الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

التحليل الحقيقي

إبراهيم بن صالح العليان
قسم الرياضيات
جامعة الملك سعود

المحتويات

الباب الأول

الأعداد الحقيقية

في هذا الباب نتطرق لمجموعات الأعداد الطبيعية، الصحيحة، النسبية وغير النسبية ثم الأعداد الحقيقية والبناء الجبري لها. ثم نركز على خاصية متوفرة فقط في الأعداد الحقيقية وهي خاصية التمام. ثم نختم هذا الباب بالحديث عن المجموعات القابلة للعد.

1.1 مقدمة

من المهم معرفة المجموعات والعمليات عليها ومصطلحات المنطق والدوال، والتي سبق دراستها في مقرر أسس الرياضيات. ونظرا لأن مقرر التحليل يعتمد بشكل كبير على البراهين فإننا نذكر بطرائق البرهان والتي سوف نستخدمها خلال هذا المقرر.

طرائق البرهان

1. البرهان المباشر (direct proof)
2. البرهان عكس المباشر (contrapositive)
3. البرهان بالتناقض (contradiction)
4. البرهان الإنشائي (constructive proof)
5. البرهان بإعطاء مثال معاكس (counter example)
6. الاستقراء الرياضي (induction)

وهذه بعض الأمثلة عن طرق البرهان والتي توضح كيف يمكن برهنة النظريات أو النتائج أو التمارين.

مثال 1. أثبت أنه يوجد عددان a, b غير نسبيين، بحيث a^b عدد نسبي.

مثال 2. إذا كان

$$a \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن: $a = 0$

البرهان

لنفرض أن $a > 0$. وبما أن $0 < \frac{a}{2} < a$ ، فإننا نأخذ $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ ، فنحصل على تناقض. إذا $a = 0$. □

1.2 الأعداد الحقيقية

قبل أن نبدأ بدراسة الأعداد الحقيقية، نقدم نبذة عن الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية.

الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

إن ما يميز الأعداد الطبيعية أنها مجموعة استقرائية، أي تحقق الشرطين

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

وبالتالي تحقق مبدأ الاستقراء الرياضي.

تعريف 1.2.1: مبدأ الاستقراء الرّياضي

إذا كان $P(n)$ تقريرا رياضيا ، وكان
-1 $P(1)$ تقريرا صائبا
-2 إذا كان التقرير $P(n)$ صائبا، فإن التقرير $P(n+1)$ صائبا كذلك.
فإن التّقرير $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 1 :
أثبت أن

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

صحيح لكل $n \in \mathbb{N}$

نظرية 1.2.1: خاصية الترتيب التام للأعداد الطبيعية

كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر

ملاحظة 1.

المعادلة $x + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{N}$.

الأعداد الصحيحة

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

ملاحظة 2.

- $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة إبدالية .
- المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{Z}$.

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

ملاحظة 3.
$(\mathbb{Q}, +, *)$ حقل مرتب

نظرية 1.2.2:

المعادلة $x^2 = 2$ ليس لها حل في $\mathbb{Q}$

البرهان

مثال 3. لتكن $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ ما أكبر عنصر في A؟

الأعداد الحقيقية

الأعدادا التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ هي الأعداد غير النسبية، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}^c$ أو $\mathbb{I}$.

ملاحظة 4.
$(\mathbb{R}, +, *)$ حقل مرتب

متطابقة المثلث

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ ، فإن

$$| a + b | \leq | a | + | b |$$

$$|| a | - | b || \leq | a - b |$$

تمرين 2 : هل هذه العبارة صحيحة دائمًا؟

$$b < c \Rightarrow | a + b | < | a + c |$$

تمرين 3 :
إذا كان

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

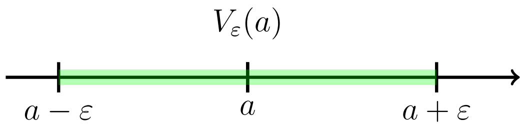
فأثبت أن: $a \leq b$

حل التمرين 1:
نفرض أن $a > b$ ولنأخذ $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0$. نلاحظ أن $x > y + \varepsilon_0$ وهذا تناقض.

تعريف 1.2.2: جوار - ε

إذا كان $a \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ ، فإننا نعرف جوار- ε بأنه

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$



تمرين 4 :

1. إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكان $\forall \varepsilon > 0 \quad x \in V_\varepsilon(a)$ فإن $x = a$.
2. إذا كانت $A = (0,1)$, و $a \in A$ بحيث $V_\varepsilon(a) \subset A$ ، فما أكبر قيمة للعدد ε ؟

1.3 مسلمة التمام

لاحظنا سابقا أن مجموعة الأعداد النسبية فيها فراغات (gaps) ، فعلى سبيل المثال $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي. ولكن فهم أساسيات التفاضل والتكامل يعتمد على مفاهيم النهايات والاتصال والتي تتطلب أن نعمل في مجموعة ليس فيها فراغات. وتعرف هذه الخاصية بخاصية التمام للأعداد الحقيقية. (completeness property) .

تعريف 1.3.1: الحد العلوي والحد السفلي

1- $u \in \mathbb{R}$ حد علوي (upper bound) للمجموعة A إذا كان

$$a \leq u \qquad \forall a \in A$$

ونقول إن المجموعة A محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي.

2- $l \in \mathbb{R}$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة A إذا كان

$$l \leq a \qquad \forall a \in A$$

ونقول إن المجموعة A محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي
3- تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث

$$l \leq a \leq u \qquad \forall a \in A$$

مثال 4. أوجد حدان علويان وحدان سفليان للمجموعات الآتية إن وجد:
1- $[1,4)$
2- $(2,\infty)$

تعريف 1.3.2:

1- إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي أصغر (supremum) ويرمز له بالرمز $\beta = \sup A$ إذا تحقق

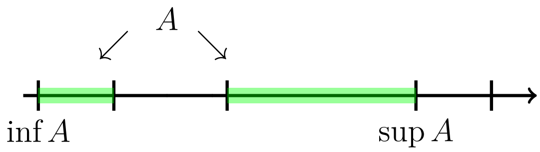
أ) $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي للمجموعة A ، أي

$$a \leq \beta \qquad \forall a \in A$$

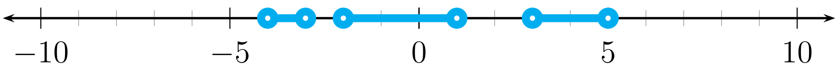
ب) لا يوجد حد علوي للمجموعة A أصغر من β ، أي

$$a \leq u \qquad \forall a \in A \qquad \Rightarrow \qquad \beta \leq u$$

2- إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\alpha \in \mathbb{R}$ حد سفلي أكبر للمجموعةِ A (infimum) ويرمز له بالرمز $\alpha = \inf A$ إذا كان حدا سفليا، ولا يوجد حد سفلي أكبر منه.



تمرين 5 : ما الحدود العلوية والسفلية للمجموعة التالية؟



ملاحظات

- الحد العلوي الأصغر وحيد
- الحد السفلي الأكبر وحيد
- إذا كان $\sup A \in A$ ، فإن $\sup A = \max A$ ، حيث $\max A$ هو أكبر عنصر في A
- إذا كان $\inf A \in A$ ، فإن $\inf A = \min A$ ، حيث $\min A$ هو أصغر عنصر في A
- إذا كانت A غير محدودة من أعلى، فإن $\sup A = \infty$
- إذا كانت A غير محدودة من أسفل، فإن $\inf A = -\infty$
- إذا كان $\sup A \in A$ ، فإن $\sup A = \max A$
- إذا كان $\inf A \in A$ ، فإن $\inf A = \min A$
- $\sup \phi = \dots$
- $\inf \phi = \dots$

مثال 5.

أوجد الحدود العلوية والسفلية للمجموعات التالية إن وجد.

1. $\{1,2,5\}$
2. $[2,5)$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

تمرين 6 :
إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \qquad a > \beta - \varepsilon$$

مثال 6. إذا كانت A أي من الفترات $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$ فإن

$$\sup A = b$$

$$\inf A = a$$

من الكافي التركيز على دراسة أصغر حد علوي لمجموعة، لأننا نستطيع الحصول على أكبر حد سفلي عن طريق النظرية التالية.

نظرية 1.3.1:

إذا كانت $-A = \{-x : x \in A\}$ ، فإن المجموعةِ A محدودة من أسفل إذا وفقط إذا كانت $-A$ محدودة من أعلى، وكذلك

$$\inf A = -\sup(-A)$$

الخاصية الآتية توضح الفرق بين الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية.

تعريف 1.3.3: مسلمة التمام

1- إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر في $\mathbb{R}$
2- إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أسفل، فإن لها حدا سفليا أكبر في $\mathbb{R}$

نستطيع من هذه المسلمة استنتاج العديد من النتائج المفيدة وفيما يلي بعض هذه النتائج.

نظرية 1.3.2: نظرية أرخميدس

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى

ويمكن أن نستنتج من هذه النظرية النتيجتين التاليتين:

نتيجة 1.3.1: خاصية أرخميدس

لكل $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$

البرهان

نتيجة 1.3.2: .

كل $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n-1 \le x < n$.

تمرين 1. 1. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

2. إذا كان

$$x \in [0, \infty), \quad x \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

3. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad x \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

كل من الأعدا النسبية وغير النسبية منتشرة على خط الأعداد الحقيقية ولا يمكن أن نجد فترة مفتوحة تضم أعدادا نسبية فقط أو أعدادا غير نسبية فقط.

