الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الجامعة الافتراضية السورية
SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

الرياضيات الاقتصادية والإدارية

د. طلال عبود

ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

الرياضيات الاقتصادية والإدارية

الدكتور طلال عبود

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2020

Economic and Administrative Mathematics

Dr. Talal Abboud

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2020

الفهرس

الفصل الأول: مراجعة تأسيسية

عنوان الموضوع: مراجعة تأسيسية Basic Concepts

كلمات مفتاحية:

الأعداد Numbers، التعبير الرياضي Mathematical Expression، التطبيق/الدالة Function، الرسم البياني Graph، النسبة المئوية Percentage، العمليات الحسابية Arithmatic Rules.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل مراجعة لبعض المفاهيم والعمليات الرياضية الأساسية، كما يتضمن الكثير من الأمثلة والتطبيقات الأولية، وذلك كمدخل لفهم بعض الظواهر الاقتصادية والإدارية وكيفية التعامل مع التعبير الرياضي لمثل هذه الظواهر.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. تذكر مجموعات الأعداد والتمييز بينها، والتركيز على الأعداد الحقيقية.
2. ترميز المتغيرات، وصياغة العلاقات فيما بينها على شكل رياضي، والتمييز بين المعادلة والمتراجحة.
3. تذكر مفهوم كثير الحدود والتطبيق أو الدالة خصوصاً بين متغير وحيد وتابع له.
4. تذكر مفهوم الرسم البياني، والتمكن من رسم الخط البياني لتابع من الدرجة الأولى.
5. تذكر وفهم النسب المئوية، والتمكن من التعامل مع أشكال مختلفة منها.
6. تذكر واستخدام العمليات الحسابية الأساسية وترتيب إنجازها.
7. التعرف على بعض التطبيقات الأولية في الإدارة والاقتصاد.

مخطط الفصل:

1-1 مجموعات الأعداد

تُصنف الأعداد عادةً في مجموعات، وكل مجموعة لها خصائصها واستخداماتها، كما هو مبين أدناه.

أ) الأعداد الطبيعية Natural Numbers: 1، 2، 3، ... ∞ القيم الموجبة.

نرمز لها بالشكل $N = \{1, 2, 3, \dots, \}$

ضرب أو جمع عددين طبيعين هو دوماً عدد طبيعي.

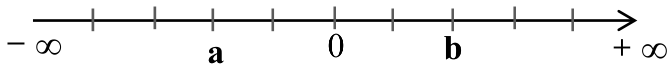
ب) الأعداد الصحيحة Integer Numbers: الأعداد الطبيعية السالبة والموجبة مضافاً إليها الصفر.

نرمز لها بالشكل $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0,1, 2, 3, \dots, \}$

ت) الأعداد الحقيقية Real Numbers: تشـــمل جميع الأعداد بين −∞ و +∞، حيث يمكن إيجاد عدد ثالث بين كل عددين، إذ يكفي جمع العددين وتقســيمهما على 2 (أي متوســط العددين)، مما يؤمن استمرارية المجموعة. تشمل هذه الفئة من الأعداد جميع مجموعات الأعداد.

نرمز لها بشكل مجال مفتوح مستمر $R =]-\infty, +\infty[$

تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على شكل مستقيم موجه (ندعوه محور) من −∞ إلى +∞.



نلاحظ أن تموضــع الأعداد الحقيقية على المحور ينشــئ ترتيباً تاماً فيما بينها وفقاً لعلاقة الأكبر > بين أي عددين مختلفين $b>a$.

بعض خصائص مجموعة الأعداد الحقيقية R، من أجل أية ثلاثة أعداد $\forall a,b,c \in R$، لدينا:

1. حاصل جمع أو طرح أو ضرب أي عددين حقيقين هو عدد حقيقي.
2. حاصل قسمة أي عددين (شرط ألا يساوي المقام الصفر) هو عدد حقيقي أيضاً.
3. تبديلية بالنسبة للجمع $a + b = b + a$
4. تبديلية بالنسبة للضرب $a . b = b . a$
5. تجميعية بالنسبة للجمع $a + (b + c) = (a + b) + c$
6. تجميعية بالنسبة للضرب $a . (b . c) = (a . b) . c$

7. حاصل ضرب أي عدد حقيقي بالصفر هو صفر: $a . 0 = 0$

8. حاصل قسمة الصفر على أي عدد حقيقي $a\neq0$ هو صفر: $\frac{0}{a} = 0$

9. حاصل قسمة أي عدد حقيقي a على الصفر غير معرّف: $\frac{a}{0}$ غير معرف.

10. قانون الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: $a.(b + c) = a.b + a.c$

ث) الأعداد الكسرية Rational Numbers: $\frac{a}{b}$ حيث a، b أعداد حقيقية، و $b\neq0$.

يُدعى a بالبسط (Numerator) ويُدعى b بالمقام (Denominator). ليس بالضرورة أن نحصل على أعداد صحيحة نتيجة قسمة حدي العدد الكسري.

يمكن أيضاً تصنيف مجموعة من الأعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل كسر بالأعداد غير الكسرية Irrational Numbers مثل العدد π أو العدد $\sqrt{2}$.

بعض خصائص الأعداد الكسرية:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = c.b$ الإشارة ⇔ تعني "إذا وفقط إذا" أو "يكافؤ".
2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a\pm c}{b}$
3. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$
4. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
5. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
6. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$
7. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$
8. $a + \frac{c}{d} = \frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+c}{d}$
9. $a \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{d}$
10. $a \div \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{c}$

أحد أهم تطبيقات الأعداد الكسرية هو النسب المئوية % كما سنرى لاحقاً.

مثال (1−1). بعض الأمثلة عن مجموعات الأعداد.

(أ) عدد العمال هو عدد طبيعي، ولا يمكن القول مثلاً نصف عامل أو 15.33 عامل.

(ب) زيادة أو نقصـان عدد القطع في مسـتودع هو عدد صـحيح، قد يكون موجب (هناك زيادة) أو سالب (نقص).

(ت) الربح أو الخسارة مقدرة بالليرات السورية الصحيحة بدون كسور، عادةً ما نسجل الخسائر في القيود المحاسبية بإشارات سالبة، والأرباح بقيم موجبة.

(ث). إذا كان أجر أحد العاملين يعمل كامل الأسبوع هو 22 ألف ل.س أسبوعياً، فإن أجره اليومي هو $\frac{22000}{7}$ ل.س. رغم أنه يُمكن التعبير عن الأجر اليومي بعدد كسـري، لكن النتيجة ليسـت عدد صحيح بل عدد حقيقي.

1-2 التعبير الرياضي

1-2-1 الترميز الرياضي

نسـتخدم عادةً الأحرف اللاتينية لتمثيل الأعداد، والرموز الأكثر انتشـاراً لتمثيل المتغيرات Variables ‎x, y, z, t, …‎، في حين نسـتخدم عادةً الرموز ‎a, b, c, …‎ لتمثيل الثوابت Constants، وعادةً ما نستخدم الرموز اليونانية ‎α, β, γ, …‎ لتمثيل المعاملات Coefficients.

وتعبر الصيغة الرياضية عن العلاقات بين المتغيرات المُرمّزة، ونعبر عن التوابع بالشكل ‎f(x), g(x), …‎ للقول أن التعبير f أو g هو تابع للمتغير x، وأحياناً نستخدم الأحرف الكبيرة ‎F(x), G(x), …‎.

مع الإشارة إلى أن هذا الترميز هو مجرد تمثيل اصطلاحي ولا يجب النظر إليه كحقيقة مطلقة.

بشكل عام، الرياضـيات تحاول استخدام مواردها بالشكل الأمثل، بمعنى، في حال وجود صـعوبة في فهم الصـيغة، نسـعى لتخفيف عدد الرموز والعمليات الرياضـية. مثلاً لا داعي لكتابة الجداء A x T ويمكن كتابتها مباشرة AT أو A.T حيث لا يوجد لبس في فهمها.

نستعرض فيما يلي بعض الرموز الرياضية الأكثر استخداماً:

الرمز ∀ يعني "مهما يكن".	الرمز ∃ يعني "يوجد على الأقل".
الرمز ⇔ يعني "يكافئ".	الرمز ⇐ يعني "يؤدي إلى".
الرمز ∈ يعني "ينتمي إلى".	الرمز # يعني "لا يساوي".
الرمز ≤ يعني "أصغر أو يساوي".	الرمز > يعني "أصغر تماماً".

المجالات: مجموعة الأعداد المحددة بين عددين.

[a, b] مجال مغلق، أي جميع الأعداد x بين a و b ضمناً. يكافئ $a \le x \le b$

]a, b] مجال مفتوح من جهة، يشمل جميع الأعداد بين a و b ولا تشمل العدد a. المجال]a, b] يكافئ $a<x\le b$.

]a, b[مجال مفتوح من الجهتين، أي جميع الأعداد بين a و b ولا تشمل a و b. المجال]a, b[يكافئ $a<x<b$.

عندما نضع مجموعة من الأعداد ضمن أقواس كبيرة {a, b, c, …} يعني هذه الأعداد فقط.

عندما نضع عددين ضمن أقواس صغيرة بالشكل (a, b) يعني زوج/ثنائية من العددين فقط.

القيمة المطلقة للعدد x: $|x|$، تعني تجاهل إشارة x، أي القيم الموجبة فقط للعدد x:

$$|x| = x \;\; if\; x \ge 0$$
$$|x| = -x \;\; if\; x < 0$$

الأقواس: في حال وجود صيغ معقدة، عادةً ما نستخدم الأقواس ( ) تجنباً لتداخل العمليات الجبرية.

يمكن إنجاز عملية الجداء بضرب كل حد من حدود القوس الأول بجميع حدود القوس الثاني ندعوها بقانون التوزيع Distributive law، ثم إجراء عملية اختصار الحدود المشابهة.

ما ندعوه بمعادلة Equation هو تجميع مجموعة من الحدود الجبرية في طرفين: طرف أيمن وطرف أيسر، وقد تكون المعادلة صحيحة من أجل بعض قيم المتغيرات يجب البحث عنها ندعوه بحل المعادلة، أي قيم المتغيرات التي تجعل المعادلة محققة.

يمكن إجراء جميع العمليات الرياضية على المعادلة، لكن بشرط إجراء نفس العملية على الطرفين، مع الانتباه بطبيعة الحال على صحة تطبيق العملية الرياضية كالتقسيم على صفر مثلاً.

إذا كان أحد أطراف المعادلة أكبر أو أصغر من الطرف الآخر، ندعوها متراجحة Inequality، وحل المتراجحة هو إيجاد قيم المتغيرات التي تجعلها صحيحة أو محققة، مع الانتباه الشديد أثناء تطبيق العمليات الرياضية على المتراجحات، فهي قد تختلف عن تطبيقها على المعادلات.

مثال (1−2). بعض أشكال المعادلات والمتراجحات.

(أ) الصيغة $F(x) = (x+2)(x-3)$ تعني جداء كثيري الحدود $(x+2)$ و $(x-3)$.

$$\mathbf{F(x)} = (x+2)(x-3) = x(x-3) + 2(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = \mathbf{x^2 - x - 6}$$

(ب) بعض أشكال المعادلات:

1. $x^2 = 10x$ ولها حلان هما $x=0$ أو $x=10$.

2. $4x + x = 20$ لها حل واحد هو $x=4$.

3. $x^2 + 10 = 0$ لا حل لها في مجموعة الأعداد الحقيقية.

(ت) صياغة المعادلات السابقة في (ب) على شكل متراجحات:

1. $x^2 < 10x$ محققة فقط عندما $0<x<10$

2. $4x + x < 20$ صحيحة فقط عندما $x<4$

3. $x^2 + 10 > 0$ محققة دوماً في مجموعة الأعداد الحقيقية.

1-2-2 الرسم البياني

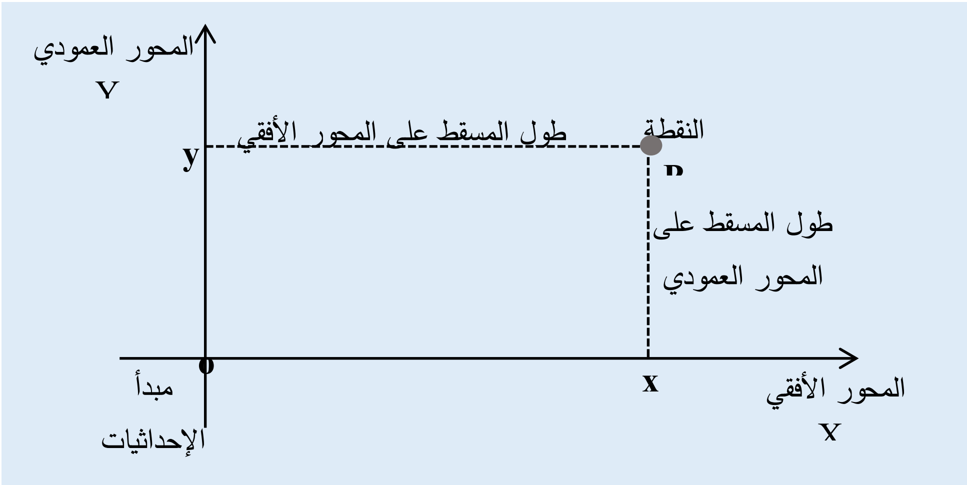
الرسم البياني لتابع هو محاولة إظهار المنحني البياني لتغيرات التابع بدلالة متغيرات المجهول ضمن جملة إحداثيات محددة. يعطي التمثيل البياني صورة أوضح لشكل العلاقة بين التابع ومتغيراته. سنقتصر حالياً على تمثيل المنحني البياني على مستوي أي من بُعدين فقط: متغير وحيد وتابع له.

ليكن لدينا التابع $y = F(x)$، نمثل y كمحور عمودي، و x كمحور أفقي ندعوها جملة الإحداثيات.

ندعو نقطة تقاطع المحورين o مبدأ الإحداثيات Origin.

تسمح جملة الإحداثيات بتحديد كل نقطة p من المستوي على شكل زوج (x, y)، حيث الإحداثية الأولى x هي المسقط العمودي للنقطة p على المحور الأفقي، والإحداثية الثانية y هي المسقط العمودي للنقطة على المحور العمودي، كما هو مبين في الشكل (1-2).

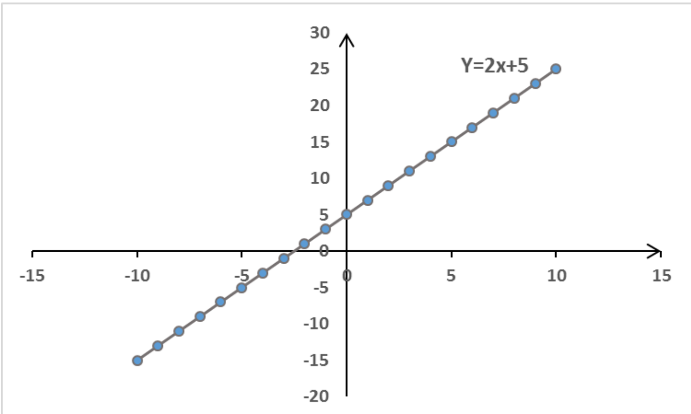
يمكن أن يأخذ المنحني البياني للتابع أشكال عديدة كما سنرى في هذه الأملية، ويتم رسمه أيضاً بطرق مختلفة، وفي حال عدم القدرة على إيجاد طريقة محددة للرسم، فيمكن اللجوء دوماً إلى أخذ عدد كبير من قيم المتغير x وحساب قيمة التابع $y=F(x)$ المقابلة لها، ورسم النقاط في جملة الإحداثيات، ثم وصل هذه النقاط ببعضها.



الشكل (1−2) تمثيل نقطة في جملة إحداثيات مستوية

مثال (1−3). المنحني البياني لتابع من الدرجة الأولى هو دوماً مستقيم.

المنحني البياني للتابع $y = 2x + 5$ هو المبين في الشكل (1−3).

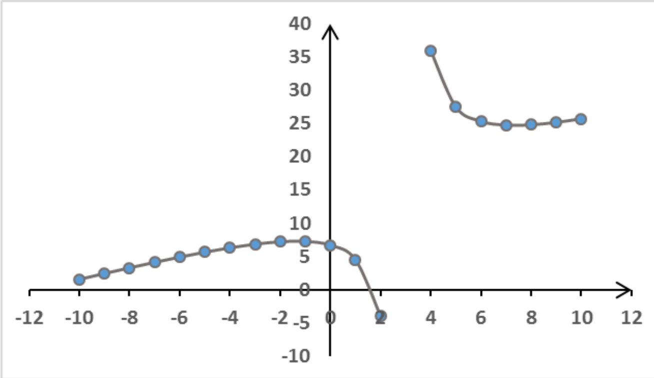


الشكل (1−3) الخط البياني لتابع من الدرجة الأولى

مثال (1−4). المنحني البياني لتابع عبر تمثيل نقاطه.

ارسم الخط البياني للتابع $y = \frac{x^2+10x-20}{x-3}$

يتم الرسم بتحديد عدد كبير من النقاط ثم الوصل بينها، مع الإشارة إلى أن هذا الكسر غير معرف عند القيمة $x=3$ (حيث المقام يساوي الصفر)، لذلك نلاحظ على الشكل تغيراً كبيراً في شكل التابع وانتقاله من $-\infty$ إلى $+\infty$ عند الاقتراب من القيمة 3 من اليمين أو اليسار.



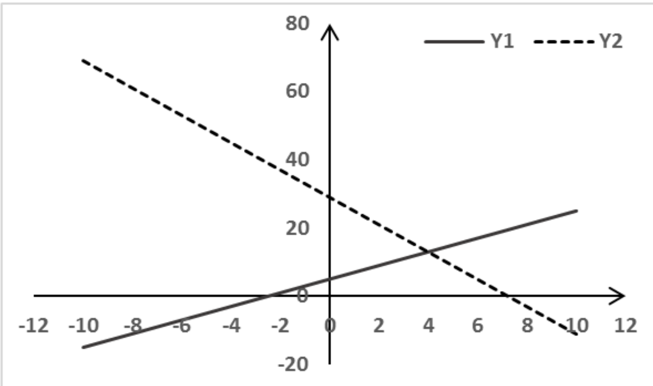
الشكل (1−4) الخط البياني لتابع كسري معقد عبر تمثيل نقاطه

مثال (1−5) رسم المنحنيات البيانية لمعادلتين خطيتين على نفس الشكل.

رسم المنحنيات البيانية للمعادلتين $Y1 = 2x + 5$ و $Y2 = -4x + 29$ على نفس الشكل.

نقطة تقاطع المستقيمين عندما $Y1 = Y2$ أي الحل المشترك للمعادلتين: $2x + 5 = -4x + 29$

وبالتالي تكون قيمة $x=4$ و $Y1 = Y2 = 13$ كما هو مبين على الشكل (1−5).



الشكل (1−5) الحل المشترك لمستقيمي معادلتين خطيتين

1−3 بعض القواعد الأساسية في الحساب

تُنجز العمليات الحسابية وفق الترتيب الآتي:

أولاً) إنجاز عمليات حساب الرفع لقوة، ثم الجذور.

ثانياً) إنجاز عمليات حساب الضرب، ثم القسمة.

ثالثاً) إنجاز عمليات حساب الجمع، ثم الطرح.

إذا كان هناك أقواس، تُنجز جميع العمليات الحسـابية داخل كل من الأقواس وفق الترتيب السـابق، ثم تُنجز العمليات بين الأقواس وفق نفس الترتيب أيضاً.

إذا كان هناك كسور، تُنجز عمليات كل من البسط والمقام بشكل مستقل، ثم يُحسب الكسر.

مع الإنتباه إلى جداء الإشارات: موجب x موجب = موجب.

موجب x سالب = سالب.

سالب x سالب = موجب.

مجموع عدة أعداد Summation:

ليكن لدينا الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_n$، يمكن كتابة مجموع هذه الأعداد من 1 إلى n بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_1 + \cdots + x_n$$

يُرمز للجمع بالرمز اللاتيني Σ ويُلفظ سيغما Sigma.

مثلاً، مجموع الأعداد من 1 إلى 5:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

بعض قواعد الجمع:

(أ) $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

(ب) $\sum_{i=1}^{n} a.x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$

الرفع إلى قوة Exponential:

رفع العدد a إلى قوة n يعني ضـرب العدد a بنفسـه n مرة. ويرمز له بالشـكل: a^n ويُدعى العدد a بالأساس والعدد n بالأس. فيما يلي بعض قواعد الرفع إلى قوة (سنعود إليها في الفصل الخامس عند الحديث عن التوابع الأسية):

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n.m}$
3. $(\mathrm{a} \times \mathrm{b})^n = a^n \times b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ شرط b # 0
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ شرط a # 0

6. $a^0 = 1$

مثال (6−1). أمثلة عن الرفع إلى قوة:

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

الجذور Roots:

ليكن a عدد حقيقي، و n عدد حقيقي موجب و ليكن $a^{\frac{1}{n}}$ عدداً حقيقياً،

فإن $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ يُدعى الجذر النوني للعدد a. نلاحظ هو حالة خاصة من الرفع لقوة بشكل عام.

1. إذا كان a = 0 فإن جذره مهما كانت n يساوي الصفر.
2. إذا كان a > 0 وإذا كان n عدد زوجي، فإن $\sqrt[n]{a}$ هو عدد حقيقي موجب بحيث $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3. إذا كان a < 0 وإذا كان n عدد زوجي، فإن $\sqrt[n]{a}$ غير معرف.
4. إذا كان n عدد فردي، فإن $\sqrt[n]{a}$ هو عدد حقيقي بحيث $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ مهما كانت إشارة a.

جرت العادة على ألا نكتب n=2 عندما نتحدث عن الجذر التربيعي.

بعض قواعد الجذور:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{n}{m}}$
2. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

مثال (7−1). أمثلة عن الجذور:

$\sqrt{9} = \pm 3$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
$\sqrt[2]{-4}$ غير معرف	$\sqrt{(-6)^2} = 6$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

4-1 التطبيقات العددية

1-4-1 كثير الحدود

ما ندعوه كثير الحدود هو تجمع عدد من الحدود الجبرية، الحد هو جداء عدد a (ندعوه معامل أو ثابت Scalar) بمتغير x، وندعو الحد بأنه من الدرجة n إذا كان أس المتغير x هي n: $a.x^n$.

يُكتب كثير الحدود من الدرجة n بالشكل: $F(x) = a^0 + a^1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

دراسة إشارة كثير الحدود F(x) تعني تحديد مجموعة قيم x التي تجعل F(x) سالب أو موجب.

تقييم كثير حدود يعني إيجاد القيم العددية لكثير الحدود عند قيم محددة لمتغيراته.

يمكن لكثير الحدود أن يشمل عدة متغيرات، مثلاُ:

$$F(x) = a^0 + a^1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + \ldots c_1 z + \ldots$$

مثال (1-8). كثير الحدود من الشكل $F(x,y) = 4 + 2x - 3y$

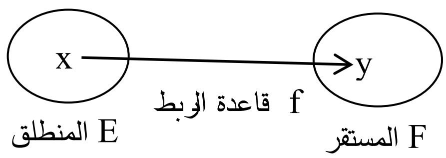
ما قيمة F(x,y) عندما $x = 2$، $y = 3$ ؟

بالتبديل نجد: $F(x,y) = 4 + 2*2 - 3*3 = -1$

1-4-2 التطبيق Function

التطبيق (يدعوه البعض تابع أو دالة) هو علاقة f تربط بين عنصـــر x من مجموعة E وعنصـــر y من مجموعة F. نسمي E المنطلق ونسمي F المستقر. نرمز للتطبيق بالشكل:

$$f: E \rightarrow F$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$



حيث:

- ✓ كل عنصر x من المنطلق E يجب أن يكون له صورة y من المستقر وفق العلاقة f(x).
- ✓ ليس بالضرورة أن يكون لكل عنصر y من المستقر صورة لعنصر x من المنطلق.
- ✓ يمكن أن يكون عنصر y من المستقر صورة لأكثر من عنصر x من المنطلق.

مثال (1-9). ليكن لدينا التطبيق: $F: R \rightarrow R$

$$F: x \rightarrow y = F(x) = 2x^2$$

المنطلق هو مجموعة الأعداد الحقيقية $E = R$ والمستقر هو $F = R$ أيضاً.

أما قاعدة الربط فهي $F(x) = 2x^2$. ونجد بعض قيم هذا التطبيق:

$F(+1) = 2\,(+1)^2 = 2 \in R$

$F(-1) = 2\,(-1)^2 = 2 \in R$

$F(0) = 2\,(0)^2 = 0 \in R$

$F(1/2) = 2\,(1/2)^2 = 1/2 \in R$

نلاحظ أن العنصر 2 من المستقر هو صورة لعنصرين +1، −1 من المنطلق.

في حين، لا يُمثل العدد السالب تماماً من المستقر F صورة لأي عنصر من المنطلق، حيث لا يمكن إيجاد في R عدداً يكون مربعه سالباً.

1-4-3 دراسة تغيرات تابع

غالباً ما نلجأ إلى دراسة تغيرات تابع $F(x)$ بدلالة تغيرات المجهول x، وسنقتصر حالياً على الخطوط العريضـــة لتوابع من متغير وحيد، على أن نعود إليها في الفصـــول اللاحقة حســـب طبيعة كل تابع، ولدراسة تغيرات التابع نتبع المراحل الآتية:

1. تحديد مجموعة تعريف التابع D_f.
2. دراسة مقاربات التابع، أي تحديد نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف.
3. دراسة إشارة المشتق الأول $F'(x)$.
4. تحديد تزايد وتناقص التابع حسب إشارة المشتق الأول.
5. تحديد بعض النقاط المرجعية المساعدة في تحديد شكل التابع.
6. رسم المنحني البياني للتابع.

يُمكن في بعض الحالات وحسب الحاجة، دراسة إشارة المشتق الثاني $F''(x)$ وتحديد نقاط الانعطاف أو تغيرات المشتق الأول.

(1) مجموعة التعريف واستمرارية التابع

مجموع تعريف التابع تُمثل مجموعة المنطلق وهي مجموعة جزئية من R والتي يأخذ فيها المتحول x قيمه، نرمز لمجموعة التعريف بالرمز D_f.

مثال $(1-10)$. أمثلة عن مجموعة تعريف بعض التوابع:

1. التابع $F(x) = x^2 - 1$ معرف على $D_f = R$.
2. التابع $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$ معرف على $D_f = R/\{-1\}$.
3. التابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ معرف على $D_f = R$.
4. التابع $F(x) = \sin(2x)$ معرف على R.

نقول عن f أنه مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان:

1. أن تكون x_0 من مجموعة التعريف: $x_0 \in D_f$
2. نهاية التابع f(x) عندما تسعى x إلى x_0 تساوي قيمة التابع عند x_0: $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$

مثال $(1-11)$. أمثلة عن استمرارية بعض التوابع:

أ) التابع $f(x) = 2x^2 - 1$ مستمر عند النقطة $x_0 = 1$ لأن:

تنتمي لمجموعة التعريف: $x_0=1 \in D_f = R$

نهاية التابع f(x) عندما تسعى x إلى 1 تساوي قيمة التابع عندها: $\lim_{x\to1}(2x^2 - 1) = 1 = f(1)$

ب) التابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ غير مستمر عند النقطة $x_0=0$، لأن:

مجموعة التعريف هي R، و $x_0=0$ تنتمي إليه، الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني: عندما تسعى x إلى الصفر من اليمين (بقيم أكبر من x_0) فإننا نطبق الصيغة الأولى، وبالتالي التابع يسعى إلى الصفر: $f(x=0) = 0$. في حين، عندما تسعى x إلى الصفر من اليسار (بقيم أصغر من x_0) فإننا نطبق الصيغة الثانية، بالتالي التابع يسعى إلى القيمة 1-: $f(x=0) = 0 - 1$. عند القيمة $x_0=0$، نلاحظ أن نهايتي التابع مختلفتين عن قيمته التي تساوي الصفر من تطبيق الصيغة الأولى، وبالتالي التابع غير مستمر عند $x_0=0$، رغم كونه معرف وله قيمة محددة عندها.

ت) التابع $f(x) = \frac{x^2-1}{2x-1}$ غير مستمر عند النقطة $x_0 = 1/2$.

مجموعة تعريف التابع هي جميع قيم R عدا القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر، ونجد أن المقام يساوي الصفر عند القيمة 1/2 وبالتالي: $D_f =]-\infty , 1/2[\cup]1/2 , +\infty[$

نلاحظ أن القيمة $1/2 \notin D_f$ وبالتالي التابع غير مستمر عند النقطة $x_0 = 1/2$.

(2) تحديد (البحث عن) المقاربات

يعني مصـــــطلح "المقارب" أن التابع F(x) يقترب منه عندما تقترب x من قيمة محددة دون أن تأخذ هذه القيمة تماماً، البحث عن نهاية التابع F(x) عندما تسعى x إلى قيمة ما.

ليكن L الخط البياني للتابع العددي y = f(x) والمرســوم في جملة متعامدة نظامية oxy. يوجد ثلاثة أنواع من المقاربات للخط البياني للتابع f:

1. مستقيم مقارب يوازي المحور ox إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ حيث a∈R فإن المستقيم y=a يدعى مستقيم مقارب يوازي ox.
2. مســتقيم مقارب يوازي oy إذا $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ حيث b∈R فإن المســتقيم x=b يدعى مستقيم مقارب يوازي oy.
3. مستقيم مقارب مائل إذا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فهناك إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل D.

بفرض Y = ax + b معادلة هذا المســتقيم, نقول إن D مســتقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع f(x) إذا كان الفرق ε(x) = f(x) − Y حيث ε(x) تابع يســعى إلى الصـــفر عندما تسعى x إلى اللانهاية.

للبحث عن المسـتقيمات المقاربة بشـكل عام، نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على شـكل مجالات ثم نبحث عن النهايات عند أطراف المجالات (ســـنعود إليها في الفصـــــل الرابع عند الحديث عن المتتاليات).

مثال (1−12). أمثلة عن البحث عن مقاربات:

أ) مقاربات التابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1$

مجموعة تعريفه: $D_f =]-\infty , +1[$

نهاية التابع f(x) تساوي 1 عندما تسعى x إلى اللانهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ وبالتالي y=1 هو مستقيم مقارب يوازي ox.

كذلك $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ وبالتالي x=1 هو مستقيم مقارب يوازي oy.

ب) مقاربات التابع $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

مجموعة تعريفه: $D_f =]-\infty , +2[\cup]+2 , +\infty[$

المقارب الأول $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ وبالتالي y=3 هو مستقيم مقارب يوازي ox.

المقارب الثاني $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ وبالتالي x=2 هو مستقيم مقارب يوازي oy.

(3) دراسة إشارة المشتق الأول

ليكن f(x) تابع حقيقي حيث مجموعة تعريفه D_f، نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. الشرط الأول: أن تكون x_0 تنتمي إلى مجموعة التعريف $x_0 \in D_f$
2. الشرط الثاني: أن تكون النهاية $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة، ونسمي هذه النهاية قيمة التابع المشتق عند النقطة x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$، ونرمز للتابع المشتق عند جميع قيم x بالشكل $f'(x)$.

ملاحظة: كل تابع f قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 أو على مجال، فهو مستمر عند النقطة x_0 أو على هذا المجال، أما العكس فليس بالضرورة صحيحاً.

مثال (1−13). أمثلة أولية عن حساب مشتقات بعض التوابع:

أ) برهن أن التابع $f(x) = 2x^2 - 1$ قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$.

الشرط الأول: التابع معرف ومستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية $D_f = R$ والقيمة $x_0=0$ تنتمي لهذه المجموعة، محقق.

الشرط الثاني: حساب النهاية $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 1 - (-1)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 2x = 0 \neq \infty$$

نجد أنها تساوي الصفر، وبالتالي الشرط الثاني محقق أيضاً، فالتابع إذاً قابل للاشتقاق عند $x_0=0$.

ب) هل التابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ وعند النقطة $x_0 = -2$ ؟

مجموعة تعريف التابع هي: $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

القيمة $x_0=-2$ لا تنتمي لمجموعة التعريف، وبالتالي التابع غير قابل للاشتقاق عندها.

القيمة $x_0=1$ تنتمي لمجموعة التعريف، لنتحقق عندها من الشرط الثاني:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2-1}{x+2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x^2}=1\neq\infty$$

وبالتالي التابع قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$.

سنكتفي حالياً بهذا القدر عن المشتقات على أن نعود إليها بالتفصيل في الفصل السادس عند الحديث عن التفاضل والاشتقاق.

(4) تزايد وتناقص تابع.

ليكن f(x) تابع مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما من مجموعة تعريفه:

1. نقول عن f(x) أنه متزايد (متزايد تماماً) على هذا المجال إذا كان مشـــتقه f'(x) موجباً (موجباً تماماً) على هذا المجال.
2. نقول عن f(x) أنه متناقص (متناقص تماماً) على هذا المجال إذا كان مشتقه f'(x) سالباً (سالباً تماماً) على هذا المجال.

(5) تحديد بعض النقاط المساعدة.

الحد الأعلى والحد الأدنى لتابع:

1. نقول عن M أنها حد أعلى لتابع (إن وجدت) إذا كان: $\forall\ x\in D_f\ ,\ f(x)\leq M$
2. نقول عن m أنها حد أدنى لتابع (إن وجدت) إذا كان: $\forall\ x\in D_f\ ,\ f(x)\geq m$
3. ونقول عن تابع أنه محدود من الأعلى إذا كان له حد أعلى، ونقول عن تابع أنه محدود من الأدنى إذا كان له حد أدنى، ونقول عن تابع أنه محدود فقط إذا كان له حد أعلى وحد أدنى.

القيم الموضـــعية Local Points (يدعوها البعض نقاط اســـتقرار Stationarty Points) لتابع f(x) مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما من مجموعة تعريفه:

1. نقول أن للتابع f(x) قيمة موضـــعية عند النقطة x_0 من هذه المجال إذا كان مشـــتقه معدوم عند هذه النقطة $f'(x_0)=0$.
2. نقول عن القيمة الموضـــعية أنها عظمى إذا غير المشـــتق f'(x) إشـــارته من الموجب إلى السالب عند النقطة x_0.
3. نقول عن القيمة الموضـــعية أنها صـــغرى إذا غير المشـــتق f'(x) إشـــارته من الســـالب إلى الموجب عند النقطة x_0.

مثال (1−14). أمثلة عن الحدود الأدنى والأعلى لبعض التوابع:

أ) حدود التابع $f(x) = 2\sin x + 1/2$:

حيث أن $-1 \le \sin x \le +1$ فإن $-2 \le 2\sin x \le +2$ وبإضافة 1/2 إلى الطرفين، يُصبح التابع محدود بين 3/2- كحد أدنى و 5/2+ كحد أعلى: $-3/2 \le 2\sin x + 1/2 \le +5/2$.

ب) حدود التابع: $f(x) = x^2 - 4x + 1$

نتمم عبارة التابع f(x) إلى مربع كامل بإضافة وطرح نفس المقدار 4 كما يلي:

$f(x) = x^2 - 4x + \mathbf{4} - \mathbf{4} + 1$

$f(x) = (x - 2)^2 - 3$

حيث أن العبارة $(x-2)^2$ هي مربع مقدار وبالتالي فهي دوماً أكبر أو تساوي الصفر(موجبة)، أي أصغر قيمة لها هي الصفر، وبإضافة المقدار 3- ، فإن أصغر قيمة للمجموع $(x - 2)^2 - 3$ تُصبح 3-، أي أن الحد الأدنى للتابع السابق هو القيمة 3- .

مثال (1−15). تحديد بعض نقاط التابع.

ليكن لدينا التابع $F(x) = 2x^3 - x^2 + 20$ ، لنر أي من النقاط الآتية تقع على المنحني البياني للتابع وتُحقق صيغة التابع:

النقطة	x_0	$F(x_0)$	تحقق/لا تحقق الصيغة؟
A	3	65	تحقق الصيغة
B	- 3	- 65	لا تحقق الصيغة
C	- 5	- 255	تحقق الصيغة
D	0	0	لا تحقق الصيغة

لمعرفة فيما إذا كانت النقطة تقع على الخط البياني، يكفي استبدال قيمة x_0 في صيغة التابع، فإن حصلنا على القيمة المقابلة لها $F(x_0)$ تكون تحقق الصيغة (النقطة تقع على المنحني البياني) وإلا فإنها لا تقع عليه.

بعض التتمات في تعريف التوابع العددية:

أ) ندعو التابع F(x) بأنه زوجي Even إذا كان $F(-x) = F(x)$.

مثال: $F(x) = x^2$ ، إذا استبدلنا x بـ x- فإن $F(-x) = x^2 = F(x)$.

ب) ندعو التابع F(x) بأنه فردي Odd إذا كان $F(-x) = -F(x)$.

مثال: $F(x) = x^3$ ، إذا استبدلنا x بـ -x فإن $F(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -F(x)$.

ت) ندعو التابع F(x) بأنه دوري Periodic إذا كان $F(x+nT) = F(x)$. حيث T مجال الدورة الواحدة للتابع و n عدد الدورات.

مثال: $F(x) = Sin(x)$، إذا استبدلنا x بـ $x+n\pi$، فإن $F(x+n\pi) = F(x)$.

ث) من أجل أي تابع $y=F(x)$ فإننا ندعو $x=F^{-1}(y)$ بالتابع العكسي Inverse للتابع y.

مثال: $y = F(x) = 1/x$، فإن $F^{-1}(y) = x = 1/y$.

ج) من أجل أي تابعين $y = F(z)$ و $z = g(x)$، ندعو التابع $y = f(g(x))$ بالتابع المركب Composite.

مثال: $y = F(z) = 2z$، و $z = 3x$، فإن $y = 2(3x) = 6x$.

5-1 التعامل مع النسب المئوية

النسبة المئوية % هي باختصار العدد مقسوماً على 100، ويمكن التعبير عنها باستخدام رمز النسبة المئوية مثلاً 60% أو على شكل أرقام عشرية 0.6، أو على شكل كسر $\frac{60}{100}$ ويُعامل معاملة الكسر وبالتالي يُطبق عليه جميع خصائص وعمليات الأعداد الكسرية.

ويجري التعبير عن الزيادة أو النقص في مقدار ما A بمقدار B كنسبة مئوية من المقدار الأصلي كما يلي: $\frac{A}{B} \times 100 = t\%$.

استخدام النسب المئوية في الاقتصاد مهم للغاية، ويعبر بشكل أفضل عن مضمون قيم الظاهرة الاقتصادية، سنستعرض فيما يلي العديد من الأمثلة التطبيقية.

مثال (1−16). بعض الأمثلة عن حساب النسب المئوية.

(أ). فرضت الحكومة ضريبة إعادة إعمار 5.5% من الراتب الشهري، فإذا كان راتب أحد العاملين هو 42 ألف ل.س شهرياً، فإنه مبلغ الضريبة يساوي 2310 ل.س:

$$5.5\% \times 42000 = 2310$$

(ب). قررت إدارة الشركة زيادة سعر بيع أحد منتجاتها البالغ حالياً 1400 ل.س للقطعة، بنسبة 7%، فإن السعر الجديد يساوي 1498 ل.س:

$.7\% \times 1400 + 1400 = 1498$

(ت). يبلغ راتب أحد العاملين 40 ألف ل.س شـهرياً، تم زيادته بمقدار 10 آلاف ل.س، فإن النسـبة المئوية للزيادة t تبلغ:

$$.t = \frac{10}{40} \times 100 = 25\%$$

(ث). يبلغ الدخل الشهري لأحد العاملين 50 ألف ل.س شهرياً، تم إضافة تعويض محروقات شهري بمقدار 11 ألف ل.س، فإن النسبة المئوية لزيادة الدخل الشهري تبلغ:

$$.t = \frac{11.000}{50.000} \times 100 = 22\%$$

(ج). قررت إدارة الشركة تخفيض سعر أحد منتجاتها البالغ 4000 ل.س للقطعة بمقدار 10%، فإن السعر الجديد للمنتج يساوي 3600 ل.س ويُحسب كما يلي:

$$.4000 - 4000 \times 10\% = 4000 - 400 = 3600$$

قد تكون التغيرات في المقادير متتالية خلال فترات زمنية متتالية وبنسب متساوية أو مختلفة، وبالتالي يجب حساب قيمة ونسب التغيرات بشكل مستقل في كل نهاية كل فترة، فنحصل في نهاية جميع الفترات على تراكم التغيرات الحاصلة، وهو ما نلاحظه في حالة التغيرات في سعر سهم في البورصة.

إذا كان لدينا سعر السهم في بداية السنة هو A، ولدينا عدة تغيرات على سعر السهم ولتكن نسب التغير $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ على آخر سعر الفترة التي تسبقها، ويمكن لهذه النسب أن تكون موجبة (ارتفاع في السعر) أو سالبة (انخفاض في السعر) فإن سعر السهم في نهاية السنة يُحسب كما يلي:

سعر السهم في نهاية الفترة الأولى: $.A1 = A + t_1A = A(1 + t_1)$

سعر السهم في نهاية الفترة الثانية: $.A2 = A1 + t_2A1 = A1(1 + t_2) = A(1 + t_1)(1 + t_2)$

وهكذا... ويتم حساب السعر في نهاية كل فترة، ليُصبح في نهاية السنة A_n كما يلي:

$$.An = A(1 + t_1)(1 + t_2) \ldots (1 + t_n)$$

مثال (1−17). تغيرات متتالية في سعر السهم.

بلغت قيمة سهم ما في البورصة في بداية السنة الماضية 200 ل.س، وتناقصت قيمة السهم بمقدار 10% في النصف الأول من السنة، ثم ارتفعت قيمته بمقدار 15% في النصف الثاني عما هو عليه في نهاية النصف الأول، فما هي قيمة السهم في نهاية السنة؟

قيمة السهم في نهاية النصف الأول من السنة: $200 - 200 \times 10\% = 200 - 20 = 180$.

قيمة السهم في نهاية النصف الثاني من السنة: $180 + 180 \times 15\% = 180 + 27 = 207$.

أو يمكن حساب السعر بعد تغيرين اثنين في نهاية السنة كما يلي:

$$207An = 200(1-0.1)(1+0.15) = 200 \times 0.9 \times 1.15 = .$$

أحد التطبيقات المفيدة للنسب المئوية هو حساب مؤشرات تزايد/تناقص الأسعار أو الاستهلاك أو الناتج المحلي أو غيره، وذلك بالنسبة إلى سنة مرجعية محددة. ويمكن تمثيل القيم الناتجة على شكل سلاسل زمنية سنوية أو شهرية أو فصلية أو غيرها.

مثال (1−18). حساب مؤشر تغير الأسعار سنوياً، مؤشر التضخم.

من المعروف أن أسعار المواد تتغير من سنة إلى أخرى، لذلك يتم اختيار سلة من المواد المعبرة عن حالة الاستهلاك في السوق وتقييم أسعار هذه السلة سنوياً، وذلك لتقدير معدل تغير الأسعار أو ما ندعوه بمعدل التضخم[1].

لدينا الجدول المبين أدناه (1−1) الذي يبين قيمة سلة مرجعية (سنة الأساس) من المنتجات الاستهلاكية بالأسعار الجارية، ولتكن السنة المرجعية في متابعة مؤشر الأسعار هي 2010، فما هو مؤشر الأسعار في السنوات 2009، 2011، و 2012 بالنسبة لسنة الأساس؟

نعتبر أن معدل الأسعار في السنة المرجعية (أي 2010) هو 100%، ثم نقوم بنسب قيمة السلة في كل سنة إلى قيمة هذه السلة في العام 2010 كما هو مبين في الجدول (1−1).

الجدول (1-1) حساب مؤشر تغير الأسعار سنوياً، مؤشر التضخم

السنة	2009	**2010**	2011	2012
سعر السلة المرجعية	950	**1000**	1100	1400
مؤشر الأسعار بالنسبة إلى سنة الأساس	$\frac{950}{1000} = 95\%$	**100%**	$\frac{1100}{1000} = 110\%$	$\frac{1400}{1000} = 140\%$
مؤشر التضخم السنوي بالنسبة للسنة السابقة		$\frac{1000-950}{950} = 5.26\%$	$\frac{1100-1000}{1000} = 10\%$	$\frac{1400-1100}{1100} = 27.27\%$
مؤشر التضخم السنوي بالنسبة إلى سنة الأساس	$\frac{950-1000}{1000} = -5\%$	$\frac{1000-1000}{1000} = 0\%$	$\frac{1100-1000}{1000} = 10\%$	$\frac{1400-1000}{1000} = 40\%$

[1]. هناك العديد من طرق حساب مؤشرات الأرقام القياسية والأسعار لا مجال لذكرها حالياً، منها مؤشر Laspeyres، مؤشر Paasche، طريقة المتوسط الهندسي، ... وغيرها.

6–1 تطبيقات أولية ذات طابع تدريبي

تطبيق (1–1): عدد العاملين في سلسلة مقاهي.

يُقدر عدد العاملين في شـركة تُدير سـلسـلة من المقاهي كتابع لعدد المقاهي المفتتحة (عاملين في المقهى المفتتح، إداريين، نقل، ...)، ويُعطى بالصيغة الآتية:

$$Y = 10\,n + 40$$

حيث n عدد المقاهي المفتتحة، و Y العدد الكلي للعاملين في الشركة. والمطلوب:

أ) رسم الخط البياني لعدد العاملين بدلالة عدد المقاهي.

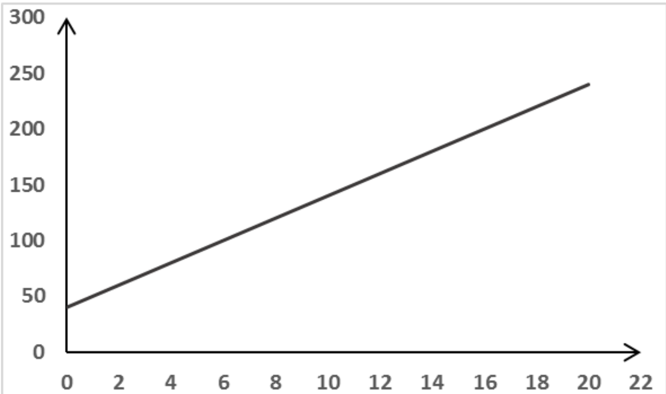
ب) حساب العدد اللازم من العاملين في حال افتتاح 12 مقهى.

ت) حساب عدد المقاهي الممكن افتتاحها في حال كان عدد العاملين 200 عامل.

<u>الحل:</u>

أ) الخط البياني. لاحظ أن عدد المقاهي يبدأ من الصفر ولا يمكن أن يأخذ قيماً سالبة.

لاحظ أيضـــاً أن الحد الأدنى لعدد العاملين في حال عدم افتتاح أي مقهى n=0 هو 40 عاملاً وهو نقطة التقاطع مع المحور العمودي: $y = 10*0 + 40 = 40$.



الشكل (1–6) عدد العاملين بدلالة عدد المقاهي (مثال خطي).

ب) العدد اللازم من العاملين في حال افتتاح 12 مقهي، أي n=12، يساوي 160 عاملاً:

$$Y(n=12) = 10*12 + 40 = 160$$

ت) عدد المقاهي الممكن افتتاحها في حال كان عدد العاملين 200 عامل أي y=200 هو 16 مقهى: $200 = 10\,n + 40 \;\Leftarrow\; n = 16$

تطبيق (1−2): نسبة الزيادة في سعر منتج.

بلغ سـعر أحد المنتجات 400 ل.س العام الماضـي، ويتم بيعه حالياً بسـعر 500 ل.س، ما مقدار الزيادة والنسبة المئوية للزيادة؟

مقدار الزيادة: $500 - 400 = 100$ ل.س

نسبة الزيادة: $t = \frac{100}{400} = 25\%$ التقسيم على سعر العام الماضي.

تطبيق (1−3) السعر قبل الضريبة.

يبلغ سـعر بيع أحد المنتجات 600 ل.س متضـمناً ضـريبة الاسـتهلاك البالغة 13%، ما هو سـعر التكلفة قبل الضريبة؟

ليكن سعر التكلفة قبل الضريبة هو P، فإن سعر البيع 600 ل.س هو سعر التكلفة P مضافاً إليه ضريبة الاستهلاك أي 0.13 P، أي: $600 = P + 0.13\ P$

أي أن سعر التكلفة قبل الضريبة يساوي 531 ل.س: $P = \frac{600}{1+0.13} = 531$

تطبيق (1−4) حساب السعر قبل التخفيض.

يباع أحد المنتجات حالياً بسعر 300 ل.س بعد التخفيض بنسبة 50% على السعر الأصلي، فما هو السعر الأصلي قبل التخفيض؟

ليكن السعر قبل التخفيض هو P، فتكون قيمة التخفيض 0.5 P، ولدينا: $300 = P - 0.5\ P$

أي أن السعر الأصلي قبل التخفيض يساوي 600 ل.س: $P = \frac{300}{1-0.5} = 600$

تطبيق (1−5): موازنة الدعاية.

بلغت موازنة الدعاية للعام 2018 في إحدى الشركات 5 مليون ل.س، وأقرت إدارة الشركة زيادة هذه الموازنة بمقدار 20% لهذا العام 2019، فما هي موازنة الدعاية لعام 2019؟

موازنة الدعاية لعام 2019 = الموازنة لعام 2018 + 20% x الموازنة عام 2018

= 5 + 0.2 x 5 = 6 مليون ل.س.

لنفترض أن إدارة الشـركة قررت زيادتها بمقدار 600 ألف فقط، فإن النسـبة المئوية للزيادة في هذه الحالة هي: نسبة الزيادة% = 600 ألف ÷ 5 مليون = 12%

تطبيق (1-6): حساب السعر من نسبة التخفيضات.

أعلن أحد محلات المفروشـات عن تخفيضـات بنسـبة 40% على جميع منتجاته، قام أحد البائعين بتخفيض مبلغ 1200 ل.س على سعر طاولة، كم يبلغ سعر الطاولة P؟

حيث أن نسبة التخفيض 40% من السعر الأصلي P تساوي 1200 ل.س، أي $0.4\ P = 1200$

وبالتالي فإن سعر الطاولة P يساوي 3000 ل.س : $P = \frac{1200}{0.4} = 3000$

تطبيق (1-7): مؤشر تغير أسعار مواد أولية.

لنفترض أن الشركة تشتري سنوياً نفس الكميات من المواد الأولية لتصنيع أحد منتجاتها، لكن الأسعار تختلف من سنة إلى أخرى، فيمكن حساب مؤشر تغير أسعار المواد الأولية بشكل عام.

المواد الأولية	الكمية	أسعار 2017	أسعار 2018
مادة A	20	10	12
مادة B	15	8	7
مادة C	30	6	8

فتكون تكلفة المنتج بأسعار 2017 هو: $20x10 + 15x8 + 30x6 = 500$

وتكون تكلفة المنتج بأسعار 2018 هو: $20x12 + 15x7 + 30x8 = 585$

ويكون مؤشر تكلفة أسعار المواد الأولية الداخلة في المنتج لعام 2018 بالنسبة إلى 2017 هو:

$$\frac{585}{500} = 117\%$$

تطبيق (1-8): قيمة مدخرات بعد مدة من الزمن.

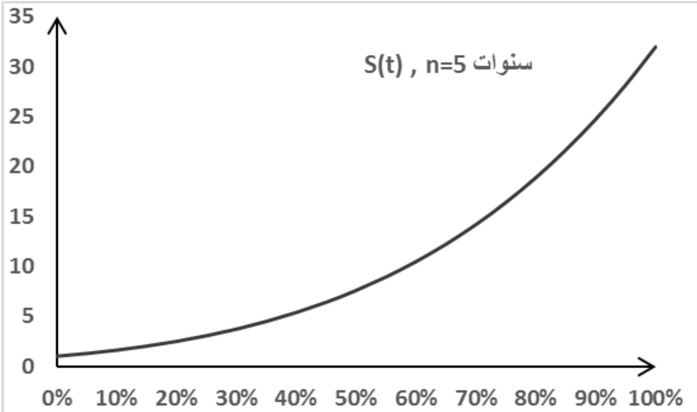
في حال ادخار مبلغ A من المال لمدة n سنة وبمعدل فائدة سنوية t، فإن المبلغ المدخر S في نهاية المدة يُحسب بالصيغة الآتية: $S = A(1+t)^n$

1. ما قيمة المدخرات في حال كان A=1000، t=10%، n=5 ؟
2. ارسم الخط البياني للتابع S بدلالة معدل الفائدة t، حيث A=1000، n=5.

<u>الحل:</u>

أ) نطبق الصيغة: $S = 1000(1+0.1)^5 = 1610.51$

ب) الخط البياني. تجدر الإشارة إلى أن معدل الفائدة t هو نسبة مئوية أي قيمه تتراوح بين الصفر و100%. نجد في الشكل البياني (1–7) شكل العلاقة بين قيمة ادخار وحدة نقدية واحدة (ل.س مثلاً) ومعدل الفائدة وذاك بعد فترة محددة تساوي 5 سنوات.



الشكل (1–7) الخط البياني لوحدة نقدية واحدة بدلالة معدل الفائدة، ولمدة 5 سنوات

تطبيق (1–9) موازنة الدعاية والمبيعات.

تُقدر إدارة التسويق في إحدى شركات بيع البرادات أن العلاقة بين قيمة المبيعات V وموازنة الدعاية P هي علاقة خطية ولها الشكل الآتي: $V = 5000 + 10\ P$

حيث P و V مقدرة بآلاف الليرات السورية، والمطلوب:

أ) في حال لم تنفق الشركة أي مبلغ على الدعاية، ما قيمة المبيعات المتوقعة؟

ب) في حال أنفقت الشركة 500 ألف ل.س على الدعاية، ما قيمة المبيعات المتوقعة؟

ت) كم يجب أن تنفق الشركة على الدعاية كي تصل قيمة مبيعاتها إلى 20 مليون ل.س؟

ث) إذا زادت الشركة المبالغ المنفقة على الدعاية بمقدار 100 ألف ل.س سنوياً، فما هي الزيادة في قيمة المبيعات؟

ج) ما هو الشكل البياني للعلاقة بين قيمة المبيعات وموازنة الدعاية؟

<u>الحل:</u>

أ) إذا لم تنفق الشركة أي مبلغ على الدعاية، أي قيمة P=0 تكون المبيعات تساوي 5 مليون ل.س: $V(P=0) = 5000 + 10*0 = 5000$

ب) إذا أنفقت الشركة مبلغ 500 ألف ل.س على الدعاية أي P=500 تكون المبيعات تساوي 10 مليون ل.س: $V(P=500) = 5000 + 10*500 = 10.000$

ت) كي تصـــل قيمة المبيعات إلى 20 مليون ل.س، أي $V(P) = 20.000$ يجب أن تكون موازنة الدعاية مبلغ مليون ونصف المليون ل.س:

$$P = (20.000-5000)/10 = 1500 \quad \Leftarrow \quad 20.000 = 5000 + 10\,P$$

ث) في حال قررت الشـــركة زيادة موازنة الدعاية بمقدار 100 ألف ل.س ســـنوياً، فإن الزيادة في قيمة المبيعات تُحسب كما يلي:

ليكن لدينا موازنتي الدعاية لسنتين متتاليتين $P1$ و $P2$ فإن الفرق بينهما هو دوماً ثابت:

$$P2 - P1 = \Delta P = 100$$

فإن الفرق في المبيعات ΔF المقابل لفرق الموازنتين يساوي:

$$\Delta F = F(P2) - F(P1)$$

$$\Delta F = (5000 + 10*P2) - (5000 + 10*P1)$$

$$\Delta F = 10*P2 - 10*P1 = 10\,(P2 - P1) = 10\,\Delta P$$

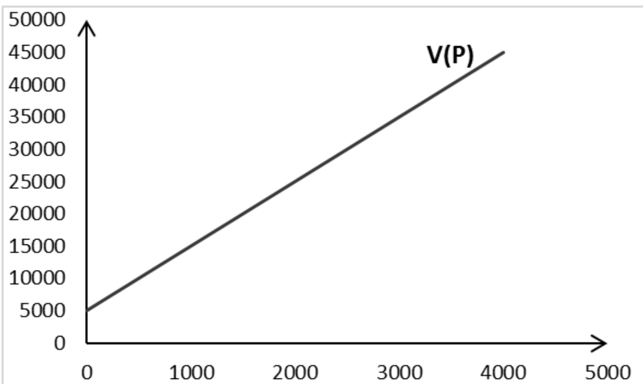
$$\Delta F = 10 * 100 = 1000$$

أي أن الزيادة في قيمة المبيعات تساوي مليون ل.س.

نلاحظ أيضـــاً أن النســـبة $\Delta F/\Delta P$ هي دوماً ثابتة وتســـاوي 10، وهي في الحقيقة معدل تزايد التابع F بالنســـــبة إلى تزايد المتغير P، أي كلما زادت الدعاية بمقدار ليرة ســـــورية واحدة فإن المبيعات تزداد بمقدار 10 ل.س، وسنرى لاحقاً أن هذه القيمة 10 هي المشتق الأول للتابع.

ج) الشكل البياني للعلاقة بين قيمة المبيعات وموازنة الدعاية

نلاحظ من الشـــكل البياني (1-7) أن العلاقة خطية، وبأن المبيعات لا تقل عن 5 مليون ل.س أي في حال كانت موازنة الدعاية معدومة.



الشكل (1-7) شكل العلاقة بين قيمة المبيعات وموازنة الدعاية (مثال)

أسئلة واختبارات الفصل الأول: مراجعة تأسيسية.

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	مجموعة الأعداد الحقيقية R ليست تبديلية بالنسبة للجمع أو بالنسبة للضرب		✓
2	حاصل قسمة عددين كسريين هو جداء الأول في مقلوب الثاني	✓	
3	يُقصد بالمجال]a, b] جميع الأعداد بين a و b بما فيها العدد a.		✓
4	القيمة المطلقة للعدد a $\|a\|$، تعني تجاهل الإشارة أي القيم الموجبة فقط للعدد.	✓	
5	يمكن إجراء جميع العمليات الرياضية على طرفي المعادلة دون قيود.		✓
6	يُقصد بدراسة إشارة كثير الحدود F(x) تحديد قيم x التي تجعل F(x) سالب أو موجب.	✓	
7	الخط البياني لتابع من الدرجة الأولى هو دوماً مستقيم.	✓	
8	نسبة 20% من العدد 300 هو القيمة 60.	✓	
9	لا فرق على الإطلاق في إنجاز العمليات الحسابية بأي ترتيب.		✓
10	رفع العدد a إلى قوة n يعني ضرب العدد a بنفسه n مرة.	✓	
11	يأخذ الجذر النوني للعدد صفر $\sqrt[n]{0}$ قيماً عديدة حسب قيمة n.		✓
12	مجموعة تعريف تابع هي القيم التي يأخذها التابع من مجموعة الأعداد الحقيقية.		✓
13	كل تابع قابل للاشتقاق عند نقطة ما، فهو مستمر عند هذه النقطة.	✓	
14	نقول عن تابع أنه متزايد على مجال قابل للاشتقاق عليه إذا كان مشتقه موجباً على المجال	✓	

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- قيمة العبارة الجبرية $\sqrt{4\,a^2}$ عندما a=5 هو:

أ) ± 10 ب) ± 25

ج) ± 100 د) جميع الأجوبة خاطئة

2- حاصل جداء أو جمع عددين طبيعيين هو دوماً:

أ) عدد سالب ب) عدد طبيعي

ج) حقيقي سالب/موجب د) جميع الأجوبة خاطئة

3- حاصل قسمة كسر على عدد من الشكل $\frac{c}{d} \div a$ حيث $a \neq 0$ هو:

أ) $\frac{c.a}{d}$ ب) هو a.c.d

ج) $\frac{c}{d.a}$ د) جميع الأجوبة خاطئة

4- الكتابة على شكل مجال مفتوح من الجهتين $x\in]a, b[$ يكافئ:

أ) $x=a$ أو $x=b$ ب) $a \le x \le b$

ج) $a < x < b$ د) جميع الأجوبة خاطئة

5- القيمة المطلقة للعدد $|-5|$ هي:

أ) العدد 5- ب) العدد 5

ج) العددين 5 أو 5- د) جميع الأجوبة خاطئة

6- حلول المعادلة $x^2 - 4 = 0$ في R هي:

أ) ليس لها حلول في R ب) $x = -2$ أو $x = +2$

ج) $x = 0$ أو $x = 4$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- حلول المتراجحة $4x < 20$ في R هي:

أ) ليس لها حلول في R ب) $x > 5$

ج) $x < 5$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- المتراجحة $x^2 + 1 > 0$ هي:

أ) غير محققة في R ب) محققة وغير محققة حسب قيم x

ج) دوماً محققة في R د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- إذا كانت ضريبة الدخل هي 12% من الراتب، فإن قيمة هذه الضريبة لموظف راتبه 40 ألف ل.س هي:

أ) 12000 ل.س ب) لا يمكن حسابها

ج) 4800 ل.س د) جميع الأجوبة خاطئة

10- يبلغ راتب أحد العاملين 50000 ل.س، وحصـــل على مكافأة مقدارها 10000 ل.س، فإن نســـبة المكافأة من الراتب تبلغ:

أ) 20% ب) 10%

ج) 50% د) جميع الأجوبة خاطئة

11- حاصل جداء $2^3 \times 3^2$ هو القيمة:

أ) 72 ب) 36

ج) لا يمكن حسابها د) جميع الأجوبة خاطئة

12- الحد الأعلى للتابع $F(x) = 2\,sin\,x + 4$ هو:

أ) 2 ب) 6

ج) غير معرف د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

مسألة (1-1).

ليكن معدل الاهتلاك السنوي لإحدى السيارات يساوي 10%، ويبلغ سعر الشراء لهذه السيارة 20 مليون ل.س، والمطلوب:

أ- ما صيغة سعر السيارة بدلالة عدد سنوات الاستهلاك؟

ب- ما سعر السيارة في نهاية السنة العاشرة؟

(توجيهات للإجابة: معادلة خطية. الفقرة 1-2)

مسألة (1-2).

يُنتج ويبيع أحد المعامل 100 ألف قطعة سنوياً، تقدر إدارة الشركة أن العام القادم سيكون هناك ركود يصل إلى 60% من الإنتاج والمبيعات، فما هو مستوى الإنتاج الواجب التخطيط له للعام القادم؟

(توجيهات للإجابة: معادلة خطية. الفقرة 1-2، 1-5)

مسألة (1-3).

رصدت إدارة المبيعات في نهاية السنة التغيرات الآتية عن بداية السنة على سعر وحجم مبيعات أحد منتجاتها:

تزايد سعر البيع بمقدار 8% خلال السنة، وتناقص حجم المبيعات بمقدار 10%.

فما هي نسبة التغير الإجمالي في الإيرادات بين بداية ونهاية السنة؟

(توجيهات للإجابة: ضرب نسب مئوية. الفقرة 1-5)

مسألة (1-4).

خلال تتبع لسعر سهم على مدى 4 أشهر، لاحظنا ما يلي:

تزايد سعر السهم في نهاية الشهر الأول بمقدار 2% عن سعره في بداية الشهر.

تناقص سعر السهم في نهاية الشهر الثاني بمقدار 5% عن سعره في نهاية الشهر الأول.

تناقص سعر السهم في نهاية الشهر الثالث بمقدار 3% عن سعره في نهاية الشهر الثاني.

تزايد سعر السهم في نهاية الشهر الرابع بمقدار 9% عن سعره في نهاية الشهر الثالث.

فما هي نسبة التغير في سعر السهم بين بداية الشهر الأول ونهاية الشهر الرابع؟

(توجيهات للإجابة: ضرب نسب مئوية. الفقرة 1-5)

السؤال (1-5). أوجد جداء الأقواس الآتية: $F(x) = x\,(-x+5)\,(x-6)$

السؤال (1-6). حلل إلى عوامل أولية: $F(K,L) = L^2 - 0.25\,K^2$

الفصل الثاني: التوابع الصحيحة من الدرجتين الأولى والثانية

عنوان الموضوع: التوابع الصحيحة من الدرجتين الأولى والثانية

Functions of first and Second Orders

كلمات مفتاحية:

معادلة من الدرجة الأولى Linear Equation. معادلة من الدرجة الثانية Quadratic Equation.
جملة معادلات خطية Simultaneous Linear Equations.
توابع الإيرادات، التكاليف، والربح Revenue, Cost, and Profit Function.
توابع العرض والطلب Supply & Demand Functions، توازن السوق Market Equilibrium.
توازن الدخل القومي National Income Equilibrium، نموذج استثمار–ادخار وسيولة–نقدية ISLM (Investment-Saving, Liquidity-Money).

ملخص الفصل:

يُعتبر هذا الفصل مقدمة مفيدة للغاية للتعامل مع الظواهر الاقتصادية والصيغ الرياضية، كونه من ناحية يستخدم أدوات رياضية بسيطة أي توابع من الدرجتين الأولى والثانية للتعامل مع ظواهر اقتصادية يبدو بعضها معقداً، إذ تم الاقتصار على حالات محددة للظاهرة وصياغتها وحلها باستخدام الأداة الرياضية المناسبة، كما تم توضيح ومحاولة تفسير العديد من المشكلات الاقتصادية عبر العديد من الأمثلة والتطبيقات العملية.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يستطيع الطالب صياغة بعض الظواهر الاقتصادية على شكل صيغ رياضية من الدرجة الأولى والثانية.
2. يحل معادلات من الدرجتين الأولى والثانية، ويرسم خطوطها البيانية.
3. يجد توابع الربح ويجد الربح الأعظمي عبر دراسة هذه التوابع.
4. يجد سعر وكمية توازن سلعة في السوق لتوابع من الدرجتين الأولى والثانية.
5. يتمكن من إيجاد مستويات توازن الدخل القومي في حالة توابع خطية.

مخطط الفصل:

2-1 التوابع العددية من الدرجة الأولى Linear Functions.
2-2 حل جملة معادلات خطية بيانياً وجبرياً Simultaneous Solution of Linear Equations.

2-3 التوابع من الدرجة الثانية Quadratic Functions.

2-4 توابع الإيرادات، التكاليف، والربح Revenue, Cost, and Profit Function.

2-5 توابع العرض والطلب Supply & Demand Functions.

2-6 توابع توازن الدخل القومي من الدرجة الأولى Linear Equations of National Income Equilibrium.

مقدمة

كثيراً ما نهتم لدى دراسة الظواهر الاقتصادية، بصياغة العلاقة بين متغيرات الظاهرة، وحيث أن الصياغة الرياضية هي ترميز مجرد، يقع على عاتق الاقتصادي تحميل المعنى/المفهوم الاقتصادي للمتغير وتفسير اتجاه العلاقات الاقتصادية، أي ما هو المتغير التابع؟ وما هو المتغير المستقل؟

مثلاً الصيغة الرياضية $y = 2x + 6$ هي مكافئة تماماً للصيغة $x = 0.5y + 3$، ندعو الصيغة الأولى التابع Function والصيغة الثانية التابع العكسي Inverse Function، أو العكس.

التفسير الاقتصادي في الحالة الأولى يعني أن y تابع لـــ x، أو يمكن حساب y بعد معرفة x، في حين أن x تابع لـ y في الصيغة الثانية.

مثلاً، التعبير "الربح = سعر البيع – سعر التكلفة"، تعني أن الربح يتحدد كنتيجة للفرق بين سعر البيع في السوق وتكلفة المنتج لدى الشركة، وهو أحد مبادئ عمل اقتصاد السوق الحر.

التعبير "سعر البيع = سعر التكلفة + الربح"، تعني أن سعر البيع يتحدد بعد معرفة التكلفة وبإضافة هامش الربح، وهو أحد مبادئ الاقتصاد الاشتراكي المخطط (التسعير الإداري).

في حين أن الصياغة الرياضية لا تميز بين التعبيرين، بمعنى أن الرياضيات تنظر إلى المتغيرات بشكل مجرد من المعنى، وعلى الدارس الاقتصادي تحميل هذه الرموز المعنى المناسب وتفسيرها.

من الضروري أثناء صياغة العلاقات الرياضية توضيح المتغير التابع والمتغير المستقل، ولذلك نكتب عادةً التابع على شكل $F(x)$ بدلاً من y، وذلك للقول أن المتغير المستقل هو x وبأن المتغير التابع $y=F(x)$ هو المتغير التابع لـ x، وهذا ما سنعتمده لدي الحديث عن الصيغ الرياضية بشكل عام.

قد نجد في الصيغة الرياضية عدة متغيرات x, y, z, t، ولكن التابع قد يكون لمتغيرين فقط مثلاً x, y فنكتب حينها $F(x,y)$ حتى وإن ظهرت المتغيرات الأخرى في الصيغة فيُنظر إليها كثوابت أو معاملات Parameters لا يتأثر بها التابع F، مثلاً: $F(x,y) = 2x + 3y - 5z + t + 15$ تعني أن التابع للمتغيرين x, y فقط، وتعامل t و z معاملة الثوابت.

إن تحويل الظاهرة الاقتصادية إلى صيغ رياضية هو ولا شك مفيد للغاية، ويدخل ضمن إطار الرياضيات التطبيقية في الاقتصاد وندعوه بالنمذجة الاقتصادية Economic Modelling أو نماذج الاقتصاد القياسي Econometrics Models، ولن يكون الموضوع الرئيس في الأملية الحالية بل سنلجأ إلى أدواته حسب الحاجة.

2-1 التوابع من الدرجة الأولى

رأينا سابقاً أن كثير حدود من الدرجة الأولى يكتب بالشكل $F(x) = a\,x + b$، حيث a, b أعداد ثابتة حقيقية و a لا يساوي الصفر a # 0.

لإيجاد إشارة كثير الحدود F(x) من الدرجة الأولى، نقوم بما يلي:

أ) حل المعادلة من الدرجة الأولى: $F(x) = 0$ أي $ax + b = 0$

للمعادلة حل/جذر وحيد هو $x_0 = -\frac{b}{a}$

ب) تكون إشارة F(x) مخالفة لإشارة a قبل الجذر وموافقة لإشارة a بعد الجذر.

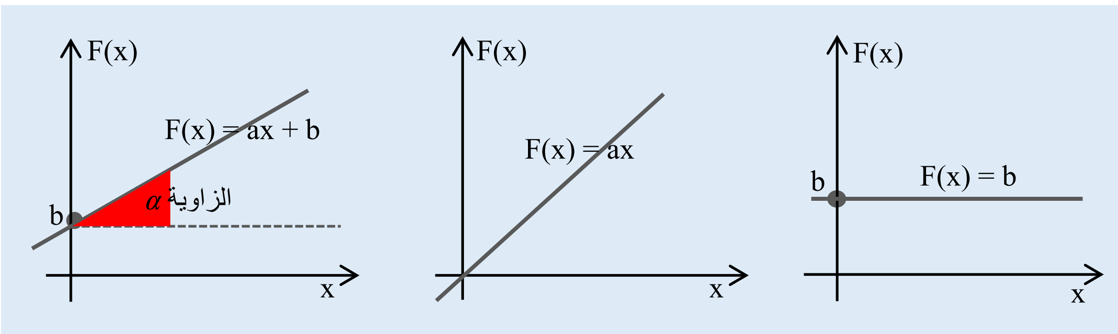
ت) نضع جدول إشارة كثير الحدود كما يلي:

قيم x	- ∞	$x_0 = -\frac{b}{a}$	+ ∞
إشارة F(x)	مخالف لإشارة a	0	موافق لإشارة a

يُمثل كثير الحدود من الدرجة الأولى هندسياً في فضاء ثنائي البعد (مستوي) محوره الأفقي x (محور السينات) ومحوره العمودي F(x) (محور العينات) بشكل مستقيم.

يُدعى الثابت a بميل التابع Slobe ويُمثل ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات.

في حين يمثل الثابت b قيمة F(x) عندما x=0 أي نقطة تقاطع الخط البياني للتابع مع محور العينات Intercept.



الشكل (2-1) بعض أشكال الخط البياني لتوابع من الدرجة الأولى

مثال (2-1). ادرس إشارة $F(x) = 2x - 4$

نحسب قيمة x التي تعدم F(x): $F(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

إشارة F(x) مخالفة لإشارة a=2 أي سالب قبل الجذر 2 أي من أجل x<2 أو $x \in]-\infty, +2[$

وموافقة لإشارة a=2 أي موجب بعد الجذر 2 أي من أجل x>2 أو $x\in]+2, +\infty[$

مثال (2–2). ادرس إشارة $F(x) = 2x$

نحسب قيمة x التي تعدم F(x): $F(x) = 2x = 0 \Rightarrow x=0$

إشارة F(x) مخالفة لإشارة a، أي سالب قبل الصفر وموجب بعده، باختصار له نفس إشارة x.

مثال (2–3). أوجد المعادلة لمستقيم يمر بالنقطة (1, 5) وميله يساوي 2.

إيجاد معادلة المستقيم $F(x) = a\,x + b$ يعني إيجاد قيم ثوابت المعادلة a, b .

الميل: $a = 2$،

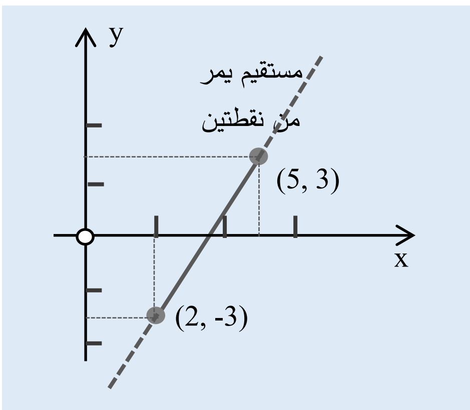
قيمة b: نبدل قيم النقطة $F(x) = 1$ من أجل $x = 5$ في المعادلة فتصبح: $5 = 2x1 + b$
وبالتالي تحسب قيمة b: $b = 5-2 = 3$ ،

فتصبح معادلة المستقيم: $F(x) = 2\,x + 3$.

مثال (2–4). رسم مستقيم يمر من نقطتين.

ليكن لدينا النقطتين: (5, 3) و (2, -3) والمطلوب: رسم المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين. حاول إيجاد معادلة المستقيم.

نرسم جملة إحداثيات من محورين، ونمثل النقطتين عليها، ثم نصل بين النقطتين، فيكون هو المستقيم المطلوب.



الشكل (2–2) رسم مستقيم يمر من نقطتين

معادلة المستقيم: الشكل العام لمعادلة المستقيم هو $y = a\,x + b$، نبدل النقطتين ونجد قيم الثوابت a, b .

من النقطة الأولى (5, 3)، نجد: $3 = 5a + b$

من النقطة الثانية (2, -3)، نجد: $-3 = 2a + b$

نحصـل على معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين هما a, b. سـنرى في الفقرة اللاحقة كيفية إيجاد الحل المشترك لهاتين المعادلتين.

2-2 حل جملة معادلات خطية بيانياً وجبرياً

في الكثير من الظواهر الاقتصـــادية، يتشـــكل لدينا عدة معادلات بعدة متغيرات، ويجب البحث عن حلول مشتركة لهذه المعادلات، هناك طرق عديدة لإيجاد هذه الحلول.

لدينا 3 حالات:

الحالة الأولى: عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات.

الحالة الثانية: عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات.

الحالة الثالثة: عدد المعادلات أصغر من عدد المتغيرات.

سـنهتم حالياً بالطرق البسـيطة لمعالجة الحالة التي يكون فيها المعادلات خطية حيث عدد المعادلات يســـاوي عدد المجاهيل Simultaneous Linear Equations، كما ســـنعود إليها عند الحديث عن المصفوفات، في حين سنتعرض للحالتين الأخريتين في مواضع مختلفة من هذه الأملية حسب الحالة.

2-2-1 الحل البياني

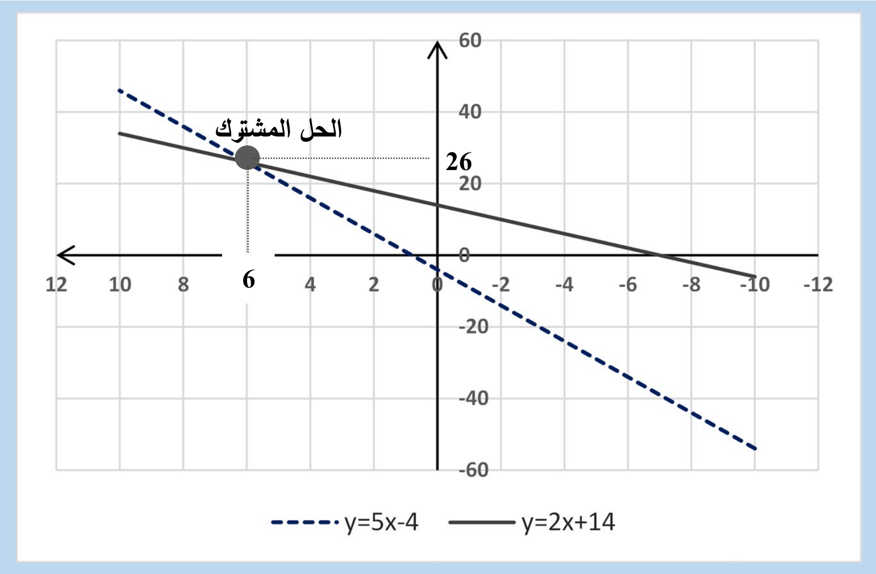
سنقتصر في هذه الفقرة على التمثيل البياني لمعادلتين بمجهولين فقط، إذ يصعب رسمها هندسياً إذا كان عدد المجاهيل أكبر من 2.

يتم البحث عن الحل المشترك كما يلي:

1. نرسم الخطين البيانين للمعادلتين على نفس جملة الاحداثيات.
2. نوجد على الشـــكل البياني نقاط تقاطع الخطين (إن وجدت)، فتكون هي الحل المشـــترك للمعادلتين.
3. نوجد المساقط لهذه النقاط على المحورين الأفقي والعمودي، فتكون قيم المساقط هي قيم الحل المشترك.

مثال (2-5) ليكن لدينا المعادلتين بمجهولين x, y:

المعادلة الأولى $y = 5x - 4$ المعادلة الثانية $y = 2x + 14$



الشكل (2–3) الحل البياني لجملة معادلتين خطيتين

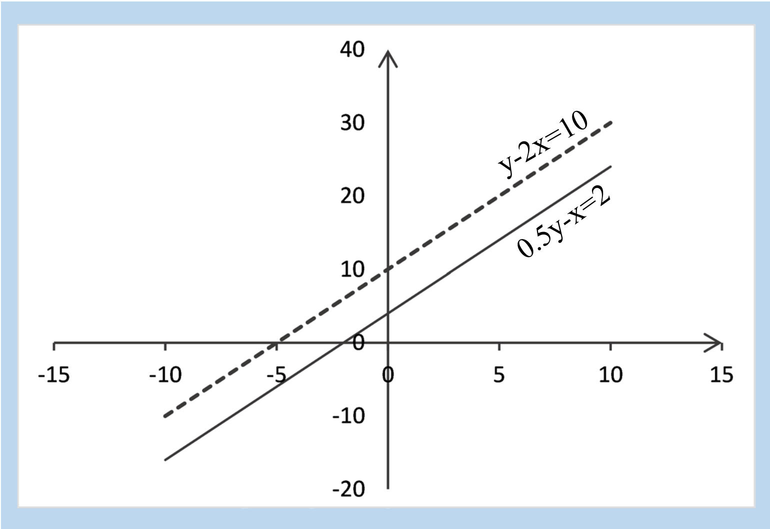
في بعض الحالات، قد يكون الخطين البيانيين متوازيين، وبالتالي لا يوجد إمكانية للتقاطع بينهما ولا يوجد حل مشترك، تقع هذه الحالة عندما يكون للمستقيمين نفس الميل.

مثال (2–6) ليكن لدينا المعادلتين بمجهولين x, y:

المعادلة الأولى $y - 2x = 10$ المعادلة الثانية $0.5y - x = 2$

نلاحظ من الشكل (2–3) أن الخطين البيانيين متوازيان، وبالتالي لا يوجد تقاطع بينهما أي لا يوجد حل مشترك للمعادلتين. ونلاحظ أن للمعادلتين نفس الميل ويساوي 2.

يمكن أن تعبر هذه الحالة على ظواهر اقتصادية ندعوها الخطوط متساوية التكلفة Isocost كما سنرى لاحقاً. تحصل هذه الظاهرة عندما تتغير التكاليف الثابتة مثلاً وتبقى التكاليف المتغيرة للقطعة الواحدة (المعبر عنها بميل المستقيم) ثابتة، أي ينتقل الخط البياني كاملاً من مستوى إلى مستوى أعلى أو أقل حسب الحالة.



الشكل (2–4) الخطين البيانيين متوازيين (لا يوجد حل مشترك)

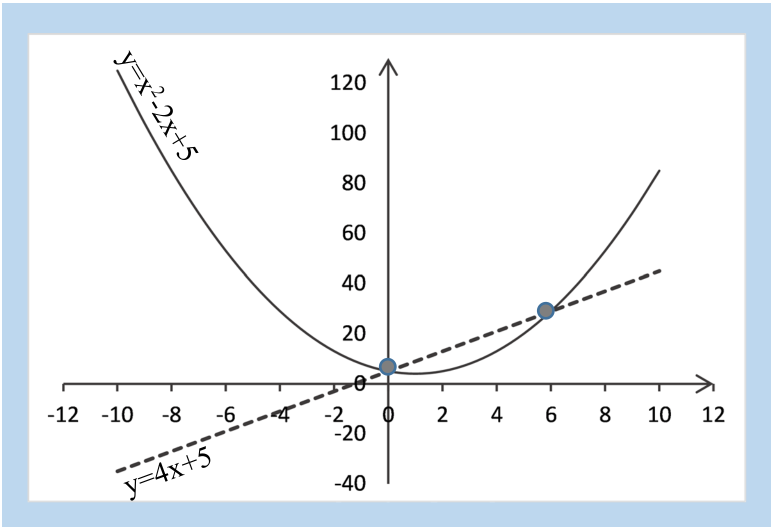
وفي حالات أخرى، قد تكون إحدى المعادلتين أو الاثنتين غير خطية، فيمكن أيضاً حلها بيانياً وإيجاد الحل المشترك على الشكل البياني.

مثال (2–7) لتكن لدينا المعادلتين:

المعادلة الأولى $y = x^2 - 2x + 5$ المعادلة الثانية $y = 4x + 5$

نجد من الشكل (2–5)، يتقاطع الخطان البيانيان في نقطتين (الحل المشترك) هما:

النقطة الأولى: عندما $x=0, y=5$ النقطة الثانية: عندما $x=6, y=29$



الشكل (2–5) الحل المشترك لجملة معادلتين إحداهما غير خطية

2-2-2 الحل الجبري بطريقة التعويض

رأينا أعلاه طريقة حل بيانية، وهي مفيدة في حالات خاصة، سنرى حالياً طريقة الحل بالتعويض وهي بالتأكيد أفضل في حال كان عدد المتغيرات المشتركة بين المعادلات أكثر من اثنين ندعوها طريقة الحل بالتعويض أو بالحذف Elimination Method، كما سنقتصر على الحالة التي يكون فيها عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

تعمل الطريقة كما يلي:

(1) حساب أحد المجاهيل من إحدى المعادلات بدلالة المجاهيل الأخرى.

(2) استبدال المجهول المحسوب من (1) في المعادلات الأخرى.

(3) تكرار الخطوتين (1) و (2) للمجاهيل المتبقية بالتدريج حتى نحصل في آخر عملية استبدال على معادلة واحدة بمجهول واحد.

(4) يتم حل المعادلة الناتجة من (3) ثم العودة للمعادلات السابقة وإيجاد قيم المجاهيل بالتدرج.

وسنوضحها على عدد من الأمثلة.

يمكن دوماً اللجوء إلى الشكل العام لحل معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين فقط، كما يلي. ليكن لدينا المعادلتين:

المعادلة الأولى $ax + by = c$ المعادلة الثانية $dx + ey = f$

حيث x, y مجهولين، و a, b, c, d, e, f ثوابت المعادلتين.

أ) حذف المجهول y وذلك بضرب المعادلة الأولى بـ e وضرب الثانية بـ b ثم طرح المعادلتين:

$$\begin{array}{rl} & eax + eby = ec \\ - & bdx + bey = bf \\ \hline & (ae - bd)\,x = ec - bf \end{array}$$

ومنه نجد قيمة x: $x = \frac{ec-bf}{ae-bd}$

ب) حذف المجهول x وذلك بضرب المعادلة الأولى بـ d وضرب الثانية بـ a ثم طرح المعادلتين:

$$\begin{array}{rl} & dax + dby = dc \\ - & adx + aey = af \\ \hline & (db - ae)\,y = dc - af \end{array}$$

ومنه نجد قيمة y: $y = \frac{dc - af}{db - ae}$

نلاحظ أن هذه الطريقة لا يمكن استخدامها عندما يكون db-ae=0 حيث لا يمكن التقسيم على صفر، أي أنه لا يوجد حل مشترك للمعادلتين (أو هناك عدد لا نهائي من الحلول).

مثال (2–8) حل معادلتين خطيتين بمجهولين.

ليكن لدينا المعادلتين:

الأولى $4x + 5y = 20$ الثانية $2x + 3y = 15$

الحل:

نضرب المعادلة الثانية بالعدد 2- ونجمع المعادلتين:

$$\begin{array}{rl} & 4x + 5y = 20 \\ * -2 & -4x + -6y = -30 \\ \hline & 0 - y = -10 \Rightarrow y = 10 \end{array}$$

نستبدل $y=10$ بإحدى المعادلتين ولتكن الأولى: $4x + 5*10 = 20$ مما يؤدي إلى $x=-7.5$.

فيكون الحل المشترك: $x = -7.5\ ,\ y = 10$

يُنصح دوماً بالتأكد من الحل المشترك، خصوصاً إذا كان عدد المعادلات كبيراً:

الأولى $4*(-7.5) + 5*10 = 20$ صحيحة.

الثانية $2*(-7.5) + 3*(10) = 15$ أيضاً صحيحة.

مثال (2–9) حل معادلتين بمجهولين إحداهما خطية والأخرى تربيعية.

لنحاول إيجاد الحل المشترك للمعادلتين المذكورتين في المثال (2–7)

المعادلة الأولى $y = x^2 -2x + 5$ المعادلة الثانية $y = 4x + 5$

الحل:

من المعادلة الثانية نجد $y=4x+5$،

نستبدل y في المعادلة الأولى: $4x + 5 = x^2 - 2x + 5$

بالاختصار نجد $x2 - 6x = 0$

بإخراج عامل مشترك x خارج قوسين نجد $x (x-6) = 0$

فيكون قيم x إما $x_1=0$ أو $x_2=6$

نستبدل هاتين القيمتين في المعادلة الثانية (أو الأولى) لإيجاد قيم y:

من أجل $x_1=0$ نجد $y_1 = 4*0 + 5 = 5$ الحل (النقطة) الأول: x=0, y=5

من أجل $x_2=6$ نجد $y_2 = 4*6 + 5 = 29$ الحل (النقطة) الثاني: x=6, y=29

نلاحظ أنه نفس الحل البياني الذي حصلنا عليه.

مثال (2−10) حل معادلتين خطيتين بمجهولين باستخدام الصيغة العامة.

لنأخذ المعادلتين في المثال (2−8):

الأولى $4x + 5y = 20$ الثانية $2x + 3y = 15$

<u>الحل:</u>

قيم ثوابت المعادلة الأولى: a=4, b=5, c=20

قيم ثوابت المعادلة الثانية: d=2, e=3, f=15,

قيمة x: $x = \frac{ec-bf}{ae-bd} = \frac{3*20-5*15}{4*3-5*2} = -7.5$

قيمة y: $y = \frac{dc-af}{db-ae} = \frac{2*20-4*15}{2*5-4*3} = 10$

نجد أنه نفس الحل الذي حصلنا عليه سابقاً.

إذا كان لدينا أكثر من مجهولين اثنين، فيمكن تطبيق طريقة التعويض أيضـــاً، لكن إذا كان عدد المجاهيل كبيراً تُصبح الطريقة معقدة ولا ننصح بها، بل ننصح باللجوء إلى المصفوفات. لنحاول حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات فقط في المثال الآتي (2−11).

مثال (2−11) حل جملة معادلات خطية بثلاث متغيرات.

ليكن لدينا المعادلات الثلاث الآتية:

$x - 3y + 4z = 5$ [1]

$2x + y + z = 3$ [2]

$4x + 3y + 5z = 1$ [3]

لنحاول إيجاد الحل المشترك لهذه المعادلات بطريقة التعويض.

نضرب المعادلة [1] بـ 2- ونجمعها للثانية، فنحصل على المعادلة [4] بمتغيرين فقط y, z:

$y - z = -1$ [4]

نضرب المعادلة [1] بـ 4- ونجمعها للثالثة، فنحصل على المعادلة [5] بمتغيرين فقط y, z:

$15y - 11z = -19$ [5]

فيكون لدينا المعادلتين [4] و [5] بمجهولين، نحلهما بنفس الطريقة:

نضرب المعادلة [4] بـ 15- ونجمعها للخامسة، فنحصل على المعادلة [6] بمتغير فقط z :

$4z = -4$ [6]

منها، نجد قيمة z=-1، نستبدلها في المعادلة [4]، فنجد قيمة y=-2: $y - (-1) = -1$

نستبدل y=-2 و z=-1 في المعادلة [1] فنجد قيمة x=3: $x - 3*(-2) + 4*(-1) = 5$

يُنصح دوماً بالتحقق من الأجوبة x=3, y=-2, z=-1:

المعادلة [1]: $3 - 3*(-2) + 4*(-1) = 5$ صحيحة

المعادلة [2]: $2*(3) + (-2) + (-1) = 3$ صحيحة

المعادلة [3]: $4*(3) + 3*(-2) + 5*(-1) = 1$ صحيحة

2-3 التوابع من الدرجة الثانية (التوابع التربيعية)

كثير حدود من الدرجة الثانية له الشكل العام: $F(x) = ax^2 + bx + c$، حيث a, b, c أعداد حقيقية و a غير معدوم. عندما يكون a=0 فإن كثير الحدود يصبح من الدرجة الأولى.

2-3-1 إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

دراسة إشارة F(x) تعني تحديد قيم x التي تجعل F(x) سالب أو موجب، ولذلك نقوم بما يلي:

1. اعتبار كثير الحدود كمعادلة من الدرجة الثانية أي $F(x) = 0$
2. إيجاد جذور المعادلة (إن وجدت).
3. دراسة إشارة المقدار F(x) بين الجذرين، وخارج الجذرين.
4. وضع جدول مساعد لتغيرات قيم x وقيم كثير الحدود F(x) وجذور المعادلة.
5. صياغة مجالات إشارة F(x).

نعدم معادلة كثير الحدود: $F(x)=0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4a.c$ ، هناك ثلاث حالات ممكنة:

الحالة الأولى: $\Delta > 0$ للمعادلة جذران حقيقيان.

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ للمعادلة جذر مضاعف.

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ ليس للمعادلة جذور.

الحالة الأولى $\Delta > 0$ ، نحسب جذرا المعادلة بالشكل الآتي:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

نضع جدول فتكون إشارة F(x) بين الجذرين مخالف لإشارة a وخارج الجذرين موافق لإشارة a:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
إشارة F(x)	موافق لإشارة a	0	مخالف لإشارة a	0	موافق لإشارة a

الحالة الثانية $\Delta = 0$: للمعادلة جذر مضاعف يساوي $x_0 = \frac{-b}{2a}$ وتكون إشارة F(x) قبل وبعد الجذر موافقة لإشارة a.

الحالة الثالثة $\Delta < 0$: لا يوجد جذور حقيقية لـ F(x) ، وتكون إشارته موافقة لإشارة a.

مثال (2−12). ادرس إشارة المقدار $F(x) = -2x^2 - x + 3$

الحل: $F(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0$

$a = -2 , b = -1 , c = 3 \qquad \Delta = b^2 - 4a.c = 1- 4*(-2)*3 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{1+5}{2x(-2)} = -1.5 \qquad x_2 = \frac{1-5}{2x(-2)} = +1$

x	$-\infty$	-1.5		+1	$+\infty$
إشارة F(x)	موافق لإشارة a أي سالب	0	مخالف لإشارة a أي موجب	0	موافق لإشارة a أي سالب

من أجل قيم $x \in]-\infty, -1.5[\cup]+1, +\infty[$ فإن F(x) يكون سالب تماماً،

ومن أجل قيم $x \in]-1.5, +1[$ فإن F(X) يكون موجب تماماً.

مثال (2−13). ادرس إشارة $F(x) = x^2 - 6x + 9$

الحل: $F(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1 , b = -6 , c = 9 \qquad \Delta = b^2 - 4a.c = 36- 4*1*9 = 0$

$x_0 = -b/2a = 6/2 = +3$

x	$-\infty$	$+3$	$+\infty$
إشارة F(x)	**موافق لإشارة a أي موجب**	0	**موافق لإشارة a أي موجب**

مثال (2−14). ادرس إشارة $F(x) = 3x^2 - x + 1$

الحل: $F(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - x + 1 = 0$

$a = 3 , b = -1 , c = 1 \qquad \Delta = b^2 - 4a.c = 1- 4*3*1 = -11 < 0$

حيث أن المميز سالب فلا يوجد جذور للمعادلة، وإشارة F(x) توافق إشارة a أي موجب دوماً.

2−3−2 وضع كثير حدود من الدرجة الثانية على شكل جداء

إذا كان لكثير الحدود من الدرجة الثانية $F(x) = ax^2 + bx + c$ جذران x_1 و x_2 فإنه يُمكن كتابته على شكل جداء على الشكل: $F(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

وإذا كان له جذر مضاعف x_0 نكتبه على الشكل: $F(x) = a(x-x_0)^2$

مثال (2−15). ضع كثير الحدود $F(x) = -4x^2 - 2x + 2$ على شكل جداء.

نحسب جذور المعادلة $F(x) = 0$:

$F(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4*(-4)*2 = 36 > 0$

$$x_1 = \frac{+2+6}{2\times(-4)} = -1 \qquad x_2 = \frac{+2-6}{2\times(-4)} = 0.5$$

وبالتالي يكتب F(x) عل شكل جداء كما يلي: $F(x) = 2(x+1)(x-0.5)$.

مثال (2−16). ضع كثير الحدود $F(x) = x^2 -6x + 9$ على شكل جداء

نحسب جذور المعادلة $F(x) = 0$:

$F(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 4*1*9 = 0$

$x_0 = -b/2a = 6/2 = 3$

وبالتالي يكتب F(x) على شكل جداء كما يلي: $F(x) = (x-3)^2$.

مثال (2−17). ضع كثير الحدود $F(x) = 9 - x^2$ على شكل جداء.

نحسب جذور المعادلة $F(x) = 0$:

$$F(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = +3 , x_2 = -3$$

وبالتالي يكتب $F(x)$ على شكل جداء: $F(x) = -(x+3)(x-3) = (3+x)(3-x)$

هناك طرق أخرى لكتابة كثير الحدود على شكل جداء، منها:

أ) إخراج عامل مشترك. أمثلة:

$$F1(x) = 3x^2 – 6x = 3x (x-2)$$

$$F2(x) = x^2 + 4x = x (x+4)$$

$$F3(x) = 1/4 x^2 – x = 1/4 x (x-4)$$

ب) المطابقات الشهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ج) التحليل المباشر، إذا كان لدينا كثير حدود من الشكل $x^2 + bx + c$ حيث أمثال x^2 تساوي الواحد، نبحث عن عددين مجموعهما b وجداؤهما c. أمثلة:

$$F1(x) = x^2 – x -2 = (x-2) (x+1)$$

$$F2(x) = x2 – x – 30 = (x-6) (x+5)$$

2–3–3 دراسة إشارة كثير الحدود بشكل عام

نتبع الخطوات الآتية:

1. وضع كثير الحدود على شكل جداء (قدر الإمكان) كثيرات حدود جزئية من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية والتي سبق أن تم دراستها.
2. دراسة إشارة كل واحد من كثيرات الحدود الجزئية على حدة.
3. تنظيم جدول ووضع إشارة كل منها في سطر مستقل.
4. تتحدد إشارة كثير الحدود بإجراء جداء (أو قسمة) إشارات كثيرات الحدود الجزئية.

مثال (2–18). ادرس إشارة كثير الحدود $F(x) = x^3 + 4x^2 – 12x$

<u>الحل:</u>

1) نضع كثير الحدود بشكل جداء:

$$F(x) = x^3 + 4x^2 - 12x = x\,(x^2 + 4x - 12) = x\,(x+6)\,(x-2)$$

2) هناك 3 كثيرات حدود جزئية هي $x, (x+6), (x-2)$ ندرس إشارة كل منها:

الجذور هي $x = 0$ ، $x = -6$ ، $x = 2$

3) وضع جدول نضع فيه إشارات كثيرات الحدود الثلاث، ونتيجة ضرب الإشارات لنحصل على إشارة كثير الحدود $F(x)$:

قيم x	$-\infty$	-6		0		2	$+\infty$
كثير الحدود x	-	-	-	0	+	+	+
كثير الحدود $x + 6$	-	0	+	+	+	+	+
كثير الحدود $x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
إشارة $F(x)$	-	0	+	0	-	+	+

أي أن إشارة كثير الحدود $F(x)$ سالبة قبل القيمة 2 أي على المجال $]-\infty , 2[$.

وموجبة بعد القيمة 2 أي على المجال $]2 , +\infty[$.

2-4 توابع الإيرادات، التكاليف، والربح

كثيراً ما نهتم في العلوم الاقتصـــادية بالبحث عن أفضـــل الإيرادات، وأقل التكاليف، وأعلى الأرباح، لذلك من المفيد جداً البحث عن صياغة رياضية لمثل هذه التوابع، ثم البحث عن أفضل قيمها.

تمثل الإيرادات المبالغ الناتجة عن المبيعات المباشرة من منتجاتها، وكذلك المبيعات الهامشية (خردة، منتجات ثانوية، خدمات صيانة، ...)، أي جميع ما تُحققه الشركة من نشاطاتها من إيرادات.

في حين تمثل التكاليف جميع النفقات سـواء المباشـرة على المنتجات (مواد أولية، عمالة، طاقة، ...) وغير المباشـرة مثل ضـرائب ورسـوم على النشـاطات والأرباح، وكذلك التكاليف الثابتة مثل إيجار أراضـــي أو أبنية أو الرواتب الثابتة للعاملين الإداريين الدائمين. عادةً ما نميز بين التكاليف الثابتة FC (Fixed Costs) والتكاليف المتغيرة (Variable Costs) أي تكلفة إنتاج القطعة الواحدة دون الأخذ بالاعتبار للتكاليف الثابتة نرمز لها $V(x)$ حيث x عدد القطع المنتجة، فيكون تابع التكاليف الإجمالية $C(x)$: $C(x) = FC + V(x)$.

وبالتالي يمثل الربح Profit الفرق الصافي بين جميع الإيرادات وجميع التكاليف.

ليكن x عدد القطع التي تبيعها الشـــركة، وليكن R(x) تابع الإيرادات الناجم عن المبيعات، وليكن C(x) تابع التكاليف الكلية (الثابتة والمتغيرة)، فيكون تابع الربح F(x) له شكل الفرق بينهما:

$$F(x) = R(x) - C(x)$$

أو $$F(x) = R(x) - FC - V(x)$$

لنستعرض بعض الأمثلة التطبيقية.

تطبيق (2-1). التكاليف الكلية تابع خطي.

تبلغ التكاليف الثابتة لأحد مصانع الأحذية 2000 ل.س شهرياً، كما تبلغ تكلفة إنتاج الحذاء الواحد 50 ل.س. والمطلوب:

1. لنرمز لعدد القطع المنتجة بـ x، فما هي صيغة تابع التكاليف الكلية ولنرمز لها بـ C(x).
2. رسم الخطي البياني للتابع C(x).

الحل:

1. التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + (عدد القطع * تكلفة القطعة الواحدة)

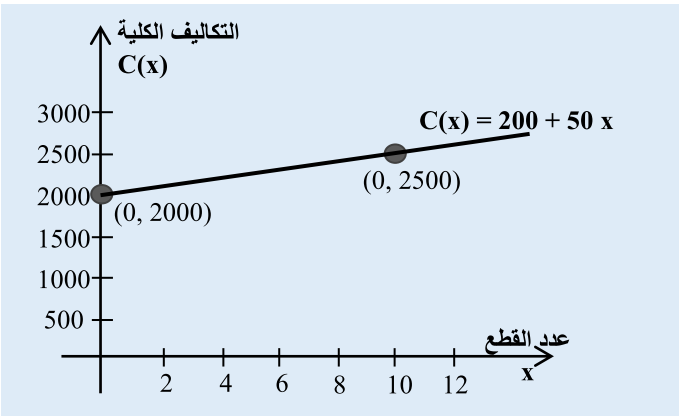
فتصبح صيغة تابع التكاليف الكلية: $C(x) = 2000 + 50\ x$

2. رسم الخط البياني: أبسط طريقة هي تحديد نقطتين من التابع والوصل فيما بينها.

النقطة الأولى: لتكن $x=0$ فتصبح $C(x=0)=2000$ وتكتب بشكل $(0, 2000)$

النقطة الثانية: لتكن $x=10$ فتصبح $C(x=10)=2000 + 50*10=2500$ وتكتب $(10, 2500)$

نلاحظ أن التابع يتزايد بمعدل ثابت، أي 50 ل.س لكل واحدة إضافية من x.



الشكل (2-6) الخط البياني لتابع تكلفة من الدرجة الأولى

تطبيق (2-2). اهتلاك آلة.

اشترى أحد التجار آلة بقيمة 20 ألف ل.س، ويستهلكها بشكل خطي على عشر سنوات.

1. اكتب معادلة اهتلاك الآلة F(x) كتابع لسنوات الاستعمال x.
2. ما هي قيمة الآلة بعد 4 سنوات من الاستعمال.
3. رسم الخط البياني لتابع الاهتلاك F(x).

<u>الحل:</u>

1) معادلة تابع اهتلاك الآلة F(x) كتابع لسنوات الاستعمال x:

تستهلك الآلة على 10 سنوات وبالتالي قيمة الاهتلاك السنوية: $20.000/10 = 2000$ ل.س

ويُصبح الاهتلاك كتابع لعدد السنوات x: $F(x) = 2000x$ أي قسط الاهتلاك السنوي مضروباً بعدد السنوات، وبالتالي تُهتلك الآلة كلياً بعد 10 سنوات.

2) قيمة الآلة بعد 4 سنوات من الاستعمال:

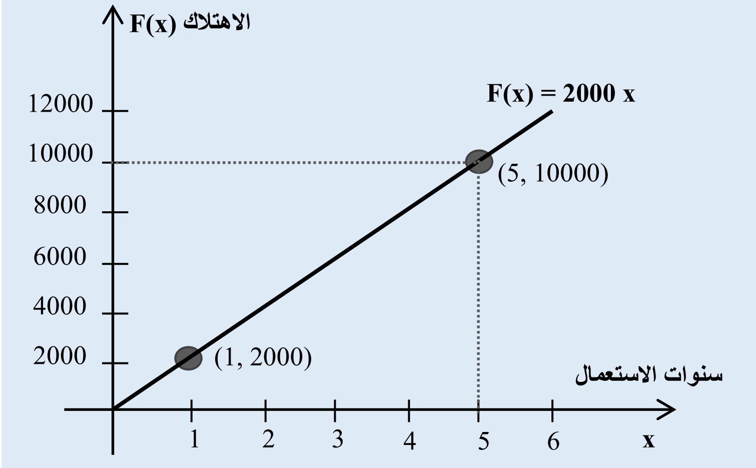
الاهتلاك خلال السنوات الأربعة يساوي: $F(4) = 2000 * 4 = 8000$

ويصبح قيمة الآلة بعد طرح قيمة الاهتلاكات: $20000 – 8000 = 12000$ ل.س.

3) رسم الخط البياني: يكفي تحديد نقطتين من الخط البياني ثم الوصل بينهما.

لنأخذ النقطة الأولى من أجل $x = 1$ فيكون $F(1) = 2000$: النقطة (1, 2000)

لنأخذ النقطة الثانية من أجل $x = 5$ فيكون $F(5) = 10.000$: النقطة (5, 10.000)



الشكل (2-7) الخط البياني لتابع اهتلاك خطي

تطبيق (2−3). تابع تكاليف له صيغتان.

يقدر أحد الناشرين تكلفة طباعة النسخة الواحدة من أحد الكتب بحوالي 50 ل.س إذا كان عدد النسخ المطبوعة لا يتجاوز 1000 نسخة، وتتناقص إلى 40 ل.س إذا تجاوز عدد النسخة المطبوعة 1000 نسخة. والمطلوب:

1. ما هو تابع تكلفة الطباعة $F(x)$ بدلالة عدد النسخ x.
2. رسم الخط البياني للتابع.

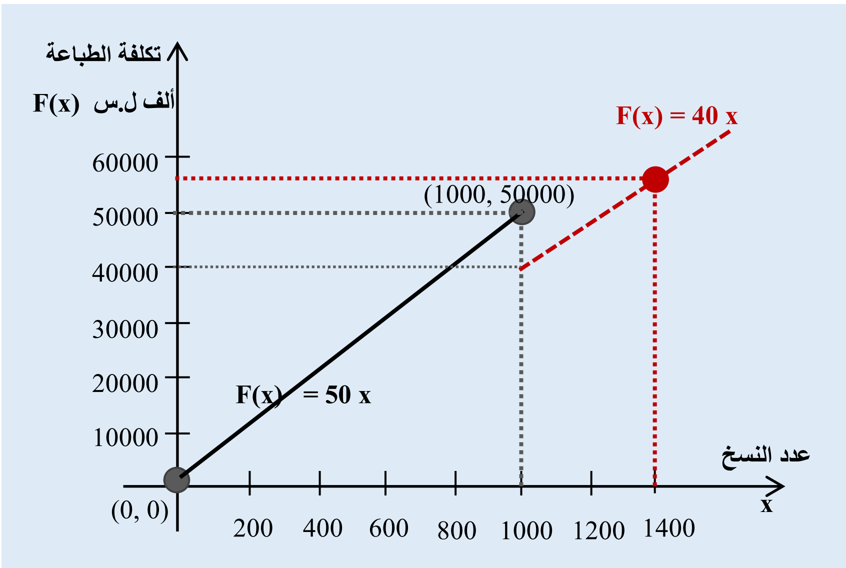
<u>الحل:</u>

1) يأخذ تابع الطباعة $F(x)$ صيغتان حسب قيم x كما يلي:

إذا كان $x \leq 1000$ يأخذ التابع الشكل $F(x) = 50\ x$

إذا كان $x > 1000$ يأخذ التابع الشكل $F(x) = 40\ x$

2) الخط البياني للتابع: نلاحظ أن التابع غير مستمر عن النقطة $x = 1000$ وذلك بسبب تغير الميل من 50 إلى 40.



الشكل (2−8) الخط البياني لتابع خطي له صيغتان مختلفتين

تطبيق (2−4). الربح تابع للكمية.

أجرى أحد مصانع الطاولات بحثاً عن مدى استعداد المستهلك لشراء منتجاته من الطاولات، تبين له أن سعر بيع الطاولة هو تابع لعدد الطاولات الممكن بيعها وله الشكل: $P(x) = 50 - 0.3\ x$

حيث x عدد الطاولات و P(x) سعر البيع من أجل x طاولة.

وقام المصنع بتقدير تكاليف الإنتاج C(x) فكان لها الصيغة الآتية: $C(x) = 2.3\ x^2 + 4x + 60$

والمطلوب:

1) تحديد صيغ: تابع سعر الطلب D(x)، تابع الإيرادات R(x)، تابع الربح F(x)

2) تحديد مجال عدد الطاولات (قيم x) التي يكون فيها المصنع رابحاً.

الحل:

1) تابع الطلب هو السعر المستعد المستهلك دفعه، وبالتالي له نفس صيغة سعر بيع الطاولة أي:

$$D(x) = P(x) = 50 – 0.3\ x$$

تابع الإيرادات هو الكمية المباعة مضروباً بسعر البيع $R(x) = x\ D(x)$ أي:

$$R(x) = x\ (50 – 0.3x) = 50\ x – 0.3\ x^2$$

تابع الربح هو الفرق بين الإيرادات والتكاليف $F(x) = R(x) – C(x)$ أي:

$$F(x) = (50x – 0.3x^2) – (2.3\ x^2 + 4x + 60) = -2.6x^2 + 46x - 60$$

2) يكون المصنع رابحاً عندما يكون تابع الربح أكبر من الصفر $F(x) > 0$ أي:

$$F(x) = -2.6x^2 + 46x – 60 >0$$

ندرس إشارة كثير الحدود F(x) ونقبل القيم التي تجعله موجباً:

نضع $F(x) = 0$ ونحل هذه المعادلة:

$\Delta = b2 – 4\ a\ c = 1492$ ويكون $3\sqrt{\Delta}= 38.6$

جذور المعادلة $F(x) = 0$ هي: $= 1.42 x_1 = \frac{-46+38.63}{2x(-2.6)}$ و $= 16.27 x_2 = \frac{-46-38.63}{2x(-2.6)}$

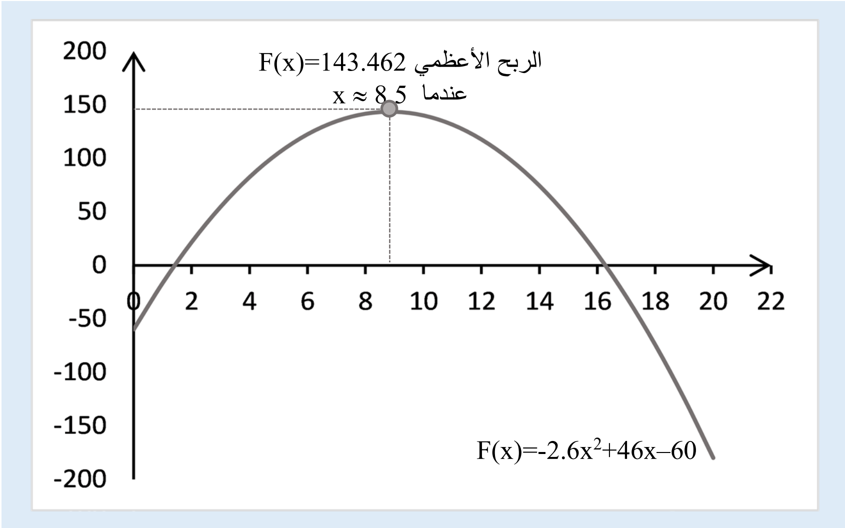
x	0	1.42		16.27	$+\infty$
إشارة F(x)	**سالب، خاسر**	0	**موجب، رابح**	0	**سالب، خاسر**

من أجل قيم $]-\infty, 1.42[\cup]16.27, +\infty[$ فإن F(x) يكون سالب تماماً،

ومن أجل قيم $x\in]1.42, 16.27[$ فإن F(X) يكون موجب تماماً، أي أن المصنع يُحقق أرباح على هذا المجال فقط، كما يوضح الخط البياني أدناه. وبأن الربح الأعظمي يقع ضمن هذا المجال.

ملاحظة: من المفيد الإشـارة إلى أن x يجب أن يكون عدداً طبيعياً كونه يمثل عدد طاولات، ونلاحظ

أنه ليس كذلك عند بعض القيم، كوننا لم نفرض على x أية قيود. في هذه الحالة يمكن تقريب الأعداد العشـرية إلى أعداد صــحيحة مع الانتباه إلى ضــرورة تحقق الربح وشــكل التابع. مثلاً 1.42 تقرب إلى 2 طاولة.



الشكل (2–9) الخط البياني لتابع ربح من الدرجة الثانية تابع للكمية

تطبيق (2–5): تابع الربح كتابع لسعر البيع.

يُنتج أحد المعامل دفاتر مدرسية بنوعية جيدة، حيث تبلغ تكلفة الدفتر الواحد 2 $/الدفتر.

يمكن بيع الدفتر الواحد بسعر 5 $/الدفتر، ويمكن بيع بهذا السعر 4000 دفتر سنوياً.

تُخطط إدارة المعمل لزيادة سعر البيع، وتقدر أنه من أجل كل زيادة بمقدار 1 دولار، سيؤدي إلى خسارة 400 دفتر من المبيعات. والمطلوب:

1) عبر عن صيغة تابع الربح F بدلالة سعر البيع p.
2) ارسم الخط البياني لتابع الربح.
3) ما مجال عدد الدفاتر التي يكون فيها المعمل رابح؟
4) استنتج من الخط البياني القيمة التقريبية لعدد الدفاتر المتوقع بيعها حيث الربح أكبر ما يمكن.

<u>الحل:</u>

1) صيغة تابع الربح F بدلالة سعر البيع p:

الربح = عدد الدفاتر المباعة مضروباً بربح الدفتر الواحد

نعلم أنه يمكن بيع 4000 دفتر بسعر بيع يساوي 5 $/الدفتر

تنقص هذه الكمية المباعة بمقدار 400 دفتر مع كل زيادة 1 $ على سعر الدفتر الواحد

إذا كان سعر بيع الدفتر الواحد هو p فكل زيادة عن 5 أي (p-5) تؤدي إلى نقص الكمية 400 وبالتالي يُصبح تابع كمية المبيعات بدلالة السعر أي Q(p):

$$Q(p) = 4000 - 400\ (p-5)$$

$$Q(p) = 4000 - 400\ p + 2000 = 6000 - 400\ p$$

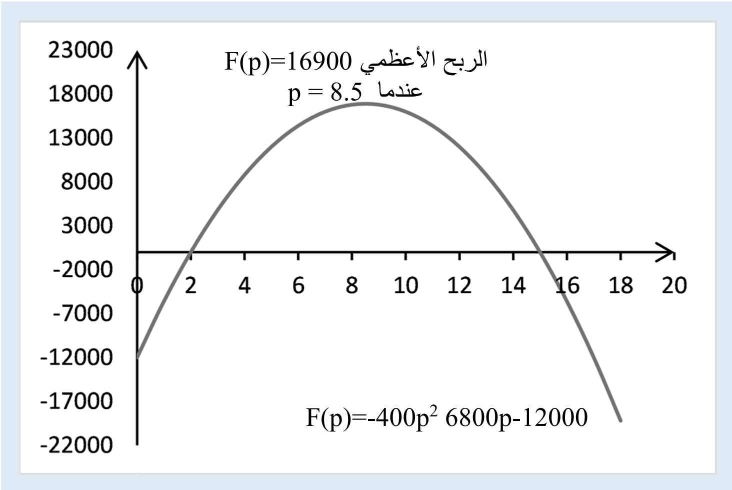
باعتبار أن الربح هو الفرق بين المبيعات وتكاليف الكمية المباعة أي يساوي (p – 2) للدفتر الواحد

$$F(p) = Q(p)\ x\ (p - 2)$$

$$F(p) = (6000 - 400\ p).(p - 2)$$

$$\mathbf{F(p) = - 400\ p^2 + 6800\ p - 12000}$$

2) الخط البياني لتابع الربح F(p) بدلالة سعر البيع p:



الشكل (2–10) الخط البياني لتابع ربح من الدرجة الثانية تابع للسعر

3) مجال عدد الدفاتر التي يكون فيها المعمل رابح:

ندرس إشارة كثير الحدود F(p) ونقبل القيم التي تجعله موجباً:

نحل هذه المعادلة نضع F(p) = 0، فيكون Δ = 27.040.000 ويكون $\sqrt{\Delta}= 5200$

جذور المعادلة F(p) = 0 هي: $p_1 = \frac{-6800+5200}{2x(-400)} = 2$ و $p_2 = \frac{-6800-5200}{2x(-400)} = 15$

p	0	2		15	$+\infty$
إشارة F(p)	**سالب، خاسر**	0	**موجب، رابح**	0	**سالب، خاسر**

من أجل سعر بين 2$ و 15$ أي على المجال]2, 15[فإن الربح F(p) يكون موجب تماماً، كما يوضح الخط البياني أعلاه.

4) القيمة التقريبية لعدد الدفاتر المتوقع بيعها حيث الربح أكبر ما يمكن:

يوضح الخط البياني أن أعلى ربح ممكن هو عندما يكون السعر حوالي 8.5 دولار للدفتر الواحد، وتكون قيمة الربح $F(p=8.5) = 16.900\ \$$.

كما تكون الكمية المتوقع بيعها تساوي 2600 دفتر، وتحسب من تابع الكمية بدلالة السعر:

$$Q(p=8.5) = 6000 - 400 \times (8.5)^2 = 2600$$

5-2 توابع العرض والطلب

غالبية المنتجات تتبع ما ندعوه قانون العرض والطلب، بمعنى أنه كلما ارتفع سعر البيع للمنتج كلما كان هناك نزعة للمُنتِج (البائع) لأن يعرض كميات أكبر للبيع، في حين يكون للمستهلك (الشاري) نزعة لتقليل الكميات المشتراة، تبدو هذه النزعة أو السلوك كظاهرة اقتصادية وتُدرس إحصائياً ولا تهتم كثيراً بالسلوك الفردي لمستهلك أو لمنتج بعينه. فعندما نقول "سلوك المُنتِج" يُقصد به السلوك الإحصائي لمجتمع البائعين الذين يعرضون منتجهم في السوق وليس سلوك منتج بعينه، وعندما نقول "سلوك المستهلك" نقصد السلوك الإحصائي لمجتمع المشترين الذين يشترون هذا المنتج وليس سلوك مستهلك بعينه.

نلاحظ أيضاً أن سعر البيع غالباً ما يكون تابع للكميات المعروضة من البائع وللكميات المطلوبة من المستهلك، فما هو السعر المناسب لكل من البائع والمشتري على السواء؟ بمعنى ما هو السعر الذي يكون فيه البائع على استعداد لبيع منتجه عنده؟ وما هو السعر المستعد المستهلك لدفعه؟ وعند أية كمية يتحقق تساوي السعرين: سعر البائع وسعر المشتري؟ هذا ما سنحاول دراسته في هذه الفقرة.

ليكن $P_s(q)$ تابع سعر العرض Supply Function

ليكن $P_D(q)$ تابع سعر الطلب Demand Function

تبدو العملية الرياضية وكأنها حل مشترك لمعادلتين بنفس المتغيرات: الكمية q والسعر P، حيث تابع السعر P له صيغتان تمثلان صيغة العرض وصيغة الطلب، وما ندعوه بنقطة التوازن Equilibrium في السوق ليس إلا الحل المشترك لهاتين المعادلتين. إذاً، يحصل التوازن في سوق منتج ما عندما نصل إلى تساوي سعري العرض والطلب: $P_s(q) = P_D(q)$

بحل هذه المعادلة، نجد كمية التوازن ونرمز لها q^* ونجد سعر التوازن P^* بتبديل q^* في إحدى المعادلتين السابقتين $P_S(q)$ أو $P_D(q)$.

تطبيق (2−6) تابعي العرض والطلب لها الشكل الخطي.

ليكن لدينا تابعي العرض والطلب لأحد المنتجات كما يلي، حيث q الكمية المعروضة أو المطلوبة:

تابع سعر العرض له الشكل $S(q) = 10q$

تابع سعر الطلب له الشكل $D(q) = -10q + 240$

المطلوب:

1) رسم الخطين البيانيين لتابعي العرض والطلب بدلالة الكمية q، ولماذا يجب أن تكون $q \geq 0$؟

2) حساب إحداثيات نقطة التقاطع بين الخطين أي عندما $S(q) = D(q)$ والكمية q^* وحساب كل من سعري العرض والطلب عند هذه النقطة، تفسير المعنى الاقتصادي لهذه النقطة.

3) تفسير المعنى الاقتصادي عندما $q=0$ بالنسبة للعارض وبالنسبة للمستهلك.

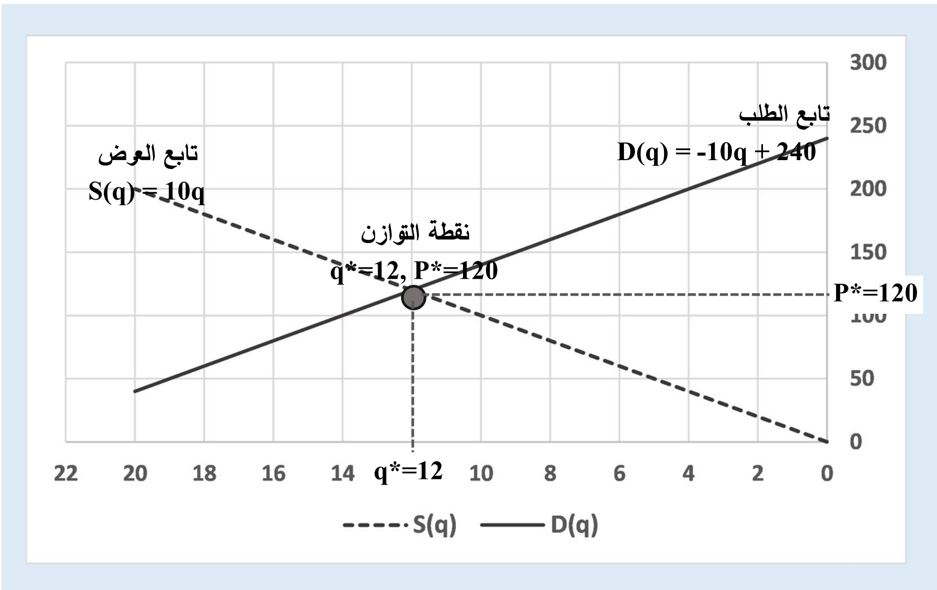
4) تفسير المعنى الاقتصادي عندما $S(q)=0$ و $D(q)=0$.

<u>الحل:</u>

1) الخطين البيانيين لتابعي العرض والطلب بدلالة الكمية q:

قيم المتغير q لا يمكن أن تكون سالبة كونها تعبر عن كمية الطلب أو استهلاك المنتج.

نلاحظ أن صـــيغتي التابعين هي من الدرجة الأولى، وبالتالي تمثل كل منهما مســـتقيماً في جملة إحداثيات ببعدين، ويتم رسم الخط بمعرفة نقطتين من الخط والوصل بينهما:



الشكل (2−11) الخط البياني لتابعين عرض وطلب خطيين

2) إحداثيات نقطة التقاطع بين الخطين أي عندما $S(q) = D(q)$

بمســاواة المعادلتين، نجد $10q = 240 - 10q$، ووبحل هذه المعادلة نجد $q^*=240/20=12$ وهي الكمية التي يتســاوى عندها العرض مع الطلب، لذلك ندعوها نقطة توازن الســوق، ويكون ســعري العرض والطلب متساويين عندها، ونجد السعر المشترك عند هذه النقطة وفق صيغتي التابعين:

سعر العرض: $S(q^*) = 10*12 = 120$

سعر الطلب: $D(q^*) = 240 - 10*12 = 120$

3) تفسير المعنى الاقتصادي عندما $q=0$:

تعبر $q=0$ عن تقاطع كل من تابعي سعر العرض والطلب مع المحور العمودي:

يكون سعر الطلب $D(q=0)=240$، أي أقصى سعر يمكن أن يدفعه المستهلك هو 240، بطبيعة الحال هذه حالة وهمية، إذ لا يمكن إيجاد مســتهلك عقلاني يدفع أي مبلغ مقابل لاشـــيء، لكن يمكن تخيل الظاهرة عندما تقترب الكمية من الصفر فإن السعر يقترب من القيمة 240.

ويكون سـعر العرض $S(q=0)=0$ أي أن العارض/المُنتج مسـتعد لعرض بيع كمية صـفر بسـعر صــفر، وهي أيضــاً حالة وهمية، لكن يمكن تخيل الظاهرة عندما تقترب الكمية من الصــفر فإن سعر العرض يقترب من الصفر.

4) تفسير المعنى الاقتصادي عندما $S(q)=0$ و $D(q)$:

تعبر $S(q)=0$ أو $D(q)=0$ عن تقاطع تابعي سعر العرض والطلب مع المحور الأفقي:

سـعر الطلب $D(q)=0$ تكون قيمة $q=24$، أي أن أقصـى كمية يمكن شرائها (حتى لو مجاناً) لن تتجاوز 24 قطعة وندعوها أحياناً طاقة الســـوق Market Saturation، بمعنى لا يمكن للطلب في السوق أن يتجاوز 24 قطعة أو لا يوجد مستهلكين تستهلك أكثر من 24 قطعة.

سـعر العرض $S(q)=0$ تكون قيمة $q=0$، أي أن أقصـــى كمية يمكن للمُنتج أن يعرضــها بسـعر صفر هي صفر، بمعنى لا يوجد عارض مستعد أن يبيع بسعر مجاني.

تطبيق (2-7): تابعي طلب خطيين لنفس المنتج.

أطلق أحد المعامل نوعاً جديداً من البرادات، وتُقدر إدارة المعمل أن المبيعاتها خلال العام القادم ستأخذ نموذجين وليست متأكدة منهما، كما يلي:

النموذج الأول: $S1 = 0.6\ n + 5$ النموذج الثاني: $S2 = 0.9\ n + 2$

حيث Si هو المبيعات الشهرية بآلاف القطع، و n رقم الشهر خلال السنة القادمة. والمطلوب:

أ) رسم الخط البياني لكل من النموذجين S1, S2.

ب) تحديد قيمة نقاط التقاطع مع المحور العمودي، وماذا تعني اقتصادياً؟

ت) تحديد ميل كل من المستقيمين، وماذا تعني اقتصادياً؟

ث) تحديد متى تتساوى قيمة المبيعات للنموذجين، وقيمة المبيعات في هذا الشهر.

الحل:

أ) الخط البياني لكل من النموذجين S1, S2 في الشكل (2−12).

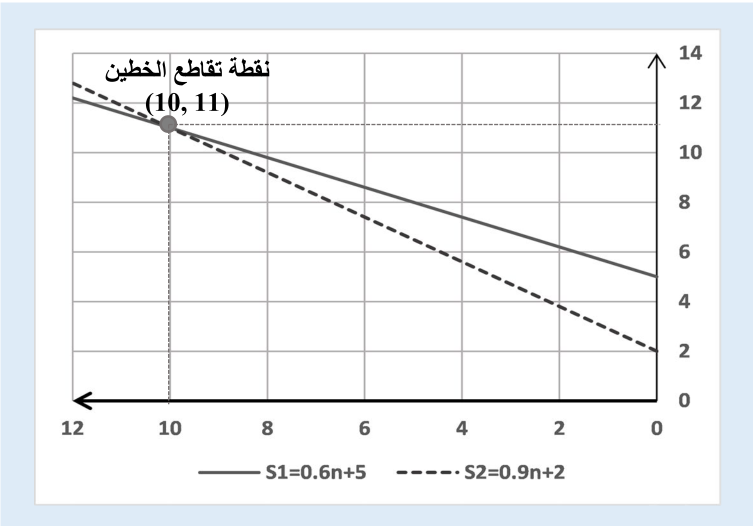
ب) نقاط التقاطع مع المحور العمودي:

نقطة التقاطع مع المحور العمودي أي عندما n=0:

في النموذج الأول تُصبح المبيعات تساوي 500 براد: S1=0.6*0 + 5.

في النموذج الثاني تُصبح المبيعات تساوي 200 براد: S1=0.9*0 + 2.

تعني اقتصادياً، أنه يمكن للمعمل بيع مباشرة (لحظة إقلاع الإنتاج) 500 براد وفق النموذج الأول، أو 200 براد وفق النموذج الثاني. يمكن تخيل الحالة أنه يمكن إجراء عقود بيع باعتبار أنه لا يوجد إنتاج فعلي في اللحظة صفر (ولا يوجد مخزون سابق)، على أن تتم عملية التسليم لاحقاً.



الشكل (2−12) الخطوط البيانية لنموذجي مبيعات لنفس المنتج

ت) ميل المستقيمين:

ميل مستقيم النموذج الأول S1 هو قيمة أمثال n ويساوي 0.6

ميل مستقيم النموذج الثاني S2 هو قيمة أمثال n ويساوي 0.9

يعني اقتصـــادياً، في النموذج الأول: كل شـــهر تزيد قيمة المبيعات بمقدار 600 (0.6 ألف) قطعة عن الشهر السابق، في حين تزداد بمقدار 900 قطعة كل شهر في النموذج الثاني.

ت) نقطة تقاطع المستقيمين حيث تتساوي المبيعات:

تمثل نقطة تقاطع المستقيمين، الشهر الذي تتساوى فيه المبيعات وفق النموذجين:

$$S1 = S2 \quad \text{أو} \quad 0.6n + 5 = 0.9n + 2$$

بحل هذه المعادلة، نجد: $n=10$ و $S1=S2=11$، أي تتساوى المبيعات وفق النموذجين في الشهر العاشر ويكون عدد البرادات المتوقع بيعها حينها يساوي 11 ألف قطعة.

تطبيق (2–8): تابع الطلب له شكل غير خطي.

يُقدر أحد مستوردي الشاي أن الاستهلاك (الطلب) سيكون خلال الفترة القادمة له الشكل الآتي:

$$Q(p) = \frac{5000}{p^2}$$

حيث p هو سعر كغ بالدولار، و Q(p) الكمية الممكن استهلاكها كتابع للسعر.

كما يتوقع المستورد أن يتطور سعر الكغ أسبوعياً وفق الصيغة الآتية، حيث t هو الزمن مقدراً بالأسابيع:

$$p(t) = 0.1\, t^2 + 0.5\, t + 10$$

والمطلوب:

1) عبر عن تابع الطلب (الاستهلاك المتوقع) بدلالة الزمن.

2) ما سعر كغ الشاي في اللحظة الحالية أي $t=0$، وما الطلب المتوقع على الشاي حالياً؟

3) ما السعر المتوقع للكغ الواحد في الأسبوع العاشر أي $t=10$، وما الطلب المتوقع حينها؟

4) ما السعر المتوقع بعد فترة طويلة جداً (عندما تنتهي t إلى اللانهاية)، وما الطلب المتوقع حينها؟

5) استخدام MS Excel لرسم الخطوط البيانية لتطور السعر والطلب بدلالة الزمن.

الحل:

1) تابع الطلب (الاستهلاك المتوقع) بدلالة الزمن

تابع الطلب حسب السعر هو $Q(p) = \frac{5000}{p^2}$

تابع السعر حسب الزمن هو $p(t) = 0.1\, t^2 + 0.5\, t + 10$

يكفي استبدال صيغة p(t) في صيغة تابع الطلب للحصول على تابع الطلب بدلالة الزمن:

$$Q(t) = \frac{5000}{p(t)^2} = \frac{5000}{(0.1t^2 + 0.5t + 10)^2}$$

وكما نلاحظ أن المقام من الدرجة الرابعة.

2) السعر والطلب في اللحظة الحالية أي عندما t=0:

لحساب السعر، نستبدل t=0 في تابع السعر فيكون السعر حالياً يساوي 10 $/كغ:

$$p(t=0) = 0.1 \text{ x } 0^2 + 0.5 \text{ x } 0 + 10 = 10$$

لحساب الطلب، نستبدل t=0 في تابع الطلب بدلالة الزمن، نجد أنه يساوي 50 كغ:

$$Q(t = 0) = \frac{5000}{(0.1 \; x \; 0^2 + 0.5 \; x \; 0 + 10)^2} = \frac{5000}{100} = 50$$

3) السعر والطلب في الأسبوع العاشر أي عندما t = 10:

لحساب السعر، نستبدل t = 10 في تابع السعر فيكون السعر حالياً يساوي 25 $/كغ:

$$p(t=10) = 0.1 \text{ x } 10^2 + 0.5 \text{ x } 10 + 10 = 25$$

لحساب الطلب، نستبدل t = 10 في تابع الطلب بدلالة الزمن، نجد أنه يساوي 8 كغ:

$$Q(t = 10) = \frac{5000}{(0.1 \; x \; 10^2 + 0.5 \; x \; 10 + 10)^2} = \frac{5000}{(25)^2} = 8$$

4) السعر والطلب المتوقع بعد فترة طويلة جداً (عندما تنتهي t إلى اللانهاية):

لحساب السعر، نحسب نهاية تابع السعر p(t) عندما t → ∞، فنجد أنه ينتهي إلى اللانهاية:

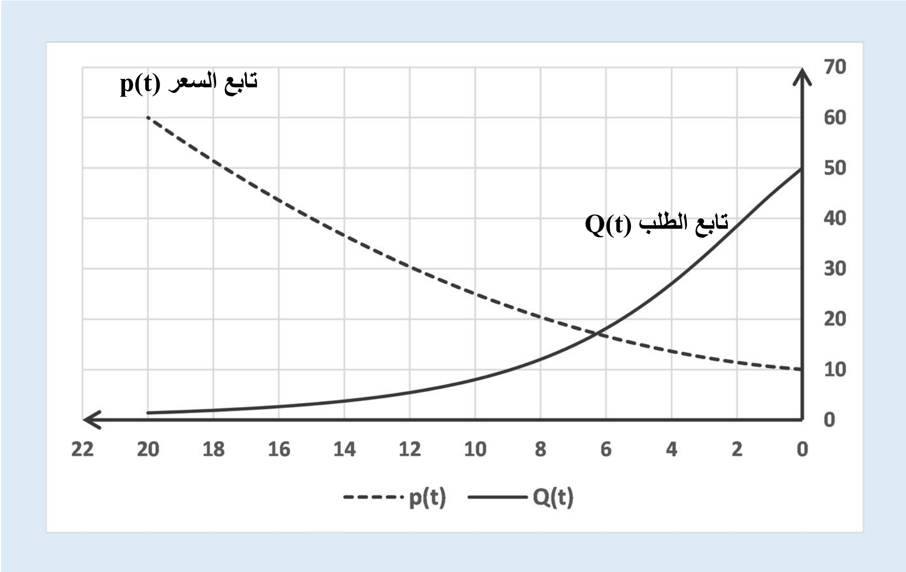
$$p(t \rightarrow 10) = 0.1 \text{ x } \infty^2 + 0.5 \text{ x } \infty + 10 \rightarrow \infty$$

ولحساب الطلب، نستبدل السعر t = ∞ في تابع الطلب بدلالة الزمن، نجد أنه يساوي الصفر:

$$Q(t \rightarrow \infty) = \frac{5000}{(\infty)^2} \rightarrow 0$$

أي عندما يرتفع السعر بشكل كبير جداً، يتناقص الاستهلاك (الطلب) إلى الصفر.

5) الخطوط البيانية لتطور السعر والطلب بدلالة الزمن:



الشكل (2–13) الخطوط البيانية لتطور السعر والطلب لنفس المنتج بدلالة الزمن

تطبيق (2–9): البحث عن سعر توازن سلعة في السوق.

يعرض أحد المنتجين كمية x من مادة ما عندما يكون السعر $p=S(x)$، وبأن نفس الكمية ستطلب من المستهلك عندما يكون السعر $P=D(x)$، حيث يُعطى تابعي الطلب والعرض كما يلي:

تابع الطلب: $D(x) = 174 - 6x$ تابع العرض: $S(x) = x^2 + 14$

والمطلوب:

1. معرفة الكمية والسعر عندما يتوازن السوق؟
2. رسم الخطوط البيانية للعرض والطلب على نفس جملة الإحداثيات، والتعليق عليه.

<u>الحل:</u>

1) يتوازن سوق المادة عندما يكون العرض يساوي الطلب أي $S(x) = D(x)$

أي: $x^2 + 14 = 174 - 6x$

نكتب هذه المعادلة بشكل نظامي فتصبح: $x^2 + 6x - 160 = 0$

أو بالشكل: $(x-10)(x+6) = 0$ وبالتالي فجذور المعادلة تكون: $x = -16$ أ و $x = 10$

وحيث أن x هي كمية من واحدات الإنتاج فهي قيمة موجبة، أي أن الحل المقبول هو $x = 10$ ونرفض الحل $x = -16$ لأنه سالب.

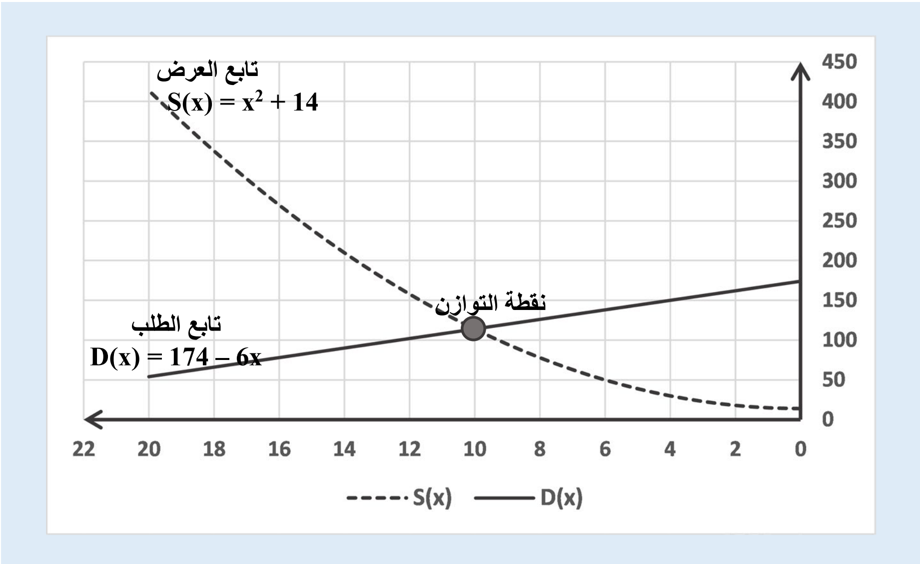
إذاً $x^* = 10$ هي كمية الإنتاج التي تساوي العرض بالطلب وهي كمية التوازن،

وبالتالي يكون السعر عند هذه الكمية (سعر التوازن P^*) بالتبديل في أي من معادلتي العرض أو الطلب: $P^* = D(10) = 174 - 6\,(10) = 114$.

2) رسم الخطوط البيانية:

نلاحظ من الخطوط البيانية على الشكل (2−14):

1. يحصل التوازن بين العرض والطلب عند سعر يساوي 10ل.س، والكمية تساوي 114 واحدة.
2. لن يعرض المنتج أية كمية بسعر أقل من 14 ل.س أي نقطة تقاطع تابع العرض مع محور العينات x=0.
3. الطلب يصبح صفر أي لا أحد سيشتري السلعة عندما يتجاوز السعر 29 ل.س.
4. من أجل كمية $0 \le x \le 10$ فإن هناك نقص في عرض السلعة، كما يبين الشكل أن كمية العرض أقل من كمية الطلب.
5. من أجل $10 \le x \le 29$ فإن هناك فائض في عرض السلعة، كما يبين الشكل أن كمية العرض أكبر من كمية الطلب.



الشكل (2−14) سعر التوازن لتابع طلب خطي وتابع عرض تربيعي

تطبيق (2−10) توازن في سوق منتجين اثنين.

لدينا توابع الطلب والعرض الآتية لمنتجين A, B مرتبطين أحدهما بالآخر:

تابع الطلب للمنتج A: $D_A = -2P_A + P_B + 10$

تابع الطلب للمنتج B: $D_B = 2P_A - 2P_B + 5$

تابع العرض للمنتج A: $S_A = 2P_A - 3$

تابع العرض للمنتج A: $S_B = 3P_B - 2$

حيث P_A هو سعر المنتج A و P_B سعر المنتج B.

والمطلوب: تحديد أسعار وكميات التوازن للمنتجين.

الحل:

عند التوازن، يكون لدينا كمية الطلب من كل منتج يساوي كمية العرض من نفس المنتج.

أي عند التوازن يكون $D_A = S_A$ أو $10 - 2P_A + P_B = -3 + 2P_A$ [1]

كذلك للمنتج الثاني $D_B = S_B$ أو $5 + 2P_A - 2P_B = -2 + 3P_B$ [2]

كما نلاحظ، نحصل على معادلتين بمجهولين فقط هما P_A, P_B، نحل هاتين المعادلتين.

نعيد ترتيب المعادلتين:

المعادلة الأولى تكتب بالشكل: $-4P_A + P_B = -13$ [1']

المعادلة الثانية تكتب بالشكل: $2P_A - 5P_B = -7$ [2']

ضرب [2'] بـ 2 وجمعها للأولى [1'] نجد: $-9P_B = -27$ [3]

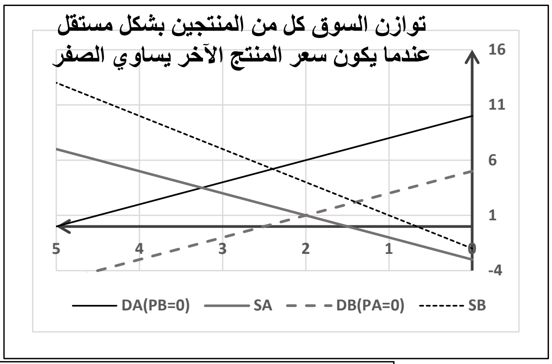
ومنها نجد سعر المنتج الثاني يساوي 3: $P_B = (-27/-9) = 3$

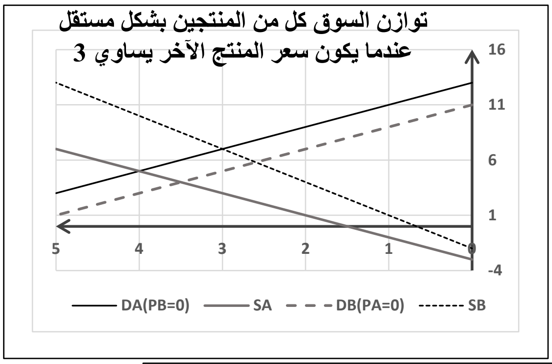
نستبدل P_B في المعادلة [2'] فنجد سعر المنتج الأول يساوي 4: $P_A = \frac{-7+5*3}{2} = 4$

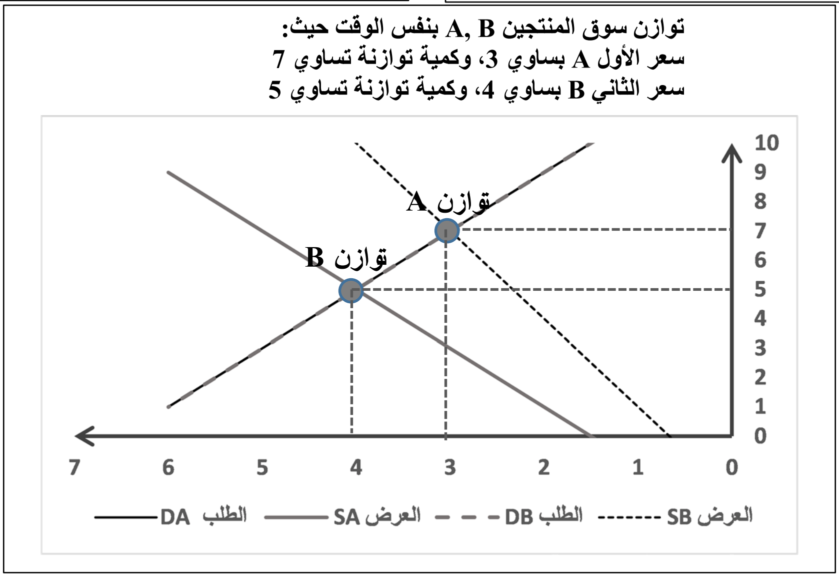
نستبدل P_A, P_B في معادلتي الطلب فنحصل على كمية الطلب لكل من المنتجين:

كمية الطلب للمنتج A عند التوازن يساوي 5: $D_A = -2*4 + 3*1 + 10 = 5$

كمية الطلب للمنتج B عند التوازن يساوي 7: $D_B = 2*4 - 2*3 + 5 = 7$







تطبيق (2-11): تابع استهلاك من الدرجة الثانية.

لدينا تابع حجم المبيعات حسب السعر لمنتج معين من الشكل: $x = - 200\ p + 12000$

حيث x عدد القطع الممكن بيعها، و p سعر بيع القطعة الواحدة.

وليكن F هو المبلغ الإجمالي المصروف من قبل المستهلك خلال الشهر الواحد.

والمطلوب:

1) عبّر عن مصروف المستهلك F بدلالة سعر البيع.

2) ناقش المعنى الاقتصادي عندما يكون المصروف $F(p) = 0$.

3) بين على الخط البياني للتابع $F(p)$ أكبر مصروف ممكن للمستهلك صرفه.

الحل:

1) مصروف المستهلك F بدلالة سعر البيع هو عدد القطع المستهلكة مضروباً بالسعر:

$$F(p) = x \cdot p = (-200p + 12000) \cdot p$$
$$F(p) = -200p^2 + 12000p$$

2) المعنى الاقتصادي عندما يكون المصروف معدوماً أي $F(p) = 0$

$$F(p) = 0$$
$$-200p2 + 12000p = 0$$
$$p \cdot (-200p + 12000) = 0$$

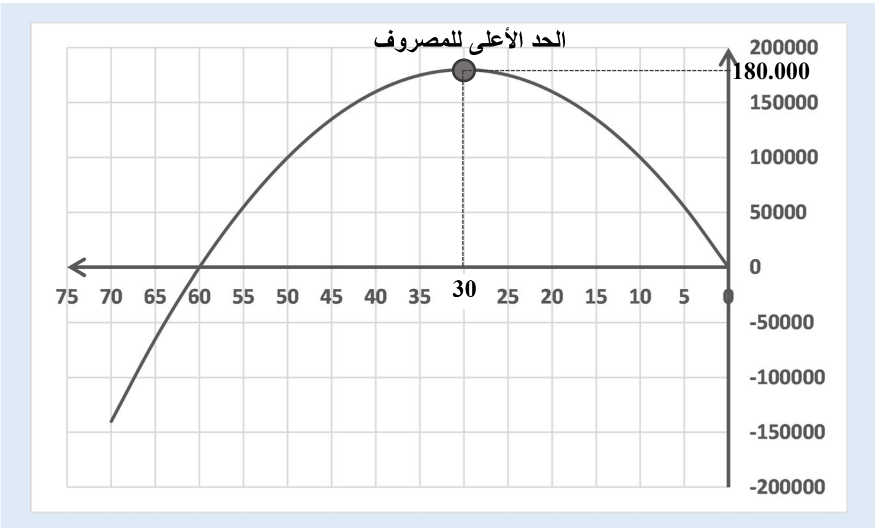
إما $p = 0$ أو $-200p + 12000 = 0$ أي $p = 60$.

عندما يكون السعر في أدنى مستوياته أي يساوي الصفر، نلاحظ أن المستهلك مستعد لاستهلاك 12000 قطعة مجانية (سقف الاستهلاك)، حيث المصروف يساوي الصفر.

عندما يكون السعر يساوي 60 ل.س/القطعة، نلاحظ أن مصروف المستهلك أصبح صفراً، أي أنه غير مستعد لشراء أية قطعة بسعر أكبر من 60 ل.س للقطعة الواحدة.

3) الخط البياني للتابع $F(p)$ حيث المحور الأفقي هو سعر البيع p:

نلاحظ على الخط البياني لتابع المصروف بدلالة السعر، أن أعلى مصروف ممكن يساوي 180000 ل.س عندما يكون سعر البيع يساوي 30 ل.س/القطعة.



الشكل (2–15) الخط البياني لتابع استهلاك تربيعي

تطبيق (2–12). البحث عن معادلة مستقيم.

ليكن لدينا جدول المبيعات الآتي بدلالة عدد مندوبي المبيعات المستخدمين:

عدد المندوبين x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات y	104	107	112	117	120	123	130	132	136	142	143	147

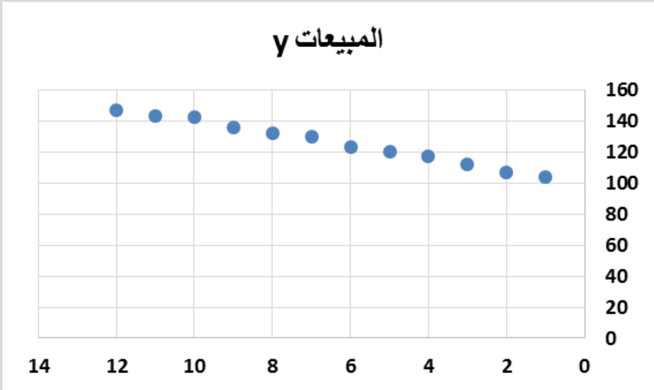
المطلوب:

1) رسم الخط البياني لتطور المبيعات بدلالة عدد المندوبين.

2) محاولة إيجاد معادلة الخط البياني الناتج (يبدو كمستقيم).

الحل:

1) الخط البياني حيث المحور العمودي Y يمثل المبيعات، والمحور الأفقي X يمثل عدد المندوبين.



الشكل (2–16) الخط البياني لسلسلة مبيعات نقطية

2) محاولة البحث عن المعادلة

نلاحظ من شكل الخط البياني الناتج، يبدو وكأنه مستقيم، لذلك سنفترض أن يمثل مستقيم.

معادلة المستقيم لها صيغة من الدرجة الأولى $Y = a\,x + b$، والمطلوب إذاً تحديد قيم الثابتين a, b

يمكن إيجاد قيمتي الثابتين عبر تشكيل معادلتين من الدرجة الأولى وحل مشترك لهاتين المعادلتين.

نفترض أن جميع النقاط تقع على الخط البياني، وبالتالي تحقق صيغة المعادلة (من الدرجة الأولى) التي نبحث عنها، يكفي إذاً أخذ أي نقطتين وتبديلهما في الصيغة وإيجاد الحل المشترك:

لنأخذ النقطة الأولى $(x=1, y=104)$ فيكون لدينا المعادلة الأولى: $104 = a + b$

والنقطة الأخيرة مثلاً $(x=12, y=147)$ فيكون لدينا المعادلة الثانية: $147 = 12\,a + b$

وبالتالي نحصل على معادلتين بمجهولين من الدرجة الأولى، نقوم بإيجاد الحل المشترك:

$a = 3.91$ و $b = 100.09$

طبعاً، إذا أخذنا نقطتين أخريتين، قد نحصل على قيم مختلفة للثابتين a, b، لذلك يمكن تجريب عدد من النقاط ومن ثم أخذ وسطي قيم a الناتجة ووسطي قيم b الناتجة للنقاط المأخوذة بالاعتبار.

قمنا بتجريب عدة نقاط، وكان وسـطي قيم a يسـاوي 4 تقريباً، ووسـطي قيم b يسـاوي 100 تقريباً، فتكون الصيغة المقترحة للمعادلة لها الشكل: $\mathbf{y = 100 + 4\,x}$.

تطبيق (2−13): الكمية المثلى للإنتاج.

يُقدر أحد المنتجين أنه إذا أنتج كميات كبيرة x (بمئات القطع)، فإن السـعر P يُصـبح تابع للكمية أو الطلب ويُعطى بالشـــكل $P = 60 - x$. ويرغب المنتج طبعاً بتعظيم إيراداته، فما هي الكمية المثلى التي تجعل إيراداته أكبر ما يمكن؟

الحل:

نتبع الخطوات التقليدية لدراسة تابع الإيرادات والبحث عن القيمة أو النهاية العظمى لهذا التابع.

الإيرادات $R(x)$ = السعر p * الكمية x

السعر هو تابع للكمية أي متغير وليس ثابتاً: $P = 60 - x$

إذاً، الإيرادات $R(x) = x\,(60 - x) = -x^2 + 60\,x$ وهو تابع من الدرجة الثانية

التابع المطلوب إيجاد نهايته العظمى إذاً هو: $R(x) = -x^2 + 60\,x$

(1) مجموعة التعريف: حيث أن x تمثل عدد القطع المنتجة فلا يمكن إلا أن تكون موجبة، وبالتالي التابع معرف على جميع القيم الموجبة $[0, +\infty[$.

(2) النهايات الحدية عند أطراف مجال التعريف:

عند الحد الأصغر أي الصفر $x=0$ يأخذ القيمة $R(x) = -(0)^2 + 60\,(0) = 0$

عندما تنتهي x إلى فإن الإيرادات تنتهي إلى $-\infty$

(3) المشتق الأول للتابع: $R'(x) = -2\,x + 60$

لإيجاد النهاية، نعدم المشتق الأول: $R'(x) = 0$

أي $-2\,x + 60 = 0$ وبالتالي $x = 60/2 = 30$

من أجل $x=30$ نجد الإيرادات تساوي $R\,(x) = -(30)^2 + 60\,(30) = 900$

إذاً تبدو النقطة (30, 900) هي نهاية للتابع، علينا التأكد أنها نهاية عظمى.

(4) نضع جدول التحولات:

الكمية x	0	30	$+\infty$
المشتق $R'(x)$	موجب + + +	0	سالب − − −
التابع $R(x)$	0 متزايد	900	متناقص $-\infty$

طالما أن التابع يتزايد من القيمة 0 حتى نقطة النهاية $x=30$ ثم يتناقص اعتباراً من هذه النقطة، فإن النهاية عظمى. وللتأكد يمكن حساب المشتق الثاني، ورسم الخط البياني للتابع.

المشتق الثاني لتابع الإيرادات: $R''(x) = -2$ وهو سالب دوماً أي التقعر نحو العينات السالبة أي أن النهاية عظمى.

(5) بعض النقاط المساعدة

نقطة التقاطع مع محور العينات أي من أجل $x=0$:

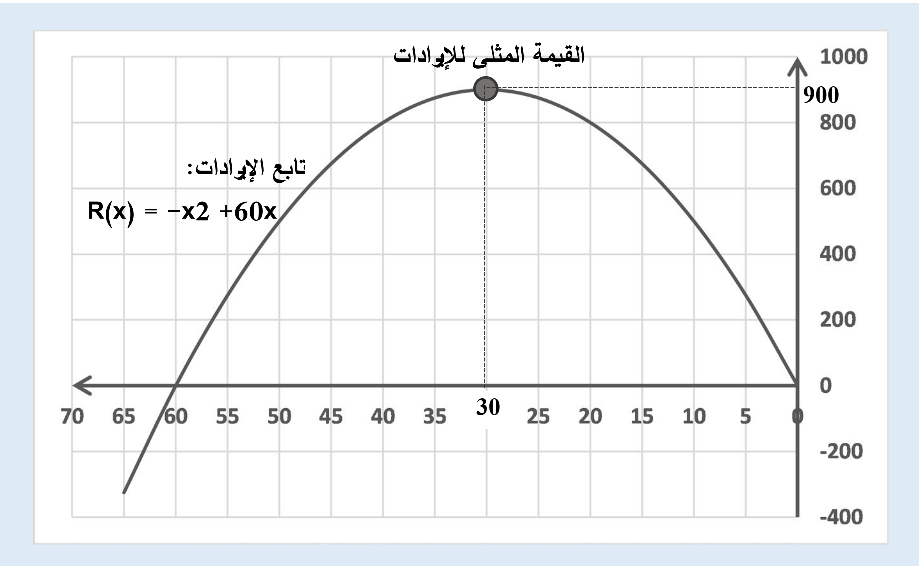
نجد قيمة $R(x)$: $R(x) = -(0)^2 + 60\,(0) = 0$، النقطة الأولى $(0, 0)$ وهي مركزالمحاور

نقاط التقاطع مع محور السينات أي $R(x)=0$، نسحب قيم x:

$R(x) = -x^2 + 60\,x = 0$ يمكن كتابته على شكل جداء: $x(-x + 60) = 0$ وبالتالي نجد أن التابع يتقاطع مع محور السينات في نقطتين هما: $x = 0$ و $x = 60$

النقطة الثانية $(0, 0)$ وهي نفس النقطة التي حصلنا عليها أعلاه، والنقطة الثالثة $(60, 0)$

(6) الخط البياني للتابع. بالاستعانة بالنقاط المحسوبة أعلاه، وبجدول تحولات التابع، يمكن رسم الخط البياني للتابع ويأخذ الشكل الآتي (2−17).



الشكل (2−17) الخط البياني لتابع إيرادات

وبالنتيجة، فإن الإيرادات تصل الحد الأقصى لتبلغ 900 عندما يكون عدد القطع المنتجة يساوي 30 قطعة، وهي الكمية الواجب إنتاجها.

6-2 توابع توازن الدخل القومي من الدرجة الأولى

على مستوى الاقتصاد الكلي Macroeconomics، تهتم الدول بتحديد توازن بين حجم الدخل القومي National Income وحجم الإنفاق الكلي Expenditure، وتقدير الاستهلاك الكلي Consumption، والادخار الكلي Savings، ...الخ. سنرى فيما يلي بعض التطبيقات البسيطة لتحديد التوازن الكلي.

ليكن Y الدخل القومي، فيكون لدينا:

تابع الاستهلاك بدلالة الدخل القومي $C=f(Y)$، وتابع الادخار $S=g(Y)$.

عادةً ما يتزايد الاستهلاك والادخار مع تزايد في قيمة الدخل الإجمالي، لنأخذ حالياً حالة يكون فيها الاستهلاك تابع خطي بالنسبة للدخل: $C = aY + b$. حيث $a, b>0$. تمثل b الحد الأدنى للاستهلاك عندما يكون الدخل يساوي الصفر أي الاستهلاك المستقل عن الدخل، وتمثل a معدل تغير الاستهلاك عندما يتغير الدخل بمقدار وحدة نقدية واحدة، عادةً ما تكون $0<a<1$.

<u>الحالة البسيطة حيث الدخل القومي موزع بين الاستهلاك والادخار:</u>

يكون تابع الدخل القومي في هذه الحالة: $Y = C + S$

وبالتالي يمكن حساب الادخار الكلي كما يلي $S = Y – C$، وليكن $C = aY + b$ فإن:

$$S = Y – aY – b = (1-a)\, Y - b$$

تُدعى القيمة a النزعة الهامشية للاستهلاك MPC: Marginal Propensity to Consumption،

كما تُدعى القيمة $1-a$ النزعة الهامشية للادخار MPS: Marginal Propensity to Save.

نجد دوماً $MPC + MPS = 1$ حتى في حالة توابع غير خطية.

في حال وجود حجم محدد من الاستثمارات I^* فإن الدخل القومي يُصبح $Y = C + I^*$،

وحيث أن $C = aY + b$، يكون لدينا معادلتين بمجهولين C, Y، يتم حلهما إيجاد قيم C, Y.

يُدعى النموذج في هذه الحالة بنموذج ادخار–استثمار IS (Investment-Saving).

مثال (2–19) النزعة الهامشية للاستهلاك وللادخار.

ليكن تابع الاستهلاك $C = 0.8Y + 5000$.

ما قيمة النزعة الهامشية للاستهلاك MPC؟ وما قيمة النزعة الهامشية للادخار MPS؟

الشكل العام لتابع الاستهلاك بدلالة الدخل $C = aY + b$

فتكون النزعة الهامشية للاستهلاك MPC تساوي $a=0.8$.

وتكون النزعة الهامشية للادخار MPS تساوي $1-a=0.2$.

<u>حالة وجود إنفاق حكومي:</u>

ليكتمل النموذج الاقتصـــــادي الكلي، علينا إدخال الإنفاق الحكومي Government Expenditure (G)، والضرائب Taxation (T)، وبالتالي تابع الدخل القومي Y يأخذ الشكل: $Y = C + I + G$

من أجل إنفاق حكومي ثابت G^* واستثمارات ثابتة I^* يُصبح النموذج: $Y = C + I^* + G^*$

أيضـــاً علينا أن نخفض الدخل القومي للعائلات بمقدار الضـــرائب T فيصـــبح الدخل القومي الجاهز Disposable Income لإنفاق العائلات ولنرمز له بالرمز Y_d:

$C = aY_d + b$ حيث $Y_d = Y - T$

عادةً ما تكون الضـرائب ثابتة أيضـاً ولتكن T^*، أو متغيرة مع جزء من الدخل القومي $T=tY$ حيث t هي نسبة الدخل القومي الخاضع للضريبة، أو تكون تركيبة خطية من الاثنين: $T=tY + T^*$.

<u>حالة وجود استثمارات مرتبطة بفوائد:</u>

عادةً ما يكون حجم الاســـتثمارات I مرتبط بمعدلات الفائدة Interest Rate (r)، ليكن الاســـتثمار تابع خطي لمعدل الفائدة أي من الشـكل: $I = c.r + d$ حيث $c<0, d>0$. ولنضـيف هذه العلاقة للنموذج المبين أعلاه والمؤلف من قطاعي الاستثمار والادخار فقط، فنحصل على:

$$Y = C + I \quad [1]$$
$$C = aY + b \quad [2]$$
$$I = c.r + d \quad [3]$$

نلاحظ أنه مكون من ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل هي Y, C, I, r، وبالتالي لا يمكن تحديد التوازن للدخل القومي بطريقة وحيدة. لذلك سنلجأ إلى تحديد حجم الدخل القومي Y بدلالة معدل الفائدة r:

نستبدل [2] في [1] فنجد: $I = (1-a)Y - b \quad [4]$

بمساواة المعادلتين [3] و [4] نجد: $(1-a)Y - b = c.r + d$ ومنه نحصل على العلاقة بين الدخل القومي ومعدل الفائدة وفق الصيغة [5] وتُدعى IS Schedule أو نموذج IS:

$$Y = \frac{c}{1-a} r + \frac{d+b}{1-a} \qquad [5]$$

أي يختلف حجم التوازن للدخل القومي من أجل مستويات مختلفة لحجم الفوائد.

لنرى تطبيق هذه الصيغة في حالة توازن الكتلة النقدية أو السيولة التي يديرها عادةً المصرف المركزي، بين الحجم المعروض M_s والحجم المطلوب M_d.

في حالة التوازن يكون لدينا $M_d = M_s$

ليكن $M_s = M_s^*$ حجم الكتلة النقدية الثابت الذي قدر المصرف المركزي أن السوق بحاجة له.

الطلب على السيولة له علاقة بعدة عوامل هي المعاملات الاقتصادية، والمضاربة، والاحتياطي لحالات الطوارئ، وكل منها له علاقة بحجم الدخل القومي:

ليكن حجم الطلب على الكتلة النقدية للمعاملات والاحتياطي $L_1 = k_1 Y$ حيث $k_1 > 0$

ليكن حجم الطلب على الكتلة النقدية للمضاربة $L_2 = k_2 r + k_3$ حيث $k_2 < 0, k_3 > 0$

فيكون الطلب الإجمالي على الكتلة النقدية $M_d = L_1 + L_2$ أو:

$$M_d = k_1 Y + k_2 r + k_3$$

في حالة التوازن لدينا $M_d = M_s$ وحيث $M_s = M_s^*$ فإنه يكون لدينا علاقة إضافية تربط بين الدخل القومي Y وحجم الفوائة r ويُدعى بنموذج السيولة والنقدية LM (Liquidity-Money):

$$M_s^* = k_1 Y + k_2 r + k_3 \qquad [6]$$

وتشكل مع العلاقة [5] معادلتين بمجهولين هما Y, r، ويُدعى بنموذج السيولة والنقدية والاستثمار والادخار المعروف تحت اسم ISLM (Investment-Saving, Liquidity-Money). وبحل هاتين المعادلتين [5] و [6]، نجد حجم التوازن من أجل كتلة نقدية ما.

كما يُمكن إيجاد العلاقة بين حجم الدخل القومي Y و حجم العرض من الكتلة النقدية M_s^*، وذلك من المعادلة [6]، فنحصل على الصيغة [7]:

$$Y = \frac{-k_2}{k_1} r + \frac{M_s^* - k_3}{k_1} \qquad [7]$$

نلاحظ من هذه الصيغة، أن ميل الخط البياني LM أي المقدار $(-k_2/k_1)$ لا يتعلق بحجم الكتلة النقدية المعروضة M_s^*، في حين أن الجزء الثابت $(M_s^* - k_2)/k_1$ هو الذي يتغير بالزيادة أو

بالنقصــان مع تزايد أو تناقص M_s*، بمعنى أنه سـنحصـل على مسـتقيمات متوازية (كون الميل لا يتغير) مع تغير العرض من الكتلة النقدية، أي ننتقل بين مستقيمات متوازية من مستوى إلى مستوى آخر دون تعديل في ميلها[2].

سنحاول في التطبيقات اللاحقة دراسة توازن الدخل القومي في حالات حيث التوابع خطية فقط.

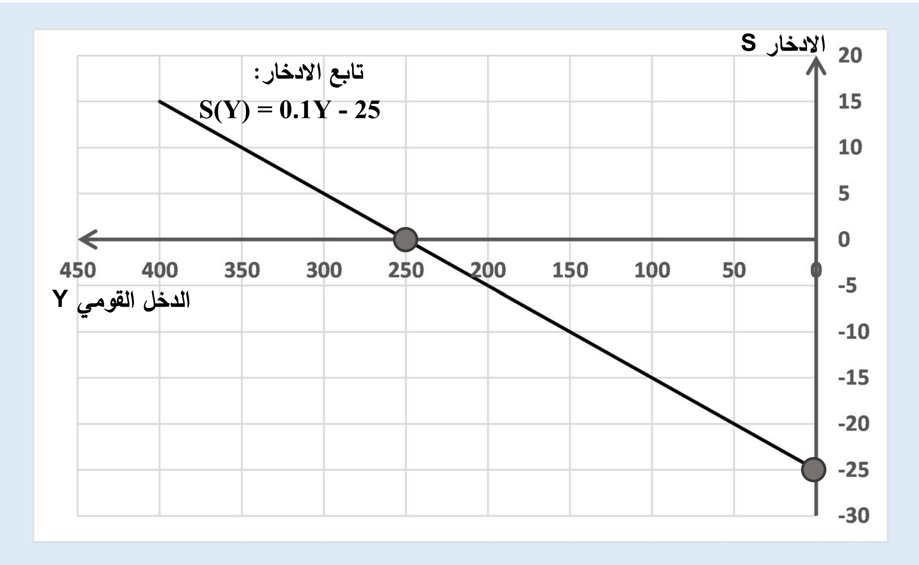
تطبيق (2–14): توازن الدخل القومي: حالة ادخار واستهلاك فقط.

ليكن $C = 0.9Y + 25$، فيكون تابع الادخار بدلالة الدخل:

$$S = Y - C = Y - (0.9Y+25) = (1-0.9)Y - 25$$

$$S = 0.1Y - 25$$

يكون لهذا التابع شكلاً خطياً كما يبين الشكل (2–18).



الشكل (2–18) الخط البياني لتابع استهلاك خطي بدلالة الدخل القومي

تطبيق (2–15) توازن الدخل القومي: حالة ادخار واستهلاك واستثمارات فقط.

ليكن $C = 0.7Y + 20$، وليكن حجم الاستثمارات المقررة $I^*=10$.

ما قيمة الاســـتهلاك والدخل الإجمالي الذي يحقق التوازن بين الدخل الإجمالي والإنفاق الإجمالي (استهلاك واستثمار)؟

<u>الحل:</u>

$Y = C + I^*$ مما يعطي $Y = C + 10$ [1]

---

2. يُنصح دوماً بالعودة إلى المراجع الاقتصادية من أجل المزيد من التفسير الاقتصادي.

ولدينا معادلة الاستهلاك $C = 0.7Y + 20$ [2]

الحل المشترك لهاتين المعادلتين:

$Y = (0.7Y+20) + 10 = 0.7Y + 30$ مما يعطي $Y=100$ وهي قيمة الدخل الإجمالي عند حالة التوازن. ومن [1] أيضاً نجد $C=90$.

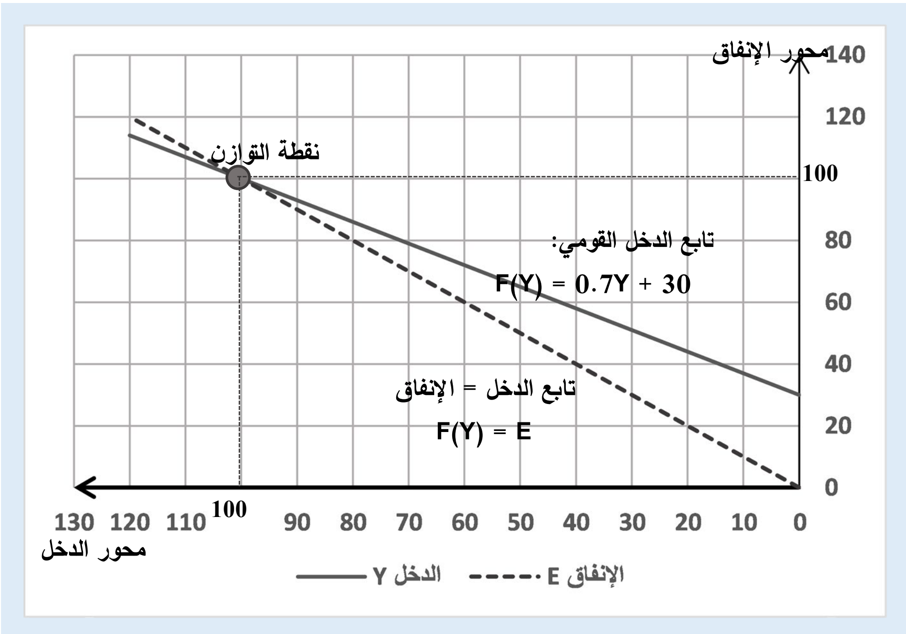
الحل البياني:

نضع جملة إحداثيات من محورين: حيث المحور الأفقي الدخل، والمحور العمودي الإنفاق.

نرسم الخط البياني للحالات التي يتساوى فيها الدخل الكلي مع الإنفاق الكلي، فيكون منصف الربع الأول هو الخط البياني المُعبر عن هذه الحالة.

نرسم الخط البياني لمستويات مختلفة من الدخل الإجمالي: التابع $F(Y)=0.7Y+30$ مقابل الإنفاق.

نوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين السابقين، فيجب أن نحصل على $Y=100$ كما هو مبين في الشكل (2−19).



الشكل (2−19) التوازن بين الدخل القومي والإنفاق

تطبيق (2−16) توازن الدخل القومي: حالة وجود إنفاق حكومي.

ليكن $G = 15$ ، $I = 10$ ، $C = 0.7Y_d + 90$ ، $T = 0.1Y + 40$

ولتكن المبالغ بمليارات الليرات السورية، المطلوب حساب مستوى التوازن للدخل القومي.

الحل:

لدينا ستة معادلات خطية بستة مجاهيل:

$$Y = C + I + G \qquad [1]$$

$$G = 15 \qquad [2]$$

$$I = 10 \qquad [3]$$

$$C = 0.7Y_d + 90 \qquad [4]$$

$$T = 0.1Y + 40 \qquad [5]$$

$$Y_d = Y - T \qquad [6]$$

نستبدل قيم G و I في المعادلة [1] فنجد: $Y = C + 10 + 15 = C + 25$ [7]

نستبدل في المعادلة [6] المجهولين Y و T فنجد المعادلة [8]:

$$Y_d = Y - (0.1Y + 40) = 0.9Y - 40 \qquad [8]$$

باستبدال الصيغة [8] في المعادلة [4] نحصل على المعادلة [9]:

$$C = 0.7(0.9Y - 40) + 90 = 0.63Y + 118 \qquad [9]$$

بحل المعادلتين [7] و [9] بنفس المجهولين:

$$Y = C + 25 = (0.63Y + 118) + 25 = 0.63Y + 143 \qquad [10]$$

بحل المعادلة الأخيرة [10] نجد $Y=386.486$ وهي قيمة الدخل القومي الذي يحقق التوازن مع الإنفاق.

تطبيق (2–17) توازن الدخل القومي: حالة وجود استثمارات مرتبطة بفوائد.

لدينا المعطيات الآتية عن حالة السوق:

تابع الاستهلاك	$C = 0.7Y + 200$	[1]
تابع الاستثمار	$I = -25r + 2000$	[2]
حجم العرض من الكتلة النقدية	$M_s = 2500$	[3]
حجم الطلب على الكتلة النقدية للمعاملات	$L_1 = 0.2Y$	[4]
حجم الطلب على الكتلة النقدية للمضاربة	$L_2 = -30r + 2900$	[5]

والمطلوب دراسة تأثير العرض من الكتلة النقدية على مستوى التوازن للدخل القومي Y وعلى حجم الفوائد r.

الحل:

نعلم أن $Y = C + I$ وبجمع المعادلتين [1] و [2] نجد نموذج IS:

نموذج IS : $0.3Y + 25r = 2200$ [6]

كما نعلم أن $M_d = L_1 + L_2$، وفي حالة التوازن يكون لدينا $M_d = M_s$

أي بجمع المعادلتين [4] و [5] ومساواتهما للمعادلة [3] نجد نموذج LM:

$$0.2Y - 30r + 2900 = 2500$$

نموذج LM: $0.2Y - 30r = -400$ [7]

نحصل على معادلتين [6] و [7] بمجهولين فقط هما Y, r. بحل هاتين المعادلتين نجد قيم Y, r.

ضرب المعادلة [6] بـ 0.2 وضرب المعادلة [7] بـ -0.3 ثم جمعهما:

$$\begin{array}{ll} \times\ 0.2 & 0.3Y + 25r = 2200 \\ \times\ -0.3 & 0.2Y - 30r = -400 \\ \hline \end{array}$$

$$14r = 560 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 40}$$

بتبديل قيمة r=40 في المعادلة [6] نجد قيمة Y تساوي 4000:

$$\boldsymbol{Y} = \frac{2200 - 25r}{0.3} = \frac{2200 - 25 * 40}{0.3} = \mathbf{4000}$$

فيكون مستوى التوازن $Y = 4000$ و $r = 40$. كما هو مبين على الشكل (2–21).

لدراســـة تأثير تغير حجم العرض من الكتلة النقدية على هذا المســـتوى من التوازن، يجب إعادة حل المعادلات لكن من أجل قيم مختلفة من حجم العرض.

رأينا أعلاه أن العلاقة بين Y و M_s^* تأخذ الشكل الآتي:

$$Y = \frac{-k_2}{k_1}r + \frac{M_s^* - k_3}{k_1}$$

حيث $k_1=0.2$ ، $k_2=-30$ ، $k_3=2900$ ومنه نجد معادلة Y:

$$Y = \frac{-(-30)}{0.2}r + \frac{M_s^* - 2900}{0.2} = 150r + 5M_s^* - 14500$$

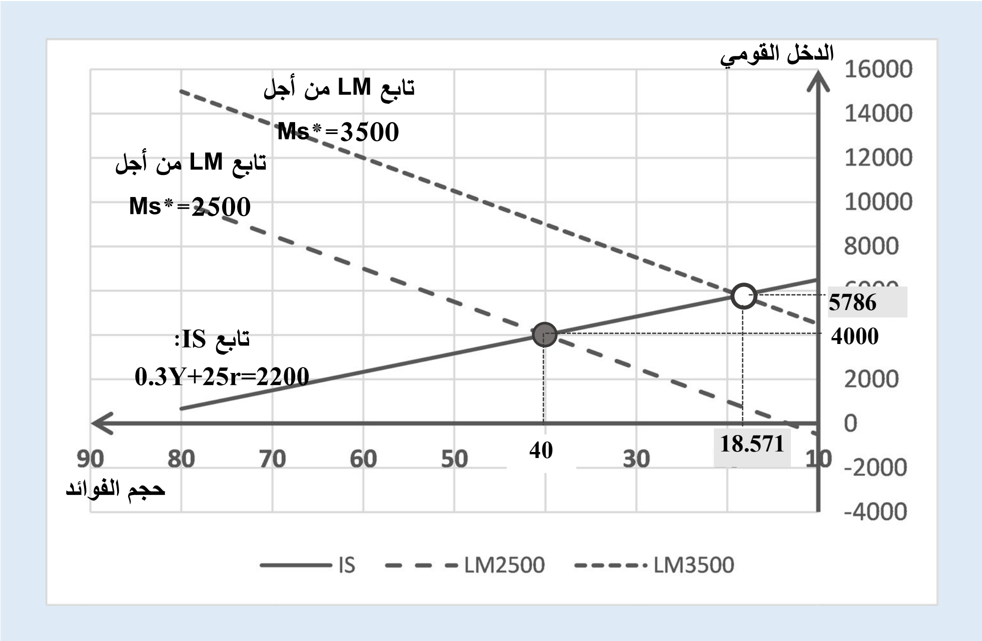
من أجل $M_s^*=2500$ نجد أن التوازن يحصل عند $Y=4000$، و $r=40$.

من أجل $M_s^*=3500$ نجد أن معادلة الدخل:

$$Y = 150r + 5*3500 - 14500 = 150r + 3000$$

وبحلها مع نموذج IS وفق المعادلة [6]، نجد أن التوازن يحصل عند Y=5786، و r=18.571.

وهو ما تُظهره الخطوط البيانية على الشــكل (2−20)، نلاحظ بأنه مع تزايد الكتلة النقدية، فإن الخط البياني ينتقل كلياً إلى مســتوى أعلى وبشــكل موازي للســابق، وبالتالي ينتقل مســتوى التوازن إلى قيمة جديدة للدخل ولحجم الفوائد.



الشكل (2−20) التوازن من أجل مستويات مختلفة من عرض الكتلة النقدية M_s

أســئلة واختبارات الفصــل الثاني: التوابع الصــحيحة من الدرجة الأولى والثانية

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	إشارة كثير الحدود F(x) = -5x هي دوماً سالبة $\forall x \in R$		✓
2	إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية هي دوماً من إشارة المميز Δ		✓
3	يُحسب المميز للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بالشكل $\Delta = b^2 - 4a.c$	✓	
4	في حال كان المميز Δ لمعادلة من الدرجة الثانية سالب، فيكون للمعادلة جذران		✓

5	إشارة كثير الحدود $F(x) = x^2 + 4$ هي دوماً موجبة	✓	
6	التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة – التكاليف المتغيرة		✓
7	حل مشكلة سعر التوازن في سوق منتج ما، هو حل مشترك لمعادلتي العرض والطلب	✓	
8	تابعي العرض والطلب هي دوماً توابع خطية وتمثل بمستقيمات مهما كانت طبيعة المنتجات		✓
9	عادةً ما يتزايد الاستهلاك والادخار على المستوى الكلي مع تزايد الدخل القومي	✓	
10	لدينا تابع الاستهلاك الكلي C=aY+b، فإن النزعة الهامشية للاستهلاك MPC تساوي a	✓	
11	مجموع النزعة الهامشية للادخار MPS والنزعة الهامشية للاستهلاك MPC يساوي دوماً الواحد 1	✓	
12	لدينا تابع الاستهلاك C=0.7Y+200، فإن النزعة الهامشية للادخار MPS تساوي 0.3	✓	
13	من أجل إنفاق حكومي ثابت *G واستثمارات ثابتة *I يُصبح نموذج الدخل الكلي بالصيغة: $Y = C + I^* + G^*$	✓	
14	لا يختلف حجم التوازن للدخل القومي من أجل مستويات مختلفة لحجم الفوائد		✓
15	لدينا نموذج خطي للتوازن الكلي وفق نموذج LM، فإن ميل المستقيم LM لا يتعلق بحجم الكتلة النقدية المعروضة M_s^*.	✓	

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- الصيغة الرياضية 8y=4x+4 تكافئ الصيغة:

أ) x=2y-4　　ب) x=y+1

ج) x=2y-1　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- إشارة كثير الحدود $F(x) = 4x + 4$ عندما $x = -2$ هي:

أ) سالبة　　ب) موجبة

ج) لا إشارة له　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- ميل المستقيم المشكل من التابع $2y = 4x - 10$ هي:

أ) 4　　ب) 2

ج) -5　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- الحل المشترك لجملة المعادلتين: $y = x$ و $y = 6x - 10$ هو:

أ) x=2, y=2　　ب) x=0, y=2

ج) x=2, y=0　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- إشارة كثير الحدود $F(x) = x^2 + 8$ هي:

أ) دوماً موجبة
ب) دوماً سالبة
ج) لا إشارة له
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- إشارة كثير الحدود $F(x) = ax^2+bx+c$ حيث $a \# 0$ إذا كان المميز Δ سالب هي:

أ) موافقة لإشارة b
ب) موافقة لإشارة a
ج) موافقة لإشارة c
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- حلول المعادلة $3x^2 - 27 = 0$ هي:

أ) $x_1=+3, x_2=-3$
ب) $x_1=9, x_2=-9$
ج) لا حل لها
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- يمكن رسم مستقيم تابع من الدرجة الأولى وذلك بمعرفة:

أ) نقطتين منه
ب) ميل المستقيم
ج) معادلة المستقيم
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

9- الحل المشترك لجملة المعادلتين: $y = x^2 + 2x$ و $y = 5x + 4$ هو:

أ) $x_1 = 0, x_2 = 2$
ب) $x_1 = -1, x_2 = 4$
ج) لا حل مشترك لهما
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- يمكن التعبير عن الصيغة $a^2 - 2ab + b^2$ بشكل مختلف كما يلي:

أ) $(a+b)^2$
ب) $(a-b)^2$
ج) $(a+b)(a-b)$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- يمكن كتابة كثير الحدود $F(x) = x^2 - x - 2$ كما يلي:

أ) $(x-1)^2$
ب) $(x-2)^2$
ج) $(x-6)(x+5)$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- ليكن $D(x) = 20 - x$ هو تابع سعر الطلب من أجل x قطعة من سلعة ما، فيمكن التعبير عن تابع الإيرادات الكلية $R(x)$ كما يلي:

أ) $R(x) = D(x)$
ب) $R(x) = -x^2 + 20x$
ج) $R(x) = x^2 + x$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- لدينا تابع الربح من مبيعات سلعة ما له الشكل $P(x) = q^2 - 10q$، فإنه يمكن تحقيق ربح عندما:

أ) $q \leq 10$ فقط
ب) $q > 10$ فقط
ج) لا يمكن تحقيق أرباح أبداً
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- لدينا تابع سعر العرض $S(q) = 200 - 5q$ وتابع سعر الطلب $D(q) = q^2 + 50$، فإن حالة التوازن بين العرض والطلب تقع عند النقطة:

أ) $q = 10$، و $S(q)=D(q)=150$

ب) لا يوجد نقطة توازن أصلاً

ج) $q = 0$ و $S(q)=D(q)=200$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- لدينا تابع الدخل القومي لقطاعين فقط له الشكل $Y = C + S$ وليكن تابع الاستهلاك له الشكل $C = aY + b$ فإن تابع الادخار S يكون له الشكل الآتي:

أ) $S = -aY + C$

ب) $S = (1-a)Y - b$

ج) لا يمكن حسابه أصلاً

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (2-1). ادرس إشارة كثير الحدود: $G(x) = -7 x + 35$

السؤال (2-2). رسم وإيجاد معادلة مستقيم يمر من نقطتين.

ارسم الخط البياني لمستقيم يمر بالنقطتين (5, 10) و (-2, -7)، ثم أوجد معادلته، وما هو ميل المستقيم؟

(توجيهات للإجابة: تبديل النقطتين في الصيغة العامة لمعادلة من الدرجة الأولى. الفقرة 2-1)

السؤال (2-3). حل كل من جملة المعادلتين: $3x + 4y = 12$ $\quad$ $x + 4y = 8$

السؤال (2-4). أوجد نقطة التقاطع بين المستقيمين، هندسياً وجبرياً:

$F(x) = 3x - 10$ $\quad$ $G(x) = -2 x + 5$

السؤال (2-5). ادرس إشارة كثير الحدود: $R(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

لسؤال (2-6). حل المعادلة الآتية: $(x - 8)^2 = 25$

السؤال (2-7). توابع العرض والطلب.

ليكن لدينا تابع سعر العرض $S(x) = x^2 + 14 x + 22$

وتابع سعر الطلب: $D(x) = - x^2 - 10 x + 150$

والمطلوب: رسم تابعي العرض والطلب السابقين، وإيجاد كمية وسعر التوازن هندسياً وجبرياً.

(توجيهات للإجابة: الحل المشترك لتقاطع المعادلتين. الفقرة 2-3)

السؤال (2-8). تابع ربح.

لتكن التكاليف الثابتة لمنتج ما تساوي 4 ل.س، والتكلفة المتغيرة تساوي 1 ل.س/قطعة.

ولدينا تابع سعر الطلب $P = 10 - 2x$

والمطلوب:

1) ما هي صيغة تابع التكاليف الكلية TC بدلالة عدد القطع المنتجة x ؟

2) ما هي صيغة تابع الإيرادات الكلية TR بدلالة عدد القطع المباعة x ؟

3) ما هي صيغة تابع الربح الكلي F بدلالة عدد القطع المباعة x ؟

(توجيهات للإجابة: الربح = الإيرادات − التكاليف. الفقرة 2−4)

السؤال (2−9) اكتب صيغة تابع الادخار بفرض لدينا معادلة الاستهلاك الآتية: $C = 0.95\,Y + 40$

السؤال (2−10) حساب التوازن لسوق مغلق وعدم وجود تدخل حكومي.

ليكن تابع الاستهلاك له الشكل $C = 0.6\,Y + 20$، وليكن الاستثمار المخطط له ثابت $I^*=120$. والمطلوب:

حساب مستويات التوازن لكل من: الدخل القومي Y، الاستهلاك C، والادخار S.

(توجيهات للإجابة: العودة للصيغة العامة مع وجود حجم استثمار ثابت. الفقرة 2−6)

الفصل الثالث: المتراجحات وتطبيقاتها

عنوان الموضوع: المتراجحات وتطبيقاتها Inequalities and its Applications

كلمات مفتاحية:

المتراجحة Inequality. حل متراجحة Inequality Solution. حل بياني Graphic Solution. متراجحة خطية Linear Inequality. متراجحة تربيعية Quadratic Inequality. قيد اقتصادي Economic Constraint. برنامج خطي بسيط Simple Linear Program. نقطة التعادل Breakeven Point. تعظيم الربح Profit Maximization. تقليل التكلفة Cost Minimization.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل مفاهيم المتراجحات، وكيفية البحث عن حل لمتراجحة أو أكثر بالشكل التحليلي أو بالشكل البياني، سيكون التركيز على المتراجحات الخطية، كما سنرى بعض التطبيقات الاقتصادية خصوصاً تلك المتعلقة بتمثيل القيود على الموارد الاقتصادية، كما سيتم التعرض لمفاهيم البرمجة الخطية البسيطة بأعداد حقيقية وتطبيقات بمتغيرين اثنين فقط وحلها بيانياً، وسنرى بعض التطبيقات المتعلقة بالبحث عن أعلى ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يتمكن الطالب من فهم أساسيات المتراجحة.
2. يميز بين المتراجحة والمعادلة والعمليات الرياضية على كل منهما.
3. يحل متراجحة خطية أو تربيعية بمتغير وحيد.
4. يحل عدة متراجحات خطية بمتغيرات عددها يساوي عدد المتراجحات.
5. يستخدم التمثيل البياني لحل جملة متراجحات خطية وتربيعية.
6. يستخدم التمثيل البياني لحل مسألة برمجة خطية بسيطة بمتغيرين اثنين فقط.
7. يتمكن من إيجاد نقطة التعادل بين التكاليف والإيرادات.

مخطط الفصل:

1-3 تعريف وخصائص المتراجحة Inequality Defifnition & Characteristics.

2-3 حل المتراجحات Inequality Solution.

3-3 تمثيل القيود الاقتصادية على شكل متراجحات Economic Constraints as Inequalities.

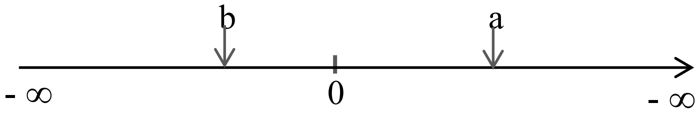
3−1 تعريف وخصائص المتراجحة

المتراجحة Inequality هي كل مقارنة بين عددي حقيقيين $a, b \in R$ وتكتب بالشكل:

$a \le b$ وتقرأ a أصغر أو يساوي b (أو $b \le a$)

مثال (3−1). بعض المتراجحات: $2 > 0.5$ ، $-8 < -3$ ، $-100 < 0$ ، $1 > 0$.

يمكن تمثيل طرفي المتراجحة $a > b$ على محور الأعداد الحقيقية، حيث يقع العدد a بعد العدد b بالاتجاه الموجب للمحور، بالشكل الآتي:



بعض خصائص المتراجحات. ليكن لدينا المتراجحة $a > b$ فإن:

1) إضافة عدد حقيقي $c \in R$ إلى طرفي المتراجحة لا يغير اتجاه المتراجحة: $a + c > b + c$

مثال (3−2). لدينا $-4 < 2$ فإن إضافة العدد $c=4$ إلى طرفي المتراجحة لا يغير اتجاه المتراجحة:

$2+4>-4+4$ يعطي $6>0$.

أو إضافة العدد السالب −2 إلى طرفي المتراجحة تصبح $-4-24 < 2-2$

2) الضرب بعدد موجب تماماً $c \in R^{+*}$ لا يغير اتجاه المتراجحة: $a.c > b.c$

مثال (3−3). ليكن $4 < 6$ لنضرب الطرفين بالعدد 3 مثلاً $3*4 < 3*6$ أي $12<18$.

أو الضرب بالعدد نصف 1/2 فتصبح المتراجحة $4*0.5 < 6*0.5$

3) الضرب بعدد سالب تماماً $c \in R^{-*}$ يغير اتجاه المتراجحة: $a.c < b.c$

مثال (3=4). $6>4$ نضرب بالعدد −2 فتصبح $6*(-2) < 4*(-2)$ أي $-12 < -8$

أو نضرب بالعدد -1/2 فتصبح $6*(-1/2) < 4*(-1/2)$ أي $-3 < -2$

4) إن قلب العددين a, b حيث $a, b \neq 0$ ولهما نفس الإشارة يغير اتجاه المتراجحة:

مثال (3−5). لدينا المتراجحة $2>1$ ، تصبح بعد قلب الطرفين $1/2 < 1$

5) جمع المتراجحات من نفس الاتجاه، فإن متراجحة المجموع تحافظ على نفس الاتجاه.

بفرض $a, b, c, d \in R$، وليكن $a>b$ و $c>d$ فإن $a+c > b+d$

مثال (3–6). لدينا المتراجحتان $-1 < 2$ و $-10 < -8$

بعد الجمع يكون لدينا $-10-1 < -8+2$ أي $-11 < -6$

6) ضرب المتراجحات، بفرض $a, b, c, d \in R^{+*}$ أعداد موجبة، وليكن $a>b$ و $c>d$، فإن $a.c>b.d$.

في حين إذا كانت الأعداد مختلفة في الإشارات، فإن المتراجحة الناتجة تتعلق بهذه الإشارات.

مثال (3–7). ليكن $3>2$ و $4>3$ بعد الضرب $2*3 < 3*4$ صحيحة.

يمكن تمثيل المتراجحة $F(X)$ بيانياً كما يلي:

1. نقل كافة حدودها إلى طرف واحد بحيث نحصل في أحد الطرفين على الصفر، وبالتالي نحصل على متراجحة من الشكل $F(x)\geq 0$ أو $F(x)\leq 0$.
2. رسم الخط البياني للمعادلة $F(x)=0$.
3. الحل البياني للمتراجحة هو جميع النقاط تحت الخط البياني إذا كانت المتراجحة من الشكل $F(x)\leq 0$. أو فوق الخط البياني إذا كانت المتراجحة من الشكل $F(x)\geq 0$.

3–2 حل المتراجحات

حل المتراجحة $F(x) \geq (\leq)\ 0$ يعني إيجاد قيم x التي تحقق المتراجحة.

أثناء البحث عن حل للمتراجحة، يجب الانتباه كثيراً في حال التعامل معها كمعادلة من حيث إجراء العمليات الرياضية عليها، مثلاً الضرب بعدد سالب أو القسمة عليه، قلب طرفي المتراجحة، اختصار حد من طرفي المتراجحة، ....، الخ.

بشكل عام، قد نضطر لدراسة إشارة كثيرات الحدود المكونة للمتراجحة من أشكال مختلفة، حل المتراجحة يعني باختصار دراسة إشارة كثيرات حدود والأخذ بالإشارة الجبرية التي تحقق المتراجحة. ويُنصح بشدة بالتحقق من صحة الحل بعد الحصول عليه.

3–2–1 حل متراجحة خطية بمتغير وحيد

المتراجحة الخطية بمتغير وحيد لها الشكل $F(x) = ax + b \geq (\leq)\ 0$، حيث $a, b\in R$ و $a\neq 0$.

يتم حل المتراجحة F(x) بدراســـة إشـــارة كثير حدود من الدرجة الأولى، ثم أخذ قيم x التي تُحقق المتراجحة أي أكبر (أو أصغر) من الصفر.

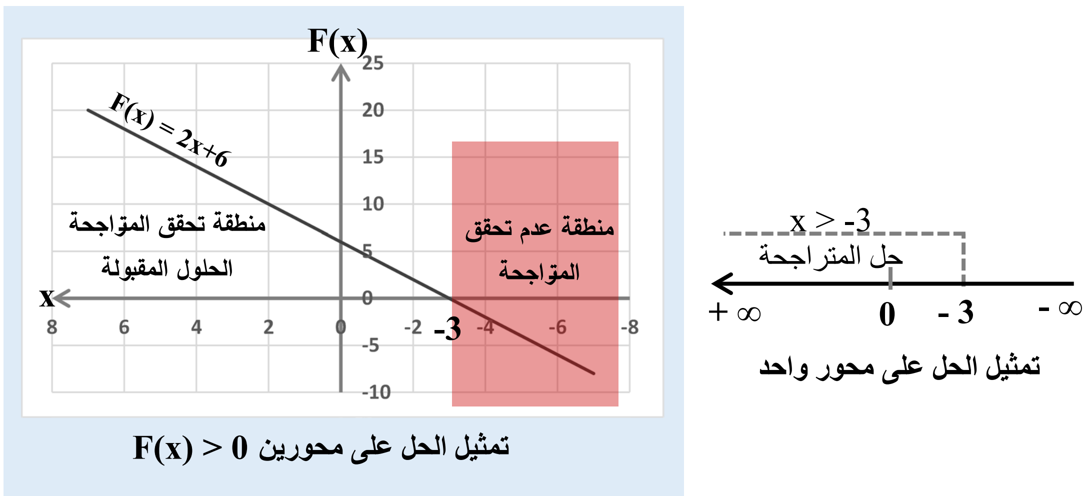
مثال (3−8). حل المتراجحة الخطية الآتية: $F(x) = 2x + 6 > 0$

نضع $F(x) = 0$ فنجد $x = -3$.

يكون $F(x) > 0$ عندما تكون $x>-3$ و $F(x) < 0$ عندما $x<-3$

أي أن قيم x التي تحقق المتراجحة تنتمي للمجال $x\in]-3, +\infty[$.

يُمكن تمثيل الحل البياني للمتراجحة على محور واحد (محور x) أو تمثيل التابع F(x) على المحور العمودي و x المحور الأفقي، نجصـل على نفس النتيجة $x>-3$ كما هو موضـح على الشكل (3−1).



الشكل (3−1) تمثيل متراجحة خطية بمتغير وحيد بيانياً

بنفس المنطق، يُمكن حل متراجحتين بمتغير وحيد عبر التمثيل البياني.

مثال (3−9). حل جملة المتراجحتين بمجهول وحيد.

الأولى $2x - 4 < 0$ الثانية $3x +12 > 0$

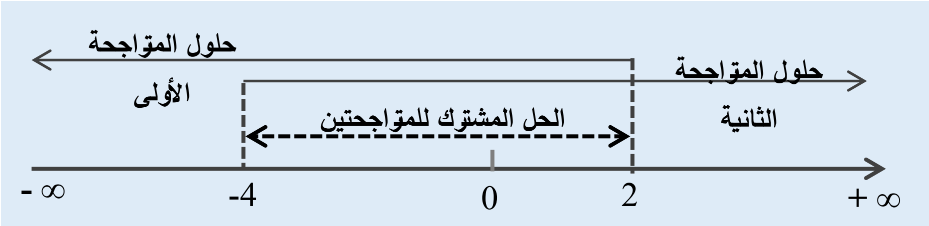
حل المتراجحة الأولى: $2x<4 \Leftarrow x<2$ ويُكتب بشكل مجال $x\in]-\infty, +2[$

حل المتراجحة الثانية: $3x>-12 \Leftarrow x>-4$ ويُكتب بشكل مجال $x\in]-4, +\infty[$

الحل المشترك هو مجال تقاطع المجالين السابقين أي المجال $]-4, +2[$:

$$]-\infty, +2[\cap]-4, +\infty[=]-4, +2[$$

نمثل بيانياً حلول المتراجحتين، ونأخذ مجال التقاطع بين الحلّين كما يوضح الشكل (3−2).



الشكل (3−2) الحل المشترك بيانياً لمتراجحتين خطيتين بمتغير وحيد

3−2−2 حل متراجحة تربيعية بمتغير وحيد

المتراجحة التربيعية أو من الدرجة الثانية بمتغير وحيد لها الشكل $F(x) = ax^2 + bx + c \geq (\leq)\ 0$، حيث $a, b, c \in R$ و $a \neq 0$.

يتم حل المتراجحة $F(x)$ بدراســـة إشـــارة كثير حدود من الدرجة الثانية، ثم أخذ قيم x التي تُحقق المتراجحة أي أكبر (أو أصغر) من الصفر.

مثال (3−10). حل المتراجحة التربيعية $x^2 + 3x - 1 \geq 2 + x$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد وندرس إشارة كثير الحدود $F(x)$ الناتج:

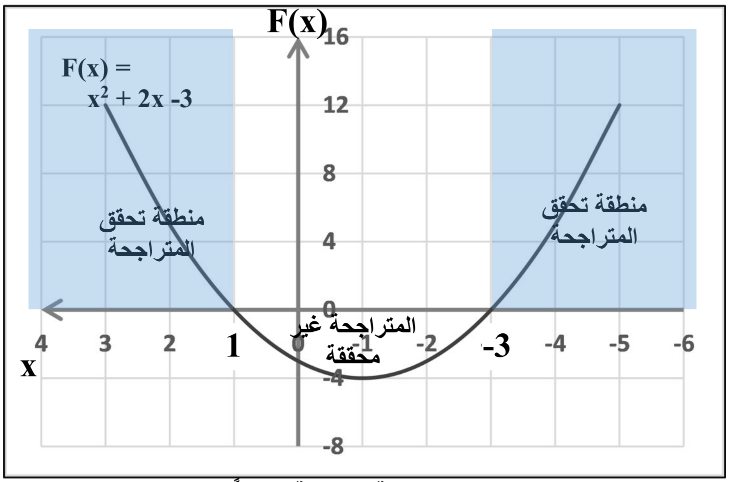
$$F(x) = x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

ليكن $F(x) = 0$ ونحلها كمعادلة، نجد $(x-1)(x+3) = 0$، وبالتالي جذورها $x=1$ و $x=-3$.

X	$-\infty$	-3		+1	$+\infty$
إشارة x^2+2x-3	+ + +	0	− − −	0	+ + +

أي أن قيم x التي تحقق المتراجحة هي المجالات $x \in]-\infty, -3] \cup [+1, +\infty[$.

يمثل الشكل (3−3) التمثيل البياني لهذه المتراجحة.



الشكل (3-3) تمثيل متراجحة تربيعية بيانياً

3-2-3 حل جملة متراجحات بمتغيرين اثنين

سنقتصر على متراجحات بمتغيرين اثنين على الأكثر، تسهيلاً للبحث عن الحل بيانياً.

مثال (3-11). حل جملة متراجحتين خطيتين بمجهولين اثنين.

ليكن لدينا المتراجحتين:

الأولى $4x + y \geq 20$ الثانية $3x + 2y \geq 30$

يمكن إيجاد الحل المشترك للمتراجحتين عبر التمثيل البياني كما يلي:

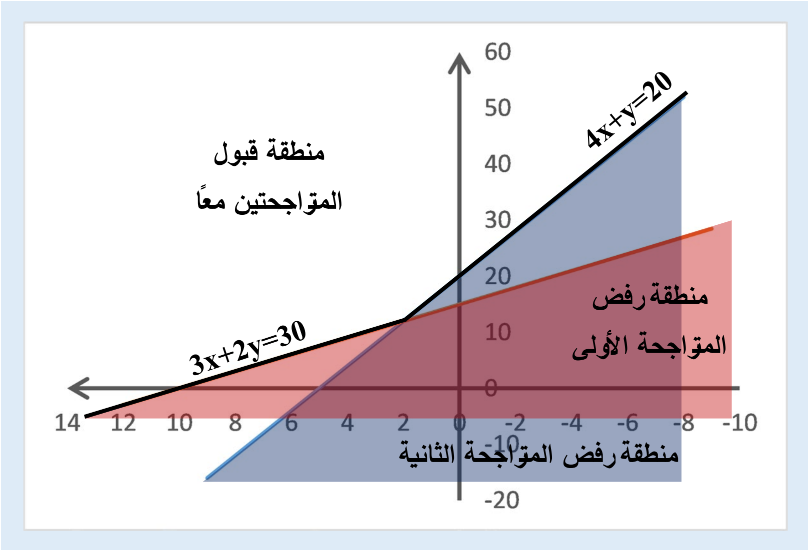
(1) تمثيل مستقيمي المعادلتين $4x+y=20$ و $3x+2y=30$.

(2) تحديد منطقة القبول حسب اتجاه كل من المتراجحين.

(3) تحديد تقاطع منطقتي القبول للمتراجحتين معاً، فتكون هذه المنطقة هي الحل المشترك.

نلاحظ من الشكل البياني (3-4) ما يلي:

1. نقطة تقاطع مستقيمي المعادلتين هي $x = 2 , y = 12$.
2. جزء من الحل المشترك يتحقق عبر المتراجحة الأولى $4x + y \geq 20$، عندما $x \leq 2$.
3. والجزء الآخر من الحل المشترك يتحقق عبر المتراجحة الثانية $3x + 2y \geq 30$، عندما $x \geq 2$.



الشكل (3−4) حل جملة متراجحتين خطيتين بمتغيرين اثنين بيانياً

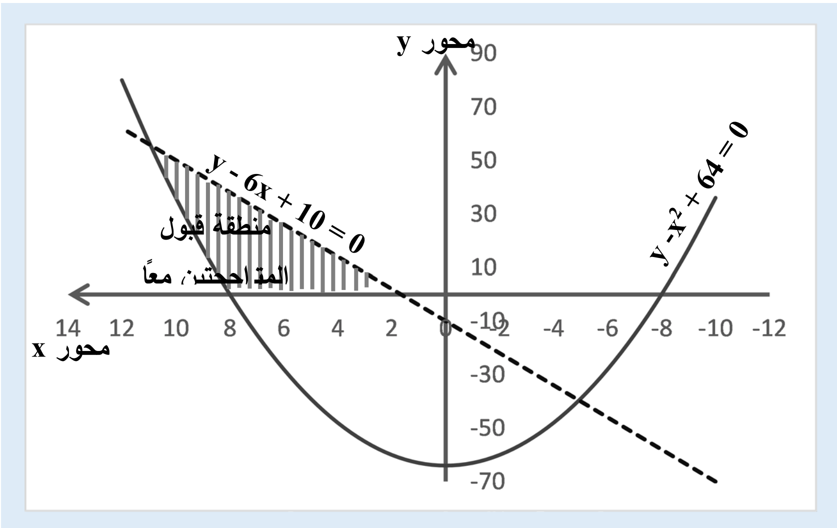
يمكن بنفس الطريقة البيانية، حل عدة متراجحات خطية أو غير خطية بمتغيرين اثنين.

مثال (3−12). حل جملة متراجحتين بمجهولين اثنين، إحداهما تربيعية والأخرى خطية.

ليكن لدينا المتراجحتين:

الأولى $y - x^2 + 64 \geq 0$ الثانية $y - 6x + 10 \leq 0$

نلاحظ من الشكل (3−5) أن الحل المشترك هو المنطقة/المساحة المحصورة بين مستقيم المعادلة من المتراجحة الثانية $y\text{-}6x\text{+}10\text{=}0$، والخط البياني من المتراجحة الأولى عندما $y\text{-}x^2\text{+}64\text{=}0$، والمحور الأفقي $y\text{=}0$.



الشكل (3−5) حل جملة متراجحتين بمتغيرين اثنين إحداهما خطية والأخرى تربيعية بيانياً

تطبيق (3−1) موازنة الحواسيب والطابعات.

خصصت إدارة الشركة 900 ألف ل.س لشراء حواسيب وطابعات شخصية، تبلغ تكلفة شراء الحاسب الواحد 200 ألف ل.س، وتكلفة شراء الطابعة الواحدة 100 ألف ل.س، فإذا كان عدد الحواسيب هو x وعدد الطابعات هو y. المطلوب:

1) صياغة المتراجحة التي تبين العلاقة بين مبلغ الموازنة وتكاليف شراء x حاسب و y طابعة.

2) ما الحد الأقصى لعدد الحواسيب التي يُمكن شرائها؟ وما الحد الأقصى لعدد الطابعات التي يمكن شرائها؟

3) في حال قررت الإدارة شراء 4 طابعات، كم حاسب يمكن للشركة شراءه في هذه الحالة؟

4) مثل قيد الموازنة كمتراجحة في فضاء من بعدين x,y.

<u>الحل:</u>

1) المتراجحة المطلوبة لها الشكل: $200\ x + 100\ y \le 900$

2) الحد الأقصى لعدد الحواسيب التي يُمكن شرائها:

في هذه الحالة، كامل الموازنة ستخصص للحواسيب وبالتالي عدد الطابعات y=0، فيكون عدد الحواسيب x هو حل المتراجحة:

$200\ x + 100*0 \le 900$ أو $200\ x \le 900$ فيكون $x \le 900/200=4.5$

حيث أن عدد الحواسيب هو عدد طبيعي فلا يمكن لـــ x أن تساوي 4.5 وبالتالي تكون قيمة x المقبولة تساوي x=4 وهو العدد الذي مكن شراءه. ويكون فائض الموازنة في هذه الحالة 100 ألف ل.س.

الحد الأقصى لعدد الطابعات التي يمكن شرائها: بنفس الطريقة نجد عدد الطابعات، وذلك بفرض x=0 فتكون y المطلوب هو حل للمتراجحة $200*0 + 100\ y \le 900$

أي $y \le 900/100 = 9$ أي يمكن شراء 9 طابعات بالحد الأقصى.

3) في حال شراء 4 طابعات أي $y = 4$، يكون تكاليفها $4*100 = 400$

تُصبح المتراجحة $200\ x + 400 \le 900$ أو $200\ x \le 500$

وبالتالي يكون عدد الحواسب أقل أو يساوي من 2.5: $x \le \frac{500}{200} = 2.5$

وحيث أنه لا يمكن شراء نصف حاسوب، يكون عدد الحواسيب 2 بالحد الأقصى، ويكون فائض الموازنة في هذه الحالة 100 ألف ل.س.

4) التمثيل البياني. يبين الشكل أنه تم تمثيل المنطقة المقبولة في فضاء القيم المستمرة للمتغيرين x,y، لكن حيث هذه القيم أعداد طبيعية، يجب أخذ نقاط التقاطع بين الإحداثيات كأعداد طبيعية، وبالتالي تمثل القيم المقبولة كزوج من x و y كما يلي:

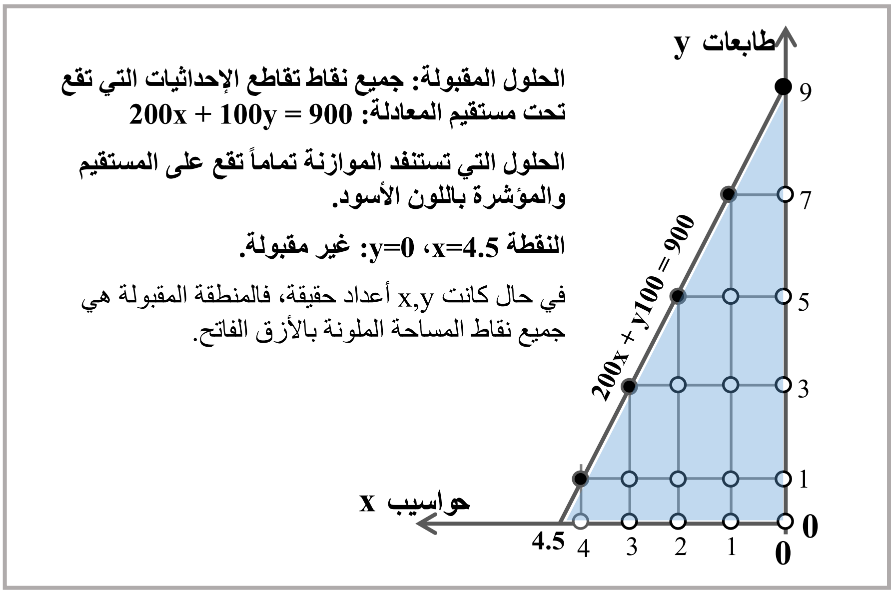
(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0,9)

(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)

(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)

(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

(4, 0), (4, 1)



الشكل (3–6) تمثيل قيد موازنة خطية لموردين اثنين بأعداد طبيعية

3–3 تمثيل قيود الموارد الاقتصادية على شكل متراجحات

3–3–1 تمثيل مشكلة القيود على شكل برنامج رياضي

أحد التطبيقات المهمة للجبر الخطي هو المساعدة في صياغة وحل مشكلة محدودية الموارد الاقتصادية Resources's Scarcity عبر جملة من المعادلات أو المتراجحات.

يُقصد بالموارد: رؤوس الأموال، المواد الأولية، التجهيزات، الأفراد، الوقت، ...؛

وبالأهداف: تخفيض التكلفة، الزمن، المخزون، الخسارة، الانحراف عن التوقعات، المخاطرة، أو تحسين المبيعات، الدخل، الفعالية، وحتى الرضا النفسي ...؛

كما يُقصد بالقيود: محدودية الموارد، قانونية، فنية، تجارية، مالية، سياسية أو بشرية، ...

بعد تحديد الأهداف، كيف يمكن استخدام الموارد بشكل أمثلي؟ أو كيف يمكن توزيع الموارد بالشكل الأمثل لتحقيق الهدف المطلوب مع الأخذ بعين الاعتبار القيود المفروضة؟

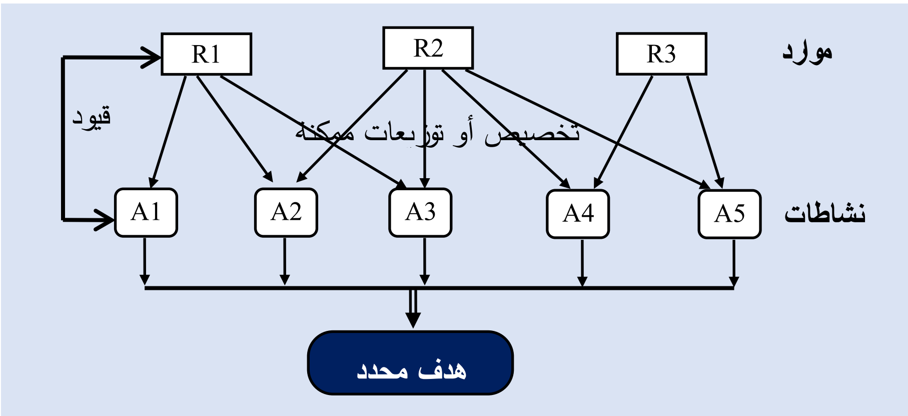
وتُصبح المشكلة الاقتصادية كما يلي:

1. البحث عن أكبر Maximization أو أصغر قيمة Minimization لتابع هدف محدد Objective Function،
2. هناك قيود Constraints تحد من الوصول للهدف المرجو،
3. وجود خيارات متعددة Alternatives للفعل أو للقرار،
4. صياغة التابع الهدف والقيود على شكل معادلات أو متراجحات Equations or Inequalities، وأغلب الأحيان تكون خطية.

ويأخذ الشكل العام للنموذج وفقاً لنهج بحوث العمليات: تعظيم Maximize أو تقليل Minimize التابع الهدف، تحت مجموعة من القيود Constraints.

نقول عن حل النموذج أنه قابل للتنفيذ Feasible إذا حقق جميع القيود، ونقول عنه أنه حل أمثلي Optimal إذا كان أفضل الحلول المقبولة (أكبر قيمة أو أصغر قيمة).

عندما نتحدث عن توزيع الموارد، يجب التحديد: توزيع الموارد بين النشاطات الممكنة، كمثال عن نشاطات الشركة نذكر: اختيار أي فئة من المنتجات، أي نوع من الآلات، أية فئة من الأفراد ... أو أية فئة ناتجة عن تركيبة من الفئات السابقة، وكذلك إيجاد مستويات النشاطات التي تستهلك الموارد من أجل تحقيق هدف محدد بشكل أمثلي ضمن مجموعة من القيود، كما يوضح الشكل (3-7).



الشكل (3-7) تخصيص/توزيع الموارد على النشاطات

في العديد من الحالات العملية، يصعب التمييز بين ما يترجم لتابع اقتصادي وبين ما يترجم لقيد، إذ يمكن تحويل التابع الاقتصادي إلى قيد والقيد إلى تابع اقتصادي، ويعتمد تحديد التابع الهدف على ما تُركز عليه أو يسعى لتحقيقه متخذ القرار (عبود، 2017)؛ في حالة تمويل الاستثمارات مثلاً، قد يطلب إيجاد القيمة العظمى للسيولة (التابع الهدف) بشرط ألاّ تتجاوز النفقات المالية 10% من المبالغ المقترضة (القيد)، أو قد يطلب إيجاد الحد الأدنى من النفقات المالية (التابع الهدف) بحيث يكون هناك دوماً حد أدنى من السيولة لا تقل عن مبلغ محدد.

بشكلٍ عام، يترجم التابع الهدف ما نريده وتترجم القيود ما لا نريده أو ما لا نستطيعه، ويجب على أي نموذج رياضي (X, Y, Z) أن يحقق الشروط الآتية:

1. لا تأخذ متغيرات القرار X إلاّ قيماً عددية.
2. أن يكون Z تابع رياضي للمتغيرات X تحليلي، حيث يتم البحث عن القيمة العظمى (أو الصغرى) للتابع.
3. أن تكون Y_j مجموعة من التوابع الرياضية للمتغيرات X ومحدودة من الأعلى أو الأدنى، وتعبر هذه الحدود عن قيود الموارد.
4. ترتبط التوابع Z , Y_j بالمجاهيل x عن طريق معاملات كمية $c_1, c_2, ..., c_n$ ، $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$ ، b_j ($j=1, 2, ..., m$)، وهي معطيات معلومة أو تحسب من المعطيات الخام وليست مجهولة، ولكن يمكن تعديلها بهدف دراسة حساسية النموذج ومدى استقرار الحل النهائي.

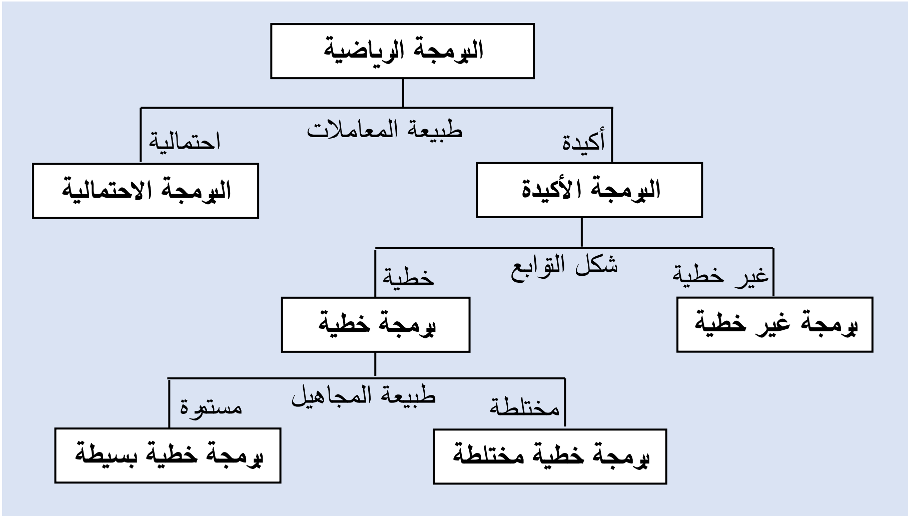
ويُمثَّل البرنامج الرياضي Mathematical Program بالشكل الآتي:

أوجد قيم متغيرات القرار $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$

بحيث يكون $Z = f(X) = f(x_1, x_2, ...,x_n, c_1, c_2, ...,c_n)$ أكبر (أو أصغر) ما يمكن

تحت القيود $Y_j = F_j(X) = F_j(x_1,x_2, ...,x_n, a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}) \geq\leq b_j \quad j = 1, 2, ..., m$

التقنية الأكثر انتشاراً في بحوث العمليات هي البرمجة الخطية Linear Programming، وهي جزء من نماذج البرمجة الرياضية Mathematical Programming، وهذه الأخيرة هي جزء من نماذج التأويج والتي بدورها هي فئة من نماذج بحوث العمليات، حيث تُعتبر نماذج بحوث العمليات فئة مهمة من الأساليب المساعدة على اتخاذ القرارات. تختلف نماذج البرمجة الرياضية حسب طبيعة متغيرات القرار X وشكل التوابع Z, Y كما هو مبين في الشكل (3–8).



الشكل (3–8) فئات البرمجة الرياضية

سـنهتم فيما يلي بالبرامج الخطية البسـيطة Simple Lineare Programming فقط كونها الأكثر انتشـاراً وتطبيقاً، ويمكنها في العديد من الحالات تمثيل الظاهرة الاقتصـادية القرار بشكل مقبول، كما يتوفر العديد من البرمجيات المعلوماتية المساعدة على استخدامها بسهولة[3].

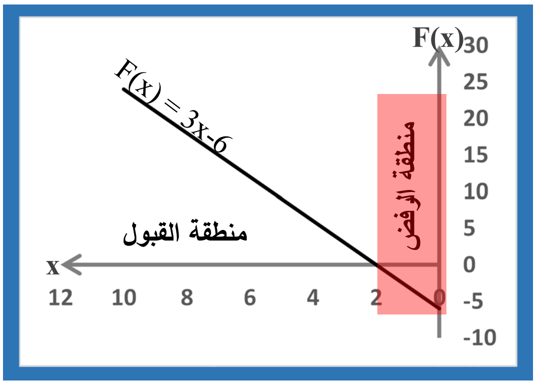
يجب أن تتوفر في المشكلة خمس فرضيات أساسية، كي نتمكن من معالجتها عبر البرمجة الخطية البسيطة:

1. التأكد التام Certainty: كافة متغيرات ومعاملات المسألة محدودة ومؤكدة.
2. النسبية Proportionality: يعني أن المقادير المستخدمة تتناسب خطياً مع قيم المتغيرات. مثلاً، إذا كان القطعة الواحدة من المنتج تحتاج 3 وحدات من أحد الموارد، فإن 10 قطع من المنتج يحتاج 30 وحدة من المورد.
3. الجمع Additive: النشاطات مستقلة، معيار الإنجاز الإجمالي هو حاصل جمع الكميات الناتجة عن النشاطات الفردية، الربح مثلاً هو مجموع الأرباح من جميع المنتجات.
4. قابلية التجزئة Divisibility: متغيرات القرار هي قيم حقيقية ويمكن قبول أجزاء من المنتج. مثلاً، إنتاج 10.15 طاولة، وهذا مستحيل ويمكن في هذه الحالة اللجوء إلى طرق أخرى مثل البرمجة الخطية بأعداد طبيعية.
5. اللاسلبية Non-Negativity: لا يمكن لمتغيرات القرار أن تأخذ قيماً سالبة انسجاماً مع طبيعتها. مثلاً، لا يمكن قبول إنتاج – 10 طاولات!

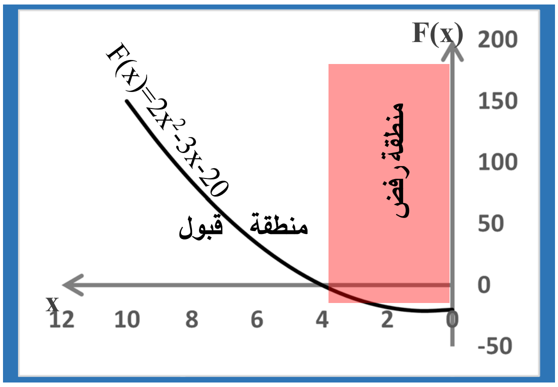
---

[3]. للمزيد عن البرمجة الخطية وتقنيات بحوث العمليات بشـكل عام، يُمكن العودة إلى كتاب الدكتور أديب كولو "بحوث العمليات: التقنيات الكمية في الإدارة". دمشق، الطبعة الثانية، 2006.

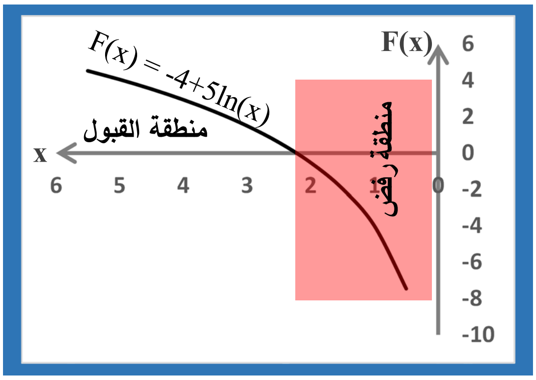
نجد في الشكل (3−9) بعض أشكال تمثيل قيود من صيغ رياضية مختلفة، حيث يبين الشكل منطقة الحلول المقبولة ومنطقة الحلول المرفوضة، مع الأخذ بالاعتبار أن x≥0 دوماً.



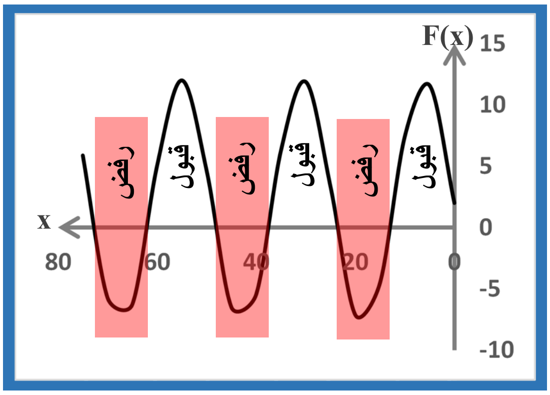
(أ) قيد خطي $3x - 6 \geq 0$
محقق عندما x≥2



(ب) قيد تربيعي $2x^2 - 3x -20 \geq 0$
محقق عندما x≥4



(ج) قيد لوغاريتمي $-4 + 5\ln(x) \geq 0$
محقق عندما x≥2.2255



(د) قيد جيبي $F(x) = 2 -10Sin\ x \geq 0$
محقق على عدة مجالات

الشكل (3−9) تمثيل القيود على شكل متراجحات

تطبيق (3−3): البحث عن نقطة التعادل بين الإيرادات والتكاليف.

تبلغ التكاليف الثابتة اليومية لأحد محلات الحلويات 5000 ل.س يومياً. كما تبلغ تكلفة إنتاج القطعة الواحدة 100 ل.س/قطعة. ويمكن بيع القطعة الواحدة بـ 150 ل.س/القطعة.

ليكن x عدد القطع المنتجة يومياً وليكن C(x) تابع التكاليف الكلية، وليكن R(x) تابع الإيرادات الإجمالية، وF(x) تابع الربح، والمطلوب:

1) ما هي صيغة تابع التكاليف الكلية C(x) ؟

2) ما هي صيغة تابع الإيرادات R(x) ؟

3) ما صيغة تابع الربح $F(x)$، ومتى يكون المحل رابحاً ؟

4) كم عدد القطع الواجب بيعها كي يستطيع المحل تغطية تكاليفه الثابتة؟

5) بين بالمخططات نقاط التعادل لتغطية التكاليف الثابتة والتكاليف الكلية.

الحل:

1) صيغة تابع التكاليف الكلية $C(x)$: التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

$$C(x) = 5000 + 100\,x$$

2) صيغة تابع الإيرادات $R(x)$: الإيرادات = عدد القطع المباعة x سعر بيع القطعة الواحدة

$$R(x) = 150\,x$$

3) عدد القطع التي يكون فيها المحل رابحاً: الربح = الإيرادات – التكاليف

$$F(x) = R(x) - C(x)$$

$$F(x) = 150\,x - [5000 + 100\,x]$$

$$F(x) = 50\,x - 5000$$

يكون المحل رابحاً عندما يكون $F(x) > 0$

أي $50\,x - 5000 > 0$ وبالتالي تكون $x > 100$

أي يبدأ المحل بتحقيق الأرباح عندما يبيع أكثر من 100 قطعة يومياً.

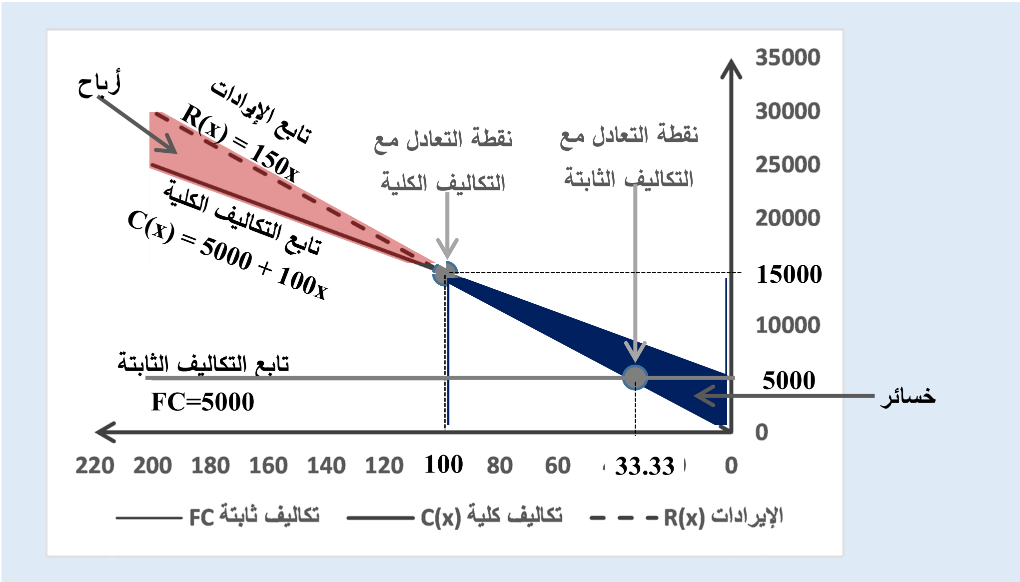
4) عدد القطع الواجب بيعها كي يستطيع المحل تغطية تكاليفه الثابتة

التكاليف الثابتة تساوي 5000، وبالتالي يجب أن يحقق إيرادات أكبر أو تساوي 5000 أي:

$$R(x) = 150\,x \geq 5000$$

أو $x \geq 5000/150 \geq 33.33$ أي يجب أن يكون عدد القطع لا يقل عن 34 قطعة (باعتبار أن x هي عدد طبيعي يمثل عدد القطع).

5) المخططات البيانية لإظهار نقطة التعادل بين افيرادات مع التكاليف الثابتة والتكاليف الكلية، كما هو مبين في الشـــكل (3–10)، حيث تتقاطع الخطوط البيانية بين الإيرادات من جهة والتكاليف الثابتة والمتغيرة من جهة أخرى.



الشكل (3−10) نقطة التعادل بين الإيرادات والتكاليف

3−3−2 الحل البياني لمشكلة تعظيم الربح بمتراجحات خطية

تطبيق (3−2) مشكلة تعظيم الربح Maximization

تُصنع شركة منتجين A, B، ويستخدم المنتجان نفس الموارد ولتكن رأس مال K، ساعات عمل L.

يتوفر لدى الشركة 124 وحدة من K، و 120 وحدة من L.

تربح الشركة 5$ من بيع كل قطعة من A ، ودولارين اثنين لكل قطعة من B.

يحتاج إنتاج كل قطعة من A إلى 3 واحدات من K، و 4 واحدات من L.

كما يحتاج إنتاج كل قطعة من B إلى 5 واحدات من K، و 3 واحدات من L.

والمطلوب: ما الكميات من A ومن B التي يمكن للشركة بيعها لتعظيم الربح؟

الحل:

ليكن A عدد القطع التي يمكن بيعها من المنتج الأول A، وليكن B عدد القطع التي يمكن بيعها من المنتج الثاني B.

تابع الربح $\text{Max}(P = 5A + 2B)$

القيود: قيد المورد K: $3A + 5B \le 120$

قيد المورد L: $4A + 3B \le 94$

قيود عدم السلبية على عدد القطع من A ومن B: $A \ge 0$ و $B \ge 0$

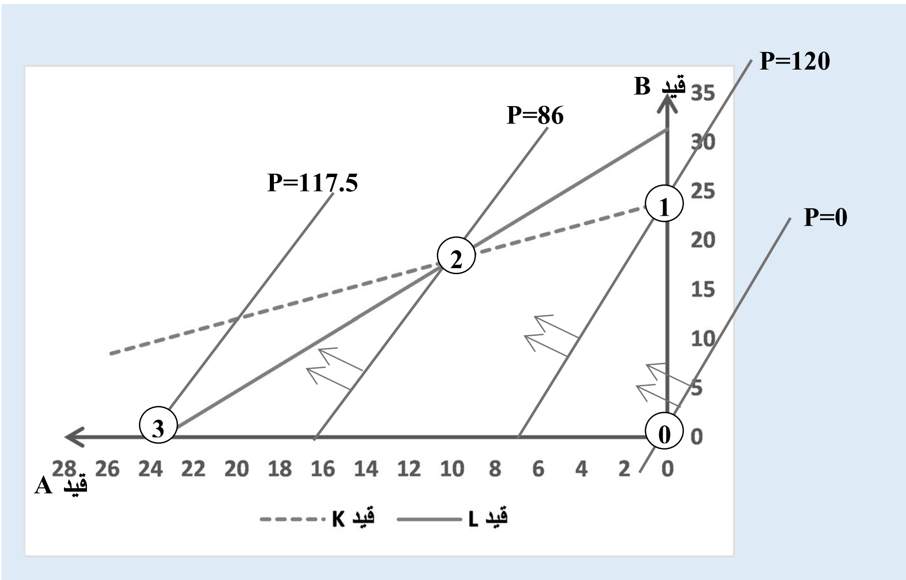
يتم رســم القيود B بدلالة A مثلاً، فتتحدد لدينا منطقة الحلول المقبولة وهي المنطقة المحصــورة بين النقاط 0 1 2 3 حيث تمثل كل منها نقطة تقاطع بين قيدين اثنين على الأقل كما هو موضح على الشكل (3–11).

في حين أن رسم التابع يبدو أكثر صعوبة، نلاحظ أن معادلة الربح $P = 5A + 2B$ حيث P هي قيمة محددة للربح من أجل قيم محددة لكل من المنتجين A, B، يمكن إعادة صـياغة هذه المعادلة لتصـبح B بدلالة A ومن أجل ربح ما P: $B = (-5/2)\ A + (P/2)$

إذاً ميل هذا المستقيم هو (-5/2) وتتغير نقطة تقاطعه مع المحور العمودي حسب قيم P، فالمستقيم الممثل للربح له ميل ثابت دوماً مهما كانت قيم الربح P، إذاً يمكن رسم عدة مستقيمات متوازية حسب قيم P، أي أن مستوى الربح ينتقل من قيمة إلى أخرى.

يتم رســم التابع الهدف بأخذ ميل التابع والبحث عن قيمة الزاوية المعبرة عنه، ثم رســم مســتقيم بنفس ويمر من نقطة أخرى من التابع ولتكن النقطة A=0, B=0 حيث الربح يســاوي الصــفر، ثم يتم رســم مســتقيمات موازية لهذا المســتقيم لكن من أجل قيم أكبر للربح، وآخر نقطة يتقاطع فيها المســتقيمات الممثلة للربح مع نقاط المنطقة المقبولة تكون هي نقطة الربح الأعظمي، نســـقط هذه النقطة على المحورين A, B، فتكون هذه المساقط هي قيم المنتجين A, B المقابلة لأكبر ربح ممكن.

نلاحظ من الشــكل أن آخر نقطة يتقاطع فيها أحد مســتقيمات الربح مع المنطقة المقبولة هي النقطة 3، وعند هذه النقطة يكون B=0 و A=23.5 وهي في الحقيقة نقطة التقاطع بين مســـتقيم المورد L والمحور الأفقي، ويكون الربح عندها يساوي 117.5 : $P = 5*0 + 2*23.5 = 117.5$.



الشكل (3–12) حل مشكلة برمجة خطية بقيدين اثنين

تطبيق (3−4) مشكلة تعظيم الربح Maximization بعدة خيارات

تنتج إحدى الشـــركات منتجين A, B وتبيع جميع ما تنتجه، حيث تربح من بيع كل قطعة من كلا المنتجين 200 ل.س/القطعة.

كما يستخدم المنتجين نفس المواد الأولية R، والعمالة L، والطاقة K كما يلي:

كل قطعة من A تستهلك 12 كغ من R، 10 ساعات من L، و15 وحدة من K.

كل قطعة من B تستهلك 21 كغ من R، 10 ساعات من L، و6 وحدة من K .

يتوفر لدى الشركة 252 كغ من R، و 150 ساعة عمل، و 80 وحدة طاقة K.

ما الكميات التي يُمكن إنتاجها من A, B بحيث يكون الربح أعظم ما يُمكن؟

الحل:

ليكن x عدد القطع التي تبيعها من A، و y عدد القطع التي تبيعها من B.

تابع الربح: $Z = 200x + 200\ y$

القيود:

قيد المواد الأولية R: $12x + 21y \le 252$

قيد ساعات العمل L: $10x + 10y \le 150$

قيد وحدات الطاقة K: $15x + 6y \le 180$

قيد عدم السلبية على عدد القطع: $x\ge0$ ، $y\ge0$

نلاحظ على الشـــكل البياني أن منطقة الحلول المقبولة أي التي تحقق جميع القيود الســـابقة، هي المنطقة المحصورة بين مبدأ الإحداثيات 0 والنقاط 1، 2، 3، 4،

نعلم من أجل أي نقطـة (حل مقبول) داخل المنطقـة المقبولـة، هنـاك نقطـة واحدة على الأقل (حل مقبول) على حدود المنطقة أفضـــل منه، لذلك فالحل الأمثل متواجد على حدود المنطقة، وكون هذه المنطقة محدبة، فإن نقاطع التقاطع بين القيود هي أفضـل من النقاط (الحلول) الواقعة بين كل نقطتي تقاطع، ومنه نجد أن الحل الأمثل هو أحد نقاط تقاطع القيود، تتحدد هذه النقطة الممثلة للحل الأمثل حسب ميل التابع الهدف.

ميل التابع الهدف يُحسب بإعادة صياغة معادلة Z على الشكل $y = x + (Z/200)$

أي ميل المستقيم y يساوي الواحد، وبالتالي الزاوية التي يصنعها مع المحور الأفقي تساوي 45 درجة.

نرسم المستقيمات متساوية الميل (متوازية) والممثلة للتابع y من أجل قيم مختلفة للربح Z، ونستمر بزيادة قيمة الربح Z حتى آخر نقطة يتقاطع فيها أحد هذه المستقيمات مع المنطقة المقبولة، فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

أو نقارن بين أرباح النقاط الأربعة الممثلة للتقاطع بين القيود، ونأخذ النقطة التي تُحقق أكبر ربح ممكن، كما يلي:

مبدأ الإحداثيات: نقطة تقاطع قيدي عدم السلبية، فنجد $x=0, y=0$ ويكون الربح يساوي الصفر:

$$Z = 200*0 + 200*0 = 0$$

النقطة1: تقاطع القيد R مع قيد عدم سلبية x فنجد $x=0, y=12$، ويكون الربح يساوي 2400:

$$Z = 200*0 + 200*12 = 2400$$

النقطة2: تقاطع القيدين L و R فنجد $x=8, y=8$، والربح يساوي 3000:

$$Z = 200*7 + 200*8 = \mathbf{3000}$$

النقطة3: تقاطع القيدين L و K ونجد $x=10, y=5$، والربح يساوي 3000:

$$Z = 200*10 + 200*5 = \mathbf{3000}$$

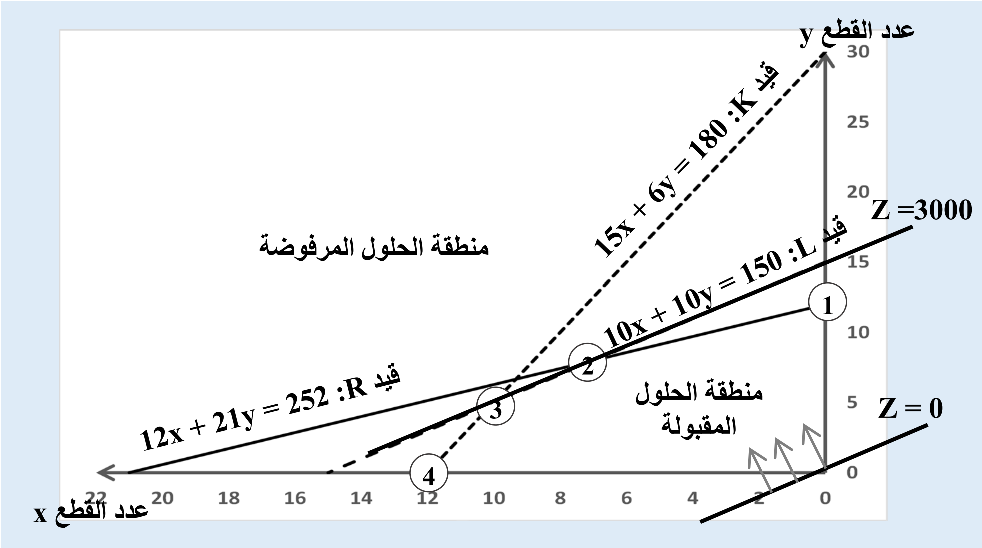
النقطة4: تقاطع القيد K مع قيد عدم سلبية y، ونجد $x=15, y=0$، والربح يساوي 2400:

$$Z = 200*12 + 200*0 = 2400$$

نجد أن النقطتين 2 و 3 تحققان نفس الربح الأعظمي 3000، وأيضاً أية نقطة تقع على خط القيد L تُحقق نفس قيمة الربح 3000.

يمكن أن نلاحظ أن ميل مستقيم هذا القيد L يساوي الواحد، أي أنه يوازي مستقيم الربح y، وعندما يصل مستقيم الربح إلى نقطتي التقاطع 2 و 3 فإنه ينطبق تماماً على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين، بالتالي جميع النقاط الواقعة على هذه القطعة المستقيمة تحقق نفس الربح 3000.

بمعنى اقتصادي أن المُنتج لديه خيارات عديدة بين الخيارين 2 و 3 وجميعها تُحقق نفس الربح الذي يساوي 3000.



الشكل (3–9) الحل البياني لمشكلة تعظيم ربح بعدة خيارات Max

3–3–3 الحل البياني لمشكلة تقليل التكاليف بمتراجحات خطية

تطبيق (3–5) مشكلة تقليل التكاليف Minimization

تُصنع إحدى الشركات منتجين اثنين A, B، وكل من المنتجين يستخدم نفس المواد X, Y, Z كما يلي:

كل قطعة من A تحتاج 50 غرام من X، و 10 غرام من Y، و 15 غرام من Z

كل قطعة من B تحتاج 20 غرام من X، و 10 غرام من Y، و 50 غرام من Z

لا يمكن شراء/استهلاك أقل من 100 غرام من X، و 30 غرام من Y، و 75 غرام من Z.

كل قطعة من A تكلف 2 ل.س، وكل قطعة من B تكلف 6 ل.س

ما الكميات الواجب إنتاجها من A, B بحيث يكون التكاليف أقل ما يمكن؟

الحل:

ليكن A عدد القطع التي تنتجها من A، و B عدد القطع التي تنتجها من B.

تابع التكلفة: $Z = 3A + 6B$ والمطوب أصغر قيمة أي Min (Z).

القيود: قيد المادة X: $50A + 20B \geq 100$

قيد المادة Y: $10A + 10B \geq 30$

قيد المادة Z: $15A + 50B \geq 75$

قيود عدم السلبية على عدد القطع: $B\geq0$ ، $A\geq0$

لحساب ميل تابع التكلفة $Z = 3A + 6B$، تعيد صياغته ليُصبح $B = (3/6) A + (Z/6)$

فالميل (ظل الزاوية التي يصنعها مع المحور الأفقي A) يساوي 0.5، نبحث في الجداول المثلثية عن قيمة الزاوية فنجد أنها تســــاوي حوالي 27 درجة، انطلاقاً النقطة (0 ,0) باعتبارها معروفة وهي حل غير مقبول، باستخدام المنقلة، نرسم مستقيم بزاوية 27 درجة مع المحور الأفقي كما يبين الشكل (3−10) حيث $Z=0$.

لإيجاد الحل الأمثل نرسم مستقيمات موزاية للمستقيم $Z=0$، بحيث تزداد قيمة Z (التكاليف) حتى أول نقطة يمر بها من منطقة الحلول المقبولة، فتكون Z عند هذه النقطة أقل التكاليف الممكنة وهي الحل الأمثل. أو ننطلق من أي مستقيم في منطقة الحلول المقبولة ونرسم مستقيمات موازية له بحيث تقل قيمة Z، ثم نأخذ أول نقطة يتقاطع فيها أحد المستقيمات مع نقاط حدود المنطقة المقبولة.

كما أشــرنا في حل مشــكلة التعظيم Max، فإن الحل الأمثل يقع على حدود منطقة الحلول المقبولة، وهو أحد نقاط تقاطع القيود: 4 ,3 ,2 ,1، لذلك يكفي حساب قيمة تابع التكاليف Z عند النقاط الأربعة أو أخذ النقطة التي تُحقق أقل تكلفة:

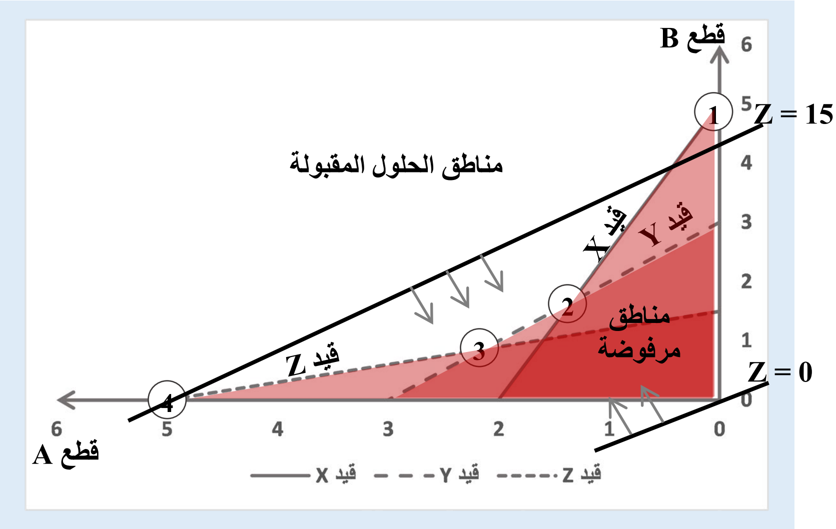
النقطة 1: تقاطع القيدين $A=0$ و $50A+20B=100$، فتكون $A=0$ و $B=5$، والتكلفة تساوي 30: $Z = 3*(0) + 6*(5) = 30$.

النقطة 2: تقاطع القيدين X و Y أي $10A+10B=30$ و $50A+20B=100$، بحل هاتين المعادلتين نجد: $A=4/3$ و $B=5/4$، والتكلفة تساوي 11.5: $Z = 3*(4/3) + 6*(5/4) = 11.5$.

النقطة 3: تقاطع القيدين Z و Y أي $10A+10B=30$ و $15A+50B=75$، بحل هاتين المعادلتين نجد: $A=15/7$ و $B=6/7$، والتكلفة تســـاوي 11.57: $Z = 3*(15/7) + 6*(6/7) = 11.57$.

النقطة 4: تقاطع القيدين Z و Y أي $B=0$ و $15A+50B=75$، نجد: $A=5$ و $B=0$، والتكلفة تساوي 15: $Z = 3*(5) + 6*(0) = 15$.

بمقارنة قيم Z وأخذ الأقل بينها، نجد أن أقل ربح ممكن هو Z=11.5 عند النقطة 2 حيث A=4/3 و B=5/4 ويُمثل الحل الأمثل.



الشكل (3–10) الحل البياني لمشكلة تقليل التكلفة Min

أسئلة واختبارات الفصل الثالث: المتراجحات وتطبيقاتها

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي موجب تماماً لا يغير اتجاه المتراجحة.	✓	
2	ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي لا يغير اتجاه المتراجحة.		✓
3	قلب طرفي المتراجحة يغير اتجاه المتراجحة.	✓	
4	جمع متراجحين من نفس الاتجاه يعطي متراجحة جديدة لها نفس الاتجاه.	✓	
5	ضرب متراجحين من نفس الاتجاه يعطي متراجحة جديدة لها نفس الاتجاه.		✓
6	حل متراجحة يعني إيجاد قيم متغيراتها التي لا تحقق المتراجحة.		✓
7	المتراجحة $2x^2 + 5 > 0$ هي محققة دوماً.	✓	
8	حل المتراجحة $3x - 12 < 0$ هو $x > 4$.		✓
9	يمكن تمثيل قيود الموارد الاقتصادية على شكل متراجحات أو معادلات.	✓	
10	يمكن عبر التمثيل البياني إيجاد جميع أنواع المتراجحات مهما كان عدد متغيراتها.		✓

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- إن ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي c يؤدي إلى:

أ) تغيير اتجاه المتراجحة
ب) لا يغير اتجاه المتراجحة
ج) حسب إشارة العدد c
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- إن إضافة عدد حقيقي c إلى طرفي المتراجحة يؤدي إلى:

أ) تغيير اتجاه المتراجحة
ب) لا يغير اتجاه المتراجحة
ج) حسب إشارة العدد c
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- حلول المتراجحة $2x - 3 > x + 5$ هي:

أ) $x = 8$
ب) $x < 8$
ج) $x > 8$
د) جميع الأجوبة خاطئة

4- حلول المتراجحة $x^2 > 0$ هي:

أ) مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر
ب) $x = 0$ و $x > 1$
ج) $x = 0$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- لدينا المتراجحة $2x^2 + 3x - 7 > 0$ فإن القيمة $x = 2$:

أ) تُحقق المتراجحة
ب) لا تُحقق المتراجحة
ج) حسب إشارة المميز Δ
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- لدينا المتراجحة $x^2 + x > 20$ فإن القيمة $x = 4$:

أ) تُحقق المتراجحة
ب) لا تُحقق المتراجحة
ج) حسب إشارة المميز Δ
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- لدينا المتراجحة $\frac{x^2-9x}{2x+1} < 0$ فإن القيمة $x = 1$:

أ) تُحقق المتراجحة
ب) لا تُحقق المتراجحة
ج) حسب إشارة مميز المقام Δ
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- لدينا جملة المتراجحتين $(x - 1 > 0)$ و $(2x < 4)$ فإن القيمة $x = -2$:

أ) حل مشترك للمتراجحتين
ب) لا تُحقق المتراجحتين معاً
ج) حسب اتجاه المتراجحتين
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- لدينا جملة المتراجحتين $(x^2 - 9 \geq 0)$ و $(x - 3 < 0)$ فإن القيمة $x = 6$:

أ) حل مشترك للمتراجحتين
ب) لا تُحقق المتراجحتين معاً
ج) حسب اتجاه المتراجحتين
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (3-1) حل المتراجحة الآتية: $x^2 - 1 \geq 2x - 2$

السؤال (3-2) حل المتراجحة الآتية: $\frac{-x+1}{2x^2-4x+1} \leq 1$

السؤال (3-3) حل المتراجحة الآتية: $|x^2 - 1| \geq 0$

السؤال (3-4) حل جملة المتراجحتين: الأولى: $x^2 - 4 \geq 0$ الثانية: $5x - 1 < 4x$

السؤال (3-5). تطبيق مساحة إعلانية.

تبلغ تكلفة الإعلان في أحد المجلات المرموقة 10 آلاف ل.س بالإضافة إلى 100 ل.س لكل سم^2. والمطلوب:

1) كتابة صيغة تكلفة إعلان مساحته x سم^2 بدلالة التكلفة.

2) لدينا شـــركة موازنة الإعلان لديها محددة بين 50 ألف ل.س، و 60 ألف ل.س، ما هي حجم المســـاحات الإعلانية التي يمكن للشركة حجزها؟

(توجيهات للإجابة: صياغة وحل متراجحة من الدرجة الأولى. الفقرة 3-2)

السؤال (3-6): البحث عن نقطة التعادل بين الإيرادات والتكاليف.

تبلغ التكاليف الثابتة لأحد معامل المفروشــات 100 ألف ل.س شــهرياً. كما تبلغ تكلفة إنتاج القطعة الواحدة 50 ألف ل.س/قطعة. ويمكن بيع القطعة الواحدة بـــــ 75 ألف ل.س/القطعة. ليكن x عدد القطع المنتجة يومياً وليكن C(x) تابع التكاليف الكلية، وليكن R(x) تابع الإيرادات الإجمالية، وF(x) تابع الربح، والمطلوب:

1) ما صيغة تابع التكاليف الكلية C(x) ؟

2) ما صيغة تابع الإيرادات R(x) ؟

3) ما صيغة تابع الربح F(x)، ومتى يكون المعمل رابحاً ؟

4) كم عدد القطع الواجب بيعها كي يستطيع المحل تغطية تكاليفه الثابتة؟

(توجيهات للإجابة: صياغة التوابع، حل متراجحة الربح أكبر من الصفر . الفقرة 3-2)

الفصل الرابع: المتتاليات العددية وتطبيقاتها

عنوان الموضوع: المتتاليات العددية وتطبيقاتها Series and its Applications

كلمات مفتاحية:

المتتالية Serie، المتتالية العددية Numerical Serie، المتتالية الهندســية Geometric Serie، نهاية متتالية Serie's Limit، مجموع متتالية Sum of Serie's، متتالية متقاربة Convergent Serie، القيمة المســـتقبلية Future Value، القيمة الحالية Present Value.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل المفاهيم الرئيسة للمتتالية العددية وقواعدها وتطبيقاتها المتنوعة في العلوم الاقتصادية والإدارية، حيث سيتم تعريف المتتالية كتطبيق عددي، والتعامل مع المتتاليات الخاصة مثل الحسابية أو الهندسية، وتعريف تقارب متتالية، وكيفية البحث عن مجموع ونهاية المتتالية، كما ســـيتم اســـتعراض عدد من التطبيقات الإدارية والاقتصادية من مجالات عديدة.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يتذكر مفاهيم المتتالية العددية وأهميتها في العلوم الاقتصادية.
2. يميز بين المتتالية الحسابية والهندسية ويوجد صيغتها ونهايتها.
3. يتمكن من البحث عن نهاية متتالية عددية من أشكال مختلفة.
4. يحسب مجموع حدود متتالية عددية.
5. يحسب القيمة الحالية والقيمة المستقبلية لسلسلة تدفقات مالية.
6. يستخدم مفاهيم وقواعد المتتاليات العددية لشرح بعض الظواهر الاقتصادية.

مخطط الفصل:

1-4 مفاهيم المتتاليات العددية Concepts of Series.

2-4 المتتالية الحسابية Numerical Serie.

3-4 المتتالية الهندسية Geometric Serie .

4-4 نهاية متتالية Serie's Limit.

1-4 مفاهيم المتتالية العددية

المتتالية/المتسـلسـلة العددية[4] هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N ومسـتقره مجموعة الأعداد الحقيقية R أو أية مجموعة جزئية منها. نرمز للمتتالية بالشكل:

$$U: N \to R$$
$$N \to U_n = U(n)$$

ندعو U_n الحد العام للمتتالية من المرتبة n.

يمكن التعبير عن المتتالية بعلاقة تدريجية بين حدودها المتجاورة، حيث نضع الحد العام للمتتالية U_n بدلالة الحد الذي يسبقه U_{n-1}.

نقول عن متتالية U_n أنها متزايدة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n\in N, U_{n+1} > U_n$.

نقول عن متتالية U_n أنها متناقصة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n\in N, U_{n+1} < U_n$.

مثال (4–1)، أمثلة عن بعض المتتاليات:

(أ) سلسلة الأعداد 2، 4، 6، 8، ... تشكل متتالية عددية، قد يراها البعض الأرقام الزوجية أو كل عدد هو العدد الذي يسبقه مضافاً إليه 2.

ب) المتتالية $U_n = 2n^2 + 1$ تأخذ قيمها كما يلي:

$$U_1 = 2*(1)^2 + 1 = 3 \qquad U_2 = 2*(2)^2 + 1 = 9$$
$$U_3 = 2*(3)^2 + 1 = 19 \qquad \ldots$$
$$U_{10} = 2*(10)^2 + 1 = 201 \qquad \ldots$$

ت) سلسلة الأعداد الطبيعية 1، 2، 3، 4، ... تشكل بحد ذاتها متتالية، منطلقها N ومستقرها N حيث كل حد هو الحد السابق مضافاً إليه العدد 1. حدها العام $U_{n+1} = U_n + 1$.

ث) سلسلة الأعداد حيث كل عدد هو ضعف العدد الذي يسبقه تشكل متتالية عددية، ويمكن كتابة حدها العام على الشكل $U_{n+1} = 2U_n$.

مثال (4–2) إيجاد أحد الحدود الناقصة من متتالية.

ليكن لدينا جدول التكاليف C(x) بدلالة عدد القطع المنتجة يومياً x كما يلي:

---

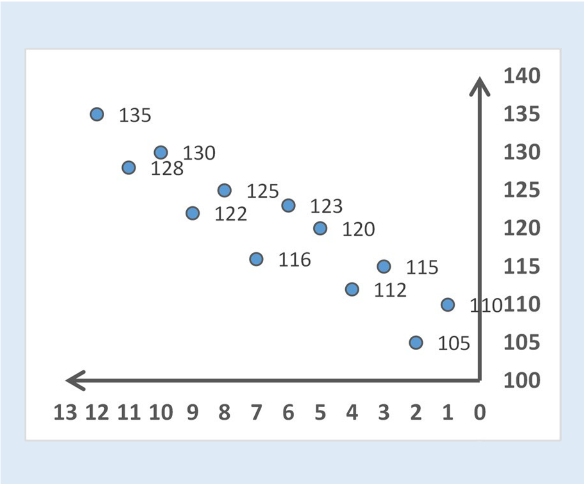
4. يستخدم بعض المؤلفين مصطلح متسلسلة عددية للتعبير عن نفس مفهوم المتتالية العددية Serie, Sequence، سوف لن نميز بين المصطلين في هذه الأملية.

تقترب x من الحد 14 من اليسار →						← تقترب x من الحد 14 من اليمين			
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C(x)	50	55	60	65	؟؟	75	80	85	90

يمكن أن نستنتج أن التكاليف $C(x)$ عند $x=14$ تساوي 70 سواء اقتربت x من القيمة 14 من اليمين أو من اليسار، وبالتالي نعتبر أن نهاية $C(x)$ تساوي 70 عندما تقترب x من 14.

مثال (4-3) سلسلة المبيعات الأسبوعية.

تم خلال الأشهر الأخيرة تسجيل حجم المبيعات الأسبوعية، فحصلنا على الجدول الآتي:



رقم الأسبوع	المبيعات
1	110
2	105
3	115
4	112
5	120
6	123
7	116
8	125
9	122
10	130
11	128
12	135

الشكل (4-1) متتالية عددية تمثل مبيعات أسبوعية

ملاحظة: لن نتعرض في هذا الفصل إلى بعض الأشكال المهمة من المتتاليات العددية بشكل خاص السلاسل الزمنية، حيث لاحظنا أنه يتم دراستها بشكل موسع في مقررات أخرى.

2-4 المتتالية الحسابية

نقول عن متتالية عددية U_n أنها حسابية Arithmatic Serie إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت.

ونكتبها بالشكل $U_{n+1} = U_n + q$ حيث q عدد ثابت ندعوه أساس المتتالية، قد يكون q موجب أو سالب أو حتى يأخذ الصفر وفي هذه الحالة الأخيرة تصبح المتتالية هي نفسها.

كما يمكن كتابة الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل $U_n = U_1 + n.q$ حيث U_1 هو الحد الأول و q هو أساس المتتالية.

من الضــروري الانتباه إلى ترقيم الحد الأول بالرقم صــفر أو الواحد، إذا بدأ الترقيم بالصــفر يعني أن الرقم 0 قد لا يُفهم منه المصـــطلح اللغوي "الحد الأول"، وفي هذه الحالة عندما نقول الحد n=3 مثلاً فهذا يعني أن عدد الحدود هو أربعة حدود وليس 3 كما يُشـــير العدد n=3. في حين إذا بدأ الترقيم بالعدد 1 للحد الأولى، يكون الحد الثالث هو عندما n=3، لذلك يُنصح بدء الترقيم بالواحد.

بعض خصائص المتتالية الحسابية:

(1) الفرق بين أي حدين متتاليين $(U_{n+1} - U_n)$ هو ثابت ويســـاوي q. لمعرفة إذا كانت المتتالية حســابية أم لا، يكفي أن نأخذ الفرق بين كل حدين متتاليين، فإذا كان الفرق دوماً ثابت نسـتنتج أن المتتالية حسابية، وبأن أساس المتتالية q يساوي هذا الفرق.

(2) أي حد من حدود المتتالية الحسابية هو متوسط الحدين المجاورين له (الحد السابق له والحد التالي) أي $U_n = \frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$.

(3) كل متتالية حسابية أساسها موجب تكون متزايدة.

(4) كل متتالية حسابية أساسها سالب تكون متناقصة.

(5) مجموع أول N حد لمتتالية حسابية S_N يُعطى بالصيغة الآتية:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} U_i = U_1 + U_1 + \cdots + U_N = n.\frac{U_1 + U_N}{2} = n.\frac{2U_1 + (N-1)q}{2}$$

(6) مجموع أول N حد من متتالية الأعداد الطبيعية $U_n=n$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

(7) مجموع أول N حد من متتالية الأعداد الطبيعية الزوجية $U_n=2n$:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2N = N(N+1)$$

(8) مجموع أول N حد من متتالية الطبيعية الفردية $U_n=2n+1$ و n تبدأ من الصفر:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2N-1) = N^2$$

مثال (4–4). أمثلة عن متتالية حسابية.

(أ) لدينا المبيعات الأسبوعية كما يلي:

الأسبوع الأول: 2000، الثاني: 5000، الثالث: 8000، الرابع 11000، ...

تشكل هذه المبيعات متتالية حسابية أساسها q=3000. حدها العام $U_{n+1} = U_n + 3000$.

يمكن إيجاد مبيعات الأسبوع الخامس كما يلي: $U_5 = U_4 + q = 11000 + 3000 = 14000$

(ب) سجلنا على مدى عدة أيام الاتصالات الواردة إلى مقسم الاستعلامات في الشركة فكانت لدينا عدد الاتصالات الآتية: اليوم الأول 40، الثاني 35، الثالث 30، الرابع 25، ...

تبدو هذه المتتالية حسابية حيث أساسها سالب ويساوي $q=-5$ وحدها العام هو $U_{n+1} = U_n - 5$.

كما يمكن معرفة متى تنعدم الاتصالات إلى المقسم، وذلك بحساب قيم حدود المتتالية بالتدرج حتى نصل إلى القيمة صفر، مع الإشارة إلى أنه لا يمكن أن يكون هناك اتصالات سلبية أي $U_n \geq 0$، وبالحساب نجد أنه في اليوم التاسع تكون $U_n=0$ أي تنعدم الاتصالات لمقسم الشركة وتحسب كما يلي:

$U_n = U_0 + nq$ مع الانتباه إلى أن الحد الأول رقم ترتيبه هو الصفر.

بحل المعادلة $40 - 5q = 0$ نجد $n=8$ وهو الحد التاسع، بدء التعداد من الصفر وليس الواحد.

(ت) اكتب الحدود الأولى للمتتالية العددية الآتية $U_n = 2n^2 + n - 10$ واستنتج إن كانت حسابية أم لا؟

رقم الحد n	1	2	3	4	5	...
قيمة المتتالية Un	7−	0	11	26	45	...
الفرق $U_n - U_{n-1}$		**7**	**11**	**15**	**19**	...

نلاحظ أن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس ثابتاً، فالمتتالية ليست حسابية.

(ت) استنتج الحد العام للمتتالية الحسابية الآتية:

المتتالية: 0، −2، −4، −6، −8، ...،

نلاحظ أن المتتالية تتناقص بشكل منتظم، أي أن الفرق بين كل حدين متتاليين هو دوماً ثابت ويساوي 2- فيكون هو أساس المتتالية $q = -2$.

وبالتالي الحد العام يُكتب بالشكل: $U_{n+1} = U_n - 2$.

مثال (4−5). مجموع أول N حد لمتتالية حسابية.

(أ) لنأخذ بيانات المثال السابق (4−4، ب) لحساب مجموع الاتصالات خلال الأيام التسعة الأولى، بتطبيق الصيغة أعلاه، نجد أنها تساوي 180 اتصال $S_9=180$:

$$S_9 = \sum_{i=1}^{9} U_i = 40 + 35 + \cdots + 0 = 9 * \frac{40 + 0}{2} = 180$$

(ب) لنأخذ بيانات المثال السـابق (4–4، ث) لحسـاب مجموع الحدود الخمسـة الأولى، بتطبيق الصيغة أعلاه، نجد أنها تساوي $S_5 = -40$:

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} U_i = 0 - 2 + \cdots - 8 = 5 * \frac{0 - 8}{2} = -40$$

3-4 المتتالية الهندسية

نقول عن متتالية U_n أنها هندسية Geometric Serie إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بالضرب بعدد ثابت q. ونكتب حدها العالم بالشكل $U_{n+1} = q.U_n$ حيث q عدد حقيقي ندعوه أساس المتتالية.

قد يكون q موجب أو سالب أو حتى الصفر، وفي هذه الحالة الأخيرة تنعدم حدود المتتالية.

كما يمكن كتابة الحد العام للمتتالية الهندسـية بالشـكل $Un = q^n.U_1$ حيث U_1 هو الحد الأول و q أساس المتتالية.

بعض خصائص المتتالية الهندسية:

(1) ناتج قسمة كل حدين متتاليين (U_{n+1}/U_n) هو دوماً ثابت ويساوي أساس المتتالية q. لمعرفة فيما إذا كانت المتتالية هندسية، يكفي أن نأخذ ناتج القسمة فإن كان ثابتاً دوماً نستنتج أن المتتالية هندسية، وبأن أساس المتتالية q يساوي هذا الناتج.

(2) كل متتالية هندسية أساسها موجب وأكبر من الواحد تكون متزايدة.

(3) كل متتالية هندسية أساسها موجب وأصغر من الواحد تكون متناقصة.

(4) كل متتالية هندسية أساسها سالب تكون غير متزايدة وغير متناقصة.

(5) جداء الحد الأول U_1 بالحد الأخير U_n يسـاوي جداء الحد الثاني U_2 بالحد ما قبل الأخير U_{n-1}، وكذلك يساوي جداء الحد الثالث U_3 بالحد الذي يسبق ما قبل الأخير U_{n-2}، ... وهكذا نجد أن الصيغة الآتية محققة دوماً: $U_1.U_n = U_2.U_{n-1} = U_i.U_{n-i+1}$.

(6) أي حد من حدود المتتالية الهندســـية U_n هو الجذر التربيعي لجداء الحدين الذي يســـبقه U_{n-1} والذي يليه U_{n+1}، والصيغة الآتية محققة دوماً: $U_n = \sqrt{U_{n-1}.U_{n+1}}$.

(7) مجموع أول N حد لسلسة هندسية U_n حدها الأول u_1 وأساسها q بالصيغة:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} U_i = u_1\left(\frac{q^N-1}{q-1}\right) = \frac{q.U_N-U_1}{q-1} \quad \text{حيث} \quad q \# 1$$

(8) لتكن U_n متتالية هندســـية غير منتهية، وليكن S_n مجموع أول n حد من حدودها، فإن مجموع المتتالية $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{U_1}{1-q}$ متقارب عندما تسعى n إلى اللانهاية إذا كان $|q|<1$.

(9) مجموع المتتالية الهندسية $U_{n+1}=(1/2)U_n$ عندما $n\to\infty$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$$

مثال (4–6). بعض الأمثلة عن متتاليات هندسية.

(أ) لدينا متتالية الأعداد 1، 2، 4، 8، 16، ...

نلاحظ أن كل عدد هو ضعف الذي يسبقه، بالتالي تشكل هذه الأعداد متتالية هندسية حدها الأول $U_1=1$ وأساسها $q=2$. وحدها العام $U_{n+1} = 2U_n$.

(ب) متتالية الأعداد $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$ هي متتالية هندسية

نلاحظ أن كل عدد هو ثلث العدد الذي يســـبقه، بالتالي فهي متتالية هندســـية حدها الأول $U_1=1/2$ وأساسها $q=(-1/3)$ والحد العام $U_{n+1} = (-1/3)\ U_n$

مثال (4–7) بعض الأمثلة عن مجموع متتالية هندسية.

(أ) مجموع أول 5 حدود للمتتالية في المثال (4–6، أ) أعلاه:

$S_5 = 1+2+4+8+16 = 31$ أو حسب الصيغة $S_5 = 1\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right) = 31$

(ب) مجموع أول 5 حدود للمتتالية في المثال (4–6، ب) أعلاه:

$$S_5 = \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{18}+\left(-\frac{1}{54}\right)+\frac{1}{162}=\frac{61}{162}=0.3765$$

$$S_5 = \frac{1}{2}.\left(\frac{(-\frac{1}{3})^5-1}{(-\frac{1}{3})-1}\right)=0.3765$$

تطبيق (4−1): القيمة المستقبلية لجملة دفعات مالية دورية متساوية كمتتالية هندسية.

إذا كان لدينا جملة من الدفعات الدورية المتساوية ولتكن قيمة الدفعة A، ولمدة n فترة، وبفائدة مركبة t ثابتة في جميع الفترات، فإنه يمكن مقاربة حساب القيمة المستقبلية Furure Value لهذه الدفعات الدورية كمتتالية عددية تتميز بما يلي:

1. لدينا دفعة أولى قيمتها $A_0 = A$،
2. القيمة المستقبلية للدفعة في نهاية الفترة الأولى: $FV_1 = A\ (1+t)$
3. القيمة المستقبلية للدفعة الثانية: $FV_2 = A\ (1+t)^2 = FV_1\ (1+t)$

   أي هي القيمة المستقبلية للدفعة الأولى FV_1 مضروباً بـ $(1+t)$.
4. القيمة المستقبلية للدفعة الثالثة: $FV_2 = A\ (1+t)^3 = FV_2\ (1+t)$

   أي هي القيمة المستقبلية للدفعة الثانية FV_2 مضروباً بـ $(1+t)$.
5. بشكل عام، القيمة المستقبلية للدفعة في الفترة i أي FV_i هي القيمة المستقبلية للدفعة التي تسبقها FV_{i-1} مضرباً بـ $(1+t)$: $FV_i = A\ (1+t)^i = FV_{i-1}\ (1+t)$

نلاحظ أن هذه القيم المستقبلية تشكل متتالية هندسية أساسها $q=(1+t)$، وحدها الأول A، وعدد الدفعات منتهي ويساوي n، وبالتالي فإن مجموع القيم المستقبلية لهذه الدفعات FV:

$$FV = A + A(1+t) + A(1+t)^2 + A(1+t)^3 + \ldots + A(1+t)^n$$

$$FV = \sum_{i=1}^{n} A(1+t)^i$$

يمكن حساب هذا المجموع بتطبيق صيغة مجموع متتالية هندسية: $S = U_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

حيث الحد الأول هو $U_1 = A$، وأساس المتتالية $q = (1+t)$. و n: أول n من حدودها.

بتطبيق هذه الصيغة على مجموع القيم المستقبلية لسلسلة دفعات متساوية:

$$S = A\left(\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}\right) = A\left(\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right)$$

بإعادة ترتيب الصيغة حيث S هو القيمة المستقبلية لجميع الدفعات الدورية FV:

$$FV = \sum_{i=1}^{n} A(1+t)^i = A\left(\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right)$$

مثال عددي: لنفترض أنك حصلت على قرض قسطه الشهري 100 ألف ل.س ولمدة 6 أشهر، وبفائدة شهرية 2%، فما القيمة المستقبلية لهذا القرض؟

لدينا الدفعة الشهرية A=100، عدد الفترات n=6، معدل الفائدة الشهري t=0.02

الدفعة الشهرية المفترض أنها تساوي 100 ألف هي في الحقيقة محسوبة في بداية الشهر، في حين عندما نقول ستة أشهر يُقصد بها في نهاية الشهر السادس وكأن هناك فوائد شهر واحد يجب أن تضاف للدفعة، لذلك يجب إعادة حساب الدفعة لتكون في نهاية الشهر، أي يجب إضافة فوائد شهر واحد على هذه الدفعة لتصبح 102 ألف وليس 100: 102=0.2*100+100. أي عدّاد الأشهر n يبدأ من الواحد وليس من الصفر.

بتطبيق الصيغة أعلاه، نجد القيمة المستقبلية المكافئة للقرض تساوي 630.812 ل.س:

$$FV = A\left(\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right) = 102\left(\frac{(1+0.02)^6 - 1}{0.02}\right) = 102 * 6.30812 = 643.428$$

تجدر الإشارة إلى أنه في حال حساب مبلغ الفائدة الشهرية وإضافتها إلى القسط الشهري ثم ضرب الناتج بستة أشهر، نحصل على قيمة مستقبلية تساوي 612 ألف: = 6*(100*0.2+100) 612.000، والفرق بين هذه القيمة والقيمة التراكمية السابق FV هو فوائد الفوائد.

تطبيق (4–2): القيمة الحالية لجملة دفعات مالية دورية متساوية كمتتالية هندسية.

يمكن استخدام نفس المحاكمة في التطبيق السابق (4–1) لاستخراج صيغة القيمة الحالية Present Value لجملة من الدفعات الدورية المتساوية، كما يلي:

6. لدينا دفعة أولى قيمتها $A_0 = A$،
7. القيمة الحالية لدفعة في نهاية الفترة الأولى: $PV_1 = \frac{A}{(1+t)}$
8. القيمة الحالية للدفعة الثانية: $PV_2 = \frac{A}{(1+t)^2} = \frac{\frac{A}{(1+t)}}{(1+t)} = \frac{PV_1}{(1+t)} = PV_1 \frac{1}{(1+t)}$

   أي هي القيمة الحالية للدفعة الأولى PV_1 مضروباً بـ $\frac{1}{(1+t)}$.
9. القيمة الحالية للدفعة الثالثة: $PV_3 = \frac{A}{(1+t)^3} = \frac{\frac{A}{(1+t)^2}}{(1+t)} = \frac{PV_2}{(1+t)} = PV_2 \frac{1}{(1+t)}$

   أي هي القيمة الحالية للدفعة الثانية PV_2 مضروباً بـ $\frac{1}{(1+t)}$.

10. بشكل عام، القيمة الحالية للدفعة في الفترة i أي PV_i هي القيمة الحالية للدفعة التي تسبقها FV_{i-1} مضرباً بـ $\frac{1}{(1+t)}$:

$$PV_i = \frac{A}{(1+t)^i} = \frac{\frac{A}{(1+t)^{i-1}}}{(1+t)} = \frac{PV_{i-1}}{(1+t)} = PV_{i-1}\frac{1}{(1+t)}$$

نلاحظ أن هذه القيم الحالي تشكل متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{(1+t)}$ ، وحدها الأول A، وعدد الدفعات منتهي ويساوي n، وبالتالي فإن مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات PV:

$$PV = A + \frac{A}{(1+t)} + \frac{A}{(1+t)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+t)^n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+t)^i} = A.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+t)^i}$$

يمكن حساب هذا المجموع بتطبيق صيغة مجموع متتالية هندسية: $S = U_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

حيث $U_1=A$: هو الحد الأول للمتتالية. وأساس المتتالية $q = \frac{1}{(1+t)}$. و n: أول n حد من حدودها.

بتطبيق هذه الصيغة على مجموع القيم الحالية لسلسلة دفعات متساوية:

$$PV = A\left(\frac{\left(\frac{1}{1+t}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{(1+t)}\right) - 1}\right) = A\left(\frac{\left(\frac{1}{1+t}\right)^n - 1}{\left(\frac{-t}{(1+t)}\right)}\right)$$

مثال عددي: لنأخذ نفس بيانات المثال في التطبيق الســـابق (4–1)، نجد القيمة الحالية لدفعات القرض تساوي 571.346 ل.س:

$$PV = 100\left(\frac{\left(\frac{1}{1+0.02}\right)^6 - 1}{\left(\frac{-0.02}{(1+0.02)}\right)}\right) = 100 * 5.71346 = 571.346$$

من المنطقي التساؤل، فيما لو تم استثمار كامل مبلغ القيمة الحالية PV=571.346 لمدة ستة أشهر متتالية دون سحب الفوائد، فهل سنحصل على نفس القيمة المستقبلية FV=630.812؟

ليكن FV2 هو القيمة المستقبلية الناتج استثمار القيمة الحالية PV لمدة ستة أشهر، يُحسب كما يلي:

$$FV2 = PV(1+t)^6 = 571.346*(1+0.02)^6 = 643.428$$

نلاحظ أن القيمتين المســـتقبليتين FV, FV2 متســـاويتان، وهذا منطقي، إذا لا يجب أن يكون هناك فرق سواء سحبنا كامل القيمة الحالية PV للقرض وتم استثمارها لستة أشهر، أو الاستثمار للقرض على شكل دفعات شهرية.

4-4 نهاية متتالية

نهاية متتالية Serie's Limit هو دراسة سلوك المتتالية U_n عندما تسعى n إلى اللانهاية، أو إلى قيمة محددة مسبقاً، ونرمز لها كما يلي: $\lim_{n\to\infty} U_n = L$.

مجموع حدود متتالية:

لتكن U_n متتالية، حدها الأول U_1، وأساسها q، وليكن S_n مجموع أول n حد من حدودها، و S مجموع المتتالية، فإنه يُعبر عن مجموع متتالية غير منتهية بالشكل $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$، كما يعبر عن مجموع أول N حد من حدودها بالشكل $S_N = \sum_{n=1}^{N} U_n$.

إذا كانت U_n متتالية منتهية، فيمكن إيجاد مجموع بعض المتتاليات الشهيرة كما يلي:

1. مجموع مربعات أول n عدد طبيعي: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. مجموع مربعات أول n عدد طبيعي فردي: $1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
3. عندما $n\to\infty$: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots = 1$
4. عندما $n\to\infty$: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$

تقارب متتالية Convergent Series:

نقول عن متتالية أنها متقاربة Convergent إذا أمكن إيجاد قيمة عددية محددة للمتتالية عندما تسعى n إلى اللانهاية. وفي حال عدم وجود مثل هذه القيمة نقول أنها غير متقاربة Divergent.

1. تقارب متتالية غير منتهية: إذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ فإن $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = L$
2. اختبار تقارب متتالية غير منتهية: إذا كان مجموع المتتالية $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ متقارب، فإن نهاية الحد الأخير يسعى إلى الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$، وإذا كان $\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$، فإن المتتالية غير متقاربة Divergenet.
3. ليكن لدينا متتاليتين غير منتهيتين U_n, V_n حيث مجموع الأولى $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = L$ ومجموع الثانية $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = M$ فإن مجموع حاصل جمع حدود المتتاليتين هو حاصل جمع المجموعين: $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n + V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} V_n = L + M$
4. لدينا المتتالية U_n حيث مجموعها $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = L$ وليكن c عدد حقيقي $c\in R$، فإن مجموع جداء كل حد من حدود المتتالية بالعدد c هو حاصل جداء العدد c بمجموع المتتالية: $\sum_{n=1}^{\infty} c.U_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} U_n\, c.L$

نقول عن متتالية أنها تسعى نحو L عندما تسعى n إلى اللانهاية إذا كان $\lim_{n\to\infty} U_n \to L$، ونقول أن L هي نهاية المتتالية U_n.

لدى البحث عن نهاية متتالية U_n، فإنه يكاد يستحيل أن نصل إلى القيمة الفعلية للنهاية ولتكن L، لذلك نستخدم مصطلح "يسعى إلى"، ولإيجاد نهاية المتتالية بفرق صغير جداً لا يتجاوز ε (يُلفظ إيبسلون) بين القيمة الحقيقية للنهاية والقيمة التي نقبل عندها هذا الفرق، يتم دراسة متراجحة هذا الفرق بحيث لا يتجاوز عدد صغير جداً: $\left|\lim_{n\to\infty} U_n - L\right| \leq \varepsilon$.

نهاية بعض المتتاليات الشهيرة:

$$U_n = n\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = \infty \qquad\qquad U_n = \frac{1}{n}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

$$U_n = n^2,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = \infty \qquad\qquad U_n = \frac{1}{n^2}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

$$U_n = \sqrt{n}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = \infty \qquad\qquad U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

$$0 < a < 1\,,\quad \lim_{n\to\infty} n\,.\,a^n = 0 \qquad\qquad U_n = (n)^{\frac{1}{n}}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = 1$$

$$0 < a < 1\,, \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad\qquad U_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}\,,\quad \lim_{n\to\infty} U_n = e$$

العمليات على النهايات:

ليكن لدينا المتتاليتين U_n, V_n حيث نهاية كل منهما كما يلي: $\lim_{n\to\infty} U_n = L$ و $\lim_{n\to\infty} V_n = M$

يمكن إجراء عمليات الحسابية على النهايات كما يلي:

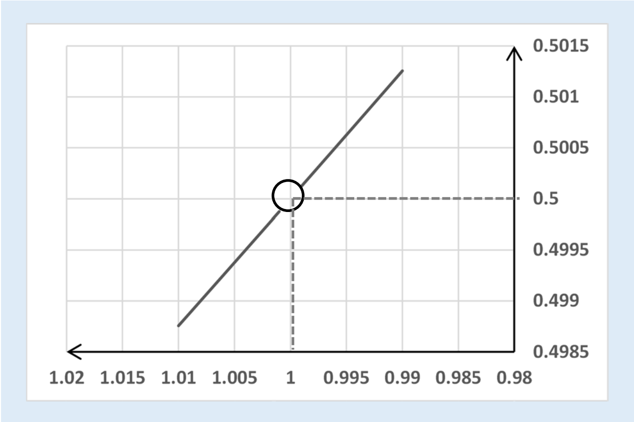
5. نهاية مجموع المتتاليتين هو مجموع النهايتين $\lim_{n\to\infty}(U_n + V_n) = L + M$
6. نهاية فرق المتتاليتين هو فرق النهايتين $\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = L - M$
7. نهاية جداء المتتاليتين هو جداء النهايتين $\lim_{n\to\infty}(U_n . V_n) = L . M$
8. نهاية قسمة المتتاليتين هو قسمة النهايتين $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{L}{M}$

مثال (4–8): حساب نهاية المتتالية $U_n = \frac{\sqrt{n}-1}{n-1}$ عندما تنتهي n إلى القيمة 1.

نلاحظ أنه لا يمكن تبديل القيمة 1 بالصيغة أعلاه كونها تجعل المقام (n-1) يساوي الصفر، لذلك سنلجأ إلى حساب النهاية بالتقرب تدريجياً من القيمة 1 من اليمين (بقيم أكبر من الواحد) ومن اليسار (بقيم أصغر من الواحد) وبقفزات صغيرة من مرتبة 0.01، ونراقب سلوك المتتالية كيف يتغير كلما اقتربنا من الواحد، يُنصح بوضعها ضمن جدول كما يلي:

	تقترب n من 1 من اليسار			→		←	تقترب n من 1 من اليمين		
n	0.96	0.97	0.98	0.99	**1**	1.01	1.02	1.03	1.04
U_n	0.505	0.504	0.503	0.501	**0.5**	0.499	0.498	0.496	0.495

كما يمكن اللجوء إلى التمثيل البياني لهذه المتتالية لمراقبة هذا السلوك، حيث يُظهر الشكل (4-2) انقطاع المتتالية عند القيمة 1 (عدم تعيين)، في حين أن قيم المتتالية (من اليمين ومن اليسار) تقترب من القيمة 0.5.



الشكل (4-2) التمثيل البياني لنهاية متتالية متقاربة

مثال (4-9) أمثلة عددية عن نهاية متتاليات.

(أ) لتكن المتتالية ذات الحد العام: $U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$

تبدو المتتالية وكأنها ليست حسابية أو هندسية، لذلك من الأفضل في مثل هذه الحالات أن نلجأ إلى حساب حدودها الأولى، ومراقبة قيم الحدود لاستخلاص نمط أو شكل التغيرات فيما بينها:

$$U_1 = 1 + \frac{(-1)^1}{2*1} = \frac{1}{2} \qquad U_2 = 1 + \frac{(-1)^2}{2*2} = \frac{5}{4}$$

$$U_3 = 1 + \frac{(-1)^3}{2*3} = \frac{5}{6} \qquad U_4 = 1 + \frac{(-1)^4}{2*4} = \frac{9}{8}$$

نلاحظ أن قيم المتتالية تتزايد من الحد الأول إلى الثاني، ثم تتناقص إلى الثالث، ثم تتزايد إلى الرابع، ... وهكذا، كما نلاحظ أن هذه الحدود تتروح بالزيادة أو بالنقصان حول القيمة 1، وبأن مقدار الفرق d_n عن الواحد يتناقص مع تزايد n، إذاً يمكن الاستنتاج أن المتتالية متقاربة باعتبار أن الفرق d_n يتناقص إلى الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية، ويمكن الاستنتاج المتتالية تتقارب إلى العدد 1 وهو نهاية هذه المتتالية.

لنفترض أن الفرق بين U_n والنهاية المفترضة L أقل من عدد صغير جداً وليكن $\varepsilon=10^{-3}$ فإن المتراجحة $|U_n - L| < 10^{-3}$، تسمح بإيجاد اعتباراً من أي حد n يتحقق هذا الفرق.

في المثال أعلاه، نتوقع أن تكون النهاية $L=1$:

$\left|1 + \frac{(-1)^n}{2n} - 1\right| < 10^{-3}$ أو $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| < 10^{-3}$ أو $\frac{1}{2n} < 10^{-3}$ ومنه $2n>1000$، أي $n>500$.

مما يعني أنه من أجل فرق بين النهاية المتوقعة L=1 والحد U_n، يجب أن يكون n>500.

(ب). برهن أن نهاية المتتالية $U_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ هي $\frac{3}{2}$.

نفرض أن $\varepsilon=10^{-3}$، نحسب الفرق:

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < 10^{-3} \text{ أو } \left|\frac{6n+2-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| < 10^{-3} \text{ أو } \frac{5}{2(2n-1)} < 10^{-3}$$

بحل هذه المتراجحة، نجد أنه يجب أن يكون n≥1251 من أجل أن يكون الفرق بين نهاية المتتالية والحد رقم n لا يزيد عن واحد من ألف 10^{-3}، وبالتالي يمكن قبول نهاية المتتالية أنها تساوي $\frac{3}{2}$.

(ت) أوجد نهاية المتتالية عندما n تنتهي إلى القيمة 2: $\lim_{n\to 2} U_n = 3n^2 - 4n + 8$

يمكن النظر إلى هذه المتتالية كثلاث متتاليات وتطبيق العمليات على نهايات كل منها:

$$\lim_{n\to 2} U_n = 3n^2 - 4n + 8 = \lim_{n\to 2} 3n^2 + \lim_{n\to 2}(-4n) + \lim_{n\to 2}(8) = 12 - 8 + 8 = 6$$

تطبيق (4−3): دور التكاليف الثابتة.

تقدر إدارة أحد المصانع أن التكاليف الثابتة للمصنع تساوي 500 ألف ل.س شهرياً، والتكاليف المباشرة لإنتاج القطعة الواحدة يساوي 50 ل.س/القطعة، ليكن عدد القطع التي ينتجها المصنع شهرياً هو x، المطلوب:

أ) ما صيغة تابع التكاليف الكلية T(x)؟ وما صيغة تابع التكلفة الوسطية للقطعة الواحدة A(x)؟

ب) عندما يُنتج المصـــــنع حجماً كبيراً جداً من القطع أي عندما تنتهي x إلى اللانهاية، ما قيمة وسطي تكلفة القطعة الواحدة؟

ت) ما التفسير الاقتصادي لهذه النتيجة؟

<u>الحل:</u>

أ) التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

يأخذ تابع التكاليف الكلية لإنتاج x قطعة الشكل الآتي: T(x) = 50 x + 500.000 ل.س.

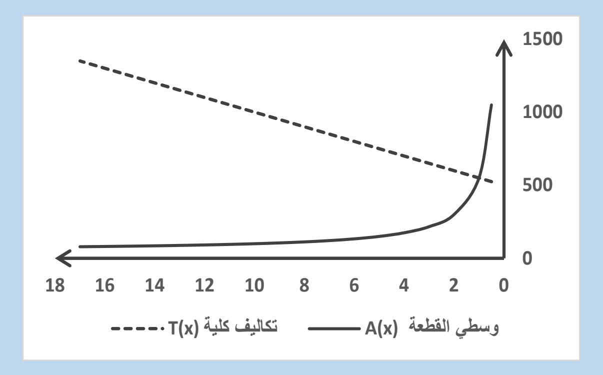
وسطي تكلفة إنتاج القطعة الواحدة A(x) هو التكاليف الكلية مقسومة على عدد القطع أي:

$$A(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{50x + 500000}{x}$$

ب) عندما x تذهب إلى اللانهاية، ندرس نهاية تابع وسطي التكلفة A(x) :

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{50x + 500000}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{50x}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{500000}{x}$$

نلاحظ أن الحد الأول $\frac{50x}{x}$ ينتهي إلى القيمة 50 عندما x ينتهي إلى اللانهاية. وينتهي الحد الثاني $\frac{500000}{x}$ إلى القيمة 0 عندما x ينتهي إلى اللانهاية. وبالتالي، تكون نهاية وسطي تكلفة القطعة الواحدة A(x) تساوي 50 ل.س/القطعة.



الشكل (4–3) نهاية وسطي تكلفة إنتاج قطعة واحدة لتابع تكلفة خطي

ت) التفسير الاقتصادي: مع تزايد عدد القطع المنتجة x إلى كميات كبيرة جداً، فإن مساهمة التكاليف الثابتة (مبلغ 500000 ل.س) في تكلفة القطعة الواحدة تصبح مهملة وتقترب من الصفر عندما تقترب الكمية من ∞، ويبقى فقط تأثير التكاليف المتغيرة بالقطعة الواحدة (أي 50 ل.س) هو الحاسم في حساب التكاليف الكلية.

تطبيق (4–4): تكاليف التلوث.

لدى غرق إحدى ناقلات النفط، ترغب إدارة الشركة المالكة بتقدير تكاليف إزالة تلوث النفط المتسرب في البحر من الناقلة، بناءً على دراسات ذات مصداقية، تم تقدير هذه التكاليف كتابع للنسبة المئوية من مساحة البقعة الملوثة له الشكل الآتي: $F(p) = \frac{12p}{100-p}$

حيث p النسبة المئوية من حجم البقعة الملوثة، و F(p) بملايين الليرات السورية. والمطلوب:

أ) ضع جدول يوضح تكاليف التنظيف لكل 10% بدءاً من p=10% وحتى p=90%.

ب) رسم الخط البياني لتابع التكلفة.

ت) في حال كان على الشركة إزالة كامل التلوث أي 100%، ما التكلفة التقديرية لهذا الإجراء؟

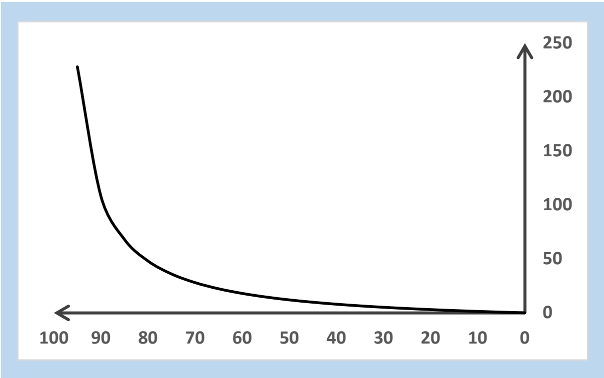
<u>الحل:</u>

أ) جدول يبين النسبة المئوية المنظفة وتكاليفها من 10% إلى 90%:

p %	10	20	30	40	50	60	70	80	90
F(p)	1.333	3	5.143	8	12	18	28	48	108

نلاحظ أن التكاليف تزداد بشكل كبير جداً كلما اقتربنا من تنظيف كامل المساحة الملوثة.

ب) الخط البياني: يمكن الاستناد إلى الجدول السابق لرسم الخط البياني، إذ أنه يحتوي على عدد مقبول من النقاط.



الشكل (4-3) تابع أسي يمثل تكاليف إزالة % من تلوث بقعة نفط

ت) عندما تقترب p من 100%، نلاحظ من الخط البياني أن التكاليف تسعى بسرعة جنونية إلى قيم كبيرة جداً نحو ∞، وهو في الحقيقة ليس إلا نهاية تابع التكاليف:

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = \frac{12p}{100-p} \to \infty$$

بمعنى أن إزالة كامل التلوث هو مستحيل عملياً، كون التكاليف تصبح لا نهائية.

لذلك تقوم أغلب الشـــركات في مثل هذه الحالات بالموازنة بين تكاليف إزالة المخالفة، والعقوبات القانونية المقرة في مثل هذه الحالات، فإن كانت تكلفة العقوبات أقل من التكاليف، تتحمل الشـركة العقوبات، وإلا تقوم بإزالة المخالفة.

تطبيق (4-5): تكاليف الإدارة لشركة صناعية.

تقدر إدارة إحدى الشـــركات الصـــناعية أنه إذا تم تشـــغيل خطوط الإنتاج بمعدل p% من الطاقة الإنتاجية القصـــوى لهذه الخطوط، فإن التكاليف الكلية للعمليات الإدارية المرافقة لهذه النســـبة من الطاقة الإنتاجية مقدرة بآلاف الليرات تُعطى بالتابع الآتي:

$$T(p) = \frac{8p^2 - 636p - 320}{p^2 - 68p - 960}$$

حيث p هي النسبة المئوية المستعملة من الطاقة الإنتاجية، و T(p) التكاليف الإدارية بملايين ل.س.

يُقصـد بالتكاليف الإدارية النفقات غير المرتبطة بالتكاليف المباشـرة للإنتاج، مثل القرطاسـية، أجور الإداريين، المراسلات، ...الخ. والمطلوب:

أ) ما قيمة التكاليف الإدارية في حال عدم تشغيل أي من خطوط الإنتاج أي p=0% ؟

ب) ما قيمة التكاليف الإدارية في حال تشغيل خطوط الإنتاج بطاقتها القصوى أي p=100% ؟

ت) ضع جدولاً يبين التكاليف الإدارية بدلالة النسبة المشغلة من الطاقة الإنتاجية وذلك من p=0% إلى p=100% وبقفزات 10%. ماذا تلاحظ عندما p=80%؟

ث) رسم الخط البياني لتابع التكاليف الإدارية بدلالة النسبة المئوية لتشغيل خطوط الإنتاج؟

ج) فيما لو فرضنا أنه لسبب ما، يمكن تشغيل خطوط الإنتاج بنسبة 80%، فما تقديرك للتكاليف الإدارية عند هذه النسبة؟

الحل:

أ) التكاليف الإدارية لعدم التشغيل أي p=0% تساوي حوالي 333.333 ل.س، كما يلي:

$$T(p=0\%)=\frac{8(0)^2-636*0-320}{(0)^2-68*0-960}=\frac{-320}{-960}=0.333333$$

ب) التكاليف الإدارية للتشغيل بالطاقة القصوى أي p=100% تساوي حوالي 7.178.571 ل.س:

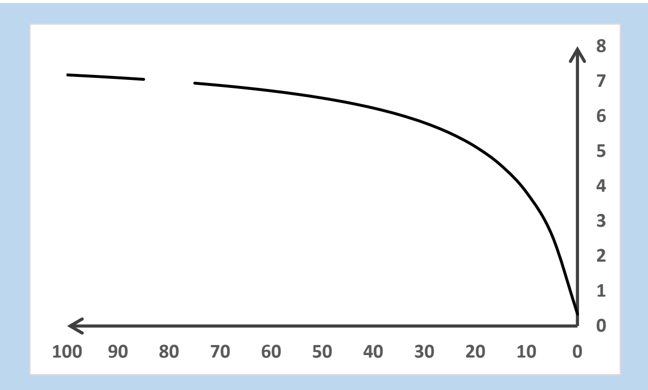
$$T(p=100\%)=\frac{8(100)^2-636*100-320}{(100)^2-68*100-960}=\frac{16080}{2240}=7.178571$$

ت) جدول يبين النسبة المئوية للتشغيل مع التكاليف الإدارية من 0% إلى 100%:

p %	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
T(p)	0.333	3.818	5.125	5.810	6.231	6.516	6.722	6.878	**غير معرف**	7.098	7.179

نلاحظ أن التكاليف غير قابلة للحساب عند p=80%، وذلك لأن المقام $p^2 - 68p - 960$ يساوي الصفر عندما p=80.

ث) الخط البياني للتابع: نلاحظ من المخطط أن التابع منقطع عندما p=80%.



الشكل (4-4) تابع أسي يمثل تكاليف إدارية بدلالة نسبة تشغيل خطوط الإنتاج

ج) إذا فرضنا أنه يمكن تشغيل خطوط الإنتاج بنسبة 80%، فإنه يتوجب حساب نهاية تابع التكاليف الإدارية F(p) عندما تسعى p إلى 80%، إذا حاولنا استبدال p=80 في صيغة التابع سنحصل على حالة عدم تعيين، لنضع جدول في جوار p=80، ولنراقب سلوك المتتالية F(p):

p %	79.96	79.97	79.98	79.99	**80**	80.01	80.02	80.03	80.04
T(p)	6.99956	6.99967	6.99978	6.99989		7.0001	7.00021	7.00032	7.00043

نلاحظ أن التكاليف الإدارية تقترب من القيمة 7 سواء من اليمين أو من اليسار، لذلك يمكن الاستنتاج أن نهاية متتالية التابع F(p) تنتهي إلى القيمة 7 مليون ل.س عندما تنتهي p إلى 80%.

تطبيق (4−6): معدل تطور عدد سكان إحدى المدن.

تم تقدير تطور عدد السكان (مليون نسمة) لإحدى المناطق فحصلنا على تابع له الشكل:

$$\mathrm{P(t)} = 50 - \frac{10}{\mathrm{t}+1}$$

حيث t عدد السنوات، و P(t) عدد السكان بدلالة عدد السنوات. والمطلوب:

أ) ما العدد المتوقع السكان بعد 5 سنوات؟

ب) ما معدل تزايد عدد السكان سنوياً خلال السنوات الخمسة القادمة؟

ت) ما العدد المتوقع للسكان بعد فترة طويلة جداً أي عندما تذهب t إلى اللانهاية؟

الحل:

أ) عدد السكان المتوقع بعد 5 سنوات:

يكفي تبديل t = 5 في صيغة المعادلة أعلاه، فيكون يساوي حوالي 48.3 مليون نسمة:

$$P(t) = 50 - \frac{10}{5+1} = 48.333$$

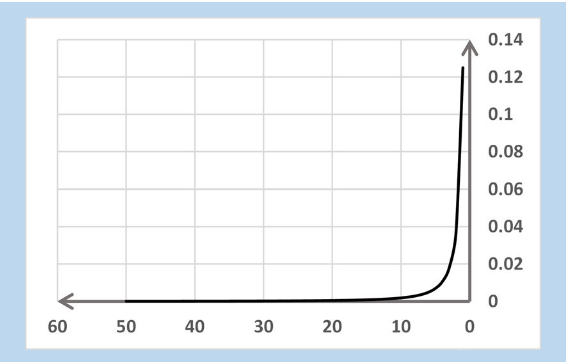
ب) معدل تزايد عدد السكان سنوياً خلال السنوات الخمسة القادمة:

نضع جدول تطور عدد السكان سنوياً (مليون نسمة)، ونأخذ بشكل تقريبي وسطي معدل التطور للسنوات الخمسة:

السنة t	عدد سكان السنة P(t)	الفرق عن السنة السابقة P(t) – P(t-1)	معدل التطور السنوي % [P(t) – P(t-1)]/P(t)
0 بداية السنة	40		
1	45.000	5	12.500%
2	46.667	1.667	3.704%

3	47.500	0.833	1.786%
4	48.000	0.500	1.053%
5	48.333	0.333	0.694%
وسطي معدل التطور خلال السنوات الخمس (تقريبي)			**3.947 %**

نلاحظ أن معدل التطور يتناقص بشكل كبير من 12.5% في نهاية السنة الأولى إلى حوالي 0.69% في نهاية السنة الخامسة، كما يبين الخط البياني في الشكل (4−5)، وبمعدل وسطي 3.947% للسنوات الخمس.



الشكل (4−5) المعدل السنوي لتوايد سكان إحدى المدن

في حين، يُمكن حساب وسطي معدل التطور السنوي بين بداية السنة الأولى ونهاية السنة الخامسة (لاحظ لدينا في الحقيقة 6 سنوات وليس 5)، فإن المعدل يُصبح $= \frac{48.333-40}{40}$ 4.166%، أي أكبر من الوسطي السابق، وهذا منطقي كون الوسطي يعدل بين القيم الكبيرة في البداية والصغيرة في النهاية، في حين أن المعدل بين أول وآخر سنة هو أكثر منطقيةً كونه يأخذ ضمنياً التطور الداخلي للمعدل.

ت) عدد السكان المتوقع بعد فترة طويلة جداً:

أي ما نهاية متتالية عدد السكان P(t) عندما تذهب t إلى اللانهاية:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \mathrm{Lim}\left(50 - \frac{10}{t+1}\right) = 50 - 0 = 50$$

نلاحظ أن عدد السكان سيستقر عند 50 مليون نسمة بعد فترة طويلة جداً من الزمن، ولن يتزايد عدد السكان حينها.

تطبيق (4−7): تطور أسعار العقارات.

تتضاعف قيمة العقارات في القطر كل عشر سنوات، لدينا عقار قيمته تساوي مليون ل.س عام 1980، والمطلوب:

أ) ما قيمة العقار المتوقعة عام 2020؟

ب) إذا كانت وحدة الزمن هي 10 سنوات، هل قيمة العقارات متتالية حسابية أم هندسية؟

ت) ارسم الخط البياني لتطور أسعار العقارات خلال 50 سنة القادمة.

الحل:

أ) ليكن n متغير الفترات الزمنية مقدر بعشرات السنين، و U_n هي قيمة العقار في الفترة رقم n:

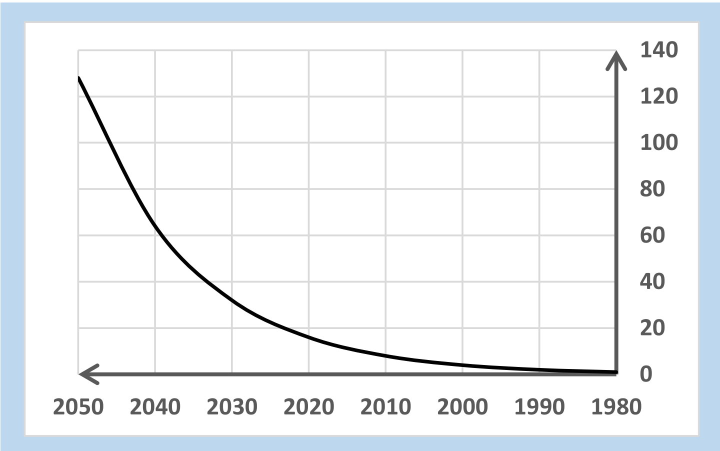
فتكون صيغة المتتالية $U_n = 2\,U_{n-1}$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$

نضـــع جدولاً يبدأ من عام 1980، يتبين من الجدول قيمة العقار المتوقعة عام 2020 تســـاوي 16 مليون ل.س.

السنة	قيمة n	قيمة U_n (مليون ل.س)
1980	1	**1**
1990	2	**2**
2000	3	**4**
2010	4	**8**
2020	5	**16**
2030	6	**32**
2040	7	**64**
2050	8	**128**

ب) شكل المتتالية كما يوضح الجدول أنها متتالية هندسية، إذ تتضاعف قيمة العقار كل 10 سنوات، مع الانتباه إلى أن n تأخذ القيم $1, 2, 3, \dots$

ت) الخط البياني لتطور أسعار العقارات خلال 50 سنة:



الشكل (4-6) الخط البياني لتطور أسعار العقارات خلال الـ 50 سنة (مثال)

تطبيق (4–8): القيمة المستقبلية لجملة دفعات دورية متساوية.

لدينا قرض يدفع على شكل دفعات سنوية متساوية، قيمة كل دفعة 100 ل.س، وبمعدل فائدة 10% سنوياً، ولمدة 5 سنوات.

أ) ما القيمة المستقبلية لهذا القرض في السنة الخامسة؟

ب) ما القيمة الحالية لهذا القرض؟

<u>الحل:</u>

أ) القيمة المستقبلية: تطبيق صيغة جمع متتالية هندسية، حيث A = 100، و t = 0.1، و n = 5:

$$FV = 100\left(\frac{(1+0.1)^5 - 1}{0.1}\right) = 610.51$$

أو حسابها دفعة دفعة ثم حساب المجموع:

السنة	0	1	2	3	4
قيمة الدفعة	100	100.(1+0.1) = 110	$100.(1+0.1)^2$ = 121	$100.(1+0.1)^3$ = 133.10	$100.(1+0.1)^4$ = 146.41

وبالتالي يُصبح مجموع الدفعات المستقبلية:

$$FV = 100 + 110 + 121 + 133.10 + 146.41 = 610.51$$

ب) القيمة الحالية: تطبيق صيغة جمع متتالية هندسية، حيث A = 100، و t = 0.1، و n = 5:

$$PV = 100\left(\frac{\left(\frac{1}{1+0.1}\right)^5 - 1}{\left(\frac{-0.1}{(1+0.1)}\right)}\right) = 416.99$$

أو حسابها دفعة دفعة ثم حساب المجموع:

السنة	0	1	2	3	4
قيمة الدفعة	100	100/(1+0.1) = 90.91	$100/(1+0.1)^2$ = 82.65	$100/(1+0.1)^3$ = 75.13	$100/(1+0.1)^4$ = 68.30

وبالتالي يُصبح مجموع الدفعات المستقبلية:

$$FV = 100 + 90.91 + 82.65 + 75.13 + 68.30 = 416.99$$

نلاحظ، إذا كان عدد الفترات كبيراً، فإن حساب القيمة الحالية أو المستقبلية دفعة دفعة سيكون مرهقاً، لذلك من الأفضل تطبيق صيغة جمع متتالية هندسية.

تطبيق (4−9): التخطيط للتقاعد.

تخطط منذ الآن لتقاعدك بعد 50 سـنة بحيث يكون لديك في بداية تقاعدك مليون ل.س، لديك حالياً رصيد 10.000 ل.س، فما هو معدل الفائدة الذي تقبل به ويجعل رصيدك يحقق حلمك؟

الحل:

القيمة الحالية PV = 10.000 ، القيمة المستقبلية FV = 1.000.000 ، n = 50.

نطبق معادلة القيمة المستقبلية: $FV = PV\ (1+t)^n$ أي $1000.000 = 10.000\ (1+t)^{50}$

أو $100 = \frac{1.000.000}{10.000} = (1+t)^{50}$ مما يعطي $t = \sqrt[50]{100} - 1 = 0.096479$

بالتجريب أو باسـتخدام تحويل لغاريتمي، نحصـل على معدل فائدة يسـاوي تقريباً 9.65%: t=9.65%.

تطبيق (4−10): حساب معدل المردود الداخلي *IRR*.

لدينا مشروع استثمار 435.44 ل.س في بدايته، ثم تدفقات سنوية كما يلي: 100 في السنة الأولى، 200 في السنة الثانية، 300 في السنة الثالثة. والمطلوب:

أ) إذا طلبنا معدل مردود داخلي يساوي 18%، فهل سيكون المشروع مربح؟

ب) إذا طلبنا معدل مردود داخلي يساوي 12%، فهل سيكون المشروع مربح؟

ت) ما معدل المردود الداخلي لهذا الاستثمار؟

الحل:

لنضع جدول تدفقات المشروع كما يلي:

الفترة	التدفق الجاري	التدفق المحين من أجل 12%	التدفق المحين من أجل 18%
0	435.44 −	435.44 −	435.44 −
1	100	89.29	84.75
2	200	159.44	143.64
3	300	213.53	182.89
القيمة الحالية الصافية	**164.56**	**26.82**	**24.48 −**

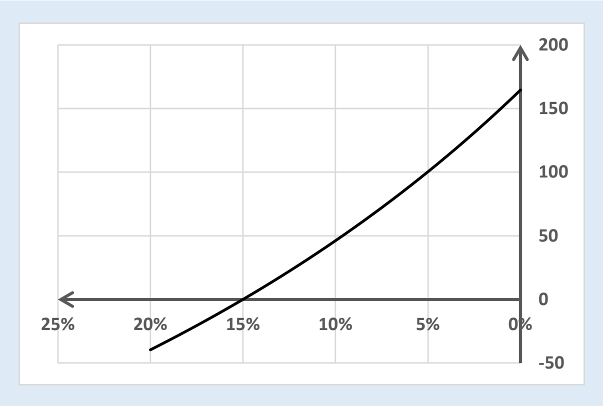
أ) من أجل معدل 18% فإن القيمة الحالية الصافية تساوي −24.48 أي المشروع خاسر.

ب) ومن أجل معدل يساوي 12% فالقيمة الحالية الصافية تساوي 26.82 أي المشروع رابح.

ت) من أجل أن تكون القيمة الحالية الصـافية تسـاوي الصـفر، يجب أن يكون معدل المردود الداخلي بين 12% و 18%، ولحسابه نقول بتجريب عدد من القيم.

نجد من الشكل (4-) أنه عند معدل يساوي تقريباً 15% فإن المشروع لا رابح ولا خاسر، إذا كان أكبر فإن القيمة الحالية الصافية تصبح سالبة، وقيمة أقل يصبح المشروع رابح.

المعدل	القيمة الحالية الصافية
%13	17.60
%14	8.66
%15	**0.00**
%16	8.40 −
%17	16.56 −



الشكل (4-7) القيمة الحالية الصافية بدلالة معدل التراكم

أسئلة واختبارات الفصل الرابع: المتتاليات وتطبيقاتها

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	نقول عن متتالية أنها متزايدة إذا تحقق الشرط: $\forall n\in N, U_{n+1} < U_n$.		✓
2	نقول عن متتالية أنها متناقصة إذا تحقق الشرط: $\forall n\in N, U_{n+1} < U_n$.	✓	
3	المتتالية الآتية 6-، 9-، 12-، 15-، ... هي متتالية حسابية أساسها 3.		✓
4	نقول عن متتالية عددية أنها حسابية إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت.	✓	
5	إذا الفرق بين أي حدين متتاليين من المتتالية U_n هو ثابت ويساوي q، نقول أن المتتالية حسابية وأساسها يساوي q.	✓	
6	إذا حاصل قسمة أي حدين متتاليين من المتتالية U_n هو ثابت ويساوي q، نقول أن المتتالية هندسية وأساسها يساوي q.	✓	
7	كل متتالية هندسية أساسها موجب وأصغر من الواحد تكون متزايدة.		✓

8	المتتالية 4، 8، 16، 32، ... هي متتالية هندسية أساسها q=2.	✓	
9	المتتالية 1/4، 1/8، 1/16، 1/32، ... هي متتالية هندسية أساسها q=2.		✓
10	القيمة المستقبلية FV لسلسلة تدفقات مالية ثابتة سنوياً وبمعدل فائدة سنوي ثابت ويساوي t هي متتالية هندسية أساسها q=(1+t).	✓	
11	نهاية المتتالية $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ عندما تسعى n إلى اللانهاية هو الصفر 0.	✓	
12	نهاية المتتالية $U_n = (\sqrt{9})^n$ عندما تسعى n إلى اللانهاية هو الصفر 0.		✓

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- المتتالية $U_n = n^2 + 2$ هي متتالية:

أ) حسابية ب) هندسية

ج) حسابية وهندسية بنفس الوقت د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

2- الحد العام للمتتالية الآتية: 1، 4، 9، 16، 25، ... هو :

أ) $U_n = U_{n-1} + 5$ ب) $U_n = 4\,n$

ج) $U_n = n^2$ د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

3- نهاية المتتالية $\frac{3\,n}{3n^2}$ عندما $n \to \infty$ هي :

أ) واحد 1 ب) لانهاية ∞

ج) صفر 0 د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

4- نهاية المتتالية $U_n = \frac{8n^2+n}{n^2}$ عندما $n \to \infty$ هي :

أ) 8 ب) لا نهاية ∞

ج) 5 د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

5- الحد العام لمتتالية الأرباح الشهرية الآتية 12، 17، 22، 27، ... هو:

أ) $U_{n+1} = U_n - 5$ ب) $U_{n+1} = U_n + 5$

ج) $U_{n+1} = 5\,U_n$ د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

6- لدينا المتتالية الآتية 81، 27، 9، 3، ... فإن الحد العام لهذه المتتالية هو :

أ) $U_{n+1} = U_n + 3$ ب) $U_{n+1} = 1/2\,U_n$

ج) $U_{n+1} = 1/3\,U_n$ د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

7- المجموع S لأول N حد من متتالية الأعداد الطبيعية $U_n = n$ هو:

أ) $S = \frac{N(N+1)}{2}$ ب) $S = \frac{2N(N-1)}{4}$

ج) $S = \frac{N^2}{2}$ د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

8- في المتتالية الهندسية Un، الصيغة الآتية $U_1.U_n = U_2.U_{n-1} = U_i.U_{n-i+1}$:

أ) محققة للحدين الأول والأخير فقط
ب) دوماً محققة
ج) محققة فقط إذا كانت المتتالية متناوبة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

9- القيمة المستقبلية لمبلغ 10.000 ل.س بعد سنتين بمعدل فائدة مركب يساوي 10% سنوياً، فإن هي:
أ) 12.000 ل.س
ب) 12.100 ل.س
ج) 2000 ل.س
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- القيمة الحالية PV لسلسلة تدفقات مالية قسطها السنوي ثابت يساوي A لمدة n سنة، وبمعدل تراكم سنوي مركب t تُحسب كمجموع متتالية هندسية أساسها q يساوي:
أ) $q = (1 + t)$
ب) $q = \frac{1}{t}$
ج) $q = \frac{1}{(1+t)}$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- نهاية المتتالية $U_n = \frac{8n+6}{4n-7}$ عندما تسعى n إلى اللانهاية ∞ هي:
أ) القيمة 2
ب) القيمة 8
ج) القيمة 4
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (4-1) أوجد نهاية المتتالية الآتية: $U_n = \frac{-2n^2+1}{n^3-1}$

السؤال (4-2) أوجد نهاية المتتالية الآتية: $u_n = \frac{6n-4}{\sqrt{3n^2+4}}$

السؤال (4-3) حساب القيمة الحالية والقيمة المستقبلية.

1) لنفرض أنك تضع في بداية كل سنة مبلغاً مقداره 100 ألف ل.س في المصرف، بمعدل فائدة 10% سنوياً، والمطلوب:

أ) ما القيمة المستقبلية FV لهذه المبالغ بعد 5 سنوات؟

ب) ما القيمة الحالية PV لهذه المبالغ إذا ادخرت 5 سنوات متتالية؟

ت) لنفترض أننا استثمرنا مبلغ القيمة الحالية الناتج PV من (ب) لمدة 5 سنوات وبنفس معدل الفائدة، ما القيمة المستقبلية لهذا المبلغ في نهاية السنة الخامسة؟ ماذا تستنتج؟

ث) لنفترض حالياً أنه سيأتيك بعد 5 سنوات مبلغ القيمة المستقبلية الناتج FV من (أ)، ما القيمة الحالية لهذا المبلغ باعتماد نفس معدل الفائدة؟ ماذا تستنتج؟

(توجيهات للإجابة: يمكن معالجتها سنة سنة، أو تطبيق مجموع متتالية هندسية. الفقرة 4-3)

السؤال (4-5) حساب نقطة التعادل.

تُقدر إدارة الشركة أن حجم مبيعاتها سيرتفع بمعدل 5% سنوياً، وتحتاج إلى أن تبيع 10 آلاف قطعة كل سنة لكي تبدأ بتحقيق الأرباح (يعني نقطة التعادل = 10 آلاف)، تبلغ مبيعاتها الحالية 8 آلاف قطعة.

والمطلوب: كم سنة تحتاج الشركة لتصل إلى نقطة التعادل حيث تبدأ بتحقيق الأرباح؟

(توجيهات للإجابة: معالجة الفرق بين المبيعات الحالية وكمية التعادل كمتتالية هندسية. الفقرة 4-3)

السؤال (4-6) القيمة المستقبلية ومعدل فائدة يُضاعف المبلغ.

تُعطي أحد المستثمرين ضعف المبلغ المستثمر لديه كل سنتين. والمطلوب:

أ- ما هي الفائدة السنوية المطبقة في هذه الحالة؟

ب- ما هي القيمة المستقبلية FV بعد n سنوات بدلالة المبلغ المستثمر A؟

(توجيهات للإجابة: من صيغة القيمة المستقبلية تساوي 2 . الفقرة 4-3)

السؤال (4-7) حساب القيمة الحالية لقرض.

تم الاتفاق بين أحد المستثمرين وأحد المصارف على شروط خاصة لمنح المصرف قرضاً للمستثمر، كما يلي:

مدة القرض 5 سنوات.

فائدة القرض: 10% خلال السنة الأولى، وتزداد بمعدل 0.5 نقطة سنوياً. ويتم احتساب الفوائد شهرياً.

دفعات القرض: 100 ألف ل.س شهرياً خلال السنتين الأولى والثانية، 200 ألف ل.س شهرياً خلال السنوات الثلاث المتبقية.

والمطلوب: ما هي قيمة مبلغ القرض الذي يمكن للمستثمر الحصول عليه حالياً؟

(توجيهات للإجابة: من صيغة القيمة الحالية مع تغيير في معدل الفائدة . الفقرة 4-3)

السؤال (4-8) حساب قيمة أصل المبلغ.

تم وضع مبلغ x في المصرف بفائدة بسيطة t، فبلغت قيمة المبلغ مع الفوائد 220 ليرة بعد سنة، و 240 ليرة بعد سنتين. فما هي قيمة أصل المبلغ x، وما هو معدل الفائدة t ؟

(توجيهات للإجابة: من صيغة القيمة المستقبلية بمدل فائدة بسيط. الفقرة 4-2)

السؤال (4-9) المفاضلة بين خيارات استثمارية.

يملك مستثمر مبلغاً قدره 100 ألف ل.س يرغب بتوظيفه لمدة عام، ولديه الخيارات الآتية:

الأول: وضع المبلغ في المصرف بفائدة قدرها 15%.

الثاني: توظيف المبلغ لمدة أربعة أشهر بفائدة مركبة تساوي 10% سنوياً، ثم توظيف الحصيلة لأربعة أشهر أخرى بفائدة مركبة 15% سنوياً، وتوظيف الحصيلة الناتجة أيضاً لمدة أربعة أشهر بفائدة مركبة 20% سنوياً.

الثالث: توظيف المبلغ شهرياً بمعدل فائدة يبدأ بـ 10% سنوياً في الشهر الأول ويتزايد كل شهر بمقدار 1% على أساس سنوي، أي يتم توظيف حصيلة المبلغ مع الفوائد في نهاية كل شهر للشهر اللاحق.

والمطلوب: أي من الخيارات الثلاث هو الأفضل؟

(توجيهات للإجابة: معالجة كل خيار بشكل مستقل ثم أخذ الأكبر. الفقرة 4-2، 4-3)

الفصل الخامس: التوابع اللغارتيمة والأسية

عنوان الموضوع: التوابع اللغاريتمية والأسية Logarithmic & Exponential Functions

كلمات مفتاحية:

التابع اللغاريتمي Logarithmic Function، التابع الأسي Exponential Functions، الجذر النوني n-Square، أســـاس لغـاريتم Logarithm Base، العـدد النيبري e، تـابع النمو الاقتصـــــادي Growth Economic Function، تابع إنتاج كوب دوغلاس Cobb-Douglas Function.

ملخص الفصل:

رأينا في فصـول سـابقة بعض أشكال التوابع الأسـية، نظراً لأهميتها وارتباطها العضـوي بأشـكال التوابع اللغاريتمية فقد خصـصـنا لها فصــلاً مسـتقلاً، هي في النهاية توابع عددية، لكن تطبيقاتها الاقتصــادية والإدارية تتمتع بأهمية خاصة.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يميز التابع اللغاريتمي والأسي ويفهم الارتباط وقواعد الانتقال بينهما.
2. يتعامل مع أشكال مختلفة من الرفع لقوة والجذر النوني.
3. يتعامل مع التابع اللغاريتمي بأساس مختلف.
4. يطبق قواعد التابع الأسي على توابع إنتاج من نمط كوب دوغلاس.
5. يتعرف على العدد النيبري e وأهميته التطبيقية.
6. يُطبق قواعد التوابع الغاريتمية والأسية على ظواهر النمو الاقتصادي.

مخطط الفصل:

5-1 التعبير الأسي Exponential Expression

5-2 التعبير اللغاريتمي Logarithmic Expression

5-3 العلاقة بين التوابع اللغاريتمية والأسية Logarithmic & Exponential Expressions.

5-4 تطبيقات: توابع النمو الاقتصادي Applications: Growth Economic Functions.

1-5 التعبير الأسي

رأينا سابقاً بعض أشكال التوابع الأسية دون أن نعلن عنها صراحةً، مثلاً عندما نقول a^2 فنقصد بذلك a x a أي a مضــروب بنفســه مرتين، يُمكن تعميم هذه القاعدة بالقول مثلاً $M=a^n$ أي a مضــروب بنفســه n مرة، يُمكن للعدد n أن يكون موجب أو سـالب، صـحيح أو كسـري، وندعوه بالأس أو القوة، وندعو العدد a بالأساس، وندعو $M=a^n$ بالصيغة الأسية للعدد M.

مثلاً، $2^3 = 2*2*2 = 8$، $3^4= 3*3*3*3 = 81$

قد يكون من السهل التعامل مع أس n صحيح وموجب، لكن كيف نتعامل مع أس سالب؟

لنأخذ المتتالية الآتية كمضاعفات للعدد 2:

2^{-2}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	…
?	?	?	?	2	4	8	16	…

لنبدأ بالعدد $2^1=2$، نلاحظ أن كل حد هو ضــعف الحد الذي يسـبقه، بالتالي الحد العام لهذه المتتالية يساوي $U_{n+1} = 2U_n$ أو $U_n = \frac{U_{n+1}}{2}$ أي يمكن استنتاج الحد السابق بتقسيم الحد الذي يليه على 2، ومنه يُمكن كتابتها بشكل أسي كما يلي:

قيمة 2^0 بتقسيم الحد الذي قبله أي 2 على 2 نجد $2^0 = 1$.

قيمة 2^{-1} بتقسيم الحد الذي قبله أي 1 على 2 فنجد $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$.

قيمة 2^{-2} بتقسيم الحد الذي قبله أي 1/2 على 2 فنجد $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

وهكذا ...، يُمكن كتابة الصيغ الأسية بأس سالب كما يلي: $M = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

وهكذا يُمكن كتابة أي صيغة أسية سواء كانت n موجبة أو سالبة، حيث n عدد صحيح.

كيف يتم التعامل مع n في حال كنت عدد كسري من الشكل $n = \frac{p}{q}$ ؟

لنبدأ بتعريف الجذر النوني للعدد M، بأنه العدد a الذي إذا ضُـرب بنفســه n مرة نحصـل على العدد M. ونرمز له بالشكل $M^{\frac{1}{n}}$ أي p=1 و q=n، ويُكتب كما يلي:

$$a^n = M \quad \text{أو} \quad M^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{M} = a$$

مثلاً، العدد 3 هو الجذر التربيعي للعدد 9 ويُكتب بالشكل $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$

أو العدد 5 هو الجزر التكعيبي للعدد 125 ويُكتب بالشكل $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

يُمكن تعميم تعريف الجذر النوني السابق إلى أي عدد كسري حيث p≠0، أي $n = \frac{p}{q}$ وطبعاً q≠0.

لنأخذ مثالاً توضيحياً، كيف نتعامل مع $a = 81^{\frac{3}{4}}$ ؟

عند الرفع إلى قوة، يُمكن كتابة الأس $n = \frac{3}{4}$ كما يلي: $(3)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}$

بالتالي يُمكن الكتابة $(81^3)^{\frac{1}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = a = 81^{\frac{3}{4}}$

يتم التعامل مع الجذر $n = \frac{3}{4}$ بطريقتين وعلى مرحلتين في الحالتين كما يلي:

إما نأخذ الجذر الرابع للعدد 81، ثم النتيجة نرفعه للقوة 3، كما يلي:

المرحلة الأولى: $81^{\frac{1}{4}} = 3$ المرحلة الثانية: $3^3 = 27$

فنجد $a = 81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 27$

أو نرفع العدد العدد 81 للقوة 3، ثم نأخذ الجذر الرابع للنتيجة، كما يلي:

المرحلة الأولى: $81^3 = 531441$ المرحلة الثانية $531441^{\frac{1}{4}} = 27$

فنجد $a = 81^{\frac{3}{4}} = (81^3)^{\frac{1}{4}} = 27$

يبين هذا المثال أنه يمكن التعامل مع أي أس من الشـــكل الكســـري $n = \frac{p}{q}$ حيث q≠0، ونكتب الصيغة العامة بالشكل:

$$M^{\frac{p}{q}} = (M^p)^{\frac{1}{q}} = \left(M^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

حتى لو كان الأس ســالباً، فقد رأينا ســابقاً كيفية التعامل مع الأس الســالب، لنأخذ نفس المثال أعلاه بجذر سالب، ما جذر $81^{-\frac{3}{4}}$ ؟

$$81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{27}$$

بعض الخصائص والنصائح لتنفيذ العمليات الحسابية على القوى:

1. يُمكن أن يكون للعدد أكثر من جذر نوني. مثلاً، الجذر التربيعي للعدد 4 هو 2+ أو 2-.
2. بعض الأعداد ليس لها جذر نوني، الجذر التربيعي للعدد 4- غير مُعرّف، لأنـه لا يمكن إيجاد عدد يكون حاصــل ضــربه بنفســه يســاوي 4-، إذ أن تربيع أي عدد أكبر أو يســاوي الصفر.

3. يمكن تنفيذ العملات بأي ترتيب نريده، لكن من السهل تنفيذ الجذر (1/q) أولاً في حالة الأس الكســري، ثم الرفع إلى القوة p. باعتبار الجذر يُعطي قيم صـــغيرة، في حين أن الرفع للقوة يعطي قيماً كبيرة، وبالتالي نتجنب حساب جذور الأعداد الكبيرة.

4. عندما نقول جذر العدد M، فإننا نقصـــد الجذر التربيعي في حال عدم وجود لبس في فهم العبارات، وإلا يجب التصريح بذلك.

5. معظم الآلات الحاسبة مزودة بوظائف حساب القوة n للعدد a: a^n، والجذر النوني $a^{1/n}$.

6. في التطبيقات الإدارية والاقتصـــادية، نقتصـــر أغلب الأحيان على الجذور الموجبة، لكن مع الانتباه إلى طبيعة المتغيرات التي نتعامل معها.

7. بعض القواعد الأساسية لتسهيل التعامل مع الرفع لقوة:

   1. جداء القوى لنفس العدد $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
   2. قسمة القوى لنفس العدد $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
   3. الرفع لقوة $(a^n)^m = a^{n.m}$
   4. قوة جداء عددين $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$
   5. رفع حدي كسر لنفس القوة $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
   6. التعبير عن الجذر بقوة $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
   7. التعبير عن الأس السالب بقوة $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مثال (5−1) أمثلة عن التعامل مع القوة والجذور.

1) $(4)^3 = 64$

2) $(-4)^3 = -64$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

4) $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

5) $(64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = \pm 8$

6) $(625)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{625} = \pm 25$

7) $(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

8) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

9) $(4)^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 32$

10) $(1)^{-\frac{7}{9}} = \frac{1}{1^{\frac{7}{9}}} = 1$

11) $3^2.3^4 = 3^{2+4} = 729$ 　　 12) $\frac{4^7}{4^5} = 4^{7-5} = 16$

13) $(-4)^3.(-4)^2 = (-4)^5 = -1024$ 　　 14) $\frac{4^3}{4^{-3}} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$

15) $(5^2)^3 = 5^6 = 15625$ 　　 16) $(5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2.\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$

كما يمكن استخدام الرفع لقوة وقواعدها لتبسيط بعض الصيغ الرياضية.

مثال (5−2) أمثلة استخدام الرفع القوة لتبسيط الصيغ الرياضية.

(أ) الصيغة $\frac{x^4*x^3}{x^4}$ يمكن كتابتها بالشكل $\frac{x^4*x^3}{x^4} = \frac{x^{4+3}}{x^4} = \frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$.

(ب) الصيغة $\frac{x^4*y^3}{x^{2*}y^2}$ يمكن كتابتها بالشكل $\frac{x^4*y^3}{x^{2*}y^2} = (x^4 * x^{-2})(y^3 * y^{-2}) = x^2 * y$

(ت) الصيغة $\left(x^2 * y^{\frac{1}{3}}\right)^3$ يمكن كتابتها بالشكل $x^{3*2} * y^{3*\frac{1}{3}} = x^6 * y$.

كما نلاحظ، العمليات الرياضـــية على القوى ليســـت بالصـــعوبة التي نتخيلها وإن كانت معقدة كونها تشـــمل الكثير من الحســـابات، لذلك يجب توخي الحذر أثناء إنجاز العمليات وفق الترتيب المنطقي لإنجاز العمليات الحسابية ودون الوقوع في أخطاء، كما ننصح بتدقيق الحسابات.

تطبيق (5−1) تابع إنتاج من نمط توابع كوب_دوغلاس.

يتعلق حجم أو كمية الإنتاج Q لمصنع ما بالعديد من العوامل تُدعى عوامل الإنتاج، مثل رأس المال، العمالة، البيئة القانونية، الوضـــع الأمني، ....، الخ. لنقتصـــر في التطبيق الحالي على عاملين اثنين فقط: رأس المال K والعمالة L، ونعبر عن حجم الإنتاج كتابع للعاملين: $Q = F(k, L)$.

ليكن لدينا تابع لمصنع محدد من الشكل $Q = 60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$ أو $Q = 60\sqrt[4]{K}\sqrt{L}$. والمطلوب:

أ) ما حجم الإنتاج عندما K=25 و L=50 ؟

ب) احسب مقدار ونسبة زيادة الإنتاج في حال مضاعفة رأس المال (2K) والعمالة (2L)؟

ت) ارســـم الخط البياني لتابع رأس المال K بدلالـة حجم العمـالـة L من أجل كميات مختلفة: Q=949, Q=1596, Q=1300.

ث) عمم النتيجة على تابع من الشـــكل $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ ، من أجل نفس معدل التغير λ في رأس المال والعمالة.

الحل:

(أ) يمكن حساب كمية الإنتاج من أجل قيم محددة لرأس المال والعمالة، مثلاً إذا كان K=25 و L=50 فنجد كمية الإنتاج تساوي تقريباً 949 قطعة: $Q = 60\left(25^{\frac{1}{4}}\right)\left(50^{\frac{1}{2}}\right) \cong 949$.

(ب) في حالة مضاعفة رأس المال والعمالة، هل يتضاعف حجم الإنتاج؟

بمعنى إذا أصبح رأس المال K=50، والعمالة L=100، فهل يتضاعف حجم الإنتاج؟ أو ما هو التغير في حجم الإنتاج في هذه الحالة؟

عندما K=50، L=100 فإن حجم الإنتاج يُصبح 1596 قطعة، أي أنه لم يتضاعف، بل زاد بمقدار 647=949-1596 أو ما يعادل 68.18% من حجم الإنتاج:

$$Q = 60\left(50^{\frac{1}{4}}\right)\left(100^{\frac{1}{2}}\right) \cong 1596$$

يُمكن في الحقيقة إنجاز هذه العملية بتطبيق قواعد الرفع إلى قوة كما يلي:

رأس المال K يتضاعف ليصبح 2K العمالة L تتضاعف لتصبح 2L

صيغة تابع الإنتاج تصبح:

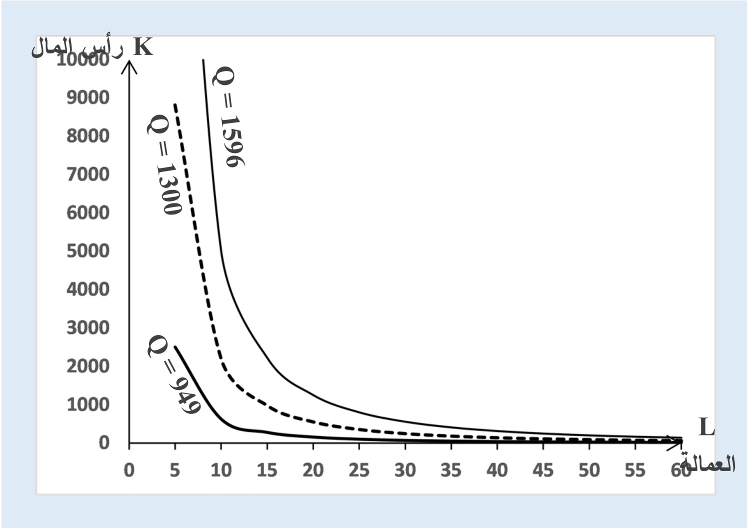
$$Q = 60(2K)^{\frac{1}{4}}(2L)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{2}}\right)\left(60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}\right) = 2^{\frac{3}{4}}\left(60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}\right)$$

أي أن حجم الإنتاج الجديد بعد المضاعفة يساوي 1.6818 $(2^{\frac{3}{4}} = 1.6818)$ مضروباً بالإنتاج قبل المضاعفة، أي أن الزيادة هي فقط 68.81% فقط.

نلاحظ أن الزيادة في حجم الإنتاج هي $2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} = 1.6818$ أي 2 مرفوعة لحاصل جمع الأسين 1/2 و 1/4.

ت) الخطوط البيانية من أجل حجم مختلف لكمية الإنتاج

نلاحظ أن الخطوط البيانية متوازية، وكل منها يُشكل مستوى/حجم محدد لكمية الإنتاج.



الشكل (5−1) بعض أشكال تابع إنتاج Cobb_Douglas

ث) بشـــكل عام، إذا كان لدينا تابع إنتاج من الشـــكل $Q = AK^{\propto}L^{\beta}$، وتم إجراء نفس معدل التغير مقداره λ في رأس المال والعمالة[5]، فإن حجم الإنتاج الجديد يحسب كما يلي:

$$Q = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \left(\lambda^{\alpha} * \lambda^{\beta}\right)\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right) = \lambda^{\alpha+\beta}\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right)$$

أي أن حجم الإنتاج بعد التعديل يساوي حجم الإنتاج قبل التعديل مضروباً بمعامل يساوي $\lambda^{\alpha+\beta}$.

يُدعى المجموع $\beta+\alpha$ بدرجة التجانس Degree of Homogeneity، ونميز ثلاثة حالات:

1. الحالة الأولى: إذا كان $\alpha+\beta=1$، أي $\lambda = \lambda^{\alpha+\beta}$ فإن تابع الإنتاج يُظهر ثبات ســـلمي Constant Returns to Scale، أي $Q_2 = \lambda Q_1$ أي كمية الإنتاج بعد التعديل Q_2 تتغير بشـــكل خطي مع الكمية قبل التعديل Q1 وبمعدل تغير يســـاوي نفس معدل تغير عوامل الإنتاج λ.

2. الحالة الثانية: إذا كان $\alpha+\beta<1$، فإن تابع الإنتاج يُظهر تناقص ســـلمي Decreasing Returns to Scale ، أي $Q_2 < \lambda Q_1$ أي كمية الإنتاج بعد التعديل Q_2 أقل من الكمية قبل التعديل Q1 مضروبةً بمعامل تغير عوامل الإنتاج λ.

3. الحالة الثالثة: إذا كان $\alpha+\beta>1$، فإن تابع الإنتاج يُظهر تزايد ســـلمي Increasing Returns to Scale ، أي $Q_2 > \lambda Q_1$ أي كمية الإنتاج بعد التعديل Q_2 أكبر من الكمية قبل التعديل Q1 مضروبةً بمعامل تغير عوامل الإنتاج λ.

---

[5]. تُدعى مثل هذه التوابع بتوابع الإنتاج Cobb_Douglas.

2-5 التعبير اللغاريتمي

رأينا في الفقرة الســابقة كيفية التعبير عن عدد M بشـكل أسـي $M = a^n$، ودعونا التعبير a^n بالشـكل الأســـي للعدد M. في العديد من الحالات العملية، قد نحتاج إلى إيجاد قيمة n من أجل قيم محددة للعددين M و a. في حال كانت الأعداد غير صـــحيحة وكبيرة، يكاد يســـتحيل إيجاد قيمة n عبر التجريب، لذلك سنعكس هذا التمثيل عبر مفهوم اللغاريتم.

ليكن $M = a^n$، ندعو التعبير الرياضي ($Log_a\ M = n$) بلغاريتم العدد M للأساس a ويساوي n.

إذاً التعبير الرياضي $M = a^n$ يكافئ التعبير الرياضي $Log_a\ M = n$. حيث $a>0$، و $a\neq1$.

مثال (5-3) بعض الأمثلة الأولية للتعامل مع اللغاريتم.

1. التعبير الأسي $4^2 = 16$ يكافئ التعبير اللغاريتمي $Log_4(16) = 2$.
2. $Log_{10}(100) = n$ يكافئ $10^n = 100$ أو $10^n = 10^2$ ، فنجد $n = 2$.
3. $Log_4(2) = n$ يكافئ $4^n = 2$ ، فنجد $n = 1/2$.
4. $Log_5(1/5) = n$ يكافئ $5^n = 1/5$ أو بالرفع لقوة سالبة $5^n = 5^{-1}$ ، فنجد $n = -1$.
5. التعبير الأسي $10^n = 1$ يكافئ التعبير اللغاريتمي $Log_{10}(1) = n$ ، فنجد $n = 0$.
6. التعبير الأسي $10^n = (1/10)$ يكافئ التعبير اللغاريتمي $Log_{10}(1/10) = n$ ، فنجد $n=-1$.
7. التعبير $10^n = (1/100)$ يكافئ $Log_{10}(1/100) = n$ ، فنجد $n = -2$.
8. لغاريتم العدد 64 للأساس 4 يساوي 3 $Log_4(64) = 3$
9. لغاريتم العدد 1/64 للأساس 4 يساوي -3 $Log_4(1/64) = -3$
10. لغاريتم العدد 216 للأساس 6 يساوي 3 $Log_6(216) = 3$

نلاحظ أن الشكل اللغاريتمي ليس إلا صياغة أخرى عن الشكل الأسي للتعبير الرياضي.

القواعد الأساسية على اللغاريتمات:

القاعدة الأولى: لوغاريتم جداء عددين $Log_a(x.y) = Log_a(x) + Log_a(y)$

القاعدة الثانية: لوغاريتم قسمة عددين $Log_a(x/y) = Log_a(x) - Log_a(y)$

القاعدة الثالثة: لوغاريتم عدد مرفوع لقوة $Log_a(x^n) = n.Log_a(x)$

مثال (5−4) بعض الأمثلة الأولية لتطبيق العمليات على اللغاريتم.

1. يُمكن تبسيط الصيغة $Log_a(x) + Log_b(y) – Log_b(z)$ بالشكل $\text{Log}_\text{b}\left(\frac{\text{x.y}}{\text{z}}\right)$

2. تبسيط الصيغة $3Log_a(x) – 2Log_b(z)$:

باستخدام القاعدة الثالثة أعلاه، نجد: $3\text{Log}_b\text{x} - 2\text{Log}_b\text{y} = \text{Log}_b\text{x}^3 - \text{Log}_b\text{y}^2$

والقاعدة الثانية، فنجد: $\text{Log}_b\text{x}^3 - \text{Log}_b\text{y}^2 = \text{Log}_\text{b}\left(\frac{\text{x}^3}{\text{y}^2}\right)$.

3. إيجاد قيمة n في الصيغة $10(1.6)^n = 10000$

بداية، نختزل الطرفين على 10، فنجد $(1.6)^n = 1000$

نأخذ لوغاريتم الطرفين، فنجد $Log(1.6)^n = Log(1000)$ أو $n.Log(1.6) = Log(1000)$

أخيراً، نجد قيمة n: $n = \frac{\text{Log}(1000)}{\text{Log}(1.6)}$

كما نلاحظ أن هذه الصيغة صحيحة مهما كان أساس اللغاريتم، لنأخذ الأساس 10 مثلاً:

$Log_{10}(1000) = 3$ وكذلك $Log_{10}(1.6) = 0.20412$.[6]

ومنه قيمة n: $n = \frac{\text{Log}(1000)}{\text{Log}(1.6)} = \frac{3}{0.20412} = 44.09171$

4. تبسيط الصيغة $\sqrt{\frac{x^5y^3}{x^4}}$.

اختزال x^4 من البسط والمقام، تُصبح الصيغة على الشكل: $\sqrt{x.y^3} = (x.y^3)^{\frac{1}{2}}$

نأخذ لغاريتم الصيغة الأخيرة فتصبح كما يلي:

$$Log(x.y^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}Log(x.y^3) = \frac{1}{2}Log(x) + \frac{3}{2}Log(y)$$

في الكثير من الحالات العملية، نلاحظ وجود عدد عدد خاص يساوي تقريباً $e=2.718$، ويُستخدم للتعبير عن صيغة أسية $F(x) = e^x$، وقد أشرنا إليه في بحث المتتاليات، نعيد التذكير به.

لنأخذ المتتالية $\text{U}_\text{n} = (1 + \frac{1}{\text{n}})^\text{n}$ ولنرى نهاية هذه المتتالية عندما n تسعى إلى اللانهاية، يُمكن البدء بحساب حدودها الأولى ثم مراقبة سلوكها، ويمكن رؤية ذلك عبر التمثيل البياني كما هو موضح في الجدول المبين أدناه، نلاحظ أن هذه المتتالية تنتهي إلى عدد ثابت ندعوه العدد النيري $e=2.718282…$.

n	**Un**

6. نضطر أحياناً لاستخدام الآلات الحاسبة العلمية، إذ قد لا نحصل على أعداد صحيحة.

1	2
10	2.593742
100	2.704814
1000	2.717602
10.000	2.718146
100.000	2.718268
1000.0000	2.718281
1000.000.000	2.718282

جرت العادة في التطبيقات الاقتصادية على استخدام اللغاريتمات بأساس e، وتُدعى لغاريتم طبيعي أو اللغاريتم النيبري ويرمز لها بالحرفين "Ln": $Log_e(x) = Ln(x)$ أي لغاريتم العدد x بأساس e.

مثلاً، اللغاريتم الطبيعي للعدد e يساوي الواحد $Ln(e) = 1$، وللعدد 1 يساوي الصفر، وللعدد 10 يساوي 2.3025. وبالتالي القضية ليست إلا تغيير لأساس اللغاريتم.

تطبيق (5−2) تواتر الاتصالات على مقسم شركة على شكل لغاريتمي.

تقدر إدارة إحدى الشركات الجديدة، أن عدد الاتصالات التي ترد إلى مقاسمها بما فيها زيارة موقعها الإلكتروني هو تابع لغاريتمي من الشكل: $Y = 200Log_{10}(15+20n)$

حيث Y عدد الاتصالات، و n رقم الشهر منذ انطلاقة الشركة. والمطلوب:

أ) حساب عدد الاتصالات الشهرية خلال الأشهر الستة الأولى من عمر الشركة.

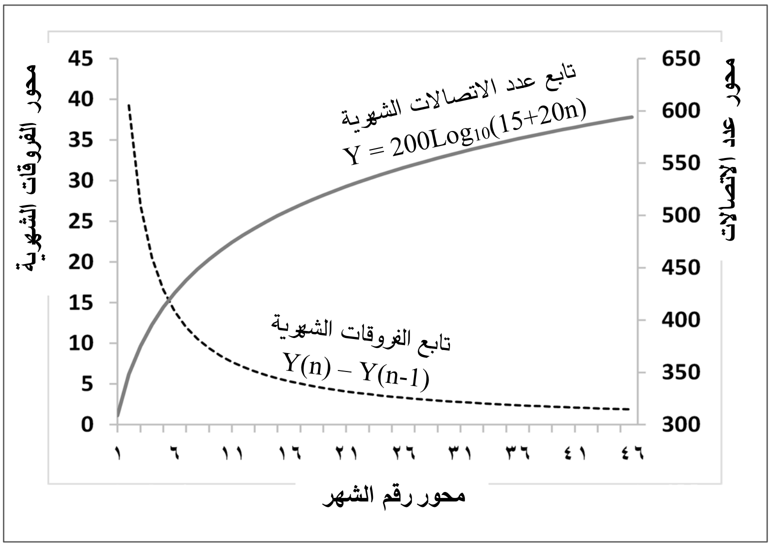
ب) رسم الخطي البياني لعدد الاتصالات بدلالة رقم الشهر. ماذا تلاحظ؟

الحل:

أ) لحساب عدد الاتصالات الشهرية خلال الأشهر الستة الأولى، يكفي استبدال n بأرقام الأشهر من 1 إلى 6، وحساب قيمة التابع Y:

n رقم الشهر	1	2	3	4	5	6
Y عدد الاتصالات	309	348	375	396	412	426
الفرق عن الشهر السابق $Y(n) - Y(n-1)$	–	39	27	21	17	14

ب) الخط البياني: نلاحظ من الخط البياني أن عدد الاتصالات يتناقص مع الزمن، ويظهر بشكل واضح من الخط البياني لفروقات الاتصالات الشهرية في الشكل (5−2).



الشكل (5−2) تطور عدد الاتصالات الشهرية بإحدى الشركات

في نهاية هذا الفقرة، قد يكون من المفيد تذكر بعض اللغاريتمات الشهيرة تسهيلاً لإنجاز الحسابات:

1. يرمز للغاريتم النبيري أو الطبيعي بالحرفين $Ln(x)$، وللغاريتم العشـري (الأسـاس = 10) بالشكل $Log_{10}(x)$ ونهمل 10 في حال عدم وجود لبس في فهم الصيغة.
2. $Log_a(1) = 0$
3. $Log_a(a) = 1$
4. $Log_a(0) = -\infty$ إذا كان $a>1$ ، $Log_a(0) = +\infty$ إذا كان $a<1$.
5. $Log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} Log_a x$
6. $Log_a b = \frac{1}{Log_b a}$
7. $x = a^{Log_a x}$
8. اللغاريتم العشري للعدد النبيري: $Log_{10}(e) = 0.4342945$
9. اللغاريتم الطبيعي/النيبري للعدد 10: $Log_e(10) = 2.302585$
10. $Log\ x = \frac{1}{Ln\ 10} Ln\ x = 0.4342945\ Ln\ x$
11. $Ln\ x = \frac{1}{Log\ e} Log\ x = 2.302585\ Ln\ x$

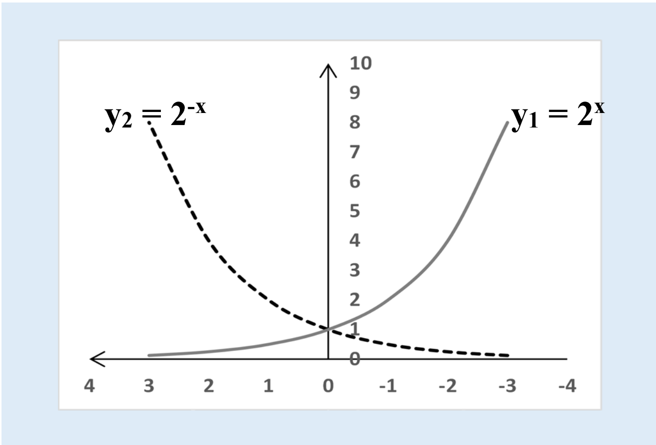
5-3 العلاقة بين التوابع اللغاريتمية والأسية

رأينا العلاقة العضوية بين الصيغ الأسية والصيغ اللغاريتمية، وبأن أحدها هو صورة للآخر، ويمكن أن نجد أشكال عديدة جداً من التوابع الأسية/اللغاريتمية حيث الأساس يمكن أن يتنوع كثيراً، كما لاحظنا وجود عدداً خاصاً هو العدد النيبري e، نستخدمه كأساس في التوابع الأسية/اللغاريتمية، وعندما نقول تابع أسي أو لغاريتمي دون تحديد الأساس فنقصد به الأساس e، أي من الشكل $y = e^x$ أو $y = 5x + e^{x+3}$ مثلاً.

لنأخذ تابعين من الشكل $y_1 = 2^x$، $y_2 = 2^{-x}$ ولنحاول إيجاد بعض قيمهما ورسم خطوطها البيانية.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_1=2^x$	0.063	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y_2 = 2^{-x}$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.063

نلاحظ أن قيم التابعين هي نفسها لكن بترتيب معكوس، ويوضح ذلك الخط البياني على الشكل (5-3)، أن التابعين متناظرين تماماً بالنسبة للمحور العمودي.



الشكل (5-3) تمثيل الخط البياني لبعض التوابع الأسية

تطبيق (5-3) تطور نسبة العائلات التي تمتلك شاشات LCD.

يُقدر المكتب المركزي للإحصاء أن نسبة العائلات التي تمتلك شاشات مسطحة LCD سنوياً بعد السماح بتصنيعها أو استيرادها هو تابع أسي له الشكل الآتي: $y = 100(1 - e^{-0.1n})$

حيث y هي النسبة المئوية الإجمالية للعائلات التي تمتلك شاشة، و n هو عدد السنوات منذ السماح بها. والمطلوب:

1. ما نسبة العائلات التي ستمتلك شاشة في السنوات الخمس الأولى؟

2. متى يصل السوق إلى حالة الإشباع القصوى، بعد كم سنة تمتلك جميع العائلات شاشة؟

3. ارسم الخط البياني للتابع y.

الحل:

أ) لحساب نسبة العائلات التي ستمتلك شاشة في السنوات الخمس الأولى: يكفي استبدال n=1, 2, ...,5 وحساب قيمة y المقابلة لكل منها:

السنة الأولى n = 1: $y_1 = 100\left(1 - e^{-0.1*(1)}\right) = 9.52\%$

السنة الثانية n = 2: $y_2 = 100\left(1 - e^{-0.1*(2)}\right) = 18.13\%$

السنة الثالثة n = 3: $y_3 = 100\left(1 - e^{-0.1*(3)}\right) = 25.92\%$

السنة الرابعة n = 4: $y_4 = 100\left(1 - e^{-0.1*(4)}\right) = 32.97\%$

السنة الخامسة n = 5: $y_5 = 100\left(1 - e^{-0.1*(5)}\right) = 39.35\%$

ب) حالة الإشباع القصوى للسوق: أي عندما تمتلك جميع العائلات شاشة مما يعني y=100%

نستبدل y=100 في الصيغة $y = 100(1 - e^{-0.1n})$ فنحصل على المعادلة:

$$100 = 100(1 - e^{-0.1n})$$

حيث المتغير الوحيد فيها هو عدد السنوات n، وبحل المعادلة:

بتقسيم الطرفين على 100 نجد: $1 = 1 - e^{-0.1n}$

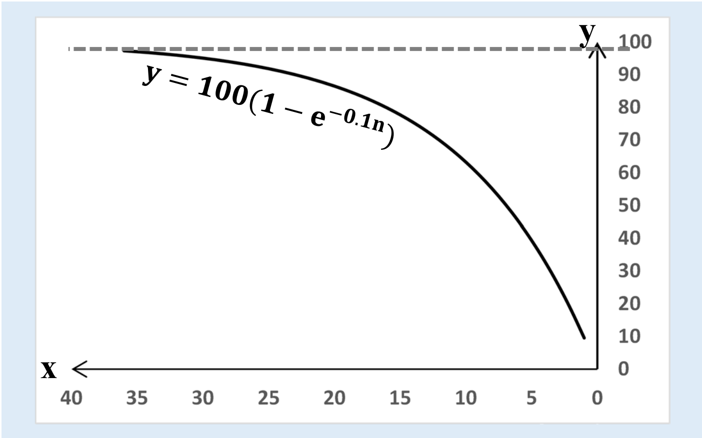
أو $1 - 1 = -e^{-0.1n}$ ومنه $e^{-0.1n} = 0$ أو نكتبها بالشكل $\frac{1}{e^{0.1n}} = 0$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان المقام يساوي اللانهاية ∞، مما يعني $e^{0.1n} = \infty$ أي أن $n = \infty$.

بمعنى اقتصادي، نظرياً لا يمكن إشباع السوق بشكل كامل 100%، لكن عملياً عندما نصل إلى نسبة قريبة من 100% ولتكن حوالي 95% من السوق مثلاً، ويتحقق ذلك بعد حوالي 30 سنة، نقول جوازاً أن السوق مشبع.

في الحقيقة، نلاحظ بشكل شبه دائم في الأسواق، أن هناك نسبة "طبيعية" من العائلات لا ترغب بامتلاك شاشة مسطحة لسبب أو لآخر حتى وإن توفرت لها الإمكانيات المادية.

ت) الخط البياني للتابع: نلاحظ أن الإقبال على شراء الشاشات في السنوات الأولى يكون كبيراً بالمقارنة مع السنوات الأخيرة، أي أن معدل التزايد السنوي يتناقص تدريجياً.



الشكل (5–4) تطور نسبة العائلات التي تمتلك شاشة LCD (مثال)

4–5 تطبيقات: توابع النمو الاقتصادي

أحد أهم التطبيقات للتوابع الأسية واللغاريتمية تندرج ضمن إطار البحث عن صيغ النمو الاقتصادي، حيث نلاحظ في هذا النمط من الظواهر الاقتصادية الكثير من العوامل، وبأن النمو ذو طابع تراكمي سواء زمنياً أو حسب تكامل هذه العوامل.

تطبيق (5–4) تابع نمو اقتصادي من الشكل الأسي البسيط.

أجرى المكتب المركزي للإحصاء دراسات إحصائية على فترة طويلة من الزمن لتحديد الشكل الرياضي لتطور الناتج المحلي الإجمالي GDP: Gross Domestic Product وحساب معدلات النمو الاقتصادي في القطر، فحصل على صيغة ذات مصداقية من الشكل الآتي:

$$Y = 20\, e^{0.05x} \qquad \text{معادلة } [1]$$

حيث x هو رقم السنة منذ بدء حفظ البيانات لدى المكتب. Y هو الناتج المحلي الإجمالي بمليارات الليرات السورية. والمطلوب:

أ) ما هو أول رقم مسجل لدى المكتب للناتج المحلي الإجمالي؟

ب) متى يصل الناتج المحلي الإجمالي إلى 40 مليار ل.س؟

ت) ارسم الخط البياني للتابع Y، ماذا تلاحظ من شكل الخط البياني؟

ث) استنتج من الخط البياني قيم الناتج المحلي الإجمالي بعد فترة طويلة جداً من الزمن، أو ادرس نهاية التابع Y عندما تسعى x إلى قيم كبيرة جداً أو إلى اللانهاية.

ج) حاول حساب معدل النمو السنوي أي كل سنة بالنسبة للسنة السابقة، ماذ تلاحظ؟

الحل:

أ) لحساب أول رقم مسجل لدى المكتب للناتج المحلي الإجمالي، يكفي استبدال x=0 في صيغة التابع، بالتبديل نجد: $Y(x=0) = 20\ e^{0.05*(0)} = 20*(e^0) = 20$

أي أن أول قيمة للناتج المحلي الإجمالي مسجلة لدى المكتب تساوي 20 مليار ل.س.

ب) لحساب متى يصل الناتج المحلي الإجمالي إلى 40 مليار ل.س، نستبدل $Y = 40$، ونحل المعادلة: $20\ e^{0.05x} = 40$

بتقسيم الطرفين على 20 نجد: $e^{0.05x} = (40/20) = 2$

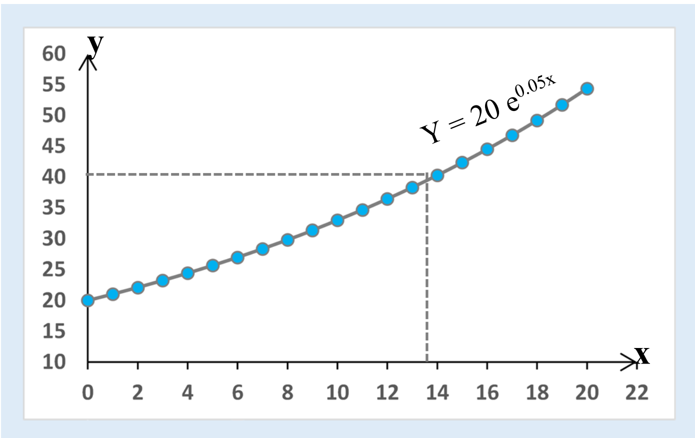
نأخذ لغاريتم الطرفين $Ln(e^{0.05x}) = Ln(2)$ أو تُكتب بالشكل $0.05x\ Ln(e) = Ln(2)$

نعلم أن اللغاريتم الطبيعي للعدد e هو الواحد $Ln(e) = 1$، وكذلك $Ln(2) = 0.693$

بالتالي تُصبح المعادلة $0.05x * 1 = 0.693$ ومنه نجد قيمة $x = 0.693/0.05 = 13.86$

أي يصل الناتج المحلي الإجمالي إلى 40 مليار خلال 14 سنة تقريباً.

ت) الخط البياني للتابع Y: نلاحظ من شكل الخط البياني للتابع أن معدلات التزايد في السنوات الأخيرة أكبر من معدلات التزايد في السنوات الأولى، وكأن هناك تسارع في معدلات النمو.



الشكل (5-5) تطور الناتج المحلي الإجمالي بشكل أسي (مثال)

ث) لحساب الناتج المحلي الإجمالي بعد فترة طويلة جداً من الزمن، يجب دراسة نهاية التابع Y عندما تسعى x إلى اللانهاية:

$$\lim_{x\to\infty}(20\ e^{0.05x}) = \lim_{x\to\infty}(20\ e^{\infty}) = \infty$$

نظرياً، يذهب الناتج المحلي الإجمالي إلى اللانهاية عندما تسعى عدد السنوات إلى اللانهاية، عملياً أو بالمفهوم الاقتصادي، تزداد قيم الناتج المحلي الإجمالي بشكل كبير جداً بعد فترة طويلة جداً من الزمن.

ج) معدل النمو السنوي أي كل سنة بالنسبة للسنة السابقة، لنأخذ السنوات الأولى:

يُحسب معدل النمو السنوي بقسمة الفرق بين سنتين متتاليتين على السنة السابقة كما يلي:

$$t = \frac{Y_{x+1} - Y_x}{Y_x}$$ معادلة [2]

نلاحظ من الجدول أن معدل التزايد السنوي ثابت ويساوي 5.13%.

السنة	الناتج GDP	معدل الزيادة t %
0	20	
1	21.025	5.13%
2	22.103	5.13%
3	23.237	5.13%
4	24.428	5.13%
5	25.681	5.13%
6	26.997	5.13%

كان يُمكن حساب هذا المعدل وفق المعادلة [2] كما يلي:

$$\frac{Y_{x+1} - Y_x}{Y_x} = \frac{20e^{0.05(x+1)} - 20e^{0.05x}}{20e^{0.05x}} = \frac{e^{0.05x}(e^{0.05} - 1)}{e^{0.05x}} = e^{0.05} - 1 = 0.0513$$

وهي نفس القيمة التي حصلنا عليها عبر تجريب بعض القيم للسنوات الأولى.

تطبيق (5-5) تابع نمو اقتصادي من الشكل الأسي البسيط، انكماش.

لنأخذ نفس بيانات التطبيق أعلاه (5-4)، لكن صيغة الناتج المحلي الإجمالي لها الشكل الآتي:

$$Y = 20\ e^{-0.05x}$$ معادلة [1]

أي قيمة المعامل في الأس سالب ويساوي 0.05- بدلاً من 0.05، ولنجب على نفس الأسئلة:

أ) ما هو أول رقم مسجل لدى المكتب للناتج المحلي الإجمالي؟

ب) متى يصل الناتج المحلي الإجمالي إلى 40 مليار ل.س؟

ت) ارسم الخط البياني للتابع Y، ماذا تلاحظ من شكل الخط البياني؟

ث) اســـتنتج من الخط البياني قيم الناتج المحلي الإجمالي بعد فترة طويلة جداً من الزمن، أو ادرس نهاية التابع Y عندما تسعى x إلى قيم كبيرة جداً أو إلى اللانهاية.

ج) حاول حساب معدل النمو السنوي أي كل سنة بالنسبة للسنة السابقة، ماذ تلاحظ؟

<u>الحل:</u>

أ) أول رقم مسـجل لدى المكتب للناتج المحلي الإجمالي، نسـتبدل x=0 في الصـيغة التابع، نجد:
$Y(x=0) = 20\ e^{-0.05*(0)} = 20*(e^{0}) = 20$

أول قيمة للناتج المحلي الإجمالي هي نفسـها المحسـوبة في التطبيق السـابق وتسـاوي 20 مليار ل.س.

ب) الناتج المحلي الإجمالي Y = 40، نحل المعادلة: $20\ e^{-0.05x} = 40$

بتقسيم الطرفين على 20 نجد: $e^{-0.05x} = (40/20) = 2$

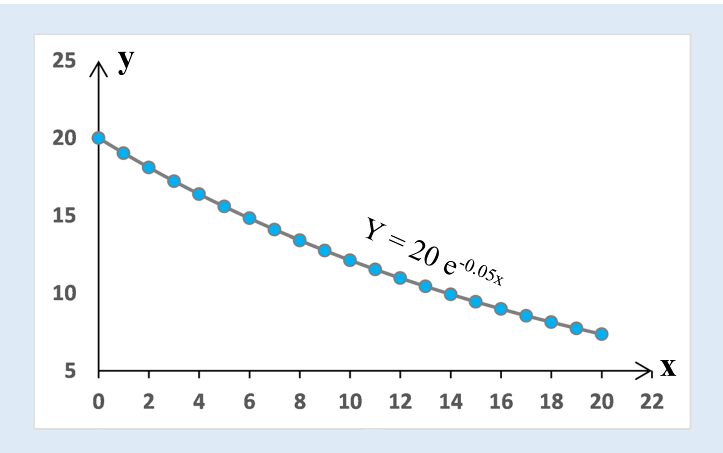
نأخذ لغاريتم الطرفين $Ln(e^{-0.05x}) = Ln(2)$ أو تُكتب بالشكل $-0.05x\ Ln(e) = Ln(2)$

اللغاريتم الطبيعي للعدد e هو الواحد $Ln(e) = 1$، وكذلك $Ln(2) = 0.693$

بالتالي تُصبح المعادلة $-0.05x = 0.693$ ومنه نجد قيمة $x = 0.693/(-0.05) = -13.86$

نلاحظ أن قيمة x ســالبة وهذا غير ممكن عملياً، كون x هي عدد ســنوات ولا يمكن أن تكون سالبة، أي أن الناتج المحلي الإجمالي لن يصل أبداً إلى 40 مليار.

ت) الخط البياني للتابع Y: نلاحظ من شــكل الخط البياني للتابع أن معدلات التزايد في الســنوات الأخيرة أقل من معدلات التزايد في السنوات الأولى، وكأن هناك تناقص في معدلات النمو.



الشكل (5-6) تطور الناتج المحلي الإجمالي بشكل أسي (مثال، انكماش)

ث) لحســـــاب الناتج المحلي الإجمالي بعد فترة طويلة جداً من الزمن، يجب دراســـــة نهاية التابع Y عندما تسعى x إلى اللانهاية:

$$\lim_{x\to\infty}(20\ \mathrm{e}^{-0.05x}) = \lim_{x\to\infty}\left(20\ \frac{1}{e^{0.05x}}\right) = \frac{20}{\infty} = 0$$

نظرياً، يذهب الناتج المحلي الإجمالي إلى الصـــفر عندما تســـعى عدد الســـنوات إلى اللانهاية، عملياً أو بالمفهوم الاقتصـــــادي، تتناقص قيم الناتج المحلي الإجمالي بشـــكل كبير جداً بعد فترة طويلة جداً من الزمن.

ج) معدل النمو السنوي أي كل سنة بالنسبة للسنة السابقة، يُحسب معدل النمو السنوي كما في التطبيق السابق: $t = \frac{Y_{x+1}-Y_x}{Y_x}$ معادلة [2]

نلاحظ من الجدول أن معدل التزايد السنوي ثابت ويساوي 5.13%.

السنة	الناتج GDP	معدل الزيادة % t
0	20	
1	19.025	-4.88%
2	18.097	-4.88%
3	17.214	-4.88%
4	16.375	-4.88%
5	15.576	-4.88%
6	14.816	-4.88%

يُمكن حساب هذا المعدل وفق المعادلة [2] كما يلي:

$$\frac{Y_{x+1}-Y_x}{Y_x} = \frac{20e^{-0.05(x+1)} - 20e^{-0.05x}}{20e^{-0.05x}} = \frac{e^{-0.05x}(e^{-0.05}-1)}{e^{-0.05x}} = e^{-0.05} - 1 = -0.04877$$

وهي نفس القيمة التي حصـــلنا عليها عبر تجريب بعض القيم للســـنوات الأولى، والتي تبين أن حجم الناتج المحلي الإجمالي في تناقص مستمر وبمعدل ثابت سنوياً.

في معظم التطبيقات التي تعرضنا لها، يكون لدينا صيغة رياضية للظاهرة الاقتصادية، لكن في جميع هذه الظواهر، هناك من عمل على اســتخراج هذه الصــيغ انطلاقاً من البيانات المتوفرة عن الظاهرة، وهي إحدى القضايا المهمة للغاية والصعبة في الاقتصاد، وتدخل عملية إيجاد مثل هذه الصيغ ضمن إطار ما ندعوه بالنمذجة الاقتصـادية Econometric Modelling، وليسـت موضـوع الأملية الحالية، مع ذلك سـنحاول في مواضـيع عديدة من الأملية إعطاء بعض الأمثلة البسـيطة عن كيفية إيجاد مثل هذه الصيغ، وفيما يلي تطبيق عن هذا الموضوع.

تطبيق (5-5) البحث عن صيغة رياضية لمعدل النمو الاقتصادي.

سجلت وزارة الاقتصاد على مدى عدة سنوات الناتج المحلي الإجمالي GDP للقطر بمليارات الدولار، فكان لديها البيانات الآتية:

السنة رقم السنة	2000 1	2004 4	2007 7	2011 11	2012 12	2016 16	2018 18
GDP (مليار $)	6	10	17	35	42	80	108

والمطلوب: إيجاد الصيغة الرياضية لمعدل النمو الاقتصادي بفرض أنها من الشكل $GDP = b\,e^{a.t}$،

حيث: t رقم السنة، a, b: ثوابت التابع/الصيغة يجب البحث عنها استناداً للبيانات المتوفرة.

<u>الحل:</u>

الصيغة $GDP = b\,e^{a.t}$ لها شكل أسي، بتحويلها إلى شكل لغاريتمي بأخذ لغاريتم الطرفين، نجد:

$$Ln(GDP) = Ln(b\,e^{a.t}) = Ln(b) + Ln(e^{a.t}) = Ln(b) + a.t$$

لنرمز للغاريتم الناتج المحلي الإجمالي بالرمز $Y = Ln(GDP)$.

حيث أن الثابت b قيمته محددة من أجل صيغة محددة، فلغاريتم b أيضاً ثابت في الصيغة، ولنرمزله بالشكل $Ln(b) = c$.

نلاحظ أننا حصلنا على صيغة خطية بين لغاريتم الناتج المحلي الإجمالي GDP والزمن t، بالتالي نبحث عن معادلة أفضل مستقيم يمر بالنقاط المذكورة في الجدول أعلاه، لها الشكل:

$$Y = a.t + c$$

لحساب ميل المستقيم a، نقوم بحساب الفرق النسبي بين قيمتين لـ Y_1, Y_2 من أجل قيمتين لـ t_1, t_2 كما يلي:

$$Y(t_2) - Y(t_1) = (a.t_2 + c) - (a.t_1 + c) = a.(t2 - t1)$$

ومنه نجد قيمة a: $a = \frac{Y(t_2)-Y(t_1)}{t_2-t_1}$

نستكمل إجراء الحسابات في الجدول السابق، وذلك بإضافة لغاريتم GDP، وقيم a من أجل كل قيمتين متتاليتين للناتج المحلي الإجمالي، فنجد:

السنة **رقم السنة**	**2000** **1**	**2004** **4**	**2007** **7**	**2011** **11**	**2012** **12**	**2016** **16**	**2018** **18**
GDP الفعلي	6	10	17	35	42	80	108
Y = Ln(GDP)	1.792	2.303	2.833	3.555	3.738	4.382	4.682
قيم a		0.170	0.177	0.181	0.182	0.161	0.150
قيم c	1.622	1.622	1.642	1.683	1.695	1.659	1.619

GDP حسب الصيغة	6.164	10.264	17.093	33.739	39.991	78.938	110.903

نلاحظ أن قيم a غير متســاوية، لكنها متقاربة، وبالتالي نتوقع أن تشــكل قيم Y=Ln(GDP) مع رقم السنة t مستقيماً كما يوضح الشكل (5−7).

بفرض أن هذا المستقيم موجود، فنقبل أن القيمة المتوقعة للميل a هي متوسط قيم a في الجدول، أي تساوي تقريباً $a = 0.170$.

علينا حالياً البحث عن قيمة c، بعد أن أصبحت الصيغة $Y = 0.17\,t + c$ كما يلي: $c = Y - 0.17t$.

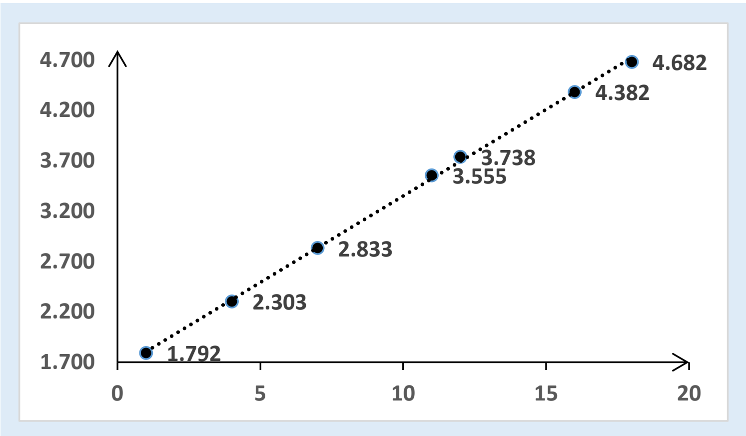
لكن، من أجل كل نقطة (قيمة t) لدينا في الجدول قيمة Y المقابلة لها وبالتالي قيمة لـــــــ c، نأخذ متوسط القيم الناتجة، فنجد القيمة المتوقعة تساوي تقريباً $c = 1.649$،

فتصبح الصيغة النهائية للمستقيم $Y = 0.17\,t + 1.649$

حيث أن $c = Ln(b)$ نجد قيمة $b = e^{1.649} = 5.2$

لنستبدل قيم a, b في صيغة التابع $GDP = b\,e^{a.t}$ فنجد الصيغة الرياضية للناتج المحلي الإجمالي:

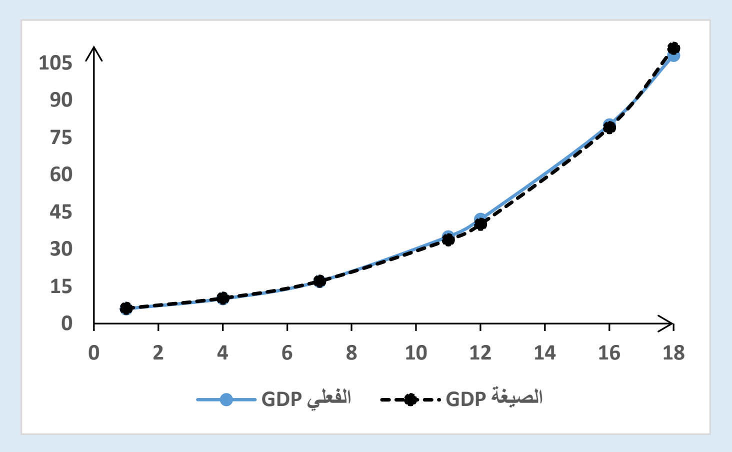
$$GDP = 5.2\,e^{0.17t}$$



الشكل (5−7) أفضل مستقيم بمر من عدة نقاط

من الضـــروري، حســاب GDP حســب هذه الصـــيغة ومقارنته مع القيم الفعلية GDP، فإذا كانت الفروقات كبيرة فإن الصـــيغة غير مناســبة، وإذا كانت قليلة فيُمكن قبول الصـــيغة على أنها نموذج مقبول لحســاب الناتج المحلي الإجمالي، يبين الجدول والشــكل (5−8) أن هذه الفروقات قليلة بين القيمة المتوقعة حسب النموذج والقيم الفعلية، وبالتالي يُمكن قبول النموذج[7].

7. للمزيد من المعلومات حول النمذجة الاقتصادية، يمكن العودة إلى المراجع ....



الشكل (5-8) الخطوط البيانية للقيم الفعلية لـ GDP والقيم المتوقعة حسب النموذج (مثال)

في الحقيقة، هناك كما أشـــرنا مجال واســـع ومهم للبحث عن نماذج رياضــــية تُعبر عن الظواهر الاقتصــــادية، ما قمنا به في هذا التطبيق ليس إلا محاولة تجريبية، ويجب أن تســـتكمل بالاختبارات الإحصائية المناسبة لقبول أو لرفض صيغة النموذج.

تطبيق (5-6) تحديد معدل النمو الاقتصادي.

بفرض أن الدخل القومي يتطور باســـتمرار، ولدينا صـــيغة تطور الدخل القومي بشـــكل مســـتمر بين لحظتين 0, t: $G_t = G_0 e^{r.t}$

حيث: G_0: الدخل القومي في اللحظة 0. G_t: الدخل القومي في اللحظة t.

r: معدل النمو خلال الفترة t. t: رقم الفترة.

والمطوب:

أ) تحديد صيغة حساب معدل النمو خلال الفترة t.

ب) حســـاب معدل النمو الســـنوي، الشـــهري، واليومي، من أجل دخل قومي كان في بداية الســـنة يساوي 15 مليار $ وفي نهاية السنة وصل إلى 20 مليار $.

<u>الحل:</u>

أ) صيغة حساب معدل النمو خلال الفترة t:

من الصيغة $G_t = G_0 e^{r.t}$ ، بأخذ لغاريتم الطرفين نجد: $Ln(G_t) = Ln(G_0\, e^{r.t})$

أو تكتب بالشكل $Ln(G_t) = Ln(G_0) + Ln(e^{rt}) = Ln(G_0) + r.t\, Ln(e)$

نعلم $Ln(e) = 1$، فنجد $Ln(G_t) = Ln(G_0) + r.t$

بالتالي تُحسب r بالشكل: $r = \frac{Ln(G_t)-Ln(G_0)}{t}$ أو بشكل آخر: $r = \frac{1}{t} Ln\left(\frac{G_t}{G_0}\right)$

نلاحظ أن هذه الصيغة صالحة من أجل أية قيم للزمن t أو أية تجزئة للفترة، حيث t هي عدد أجزاء الفترة سواء كانت شهرية أو يومية، أو فصلية، أو غيرها.

ب) معدل النمو السنوي، الشهري، واليومي

لدينا دخل قومي في بداية السنة يساوي $G_0 = 15$، وفي نهاية السنة $G = 20$،

من أجل سنة كاملة أي اعتبارها فترة تراكم واحدة $t = 1$، نجد معدل النمو السنوي:

$$r = \frac{Ln(G_t) - Ln(G_0)}{t} = \frac{Ln(20) - Ln(15)}{1} = \frac{2.996 - 2.708}{1} = 28.77\%$$

من أجل سنة مجزأة إلى 12 شهر أي $t = 12$، نجد معدل النمو الشهري:

$$r = \frac{Ln(G_t) - Ln(G_0)}{t} = \frac{Ln(20) - Ln(15)}{12} = \frac{2.996 - 2.708}{12} = 2.4\%$$

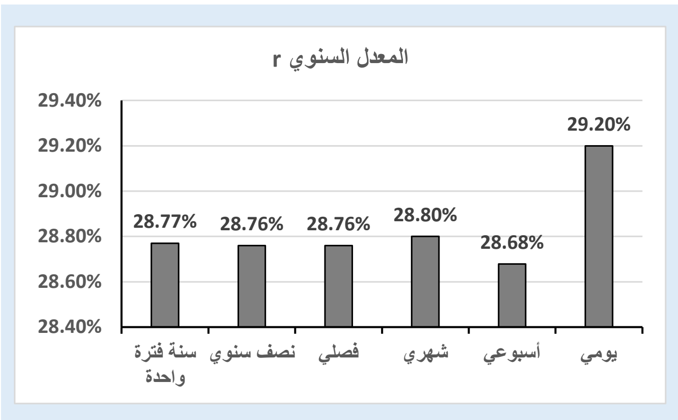
من أجل سنة مجزأة إلى 365 يوم أي $t = 365$، نجد معدل النمو اليومي:

$$r = \frac{Ln(G_t) - Ln(G_0)}{t} = \frac{Ln(20) - Ln(15)}{365} = \frac{2.996 - 2.708}{365} = 0.08\%$$

نلاحظ أنه في حال حساب المعدل السنوي بشكل تقريبي من المعدل الشهري 2.4% أي بضرب المعدل الشهري بـــ 12، نحصل على قيمة المعدل السنوي 28.8% (2.4x12)، وهي أكبر من المعدل السنوي 28.77% باعتبار السنة فترة تراكم واحدة.

وفي حال حساب المعدل السنوي بتقريب من المعدل اليومي، نحصل على معدل يساوي 29.2% (0.08x365)، وهو أكبر بشكل واضح من المعدل 28.77% باعتبار السنة فترة تراكم واحدة.

يبين الشكل (5–9) الفروقات بين معدل النمو السنوي محسوباً على أساس تراكمي لفترات مختلفة.



الشكل (5–9) مثال عن فروقات معدلات النمو السنوية محسوبة على أساس تراكمي مختلف.

هذه الفروقات منطقية بالنظر إلى الصيغة أعلاه، فهي صيغة تراكمية ومستمرة، فكلما كان عدد الأجزاء/الفترات كبيراً كلما اقتربنا من الشكل المستمر للصيغة، وكلما كان هذا العدد قليلاً، كلما اقتربنا من جمع متقطع لقيم الفترات. يُمكن تخيل الفرق بين المفهومين (المستمر والمتقطع) وكأن هناك فراغات (فترات جزئية) غير مأخوذة بالاعتبار في حال الجمع المتقطع، وكلما اقتربنا من الاستمرارية كلما كان عدد الفراغات صغيراً، وبالتالي لا يوجد الكثير من القيم غير المأخوذة بالاعتبار. سنعود إلى هذه المفاهيم عند الحديث عن التكامل في الفصل السابع.

أسئلة واختبارات الفصل الخامس: التوابع اللغارتيمة والأسية

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	ناتج الصيغة $M = 2^5$ يساوي 32.	✓	
2	ناتج الصيغة $M = 2^{-2}$ يساوي $\frac{1}{4}$.	✓	
3	الصيغة الأسية $M = a^{-n}$ تكافئ $M = \frac{1}{a^n}$.	✓	
4	الجذر التربيعي للعدد 4-: $(-4)^{\frac{1}{2}}$ يساوي 2+ أو 2-.		✓
5	حاصل القسمة $\frac{a^n}{a^m}$ يساوي a^{n-m}.	✓	
6	يُقصد التعبير الرياضي $(Log_a M = n)$ لغاريتم العدد M للأساس a ويساوي n.	✓	
7	التعبير الأسي $4^2 = 16$ يكافئ التعبير اللغاريتمي $Log_4(16) = 2$.	✓	
8	ناتج العملية $Log_4(2) = n$ يؤدي $n = 2$.		✓
9	ناتج العملية $Log_5(1/5) = n$ يؤدي $n = -1$.	✓	
10	لغاريتم العدد 64 للأساس 4 يساوي $Log_4(64) = 4$.		✓
11	لوغاريتم جداء عددين x، y يُعطى بالصيغة: $Log(x.y) = Log(x) + Log(y)$.	✓	
12	الصيغة $Log(x) + Log(y) – Log(z)$ تكافؤ الصيغة $Log\left(\frac{x.y}{z}\right)$.	✓	
13	قيمة n التي تُحقق الصيغة $10^n = \frac{1}{10}$ تساوي 1 .		✓
14	الصيغة $5^x = 2.(3)^x$ تكافؤ الصيغة $x.[Ln(5) - Ln(3)] = Ln(2)$.	✓	
15	اللغاريتم العشري لعدد السالب غير معرف، لكن اللغريتم الطبيعي لعدد سالب دوماً معرف.		✓

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- الصيغة اللغاريتمية $M = 4\ln x - 3\ln y + 5\ln z$ تكافؤ الصيغة:

أ) $M = \ln\frac{4x}{3y}5z$

ب) $M = \ln\left(\frac{x^4}{y^3}z^5\right)$

ج) $M = \ln\frac{4x}{5z} - 3y$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- يُمكن إعادة كتابة الصيغة $x = ae^{bx}$ بالشكل اللغاريتمي كما يلي:

أ) $x = \ln\frac{ab}{x}$

ب) $x = \ln\left(\frac{ax}{b}\right)$

ج) Ln(x) = Ln(a) + b.x

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- حل المعادلة $18e^{-3x} = 2e^{-5x}$ هو:

أ) $x = -\ln 3$

ب) لا يُمكن حسابه

ج) x = Ln(5) + Ln(-3)

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- لغاريتم العدد 125 للأساس 5 أي $Log_5(125)$ هو:

أ) $Log_5(125) = 5$

ب) $Log_5(125) = 3$

ج) $Log_5(125) = 125$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- الصيغة $M = \left(x^3 * y^{\frac{1}{3}}\right)^3$ تكافئ:

أ) M = 9x.y

ب) M = x.y

ج) $M = y.\, x^9$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- ناتج العملية الصيغة $M = \frac{4^7}{4^5}$ يساوي:

أ) M = 2

ب) M = 12

ج) M = 16

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- ناتج العملية الصيغة $M = \left(\frac{-4}{5}\right)^2$ يساوي:

أ) $M = \frac{16}{25}$

ب) $M = 1$

ج) $M = 25$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- يُمكن إعادة كتابة صيغة الناتج المحلي الإجمالي من الشكل $GNP = A.e^{r.t}$ بشكل لغاريتمي كما يلي:

أ) Ln(GNP) = r.t

ب) Ln(GNP) = Ln(A) + r.t

ج) Ln(GNP) = A + r.t

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- يُحسب معدل النمو r لناتج محلي إجمالي من الشكل $G = A.e^{r.t}$ بين اللحظة الحالية واللحظة t كما يلي:

أ) $r = \frac{1}{t}\frac{\ln G_t}{\ln G_0}$ ب) $r = Ln(G_t) + G_0$

ج) $r = G_t + G_0$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- يُحسب معدل النمو r لناتج محلي إجمالي من الشكل $G = A.e^{r.t}$ بين اللحظة الحالية واللحظة t كما يلي:

أ) $r = \frac{\ln G_t - \ln G_0}{t}$ ب) $r = Ln(G_t) + G_0$

ج) $r = G_t + G_0$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (5-1) تجانس الإنتاج في توابع Cobb-Douglas.

ليكن لدينا توابع الإنتاج من نمط Cobb-Douglas ولها الشكل $Q = AK^{\propto}L^{\beta}$ حيث K راس المال و L العمالة، يُدعى المجموع β+α بدرجة التجانس Degree of Homogeneity. والمطلوب:

1) إذا تم تغيير كل من رأس المال والعمالة بنفس المقدار λ، فما مقدار التغير الإجمالي في حجم الإنتاج Q؟

2) لنفرض لدينا تابع إنتاج من الشكل $Q = A[bK^{\propto} + (1-b)L^{\propto}]^{\frac{1}{\propto}}$، برهن أن هذا التابع متجانس ويُظهر ثبات سلمي Constant Returns to Scale من أجل تغير مقداره λ في كل من رأس المال K والعمالة L.

(توجيهات للإجابة: استبدال β و α بضعفها. الفقرة 5-1 تطبيق 5-1)

السؤال (5-2) تابعي العرض والطلب من الشكل الأسي.

قدرت إحدى الشركات أن تابعي العرض S والطلب D بدلالة السعر P لأحد منتجاتها لها الشكل:

تابع العرض: $D = Ae^{-k\,P}$ تابع الطلب: $S = Be^{m\,P}$

حيث A, B, k, m ثوابت موجبة. والمطلوب:

1) إيجاد سعر التوازن *P.

2) برهن أن كمية التوازن *Q تُعطى بالصيغة: $Q^* = \left(A^m B^k\right)^{\frac{1}{m+k}}$

(توجيهات للإجابة: مساواة العرض بالطلب وحل المعادلة. الفقرة 5-3)

السؤال (5-3) تابع تراكمي لاستخراج موارد غير متجددة له شكل أسي.

تقدر إحدى شركات التنقيب عن الموارد الطبيعية غير المتجددة، أن القيمة التراكمية Y بملايين الدولارات لاستثمار أحد هذه الموارد بدلالة الزمن x له الشكل: $Y = Ae^{0.1\,x}$ حيث A ثابت موجب. والمطلوب:

1) إذا كانت القيمة المستخرجة Y حتى الآن أي x=0 تساوي 100 مليون، فما قيمة الثابت A؟

2) تقدير المدة x التي تحتاجها الشركة لمضاعفة القيمة التراكمية اعتباراً من الآن، أي متى تصبح Y=200؟

(توجيهات للإجابة: تبديل القيم، وحل معادلة. الفقرة 5-4)

الفصل السادس: المشتقات وتحليل ظاهرة الحدية

عنوان الموضوع: المشتقات وتحليل ظاهرة الحدية Differntiation and Marginal Phenom

كلمات مفتاحية:

التفاضل Differentiaion، التكامل Integration، الميل/المماس Tangent، الاشتقاق Direvation، التوابع الحدية Marginal Function، نقاط الاستقرار الموضعية Stationary Points، الحل الأمثل Optimal Solution، مرونة الطلب Demand Elasticity، التفاضل الجزئي Partial Differentiation، المرونة الجزئية للطلب Partial Elasticity of Demand، المرونة الجزئية لتوابع الإنتاج Partial Elasticity of Production Funaction، مضاريب لاغرانج Lagrange Multipliers.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل أحد أهم الأدوات الرياضية وتطبيقاتها في العلوم الاقتصادية والإدارية، ونعني بذلك مفاهيم وقواعد التفاضل والتكامل، يبدأ الفصل بتوضيح أساسيات التفاضل والتكامل ودورها في تفسير بعض الظواهر الاقتصادية، ثم يتناول قواعد اشتقاق التوابع العددية، وكيفية تطبيق هذه القواعد لإيجاد التوابع الحدية للتوابع الاقتصادية مثل مرونة الطلب أو المرونة الجزئية لتوابع الإنتاج متعددة المتغيرات، ثم نتناول بعض قواعد البحث عن نقاط الاستقرار الموضعية ودورها في البحث عن الحلول المثلى لبعض الظواهر الاقتصادية، كما سنتعرض إلى طريقة مضاريب لاغرانج للبحث عن حلول مثلى باستخدام المشتقات الجزئية، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الأدوات، سنعرض الكثير من الأمثلة والتطبيقات الإدارية والاقتصادية.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يفهم أساسيات التفاضل والتكامل.
2. يُطبق قواعد التفاضل في اشتقاق التوابع العددية.
3. يوجد التوابع الحدية لبعض الظواهر الاقتصادية (التكاليف، الأرباح، ...).
4. يستخدم مفاهيم وقواعد نقاط الاستقرار الموضعية لإيجاد الحلول المثلى لتوابع اقتصادية.
5. يُوجد ويُحلل المرونة الحدية لتوابع الطلب.
6. يُطبق التفاضل الجزئي في اشتقاق بعض التوابع متعددة المتغيرات.
7. يُوجد ويُحلل المرونة الجزئية لتوابع الإنتاج.
8. يُطبق قواعد مضاريب لاغرانج لحل مسألة الأمثلية ضمن قيود.

مخطط الفصل:

1-6 مفاهيم التفاضل والتكامل Basic Concepts of Differentiaion & Integration.

2-6 قواعد التفاضل Rules of Differentiaion.

3-6 التوابع الحدية للإيرادات، التكاليف، والأرباح Marginal Cost, Revenue, Profit Functions.

4-6 القيمة المثلى لبعض التوابع الاقتصادية Optimal Solution of Some Economic Functions.

5-6 تحليل ظاهرة المرونة الحدية لتوابع الطلب Marginal Elasticity of Demand Function.

6-6 التفاضل الجزئي لتوابع متعددة المتغيرات Partial Differentiation of Mutivariates Functions.

7-6 المرونة الجزئية لتوابع متعددة المتغيرات Partial Elasticity of Mutivariates Funaction.

8-6 مضاريب لاغرانج Lagrange Multipliers.

1-6 مفاهيم التفاضل والمشتق

رأينا لدى دراســـة التابع من الدرجة الأولى أو الثانية بعض مفاهيم الاشـــتقاق عند الحديث عن ميل المستقيم أو مماس المنحني البياني للتابع، ولاحظنا أن عملية الاشتقاق ليست إلا دراسة تغيرات التابع بدلالة تغيرات المجهول، فمفهوم التغير النسـبي هو أسـاسـي في عملية الاشـتقاق، لذلك ندعو هذه العملية في أغلب الأحيان بعملية تفاضل التابع Function Differentiation.

في التطبيقات الإدارية والاقتصـادية، نجد لهذا التغير النسـبي أهمية بالغة، فمثلاً معرفة مقدار تغير تكاليف إنتاج القطعة الواحدة إذا زاد الإنتاج بمقدار قطعة واحدة، أو مقدار التغير في ربح القطعة الواحدة إذا تغيرت المبيعات بمقدار قطعة واحدة، ... الخ.

لتوضيح هذا المفهوم، لنأخذ تابع من الدرجة الأولى $F(x) = ax + b$، وليكن ΔF التغير في التابع من أجل تغير Δx في قيم المجهول x، فما هو التغير في قيمة التابع عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة 1، أو ما ندعوه بالتغير النسـبي؟ قيمة هذا التغير في التابع ليسـت إلّا النسـبة $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ وهو ما دعيناه في حالة المستقيم بميل التابع Slobe. يُقصد بميل المستقيم ظل Tangent الزاوية التي يصـنعها مماس المنحني البياني مع المحور الأفقي (محور السينات).

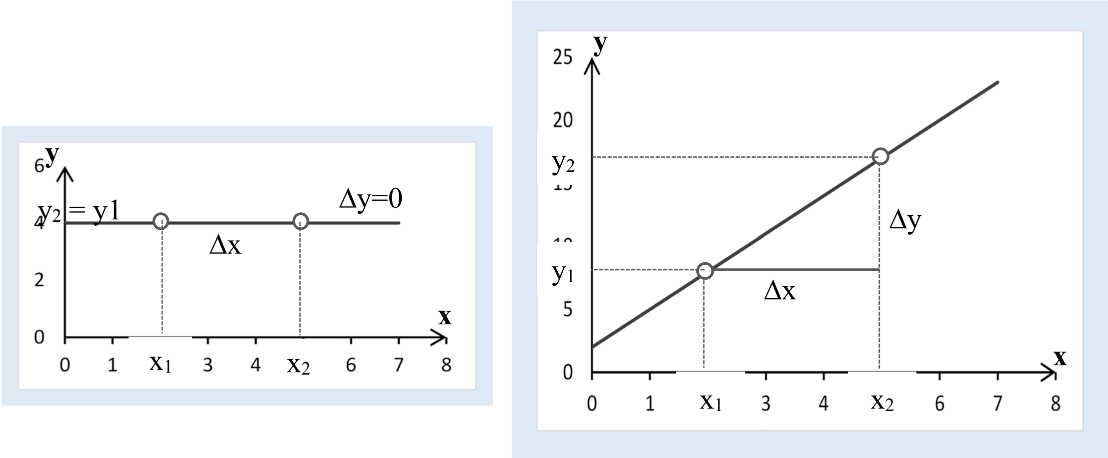
مثال (6–1) تغيرات تابع من الدرجة الأولى.

ليكن لدينا التابع $y = 3x + 2$، ولنراقب تغيرات التابع y بدلالة تغيرات المجهول x كما هو مبين في الشـكل (6–1)، نلاحظ أن تغير التابع بالنسـبة لتغير وحدة واحدة من x هو دوماً ثابت ويسـاوي 3: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$. أو من أجل أي تغير Δx يمكن حساب التغير في قيم التابع، مثلاً:

من أجل $x_1 = 2$ فإن $y_1 = 8$ ، من أجل $x_2 = 5$ فإن $y_2 = 17$

فيكون $\Delta x = x_2 - x_1 = 3$ وكذلك $\Delta y = 17 - 8 = 15$، ومنه $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{3} = 3$. نلاحظ أن هذه النسبة ثابتة دوماً وتساوي 3، ونلاحظ أيضاً أن قيمة أمثال x في الصيغة أعلاه من أجل أمثال لـــ y تساوي الواحد، وتمثل هذه القيمة ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم y مع المحور الأفقي ox.

للتوضـح أيضـاً، لتأخذ تابع ثابت القيمة، مثلاً: y=4، حيث لدينا دوماً $\Delta y = 0$، من أجل أي قيمة أو تغير في x، إذاً $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$، أصـــلاً لا يوجد أي تغير قيم التابع y كونـه ثابت. يُمكن كتابة صيغته "للتوضيح فقط" على الشكل $y = 0x + 4$.



الشكل (6–1) تغيرات تابع خطي بدلالة تغيرات المجهول

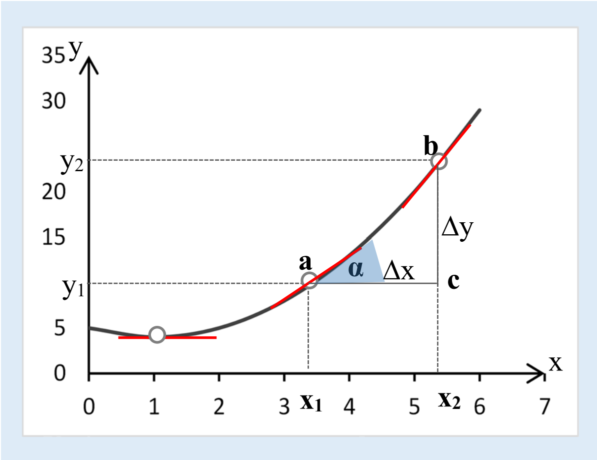
باعتبار أن التوابع بشكل عام ليست بالضرورة خطية، يجب تعميم هذا المفهوم، دون أن يغيب عن الذهن معدل تغير التابع بدلالة تغير المجهول، لنأخذ مثال توضيحي آخر لتابع غير خطي.

مثال (6–2). تغيرات تابع غير خطي.

ليكن لدينا التابع $y = x^2 - 2x + 5$ ولنراقب تغيرات y مع تغيرات x، كما هو موضح في الجدول أدناه والشكل (6–2). نلاحظ أن معدل التغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غير ثابت، أي أن الفرق Δy يختلف من أجل نفس الفرق $\Delta x=1$، إذا رسمنا مستقيم عند كل نقطة وبميل يساوي هذا المعدل، نلاحظ أن هذا المستقيم يمس الخط البياني للتابع عند النقطة.

في حين يُمكن ملاحظة أن التغيرات في المعدل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من أجل فرق $\Delta x=1$ هو ثابت ويساوي 2 دوماً، أي أنه يُمثل مستقيم ميله يساوي 2.

المجهول x	0	1	2	3	4	5	…
التابع y	5	4	5	8	13	20	
معدل التغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	-1	1	3	5	5	
تغيرات معدل التغير	–	–	2	2	2	2	



الشكل (6−2) تغيرات تابع غير خطي بدلالة تغيرات المجهول

تُعطينا الأمثلة السابقة فكرة عن كيفية حساب ميل التابع عند كل نقطة، لكن من الواضح أنه لا يُمكن اللجوء دوماً إلى الشـــكل البياني، لذلك يتعين البحث عن طرق تحليلية لحســـاب قيمة الميل عند كل نقطة من نقاط التابع.

لنتخيل الحالة التي يكون فيها Δx صـــغير جداً جداً، فما قيمة التغير في التابع Δy؟ بمعنى آخر، ما قيمة Δy عندما تسعى Δx إلى الصفر؟

عندما يتناقص الفرق Δx، فإن النقطة b تقترب شـيئاً فشـيئاً من النقطة a (انظر إلى الشـكل أعلاه)، أي أن وتر المثلث acb، يصـغر شـيئاً فشـيئاً، لكن زاوية المثلث عند a تبقى نفسـها، حتى يصـل هذا الوتر إلى قيمة صـــغيرة جداً جدا، في هذه الحالة تكاد تتطابق زاوية المثلث عند a مع الزاوية α التي يصنعها مماس منحنى التابع tangent مع المحور الأفقي عند النقطة a. ويكون ظل الزاوية tangent عند هذه النقطة يُعبر عن ميل المماس عندها، فظل الزاوية α ليس إلا معدل التغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما Δx يذهب إلى الصفر كما يوضح الشكل أعلاه.

إذاً نعرف معدل التغير عند فروقات صغيرة جداً dy, dx بالشكل: $\frac{dy}{dx} = \tan \propto$

وهو ما ندعوه المشتق الأول للتابع عند النقطة، ونرمز بالرمز $F'(x)$ (إشارة فتحة على F'). فالمشتق الأول لتابع $y=F(x)$ عند نقطة a إذاً ليس إلاّ نهاية التابع عندما x تنتهي إلى a، كما يلي:

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

حيث نستخدم الرمز dx للقول أن الفرق (x-a) ينتهي إلى الصفر، وأيضاً للإشارة إلى أن المشتق هو مشـــتق التابع F بالنســـبة للمجهول x. كما ندعو عملية التي يتم بها البحث عن المشـــتق بعملية التفاضل Differentiation. لنطبق هذه العملية على مثال توضيحي.

مثال (6−3): تفاضل تابع من الدرجة الأولى.

أ) لنأخذ التابع من الدرجة الأولى: $F(x) = 3x + 7$

لنبحث عن قيمة المشتق عن نقطة ما ولتكن a أي عندما x=a بتطبيق النهاية:

$$F'(x) = \lim_{x\to a}\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x\to}\frac{(3x+7) - (3a+7)}{x - a} = \lim_{x\to}\frac{3(x-a)}{x-a} = 3$$

اختزال البسط والمقام على (x-a)، نجد: $F'(x) = 3$

ب) لنأخذ تابع آخر من الدرجة الثانية $F(x) = x^2$.

قيمة المشتق عن نقطة ما a أي عندما x=a بتطبيق النهاية:

$$F'(x) = \lim_{x\to a}\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x\to}\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$

اختزال البسط والمقام على (x-a)، نجد: $F'(x) = x+a = 2a$

هذه النتيجة صالحة من أجل أية قيمة لـــ a، وبالتالي صالحة عندما a=x ومنه نجد المشتق الأول التابع يساوي: $F'(x) = 2x$.

يوضح هذا المثال كيفية الحصول على مشتق تابع ما عبر عملية التفاضل، لكن في الواقع، نلجأ إلى النهاية عندما لا تتوفر لدينا قاعدة مثبتة لحساب الاشتقاق (الفقرة التالية).

نركز على أن المشتق الأول $F'(x)$ يقيس معدل تغير التابع $y=F(x)$ بالنسبة إلى معدل تغير المجهول x، ويُعبر عن ميل المماس عند أي قيمة (نقطة) من مجال تعريف التابع (المنحني البياني)، فماذا يعني عملياً هذا المعدل؟

1. إذا كان المعدل يساوي الصفر $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ ، يعني أن تغيرات التابع تساوي الصفر من أجل أي تغير في قيم المجهول $\Delta y=0$ حيث $\Delta x\neq 0$. مما يعني أيضاً أن ظل الزاوية يساوي الصفر،أي أن الزاوية تساوي 180 درجة (أو π).
2. إذا كان المعدل أكبر من الصفر $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ، يعني أن التابع والمجهول يتغيران بنفس الاتجاه، بمعنى أن التابع يتزايد مع تزايد قيم المجهول، ويتناقص بتناقصه. مما يعني أيضاً أن ظل الزاوية أكبر من الصفر،أي أن الزاوية حادة أقل 180 درجة (أو أقل من π).
3. إذا كان المعدل أصغر من الصفر $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ، يعني أن التابع والمجهول يتغيران باتجاهين مختلفين، بمعنى أن التابع يتزايد مع تناقص قيم المجهول، ويتناقص بتزايده. مما يعني أيضاً أن ظل الزاوية أصغر من الصفر،أي أن الزاوية منفرجة أكبر 180 درجة (أو أكبر من π).

يُمكن تعميم هذا التفسير عند أي نقطة من نقاط التابع حيث التغيرات صغيرة جداً، ونستخدم في هذه الحالة المشتق عند النقطة المعنية $F'(x) = \frac{dy}{dx}$.

يُمكن الاستنتاج أن التابع $F(x)$ يكون متزايد (متزايد تماماً) إذا كان مشتقه الأول $F'(x)$ موجب (موجب تماماً، وبأنه متناقص (متناقص تماماً) إذا كان مشتقه الأول سالب (سالب تماماً). كما هو موضح في الشكل (6−3).

مثال (6−4) تزايد وتناقص تابع.

ليكن لدينا التابع $F(x) = -5x^3 + 40x^2 + 100$. لندرس إشارة مشتقه الأول، ولنرسم منحني التابع، وميل المماس عند بعض النقاط.

المشتق الأول: $F'(x) = -15x^2 + 80x$

ينعدم المشتق الأول عندما $x=0$ تمثل النقطة C أو $x=80/15$ تمثل النقطة A.

ويكون جدول تزايد وتناقص التابع كما يلي:

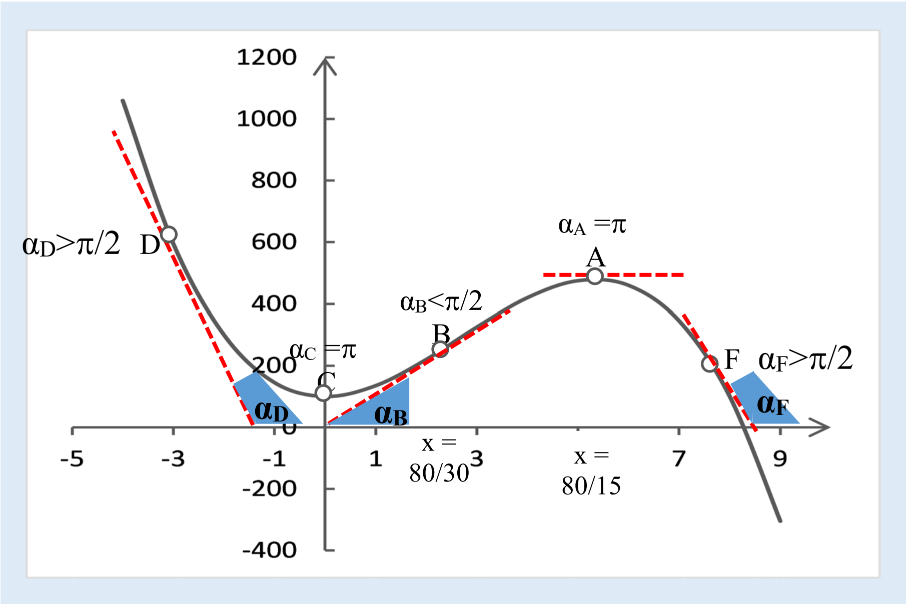
X / **النقطة**	$-\infty$		0 / C		80/30 / B		80/15 / A		$+\infty$
F'(x)		- - -	0	+ + +	106.7	+ + +	0	- - -	
F(x)		متناقص	100	متزايد	289.6	متزايد	479.3	متناقص	

قيمة المشتق الأول أو ميل الزاوية α التي يصنعها المماس مع المحور الأفقي عند النقطتين: A, C يساوي الصفر، فالزاوية تساوي إذاً 180 درجة (أو π)، والمماس عند هذه النقطة هو مستقيم يوازي المحور الأفقي.

قيمة المشتق الأول بين النقطتين A و C موجب، فالتابع متزايد. لنأخذ النقطة B مثلاً حيث $x=80/30$ نجد قيمة المشتق $F'(x)=106.7$ وقيمة التابع $F(x=80/30)=289.6$، ونجد على الشكل أن زاوية المماس عند هذه النقطة هي زاوية حادة أقل 90 درجة (أو أقل من $\pi/2$).

في حين نلاحظ أن قيمة المشتق الأول من $-\infty$ حتى النقطة C سالب، فالتابع متناقص. لنأخذ النقطة D مثلاً على الشكل، لاحظ أن زاوية المماس عند هذه النقطة هي زاوية منفرجة أكبر 90 درجة (أو أكبر من $\pi/2$).

كذلك قيمة المشتق الأول من النقطة A حتى $+\infty$ سالب، فالتابع متناقص. لنأخذ النقطة F مثلاً على الشكل، لاحظ أن زاوية المماس عند هذه النقطة هي زاوية منفرجة أكبر 90 درجة (أو أكبر من $\pi/2$).



الشكل (6-4) تزايد وتناقص تابع حسب إشارة المشتق الأول أو زاوية المماس

6-2 قواعد التفاضل

نورد فيما يلي أهم القواعد الأكثر انتشاراً في اشتقاق الأنواع المختلفة من التوابع، دون الحاجة لتبرير كيفية الحصول عليها، إذ ما يهمنا في الأملية الحالية هو تطبيقاتها، يُمكن للطالب أن يبذل بعض الجهد للبرهان عليها أو العودة للمراجع الرياضية. مع الانتباه إلى مجالات تعريف التابع، إذ لا يُمكن اشتقاق تابع إلا على مجموعة تعريفه.

(1) مشتق العدد الثابت $F(x) = a$ فإن $F'(a) = 0$.

مشتق العدد الثابت هو الصفر، إذ لا يوجد أي تغيرات في الثابت.

(2) مشتق تابع مضروب بثابت: $G(x) = a.F(x)$، فإن $G'(x) = a.\ F'(x)$.

مشتق تابع مضروب بعدد ثابت يساوي مشتق التابع مضروباً بالثابت.

(3) مشتق مجموع تابعين $H(x) = F(x) + G(x)$ ، فإن $H'(x) = F'(x) + G'(x)$.

مشتق مجموع تابعين هو حاصل مجموع مشتقي التابعين.

(4) مشتق طرح تابعين $H(x) = F(x) - G(x)$ ، فإن $H'(x) = F'(x) - G'(x)$.

مشتق طرح تابعين هو حاصل طرح مشتقي التابعين.

(5) مشتق جداء تابعين $H(x) = F(x) . G(x)$ ، فإن $H'(x) = F'(x).G(x) + G'(x).F(x)$.

مشتق جداء تابعين يساوي مشتق الأول في الثاني + مشتق الثاني في الأول.

(6) مشتق كسر $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ، فإن $H'(x) = \frac{F'(x).G(x) - G'(x).F(x)}{G(x)^2}$

مشتق كسر هو (مشتق البسط في المقام – مشتق المقام في البسط) مقسوماً على مربع المقام.

(7) مشتق تابع أسي $Fx) = a.x^n$ فإن $F'(x) = a.n.x^{n-1}$.

مشتق تابع تابع أسي يساوي حاص جداء الأس بالتابع بعد إنقاص الأس واحد.

(8) مشتق تابع مركب (سلسلة توابع) $H(x) = F(G(x)$ ، فإن $H'(x) = F'(G).G'(x)$

مشتق تابع مركب يساوي مشتق ما داخل التابع مضروباً بمشتق التابع بالنسبة إلى ما بداخله.

(9) مشتق التابع العكسي، ليكن $y(x)$ والتابع العكسي $x(y)$، فإن $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$

مشتق التابع العكسي يساوي مقلوب مشتق التابع الأصلي.

(10) مشتق مقلوب تابع $y=F(x)$ والمقلوب $G(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{F(x)}$ ، فإن $G'(x) = \frac{F'(x)}{(F(x))^2}$

مشتق مقلوب تابع يساوي مشتق التابع مقسوماً على مربع التابع.

(11) مشتق لغاريتم طبيعي $y = Ln(F(x))$، فإن $y' = \frac{F'(x)}{F(x)}$

مشتق تابع لغاريتم طبيعي يساوي مشتق ما داخل اللغاريتم (أي التابع $F(x)$) مقسوماً على التابع $F(x)$ (ما داخل اللغاريتم).

(12) مشتق لغاريتم للأساس a: $y=Log_a(F(x))$، فإن $y' = (Log_a e)\frac{F'(x)}{F(x)}$

مشتق تابع لغاريتمي للأساس a يساوي لغاريتم e للأساس a مضروباً بمشتق ما داخل اللغاريتم ومقسوماً على التابع.

(13) مشتق التابع الجيبي $F(x) = \sin x$ هو $F'(x) = \cos x$

مشتق الجيب هو التجيب.

(14) مشتق التابع الجيبي $F(x) = \cos x$ هو $F'(x) = -\sin x$

مشتق التجيب هو سالب الجيب.

(15) مشتق تابع الظل $F(x) = \tan x$ هو $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

مشتق الظل هو مقلوب مربع التجيب.

(16) مشتق تابع التظل $F(x) = \cot x$ هو $F'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

مشتق التظل هو سالب مقلوب مربع الجيب.

مثال (6–5) بعض الأمثلة عن مشتقات التوابع.

(1) $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6$ ، $F'(x) = 12x^2 + 10x$

(2) $F(x) = 2x - 6$ ، $F'(x) = 2$

(3) $F(x) = x^{7/5} + x^3$ ، $F'(x) = (7/5)x^{2/5} + 3x^2$

(4) $F(x) = \frac{a}{x}$ ، $F'(x) = \frac{-a}{x^2}$

(5) $F(x) = \frac{3x^4-5x^2+10}{2x+3}$ ، $F'(x) = \frac{18x^4+36x^3-10x^2-30x-20}{(2x+3)^2}$

(6) $F(x) = \sqrt[n]{x}$ أو $F(x) = (x)^{\frac{1}{n}}$ ، $F'(x) = \frac{1}{n}\frac{x^{1-n}}{\sqrt[n]{x}}$ أو $F'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$

(7) $F(x) = x.\sqrt{x}$ يكتب $F(x) = x^{3/2}$ ، $F'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(8) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $F'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

(9) $F(x) = Ln(a.x)$ ، $F'(x) = \frac{a}{x}$

(10) $F(x) = e^{ax}$ ، $F'(x) = a.e^{ax}$

مثال (6–6) مقارنة قيمة المشتق مع ظل زاوية.

ليكن لدينا التابع $F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x$ والمطلوب:

أ) حساب قيمة التابع في جوار النقطة a حيث $x_a=3$، وعند النقطة b حيث $x_b=3.1$

ب) حساب ظل الزاوية المشكلة بالمثلث القائم حيث زاويتيه الحادتين عند a و b.

ت) حساب قيمة مشتق التابع عند النقطة a.

ث) قارن بين القيمتين الناتجتين عن (ب) و (ت)، ماذا تستنتج؟

الحل:

أ) قيمة التابع في جوار النقطة a حيث $x_a=3$، نجد: $F(x=3) = 75$

قيمة التابع عند النقطة b حيث $x_b=3.1$، نجد: $F(x=3.1) = 80.011$

ب) ظل الزاوية هو معدل تغير التابع بين النقطتين: $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{80.011-75}{3.1-3} = \frac{5.011}{0.1} = 50.011$

ت) مشتق التابع $F'(x) = 3x^2 + 4x + 10$

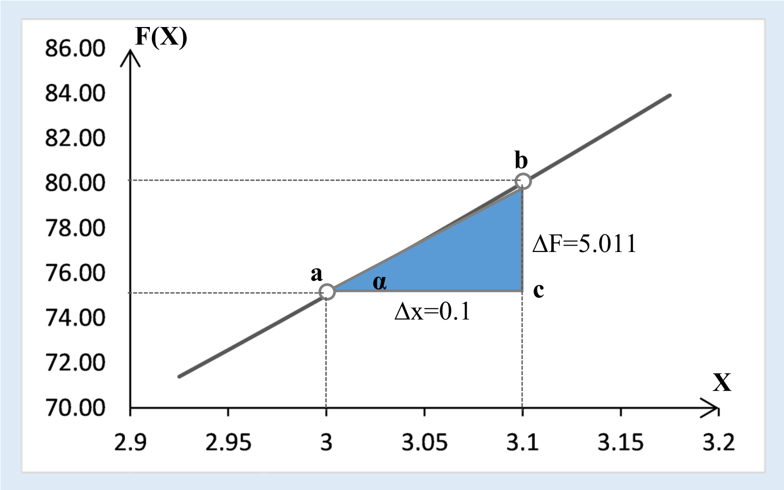
قيمة المشتق عندما $x=3$: $F'(x=3) = 49$.

ث) نلاحظ أن قيمة المشتق قريبة جداً من قيمة ظل الزاوية عند النقطة a.

إن الفرق بين القيمتين هو نتيجة لطريقة الحساب المتقطعة (التقريبية) عبر ظل الزاوية، وطريقة الحساب المستمرة (النقطية) عبر المشتق. كما نلاحظ، تعتمد طريقة الظل على حساب النسبة $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ ، وحيث أنه لا يمكن أبداً حساب هذا المقدار تجريبياً عندما $\Delta x=0$، لذلك يتم الحساب بجوار النقطة المعنية، ونلاحظ أيضاً أن طريقة المشتق هي الصحيحة إذا كان لدينا تابع قابل للاشتقاق عند النقطة المعنية.

في الواقع الفعلي، حيث لا يتوفر في الكثير من الحالات الصيغة الدقيقة للتابع، نلجأ إلى حساب معدلات التغير عبر ظل الزاوية أو عبر نسبة الفرق $\frac{\Delta F}{\Delta x}$.

يوضح الشكل (6-5) الزاوية a من المثلث القائم acb، حيث يمكن حساب ظل هذه الزاوية (الضلع المقابل على الضلع المجاور): $\tan \propto = \frac{bc}{ac} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{5.011}{0.1} = 50.11$. ونلاحظ أن هناك فرق بسيط بين وتر المثلث والمنحني البياني للتابع يظهر بشكل واضح بجوار النقطة b.



الشكل (6-5) مقارنة ظل الزاوية مع المشتق (مثال)

قواعد الاشتقاق من درجة n أكبر من الواحد:

لا يوجد أبداً ما يمنع اشتقاق المشتق $F'(x)$ فنحصل على المشتق الثاني للتابع، ونرمز له بالرمز $F''(x)$، وتطبق جميع المفاهيم والقواعد المذكورة أعلاه، حيث يُمكن إيجاد مشتق التابع من الدرجة n باشتقاق تدريجي لمشتقاته السابقة: $F^{(n)}(x) = F^{(n-1)\prime}(x)$.

يحتل المشتق الثاني أهمية خاصة خصوصاً في التطبيقات الاقتصادية، إذ يُعبر عن التغيرات في المشتق الأول، والمشتق الأول بدوره يُعبر عن تغيرات التابع الأصلي، إذاً يُعبر المشتق الثاني عن تغيرات التغيرات في التابع الأصلي.

مثال (6-7) المشتق الثاني لبعض التوابع.

(1) ليكن لدينا $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6$، فإن:

المشتق الأول: $F'(x) = 12x^2 + 10x$، ويكون المشتق الثاني: $F''(x) = 24x + 10$

(2) ليكن لدينا $F(x) = 2x - 6$ ، فإن:

المشتق الأول: $F'(x) = 2$ ويكون المشتق الثاني: $F''(x) = 0$

(3) ليكن لدينا $F(x) = \frac{a}{x}$ ، فإن:

المشتق الأول: $F'(x) = \frac{-a}{x^2}$ ، ويكون المشتق الثاني: $F''(x) = \frac{2a\,x}{x^4}$

(4) ليكن لدينا $F(x) = x.\sqrt{x}$ الذي يكتب أيضاً على الشكل $F(x) = x^{3/2}$، فإن:

المشتق الأول: $F'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ويكون المشتق الثاني: $F''(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$

لنحاول حالياً تفحص ماذا يُمثل المشتق الثاني عبر مثال؟

مثال (6−8) المشتق الثاني لتابع.

لنأخذ التابع في المثال (6−4): $F(x) = -5x^3 + 40x^2 + 100$. رأينا تزايد وتناقص التابع عبر دراسة إشارة مشتقه الأول، لندرس حالياً إشارة مشتقه الثاني، وكيف يُمكن استثمارها؟

المشتق الأول للتابع هو $F'(x) = -15x^2 + 80x$

فيكون المشتق الثاني هو $F''(x) = -30x + 80$

ينعدم المشتق الثاني عندما $x=80/30 = 8/3$.

يُمكن دراســة تزايد وتناقص المشــتق الأول $F'(x)$ كما جرى تماماً عند دراســة تزايد وتناقص التابع الأصلي، لنضف سطر إلى جدول التابع (من المثال أعلاه) يعبر عن إشارة المشتق الثاني وسطر آخر للتعبير عن تزايد وتناقص المشتق الأول:

X	$-\infty$		0		8/3		80/15		$+\infty$
النقطة			C		B		A		
F''(x)		+ + +	80	+ + +	0	- - -	-80	- - -	
F'(x)		متزايد		متزايد	106.7	متناقص	0	متناقص	
		- - -	0	+ + +	106.7	+ + +	0	- - -	
F(x)		متناقص	100	متزايد	289.6	متزايد	479.3	متناقص	

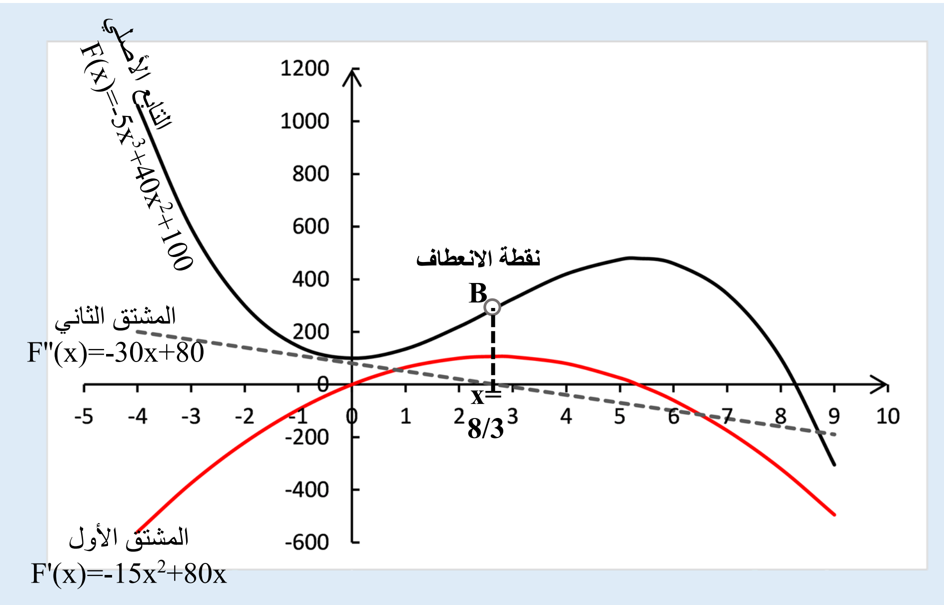
نجد أن المشـتق الأول يكون متزايد قبل النقطة B حيث $x=8/3$، ثم يبدأ بالتناقص بعد هذه النقطة، مع ملاحظة أيضـاً أن التابع الأصـلي يبقى متزايداً في جوار هذه النقطة. باعتبار أن المشتق الأول يعبر عن تغير التابع الأصـلي، مما يعني أن معدل التزايد (أي المشـتق الثاني) يبدأ بالتناقص بعد النقطة B، إذ كان موجباً فأصبح سالباً. كما يمكن أن نستخلص من الجدول أن المشتق الأول يبلغ حده الأعلى عند النقطة B أيضاً.

يُمكن تشبيه هذه المحاكمة، بسرعة السيارة عبر المشتق الأول، وبتسارعها عبر المشتق الثاني، إذا كان التسـارع (المشـتق الثاني) يسـاوي الصـفر، تكون سـرعة السـيارة ثابتة (المشـتق الأول يسـاوي ثابت)، وإذا كان التسارع موجباً، تزداد السرعة شيئاً فشيئاً، وإذا كان المشتق الثاني سالباً فإن سرعة السيارة تتناقص شيئاً فشيئاً.

باختصار، يُعبر المشتق الثاني عن التغير في تزايد أو في تناقص التابع (وليس فيما إذا كان متزايد أو متناقص)، وعن اتجاه هذا التغير، فهو إذاً يعبر عن انعطاف Inflection في ســـرعة تزايد أو تناقص التابع الأصلي:

1. إذا كانت إشـارة المشـتق الثاني موجبة $F''(x) > 0$، فهذا يعني أن اتجاه منحني التابع نحو الأعلى (نحو العينات الموجبة)، ندعوه منحني محدب Convex.
2. إذا كانت إشـارة المشـتق الثاني سـالبة $F''(x) < 0$، فهذا يعني أن تقعر منحني التابع نحو الأسفل (نحو العينات السالبة)، وندعوه منحني مقعر Concave.
3. إذا غير المشتق الثاني إشارته من الموجب إلى السالب، يعني أن هناك تناقصاً في معدل تزايد التابع، جوازاً أقل تسارعاً.
4. إذا غير المشـتق الثاني إشـارته من السـالب إلى الموجب، يعني أن هناك تزايداً في معدل تناقص التابع، جوازاً أكثر تسارعاً.

برسم التابع الأصـلي ومشـتقيه الأول والثاني على نفس الشـكل (6−6)، يُمكن ملاحظة جميع هذه التغيرات.



الشكل (6−6) تمييز نقاط انعطاف التابع على المنحني البياني

تطبيق (6–1) معامل Arrow-Pratt للنزعة تجاه المجازفة.

نستخدم عادةً تابع المنفعة لقياس مدى رضا المستهلك من شراء منتج ما (سلعة، خدمة، معلومة)، ويُعطى معامل Arrow-Pratt ‏(Arrow, 1965) و (Pratt, 1964) لقياس النزعة تجاه المجازفة Coefficient of Risk Aversion بالشكل الآتي:

$$r = \frac{x.U''(x)}{U'(x)}$$

حيث U(x) هو تابع المنفعة من استهلاك المنتج، و U'(x) مشتقه الأول، و U''(x) مشتقه الثاني.

لدينا تابع منفعة من الشكل $U(x) = \frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha}$ حيث α معامل التابع وهو ثابت.

والمطلوب: حساب المعامل r.

<u>الحل:</u>

يُمكن كتابة التابع U(x) بشكل لغاريتمي على الشكل Ln(U(x)) = -α.Ln(x) – Ln(1-α)

المشتق الأول: باشتقاق الصيغة اللغاريتمية نجد $\frac{U'(x)}{U(x)} = \frac{-\alpha}{x}$ أو $U'(x) = \frac{-\alpha}{x}U(x)$

المشتق الثاني: باشتقاق المشتق الأول نجد $U''(x) = \frac{\alpha}{x^2}U(x) - \frac{\alpha}{x}U'(x)$

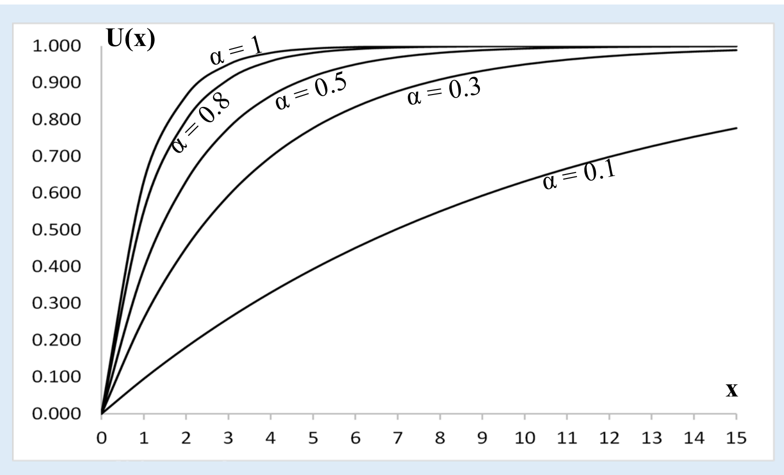
باستبدال U(x) في الصيغة من صيغة المشتق $U(x) = \frac{-x}{\alpha}U'(x)$

نجد بعد الاختزال والتجميع: $U''(x) = \frac{\alpha}{x^2}.\frac{-x}{\alpha}U'(x) - \frac{\alpha}{x}U'(x) = \left(\frac{-1-\alpha}{x}\right)U'(x)$

ومنه نجد صيغة المشتق الثاني مقسوماً على المشتق الأولى: $\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{-1-\alpha}{x}$

فتكون الصيغة النهائية للمعامل r: $r = x.\frac{-1-\alpha}{x} = -(1+\alpha)$

كما نلاحظ أنها قيمة ثابتة تتعلق بثابت التابع α فقط. ويوضح الشكل (6–7) بعض لأشكال توابع المنفعة من أجل قيم مختلفة للثابت.



الشكل (6–7) معامل النزعة تجاه المجازفة لتابع منفعة له شكل أسي

6-3 التوابع الحدية للإيرادات، التكاليف، والأرباح

رأينا سابقاً بعض التوابع البسيطة لتوابع الدخل أو الإيرادات والتكاليف، ولم نشر صراحةً إلى تغيرات توابع بالاستناد إلى مفاهيم المشتقات، سنستثمر حالياً هذه المفاهيم فيما يتعلق بمفهوم التغيرات "الحدية أو الهامشية Marginal"، حيث يُمكن التعبير عن مفاهيم الدخل الحدي أو التكلفة الحدية أو الربح الحدي، بالمشتق الأول لتوابع الدخل الكلي، أو التكلفة الكلية، أو الربح الكلي على التوالي.

ليكن لدينا تابع الإيرادات الكلية Total Revenue من مبيعات أحد المنتجات: TR(Q)، حيث Q يُمثل عدد القطع المباعة من المنتج، فإذا رغبت إدارة الشركة معرفة الإيراد الإضافي ΔTR من القطعة الواحدة وذلك من بيع كمية إضافية ولتكن ΔQ، يكفي أن نأخذ قيمة المقدار $\frac{\Delta TR}{\Delta Q}$ عندما ΔQ تأخذ القيمة واحد 1، كما رأينا أن نهاية هذا المقدار $\frac{\Delta TR}{\Delta Q}$ هي المشتق الأول عندما تنتهي Δx إلى الصفر.

إذاً لمعرفة الإيراد الإضافي الذي يمكن تحقيقه عند أية قيمة من المبيعات Q، يكفي أن نأخذ قيمة المشتق الأول عند هذه القيمة، وهو ما ندعوه بالإيراد أو الدخل الحدي MR (Marginal Revenue):

الإيرادات الحدية MR من الإيرادات الكلية TR: $MR(Q) = TR'(Q) = \frac{dTR}{dQ}$

لنأخذ الحالة البسيطة للطلب على المنتج، في حالة الاحتكار التام Monopole حيث تسيطر شركة أو تكتل شركات على السوق كلياً وتفرض السعر الذي تريده، مثل حالة المنتجات الأساسية التي تتحكم بها الحكومات كلياً. ولنفترض أن السعر هو تابع متناقص مع الطلب Q وله شكل خطي:

$$P(Q) = aQ + b$$

حيث a عدد سالب ويمثل ميل التابع، و b عدد موجب يُمثل السعر عندما Q=0 أي نقطة تقاطع التابع مع المحور العمودي وهو أقل سعر يُمكن أن تقبل به الشركة.

يمكن حساب تابع الإيرادات الكلية بضرب سعر البيع بالكمية المباعة:

$$TR(Q) = P(Q).Q = aQ^2 + bQ$$

وبالتالي يكون الإيراد الهامشي/الحدي MR(Q) هو مشتق تابع الإيرادات الكلية TR(Q):

$$MR(Q) = 2a.Q + b$$

في هذه الحالة حيث تابع السعر خطي، نجد أن تابع الإيراد الحدي هو أيضاً خطي، ميله هو ضعف ميل تابع السعر 2a، وله نفس نقطة تقاطع السعر مع المحور العمودي b.

كما نجد وسطي سعر بيع القطعة الواحدة AR(Q) بتقسيم الإيرادات الكلية TR(Q) على عدد القطع:

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = aQ + b = P(Q)$$

نلاحظ أن الوسـطي يسـاوي سـعر البيع نفسـه، بمعنى أن هذا الوسـطي مسـتقل عن الطلب في هذه الحالة، وهذا منطقي كونه مفروض من قبل الشركة المحتكرة.

في حالة المنافسـة التامة Perfect Competition حيث لا قيود على دخول مُنتجين جدد، ولا يمكن لأي مُنتِج السيطرة على سعر السوق، فالسعر محدد بآلية السوق ويبيع المُنتِج بسعر السوق، بمعنى أن السعر ثابت لا علاقة له بالكمية التي يبيعها مُنتِج مُحدد وليكن $P = c$.

ويكون في هذه الحالة تابع الإيرادات الكلية $TR(Q) = P.Q = c.Q$.

وتابع الإيرادات الحدية $MR(Q) = P = c$. ويساوي تماماً وسطي إيراد القطعة الواحدة $AR(Q) = c$.

يُمكن تعميم المفاهيم والمحاكمة السابقة على الأنواع المختلفة للتوابع الاقتصادية، ما يهمنا حالياً توابع التكاليف والربح.

إذا كان تابع التكاليف الكلية (Total Cost) هو $TC(Q)$، فإن:

التكلفة الحدية (MC (Marginal Cost: $MC(Q) = TC'(Q) = \frac{dTC}{dQ}$

وسطي تكلفة القطعة الواحدة (AC (Average Cost: $AC(Q) = \frac{TC}{Q}$

إذا كان تابع الأرباح الكلية (Total Profit) هو $TP(Q)$، فإن:

الربح الحدي (MP (Marginal Profit: $MP(Q) = TP'(Q) = \frac{dTP}{dQ}$

وسطي ربح القطعة الواحدة (AP (Average Profit: $AP(Q) = \frac{TP}{Q}$

مع الإشـارة إلى أن تابع الأرباح الكلية يسـاوي الفرق بين تابعي الإيرادات الكلية والتكاليف الكلية، وكذلك المشتق الأول هو الفرق بين مشتقي التابعين:

$$TP(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$
$$TP'(Q) = TR'(Q) - TC'(Q)$$

من المفيد الإشـارة في نهاية هذه الفقرة إلى أن مضـامين وبنود الإيرادات والتكاليف والأرباح، متنوعة جداً وقد تتباين بين منتج وآخر أو بين شركة وأخرى، وأيضاً حسب الأنظمة والقوانين النافذة من حيث الرسوم والضـرائب وغيرها، ننصـح بالعودة إلى المراجع المالية والمحاسبية المختصـة. قد نجد بعض الدراسـات التجريبية التي تعطي صـيغ/توابع رياضـية عامة لبعض أنواع المنتجات ضـمن شـروط محددة، وحيثما وجدنا مثل هذه الصـيغ، يجب التأكد من تحقق هذه الشروط قبل اعتماد الصـيغة. في

هذه الأملية نهتم بالقيم وصيغ التوابع النهائية، طالما أن الصيغ الرياضية معطاة أو تم استخلاصها من مجموعة بيانات، فمن البديهي ألا تُؤثِّر طبيعة المنتجات على العمليات الرياضية.

سنحاول فيما يلي إيراد مجموعة من التطبيقات توضح المفاهيم السابقة.

تطبيق (6−2) الإيرادات الكلية والحدية.

ليكن لدينا تابع سعر الطلب على أحد المنتجات $P(Q) = 100 - 2Q$، حيث Q الكمية المباعة.

والمطلوب:

أ) إيجاد صيغة تابع الإيرادات الكلية بدلالة الكمية $TR(Q)$.

ب) إيجاد صيغة تابع الإيرادات الحدية بدلالة الكمية $MR(Q)$.

ت) ما قيمة MR من أجل $Q=10$ ؟

ث) ما قيمة الإيرادات الإضافية في حال زادت المبيعات من $Q=9$ إلى $Q=10$؟

ج) قارن القيمتين الناتجتين عن (ت) و (ث)، ماذا تستنتج؟

ح) على نفس الشكل البياني، ارسم تابعي الإيرادات الكلية والحدية.

<u>الحل:</u>

أ) صيغة تابع الإيرادات الكلية بدلالة الكمية $TR(Q)$:

الإيرادات الكلية = الكمية المباعة x سعر البيع، منه نجد صيغة تابع الإيرادات الكلية:

$$TR(Q) = Q(100 - 2Q) = -2Q^2 + 100Q$$

ب) تابع الإيرادات الحدية بدلالة الكمية $MR(Q)$ هو المشتق الأول لتابع الإيرادات الكلية:

$$MR(Q) = TR'(Q) = -4Q + 100$$

ت) قيمة MR من أجل $Q=10$، يكفي استبدال $Q=10$ في صيغة تابع الإيرادات الحدية:

$$MR(Q=10) = -4(10) + 100 = 60$$

ث) الإيرادات الإضافية في حال زادت كمية المبيعات من $Q=9$ إلى $Q=10$:

$$TR(Q=9) = -2(9)^2 + 100(9) = 738$$

$$TR(Q=10) = -2(10)^2 + 100(10) = 800$$

الإيرادات الإضافية: $TR(Q=10) - TR(Q=9) = 800 - 738 = 62$

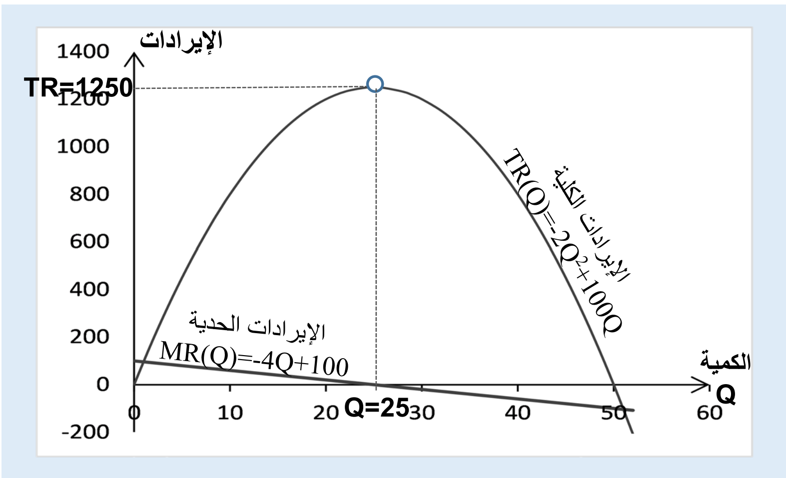
ج) نلاحظ أن الزيادة في قيمة الإيرادات محسوبة بانتقال كمية المبيعات دفعة واحدة من 9 إلى 10 يساوي 62، في حين أن قيمة المشتق عند Q=10 تساوي 60، وهما قيمتان متقاربتان جداً.

ح) الخط البياني للتابعين:

نلاحظ تزايد في قيمة الإيرادات الكلية عندما تتزايد الكمية من Q=0 حتى Q=25، بما يتوافق مع الإشـــارة الموجبة للمشـــتق. وبأن إيرادات المبيعات تبدأ بالتناقص بعد Q=25، وبما يتوافق أيضاً مع الإشارة السالبة للمشتق.

تبلغ الإيرادات حدها الأقصـى TR=1250 عندما Q=25 وبما يتوافق مع إيرادات حدية تسـاوي الصفر (المشتق الأول يساوي الصفر). يُمكن التأكد أن هذه القيمة هي الحد الأعلى من الإشارة السـالبة للمشـتق الثاني $TR''(Q) = -4$، أي أن تقعر منحني تابع الإيرادات الكلية نحو الأسفل، فالقيمة عظمى إذاً.

نلاحظ أيضاً على الشكل أن الإيرادات تُصبح سالبة (خسارة) عندما تتجاوز كمية المبيعات 50 قطعة $Q>50$.



الشكل (6-8) الخطوط البيانية لتابعي الإيرادات الكلية والهامشية

تطبيق (6-3) التكاليف الكلية والحدية.

ليكن لدينا تابع وسطي تكلفة إنتاج القطعة الواحدة له الشكل: $AC(Q) = Q - 9 + \frac{238}{Q}$

والمطلوب:

أ) تحديد صيغة تابع التكاليف الكلية TC(Q).

ب) تحديد صيغة تابع التكلفة الحدية MC(Q).

ت) ليكن حجم الإنتاج الحالي Q=30، إذا قررت إدارة الشركة زيادته بمقدار 5 قطع إضافية، فما أثر ذلك على التكاليف الكلية، والحدية، ووسطي تكلفة القطة الواحدة؟

ث) ارسم المنحني البياني لتوابع التكاليف الكلية، والحدية، ووسطي تكلفة القطعة الواحدة. سجل ملاحظاتك من خلال الشكل.

الحل:

أ) صيغة تابع التكاليف الكلية TC(Q): نعلم أن وسطي تكلفة القطعة الواحدة هو التكاليف الكلية مقسوماً على عدد القطع المنتجة: $AC(Q) = \frac{TC}{Q}$ فيكون TC = AC * Q، ومنه نجد:

$$TC(Q) = Q.\left(Q - 9 + \frac{238}{Q}\right) = Q^2 - 9Q + 238$$

ب) صيغة تابع التكلفة الحدية MC(Q) هو المشتق الأول لتابع التكاليف الكلية TC، فنجد:

$$MC(Q) = TC'(Q) = 2Q - 9$$

ت) في حال زيادة كمية الإنتاج بمقدار 5 قطع إضافية عن الحجم الحالي Q=30

التكاليف الكلية قبل الزيادة TC1: $TC1(Q=30) = 30^2 - 9*30 + 238 = 868$

التكاليف الكلية بعد الزيادة TC2: $TC2(Q=35) = 35^2 - 9*35 + 238 = 1148$

تُحسب وسطي تكلفة القطعة الواحدة AC إما بتطبيق صيغة التابع الخاص بها أو بتقسيم التكاليف الكلية على عدد القطع، فنجد:

قبل الزيادة AC1: $AC1(Q=30) = 868/30 = 28.93$

بعد الزيادة AC2: $AC2(Q=30) = 1148/35 = 32.8$

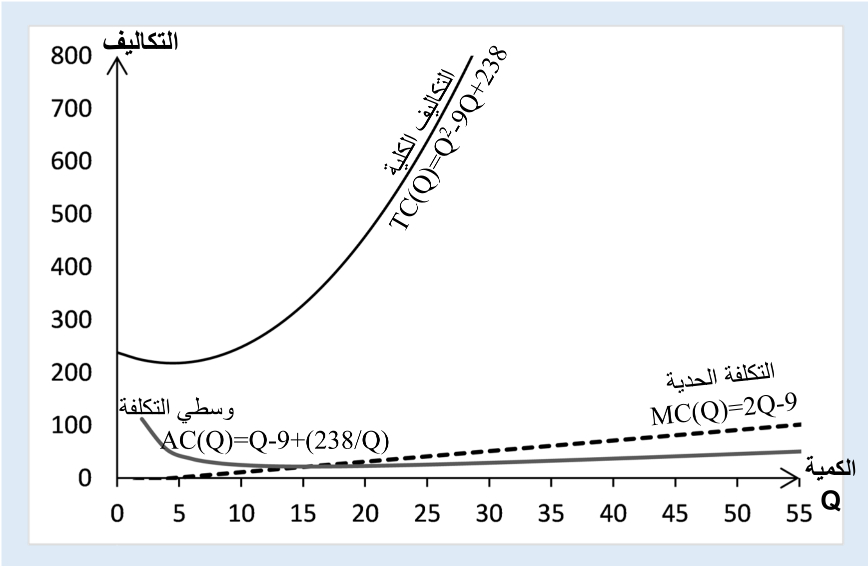
التكلفة الحدية قبل الزيادة MC1: $MR1(Q=30) = 2*30 – 9 = 51$

التكلفة الحدية بعد الزيادة MC2: $MR2(Q=35) = 2*35 – 9 = 61$

نلاحظ أن الفرق كبير جداً بين وسطي تكلفة القطعة والتكلفة الحدية سواء قبل أو بعد الزيادة كما هو مبين في الشكل (6–9)، ويعكس التغيرات الكبير في ميل مماس التابع بين النقطين Q=30 و Q=35، فالوسطي محسوب على أساس أن التزايد خطي[8]، في حين أن شكل المنحني البياني للتابع بعيد كل البعد عن الخطية.

ث) المنحنيات البيانية

8. للتذكير فقط، أن المتوسط الحسابي y لقيمتين x_1, x_2 هو شكل خطي للقيمتين: $y = 0.5x_1 + 0.5x_2$.



الشكل (6–9) الخطوط البيانية لتوابع التكاليف الكلية والهامشية والوسطي

تطبيق (6–4) الأرباح الكلية والحدية.

لنأخذ تابعي الإيرادات والتكاليف الكلية في التطبيقين السابقين (6–2) و (6–3):

تابع الإيرادات الكلية TR(Q): $TR(Q) = Q(100 – 2Q) = -2Q^2 + 100Q$

تابع التكاليف الكلية TC(Q): $TC(Q) = Q2 – 9Q + 238$

والمطلوب:

أ) تحديد صيغة تابع الأرباح الكلية TP(Q).

ب) تحديد الكميات التي تُحقق فيها الشركة الأرباح.

ت) ارسم على نفس الشكل البياني توابع الأرباح الكلية، الهامشية، ووسطي ربح القطعة الواحدة.

ث) بيّن على نفس الشـــكل الخطوط البيانية لتابع الإيرادات الكلية، التكاليف الكلية، والأرباح الكلية.

الحل:

أ) صيغة تابع الأرباح الكلية TP(Q): الإيرادات الكلية TR(Q) – التكاليف الكلية TC(Q)

فنجد الصيغة: $TP(Q) = (-2Q^2 + 100Q) – (Q^2 - 9Q + 238) = -3Q^2 +109Q - 238$

ب) الكميات التي تُحقق فيها الشركة الأرباح: عندما $TP(Q) > 0$

يكفي دراسة إشارة تابع الأرباح الكلية TP(Q) وأخذ القيم التي يكون فيها موجباً.

$$TP(Q) = -3Q^2 + 109Q - 238 > 0$$

إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية $TP(Q) = -3Q^2 + 109Q - 238$

$\Delta = (109)^2 - 4*(-3)*(-238) = 9025 \qquad \sqrt{\Delta} = 95$

$Q_1 = \frac{-109+95}{2*(-3)} = \frac{14}{6} = 2.333 \qquad Q_2 = \frac{-109-95}{2*(-3)} = \frac{204}{6} = 34$

Q	-∞	Q_1		Q_2	+∞
TP(Q)	- - - خسائر	0	+ + + أرباح	0	- - - خسائر

نلاحظ من الجدول أن الشـــركة تبدأ بتحقيق الأرباح بدءاً الكمية $Q_1=2.333$ وحتى الكمية $Q_2=34$. ويمكن ملاحظة ذلك على الشكل (6−10).

ت) توابع الأرباح الكلية، الحدية، ووسطي ربح القطعة الواحدة

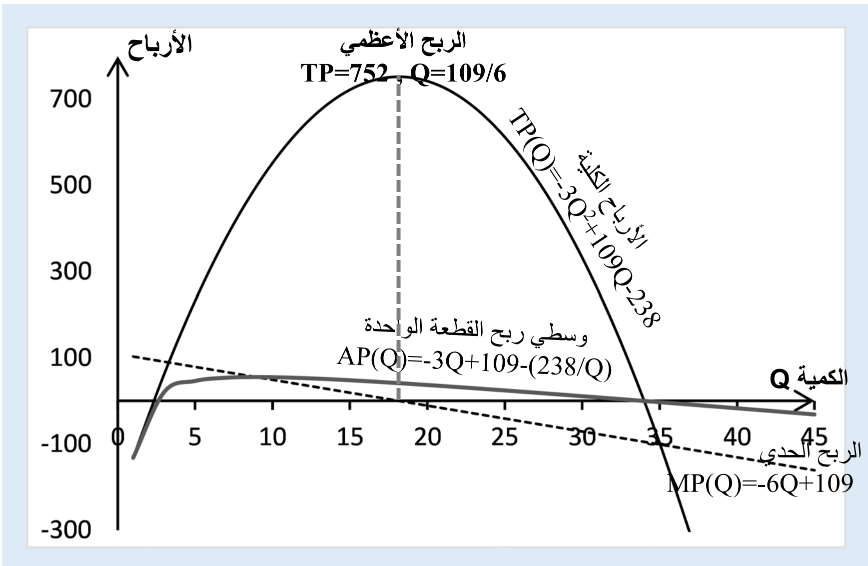
تابع الربح الحدي MP(Q) هو مشتق تابع الأرباح الكلية، فنجد:

$$MP(Q) = TP'(Q) = -6Q + 109$$

تابع وسطي ربح القطعة AP(Q) هو الأرباح الكلية TP(Q) مقسوماً على عدد القطع Q، فنجد:

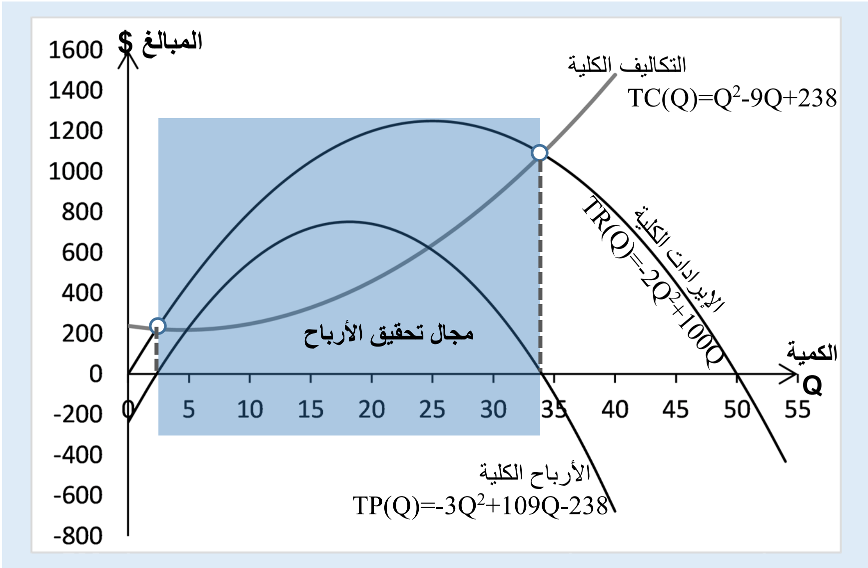
$$AP(Q) = \frac{TP(Q)}{Q} = \frac{-3Q^2 + 109Q - 238}{Q} = -3Q + 109 - \frac{238}{Q}$$

نجد على الشكل (6−10) المنحنيات البيانية للتوابع الثلاثة TP, TP', AP:



الشكل (6−10) المنحنيات البيانية لتوابع الأرباح الكلية، الحدية، ووسطي ربح القطعة الواحدة

ث) المنحنيات البيانية لتوابع الإيرادات الكلية، التكاليف الكلية، والأرباح الكلية:



الشكل (6–10) المنحنيات البيانية لتوابع تكاليف وإيرادات وأرباح كلية

6–4 القيمة المثلى لبعض التوابع الاقتصادية

نحتاج في العديد من الظواهر الاقتصادية للبحث عن أفضل أو أسوأ قيمة للظاهرة، ويمكن للمشتقات تقديم العون الكبير في مثل هذه الحالات.

ليكن لدينا التابع $y = F(x)$، قابل للاشتقاق على مجال تعريفه $x \in D_f$، وهذا ما سنفرضه محققاً دوماً إلاّ في حالة النص صراحةً على غير ذلك.

رأينا أن المشتق الأول للتابع $F'(x)$ يعبر عن ميل المماس عند أي نقطة من نقاطه، عندما يكون $F'(a)=0$ عند النقطة a، فإن الميل يساوي الصفر، أي أن التابع ليس متزايداً أو متناقصاً عند هذه النقطة المميزة، ندعو مثل هذه النقاط بنقاط استقرار أو نهاية موضعية Stationary Point. قد تُمثل هذه النقطة حد أعلى موضعي Local Maximum، أو حد أدنى موضعي Local Minimum، أو نقطة انعطاف Inflection. إذا كان الحد الأعلى هو أكبر قيمة للتابع ندعوها نهاية عظمى Global Maximum، وإذا كان الحد الأدنى هو أقل قيمة للتابع ندعوها نهاية صغرى Global Minimum.

إذا كان تقعر التابع إلى الأعلى أي نحو العينات الموجبة، فهذا يعني أن النهاية صغرى، وإذا كان التقعر نحو الأسفل أي نحو العينات السالبة فهذا يعني أن النهاية عظمى.

بمفاهيم المشتقات:

1. تُحقق نقاط الاستقرار (سواء كانت أدنى أو أعلى أو انعطاف) المعادلة: $F'(x) = 0$.

2. إذا كان المشـــتق الثاني $F''(x) > 0$ فإن النهاية صـــغرى. وإذا كان $F''(x) < 0$ فإن النهاية عظمى.

وهذا كل ما نحتاجه لمعرفة أفضل/أكبر أو أسوأ/أصغر قيمة للتابع الاقتصادي. وقد رأينا سابقاً كيفية التعامل مع الحدود الدنيا والعليا لتوابع من الدرجة الأولى والثانية، لذلك ســـنعرض بعض الأمثلة لأنماط أخرى من التوابع.

مثال (6–9) البحث عن نقاط الاستقرار الحدية لتابع من الدرجة الثالثة.

ليكن لدينا التابع من الدرجة الثالثة: $F(x) = -x^3 + 10x^2 + 60x + 200$.

والمطلوب: البحث عن النقاط الحدية (إن وجدت)، ورسم الخط البياني للتابع.

<u>الحل:</u>

لتحديد النقاط الحدية، نوجد ونعدم المشتق الأول: $F'(x) = 0$

$$F'(x) = -3x^2 + 20x + 60 = 0$$

$$\Delta = (20)2 - 4*(-3)*60 = 1120 \qquad \sqrt{\Delta} = 33.4664$$

$$x_1 = \frac{-20+\sqrt{1120}}{2(-3)} = -2.24 \qquad x_2 = \frac{-20-\sqrt{1120}}{2(-3)} = 8.91$$

إذاً للتابع $F(x)$ نقطتان حديتان عندما $x=-2.24$ و $x=8.91$.

لكي تُحدد فيما إذا كانتا أعلى أو أدنى، يجب دراسة إشارة المشتق الثاني $F''(x)$ عند هاتين النقطتين:

$$F''(x) = -6x + 20$$

عند النقطة الأولى $x=-2.24$، قيمة المشتق الثاني $F''(x=-2.24)=-6(-2.24)+20= 33.44$

ونجد إشارة المشتق الثاني موجبة فالتقعر نحو الأعلى، وبالتالي تمثل النقطة حداً موضعياً أدنى.

عند النقطة الثانية $x=8.91$، قيمة المشتق الثاني $F''(x=8.91)=-6(8.91)+20= -33.46$

فنجد إشارة المشتق الثاني سالبة فالتقعر نحو الأسفل، وبالتالي تمثل النقطة حداً موضعياً أعلى.

كما يُمكن إيجاد قيم التابع عند هاتين النقطتين:

عند الحد الموضعي الأعلى $F(x) = -(8.91)^3 +10(8.91)^2 +60(8.91)+200 \cong 821$

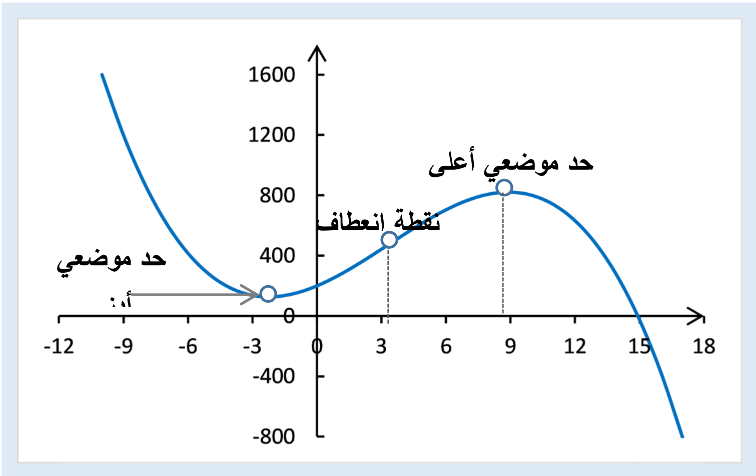
عند الحد الموضعي الأدنى $F(x) = -(-2.24)^3 +10(-2.24)^2 +60(-2.24)+200 \cong 127$

لمعرفة إذا كان هناك انعطاف في التابع، نضـــع المشـــتق الثاني $F''(x) = 0$، وبالتالي نجد أن هناك نقطة انعطاف وحيدة عندما $x = 20/6 = 3.33$، حيث يغير المشـتق الثاني إشـارته من الموجب إلى السالب، بمعنى أن التابع يبقى متزايد طالما أن المشتق الأول موجب، لكن سرعة هذا التزايد تتناقص.

نلخص عادةً جميع النتائج السابقة في جدول تغيرات التابع، كما يلي:

X	-∞	**-2.24**		**3.33**		**8.91**	+∞
F''(x)	+ +	+	+ +	**0**	- -	-	- -
F'(x)	- - -	**0**	+ +	+	+ +	**0**	- - -
F(x)	متناقص	**127** **حد أدنى**	متزايد	**474** **انعطاف**	متزايد	**821** **حد أعلى**	متناقص

ونوضح ذلك عبر الخطوط البيانية، كما هو مبين على الشكل (6−11).



الشكل (6−11) نقاط الاستقرار الحدية لتابع من الدرجة الثالثة

تطبيق (6−5) القيمة العظمى للأرباح.

قدرت إدارة إحدى الشركات أن تابعي التكاليف الكلية والطلب لها الشكل الآتي:

تابع التكاليف الكلية $TC(Q)$: $TC(Q) = 2Q^2 - 40Q + 975$

تابع سعر الطلب $P(Q)$: $P(Q) = 300 - 3Q$

والمطلوب: إيجاد حجم المبيعات الذي يُحقق أعلى ربح ممكن.

<u>الحل:</u>

بدايةً علينا إيجاد تابع الإيرادات الكلية $TR(Q)$: حجم المبيعات Q مضروباً بسعر البيع $P(Q)$

$$TR(Q) = Q(300 - 3Q) = -3Q^2 + 300Q$$

فيكون تابع الأرباح الكلية TP(Q) هو الفرق بين تابعي الإيردات الكلية والتكاليف الكلية:

$$TP(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (-3Q^2 + 300Q) - (2Q^2 - 40Q + 975)$$

$$TP(Q) = -5Q^2 + 340Q - 975$$

يكون للتابع TP(Q) حد أعلى أو أدنى عندما يكون المشتق الأول TP'(Q) يساوي الصفر:

$$TP'(Q) = -10Q + 340 = 0$$

أي عندما تكون $Q = 340/10 = 34$

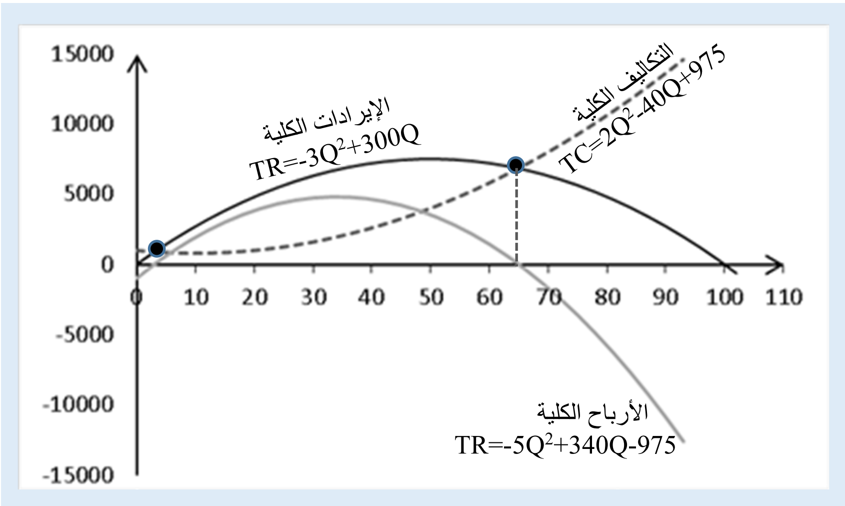
وتكون قيمة التابع عند هذه الكمية يساوي 4805:

$$TP(Q=34) = -5(34)^2 + 340*(34) - 975 = 4805$$

لمعرفة إذا كانت حد أعلى أو أدنى، يجب دراسة إشارة المشتق الثاني عند هذه القيمة:

$$TP''(Q) = -10$$

نلاحظ أن المشتق الثاني دوماً سالب، بالتالي تعقر التابع دوماً نحو الأسفل (نحو العينات السالبة) أي أن الحد هو أعلى، وباعتبار أن التعقر دوماً نحو الأدنى بمعني أن المشتق الثاني لا يغير إشارته أبداً، فهذا الحد هو القيمة العظمى للتابع.



الشكل (6–12) الربح الأعظمي لتابع إيرادات من الدرجة الثانية

تطبيق (6–6) القيمة العظمى لعدد العاملين (تابع من الدرجة الثالثة).

تُقدر إدارة إحدى الشركات أن عدد العاملين L الذي ستحتاجة لإنتاج كمية/حجم إنتاج P(L) له الشكل الآتي: $P(L) = -0.5L^3 + 30L^2$. والمطلوب:

أ) تقدير عدد العاملين الذي يُعظّم Maximize حجم الإنتاج، وضح ذلك بالرسم البياني.

ب) تقدير عدد العاملين الذي يُعظم متوسط حجم الإنتاج للعامل الواحد AP، قارنه مع حجم الإنتاج الهامشي MP(L).

ت) رسم المنحني البياني للتابعين AP(L) و MP(L) بدلالة عدد العاملين.

<u>الحل:</u>

أ) تقدير عدد العاملين الذي يُعظّم حجم الإنتاج

بدايةً، يجب تحديد نقاط الاستقرار، وذلك بإعدام المشتق الأول P'(L):

$$P'(L) = -1.5L^2 + 60L = L\ (-1.5L + 60) = 0$$

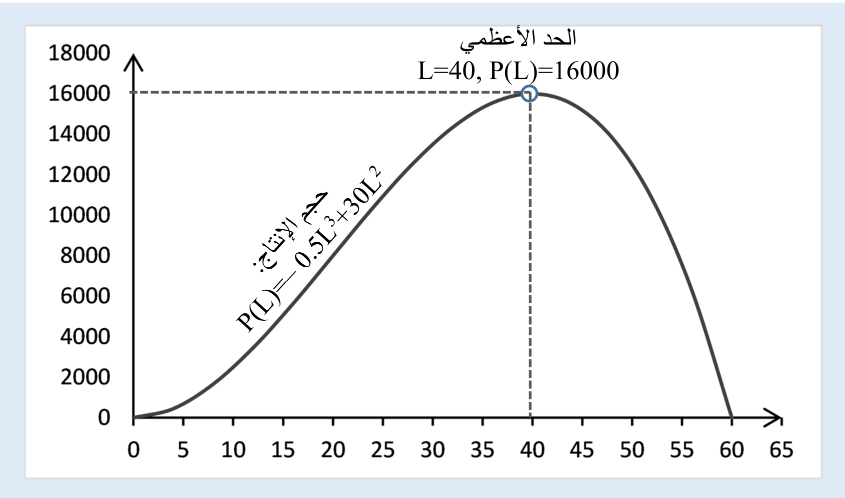
مما يعطي إما L=0 أو $L = \frac{60}{1.5} = 40$ أي هناك نقطتي استقرار موضعيتين.

لكي نتأكد فيما إذا كانت هاتين النقطتين تُمثل حداً أعلى أو أدنى، يجب دراسة إشارة المشتق الثاني P''(L)، فإن كانت موجبة فالحد أدنى، وإن سالبة فالحد أعلى:

$$P''(L) = -3L + 60$$

عندما L=0، تكون قيمة المشتق الثاني 60+، أي إشارته موجبة، فتقعر التابع نحو الأعلى، بالتالي عند هذه النقطة الحد أدنى.

عندما L=40، تكون قيمة المشتق الثاني 60-، أي إشارته سالبة، فتقعر التابع نحو الأسفل، بالتالي عند هذه النقطة الحد أعلى. وهي عدد العاملين الذي يجعل حجم الإنتاج أكبر ما يُمكن (نهاية عظمى). ويكون حجم الإنتاج عند هذه النقطة يساوي 16000 قطعة.



الشكل (6-13) القيمة العظمى لتابع كمية الإنتاج بدلالة العمالة من الدرجة الثالثة

ب) تقدير عدد العاملين الذي يُعظم متوســـط حجم الإنتاج للعامل الواحد AP، قارنه مع حجم الإنتاج الهامشي MP.

متوســـط حجم الإنتاج للعامل الواحد AP(L) يســـاوي حجم الإنتاج P(L) مقســـوماً على عدد العاملين L:

$$AP(L) = \frac{P(L)}{L} = \frac{-0.5L^3 + 30L^2}{L} = -0.5L^2 + 30L$$

بنفس الطريقة السابقة، نجد نقاط الاستقرار الحدية:

$$AP'(L) = -L + 30 = 0$$

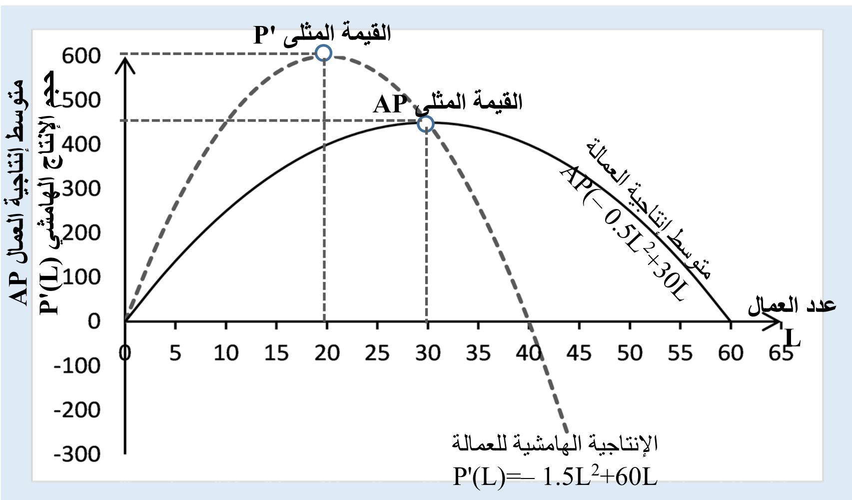
إذاً $L=30$، وهي نقطة الاستقرار الحدية الوحيدة. وتُمثل نهاية عظمى باعتبار أن المشتق الثاني لهذا التابع $AP''(L) = -1$ هو دوماً سالب (التقعر نحو الأسفل).

تُمثل هذه القيمة اقتصـــادياً القيمة المُثلى لمتوســـط عدد القطع للعامل الواحد Average Product Labour، وتُدعى جوازاً إنتاجية العامل Labour Productivity إذا كانت هذه الإنتاجية مقاسة بعدد القطع التي يُنتجها العامل الواحد.

لنقارن هذا المتوسط مع حجم الإنتاج الهامشي $P'(L) = = -1.5L^2 + 60L$، بالتالي نحتاج إلى حساب القيمى العظمى لهذا التابع:

المشتق الأول لحجم الإنتاج الهامشي $P''(L) = = -3L + 60$، ويساوي الصفر عندما $L=20$.

المنحني البياني لتابعي متوسط إنتاجية العامل AP(L) وحجم الإنتاج الهامشي PL'(L) بدلالة عدد العاملين:



الشكل (6–14) مقارنة بين متوسط إنتاجية العمالة والإنتاجية الهامشية

تطبيق (6-7) تكلفة المخزون الأمثلية (حالة بسيطة).

تسعى جميع الشركات إلى تقليل تكاليف الإمداد والتموين والتخزين، لنأخذ الحالة البسيطة، سواء تكاليف التخزين أو إجرائيات الشراء الإدارية، والمتعلقة بعدد الطلبيات، وحجم الطلبية الواحدة. لنفرض بأن الطلبيات تتم بفترات زمنية متساوية خلال العام الواحد، وبأن الشركة تقوم بالطلبية عندما يصل المخزون الحالي إلى الصفر.

ليكن لدينا:

1. الحجم السنوي للطلب على مادة أولية D.
2. حجم الطلبية الواحدة Q.
3. التكلفة الثابتة للإجراءات الإدارية لطلبية واحدة هو R ليرة سورية.
4. التكلفة السنوية لتخزين قطعة واحدة من المادة h.

فيكون عدد الطلبيات السنوية يساوي حجم الطلب السنوي مقسوماً على حجم الطلبية الواحدة $n = \frac{D}{Q}$

بالتالي تكون التكاليف الإدارية لهذه الطلبات يساوي $M = n.R = R\frac{D}{Q}$

وسطي عدد القطع المخزنة خلال فترة واحدة هو Q/2.

وتكون تكاليف التخزين فقط $S = h\frac{Q}{2}$

بالتالي تكون التكاليف الكلية السنوية TC هو مجموع تكاليف التخزين خلال السنة والتكاليف الإدارية لجميع الطلبيات خلال نفس السنة:

$$\mathrm{TC(Q) = M + S = R\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} = \frac{DR}{Q} + \frac{h}{2}Q}$$

يمكن معرفة حجم الطلبية الواحدة Q التي تجعل التكاليف الكلية TC أقل ما يُمكن، كما يلي:

البحث عن نقاط الاستقرار للتابع TC(Q) عبر المشتق الأول، ثم (إن وجدت) التأكد من من بعض هذه النقاط صغرى أو عظمى عبر إشارة المشتق الثاني.

$$\mathrm{TC'(Q) = \frac{-DR}{Q^2} + \frac{h}{2}}$$

نضع TC'(Q) = 0، فنجد: $\frac{DR}{Q^2} = \frac{h}{2}$ ، أو نكتبها بالشكل $Q^2 = \frac{2DR}{h}$ ومنه نجد قيم Q لنقاط الاستقرار: $\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{\mathrm{2DR}}{\mathrm{h}}}$، وندعوها الكمية الاقتصادية أو المثلى للطلب EOD (Economic Order Quantity).

يُمكن التأكد أن هذه النقطة هي حد أدنى لتابع التكاليف الكلية TC من إشـــارة المشـــتق الثاني "TC وهي دوماً موجبة: $TC''(Q) = \frac{2DR}{Q^3} > 0$

إذ لدينا جميع المقادير D, R, Q موجبة، فإشارة المشتق الثاني موجبة، ويكون تقعر التابع نحو الأعلى، فالنقطة الحدية هي حد أدنى، وباعتبار لا يوجد نقطة اســـتقرار أخرى، فهي نهاية صغرى.

مثال رقمي، ليكن لدينا:

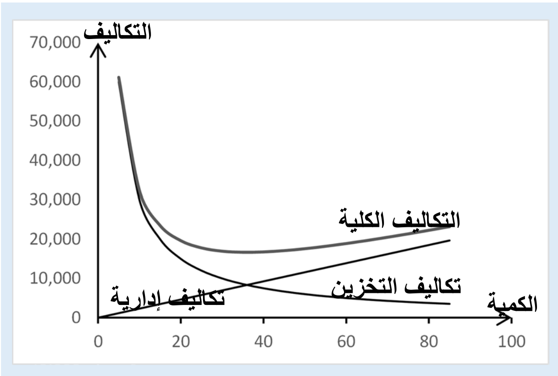
5. الحجم السنوي للطلب D = 5000.
6. حجم الطلبية الواحدة Q.
7. التكلفة الثابتة للإجراءات الإدارية لطلبية واحدة هو R = 60 ليرة سورية.
8. التكلفة السنوية لتخزين قطعة واحدة h=463.

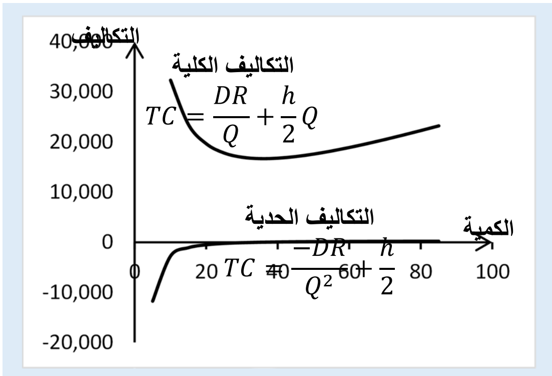
التكاليف الكلية السنوية TC: $TC(Q) = \frac{5000*600}{Q} + \frac{463}{2}Q$

مشتق التابع 'TC: $TC'(Q) = \frac{-300000}{Q^2} + \frac{463}{2}$

الكمية المثلى/الاقتصادية للطلب: $Q = \sqrt{\frac{2DR}{h}} = \sqrt{\frac{2*5000*60}{463}} = 36$

الخطوط البيانية لتوابع التكاليف الكلية TC، التكاليف الإدارية M، وتكاليف التخزين S بدلالة حجم الطلبية Q، موضحة على الشكل (6–15).





الشكل (6–15) الكمية الاقتصادية للمخزون

6-5 تحليل ظاهرة المرونة الحدية لتوابع الطلب

إحدى القضـــايا التي تؤرق الاقتصــــاديين تتعلق بمعرفة أثر تغيرات الســـعر على تغيرات الأرباح والإيرادات، أو تغير سـعر الشـراء للمواد الأولية أو تكاليف أحد عوامل الإنتاج على تكاليف الإنتاج، ولا تتعلق القضـية بمعرفة إجمالي الإيرادات أو الأرباح في حال تزايد/تناقص السـعر بمقدار محدد أو مع تزايد/تناقص الكمية بمقدار محدد، إذ يُمكن حســـابها مباشــــرةً من تابع الإيرادات TR=P.Q، بل بمعرفة التغير النسبي للإيرادات مع التغير النسبي للسعر أو للكمية أو الاثنين معاً، وهو ما نعبر عنه بمصطلح المرونة Elasticity. مثلاً مرونة الطلب بالنسبة للسعر E تُحسب بالشكل:

$$E = \frac{\text{التغير في الطلب } \%}{\text{التغير في السعر } \%}$$

غالباً ما نهتم بدراسة مرونة الطلب على منتج معين بالنسبة لسعر هذا المنتج، ويُمكن بنفس المنهجية تقدير المرونة لكافة أنواع الظواهر الاقتصادية التي يُمكن صياغتها على شكل توابع رياضية.

مرونة الطلب بالنسـبة للسـعر E هي النسـبة المئوية للتغير في الطلب $\% \frac{\Delta Q}{Q}$ مقسـوماً على النسـبة المئوية للتغير في السعر $\% \frac{\Delta P}{P}$ ، أو تُكتب بالشكل:

$$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{P}{Q} . \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

عندما تكون التغيرات ΔQ و ΔP صـــغيرة جداً dQ و dP، أي نبحث عن المرونة عند نقطة محددة، فإن $\frac{dQ}{dP}$ تعبر عن تفاضل تابع الكمية بدلالة السعر عند هذه النقطة، وتصبح المرونة لها الشكل:

$$E = \frac{P}{Q} . \frac{dQ}{dP}$$

أي نسبة السعر إلى الكمية مضروبةً بقيمة المشتق الأول للكمبة بالنسبة للسعر عند النقطة المعنية، مع الإشـارة إلى أن قيمة E قد تكون موجبة أو سـالبة، لذلك من الأفضـل أخذ القيمة المطلقة، ويُفسـر هذا المؤشر كما يلي:

1. إذا كان $|E| = 1$: فإن نسـبة التغير في الطلب تسـاوي نسـبة التغير في السـعر، ندعوها بالمرونة الواحدية Unit Elastic.
2. إذا كانت $|E| > 1$: فإن نسبة التغير في الطلب أكبر من نسبة التغير في السعر، نقول أن الطلب مرن بالنسبة للسعر Elastic.

3. إذا كانت $|E| < 1$: فإن نسبة التغير في الطلب أصغر من نسبة التغير في السعر، نقول أن الطلب غير مرن بالنسبة للسعر Inelastic.

جرت العادة في التوابع الاقتصادية على كتابة السعر بدلالة الكمية P=F(Q)، ومع ملاحظة أن تابع المرونة أعلاه يُعبر عن الكمية بدلالة السعر، في حين أننا نحتاج إلى تفاضل الكمية بدلالة السعر، لذلك يجب إعادة صياغة التابع P=F(Q) ليصبح Q=G(P). نعلم أن تفاضل التابع العكسي هو مقلوب تفاضل التابع الأصلي:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}}$$

أي يُمكن الحصول على تفاضل الكمية بدلالة السعر $\frac{dQ}{dP}$ بأخذ مقلوب تفاضل التابع الأصلي للسعر بدلالة الكمية $\frac{dQ}{dP}$ بكل بساطة.

بنفس المنطق أعلاه، كما قدرنا مرونة الطلب بالنسبة للسعر، يُمكن تقدير مرونة السعر بالنسبة للطلب بطريقة مشابهة تماماً. فتصبح مرونة السعر بالنسبة للطلب $E_{Q/P}$ هو النسبة المئوية للتغير في السهر $\%\frac{\Delta P}{P}$ مقسوماً على النسبة المئوية للتغير في الطلب $\%\frac{\Delta Q}{Q}$ ، أو تُكتب بالشكل:

$$E_{Q/P} = \frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dQ}{Q}} = \frac{Q}{P}.\frac{dP}{dQ}$$

كما نلاحظ أنها مقلوب مرونة السعر بالنسبة للطلب. لكن جرت العادة في الدراسات الاقتصادية على دراسة مرونة الطلب كون السعر في أغلب الحالات يتحدد في السوق، بينما الكميات تُحدد من قبل الشركات المنتجة.

تطبيق (6–8) مرونة الطلب بالنسبة للسعر تابعه من الدرجة الأولى.

ليكن لدينا تابع الطلب الآتي $P = 40 - 0.5Q$. والمطلوب: حساب مرونة الطلب بالنسبة للسعر عند الكمية Q=10.

لدينا تابع المرونة: $E = \frac{P}{Q}.\frac{\Delta Q}{\Delta P}$

لنكتب أولاً تابع الكمية بدلالة السعر فنجد: $Q = 80 - 2P$

المشتق الأول للكمية بدلالة السعر $Q'(P) = \frac{dQ}{dP} = -2$

عند القيمة Q=10، يكون $P = 40\text{-}0.5(10) = 35$

فتكون قيمة المرونة $E = \frac{35}{10}.(-2) = -7.5$

وهي أكبر بالقيمة المطلقة من الواحد، فالطلب مرن Elastic عند هذا السعر.

تطبيق (6–9) مرونة الطلب بالنسبة للسعر تابعه من الدرجة الثانية.

ليكن لدينا تابع الطلب له الشكل $P = 200 - Q^2$. والمطلوب:

أ) حساب مرونة الطلب بالنسبة للسعر عندما يكون السعر P=100.

ب) حساب نسبة التغير في الكمية إذا ارتفع السعر السابق بنسبة 5%.

ت) حساب مرونة الطلب بالنسبة للسعر عند الكمية Q=10.

ث) حساب نسبة التغير في السعر إذا ازدادت الكمية السابقة بنسبة 5%.

الحل:

أ) حساب مرونة الطلب بالنسبة للسعر عندما يكون السعر P=100.

لنحسب بدايةً كمية الطلب عند هذا السعر: $P = 200 - Q^2 = 100$

بحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية $Q2 = 100$، فنجد إما Q=10 أو Q=-10، نهمل الحل السالب كونه غير مقبول اقتصادياً، فالكمية إذاً تساوي 10 عند سعر P=100.

لإيجاد $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ ، نحتاج لكتابة تابع الكمية بدلالة السعر، قد يكون من الصعب استخلاص صيغة الكمية بدلالة السعر خصوصاً في التوابع المعقدة، لذلك سنستخدم الصيغة $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}}$

تفاضل تابع السعر بدلالة الكمية: $P'(Q) = \frac{dP}{dQ} = -2Q$

فيكون تفاضل الكمية بدلالة السعر هو مقلوب السابق $Q'(P) = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}} = \frac{1}{-2Q}$

عند القيمة P=100، تكون قيمة الكمية Q=10، وكذلك $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{-2(10)} = -\frac{1}{20}$

فتكون قيمة المرونة $E = \frac{P}{Q}.\frac{dQ}{dP} = \frac{100}{10} \text{x} \left(-\frac{1}{20}\right) = -0.5$

وهي أصغر بالقيمة المطلقة من الواحد، فالطلب غير مرن Inelastic عند هذا السعر.

ب) نسبة التغير في الكمية إذا ارتفع السعر السابق P=5%.

نعلم أن مؤشر المرونة هو نسبة التغير في الطلب $\frac{\Delta Q}{Q}$ مقسوماً على نسبة التغير في السعر $\frac{\Delta P}{P}$:

$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = -0.5$ ومنه نجد $\frac{\Delta Q}{Q} = (-0.5)\frac{\Delta P}{P}$، ولدينا $\frac{\Delta P}{P} = 5\%$

فيكون نسبة التغير في الكمية $\frac{\Delta Q}{Q} = (-0.5) * 5\% = -2.5\%$

أي إذا ازداد السعر بنسبة 5%، فإن الكمية تتناقص بنسبة 2.5%.

ت) مرونة السعر بالنسبة للطلب عند الكمية Q=10.

لدينا تابع مرونة السعر بالنسبة للكمية: $E_{Q/P}=\frac{Q}{P}.\frac{dp}{dQ}$

تفاضل تابع السعر بدلالة الكمية: $\frac{dP}{dQ}=-2Q$، ومنه نجد $\frac{dP}{dQ}=(-2)*10=-20$

عندما Q=10، فإن السعر يساوي $P(Q=5)=200-10^2=100$

فتكون قيمة مؤشر مرونة السعر بالنسبة للكمية $E_{Q/P}=\frac{10}{100}x(-20)=-2$

وهي كما أشرنا أعلاه مقلوب مؤشر مرونة السعر بالنسبة للكمية $E_{Q/P}=\frac{1}{E}=\frac{1}{-0.5}=-2$

وهي أكبر بالقيمة المطلقة من الواحد، فالسعر مرن عند هذه الكمية.

ث) نسبة التغير في السعر إذا ازدادت الكمية السابقة بنسبة 5%.

من تعريف مرونة السعر بالنسبة للكمية هو نسبة التغير في السعر $\frac{\Delta P}{P}$ مقسوماً على نسبة التغير في الكمية $\frac{\Delta Q}{Q}$، وتم حسابها أعلاه تساوي $E_{Q/P}=-2$

$E_{Q/P}=\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta Q}{Q}}=-2$ ومنه نجد $\frac{\Delta P}{P}=(-2)\frac{\Delta Q}{Q}$، ولدينا $\frac{\Delta Q}{Q}=5\%$

فيكون نسبة التغير في السعر $\frac{\Delta P}{P}=(-2)*5\%=-10\%$

أي إذا ازدادت الكمية بنسبة 5%، فإن السعر يتناقص بنسبة 10%.

بعض خصائص مرونة الطلب الخطي.

لدينا تابع الإيرادات بدلالة كمية المبيعات يساوي السعر مضروباً بالكمية $TR(Q)=P.Q$.

لندرس العلاقة بين المرونة والإيرادات الحدية/الهامشية $MR=\frac{d(TR)}{dQ}=\frac{d(P.Q)}{dQ}$

$$MR=\frac{d(P.Q)}{dQ}=Q\frac{dP}{dQ}+P=P\left(1+\frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}\right)$$

المقدار بين قوسين هو مقلوب مؤشر المرونة $\frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{E}$

ومنه نجد العلاقة بين الإيرادات الهامشية والمرونة كما يلي: $MR=P\left(1+\frac{1}{E}\right)$

لنحاول تحليل هذه العلاقة:

1. إذا كان $-1<E<0$ فإن $1/E<-1$، بالتالي يكون MR سالب مهما كانت قيمة السعر P، مما يعني أن تابع الإيرادات متناقص حيث يكون الطلب غير مرن.

2. إذا كان E<-1 فإن 1/E < -1، بالتالي يكون MR موجب مهما كانت قيمة السـعر P، مما يعني أن تابع الإيرادات متزايد حيث يكون الطلب مرن.

3. إذا كان E=-1 فإن 1/E = -1، بالتالي يكون MR يساوي الصفر مهما كانت قيمة السعر P، مما يعني أن تابع الإيرادات ثابت والطلب ذو مرونة واحدية.

لنأخذ حالة بسيطة حيث تابع الطلب من الشكل الخطي $P = aQ + b$ حيث a<0 و b>0

منه نجد $Q = (1/a)(P-b)$، وبالتالي $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{a}$

وتكون المرونة E تساوي: $E = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{a}\frac{P}{\frac{1}{a}(P-b)} = \frac{P}{P-b}$

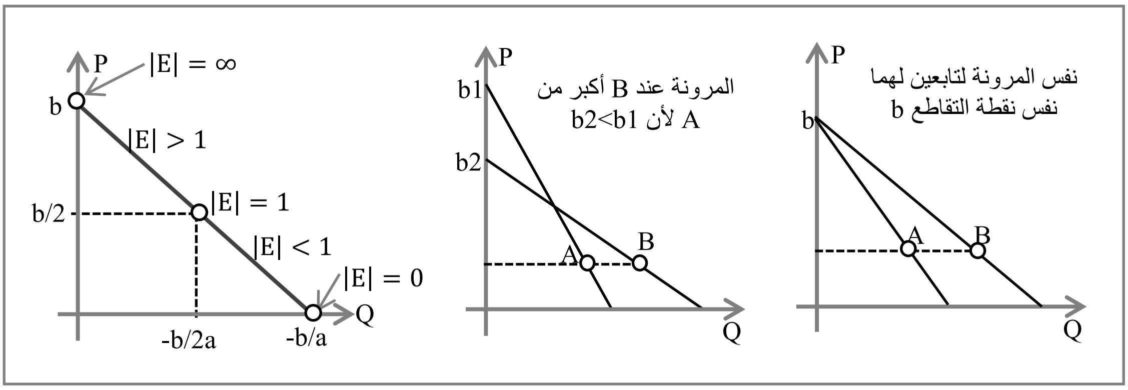
نلاحظ أن هذه الصـيغة لها علاقة بالسـعر P وبنقطة تقاطع تابع الطلب مع المحور العمودي b، وليس لها علاقة بميل مسـتقيم الطلب a. مما يعني أنه من أجل أي تابعي طلب لهما نفس نقطة التقاطع b، فإن التابعين لهما نفس المرونة من أجل أي سعر. يُمكن ملاحظة أن قيمة مؤشر المرونة تتغير على طول مستقيم تابع الطلب، كما هو مبين في الشكل (6−16).

إذا كانت P=b مثلاً، نجد أن مؤشر المرونة يصبح لا نهائي: $E = \frac{b}{b-b} = \frac{b}{0} \to \infty$

إذا كانت P=0 مثلاً، نجد أن مؤشر المرونة يصبح صفر: $E = \frac{0}{0-b} = \frac{0}{-b} = 0$

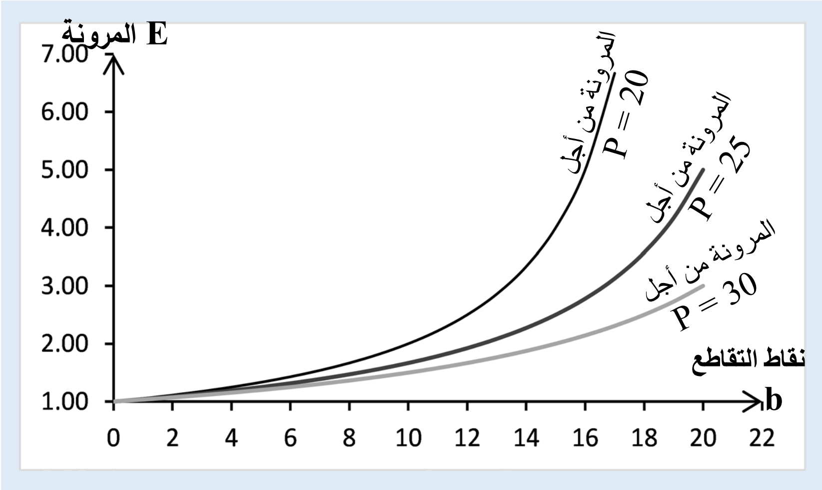
إذا كانت P=b/2 مثلاً، نجد أن مؤشر المرونة يصبح صفر: $E = \frac{b/2}{b/2-b} = -1$

إذاً، تتناقص المرونة من ∞ عندما P=b، لتصـل إلى الصـفر عندما P=0، ويكون الطلب واحدي المرونة في منتصف المستقيم أي عندما P=b/2 و Q=-b/2a.



الشكل (6−16) علاقة المرونة بنقاط التقاطع مع المحور العمودي (السعر) لتابع سعر خطي

أيضـاً، نلاحظ من صـيغة تابع المرونة أن b موجودة في المقام، أي أنه كلما كانت b صـغيرة كلما كان مؤشـر المرونة بالقيمة المطلقة كبيراً، وكلما كانت b كبيرة كلما كان مؤشـر المرونة بالقيمة المطلقة صغيراً، هو مبين في الشكل (6−17).



الشكل (6–17) علاقة المرونة بنقاط التقاطع مع المحور العمودي لتابع سعر خطي، من أجل نفس السعر

تطبيق (6–10) مرونة تابع الطلب من الشكل التربيعي.

ليكن لدينا تابع الطلب لأحد المنتجات من الشكل $P = 800 - 2Q^2$، والمطلوب:

أ) حساب متوسط المرونة السعرية للطلب بين الكميتين Q=14 و Q=16.

ب) حساب المرونة السعرية للطلب عند الكمية Q=15.

ت) قارن الجوابين السابقين، ماذا تستنتج؟

الحل:

أ) متوسط المرونة السعرية للطلب بين الكميتين Q=14 و Q=16.

عندما Q=14، نجد السعر يساوي $P(14) = 800 - 2x14^2 = 408$

عندما Q=16، نجد السعر يساوي $P(16) = 800 - 2x16^2 = 288$

لدينا فرق الكمية $\Delta Q = 16 - 14 = 2$

لدينا فرق السعر $\Delta P = 288 - 408 = -120$

مؤشر المرونة $E = \frac{P}{Q}.\frac{\Delta Q}{\Delta P}$، لكن ما هي القيم التي سنأخذها للكمية Q وللسعر P؟ إذ لدينا نقطتين.

في مثل هذه الحالات، نأخذ وسطي النقطتين، أي $Q = (14+16)/2 = 15$، وكذلك بالنسبة للسعر $P = (288+408)/2 = 348$، ومن ثم نطبق صيغة المؤشر، ندعو المرونة في هذه الحالة بالمرونة

القوســية Arc Elasticity كونها تُحســب على قوس من المنحني البياني وليس عند نقاط بعينها، فتكون قيمة المرونة على هذا القوس (بين الكميتين 14 و 16) تساوي:

$$E = \frac{P}{Q}.\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{348}{15}\frac{2}{-120} = -0.387$$

ب) المرونة السعرية للطلب عند الكمية Q=15.

من أجل Q=15، نجد السعر يساوي $P(14) = 800 - 2x15^2 = 350$

من أجل حساب مؤشر المرونة عند نقطة $E = \frac{P}{Q}.\frac{dQ}{dP}$، نحتاج تفاضل تابع الكمية بالنسبة للسعر، فنأخذ مقلوب تفاضل السعر بالنسبة للكمية، فيكون لدينا $\frac{dQ}{dP}$ من أجل Q=15:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}} = \frac{1}{-4Q} = \frac{1}{-4(15)} = -\frac{1}{60}$$

نطبق صيغة المؤشر، فتكون قيمة المرونة عند الكمية 15 تساوي:

$$E = \frac{P}{Q}.\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{350}{15}\left(-\frac{1}{60}\right) = -0.389$$

ت) من مقارنة الجوابين الســابقين، نجد أن القيمتين متقاربتين جداً، ويعكس الفرق البســيط إلى عدم دقة طريقة الوسطي.

6-6 التفاضل الجزئي لتوابع متعددة المتغيرات

رأينا في أغلب الفقرات السـابقة كيفية التعامل مع توابع عددية بمجهول وحيد، لكن لسـوء الحظ ليست هي الحالة العامة في التطبيقات الاقتصــادية، إذ نجد أن أغلب الظواهر الاقتصــادية وبالتالي توابعها تتعلق بعدة متغيرات، لذلك سنرى في هذه الفقرة كيفية استخدام المشتقات الجزئية عبر عملية التفاضل الجزئي Partial Differerntiation، للتعامل مع توابع متعددة المتغيرات.

قد تبدو معقدة أو صــــعبة للبعض، لكنها لا تخرج أبداً عن مفاهيم وقواعد التفاضــــل في حالة تابع بمتغير وحيد، لكن هذا التعقيد مبرر بحكم كون الظاهرة الاقتصـــــادية معقدة أصـــــلاً، وبالتالي من الطبيعي أن نستخدم أدوات رياضية معقدة لمعالجتها، ومن حسن الحظ توفر تقنيات التفاضل الجزئي التي تساعد كثيراً في التعبير عن الظاهرة الاقتصادية واقتراح الحلول الأفضل لتطبيقها.

سوف نحاول معالجة حالات بسيطة، بحيث يتكون لدى الطالب المبادئ الأساسية للتفاضل الجزئي، ويُمكن أن تُشكل منطلقاً مقبولاً للتوسع بها وتطبيقها في الحالات الأكثر تعقيداً.

ليكن لدينا تابع متعدد المتغيرات $Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، بمعنى أن قيمة التابع Y تتحدد بمعرفة قيم المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جميعاً، ندعو أحياناً Y بالمتغير التابع Dependent Variable والمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بالمتغيرات المستقلة Independent Variables.

مثال (6–10) أمثلة عن توابع متعددة المتغيرات.

$$F(x, y) = 3x + 4y + 7xy - x^2y - y^2$$

$$F(x, y, z) = x + y + z$$

كما رأينا كيفية التمثيل البياني لتابع بمجهول وحيد $y=F(x)$ في فضاء ثنائي البعد، وقد يكون كذلك ممكن في حالة تابع بمجهولين $z=f(x,y)$ في فضاء ثلاثي الأبعاد[9]، لكن يستحيل التمثيل أو التصور البياني في حالة توابع بأكثر من مجهولين اثنين، وهنا يلعب التفاضل الجزئي دوراً محورياً في تحليل الظاهرة الاقتصادية كما سنرى.

ليكن لدينا تابع بعدة متغيرات $Y=F(x, z, t, \ldots)$، ما ندعوه بالمشتق الجزئي Partial Derivative للتابع F بالنسبة لأحد متغيراته x هو <u>مشتق التابع بالنسبة لهذا المتغير فقط بفرض المتغيرات الأخرى ثابتة</u>، ونرمز له بالشكل:

$$F'_x = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

يُقرأ الرمز ∂ "ديي" لتمييزه كرمز لمشتق جزئي عن d "د" كرمز للمشتق التقليدي الذي رأينا سابقاً.

يُفسر المشتق الجزئي $\frac{\partial F}{\partial x}$ لتابع متعدد المجاهيل F بالنسبة لأحد مجاهيله x، بنفس الطريقة للمشتق التقليدي أي تابع بمجهول وحيد، فهو يُمثل معدل تغير التابع F بالنسبة لتغير المجهول x بفرض جميع المجاهيل الأخرى ثابتة.

يُمكن أيضاً أن نوجد المشتق الثاني للتابع بنفس الطريقة، ونرمز له بالشكل بالنسبة لمجهول واحد:

$$F''_x = F_{xx} = \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}$$

أما إذا كان الاشتقاق بالنسبة لمجهولين y أولاً ثم x، فنرمز له بالشكل: $F_{xy} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$

أو x أولاً ثم y، فنرمز له بالشكل: $F_{yx} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}$

9. يُمكن دوماً اللجوء في هذه الحالة إلى البرمجيات التخصصية.

وتُشير نظرية Young حول تناظر الاشتقاق الجزئي من الدرجة الثانية Symmetry of Second Derivatives، على أن ترتيب الاشتقاق بالنسبة لعدة مجاهيل هو غير مهم. في الحقيقة، نجد دوماً أن $F_{xy} = F_{yx}$، إلا في حالات استثنائية غير معنيين بها في هذه الأملية.

كما يُمكن تطبيق نفس القواعد لإيجاد المشتق من الدرجة n.

مثال (6–11) أمثلة عن اشتقاق جزئي لبعض التوابع متعددة المتغيرات.

أ) ليكن لدينا التابع $F(x,y) = 5x^2 + 3y^2$

المشتق الجزئي للتابع $F(x,y)$ بالنسبة للمجهول x هو: $F'_x = 10x$، حيث اعتبرنا y^2 ثابت مشتقه صفر.

المشتق الجزئي لنفس التابع بالنسبة لـ y هو: $F'y = 6y$ ، حيث اعتبرنا x^2 ثابت مشتقه صفر.

ب) لدينا التابع $F(x,y,z) = 2x^2 + 3x + y^2 – 4y + 3z$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ x هو: $F'_x = 4x + 3$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ y هو: $F'_y = 2y - 4$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ z هو: $F'_z = 3$

ت) لدينا التابع $F(x,y,z) = x.y.z$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ x هو: $F'_x = y.z$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ y هو: $F'_y = x.z$

المشتق الجزئي للتابع بالنسبة لـ z هو: $F'_z = y.z$

كما نلاحظ أن عملية الاشتقاق لا تختلف أبداً عن عملية الاشتقاق التقليدية.

مثال (6–12) أمثلة عن المشتق الجزئي الثاني لبعض التوابع متعددة المتغيرات.

أ) لدينا التابع $F(x,y) = 5x^2 + 4y^3$، ولنوجد المشتقات من الدرجة الثانية $F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{yx}$.

المشتق الأول بالنسبة لـ x: $F_x = 10x$، فيكون المشتق الثاني بالنسبة لـ x أيضاً: $F_{xx} = 10$

المشتق الأول بالنسبة لـ y: $F_y = 12y$، فيكون المشتق الثاني بالنسبة لـ y أيضاً: $F_{yy} = 12$

لإيجاد المشتق F_{xy}، فإننا نشتق التابع الأصلي أولاً بالنسبة لـــ y فنجد $F_y=12y$، ثم نشتق هذا المشتق F_y بالنسبة لـ x فنجد $F_{xy} = 0$.

لإيجاد المشتق F_{yx}، فإننا نشتق التابع الأصلي أولاً بالنسبة لـــ x فنجد $F_x=10x$، ثم نشتق هذا المشتق F_x بالنسبة لـ y فنجد $F_{yx} = 0$. وكما نلاحظ أن $F_{xy} = F_{yx}$ حسب نظرية Young.

ب) لدينا التابع $F(x,y) = x^2 y^3$، ولنوجد المشتقات من الدرجة الثانية $F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{yx}$.

المشتق الأول بالنسبة لـ x: $F_x = 2x\, y^3$، فيكون المشتق الثاني بالنسبة لـ x: $F_{xx} = 2y^3$

المشتق الأول بالنسبة لـ y: $F_y = 3x^2\, y^2$، فيكون المشتق الثاني بالنسبة لـ y: $F_{yy} = 6x^2\, y$

لإيجاد المشتق F_{xy}، فإننا نشتق التابع الأصلي أولاً بالنسبة لـ y فنجد $F_y = 3x^2\, y^2$، ثم نشتق هذا المشتق F_y بالنسبة لـ x فنجد $F_{xy} = 6x\, y^2$.

لإيجاد المشتق F_{yx}، فإننا نشتق التابع الأصلي أولاً بالنسبة لــ x فنجد $F_x = 2x\, y^3$، ثم نشتق هذا المشتق F_x بالنسبة لـ y فنجد $F_{yx} = 6x\, y^2$. وكما نلاحظ أن $F_{xy} = F_{yx}$ حسب نظرية Young.

إذا كان لدينا تابع بعدة مجاهيل، فإنه من المهم جداً لدى دراسة الظواهر الاقتصادية، معرفة التغيرات الكلية في التابع الإجمالي F بالنسبة للتغيرات في جميع مجاهيله، وإذا كان عدد المجاهيل كبيراً فإن الأمر يُصبح مربكاً ومعقداً للغاية، إذ من النادر أن نستطيع تثبيت المجاهيل، فهي أصلاً قد تتفاعل مع بعضها (يُمكن التعبير عن هذا التفاعل بالمشتقات الجزئية فيما بين المجاهيل)، نشير إلى ضرورة الانتباه بشدة إلى كيفية استثمار المشتقات الجزئية لمجهول واحد أو لعدة مجاهيل. في الواقع الفعلي، يُمكن مقاربة المشكلة بتقريبات مقبولة للتغيرات المستقلة في المجاهيل وتقدير أثرها على التغير في التابع الإجمالي.

لنأخذ تابع بمجهولين $Z = F(x,y)$ ولنلاحظ كيفية تقريب التغير الإجمالي بدلالة التغير في المجهولين:

إذا تغيرت x بمقدار Δx مع بقاء y ثابتة، فإن التغير في التابع ΔZ يكون: $\Delta Z1 = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$

إذا تغيرت y بمقدار Δy مع بقاء x ثابتة، فإن التغير في التابع ΔZ يكون: $\Delta Z2 = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

في الواقع الفعلي، يُمكن طبعاً أن تتغير x و y بنفس الوقت، لكن إذا كانت تغيرات المجاهيل صغيرة، فإنه يُمكن قبول –بتقريب مقبول– التغير الكلي ΔZ في التابع كمجموع جبري للتغيرات الجزئية لكل من مجاهيله بشكل منفرد، كما يلي:

$$\Delta Z = \Delta Z1 + \Delta Z2 = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

وإذا كانت التغيرات Δx، Δy صغيرة جداً نعبر عنها بالتفاضل dx، dy وبالتالي يمكن كتابة التغير السابق على النحو الآتي:

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

وندعوها بصيغة التقريبات الصغيرة أو المتتالية Small Increments Formula.

مثال (6−13) التغير الكلي لتابع متعددة المتغيرات بتقريبات صغيرة.

ليكن لدينا التابع $Z = 2x^3 y - 5y^3 x$، والمطلوب:

أ) حساب $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ عند النقطة $x=2, y=4$

ب) تقدير التغيرات في Z عندما تزداد x من 2 إلى 2.1 وتتناقص y من 4 إلى 3.9.

أ) لنوجد تفاضلات التابع بالنسبة لـ x، وبالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y - 5y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 - 15y^2x$$

عند النقطة $x=2, y=4$، نجد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6(2)^2(4) - 5(4)^3 = 16$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(2)^3 - 15(4)^2(2) = -464$$

ب) تقدير التغيرات في Z

عندما تزداد x من 2 إلى 2.1 فإن $\Delta x = 2.1 - 2 = 0.1$

عندما تتناقص y من 4 إلى 3.9 فإن $\Delta y = 3.9 - 4 = -0.1$

باستخدام صيغة التقريبات الصغيرة، نجد التغير الكلي في Z:

$$\Delta Z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = (16)(0.1) + (-464)(-0.1) = 48$$

أي عند التغيرات المذكورة للنقطة، يتغير التابع الكلي بمقدار **48**.

في حال تم حساب قيمة التابع Z فعلياً عند النقطة قبل وبعد التغير، نجد:

قبل التغير، $x=2, y=4$ نجد قيمة Z: $Z = 2(2)^3 (4) - 5(4)^3 (2) = -576$

بعد التغير، $x=2.1, y=3.9$ نجد قيمة Z: $Z = 2(2.1)^3 (3.9) - 5(3.9)^3 (2.1) = -550.6$

بالتالي يكون الفرق يســـاوي $\Delta Z = (-550.6) - (-576) = \mathbf{25.4}$. وهو مختلف عن التغير التقريبي السابق (48).

إن البحث عن تفســير هذا الفرق هو قضــية مهمة في تحليل الظاهرة الاقتصــادية، حالياً يُمكن فقط القول أن هناك تأثيرات مشتركة (تفاعلية) بين المجهولين x, y غير مأخوذة بالاعتبار. عموماً، تؤدي هذه التفاعلات إلى تضـــخيم أو تقليص الجمع الجبري للتغيرات الجزئية، أو حتى قد تلغي بعضـــها البعض. إذ يجب النظر إلى الظاهرة الاقتصادية ككل (كمنظومة System)، حيث المخرجات النهائية ليست بالضرورة المجموع الجبري لنتائج العمليات الداخلية للمدخلات، تبدو العمليات وكأنها "صندوق أسود"، قد نستطيع تمييز بعضها (التغيرات الجزئية) وبعضها الآخر قد لا نستطيع تمييزه (التفاعلات بين المتغيرات).

أحد أهم التطبيقات لصيغة التقريبات الصغيرة، هو في البحث عن مشتقات بعض المجاهيل بالنسبة للبعض الآخر، خصوصاً في حالة صيغ رياضية معقدة يصعب فصل المتغيرات عن بعضها أو كتابتها بحيث يكون أحدها بدلالة الآخر بشكل صريح.

ليكن لدينا التابع $F(x, y) = Cst$. كيف يتم إيجاد مشتق y بالنسبة لـ x: $\frac{dy}{dx}$ ؟

نكتب التابع $Z = F(x, y) = Cst$، المقصود بالرمز Cst (Constant) بأنه عدد ثابت.

نطبق صيغة التقريبات: $dZ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ولنلاحظ أن $Z = Cst$.

في هذه الحالة، نجد $dZ = 0$، وبالتالي $dZ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$

بإعادة ترتيب الصيغة، نجد $\frac{\partial z}{\partial x}dx = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ومنه نجد تفاضل y بالنسبة لـ x:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

نلاحظ بأن هذه الصــيغة صــالحة من أجل أي تابع من الشــكل $F(x, y) = C^{st}$، وندعو هذه التقنية بالتفاضل الضمني Implicit Differentiation.

مثال (6–14) مشتق مجهول بالنسبة لآخر باستخدام صيغة التقريبات الصغيرة.

ليكن لدينا التابع $5y^3 + x^2 y^2 + 7x - 100 = 0$، والمطلوب إيجاد مشتق y بالنسبة لـ x: $\frac{dy}{dx}$ ؟

نكتب التابع بالشكل: $Z = F(x,y) = 5y^3 + x^2 y^2 + 7x = 100$

نطبق صيغة التقريبات: $dZ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

لدينا $Z = 100$، وبالتالي نجد $dZ = 0$، فنجد $dZ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$

نوجد تفاضل z بالنسبة للمجهول x: $\frac{\partial z}{\partial x} = F'_x = 2x\, y^2 + 7$

نوجد تفاضل z بالنسبة للمجهول y: $\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y = 15y^2 + 2x^2\, y$

ومنه نجد تفاضل y بالنسبة لـ x:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\left(\frac{2x\, y^2 + 7}{15y^2 + 2x^2\, y}\right)$$

قد تكون هذه الفقرة كافية لاحتياجات التعامل رياضـــياً مع التوابع الاقتصـــادية، في جميع الأحوال، يُمكن للطالب العودة دوماً للمراجع الرياضـية الأكثر تخصصـاً عند الحاجة، ولن يجد أية صـعوبة في البحث عن تقنيات للظواهر الأكثر تعقيداً.

6-7 المرونة الجزئية لتوابع متعددة المتغيرات

سنرى في هذه الفقرة بعض التطبيقات للتفاضل الجزئي في حالة توابع اقتصادية بعدة مجاهيل.

6-6-1 المرونة الجزئية للطلب

ليكن لدينا تابع الطلب Q بعدة متغيرات: سـعر المنتج المعني نفســه P، سـعر المنتج البديل (الآخر) A، والدخل الإجمالي للمستهلكين Y: $Q = F(P, A, Y)$.

يُقصـــد بالمنتج البديل (الآخر) أي منتج غير المنتج المعني يُمكن أن يلجأ إليه المســتهلك لتعويض المنتج المعني/الأصلي.

ولندرس استجابة تابع الطلب في حالة التغير في أي من المجاهيل الثلاثة، وباستخدام مفهوم المرونة الذي رأيناه سابقاً، باعتبار أن التابع هو لعدة مجاهيل سنستخدم مصطلح المرونة الجزئية.

مثلاً المرونة الجزئية للطلب بالنسبة للسعر E_P هو: $E_P = \frac{P}{Q} \frac{\partial Q}{\partial P}$

استخدمنا إشارة المشتق الجزئي $\frac{\partial Q}{\partial P}$ للقول أن الاشتقاق هو بالنسبة للمجهول P بفرض جميع المجاهيل الأخرى ثابتة.

بنفس الطريقة، نجد المرونة الجزئية للطلب بالنسبة لسعر المنتج البديل E_A هو: $E_A = \frac{A}{Q}\frac{\partial Q}{\partial A}$ وندعوها أحياناً بالمرونة السعرية التقاطعية للطلب Cross-Price Elasticity of Demand.

قد يكون هذا المؤشر E_A موجباً أو سالباً، بشكل عام نجد:

1. إذا كان المنتج الآخر بديلاً فعلياً للمنتج المعني (Substituable)، فإن المستهلك سيلجأ إلى استهلاك كمية أكبر من المنتج المعني في حال ارتفاع سعر المنتج البديل A، مما يعني أن $E_A > 0$ أو $\frac{\partial Q}{\partial A} > 0$ باعتبار أن $\frac{Q}{A}$ موجبة دوماً.
2. إذا كان المنتج الآخر بديلاً متمماً للمنتج المعني (Complementary)، فإن المستهلك سيلجأ إلى استهلاك كمية أقل من المنتج المعني في حال ارتفاع سعر المنتج البديل A، باعتبار أنه ليس مضطراً لدفع موازنة إضافية للمنتج البديل المتمم، مما يعني أن $E_A < 0$ أو $\frac{\partial Q}{\partial A} < 0$.

بنفس الطريقة، نجد مرونة الطلب بالنسبة للدخل E_Y هو: $E_Y = \frac{Y}{Q}\frac{\partial Q}{\partial Y}$، ويُمكن تفسيرها كما يلي:

1. إذا كان المنتج طبيعي Normal، فمن المنطقي أن يزداد الطلب على المنتج (كمية أكبر من الحالية) مع زيادة الدخل، مما يعني أن E_Y تكون موجبة.
2. إذا كان المنتج غير أساسي Inferior، نجد أن الطلب يتناقص على المنتج (كمية أقل من الحالية) مع زيادة الدخل، مما يعني أن E_Y تكون سالبة.
3. في بعض حالات منتجات الرفاهية Superior، قد تتجاوز قيمة E_Y الواحد، مما يعني أن التزايد في نسبة استهلاك المنتج هي أكبر من التزايد في نسبة الدخل الإجمالي.

مثال (6–15) المرونة الجزئية لتابع طلب متعدد المتغيرات.

ليكن لدينا تابع الطلب $Q = 210 - 3P + 2A + 0.2Y$

حيث $P = 20$، $A = 25$، و $Y = 1000$. والمطلوب:

أ) حساب المرونة السعرية للطلب.

ب) حساب المرونة السعرية التقاطعية (بالنسبة للمنتج البديل). هل المنتجين قابلين للتبديل فيما بينهما أم متممين أحدهما للآخر؟

ت) حساب مرونة الطلب بالنسبة للدخل الإجمالي.

<u>الحل:</u>

نقوم بحساب Q بالنسبة للمعطيات المتوفرة:

$$Q = 210 - 3(20) + 2(25) + 0.2(1000) = 400$$

نوجد المشتقات الجزئية: $\frac{\partial Q}{\partial P} = -3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial A} = 2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial Y} = 0.2$

أ) المرونة السعرية للطلب: $E_P = \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{20}{400}(-3) = -0.15$

ب) المرونة السعرية التقاطعية (بالنسبة للمنتج البديل): $E_A = \frac{P}{A}\frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{25}{400}(2) = 0.125$

باعتبارها موجبة، فالمنتجين قابلين للتبديل فيما بينهما.

ت) مرونة الطلب بالنسبة للدخل الإجمالي: $E_Y = \frac{P}{Y}\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{1000}{400}(0.2) = 0.5$

1-6-6 المرونة الجزئية لتوابع الإنتاج

رأينا سابقاً بعض التطبيقات عن توابع الإنتاج، عموماً تابع حجم الإنتاج (الكمية المُنتجة) تتعلق بعدد كبير من العوامل ندعوها عوامل الإنتاج Production Factors، يأتي في مقدمتها رأس المال Capital واليد العاملة Labour وتُشكل الجزء الأهم والأكبر في تحديد حجم الإنتاج.

ليكن لدينا حجم الإنتاج تابع لعاملين: رأس المال K، والعمالة L: $Q = F(K, L)$.

يُمكن استخدام مفهوم المشتق الجزئي لدراسة تأثير كل من العاملين أو العاملين معاً على حجم الإنتاج، كما يلي:

1. معدل تغير كمية الإنتاج بالنسبة لرأس المال $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$، كما يُمكن تقدير تغيرات صغيرة في حجم الإنتاج بدلالة التغير في حجم رأس المال $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K$.
2. معدل تغير كمية الإنتاج بالنسبة للعمالة $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$، كما يُمكن تقدير تغيرات صغيرة في حجم الإنتاج بدلالة التغير في حجم العمالة $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L$.
3. كما يُمكن تقدير التغيرات الصغيرة في حجم الإنتاج إذا تغير العاملان معاً باستخدام صيغة التقريبات الصغيرة $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L$.

من أجل حجم إنتاج ثابت $Q = Cst$، يكون لدينا تركيبات متعددة بين حجمي العمالة ورأس المال تُحقق هذه الكمية، ندعو المنحنيات البيانية في هذه الحالة بمنحنيات متساوي الكمية Isoquant، حيث يُمثل كل منحني مستوى محدد وثابت من حجم الإنتاج في جميع نقاط المنحني، وكلما كانت قيمة الكمية كبيرة كلما كان مستوى المنحني أعلى.

ومن أجل حجم إنتاج ثابت أي من أجل منحني بياني محدد، من المفيد جداً تقدير معدل التعويض بين رأس المال والعمالة $\frac{dK}{dL}$، وندعو هذا المشتق بالمعدل الهامشي للتعويض التقني Marginal

Rate of Technical Substitution (MRTS)، ويُمكن حسابها باستخدام الاشتقاق الضمني، ونجد أنها تساوي معدل المشتق الجزئي لتابع الإنتاج بالنسبة للعمالة إلى المشتق الجزئي لتابع الإنتاج بالنسبة رأس المال، كما يلي:

$$MRTS = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

لنأخذ التابع الأكثر انتشاراً عن حجم الإنتاج المعروف باسم Cobb_Douglas، وله الشكل:

$$Q = AK^{\propto}L^{\beta}$$

حيث α، β ثوابت موجبة.

نوجد المشتقات الجزئية: $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \propto AK^{\propto-1}L^{\beta}$ $\quad$ $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^{\propto}L^{\beta-1}$

فيكون المعدل الهامشي للتعويض التقني MRTS يساوي:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\beta AK^{\propto}L^{\beta-1}}{\propto AK^{\propto-1}L^{\beta}} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

نقول عن تابع إنتاج أنه متجانس Homogeneous من الدرجة n، إذا كان من أجل أي عدد λ (يُقرأ لامبدا) فإن: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n F(K, L)$. ويُفسر هذا التحويل كما يلي:

1. نقول أن تابع الإنتاج يُظهر تناقصاً سلمياً إذا كان $n < 1$.
2. نقول أن تابع الإنتاج يُظهر تزايد سلمياً إذا كان $n > 1$.
3. نقول أن تابع الإنتاج يُظهر ثباتاً سلمياً إذا كان $n = 1$.

مثال (6–16) المعدل الهامشي للتعويض التقني MRTS لتابع Cobb-Douglas.

ليكن لدينا التابع $Q = 5K^2+3L^2$، والمطلوب:

أ) حساب المشتقات الجزئية بالنسبة للعمالة L ولرأس المال K.

ب) حساب MRTS.

ت) هل التابع متجانس، ومن أية درجة؟

الحل:

أ) المشتقات الجزئية: $MP_K = 10K$ و $MP_L = 6L$

ب) المعدل الهامشي للتعويض التقني MRTS يساوي: $\mathrm{MRTS} = \frac{\mathrm{MP_L}}{\mathrm{MP_K}} = \frac{6\mathrm{L}}{10\mathrm{K}}$

كما يُمكن تقدير التغيرات التقريبية في حجم الإنتاج إذا تغير العاملان معاً باستخدام صيغة التقريبات الصغيرة: $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = 10K\Delta K + 6L\Delta L$

8-6 مضاريب لاغرانج

يمكن حل مسألة الأمثلية ضمن قيود محددة باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج. تقوم فكرة الطريقة على تشكيل تابع جديد مكون من التابع الهدف والقيود، ثم حل جملة معادلات مشكلة من المشتقات الجزئية لهذا التابع.

لنفرض أننا نريد إيجاد القيمة المثلى للتابع F(x, y) تحت القيود T(x, y) = M. نتبع الخطوات الآتية:

(1) نعرف تابع جديد بالشكل الآتي: $g(x, y, \lambda) = F(x, y) - \lambda\,[T(x, y) - M]$

(2) حل جملة المعادلات:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$$

ندعو المعامل λ بمضروب لاغرانج، وندعو التابع $g(x, y, \lambda)$ بتابع لاغرانج.

مثال (6–17) أمثلة تابع باستخدام مضاريب لاغرانج.

المطلوب إيجاد القيم المثلى للتابع $F(x, y) = x^2 - 3xy + 12x$

تحت القيد $2x + 3y = 6$

الحل:

(1) نعرف تابع لاغرانج بالشكل الآتي:

$$g(x, y, \lambda) = x^2 - 3xy + 12x + \lambda\,[6 - 2x - 3y]$$

(2) حل جملة المعادلات:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 3y + 12 - 2\lambda\ = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -3x - 3\lambda\ = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 6 - 2x - 3y = 0$$

بحل هذه المعادلات الثلاث، نجد: $x = -1,\ y = 8/3,\ \ \lambda = 1$

وتكون القيمة المثلى للتابع $F(x, y) = (-1)^2 - 3(-1)(8/3) + 12(-1) = -3$

تطبيق (6−11) الربح الأمثلي بتطبيق مضاريب لاغرانج.

يُنتج أحد المصانع منتجين A, B يتشاركان معظم المواد الأولية. لدينا توابع التكاليف الكلية والأسعار كما يلي:

$$TC = 10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2$$
$$P1 = 50 - Q1 + Q2$$
$$P2 = 30 + 2Q1 - Q2$$

حيث Q1 و Q2 هي الكميات المنتجة والمباعة من المنتجين A و B على التوالي. و P1, P2 أسعار بيع كل من المنتجين A, B. والمطلوب:

(1) إيجاد الربح الأمثلي في حال تعاقد المصنع على إنتاج وبيع 15 قطعة من المنتجين.

(2) تقدير الربح الأمثلي في حال زيادة الإنتاج بمقدار وحدة واحدة.

الحل:

(1) الربح الأمثلي

الربح الكلي TP يساوي الإيرادات الكلية – التكاليف الكلية

الإيرادات الكلية TR تســاوي مجموع الإيرادات للمنتج A (TR1) وللمنتج B (TR2)، في حال تعاقد المصنع على إنتاج وبيع 15 قطعة من المنتجين، فإن TR تساوي:

$$TR = TR1 + TR2 = P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$TR = (50 - Q_1 + Q_2)Q_1 + (30 + 2Q_1 - Q_2)Q_2$$
$$TR = 50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 - Q_2^2$$

بالتالي، فإن تابع الربح TP يُصبح له الشكل: $TP = TR - TC$

$$TP = (50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 - Q_2^2) - (10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2)$$
$$TP = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 - 20Q_2 - Q_2^2$$

إذاً، يتوجب البحث عن أفضل قيمة لتابع الربح TP تحت قيد مجموع قطع المنتجين:

$$M = Q_1 + Q_2 = 15$$

نشكل تابع لاغرانج $g(Q1, Q2, \lambda)$:

$$g(Q1, Q2, \lambda) = (40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 - 20Q_2 - Q_2^2) + \lambda(15 - Q_1 - Q_2)$$

حل جملة المعادلات المشكلة من التفاضلات الجزئية:

$$\frac{\partial g}{\partial Q_1} = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial Q_2} = 20 + 2Q_1 - 2Q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 15 - Q_1 - Q_2 = 0$$

نجد الحل المشترك لهذه المعادلات: $Q1 = 10,\ Q2 = 5,\ \lambda = 30$

ومنه نجد القيمة المثلى للربح $TP = 475$:

$$TP = 40(10) - (10)^2 + 2(10)(5) + 20(5) - (5)^2 = 475$$

(2) الربح الأمثلي في حال زيادة الإنتاج بمقدار وحدة واحدة:

الطريقة الأولى هي باستبدال مجموع الكميات من المنتجين بالقيمة 16 بدل القيمة $M=Q_1+Q_2=15$

ثم أخذ الفرق بين الربحين من أجل 15 و من أجل 16 قطعة من المنتجين، لكن هذه الطريقة قد تكون طويلة أو معقدة. لذلك سنعتمد طريقة أخرى نوضح من خلالها مفهوم مضروب لاغرانج.

لنستبدل الكمية المنتجة 15 بمتغير وليكن M، فيُصبح تابع لاغرانج له الشكل:

$$g(Q1, Q2, \lambda, \mathbf{M}) = (40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 - 20Q_2 - Q_2^2) + \lambda(\mathbf{M} - Q_1 - Q_2)$$

ثم نأخذ التفاضل الجزئي للتابع g بالنسبة للمتغير M فنجد أنه يساوي λ:

$$\frac{\partial g}{\partial M} = \lambda$$

نلاحظ أن λ يُمثل التغير في التابع g مع تغير M بمقدار وحدة واحدة.

وإذا تحقق القيد $M = Q_1 - Q_2$ فإن التابع g يُختزل بتابع الربح.

أي أن مضـــروب لاغرانج يُمثل التغير في القيمة المثلى للتابع عند تغير الكمية بمقدار واحد، بالتالي فإن الربح يزداد بمقدار 30 وحدة نقدية مع زيادة الكمية M بمقدار 1.

أســئلة واختبارات الفصــل الســادس: المشــتقات وتحليل ظاهرة الحدية

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	يُعبر مماس المنحني البياني لتابع عند نقطة ما منه عن ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور الأفقي.	✓	
2	ندعو عملية البحث عن مشتق تابع عددي بعملية التكامل Integration.		✓
3	مشتق التابع $F(x) = a$ حيث a عدد حقيقي هو الصفر.	✓	
4	مشتق تابع عددي مضروب بعدد ثابت يساوي مشتق التابع مطروحاً منه الثابت.		✓
5	مشتق تابع تابع أسي يساوي حاص جداء الأس بالتابع بعد إنقاص الأس واحد	✓	
6	مشتق تابع لغاريتم طبيعي يساوي مشتق ما داخل اللغاريتم مقسوماً على التابع	✓	
7	يكون التابع متناقصاً إذا كان مشتقه الأول موجباً.		✓
8	يكون تقعر منحني التابع نحو العينات السالبة، إذا كانت إشارة المشتق الثاني موجبة.		✓
9	ميل التابع $F(x) = 3x - 12$ هو دوماً ثابت ويساوي 3.	✓	
11	مشتق التابع $F(x) = x^n$ هو $F'(x) = n.x^{(n-1)}$.	✓	
12	يُعبر المشتق الثاني للتابع العددي عن تزايد أو تناقص التابع.		✓
13	تُحقق نقاط الاستقرار (سواء كانت أدنى أو أعلى أو انعطاف) المعادلة: $F'(x) = 0$.	✓	
14	مرونة الطلب بالنسبة للسعر هي النسبة المئوية للتغير في الطلب مقسوماً على النسبة المئوية للتغير في السعر.	✓	
15	إذا كانت مرونة الطلب بالنسبة للسعر أصغر من الواحد، نقول أن الطلب مرن Elastic.		✓
16	مرونة السعر بالنسبة للطلب هي مقلوب مرونة الطلب بالنسبة للسعر.	✓	
17	يُمكن مقاربة التغير الإجمالي في تابع متعدد المتغيرات بتقريبات مقبولة للتغيرات المستقلة في المجاهيل Small Increments Formula.	✓	
18	يمكن حساب المعدل الهامشي للتعويض التقني (MRTS) بين رأس المال والعمالة بالمشتق الضمني $\frac{dK}{dL}$ لتابع الإنتاج $F(K, L)$.	✓	

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- المشتق الأول للتابع $F(x) = 3x^2 - 4x + 2$ هو:

أ) $F'(x) = 6x$

ب) $F'(x) = -4x$

ج) $F'(x) = 6x - 4$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- المشتق الثاني لتابع عددي من الدرجة الأولى $F(x) = ax + b$ حيث $a, b \in R$ و $a \# 0$ هو:

أ) دوماً ثابت ويساوي a

ب) دوماً ثابت ويساوي الصفر 0

ج) دوماً ثابت ويساوي b

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- يكون التابع $F(x)$ متناقصاً على مجال معرف عليه إذا كان:

أ) مشتقه الأول $F'(x)$ سالباً

ب) مشتقه الأول موجباً أو سالباً

ج) مشتقه الأول $F'(x)$ موجباً

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- المشتق الثاني لتابع عددي من الدرجة الثانية $F(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in R$ و $a \# 0$ هو:

أ) دوماً ثابت ويساوي c

ب) دوماً ثابت ويساوي b

ج) دوماً ثابت ويساوي 2a

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- مشتق مقلوب تابع $G(x) = \frac{1}{F(x)}$ هو:

أ) $G'(x) = \frac{1}{F'(x)}$

ب) $G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)}$

ج) $G'(x) = \frac{F'(x)}{(F(x))^2}$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- مشتق تابع لغاريتم طبيعي $y = Ln(F(x))$ هو:

أ) $y' = F'(x)$

ب) $y' = \frac{F'(x)}{F(x)}$

ج) $y' = \frac{1}{F'(x)}$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- مشتق التابع الجيبي $F(x) = Cos(x)$ هو:

أ) $F'(x) = -Sin(x)$

ب) $F'(x) = Tan(x)$

ج) $F'(x) = Cos(x)$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- مشتق التابع $F(x) = (x)^{\frac{1}{n}}$ هو:

أ) $F'(x) = \frac{1}{n}x^{n-1}$

ب) $F'(x) = n\, x^{\frac{1}{n}}$

ج) $F'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- مشتق التابع $F(x) = e^{ax}$ هو:

أ) $F'(x) = a.e^{ax}$

ب) $F'(x) = x$

ج) $F'(x) = e^x$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- المشتق الثاني للتابع $F(x) = x^2 + 2x$ هو:

أ) $F''(x) = 4$

ب) $F''(x) = 2x + x$

ج) $F''(x) = 2x$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- لدينا تابع الإيرادات الكلية كما يلي $TR(Q) = Q^2 + 5Q + 100$ فإن تابع الإيرادات الحدية $MR(Q)$ هو:

أ) $MR(Q) = TR(Q)$

ب) $MR(Q) = Q^2 + 100$

ج) $MR(Q) = 2Q + 5$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- لدينا تابع التكاليف الكلية كما يلي $TC(Q) = Q^2 - 10Q$ فإن وسطي تكلفة القطعة الواحدة $AC(Q)$ هو:

أ) $AC(Q) = Q - 10$

ب) $AC(Q) = Q^3 – 10Q^2$

ج) $AC(Q) = 2Q + 10Q$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- تُحسب مرونة الطلب Q بالنسبة للسعر P كما يلي:

أ) $E = \frac{dQ}{dP}$

ب) $E = \frac{P}{Q} . \frac{dQ}{dP}$

ج) $E = \frac{1}{P} . \frac{dQ}{dP}$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- ليكن لدينا تابع الإيرادات $TR(Q) = P.Q$، فإن العلاقة بين المرونة على الطلب E والإيرادات الهامشية MR لها الشكل الآتي:

أ) $MR = P\left(1 + \frac{1}{E}\right)$

ب) $MR = (1 + E)$

ج) $MR = \left(1 + \frac{1}{E}\right)$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- لدينا تابع الطلب من الشكل $P = aQ + b$ حيث $P\#b$ فإن مرونة الطلب بالنسبة للسعر E تُحسب كما يلي:

أ) $E = \frac{P}{P-b}$

ب) $E = \frac{P}{Q}$

ج) $E = -b$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

16- المشتق الجزئي للتابع $F(x,y) = 2x^2 + y^2$ بالنسبة للمجهول x هو:

أ) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y$

ب) $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x$

ج) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

17- المشتق الجزئي للتابع $F(x, y) = \frac{x^2}{y} + x$ بالنسبة للمجهول y هو:

أ) $\frac{\partial F}{\partial y} = y + x$

ب) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2}$

ج) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2} + x$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (1-6) التكلفة الهامشية ووسطي التكلفة.

قدر أحد المصانع أن وسطي تكلفة إنتاج القطعة الواحدة Average Cost لها الشكل الآتي: $AC = \frac{200}{Q} + 10$

والمطلوب:

1) إيجاد صيغة تابع التكاليف الكلية Total Cost.

2) إيجاد صيغة تابع التكاليف الهامشية Marginal Cost.

3) ما قيمة التكلفة الوسطية AC والتكلفة الهامشية MC في حال قرر المصنع إنتاج الكميات الآتية:

Q = 10 ، Q = 100 ، Q = 1000

4) في حال قرر المصنع إنتاج كميات كبيرة جداً أي عندما Q تنتهي إلى اللانهاية، ما تقديرك لقيمة التكلفة الوسطية والتكلفة الهامشية، ماذا تستنتج؟

(توجيهات للإجابة: تابع التكاليف الكلية = الوسطي x الكمية، ثم اشتقاق التابع. الفقرة 6-3)

السؤال (6-2) الإيرادات الكلية والهامشية.

تُقدر إدارة الشركة أن تابع الطلب على أحد منتجاتها له الشكل الآتي: $P = 500 - \sqrt{Q}$

حيث Q الكمية المباعة، و P سعر البيع. والمطلوب:

1) إيجاد صيغة تابع الإيرادات الكلية Total Revenue.

2) إيجاد صيغة تابع الإيرادات الهامشية Marginal Revenue.

3) ما قيمة الإيراد الوسطي AR والإيراد الهامشي MR للقطعة الواحدة، في حال قرر المصنع إنتاج الكميات الآتية: Q = 100 ، Q = 400 ، Q = 900 ماذا تستنتج؟

(توجيهات للإجابة: تابع الإيرادات الكلية = السعر x الكمية، ثم اشتقاق التابع. الفقرة 6-3)

السؤال (6-3) العلاقة بين الإيرادات الهامشية ومرونة الطلب بالنسبة للسعر.

ليكن لدينا تابع الطلب P = F(Q)، وتابع الإيرادات الكلية TR = P.Q، حيث Q الكمية المباعة، و P سعر البيع.

والمطلوب: إيجاد صيغة العلاقة بين تابع مرونة الطلب بالنسبة للسعر $E = \frac{P}{Q} \text{x} \frac{dQ}{dP}$ والإيرادات الهامشية MR.

(توجيهات للإجابة: اشتقاق تابع الإيرادات الكلية ثم تحويلات على الصيغة لنحصل على العلاقة. الفقرة 6-5)

السؤال (6-4) المعدل الهامش للتعويض التقني MRTS.

ليكن لدينا تابع إنتاج له الشكل $Q = K^2 + 2L^2$ حيث Q الكمية المنتجة، و L حجم العمالة، و k رأس المال.

والمطلوب:

1) إيجاد صيغ التوابع الهامشية $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$ و $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$.

2) برهن صحة الصيغة $MRTS = \frac{2L}{K}$.

3) برهن صحة الصيغة $K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = 2Q$.

(توجيهات للإجابة: اشتقاق جزئي للتابع، ثم تحويلات للحصول على الصيغ. الفقرة 6-6-1)

السؤال (6-5) تعظيم الربح لمنتجين في حالة احتكار.

تُنتج شركة محتكرة لسوق منتجين A, B، حيث أسعار المنتجين مرتبطة بالكميات المنتجة Q_A, Q_B كما يلي:

سعر المنتج الأول A: $P_A = 50 - Q_A$ سعر المنتج الثاني B: $P_B = 95 - 3Q_B$

ولديها تابع التكاليف الكلية للمنتجين معاً من الشكل: $TC = Q_A^2 + 3Q_AQ_B + Q_B^2$

والمطلوب:

1) برهن أن تابع الأرباح الكلية TP للشركة له الشكل:

$$TP = 50Q_A - 2Q_A^2 - 95Q_B + 4Q_B^2 - 3Q_AQ_B$$

2) أوجد المشتقات الجزئية:

$$TP_A = \frac{\partial \text{TP}}{\partial \text{Q}_A} \text{ ، } TP_B = \frac{\partial \text{TP}}{\partial \text{Q}_B} \text{ ، } TP_{AA} = \frac{\partial^2 \text{TP}}{\partial^2 \text{Q}_A} \text{ ، } TP_{BB} = \frac{\partial^2 \text{TP}}{\partial^2 \text{Q}_B} \text{ ، } TP_{AB} = \frac{\partial^2 \text{TP}}{\partial \text{Q}_A \partial \text{Q}_B}$$

3) باستخدام المشتقات الجزئية، أوجد قيم Q_A, Q_B التي تجعل الربح أكبر ما يُمكن (الحل الأمثل).

4) أوجد قيم الأسعار الموافقة لكميات الحل الأمثل المحسوبة أعلاه.

(توجيهات للإجابة: اشتقاقات جزئية للتابع، استخدام مضاريب لاغراغ. الفقرة 6-7)

الفصل السابع: التكاملات الرياضية وتطبيقاتها

عنوان الموضوع: التكاملات الرياضية وتطبيقاتها Integration and its Applications

كلمات مفتاحية:

عملية التكامل Integration، التابع الأصـــلي Integral Function، التكامل غير المحدود Indefinte Integration، التكامل المحدود definte Integration، حدود التكامل Limits of Integration، التوابع الأصلية للتكاليف، الإيرادات، الأرباح Integral Function of Costs, Revenue, Profit، فائض المســتهلك Consumer's Surplus، فائض المُنتِج Producer's Surplus، تراكم تدفقات استثمارية Actualization of Investment Flows.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي عملية التكامل وتطبيقاتها الاقتصادية، إذ لا يمكن الفصل بين عمليتي التفاضــل والتكامل. سـيتم التعريف بمفاهيم التكامل المحدود وغير المحدود، وأهم قواعد عملية التكامل لإيجاد التوابع الأصــلية، كما ســيتم التذكير بأهم التكاملات الشــهيرة والتي نجد تطبيقاتها في العلوم الاقتصـــادية والرياضية، كما سنجد عدداً لابأس به من التطبيقات المباشرة والتي رأينا غالبيتها في الفصل السابق أثناء الحديث عن التفاضل والمشتقات، وفي مقدمة هذه التطبيقات إيجاد التوابع الأصلية للتكاليف والإيرادات والأرباح الهامشية، وكذلك في إيجاد مجموع سلسلة من التدفقات المالية سواء بحساب القيمة الحالية الصافية أو القيمة المستقبلية أو حساب معدل التراكم أو العمر الاقتصادي لاستثمار ما.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يفهم أساسيات التكامل ويربطها بمفاهيم التفاضل.
2. يتمكن من تطبيق قواعد التكامل لإيجاد التوابع الأصلية.
3. يُميز بين التكاملات غير المحدودة والتكاملات المحدودة.
4. يوجد التوابع الأصلية لبعض التوابع الاقتصادية الهامشية (التكاليف، الأرباح، فائض المستهلك والمنتج...).
5. يوجد القيمة الحالية الصافية أو المستقبلية أو غيرها من متغيرات سلسلة من التدفقات المالية.

مخطط الفصل:

7-1 التكاملات غير المحدودة Indefinte Integration.

7-2 التكاملات المحدودة Definte Integration.

7-3 تحليل بعض الظواهر الاقتصادية Analysis of some Economic Functions.

7-4 تراكم سلسلة من التدفقات الاستثمارية Actualization of Investment Flows.

1-7 التكاملات غير المحدودة

التكامل هو العملية العكســـية لعملية التفاضـــل، مثلاً يُمكن تخمين أن تكامل التابع $f(x) = 2x$ هو التابع $F(x) = x^2$، حيث يمكن التأكد أن مشتق x^2 هو $2x$. لكن هذه عملية التخمين هذه تُصبح شبه مستحيلة مع تعقيد شكل التابع، لذلك لا بد من اللجوء إلى قواعد محددة لإيجاد التابع الأصلي.

إذا كان $F'(x) = f(x)$، فإننا ندعو $F(x)$ بأنه التابع الأصلي Integral للتابع $f(x)$، ويُكتب بالشكل:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

مثلاً $F(x) = \int 5x^4dx = x^5$ تبدو وكأنها إضــافة واحد إلى الأس واسـتبدال الأمثال 5 بالقيمة 1، للتأكد من العملية نعيد اشـتقاق $F(x) = x^5$، فنجد أنها تسـاوي $f(x) = 5x^4$. لكن أيضـاً مشـتق التابع $F(x) = x^5 + 3$ هو $f(x) = 5x^4$، وكذلك أي تابع من الشــكل $F(x) = x^5 + c$ حيث c هو ثابت له المشتق $f(x) = 5x^4$، ندعو الثابت c ثابت التكامل:

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

إذاً يُمكن حساب تكامل تابع أسي من الشكل $f(x) = x^n$ بإضـافة 1 إلى الأس n والتقسيم على الأس الناتج n+1، بالشكل:

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{1}{1+n}x^{n+1} + c$$

هذه الصيغة صالحة من أجل أية قيمة لـــ n سواء كانت موجبة أو سالبة، باستثناء $n = -1$ حيث لا يمكن التقسـيم على الصـفر، أي لا تصـلح هذه الصـيغة لإيجاد تكامل $f(x) = \frac{1}{x}$. رأينا سـابقاً أن مشتق التابع اللغاريتمي $F(x) = \ln(x)$ هو $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln{(x)} + c$$

لنر حالياً تكامل التابع $F(x) = \int e^{mx}dx$ بعملية معاكسة للاشتقاق، أي بالتقسيم على أمثال x:

$$F(x) = \int e^{mx}dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$$

مثال (7–1) أمثلة عن تكامل بعض التوابع:

$$\int 1dx = x + c \qquad (1)$$

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (2)$$

$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + c$ (3)

$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + c$ (4)

$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$ (5)

$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3} = \frac{1}{-2}x^{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$ (6)

أهم قواعد التكامل:

(1) تكامل تابع f(x) مضروباً بثابت a يساوي الثابت مضروباً بتكامل التابع:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

(2) تكامل مجموع/طرح تابعين f(x), g(x) يساوي مجموع/طرح التكاملين:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

(3) تكامل مشتق f(x) هو التابع نفسه f(x): $(\int f(x)dx)' = f(x)$

(4) تكامل جداء التابع بمشتقه يساوي نصف مربع التابع: $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)$

(5) تكامل قسمة مشتق التابع على التابع نفسه: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c$

(6) قاعدة التعويض، ليكن x=u(t) فإن $\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big).u'(t)dt$

(7) التكامل بالتجزئة، ليكن u(x), v(x) تابعين قابلين للاشتقاق، فإن: $\int udv = u.v - \int vdu$

بعض التكاملات الشهيرة:

$\int adx = ax + c$ (1)

$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$ (2)

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ حيث n # -1 (3)

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c$ حيث n # -1 (4)

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln|ax+b| + c \quad (6)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + c \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c \quad (8)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + c \quad (9)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad (10)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (11)$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (12)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c \quad (14)$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c \quad (15)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \quad (16)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad (17)$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x} \ln x} dx = \ln|\ln x| + c \quad (19)$$

$$\int x^n e^{mx} dx = \frac{1}{m} x^n e^{mx} - \frac{n}{m}\int x^{n-1} e^{mx} dx \quad (20)$$

مثال (7–2) بعض التكاملات.

(1) تكامل التابع $\int x^2 e^{-x^3} dx$

نلاحظ أن تفاضــل التابع $-x^3$ هو x^2 بغض النظر عن قيمة الثابت 3-، يُمكن أن نخمن صــيغة أولى للتابع $F(x) = e^{-3x}$ حيث تفاضــــل هذا التابع $F'^{(x)} = -3x^2e^{-3x}$ ، نلاحظ أن هذه الصيغة F'(x) هي نفس الصيغة المطلوب إيجاد تكاملها مضربةً بـ 3-، فنقسم F(x) على 3-:

$$\int x^2e^{-x^3}dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$$

(2) $\int \frac{x}{(1+4x^2)^3}dx$

تفاضـل ما داخل القوس $(1+4x^2)$ هو 8x ويشـابه البسط في الكسر، وذلك بغض النظر عن قيم الثوابت حيث نعدلها حسـب الحاجة، لنركز على الجزء $(1+4x^2)^{-3}$ ولنخمن صــيغة أولى للتابع الأصلي بزيادة الأس بمقدار واحد: $F(x) = (1+4x^2)^{-2}$ فيكون تفاضل هذا التابع:

$$F'(x) = (-2) * (8x)(1 + 4x^2)^{-3} = \frac{-16x}{(1 + 4x^2)^{-3}}$$

وهو كما نلاحظ نفس شكل التابع المطلوب إيجاد تكامله مضـروباً بالمقدار 16-، إذاً يكفي أن نقسمه على 16 فنحصل على التكامل:

$$\int \frac{x}{(1 + 4x^2)^3}dx = \frac{-1}{16(1 + 4x^2)^3} + c$$

(3) تكامل التابع $\int \left(3x^2 + 2e^{-x} + \frac{4}{2x^2}\right)dx$

$$\int \left(3x^2 + 2e^{-x} + \frac{4}{2x^2}\right)dx = \int 3x^2dx + \int 2e^{-x}dx + \int \frac{4}{2x^2}dx$$

$$\int 3x^2dx + \int 2e^{-x}dx + \int \frac{4}{2x^2}dx = x^3 +$$

تطبيق (7–1) توابع التكاليف والأرباح الكلية.

ليكن تابع التكاليف الهامشية MC (Marginal Cost) لإحدى الشركات كما يلي:

$$MC = 3x^2 + x + 8$$

وتابع الإيرادات الهامشية MR (Marginal Revenue) له الشكل الآتي:

$$MR = 20 – 7x$$

حيث x حجم الإنتاج. والمطلوب:

(1) إيجاد تابع التكاليف الكلية TC (Total Cos) في حال كانت التكاليف الثابتة تساوي 200.

(2) إيجاد تابع الإيرادات الكلية TR (Total Revenue).

(3) إيجاد تابع الطلب P(x).

(4) إيجاد تابع الأرباح الكلية TP (Total Profit).

الحل:

(1) تابع التكاليف الكلية TC (Total Cost) هو تكامل تابع التكاليف الحدية MC:

$$TC(x) = \int MC(x)\,dx = \int (3x^2 + \mathrm{x} + 8)\,dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8x + c$$

حيث أن التكاليف الثابتة تساوي 200 وهي مستقلة عن الكمية المنتجة، لذلك يُمكن أخذ x=0 فنجد أن ثابت التكامل c يساوي 200، فيصبح تابع التكاليف الكلية له الشكل:

$$TC(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8x + 200$$

(2) تابع الإيرادات الكلية TR (Total Revenue) هو تكامل الإيرادات الحدية MR:

$$TR(x) = \int MR(x)\,dx = \int (20 - 7\mathrm{x})\,dx = 20x - \frac{7}{2}x^2 + c$$

حيث أنه لا تتوفر لدينا معلومات إضافية لحساب ثابت التكامل c، فيمكن القبول أنه عندما لا تبيع الشركة أية قطعة أي x=0، فإن الإيرادات تساوي الصفر TR(x=0)=0ن وبالتالي يُمكن استنتاج قيمة منطقية لثابت التكامل:

$$TR(x = 0) = 20(0) - \frac{7}{2}(0)^2 + c = 0$$

مما يعطي c=0، بالتالي يُصبح الشكل النهائي لتابع الإيرادات:

$$TR(x) = 20x - \frac{7}{2}x^2$$

(3) إيجاد تابع الطلب P(x): نعلم أن الإيرادات تساوي الكمية مضروبة بالسعر TR(x) = x.P(x)، ولدينا صيغة تابع الإيرادات، بالتالي يُصبح تابع الطلب: P(x) = TR(x)/x

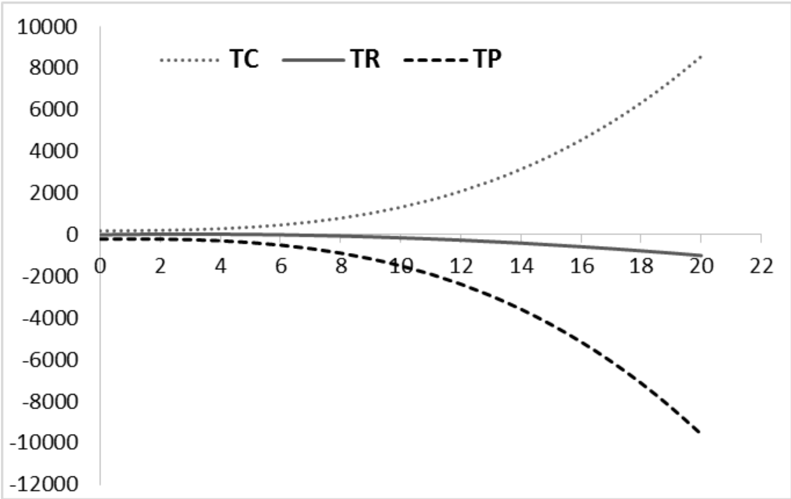
$$P(x) = \frac{TR(x)}{x} = \frac{20x - \frac{7}{2}x^2}{x} = 20 - \frac{7}{2}x$$

(4) تابع الأرباح الكلية TP (Total Profit): نعلم أن الأرباح الكلية تســـاوي الفرق بين الإيرادات الكلية والتكاليف الكلية: TP = TR – TC

$$TP(x) = TR(x) - TC(x) = \left(20x - \frac{7}{2}x^2\right) - \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8x + 200\right)$$

$$TP(x) = -x^3 - 4x^2 + 12x - 200$$

نلاحظ من دراسة الخطوط البيانية لهذه الحالة أن الأرباح دوماً سالبة، أي الشركة في خسارة دائمة:



الشكل (7–1) توابع الأرباح والتكاليف والإيرادات الكلية (تكامل التوابع الهامشية)

تطبيق (7–2) عدد منافذ البيع في سلسلة متاجر للبيع بالتجزئة.

تُقدر إدارة إحدى شركات البيع بالتجزئة أن عدد منافذ البيع يتطور بمعدل شهري على النحو الآتي:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{2}{\sqrt{t}}$$

حيث n عدد المنافذ و t عدد الأشهر. ولدى الشركة في بداية عملها 3 منافذ، فما هو عدد المنافذ الكلية بعد 16 شهر؟

الحل:

عدد المنافذ الكلية n هو تكامل معدل هذا العدد بالنسبة للزمن (الأشهر):

$$n = \int \frac{2}{\sqrt{t}} = 2\int \frac{1}{\sqrt{t}} = 2\int t^{-\frac{1}{2}} = (2)(2)t^{-\frac{1}{2}+1} = 4\sqrt{t} + c$$

حيث أن عدد المنافذ في بدء عمل الشركة أي عندما n=0 يساوي 3، فيمكن حساب ثابت التكامل:

$3 = 4\sqrt{0} + c$ مما يعطي أن ثابت التكامل يساوي c=3.

بالتالي، يكون عدد المنافذ بعد 16 شهر أي n=16 يساوي 19 منفذاً للبيع كما يلي:

$$n = 4\sqrt{16} + 3 = 16 + 3 = 19$$

7-2 التكاملات المحدودة

أحد أهم التطبيقات التي نحتاج للتكاملات هو إيجاد المساحات المحصورة بمجموعة من القيود، وهي من الظواهر الاقتصادية المتكررة باعتبار أن أهم أهداف الاقتصاد هو البحث عن أفضل الخيارات/الحلول ضمن مجموعة من القيود على الموارد الاقتصادية.

لنأخذ مثالاً توضيحياً عن كيفية حساب المساحة المحصورة للتابع f(x) = 5x، بين القيمتين x=4 و x=8، يمكن حساب هذه المساحة في هذه الحالة الخاصة كما يبين الشكل (7-2) كفرق بين مساحتي المثلثين obc و oad، لكن عندما يكون لدينا أشكالاً معقدة تبدو الحسابات على أساس الأشكال الهندسية أكثر تعقيداً إن لم تكن مستحيلة. لذلك نلجأ إلى حسابها باستخدام تكامل التابع f(x)، حيث تحسب كفرق بين قيم التابع الأصلي بين القيمتين المذكورتين x=8 و x=4:

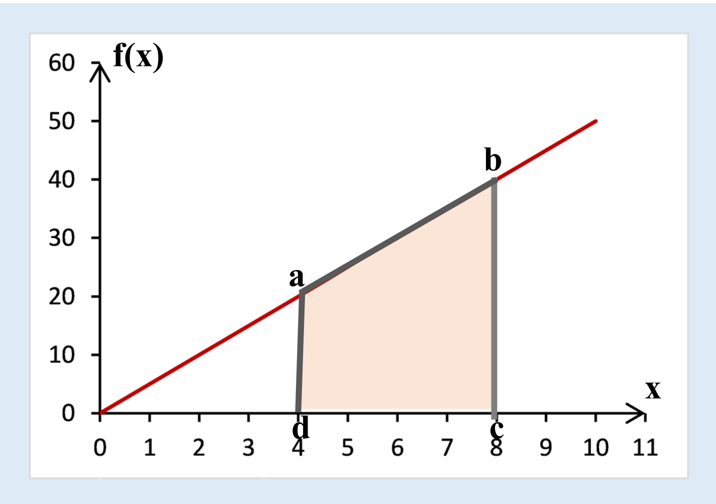
تكامل التابع f(x)=5x: $F(x) = \int 5x\, dx = \frac{5}{2}x^2 + c$

قيمة التابع الأصلي F(x) عند x=8: $F(x=8) = \frac{5}{2}(8)^2 + c = 160 + c$

قيمة التابع الأصلي F(x) عند x=4: $F(x=4) = \frac{5}{2}(4)^2 + c = 40 + c$

فتكون المساحة (abcd) المحصورة بين الخط البياني للتابع والمستقيمين x=4 و x=8 هي فرق القيمتين ونكتبها على النحو الآتي:

$$\int_4^8 f(x)dx = F(x=8) - F(x=4) = (160+c) - (40+c) = 120$$



الشكل (7-2) المساحة المحصورة بين قيمتين

بشكل عام، نكتب التكامل المحدد بين قيمتين x=a و x=b حيث a>b، للتابع f(x) كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ندعو القيمتين a و b بحدود التكامل Limits of Integration.

نلاحظ أنه من غير الضروري البحث عن قيمة ثابت التكامل c كونه سيُحذف خلال عملية الفرق.

مثال (7–3) بعض الأمثلة عن التكاملات المحددة.

(1) قيمة التكامل المحدد: $\int_4^8 5dx$

نوجد صيغة التكامل غير المحدد: $F(x) = \int 5dx = 5x + c$

نوجد الفرق بين قيم التابع F(x) عند نهايتي التكامل:

$$F(8) - F(4) = [5(8) + c] - [5(4) + c] = 40 - 20 = 20$$

(2) قيمة التكامل المحدد: $\int_0^4 (x + 4)dx$

نوجد صيغة التكامل غير المحدد: $F(x) = \int (x + 4)dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

نوجد الفرق بين قيم التابع F(x) عند نهايتي التكامل:

$$F(4) - F(0) = \left[\frac{1}{2}(4)^2 + 4(4) + c\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 + 4(0) + c\right] = 24 - 0 = 24$$

(3) قيمة التكامل المحدد: $\int_0^1 e^x dx$

نوجد صيغة التكامل غير المحدد: $F(x) = \int e^x dx = e^x + c$

نوجد الفرق بين قيم التابع F(x) عند نهايتي التكامل:

$$F(1) - F(0) = [e^1 + c] - [e^0 + c] = e - 1$$

تطبيق (7–3) استخراج النفط.

بدأت إحدى الشركات باستخراج النفط من أحد الحقول المكتشفة حديثاً، بمعدل سنوي من الشكل:

$$\frac{dN}{dt} = 30t^2 - 4t^3$$

حيث N: عدد البراميل بالآلاف المستخرجة سنوياً، t: رقم السنة بدءاً من اللحظة t=0.

والمطلوب: حساب عدد البراميل المستخرجة خلال السنوات الخمسة الأولى.

<u>الحل:</u>

عدد البراميل المستخرجة خلال السنوات الخمسة الأولى هو مجموع البراميل المستخرجة على أساس مستمر خلال السنوات الخمسة، أي هو تكامل التابع أعلاه:

$$N = \int_0^5 \frac{dN}{dt} dt = \int_0^5 (30t^2 - 4t^3) dt$$

تكامل التابع $30t^2 - 4t^3$ هو:

$$N = \int (30t^2 - 4t^3) dt = \frac{30}{3} t^3 - \frac{4}{4} t^4 + c = 10t^3 - t^4 + c$$

فيكون عدد البراميل N خلال السنة الخمسة يساوي 625 ألف برميل:

$$N = [10t^3 - t^4]_0^5 = [10(5)^3 - (5)^4] - [0] = 625$$

3-7 تحليل بعض الظواهر الاقتصادية

1-3-7 فائض المستهلك

ليكن لدينا تابع الطلب $P = f(x)$ حيث x الكمية المستعد المستهلك شرائها بالسعر P.

عند الكمية $x=x_0$ فإن السعر يساوي $P=p_0$.

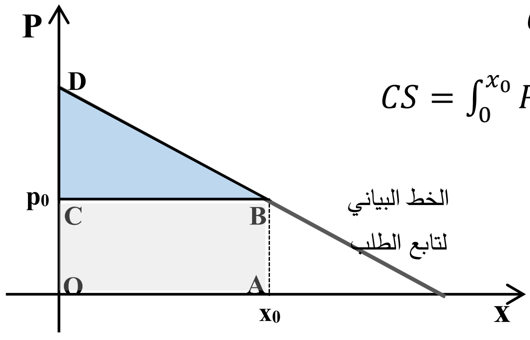
عند هذه القيم، فإن المستهلك يُنفق ما مقداره $(x_0.p_0)$، وهي تساوي مساحة المستطيل OABC.

p_0 هو آخر سعر مستعد المستهلك دفعه من أجل آخر وحدة x_0 يجري شرائها، ومن الصفر حتى هذه الكمية x_0، فإن المستهلك مستعد لدفع سعر أعلى من p_0 حسب تابع الطلب. تُمثل المساحة CBD منفعة المستهلك من دفع السعر المحدد بـــــ p_0، وندعو قيمة هذه المساحة بفائض المستهلك CS (Consumer's Surplus) ، وتُحسب كما يلي:

CS = مساحة CBD = مساحة OABD – مساحة OABC

المساحة OABC ليست إلا الجداء $(x_0\ p_0)$. في حين تمثل المساحة OABD تكامل تابع الطلب P بين القيمتين x=0 و $x=x_0$: $OABD = \int_0^{x_0} P\, dx$

وبالتالي، نجد فائض المستهلك CS: $CS = \int_0^{x_0} P\, dx - x_0 p_0$



الشكل (7-3) تمثيل فائض المستهلك بيانياً

تطبيق (7–4) حساب فائض المستهلك.

ليكن لدينا تابع الطلب على منتج ما من الشكل: $P = 60 – 4x$، حيث x عدد القطع.

ما قيمة فائض المستهلك CS عند الكمية $x_0 = 6$؟

<u>الحل:</u>

السعر عند الكمية $x_0=6$ يساوي: $p_0 = 60 – 4*6 = 36$

تكامل التابع P: $\int (60 - 50x) = 60x - 2x^2 + c$

من صيغة CS، نجد فائض المستهلك عند الكمية x_0 يساوي 72 كما يلي:

$$CS = \int_0^{x_0} P\,dx - x_0 p_0$$

$$CS = \int_0^{6} (60-4x)\,dx - 6\text{x}36 = [60\text{x}6 - 2(6)^2] - [60\text{x}0 - 2(0)^2] - 216 = 72$$

7–3–2 فائض المُنتِج

ليكن لدينا تابع العرض $P = f(x)$ حيث x تمثل الكمية المستعد بيعها المُنتِج بالسعر P.

عند الكمية $x = x_0$ فإن السعر يساوي $P = p_0$.

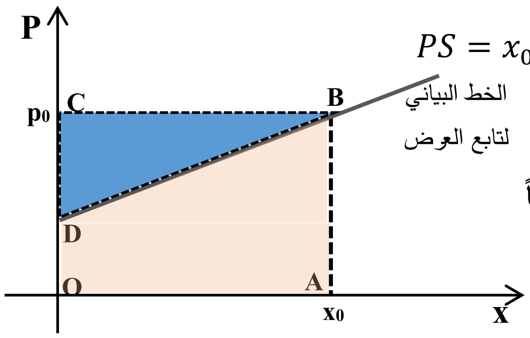
عند هذه القيم، فإن المُنتج يحقق إيراداً مقداره $(x_0\, p_0)$، وهي تساوي مساحة المستطيل OABC.

p_0 هو السعر مستعد المنتج قبوله من أجل آخر وحدة x_0 يجري بيعها، ومن الصفر حتى هذه الكمية x_0، فإن المنتج مستعد لقبول سعر أقل من p_0 حسب تابع العرض. تُمثل المساحة CBD منفعة المنتج من البيع بالسعر المحدد p_0، وندعو قيمة هذه المساحة بفائض المُنتِج PS (Producer's Surplus) ، وتُحسب كما يلي:

PS = مساحة CBD = مساحة OABC – مساحة OABD

المساحة OABC ليست إلا الجداء $(x_0\, p_0)$. في حين تمثل المساحة OABD تكامل تابع العرض P بين القيمتين $x=0$ و $x=x_0$: $OABD = \int_0^{x_0} P\,dx$

وبالتالي، نجد فائض المُنتِج PS: $PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} P\,dx$



الشكل (7–4) تمثيل فائض المُنتِج بيانياً

تطبيق (7–5) حساب فائض المُنتِج.

ليكن لدينا تابع العرض على منتج ما من الشكل: $P = 40 + x^2$، حيث x عدد القطع.

ما قيمة فائض المنتج PS عند الكمية $x_0 = 6$؟

<u>الحل:</u>

السعر عند الكمية $x_0=6$ يساوي: $p_0 = 40 + 6^2 = 76$

تكامل التابع P: $\int(40 + x^2) = 40x + \frac{1}{3}x^3 + c$

من صيغة PS، نجد فائض المنتج عند الكمية x_0 يساوي 144 كما يلي:

$$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} P\,dx$$

$$PS = 6\text{x}76 - \int_0^6 (40 + x^2)dx = 456 - \left[\left(40\text{x}6 + \frac{1}{3}(6)^3\right) - \left(40\text{x}0 + \frac{1}{3}(0)^3\right)\right]$$

$$PS = 456 - 312 = 144$$

تطبيق (7–6) حساب فائض المستهلك والمُنتِج.

ليكن لدينا تابعي العرض والطلب لأحد المنتجات في سوق حيث المنافسة تامة كما يلي:

تابع الطلب: $P_d = 52 - Q_d$ تابع العرض: $P_s = 10 + 2Q_s$

والمطلوب: (1) حساب فائض المستهلك CS.

(2) حساب فائض المنتج PS.

(3) بين على نفس الشكل فائض المستهلك وفائض المُنتِج.

<u>الحل:</u>

في سوق المنافسة التامة، فإن السعر يتحدد عند التوازن حيث يتساوى سعري وكميتي العرض مع الطلب، أي:

$$Q = Q_s = Q_d \quad \text{و} \quad P = P_s = P_d$$

$$P_s = P_d \Rightarrow 10 + 2Q = 52 - Q$$

ومنه نجد سعر وكمية التوازن: $Q_0 = 14$ و $P_0 = 38$.

(1) حساب فائض المستهلك CS:

تكامل تابع الطلب: $\int(52 - Q)dQ = 52Q - \frac{1}{2}Q^2 + c$

من صيغة CS، نجد فائض المستهلك عند الكمية Q_0 يساوي 98 كما يلي:

$$CS = \int_0^{Q_0} P\,dQ - Q_0P_0$$

$$CS = \int_0^{14} (52 - Q)dQ - 14\text{x}38$$

$$= \left[\left(52\text{x}14 - \frac{1}{2}(14)^2\right) - \left(52\text{x}0 - \frac{1}{2}(0)^2\right)\right] - 532$$

$$= 630 - 532 = 98$$

(2) حساب فائض المنتج PS:

تكامل تابع العرض: $\int(10 + 2Q) = 10Q + Q^2 + c$

من صيغة PS، نجد فائض المنتج عند الكمية Q_0 يساوي 196 كما يلي:

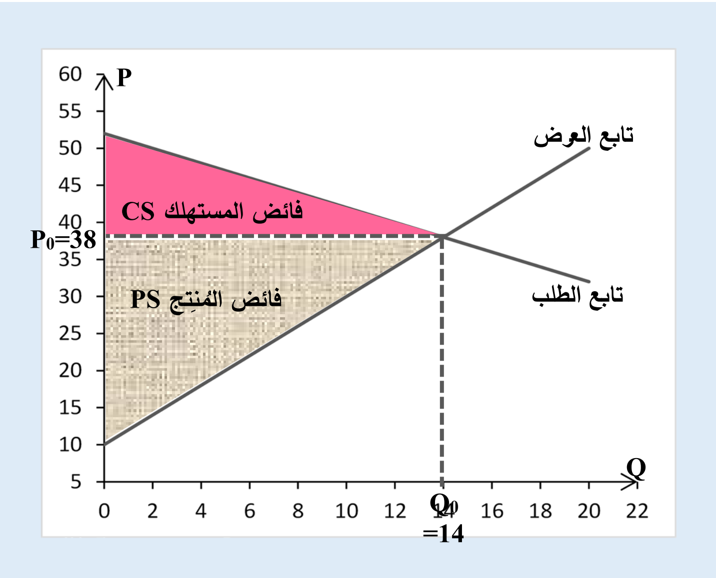
$$PS = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} P\,dQ$$

$$PS = 14\text{x}38 - \int_0^{14} (10 + 2Q)dQ$$

$$= 532 - [(10\text{x}14 + (14)^2) - (10\text{x}0 + (0)^2)]$$

$$PS = 532 - 336 = 196$$

(3) فائض المستهلك وفائض المُنتج بيانياً:



الشكل (7–5) تمثيل فائضي المستهلك والمُنتِج بيانياً

4–7 تراكم سلسلة من التدفقات الاستثمارية

يُعرف الاسـتثمار الصـافي Net Investment (I) بأنه معدل التغير في رأس المال K خلال الزمن كما يلي: $I(t) = \frac{dK}{dt}$.

يمثل التابع I(t) التدفق المالي مقاس بوحدة نقدية محددة (دولار، ليرة، ذهب، ...)، والتابع K(t) يمثل تراكم هذا التدفق في اللحظة t مقاس أيضـاً بنفس الوحدة النقدية. بالتالي عندما نعلم صـيغة التابع K(t)، يُمكن إيجاد الاستثمار الصـافي I(t) بتفاضل التابع K(t)، والعكس صحيح إذا علمنا صيغة الاستثمار الصـافي I(t)، يمكن إيجاد رأس المال K(t) بتكامل التابع I(t)، وبشكل خاص إذا أردنا معرفة تراكم رأس المال بين فترتين t_1 و t_2، نأخذ التكامل المحدود للتابع I(t) بين الفترتين:

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

مثال (7–4) لدينا تابع الاستثمار الصافي في الفترة t الآتي: I(t) = 400 t

فإن تراكم رأس المال بين نهاية السنة الأولى $t_1=1$ و نهاية السنة الرابعة $t_2 = 4$ يكون:

$$\int_{1}^{4} (400\,t)dt = 400\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^4 = \frac{400}{2}(4)^2 - \frac{400}{2}(1)^2 = 3200 - 200 = 3000$$

وإذا أردنا أن نعرف متى يصل التراكم إلى مبلغ 5000 وحدة نقدية، نفرض $t_1=1$ و t_2 مجهولة:

$$\int_{1}^{t_2} (400\,t)dt = 400\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^{t_2} = \frac{400}{2}(t_2)^2 - \frac{400}{2}(1)^2 = 200t_2^2 - 200 = 5000$$

ومنه $2t_2^2 - 2 = 50$ أو $t_2^2 = 24$

بالتالي نجد قيمة t_2 تساوي تقريباً أربع سنوات و328 يوم: $t_2 = \sqrt{24} \approx 4.899$

القيمة الحالية الصافية Net Present Value

رأينا سـابقاً بعض التطبيقات عن كيفية حساب القيمة الحالية الصـافية لمجموعة من التدفقات المالية، وتم الحسـاب على أسـاس مجموع هذه التدفقات في اللحظة الحالية على شكل متتالية هندسـية (الفقرة ...) أساسها $\frac{1}{1+t}$ وحدّها الأول يساوي A كما يلي:

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{A}{(1+t)^i} = A\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+t)^i} = \mathrm{A}\left(\frac{\left(\frac{1}{1+\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{n}} - 1}{\left(\frac{1}{(1+\mathrm{t})}\right) - 1}\right) = \mathrm{A}\left(\frac{\left(\frac{1}{1+\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{n}} - 1}{\left(\frac{-\mathrm{t}}{(1+\mathrm{t})}\right)}\right)$$

لنرَ حالياً كيفية حساب القيمة الحالية/المستقبلية في حال كان الزمن مستمراً.

ليكن لدينا وحدة نقدية واحدة تُستثمر لمدة سنة واحدة، بمعدل تراكم/فائدة سنوية r يساوي 100%، فإن القيمة الحالية المستقبلية لهذا المبلغ F في نهاية السنة تُحسب بالشكل الآتي:

حسابه دفعة واحدة لمدة سنة: $A_1 = (1+r) = (1+1) = 2$

لنفرض حالياً، أنه يُحسب على أساس تراكم/فوائد شهرية، حيث يجري تقريب معدل الفائدة الشهري r_m بتقسيم معدل الفائدة السنوي على 12 شهراً أي $r_m = \frac{r}{12}$، فإن المبلغ في نهاية السنة يُصبح:

$$A_{12} = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130353$$

وإذا تم حساب القيمة المستقبلية على أساس تراكم/فوائد يومية، يُصبح:

$$A_{365} = \left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71445677$$

وإذا تم حسابه على أساس تراكم/فوائد ساعية، يُصبح:

$$A_{8760} = \left(1+\frac{r}{8760}\right)^{8760} = \left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2.7181267$$

عندما تكون n كبيرة جداً أي عندما تذهب إلى اللانهاية، تكون القيمة المستقبلية نهاية المتتالية:

$$A_{Fut} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

أي أن استثمار مبلغ P لمدة سنة بمعدل فائدة 100% وبشكل مستمر يساوي: $A = P.e$

لنفترض حالياً أن معدل الفائدة خلال طيلة المدة t يســـــاوي r وليس واحد، وتم تجزئة المدة الزمنية t إلى n فترة، ويجري حســـاب معدل الفائدة للفترة الواحدة بتقســيم معدل الفائدة r على عدد أجزاء المدة الزمنية n، فإن القيمة المستقبلية تُحسب بالشكل:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n.t} = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\left(\frac{n}{r}\right)r.t} = P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\left(\frac{n}{r}\right)}\right]^{r.t} = P\, e^{r.t}$$

أو يُمكن حساب المبلغ الحالي P للمبلغ المستقبلي A بالشكل الآتي:

$$P = A\, e^{-r.t}$$

إذا كان لدينا سلسلة من التدفقات السنوية المتساوية حيث الدفعة السنوية ثابتة وتساوي A، ولمدة n سنة، بمعدل تراكم سنوي r%، فإن القيمة الحالية الصافية لهذه التدفقات في اللحظة الحالية يُحسب كتكامل للقيمة السابقة P:

$$NPV = \int_0^n Ae^{-r.t}\,dt = A\int_0^n e^{-r.t}\,dt = \frac{-A}{r}e^{-r.t}$$

مثال (7-5) القيمة الحالية الصافية.

لدينا استثمار حيث تدفقه السنوي يساوي 100 $، لمدة 5 سنوات ومعدل الفائدة يساوي 12% سنوياً، فما القيمة الحالية الصافية لهذا الاستثمار؟

A=100، n=5، r=0.12، نطبق الصيغة أعلاه، فنجد NPV = 376:

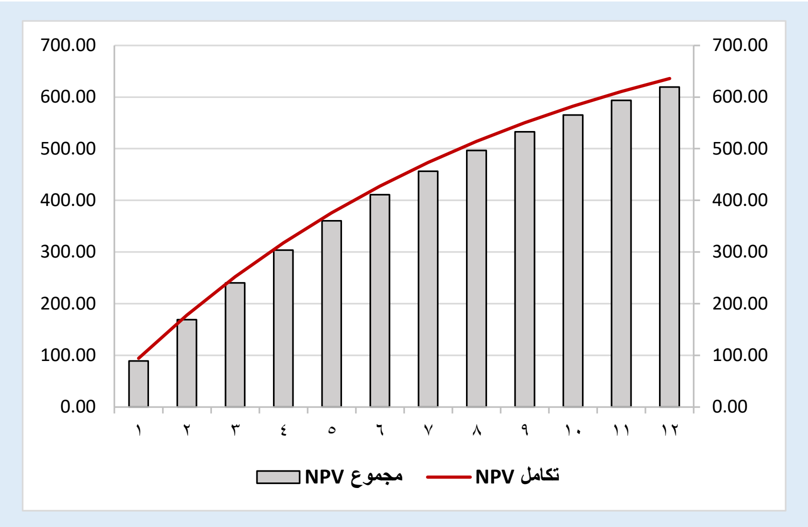
$$NPV1 = \int_0^5 100e^{-(0.12)t}\,dt = 100\int_0^5 e^{-(0.12)t}\,dt = \left[\frac{-100}{0.12}e^{-(0.12).t}\right]_0^5$$

$$= \frac{-100}{0.12}\left(e^{-(0.12).5} - e^{-(0.12).0}\right) = \frac{-100}{0.12}(0.5488 - 1) = 376$$

في حين لو تم حساب القيمة الحالية الصافية على أساس مجموع القيمة الحالية الصافية للسنوات الخمس، لكانت النتيجة مختلفة حيث نجد NPV = 360.5:

$$NPV2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+t)^i} = \frac{100}{(1.12)^1} + \frac{100}{(1.12)^2}\frac{100}{(1.12)^3}\frac{100}{(1.12)^4}\frac{100}{(1.12)^5} = 360.5$$

يبدو الفرق بين القيمتين NPV1 و NPV2 مهماً (376-360.5=15.5)، وهو نتيجة طبيعية للفرق بين اعتبار الزمن مستمراً أو متقطعاً، إذا كان متقطعاً فهناك بعض الزمن بين كل فترتين غير مأخوذ بالاعتبار، وبالتالي بعض الفوائد غير مأخوذة بالاعتبار أيضاً.



الشكل (7-6) القيمة الحالية الصافية على أساس متقطع (مجموع) أو مستمر (تكامل)

تطبيق (7−7) تقييم استثمارات.

يُمكنك وضع مبلغ $ P=1000 في المصرف لمدة سنة، والحصول على $ A=100 شهرياً، وبمعدل فائدة سنوية $r_a=12\%$. والمطلوب:

1. حساب القيمة الحالية الصافية على أساس تراكم شهري، بفرض معدل الفائدة الشهري r_m يساوي تقريباً معدل الفائدة السنوي r_a مقسوماً على 12 شهر، ولتكن NPV1.
2. حساب القيمة الحالية الصافية على أساس تراكم شهري، بفرض معدل الفائدة السنوي r_a هو تراكم لمعدل الفائدة الشهري r_m، ولتكن NPV2.
3. حساب القيمة الحالية الصافية على أساس تراكم يومي، بفرض معدل الفائدة اليومي r_d يساوي معدل الفائدة السنوي r_a مقسوماً على 365 يوم، وبفرض التدفق اليومي يساوي التدفق الشهري مقسوماً على 30 يوم، ولتكن NPV3.
4. حساب القيمة الحالية الصافية استناداً للدفعات الشهرية باعتبار كامل السنة مستمرة زمنياً، ولتكن NPV4.
5. حساب معدل المردود الداخلي IRR الشهري الذي يجعل القيمة الحالية الصافية تساوي الصفر، على أساس تراكم شهري.

الحل:

(1) القيمة الحالية الصافية على أساس معدل فائدة شهري تقريبي:

معدل الفائدة الشهري $r_m = \frac{r_a}{12} = \frac{12\%}{12} = 1\%$

$$NPV1 = -1000 + \sum_{i=1}^{12} \frac{100}{(1+0.01)^i} = 125.5$$

(2) القيمة الحالية الصافية على أساس معدل فائدة شهري تراكمي:

معدل الفائدة الشهري $(1+0.12) = (1+r_m)^{12} \;\Rightarrow\; r_m = (1+0.12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.949\%$

$$NPV2 = -1000 + \sum_{i=1}^{12} \frac{100}{(1+0.00949)^i} = 129.2$$

(3) القيمة الحالية الصافية على أساس معدل فائدة يومي تراكمي:

معـدل الفـائـدة اليومي $= (1+0.12)^{\frac{1}{365}} - 1 = r_d \Rightarrow (1+0.12) = (1+r_d)^{365}$
0.0311%

$$NPV3 = -1000 + \sum_{i=1}^{365} \frac{\frac{100}{30}}{(1+0.000311)^i}$$

$$NPV3 = -1000 + \frac{100}{30}\left(\frac{\left(\frac{1}{1+0.000311}\right)^{365} - 1}{\left(\frac{-0.000311}{(1+0.000311)}\right)}\right) = 150.4$$

(4) القيمة الحالية الصافية استناداً للدفعات الشهرية باعتبار كامل السنة مستمرة زمنياً:

$$NPV4 = -1000 + \int_0^{12} 100e^{-(0.01)t}\,dt = -1000 + \left[\frac{-100}{0.01}e^{-(0.01).t}\right]_0^{12} = 130.8$$

في حال حساب التراكم المستمر على أساس يومي، نجد NPV5=197.8

$$NPV5 = -1000 + \int_0^{365} 100e^{-(0.000311)t}\,dt =$$

$$NPV5 = -1000 + \left[\frac{-100}{0.000311}e^{-(0.000311).t}\right]_0^{12} = 197.8$$

(5) معدل المردود الداخلي IRR الشهري:

هو معدل الفائدة/التراكم الذي يجعل القيمة الحالية الصـافية تسـاوي الصـفر على أسـاس تراكم شهري:

$$NPV = -1000 + \sum_{i=1}^{12} \frac{100}{(1+r)^i} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة 12، يمكن الحصـول على قيم r بالتجريب، فنحصـل على قيمة معدل التراكم الشهري أي معدل المردود الداخلي الشهري يساوي r=2.923%.

أسئلة واختبارات الفصل السابع: التكاملات وتطبيقاتها

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	عملية التكامل هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل.	✓	
2	تكامل التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ هو F(x) = Ln(x) + c.	✓	
3	تكامل التابع $f(x) = 2$ هو F(x) = 2 + c.		✓
4	تكامل التابع f(x) = x هو $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$.	✓	
5	تكامل مجموع تابعين يساوي مجموع تكاملي التابعين.	✓	
6	ليكن u(x), v(x) تابعين قابلين للاشتقاق، فإن: $\int udv = u.v - \int vdu$.	✓	
7	تكامل التابع $f(x) = a$ هو F(x) = a + c.		✓
8	الصيغة الآتية $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ صحيحة أم خاطئة؟	✓	
9	الصيغة الآتية $\int \cos x\, dx = -\sin x + c$ صحيحة أم خاطئة؟		✓
10	تكامل تابع التكاليف الهامشية لمنتج ما هو تابع التكاليف الكلية لنفس المنتج.	✓	
11	تكامل تابع الأرباح الهامشية لمنتج ما هو تابع الإيرادات الكلية لنفس المنتج.		✓
12	التكامل المحدود لتابع f(x) بين قيمتين a, b هو الفرق بين قيمتي التابع الأصلي F(x) عند هاتين القيمتين a, b.	✓	
13	يمكن إيجاد رأس المال K(t) بتكامل تابع الاستثمار الصافي I(t).	✓	
14	المبلغ الحالي P لمبلغ مستقبلي A بعد t سنة بمعدل تراكم سنوي r هو $P = A\, e^{-r.t}$.	✓	
15	تكامل التابع $f(x) = x^4 + 5$ هو $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x + c$.		✓
16	تكامل التابع $f(x) = \sqrt{x}$ هو $F(x) = \frac{1}{1.5}x^{1.5} + c$.	✓	

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- التابع الأصلي للتكامل $F(x) = \int \frac{1}{x^2}dx$ هو:

أ) $F(x) = \frac{1}{x} + x$

ب) $F(x) = -\frac{1}{x} + c$

ج) $F(x) = -x^2 + c$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- التابع الأصلي للتكامل $F(x) = \int e^{2x}dx$ هو:

أ) $F(x) = \frac{1}{x}e^x$

ب) $F(x) = e^x + c$

ج) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- ليكن تابع الإيرادات الهامشية MR = 10 – Q فإن تابع الإيرادات الكلية TR يساوي:

أ) $TR = 10Q + c$　　　　ب) $TR = 10Q - \frac{1}{2}Q^2$

ج) $TR = -Q^2 + c$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- ليكن لدينا تابع التكاليف الهامشية $MC = aQ + b$ ولتكن التكاليف الثابتة تساوي الصفر، فإن تابع التكاليف الكلية TC يساوي:

أ) $TC = aQ + c$　　　　ب) $TC = aQ^2 + bQ^2$

ج) $TC = \frac{a}{2}Q^2 + bQ$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- قيمة التكامل المحدود $\int_1^2 3x^2 dx$ تساوي:

أ) سبعة 7　　　　ب) الواحد 1

ج) ثمانية 8　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- قيمة التكامل المحدود $\int_0^2 (x+2)\, dx$ تساوي:

أ) صفر 0　　　　ب) اثنان 2

ج) ستة 6　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- يُحسب فائض المستهلك CS لتابع الطلب f(Q) من أجل كمية Q_0 كما يلي:

أ) $CS = F(Q_0) - F(0)$　　　　ب) $CS = Q_0F(Q_0)$

ج) $CS = \int_0^{Q_0} f(Q)\, dQ - Q_0P_0$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- يُعرف الاستثمار الصافي I(t) كمعدل التغير في رأس المال K خلال فترة من الزمن مقدارها t كما يلي:

أ) $I = \frac{dt}{dK}$　　　　ب) $I = \frac{dK}{dt}$

ج) $I = K(t) - K(0)$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- القيمة الحالية الصافية NPV لسلسلة مستمرة من الدفعات الثابتة A ولمدة n سنة، بمعدل تراكم سنوي r تساوي:

أ) $NPV = \frac{1}{r}e^{r.t}$　　　　ب) $NPV = \frac{-A}{r}e^{-r.t}$

ج) $NPV = NPV(t) - NPV(0)$　　　　ب) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- قيمة التكامل المحدود $\int_{-2}^{+2} x^3\, dx$ تساوي:

أ) صفر 0　　　　ب) أربعة 4

ج) ثمانية 8　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

السؤال (7-1) التكاليف الكلية والهامشية.

ليكن تابع التكاليف الهامشية Marginal Cost لأحد منتجات الشركة له الشكل: $MC = 2$. والمطلوب:

1) بفرض أن التكاليف الثابتة تساوي 500 $، ما صيغة تابع التكاليف الكلية TC بدلالة الكمية Q.

2) إيجاد قيمة التكاليف الكلية إذا أنتجت الشركة 100 قطعة.

(توجيهات للإجابة: إيجاد صيغة التكاليف بالتكامل للتكاليف الهامشية. تطبيق 7-1)

السؤال (7-2) الأرباح الكلية والهامشية.

ليكن لدينا توابع الإيرادات والتكاليف الهامشية لأحد منتجات الشركة كما يلي:

الإيرادات الهامشية: $MR = 240 - 0.6Q^2$ والتكاليف الهامشية: $MC = 150 + 0.3Q^2$

والمطلوب:

1) إيجاد صيغة تابع الإيرادات الكلية TR بدلالة الكمية Q؟

2) إيجاد صيغة تابع التكاليف الكلية TC بدلالة الكمية Q بفرض أن التكاليف الثابتة تساوي 50 $؟

3) إيجاد صيغة تابع الأرباح الكلية إذا باعت الشركة 100 قطعة.

(توجيهات للإجابة: بتكامل التكاليف والإيرادات الهامشية، الربح = الفرق بينهما. تطبيق 7-1)

السؤال (7-3) فائضي المستهلك المُنتج Producer's & Consumer's Surplus.

لدينا تابعي العرض والطلب لأحد المنتجات في حالة المنافسة التامة Pure Competition كما يلي:

تابع العرض: $P = f(Q_S) = 10 + 2Q_S$ تابع الطلب: $P = f(Q_D) = 50 - 2Q_D$.

والمطلوب:

1) إيجاد التوابع الأصلية $F(Q_S) = \int f(Q_S)dQ_S$ و $F(Q_D) = \int f(Q_D)dQ_D$

2) إيجاد فائض المستهلك، وفائض المُنتج عند التوازن.

(توجيهات للإجابة: تطبيق مباشر 7-3-1، 7-3-2)

السؤال (7-4) حساب تراكم تدفق مالي.

ليكن لدينا تابع الاستثمار الصافي $I(t) = 600\sqrt{t}$. والمطلوب:

1) إيجاد التابع الأصلي $K(t) = \int I(t)dt$.

2) إيجاد قيمة التراكم الرأسمالي من نهاية السنة الأولى وحتى نهاية السنة الرابعة: $\int_1^4 I(t)dt$.

(توجيهات للإجابة: تطبيق مباشر 7-4)

الفصل الثامن: المصفوفات وجداول المدخلات والمخرجات

عنوان الموضـــوع: المصـــفوفات وجداول المدخلات والمخرجات Matrices & Inputs-Outputs Tables

كلمات مفتاحية:

المصـفوفة Matrix، سـطر شـعاع Row Vector، عمود شـعاع Column Vector، رتبة مصـفوفة Matrix Order، منقول مصـــفوفة Transposition، ضـــرب مصـــفوفات Matrix Multiplication، محدد مصـــفوفة Matrix Determinant، المرافق Cofactor، مقلوب مصـــفوفة Matrix Inverse، قاعدة كرامر Cramer's Rule، جداول المدخلات والمخرجات Inputs Outputs Tables.

ملخص الفصل:

يتناول هذا الفصل المفاهيم الأساسية للمصفوفات والعمليات عليها التي تخدم مباشرة التطبيقات الاقتصـادية، سيتم التعريف بمفهوم المصـفوفة بشـكل عام وتمييزها حسـب رتبتها، ثم إجراء العمليات الرياضـية الأسـاسـية عليها من جمع وطرح وضرب، ثم سيتم إدخال مفهوم محدد مصفوفة ومرافقاتها لاستخدامها في قلب المصفوفات لكي نتمكن من إنجاز عمليات القسـمة، وأخيراً كيفية اسـتخدام المصـفوفات للتعبير عن بعض الظواهر الاقتصـادية على شـكل جملة معادلات خطية واستخدام قاعدة كرامر في حلها.

المخرجات والأهداف التعليمية:

1. يفهم أساسيات المصفوفات (سطر شعاع، عمود شعاع، مصفوفة من رتب أعلى).
2. يُجري العمليات الرياضية على المصفوفات (جمع، طرح، ضرب، منقول).
3. يحسب محدد ومقلوب مصفوفة.
4. يُطبق قواعد المصفوفات لحل جملة معادلات خطية.
5. يُطبق قاعدة كرامر لحل جملة معادلات خطية.

مخطط الفصل:

8-1 المفاهيم والعمليات الأساسية على المصفوفات

8-1-1 مفهوم وترميز المصفوفة

المصـــفوفة Matrix هي طريقة بســـيطة لتمثيل البيانات على شـــكل جداول، لذلك يدعوها البعض جدول، تمثل المصـفوفة على شكل أعمدة Columns وأسطر Rows، وكل تقاطع بين عمود وسطر يُدعى خلية أو عنصر.

إذا كان عدد الأعمدة n وعدد الأسـطر m، ندعو المصـفوفة من الدرجة/الرتبة[10] Order: $m\ x\ n$، لاحظ عدد الأســـطر هو الرقم الأول وعدد الأعمدة هو الرقم الثاني (قراءة الجداء من اليســـار إلى اليمين).

نرمز للمصفوفة عادةً بأحرف كبيرة ... ,A, B, X, Y، في حين نرمز لعناصرها بأحرف صغيرة، مثلاً العنصر a_{ij} يعني العنصر الموجود في السطر رقم i والعمود رقم j أو في الخلية ij، وتمثل المصفوفة A من المرتبة $m\ x\ n$ بالشكل الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & \cdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & a_{in} \\ & & & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يمكن للمصفوفة أن تكون سطر واحد m=1، ندعوها سطر شعاع Row Vector، أو من عمود واحد n=1 ندعوها عمود شعاع Column Vector، وإذا كانت m=1 و n=1 فنحصـل على مصـفوفة من عنصر واحد فقط.

1. ندعو مصـفوفة M بأنها مصـفوفة صـفرية إذا كانت جميع عناصـرها تساوي الصـفر، وتلعب دوراً مشابهاً للدور الذي يلعبه الصفر في الحساب التقليدي:

$$M = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \ \forall\ i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n$$

2. نقول عن مصـــــفوفتين A, B أنهما متســـاويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الرتبة، وجميع العناصر المتقابلة متساوية $a_{ij} = b_{ij}$، مهما يكن i, j.

3. نقول عن مصـفوفة أنها مربعة Square Matrix من الرتبة $n_x n$ (أو اختصـاراً من الرتبة n) إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها. ونقول عن مصـفوفة مربعة أنها متناظرة بالنسبة للقطر إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ مهما يكن $i,j = 1, 2, \ldots, n$.

[10]. يدعوها البعض حجم المصفوفة، سنستخدم مصطلح رتبة المصفوفة في هذه الأملية.

4. نقول عن مصفوفة أنها قطرية Diagonal Matrix إذا كان جميع عناصرها تساوي الصفر باستثناء عناصر القطر. وإذا كانت جميع قيم القطر تساوي الواحد ندعوها بالمصفوفة الواحدية Unit Matrix.

5. نقول عن مصفوفتين A, B من نفس الرتبة أنهما متساويتين إذا وفقط إذا جميع العناصر المتقابلة متساوية: $a_{ij} = b_{ij}$، مهما يكن i, j.

6. نعرف أثر Trace مصفوفة مربعة A من الرتبة nxn بأنه مجموع عناصر القطر الرئيسي $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

مثال (8−1) المبيعات الشهرية لمدة 3 أشهر لثلاثة منتجات يُمكن أن تكتب على شكل مصفوفة مربعة، حيث الأعمدة تمثل الأشهر m=3 والأسطر تمثل المنتج n=3 كما يلي:

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 27 \\ 8 & 18 & 23 \\ 7 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

وتقرأ مبيعات نفس الشهر لجميع المنتجات في نفس العمود، في حين تُقرأ المبيعات لمنتج واحد لجميع الأسطر في نفس السطر.

كما كنا ننجز العميات الحسابية الأساسية على المتغيرات المنفردة، يُمكن إنجاز عمليات مشابهة على الصمفوفات كما سنرى.

يُمكن باستخدام المصفوفات التعبير عن معادلات أو متراجحات بعدة متغيرات، ثم استخدام العمليات وخصائص المصفوفات للتعامل معها.

مثال (8−2) التعبير عن معادلات/متراجحات بعدة متغيرات بشكل مصفوفات.

ليكن لدينا المعادلات الآتية:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 28 \qquad [1]$$
$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \qquad [2]$$
$$7x_1 + \quad + x_3 = 14 \qquad [3]$$

نُمثل المجاهيل على شكل شعاع عمود $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

كما نُمثل الطرف الثاني على شكل شعاع عمود $B = \begin{bmatrix} 28 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}$

وأخيراً، نُمثل أمثال/معاملات المجاهيل بشــكل مصـــفوفة 3x3 حيث الســطر الأول يحوي أمثال المجاهيل في المعادلة الأولى، الســطر الثاني يحوي أمثال المجاهيل في المعادلة الثانية، والســطر الثالث يحوي أمثال المجاهيل في المعادلة الثالثة، وبنفس الترتيب:

مصفوفة الأمثال A: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

وبالتالي يُمكن كتابة جملة المعادلات الثلاثة أعلاه على شكل مصفوفات كما يلي: $A.X = B$.

يُمكن للقارئ التحقق من أن الجداء $A.X$ أنه يساوي B.

وسنستفيد من هذه الخاصية لاحقاً لحل جملة معادلات خطية بطريقة المصفوفات.

حتى لو كانت المعادلات أعلاه على شــكل متراجحات جميعها من نفس الاتجاه، يُمكن كتابتها على شكل مصفوفات، والاستفادة منها لحل جملة متراجحات خطية:

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28$ [1']

$-2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20$ [2']

$7x_1 + \quad + x_3 \leq 14$ [3']

يُمكن كتابة جملة المتراجحات الثلاثة أعلاه على شكل مصفوفات كما يلي: $A.X \leq B$.

8-1-2 منقول مصفوفة

يُقصــد بمنقول Transposition المصــفوفة A المصــفوفة الناتجة عن التبديل بين مواضــع الأعمدة ومواضع الأسطر ونرمز لها بالشكل A^T. حيث أول سطر يُصبح أول عمود، ثاني سطر يُصبح ثاني عمود، ... وهكذا.

إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m \, x \, n$، فإن منقولها A^T من الرتبة $n \, x \, m$.

بعض خصائص المنقول:

1. منقول جمع مصفوفتين هو جمع المنقولين: $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. منقول منقول مصفوفة هو المصفوفة نفسها: $(A^T)^T = A$.
3. منقول مصفوفة مضروبة بعدد سلمي k هو منقول المصفوفة مضرباً بالعدد:

   $(k.A)^T = k.A^T$
4. منقول جداء مصفوفتين A.B (شرط أن يكون مُعرّف) هو الجداء: $(A.B)^T = B^T.A^T$.

5. نقول عن مصفوفة A أنها متعامدة Orthogonal إذا كان $A.A^T = \mathbf{I}$.

مثال (8−3). أمثلة عن منقول المصفوفة s في المثال أعلاه (8−1) هو:

$$S^T = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 15 & 18 & 20 \\ 27 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

منقول المصفوفة $A = |5 \quad 8 \quad 14|$ هو $A^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$

منقول المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ هو $B^T = |6 \quad 9 \quad 10|$

8−1−3 جمع وطرح مصفوفات

يُمكن جمع/طرح مصفوفات من نفس الدرجة $m\ x\ n$ فقط، وذلك بجمع/طرح العناصر من نفس رقم الخلية ij في كل من المصفوفات المعنية.

مثال (8−4). أمثلة عن جمع/طرح مصفوفات.

أ) ليكن لدينا المصفوفتين: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 9 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

حاصل مجموع المصفوتين: A + B = C

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 9 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -1 & 11 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

حاصل طرح المصفوتين: A - B = D

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 9 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -13 & 7 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

ب) لدينا المصفوفتين: $A = |3 \quad 8 \quad 9|$ $\quad B = |-5 \quad 7 \quad 7|$

حاصل مجموع المصفوتين: A + B = C

$$C = A + B = |3 \quad 8 \quad 9| + |-5 \quad 7 \quad 7| = |-2 \quad 15 \quad 16|$$

حاصل طرح المصفوتين: A - B = D

$$D = A - B = |3 \quad 8 \quad 9| - |-5 \quad 7 \quad 7| = |8 \quad 1 \quad 2|$$

بعض خصائص عملية جمع مصفوفات:

1. عملية جمع المصفوفات هي تبديلية: A + B = B + A.
2. حاصل طرح المصفوفة A من نفسها هو المصفوفة الصفرية: A – A = 0

3. حاصل جمع المصفوفة A إلى المصفوفة الصفرية هو نفس المصفوفة: A + 0 = A

4. حاصل طرح المصفوفة الصفرية من مصفوفة A هو نفس المصفوفة: A - 0 = A

8-1-4 ضرب مصفوفة بثابت

ضرب مصفوفة A بعدد ثابت c (Scalar Multiplication) يعني ضرب جميع عناصرها a_{ij} بهذا العدد، فيصبح كل عنصر من المصفوفة الجديدة B = c.A هو $b_{ij} = c.a_{ij}$.

إذا كان c = 0، نحصل على المصفوفة الصفرية: مصفوفة جميع عناصرها تساوي الصفر.

كما هو الحال في عملية الضرب التقليدية، فإن ضرب مصفوفة بثابت هي عملية تبديلية، توزيعية، وتجميعية:

1. عملية ضرب مصفوفة بعدد سلمي تبديلية: c A = A c
2. عملية ضرب مصفوفة بعدد سلمي توزيعية: c (A + B) = c A + c B
3. عملية ضرب مصفوفة بعدد سلمي تجميعية: c k (A) = c (k A) = c k A

مثال (8-5). أمثلة عن ضرب مصفوفة بثابت.

ليكن لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

جداء المصفوفة بالعدد c = 3 هي المصفوفة: $B = 3A = 3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 15 & 9 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

جداء المصفوفة بالعدد c = 0 هي المصفوفة: $B = 0A = 0\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

جداء المصفوفة بالعدد c = -3 هي المصفوفة: $B = -3A = -3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ -15 & -9 \\ -18 & -24 \end{bmatrix}$

8-1-5 ضرب مصفوفات

لنبدأ بضرب مصفوفات من سطر واحد وعمود واحد.

ليكن لدينا سطر شعاع **a** بـ n عمود: $a = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \qquad a_{1n}]$

ولدينا أيضاً عمود شعاع **b** بـ n سطر: $b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix}$

فإن جداء المصفوفتين السابقتين: **c = a.b** تحسب بالشكل الآتي:

$$\mathrm{a.b} = [a_{11} \quad a_{12} \qquad\qquad a_{1n}]\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

نلاحظ أن الجداء **a.b** هو مصفوفة مكونة من عنصر واحد أي من الدرجة $1\ x\ 1$، ويتم إيجاده بجمع حاصل جداء كل عنصر من **a** بالعنصر المقابل له من **b**.

لكي نستطيع إيجاد جداء الشعاعين، يجب أن يكون للشعاعين نفس عدد العناصر، حيث للشعاع **a** الرتبة $1\ x\ n$ وللشعاع **b** الرتبة n x 1. وإلا فإن عملية الضرب غير معرفة (مستحيلة).

مثال (8–6). أمثلة عن ضرب شعاعين.

ليكن لدينا الشعاعين $\boldsymbol{a} = |5 \quad 8 \quad 14|$ هو $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

فإن جداء الشعاعين **c = a.b** هو: $\mathbf{a.b} = [3x5 + (-2)x8 + 2x14 = 27$

يُمكن تعميم العملية السابقة على جداء مصفوفات غير شعاعية.

ليكن لدينا مصــفوفة A من الرتبة $n\ x\ s$ ومصــفوفة B من الرتبة $s\ x\ m$، مع وجوب أن يكون عدد أعمدة الأولى A يسـاوي عدد أسـطر الثانية B، فنحصــل على مصــفوفة C = A.B رتبتها هي عدد أسطر الأولى n وعدد أعمدة الثانية m أي من الرتبة $n\ x\ m$. ويجري الحصـول على كل عنصـر من عناصرها c_{ij} بجداء عناصر السطر رقم i بعناصر العمود رقم j كما يلي:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

وذلك من أجل $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$

قبل إجراء عملية الضـرب، يجب التحقق فيما إذا كانت عدد أعمدة الأولى A (s) يسـاوي عدد أسـطر الثانية B (s).

مثال (8–7). أمثلة عن ضرب مصفوفتين.

لدينا المصفوفتين: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

عدد أعمدة الأولى A يســاوي 3 أعمدة، وعدد أســطر الثانية B يســاوي 3 أســطر، فهما متســاويين، وبالتالي يمكن إجراء عملية ضرب المصفوفتين. فإن جداء المصفوفتين C = A.B هو مصفوفة عدد أســـطرها يســـاوي عدد أســـطر الأولى A أي 3، وعدد أعمدتها يســـاوي عدد أعمدة الثانية أي 2، فالمصفوفة الجديدة C تكون من الرتبة $3x2$:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

قيمة c_{11} هي حاصل جداء شعاعي السطر الأول من الأولى بالعمود الأول من الثانية:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 2x1 + 3x0 + 4x6 = 26$$

قيمة c_{12} هي حاصل جداء شعاعي السطر الأول من الأولى بالعمود الثاني من الثانية:

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x2 + 3x3 + 4x1 = 17$$

قيمة c_{21} هي حاصل جداء شعاعي السطر الثاني من الأولى بالعمود الأول من الثانية:

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 4x1 + 5x0 + 1x6 = 10$$

قيمة c_{22} هي حاصل جداء شعاعي السطر الثاني من الأولى بالعمود الثاني من الثانية:

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 4x2 + 5x3 + 1x1 = 23$$

قيمة c_{31} هي حاصل جداء شعاعي السطر الثالث من الأولى بالعمود الأول من الثانية:

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 5x1 + 1x0 + 4x6 = 29$$

قيمة c_{32} هي حاصل جداء شعاعي السطر الثالث من الأولى بالعمود الثاني من الثانية:

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 5x2 + 1x3 + 4x1 = 17$$

بالنتيجة، نحصل على المصفوفة C:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 10 & 23 \\ 29 & 17 \end{bmatrix}$$

في ختام هذه الفقرة، فإن عملية ضرب المصفوفات تتمتع بخصائص الضرب التقليدي، شرط تحقق رتب المصفوفات لكي تتم عمليتي الجمع والضرب المشار إليها أعلاه:

1. توزيع الضرب على الجمع: A (B + C) = AB + AC
2. توزيع الجمع على الضرب: (A + B) C = AC + BC
3. تجميعية بالنسبة للضرب: (A B) C = (A B) C

4. ليست بالضرورة أن تكون تبديلية: A B قد لا يساوي B A ، لنأخذ المثال أدناه.

مثال (8–8). مثال عن عدم تحقق خاصية التبديل في ضرب مصفوفتين.

ليكن لدينا المصفوفتين المربعتين: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

نجد أن A.B تساوي: $A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

في حين نجد أن B.A تساوي: $B.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

نلاحظ أن $A.B \neq B.A$.

مثال (8–9). التحقق من رتب المصفوفات قبل إجراء عمليات عليها.

ليكن لدينا المصفوفات كما يلي: A من الرتبة $3x3$، B من الرتبة $2x3$، C من الرتبة $4x2$.

لنتحق من إمكانية إنجاز العمليات الآتية:

1. 3B : ممكنة. مجرد عملية الضرب بثابت.
2. A + B: غير ممكنة، بسبب اختلاف عدد الأسطر.
3. A . B: غير ممكنة، عدد أعمدة الأولى A لا يساوي عدد أسطر الثانية B.
4. B . A: ممكنة، عدد أعمدة الأولى B يساوي عدد أسطر الثانية A.
5. C . B: ممكنة، عدد أعمدة الأولى C يساوي عدد أسطر الثانية B.
6. $B^T + C$: غير ممكنة، بسبب اختلاف عدد الأسطر.
7. $B^T . A$: غير ممكنة، عدد أعمدة الأولى B^T لا يساوي عدد أسطر الثانية A.
8. $(B.A)^T$: ممكنة. عملية الضرب ممكنة، والمنقول للمصفوفة الناتجة ممكن.
9. C.B.A: ممكنة. لدينا عدد أعمدة الأولى C يساوي عدد أسطر الثانية B ونحصل على مصفوفة درجتها $4x3$، حاصل ضرب هذه الأخيرة مع A ممكن أيضاً كون عدد أعمدتها يساوي عدد أسطر A.

تطبيق (8–1) ضرب مصفوفات.

تنتج إحدى الشركات ثلاثة منتجات P1, P2, P3، وتبيعها لموزعين اثنين C1, C2، حيث لدينا جدول/مصفوفة الطلب A من الموزعين كما يلي:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P1 & P2 & P3 \end{array} \\ \begin{array}{c} C1 \\ C2 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

تسعر الشركة منتجاتها الثلاثة كما يلي: $\begin{array}{c} P1 \\ B = P2 \\ P3 \end{array} \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 200 \end{bmatrix}$

وتســتخدم أربعة أنواع من المواد الأولية R1, R2, R3, R4 لتصــنيع المنتجات الثلاثة وفق جدول الكميات الآتي (بالطن):

$$C = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R1 & R2 & R3 & R4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

كما تبلغ تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية الأربعة كما يلي: $D = \begin{array}{c} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array} \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \\ 150 \\ 15 \end{bmatrix}$

والمطلوب:

أ) إيجاد الجداء الآتية: A.B (1)   A.C (2)   C.D (3)   A.C.D (4)

ومحاولة إعطاء تفسير اقتصادي لكل منها.

ب) ليكن E = [1 1]، أوجد E.A.C.D (1)   E.A.B (2)   E.A.B – E.A.C.D (3)

ومحاولة إعطاء تفسير اقتصادي لكل منها.

الحل:

أ) الجداء: A.B (1)

$$A.B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5900 \\ 1100 \end{bmatrix}$$

كما نلاحظ أن المصــــفوفة الناتجة تمثل الفاتورة المســـتجرة من قبل كل الموزعين الاثنين: فاتورة C1 تساوي 5900، وفاتورة C2 تساوي 1100. وهي إيرادات الشركة من الموزعين.

الجداء A.C (2):

$$A.C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 23 & 22 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

تمثل المصــفوفة الناتجة جدول الاســتهلاك من المواد الأولية حســب الموزعين، حيث يُمثل السـطر الأول كمية كل المواد الأولية الأربعة للموزع الأول C1، ويُمثل السـطر الثاني كمية كل المواد الأولية الأربعة للموزع الثاني C2.

الجداء C.D (3):

$$C.D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \\ 150 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 285 \\ 165 \end{bmatrix}$$

تمثل المصفوفة الناتجة جدول التكاليف الكلية لكل من المنتجات الثلاثة: تكاليف P1 تساوي 35، تكاليف P2 تساوي 285، وتكاليف P3 تساوي 165.

الجداء (4) A.C.D:

تم حساب A.C أعلاه، نجد A.C.D:

$$A.C.D = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 23 & 22 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \\ 150 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4740 \\ 835 \end{bmatrix}$$

تمثل المصـــــفوفة الناتجة جدول إجمالي تكاليف المواد الأولية لكل من الموزعين، حيث تبلغ تكاليف المواد الأولية للمنتجات المســــتجرة من قبل الموزع الأول C1: 4740، كما تبلغ تكاليف المواد الأولية للمنتجات المستجرة من قبل الموزع الثاني C2: 835.

ب) ليكن [1 1] = E،

الجداء (1) E.A.C.D: تم حساب A.C.D أعلاه، منه نجد:

$$E.A.C.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4740 \\ 835 \end{bmatrix} = 5575$$

ويُمثل إجمالي تكاليف المواد الأولية للموزعين الاثنين معاً ولجميع المنتجات المســــتجرة (التكاليف الإجمالية).

الجداء (2) E.A.B: تم حساب A.B أعلاه، منه نجد:

$$E.A.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5900 \\ 1100 \end{bmatrix} = 7000$$

يُمثل المجموع الإجمالي لفاتورة الموزعين الاثنين معاً ولجميع المنتجات المســــتجرة (الإيرادات الإجمالية).

طرح النتيجتين الأخيرتين (3) E.A.B – E.A.C.D:

E.A.B – E.A.C.D = 7000 – 5575 = 1425

يُمثل هذا الرقم الأرباح الإجمالية، حيث الجداء EAB هو الإيرادات الإجمالية، والجداء EACD هو التكاليف الإجمالية.

8-2 محدد ومقلوب مصفوفة

سنتعامل في هذه الفقرة مع المصفوفات المربعة nxn حيث عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة.

قبل الدخول في تفاصـيل قلب مصـفوفة، لنتعرف على المصـفوفة الحيادية Identity Matrix، على غرار العدد 1 في الحساب التقليدي بالنسبة للضرب، نرمز لمصفوفة الحيادية بالرمز **I**.

المصفوفة الحيادية **I** هي مصفوفة مربعة من الرتبة nxn حيث جميع عناصرها تساوي الصفر عدا عناصر القطر تساوي الواحد: $a_{ij} = 0 \;\; \text{if } i \# j$ و $a_{ij} = 1 \text{ if } i = j$ وذلك من أجل i=1, 2, …, n و j=1, 2, …,n. مثلاً المصفوفة الحيادية **I**:

من الرتبة $3x3$: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ من الرتبة $2x2$: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ندعو المصفوفة A^{-1} بأنه مقلوب المصفوفة A إذا وفقط إذا كان: $A.A^{-1} = \mathbf{I}$

لنأخذ مصفوفة مربعة من الرتبة $2x2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

لنحاول إيجاد مقلوب المصفوفة $A^{-1} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ بحيث $A.A^{-1} = \mathbf{I}$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بفرض أن قيم المصفوفة A معلومة، يُمكن إيجاد عناصر المصفوفة A^{-1} كما يلي:

$$ae + bg = 1 \qquad ce + dg = 0$$
$$af + bh = 0 \qquad cf + dh = 1$$

لدينا أربع معادلات خطية بأربعة مجاهيل هي e, f, g, h، بحل جملة المعادلات هذه، نجد:

$$e = \frac{d}{ad-bc} \qquad f = \frac{-b}{ad-bc}$$
$$g = \frac{-c}{ad-bc} \qquad h = \frac{a}{ad-bc}$$

ندعو المقدار (في المقام) ad – bc بمحدد المصفوفة Determinant ونرمز له بالشكل:

det(A) أو بالشكل $|A|$ أو بالشكل $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد عناصر المقلوب A^{-1} إذا كان المحدد يساوي الصفر $|A| = 0$ إذ لا يجوز التقسيم على الصفر. ندعو المصفوفة بأنها أحادية Singulr إذا كان محددها يساوي الصفر، وإلا فهي غير أحادية Non-Singulra ويوجد مقلوب لها.

قاعدة عامة: لا يمكن إيجاد مقلوب مصفوفة إذا كان محددها يساوي الصفر.

بشكل عام، لإيجاد مقلوب مصفوفة 2x2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نتبع الخطوات الآتية:

1) تبديل موضعي عناصر القطر a و d: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & b \\ c & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$

2) تغيير إشارة عناصر غير القطرية: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & -b \\ -c & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$

3) ضرب جميع العناصر الأخيرة بمقلوب المحدد: $\frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{\det(A)}$

4) نحصل على مقلوب A: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

مثال (8−10) أمثلة عن إيجاد مقلوب مصفوفة $2x2$.

أ) إيجاد مقلوب ومحدد المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

محدد المصفوفة $|A| = \text{ad} - \text{bc} = 2x5 - 6 * 4 = -14$

نجد المقلوب A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{4}{14} & -\frac{2}{14} \end{bmatrix}$

ننصح دوماً بالتحقق من الجواب، وذلك بضرب المصفوفة A بمقلوبها A-1، يجب أن نحصل على المصفوفة الحيادية **I**:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{4}{14} & -\frac{2}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) إيجاد مقلوب ومحدد المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

محدد المصفوفة $|A| = \text{ad} - \text{bc} = 1x10 - 2 * 5 = 0$

بالتالي لا يوجد مقلوب للمصفوفة، بسبب كون المحدد يساوي الصفر.

ت) إيجاد مقلوب ومحدد المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

محدد المصفوفة $|A| = \text{ad} - \text{bc} = 2x10 - 5 * 6 = -10$

نجد المقلوب: $A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}$

بعض خصائص محدد مصفوفة:

1. لا تتغير قيمة المحدد إذا تم التبديل بين الأسطر والأعمدة.
2. إذا تم التبديل بين سطرين (أو عمودين)، فإن المحدد يغير إشارته.
3. إذا تطابق سطرين (أو عمودين)، فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

4. إذا تم ضـــرب عناصـــر أحد الأســـطر (أو أحد الأعمدة) بنفس المعامل، فإن قيمة المحدد تضرب بنفس قيمة المعامل.

5. إذا تم إضافة عناصر أحد الأسطر (أو مضاعف عناصر هذا السطر) إلى العناصر المقابلة من سطر آخر، لا تتغير قيمة المحدد.

6. أيضاً، إذا تم إضافة عناصر أحد الأعمدة (أو مضاعف عناصر هذا العمود) إلى العناصر المقابلة من عمود آخر، لا تتغير قيمة المحدد.

قبل البحث عن مقلوب مصفوفة من رتبة أعلى من 2x2، لنتعرف على مفهوم المرافق Cofactor (أو المصفوفة المرافقة) لكل عنصر من عناصرها.

ليكن لدينا المصـفوفة A من الرتبة $n x n$، نعرف مرافق العنصـر a_{ij} ونرمز له بالشكل A_{ij} بأنه محدد المصفوفة الجزئية من الرتبة (n-1)x(n-1) من المصفوفة A بعد حذف السطر رقم i، والعمود رقم j، ومسبوقاً بإشارة المقدار $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا كان i+j فردي فإشارة المرافق A_{ij} سالبة،

وإذا كان i+j زوجي فإشارة المرافق A_{ij} موجبة.

كما نلاحظ أنه يكون لدينا مرافقات لمصفوفة من الرتبة $n x n$: n^2 مرافق.

مثال (8−11) أمثلة عن إيجاد مرافقات مصفوفة $3x3$.

لدينا المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد جميع مرافقات هذه المصفوفة.

لدينا في هذه الحالات 9 مرافقات (3 x 3)، هي:

المرافق A_{11} يساوي: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

المرافق A_{12} يساوي: $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

المرافق A_{13} يساوي: $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$

المرافق A_{21} يساوي: $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

المرافق A_{22} يساوي: $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$

المرافق A_{23} يساوي: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

المرافق A_{31} يساوي: $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1$

المرافق A_{32} يساوي: $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13$

المرافق A_{33} يساوي: $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 23$

يعطينا المثال أعلاه فكرة عن كيفية إيجاد محدد من الرتبة الثالثة $3x3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

محدد مصــفوفة من الرتبة الثالثة هو حاصــل جمع جداءات كل عنصــر من ســطر واحد محدد (أو عمود واحد محدد) مضروباً بمرافق هذا العنصر. كما يلي:

أي: $\mathrm{Det}(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$

أو: $\mathrm{Det}(A) = a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23}$

قد يكون إجراء عملية حســاب المحدد عبر الأســطر أو عبر الأعمدة طريقة للتحقق من الجواب، إذ يجب أن نحصــل على نفس النتيجة ســواء أجرينا الحســابات عبر الأســطر أو عبر الأعمدة. بمعنى آخر، يكفي أن نأخذ سطر واحد أو عمود واحد.

إذاً، يُمكن إيجاد محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة باتباع الخطوات الآتية:

(1) اختيار سطر ما (أو عمود ما).

(2) إيجاد جميع مرافقات عناصر هذا السطر (أو العمود).

(3) ضرب كل عنصر بمرافقه.

(4) جمع الجداءات الناتجة عن الخطوة (3).

مثال (8−12) إيجاد محدد مصفوفة $3x3$.

لنأخذ نفس المصـــــفوفة في المثال الســـــابق $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد محدد هذه المصفوفة.

تم في المثال أعلاه حساب جميع مرافقات عناصر المصفوفة التسع، لنأخذ مرافقات السطر الأول مثلاً: $A_{11} = 7$ ، $A_{12} = 1$ ، $A_{13} = -11$، ولنوجد محدد المصفوفة:

$$\mathrm{Det}(A) = (7)(7) + (3)(1) + (2)(-11) = 30$$

يُمكن التحقق بأخذ أي سطر آخر أو عمو آخر، لنأخذ مثلاً العمود الثالث:

مرافقات العمود الثالث: $A_{13} = -11$ ، $A_{23} = 2$ ، $A_{33} = 23$، فنجد محدد المصفوفة:

$$Det(A) = (2)(-11) + (3)(2) + (2)(23) = 30$$

أخيراً، نعرف يُمكن إيجاد مقلوب مصـــــفوفة A (3x3) يســـــاوي مقلوب المحدد مضـــــروباً بمنقول المرافقات.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مقلوب هذه المصفوفة A^{-1}، يُحسب بالشكل:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

أي بضرب منقول مصفوفة المرافقات A_{ij} بمقلوب محدد المصفوفة A.

من الواضح أنه لا يُمكن إيجاد مقلوب مصفوفة إذا كان محددها يساوي الصفر.

نظراً لتعقيد حسابات المحدد والمرافقات، يُنصح دوماً بالتحقق من أن جداء المصفوفة بمقلوبها يساوي المصفوفة الحيادية أي $A^{-1}.A = \mathbf{I}$ أو $A.A^{-1} = \mathbf{I}$.

مثال (8−13) إيجاد محدد مصفوفة $3x3$.

لنأخذ نفس المصـــــفوفة في المثال أعلاه $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد مقلوب هذه المصفوفة.

تم في المثال أعلاه حساب محدد المصفوفة $det(A) = 30$.

كما تم حساب مرافقات المصفوفة: $Cofactors(A) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -11 \\ -4 & 8 & 2 \\ -1 & -13 & 23 \end{bmatrix}$

بالتالي يُمكن حساب المقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Cofactors(A) = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & -13 \\ -11 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

رأينا حتى الآن كيف يُمكن إيجاد مقلوب مصـــــفوفة من الرتبة الثانية والثالثة، يُمكن تعميم الطريقة المذكورة أعلاه على أية مصفوفة A من الرتبة nxn حيث n>3، باتباع نفس الخطوات بالتدرج:

(1) تحديد المصفوفات الجزئية من الرتبة (n-1)x(n-1) المشكلة كل منها بحذف السطر رقم i والعمود رقم j.

(2) إيجاد المعاملات المرافقة A_{ij}: أي محددات المصفوفات الجزئية المحددة في (1)، وضربها بالإشارة $(-1)^{i+j}$، فنحصل على المصفوفة المرافقة للعنصر a_{ij}.

(3) تكرار الخطوات (1)، (2)، (3) بعد إنقاص واحد من رتبة المصـــــفوفات الجزئية حتى نحصل على جميع المرافقات A_{ij} لجميع العناصر a_{ij}.

(4) حساب محدد المصفوفة A: $|A|$.

(5) إيجاد مقلوب A بضرب منقول المصفوفة المرافقة A_{ij}^T بمقلوب المحدد $|A|$.

نلاحظ أن إجراء الحســـابات لمصـــفوفات من الحجم الكبير أمراً معقداً ويســـتهلك الكثير من الوقت والجهد، لذلك ننصح باستخدام البرمجيات المتخصصة أو بناء نموذج للحسابات على MS Excel.

إذا كان جداء مصفوفتين A.B معرفاً، فإن مقلوب الجداء $(A.B)^{-1}$ هو الجداء: $B^{-1}.A^{-1}$.

في بعض الحالات، قد نحتاج للبحث عن الأشـــعة الذاتية Eigenvectors لمصـــفوفة مربعة A من الرتبة nxn، والقيم الذاتية (الجذور الكامنة) Eigenvalues المرافقة لهذه الأشـعة. الأشـعة الذاتية X تحقق الصيغة: $A.X = \lambda.X$، في حين تُحقق القيم الذاتية المعادلة: $|A - \lambda I| = 0$.

3-8 تمثيل وحل جملة معادلات خطية عبر المصفوفات

أحد أهم التطبيقات لمقلوب مصفوفة هو المساعدة في إيجاد حل لجملة معادلات خطية، وقد رأينا أنه يُمكن تمثيل جملة معادلات (أو متراجحات) خطية بشكل مصفوفي.

ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين بمجهولين اثنين x_1, x_2:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

يُمكن تمثيلها بالشكل $A.X = B$ حيث:

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ تمثل شعاع عمود المجاهيل.

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ تمثل شعاع عمود الطرف الثاني.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ تمثل أمثال المجاهيل في المعادلتين.

بفرض أن مقلوب A موجود، يُمكن إيجاد الحل مباشرةً كما يلي:

نضرب طرفي المعادلة A.X = B بمقلوب المصفوفة A، فنجد: $A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$

باعتبار أن ضرب المصفوفات هو تجميعي، نجد: $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$

حيث أن جداء المصفوفة بمقلوبها يساوي المصفوفة الحيادية: $A^{-1}.A = \mathbf{I}$

ومنه نجد $\mathbf{I}.X = A^{-1}.B$ أو $X = A^{-1}.B$، وهو حل جملة المعادلتين.

أي أن حل جملة معادلات خطية هو بكل بساطة حاصل جداء مصفوفة الطرف الثاني B بمقلوب مصفوفة أمثال المجاهيل A^{-1}، طبعاً شريطة أن يكون A^{-1} معرفاً (موجوداً)، وإذا كان هذا المقلوب غير موجود، فجملة المعادلات ليس لها حلاً وحيداً.

تطبيق (8–2) حل جملة معادلتين خطيتين لسعر التوازن بطريقة المصفوفات.

لدينا معادلتي أسعار منتجين P1, P2 كما يلي:

5P1 – 3P2 = -4 -7P1 + 4P2 = -8

والمطلوب: إيجاد سعري التوازن P1, P2 باستخدام المصفوفات.

<u>الحل:</u>

نضع المعادلتين على شكل مصفوفات: A.P = B

حيث $A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$، فنجد:

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

محدد المصفوفة: $|A| = (-7)x(-3) - 4 * 5 = 1$

فيكون المقلوب يساوي $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

نضرب الطرفين بمقلوب مصفوفة الأمثال A^{-1}، فنحصل سعر التوازن:

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 68 \end{bmatrix}$$

إذاً P1 = 40 و P2 = 68.

يُمكن التحقق أن قيمتي السعرين تحقق المعادلتين:

5(40) – 3(68) = -4 -7(40) + 4(68) = -8

تطبيق (8–3) حل جملة معادلتي توازن الدخل القومي والاستهلاك بطريقة المصفوفات.

لدينا في اقتصاد من قطاعين، معادلتي التوازن بين الدخل القومي Y والاستهلاك C كما يلي:

Y = C + I [1]

C = aY + b [2]

حيث a, b معاملات تُحقق: 0 < a < 1 و 0 < b. و I تمثل الاستثمار بفرض أنه معطى محدد.

لنضع هاتين المعادلتين على شكل مصفوفي حيث Y, C هي المتغيرات المطلوب إيجاد قيمها ندعوها متغيرات داخلية Endogemous، و I, a, b هي متغيرات خارجية exogenous قيمتها محددة مسبقاً.

لنعيد ترتيب المعادلتين بحيث يكون المجاهيل في طرف والمعاليم في الطرف الثاني، فنجد:

Y - C = I [1']

-aY + C = b [2']

فتكتب جملة المعادلتين بشكل مصفوفي: A.X = B

حيث: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} I \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ b \end{bmatrix}$$

محدد المصفوفة: $|A| = (1)x(1) - (-1) * (-a) = 1 - a$

حيث أن a < 1 اصغر تماماً من الواحد، فإن المحدد لا يساوي الصفر، فالمصفوفة لها مقلوب.

فيكون المقلوب يساوي $A^{-1} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

نوجد $X = A^{-1}.B$:

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} I + b \\ a.I + b \end{bmatrix}$$

ومنه نجد قيمة Y: $Y = \frac{I+b}{1-a}$ وقيمة C: $C = \frac{a.I+b}{1-a}$

في حال تغيرت القيمة المحددة للاستثمار بمقدار ΔI، يُمكن حساب التغيرات في الدخل Y والاستهلاك C:

$$\Delta Y = \frac{I + \Delta I + b}{1 - a} - \frac{I + b}{1 - a} = \left(\frac{1}{1 - a}\right)\Delta I$$

$$\Delta C = \frac{a.(I + \Delta I) + b}{1 - a} - \frac{a.I + b}{1 - a} = \left(\frac{a}{1 - a}\right)\Delta I$$

لذلك ندعو المعامل $\frac{1}{1-a}$ بمضـــروب الاســـتثمار Investment Multiplier للدخل القومي، وندعو المعامل $\frac{a}{1-a}$ بمضروب الاستثمار Investment Multiplier للاستهلاك.

أخيراً، يُمكن ملاحظة من مقلوب المصفوفة $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix}$ ما يلي:

1. العمود الأول هو مضاريب الاستثمار بالنسبة للدخل القومي وللاستهلاك.
2. العمود الثاني هو المضاريب المستقلة للدخل القومي وللاستهلاك، ليس لها علاقة بالاستثمار.

تطبيق (8−4) حل جملة ثلاث معادلات خطية لسعر توازن ثلاثة منتجات بطريقة المصفوفات.

لدينا معادلات أسعار ثلاثة منتجات P1, P2, P3 كما يلي:

7P1 + 3P2 + 2P3 = 60

4P1 + 5P2 + 3P3 = 80

3P1 + P2 + 2P3 = 40

والمطلوب: إيجاد أسعار التوازن للمنتجات الثلاثة P1, P2, P3 باستخدام المصفوفات.

الحل:

نضع المعادلات على شكل مصفوفات: A.P = B

حيث: $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$

تم سابقاً في المثال (8−13) حساب مقلوب المصفوفة A:

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & -13 \\ -11 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

والحل هو $P = A^{-1}.B$:

$$P = \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & -13 \\ -11 & 2 & 23 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد:

$$P1 = \frac{7}{30}60 - \frac{4}{30}80 - \frac{1}{30}40 = 2$$

$$P2 = \frac{1}{30}60 + \frac{8}{30}80 - \frac{13}{30}40 = 6$$

$$P3 = -\frac{11}{30}60 + \frac{2}{30}80 + \frac{23}{30}40 = 14$$

تطبيق (8−5) إيجاد توازن العرض والطلب لمنتجين اثنين باستخدام المصفوفات.

لدينا توابع العرض والطلب لمنتجين اثنين كما يلي:

الطلب والعرض للمنتج الأول: $D1 = 50 - 2P1 + P2$ $\qquad S1 = -20 + P1$

الطلب والعرض للمنتج الثاني: $D2 = 10 + P1 - 4P2$ $\qquad S2 = -10 + 5P2$

والمطلوب:

أ) التعبير عن أسعار التوازن بشكل مصفوفي.

ب) إيجاد قيم أسعار وكميات التوازن للمنتجين.

<u>الحل:</u>

أ) التعبير عن أسعار التوازن بشكل مصفوفي:

علينا بدايةً إعادة كتابة المعادلات أعلاه لتصبح المتغيرات الوحيدة فيها هي الأسعار P1, P2

عند التوزان، يكون لدينا العرض = الطلب لكل من المنتجين، فنجد:

للمنتج الأول: $S1 = D1 \Rightarrow -20 + P1 = 50 - 2P1 + P2$

فنجد: $3P1 - P2 = 70 \qquad [1]$

للمنتج الثاني: $S2 = D2 \Rightarrow -10 + 5P2 = 10 + P1 - 4P2$

فنجد: $-P1 + 9P2 = 20 \qquad [2]$

بالتالي تكتب المعادلتين [1] و [2] على شكل مصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ب) قيم أسعار وكميات التوازن للمنتجين

لإيجاد قيم الأسعار عند التوازن، يكفي حل معادلة المصفوفات أعلاه، فنجد:

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأمثال $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ يساوي: $Det(A) = (3)*(9) - (-1)(-1) = 26$

بالتالي مقلوب مصفوفة الأمثال تساوي: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$

فنجد قيم الأسعار عند التوازن:

سعر المنتج الأول P1: $P1 = \frac{9}{26}x70 + \frac{1}{26}x20 = 25$

سعر المنتج الثاني P2: $P1 = \frac{1}{26}x70 + \frac{3}{26}x20 = 5$

وتكون الكميات عند التوازن كما يلي:

للمنتج الأول، نســـتبدل قيم P1 و P2 في أي من معادلتي هذا المنتج باعتبار العرض والطلب متساويين عن التوازن D1=S1: S1 = -20 + (25) = 5

يُمكن التأكد أن هذه الكمية S1=5 تتحقق في معادلة الطلب D1 = 50 – 2(25) + (5) = 5

للمنتج المنتج الثاني، نستبدل قيم P1 و P2 في أي من معادلتي العرض أو الطلب لهذا المنتج:

S2 = -10 + 5(5) = 15

وهي محققة من معادلة الطلب على هذا المنتج D2 = 10 + (25) – 4(5) = 15

4-8 قاعدة كرامر

رأينا سـابقاً كيفية إيجاد محدد ومقلوب مصـفوفة من رتب صـغيرة 2x2 و 3x3، لكن هذه الطريقة قد تأخذ الكثير من الوقت والجهد، في التطبيقات الإدارية والاقتصـادية، على الأغلب أن نهتم بمتغير أو بعدد قليل من المتغيرات فقط من بين الكثير من المتغيرات الاقتصـــاديةن لذلك لا يكون هناك حاجة لهدر الجهد والوقت لحساب جميع مرافقات المصـفوفة ثم إيجاد المقلوب، سنرى في هذه الفقرة طريقة لإيجاد قيم أحد المتغيرات فقط دون الحاجة للبحث عن قيم جميع المتغيرات، هذه الطريقة معروفة بقاعدة كرامر Cramer's Rule.

ليكن لدينا جملة معادلات A.X = B تشـكل مصـفوفة من الرتبة nxn، فإن قيمة المتغير x_i يُمكن إيجادها عبر قاعدة كرامر كما يلي:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

حيث A_i هي نفس المصـفوفة A وذلك بعد تبديل العمود رقم i في المصـفوفة A بالطرف الثاني من جملة المعادلات B.

1. إذا كان det(A) = 0، فمن الواضـح أنه لا يوجد حل لجملة المعادلات، إذ لا يمكن التقسـيم على صفر.

2. إذا كان $det(A) \neq 0$، فلجملة المعادلات حل وحيد.

3. إذا كان $det(A) = det(A_i) = 0$ من أجل جميع المتغيرات i، فلجملة المعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

مثال (8–14) تطبيق قاعدة كرامر على جملة معادلتين خطيتين.

ليكن لدينا جملة المعادلتين $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

ولنفترض أننا نهتم بقيمة x_2 فقط.

تعطينا صيغة كرامر طريقة الحساب مباشرةً: $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$

حيث: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

ونشكل A_2 بتبديل الطرف الثاني $B = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ مكان العمود رقم 2: $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 30 \end{bmatrix}$

محدد A: $det(A) = (2)(-5) - (5)(3) = -25$

محدد A_2: $det(A_2) = (2)(30) - (20)(0) = 0$

ومنه نجد قيمة x_2: $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-25} = 0$

مثال (8–14) تطبيق قاعدة كرامر على جملة معادلات خطية من ثلاثة مجاهيل.

ليكن لدينا جملة معادلات $A.X = B$ من ثلاثة مجاهيل x_1, x_2, x_3 كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 26 \end{bmatrix}$$

ولنفترض بأننا نريد معرفة قيمة x_3 مثلاً. حيث مصفوفة الأمثال: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

نشكل A_3 بتبديل الطرف الثاني $B = \begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 26 \end{bmatrix}$ مكان العمود رقم 3: $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 \\ -3 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 26 \end{bmatrix}$

نوجد محدد A_3 عبر السطر الأول مثلاً:

$$\det(A_3) = (3)\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 26 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 26 \end{vmatrix} + (18)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 144$$

كذلك نوجد محدد A عبر السطر الأول مثلاً:

$$\det(A) = (3)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (5)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

ومنه نجد قيمة x_3: $x_3 = \frac{\det(3)}{\det(A)} = \frac{144}{-36} = -4$

تطبيق (8–6) إيجاد مستويات التوازن القومي باستخدام قاعدة كرامر.

لدينا معادلات التوازن على المستوى القومي لثلاثة قطاعات: الدخل القومي Y، الدخل القومي الجاهز Y_d، وحجم الضرائب T، كما يلي:

$Y = C + I^* + G^*$ [1]

$C = aY_d + b$ [2] حيث $0 < a < 1$ و $b > 0$.

$Y_d = Y - T$ [3]

$T = t.Y + T^*$ [4] حيث $t < 1$ و $T^* > 0$.

عندما نضع إشارة *، عادةً ما يُقصد أن المتغير هو ثابت ذو قيمة محددة في هذه الجملة.

والمطلوب:

أ) وضع جملة المعادلات السابقة بشكل مصفوفي **A.X = B**.

ب) استخدام قاعدة كرامر لإيجاد قيم الدخل القومي Y عند التوازن.

<u>الحل:</u>

أ) وضع جملة المعادلات السابقة بشكل مصفوفي **A.X = B**

لنبدأ بوضع المعادلات بشكل نظامي، أي المجاهيل Y, C, Y_d, T في الطرف اليساري والمعالیم I^*، G^*، b، T^* في الطرف اليميني:

فيكون لدينا شعاع عمود المتغيرات X: $X = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix}$

إذاً يجب إعادة ترتيب المعادلات بحيث يكون الحد الأول في كل منها تابع لـ Y، الحد الثاني تابع C، الحد الثالث تابع Y_d، والحد الرابع تابع T حسب الترتيب الوارد في عمود X.

من المعادلة الثالثة [3] مثلاً، نعيد ترتيبها بالشكل: $-Y + Y_d + T = 0$ ، نلاحظ أن أمثال C في هذه المعادلة يساوي الصفر.

بعد إعادة الترتيب، نجد جملة المعادلات:

$Y - C = I^* + G^*$ [1']

$C - aY_d = b$ [2']

$$- Y + Y_d + T = 0 \qquad [3']$$

$$-t.Y + T = T^* \qquad [4']$$

فتكون مصفوفة الأمثال A تكتب بالشكل:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصوفة (شعاع عمود) الطرف الثاني B:
$$B = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

بالتالي، نجد الشكل المصفوفي لجملة المعادلات $A.X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

ب) استخدام قاعدة كرامر لإيجاد قيم الدخل القومي Y عند التوازن

حسب صيغة كرامر، نجد الدخل القومي Y (العمود الأول) يُحسب بالشكل: $Y = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$

مصفوفة A_1 بعد استبدال الطرف الثاني B بالعمود الأول (عمود Y):

$$A_1 = \begin{bmatrix} I^* + G^* & -1 & 0 & 0 \\ b & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حساب $\det(A_1)$: نأخذ النشر عبر السطر الأول كونه يحوي الكثير من الأصفار:

$$\det(A_1) = (I^* + G^*) \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

المحدد الأول، ننشر حسب السطر الأول كونه يحوي كثير من الأصفار، فنجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

المحدد الثاني، ننشر حسب السطر الأول، فنجد:

$$\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ T^* & 1 \end{vmatrix} = b - a.T^*$$

فيكون: $\det(A_1) = (I^* + G^*)(1) - (-1)(b - aT^*) = I^* + G^* + b - aT^*$

حساب $\det(A)$: نأخذ النشر عبر السطر الأول كونه يحوي الكثير من الأصفار:

$$\det(A) = (1)\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

المحدد الأول، ننشر حسب السطر الأول كونه يحوي كثير من الأصفار، فنجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-a)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

المحدد الثاني، ننشر حسب السطر الأول، فنجد:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-\mathrm{a})\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\mathrm{t} & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{a}(-1+\mathrm{t})$$

فيكون: $\det(A) = (1)(1) - (-1)\, a.(-1+t) = 1 - a + a.t$

نطبق قاعدة كرامر أخيراً، فتكون قيمة Y تتحدد كما يلي:

$$\mathrm{Y} = \frac{\det(\mathrm{A_1})}{\det(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{I}* + \mathrm{G}* + \mathrm{b} - \mathrm{aT}*}{1 - \mathrm{a} + \mathrm{a.t}}$$

تطبيق (8–7) إيجاد مستويات التوازن القومي لنموذج IS-LM باستخدام قاعدة كرامر.

لدينا معادلات نموذج IS-LM لاقتصاد مكون من قطاعين:

$0.30Y + 15r = 830$ [1]

$0.12Y - 60r = 200$ [2]

حيث Y الدخل القومي، و r حجم الفائدة. والمطلوب:

أ) التعبير عن النموذج بشكل مصفوفي A.X = B.

ب) إيجاد قيمة r في حالة التوازن.

الحل:

أ) التعبير عن النموذج بشكل مصفوفي A.X = B.

مصفوفة الأمثال A تُكتب بالشكل: $A = \begin{bmatrix} 0.30 & 15 \\ 0.12 & -60 \end{bmatrix}$

شعاع عمود المتغيرين X: $X = \begin{bmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{r} \end{bmatrix}$

شعاع عمود الطرف الثاني B: $B = \begin{bmatrix} 830 \\ 200 \end{bmatrix}$

فتصبح جملة المعادلتين على شكل مصفوفي: $\begin{bmatrix} 0.30 & 15 \\ 0.12 & -60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 830 \\ 200 \end{bmatrix}$

ب) إيجاد قيمة r في حالة التوازن

تعطينا صيغة كرامر طريقة الحساب مباشرةً: $r = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$

حيث A_2 بتبديل الطرف الثاني $B = \begin{bmatrix} 830 \\ 200 \end{bmatrix}$ مكان العمود رقم 2: $A_2 = \begin{bmatrix} 0.30 & 830 \\ 0.12 & 200 \end{bmatrix}$

فيكون محدد A_2: $\det(A_2) = (0.30)(200) - (0.12)(830) = -39.6$

ومحدد A: $\det(A) = (0.30)(-60) - (0.12)(15) = -19.8$

ومنه نجد قيمة r: $r = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-39.6}{-19.8} = 2$

5-8 تطبيقات: جداول المدخلات والمخرجات

تقوم فكرة دراسة هيكلية الاقتصاد والتشابكات بين القطاعات الإقتصادية على استخدام المصفوفات أو ما ندعوها جداول المدخلات والمخرجات Inputs Outputs Tables، وبدأ انتشـــارها منذ منتصـــف القرن الماضـــي على يد عالم الاقتصـــاد Wassily Leontief والمعروفه باسـمه. يُمكن أن يُنظر إليها كتوزيع للموارد على الاستخدامات، أو حتى على تطور هيكيلة الاقتصاد على عدة فترات متعاقبة، أو على دراسة أثر القرارات الاقتصادية على هيكلية الاقتصاد الكلي.

بفرض أن الاقتصـــاد القومي مقســم إلى عدة قطاعات: n قطاع، تهتم جداول المدخلات والمخرجات بعرض وتحليل العلاقات المتبادلة بين مختلف القطاعات الاقتصادية على المستوى القومي خلال فترة محددة، حيث تُمثل على شـــكل مصـــفوفة تظهر القطاعات فيها كقطاعات مُنتجة في الصـــفوف وكقطاعات مُستهلكة في الأعمدة، مما يعني أن عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة أي أن المصفوفة مربعة من الرتبة nxn، يُمكن أن يضـــاف إلى الجدول بعض الأعمدة والأســطر للتوضــيح ولا تدخل مباشرةً في العلاقة التبادلية بين القطاعات، كما يبين الجدول أدناه.

تفرض بعض الفرضيات الأولية على جداول المخرجات والمدخلات:

1. كل قطاع معرف بعوامل إنتاج ثابتة، أي أن هناك علاقة ثابتة أو غير مرنة بين مستوى الخرج لأي قطاع والمستويات المطلوبة للمدخلات، حيث يتم تجاهل مبادئ الاقتصاد السلمي.
2. إنتاج الخرج في كل قطاع معرف بعائد سلمي ثابت، أي أن زيادة (إنقاص) نسبة مئوية محددة لخرج القطاع يتطلب زيادة (إنقاص) نفس النسبة في جميع مدخلات القطاع.

3. تكنولوجيا الإنتاج تفرض كمعطى محدد، توضـــــع وتثبت معاملات توابع الإنتاج من أجل تكنولوجيا محددة.

4. كل قطاع يُنتج سلع/خدمات متجانسة.

عادةً ما يُعبر عن واحدات قياس قيم الجدول بواحدات فيزيائية (الطن أو ســــاعات العمل مثلاً) أو بعملة محددة (الدولار مثلا) وهو الأكثر انتشاراً.

		القطاعات المستهلكة						الطلب النهائي F				إجمالي الطلب
		زراعة	صناعة	...	قطاع j	...	قطاع n	C	I	G	E	
القطاعات المُنتجة	زراعة	X_{11}	X_{12}				X_{1n}	C_1	I_1	G_1	E_1	X_1
	صناعة	X_{21}	X_{22}				X_{2n}	C_2	I_2	G_2	E_2	X_2
	...	...					...	...	...	...	...	...
	قطاع i	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{in}	C_i	I_i	G_i	E_i	X_i
	...	...					...	...	...	...	...	...
	قطاع n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nj}	...	X_{nn}	C_n	I_n	G_n	E_n	X_n
القيمة المضافة V	أجور W	W_1	W_2	...	W_j	...	W_n	W_C		W_G		W
	فوائد R	R_1	R_2	...	R_j	...	R_n					R
	استيراد M	M_1	M_2	...	M_j	...	M_n	M_C	M_I	M_G		M
الإنتاج المحلي (العرض)		X_1	X_2	...	X_j	...	X_n	C	I	G	E	

حيث X_i: قيمة مخرجات القطاع i.

X_{ij}: قيمة التبادل من القطاع i إلى القطاع j، أو قيمة المدخلات المُنتَجة في القطاع i والمُستَخدمة في القطاع j. ينظر إليها كقيمة مبيعات القطاع i (مدخلات) إلى القطاع j (مخرجات).

V_j: إجمالي القيمة المضافة المستخدمة في عملية الإنتاج للقطاع j، وتشمل: الأجور W_j، الفوائد والأرباح R_j، والمستوردات M_j للقطاع المعني j. لدينا: $V_j = W_j + R_j + M_j$.

إجمالي الأجور W: $W = \sum_{j=1}^{n} W_j + (W_c + W_G)$ حيث W_c أجور العائلات، W_G الأجور الحكومية.

إجمالي الفوائد والأرباح R: $R = \sum_{j=1}^{n} R_j$.

إجمالي المســــتوردات M: $M = \sum_{j=1}^{n} M_j + (M_c + M_I + W_G)$ حيث M_c مســــتوردات العائلات، M_I مستوردات الشركات، و M_G مستوردات الحكومة.

F_i: إجمالي قيمة الســـلع والخدمات التي أنتجها القطاع i، وتشـــمل: نفقات اســـتهلاك العائلات C_i، النفقات الاستثمارية I_i، المشتريات الحكومية G_i، والتصدير E_i من القطاع المعني i. لدينا $F_i = C_i + I_i + G_i + E_i$.

إجمالي الاستهلاك C: $C = \sum_{i=1}^{n} C_i + (M_c + M_G)$ حيث M_c استهلاك العائلات، M_G استهلاك الحكومة.

إجمالي الاستثمار I: $I = \sum_{i=1}^{n} I_i + M_I$ حيث M_I استثمار الشركات.

إجمالي الإنفاق الحكومي G: $G = \sum_{i=1}^{n} G_i + (W_G + M_G)$ حيث W_G أجور الحكومة، M_G استهلاك الحكومة.

إجمالي التصدير E: $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.

يعبر مجموع كل عمود X_j عن قيمة الناتج المحلي للقطاع j أي مجموع المدخلات الوسيطة والقيمة المضافة، في حين يعبر مجموع كل سطر X_i عن قيمة الإنتاج المحلي للقطاع i أي الاستخدام الوسيط والطلب النهائي، ولا بد أن يتساوى المجموع مستوى الأعمدة (العرض) أو الصفوف (الطلب) لنفس القطاع k، حيث k=1, 2, …, n كما يلي:

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} X_{kj} + F_k = \sum_{i=1}^{n} X_{ik} + V_k$$

يُمكن التعبير عن مجموع كل سطر X_i (إجمالي الطلب للقطاع i) على شكل معادلة خطية:

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + F_i = X_i$ من أجل i=1, 2, …, n معادلة [1]

حيث $F_i = C_i + I_i + G_i + E_i$

كذلك يُمكن التعبير عن مجموع كل عمود X_j (إجمالي العرض للقطاع j) على شكل معادلة خطية:

$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j = X_j$ من أجل i=1, 2, …, n معادلة [2]

حيث $V_j = W_j + R_j + M_j$

على مستوى الاقتصاد الكلي والحسابات القومية، لدينا معادلات الحسابات القومية:

التوازن الإجمالي: $W + R + M = C + I + G + E$

أو كتابتها على الشكل: $W + R = C + I + G + (E – M)$

حيث $(W + R)$ تمثل الدخل القومي الإجمالي GDI: Gross Domestic Income.

$(C + I + G)$ تمثل الناتج المحلي الإجمالي GDP: Gross Domestic Product.

$(E - M)$ تمثل ميزان التجارة الخارجية Net Exports-Imports.

تفرض المعادلات التوازنية أن كل مدخل j مســـتخدم من قبل قطاع i يتناســـب بشـــكل طردي Proportional مع ناتج القطاع j أي مع X_j ونعبر عنه بشكل خطي:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \qquad \text{معادلة [3]}$$

حيث $0 < a_{ij} < 1$، و تُدعى الأمثال a_{ij} بالمعاملات الفنية Technical Coefficient وتعبر عن الموارد المستخدمة من المنتج j لإنتاج وحدة واحدة من المنتج i، وبالتالي يُعاد كتابة المعادلات أعلاه كمجموع كل سطر، من أجل كل سطر i حيث $i=1, 2, \ldots, n$، كما يلي:

مجموع السطر X_i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{ij} + F_i = X_i$ معادلة [4]

يحصل التوازن عندما تتساوى المدخلات مع المخرجات أي $A.X + F = X$ أو نعبر عنها بالشكل:

$$(\mathbf{I} - A)\, X = F \qquad \text{معادلة [5]}$$

حيث: مصفوفة المعاملات الفنية: $A = [a_{ij}]$

شعاع عمود قيم الإنتاج المحلي: $X = [x_{ij}]$

شعاع عمود الطلب النهائي: $F = [F_i]$

تُدعى المصفوفة **$(\mathbf{I} - \mathbf{A})$** بمصفوفة ليونتييف.

بالتالي يُمكن حل هذه الجملة (إن وُجد الحل) وإيجاد قيم المتغيرات X بحل جملة المصفوفات:

$$X = (\mathbf{I} - A)^{-1} F \qquad \text{معادلة [6]}$$

يُدعى مقلوب المصفوفة $(\mathbf{I} - A)^{-1}$ بمقلوب مصفوفة ليونتييف أو مضاعفات الإنتاج المحلي، حيث يُدعى كل عنصر منها بالمضاعف الجزئي Partial Multiplier كونه يقيس الأثر المضاعف الذي أحدثه التغير في الطلب النهائي من المتطلبات (المباشرة وغير المباشرة) المتمثلة في هذا العنصر، والتي تعكس علاقة (المباشرة وغير المباشرة) القطاع المُنتج i بالقطاع المستخدم j.

يُنظر إلى حل المصفوفة X كنتيجة لعملية تدريجية Iterative Process حيث يُمكن رؤية التعديلات التدريجية على فترات/دورات متتالية للمخرجات على الطلب النهائي ومتطلبات المدخلات، كما يلي:

$$X = F + A.F + A(A.F) + \ldots + A(A^{n-1})F = (I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1})\, F$$

تطبيق (8-8) تطبيق المصفوفات على جداول المدخلات والمخرجات (Static Model).

ليكن لدينا مصفوفة المدخلات والمخرجات لثلاثة قطاعات اقتصادية: زراعة، صناعة، وخدمات، كما يلي:

		زراعة X1	صناعة X2	خدمات X3	الطلب F	**الناتج المحلي**
زراعة X1		20	10	5	35	**70**
صناعة X2		10	15	8	12	**45**
خدمات X3		4	6	8	10	**28**
الناتج المحلي		**70**	**45**	**28**		
القيمة المضافة V	العمالة L	45	20	10		
	الأجور W	30	20	15		
	الفوائدR	20	40	10		

من الجدول، لدينا:

مصفوفة قيم المدخلات والمخرجات I-O: $A_{IO} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 5 \\ 10 & 15 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

شعاع الطلب حسب القطاع: $F = \begin{bmatrix} 35 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$

شعاع الناتج المحلي حسب القطاع: $X = \begin{bmatrix} 70 \\ 45 \\ 28 \end{bmatrix}$

حساب مصفوفة المدخلات والمخرجات النسبية أو مصفوفة المعاملات التكنولوجية A، وذلك بتقسيم كل قيمة من خلايا القطاع على الناتج المحلي للقطاع (مجموع العمود)، فنجد:

$$A = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.222 & 0.179 \\ 0.143 & 0.333 & 0.286 \\ 0.057 & 0.133 & 0.286 \end{bmatrix}$$

تُقرأ هذه المصـــــفوفة كما يلي: من أجل إنتاج دولار واحد في القطاع الأول (العمود الأول أي الزراعة)، نحتاج إلى 0.286 دولار من القطاع الأول (الزراعة) و 0.143 من القطاع الثاني (الصناعة) و 0.057 من القطاع الثالث (الخدمات).

نطرح مصفوفة المعاملات التكنولوجية من المصفوفة الواحدية (I –A)، فنجد:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.286 & 0.222 & 0.179 \\ 0.143 & 0.333 & 0.286 \\ 0.057 & 0.133 & 0.286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.714 & -0.222 & -0.179 \\ -0.143 & 0.667 & -0.286 \\ -0.057 & -0.133 & 0.714 \end{bmatrix}$$

محدد هذه المصفوفة(I –A) يساوي det(A) = 0.276.

نحسب مصفوفة ليونتييف $(\mathbf{I} - A)^{-1}$ أي المقلوب $(\mathbf{I} - A)^{-1}$:

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.585 & 0.660 & 0.660 \\ 0.428 & 1.809 & 0.831 \\ 0.207 & 0.390 & 1.608 \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة التي سنستخدمها للتعديل في هيكلية الاقتصاد.

لنفترض حالياً أنه من المتوقع أن يكون الطلب الجديد كما يلي: الزراعة 45، الصـــناعة 20، والخدمات 15 أي $F = \begin{bmatrix}45\\20\\15\end{bmatrix}$، فما هو الإنتاج المحلي المطلوب حسب القطاع؟

من المعادلة [6]، نوجد قيم الإنتاج الجديدة بتطبيق الصيغة: $X = (\mathbf{I} - A)^{-1}F$:

$$X = (I - A)^{-1}F = \begin{bmatrix}1.585 & 0.660 & 0.660\\0.428 & 1.809 & 0.831\\0.207 & 0.390 & 1.608\end{bmatrix}\begin{bmatrix}45\\20\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}94.43\\67.91\\41.23\end{bmatrix}$$

X1 =1.585*45 + 0.660*20 + 0.660*15 = 94.43.

X2 =0.428*45 + 1.809*20 + 1.608*15 = 67.91.

X3 =0.207*45 + 0.390*20 + 1.608*15 = 41.23.

إذاً التركيبة الجديدة لإنتاج (مخرجات) كل قطاع هي: الزراعة X1=94.43، الصــناعة X2=67.91، والخدمات x3=41.23.

لنحصــل على القيم النقدية الجديدة كمصـفوفة A2، يُمكن إعادة توزيع التركيبة الجديدة للناتج المحلي المطلبو على القطاعات بنفس نسـب التوزيع حسـب مصـفوفة المعاملات التكنولوجية A أعلاه، وذلك بضرب كل معامل بالقيمة الكلية للقطاع كما يلي:

$$A2 = \begin{bmatrix}0.286x94.43 & 0.222x67.91 & 0.179x41.23\\0.143x94.43 & 0.333x67.91 & 0.286x41.23\\0.057x94.43 & 0.133x67.91 & 0.286x41.23\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26.98 & 15.09 & 7.363\\13.49 & 22.64 & 11.78\\5.396 & 9.054 & 11.78\end{bmatrix}$$

بالتالي تكون الزيادة في الناتج المحلي لكل قطاع كما يلي:

الناتج المحلي	الطلب	خدمات	صناعة	زراعة	
24.43	10	2.363	5.090	6.981	زراعة
22.91	8	3.780	7.635	3.491	صناعة
13.23	5	3.780	3.054	1.396	خدمات
60.57		13.23	22.91	24.43	الناتج المحلي (العرض)

كما يُمكن الحصول على القيم النقدية للأجور والفوائد والعمالة المطلوبة بنفس الطريقة.

مثلاً، لدينا شعاع نسبة الأجور W_j إلى الناتج المحلي قبل التعديل X_j:

$$h_j = \frac{W_j}{X_j} = \begin{bmatrix}\frac{30}{70} = 0.429 & \frac{20}{45} = 0.444 & \frac{15}{28} = 0.536\end{bmatrix}$$

ومنه يُمكن حساب القيم النقدية للأجور الجديدة $W2_j$ بضرب النسب أعلاه hj بالناتج المحلي لكل قطاع Xj بعد التعديل:

القطاع الأول الزراعة: $W2_1 = h_1*X_1 = 0.429 \times 94.43 = 40.71$

القطاع الثاني الصناعة: $W2_2 = h_2*X_2 = 0.444 \times 67.91 = 30.18$

القطاع الثاني الصناعة: $W2_3 = h_3*X_3 = 0.536 \times 41.23 = 22.09$

ويكون المجموع الإجمالي للأجور بعد التعديلات: $W2 = 40.71 + 30.18 + 22.09 = 92.74$

أو يُمكن حسابه بشكل مصفوفي كما يلي:

$$W2_j = h_j X_j^T = [0.429 \quad 0.444 \quad 0.536]\begin{bmatrix}94.43\\67.91\\41.23\end{bmatrix} = 92.74$$

بنفس الطريقة تماماً، يُمكن حساب حجم النقود المطلوبة للعمالة والفوائد وغيرها في الجدول.

نلاحظ أن حجم الأجور قبل التعديلات كانت 65 (وحدة نقدية) وأصبحت 92.74 (وحدة نقدية)، إذاً التعديلات المقترحة تتطلب زيادة في الأجور مقدارها 27.74 (وحدة نقدية) $92.74 - 65 = 27.74$.

أسئلة واختبارات الفصل الثامن: المصفوفات

1) أسئلة صح / خطأ True/False

	السؤال	صح	خطأ
1	يُقصد برتبة المصفوفة m x n ما يلي: مصفوفة عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n.	✓	
2	لا يمكن أبداً أن تكون المصفوفة من الرتبة m x 1 حيث $m > 1$.		✓
3	ندعو المصفوفة من الرتبة 1 x n حيث $n > 1$ بسطر شعاع Row Vector.	✓	
4	يُقصد بمنقول المصفوفة A المصفوفة الناتجة عن التبديل بين مواضع الأعمدة ومواضع الأسطر A^T.	✓	
5	منقول جمع مصفوفتين هو جمع المنقولين: $(A + B)^T = A^T + B^T$.	✓	
6	منقول جداء معرف على مصفوفتين A.B هو جداء المنقولين: $(A.B)^T = A^T.B^T$.		✓
7	حاصل جمع/طرح المصفوفة A إلى المصفوفة الصفرية هو نفس المصفوفة: $A \pm 0 = A$	✓	
8	ضرب مصفوفة بعدد سلمي c هي عملية غير توزيعية: $c (A + B) \# c A + c B$		✓

9	ضرب مصفوفة بعدد سلمي هي عملية تجميعية: c k (A) = c (k A) = c k A	✓	
10	يتم الحصول على حاصل جداء معرف لشعاع سطر a وشعاع عمود b أي a.b بجمع حاصل جداء كل عنصر من a بالعنصر المقابل له من b.	✓	
11	جداء مصفوفة A رتبتها n x s بالمصفوفة B رتبتها h x m، أي A.B حيث h # s هو مصفوفة رتبتها h x s.		✓
12	حاصل جداء معرف لمصفوفة A من الرتبة 4 x 3 بالمصفوفة B من الرتبة 3 x 5، هو مصفوفة رتبتها 4 x 5.	✓	
13	جمع المصفوفات هو عملية توزيعية على الضرب: (A + B) C = AC + BC شرط أن يكون الضرب معرف.	✓	
14	لدينا المصفوفتين A من الرتبة $3x3$، B من الرتبة $2x3$، فإن عملية الجمع A+B ممكنة.		✓
15	المصفوفة الحيادية **I** هي مصفوفة مربعة من الرتبة nxn حيث جميع عناصرها تساوي الصفر ادا عناصر القطر تساوي الواحد.	✓	
16	ندعو المصفوفة بأنها أحادية Singulr إذا كان محدده لا يساوي الصفر.		✓
17	إذا كان لدينا مصفوفة مربعة من الرتبة n فإن عدد المرافقات يساوي n^2 مرافق.	✓	
18	في جداول المدخلات والمخرجات، يُدعى مقلوب مصفوفة ليونتيف $(\mathbf{I-A})^{-1}$ بمصفوفة مضاعفات الإنتاج المحلي.	✓	

2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- لدينا الشعاع $B = \begin{bmatrix}5\\9\\4\end{bmatrix}$ فإن منقول هذا الشعاع B^T هو:

أ) $B^T = \left|4 \quad 9 \quad 5\right|$

ب) $B^T = |18|$

ج) $B^T = \left|5 \quad 9 \quad 4\right|$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- لدينا الشعاعين $A = \begin{bmatrix}-5\\8\\7\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}5\\9\\4\end{bmatrix}$ فإن حاصل طرح الشعاعين A-B هو:

أ) $A - B = 8$

ب) لا يمكن طرحها كونها أعمدة أشعة

ج) $A - B = \begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix}5 & -4\\3 & 7\end{bmatrix}$ فإن منقول هذه المصفوفة A^T هو:

أ) $A^T = \begin{bmatrix}5 & -4\\3 & 7\end{bmatrix}$

ب) $A^T = \begin{bmatrix}5 & 3\\-4 & 7\end{bmatrix}$

ج) لا يمكن إيجاد المنقولة كونها مربعة　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- لدينا المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ فإن حاصل طرح المصفوفتين A-B هو:

أ) $A - B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$　　　　ب) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

ج) لا يمكن إيجاد حاصل الطرح كونها مربعة　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- لدينا المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن جداء المصفوفة A بالثابت c=3 هو:

أ) $c.A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$　　　　ب) $c.A = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

ج) لا يمكن إيجاد الجداء　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- لدينا المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن جداء المصفوفة A بالصفر c=0 هو:

أ) $c.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　　　　ب) $c.A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ج) لا يمكن إيجاد الجداء　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- لدينا الشعاعين $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ فإن حاصل جداء الشعاعين BxA هو:

أ) $BxA = 16$　　　　ب) لا يمكن إيجاد الجداء بسبب اختلاف الرتب

ج) $BxA = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- لدينا الشعاعين $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ فإن حاصل جداء الشعاعين BxA هو:

أ) $BxA = 22$　　　　ب) لا يمكن إيجاد الجداء بسبب اختلاف الرتب

ج) $BxA = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- لدينا المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ فإن جداء المصفوفتين A.B هو:

أ) $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 42 & 4 \end{bmatrix}$　　　　ب) $A.B = 53$

ج) لا يمكن إيجاد الجداء　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- محدد المصفوفة الواحدية $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أي Det(I) هو:

أ) Det(I) = 1　　　　ب) Det(I) = 0

ج) لا يمكن إيجاد المحدد　　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ أي $\mathrm{Det}(A)$ هو:

أ) $\mathrm{Det}(A) = 8$
ب) $\mathrm{Det}(A) = 6$
ج) لا يمكن إيجاد المحدد
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ أي A^{-1} هو:

أ) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/6 & -2/6 \\ -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$
ب) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/6 & 2/6 \\ 1/6 & 4/6 \end{bmatrix}$
ج) لا يمكن إيجاد المقلوب
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ أي $\mathrm{Det}(A)$ هو:

أ) $\mathrm{Det}(A) = 20$
ب) $\mathrm{Det}(A) = 0$
ج) لا يمكن إيجاد المحدد
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- ليكن لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن مرافق العنصر $|A_{11}| = Cof(a_{11})$ هو:

أ) $|A_{11}| = 2$
ب) $|A_{11}| = 9$
ج) $|A_{11}| = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- ليكن لدينا الشعاعين $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $B = [0 \quad 4 \quad -5]$ فإن الجداء A.B هو:

أ) $A.B = 8$
ب) $A.B = 0$
ج) لا يمكن حسابه بسبب اختلاف الرتب
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3) مسائل \ قضايا للمناقشة

<u>السؤال (8-1) سعر التوازن لمنتجين باستخدام المصفوفات.</u>

لدينا معادلتي سعري التوازن لمنتجين كما يلي:

$-4P_1 + P_2 = -13$ $\qquad$ $2P_1 - 5P_2 = -7$

والمطلوب:

1) كتابة المعادلتين على شكل مصفوفي.

2) إيجاد سعري التوازن عبر حل جملة المعادلتين باستخدام قواعد المصفوفات.

(توجيهات للإجابة: تطبيق مباشر 8-3)

<u>السؤال (8-2) مقلوب مصفوفة من الرتبة 3x3.</u>

ليكن لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ والمطلوب:

1) حساب جميع مرافقات المصفوفة: $|A_{ij}| = Cof(a_{ij})$.

2) حساب محدد المصفوفة: Det(A).

3) إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1}.

السؤال (8-3) أسعار وكميات التوازن لمنتجين باستخدام المصفوفات.

لدينا معادلات التوازن لمنتجين A, B كما يلي:

معادلات الطلب للمنتج A: $D_A = 50 - 2P_A + P_B$ وللمنتج B: $D_B = 10 + P_A - 4P_B$

معادلات العرض للمنتج A: $S_A = -20 + P_A$ وللمنتج B: $S_B = -10 + 5P_B$

والمطلوب:

1) كتابة معادلات التوازن بشكل جبري.

2) كتابة جملة معادلات التوازن على شكل مصفوفي.

3) إيجاد أسعار وكميات التوازن عبر حل جملة المعادلتين باستخدام قواعد المصفوفات.

(توجيهات للإجابة: مساواة العرض والطلب، وتطبيق مباشر 8-5)

السؤال (8-4) استخدام قاعدة كرامر لحل جملة معادلتين من متغيرين.

ليكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين:

$$2x + 4y = 16 \quad \text{و} \quad 3x - 5y = -9$$

والمطلوب:.

1) كتابة جملة المعادلات على شكل مصفوفي.

2) إيجاد قيم المتغيرين x, y باستخدام قاعدة كرامر .

(توجيهات للإجابة: تطبيق مباشر فقرة 8-4)

السؤال (8-5) حل نموذج IS-LM لقطاعين اقتصاديين.

ليكن نموذج IS-LM الآتي لاقتصاد من قطاعين:

$$0.25Y + 10r - 1040 = 0 \quad \text{و} \quad 0.10Y - 36r - 256 = 0$$

حيث Y, r قيم التوازن للدخل القومي ومعدل الفائدة. والمطلوب:.

1) كتابة جملة المعادلات على شكل مصفوفي.

2) إيجاد قيم Y, r عند التوازن باستخدام قواعد المصفوفات.

(توجيهات للإجابة: تطبيق مباشر 7-6)

المراجع والمصادر

مراجع عربية

أبو صبحا، سليمان (2014). الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية. دار الأكاديميون للنشر والتوزيع. عمان، الأردن. ISBN: 9957449079, 9789957449070.

الفاضل، عبدالرزاق & النعيمي، قاسم & الجندي، ياسر & نقار، عثمان. (2015). الرياضيات الاقتصادية والإدارية. منشورات جامعة دمشق، كلية الاقتصاد، دمشق، سورية.

الفاضل، عبدالرزاق & عواد، منذر & الجندي، ياسر. (2015). الرياضيات المالية والعامة. نشورات جامعة دمشق، كلية الاقتصاد، دمشق، سورية.

البياتي، محمود مهدي & القاضي، دلال. (2015). الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والاقتصادية. دار الحامد للنشر والتوزيع. عمان، الأردن. ISBN: 5095329957

بول أ. ساموليسون، مايكل د. نوردهاوس، مايكل ج. ماندل (1995). الاقتصاد. ماكرو هيل المغفلة، ترجمة: هشام عبدالله، الأهلية للنشر والتوزيع. الأردن، 2006.

دعبول، موفق؛ الحمصي، إلهام (2014). موسوعة الرياضيات (المرحلتان الأساسية والثانوية والسنوات الجامعية الأولى). دار البشائر، دمشق، سورية.

عبود، طلال. (2017). نظرية القرارات. منشورات المعهد العالي لإدارة الأعمال HIBA، دمشق، سورية.

كولو، أديب. (2006). بحوث العمليات: التقنيات الكمية في الإدارة. دمشق، الطبعة الثانية، الناشر : المؤلف.

مراجع أجنبية

ARROW, K. J. (1965). Aspects of the Theory of Risk Bearing. *In "The Theory of Risk Aversion". Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio.* Reprinted in: Essays in the Theory of Risk Bearing, Markham Publ. Co., Chicago, 1971, 90–109.

JAXQUES, Ian (2018). Mathematics for Economics and Business. 9th ed. Pearson Education Limited, U.K. ISBN: 978-1-292-19170-6.

PRATT, J. W. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. Econometrica. 32 (1–2): 122–136. doi:10.2307/1913738. JSTOR 1913738.

ROSSER, Mike. & LIS, Piotr. (2016). Basic Mathematics for Economists. Third Edition, Routledge Taylor & Francis Group, London, U.K. ISBN: 9780415485920.

SVIRIN, Alex. (2004). 1300 Math Formulas. http://fribok.blogspot.com. ISBN: 9949107741

موقع مفيد لتبسيط الرياضيات على YouTube: Scientific Flashlight