الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

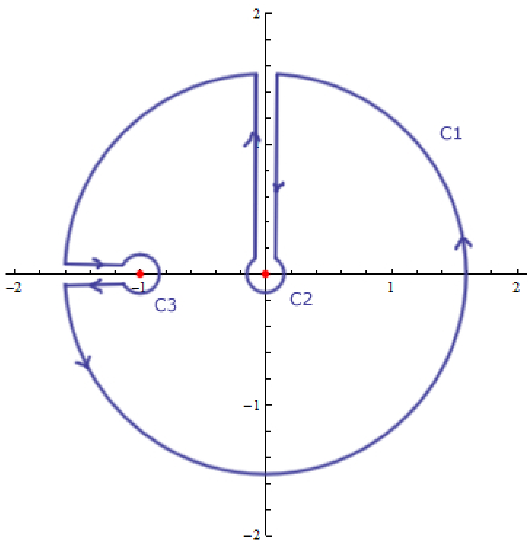
الأكاديمية العربية الدولية
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

جامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الرياضيات والإحصاء

التحليل المركب

إعداد: د. أحمد خالد العبدالعالي



المحتوى

مقدمة **ي**

1 فضاء الأعداد المركبة **١**

1.1 كتابة العدد المركب 1

1.2 نظرية دي موافر وجذور الأعداد المركبة 3

1.3 الخصائص التوبولوجية للمركب والدوال المركبة 3

1.4 تمارين 6

2 الدوال التحليلية **٩**

2.1 متسلسلات القوى 9

2.2 الاشتقاق وقابلية التفاضل 13

2.3 معادلات كوشي – ريمان 15

2.4 الدوال التوافقية 16

2.5 تمارين 17

3 التكامل المركب **١٩**

3.1 القوس الأملس قطعا 19

3.2 التكامل على القوس 20

3.3 دليل الأقواس المغلقة 22

3.4 نظرية كوشي 24

3.5 صيغ كوشي التكاملية و مفكوك تايلور للدوال التحليلية 28

4 نظرية البواقي ٣٧
4.1 مفكوك لوران وتصنيف النقاط الشاذة 37
4.2 نظرية البواقي 41

مقدمة

بسم الله والحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله سيدنا ونبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين. أما بعد،
فإن التحليل المركب هو أحد الفروع الرئيسية في علم الرياضيات، وقد أولاه العلماء منذ اكتشاف فضاء الأعداد المركبة اهتماماً كبيراً، نظراً لما لنتائجه من تطبيقات في فروع الرياضيات الأخرى. وفي هذا المقرر نعتزم دراسة مجموعة من المفاهيم والمواضيع في التحليل المركب والتي من شأنها أن تكون أساساً للطالب يمكنه من التعمق مستقبلاً في هذا المجال.

وينقسم المقرر إلى أربعة أقسام رئيسية، ففي القسم الأول نعطي تعريف الفضاء المركب وخصائصه وصور كتابة الأعداد المركبة. كما نتطرق لنظرية دي موافر وإيجاد جذور الأعداد المركبة. ثم ننتقل للخواص التوبولوجية للفضاء المركب وتعريف الدوال في المركب واتصالها.

في القسم الذي يليه ، نتعرض لمتسلسلات القوى ونصف قطر تقاربها وتعريف الدوال التحليلية وعلاقتها بالدوال القابلة للتفاضل واستخدام معادلات كوشي – ريمان لفحص قابيلة الاشتقاق. كما ونعرج في نهاية القسم على الدوال التوافقية والمرافق التوافقي.

القسم الثالث يهتم بدراسة تكامل الدوال المركبة على الأقواس الملساء قطعاً، حيث نقوم بدراسة الأقواس وأنواعها ودليل الأقواس الملساء قطعاً والمغلقة، كما نتطرق في هذا القسم إلى نظرية كوشي بصورتها البسيطة وصورتها العامة عى المجموعات بسيطة الترابط. في هذا القسم أيضاً ندرس صيغ كوشي التكاملية وتطبيقاتها بالإضافة إلى مفكوك تايلور للدوال التحليلية وما ينتج من دراسة هذا المفكوك من نتائج كنظرية ليوفيل والنظرية الأساسية في الجبر. ومن بعد ذلك ندرس خواص أصفار الدوال التحليلية ومبدأ القيمة العظمى لها. ونختتم القسم الأخير ببعض النظريات المتعلقة بتمديد الدوال التحليلية عبر نقاط أو حواجز صغيرة.

القسم الرابع والأخير يتمركز حول نظرية البواقي، ولدراسة ذلك فإننا نستعرض مجموعة من المفاهيم كمفكوك لوران على النطاقات الحلقية وتصنيف النقاط الشاذة وإيجاد الباقي عند هذه النقاط. ثم نستعرض بعد ذلك مجموعة من التطبيقات على نظرية البواقي كحساب بعض التكاملات المعتلة.

ولكي يكون الملخص ملائماً للتدريس فقد قمنا بتوزيع المحتوى على أسابيع الفصل الدراسي كما يلي

الأسبوع	المحتوى
الأول	فضاء الأعداد المركبة$\mathbb{C}$ ونظرية ديموافر جذور الأعداد المركبة
الثاني	متسلسلات القوى والتعيين الأساسي للوغاريتم
الثالث	الدوال التحليلية (قابلية الاشتقاق+ قابلية التفاضل)
الرابع	معادلات كوشي–ريمان والدوال التوافقية
الخامس	تعريف التكامل على الأقواس الملساء ودليل الأقواس المغلقة
السادس	نظرية كوشي العامة
السابع	مفكوك تايلور للدوال التحليلية وصيغ كوشي التكاملية
الثامن	النظرية الأساسية في الجبر ونظرية الأصفار المعزولة
التاسع	مبدأ القيمة العظمى للدوال التحليلية
العاشر	مفكوك لوران
الحادي عشر	تصنيف النقاط الشاذة وإيجاد البواقي
الثاني عشر	نظرية البواقي
الثالث عشر	تطبيقات على نظرية البواقي (إيجاد التكاملات المعتلة)
الرابع عشر	نظرية الدالة المفتوحة والدوال الحافظة للزوايا

فضاء الأعداد المركبة

1.1 كتابة العدد المركب

نعتبر الفضاء المركب $\mathbb{C}$ على أنه الفضاء $\mathbb{R}^2$ مع عمليتي جمع وضرب بالصورة التالية:
لكل $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ نعرف

1. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
2. $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

من التعريف السابق لعمليتي الجمع والضرب، نجد أن $\mathbb{C}$ حقل إبدالي حيث المحايد الجمعي هو العنصر $(0,0)$ والمحايد الضربي هو العنصر $(1,0)$. كما أننا نلاحظ أن

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0) \quad , \quad (a,0) * (b,0) = (ab, 0)$$

ومن هنا يتضح لنا أن العدد المركب $(a,0)$ ما هو إلا العدد الحقيقي a. الآن لنضع $i = (0,1)$، نجد أن

$$i^2 = (0,1) * (0,1) = (-1,0) = -1$$

ولذلك نسمي i عنصر الوحدة التخيلي حيث أن المساواة أعلاه لا تتحقق لأي عدد حقيقي. ومن هنا نرى كيف لبناء فضاء الأعداد المركبة أن يسهم في حل مشاكل مستعصية في الحقيقي ففي الوقت الذي تكون في المعادلة $x^2 + 1 = 0$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$، نجد أن لها حل في $\mathbb{C}$ وهو $x = i$.

فيما سبق رأينا أن العدد المركب يكتب على صورة زوج مرتب (a,b)، وبتحليل هذا الزوج نجد أن

$$(a,b) = (a,0) + i(b,0) = a + ib$$

وهذه هي الصورة الجبرية للعدد المركب $Z = (a,b)$ وعندها نسمي a الجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز له بالرمز $Re(z)$ و b الجزء التخيلي للعدد المركب z ونرمز له بالرمز $Im(z)$.

خصائص الأعداد المركبة ليكن $z = a + ib$ عدد مركب نعرف معيار أو مقياس العدد z على الصورة

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وهندسياً نرى أن معيار العدد المركب ما هو إلا المسافة بين العدد ونقطة الأصل $(0,0)$ في المستوى $\mathbb{R}^2$. نعرف أيضاً $\bar{z}$ مرافق العدد المركب z على الصورة $\bar{z} = a - ib$، وهندسياً نتحصل عليه بانعكاس العدد z حول المحور السيني. لاحظ أن $|\bar{z}| = |z|$، كما أننا نستطيع ومن خلال التعريفات السابقة أن نستنتج العلاقة التالية لكل $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} 1)\ \overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}\ , & 2)\ \overline{z*w} = \bar{z} * \overline{w} \\ 3)\ |z*w| = |z| * |w|\ , & 4)\ Re(z) \le |z| \\ 5)\ Im(z) \le |z|\ , & 6)\ Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ 7)\ Re(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} & \end{array}$$

نظرية 1.1.1 (متباينة المثلث)
ليكن $z, w \in \mathbb{C}$ فإن $|z+w| \leq |z| + |w|$.

برهان من خصائص الأعداد المركبة نعلم أن

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\ (\overline{z+w}) \\
&= (z+w)\ (\overline{z}+\overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + z * \overline{w} + \overline{z} * w \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z * \overline{w}) \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z * \overline{w}| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج المطلوب بأخذ الجذر للطرفين في العلاقة السابقة. ■

الصورة القطبية للعدد المركب. تطرقنا فيما سبق للصورة البيانية والجبرية للعدد المركب z. والآن سنستدل على العدد المركب بدلالة سعته ومقياسه وهو ما سنبينه أدناه.
ليكن $z = x + iy$ عدد غير صفري ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات الموجب، ولنضع $r = |z|$ فنجد أن

$$x = r\cos\theta\ ,\ \ y = r\sin\theta$$

وبالتالي يمكن كتابة العدد المركب z على الصورة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، وبما أن دالتي الجيب وجيب التمام دورية فإن

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

نسمي θ سعة العدد المركب ونرمز له بالرمز $\theta = arg(z)$. نلاحظ أنه باستخدام السعة يمكن كتابة العدد المركب بعدد لا نهائي من الطرق وهو الأمر الذي يجعل العلاقة $arg(z)$ لا تمثل دالة، وللتغلب على هذه المشكلة نعرف السعة الأساسية للعدد المركب $Arg(z)$ على أنها سعة العدد z التي تنتمي للفترة $(-\pi, \pi]$.

مثال 1.1.2 اكتب العدد المركب $z = 1 - i$ على الصورة القطبية وأوجد سعته الأساسية.

الحل

لكتابة العدد $1 - i$ على الصورة القطبية، يلزم إيجاد سعته الأساسية ومقياسه. وعند حساب المقياس نجد أن

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

وأن

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

أي أن الزاوية في الربع الرابع ومقدارها $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. وعليه فإن

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ولإيجاد السعة الأساسية نختار من بين السعات تلكم السعة التي تقع بين $-\pi$ و π، وبالتالي فإن $\frac{7\pi}{4}$ لا تصلح أن تكون سعة أساسية كون $\frac{7\pi}{4} > \pi$ ولذلك نقوم بعمل دورة كاملة بالاتجاه السالب فنتحصل على

$$-\pi < \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow Arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}.$$

1.2 نظرية دي موافر وجذور الأعداد المركبة

نستعرض في هذا القسم كيفية حساب قوى وجذور الأعداد المركبة. فعلى سبيل المثال لو طلب منا حساب $(1-i)^{100}$، فإننا باستخدام نظرية ذات الحدين والتي تنص على أن

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\ (n-k)!} a^{n-k} b^k,\ \ \forall a, b \in \mathbb{C} \text{ و } n \in \mathbb{N}$$

سيتطلب منا حساب 101 حد لايجاد المطلوب، وهو بلا أدنى شك عمل معقد يمكن تجنبه باستخدام نظرية دي موافر. ليكن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد مركب. عندها نجد أن

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta) \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

وبشكل عام، نستطيع باستخدام الاستقراء أن نبرهن النظرية التالية.

نظرية 1.2.1 (نظرية دي موافر)
ليكن $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j),\ \ j = 1, ..., n$ أعداد مركبة فإن

$$z_1 * ... * z_n = r_1 ... r_n(\cos(\theta_1 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + ... + \theta_n))$$

كتطبيق مباشر على هذه النظرية نجد أن

$$(1-i)^{100} = [\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})]^{100} = 2^{50}(\cos 175\pi + i\sin 175\pi) = -2^{50}$$

الآن لنأخذ عدد مركب $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ولنحاول إيجاد الأعداد المركبة z التي تحقق أن $z^n = \alpha$. لاحظ أنه بوضع

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

نجد باستخدام نظرية دي موافر أن $z_k^n = \alpha$. وبالتالي فإن الجذور النونية المختلفة للعدد المركب α هي

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})),\ \ k = 0, ..., n-1$$

ملاحظة 1.2.2 لاحظ أن الجذور النونية للعدد α تمثل هندسياً رؤوس مضلع منتظم له n من الأضلاع محاط بدائرة نصف قطرها $r^{\frac{1}{n}}$ سعة أول رؤوسه $\frac{\theta}{n}$.

1.3 الخصائص التوبولوجية للمركب والدوال المركبة

تعريف 1.3.1 لتكن X مجموعة و $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ بحيث

1. $d(x, y) = 0$ إذا وفقط إذا $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ لكل $x, y \in X$.
3. لكل $x, y, z \in X$ فإن $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

فإن d دالة مسافة، وعندها نسمي الزوج (X,d) فضاء متري. إذا كان $x \in X$ و $r > 0$ فإننا نعرف الكرة المفتوحة $B(x,r)$ والكرة المغلقة $\overline{B}(x,r)$ ذات مركز x ونصف قطر r، توالياً، كما يلي

$$B(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) < r\},\ \overline{B}(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) \le r\}.$$

بالعودة إلى مجموعة الأعداد المركبة فإن الزوج $(\mathbb{C},d)$ حيث $d(a,b) = |a-b|$ هو فضاء متري والكرات فيه ما هي إلى أقراص من المستوى.

تعريف 1.3.2 لتكن Ω مجموعة من $\mathbb{C}$ نقول أن Ω مجموعة مفتوحة إذا كان لكل $z \in \Omega$ يوجد $r > 0$ بحيث يكون $B(z,r) \subset \Omega$. كما نقول عن مجموعة F أنها مغلقة إذا كان مكملتها في المركب F^c مفتوحة.

مثال 1.3.3 المجموعة $O = \{z \in \mathbb{C},\ -1 < Re(z) < 1\}$ مجموعة مفتوحة بينما $O \cup \{1\}$ ليست كذلك. (لماذ؟!)

تعريف 1.3.4 نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء متري (X,d) بأنها محدودة إذا وفقط إذا كان $diam(A) < \infty$ حيث

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

تعريف 1.3.5 (الترابط)
نقول عن فضاء متري (X,d) بأنه مترابط إذا لم يوجد مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين A,B من X بحيث $A \cap B =$ و $A \cup B = X$. إذا كان Ω مفتوح ومترابط من X فإن Ω يسمى نطاق.

التفسير الهندسي للمجموعات المترابطة في المركب يمكن تصوره من خلال النظرية التالية.