نظرية 1.3.3: كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا نسبيا .
أي إذا كان $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ فإنه يوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث $x < q < y$

البرهان
وهذا يعني أن كل فترة مفتوحة تضم عددا لا نهائيا من الأعداد النسبية.

نظرية 1.3.4: نظرية: كثافة $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا غير نسبي .

البرهان

المفكوك العشري

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإنه يوجد عدد $x_0 \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ وأعداد $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ، بحيث

$$0 \le x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$$

ونكتب

$$x = x_0.x_1x_2\ldots$$

ويسمى المفكوك العشري للعدد x
ملاحظات:

1. إذا كان لعددين نفس المفكوك العشري، فإنهما متساويان.
2. لكل عدد $x > 0$ مفكوك عشري وحيد.
3. لو غيرنا الشرط السابق إلى

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$$

فقد يكون لبعض الأعداد مفكوكين.

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.499999\ldots$$

مثال 7. $2.2343434... = 2.2\bar{34} = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$

1.4 المجموعات القابلة للعد

نظرية المجموعات

- في أواخر القرن التاسع عشر نشأت نظرية المجموعات على يد عالم الرياضيات الألماني جوج كانتور

تعريف 1.4.1: تكافؤ المجموعات

نقول إن المجموعة A تكافئ المجموعة B

$$A \sim B$$

إذا وجد تقابل $f : A \to B$.

تنقسم المجموعات إلى مجموعات منتهية، ومجموعات غير منتهية.

تعريف 1.4.2:

نقول إن A منتهية، إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

مثال 8.

1.

$$\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$$

.2

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$$

يمكن ملاحظة أن

$$\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}. \qquad \mathbb{N}_2 \neq \mathbb{N}$$

.3

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$$

تعريف 1.4.3: المجموعة القابلة للعد

المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

فيما يلي عدد من النظريات المهمة عن المجموعات القابلة للعد.

نظرية 1.4.1:

كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

نظرية 1.4.2:

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي قابلة للعد.

نظرية 1.4.3:

إذا كانت A, B قابلة للعد، فإن $A \times B$ قابلة للعد.

نظرية 1.4.4:

إذا كانت A_n قابلة للعد لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ قابلة للعد.

نظرية 1.4.5:

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

البرهان

نظرية 1.4.6:

المجموعة $[0, 1)$ غير قابلة للعد

البرهان

نظرية 1.4.7:

المجموعة $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

تمرين 7 :

1- هل المجموعة $\{x \in I : x \in [0,1]\}$ قابلة للعد 2- أثبت أن

أ) $(a,b) \sim (0,1)$

ب) $\mathbb{R} \sim (0,1)$

الباب الثاني

المتتاليات

بعد تعريف الأعدادالحقيقية ، نبدأ بدراسة مفهوم تحليلي مهم وهو المتتاليات الحقيقية، وفيها نتعرض للمرة الأولى لمفهوم النهايات. يعود مفهوم تقارب النهايات إلى بدايات القرن التاسع عشر على يد بولزانو وكوشي.

2.1 المتتاليات المتقاربة

تعريف 2.1.1: المتتالية

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية ، أي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. ولنعرف $x_n := f(n)$.

بمعنى أن المتتالية تحدد لكل عدد طبيعي $1, 2, \ldots$ قيمة وحيدة في الأعداد الحقيقية. نرمز للمتتالية بالشكل $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ أو $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ أو اختصارا (x_n) ويعتبر x_n الحد النوني. لاحظ أن المجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ هي مدى المتتالية وهي مجموعة غير مرتبة، على العكس من المتتالية المرتبة.

وهذه بعض الأمثلة للمتتاليات.

مثال 9.

1. $(2) = (2, 2, 2, \ldots)$ هي المتتالية الثابتة.
2. $(2n) = (2, 4, 6, \ldots)$ هي متتالية الأعداد الزوجية.
3. $((-1)^n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ هي متتالية مداها المجموعة $\{-1, 1\}$.
4. $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$
5. كما يمكن تعريف المتتالية باستخدام الاستقراء مثل

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

في المتتاليات، يكون التركيز على الحدود المتأخرة، فمثلا المتتالية $\frac{1}{n}$ حدودها المتأخرة تصغر وتقترب من 0.

تعريف 2.1.2: المتتالية المتقاربة

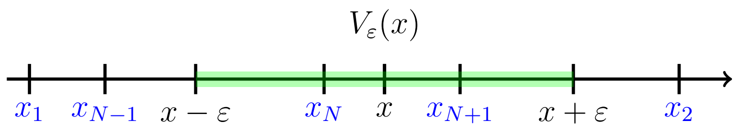
نقول إن المتتالية (x_n) متقاربة (convergent) إذا وجد $x \in \mathbb{R}$ ، بحيث

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \\ |x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ أو اختصارا $\lim x_n = x$ ، أو $x_n \to x$.

ملاحظات

1. جميع حدود المتتالية ما عدا $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ تقع في جوار- ε للعدد x ، أي $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.



2. يمكن تعريف التقارب باستخدام لغة الجوار كما يلي:
المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي كل حدود المتتالية ما عدا عدد منتهي منها.

3. إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N,\, C > 0 \in \mathbb{N} : \\ |x_n - x| < C\varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

حيث C ثابت لا يعتمد على n أو ε ، فإن $x_n \to x$.

4. يعتمد تقارب المتتالية على الحدود المتأخرة والتي تسمى ذيل المتتالية. الذيل m للمتالية (x_n) هو $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$.
فمثلا الذيل الثالث للمتالية $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ هو $(7, 9, \ldots)$.

5. من تعريف المتتالية المتقاربة نجد أن

$$|x_n - x| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x$$

مثال 10.

1. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{1}{n} = 0$
2. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{n-1}{n} = 1$
3. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{1}{2^n} = 0$
4. المتتالية $((-1)^n)$ غير متقاربة.
5. المتتالية (n) غير متقاربة.

تمرين 8 : أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{3n+2}{n+1} = 3$

نظرية 2.1.1

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فإن نهايتها وحيدة

البرهان

الآن نعطي شرطا ضروريا ولكنه ليس كافيا للمتتالية المتقاربة، وهو أن تكون المتتالية محدودة.

تعريف 2.1.3: المتتالية المحدودة

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث

$$|x_n| < K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

نظرية 2.1.2

المتتالية المتقاربة محدودة.

البرهان

هل عكس هذه النظرية صحيح؟

نظرية 2.1.3

إذا كانت $x_n \to x \neq 0$ ، فإنه يوجد $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \implies |x_n| > M$$

البرهان

نظرية 2.1.4

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x و (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y ، فإن

1. المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$.
2. المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy.
3. إذا كان $k \in \mathbb{R}$، فإن المتتالية (kx_n) متقاربة ونهايتها kx.
4. إذا كان $y_n \neq 0$، لكل $n \in \mathbb{N}$ ، و $y \neq 0$، فإن المتتالية $(\frac{x_n}{y_n})$ متقاربة ونهايتها $\frac{x}{y}$.

البرهان

مثال 11. أوجد

1. $\lim \frac{2n+1}{n}$

2. $\lim \frac{5n+1}{2n+4}$

نظرية 2.1.5

إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ و

$$x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $x \le y$.

البرهان

ملاحظة

لو كانت $y_n < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فلا نستطيع أن نستنتج أن $x < y$. أعط مثالا

نظرية 2.1.6: نظرية الحصر

إذا كانت

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N_0$$

وكان $\lim x_n = \lim z_n = L$ ، فإن (y_n) متقاربة ونهايتها L .

البرهان

مثال 12.
أوجد النهاية $\lim \frac{\sin n}{n^2}$.

مثال 13.
إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟

مثال 14.
إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim a^n = 0$.

مثال 15.
إذا كان $c > 0$ ، فأثبت أن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

مثال 16.
إذا كان $x_n \ge 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، وكان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

مثال 17.
أثبت أن $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$.

2.2 المتتاليات المطردة

تعريف 2.2.1: المتتالية المطردة

1. نقول إن المتتالية (x_n) متزايدة (increasing) إذا كان $x_{n+1} \geq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متزايدة فعلا (strictly increasing) .
2. نقول إن المتتالية (x_n) متناقصة (decreasing) إذا كان $x_{n+1} \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متناقصة فعلا (strictly decreasing) .
3. إذا كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى مطردة.

ملاحظة

المتتالية (x_n) متزايدة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(-x_n)$ متناقصة.

مثال 18.

1. المتتالية $(\frac{1}{n})$ متناقصة فعلا
2. المتتالية (n^2) متزايدة فعلا.
3. المتتالية $((-1)^n)$ ليست مطردة.
4. المتتالية $(\frac{(-1)^n}{n})$ ليست مطردة.

نظرية 2.2.1

المتتالية المطردة متقاربة، إذا وفقط إذا كانت محدودة. كما أنه

1. إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

مثال 19.
إذا كانت $x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها .

مثال 20.
إذا كانت $x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها .

تعريف 2.2.2: الأعداد الحقيقية الممتدة

تسمى المجموعة $[-\infty,\infty] = \{-\infty,\infty\} \bigcup \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة.

نقول إن G جوار للنقطة ∞ إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث $(M,\infty] \subset G$. وتكون $\lim x_n = \infty$ إذا كان كل جوار للنقطة ∞ يحوي كل حدود (x_n) ما عدا عدد منته من عناصرها. أي:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad n \geq N \Longrightarrow x_n > M$$

2.3 معيار كوشي ونظرية بولزانو-فايرشتراس

تعريف 2.3.1: متتالية كوشي

تسمى المتتالية (x_n) متتالية كوشي، إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \\ |x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall n,m \geq N$$

وهذا يعني أن الحدود المتأخرة للمتابعة قريبة من بعضها.

