الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

إسم المادة: رياضيات الإدارة

إسم المدرّسة:تغريد السيد

الأكاديمية العربية الدولية – منصة أعد

تمهيد

- صمم هذا المقرر بهدف تقديم بعض الأساليب الرياضية التي يحتاج إليها طالب الاقتصاد والعلوم الإدارية في دراسته للظواهر الاقتصادية وتحليلها بطريقة كمية بهدف الوصول إلى حل لها . حيث يهدف هذا المقرر إلى تعريف الطالب بأساسيات التفاضل والتكامل وكيفية استخدامها في حل المشكلات الاقتصادية والإدارية .وذلك من خلال التعرف على الدوال بأنواعها المختلفة وكيفية حساب النهاية لها والبحث في اتصالها ومن ثم إيجاد الاشتقاق لها وتحديد القيم العظمى والصغرى بالإضافة إلى إيجاد التكامل المحدود وغير المحدود وأساليب التكامل المختلفة في التطبيقات الاقتصادية .

محتوى المادة

-يحتوي هذا الجزء من المادة:

- الدوال (المجموعات)
- الأزواج المرتبة
- المستوى الديكارتي
- الضرب الديكارتي
- العلاقة و الدالة
- أنواع الدوال
- كثيرات الحدود

الدوال (المجموعات)

- الدالة أوز التابع أو الاقتران : هي كائن رياضي يمثل علاقة تربط كل عنصر من مجموعة تدعى المنطلق أو مجموعة الانطلاق أو المجال X بعنصر واحد وواحد فقط على الأكثر من مجموعة تدعى المستقر أو المجال المقابل أو مجموعة الوصول Y.

- تعريف : لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقيةR فإن عدد عناصر المجموعة A يرمز له n(A) .

* مثال: إذا كانت $A=\{١,٢,٣,٤,٥\}$ فإن

$n(A)=٥$

* مثال: إذا كانت $B=Q=\{\ \}$ حيث B هي المجموعة الخالية فإن

$n(B)=\ ٠$

الدوال (المجموعات)

*مثال: اذا كانت C={t،s،١,٣} فإن

n(C)= ٤

- المجموعة A={،١,٢,٣,٤،....} تسمى مجموعة غير محددة
- أما المجموعة B={١,٣,٥,٧,٩} تسمى مجموعة محددة (معدودة)
- نلاحظ أيضاً أن {٦,٢} = {٢,٦} ترتيب العناصر في أي مجموعة غير ضروري

الدوال (المجموعات)

- مجموعة القوى لمجموعة ما

- مجموعة القوة للمجموعة **X** هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة **X**

ويرمز لمجموعة القوة الخاصة بالمجموعة **X** على الصورة **P(x):**

* **مثال:** أوجد مجموعة القوى للمجموعة X={a,b,c}

- **الحل:**

$$\mathbf{P(x)} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

الدوال (المجموعات)

- ملاحظة :اذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي n من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية الممكن الحصول عليها يساوي2^n

*مثال : إذا كانت A={١,٢} فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة A

$$2^n = ٤$$

أما مجموعة المجموعات الجزئية من A فهي :

P(A) ={ Ø, {1 } , {2},{1,2}}

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الدوال (الأزواج المرتبة)

تعريف الأزواج المرتبة : هي أزواج من الأرقام المستخدمة لتحديد موقع نقطة في المستوى الإحداثي المستطيل ومكتوبة في النموذج (x,y) .

تكتب على الصورة (X,Y) حيث يسمى المتغير X بالإحداثي السيني أو (المسقط الأول)

ويسمى المتغير Y بالإحداثي الصادي أو (المسقط الثاني) .

* مثال : (٣، – ٥) ، (–١، – ٢)

المسقط الأول المسقط الثاني الإحداثي السيني الإحداثي الصادي

الدوال (الأزواج المرتبة)

* ملاحظة على الأزواج المرتبة:

- الترتيب ضروري $(X,Y) \neq (Y,X)$

$(١,٢) \neq (١,٢)$

- واذا كان $(X,Y) = (a\ ,\ b)$ فإن

$X = a, y = b$

الدوال (الأزواج المرتبة)

*مثال: اذا كان (-٣ ,١) = (x+1,y-2) أوجد قيمة كل من x,y ؟

-الحل:

$x+1=3$

$X=3-1=2$

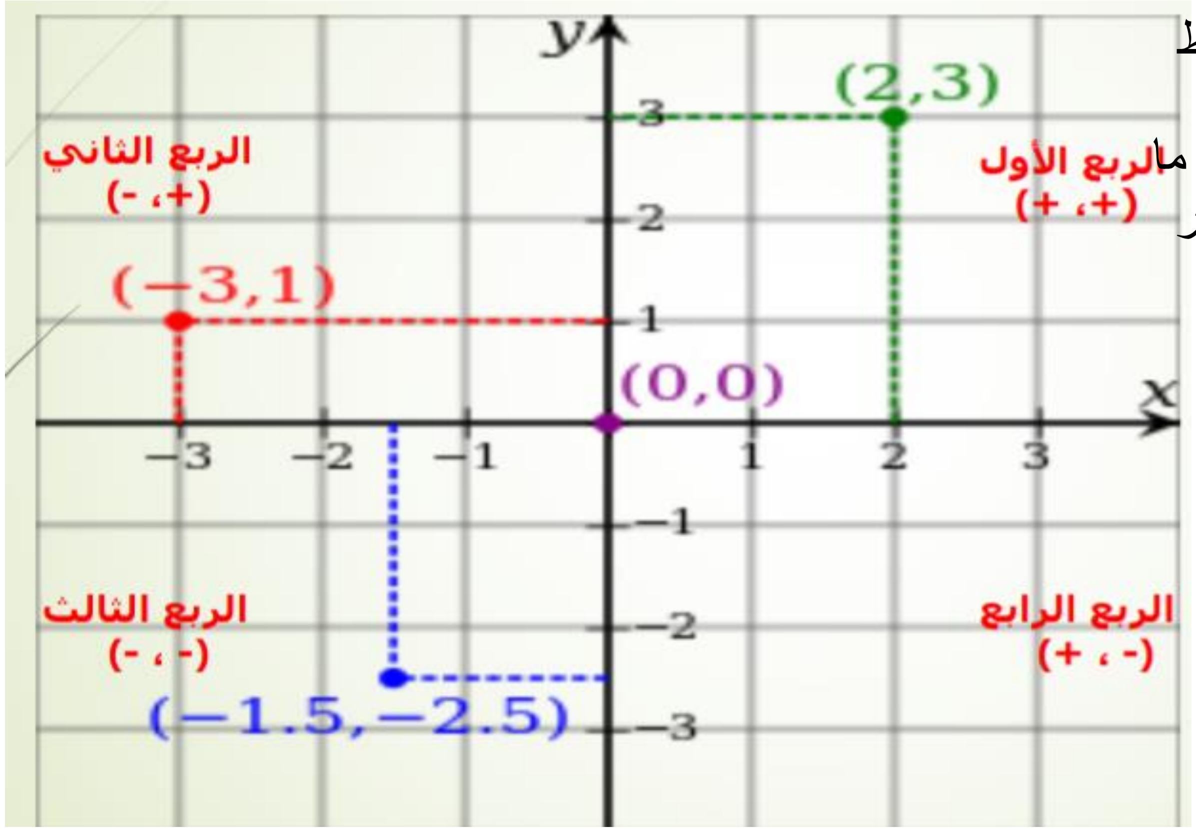
$y-2=-1$

$y=2-1=1$

الدوال (المستوى الديكارتي)

- المستوى الديكارتي هو مايكون مثل استخدام نقاط خطوط طول بالإضافة لخطوط العرض ليتم تحديد مكان ما فيكون عبارة عن المستوى الذي يقوم بعملية تحديد إحداثيات نقطة ما يتم ذلك باستخدام محورين وهما محور السينات أيضاً محور الصادات الموجب والسالب

يمكن تمثيل الأزواج المرتبة على المستوى الديكارتي (المستوى البياني) كما في الشكل التالي :



الدوال (الضرب الديكارتي)

- الضرب الديكارتي:

- يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A, B ورمزه (A x B) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (X,Y) التي ينتمي مسقطها الأول (X) إلى المجموعة الأولى A وينتمي مسقطها الثاني (Y) إلى المجموعة B . بالرموز :

$$A \times B=\{(x,y) \mid X \in A \wedge Y \in B\}$$

الدوال (الضرب الديكارتي)

*مثال : اذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B=\{-3,1,4\}$

فأوجد AxB و BxA ؟

الحل:

$AxB =\{(-2,-3),(-2,1),(-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$

$BxA=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$

لاحظ أن $BxA \neq AxB$

الدوال (الضرب الديكارتي)

مثال: اذا كانت $A=\{1,2\}$ و $B=\{x,y,w\}$

فأوجد AxB و BxA ؟

الحل:

$$AxB=\{ (x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(w,1),(w,2)\}$$

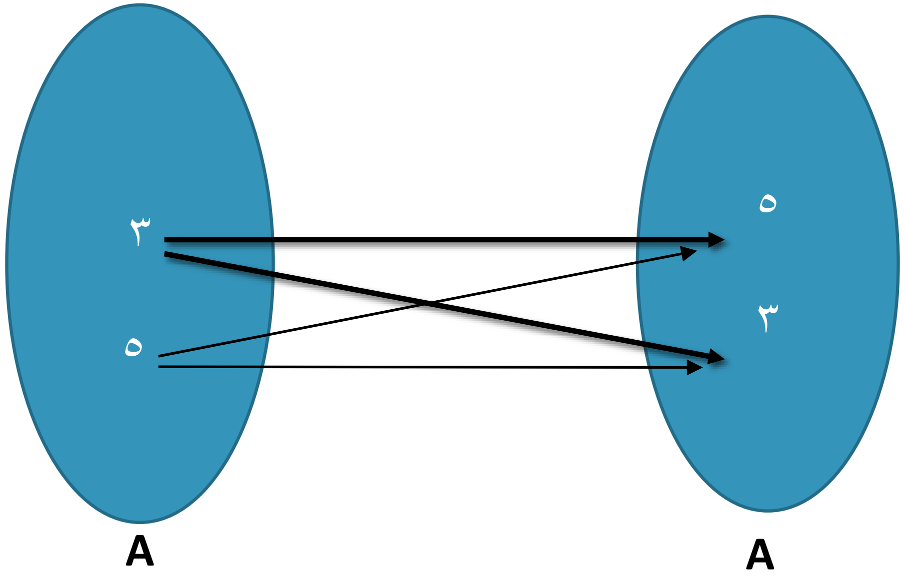
$$BxA=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(w,1),(w,2)\}$$

الدوال (الضرب الديكارتي)

*مثال: اذا كانت $A=\{3,5\}$ فأوجد $A\times A$ ؟

- الحل:

$$AxA=\{ (3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$$



الدوال (الضرب الديكارتي)

*ملاحظة: عدد عناصر الضرب الديكارتي لمجموعتين=

عدد عناصر المجموعة الأولى X عدد عناصر المجموعة الثانية

بالرموز

$$n(AxB)=n(A)X\ n(B)$$

مثال: اذا كان عدد عناصر المجموعة A=3 وعدد عناصر المجموعة B=4

فإن عدد عناصر الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B

$$n(AxB)=n(A)X\ n(B)=3\ X\ 4=12$$

الدوال (العلاقة)

تعريف العلاقة: هي ارتباط بين بعض أو كل من عناصر مجموعة ببعض أو كل من عناصر مجموعة أخرى.

* مثال: اذا كان لدينا $x= (1,2,4)$ $Y=(1,2,3,4,5)$

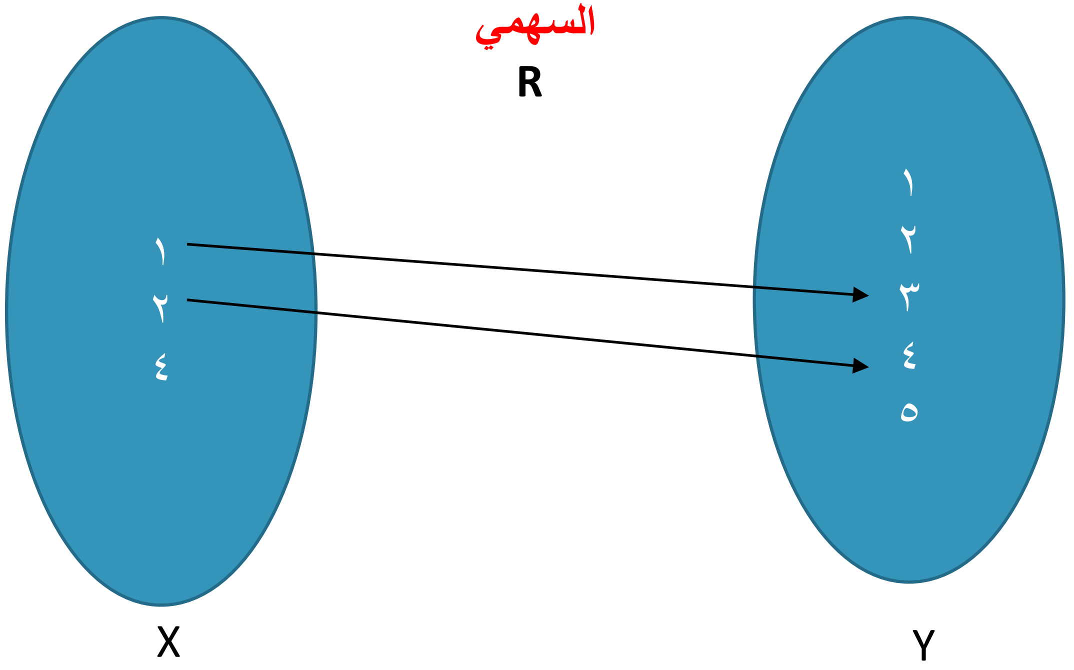
وكانت لدينا العلاقة R من x إلى y بحيث R تعني $b=a+2$

حيث $a \in x$ $b \in y$ اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

الدوال (العلاقة)

$R=\{(1,3),(2,4)\}$

المخطط السهمي
R



لاحظ أن العدد ٤ من المجموعة
X
لايمكن أن يرتبط بأي عدد من المجموعة
y

وذلك لأن ٢+٤=٦
والعدد ٦ لاينتمي إلى المجموعة
y

الدوال (العلاقة)

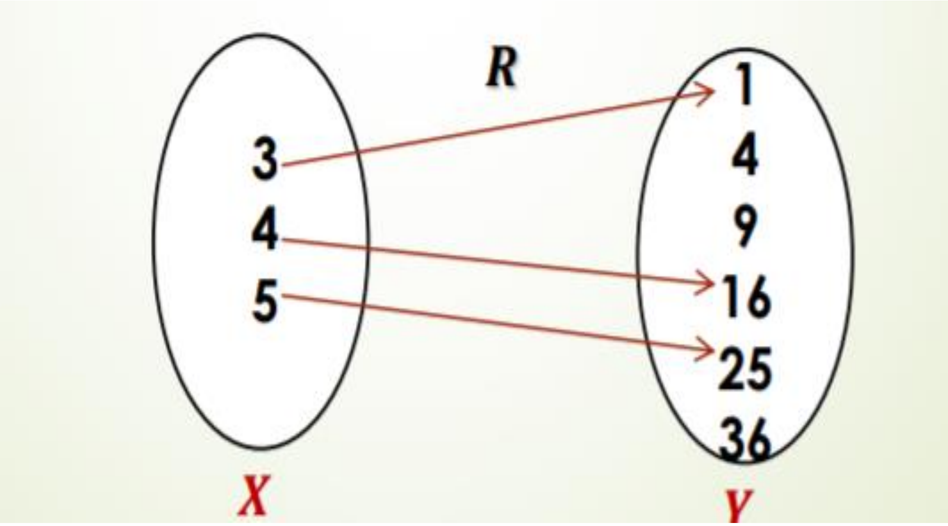
مثال : اذا كان لدينا $x= (3,4,5)$ $Y=(1,4,9,16,25,36)$

وكانت لدينا العلاقة R من x إلى y بحيث R تعني $b=a^2$

حيث $a \in x$ $b \in y$ اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

* الحل:

$R= \{(3,9),(4,16),(1,-3),(5,25)\}$



الدوال (الدالة)

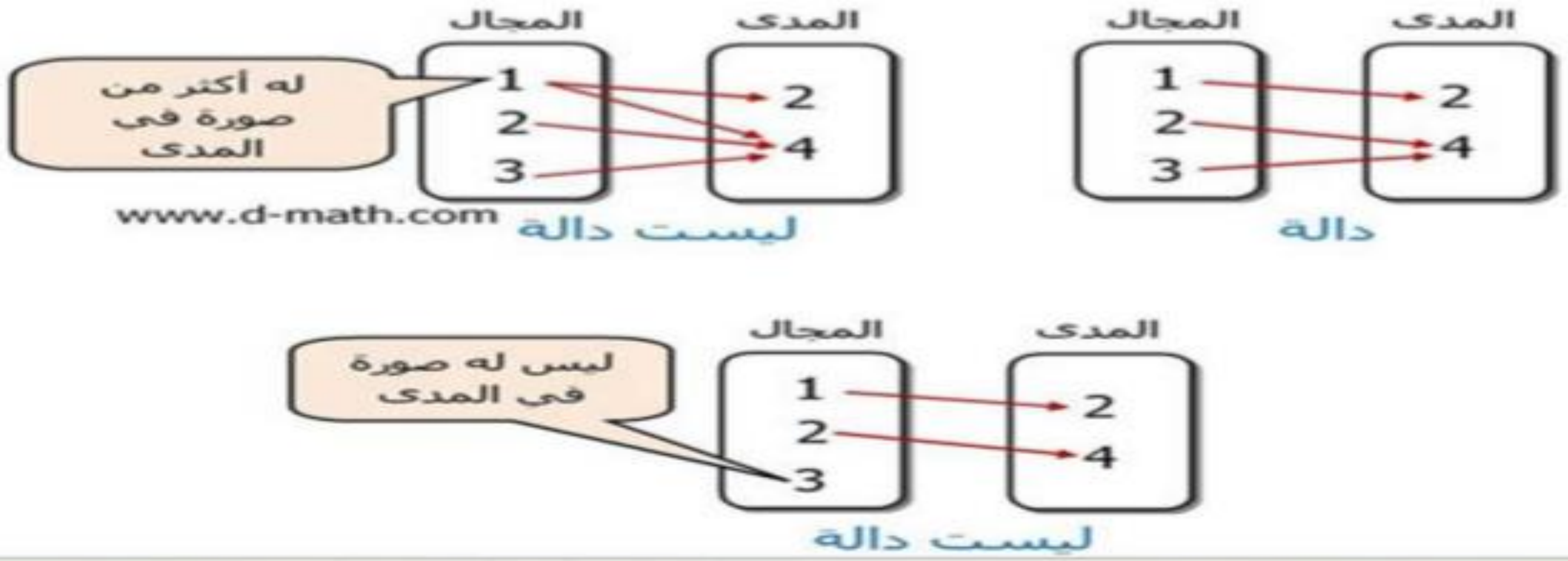
- تعريف الدالة : اذا كانت A,B مجموعتين فإن f دالة من A إلى B بمعنى $f:(A \rightarrow B)$

اذا كانت f مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي بحيث أنه لكل x تنتمي إلى A توجد y واحدة تنتمي إلى B تسمى y قيمة الدالة عند x ويرمز لها بالرمز $y=f(x)$ كما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل والمتغير y بالمتغير التابع .

الدوال (الدالة)

الدالة:

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.



الدوال (الدالة)

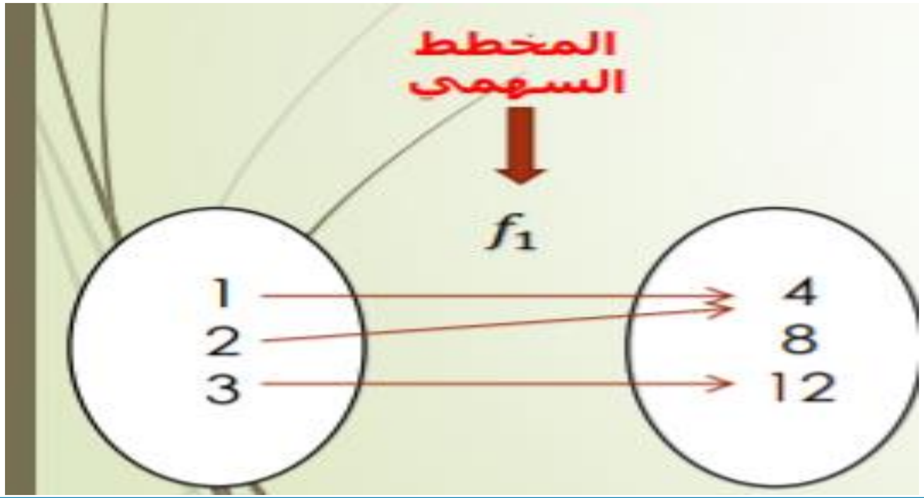
*مثال : اذا كانت $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,8,12\}$ وكانت f_1={(١ ,٤).(٢ ,٤).(٣ ,١٢)}

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$

$f_3= \{(1,4),(1,8)\}$

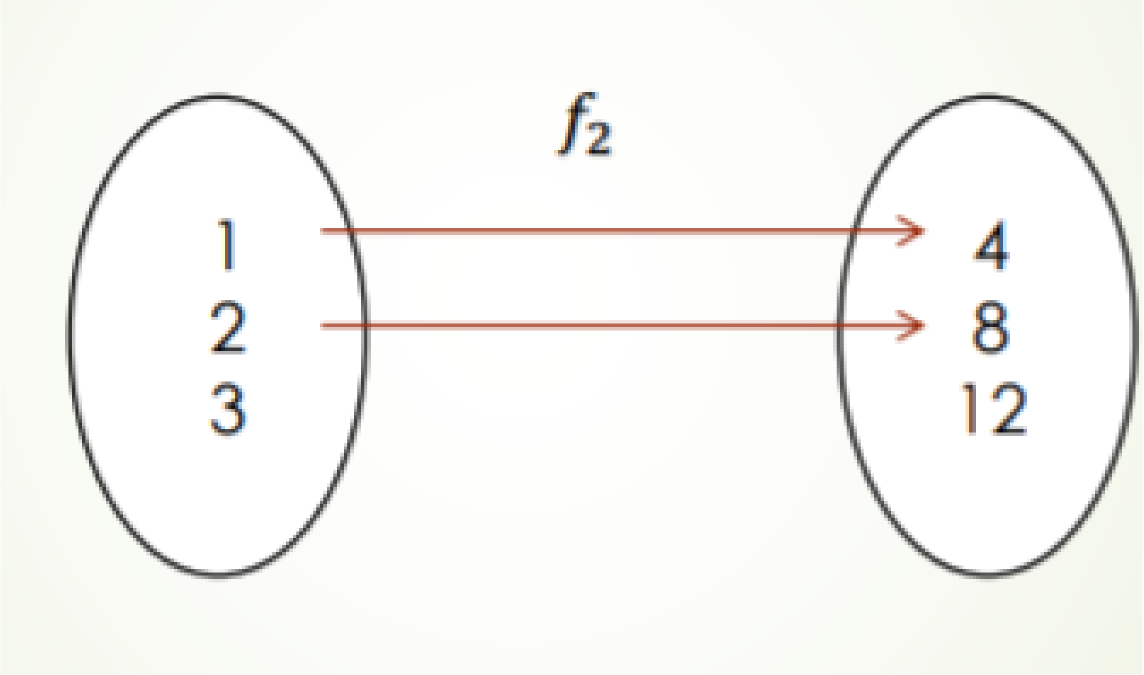
فأي من $f1$ و f_2 و f_3 يعتبر دالة ؟

* الحل: $f1$ يعتبر دالة لأن كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما أن عناصر $f1$ مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي AxB.



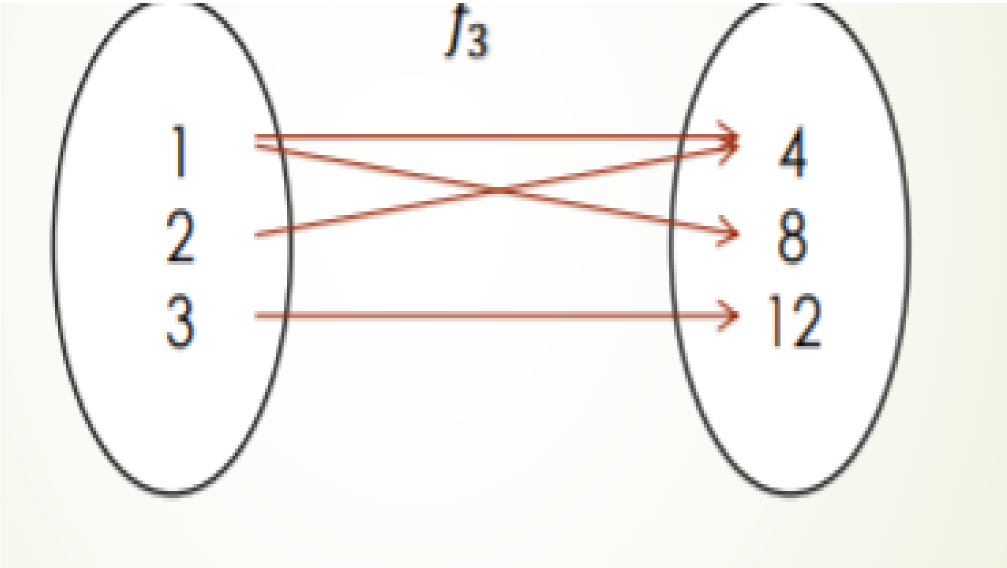
الدوال (الدالة)

f_2 ليست دالة لأن العدد ٣ ينتمي إلى A ولكن ليس له صورة في B



الدوال (الدالة)

f_3 ليست دالة لأن العدد ١ ينتمي إلى A ولكن أكثر من صورة في B



الدوال (الدالة)

**ملاحظة: اذا كانت دالة من   إلى   فإن تسمى مجال الدالة وتسمى بالمجال .

المقابل (مدى الدالة .

$$f: \quad A \longrightarrow B$$

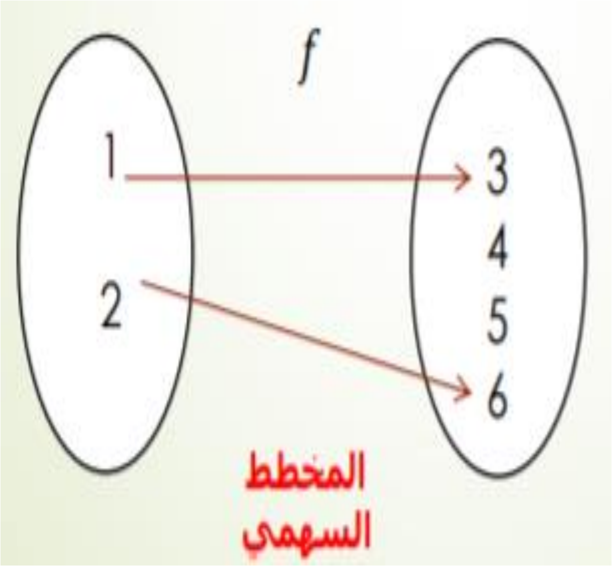
$\uparrow$ عناصر المجال

$\uparrow$ عناصر المجال المقابل

الدوال (الدالة)

مثال اذا كانت $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4,5,6\}$ وكانت $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجاتل والمدى ؟



* الحل:

- عناصر المجال= (١،٢)

- عناصر المدى =(٣،٦)

الدوال(الدالة – كثيرات الحدود)

* أنواع الدوال : سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من أنواع الدوال وهي الدالة الحقيقية وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية أي $f: R \longrightarrow R$

- كثيرة الحدود هي دالة أو تركيب جبري رياضي بسيط فهو لا يحوي على عمليات سوى الضرب والجمع قابل للمفاوضة بلا نهاية بالإضافة إلى احتوائه على مشتقات من جميع الرتب في النقاط جميعها.