نظرية 1.3.6 إذا كان Ω محتوى في $\mathbb{C}$، فإن Ω مترابط إذا وفقط إذا كان لكل $a,b \in \Omega$ يوجد مضلع $\Gamma_{a,b}$ يبدأ من a وينتهي بالنقطة b بحيث $\Gamma_{a,b} \subset \Omega$.

مثال 1.3.7 $\mathbb{C}^*$ مجموعة مترابطة بينما مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ليست كذلك.

تعريف 1.3.8 نقول عن مجموعة Ω من المركب بأنها محدبة إذا كان $a,b \in \Omega$ فإن

$$ta + (1-t)b \subset \Omega,\ \forall t \in [0,1]$$

أي أن القطعة $[a,b]$ محتواه في Ω.

ملاحظة 1.3.9 كل محدب يكون مترابط، ولكن العكس غير صحيح. فعلى سبيل المثال $\mathbb{C}^*$ مترابط لكنه غير محدب. (لماذا؟!)

المتتابعات. إن مفهوم التقارب للمتابعات في الفضاءات المترية لهو من المفاهيم المهمة التي تلعب دوراً بارزاً في دراسة الفضاءات المترية، وفي ما يلي نورد سندرس بعض النظريات ذات العلاقة بمحل دراستنا.

تعريف 1.3.10 نقول عن متتابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من فصاء متري (X,d) بأنها متقاربة إلى عنصر $x \in X$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n > N,\ x_n \in B(x,\varepsilon)$$

ونقول أن المتتابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n,m > N,\ d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

ملاحظة 1.3.11 تفسير تعريف التقارب هندسياً في الفضاء المركب، هو أنه لأي قرص مركزه x فإنه ابتداءً من حد معين تكون جميع عناصر المتتابعة (x_n) محتواة بداخل القرص. كما ولاحظ من التعريف السابق أن كل متتابعة تقاربية تكون كوشية أما العكس فليس صحيح. (اعط مثالاً على ذلك)

نتيجة 1.3.12 لتكن F مجموعة جزئية من فضاء متري X، فإن F مغلقة إذا وفقط إذا كل متتابعة من F متقاربة فإنها نهايتها تكون في F.

برهان البرهان متروك كتمرين للقارئ. ∎

نظرية 1.3.13 $\mathbb{C}$ فضاء متري تام. (أي أن كل متتابعة كوشية تكون تقاربية)

برهان قبل أن نخوض في تفاصيل البرهان، نذكر أولاً بأن $\mathbb{R}$ هو فضاء تام. الآن لتكن $(z_n = x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتابعة كوشية وليكن $\varepsilon > 0$ ، نجد أنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n, m > N$ فإن $|z_n - z_m| < \varepsilon$. لكن

$$|x_n - x_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتابعة (x_n) كوشية من $\mathbb{R}$ فهي تقاربية. بالمثل نستنتج تقارب المتتابعة (y_n)، ومن ذلك نجد أن المتتابعة (z_n) متقاربة. ∎

تعريف 1.3.14 ليكن A مجموعة جزئية من فضاء متري (X, d). نقول عن العنصر $x\ inX$ بأنه نقطة تراكم للمجموعة A إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ فإن

$$B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq$$

مثال 1.3.15 إذا وضعنا $\Omega = B(0, 1) \cup \{2i\}$ ، فإن العنصر 1 هو نقطة تراكم للمجموعة بينما العنصر $2i$ ليس كذلك.

نظرية 1.3.16 (نظرية كانتور) الفضاء المتري (X, d) تام إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة من مجموعات مغلقة وغير خالية (F_n) بحيث $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ و $diam(F_n) \to 0$ يكون $\bigcap F_n$ محتوٍ على نقطة واحدة فقط.

التراص. يأتي مفهوم التراص ليعمم دراستنا للمجموعات المنتهية وسنذكر في ما يلي ببعض التعاريف والنتائج المهمة ذات الصلة بمحل دراستنا.

تعريف 1.3.17 نقول عن مجموعة K من فضاء متري (X, d) بأنها متراصة إذا وفقط إذا كان لكل غطاء $\mathcal{G}$ من مجموعات مفتوحة للمجموعة K يمكن استخلاص غطاء جزئي منتهي.

مثال 1.3.18 في الفضاء المركب فإن كل مجموعة منتهية تكون متراصة، بينما المجموعة $B(0, 1)$ ليست متراصة. في الواقع الغطاء المكون من المجموعات المفتوحة $B(0, 1 - \frac{1}{n})$ هو غطاء لقرص الوحدة لكن لا يمكن أن نستخلص منه غطاء جزئي منتهي.

النظرية التالية ستمكننا نت الحكم على تراص المجموعات في المركب من عدمه، حيث أن المركب توبولوجياً ما هو إلا $\mathbb{R}^2$ كما رأينا في الفصل الأول.

نظرية 1.3.19 (نظرية هان–بوريل)
لتكن K مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$، فإن K تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

نظرية 1.3.20 إذا كان K متراص من فضاء متري X و A مجموعة غير منتهية من K، فإن A لها نقطة تراكم في K.

برهان إذا افترضنا أنه لا توجد نقطة تراكم للمجموعة A في K، فإنه لكل $x \in K$ توجد كرة B_x تحتوي على الأكثر على عنصر واحد من A. الآن العائلة $\mathcal{G} = \{B_x,\ x \in K\}$ تغطي المجموعة K، لكنه من غير الممكن أن نستخلص منها غطاء جزئي منتهي كون $A \subset K$ وغير منتهية. وهذا يناقض خاصية التراص للمجموعة K. ∎

الاتصال. نختتم هذا الفصل بدراسة الاتصال الدوال في الفضاءات المترية، وهو مفهوم سبق وأن تعرض القارئ باستفاضة، إلا أننا سنعرج على بعض النظريات المهمة المتعلقة بالإتصال.

تعريف 1.3.21 ليكن (X,d) و (Y,ρ) فضائين متريين ولتكن $f : X \longrightarrow Y$ دالة. نقول أن دالة متصلة عند $x \in X$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

إذا كانت f متصلة عند جميع نقاط X نقول أنها متصلة على X.

نظرية 1.3.22 إذا كانت f دالة بين فضاءين متريين X, Y، فإن العبارات التالية متكافئة:

1. f دالة متصلة.
2. لكل O مفتوح من Y فإن $f^{-1}(O)$ مفتوح من X.
3. لكل F مغلق من Y فإن $f^{-1}(F)$ مغلق من X.
4. إذا كانت (x_n) متتابعة متقاربة من x في الفضاء X فإن $(f(x_n))$ متقارية من $f(x)$ في الفضاء Y.

برهان متروك كتمرين للقارئ. ∎

نظرية 1.3.23 ليكن (X,d) و (Y,ρ) فضاءين متريين ولتكن $f : X \longrightarrow Y$ دالة. نقول أن دالة منتظمة الاتصال على X إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

طالما كانت $d(x,y) < \delta$.

من الواضح أن كل دالة منتظمة الإتصال تكون متصلة، بينما العكس غير صحيح، فعلى سبيل المثال الدالة $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ متصلة لكنها غير منتظة الإتصال على $\mathbb{R}$. (لماذا؟!)

نظرية 1.3.24 إذا كانت $f : X \longrightarrow Y$ دالة متصلة، فإن صورة كل متراص (مترابط) من X تحت تأثير الدالة f تكون متراص (مترابط) من Y. كما أن الدالة f تكون منتظمة الإتصال على كل متراص من X.

تعريف ونظرية 1.3.25 لتكن Ω مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ ولتكن (f_n) متتابعة من الدوال من Ω إلى $\mathbb{C}$. نقول أن متتابعة الدوال (f_n) متقاربة بانتظام من الدالة f على Ω إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

1.4 تمارين

تمرين 1.4.1 متى تتحقق المساواة في متباينة المثلث؟

تمرين 1.4.2 أثبت أنه لكل $z, w \in \mathbb{C}$، فإن

$$||z| - |w|| \le |z - w|$$

تمرين 1.4.3 أوجد معيار وسعة الأعداد التالية:

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}, \quad w = \frac{\alpha z}{\beta}$$

حيث $|\alpha| = 2,\ |\beta| = 3$ و $Arg(\alpha) = \frac{\pi}{4},\ Arg(\beta) = \frac{\pi}{2}$.

تمرين 1.4.4 أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للمقدار

$$\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}.$$

استنتج قيمة $\cos t + \cos 2t + ... + \cos nt$.

تمرين 1.4.5 أوجد حلول المعادلة $z^3 = 1 - i$.

تمرين 1.4.6 ليكن $z \in \mathbb{C}$ يحقق $Re(z^n) \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. بيِّن أن z هو عدد حقيقي غير سالب.

تمرين 1.4.7 بيِّن أن الدالة $f(z) = z + \frac{1}{z}$ متصلة على $\mathbb{C}^*$ ، ثم أوجد $f(\{|z| = 1\})$ و $f(\{|z| = 2\})$.

الدوال التحليلية

نبدأ هذا القسم بجموعة من التعاريف، حيث سنتطرق لمتسلسلات القوى وانطلاقاً من ذلك سنعرف بعض الدوال المهمة والتي ستكون مدخلاً للدوال التحليلية.

2.1 متسلسلات القوى

تعريف 2.1.1 لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية. نعرِّف $\limsup a_n$ و $\liminf a_n$ على الصورة التالية

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \ , \ \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

مثال 2.1.2 المتتابعة $(-1)^n$ لا تتقارب إلى أي عنصر من المركب إلا أن

$$\limsup(-1)^n = 1 \ , \ \liminf(-1)^n = -1$$

لاحظ أنه لأي متتابعة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ فإن النهايتين $\limsup a_n \ , \ \liminf a_n$ موجودتين على الرغم من أنهما قد تكونان $\pm\infty$. وعندما يكون

$$\limsup a_n = \liminf a_n$$

فإن المتتابعة (a_n) تكون متقاربة.

تعريف 2.1.3 لتكن $a_n, \ n \in \mathbb{N}$ عناصر من المركب. نقول أن المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة إلى a إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall m > N, \ \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n - a\right| < \varepsilon$$

ونقول أن المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_n |a_n|$ متقاربة.

كما هو شأن المتسلسلات في الحقيقي، فإن لنا النتيجة التالية.

نظرية 2.1.4 إذا كانت المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة مطلقاً فهي متقاربة.

برهان ليكن $\varepsilon > 0$ ولنضع $z_n = a_1 + \ldots + a_n$. حيث أن $\sum |a_n|$ متقاربة، إذاً يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. الآن، عندما $m > k \geq N$ فإن

$$|z_m - z_k| = |\sum_{n=k+1}^{m} a_n| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

أي أن المتتابعة (z_n) كوشية في $\mathbb{C}$، وبالتالي متقاربة. وهذا هو المطلوب. ∎

بمتسلسلة قوى حول $a \in \mathbb{C}$ نعني متسلسلة على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

لعل من أبسط الأمثلة على متسلسلات القوى هو المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. السؤال الآن، ماهي مجموعة النقاط التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة؟
نعلم أن

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

لكن عندما $|z| < 1$ فإن z^n تؤول إلى الصفر عندما n تؤول إلى المالا نهاية. وبالتالي فإنه

$$\forall |z| < 1, \ \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

بصورة عامة، نستطيع تحديد مجموع نقاط التقارب لمتسلسلة قوى من خلال النظرية التالية.

نظرية 2.1.5 لتكن $\sum a_n (z-a)^n$ متسلسلة القوى حول $a \in \mathbb{C}$ ولنعرّف العدد $0 \le R \le \infty$ على أنه

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

فإن

1. متسلسلة القوى متقاربة عندما $|z-a| < R$.
2. متسلسلة القوى متباعدة عندما $|z-a| > R$.
3. لكل $0 < r < R$ فإن متسلسلة القوى تتقارب بانتظام على المجموعة $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$.

عندها نسمي R نصف قطر تقارب المتسلسلة وهو العدد الوحيد الذي يحقق الخواص أعلاه.

برهان

∎

مثال 2.1.6 متسلسلة القوى

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

لها نصف قطر التقارب $R = 1$، ذلك أن

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

لاحظ أنه عندما $|z| = 1$ فإن المتسلسلة قد تكون متقاربة وقد تكون عكس ذلك. فعلى سبيل المثال هي متقاربة عندما $z = -1$ ومتباعدة عندما $z = 1$. (ماذا عن بقية النقاط على دائرة الوحدة؟!)

استناداً إلى نظرية 2.1.5، نستنتج ما يلي.

نتيجة 2.1.7 لتكن $\sum a_n(z-a)^n$ متسلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب R. فإن

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

حال وجود هذه النهاية.

برهان لنعتبر أن $a = 0$، ولنضع $c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. لنفرض أن $|z| < r < c$ وليكن $N \in \mathbb{N}$ الذي يحقق أن $|a_{n+1}|r < |a_n|$ لكل $n \geq N$. إذا وضعنا $M = |a_N|r$ سنجد أن

$$|a_{N+1}|r^{N+1} = |a_{N+1}|r^N r < |a_N|r^N = M$$

كما أن

$$|a_{N+2}|r^{N+2} = |a_{N+2}|r^{N+1}r < |a_{N+1}|r^{N+1} < M$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة، نتحصل على أن $|a_n r^n| < M$ وذلك لكل $n \geq N$. لكن في هذه الحالة فإن

$$|a_n z^n| = |a_n r^n|\frac{|z^n|}{r^n} \leq M\frac{|z^n|}{r^n},\ \forall n \geq N$$

وحيث أن $|z| < r$ فإن المتسلسلة $\sum a_n z^n$ متقاربة مطلقاً، وبالتالي فهي متقاربة. والآن من تعريف نصف قطر التقارب، نخلص إلا أن $c \leq R$. لننهي الإثبات، نحتاج تبيان أن $c \geq R$، وهو ما يمكن إثباته بطريقة مشابهة لما سبق، وذلك متروك للقارئ. ∎

مثال 2.1.8 (الدالة الأسية)
إذا اعتبرنا متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

نجد من النظرية السابقة أن

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

وعليه فإن المتسلسلة متقاربة على كامل المركب. وبالتالي فإن الدالة الأسية

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

معرفة على كامل المركب. لاحظ أنه لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ لنا $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 * \exp z_2$.

صيغة أويلر. نعلم من دراستنا السابقة لمفكوك تايلور في الحقيقي أنه لكل $x \in \mathbb{R}$ لنا

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ومن ذلك نجد أنه لكل $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

وبالتالي إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد مركب، فإن $z = re^{i\theta}$ وهذه هي صيغة أويلر للعدد المركب الذي سعته θ و مقياسه r.