نظرية 2.3.1

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فهي من نوع كوشي.

البرهان

تعريف 2.3.2: نقاط التراكم والنقاط المعزولة

نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصرا $x \neq a \in A$. يرمز لنقاط تراكم A بالرمز $\widehat{A}$.
إذا كانت $x \in A \backslash \widehat{A}$ ، فإن x تسمى نقطة معزولة من نقاط A.

مثال 21.
حدد نقاط التراكم والنقاط المعزولة في المجموعات التالية

1. $[0,1)$
2. $\{1,2,3\}$
3. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

ملاحظات

1. $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad 0 < |x-a| < \varepsilon$$

2. $x \in A$ نقطة معزولة ، إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x لا يتقاطع مع A إلا في x ، أي
$$V \cup A = \{x\}$$

مثال 22.
حدد نقاط التراكم للمجموعات التالية

1. (a, b)
2. $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Q}$

نظرية 2.3.2:

1. إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فإننا نستطيع اختيار متالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة بحيث $x_n \to x$.
2. إذ كانت (x_n) متقاربة من x والمجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية ، فإن $x \in \widehat{A}$.

ملاحظات

1. أي مجموعة منتهية ليس لها نقاط تراكم (بناء على التعريف، أي جوار لنقطة تراكم يحوي عددا غير منته من عناصر المجموعة).
2. المجموعة غير المنتهية قد لا يكون لها نقاط تراكم ($\mathbb{Z}$) .

نظرية 2.3.3: نظرية كانتور للفترات المتداخلة

لتكن I_n متتالية من الفترات المحدودة المغلقة، بحيث $I_{n+1} \subset I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.
إذا كان $\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ ، حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n ، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ يحوي نقطة واحدة على الأقل.

سؤال:

1. ماذا لو كانت الفترات مفتوحة؟
2. ماذا لوكانت الفترات غير محدودة؟

نظرية 2.3.4: نظرية بولزانوا فايرشتراس

إذا كانت A مجموع محدودة وغير منتهية، فإن لها نقطة تراكم واحدة على الأقل.

تمهيدية 2.3.1

إذا كانت (x_n) من نوع كوشي، فإنها محدودة.

نظرية 2.3.5: معياركوشي

المتتالية (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت من نوع كوشي.

مثال 23.
أثبت أن المتتالة $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.

مثال 24.
إذا كان $x_1 = 1, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة. من نوع كوشي.

2.4 المتتاليات الجزئية

تعريف 2.4.1: المتتالية الجزئية

لتكن (x_n) متتالية، (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلا، أي $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ ، فإننا نسمي المتتالية $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ متتالية جزئية من (x_n) .

إي إن المتتالية الجزئية ناتجة عن بعض عناصر المتتالية الأصلية وإعادة ترقيم الحدود الباقية.

مثال 25.

1. كل ذيل من (x_n) هو متتالية جزئية.
2. الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n) حيث $n_k = 2k - 1$ ، وكذلك الحدود الزوجية.
3. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}, \ldots)$ ليست متتالية جزئية من $(\frac{1}{n})$ لاختلاف الترتيب.
4. $(4, 8, 9, \ldots)$ ليست متتالية جزئية من $(2n)$ ، لأن 9 ليس عنصرا في المتتالية.

ملاحظة

الشرط $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ يقتضي أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

نظرية 2.4.1:

إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x، فإن كل متتالية جزئية منها متقاربة لنفس النهاية.

ملاحظات

1. إذا أمكن إيجاد متتاليتين جزئيتين (x_{n_k}) و (x_{n_j}) متقاربتين لنهايتين مختلفتين، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

2. إذا أوجدنا متتالية جزئية (x_{n_k}) غير متقاربة، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

مثال 26.

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة.

2. المتتالية $(\frac{(-1)^n n}{n+1})$ ليست متقاربة.

3. إذا عرفنا

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

فإن (x_n) ليست متقاربة.

نتيجة 2.4.1:

إذا كانت (x_n) متقاربة ، ولها متتالية جزئية متقاربة من x ، فإن $\lim x_n = x$.

نظرية 2.4.2:

إذا كانت (x_n) محدودة ، فإن لها متتالية جزئية متقاربة.

نظرية 2.4.3:

إذا كانت (x_n) محدودة ، وجميع متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية، فإن (x_n) متقاربة لنفس النهاية.

2.5 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

تعريف 2.5.1:

نقول إن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا كانت A جوارا لكل عنصر من عناصرها. أي إذا كان

$$\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$$

مثال 27.

1. كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة
2. إذا كان $y \in R$ فإن المجموعة $R\backslash\{y\}$ مجموعة مفتوحة.
3. $[a,b)$ ليست مفتوحة.
4. $\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة.
5. $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة.

نظرية 2.5.1

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مفتوحتان
2. إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.
3. إذا كانت $G_1, G_2, \ldots, G_n$ مجموعات مفتوحة، فإن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة.

النظرية السابقة تبين أن المجموعات المفتوحة تمثل تبولوجي على $\mathbb{R}$.

ملاحظة

لاحظ أن المجموعات $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n)})$ مجموعات مفتوحة لكل $n \in \mathbb{N}$ ، ولكن

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

ليست مجموعة مفتوحة.

نظرية 2.5.2:

المجموعة $G \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا وفقط إذا كانت اتحادا لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة.

تعريف 2.5.2: المجموعة المغلقة

المجموعة A مغلقة، إذا وفقط إذا كانت متممتها A^c مفتوحة.

مثال 28.

1. $[a,b], [a,\infty), (-\infty,b]$ مجموعات مغلقة.
2. $[a,b)$ ليست مغلقة.
3. $\mathbb{Z}$ مغلقة.
4. $\mathbb{Q}$ ليست مغلقة.

نظرية 2.5.3

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مغلقتان .
2. إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مغلقة.
3. إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مغلقة.

ملاحظة

لاحظ أن المجموعات $F_n = [0, 1-\frac{1}{n}]$ مغلقة لكل $n \in \mathbb{N}$ ، ولكن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = [0,1)$$

ليس مجموعة مغلقة.

نظرية 2.5.4

التقارير الثلاثة متكافئة :

1. F مغلقة.
2. $\widehat{F} \subset F$.
3. F تحتوي نهايات متتالياتها المتقاربة، أي إن

$$x_n \in F,\ \ x_n \longrightarrow x \quad \Longrightarrow\ \ x \in F$$

مثال 29.
أثبت أن المجموعة $A = (0,1)$ ليست مغلقة.

مجموعة كانتور الثلاثية

لتكن $F_0 = [0,1]$, ولنستبعد الثلث الأوسط $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ، فنحصل على $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$, ثم نستبعد الثلث الأوسط من كل فترة ناتجة، وهكذا فنحصل على

$$F_0, F_1, F_2, \dots$$

نعرف مجموعة كانتور بأنها

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

ملاحظات

1. F مغلقة.
2. $F \sim [0,1]$ وبالتالي فإن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.
3. طول مجموعة كانتور يساوي 1.

تعريف 2.5.3:

1. نعرف داخل (interior) A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A ويرمز له بالرمز A° .
2. نعرف انغلاق (closur) A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$.
3. نعرف حدود (boundary) A بأنها المجموعة $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

مثال 30.
لتكن $A = (0,1]$ ، فإن

$$A^\circ =$$
$$\overline{A} =$$
$$\partial A =$$

الباب الثالث

نهايات الدوال

تعد النهايات من المفاهيم المهمة في التحليل حيث يعتمد عليها مفاهيم الاتصال والتفاضل والتكامل. لا شك أن القارئ قد سبق له دراسة موضوع النهايات, ولكن في هذا الفصل ندرس النهايات بشكل أكثر صرامة رياضية، وكذلك نربط مفهوم النهايات بالمتتاليات.

3.1 نهاية الدالة

تعريف 3.1.1:

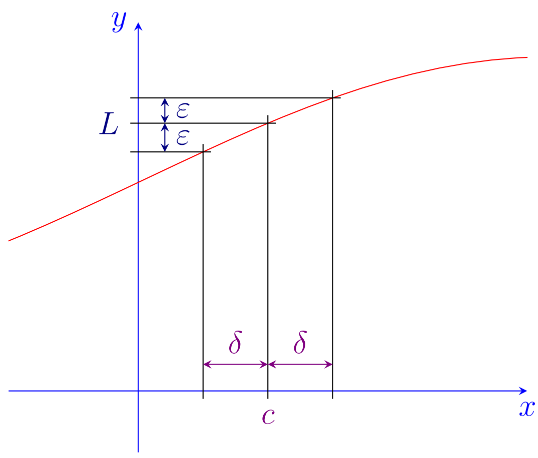
إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن للدالة f نهاية عند c وقيمتها L إذا كان

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ونكتب

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

أو $L \longrightarrow f(x)$ عندما $c \longrightarrow x$.



مثال 31.
أثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{x\to 2} 2x-1=3$

مثال 32.
إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

فأثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{x\to 2} f(x)=4$

مثال 33.
إذا كانت $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q}^c\\ \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},(p,q)=1\end{cases}$$

فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)=0$ لكل $c\in(0,1]$

ملاحظات

1. إذا كانت $\delta>0$ تحقق المطلوب لجعل $|f(x)-L|<\varepsilon$ ، فإن كل $\delta'\in(0,\delta)$ تضمن تحقق ذلك.
2. لإثبات أن $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ، يكفي إثبات أن

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0:\quad & x\in D,\\ & 0<|x-c|<\delta \quad\Rightarrow |f(x)-L|<a\varepsilon\end{aligned}$$

حيث $a>0$ لا يعتمد على x ولا ε.

3. باستخدام لغة الجوارات ، $\lim_{x\to c} f(x)=L$ تعني أنه لكل جوار V للنقطة L يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x\in U\cap(D\setminus\{c\})\Longrightarrow f(x)\in V$$

3.2 المتتاليات ونهاية الدالة

نظرية 3.2.1

إذا كانت $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ،و كانت $c\in\widehat{D}$. فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim_{x\to c} f(x)=L$
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\to c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها L.

نتيجة 3.2.1

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$. ولنعرف $S := \{(x_n) \subset D : x_n \neq c, x_n \to c\}$

1. إذا وجدت متتالية (x_n) في S بحيث $(f(x_n))$ غير متقاربة ، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.
2. إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (y_n) في S بحيث $\lim\limits_{x \to c} f(y_n) \neq \lim\limits_{x \to c} f(x_n)$ ، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.

مثال 34.
الدالة $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ليس لها نهاية عند 0.

مثال 35.
الدالة $\text{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ليس لها نهاية عند 0.

مثال 36.
الدالة $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ ليس لها نهاية عند 0.

مثال 37.
الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

ليس لها نهاية عند أي عدد $c \in \mathbb{R}$.

نظرية 3.2.2

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة.

نظرية 3.2.3

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة فهي وحيدة.

البرهان:

3.3 النظريات الأساسية

نظرية 3.3.1

لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $c\in\widehat{D}$. إذا كان للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c. أي يوجد جوار U للنقطة c و $M>0$ بحيث

$$|f(x)|\leq M \qquad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}$$

البرهان:

نظرية 3.3.2

لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ حيث $L\neq 0$ ، فإنه يوجد جوار U للنقطة c و $M>0$ بحيث

$$|f(x)|>M \qquad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}$$

البرهان:

نظرية 3.3.3

لتكن $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ ، $\lim\limits_{x\to c}g(x)=K$ ، فإن

1. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=L+K$
2. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=LK$ ، كما أن
   - $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=L-K$
   - $\lim\limits_{x\to c}rf(x)=rL, \quad \forall r\in\mathbb{R}$
3. إذا كان $K\neq 0$ ، فإن $g(x)\neq 0$ لكل $x\neq c$ في جوار ما للنقطة c ، كما أن $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{K}$

البرهان:

نظرية 3.3.4

لتكن $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $c\in\widehat{D}$. إذا كان لكل من f,g نهاية عند c ، وكان

$$f(x)\leq g(x) \qquad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}$$

فإن

$$\lim_{x\to c}f(x)\leq\lim_{x\to c}g(x)$$

البرهان:

نظرية 3.3.5

لتكن $f,g,h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان هناك جوار U للنقطة c بحيث
$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \forall x \in U \cap D\backslash\{c\}$$
وكان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$

البرهان:

مثال 38.

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$
3. $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
4. $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} \cos\theta = \cos\theta_0 \qquad \lim\limits_{\theta\to\theta_0} \sin\theta = \sin\theta_0,$
5. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = 0$

3.4 امتداد تعريف النهايات

تعريف 3.4.1:

1. لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D\cap(c,\infty)$. فإن النهاية اليمنى للدالة f عند c تساوي L إذا كان
$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0 : \quad & x\in D,\\ & 0<x-c<\delta \qquad \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\end{aligned}$$
ونكتب
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$
2. لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D\cap(-\infty,c)$. فإن النهاية اليسرى للدالة f عند c تساوي K إذا كان
$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0 : \quad & x\in D,\\ & 0<c-x<\delta \qquad \Rightarrow |f(x)-K|<\varepsilon\end{aligned}$$

ونكتب

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = K$$

نظرية 3.4.1

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$ فإن

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

البرهان:

مثال 39.

1.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \\ 0 & x = 4 \\ 2x-4 & x < 4 \end{cases}$$

ما قيمة $\lim_{x \to 4} f(x)$ ؟

2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

هل النهاية $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجودة؟

تعريف 3.4.2:

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$، نقول إن

1. $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ إذا كان

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > M \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ إذا كان

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < M \end{aligned}$$

تعريف 3.4.3:

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

1. نقول إن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \begin{aligned} & x \in D, \\ & x > M \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

2. نقول إن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \begin{aligned} & x \in D, \\ & x < M \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

مثال 40.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2}$

3.5 الدوال المطردة

تعريف 3.5.1:

1. نقول إن f متزايدة إذا كان

$$x, y \in D,\;\; x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$$

وتكون متزايدة فعلا إذا كان $f(x) < f(y)$.

2. نقول إن f متناقصة إذا كان

$$x, y \in D,\;\; x < y \Longrightarrow f(x) \ge f(y)$$

وتكون متناقصة فعلا إذا كان $f(x) > f(y)$.

ملاحظات

1. نقول إن f مطردة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.
2. f متزايدة إذا وفقط إذا كانت $-f$ متناقصة.

نظرية 3.5.1:

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متزايدة، فإنه لكل $c\in(a,b)$ تكون النهايتان $\lim_{x\to c^+}f(x)$ و $\lim_{x\to c^-}f(x)$ موجودتين، كما أن

$$\lim_{x\to c^-}f(x)\leq f(c)\leq\lim_{x\to c^+}f(x)$$

كما أن $\lim_{x\to a^+}f(x)$ و $\lim_{x\to b^-}f(x)$ موجودة وتحقق

$$f(a)\leq\lim_{x\to a^+}f(x),\qquad\lim_{x\to b^-}f(x)\leq f(b)$$

نظرية 3.5.2:

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مطردة، فإن مجموعة النقاط A التي لا يوجد عندها للدالة f نهاية، هي مجموعة قابلة للعد. وإذا كانت $c\in[a,b]\backslash A$ ، فإن

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

الباب الرابع

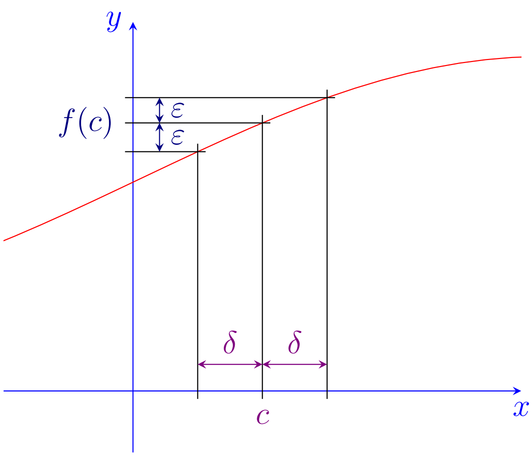
الاتصال

4.1 الدوال المتصلة

تعريف 4.1.1:

إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in D$. فإن الدالة f متصلة عند c إذا كان

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0: \quad & x \in D, \\ & |x - c| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \end{aligned}$$



ملاحظات

1. نعرف نهاية الدالة f عند أي نقطة في $\widehat{D}$ وإن لم تكن في D، بينما يعرف الاتصال عند أي نقطة في D حتى وإن كانت معزولة.

2. تكون الدالة متصلة عند $c \in D \cap \widehat{D}$ إذا وفقط إذا كان

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

3. إذا كانت $c \in D$ نقطة معزولة، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث
$$(c-\delta, c+\delta) \cap D = \{c\}$$
وبالتالي، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، فإن
$$|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$$

4. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث
$$x \in U \cap D \Longrightarrow \quad f(x) \in V$$

5. تكون f متصلة على مجموعة D إذا كانت متصلة عند كل نقطة في D.

نظرية 4.1.1

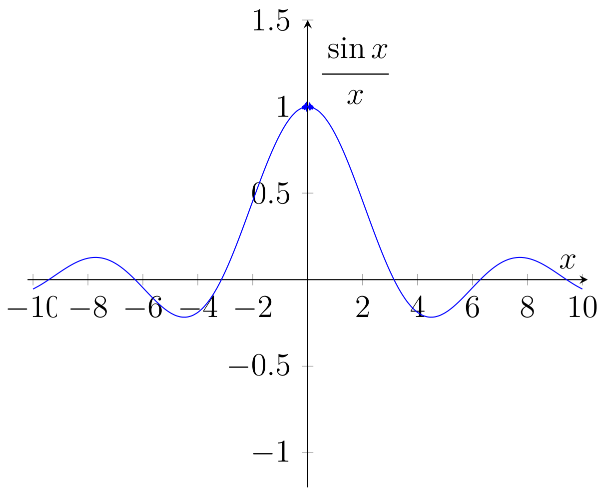
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$. إذا وفقط إذا كان لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها $f(c)$.

نتيجة 4.1.1

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير متصلة عند $c \in D$. إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \longrightarrow c$ ولكن صورتها $(f(x_n))$ غير متقاربة من $f(c)$.

مثال 41.
كثيرة الحدود دالة متصلة.

مثال 42.
الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
متصلة على $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.



مثال 43.
الدالة $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: f المعرفة بالقاعدة

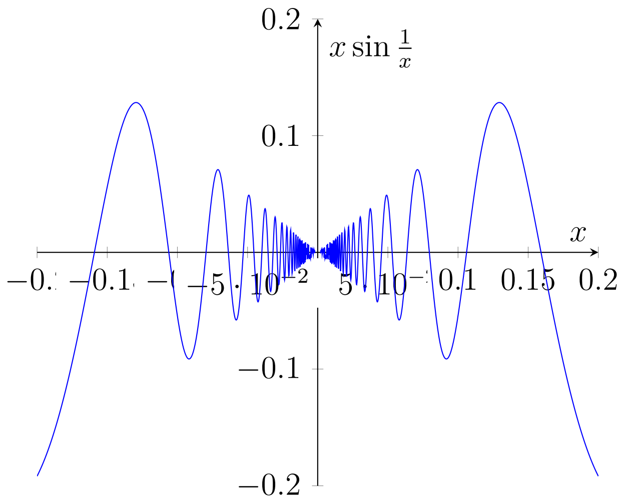
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

غير متصلة عند أي عدد $c \in \mathbb{R}$.

