الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الجبر الخطي (١)

الدكتور

يوسف الوادي

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

١٤٣٦ – ١٤٣٧ هـ

٢٠١٥ – ٢٠١٦ م

الجبر الخطي (١)

لطلاب السنة الأولى

قسم الإحصاء الرياضي

(كلية العلوم)

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الجبر الخطي (١)

الدكتور

يوسف الوادي

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

١٤٣٥ — ١٤٣٦ هـ

٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

الفهرس

الموضوع	الصفحة
٢ . ٧ . المصفوفات المتناظرة والمتناظرة المتخالفة.	٦٨
٢ . ٨ . المصفوفات الهرميتية.	٧٠
– تمارين.	٧٤
الفصل الثالث: المحددات	٧٧
٣ . ١ . مفهوم المحددات.	٧٧
٣ . ٢ . نشأة المحددات.	٨٠
٣ . ٣ . قاعدة ساروس.	٨١
٣ . ٤ . خواص المحددات.	٨٢
٣ . ٥ . ملاحظات مهمة.	٩٠
٣ . ٦ . تمارين محلولة.	٩١
– تمارين.	٩٨
الفصل الرابع: حلول الجمل الخطية	١٠١
٤ . ١ . الشكل المصفوفي لجملة معادلات خطية.	١٠١
٤ . ٢ . العمليات الأولية على أسطر مصفوفة.	١٠٣
٤ . ٣ . اختزال مصفوفة إلى الشكل المدرج.	١٠٧
٤ . ٤ . توظيف الشكل المدرج في حل جملة معادلات خطية.	١٠٩
٤ . ٥ . مقلوب مصفوفة مربعة.	١١٢

الموضوع	الصفحة
٤ . ٦ . حل جملة خطية بواسطة مقلوب مصفوفة.	١١٦
٤ . ٧ . مناقشة حلول جملة خطية.	١١٧
٤ . ٨ . قاعدة كرامر في حل جملة خطية.	١٢١
٤ . ٩ . مقلوب مصفوفة مربعة باستخدام المحددات.	١٢٣
٤ . ١٠ . نموذج من تطبيقات الجبر الخطي.	١٢٩
– تمارين محلولة.	١٣٥
– تمارين.	١٤٩
الفصل الخامس: الفضاء المتجهي (الشعاعي)	١٥٥
٥ . ١ . المتجهات في R^2, R^3, R^n.	١٥٥
٥ . ٢ . الفضاء المتجهي.	١٦٣
٥ . ٣ . الفضاء الجزئي.	١٦٨
٥ . ٤ . التركيب الخطي.	١٧٣
– تمارين.	١٨٠
٥ . ٥ . الارتباط والاستقلال الخطي.	١٨١
٥ . ٦ . القاعدة والإحداثيات والبعد.	١٨٦
– تمارين.	١٩٨
٥ . ٧ . فضاءات خاصة بالمصفوفات.	٢٠٠

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وَقُل رَبِّ زِدنِي عِلماً﴾

يعد الجبر الخطي من العلوم القديمة الحديثة؛ إذ أدى التطور العلمي الهائل في المجالات جميعها إلى بقاء هذا الفرع من علوم الرياضيات حياً؛ مستمراً في تطوير نفسه؛ ليخدم كل متطلب جديد في الرياضيات والفيزياء والكيمياء والإحصاء والاقتصاد والمعلوماتية والاتصالات وفروع أخرى. ولا يخفى علينا تطبيقات المفاهيم المختلفة للجبر الخطي في نظرية بحوث العمليات مثلاً، وفي مجال معالجة الصورة، ودراسات إحصائية مختلفة، مثل: النمو السكاني وغيرها.

يأتي هذا الكتاب لتلبية الحاجات الأساسية لطالب العلوم؛ إذ يُعد لبنة أولى في بناء رياضي ضروري لدارسي العلوم التطبيقية ومنها الإحصاء الرياضي.

يغطي هذا الكتاب مفردات منهاج الجبر الخطي (١) لطلاب الإحصاء الرياضي في كلية العلوم، وتتوزع مفرداته على فصول سبعة، جاء أولها خارج سياق الجبر الخطي لكنه يحتوي على مفاهيم لا بد منها لكل من يود الاطلاع على أي فرع رياضي، ونقصد هنا مفاهيم المجموعات والعلاقات والتطبيقات والبنى الجبرية، أما الفصول الثاني والثالث والرابع، فهي تعد كتلة مترابطة تتمحور حول حل جملة المعادلات الخطية، التي نستخدم فيها المصفوفات والمحددات، لذلك نجد أنفسنا مضطرين للتعرف إلى كل ما يتعلق بخصائص كل منهما (مصفوفات ومحددات)، ومن ثم نناقش إمكانية وجود حلول لجملة معادلات خطية في ضوء ما نخلص إليه في دراسة خصائص كل من المصفوفات والمحددات والعمليات عليهما.

ننقل القارئ في الفصل الخامس إلى دراسة كائن رياضي آخر، لا يخلو منه أي كتاب في الجبر الخطي، ألا وهو الفضاءات الشعاعية أو ما يسمى بالفضاءات المتجهية، ولكي تكون الفكرة هنا مبسطة، فإننا نقدم لهذا، بما هو ملموس ومعروف عن المتجهات (الأشعة) في الفضاءات المألوفة، ثم ننتقل إلى دراسة الفضاء المتجهي بشكله العام، وكل ما يتفرع عن ذلك من مفهوم الفضاء الجزئي والارتباط والاستقلال الخطي والقاعدة والبعد. لا نذهب في الفصل السادس بعيداً عن الفضاءات المتجهية إذ ندرس هنا التطبيقات الخطية أو ما يسمى أيضاً التحويلات الخطية، فنتعرف مفهوم التطبيق الخطي وخصائصه، ونتعرف أيضاً نواته وصورته، ومن خلال ذلك نتعرف التطبيقات الخطية المتباينة والغامرة، كما نربط التطبيقات الخطية بالمصفوفات، ونتعرف العلاقات التي تحكم هذا الرابط، ثم ننتقل إلى دراسة فضاء هذه التطبيقات وتماثله مع فضاء المصفوفات حيث نختم بموضوع المصفوفات المتشابهة.

أما الفصل السابع، فقد جاء مقتضباً واختيارياً، إلا أنه يُعد مقدمة لربط هذا المقرر بالمقرر الذي يليه ألا وهو الجبر الخطي (٢).

لقد تدرجنا في تناول هذه المواضيع بشكل علمي ميسر وزودناها بأمثلة وتمارين كافية.

ونريد أن نشير إلى وجود قائمة بالمصطلحات العلمية وأخرى بالمراجع استقينا منها موضوعات هذا الكتاب.

في الختام نرجو من الله أن يكون هذا العمل خالصاً لوجهه، وأن يجد القارئ ما ينفعه بين سطوره.

دمشق **المؤلف**

أ.د. يوسف الوادي

الفصل الأول

مقدمة جبرية Algebraic Introduction

نتناول في هذا الفصل بعض المبادئ الأساسية في الجبر، وتشمل مفاهيماً أساسية في المجموعات والتطبيقات، وكلاً من العلاقات الثنائية والعمليات الثنائية وصولاً إلى البنى الجبرية.

١ . ١ . المجموعات: Sets

المجموعة كلمة مألوفة لدينا، نستخدمها كثيراً في حياتنا اليومية، ولا يمكن تعريفها بشكل دقيق، ربما أفضل ما يقال عنها: إنها مفهوم (Concept) رياضي شأنها شأن النقطة والمستقيم.

تعد المجموعات أساساً لكثير من فروع الرياضيات، ولها لغة ورموز خاصة بها.

يمكن القول: إن المجموعة هي تجمع (collection) لأشياء متمايزة ويجب أن تتحدد بشكل دقيق لا يقبل اللبس، ونعني بذلك أنه إذا أعطينا شيئاً ما فإننا نستطيع الحكم إذا ما كان هذا الشيء ينتمي إلى المجموعة المفروضة أم لا.

نسمي الأشياء التي تتكون منها مجموعة ما عناصر (elements) هذه المجموعة فمثلاً العدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية، والحرف b هو عنصر من مجموعة أحرف اللغة الإنكليزية، أما العدد $\sqrt{3}$ فهو ليس عنصراً من مجموعة الأعداد الصحيحة.

ملاحظة: يرمز للمجموعات عادة بحروف كبيرة $A, \ B, ...$، بينما يرمز لعناصر هذه المجموعات بحروف صغيرة $a, b, ...$.

تتعين المجموعة:

(i) إما بطريقة القائمة: وهي كتابة عناصر المجموعة بين قوسين من الشكل { } على أن توضع فواصل بين العناصر ولا أهمية لترتيب هذه العناصر، وتكرار أي عنصر لا يغير من المجموعة فالعبرة بالعناصر المتمايزة (المختلفة)، مثلاً: $S = \{1,2,3,4,5\} = \{1,5,3,4,2\}$، $B = \{6, -6\} = \{6, 6, -6\}$.

(ii) أو بطريقة القاعدة أو الصفة المميزة لعناصر المجموعة، وتستخدم هذه الطريقة عندما نستطيع الحكم على عنصر ما، فيما إذا كان ينتمي للمجموعة أم لا بواسطة تحقيق هذا العنصر للصفة أو الصفات المميزة التي يجب أن يتمتع بها كل عنصر من هذه المجموعة. فمثلاً:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} = \{x \mid x \in Z\ ;\ 0 < x < 5\}$$

أو: $S = \{1, 4, 9, 25\} = \{x \mid$ x هو مربع أحد الأعداد 1, 2, 3, 5$\}$

أو: $S = \{1, -2\} = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$

أي إن S الأخيرة هي مجموعة جذور المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$

ملاحظة: هناك مجموعة ليس فيها أي عنصر، وتسمى المجموعة الخالية (empty set)، ويرمز لها بـ ϕ، فمثلاً مجموعة حلول (جذور المعادلة) $x^2 - 2 = 0$ في الأعداد الصحيحة هي مجموعة خالية، وكذلك مجموعة حلول المعادلة $x^2+1 = 0$ هي ϕ في الأعداد الحقيقية.

قدرة مجموعة: إذا كانت S مجموعة ما، فسنرمز لعدد عناصرها بـ $|S|$ (وهذا لا يعني قيمة مطلقة) أو بـ card S ونسمي هذا العدد قدرة المجموعة S.

إذا كان $|S| < \infty$، فإن S تسمى مجموعة منتهية (Infinite Set).

وعندما لا يكون $|S| < \infty$، فإن S تسمى مجموعة غير منتهية (Infinite Set).

ويجب ملاحظة أن $|\phi| = 0$؛ أي إن قدرة المجموعة الخالية هي صفر.

رمزا الانتماء والاحتواء:

إذا كانت $S = \{a, b, c, d\}$، فإننا نقول: إن a هو عنصر من S أو إن a ينتمي لـS، ونعبر عن ذلك بالشكل $a \in S$.

نلاحظ أن e ليس عنصراً من S أو نقول: إن e لا ينتمي إلى S ونكتب $e \notin S$.

إذا أخذنا المجموعة $A = \{a, b, d\}$، فإننا نلاحظ أن كل عنصر من A هو عنصر من S وعليه فإننا نقول إن A مجموعة جزئية من S (subset) أو نقول A محتواة في S، ونعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq S$، وإذا كانت $A \subseteq S$ ولكن S غير محتواة في A، فإننا نقول إن A محتواة تماماً في S، ونعبر عن ذلك بـ $A \subset S$، وهذا يعني أنه يوجد عنصر واحد على الأقل في S وليس في A.

إذا كانت $B = \{a, b, g\}$، فإن B ليست محتواة في S لوجود عنصر واحد على الأقل في B ولا ينتمي لـ S، ونعبر عن ذلك بالشكل $B \not\subset S$؛ لأن $g \in B$ بينما $g \notin S$.

ملاحظة:

نقول: إن المجموعتين A, B متساويتان $(A = B)$ إذا كان $(A \subseteq B$ وَ $B \subseteq A)$.

المجموعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعة أخرى، والمجموعة الخالية وحيدة.

مجموعة أجزاء مجموعة (Power Set):

تدعى مجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما S بمجموعة أجزاء S أو مجموعة القوة، ويرمز لها بـ $P(S)$ فإذا كانت $S = \{a, b, c\}$، فإن:

$$P(S) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\} , \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

نلاحظ أن عناصر $P(S)$ هي مجموعات، وكل منها مجموعة جزئية من S؛ لذلك نكتب $\{a\} \in P(S)$؛ لأن $\{a\}$ هنا عنصر بالنسبة لـ $P(S)$.

ونكتب كذلك: $\phi \in P(S) , \{b, c\} \in P(S)$

في حين أن: $\phi, \{a\}, .. \{a,b\}, S \subseteq S$

إذا كانت S مجموعة منهية حيث $|S| = n$، فإن $|P(s)| = 2^n$

مكممات الشمول والوجود: Universal and Existtential Quantifiers

إذا كانت S مجموعة ما غير خالية، فكثيراً ما نستخدم في الرياضيات أحد التعبيرات الآتية:

مهما يكن $x \in S$، فإن P(x) هي صفة ما يحققها المتغير x أو نقول لكل $x \in S$، فإن P(x) أو أياً كان $x \in S$، فإن P(x)، ويرمز عادة لهذا التعبير بالرمز $\forall x$، ويسمى الرمز $\forall$ دلالة الشمول.

كما نستخدم أيضاً التعبير يوجد $\exists x \in S$ بحيث P(x) والرمز $\exists$ يسمى دلالة (رمز) الوجود.

مثال:

لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن العبارة P(x) التي تعني "$P(x) : x + 2 > 1$" حيث $x \in N$.

إن هذه العبارة صحيحة دوماً مهما كان $x \in N$ ويعبر عن هذا بالشكل:

$$\forall x \in N : x + 2 > 1$$

مثال:

إذا كانت A مجموعة المثلثات في المستوي الإقليدي وكان P(x) عبارة تعني «x مثلثاً قائماً في هذا المستوي» عندئذ يكون ما يلي صائباً:

$$\exists x \in A : P(x)$$

أي يوجد مثلث قائم على الأقل من بين مجموعة مثلثات المستوي، أما العبارة:

$$\forall x \in A : P(x)$$

فهي خاطئة.

١ . ٢ . العمليات على المجموعات: Set Operations

تتلخص العمليات على المجموعات في الآتي:

(i) الاجتماع (Union) ورمز هذه العملية «$\cup$» ويعرف الاجتماع كالآتي:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

(ii) التقاطع (Intersection) ورمزه «$\cap$» ويعرف بالشكل:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

ملاحظة: المجموعة الكلية أو الشاملة «Universal set» ويرمز لها عادة بـ U أو Ω.

إذا كانت S مجموعة ما، فإن أي مجموعة R حيث $S \subseteq R$ يمكن عدّها مجموعة شاملة بالنسبة لـ S.

من جهة ثانية إذا اختيرت المجموعة الشاملة (الكلية)، فيجب تثبيتها في المسألة الواحدة، إذ لا يجوز اختيار أكثر من مجموعة كلية في المسألة الواحدة.

(iii) متممة أو مكملة مجموعة the complement of a set:

نعرف متممة مجموعة ما A بالنسبة لمجموعة كلية Ω على أنها:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ and } x \notin A\}$$

(iv) فرق مجموعتين: «Difference»

يعرف الفرق بالشكل:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

ويبرهن بسهولة أن $A - B = A \cap \overline{B}$.

(v) الفرق التناظري: Symmetric difference

يعرف بالشكل:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

ويرمز للفرق التناظري أيضاً بـ $\oplus$.

خواص العمليات على المجموعات:

إذا كانت A, B, C مجموعات من مجموعة كلية Ω، فإن:

(1) $A \cup A = A$.
(2) $A \cup B = B \cup A$.
(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
(4) $A \cap A = A$.
(5) $A \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap A$.
(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
(7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(9) $A \cup \phi = A$.
(10) $A \cap \phi = \phi$.
(11) $A \cup \Omega = \Omega$.
(12) $A \cap \Omega = A$.
(13) $\overline{\Omega} = \phi$.
(14) $\overline{\phi} = \Omega$.
(15) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$.
(16) $A \cup \overline{A} = \Omega$.
(17) $A \cap \overline{A} = \phi$.
(18) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
(19) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(20) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.
(21) $A - B \neq B - A$ (بفرض A,B غير خاليين وَ $A \neq B$).
(22) $A - B \subseteq A$.
(23) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
(24) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

المجموعات العددية:

(i) مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers:

يرمز لها بـ N أو Z^+ وتعرف بالشكل:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

وتسمى هذه المجموعة أيضاً بمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (Positive integers) Z^+.

ملاحظة:

نلاحظ أن بعض المراجع تفرض العدد صفر «0» عدداً طبيعياً وهذا ما ينوه إليه المؤلف إن كان سيعد الصفر من N أو لا.

(ii) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة (Negative Integers):

ويرمز لها بـ Z^- وتنتج من Z^+ بضرب كل عنصر من Z^+ بـ (-1) أي:

$$Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

(iii) مجموعة الأعداد الصحيحة «Integers»:

يرمز لهذه المجموعة بـ Z وتتعين بالشكل:

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$$

أي إن:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

(iv) مجموعة الأعداد العادية أو النسبية أو الكسرية: Rational Numbers

يرمز لهذه المجموعة بـ Q وتعرف كالآتي:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z \text{ and } b \neq 0 \right\}$$

(v) مجموعة الأعداد الحقيقية «Real Numbers»:

ويرمز لها بـ R وهي مجموعة تحوي تماماً المجموعة Q، كما تحوي أعداداً أخرى مثل e, π، والجذور الصم $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$،..

وبصفة عامة، فإنها مكونة من جميع الأعداد التي يمكن تمثيلها على مستقيم موجه (محور $x'ox$)، وبعبارة أخرى فإن كل عدد حقيقي يقابله نقطة من المحور $(x'ox)$كما أن أية نقطة من هذا المستقيم يقابلها عنصر من R.

(vi) مجموعة الأعداد العقدية Complex Numbers:

ونرمز لها بـ C وهي مجموعة تحوي تماماً المجموعة R وتعرف بالشكل:

$$C = \{x + iy \mid x,y \in R \text{ and } i^2 = -1\}$$

وسوف نتطرق إلى هذه المجموعة بشيء من التفصيل في نهاية هذا الفصل.

١ . ٣ . الجداء الديكارتي والعلاقات والتطبيقات:

Cartesian product, Relations, and Mappings:

١ . ٣ . ١ . الجداء الديكارتي: Cartesian Product

يُعرّف الجداء الديكارتي للمجموعة A بالمجموعة B بأنه المجموعة $A \times B$ حيث:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

ويسمى العنصر (a, b) زوجاً مرتباً ordered pair أو ثنائية ويجب ملاحظة أن $(a,b) \neq (b,a)$.

مثال (١):

لتكن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3, 5\}$ عندئذ يكون:

$$A \times B = \{(1, 2) , (1, 3), (1, 5) , (2, 2), (2, 3), (2, 5)\}$$

ملاحظة (١):

من التعريف ومن المثال الأخير نجد أن $A \times B \neq B \times A$

يمكن توسيع مفهوم الجداء الديكارتي لنحصل على جداء ثلاث مجموعات أو أكثر حيث:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A , b \in B, c \in C\}$$

والمجموعة هنا تصبح مجموعة ثلاثيات مرتبة (triples) وهكذا..

ملاحظة (٢):

إذا كانت $A = B$ فإن : $A \times B = A \times A = A^2$

وإن: $A \times A \times A = A^3$

لذلك نلاحظ أن مجموعة نقاط المستوي جميعها أو متجهات المستوي يعبر عنها بالشكل:

$$R^2 = R \times R = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$$

وهكذا فإن:

$$R^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R , i = 1, 2, \dots, n\}$$

مثال (٢):

أوجد x,y إذا علمت أن $(0,1) = (2x - y, x + y)$

الحل:

لدينا $2x - y = 0$ وَ $x + y = 1$ وبالحل المشترك نجد $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$.

بعض خواص الجداء الديكارتي:

(i) إذا كانت $A = \phi$، فإن $A \times B = \phi$، وكذلك الأمر إذا كانت $B = \phi$.

(ii) $A \times B \neq B \times A$ (ما لم تكن $A = B$ أو إحداهما خالية).

(iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iv) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(v) إذا كان $|A| = n$, $|B| = m$، فإن $|A \times B| = |B \times A| = n . m$

(vi) إذا كان $E \subseteq A$ وَ $F \subseteq B$، فإن $E \times F \subseteq A \times B$.

١ . ٣ . ٢ . العلاقات الثنائية: Binary Relations

تعريف (١): إذا كانت A, B مجموعتين غير خاليتين، وكانت $R \subseteq A \times B$، فإن R تُدعى علاقة ثنائية من A إلى B أو علاقة منطلقها A ومستقرها B.

وعندما يكون $A = B$، فإن R تدعى علاقة ثنائية على A.

تعريف (٢): إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B، فإن العلاقة العكسية لـ R، ويرمز لها بـ R^{-1} تُعرف كالآتي:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

ملاحظة (١):

إذا كانت R علاقة من A إلى B

فإن المجموعة $\{x \in A \mid (x, y) \in R\}$ هي مجموعة جزئية من A، وتسمى مجموعة تعريف العلاقة (domain).

أما المجموعة $\{y \in B \mid (x, y) \in R\}$، فهي مجموعة جزئية من B، وتسمى مدى العلاقة R (range) أو المستقر الفعلي لـ R.

تعريف (٣): العلاقة الثنائية على مجموعة Binary Relation on a set هي علاقة منطلقها ومستقرها المجموعة نفسها، أي إنه إذا كانت R علاقة على مجموعة A، فإن R تعطى بـ:

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A\} \subseteq A \times A$$

لهذا النوع من العلاقات أهمية كبرى لكثرة تطبيقاته في الرياضيات وبعض العلوم الأخرى، لذلك سوف نتعرف بعض خواصه من خلال التعاريف الآتية.

تعريف (٤): لتكن R علاقة على مجموعة A عندئذ نقول: إن R انعكاسية (reflexive) إذا تحقق التالي: $\forall x \in A$، فإن $(x, x) \in R$ أو نكتب xRx ومعنى ذلك أن R تكون انعكاسية إذا ارتبط كل عنصر من A بنفسه وفق R.

تعريف (٥): إذا كانت R علاقة على مجموعة A، فإن R تسمى تناظرية (symmetric) إذا تحقق الآتي: $\forall (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

تعريف (٦): إذا كانت R علاقة معرفة على مجموعة A، فإننا نقول: إن R متعدية (transitive) إذا تحقق الآتي:

$$\forall (x, y) \in R \text{ and } \forall (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

تعريف (٧) (علاقة التكافؤ): إذا كانت R علاقة على A وكانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية، فإنها تدعى علاقة تكافؤ (equivalence relation).

تعريف (٨): نقول عن علاقة R على A إنها تخالفية (لا تناظرية) (antisymmetric) إذا تحقق الشرط الآتي:

$(x, y) \in R$ وَ $(y, x) \in R$ لا يتحققان إلا إذا كان $x = y$، أو بتعبير آخر:

$$(x, y) \in R \text{ and } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

تعريف (٩): علاقة الترتيب (ordered relation)

إذا كانت R علاقة على A وكانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية قيل إنها علاقة ترتيب.

أمثلة على علاقات التكافؤ والترتيب:

(١) نعرف على Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) العلاقة R كالآتي:

$$\forall a, b \in Z : (a, b) \in R \Leftrightarrow a - b = 3n \; ; n \in Z$$

الحل:

أولاً هذه العلاقة تعني أن العددين الصحيحين a, b يرتبط بعضهما ببعض إذا كان فرقهما من المضاعفات الصحيحة للعدد 3.

والآن لنرى أن R انعكاسية حيث $(a, a) \in R \Leftrightarrow a - a = 3n$

وهذا محقق حيث: $a - a = 3\ (0)$

كذلك لنبين أن R تناظرية فإذا كان $(a, b) \in R$، فإن ذلك يعني أن $a - b = 3n$

ومنه فإن $b - a = 3\ (-n)$ ولكن كون $n \in Z$، فإن $-n \in Z$ أي إن $(b, a) \in R$.

أخيراً هل R متعدية؟

للإجابة على ذلك نقول:

$\forall\ a, b, c \in Z$

وإذا كان $(a, b) \in R$ وَ $(b, c) \in R$ فهل $(a, c) \in R$؟

لكن: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a - b = 3n\ (1)$ حيث $n \in Z$

وَ: $(b, c) \in R \Leftrightarrow b - c = 3n'\ (2)$ حيث $n' \in Z$

بجمع (1) و (2) نجد: $a - b + b - c = 3n + 3n'$ ومنه:

$$a - c = 3\ (n + n')$$

وكون $n, n' \in Z$ فإن $n + n' \in Z$ أي إن $a - c$ من مضاعفات 3.

إذن $(a, c) \in R$ ومن ثمَّ R متعدية.

مما سبق نجد أن R علاقة تكافؤ.

(٢) نعرف على Z^+ العلاقة R كالآتي:

$$\forall\ x, y \in Z^+\ ;\ (x, y) \in R \Leftrightarrow x \mid y$$

(أي إن x يقسم y أو y يقبل القسمة على x).

هذه العلاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية، فهي علاقة ترتيب.

وهناك الكثير من الأمثلة على مثل هذه العلاقات.

١ . ٣ . ٣ . التطبيقات Mapping:

التطبيق هو حالة خاصة من العلاقات الثنائية، ولتعيين تطبيق ما يلزمنا ثلاثة أمور أساسية، هي:

(a) مجموعة أولى $A \neq \phi$.

(b) مجموعة ثانية $B \neq \phi$.

(c) قانون أو قاعدة تربط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B.

حيث تسمى A مجموعة المنطلق أو مجموعة التعريف، وتسمى B مجموعة المستقر. يمكن تلخيص ذلك بالتعريف الآتي:

تعريف (١): إذا كانت A, B مجموعتين غير خاليتين وكانت $R \subseteq A \times B$ فإن R تسمى تطبيقاً ويرمز له عادة بـ f إذا تحقق الآتي:

(i) مجموعة تعريف R هي كامل المجموعة A أي:

$$\{x \in A \mid (x, y) \in R\} = A$$

(ii) كل عنصر في A يرتبط بعنصر وحيد من B أي:

$$(x, y) \in R \text{ and } (x, z) \in R \Rightarrow y = z$$

أو نقول: إن لكل عنصر من A مقابل وحيد في B.

ملاحظة:

هناك تسميات متعددة للتطبيقات، مثل: الدوال أو التوابع أو التحويلات transformation, functions.

نكتب التطبيق عادة بالشكل: $f : A \to B$، وإذا كان $(x, y) \in f$، فإننا نكتب $y = f(x)$، ونسمي $y \in B$ صورة $x \in A$ وفق f.

تعريف (٢): إذا كان f, g تطبيقين لهما مجموعة المنطلق A نفسها ومجموعة المستقر B نفسها، فإن $f = g$ إذا كان $\forall x \in A$، فإن $f(x) = g(x)$.

تعريف (٣): التطبيق المتباين (injective = one – to – one)

نقول إن: التطبيق $f : A \to B$ متباين إذا تحقق الآتي:

$$\forall x_1, x_2 \in A$$

فإن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

أو: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

تعريف (٤): التطبيق الغامر surjective = onto

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً ما، فإن f يُدعى تطبيقاً غامراً إذا تحقق الآتي:

$$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A ; y = f(x)$$

أي إن عناصر B جميعها هي صور لعناصر A.

تعريف (٥): التقابل (bijective = one – to – one and onto)

يكون التطبيق f تقابلاً إذا كان متبايناً وغامراً بآن واحد، وفي هذه الحالة يوجد له تقابل عكسي نرمز له بـ f^{-1}.

مثال:

التطبيق $f: Z \to Z$ المعرف بـ $y = f(x) = x - 1$ هو تطبيق متباين وغامر، فهو تقابل وتقابله العكسي: $x = f^{-1}(y) = y + 1$.

أما التطبيق $f: R \to R$ حيث $y = f(x) = x^2$ فهو ليس تبايناً؛ لأنه مثلاً:

$f(-1) = f(1) = 1$ علماً بأن $-1 \neq 1$ ومن ثمَّ فهو ليس تقابلاً.

تمارين:

(١) هل $f: R \to R$ حيث $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تطبيق؟ ولماذا؟.

(٢) هل التطبيق $f: Z \to Z$ حيث $f(x) = x^3$ متباين؟.

(٣) هل التطبيق $f: R \to R$ حيث $f(x) = -3x + 4$ تقابل؟ وإذا كان كذلك ما هو تقابله العكسي؟.

(٤) هل $f: R \to R$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$ تطبيق؟ ولماذا؟.

(٥) هل $f: R \to R$ حيث $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ تطبيق؟ ولماذا؟.

١ . ٤ . العمليات الثنائية والبنى الجبرية:

Binary Operations and Algebraic Structures:

١ . ٤ . ١ . العملية الثنائية أو قانون التشكيل الداخلي:

– إذا كانت S مجموعة غير خالية ($S \neq \phi$).

وليكن التطبيق $f: S \times S \to S$ حيث $(a, b) \to a * b$ أي إن صورة أي عنصر من المنطلق (وهو في هذه الحالة زوج (a, b)) هي عنصر في المستقر S. ويسمى هذا التطبيق عملية ثنائية على S أو في S.

– أي إن العملية الثنائية (*) على مجموعة S هي تطبيق مجموعة تعريفه $S \times S$ ومستقره الفعلي (مداه) محتوى في S.

– إذا كان المستقر الفعلي للتطبيق السابق هو مجموعة T وكانت $T \subseteq S$، فإننا نقول: إن $(S, *)$ بنية جبرية (Algebraic Structure)، أو نقول: إن S مغلقة بالنسبة للعملية (*) وإذا كان $T \not\subset S$، فإن $(S, *)$ غير مغلقة.

– إن $(Z , +)$ مغلقة لأن حاصل جمع أي عددين من Z هو عدد من Z. وكذلك $(Z , .)$ مغلقة. في حين أن $(N, -)$ غير مغلقة وكذلك $(Z^*, \div)$ غير مغلقة.

خواص العمليات الثنائية:

إذا كانت (*) عملية ثنائية على مجموعة غير خالية S عندئذ نقول:

(i) إن (*) تبديلية Commutative إذا تحقق الآتي:

$$\forall x, y \in S: x * y = y * x$$

(ii) إن (*) تجميعية (associative) إذا تحقق أن:

$$\forall x, y, z \in S : (x * y) * z = x * (y * z)$$

تعريف (١): يدعى العنصر $e \in S$ عنصراً حيادياً من اليمين بالنسبة لـ (*) إذا كان:

$$\forall x \in S : x * e = x$$

ويدعى e عنصراً حيادياً من اليسار بالنسبة لـ (*) إذا كان:

$$\forall x \in S : e * x = x$$

وإذا كان e حيادياً من اليمين واليسار بآن واحد فإنه يسمى عنصراً حيادياً بالنسبة لـ (*) (Identity Element).

تعريف (٢): إذا كانت (*) عملية ثنائية على S وكان $e \in S$ حيادياً يمينياً (يسارياً)، فإن $x^{-1} \in S$ يدعى نظير x اليميني (اليساري) إذا تحقق الآتي:

$$x * x^{-1} = e \quad (x^{-1} * x = e)$$

ويقال: إن x^{-1} هو نظير (inverse) x إذا كان حيادياً يسارياً ويمينياً بآن واحد.

ملاحظات مهمة:

١ . العنصر الحيادي $e \in S$ وحيد في حالة وجوده.

٢ . إذا كانت (*) تجميعية، فإن نظير أي عنصر وحيد (إن وجد).

تمرين:

بين أن * المعرفة على Z كالآتي: $\forall a, b \in Z : a * b = 2a + b$ ليست تبديلية، وليست تجميعية.

١ . ٥ . بعض البنى الجبرية:

١ . الزمرة Group:

لتكن G مجموعة غير خالية ($G \neq \phi$)، ولنزود G بعملية ثنائية (*).

– إذا كانت (G, *) مغلقة وكانت (*) تجميعية، فإن (G, *) تسمى شبه زمرة أو نصف زمرة (Semigroup).

– إذا كانت (G, *) نصف زمرة، وكانت G تملك عنصراً حيادياً بالنسبة لـ *، ولكل عنصر من G نظير في G، فإننا نقول إن (G, *) زمرة.

أي إن الزمرة هي مجموعة غير خالية G مزودة بعملية ما (*) تحقق الآتي:

(i) (G, *) مغلقة. (ii) * تجميعية.

(iii) يوجد $e \in G$ حيادي بالنسبة لـ *. (iv) لكل عنصر $a \in G$ نظير وليكن $a' \in G$.

ملاحظة:

إذا كانت (G, *) زمرة، وتحقق بالإضافة لذلك أن * تبديلية، فإن هذه الزمرة تسمى زمرة تبديلية (Commutative) أو آبلية (Abelian).

مثال:

كل من (Z, +)، (R, +)، (Q, +) زمرة تبديلية.

تمرين:

لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ حيث $i^2 = -1$ نزود G بعملية الضرب العادية (.). أثبت أن (G, .) زمرة، وأنها تبديلية.

٢ . الحلقة Ring:

إذا كانت R مجموعة غير خالية $(R \neq \phi)$ مزودة بعمليتين داخليتين، ولنرمز للعملية الأولى بـ $(+)$ دون أن تكون الجمع العادي والثانية بـ $(.)$ دون أن تعني أنها الضرب العادي، عندئذ نقول: إن الثلاثية $(R, +, .)$ حلقة إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) $(R, +)$ زمرة تبديلية. (ii) $(R, .)$ شبه زمرة.

(iii) العملية $(.)$ تقبل التوزيع على $(+)$ من اليمين واليسار أي:

$$\forall a, b, c \in R : \begin{cases} a.(b+c) = a.b + a.c \\ (b+c).a = b.a + c.a \end{cases}$$

ملاحظات:

إذا كانت العملية الثانية $(.)$ تبديلية، قيل: إن الحلقة $(R, +, .)$ حلقة تبديلية:

- إذا وجد عنصر حيادي بالنسبة لـ $(.)$، فإن R تسمى حلقة واحدية.
- سنرمز للعنصر الحيادي بالنسبة لـ $(+)$ بـ 0، ويسمى صفر الحلقة، وللحيادي بالنسبة لـ $(.)$ بـ (1) ويسمى واحد الحلقة.
- نرمز للنظير الجمعي لـ x بالرمز $-x$، وللنظير الضربي بـ x^{-1}.

ونذكر أن $-(-x) = x$ ، $(x^{-1})^{-1} = x$

٣ . الحقل Field:

نسمي الثلاثية $(K, +, .)$ حقلاً إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) $(K, +)$ زمرة تبديلية.

(ii) $(K^*, .)$ زمرة تبديلية حيث $K^* = K - \{0\}$.

(iii) العملية $(.)$ تقبل التوزيع على $(+)$.

من هذا التعريف نستنتج أن كل حقل هو حلقة، ولكن العكس غير صحيح.

٤ . خواص مهمة:

لتكن R حلقة، وليكن $x, y \in R$ عندئذ:

(i) $x \,.\, 0 = 0 \,.\, x = 0$

(ii) $x\,(-y) = -\,(xy) = (-x)\,y$

(iii) $(-x)\,(-y) = x\,y$

أمثلة:

أ) $(Z, +, .)$ حلقة واحدية تبديلية (تحقق من ذلك).

ب) $(Q, +, .)$ حلقة واحدية تبديلية (تحقق من ذلك).

جـ) كذلك الأمر $(R, +, .)$ حلقة واحدية تبديلية.

د) $(Q, +, .)$ حقل.

هـ) $(R, +, .)$ حقل.

و) $(C, +, .)$ حقل.

ز) $(2Z, +, .)$ حلقة تبديلية، لكنها ليست واحدية.

تمارين:

١) هل $(R^{+}, +)$ زمرة؟.

٢) هل $(3Z, +)$ زمرة؟

٣) أثبت أن المجموعة $R = \{a + b\sqrt{2}\ :\ a, b \in Z\}$ تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديين. وهل هي واحدية أو تبديلية؟.

١ . ٦ . حقل الأعداد العقدية C: Complex Numbers

– نشأت فكرة الأعداد العقدية في أثناء محاولة الرياضيين حل معادلات من قبيل المعادلة $x^2 + 1 = 0$ حيث $x^2 = -1$ وهذه لا تقبل حلاً في الحقل R؛ لأن $x = \sqrt{-1} \notin R$، واتفق على أن يعد $i^2 = -1$، وعليه فإن $i = \sqrt{-1}$ ويسمى الواحدة التخيلية (imaginary unit) وتطور ذلك إلى معرفة الحقل C حيث إن عمليتي الجمع والضرب على C تتمتع بخواص الجمع والضرب على R نفسها.

– كل تركيب من الشكل $z = x + iy$ حيث $a, b \in R$ يُدعى عدد عقدي قسمه الحقيقي x وقسمه التخيلي y، ونكتب:

$$Re(z) = x \ , \ Im(z) = y$$

أي إن:

$$Re\,(3 + 2i) = 3 \ , \ Im\,(3 + 2i) = 2$$
$$Re(1 - 5i) = 1 \ , \ Im\,(1 - 5i) = -5$$
$$Re\,(7i) = 0 \ , \ Im\,(7i) = 7$$
$$Re\,(4) = 4 \ , \ Im\,(4) = 0$$

تعريف: نقول: إن العددين العقديين:

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

متساويان $(z_1 = z_2)$ إذا وفقط إذا كان: $a = c$ وَ $b = d$

١ . ٦ . ١ . العمليات على C:

تعرف عمليات الجمع والطرح والضرب على C بموجب قوانين الجبر، ولكن مع الأخذ بالحسبان أن $i^2 = -1$، حيث:

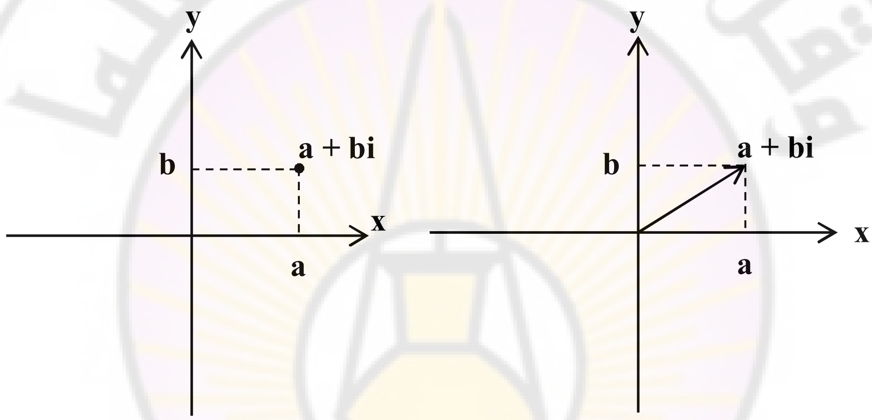
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$$

$$(a + bi) . (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i$$

حيث أجرينا عملية ضرب عادية وبدلنا i^2 بما يساويه 1 – واستخدمنا الخواص التجميعية وجمعنا الحدود المتشابهة، أي القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

١ . ٦ . ٢ . المستوي العقدي Complex Plane:

يمكن أن نعبر عن كل عدد عقدي $z = a + bi$ على شكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية ونمثله هندسياً على شكل نقطة أو متجه (شعاع) في المستوي (x, y).



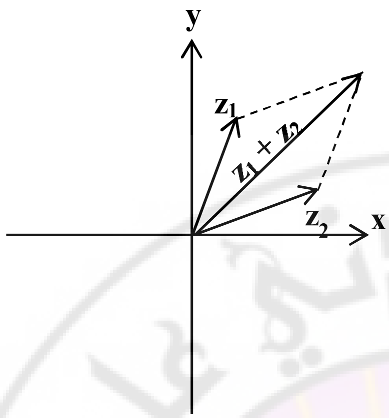
يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور التخيلي، ويسمى هذا المستوي بالمستوي العقدي.

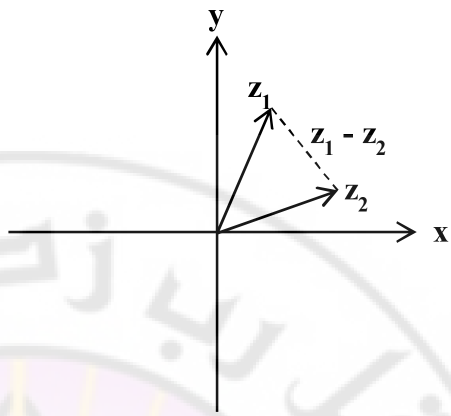
عنصر الواحدة على (x) هو الواحد /1/ الحقيقي وعنصر الواحدة على (y) هو الواحدة التخيلية /i/.

ويمكن أن نجمع ونطرح الأعداد العقدية، وأن نضرب عدداً عقدياً بآخر حقيقي كما لو أننا نجمع ونطرح متجهات أو نضرب متجهاً بعدد حقيقي. والفرق الوحيد هو أن ضرب عددين عقديين لا يقابله ضرب متجهين ببعضهما.

ملاحظة:

$z = a + bi$ يساوي 0 إذا وفقط إذا كان $a = 0$ و $b = 0$.





تعريف: إذا كان $z = a + bi$ عدداً عقدياً، فإن مرافقه العقدي أو مرافقه هو $\bar{z} = a - bi$

مثلاً: إن مرافق $z = 3 + 4i$ هو $\bar{z} = 3 - 4i$

وإن مرافق $z = -2 - 5i$ هو $\bar{z} = -2 + 5i$

أما مرافق $z = i$ فهو $\bar{z} = -i$

ومرافق $z = 7$ هو $\bar{z} = 7$

مما سبق نجد أن $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي.

ويمكن أن نستنتج بعض الحقائق الآتية:

$$z . \bar{z} = (a + bi) . (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

ومنه فإن: $\sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

وهذا ما يسمى طويلة العدد العقدي أو قياسه أو قيمته المطلقة.

إذن في C يدل الرمز $|z|$ على طويلة العدد العقدي وهو يساوي: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

أمثلة:

1) $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$

2) $z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$

3) $z = -4 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

4) $z = i \Rightarrow |z| = \sqrt{0+1} = 1$

– مقلوب عدد عقدي (النظير الضربي):

إذا كان $z \neq 0$ عندئذ يعرف مقلوبه ($\frac{1}{z}$ أو z^{-1}) من الخاصة $\left(\frac{1}{z}\right).z = 1$ ولهذه المعادلة حل وحيد حيث نضرب طرفيها بـ $\bar{z}$ لنحصل على:

$$\left(\frac{1}{z}\right).z.\bar{z} = 1.\bar{z} \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right).|z|^2 = \bar{z}$$

ومنه فإن $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (*) وهو المقلوب الذي نبحث عنه.

مثال:

أوجد مقلوب العدد العقدي $z = 3 + 4i$.

من خلال العلاقة (*) التي تعطي المقلوب نجد:

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

– القسمة في C:

إذا كان $z_2 \neq 0$ فإن حاصل قسمة z_1 على z_2 يُعطى بالشكل:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z_2}.z_1 = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}z_1 = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

أي إننا ضربنا كلاً من بسط ومقام $\frac{z_1}{z_2}$ بمرافق z_2.

مثال:

اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل $a + bi$، حيث: $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - 2i$

الحل:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{1-2i}=\frac{(3+4i).(1+2i)}{(1-2i).(1+2i)}$$

$$=\frac{3+6i+4i+8i^2}{1-4i^2}=\frac{3+10i-8}{1+4}=\frac{-5+10i}{5}$$

$$= -1+2i$$

من الخواص المهمة في C الآتي:

إذا كانت z, z_1, z_2 أعداداً عقدية، فإن:

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(5) $\overline{\left(\overline{z}\right)}=z$

(6) $|\overline{z}|=|z|$

(7) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

(9) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

١ . ٥ . ٣ . الشكل القطبي (المثلثي) للعدد العقدي:

إذا كان $z = a + bi$ عدداً عقدياً لا يساوي صفر.

وإذا كان ϕ هي الزاوية التي يصنعها المتجه الذي يمثل z مع الاتجاه الموجب للمحور x عندئذ فإن:

$$a = |z| \cos \phi \ , \ b = |z| \sin \phi$$

أي إن العدد z يمكن أن يكتب بالشكل:

$$z = |z| (\cos\phi + i \sin\phi)$$

ويدعى هذا بالشكل القطبي للعدد z.

وتدعى الزاوية ϕ سعة (argument) z وهي ليست وحيدة؛ لأنه يمكن إضافة أو طرح أي مضاعفات لـ 2π دون أن يتغير $\cos\phi,\ \sin\phi$. وهناك سعة وحيدة تحقق الشرط $-\pi \le \phi \le \pi$ ويُدعى هذا بالتعيين الأساسي لسعة z.

مثال:

اكتب العدد العقدي $z = 1 - \sqrt{3}i$ بالشكل القطبي.

الحل:

نحسب $|z|$ فنجده: $|z| = \sqrt{1+3} = 2$

ومنه فإن: $\sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\phi = \frac{1}{2}$

وعليه فإن التعيين الأساسي هو $\phi = -\frac{\pi}{3}$

إذن:

$$\begin{aligned} z &= |z|\,(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

الضرب والقسمة:

إن الشكل المثلثي للعدد العقدي يُسهِّل عمليتي الضرب والقسمة:

فإذا كان:

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$$
$$z_2 = |z_2|\,(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$

فإن:

$$z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

وإن:

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} . (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

حيث نفرض هنا أن $z_2 \neq 0$.

قانون موافر: Demoivre's Formula

إذا كان $n \in Z^+$ وكان $z \neq 0$ حيث:

$$z = |z| . (\cos\phi + i\sin\phi)$$

فإن:

$$z^n = z . z ..... z \ (\text{مرة } n) = |z|^n (\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

في الحالة الخاصة عندما يكون $|z| = 1$ فإن:

$$z^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

أي إن:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

وهذا ما يسمى قانون موافر.

ملاحظة مهمة:

إذ كان θ عدداً حقيقياً وليكن قياساً بالراديان لزاوية ما، عندئذ فإن الدالة الأسية العقدية $e^{i\theta}$ تعرف على الشكل:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وتدعى أحياناً قانون أويلر (Euler).

ملاحظة:

إذا كان $z = a + bi$، عندئذ يعرف e^z على الشكل:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a . e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

مثال:

استخدم الشكل القطبي لحساب كل من $z_1.z_2$، $\frac{z_1}{z_2}$

حيث: $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ ، $z_2 = \sqrt{3}+i$

الحل:

الشكل المثلثي لكل من z_2, z_1 هو:

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \ , \ z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

إذن:

$$z_1.z_2 = (2).(2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4(0+i) = 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 1.(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

مثال:

إذا كان: $z_1 = 1 + i \ , z_2 = 1 - i$

فاحسب كلاً من: $\frac{z_1}{z_2}$ ، $z_1 \ . \ z_2$

الحل:

$$z_1 \ . \ z_2 = (1 + i)\ (1 - i) = 1 - i + i - i^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i).\overline{(1-i)}}{(1-i).\overline{(1-i)}} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

لنعود لحساب كل من $z_1.z_2$، $\frac{z_1}{z_2}$ باستخدام الشكل القطبي:

$$z_1 = |z_1|\,[\cos\phi_1 + i\sin\phi_1] = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = |z_2|\,[\cos\phi_2 + i\sin\phi_2] = \sqrt{2}\left[\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$$

$$z_1.z_2 = |z_1|\,.\,|z_2|\,[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)$$
$$= \sqrt{2}.\sqrt{2}[\cos 0 + i\sin 0] = 2[1 + 0.i] = 2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 1.[0 + i.1] = i$$

وهو المطلوب.

تمارين:

١) أوجد لاً من x, y إذا كان:

$$5x + 4yi - 12 - xi + i = 0$$

الجواب: $x = \frac{12}{5}, y = \frac{7}{20}$

٢) أوجد كلاً من x, y إذا كان:

$$(x + 3i)(y - i) - 9 = 7i$$

الجواب: $x = 2, y = 3$

$$x = -9\ ,\ y = -\frac{2}{3}$$

٣) أوجد $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1.\,z_2$

حيث: $z_1 = 3 + 2i\ ,\ z_2 = 2 - 5i$

٤) إذا كان $a = \frac{1-2i}{1-3i}$ ، $b = \frac{2-i}{3-i}$

فأثبت أن a, b مترافقان ثم أوجد قيمة $25(a^2 + b^2) - 48\ ab$.

