075	-0.05	3	X_3
1	5/4	0	0	-1/16	1/8	75/2	X_1
0	9/4	0	0	13.75	13/40	411/2	Z

المطلوب: بيان حساسية الموديل الرياضي للتغيرات المحتملة ؟

الحل:

$K_1=$ 0 وتعني ان أي طن منتج من السمنت المقاوم للاملاح يؤدي الى خسارة مقدارها 60 دينار . فيجب ان تتوقف الشركة عن انتاج السمنت المقاوم للاملاح.

$K_2=13.75$ تعني ان أي تغير مقداره طن واحد في انتاج السمنت الابيض يؤدي الى تغير مقداره 13.75 دينار في الارباح .

$K_3=$ 13/40 تعني ان أي تغير مقداره طن واحد في انتاج السمنت الاعتيادي يؤدي الى تغير في الارباح مقداره 13/40 دينار .

المتغيرات الاساسية

1) التغير في الربح في الطن المنتج من السمنت الاعتيادي

$r_1 = 13.75/(-1/16) = -220$

$r_2 = (13/40)/(1/8) = 2.6$

$r_3 = (9/4)/(5/4) = 1.8$

دينار الحد الادنى $5-1.8=3.2$

دينار الحد الاعلى $5+220=225$

Range 3.2 ـ 225 دينار

نلاحظ امكانية زيادة الربح في الطن المنتج من السمنت الاعتيادي الى قيمة عالية 225 دينار دون التاثير في استقرارية الموديل الرياضي.

2) التغير في الربح في الطن المنتج من السمنت الابيض

$r_1 = 13.75/0.075 = 183.3$

$r_2 = (13/40)/-0.05 = -6.5$

$r_3 = (9/4)/0 =$ كمية غير معلومة

دينار الحد الادنى 6

دينار الحد الاعلى $6+6.5=12.5$

Range 6ـ12.5

نلاحظ امكانية زيادة الربح في الطن المنتج من السمنت الابيض الى 12.5 دينار دون التاثير في الموديل الرياضي.

مدى التغير في ساعات العمل المتاحة

1) مدى تغير ساعات العمل في مصنع البصرة

$r_1=60/1=60$

$r_2 =3/0=$ كمية غير معلومة

$r_3=(75/2) /0 =$ كمية غير معلومة

$480-60 = 420 = 7$ ساعات الحد الادنى

Range 7- 8 ساعة

2) مدى تغير ساعات العمل في مصنع الكوفة

$r_1 = 60/-0.5 = -120$
$r_2 = 3/0.075 = 40$
$r_3 = (75/2) / (-1/16) = - 600$

$360 – 40 = 320$ خمسة ساعات وثلث الحد الادنى

$360 + 120 = 480$ ستة ساعات الحد الاعلى

Range 320 - 480 دقيقة

3) مدى تغير ساعات العمل في مصنع السماوة

$r_1 = 60/-0.5 = -120$
$r_2 = 3/-0.05 = -60$
$r_3 = (75/2) / (1/8) = 18.75$

$480 – 18.75 = 462.25$ دقيقة الحد الادنى

$480 + 60 = 540$ دقيقة الحد الاعلى

Range 7ساعة +42.25 دقيقة - 9 ساعة

أسـئلة

س1) ينـتج مصـنع الألمنيـوم فـي البصـرة نـوعين مـن رقـائق الألمنيـوم ، همـا الرقـائق الاعتيادية والرقائق الصلبة . وتتكون سبيكة الرقائق الاعتيادية من 800 غم ألمنيوم و 200 غم مغنيسيوم لكل كغم من السبيكة . بينما تتكون سبيكة الرقائق الصلبة من 750 غم ألمنيوم و 150غم حديد و 100 غم مغنيسيوم . وكان لدى الشركة 1500 كغم من الألمنيوم و 150 كغم من الحديد و 200 كغم من المغنيسيوم خلال الفترة الزمنية .

فما هي الكميات المثلى للإنتاج التي تحقق اعظم الأرباح ، إذا كان الربح في الكغم من الرقائق الصلبة 4 دينار وفي الرقائق الاعتيادية 5 دينار؟

س2) اوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة Simplex ؟

$$Max(z) = 10X_1 + 8X_2$$

Subject to :

$$5X_1 + 3X_2 \leq 420$$

$$6X_1 + 4X_2 \leq 240$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

س3) مزارع يرغب في زراعة الارض بمحاصيل قصب السكر والقطن والذرة . فاذا كانت حصة كل محصول من الارض المزروعة وكميات المياه المستهلكة والعائد لكل فدان (مشارة) هي كما في الجدول الآتي :

الموارد المتاحة	الذرة	القطن	قصب السكر	
3000	400	500	600	الارض / مشارة
30	1	2	3	المياه / قدم ^{3}
	250	750	1000	العائد / دينار

المطلوب : صياغة موديل رياضي وحله بطريقة الـ simplex ؟

س4) يبين الجدول التالي كل من عدد وحدات المنفعة في كل غم من عناصر الغذاء (الكاربوهيدرات ، البروتينات والدهنيات) والاحتياجات اليومية للشخص الواحد من وحدات المنفعة وتكاليف المنفعة بالدينار لكل كغم من اللحوم الحمراء والبطاطا

الاحتياجات / وحدة منفعة	البطاطا	اللحوم	عناصر الغذاء
≥ 50	15	5	كاربوهيدرات
≥ 40	5	20	بروتينات
≤ 60	2	15	دهنيات
	2	4	التكاليف / دينار

المطلوب : صياغة نموذج رياضي لتقليل تكاليف المنفعة وحله بطريقة الـ simplex ؟

س5) محطة زراعية لتربية الماشية تحتاج الى كميات من الحنطة ومسحوق العظام والجت . فاذا كانت الاحتياجات اليومية للماشية من الكاربوهيدرات والبروتينات والفيتامينات والتكاليف هي كما في الجدول الآتي :

الاحتياجات / وحدة	الجت	مسحوق العظام	الحنطة	عناصر الغذاء
200	40	20	90	الكاربوهيدرات
180	60	80	30	البروتينات
150	60	20	10	الفيتامينات
	70	80	180	التكاليف / دينار

المطلوب صياغة الموديل الرياضي لتقليل التكاليف وحله بطريقة الـ simplex ؟

س6) اوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية بطريقة Simplex ؟

$$Min(z) = 12X_1 + 8X_2 + 10X_3$$
subject to :
$$4X_1 + 2X_2 + 3.6X_3 \geq 70$$
$$4X_1 + 0.04X_2 + 0.1X_3 \geq 3$$
$$0.2X_1 + 0.04X_2 + 0.16X_3 \geq 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

س7) اوجد حل مسالة البرمجة الخطية التالية بطريقة الـ simplex ؟

$$Max(Z) = 3X1 + 4X_2 + 5X_3$$
Subject to :
$$80X_1 + 60X_2 + 100X_3 \geq 1000$$
$$40X_1 + 50X_2 + 30X_3 \geq 300$$
$$10X_1 + 20X_2 + 50X \geq 400$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

س8) ينتج أحد المصانع نوعين من المنتجات A1 و A2 . ويجري العمل فيه في ثلاثة أقسام ، يعمل في القسم الاول 60 عامل وفي القسم الثاني 150 عامل وفي القسم الثالث 40 عامل . وكانت ساعات العمل الاسبوعية للعامل 40 ساعة وكان الربح في كل وحدة منتجة من A هو 10 دينار ومن A2 يبلغ 6 دينار وعدد ساعات العمل الازمة لانتاج الوحدة الواحدة من المنتج A1 نصف ساعة ومن A2 ساعة .

المطلوب : تنظيم الانتاج في المصنع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن ؟

س9) عائلة ترغب في اختيار توليفة من المواد الغذائية تتوفر فيها العناصر الضرورية (بروتينات ، دهنيات ، كاربوهيدرات) وباقل تكلفة ممكنة . و هناك ثلاثة توليفات من الغذاء هي C,B,A . شرط ان تحتوي التوليفة في الاقل 1000غم من الكاربوهيدرات و 300غم من البروتينات و 400 من الدهنيات .

وكانت محتويات كل توليفة غذائية من العناصر المذكورة وتكلفة الوحدة من التوليفة هي كالاتي :

الكلفة / دينار	الدهنيات	البروتينات	الكاربوهيدرات	التوليفة
3	10	40	80	A
4	20	50	60	B
5	50	30	100	C
	400	300	1000	الاحتياجات اليومية

المطلوب : صيغة النموذج الرياضي للمسألة وحله بطريقة simplex

س10) الجدول التالي يوضح كميات الانتاج في شركة الكبريت الوطنية في ثلاثة مناجم لها وتكاليف الانتاج :

الكميات المطلوب تجهيزها / طن	منجم 3	منجم 2	منجم 1	نوع الانتاج
200	3	5	2	الكبريت الاعتيادي
300	6	4	4	الكبريت عالي الجودة
	400	300	200	**تكاليف الانتاج/ الف دينار- يوم**

وكان عدد الايام التي يشتغلها كل منجم لتصبح نفقات الانتاج اقل ما يمكن ، هي كما في الجدول التالي :

X_1	X_2	X_3	K_1	K_2	Z	B_i	Basic
0	1	0	1/3	-1/6	0	125/3	X_2
2/3	0	1	-2/9	5/18	0	125/9	X_3
-200/3	0	0	-100/9	-550/9	1	-102500/9	

المطلوب تحليل حساسية النموذج ؟

الحل الامثل لمسألة النقل

تعتبر طريقة Vogel أفضل الطرق لإيجاد حل ابتدائي لمسألة النقل ، وغالبا ما يكون هو الحل الامثل ايضاً . لكن في بعض الحالات فأن الحل بطريقة Vogel لا يكون حلاً أمثل ، حيث يمكن خفض مجموع تكاليف النقل عن القيمة المستخرجة بهذه الطريقة .

لتطوير الحل والوصول الى الحل الامثل لمسألة النقل نعتمد طريقتان :

1) طريقة المسار المتعرج (الحجر المتنقل) Stepping Stone Method .
2) طريقة التوزيع المعدلة Modified Disteribution Method .

وكلاهما تؤدي الى تحسين الحل وتطويره والوصول الى نفس الحل الامثل للمسألة.

طريقة المسار المتعرج

تكون خوارزمية الحل بهذه الطريقة كالاتي :

1) نستخرج الحل الابتدائي للمسألة بطريقة Vogel .
2) نحدد المتغيرات غير الاساسية (الخلايا الفارغة في جدول الحل) .
3) نرسم المسارات المغلقة للمتغيرات غير الاساسية ، ثم نستخرج التغير في مجموع التكاليف الكلية للمسألة الذي يحدثه المسار.