مثال 44.
إذا كانت $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: f معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

متصلة على $\mathbb{R}$.



مثال 45.
إذا كانت $\mathbb{R} \longrightarrow (0, 1]$: f معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}^c \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1 \end{cases}$$

فإن الدالة متصلة على الأعداد غير النسبية، لأنه لكل عدد غير نسبي c، فإن:

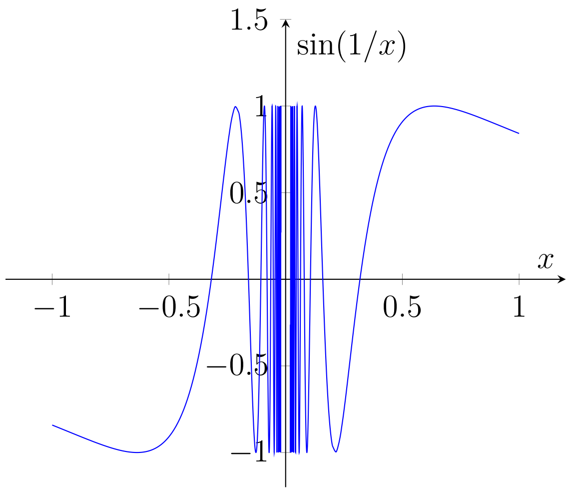
$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 = f(c)$$

أنواع عدم الاتصال

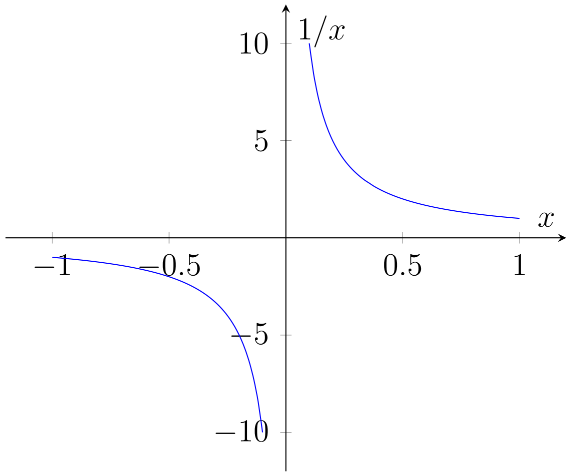
1. عدم الاتصال القابل للإزالة. ويحدث عندما تكون النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ولكن $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. وفي هذه الحالة يمكن إعادة تعريف الدالة عند c بحيث تساوي قيمة النهاية.

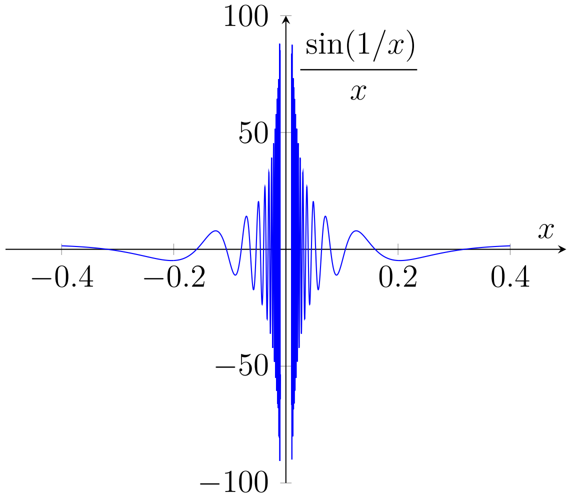
2. عدم الاتصال من نوع القفزة:إذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى للدالة f موجودتين عند c ولكنهما غير متساويتين أي $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$.

3. عدم الاتصال المتذبذب: إذا كانت أحدى النهايتين $\lim_{x\to c^+} f(x)$ أو $\lim_{x\to c^-} f(x)$ غير موجودة.



4. عدم الاتصال اللانهائي: عندما تكون f غير محدودة في كل جوار للنقطة c، أي $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.





4.2 تحصيل الدوال المتصلة

نظرية 4.2.1

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن $f + g, f - g, fg$ متصلة عند c، كما أن f/g متصلة عند c إذا كانت $g(c) \neq 0$.

البرهان:

نتيجة 4.2.1

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن kf متصلة عند c، لأي ثابت k.

نتيجة 4.2.2

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، فإن $f + g, f - g, fg$ متصلة على D، كما أنه إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x \in D$، فإن f/g متصلة على D.

مثال 46.
الدالة الكسرية p/g حيث p و q كثيرتا حدود، هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ماعدا أصفار q الحقيقية.

1. الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. الدالة $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^4 + 2}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال 47.

1. الدالتان $\sin x, \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$.
2. الدالة $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{(\frac{\pi}{2} + n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$.
3. الدالة $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$.

نظرية 4.2.2

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D) \subset E$، وكانت f متصلة عند $c \in D$ ، و g متصلة عند $f(c)$ ، فإن دالة التحصيل $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند c.

البرهان:

نتيجة 4.2.3

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، والدالة $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على E، وكانت $f(D) \subset E$، فإن الدالة $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D.

مثال 48.
إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن الدالة $|f|$ متصلة على D.

مثال 49.
إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن الدالة $\sqrt{f}$ متصلة على D.

4.3 خواص الاتصال على فترة

تعريف 4.3.1

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ محدودة، إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in D$$

نظرية 4.3.1

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، فإنها محدودة.

البرهان:

تعريف 4.3.2

يكون للدالة $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ قيمة صغرى (مطلقة) على D إذا وجد $x_1\in D$ بحيث

$$f(x_1)\leq f(x)\quad\forall x\in D$$

ويكون لها قيمة عظمى (مطلقة) على D إذا وجد $x_2\in D$ بحيث

$$f(x_2)\geq f(x)\quad\forall x\in D$$

وتسمى القيمتان العظمى والصغرى القيم القصوى للدالة.

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ قيمة صغرى عند x_1 وقيمة عظمى عند x_2، فإن $f(D)\subset[f(x_1),f(x_2)]$.
2. القيم القصوى إذا وجدت فهي وحيدة، ولكن قد تأخذها عند أكثر من نقطة.

مثال 50.

1. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$ لها قيمة صغرى عند 0 وليس لها قيمة عظمى.

2. الدالة $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$ ليس لها قيما قصوى.

3. الدالة $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

ليس لها قيما عظمى.

نظرية 4.3.2

إذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة، وكانت $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، فإن للدالة f قيمة عظمى وصغرى على I.

نظرية 4.3.3: نظرية القيمة البينية

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ وكان λ عددا حقيقيا بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عدد $c\in(a,b)$ بحيث $f(c)=\lambda$.

.

هذه شروط كافية وليست ضروية.

نتيجة 4.3.1

إذا كانت I فترة، والدالة $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(I)$ فترة.

.

نتيجة 4.3.2

إذا كانت f متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a, b]$، فإن $f([a, b])$ فترة مغلقة ومحدودة.

.

نتيجة 4.3.3

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على وكانت إشارتا $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين ، فإن للدالة f صفرا في الفترة (a, b).

مثال 51.
لتكن p كثيرة حدود حقيقية من الدرجة n. إذا كان n عددا فرديا، فإن للمعادلة $p(x) = 0$ جذرا حقيقيا واحدا على الأقل.

مثال 52. نظرية النقطة الثابتة

إذا كانت $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ متصلة، فأثبت أن f لها نقطة ثابتة. أي يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $f(c) = c$.

نظرية 4.3.4

لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإنها مطردة فعلا.

.

نظرية 4.3.5

لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ فإنها مطردة فعلا على I، وكان مدى g أي $f(I)$ فترة، فإن f متصلة.

.

نظرية 4.3.6

لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإن f^{-1} متصلة ومطردة فعلا.

.

مثال 53.
أثبت أن $f(x)=\sqrt[n]{x}$ دالة متصلة على $[0,\infty)$.

لاحظ أن اتصال f لوحده غير كاف لضمان اتصال f^{-1}.

مثال 54.
إذا كانت الدالة $f:[0,1]\cup(2,3]\longrightarrow[0,2]$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ x-1 & 2<x\le 3 \end{cases}$$

فإن f متصلة ومتباينة، ولكن $f^{-1}:[0,2]\longrightarrow[0,1]\cup(2,3]$ حيث

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ x+1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

غير متصلة.

4.4 الاتصال المنتظم

إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة $c \in D$، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

لكن لو اخترنا نقطة أخرى $c' \in D$ فإنه يوجد $\delta' > 0$

$$x \in D, |x - c'| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن δ مرتبطة بالنقطة c.

مثال 55.

لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 3$. باستخدام تعريف $\varepsilon - \delta$ ، فإننا نجد أن $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ تحقق شرط الاتصال.

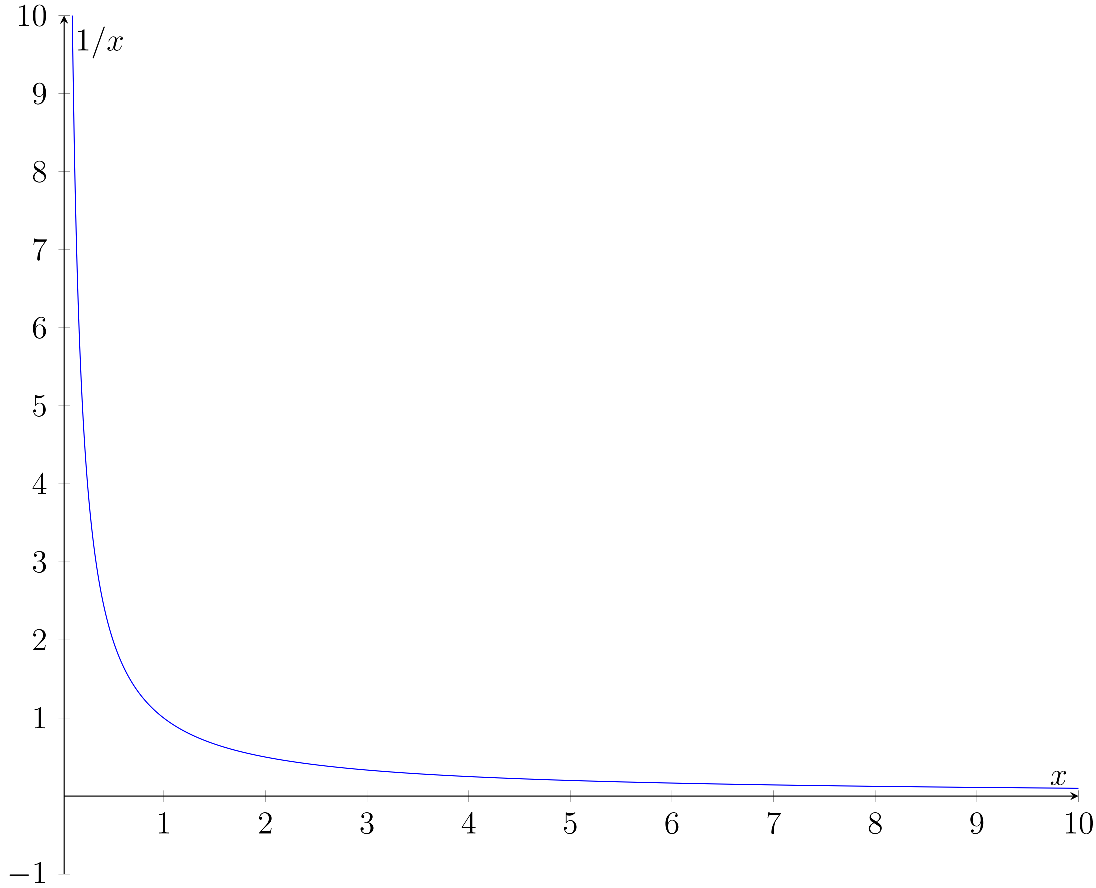
مثال 56.

لتكن $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{x}$. باستخدام تعريف $\varepsilon - \delta$ ، فإننا نجد أن $\delta = \min\{\dfrac{c}{2}, \dfrac{c^2\varepsilon}{2}\}$ تحقق شرط الاتصال.

تعريف 4.4.1: الاتصال المنتظم

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad x, t \in D, \\ |x - t| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$



ملاحظات

1. الاتصال المنتظم يكون على مجموعة، وليس عند نقطة.

2. أي دالة متصلة بانتظام، فهي متصلة.

مثال 57.
لتكن $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$. باستخدام تعريف $\varepsilon - \delta$ ، فإننا نجد أن $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ تحقق شرط الاتصال.

نظرية 4.4.1: معيار عدم الاتصال المنتظم

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (t_n) في D بحيث

1. $|x_n - t_n| \to 0$
2. $|f(x_n) - f(t_n)| \nrightarrow 0$

.

نتيجة 4.4.1:

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا كان لكل متتاليتان (x_n) و (t_n) في D تحققان $|x_n - t_n| \to 0$ ، فإن $|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$.

مثال 58.
الدالة $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ ليست متصلة بانتظام.

مثال 59.
الدالة $f : [2,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ منتظمة الاتصال.

مثال 60.
الدالة $f:[2,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$ متصلة بانتظام.

مثال 61.
الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$ غير منتظمة الاتصال.

نظرية 4.4.2

إذا كانت $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة متصلة، والمجموعة D مغلقة ومحدودة، فإن f متصلة بانتظام.

.

مثال 62.
الدالة $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^3 - x^2$ متصلة بانتظام.

مثال 63.
الدالة $f : (0, 10) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^4 - x$ متصلة بانتظام.

مثال 64.
الدالة $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام.

وهذا يعني أن شروط النظرية السابقة كافية وليست ضرورية لانتظام الاتصال.

نظرية 4.4.3

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال على D . فإنه يمكن تمديد الدالة f لتصبح متصلة بانتظام على $\overline{D} = D \cup \widehat{D}$.

.

تعريف 4.4.2: شرط ليبشتز

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز ، إذا كان هناك ثابت $k > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq k|x - t| \quad \forall x, t \in D$$

مثال 65.
الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 4x - 5$ تحقق شرط ليبشتز

تمرين أثبت أن أي دالة تحقق شرط ليبشتز، في متصلة بانتظام.

4.5 المجموعات المتراصة والاتصال

تعريف 4.5.1: الغطاء المفتوح

إذا كانت $G_\lambda \subset \mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ حيث Λ مجموعة ترقيم. وكانت المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ ، بحيث $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ، فإن المجموعة $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تسمى عطاء مفتوحة للمجموعة D.

مثال 66.

1. $\{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0, \infty)$.

2. $\{(n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للأعداد الطبيعية.

3. $\{\mathbb{R}\}$ غطاء مفتوح لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

تعريف 4.5.2: المجموعة المتراصة

المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، إذا كان كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة D يحوي مجموعة جزئية منتهية $\{G_{\lambda_1}, \dots G_{\lambda_n}\}$ تغطي D.

مثال 67.

1. $\mathbb{R}$ ليست متراصة.
2. $(0, 1)$ ليست متراصة.
3. $[0, 1]$ متراصة.
4. $\{x_1, \dots, x_n\}$ متراصة.

نظرية 4.5.1: نظرية هاين بوريل

المجموعة D متراصة، إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان:

.

نظرية 4.5.2

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ ، فإن التقارير التالية متكافئة:

1. المجموعة D متراصة.
2. المجموعة D مغلقة ومحدودة.
3. لكل متتالية عناصرها في D، يوجد متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D.

نظرية 4.5.3

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن f متصلة بانتظام.

.

نظرية 4.5.4

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(D)$ متراصة.

.

ملاحظات

1. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة

   (ا) إذا كانت $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2$، فإن $f((0,1)) = \{2\}$ مجموعة غير مفتوحة.

   (ب) إذا كانت $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$ ، فإن $f((0,\infty)) = [-1,1]$ مجموعة غير مفتوحة.

2. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مغلقة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مغلقة.

   (ا) في الدالة $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ نلاحظ أن $f([0,\infty)) = (0,1]$ ليست مجموعة مغلقة.

نظرية 4.5.5

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه يوجد $x_1, x_2 \in D$ بحيث

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in D$$

.

نظرية 4.5.6

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة ، فإن $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ متصلة.

.

الباب الخامس

التفاضل

نشأة التفاضل

- ظهر في منتصف القرن السابع عشر
- ساهم نيوتن في نشأة التفاضل والتكامل عام 1666 واستخدمه في حل مسائل فيزيائية في السرعة والحركة
- بعد 10 سنوات ظهرت مساهمة ليبنز من خلال دراسته للمماسات المنحنيات ومسائل المساحة
- عُرفت المشتقة بشكل متماسك باستخدام النهايات بعد أن عرف كوشي النهاية عام 1821

5.1 المشتقة وقوانين الاشتقاق

تعريف 5.1.1: المشتقة

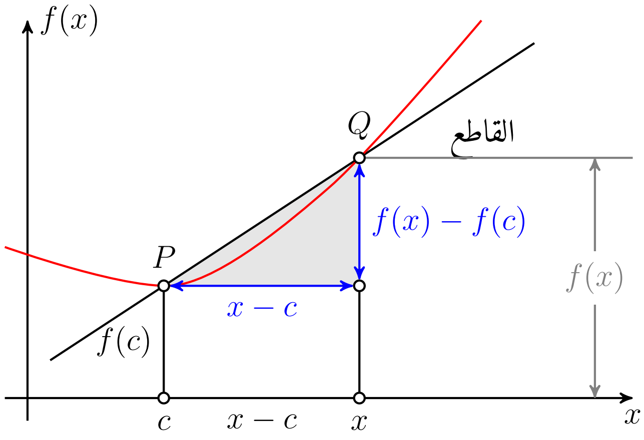
لتكن I فترة، ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ إذا كانت $c \in I$ وكانت النهاية

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة، فإن

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ويقال إن f قابلة للاشتقاق عند c



إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I فإن f قابلة للاشتقاق على I .
إذا كانت $I = [a, b]$ فإن المشتقة عند a, b تعرف كما يلي

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

مثال 68.
أوجد المشتقة للدوال التالية عند c باستخدام التعريف

1. $f(x) = k$

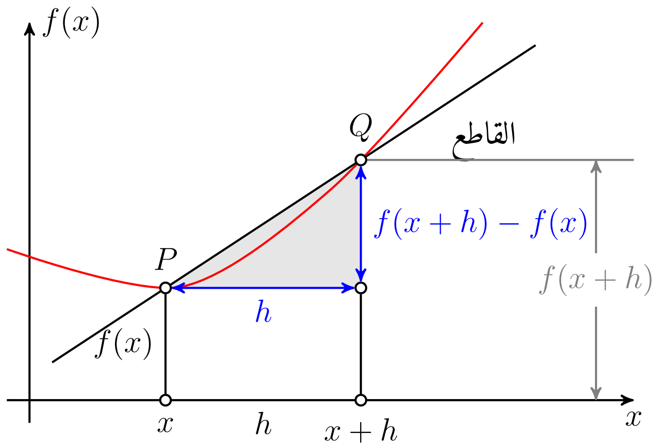
2. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

.3 $f(x) = |x|$

تعريف 5.1.2: تعريف آخر للمشتقة

إذا كانت إذا كانت الدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق، فإن مشتقتها تعطى بالعلاقة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



تعريف 5.1.3: المشتقة اليمنى واليسرى

إذا كانت إذا كانت الدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة c فإن المشتقة اليمنى واليسرى تعطى بالعلاقة

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعريف 5.1.4: المشتقة عند أطراف الفترة

إذا كانت $I = [a, b]$ فإن المشتقة عند a, b تعرف كما يلي

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

مثال 69.
أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sin x$ عند c باستخدام التعريف.