٥) أوجد في الحقل C جذور المعادلة: $x^2 - x + 1 = 0$

١ . ٧ . تمارين:

١) نعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة Z العملية * كالآتي:

$\forall a, b \in Z$ فإن $a * b = a + 2b$

(a) احسب كلاً من $b * a$, $a * (b * c)$, $(a * b) * c$

هل (*) تجميعية؟ وهل هي تبديلية؟.

(b) هل تقبل العملية (*) عنصراً حيادياً؟ وما هو إن وجد.

(c) احسب كلاً من: $2 * (3 * 5)$, $(2 * 3) * 5$, $2 * 3$, $3 * 2$

٢) نعرف على Z العملية (*) بالشكل:

$\forall\ a, b \in Z \Rightarrow a * b = a + b + 2$

(a) بيّن أن (*) تبديلية وتجميعية.

(b) هل يوجد حيادي؟ وما هو إن وجد.

(c) ما هو نظير العنصر $a \in Z$؟.

٣) أي البنى الجبرية الآتية زمرة:

(a) $(R^+, +)$. (b) $(3Z, +)$.

(c) المجموعة {1, -1} بالنسبة للضرب. (d) $(Z, *)$ حيث * معرف بـ $a*b = a + b +1$

٤) بيّن أن $(2Z, +, .)$ حلقة تبديلية، لكنها ليست واحدية.

٥) بيّن أن المجموعة $R = \{a + b\sqrt{2}\ : a, b \in Z\}$

تشكل حلقة بالنسبة للجمع والضرب العاديين وهي واحدية تبديلية.

٦) أثبت أن $F = \{a + b\sqrt{2} \;:\; a, b \in Q\}$ تشكل حقلاً بالنسبة للجمع والضرب العاديين.

٧) لتكن الثلاثية $(Q, *, □)$ حيث * هي جمع معرف بـ:

$$a * b = a + b - 1$$

وحيث □ هو ضرب معرف بـ: $a □ b = a + b - ab$

هل $(Q, *, □)$ حقل؟.

٨) أي العلاقات الآتية، علاقة تكافؤ؟

(a) العلاقة R معرفة على Z حيث $(mRn \Leftrightarrow m.n > 0)$.

(b) العلاقة R معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث $(xRy \Leftrightarrow x \geq y)$.

(c) العلاقة R معرفة على Z (مجموعة الأعداد الصحيحة)

حيث $(aRb \Leftrightarrow a = b \bmod n)$ وحيث $n \in Z$.

٩) نعرف على R (مجموعة الأعداد الحقيقية العملية (*) كالآتي:

$$\forall\, a, b \in R : a * b = a + b + ab - 2$$

هل (*) تبديلية؟ هل هي تجميعية؟ هل تقبل حيادي؟ وما هو إن وجد.

١٠) أعد السؤال السابق من أجل العملية (*) الآتية والمعرفة على Q بالشكل:

$$\forall\, a, b \in Q : a * b = ab + 1$$

١١) بين أن كلاً من $(R, +, .)$ و $(C, +, .)$ حقل.

* * *

الفصل الثاني

المعادلات الخطية والمصفوفات

٢ . ١ . جملة المعادلات الخطية: The system of linear equations

تعريف (١):

تدعى كل معادلة من الشكل:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

معادلة خطية متحولاتها هي: $x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث a_i, b معاملات ثابتة وليست جميع a_i أصفاراً. وكل مجموعة منتهية من المعادلات الخطية تسمى جملة معادلات خطية أو اختصاراً جملة خطية.

تشكل القيم: $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ حلاً للجملة الخطية في n متحولاً إذا حققت هذه القيم كل واحدة من معادلات الجملة الخطية، وتسمى متحولات الجملة الخطية أيضاً بالمجاهيل، وقد نرمز لهذه المجاهيل بـ $x, y, z, \dots$.

مثال (١):

الجملة الخطية:

$$2x = y - 4z$$
$$y = 2z$$

هي جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل (متحولات) هي x, y, z وأحد حلول هذه الجملة هو $(-1, 2, 1)$ حيث إن $x = -1, y = 2, z = 1$ يحقق كلاً من المعادلتين.

وهذا الحل ليس الوحيد، فهناك على سبيل المثال الحلول $(0, 0, 0)$، $(\frac{1}{2}, -1, \frac{-1}{2})$ وبشكل عام كل ثلاثية من الشكل $(-t, 2t, t)$ حيث $t \in R$ هو حل لهذه الجملة. ومن

هنا نرى أن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول لهذه الجملة كل منها يقابل إحدى قيم t. تدعى مجموعة الحلول هذه مجموعة حلول ذات وسيط (Parameter) واحد هو t هنا.

مثال (٢):

الجملة:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

هي جملة معادلتين ذات مجهولين، ليس لها حل مشترك أو نقول: إنها مستحيلة الحل. مثل تلك الجمل تسمى جمل غير متوائمة (متآلفة) في حين تسمى الجمل المماثلة للجملة في المثال (١) أي الجمل الخطية التي لها حل واحد على الأقل بجمل متوائمة (متآلفة).

ملاحظة:

يتضح من المثال السابق أن شرط تساوي عدد المجاهيل بعدد المعادلات هو شرط لازم وغير كافٍ لكي يكون للجملة حل.

مثال (٣):

جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_1x_2 \qquad - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

ليست جملة معادلات خطية؛ لأن المعادلة الثالثة تحوي في أحد حدودها حاصل ضرب مجهولين وهو الحد الثاني x_1x_2، فهذه المعادلة ليست خطية ومن ثمَّ الجملة ليست خطية.

٢ . ٢ . حل جملة معادلات خطية:

لحل جملة معادلات خطية نقوم بتحويلها إلى الشكل النظامي، ويتم ذلك بترتيب المتحولات في كل معادلة ثم نحل الجملة بطريقة الحذف بإجراء عمليات (تحويلات) تدعى التحويلات الأولية وهذه التحويلات، هي:

١ . ضرب معادلة أو أكثر بعدد لا يساوي الصفر.

٢ . مبادلة موضعي معادلتين في الجملة.

٣ . ضرب إحدى المعادلات بعدد ما، وإضافة الناتج إلى معادلة أخرى.

مثال (٤):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$\begin{array}{ll} -y+z=3 & (A_1) \\ x-y-z=0 & (B_1) \\ -x-z=-3 & (C_1) \end{array}$$

الحل:

نبادل بين موضعي (A_1) و (B_1):

$$\begin{array}{ll} x-y-z=0 & (A_2) \\ -y+z=3 & (B_2) \\ -x-z=-3 & (C_2) \end{array}$$

نضيف (A_2) إلى (C_2):

$$\begin{array}{ll} x-y-z=0 & (A_3) \\ -y+z=3 & (B_3) \\ -y-2z=-3 & (C_3) \end{array}$$

نضرب (B_3) بـ 1 -:

$$\begin{array}{ll} x-y-z=0 & (A_4) \\ y-z=-3 & (B_4) \\ -y-2z=-3 & (C_4) \end{array}$$

نضيف (B_4) إلى (A_4) كما نضيف (B_4) إلى (C_4):

$$\begin{aligned}
x - 2z &= -3 && (A_5)\\
y - z &= -3 && (B_5)\\
-3z &= -6 && (C_5)
\end{aligned}$$

نضرب (C_5) بـ 1/3 -:

$$\begin{aligned}
x - 2z &= -3 && (A_6)\\
y - z &= -3 && (B_6)\\
z &= 2 && (C_6)
\end{aligned}$$

نضرب (C_6) بـ 2+ ونضيف الناتج إلى (A_6) كما نضيف (C_6) إلى (B_6):

$$\begin{aligned}
x &= 1 && (A_7)\\
y &= -1 && (B_7)\\
z &= 2 && (C_7)
\end{aligned}$$

وهذا هو الحل الوحيد للجملة المفروضة ويمكن كتابته على النحو: (1, -1, 2).

مثال (٥):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 &= 0 && (A_1)\\
-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 && (B_1)\\
-x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 0 && (C_1)
\end{aligned}$$

الحل:

نضيف (A_1) إلى كل من (B_1) و (C_1):

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 &= 0 && (A_2)\\
2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 && (B_2)\\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 && (C_2)
\end{aligned}$$

نضرب (B_2) بـ 1/2+:

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 &= 0 && (A_3)\\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 && (B_3)\\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 && (C_3)
\end{aligned}$$

نضرب (B_3) بـ 1 - ونضيف الناتج إلى (C_3) أو نقول: نطرح (B_3) من (C_3):

$$\begin{array}{llr}
x_1 & + 3x_3 + x_4 = 0 & (A_4) \\
 & x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 & (B_4) \\
 & 0 = 0 & (C_4)
\end{array}$$

المعادلة (C_4) هي مطابقة ولا تخفض عدد المجاهيل، لذلك نستبعد هذه المعادلة:

$$\begin{array}{llr}
x_1 & + 3x_3 + x_4 = 0 & (A_5) \\
 & x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 & (B_5)
\end{array}$$

نحسب x_1 من (A_5) ونحسب x_2 من (B_5):

$$\begin{array}{lr}
x_1 = -3x_3 - x_4 & (A_6) \\
x_2 = -2x_3 - x_4 & (B_6)
\end{array}$$

فإذا فرضنا أن $x_3 = s, x_4 = t$ حيث s, t وسيطان، فنحصل على الحل الآتي:

$$x_1 = -3s - t$$
$$x_2 = -2s - t$$
$$x_3 = s, x_4 = t$$

يكتب الحل على شكل متجه:

$$(-3s - t, -2s - t, s, t)$$

حيث يأخذ الوسيطان s, t قيماً حقيقية بشكل مستقل، ونلاحظ أن لهذه الجملة الخطية عدداً لا نهائياً من الحلول. من هذه الحلول:

$$(0, 0, 0, 0) \ ; \ s = t = 0$$
$$(-1, -1, 0, 1) \ ; s = 0, t = 1$$

بعد هذه المقدمة حول الجمل الخطية يمكن إثبات صحة المبرهنة الآتي:

مبرهنة:

إن تطبيق أي من التحويلات الأولية على الجملة الخطية يحولها إلى جملة خطية مكافئة.

البرهان:

سوف نثبت صحة هذه المبرهنة من أجل العملية الثالثة؛ أي إضافة حاصل ضرب معادلة بعدد إلى معادلة أخرى حيث إن هذه العملية تتضمن العمليتين الباقيتين؛ لذلك نأخذ معادلتين من معادلات الجملة المفروضة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = d \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد k $(k \neq 0)$ ونضيف الناتج إلى المعادلة (2) ونترك بقية المعادلات، لذلك علينا أن نبرهن أن $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ هو حل للجملة الخطية المفروضة إذا وفقط إذا كان حلاً للجملة الناتجة بعد التحويل الذي أجريناه وبما أن بقية المعادلات تبقى ثابتة؛ لذا علينا أن نبرهن أن ذلك يتحقق من أجل المعادلة (2) التي تحولت إلى الشكل:

$$(c_1 + ka_1)\, x_1 + (c_2 + ka_2)\, x_2 + \ldots + (c_n + ka_n)\, x_n = d + kb \qquad (3)$$

لنفرض أن $(s_1, s_2,\ldots, s_n)$ يحقق الجملة الأساسية فهو يحقق (1) و (2) ومن ثمَّ:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b \qquad (4)$$
$$c_1s_1 + c_2s_2 + \ldots + c_ns_n = d \qquad (5)$$

نضرب المعادلة (4) بـ k ونضيف الناتج إلى المعادلة (5) فتبقى العلاقة الآتية صحيحة:

$$k(a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n) + (c_1s_1 + c_2s_2 + \ldots + c_ns_n) = kb + d \qquad (6)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد:

$$(c_1 + ka_1)s_1 + (c_2 + ka_2)s_2 + \ldots + (c_n + ka_n)s_n = d + kb \qquad (7)$$

وتدل (7) على أن $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ يحقق المعادلة (3).

والآن إذا فرضنا أن $(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)$ يحقق الجملة بعد التحويل، وهذا يعني أن المعادلة (7) محققة، ولكن (1) محققة أي:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$$

وهو بدوره يؤدي إلى أن:

$$k(a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots. + a_ns_n) = kb$$

بطرح المعادلة الأخيرة من المعادلة (7) نجد:

$$c_1s_1 + c_2s_2 + \ldots. + c_ns_n = d$$

وبذلك يتم المطلوب.

بعد هذا التمهيد يمكننا الدخول إلى مفهوم المصفوفات ودراستها.

٢ . ٣ . المصفوفات: Matrices

تعريف (٢):

لتكن المجموعتان E, F الجزئيتان من مجموعة الأعداد الطبيعية N حيث:

$$E = \{1, 2, \ldots., m\} \quad , \quad F = \{1, 2, \ldots., n\}$$

وليكن التطبيق $f: E \times F \to K$ المعرف بـ $f(i, j) = a_{ij}$ حيث K حقل مثل حقل الأعداد الحقيقية R أو العقدية C. صورة هذا التطبيق، هي:

$$f(E \times F) = \{a_{11}, a_{12}, \ldots., a_{1n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots., a_{mn}\}$$

نرتب هذه العناصر في m من الأسطر (الصفوف) و n من الأعمدة بين قوسين كالآتي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى هذه الصيغة بالمصفوفة $m \times n$ أو المصفوفة من المرتبة $(m \times n)$ حيث يدل العدد m على عدد الأسطر، والعدد n على عدد الأعمدة.

يحدد كل عنصر a_{ij} في المصفوفة بواسطة دليلين، الأول يرمز لرقم السطر الذي يقع فيه العنصر، والثاني لرقم العمود الواقع فيه ذلك العنصر. فمثلاً العنصر a_{23} يقع في السطر الثاني والعمود الثالث.

مثال (٦):

لتكن مجموعة المعادلات الخطية:

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 - 7x_3 = 10$$
$$-x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$$

إن مصفوفة المعاملات لهذه الجملة، هي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي من المرتبة (3 ,4) فيها $a_{41} = 3,\ a_{33} = -5\ ,\ a_{12} = -3$

تعريف (٣):

تسمى المصفوفة التي نحصل عليها بإضافة عمود إلى مصفوفة معاملات جملة خطية حيث يمثل هذا العمود الثوابت في الطرف الأيمن من الجملة، بالمصفوفة الموسعة للجملة: (Augmented Matrix).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

مثال (٧):

المصفوفة الموسعة للجملة الخطية في المثال السابق، هي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -7 & 10 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

وسوف يكون لهذه المصفوفة دور في حل جملة المعادلات الخطية في الفصل الثالث.

ملاحظة:

يمكن أن نعرف المصفوفة أيضاً كالآتي:

المصفوفة هي أي ترتيب مستطيل لمجموعة من العناصر على هيئة صفوف (أسطر) وأعمدة، وسوف تكون عناصر المصفوفة في الغالب أعداداً حقيقية في هذا الكتاب.

مثال (٨):

لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix} , \ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن A من المرتبة 2×4، B من المرتبة 3×1، C من المرتبة 3×2.

ملاحظة:

نكتب المصفوفة A من المرتبة (m, n) اختصاراً على الشكل:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \ ; \ i = 1, 2, \ldots, m \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

٢ . ٤ . تساوي مصفوفتين:

لتكن المصفوفتان A, B حيث:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \ , \ B = [b_{ij}]_{p\times q}$$

تتساوى المصفوفتان A, B ‏(A = B) إذا تحقق الشرطان الآتيان:

١ . المصفوفتان من المرتبة نفسها؛ أي: $m = p \ , n = q$

٢ . $a_{ij} = b_{ij}$ أي كل عنصر من A يساوي نظيره في B.

مثال (٩):

عين قيمة x لتكون المصفوفتان A و B متساويتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x^2 - x & 2 \\ x & 3 \\ 5 & x-2 \end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفتان من المرتبة نفسها لذلك لتساويهما يكفي أن تتساوى العناصر المتناظرة أي:

$$\begin{aligned} 2 &= x^2 - x \\ -1 &= x \\ -3 &= x - 2 \end{aligned}$$

وبالحل المشترك نجد أن $x = -1$ هي القيمة المطلوبة.

٢ . ٥ . مصفوفات خاصة:

١ . مصفوفة الصفر Zero Matrix:

وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار، ويرمز لها بـ $O_{m\times n}$ فمثلاً:

$$O_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; O_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٢ . مصفوفة السطر Row Matrix:

إن المصفوفة من المرتبة $1 \times m$ تسمى مصفوفة سطر وهي مؤلفة من سطر واحد وm من الأعمدة ومن ثمَّ هي من الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

٣ . مصفوفة العمود Column Matrix:

وهي المصفوفة من المرتبة $m \times 1$ أي إنها مؤلفة من m سطراً وعموداً واحداً، فهي من الشكل:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

٤ . المصفوفة المربعة Square Matrix:

إذا كان $n = m$ في المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، فإنها تسمى بالمصفوفة المربعة، وعليه فإنها من الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث تسمى العناصر a_{ii} بعناصر القطر الرئيس.

٥ . المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

تكون المصفوفة المربعة $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ قطرية إذا وفقط إذا كان $d_{ij} = 0$ من أجل $i \neq j$ أي إن عناصر المصفوفة جميعها عدا عناصر قطرها الرئيس تساوي الصفر.

إذن:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

٦ . المصفوفة الأحادية (الواحدية) **Unit Matrix**:

هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيس متساوية، وتساوي الواحد أي $d_{ii} = 1$; $i = 1,2,\dots,n$ ويرمز لها بـ I_n. فمثلاً:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

إذا كانت عناصر القطر الرئيس في المصفوفة القطرية متساوية، ولا تساوي الواحد، فإن المصفوفة القطرية تسمى مصفوفة سلمية Scalar matrix.

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

وعليه فإن المصفوفة السلمية تكتب بدلالة المصفوفة الواحدية على الشكل الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = kI_3$$

٧ . المصفوفة المثلثية **triangular Matrix**:

إذا كانت المصفوفة مربعة، وكانت العناصر جميعها الواقعة تحت القطر الرئيس أصفاراً، فإنها تسمى مصفوفة مثلثية عليا. وإذا كانت العناصر جميعها الواقعة فوق القطر الرئيس أصفاراً، سميت مصفوفة مثلثية سفلى:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ مصفوفة مثلثية عليا.

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$ مصفوفة مثلثية سفلى.

فمثلاً: المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ هي مصفوفة مثلثية عليا من المرتبة 3×3.

والمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$ هي مصفوفة مثلثية سفلى من المرتبة 2×2.

ملاحظة:

من الواضح أن مفهوم قطر مصفوفة يرتبط بالمصفوفات المربعة؛ لذلك فإن المصفوفات الواردة في ٥، ٦، ٧ لا يمكن أن تكون مستطيلة.

٢ . ٦ . العمليات على المصفوفات:

أولاً– منقول مصفوفة Transpose of a Matrix:

تعريف:

منقول مصفوفة A هو مصفوفة جديدة أسطرها أعمدة المصفوفة A وأعمدتها أسطر المصفوفة A، ويرمز لها بـ A^T، فإذا كانت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، فإن $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$.

مثال (١٠):

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

فإن: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ثانياً– المضاعف السلمي لمصفوفة Scalar multiple of Matrix:

لتكن المصفوفة $A[a_{ij}]_{m\times n}$، وليكن $\alpha \in K$ (حيث K حقل). تعرف المصفوفة αA على أنها المصفوفة الناتجة عن A بضرب كل عنصر من عناصر A بـ α: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

ويلاحظ أن αA لها مرتبة A نفسها.

مثال (١١):

إذا كانت:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $-3A = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 3 \\ -9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

ملاحظة:

إذا كان α, β عنصرين من الحقل K فإن:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

وذلك لأن:

$$(\alpha\beta)A = (\alpha\beta)[a_{ij}] = [\alpha\beta a_{ij}] = [\alpha(\beta a_{ij})] = \alpha[\beta a_{ij}] = \alpha(\beta A)$$

ثالثاً– جمع المصفوفات Sum of Matrices:

الشرط اللازم والكافي لجمع المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ هو أن تكونا من مرتبة واحدة (m, n)، عندئذ فإن الناتج هو مصفوفة جديدة $C = [c_{ij}]$ من المرتبة (m,n) بحيث:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; ; (1 \leq i \leq m \;\; , \;\; 1 \leq j \leq n)$$

ونكتب ذلك على الشكل:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

وتتصف عملية جمع المصفوفات بالآتي:

١ . عملية جمع المصفوفات عملية داخلية؛ أي عملية ثنائية.

٢ . عملية جمع المصفوفات تبديلية؛ أي:

$$A + B = B + A$$

٣ . مصفوفة الصفر 0 عنصر حيادي بالنسبة للجمع:

$$0 + A = A + 0 = A$$

٤ . الجمع تجميعي:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

٥ . لكل مصفوفة A نظير (معكوس) بالنسبة للجمع هو A – أي:

$$A + (- A) = (- A) + A = 0$$

ملاحظة:

لو عدنا إلى ضرب مصفوفة بعدد ووضعنا $\alpha = -1$، فإن:

$$\alpha A = -1 \, . \, A = [-a_{ij}]$$

ومن ثمَّ فإن كل عنصر في المصفوفة A – هو نظير (معكوس جمعي) للعنصر الذي يقابله في A.

وهكذا نجد من الخواص الخمس السابقة أن مجموعة المصفوفات $M_{m\times n}$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة للجمع.

٦ . $\forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow (\alpha + \beta) \, . \, A = \alpha A + \beta A$

٧ . $\forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha \, (A + B) = \alpha A + \alpha B$

لنبرهن الخاصة الأخيرة، ونترك برهان بقية الخواص كتمرين للطالب:

$$\alpha(A + B) = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] =$$
$$= \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B$$

مثال (١٢):

لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

١ . هل يمكن حساب $A + B$؟ ولماذا؟

٢ . هل يمكن حساب $A + C$؟ ولماذا؟ أوجد الناتج.

٣ . احسب $3A + 2C$.

الحل:

١ . لا يمكن حساب $A + B$؛ لأنهما من مرتبتين مختلفتين.

٢ . يمكن حساب $A + C$؛ لأنهما من مرتبة واحدة، ومن ثمَّ:

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 1+2 & -1+3 \\ 3+2 & -2-3 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

٣ .

$$3A + 2C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 9 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 13 & -12 & 14 \end{bmatrix}$$

رابعاً: طرح المصفوفات:

لتكن المصفوفتان A, B من المرتبة نفسها، نعرف حاصل طرح المصفوفتين $A - B$ على أنه مصفوفة جديدة C من المرتبة نفسها حيث:

$$C = A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]$$

مثال (١٣):

احسب كلاً من $A - B$, $2A - B$ إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-4 \\ -1+1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0-1 & 4-2 \\ -1+1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال (١٤):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من:

$$A^T - B^T, (A - B)^T, A^T + B^T, (A + B)^T$$

الحل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + B)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$A-B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 8\\ 2 & 15\end{bmatrix} \Rightarrow (A-B)^T = \begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ -1 & 8 & 15\end{bmatrix}$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix}2 & -1 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 4 & -3 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ -1 & 8 & 15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-B)^T = A^T - B^T$$

مثال (١٥):

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -6\\ -4 & 2 & -3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 4 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

فأثبت أن $4I_3 - B^T = A^T$ (حيث I_3 مصفوفة الواحدة من المرتبة 3).

الحل:

$$4I_3 - B^T = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -2\\ 3 & 6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 0 & -1 & 2\\ -3 & -6 & -3\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 0 & -1 & 2\\ -3 & -6 & -3\end{bmatrix} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $4I_3 - B^T = A^T$ وهو المطلوب.

خامساً: ضرب المصفوفات:

نعلم من حساب المتجهات أنه إذا كان $\vec{a}=(2,3), \vec{b}=(-4,5)$، فإن حاصل ضربهما الداخلي أو ما يسمى الضرب العددي هو العدد:

$$\vec{a}.\vec{b} = (2)(-4) + (3)(5) = -8 + 15 = 7$$

وإذا كان $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ فإن حاصل الضرب العددي هو:

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

وهكذا.....

نعود إلى المصفوفات فإذا كانت A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ فسوف نرمز للمتجه المكون من عناصر السطر i بالرمز X_i وللمتجه المكون من عناصر العمود j بالرمز X^j.

مثال (١٦):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$X_1 = (4,3,-1) \quad , \quad X^1 = (4,1,0)$$
$$X^3 = (-1,5,0) \quad , \quad X_2 = (1,2,5)$$

وعليه فإن:

$$X_1X^1 = (4)(4) + (3)(1) + (-1)(0) = 19$$
$$X_1X^3 = (4)(-1) + (3)(5) + (-1)(0) = 11$$

تعريف:

لتكن المصفوفتان A, B حيث:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \ , \ B = [b_{ij}]_{n\times q}$$

أي إن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B. يعرّف حاصل الضرب A.B على أنه مصفوفة C من المرتبة $m \times q$ التي يعطى كل عنصر فيها بالعلاقة:

$$c_{ij} = X_iY^j$$

حيث X_i يرمز للسطر i من المصفوفة A ويرمز Y^j للعمود j من المصفوفة B.

من هذا التعريف نجد أن:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

مثال (١٧):

أوجد كلاً من B . A و A . B في كل من الحالتين التاليتين إذا كان ممكناً:

١) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

٢) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

الحل:

١) عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B، ويساوي 3 إذاً يمكن حساب A . B، وهي من المرتبة 2 × 2:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = X_1Y^1 = (1,2,3) . (-4,0,-5) = 1(-4) + 2(0) + 3(-5) = -19$

$c_{12} = X_1Y^2 = (1,2,3) . (5,4,0) = 1(5) + 2(4) + 3(0) = 13$

$c_{21} = X_2Y^1 = (-3,-2,-1) . (-4,0,-5) = 12 + 0 + 5 = 17$

$c_{22} = X_2Y^2 = (-3,-2,-1) . (5,4,0) = -15 - 8 + 0 = -23$

$$\Rightarrow C = A.B = \begin{bmatrix} -19 & 13 \\ 17 & -23 \end{bmatrix}$$

كذلك يمكن حساب B.A؛ لأن عدد أعمدة B يساوي عدد أسطر A، ويساوي 2 ومن ثمَّ، فإن المصفوفة D = B . A هي من المرتبة 3 × 3 وتحسب كالآتي:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$d_{11} = X_1Y^1 = (-4,5) . (1, -3) = -4 - 15 = -19$

$d_{12} = (-4)(2) + (5)(-2) = -18$

$d_{13} = (-4)(3) + (5)(-1) = -17$

$d_{21} = (0)(1) + (4)(-3) = -12$

$d_{22} = (0)(2) + (4)(-2) = -8$

$d_{23} = (0)(3) + (4)(-1) = -4$

$d_{31} = (-5)(1) + (0)(-3) = -5$

$d_{32} = (-5)(2) + (0)(-2) = -10$

$d_{33} = (-5)(3) + (0)(-1) = -15$

$$D = \begin{bmatrix} -19 & -18 & -17 \\ -12 & -8 & -4 \\ -5 & -10 & -15 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A . B \neq B . A$.

٢) $B . A$ معرف؛ لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B، ويساوي 3 والمصفوفة الناتجة من المرتبة 3×1:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{bmatrix}$$

بينما B.A غير معرف؛ لأن عدد أعمدة B لا يساوي عدد أسطر A.

ملاحظة:

لتكن المصفوفة المربعة A، إن قوى A تحسب كالآتي:

$A^0 = I$

$A^1 = A$

$A^2 = A . A$

$A^3 = A . A . A$

....

$A^n = A . A . A . A ...... A$ (مرة n)

مثال (١٨):

لتكن المصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من A^1, A^2, A^3.

الحل:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وليكن العددان الطبيعيان m, n عندها يكون:

$$A^m A^n = A^{m+n} \ , \ (A^m)^n = A^{m.n}$$

ملاحظة:

تؤدي المصفوفة الأحادية I_n دور العنصر المحايد بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المربعة؛ أي إن $I.A = A$. ولذلك فإننا نعرف $A^0 = I$ مهما تكن المصفوفة المربعة A.

تتصف عملية الضرب كالآتي:

(1) $A\,(B \,.\, C) = (A \,.\, B)\, C$ عملية الضرب تجميعية:

(2) $A \,.\, I = A \ , \ I \,.\, B = B$

(3) $A\,(B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$

(4) $(B + C) \,.\, A = B \,.\, A + C \,.\, A$

(5) $A \,.\, 0 = 0 \ , \ 0 \,.\, B = 0$

(6) $(A \,.\, B)^T = B^T \,.\, A^T$

لنبرهن الخاصة الأولى. وبقية الخواص يمكن إثباتها بطريقة مشابهة.

لتكن A المصفوفة من المرتبة $m \times n$، والمصفوفة B من المرتبة $n \times p$، والمصفوفة C من المرتبة $p \times q$، ولنبرهن أن: $A . (B . C) = (A . B) . C$

بما أن:

$$(B.C)_{kj} = \sum_{s=1}^{p} b_{ks}.c_{sj}$$

فيكون:

$$(A(B.C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B.C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{p} b_{ks}c_{sj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj} = \sum_{s=1}^{p}(A.B)_{is}\,c_{sj}$$

$$= ((A . B)\,C)_{ij}$$

وبذلك يتم المطلوب.

مثال (١٩):

لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من:

(1) $A(B . C)$, $(A . B)\,C$

(2) $A\,(B + C)$, $A . B + A . C$

الحل:

(١)

$$A(B.C) = A\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -8 \\ 24 & 6 & -18 \\ 37 & 1 & -30 \end{bmatrix}$$

$$(A.B)C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -8 \\ 24 & 6 & -18 \\ 37 & 1 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\,.\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,.\,C$$

(٢)

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 7 \\ -6 & 9 & 11 \\ -11 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(A.B + A.C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 7 \\ -6 & 9 & 11 \\ -11 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\,.\,(B + C) = A\,.\,B + A\,.\,C$$

يمكن إثبات صحة ما يلي بسهولة:

مبرهنة:

لتكن المصفوفتان A, B عندئذ:

(١) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$ حيث كل منهما من المرتبة نفسها.

(٢) $(A\,.\,B)^T = B^T\,.\,A^T$ حيث A من المرتبة $m \times n$، B من المرتبة $n \times p$.

(٣) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ حيث $\alpha \in K$ مقدار سلمي من حقل K.

(٤) $(A^T)^T = A$.

ملخص:

(١) ملاحظة:

نرمز عادة لمجموعة المصفوفات جميعها من المرتبة $(m \times n)$ والتي عناصرها من حقل K بالرمز $M_{m\times n}(K)$ أو $M_{mn}(K)$ حيث نكتب مثلاً $A \in M_{m\times n}(K)$ للدلالة على أن A مصفوفة مرتبتها $m \times n$ وعناصرها من الحقل K.

يمكن تلخيص ما سبق ذكره حول خواص العمليات على المصفوفات بالآتي:

(٢) خواص حساب المصفوفات: Properties of matrix arithmetic

بفرض أن مرتبة المصفوفات الواردة فيما يلي تسمح بإجراء كل من العمليات الواردة عندئذ تكون الخواص التالية محققة:

a) $A + B = B + A$ جمع المصفوفات تبديلي.

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ جمع المصفوفات تجميعي.

c) $A\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,C$ ضرب المصفوفات تجميعي.

d) $A\,(B + C) = AB + AC$ توزيع الضرب على الجمع من اليسار.

e) $(B + C)\,A = BA + CA$ توزيع الضرب على الجمع من اليمين.

f) $A\,(B - C) = AB - AC$

g) $(B - C)\,A = BA - CA$

h) $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$ المضاعف السلمي توزيعي على جمع المصفوفات.

i) $\alpha(B - C) = \alpha B - \alpha C$

j) $(\alpha + \beta)\,C = \alpha C + \beta C$

$(\alpha - \beta) C = \alpha C - \beta C$ (k

$\alpha(\beta C) = (\alpha\beta) C$ (*l*

$\alpha(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$ (m

(٣) خواص المصفوفة الصفرية:

إذا كان $\alpha \in K$ مقداراً سلمياً (حيث K حقل)، وإذا كانت المصفوفات من مرتبة تسمح بإجراء عمليات الجمع والطرح على المصفوفات عندئذ:

(a) $A + 0 = 0 + A = A$ حيث 0 مصفوفة صفرية لها مرتبة A نفسها.

(b) $A - 0 = A$

(c) $A - A = A + (- A) = 0$

(d) $0 . A = 0$

(e) إذا كان $\alpha . A = 0$، فإن $\alpha = 0$ أو $A = 0$

٢ . ٧ . المصفوفات المتناظرة والمتناظرة المتخالفة:

Symmetric and skew symmetric matrices:

تعريف (١):

تكون المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_n$ متناظرة إذا كان $A = A^T$ (حيث عناصر A أعداد حقيقية أو عقدية).

ويُقال إن $A = [a_{ij}]_n$ متناظرة متخالفة إذا كان $A = - A^T$.

من هذا التعريف نلاحظ أن المصفوفة المتناظرة أو المتناظرة المتخالفة هي مصفوفة مربعة.

مثال:

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & -7 \\ 5 & 3 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -2 & 8 \\ -7 & -6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة؛ لأن $A = A^T$.

وكذلك المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ متناظرة؛ لأن $B = B^T$.

من التعريف السابق أيضاً نلاحظ أن عناصر القطر الرئيس في المصفوفة المتناظرة المتخالفة تساوي صفراً لكي يتحقق الشرط $A = - A^T$.

مثال:

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ -8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ متناظرة متخالفة؛ لأن:

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ومنه $-A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ -8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ إذن $A = - A^T$.

مثال:

المصفوفتان: $B = \begin{bmatrix} 0 & 4i & 1+2i \\ -4i & 0 & -3+i \\ -1-2i & 3-i & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1i & 4i & 1-i \\ 4i & -4 & -5i \\ 1-i & -5i & 1+2i \end{bmatrix}$

تحققان $A = A^T$، $B = - B^T$؛ أي إن A متناظرة، بينما B متناظرة متخالفة.

٢ . ٨ . المصفوفات الهرميتية: Hermitian Matrices

للتعرف على المصفوفات الهرميتية لا بد من معرفة كل من المفاهيم الآتية:

٢ . ٨ . ١ . مرافق مصفوفة: Conjugate of a matrix

تعريف:

إن مرافق المصفوفة العقدية $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ هو $\overline{A}$ حيث $\overline{A} = [\ \overline{a}_{ij}]_{m\times n}$ والتي عناصرها الأعداد المرافقة لعناصر A.

مثال:

إذا كانت:
$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & 5i \\ 1 & 1+10i \\ -1+2i & 12-4i \end{bmatrix}$$

فإن:
$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2+3i & -5i \\ 1 & 1-10i \\ -1-2i & 12+4i \end{bmatrix}$$

٢ . ٨ . ٢ . مرافق منقول مصفوفة: Conjugate transpose of a matrix

يعرف مرافق منقول المصفوفة العقدية $A = [a_{ij}]$ على أنه: $A^* = \overline{(A^T)} = (\overline{A})^T = [\overline{a}_{ij}]$

مثال:

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2+2i & 3i \\ 3+6i & -1-4i \\ 5i & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A^* = \begin{bmatrix} 2-2i & 3-6i & -5i \\ -3i & -1+4i & 7 \end{bmatrix}$

٢ . ٨ . ٣ . المصفوفة الهرميتية: Hermitian Matrix

تعريف:

نقول: إن المصفوفة العقدية $A = [a_{ij}]$ هي مصفوفة هرميتية إذا وفقط إذا كان: $A = A^*$.

ينتج من هذا التعريف مباشرة أن المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة مربعة بحيث:

$$(1 \le I , j \le n) \quad a_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

وكون هذه العلاقة الأخيرة محققة عندما $i = j$ أي إن $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ فهذا يستوجب أن تكون عناصر القطر الرئيس أعداداً حقيقية.

مثال:

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$

لنحسب $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$، ومنه فإن $A = A^*$.

أي إن A هرميتية.

أما المصفوفة الهرميتية المتخالفة فهي مصفوفة عقدية مربعة A بحيث $A = - A^* = - (\overline{A})^T$ ونستنتج أن القطر الرئيس في هذه المصفوفة هو أعداد تخيلية بحتة فمثلاً المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة هرميتية متخالفة.

نتائج:

(١) المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة.

(٢) المصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي مصفوفة متناظرة متخالفة.

٢ . ٩ . تمارين محلولة:

تمرين (١):

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}0 & 4 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ولتكن I_3 مصفوفة الواحدة من المرتبة الثالثة أوجد كلاً من:

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) $2A-3B$

(4) $A-5I_3$

(5) A^TB^T

$$(1)\ A+B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 5\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$(2)\ A-B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$(3)\ 2A-3B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 6\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 12 & -6\\ 9 & 3 & 6\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -12 & 8\\ -5 & -5 & 0\\ 3 & 2 & -7\end{bmatrix}$$

$$(4)\ A-5I_3=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 3\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

$$(5)\ A^T.B^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -1 & 1\\ -6 & 1 & 1\\ 16 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

تمرين(٢):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من $A^T , (A^T)^T$.

الحل:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \ , \ (A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

تمرين (٣):

أوجد كلاً من $A . B$ و $B . A$ إن أمكن:

١ . عندما: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

٢ . عندما: $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

تمرين (٤):

أثبت أنه إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $A^2 - A - 5I = 0$

الحل:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - A - 5I = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمارين (٢):

١ . لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً من: $A + B, A - B, 2C - 3B - A$.

٢ . احسب حاصل الضرب:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

٣ . إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

(١) احسب كلاً من $A.B$ و $B.A$.

(٢) ما هي قيم θ التي تجعل $A.B = B.A$؟.

٤ . احسب:
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

٥ . إذا كان:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ 0 & -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 & -4 \\ 8 & y & -2 \\ -1 & -3 & z \end{bmatrix}$$

فأوجد قيم x, y, z.

٦ . إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن:

(١) $4I_3 - A^T = B^T$

(٢) $(A \,.\, B)^T = B^T \,.\, A^T$.

*　　　*　　　*

الفصل الثالث

المحددات Determinants

٣ . ١ . مفهوم المحددات:

يرتبط بكل مصفوفة مربعة عدد يعرّف بأنه محدد تلك المصفوفة، وهذا يحمل معلومات عن المصفوفة فيما إذا كانت فريدة Singular أو يقال أيضاً شاذة أو لا.

ملاحظة:

إذا كانت A مصفوفة من المرتبة $m \times n$، فإن المصفوفة الجزئية A_{ij} هي المصفوفة الناتجة عن A بحذف السطر i والعمود j.

مثال (١):

أوجد المصفوفة الجزئية A_{23} من المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف (١):

لتكن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ نعرف محدد المصفوفة A كالآتي:

(1) $\det A = a_{11} \;\; ; \;\; n = 1$

(2) $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \;\; ; \;\; n = 2$

(3) $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

ويرمز للمحدد أيضاً بـ:
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{23} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

سوف نوضح هذا التعريف من أجل $n = 3$.

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وكل من هذه المحددات من المرتبة الثانية وهو معرف في (١).

مثال (٢):

أوجد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + (-3) \det \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\,[(-2)(2) - 1(0)] - 1\,[(-3)(2) - 2(0)] - 3\,[(-3)(1) - (2)(-2)]$$

$$= 2(-4) – 1(-6) – 3(-3 + 4) = -8 + 6 – 3 = -5$$

تعريف (٢):

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة n، ولتكن المصفوفة الجزئية A_{ij} من المرتبة $(n–1)$ والتي نحصل عليها ـ كما أسلفنا سابقاً ـ بحذف السطر i والعمود j من المصفوفة A عندها:

١ ـ نسمي المحدد $\det(A_{ij})$ الصغير (minor) i,j للمصفوفة A.

٢ ـ نسمي المقدار $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ المرافق (Cofactor) (i,j) للمصفوفة، ونرمز له بالرمز $D_{ij} = (-1)^{ij}\det(A_{ij})$.

مثال (٣):

لتكن المصفوفة:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد الصغير (2,3) والمرافق (2,3) لهذه المصفوفة.

الحل:

الصغير هو $\det(A_{23})$ وهو:

$$\det(A_{23}) = \det\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -10$$

أما المرافق فهو $(-1)^{2+3}\det(A_{23})$ وعليه فإن:

$$D_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = (-1)^5(-10) = 10$$

ملاحظة:

في بعض المراجع نجد أن الصغير والمرافق يرتبطان باسم العنصر a_{ij}، فنقول مرافق العنصر a_{ij} وصغير هذا العنصر.

٣ . ٢ . نشأة المحددات:

لقد نشأت المحددات تاريخياً من دراسة جملة معادلات خطية، ولتوضيح ذلك نعد الجملة الخطية:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

إذا حاولنا حل هذه الجملة بالطرق المعروفة لدينا نجد أنه عندما يكون هناك حل وحيد لهذه الجملة، فإن:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad , \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

فإذا عبرنا عن ذلك بواسطة المحددات نجد:

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\det\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

ملاحظة:

يرمز عادة للمحدد بـ:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

في تعريف المحدد (١) يمكن كتابة (٣) كالآتي:

$$\det A = a_{11}\,[(-1)^{1+1}\det A_{11}] + a_{12}[(-1)^{1+2}\det A_{12}] + \ldots.. + a_{1n}\,[(-1)^{1+n}\det A_{1n}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[(-1)^{1+j}\det A_{1j}]$$

ويسمى هذا نشر أو فك المحدد حسب عناصر سطره الأول.

مبرهنة:

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة n حيث $n \geq 2$. لا تتغير قيمة المحدد إذا نشرناه حسب عناصر أي سطر أو حسب عناصر أي عمود.

الإثبات:

لننشر المحدد حسب السطر i فيكون:

$$\det A = a_{i1}\,[(-1)^{i+1}\det A_{i1}] + a_{i2}[(-1)^{i+2}\det A_{i2}] + \ldots. + a_{in}[(-1)^{i+n}\det A_{in}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

وإذا نشرنا المحدد حسب عناصر العمود j نجد:

$$\det A = a_{ij}\,[(-1)^{1+j}\det A_{1j}] + a_{2j}\,[(-1)^{2+j}\det A_{2j}] + \ldots. + a_{nj}[(-1)^{n+j}\det A_{nj}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}[(-1)^{i+j}\det A_{ij}]$$

وبذلك نجد القيمة نفسها.

ومنه أيضاً نحصل على النتيجة الآتية: $\det(A) = \det(A^T)$

٣ . ٣ . قاعدة ساروس:

تستعمل هذه الطريقة في نشر المحددات من المرتبة الثالثة فقط وتتلخص هذه القاعدة كالآتي:

نكتب المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ثم نعيد كتابة العمودين الأول والثاني إلى يمين هذا المحدد، فتتكون ثلاثة أقطار رئيسة وثلاثة أقطار ثانوية، وقيمة المحدد تساوي مجموع حواصل ضرب عناصر كل قطر

من الأقطار الرئيسة مطروحاً منها مجموع حواصل ضرب عناصر كل قطر من الأقطار الثانوية ويتم ذلك عملياً كالآتي:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{12} \end{matrix}$$

$$D = (a_{11}.\ a_{22}\ .\ a_{33} + a_{12}\ .\ a_{23}\ .\ a_{31} + a_{13}\ .\ a_{21}\ .\ a_{32}) -$$
$$- (a_{31}\ .\ a_{22}\ .\ a_{13} + a_{32}\ .\ a_{23}\ .\ a_{11} + a_{33}\ .\ a_{21}\ .\ a_{12})$$

مثال (٤):

احسب قيمة المحدد الآتي وفق قاعدة ساروس:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$D = [(2.0.0) + (-2)(1)(3) + (1.1.4)] - [3.0.1 + 4.1.2 + 0.1.(-2)]$$
$$D = (0 - 6 + 4) - (0 + 8 + 0) = -2 -8 = - 10$$

٣ . ٤ . خواص المحددات:

خاصة (١):

إذا ضربنا أي سطر (أو عمود) في المحدد detA بالعدد m فإن قيمة المحدد تضرب أيضاً بالعدد m.

البرهان:

لنفرض أننا ضربنا عناصر السطر i بالعدد m ولنكتب منشور هذا المحدد حسب عناصر سطره i نجد:

$$\sum_{j=1}^{n} ma_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} = m.\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} = m.\det A$$

نتيجة (١):

إذا حوى أحد أسطر (أو أعمدة) المحدد عاملاً مشتركاً، فيمكن إخراجه خارج المحدد.

نتيجة (٢):

ضرب محدد بعدد k يكافئ ضرب عناصر أحد أسطره (أو أعمدته) فقط بذلك العدد، في حين رأينا في المصفوفات أن عناصر المصفوفة جميعها تضرب بذلك العدد.

خاصة (٢):

إذا كان كل عنصر من عناصر السطر i (أو العمود j) $(i,\ j = 1,2,\ldots,n)$ من detA هو مجموع لعنصرين أي $a_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$، فإن detA يساوي مجموع محددين $\det A_1 + \det A_2$ عناصر السطر i (أو العمود j) فيهما هي α_{ij}, β_{ij} على الترتيب، وبقية عناصرهما هي عناصر detA نفسها.

البرهان:

نكتب منشور هذا المحدد حسب عناصر سطره i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\det A_{ij}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

$$\det A = \det A_1 + \det A_2$$

نتيجة (٣):

لجمع محددين يختلفان في سطر (أو عمود) فقط نجمع عناصر ذلك السطر (أو العمود) ونكتب بقية العناصر كما هي.

خاصة (٣):

مبادلة سطرين (أو عمودين) في محدد يغير إشارته.

البرهان:

من أجل $n = 2$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

نبدل موضعي السطرين:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

والخاصة صحيحة من أجل $n = 2$.

والآن سوف نبرهن أنه إذا كانت الخاصة صحيحة من أجل كل محدد من المرتبة k حيث $k \le n - 1$ فهي صحيحة من أجل $k = n$.

في المحدد $\det A$ من المرتبة $k = n$ حيث $k > 2$ الذي بادلنا فيه موضعي سطرين يوجد فيه على الأقل سطر لم يتغير موضعه، وليكن السطر i، ولنكتب منشور هذا المحدد حسب عناصر السطر i فيكون:

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D'_{ij}$$

والعامل المرافق D'_{ij} في المحدد الجديد هو العامل المرافق D_{ij} بعد تبديل موضعي سطرين فيه، وبما أن الخاصة صحيحة من أجل $k = n - 1$، فإن $D'_{ij} = - D_{ij}$ وبالتعويض نجد:

$$\det A' = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} = -\det A$$

وهو المطلوب.

خاصة (٤):

إذا كان أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في محدد مماثلاً لسطر آخر أو عمود آخر، فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

البرهان:

لنفرض أن السطرين i, j متماثلان، فيكون:

$$\det A = - \det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

نتيجة (٤):

إذا كانت عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) مضاعفات لعناصر سطر (عمود) آخر، فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

تعد الخاصة الآتية من أهم خواص المحددات؛ لأنها تفيد في تبسيط حساب قيمة المحدد؛ لأن العملية المطبقة لا تغير من قيمته.

خاصة (٥):

لا تتغير قيمة المحدد إذا ضربنا أحد أسطره بعدد ما، وأضفنا الناتج إلى سطر آخر.

البرهان:

ليكن المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نضرب السطر j بالعدد $(0 \neq \alpha)$، ونضيف الناتج إلى السطر i، فنحصل على محدد جديد D_1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \dots & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بتطبيق الخاصتين (١) و (٢) على المحدد الأخير D_1 نجد:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = D'_1 + \alpha D''_1$$

ولكن $D'_1 = D$ و $D''_1 = 0$ لتساوي سطرين فيه إذن: $D_1 = D = D'_1$

خاصة (٦):

قيمة المحدد المثلثي تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس.

البرهان:

ليكن المحدد المثلثي:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

نفك هذا المحدد وفق عناصر سطره الأول:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - 0) - 0\,(a_{21}a_{33} - 0) + 0\,(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}$$

ملاحظات:

١ . تسمى الصورة المثلثية السابقة للمحدد بالصورة المثلثية السفلى، بينما إذا كانت العناصر جميعها الواقعة تحت القطر الرئيس أصفاراً؛ فإن للمحدد صورة مثلثية عليا.

٢ . $\det A = \det A^T$؛ لأن نشر المحدد حسب سطر أو عمود لا يغير قيمة المحدد.