ملاحظة 2.1.9 فيما يلي نورد بعض الملاحظات على الدالة الأسية:

1. مدى الدالة الأسية هو $\mathbb{C}^*$. ذلك أنه لكل $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ فإن بوضع $z = \ln r + i\theta$ نجد أن $e^z = w$. كما أن
$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x|\ |e^{iy}| = e^x > 0.$$

2. الدالة الأسية في الحقيقي تكون تناظر أحادي، وبالتالي فإن لها معكوس وهو اللوغاريتم الطبيعي. إلا أنها ليست كذلك في المركب. في الواقع إذا كان $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فإن
$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

بعد دراستنا للدالة الأسية، سننتقل الآن لتعريف الدوال المثلثية في المركب، فنعرّفها لكل $z \in \mathbb{C}$ كما يلي
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ونلاحظ من التعريف أن
$$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

وبنفس الطريقة، نجد أن
$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

تعيين اللوغاريتم. هدفنا الآن هو تعريف دالة f تحقق أن
$$e^{f(z)} = z$$

لاحظ من خواص الدالة الأسية فإن الدالة المنشودة f لن تكون معرفة عند الصفر. لو اقترحنا التعريف التالي
$$\log(z) = \ln|z| + iArg(z)$$

سنجد أن
$$e^{\log(z)} = e^{\ln|z| + iArg(z)} = e^{\ln|z|} * e^{iArg(z)} = |z|\ e^{iArg(z)} = z$$

تعريف 2.1.10 ليكون Ω مفتوح من المركب. نقول أن الدالة f تعيين للوغاريتم على Ω إذا وفقط إذا كانت f دالة متصلة على Ω وتحقق أن
$$\forall z \in \Omega,\ \ e^{f(z)} = z. \qquad (2.1.1)$$

مثال 2.1.11 الدالة $\log z$ تحقق الخاصية (2.1.1) على $\mathbb{C}^*$ إلا أنها غير متصلة على هذا المجال، ولكي تكون متصلة وجب نزع جميع الأعداد السالبة، وعندها يكون $\log z$ تعيين للوغاريتم على $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ونسميه التعيين الأساسي للوغاريتم نسبة للسعة الأساسية المستخدمة في التعريف.

لاحظ أنه لكل $\alpha \in \mathbb{R}$، بالإمكان أن نعرف تعيين للوغاريتم $\log_\alpha(z)$ على المجموعة $\mathbb{C} \setminus \{te^{i\alpha},\ t \geq 0\}$، وذلك بتعريف
$$\log_\alpha(z) = \ln|z| + iArg_\alpha(z)$$

حيث Arg_α هي سعة العدد المركب التي تنتمي للفترة $[\alpha, \alpha + 2\pi)$.

نظرية 2.1.12 (العلاقة بين تعيينات اللوغاريتم على نطاق)
ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و ليكن f,g تعيينين للوغاريتم على Ω، فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = g(z) + 2k\pi i$$

من النظرية السابقة يتبين لنا أن أي تعيين للوغاريتم على $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ يكون على الصورة $\log z + 2k\pi i$. كما نستنتج أنه لا يوجد تعيين للوغاريتم على $\mathbb{C}^*$. (لماذا؟!)

برهان ليكن $z \in \Omega$. حيث أن f,g تعيينين للوغاريتم، فإن

$$e^{f(z)} = e^{g(z)} = z \Rightarrow \exists k(z) \in \mathbb{Z},\ f(z) = g(z) + 2k(z)\pi i$$

بقي أن نبيّن أن $k(z)$ ثابتة على Ω. لكن

$$k(z) = \frac{f(z) - g(z)}{2\pi i}$$

هي دالة متصلة كون f,g كذلك، وعليه فإن $k(\Omega)$ مترابط من $\mathbb{Z}$ كصورة لمترابط بدالة متصلة. وبالتالي فإن $k(z)$ ثابتة. ■

2.2 الاشتقاق وقابلية التفاضل

بعد دراستنا لبعض الدوال من خلال متسلسلات القوى وتعيين اللوغاريتم، نجد أنفسنا في حالة جيدة لدراسة الدوال التحليلية.

تعريف 2.2.1 لتكن f دالة معرفة على مفتوح Ω من المركب. نقول أن f قابلة للاشتقاق عند $a \in \Omega$ إذا وفقط إذا كانت النهاية

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

موجودة. وعندها نرمز لتلك النهاية بالرمز $f'(a)$. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط Ω فإننا نقول أن f تحليلية على Ω.

لاحظ أن قابلية اشتقاق الدالة f عند a تقتضي وجود دالة $\varepsilon(h)$ تحقق أن $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ بحيث

$$f(a+h) - f(a) = h\varepsilon(h) + hf'(a)$$

ومن ذلك نرى أن قابلية الاشتقاق عند نقطة تقتضي اتصال الدالة عند هذه النقطة.

مثال 2.2.2 الدالة $f(z) = z^3$ تحليلية على كامل المركب (كلية). ذلك أنه لكل $z \in \mathbb{C}$ لنا

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{((z+h) - z)((z+h)^2 + (z+h)z + z^2)}{h} \\ &= 3z^2\end{aligned}$$

مثال 2.2.3 الدالة $f(z) = \overline{z}$ غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من المركب. في الواقع

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

وهذه النهاية غير موجودة، لأنه لو اعتبرنا $h \in \mathbb{R}$ سنجد أن

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = 1$$

في حين أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{ih}}{ih}=-1$$

مثال 2.2.4 إذا كانت f تعيين للوغاريتم على مفتوح Ω، فإن fتحليلية ولنا $f'(z)=\frac{1}{z}$ لكل $z\in\Omega$. في الواقع، إذا كان $z_0\in\Omega$ ووضعنا $f(z_0)=w_0$ فإن $e^{w_0}=z_0$ وعندما z تؤول إلى z_0 فإن w تؤول إلى w_0 كون الدالة f متصلة. وبالتالي فإن

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{w-w_0}{e^w-e^{w_0}}=\frac{1}{e^{w_0}}=\frac{1}{z_0}$$

تذكر أنه إذا كانت E مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ و $f:E\longrightarrow\mathbb{R}^m$ دالة، فإننا f تكون قابلة للتفاضل عند $a\in E$ إذا وفقط إذا وجد مؤثر خطي $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ بحيث

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-A(h)|}{|h|}=0$$

كما أن قابلية التفاضل للدالة f عند النقطة a ستكون مضمونة في حال كانت المشتقات الجزئية لمركبات الدالة f موجودة ومتصلة عند النقطة a. ومما سبق التذكير به، نرى أن الدالة $f(z)=\overline{z}$ قابلة للتفاضل عند جميع نقاط المركب على الرغم من أنها غير قابلة للاشتقاق، ذلك أن الدالة تعطى بالعلاقة التالية

$$f(x,y)=x-iy=(x,-y)$$

وبوضع $f_1(x,y)=x,\ f_2(x,y)=-y$ نجد أن

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}=1,\ \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}=-1$$

ومن هنا نرى أن الدالة قابلة لتفاضل عند جميع قيم $z=(x,y)$ وتفاضلها هو المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

كما في الحقيقي، فإن قواعد الاشتقاق تبقى صحيحة في المركب. وهو ما تنص عليه النظريتان التاليتان.

نظرية 2.2.5 ليكن Ω مفتوح من المركب ولتكن f,g دالتين قابلتين للاشتقاق عند $a\in\Omega$، فإن الدوال $f+g,\ f-g,\ f*g$ قابلة للاشتقاق عند a ولنا

$$(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a),\ (f*g)'(a)=f'(a)*g(a)+f(a)*g'(a)$$

وإذا كان $g(a)\neq 0$ فإن f/g قابلة للاشتقاق عند a ولنا

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)*g(a)-f(a)*g'(a)}{g^2}(a)$$

نظرية 2.2.6 (قاعدة السلسلة)
لتكن f قابلة للاشتقاق عند نقطة a من مجموعة مفتوحة Ω ولتكن g دالة معرفة على مفتوح Ω' يحوي النقطة $f(a)$ وقابلة للاشتقاق عند هذه النقطة، فإن الدالة $g\circ f$ تكون قابلة للاشتقاق عند a ولنا

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\ f'(a)$$

نظرية 2.2.7 ليكن Ω نطاق من المركب و f دالة تحليلية على Ω إذا كان $f'(z)=0$ لكل $z\in\Omega$، فإن f دالة ثابتة.

برهان لنفرض أن f قيمها حقيقية. ليكن $a \in \Omega$ ولنضع $\alpha = f(a)$ و $A = \{z \in \Omega,\ f(z) = \alpha\}$. لو بيّنا أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة، فإن المطلوب سينتج من كون Ω نطاق. إذا كانت (a_n) متتابعة من A تتقارب إلى عنصر a من Ω، فإن

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$$

وذلك بفضل اتصال الدالة f. بقي تبيان أن A مفتوحة، ولهذا الغرض، نأخذ $a \in A$ و $\varepsilon > 0$ بحيث $B(a,\varepsilon) \subset \Omega$. ليكن $z \in B(a,\varepsilon)$ ولنعرف الدالة

$$\gamma(t) = (1-t)a + tz,\ \ \forall t \in [0,1]$$

وبضع الدالة $g(t) = f(\gamma(t))$، نجد أن

$$\lim_{s\to t} \frac{g(s)-g(t)}{s-t} = \lim_{s\to t} \frac{g(s)-g(t)}{\gamma(s)-\gamma(t)} \frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t} = f'(\gamma(t)) * \gamma'(t) = 0$$

بالتالي الدالة الحقيقية g ثابتة على $[0,1]$، وعليه فإن $f(a) = f(z)$ لكل $z \in B(a,\varepsilon)$ كما أردنا برهانه. ∎

2.3 معادلات كوشي - ريمان

رأينا في القسم السابق أن قابلية التفاضل لا تفضي بالضرورة إلى قابلية الاشتقاق. وفي هذا القسم نورد معادلات كوشي - ريمان والتي تعتبر المفتاح للغز تلك العلاقة.

نظرية 2.3.1 إذا كانت $f = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة معرفة على مفتوح Ω من المركب، فإن f قابلة للاشتقاق عند $z_0 = (x_0,y_0)$ إذا وفقط إذا كانت f قابلة للتفاضل عند z_0 وتحقق معادلات كوشي - ريمان والتي تعطى على الصورة

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)\ ,\ \ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

وعندها يكون $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$.

برهان لنفرض أن f قابلة للاشتقاق عند z_0 وأن $h \in \mathbb{R}$، فإن

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0) + iv(x_0+h,y_0) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{h} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

من الناحية الأخرى، فإن

$$f'(z_0) = \lim_{ih\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h) + iv(x_0,y_0+h) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{ih} = -iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)$$

ومن ذلك نجد أن قابلية الاشتقاق تقتضي تحقق معادلات كوشي - ريمان.
لنفرض الآن أن الدالة f قابلة للتفاضل وتحقق معادلات كوشي - ريمان. نعلم أن قابلة التفاضل تقتضي وجود المشتقات الجزئية وأن تفاضل f عند النقطة (x_0,y_0) هو

$$Df(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & -u_x(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

وإذا كان $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{C}$، فإن قابلية اشتقاق f تفضي إلى أن

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h_1,y_0+h_2) - f(z) - Df(x_0,y_0)(h_1,h_2)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - h(u_x(z_0) + iv_x(z_0))|}{|h|}$$

وهذا يقتضي أن
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=u_x(z_0)+iv_x(z_0)$$
أي أن f قابلة للاشتقاق عند z_0. ∎

مثال 2.3.2 أوجد مجموعة النقاط التي تكون عندها الدالة $f(x,y)=x^2-3y^2+i(2xy+x^2+3x)$ قابلة للاشتقاق.

الحل

حيث إن المشتقات الجزئية
$$u_x=2x,\ u_y=-6y,\ v_x=2y+2x+3,\ v_y=2x$$
موجودة ومتصلة فإن الدالة f قابلة للتفاضل لجميع قيم $z=(x,y)\in\mathbb{C}$. وبالتالي فمن النظرية السابقة، الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند النقاط التي تحقق معادلات كوشي – ريمان وهي النقاط (x,y) التي تحقق
$$2x=2x,\ -6y=-2y-2x-3\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$
أي أن f قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط المستقيم $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ واشتقاقها هو $f'(x,y)=2x+i(2y+2x+3)$.

نظرية 2.3.3 ليكن Ω مفتوح من المركب، فإنه يوجد تعيين للوغاريتم على Ω إذا وفقط إذا وجدت دالة f تحليلية على Ω تحقق أن
$$f'(z)=\frac{1}{z},\ \forall z\in\Omega.$$

برهان ليكن g تعيين للوغاريتم على Ω فإنه من مثال 2.2.4 نجد أن $f'(z)=\frac{1}{z}$. بقي برهان الاتجاه الآخر. لنفرض أن f دالة تحليلية على Ω وتحقق أن $f'(z)=\frac{1}{z}$ ولنعرف الدالة
$$g(z)=z\ e^{-f(z)}$$
فنجد أن
$$g'(z)=e^{-f(z)}+ze^{-f(z)}(\frac{-1}{z})=0$$
وبالتالي فإن g ستكون ثابتة على كل جزء مترابط من Ω. لاحظ أن $g\neq 0$ وذلك من تعريف الدالة f وعليه فإنه يوجد $\alpha\in\mathbb{C}$ بحيث $g(z)=e^{\alpha}$. الآن الدالة $h(z)=f(z)+\alpha$ تحقق أن $e^{h(z)}=z$. أي أنها تعيين للوغاريتم على Ω. ∎

2.4 الدوال التوافقية

تعريف 2.4.1 ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة من صنف C^2 على Ω. نقول أن f دالة توافقية إذا وفقط إذا كان
$$\triangle f=f_{xx}+f_{yy}=0$$

مثال 2.4.2 الدالة $u(x,y)=2xy$ دالة توافقة على كامل المركب، ذلك أن $\triangle u=0+0=0$ كذلك الدالة $v(x,y)=x^2-y^2$ لأن $\triangle v=2-2=0$.

مثال 2.4.3 إذا كانت $f=u+iv$ دالة تحليلية على مفتوح Ω، فإن u,v دالتين توافقيتين على Ω، وذلك باستخدام معادلات كوشي – ريمان.

لاحظ أننا ساتخدمنا في المثال السابق حقيقة أن الدوال التحليلية تكون من صنف C^∞ وهو ما سنقوم ببرهانه لاحقاً.

تعريف 2.4.4 (المرافق التوافقي)
إذا كانت u الة توافقية على Ω فإننا نقول عن v بأنها مرافق توافقي اللدالة u إذا وفقط إذا كانت $f = u + iv$ دالة تحليلية على Ω.

مثال 2.4.5 رأينا فيما سبق أن الدالة $u(x,y) = 2xy$ هي دالة توافقية على كامل المركب. الآن نريد إيجاد مرافق توافقي v للدالة u. بعبارة أخرى نبحث عن v التي تجعل الدالة $f = 2xy + iv$ تحليلية على $\mathbb{C}$. ولكي تكون f تحليلية، فمن معادلات كوشي – ريمان يجب أن يكون

$$u_x = v_y \Rightarrow 2y = v_y \Rightarrow v_y = y^2 + \phi(x)$$

لكن $u_y = -v_x$ وبالتالي فإن

$$2x = -\phi'(x) \Rightarrow \phi(x) = -x^2 + c, \;\; c \in \mathbb{C}$$

إذاً المرافق التوافقي $v(x,y) = y^2 - x^2 + c$.

ملاحظة 2.4.6 المرافق التوافقي ليس بالضرورة أن يكون موجوداً لكل دالة توافقي. فعلى سبيل المثال الدالة $\log|z|^2$ هي توافقية على $\mathbb{C}^*$ إلا أنه لا يوجد لها مرافق توافقي. في الواقع، لو افترضنا وجود مرافق توافقي v الدالة $\log|z|^2$ فإن $f(z) = \log|z|^2 + iv$ ستكون تحليلية على $\mathbb{C}^*$. أي أن

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial \log(x^2+y^2)}{\partial x} + iv_x \\ &= \frac{\partial \log(x^2+y^2)}{\partial x} - i\frac{\partial \log(x^2+y^2)}{\partial y} \\ &= 2\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{2}{z} \end{aligned}$$

أي أن الدالة $\frac{1}{2}f$ مشتقتها $\frac{1}{z}$ وبالتالي من نظرية 2.3.3 يوجد تعيين للوغاريتم على $\mathbb{C}^*$ وهذا تناقض.

النظرية التالية تعطي الشروط التي تضمن وجود المرافق التوافقي.

نظرية 2.4.7 ليكن $a \in \mathbb{R}$ و $r > 0$، إذا كانت u دالة توافقية على $B(a,r)$ فإنه يوجد مرافق توافقي للدالة u.

برهان بدون فقدان العمومية، نعتبر أن $a = 0$. الآن الدالة

$$v(x,y) = \int_0^y u_x(x,t)\; dt - \int_0^x u_y(s,0)\; ds$$

تحقق المطلوب. ∎

2.5 تمارين

تمرين 2.5.1 لتكن $(a_n),(b_n)$ متتابعين من $\mathbb{R}$. أثبت أن

$$\limsup a_n \ge \liminf a_n, \quad \limsup(a_n+b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n, \quad \liminf(a_n+b_n) \ge \liminf a_n + \liminf b_n$$

تمرين 2.5.2 ليكن a عدد مركب. أوجد نصف قطر تقارب للمتسلسلات التالية.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

تمرين 2.5.3 أوجد حلول المعادلة

$$e^{2z} + 2e^{z} - 8 = 0.$$

تمرين 2.5.4 ليكن f تعيين للوغاريتم على Ω.

1. أثبت العبارات التالية أو انفها بمثال مضاد:

   (a) لكل $z \in \Omega$ فإن $f(z^2) = 2f(z)$.

   (b) لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\exp(nf(z)) = z^n$.

2. إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ ، أثبت إنه بوضع

$$z^{\alpha} = e^{\alpha f(z)},$$

   نحصل على دالة تحليلية معرفة على Ω. ثم أوجد قيمة $(1+i)^i$.

3. اقترح طريقة لإيجادالمقدار z^{α} حيث $z \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}$.

تمرين 2.5.5 أثبت أنه إذا كانت f دالة تحليلية على مفتوح Ω من المركب، فإن الدالة $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ تحليلية على $\overline{\Omega}$.

تمرين 2.5.6 أثبت أنه يوجد مرافق توافقي للدالة $\log|z|^2$ على القرص $B(-3,2)$.

التكامل المركب

3.1 القوس الأملس قطعا

تعريف 3.1.1 نسمي قوس من $\mathbb{C}$ كل دالة $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ متصلة حيث $[a,b]$ فترة من $\mathbb{R}$, ونرمز لصورة القوس γ في $\mathbb{C}$ بالرمز γ^*. إذا كانت $\gamma'(t)$ موجودة لكل $t \in [a,b]$ و γ' متصلة فإن γ يسمى قوس أملس (*smooth path*). ونقول عن القوس المتصل γ بأنه أملس قطعاً (*pointwise smooth*) إذا وجدت تقسيمة $a = t_0 < t_1.... < t_n = b$ بحيث على الفترة (t_j, t_{j+1}) القوس γ يتساوى مع قوس أملس معرف على $[t_j, t_{j+1}]$. تسمى $\gamma(a)$ بداية القوس و $\gamma(b)$ نهايته. إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإن القوس γ يسمى قوس مغلق.

ملاحظة 3.1.2 المعني بقابلية اشتقاق الدالة γ عند أطراف الفترة $[a,b]$ هو وجود النهاية من جهة واحدة، أي أن

$$\gamma'(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \ , \ \gamma'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b+t) - f(b)}{t}$$

أمثلة 3.1.3 في ما يلي نعطي بعض الأمثلة على أقواس ملساء قطعاً.

- الدائرة التي مركزها $z_0 \in \mathbb{C}$ ونصف قطرها $r > 0$ والتي نرمز لها بالرمز $\gamma_{(z_0,r)}$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \gamma_{(z_0,r)} : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) &= re^{it} \end{aligned}$$

لاحظ أن القوس $\gamma_{(z_0,r)}$ أملس ومغلق.

- القطعة $[A, B]$ حيث A, B أعداد مركبة, تعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} \gamma_{[A,B]} : [a,b] &\longrightarrow [A,B] \\ \gamma_{[A,B]}(t) &= \frac{(b-t)A + (t-a)B}{b-a} \end{aligned}$$

عندما $a = 0 \ , \ b = 1$ فإن $\gamma_{[A,B]}(t) = (1-t)A + tB$.

- ليكن Γ معرف كما يلي:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} e^{it} & ,0 \le t \le \pi \\ \frac{2t-3\pi}{\pi} & ,\pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

نلاحظ أن Γ^* هو النصف العلوي لدائرة الوحدة اتحادالقطعة $[-1,1]$ وبالتالي هو ليس بقوس أملس (لوجود انكسار عند $t = \pi$) ولكنه قوس أملس قطعاً ومغلق.

لاحظ أن تطابق صورتي قوسين γ_1 و γ_2 لا يعني بالضرورة أن لهما نفس الخصائص. فعلى سبيل المثال إذا اعتبرنا الفترة $[0,2\pi]$ فإن القوسين

$$\gamma_{(0,1)}(t) = e^{it} \quad , \quad \gamma_{n(0,1)}(t) = e^{int}, n \in \mathbb{N}$$

لهما نفس الصورة على الرغم من أن $\gamma_{(0,1)}$ أحادية على الفترة $(0,2\pi)$ بينما $\gamma_{n(0,1)}$ ليست كذلك. سنبين أثر هذا الاختلاف لاحقاً عندما ندرس دليل القوس المغلق والأملس قطعاً.

3.2 التكامل على القوس

تعريف 3.2.1 ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً فإن طول γ والذي نرمز إليه بالرمز L_γ هو

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

مثال 3.2.2 $L_{\gamma_{(0,1)}} = \int_0^{2\pi} |ie^{it}|dt = 2\pi$ بينما $L_{\gamma_{n(0,1)}} = \int_0^{2\pi} |nie^{int}|dt = 2n\pi$.

مثال 3.2.3 اعتبر القوس Γ كما في المثال 3.1.3 , نجد أن

$$L_\Gamma = \int_0^\pi |ie^{it}|dt + \int_\pi^{2\pi} |\frac{2}{\pi}|dt = \pi + 2$$

تعريف 3.2.4 ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f دالة متصلة على γ^* فإن تكامل الدالة f على γ يعرف كالتالي

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

مثال 3.2.5 إذا كانت $f(z) = \frac{1}{z}$ و $r > 0$ فإن

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}dt = 2\pi i$$

من ناحية أخرى نجد أن

$$\int_{\gamma_{n(0,r)}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{nit}} nire^{nit}dt = 2n\pi i$$

مثال 3.2.6 إذا كانت $f(z) = z$ و $A, B \in \mathbb{C}$ فإن

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{[A,B]}} f(z)dz &= \int_0^1 ((1-t)A + tB)(B-A)dt \\ &= (B-A)\left[At + \frac{t^2}{2}(B-A)\Big|_0^1\right] = \frac{1}{2}(B^2 - A^2)\end{aligned}$$

نظرية 3.2.7 ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f دالة تحليلية على مفتوح يحوي γ^* فإن

$$\int_\gamma f'(z) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

برهان من النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل نجد أن

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [f \circ \gamma]'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

■

ملاحظة 3.2.8 في برهان النظرية السابقة استخدمنا أن f' متصلة دون أن نبرهن ذلك. لاحقاً سنبين أن الدوال التحليلية تكون قابلة للاشتقاق مالا نهاية من المرات, وإلى ذلك الحين سنستخدم هذه الحقيقة.

تطبيقات على نظرية 3.2.7

1. 1 . لتكن $f(z) = e^z$ فإن $\int_{\gamma_{[A,B]}} e^z dz = e^B - e^A$.

2. 2 . علاوة على الشروط في النظرية إذا كان γ مغلق فإن $\int_\gamma f'(z)dz = 0$ وبالتالي نرى أنه لا يوجد فرع دالة لوغارتمية fعلى أي مفتوح يحوي دائرة $\gamma_{(0,r)}$. لأنه لو وجد هذا الفرع للوغاريتم لكان

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} f'(z)dz = 0$$

من ناحية أخرى وحيث أن $f'(z) = \frac{1}{z}$ فإنه كما رأينا في الأمثلة السابقة

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} \frac{1}{z}dz = 2\pi i \neq 0$$

وهذا تناقض.

مثال 3.2.9 ليكن $\gamma_1(t) = t + it,\ 0 \leq t \leq 1$ و $\gamma_2(t) = t + it^2,\ 0 \leq t \leq 1$. لاحظ أن $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ و $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = 1 + i$ أي أن القوسين لهما نفس البداية والنهاية. الآن نقوم بحساب التكاملات التالية

$$\int_{\gamma_1} zdz\ ,\ \int_{\gamma_2} zdz\ ,\ \int_{\gamma_1} \bar{z}dz\ ,\ \int_{\gamma_2} \bar{z}dz$$

لاحظ أن $\gamma_1 = [0, 1 + i]$ وبالتالي فإن

$$\int_{\gamma_1} zdz = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

وباستخدام التعريف نجد أن

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} zdz &= \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it)dt \\ &= \int_0^1 t + 3it^2 - 2t^3 dt = i\end{aligned}$$

مرة أخرى نستخدم التعريف لحساب التكاملين المتبقيين, فنتحصل على

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1 + i)dt = (1 + i)\frac{1 - i}{2} = 1$$

بينما

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it^2)(1 + 2it)dt = \int_0^1 t + it^2 + 2t^3 dt = 1 + \frac{i}{3}$$

العبرة من المثال السابق.
رأينا أن في المثال أعلاه أن $\int_{\gamma_1} zdz = \int_{\gamma_2} zdz$ وذلك لأن الدالة $f(z) = z$ لها أصل $F(z) = \frac{z^2}{2}$ وبتطبيق نظرية 3.2.7 يتضح لنا سبب تساوي التكاملين. من جهة أخرى وجدنا أن $\int_{\gamma_1} \bar{z}dz \neq \int_{\gamma_2} \bar{z}dz$ وذلك لأن الدالة $\bar{z}$ ليس لها أصل في $\mathbb{C}$ على الرغم من كونها دالة متصلة. فلو افترضنا وجود دالة تحليلية $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ بحيث

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \bar{z} = x - iy$$

فإنه من معادلات كوشي-ريمان نجد أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x \ , \ \frac{\partial U}{\partial y} = y \Longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2$$

أي أن الدالة U ليست توافقية, وهذا يتناقض مع كون F دالة تحليلية. وهنا يتجلي لنا أحد الفروق بين المركب والحقيقي. ففي الحقيقي كل دالة f متصلة على $[a,b] \subset \mathbb{R}$ يوجد لها أصل F بحيث لكل $x \in (a,b)$ فإن $F'(x) = f(x)$ وذلك بوضع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

نظرية 3.2.10 (بعض خصائص التكامل)
ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f, g دالتين متصلتين على γ^* و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, فإن

1. $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$.
2. $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$ حيث γ^- هو القوس المعاكس للقوس γ والمعرف بالعلاقة $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$
3. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma \left|f(z)dz\right| \le \sup_{z\in\gamma^*} |f(z)|\ L_\gamma$.

برهان سنثبت الفقرة 3 ونترك الفقرتين 1 و 2 كتمرين. ليكن $\int_\gamma f(z)dz = re^{i\theta}$, إذاً

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = r &= \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz \\ &= \int_a^b Re(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\ &\le \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| dt \\ &\le \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\ L_\gamma\end{aligned}$$

■

3.3 دليل الأقواس المغلقة

مفهوم الدليل هو أحد المفاهيم المهمة في التحليل المركب, وسنرى استخداماته عندما ندرس الصيغة العامة لتكامل كوشي وكذلك نظرية البواقي, وفي هذا الفصل نورد تعريف الدليل وأهم خواصه.

تعريف 3.3.1 ليكن γ قوس أملس قطعاً ومغلق و $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ فإن دليل القوس γ بالنسبة للعنصر z_0 هو

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

مثال 3.3.2 ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $\gamma_{n(z_0,1)}(t) = z_0 + e^{int},\ 0 \le t \le 2\pi$, فإن

$$I(\gamma_{n(z_0,1)}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n(z_0,1)}} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} nidt = n$$

بنفس الطريقة نجد أن

$$I(\gamma^-_{n(z_0,1)}, z_0) = -n$$

من المثال السابق يبدو لنا وكأن الدليل هو عبارة عن عدد اللفات التي يصنعها القوس حول z_0 بإشارة موجبة عندما يكون الدوران باتجاه الطواف وبإشارة سالبة عندما يكون عكسه. النظرية التالية تؤكد هذا الفهم للدليل.

نظرية 3.3.3 إذا كان $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً ومغلق، فإن الدالة $z \mapsto I(\gamma, z)$ متصلة على $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

برهان ليكن $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$، وليكن $\alpha = d(z_0, \gamma^*)$. إذا كان $z \in B(z_0, \frac{\delta}{4})$، فإن $d(z,\gamma^*) < \frac{\delta}{4}$

$$|z - \gamma(t)| > \frac{\delta}{4}, \ \forall t \in [a,b]$$

و لنا

$$\begin{aligned} |I(\gamma; z) - I(\gamma; z_0)| &\leq \int_a^b \frac{|z_0 - z|}{|(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - z_0)|} |\gamma'(t)| dt \\ &\leq |z - z_0| \frac{\delta^2}{16} \ L_\gamma \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الدالة $I(\gamma; z)$ متصلة على $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. ■

نظرية 3.3.4 ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً ومغلق فإنه لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ يكون $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ وهو ثابت على كل جزء مترابط من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ويكون صفراً على الجزء المترابط غير المحدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

برهان ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً ومغلق و ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. نعرف الدالة g على الفترة $[a,b]$ كما يلي

$$g(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

لاحظ أن الدالة g متصلة وتحقق أن $g(a) = 0$ و $g(b) = 2\pi i \ I(\gamma, z)$ وأن $g'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$. الآن نضع $\psi(x) = e^{g(x)}$ من الواضح أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة تكون فيها الدالة γ' متصلة ولنا

$$\psi'(s) = g'(s) e^{g(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \psi(s)$$

وبالتالي نجد أن

$$\left(\frac{\psi(s)}{\gamma(s) - z} \right)' = \frac{\psi'(s)(\gamma(s) - z) - \gamma'(s)\psi(s)}{(\gamma(s) - z)^2} = 0$$

أي أن الدالة $\frac{\psi(x)}{\gamma(x) - z}$ هي ثابتة على كل فترة تكون عليها الدالة γ' متصلة وبما أن γ قوس أملس قطعاً فإنه توجد تقسيمة $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ بحيث γ' تكون متصلة على (x_j, x_{j+1}). إذاً من الاتصال يكون لنا

$$\frac{\psi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\psi(x_1)}{\gamma(x_1) - z} = \ldots = \frac{\psi(b)}{\gamma(b) - z}$$

وبما أن $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإن

$$\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow 1 = e^{2\pi i I(\gamma, z)}$$

وهذا يقتضي أن $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ وهو ثابت على كل جزء مترابط من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ لأن الدالة $z \mapsto I(\gamma, z)$ متصلة على $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (لماذا؟!). بقي أن نبين أنه الدليل يساوي الصفر على الجزء المترابط غير المحدود وهذا واضح لأنه ثابت على هذا الجزء المترابط وبالتالي

$$I(\gamma, z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = 0$$

■

ملاحظة 3.3.5 إذا كان γ كما في النظرية السابقة فإن الجزء المترابط الغير محدود يكون وحيداً وذلك لأن γ^* متراص كصورة للمتراص $[a,b]$ بالدالة المتصلة γ وبالتالي يوجد $R > 0$ بحيث $\gamma^* \subset B(0,R)$ وبما أن $\mathbb{C} \setminus B(0,R)$ مترابط ينتمي للجزء المترابط الغير محدود فإن الجزء المترابط غير المحدود يكون وحيداً.

مثال 3.3.6 ليكن γ كالتالي

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + e^{2it} & , 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ -1 + e^{-4i(t-\frac{\pi}{2})} & , \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ 1 + e^{it} & , \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

لاحظ أن $\gamma^* = \gamma^*_{(1,1)} \cup \gamma^{-*}_{(-1,1)}$ وبتطبيق النظرية السابقة نجد أن

$$I(\gamma, \frac{1}{2}) = 1 \ , \ I(\gamma, -1 - \frac{i}{2}) = -1 \ , \ I(\gamma, -5) = I(\gamma, 2012i) = 0$$

3.4 نظرية كوشي

هذا القسم يتناول نظرية كوشي و سنتدرج في ذلك من الصورة البسيطة إلى الصورة العامة.

نظرية 3.4.1 (نظرية كوشي)

لتكن f دالة تحليلية على مفتوح يحوي $\overline{B}(a,r)$. فإن

$$\int_{\gamma_{(a,r)}} f(z)dz = 0$$

برهان لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. حيث أن الدالة f تحليلية إذاً المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, x_y موجودة ومتصلة و تحقق $u_x = v_y \ , u_y = -v_x$ (معادلات كوشي-ريمان). وبالتالي من نظرية جرين نجد أن

$$\int_{\gamma_{(a,r)}} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \int\int_{B(a,r)} (-v_x - u_y)dx\ dy = 0$$

بالمثل نجد أن

$$\int_{\gamma_{(a,r)}} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \int\int_{B(a,r)} (u_x - v_y)dx\ dy = 0$$

وبذلك نتحصل على المطلوب لأن

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{(a,r)}} f(z)dz &= \int_{\gamma_{(a,r)}} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma_{(a,r)}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\gamma_{(a,r)}} v(x,y)dx + u(x,y)dy \end{aligned}$$

■

مثال 3.4.2 لتكن $f(z) = z^2, g(z) = \frac{\sin z}{z+2}$ بتطبيق نظرية كوشي نجد أن

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} z^2 dz = 0$$

وذلك لأن الدالة z^2 تحليلية على كامل $\mathbb{C}$. بالمثل يكون لنا

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} \frac{\sin z}{z+2} dz = 0$$

لأن $\frac{\sin z}{z+2}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{-2\}$ وبالتالي يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة Ω تحوي $\overline{B}(0,1)$ بحيث تكون الدالة $\frac{\sin z}{z+2}$ تحليلية. لكن لا يمكن تطبيق نظرية كوشي لحساب التكامل

$$\int_{\gamma(0,2)} \frac{3z^6}{z-1}dz$$

كون الدالة $\frac{3z^6}{z-1}$ ليست تحليلية على $B(0,2)$ لأن العنصر $1 \in B(0,2)$, وسوف نتناول لاحقاً كيفية التعامل مع هكذا تكاملات عندما ندرس صيغ كوشي التكاملية.

الآن نقوم بإثبات مجموعة من النظريات والتي من شأنها أن تمهد لنا الطريق للوصول إلى نظرية كوشي في صيغتها العامة.

نظرية 3.4.3 لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ و $\triangle$ مثلث من Ω بحيث داخلية $\triangle$ محتواه في Ω فإن

$$\int_{\triangle} f(z)dz = 0$$

برهان لنفرض أنه يوجد $a > 0$ بحيث

$$\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right| = a$$

ليكن محيط المثلث $\triangle$ يساوي L, نقوم بتوصيل أنصاف أضلاع المثلث فنحصل على أربعة مثلثات وبالتالي فإنه على أحد هذه المثلثات وليكن $\triangle_1$ يكون

$$\left|\int_{\triangle_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right|, \quad L(\triangle_1) = \frac{L}{2}$$

نستمر بهذه الطريقة فنبني متتابعة من المثلثات $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق

$$\left|\int_{\triangle_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\triangle_{n-1}} f(z)dz\right| \geq \ldots \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right|, \quad L(\triangle_n) = \frac{L}{2^n}$$

وحيث أن $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتابعة من مجموعات متراصة تحقق أن

$$\triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots \supset \triangle_n \supset \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} L(\triangle_n) = 0$$

فإنه توجد نقطة وحيدة z_0 بحيث $z_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \triangle_n$. وبما أن f تحليلية على Ω فإنه توجد دالة O تحقق أن $\lim_{z\to z_0} O(z-z_0) = 0$ بحيث

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)O(z-z_0)$$

وبالتالي

$$\frac{a}{4^n} \leq \left|\int_{\triangle_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\triangle_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)O(z-z_0)dz\right|$$

لكن الدالة $f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ هي كثيرة حدود أي أن لها أصل وعليه فإن

$$\int_{\triangle_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)dz = 0$$

من ناحية أخرى وباستخدام نظرية 3.2.10 نجد أن

$$\left|\int_{\triangle_n} (z-z_0)O(z-z_0)dz\right| \leq \frac{L}{2^n}\frac{L}{2^n}\sup_{z\in\triangle_n}|O(z-z_0)|$$

أي أن
$$\frac{a}{L^2} \leq \sup_{z\in\triangle_n} |O(z-z_0)|$$
وهذا يتناقض مع كون $a > 0$ لأن
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\triangle_n} |O(z-z_0)| = 0$$
■

مثال 3.4.4 الشرط على داخلية المثلث في النظرية السابقة هو شرط أساسي فعلى سبيل المثال الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ ولكن على المثلث $\triangle_1 = [-1-i, 1-i, i]$ نجد أن
$$\int_{\triangle_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i\ I(\triangle_1, 0) = 2\pi i \neq 0$$
وهذا لا يتناقض مع النظرية لأن النقطة صفر تنتمي لداخلية المثلث $\triangle_1$, بينما على المثلث $\triangle_2 = [1, 2, 1+i]$ فإن
$$\int_{\triangle_2} \frac{1}{z} dz = 0$$
لأن داخلية المثلث $\triangle_2$ محتواه في $\mathbb{C}^*$

نظرية 3.4.5 (نظرية موريرا)
لتكن f دالة متصلة على نطاق (مفتوح ومترابط) Ω بحيث تكاملها على كل مثلث من Ω يساوي صفر فإن f تكون تحليلية.

برهان لاحظ أن f على Ω إذا كانت تحليلية على كل قرص محتوى في Ω وبالتالي يكفي أن نبرهن النظرية عندما $\Omega = B(a, r)$. نعرف الدالة
$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw, \quad \forall z \in B(a, r)$$
ليكن $h \in \mathbb{C}$ بحيث يكون المثلث $\triangle = [a, z, z+h]$ محتوى في $B(a, r)$. حيث أن
$$0 = \int_{\triangle} f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,a]} f(w)dw$$
فإن
$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw = h\int_0^1 f(z+th)dt$$
وبالتالي يكون
$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(z+th) - f(z)dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(z+th) - f(z)|$$
الآن بأخذ النهاية عندما h تؤول إلى الصفر ينتج أن $F'(z) = f(z)$. أي أن الدالة f تحليلية على $B(a, r)$. ■

ملاحظة 3.4.6 لاحظ أنه في النظرية السابقة لوكان Ω عبارة عن قرص فإن النتيجة ستكون أقوى بأن تكون الدالة f لها أصل وهو F كما تم تعريفة في البرهان. بصورة عامة، ليس من الضروري أن يكون للدالة f أصل حتى لو حققت شروط النظرية 3.4.5. (أعط مثالاً على ذلك؟!)

النتيجة التالية تعطي الشرط اللازم والضروري لوجود أصل للدالة المتصلة.

نظرية 3.4.7 لتكن f دالة متصلة على نطاق Ω من $\mathbb{C}$، فإن f لها أصل إذا وفقط إذا كان تكامل الدالة f على كل قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω مساوياً للصفر.

برهان لنفرض أن الدالة المتصلة f لها أصل. نجد أن المطلوب ينتج مباشرةً من نظرية 3.2.7. وهذا يبرهن الاتجاه الأول. لبرهان الاتجاه الآخر سنتبع نفس الفكرة الواردة في برهان نظرية 3.4.5. ليكن $a \in \Omega$ ولنعرف F كما يلي

$$F(z) = \int_{\gamma(a,z)} f(w)\ dw, \ \ \forall z \in \Omega$$

حيث $\gamma(a,z)$ قوس أملس قطعاً يصل بين العنصرين a وَ z في Ω. لاحظ أن F هي دالة حسنة التعريف، وذلك لضمان وجود القوس $\gamma(a,z)$ كون Ω نطاق. كما أنه لو وجد قوس آخر $\gamma'(a,z)$ يربط العنصرين a وَ z، فإن القوس $\gamma = \gamma(a,z) \cup \gamma'(a,z)$ هو قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω. وبالتالي فإن المعطيات في النظرية ستفضي إلى أن

$$\int_{\gamma} f(w)\ dw = 0 \Rightarrow \int_{\gamma(a,z)} f(w)\ dw = \int_{\gamma'(a,z)} f(w)\ dw$$

ليكن $h \in \mathbb{C}$ بحيث تكون القطعة $[z, z+h]$ محتواة في Ω. والآن بأخذ القوس $\gamma = \gamma(a,z) \cup [z, z+h] \cup \gamma^{-}(a, z+h)$، نجد أن

$$\int_{\gamma} f(w)\ dw = 0 \Rightarrow F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\ dw$$

وبنفس الطريقة كما برهان نظرية موريرا نجد أن $F'(z) = f(z)$. ■

رأينا سابقاً أن الدالة التحليلية على نطاق ليس بالضرورة أن يكون لها أصل على مجال تعريفها. وفيما يلي نورد مفهوم المجموعة بسيطة الترابط والذي يعتبر مفتاح لغز العلاقة بين الدوال التحليلية ووجود الأصل لهذه الدوال.

تعريف 3.4.8 نقول عن مجموعة مترابطة $\Omega \subset \mathbb{C}$ بأنها بسيطة الترابط إذا وفقط إذا كان لكل قوس أملس قطعاً ومغلق γ من Ω تكون الأجزاء المترابطة المحدودة من $\Omega \setminus \gamma^*$ محتواه في Ω.

مثال 3.4.9 المجموعتان $\mathbb{C}^*$ و $B(0,2) \setminus B(1, \frac{1}{2})$ مترابطتان إلا أنهما ليستا بسيطتي الترابط.

مثال 3.4.10 $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ و $B(i,2)$ و $\{z \in \mathbb{C} : -2 \le Im(z) \le 4\}$ هي مجموعات بسيطة الترابط.

سنعطي أدناه نظرية من أهم النظريات في التحليل المركب والتي تعد أحد المعاول القوية في هذا المجال. وكون النظرية متقدمة وتتطلب إلمام أعمق، سنورد النظرية بدون برهان.

نظرية 3.4.11 ليكن $\Omega \neq \mathbb{C}$ نطاق، فإن Ω بسيط الترابط إذا وفقط إذا وجدت دالة تحليلية f أحادية وشاملة من Ω إلى قرص الوحدة.

الآن لدينا تصور بأن القارئ مستعد للخوض في تفاصيل نظرية كوشي العامة.

نظرية 3.4.12 (نظرية كوشي الصيغة العامة)
لتكن f دالة تحليلية على Ω بسيط الترابط من $\mathbb{C}$ و γ قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω فإن

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

برهان يكفي أن نبين أن الدالة f لها أصل. بفضل نظرية 3.4.11، من الممكن أن نعتبر أنّ $\Omega = B(0,1)$. وبالتالي فإنه لكل مثلث $\triangle \subset \Omega$ تكون داخلية $\triangle$ محتواه في Ω. لكن f تحليلية وبالتالي من نظرية 3.4.3 يكون

$$\int_{\triangle} f(z)dz = 0$$

وبتطبيق نظرية موريرا نجد أن الدالة f لها أصل Ω. ∎

كتطبيق لنظرية كوشي نعطي النتيجة التالية

نتيجة 3.4.13 لتكن f دالة تحليلية على بسيط الترابط Ω و γ_1, γ_2 قوسين أملسين قطعاً بحيث $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \Omega$ ولهما نفس البداية والنهاية فإن

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

برهان ينتج المطلوب بتطبيق النظرية السابقة على القوس $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^{*-}$ ∎

3.5 صيغ كوشي التكاملية و مفكوك تايلور للدوال التحليلية

نبدأ هذا القسم بنظريتين لهما أهمية في أثبات نظرية مفكوك تايلور

تمهيدية 3.5.1 (نظرية ليبنز)
لتكن $\phi : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة و لتكن $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة معرفة على الصورة

$$g(s) = \int_a^b \phi(t,s)dt$$

فإن g دالة متصلة. علاوة على ذلك , إذا كانت $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ موجودة ومتصلة فإن $g \in C^1$ ولنا

$$g'(s) = \int_a^b \frac{\partial \phi(t,s)}{\partial s} dt$$

تمهيدية 3.5.2 ليكن γ قوس أملس قطعاً من $\mathbb{C}$ ولتكن f_n و f دوال متصلة على γ^*. إذا كانت f_n تتقارب بانتظام من f على γ^* فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

نظرية 3.5.3 (صيغة تكامل كوشي)
ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي القرص $\overline{B}(a,r)$ فإنه لكل $z \in B(a,r)$ يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

برهان لنفترض أولاً أن $a = 0$ و $r = 1$. بما أن $z \in B(0,1)$ فإن

$$1 = I(\gamma_{(0,1)}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt$$

وبالتالي يكون

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)e^{it}}{e^{it}-z}dt$$

الآن على الفترة $[0,1]\subset\mathbb{R}$ نعرف الدالة

$$g(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(f(e^{it}+s(z-e^{it}))-f(z))e^{it}}{e^{it}-z}dt$$

لاحظ أن الدالة g حسنةالتعريف على الفترة $[0,1]$ لأن

$$|e^{it}+s(z-e^{it})|\leq|e^{it}(1-s)|+|sz|<(1-s)+s=1$$

و عندها نجد أن $g(1)=0$ وإذا بيّنا أن $g(0)=0$ فإن المطلوب ينتج بصورةٍ مباشرة. لكن من نظرية ليبنز لنا

$$\begin{aligned}g'(s)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-(e^{it}-z)(f'(e^{it}+s(z-e^{it})))e^{it}}{e^{it}-z}dt\\&=\frac{-1}{2\pi i(1-s)}\int_0^{2\pi}(f(e^{it}+s(z-e^{it}))'dt=0\end{aligned}$$

وعليه فإن $g(1)=g(0)=0$.

في الحالة العامة وعندما f تحليلية بجوار $B(a,r)$ و $\xi_0\in B(a,r)$ فإن $z_0=\frac{\xi_0-a}{r}\in B(0,1)$, الآن نعرف

$$g(z)=f(a+rz)$$

فنجد أن الدالة g تحليلية بجوار $B(0,1)$, وبالتالي نص النظرية يتبع عند تطبيق الفقرة الأولى من البرهان على الدالة g. ∎

تطبيقات على نظرية 3.5.3

1. 1 . اعتمدنا سابقاً أن كل دالة تحليلية تكون من صنف C^∞ دون أن نبرهن ذلك , والآن نبين هذه الحقيقة. لنفرض أن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي القرص $\overline{B}(a,r)$, عندها يوجد $R>r$ بحيث تكون f تحليلية على $B(a,R)$ ومن نظرية كوشي نجد أن الدالة f لها أصل F على $B(a,R)$. الآن من صيغة كوشي التكاملية نجد أن

$$\forall z\in B(a,r),F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{F(w)}{w-z}dw$$

وبهذه الصيغة نجد أن الدالة F قابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات ولنا

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{F(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

وبالتالي تكون $f\in C^\infty(\Omega)$.

2. 2 . رأينا أن نظرية كوشي لا تخولنا لحساب قيمة قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_{(0,2)}}\frac{3z^6}{z-1}dz$$

أما الآن وبوضع $f(z)=3z^6$ نجد من صيغة تكامل كوشي أن

$$\int_{\gamma_{(0,2)}}\frac{3z^6}{z-1}dz=2\pi if(1)=6\pi i$$

مثال 3.5.4 أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{(z-i)(z+1)}dz$$

الحل:
حيث أن الدالة $f(z)=\frac{\log(z)}{z+1}$ تحليلية على مفتوح[1] يحوي القرص $\overline{B}(i,\frac{1}{2})$, إذاً من صيغة تكامل كوشي نحصل على

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}} \frac{\log(z)/(z+1)}{(z-i)}dz &= 2\pi i f(i)\\ &= 2\pi i\frac{\log(i)}{i+1}=\frac{2\pi i-\pi}{1+i}\end{aligned}$$

طريقة أخرى:
باستخدام الكسور الجزيئية نجد أن

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}} \frac{\log(z)/(z+1)}{(z-i)}dz &= \frac{1}{1+i}\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{z-i}dz-\frac{1}{1+i}\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{z+1}dz\\ &= \frac{2\pi i\log(i)}{1+i}+0\end{aligned}$$

نظرية 3.5.5 (صيغة تكامل كوشي العامة)
لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$. إذا كان γ قوس أملس قطعاً ومغلق بحيث

$$I(\gamma,z)=0,\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$$

فإنه لكل $z\in\Omega\setminus\gamma^*$ يكون

$$I(\gamma,z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

نظرية 3.5.6 (مفكوك تايلور)
ليكن $r>0$ و $a\in\mathbb{C}$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $\overline{B}(a,r)$ فإنه لكل $z\in B(a,r)$ لنا

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

حيث

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

برهان من تكامل كوشي نعلم أن

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{w-z}dw\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})re^{it}}{a+re^{it}-z}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{1-\frac{z-a}{re^{it}}}dt\end{aligned}$$

---

[1] يجب اختيار هذا المفتوح بعناية بحيث يكون بعيدا عن -1.

لاحظ أن

$$\left|\frac{z-a}{re^{it}}\right| < 1$$

وعليه فإن

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{re^{it}}\right)^n$$

وبذلك يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{re^{it}}\right)^n\right]dt$$

ومن التقارب المنتظم يمكننا تبديل المجموع مع التكامل فنحصل على

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-int}dt\right)(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n \end{aligned}$$

وحيث أن هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام على $B(a,r)$ فإنه يمكننا أن نشتق حداً بحد, وبالتالي نجد أن

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

■

نتيجة 3.5.7 لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ و $a \in \Omega$ فإنه يوجد $r > 0$ بحيث

$$\forall z \in B(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

برهان خذ $r < d(a, \partial\Omega)$, عندها النتيجة تتبع من النظرية السابقة. ■

مثال 3.5.8 الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية بجوار القرص $B(i, \frac{1}{2})$, ومن النظرية السابقة نجد أن

$$\forall z \in B(i, \frac{1}{2}),\ \ \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$$

وبحساب المشتقات نتحصل على

$$a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(i)^{n+1}}$$

نظرية 3.5.9 (متباينة كوشي)
ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $B(a,r)$ فإن

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \le \frac{1}{r^n}\sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

برهان نعلم من مفكوك تايلور ونظرية 3.2.10 أن

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-int}dt\right| \\ &\le \frac{1}{r^n}\sup_{|z-a|=r}|f(z)|\end{aligned}$$

∎

قد يبدو للقارئ من الوهلة الأولى أن متباينة كوشي ليست بتلك الأهمية وذلك لسهولة البرهان إلا إنه وعلى العكس تماماً فإن هذه المتباينة لها العديد من التطبيقات المهمة ولعل من أهمها نظرية ليوفيل التي تنص على

نظرية 3.5.10 (نظرية ليوفيل)
لتكن f دالة كلية (أي تحليلية على كامل المركب). إذا كانت f محدودة فإنها ثابتة.

برهان ليكن $M = \sup\{|f(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. من مفكوك تايلور لنا

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

ولكن من متباينة كوشي فإنه

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \frac{M}{r^n}$$

وحيث أن f دالة كلية, فإنه بأخذ النهاية عندما $r \to \infty$ نحصل على

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \lim_{r\to\infty}\frac{M}{r^n} = 0\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

وبهذا يكون $f(z) = f(a)$ لكل $z \in \mathbb{C}$, أي أن f ثابتة. ∎

من نظرية ليوفيل نرى أن الدوال $\sin z, \cos z, e^z$ دوال ليست محدودة وذلك كونها دوال كلية, وهذا يختلف عن الدوال في الحقيقي لأننا نعلم على سبيل المثال أن $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

رأينا في بدايةالمقرر أن تعريف الضرب على الأعداد المركبة مكننا من حل المعادلة $z^2 + 1 = 0$ وهو ما لم يتسنى لنا في الأعداد الحقيقية, والآن نورد نظرية مفادها ضمان وجود الجذور لكثيرات الحدود في المركب

نظرية 3.5.11 (النظرية الأساسية في الجبر)
إذا كانت P كثيرة حدود غير ثابتة فإن لها على الأقل جذر في $\mathbb{C}$.

برهان حيث أن P كثيرة حدود غير ثابتة فإن $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)| = \infty$. في الواقع

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = z_n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + 1\right)$$

لو كانت P ليس لها جذور فإن الدالة $f = \frac{1}{P}$ تحليلية على كامل المركب وتحقق

$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = 0$$

وبالتالي إذا كان $M > 0$ فإنه يوجد $R > 0$ بحيث $|f(z)| \leq M$ لكل $|z| > R$. من الناحية الأخرى فإن الدالة $|f|$ متصلة وبالتالي على المتراص $\overline{B}(0,R)$ تصل إلى قيمتها العظمى. وعليه فإن الدالة f محدودة ومن ليوفيل تكون ثابته, وهذا يؤدي إلى أن P ثابتة وهذا تناقض. ∎

تعريف 3.5.12 لتكن f دالة تحليلة على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ فإننا نقول أن $a \in \Omega$ جذر للدالة f من الدرجة $m \geq 1$ إذا وفقط إذا كان

$$f(a) = ... = f^{(m-1)}(a) = 0, \;\; f^{(m)}(a) \neq 0$$

لاحظ أنه من مفكوك تايلور على $B(a,r) \subset \Omega$ نجد أن

$$\forall z \in B(a,r), \;\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m}$$

وبذلك نستنتج أن كون a جذر من الدرجة m للدالة f يقتضي وجود $r > 0$ ودالة تحليلية g على $B(a,r)$ بحيث لكل $z \in B(a,r)$ فإن $f(z) = (z-a)^m g(z)$ و $g(a) \neq 0$.

نظرية 3.5.13 (نظرية الأصفار المعزولة)
لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ فإن العبارات التالية متكافئة.

1. 1 . $f \equiv 0$.
2. 2 . يوجد عنصر $a \in \Omega$ بحيث $f^{(n)}(a) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
3. 3 . المجموعة $Z_f = \{z : f(z) = 0\}$ لها نقطة تراكم في Ω.

برهان من الواضح أن العبارة الثانية تتبع من الأولى مباشرةً. والآن لنفترض صحة العبارة (2). من مفكوك تايلور فإنه يوجد $r > 0$ بحيث

$$\forall z \in B(a,r), \;\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0$$

أي أن a نقطة تراكم Z_f. بقي أن نبين أن العبارة الثالثة تقتضي الأولى. لتكن a نقطة تراكم لأصفار الجالة f ولتكن A هي مجموعة نقاط تراكم Z_f. لاحظ أنه لو بيَّنا أن A مغلقة ومفتوحة فإن $A = \Omega$ لأن Ω نطاق. ليكن $a \in A$، مرة أخرى نرى من مفكوك تايلور أن

$$\forall z \in B(a,r) \Subset \Omega, \;\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

لنفرض أن k أصغر عدد صحيح بحيث $f^{(k)}(a) \neq 0$، نجد أن

$$f(z) = (z-a)^k \left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k} \right]$$

لنضع

$$h(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k}$$

نجد أن الدالة h تحليلية على $B(a,r)$ وتحقق أن $h(a) \neq 0$. وبما أن h متصلة، فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث تكزن الدالة h مغايرة للصفر عند جميع نقاط $B(a,\varepsilon)$. لكن هذا يقتضي أن العنص a هو الصفر الوحيد للدالة $f(z) = (z-a)^k h(z)$ على القرص $B(a,\varepsilon)$. وهذا يناقض كون a نقطة تراكم للمجموعة A. إذاً $f^{(n)}(a) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، وبالتالي فإن $B(a,r) \subset A$

وهذا معناه أن المجموعة A مفتوحة. لتبيان أن A مغلقة نفترض متتابعة $A \subset ((a_n)$ بحيث $a_n \to a$. ليكن V جوار للعنصر a، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n > N$ يكون $a_n \in V$. وبما كل a_n نقطة تراكم لأصفار الدالة f، فإن الجوار V يحتوي على عدد لا نهائي من أصفار f وهذا هو تعريف أن a نقطة تراكم للمجموعة Z_f. بذلك نكون أنهينا برهان النظرية. ∎

تطبيقات على نظرية الأصفار المعزولة

- جميع الدوال التحليلية بجوار الصفر التي تحقق $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ هي $f(z) = \frac{1}{z+1}$. لأنه لو كانت g دالة تحليلية تحقق $g(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ فإن $f - g = 0$ على المجموعة $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ وحيث أن A لها نقطة تراكم فإن $f \equiv g$.

- إذا كانت P كثيرة حدود غير صفرية فإن جذورها منتهية. وذلك لأن $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$ وبالتالي يوجد $R > 0$ حيث جذور P محتواه في $\overline{B}(0,R)$. إذاً جذور P منتهية وإلا وجدت نقطة تراكم لجذورها. الآن لتكن $a_1, ..., a_n$ جذور كثيرة الحدود P من الدرجة $m_1, ..., m_n$ على التوالي, فإن جميع هذه الجذور من درجة منتهية. فعلى سبيل المثال لو كان $f^{(n)}(a_1) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فمن مفكوك تايلور حول a_1 تكون P كثيرة حدود صفرية وهذا تناقض. إذاً نستنتج من ذلك أن P تكتب على الصورة

$$P(z) = (z - a_1)^{m_1} ... (z - a_n)^{m_n}$$

- إذا كانت f دالة تحليلية على نطاق Ω و $a \in \Omega$ جذر من الدرجة m للدالة f فإنه يوجد $r > 0$ و g دالة تحليلية على $B(a,r)$ تحقق $g(z) \neq 0, \forall z \in B(a,r)$ بحيث

$$\forall z \in B(a,r), \;\; f(z) = (z - a)^m g(z)$$

أي أن أصفار الدوال التحليلية تكون معزولة.

نظرية 3.5.14 (مبدأ القيمة العظمى)
لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ إذا وجد $a \in \Omega$ بحيث

$$|f(a)| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$$

فإن f تكون ثابتة على Ω.

ينتج من هذه النظرية النص التالي

نتيجة 3.5.15 ليكن Ω مفتوح ومحدود من $\mathbb{C}$ و f دالة تحليلية على Ω ومتصلة على $\overline{\Omega}$ فإن

$$\sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|.$$

ننهي هذا القسم بجزئية متعلقة بتمديد الدوال التحليلية.

نظرية 3.5.16 ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و L مستقيم من المركب. إذا كانت f متصلة على Ω وتحليلية على $\Omega \setminus L$ فهي تحليلية على كامل Ω.

برهان البرهان يعتمد على إثبات أن تكامل f على كل مثلث من Ω مساوي للصفر وهو متروك كتمرين للقارئ. ∎

نظرية 3.5.17 ليكن Ω مفتوح من المركب $a \in \Omega$. إذا كانت f دالة تحليلية على $\Omega \setminus \{a\}$ ومحدودة بجوار a فإنه توجد دالة تحليلية $\widetilde{f}$ على Ω بحيث $f = \widetilde{f}$ على $\Omega \setminus \{a\}$.

برهان لنعرف الدالة

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)\ f(z) & ,\ z \neq a \\ 0 & ,\ z = a \end{cases}$$

بما أن الدالة f محدودة بجوار، فإن الدالة g تكون متصلة على Ω وتحليلية على $\Omega \setminus \{a\}$ وبالتالي من نظرية 3.5.16 فإن g تكون تحليلية على كامل Ω. لكن من مفكوك تايلور يوجد $r > 0$ بحيث

$$\forall z \in B(a,r),\ \ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

والآن بوضع $\widetilde{f} = \frac{g(z)}{z-a}$ نجد أن $\widetilde{f}$ دالة تحليلية على Ω وتحقق أن

$$\widetilde{f}(z) = \frac{g(z)}{z-a} = f(z),\ \ \forall z \in \Omega \setminus \{a\}.$$

∎

نظرية البواقي

4.1 مفكوك لوران وتصنيف النقاط الشاذة

تطرقنا سابقاً لتعريف النقاط الشاذة المنعزلة, وفي هذا القسم سنقوم بدراستها بصورة مستفيضة. وقبل أن نخوض في ذلك سنثبِّت الرمز $B(a;r,R)$ على أنه المجموعة $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ حيث $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$.

تعريف 4.1.1 نقول أن النقطة $a \in \mathbb{C}$ نقطة شاذة منعزلة للدالة f إذا وجد $r > 0$ بحيث تكون f تحليلية على $B(a;0,r)$. عندها نصنف a كالتالي:

1. a . 1 نقطة شاذة مزالة إذا وفقط إذا وجدت دالة تحليلية g على $B(a,r)$ بحيث $g = f$ على $B(a;0,r)$. أي أن f قابلة للتمديد كدالة تحليلية على $B(a,r)$ وتمديدها $\widetilde{f}$ هو g.

2. a . 2 قطب من الدرجة m إذا وفقط إذا كانت a نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة $g(z) = (z-a)^m\ f(z)$ و $\widetilde{g}(a) \neq 0$.

3. a . 3 نقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا لم تكن لا مزالة ولا قطب.

مثال 4.1.2 الدالة $f(z) = \frac{2z^2+z}{2z+1}$ دالة تحليلية على $B(\frac{-1}{2};0,r)$, لكن لوأخذنا $g(z) = z$ نجد أن g دالة تحليلية على $B(\frac{-1}{2},r)$ وتحقق أن $g = f$ على $B(\frac{-1}{2};0,r)$ لأنه

$$\forall z \in B(\frac{-1}{2};0,r),\ f(z) = \frac{z(2z+1)}{2z+1} = z$$

وبالتالي فإن $a = \frac{-1}{2}$ نقطة شاذة مزالة للدالة f

مثال 4.1.3 الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ ونجد أن حاصل الضرب $zf(z) = 1$ دالة تحليلية على كامل المركب وبالتالي فإن $a = 0$ هو قطب للدالة. لاحظ أن $a = 0$ لا يمكن أن تكون نقطة شاذة مزالة للدالة f لأنه لو أمكن تمديد الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ بحيث تكون تحليلية على $\mathbb{C}$ فإنه من نظرية كوشي على بسيط الترابط يكون تكامل $\widetilde{f}$ مساوياً للصفر على كل قوس أملس قطعاً من $\mathbb{C}$ وهذا يناقض كون

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

مثال 4.1.4 الدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ وبالتالي من تعريف الدالة الأسية فإنه لكل $z \neq 0$ يكون

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{(3!)z^3} + ... + \frac{1}{(n!)z^n} + ...$$

ومن هنا نرى أن $a = 0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$, لأنه لايوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث تكون $z^n e^{\frac{1}{z}}$ تحليلية وذلك كون الأسس السالبة ستستمر بالظهور وهو ما يتنافى مع مفكوك تايلور للدوال التحليلية.

تعريف 4.1.5 لتكن f دالة تحليلية على $B(a;0,r)$ فإننا نقول أن a قطب للدالة f من الدرجة m إذا وفقط إذا كان m أصغر عدد طبيعي بحيث تكون a نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة $g(z) = (z-a)^m f(z)$.

ملاحظة 4.1.6 نلاحظ من التعريف السابق أن g تحليلية على $B(a,r)$ وبالتالي من مفكوك تايلور للدوال التحليلية نجد أن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-a)^n$$
$$= \underbrace{\frac{\alpha_0}{(z-a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{(z-a)}}_{\text{الجزء الشاذ}} + \sum_{n=m}^{\infty}\alpha_n (z-a)^{n-m}$$

نظرية 4.1.7 (مفكوك لوران)
ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $B(a;r,R)$ فإنه

$$\forall z \in B(a;r,R),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(a,t)}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ t \in (r,R)$$

الآن سوف نستخدم مفكوك لوران كأداة لتصنيف النقاط الشاذة من خلال النظرية التالية.

نظرية 4.1.8 لتكن a نقطة شاذة منعزلة للدالة f و لتكن f لها مفكوك لوران على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,\ \forall z \in B(a;0,r).$$

فإن:

1. (1) a نقطة شاذة مزالة إذا وفقط إذا كان $a_n = 0$ لكل $n \leq -1$ إذا وفقط إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث تكون الدالة f محدودة على $B(a;0,\varepsilon)$.
2. (2) a قطب إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي m بحيث $a_{-m} \neq 0$ و كان $a_{-n} = 0$ لكل $n > m$ إذا وفقط إذا كانت
$$\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$$
3. (3) a نقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا كان $a_n \neq 0$ لعدد لانهائي من الأعداد الصحيحة السالبة n إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ فإن $f(B(a;0,\varepsilon))$ كثيف في $\mathbb{C}$.

برهان

1. (1) لنفرض أن a نقطة شاذة مزالة للدالة f. من التعريف فإنه توجد دالة تحليلية $\tilde{f}$ على $B(a,r)$ بحيث $f = \tilde{f}$ خارج النقطة a. لكن من مفكوك تايلور فإن على القرص $B(a,r)$ يكون
$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-a)^n$$

وحيث أن الدالة $f = \widetilde{f}$ على $B(a;0,r)$ فإن

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z-a)^n$$

أي أن $a_n = 0$ لكل $n \le -1$ وذلك من وحدانية مفكوك لوران. الآن لنفرض أن $a_n = 0$ لكل $n \le -1$. فإن الدالة f ستكون مساوية لجزئها التحليلي، وعند وضعنا $\widetilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ سنجد أن الدالة $\widetilde{f}$ تحليلية على $B(a,r)$ وبالتالي فهي محدودة بجوار النقطة a، وعليه فإن الدالة f محدودة على $B(a;0,\varepsilon)$ لكل $0 < \varepsilon < r$. لنكمل برهان (1)، نفرض أنه يوجد $r > \varepsilon > 0$ بحيث تكون الدالة f محدودة على $B(a;0,\varepsilon)$. من نظرية 3.5.17، نجد أنه توجد دالة تحليلية g تحليلية على $B(a,r)$ بحيث $f = g$ خارج النقطة a، ومن هنا نرى أن a نقطة شاذة مزالة للدالة f.

2. (2) لنفرض أن a قطب من الدرجة m للدالة f. من التعريف

■

مثال 4.1.9 أوجد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ عندما

1. 1 . $|z| < 1$.
2. 2 . $1 < |z| < 2$.
3. 3 . $|z| > 2$.

الحل

مثال 4.1.10 أوجد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z-3}$ على صورة

1. 1 . متسلسلة قوى موجبة في z.
2. 2 . متسلسلة قوى سالبة في z.

الحل

1 . لكي يكون المفكوك على صورة أسس موجبة في z, فإننا من مفكوك تايلور نبحث عن جوار Ω للصفر بحيث تكون عليه الدالة f تحليلية. وبالتالي لو أخذنا $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ فإن الدالة $\frac{1}{z-3}$ تحليلية على Ω ومن مفكوك تايلور نتحصل

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

وبالاستقراء نستطيع أن نبرهن أن

$$f^{(n)}(0) = \frac{-(n!)}{3^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

كما يمكننا أن نرى ذلك بطريقة أخرى باستخدام مجموع المتسلسلة الهندسية وذلك كون $|z| < 1$ أي أن

$$|\frac{z}{3}| < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{3(1-\frac{z}{3})} = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

2 . لاحظ أن الدالة تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ وبالتالي لن نصل للمطلوب لو أوجدنا مفكوك لوران للدالة حول النقطة 3 لأن المفكوك سيكون متسلسلة قوى في $z - 3$ ولذلك سنوسع الدائرة لتشمل النقطة صفر لنحصل على متسلسلة قوى سالبة في z. وعليه نختار $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 3\}$ فنجد أن

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}$$

وبما أن لكل $z \in \Omega$ يكون $\frac{3}{|z|} < 1$ فإن

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

مثال 4.1.11 صنف النقاط الشاذة بالنسبة للدوال التالية

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2},\ f_2(z) = \frac{e^z}{z\sin z},\ f_3(z) = \frac{\sin z}{z}$$

الحل

1. 1 . الدالة f_1 تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{1,i\}$. إذاً النقاط الشاذة المنعزلة هي $a = 1, i$. ندرس الدالة بجوار كل نقطة على حدا فنجد أن الدالة $\frac{z^2}{(z-i)^2}$ تحليلية على القرص $B(1,\frac{1}{2})$ وبالتالي لها مفكوك تايلور على الصورة

$$\frac{z^2}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n,\ \forall z \in B(1,\frac{1}{2})$$

أي أن الدالة f_1 بجوار النقطة $a = 1$ تكتب على الصورة

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n = \frac{a_0}{z-1} + a_1 + a_2(z-1) + ... + a_n(z-1)^{n-1} + ...$$

إذاً $a = 1$ قطب من الدرجة الأولى (بسيط) للدالة f_1. نقوم بنفس العملية لتصنيف النقطة $a = i$, فنجد من مفكوك تايلور أن

$$\frac{z^2}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-i)^n, \forall z \in B(i,\frac{1}{2})$$

بالتالي فإن الدالة f_1 بجوار $a = i$ لها المفكوك

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-i)^n = \frac{b_0}{(z-i)^2} + \frac{b_1}{z-i} + b_2 + b_3(z-i) + ... + b_n(z-i)^{n-2} + ...$$

أي أن $a = i$ قطب من الدرجة الثانية.

2. 2 . الدالة f_2 تحليلية إلا عند اصفار المقام. ومن دراستنا السابقة لأصفار الدالة $\sin z$ فإننا نجد أن f_2 تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. سندرس الآن النقطة $a = 2k\pi$. حيث أن

$$\sin' z = \cos z \Rightarrow \sin' 2k\pi = 1 \neq 0$$

فإن $a = 2k\pi$ جذر بسيط للدالة $\sin z$ وبالتالي من نظرية الأصفار المعزولة يوجد جوار V_k للنقطة $a = 2k\pi$ ودالة تحليلية g_k على V_k تحقق $g_k(z) \neq 0$ لكل $z \in V_k$ بحيث $\sin z = (z-2k\pi)g_k(z), \forall z \in V_k$. من ذلك نستنتج أن

$$f_2(z) = \frac{e^z}{z(z-2k\pi)g_k(z)},\ \forall z \in V_k$$

وحيث أن $\frac{e^z}{g_0(z)}$ دالة تحليلية فإن $a = 0$ هو قطب من الدرجة الثانية للدالة f_2. بينما لكل $k \neq 0$ فإن $a = 2k\pi$ هو قطب بسيط للدالة f_2 وذلك لأن $\frac{e^z}{z^2 g_k(z)}$ تحليلية لكل $k \neq 0$.

3. 3 . من الوهلة الأولى نرى أن $a = 0$ نقطة شاذة منعزلة للدالة f_3, وبإيجاد مفكوك تايلور نتحصل

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

ومن هنا نجد أن $a = 0$ نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة f_3.

4.2 نظرية البواقي

في هذا القسم سندرس نظرية البواقي والتي تعمم نظريات التكامل السابقة, كما أنها وسيلة فعالة لحساب التكاملات المعتلة.

تعريف 4.2.1 لتكن a نقطة شاذة منعزلة للدالة f والتي لها مفكوك لوران على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \ \forall z \in B(a;0,r)$$

فإن باقي الدالة f عند a هو المعامل a_{-1} (معامل $\frac{1}{z-1}$) وعندها نكتب $Res(f,a) = a_{-1}$.

مثال 4.2.2 رأينا سابقاً أن النقطة $a = 0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$, من تعريف الدالة الأسية

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ... + \frac{1}{n!z^n} + ...$$

إذاً $Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1$. بصورةٍ عامة, فإن $Res(z^n e^{\frac{1}{z}}, 0) = \frac{1}{(n+1)!}$.

لاحظ أنه أحياناً يكون من الصعب إيجاد المفكوك لحساب الباقي. لذا نورد النتيجة التالي والتي ستساعدنا على حساب الباقي عند الأقطاب.

نتيجة 4.2.3 لتكن النقطة a قطب للدالة f من الدرجة m فإن باقي f عند a يعطى على الصورة

$$Res(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

برهان من الملاحظة 4.1.6 وجدنا أن $g(z) = (z-a)^m f(z)$ دالة تحليلية ومن ذلك استنتجنا أن

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} &= \frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \\ &= \frac{\alpha_0}{(z-a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}} + ... + \frac{\alpha_{m-1}}{(z-a)} + \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z-a)^{n-m} \end{aligned}$$

إذاً

$$Res(f,a) = \alpha_{m-1} = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!} = \lim_{z\to a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

■

مثال 4.2.4 في المثال 4.1.11 وجدنا أن للدالة f_1 قطب بسيط عند $a = 1$ وقطب من الدرجة الثانية عند $a = i$.
ومن النتيجة السابقة لنا

$$Res(f_1, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f_1(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{(z-i)^2} = \frac{1}{(1-i)^2}$$

بينما

$$\begin{aligned} Res(f_1, i) &= \lim_{z\to i} \frac{[(z-i)^2 f_1(z)]'}{(2-1)!} \\ &= \lim_{z\to 1}[\frac{z^2}{z-1}]' \\ &= \lim_{z\to i} \frac{2z(z-1) - z^2}{(z-1)^2} = \frac{-1-2i}{(i-1)^2} \end{aligned}$$

مثال 4.2.5 الدالة f_3 لها قطب من الدرجة الثانية عند الصفر وبالتالي فإن

$$Res(f_3,0)=\lim_{z\to 0}[\frac{e^z}{g_0(z)}]'=\lim_{z\to 0}\frac{e^z(g_0(z)-g_0'(z))}{g_0^2(z)}$$

لكن

$$g_0(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...$$

ومن هنا نرى أن $g_0(0)=1$ و $g_0'(0)=0$. إذاً

$$Res(f,0)=1$$

نظرية 4.2.6 (نظرية البواقي)
ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $a_1,...,a_n$ نقاط ن Ω ولتكن f دالة تحليلية على $\Omega\setminus\{a_1,...,a_n\}$. إذا كان γ قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω بحيث $a_j\notin\gamma^*,\ j=1,...,n$ و $I(\gamma,z)=$ لكل $z\notin\Omega$ فإن

$$\int_\gamma f(z)\ dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}Res(f,a_j)*I(\gamma,a_j)$$

مثال 4.2.7 لتكن f_1 كما في المثال 4.1.11 فإن

$$\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}}f_1(z)\ dz=2\pi i[Res(f_1,1)*I(\gamma_{(i,\frac{1}{2})},1)+Res(f_1,i)*I(\gamma_{(i,\frac{1}{2})},i)]$$

من الحسابات التي قمنا بها في المثال 4.2.4 نجد أن

$$\int_{\gamma_{(i,\frac{1}{2})}}f_1(z)\ dz=2\pi i[Res(f_1,1)*0+Res(f_1,i)*1]=-2\pi i\left(\frac{1+2i}{(i-1)^2}\right)$$

في حين أن

$$\int_{\gamma_{(1,\frac{1}{3})}}f_1(z)\ dz=\frac{2\pi i}{(i-1)^2}$$

مثال 4.2.8 اعتبر الدالة f_2 من المثال 4.1.11 , رأينا أن النقطة $a=0$ قطب من الدرجة الثانية للدالة f_2 وأن $Res(f_2,0)=1$ وبالتالي من نظرية البواقي نجد أن

$$\int_{\gamma_{(0,1)}}f_2(z)\ dz=2\pi i$$

مثال 4.2.9 ليكن $R>>1$. أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^4+1}dz$$

حيث

$$\gamma_R(t)=\begin{cases} Re^{it} & ,0\le t\le\pi\\ \frac{2t-3\pi}{\pi}R & ,\pi\le t\le 2\pi\end{cases}$$

الحل

برسم القوس γ_R نجد أن صورته هي اتحاد النصف العلوي للدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R مع القطعة $[-R, R]$. الآن ندرس الدالة $\frac{z^2}{z^4+1}$ فنجد أن لها نقاط شاذة عند أصفار المقام وهي

$$a_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, a_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, a_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}, a_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

وعليه فمن نظرية البواقي نحصل على

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{4} Res(\frac{z^2}{z^4+1}, a_j) * I(\gamma, a_j)$$

وحيث أن a_3, a_4 تقعان في النصف السفلي من المركب فإن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} Res(\frac{z^2}{z^4+1}, a_j)$$

لكن $z^4 + 1 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)$. أي أن a_1, a_2 قطبين بسيطين للدالة والباقي هو

$$\begin{aligned} Res(\frac{z^2}{z^4+1}, a_1) &= \frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} \\ &= \frac{a_1^2}{a_1^3(1 - \frac{a_2}{a_1})(1 - \frac{a_3}{a_1})(1 - \frac{a_4}{a_1})} \\ &= \frac{e^{\frac{-\pi i}{4}}}{(1-i) * 2 * (1+i)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بطريقة مشابهة نجد أن

$$Res(\frac{z^2}{z^4+1}, a_2) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i \left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} - \frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right) = 2\pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

تطبيقات على نظرية البواقي

كما أسلفنا فإن نظرية البواقي تساعدنا على حساب بعض الصيغ التكاملية ونورد كتطبيق لهذه بعض الأمثلة.