نظرية 5.1.1

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فهي متصلة عند c ولكن العكس غير صحيح

.

نظرية 5.1.2

إذا كانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فإن

1. $f+g$ قابلة للاشتقاق $(g+f)'(c) = g'(c) + f'(c)$
2. fg قابلة للاشتقاق $(fg)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$
3. إذا كانت $g(c) \neq 0$ فإن $\dfrac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

نتيجة 5.1.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

1. f^2 قابلة للاشتقاق عند c و $(f^2)'(c) = 2f(c)f'(c)$
2. f^n قابلة للاشتقاق عند c و $(f^n)'(c) = nf^{n-1}(c)f'(c)$

مثال 70.
أوجد مشتقات الدوال التالية:

1. $f(x) = x^n$
2. كثيرة الحدود $p(x)$
3. مشتقة $f(x) = x^{-n}$

نظرية 5.1.3

إذا كانت I, J فترتين وكانت $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$، وكانت $f(I) \subset J$ و $g : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $f(c)$، فإن $gof : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c ومشتقتها

$$(gof)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

ملاحظات

.1

$$(gof)' = (g'of) \cdot f'$$

.2

$$y = f(x), \qquad w = g(y)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

مثال 71.
ابحث قابلية الدوال الآتية للاشتقاق عند $x = 0$.

.1

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

.2

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

.3

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نظرية 5.1.4: مشتقة الدالة العكسية

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة على الفترة وقابلة للاشتقاق عند $b \in I$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $c = f(b)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(b) \neq 0$

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(b)}$$

أو

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

مثال 72.

1. الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ متباينة وقابلة للاشتقاق، أوجد $(f^{-1})'(8)$.

2. الدالة $f:[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)$ متباينة وقابلة للاشتقاق. أوجد مشتقة دالتها العكسية.

مثال 73.

1. أوجد مشتقة الدالة $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$

$$D=\begin{cases}\mathbb{R}-\{0\} & n \text{ فردي};\\ (0,\infty) & n \text{ زوجي}.\end{cases}$$

5.2 نظرية القيمة المتوسطة

تعتبر نظرية القيمة المتوسطة من النظريات المهمة في حساب التفاضل

تعريف 5.2.1: القيم القصوى المحلية

نقول إن للدالة $f: D \to \mathbb{R}$ قيمة عظمى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c - \delta, c + \delta)$ بحيث

$$f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

ولها قيمة صغرى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c - \delta, c + \delta)$ بحيث

$$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

القيمة العظمى (الصغرى) المطلقة هي قيمة عظمى (صغرى) محلية، ولكن العكس غير صحيح

نظرية 5.2.1: قيمة المشتقة عند القيم القصوى

إذا كان للدالة f قيمة قصوى على الفترة المفتوحة (a, b) عند النقطة c وكانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

$$f'(c) = 0$$

.

تعريف 5.2.2: النقاط الحرجة

نقول إن c نقطة حرجة للدالة f إذا كانت

1. f غير قابلة للاشتقاق عند c
2. أو كانت $f'(c) = 0$

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c فإن c نقطة حرجة للدالة f.
2. إذا كان للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c نقطة داخلية في D فإن c نقطة حرجة للدالة f.
3. إذا كان للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c تقع في حافة D فإن c ليست بالضرورة نقطة حرجة للدالة f

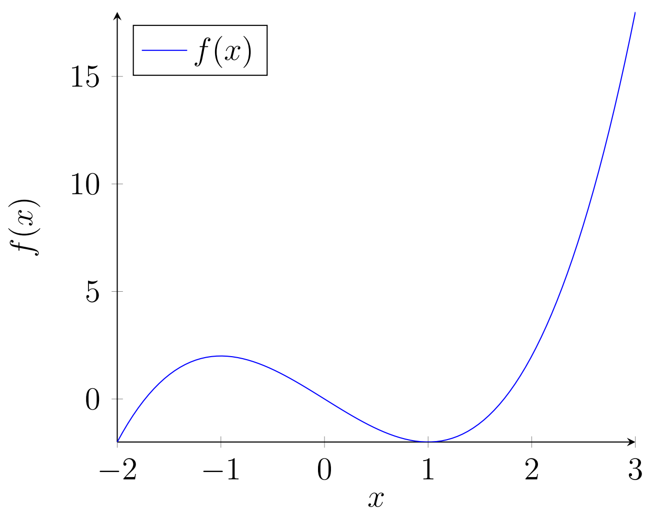
   مثال: $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$
4. إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f فليس من الضروري أن يكون للدالة قيمة قصوى عند c

   مثال: $f(x)=x^3$ عند $x=0$

مثال 74.

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=x^3-3x$$



.

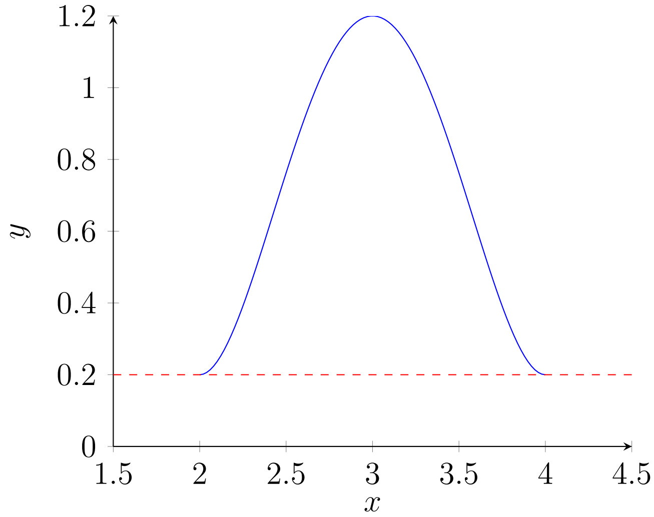
نظرية 5.2.2: نظرية رول

إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f'(c) = 0$$



مثال 75.
لتكن $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x)=-x^2+6x-6$$

أوجد c التي تحقق نظرية رول.

مثال 76.

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

هذه الدالة لا تحقق شروط نظرية رول

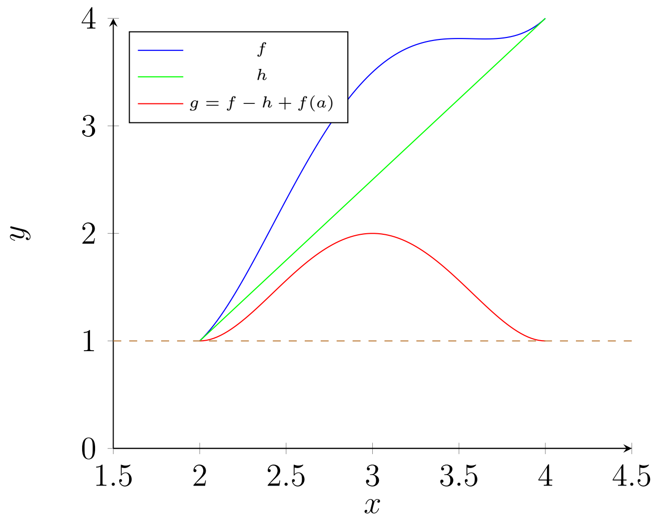
نظرية 5.2.3: نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



مثال 77.
لتكن $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = x^3$$

أوجد c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة.

.

نظرية 5.2.4
لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على D، فإن f' محدودة على D، إذا وفقط إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز على D.

.

مثال 78.

1. $f(x) = \sin x$ تحقق شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$، وبالتالي فهي متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$. .

2. $f(x) = \tan^{-1} x$ تحقق شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$، وبالتالي فهي متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$. •

3. $f(x) = \ln x$ تحقق شرط ليبشتز على $[2, \infty)$، وبالتالي فهي متصلة بانتظام على $[2, \infty)$. •

4. $f(x) = \ln x$ ليست متصلة بانتظام على $(0, 1)$. •

نظرية 5.2.5

لتكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على (a, b)

1. إذا كان $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f دالة ثابتة على $[a, b]$
2. إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f دالة متباينة على $[a, b]$

•

نتيجة 5.2.1

لتكن $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b)
إذا كان

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

فإنه يوجد ثابت $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$f(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

نظرية 5.2.6

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b)

1. إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متزايدة على $[a,b]$
2. إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متناقصة على $[a,b]$
3. إذا كان $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متزايدة فعلا على $[a,b]$
4. إذا كان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متناقصة فعلا على $[a,b]$

.