والمسار المغلق يبدأ من المتغير غير الاساسي ويتجه افقيا وعموديا وباتجاه واحد (باتجاه عقرب الساعة او باتجاه معاكس لاتجاه عقرب الساعة) ويمر بالمتغيرات الاساسية الركنية (وعند تصادف وجود متغيرين أساسيين بطريق المسار ، نعرج عن المتغير الاساسي غير الركني وهكذا) لينتهي المسار بالمتغير غير الاساسي نفسه .

نحسب التغير في التكاليف الكلية الذي يحدثه المسار المغلق وذلك بجمع خلايا المسار حيث تعطى الخلية الاولى في المسار اشارة موجبة والثانية اشارة سالبة والثالثة موجبة ... وهكذا . وسيكون عدد المتغيرات وعدد الاشارات عدداً زوجيا .

4) اذا كانت التغيرات في التكاليف الكلية لجميع المسارات موجبة فأن ذلك يعني عدم امكانية تحسين وتطوير الحل . ونقبل الحل الابتدائي بطريقة Vogel ونعتبره حلاً امثل .

5) تهمل المسارات ذات التغير الموجب في التكاليف الكلية لأن استخدامها سيزيد من مجموع التكاليف الكلية .

المسارات ذات التغير السالب يؤدي استخدامها الى خفض مجموع التكاليف . لذلك ولغرض تطوير الحل نعتمد المسار المغلق ذو اكبر قيمة في السالبية (وليس اكبر قيمة سالبة) لأنه سيؤدي الى خفض مجموع التكاليف بأكبر قيمة ممكنة .

6) نحدد اصغر خلية ذات اشارة سالبة في المسار المختار ونبدأ بإضافة قيمة هذه الخلية الى خلايا المسار ذات الاشارة الموجبة ، ونطرح قيمة هذه الخلية من الخلايا ذات الاشارة السالبة في المسار . فينجم عن ذلك انخفاض في مجموع التكاليف .

7) نحسب مجموع التكاليف الكلية بعد التوزيع الجديد للوحدات المنقولة . وسيكون الناتج اقل مما هو مستخرج بطريقة Vogel .

مثال :

المصفوفة التالية تبين تكاليف النقل بالدينار لكل وحدة من مراكز الانتاج S_3,S_2,S_1 الى المخازن D_3 , D_2 , D_1

المطلوب : ايجاد الحل الامثل لمسألة النقل بطريقة المسار المتعرج ؟

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	2	3	5	30
S_2	10	15	10	70
S_3	5	10	15	50
الطاقة الاستيعابية	45	80	25	150

الحل :

نستخرج الحل الابتدائي بطريقة Vogel وسيكون كالاتي :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	2	3 30	5	30
S_2	10	15 45	10 25	70
S_3	5 45	10 5	15	50
الطاقة الاستيعابية	45	80	25	150

$$\text{Min}(Z) = 3(30) + 15(45) + 10(25) + 5(45) + 10(5)$$
$$= 90 + 675 + 250 + 225 + 50$$
$$= 1290$$ دينار

نلاحظ ان المتغيرات غير الاساسية هي X_{11} , X_{13} , X_{21} و X_{33} .

نختبر تأثير استخدام مسارات هذه المتغيرات في الحل .

المتغير X_{11}

لو نقلنا وحدة واحدة من مركز الانتاج S_1 الى المخزن D_1 فأن هذا سيؤدي الى زيادة تكاليف النقل بمقدار 2 دينار . ولكي يكون عدد الوحدات المنقولة من S_1 مساويا لـ 30 وحدة (وهي عدد الوحدات المنتجة فيه) فأن ذلك يتطلب خفض عدد الوحدات المنقولة من S_1 الى المخزن D_2 وحدة واحدة فيصبح 29 وحدة وهذا سيؤدي الى خفض التكاليف الكلية بمقدار 3 دينار .

وبالنسبة للمخزن D_1 فأن طاقته الاستيعابية 45 وحدة ولذلك فأن نقل وحدة من S_1 اليه سيستلزم خفض عدد الوحدات التي تنقل من المصدر S_3 الى المخزن D_1 بمقدار وحدة واحدة حتى لا يتجاوز عدد الوحدات المنقولة اليه طاقته الاستيعابية . وان تخفيض وحدة واحدة من الكمية المنقولة من المصدر S_3 الى المخزن D_1 سيؤدي الى خفض التكاليف الكلية بمقدار 5 دنانير .

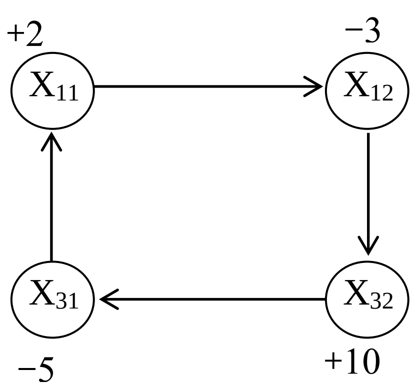
المخزن D_2 يستوعب 80 وحدة . وان نقص وحدة واحدة من الوحدات المنقولة اليه من المصدر S_1 يتطلب التعويض ، فيتم نقل وحدة واحدة من المصدر S_3 الى المخزن D_2 ويترتب على ذلك زيادة في مجموع التكاليف الكلية بمقدار (10) دنانير.

الان اصبح الجدول متوازنا .

نستخرج محصلة التغير في التكاليف الكلية لعملية النقل التي احدثها اعادة التوزيع هذا .

$$\triangle Cost = 2 - 3 + 10 - 5 = 4 \text{ دينار}$$

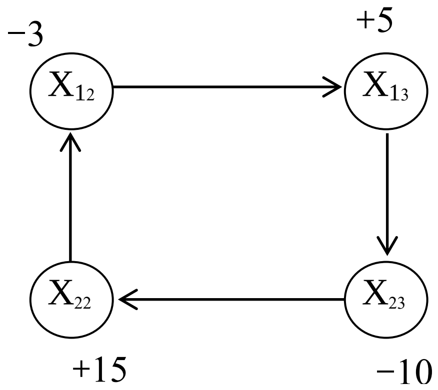
وسيكون توضيح ما سبق شرحه بالرسم التالي :



$\Delta Cost = 2 - 3 + 10 - 5 = 4$ دينار

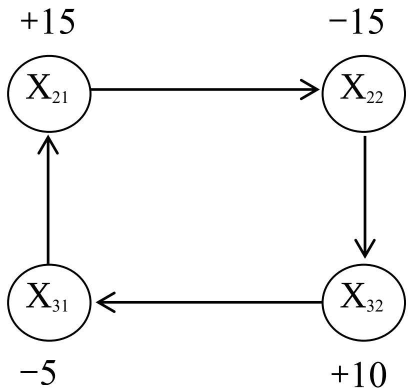
نستخرج المسارات المغلقة للمتغيرات غير الاساسية الاخرى :

المسار المغلق للمتغير X_{13}



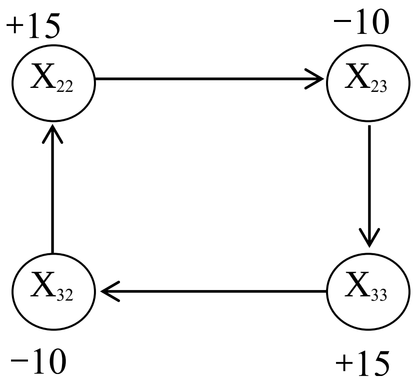
$\Delta Cost = 5 - 10 + 15 - 3 = 7$ دينار

المسار المغلق للمتغير X_{21}



$\triangle Cost = 10 - 15+10 -5 = 0$ دينار

المسار المغلق للمتغير X_{33}



$\triangle Cost = 15 - 10 +15 - 10 = 10$ دينار

نلاحظ ان التغير في التكاليف الكلية عند استخدام أي من هذه المسارات هو مقدار موجب وذلك يؤدي الى ازدياد في مجموع التكاليف الكلية لعملية النقل عند استخدام أي من هذه المسارات .

لذلك لا يمكن تحسين الحل . ونعتبر الحل المستخرج بطريقة Vogel حلاً أمثل .

مثال :

استخرج الحل الامثل لتكاليف نقل الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج O_3, O_2,O_1 الى منافذ التوزيع D_3, D_2,D_1 علما ان تكلفة نقل كل وحدة من أي من المصادر الى كل من منافذ التوزيع هي كما مبينة في الجدول ؟

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7	5	6	100
O_2	10	8	3	50
O_3	15	12	4	200
الطلب	80	150	120	350

والحل الابتدائي بطريقة vogel

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7	5 100	6	100
D_2	10 50	8	3	50
D_3	15 30	12 50	4 120	200
الطلب	80	150	120	350

$$\text{Min } (Z) = 5(100)+10(50)+15(30)+12(50)+4(120)$$
$$= 500+500+450+600+480$$

=2530 دينار

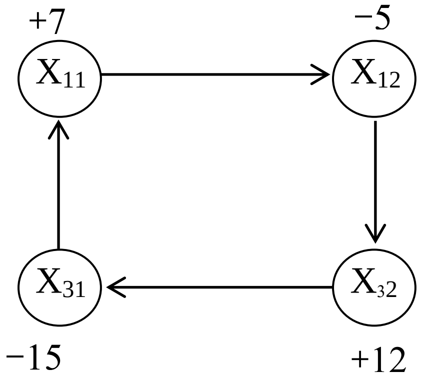
	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7 30	5 70	6	100
O_2	10 50	8	3	50
O_3	15	12 80	4 120	200
الطلب	80	150	120	350

الحل الامثل بطريقة المسار المتعرج

نحدد المتغيرات غير الاساسية :

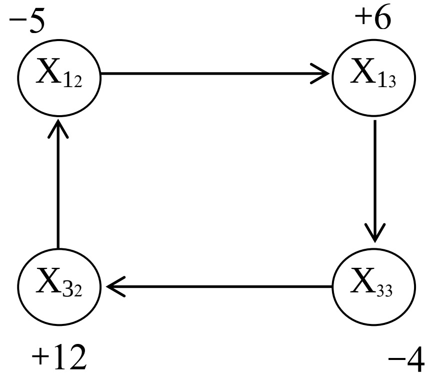
X_{23} ,X_{22} , X_{13} , X_{11}

المسار المغلق للمتغير x_{11} والتغير الذي يحدثه في تكلفة نقل كل وحدة خلاله



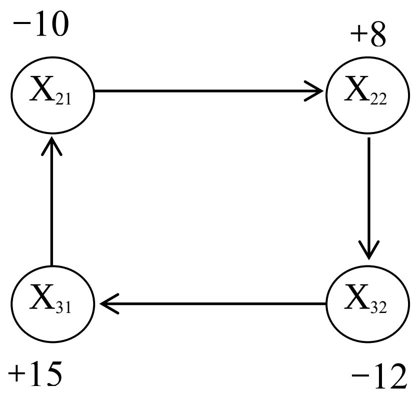
$\triangle Cost = 7 – 5 + 12 - 15 = -1$ دينار

المسار المغلق للمتغير X_{13} والتغير الذي يحدثه في تكلفة نقل كل وحدة خلاله .



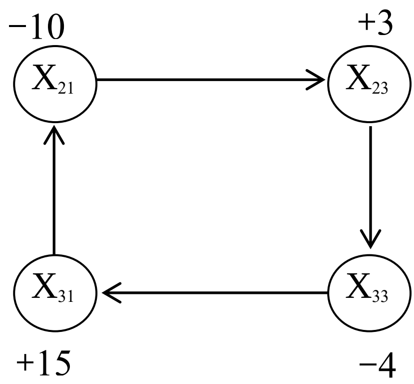
$\triangle Cost = 6-4+12-5= 9$ دينار

المسار المغلق للمتغير x_{22} والتغير في التكاليف الذي يحدثه



$\triangle Cost = 8-12+15-10 = 1$ دينار

المسار المغلق للمتغير x_{23} والتغير في التكاليف



$\triangle Cost = 3-4+15-10 = 4$ دينار

يتبين ان المسار الوحيد الذي يمكن ان يخفض التكاليف الكلية هو مسار المتغير X_{11}

نعيد توزيع الوحدات المنقولة عبر خلايا المسار

اصغر خلية ذات اشارة سالبة هي X_{31} تنقل خلالها 30 وحدة . نضيف 30 وحدة الى مجموع الوحدات المنقولة عبر كل خلية ذات اشارة موجبة في المسار . ونخفض 30 وحدة من مجموع الوحدات المنقولة عبر الخلايا ذات الاشارة السالبة .

$S_1D_1 = 0+30 = 30$ وحدة

$S_1D_2 = 100-30 = 70$ وحدة

$S_3D_2 = 50+30 = 80$ وحدة

$S_3D_1 = 30-30 = 0$

أي عدم نقل اية وحدة من المصدر S_3 الى منفذ التسويق D_1

نحسب التكاليف الجديدة من مصفوفة الحل الجديد :

$$\begin{aligned} \min(Z) = \; & 7(30) + 5(70) + 10(50) + 12(80) + 4(120) \\ & = 210+350+500+960+480 \\ & = 2500 \end{aligned}$$

دينار

وهكذا انخفضت التكاليف الكلية من 2530الى 2500 دينار

طريقة التوزيع المعدل

في هذه الطريقة نحدد المتغيرات الاساسية ، ونستخرج تكلفة الخلايا للمتغيرات الاساسية C_{ij} باستخدام المجهولين U_iو V_j وكالاتي :

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث :

U متغير يستخدم للصفوف

V متغير يستخدم للاعمدة

وسيتكون لدينا نظام من المعادلات الخطية يتم حله لاستخراج قيم المجاهيل. بعد استخراج قيم المجاهيل ، نستخدمها لتقييم المتغيرات غير الاساسية في الحل. ويحتسب مقدار التغير في التكاليف الكلية الذي يتسبب فيه استخدام مسار المتغير غير الاساسي كالاتي :

$$\triangle Cost = C_{ij} - U_i - V_j$$

لكل متغير غير أساسي . فاذا كانت التغيرات في التكاليف الكلية موجبة لجميع المتغيرات غير الاساسية فهذا يعني انه ليس بالامكان تحسين الحل ويتم اعتماد النتائج المستخرجة بطريقة Vogel واعتبارها حلاً أمثل . اما اذا كان هناك تغيرات سالبة في التكاليف الكلية فهذا يعني ان استخدام مسارات تلك المتغيرات غير الاساسية التي احدثت هذا التغير السالب ، يمكن ان يحسن الحل ويخفض من مجموع التكاليف الكلية لعملية النقل .

نختار المتغير غير الاساسي الذي تسبب في اكبر قيمة سالبة في التغير في تكاليف النقل . ونرسم المسار المغلق له . ونعيد توزيع عدد الوحدات التي يجب نقلها خلاله

مثال :

استخرج الحل الامثل لتكاليف نقل الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج O_3, O_2,O_1 الى منافذ التوزيع D_3, D_2,D_1 علما ان تكلفة نقل كل وحدة من أي من المصادر الى كل من منافذ التوزيع هي كما مبينة في الجدول ؟

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7	5	6	100
O_2	10	8	3	50
O_3	15	12	4	200
الطلب	80	150	120	350

والحل الابتدائي بطريقة vogel

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7	5 100	6	100
D_2	10 50	8	3	50
D_3	15 30	12 50	4 120	200
الطلب	80	150	120	350

$$\text{Min (Z)} = 5(100)+10(50)+15(30)+12(50)+4(120)$$
$$= 500+500+450+600+480$$
$$=2530$$ دينار

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7 30	5 70	6	100
O_2	10 50	8	3	50
O_3	15	12 80	4 120	200
الطلب	80	150	120	350

الحل الابتدائي بطريقة Vogel اظهر خمسة متغيرات اساسية هي :
$X_{33}, X_{32}, X_{31}, X_{21}, X_{12}$

نستخرج C_{ij} للمتغيرات الاساسية
$C_{ij} = U_i + V_j$

$C_{12} = U_1 + V_2 = 5$
$C_{21} = U_2 + V_1 = 10$
$C_{31} = U_3 + V_1 = 15$
$C_{32} = U_3 + V_2 = 12$
$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$

اصبح لدينا خمسة معادلات خطية وستة مجاهيل ، لذلك سيكون لنظام المعادلات الخطية عدد غير محدود من الحلول . ولتسهيل الحل واستخراج قيم المجاهيل U_i , V_j نختار احد هذه الحلول وذلك بجعل $U_1 = 0$

$U_1 = 0$
$V_2 = 5$
$U_3 = 12-V_2 = 12-5=7$
$V_1 = 15-U_3 = 15-7=8$
$U_2= 10-V_1 = 10-8=2$
$V_3= 4-U_3= 4-7=-3$

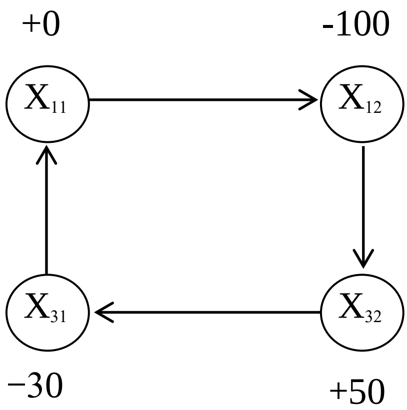
الان نستخرج التغير في التكاليف الكلية الذي يتسبب فيه كل متغير غير اساسي .

$\triangle$ cost = Cij – Ui – Vj

المتغيرات غير الاساسية	$C_{ij} - U_i - V_j$	$\triangle$ Cost
X_{11}	$C_{11}- U_1 - V_1$	7-0-80 = -1
X_{13}	$C_{13}- U_1 - V_3$	6-0-(-3) = 9
X_{22}	$C_{22}- U_2 - V_2$	8-2-5 = 1
X_{23}	$C_{23}- U_2 - V_3$	3-2-(-3) = 4

اذن المتغير غير الاساسي الوحيد الذي يمكن عن طريقة خفض التكاليف الكلية هو X_{11}

نرسم المسار المغلق للمتغير X_{11}



اصغر قيمة سالبة في المسار هي 30

نطرح 30 من القيم ذات الاشارة السالبة

ونضيف 30 الى القيم ذات الاشارة الموجبة فتصبح قيم المتغيرات كالآتي :

$X_{11} = 0+30 = 30$
$X_{12} = 100-30 = 70$
$X_{32} = 50+30 = 80$
$X_{31} = 30-30 = 0$

نكتب مصفوفة الحل الجديد :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
O_1	7 30	5 70	6	100
O_2	10 50	8	3	50
O_3	15	12 80	4 120	200
الطلب	80	150	120	350

$$Min(Z) = 7(30)+5(70)+10(50)+12(80)+4(120)$$
$$= 210+350+500+960+480$$
$$=2500$$ دينار

وهو نفس الناتج المستخرج بطريقة المسار المتعرج

أسئلـة

س1) أوجد حل مسألة النقل التالية :

	D1	D2	D3	الانتاج
S1	11	20	13	150
S2	14	19	15	150
S3	17	16	10	200
الطلب	170	190	140	500

س2) شركة للمواد الغذائيـة تستورد 1750 طـن من المواد الغذائيـة من الخـارج عن طريق ثلاثـة موانـئ هـي ميناء البصـرة ، ميـناء العقبـة ، ميناء اسطنبول وتوزع المواد على مخازنها في البصرة والرمادي والموصل وبغداد والحلة . وكانت الكميات المتاحة فـي المـوانئ والطاقـة الاستيعابية للمخـازن وتكلفـة نقل الطـن الواحـد من المـواد الـى المخازن هي كما في المصفوفة التالية :

الميناء	البصرة	الرمادي	الموصل	بغداد	الحلة	الكميات المتاحة
البصرة	3	8	6	4	5	900
العقبة	5	6	2	7	3	600
اسطنبول	4	3	5	7	5	250
الطاقة الاستيعابية	300	150	300	600	400	1750

المطلوب : نقل الكميات المستوردة من المواد من الموانيء المذكورة الى المدن بأقل تكلفة ممكنة ؟

س3) مصنع للمكائن الكهربائية الدقيقة فيه ثلاثة مراحل انتاجية ولدية 5 مستودعات لخزن المنتجات الفائضة لتوزيعها مستقبلا . تنتج المراحل الثلاث خلال الاسبوع ما ياتي :

3	2	1	المرحلة
500	400	600	الانتاج

وتستوعب المستودعات اسبوعيا ما يأتي :

5	4	3	2	1	المخزن
200	550	300	250	200	الطاقة الاستيعابية

وكانت تكاليف نقل الوحدة الواحدة من الانتاج من كل مرحلة انتاجية الى كل المخزن هي كما في الجدول:

مخزن5	مخزن4	مخزن 3	مخزن 2	مخزن1	المراحل الانتاجية
2	1	3	1	2	المرحلة A
1	3	1	2	4	المرحلة B
4	3	1	1	2	المرحلة C

المطلوب :

ايجاد اقل تكلفة ممكنة لنقل الوحدات المنتجات الى المخازن مستخدما طريقة Vogel؟

س4) اوجد الحل الامثل لمسألة النقل التالية بطريقة التوزيع المعدل . علما ان الحل الابتدائي بطريقة Vogel لنقل الكميات المنتجة في مراكز الانتاج S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 الى منافذ التوزيع D_1, D_2, D_3, D_4 هو :

Min(Z) = 5750 الف دينار

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	17	9 100	21	6 150	250
S_2	8	6 150	4	2	150
S_3	11	20	15	6 200	200
S_4	10	2 100	3	7	100
S_5	6 200	11	5 50	4 50	300
الكميات المطلوبة	200	350	50	400	1000

$$Min(Z) = 9(100)+6(150)+6(150)+6(200)+2(100)+6(200)+5(50)+4(50)$$

$$= 900+900+900+1200+200+1200+250+200$$

$$=5750$$

س5) اوجد اقل تكلفة ممكنة لنقل المنتجات في مراكز الانتاج الثلاثة S_1,S_2,S_3 الى المدن ، الكوت ، الحلة ، بعقوبة والرمادي . علما ان تكلفة نقل الطن الواحد من الانتاج بالاف الدنانير الى أي من المدن المذكورة هي كما في الجدول التالي :

مراكز الانتاج	الكوت	الحلة	بعقوبة	الرمادي	الكميات المنتجة
S_1	10	0	20	11	170
S_2	20	9	7	12	260
S_3	18	16	14	0	50
الكميات المطلوبة	70	160	150	100	480

Min(z) = 2890

س 6) اوجد الحل الامثل لمسألة النقل التالية ، بطريقة المسار المتعرج . علما ان الحل الابتدائي بطريقة Vogel لنقل الكميات المنتجة في مراكز الانتاج S_5,S_4,S_3,S_2,S_1 الى منافذ التوزيع D_4,D_3,D_2,D_1 هو :

$Min(Z) = 5750$ الف دينار

	D1	D2	D3	D4	الانتاج
S1	17	9 100	21	6 150	250
S2	8	6 150	4	2	150
S3	11	20	15	6 200	200
S4	10	2 100	3	7	100
S5	6 200	11	5 50	4 50	300
الكميات المطلوبة	200	350	50	400	1000

س7) شركة وقود ، تمتلك خمسة محطات لتعبئة الوقود في خمسة مدن . وتشتري البنزين المحسن من ثلاثة مراكز لتجهيز الوقود وتنقله الى محطاتها بواسطة الصهاريج (السيارات الحوضية) . تم حساب اقل تكلفة لنقل 1000 طن من البنزين وفق طريقة Vogel كالاتي

$min(Z) = 87500$ دينار

مراكز التجهيز	محطة السماوة	محطة بغداد	محطة العمارة	محطة البصرة	محطة الحلة	الكميات المجهزة
S_1	100 100	120 200	200	150	50 200	500
S_2	50	70	60 50	90 250	80	300
S_3	70	80 100	100 100	150	120	200
الكميات المطلوبة	100	300	150	250	200	1000

المطلوب : اعتماد طريقة التوزيع المعدل Modified distribution لبيان إمكانية خفض تكاليف النقل الكلية عن المبلغ المحتسب بطريقة Vogel ؟

س8) تحتاج كليات العلوم عدداً من النسخ من كتاب الحاسوب وبالاعداد المبينة في الجدول وكانت هناك أربعة دور نشر وتوزيع تستطيع تجهيز الكليات بالكتب المطلوبة وبالاسعار المبينة .

المطلوب : حل المسألة بشكل يحقق اقل تكلفة ممكنة للكليات في عملية التجهيز

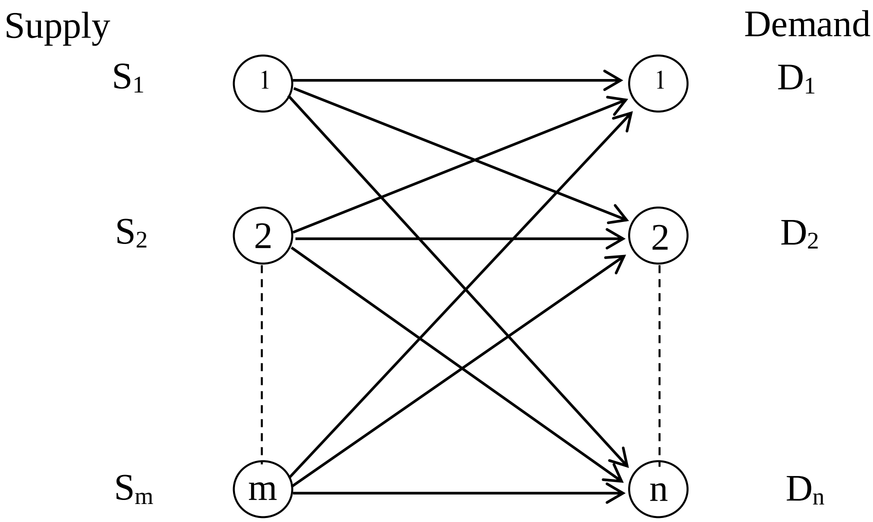
دور النشر والتوزيع	علوم الكوفة	علوم كربلاء	علوم بابل	علوم المستنصرية	علوم بغداد	المجموع
العالمية	15	12	8	10	14	250
الحكمة	18	15	14	16	10	300
جهينة	16	15	11	9	19	250
العربية	17	16	12	10	20	200
	100	150	200	300	250	1000

الفصل الثالث

مسألة النقل

تعتبر مسألة النقل، مسألة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، ويهدف نموذج النقل الى ايجاد طريقة اقل كلفة في نقل عدد من الوحدات المنتجة في عدد من مراكز الانتاج او المصادر Sources الى مراكز الاستهلاك او التخزين (مراكز الطلب Demand . وقد أسهم F. Hitchkook و T. Koopman في وضع نموذج النقل.

ومسألة النقل ، مسألة برمجة خطية ذات بنية خاصة (وكذلك هناك مسائل أخرى لها نفس البنية رغم عدم وجود عملية نقل). ويمكن ان تكتب كنموذج شبكي كالاتي:



حيث

S_i

$i= 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots.. m$

تمثل عدد الوحدات المنتجة او المعروضة في المصدر I

Dj

$j= 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

تمثل عدد الوحدات المطلوبة في المخزن او مركز التسويق J

C_{ij}

تمثل تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر I الى مركز الطلب J

X_{ij}

تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر I الى مركز الطلب J

Z

Z= تمثل مجموع تكاليف النقل

فهناك m من المصادر

و n من مراكز الطلب

ويكون النموذج الرياضي كالاتي :

$$Min(Z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Subject to :

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_i$$

j = 1,2, ………. n

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$$

i = 1,2, ………. m

$C_{ij} \geq 0$

i = 1,2, ………. m

j = 1,2, ………. n

وفي نموذج النقل تتساوى الكميات المعروضة في المصانع او وحدات العرض مع الكميات المطلوبة في المخازن او مراكز الطلب والتسويق.

ولبيان كيفية صياغة نموذج النقل نأخذ المثال التالي :

مثال : مصنع لانتاج الاجهزة الكهربائية ، فيه ثلاثة مراحل انتاجية ولديه اربعة مخازن (لخزن فائض انتاج المراحل وتوزيعها مستقبلا) . وقد كانت تكلفة نقل وحدة واحدة من كل مرحلة انتاج الى المخازن المختلفة وكذلك عدد الوحدات المنتجة اسبوعيا ، وسعة المخازن هي كما مبينة في الجدول التالي :

الوحدات المنتجة	مخزن 4	مخزن 3	مخزن 2	مخزن 1	مراحل الانتاج
500	1	3	1	2	المرحلة الاولى
350	3	1	2	4	المرحلة الثانية
450	3	1	1	2	المرحلة الثالثة
	500	350	250	200	الوحدات المطلوبة

نفرض ان عدد الوحدات المنقولة من المصدر I الى المخزن J = X_{ij}

$i = 1,2,3, \ldots\ldots\ldots$

$j = 1,2,3,4$

وتكون تكاليف النقل الكلية :

$$\begin{aligned} \text{Min }(Z) = \; & 2X_{11} + X_{12} + 3X_{13} + X_{14} + \\ & 4X_{21} + 2X_{22} + X_{23} + 3X_{24} + \\ & 2X_{31} + X_{32} + X_{33} + 3X_{34} \end{aligned}$$

وتكون القيود كالاتي :

قيود خاصة بمراكز الانتاج (المصادر) :

ان عدد الوحدات التي تنقل من أي مصدر الى أي مخزن أو الى كل المخازن يجب ان لا يتجاوز طاقة المصدر .

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 50$ في مركز الانتاج المصدر (1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 350$ في مركز الانتاج المصدر (2)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 450$ في مركز الانتاج المصدر (3)

كذلك هناك قيود خاصة بالمخازن

ان عدد الوحدات المنقولة الى أي مخزن من أي مركز انتاج او من كل مراكز الانتاج يجب ان لا يتجاوز سعة المخزن

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 200$ في مخزن 1

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 250$ في مخزن 2

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 350$ في مخزن 3

$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 500$ في مخزن 4

$X_{ij} \geq 0$

عدد الوحدات المنقولة يجب ان يكون موجبا

حل مسألة النقل

هناك عدة طرق تستخدم في حل مسألة النقل ، جميعها أسهل من طريقة Simplex وتكون نتائجها جيدة ، وهي تستخرج حلاً ابتدائياً وهذه الطرق:

1. طريقة الركن الشمالي الغربي .
2. طريقة الاقل كلفة .
3. طريقة فوكل التقريبية .

طريقة فوكل Vogel Approximation Method

تعتبر من افضل الطرق المستخدمة في ايجاد اقل التكاليف لنقل الوحدات من مراكز الانتاج او العرض الى مراكز الطلب أو المخازن .

خطوات الحل في طريقة فوكل

1) نحسب الفروق في الصفوف وفي الاعمدة بين اقل تكلفتين غير متساويتين .
2) نختار الصف او العمود ذو اكبر الفروق .
3) في الصف او العمود المختار نحدد أصغر خلية فيه من حيث التكلفة ونعمل على تلبية الطلب المقابل لهذه الخلية وحسب كمية العرض المقابل لها . فاذا كانت الكمية المطلوبة أكبر من الكمية المعروضة فيتم إملاء الخلية بجميع الكمية المنتجة . اما اذا كانت الكمية المطلوبة اقل من الكمية المنتجة المقابلة فيتم إملاء الخلية بجميع الكمية المطلوبة .
4) حذف الصف اذا نفذت الكمية المنتجة فيه او حذف العمود اذا تم توزيع الكمية المطلوبة .
5) نعيد حساب فروق الصفوف وفروق الاعمدة ونكرر الاجراءات السابقة من جديد .

مثال : استخرج اقل تكلفة ممكنة لمسألة النقل التالية :

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	2.5	2	5	0	30
S_2	1	0	6	6.5	70
S_3	5.5	4.5	7	8	60
S_4	4	6.2	4.3	10	40
الطلب	50	20	60	70	200

الحل :

نستخرج الفروق

$\Delta R_1=2-0=2$
$\Delta R_2=1-0=1$
$\Delta R_3=5.5-4.5=1$
$\Delta R_4=4.3-4=0.3$

الفروق في الاعمدة

$\Delta C1=2.5-1=1.5$
$\Delta C2=2-0=2$
$\Delta C3=5-4.3=0.7$
$\Delta C4=6.5-0=6.5$

اكبر الفروق هو 6.5 في عمود D4

اصغر خلية في عمود D4 هي a_{14} وفيها تكلفة نقل الوحدة الواحدة 0 وحدة نقد .

مركز الطلب D_4 المقابل للخلية يحتاج 70 وحدة ، بينما مركز الانتاج المقابل للخلية S_1 فيه 30 وحد ة منتجة . وعليه يتم تخصيص كل الوحدات المنتجة في مركز الانتاج S_1 لملأ الخلية .

$X_{14}=30$
$C_{14}X_{14}=0(30)=0$

يحذف صف S1 فتصبح مصفوفة النقل :

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج	$\triangle R$
S_2	1	0	6	6.5	70	1
S_3	5.5	4.5	7	8	60	1
S_4	4	6.2	4.3	10	40	0.3
الطلب	50	20	60	40	170	
$\triangle C$	3	4.5	1.7	2.5		

اكبر الفروق = 4.5 في عمود D2

اصغر خلية في عمود D2 الخلية a_{22} . يحتاج مركز الطلب D_2 المقابل لهذه الخلية الى 20 وحدة . ومركز الانتاج S_2 المقابل للخلية لديه 70 وحدة منتجة. لذلك يتم تخصيص 20 وحدة من الكمية المنتجة في S_2 الى مركز الطلب D_2

$$X_{22}=20$$
$$C_{22}X_{22}=0(20)=0$$

يحذف العمود الثاني . فتصبح المصفوفة :

	D_1	D_3	D_4	الانتاج	$\triangle R$
S_2	1	6	6.5	50	5
S_3	5.5	7	8	60	1.5
S_4	4	4.3	10	40	0.3
الطلب	50	60	40	150	
$\triangle C$	3	1.7	2.5		

اكبر الفروق = 5 في صف S2

اصغر خلية في صف S2 هي الخلية a_{21} وهي تقابل جهة الطلب D_1 والذي يحتاج الى 50 وحدة وتقابل مركز الانتاج S_4 و فيه 40 وحدة منتجة أيضاً .

يتم تخصيص 50 وحدة لملأ الخلية a_{21} .

$X21=50$
$C21X21=1(50)=50$

يحذف صف S2 ويحذف عمود D1 فتصبح المصفوفة .

	D_3	D_4	الانتاج	ΔR
S_3	7	8	60	1
S_4	4.5	10	40	5.5
الطلب	60	40	100	
ΔC	2.5	2		

اكبر الفروق = 5.5 في صف S4

اصغر خلية في الصف الثاني ، الخلية a_{43} وهي تقابل جهة الطلب D_3 التي تحتاج 60 وحدة . وان مركز الانتاج S_4 المقابل للخلية المذكورة فيه 40 وحدة منتجة .

نخصص 40 وحدة من انتاج S_4 لملأ الخلية a_{43}

$X_{43}=40$
$C_{43}X_{43}=4.5(40)=180$

يحذف صف S3 فتصبح المصفوفة كالآتي :

	D_3	D_4	الانتاج
S_3	7	8	60
الطلب	20	40	60

ونكون قد توصلنا الى الحل :

يتم تخصيص 20 وحدة لملأ الخلية a_{33} . و تخصيص 40 وحدة لملأ الخلية a_{34} . وتكون مصفوفة الحل كالآتي :

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	2.5	2	5	0 30	30
S_2	1 50	0 20	6	6	70
S_3	5.5	4.5	7 20	8 40	60
S_4	4	6.2	4.3 40	10	40
الطلب	50	20	60	70	200

$$\text{Min } (Z) = 0(30) + 0(20) + 1(50) + 4.3(40) + 7(20) + 8(40)$$
$$= 50+172+140+320$$
$$=682$$ وحدة نقد

اقل التكاليف الممكنة لنقل الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج الى جهات الطلب .

مشكلة الانحلال في مسائل النقل

ان احد الشروط التي يجب ان تتحقق في أي حل لمسألة النقل هو ان يكون:

عدد المتغيرات الاساسية = عدد الصفوف + عدد الاعمدة –1

$$Xij = R + C - 1$$

واذا لم يتحقق هذا الشرط فان الحل يتسم بالانحلالية ، فاذا اصبح :

عدد المتغيرات الاساسية $R+C - 1 < Xij$

فانه يؤشر وجود خطأ في صياغة المسالة يتمثل بتخصيص الوحدات المنتجة المنقولة . لذلك يجب تعديل الحل بما يضمن تحقيق القاعدة .

اما اذا كان :

عدد المتغيرات الاساسية $R+C - 1 > Xij$

وهو يقع في الحل المبدئي او عند تحسين ، فان ذلك يتطلب ملأ احدى الخلايا بمقدار صفر كي يتحقق الشرط ويصبح الحل ممكناً.

مثال :

استخرج حل مسألة النقل التالية بطريقة فوجل ؟

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	20	12	30	15	520
S_2	40	25	14	28	320
S_3	22	9	10	31	460
الطلب	220	250	380	450	1300

الحل :

نحسب الفروق في الصفوف والفروق في الاعمدة

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج	ΔR
S_1	20	12	30	15	520	3
S_2	40	25	14	28	320	11
S_3	22	9	10	31	460	1
الطلب	220	250	380	450	1300	
ΔC	2	3	4	13		

اكبر الفروق هو 13 في عمود D4 .

اصغر خلية في عمود D4 هي الخلية a_{14} وفيها تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المواد تساوي 15 وحدة نقد .

نلاحظ ان احتياجات المخزن D4 هو 450 وحدة من المواد . وان الكمية المنتجة في مركز الانتاج S_1 هي 520 وحدة لذلك يتم تلبية احتياجات المخزن D_4 بالكامل أي 450 وحدة من الكمية المنتجة في S_1 ويتبقى من انتاج S_1 ما قيمته 0 - 70= (520-450) .

نحذف عمود D4 وتصبح مصفوفة النقل كالاتي :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج	ΔR
S_1	20	12	30	70	8
S_2	40	25	14	320	11
S_3	22	9	10	460	1
الطلب	220	250	380	850	
ΔC	2	3	4		

نلاحظ ان اكبر الفروق الجديدة هو 11 في صف S2 .

أصغر الخلايا في صف S2 هي الخلية a_{23} ، و المخزن D_3 المقابل للخلية a_{23} يحتاج الى 380 وحدة منتجة ، وفي مركز الانتاج S_2 المقابل للخلية فقط 320 وحدة منتجة . لذلك نخصص كل الانتاج في S2 الى المخزن D3 ويبقى المخزن D3 بحاجة الى 60 وحدة (380-320) .

نحذف صف S2 فتصبح المصفوفة كالآتي :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج	ΔR
S_1	20	12	30	70	8
S_3	22	9	10	460	1
الطلب	220	250	60	530	
ΔC	2	3	20		

أكبر الفروق هو 20 في عمود D3 .

أصغر خلية في عمود D3 هي الخلية a_{33} ، المخزن D_3 المقابل لهذه الخلية يحتاج 60 وحدة ، وكمية الانتاج المقابلة لهذه الخلية في مركز الانتاج S_3 تساوي 460 وحدة ، لذلك يتم تخصيص كل الكمية المطلوبة 60 وحدة لملأ الخلية

نحذف عمود D3 ونعيد كتابة مصفوفة النقل ونستخرج الفروق الجديدة :

	D_1	D_2	الانتاج	ΔR
S_1	20	12	70	8
S_3	22	9	400	13
الطلب	220	250	470	
ΔC	2	3		

اكبر الفروق هو 13 في صف S3 . أصغر خلية فيه a32 تقابل مركز الانتاج S3 وفيه 400 وحدة منتجة . وان مركز الطلب المقابل لهذه الخلية وهو D2

يحتاج الى 250 وحدة . لذلك يتم ملأ الخلية بكامل الكمية المطلوبة وهي 250 وحدة ويتبقى في مركز الانتاج S3 (150 وحدة)

نحذف عمود D2 ونكتب مصفوفة النقل الناتجة :

	D_1	الانتاج
S1	20	70
S3	22	150
الطلب	220	

اصبح لدينا خليتان هما A11 و A31 . تملأ الخليتان بالكمية المطلوبة كل خلية من مركز الانتاج المقابل لها .

وسيكون الحل النهائي كالاتي :

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	20 70	12	30	15 450	520
S_2	40	25	14 320	28	320
S_3	22 150	9 250	10 60	31	460
الطلب	220	250	380	450	1300

نستخرج اقل تكلفة ممكنة :

$$\min(Z) = 15(450)+14(320)+10(60)+9(250)+20(70)+22(150)$$
$$= 6750+4480+600+2250+1400+3300$$
$$= 18780$$ وحدة نقد

وهي اقل تكلفة ممكنة لنقل الوحدات المنتجة من مراكز الانتاج الثلاث الى المخازن الاربعة .

مسالة النقل غير المتوازنة

تصبح مسألة النقل غير متوازنة ، عندما لا تتساوى فيها الكميات المنتجة والمعروضة مع الكميات المطلوبة . وفي مثل هذه المسائل فانه عندما تكون الكميات المنتجة (المعروضة) في مراكز الانتاج اكبر من استيعاب جهات الطلب (مراكز التوزيع أو المخازن) فيتم وضع عمود وهمي يستوعب الفائض في الكميات المنتجة وتجعل تكاليف نقل الوحدة الواحدة من الإنتاج الى خلايا هذا العمود مساوية للصفر (أي لايكون هناك عملية نقل حقيقية) .ونتبع خطوات الحل الاعتيادية في طريقة vogel .

وعندما تكون الكميات المنتجة والمعروضة في مراكز الانتاج اقل من استيعاب جهات الطلب فيتم وضع صف وهمي يستوعب الفرق بين الكميات المنتجة في مراكز الانتاج والكميات المطلوبة في جهات الطلب ومنافذ التسويق . ونجعل تكلفة نقل كل وحدة من مراكز الانتاج الى خلايا الصف مساوية للصفر .

مثال:

مصفوفة النقل التالية تشتمل ثلاثة مراكز انتاج هي S_3,S_2,S_1 تنتج 45 وحدة . وفيها ثلاثة منافذ تسويق تستوعب 38 وحدة من الانتاج .

المطلوب :

حساب اقل التكاليف الممكنة لنقل ما تحتاجه منافذ التسويق من الانتاج في مراكز الانتاج ، معتمدا طريقة vogel ؟

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	7	4	5	15
S_2	2	6	3	10
S_3	10	9	8	10
الطلب	20	8	10	

الحل :

نضيف العمود الوهمي D_4 كي يستوعب 7 وحدات وهو الفرق بين الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج والوحدات المطلوبة في منافذ التسويق . ونعتبر تكلفة نقل الوحدة الواحدة من الناتج الى كل خلية في هذا العمود مساوية للصفر .

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج	$\triangle R$
S_1	7	4	5	0	15	4
S_2	2	6	3	0	20	2
S_3	10	9	8	0	10	8
الطلب	20	8	10	7	45	
$\triangle C$	5	2	2	0		

نلاحظ ان اكبر الفروق هو 8 في الصف الثالث

اصغر خلية في الصف الثالث هي الخلية a_{34} في العمود الوهمي D_4 وان مركز الانتاج المقابل لهذه الخلية فيه 10 وحدات منتجة . اما جهة الطلب D_4 المقابلة لهذه الخلية فنحتاج الى 7 وحدات فقط . لذلك نخصص 7 وحدات لملأ الخلية a_{34} ويحذف العمود الوهمي D_4 فتصبح المصفوفة :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج	$\triangle R$
S_1	7	4	5	15	1
S_2	2	6	3	20	1
S_3	10	9	8	3	1
الطلب	20	8	10	38	
$\triangle C$	5	2	2		

اكبر الفروق = 5 في العمود الاول

اصغر خلية في العمود الاول هي a_{21}

مركز الانتاج S_2 المقابل لهذه الخلية ينتج 20 وحدة ، كما وان جهة الطلب D_1 المقابلة لهذه الخلية تحتاج الى 20 وحدة . لذلك يتم تخصيص كامل الكمية المنتجة في S_2 الى جهة الطلب D_1 ثم نحذف العمود D_1 والصف S_2 . فتصبح المصفوفة

$\triangle R$	الانتاج	D_3	D_2	
1	15	5	4	S_1
1	3	8	9	S_3
	18	10	8	الطلب
		3	5	$\triangle C$

اكبر الفروق = 5 في العمود D_2

اصغر خلية في العمود D_2 هي الخلية a_{12} وهي تقابل مركز الانتاج S_1 الذي فيه 15 وحدة منتجة وتقابل ايضا جهة الطلب D_2 التي تحتاج الى 8 وحدات .

يتم تخصيص 8 وحدات من انتاج S_1 الى جهة الطلب D_2 و يحذف العمود D_2 وتصبح مصفوفة النقل .

الانتاج	D_3	
7	5	S_1
3	8	S_3
10	10	الطلب

بقي هناك خليتان فقط . يخصص الى الخلية a_{13} 7 وحدات والخلية a_{33} ثلاثة وحدات .

نكتب جدول النقل بعد ملأ الخلايا فيه ونستخرج مجموع التكاليف.

	D_1	D_2	D_3	D_4	الانتاج
S_1	7	4 8	5 7	0	15
S_2	2 20	6	3	0	20
S_3	10	9	8 3	0 7	10
الطلب	20	8	10	7	45

تم نقل 38 وحدة منتجة في مراكز الانتاج الى منافذ التسويق D_1, D_2 , D_3

ولم تنقل الـ 7 وحدات الفائضة عن استيعاب منافذ التسويق ، وتبقى في مركز الانتاج S_3

$$\text{Min}(Z) = 4(8) + 5(7) + 2(20) + 8(3) + 0(7)$$
$$= 32+35+40+24$$

=131 وحدة نقدية

اقل تكلفة ممكنة لنقل 38 وحدة منتجة في مراكز الانتاج الى منافذ التسويق.

مسألة النقل ذات هدف التعظيم Max (Z)

كان الهدف في مسائل النقل هو تخفيض تكاليف نقل الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج الى جهات الطلب ومنافذ التسويق المختلفة .

في بعض الحالات تكون مسألة النقل لفعاليات وانشطة مطلوب تعظيمها . ويمكن استخدام نموذج النقل في تعظيم الارباح مثلما استخدم لخفض التكاليف . وبنفس الاسلوب مع بعض الاجراءات وكما يأتي :

لتحويل مسألة النقل التي تهدف الى التعظيم Max (Z) الى مسألة نقل ذات هدف تدنية min(Z) نستخرج تكاليف الفرص ، حيث تحدد الخلية ذات اكبر التكاليف . ويتم طرح قيم كل خلية في مصفوفة النقل من الخلية المذكورة . ونكتب مصفوفة النقل الجديدة وتحل بنفس الاسلوب المتبع بطريقة vogel ، لكن عند احتساب الناتج النهائي لتكاليف النقل يتم ضرب القيم الحقيقية للخلايا قبل التحويل (وليس الجديدة) * الربح الاصلي .

ويعود السبب في حساب تكاليف الفرص . الى انه في حالة عدم استغلال طريق معين عبر الخلية ذات اكبر تكلفة لنقل الوحدة الواحدة ، فيكون هنالك اضطرار الى استغلال خلايا اخرى اقل تكلفة وبهذه تحول مسألة النقل من هدف التعظيم max(Z) الى هدف التدنية min(Z)

مثال :

مصفوفة النقل التالية تبين الكميات المنتجة في مراكز الانتاج الثلاثة S_3,S_2,S_1 والكميات المطلوبة في منافذ التسويق الثلاث D_2,D_1 ,D_3 والارباح المتحققة لنقل الوحدة الواحدة من كل مركز من مراكز الانتاج الى أي من منافذ التسويق المختلفة .

المطلوب :حل مسألة النقل ، واستخراج افضل طريقة في توزيع الكميات المنتجة الى منافذ التسويق بحيث تحقق اعلى ربح ممكن .

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	10	15	10	150
S_2	12	13	11	150
S_3	13	11	8	100
الطلب	120	180	100	400

الحل :

نلاحظ ان الخلية ذات اكبر الارباح لنقل وحدة واحدة من الانتاج هي a_{12} فيها الربح (تكلفة نقل الوحدة الواحدة من انتاج S_1 الى منفذ التسويق D_2 مساوية لـ 15 وحدة نقدية) .

نكتب مصفوفة النقل الجديدة بعد طرح قيم كل خلية من 15 فتصبح مصفوفة النقل كالاتي :

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	5	0	5	150
S_2	3	2	4	150
S_3	2	4	7	100
الطلب	120	180	100	400

الان نستخرج الحل الابتدائي بطريقة vogel

$\triangle R_1 = 5$

$\triangle R_2 = 1$

$\triangle R_3 = 2$

$\triangle C_1 = 1$

$\triangle C_2 = 2$

$\triangle C_3 = 1$

اكبر الفروق = 5 في الصف الاول

اصغر خلية في الصف الاول هي الخلية a_{12} وهي تقابل مركز الانتاج S_1 وفيه 150 وحدة وتقابل ايضا منفذ التسويق D_2 الذي يحتاج الى 180 وحدة . اذلك يتم تخصيص 150 وحدة الى الخلية a_{12} ويحذف الصف الاول ، فتصبح مصفوفة النقل:

	D_1	D_2	D_3	الانتاج	$\triangle R$
S_2	3	2	4	150	1
S_3	2	4	7	100	1
الطلب	120	30	100	250	
$\triangle C$	1	2	3		

أكبر الفروق = 3 في العمود D_3

اصغر خلية في العمود D_3 هي الخلية a_{23} وهي تقابل مركز لانتاج S_2 وفيه 150 وحدة ، وتقابل ايضا منفذ التسويق D_3 ويحتاج الى 100 وحدة ، لذلك يتم تخصيص 100 وحدة لملأ الخلية a_{23} وبحذف العمود D_3 فتصبح مصفوفة النقل كالآتي :

	D_1	D_2	الانتاج	$\triangle R$
S_2	3	2	50	1
S_3	2	4	100	2
الطلب	120	30	150	
$\triangle C$	1	2		

اكبر الفروق = 2 في كل من الصف S_3 والعمود D_2 نختار احدهما وليكن الصف S_3 . اصغر خلية فيه ، الخلية a_{31} تقابل مركز الانتاج S_3 وفيه 100 وحدة

وتقابل ايضا منقذ التسويق D_1 ويحتاج الى 120 وحدة . لذلك يتم تخصيص 100 وحدة لملأ الخلية a_{31} ويحذف الصف S_3 فتصبح مصفوفة النقل .

	D_1	D_2	الانتاج
S_2	3	2	50
الطلب	20	30	

تخصص 30 وحدة لملأ الخلية a_{22} و 20 وحدة الخلية a_{21} .

تكتب مصفوفة النقل بعد ملأ الخلايا ، ثم تستخرج ارباح النقل .

	D_1	D_2	D_3	الانتاج
S_1	10	15 (150)	10	150
S_2	12 (20)	13 (30)	11 (100)	150
S_3	13 (100)	11	8	100
الطلب	120	180	100	400

اكبر ربح ممكن لنقل الوحدات المنتجة في مراكز الانتاج الى منافذ التسويق :

$= 15\ (150) + 12\ (20) + 13\ (30) + 11\ (100) + 13\ (100)$

$= 2250 + 240 + 390 + 1100 + 1300$

$= 5280$ وحدة نقد

الفصل الرابع

مسألة التخصيص

تعالج مسألة التخصيص ، توزيع عدد من العناصر على عدد من الوظائف او المهام ، بحيث يخصص عنصر واحد لغرض واحد . وكمثال على ذلك تخصيص مجموعة من الافراد على المكائن بحيث يخصص فرد واحد لماكنة واحدة، بشكل يقلل من التكاليف الكلية لانجاز المهام او زيادة المنافع المتحققة من العملية . كذلك الامر عندما تكون المسألة تتعلق بتخصيص الوظائف على عدد من المكائن (عندما يمكن للماكنة الواحدة ان تؤدي عدد من الوظائف) بحيث تخصص وظيفة واحدة للماكنة الواحدة بشكل يقلل التكاليف الكلية او يزيد من اداء المكائن.

وتعد مسائل التخصيص حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية باعتبارها مسألة نقل ذات خصائص معينة ، فمسألة النقل تهدف الى نقل الوحدات المنتجة من مراكز الانتاج الى جهات الطلب او منافذ التسويق . وكذلك مسألة التخصيص هدفها تخصيص عدد من العناصر على عدد من المهام او الوظائف .

مثال :

رئيس عمال في ورشة معينة في المصنع (4) عمال وهناك (4) وظائف شاغرة ، فما هو افضل تخصيص للعمال الى الوظائف ، يقلل من مجموع التكاليف، اذا كانت تكلفة تخصيص كل عامل الى أي من هذه الوظائف هي كما في الجدول التالي :

		الوظائف			
الأشخاص		P_1	P_2	P_3	P_4
	M_1	50	70	100	30
	M_2	30	60	80	40
	M_3	40	30	60	20
	M_4	10	40	20	100

هنا الهدف هو تعظيم كفاءة التخصيص الوظيفي .

$$Z = 5X_{11} + 7X_{12} + 10X_{13} + 3X_{14} +$$
$$3X_{21} + 6X_{22} + 8X_{23} + 4X_{24} +$$
$$4X_{31} + 3X_{32} + 6X_{33} + 2X_{34} +$$
$$X_{41} + 4X_{42} + 2X_{43} + 10X_{44}$$

القيود

عند تخصيص العامل I الى الوظيفة j $X_{ij} = 1$

عندما لا يخصص العامل I الى الوظيفة j $X_{ij} = 0$

القيود الخاصة بعدم امكانية تخصيص عامل واحد للعمل على اكثر من وظيفة واحدة (كل شخص يعين لوظيفة واحدة) .

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$$

والقيود المتعلقة بعدم تكليف اكثر من عامل لوظيفة واحدة (أي وظيفة لها شخص واحد) .

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$$

ولكون (1 أو $X_{ij} = 0$) فأن مسألة التخصيص ليست مسألة برمجة خطية . لكن بسبب امكانية ارجاعها الى مسألة نقل ، يمكن اعتبارها حالة خاصة من مسائل النقل وبالتالي مسائل البرمجة الخطية .

ونموذج التخصيص كالاتي :

$$Max(Z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$$

i = 1,2, …….. N

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$$

J = 1,2, ……. N

X_{ij} = 0,1

i = 1,2, ………. N

j = 1,2, ………. N

P_{ij} علاقة مساهمة العنصر I في الموقع J وعندما تؤول P_{ij} الى تكاليف فأن Z يتم ترتيبها حسب الصيغة :

$$Min(Z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$$

J = 1,2, ………. N

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$$

i = 1,2, ………. N

X_{ij} = 0 or 1

i = 1,2, ………. N

j = 1,2, ………. N

حل مسألة التخصيص

هناك عدة طرق لحل مسالة التخصيص ، وهي أسهل من طريقة البرمجة الخطية . ومن افضل هذه الطرق هي الطريقة الهنكارية .

الطريقة الهنكارية

تعتمد الطريقة الهنكارية على استخراج تكلفة الفرصة Opportunity Cost

خوارزمية الطريقة الهنكارية

1) طرح أصغر قيمة في كل صف من عناصر الصف واعادة كتابة المصفوفة الناتجة.

2) طرح أصغر قيمة في كل عمود من عناصر العمود وكتابة المصفوفة الناتجة . ونتيجة للخطوتين السابقتين ستتكون عدة عناصر صفرية في المصفوفة .

3) يغطى كل صف يحتوي اكثر من عنصر صفري ، يغطى بخط أفقي ويغطى كل عمود يحتوي اكثر من عنصر صفري بخط عمودي .

4) اذا كان مجموع الخطوط (الافقية والعمودية) $\geq N$ فنكون قد توصلنا الى الحل الامثل ونجري الاتي :

أ- تخصيص الصفر الموجود في كل صف ونشطب عناصر العمود الذي يقع فيه هذا العنصر .

ب- أو نخصص الصفر الموجود في كل عمود ونشطب عناصر الصف الذي يقع فيه هذا العنصر .

ج- نحسب مجموع التكلفة لعملية التخصيص من جدول المسألة الاصلي بجمع العناصر المناظرة لهذه الاصفار المخصصة .

5) في حالة كون عدد الخطوط $< N$ نتبع الاتي :

أ- نختار أصغر عنصر في الجدول غير مغطى بخطوط .

ب- نضيف قيمة هذا العنصر الى العناصر المغطاة بخطين (افقي وعمودي).

ج- نطرح قيمة هذا العنصر من العناصر غير المغطاة في الجدول .

نذهب الى الخطوة رقم (4) .

مثال 1 :

أوجد أفضل تخصيص لأربعة من الفنيين على أربعة أعمال . علما ان مصفوفة التخصيص هي :

	E_1	E_2	E_3	E_4
T_1	6	4	1	3
T_2	8	7	10	9
T_3	4	5	11	7
T_4	6	7	8	5

الحل :

نطرح أصغر قيمة في كل صف من عناصر الصف فتصبح المصفوفة كالاتي :

	E_1	E_2	E_3	E_4
T_1	5	3	0	2
T_2	1	0	3	2
T_3	0	1	7	3
T_4	1	2	3	0

نطرح أصغر قيمة في كل عمود من عناصر العمود فتبقى المصفوفة كما هي :

	E_1	E_2	E_3	E_4
T_1	0	3	2	2
T_2	1	0	0	2
T_3	0	1	4	3
T_4	1	2	0	0

نلاحظ عدم وجود خطوط .

ان اصغر عنصر في الجدول هو a_{21} وقيمته = 1 .

نطرح هذه القيمة (1) من العناصر فتصبح المصفوفة :

	E_1	E_2	E_3	E_4
T_1	4	2	$\boxed{0}$	1
T_2	0	$\boxed{0}$	2	2
T_3	$\boxed{0}$	0	6	2
T_4	0	1	2	$\boxed{0}$

بذلك حصلنا على عناصر صفرية جديدة .

عدد الخطوط = $N < 5$

اذن الجدول يمثل الحل الامثل وعليه :

يخصص الفني T_1 للعمل E_3

يخصص الفني T_2 للعمل E_2

يخصص الفني T_3 للعمل E_1

يخصص الفني T_4 للعمل E_4

تكلفة التخصيص = 1 + 10 + 5 + 5 = 21 وحدة

$Min(Z) = 1 + 7 + 4 + 5 = 17$ وحدة

مثال 2 :

شركة صناعة المنظفات ومساحيق الغسيل لديها ثلاثة مصانع في كل من بغداد والحلة وكربلاء . وتمتلك الشركة أربعة مخازن للمواد الاولية . فما هي الطريقة المثلى لتخصيص مخزن لكل مصنع يجعل تكاليف التخصيص أقل ما يمكن. علما ان تكلفة نقل الطن الواحد من المواد الاولية من كل مخزن الى أي من المصانع هي كما في الجدول :

مصنع كربلاء	مصنع الحلة	مصنع بغداد	المخازن
70	75	100	مخزن A
75	80	110	مخزن B
60	100	75	مخزن C
80	120	80	مخزن D

الحل : بما ان عدد المخازن اكبر من عدد المصانع ، لذلك نضيف الى المصفوفة المصنع الوهمي ونجعل تكاليف التخصيص فيه صفر :

مصنع وهمي	مصنع كربلاء	مصنع الحله	مصنع بغداد	المخازن
0	70	75	100	مخزن A
0	75	80	110	مخزن B
0	60	100	75	مخزن C
0	80	120	80	مخزن D

نطرح اصغر قيمة من كل صف من عناصر الصف فتبقى المصفوفة كما هي .
نطرح أصغر قيمة في كل عمود من عناصر العمود فتصبح المصفوفة كالآتي :

المخازن	مصنع بغداد	مصنع الحلة	مصنع كربلاء	مصنع وهمي
مخزن A	25	0	10	0
مخزن B	35	5	15	0
مخزن C	0	25	0	0
مخزن D	5	45	20	0

نلاحظ ان عدد الخطوط = 3 وهو < N
أصغر قيمة غير مغطاة بخطوط هي 5 .
نضيف 5 الى العناصر المغطاة بخطين وهي a_{14} و a_{34} . ونطرح 5 من باقي العناصر غير المغطاة فتصبح المصفوفة كالآتي :

المخازن	مصنع بغداد	مصنع الحلة	مصنع كربلاء	مصنع وهمي
مخزن A	25	$\boxed{0}$	10	5
مخزن B	30	0	10	$\boxed{0}$
مخزن C	0	25	$\boxed{0}$	5
مخزن D	$\boxed{0}$	40	15	0

عدد الخطوط = 4 = N
اذن الجدول يمثل جدول الحل الامثل . نخصص الاصفار ونحسب تكاليف التخصيص

$$Min(Z) = 75 + 60 + 80 = 215$$

مثال 3 :

مدير الانتاج في المصنع لديه (4) مهندسين وهناك (4) ورش شاغرة ، فما هو أفضل تخصيص للمندسين الى الورش يقلل مجموع التكاليف ، اذا كانت تكلفة تخصيص كل مهندس الى أي من هذه الورش هي كما في الجدول التالي:

المهندسين	التفريز	التنعيم	السباكة	الخراطة
M_1	5	7	10	3
M_2	3	6	8	4
M_3	4	3	6	2
M_4	1	4	2	10

الحل :

1) نحدد أصغر قيمة في كل صف

$M_1 = 3$
$M_2 = 3$
$M_3 = 2$
$M_4 = 1$

نطرح أصغر قيمة في كل صف من عناصر الصف ، فتصبح المصفوفة :

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	4	7	0
M_2	0	3	5	1
M_3	2	1	4	0
M_4	0	3	1	9

2) نحدد اصغر قيمة في كل عمود

$P_1 = 0$
$P_2 = 1$
$P_3 = 1$
$P_4 = 0$

نطرح أصغر قيمة من عناصر العمود فتصبح المصفوفة كالآتي :

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	3	6	0
M_2	0	2	4	1
M_3	2	0	3	0
M_4	0	2	0	9

نغطي كل صف يحتوي أكثر من صفر بخط أفقي

ونغطي كل عمود يحتوي أكثر من صفر بخط عمودي

عدد الخطوط = 4 = N

اذن الحل هو حل أمثل ، فيتم تخصيص الوظائف كالآتي :

تخصيص الوظيفة P_1 للعامل M_2 .

تخصيص الوظيفة P_2 للعامل M_3 .

تخصيص الوظيفة P_3 للعامل M_4 .

تخصيص الوظيفة P_4 للعامل M_1 .

ان تكلفة الفرصة لهذه التخصيصات = صفر

نستخرج التكاليف الكلية لأداء هذه الوظائف من الجدول الاصلي كالاتي :

$Min(Z) = 3 + 3 + 3 + 2 = 11$ وحدة

التخصيص المقيد

قد تكون هناك قيود توضع على مسألة التخصيص ، لسبب او لاخر . مثلا قد يكون هناك عنصر غير مرغوب تخصيصه لوظيفة معينة لأمر يتعلق بالكفاءة او لربما الناحية الامنية . فكيف يتم التعامل مع هذه القيود .

نجعل التخصيص غير المرغوب لا يؤثر في الحل وذلك بجعل قيمته كبيرة وعكس هدف مسألة التخصيص ، فاذا كانت مسألة التخصيص ذات هدف تدنية نجعل قيمة التخصيص غير المرغوب كبيرة جدا مقارنة ببقية القيم ولتكن M . اما اذا كانت مسألة التخصيص ذات هدف تعظيم فنجعل قيمة التخصيص غير المرغوب سالبة بمقدار كبير مثلا M- .

مثال 4 :

في المثال السابق ، وجه مدير الانتاج رئيس المهندسين في الورشة بضرورة عدم تخصيص المهندس M4 الى ورشة السباكة .

المطلوب : حل مسألة تخصيص في ضوء التخصيص غير المرغوب ؟

الحل :

نجعل قيمة التخصيص المذكور يساوي M

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	5	7	10	3
M_2	3	6	8	4
M_3	4	3	6	2
M_4	1	4	m	10

نطرح اصغر قيمة في كل صف من عناصر الصف فتصبح المصفوفة كالاتي :

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	5	7	0
M_2	0	3	5	1
M_3	2	1	4	0
M_4	0	3	m	9

يبقى المقدار M كبيراً رغم طرح العنصر 4 منه . فنبقي على المقدار M على حالة كدليل على كون الناتج مقدار كبيراً ايضاً .

نطرح اصغر قيمة في كل عمود من عناصر العمود فتصبح المصفوفة الناتجة:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	4	3	0
M_2	0	2	1	1
M_3	2	0	0	0
M_4	0	3	m	9

عدد الخطوط = 3 وهو اقل من N

اصغر عنصر غير مغطى هو X_{23} وقيمتة تساوي 1 . نضيف 1 الى كل من العنصرين X_{31} , X_{34} ونطرح 1 من العناصر غير المغطاة بخطوط فتصبح المصفوفة .

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	3	2	0
M_2	0	1	0	1
M_3	3	0	0	1
M_4	0	1	m	9

أصبح عدد الخطوط N = 4

اذن الجدول يمثل الحل الامثل

نبدأ بالتخصيص :

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	2	3	2	$\boxed{0}$
M_2	0	1	$\boxed{0}$	1
M_3	3	$\boxed{0}$	0	1
M_4	$\boxed{0}$	1	m	9

min (Z)= 5+4+3+2=14 وحدة

نلاحظ ارتفاع مجموع التكاليف بسبب التخصيص المقيد .

مسألة التخصيص ذات هدف التعظيم Max(Z)

يمكن لنموذج التخصيص ان يحل مسائل تتضمن هدف التعظيم ، مثلا تعظيم الارباح او الايرادات المتحققة من تخصيص أنشطة معينة في مواقع مختلفة.

خطوات الحل:

1) نساوي عدد الصفوف بعدد الاعمدة باضافة صف وهمي او عمود وهمي .

2) تحويل مسالة التخصيص الى مصفوفة مقابلة ، وذلك باستخراج مصفوفة الفرص الضائعة حيث نطرح عناصر كل عمود من اكبر قيمة في العمود نفسه .

3) نتبع خطوات حل مسائل التخصيص ذات التدنية Min (Z) وسيكون التخصيص الامثل هو الذي يتضمن تخفيض الفرص الضائعة .

مثال 1 :

المصفوفة التالية تمثل الإيرادات المتوقعة لشركة السيارات عند تخصيص ورشة مركزية لصيانة السيارات في كل مدينة من المدن الثلاثة التالية :

ورش صيانة السيارات	الموصل	**بغداد**	البصرة
ورشة سيارات بيجو	10000	8000	12000
ورشة السيارات البرازيلية	15000	18000	6000
ورشة سيارات تويوتا	16000	10000	20000
ورشة سيارات مرسيدس	12000	17000	10000

المطلوب : ايجاد افضل تخصيص يتضمن اكبر ايراد مالي للشركة ؟

الحل :

نضيف العمود الوهمي P_4 وعناصره اصفاراً .

ورش صيانة السيارات	الموصل	بغداد	البصرة	مدينة وهمية

0	12000	8000	1000	ورشة سيارات بيجو
0	6000	18000	15000	ورشة السيارات البرازيلية
0	20000	10000	16000	ورشة سيارات تويوتا
0	10000	17000	12000	ورشة سيارات مرسيدس

نستخرج مصفوفة القيم الضائعة بطرح عناصر كل عمود من اكبر عنصر فيه

مصفوفة القيم الضائعة

مدينة وهمية	البصرة	بغداد	الموصل	صيانة السيارات
~~0~~	8000	10000	6000	ورشة سيارات بيجو
~~0~~	~~14000~~	~~0~~	~~1000~~	السيارات البرازلية
~~0~~	~~0~~	~~8000~~	~~0~~	ورشة سيارات تويوتا
~~0~~	10000	1000	4000	ورشة سيارات مرسيدس

عدد الخطوط = 3 وهو اقل من N

نطرح اصغر قيمة في كل صف من عناصر الصف ، فتبقى المصفوفة كما هي. ونطرح اصغر قيمة في كل عمود من عناصر العمود فتبقى المصفوفة كما هي

عدد الخطوط = N >3

نحدد اصغر عنصر غير مغطى بخطوط وهو 1000 $C_{4\,2}$=

نضيف 1000 (العنصر المذكور) الى العناصر المغطاة بخطين وهما C_{24},C_{34} ونطرح 1000 من العناصر غير المغطاة بخطوط فتصبح المصفوفة كالاتي :

مدينة وهمية	البصرة	بغداد	الموصل	ورش صيانة السيارات
0	7000	9000	5000	ورشة سيارات بيجو
1000	14000	0	1000	ورشة السيارات البرازيلية

ورشة سيارات تويوتا	0	8000	0	1000
ورشة سيارات مرسيدس	3000	0	9000	0

عدد الخطوط $N = 4$

نلاحظ تعذر امكانية التخصيص بسبب اشتراك الخلايا في الصفوف والاعمدة ، لذلك نستمر خطوة أخرى .

أصغر قيمة غير مغطاة بخطوط هي العنصر C_{21} وقيمته 1000 .

نضيف 1000 الى العنصرين C_{32},C_{34} المغطيان بأكثر من خط . ونطرح 1000 من العناصر غير المغطاة بخطوط فتصبح المصفوفة كالآتي :

ورش صيانة السيارات	الموصل	بغداد	البصرة	مدينة وهمية
ورشة سيارات بيجو	4000	9000	6000	~~0~~
ورشة السيارات البرازيلية	~~0~~	~~0~~	~~13000~~	~~1000~~
ورشة سيارات تويوتا	~~0~~	~~9000~~	~~0~~	~~2000~~
ورشة سيارات مرسيدس	~~3000~~	~~0~~	~~9000~~	~~0~~

عدد الخطوط $= 6 > N$

ونكون قد توصلنا الى التخصيص الأمثل .

تخصص ورشة صيانة السيارات البرازيلية في مدينة الموصل

تخصص ورشة صيانة سيارات المارسيدس في مدينة بغداد

تخصص ورشة صيانة السيارات تويوتا في مدينة البصرة

ولا تخصص ورشة لصيانة سيارات البيجو في أي من تلك المدن . حيث خصصت في المدينة الوهمية .

والتخصيص يحقق ايراداً مقداره :

$Max(z)=15000+20000+17000=52000$ وحدة نقدية

أسئلـــــة

س1) منشاة الصناعات الميكانيكية لديها ثلاث مصانع وثلاث مخازن للمواد الاولية. فما هي الطريقة المثلى لتخصيص مخزن لكل مصنع بحيث تصبح تكاليف النقل اقل ما يمكن . علما ان تكلفة نقل وحدة واحدة من كل مخزن الى أي من المصانع هي كما في الجدول .

مخزن C	مخزن B	مخزن A	المصنع
8	9	6	مصنع الوليد
15	7	8	مصنع الاسكندرية
10	4	5	مصنع المسيب

س2) اذا كانت تكلفة انجاز الوظائف P_1 , P_2 , P_3 , P_4 خلال وحدة الزمن ، من قبل اربعة فنيين T_1,T_2,T_3,T_4 هي كما في الجدول التالي :

P_4	P_3	P_2	P_1	الفنيين
350	100	250	150	T_1
210	400	270	170	T_2
190	90	280	120	T_3
230	170	260	100	T_4

المطلوب : ايجاد افضل تخصيص ، يجعل مجموع تكاليف انجاز الوظائف اقل ما يمكن ؟

س3) أوجد افضل جدول للامتحانات النهائية يلبي رغبة أكبر عدد من الطلبة . علماً ان مصفوفة التخصيص التي تمثل رغبات الطلبة في مواعيد امتحانات المواد الدراسية هي كالآتي :

التاريخ	هياكل بيانات	دوائر رقمية	بحوث عمليات	C++	برمجة عددية	برمجة مرئية
5/20	30	21	20	32	30	24
5/22	12	25	30	18	10	20
5/24	12	30	32	15	20	18
5/26	31	14	23	30	32	25
5/28	20	28	31	15	18	28
5/31	32	20	10	31	33	29

س4) قناة تلفزيونية . أجرت استفتاءً لمشتركيها لتخصيص برامجها على ايام الاسبوع المهمة. فكانت نتيجة الاستفتاء هي كما في المصفوفة التالية :

سهرة منوعة	فلم اجنبي	مسرحية	فلم عربي	**الايام**
3000	3000	1000	2000	الاحد
1000	5000	3000	4000	الاثنين
5000	4000	2000	7000	الخميس
6000	1000	5000	3000	الجمعة

المطلوب : ايجاد التخصيص الامثل للبرامج على ايام الاسبوع بشكل يلبي رغبة اكبر عدد من المشتركين ؟

س5) شركة النسيج الوطنية ، تنتج اربعة انواع من المنسوجات في اربعة مصانع لها ، وكانت الطاقة الانتاجية للمصانع متشابهة . اذا كانت تكاليف انتاج م^2 من كل نوع من المنسوجات بالدينار كما في الجدول التالي :

المنسوجات	مصنع الكوت	**مصنع الحلة**	مصنع السماوة	مصنع القادسية
القطنية	500	700	1100	600
الصوفية	800	500	900	700
الحريرية	600	700	100	800
البولستر	1000	600	1200	900

المطلوب :

تخصيص كل مصنع لانتاج نوع واحد من المنسوجات ، بحيث تصبح تكاليف الانتاج الكلية اقل ما يمكن ؟

References المصادر

1) Amedeo R.and Richard C. , Urban operation Research , Prentice – Hall Inc. , 1981.
2) Anderson M. Q. , Quantitative Management Decision Making : with models and applications , Monterey calif. Brook / cole Publishing company , 1982.
3) Bazarra M. and Jarvis J. , linear programming and network flows , John Wiley and sons , U.S.A , 1977 .
4) Charles A.Holloway , Decision Making under uncertainly : Models and choices , Prentice – Hall Inc .,Englewood cliffs , 1977 .
5) Hamdy A. Taha , Operations Research 3rd. ed. , Macmillan Publishing Co. Inc. , U.S.A 1982 .
6) Hans G. and John A. , Introduction to operations Research Techniques , Allyn and Bacon Inc. , 1978 .
7) Hiller and Lieferman , Introduction to operations Research , Holdenday Inc. , San francisco 1980.
8) Hoel , finite Mathematics & calculus with Applications to business , John Wiley & sons Inc. , Newyork U.S.A.
9) Hoffman , A.J. , Cycling in the simplex Algorithm ,National Bureau of standards 1983.
10) Levin I. Richard , c.A. kirkpatrick , and D.S. Rubin , Quantitative approaches to management , 5ed. Mcgraw – Hill Inc . ,U.S.A 1982.
11) Leon Cooper , U. Narayan Bhat , and Larry J.Leblanc , Introduction to operation Research Models , W.B. Saunders Company , U.S.A 1977.
12) Makower M.S. , operation Research , stagton. Britain 1977.
13) Strum J.E. , Introduction to Linear programming , Holden day Inc. , San francisco 1972.
14) Swanson L.W. , linear Programming , Mcgraw – Hill Inc. , Newyork U.S.A 1980.
15) Vajda S. , Mathematical programming , Addison - wesley Publishing Co . , U.S.A 1961.