٣ . إذا كانت عناصر سطر ما جميعها (عمود ما) في محدد تساوي صفراً، فإن المحدد يساوي صفراً.

سوف نبين فيما يأتي صحة بعض الخواص من أجل محددات المرتبة الثالثة:

تمرين:

لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بترتيبها نفسه؛ أي إن $\det A = \det A^T$.

البرهان:

ليكن المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

نبدل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر، ولنفرض D' المحدد الجديد:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ولنبرهن أن $D = D'$:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad (1)$$

$$D' = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $D = D'$.

تطبيق:

تبديل موضعي سطرين في محدد يغير إشارته:

الحل:

ليكن المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

نعلم أن:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

نبدل موضعي السطرين الأول والثاني، وليكن D' المحدد الناتج:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D' = -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) + (a_{33}a_{21}a_{12} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

ومن ثمَّ نجد أن: $D' = - D$.

تطبيق:

إذا تساوت العناصر المتناظرة في سطرين أو عمودين من محدد، فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

البرهان:

ليكن المحدد D الذي فيه عناصر السطر الثاني تساوي نظيراتها في السطر الثالث، ولنبرهن أن قيمة المحدد تساوي الصفر:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{22}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{23} - a_{21}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}) = 0$$

تطبيق:

لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أحد الأسطر عناصر سطر آخر بعد ضربها بعدد k.

البرهان:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ k، ونضيف الناتج للسطر الأول؛ فنحصل على المحدد:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وحسب الخاصة (٥) نجد:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ولكن المحدد الأخير يساوي الصفر لتساوي سطرين فيه، إذن:

$$D' = D + k(0) = D + 0 = D$$

٣ . ٥ . ملاحظات مهمة:

١ . لتكن المصفوفتان المربعتان A, B من المرتبة نفسها، عندئذ يكون:

$$\det(A.B) = (\det A)(\det B)$$

٢ . $\det(A.B)^T = (\det A)(\det B^T) = (\det A)(\det B)$

٣ . إذا كانت D مصفوفة قطرية:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن: $\det D = d_{11}.d_{22} \,\dots\dots\, d_{nn}$

إذا كانت I مصفوفة الواحدة، فإن: $\det I = 1$

٤ . لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n، وليكن α عدد ما، عندئذ:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

٣ . ٦ . تمارين محلولة:

سوف نقوم بحل بعض التمارين التي تؤكد صحة الخواص السابقة.

تمرين (١):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 4 & 0 & 7\\ 8 & 14 & -3\end{bmatrix}$$

احسب كلاً من detA، $\det A^T$.

الحل:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 4 & 0 & 7\\ 8 & 14 & -3\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}0 & 7\\ 14 & -3\end{vmatrix}-(-3).\begin{vmatrix}4 & 7\\ 8 & -3\end{vmatrix}+5.\begin{vmatrix}4 & 0\\ 8 & 14\end{vmatrix}$$

detA = 1 (0 – 98) + 3 (-12-56) + 5 (56 – 0)

detA = - 98 – 204 + 280 = - 22

$$\det A^T=\begin{vmatrix}1 & 4 & 8\\ -3 & 0 & 14\\ 5 & 7 & -3\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}0 & 14\\ 7 & -3\end{vmatrix}-4.\begin{vmatrix}-3 & 14\\ 5 & -3\end{vmatrix}+8.\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 5 & 7\end{vmatrix}$$

$\det A^T$ = 1 (0 – 98) – 4 (9 – 70) + 8 (–21 – 0)

$\det A^T$ = – 98 + 244 – 168 = – 22

تمرين (٢):

أوجد قيمة كل من المحددين:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & -2 & -1\\ -5 & 0 & 5\end{vmatrix},\ D'=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 0 & -5 & 5\end{vmatrix}$$

الحل:

$$D = 1.\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = -10 - 0 + 3\ (0 - 10) = -10 - 30 = -40$$

$$D' = 0.\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D' = 0 - 1\ (-10 - 0) + 3\ (10 - 0) = +10 + 30 = +40$$

وهذه النتيجة تؤكد صحة الخاصة (٣) من (٤ . ٢) نجد أن $D' = -D$ (D' ينتج عن D بتبديل موضعي العمودين الأول والثاني).

تمرين (٣):

أوجد قيمة المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$D = 2.\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -28 - 2 + 30 = 0$$

إذاً عندما يتساوى سطران في محدد، فإن قيمته تساوي الصفر (الخاصة (٤)).

تمرين (٤):

أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -42\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

نخرج 7 عاملاً مشتركاً بين عناصر العمود الأول (نتيجة (١) خاصة (١)):

$$D=\begin{vmatrix}7 & -4 & 4\\ 42 & -15 & 6\\ 21 & 2 & 12\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1 & -4 & 4\\ 6 & -15 & 6\\ 3 & 2 & 12\end{vmatrix}$$

نخرج 2 عاملاً مشتركاً بين عناصر العمود الثالث:

$$D=7(2)\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ 6 & -15 & 3\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

ثم نخرج 3- عاملاً مشتركاً بين عناصر السطر الثاني:

$$D=7(2)(-3)\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}=-42\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

تمرين (٥):

دون فك المحدد أثبت أن:

$$D=\begin{vmatrix}39 & 9 & 70\\ 30 & 7 & 53\\ 13 & 3 & 23\end{vmatrix}=-1$$

الحل:

نضرب السطر الثالث بـ 3-، ونضيف الناتج إلى السطر الأول (الخاصة (٥)):

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 30 & 7 & 53\\ 13 & 3 & 23\end{vmatrix}$$

نفك المحدد وفق عناصر السطر الأول:

$$D=1.\begin{vmatrix}30 & 7\\ 13 & 3\end{vmatrix}=90-91=-1$$

تمرين (٦):

دون فك المحدد أثبت أن:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

الحل:

نضيف العمود الثاني إلى العمود الثالث (الخاصة (٥)):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

نخرج $a + b + c$ عاملاً مشتركاً بين عناصر العمود الثالث (نتيجة (١) خاصة (١)):

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

العمودان الأول والثالث متساويان فالمحدد يساوي الصفر (الخاصة (٤)):

$$D = (a + b + c)(0) = 0$$

تمرين (٧):

أوجد قيمة المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 11 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

الحل:

هذا المحدد مثلثي، إذاً قيمته تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس:

$$D = (3)(-4)(-5) = 60$$

تمرين (٨):

احسب قيمة المحدد التالي بعد تحويله إلى الشكل المثلثي:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & 8 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نضيف السطر الأول إلى السطر الثاني:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 10 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ 5 -، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & -22 & 16 \end{vmatrix}$$

نخرج 5 من السطر الثاني:

$$D = 5.\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -22 & 16 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ 11، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = 5.\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 27 \end{vmatrix}$$

والآن أصبح للمحدد الشكل المثلثي، ومن ثمَّ:

$$D = 5 \, . \, ((1).(2).(27)) = 5\,(54) = 270$$

تمرين (٩):

برهن أن:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}=0$$

نضرب كلاً من السطرين الأول والثالث بـ 1 -، ونضيف الناتج إلى السطرين الثاني والرابع على الترتيب:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=0$$

لتساوي سطرين فيه.

تمرين (١٠):

أثبت دون فك المحدد أن:

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b(b-c)(c-a)$$

الحل:

نضرب السطر الأول بـ 1- ونضيف الناتج إلى كل من السطرين الثاني والثالث:

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & (b-a)(b+a)\\ 0 & c-a & (c-a)(c+a)\end{vmatrix}$$

نأخذ (b – a) عاملاً مشتركاً من السطر الثاني، كما نأخذ (c – a) عاملاً مشتركاً من السطر الثالث:

$$D=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & (b+a)\\ 0 & 1 & (c+a)\end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ 1-، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & (b+a)\\ 0 & 0 & (c-b)\end{vmatrix}$$

والمحدد الأخير مثلثي، إذن:

$$D = (b-a)(c-a)\,[(1)(1)(c-b)] = (b-a)(c-a)(c-b)$$
$$D = (a-b)(b-c)(c-a)$$

وهو المطلوب.

تمرين (١١):

تحقق فيما يأتي أن: $\det(\alpha A) = \alpha^n.\det A$

(a) $\alpha = 3$ ، $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{bmatrix}$

(b) $\alpha = -2$ ، $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$

الحل:

(a) $\det A=\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{vmatrix}=-12+10=-2$.

$$\alpha A=3A=\begin{bmatrix}9 & 15\\ -6 & -12\end{bmatrix}\Rightarrow \det(3A)=-108+90=-18$$

ولكن: $-18 = (3)^2(-2) = \alpha^2 \det A$

(b) بالطريقة نفسها يترك للطالب.

تمارين (٣):

١ . احسب قيمة كل من المحددات الآتية:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(c)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad (d)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

٢ . برهن أن:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3 & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6$$

٣ . إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A^2 = I_n$ برهن أن: $\det A = \pm 1$.

وإذا كان: $A^T . A = A . A^T = I_n$ برهن أيضاً أن $\det A = \pm 1$.

٤ . برهن أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

٥ . مستخدماً خواص المحددات احسب قيمة كلاً من المحددين:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

٦ . عين قيمة x في كل مما يأتي:

(a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -2 & x-3 & -2 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

٧ . أثبت دون فك المحدد أن:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -2 & 10 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} -5 & -7 & 3 \\ 8 & 11 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} x+y & 2y & z \\ y+z & 2z & x \\ z+x & 2x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

٨ . حل المعادلة:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$$

٩ . تحقق أن: $\det(A.B) = \det(B.A)$ حيث:

(a) $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

وتحقق أيضاً أن $\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$، وأن $\det(A^2) = (\det A)^2$.

* * *

الفصل الرابع

حلول الجمل الخطية

Solutions of Linear Systems

٤ . ١ . الشكل المصفوفي لجملة معادلات خطية:

لتكن جملة المعادلات الخطية مكونة من m من المعادلات و n من المجاهيل (متغيرات) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أي:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

تسمى الأعداد a_{ij} معاملات المجاهيل (أمثال المجاهيل)، وتدعى b_i ثوابت المعادلات.

نلاحظ في المعادلة التي ترتيبها i أن معامل المتحول الذي ترتيبه j هو a_{ij}، فمثلاً في المعادلة الثانية معامل المجهول الأول هو a_{21}.

من خلال تعريف تساوي مصفوفتين يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية السابقة على الشكل الآتي:

$$
\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

ومن خلال تعريف ضرب المصفوفات، فإن الطرف الأيسر يمكن تحويله إلى ضرب مصفوفتين، وتصبح العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نرمز للمصفوفة $[a_{ij}]_{m\times n}$ بـ A، وللمصفوفة $[x_i]_{n\times 1}$ بـ X، وللمصفوفة $[b_i]_{n\times 1}$ بـ B، عندئذ نكتب العلاقة السابقة على الشكل الآتي والمسمى بالشكل المصفوفي للجملة الخطية:

$$AX = B$$

تسمى A مصفوفة معاملات، وتسمى X مصفوفة المجاهيل، أما B فتسمى مصفوفة الثوابت أو عمود الثوابت.

مثال (١):

اكتب كلاً من جمل المعادلات الآتية بالشكل المصفوفي:

١)
$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

٢)
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

الحل:

١)
$$A . X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٢)
$$A . X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٤ . ٢ . العمليات (التحويلات) الأولية على أسطر مصفوفة:

في مقدمة الفصل الأول ناقشنا حل مجموعة معادلات خطية، ورأينا أن العمليات التالية على مجموعة معادلات خطية تقود إلى جملة معادلات جديدة مكافئة للجملة الأساسية ومن ثمَّ فإن حل الجملة الجديدة هو حل الجملة الأساسية نفسه، وهذه العمليات، هي:

١ . المبادلات بين موضعي معادلتين.

٢ . ضرب معادلة بعدد لا يساوي الصفر.

٣ . ضرب إحدى المعادلات بعدد لا يساوي الصفر، وإضافة الناتج إلى معادلة أخرى.

والآن يمكن أن نستخدم المصفوفات لبيان خطوات حل جملة معادلات خطية:

مثال (٢):

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$2x - 3y + z = 1$$
$$x + 2z = 0$$
$$-y - z = -5$$

نسمي المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات المذكورة. حيث يقع إلى يسار الخط الشاقولي مصفوفة المعاملات، ويمثل العمود إلى يمين الخط الشاقولي عمود الحدود الثابتة في كل معادلة.

مثال (٣):

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 - 3x_2 - 1 = x_4 - 4x_3$$
$$-x_1 + 2x_3 = 0$$

اكتب المصفوفة الموسعة لهذه الجملة.

الحل:

نكتب الجملة في شكلها النظامي، وذلك بترتيب المجاهيل:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$
$$-x_1 + 2x_3 = 0$$

فتكون المصفوفة الموسعة:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بطريقة مشابهة للعمليات التي أجريت على جملة معادلات خطية، فإننا نعرف العمليات الأولية على أسطر مصفوفة بأنها:

١ . المبادلات بين موضعي السطرين i و j في المصفوفة، ونرمز لذلك بـ $R_{i,j}$.

٢ . ضرب عناصر السطر i بالعدد $\alpha \neq 0$، ويرمز لذلك بـ $R_i(\alpha)$.

٣ . ضرب عناصر السطر j بالعدد α $(\alpha \neq 0)$، وإضافة الناتج إلى عناصر السطر i، ويرمز لذلك بـ $R_{i,j}(\alpha)$.

هذه العمليات تقود إلى مصفوفة مكافئة للمصفوفة المفروضة، ومنه التعريف الآتي:

تعريف (١):

نقول عن مصفوفتين إنهما متكافئتان إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بسلسلة من التحويلات الأولية على الأسطر.

مثال (٤):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

نضرب السطر الثالث بالعدد 3 ($R_3(3)$)، كما نضيف للسطر الثاني حاصل ضرب السطر الأول بـ 2 - ($R_{21}(-2)$)، فنحصل على مصفوفة جديدة نسميها مكافئة للمصفوفة A، ويرمز للتكافؤ بـ (~):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-2)}{\overset{R_3(3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 15 & -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال (٥):

لتكن جملة المعادلات الخطية ومصفوفتها الموسعة:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

سوف نجري عمليات أولية على جملة المعادلات الخطية وما يقابلها على المصفوفة الموسعة.

١ . نضرب المعادلة الأولى بـ 3 - ونضيف الناتج إلى المعادلة الثالثة.

٢ . نضرب المعادلة الثانية بـ 1/2، فنجد:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -2 \\ 2x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

مثال (٦):

بتطبيق عمليات أولية على أسطر المصفوفة الموسعة أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} -y+z&=3 \\ x-y-z&=0 \\ -x-z&=-3 \end{aligned}$$

الحل:

المصفوفة الموسعة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

نبادل موضعي السطرين الأول والثاني $R_{1,2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \overset{R_{1,2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

نضيف السطر الأول للثالث، ونضرب السطر الثاني بـ 1 -:

$$\overset{R_{1,3}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \overset{R_{2}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

نضيف السطر الثاني إلى السطرين الثالث والأول ثم نضرب السطر الثالث في المصفوفة الجديدة بـ $-\frac{1}{3}$:

$$\overset{R_{3,2}(1)}{\underset{R_{1,2}(1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & -3\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right]\overset{R_3(-1/3)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & -3\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

نضرب السطر الثالث بـ 2 ثم بـ 1، ونضيف الناتج إلى السطرين الأول والثاني على الترتيب:

$$\overset{R_{1,3}(2)}{\underset{R_{2,3}(1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

إذا عدنا وكتبنا جملة المعادلات التي تقابل المصفوفة الأخيرة نجد:

$$x = 1$$
$$y = -1$$
$$z = 2$$

وهذه الجملة تكافئ الجملة الأساسية إذن فالحل هو:

$$x = 1$$
$$y = -1$$
$$z = 2$$

هنا تبرز الحقيقة الآتية:

إذا كانت المصفوفتان الموسعتان متكافئتين، فإن جملة المعادلات الموافقة تكون متكافئة أيضاً ولها الحل نفسه.

٤ . ٣ . اختزال المصفوفة إلى الشكل المدرج:

لتكن المصفوفة غير الصفرية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إذا كان العنصر $a_{11} = 0$ فيوجد على الأقل عنصر $a_{ij} \neq 0$ لذلك نبادل السطر الأول بالسطر i والعمود الأول بالعمود j ونضرب عناصر السطر الأول الجديد بمقلوب a_{ij} أي بـ a_{ij}^{-1}؛ فنحصل بذلك على مصفوفة جديدة $B = [b_{ij}]$ فيها $b_{11} = 1$.

نطبق على المصفوفة B التحويلات الآتية:

$$R_{21}(-b_{21}) , R_{31}(-b_{31}) ,\ldots\ldots, R_{m1}(-b_{m1})$$

فنحصل على المصفوفة الجديدة $C = [c_{ij}]$ من الشكل:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

نأخذ المصفوفة الجزئية C_{11}:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

نطبق على هذه المصفوفة التحويلات نفسها التي طبقناها على A، ونستمر بالعمل هكذا حتى نحصل على مصفوفة $D = [d_{ij}]$ من الشكل:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & d_{3r} & \cdots & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{rr+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

تسمى المصفوفة D بالشكل المدرج للمصفوفة A.

مثال (٧):

المصفوفات التالية من الشكل المدرج:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right],\ \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&1&0\\0&1&2&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],\ \begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

٤ . ٤ . توظيف الشكل المدرج في حل جملة معادلات خطية:

إن الهدف الرئيس من تحويل مصفوفة إلى الشكل المدرج هو حل جملة معادلات خطية، وهو ما يسمى طريقة غاوص . جوردان Gauss – Jordan elimination.

والعمليات التي نجريها لتحويل مصفوفة إلى الشكل المدرج تنقلنا إلى مصفوفات مكافئة، وهذا يعني أن الشكل المدرج لمصفوفة يكافئ (~) المصفوفة الأساسية، وسوف نبين ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (٨):

باستخدام طريقة غاوص . جوردان أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_3 + 2x_4 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4$$
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة لهذه الجملة ثم نحولها إلى الشكل المدرج:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&1&2&3\\2&4&-2&0&4\\2&4&-1&2&7\end{array}\right]\overset{R_{1,2}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}2&4&-2&0&4\\0&0&1&2&3\\2&4&-1&2&7\end{array}\right]\overset{R_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&2\\0&0&1&2&3\\2&4&-1&2&7\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{3,1}(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right]\overset{R_{3,2}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

وبالعودة إلى جملة المعادلات نجد أنها تكافئ الجملة الآتية:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_3 + 2x_4 = 3$$

وعليه فإن:

$$x_3 = 3 - 2x_4 \;\;,\;\; x_1 = 5 - 2x_2 - 2x_4$$

حيث يوجد في هذا الحل وسيطان (متحولان اختياريان) نعدهما x_4, x_2 فإذا كان $x_4 = t, x_2 = s$، فإن مجموعة الحل تأخذ الشكل الآتي:

$$\{(5 - 2s - 2t, s , 3 - 2t, t) \; ; s, t \in R\}$$

مثال (٩):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات:

$$x_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$
$$- x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = - 2$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = - 1$$
$$- x_2 + 2x_3 = 0$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\1 & 2 & 3 & 1 & 0\\-1 & -1 & 1 & 1 & -2\\0 & 1 & 1 & 1 & -1\\0 & -1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right]\underset{R_{3,1}(1)}{\overset{R_{2,1}(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 3 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & -1\\0 & -1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{2,3}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right]\underset{\substack{R_{4,2}(-1)\\ R_{5,2}(1)}}{\overset{R_{1,2}(-2)}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{4,5}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\overset{R_{4,3}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{3}\left(\frac{1}{3}\right)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\overset{R_{2,3}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

وبالعودة إلى المعادلات:

$$x_1=\frac{7}{3}+\frac{4}{3}x_4$$

$$x_2=\frac{-2}{3}-\frac{2}{3}x_4$$

$$x_3=\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}x_4$$

أي إن الحل هنا بدلالة وسيط واحد هو x_4، ولذلك نفرض $x_4 = t$ فيكون الحل:

$$x_1=\frac{7}{3}+\frac{4}{3}t$$

$$x_2=\frac{-2}{3}-\frac{2}{3}t$$

$$x_3 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{3}t$$

مثال (١٠):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات:

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_{3,1}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_{3,2}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نلاحظ من هذه المصفوفة أن المعادلة الثالثة تكافئ المعادلة:

$$0 \,.\, x_1 + 0x_2 + 0.x_3 = 1$$

وهذا مستحيل، وعليه فإنه لا يوجد حل مشترك لجملة المعادلات الخطية؛ أي إن الجملة مستحيلة الحل.

٤ . ٥ . مقلوب (معكوس) مصفوفة مربعة inverse of a matrix:

تعريف (٢):

لتكن A مصفوفة مربعة، ولنفرض أنه توجد مصفوفة B بحيث $A.B = B.A = I$ (I مصفوفة الواحدة) عندها نقول: إن A قابلة للقلب (invertible) أو ليست فريدة (nonsingular) وإن B هي مقلوب (معكوس ضربي) لـ A. ونرمز للمقلوب بـ A^{-1}.

مثال (١١):

برهن أن B هي مقلوب A إذا علمت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B.A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

إذن: $AB = BA = I$ ومن ثمَّ فإن كلاً من A و B معكوس للأخرى.

مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للقلب، فإن المقلوب وحيد.

البرهان:

لنفرض أن كلاً من C و B مقلوب لـ A أي $A.B = B.A = I$ و $A.C = C.A = I$

ولنبرهن أن $B = C$.

نعلم أن: $B = B \,.\, I = B\,(A \,.\, C) = (B.A) \,.\, C = I \,.\, C = C$ وهو المطلوب.

مثال (١٢):

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نبحث عن مصفوفة مربعة X من المرتبة الثالثة بحيث يكون $A \,.\, X = I$ أي:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

إذن:

$$\begin{bmatrix}x_{11}+x_{21}+x_{31}&x_{12}+x_{22}+x_{32}&x_{13}+x_{23}+x_{33}\\2x_{21}+x_{31}&2x_{22}+x_{32}&2x_{23}+x_{33}\\x_{11}+x_{31}&x_{12}+x_{32}&x_{13}+x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

فإذا أخذنا كل عمود من الطرف الأيسر، وقارناه مع العمود المقابل له في مصفوفة الواحدة في الطرف الأيمن، فإننا نحصل في كل مرة على ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل. والمصفوفات الموسعة المقابلة لها هي على الترتيب:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&2&1&0\\1&0&1&0\end{array}\right],\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&1\\1&0&1&0\end{array}\right],\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right]$$

وبتحويل كل منها إلى الشكل المدرج:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right],\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{array}\right],\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

وبذلك تكون المصفوفة $X = A^{-1}$ هي المصفوفة التي أعمدتها على الترتيب من اليسار إلى اليمين: $(2, 1, -2)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, -1, 2)$ أي إن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\-2&1&2\end{bmatrix}$$

والطريقة العملية للحصول على A^{-1}: هو تكوين المصفوفة $[A : I]$ وتحويل A إلى مصفوفة الواحدة، فتكون المصفوفة التي تحتل مكان I هي A^{-1}. وهكذا بالعودة إلى المصفوفة A في المثال السابق (١٢) نجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\overset{R_{3,1}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{1,3}(1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_{2,3}(2)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&-2&1&2\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{1,2}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&0&1&-2&1&2\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_{2,3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&2\end{array}\right]$$

$$\overset{R_{2}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&-2&1&2\end{array}\right]$$

بما أن I أصبحت مكان A، فإن A^{-1} هي التي احتلت مكان I أي إن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\-2&1&2\end{bmatrix}$$

تطبيق:

أوجد A^{-1} إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&2\end{bmatrix}$$

مثال (١٣):

أوجد مقلوب A إن وجد حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A:I]=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]\overset{R_{2,1}(2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right]$$

لا يمكن الحصول على مصفوفة الواحدة مكان A إذن A فريدة، أي ليس لها معكوس ضربي (مقلوب).

٤ . ٦ . حل جملة خطية بواسطة مقلوب مصفوفة:

نفرض أن الجملة الخطية في شكلها المصفوفي هي: $AX = B$، فإذا كانت A مربعة من المرتبة n، وليست فريدة، فيكون لدينا:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} . A . X = A^{-1} . B \Rightarrow I . X = A^{-1} . B \Rightarrow X = A^{-1} . B$$

مثال (١٤):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 = -1$$
$$2x_2 + x_3 = 1$$

الحل:

$$A.X = B$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

نحسب A^{-1} بالطريقة التي شرحناها في الفقرة السابقة:

$$[A:I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 , x_2 = -2 , x_3 = 5$$

ملاحظة:

تستعمل الطريقة السابقة (طريقة مقلوب مصفوفة) فقط إذا كانت A مصفوفة مربعة أي عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

٤ . ٧ . مناقشة حلول جملة خطية:

تكتب الجملة الخطية بالشكل المصفوفي $AX = B$ حيث A مصفوفة من المرتبة $m\times n$ و X مصفوفة عمود من المرتبة $n\times 1$ و B مصفوفة عمود من المرتبة $m\times 1$.

مبرهنة:

لكل جملة معادلات خطية $AX = B$ حل وحيد أو عدد لا نهائي من الحلول أو لا يكون لها أي حل (مستحيلة).

تقبل هذه النظرية دون برهان، فالبرهان ليس من صلب هذا المنهج. مع الإشارة إلى أن الحالات الثلاث وردت في الأمثلة السابقة.

تعريف (٣):

تسمى الجملة الخطية $AX = B$ متجانسة إذا كان $B = 0$ (مصفوفة عمود صفرية).

ملاحظة:

لكل جملة خطية متجانسة حل صفري (trivial) أو عدد لا نهائي من الحلول، أي إن الجملة المتجانسة تملك حلاً واحداً على الأقل وهو الحل الصفري.

تعريف (٤):

نعرف رتبة المصفوفة على النحو الآتي: الرتبة r لمصفوفة هي العدد الطبيعي الذي يحقق الشرطين الآتيين:

١ . يوجد على الأقل صغير (minor) واحد من المرتبة r لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

٢ . كل صغير من المرتبة $r + 1$ يساوي الصفر.

ملاحظة:

حسب تعريف رتبة مصفوفة، إذا كانت رتبة المصفوفة r، فإن الصغير من المرتبة $r+1$ يساوي الصفر ومن ثمَّ فإن كل صغير من مرتبة أعلى من ذلك يساوي الصفر أيضاً، لذلك يمكن القول: إن كل صغير من مرتبة أكبر من r يساوي الصفر.

نتيجة:

من التعريف السابق يمكن القول: إن رتبة مصفوفة (rank of a matrix) هو عدد الأسطر التي ليست جميع عناصرها أصفاراً بعد تحويل المصفوفة إلى الشكل المدرج.

ونرمز لذلك بـ rank (A) أو $r(A)$ أو اختصاراً بـ r.

مثال (١٥):

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحول المصفوفة إلى الشكل المدرج:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&-2\\1&-3&0&5\end{bmatrix}\overset{R_{3,1}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&-2\\0&-2&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_{3,2}(2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow r(A)=2$$

وهو عدد الأسطر التي ليست جميع عناصرها أصفاراً.

مبرهنة:

لتكن الجملة الخطية $AX = B$ حيث A مصفوفة من المرتبة $m \times n$، وليكن p رتبة A $(r(A) = p)$ وq رتبة المصفوفة الموسعة $[A:B]$ عندئذٍ:

١ . ليس للجملة حلول إذا كان $p < q$.

٢ . للجملة حل وحيد إذا كان $p = q = n$.

٣ . للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذا كان $p = q < n$.

البرهان:

١ . إذا كان $p < q$ فسوف يوجد سطر في الشكل المدرج للمصفوفة $[A:B]$ من الشكل $[0 \; 0 \; \dots \; 0:1]$ وهذا يقابل المعادلة $0 = 1$ وهي مستحيلة. وعليه فإن الجملة مستحيلة الحل أو نقول ليس لها حلول.

٢ . إذا كان $p = q = n$ وبعد حذف الأسطر التي جميع عناصرها أصفار في الشكل المدرج، سوف نحصل على الجملة الخطية المكافئة:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = d_1 \\ & x_2 & & & = d_2 \\ & & \dots & & = \dots \\ & & & \dots & = \dots \\ & & & x_n & = d_n \end{array}$$

وهذا يدل على أن الجملة تملك حلاً وحيداً هو $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

٣ . إذا كان $p = q < n$، فإنه وبعد حذف الأسطر الصفرية في الشكل المدرج نحصل على مجموعة المعادلات الآتية $(p = q = r)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + c_{1,r+1}x_{r+1} & \ldots & \ldots & + c_{1n}x_n & = & d_1 \\
& x_2 & & + c_{2,r+1}x_{r+1} & \ldots & \ldots & + c_{2n}x_n & = & d_2 \\
& & \ddots & \vdots & \ldots & \ldots & & = & \\
& & \ddots & \vdots & \ldots & \ldots & & = & \\
& & x_r & + c_{r,r+1}x_{r+1} & \ldots & \ldots & + c_{rn}x_n & = & d_n
\end{array}$$

وبذلك يكون للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

نتيجة:

لتكن الجملة المتجانسة $AX = 0$ حيث A مصفوفة من المرتبة $m\times n$ عندئذ:

١ . للجملة حل وحيد (الحل الصفري) إذا كان $r(A) = n$.

٢ . للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذا كان $r(A) < n$.

نتيجة:

إذا كان عدد المجاهيل في جملة خطية أكثر من عدد المعادلات، فإن للجملة عدداً لا نهائياً من الحلول.

مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$، فإن العبارات الآتية متكافئة:

١ . A قابلة للقلب (invertible) أو لها معكوس.

٢ . للجملة $AX = B$ حل وحيد أياً كانت B.

٣ . $AX = 0$ تقبل الحل الصفري كحل وحيد.

٤ . رتبة المصفوفة A هي $r(A) = n$.

٥ . الشكل المدرج للمصفوفة A هو I (مصفوفة الواحدة).

٤ . ٨ . قاعدة كرامر (Crammer rule) في حل جملة خطية:

لتكن الجملة الخطية $AX = B$ حيث A مصفوفة مربعة من المرتبة n وحيث:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نرمز بـ $A(i)$ للمصفوفة الناتجة عن المصفوفة A بعد استبدال العمود i بالعمود B.

مثال (١٦):

لتكن الجملة الخطية:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + 3x_3 = 1$$
$$2x_2 - x_3 = 0$$

أوجد المصفوفة A، وكل من $A(1), A(2), A(3)$.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} , \; A(1) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} , \; A(3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

يتم حل الجملة الخطية التي يكون فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل حسب قاعدة كرامر أو ما نسميه طريقة المحددات أيضاً. والمبرهنة التالية تلخص هذه الطريقة.

مبرهنة:

لتكن الجملة الخطية $AX = B$ حيث A مصفوفة مربعة من المرتبة n أي عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، وليكن $\det A \neq 0$ عندئذٍ يكون:

$$x_1 = \frac{\det(A(1))}{\det(A)} \;,\; x_2 = \frac{\det(A(2))}{\det(A)} \;, \ldots.. ,\; x_n = \frac{\det(A(n))}{\det(A)}$$

مثال (١٧):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{gathered}$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 30 \neq 0$$

إذن يوجد حل وحيد للجملة المفروضة.

$$\det A(1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36 \;,\; \det A(2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\det A(3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} \;,\quad x_2 = \frac{-6}{30} = \frac{-1}{5} \;,\quad x_3 = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

مثال (١٨):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$5x_1 - 3x_3 = -5$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

وفي هذه الحالة لا تطبق قاعدة كرامر.

٤ . ٩ . مقلوب مصفوفة مربعة باستخدام المحددات:

تعريف (٥):

لتكن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$، نعلم أن $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$ حيث D_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij}، نأخذ المصفوفة $[D_{ij}] = [D_{ij}]^T$ أي إن هذه المصفوفة هي منقول المصفوفة التي عناصرها العوامل المرافقة لعناصر A، وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الملحقة (adjoint matrix)، ويرمز لها بـ adjA. نذكر مرة ثانية أن المرافق يطلق عليه أيضاً مرافق المصفوفة.

ملاحظة:

$$A \,.\, (\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A) \,.\, A = \det A \,.\, I_n$$

مثال (١٩):

احسب adjA إذا علمت أن:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب العوامل المرافقة $D_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$:

$$D_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & -1\end{vmatrix}=-7\ ,\ D_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\ ,\ D_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-1$$

$$D_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 6 & -1\end{vmatrix}=4, D_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-6\ ,\ D_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-32$$

$$D_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3, D_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-5\ , D_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$\left[D_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ 4 & -6 & -32\\ -3 & -5 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow \text{adj}A=\left[D_{ij}\right]^T=\begin{bmatrix}-7 & 4 & -3\\ 1 & -6 & -5\\ -1 & -32 & 5\end{bmatrix}$$

إذا كان $\det A \neq 0$، فتسمى المصفوفة A منتظمة (ليست فريدة). فإذا ضربنا طرفي العلاقة:

$$A\ .\ (\text{adj}A) = (\text{adj}A)\ .\ A = \det A.I_n$$

بـ $1/\det A$ نجد:

$$A.\left[\frac{1}{\det A}\text{adj}A\right]=\left[\frac{1}{\det A}\text{adj}A\right].A = I_n$$

إذن مقلوب A هي:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\text{adj}A$$

لذلك في المثال السابق:

$$A^{-1}=\frac{-1}{38}\begin{bmatrix}-7 & 4 & -3\\ 1 & -6 & -5\\ -1 & -32 & 5\end{bmatrix}$$

مما سبق نجد أنه لحساب مقلوب مصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

١ . نحسب $\det A$ (عندما $\det A \neq 0$ يوجد مقلوب).

٢ . نحسب المصفوفة الملحقة adjA.

٣ . نحسب المقلوب $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$.

مثال (٢٠):

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4 \;,\; D_{12} = (-1)^{1+2}(6) = -6$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1 \;,\; D_{22} = (-1)^{2+2}(2) = 2$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

تطبيق:

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad a_{ij} \in R$$

مثال (٢١):

طبق مقلوب مصفوفة في حل جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

لقد وجدنا سابقاً أن مقلوب هذه المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{-1}{38}\begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$X = A^{-1} . B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{38}\begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

تمرين:

عين قيمة k، ليكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة حل غير الحل الصفري:

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 0 \\ x + ky + z &= 0 \\ x + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

توجيه: يجب أن يكون $\det A = 0$. أي عندما يكون عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات في المعادلة $AX = 0$، فإن لهذه الجملة حلاً غير الحل الصفري عندما $\det A = 0$.

مثال (٢٢):

أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 - 5x_6 = 0$$
$$3x_1 - 5x_2 + x_3 + 8x_5 - 2x_6 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

الحل:

نكتب مصفوفة المعاملات، ونرجعها إلى الشكل المدرج بعد أن نبادل بين العمودين الثالث والرابع؛ أي إن ترتيب المجاهيل يصبح: $x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6$.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن رتبة المصفوفة $r(A) = 3$ وبما أن عدد المجاهيل $n = 6$ فإن عدد المجاهيل الاختيارية هو: $n - r(A) = 6 - 3 = 3$

نعد هذه المجاهيل الاختيارية: x_3, x_5, x_6 فنجد:

$$x_1 = -2x_3 - x_5 - 4x_6$$
$$x_2 = -x_3 + x_5 - 2x_6$$
$$x_4 = -3x_3 + 2x_5 - 5x_6$$

ويمكن كتابة هذا الحل العام على الشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٢٣):

أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$
$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - x_2 - x_4 = 9$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 19$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة ونرجعها إلى الشكل المدرج:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & 19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

رتبة المصفوفة الموسعة تساوي رتبة مصفوفة المعاملات، وتساوي 2. وعليه فإن عدد المجاهيل الاختيارية يساوي $n - r = 4 - 2 = 2$.

إذن يوجد لمجموعة المعادلات حلول، وهذه المعادلات تكافئ المعادلتين:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$
$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 5$$

نعد المجهولين الاختياريين x_3, x_4، فيكون:

$$x_2 = 2x_3 - x_4 + 5$$
$$x_1 = x_3 + 7$$

ويكتب هذا الحل العام على الشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{حل عام دون طرف ثانٍ}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{حل خاص}}$$

٤ . ١٠ . نموذج من تطبيقات الجبر الخطي:

الجمل الحركية المتقطعة: Discrete Dynamical Systems

تعريف: تُعرَّف الجملة الحركية المتقطعة بأنها متتالية من الأشعة $x^{(k)}$ حيث $(k = 0, 1, \ldots)$ وتسمى حالات state، يحددها شعاع ابتدائي $x^{(0)}$ وتعطى بالعلاقة $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$، حيث A مصفوفة مربعة ثابتة مفروضة تسمى مصفوفة انتقال الجملة، وسلسلة ماركوف Markov chain هي أحد أنواع الجمل الحركية المتقطعة.

مثال:

نفترض أن شركتين تعملان في مجال صناعة معجون الأسنان تتنافسان على الزبائن في سوق ثابتة يستعمل فيها الزبون إحدى علامتين تجاريتين A و B. ونفترض أيضاً أن تحليلاً أجري للسوق يُظهر أن عادات الشراء للزبائن تتبع النمط التالي في الأرباع التي جرى تحليلها: في كل ربع (مدة ثلاثة أشهر).

- ٣٠% من مستخدمي A سيتحولون إلى B، في حين سيبقى الآخرون على A.
- ٤٠% من مستخدمي B سيتحولون إلى A في ربع معين، في حين أن مستخدمي B الآخرين سيبقون على B.

ولو فرضنا أن هذا النمط لا يتغير من ربع إلى ربع، يصبح لدينا مثال لما يسمى نموذج سلسلة ماركوف.

والمطلوب: عبِّر عن بيانات هذا النموذج بلغة المصفوفات والأشعة.

الحل:

لاحظ أنه إذا كان a_0, b_0 نسبتي الزبائن المستخدمين لـ A, B على الترتيب في ربع معين، وكان a_1, b_1 نسبتي الزبائن ا لمستخدمين لـ A, B في الربع التالي، عندئذ تنص معطياتنا على أن:

$$a_1 = 0.7\ a_0 + 0.4b_0$$
$$b_1 = 0.3a_0 + 0.6b_0$$

ويمكننا معرفة ما سيحصل في الربع التالي بأن نستبدل الدليلين 0 ,1 بالدليلين 1 ,2 على الترتيب في العلاقة السابقة، وبصفة عامة نستبدل الدليلين 1,0 بالدليلين k, k+1 لنحصل على:

$$a_{k+1} = 0.7a_k + 0.4b_k$$
$$a_{k+1} = 0.3a_k + 0.6b_k$$

ليكن: $x^{(k)} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

عندئذ يكون الشكل المصفوفي للجملة $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$

إن أشعة الحالات $x^{(k)}$ في المثال السابق تحقق الخاصية الآتية:

جميع الإحداثيات غير سالبة، وحاصل جمع كل الإحداثيات يساوي الواحد.

يسمى كل شعاع من هذا النوع، شعاع توزيع احتمالي، كما أن كل عمود في المصفوفة A هو شعاع توزيع احتمالي أيضاً، وتسمى كل مصفوفة مربعة كهذه مصفوفة عشوائية (Stochastic matrix) وبناء على هذه المصطلحات، نعطي الآن تعريفاً دقيقاً لسلسلة ماركوف.

تعريف:

سلسلة ماركوف هي جملة حركية متقطعة حالتها الابتدائية $x^{(0)}$ شعاع توزيع احتمالي ومصفوفة انتقالها A مصفوفة عشوائية. أي إن كل عمود في A هو شعاع توزيع احتمالي.

وبالعودة إلى المثال السابق، نجد أن أشعة الحالة ومصفوفة الانتقال:

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

تؤدي دوراً مهماً جداً، ففي تمثيلنا لجملة خطية كجداء مصفوفي، نرى أن المعادلتين في المثال السابق يمكن كتابتهما ببساطة على الشكل $x^{(1)} = Ax^{(0)}$، وبإجراء مزيد من الحسابات نجد أن $x^{(2)} = Ax^{(1)} = A(Ax^{(0)}) = A^2x^{(0)}$، ويعمم ذلك على النحو:

$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} = A^2x^{(k-2)} = \ldots = A^kx^{(0)}$، وهذا في الواقع صحيح في حالة أي جملة حركية متقطعة، وهو ما يعبر عنه بالحقيقة الآتية:

«مهما يكن العدد الصحيح الموجب k والجملة الحركية المتقطعة التي مصفوفة انتقالها A وحالتها الابتدائية $x^{(0)}$، فإن الحالة ذات الترتيب k تعطى بالعلاقة $x^{(k)} = A^kx^{(0)}$».

الآن أصبح لدينا معرفة بمسألة سلسلة ماركوف.

مثال:

باستعمال رموز المثال السابق، نفرض أنه منذ البداية استأثرت العلامة التجارية A بجميع الزبائن (أي إن B دخلت السوق حديثاً). ما هي حصص السوق بعد مُضيّ ربعين؟ وبعد مضي 20 ربعاً؟ أجب عن هذه الأسئلة أيضاً في الحالة التي تستأثر فيها العلامة B بجميع الزبائن.

الحل:

قولنا إن العلامة A تستأثر بجميع الزبائن مكافئ لقولنا إن شعاع الحالة الابتدائية هو $x^{(0)} = (1,0)$ أجرِ العمليات الحسابية اللازمة لإيجاد $x^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = x^{(2)} = A^2x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

وبهذا ستحصل العلامة التجارية A على 61% من السوق، وستحصل B على 31% من السوق في الربع الثاني. ولم نحاول إجراء الحساب يدويّاً؛ بل حاسوبياً للحصول على إجابة تقريبية.

$$x^{(20)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}^{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57143 \\ 0.42857 \end{bmatrix}$$

وبهذا، وبعد 20 ربعاً، ستهبط حصة العلامة A إلى نحو 57% من السوق، وسترتفع حصة B إلى قرابة 43%.

تأمل الآن ما سيحصل لو اختلف المشهد تماماً؛ أي إذا كان $x^{(0)} = (0,1)$.

بالحساب اليدوي نحصل على:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.48 \end{bmatrix}$$

نستعمل حاسوباً لنجد أن:

$$x^{(20)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}^{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57143 \\ 0.42857 \end{bmatrix}$$

قد يبدو هذا مستغرباً! ففي حالة $k = 20$ نحصل على الإجابة نفسها التي حصلنا عليها بشرط ابتدائي مختلف تماماً. وهذا ليس من قبيل المصادفة. وثمة خاصية أخرى لافتة لأشعة الحالات، تتمثل في أن كلاً منها بحد ذاته شعاع توزيع احتمالي، وهذا ليس مصادفة كذلك.

ومن النماذج المهمة الأخرى ما يسمى نموذج المجتمع الإحصائي البنيوي Structured population model، وفي هذا النموذج مجتمع من الكائنات مقسم إلى عدد منته من الحالات المنفصلة، كالعمر المقدّر بالسنة أو الوزن المقدر بالرطل، وذلك بحيث يوصف كامل المجتمع بشعاع حالة يمثل هذا المجتمع عند أزمنة متقطعة بفواصل زمنية ثابتة، مثلاً كل يوم أو كل سنة.

مثال:

لنوع معين من الحشرات ثلاث مراحل حياتية: البيضة، اليافعة، البالغة. رُصد مجتمع في بيئة معينة كل يومين، فوُجِد أنه يحقق الخصائص الآتية: 20% من البيوض لن تبقى حية، و 60% ستنتقل إلى مرحلة (يافعة). وفي المدة الزمنية نفسها، فإن 10% من اليافعات لن تبقى حية، و 60% ستنتقل إلى مرحلة البلوغ. في حين أن 80% من البالغات ستبقى حية، كذلك وفي المدة الزمنية نفسها، فإن البالغات ستولّد قرابة 0.25 بيضة لكل بالغة. وبفرض وجود 10 بيوض و 8 يافعات و 6 بالغات (مقيسة بالآلاف). نمذج هذا المجتمع على شكل جملة حركية متقطعة، واستعملها لحساب إجمالي المجتمع في يومين وفي 10 أيام وفي 100 يوم.

الحل:

يبدأ الزمن باليوم (0)، والمرحلة ذات الترتيب k هي اليوم $2k$، الفترة الزمنية هنا يومان، وشعاع الحالة من الشكل $x^{(k)} = (a_k, b_k, c_k)$، حيث a_k عدد البيوض، b_k عدد اليافعات، c_k عدد البالغات (كلها مقيسة بالآلاف) في اليوم $2k$. لدينا من المعطيات $x^{(0)} = (10,8,6)$ وإضافة إلى ذلك، فإن الانتقال من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.25 \\ 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$ مصفوفة الانتقال

يدل العمود الأول على أن 20% من البيوض ستبقى بيوضاً بمرور مدة زمنية واحدة، وأن 60% ستصبح بالغة، وأن الباقية لن تبقى حية. ويدل العمود الثالث على أن 0.25 بيضة تنتج عن كل بالغة، وأن أياً من البالغات لن تصبح يافعة، وأن 80% منها تبقى حية. أجرِ الآن الحساب لإيجاد الحالة $x^{(1)}$ في اليوم 2.

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}=A^1x^{(0)}=\begin{bmatrix}0.2&0&0.25\\0.6&0.3&0\\0&0.6&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\8\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.5\\8.4\\9.6\end{bmatrix}$$

ونستعمل حاسوباً لإجراء الحسابات المتبقية للحصول على إجابات تقريبية (نستعمل الرمز ≈ للدلالة على التساوي التقريبي).

$$x^{(10)}=\begin{bmatrix}a_{10}\\b_{10}\\c_{10}\end{bmatrix}=A^{10}x^{(0)}\approx\begin{bmatrix}3.33\\2.97\\10.3\end{bmatrix},x^{(100)}=\begin{bmatrix}a_{100}\\b_{100}\\c_{100}\end{bmatrix}=A^{100}x^{(0)}\approx\begin{bmatrix}0.284\\0.253\\0.877\end{bmatrix}$$

ويبدو أن تعداد هذا المجتمع يتراجع بمرور الزمن.

تمارين

١ . عين رتبة كل من المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\2&5&-4&6\\-1&-3&2&-2\\2&4&-1&6\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\5&6&7&8&9\\10&11&12&13&14\\15&16&17&18&19\end{bmatrix}$$

٢ . احسب مقلوب كل من المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}-1&-3&3&-1\\1&1&-1&0\\2&-5&2&-3\\-1&1&0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$$

ثم تحقق من صحة الجواب.

٣ . احسب مقلوب كل من المصفوفات الآتية، وتحقق من صحة الإجابة:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&6\\3&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\-3&1&-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&-3&4\\1&0&-1&2\\-9&0&0&5\end{bmatrix}$$

٤ . أوجد الحل العام لكل من مجموعات المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+5y-2z=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+7z=0 \\ 3x-2y+8z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+3x_4=2 \end{cases}$$

٥ . أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات المتجانسة:

(1) $x_1-2x_2+x_3-4x_4=0$

(2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+5x_3=0 \end{cases}$

٦ . عين قيمة k، ليكون للمعادلات:

$$\begin{aligned} kx+y+z&=1 \\ x+ky+z&=1 \\ x+y+kz&=1 \end{aligned}$$

١ . حل وحيد. ٢ . ليس لها حل. ٣ . لها أكثر من حل.

٧ . احسب مقلوب المصفوفة A بطريقة التحويلات الأولية ثم بطريقة المحددات:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

٨ . إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A^2=I_n$ فبرهن أن $\det A=\pm 1$. وكذلك إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A^T.A=A.A^T=I_n$ فبرهن أيضاً أن $\det A=\pm 1$.

٩ . أوجد كلاً من المصفوفتين X, Y حيث إن:

$$(1)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.X - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

١٠ . أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 4x + 3y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

تمارين محلولة

١ . برهن دون فك المحدد أن:

$$D = \begin{vmatrix} 39 & 9 & 70 \\ 30 & 7 & 53 \\ 13 & 3 & 23 \end{vmatrix} = -1$$

الحل:

نضرب السطر الثالث بـ (3-)، ونضيف الناتج إلى السطر الأول:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 7 & 53 \\ 13 & 3 & 23 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 30 & 7 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 90 - 91 = -1$$

٢ . حول المحدد الآتي إلى الصورة المثلثية، واحسب قيمته:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نضرب السطر الأول بـ (3-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثاني، كما نضرب السطر الأول بـ (6-) ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & 7 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ (2-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

وهكذا أصبح D على شكل مثلثي ومن المعلوم أن قيمته تساوي حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي؛ أي:

$$D = (1)(-5)(9) = -45$$

٣ . أثبت باستخدام خواص المحددات أن:

$$D = \begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نخرج (3) عاملاً مشتركاً من عناصر العمود الأول:

$$D = \begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

نخرج (2) عاملاً مشتركاً من عناصر السطر الثاني:

$$D = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

نضرب العمود الأول بـ (1-) ونضيف الناتج إلى العمود الثالث:

$$D = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4 . أثبت دون فك المحدد أن:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

الحل:

نضرب السطر الأول بـ (1-) ونضيف الناتج إلى كل من السطرين الثاني والثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

نخرج (b – a) عاملاً مشتركاً من السطر الثاني و (c – a) عاملاً مشتركاً من السطر الثالث:

$$D = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 1 & (c+a) \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ (1-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 0 & (c-b) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a).1.1.(c-b)$$

$$= -(a-b)(c-a)(-1)(b-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

٥ . أوجد بطريقة المحددات الحل المشترك لجملة المعادلات:

$$x - y = 5$$
$$-y + z = 8$$
$$x + y + z = 4$$

الحل:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ (1-) ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

نفك D حسب عناصر العمود الأول:

$$D = 1.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15$$

حيث تم حساب D_x و D_y بالنسبة لعناصر السطر الأول أما D_z، فتم حسابه بالنسبة لعناصر العمود الأول، ومنه:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-3} = 5$$

٦ . أوجد بطريقة المحددات الحل المشترك لجملة المعادلات:

$$x + 2y + 3z = 3$$
$$2x - y + z = 6$$
$$-x - 2y + 2z \;\; 2$$

الحل:

نضرب السطر الأول بـ (2-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثاني ثم نضرب السطر الأول بـ (1)، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (1)(-5)(5) = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

نضيف العمود الثاني إلى العمود الثالث:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 50$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ (2-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثاني ثم نضرب السطر الأول بـ (1)، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ (2-)، ونضيف الناتج إلى السطر الثاني ثم نضرب السطر الأول بـ (1)، ونضيف الناتج إلى السطر الثالث:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

ومنه:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-50}{-25} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{25}{-25} = -1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-25}{-25} = 1$$

٧ . حل جمل المعادلات الآتية باستخدام معكوس مصفوفة:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 5x - 3y &= 7 \end{aligned} \qquad (1)$$

الحل:

الشكل المصفوفي هو:

$$AX = B \qquad (i)$$

نضرب طرفي العلاقة (i) بـ A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

حيث I مصفوفة الواحدة، لذلك نحسب A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -19$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix}$$

إذن:

$$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{19} & \frac{2}{19}\\ \frac{5}{19} & \frac{-3}{19}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{24}{19}+\frac{14}{19}\\ \frac{40}{19}-\frac{21}{19}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{38}{19}\\ \frac{19}{19}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

ومنه $x = 2, y = 1$ هو الحل المشترك.

$$\begin{aligned}7x+2y&=1\\2x-y&=5\end{aligned}\qquad(2)$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\ ,\ X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

لنحسب A^{-1}:

$$\det A=\begin{vmatrix}7 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=-11$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-1 & -2\\-2 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{2}{11} & \frac{-7}{11}\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{2}{11} & \frac{-7}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}+\frac{10}{11}\\ \frac{2}{11}-\frac{35}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{11}\\ \frac{-33}{11}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

ومنه: $x = 1\ , y = -3$ هو الحل المشترك.

$$\begin{aligned}x-y+2z&=5\\2x-3y+z&=-1\\x+5y+21z&=74\end{aligned}\qquad(3)$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 21\end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \; , \; B=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 74\end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} = A^{-1}B$$

لنحسب A^{-1}:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 6 & 19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$D_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & 21\end{vmatrix}=-68 \quad , \quad D_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 21\end{vmatrix}=-41$$

$$D_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=13 \quad , \quad D_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 21\end{vmatrix}=31$$

$$D_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 21\end{vmatrix}=19 \quad , \quad D_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-6$$

$$D_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=5 \quad , \quad D_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6$$

$$D_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-68 & 31 & 5\\ -41 & 19 & 3\\ 13 & -6 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}68 & -31 & -5\\ 41 & -19 & -3\\ -13 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}68 & -31 & -5\\ 41 & -19 & -3\\ -13 & 6 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 74\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}340+31-370\\ 205+19-222\\ -65-6+74\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

إذن الحل المشترك هو: $x = 1 , y = 2 , z = 3$.

٨ . أوجد قيم x، لتكون المصفوفات الآتية منتظمة (غير شاذة):

$$A=\begin{bmatrix}-2 & x\\ 3 & 6\end{bmatrix}\quad (١)$$

$$B=\begin{bmatrix}x-1 & 3\\ 4 & x+3\end{bmatrix}\quad (٢)$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ x+1 & x+2 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\quad (٣)$$

الحل:

تكون المصفوفة منتظمة إذا كان محددها لا يساوي الصفر وهو شرط وجود معكوس للمصفوفة. لذلك علينا حساب محدد كل من هذه المصفوفات:

(١) $$\det A=\begin{vmatrix}-2 & x\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-12-3x$$

$$\det A = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \forall\, x \in R - \{-4\}\ ,\ \det A \neq 0$$

أي تكون A منتظمة من أجل كل $x \in R - \{-4\}$.

(٢) $$\det B=\begin{vmatrix}x-1 & 3\\ 4 & x+3\end{vmatrix}=(x-1)(x+3)-12=x^2+2x-15$$

$$\det B = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -5,\ x = 3$$

$$\forall\, x \in R - \{-5, 3\}\ ,\ \det B \neq 0$$

أي $\forall\, x \in R - \{-5, 3\}$، فإن B منتظمة.

(٣) $$\det C=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ x+1 & x+2 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}=3(4x+4)+(4x-4)+3(2x-6)$$

$$= 12x + 12 + 4x - 4 - 6x - 18 = 10x - 10$$

$$\det C = 0 \Rightarrow x = 1$$

إذن C منتظمة من أجل كل $x \in R - \{1\}$.

٩ . إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأثبت أن: $A^2 + 2A = 11I_2$ واستنتج A^{-1}:

الحل:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = 11I_2$$

وهو المطلوب.

لحساب A^{-1} نضرب طرفي العلاقة $A^2 + 2A = 11I_2$ بـ A^{-1} فنجد:

$$A^2A^{-1} + 2AA^{-1} = 11I_2A^{-1}$$
$$\Rightarrow AAA^{-1} + 2I_2 = 11A^{-1}$$
$$\Rightarrow AI_2 + 2I_2 = 11A^{-1}$$
$$\Rightarrow A + 2I_2 = 11A^{-1} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 11A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

١٠ . إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن: $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$ (يساوي المصفوفة الصفرية) ثم استنتج من ذلك A^{-1}:

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ - & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-4A = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad 3I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لحساب A^{-1} نتبع الخطوات نفسها الواردة في المثال السابق:

$$A^2 - 4A + 3I_3 = 0 \Rightarrow A^2A^{-1} - 4AA^{-1} + 3I_3A^{-1} = 0\ A^{-1} \Rightarrow$$

$$A - 4I_3 + 3A^{-1} = 0 \Rightarrow 3A^{-1} = 4I_3 - A$$

$$3A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

تمارين غير محلولة

١ . حل الجملة الخطية الآتية بطريقة الحذف (غاوص):

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5x = 0$$

٢ . حل الجملة الخطية المتجانسة الآتية بطريقة غاوص وجوردان:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

٣ . حل كلاً من الجمل الخطية الآتية بأي طريقة تختارها:

أ) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$
$$-6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30$$

ب) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

ج) $x - y + 2z - w = -1$

$$2x + y - 2z - 2w = -2$$
$$-x + 2y - 4z + w = 1$$
$$3x - 3w = -3$$

٤ . لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)\, z = a + 2$$

من أجل أي قيم لـ a تملك هذه الجملة حلاً وحيداً؟.

ومن أجل أي قيم لـ a لا تملك حلولاً (مستحيلة)؟.

ومن أجل أي قيم لـ a يكون للجملة عدد لا نهائي من الحلول؟.

٥ . عين قيم λ التي تجعل للجملة الآتية حلولاً غير الحل الصفري (التافه):

$$(\lambda - 3)x + y = 0$$
$$x - (\lambda - 3)y = 0$$

٦ . لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \ , \ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً مما يأتي إذا كان ممكناً:

(a) $D + E$, (b) $D - E$, (c) $5A$, (d) $-7C$, (e) $2A^T + C$, (f) $D^T - E^T$, (g) $(2E^T - 3D^T)^T$, (h) $A . B$, (i) $B . A$, (j) $(DA)^T$, (k) $(C^TB)A^T$, (l) $(2D^T - E) . A$, (m) $(4B) . C + 2B$

ملاحظة: A^T أو D^T ... هو منقول (transpose) المصفوفة.

٧ . (أ) أوجد المصفوفة A إذا علمت أن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(ب) أوجد المصفوفة B إذا علمت أن $(7B)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(ج) أوجد المصفوفة C إذا علمت أن $(5C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(د) أوجد المصفوفة D إذا علمت أن $(I_2 + 2D)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

٨ . أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

٩ . إذا كان كل من k_1, k_2, k_3, k_4, k أعداداً مخالفة للصفر، فأوجد مقلوب كل من المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

١٠ . استخدم مقلوب مصفوفة المعاملات A^{-1} لحل الجملة الآتية:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_1 + 8x_3 = 17$$

وكذلك من أجل الجملة:

$$x + y + z = 5$$
$$x + y - 4z = 10$$
$$-4x + y + z = 0$$

١١ . لتكن المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد صغائر هذه المصفوفة جميعها.

(ب) أوجد مرافقات المصفوفة جميعها.

١٢ . احسب $\det A$ في كل من الحالات الآتية:

$$(a)\ A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 7\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$(b)\ A=\begin{bmatrix}k+1 & k-1 & 7\\ 2 & k-3 & 4\\ 5 & k+1 & k\end{bmatrix}$$

$$(c)\ A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0 & 5\\ 2 & 2 & 0 & -2\\ 4 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 10 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$(d)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20\\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25\end{bmatrix}$$

١٣ . استخدم طريقة كرامر لحل الجملة الخطية:

$$\begin{aligned}4x + y + z + w &= 6\\ 3x + 7y - z + w &= 1\\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3\\ x + y + z + 2w &= 3\end{aligned}$$

١٤ . دون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix}b+c & c+a & b+a\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

١٥ . أثبت الآتي:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1\\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2\\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

١٦ . أثبت صحة المساواة:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

١٧ . ضع إشارة (✓) أو إشارة خطأ (×) أمام كل من العبارات الآتية:

(i) $(A^T)^T = A$ لأجل أي مصفوفة A.

(ii) لأجل كل مصفوفة مربعة A، إن $tr(A^T) = tr(A)$

(iii) إذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين من المرتبة نفسها، فإن $(AB)^T = A^T.B^T$

(iv) إذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين من المرتبة نفسها، فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

(v) إذا كانت A,B مصفوفتين من المرتبة نفسها، وكان α عدد ما، فإن:

$$(\alpha A + B)^T = \alpha A^T + B^T$$

(vi) إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $(n \times n)$، وليست قلوبة عندئذ يكون للجملة الخطية $AX = 0$ عدد لا نهائي من الحلول.

(vii) إذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين من المرتبة $(n \times n)$، فإذا كانت A.B قلوبة، فإن كلاً من A، B يجب أن تكون قلوبة أيضاً.

(iix) إذا كانت A مصفوفة مثلثية دنيا، فإن قيمة محددها تساوي مجموع عناصر قطرها الرئيس.

(ix) $\det(A + B) = \det A + \det B$ حيث A,B مصفوفتان مربعتان من المرتبة نفسها.

(x) $\det(A^3) = (\det A)^3$.

١٨ . إذا كانت A مصفوفة مربعة، فأثبت أن $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ عندما $A^4 = 0$.

١٩ . بفرض أن المصفوفات الآتية جميعها من المرتبة $n \times n$ وبفرض أنها قلوبة، حل المعادلة الآتية من أجل D (أي أوجد D).

$$C^T B^{-1} A^2 BAC^{-1} DA^{-2} B^T C^{-2} = C^T$$

٢٠ . بسّط كلاً من:

(a) $D^{-1}CBA(BA)^{-1}C^{-1}(C^{-1}D)^{-1}$

(b) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

٢١ . إذا كان كل من $A, B, A + B$ قلوبة ومن المرتبة نفسها، فأثبت أن:

$$A(A^{-1} + B^{-1})\,B(A + B)^{-1} = I$$

٢٢ . أوجد محدد المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

٢٣ . لتكن A, B, C مصفوفات مربعة من المرتبة 3×3، وليكن:

$$\det A = -2,\ \det B = 3,\ \det C = 5$$

احسب كلاً من:

a) $\det(-A)$, b) $\det(A^{-1})$, c) $\det(2A^T.B^2.C)$

d) $\det(3A)^{-1}$ e) $\det(3A^{-1})$ f) $\det(AB^{-1}C^2)$

٢٤ . بفرض أن مقلوب المصفوفات الواردة أدناه موجودة، أثبت صحة العلاقة:

$$(C^{-1} + D^{-1}) = C(C + D)^{-1}D$$

* * *

الفصل الخامس

الفضاء المتجهي (الشعاعي) Vector Space

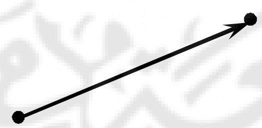
٥ . ١ . المتجهات في R^2، R^3، R^n:

Vectors in 2- space, 3-space and n – space:

تتمحور دراسة الجبر الخطي عند نوعين أساسيين من الكائنات الرياضية ألا وهما: المصفوفات، والفضاءات المتجهية، وقد تناولنا في فصول سابقة دراسة المصفوفات. وفي هذا الفصل والفصول اللاحقة سوف ندرس الفضاء المتجهي، لذلك سنقوم بعرض بعض الأفكار الأساسية عن المتجهات في مقدمة هذا الفصل.

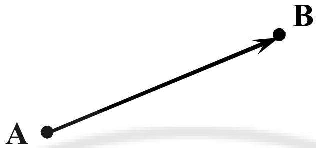
٥ . ١ . ١ . المتجه (الشعاع) الهندسي:

إن المتجه بالمفهوم الهندسي هو قطعة مستقيمة موجهة، وهو يستخدم للتعبير عن كثير من المسائل الفيزيائية والميكانيكية وغيرها. ويستخدمه المهندسون والفيزيائيون في المستوي (R^2) وفي الفراغ (R^3) ويمثلونه بسهم للدلالة على الاتجاه وطول هذا السهم يعبر عن المقدار الذي يمثله، ويدعوه الرياضيون بالمتجه الهندسي، بداية السهم تسمى نقطة بداية المتجه (initial point) وآخره يسمى نقطة نهاية المتجه (terminal point).

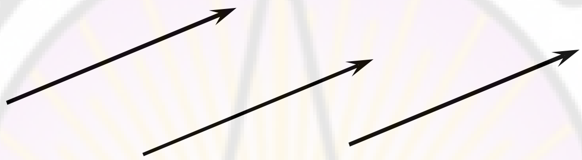


وسوف نرمز للمتجهات بأحرف لاتينية داكنة مثل ... ,a, b, ..., u, v في حين أننا سنرمز للقيم السلمية والتي هي عناصر من حقل ما بأحرف يونانية مثل $\alpha,\beta,.., \lambda,\mu,..$.

وإذا عبرنا عن متجه بدلالة نقطة البداية ونقطة النهاية، فإننا سنكتب ذلك: $u = \overrightarrow{AB}$ حيث A هي نقطة البداية، B نقطة النهاية.



نقول عن المتجهات التي لها الطول نفسه، والاتجاه نفسه بأنها متجهات متكافئة، وبما أن المتجه يتعين من خلال طوله وجهته، فإن المتجهات المتكافئة تمثل المتجه نفسه، وفي هذه الحالة نقول عنها: إنها متساوية، ونكتب مثلاً $v = w$.

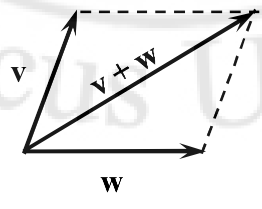


أما المتجه الذي تنطبق بدايته على نهايته فيسمى المتجه الصفري zero vector ويرمز له بـ 0 وهذا المتجه ليس له اتجاه طبيعي.

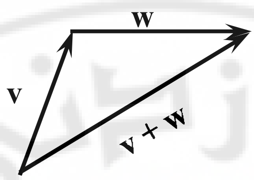
٥ . ١ . ٢ . جمع المتجهات:

هناك العديد من العمليات على المتجهات، وكلها لها أصل في قوانين الفيزياء.

ليكن v, w متجهين في R^2 أو R^3 بحيث إن لهما نقطة البداية نفسها، عندئذ يعين هذان المتجهان متوازي أضلاع، ويعرف مجموعهما على أنه قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة البداية المشتركة لهذين المتجهين، وتسمى هذه قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات.



وهناك قاعدة المثلث لجمع متجهين في R^2 أو R^3، فإذا كان v, w متجهين بحيث نهاية v هي بداية w، فإن المجموع v+w هو المتجه الذي بدايته بداية v، ونهايته نهاية w.



• مما سبق نستنتج مباشرة أن:

$v + w = w + v \quad (1)$ أي إن الجمع تبديلي.

• المتجه العاكس لـ v (negative of v) ورمزه v – هو متجه له طول v نفسه، ولكنه بعكس الاتجاه، ومن ذلك يمكن تعريف طرح متجهين على أنه:

$$w - v = w + (-v) \qquad (2)$$

• نلاحظ أيضاً أن المتجه الصفري هو عنصر حيادي بالنسبة لجمع المتجهات حيث:

$$v + 0 = 0 + v = v$$

٥ . ١ . ٣ . المضاعف السلمي لمتجه (Scalar multiple):

إذا كانv متجهاً في R^2 أو R^3 وإذا كان α مقداراً سلمياً من حقل k ($\alpha \in k$)، فإننا نعرف ضرب v بـ α (scalar product of v by α) على أنه المتجه الذي طوله يساوي $|\alpha|$ مرة من طول v واتجاهه اتجاه v نفسه إذا كان α موجباً وعكس اتجاه v إذا كان α سالباً.

أما إذا كان $\alpha = 0$ أو $v = 0$، عندئذ يعرف αv على أنه المتجه الصفري.

وفي حالة خاصة إذا كان $\alpha = -1$، فإننا نحصل على المتجه المعاكس لـ v ألا وهو: v – أي:

$$(-1)\, v = -v \qquad (3)$$

• ومن الخصائص المهمة أيضاً أن جمع المتجهات (الذي عرفناه قبل قليل) تجميعي أي:

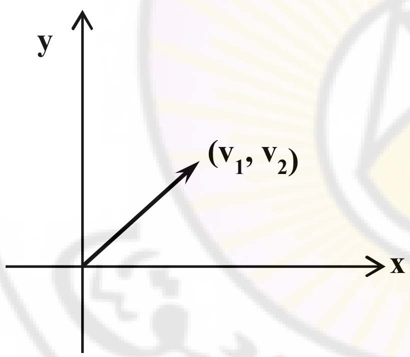
$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

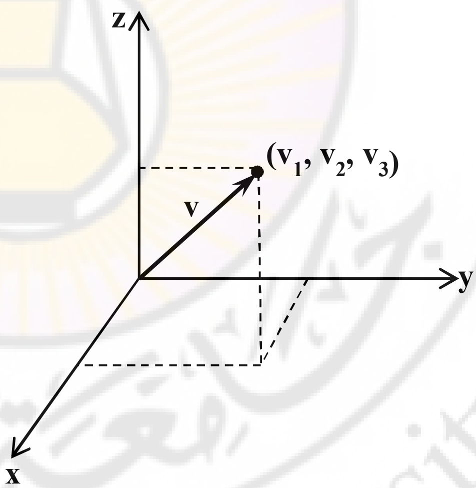
٥ . ١ . ٤ . المتجهات في جملة إحداثية:

• حتى الآن تناولنا موضوع المتجهات دون أن ننسب المستوي (R^2) أو الفراغ (R^3) . الواقعة فيه هذه المتجهات . إلى جملة إحداثية.

• إن التعامل مع العمليات على المتجهات بوجود جملة محاور إحداثية يجعل هذه العمليات أكثر بساطة وسهولة.

• إذا كان v متجهاً منسوباً لجملة إحداثية بحيث تنطبق نقطة بداية v على مبدأ هذه الجملة، عندئذ يعرف هذا المتجه بشكل تام بمعرفة إحداثيات نقطة نهاية v.





نسمي هذه الإحداثيات مركبات (components) v بالنسبة للجملة الإحداثية، وسوف نكتب $v = (v_1, v_2)$ لتدل على v في المستوي (R^2). ونقول: إن مركباته هي (v_1, v_2) وهو زوج مرتب، كما نكتب $v = (v_1, v_2, v_3)$ للدلالة على متجه v في الفضاء الثلاثي (R^3) الذي مركباته (v_1, v_2, v_3) وهي ثلاثية مرتبة.

ومن الواضح جداً أن المتجهين $v,\ w$ يكونان متساويين إذا تساوت المركبات المتناظرة، أي إذا كان: $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$، فإن:

$$v = w \Leftrightarrow v_1 = w_1\ ,\ v_2 = w_2\ ,\ v_3 = w_3$$

ملاحظة: يمثل المتجه الصفري في جملة إحداثية $0 = (0, 0)$ في R^2 أو $0 = (0, 0, 0)$ في R^3.

ملاحظة: من المعلوم أن الزوج المرتب (v_1, v_2) يمكن أن يمثل متجهاً v مركباته v_1, v_2 أو يمثل نقطة إحداثياتها v_1, v_2.

- لو فرضنا أن $\overrightarrow{p_1p_2}$ يمثل متجهاً في R^2 نقطة بدايته لا تنطبق على مبدأ الإحداثيات بحيث $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$، عندئذ فإن مركبات هذا المتجه تعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \qquad (4)$$

حيث:

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{op_2} - \overrightarrow{op_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

وإذا كان $\overrightarrow{p_1p_2}$ يمثل متجهاً في R^3 حيث $p_1(x_1, y_1, z_1)$, $p_2(x_2, y_2, z_2)$، فإن:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (5)$$

مثال:

أوجد مركبات المتجه $\overrightarrow{p_1p_2}$ الذي بدايته $p_1(2, -1, 4)$ ونهايته $p_2(7, 5, -8)$.

الحل:

إن هذا المتجه v هو:

$$v = \overrightarrow{p_1p_2} = (7 - 2, 5 + 1, 8 - 4) = (5, 6, -12)$$

٥ . ١ . ٥ . الفضاء R^n:

لقد استُعملت الأزواج والثلاثيات المرتبة للتعبير عن متجهات في R^2 و R^3 في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر ومع حلول القرن العشرين طوّر الفيزيائيون والرياضيون

ذلك، وأصبح التعامل مع فضاءات ذات أبعاد أكبر من ذلك ضرورياً لإجراء الأبحاث، والتعامل مع كثير من القضايا، وعلينا الآن أن نوضح مفهوم الفضاء R^n.

نعلم جميعاً أن مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل بمستقيم (من وجهة نظر هندسية) ويدعى هذا بالمستقيم الحقيقي (real line)، ويرمز له بـ R أو R^1 وهذا ما يدعونا للقول: إن المستقيم أحادي البعد (one dimensional).

من جهة ثانية تدعى مجموعة الأزواج الحقيقية المرتبة (2- tuples) ومجموعة الثلاثيات الحقيقية المرتبة (3 – tuples)، ويرمز لهما على الترتيب R^2, R^3، وهو الأمر الذي دعانا للقول: إن المستوي هو فضاء ثنائي الأبعاد، والفراغ هو فضاء ثلاثي الأبعاد، وهذا يشكل أساساً لتوسيع مفهوم الفضاء إلى فضاءات ذات أبعاد أكبر حيث نسمي مجموعة المرتبات $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ فضاء من البعد n أو n – space، ونرمز له بـ R^n وحيث: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ أعداد حقيقية.

مثال:

لنفرض أن هناك باحثاً يجري تجربة مخبرية، وفي كل مرة يجريها تحوي هذه التجربة (n) قياساً، عندئذ إن نتيجة كل تجربة يمكن أن تمثل بمتجه $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ في R^n حيث إن $y_1, y_2, \ldots, y_n$ هي المقادير التي جرى تسجيلها.

هناك الكثير من الأمثلة عن متجهات من هذا النوع..

٥ . ١ . ٦ . العمليات على المتجهات في R^n:

Operations on vectors in R^n:

نكتب المتجه v في R^n على الشكل: $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

كما نرمز للمتجه الصفري في R^n على الشكل $0 = (0, 0, \ldots., 0)$

• ليكن v, w متجهين في R^n حيث $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ و $v = v_1, v_2, \ldots, v_n)$

عندئذ: $v = w \Leftrightarrow v_1 = w_1, v_2 = w_2, \ldots, v_n = w_n$ (تساوي متجهين).

مثال: $a = 1 , b = -4 , c = 2 , d = 7 \Leftrightarrow (a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$

- يعرف المجموع كالآتي: إذا كان $v = (v_1, v_2) , w = (w_1, w_2)$

فإن:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \;\ldots\ldots (6)$$

وإن:

$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2) \;\ldots\ldots\ldots (7)$ حيث α عنصر من حقل k.

وبشكل خاص:

$$- v = (-1) v = (-v_1, - v_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

وعليه فإن:

$$w - v = w + (-v) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2) \;\ldots\ldots\ldots (9)$$

- يمكن تعميم كل من هذه العمليات بحيث تصبح عمليات في R^n، فإذا كان:

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) , w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ متجهين في R^n وإذا كان α مقداراً سلمياً من حقل ما k، عندئذ:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n + w_n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$
$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$
$$- v = (-v_1, -v_2, \ldots, - v_n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$
$$w - v = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

مثال:

إذا كان $v = (1, -3, 2) , w = (4, 2, 1)$، فإن:

$$v + w = (5, -1, 3) \;,\; 2v = (2, -6, 4)$$
$$- w = (-4, -2, -1) , v - w = (-3, -5, 1)$$

تلخص المبرهنة التالية أهم خواص العمليات على المتجهات:

مبرهنة (١):

إذا كانت u, v, w متجهات في R^n وإذا كانت $\alpha, \beta \in k$ (مقادير سلمية من حقل k)، عندئذ:

(a) $u + v = v + u$
(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$
(c) $u + 0 = 0 + u = u$
(d) $u + (-u) = (-u) + u = 0$
(e) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$
(f) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
(g) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u$
(h) $1 . u = u$

الإثبات:

سوف نثبت صحة (b)، ونترك الباقي كتمرين:

لتكن المتجهات:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) , v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) , w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= ((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)) + (w_1, w_2, \ldots, w_n)\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n)\\ &= ((u_1 + v_1) + w_1 , (u_2 + v_2) + w_2, \ldots , (u_n + v_n) + w_n)\\ &= (u_1 + (v_1 + w_1) , u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)\\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)\\ &= u + (v + w)\end{aligned}$$

يمكن التحقق أيضاً من الخواص الإضافية الآتية باتباع أسلوب المبرهنة السابقة نفسه.

مبرهنة (٢):

إذا كان v متجهاً في R^n، وكان α مقداراً سلمياً $(\alpha \in k)$، عندئذ:

(a) $0 . v = 0$

(b) $\alpha . 0 = 0$

(c) $(-1) v = - v$

تعريف التركيب الخطي: إذا كان w متجهاً في R^n، عندئذ نقول: إن w هو تركيب خطي للمتجهات $v_1, v_2, \ldots, v_r \in R^n$ (متجهات من R^n).

إذا وجدت سلميات (أعداد) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in k$ بحيث:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

تدعى هذه السلميات معاملات التركيب الخطي.

- عندما يكون $r = 1$، فإن (14) تصبح $w = \alpha_1 v_1$؛ أي إن التركيب الخطي لمتجه وحيد ما هو إلا مضاعفه السلمي.

٥ . ٢ . الفضاء المتجهي Vector Space:

تعريف (١):

لتكن V مجموعة غير خالية $(V \neq \phi)$، نزود V بقانوني تشكيل أحدهما داخلي رمزه (+) دون أن يعني أنه الجمع العادي، والآخر خارجي رمزه (.) وهو عبارة عن ضرب مقدار سلمي $(\alpha \in k)$ بعنصر من V. نقول: إن V المزودة بهاتين العمليتين هي فضاء متجهي على الحقل k إذا تحققت القضايا الآتية أو ما يسمى بالمصادرات (axioms):

$$\forall\, u, v, w \in V \,,\ \forall\, \alpha, \beta \in k$$

(i) $u + v \in V$

(ii) $u + v = v + u$

(iii) $u + (v + w) = (u + v) + w$

(iv) $\exists 0 \in V$ (zero object = zero vector) : $u + 0 = 0 + u = u$

(v) $\forall\, u \in V \,,\ \exists\, -u \in V : u + (-u) = (-u) + u = 0$

أي إن $(V, +)$ زمرة تبديلية.

(vi) $\alpha\, u \in V$; (V مغلقة بالنسبة للضرب السلمي)

(vii) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$

(viii) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$

(ix) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)(u)$

(x) $1 . u = u$

ملاحظة: نقول إن الثلاثية $(V, +, .)$ فضاء متجهي على الحقل k أو اختصاراً نقول: إن V فضاء متجهي على k أو قد نكتفي بالقول: إن V فضاء أو فضاء على الحقل k وفي بعض الأحيان نكتب $V(k)$ للدلالة على أن V فضاء على الحقل k.

ملاحظات:

• تسمى عناصر V متجهات دون أن تكون هي المتجهات المعتادة، ونسمي عناصر الحقل k السلميات أو المقادير السلمية أو أعداداً. والحقل k في كتابنا هذا سيكون حقل الأعداد الحقيقية R أو العقدية C.

• نسمي العنصر الحيادي في الزمرة $(V, +)$ والوارد في (iv) من التعريف صفر الفضاء، وقد نرمز له بـ 0_v أو نكتفي بـ 0. أما صفر الحقل، فيرمز له بـ 0_k أو اختصاراً 0.

• يجب التمييز بين (+) في (iii)، (ii)، (i) في التعريف والتي هي عملية جمع لعناصر V؛ أي جمع متجهات بينما عملية (+) الواردة في (viii) من اليسار هي جمع أعداد أو عناصر الحقل k من الطرف اليساري لـ (viii) وهي جمع متجهات من الطرف اليميني لـ (viii).

• إن (i) تعني أن V مغلقة بالنسبة للجمع، وإن (vi) تعني أن V مغلقة بالنسبة للمضاعف السلمي.

• قبل البدء بالإجابة عن أي سؤال يتعلق بالفضاء المتجهي يجب تحديد نوع العملية الأولى (+) ومعرفتها، وكذلك نوع العملية الثانية (.) ومضمونها.

٥ . ٢ . ١ . أمثلة:

١) لتكن V مجموعة مؤلفة من عنصر وحيد نرمز له بـ 0، ولنعرف الجمع والضرب كالآتي: $0 + 0 = 0 \, , \, \alpha \, 0 = 0$ أياً كان $\alpha \in k$ من السهل التحقق من أن القضايا العشر الواردة في تعريف الفضاء محققة، ويسمى هذا بالفضاء الصفري zero vector space.

٢) كل حقل هو فضاء متجهي على نفسه.

٣) لتكن المجموعة: $k^2 = k \times k = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in k\}$ حيث k حقل.

نزود هذه المجموعة بعملية (+) كالآتي:

$$\forall \, u = (u_1, u_2) \, , \, v = (v_1, v_2) \in k^2$$

فإن:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

ونزود k^2 بعملية ضرب بمقدار سلمي $\alpha \in k$ كالآتي:

$$\alpha \, . \, u = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

إن المجموعة k^2 المزودة بهاتين العمليتين تشكل فضاء متجهياً؛ لأنه يمكن التحقق بسهولة من أن شروط التعريف محققة.

٤) يمكن تعميم المثال السابق إلى المجموعة k^n حيث:

$$k^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in k\}$$

(وحيث k حقل) وذلك بتزويد k^n بعملية (+) وعملية (.) كما هي في المثال الأخير.

عندما يكون الحقل k هو حقل الأعداد الحقيقية R، فإننا نحصل على R^n أو R^2 عندما $n = 2$ أو R^3 عندما $n = 3$ وهذان الأخيران هما الفضاءان الحقيقيان المألوفان لدينا.

٥) من الأمثلة الشهيرة أيضاً على الفضاءات المتجهية، هو فضاء المصفوفات $M_{m\times n}(k)$ بالنسبة لجمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد من k.

٦) تشكل كل من مجموعة الحدوديات الحقيقية بمتغير واحد x والتي نرمز لها بـ $R[x]$ ومجموعة الحدوديات العقدية والتي نرمز لها بـ $C[x]$ فضاءً متجهياً بالنسبة لجمع الحدوديات وضرب حدودية بعنصر من الحقل R بالنسبة للفضاء $R[x]$ وبعنصر من الحقل C بالنسبة للفضاء $C[x]$.

٧) كحالة خاصة من المثال ٥) يمكن التحقق من أن $M_{2\times2}(R)$ (مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة 2 والتي عناصرها من R) تشكل فضاء بالنسبة لجمع المصفوفات وضربها بعنصر من R في هذه الحالة. (تحقق من ذلك).

٨) لتكن V مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(V = R^+)$ ولنعرف الجمع كالآتي:

$$\forall\, u, v \in V : u + v = u \,.\, v \,.....$$

والضرب بمقدار سلمي كالآتي: $\forall\, u \in V ,\ \forall\, \alpha \in R$

فإن: $\alpha u = u^{\alpha}$

فمثلاً: $1 + 1 = 1 \,.\, 1 = 1$ (بالنسبة للجمع)

$2 \,.\, 1 = 1^2 = 1$ (بالنسبة للضرب هنا $\alpha = 2$).

يمكن التحقق من أن شروط التعريف محققة:

1) $u + v = v + u = u \,.\, v = v \,.\, u$

2) $u + (v + w) = u + v \,.\, w = u \,.\, v \,.\, w = \ldots = (u + v) + w$

3) $u + 1 = u \,.\, 1 = u$ (صفر الفضاء هو 1)

4) $\forall\, u \in V \Rightarrow -u = \dfrac{1}{u}$

لأن $u + (-u) = 0$ تعني أن $u + \dfrac{1}{u} = u.\left(\dfrac{1}{u}\right) = 1$

وبالنسبة للضرب بـ α نجد مثلاً:

$$\alpha\,(u+v) = \alpha\,.\,(uv) = (uv)^{\alpha} = u^{\alpha}v^{\alpha} = (\alpha u) + (\alpha v)$$

وهكذا بقية الشروط فمثلاً: $1\,.\,u = u^1 = u$

أي إن V المزود بالعمليتين المذكورتين تشكل فضاء متجهياً.

٥ . ٢ . ٢ . بعض القضايا في الفضاء المتجهي:

ليكن v فضاء متجهياً على حقل k عندئذ:

(١) $\forall\, u \in V, \forall\, \alpha \in k$ فإن $\alpha\,.\,0_V = 0_V$ و $0_k\,.\,u = 0_V$

(٢) $\alpha(-u) = (-\alpha)\,u = -\,\alpha\,u\,,\ \forall\, u \in V, \forall\, \alpha \in k$

(٣) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v\ ;\ \forall\, u\,, v \in V\,, \forall\, \alpha \in k$

(٤) $(\alpha - \beta)\,u = \alpha u - \beta u\ ;\ \forall\, u \in V\,, \forall\, \alpha, \beta \in k$

(٥) $\alpha u = 0 \Leftrightarrow u = 0_V \text{ or } \alpha = 0_k$

الإثبات:

(١) $\alpha u = \alpha u + 0_V = \alpha(u + 0_V) = \alpha u + \alpha.0_V$

وكون $(V, +)$ زمرة تبديلية، فإن $\alpha\,.\,0_V = 0_V$

وبشكل مشابه يمكن إثبات أن $0_k\,.\,u = 0_V$

(٢) $(-\alpha)\,u + \alpha u = (-\alpha + \alpha)\,u = 0_k\,.\,u = 0_v$

ومنه نجد: $(-\alpha)\,u = -\alpha u$

كذلك: $\alpha(-u) + \alpha u = \alpha\,(-u + u) = \alpha\,.\,0_V = 0_V$

فيكون $\alpha\,(-u) = -\,\alpha u$

(٣) $\alpha(u - v) + \alpha v = \alpha\,[(u - v) + v)] = \alpha\,(u + 0_v) = \alpha u$

ومنها نجد: $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$

وبشكل مشابه نثبت أن: $(\alpha - \beta) u = \alpha u - \beta u$

(٤) إذا كان $\alpha = 0_k$، فإن $0_k \, . \, u = 0_v$، أما إذا كان $\alpha \neq 0$ فمن العلاقة $\alpha u = 0_v$ وبضرب طرفيها بـ α^{-1} (مقلوب α) نجد:

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} \, . \, 0_v$$
$$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)u = 0_v \Rightarrow 1 \, . \, u = 0_v \Rightarrow u = 0_v$$

وعليه ينتج أن $\alpha u = 0_v \Leftrightarrow \alpha = 0_k$ أو $u = 0_v$

من كل ما سبق نلاحظ أن العمليات في فضاء شبيهة تماماً بالعمليات الجبرية المعروفة لنا.

٥ . ٣ . الفضاء الجزئي Subspace:

تعريف (١):

لتكن W مجموعة جزئية غير خالية من فضاء شعاعي ($\phi \neq W \subseteq V$).

تكون المجموعة W فضاءً شعاعياً جزئياً من V إذا كانت W بحد ذاتها تشكل فضاء شعاعياً بالنسبة للعمليتين المعرفتين على V.

أو يمكن أن نعرف الفضاء الجزئي من فضاء متجهي V بالشكل الآتي:

تعريف (٢):

إذا كانت $\phi \neq W \subseteq V$، فإن W تكون فضاء جزئياً من V إذا تحقق الآتي:

$1 - \forall \, u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

$2 - \forall \, u \in W, \forall \, \alpha \in k \Rightarrow \alpha \, u \in W$

هذان التعريفان متكافئان، ويمكن اعتماد أحدهما ويفضل الثاني.

يمكن اختزال الشرطين الواردين في التعريف الأخير إلى شرط واحد كما في المبرهنة الآتية:

مبرهنة (١):

تكون المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء المتجهي V(k) فضاء جزئياً من V إذا وفقط إذا تحقق الآتي:

$$\alpha u + \beta v \in W \text{ فإن } ،\forall\, u, v \in W, \forall\, \alpha, \beta \in k$$

الإثبات:

إذا كان W فضاء جزئياً، فإننا نجد أن $\alpha u\ ,\ \beta u \in W$ من خلال تعريف الفضاء الجزئي وذلك $\forall\, u, v \in W, \forall\, \alpha, \beta \in k$

وعليه فإن: (*) $\alpha u + \beta u \in W$ أيضاً من خلال تعريف الفضاء الجزئي.

العكس إذا كانت (*) محققة، فهي محققة من أجل $\alpha = \beta = 1$

وعليه فإن $u + v \in W$ وهي محققة أيضاً من أجل $\beta = 0$

وعليه فإن $\alpha u \in W$ وهذا يعني أن W فضاء جزئي من V.

ملاحظات:

(١) إن أي فضاء متجهي V يحوي فضاءين جزئيين على الأقل هما V نفسه والفضاء الصفري $\{0_V\}$؛ وذلك لأن كلاً منهما يحقق تعريف الفضاء الجزئي.

(٢) إن صفر الفضاء V ينتمي إلى أي فضاء جزئي منه؛ وذلك لأنه إذا كان W فضاء جزئياً من V، فإن $\alpha u \in W$ حيث $u \in W, \alpha \in k$ وبشكل خاص عندما $\alpha = 0_k$، فإن $0_k\ .\ u = 0_v \in W$.

٣) إن نظير أي عنصر من الفضاء الجزئي W ينتمي إلى W؛ وذلك لأن:

$$\forall\, u \in W \Rightarrow (-1)\ .\ u = -\, u \in W$$

٥ . ٣ . ١ . أمثلة على الفضاءات الجزئية:

مثال (١):

إذا كان $V = R^2$ أي $V = \{(x, y) : x, y \in R\}$

وكانت W مجموعة جزئية من V حيث $W = \{(x, 0) : x \in R\}$، فإن W يشكل فضاء جزئياً من V ونلاحظ أن W هو المحور X.

وبشكل عام كل مستقيم يمر بمبدأ المحورين الإحداثيين يشكل فضاءً جزئياً من المستوي (R^2) الحقيقي، حيث إن مجموع شعاعين على هذا المستقيم سيبقى شعاعاً على المستقيم نفسه، وكذلك ضرب شعاع على هذا المستقيم بعدد حقيقي يعطينا شعاعاً على المستقيم نفسه؛ أي إن: W في هذه الحالة هي مجموعة أزواج حقيقية مرتبة من الشكل: $W = \{(x, y): y = mx\}$، فإذا كان $u, v \in W$، فإن u سيكون من الشكل $u = (x, y)$ حيث $y = mx$، ويكون v من الشكل $v = (x', y')$ حيث $y' = mx'$ ومن ثمَّ $u + v$ سيكون من الشكل: $(x + x', y + y')$ ومن ثمَّ فإن $y + y' = m (x + x')$ وهذا يعني أن $u + v \in W$.

من جهة ثانية إذا كان $\alpha \in R$، فإن αu من الشكل: $(\alpha x,\alpha y)$ ومنه فإن $\alpha y = m(\alpha x)$ أي $\alpha y = \alpha(mx)$ إذن $\alpha u \in W$، وهذا يعني أن W فضاء جزئي من $V = R^2$.

ملاحظة (١):

ينطبق المثال الأخير على المستقيمات المارة بمبدأ الإحداثيات في الفضاء R^3 وعلى المستويات المارة بمبدأ الإحداثيات في R^3.

مثال (٢):

لتكن W مجموعة جزئية غير خالية من R^2 حيث $W = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0\}$ إن W ليست فضاء جزئياً من R^2؛ لأن W ليست مغلقة بالنسبة للضرب بمقدار سلمي

فلو كان $\alpha \in k$ وأخذنا $u = (x, y) \in W$ و $\alpha = -1$، فإن $\alpha u = (-1) . (x, y) = (-x, -y)$ لكن $(-x, -y) \notin W$.

مثال (٣):

ليكن V فضاء المصفوفات المربعة أي $V = M_{n\times n}$.

نعلم أن مجموع مصفوفتين متناظرتين هو مصفوفة متناظرة، وأن ضرب مصفوفة متناظرة بعدد α هو مصفوفة متناظرة إذن مجموعة المصفوفات المتناظرة ذات السعة $(n\times n)$ تشكل فضاء جزئياً من $M_{n\times n}$.

كذلك الأمر بالنسبة لمجموعة المصفوفات المثلثية العليا أو الدنيا، فهي تشكل فضاءات جزئية من $M_{n\times n}$ وكذلك القطرية.

مثال (٤):

إذا كانت W مجموعة المصفوفات $(n\times n)$ القابلة للقلب (لها مقلوب) . والتي هي مجموعة جزئية من $M_{n\times n}$. إن هذه المجموعة لا تشكل فضاء جزئياً من $M_{n\times n}$؛ لأنه لو أخذنا:

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \ , \ v = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

فإن u, v قابلتان للقلب؛ لأن $\det u \neq 0 , \det v \neq 0$.

لكن $u + v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ وعليه $\det(u + v) = 0$

إذن $u + v \notin W$

مثال (٥):

نعلم أن الحدودية هي دالة يعبر عنها بالشكل:

$$P(x) = a_1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

وندعوها حدودية من الدرجة n.

ومن نافلة القول: إن مجموع حدوديتين درجة كل منهما أصغر أو يساوي n هو حدودية درجتها أصغر أو تساوي n.

وكذلك فإن ضرب حدودية درجتها n بمقدار سلمي $\alpha \in k$ هو حدودية درجتها أصغر أو يساوي n.

أي إن مجموعة الحدوديات هذه تشكل فضاء جزئياً من فضاء الحدوديات جميعها والذي نرمز له بـ $V = P_n$.

مبرهنة (٢):

لتكن $w_1, \; w_2, \; \ldots, \; w_r$ فضاءات جزئية من فضاء شعاعي V، عندئذ يكون $w_1 \cap w_2 \cap \ldots \cap w_n$ فضاء جزئياً من V.

البرهان:

ليكن $W = \bigcap_{i=1}^{r} w_i$ عندئذ $W \neq \phi$ لأن كل من هذه الفضاءات الجزئية يحوي الشعاع الصفري (كونه فضاء جزئي)، ومنه فالتقاطع يحوي الشعاع الصفري. لذلك يبقى أن نبين أن W مغلق بالنسبة للجمع والضرب بمقدار سلمي. ولإثبات هذا نفرض $u, v \in W$ وبما أن W هو تقاطع $w_1, w_2, \ldots, w_r$، فإن u, v ينتمي لكل واحد من الفضاءات الجزئية $w_1, w_2, \ldots, w_r$ وكون كل منهما فضاءً جزئياً من V، فإن $u + v$ ينتمي أيضاً لكل منها، ومن ثمَّ $u + v \in W$ وبشكل مماثل نثبت أن $\alpha . u \in W$.

إذن W فضاء جزئي من V.

ملاحظة:

يمكن صياغة المبرهنة الأخيرة بالقول: إن تقاطع عدد منتهٍ من فضاءات جزئية من فضاء شعاعي V هو فضاء جزئي من V.

٥ . ٤ . التركيب الخطي Linear Combination والجملة المولّدة لفضاء ما:

تعريف (١):

ليكن u عنصراً (شعاعاً) من فضاء V، عندئذ نقول: إن u تركيب خطي للمتجهات $u_1, u_2, \ldots, u_s$ من V إذا أمكن التعبير عن u بالشكل:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مقادير سلمية من الحقل k، وتدعى هذه المقادير السلمية بمعاملات التركيب الخطي.

مبرهنة (١):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ مجموعة غير خالية من عناصر فضاء V، عندئذ:

(a) تشكل المجموعة W المكونة من جميع التراكيب الخطية الممكنة لعناصر S فضاء جزئياً من V.

(b) المجموعة W السابقة هي «أصغر» فضاء جزئي من V يحوي جميع عناصر S بمعنى أن أي فضاء جزئي آخر يحوي عناصر S لا بد أن يحوي W.

الإثبات:

لتكن W مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة لعناصر S، وليكن:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_r u_r \in S$$
$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_r u_r \in S$$

حيث: $c_1, c_2, \ldots, c_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ مقادير سلمية من الحقل k، فيكون:

$$u + v = (c_1 + k_1)u_1 + (c_2 + k_2)u_2 + \ldots + (c_r + k_r)\, u_r$$

وهذا الأخير هو تركيب خطي لعناصر S؛ أي إن $u + v \in W$.

وكذلك الأمر بالنسبة لـ αu (حيث α مقدار سلمي).

فإن:

$$\alpha u = \alpha c_1u_1 + \alpha c_2u_2 + \ldots + \alpha c_ru_r \in W$$

إذن W فضاء جزئي من V.

(b) ليكن W′ فضاء جزئياً من V يحوي عناصر S جميعها كون W′ مغلقاً بالنسبة للجمع والضرب بمقدار سلمي، فهو يحوي التراكيب الخطية جميعها لـ S، ولذلك فهو يحوي W (أي W هو الأصغر).

تعريف (٢):

إذا كان V فضاء متجهياً، وكانت S مجموعة غير خالية من متجهات V، فإن الفضاء الجزئي W ا لمكون من التراكيب الخطية جميعها الممكنة لعناصر S يدعى بسطة S، ويرمز له بـ W = span (S)، ونقول: إن عناصر S تولد W (generate = span).

وقد يرمز لذلك أيضاً بـ W = <S>.

مثال (١):

إن المجموعة $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ حيث $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ تولّد أو span الفضاء R^3.

لأنه أياً كان الشعاع $u = (a, b, c) \in R^3$، فإنه يمكن التعبير عن u على الشكل $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.