ملاحظات

1. في النظريتين السابقتين، إذا أسقطنا شرط الاتصال على الفترة $[a,b]$ فإن النتيجة صحيحة، لكن على الفترة (a,b)
2. f متزايدة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in (a,b)$
3. f متناقصة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in (a,b)$
4. إذا كانت f متزايدة فعلا فلا يشترط أن يكون $f'(x) > 0$

   مثال: $f(x) = x^3$

مثال 79.

1. أثبت أن

$$\sin x \le x \qquad \forall x \ge 0$$

.

2. أثبت متباينة برنولي

$$(1+x)^r > 1 + rx \qquad \forall x > -1, x \neq 0, r > 1, r \in \mathbb{Q}$$

نظرية 5.2.7: اختبار المشتقة الأولى

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، و c نقطة حرجة للدالة f

1. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث

$$\forall x \in U, x < c \qquad f'(x) < 0$$

$$\forall x \in U, x > c \qquad f'(x) > 0$$

فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

2. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث

$$\forall x \in U, x < c \qquad f'(x) > 0$$

$$\forall x \in U, x > c \qquad f'(x) < 0$$

فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

3. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث يكون للمشتقة $f'(x)$ نفس الإشارةلكل $x \in U - \{c\}$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى للدالة f

نظرية 5.2.8: مشتقة الدالة العكسية

إذا كانت $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومشتقتها f' متصلة على I وكانت $b \in I$ و $f'(b) \neq 0$ فإنه يوجد فترة مفتوحة $J \subset I$ تحتوي b بحيث تكون الدالة $f|_J$ متباينة والدالة $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b)) = \frac{1}{f'(b)}$$

ز

نظرية 5.2.9: نظرية داربو: الخاصية البينية للمشتقة

إذا كانت $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وكانت λ تقع بين $f'(a)$ و $f'(b)$ أي إن

$$f'(a) < \lambda < f'(b) \qquad or \qquad f'(b) < \lambda < f'(a)$$

فإنه يوجد فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

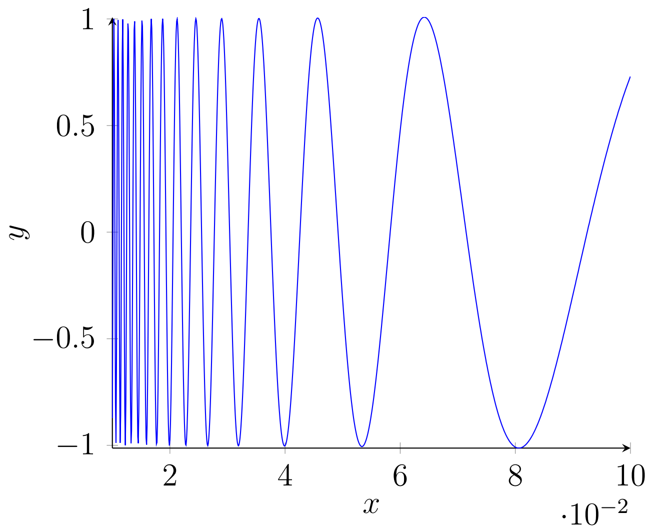
$$f'(c) = \lambda$$

مثال 80.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

لاحظ أن عدم اتصال المشتقة ليس من نوع القفزة



مثال 81.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ليست مشتقة لأي دالة في جوار 0.

5.3 قاعدة لوبيتال

تسهل عملية إيجاد بعض النهايات المعقدة

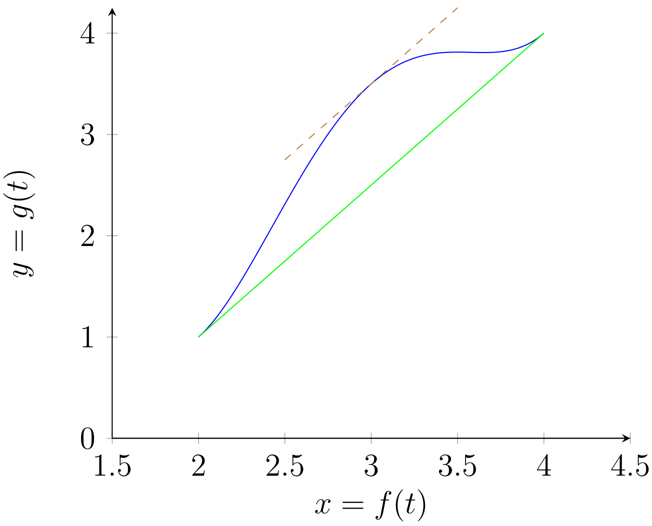
نظرية 5.3.1: نظرية كوشي للقيمة المتوسطة

إذا كانت $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$



نظرية 5.3.2: قاعدة لوبيتال

إذا كانت $c \in I$ وكانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ متصلة على I وقابلة للاشتقاق على $I - \{c\}$ وكان

1. $\forall x \in I \in -\{c\} \qquad g'(x) \neq 0$
2. $f(c) = g(c) = 0$
3. النهاية $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

.

مثال 82.

1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{|x|}$$

نظرية 5.3.3

إذا كانت $a > 0$ وكانت $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
2. $\forall x > a \qquad g'(x) \neq 0$
3. النهاية $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظات

يوجد عدد من حالات عدم التعيين مثل

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0 \cdot \infty$$
$$\infty - \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

نظرية 5.3.4

إذا كانت $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$
3. النهاية $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 83.

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)+x}{x}$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{x}$$

3.

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x)$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

.5

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x$$

5.4 نظرية تيلور

تعتبر من النظريات المهمة في التفاضل والتحليل بشكل عام، وتستخدم لإثبات العديد من النظريات. كما تستخدم في التحليل العددي.

نظرية 5.4.1: نظرية تيلور

وكانت $f \in C^n[a,b]$ أي المشتقات $f',\ldots,f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$ وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a,b)
إذا كان $x_0 \in [a,b]$ فإنه لأي $x \in [a,b]-\{x_0\}$ يوجد نقطة c بين x_0 و x بحيث

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

بإمكاننا الحصول على نظرية القيمة المتوسطة بوضع $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

وهذه صيغة تيلور:

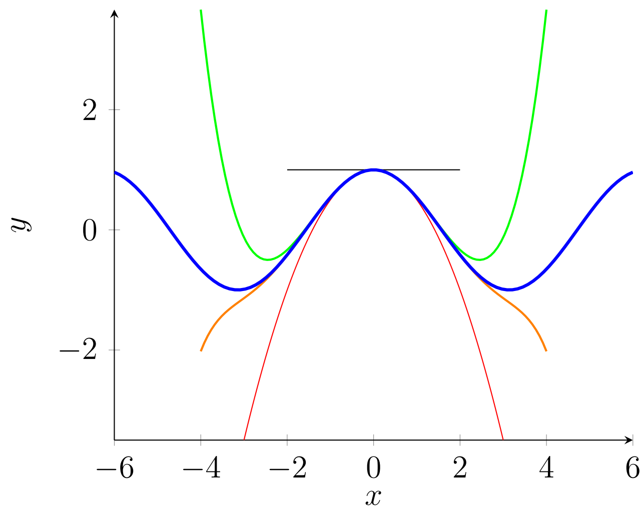
$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

يسمى $R_n(x)$ الباقي

مثال 84.
الشكل الآتي يوضح تقريب الدالة $f(x) = \sin x$ عند $x = 0$.



مثال 85.

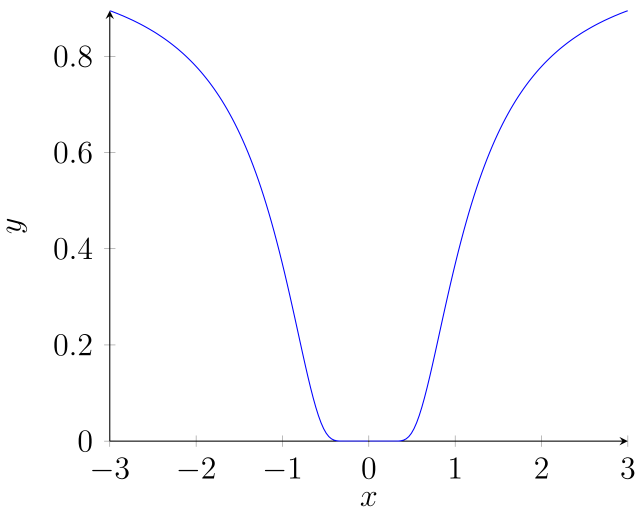
1. قرب الدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ بكثيرة حدود من الدرجة الثالثة عند $x_0=0$
2. ما مقدار الخطأ في التقريب على الفترة $[0,\frac{1}{2}]$
3. قرب الدالة $f(x)=e^{x}$ بكثيرة حدود عند $x_0=0$
4. إذا أردنا الحصول على تقريب للعدد e لا يتجاوز الخطأ فيه 10^{-2} ، فما قيمة n ؟
5. قرب الدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$ بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0=0$

مثال 86.

قرب الدالة

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0 = 0$



نظرية 5.4.2: نظرية ينق

إذا كانت
$f, f', \dots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$ وكانت $f^{(n}$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in [a,b]$
إذا كان $x \in [a,b]$ فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \dots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + E$$

حيث $\frac{E}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0$ عندما $x \to x_0$

نتيجة 5.4.1

إذا كانت
$f'(c) = f''(c) \dots, f^{(m-1)}(c) = 0$ و $f^{(m)}(c) \neq 0$ فإن

- إذا كان m عددا فرديا، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية
- إذا كان m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية
- إذا كان m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية