# الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

## الأكاديمية العربية الدولية

## المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

# احصاء متقدم – المحاضرة الاولى – مقدمة تعاريف في علم الاحصاء

**Research** · October 2015

DOI: 10.13140/RG.2.1.2290.7601



**1 author:**

Aziz Mahdi Abd Al-Shammari
University of Diyala

المحاضرة الأولى

**المقدمة:**

**أولا: طبيعة علم الإحصاء The Statistics Science**

أن كلمة إحصاء في الماضي كان يقصد منها العد والحصر، حتى سمي الإحصاء بعلم العد The science of counting. وان لفضة الإحصاء في الانكليزية (statistics) كانت تستعمل في أوربا للدلالة على أعمال وحسابات الدولة في شؤون الحرب و الضرائب وعدد السكان و المواليد و الوفيات و الإنتاج الزراعي ...... الخ .

ويمكن تقسيم علم الإحصاء إلى قسمين رئيسيين:

1- الإحصاء الوصفي : Descriptive statistics

ويشمل الطرق الإحصائية المستعملة في وصف مجموعة معينة من البيانات وتتضمن هذه الطرق الإحصائية على أساليب جمع البيانات data بصورة قياسية ورقمية numerical measurements يتم جمعها وتبويبها وتلخيصها وعرضها باستخدام المقاييس الإحصائية المناسبة لها .

2- الإحصاء ألاستنتاجي ( الاستدلالي) Statistical Inference ويشمل الطرق الإحصائية التي تهدف الى عمل استنتاجات حول المصدر الذي جمعت منه البيانات ويتم هذا القسم بمرحلتين رئيستين :

أ- التقدير : Estimation ويتم بايجاد قيم تقديرية للاستنتاج منها على القيم الحقيقية لمصدر جمع البيانات وهذه القيم التقديرية اما ان تكون مقدرة تقديراً محدداً أي عند نقطة معينة ، او تقدير على شكل فترة معينة او مدى .

ب- اختبار الفرضيات : Test of Hypotheses :

ويتضمن اختبار الفرضيات التي توضع كتفسير أولي للظاهرة المراد دراستها للوصول الى قرار بقبولها او رفضها .

وما تقدم يعرف علم الإحصاء بانه العلم الذي يعمل على استخدام الاسلوب العلمي في طرق جمع البيانات وتبويبها وتلخيصها وعرضها وتحليلها بهدف الوصول منها الى الاستنتاجات وقرارات مناسبة .

**ثانياً : تاريخ تطور علم الاحصاء : History Statistics**

ان تاريخ الاحصاء الوصفي يعود الى بداية الحضارة البشرية ، ففي العصور المختلفة للبابليين و الأشوريين و الفراعنة و اليونانيين استعمل الاحصاء للحصول على معلموات حول تعداد الرجال للحروب والإنتاج الزراعي وتقدير الضرائب ، اما الاحصاء الاستنتاجي والذي يعتمد اعتماداً كبيراً على نظرية الاحتمال ، فقد بدأ تطوره منذ القرن السادس عشر كنتيجة لانتشار لعب القمار في أوربا ، حيث اكتشف العالم De moivre 1833 معادلة منحنى التوزيع الطبيعي Normal Distribution الذي تعتمد عليه نظرية الاحصاء الاستدلالي .

بعد ذاك دخلت تطبيقات علم الإحصاء في عدة مجالات من العلوم المختلفة مثل العلوم الفلك والبيولوجي والجيولوجي والاجتماع والتعليم فمثلاً طبق العالمFrancis Gal ton -1911) (1822علم الاحصاء في مجال علم الوراثة و التطور وشارك في ايجاد نظرية الارتباط Correlation و الانحدار Regression . ويعتبر Fisher ( 1890-1962) اشهر علماء القرن العشرين والذي طور علم الاحصاء وطبقه في علوم كثيرة كالزراعة و البيولوجي و الوراثة و الاقتصاد ووضع أُسس تصميم وتحليل التجارب .

**ثالثاً : البيانات و الرموز الإحصائية :**

عند تجميع البيانات (Data) عن ظاهرة معينة فإننا نرمز لها بالرمز (y) وان كل مفردة او مشاهدة لهذه الظاهرة نرمز لها بالرمز ($y_i$) .

فمثلا عند دراسة أطول الطلبة في احد الجامعات فأننا نرمز لصفة الطول بالرمز(y) وطول أي طالب بالرمز ($y_i$) وتسمى بالمفردة او المشاهدة Observation تختلف قيمة المشاهدة ($y_i$) من طالب لأخر ولهذا نقول ان (y) متغيرVariable ولذلك يمكن ان نقسم الصفات من الناحية الأحصائية الى نوعين :

1-الصفات المتغيرة : وهي الصفات التي تتغير من شخص لاخراو من حيوان لاخر او من نبات لنبات او من جماد لاخر كما في صفة طول الطلاب السابقة الذكر وصفة العمر واللون والحرارة وحاصل النبات .... الخ.

2-الصفات الثابتة :وهي صفات لا متغيرة ضمن الزمان والمكان المحددين لها.
لها . فمثلاً طلبة الدراسات العليا لكلية التربية في جامعة ديالى للعام الدراسي 2006-2007 م .

وتنقسم المتغيرات الى قسمين :

أ- المتغيرات النوعية (الوصفية) Qualitative Variables
وهي تلك الصفات او الظواهر التي لا يمكن قياسها مباشرة بالارقام العددية مثل صفة لون العيون (اسود ، ازرق ، بني) والحالة الاجتماعية (اعزب او متزوج ) او (غني وفقير) (ذكر وانثى )........الخ .

ب-المتغيرات الكمية : Quantative Variaables
وهي تلك الصفات او الظواهر التي يمكن قياسها مباشرة بأرقام عددية او بواسطة آلات القياس مناسبة فبيانات الطول يمكن ان تقاس بوحدات الطول وبيانات الوزن تقاس بوحدات الوزن .
وتنقسم المتغيرات الكمية من حيث القياس الى مجموعتين :-

1- متغيرات مستمرة (متصلة) Continous Variables :
المتغير المستمر هو المتغير الذي يأخذ قيماً لاحد لها ضمن مدىً معين مثال : عندما يوزن شخص معين ،والميزان يقيس بالكيلوغرام فيكون الوزن (70كغم) مثلاً ، وعندما يوزن شخص معين ، والميزان يقيس بالكيلوغرمات وانصافها فقد يكون وزن هذا الشخص 59.5 او60كغم او60.5 كلغم .واذا كان الميزان يعطي ارباع الكيلوغرام فقد يكون الوزن 59.75كغم او 60.25كغم وهكذا بدون حد ومع عدد الموازين ، توجد هناك ملايين القيم حول القيمة (60كغم).اي ان الوزن لايمكن ان يقفز الى 61 او 59كغم لانه غير متقطع . وفي هذا المثال يمكن ان نقول : $(59 \le y \le 60)$ على اعتبار ان (y) هي صفة وزن الشخص والذي يترلوح مداه بين 59- 60 كغم .

2- متغيرات متقطعة او منفصلة (غير مستمرة): Discrete Variables
3- المتغير المتقطع هو المتغير الذي ياخذ قيم محددة ويتصف بنقلات كاملة . أي ان المشاهدة (المفردة)تاخذ فية قيما متباعدة او متقطعة ويرتكز على الاعداد . فمثلا لدينا (20) نبات ونريد معرفة عدد النباتات المصابة فيها ، فمثلاً المصابة هي (5) ولا نعطي (5.5) او (4.6) او ()3.7 نبات بل يجب ان نعطي ناقلات كاملة أي من 4 مثلاً الى 5 او ان نرجع الى 3 وهذا هو المتغير المتقطع . ومن الأمثلة على المتغير المتقطع عدد المخار على نبات معين او عدد او عدد الوحدات الأنتاجية في مصنع ما ........ الخ

---

المجتمع والعينة : Population and sample

1- المجتمع :هو جميع القيم أو المفردات التي يمكن أن يأخذها المتغير ،وتعبير أخر : هو عدد الوحدات التي تنطوي تحت صفة واحدة أو أكثر مشتركة بحيث تميز عن باقي المجتماعات تميز كامل . فمثلاً أذا كانت دارستنا متعلقة بأطول طلبة جامعة معينة فأن المجتمع في هذه الحالة هو اطوال جميع الطلبة في تلك الجامعة . أو المجتمع أما ان يكون :

أ- محدودا: Finite opulation وفيه يمكن حصر عدد الوحدات الانتاجية في مصنع ما ليوم معين .

ب- غير محدود: Infinite Population
وهو المجتع الذي يصعب فيه او يستحيل حصرعدد مفرداته مثل مجتمع سمك معين في نهر ديالى . او عدد البكتريا في حقل ما، ويرمز للمجتمع بالرمز N .
2- العينة :Sample
هي جزء من المجتمع ، وهي عبارة عن مجموعة من القيم اوالمشاهدات اختيرت بطريقة ما من المجمع وهي اصغر وحدة نعمل عليها بحيث تمثل المجتع .
حجم العينة : ويرمز لها بالرمزn وهو عدد مفردات العينة .
جزء المعايتة : هو النسبة بين حجم العينة والمجتمع ،فاذا فرضنا ان مجتمع ما حجمه 60 وحدة واخذنا منه عينة حجمها 10وحدات فان جزء المعاينة سيكون $\frac{n}{N}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ .

اسباب اخذ العينات :
1 - تقليل الكلفة لان الشمول الكامل للمجتمع يكون ذا كلفة باهضة .
2- دقة البيانات : اذ ان التعداد الشامل قد يقلل من دقة البيانات لان احتمال وقوع الاخطاء يزداد مع زيادة حجم المجتمع .
3- تلف وحدات العد المدروسة بعد انتهاء التجربة ومن هنا لايمكن استعمال كل وحدات المجتمع بل ناخذ عينات ممثلة للمجتمع .
4- الحاجة الانية : احيانا تجبرنا الظروف على اخذ العينة حتى لو كانت المكانية متوفرة ، مثلا لو طلب منا تقدير انتاج العراق من الحنطة لكي تستطيع وزارة التجارة تقدير ما تستورده منه عند ذاك نحن لا نسطتطيع ان نحصي كل ارض العراق لنه يكلف جهد ومال ووقت وكذلك انتظارالموسم لحصد المحصول لجميع المساحات المزروعة وعليه من الافضل اخذ عينة من مكان معين وصورة عشوائية وبدون تحيز ونقدر الحاصل فيها ثم نعمم ذلك على جميع المساحة المزروعة ، اذن الحاجة الانية يجب ان تعطي فكرة معينة الآن وليس في أي وقت اخر.
طرق اخذ العينة :
1- الاجتهاد الشخصي : وعيبها انه لا يوجد ضمان في كونها ممثلة للمجتمع لاننا قد نخطئ بسبب الاعتماد على اجتهادات شخصية واحيانا يكون الاجتهاد الشخصي به تحيز مقصود او غير مقصود وبحسن نية .
2- الباقتطاع الجزئ :ويعتمد على سهولة الحصول على العينات وبدون صرف عناء او تكاليف ومن عيوبها انها لا تضمن تمثيل صحيح للمجتمع .
3ـالمعاينة العشوائة البسيطة : Simple random sample
وهذه تتحقق بشرطين :
ا - وجود تجانس مقبول بين مفردات المجتمع فيما يتعلق بمتغير معين .
ب - الاختيار كيفما اتفق : وكمثال للشرط الاول نلاحظ ان تجانس اعمار الطلبة في المرحلة الاولى لكلية التربية في جامعة ديالى لا يوجد بينهم من هو في عمر عشر سنوات ولا في عمر خمسون سنة ،وعندها ناخذ عينة كيفما اتفق أي ان كل فرد في المجتمع يجب ان تكون له نفس الفرصة والاحتمال مع الذين شملوا بالعينة .
4 - المعاينة الطبقية :اذا كان المجتمع غير متجانس فيجب ان نقسمه الى طبقات ثم ناخذ عينة ممثلة لكل طبقة ومثال على ذلك لو كان مجتمع مكون من نوعين من الابقار (فريزيان و جيرسي ) ففي هذه الحالة لا يمكن اخذ عينة واحدة من الاثنين ويصورة مجتمعة لانهما مختلفان بأدرار الحليب او العمر او الوزن فقد تظهر ابقار فريز بأن في العينة أكثر من ابقار الجيريسي لذلك علينا ان نقسم هذا المجتمع لى طبقات ، بحيث يوجد تجانس مقبول في كل طبقة والطبقات تختلف بعضها عن بعض . وهذا مثال اخر :

| انواع الابقار | عدد ألابقار | |
| --- | --- | --- |
| $N_1$ —— A | 200 | N = 1 000 |
| $N_2$ ——B | 300 | |
| $N_3$ —— C | 500 | |

**حيث ان N تشمل المجتمع الكلي للابقار المختلفة الغير متجانسة وعددها (1000) .**
**$N_1,N_2,N_3$ هي طبقات ويوجد داخل كل طبقة تجانس مقبول .ولو اردنا اختيار (100) بقرة كعينة وهذا يساوي n من الـ (1000) بقرة وهي تساويN.فان الطبقة C أي (N3) تشكل نصف المجتمع (N) اذن يجب ان تكون العينة المأخوذة نصفها الطبقة $N_3$(C) وهكذا بالنسبة للطبقات الاخرى . فا لبنسبة للطيقة A ( 200) بقرة هي مجتمع قائم بحد ذاته ولكن لا يرمز لها بالرمز N بل $N_1$ أي هي مجتمع من اصل مجتمع اكبر وهكذا بالنسبة للطبقة B.**
**$n_1,n_2,n_3$ = حجم العينات (كنسبة) الذي يؤخذ من الطبقات الاولى والثانية والثالثة وكما يلي :**

$$n_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{200}{1000} = 20\%$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{300}{1000} = 30\%$$

$$n_3 = \frac{N_3}{N} = \frac{500}{1000} = 50\%$$

**إذن :**

$$n = n1 + n2 + n3 = 0.20 + 0.30 + .050 = 100$$

**وبعد ذلك يجب اختبار العينة داخل كل طبقة بطريقة المعاينة العشوائية البسيطة بسبب حصول التجانس داخل كل طبقة. وتوزيع المجتمع إلى طبقات يجب أن يكون الشكل الطبيعي لذلك أن C, B, A هي الطبقات من حيث متغير الحليب الذي تدرسه فقط – ولكن عندما تكون الطبقات الثلاثة متجانسة لمتغير أخر مثل العمر الذي لا ندرسه لذلك يهمل**

4- **المعاينة المرحلية: لكي نصل إلى وحدة المعاينة يجب أن نمر بمراحل معاينة وكل واحدة من هذه المراحل قد تكون طبقية أو عشوائية.**

**المدينة طبقيه اقضيه طبقيه نواحي قرى عشوائية بساتين عشوائية نخيل . وقد تكون كل المراحل طبيعية أو عشوائية فإذا تقيدنا بها نصل الى عينة مشتملة .**

**طرق جمع البيانات**
**هناك طريقتان :**
**1- طريقة المسح : وهي تدوين البيانات كما موجدة في الطبيعة من دون السيطرة على العوامل التي تؤثر عليها. والمسح نوعان :**
**أ- مسح شامل (تعداد) .**
**ب- مسح بالمعاينة : ويكون باختيار بعض الأسُسُ وتدوين بعض المعلومات دون تدخل في تفاصيلها .**

**2- طريقة التجارب العلمية :**
**وتتم عن طريق أجراء تجارب علمية لدراسة عامل متغير محدد ، مثلاً التسميد لمحصول معين لمعرفة تأثير على النبات ، فيجب السيطرة على كل العوامل الأخرى المؤثر على النبات باستثناء عامل التسميد الذي يبقى متغيراً .**

---

**الرموز الاحصائية .Statistical no tatioy**
**كما مر بنا سبقاً سنرمز للمتغير بالرمز y ولكل قيمة له بالرمز yi ، فلو كانت أعمار 5 طلاب كاللاتي : 16، 22 ، 24 ، 18 ، 20 سنه فتكتب : 16، 22 ، 24 ، 18 ، 20 = yi**
**أي ان : وهي قيمة المشاهدة الأولى للمتغير 20 $Y_1$**
**و قيمة المشاهدة الثانية للمتغير $Y_2 = 18$**
**و قيمة المشاهدة الثالثة للمتغير $Y_3 = 24$**
**و قيمة المشاهدة الرابعة للمتغير $Y_4 = 22$**
**و قيمة المشاهدة الثانية للمتغير $Y_5 = 16$**
**وهكذا 1....... إلى أن نصل إلى القيمة الأخيرة:**
تعني القيمة الخامسة
**أي القيمة الأخيرة (n=5) للمتغير أو المشاهدة الأخيرة .**
**وعادة يرمز لمجموعة قيم المتغير بالرمز $\sum_{i=1}^{n} y_i$**
**فالرمز $\sum$ هو حرف اغريقي يسمى Sigma**
**أي مجموع او Summation of والرقمان i,n هما حدي المجموع وعلية فالرمز $\sum_{i=1}^{n} y_i$ يقرأ كالاتي :**
**مجموع قيم y مبتدأ من المشاهدة الاولى وحتى المشاهدة الاخيرة .**
**أي**

$$\sum_{i=1}^{n} yi = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + yn$$

**وللاختصار والسهولة فقد يكتب الرمز السابق بدون ذكر حدي المجموع أي فقط ( $\sum$yi ) اذا لم يكن هناك خوفا من الالتباس .**

**وهناك مجموع جزئي مثل :** $$\sum_{i=3}^{5} yi$$

**أي مجموع المشاهدات الثالثة والرابعة والخامسة فقط :** $\sum_{i=3}^{5} yi = y_3 + y_4 + y_5$

**ويرمز لمجموعمربعات جميع المشاهدات بالرمز $\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}$ ويساوي :**

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} = y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + y_3^{\ 2} + ...... + y_n^{\ 2}$$

**ويرمز لمربع مجموع المشاهدات بالرمز $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$ ويساوي :**

$$\left(\sum yi\right)^2 = \left(y_1 + y_2 + y_3 + ..... + y_n\right)^2$$

**كما ي رمز لحاصل ضرب متغيرين مثل x و y بالرمز $\sum x_i y_i$ وهو يساوي :**

$$\sum x_i\ y_i = y_1\ x_1 + y_2\ x_2 + y_3\ x_3 + ..... + y_n\ x_n$$

**ويرمز لحاصل ضرب مجموعتين لقيم متغيرين بالرمز $(\sum x_i)\ (\sum y_i)$ وهو يساوي :**

$$(\sum xi)\ (\sum yi) = (x1 + x2 + x3 + ..... + xn)(y1 + y2 + y3 + .... + yn)$$

**وفيما يلي بعض القواعد الهامه في عملية الجمع : -**

**قاعدة (1)**

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

**اذا كانت C أي عدد ثابت فان :**

$$\sum_{i=1}^{n} c = c_1 + c_2 + c_3 + ..... + c_n = nc$$

**قاعدة (2)**

**اذا كانت C أي عدد ثابت فان : -**

$$\sum cyi = c\sum yi$$

**البرهان : -**

$$\begin{aligned}\sum cyi &= cy_1 + cy_2 + cy_3 + ..... + cy_n \\ &= c(\ y_1 + y_2 + y_3 + ..... + y_n\ ) \\ &= c\sum y_i\end{aligned}$$

**القاعدة (3)**

**جميع قيم متغيرين او اكثر هو مجموع جميعهم أي ان :-**

$$\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

**البرهان :- $\sum$**

$$\begin{aligned}\sum (x_i + y_i) &= (\ x_1 + y_1) + (\ x_2 + y_2) + ...... + (x_n + y_n) \\ &= (\ x_1 + x_2 + ...... + x_n) + (y_1 + y_2 + .... + y_n) \\ &= \sum x_i + \sum y_i\end{aligned}$$

- **ويجب التفريق بين بعض الرموز الاحصائية مثل :-**

$$-\sum \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + .... + \frac{x_n}{y_n}$$

**وهذا يختلف عن الصورة التالية :**

$$-\ \frac{\sum x_i}{\sum y_i} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ..... + x_n}{y_1 + y_2 + y_3 + ..... + y_n}$$

**وكذلك فان :**

وهي تختلف عن الصورة :-

$-\sum (x_i - 3) = \sum x_i - n(3)$

$-\sum x_i - 3$

سؤال : اذا علمت ان قيم كل من المتغيرين x و y هي كالاتي :