مثال (٢):

إن الحدوديات $1, x, x^2, \ldots, x^n$ تولّد فضاء الحدوديات P_n، لأن كل حدودية P من P_n يعبر عنها بالشكل: $P \; a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ والتي هي عبارة عن تركيب خطي للحدوديات $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

ويمكن أن نرمز لذلك بـ: $P_n = \text{span}\ \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

مثال (٣):

لنأخذ المتجه $u_1 = (1, 2, -1)$ والمتجه $u_2 = (6, 4, 2)$ من R^3.

أثبت أن $u = (9, 2, 7)$ هو تركيب خطي لـ u_1 و u_2.

بينما $u' = (4, -1, 8)$ ليس تركيباً خطياً لـ u_1, u_2.

الحل:

للحل نقول: هل يوجد α_1, α_2 (مقادير سلمية) بحيث:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ ?$$

لكن:

$$u = (9, 2, 7) = \alpha_1 (1, 2, -1) + \alpha_2 (6, 4, 2)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 + 6\alpha_2 = 9$$
$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2$$
$$- \alpha_1 + 2\alpha_2 = 7$$

بالحل المشترك نجد $\alpha_2 = 2, \alpha_1 = -3$

إذن الإجابة نعم يوجد $\alpha_2 = 2, \alpha_1 = -3$ ومنه $u = -3u_1 + 2u_2$؛ أي u تركيب خطي لـ u_1, u_2.

في حين أن:

$$u' = (4, -1, 8) = \alpha'_1 (1, 2, -1) + \alpha'_2 (6, 4, 2)$$
$$\Rightarrow \alpha'_1 + 6\alpha'_2 = 4$$
$$2\alpha'_1 + 4\alpha'_2 = -1$$
$$-\alpha'_1 + 2\alpha'_2 = 8$$

والجملة مستحيلة الحل؛ لذلك فإن u' ليس تركيباً خطياً لـ u_1, u_2.

مثال (٤):

١) بيّن فيما إذا كانت المتجهات: $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (2, 1, 3)$ تولد الفضاء R^3.

الحل:

علينا أن نبين أن أي متجه مثل $b = (b_1, b_2, b_3)$ من R^3 يمكن التعبير عنه كتركيب خطي للمتجهات u_1, u_2, u_3 أي إنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (مقادير سلمية) بحيث:

$$b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

بالتعويض نجد:

$$(b_1, b_2, b_3) = (\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, 0, \alpha_2) + (2\alpha_3, \alpha_3, 3\alpha_3)$$

أو:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= b_1 \\ \alpha_1 \qquad + \alpha_3 &= b_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= b_3 \end{aligned}$$

وهذه جملة معادلات خطية غير متجانسة مصفوفة معاملاتها:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

ومن ثمَّ الجملة لا تملك حلاً إذن المتجهات u_1, u_2, u_3 لا تولد R^3.

٢) هل تولّد المتجهات: $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 0, 0)$, $u_3 = (-2, 1, 0)$ الفضاء R^3؟

بالطريقة السابقة نفسها نجد أن هذه المتجهات تولد R^3.

٥ . ٤ . ١ . فضاء حلول جملة خطية متجانسة:

يمكن النظر إلى حل جملة خطية متجانسة $AX = 0$ مكونة من m معادلة و n مجهول (متغير) على أنه متجه في الفضاء R^n.

مبرهنة (١):

إن مجموعة حلول جملة خطية متجانسة $AX = 0$ في n مجهول تشكل فضاء جزئياً من R^n.

البرهان:

لتكن W مجموعة حلول هذه الجملة، وبذلك فإن $W \neq \phi$؛ لأن الجملة تقبل على الأقل الحل الصفري $(X = 0)$.

ليكن $X_1, X_2 \in W$ هذا يعني أن X_1, X_2 هما حلان لهذه الجملة فيكون:

$AX_1 = 0$ و $AX_2 = 0$، ومنه:

$$A (X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$$

إذن $X_1 + X_2 \in W$.

من جهة ثانية إذا كان $\alpha \in K$ (مقدار سلمي)، فإن:

$$A(\alpha X_1) = \alpha(AX_1) = \alpha . 0 = 0$$

أي $\alpha X_1 \in W$، وعليه فإن W فضاء جزئي من R^n.

أمثلة:

(١) لتكن الجملة الخطية المتجانسة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أوجد فضاء حلول هذه الجملة.

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

فالجملة تملك لا نهاية من الحلول، ولنأخذ x_2, x_3 مجاهيل اختيارية، ولنفرض: $x_2 = s$ و $x_3 = t$، فيكون:

$$x_1 = 2s - 3t \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0$$

وهي تعبر عن معادلة مستوٍ في R^3 وهذا المستوي مار بالمبدأ.

(فرضنا $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$).

أو نقول إن فضاء الحلول هو:

$$W = \{(2s - 3t, s, t) : s, t \in R\}$$

أو:

$$W = \text{span}\ \{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$$

(٢) لتكن الجملة الخطية المتجانسة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أوجد فضاء حلول هذه الجملة (solution space).

الحل:

بالطريقة السابقة نفسها نجد:

$$x = -5t,\ y = -t,\ z = t$$

والفضاء هو:

$$W = \{(-5t, -t, t) ; t \in R\}$$

أو:

$$W = \text{span}\ \{(-5, -1, 1)\}$$

مبرهنة (٢):

لتكن: $S = \{u_1, u_2, .., u_r\}, S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ مجموعتين غير خاليتين من عناصر الفضاء V، عندئذ:

$$\text{Span}\,(S) = \text{span}\,(S')$$

إذا وفقط إذا كان كل شعاع من S هو تركيب خطي لأشعة S' وكل شعاع من S' هو تركيب خطي لأشعة S. (نقبلها دون إثبات).

تمارين

١ . أي من المجموعات التالية W تشكل فضاء جزئياً من الفضاء V المذكور بجانب كل منها:

(a) $W = \{(a, a, 0) ; a \in R\}$, $V = R^3$
(b) $W = \{(a, 0, 0) ; a \in R\}$, $V = R^3$
(c) $W = \{(a, b, c) ; a + b = c \ ; \ a, b, c \in R\}$, $V = R^3$
(d) $W = \{(a, -a, 0) ; a \in R\}$, $V = R^3$

٢ . (a) هل مجموعة المصفوفات القطرية من المرتبة (السعة) $n \times n$ تشكل فضاء جزئياً من مجموعة كل المصفوفات المربعة من السعة $n \times n$؟.

(b) هل تشكل مجموعة المصفوفات المربعة من السعة $n \times n$ والتي محدد كل منها يساوي صفر فضاء جزئياً من $M_{n\times n}$؟.

٣ . بين أي من المجموعات W التالية تشكل فضاء جزئياً من $V = P_3$ (فضاء الحدوديات من الدرجة أصغر أو يساوي 3).

(a) $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ ; a_1 = a_2\}$
(b) $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ ; a_0 = 0\}$
(c) $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ ; a_0, a_1, a_2, a_3 \in Z\}$
(d) $W = \{a_0 + a_1x \ ; a_0, a_1 \in R\}$

٤ . ليكن $u = (0, -3, 6)$، وليكن $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (1, 0, -4)$

هل u تركيب خطي لـ u_1, u_2؟

٥ . هل $u = (3, -9, -2)$ تركيب خطي لـ u_1, u_2 السابقين؟

٦ . هل $u = (0, 0, 0)$ تركيب خطي لـ u_1, u_2 الواردين في التمرين (٤)؟.

٧ . لتكن المتجهات: $u_1 = (2, 1, 4)$, $u_2 = (1, -1, 3)$, $u_3 = (3, 2, 5)$

عبر عن كل من المتجهات $u = (-9, -7, -15), v = (6, 11, 6)$, $w = (0, 0, 0)$

على شكل تركيب خطي للمتجهات الثلاثة السابقة u_1, u_2, u_3.

٨ . (a) هل $X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ تركيب خطي لـ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) أعد السؤال من أجل: $X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

(c) أعد السؤال من أجل: $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

٩ . (a) عبّر عن $P = -9 - 7x - 15x^2$ على شكل تركيب خطي لـ:

$$P_1 = 2 + x + 4x^2,\ P_2 = 1 - x + 3x^2,\ P_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

(b) أعد السؤال نفسه من أجل $P = 6 + 11x + 6x^2$

(c) أعد السؤال نفسه من أجل $P = 7 + 8x + 9x^2$

١٠ . بيّن في كل مما يأتي إذا ما كانت المتجهات تولّد الفضاء R^3:

(a) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 0, 0)$, $u_3 = (-2, 1, 0)$

(b) $u_1 = (2, -1, 2)$, $u_2 = (4, 1, 3)$, $u_3 = (2, 2, 1)$

١١ . لنفرض: $u_1 = (2, 1, 0, 3)$, $u_2 = (3, -1, 5, 2)$, $u_3 = (-1, 0, 2, 1)$ أي من الأشعة التالية تقع في $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$؟

(a) (2, 3, -7, 3) (b) (0, 0, 0, 0), (c) (1, 1, 1, 1)

٥ . ٥ . الارتباط والاستقلال الخطي:

Linear dependence, Linear independence:

في جملة إحداثية متعامدة (x, y) نعلم أن كل متجه في المستوي يكتب بطريقة وحيدة على شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة المعيارية أو النظامية $\{i,j\}$ حيث $i = (1, 0)$، $j = (0, 1)$ فمثلاً يُكتب الشعاع $(2, 3)$ على الشكل $(2, 3) = 2i + 3j$.

تعريف (١):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مجموعة غير خالية من عناصر الفضاء المتجهي V، عندئذ يكون للمعادلة الشعاعية:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

حلاً واحداً على الأقل ألا وهو الحل الصفري أي: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ والذي يسمى بالحل التافه، فإذا كان هذا هو الحل الوحيد، عندئذ نقول: إن S مستقلة خطياً (أو أن عناصر S مستقلة خطياً)، أما إذا وُجدت حلول أخرى بالإضافة للحل التافه، فإننا نقول: إن S مرتبطة خطياً.

أمثلة:

(١) المجموعة $S = \{e_1 = (1,0, \ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0, \ldots,0,1)\}$ مستقلة خطياً في الفضاء R^n وتسمى القاعدة المعيارية (القانونية) لهذا الفضاء.

(٢) كذلك الأمر بالنسبة للقاعدة المعيارية في R^3 والتي هي:

$$\{i = (1,0,0)\ ,\ j = (0,1,0),\ k = (0,0,1)\}$$

فإذا أخذنا المعادلة الشعاعية: $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k = 0$

لوجدنا $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ ومنه فإن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ هو الحل الوحيد لهذه المعادلة؛ أي إن i, j, k مستقلة خطياً.

(٣) بين إذا ما $u_1 = (1, -2, 3)\ ,\ u_2 = (5, 6, -1)\ ,\ u_3 = (3, 2, 1)$ مستقلة خطياً.

الحل:

لنأخذ المعادلة: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

فنجد:

$$\alpha_1(1, -2, 3) + \alpha_2 (5, 6, -1) + \alpha_3 (3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

والتي ينتج عنها:

$$\alpha_1 + 5\alpha_2 + \ + 3\alpha_3 = 0$$
$$- 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

ويمكن من خلال محدد هذه الجملة معرفة إذا ما كانت تملك حلاً غير الحل الصفري (التافه) حيث نجد المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

إذن للجملة حلول غير الحل الصفري، ومن ثمَّ فإن المتجهات مرتبطة خطياً.

(٤) إن الحدوديات $1, x, x^2, \ldots, x^n$ مستقلة خطياً في فضاء الحدوديات P_n؛ لأنه لو فرضنا:

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2, \ldots, P_n = x^n$$

وأخذنا المعادلة المتجهية:

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_{n==0}$$

والتي تكافئ:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

فالحدوديات مستقلة خطياً.

(٥) بين إذا ما كانت الحدوديات الآتية مستقلة أو مرتبطة خطياً:

$$P_1 = 1 - x, P_2 = 5 + 3x - 2x^2 , P_3 = 1 + 3x - x^2$$

الحل:

لنأخذ المعادلة الشعاعية:

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$$

ثم نعوض:

$$\alpha_1(1 - x) + \alpha_2(5 + 3x - 2x^2) + \alpha_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

وهذه تكافئ:

$$(\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3) + (-\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3)\, x + (-2\alpha_2 - \alpha_3)\, x^2 = 0$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ &-\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ &-2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

,بحل هذه الجملة نجد أنها تملك حلاً غير الحل الصفري، وبذلك فإن الحدوديات P_1, P_2, P_3 مرتبطة خطياً.

نتيجة:

إذا كانت S مجموعة مكونة من عنصرين (متجهين) أو أكثر في فضاء متجهي V، فإن:

(a) S مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد عناصرها على الأقل على شكل تركيب خطي لبقية عناصر S.

(b) S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان لا يوجد أي عنصر في S قابل للتعبير عنه كتركيب خطي لبقية عناصر S.

مبرهنة (١):

(a) كل مجموعة منتهية من عناصر فضاء متجهي V تحوي 0 (صفر الفضاء) تكون مرتبطة خطياً.

(b) المجموعة المكونة من عنصر واحد فقط تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا لم يكن هذا العنصر هو الصفر (0).

(c) المجموعة المكونة من عنصرين فقط تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا لم يكن أحد العنصرين مضاعفاً سلمياً للآخر.

البرهان:

من أجل أي عناصر $u_1, u_2, \ldots, u_r$ تكون المجموعة $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, 0\}$ مرتبطة خطياً، لأن:

$$0.u_1 + 0.u_2 + \ldots + 0.u_r + 1 \,.\, 0 = 0$$

ليست جميع معاملاتها أصفاراً.

مبرهنة (٢):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ مجموعة متجهات في الفضاء R^n إذا كان $r > n$، فإن S تكون مرتبطة خطياً.

البرهان:

لنفرض:

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}) \\ u_2 &= (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}) \\ &\vdots \\ u_r &= (u_{r1}, u_{r2}, \ldots, u_{rn}) \end{aligned}$$

ولنأخذ المعادلة:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r = 0$$

وبإجراء العمليات المناسبة نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} u_{11}\alpha_1 + u_{21}\alpha_2 + \ldots + u_{r1}\alpha_r &= 0 \\ u_{12}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + \ldots + u_{r2}\alpha_r &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad &\vdots \\ u_{1n}\alpha_1 + u_{2n}\alpha_2 + \ldots + u_{rn}\alpha_r &= 0 \end{aligned}$$

وهذه جملة متجانسة ذات (n) معادلة و (r) مجهول وكون $r > n$، فإن هذه الجملة تملك حلولاً غير الحل الصفري، ومن ثمَّ فالمجموعة S مرتبطة خطياً.

٥ . ٦ . القاعدة والإحداثيات والبعد:

Basis, Coordinates, and dimension:

تعريف (١):

إذا كان V فضاء متجهياً على حقل k ولتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة منتهية من عناصر V، عندئذ يُقال إن S تشكل قاعدة للفضاء V إذا تحقق الشرطان الآتيان:

(i) S مستقلة خطياً. (ii) S تولّد V.

مثال (١): القاعدة القانونية (المعيارية) لـ Standard Basis R^3, R^2

في الفضاء R^2 نعلم أن $S = \{i,j\}$ (حيث $i = (1,0)$, $j = (0,1)$) تشكل قاعدة؛ لأن S مستقلة خطياً وهي مولّدة لهذا الفضاء، وتسمى هذه القاعدة القانونية لـR^2.

كذلك الأمر في الفضاء R^3 تشكل المجموعة $S = \{i, j, k\}$ (حيث $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1)$, $k = (0, 0, 1)$) قاعدة لهذا الفضاء. وفي كثير من الأحيان نرمز لعناصر هذه القواعد بالرموز $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ في R^2 و $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ في R^3.

مثال (٢):

أثبت أن $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ قاعدة للفضاء P_n حيث P_n فضاء الحدوديات الحقيقية التي درجة كل منها أصغر أو تساوي n.

الحل:

علينا أن نثبت أن حدوديات S مستقلة خطياً وتولّد P_n. فإذا رمزنا لهذه الحدوديات بـ: $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2, \ldots, P_n = x^n$ نجد أن أي حدودية P من P_n يمكن أن تكتب على النحو: $P = a_0 . 1 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$ أي:

$$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

وهذا معناه أن S تولّد الفضاء P_n أو نكتب $P_n = \text{span}\ \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

من جهة ثانية لكي نثبت أن S مستقلة خطياً، نفرض المعادلة الآتية:

$$a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n = 0$$

لكن هذه المعادلة الأخيرة تكافئ المعادلة الآتية:

$$a_0 \,.\, 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

وهي تساوي الصفر وذلك أياً كان $x \in (-\infty, \infty)$؛ أي إنها مطابقة في x؛ أي إن كل من أمثال هذه المعادلة يساوي صفراً؛ أي: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ هو الحل الوحيد لهذه المعادلة. وعليه فإن S مستقلة خطياً.

إذن يتم المطلوب وهو أن S تشكل قاعدة للفضاء P_n.

مثال (٣):

هل تشكل الحدوديات $P_1 = 1 - x\ ,\ P_2 = 5 + 3x - 2x^2\ ,\ P_3 = 1 - 3x - x^2$ قاعدة للفضاء P_2؟

الحل:

ليكن:

$$\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \alpha_3P_3 = 0$$

فيكون:

$$\alpha_1(1 - x) + \alpha_2\,(5 + 3x - 2x^2) + \alpha_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

ومنه:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ &- \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ &-2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

ولجملة المعادلات هذه حل غير الحل الصفري؛ أي إن مجموعة الحدوديات ليست مستقلة خطياً فهي لا تشكل قاعدة للفضاء P_2.

مثال (٤):

أثبت أن المتجهات $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (2, 9, 0)$, $u_3 = (3, 3, 4)$ تشكل قاعدة للفضاء R^3.

الحل:

لتكن المعادلة:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

بالتعويض نجد:

$$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(2,9,0) + \alpha_3(3,3,4) = (0,0,0)$$

إذن:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ &2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ &\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

فنجد أن لهذه الجملة المتجانسة حلاً وحيداً وهو الحل الصفري فهي مستقلة خطياً.

من جهة ثانية $\forall\, b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$، ولنفرض:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = b \Rightarrow \\ &\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b_1 \\ &2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 = b_2 \\ &\alpha_1 + 4\alpha_3 = b_3 \end{aligned}$$

فنجد أن لهذه الجملة غير المتجانسة حل؛ أي إن المتجهات u_1, u_2, u_3 تولّد R^3.

إذن كون المتجهات السابقة مستقلة خطياً وتولد R^3، فإن هذه المتجهات تشكل قاعدة للفضاء R^3.

مثال (٥):

إن المصـفوفات $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تشكل قاعدة لفضاء المصفوفات $M_{2\times2}$ وهذه هي القاعدة القانونية.

ملاحظة:

عندما يكون عدد عناصر القاعدة منتهياً، فنقول: إن الفضاء منتهيَ التوليد؛ أي إنه يتولد بواسطة مجموعة منتهية.

مبرهنة (١):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ قاعدة لفضاء V، عندئذ يُكتب كل متجه $v \in V$ على الشكل $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ وبطريقة وحيدة.

الإثبات:

بما أن S تولّد V كونها قاعدة له، فإن كل عنصر من الفضاء V يُكتب على شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة (التعريف) أي $\forall v \in V$، فإن:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \qquad (1)$$

ولنبرهن أن هذه هي الطريقة الوحيدة للتعبير عن v بدلالة عناصر S لذلك نفرض جدلاً أن v يكتب بصورة ثانية، وليكن:

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n \qquad (2)$$

بطرح العلاقتين (1) و (2) نجد:

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)u_n$$

ولكن العناصر $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقلة خطياً؛ لأنها تشكل قاعدة الفضاء V وبسبب الاستقلال الخطي نجد أن:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

أي إن:

$$\alpha_1 = \beta_1 \,,\, \alpha_2 = \beta_2 \,,\, \dots \,,\, \alpha_n = \beta_n$$

ومن ثمَّ فإن التعبير عن v يتم بطريقة وحيدة بدلالة عناصر S.

تعريف (٢):

إذا كانت $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ قاعدة للفضاء V وكان $v \in V$ يكتب بالشكل $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$، فإن السلميات $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ تدعى إحداثيات أو مركبات العنصر (المتجه) v بالنسبة للقاعدة S، ويدعى المتجه $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من R^n بالمتجه الإحداثي لـ v بالنسبة للقاعدة S ويعبر عن ذلك أحياناً بـ:

$$(v)_S = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

مثال:

- إن المتجه الإحداثي للحدودية $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ في الفضاء P_n بالنسبة للقاعدة القانونية هو:

$$(P)_S = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

- المتجه الإحداثي للمصفوفة $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة القانونية للفضاء $M_{2\times2}$ هو:

$$(B)_S = (a, b, c, d)$$

٥ . ٦ . ٢ . البعد: (Dimension)

رأينا فيما سبق أن القاعدة القانونية للفضاء R^2 تتكون من متجهين وللفضاء R^3 تتكون من ثلاثة متجهات. وللفضاء R^1 تتكون من متجه واحد وللفضاء R^n تتكون من n متجهاً. في حين أن القاعدة القانونية للفضاء $M_{2\times2}$ تتكون من أربعة عناصر، ونقول في كل من هذه الحالات إن الفضاء منتهي البعد، ونكتب بعده بالشكل $\dim V = n$ حيث n عدد عناصر القاعدة.

مبرهنة (١):

إذا كان V فضاء على حقل k وكانت $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ قاعدة له، فإن أي مجموعة من متجهات هذا الفضاء $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ حيث $m > n$ تكون مرتبطة خطياً.

الإثبات:

(انظر بحث الاستقلال والارتباط الخطيان).

مبرهنة (٢):

ليكن V فضاء متجهياً، ولتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ قاعدة له عدد عناصرها يساوي n فإذا كانت $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ قاعدة أخرى لهذا الفضاء عدد عناصرها يساوي m، فإن $m = n$.

الإثبات:

١) إذا كان $m > n$، فإن S' تكون مرتبطة خطياً حسب المبرهنة السابقة وهذا يناقض كون S' قاعدة لـ V.

٢) إذا كان $n > m$، فإنه أيضاً حسب المبرهنة السابقة تكون S مرتبطة خطياً وهو يناقض كون S قاعدة للفضاء V.

إذاً $m = n$.

تعريف (١):

ليكن V فضاء على حقل k، ولتكن S قاعدة في هذا الفضاء عدد عناصرها يساوي n. يُعرّف بعد الفضاء V على أنه العدد الطبيعي $|S| = n$ ونكتب $\dim V = n$.

ملاحظات:

- سوف نتعامل مع فضاءات ذات بعد منتهٍ، أي $\dim V < \infty$.

- إن بعد الفضاء الصفري $V = \{0\}$ هو صفر أي $\dim\{0\} = 0$.
- إذا كان k حقلاً، فإن $\dim (k^n) = n$.
- إذا كان الفضاء V هو فضاء الحدوديات P_n (درجة أي منها أصغر أو تساوي n)، فإن $\dim (P_n) = n + 1$.
- $\dim M_{m\times n}(k) = m \,.\, n$.

مثال (١):

عين قاعدة الفضاء وبعده:

$$W = \{(x - y, x + y + 2z, x + 2y + 3z) ; x, y, z \in R\}$$

الحل:

$\forall u \in W$ فإن:

$$\begin{aligned} u &= (x - y , x + y + 2z, x + 2y + 3z) \\ &= x (1,1,1) + y(-1,1,2) + z(0,2,3) \end{aligned}$$

وعليه فإن المجموعة:

$$S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,2), u_3 = (0,2,3)\}$$

تولد الفضاء W أي $W = \langle S\rangle$.

لنبحث عن مجموعة من عناصر S تكون مستقلة خطياً، لذلك نكون المصفوفة A التي أسطرها مركبات u_1, u_2, u_3، فنجد:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ونحولها إلى الشكل المدرج.

بإجراء تحويلات أولية على الأسطر نحصل على المصفوفة المكافئة لـ A:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي نستنتج منها أن u_1, u_2 مستقلان خطياً ومولدان لـ W.

إذن قاعدة W هي $S' = \{u_1, u_2\}$، وإن $\dim W = 2$.

تعريف (٢):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مجموعة من متجهات فضاء V.

نقول: إن S مجموعة عظمى من المتجهات المستقلة في V إذا تحقق الآتي:

(i) S مستقلة خطياً.

(ii) أياً كان $u \in V$، فإن $S \cup \{u\}$ مرتبطة خطياً.

كما يُقال: إن S مجموعة صغرى مولّدة للفضاء V إذا كان:

(i) $V = \text{span}(S)$ أو $V = \langle S \rangle$.

(ii) أياً كان $u_i \in S$، فإن $S - \{u_i\}$ لا تولّد V.

مبرهنة (٣):

إذا كانت $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مجموعة من متجهات الفضاء V (حيث V فضاء غير صفري).

فإن $S \Leftrightarrow V = \langle S \rangle$ تحوي قاعدة لـ V.

الإثبات:

لتكن S مولّدة للفضاء V، ولنثبت أنها تحوي قاعدة لهذا الفضاء. إذا كانت S مستقلة خطياً، فهي تصبح قاعدة ويتم المطلوب. أما إذا كانت S مرتبطة خطياً فهذا يعني أن أحد عناصرها، وليكن u_n يُكتب كتركيب خطي لبقية العناصر على الشكل:

$$u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} \;;\; (\alpha_i \in k) \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

وكون S تولد V فإنه $\forall u \in V$ فهو يكتب على الشكل:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i + \beta_n u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i + \beta_n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \beta_n \alpha_i) u_i = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i u_i \end{aligned}$$

حيث فرضنا $\gamma_i = \beta_i + \beta_n \alpha_i$ وبذلك تكون المجموعة $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ مولّدة للفضاء V، فإذا كانت S_1 مستقلة خطياً، فإنها تصبح قاعدة لهذا الفضاء، وإذا كانت مرتبطة خطياً، فإننا نكرر الخطوة السابقة، وهكذا حيث نصل بعد عدد منتهٍ من الخطوات إلى مجموعة $S^* \subseteq S$ مولدة ومستقلة خطياً، فتكون هي قاعدة الفضاء المحتواة في S. «قلنا: إنه بعد عدد منتهٍ من الخطوات؛ لأن الفضاء منتهي البعد».

بفرض أن S تحوي قاعدة للفضاء V، ولتكن هذه القاعدة هي $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ وبذلك يتحقق الآتي:

$$\forall\, u \in V \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \ \ ; i = 1,2,\ldots,k$$

ومنه فإن:

$$\forall\, u \in V \Rightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + 0.u_{k+1} + \ldots + 0.u_n$$

والعلاقة الأخيرة تعني أن S تولّد V ($V = \langle S \rangle$).

مبرهنة (٤):

لتكن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ مجموعة متجهات من فضاء V عندئذ:

S قاعدة لـ V $\Leftrightarrow$ S مجموعة عظمى مستقلة خطياً في V $\Leftrightarrow$ S مجموعة صغرى مولّدة لـ V.

الإثبات:

- S قاعدة ⇐ S مجموعة عظمى مستقلة خطياً في V؛ لأنه لو أضفنا لـ S عنصر $u \in V$ فتصبح المجموعة $S \cup \{u\}$ مرتبطة خطياً؛ لأنه يمكن التعبير عن u كتركيب خطي لعناصر S كونها قاعدة إذن S مجموعة عظمى مستقلة خطياً في V.

- S مجموعة عظمى مستقلة خطياً ⇐ S مجموعة صغرى مولدة لـ V كون S مجموعة عظمى مستقلة خطياً، فإنه $\forall u \in V$ وإن: $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$ مرتبطة خطياً أي $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ حيث α_i ليست جميعها أصفاراً. وهذا يعني أن S تولّد V، وكون S مستقلة خطياً، فإنها تكون مجموعة صغرى مولّدة لـ V.

- إذا كانت S مجموعة صغرى مولّدة لـ V لنبرهن أنها قاعدة لهذا الفضاء كون S مولّدة للفضاء، فإنها (بحسب مبرهنة سابقة) تحوي قاعدة لهذا الفضاء، ولتكن $S_1 \subseteq S$ هي هذه القاعدة. وهذا يعني أن عدد عناصر S_1 أقل من عدد عناصر S وهي تولد V وهذا تناقض إذن $S = S_1$.

من كل ما سبق نخلص إلى النتيجة الآتية:

نتيجة:

إذا كان V فضاء متجهياً على حقل k حيث $\dim V = n$، وإذا كانت $S \subset V$ مجموعة متجهات، فإن:

- (S مستقلة خطياً وعدد عناصرها n) ⇔ S قاعدة للفضاء V.
- (S تولّد V وعدد عناصرها n) ⇔ S قاعدة للفضاء V.

مبرهنة (٥):

إذا كان W فضاء جزئياً من فضاء منتهي البعد V ($\dim V = n$)، فإن:

$$\dim W \le \dim V = n$$

الإثبات:

إذا كان $W = \{0\}$ فضاء صفرياً، فإن $dimW = 0$ ومن ثمَّ $0 < n$ أما إذا كان $W \neq \{0\}$ وكون $dimV = n$ فإن أية مجموعة من متجهات V عددها $n + 1$ تكون مرتبطة خطياً، ومن ثمَّ فإن $dimW \leq n$.

مبرهنة (٦):

إذا كانت $A = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ مجموعة من عناصر V مستقلة خطياً، فإنه يمكن تحديد A لتصبح قاعدة في الفضاء V.

الإثبات:

لنفرض $dimV = n$ وأن $r < n$ ولهذا فإنه لا يمكن للمجموعة A أن تولد V. وهذا معناه أنه يوجد متجه $u_{r+1} \in V$، ولكن $u_{r+1} \notin span\ (A)$، وكون بعد V يساوي n وإن $r < n$، فإن المتجهات $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}$ مستقلة خطياً، فإذا كان $r + 1 = n$، فإن المجموعة $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}\}$ تصبح قاعدة في V.

أما إذا كان $r + 1 < n$، فإننا نكرر العملية السابقة بحيث نحصل على $(r + 2)$ من المتجهات المستقلة خطياً وهكذا..، وعندما نصل إلى إضافة $n - r$ من المتجهات إلى A، فإن المجموعة الناتجة تصبح قاعدة في V.

مثال:

لتكن $A = \{(1,2,3), (-1,4,5)\}$ مجموعة جزئية من R^3 مستقلة خطياً. والمطلوب تمديد A لتصبح قاعدة في R^3.

الحل:

إن المتجه $(1,0,0)$ لا ينتمي للفضاء المولد بـ A؛ أي $(1,0,0) \notin span\ (A)$. وعليه فإنه بإضافة هذا العنصر لـ A نحصل على قاعدة في R^3 هي:

$$A' = \{(1,2,3), (-1,4,5), (1,0,0)\}$$

ملاحظة:

يمكن تمديد القاعدة بأكثر من طريقة.

ملاحظة:

يفضل حل التمرين السابق بالشكل العام كالآتي:

نعين span (A) حيث $\forall\ (x,y,z) \in \text{span}\ (A)$، فإن:

$$(x,y,z) = \alpha\ (1,2,3) + \beta\ (-1,4,5)$$

ومنه:

$$x = \alpha - \beta\ ,\ y = 2\alpha + 4\beta\ ,\ z = 3\alpha + 5\beta$$

ويكون لهذه المعادلات حل إذا كان $x + 4y - 3z = 0$ إذن:

$$\text{Span}(A) = \{(x,y,z) : x + 4y - 3z = 0\}$$

وعليه فيمكن أن نأخذ أي عنصر (x,y,z) بحيث $(x,y,z) \notin \text{span}\ (A)$؛ أي بحيث $x + 4y - 3z \neq 0$ فيمكن أن نأخذ المتجه (1,1,1)، فنجده لا ينتمي إلى span(A).

تمارين

١ . في كل مما يأتي: بيِّن لماذا لا تشكل المجموعة (مجموعة متجهات) قاعدة للفضاء المذكور بجانبها:

(a) $\{u_1 = (1,1), u_2 = (3,5), u_3 = (4,2)\}$ في R^2.

(b) $\{P_1 = 1 + x, P_2 = 2x - x^2\}$ في فضاء الحدوديات P_2.

(c) $\left\{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right\}$ في $M_{2\times2}$.

٢ . أثبت أن المصفوفات الآتية تشكل قاعدة للفضاء $M_{2\times2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

٣ . أي المجموعات الآتية تشكل قاعدة في الفضاء R^3؟

(a) $A = \{(1,0,0), (2,2,0), (3,3,3)\}$

(b) $B = \{(2,-3,1), (4,1,1), (0,-1,1)\}$

٤ . أي المجموعات الآتية تشكل قاعدة في الفضاء P_2:

(a) $A = \{2 - 4x + x^2, 3 + 2x - x^2, 1 + 6x - 2x^2\}$

(b) $B = \{3 + 2x - x^2, x + 5x^2, 2 - 4x + x^2\}$

(c) $C = \{1 + x + x^2 , x + x^2 , x^2\}$

٥ . ليكن V فضاء مولّداً بالمتجهات: $v_1 = \cos^2 x, v_2 = \sin^2 x, v_3 = \cos 2x$

(a) أثبت أن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ليست قاعدة في V.

(b) أوجد قاعدة لهذا الفضاء V.

٦ . (a) أوجد إحداثيات المتجه $w = (5,-3)$ بالنسبة للقاعدة:

$S = \{u_1 = (0,1), u_2= (1,0)\}$

(b) أوجد إحداثيات $w = (1,0)$ بالنسبة للقاعدة: $S = \{u_1 = (3,8), u_2 = (1,1)\}$

(c) أوجد إحداثيات $w = (a,b)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{(1,1), (0,2)\}$.

٧ . أوجد إحداثيات المتجه v بالنسبة للقاعدة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ فيما يأتي:

(a) $v_1 = (3,2,1), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (5,0,0), v = (3,4,3)$

(b) $v_1 = (1,2,3), v_2 = (-4,5,6), v_3 = (7,-8,9), v = (5,-12,3)$

٨ . أوجد إحداثيات المتجه p بالنسبة للقاعدة $\{p_1, p_2, p_3\}$ فيما يأتي:

(a) $p_1 = 1 , p_2 = x , p_3 = x^2, p = 4 - 3x + x^2$

(b) $p_1 = 1 + x , p_2 = 1 + x^2 , p_3 = x + x^2 , p = 2 - x + x^2$

٩ . أوجد قاعدة الفضاء الجزئي وبعده لحلول جملة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

١٠ . أوجد قاعدة الفضاء المتجهي وبعده الذي تولده الحدوديات:

$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 , p_2 = t^3 + 6t - 5 , p_3 = 2t^2 - 3t^2 + 9t - 1,$
$p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

٥ . ٧ . فضاءات خاصة بالمصفوفات:

سوف نتناول في هذا الجزء بعض الفضاءات المتجهية المهمة التي ترتبط بالمصفوفات، وهذه الدراسة سوف تزودنا بفهم أعمق للعلاقات بين حلول معادلات خطية، وخصائص مصفوفة معاملاتها.

نعود لنذكر أن المتجهات في الفضاء R^n يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

أو على شكل مصفوفة سطر؛ أي على النحو:

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots\ldots \quad u_n]$$

أو أيضاً على شكل مصفوفة عمود:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

سوف نستعمل في هذا الجزء الشكلين الأخيرين.

تعريف (١):

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$؛ أي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عندئذ نسمي المتجهات:

$$r_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$
$$r_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}]$$
$$\vdots$$
$$r_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$$

متجهات أسطر المصفوفة A (وهي متجهات مكونة من أسطر A) وكل منها هو متجه من الفضاء R^n. (Row vector).

كما نسمي المتجهات المكونة من أعمدة A وهي:

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} , \ C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} , \ldots , C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

بمتجهات أعمدة A. (Column vector) وكل من متجهات الأعمدة هو عنصر (متجه) من الفضاء R^m.

مثال:

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ، عندئذ تكون متجهات أسطر A، هي:

$$r_1 = [2 \quad 1 \quad 0] \, , \, r_2 = [3 \quad -1 \quad 4] \ \in R^3$$

ومتجهات أعمدة A، هي:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \ c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \ c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in R^2$$

5 . ٧ . ١ . فضاءات الأسطر والأعمدة وفضاء الحلول:

تعريف (١):

إذا كانت A مصفوفة من المرتبة (السعة) m × n، عندئذ نسمي الفضاء الجزئي من R^n . المولَّد بمتجهات الأسطر . فضاء أسطر A (Row space of A).

كما نسمي الفضاء الجزئي من R^m والمولد بمتجهات الأعمدة فضاء أعمدة A (column space of A).

وأخيراً نسمي فضاء حلول جملة المعادلات المتجانسة $AX = 0$ الذي هو فضاء جزئي من R^n فضاء الأصفار (فضاء الحلول) (Null space).

سوف نهتم هنا بالإجابة عن السؤالين الآتيين:

١ . ما العلاقات بين هذه الفضاءات، وحلول جملة المعادلات الخطية $AX = b$؟

٢ . ما العلاقات فيما بين هذه الفضاءات الثلاثة.

فإذا تناولنا السؤال الأول، وفرضنا أن المصفوفة A كما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وأن $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، عندئذ يمكن التعبير عن AX على شكل تركيب خطي لمتجهات الأعمدة بمعاملات من X؛ أي:

$$AX = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \qquad (1)$$

حيث كما أسلفنا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ تعبر عن متجهات الأعمدة.

أي؛ إن الجملة الخطية $AX = b$ المكونة من (m) معادلة خطية في (n) مجهول يمكن أن تكتب على هذا النحو:

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n = b \qquad (2)$$

وينتج عن هذا الشكل أن الجملة تكون متوائمة (لها حل) إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن b على شكل تركيب خطي لمتجهات أعمدة A.

ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة (١):

تكون الجملة الخطية $AX = b$ متوائمة (Consistent) إذا وفقط إذا كان b عنصراً من فضاء الأعمدة.

مثال:

ليكن $AX = b$ حيث:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ عنصر من فضاء الأعمدة، وذلك بالتعبير عنه على شكل تركيب خطي لهذه الأعمدة.

الحل:

نحل الجملة بأي طريقة كانت، ولتكن طريقة غاوص فنجد أن $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$، عندئذ ومن خلال العلاقة (2) نجد:

$$2c_1 - 1c_2 + 3c_3 = \\ = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = b$$

إذن b يقع في فضاء أعمدة A.

إذا عدنا من جديد لما يسمى الحل العام (general solution) لجملة خطية متوائمة $AX = b$، فنجد أن هذا الحل ينتج من إضافة حل معين لهذه الجملة إلى حل الجملة المتجانسة $AX = 0$ وإذا تذكرنا أن فضاء الحلول (Null space) هو نفسه الفضاء الناتج من حلول الجملة $AX= 0$، فإنه يمكن إعادة صياغة المبرهنة السابقة بالشكل الآتي:

مبرهنة (٢):

إذا كان X_0 حلاً ما لجملة متوائمة $AX = b$ وإذا كانت المجموعة $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ قاعدة لفضاء الأصفار (Null space) للمصفوفة A، عندئذ كل حل للجملة $AX = b$ يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$X = X_0 + c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k \quad (3)$$ ($c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادير سلمية)

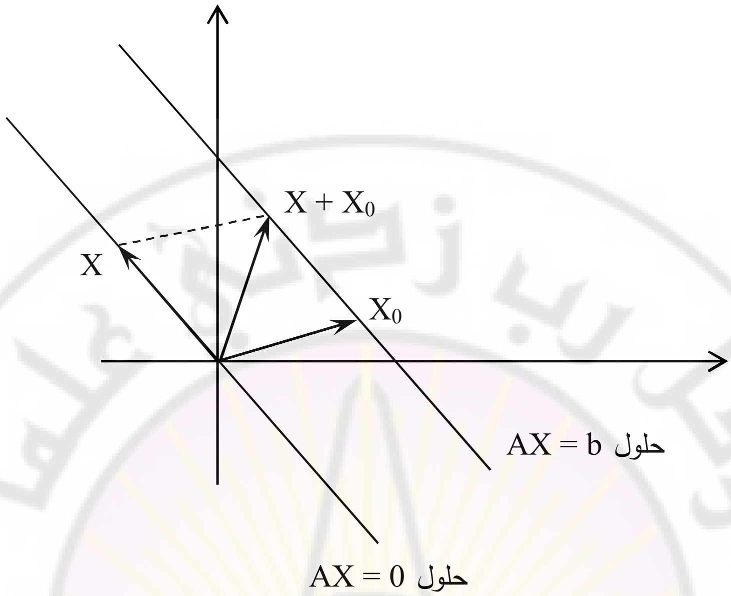
ومن جهة ثانية من أجل أي اختيار للمقادير السلمية (الأعداد) $c_1, c_2, \dots, c_k$، فإن المتجه X في العلاقة (3) هو حل للجملة $AX = b$.

ملاحظة:

المعادلة (3) السابقة تعطي قانوناً للحل العام للجملة $AX = b$ والمتجه X_0 في هذا القانون يدعى حلاً جزئياً (particular solution)، أو حلاً خاصاً للجملة $AX = b$ والجزء المتبقي من (3) يدعى الحل العام للجملة $AX = 0$.

أي إن الحل العام للجملة المتوائمة هو مجموع للحل الخاص للجملة $AX = b$ والحل العام للجملة المتجانسة المقابلة ($AX = 0$).

هندسياً يمكن النظر إلى مجموعة حلول الجملة $AX = b$ على أنها انسحاب وفق المتجه x_0 لفضاء حلول الجملة $AX = 0$.



مثال:

لتكن الجملتان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , AX = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , AX = b$$

نجد أن:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r-4s-2r \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_h}$$

$$X \qquad\qquad\qquad\qquad X_0$$

حيث X_h هو الحل العام للجملة المتجانسة $AX = 0$، وإن متجهات X_h تشكل قاعدة لفضاء حلول الجملة المتجانسة.

ملاحظة:

إن إيجاد قاعدة لكل من فضاء الأسطر والأعمدة يتم من خلال تحويل المصفوفة A إلى الشكل المدرج فإذا تحولت A إلى الشكل المدرج R، فإن الأسطر التي تحوي عناصر رائدة (الأسطر غير الصفرية) تشكل قاعدة لفضاء أسطر المصفوفة R والأعمدة التي تحوي عناصر رائدة (واحدات) من الأسطر تشكل قاعدة لفضاء أعمدة R.

مثال:

لتكن المصفوفة المدرجة:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن المتجهات:

$$r_1 = [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3]$$
$$r_2 = [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تشكل قاعدة لفضاء الأسطر.

وإن المتجهات:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \; c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \; c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تشكل قاعدة لفضاء الأعمدة.

ملاحظة:

العمود الثالث ليس فيه عنصر رائد لسطر ما، فهو لا يكون من بين عناصر قاعدة فضاء الأعمدة.

مثال:

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

أوجد قاعدة لفضاء أسطر هذه المصفوفة.

الحل:

نحول هذه المصفوفة للشكل المدرج، فنحصل على:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عندئذ تشكل الأسطر غير الصفرية قاعدة لفضاء أسطر A، وهذه الأسطر، هي:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$
$$r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$
$$r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

بالإضافة لما سبق إذا بحثنا عن قاعدة لفضاء أعمدة A، فإننا نجد أن الأعمدة الأول والثالث والخامس في المصفوفة المدرجة R تحوي عناصر رائدة، لذلك فإن هذه الأعمدة في المصفوفة A تشكل قاعدة لفضاء الأعمدة، أي إن القاعدة هي:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

يمكن الاستفادة مما سبق في إيجاد قاعدة لفضاء جزئي ما من خلال العناصر المولدة له.

مثال:

أوجد قاعدة للفضاء الجزئي من R^5 المولَّد بالمتجهات:

$$u_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad , \quad u_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$$
$$u_3 = (0, 5, 15, 10, 0) \; , \quad u_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

الحل:

إن الفضاء المولَّد بهذه المتجهات هو فضاء أسطر المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 20 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

وبتحويل هذه المصفوفة إلى الشكل المدرج نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن الأسطر غير الصفرية تشكل قاعدة لفضاء الأسطر، وهي:

$w_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $w_2 = (0, 1, 3, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$

ومن ثمَّ فإنها تشكل قاعدة للفضاء المولد بـ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

سوف نعطي مثالاً فيما يأتي لتأسيس طريقة لحل المسألة العامة الآتية:

المسألة:

إذا كانت $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ مجموعة متجهات من R^n، فأوجد مجموعة جزئية من هذه المتجهات بحيث تشكل قاعدة للفضاء المولّد بـ S أي لِ span(S)، ثم عبّر عن كل متجه خارج هذه القاعدة على شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة هذه.

مثال:

(i) أوجد مجموعة جزئية من المتجهات الآتية (بحيث تشكل قاعدة للفضاء المولد بهذه المتجهات).

$v_1 = (1,-2,0,3)$, $v_2 = (2,-5,-3,6)$, $v_3 = (0,1,3,0)$
$v_4 = (2,-1,4,-7)$, $v_5 = (5,-8,1,2)$

(ii) عبّر عن كل متجه خارج هذه القاعدة كتركيب خطي لعناصرها.

الحل:

(i) نكوّن مصفوفة أعمدتها المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4, v_5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

ونبحث عن قاعدة لفضاء أعمدة هذه المصفوفة؛ وذلك بتحويل هذه المصفوفة إلى الشكل المدرج المختزل، ونرمز لأعمدة المصفوفة الناتجة بـ w_1, w_2, w_3, w_4, w_5، فنجد:

$$R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \end{array}$$

فنجد أن العناصر (الواحدات) الرائدة تقع في العمود الأول والثاني والرابع.

وبناء عليه، فإن قاعدة فضاء الأعمدة، هي: $\{w_1, \ w_2, \ w_4\}$ للمصفوفة R، ونتيجة لذلك فإن $\{v_1, \ v_2, \ v_4\}$ هي قاعدة فضاء الأعمدة للمصفوفة A. وبذلك يتم المطلوب الأول.

(ii) نعبر عن w_3, w_5 كتركيب خطي لعناصر القاعدة w_1, w_2, w_4 حيث نعبر عن w_3 كتركيب خطي للأعمدة التي تسبقه من عناصر القاعدة، فنجد مباشرة:

$$w_3 = 2w_1 - w_2$$

ونعبر عن w_5 بدلالة الأعمدة التي تسبقه من عناصر القاعدة أيضاً، ونجد أن:

$$w_5 = w_1 + w_2 + w_4$$

وندعو هذه المعادلات بمعادلات الارتباط، وعليه فإن:

$$v_3 = 2v_1 - v_2$$
$$v_5 = v_1 + v_2 + v_4$$

٥ . ٧ . ٢ . تمارين

١ . عين متجهات أسطر، ومتجهات أعمدة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

٢ . عبّر في كل مما يأتي عن الجداء AX على شكل تركيب خطي لمتجهات أعمدة المصفوفة A:

$$\text{(i)}\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \text{(iv)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

٣ . بيّن في كل مما يأتي فيما إذا ما كان b يقع في فضاء أعمدة A، وإذا كان كذلك فعبر عن b على شكل تركيب خطي لمتجهات أعمدة A.

$$\text{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

٤ . بفرض أن $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = -3$ حل للجملة $AX = b$ وأن مجموعة حلول الجملة المتجانسة $AX = 0$ تعطى بالعلاقات:

$$x_1 = -3r + 4s \ , \ x_2 = r - s \ , \ x_3 = r, x_4 = s$$

(i) أوجد الشكل المتجهي للحل العام للجملة $AX = 0$.

(ii) أوجد الشكل المتجهي للحل العام للجملة $AX = b$.

٥ . أوجد في كل مما يأتي الشكل المتجهي للحل العام للجملة $AX = b$، ومنه أوجد الشكل المتجهي للحل العام للجملة $AX = 0$:

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ 6x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

٦ . أوجد قاعدة لفضاء الحلول (فضاء الأصفار) = Null space للمصفوفة A في كل مما يأتي:

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & -3 & 18 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

٧ . أوجد في كل حالة قاعدة فضاء أسطر المصفوفة A كون A هي المصفوفة الواردة في التمرين السابق (٦).

٥ . ٧ . ٣ . رتبة وانعدامية مصفوفة: Rank and Nullity

في الفقرة السابقة بحثنا في العلاقات بين جملة معادلات خطية وفضاء أسطر أو أعمدة مصفوفة المعاملات لهذه الجملة أو حتى فضاء الحلول (فضاء الأصفار) أيضاً.

وفي هذه الفقرة سوف نهتم ببعد كل من هذه الفضاءات. والنتيجة التي سنراها سوف تمنحنا رؤية أعمق للعلاقة بين الجملة الخطية ومصفوفة معاملاتها.

بالعودة إلى المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

التي كنا درسنا فضاء أسطرها وفضاء أعمدتها، ووجدنا أن قاعدة كل منهما تتكون من ثلاثة متجهات، وهذا يعني أن بعد كل من هذين الفضاءين يساوي /3/؛ أي إن لهما البعد نفسه، وهذا ليس مصادفة، ولكنه حقيقة ما تبينه المبرهنة الآتية:

مبرهنة (١):

إن عدد أبعاد فضاء أسطر مصفوفة A يساوي عدد أبعاد فضاء أعمدة هذه المصفوفة.

الإثبات:

ليكن R شكلاً مدرجاً للمصفوفة A، عندئذ نجد وبحسب دراستنا السابقة:

بعد فضاء أسطر A = بعد فضاء أسطر R

بعد فضاء أعمدة A = بعد فضاء أعمدة R

ولذلك يكفي أن نثبت أن فضاء أسطر R وفضاء أعمدة R لهما البعد نفسه.

ولكن بعد فضاء أسطر R يساوي عدد الأسطر غير الصفرية، وإن بعد فضاء أعمدة R يساوي عدد العناصر (الواحدات) الرائدة. وهذان العددان متساويان، ومن ثمَّ فإن بعد فضاء الأسطر يساوي بعد فضاء الأعمدة.

ملاحظة:

إن بعد كل من فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة وفضاء الحلول لمصفوفة ما، لها أهمية خاصة وهو ما نتج عنه بعض المفاهيم والمصطلحات.

تعريف (١):

إن البعد المشترك لفضاء الأسطر، وفضاء الأعمدة لمصفوفة A يدعى رتبة المصفوفة، ويرمز له بـ rank (A)، ويدعى بعد فضاء الحلول انعدامية A (Nullity of A) ويرمز له بـ Nullity (A).

مثال:

أوجد كلاً من رتبة المصفوفة A وانعداميتها:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحول المصفوفة إلى الشكل المدرج المختزل، فنحصل على:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فنجد أن R تملك عنصرين رائدين (واحدين)، فيكون بعد فضاء الأسطر = بعد فضاء الأعمدة = رتبة المصفوفة، إذن $\text{rank}(A) = 2$.

أما مسألة حساب انعدامية A ((nullity(A)))، فإنها تتطلب حل الجملة المتجانسة $AX = 0$ ومعرفة عدد أبعاد فضاء الحلول. إن الجملة $AX = 0$ تكافئ الجملة:

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$
$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_3 + 5x_6 = 0$$

وبحل هذه الجملة بالنسبة للمتغيرات الرائدة x_1, x_2، نجد:

$$x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$$
$$x_2 = 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$$

ومنها نحصل على الحل العام:

$$x_1 = 4r + 28s + 37t - 13u$$
$$x_2 = 2r + 12s + 16t - 5u$$
$$x_3 = r$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = t$$
$$x_6 = u$$

ويمكن كتابة هذا الحل على شكل متجهات أعمدة:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\, v_1} + s\underbrace{\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\, v_2} + t\underbrace{\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\, v_3} + u\underbrace{\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow\, v_4}$$

ومنه، فإن $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول؛ وذلك يعني أن:

$$\text{Nullity}(A) = 4$$

مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة ذات n عمود، فإن: $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$

الإثبات:

كون A تملك n عموداً فهذا يعني أن الجملة المتجانسة $AX = 0$ تملك n مجهولاً (متغيراً) وهذه المتغيرات تنقسم إلى فئتين، هما: المتغيرات الرائدة والمتغيرات المستقلة أو الاختيارية، وهذا يعني أن عدد المتغيرات الرائدة + عدد المتغيرات المستقلة = n.

ولكن عدد المتغيرات الرائدة هو نفسه عدد العناصر الرائدة في الشكل المدرج المختزل للمصفوفة A وهو نفسه رتبة A وعدد المتغيرات الاختيارية أو المستقلة هو نفسه عدد الوسطاء في الحل العام للجملة $AX = 0$ وهو نفسه انعدامية المصفوفة وهو المطلوب.

تمارين

١ . لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

تحقق أن: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

٢ . أوجد في كل مما يأتي، رتبة المصفوفة $(\text{rank}(A), \text{null}(A))$ وانعداميتها، ثم تحقق أن عدد الأعمدة = $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n$.

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، (ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، (iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

٣ . أوجد رتبة المصفوفة الآتية وانعداميتها:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

٥ . ٨ . المجموع المباشر للفضاءات الجزئية:

Direct Sum of Vector Subspaces:

٥ . ٨ . ١ . مجموع فضاءات جزئية:

تعريف (١):

إذا كانت $V_1, V_2, \ldots, V_k$ فضاءات جزئية من فضاء متجهي V، فإننا نعرف مجموع هذه الفضاءات كما يأتي:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = \left\{ \sum_{i=1}^{k} u_i \middle| u_i \in V_i \right\}$$

مبرهنة (١):

إذا كانت $V_1, V_2, \ldots, V_k$ فضاءات متجهية جزئية من الفضاء المتجهي V المعرف على حقل k، فإن $\sum_{i=1}^{k} V_i$ فضاء جزئي من V.

الإثبات:

ليكن: $u = \sum_{i=1}^{k} u_i$ ، $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ حيث $u_i, v_i \in V_i$

وبفرض $\alpha, \beta \in k$، فإن:

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{k} u_i + \beta \sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha u_i + \beta v_i)$$

ولكن $\alpha u_i + \beta v_i \in V_i$؛ لأن V_i فضاء جزئي من V $(i = 1, 2, \ldots, k)$

ونستنتج من ذلك أن: $\alpha u + \beta v \in \sum_{i=1}^{k} V_i$.

ومن ثمَّ فالمجموع $\sum_{i=1}^{k} V_i$ هو فضاء جزئي من V.

مثال (١):

أوجد قاعدة الفضاء الجزئي $V_1 + V_2$ وبعده من الفضاء R^3 إذا علمت أن:

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid x + 3y - 4z = 0) \ , \ V_2 = \{(x,y,z) \mid x + y - z = 0\}$$

الحل:

نوجد قاعدة لكل من V_1, V_2 حيث:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \mid x + 3y - 4z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \mid x = 4z - 3y\} = \{(4z - 3y, y, z)\} \\ &= \{y(-3,1,0) + z(4,0,1)\} \end{aligned}$$

ومنه: فإن قاعدة V_1 هي: $S_1 = \{(-3,1,0) , (4,0,1)\}$

كذلك:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y,z) \mid x + y - z = 0\} = \{(x,y,z) \mid z = x + y\} \\ &= \{(x,y,z+y)\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1)\} \end{aligned}$$

ومنه: فإن قاعدة V_2 هي: $S_2 = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$

إن الفضاء $V_1 + V_2$ يتولد بـ $S_1 \cup S_2$ أي بـ:

$$S_1 \cup S_2 = \{(1,0,1) , (0,1,1), (-3,1,0), (4,0,1)\}$$

ولنبحث عن المجموعة المستقلة خطياً ضمن $S_1 \cup S_2$، فنكتب عناصر $S_1 \cup S_2$ على هيئة أسطر لمصفوفة ونحولها للشكل المدرج:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فتكون قاعدة $V_1 + V_2$ هي: $\{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ ويكون $\dim(V_1+V_2) = 3$.

بينما كان $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$

ملاحظة:

إذا طلب قاعدة وبعد $V_1 \cap V_2$، فإننا نكتب:

$$V_1 \cap V_2 = \{(x,y,z) \mid x + 3y - 4z = 0 \,,\, x + y - z = 0\}$$

وقاعدة $V_1 \cap V_2$ هي مجموعة حلول الجملة المتجانسة:

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

والتي لها لا نهاية من الحلول وكل منها من الشكل: $(t, -3t, -2t)$

وعليه فإن $\{(1,-3,-2)\}$ تشكل قاعدة لـ $V_1 \cap V_2$ وعدد أبعاد $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$

٥ . ٨ . ٢ . المجموع المباشر لفضاءات جزئية:

تعريف (١):

إذا كانت $V_1, V_2, \ldots, V_k$ فضاءات جزئية من فضاء V فإن المجموع $S = \sum_{i=1}^{k} V_i$ يسمى مجموعاً مباشراً إذا كان كل متجه $u \in S$ يُكتب بطريقة وحيدة على الشكل الآتي:

$$u = \sum_{i=1}^{k} u_i \quad , \quad u_i \in V_i$$

ونكتب في هذه الحالة: $S = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots.. \oplus V_k$

مثال (١):

إذا كانت $V_1 = \{x(1,0)\} \;,\; V_2 = \{y(0,1)\}$ حيث $x,y \in R$ فضاءات جزئية كما نرى من الفضاء R^2، فإنه $\forall (x,y) \in R^2$ وإن $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ يكتب بهذه الطريقة الوحيدة ومن ثمَّ فإن $R^2 = V_1 \oplus V_2 = \bigoplus_{i=1}^{2} V_i$ ، أي إن R^2 مجموع مباشر لهذين الفضاءين الجزئيين.

مبرهنة (١):

لتكن $V_1, V_2, \ldots, V_k$ فضاءات جزئية من الفضاء V، وليكن $S=\sum_{i=1}^{k}V_i$،

عندئذ تكون الشروط الآتية متكافئة:

(i) المجموع $S=\sum_{i=1}^{k}V_i$ مباشر.

(ii) إذا كان $\sum_{i=1}^{k}u_i=0$ حيث $u_i \in V_i$ فإن $u_i=0$ $(1 \le i \le k)$.

(iii) $V_j \cap \sum_{i\neq j}V_i=\{0\}$ ، $(1 \le j \le k)$.

الإثبات:

(i) $\Leftarrow$ (ii)

إذا كان $\sum_{i=1}^{k}u_i=0$ ، فإن هذا المجموع يُكتب بالشكل $\sum_{i=1}^{k}u_i=\sum_{i=1}^{k}0$ وكون المجموع مباشراً فرضاً، فإن $\sum_{i=1}^{k}u_i=0$ يكتب بطريقة وحيدة إذن $u_i=0$ $(1 \le i \le k)$.

(ii) $\Leftarrow$ (i)

إذا كان $u=\sum_{i=1}^{k}u_i=\sum_{i=1}^{k}u'_i$ فينتج $0=\sum_{i=1}^{k}(u_i-u'_i)$

وبما أن (ii) محققة فرضاً، فإن $u_i=u'_i$ $(1 \le i \le k)$ ومن ثمَّ فالمجموع مباشر.

(ii) $\Leftarrow$ (iii)

إذا كان $u_j \in V_j \cap \sum_{i\neq j}V_i$ ، فإن $u_j \in V_j$ و $u_j \in \sum_{i\neq j}V_i$ ومن ثمَّ $u_j=\sum_{i\neq j}u_i$

ومنها: $u_j-\sum_{i\neq j}u_i=0$ وكون (ii) محققة، فإن $u_j=0$ $(1 \le j \le k)$ ومن ثمَّ:

$V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$ $(1 \leq j \leq k)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

إذا كان $u = \sum_{i=1}^{k} u_i = \sum_{i=1}^{k} u'_i$ فإن $\sum_{i=1}^{k} (u_i - u'_i) = 0$

ومنه: $\sum_{i \neq j} (u_i - u'_i) = u'_j - u_j$، أي إن:

$u'_j - u_j \in V_i \cap \sum_{i \neq j} V_i$ $(1 \leq j \leq k)$ وكون (iii) محققة، فيكون:

$V_i \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$ أي إن $u'_j - u_j = 0$ إذن $u'_j = u_j$ $(1 \leq j \leq k)$ وهذا يعني أن المجموع مباشر.

مبرهنة (٢):

إذا كان V فضاء متجهياً منتهي البعد، وكانت $V_1, V_2, \ldots, V_k$ فضاءات جزئية منه، فإذا كانت $B_1, B_2, \ldots, B_k$ قواعد مرتبة للفضاءات الجزئية المفروضة، فإن القضيتين الآتيتين متكافئتان:

(a) المجموع $S = \sum_{i=1}^{k} V_i$ مباشر.

(b) $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ قاعدة مرتبة للفضاء الجزئي S.

الإثبات:

إن B_i تولد V_i $(1 \leq i \leq k)$. ومن ثمَّ فإن B تولد $S = \sum_{i=1}^{k} V_i$؛ ولذلك يبقى أن نبرهن أن B مستقلة خطياً.

إذا لم تكن B مستقة خطياً، فهي مرتبطة خطياً وكل علاقة خطية بين عناصر B هي من الشكل: $\sum_{i=1}^{k} u_i = 0$ حيث u_i تركيب خطي لمتجهات B_i $(1 \le i \le k)$ وبما أن المجموع مباشر فينتج $u_i = 0$ $(1 \le i \le k)$ إذن B قاعدة لـ S.

$(a) \Leftarrow (b)$

إذا كان $u = \sum u_i = \sum u'_i$ فإن $\sum (u_i - u'_i) = 0$ وهذه علاقة خطية بين متجهات B قاعدة S، ومنه: فإن $u_i - u'_i = 0$.

إذن $u_i = u'_i$ $(1 \le i \le k)$ ومن ثمَّ فالمجموع مباشر.

نتيجة:

يكون المجموع $S = \sum_{i=1}^{k} V_i$ مباشراً إذا وفقط إذا كان $\dim S = \sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)$.

مثال:

ليكن الفضاءان الجزئيان من R^2:

$$V_1 = \{x(4,-7) \mid x \in R\} \quad , \quad V_2 = \{y(2,5) \mid y \in R\}$$

أثبت أن $V_1 + V_2$ هو مجموع مباشر.

الحل:

إذا كان $V_1 \cap V_2 = \{0\}$، فإن المجموع $V_1 + V_2$ يكون مباشراً، لذلك نأخذ $u \in V_1 \cap V_2$، فيكون $u = x(4,-7) = y(2,5)$ من أجل بعض قيم x,y، ومنه:

$$(4x, -7x) = (2y, 5y) \Rightarrow 4x - 2y = 0 \ , \ -7x + 5y = 0$$

وهذه الجملة تملك حلاً وحيداً هو الصفر؛ أي $x = y = 0$

إذن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$، ومنه: فإن المجموع مباشر.

مثال:

هل $V_1 + V_2$ مجموع مباشر حيث:

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 0\}$$
$$V_2 = \{\alpha(1,-1,2) \mid \alpha \in R\}$$

الحل:

ليكن $u \in V_1 \cap V_2$، فيكون:

$$u = (x,y,z) = \alpha(1,-1,2) \qquad (1)$$

حيث $x + 2y + z = 0$

من (1) نجد $x = \alpha \, , \, y = -\alpha \, , \, z = 2\alpha$

وبالتعويض في $x + 2y + z = 0$، فنجد:

$$\alpha + 2(-\alpha) + 2\alpha = 0$$

نجد $\alpha = 0$، ومنه: فإن $u = 0$ إذن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ فالمجموع مباشر.

٥ . ٨ . ٣ . الفضاء الجزئي المكمّل: Supplementary subspace

مبرهنة (١):

إذا كان V_1 فضاء جزئياً من الفضاء V، فإنه يوجد فضاء جزئي V_2 بحيث $V = V_1 \oplus V_2$.

ويسمى V_2 بالفضاء الجزئي المكمّل لـ V_1.

الإثبات:

لنفرض $V_2 \neq V_1$ و $V_1 \neq \{0\}$، ولتكن $A = (a_i)$ قاعدة للفضاء الجزئي V_1، ولنمدد هذه القاعدة بالمتجهات $B = (b_j)$ لتشكل قاعدة للفضاء V، ليكن V_2 الفضاء الجزئي من V الذي تولده المتجهات $B = (b_j)$ ولنبرهن أن $V = V_1 \oplus V_2$.

إن $(a_i) \cup (b_j)$ تولد الفضاء V ومن ثمَّ: $V = V_1 + V_2$ من ناحية ثانية إذا كان $u \in V_1 \cap V_2$ يمكننا أن نكتب:

$$u = \Sigma\alpha_i a_i \ , \ u \in V_1 \ , u = \Sigma\beta_j b_j \ , u \in V_2$$

ومنه:

$$\Sigma\alpha_i a_i - \Sigma\beta_j b_j = 0$$

ولكن $(a_i) \cup (b_j)$ مستقلة خطياً ومن ثمَّ $\alpha_I = \beta_j = 0$ من أجل جميع قيم i,j، ومنه: $u = 0$ أي إن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

مثال:

أوجد الفضاء الجزئي المكمل للفضاء الجزئي V_1 من R^3 حيث:

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid x + y - z = 0\}$$

الحل:

إن $\{(-1,1,0) , (1,0,1)\}$ تشكل قاعدة لـ V_1، ولنكمل هذه القاعدة إلى قاعدة لـ R^3 بالمتجه $b_1 = (1,1,3)$ وليكن $V_2 = \{\alpha(1,1,3) \mid \alpha \in R\}$ الفضاء الجزئي المولد بـb_1، فيكون $V = V_1 \oplus V_2$.

ملاحظة:

إن الفضاء المكمل غير وحيد كما يوضح ذلك المثال الآتي:

لنأخذ R^2 والفضاء الجزئي منه $V_1 = \{(x,x) \mid x \in R\}$

إن كلاً من $V_2 = \{(x,0) \mid x \in R\}$ و $V_3 = \{(0,y) \mid y \in R\}$ مكمل لـ V_1 حيث نرى بسهولة:

من جهة أن: $(x,y) = (x,x) + (0,y - x)$

ومن جهة ثانية أن: $(x,y) = (y,y) + (x - y, 0)$

أي: $R^2 = V_1 \oplus V_2 \ , \ R^2 = V_1 \oplus V_3$

تمرين:

أوجد الفضاء الجزئي المكمل للفضاء الجزئي V_1 من R^3 حيث:

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid x - y = 0 , x + 2z = 0\}$$

نقبل المبرهنة التالية دون برهان.

مبرهنة:

إذا كان V_1, V_2 فضائين جزئيين من فضاء V منتهي البعد، فإن:

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

١ . تمرين محلول:

ليكن: $W_1 = \{(x,y,z) : 2x + y - 3z = 0, -x + 2z = 0, x + y - z = 0\}$ فضاء جزئياً من R^3.

وليكن: W_2 فضاء جزئياً من R^3 مولداً بالمجموعة: $S_2 = \{u_1 = (2,-1,1), u_2 = (0,1,1)\}$

أي $W_2 = <S_2>$. والمطلوب:

(i) عين قاعدة وبعد كل من: $W_1, W_2, W_1 + W_2 , W_1 \cap W_2$

(ii) هل $W_1 + W_2$ مجموع مباشر؟

(iii) عين الفضاء الجزئي المتمم للفضاء W_1.

الحل:

(i) لتعيين قاعدة W_1 نحل جملة المعادلات التي تعين W_1؛ أي:

$$\begin{gathered} 2x + y - 3z = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{gathered}$$

نجد: $x = 2z , y = -z$,

إذن: $W_1 = \{(x,y,z) = (2z, -z, z) : z \in R\}$

$$W_1 = \{z (2,-1,1)\}$$

ومن ثمَّ فإن قاعدة W_1 هي $S_1 = \{(2,-1,1)\}$

أي $W_1 = <S_1>$ وإن $\dim W_1 = 1$

إن W_2 مولد بـ S_2 وهي مستقلة خطياً، ومنه: $\dim W_2 = 2$

قاعدة $W_1 \cap W_2$ تتعين كما يأتي:

$$\forall u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} u \in W_1 \Rightarrow u = \alpha(2,-1,1) \\ u \in W_2 \Rightarrow u = \beta(2,-1,1) + \gamma(0,1,1) \end{cases}$$

إذن:
$$u = \alpha(2,-1,1) = \beta(2,-1,1) + \gamma(0,1,1)$$

ومنه:
$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha = 2\beta \\ -\alpha - \beta = \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta, \gamma = 0$$

ومنه فإن $u = \alpha(2,-1,1)$؛ أي إن $W_1 \cap W_2$ مولّد بالمتجه $v_1 = (2,-1,1)$.

ومنه فإن قاعدة الفضاء $W_1 \cap W_2$ هي $v_1 = \{(2,-1,1)\}$

ومن ثمَّ فإن $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$

أما بالنسبة للفضاء $W_1 + W_2$، فإنه مولد بـ $S_1 \cup S_2$

لكن $S_1 \cup S_2 = S_2$ وهي مجموعة مستقلة خطياً، فهي قاعدة لـ $W_1 + W_2$

ومنه فإن $\dim (W_1 + W_2) = 2$

(ii) بما أن التقاطع ليس فضاء صفرياً فالمجموع ليس مباشراً.

(iii) لنفرض W متمم للفضاء W_1 في R^3، فيكون:

$$\dim(R^3) = \dim W_1 + \dim W \Rightarrow 3 = 1 + \dim W$$

أي: $\dim W = 2$

نختار متجهين من R^3 يشكلان مع المتجه $v_1 = (2,-1,1)$ مجموعة مستقلة خطياً وليكونا $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$، فيكون:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

فالمجموعة $\{v_1, e_1, e_2\}$ مستقلة خطياً.

ومن ثمَّ فإن $W = <e_1, e_2>$ أي أنه الفضاء الجزئي المتمم لـ W_1 وهو مولد بـ $\{e_1, e_2\}$.

٢ . أوجد فضاء جزئياً مكملاً للفضاء الجزئي W_1 من R^3 في الحالتين:

(a) $W_1 = \{(x,y,z) : x - 3y + 5z = 0\}$

(b) $W_1 = \{(x,y,z) : 2x - y + 3z = 0 , x - 3z = 0\}$

٣. أوجد فضاء جزئياً مكملاً للفضاء الجزئي W_1 من R^2 في الحالتين:

(a) $W_1 = \{(x,y) : 2x - 3y = 0\}$

(b) $W_1 = \{x,y) : x + 2y = 0\}$

٤ . بيّن أن $W_1 + W_2$ مجموع مباشر إذا علمت أن:

$W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 , x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\}$ فضاء جزئي من R^4

$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ فضاء جزئي من R^4 أيضاً.

توجيه: نحسب الحل المشترك للجملة الخطية المكونة من المعادلات الأربع.. فيكون حلها الوحيد هو صفر الفضاء، أي (0,0,0,0).

٥ . ليكن $V = R^3$، وليكن W_1, W_2 فضاءين جزئيين من V حيث:

$W_1 = \{(x_1,x_2,x_3) : 3x_2 + 7x_3 - x_1 = 0\}$
$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3) : 5x_1 + 3x_2 = 0, 3x_2 + 2x_3 = 0\}$

بيّن أن: $W_1 + W_2$ مجموع مباشر.

تمارين الفصل الخامس

I . ضع علامة صح (✓) أو علامة خطأ (×) أمام كل من العبارات الآتية:

(١) كل فضاء جزئي من فضاء متجهي هو فضاء متجهي بحد ذاته.

(٢) كل فضاء متجهي هو فضاء جزئي من ذاته.

(٣) المجموعة R^2 هي فضاء جزئي من R^3.

(٤) تقاطع فضاءين جزئيين من فضاء متجهي V، فضاء جزئي من V.

(٥) مجموعة المصفوفات المثلثية العليا من المرتبة $(n \times n)$ هي فضاء جزئي من مجموعة كل المصفوفات المربعة من المرتبة $(n \times n)$.

(٦) المجموعة التي تحوي متجهاً وحيداً مستقلة خطياً.

(٧) مجموعة المتجهات $\{u, k.u\}$ مرتبطة خطياً حيث k عنصر من حقل K.

(٨) إذا كانت مجموعة المتجهات $\{u_1, u_2, u_3\}$ مستقلة خطياً، فإن $\{ku_1, ku_2, ku_3\}$ مستقلة خطياً حيث k عنصر من حقل K.

(٩)إذا كان الفضاء المتجهي V مولّداً بمجموعة المتجهات $\{u_1,\ldots,u_n\}$، فإن $\{u_1,.., u_n\}$ قاعدة في V.

(١٠) كل مجموعة متجهات مستقلة خطياً في V، تشكل قاعدة في V.

(١١) إذا كان V فضاء متجهياً صفرياً، أي $V = \{0\}$، فإن بعده يساوي صفراً.

(١٢) يوجد مجموعة مؤلفة من 17 متجهاً مستقلة خطياً في R^{17}.

(١٣) كل مجموعة مكونة من 5 متجهات ومولّدة لـ R^5 تشكل قاعدة في R^5.

(١٤) العمليات (التحويلات) الأولية على أسطر مصفوفة لا تغير فضاء أسطرها.

(١٥) إذا كانت الجملة $AX = 0$، وكانت A من المرتبة (7×5)، حيث $\text{rank}(A) = 3$، فإن $\text{null}(A) = 3$ أيضاً.

(١٦) إذا كان $\text{rank}(A) = r$، فإن $\text{rank}(A^T) = r$.

II . ١ . لتكن V مجموعة الأزواج الحقيقية المرتبة جميعها، ولنعرف الجمع والضرب بعدد (سلمي) كما يأتي:

$$\forall\, u = (u_1,u_2) \in V \;,\; \forall\, v = (v_1,v_2) \in V,\; \forall\, \alpha \in R$$

فإن:

$$u + v = (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2) \;,\; \alpha \,.\, u = (0,\, \alpha u_2)$$

والمطلوب:

(i) احسب كلاً من $u + v$ و αu من أجل $v = (1,-3),\, u = (2,4),\, \alpha = 5$

(ii) بين أن $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ محققة.

وأن $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$ (حيث $\beta \in R$)

بينما $1 \,.\, u = u$ غير محققة.

II . ٢ . لتكن V مجموعة الأزواج الحقيقية المرتبة كلها، نعرف الجمع والضرب بمقدار سلمي على النحو الآتي:

$$\forall\, u = (u_1, u_2) \;,\; v = (v_1, v_2) \;,\; \forall\, \alpha \in R:$$
$$u + v = (u_1 + v_1 - 1,\, u_2 + v_2 - 1),\; \alpha u = (\alpha u_1,\, \alpha u_2)$$

(i) أثبت أن $(0,0)$ لا يمثل المتجه الصفري.

(ii) أثبت أن $(1,1)$ هو المتجه الصفري.

(iii) أثبت أن $(V, +\, , \,.)$ فضاء متجهي.

II . ٣ . هل تشكل مجموعة الأزواج $V = \{(0,b) : b \in R\}$ فضاء متجهياً بالنسبة للجمع والضرب بمقدار سلمي المألوفين.

II . ٤ . نزود مجموعة الحدوديات من الشكل $a_0 + a_1x$ بالعمليتين:

الجمع: $(a_0 + a_1x) + (b_0 + b_1x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$

والضرب بمقدار سلمي: $\alpha (a_0 + a_1x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x$، فهل تشكل فضاء متجهياً؟

II . ٥ . أثبت أن $V = \{0\}$ تشكل فضاء متجهياً بالنسبة للعمليتين:

$$0 + 0 = 0 \ , \ \alpha.0 = 0$$

II . ٦ . أثبت أن مجموعة المصفوفات $V = M_{m\times n}$ تشكل فضاء متجهياً بالنسبة لجمع المصفوفات المألوف، ولضرب مصفوفة بمقدار سلمي.

II . ٧ . في كل مما يأتي هل W فضاء جزئي من V:

(i) $V = R^3 , W = \{(a,b,c) : c = a - b\}$

(ii) $V = M_{22}, W = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$

(iii) $V = M_{22}, W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x + y = z + t\right\}$

II . ٨ . هل تولّد مجموعة الحدوديات:

$$p_1 = 1 - x + 2x^2 , p_2 = 3 + x , p_3 = 5 - x + 4x^2 , p_4 = -2 - 2x + 2x^2$$

الفضاء P_2 (P_2 هو فضاء جميع الحدوديات من الدرجة أصغر أو يساوي 2).

II . ٩ . نفرض:

$$u_1 = (2,1,0,3) , u_2 = (3,-1,5,2) , u_3 = (-1,0,2,1)$$

ولنأخذ الفضاء المولّد بهذه المجموعة $V = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$

أي من المتجهات الآتية يقع في V:

(i) $(2,3,-7,3)$ (ii) $(0,0,0,0)$

(iii) $(1,1,1,1)$ (iv) $(-4,6,-13,4)$

II . ١٠ . أثبت أن المتجهات $u_1 = (1,2,1), u_2 = (2,9,0), u_3 = (3,3,4)$ تشكل قاعدة للفضاء R^3.

II . ١١ . بين أن المجموعة A، فيما يأتي، تولد الفضاء V المذكور بجانبها، ثم عيّن قاعدة B لهذا الفضاء بحيث $B \subseteq A$.

(i) $A = \{(2,3), (1,2), (4,6)\}$، $V = R^2$

(ii) $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,1), (2,3,4)\}$، $V = R^3$

(iii) $A = \{p_1 = 2, p_2 = 1 - x, p_3 = 2 + x^2, p_4 = 1 + x^2\}$، $V = P_2$ (فضاء حدوديات).

II . ١٢ . عين قاعدة الفضاء الجزئي وبعده في كل مما يأتي:

(i) $W = \{(x,y,z) \in R^3 : x + 6y - 2z = 0, 2x - 4y + z = 0\}$

(ii) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 = x_4 , 5x_1 - x_2 + x_4 = x_3\}$

II . ١٣ . (i) أثبت أن كلاً من:

$W_1 = \{(x,y,z) \in R^3 : y = 2x\}$، $W_2 = \{(x,2x,-x) : x \in R\}$ فضاء جزئي من R^3، ثم عين قاعدة كل منهما وبعده.

(ii) عين قاعدة وبعد كل من $W_1 \cap W_2$، $W_1 + W_2$ وهل $W_1 + W_2$ مجموع مباشر.

(iii) عين الفضاء الجزئي المكمل (المتمم) للفضاء الجزئي W_1.

*   *   *

الفصل السادس

التطبيقات الخطية Linear Mappings

٦ . ١ . التطبيق الخطي:

سوف ندرس في هذا الفصل دوال (توابع) من الشكل $w = F(x)$، حيث المتغير المستقل x هو متجه من فضاء ما V، والمتغير التابع w هو متجه أيضاً من فضاء آخر W، وتدعى مثل هذه الدوال أو التطبيقات تحويلات وإذا حققت بعض الشروط فإنها تدعى تطبيقات خطية أو تحويلات خطية Linear Transformation or Linear Mapping.

٦ . ١ . ١ . تعريف:

ليكن V, W فضاءين متجهين معرفين على الحقل K نفسه، عندئذ يكون التطبيق $f: V \to W$ خطياً إذا تحقق الآتي:

(i) $\forall u, v \in V$، فإن $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

(ii) $\forall \alpha \in K , \forall u \in V$، فإن $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

ملاحظة:

من هذا التعريف نلاحظ أن f يحافظ على عمليتي الجمع والضرب السلمي في الفضاءين V, W، لذلك فهو يدعى أيضاً تشاكل (Homomorphism) لـ V في W.

مثال:

ليكن التطبيق $f: R^2 \to R^3$ المعرف بـ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1, x_2)$ أثبت أن f خطي.

الحل:

$\forall u = (x_1, x_2) , v = (y_1, y_2) \in R^2$، عندئذ: $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

ومنه، فإن:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2)\,,\ 2(x_1+y_1)\,,\ (x_2+y_2)) \\ &= (x_1+x_2,\ 2x_1,\ x_2)+(y_1+y_2\,,\ 2y_1,\ y_2) \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

أي إن (i) من التعريف محققة.

من جهة ثانية $\forall\alpha\in K$, $\forall u=(x_1, x_2)\in R^2$ فإن: $\alpha u=(\alpha x_1, \alpha x_2)$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= (\alpha x_1+\alpha x_2\,,\ 2\alpha x_1,\ \alpha x_2) \\ &= \alpha(x_1+x_2,\ 2x_1,\ x_2)=\alpha\,.f(u) \end{aligned}$$

وهذا هو الشرط (ii) من التعريف، ومن ثمَّ f خطي.

٦ . ١ . ٢ . مبرهنة:

إذا كان V, W فضاءين متجهين على الحقل K نفسه، فإن التطبيق $f: V\to W$ يكون خطياً إذا وفقط إذا تحقق الآتي:

$$\forall\ u, v\in V,\ \forall\ \alpha, \beta\in K: f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

الإثبات:

($\Leftarrow$) لنفرض أن f تطبيق خطي، ولنثبت صحة المساواة:

$$f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v) \qquad (1)$$

وذلك أياً كان $\alpha, \beta\in K$ وأياً كان $u, v\in V$.

نعلم أن V فضاء متجهي إذن $\alpha u, \beta v\in V$، ومنه وبحسب الشرط (i) في تعريف التطبيق الخطي، فإن $f(\alpha u+\beta v)=f(\alpha u)+f(\beta v)$ وبحسب (ii) في تعريف التطبيق الخطي، فإن الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة يصبح:

$$f(\alpha u)+f(\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

أي إن (1) محققة.

($\Rightarrow$) لنفرض أن (1) محققة، ولنثبت أن f خطي:

كون (1) محققة مهما كانت $\alpha, \beta \in K$ فهي محققة من أجل $\alpha = \beta = 1$، ومنه فإن:

$$f(1.u + 1.v) = f(u + v) = 1.\ f(u) + 1\ .\ f(v) = f(u) + f(v)$$

أي إن $f(u + v) = f(u) + f(v)$ وهو الشرط (i) من تعريف التطبيق الخطي.

من جهة ثانية إذا أخذنا $\beta = 0$ وعوضنا في (1)، فإنها تصبح:

$$f(\alpha u + 0) = f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

وهو الشرط (ii) من تعريف التطبيق الخطي؛ أي إن f تطبيق خطي.

٦ . ١ . ٣ . نتائج:

إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً، فإن:

(i) $f(0_V) = 0_W$ لأن $0_V = 0\ .\ u$ أياً كان $u \in V$، ومنه فإن:

$$\begin{aligned} f(0_V) &= f(0.u) = 0\ .\ f(u) \\ &= 0_w \end{aligned}$$

أي إن صورة المتجه الصفري من المنطلق هي المتجه الصفري في المستقر.

(ii) $f(-u) = -f(u)$ أياً كان $u \in V$

وذلك لأن $f(-u) = f(-1.u) = -1.f(u) = -f(u)$

(iii) $f(u - v) = f(u) - f(v)$ وذلك $\forall\ u, v \in V$

لأن:

$$\begin{aligned} f(u - v) &= f(u + (-1)\ .\ v) = f(u) + f(-v) \\ &= f(u) - f(v) \end{aligned}$$

(iv) يمكن تعميم المبرهنة السابقة على النحو الآتي:

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in K\ ;\ \forall\ u_1, u_2, \ldots, u_r \in V$$

فإن:

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots. + \alpha_r f(u_r)$$

أو بشكل مختصر:

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(u_i)$$

وفي الحالة الخاصة: إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ متجهات قاعدة الفضاء V الذي بعده (n) فإن $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i)$.

وهذه العلاقة الأخيرة تبين أن f يتعين تماماً بتأثيره في قاعدة V.

فلو فرضنا $u_1, u_2, \ldots, u_n \in W$ بحيث: $f(a_i) = u_i$ وحيث $i = 1,2,\ldots,n$، فيمكن تعيين $f : V \to W$ كما يأتي:

$$\forall v \in V ; v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

فإن:

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

مثال (١):

أوجد التطبيق $f : R^3 \to R^2$ الذي يطبق القاعدة:

$$A = \{a_1 = (1,-1,1) , a_2 = (1,0,1), a_3 = (-1,0,0)\}$$

في المتجهات: $u_1, u_2, u_3 \in R^2$

$$a_1 \to u_1 = (2,-1) , a_2 \to u_2 = (1,1) , a_3 \to u_3 = (0,3)$$

الحل:

أياً كان المتجه $(x,y,z) \in R^3$، فإن:

$$(x,y,z) = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 \Rightarrow$$
$$(x,y,z) = \alpha(1,-1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(-1,0,0)$$

ومنه فإن:

$$x = \alpha + \beta - \gamma\ ,\ y = -\alpha,\ z = \alpha + \beta$$

وعليه فإن:

$$\alpha = -y,\ \beta = y + z,\ \gamma = z - x$$

إذن:

$$(x,y,z) = -ya_1 + (y+z)a_2 + (z - x)\ a_3$$

وبتطبيق f نجد:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= -y\ f(a_1) + (y+z)\ f(a_2) + (z - x)\ f(a_3) \\ &= -y(2,-1) + (y+z)\ (1,1) + (z - x)\ (0,3) \\ &= (-y + z,\ -3x + 2y + 4z) \end{aligned}$$

وهذه العلاقة الأخيرة هي التي تعين f أي قاعدة ربط f.

فمثلاً إذا أردنا حساب صورة $u = (4,-2,1)$، فإن:

$$f(u) = f(4,-2,1) = (+2 + 1,\ -12 - 4 + 4) = (+3,\ -12)$$

مثال (٢):

a) هل التطبيق $f : R^3 \to R^2$ حيث $f(x,y,z) = (x + 2,\ y + z)$ خطي؟

الحل:

$\forall\ u = (x,y,z)\ ,\ v = (x',y',z') \in R^3$، فإن:

$$f(u + v) = f(x + x',\ y + y'\ ,\ z + z') = (x + x' + 2,\ y + y' + z + z')$$

ولكن:

$$\begin{aligned} f(u) + f(v) &= (x + 2,\ y + z) + (x' + 2,\ y' + z') \\ &= (x + x' + 4,\ y + z + y' + z') \neq f(u + v) \end{aligned}$$

إذن f ليس خطياً.

b) هل التطبيق $f: R^2 \to R^2$ حيث $f(x,y) = (y,\ 2x + y)$ خطي؟

الحل:

(i) $\forall\, u = (x,y)\,,\, v = (x', y') \in R^2$، فإن:

$$f(u + v) = f(x + x', y + y') = (y + y' , 2(x + x') + y + y')$$
$$= (y + y' , 2x + 2x' + y + y') = (y, 2x + y) + (y', 2x' + y')$$
$$= f(u) + f(v)$$

فالشرط الأول من تعريف التطبيق الخطي محقق.

(ii) $\forall\, \alpha \in k\,,\, \forall\, u = (x,y) \in R^2$، فإن:

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y, 2\alpha x + \alpha y)$$
$$= \alpha(y, 2x + y) = \alpha f(u)$$

والشرط الثاني من تعريف التطبيق الخطي محقق، إذن f خطي.

٦ . ١ . ٤ . تعريف:

إذا كان التطبيق الخطي $f : V \to V$، فإن f يسمى في هذه الحالة مؤثراً خطياً (أي إن المنطلق والمستقر هو الفضاء نفسه).

٦ . ١ . ٥ . مبرهنة:

إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً، فإنه يحافظ على الفضاءات الجزئية أي:

(a) إذا كان V_1 فضاء جزئياً من V، فإن $f(V_1)$ فضاء جزئي من W.

(b) إذا كان W_1 فضاء جزئياً من W فإن $f^{-1}(W_1)$ فضاء جزئي من V.

الإثبات:

(a) $\forall\, \alpha, \beta \in K\,,\, \forall\, u, v \in V_1$، فإن:

$\alpha u + \beta v \in V_1$ كون V_1 فضاء جزئي، ومن ثمّ:

$f(\alpha u+\beta v) \in f(V_1)$ وبما أن f تطبيق خطي، فإن: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ إذن:

$\forall\, f(u), f(v) \in f(V_1)$، فإن $\alpha f(u) + \beta f(v) \in f(V_1)$

وهذا معناه أن $f(V_1)$ فضاء جزئي من W.

(b) $\forall u, v \in f^{-1}(W_1)$، فإنه $\exists u', v' \in W_1$ بحيث $u = f^{-1}(u')$, $v = f^{-1}(v')$

أي إن: $u' = f(u)$, $v' = f(v)$

إذن $\forall \alpha, \beta \in K$ فإن:

$$\begin{aligned}\alpha u' + \beta v' &= \alpha f(u) + \beta f(v) \\ &= f(\alpha u + \beta v) \in W_1\end{aligned}$$

إذن $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(W_1)$، ومنه فإن $f^{-1}(W_1)$ فضاء جزئي من V.

٦ . ٢ . نواة وصورة تطبيق خطي:

Kernel and image of a linear mapping:

٦ . ٢ . ١ . تعريف:

ليكن $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً

(i) إذا كان V_1 الوارد في المبرهنة الأخيرة يساوي V ($V_1 = V$)، فإن $f(V)$ فضاء جزئي من W يسمى صورة التطبيق f ويرمز له بـ Imf.

(ii) نعلم أن 0_W فضاء جزئي من W، ولذلك بحسب المبرهنة الأخيرة، فإن $f^{-1}(0_W)$ فضاء جزئي من V ويسمى نواة التطبيق f.

ملاحظة (١):

تعرف نواة التطبيق الخطي $f : V \to W$ على أنها مجموعة المتجهات $u \in V$ بحيث $f(u) = 0$ ونرمز لها بـ kerf أي: $\text{kerf} = \{u \in V \mid f(u) = 0\} = f^{-1}(0_V)$.

من جهة ثانية، فإن صورة التطبيق الخطي f، ويرمز لها بـ Imf هي المجموعة:

$$\text{Imf} = \{u' \in W \mid \exists\, u \in V \,;\, f(u) = u'\}$$

وقد يرمز لها أيضاً بـ $f(V)$.

تجدر الملاحظة أن كلاً من kerf و Imf هو فضاء جزئي، الأول فضاء جزئي من V، والثاني فضاء جزئي من W. كما هو موضح في المبرهنة الأخيرة.

ملاحظة (٢):

إذا كان V فضاء منتهي البعد، وإذا كانت $C = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ قاعدة له، فقد

رأينا سابقاً أنه $\forall\, u \in V$، فإن $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ حيث $\alpha_i \in K$ $(i = 1,2,\ldots, n)$.

فإذا أخذنا التطبيق الخطي $f : V \to W$، فإن:

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) \in \mathrm{Im} f$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أنه إذا كانت $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ مولّدة للفضاء V (وهي كذلك هنا لأنها قاعدة له)، فإن صورها وفق f وهي $\{f(b_1),\ f(b_2),\ \ldots,\ f(b_n)\}$ تولّد Imf.

مثال:

ليكن التطبيق $f : R^4 \to R^3$ المعرف بـ:

$$f(x,y,z,t) = (x - y + t,\ y - z,\ z - t - x)$$

والمطلوب:

(i) أثبت أن f تطبيق خطي.

(ii) أوجد قاعدة نواة هذا التطبيق (kerf) وبعده.

(iii) أوجد قاعدة صورة هذا التطبيق (Imf) وبعده.

الحل:

(i) $\forall\, \alpha, \beta \in K ,\ \forall\, u = (x_1, y_1, z_1, t_1) ,\ v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in R^4$، فإن:

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2 , \alpha z_1 + \beta z_2 , \alpha t_1 + \beta t_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha t_1 + \beta t_2 , \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha z_1 - \beta z_2 , \\ &\quad \alpha z_1 + \beta z_2 - \alpha t_1 - \beta t_2 - \alpha x_1 - \beta x_2) \\ &= \ldots\ldots = \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

إذن f خطي.

(ii) $\ker f = \{u \in R^4 \mid f(u) = (0,0,0)\}$

$$f(u) = f(x,y,z,t) = (x - y + t, y - z, z - t - x) = (0,0,0)$$

ومنه:

$$x - y + t = 0$$
$$y - z = 0$$
$$- x + z - t = 0$$

نأخذ مصفوفة معاملات هذه الجملة المتجانسة ونحولها للشكل المدرج:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x - y + t = 0 \;,\; y - z = 0 \Rightarrow y = z \,,\, x = z - t$$
$$\Rightarrow (x,y,z,t) = (z - t, z, z, t)$$
$$= z(1,1,1,0) + t\,(-1, 0, 0, 1)$$

ومن ثمَّ فإن قاعدة kerf هي $\{(1,1,1,0) \,,\, (-1,0,0,1)\}$

وبعد النواة $\dim\ker f = 2$.

(iii) لمعرفة قاعدة Imf وبعده نبحث عن مولّد Imf الذي هو صورة قاعدة ما في المنطلق لذلك نأخذ القاعدة القانونية في R^4 ونحسب صور عناصر هذه القاعدة أي نحسب:

$$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,0,-1) \,,\, f(e_2) = f(0,1,0,0) = (-1,1,0)$$
$$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (0,-1,1) \,,\, f(e_4) = f(0,0,0,1) = (1,0,-1)$$

إذن المجموعة:

$$\{e'_1 = (1,0,-1) \,,\, e'_2 = (-1,1,0) \,,\, e'_3 = (0,-1,1) \,,\, e'_4 = (1,0,-1)\}$$

تولّد Imf، لنستخرج منها مجموعة مستقلة خطياً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن قاعدة Imf هي $\{e'_1 = (1,0,-1) \ , \ e'_2 = (0,1,-1)\}$، وعدد أبعاد Imf يساوي 2 ($\dim Imf = 2$).

ملاحظة (٣):

نقول عن تطبيق ما إنه متباين إذا تحقق الآتي: ($f : V \to W$)

$\forall u_1, u_2 \in V$

وكان: $f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$

أو بتعبير آخر: $u_1 \neq u_2 \Rightarrow f(u_1) \neq f(u_2)$

ونقول: إنه غامر إذا كان:

$$\forall u' \in W \ ; \exists \ u \in V \ ; u' = f(u)$$

وفي التطبيقات الخطية يمكن الحكم على تطبيق ما فيما إذا كان متبايناً أو غامراً من خلال نواة هذا التطبيق وصورته.

٦ . ٢ . ٢ . مبرهنة:

ليكن V, W فضاءين متجهين على حقل k، وليكن $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً عندئذ يكون:

f متبايناً إذا وفقط إذا كان $\ker f = \{0\}$.

الإثبات:

(i) إذا كان f متبايناً ولنفرض $u \in kerf$ لكن $f(0_V) = 0_W$ من جهة ومن جهة ثانية $f(u) = 0_W$ (كون $u \in kerf$).

إذن: $f(u) = f(0_V)$ وبما أن f متباين، فإن $u = 0_V$.

أي إن النواة $kerf = \{0\}$.

(ii) إذا كانت $kerf = \{0\}$، ولنفرض $u, v \in V$ بحيث: $f(u) = f(v)$

فينتج $f(u) - f(v) = 0$.

ومنه: $f(u - v) = 0$ (كون f خطياً).

إذن $u - v \in kerf$، ولكن $kerf = \{0\}$ إذن $u - v = 0$

ومنه: $u = v$ إذن:

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$$

أي إن f متباين وهو المطلوب.

٦ . ٢ . ٣ . نتيجة:

يكون التطبيق $f: V \to W$ تشاكلاً تقابلياً أو تماثلاً (Isomorphism) $\Leftrightarrow$

(i) $kerf = \{0\}$ (ii) $Imf = W$

أي إن f تطبيق خطي متباين وغامر ويدعى إيزمورفيزم، ونقول: إن الفضاءين متماثلان $(V \approx W)$.

مثال:

بيّن فيما إذا كان المؤثر الخطي $f : R^2 \to R^2$ متبايناً، غامراً

حيث: $f(x,y) = (2x + y, x - y)$

الحل:

f متباين $\Leftrightarrow$ $kerf = \{0\}$

لكن:

$$kerf = \{u \in R^2 : f(u) = 0\}$$

ليكن $u = (x,y)$، فيكون $f(u) = (2x + y, x - y)$

فعندما يكون $f(u) = 0$، فإن:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ X - y &= 0 \end{aligned}$$

وهذه الجملة تملك حلاً وحيداً هو $x = y = 0$ إذن $u = 0$ وإذن $\ker f = \{0\}$.

وهذا يدل على أن f متباين.

لنرى ما إذا كان f غامراً.

إن: $Imf = \{u' \in R^2 \mid \exists\, u \in R^2 ; f(u) = u'\}$

إذن: $Imf = \{f(x,y) \mid (x,y) \in R^2\}$

ولكن $f(x,y) = (2x,x) + (y,-y)$

$$\Rightarrow f(x,y) = (2x,y) = (2x,x) + (y,-y) = x\,(2,1) + y(1, -1)$$

إذن $A = \{2,1) \,.\, (1,-12)\}$ تولد Imf وكون A مستقلة خطياً فهي قاعدة لـ R^2

إذن $Imf = R^2$ فهو غامر.