مثال 4.2.10 أوجد قيمة التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

الحل

لنعتبر γ_R كما في المثال السابق. رأينا أن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

وباستخدام تعريف التكامل على الأقواس نحصل على

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1} dx + \int_{0}^{2\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it}+1} iRe^{it} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow &\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1} dx = -\int_{0}^{2\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it}+1} iRe^{it} dt + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

لكن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{R^2e^{2it}}{R^4e^{4it}+1}iRe^{it}dt\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{R^2e^{2it}}{R^4e^{4it}+1}iRe^{it}\right|dt$$
$$\le \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{R^3}{R^4-1}dt = 0$$

إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

بصورةٍ عامة، وباستخدام نفس الفكرة في المثال السابق نستطيع أن نبيّن النتيجة التالية.

نتيجة 4.2.11 لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث $\deg P + 2 \le \deg Q$ و $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (أي أن Q ليس لها أصفار حقيقية). إذا كانت $a_1,..a_n$ هي أصفار Q في المركب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{Im(a_j)>0}Res(\frac{P(z)}{Q(z)},a_j)$$

مثال 4.2.12 لحساب قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{x^2+2x+2}dx$$

نضع $P(x) = 3$ و $Q(x) = x^2+2x+2$ فنجد أن P, Q تحققان شروط النتيجة 4.2.11, ولكن

$$Q(z) = 0 \Rightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = -1\pm i$$

إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{x^2+2x+2}dx = 2\pi i\ Res(\frac{3}{z^2+2z+2},-1+i) = 3\pi$$

على نفس المنوال، باسطاعتنا أن نبرهن النص التالي

نتيجة 4.2.13 ليكن $\alpha > 0$ و لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث $\deg P + 1 \le \deg Q$ و $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (أي أن Q ليس لها أصفار حقيقية). إذا كانت $a_1,..a_n$ هي أصفار Q في المركب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{Im(a_j)>0}Res(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)},a_j)$$

مثال 4.2.14 لحساب قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$$

نقوم أولاً بحساب أصفار المقام فنجد أن $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ أي أن الأصفار هي $i,-i$ وبالتعويض في النتيجة السابقة عن $\alpha = 1$ و $P(x) = 1$ و $Q(x) = x^2+1$ نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i\ Res(\frac{e^{iz}}{z^2+1},i) = 2\pi i\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

تمرين 4.2.15 أوجد قيمة التكاملات التالية

$$1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx \qquad 2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos^2 x}{x^4+1}dx \qquad 3)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+2x^2+1}$$

جامعة الملك فيصل	الاختبار الفصلي النهائي	التاريخ :1435/8/7هـ
كلية العلوم	الفصل الثاني من العام 1434-1435 هـ	الزمن : ساعتان
قسم الرياضيات والإحصاء	تحليل مركب(كلية العلوم)	الدرجة :

الاسم: .... الرقم الأكاديمي:...............................

السؤال الأول

لتكن f دالة معرفة على الصورة التالية

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

1. أوجد مجموعة النقاط التي تكون عندها الدالة f تحليلية، ثم أوجد مشتقتها.
2. بيِّن أن الصفر نقطة شاذة أساسية للدالة f.
3. أثبت أنه توجد متتابعة $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى الصفر بحيث تكون

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 1$$

4. أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma(0,1)} f(z)\ dz$$

ثم استنتج أنه لا توجد متتابعة من كثيرات حدود (P_n) تتقارب بانتظام من الدالة f على حدود قرص الوحدة.

السؤال الثاني

1. أورد نص نظرية ليوفيل. هل تبقى النظرية صحيحة على $\mathbb{C}^*$؟ ماذا عن النطاق $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ؟ برر إجابتك.
2. لتكن f دالة تحليلية على كامل المركب. أثبت أن $f(\mathbb{C})$ كثيف في $\mathbb{C}$.
3. استنتج من الفقرة السابقة أنه إذا كانت u دالة توافقية على كامل المركب وموجبة فهي ثابتة.
4. أوجد جميع الدوال التحليلية f على $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ والتي تحقق أن

$$f^{(n)}(0) = n!, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(تلميح: ادرس مفكوك الدالة بجوار الصفر)

السؤال الثالث

1. لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من المركب ولتكن $a_1, ..., a_n$ هي أصفار الدالة f من الدرجة $m_1, ..., m_n$ على الترتيب. بيِّن أنه إذا كان γ قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω لا يمر بأصفار f ويحقق أن $I(\gamma, z) = 0$ لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ فإن

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j * I(\gamma, a_j)$$

ثم استنتج قيمة التكامل

$$\int_{\gamma(1,\frac{1}{2})} \frac{dz}{z \log(z)}$$

2. أوجدي قيمة التكاملات التالية.

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx \quad , \quad 2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\ dx$$

أمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر :)

جامعة الملك فيصل
كلية العلوم– قسم الرياضيات والإحصاء
16 جمادى الأول 1435 هـ

الاختبار الفصلي الأول لمادة التحليل المركب (العلوم)

الاسم:
الرقم الأكاديمي:

السؤال الأول

1 . ليكن $\alpha = -1 + i$.

(a) أوجد α^{16} و $\log \alpha$.

(b) أوجد حلول المعادلة : $z^4 = \alpha$.

2 . أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للمقدار

$$\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}, \; n \in \mathbb{N}$$

استنتج قيمة $\sin t + \ldots + \sin nt$.

3 . أثبت كما جاء في الدرس أنه إذا كانت $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ و u توافقية على قرص B_a^r فإنه يوجد لها مرافق توافقي.
استنتج من ذلك أن الدالة $\log |z|^2$ لها مرافق توافقي على القرص B_{-2}^1 ثم أوجده.

السؤال الثاني

1 . أثبت العبارات التالية أو انفها بمثال المضاد.

- إذا كانت f دالة متصلة على $\mathbb{C}$ و g دالة تحليلية على كامل المركب، وكانت $g \circ f$ قابلة للاشتقاق عند $z_0 \in \mathbb{C}$، فإن f قابلة للاشتقاق عند z_0.
- لا يوجد تعيين للوغاريتم على $\mathbb{C}^*$.

2 . ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و f دالة لها أصل على Ω.

(a) بين أنه إذا كان γ_1, γ_2 قوسين أملسين قطعاً من Ω بحيث لهما نفس البداية والنهاية فإن
$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)\ dz$$
هل تبقى النتيجة صحيحة لو كانت f تحليلية فقط؟ برر إجابتك.

(b) أثبت أنه لو كانت F_1, F_2 دالتي أصل للدالة f على Ω فإنه يوجد $c \in \mathbb{C}$ بحيث $F_1 = F_2 + c$.

السؤال الثالث

1 . أثبت أنه إذا كان γ قوس أملس قطعاً ومغلق من $\mathbb{C}$، فإن الدليل ثابت على كل جزء مترابط $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. استنتج من النظرية السابقة قيمة التكامل

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{2e^{it}-1}dt$$

2 . ليكن $\gamma_R = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ارسم γ_3 ثم احسب

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2}\ dz$$

جامعة الملك فيصل
كلية العلوم– قسم الرياضيات والإحصاء
16 صفر 1434 هـ

الاختبار الفصلي الثاني لمادة التحليل المركب

الاسم:
الرقم الأكاديمي:

السؤال الأول

1. اذكر نص وبرهان النظرية الأساسية في الجبر.

2. ليكن $\gamma_R(t) = Re^{it},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(a) اشتق الدالة $z \log z$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_{\gamma_R} \log z\, dz$.

(b) أوجد

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2} dz$$

السؤال الثاني

1 . أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-i)^2(z-1)} dz$$

عندما

(a) $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

(b) $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-it},\ t \in [0, 2\pi]$

2 . أوجد جميع الدوال التحليلية f بجوار الصفر والتي تحقق أن $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

السؤال الثالث

1 . أوجد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$

(a) عندما $|z-1| < \frac{1}{2}$.

(b) عندما $|z| > 1$.

2 . صنف النقاط الشاذة للدوال التالية

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z-i)} \ , \ g(z) = \frac{1}{e^z-1}$$

السؤال الرابع

1 . لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ وليكن a جذر من الدرجة m للدالة f. بيِّن أن a قطب من الدرجة m للدالة $\frac{1}{f}$.

2 . ليكن $\gamma(t) = (t, \sin t),\ t \geq 0$. ارسم صورة γ ثم بيِّن أنه يوجد تعيين على للوغاريتم على $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

جامعة الملك فيصل
كلية العلوم– قسم الرياضيات والإحصاء
17 رجب 1434 هـ

الاختبار الفصلي الأول لمادة التحليل المركب 1 (ماجستير)

الاسم:
الرقم الأكاديمي:

السؤال الأول

1. 1 . أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ثم بين أنها تحليلية على $\mathbb{C}^*$. هل توجد متتابعة من كثيرات حدود $P_n,\ n \in \mathbb{N}$ تتقارب بانتظام من الدالة f على $\gamma_{(0,1)}$.

2. 2 . ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة, وليكن Ω' مفتوح من $\mathbb{C}$ بحيث $f(\Omega) \subset \Omega'$ و g دالة تحليلية على Ω' تحقق أن $g'(w) \neq 0$ لكل $w \in \Omega'$. إذا كان $a \in \Omega$ والدالة $h(z) = g(f(z))$ تحليلية وأحادية بجوار النقطة a فأثبت أن $f'(a)$ موجودة وأوجد صيغتها.

3. 3 .ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و f دالة تحليلية على Ω بين أن الدالة $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ تحليلية على Ω.

السؤال الثاني

1. 1 .لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω ويكن Δ مثلث محتوى هو وداخليته في Ω. أثبت أن

$$\int_{\Delta} f(z)\ dz = 0 \qquad (0.0.1)$$

هل تبقى النتيجة صحيحة لو أغفلنا الشرط على داخلية المثلث؟ برر إجابتك.

2. 2 . ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و f دالة لها أصل على Ω.

(a) بين أنه إذا كان γ_1, γ_2 قوسين أملسين قطعاً من Ω بحيث لهما نفس البداية والنهاية فإن

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)\ dz \qquad (0.0.2)$$

هل تبقى النتيجة صحيحة لو كانت f تحليلية فقط؟ برر إجابتك.

(b) أثبت أنه لو كانت F_1, F_2 دالتي أصل للدالة f على Ω فإنه يوجد $c \in \mathbb{C}$ بحيث $F_1 = F_2 + c$.

3. 3 . ليكن $\gamma_R = -1 + Re^{it},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, أوجد

$$1)\ \lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} \frac{\cos z}{z+1}\ dz \quad , \quad 2)\ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2}\ dz \qquad (0.0.3)$$

السؤال الثالث

1. 1 . ليكن

$$\gamma(t) = \begin{cases} te^{it} & ,0 \leq t \leq 2\pi \\ t & ,t \geq 2\pi \end{cases} \tag{0.0.4}$$

صوِّر القوس Γ في المستوى, ثم بين أن Γ مغلق ومترابط وغير محدود من $\mathbb{C}$.

2. 2 . بين أنه يوجد φ تعيين للوغارتيم وحيد على $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ يحقق $\varphi(i) = i\frac{\pi}{2}$.

3. 3 . أوجد مجال تعريف وقيمة الدالة $F(z) = \log(z) - \varphi(z)$, ثم استنتج قيمة $\varphi(3-3i)$. ($\log(z)$ هو التعيين الأساسي للوغاريتم).

4. 4 . هل توجد دالة تحليلية ومحدودة على $\mathbb{C} \setminus \Gamma$؟

جامعة الملك فيصل
كلية العلوم– قسم الرياضيات والإحصاء
23 رجب 1434 هـ

الاختبار النهائي لمادة التحليل المركب 1 (ماجستير)

الاسم:
الرقم الأكاديمي:

السؤال الأول

1. أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للدالة $f(z) = e^{\frac{i}{z-1}}$ ثم بين أين تكون تحليلية وصنف نقاطها الشاذة.
2. هل $\lim_{z\to 1} |f(z)|$ موجودة؟ برر إجابتك.
3. لتكن $A = \{z : f(z) = 1\}$. بيِّن أن $A \cap [0,1]$ غير منتهية. هل يتنافض ذلك مع نظرية الأصفار المعزولة؟
4. لتكن $w \in \mathbb{C}$ أثبت أنه توجد متتابعة $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $z_n \to 1$ وتحقق أن $f(z_n) \to w$.
5. لتكن $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ دالة تحليلية. أثبت أنه يوجد دالة تحليلية h على $B(0,1)$ بحيث $g = e^h$.

السؤال الثاني

1. اذكر نص وبرهان نظرية البواقي.
2. ليكن γ هو القوس المعرف كالتالي

$$\gamma(t) = \begin{cases} te^{it} & , \ 0 \leq t \leq 2\pi \\ 4\pi - t & , \ 2\pi \leq t \leq 4\pi \end{cases} \tag{0.0.1}$$

صور γ^* واحسب التكامل

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + \pi^2} \tag{0.0.2}$$

3. أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$1) \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \qquad 2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4 + \cos\theta} \tag{0.0.3}$$

السؤال الثالث

1. لتكن $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ تقابل تحليلي بحيث $f(0) = 0$. بيِّن أن $f(z) = \lambda z$ و $|\lambda| = 1$.
2. ليكن $|a| < 1$. بيِّن أن الدالة

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \tag{0.0.4}$$

تقابل تحليلي على قرص الوحدة وأوجد معكوسها.

3. بيِّن أن كل تقابل تحليلي على قرص الوحدة يكون على الصورة $\lambda\varphi_a$ حيث $|\lambda| = 1$ و $|a| < 1$.
4. بيِّن أنه إذا كانت $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ دالة تحليلية وكان $f(a) = \alpha$ فإن

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2} \tag{0.0.5}$$

5. هل توجد دالة تحليلية $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ بحيث يكون $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ و $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.