$x_i = 2,6,3,1$

$y_i = 3,9,6,2$

اوجد قيمة كل مما ياتي :-

1- $\sum_{i=1}^{n} y_i$

2 – $\sum_{i=2}^{3} y_i$

3 – $\sum y_i^2$

4 – $(\sum y_i)^2$

5 – $\sum x_i y_i$

6 – $(\sum x_i)(\sum y_i)$

7 – $\sum (y_i - x_i)^2$

8 – $\sum (x_i - 3)(y_i - 5)$

9 - $\sum x_i y_i^2$

10 - $\sum (y_i - 3)$

11 - $\sum y_i - 3$

12 - $\sum \frac{x_i + 2}{y_i}$

13 - $\sum \frac{\sum (x_i + 2)}{\sum y_i}$

14 - $\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$

15 - $\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$

**: الحل**

**1 -**

$$\sum yi = y1 + y2 + y3 + y4$$
$$= 3 + 9 + 6 + 2 = 20$$

**2 –**

$$\sum_{i=2}^{3} yi = y2 + y3$$
$$= 9 + 6 = 15$$

**3 –**

$$\sum yi =_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$
$$= (3)^2 + (9)^2 + (6)^2 + (2)^2$$
$$= 130$$

**4 –**

$$\left(\sum yi\right)^2 = (y1 + y2 + y3 + y4)^2$$
$$= (3 + 9 + 6 + 2)^2 = (20)^2$$
$$= 400$$

**5 –**

$$\sum xiyi = x1y1 + x2y2 + x3y3 + x4y4$$
$$= (2)(3) + (6)(9) + (3)(6) + (1)(2)$$
$$= 80$$

**6 –**

$$\left(\sum xi\right)\left(\sum yi\right) = (x1 + x2 + x3 + x4)(y1 + y2 + y3 + y4)$$
$$(12)(20) = 240$$

**7 –**

$$\sum(y_i - x_i)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y3 - x_3)^2 + (y4 - x_4)^2$$
$$= (3-2)^2 + (9-6)^2 + (6-3)^2 + (2-1)^2$$
$$= 20$$

**8 –**

$$\sum(x_i - 3)(y_i - 5) = (x_i - 3)(y_i - 5) + (x_2 - 3)(y_2 - 5) + (y_3 - 3)(y_3 - 5) + (x_4 - 3)(y_4 - 5)$$
$$= (2-3)(3-5) + (6-3)(9-5) + (3-3)(6-5) + (1-3)(2-5)$$
$$= 20$$

**وهنا ايضا يمكن الوصول الى نفس النتيجة بفتح الاقواس ثم التعويض كما يلي :**

$$\sum(y_i - 3)(y_i - 5) = \sum(x_i y_i - 5x_i - 3y_i + 15)$$
$$= \sum x_i y_i - 5\sum x_i - 3\sum y_i + (4)(15)$$
$$= 80 - 5(12) - 3(20) + 60 = 20$$

**9 –**

$$\sum x_i y^2{}_i = x_1 y^2{}_1 + x_2 y^2{}_2 + x_3 y^2{}_3 + x_4 y^2{}_4$$

$$= (2)(3)^2 + (6)(9)^2 + (3)(6)^2 + (7)(2)^2$$
$$= 616$$

**10 –**

$$\sum(yi - 3) = \sum yi - \sum 3$$
$$= \sum yi - n(3)$$
$$= \sum yi - (4)(3)$$
$$= 20 - 12 = 8$$

**11-**

$$\sum yi - 3$$
$$= 20 - 3$$
$$= 17$$

**12-**

$$\sum \frac{x_i + 2}{y_i} = \frac{x_1 + 2}{y_1} + \frac{x_2 + 2}{y_2} + \frac{x_3 + 2}{y_3} + \frac{x_4 + 2}{y_4}$$
$$= \frac{2+2}{3} + \frac{6+2}{9} + \frac{3+2}{6} + \frac{1+2}{2}$$
$$= \frac{164}{36}$$

**13-**

$$\sum \frac{\sum (xi + 2)}{\sum yi} = \frac{\sum xi + (n)(2)}{\sum yi}$$
$$\frac{12+8}{20} = 1$$

**14-**

$$\sum yi - \frac{\left(\sum xi\right)^2}{n}$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - \frac{\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)^2}{4}$$

$$(3)^2 + (9)^2 + (6)^2 + (2)^2 - \frac{(3+9+6+2)^2}{4}$$

$$= 130 - \frac{(20)^2}{4}$$

$$= 130 - 100 = 30$$

**15 –**

$$\sum x_i y_i - \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$= (2)(3) + (6)(9) + (3)(6) + (1)(2) - \frac{(12)(20)}{4}$$

$$= 80 - \frac{(12)(20)}{4} = 20$$