ملاحظة:

من الممكن أن نجيب على كون f غامراً بأن نبحث عن صورة قاعدة المنطلق، ولتكن القاعدة القانونية، فيكون $f(e_1) = f(1,0) = (2,1)$, $f(e_2) = f(0,1) = (1, -1)$ والمجموعة $\{f(e_1), f(e_2)\}$ مستقلة خطياً إذن تشكل قاعدة لـ R^2 فهي تولد R^2 كاملاً، أي إن $Imf = R^2$. ومنه: فإن f غامر.

مثال:

إذا كانت $R_2[x]$ مجموعة الحدوديات الحقيقية من الدرجة أصغر أو يساوي 2 وكان $f: R_2[x] \to R_2[x]$ مؤثراً خطياً معرفاً بالعلاقة:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x_2) = (a_0 + a_2) + (a_2 - 2a_1)x + (a_0 + 2a_1 - a_2)x^2$$

فهل f متباين؟

الحل:

لتكن الحدودية $P(x) \in R_2[x]$، فإذا كانت $P(x) \in \ker f$، فإن $f(P(x)) = 0$ حيث $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

ومنه:

$$f(P(x)) = (a_0 + a_2) + (a_2 - 2a_1)x + (a_0 + 2a_1 - a_2)x^2 \equiv 0$$

أي:

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 &= 0 \\ a_2 - 2a_1 &= 0 \\ a_0 + 2a_1 - a_2 &= 0 \end{aligned}$$

ولمعرفة حلول هذه الجملة المتجانسة نحسب محدد معاملاتها:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

والجملة تملك حلاً وحيداً هو الحل الصفري، أي $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

إذن $\ker f = \{0\}$. وعليه فإن f متباين.

٦ . ٢ . ٤ . مبرهنة:

إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً متبايناً، فإن صورة مجموعة متجهات مستقلة خطياً من V هي متجهات مستقلة خطياً من W.

الإثبات:

لتكن $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعة متجهات مستقلة خطياً من V، ولنبرهن أن المجموعة $S' = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$ مستقلة خطياً.

إذا لم تكن S' مستقلة خطياً، فإنها مرتبطة خطياً، ومن ثمَّ فهي تحقق العلاقة:

$$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n) = 0$$

أي:

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = 0$$

إذن:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \in \ker f$$

وبما أن f متباين ينتج أن:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

ولكن S مستقلة خطياً إذن:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

ومنه: فإن S' مستقلة خطياً.

مثال:

ليكن التطبيق $f: R^2 \to R^3$ المعرف بـ:

$$f(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

(a) أثبت أن f متباين.   b) أوجد قاعدة صورة f(Imf).

الحل:

(a) يكون f متبايناً $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$ لكن $f(x,y) = (x + y, 2x, x - y) = (0,0,0)$، ومنه: فإن $x + y = 0, 2x = 0, x - y = 0$ وحل هذه الجملة هو $x = y = 0$

إذن $\ker f = \{0\}$، ومنه: فإن f متباين.

(b) لنعين صور القاعدة القانونية من المنطلق R^2 حيث:

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,2,1) = e'_1$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0,-1) = e'_2$$

وهذان المتجهان مستقلان خطياً بحسب المبرهنة الأخيرة، وهما يولدان Imf إذن المتجهان $\{e'_1, e'_2\}$ يشكلان قاعدة لـ Imf.

٦ . ٢ . ٥ . توطئة:

إذا كان $f: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً، وكان V منتهي البعد، فإن $Imf = f(V)$ منتهي البعد أيضاً.

الإثبات:

بما أن V منتهي البعد، فإذا كانت $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ قاعدة لـ V، فإن المتجهات $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ تولّد Imf، وبما أن الفضاء الجزئي Imf يملك عدداً منتهياً من المولدات، فإن بعده أصغر أو يساوي n.

٦ . ٢ . ٦ . مبرهنة:

إذا كان $f : V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً، وكان V منتهي البعد، فإن:

$$\dim V = \dim(Imf) + \dim(\ker f)$$

الإثبات:

بما أن V منتهي البعد، وبما أن kerf فضاء جزئي منه، فإن kerf منتهي البعد. كذلك الأمر كون W منتهي البعد، وكون Imf فضاء جزئياً منه، فإن Imf يكون منتهي البعد.

لنفرض $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_S\}$ قاعدة لـ kerf، ولنكمل هذه القاعدة لتصبح قاعدة لـ V، ولتكن المتجهات التي تلزم لإكمالها $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ فتصبح المجموعة:

$$A = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

قاعدة لـ V، ويكون:

$$\dim V = r + s$$

لنبرهن أن $\{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_r)\}$ قاعدة لـ Imf.

بما أن A قاعدة لـ V، و $\dim V = r + s$، فيكون:

$$\forall u \in V \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j$$

وكون f تطبيقاً خطياً نجد:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(u_i) + \sum_{j=1}^{r} \beta_i f(b_j) \Rightarrow$$

$$f(u) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j f(b_j) \qquad (1)$$

لأن $f(u_i) = 0 \ (i = 1,2,\ldots,s)$ كون S قاعدة لـ kerf والعلاقة (1) تدل على أن $\{f(b_1), \ \ldots \ , \ f(b_r)\}$ تولد Imf وهذه المجموعة مستقلة خطياً؛ لأنها إن لم تكن كذلك فهي مرتبطة خطياً، ومن ثمَّ فهي تحقق العلاقة:

$$\gamma_1 f(b_1) + \gamma_2 f(b_2) + \ldots + \gamma_r f(b_r) = 0 \qquad (2)$$

حيث ليست جميع γ_i تساوي الصفر، وبما أن f خطي، فإن (2) تكتب على الشكل:

$$f(\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_r b_r) = 0$$

ومنه، فإن:

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_r b_r \in \mathrm{kerf}$$

ومن ثمَّ فإن هذا المتجه يكتب كتركيب خطي لمتجهات S التي هي قاعدة لـ kerf؛ أي:

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_r b_r = \sum_{i=1}^{s} \delta_i u_i$$

ومنه، فإن:

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_j b_j - \sum_{i=1}^{s} \delta_i u_i = 0 \qquad (3)$$

وبما أن المتجهات $\{u_1, u_2, ..., u_s, b_1, b_2, ..., b_r\}$ مستقلة خطياً فإن معاملات (3) تساوي الصفر، ومنه: فإن $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_r = 0$

وعليه، فإن المتجهات $\{f(b_1),f(b_2),...,f(b_r)\}$ مستقلة خطياً فهي قاعدة لـ Imf، إذن $\dim(Imf) = r$.

إذن يتم المطلوب حيث يصبح:

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(Imf)$$

٦ . ٢ . ٧ . نتيجة:

(i) $\dim(Imf) \le \dim V$

(ii) يكون f متبايناً $\Leftrightarrow \dim(Imf) = \dim V$

(iii) يكون f غامراً $\Leftrightarrow \dim(Imf) = \dim W$

(iv) إذا كان $\dim V > \dim W$، فإن f غير متباين.

(v) إذا كان $\dim V < \dim W$، فإن f غير غامر.

(vi) إذا كان $V = W$ (f مؤثر خطي)، فإن f يكون متبايناً إذا وفقط إذا كان غامراً.

(vii) يكون $f : V \to W$ تشاكلاً تقابلياً (تماثلاً) $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}, \dim V = \dim W$

(viii) يكون المؤثر الخطي $f : V \to V$ تماثلاً $\Leftrightarrow$ كان f متبايناً أي $\ker f = \{0\}$

٦ . ٢ . ٨ . تعريف:

تُعرّف رتبة التطبيق الخطي $f: V \to W$ على أنها بعد صورة هذا التطبيق، ونكتب $r = \dim(Imf)$.

ملاحظة:

إن $r \le n = \dim V$، وإذا كان $r = n$، فإن $\dim(\ker f) = 0$؛ أي إن $\ker f = \{0\}$، وهذا معناه أن f تماثل (تشاكل تقابلي)، لـ V على $Imf = f(V)$.

مثال:

إذا كان $f : R^2 \to R^2$ مؤثراً خطياً معيناً بـ:

$$f(x,y) = (2x - y, -x + y)$$

(i) أثبت أن f تماثل (تشاكل تقابلي).

(ii) أوجد المؤثر العكسي f^{-1}.

الحل:

(i) لكي يكون f تشاكلاً تقابلياً يكفي أن يكون $\ker f = \{0\}$

فإذا كان $f(x,y) = (0,0)$ فهذا يعني أن $(x,y) \in \ker f$

لذلك عندما $f(x,y) = (2x - y, -x + y) = (0,0)$

ينتج $2x - y = 0 \;\; , \;\; -x + y = 0$

والحل الوحيد لهذه الجملة هو $x = y = 0$ إذن $\ker f = \{0\}$ ومن ثمَّ فإن f تشاكل تقابلي.

(iii) لإيجاد المؤثر العكسي لـ f علينا أن نعين $(x,y) = f^{-1}\,(2x - y, -x+ y)$ فإذا فرضنا $2x - y = a \; , \; - x + y = b$ وحسبنا x,y بدلالة a,b نجد:

$$y = a + 2b \;\; , \;\; x = a + b$$

إذن:

$$f^{-1}\,(a,b) = (a + b \; , \; a + 2b)$$

تمارين

١ . أثبت أن كلاً من التطبيقات الآتية خطي:

(a) $f : R^2 \to R^2 ; f(x,y) = (3x + y , 2x)$

(b) $f : R^3 \to R^3 ; (x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_2 + x_3)$

(c) $f : R^3 \to R^2 ; f(x,y,z) = (x, -5x + 3y - 5z)$

٢ . هل التطبيقات الآتية خطية؟

(i) $f : R^2 \to R$ حيث: $f(x,y) = x . y$

(ii) $f : R^2 \to R^3$ حيث $f(x,y) = (x + 1, 2y, x + y)$

٣ . بين أياً من التطبيقات الخطية الآتية متباين، غامر، متباين وغامر أو غير متباين وغير غامر:

(a) $f : R^2 \to R^2 ; f(x,y) = (2x + y, x - y)$
(b) $f : R^3 \to R^4 ; f(x,y,z) = (x,y,y,z)$
(c) $f : R^3 \to R^4 ; f(x,y,z) = (x - y, y - z, z - x, x - y)$
(d) $f : R_3[x] \to R_3[x] ; f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

٤ . ليكن $V = M_{22}(R)$ فضاء المصفوفات المربعة من المرتبة (2×2)

ولتكن $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ نعرف المؤثر الخطي $f : V \to V$ بالعلاقة $f(A) = M.A$ حيث $A \in M_{22}(R)$.

(a) أوجد قاعدة نواة هذا التطبيق وبعده.

(b) أوجد قاعدة صورة هذا التطبيق وبعده.

٥ . أوجد قاعدة كل من النواة والصورة وبعدهما لكل من التطبيقات الخطية الآتية:

(i) $f : R^3 \to R^2 ; f(x,y,z) = (x - y, y - z)$

(ii) $f : R^3 \to R^2$; $f(x,y,z) = (x,x)$
(iii) $f : R^3 \to R^2$; $f(x,y,z) = (x - y + 2z, x + y + 3z)$
(iv) $f : R^3 \to R^3$; $f(x,y,z) = (x + y + z , x + y - z, x + y)$

٦ . ليكن V فضاء الحدوديات $R_3[x]$ من الدرجة أصغر أو يساوي 3 والذي قاعدته $\{1, x, x^2, x^3\}$.

ليكن $g : p(x) \to p(x - 1)$, $f : p(x) \to p(x + 1)$

أثبت أن كلاً من f, g خطي، ثم أثبت أن $f \circ g = g \circ f = I$ حيث $I \in R_3[x]$ هو التطبيق المطابق.

٧ . ليكن الفضاء R^2 وقاعدته القانونية $\{e_1, e_2\}$، وليكن التطبيق $f : R^2 \to M_{22}(R)$ المعين بـ: $f(x,y) = \begin{bmatrix} x+y & y \\ -y & x-y \end{bmatrix}$

أ . أثبت أن f خطي.

ب . هل هذا التطبيق متباين؟.

ج . أوجد قاعدة صورة هذا التطبيق.

٨ . عين المؤثر الخطي $f : R^2 \to R^2$ الذي ينقل القاعدة $A = \{(4,3) , (2,-2)\}$ إلى $f(2,-2) = (1,5)$, $f(4,3) = (7,5)$.

٦ . ٣ . مصفوفة تطبيق خطي: A Matrix of a Linear Mapping

إذا كان V, W فضاءين متجهين على الحقل K نفسه، وكانا منتهيا البعد، حيث $\dim V = n$ وفيه $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ قاعدة مرتبة، وحيث: $\dim W = m$ وفيه $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ قاعدة مرتبة أيضاً.

نعلم أن صورة المتجه $a_i \in V$ هو متجه $f(a_i) \in W$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ والمتجه $f(a_i)$ يكتب كتركيب خطي وحيد لعناصر القاعدة B؛ أي إن:

$$\left.\begin{array}{l}
f(a_1) = p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \ldots + p_{m1}b_m \\
f(a_2) = p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \ldots + p_{m2}b_m \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
f(a_i) = p_{1i}b_1 + p_{2i}b_2 + \ldots + p_{mi}b_m \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
f(a_n) = p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \ldots + p_{mn}b_m
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

يمكن كتابة (1) بشكل مختصر:

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}b_i \quad ; j = 1, 2, \ldots, n$$

إذا أخذنا منقول مصفوفة المعاملات وسميناها P، فإن:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

حيث عناصر العمود j مثلاً هي إحداثيات المتجه $f(a_j)$ في (1) بالنسبة للقاعدة المرتبة B للفضاء W.

٦ . ٣ . ١ . تعريف:

تسمى المصفوفة P بمصفوفة التطبيق الخطي $f: V \to W$ بالنسبة للقاعدتين A,B، ويرمز لهذه المصفوفة عادة بالرمز $P = M_A^B(f)$ وهي مصفوفة مرتبتها $(m \times n)$.

ملاحظة (١):

إذا كانت القاعدتان هما القاعدتان القانونيتان، فإنه يرمز لهذه المصفوفة فقط بـ $P = M(f)$، ونلاحظ أن المصفوفة $M_A^B(f)$ مرتبطة بالقاعدتين؛ لذلك فإن مصفوفة التطبيق الخطي تتغير بتغيير القاعدتين، لكنها تبقى من المرتبة $(m \times n)$ نفسها.

ملاحظة (٢):

(i) المصفوفة $M_A^B(f)$ هي منقول مصفوفة المعاملات في (1).

(ii) عدد أعمدة $M_A^B(f)$ يساوي /n/ وهو بعد فضاء المنطلق V.

(iii) عدد أسطر $M_A^B(f)$ يساوي /m/ وهو بعد فضاء المستقر W.

(iv) إذا كان f مؤثراً خطياً، فإن مصفوفة المؤثر الخطي تكون مربعة من المرتبة $\dim V = n$

مثال (١):

ليكن التطبيق الخطي $f : R^2 \to R^3$ المعين بـ:

$$f(x,y) = (3x - 2y , 0 , x + 4y)$$

(i) أوجد مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في R^2, R^3.

(ii) أوجد مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين المرتبتين:

$$A = \{(1,1) , (0,2)\} \ \ , \ \ B = \{(1,1,0) , (1,0,1) , (0,1,1)\}$$

الحل:

(i) إن القاعدة القانونية (المعيارية) في R^2 هي $\{e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$

والقاعدة القانونية (المعيارية) في R^3 هي $\{e'_1 = (1,0,0) , e_2 = (0,1,0) , e_3 = (0,0,1)\}$

لنكتب كلاً من $f(e_1), f(e_2)$ كتركيب خطي لعناصر قاعدة R^3:

$$f(e_1) = f(1,0) = (3,0,1) = 3e'_1 + 0 \,.\, e'_2 + 1 \,.\, e'_3$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (-2,0,4) = -2e'_1 + 0 \,.e'_2 + 4e'_3$$

ومنه: فإن مصفوفة f بالنسبة لهاتين القاعدتين، هي:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) نعين صورة متجهات القاعدة A وفق f، فنجد:

$$f(a_1) = f(1,1) = (1,0,5)$$

$f(a_2) = f(0,2) = (-4,0,8)$

لنكتب كلاً من $f(a_1),\ \ f(a_2)$ كتركيب خطي لعناصر B، ولكن أولاً لنكتب أي عنصر $(a,b,c) \in R^3$ كتركيب خطي لعناصر B، فنجد:

$$(a,b,c) = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$$
$$= \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$

وبحل هذه المعادلات بالنسبة لـ α, β, γ، نجد:

$$\alpha = \frac{a+b-c}{2}\ ,\ \beta = \frac{a-b+c}{2}\ ,\ \gamma = \frac{-a+b+c}{2}$$

إذن:

$$f(a_1) = f(1,1) = (1,0,5) = -2b_1 + 3b_2 + 2b_3$$
$$f(a_2) = f(0,2) = (-4,0,8) = -6b_1 + 2b_2 + 6b_3$$

$$M_A^B(f) = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

وهنا نلاحظ ان مصفوفة f تغيرت بتغير القاعدتين، لكنها حافظت على المرتبة نفسها.

٦ . ٣ . ٢ . التطبيق الخطي المقابل لمصفوفة:

A linear mapping of a given matrix:

قبل البدء بمناقشة هذه الفقرة نود أن ننوه إلى الملاحظات المهمة الآتية:

(١) كما قلنا سابقاً، إن التطبيق الخطي $f : V \to W$ يحافظ على عمليتي الجمع والضرب بمقدار سلمي؛ ولذلك سمّي تشاكلاً (Homomorphism)؛ لذلك سوف نرمز لمجموعة جميع التشاكلات (التطبيقات الخطية) التي منطلق كل منها V، ومستقر كل منها W بالرمز Hom(V, W)، أي:

$$Hom(V,W) = \{f : V \to W\ ;\ \text{خطي } f\}$$

(٢) عندما نبحث عن مصفوفة تطبيق خطي بالنسبة لقاعدتين A,B، فإننا نرتب كلاً من هاتين القاعدتين، لذلك نقول: إن المصفوفة المتعلقة بتطبيق ما، هي مصفوفة بالنسبة لقاعدتين مرتبتين؛ لأن تغيير الترتيب لأي من القاعدتين يغير المصفوفة، وذلك بتغيير ترتيب أعمدتها؛ لذلك يجب الحفاظ على ترتيب عناصر كل من القاعدتين في المسألة الواحدة.

والآن نعود إلى البحث عن تعيين تطبيق خطي $f \in \text{Hom}\ (V,W)$ عُلمت مصفوفته $M_A^B(f)$ بالنسبة للقاعدتين المرتبتين A, B في كل من V, W على الترتيب.

إن معرفة $M_A^B(f)$ تعني معرفة المعادلات (1)، وكل متجه $u \in V$ يُكتب كتركيب خطي وحيد لمتجهات القاعدة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ بالشكل: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$، ومنه: $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i)$، فإذا عوضنا $f(a_i)$ بما يساويه، نحصل على قانون التطبيق الخطي المطلوب.

٦ . ٣ . ٣ . مبرهنة:

إذا كان V, W فضاءين على الحقل K نفسه حيث $\dim V = n, \dim W = m$، وبفرض $P = [p_{ij}]_{m\times n} \in M_A^B(f)$ عندئذ يوجد تطبيق خطي $f \in \text{Hom}\ (V,W)$ مصفوفته هي P بالنسبة لقاعدتين مرتبتين A,B في V,W على الترتيب معين بـ:

$$\left.\begin{aligned} f(a_j) &= \sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_i ; j = 1,2,\dots,n \\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

وإن أي تطبيق آخر $g \in \text{Hom}\ (V,W)$ معين بـ:

$g(a_i) = f(a_i)\ ; i = 1,2,\dots,n$ يقتضي $f = g$ (أي إن f وحيد).

الإثبات:

نبرهن أولاً أن f المعين بـ (*) خطي.

فإذا كان $u, v \in V$ حيث $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i , v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i a_i$

فإن: $f(u+v)=f\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)a_i$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)f(a_i)$$

فإذا عوضنا $f(a_i)$ بما يساويه من العلاقة الأولى في (*)، نجد:

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ji}b_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)p_{ji}\right]b_j\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\beta_i\right]b_j\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\alpha_i\right)b_j+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\beta_i\right)b_j\\
&= f(u)+f(v)
\end{aligned}$$

وذلك بعد الاستفادة من (*).

بشكل مشابه نبرهن:

$$\forall u \in V , \forall \gamma \in K ; f(\gamma u)=\gamma f(u)$$

والآن لنثبت أن f وحيد، فإذا كان $g \in Hom(V,W)$ حيث:

$$g(a_i)=f(a_i) ; \ i=1,2,\ldots,n$$

يكون لدينا: $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i \in V$

ومنه: $g(u)=g\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(a_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right) = f(u)$$

إذن $g = f$.

ملاحظة مهمة:

لقد عددنا في هذا البرهان أن f معين بالعلاقات (*)، وأن $f(a_i) = g(a_i)$.

مثال:

أوجد التطبيق الخطي $f \in Hom(R^3, R^4)$ الذي مصفوفته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في كل من R^3, R^4.

الحل:

من المصفوفة وبتطبيق المعادلات (1)، نجد:

$$f(e_1) = f(1,0,0) = 1e'_1 - 1e'_2 + 3e'_3 + 2e'_4 = (1,-1,3,2)$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = 0e'_1 + 1e'_2 + 2e'_3 - 3e'_4 = (0,1,2,-3)$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = -1e'_1 + 0e'_2 + 4e'_3 + 1e'_4 = (-1,0,4,1)$$

حيث: $\{e_1, e_2, e_3\}$ القاعدة القانونية في R^3 و $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ القاعدة القانونية في R^4.

ولكن $\forall (x,y,z) \in R^3$، فإن: $(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

ومنه، فإن:

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$
$$= x \,.\, (1,-1,3,2) + y(0,1,2,-3) + z(-1,0,4,1)$$
$$= (x - z, -x + y, 3x + 4z, 23x - 3y + z)$$

وهو التطبيق الخطي المطلوب (أي قاعدة ربط f).

تمرين:

أوجد التطبيق الخطي $f \in Hom(R^2, R^3)$ الذي مصفوفته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

أوجد المؤثر الخطي $f \in Hom(R^2, R^2)$ الذي مصفوفته:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $A = \{a_1 = (1,1) , a_2 = (2,3)\}$.

الحل:

إن f مؤثر خطي، والقاعدة في كل من المنطلق والمستقر نفسها وهي A.

ومن المصفوفة نجد:

$$f(a_1) = 2a_1 - 3a_2 = 2(1,1) - 3(2,3) = (-4, -7)$$
$$f(a_2) = -1a_1 + 4a_2 = -1(1,1) + 4(2,3) = (7,11)$$

ولكن $\forall(x,y) \in R^2$، فإن:

$$(x,y) = \alpha a_1 + \beta a_2 = \alpha(1,1) + \beta(2,3) = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$$

ومنه نجد أن:

$$x = \alpha + 2\beta$$
$$y = \alpha + 3\beta$$

وبحل هذه الجملة بالنسبة لـ α, β نجد: $\alpha = 3x - 2y , \beta = y - x$

إذن:

$$f(x,y) = \alpha f(a_1) + \beta f(a_2)$$

$= (3x - 2y) . (-4, -7) + (y - x) . (7, 11)$
$= (-12x + 8y, -21x + 14y) + (7y - 7x, 11y - 11x)$
$= (-19x + 15y, - 32x + 25y)$

وهو التطبيق الخطي المطلوب.

٦ . ٤ . تعيين تطبيق خطي من خلال الإحداثيات:

يمكن تعيين تطبيق خطي علمت مصفوفته بواسطة إحداثيات متجه ما من المنطلق. ولمعرفة هذه الطريقة سوف نوضح ذلك تدريجياً من خلال التمهيديات الآتية:

٦ . ٤ . ١ . تمهيدية:

ليكن $f \in Hom(R^2, R^2)$ مؤثراً خطياً بالنسبة للقاعدة القانونية $\{e_1, e_2\}$ في المنطلق والمستقر.

عندئذ إذا كان $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً، $u' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً أيضاً

وكان كل منهما من الفضاء R^2 بحيث $u' = f(u)$، فإن: $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ حيث A هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين المذكورتين.

الإثبات:

نعلم أن $u = (x_1, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$، وإن:

$$u' = (x'_1, x'_2) = x'_1e_1 + x'_2e_2 \qquad (a)$$

إذن:

$$u' = f(u) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) \qquad (b)$$

ولكن كل من $f(e_1), f(e_2)$ يكتب كتركيب خطي لعناصر القاعدة؛ أي:

$f(e_1) = \alpha e_1 + \alpha_2e_2 \ , \ f(e_2) = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ مقادير سلمية.

من (a)، (b) وبعد التعويض نجد:

$$u' = x'_1e_1 + x'_2e_2$$
$$= x_1(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2) + x_2(\beta_1e_1 + \beta_2e_2)$$
$$= (\alpha_1x_1 + \beta_1x_2)e_1 + (\alpha_2x_1 + \beta_2x_2)e_2$$

إذن:

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta_1x_2$$
$$x'_2 = \alpha_2x_1 + \beta_2x_2$$

وبتحويل المعادلتين الأخيرتين إلى الشكل المصفوفي نجد:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ولكن المصفوفة $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين القانونيتين التي تعرفنا عليها سابقاً إذن هي A.

أي إن:

$$u' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = f(u) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يفضل أن نرمز لعناصر المصفوفة بـ a_{ij} حيث يصبح:

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

حيث تمثل معاملات $f(e_1)$ العمود الأول في المصفوفة A.

ومعاملات $f(e_2)$ العمود الثاني في المصفوفة A.

وبشكل عام كما مر معنا سابقاً عند دراسة مصفوفة تطبيق خطي، فإن معاملات $f(a_j)$ أو إحداثياته بالنسبة لقاعدة ما هي عناصر السطر j في مصفوفة التطبيق الخطي f.

أي إن: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

٦ . ٤ . ٢ . تمهيدية:

ليكن $f \in Hom(R^3, R^2)$، ولنأخذ القاعدتين المرتبتين $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ في R^3 و $B = \{b_1, b_2\}$ في R^2، إذا كان $u=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ متجهاً في R^3 وكان $u'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ متجهاً في R^2 حيث $u' = f(u)$.

فإن f يعطى بالعلاقة $u'=\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=f(u)=A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

حيث A مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين المذكورتين.

الإثبات:

$\forall\, u = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$، فإن $u = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$

لكن $u' = f(u)$ إذن:

$$u' = (x'_1, x'_2) = x_1f(a_1) + x_2f(a_2) + x_3f(a_3) \qquad (i)$$

وكون كل من $f(a_1) , f(a_2) , f(a_3) \in R^2$، فإن:

$$f(a_1) = a_{11}b_1 + a_{21}b_2 \, , f(a_2) = a_{12}b_1 + a_{22}b_2 \, , f(a_3) = a_{13}b_1 + a_{23}b_2 \qquad (ii)$$

من جهة ثانية وبالاستفادة من (i) و (ii) نجد:

$$\begin{aligned} u' = x'_1b_1 + x'_2b_2 &= x_1(a_{11}b_1 + a_{21}b_2) + x_2(a_{12}b_1 + a_{22}b_2) + x_3(a_{13}b_1 + a_{23}b_2) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)b_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)b_2 \end{aligned}$$

أي إن:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

وبتحويل هذه إلى الشكل المصفوفي تصبح:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للقاعدتين المذكورتين كما هو معلوم سابقاً، إذن $u' = f(u) = A \,.\, u$.

أي إن قاعدة ربط تطبيق خطي تتعين من خلال إحداثيات متجه u من المنطلق.

مثال:

طبق المبرهنة الأخيرة لتعيين التطبيق الخطي $f \in Hom\,(R^2,R^3)$ الذي مصفوفته:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين:

$$A = \{a_1 = (1,1), a_2 = (0,-2)\}\ ,\ B = \{b_1 = (1,1,1), b_2 = (1,1,0), b_3 = (1,0,0)\}$$

الحل:

أولاً: $\forall\ (x,y) \in R^2$، فإن:

$$(x,y) = \alpha a_1 + \beta a_2 \Rightarrow \alpha = x, \beta = \frac{1}{2}\ (x - y)$$

أي إن:

$$(x,y) = xa_1 + \frac{1}{2}\ (x - y)a_2$$

أي إن إحداثيات $u\ (x,y)$ بالنسبة للقاعدة A، هي: $\left(x, \frac{1}{2}(x-y)\right)$.

وبتطبيق المبرهنة:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x-2y \\ 5x \end{bmatrix}$$

لكن (x'_1, x'_2, x'_3) هي الإحداثيات بالنسبة للقاعدة B، ومنه: فإن:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x'_1 b_1 + x'_2 b_2 + x'_3 b_3 = y b_1 + (-x-2y) b_2 + 5x b_3 \\ &= y(1,1,1) + (-x-2y)(1,1,0) + 5x\,(1,0,0) \\ &= (4x-y, -x-y, y) \end{aligned}$$

مثال:

أوجد المؤثر الخطي $f \in \text{Hom}\,(R^2, R^2)$ الذي مصفوفته $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة المرتبة (في الفضاء R^2): $A = \{a_1 = (1,1)\ ,\ a_2 = (2,3)\}$ وذلك بتطبيق المبرهنة الأخيرة.

الحل:

$\forall\,(x,y) \in R^2$، فإنه يُكتب كتركيب خطي لعناصر A كالآتي:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta\,(2,3) = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$$

ومنه نجد:

$$\alpha = 3x - 2y\ ,\ \beta = y - x$$

إذن:

$$(x,y) = (3x - 2y)a_1 + (y - x)a_2$$

أي إن إحداثيات $u = (x,y)$ بالنسبة للقاعدة A، هي:

$$(x_1,x_2) = (3x - 2y, y - x)$$

وبتطبيق المبرهنة الأخيرة:

$$u' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = f(u) = P.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حيث P مصفوفة المؤثر f وحيث $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ هو متجه إحداثياته (x_1, x_2) بالنسبة للقاعدة A وحيث: $u' = f(u) = (x'_1, x'_2)$ هو متجه من R^2 هذه إحداثياته بالنسبة لـ A

إذن: $u' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = f(u) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x - 5y \\ -13x + 10y \end{bmatrix}$

وهذا يكتب كتركيب خطي لعناصر A أي:

$$
\begin{aligned}
f(u) &= (7x - 5y)a_1 + (-13x + 10y)a_2 \\
&= (7x - 5y)\,(1,1) + (-13x + 10y)\,(2,3) \\
&= (-19x + 15y, -32x + 25y)
\end{aligned}
$$

٦ . ٤ . ٣ . مبرهنة:

ليكن V فضاء على حقل K قاعدته المرتبة $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

وليكن W فضاء آخر على الحقل نفسه وقاعدته $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

وإذا كان $f \in \text{Hom}(V, W)$. فإذا كانت $u = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود تمثل إحداثيات $u \in V$ و $u' = f(u) = X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود تمثل إحداثيات $u' = f(u)$ بالنسبة للقاعدة B.

عندئذ $X' = P \,.\, X$ حيث P مصفوفة التطبيق الخطي أي $P = M_A^B(f)$.

الإثبات:

إن المتجه $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يكتب بالشكل: $u = \sum_{i=1}^{n} x_j a_j$

ومن ثمَّ فإن: $f(u)=\sum_{j=1}^{n} x_j f(a_j)$.

فإذا عوضنا $f(a_j)$ بما يساويه. كما ورد في (٧ . ٣ .) العلاقات (1)، فإننا نجد:

$$f(u)=\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j\right] b_i$$

فإذا عددنا $x'_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$ ، فإننا نحصل على: $f(u)=\sum_{i=1}^{m} x'_i b_i$ ؛ أي إن $X' = P \ . \ X$

وهو المطلوب.

مثال:

أوجد $f \in \text{Hom}\,(R^3, R^4)$ إذا كانت مصفوفته:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في كل من R^3, R^4.

الحل:

نطبق العلاقة الأخيرة في المبرهنة السابقة:

$$X' = P \ . \ X$$

أو ما يقابلها:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

وهذا العمود هو إحداثيات $u' = f(u)$ بالنسبة للقاعدة القانونية، إذن:

$$\begin{aligned} f(u) = f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_3)e'_1 + (x_2 - x_1)e'_2 + (3x_1 + 2x_2 + 4x_3)e'_3 \\ &+ (2x_1 - 3x_2 + x_3)e'_4 \\ &= (x_1 - x_3, x_2 - x_1 , 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 , 2x_1 - 3x_2 + x_3) \end{aligned}$$

وهو التطبيق الخطي المطلوب.

تمارين

١ . ليكن التطبيق $f : R^3 \to R^2$ المعرف بـ $f(x,y,z) = (x + y, x + z)$ والمطلوب:

(١) برهن أن f خطي.

(٢) أوجد قاعدة kerf (النواة) وبعدها، هل f متباين؟ ولماذا؟

(٣) أوجد قاعدة Imf وبعدها، وهل f غامر ولماذا؟

٢ . لتكن $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ القاعدة القانونية في R^4 وليكن $f : R^4 \to R^3$ تطبيقاً خطياً بحيث:

$$f(e_1) = (1,0,-1) , f(e_2) = (-1,1,0), f(e_3) = (0,-1,1), f(e_4) = (1,0,-1)$$

والمطلوب:

(١) عيّن f (أي قاعدة ربطه).

(٢) أوجد قاعدة كل من kerf، Imf وبعدهما.

٣ . إذا كان $P_3[x]$ فضاء الحدوديات الحقيقية بمتغير واحد هو x، وليكن التطبيق (المؤثر) $f : P_3[x] \to P_3[x]$ المعرف بالعلاقة $f(P(x)) = P'(x)$ حيث $P'(x)$ هو مشتق الحدودية $P(x)$. والمطلوب:

(١) أثبت أن f خطي.

(٢) أوجد قاعدة نواة f ‏(kerf) وبعدها.

(٣) أوجد قاعدة صورة f ‏(Imf) وبعدها.

٤ . أثبت أن $f : R^2 \to R^2$، حيث $f(x,y) = (xy, y)$ ليس خطياً.

٥ . أثبت أن $f : R^3 \to R^3$، حيث $f(x,y,z) = (x,y^2,z)$ ليس خطياً.

٦ . ٥ . فضاء التطبيقات الخطية:

ندرس هنا عملية جمع التطبيقات الخطية، والمضاعف السلمي لتطبيق خطي والحصول على تطبيقات خطية جديدة نتيجة ذلك. وكما ذكرنا في السابق فإننا سنرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من الفضاء V المعرف على حقل K إلى الفضاء W المعرف على الحقل نفسه بالرمز Hom (V,W).

٦ . ٥ . ١ . تعريف:

إذا كان $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ فإننا نعرف المجموع $f + g$ والضرب بمقدار سلمي (المضاعف السلمي) $\lambda.f$ على النحو الآتي:

$$\left.\begin{array}{l}(f+g)(u)=f(u)+g(u)\\(\lambda f)(u)=\lambda f(u)\end{array}\right\}\forall u\in V, \forall\lambda\in K$$

٦ . ٥ . ٢ . مبرهنة:

إذا كان $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ فإن كلاً من $f + g$، $\lambda.f$ تطبيق خطي.

الإثبات:

(i) $\forall\, u,v \in V\,,\ \forall\, \alpha, \beta \in K$، فإن:

$$(f+g)\,(\alpha u+\beta v) = f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v)$$

وذلك بحسب تعريف مجموع تطبيقين خطيين.

إذن:

$(f+g)(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(u)+\alpha g(u)+\beta g(v)$ (لأن كلاً منهما خطي)

$=\alpha[f(u)+g(u)]+\beta[(f(v)+g(v)]$

$=\alpha(f+g)(u)+\beta(f+g)(v)$ حسب التعريف ثانية

إذن $f+g$ خطي أي $f+g\in \mathrm{Hom}\,(V+W)$

(ii) $\forall\, u,v\in V\,,\ \forall\, \alpha,\beta\in K\,,\ \forall\, \lambda\in K$

عندئذ:

$(\lambda f)\,(\alpha u+\beta v)=\lambda\, f(\alpha u+\beta v)$ حسب تعريف المضاعف السلمي

$=\lambda\,[\alpha f(u)+\beta f(v)]$

$=\lambda\alpha f(u)+\lambda\beta f(v)$

$=\alpha(\lambda f)(u)+\beta(\lambda f)(v)$

وهذا دليل على أن $\lambda f\in \mathrm{Hom}\,(V,W)$.

مثال (١):

ليكن $f,g\in \mathrm{Hom}\,(R^2,R^3)$ حيث:

$f(a,b)=(a+b,\,2a,\,a-2b)$

$g(a,b)=(b,\,a,\,b+2a)$

أوجد كلاً من: $f+g,\ f-g,\ 2f-3g,\ -3f$

الحل:

حسب التعريف:

$(f+g)(a,b)=f(a,b)+g(a,b)$

$=(a+b,\,2a,\,a-2b)+(b,\,a,\,b+2a)$

$=(a+2b,\,3a,\,3a-b)$

$(f-g)\,(a,b)=f(a,b)-g(a,b)$

$= (a + b, 2a, a - 2b) - (b, a, b + 2a)$
$= (a, a, -a - 3b)$
$2f(a,b) = 2\,(a + b, 2a, a - 2b) = (2a + 2b, 4a, 2a - 4b)$

ويترك الباقي للتدريب.

٦ . ٥ . ٣ . مبرهنة:

تشكل المجموعة $\mathrm{Hom}\ (V,W)$ فضاء متجهياً بالنسبة لعمليتي الجمع والمضاعف السلمي المعرفتين آنفاً.

الإثبات:

رأينا في المبرهنة الأخيرة أن عملية الجمع هي عملية داخلية على $\mathrm{Hom}\ (V,W)$ وأن ضرب تطبيق خطي بمقدار سلمي $\alpha \in K$ هو قانون تشكيل خارجي على $\mathrm{Hom}(V,W)$؛ أي إنه $\forall\ f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$، وأياً كان $\alpha \in K$، فإن:

$$\alpha f \in \mathrm{Hom}(V,W) \text{ و } f + g \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$$

(a) يمكن التحقق بسهولة أن $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعلمية الجمع.

(b) من جهة ثانية $\forall \alpha, \beta \in K\ ,\ \forall\ f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$، فإن:

(i) $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

(ii) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g)$

(iii) $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

(iv) $1.f = f$

وبذلك يكون $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ فضاء متجهياً على الحقل K.

٦ . ٦ . تركيب التطبيقات الخطية:

إذا كانت V_1, V_2, V_3 ثلاثة فضاءات متجهية على حقل K

وليكن $f \in Hom(V_1, V_2)$, $g \in Hom(V_2, V_3)$، عندئذ يكون التطبيق gof معرفاً كالآتي:

$gof : V_1 \to V_3$ بحيث لكل $u \in V_1$، فإن $(gof)(u) = g(f(u))$

المبرهنة التالية تبين أنه إذا كان كل من f,g خطياً، فإن gof خطي أيضاً.

٦ . ٦ . ١ . مبرهنة:

إذا كانت V_1, V_2, V_3 فضاءات متجهية على حقل K، وكان f, g تطبيقين خطيين حيث: $f \in Hom(V_1,V_2)$، $g \in Hom(V_2,V_3)$، فإن gof تطبيق خطي لـ V_1 في V_3؛ أي: $gof \in Hom(V_1, V_3)$.

الإثبات:

$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V_1$، فإن:

$(gof)(\alpha u + \beta v) = g(f(\alpha u + \beta v))$ من تعريف تركيب تطبيقين

$= g[\alpha f(u) + \beta f(v)]$ لأن f خطي

$= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v))$

$= \alpha(gof)(u) + \beta(gof)(v)$

أي إن gof خطي، أي $gof \in Hom(V_1, V_3)$.

ملاحظة:

إذا كان $V_1 = V_2 = V_3$، فإن f, g مؤثران خطيان، وإن $gof \in Hom(V_1)$ ويصطلح على أنه جداء التطبيقين، ويكتب gf بدلاً من gof لذلك نكتب f^2 بدلاً من fof أو f^3 بدلاً من f^2of وهكذا..

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $f^2 = f$، فإننا نسمي f مؤثراً جامداً.

فمثلاً المؤثر $f \in Hom(R^3)$ حيث $f(a,b,c) = (a + 2b, 0, b + c)$ وهو مؤثر جامد؛ لأن:

$$f^2(a,b,c) = (fof)(a,b,c) = f(a+2b, 0, b + c)$$
$$= (a + 2b, 0, b + c) = f(a,b,c)$$

إذن f جامد.

بطريقة مشابهة للمبرهنة السابقة يتم إثبات صحة المبرهنة الآتية:

٦ . ٦ . ٢ . مبرهنة:

لتكن V_1, V_2, V_3 فضاءات متجهية على حقل K، وليكن:

$f,g \in Hom(V_1, V_2)$، $\varphi, h \in Hom(V_2, V_3)$، وبفرض $\lambda \in K$ فإن:

$$\varphi(f + g) = \varphi of + \varphi og \qquad (1)$$
$$(\varphi + h)of = \varphi of + hof \qquad (2)$$
$$\lambda(hof) = (\lambda h)of = ho(\lambda f) \qquad (3)$$

الإثبات:

نكتفي بإثبات صحة (1)؛ لأن إثبات (2) و (3) يتم بطريقة مشابهة.

$\forall u \in V_1$، فإن:

$$\varphi o(f + g)(u) = \varphi[(f + g)(u)]$$
$$= \varphi[f(u) + g(u)]$$
$$= \varphi(f(u) + \varphi(g(u))$$
$$= (\varphi of)(u) + (\varphi og)(u)$$
$$= (\varphi of + \varphi og)(u)$$

إذن: $\varphi o(f + g) = (\varphi of) + (\varphi og)$

٦ . ٧ . تماثل فضاء المصفوفات وفضاء التطبيقات الخطية:

$$\mathbf{Hom(V,W) \cong M_{m\times n}(K)}$$

لتكن $M_{m\times n}(K)$ مجموعة المصفوفات ذات المرتبة $m\times n$ التي عناصرها من حقل K. تشكل هذه المجموعة فضاء متجهياً بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعنصر من الحقل K. وهو أحد الأمثلة التي كنا أوردناها على الفضاءات المتجهية.

درسنا أيضاً في الفقرة (٧ . ٥) من هذا الفصل فضاء التطبيقات الخطية الذي رمزنا له بـ Hom(V,W).

نتناول الآن تشاكلاً تقابلياً بين الفضائين المذكورين من خلال المبرهنة الآتية التي نتركها دون برهان، ونكتفي بطرح أمثلة توضيحية، وبعض نتائج هذه المبرهنة.

٦ . ٧ . ١ . مبرهنة:

ليكن الفضاءات V,W حيث $\dim V = n,\ \dim W = m$، وليكن Hom(V,W) فضاء التطبيقات الخطية من V إلى W، عندئذ يوجد تشاكل تقابلي (تماثل) بين Hom(V,W) و $M_{m\times n}(K)$، ونكتب $M_{m\times n} \cong Hom(V,W)$. والرمز $\cong$ هو رمز التماثل (isomorphism).

٦ . ٧ . ٢ . ملاحظة:

تبين هذه المبرهنة أنه من أجل كل تطبيق خطي $f \in Hom(V,W)$ يمكن تعيين مصفوفة $M_A^B(f)$ بالنسبة لقاعدتين مرتبتين في الفضاءين V,W.

كما تبين هذه المبرهنة أنه من أجل كل مصفوفة $P \in M_{m\times n}(K)$ يمكن تعيين تطبيق خطي $f \in Hom(V,W)$.

٦ . ٧ . ٣ . نتيجة:

بما أن $Hom(V,W) \cong M_{m\times n}(K)$ ، فإن بعديهما متساويان أي:

$$\dim Hom(V,W) = \dim M_{m\times n}(K) = m.n$$

٦ . ٧ . ٤ . نتيجة:

يمكن نقل دراسة التطبيقات الخطية من فضاء متجهي إلى آخر منتهي البعد إلى فضاء مصفوفات هذه التطبيقات وبالعكس.

٦ . ٧ . ٥ . نتيجة:

(i) مصفوفة مجموع تطبيقين خطيين تساوي مجموع مصفوفتيهما؛ أي:

$$M_A^B(f+g) = M_A^B(f) + M_A^B(g)$$

(ii) مصفوفة المضاعف السلمي لتطبيق خطي تساوي المضاعف السلمي للمصفوفة؛ أي:

$$M_A^B(\lambda f) = \lambda M_A^B(f)$$

مثال:

ليكن $f, g \in \mathrm{Hom}(R^2, R^3)$ حيث:

$$f(x,y) = (x + 2y,\ y,\ x - y)\ ,\ g(x,y) = (x + y,\ x,\ 3x)$$

(i) احسب مصفوفة كل من $f,\ g,\ f + g$ بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في المنطلق والمستقر.

(ii) تحقق أن $M(f + g) = M(f) + M(g)$

الحل:

(i) $f(1,0) = (1,0,1)\ ,\ f(0,1) = (2,1,-1)$

إذن:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$g(1,0) = (1,1,3)\ ,\ g(0,1) = (1,0,0)$

إذن:

$$M(g)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

لنعين الآن التطبيق $f + g$:

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = (x + 2y,\ y,\ x - y) + (x + y,\ x,\ 3x)$$
$$= (2x + 3y,\ x + y,\ 4x - y)$$

ومنه:

$$(f+g)(1,0) = (2,1,4)\ ,\ (f+g)(0,1) = (3,1,-1)$$

إذن:

$$M(f+g)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix} \qquad (1)$$

(ii) لنأخذ $M(f) + M(g)$ حيث نجد:

$$M(f)+M(g)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد $M(f + g) = M(f) + M(g)$

ملاحظة:

إذا أضفنا إلى المثال الأخير الطلب الآتي:

(iii) أوجد λf ومصفوفته وعينهما عندما $\lambda = -3$، ثم تحقق أن $M(\lambda f) = \lambda M(f)$.

الحل:

$$\lambda f(x,y) = \lambda(x + 2y,\ y,\ x - y)$$
$$= (\lambda x + 2\lambda y,\ \lambda y,\ \lambda x - \lambda y)$$

ومن ثمَّ:

$$\lambda f(1,0) = (\lambda,0,\lambda)\ ,\ \lambda f(0,1) = (2\lambda,\lambda,-\lambda)$$

ومنه:

$$\lambda M(f)=\begin{bmatrix}\lambda & 2\lambda\\ 0 & \lambda\\ 1 & -1\end{bmatrix}=M(\lambda f)$$ وهذا يبين صحة العلاقة $M(\lambda f) = \lambda M(f)$.

وعندما يكون $\lambda = -3$ يكون:

$$\lambda f = -3f \Rightarrow -3f(x,y) = (-3x - 6y, -3y, -3x + 3y)$$

وعليه فإن:

$$-3f(1,0) = (-3,0,-3)\ ,\ -3f(0,1) = (6,3,-3)$$

إذن:

$$M(-3f)=\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 0 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

ولكن:

$$-3M(f)=-3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 0 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

أي إن العلاقة $M(-3f) = -3M(f)$ محققة.

٦ . ٨ . ضرب المصفوفات وعلاقته بتركيب التطبيقات الخطية:

رأينا أن جمع التطبيقات الخطية يقابل جمع مصفوفات هذه التطبيقات، وأن ضرب تطبيق خطي f بمقدار سلمي $\lambda \in K$ يقابل ضرب مصفوفة f بهذا المقدار السلمي.

وتبين المبرهنة الآتية كيف أن تركيب التطبيقات الخطية يقابل ضرب مصفوفات هذه التطبيقات.

٦ . ٨ . ١ . مبرهنة:

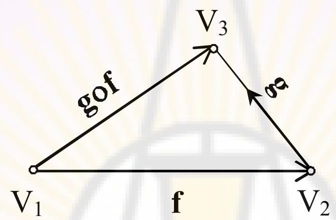
لتكن الفضاءات المتجهية V_1, V_2, V_3 حيث قواعدها المرتبة هي: B_1, B_2, B_3 على الترتيب وأبعادها:

$$\dim V_1 = n \ , \ \dim V_2 = m, \ \dim V_3 = p$$

فإذا كان $f \in Hom\,(V_1, V_2)$، $g \in Hom\,(V_2, V_3)$، فإن:

$g \circ f \in Hom(V_1, V_3)$ وإن $M_{B_1}^{B_3}(g \circ f) = M_{B_2}^{B_3}(g).M_{B_1}^{B_2}(f)$

والمخطط يوضح ذلك:



ونقبل هذه المبرهنة دون إثبات.

٦ . ٨ . ٢ . ملاحظة:

إذا كان $V_1 = V_2 = V_3$، فإن $f, g \in Hom\,(V_1, V_2)$، وتصبح مصفوفات هذه التطبيقات مربعة.

مثال:

ليكن $f \in Hom(R^2, R^3)$ حيث $f(x,y) = (2x, -y, x + y)$

وليكن $g \in Hom\,(R^3, R^4)$ حيث $g(x,y,z) = (y,z,x,y)$

والمطلوب:

(i) احسب gof، واحسب كلاً من $M(f)$, $M(g)$, $M(gof)$.

(ii) تحقق من صحة العلاقة M(gof) = M(g) . M(f)

الحل:

(i) بما أن المطلوب هو M(g), M(f) فهذا يعني أن القواعد المنسوبة لها هذه المصفوفات هي القانونية.

والآن نحسب أولاً gof.

$$(gof)(x,y) = g(f(x,y)) = g(2x,-y,x+y) = (-y,x+y,2x,-y)$$

لنحسب M(f):

$$f(1,0) = (2,0,1)\ ,\ f(0,1) = (0,-1,1) \Rightarrow$$

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب M(g):

$$g(1,0,0) = (0,0,1,0)$$
$$g(0,1,0) = (1,0,0,1)\ ,\ g(0,0,1) = (0,1,0,0) \Rightarrow$$

$$M(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نحسب M(gof):

$$(gof)(1,0) = (0,1,2,0)\ ,\ (gof)(0,1) = (-1,1,0,-1) \Rightarrow$$

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) نحسب M(g) . M(f)، فنجد:

$$M(g).M(f)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\\2&0\\0&-1\end{bmatrix}=M(g\circ f)$$

وهو المطلوب.

٦ . ٨ . ٣ . نتيجة:

بما أن $gof \neq fog$ في الحالة العامة، فإن:

$M(gof) \neq M(fog)$ أو $M(g) . M(f) \neq M(f) . M(g)$ وهذا ما قد تعلمناه من أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً.

٦ . ٨ . ٤ . ملاحظة:

(١) سبق أن أثبتنا أن $\varphi o(f + g) = (\varphi of) + (\varphi og)$.

وبنقل هذا إلى فضاء المصفوفات نحصل على الحقيقة التي أوردناها حول قابلية توزيع الضرب على الجمع في المصفوفات؛ أي تصبح العلاقة:

$$M(\varphi) . [M(f) + M(g)] = M(\varphi) . M(f) + M(\varphi) . M(g)$$

(٢) كذلك الأمر بالنسبة للخاصة التجميعية حيث إن:

$$(hof)og = ho(fog)$$

وتنقل هذه الخاصة إلى الخاصة التجميعية لضرب المصفوفات؛ أي:

$$[M(h) . M(f)] . M(g) = M(h) . [M(f) . M(g)]$$

٦ . ٩ . معكوس (مقلوب) مؤثر خطي ومصفوفته:

نعلم أنه إذا كان f مؤثراً خطياً وكان تقابلاً؛ أي إن f تماثل خطي فإن له مقلوب أو معكوس نرمز له بـ f^{-1}، وفي هذه الفقرة سنبحث مصفوفة كل من f^{-1}, f والعلاقة بينهما من خلال المبرهنة الآتية.

٦ . ٩ . ١ . مبرهنة:

إذا كان $V,\ W$ فضائين على الحقل K نفسه، بعد كل منهما يساوي n وكانت $A,\ B$ قاعدتين مرتبتين في $V,\ W$ على الترتيب فإن $f \in Hom\ (V,W)$ يكون تماثلاً (تشاكلاً تقابلياً) إذا وفقط إذا كانت $M_A^B(f)$ قلوبة (قابلة للقلب) وإن:

$$M_A^B(f^{-1}) = \left[M_A^B(f)\right]^{-1}$$

الإثبات:

إذا كان $f \in Hom\ (V,W)$ تماثلاً فهو تقابل ومن ثمَّ يكون له تقابل عكسي هو $f^{-1} \in Hom\ (W,V)$ وهو خطي.

وعندئذ يكون: $f^{-1}of = I_V\ ,\ fof^{-1} = I_W$

حيث I_V التطبيق المطابق في الفضاء V، I_W التطبيق المطابق في W وبذلك يكون:

$$M_A^B(f).M_A^B(f^{-1}) = M(I_W) = I_n$$

وهي مصفوفة الواحدة.

وكذلك الأمر: $M_A^B(f^{-1}).M_A^B(f) = I_n$

وهذا يدل أن $M_A^B(f)$ قابلة للقلب ومقلوبها هو $M_A^B(f^{-1})$؛ أي إن:

$$\left[M_A^B(f)\right]^{-1} = M_A^B(f^{-1})$$

من جهة ثانية إذا كانت $H = M_A^B(f)$ مصفوفة قلوبة ومقلوبها H^{-1} ولنفرض أن $g \in Hom(W,V)$ بحيث: $M_B^A(g) = H^{-1}$

وكون: $H\ .\ H^{-1} = H^{-1}.H = I_n$

فنجد: $H.H^{-1} = I_n \Rightarrow M_A^B(f).M_B^A(g) = M_B^B(I)$

$$\Rightarrow M_B^B(f \circ g) = M_B^B(I_W)$$

ونجد أيضاً: $H.H^{-1} = I_n \Rightarrow M_B^A(g).M_A^B(f) = M_A^A(I_V)$

$$\Rightarrow M_A^B(g \circ f) = M_A^A(I_V)$$

ومن ثمَّ ينتج: $fog = I_W , gof = I_V$

وهذا يعني أن التطبيق الخطي f يملك مقلوباً هو g وأن f تقابل بالإضافة لكونه خطياً؛ أي إنه تماثل (تشاكل تقابلي) أو (isomorphism).

مثال:

ليكن f مؤثراً خطياً: $f \in Hom(R^3, R^3)$ حيث:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + z , y + z)$$

أثبت أن f يملك مقلوباً، واحسب مقلوبه f^{-1}، احسب H مصفوفة f، واحسب H^{-1} مصفوفة f^{-1} بالنسبة للقاعدة القانونية.

الحل:

كون f مؤثراً خطياً، فإن f يكون تماثلاً إذا كان متبايناً؛ أي عندما تكون نواته $kerf = \{0\}$.

لكن النواة تعطى بـ: $kerf = \{(x,y,z) \in R^3 : f(x,y,z) = 0\}$

لنضع $f(x,y,z) = 0$، فنجد:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + z, y + z) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$x + y + z = 0 , x + z = 0, y + z = 0$$

والحل الوحيد لهذه الجملة المتجانسة هو الصفر $x = y = z = 0$

$$\Rightarrow kerf = \{0\}$$

إذن f يملك مقلوباً.

نعين $M(f) = H$، فنجد:

$$f(1,0,0) = (1,1,0) , f(0,1,0) = (1,0,1) , f(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$H=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

إذا أردنا حساب f^{-1} نتبع الخطوات الآتية:

$$(x,y,z) = f^{-1}(x + y + z, x + z, y + z)$$

فإذا وضعنا: $x + y + z = a, x + z = b, y + z = c$

وبالحل المشترك نجد: $x = a - c, y = a - b, z = b - a + c$

إذن:

$$f^{-1}(a,b,c) = (a - c, a - b, b - a + c)$$
$$\Rightarrow f^{-1}(1,0,0) = (1,1,-1)\ ,\ f^{-1}(0,1,0) = (0,-1,1),\ f^{-1}(0,0,1) = (-1,0,1)$$

ومنه:

$$H^{-1}=M(f^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق بسهول من أن: $H . H^{-1} = H^{-1} . H = I$

ملاحظة مهمة:

لمعرفة f^{-1} هناك طريقة ثانية، وذلك بحساب H^{-1} أولاً من خلال المصفوفة H ومن ثم نكتب:

$$f^{-1}(x,y,z) = H^{-1} . \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-z\\x-y\\-x+y+z\end{bmatrix}$$

أو:

$$f^{-1}(x,y,z) = (x - z, x - y, -x + y + z)$$

وهو الجواب نفسه الذي حصلنا عليه عند حساب f^{-1}.

٦ . ١٠ . تغيير القاعدة وتشابه المصفوفات:

٦ . ١٠ . ١ . مصفوفة الانتقال:

تعريف: ليكن V فضاء متجهياً على حقل K

ولتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ قاعدتين في V

تُعرّف مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة B على أنها مصفوفة المؤثر الخطي المطابق $I: V \to V$؛ أي إن مصفوفة الانتقال هي: $P = M_A^B(I)$.

ينتج من هذا التعريف الآتي:

١ . مصفوفة الانتقال هي مصفوفة مربعة؛ أي $P \in M_n(K)$.

٢ . المصفوفة P قلوبة؛ لأنها تمثل مصفوفة المؤثر المطابق والذي هو قلوب بدوره.

٣. المصفوفة P^{-1} هي مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة A أي $P^{-1} = M_B^A(I)$

مثال:

لتكن:

$$A = \{a_1 = (1,-1,0), a_2 = (0,1,-1), a_3 = (0,0,1)\}$$
$$B = \{b_1 = (1,0,1), b_2 = (-1,1,0) , b_3 = (0,0,-1)\}$$

قاعدتين في R^3. المطلوب:

١ . أوجد P مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة (E) القانونية في R^3.

٢ . أوجد Q مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية (E) إلى القاعدة A.

٣ . احسب P^{-1} وقارنها مع Q ماذا تجد؟

٤ . أوجد P' مصفوفة الانتقال من A إلى B.

٥ . أوجد Q' مصفوفة الانتقال من B إلى A.

٦ . احسب $(P')^{-1}$ وقارنها مع Q' ماذا تجد؟.

الحل:

١ . لمعرفة المصفوفة P علينا أن نكتب $I(a_1),\ I(a_2),\ I(a_3)$ على شكل تراكيب خطية لعناصر القاعدة القانونية $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ وحيث I هو المؤثر المطابق:

$$I(a_1) = a_1 = (1,-1,0) = 1.e_1 - 1.e_2 + 0.e_3$$
$$I(a_2) = a_2 = (0,1,-1) = 0.e_1 + 1.e_2 - 1.e_3$$
$$I(a_3) = a_3 = (0,0,1) = 0.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$

إذن:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ . إن المصفوفة Q هي مصفوفة الانتقال من E إلى A أي $Q = M_E^A(I)$ لذلك علينا كتابة $I(e_1), I(e_2), I(e_3)$ على شكل تراكيب خطية لعناصر A. ولهذه الغاية يجب معرفة مركبات متجه ما $(x,y,z) \in R^3$ بدلالة عناصر A. حيث:

$$\forall (x,y,z) \in R^3 : (x,y,z) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$
$$= \alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(0,1,-1) + \alpha_3(0,0,1)$$
$$= (\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + \alpha_3)$$

إذن:

$$\alpha_1 = x\ ,\ \alpha_2 = x + y\ ,\ \alpha_3 = x + y + z$$

إذن:

$$(x,y,z) = x\ .\ a_1 + (x + y)a_2 + (x + y + z)a_3 \qquad (1)$$

إذن:

$$I(e_1) = e_1 = (1,0,0) = 1\ .\ a_1 + 1\ .\ a_2 + 1\ .\ a_3$$
$$I(e_2) = e_2 = (0,1,0) = 0\ .\ a_1 + 1\ .\ a_2 + 1\ .\ a_3$$
$$I(e_3) = e_3 = (0,0,1) = 0\ .\ a_1 + 0\ .\ a_2 + 1\ .\ a_3$$

ومن ثمّ فإن:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٣ . نحسب P^{-1} بالطرق المعروفة لدينا سابقاً، فنجد:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بالمقارنة نجد $P^{-1} = Q$.

٤ . P' هي مصفوفة الانتقال من A إلى B؛ أي $P' = M_A^B(I)$ ؛ لذلك يجب كتابة $I(a_1)$, $I(a_2)$, $I(a_3)$ بدلالة القاعدة B وفي هذه الحالة يجب أولاً معرفة إحداثيات متجه ما من R^3 بالنسبة للقاعدة B؛ لذلك نحسب بشكل مشابه، كما في الطلب الثاني من هذه المسألة:

$$(x,y,z) = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$$

وبعد الحساب نجد:

$$\beta_1 = x + y,\ \beta_2 = y\ ,\ \beta_3 = x + y - z$$

فيصبح:

$$(x,y,z) = (x + y)b_1 + yb_2 + (x + y - z)b_3$$

ومنه:

$$I(a_1) = a_1 = (1,-1,0) = 0.b_1 - 1.b_2 + 0.b_3$$
$$I(a_2) = a_2 = (0,1,-1) = 1.b_1 + 1.b_2 + 2.b_3$$
$$I(a_3) = a_3 = (0,0,1) = 0.b_1 + 0.b_2 - 1.b_3$$

ومنه فإن:

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

٥ . إن $Q' = M_B^A(I)$ لذلك علينا كتابة $I(b_1), I(b_2), I(b_3)$ كتراكيب خطية لعناصر A وبعد الاستفادة من العلاقة (1) السابقة:

$$I(b_1) = b_1 = (1,0,1) = 1.a_1 + 1.a_2 + 2.a_3$$
$$I(b_2) = b_2 = (-1,1,0) = -1.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3$$
$$I(b_3) = b_3 = (0,0,-1) = 0.a_1 + 0.a_2 - 1.a_3$$

إذن:

$$Q' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

٦ . نحسب $(P')^{-1}$، فنجدها تساوي Q' أي $(P')^{-1} = Q'$ أو يمكن حساب:

$$Q'.P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P'.Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

أي إن $P' . Q' = Q' . P' = I$ فكل منهما مقلوب للأخرى.

٦ . ١٠ . ٢ . أثر تغيير القاعدة على مصفوفة تطبيق خطي:

مبرهنة:

إذا كان V فضاء متجهياً على حقل K، وإذا كانت A, A' قاعدتين فيه، بحيث تمثل P مصفوفة الانتقال من A إلى A'. إذا كان أيضاً W فضاء متجهياً على الحقل نفسه، وكانت B, B' قاعدتين فيه، ولتكن Q مصفوفة الانتقال من B إلى B' لنأخذ التطبيق الخطي: $f : V \to W$ بحيث:

$$H' = M_{A'}^{B'}(f) \quad , \quad H = M_A^B(f)$$

عندئذ يكون: $H' = Q.H.P^{-1}$

الإثبات:

لـدينا مـن الفـرض $P = M_A^{A'}(I_V)$ حيـث I_V التطبيـق المطـابق في V ومـن ثمَّ فـإن $P^{-1} = M_{A'}^{A}(I_V)$.

وكذلك من الفرض لدينا $Q = M_B^{B'}(I_W)$ حيث I_W التطبيق المطابق في W.

لنأخذ المخطط الآتي الذي يمثل التطبيقات السابقة:

$$\underset{\text{القاعدة}\ (A')}{V} \xrightarrow{I_V} \underset{\text{القاعدة}\ (A)}{V} \xrightarrow{f} \underset{\text{القاعدة}\ (B)}{W} \xrightarrow{I_W} \underset{\text{القاعدة}\ (B')}{W}$$

فنجد أن: $f = I_W \circ f \circ I_V$

حيث f الواقع في الطرف اليساري تقابله مصفوفته بالنسبة للقاعدتين A', B' بينما f الأخرى، فتمثله المصفوفة بالنسبة للقاعدتين A, B ومن ثمَّ يكون:

$$M_{A'}^{B'}(f) = Q.M_A^B(f).P^{-1}$$

أي إن: $$H' = Q\ .\ H\ .\ P^{-1}$$

ملاحظات:

(١) إذا تغيرت القاعدة في المنطلق V فقط من A إلى A'، فإن: $H' = HP^{-1}$.

(٢) إذا تغيرت القاعدة في المستقر W فقط من B إلى B'، فإن $H' = Q.H$

(٣) إذا كان $f : V \to V$ مؤثراً خطياً، وكانت $H = M_A^A(f)$ ، $H' = M_{A'}^{A'}(f)$ بينما بقيت P تمثل مصفوفة الانتقال من A إلى A'، ومن ثمَّ P^{-1} تمثل مصفوفة الانتقال من A' إلى A وإن:

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{القاعدة}\ A'}{V} \arrow[r, "I"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & \underset{\text{القاعدة}\ A}{V} \arrow[r, "f"] & \underset{\text{القاعدة}\ A}{V} \arrow[r, "I"] & \underset{\text{القاعدة}\ A'}{W} \end{tikzcd}$$

$$f = I o f o I$$

ومن ثمَّ:

$$M_{A'}^{A'}(f) = M_A^{A'}(I).M_A^A(f).M_{A'}^{A}(I)$$

$\Rightarrow H' = P.H.P^{-1}$

مثال:

ليكن التطبيق الخطي:

$$f : R^2 \to R^3 : f(x,y) = (x + y, x, y)$$

ولتكن:

$A = \{a_1 = (1,1), a_2 = (0,-1)\}$ قاعدة في R^2

$B = \{b_1 = (1,-1,0), b_2 = (0,1,-1), b_3 = (0,0,1)\}$ قاعدة في R^3.

١ . أوجد H مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين القانونيتين $H = M(f)$.

٢ . أوجد H' مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A, B: $H' = M_A^B(f)$

الحل:

١ . القاعدة القانونية في R^2 هي $\{e_1 = (1,0)\ ,\ e_2 = (0,1)\}$

والقاعدة القانونية في R^3 هي: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0) = 1.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0,1) = 1.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$

إذن:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ . طريقة أولى:

$$f(a_1) = f(1,1) = (2,1,1) = 2b_1 + 3b_2 + 4b_3$$
$$f(a_2) = f(0,-1) = (-1,0,-1) = -1.b_1 -1.b_2 - 2b_3$$

ومنه:

$$H' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

طريقة ثانية:

يمكن حساب H' بطريقة ثانية بالاستفادة من المبرهنة الأخيرة:

$$H' = Q.H.P^{-1}$$

حيث P مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية في R^2 إلى A.

وحيث Q مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية في R^3 إلى B.

لذلك نحسب P^{-1} مصفوفة الانتقال من A إلى القاعدة القانونية في R^2:

$I(a_1) = a_1 = 1.e_1 + 1.e_2$، $I(a_2) = a_2 = 0.e_1 - 1.e_2$ إذن:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نحسب Q مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية في R^3 إلى B:

$$I(e_1) = e_1 = 1 . b_1 + 1.b_2 + 1.b_3$$
$$I(e_2) = (0,1,0) = 0.b_1 + 1.b_2 + 1.b_3$$
$$I(e_3) = e_3 = (0,0,1) = 0.b_1 + 0.b_2 + 1.b_3$$

إذن:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$H' = Q.H.P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-1\\4&-2\end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة H' نفسها التي حسبناها بالطريقة الأولى.

٦ . ١٠ . ٣ . تعريف: (تشابه المصفوفات)

تكون المصفوفتان $A, B \in M_{n\times n}(K)$ متشابهتين، إذا وجدت مصفوفة قلوبة $P \in M_{n\times n}(K)$ بحيث:

$$B = P^{-1} . A . P$$

مثال:

ليكن المؤثر الخطي $f \in Hom(R^3, R^3)$ المعرف بـ:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + y, z)$$

١ . احسب مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية (ولتكن A).

٢ . احسب مصفوفة f بالنسبة للقاعدة:

$A' = \{b_1 = (1,1,0), b_2 = (1,0,1), b_3 = (0,1,1)\}$ ولتكن B.

٣ . أوجد المصفوفة $P \in M_{3\times3}(R)$ القابلة للقلب بحيث تحقق علاقة تشابه المصفوفات:

$$B = P^{-1} . A . P$$

الحل:

١ . لنحسب المصفوفة A:

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,0) = e_1 + e_2 + 0.e_3$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,0) = e_1 + e_2 +0.e_3$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1) = 1.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$

إذن:

$$M(f) = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ . نحسب المصفوفة B:

$$f(b_1) = f(1,1,0) = (2,2,0) = 2.b_1 + 0.b_2 + 0.b_3$$
$$f(b_2) = f(1,0,1) = (2,1,1) = b_1 + b_2 + 0.b_3$$
$$f(b_3) = f(0,1,1) = (2,1,1) = b_1 + b_2 + 0.b_3$$

إذن:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{A'}^{A'}(f)$$

٣ . تمثل P مصفوفة الانتقال من القاعدة A' إلى القاعدة القانونية لذلك:

$$I(b_1) = I(1,1,0) = (1,1,0) = 1.e_1 + 1.e_2$$
$$I(b_2) = I(1,0,1) = (1,0,1) = 1.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$
$$I(b_3) = I(0,1,1) = (0,1,1) = 0.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$$

إذن:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب مقلوب P، فنجد:

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكن حساب $P^{-1}.A.P$ حيث:

$$P^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

إذن P تحقق علاقة التشابه المطلوبة؛ أي إن A, B متشابهتان.

تمارين الفصل السادس

١ . ضع علامة صح (✓) أو خطأ (×) أمام العبارات الآتية:

(١) إذا كان $f : R^4 \to R^3$ تطبيقاً خطياً، فإن مصفوفته من المرتبة (4×3).

(٢) إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً، وكان $kerf = \{0\}$، فإن f متباين.

(٣) إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً بحيث: $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha f(u_1) + a_2 f(u_2)$، فإن f يكون خطياً.

(٤) كل تطبيق خطي $f : V \to W$ له مقلوب $f^{-1} : W \to V$.

(٥) كل تطبيق خطي هو مؤثر خطي.

٢ . ليكن التطبيقان الخطيان: $f : R^4 \to R^3$، $g : R^3 \to R^2$ المعرفان بـ:

$$f(x,y,z,t) = (x + y, x + z, x + t)$$
$$g(x,y,z) = (x - y, x - z)$$

أوجد المصفوفة $M(gof)$ بطريقتين مختلفتين.

«أي بحساب $M(g).M(f)$، ثم بحساب gof ومن ثم المصفوفة المقابلة».

٣ . ليكن $f:R^3 \to R^3$ مؤثراً خطياً، ولتكن $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ قاعدة في R^3، ولتكن:

$$H = M_A^A(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

(١) أثبت أن $B = \{b_1 = u_1 + u_2 , b_2 = u_1 - u_2 + u_3 , b_3 = u_2 - u_3\}$ قاعدة أيضاً في R^3.

(٢) أوجد المصفوفة $H' = M_B^B(f)$

«**توجيه:** $H' = P . H . P^{-1}$، حيث P مصفوفة انتقال من A إلى B».

٤ . ليكن الفضاء R^2 وقاعدته القانونية $\{e_1, e_2\}$، وليكن التطبيق $f : R^2 \to M_{22}(R)$ حيث:

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$$

(١) أثبت أن f خطي.

(٢) هل f متباين؟.

(٣) أوجد قاعدة صورة هذا التطبيق (Imf).

٥ . إذا علمت أن $A = \{(4,3), (2,-2)\}$ تشكل قاعدة في R^2، وأن المؤثر الخطي:

$f : R^2 \to R^2$ معرف بتأثيره على هذه القاعدة بالشكل:

$$f(4,3) = (7,5) \ , \ f(2,-2) = (1,5)$$

عيّن هذا المؤثر (قاعدة ربط f).

٦ . ليكن $P[x]$ فضاء الحدوديات الحقيقية بمتغير واحد x

ولنفرض المؤثر $D : P[x] \to P[x]$، حيث D هو المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$.

(i) إذا كان V_1 فضاء جزئياً للحدوديات الحقيقية التي درجتها أصغر أو تساوي 3 فأثبت أن $f(v_1)$ فضاء جزئي أيضاً من $P[x]$.

(ii) أثبت أن $f^{-1}(v_1)$ فضاء جزئي من $P[x]$.

٧ . ليكن $f \in Hom(R^2, R^2)$، حيث $f(x,y,) = (y,x)$

وليكن $V_1 = \{(x,y) : (x - 2y = 0\}$، $V_2 = \{\alpha(0,1) : \alpha \in R\}$ فضاءين جزئيين من R^2:

(i) احسب $f(V_1)$، وبين أنه فضاء جزئي من R^2.

(ii) احسب $f^{-1}(V_2)$، وبين أنه فضاء جزئي من R^2.

٨ . ليكن $f : R^3 \to R^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بمصفوفته بالنسبة للقاعدة القانونية:

$$H = M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) احسب كلاً من null (f), rank(f) وبين فيما إذا كان f غامراً وفيما إذا كان متبايناً.

(ii) عين قاعدة Imf (دون تعيين قاعدة ربط f).

(iii) أوجد قاعدة ربط f.

٩ . بين أن $f:R^2 \to R^2$ المعرف بـ: $f(x_1,x_2) = (4x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ مؤثر خطي.

١٠ . استناداً إلى تعريف التطبيق الخطي أثبت أن $f : R^3 \to R^2$ تطبيق خطي حيث:
$f(x,y,z) = (x + y - z, x - 2z)$.

١١ . بين في كل مما يأتي إذا ما كان f تطبيقاً خطياً أم لا.

(i) $f : M_{22} \to M_{23}$ حيث $f(A) = A.B$ وحيث B مصفوفة مثبتة مرتبتها (2×3).

(ii) $f: M_{nn}(R) \to R$ حيث:

$$f(A) = Tr(A)$$ (أثر المصفوفة A)

(iii) $f : M_{mn} \to M_{nm}$ حيث $f(A) = A^T$

(iv) $f : M_{22}(R) \to R$ حيث: $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - b + c - d$

(v) $f : P_2[x] \to P_2[x]$ حيث: $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$

(vi) $f : P_2[x] \to P_2[x]$ حيث:

$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$

«في الحالتين الأخيرتين $P_2[x]$ ترمز لفضاء الحدوديات الحقيقية التي درجة كل منها أصغر أو تساوي 2».

١٢ . نفرض $S = \{v_1, v_2\}$ قاعدة في R^2، حيث $v_1 = (1,1), v_2 = (1,0)$

وليكن $T: R^2 \to R^2$ مؤثراً خطياً بحيث:

$$T(v_1) = T(1,1) = (1,-2), T(v_2) = T(1,0) = (-4,1)$$

عين علاقة ربط T واستخدم هذه العلاقة لإيجاد $T(-5,3)$.

١٣ . بفرض $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ قاعدة لـ R^3، حيث:

$$v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,9,0), v_3 = (3,3,4)$$

وليكن $T: R^3 \to R^2$ حيث:

$$T(v_1) = (1,0), T(v_2) = (-1,1) , T(v_3) = (0,1)$$

أوجد علاقة ربط T (أي $T(x,y,z)$) ثم استخدم ذلك لإيجاد $T(7,13,7)$.

١٤ . ليكن $f : R^2 \to R^2$ مؤثراً خطياً معطى بالعلاقة:

$$f(x,y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

والمطلوب أي المتجهات الآتية يقع في (Imf).

(i) $(1, -4)$ (ii) $(5,0)$ (iii) $(-3,12)$

١٥ . إذا كان V فضاء متجهياً وكانت $u_1, u_2, u_3 \in V$

وليكن $f : V \to R^3$ تطبيقاً خطياً بحيث:

$$f(u_1) = (2,-1,4), f(u_2) = (-3,2,1), f(u_3) = (0,5,1)$$

أوجد $f(3u_1 - 2u_2 + u_3)$.

١٦ . ليكن $f : P_2[x] \to P_3[x]$ تطبيقاً خطياً معرفاً بـ $f(P(x)) = x\,P(x)$، فأي العناصر الآتية تقع في نواة f (kerf):

(i) x^2 (ii) 0 (iii) $1 + x$

ملاحظة: $P(x)$ حدودية ما من $P_2[x]$.

١٧ . لتكن المؤثرات الخطية $f,g,h \in \text{Hom}(R^3, R^3)$ حيث:

$f(x,y,z) = (-x, -y, -z)$
$g(x,y,z) = (y,z,x)$
$h(x,y,z) = (x,2y,2z)$

أثبت أن $f^2 = I$ ،$g^3 = I$ (I تطبيق مطابق).

ثم احسب كلاً من: $h^4, fogofog, fogoh$

١٨ . أوجد مصفوفة كل من المؤثرات الخطية الآتية (على R^2):

$$f(x,y) = (2y,3x-y),\ g(x,y) = (3x-4y,\ x + 5y)$$

وذلك بالنسبة للقاعدة القانونية في R^2 ثم بالنسبة للقاعدة المرتبة $A = \{(1,3), (2,5)\}$

١٩. هل المؤثرات الخطية الآتية تماثلات (تشاكل تقابلي) وإذا كان كذلك، فأوجد f^{-1},g^{-1} علماً أن:

$f(x,y,z) = (x + z,\ 2x + 4y + z,\ -x + 2z)$
$g(x,y) = (x + y,\ -x + y)$

٢٠ . أوجد التطبيق الخطي الذي مصفوفته:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

وذلك بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في R^4, R^2

ثم بالنسبة للقاعدتين:

$A = \{(1,1), (0,-1)\}$ ،$B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$

٢١ . عين التطبيق الخطي $f : R^n \to R^m$ الذي مصفوفته A بالنسبة للقاعدة القانونية في كل مما يأتي:

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢٢ . ليكن التطبيقان الخطيان:

$f(x,y,z) = (x - y, z, y, x + y) ; f \in Hom(R^3, R^4)$
$g(x,y,z) = (2x, -z, -y, 2x) ; g \in Hom(R^3, R^4)$

احسب مصفوفة $f + g$ بطريقتين مختلفتين.

٢٣ . ليكن المؤثر الخطي $f : R^3 \to R^3$ حيث $f(x,y,z) = (x + 2y - z, 3y + z, -2z)$

برهن أن f تشاكل تقابلي (تماثل) وعين f^{-1} ثم أوجد مصفوفة f^{-1} بالنسبة للقاعدة المرتبة $\{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ وتحقق من صحة العلاقة $[M(f)]^{-1} = M(f^{-1})$.

٢٤ . أوجد مصفوفة الانتقال من A إلى A' في كل مما يأتي:

(i) $A = \{(2,3), (0,1)\}$، $A' = \{(6,4), (4,8)\}$، في الفضاء R^2.

(ii) $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$، $A' = \{(2,0,3), (-1,4,1), (3,2,5)\}$ في R^3.

(iii) $A = \{t, 1, t^2\}$، $A' = \{3 + 2t + t^2, t^2 - 4, 2 + t\}$ في $P_2[t]$.

٢٥ . ليكن المؤثر الخطي $f : R^3 \to R^3$ المعرف بـ: $f(x,y,z) = (x, x - y, x + y)$ والمطلوب:

(i) أوجد $H = M(f)$ بالنسبة للقاعدة القانونية (E) في R^3.

(ii) احسب rank(f)، واستنتج إن كان غامراً.

(iii) احسب null(f)، واستنتج إن كان متبايناً.

(iv) أثبت أن كلاً من:

$A = \{u_1(1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$
$B = \{v_1 = (1,-1,-1), v_2 = (-1,1,-1), v_3 = (-1,-1,1)\}$

قاعدة في R^3 ثم احسب المصفوفات:

$$K = M_E^A(f) \quad , \quad L = M_A^E(f) \quad , \quad N = M_A^A(f)$$
$$M = M_E^B(f) \quad , \quad X = M_B^B(f) \quad , \quad Y = M_A^B(f)$$

(v) أوجد P مصفوفة الانتقال من E إلى A.

(vi) أوجد Q مصفوفة الانتقال من E إلى B.

(vii) بين أياً من العلاقات الآتية صحيحة، وأياً منها خاطئة ثم صحح العلاقة الخاطئة:

$K = P^{-1} . H$
$L = H . P^{-1}$
$N = P . H . P^{-1}$
$M = Q . H$
$N = P^{-1} . K$
$X = Q . M$
$Y = P^{-1} . M$

* * *

الفصل السابع

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors

نسلط الضوء في هذا الفصل على معنى القيمة الذاتية والمتجه الذاتي لمصفوفة مربعة.

ظهرت فكرة القيمة الذاتية والمتجه الذاتي أولاً من خلال الحركة الدورانية، لكن توسعت فيما بعد لتشمل أنواعاً عديدة من السطوح، ولكي تصف حلول معادلات تفاضلية معينة، وفي القرن العشرين استخدمت في المصفوفات وفي التحويلات الخطية، وفي يومنا هذا فهي تطبق في حقول كثيرة، مثل: الغرافيك، والاهتزاز الميكانيكي، والتدفق الحراري، وغير ذلك كثير..

٧ . ١ . القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

٧ . ١ . ١ . تعريف:

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$، نسمي المتجه $X \in R^n$ متجهاً ذاتياً لـ A إذا كان AX مضاعفاً سلمياً لـ X أي إذا وجد $\lambda \in K$ (K حقل) بحيث $AX = \lambda X$.

ويدعى λ، في هذه الحالة، بالقيمة الذاتية للمصفوفة A، والمتجه X هو متجه ذاتي يقابل λ.

نود التذكير أن X متجه غير صفري، وذلك لتجنب الحالة غير المهمة $A0 = \lambda 0$ التي تتحقق لأجل كل A وكل λ.

٧ . ١ . ٢ . ملاحظة:

إن صورة المتجه X الناتجة عن ضربه بالمصفوفة A المربعة ما هي إلا مضاعف سلمي لـ X.

مثال (١):

بـيّن أن المتجـه $X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ يشـكل متجهـاً ذاتيـاً للمصـفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$ يقابـل القيمة $\lambda = 3$.

الحل:

$$A.X=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\lambda\cdot X$$

أي إن $\lambda = 3$ قيمة ذاتية لـ A يقابلها المتجه الذاتي: $X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

٧ . ٢ . حساب القيم الذاتية:

نبين فيما يأتي طريقة حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة مربعة من المرتبة $(n \times n)$.

نكتب المعادلة $A.X = \lambda \,.\, X$ بالشكل:

$$AX = \lambda IX \qquad (1)$$

علماً أن I مصفوفة الواحدة من المرتبة $n \times n$.

وتكتب المعادلة (1) بالشكل:

$$(\lambda I - A)\, X = 0 \qquad (2)$$

لكي يكون λ قيمة ذاتية لـ A، فيجب أن يكون المتجه X غير صفري؛ أي إن (2) يجب أن تملك حلاً غير صفري بالنسبة لـ X، وهذا يتطلب – حسب ما تعلمناه عند مناقشة حلول الجمل الخطية المتجانسة – أن يكون المحدد:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (3)$$

ونسمي (3) بالمعادلة المميزة للمصفوفة A.

ويمكن صياغة ما سبق على النحو الآتي:

٧ . ٢ . ١ . مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$، فإن λ تكون قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا كان:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

مثال (٢):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة السابقة $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

الحل:

نكوّن المعادلة $\det(\lambda I - A) = 0$

أولاً: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

ومنه المعادلة المميزة هي: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

ونفك هذا المحدد؛ لنجد:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) + 0 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

ومنه إما $\lambda = 3$ أو $\lambda = -1$ وهذه هي القيم الذاتية للمصفوفة وفعلاً $\lambda = 3$ هي إحدى هذه القيم، كما رأينا في المثال السابق.

نلاحظ أننا وجدنا قيمة ذاتية جديدة هنا وهي $\lambda = -1$.

ملاحظة: لقد سمينا $\det(\lambda I - A) = 0$ معادلة مميزة لـ A، وعند فك المحدد في المثال الأخير وجدنا المعادلة $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ وبفك الأقواس نجد: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

ندعو كثيرة الحدود $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A آنفة الذكر.

وبشكل عام، فإن كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ تكون من الشكل:

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n$$

مثال (٤):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix}$$

ومنه فالمعادلة المميزة هي:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda . \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} + 1 . \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

إما $\lambda = 4$ أو $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

وحل هذه الأخيرة هو $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$

إذن هناك ثلاث قيم ذاتية مختلفة لهذه المصفوفة.

تمرين:

أوجد المعادلة المميزة لكل من المصفوفات:

$$(a)\ A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix} \quad , \quad (b)\ A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 10 & -9\end{bmatrix}$$

$$(c)\ A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad (d)\ A=\begin{bmatrix}-2 & -7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

ثم أوجد القيم الذاتية لكل منها.

٧ . ٣ . تعيين المتجهات الذاتية:

٧ . ٣ . ١ . مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$، عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

(a) λ قيمة ذاتية لـ A.

(b) الجملة المتجانسة $(\lambda I - A)X = 0$ تملك حلاً غير صفري (غير تافه) بالنسبة لـ X.

(c) يوجد متجه غير صفري X، بحيث $AX = \lambda X$.

(d) λ يشكل حلاً للمعادلة المميزة $\det(\lambda I - A) = 0$

(نقبلها دون إثبات).

نود هنا أن نبين طريقة إيجاد متجه ذاتي X، الذي يقابل قيمة ذاتية λ وذلك من خلال الأمثلة التوضيحية.

مثال (٥):

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$

أوجد القيم الذاتية لـ A، ثم عين المتجهات الذاتية.

الحل:

لقد أوجدنا القيم الذاتية لهذه المصفوفة حيث كان $\lambda = 3$,$\lambda = -1$

لمعرفة المتجه الذاتي الذي يقابل كل واحدة من هذه القيم الذاتية نعود للمعادلة الأساسية الناتجة من تعريف المتجه الذاتي وهي المعادلة (2) $(\lambda I - A)X = 0$

في هذا المثال X هو متجه العمود $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ؛ لأن مرتبة A هو 2×2، ولكن $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$، كما هو في المثال (٢).

إذن: $(\lambda I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

فمن أجل $\lambda = 3$ تصبح المعادلة الأخيرة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وينتج عنها أن $-8x_1 + 4x_2 = 0$ أو $x_2 = 2x_1$

إذن المتجه: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

لذلك نقول إن $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي يقابل القيمة $\lambda = 3$ وبالطريقة نفسها من أجل $\lambda = -1$ نجد:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والتي نجد منها $x_1 = 0$، أما x_2 فهو اختياري والمتجه: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

إذن $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي يقابل $\lambda = -1$.

مثال (٦):

عين المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

الحل:

$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$ والمعادلة المميزة:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

ومنه فالقيم الذاتية هي: $\lambda = 1, \lambda = 4$

من أجل $\lambda = 1 \Leftarrow (\lambda I - A)X = 0$

تصبح: $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

والتي ينتج عنها: $x_1 = -2x_2$

إذن المتجه المطلوب: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

فالمتجه الذاتي الأول الذي يقابل $\lambda = 1$ هو $u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ومن أجل $\lambda = 4$، فإن $(\lambda I - A)X = 0$ تصبح: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

وينتج عنها $x_1 = x_2$، ومن ثمَّ فالمتجه المطلوب:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذلك نقول إن $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة A يقابل $\lambda = 4$.

مثال (٧):

أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة: المتجه X هنا من R^3؛ لأن A من المرتبة 3×3

الحل:

المعادلة المميزة: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$

نفك المحدد وفق عناصر العمود الثاني، فنجد:

$$(\lambda - 2).\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 3) + 2] = 0$$

ومنه:

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

إذن $\lambda = 1$ جذر بسيط، $\lambda = 2$ جذر مضاعف للمعادلة المميزة وهي القيم الذاتية.

من أجل $\lambda = 2$ تصبح المعادلة $(\lambda I - A)X = 0$ على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن هذه الأخيرة $x_3 = -x_1$، وأما x_2 فهو اختياري، إذن المتجه:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن لدينا متجهان ذاتيان هنا؛ لأن الجذر مضاعف، وهما:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن أجل $\lambda = 1$، فإن المعادلة: $(\lambda I - A)X = 0$ تصبح:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وينتج عنها:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = x_3, x_1 = -2x_3$$

إذن المتجه المطلوب:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن نقول إن $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي لـ A يقابل $\lambda = 1$.

٧ . ٤ . قوى مصفوفة مربعة:

عندما نحسب القيم الذاتية لمصفوفة مربعة A ومتجهاتها الذاتية، عندئذ يصبح من السهولة بمكان حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـ A^k حيث k عدد صحيح موجب، فلو كانت λ قيمة ذاتية لـ A وكان X المتجه الذاتي المقابل، فإن:

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

وهذه العلاقة تدل على أن λ^2 هي قيمة ذاتية لـ A^2، وأن X هو المتجه الذاتي الموافق.

بشكل عام، فإن المبرهنة التالية تبين العلاقة بين قوى مصفوفة مربعة A وقوى القيمة الذاتية لها.

مبرهنة:

إذا كان $k \in Z^+$، وكانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و X المتجه الذاتي الموافق لـ λ، عندئذ تكون λ^k قيمة ذاتية لـ A^k ويبقى X المتجه الذاتي المقابل لـ λ.

مثال (٨):

وجدنا في المثال (٧) أن $\lambda = 2, \lambda = 1$ هي قيم ذاتية للمصفوفة A الواردة في ذاك المثال.

ومن خلال المبرهنة الأخيرة، فإن $2^7 = 128$ وكذلك $1^7 = 1$ هي قيم ذاتية لـ A^7.

وإن المتجهين $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ هما متجهان ذاتيان يقابلان $\lambda = 128$.

والمتجه $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي يقابل $\lambda = 1^7 = 1$.

* * *

المصطلحات العلمية

A	
Addition	جمع أو إضافة
Adjoint of a matrix	مصفوفة ملحقة
Algebraic	جبري
Algebraic Structure	بنية جبرية
Angle	زاوية
Area	مساحة
Associative operation	عملية تجميعية
Augmented Matrix	مصفوفة موسعة
B	
Basis, Base	قاعدة أو أساس
Ordered Basis	قاعدة مرتبة
Standard basis	قاعدة قانونية
Binary Operation	عملية ثنائية
Binary Relation	علاقة ثنائية
C	
Change of basis	تغيير القاعدة
Cofactor	عامل مرافق

Column	عمود
Complement	متمم
Commutative	تبديلي
Coordinates	إحداثيات
Conjugate of a matrix	مرافق مصفوفة
Cramer's Rule	قانون أو قاعدة كرامر

D

Dependent (linearly dependent)	مرتبط (مرتبط خطياً)
Determinant	محدد
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Dimension	البعد
Direct Sum	مجموع مباشر
Distributive Law	قانون توزيعي

E

Echelon form	الشكل المدرج
Element	عنصر
Elementary matrix	مصفوفة أولية
Elementary operation	عملية أولية
Elementary transformations	تحويلات أولية
Empty set	مجموعة خالية

Equality	مساواة أو تساوٍ
Equivalence Relation	علاقة تكافؤ
Equivalence Classes	صفوف تكافؤ
F	
Field	حقل
Finite dimensional	منتهي البعد
Finite Set	مجموعة منتهية
G	
General Solution	الحل العام
General Solution set	مجموعة الحل العام
Generators	مولدات
Group	زمرة
H	
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Homogeneous	متجانس
Homogeneous system	جملة متجانسة
Homomorphism	تشاكل
I	
Identity	مطابق (حيادي)
Identity map	تطبيق مطابق

Identity Matrix (unit matrix)	مصفوفة واحدية (أحادية)
Image	صورة
Image of map	صورة تطبيق
Injective	متباين
Inverse	مقلوب أو معكوس
Inverse of a map	معكوس تطبيق (التطبيق العكسي)
Inverse of a matrix	مقلوب مصفوفة
Invertible	قلوب (قابل للقلب) أو عكوس
Invertible map	تطبيق عكوس
Invertible matrix	مصفوفة عكوسة
Isomorphism	تشاكل تقابلي (تماثل)

K

Kernel	نواة
Kernel of a map	نواة تطبيق

L

Linear	خطي
Linear Algebra	جبر خطي
Linear dependence	ارتباط خطي
Linear Equation	معادلة خطية

Linear independence	استقلال خطي
Linear map	تطبيق خطي
Linear operator	مؤثر خطي
Linear Space	فضاء خطي
Linear Transformation	تحويل خطي
Lower triangular matrix	مصفوفة مثلثية دنيا

M

Main	رئيس
Main diagonal	قطر رئيس
Mapping (map)	تطبيق
Injective mapping	تطبيق متباين
Inverse of a mapping	مقلوب أو معكوس التطبيق
Linear Mapping	تطبيق خطي
Markov Chain	سلسلة ماركوف
Matrix	مصفوفة
Augmented matrix	مصفوفة موسعة
Adjoint of a matrix	ملحق مصفوفة (المصفوفة الملحقة)
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية

Inverse of a matrix	مقلوب مصفوفة
Minor of a matrix	صغير مصفوفة
Matrix of a linear map	مصفوفة تطبيق خطي
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
Lower Triangular matrix	مصفوفة مثلثية دنيا
Upper Triangular matrix	مصفوفة مثلثية عليا
Zero matrix	مصفوفة صفرية
Maximal	أعظمي
Multiplication	ضرب (جداء)
Scalar multiplication	ضرب سلمي

N

Null Space	فضاء الانعدامية (فضاء الحلول)
Nullity	انعدامية
Number	عدد
Complex Number	عدد عقدي
Natural Number	عدد طبيعي

Quotient Number	عدد كسري أو نسبي
Real Number	عدد حقيقي
Integer	عدد صحيح

O

Ordered	مرتّب
Order pair	زوج مرتب
Ordered basis	قاعدة مرتبة

P

Polynomial	كثيرة الحدود (حدودية)
Product	جداء
Product of matrices	جداء مصفوفات
Projection	مسقط

R

Rank	رتبة
Rank of a matrix	رتبة مصفوفة
Rank of a linear map	رتبة تطبيق خطي
Reduction	اختزال
Reduction of a matrix	اختزال مصفوفة
Reduced row echelon form	الشكل المدرج المختزل

Ring	حلقة
Row	سطر
Row of a matrix	سطر مصفوفة
Row echelon form	الشكل المدرج
Row operation	عملية سطرية (عملية على أسطر مصفوفة)
Row space	فضاء الأسطر

S

Scalar	سلمي
Set	مجموعة
Empty Set	مجموعة خالية
Similar	مشابه
Similarity	تشابه
Solution	حل
Solution of a linear equation	حل معادلة خطية
Solution of a linear system	حل جملة خطية
Span	يولد
Submatrix	مصفوفة جزئية
Subspace	فضاء جزئي

Subset	مجموعة جزئية
Substitution	تعويض
Sum	مجموع
Supplementary Subspace	فضاء جزئي مكمل (متمم)
T	
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
U	
Upper Triangular matrix	مصفوفة مثلثية عليا
V	
Vector	متجه (شعاع)
Vector space	فضاء متجهي (شعاعي)
Z	
Zero	صفر
Zero function	تابع صفري
Zero Matrix	مصفوفة صفرية
Zero Map	تطبيق صفري
Zero space	الفضاء الصفري
Zero vector	متجه أو شعاع صفري

المراجع العلمية

١ . الحمصي، إلهام: «الجبر الخطي (١)»، منشورات جامعة دمشق ١٩٨٢.

٢ . هنانو، عبد اللطيف. الراشد، شوقي: «الجبر الخطي (١)»، منشورات جامعة دمشق ٢٠١٤ – ٢٠١٥.

٣ . هنانو، عبد اللطيف: «الجبر الخطي (١)»، منشورات جامعة دمشق ٢٠١١ – ٢٠١٢.

٤ . الوادي، يوسف . الشماط، هدى: «الرياضيات العامة (١)»، منشورات جامعة دمشق ٢٠٠٨ – ٢٠٠٩.

٥ . الوادي، يوسف . خليفة، حسن: «أساسيات الجبر»، منشورات كلية المعلمين ومكتبة الخبتي بيشة/ المملكة العربية السعودية ٢٠٠٢ – ٢٠٠٣.

REFERENCES

1 – Beezer, R. "First course in Linear Algebra" University of Puget Sound, Washington, USA 2014.

2 – Fraleigh, J. : " Abstract Algebra" Addision- Wesley Publ. 5th ed. 1994

3 – Hefferon, J. : "Linear Algebra". Mathematics, Saint Michael's College, USA 2014.

4 – Howard, A., Rorres C.: "Elementary Linear Algebra" 11th ed. John Wiley & Sons 2011.

5 – Murty, Katta, G. : "Computational and Algorithmic Linear Algebra" World Scientific Publishing 2014.

6 – Rosen, K.H. : "Discrete Mathematics and it's Applications" 6th ed. Mc GRAW-HILL 2007.

7 – Saracino, D.: "Abstract Algebra", 1988.

التدقيق العلمي

أ.د. حمزة حاكمي.

أ.م.د. عبد اللطيف هنانو.

م.د. شوقي الراشد.

التدقيق اللغوي

د. فخري بوش

Damascus University Publications
Faculty of Sciences

Linear Algebra (I)

Dr. Youssef Alwadi
Professor of Mathematics