* تعريف كثيرات الحدود : تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التى تكتب على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

***حيث أن $a_0 + a_1 + a_{n-1} + \ldots\ldots$ أعداد حقيقية وتسمى المعاملات أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود ممثلة بأعلى أس .**

(كثيرات الحدود):

- ومن الأمثلة على كثيرات الحدود :

١ ـ كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة) ومن الأمثلة عليها:

$$f_1(x) = 5$$

$$f_2(x) = -2$$

المدى

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

(كثيرات الحدود):

٢- كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية) ومن الأمثلة عليها:

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = -2x + 3$$

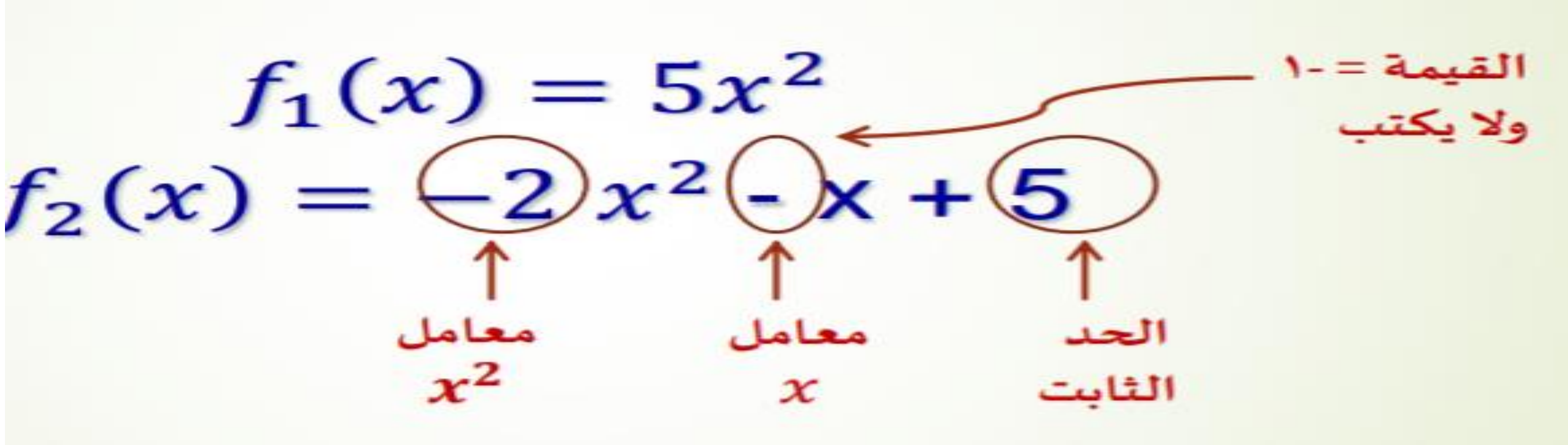
معامل x

الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد ١.

(كثيرات الحدود):

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثانية(وتسمى بالدالة التربيعية) ومن الأمثلة عليها:



*لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقة R كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد ٢.

كثيرات الحدود:

٤- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية) ومن الأمثلة عليها:

$$f_1(x) = 3x^3 - x^2 - 4$$

$$f_2(x) = -2\,x^3 - 3\,x^2 - 5x + 1$$

معامل x^3 — معامل x^2 — معامل x — الحد الثابت

* لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد ٣.

(كثيرات الحدود):

- إيجاد قيمة دالة:

- يمكن إيجاد قيمة أي عدد أومتغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أو المتغير بدل المتغير X في تلك الدالة.

*مثال: اذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :

$f(2)$

$f(-1)$

$f(a)$

كثيرات الحدود):

** الحل:

$$f(2)=2^2+4\times2-3=4+8-3=9$$

$$f(-1)=(-1)^2+(4\times-1)-3=1-4-3=-6$$

$$f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy