الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

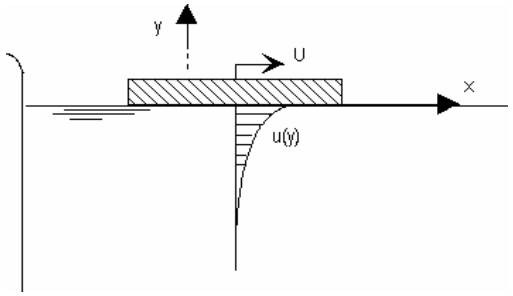
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

1 تعريفات أساسية

1.1 تُطلق كلمة **مائع** بشكلٍ عام على السوائل والغازات. وميكانيكا الموائع تُعنى باستنباط العلاقات الأساسية التي تحكم حركة و سكون الموائع. وتضم وسائل هذا الاستنباط النماذج الرياضية التي تُبنى على ما يعرف بقوانين الحفظ الأساسية، إضافةً إلى التجربة حين تقصر الوسائل النظرية عن الاستنباط.

يُعرّف المائع بأنه المادة التي يتغير شكلها باستمرار عند تعرضها لإجهادٍ قصّي، مهما صغُر هذا الإجهاد.



الشكل 1.1

يتضح معنى هذا التعريف من التجربة البسيطة الموضحة في الشكل (1.1) حيث نرى جسماً صلباً يتعرض لقوة أفقية صغيرة تعمل على تحريكه في اتجاه x الموجب. طبقة السائل المتاخمة للجسم تتحرك بسرعة تساوي تماماً سرعة الجسم. ويلاحظ في التجربة تحرك طبقات السائل الأبعد فالأبعد بسرعات تقل تدريجياً في اتجاه y السالب حتى تختفي تماماً. وهذه هي السمة المميزة للموائع، ولا تُعرف في غيرها إذا ضعُف الإجهاد القصي المبذول.

1.2 **نظام الوحدات** المستخدم في هذا الكتاب هو النظام العالمي للوحدات (SI). القائمة أدناه تبين وحداته الأساسية.

الطول	الكتلة	الزمن	درجة الحرارة	القوة	الطاقة	القدرة	الضغط
m	kg	s	K	N	J	W	Pa
متر	كيلو غرام	ثانية	كلفن	نيوتن	جول	وات	باسكال

ويمكن اشتقاق وحدات المتغيرات الأخرى من الوحدات أعلاه. كما يمكن استخدام المعامل E3 أو 10^3 ومشتقاته إذا صغرت أو كبرت قيمة المتغير كما يلي:

10^{-6}	10^{-3}	10^{6}	10^{3}
E-6	E-3	E6	E3
µ	m	M	k
مايكرو	ملي	ميغا	كيلو

1.3 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر كثيراً من متوسط المسار الحر للجزيئات. ويصدُق هذا الاعتبار على كل التحليلات الواردة في هذا الكتاب.

1.4 الكثافة

باعتبار أن الحجم V_0 هو مكعب أصغر مسافة ترد في التحليل وتستوفي شرط الكمية المتصلة فإن الكثافة ρ تعرّف كما يلي:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to V_0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$$

حيث m الكتلة بالكيلوغرام وV الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة kg/m^3.

1.5 الكثافة النسبية s

هي كثافة المادة منسوبة إلى الكثافة المعيارية للماء ، وهي $1000kg\ /m^3$.

$$s = \rho / \rho_w$$

1.6 قانون الغاز الكامل

$$p = R\rho T \qquad \text{.....(1.1)}$$

يربط القانون الضغط المطلق للغاز p بالدرجة المطلقة للحرارة T و الكثافة ρ . R ثابت الغاز و قيمته للهواء $287J\ K^{-1}kg^{-1}$.

1.7 السريان الانضغاطي و السريان اللاإنضغاطي

يوصف السريان بأنه انضغاطي إذا كانت تغيرات الكثافة فيه معتبرة. أما إذا كانت تغيرات الكثافة صغيرة نسبياً فعندئذ يوصف السريان بأنه لاإنضغاطي.

1.8 السريان الرتيب

هو السريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن عند أي موضع محدد.

1.9 السريان المنتظم

يوصف السريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل من خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع .

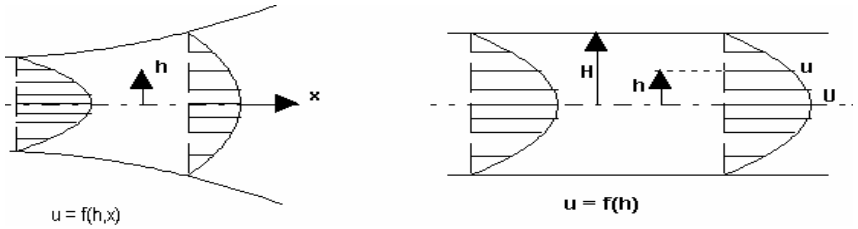
1.10 خط الانسياب

يُعرف خط الانسياب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

1.11 أبعاد السريان

يوصف السريان بأنه **أحادى، ثنائي أو ثلاثي البعد** بُناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن أن يوصف بها.

الشكل (1.2) يعطي مثالاً لسريان أحادي البعد وآخر ثنائي البعد، حيث تعتمد السرعة على الإحداثي h في المثال الأول وتعتمد على الاحداثيين x و h في الثاني.



الشكل 1.2

1.12 السريان الصفائحي والسريان المائر

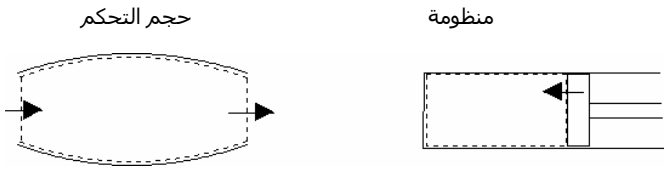
يتصف السريان الصفائحي بثبات الشكل والانسيابية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها البعض في شكل صفائح أو رقائق، بينما يتصف السريان المائر بالعنف والاضطراب.

يمكن استنباط الأسس التي تحكم تحول السريان من إحدى الحالتين إلى الأخرى بتأمل سريان الماء من صنبور. عند فتح الصنبور قليلاً نلاحظ انتظاماً في سريان الماء وثباتاً في شكله دون اضطراب كأنه مكون من صفائح أسطوانية تنزلق على بعضها البعض. يوصف هذا السريان بأنه صفائحي. بزيادة معدل السريان يمُور الماء و يضطرب ويفقد انتظامه ويوصف حينئذٍ بأنه مائر.

ويمكن إثبات أن التحول من الحالة الصفائحية إلى الحالة المائرة عند معدل سريان ثابت يحدث بزيادة السرعة أو زيادة القطر أو إنقاص اللزوجة. ويجمع المتغيرات الثلاثة مقدار لابُعدي يعرف بعدد رينولز Re يحكم التحول المذكور. و يحدث هذا التحول للسريان في الأنابيب في المدى $2000 \leq Re \leq 4000$. و يسمى عدد رينولز الذي يحدث عنده التحول **عدد رينولز الحرج** Re_c.

يتسم توزيع السرعة للسريان الصفائحي داخل الأنابيب بشكل المقطع المكافئ بينما يكون هذا التوزيع معقداً نسبياً في حالة السريان المائر.

1.13 المنظومة وحجم التحكم



الشكل 1.3

المنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدها عن بقية المائع جدار تخيلي أو حقيقي ويمكن أن يتغير موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن أن تتغير المادة داخل حجم التحكم مع الزمن. الشكل (1.3) يبين أمثلة للمفهومين.

1.14 القوة الجسمية والقوة السطحية

القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة الكهروماغنطيسية. والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتنحصر في الضغط والقص.

1.15 الإجهاد

الإجهاد هو القوة السطحية العاملة على وحدة مساحة

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

و للإجهاد مركبتين إحداهما عمودية و الأخرى مماسة

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_t$$

ويُفضّل في ميكانيكا الموائع استخدام تعبير الضغط p في الاتجاه المتعامد حيث

$$\underline{\sigma}_n = -p\underline{n}$$

ويستخدم تعبير الإجهاد القصي τ في الاتجاه المماس حيث

$$\underline{\sigma}_t = \underline{\tau}$$

وبذلك

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n} + \underline{\tau} \quad \text{.....(1.2)}$$

1.16 الضغط المقياسي والضغط الفراغي

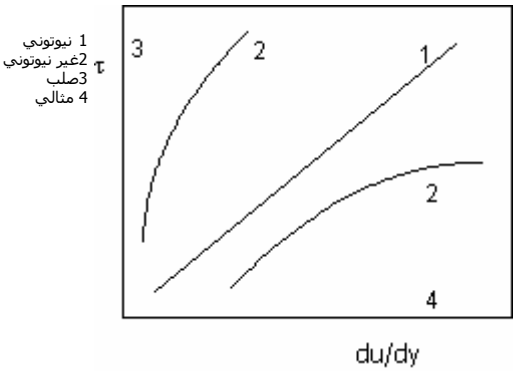
الضغط المقياسي = الضغط المطلق - الضغط الجوي

الضغط الفراغي = - الضغط المقياسي

1.17 الإجهاد القصي

تُنسب إلى نيوتن العلاقة النظرية بين الإجهاد القصي τ وممال السرعة في الاتجاه المتعامد $\frac{\partial u}{\partial y}$ للسريان الصفائحي وهي:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{.....(1.3)}$$



الشكل (1.4)

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلم أنها صحيحة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية مثل الماء والهواء و الوقود النفطي. و سُمّي ثابت المعادلة μ باللزوجة أو اللزوجة المطلقة أو اللزوجة الحركية، ووحدتها Pa.s . وتعرف الموائع التي تستجيب لهذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع **النيوتونية** - الشكل (1.4).

تُسمى فصيلة الموائع التي لا تُعطِي علاقة خطية بين القص وممال السرعة موائع **لانيوتونية**. أمثلةٌ لها البوية و النفط الشمعي.

تؤثر درجة الحرارة في قيمة اللزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل وتزيد مع ازدياد الحرارة للغازات .

تُعرّف اللزوجة الكينماتية ν كما يلي:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

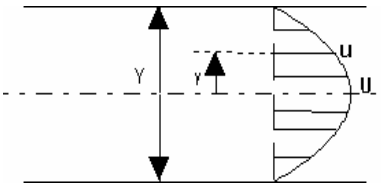
ووحدتها m^2/s.

1.18 السريان اللزجي و السريان اللالزجي

يُعرف السريان بأنه لزجي إذا نشأت فيه قوة قص ذات مقدار معتبر مقارنةً بالقوى الأخرى و إلا فيعتبر السريان لالزجي. و بمراجعة المعادلة (1.3) نرى أن مقدار القص يتعلق بحاصل ضرب اللزوجة وممال السرعة. فإذا عظُم إحداهما أو كلاهما عظُمت القوة اللزجية و سُمي السريان لزجياً .

مثال

يسري ماء سرياناً صفائحياً رتيباً في مجرى متوازي الجدران عرضه 20mm . السرعة في خط النصف 0.1m/s . درجة حرارة الماء 25°C . قدر الإجهاد على الجدران.



الشكل 1.5

توزيع السرعة في مقطع المجرى للسريان الصفائحي

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{2y}{Y}\right)^2$$

المعادلة (1.3) تربط الإجهاد القصّي بالسرعة عند الجدار

$$\tau = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w$$

$$\frac{du}{dy} = U\left[-\frac{8y}{Y^2}\right] = -8\frac{yU}{Y^2}$$

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_w = \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=\pm\frac{Y}{2}} = 4\frac{U}{Y} = 20s^{-1}$$

قائمة خواص الماء عند 25°C (الملحق أ)

ρ = 997.1 kg/m^3, ν = 0.897E-6m^2/s

$\mu = \rho\nu$ = 8.94E-4 Pa.s

τ_w = 0.018 Pa

اتجاه القوة اتجاه x الموجب.

مثال

يتحرك مكبس قطره 50.0mm داخل اسطوانة قطرها الداخلي 50.1mm .أحسب النقصان في المائة في القوة المقاومة عندما ترتفع درجة حرارة المُزلق بفعل الحركة من 20°C إلى 120°C .

استخدم الخواص المدرجة أدناه لزيت التزليق وافترض ثبات سرعة المكبس وثبات أبعاده.

$T°C$	$\nu \times 10^{-6}$, m^2/s	$\mu \times 10^{-3}$, $Pa.s$
20	9.2	8.2
30	7.5	6.6
40	6.5	5.5
60	4.7	4.0
80	3.7	3.2
100	3.2	2.46
120	2.8	2.10

القوة المقاومة = F

$$F = \tau A_w = A_w \mu \frac{du}{dr}$$

بافتراض ثبات السرعة والأبعاد

$$F = const.\ \mu$$

$$\frac{\Delta F}{F} 100 = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} 100$$

خواص الزيت

μ_{20} = 8.2E-3 Pa.s , μ_{120} = 2.1E-3 Pa.s

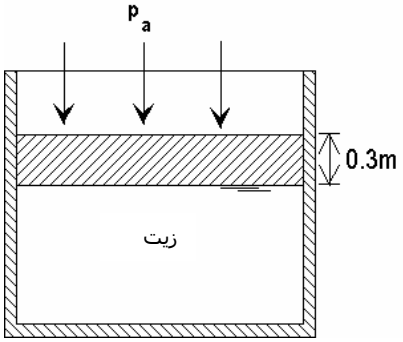
$$\Delta \mu = 6.1E\text{-}3$$

$$\frac{\Delta F}{F}(100) = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}}(100) = \mathbf{74\%}$$

مسائل

1.1 اللزوجة المطلقة للهواء عند درجة الحرارة 35°C تساوي 2.0E-5 Pa.s . أحسب اللزوجة الكينماتية عندما يكون الضغط 0.1 MPa . [17.7 E-6 m^2/s]

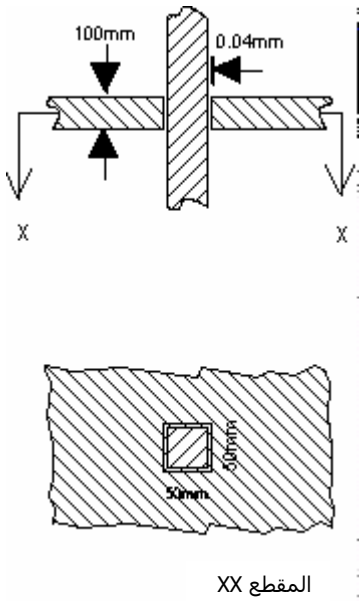
1.2 يوضح الشكل (1.6) مقطع اسطوانة ومكبس مستو تماماً على سطح زيت. سمك المكبس 0.3m . بافتراض أن الضغط الجوي 0.101MPa و أن الكثافة النسبية للمكبس المصنوع من الصلب 7.8 أحسب الضغط على سطح الزيت. [0.124MPa]



الشكل 1.6

1.3 جسم يزن 500N ومساحة سطحه السفلي $0.2m^2$ ينزلق على سطح مائل بزاوية30° مع الأفقي . لزوجة المُزلق 0.2 Pa.s . وسرعة الجسم المتحرك 1.0m/s . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المُزلق خطي أحسب سمك طبقة المُزلق. [0.16mm]

1.4 يوضح الشكل (1.7) قضيب ذا مقطع مربع، ضلعه 50mm يتحرك في مجرى معدني مغطى بمُزلق لزوجته الكينماتية 5E -6 m2/s . وكثافته النسبية 0.86 . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المُزلق خطي أحسب قوة الإعاقة اللزجية على القضيب عندما تكون سرعته 20m/s. [43 N]



المقطع XX

الشكل 1.7

1.5 القائمة أدناه توضح نتيجة تجربة لسريان ماء درجة حرارته 20°C في قناة عرضها 100mm:

***y* (mm)**	40	30	20	10	5	0	-5
***u* (m/s)**	5.0	8.0	11.0	12.5	13.0	13.2	13.0

حُسبت *y* من الخط المركزي للقناة . أرسم توزيع السرعة وأثبت إمكانية تقريبها للعلاقة الرياضية:

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

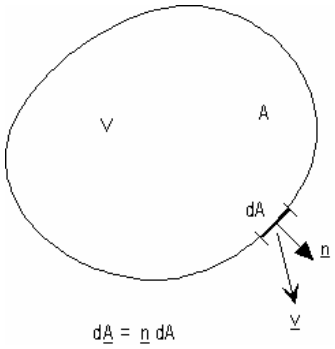
حيث a_0 و a_1 و a_2 ثوابت.

أحسب الإجهاد القصي عند الجدارين مستخدماً العلاقة أعلاه . [0.5Pa]

2 المعادلات الأساسية في ميكانيكا الموائع

تُرسى في هذا الفصل القواعد الأساسية لميكانيكا الموائع. وهي معادلات الحفظ الثلاث: حفظ الكتلة وحفظ الطاقة وحفظ كمية التحرك. ويُقدَم لذلك بتعريف متجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ .

2.1 متجه السريان



الشكل 2.1

الحجم التحكمي الموضح في الشكل (2.1) حجمه V و مساحة سطحه A. بالتركيز على المساحة التفاضلية dA فان الكتلة الخارجة عبرها هي dm في الوقت dt ليصبح معدل السريان $\dot{dm}$. سرعة السريان في الموضع هي المتجه $\underline{\boldsymbol{v}}$ بزاوية α مع المتجه أحادي الطول $\underline{n}$ والمتعامد على المساحة dA حيث

$$d\underline{A} = \underline{n}\, dA$$

$$\dot{dm} = \rho\, d\dot{V} = \rho \boldsymbol{v} \cos\alpha\, dA = \rho\, \underline{v}.d\underline{A}$$

معدل سريان الكتلة عبر كل السطح $= \dot{m}$

$$\dot{m} = \iint_A \rho \underline{v}.d\underline{A} \quad \text{.....(2.1)}$$

نُعرّف متجه سريان الكتلة كما يلي:

متجه سريان الكتلة = (متجه السرعة) (الكتلة في وحدة حجمية) $= \rho\, \underline{\boldsymbol{v}}$

وبالمثل:

متجه سريان الطاقة = (متجه السرعة) (الطاقة في وحدة حجمية)

$$= \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{\boldsymbol{v}}$$

وبالمثل:

متجه سريان كمية التحرك = (متجه السرعة) (كمية التحرك في وحدة حجمية)

$= \rho u \underline{\boldsymbol{v}} , \ \rho v \underline{\boldsymbol{v}} , \rho w \underline{\boldsymbol{v}}$

في الاتجاهات z, y, x على التوالي.

وبذلك فان معدل سريان الطاقة عبر السطح A =

$$\iint \rho \ (e + \frac{v^2}{2} + gz) \ \underline{\boldsymbol{v}}.d\underline{A} \qquad \text{.....(2.2)}$$

ومعدل سريان كمية التحرك عبر السطح A =

$$\iint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) \qquad \text{.....(2.3)}$$

2.2 حفظ الكتلة

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:
"معدل تراكم الكتلة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي يساوي صفر "

الكتلة الكلية داخل الحجم التحكمي = $\iiint_V \rho dV$

معدل ازدياد الكتلة داخل الحجم التحكمي

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

من المعادلة (2.1) خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي

$$= \iint_A \rho \underline{v}.d\underline{A}$$

و بذلك

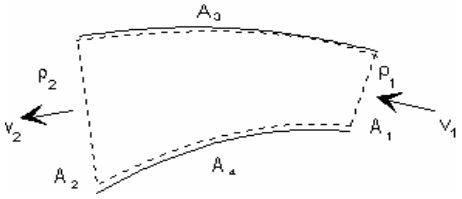
$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{v}.d\underline{A} = 0 \quad \text{.....(2.4)}$$

المعادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية.

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد (الشكل 2.2)**:**

الحد الأول في المعادلة (2.4) يساوي صفر نسبةً لرتابة السريان.

السطحان (3) و (4) لا تعبرهما كتلة ولذلك يصير فيهما تكامل الحد الثاني من معادلة الكتلة صفراً .



الشكل 2.2

تُختزل معادلة الكتلة بذلك إلى الصورة :

$$\iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 . d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 . d\underline{A}_2 = 0$$

و بملاحظة أن المتجه $\underline{A}$ يتجه إلى خارج الحجم التحكمي

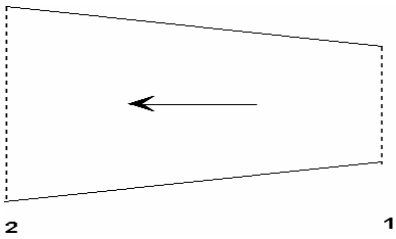
$$- \iint_{A1} \rho_1 v_1 dA_1 + \iint_{A2} \rho_2 v_2 dA_2 = 0$$

$$- \rho_1 \boldsymbol{v}_1 A_1 + \rho_2 \boldsymbol{v}_2 A_2 = 0$$

$$\rho \boldsymbol{v} A = \text{ثابت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

مثال

سريان لاإنضغاطي في مجرى ناشر



A_1	A_2	v_1	ρ
0.2 m^2	0.3m^2	2.0m/s	1000kg/m^3

أحسب السرعة المتوسطة في المقطع (2) ومعدل سريان الكتلة.

السرعتان $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$ هما السرعتان المتوسطتان في المقطعين (1) و (2) . بذلك يمكن استخدام معادلة الكتلة في صورتها أحادية البعد (2.5)

$\rho \boldsymbol{v} A$ = ثابت

بما أن السريان لا انضغاطى ثابت = ρ

$$\boldsymbol{v}_1 A_1 = \boldsymbol{v}_2 A_2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 (A_1/A_2) = 2.0\ (0.2 / 0.3) = \mathbf{1.33\ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho \boldsymbol{v} A = \rho \boldsymbol{v}_1 A_1 = 1000(2.0)0.2 = \mathbf{400 kg/s.}$$

معادلة الاستمرارية:

يطلق هذا الاسم عامةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية.

بدءً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي إلى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد - أنظر المعادلة (3) في الملحق (ب).

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V (\nabla . \rho \underline{v}) dV = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho v \right) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل تكون قيمة المُكامَل صفراً إذا كانت قيمة التكامل صفراً و كانت حدود التكامل اختيارية.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho \underline{v} = 0 \quad \text{.....(2.6a)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \text{.....(2.6b)}$$

حيث u، v ، w هي مركبات السرعة في الاتجاهات x ، y ، z.

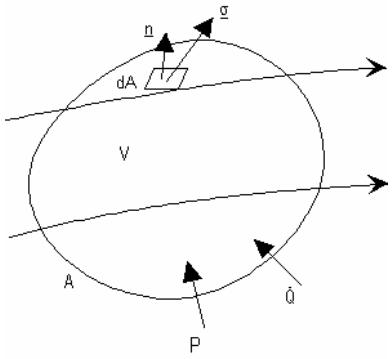
وفي حال أن السريان لا إنضغاطي

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{.....(2.7)}$$

2.3 حفظ الطـاقة

تُستمَد معادلة حفظ الطاقة من القانون الأول للحركيــة الحراريــة مطبقـاً علــى حجم تحكمي :

"معدل تراكم الطاقة داخل الحجم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان الطاقة إلى خارج الحجم التحكمي بانتقال الكتلة يعادل القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي مضافاً اليها معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي" .



الشكل 2.4

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)dV+\iint_A \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}.d\underline{A}=\iint_A(\underline{\sigma}.\underline{v})dA+P+\dot{Q}$$

الحدان الأوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي، و $\dot{Q}$ معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي.

بتجاهل اللزج يصبح الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$

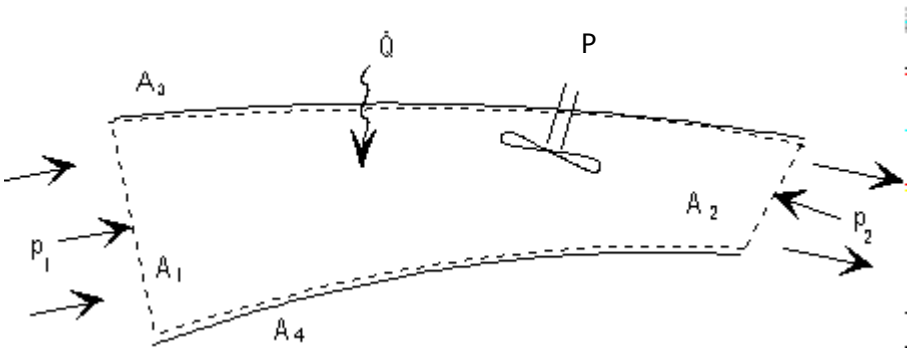
$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)]dV+\iint_A \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}.d\underline{A}=-\iint_A p\underline{v}.d\underline{A}+P+\dot{Q}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)]dV+\iint_A \rho(e+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}.d\underline{A}=P+\dot{Q} \quad .....(2.8)$$

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد:

رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي صفر، و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4).

وبذلك تُختزل المعادلة إلى الصورة



الشكل 2.5

$$-\rho_1(e_1+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^{\,2}}{2}+gz_1)v_1A_1+\rho_2(e_2+\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^{\,2}}{2}+gz_2)v_2A_2=P+\dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتيب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 \boldsymbol{v}_1 A_1=\rho_2 \boldsymbol{v}_2 A_2=\dot{m}$$

$$\dot{m}(e_1+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^{\,2}}{2}+gz_1)+P+\dot{Q}=\dot{m}(e_2+\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^{\,2}}{2}+gz_2)$$

$$\frac{e_1}{g}+\frac{p_1}{\rho_1 g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1+\frac{P}{\dot{m}\,g}+\frac{\dot{Q}}{\dot{m}\,g}=\frac{e_2}{g}+\frac{p_2}{\rho_2 g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2 \quad \text{.....(2.9)}$$

في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة $\dot{Q}=0$

و تجاهل التغير في درجة الحرارة $T_1=T_2\,,\quad e_1=e_2$

ويمكن اعتبار السريان لا انضغاطي $\rho_1=\rho_2=\rho$

فتصبح المعادلة (2.9)

$$\frac{p_1}{\rho_1 g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1+\frac{P}{\dot{m}\,g}=\frac{p_2}{\rho_2 g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2 \quad \text{.....(2.10)}$$

في حال أن القدرة P موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عنَفة.

في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10)

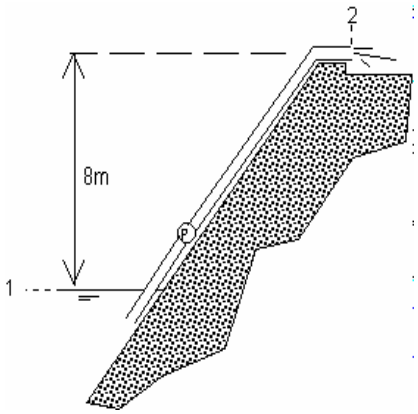
$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2 \quad \text{السمت الكلي} \quad \text{.....(2.11)}$$

أي: السمت الكلي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

مثال

يُعرَف الآتي عن وحدة ضخ ترفع الماء من النيل إلى أعلى الجرف:

الرفع: 8m
معدل السريان الحجمي 15 l/s
قطر الأنبوب صعيد المضخة: 154mm
قطر الأنبوب سافل المضخة: 102mm
كثافة الماء: 1000kg\m^3



الشكل (2.6)

المطلوب حساب:

(أ) السرعة صعيد وسافل المضخة

(ب) القدرة الخارجة من المضخة إذا اعتبرنا السريان لا لزجي.

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان اللاإنضغاطى تُعطي

$$\boldsymbol{v}_u \,.\, A_u = \boldsymbol{v}_d .\, A_d = \dot{V} = 0.015\ m^3/s$$

$$v_u = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.154)^2} = 0.81 m/s$$

$$v_d = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.102)^2} = 1.84 m/s$$

حيث اللاحقة u تعني صعيد المضخة و اللاحقة d تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^{\,2}}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m}\, g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2}}{2g} + z_2$$

$$P = \dot{m}\, g \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g} + (z_2 - z_1) \right]$$

المقطعان (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

كما أن $z_2 - z_1 = 8$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر !

$$v_1 = 0 \ , \ v_2 = v_d$$

معدل سريان الكتلة $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 1000(0.015) = 15.0\ kg/s$$

وتصبح المعادلة

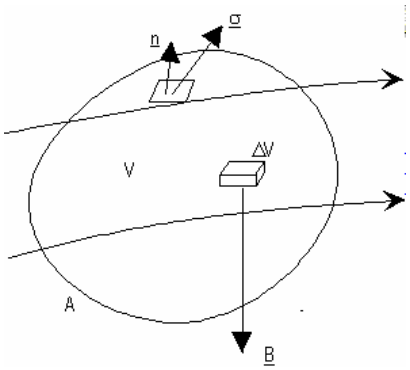
$$\mathbf{P = (15.0)(9.81)\ [\ \frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8\ ] = 1203W}$$

القدرة الخارجة = **1.2 kW**

2.4 حفظ كمية التحرك

يُستمد هذا القانون من قانون نيوتن الثاني للحركة مطبقاً على حجمٍ تحكمي:

" معدل تراكم كمية التحرك داخل الحجم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان كمية التحرك إلى خارج الحجم التحكمي بإنتقال الكتلة يعادل مجموع القُوى المؤثرة على المائع".



الشكل (2.7)

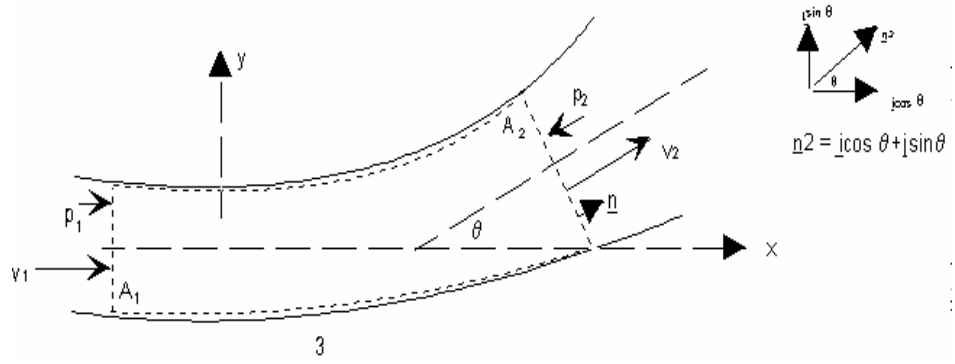
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V (\rho \underline{v})dV + \oiint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B}dV + \oiint_A \underline{\sigma}dA$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})dV + \oiint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B}dV + \oiint_A \underline{\sigma}dA \quad .....(2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد $\underline{\sigma}$ يساوي مجموع المتجهين $p\underline{n}$ - و $\underline{\tau}$. كما أن $\underline{B}$ هي القوة الجسمية على وحدة حجمية و تتمثل في الأحوال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمية أي $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$.

القوة الناشئة عن السريان داخل أنبوب منحني:

نسعى هنا للاستفادة من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) لنُقدِّر القوة المؤثرة على الأنبوب المنحني نتيجة لسريان رتيب لا انضغاطي أحادي البعد.



الشكل (2.8)

نفترض كذلك استواء الخط المركزي للأنبوب على المستوى *x-y*. بتطبيق هذه الافتراضات على المعادلة (2.12) تُجوز رتابة السريان إلغاء الحد الأول. و يعطي الحد الثاني:

$$\oiint_A \rho \ \underline{v}\,(\underline{v}.\ d\underline{A}) = -\rho \boldsymbol{v}_1^2 A_1\ \underline{i} + \rho \boldsymbol{v}_2^2 A_2\ \underline{n_2}$$

$$= -\rho \boldsymbol{v}_1^2 A_1\ \underline{i} + \rho \boldsymbol{v}_2^2 A_2\ (\cos\theta \underline{i} + \sin\theta\ \underline{j})$$

و الحد الثالث:

$$\iiint_V \underline{B}\ dV = \iiint_V -\rho g \underline{k}\ dV = -\rho\ gV\ \underline{k}$$

عند تطبيق الحد الرابع على السطحين (1) و (2) نراعي أن مُركِبة القص عليهما تساوي الصفر و يُمثَّل الحد الرابع بالضغط وحده. أما على السطح المنحني (3) فكلاً من القص والضغط ذوا قيم غير صفرية، إلا أن توزيعهما على السطح غير منتظم. ويمكن استخلاص تأثيرهما سوياً كرد فعل $\underline{R}$ من السطح (3) على الحجم التحكمي.

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$\iint_A \underline{\sigma}\, dA = \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1\, dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2\, dA_2 + \iint_{A3} \underline{\sigma}_3\, dA_3$$

$$= \iint_{A_1} p_1 dA_1 \underline{i} + \iint_{A_2} - p_2 dA_2 \left(\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}\right) + \underline{R}$$

$$= p_1A_1 \underline{i} - p_2A_2 \cos\theta \underline{i} - p_2A_2 \sin\theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

و تصبح معادلة حفظ كمية التحرك

$$-\rho \boldsymbol{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \boldsymbol{v}_2^2 A_2 \cos\theta \underline{i} + \rho \boldsymbol{v}_2^2 A_2 \sin\theta \underline{j}$$

$$= -\rho g \underline{k} + p_1A_1 \underline{i} - p_2A_2 \cos\theta \underline{i} - p_2A_2 \sin\theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

تعطي المعادلة المتجهة أعلاه ثلاث معادلات مقدارية للحركة في الاتجاهات x, y, z

$$R_x = \dot{m} (\boldsymbol{v}_2 \cos\theta - \boldsymbol{v}_1) + p_2A_2 \cos\theta - p_1A_1$$

$$R_y = \dot{m} \boldsymbol{v}_2 \sin\theta + p_2A_2 \sin\theta$$

$$R_z = \rho g V$$

وبالرمز لقوى المائع على الأنبوب في الاتجاهات الثلاث ب F_x , F_y , F_z

$$F_x = \dot{m} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \cos\theta) + p_1A_1 - p_2A_2 \cos\theta \quad \text{.....(2.13a)}$$

$$F_y = -\dot{m} \boldsymbol{v}_2 \sin\theta - p_2A_2 \sin\theta \quad \text{.....(2.13b)}$$

$$F_z = -\rho g V \quad \text{.....(2.13c)}$$

مثال

أحسب القوى في الاتجاهات *z, y, x* على كوع قائم الزاوية حجمه الداخلي 2 لتر و قطر مقطعه 100mm نتيجة لسريان زيت كثافته $850kg/m^3$ بمعدل 30 l/s إذا عُلم أن الضغط في المقطع الدخولي 0.20MPa والضغط في المقطع الخروجي 0.19MPa . أعتبر أن محور الكوع يطابق المستوى *x-y*.

تُطابق الافتراضات في هذا المثال افتراضات المعادلات (2.13)

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 = 7.85E\text{-}3\ m^2$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (850)30E\text{-}3 = 25.5kg/s$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \dot{V} / A = 30E\text{-}3 / 7.85\ E\text{-}3 = 3.82\ m/s$$

و الزاوية θ لهذه الحالة تساوي 90°

$$\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1$$

و بذلك تعطي المعادلات (2.13)

$$\boldsymbol{F_x = 1668N,\ F_y = -1590N,\ F_z = -17N.}$$

مسائل

2.1 أنبوب دائري المقطع نصف قطره R_1 موصل على التوالي بأنبوب أصغر نصف قطره R_2. توزيع سرعة السريان في الأنبوب (1) يرتبط بالمسافة نصف القطرية r حسب العلاقة

$$\boldsymbol{v} = b\left[1-\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right]$$

حيث b ثابت . أحسب :

(أ) معدل السريان الحجمي

(ب) السرعة القصوى في الأنبوب (1)

(ج) متوسط السرعة في الأنبوب (2) .

[$\frac{1}{2}\pi b R_1^2$, b, $\frac{1}{2}b(R_1/R_2)^2$]

2.2 يُعبر عن مُركِبات السرعة u وv في الاتجاهين x و y لسريان لا انضغاطي بالمعادلتين:

$$u = b(x^2 + xy - y^2)$$

$$v = b(-2xy - 2yz + 2z^2)$$

حيث b ثابت. بتحقيق حفظ الكتلة استخلص مركبة السرعة في الاتجاه z، علماً بأن محصلة السرعة عند نقطة الأصل تساوي صفر. [$b(z^2-yz)$]

2.3 سريان غير رتيب أحادي البعد سرعة التيار فيه u حيث $u = u(x, t)$ ، يعبر فيه عن الكثافة ρ بالمعادلة

$$\rho = \rho_0 (2 - \cos \omega t)$$

حيث ρ_0 وω ثوابت.

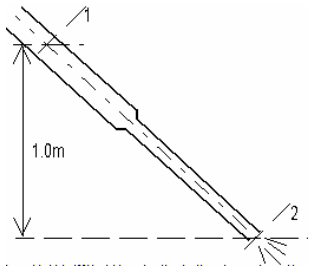
حدد العلاقة $u = u(x,t)$ إذا كانت $u(o,t) = U$

$$[U - \frac{\omega x \sin \omega t}{2 - \cos \omega t}]$$

2.4 يوضح الشكل (2.9) أنبوب يستخدم لنقل سائل كثافته $917kg/m^3$. الضغط القياسي عند المقطع (1) 1.8 kPa و عند المقطع (2) ضغطاً جوياً. مساحة المقطع العرضي (1) $0.012m^2$ و المقطع (2) $0.01m^2$

أحسب السرعة عند المقطعين (1) و (2) ومعدل السريان الحجمي متجاهلاً الاحتكاك و الفواقد الأخرى.

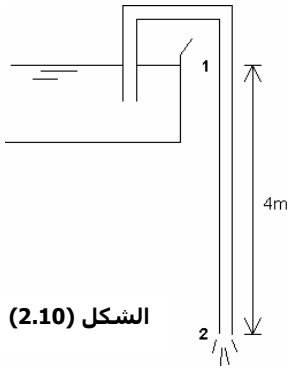
[7.32m/s, 8.78m/s, 88 l/s]



الشكل (2.9)

2.5 يوضح الشكل (2.10) مستودع لسائل يجري إفراغه بخرطوم قطره 50mm . متجاهلاً اللزج و غيره من الفواقد أحسب معدل السريان الحجمي. بين إمكانية زيادة معدل السريان بزيادة المسافة الرأسية (2—1) .

[17 l/s]



الشكل (2.10)

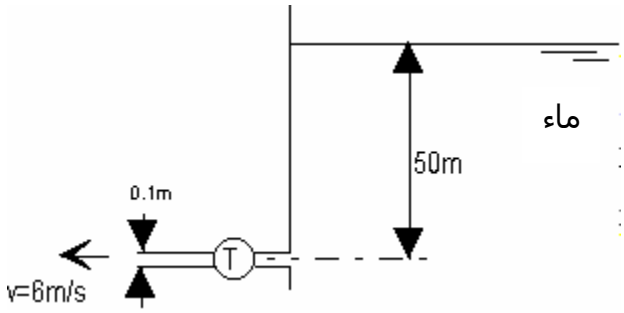
2.6 تستخدم مضخة لضخ منتج نفطي كثافته النسبية 0.86 بمعدل 1.5 l/s . القطر الصعيدي للأنبوب 20mm والقطر السافلي 15mm . سمت الضغط الفراغي صعيد المضخة 1.35m وسمت الضغط القياسي سافل المضخة يساوي 7m . أحسب

(أ) السمت الناتج من المضخة (ب) القدرة المنتقلة من المضخة للمنتج النفطي .

[10.9m, 137W]

2.7 أحسب القدرة الداخلة للعنفة **T** المبينة في الشكل (2.11) متجاهلاً الفواقد.

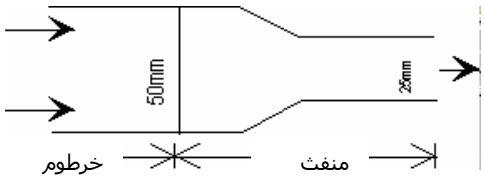
[22.3kW]



الشكل 2.11

2.8 يوضح الشكل (2.12) مقدمة خرطوم إطفاء. باعتبار أن السمت الكلي القياسي المستخدم يساوي 100m أحسب مقدار واتجاه القوة الناتجة عن المنفث على أيدي رجل الإطفاء .

[1.1kN]



الشكل (2.12)

2.9 يسري ماء عبر كوع صافي إنحناءه 180° إلى الجو . مساحة المقطع الدخولي $0.0025m^2$ و مساحة المقطع الخروجي $0.0005m^2$. السرعة في المقطع الدخولي 30m/s . متجاهلاً الفواقد وأثر الجاذبية أحسب مقدار القوة اللازمة لتثبيت الكوع و حدد اتجاهها .

[40.5kN, 0]

3 التحليل البعدي والنمذجة

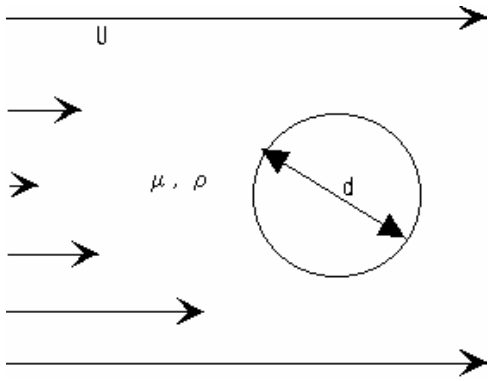
3.1 أسس التحليل البعدي

يبدأ عادةً تحليل المسألة الهندسية بوضع الأنموذج الرياضي المبني على المعادلات الحاكمة والتي تشمل قوانين الحفظ و العلاقات الثانوية. و من ثم السعي لحل هذا الأنموذج والحصول على فهم كامل للحالة الهندسية المدروسة.

إلا أن هناك قطاع كبير من المسائل الهندسية لا يمكن بلوغ الفهم الوافي لدوالها بالنمط النظري الخالص. و يتطلب بالتالي إجراء تجارب معملية لإدراك ما لم يدرك بالطرق النظرية. في ميكانيكا الموائع يتمثل ذلك في كل ما يتعلق بقوى الإعاقة و حركة السريان المائر.

التجربة إذن تشكل جانباً رئيسياً من التحليل الهندسي. و نهدف من هذا الباب إلى التبصير بالأسس التي تنظم التجربة. على وجه التحديد أسس تسمية العدد الأدنى من المتغيرات التي ينبغي إجراء التجارب فيها.

و سنتخذ مثالاً تصويرياً نوضح من خلاله الأسس المذكورة و هو مسألة **الإعاقة الناتجة عن سريان المائع عبر كُرة** .



الشكل 3.1

معلومٌ عن هذه الحالة أن قوة الإعاقة D على كرة مستقرة في تيار رتيب تتأثر بسرعة التيار U و لزوجة المائع μ و كثافته ρ و قطر الكرة d ، وبذلك

$$f(D,d,U,\rho,\mu) = 0$$

للحصول على العلاقة بين الإعاقة D والمتغيرات الأربع الأخرى معملياً فإن الأسلوب المباشر هو تثبيت قيم ثلاثة من العناصر الأربعة و أجراء تجربة لتحديد تغيّر D مع العنصر الرابع. ثم تكرار التجربة لعلاقة D مع العناصر الثلاثة الأخرى كلٍ على حدة. و نلاحظ صعوبة هذا الأسلوب المباشر في العمل التجريبي للآتي :

(1) يحتاج لجهد كبير و وقت طويل إذا كثرت عدد العناصر

(2) صعوبة أو استحالة تثبيت بعض العناصر وترك عناصر أخرى متعلقة بها متغيرة. في المثال المطروح - مثلاً - يتم التغيير في اللزوجة عادةً بتغيير المائع. إلا أن تغيير المائع يغير في الكثافة أيضاً!

والبديل لهذا الأسلوب المباشر في التجريب هو إجراء التجارب بين مقادير لابعدية مكونة من هذه العناصر بدلاً من إجراءها على العناصر نفسها.

نحصل على المقدار اللابعدي بأن نضرب أو نقسم العناصر على بعضها البعض بحيث يصبح المقدار الناتج بغير أبعاد. عدد رينولز - على سبيل المثال - يساوي $\frac{\rho v d}{\mu}$. و تعطي مكوناته الوحدات $\frac{(kg\,m^{-3})(ms^{-1})(m)}{(kg\,m^{-1}s^{-1})}$ وتصبح بذلك وحدته 1 ، فهو إذن مقدار لابعدي.

كيف يمكننا إذن تحويل العناصر الحاكمة للسريان إلى مقادير لا بعدية؟ نتبع في ذلك ما يعرف بنظرية بكنغهام.

نظرية بكنغهام (نظرية Π)

" إذا شملت مسألةٍ ما العناصر: $p_1, p_2, ..., p_n$ ، حيث $f(p_1, p_2, ..., p_n) = 0$ وشملت العناصر مجتمعةً m بُعداً فإن عدد المقادير اللابعدية المستقلة تكون $(n - m)$ "

عند تطبيق النظرية على مثال الإعاقة على الكرة فإن: $n = 5$ و $m = 3$. والأخيرة هي الطول و الكتلة و الوقت (L,M,T) ، و لا نجد في العناصر الخمسة بعداً آخر .
يصبح بذلك عدد المقادير اللابعدية المستقلة لهذه الحالة $n - m = 2$. أي انه يمكن اختصار المتغيرات إلى اثنين بحيث $f(\Pi_1,\Pi_2) = 0$ وحيث Π_1 و Π_2 مقادير لا بعدية مكونة من عناصر المسألة الخمسة.

كيف يمكننا تحديد المقادير اللابعدية ؟
(1) نبدأ باختيار m عنصراً أساسياً من العناصر n . تستوفي العناصر الأساسية المختارة الشروط التالية :

(أ) يستثنى العنصر الأول p_1 .
(ب) تشمل أبعاد العناصر المختارة مجتمعةً كل الأبعاد الأساسية للسريان.
(ج) لا يكون أيٍ من العناصر الأساسية المختارة أحد مضاعفات عنصر أساسي آخر .

بالعودة إلى مثال الإعاقة على الكرة يمكن أن نختار d, U, ρ كعناصر أساسية.

(2) تُكوّن $(n - m)$ معادلة بُعدية تربط العناصر الأساسية بكلٍ من العناصر الأخرى.
في مثال الإعاقة على الكرة :

$$\Pi_1 = d^{a1} U^{a2} \rho^{a3} D \quad \text{و} \quad \Pi_2 = d^{a4} U^{n5} \rho^{n6} \mu$$

توازُن الأبعاد في المعادلة الأولى يعني

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a1} \left(\frac{L}{T}\right)^{a2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a3} \left(\frac{ML}{T^2}\right)^1$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{a3+1} L^{a1+a2-3a3+1} T^{-a2-2}$$

$$a_1 + a_2 - 3a_3 + 1 = 0$$

$$a_3 + 1 = 0$$

$$- a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -2,\ a_2 = -2,\ a_3 = -1$$

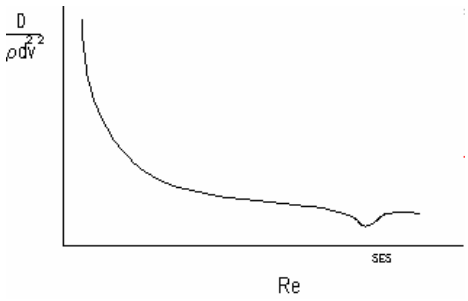
$$\Pi_1 = d^{-2}\, U^{-2}\, \rho^{-1}\, D = \frac{D}{\rho d^2 U^2}$$

و للمعادلة الثانية

$$\Pi_2 = d^{a4}\, U^{a5}\, \rho^{a6}\, \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a4}\left(\frac{L}{T}\right)^{a5}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{a6}\left(\frac{M}{LT}\right)^{1}$$

$$a_4 = -1,\ a_5 = -1,\ a_6 = -1$$



الشكل 3.2

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

و تحدد العلاقة النهائية بتجربة يرصد فيها تغير Π_1 مع Π_2 :

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

3.2 بعض المقادير اللابعدية المُهمة في ميكانيكا الموائع

(1) عدد رينولز Re

$$Re = \frac{\rho \mathrm{v} L}{\mu} = \frac{\mathrm{v} L}{\nu}$$

يبرز عدد رينولز كمقدار مهم حيثما يكون **التأثير اللزجي** مهماً مقارناً بالتأثيرات الأخرى.

(2) عدد ماخ M

$$M = \frac{\mathrm{v}}{c}$$

حيث c سرعة الصوت. ويكون عدد ماخ مهماً في دراسة السريان إذا أعتبر السريان **انضغاطياً**.

(3) عدد فرُود Fr

$$Fr = \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{gL}}$$

حيث g تسارع الجاذبية. و يكون عدد فرود مهماً حيث تكون قوة **الجاذبية** ذات قيمة مقدرة مقارنةً بالقوى الأخرى.

3.3 النمذجة

تعني النمذجة إجراء تجارب معملية على **أنموذج** للجسم الذي يراد استخدامه في الواقع. تنبع الحاجة للنمذجة من صعوبة أو استحالة إجراء التجارب على الجسم الأصل. و تنشأ الصعوبة المذكورة لكبر حجم الجسم مثلاً أو صغره في أحوال أخرى أو صعوبة إعداد الأحوال التشغيلية الملائمة. تتطلب النمذجة إذن إعداد أحوال معملية لإجراء التجارب على الأنموذج ثم التكهن بالأحوال الفعلية للحركة عند استخدام الجسم الكامل في بيئته. ويسمى هذا الجسم الكامل في مرحلة التجريب **الطراز البُدائي**.

تتطلب النمذجة استيفاء ما يُعرف بالتشابه الفيزيائي بين الأنموذج و الطراز البُدائي. ويعني هذا في ميكانيكا الموائع:

(أ) وجود تشابه هندسي بين الأنموذج و الطراز البدائي

(ب) وجود تشابه حركي بين الأنموذج و الطراز البدائي. و يؤدي التشابه الحركي إلى تساوي القُوى اللابعدية في الجسمين.

مثال

أنموذج كرة يساوي قطره نصف قطر الطراز البدائي. يُراد استخدام الطراز البدائي في الهواء عند سرعة نسبية تساوي 15m/s و يراد استخدام الماء في المعمل.

(أ) كم يجب أن تكون سرعة الماء لاستيفاء التشابه الحركي؟

(ب) إذا كانت قوة الإعاقة في المعمل 5N كم تكون قيمتها في حالة الطراز البدائي؟

ρ_a = 1.15 kg/m^3 μ_a = 1.6E-5 Pa.s

ρ_w = 1E3 kg/m^3 μ_w = 8E-4 Pa.s

(أ) المعادلة اللابعدية الخاصة بهذه الحالة

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2} = f\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)$$

استيفاء التشابه الحركي يعني

$$\left.\frac{\rho \mathrm{v} d}{\mu}\right|_p = \left.\frac{\rho \mathrm{v} d}{\mu}\right|_m$$

$$\mathrm{v}_m = \mathrm{v}_p \frac{d_p}{d_m}\frac{\mu_m}{\mu_p}\frac{\rho_p}{\rho_m} = 15(2)\frac{8E-4}{1.6E-7} = 1.7\text{m/s}$$

(ب) لإيجاد الإعاقة على الطراز البدائي

$$\left.\frac{D}{\rho \mathrm{v}^2 d^2}\right|_m = \left.\frac{D}{\rho \mathrm{v}^2 d^2}\right|_p$$

$$D_p = D_m \frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{\mathrm{v}_p}{\mathrm{v}_m}\right)^2\left(\frac{d_p}{d_m}\right)^2 = 5\frac{1.15}{1E3}\left(\frac{15}{1.7}\right)^2 2^2 = \mathbf{1.8N}$$

مسائل

3.1 كرة من الفولاذ قطرها d وكثافة مادتها ρ_s وضعت في مائع لزج كثافته ρ ولزوجته المطلقة μ . عقب التسارع الأولي بفعل الجاذبية g ثبتت السرعة الى أسفل عند v. استخلص تعبيراً رياضياً يربط المقادير اللابعدية الحاكمة للسريان، مستخدماً التحليل البعدي.

$$f\left(\frac{\rho v d}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{gd}}, \frac{\rho_s}{\rho}\right) = 0$$

3.2 الفقد في الضغط Δp لسريان لاإنضغاطي في أنبوب مستقيم يعتمد على كثافة المائع ρ ، متوسط السرعة $\boldsymbol{v}$ ، قطر الأنبوب d ، طول الأنبوب L، اللزوجة الحركية μ وارتفاع الخشونة k استخلص تعبيرا عن Δp مستخدماً التحليل البعدي.

3.3 أنبوب قطره 15mm يستخدم لنقل الماء. لوحظ أن السريان يمور عندما ترتفع السرعة إلى 0.15m/s . كم تكون السرعة الصفائحية القصوى لسريان هواء في أنبوب قطره 50mm و ذي خشونة مماثلة لأنبوب الماء. أعتبر ν_a = 1.7E-5 m^2/s و ν_w = 1E – 6 m^2/s

[0.77 m/s]

3.4 أنموذج لقاع سفينة مصغر إلى خُمس حجمها أختبر في نفق هوائي بسريان كثافته 25kg/m^3 و لزوجته 1.85E-5Pa.s و بسرعة تساوي 35m/s . قيست قوة الإعاقة على الأنموذج فكانت 65kN . قدر السرعة و الإعاقة على السفينة الكاملة في ماء البحر بكثافة تساوي 1025kg/m^3 و لزوجة 1.65E-3Pa.s . [15.2 m/s , 12.6MN]

3.5 تطير طائرة فوق سطح البحر بسرعة 450m/s . على أي سرعة تطير لتحقق تشابه القوى الانضغاطية على ارتفاع:

(أ) 800m (ب) 1600m ؟

تتغير درجة الحرارة مع الارتفاع على النحو :

الارتفاع (m)	0	800	1600
درجة الحرارة (K)	288	236	217

و تتغير سرعة الصوت مع درجة الحرارة على النحو: $c = const.\sqrt{T}$.

4 السريان اللاإنضغاطي في الأنابيب

4.1 أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب

عند استخلاص معادلة الطاقة (2.10) تجاهلنا الأثر اللزجي للسريان باعتبار أن الإجهاد القصي في المعادلة الأساسية للطاقة يساوي الصفر. على الرغم من وجود أحوال تطبيقية تُخول هذا التبسيط إلا أن معظم التطبيقات الهندسية للسريان في الأنابيب تستدعي الاهتمام بالآثار اللزجية. وبذلك نحتاج إلى تعديل المعادلة (2.10) التي تخص السريان الرتيب أحادى البعد اللالزجي لتشمل السريان اللزجي. و نُقدم هنا بالقول أن الإضافة المطلوبة تعتمد على علاقات تجربية في حالة السريان المائر بينما يمكن في حالة السريان الصفائحي استخلاصها بعلاقات نظرية بحتة.

بدءً من المعادلة (2.10)، وهي القاصرة عن معالجة الاحتكاك

$$\frac{P}{\dot{m}\,g} = \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g} \right]$$

فهي بذلك تنص على أنه إذا أريد نقل مائع من الموضع (1) إلى الموضع (2) لمقابلة رفع يساوي z_2-z_1 متر و زيادة في الضغط من p_1 إلى p_2 و زيادة في السرعة من $\mathbf{v}_1$ إلى v_2 فاننا نحتاج إلى سمت ضخ يعادل $\frac{P}{\dot{m}\,g}$ متراً . و يبدو قصور المعادلة وعدم توافقها مع الواقع إذا نظرنا في حالة سريان في أنبوب طويل وأفقي لا نحتاج فيه لرفع ولا زيادة في الضغط أو السرعة فتشير المعادلة أعلاه إلى عدم الحاجة إلى مضخة (P=0)!
يدل التحليل أعلاه إلى الحاجة إلى إضافة حد رابع إلى المعادلة لمقابلة الأثر الاحتكاكي. ولأن وحدات كل الحدود طولية (m) فإن الحد المضاف يكون أيضاً ذا وحدة طولية ويسمى سمت الاحتكاك h_f .

وبذلك نصحح كتابة المعادلة إلى الصورة

$$\frac{P}{\dot{m}\,g} = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g} + h_f \quad \text{.....(4.1)}$$

للوصول إلى العلاقة بين h_f ومتغيرات السريان الأخرى نطبق المعادلة (4.1) على سريان في أنبوب ثابت المقطع و أفقي بين موضعين (1) و (2) لا تتخللهما مضخة. فتصبح المعادلة

$$h_f = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{\Delta p_f}{\rho g} \quad \text{.....(4.2)}$$

النقصان في الضغط هنا ناتج كلياً عن الاحتكاك .

للتمهيد لإيجاد العلاقة التجربية المطلوبة بين Δp_f وعناصر السريان نستخدم التحليل البعدي – الباب III - و نبدأ بتحديد العناصر المؤثرة :

$$\Delta p_f = f_1(\rho, \boldsymbol{v}, d, L, \mu, k) \quad \text{.....(1)}$$

حيث k متوسط ارتفاع الخشونة في باطن الأنبوب.

القائمة أدناه تبين قيم k بالملمتر لأنواع الأنابيب الأكثر استخداماً

مادة الأنبوب	k(mm)	مادة الأنبوب	k(mm)
أنابيب مسحوبة	0.0015	حديد مخرصن	0.15
فولاذ تجاري	0.045	حديد زهرة	0.25
حديد مطاوع	0.045	خرسانة	0.3 - 3.0
حديد زهرة مسفلت	0.12	فولاذ مبرشم	1.0 - 10.0

العلاقة (1) تدل إلى عدد العناصر n = 7 وعدد الأبعاد الأساسية m = 3 ، وهي الكتلة والطول والوقت . بذلك تكون عدد المقادير اللابعدية المستقلة الحاكمة للسريان أربعة.

نتيجة التحليل البعدي لهذه الحالة - المسألة (3.2) - هي :

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = f_2(\mathrm{Re}, \frac{L}{d}, \frac{k}{d})$$

تدل التجربة إلى أن $\frac{\Delta p_f}{\rho v^2}$ تتغير خطياً مع $\frac{L}{d}$

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = \frac{L}{d} f_3(\mathrm{Re}, \frac{k}{d})$$

و يقتضى العرف اعتبار مقام المقدار يسار المعادلة $\frac{1}{2}\rho v^2$

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{L}{d} f(\mathrm{Re}, \frac{k}{d})$$

و بالرجوع إلى المعادلة (4.2)

$$h_f = \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} f(\mathrm{Re}, \frac{k}{d})$$

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{.....(4.3)}$$

تعرف هذه بمعادلة **دارسي** .

معامل الاحتكاك f دالة ل Re و k/d أستخلصت تجريباً وبينت في أوجه مختلفة.
ينبغي الانتباه الى أن بعض المراجع تضع المعامل **4** في الجانب الأيمن للمعادلة (4.3). يتبع ذلك أن قيمة *f* في تلك المراجع تعادل ربع قيمتها هنا.
الملحق (ج) به قائمة عددية تعطي معامل الاحتكاك *f* بدلالة *Re* و *k/d*. كما يمكن استخدام العلاقات الرياضية الآتية لحساب قيمة *f*:

(أ) للسريان الصفائحي

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} \quad \text{.....(4.4)}$$

وهذه المعادلة مستخلصة نظرياً ومُثبتة بالتجربة .

(ب) للسريان المائر

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -086 \ln\left(\frac{k/d}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \text{.....(4.5)}$$

تعرف العلاقة (4.5) بعلاقة **كولبروك – وايت.** ويمكن ملاحظة التعقيد الناشئ عن أن *f* تظهر في كلٍ من جانبي العلاقة.

(ج) معادلة سوامي للسريان المائر

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln\left(\frac{0.27k}{d} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2} \quad \text{.....(4.6)}$$

معادلة سوامي أسهل استخداماً من معادلة كولبروك - وايت ونسبة الخطأ فيها لا تتجاوز 2% إذا كانت قيم k/d و Re في الحدود

$$10^{-6} \le k/d \le 10^{-2}$$

$$5\text{x}10^{3} \le Re \le 10^{8}$$

مثال

أنبوب من الفولاذ التجاري قطره 250mm به سريان ماء بمعدل $0.1 m^3/s$ و بدرجة حرارة 35°C .

(أ) قدّر الفقد في السمت والنقصان في الضغط لمسافة أفقية 100m .

(ب) كم يكون معدل السريان الأقصى اذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m ؟

(أ) معادلة دارسي (4.3)

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

$$\mathrm{v} = \frac{q}{A} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4}0.25^2} = 2.04 m/s$$

من قائمة خواص الماء عند 35°C :

ν = 0.727E-6 m^2/s

ρ = 994.1 kg/m^3

$Re = \boldsymbol{v}d/\nu$ = 7E5

و هذا يعني أن السريان مائر

k/d = 0.045E-3 / 0.25 = 0.00018

باستخدام معادلة سوامي (4.6)

f = 0.015

$$h_f = 0.015\frac{100}{0.25}\frac{2.04^2}{2(9.81)} = \mathbf{1.3m}$$

النقصان فى الضغط = Δp_f

$\Delta p_f = \rho g h_f$ = 994.1(9.81)1.3 = **12.3kPa**

(ب) اذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m فان معادلة دارسي تتخذ الصورة:

$$1.0 = f\,\frac{100}{0.25}\,\frac{\mathrm{v}^2}{2(9.81)} = 20.39\,fv^2$$

$$fv^2 = 0.049 \quad \text{.....(1)}$$

نسبةً لاعتماد f على السرعة $\boldsymbol{v}$ فان المعادلة أعلاه تحتاج لأسلوب تكرري. و يمكن البدء بافتراض سريان مفرط التمور لاتعتمد f فيه على عدد رينولز، و من ثم السرعة. و يمكن من قوائم السريان الاحتكاكي الحصول على f لهذه الحالة بمعرفة الخشونة اللابعدية فقط.

عند هذا الافتراض الابتدائي $f = 0.0134$

باستخدام المعادلة (1) نحصل على $\boldsymbol{v} = 1.91$ m/s

و يمكن الآن الدخول للتقريب الثاني بحساب عدد رينولز ثم المعامل f

$Re = 6.6E5$, $f = 0.015$

و باستخدام المعادلة (1) نحصل على $\boldsymbol{v} = 1.81$ m/s

في التقريب الثالث نحصل على نفس النتيجة عند التقريب لمنزلتين عشريتين. و يعني هذا أن السرعة الصحيحة هي 1.81 m/s . و بالتالي معدل السريان الأقصى الممكن هو **$0.089\ \mathbf{m^3/s}$** .

مثال

أنبوب من الفولاذ المخرصن قطره الداخلي 78mm وطوله 200m ينقل الماء عند درجة الحرارة 25ºC بمعدل 7 l/s من الموضع (1) إلى الموضع (2) حيث يرتفع الموضع الثاني عن الأول بمقدار 2m . سمت الضغط عند الموضع (1) يساوي 1.0m (فراغي) و الضغط جوي عند الموضع (2) .

المطلوب حساب القدرة الخارجة من المضخة.

عند 25ºC

$\nu = 0.897E\text{-}6\ \mathrm{m^2/s}$, $\rho = 997.1\ \mathrm{kg/m^3}$

معادلة الطاقة (4.1) تعطي

$$P = \dot{m} g \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{\mathrm{v}_2{}^2 - \mathrm{v}_1{}^2}{2g} + h_f \right]$$

تَساوي المساحات A_1 و A_2 يعنى $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$

$\dot{m} = \rho q$ = (997.1)(7E-3) = 6.98 kg/s

$\boldsymbol{v} = q/A$ = 7E-3 / 4.78E-3 = 1.46 m/s

$Re = \boldsymbol{v}d/\nu$ = 1.27E5

k/d = 0.15 / 78 = 0.0019

f = 0.025

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} = 6.88\text{m}$$

P = 6.98(9.81)[2.0 +1.0 + 6.88] = **0.68kW**

4.2 الفواقد الموضعية في الأنابيب

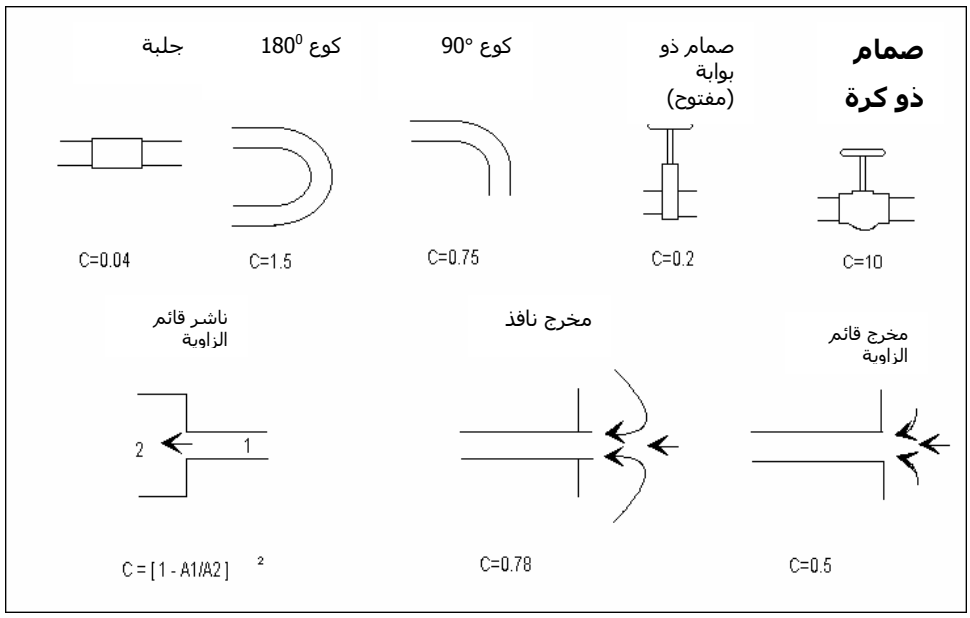
نُعنَي هنا بالفواقد في الطاقة الناشئة عن الانحناءات والعوائق في مسار المائع. على نحو ما فعلنا للفقد الاحتكاكي نعدل هنا المعادلة (4.1) بإضافة سمت للفقد الموضعي h_l

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1+\frac{P}{\dot{m}\,g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2+h_f+h_l \quad \text{.....(4.7)}$$

تدل التجارب على أن الفقد الموضعي h_l يمكن تقديره بالعلاقة العامة:

$$h_l = C_l \frac{v^2}{2g} \quad \text{.....(4.8)}$$

تحدد C لكل نوع من أنواع العوائق بالتجربة . الشكل(4.1) يوضح قيم C لبعض العوائق المألوفة.



الشكل 4.1

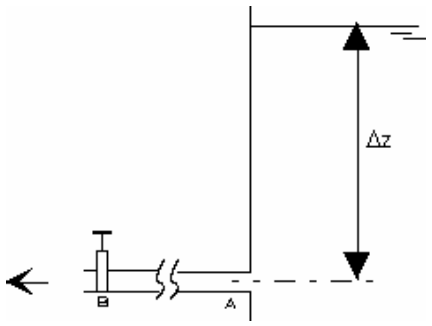
مثال

في الشكل (4.2) أدناه الأنبوب A-B من الفولاذ التجاري قطره 150mm وطوله 10m . الصِمام المستخدم صِمام ذو بوابة مفتوح تماماً. معدل السريان 50 l/s واللزوجة الكينماتية $8E\text{-}7 m^2/s$

المطلوب :

(أ) الفقد الكلي في السمت

(ب) ارتفاع الماء فوق الخط المركزي للأنبوب .



الشكل 4.2

باتخاذ المقطع (1) على سطح السائل في المستودع والمقطع (2) عند مخرج الأنبوب

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$\boldsymbol{v}_1 = 0$$

بالرجوع لمعادلة الطاقة (4.7)

$$P = 0 , \quad z_1 - z_2 = \Delta z$$

$$\Delta z = \frac{v_2^2}{2g} + h_f + h_l \qquad \text{.....(1)}$$

الفقد الكلي في السمت = $h_f + h_l$

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{q}{A} = \frac{0.05}{0.0177} = 2.83 m/s$$

$$Re = \boldsymbol{v}d/\nu = 0.53E6$$

(سريان مائر)

$$k/d = 0.045 / 150 = 0.0003$$

$$f = 0.016$$

$$h_f = 0.016\frac{10}{0.15}\frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.44\text{m}$$

$$h_l = \left(\sum C\right)\frac{v^2}{2g} = [0.5+0.2]\frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.29\text{m}$$

(أ) الفقد الكلي في السمت = $h_f + h_l$

$= 0.44 + 0.29 =$ **0.73m**

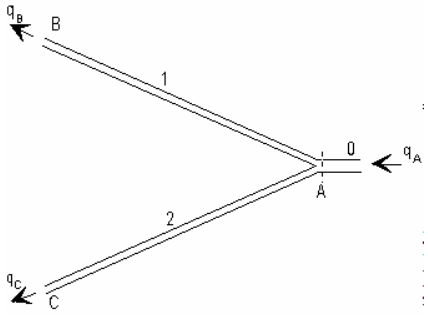
(ب) Δz ، المعادلة (1)

$$\Delta z = \frac{2.83^2}{2(9.81)} + 0.73 = 0.41 + 0.73 = \textbf{1.14m}$$

4.3 الأنابيب المتفرعة

مثال

يوضح الشكل (4.3) منظومة أنابيب متفرعة. الأنبوب **0** يتفرع إلى الأنبوبين **1** و **2** أقطارهما d_1 و d_2 و أطوالهما L_1 و L_2 وارتفاعي الخشونة فيهما k_1 و k_2. نقطة التفرع هي **A** ونقاط الخروج **B** و **C**. الضغط عند النقطتين **B** و **C** جوي - أي صفر مقياسياً. المراد في هذا المثال التوضيحي معرفة معدلي السريان في الفرعين **1** و **2** إذا كان معدل السريان عند الموضع **A** يساوي q_A.



الشكل 4.3

معادلة الطاقة بين الموضعين **A** و **B**

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{v_1^2}{2g}+h_{f1}+\frac{p_B}{\rho g} \quad \text{.....(1)}$$

و بين الموضعين **A** , **C**

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}+h_{f2}+\frac{p_C}{\rho g} \quad \text{.....(2)}$$

بخصم (2) من (1)

$$h_{f1}-h_{f2}=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g} \quad \text{.....(3)}$$

و باستخدام علاقة دارسي

$$f_1\frac{L_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}-f_2\frac{L_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{f_1 \frac{L_1}{d_1} + 1}{f_2 \frac{L_2}{d_2} + 1} \right)^{1/2} \quad \text{.....(4)}$$

حفظ الكتلة :

$$q_A = q_B + q_C = \frac{\pi}{4}(d_1^{\,2} v_1 + d_2^{\,2} v_2)$$

$$d_1^{\,2} v_1 + d_2^{\,2} v_2 = \frac{4}{\pi} q_A \quad \text{.....(5)}$$

لأن المتغيرين f_1 وf_2 دوال للسرعتين v_1 وv_2 فأن المعادلتين (4) و (5) كافيتان للحل. و لأن f_1 وf_2 دوال غير بسيطة يفضل اجراء الحل تكرارياً.

مُعطيات عددية :

d_1	d_2	k_1	k_2	L_1	L_2	q_A	ν
0.1m	0.2m	0.04mm	0.04mm	100m	100m	$0.1m^3$	$8E\text{-}7m^2/s$

المعادلة (4) تعطي

$$v_2 = v_1 \left(\frac{1000 f_1 + 1}{500 f_2 + 1} \right)^{1/2} \quad \text{.....(6)}$$

المعادلة (5)

$$v_1 = 12.73 - 4v_2 \quad \text{.....(7)}$$

المعادلتان (6) و (7) تعطيان

$$v_2 = \frac{12.73 \sqrt{\frac{1000 f_1 + 1}{500 f_2 + 1}}}{1 + 4\sqrt{\frac{1000 f_1 + 1}{500 f_2 + 1}}} \quad \text{.....(8)}$$

التقريب الأول : سريان مفرط التمور (قيمة f لا تعتمد هنا على Re)

$k_1/d_1 = 0.0004$, $f_1 = 0.016$

$k_2/d_2 = 0.0002$, $f_2 = 0.014$

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

v_1 = 1.86 m/s , v_2 = 2.72 m/s

التقريب الثاني:

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{1.86(0.1)}{8E-7} = 2.3E5$$

Re_2 = 6.8E5

f_1 = 0.018

f_2 = 0.015

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

v_1 = 1.83 m/s , v_2 = 2.73 m/s

التقريب الثالث :

Re_1 = 2.3E5

Re_2 = 6.8E5

وهي مطابقة لقيم *Re* فى التقريب الثاني. ويعنى ذلك

v_1 = 1.83 m/s , v_2 = 2.73 m/s

وبذلك

q_B = 0.014 m^3/s, q_C = 0.086 m^3/s .

سؤال للطالب: أحسب السمت المطلوب عند الموضع A ؟

مسائل

4.1 خط أنابيب أفقي من الحديد الزهرة قطره الداخلي 250mm ينقل نفطاً خاماً درجة حرارته 30°C بمعدل 50 l/s . قدر الفقد في السمت بسبب الاحتكاك للكيلومتر الواحد.

(عند درجة الحرارة 30°C خذ كثافة النفط $880kg/m^3$ و لزوجته $7.5E\text{-}6m^2/s$)

[5.1m]

4.2 أنبوب أفقي من الحديد المُخرصن قطره 50mm و طوله 100m ينقل نفطاً خاماً عند درجة الحرارة 20°C بمعدل 1.0 l/s .

(أ) وضح أن السريان في المدى الحرج لعدد رينولز.

(ب) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان صفائحيا.

(ج) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان مائراً .

(عند درجة الحرارة 20°C خذ كثافة النفط $890kg/m^3$ و لزوجته $9.2E\text{-}6m^2/s$)

[0.6m, 1.3m]

4.3 يراد ضخ كيروسين درجة حرارته 30°C عبر أنبوب قطره 300 mm وخشونته 0.25mm لمسافة 1500m بمعدل $0.1m^3/s$. يمكن اعتبار الضغط متساوي عند مدخل ومخرج الأنبوب. قدر القدرة المطلوبة من المضخة. (عند 30°C خذ كثافة الكيروسين $800kg/m^3$ ولزوجته $2E\text{-}6m^2/s$).

[8.2 kW]

4.4 يسري الماء في أنبوب أفقي ناعم قطره 15mm . قِيس الضغط في صعيد قطاع من الأنبوب طوله 50m و وجد مكافئاً ل 12mمن الماء و عند المخرج مساوياً للضغط الجوي. باعتبار اللزوجة الكينماتية تساوي $1E\text{-}6m^2/s$. أحسب معدل السريان الحجمي.

[0.3 l/s]

4.5 يصِل بلدتي هجليج و صمت الجزء الرئيسى من الخط الناقل للنفط الخام. تقع هجليج على ارتفاع 400m فوق سطح البحر و صمت على ارتفاع 930m . المسافة بين الموقعين 1400km تقريباً. القطر الداخلى للأنبوب 0.7m . بافتراض أن السريان نيوتونى و أن معدله $0.35m^3/s$ و كثافته $860kg/m^3$ و لزوجته $2E\text{-}5m^2/s$ و متوسط ارتفاع خشونة الأنبوب 4.5E-5m أحسب:

(أ) سمت الفقد الاحتكاكى

(ب) السمت الكلي المطلوب

(ج) قدرة الضخ الكلية المطلوبة.

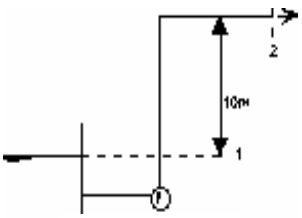
يمكن تجاهل ألفوا قد الثانوية.

[1960m, 2490m, 7.4MW]

4.6 أنبوب ناشر قائم الزاوية قصير الطول قطره الصعيدي 0.35m وقطره السافلي 0.7m يسري فيه الماء بمعدل $0.3m^3/s$. ضغط الماء في الجانب الصعيدي 5.0kPa . أحسب الفقد في السمت بسبب الناشر و أحسب الضغط في الجانب السافلي منه.

[0.28m, 6.8 kPa]

4.7 يوضح الشكل (4.4) منظومة ضخ تستخدم لرفع زيت عبر أنبوب قطره 50mm وطوله 100m وخشونته 0.1mm بمعدل 5 l/s . كثافة الزيت $870\ kg/m^3$ و لزوجته الحركية 0.008 Pa.s . أحسب القدرة المطلوبة من المضخة.



الشكل 4.4

أحسب النسبة المئوية للخطأ في إجابتك عند تجاهل الفواقد الموضعية. [1.36kw, 1.3%]

4.8 يعرف ما يلي عن منظومة أنابيب بفرعين (1) و (2):

d_1 =200mm , d_2 = 100mm

$k_1 = k_2$ = 0.2mm

$L_1 = L_2$ =15m

عند مخرج الأنبوب (2) صِمام ذو كرة مفتوح كلياً. المعدل الكلي للسريان عند نقطة التفرع 100 l/s وتساوي اللزوجة الكينماتية للسائل $8.5\ E\text{-}7m^2/s$

(أ) أحسب معدل السريان في الأنبوبين.

(ب) أحسب معدل السريان إذا أستبعد الصِمام.

[92.4 l/s ; 7.6 l/s ; 86.1 l/s ; 13.8 l/s]

5 ميكانيكا الموائع عند الاتزان النسبي

5.1 المعادلة الأساسية

يغطي هذا الباب ميكانيكا الموائع عند ما لا تكون لعناصر المائع حركة بالنسبة لبعضها البعض. ويشمل ذلك ما يعرف بسكون الموائع كما يشمل حركة المائع كوحدة واحدة بتسارع ثابت.

وبالنظر إلى معادلة كمية التحرك (2.12) فإن الاتزان النسبي يعني أن المقدار المعبر عن سريان التحرك عبر السطح التحكمي يساوي صفر أي:

$$\oiint_A \rho \ \underline{v} \ (\underline{v}.d\underline{A}) = 0$$

كما أن الإجهاد القصي يساوي صفر ، فيصبح الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$

ونضيف الفرض الخاص بلاانضغاطية السريان فتصبح المعادلة (2.12)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, dV = \iiint_V \rho g \underline{k}\, dV - \oiint_A p\underline{n}\, dA$$

وبالرمز لمتجه التسارع ب $\underline{a}$ حيث $\underline{a} = \dfrac{\partial v}{\partial t}$

$$\iiint_V \rho \underline{a}\, dV + \iiint_V \rho g \underline{k}\, dV + \oiint_A p\underline{n}\, dA = 0$$

و باستخدام نظرية التباعد - الملحق **ب** :

$$\oiint_A p\underline{n}\, dA = \iiint_V \nabla p\, dV$$

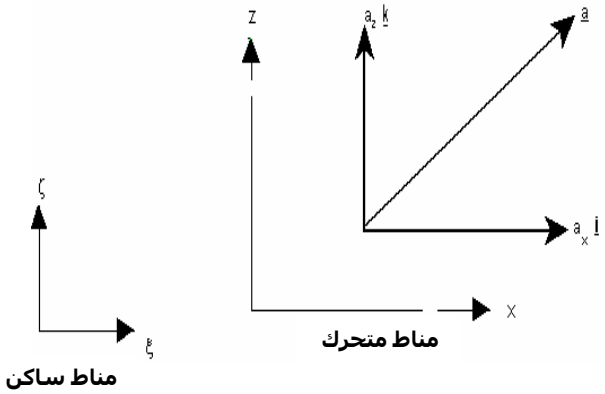
فتصبح معادلة كمية التحرك

$$\iiint_V [\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p]\, dV = 0$$

وبما أن الحجم التحكمي V اختياري ونتيجة التكامل صفر :

$$\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p = 0 \quad \text{.....(5.1)}$$

5.2 توزيع الضغط في مجال ثنائي الأبعاد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت



الشكل 5.1

ندرس هنا حركة حاوية تتحرك بتسارع ثابت $\underline{a}$ بالنسبة للمناط الساكن ζ - ξ . بالمقابل المناط *x-z* مثبت على الحاوية المتحركة.

بما أن التسارع ثابت

المقدار $a_x = \ddot{\xi}$ = ثابت، المقدار $a_z = \ddot{\zeta}$ = ثابت

بالتعويض في المعادلة (5.1)

$$\rho(a_x \underline{i} + a_z \underline{k} + g\,\underline{k}) + \frac{\partial p}{\partial \xi}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial \zeta}\underline{k} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(a_z + g), \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x$$

استخلصت المعادلتان أعلاه بالنسبة للمناط الثابت $\zeta - \xi$. لتحويلهما للمناط المتحرك *x-z* لاحظ الآتي :

$$\dot{\xi} = a_x t + c_1$$

باعتبار السرعة = 0 عند $t = 0$ $c_1 = 0$

$$\xi = \tfrac{1}{2} a_x t^2 + c_2$$

باعتبار أن المناطين يتطابقان عند بدء الحركة $c_2 = x$

$$\xi = x + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

وبالمقابل

$$\zeta = z + \tfrac{1}{2} a_z t^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x \quad \text{.....(5.2a)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(g+a_z) \quad \text{.....(5.2b)}$$

وبمكاملة (5.2a)

$$p = -\rho a_x x + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$$

(5.2b) تعطى

$$f'(z) = -\rho(g + a_z)$$

$$f = -\rho(g + a_z)z + c$$

$$p = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z + c \quad \text{.....(5.3)}$$

وهي معادلة توزيع الضغط . ويحدد الثابت c من القيم الحدودية .

معادلة سطح السائل

تدل التجربة على أن سطح السائل يكون مستوياً مستقيماً ومائلاً في حال تعرض الحاوية لتسارع ثابت. لتقصي ما يدل عليه التحليل النظري في المعادلة (5.3)

$$p = p_a \quad , \quad z = z_s$$

حيث p_a الضغط الجوي و z_s قيمة z عند سطح السائل .

$$p_a = -\rho a_x x - \rho(g + a_z) z_s + c$$

$$z_s = c' - \frac{a_x}{g + a_z} x \quad \text{.....(5.4)}$$

وهو خط مستقيم ميله $-\frac{a_x}{g + a_z}$.

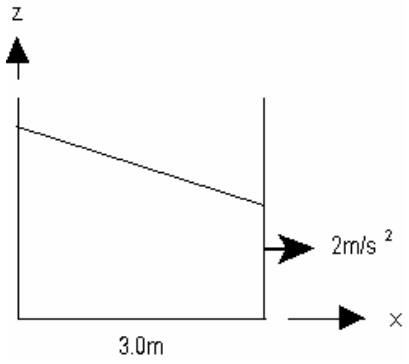
مثال

حاوية تحوي زيتاً كثافته 850 kg/m^3 وتتحرك بتسارع ثابت 2.0m/s^2 في اتجاه x الموجب (الشكل 5.2) . طول الحاوية 3.0m . لوحظ أن أدنى مستوىً للزيت 2.0m فوق القاع . استخلص

(أ) معادلة توزيع الضغط .

(ب) مقدار وموضع أقصى ضغط على الحاوية

(ج) معادلة سطح السائل وزاوية ميله .



الشكل5.2

(أ)

$a_x = 2.0\text{m/s}^2$, $a_z = 0$, $\rho = 850\ \text{kg/m}^3$

المعادلة (5.3) تعطي

$$p = -850(2.0)x - 850(9.81)z + c_1 = -1.7E3\ x - 8.34E3\ z + c_1$$

القيمة الحدودية $x = 3$, $z_s = 2$, $p = 0$

$$c_1 = 27.8E3$$

معادلة توزيع الضغط :

$$p = (27.8 - 1.7x - 8.34\ z)\ E3$$

(ب) معادلة توزيع الضغط تعطي موضع الضغط الأقصى : $x = 0$, $z = 0$

مقدار الضغط الأقصى = **27.8 k Pa**

(ج) المعادلة (5.4) تعطي سطح السائل z_s.

لحساب قيمة ثابت المعادلة

$$z_s = -\frac{2}{9.81}x + c_2 = -0.2\,x + c_2$$

عند $x = 3$ ، $z_s = 2$

$$c_2 = 2.6$$

$$\mathbf{z_s = 2.6 - 0.2x}$$

ميل السطح -0.2

$$\tan\theta = -0.2$$

$$\boldsymbol{\theta = -11.3^o}$$

5.3 توزيع الضغط في سائل ساكن

سُكون السائل يعني أن التسارع a في المعادلة (5.1) يساوي صفر . فتصبح المعادلة

$$\rho g \underline{k} + \nabla p = 0$$

$$\rho g \underline{k} + \frac{\partial p}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\underline{k} = 0$$

وهذا يعني أن p لا تعتمد على x, y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

z هو المحور الرأسي ويكون موجباً في عكس اتجاه الجاذبية .

ونعرف البعد h في الاتجاه المعاكس ل z ونقطة الأصل فيه عند سطح السائل. وبذلك فإن قيمة h هي العمق . و بالتالي

$$dh = -dz$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = \rho g h + c$$

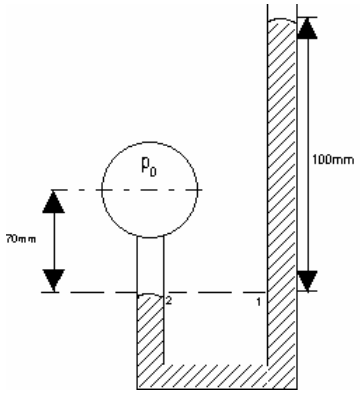
وباعتبار الضغط جوي عند السطح $c = p_a$

$$p = \rho g h + p_a \quad \text{.....(5.5)}$$

مثال

يستخدم مانومتر زئبقي لقياس ضغط زيت يسري في أنبوب . الكثافة النسبية للزيت والزئبق 0.85 و 13.6 .

(أ) قدر الضغط القياسي في الخط المركزي للأنبوب .



الشكل 5.3

(ب) قدر الضغط المطلق في الخط المركزي للأنبوب إذا كانت قراءة البارومتر 0.75m

(ج) إذا استخدم مانومتر مائي كم يكون الفرق في ارتفاعات السائل المانومتري ؟

الضغط عند الموضع (1) = الضغط عند الموضع (2)

باستخدام المعادلة (5.5) عند الموضعين

$$p_0 + 0.07\,\rho_0 g = p_a + 0.1\rho_m g$$

$$p_0 + 0.07(0.85E3)9.81 = p_a + .1(13.6E3)9.81$$

$$p_0 = 12.8E3 + p_a$$

(أ) الضغط القياسي في مركز الأنبوب = **12.8 kPa**

(ب) الضغط البارومتري = $h_b\,\rho_m\,g = 0.75\,(13.6E3)9.81 = 0.1MPa$

الضغط المطلق = $12.8E3 + 100E3$ = **112.8 kPa**

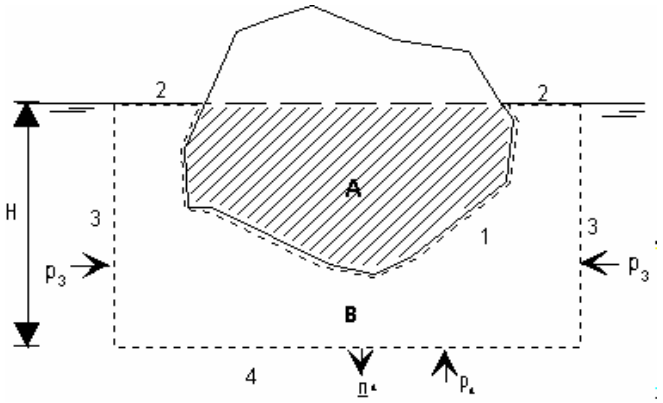
(ج) عند استخدام مانومتر مائي

$$h_w\,\rho_w\,g = h_m\,\rho_m\,g$$

$$1E3(9.81)h_w = 13.6E3(9.81)0.1$$

$$h_w = \mathbf{1.36m}$$

5.4 الطفو



الشكل 5.4

تعرف قوة الطفو بأنها القوة التي تعمل إلى أعلى على الأجسام المغمورة جزئياً أو كلياً في مائع . لاستخلاص تعبير عن هذه القوة نبدأ من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) مطبقةً على الحجم التحكمي المبين في الشكل (5.4).

الحدين الأول و الثانى من المعادلة يساويان الصفر.

الحد الثالث:

$$\iiint_{V_B} \underline{B}\, dV = - \rho g V_B \underline{k}$$

الحد الرابع :

$$\iint_{A} \underline{\sigma}\, dA = \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1\, dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2\, dA_2 + \iint_{A3} \underline{\sigma}_3\, dA_3 + \iint_{A4} \underline{\sigma}_4\, dA_4$$

على السطح (1): يساوي التكامل $\underline{R}$ وهي القوة التي يؤثر بها السطح الصلب على الحجم التحكمي .

على السطح (2) : قياسياً – $p_2 = p_a = 0$

على السطح (3) : تعمل الضغوط إشعاعيا إلى الداخل فتلغى بعضها البعض .

على السطح (4) :

$$\underline{\sigma_4} = -p_4 \underline{n_4} = p_4 \underline{k} = \rho g\, H\, \underline{k}$$

$$\iint_{A4} \underline{\sigma}_4 \, dA_4 = \rho g \, H \, A_4 \underline{k} = \rho g(V_A + V_B)\underline{k}$$

بالتعويض في معادلة كمية التحرك :

$$0 = -\rho g \, V_B \underline{k} + \underline{R} + \rho g(V_A + V_B)\underline{k}$$

$$\underline{R} = -\rho g \, V_A \underline{k}$$

القوة على الجسم الطافي $\underline{F_B}$

$$\underline{F_B} = -\underline{R} = \rho g \, V_A \underline{k}$$

V_A يساوي حجم الجزء المغمور V_i

وبذلك تكون قوة الطفو

$$\underline{F_B} = \rho g \, V_i \underline{k} \quad \text{.....(5.6)}$$

مثال

برميل من الصلب قطره 0.6m وارتفاعه 0.9m ووزنه فارغاً 300N . ملأ بزيت كثافته 800kg/m^3 ووضع في ماء كثافته 1000 kg/m^3 .

(أ) أثبت أن البرميل لا يغطس بكامله في الماء .

(ب) إذا بقى البرميل قائماً أحسب ارتفاع الجزء البارز منه .

(أ) في حالة التوازن :

$$F_B = W_d + W_o$$

حيث W_d وزن البرميل الفارغ و W_o وزن الزيت .

$$W_d = 300$$

$$W_o = (AH)\rho_o g = (\pi/4)(0.6)^2 0.9(0.8E3)9.81 = 1997N$$

$$F_b = 300 + 1997 = 2297N$$

وبقانون الطفو

$$F_b = \rho_w g \, V_I = 1000(9.81)V_i = 2297N$$

$$V_i = 0.234m^3$$

$$V = AH = 0.254m^3$$

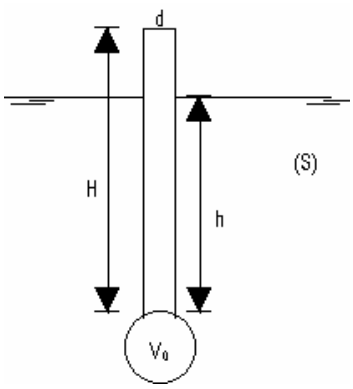
$$V > V_i$$

إذن البرميل لا يغطس تماماً .

(ب) ارتفاع الجزء البارز = $\frac{V - V_i}{A}$

$$\frac{0.254 - 0.234}{\frac{\pi}{4}0.6^2} = \mathbf{71mm}$$

5.5 الهايدرومتر



الشكل 5.5

الهايـدرومتر جهـاز يـستخدم لقيـاس الكثافـة النسبية للسوائل ويعتمد تصميمه على نظريـة الطفو.

الشكل (5.5) يوضـح هايـدرومتر قطـر سـاقه d وطوله H ووزنه W . حجـم الثقـل المثبـت فـي قاعدتـه V_o . الهايـدرومتر مغمـور جزئيـاً فـي سائل كثافته النسبية s . طـول الجـزء المغمـور من الساق h

$$F_B = W$$

$$W = \rho g V_I = \rho_w s g (V_0 + \tfrac{\pi}{4} d^2 h)$$

$$h = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2 s} - \frac{4V_0}{\pi d^2} \quad .....(5.7)$$

إذا غمس الهايدرومتر في الماء المقطر

$s = 1, \rho = \rho_w, \ h = h_0$

$$h_0 = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} - \frac{4V_0}{\pi d^2}$$

حيث h_o الارتفاع الذي يشير إلى s =1 .

وتصبح بذلك العلاقة العامة

$$h = h_0 + \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2}(\frac{1}{s} - 1) \quad .....(5.8)$$

مثال

يراد تصميم هايدرومتر لقياس الكثافة النسبية في المدى $0.5 \le s \le 1.5$. قطر ساق الهايدرومتر 10mm وطول الساق 200mm المطلوب تحديد W و V_o (وزن الهايدرومتر و حجم الثقّل).

عند s = 1.5 h = 0 الحد الأدنى للساق

و عند s = 0.5 h = H = 0.2 الحد الأقصى للساق

بالتعويض للقيم أعلاه في المعادلة (5.7) و الطرح تعطي

$$h_{0.5} - h_{1.5} = \frac{4W}{g\rho_w \pi d^2}\left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5}\right)$$

$$0.2 - 0 = \frac{4W}{9.81(1000)\pi(0.01)^2}\left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5}\right)$$

W = **0.115 N** .

و بالتعويض ثانيةً في (5.7) عند s = 1.5 و h = 0 و W = 0.116 N

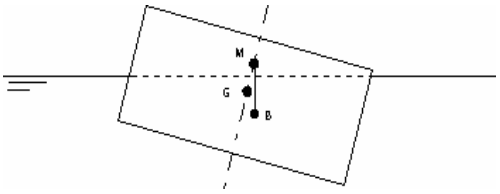
V_0 = **7.85E-6 m^3**

أي بقطر **24.6mm** إذا كان شكل الثقل كروي ($V = 4\pi R^3/3$).

5.6 إستقرار الأجسام الطافية

تعريفات :

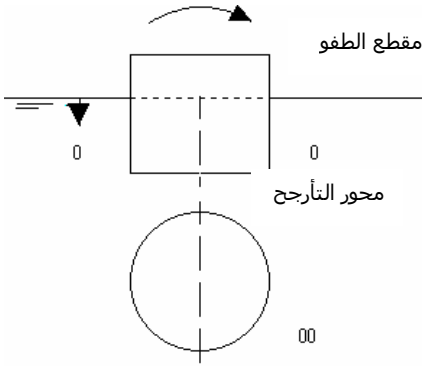
1 مركز الطفو B : هو مركز الكتلة للجزء المغمور من الجسم الطافي.



الشكل 5.6

2 مركز التأرجح M : نقطة تقاطع الخط المركزي الرأسي للجسم في حال سكونه مع الخط الرأسي المار بمركز الطفو في حالة إمالة الجسم الطافي قليلاً.

3 نصف القطر التأرجحي MB : هي المسافة بين مركز الطفو B ومركز التأرجح M.



الشكل 5.7

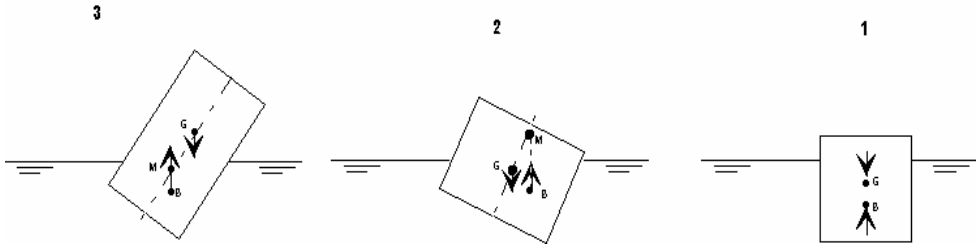
يمكن استخلاص العلاقة أدناه التي تربط نصف القطر التأرجحي بحجم السائل المزاح :

$$MB = \frac{I}{V_i} \quad \text{.....(5.9)}$$

حيث I العزم الثاني لمساحة مقطع الطفو حول محور التأرجح .

V_i : حجم السائل المزاح .

استقرار الأجسام الطافية



الشكل 5.8

الأوضاع الممكنة للجسم الطافي ثلاثة :

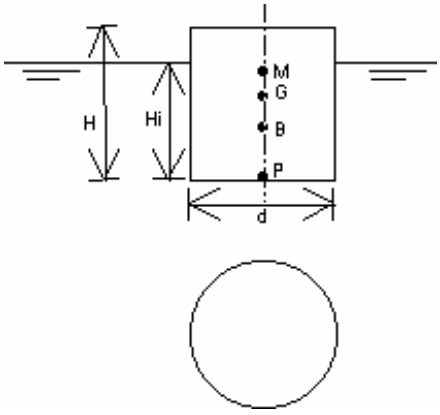
1 جسم **متوازن** . قوة الطفو F_B تعادل الوزن W ويعملان في خط واحد في الاتجاهين المتعاكسين .

2 جسم **مستقر** . قوة الطفو والوزن متساويتان ومتوازيتان في خطوط عملها و يشكلان مزدوجاً يعمل لإعادة الجسم لحالة التوازن . يسمى هذا المزدوج **مزدوج مصحح** . نلاحظ هنا أن النقطة M فوق النقطة G.

3 جسم **غير مستقر** . قوة الطفو والوزن يتساويان ومتوازيان في خطوط عملهما . المزدوج الناتج يعمل على زيادة الميل ويسمى لذلك **المزدوج القالب** . نلاحظ هنا أن النقطة M تحت النقطة G .

نستنتج مما سبق ما يعرف بقاعدة الاستقرار:

MB > GB.....(5.10)



الشكل 5.9

مثال

جسم أسطوانى صلب قطر مقطعه d ، ارتفاعه H وكثافته النسبية s . استخلص القاعدة التي تحكم طفوه قائماً على وضع مستقر في الماء .

قاعدة الاستقرار: MB > GB

$$MB = \frac{I}{V_i} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 H_i / 4} = \frac{d^2}{16 H_i}$$

$$GB = PG - PB = \frac{H}{2} - \frac{H_i}{2} = \tfrac{1}{2}(H - H_i)$$

قاعدة الطفو: $W = F_B = \rho g V_I$

وباعتبار الكثافة النسبية s

$$s \rho_w g V = \rho_w g V_i$$

$$sH = H_i$$

$$MB = \frac{d^2}{16 H_i} = \frac{d^2}{16 sH}$$

$$GB = \tfrac{1}{2}H(1-s)$$

إذن قاعدة الاستقرار:

$$\frac{d^2}{16sH} > \tfrac{1}{2}H(1-s)$$

أو

$$\frac{H}{d} < \frac{1}{2\sqrt{2s(1-s)}}$$

مسائل

5.1 حاوية طولها 1.0m، عرضها 0.5m وارتفاعها 0.3m . صب فيها الماء إلى عمق 0.25m . إذا حركت الحاوية بتسارع أفقي مقداره $2.0\ m/s^2$ أحسب :

(أ) زاوية ميل سطح الماء مع الأفقى .

(ب) كمية الماء المندلق .

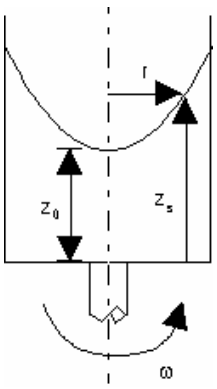
(ج) القوى التي يؤثر بها الماء على السطحين الأمامى والخلفي.

[11.5º, 25L , 22.7 N , 221N]

5.2 حاوية أسطوانية المقطع تحوي سائل وتدور حول محورها بسرعة ω rad/s – الشكل(5.10). توزيع الضغط لمثل هذه الحالة يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g(z - z_0)$$

ومعادلة سطح السائل $z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$.



الشكل 5.10

في حالة محددة قطر الحاوية 0.5m وعمق الماء قبل بدء الدوران 0.1m .

(أ) أحسب السرعة الزاوّية المطلوبة التي تجعل سطح الماء يلامس قاع الحاوية .

(ب) أحسب الارتفاع الأدنى للحاوية لمنع الماء من الاندلاق عند دوران الحاوية بالسرعة أعلاه .

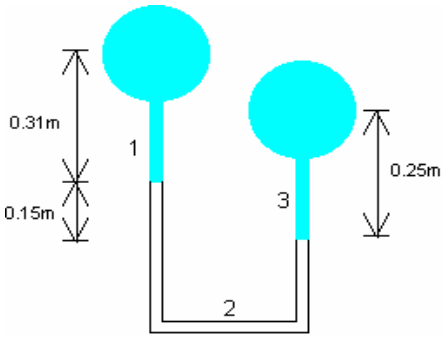
[7.9 rad/s , 0.2m]

5.3 الشكل (5.11) يوضح مانومتر تفاضلي يصل أنبوبين (أ) و (ب) . أحسب فرق الضغط بين الأنبوبين . إذا كان :

(أ) المائع (1) زيت ذو كثافة نسبية 0.8، المائع (2) زئبق ذو كثافة نسبية 13.6 والمائع (3) ماء .

(ب) الموائع (1) و (3) ماء والمائع (2) زئبق .

[20kPa , 20.6 kPa]



الشكل 5.11

5.4 شيدت مقصورة على مجموعة من تسعة براميل تطفو رأسياً على ماء البحر ذي الكثافة $1030kg/m^3$. تزن المقصورة وحدها 10kN . يزن البرميل الواحد 150N و ارتفاعه 1.5m وقطره 0.7m . باعتبار أن متوسط وزن الشخص 600 N أحسب :

(أ) العمق الذي تغطسه البراميل إذا كان في المقصورة 30 شخص .

(ب) العدد الأقصى الذي يسمح بدخوله للمقصورة إذا كان عمق الغطس الأقصى المسموح به يساوي 80% من ارتفاع البرميل .

[0.84m , 51]

5.5 هايدرومتر قطر أنبوبه 10mm يقرأ العدد 1.0 عند غمسه فى الماء المقطر ويكون حجم الماء المزاح $15E\text{-}6m^3$. أحسب المسافة بين القراءة 1.0 وسطح السائل إذا غمس الهايدرومتر في:

(أ) زيت كثافته النسبية 0.85

(ب) حامض نتريك كثافته النسبية 1.5 .

[+34mm , - 64 mm]

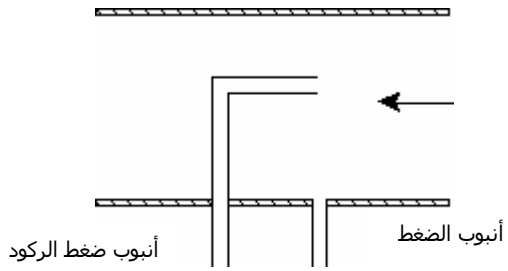
5.6 كتلة خشبية بمقطع أفقي مربع مساحته $0.1m^2$ وكثافة نسبية 0.6 . جد المدى المستقر لارتفاع الكتلة عند وضعها في سائل كثافته النسبية 0.9 .

[<0.3m]

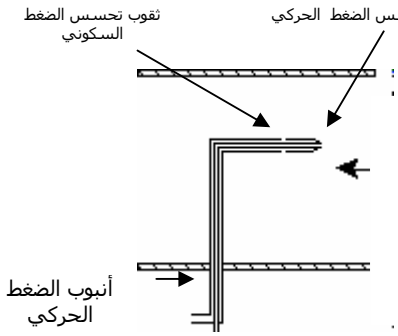
6 طُــرق القـــياس

6.1 مقـــدمة

يمكن تحسس مستوى الضغط عند أي مقطع متعامد على اتجاه السريان بواسطة أنبوب رفيع تتعامد مقدمته على اتجاه السريان. ويعرف من التجربة أن الضغط يكون ثابت المستوى عند النقاط المتعامدة على السريان وفي مقطع واحد إذا كان المجرى مستقيماً أو ذا انحناء صغير مقارناً بعرض المجرى. ويوضح الشكل (6.1) أنبوب الضغط الذي يتحسس الضغط p عند المقطع المراد قياس الضغط عنده.



الشكل 6.1



الشكل 6.2

يعرّف بالمقابل الضغط الركودي بأنه مستوى الضغط إذا هبطت سرعة السريان اللالزجي إلى الصفر. وبذلك يمكن تحسس الضغط الركودي p_0 بأنبوب تستقيم مقدمته في اتجاه السريان - الشكل (6.2) .

يمكن إدراك علاقة الضغط p بضغط الركود p_0 للسريان المثالي اللاإنضغاطى من علاقة برنولي المبسطة

$$\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{p_0}{\rho}$$

$p_0 - p = \tfrac{1}{2}\rho v^2$ = الضغط الحركي .....(6.1)

الشكل (6.2) يبين إمكانية جمع أنبوبي الضغط والضغط الركودي في أنبوب مركب واحد يعرف بأنبوب الضغط الحركي.

6.2 أجهزة قياس الضغط

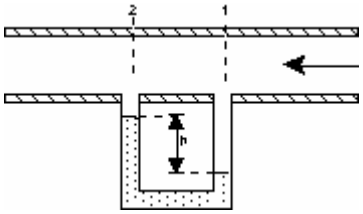
6.2.1 المِضغاط السائلي

المِضغاط السائلي أنبوب يستخدم أعمدة السوائل لتحديد الفروق في الضغط. و تنبني قاعدة قياس الضغط بالمِضغاط السائلي على المعادلة (5.5) حيث نرى أن معرفة ارتفاع سائل المِضغاط وكثافته تُمكن من تحديد الضغط. و يستخدم المِضغاط السائلي عادةً في مدى الضغط 20 Pa إلى 0.14E6 Pa .

اختيار سائل المِضغاط يعتمد على فرق الضغط المتوقع. فيستخدم الزئبق ذو الكثافة العالية لفروق الضغط العالية و يستخدم الماء عادةً لفروق الضغط المنخفضة.

6.2.1.1 المِضغاط السائلي البسيط

المِضغاط السائلي البسيط أنبوب زجاجي رفيع في شكل U ، يوصل طرفيه إلى نقطتي تحسس الضغط (1) و (2) كما في الشكل (6.3). ينشأ عن التوصيل فرق مِضغاطي *h* وتستخدم المعادلة (5.5) لتعطي

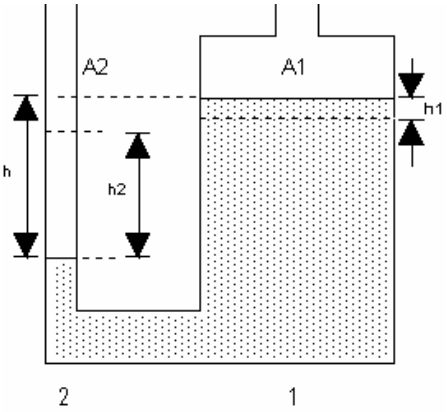


الشكل 6.3

$$p_1 - p_2 = \rho g h \quad \text{.....(6.2)}$$

6.2.1.2 مِضغاط الصناعة

لتحديد المقدار *h* في المِضغاط البسيط نحتاج لقراءة ارتفاع سائل المِضغاط في كلٍ من فرعي المِضغاط ومن ثم حساب الفرق. وقد صُمم مِضغاط الصناعة - الشكل (6.4) - للتمكين من القراءة من فرعٍ واحد مما يبسط استخدام المِضغاط السائلي.



الشكل 6.4

فرعي مِضغاط الصناعة لهما أقطار متباينة $A_1 >> A_2$. عند توصيل الفرعين بنقاط ضغط مختلفة ينشأ فرق الارتفاع h حيث

$$p_2 - p_1 = \rho g h \quad \ldots\ldots(1)$$

$$h = h_1 + h_2$$

حيث h_1 الزيادة في عمود سائل المِضغاط في الفرع (1) و h_2 النقصان في عمود السائل في الفرع (2). و نسبةً لعدم تساوي المساحات فإن h_2 تكون أكبر من h_1 مرتبطتين بالعلاقة الحجمية

$$h_2 A_2 = h_1 A_1$$

$$h_1 = h_2 \frac{A_2}{A_1}$$

وبذلك تصبح المعادلة (1)

$$p_2 - p_1 = \rho g h_2 \left(\frac{A_2}{A_1} + 1\right)$$

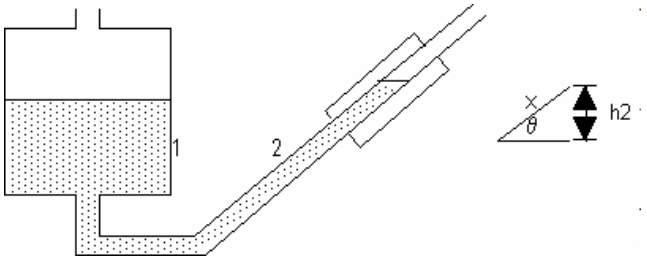
بما أن A_2/A_1 صغيرة مقارنةً بالواحد الصحيح يمكن أن نكتب:

$$p_2 - p_1 = \rho g h_2 \quad \ldots\ldots(6.3)$$

يُمكّن هذا التصميم إذن من قراءة h_2 فقط لحساب $p_2 - p_1$ بدون فقدانٍ يذكر في الدقة. إذا كانت $d_2/d_1 = 0.1$ ، مثلاً، فإن الخطأ في المعادلة (6.3) 1% فقط .

6.2.1.3 المِضغاط السائلي المائل

الشكل (6.5) يوضح مِضغاط صناعة مائل. نسبةً لأن المساحة A_2



الشكل 6.5

تقل كثيراً عن A_1 فإن القراءة تؤخذ فقط من الفرع (2) كما سبق الشرح. بالرجوع إلى المعادلة (5.5) نرى أن إمالة الفرع (2) لا تؤثر في الارتفاع الرأسي لعمود السائل، أي h_2. إلا أنها تؤدي إلى زيادة الطول المائل للعمود x حيث

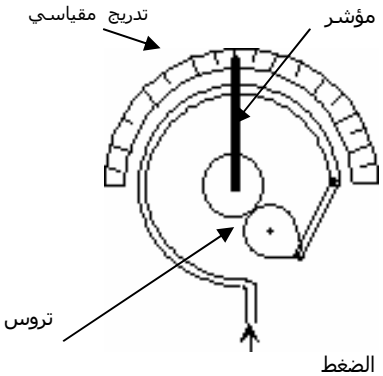
$$x = \frac{h_2}{\sin\theta}$$

وتصبح المعادلة (6.3)

$$p_2 - p_1 = (\rho g \sin\theta)x \quad \text{.....(6.4)}$$

و لأن $\sin\theta < 1.0$ فإن $h_2 < x$ مما يوفر "حساسية" أفضل للمِضغاط.

6.2.2 مِضغاط بوردون



الشكل 6.6

مِضغاط بوردون للضغط واسع الاستخدام في الصناعة لصغر حجمه وسهولة استخدامه و للمدى الواسع للضغط مقارناً بالمِضغاط السائلي. حيث تتوفر مقاييس بوردون في المدى kPa حتى 100MPaضغط مقياسي. إلا أنه أقل دقة من المِضغاط السائلي .

ويعتمد القياس بمِضغاط بوردون على ما يعرف بأنبوب بوردون. وهو أنبوب ذو مقطع إهليلجي من معدن رفيع ولدن. يكون الأنبوب حراً في شكلٍ شبه دائري كما هو موضح في الشكل (6.6). عند تحسس ضغط أعلى من الضغط الجوي عند مدخله يعمل الضغط على تمديد الأنبوب وينشأ عن ذلك شد للمسنن المثلث الذي بدوره يدير المسنن الدائري فيحرك المؤشر.

ينبغي مراعاة اختبار مِضغاط بوردون دورياً للتيقن من عمله داخل مستوى الدقة المطلوب.

6.3 أجهزة قياس معدل السريان

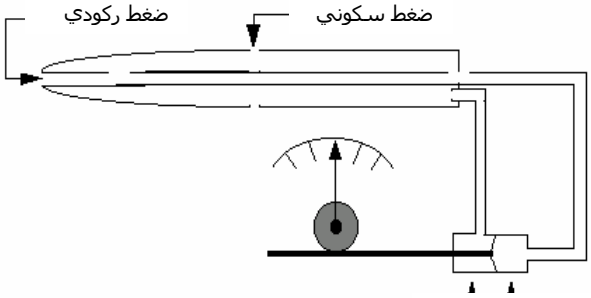
6.3.1 أنبوب الضغط الحركي

بتوصيل طرفي أنبوب الضغط الحركي- الشكل (6.2) - إلى مِضغاط بواسطة أنبوبين مطاطيين يمكن قراءة فرق ارتفاعي أعمدة سائل المِضغاط ومن ثم حساب الضغط الحركي الذي يساوي $\frac{1}{2}\rho v^2$ ، حسب المعادلة (6.1) . ونستنتج السرعة الموضعية بالتالي من المعادلة :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad \text{.....(6.5)}$$

لمعرفة معدل السريان تقاس السرعة في مواضع متعددة عند مقطع عرضي واحد ويستخلص معدل السريان بمكاملة السرعة مع المساحة.

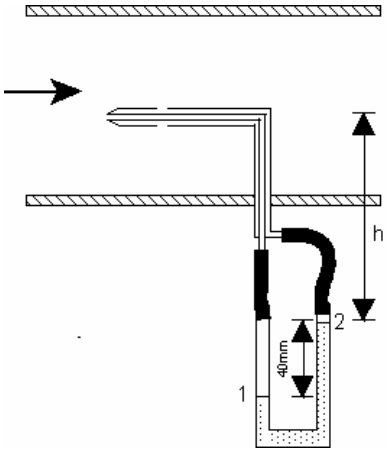
يتميز هذا الجهاز ببساطته و كلفته المنخفضة و دقته. و يمكن استخدامه لكل من السوائل و الغازات. يجب إدراك أن صلاحية المعادلة (6.5) قاصرة على السريان اللا انضغاطي. في حالة السريان الانضغاطي تتطلب المعادلة الحاكمة تعديلاً يراعى الانضغاطية، كما هو موضح في القسم (11.7) .



الشكل 6.7

مثال

أُستُخدم أنبوب ضغط حركي لقياس السرعة في موضع بسريان ماء كثافته 1000 kg/m^3 مستخدمين الزئبق كسائل مِضغاطي. الفرق في مستويي الزئبق 40mm و الكثافة النسبية للزئبق 13.6. أحسب السرعة الموضعية للسريان.



الشكل 6.7

بمعادلة الضغط عند المستوى الأفقي (1)

$$p_0 + \rho_w g(0.04) + \rho_w gh = p + \rho_m g(0.04) + \rho_w gh$$

$$p_0 - p = 4.94E3 \text{ Pa}$$

المعادلة (6.5)

$$v = \mathbf{3.1 m/s}$$

6.3.2 مقاييس السريان الزامّة

تعتمد نظرية المقاييس الزامّة على أن انخفاض الضغط الناشئ عن تقلص مساحة المجرى (الزم) له صلة مباشرة بازدياد السرعة حسب معادلتي الطاقة و الكتلة. عند التفكر في أنبوب مساحة مقطعه الابتدائي A ومساحة مقطعه عند موضع الزم a ، فإن معادلتي الطاقة و الكتلة تعطيان معدل السريان الحجمي q حيث

$$q = \frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p}$$

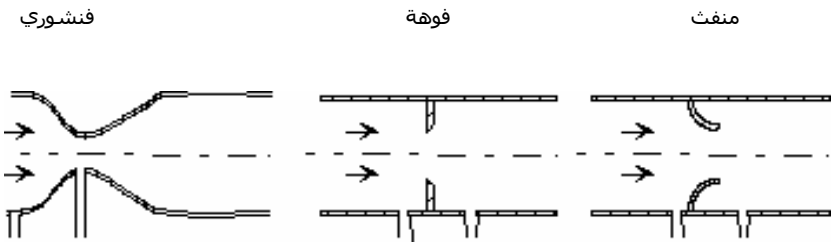
و حيث Δp الانخفاض في الضغط.

بأخذ الاعتبار للفواقد في الطاقة يكون معدل السريان أقل مما توضحه المعادلة أعلاه. و يعرّف لذلك معامل السريان C_d و قيمته أقل من 1.0

$$q = C_d \frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p} \quad \text{.....(6.6)}$$

يوضح الشكل (6.8) الأنواع الأكثر شيوعاً لمقاييس السريان الزامة. و هي المقياس الفوهي و المقياس المنفث و المقياس الفنشوري. أبسطها وأقلها تكلفة المقياس الفوهي. إلا أن معامل سريانه C_d هو الأقل قيمة، مما يعني فقداً أكبر في الطاقة. المقياس الفنشوري يميزه الفقد الضئيل في القدرة ألا أنه عالي التكلفة نسبياً. ويتوسط المقياس المنفث المقياسين الآخرين أداءً وتكلفة.

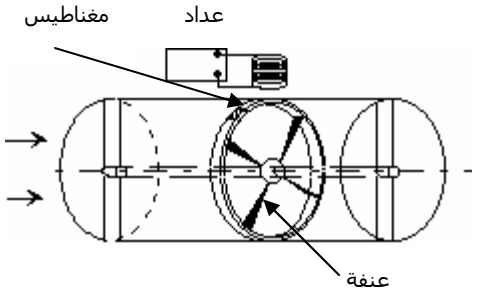
تتصف المقاييس الزامة عامةً بالبساطة و عدم الحاجة للصيانة و العمر الطويل و تناسب كلاً من السوائل و الغازات.



الشكل 6.8

6.3.3 مقياس السريان العنفي

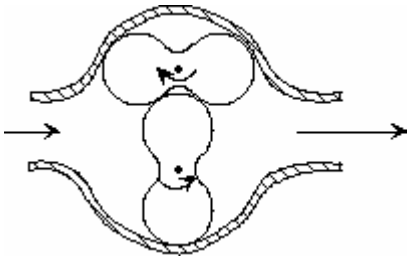
تدور العنفة بتأثير السريان وتعتمد سرعة دورانها على سرعة تيار المائع. وبذلك يمكن جعل سرعة دوران العنفة مقياساً لمعدل السريان. يتسبب المغناطيس الدائر مع العنفة في حث قوة كهربية دافعة في الملف ويولد بذلك نبضات جهد كهربي . عد هذه النبضات يُمكّن من معرفة سرعة العنفة ومن ثم تقدير معدل سريان المائع.



الشكل 6.9

6.3.4 مقياس السريان الازاحي

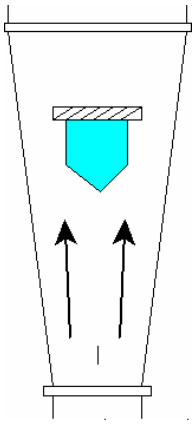
الـدوار المـستخدم فـي هـذا المقيـاس موجـب الإزاحـة. فـي كـل دورة كاملـة يسري حجم محدد من الـسائل مـن أحـد جـانبي الأنبـوب إلـى الآخـر. عـد دورات الدوار يُمكـن مـن تقـدير الـسريان الكلـي. عدد الدورات والوقـت المنـاظر يمكـن مـن تقدير معدل السريان.



الشكل 6.10

يمتاز المقياس الدوار بالدقة ويستخدم عادةً في محطات الخدمة النفطية.

6.3.5 مقياس السريان الطفوي



الشكل 6.11

يتكون هذا المقياس من أنبوب شفاف مخروطي الشكل يثبت رأسياً في مسار المائع و جسم صغير الحجم ضئيل الكثافة دوراني المقطع يوضع حراً داخل الأنبوب. عند مرور المائع في الأنبوب يتعرض الجسم إلى قوة إعاقة تعمل إلى أعلى تعادلها محصلة وزن الجسم و قوة طفوهِ. الشكل المخروطي للأنبوب يجعل السرعة المتوسطة للسريان تتناقص مع ارتفاع موضع الجسم. و بسبب الصلة المباشرة بين قوة الإعاقة و سرعة المائع فان ارتفاع الجسم يعتمد على معدل السريان. و يمكن بذلك تعيير الأنبوب رأسياً ليدل موضع الجسم المغمور إلى معدل السريان. القرص المثبت أعلى الجسم الحُر به أخاديد مائلة وظيفتها إحداث حركة دورانية في الجسم حول المحور الرأسي مما يؤدي لتوسط الجسم في الأنبوب.

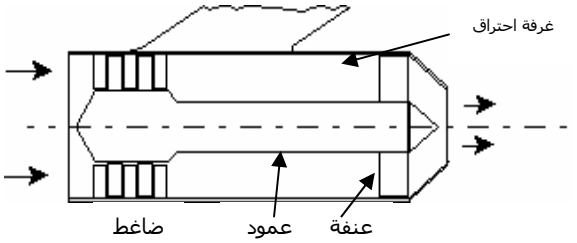
7 الدفـــع

تم استخلاص معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية في الباب (2) وهي

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \underline{v} dV + \iint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \quad .....(2.12)$$

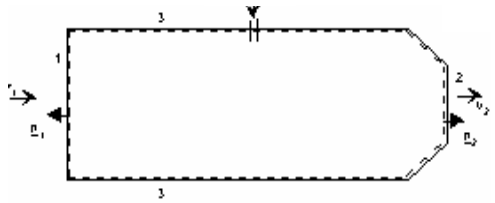
حيث V حجم التحكم و A مساحة السطح التحكمي. تمثل الحدود الأربعة على التوالي: القوة الناشئة عن التسارع و القوة الناشئة عن متجه السريان و القوة الجسمية ثم القوة السطحية.

7.1 الدفع النفّاث



محرك نفاث

الشكل 7.1



حجم تحكمي للمحرك

يتم الدفع النفاث بهروب الغازات الناتجة عن احتراق الوقود بسرعة عالية من مؤخرة المحرك. يُوفّر الضغط المطلوب للهواء الداخل إلى غرفة الاحتراق بواسطة ضاغط يستمد قدرته من عنفة تدور بفضل اندفاع نواتج الاحتراق.
بتطبيق المعادلة (2.12) على حجم التحكم الموضح مع افتراض أن السريان رتيب و أحادى البعد نحصل على الصورة الأقل تعقيداً :

$$\iint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$\rho v_1(-v_1 A_1)\ \underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2)\ \underline{i} = p_1 A_1\ \underline{i} - p_2 A_2\ \underline{i} + \underline{R_3}$

حيث $\underline{R_3}$ هي القوة المؤثرة على حجم التحكم عند السطح (3).

وبذلك يكون الدفع على جسم المحرك

$$\underline{F_t} = -\underline{R_3} = [\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1](-\underline{i})$$

اتجاه القوة هو الاتجاه السالب لـ x .

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad \text{.....(1)}$$

وباعتبار معدل السريان الكتلي للهواء عند المدخل = $\dot{m}_1$

معدل السريان الكتلي عند المخرج = $\dot{m}_2$

معدل السريان الكتلي للوقود = $\dot{m}_f$

فإن

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_f$$

نسبة الوقود إلى الهواء بالوزن = φ

$$\varphi = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_1}$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 (1 + \varphi)$$

وتصبح المعادلة (1) :

$$F_t = \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_1 v_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad \text{.....(7.1a)}$$

$$F_t = \dot{m}_1 [(1 + \varphi) v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad \text{.....(7.1b)}$$

مثال

يختبر محرك نفاث وهو ساكن على منصة اختبار. سرعة دخول الهواء إلى المحرك 150m/s وسرعة النفث 1000m/s . يمكن افتراض أن ضغط الهواء الداخل وضغط النفث يعادلان الضغط الجوي. نسبة وزن الوقود إلى الهواء تساوي 0.02 . مساحة المقطع الدخولي والخروجي $0.2m^2$ كثافة الهواء الداخل $1.15\ kg/m^3$.

أحسب القوة اللازمة لمنع المحرك من الحركة.

باستخدام المعادلة (7.1b)

$$F_t = \dot{m}_1[(1+\varphi)v_2 - v_1] + p_2A_2 - p_1A_1$$

v_1	v_2	φ	p_2	p_1
150	1000	0.02	0	0

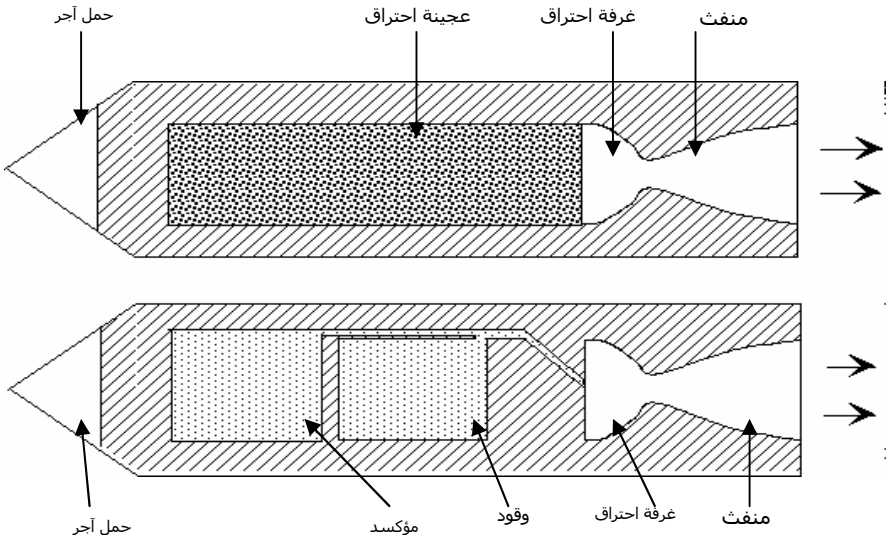
$$\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1 = 1.15(150)0.2 = 34.5 kg/s$$

$$F_t = 34.5\,[(1 + 0.02)1000 - 150] = \mathbf{30.0\ kN}$$

7.2 الدفع الصاروخي

السمة الرئيسية للصاروخ هي حمله لكل من الوقود والمؤكسد بداخله بينما يأخذ المحرك النفاث المؤكسد (الهواء) من الجو المحيط. السمة المشتركة في المحرك النفاث والمحرك الصاروخي هي إحداث تسارع للغازات المحترقة ومن ثم خلق قوة الدفع. يبين الشكل (7.2) الأجزاء الرئيسية للصاروخ بنوعيه: ذي الوقود الصلب وذي الوقود السائل. يحمل الصاروخ ذو الوقود الصلب خليط (عجينة) من الوقود والمؤكسد بينما

صاروخ ذو وقود صلب



صاروخ ذو وقود سائل

الشكل 7.2

يحمل الثاني كلاً من الوقود والمؤكسد في صوّر سائلة.

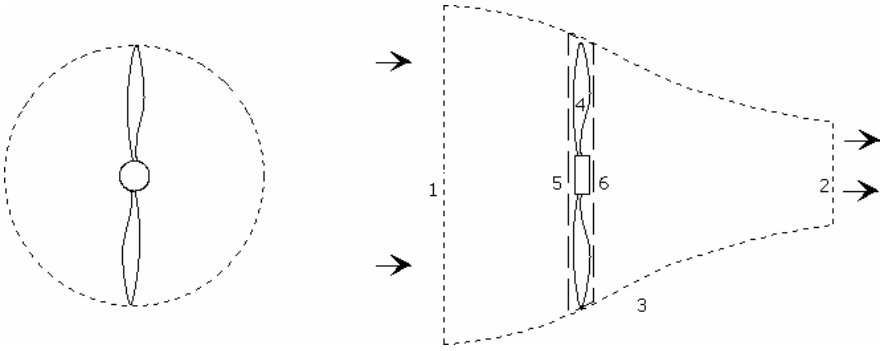
باعتبار منفث الصاروخ هو حجم التحكم وبالنظر إلى أنه ليس ثمة هواء داخل إلى حجم التحكم عبر السطح (1) فإن المعادلة (1) تعطي

$$F_t = \rho\, v_2^2 A_2 + p_2 A_2$$

$$F_t = \rho_2 v_2^2 A_2 + p_2 A_2 = \dot{m}_2\, v_2 + p_2 A_2 \quad \text{.....(7.2)}$$

حيث p_2 هو الضغط فوق الضغط الجوي المحيط بالصاروخ.

7.3 الدفّاع



الشكل 7.3

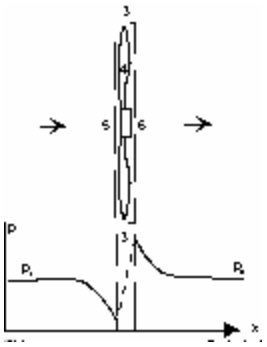
الدفّاع دوّار مِروحي يُستخدم في الطائرات والسفن حيث تُحوّل عبره القدرة الميكانيكية إلى قدرة حركية في السريان. ويؤثر رد الفعل على الجسم المراد دفعه ليحركه في الاتجاه المعاكس للسريان.

بتطبيق معادلة كمية التحرك (2.12) على حجم التحكم 4-3-2-1 :

$$\iint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\rho v_1(-v_1 A_1)\,\underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2)\,\underline{i} = p_1 A_1\,\underline{i} - p_2 A_2\,\underline{i} + \underline{R}_4$$

$$\underline{R}_4 = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - p_1 A_1 + p_2 A_2)\underline{i} \quad .....(1)$$



الشكل 7.4

الضغطان p_1 و p_2 جويان (يساويان الصفر مقياسياً).

نُعرف q معدل السريان الحجمي لتيّار المائع:

$$q = vA = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

حيث v متوسط السرعة عبر الدفاع و A المساحة التي يدور فيها الدفاع.

قوة الدفع F_t هي القوة المؤثرة على الدفاع بينما R_4 هي القوة على المائع في حجم التحكم، وبذلك

$$\underline{F}_t = -\underline{R}_4$$

$$\underline{F}_t = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1)(-\underline{i})$$

$F_t = \rho q(v_2 - v_1)$ .....(7.3a)

$F_t = \rho vA(v_2 - v_1)$ .....(7.3b)

بتطبيق المعادلة (1) على حجم التحكم الأصغر 4-3-6-5

$\underline{R}_4 = [\rho vA(v_6 - v_5) + p_6A_6 - p_5A_5]\underline{i}$

السطحان (5) و (6) متقاربان ويمكن اعتبار

$A_5 \sim A_6 = A$

$v_5 \sim v_6 = v$

ويتبع ذلك

$\underline{R}_4 = (p_6 - p_5) A\underline{i}$

$F_t = (p_6 - p_5) A (-\underline{i})$

$F_t = (p_6 - p_5) A$.....(2)

في الاتجاه السالب لـ x.

المعادلتان (2) و (7.3b) تعطيان

$p_6 - p_5 = \rho v(v_2 - v_1)$ .....(3)

وبتطبيق معادلة الطاقة على القطاعين 1-5 و 2-6

$$\frac{p_5}{\rho} + \frac{v_5^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \quad \text{.....(4)}$$

$$\frac{p_6}{\rho} + \frac{v_6^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad \text{.....(5)}$$

تعطي المعادلتان (4) و (5)

$p_6 - p_5 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ .....(6)

و المعادلتان (6) و (3)

$v(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{.....(7.4)}$$

وتعرف هذه المعادلة **بنظرية فرُود**.

القدرة الخارجة من الدفاع P_o

$$P_o = F_t v_1 = \rho A v v_1(v_2 - v_1) \quad \text{.....(7.5)}$$

القدرة الداخلة إلى الدفاع P_i

$$P_i = F_t v = \rho A v^2 (v_2 - v_1) \quad \text{.....(7.6)}$$

الكفاءة النظرية للدفاع $= \eta = \dfrac{P_o}{P_i} = \dfrac{v_1}{v}$

$$\eta = \frac{v_1}{v} \quad \text{.....(7.7)}$$

مثال

القدرة الخارجة من محرك طائرة إلى دفاعها تساوي 1MW . تطير الطائرة بسرعة 90m/s في هواء ساكن كثافته $1.1 kg/m^3$ قطر الدفاع 3m . أحسب:

(أ) سرعة تيار الهواء في الجانب السافلي.

(ب) سرعة تيار الهواء عبر الدفاع.

(ج) قطر مسار تيار الهواء صعيد وسافل الدفاع.

(د) قوة الدفع على المحرك.

(هـ) الكفاءة النظرية للدفاع.

(أ) القدرة الداخلة إلى الدفاع ، المعادلة (7.6)

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1)$$

و باستخدام نظرية فرود

$$P_i = \tfrac{1}{4} \rho A (v_1+v_2)^2 (v_2 - v_1)$$

$$1E6 = \tfrac{1.2}{4} (\tfrac{\pi}{4})(9)(90+v_2)^2 (v_2 - 90)$$

v_2 = **103.7m/s**

(ب) المعادلة (7.4) - نظرية فرود

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \mathbf{96.9m/s}$$

(ج) معدل السريان الحجمي q

$$q = v\,A = 684.6\ m^3/s$$

$$A_1 = \frac{q}{v_1} = 7.61\ m^2\ ,\ d_1 = \mathbf{3.11m}$$

$$A_2 = \frac{q}{v_2} = 6.63\ m^2\ ,\ d_2 = \mathbf{2.90m}$$

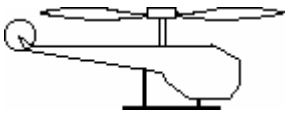
(د) الدفع F_t ، المعادلة (7.3a)

$$F_t = \rho q(v_2 - v_1) = \mathbf{10.3kN}$$

(هـ) كفاءة الدفاع η ، المعادلة (7.7)

$$\eta = \frac{v_1}{v} = \mathbf{0.93}$$

الدفّاع الرئيسي للطائرة الحوّامة:



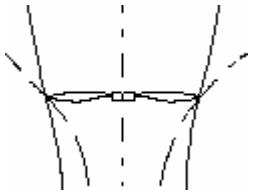
الشكل 7.5

تعتمد حركة الطائرة الحوامة اعتماداً كاملاً على الدفاع الرأسي المحور – الشكل (7.5). بينما يقتصر دور الدفاع الصغير الأفقي المحور على حفظ الاتزان بمقابلة الأثر الجانبي الناشئ عن دوران الدفاع الرأسي المحور .

(أ) التحليق

صعود

تحليق



الشكل 7.6

سرعة الطائرة الحوامة في الاتجاه العمودي صفر في هذه الحالة .

$v_1 = 0$

وبالرجوع لمعادلة الدفع (7.3b)

$F_t = \rho v v_2 A$

كما أن معادلة فرود تُختصر إلى

$v = ½ v_2$

$F_t = ½ \rho A v_2^2$

أو

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \quad \text{.....(1)}$$

القدرة الداخلة P_i

$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1) = \frac{1}{4} \rho A v_2^3$ .....(2)

المعادلتان (1) و (2) تعطيان

$$P_i = \frac{\rho A}{4}\left(\sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}}\right)^3 = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}}$$

$$P_i = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}} \quad \text{.....(3)}$$

كما أنه عند التحليق يتساوى الدفع و وزن الطائرة

$$P_i = \sqrt{\frac{Wt^3}{2\rho A}} \quad \text{.....(7.8)}$$

(ب) الصعود العمودي

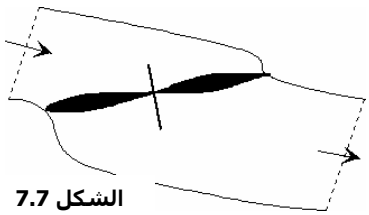
القدرة المطلوبة هنا تزيد عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق. والدفع يفوق وزن الطائرة

$F_t > Wt$

(ج) الهبوط العمودي

القدرة المطلوبة في هذه الحالة تقل عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق والدفع المطلوب يقل عن وزن الطائرة

$$F_t < Wt$$

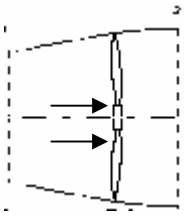


الشكل 7.7

(د) الحالة العامة

الدفع المطلوب هنا له مركبة عمودية ومركبة أفقية. يعدل مستوى دوران الدفاع بزاوية ليعطي المركبات المطلوبة وتعدل القدرة الداخلة لتفي بمحصلة القوتين والسرعة الانتقالية المطلوبة.

عنفة الرياح:



الشكل 7.8

عنفة الرياح تُحوّل قدرة الرياح إلى قدرة ميكانيكية؛ وهي بذلك عاكسة لعمل الدفّاع. القدرة الداخلة P_i هنا هي القدرة المتاحة للتيار عند مقطع العنفة ذات المساحة A. وتعتمد هذه القدرة على السرعة v_1 وهي سرعة التيار في غياب جسم العنفة.

$$P_i = \tfrac{1}{2}\dot{m}\, v_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho A v_1^3 \quad \text{.....(7.9)}$$

والقدرة الخارجة P_o

$$P_o = \tfrac{1}{2}\rho A v\,(v_1^2 - v_2^2) \quad \text{.....(7.10)}$$

الكفاءة النظرية للعنفة η

$$\eta = \frac{v(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^3}$$

وباستخدام نظرية فرود و اعتبار $r = \dfrac{v_2}{v_1}$

$$\eta = \tfrac{1}{2}(1 + r - r^2 - r^3) \quad \text{.....(1)}$$

لتحديد أعلى قيمة نظرية ممكنة للكفاءة η

$$\frac{d\eta}{dr} = ½(1 - 2r - 3r^2) = 0$$

وتعطي $r = \frac{1}{3}$

أي، عند الكفاءة العُليا

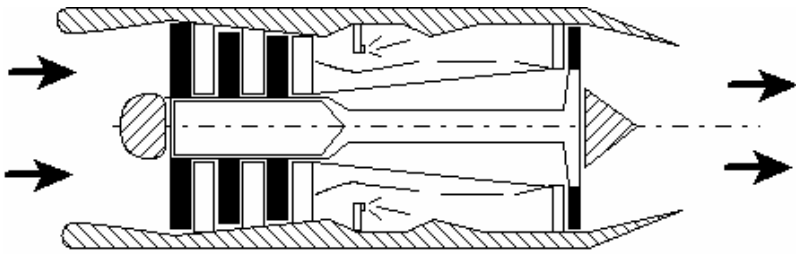
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

وبالتعويض في المعادلة (1)

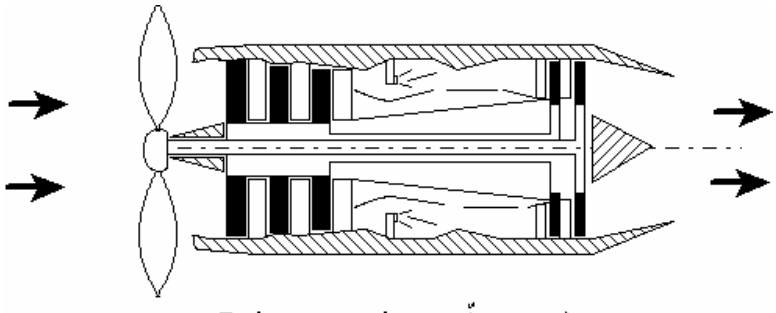
$$\eta_M = \frac{16}{27} = 0.593 \quad \text{.....(7.11)}$$

وهذا هو السقف النظري للكفاءة.

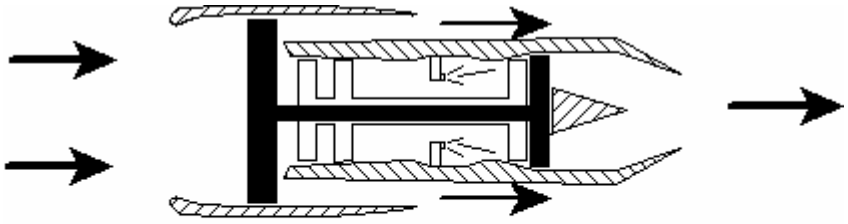
7.4 طرق الدفع النفّاث



Turbojet engine محرك عنفي–نفاث



Turboprop engine محرك عنفي–دفّاعي



turbofan engine محرك عنفي–مروحي

مسائل

7.1 الأحوال التشغيلية لمحرك نفاث :

القطر الدخولي	0.8m
القطر الخروجي	0.5m
معدل سريان الهواء	65kg/s
معدل سريان الوقود	1.39kg/s
الضغط الجوي	49kPa
الضغط الدخولي	51kPa
الضغط الخروجي	70kPa
درجة الحرارة الدخولية	293K
درجة الحرارة الخروجية	700K

بافتراض أن الهواء الداخل والغازات الخارجة غازات مثالية وباعتبار قيمة R في الحالتين 287J/kg-K

أ) أحسب الدفع

ب) أحسب القدرة إذا كانت سرعة الطائرة 300km/h

[53.7 kN, 4.5MW]

7.2 معدل سريان خليط الوقود والمؤكسد لمحرك صاروخي 2.5kg/s . تترك الغازات الساخنة منفث الصاروخ بسرعة 600m/s بالنسبة لجسم الصاروخ. الضغط في الغازات الخارجة يساوي الضغط الجوي. سرعة الصاروخ 300m/s . أحسب دفع المحرك والقدرة.
[1.5 kN, 450 kW]

7.3 دفاع طائرة يعطي دفعاً يساوي 4kN عندما تكون سرعة الطائرة 120m/s عند ارتفاع تساوي كثافة الهواء فيه $1.0kg/m^3$. قطر الدفاع 2.5m . أحسب القدرة الدنيا المطلوبة و السرعة النظرية لتيار الهواء سافل الدفاع.

[480 kW, 127m/s]

7.4 يتحرك زورق بسرعة 10m/s في ماء ساكن كثافته $1000kg/m^3$. قطر دفاع الزورق 0.5m . يمر الماء عبر مستوى الدفاع بمعدل $4m^3/s$. أحسب الدفع على الزورق والكفاءة النظرية والقدرة الداخلة للدفاع. تجاهل الفواقد الناشئة عن بدن الزورق وعن سرة الدفاع.

[83kN , 49% , 1.7MW]

7.5 إذا افتُرض أن عنفةً ريحية تعمل بكفاءتها المثالية عند سرعة الرياح 6m/s أحسب سرعة التيار عبر العنفة وعلى مسافة منها في الجانب السافلي. إذا كان قطر العنفة 5m وكثافة الهواء $1.2\ kg/m^3$ أحسب الدفع على العنفة. ما هي قيم الضغط صعيد وسافل العنفة مباشرةً؟

[4.0m/s, 2.0m/s, 377 N, 12 Pa , - 7.2 Pa]

8 حفظ كمية التحرك في الصورة التفاضلية

8.1 الصورة العامة للمعادلات

بدءً من المعادلة (2.12)، وهي معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, dV + \iint_A \rho\ \underline{v}(\underline{v}.\, d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B}\, dV + \iint_A \underline{\sigma}\, dA$$

تُستخدم نظرية التباعد الرياضية – الملحق (ب)- لتحويل التكاملات السطحية في المعادلة إلى تكاملات حجمية، ثم تشكل الحدود المكاملة حدود المعادلات التفاضلية المطلوبة.

بما أن نظرية التباعد تفترض الاستمرارية في كل المجال فان المعادلات التفاضلية تستدعي الاستمرارية كذلك. و هذا يجعل الصورة التكاملية للمعادلات أعم من الصورة التفاضلية لأن الأولى لا تستدعي استمرارية المجال.

خلال التحويل يُعرّف المتجه $\underline{s}$ ليحل محل $\nabla\tau$ حيث τ مركبة الإجهاد القصي. و يمكن تحليل المتجه $\underline{s}$ في الاتجاهات الثلاث x, y, z كما يلي

$$\underline{s} = s_x \underline{i} + s_y \underline{j} + s_z \underline{k}$$

يقود ذلك للمعادلات الثلاث الآتية و التي تعرف بمعادلات **نافير-ستوكس** :

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + s_x \quad \text{.....(8.1a)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + s_y \quad \text{.....(8.1b)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + s_z \quad \text{.....(8.1c)}$$

حيث u, v, w مركبات السرعة $\underline{v}$ في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وقد استخلص ستوكس قيم s_x, s_y, s_z كما يلي :

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right\}$$

.....(8.2a)

$$s_y = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[2\frac{\partial v}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right\}$$

..... (8.2b)

$$s_z = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left[2\frac{\partial w}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right\}$$

..... (8.2c)

معادلات نافير - ستوكس أعلاه عامة بحيث تشمل السريان ثلاثي البعد، غير الرتيب، الانضغاطي واللزجي. ولا يشترط أن تكون اللزوجة منتظمة القيمة في المجال. إلا أن هذه المعادلات لا تغطي السريان اللانيوتوني.

8.2 حالات خاصة

8.2.1 السريان اللالزجي

عند اعتبار السريان لا لزجي تصبح المقادير s_z, s_y, s_x في المعادلات (8.1) صفراً. وتعرف المعادلات الثلاث الناتجة ب**معادلات أويلر**.

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=B_x-\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{.....(8.3a)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=B_y-\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{.....(8.3b)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=B_z-\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{.....(8.3c)}$$

8.2.2 السريان اللاإنضغاطى مُنتظم اللزوجة

معادلة حفظ الكتلة للسريان اللاانضغاطي التي سبق استخلاصها في القسم (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{.....(8.4)}$$

بتعويض هذا المقدار في المعادلات (8.2) وملاحظة ثبات قيمة اللزوجة μ تصبح معادلات نافير- ستوكس:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=B_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \quad \text{....(8.5a)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=B_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \quad \text{.....(8.5b)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=B_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \quad \text{...(8.5c)}$$

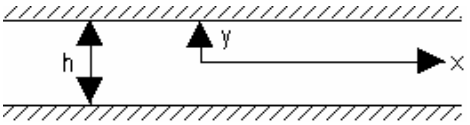
8.3 حل معادلات نافير - ستوكس

يتعذر حل معادلات نافير- ستوكس في صورتها العامة (8.2) حلاً مضبوطاً. وتكمن الصعوبة في أن الحدود الحملية في الجانب الأيسر للمعادلة غير خطية. الا أن بعض الحالات الخاصة تسمح بتبسيط المعادلات بحيث يمكن حلها **حلاً مضبوطاً**. و سنمثل لذلك بالحالة في القسم (8.3.1) أدناه . أما في الحالات التي يتعذر فيها الحل المضبوط تُحل المعادلات **حلاً تقريبياً** حيثما يكون ذلك ممكناً أو تستخدم **الطرق العددية**.

8.3.1السريان المتوازي في مجرى مستقيم (حل مضبوط)

افتراضات هذه الحالة: السريان لا انضغاطي، منتظم اللزوجة، خطوط انسيابه متوازية، رتيب ولا تؤثر عليه قوى جسمية. عند إعمال هذه الافتراضات في معادلات نافير- ستوكس (8.1) تختزل إلى المعادلة التفاضلية

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad .....(8.6)$$



الشكل 8.1

وباستخدام القيمة الحدودية

$$u = 0 \quad \text{عند} \quad y = \pm \tfrac{1}{2} h$$

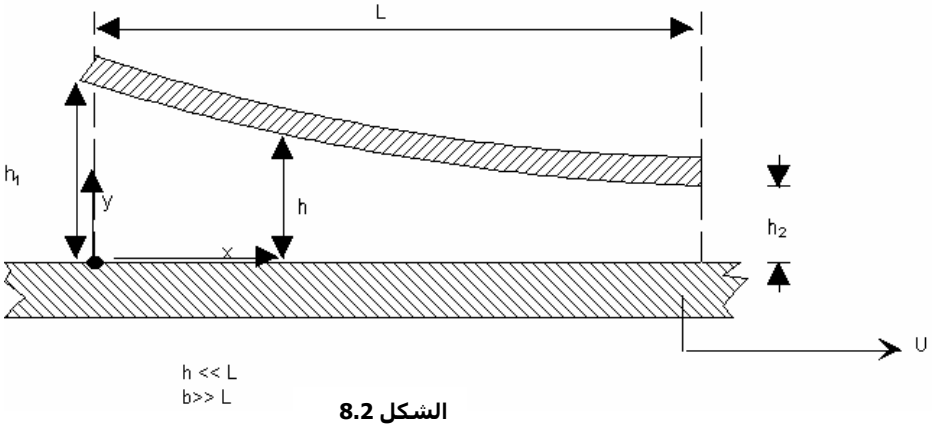
يعطى تكامل المعادلة (8.6)

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad .....(8.7)$$

8.3.2 النظرية الحركية للتزليق (حل تقريبي)

نميز بدءً بين التزليق الحركي والتزليق السكوني. يُوفَر الضغط المطلوب لفصل الأجزاء ذات الحركة النسبية في الحالة الأولى من الحركة النسبية نفسها. بينما يُوفَر في الحالة الثانية بوسائل خارجية. ويعالج في هذا القسم الأنموذج الرياضي الحاكم للحالة الأولى.

8.3.2.1 المحامل ذات النسبة الباعية الكبيرة



الشكل 8.2

تشمل الافتراضات هنا:

- ثنائية أبعاد السريان
- رتابة الحركة
- لاانضغاطية السريان
- انتظام اللزوجة
- صِغر القُوى الجسمية
- صِغر عدد رينولز.

لا انضغاطية السريان وانتظام لزوجته يختزلان معادلات نافير- ستوكس إلى الصورة (8.5).
رتابة الحركة وثنائية البعد وتجاهل القوى الجسمية تختزل الصورة (8.5) إلى الصورة:

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \quad \text{.....(1a)}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \quad \text{.....(1b)}$$

لإعمال أسلوب **الموازنة الحدية** نضع المعادلات (1) في صورة لابعدية ونتخذ لذلك القيّم المرجعية الآتية: L للأطوال وU للسرعات و ρU^2 للضغط ؛ حيث L طول المحمل في اتجاه الحركة وU سرعته الثابتة.

وبذلك نُعرّف المتغيرات اللابعدية الآتية :

$$x'=\frac{x}{L},\quad y'=\frac{y}{L},\quad u'=\frac{u}{U},\quad v'=\frac{v}{U},\quad p'=\frac{p}{\rho U^2},\quad Re=\frac{\rho UL}{\mu}$$

باعتبار القيمة **1** للمقدار اللابعدي قيمة كبيرة ومقدّرة و القيمة **ε** صغيرة ويمكن تجاهلها فإن أوزان المقادير اللابعدية أعلاه تصبح

$$x'\sim 1,\ y'\sim \varepsilon,\ u'\sim 1,\ v'\sim \varepsilon,\ Re\sim \varepsilon$$

الصورة اللابعدية للمعادلات (1a) و (1b)

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{dp'}{dx'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right] \quad \text{.....(2a)}$$

$\sim 1 \quad \sim 1 \qquad \sim \varepsilon^{-1} \quad \sim 1 \quad \sim \varepsilon^{-2}$

$$u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{dp'}{dy'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right] \quad \text{.....(2b)}$$

$\sim \varepsilon \quad \sim \varepsilon \qquad \sim \varepsilon^{-1} \quad \sim \varepsilon \quad \sim \varepsilon^{-1}$

وبذلك تُختزل المعادلات (1) الى الصورة أدناه نتيجة للتقريب بالموازنة الحدية:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2 u}{dy^2} \quad \text{.....(8.8)}$$

القيم الحدودية للسريان:

$y = 0$, $u = U$ ..... (3a)

$y = h$, $u = 0$ ..... (3b)

$x = 0$, $p = 0$ (قياسى) ..... (3c)

$x = L$, $p = 0$ (قياسى)..... (3d)

مع ملاحظة أن h دالة في x.

بمكاملة المعادلة (8.8) مرتين واستخدام القيم الحدودية (3a, 3b)

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}hy - U\frac{y}{h} + U \quad \text{.....(8.9)}$$

ويعطي حفظ الكتلة

$$q = b\int_0^h u dy = \tfrac{1}{2}bUh - \tfrac{1}{12}\frac{bh^3}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

مع ملاحظة ثبات قيمة q لكل المقاطع x.

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu\left(\frac{U}{2h^2} - \frac{q}{bh^3}\right) \quad \text{.....(4)}$$

بمكاملة (4) بين الحدود $x = 0$ وx العامة ($h = h_1$ وh العامة)

$$p = 6\mu U\int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu\frac{q}{b}\int_0^x \frac{dx}{h^3}$$

$$p = 6\mu U\int_{h_1}^h \frac{dx}{dh}h^{-2}dh - 12\mu\frac{q}{b}\int_{h_1}^h \frac{dx}{dh}h^{-3}dh \quad \text{.....(8.10)}$$

باستخدام القيمة الحدودية (3d) : $p = 0$ ، $x = L$, $h = h_2$ تصبح المعادلة (8.10)

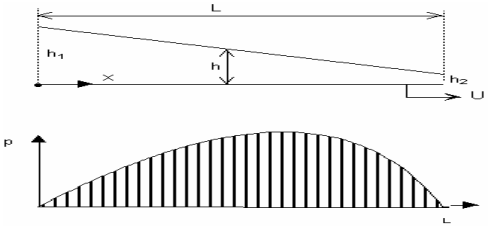
$$q = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-2} dh}{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-3} dh} \text{ bU½} \quad \text{.....(8.11)}$$

بتحديد علاقة h بـ x يمكن استخلاص علاقة الضغط p بالاحداثي x. مثال لذلك إذا كان الجانب الأعلى الساكن من المحمل ذا مستوٍ مستقيماً يمكن أن نستخلص العلاقة $h(x)$ من الشكل (8.3)

$$h = h_1 - (h_1 - h_2)\frac{x}{L}$$

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{h_1 - h_2}{L}$$

تعطي المعادلة (8.11)



$$q = bU\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{.....(8.12)}$$

وتعطي المعادلة (8.10) :

$$p = 6\mu UL\frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1^2 - h_2^2)} \quad \text{.....(8.13)}$$

الشكل 8.3

يمكن استنتاج **الحِمل** لهذه الحالة من

$$W = b\int_0^L p\,dx$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (8.13) وإجراء التكامل و بتعريف النسبة $r = \frac{h_1}{h_2}$

$$W = 6\frac{\mu b L^2 U H_w}{h_2^2} \quad \text{.....(8.14a)}$$

حيث

$$H_w = \frac{\ln r}{[r-1]^2} - \frac{2}{r^2-1} \quad \text{.....(8.14b)}$$

يمكن الوصول، من النظرية والتجربة، إلى أن أقصى حمل يكون عند $r = 2.2$ ويعطي ذلك $H_{wM} = 0.0267$.

وتعطي المعادلة (8.14a) عندها السعة الحملية W_M :

$$W_M = 0.16 \frac{\mu b L^2 U}{h_2{}^2} \quad \text{.....(8.15)}$$

لاستنتاج قوة **الإعاقة** D على حركة المحمل

$$D = b\int_0^L \tau_w dx \quad \text{.....(5)}$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

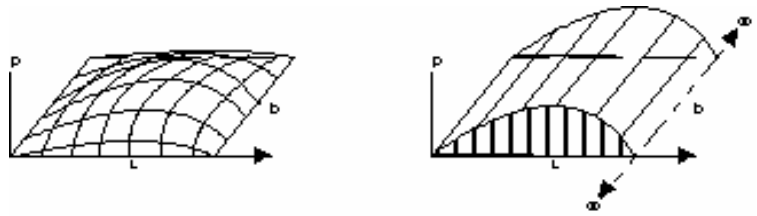
بالتعويض من المعادلات (8.9) ، (8.12) و (4) في المعادلة (5)

$$D = \frac{2\mu b L U}{h_1 - h_2} H_D \quad \text{.....(8.16)}$$

حيث

$$H_D = 2\ln r - 3\frac{r-1}{r+1}$$

8.3.2.2 المحامل ذات النسبة الباعية الصغيرة



ثلاثي البعد **ثنائي البعد**

الشكل 8.4

الافتراضات لهذه الحالة مطابقة للحالة السابقة بإستثناء أن أبعاد السريان ثلاثة وليست اثنين. ويمكن ملاحظة أن ممال الضغط في الاتجاه العرضي ليس صغيراً مما يقلل من المستوى العام للضغط.

نبدأ ثانيةً من معادلات نافير-ستوكس ونطبق بدءً الاختزال **المضبوط** للمعادلات ثم نعقب **بالتقريب**. وتكون النتيجة لهذه الحالة :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{.....(8.17a)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{.....(8.17b)}$$

عند دمج المعادلات (8.17) بمعادلة حفظ الكتلة تعطي ما يعرف ب **معادلة رينولز للتزليق** :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad \text{.....(8.18)}$$

عند حل المعادلة (8.18) بالطرق العددية ثبت، كما هو متوقع، أن النتيجة تقارب تلك التي حصلنا عليها من السريان ثنائي البعد إذا كانت النسبة الباعية b/L كبيرة.

تبعاً لذلك يمكن تحوير المعادلة (8.14) للصورة أدناه لتعبر عن السريان ثلاثي البعد:

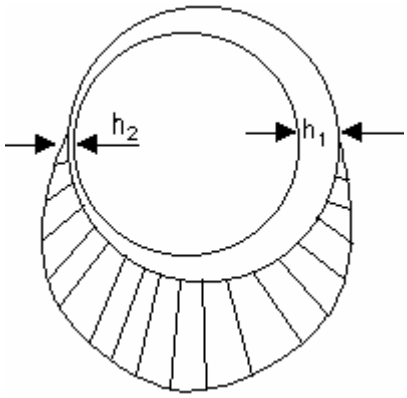
$$W = K.6\frac{\mu b L^2 U H_W}{h_2^{\,2}} \quad \text{.....(8.19)}$$

حيث يعتمِد معامل التصحيح K على b/L كما يلي :

b/L	0.25	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0	1.5	2.0
K	0.06	0.085	0.140	0.185	0.34	0.44	0.61	0.68

3.0	4.0	5.0	6.0	∞
0.775	0.835	0.885	0.94	1.0

8.3.2.3 المحمل الحلقي



التحليل في الأقسام (8.3.2.1) و (8.3.2.2) اختص بمحامل مستقيمة القاعدة. يمكن اتباع نفس التحليل للحالة الخاصة بالمحمل الحلقي بفرد أحد جوانب المحمل الحلقي طولياً على استقامته، مع إبقاء المسافة h كما هي في المحمل الحلقي الأصل. و من ثم تحديد h(x) وإجراء التحليل كما سبق.

مثال

الطول الأفقى لمحمل مستقيم في اتجاه الحركة 60mm . عرض المحمل 300mm . الارتفاعان الأعلى و الأدنى للفجوة 100E-6m و 50E-6m، على التوالي. كثافة زيت التزليق $900kg/m^3$ ولزوجته 0.1Pa.s . إذا كانت سرعة المحمل ثابتة عند 0.5m/s أحسب:

(أ) الحمل

(ب) الإعاقة

(ج) القدرة المفقودة في المحمل

(د) الزيادة في درجة الحرارة لزيت التزليق إذا كانت قيمة الحرارة النوعية c_p 1000J/kg-k .

(أ) b/L = 300/60 =5

قيمة *K* المستخدمة في المعادلة (8.19) تساوي 0.885

$$H_W = \frac{\ln(2)}{[2-1]^2} - \frac{2}{(2)^2-1} = 0.0265$$

$$W = (0.885)6\frac{(0.1)(0.3)(0.06)^2 0.5(.0265)}{(50E-6)^2} = 3.04E3$$

الحمل = **3.04 kN**

(ب) المعادلة (8.16)

$$D = \frac{2(0.1)0.3(0.06)0.5}{(100-50)E-6}\left[2\ln(2) - 3\frac{50E-6}{150E-6}\right] = 13.9$$

الإعاقة = **13.9N**

(ج) الفقد في القدرة الناشئ عن الإعاقة = D.U

D.U = (13.9)(0.5) = **7W**

(د) بإدراك أن الفقد في القدرة P الذي حسب أعلاه يتحول إلى حرارة

$P = c_p \dot{m} \Delta T = c_p \rho q \Delta T$

$$\Delta T = \frac{P}{c_p \rho q}$$

المعادلة (8.12) تعطي معدل السريان الحجمي

q = 5E-6 m^3/s

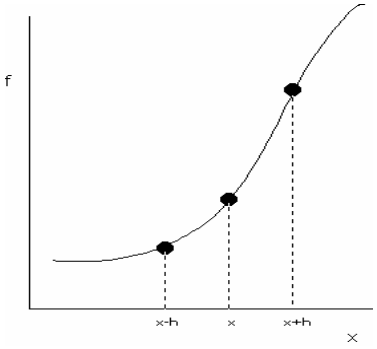
$$\Delta T = \frac{7}{1000(900)5E-6} = 1.6K = \mathbf{1.6^oC}$$

8.4 تحسيب حركة الموائع (طرق عددية)

هذا الأسلوب يعتمد استبدال التكامل المباشر لمعادلات الحفظ بحل مجموعة مكافئة من المعادلات الجبرية الخطية. و يمكن استخدام أيٍ من ثلاث طرق عددية:

1. طريقة الفروق المحددة
2. طريقة الأحجام المحددة
3. طريقة العناصر المحددة

سنكتفي هنا باعطاء شرح موجز ل**طريقة الفروق المحددة**.



الشكل 8.6

تستبدل حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة بنسب الفروق و تستنبط منها المعادلة الجبرية. يسمى هذا التبديل **التفريز العددي**. ينبني التفريز العددي على السلسلة الرياضية المعروفة ب**سلسلة تيلور**.

و يمكن تصوير ذلك بتأمل الدالة f(x) الموضحة في الشكل (8.6).

مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع (x+h)، حيث h إزاحة صغيرة، هو:

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{df}{dx} + \tfrac{1}{2}h^2\frac{d^2f}{dx^2} + \tfrac{1}{6}h^3\frac{d^3f}{dx^3} + \ldots \quad (8.21)$$

و مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع (x-h) هو:

$$f(x-h) = f(x) - h\frac{df}{dx} + \tfrac{1}{2}h^2\frac{d^2f}{dx^2} - \tfrac{1}{6}h^3\frac{d^3f}{dx^3} + \ldots \quad (8.22)$$

بطرح أو جمع المعادلتين نحصل على المشتقة $\frac{df}{dx}$ أو المشتقة $\frac{d^2f}{dx^2}$، على التوالي:

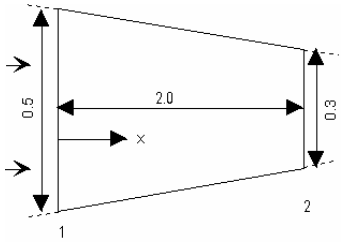
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] + O(h^2) \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right] + O(h^2) \quad \text{.....(8.24)}$$

حيث تعني $O(h^n)$ حدود من الدرجة n، أو ما بعدها. و معلوم أن هذه الحدود تكون صغيرة إذا كانت h صغيرة.

المعادلات أعلاه توضح كيف يمكن أن تقرب حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة إلى حدود مفروزة تحسب عددياً عند مواضع موزعة في مجال السريان.

مسائل



الشكل 8.6

8.1 يوضح الشكل (8.6) جزأً من مجرى لام مستوي ينقل سائلاً بالمعدل الثابت $0.5m^3/s$ لكل متر عرضى.

بافتراض انتظام السريان في كل المقاطع استنتج تعبيراً عن التسارع "الكامل" عند المقطع العام x ثم استنتج قيمته العددية عند المقطعين (1) و (2)

إذا زيد معدل السريان زيادة مطردة تساوي $0.1m^3/s^2$ لكل متر عرضي أحسب التسارع الكامل في المقطعين (1) و (2) عندما يصبح معدل السريان $0.8m^3/s$ لكل متر عرضي.

[0.20 m/s^2, 0.93m/s^2, 0.71 m/s^2, 2.70m/s^2]

8.2 سريان رتيب لا لزجي ولا انضغاطي يمكن تعريف مجالي السرعة والقوة الجسمية فيه بالمعادلتين :

$$\underline{v} = ax\,\underline{i} - ay\underline{j}$$

$$\underline{B} = -\rho g\underline{k}$$

إذا كان الضغط عند نقطة الأصل p_0 أثبت أن توزيع الضغط في المجال يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho a^2(x^2+y^2) - \rho gz\ .$$

8.3 سريان صفائحي رتيب ولا انضغاطي بين لوحين متوازيين المسافة بينهما h. يتحرك اللوح الأعلى في مستواه بالسرعة $U\underline{i}$ - بينما يظل اللوح الآخر ساكناً .

أ) أثبت أن المعادلة أدناه تعطي حلاً مضبوطاً لمعادلات نافير-ستوكس:

$$\frac{\underline{u}}{U} = \left[-\frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}\left(1-\frac{y}{h}\right)\frac{y}{h} - \frac{y}{h}\right]\underline{i}$$

خذ نقطة الأصل للمنظومة على اللوح الساكن .

ب) فى حالة خاصة لهذا السريان ، الذي يعرف بسريان **كوويت** ، الفجوة بين اللوحين 10mm وسرعة اللوح المتحرك $-0.1\underline{i}$ m/s - . باعتبار أن اللزوجة الحركية للمائع تساوي 0.05Pa.s أرسم التغير المتوقع لـ $\frac{\underline{u}}{U}$ مع $\frac{y}{h}$

للحالات الآتية:

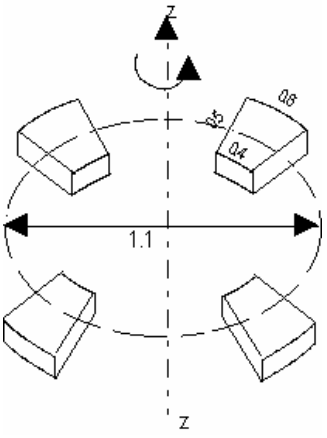
$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \textbf{(i)}$$

$$\frac{dp}{dx} = 1 \text{ Pa/m} \qquad \textbf{(ii)}$$

$$\frac{dp}{dx} = -1 \text{ Pa/m} \qquad \textbf{(iii)}$$

وحدد اتجاه القوة المؤثرة على اللوح المتحرك في كل حالة .

8.4 يوضح ا لشكل (8.7) محمل دفعي مكون من أربع قطع متطابقة صمم لحمل مولد كهربائي يدور حول المحور zz . يمكن اعتبار كل من القطع الأربع حذاءً مستوي ومائل واعتبار أن المولد يسبب حملاً حركياً يساوي 3MN . باعتبار اللزوجة الحركية للمزلق 0.04Pa.s ونسبة سمكي طبقة الزيت الأعلى إلى الأدنى 2.0 قدر السرعة الدورانية للمولد بحيث لا يقل السمك الأدنى لطبقة الزيت عن 50E-6m . *ملحوظة : قرّب شكل الحذاء إلى مستطيل.* [93 rpm]



الشكل 8.7

8.5 ارتفاع الفجوة في محمل حذائي يتغير مع اتجاه الحركة x حسب المعادلة

$$h = a\, e^{-bx}$$

حيث a و b ثوابت .

أ) استخلص علاقة للضغط p بدلالة h, h_2, h_1, L, U, μ

ب) كون تعبيراً عن المقدار اللابعدي $\dfrac{p}{\rho UL/h_2^{\,2}}$ وأرسم منحناه بدلالة h/h_2 عند $h_1/h_2 = 2.0$

ج) أرسم على نفس المناط المنحنى المقابل للحذاء المستقيم للمقارنة.

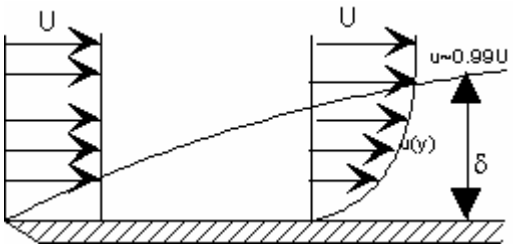
9 الإعـــاقـة

9.1 مقدمة

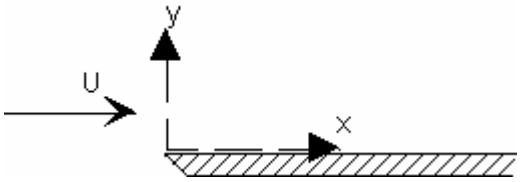
صعوبة التحليل الرياضي العام للسريان الكامل دفع إلى تقسيم مجال السريان لقسمين: أولهما السريان ضئيل التأثر بالجدران الحاوية، مما يضعف فيه ممالات السرعة ويجعل اللزج ضئيل الأثر، ويعرف هذا القسم بالسريان اللالزجي أو السريان الكَمُون. والقسم الثاني هو السريان المتأثر بممالات السرعة ويغلب فيه الأثر اللزجي، ويسمى سريان الطبقة الجدارية. ونحن في هذا الباب معنيون بدراسة هذا الأخير بينما نؤخر دراسة السريان اللالزجي للباب العاشر.

9.2 معادلات الطبقة الجدارية

يوضح الشكل (9.1) تكوّن الطبقة الجدارية على لوح رفيع السمك على استقامة السريان. ويلاحظ تغير السرعة مع المسافة y، حتى تبلغ موضعاً لا يلاحظ فيه تغيراً يذكر. ويعرف هذا الموضع بحد الطبقة الجدارية. ويؤخذ عادةً على أنه الموضع الذي تساوي فيه السرعة 0.99U، حيث U السرعة المنتظمة عند المقطع x بعيداً عن اللوح. أول من قدم هذه الصورة للطبقة الجدارية وشفعها بالتحليل هو **لودفيك برانتل**.



الشكل 9.1



الشكل 9.2

يمكن أن نرى هنا ما ذكر في المقدمة عن الممال $\frac{du}{dy}$ وقيمته داخل وخارج الطبقة الجدارية، و من ثم التفكر في المعادلة (1.3):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

حيث يكون القص τ ذا قيمة مقدرة داخل الطبقة الجدارية، بينما يمكن تجاهله خارجها. ويمكن أن نرى أيضاً أن الطبقة الجدارية أوضح وأكثر تحديداً في السريان ذي القيمة العالية لعدد رينولز.

في التحليل الآتي لسريان الطبقة الجدارية نفترض:

- السريان رتيب، لاانضغاطي وثنائى البعد.
- القوى اللزجية ذوات وزن حدي مشابه للقصور الذاتي.
- الجدار الصلب الذي يتاخم السريان هو لوح مستقيم حاد الحافة وموازي للتيار الرئيسي. ويعني ذلك أن زاوية الهجوم تساوي صفر .

القيم الحدودية للسريان في الطبقة الجدارية:

$y = 0$	$u = 0$	$v = 0$
$y \rightarrow \infty$	$u = U$	$du/dy = 0$

بإعمال الافتراضات الأولى على معادلات نافير- ستوكس تختزل المعادلات إلى الصورة :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \quad \text{.....(1)}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \quad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(3)}$$

المعادلة (1) في الصورة اللابعدية:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{dp'}{dx'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) \quad \text{.....(4)}$$

1 *1*

يتم وزن الحدود في المعادلة (4) كما يلى: الحد الأخير في الجانب الأيمن (داخل القوس) وزنه **$1/\varepsilon^2$** . عند ضربه في *1/Re* ينبغي أن يعطي الوزن **1** ليزن الجانب الأيسر للمعادلة، حسب الافتراض الثاني، وهذا يجعل وزن عدد رينولز $1/\varepsilon^2$.

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{dp'}{dx'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

1 *1* *ε^2* *1*

الموازنة الحدية اذن تختزل المعادلة الى الصورة

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{dp'}{dx'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

و بالرجوع للصورة البعدية

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{.....(9.1)}$$

عند اعمال الموازنة الحدية على المعادلة (2) مستعينين بمعرفتنا الآن لوزن عدد رينولز يمكننا موازنة المعادلة الثانية.

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

ε ε ε^3 ε

نجد أن أكبر الحدود بوزن **ε** . بذلك يمكن اغفال هذه المركبة من معادلات نافير – ستوكس.

معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0$$

1 *1*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{.....(9.2)}$$

وتعرف المعادلة (9.1) ب معادلة برانتل للطبقة الجدارية **.**

أما خارج حدود الطبقة الجدارية فإن القيم الحدودية تصبح:

$$y \geq \delta, \quad u = U, \quad du/dy = 0, \quad d^2u/dy^2 = 0$$

وتصير المعادلة (9.1)

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad \text{.....(9.3)}$$

قدّم **فون كارمن** حلاً للمعادلة (9.1) للسريان في الطبقة الجدارية في الصورة:

$$\tau_w = \rho\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} u(U-u)dy+\rho\frac{dU}{dx}\int_0^{\delta}(U-u)dy \quad \text{.....(9.4)}$$

و يُرى الآتى في حل فون كارمن:

(1) إذا لم يتغير الضغط في المجال فإن الحد الأخير يختفي.

(2) لحساب الإجهاد القصي على الجدار τ_w نحتاج لمعرفة توزيع السرعة $u(y)$.

(3) تصلح المعادلة (9.4) لكل من السريان الصفائحي والسريان المائر، بشرط استخدام دالة السرعة المناسبة.

9.3 حل فون كارمن عند ممال الضغط صفر

عند $dp/dx = 0$ تأخذ المعادلة (9.4) الصورة :

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u(U-u)dy$$

وصورتها اللابعدية

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\delta \int_0^1 \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}) d\frac{y}{\delta} \right]$$

وبتعريف القيم اللابعدية φ و η

$$\varphi = \frac{u}{U}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

نحصل على

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx}\left[\delta \int_0^1 \varphi(1-\varphi) d\eta \right] \quad \text{.....(9.5)}$$

9.3.1 الطبقة الجدارية الصفائحية

بالاستفادة من معادلة السريان النيوتوني (1.3) التي تربط الإجهاد القصي بممال السرعة

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho U \delta} \left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0}$$

يمكن حساب $\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0}$ عددياً إذا عرفت الدالة $\varphi(\eta)$. وتعرّف هنا α كقيمة عددية لهذا الممال اللابعدي.

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu\alpha}{\rho U\delta} \quad \text{.....(1)}$$

تُحدِد المعادلة (1) بذلك الجانب الأيسر من معادلة فون كارمن.
أما الجانب الأيمن للمعادلة فيتحدد بمعرفة $\varphi(\eta)$ و نرمز لهذا المقدار التكاملي بالحرف β

$$\beta = \int_0^1 \varphi(1-\varphi)d\eta \quad \text{.....(2)}$$

بالتعويض من (1) و (2) في (9.5) :

$$\delta\, d\delta \frac{\mu\alpha}{\rho U\beta} dx$$

وتُعطي المُكاملة

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{2\mu\alpha}{\rho U\beta}\right)x} \quad \text{.....(9.6)}$$

المعادلتان (1) و (9.6) تعطيان

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{2\rho U}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \text{.....(9.7)}$$

وبإجراء التكامل لـ τ_w على مساحة لوح عرضه b وطوله L

$$D = b\sqrt{2\alpha\beta\rho\mu LU^3} \quad \text{.....(9.8)}$$

نعرّف هنا C_f ، معامل **الإعاقة الجلدية**

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

$$c_f = \sqrt{8\alpha\beta}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad \text{.....(9.9)}$$

النتائج التجريبية التي حصل عليها **بلازيوس**

$$\left.\frac{\delta}{x}\right|_{\varphi=0.99} = \frac{5.0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \text{.....(9.10a)}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \text{.....(9.10b)}$$

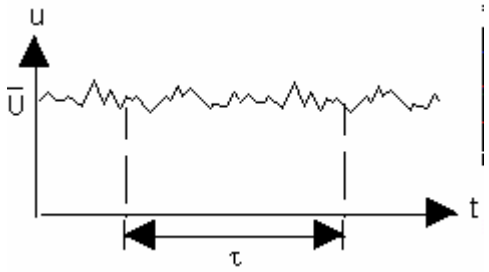
$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \text{.....(9.10c)}$$

9.3.2 الطبقة الجدارية المائرة

خصائص عامة للسريان المائر :

1) جزيئات السريان المائر لا تنزلق في صورة صفائح كما هو الحال للسريان الصفائحي ولكنها تتحد في كتيلات وتنفصل باستمرار وتتحرك في كل الاتجاهات - مع محصلة سرعة في اتجاه السريان الرئيسي.

إذا اهتممنا مثلاً بالسرعة في الاتجاه x، و سميناها u، فإن u ترتبط عند أي وقت t بالسرعة المتوسطة $\bar{u}$ و **الاضطراب** u' ، حيث



الشكل 9.3

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} u\,dt$$

و حيث τ هنا فترة الرصد .

وتعرّف **حدة التمور** T كما يلي:

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_\infty} \quad \text{.....(9.11)}$$

ويمكن اختزال المعادلة (9.11) إلى الصورة أدناه إذا كانت خصائص التمور لااتجاهية:

$$T = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty}$$

2) من خصائص السريان المائر انه بجانب الفقد اللزجي تنشأ فيه فقود إضافية بسبب "عشوائية" حركة الكتيلات، وهي:

(أ) فقد بسبب الحركة في الاتجاه العرضي.

(ب) فقد بسبب الصدم المتواصل.

وينشأ عن ذلك ما يعرف ب **إجهادات رينولز** .

3) يتحول السريان من صفائحي إلى مائر عند عدد رينولز الحرج، Re_c. مدى هذا العدد الحرج للسريان في الأنابيب

$$2\,000 < Re_c < 10\,000$$

وللسريان على الألواح المستوية ($T \sim 0.5\%$)

$$0.35E6 < Re_c < 1E6$$

الإجهاد القصّي الكلي في الطبقة الجدارية المائرة يشمل الإجهاد اللزجي البسيط المعبَر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي و إجهاد قصي إضافى ناشئ عن التموّر. الإجهاد المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي:

$$\tau_l = \mu \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{du}{dy}$$

ويعبر عن الإجهاد القصي الإضافى الناشئ عن التموّر بمعادلة **بوسينسك**

$$\tau_t = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{.....(9.12)}$$

وتسمى τ_t **الإجهاد الموري الظاهري** و ε **اللزوجة الظاهرية**.

ترتبط اللزوجة الظاهرية بمتغيرات السريان:

$\varepsilon = \varepsilon(u', v', w')$ (ممالات السرعة،

وتستخلص هذه الدالة بالتجربة.

تمكننا التعريفات المذكورة من **نمذجة التموّر** بإعادة صياغة المعادلات (9.1) و (9.2) لتشمل السريان المائر:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \varepsilon)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] \quad \text{.....(9.13)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(9.14)}$$

تقود المعادلات (9.13) و (9.14) إلى حلول فون كارمن (9.4) و (9.5). وتحتاج المعادلة (9.5) لتحديد دالة السرعة وطبيعة الإجهاد القصي الجداري. يمكن اعتماد الدالة أدناه للسريان المائر:

$$\varphi = \eta^{1/7} \quad \text{.....(9.15)}$$

للإجهاد القصي الجداري المائر على الأسطح **الناعمة** دلت تجارب بلازيوس إلى الصيغة التجريبية:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225\, Re_\delta^{-1/4} \quad \text{.....(9.16)}$$

تصلح المعادلة (9.16) للسريان المائر على الألواح المستوية في المدى 5E5<Re_x<1E7

نمضى الآن في تحليل سريان الطبقة الجدارية المائرة بالتركيز على اللوح المستوى ذي السطح الناعم.

باستخدام نتيجة بلازيوس

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225\ \mathrm{Re}_\delta^{-1/4} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4}$$

و استخدام القانون الأسي لتوزيع السرعة

$$\varphi = \frac{u}{U} = \eta^{1/7}$$

تعطي المعادلة (9.5) :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \varphi (1 - \varphi) d\eta \right]$$

$$0.0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \eta^{1/7}(1-\eta^{1/7})d\eta\right]$$

$$0.0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{7}{72}\delta\right)$$

$$\delta^{1/4}d\delta = 0.0225\frac{72}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4}dx$$

ويُعطي التكامل

$$\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5}x^{4/5}dx \quad \text{.....(9.17)}$$

بمقارنة المقدار $x^{4/5}$ للسريان المائر مع المقدار $x^{1/2}$ للسريان الصفائحي نرى أن الطبقة الجدارية المائرة تنمو أسرع من الطبقة الجدارية الصفائحية.

بوضع المعادلة (9.17) في صورة لابعدية

$$\frac{\delta}{x} = 0.37\,\mathrm{Re}_x^{-1/5} \quad \text{.....(9.18)}$$

ونلاحظ ضعف اعتماد سمك الطبقة الجدارية على عدد رينولز مقارنةً بالسريان الصفائحي.

من المعادلتين (9.16) و (9.18) نحصل على تعبير عن القص الجداري اللابعدي:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0288\,Re_x^{-1/5} \quad \text{.....(9.19)}$$

بمكاملة (9.19) على اللوح نحصل على **الإعاقة الجلدية** D

$$D = b\int_0^L \tau_w dx = 0.036\,b\,\rho\,\nu^{1/5}L^{4/5}U^{9/5}$$

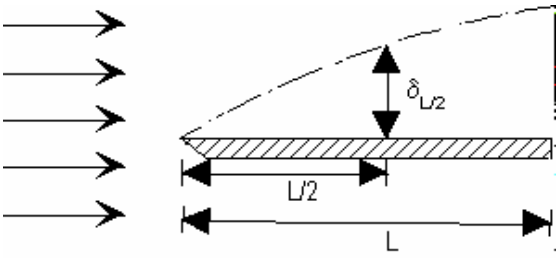
وتدل التجربة إلى أن المعامل الأدق هو **0.037**

$$D = 0.037\, b\, \rho\, v^{1/5}\, L^{4/5}\, U^{9/5} \quad \text{.....(9.20)}$$

ثم نحصل على معامل الإعاقة الجلدية

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL} = 0.074\, Re_L^{-1/5} \quad \text{.....(9.21)}$$

مثال



الشكل 9.4

سريان على لوح ناعم بممال ضغط صفري. طول اللوح متر واحد وعرضه 0.3 متر. اللزوجة الكينماتية للمائع 1E-6 m^2/s وكثافته 1000kg/m^3 . السرعة الخارجية للتيار 0.7m/s

(أ) إذا أمكن إبقاء السريان صفائحياً على كل اللوح أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية على كل اللوح.

(ب) إذا رُج السريان صعيد اللوح بحيث أصبحت الطبقة الجدارية مائرة تماماً أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية على كل اللوح.

(أ) في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية تُعطي نتائج بلازيوس :

$$\delta_x = \frac{5.0x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$Re_{L/2}$ = 0.35E6, $\delta_{L/2}$ = 4.2E-3 ≈ **4mm**

$Re_L = Re_{1.0}$ = 0.7E6

قوة الإعاقة D :

$$D = \tfrac{1}{2}\rho U^2 bL\, C_f$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} = 0.0016$$

$D = \tfrac{1}{2}(1000)(0.7)^2\,(0.3)(1.0)(0.0016) =$ **0.12N**

(ب) في حالة الطبقة الجدارية المائرة

$Re_{L/2} = 0.35E6$

و تعطي المعادلة (9.18)

$\delta_{0.5} = 0.014 =$ 14mm

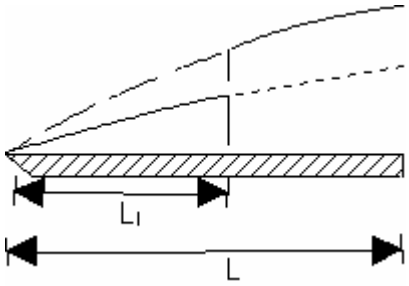
و من المعادلات (9.20) و (9.21)

$Re_L = 0.7E6,\ C_f =$ 0.005

$D = \tfrac{1}{2}(1000)(0.7)^2\,(0.3)(1.0)(0.005) =$ **0.37N**

9.3.3 الطبقة الجدارية الهجين

في القسمين السابقين (9.3.1) و (9.3.2) تم تحليل سريان الطبقة الجدارية الصفائحية والطبقة الجدارية المائرة على حِدة لتبسيط التحليل. ما يحدث عادةً في الطبيعة أن تكون الطبقة الجدارية صفائحية في البدء (مقدمة اللوح) ثم تتحول عند قيمة رينولز الحرجة إلى طبقة جدارية مائرة. يجاور اللوح في هذه الحالة ما يعرف بالطبقة الجدارية الهجين.



الشكل 9.5

نود هنا حساب قوة الإعاقة الجلدية الناشئة عن الطبقة الجدارية الهجين بافتراض أن التحول من الحالة الصفائحية إلى المائرة يتم في مسافة قصيرة يمكن تجاهلها واعتبار التحول موضعي. نعتمد في هذا التحليل على الاستنباط المنسوب إلى برانتل و القائل: **عقب مقطع التحول يمكن اعتبار شكل الطبقة الجدارية إمتداداً لطبقة جدارية مائرة وهمية تبدأ عند مقدمة اللوح** .

إذن القيمة الكلية للإعاقة D تساوي :

الإعاقة المورية على الطول L - الإعاقة المورية على الطول L_l + الإعاقة الصفائحية على الطول L_l .

$$D = \tfrac{1}{2}\rho U^2 b\left[\frac{0.074L}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} - \frac{0.074L_l}{\mathrm{Re}_{L_l}^{1/5}} + \frac{1.328L_l}{\mathrm{Re}_{L_l}^{1/2}}\right] \quad \text{.....(9.22)}$$

مثال

المعطيات مماثلة لمعطيات المثال (9.1) باستثناء أن الطبقة الجدارية هنا هجين، حيث تتحول من صفائحية إلى مائرة عند عدد رينولز الحرج 0.4E6 . المطلوب حساب قوة الإعاقة الجلدية.

عدد رينولز الحرج = $\frac{UL_l}{\nu}$

$$Re_c = \frac{UL_l}{\nu} = 0.4E6$$

$$L_l = \frac{\mathrm{Re}_c \nu}{U} = 0.57\text{m}$$

$$Re_L = 0.7(1.0)/1E\text{-}6 = 0.7E6, \quad \mathrm{Re}_{L_l} = 0.4E6$$

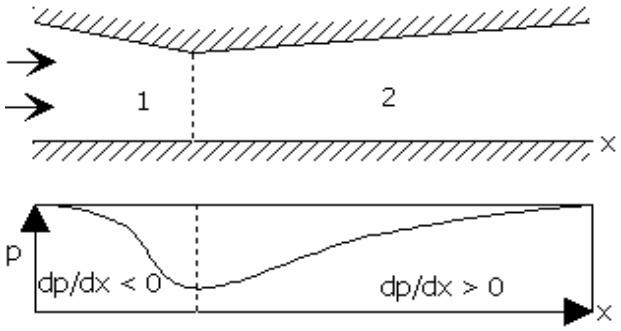
المعادلة (9.22) تعطي

$$D = \text{½ } (1E3)(0.7)^2\ (0.3)(1.0)\left[\frac{0.074}{(0.7E6)^{1/5}} - \frac{0.57}{1.0}\frac{0.074}{(0.4E6)^{1/5}} + \frac{0.57}{1.0}\frac{1.328}{(0.4E6)^{1/2}}\right]$$

$$= \mathbf{0.22N}$$

نذكُر أن الإعاقة تساوي 0.12N لهذه المعطيات في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية، و 0.37N لحالة الطبقة الجدارية المائرة.

9.4 الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفري



الشكل

مما سبقت دراسته عن الطبقات الجدارية التي يساوي ممال الضغط فيها صفر نرى أن الإجهاد القصي الجداري τ_w و ممال السرعة الجداري $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$ يتناقصان مع زيادة x - المعادلتان (9.7) و (9.19). إلا أن قيمهما لا تهبط إلى الصفر مهما كبُرت قيمة x. وعند تأمل ممال السرعة نرى أن إتجاه السرعة u لا ينعكس أبداً في هذه الحالة.

لدراسة ما يمكن أن يحدث لممال السرعة قرب الجدار في حالة ممال ضغط لا يساوي صفر نتفكر في السريان اللاإنضغاطى داخل المجرى اللام- الناشر الموضح في الشكل (9.6).

معادلة الاستمرارية، ثابت = vA ، تدل إلى أن السرعة المتوسطة v تتزايد في الجانب اللام لتبلغ مداها عند الحلق ثم تتناقص في الجانب الناشر. و بالتعويض لذلك في معادلة حفظ الطاقة في صورتها المثالية:

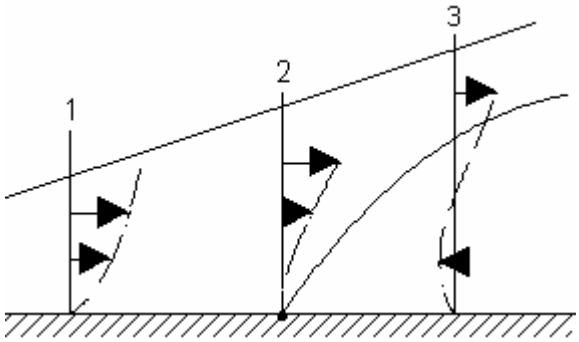
$$\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 = \text{ثابت}$$

نحصل على توزيع الضغط الموضح في الشكل (9.6) و نرى فيه أن ممال الضغط سالب في الجانب الصعيدي و موجب في الجانب السافلي. ماذا يحدث إذن للطبقة الجدارية النامية على الجدار السُفلي؟

(أ) في الجانب الصعيدي، حيث $\frac{dp}{dx} < 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيئ قرب الجدار أعلى من الضغط أمام الجزيئ. وهذا يؤدي إلى أن لا تهبط سرعة الجزيئ إلى الصفر قط .

(ب) في الجانب السافلي، حيث $\frac{dp}{dx} > 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيئ يقل عن الضغط أمامه. وهذا يؤدي إلى احتمال هبوط السرعة هناك إلى الصفر. ونعرف من التجربة أن الحالة $\frac{dp}{dx} > 0$ حالة ضرورية لهبوط السرعة إلى الصفر ولكنها ليست كافية. و بافتراض زاوية تباعد كبيرة نسبياً يهبط ممال السرعة $\frac{du}{dy}$ عند الجدار إلى الصفر و يصبح توزيع السرعة كالمُبيّن في المقطع (2) في الشكل (9.7).

ما يلي ذلك في اتجاه السريان x هو انعكاس اتجاه السرعة، $\frac{du}{dy} < 0$، و يتكون مجال سريان يدور فيه المائع موضعياً. ويسمى السريان في هذه الحالة سريان **منفصل** .



الشكل 9.7

ظاهرة الفصل تصاحبها مضار عديدة في التطبيقات الهندسية وينبغي التيقن من غياب مسبباتها عند التصميم أو استخدام أحد الوسائل المتّبعة لإزالة الفصل.

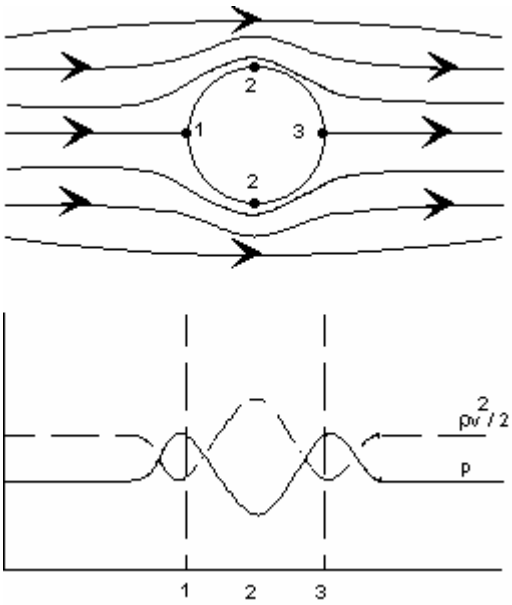
9.5 الفصل و الإعاقة الضغطية في السريان الخارجي

9.5.1 السريان عبر أسطوانة

نبدأ بدراسة سريان مثالي ثنائي البعد محكوم بمعادلة برنولي في الصورة :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{ثابت}$$

ونرى أن خضوع السريان لهذا الفرض يؤدي الى تماثل خطوط السريان حول الأسطوانة، و أن الضغط p والمقدار $\frac{1}{2}\rho v^2$ متماثلان حول المحور الرأسي – الشكل (9.8).



الشكل 9.8

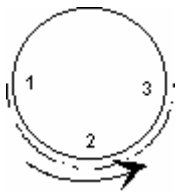
بمتابعة مستوى الضغط في خط السريان 1-2-3 فإن مثالية السريان تعني

$$p_3 = p_1$$

أي أن الضغط يُستردَ تماماً عند الموضع (3) .

هذه هي الصورة المثالية للسريان عبر الأسطوانة. ما هي الصورة الفعلية؟

يبطء السريان قرب السطح 1-2-3 بسبب قيد اللاانزلاق – الشكل (9.9). وهو القيد الذي يؤدي لتكوين طبقة جدارية على السطح. ويعني تكون الطبقة الجدارية وجود ممالات سرعة و من ثم احتكاك لزجي و فقد في الطاقة.



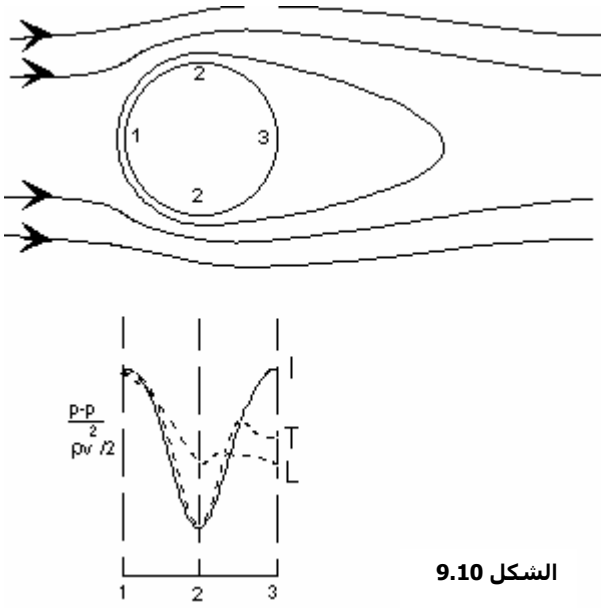
الشكل 9.9

في المسار 1-2 تتزايد السرعة و ينخفض الضغط و يؤدي الاحتكاك اللزجي إلى فقد في الطاقة الحركية. و هذا

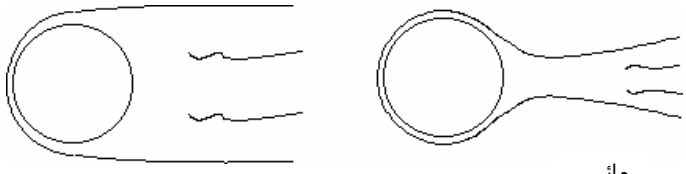
يعني أن محتوى الطاقة المفيد أقل من محتوى الطاقة في حالة السريان المثالي. و يتبع ذلك في المسار 2-3 إستحالة استرداد كل قيمة الضغط p_1 عند الموضع 3 بسبب الفقد المذكور و أن ينخفض الضغط سافل الأسطوانة عن نظيره صعيد الأسطوانة، أي

$$p_1 - p_3 > 0$$

و تنشأ بذلك قوة إعاقة على الاسطوانة في الاتجاه 3-1. و تؤدي dp/ds الموجبة في المسار 2-3 إلى انفصال الطبقة الجدارية.



الشكل 9.10



صفائحي مائر

الشكل 9.11

عند مقارنة السريان المائر عبر الأسطوانة بالسريان الصفائحي نرى أن توزيع الضغط في حالة السريان المائر أقرب إلى التوزيع المثالي - الشكلين (9.10) و (9.11). و نرى

الطبقة الجدارية الصفائحية أسرع في الانفصال من الطبقة الجدارية المائرة. ويُعزى ذلك إلى أن **الخلط الموري** في حالة السريان المائر يُغذي الطبقة الجدارية بطاقة حركية مستمدة من التيار الرئيسي مما يؤدي إلى تنشيط الطبقة الجدارية وتأخير انفصالها.

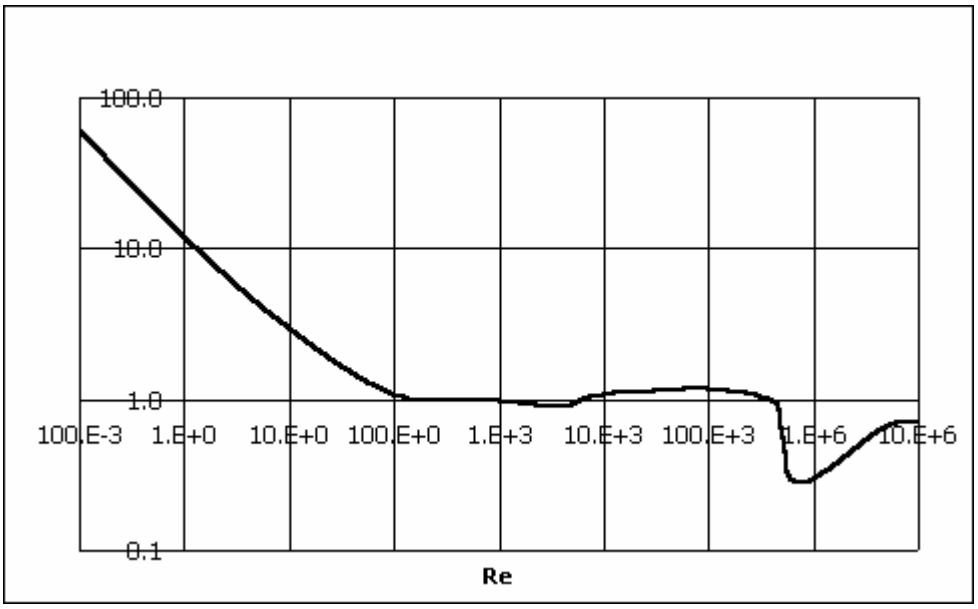
يعرف المقدار $A(p_1 - p_3)$ ب**الإعاقة الضغطية**، حيث A هي المساحة المواجهة للسريان. و يسبب هذه الإعاقة انفصال الطبقة الجدارية. **الإعاقة الجلدية**، من الجانب الآخر، يسببها السريان غير المنفصل.

يُعرّف **المعامل الكُلّي للإعاقة** C_D كما يلى :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad \text{.....(9.23)}$$

حيث D قوة الإعاقة.

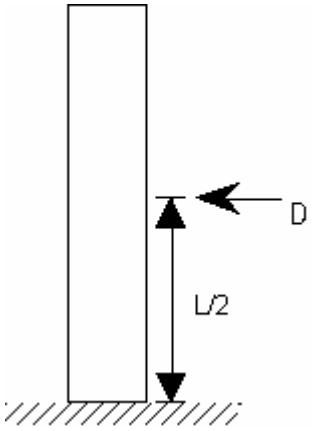
يعتمد هذا المعامل على عدد رينولز، و يوضح الشكل (9.12) هذه الصلة لأسطوانة ذات نسبة باعية عالية.



الشكل (9.12)

مثال

قَدِّر عزم الثني على قاعدة مدخنة أسطوانية ارتفاعها 20m معرّضة لرياح سرعتها 15m/s قطر المدخنة 1.5m . الضغط الجوي ودرجة الحرارة 0.1MPa و 30°C على التوالي. اللزوجة الكينماتية 2.5E-6m^2/s.



الشكل 9.13

$$Re = vd/\nu = 9E6$$

يُعطي المنحنى في الشكل (9.12) عند هذه القيمة لعدد رينولز C_D = 0.7. وتُعطي معادلة الغاز الكامل كثافة الهواء بمعرفة الضغط والحرارة

$$\rho = p / RT = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

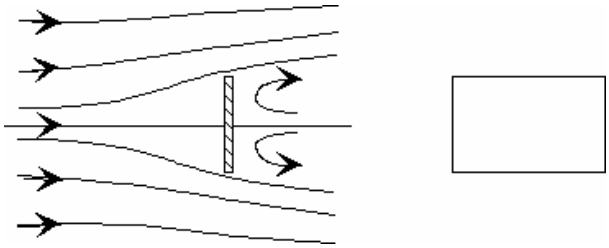
المساحة المواجهة للتيار $25m^2 = Ld$

$$D = C_D . \frac{1}{2} \rho A v^2 = 2717 \text{ N}$$

العزم M

$$M = \tfrac{1}{2} LD = \mathbf{27167\ Nm}$$

9.5.2 الإعاقة على ألواح رفيعة متعامدة على السريان



الشكل 9.14

(أ) لوح مسطح مستطيل:

معامل الإعاقة C_D للوح مستطيل ومواجه تماماً للتيار:

$$C_D = 1.17 + 0.012\ (b/h) \quad \text{.....(9.24)}$$

في الحدود: $Re_h > 1000$ و $1 < b/h < 20$

(ب) قرص :

$$C_D = 1.17 \quad \text{.....(9.25)}$$

في الحدود: $Re > 1000$

(ج) نصف كرة مفرغة :

في الحدود: $Re > 1000$

$$C_D = 1.42 \quad \text{.....(9.26a)}$$

التيار يواجه الجانب المقعر

$$C_D = 0.38 \quad \text{.....(9.26b)}$$

التيار يواجه الجانب المحدب

مثال

الدوّار الموضح في الشكل (9.15) يراد استخدامه عند سرعة هواء 3m/s . كثافة الهواء $1.1kg/m^3$. العزم المطلوب حول نقطة الدوران 0.1Nm . أحسب نصف قطر شبه الكرة.

عزم الدوران =

$$= F_1 R - F_2 R = (F_1 - F_2)R$$

حيث F_1 و F_2 القوى على نصفي الكرة و R نصف قطر الكرة .

$$(F_1 - F_2)R = \tfrac{1}{2}\rho A v^2 (C_{D1} - C_{D2})R = \tfrac{1}{2}\pi R^3 v^2 (C_{D1} - C_{D2})$$

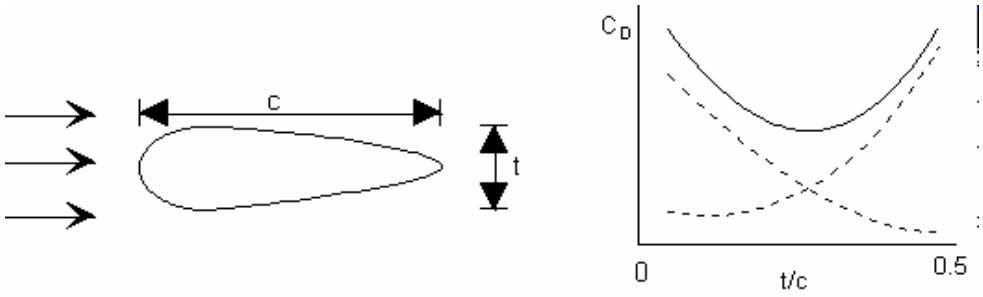
$$0.1 = \tfrac{1}{2}\pi(1.1)R^3(9)(1.42 - 0.38)$$

$$R = 0.18\text{m}$$

نصف القطر المطلوب **≥ 0.18m**

الشكل 9.15

9.5.3 الجنيحات



الشكل 9.16

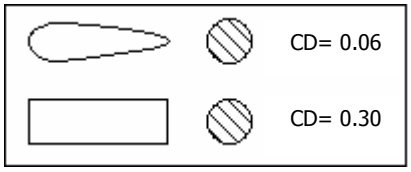
الجنيح هو المقطع التجريبي للجناح أو ريّش آلات الموائع. ويصمم ليقلل من تأثير الضغط الموجب سافل القطاع الأكثر سمكاً عند استخدامه في الحالة التصميمية . كما يراعى في تصميمه الموائمة بين الإعاقة الضغطية والإعاقة الجلدية لتعطيان إعاقة كلّية دنيا كما هو موضح في الشكل (9.16).

9.6 التحكم في الطبقة الجدارية

9.6.1 الانسيابية

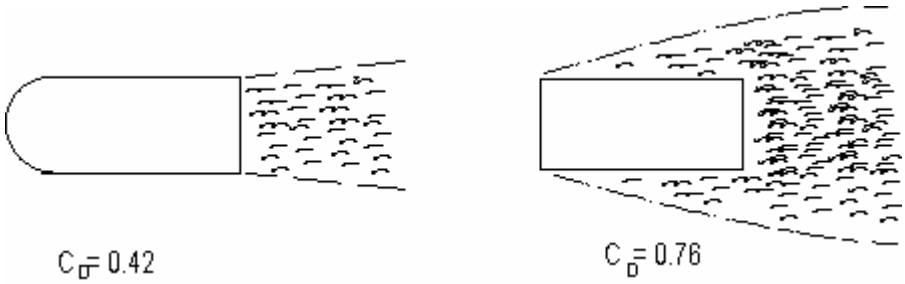
تعني الانسيابية أن الشكل الخارجي للجسم يُشكِل خطوط الانسياب الطرفية للسريان بحيث تُعطي الحجم الأدنى للدوّامات، و من ثم القدر الأدنى من الإعاقة. المثال أدناه في الشكل (9.17) يوضح أن الشكل المعروف بالقطرة، مثلاً، يعطي معامل إعاقة 0.06 بينما يعطي الشكل الأسطوانى لنفس القطر معامل إعاقة 0.3 .

ونرى شكل الأجسام الهندسية المعرضة للإعاقة الحركية - مثل: بدن الطائرة، محركات الطائرة النفاثة، الغواصة و الصاروخ - يُقرب الى القطرة.



الشكل 9.17

يستخدم مُصنعو السيارات الأنفاق الهوائية للوصول إلى تصميمات تعطي إعاقة حركية دنيا. الشكل (9.18) يبين أثر الانسيابية في خفض الإعاقة و هو مستمد من تقرير تجريبي عن حافلة فلولكسفاغن.



الشكل 9.18

عند تقدير الإعاقة الكلية على حركة السيارة نراعي أنه بالإضافة إلى الإعاقة الحركية هنالك إعاقة الطريق الناتجة عن حركة الإطارات على الطريق. فالإعاقة الكلية R تساوي الإعاقة الحركية R_A مضافاً إليها إعاقة الطريق R_R

$$R = R_A + R_R = C_D \tfrac{1}{2}\rho A U^2 + C_R Wt \quad \text{.....(9.27)}$$

حيث Wt وزن السيارة و C_R معامل الطريق.

القدرة المقابلة للإعاقة P

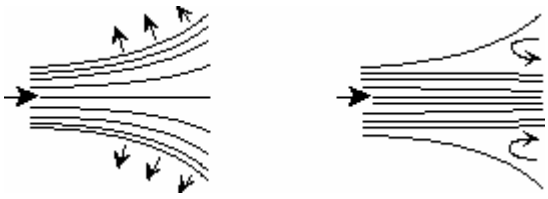
$$P = RU \quad \text{.....(9.28)}$$

تُعطي القائمتان أدناه قيماً تقريبية للمعاملات C_D و C_R

نوع العربة	C_D
شاحنة	0.8 - 1.0
حافلة	0.6 -0.8
شاحنة صغيرة	0.6 -0.7
صالون	0.2-0.5

نوع الطريق	C_R
رمل	0.1 -0.3
تربة (نصف صلبة)	0.08
حصى	0.04
أسفلت قديم	0.02
أسفلت جديد	0.01
قضبان حديدية	0.0027

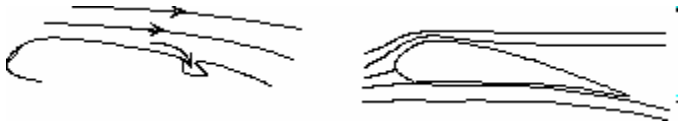
9.6.2 الامتصاص



الشكل 9.19

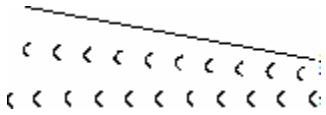
يمكن التحكم في الطبقة الجدارية بامتصاص المائع من منطقة الانفصال بوسائل خارجية. ويبدو في الشكل (9.19) تطبيق لهذه الوسيلة في سريان داخلي (ناشر). و تدل التجربة الى أن الفصل لا يحدث في الناشر إذا كانت زاوية النشر تقل عن 7° .

في الشكل (9.20) تطبيق لأسلوب الامتصاص على سريان خارجي (جنيح).



الشكل 9.20

9.6.3 تنشيط الطبقة الجدارية

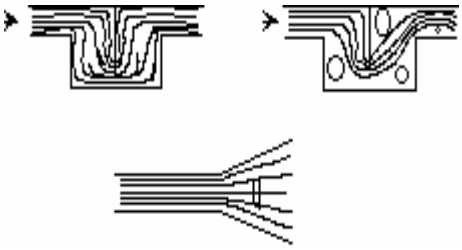


الشكل 9.21

يحدث انفصال الطبقة الجدارية، كما سبق الذكر، بسبب فقدان السريان لجزء من طاقته بسبب الاحتكاك اللزجي في الطبقة الجدارية. وتعتمد طريقة التنشيط على إضافة طاقة من التيار الرئيسي بخلق دوامات مورية بواسطة ريش صغيرة تعرف بمولدات الدوامات. وهذه من أكثر الطرق استخداماً في تصميم أجنحة الطائرات. الشكل (9.21).

9.6.4 الريش الساكنة

تستخدم الريش الساكنة في السريان الداخلي للتحكم في خطوط الانسياب و الحد من انفصال الطبقة الجدارية . يوضح الشكل (9.22) تطبيقان لهذه الوسيلة في مجرى لسريان غير منتظم الاتجاه و مجرى ناشر.



الشكل 9.22

مسائل

[حيث تحتاج لكثافة الهواء أعتبرها $1.2kg/m^3$]

9.1 سريان صفائحي عبر لوح مسطح بزاوية هجوم صفر وبممال ضغط صفر. بافتراض أن توزيع السرعة في الطبقة الجدارية من الدرجة الثانية استخلص تعبيراً عن $\frac{\tau_w}{\rho U^2}$ و C_f بدلالة Re. قارن نتائجك بنتائج بلازيوس التجريبية.

[$0.365Re_x^{-1/2}$, $1.461Re_L^{-1/2}$]

9.2 يسري هواء بسرعة 2.2m/s على استقامة لوح مسطح طوله 0.5m وعرضه 0.3m اللزوجة الكينماتية $20E\text{-}6m^2/s$ والكثافة $1.2kg/m^3$. أحسب سمك الطبقة الجدارية عند ذيل اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية .

[11mm, 2.47E-3 N]

9.3 عدد رينولز لسريان على استقامة لوح مسطح 5E6 . يتحول السريان من صفائحي إلى مائر عند البعد 0.4L من مقدمة اللوح، حيث L طول اللوح.

(أ) أحسب معامل الإعاقة الجلدية، C_f

(ب) أحسب القدرة اللازمة لتثبيت اللوح في سريان سرعته الرئيسية 2m/s وكثافته $1000\ kg/m^3$ إذا كان طول اللوح 1.0m وعرضه 0.4m .

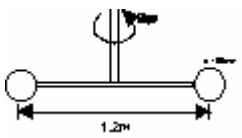
[0.00213, 3.4N, 6.8W]

9.4 يمكن اعتبار جناح الطائرة لوح مسطح باستقامة السريان لحساب التقديرات الأولى للتصميم. في حالة محددة باع ا لجناح 7.5m ووتره 2.0m وسرعة الطيران 320 m/h . اللزوجة الكينماتية للهواء $20E\text{-}6m^2/s$ و الكثافة $0.95kg/m^3$.

أ) بافتراض أن السريان مائر على كل الجناح قدّر الإعاقة على الجناح .

ب) بأى مقدار تقل القدرة المطلوبة إذا أمكن التحكم في الطبقة الجدارية لتصبح صفائحية على كل الجناح. [340N, 25.8kW]

9.5 يهبط مظلي عمودياً بمظلة بسرعة 5m/s . وزن المظلي والمظلة 1kN . باعتبار أن المظلة نصف كرة مفرغة قدّر قطرها. [7.7m]



الشكل 9.23

9.6 يوضح الشكل (9.23) خلاط دوّار يستخدم لخلط محلول كثافته $1100g/m^3$. في طرفي الدوار قرصان معدنيان مثبتان في المستوى الرأسي. قطر أذرع الخلاط صغير ويمكن تجاهل أثره الحركي. أحسب عزم اللي والقدرة اللازمتين لتشغيل الخلاط .

[86 Nm, 541W]

9.7 المساحة الأمامية لسيارة $2.2m^2$ و وزنها الكلي 20kN . معامل الإعاقة الحركي 0.5 . إذا استخدمت السيارة على طريق مسفلت متوسط الحال (C_R = 0.015) أحسب السرعة التي تتجاوز عندها الإعاقة الحركية إعاقة الطريق. أحسب أيضاً القدرات اللازمة عند السرعتين120 km/h و 100 km/h .

[77km/h ; 34.4kW, 22.5kW]

10 الرفـــع

10.1 مقدمة

يُعنى هذا الفصل بدراسة الأنموذج الرياضي للسريان اللالزجي اللاإنضغاطي. تجعل هذه الافتراضات معادلات الحفظ بسيطة إلا أنها تظل حاكمة لطائفة من التطبيقات الهندسية الهامة. و نهتم هنا بصفة أساسية بالتطبيق ذي الصلة بقوة الرفع.
سيقصر التحليل على السريان الرتيب ثنائي البعد.

نحتاج في هذا الفصل للتعريفات الآتية :

(أ) دالة السريان ψ

المركبات u وv مركبات لمتجه السرعة $\underline{V}$ في الاتجاهين x و y لسريان ثنائي البعد

$$\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j} \quad \text{.....(10.1)}$$

يمكن استبدال المتغيرات المُعتمِدة u و v بمتغير مُعتمِد واحد هو ψ باستخدام علاقات التحويل:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{.....(10.2)}$$

بهذا التعريف تحقق الدالة ψ معادلة الاستمرارية :

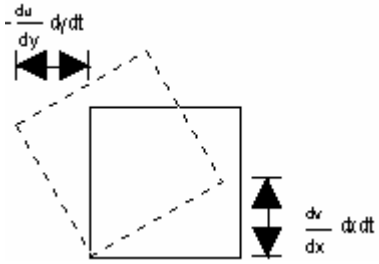
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(10.3)}$$

(ب) السريان اللادوراني

يعرف السريان بأنه لا دوراني إذا لم يكن لأيٍ من أجزاءهِ حركة دورانية خالصة.

يمكن من الشكل (10.1) استنتاج أن السرعة الزاوّية المتوسطة تساوي:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



الشكل 10.1

ونرى من ذلك أن مقدار دوران أيٍ من أجزاء المائع تتناسب مع المقدار داخل القوسين. وبذلك يمكن تعريف السريان اللادوراني بأنه الذي يحقق المعادلة

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{.....(10.4)}$$

يمكن أيضاً إثبات أن الدوران يرتبط فقط بالسريان اللزجي. ويظل السريان لا دورانياً إذا كان لا لزجياً وبدأ لا دورانياً .

(ج) دالة الكُمُون φ

يوصف السريان بأنه ذو كُمُون إذا وُجدت دالة φ تعرف متجه السرعة

$$\underline{V}=\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j}$$

حيث

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{.....(10.5)}$$

ويمكن ملاحظة أن المعادلة (10.5) تحقق المعادلة (10.4).

(د) معادلتي لابلاس لـ ψ و φ

بقرن المعادلتين (10.2) و (10.4) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{.....(10.6)}$$

وبقرن المعادلتين (10.5) و (10.3) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{.....(10.7)}$$

(هـ) المناط القطبي

نعيد هنا صياغة المعادلات (10.1) إلى (10.7) بدلالة الإحداثيات القطبية θ و r .

متجه السرعة $\underline{v}$:

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta \quad \text{.....(10.8)}$$

دالة السريان ψ:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{.....(10.9)}$$

دالة الكُمُون φ :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad \text{.....(10.10)}$$

معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{.....(10.11)}$$

السريان اللادوراني:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \quad \text{.....(10.12)}$$

معادلتي لابلاس:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{.....(10.13)}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{.....(10.14)}$$

(و) السريان المنتظم

يعرّف متجه السرعة للسريان المنتظم بالمعادلة: $\underline{V} = U\underline{i}$

فتكون $u = U$ و $v = 0$

ويتبع ذلك

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \text{ ....(1)} \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ .....(2)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \text{ .....(3)} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ .....(4)}$$

مكاملة (1) تعطي

$$\psi = Uy + f(x)$$

وبالمفاضلة والمقارنة مع (2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) = 0$$

$$\psi = Uy + c_1 \text{ .....(5)}$$

مكاملة (3) تعطي

$$\varphi = Ux + g(y)$$

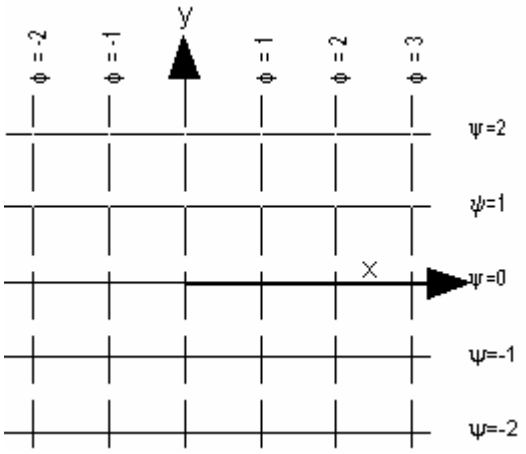
وبالمفاضلة والمقارنة مع (4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g'(y) = 0$$

$$\varphi = Ux + c_2 \quad \text{.....(6)}$$

الـــشكل (10.2) يـــصور الـــسريان المنتظم عند

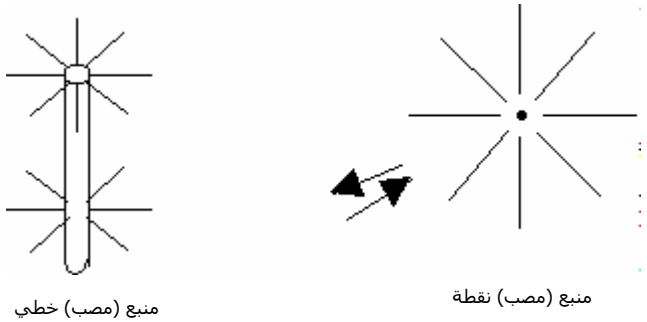
$U = 1$ m/s , $c_1 = c_2 = 0$



الشكل 10.2

(ز) المنبع والمصب

يُعرّف المنبع في هذا التحليل بأنه الموضع الذي ينبع منه المائع إشعاعياً والمصب هو الموضع الذي يختفي عنده المائع الداخل إشعاعياً. يوضح الشكل (10.3) ما يعرف بالمنبع النقطة و المصب النقطة و المنبع الخطي و المصب الخطي .



الشكل 10.3

يستخلص من التعريف أعلاه أن السرعة الزاوّية للسريان في المنبع والمصب v_θ تساوي صفر. بذلك يكون معدل السريان الحجمي q لوحدة طول واحدة في المنبع الخطي

$$q = 2\pi r v_r$$

باستخدام المعادلة (10.9):

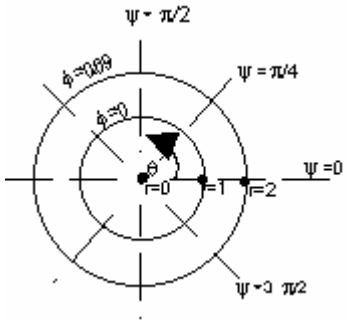
$$q = 2\pi r v_r = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta + f(r)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = f'(r) = -v_\theta = 0$$

$f(r)$ = ثابت = c_1



الشكل 10.4

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta + c_1 \quad \text{.....(1)}$$

فتعطي المعادلة (10.10)

$$q = 2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r + g(\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} g'(\theta) = v_\theta = 0$$

$g(\theta)$= ثابت = c_2

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r + c_2 \quad \text{.....(2)}$$

يبين الشكل (10.4) سريان منبع (مصب) عند

$$\frac{q}{2\pi} = 1, \qquad c_1 = c_2 = 0$$

مثال

يعرف سريان لا انضغاطي بالمعادلة $\psi = xy$

(أ) أرسم لهذا السريان بعض خطوط الانسياب على المستوى الموجب لِ x-y .

(ب) أكتب معادلة متجه السرعة.

(ج) بيّن أن السريان لا دوراني وأكتب التعبير الدال على دالة الكُمُون.

(أ) خطوط الانسياب :

عند خط الانسياب

$\psi = 0$: لكل قيم y ، $x = 0$

لكل قيم x ، y = 0.

عند خط الانسياب

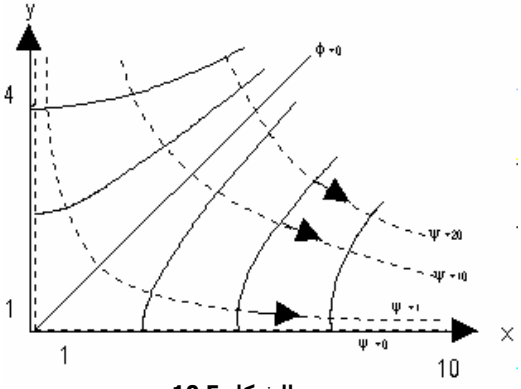
$\psi = 1$: $y = 1/x$

عند خط الانسياب

$\psi = 10$: $y = 10/x$

عند خط الانسياب

$\psi = 20$: $y = 20/x$



الشكل 10.5

(ب) متجه السرعة $\underline{V}$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x \,, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$

$$\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j} = x\underline{i} - y\underline{j}$$

ويمكن استنتاج اتجاهات خطوط الانسياب من توزيع السرعة أعلاه.

(ج) ليكون السريان لا دوراني ينبغي تحقيق المعادلة (10.4) .

ومن (ب) أعلاه

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \,, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ويحقق ذلك المعادلة (10.4)

لتحديد دالة الكُمُون

$$u = x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} x^2 + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = -y$$

$$f(y) = -\frac{1}{2} y^2 + c$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$$

10.2 اختزال معادلات نافير–ستوكس لحالة السريان اللالزجي

10.2.1 الصورة العامة للمعادلات

عند افتراض أن السريان لالزجي ولاانضغاطي يمكن تبسيط معادلات نافير- ستوكس من الصورة (8.1) باعتبار المتجه اللزجي $\underline{s}$ يساوي صفر فتأخذ المعادلات الثلاث الصورة التالية في مناط ديكارتي:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=B_x-\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{.....(10.15a)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=B_y-\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{.....(10.15b)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=B_z-\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{.....(10.15c)}$$

و قد سبقت كتابة هذه المعادلات، المعروفة بمعادلات أويلر، بالترقيم (8.3).

و في المناط الأسطوانى :

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]=B_r-\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{.....(10.16a)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]=B_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \text{.....(10.16b)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]=B_z-\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{.....(10.16c)}$$

مثال

المعادلة أدناه تمثل توزيع السرعة في مجال ثلاثي البعد لسريان رتيب:

$$\underline{V}=cx\underline{i}+cy\underline{j}-2cz\underline{k}$$

(أ) أثبت أن السريان لاإنضغاطي.

(ب) باعتبار المحور z رأسي و أن الكثافة تساوي $1000 kg/m^3$ و الثابت c يساوي $1.0\ s^{-1}$ أحسب ممال الضغط عند النقطة (1,1,5).

(أ) معادلة الاستمرارية للسريان اللاإنضغاطى ثلاثي البعد (المعادلة 2.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

وفي هذا المثال : $u = cx,\ v = cy,\ w = -2cz$

و هى تحقق المعادلة أعلاه و تحقق بالتالي الاستمرارية اللاانضغاطية.

(ب) بالتعويض لقيم u, v, w فى معادلات أويلر (10.15) و بملاحظة أن :

$$\underline{B} = B_x\underline{i} + B_y\underline{j} + B_z\underline{k} = 0 + 0 - \rho g\underline{k}$$

تعطي (10.15a)

$$\rho[c^2 x] = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -1000(1)^2(1) = -1000\ Pa/m$$

و تعطي (10.15b)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1000\ Pa/m$$

و تعطي (10.15c)

$$\rho[-2cz(-2c)] = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - 4c^2 z\rho = -1000(9.81+60) = -29810\ Pa/m$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\underline{k} = -0.001\underline{i} - 0.001\underline{j} - 29810\underline{k}$$

10.2.2 معادلة برنولي

باعتبار السريان ثنائي البعد لا دوراني و لا انضغاطي مع تجاهل القوى الجسمية تُختزل المعادلات (10.15) إلى الصور:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{.....(1)}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{.....(2)}$$

المعادلة (10.4) - شرط حالة اللادوران:

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{.....(10.4)}$$

من المعادلتين (1) و (10.4)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{p}{\rho}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right]=0$$

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=f(y) \quad \text{.....(3)}$$

وبالمثل تعطي المعادلتان (2) و (10.4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = g(x) \quad \text{.....(4)}$$

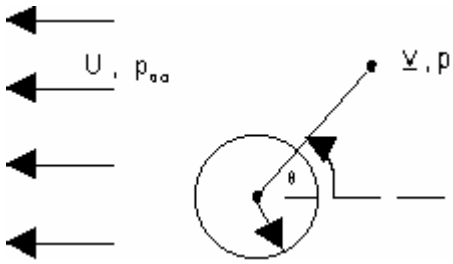
وتعطي المعادلتان (3) و (4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{ثابت} \quad \text{.....(10.17)}$$

وتعرف (10.17) ب**معادلة برنولي**.

يمكن ملاحظة أن المعادلة تشابه معادلة الطاقة التي سبق استخلاصها في الباب الثاني، آلا أنه ينبغي الانتباه إلى أن السرعة و الضغط في معادلة برنولي قيم محددة عند مواقع محددة في خطوط السريان بينما القيم المقابلة في معادلة الطاقة هي متوسطات لهذه المتغيرات عند المقاطع المشار إليها.

10.3 السريان اللادوراني عبر اسطوانة



الشكل 10.6

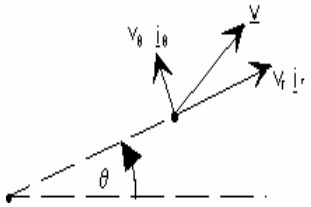
نبدأ هذا التحليل بالعلاقة التفاضلية للكُمُون φ كعلاقة مُحاكية للسريان :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad \text{.....(10.14)}$$

مع القيم الحدودية :

$$r = a\,,\quad v_r = 0 \qquad \rightarrow \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \qquad \text{.....(ق ح 1)}$$

$$r \rightarrow \infty\,,\quad v_r = -U\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r\rightarrow\infty} = -U\cos\theta \qquad \text{.....(ق ح 2)}$$



الشكل 10.7

$$r \rightarrow \infty\,,\quad v_\theta = U\sin\theta \qquad \rightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|_{r\rightarrow\infty} = U\sin\theta \qquad \text{.(ق ح 3)}$$

لحل المعادلة (10.14) باستخدام طريقة الضرب

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R'\Theta, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R''\Theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = R\Theta', \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R\Theta''$$

وبالتعويض في المعادلة (10.14)

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = k$$

وتعطي المعادلة الأخيرة المعادلتين :

$$r^2R'' + rR' - kR = 0 \quad \text{.....(2)}$$

$$\Theta'' + k\Theta = 0 \quad \text{.....(3)}$$

توجد ثلاثة احتمالات لقيمة k :

(أ) k موجبة $\Leftarrow$ $k = \lambda^2$

(ب) k سالبة $\Leftarrow$ $k = -\lambda^2$

(ج) $k = o$

حيث λ عدد حقيقي .

ويكون الحل العام للمعادلة (10.14) هو مجموع حواصل ضرب الحلول R و Θ عند كل من حالات k الثلاث :

$$\varphi = R\,\Theta\big|_{k=\lambda^2} + R\,\Theta\big|_{k=-\lambda^2} + R\,\Theta\big|_{k=0}$$

يمكن الاستنتاج أن الحل العام $\varphi(r,\theta)$ يأخذ الصورة :

$$\varphi = [\,c_1 r^{\lambda} + c_2 r^{-\lambda}][c_7 \cos\lambda\theta + c_8 \sin\lambda\theta]$$
$$+ [c_3 \cos\lambda r + c_4 \sin\lambda r]\,[\,c_9\theta^{\lambda} + c_{10}\theta^{-\lambda}\,]$$
$$+ [c_5 + c_6 \ln r][c_{11}\theta + c_{12}]$$

بملاحظة أن φ ليست دالة دورية في r فإن السطر الثانى في الحل أعلاه يختفي

$$\varphi = [\,c_1 r^{\lambda} + c_2 r^{-\lambda}][c_7 \cos\lambda\theta + c_8 \sin\lambda\theta] + [c_5 + c_6 \ln r][c_{11}\theta + c_{12}] \quad ...(4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \lambda\,[c_1 r^{\lambda-1} - c_2 r^{-\lambda-1}][c_7 \cos\lambda\theta + c_8 \sin\lambda\theta] + \frac{c_6}{r}[c_{11}\theta + c_{12}] \quad .....(5)$$

يمكن تحقيق القيمة الحدودية (ق ح 2) بالآتي :

$$\lambda = 1\,, \quad c_1 c_7 = -U\,, \quad c_8 = 0$$

وتصبح المعادلة (5)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -U\cos\theta\,(1 - \frac{c_2}{c_1}\frac{1}{r^2}) + \frac{c_6}{r}[c_{11}\theta + c_{12}] \quad .....(6)$$

وتعطي القيمة الحدودية (ق ح 1) $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$

أي $\frac{c_2}{c_1} = a^2$ ، $c_6 = 0$

فتصبح المعادلة (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -U\cos\theta\,(1 - \frac{a^2}{r^2}) \quad .....(10.16)$$

وتصبح المعادلة (4)

$$\varphi = - U \cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + c_5 c_{11}\theta + c_5 c_{12}$$

الثابت $c_5 c_{12}$ اختيارى في السريان الكمُون ويمكن اعتباره صفر .

ويمكن إحلال الرمز c محل الثابت $c_5 c_{11}$:

$$\varphi = - \left[r + \frac{a^2}{r}\right] U \cos\theta + c\theta \quad \text{.....(10.17)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left[r + \frac{a^2}{r}\right] U \sin\theta + c$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] U \sin\theta + \frac{c}{r} \quad \text{.....(10.18)}$$

لاحظ أن المعادلة (10.18) تحقق القيمة الحدودية (قح 3) .

توزيع السرعة :

التعبير عن متجه السرعة عند أي نقطة (r,θ) في مجال السريان قرب سطح الاسطوانة هو:

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \underline{i}_\theta$$

وبالتعويض لممالات الكُمُون من المعادلات (10.16) و (10.18)

$$\underline{v} = -\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) U \cos\theta\right] \underline{i}_r + \left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) U \sin\theta + \frac{c}{r}\right] \underline{i}_\theta \quad \text{.....(10.19)}$$

على سطح الاسطوانة r = a

$$\underline{v}_a = \left[2 U \sin\theta + \frac{c}{a}\right] \underline{i}_\theta$$

وبذلك تكون سرعة المائع عند سطح الاسطوانة ناتجة عن إسهامين:

(1) مقدار يعتمد على U والزاوية θ.

(2) مقدار ثابت يساوي c/a .

و يمكن تصور الإسهام الأخير بافتراض الآتى:

(أ) تدور الأسطوانة حول محورها بسرعة زاوّية ثابتة تنتج عنها سرعة طرفية تساوى c/a متر في الثانية.

(ب) يضيف دوران الاسطوانة حول محورها مقدار ثابت للسرعة يساوي c/a والتي يمكن أن تكتب ωa حيث ω السرعة الزاوّية (rad/s) في الاتجاه i_θ الموجب لتصبح المعادلة:

$$\underline{v}_a = [2 U \sin\theta + \omega a] \underline{i}_\theta \quad \text{.....(10.20)}$$

يمكن تحديد نقاط الركود على سطح الاسطوانة بتعويض $\underline{v}_a = 0$ في المعادلة (10.20) لتعطي:

$$\theta_o = \sin^{-1}\left(-\frac{\omega a}{2U}\right)$$

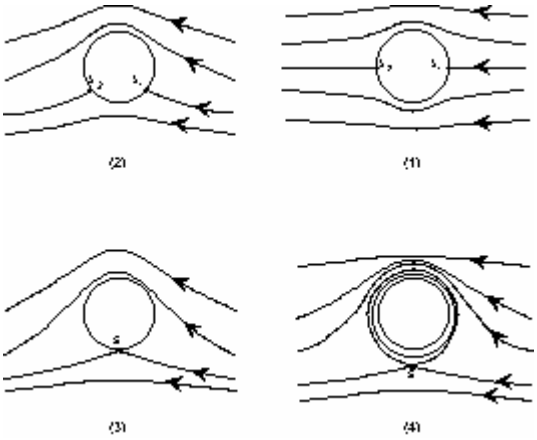
ويمكن ملاحظة ما يلي عند وضع قيم مختلفة للسرعة الدورانية ω:

(1) $\omega = 0$ لادوران يعني $\theta_o = 0 , 180°$

(2) $\omega = U/a$ $\theta_o = 210^o , 330^o$

(3) $\omega = 2U/a$ $\theta_o = 270^o$

(4) $\omega > 2U/a$ نقطة الركود تبتعد عن السطح عند $\theta = 270^o$.



الشكل 10.8

الضغط على سطح الاسطوانة

باستخدام معادلة برنولي

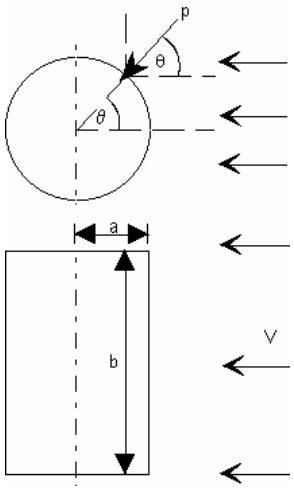
$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1-\frac{V^2}{U^2}\right)$$

ولإيجاد الضغط على سطح الاسطوانة نعوض للمقدار V^2 من المعادلة (10.20)

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1- 4\sin^2\theta - 4\frac{\omega a}{U}\sin\theta - \left(\frac{\omega a}{U}\right)^2 \right] \text{.....(10.21)}$$

القوة على سطح الاسطوانة

باعتبار F_x , F_y مركبتي القوة F على سطح الاسطوانة في الاتجاهين x و y



الشكل 10.9

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{i}$$

$$F_x = \oiint_A - p \cos\theta \, dA$$

$$dA = (a \, d\theta) \, b$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} - p \cos\theta \; abd\theta$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (10.21)

$$F_x = -ab \int_0^{2\pi} p_\infty \cos\theta \, d\theta - ab\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta - 4\cos\theta \sin^2\theta - 4\frac{\omega a}{U} \cos\theta \sin\theta \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \cos\theta \right) d\theta \right] = 0$$

وهذا يعني أن لا قوة تعمل في الاتجاه x

$$F_y = \oiint_A - p \sin\theta \, dA = -ab \int_0^{2\pi} p \sin\theta \; d\theta$$

$$= ab\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta - 4\sin^3\theta - 4\frac{\omega a}{U} \sin^2\theta - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \sin\theta \right) d\theta$$

$$= 2 a^2 b \rho U \omega \; [\pi] = 2\pi a^2 b \rho U \omega$$

$$\underline{F} = 2\pi a^2 b \rho U \omega \underline{j} \; .$$

تعمل هذه القوة في الاتجاه y الموجب متعامدة على اتجاه السريان الرئيسي وتسمى **الرفع** ويرمز لها ب F_L .

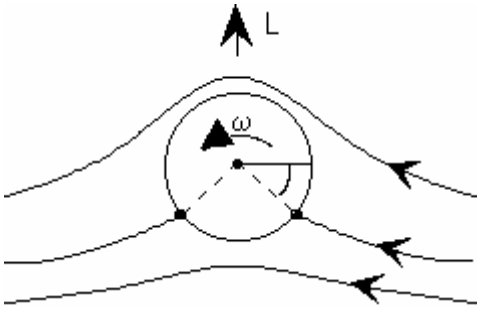
$$F_L = 2\pi a^2 b\rho U\omega \quad \text{.....(10.22)}$$

نرى ظاهرة الرفع هذه، على سبيل المثال، حين تُدفع كرة بضربة جانبية بحيث تتخذ سرعة انتقالية U وسرعة زاويّة ω تدير الكرة. ونلاحظ حينئذ أن الكرة تتحرك في مسار منحني مما يدل على نشوء قوة الدفع F_L. وقد طُبِقت النظرية في سفينة استخدمت أسطوانات عمودية معرّضة للرياح وتدار حول محورها. ومكن ذلك من الحصول على القوة F_L التي وفرت الدفع للسفينة.

نضيف هنا أن الرفع الحقيقي أقل مما تتنبأ به المعادلة (10.22) بسبب إغفال هذه المعادلة للأثر اللزجي.

يعرف معامل الرفع C_L بالمعادلة :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{2\pi\omega a}{U} \quad \text{.....(10.23)}$$



الشكل 10.10

مثال

أسطوانة قطرها 0.3m تدور حول محورها بسرعة 300rpm داخل سريان سرعته الرئيسية 4.0m/s وكثافته $1.0kg/m^3$ أحسب معامل الرفع و الرفع المثالي على متر واحد من طول الاسطوانة وحدد مواضع الركود.

$\omega = 2\pi N/60 = 2\pi(300)/60 = 31.42$ rad/s

$C_L = 2\pi(31.42)0.15/4.0 =$ **7.40**

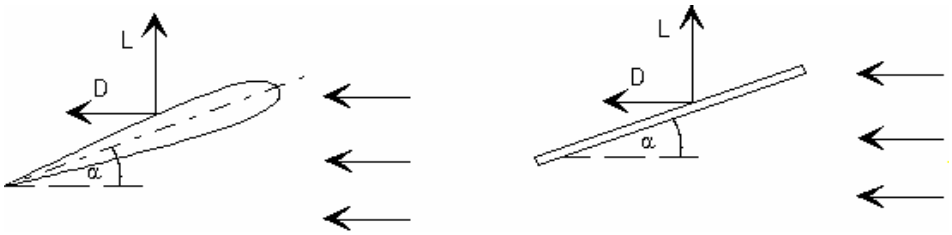
$A = bd = 1(0.3) = 0.3\ m^2$

$F_L = 7.4(1/2)1.0(4.0)^2\ (0.3) =$ **17.77N**

$$\theta_s = \sin^{-1}\left(-\frac{\omega a}{2U}\right) = \sin^{-1}(-0.589)$$

$\theta_{s1} = -36.1° =$ **323.9°,** θ_{s2} **= 216.1° .**

10.4 الرفع على الجنيح



الشكل 10.11

الجنيح شريحة وترية من الأجسام ذات الخصائص الحركية. أمثلة لهذه الأجسام: جناح الطائرة، ريّش الدفّاع و ريّش المضخات والعنفات. نحن معنيون هنا باستخلاص قوة الرفع على الجنيح و سنرى أن النظرية التي استخلصت لتقدير الدفع على الأسطوانة تفيد في استخلاص الرفع على الجنيح. بُنيّت نظرية الرفع على الاسطوانة على اعتبار السريان لالزجي. إلا أننا أضفنا الافتراض القاضي بانتقال سرعة دوران الاسطوانة إلى طبقة المائع اللصيقة بها.

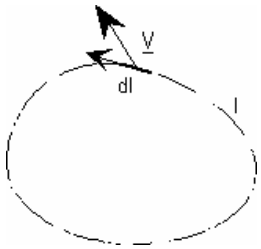
وبدراسة سريان فعلي عبر جنيح بزاوية هجوم ثابتة نرى أن قوة الرفع تنشأ دون الحاجة لدوران الجنيح حول محوره كشأن الاسطوانة. إلا أننا ندرك أيضاً أن زاوية الهجوم للجنيح الثابت تسببت في دوران المائع حول الجنيح دوراناً جزئياً. وهذا يقود إلى الاستنتاج الهام بأن الرفع في كل الأحوال، ملازم لدوران المائع حول الجسم.

التدوير Γ

يوضح الشكل (10.12) خط حلقي طوله l في سريان رتيب. السرعة عند نقطة ما على الخط الحلقي $\underline{v}$ ويعرّف التدوير بالعلاقة:

$$\Gamma = \oint \underline{v}.d\underline{l} \quad \text{.....(10.24)}$$

بتطبيق هذا التعريف على حالة الاسطوانة بالتعويض من المعادلة (10.20) في المعادلة (10.24)



الشكل 10.12

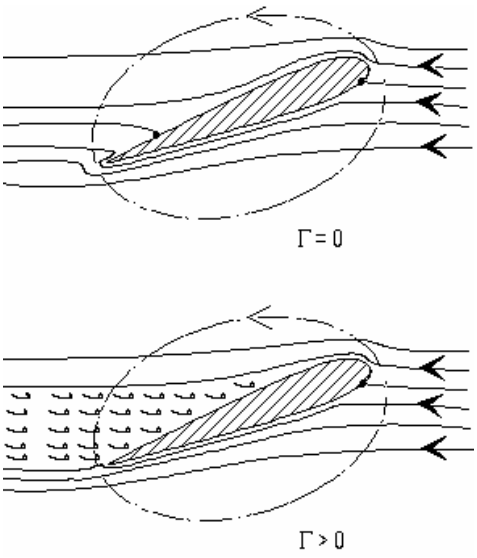
$$\Gamma = \int_0^{2\pi} (2U \sin\theta + \omega a) \underline{I}_\theta \ . \ a \, d\theta \, \underline{I}_\theta$$

$$= 2\pi a^2 \omega$$

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi a^2}$$

وبالتعويض لـ ω في المعادلة (10.22)

$$F_L = b\rho U\Gamma \ .....(10.25)$$



الشكل 10.13

بملاحظة أن التدوير يمكن استخلاصه للأجسام المختلفة بما فيها الجنيحات نرى عمومية المعادلة (10.25) و تُعرَف هذه المعادلة الهامة بقانون **كوتا-يوكوفسكي**.

ندرس الآن السلوك الفعلي للسريان حول جنيح بزاوية هجوم صغيرة و موجبة.

في بداية الحركة يكون السريان مثالياً وتكون قيمة التدوير Γ حول الجنيح صفراً .

إلا أن هذا الوضع المثالي لا يستمر طويلاً اذ أن الانعكاس الحاد في خطوط السريان عند ذيل الجنيح لا يستمر. فتستقيم خطوط السريان مسببةً انفصال الطبقة الجدارية و ظهور الدوامات في مؤخرة الجنيح التي يجرفها التيار باستمرار إلى سافل

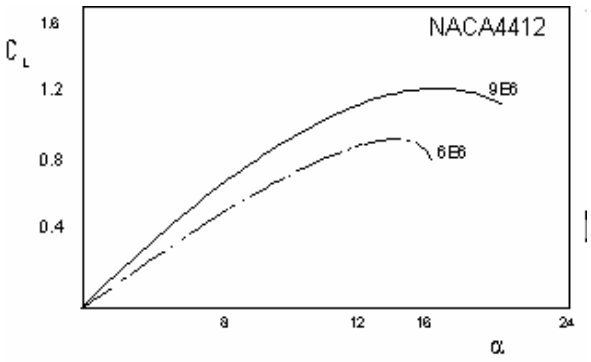
المجال. و ينتج عن استقامة هذه الخطوط فقد توازن الجوانب الموجبة والسالبة لتكامل التدوير مما يؤدي إلى أن يصبح التدوير حول الجنيح غير مساو للصفر. ويعني ذلك أن التدوير Γ لا ينتج عن طواف المائع حول الجنيح و انما عن أن خالص التكامل حول الجنيح لم يعد صفراً. و تنشأ بذلك قوة رفع على الجنيح يمكن معرفة قيمتها النظرية بتعويض قيمة التدوير في معادلة الرفع (10.25).

نرى أيضاً من التجربة أن الرفع على الجنيح يزيد مع زيادة زاوية الهجوم α في مدى زوايا الهجوم الصغيرة. وبذلك يكون أثر زاوية الهجوم على الجنيح مماثلاً لأثر السرعة الزاويّة ω في حالة الاسطوانة التي سبقت دراستها في القسم (10.3).

اذا كان الجنيح لوحاً مستوياً و لزوايا الهجوم الصغيرة يمكن استخلاص العلاقة النظرية:

$$C_L = 2\pi \sin\alpha \quad \text{.....(10.26)}$$

عند زوايا الهجوم العالية للجنيحات يزداد الانفصال وتزداد الدوامات عنفاً وينشأ عن ذلك نقصاناً في معدل زيادة C_L مع α ثم يتبع ذلك نقصاناً في قيمة C_L وزيادة في C_D وتعرف هذه بحالة **الانهيار**. ويوضح الشكل (10.14) العلاقة التجريبية للجنيح NACA4412 عند عددي رينولز 1E6 و 6E6 .



الشكل 10.14

الأثر الناشئ عن محدودية الباع

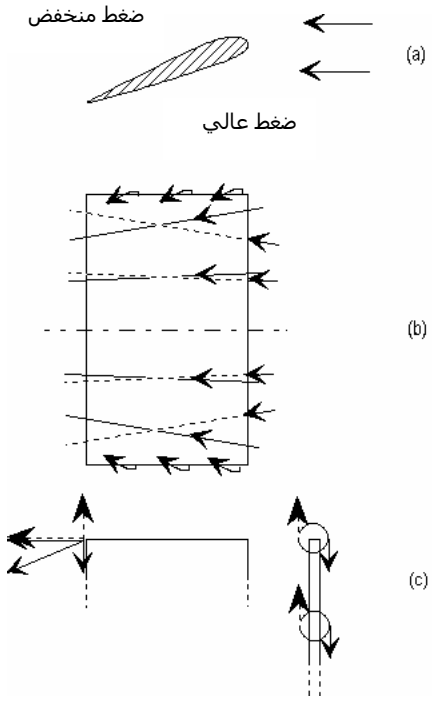
التحليل السابق اعتمد ثنائية أبعاد السريان. ويعني أن الجنيح أو الاسطوانة ذوا باع طويل جداً مقارناً بالوتر. أي أن النسبة الباعية عالية. وتعرّف النسبة الباعية كما يلي:

النسبة الباعية

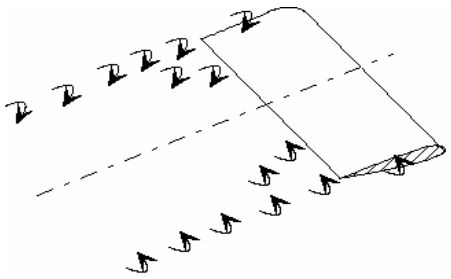
AR = باع الجناح / الوتر =

لحالات النسبة الباعية غير العالية نحتاج لدراسة طبيعة السريان ثلاثي البعد حول الجناح. ضغط المائع تحت الجناح أعلى من ضغطه فوق الجناح، كما هو موضح في الشكل (10.15a). ينشأ عن الفرق في الضغط هروب المائع من أسفل الجناح إلى أعلاه عند طرفي الجناح - الشكل(10.15b).

تؤدي الإضافة المذكورة في الجانب الأعلى إلى محصلة سرعة تتجه جزئياً نحو الخط النصفي للجناح. كما أن نقصان الكتلة في الجانب السفلي يؤدي إلى محصلة سرعة تتجه جزئياً نحو جانبي الجناح (b,c). نشوء هذه الدوامات - الشكل (10.16) - يعني فقدان في الطاقة ترتب على محدودية الطول في البعد المكاني الثالث ونقصان في الرفع عن قيمته المثالية.



الشكل 10.15

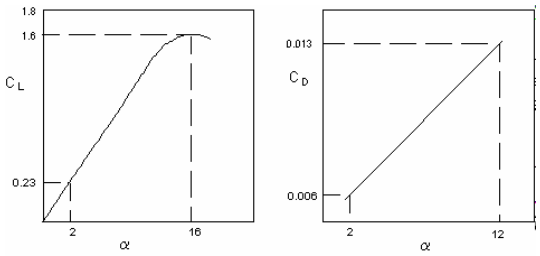


الشكل 10.16

تتبع في الصناعة بعض الطرق العملية للتقليل من أثر محدودية الباع، منها زيادة النسبة الباعية أو وضع حواجز جانبية للحد من هروب المائع إلى أعلى الجناح.
لحساب الرفع الحقيقي على الجناح يضرب الرفع المثالي المحسوب في نسبة تحدد تجريبياً على نوع الجنيح المستخدم.

مثال

طائرة تزن 20kN . المساحة المؤثرة للجناح $30m^2$. سرعة التحليق 70m/s في هواء كثافته $1.16kg/m^3$. خصائص قطاع الجناح موضحة في الشكل (10.17). قدّر زاوية الهجوم والقدرة المطلوبة لمقاومة الإعاقة على الأجنحة. تجاهل أثر الهروب الطرفي.



الشكل 10.17

للتـــوازن عنـــد التحليـــق :

الرفع = الوزن

$$Wt = \tfrac{1}{2}\rho U^2 A C_L$$

$$C_L = \frac{Wt}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{20E3}{\frac{1}{2}(1.16)(70)^2 30} = 0.23$$

من منحنى الرفع - الشكل (10.17) - عند C_L = 0.23 ، $\alpha \approx 2°$

القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقة

$$P = DU = \tfrac{1}{2}\rho A U^2 C_D U$$

من منحنى الجنيح عند α=2° , C_D=0.006

$P = \tfrac{1}{2}(1.16)(70)^3(30)(0.006) =$ **35.8kW**

مسائل

10.1 يتصف سريان بدالة الكُمُون: $\varphi = y^3 - 3x^2 y$

(أ) أستخلص مركبات السرعة .

(ب) استخلص دالة السريان .

(ج) أرسم بعض خطوط السريان في المستوى x-y لقيم x الموجبة.

[u-6xy, $v = 3y^2 - 3x^2$, $\psi = x^3 - 3xy^2$]

10.2 بدءً من المعادلة (10.19) لمتجه السرعة للسريان قرب اسطوانة ثنائية البعد في مجال لالزجي ، استخلص تعبيراً عن دالة السريان .

[$\psi = -(r - \frac{a^2}{r})U\sin\theta - a^2\omega \ln r$]

10.3 خصائص السريان الأساسى لهواء كما يلي :

الضغط 0.101 MPa

درجة الحرارة 300 K

السرعة $-70\underline{i}$ m/s

يمر السريان بأسطوانة طويلة الباع قطرها 0.3m تدور حول محورها عكس عقارب الساعة بمعدل 40rps . مستخدماً نظرية السريان المثالي أحسب :

(أ) المواقع الزاوّية للركود .

(ب) الضغط عند مواقع الركود .

(ج) السرعة والضغط قرب سطح الاسطوانة عند الزوايا : 270^o , 90^o

(د) الرفع على وحدة طول .

[190.6^o , 344.4^o ; 0.1.39 MPa ; - 177.7m/s 0.0854 MPa ; -120.3m/s ; 0.0978 MPa ; 2.92kN]

10.4 جناح طائرة من لوح مسطح طول وتره 1.5m يتحرك في هواء كثافته $1.2kg/m^3$ ولزوجته الكينماتية $6E\text{-}5\ m^2/s$ بزاوية هجوم 10^o . عدد رينولز للطيران 3E6 مبنياً على وتر الجناح . بافتراض أن السريان ثنائي البعد أحسب :

(أ) قوة الرفع على كل متر من الباع .

(ب) باع الجناح إذا كان الوزن الكلي 0.1 MN

[14.1 kN; 7.1m]

10.5 دلت اختبارات أجريت على جناح طائرة أنه يمكن تقريب تغير معاملي الرفع والإعاقة مع زاوية الهجوم α في مدى زاوية الهجوم 12^o - 0^o كما يلي :

$$C_L = 0.35(1+0.2\ \alpha\ )$$

$$C_D = 0.01\ (\ 1+\ \alpha\ )$$

وزن الطائرة 0.15 MN ومساحة الجناح $35m^2$. زاوية الهجوم عند التحليق الثابت 3^o. أحسب سرعة الطائرة والقدرة اللازمة لمجابهة الإعاقة على الجناح . أعتبر كثافة الهواء $1.2kg/m^3$

10.6 قارب سريع مزود بجنيح مائي مساحته المؤثرة $0.5m^2$. معاملي الرفع والإعاقة للجنيح 1.2 و 0.02 ، على التوالي . وزن القارب 20kN وكثافة الماء $1000kg/m^2$.

متجاهلاً مقاومة الهواء أحسب :

(أ) أقل سرعة ممكنة للقارب يحمل فيها الجنيح وزن القارب كليةً .

(ب) القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقة عند السرعة المحسوبة أعلاه .

(ج) أعلى سرعة للقارب إذا كانت القدرة القصوى 20kW .

[8.2m/s ; 2.7kW; 15.9 m/s]

11 السريان الانضغاطي للغاز

11.1 مقـدمة

تعريف: يوصف السريان بأنـه انـضغاطى إذا تغيـرت الكثافـة بقـدر مـؤثر عنـد تغيـر العوامـل الأخرى ، مثل الضغط و درجة الحرارة.

11.1.1 بعض معادلات الديناميكا الحرارية ذات الصلة

معادلة الحالة للغاز الكامل

$$p = \rho RT \quad \text{.....(11.1.1)}$$

R : ثابت الغاز ووحدته $\frac{J}{kg\ K}$

ثابت الغاز الكونى\الكتلة النسبية = $R = \frac{\overline{R}}{M_r}$

$\overline{R}$ = 8310 J/kg-K

بالنسبة للهواء:

$M_r \sim 29 \rightarrow R = 287$ J/kg-K

باعتبار c_v الحرارة النوعية عند ثبات الحجم
c_p الحرارة النوعية عند ثبات الضغط
k نسبة الحرارة النوعية

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{.....(11.1.2)}$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \quad \text{.....(11.1.3)}$$

$$c_p = c_v + R = \frac{kR}{k-1} \quad \text{.....(11.1.4)}$$

تظهر كل من c_p و c_v فى تعابير الطاقة الداخلية و المحتوى الحرارى:

$$u = c_v T \quad \text{.....(11.1.5)}$$

$$h = c_p T \quad \text{.....11.1.6)}$$

للسريان اللاتبديدي

$$p = const.\ \rho^k \quad \text{.....(11.1.7)}$$

العلاقة التفاضلية بين المحتوى الحرارى و التبديد

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \quad \text{.....(11.1.8)}$$

الزيادة فى التبديد بين الموضعين (1) و (2) لغاز مثالي:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \text{.....(11.1.9)}$$

11.1.2 معادلات الحفظ

التغيرات في درجة الحرارة للسريان الانضغاطى ذات أهمية، بصفة عامة. للسريان الرتيب أحادى البعد بدون شغل من مصدر خارجي و بتجاهل التغيرات فى الطاقة الوضعية - لضآلتها بالنسبة للغازات - تأخذ معادلة الطاقة الصورة:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}$$

حيث v السرعة المتوسطة في المقطع

$\dot{Q}$ معدل اضافة الحرارة

$\dot{m}$ معدل السريان الكتلي للغاز

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad \text{.....(11.1.10)}$$

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة:

$$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m}v) + \tau_w A_w = 0 \quad \text{.....(11.1.11)}$$

11.1.3 المقادير اللابعدية ذات الصلة

1 عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث v و c سرعة الغاز و سرعة الصوت في موضع واحد.

2 نسبة الحرارة النوعية k

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

3 عدد رينولز Re

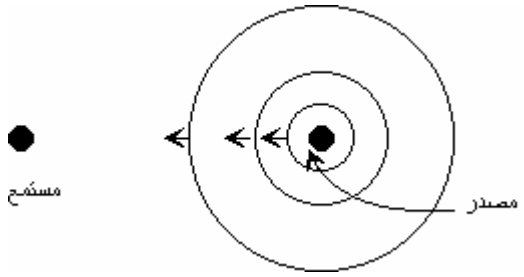
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{vL}{\nu}$$

حيث L إزاحة مرجعية في السريان
μ اللزوجة الحركية للمائع
ν اللزوجة الكينماتية للمائع.

11.2 حركة الموجات الصوتية

11.2.1 العلاقة بين الصوت ومصدره و وسط انتقاله

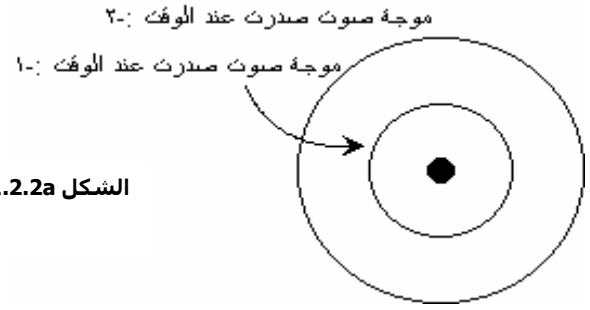
ينتقل الصوت بواسطة موجات ضغطية و بذلك فهو يحتاج لوسط ناقل و تعتمد سرعة الصوت على انضغاطية الوسط الناقل.



الشكل 11.2.1

لنتأمل موجتين صوتيتين يبدأن حركتهما من مصدر واحد. بعثت الموجة الأولى قبل وحدتي زمن من الآن – أي عند الوقت (2-) . و بعثت الثانية قبل وحدة زمنية واحدة من الآن - أي عند الوقت (1-) . تكون هذه الموجات فى شكل كرات تزداد أنصاف أقطارها بسرعة الصوت.
الشكل (11.2.1) يوضح مقاطع من هذه الكرات كما تشاهد الآن (t=0) .

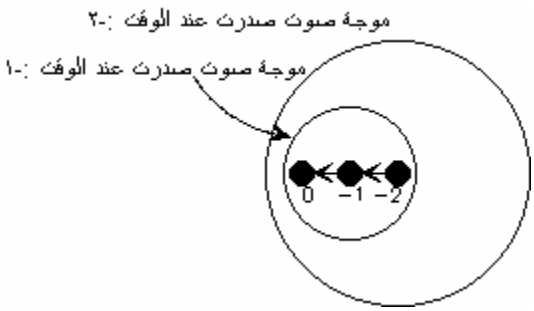
الحالة I : مصدر الصوت ساكن $\left\{\frac{v}{c}=0\right\}$



الشكل 11.2.2a

الحالة II : **مصدر الصوت يتحرك بسرعة أقل من سـرعة الـصوت** $\left\{\frac{v}{c}<1\right\}$

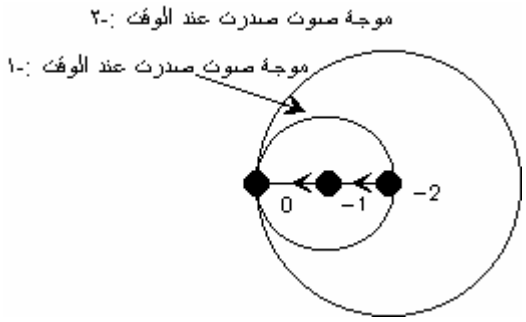
(الحالة دون الصوتية)



الشكل 11.2.2b

الحالة III : **مصدر الصوت يتحرك بسرعة تساوي سرعة الصوت** $\left\{\frac{v}{c}=1\right\}$

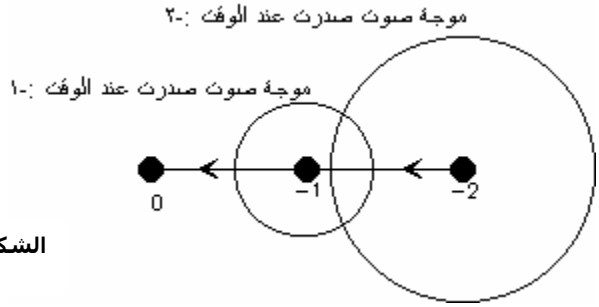
(الحالة الصوتية)



الشكل 11.2.2c

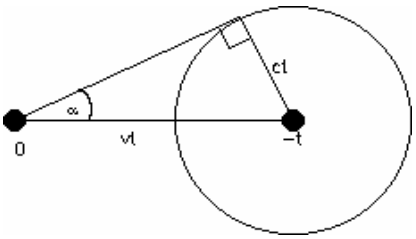
الحالة IV : **مصدر الصوت يتحرك بسرعة تفوق سرعة الصوت** $\left\{\frac{v}{c}>1\right\}$

(الحالة فوق الصوتية)



الشكل 11.2.2d

11.2.2 مخروط ماخ



الشكل 11.2.3

$$\sin\alpha = \frac{c}{v}$$

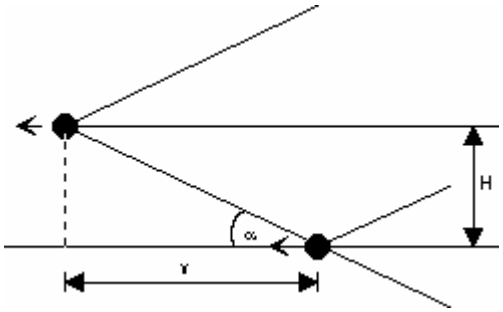
α = زاوية ماخ

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{c}{v} = \sin^{-1}\frac{1}{M} \quad .....(11.2.1)$$

و هذا يعنى انه إذا كان عدد ماخ ثابتاً فان زاوية مخروط ماخ تظل ثابتة.

مثال

طائرتان حربيتان تطيران في اتجاه واحد على مستوىً عمودي واحد و بنفس عدد ماخ. المطلوب حساب أقصى مسافة أفقية ممكنة بين الطائرتين بحيث لا تكون أي منهما في مجال صوت الأخرى.
في أي مدىً لعدد ماخ يكون ذلك ذا معنى؟



الشكل 11.2.4

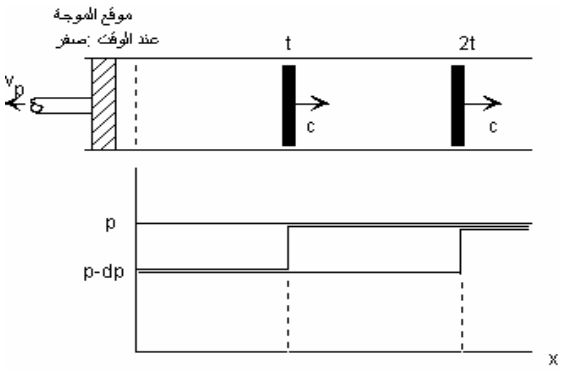
$$\tan\alpha = \frac{H}{x}$$

$$x = H\sqrt{M^2 - 1}$$

$$\rightarrow \qquad M > 1$$

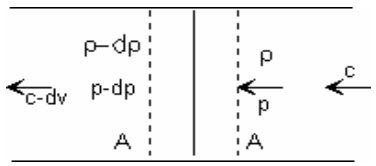
11.2.3 سرعة الصوت

الأنبوب الموضح في الشكل (11.2.5) يحوي غاز ساكن منتظم الضغط p . يحد الأنبوب عند جانبه الأيسر مكبس . يحرّك المكبس فجأةً إلى اليسار (حركة تفريغية) ينتج عنها هبوط في الضغط بمقدار ضئيل dp. ينتشر هذا الهبوط بسرعة محددة c ليعم كل الأنبوب.
مخطط الضغط- المسافة في الشكل (11.2.5) يبين توزيع الضغط في الأوقات 0 و t و $2t$.



الشكل 11.2.5

لاستخلاص علاقة سرعة الصوت بانضغاطية السريان ندرس قوانين الحفظ مطبقة على حجم تحكمي يحوي موجة صوتية – ا لشكل (11.2.6).
باتخاذ الموجة مناطاً يمكن اعتبار الغاز يتحرك بسرعة c في اتجاه x السالب.



الشكل 11.2.6

حفظ الكتلة يُعطي

(الكثافة)(المساحة)(السرعة) = ثابت

$(\rho-d\rho)(c-dv)A = \rho cA$

$\rho\, dv + c\, d\rho = 0$ .....(11.2.2)

حفظ كمية الحركة:

$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m}v) + \tau_w A_w = 0$ .....(11.1.11)

نسبةً لضآلة سمك الموجة

$A_w\, \tau_w = 0$

$\Delta(pA) = -A dp$

$\Delta(\dot{m}v) = \dot{m}\,\Delta v = \rho cA(-dv) = -A\rho c dv$

$dp + \rho c dv = 0$ .....(11.2.3)

(11.2.2) و (11.2.3) تعطيان

$\frac{dp}{d\rho} = c^2$ .....(11.2.4)

$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2}$ .....(11.2.5)

المعادلة (11.2.6) تعبر عن معدل تغير الكثافة مع الضغط و بذلك تكون مؤشراً للانـضغاطية. و نلاحظ اعتماد ذلك كلياً على سرعة الصوت c .

للسريان اللاتبديدى

$\frac{p}{\rho^k} = const$.....(11.1.7)

$$\frac{dp}{p} - \frac{d(\rho^k)}{\rho^k} = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k\frac{\rho^{k-1}}{\rho^k} d\rho = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho} \quad \text{.....(1)}$$

معادلة الغاز الكامل:

$$p = R\rho T$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{.....(2)}$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dp}{d\rho} = kRT \quad \text{.....(3)}$$

(3) و (11.2.5) تعطيان

$$c^2 = kRT$$

$$c = \sqrt{kRT} \quad \text{.....(11.2.6)}$$

11.3 السـريان اللاتبـديدي

11.3.1 مقدمة

ينبني التحليل في هذا الفصل على الافتراضات :
(أ) سريان رتيب
(ب) أحادى البعد
(ج) الآثار اللزجية وانتقال الحرارة وأثر الجاذبية ضئيلة التأثير ويمكن تجاهلها .
(د) الغاز مثالي .

الافتراضات المذكورة تبسط التحليل كثيراً إلا انـه يظـل مناسـباً للتطبيـق علـى الكثيـر مـن العمليات الهندسية بدقة مناسبة. أمثلة لهذه العمليـات : الـسريان فـي منافـث ومبطنـات العنفة الغازية والعنفة البخارية والمنافث الصاروخية .

ينبغي مراعاة الجوانب العملية الآتية لتصح الافتراضات أعلاه في مجاري الغاز:
(أ) معدل تغير المساحة مع المسافة يؤثر فـي الطبقـة الجداريـة ويجـب أن يكـون صغيراً .
(ب) إذا كان الخط المحوري للمجرى منحنياً يجب أن يكون نصف قطر الانحناء كبيراً مقارناً مع قطر المجري .

11.3.2 المعادلات التفاضلية

إبتداءً من قوانين الحفظ (كتلة وطاقة) مطبقة على حجم تحكمي تفاضلي لمجرى متغيـر المساحة في اتجاه السريان، نحصل على العلاقات التفاضلية للسريان اللاتبديدى و التـى تعرف ايضاً بالعلاقات الوصفية للسريان .

قانوني حفظ الكتلة والطاقة :

$$\rho v A = const$$

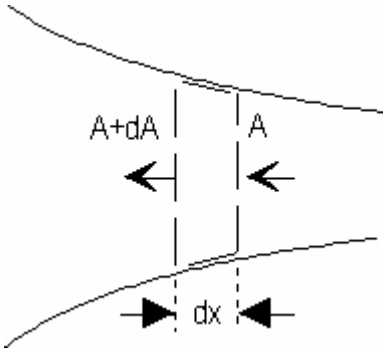
$$h + \frac{v^2}{2} = const$$

وفي صورتيهما التفاضلية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad .....(1)$$

$$dh + vdv = 0 \quad .....(2)$$

$$dh = T\,ds + \frac{dp}{\rho} \quad .....(3)$$



الشكل 11.3.1

وبما أن السريان لا تبديدى

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

وتصبح المعادلة (2)

$$\frac{dp}{\rho} + vdv = 0$$

$$\frac{dp}{\rho v^2} + \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{.....(4)}$$

(1) و (4) تعطيان

$$\frac{dp}{\rho v^2} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{d\rho}{dp} - \frac{dA}{dp}\frac{\rho}{A} = 0$$

وباستخدام (11.16)

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{dA}{dp}\frac{\rho}{A} = 0$$

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{dA}{dp}\frac{\rho}{A}c^2 = \frac{dA}{dp}\frac{\rho kRT}{A} = \frac{dA}{dp}k\frac{p}{A}$$

$$\frac{dp}{dA} = k\frac{p}{A}\frac{M^2}{1 - M^2} \quad \text{.....(11.3.1)}$$

(4) و (11.3.1) تعطيان

$$\frac{dv}{dA} = \frac{dv}{dp}\frac{dp}{dA}$$

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}\frac{1}{1 - M^2} \quad \text{.....(11.3.2)}$$

- المعادلة (11.3.2) تدل على أن عدد ماخ حرج عند M = 1
- في حال M<1 فإن السرعة تقل مع زيادة المساحة في اتجاه السريان وتزيد بنقصان المساحة ، تماماً كما هو الحال بالنسبة للسريان اللاإنضغاطى حيث

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}$$

- وفي حال M>1 تنعكس العلاقة ، حيث تزيد السرعة وتنقص تبعاً لزيادة المساحة أو نقصانها .
- المعادلة (11.3.1) تدل على أن عدد ماخ حرج أيضاً عند M = 1 والعلاقة بين الضغط والمساحة دوماً على عكس العلاقة بين السرعة والمساحة .

11.3.3 المعادلات التكاملية

عند استخلاص المعادلات التكاملية للسريان اللاتبديدى في صورة لابعدية نحتاج لتحديد نقاط مرجعية للمتغيرات وهي كما يلي :

- النقطة المرجعية الأولى هى الحالة الركودية (v =0) و سيشمل ذلك المتغيرات: T, p, ρ و تكون قيمها المرجعية : T_0, p_0, ρ_0 على التوالي.
- النقطة المرجعية الثانية هى الحالة الصوتية (v =c) . و سيقتصر استخدامها هنا على المساحة A . و تكون قيمتها المرجعية A* .

بتطبيق معادلة الطاقة (11.1.10) بين نقطة عامة و النقطة المرجعية (الركودية) :

$$h + \tfrac{1}{2} v^2 = h_0$$

$$v^2 = 2(h_0 - h)$$

و بالاستفادة من المعادلات (11.1.6) و (11.1.4)

$$v^2 = 2 C_p (T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1}(T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1} T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$M^2 = \frac{2}{k-1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\frac{T}{T_0} = [1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2]^{-1} \quad \text{.....(11.3.3)}$$

و بتعريف μ

$$\mu = [1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2]$$

$$\frac{T}{T_0} = \mu^{-1} \quad \text{.....(11.3.3)}$$

للسريان اللاتبديدى و من المعادلتين (11.1.1) و (11.1.7)

$$\frac{p}{p_0} = (\frac{T}{T_0})^{\frac{k}{k-1}}$$

و بالتعويض في المعادلة (11.3.3)

$$\frac{p}{p_0} = \mu^{-\frac{k}{k-1}} \quad \text{.....(11.3.4)}$$

و بالاستفادة من المعادلة (11.1.7)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (\frac{p}{p_0})^{\frac{1}{k}}$$

و بالتعويض من (11.3.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \mu^{-\frac{1}{k-1}} \quad \text{.....(11.3.5)}$$

و لاستخلاص العلاقة التكاملية للمساحة نبدأ من معادلة حفظ الكتلة:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v}$$

حيث الموضع **1** موضع محدد في السريان

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 M_1 c_1}{\rho M c} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{kRT_1}}{\rho M \sqrt{kRT}} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{T_1}}{\rho M \sqrt{T}} = \frac{M_1}{M}\left(\frac{\rho_1/\rho_0}{\rho/\rho_0}\right)\sqrt{\left(\frac{T_1/T_0}{T/T_0}\right)}$$

و بالتعويض من المعادلات (11.3.3) و (11.3.5)

$$\frac{A}{A_1} = \frac{M_1}{M}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

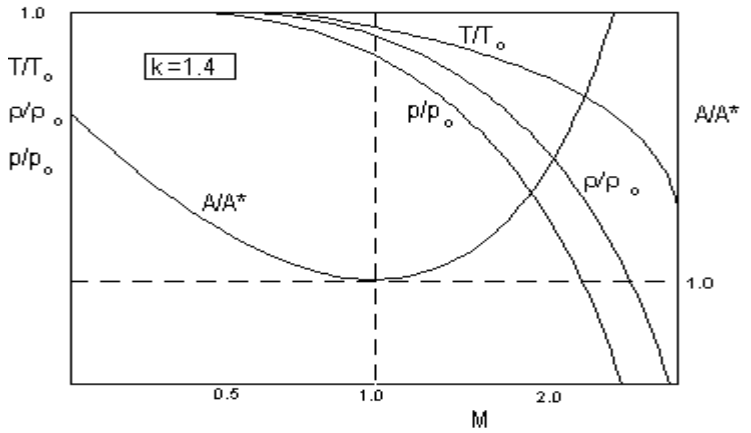
و إذا اعتبرنا المقطع (1) هو المقطع الصوتي حيث

$M = 1.0$ ، $A_1 = A^*$

$$\mu_1 = 1+½(k-1)(1) = ½(k+1)$$

و تصبح المعادلة

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{2\mu}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{.....(11.3.6)}$$



الشكل 11.3.2

الشكل (11.3.2) يبين منحنيات التغير الممثلة للمعادلات التكاملية المستخلصة. و يجد القارئ في الملحق (د) قوائم مستخلصة من المعادلات المذكورة للسريان اللاتبديدى عند k = 1.4 .

مثال

يسري غاز فى مجرى متغير المساحة. نسبة الحرارة النوعية للغاز 1.25 . درجة الحرارة عند موضع ما 30°C و درجة الحرارة الركودية 180°C . لوحظ أن الضغط عند هذا الموضع يتناقص في اتجاه السريان.

أ) أحسب عدد ماخ

ب) وضح ما إذا كان المجرى لاماً أم ناشراً

ج) وضح ما إذا كانت السرعة تزيد أو تنقص عند هذا الموضع.

(ا) $T = 30 + 273 = 303K$

$T_0 = 180 + 273 = 453K$

$\rightarrow \mu = 1.50$

المعادلة (11.3.3) تعطي

$$1.5 = 1 + 0.125\ M^2$$

$$\mathbf{M = 2.0}$$

(ب) المعادلة (11.3.1):

$$\frac{dp}{dA} = k\,\frac{p}{A}\,\frac{M^2}{1 - M^2}$$

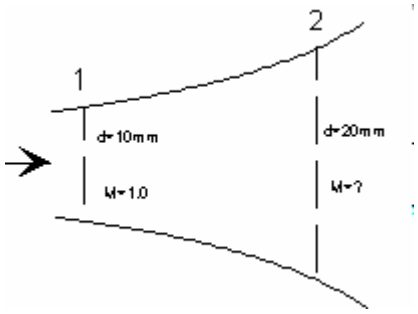
M > 1 تعني أن الجانب الأيمن سالب. و بما أن dp سالبة فان dA تكون موجبة و يعني ذلك أن **المجرى ناشر**.

(ج) المعادلة (11.3.2):

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}\frac{1}{1-M^2}$$

M > 1 تعني أن الجانب الأيمن موجب و بما أن dA موجبة فان dv تكون موجبة و يعني ذلك أن **السرعة تتزايد**.

مثال



الشكل 11.3.3

قيمة النسبة k للسريان في المجرى الموضح في الشكل (11.3.3) تساوي 1.25 . المجرى ناشر و قيمة M عند المقطع (1) تساوي 1.0 و dM/dx > 0. قطر المجرى يزيد من 10mm عند المقطع (1) إلى 20mm عند المقطع (2). المطلوب قيمة عدد ماخ عند المقطع (2).

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 4$$

المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{1}{M_2}\left(\frac{2\mu_2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$4 = \frac{1}{M_2}\{\,0.889\,[\,1 + 0.125\,M_2^2\,]\,\}^{4.5}$$

المعادلة أعلاه تتطلب طريقة تكرريه للحل.

باستخدام طريقة نيوتن رافسون – الملحق(ب):

$$F = 0.147\,[\,1 + 0.125\,M_2^2\,]^{4.5} - M$$

$$F' = 0.166 M_2\,[\,1 + 0.125\,M_2^2\,]^{3.5} - 1.0$$

$$M_{i+1} = M_i - F/F'$$

نعرف وجود حلين للمعادلة: فوق صوتى و دون صوتى:

الحل فوق الصوتي: M_2 = 3.00, 2.77, 2.70, **2.70**

الحل دون الصوتي**:** M_2 = 0.40, 0.14, 0.15, **0.15**

اعتماداً على طبيعة السريان عند المقطع **1** حيث dM/dx > 0 نستنتج أن **M_2 = 2.70**

مثال

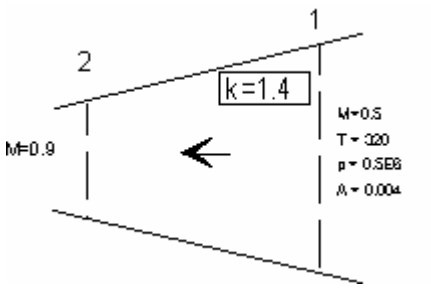
لسريان الهواء الموضح في الشكل (11.3.4) المطلوب إيجاد A_2, p_2, T_2 باستخدام:

أ) معادلات السريان اللاتبديدى

ب) قوائم السريان الانضغاطي.

للهواء:

$k = 1.4$, $R = 287\ J/kg\text{-}K$



الشكل 11.3.4

أ) باستخدام المعادلات:

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0}\frac{T_0}{T_1}T_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-1} T_1$$

$$\mu_1 = 1 + \tfrac{1}{2}(k\text{-}1)M_1^2 = 1.050$$

$$\mu_2 = 1.162$$

$$T_2 = (1.162/1.05)^{-1}\ (320) = \mathbf{289K}$$

$$P_2 = \frac{p_2}{p_0}\frac{p_0}{p_1}p_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-\frac{k}{k-1}} p_1 = \left(\frac{1.162}{1.05}\right)^{-\frac{1.4}{0.4}} (0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*}\frac{A^*}{A_1}A_1 = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} A_1 = \frac{0.5}{0.9}\left(\frac{1.162}{1.05}\right)^3 A_1 = \mathbf{0.003m^2}$$

ب) باستخدام قوائم الغاز للسريان الانضغاطي اللاتبديدى:

	A/A*	**p/p_0**	**T/T_0**	**M**
س ل أ **1**:	1.3398	0.8430	0.9524	0.5
س ل أ **2**:	1.0089	0.5913	0.8606	0.9

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0}\frac{T_0}{T_1}T_1 = \left(\frac{0.8606}{0.9524}\right)(320) = \mathbf{289K}$$

$$P_2 = \frac{p_2}{p_0}\frac{p_0}{p_1}p_1 = \left(\frac{0.5913}{0.8430}\right)(0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*}\frac{A^*}{A_1}A_1 = \frac{1.0089}{1.3398}(0.004) = \mathbf{0.003m^2}$$

11.3.3 أثر عدد ماخ على الكثافة

المعادلة (11.3.5) للسريان الانضغاطي:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = [1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2]^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{.....(1)}$$

و للسريان اللاإنضغاطى: ثابت = $\rho = \rho_0$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 \quad \text{.....(2)}$$

و باعتبار k = 1.4 القائمة أدناه تبين الخطأ الناتج عن افتراض اللاانضغاطية عند أعداد ماخ مختلفة.

M	0.2	0.4	0.5	1.0
ρ_0/ρ	1.02	1.08	1.13	1.58
ε %	2	7	12	37

11.3.4 معدل السريان الكتلي عبر منفث

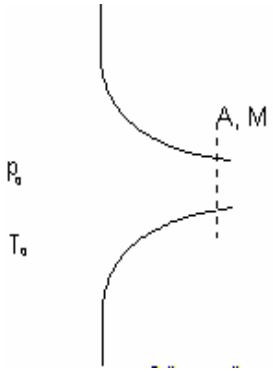
الشكل (11.3.6) يوضح منفث موصل إلى مستودع غاز مضغوط بالمواصفات الآتية:

الضغط في مستودع الإمداد p_0

درجة الحرارة في المستودع T_0

مساحة مقطع المنفث عند موضع الرصد A

عدد ماخ عند موضع الرصد M



الشكل 11.3.6

معادلة حفظ الكتلة:

$$\dot{m} = \rho v A = \left(\frac{p}{RT}\right)\left(M\sqrt{kRT}\right)A = \sqrt{\frac{k}{RT}}AMp \quad \text{.....(11.3.7)}$$

باستخدام المعادلات (11.3.3) و (11.3.4) للمتغيرات T و p

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{AMp_0}{\sqrt{T_0}} \frac{\mu^{-\frac{k}{k-1}}}{\mu^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{Ap_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\mu^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad \text{.....(11.3.8)}$$

يمكن استخلاص المعدل الأعلى للسريان بإجراء التفاضل $\frac{d\dot{m}}{dM}$ على المعادلة (11.3.7) و مساواته بالصفر. النتيجة أن أعلى معدل سريان يحدث عند M =1 ، و أعلى معدل ممكن للسريان هو

$$\dot{m}_M = \sqrt{\frac{k}{R}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{A^* p_0}{\sqrt{T_0}} \quad \text{.....(11.3.9)}$$

حيث A* المساحة الحرجة، أي عند M = 1 .
و في نفس الموضع

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p^*}{p_0}$$

= النسبة الحرجة للضغط.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T^*}{T_0}$$

= النسبة الحرجة لدرجة الحرارة.
و بتعويض M =1 فى المعادلات (11.3.4) و (11.3.3):

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (\text{للهواء} \quad = 0.528)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \qquad (\text{للهواء} \quad = 0.833)$$

و تعطى المعادلة (11.3.8) الصيغة أدناه عند k = 1.4:

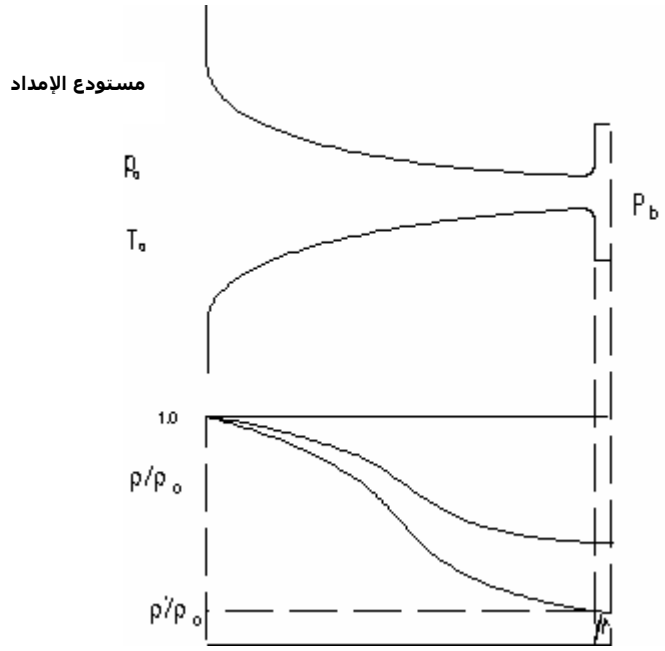
$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \quad \text{.....(11.3.10)}$$

المعادلات أعلاه استخلصت للسريان اللاتبديدى. نسبةً لوجود قدر من الاحتكاك في الواقع فان معدل السريان الحقيقي يقل عن المقدار المعبر عنه أعلاه. و بذلك يمكن تعريف معامل السريان C_m ليربط السريان الفعلي بالسريان اللاتبديدى:

C_m = معدل السريان الكتلى الفعلى \ معدل السريان الكتلى اللاتبديدى

و للمنافث المستقيمة جيدة التصنيع فان قيمة C_m تكون في المدى 0.94 – 0.99 .

11.3.5 توزيع الضغط في المنفث اللام



الشكل 11.3.7

ندرس هنا توزيع الضغط في المنفث اللام من خلال تجربة يتم فيها تثبيت الضغط و درجة الحرارة في مستودع الإمداد و يعدل الضغط في المستودع المستقبل و يُتتبع ما يحدث للضغط في محور المنفث

أ) الضغط النهائي p_b يساوي الضغط الركودي p_0

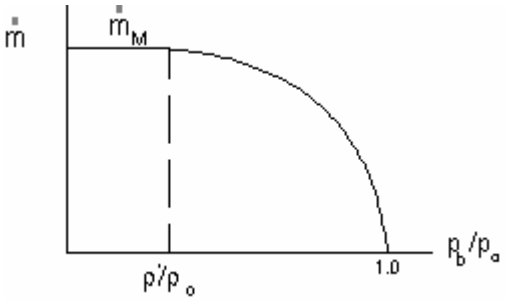
$p_b / p_0 = 1.0$

ممال الضغط في المنفث = صفر و بذلك لا يوجد سريان.

ب) الضغط النهائي p_b يقل عن الضغط الركودي p_0 . يحدِث هذا ممال ضغط في المنفث و يؤدي إلى سريان في اتجاه x الموجب.

الضغط الخروجي = الضغط النهائي، $p_e = p_b$.

و كلما خفض الضغط p_b ينخفض الضغط الخروجي p_e لنفس المستوى و تزيد السرعة M_e .



الشكل 11.3.8

ج) الحالة الحدودية:
بالاستمرار في خفض p_b تبلغ p^* و تصبح $p_e = p^*$ و يصبح عدد ماخ $M_e = 1.0$ و يأخذ معدل السريان الكتلي أعلى قيمة له، $\dot{m}_M$.

د) حالة الشرَق:
بخفض p_b أدنى من p^* لا تستجيب p_e و تظل عند المستوى p^* و تظل M_e عند 1.0 و $\dot{m}$ عند $\dot{m}_M$
و بذلك يوصف السريان بأنه **شرق**.
ينخفض الضغط سافل المنفث بصورة شبه فجائية إلى p_b عبر موجات تمددية.

مثال

منفث لام موصل بمستودع إمداد به هواء عند ضغط ركودي ثابت و درجة حرارة ركودية 25°C . الضغط النهائي ثابت عند 0.1MPa و مساحة المنفث الخروجية $0.0005\ m^2$.
المطلوب حساب معدل السريان الكتلي للحالتين:
أ) الضغط في مستودع الإمداد 0.15MPa
ب) الضغط في مستودع الإمداد 0.35Mpa.

$$\dot{m} = \rho_e v_e A_e = \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e M_e p_e$$

أ) $p_0 = 0.15MPa$
نبدأ بتحديد ما إذا كان السريان شرقاً

$$p_b = 0.1E6$$

$$p_b/p_0 = 0.667 \quad > \quad p^*/p_0 \quad (0.528)$$

اذن السريان غير شرق

$$\Rightarrow p_e = p_b = 0.1E6$$

$$p_e/p_0 = 0.667$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = \mu^{-3.5} = 0.667$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.123 = 1 = \tfrac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.78$$

$$T_e = T_0 (T_e/T_0) = T_0 (\mu_e^{-1}) = (25+273)(1/1.123) = \mathbf{265K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(265)}}(5E-4)\ (0.78)\ (0.1E6) = \mathbf{0.17\ kg/s}$$

ب) $p_0 = 0.35MPa$

$p_b/p_0 = 0.286 \quad < \quad p^*/p_0$

اذن السريان شرّق

$$\Rightarrow p_e/p_0 = p^*/p_0 = 0.528$$

$$p_e = (0.528)(0.35E6) = 0.185E6$$

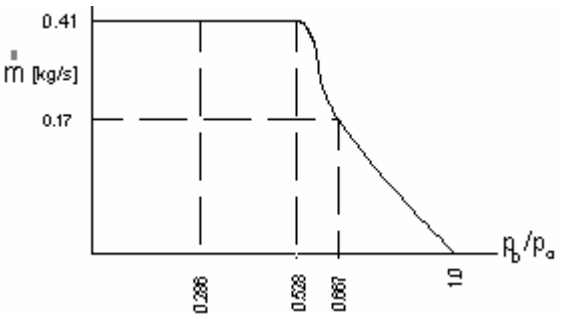
$$T_e/T_0 = T^*/T_0 = 0.833$$

$$\rightarrow T_e = (0.833)298 = \mathbf{248K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(248)}}(5E-4)\ (1.0)\ (0.185E6) = \mathbf{0.41\ kg/s}$$

و بطريقة أخرى يمكن استخدام المعادلة(11.3.9)

$$\dot{m}_M = 0.04\frac{(5E-4)(0.35E6)}{\sqrt{298}} = \mathbf{0.41\ kg/s}$$



الشكل 11.3.9

مثال

منفث لام موصل بمروحة ساحبة. مدخل المنفث مفتوح إلى الجو بضغط 0.1MPa و درجة حرارة ركودية 303K . المساحة الخروجية للمنفث $0.0001m^2$. الضغط النهائي في مخرج المنفث يساوي:

أ) 0.08MPa

ب) 0.05MPa

المطلوب تقدير معدلي السريان الكتلي و الحجمي.

أ) $p_b = 0.08MPa$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}}\ \frac{AMp}{\sqrt{T}}$$

$$p_b / p_0 = 0.08 / 0.1 = 0.8 > 0.528$$

اذن السريان غير شرق

$$p_e = p_b$$

$$p_e / p_0 = 0.8$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$0.8 = \mu^{-3.5}$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.066$$

$$\mu_e = 1 + \tfrac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.57$$

$$T_e / T_0 = \mu_e^{-1} = 0.938$$
$$\rightarrow T_e = (0.938)(303) = 284K$$

$$\dot{m} = \mathbf{0.0189\ kg/s}$$

$$q_e = \dot{m} / \rho_e = \dot{m}\ R\ T_e / p_e = (0.0189)(287)(284)/0.08E6 = \mathbf{19\ l/s}$$

ب) $p_b = 0.05MPa$

$$p_b / p_0 = 0.5 < 0.528$$

اذن السريان شرق

$$p_e / p_0 = 0.528$$

$$p_e = 0.528(0.1E6) = 0.0528E6$$

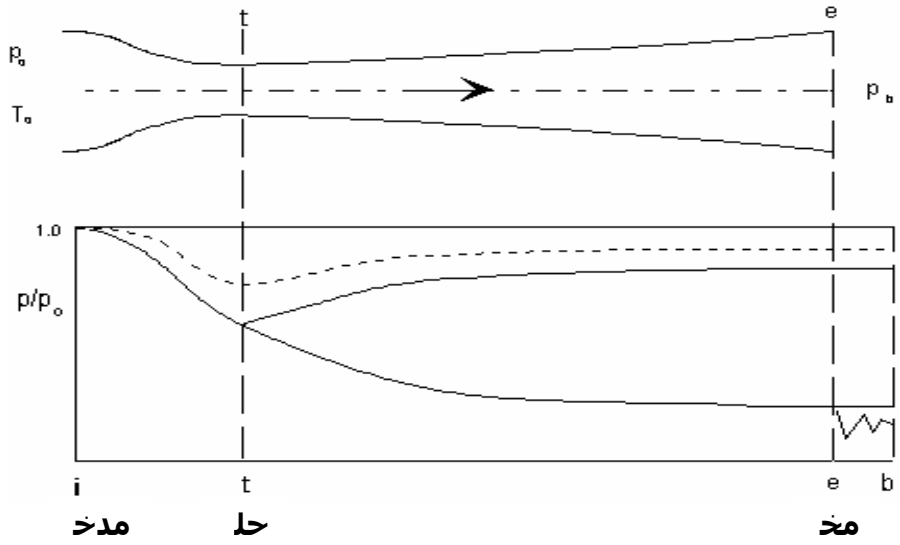
$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} = \mathbf{0.023\ kg/s}$$

$$q_e = \dot{m} R T_e / p_e$$

$$T_e = \left(\frac{T^*}{T_0}\right) T_0 = (0.8333)(303) = 252K$$

$$q_e = \mathbf{31.5\ l/s}$$

11.3.6 توزيع الضغط في المنفث اللام-الناشر



الشكل 11.3.10

التجربة هنا شبيهة بتلك التي سردت عن المنفث اللام في القسم (11.3.5):

أ) الضغط النهائي مساوٍ لضغط الإمداد $p_b/p_0 = 1$
ممال الضغط = صفر . لا سريان.

ب) بخفض p_b قليلاً ينشأ سريان في اتجاه x الموجب.
السريان في كل المنفث دون صوتي. و بالرجوع إلى المعادلات التفاضلية للسريان دون الصوتي - القسم (11.3.2) - يمكن إدراك أن الضغط يتناقص في الجانب اللام ليصل أدنى مستوىً له فى حلق المنفث ثم يتزايد في الجانب الناشر. عدد ماخ، بالتالي، يتزايد في الجانب اللام ليصل أعلى مستوىً له فى حلق المنفث ثم يتناقص في الجانب الناشر.
الضغط الخروجي في هذه الحالة يساوي الضغط النهائي. $p_e = p_b$.

ج) بخفض الضغط النهائي أكثر نبلغ الحالة الحدودية للسلوك **(ب)** .
يميز هذه الحالة الحدودية أن عدد ماخ في الحلق يكون صوتياً (M=1) و بذلك يكون الضغط هناك حرجاً $(p/p_0=p^*/p_0)$ و يكون السريان في كل مواضع المنفث الأخرى دون صوتي.
بدراسة المعادلة (11.3.6) يتضح أن السلوك (**ج**) هو أحد حلي المعادلة.

د) السلوك (**د**) يطابق الحل الثاني للمعادلة (11.3.6) ، و هو الحل فوق الصوتي.
نحصل على هذا السلوك تجريبياً بخفض الضغط النهائي إلى مقدار الضغط المحصل من حل المعادلتين (11.3.6) و (11.3.4) على التوالي. و السلوك (**د**) هنا مشابه للسلوك (**ج**) في الجانب اللام من المنفث. ينخفض الضغط باطراد ليبلغ أدناه في المخرج. كما أن عدد ماخ يزداد عن القيمة الصوتية في الحلق ليبلغ أعلاه عند المخرج.
يعرف السلوك (**د**) ب**السلوك التصميمي** للمنفث اللام-الناشر.

هـ) ينشأ السلوك (**هـ**) إذا خُفض الضغط النهائي إلى مستوآ أدنى من الضغط التصميمي الخروجي المشار إليه في (**د**).
لا يستجيب توزيع الضغط داخل المنفث لهذا الخفض. إلا أن النفث يتعرض لخفض مفاجئ في الضغط عبر موجات تمددية ليوائم الضغط النهائي السائد. و يصبح السريان **شرقاً**.

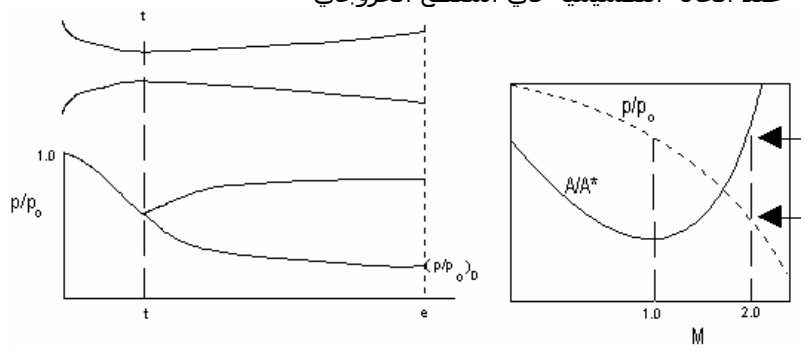
مثال

منفث لام-ناشر موصل بمستودع إمداد به هواء ضغطه و درجة حرارته 3MPa و 400K على التوال. المساحة الخروجية للمنفث $0.1m^2$. المطلوب أن يخرج الهواء من المنفث بعدد ماخ 2.0 أحسب:

أ) مساحة حلق المنفث و الضغط النهائي و معدل السريان عند الحالة التصميمية.

ب) أعلى ضغط خروجي ممكن و عدد ماخ المناظر لنفس معدل السريان.

أ) عند الحالة التصميمية في المقطع الخروجي



الشكل 11.3.12

$$M_e = 2.0$$

$$\mu_e = 1 + \tfrac{1}{2}(k-1)\,M_e^2 = 1.8$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = 0.128$$

$$p_e = 0.128(3E6) = 0.383E6$$

$$p_b = p_e = \mathbf{0.383MPa}$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e}\left(\frac{2\mu_e}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 1.688$$

$$A^* = A_t = (A^*/A_e)A_e = \mathbf{0.059m^2}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}}\frac{A_e M_e p_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = T_0\,(Te/T_0) = T_0\,\mu_e^{-1} = (1.8)^{-1}\,(400) = \mathbf{222K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(222)}}(0.1)\ (2.0)\ (0.383E6) = \mathbf{359\ kg/s}$$

ب) بالاطلاع على الرسمين يمكن استنتاج أن الضغط الأعلى الذي يعطي نفس قيمة $\dot{m}$ هو الحل الثاني (دون الصوتي). معدل السريان في الحالتين هو الأعلى - نسبةً لأن عدد ماخ يساوي 1.0 عند مرور السريان بالحلق.

A/A* = 1.688

باستخدام قوائم السريان اللاتبديدى عند المخرج:

M	**p/p_0**	**A/A***
2.0	0.128	1.688
0.37	0.91	1.688

$\rightarrow$ p_e = 0.383E6, 2.7E6

الضغط الأعلى هو: **2.7Mpa**

و يناظر ذلك **M_e = 0.37.**

11.3.7 الدفع الصاروخي

الدفع على الصاروخ ينشأ كرد فعل لاندفاع الغاز من منفث في مؤخرة الصاروخ – القسم (7.2). و يفصل التحليل أدناه المتغيرات المؤثرة في مقدار هذا الدفع.

الشكل 11.3.13

برسم حجم تحكمي داخل غرفة الاحتراق و المنفث تصبح معادلة كمية التحرك للحالة:

$$\oiint_A \rho \underline{V}(\underline{V}.\, d\underline{A}) = \oiint_A \underline{\sigma} dA$$

الضغط الجوي يعمل على كل أسطح الصاروخ فيصبح صافي الضغط على السطح الخروجي $p_e - p_a$

$$\rho_e v_e^2 A_e \underline{i} = (p_e - p_a)A_e (-\underline{i}) + R_x$$

$$F_x = -R_x = [\, \rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a)A_e \,] (-\underline{i})$$

و بذلك فان الدفع في اتجاه x السالب:

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a)A_e \quad \text{.....(11.3.11)}$$

في الحالة التصميمية:

$$p_e = p_a$$

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e = \frac{p_e}{RT_e} (kRT_e) M_e^{\,2} A_e$$

$$F_T = kA_e M_e^2 p_e \quad \text{.....(11.3.12)}$$

مثال

صمم محرك صاروخي ليعطي دفعاً يساوي 4.5kN عند الارتفاع 1.2km حيث الضغط الجوي 0.02MPa . درجة الحرارة و الضغط في غرفة الاحتراق 2000K و 2MPa ، على التوالي. قيمة k لغازات النفث 1.3 و الكتلة النسبية 20 .
أحسب: عدد ماخ الخروجي و المساحة الخروجية المطلوبة و مساحة حلق المنفث و معدل سريان الغازات.
يمكن افتراض أن السريان لاتبديدى فى المنفث و غير شرق.

للسريان غير الشرق

$$p_e = p_b = p_a = 0.02E6$$

$$p_e/p_0 = 0.01$$

المعادلة (11.3.4)

$$\mu_e = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{-\frac{k-1}{k}} = (0.01)^{-0.231} = 2.89$$

$$M_e = [(\mu_e - 1)\frac{2}{k-1}]^{1/2} = \mathbf{3.55}$$

معادلة الدفع:

$$F_T = kA_eM_e^2p_e$$

$$4.5E3 = (1.3)A_e(3.55)^2(0.02E6)$$

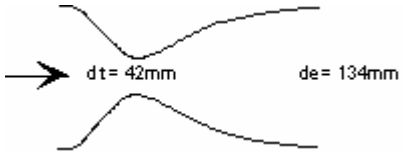
$$A_e = \mathbf{0.014m^2}$$

بما أن السريان فوق صوتي في الجزء الناشر فهو إذن صوتي عند الحلق

$$A^* = A_t$$

المعادلة (11.3.6) تعطي

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e}\left(\frac{2\mu_e}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 9.63$$



الشكل 11.3.14

$$A^* = A_t = 0.014/9.63 =$$

$$\mathbf{0.00145m^2}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}}\frac{A_eM_ep_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = (T_e/T_0)\,T_0 = (\mu_e^{-1})T_0 = 692K$$

$$R = \frac{\overline{R}}{MW} = \frac{8310}{20} = 415.5$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1.3}{(415.5)\ (692)}}(0.014)\ (3.55)\ (0.02E6) = \mathbf{2.11\ kg/s}$$

مسائل

11.3.1

أ) أحسب سرعة الصوت فى الهواء عند درجات الحرارة: 40° C ، 0° C .

ب) أحسب سرعة الصوت فى غاز الهليوم عند درجات الحرارة: 40 °C، 0°C. (k = 1.66, MW = 4)

ج) أحسب عدد ماخ لطائرة تتحرك بالسرعة 1000km/h فى هواء ساكن فى درجة الحرارة 0°C .

[355m/s,331m/s;1039m/s,970m/s;0.84]

11.3.2 طائرة فوق صوتية تطير بسرعة 3000 km/h عند الارتفاع 400m . درجة حرارة الجو 15°C . ما هى المسافة الأفقية التى تقطعها الطائرة فوق مراقب أرضى قبيل سماع هذا المراقب لصوت الطائرة؟

[895m]

11.3.3 استخلص العلاقات الآتية من الأسس الأولية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2\mu}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

حيث T^* و p^* قيم درجة الحرارة و الضغط عند الحالة الصوتية.

μ تساوى $[1+½(k-1)M^2]$.

11.3.4 يسرى الهليوم من مستودع كبير درجة الحرارة فيه 10°C عبر منفث لام . المساحة الخروجية للمنفث $0.0003m^2$ و تؤدى إلى غرفة الضغط فيها 0.1MPa . أحسب معدل السريان الكتلى عبر المنفث إذا كان الضغط المطلق فى المستودع:

أ) 0.15 MPa,

ب) 0.35 MPa.

[0.04kg/s, 0.10kg/s]

11.3.5 الضغط و درجة الحرارة و السرعة تساوى 0.35 MPa و 350 K و 300 m/s ، على التوالى ، عند مدخل أنبوب ناشر يحوى سريان لاتبديدي. إذا كانت نسبة المساحة الخروجية للمساحة الدخولية 2.5 أحسب الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند المخرج.

[0.51 MPa, 391 K, 91 m/s]

11.3.6 الضغط و درجة الحرارة فى مستودع هواء 0.7 MPa at و 15°C . المستودع موصل إلى مستودع مستقبل عبر منفث لام-ناشر. مساحة مقطعى الحلق و الخروج تساوى 1.3E-3و $5.2E-3m^2$، على التوالى. احسب:

أ) أعلى معدل للسريان

ب) قيم عدد ماخ الخروجية إلى تعطى أعلى معدل للسريان مع بقاء السريان داخل المنفث لاتبديدى

ج) قيم ضغط الاستقبال المناظرة للحالة (ب) .

[2.2kg/s;2.94,0.15;0.02MPa,0.69MPa]

11.3.7 يراد نفث هواء من مستودع كبير الضغط فيه 0.3 MPa و درجة الحرارة 300 K إلى الجو حيث الضغط 0.1 MPa بمعدل 1.0 kg/s. باعتبار السريان داخل المنفث لاتبديدي حدد المساحة الخروجية المناسبة و عدد ماخ مستخدماً:

أ) منفث لام

ب) منفث لام-ناشر

أرسم منحنى الضغط لكل حالة.

11.4 الصدمة المتعامدة

11.4.1 طبيعة الموجة الصدمية

الصدمة في حركية الغاز هي الزيادة المفاجئة في ضغط الغاز. و يصاحب ذلك تغيرات كبيرة في متغيرات السريان الأخرى. و يحدث ذلك في مسافة متناهية الصغر في اتجاه السريان. توصف الصدمة بال**متعامدة** إذا تعامدت على اتجاه سريان الغاز. و ان لم تكن كذلك فهي **صدمة مائلة**.

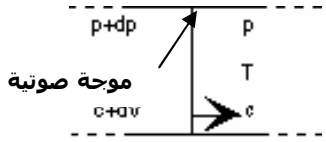
و يميز الموجة الصدمية عن الموجة الصوتية أن الزيادة في الضغط المصاحبة للأولى كبيرة بينما الزيادة في الضغط تفاضلية في حالة الموجة الصوتية. تتحرك الموجة الصوتية بسرعة الصوت بطبيعة الحال بينما تفوق سرعة الموجة الصدمية سرعة الصوت.

تنشأ الموجة الصدمية أصلاً من التتابع السريع لموجات صوتية و يمكن استنتاج ذلك مما يلي:

قانون الغاز المثالي:

$$p = R\rho T$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{.....(1)}$$



الشكل 11.4.1

السريان اللاتبديدي:

$$p = const.\rho^k$$

$$\frac{dp}{p} = k\,\frac{d\rho}{\rho} \quad \text{.....(2)}$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{k}\frac{dp}{p} = \frac{k-1}{k}\frac{dp}{p} \quad \text{.....(3)}$$

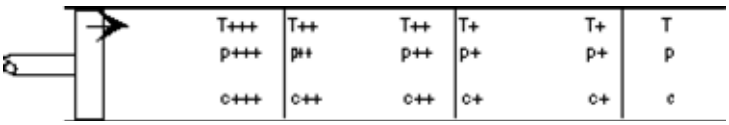
المعادلة (11.2.6)

$$c = \sqrt{kRt}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} = \frac{k-1}{2k}\frac{dp}{p} \quad \text{.....(4)}$$

بما أن $k>1$ المعادلة (3) تدل الى أن الزيادة في الضغط بسبب الموجة الضغطية تصاحبها زيادة في درجة الحرارة. المعادلة (4) تدل الى زيادة تفاضلية في سرعة الصوت بسبب الموجة الضغطية.

في حال تفرق الموجات الصوتية لا يكون هناك مجال لتأثرها ببعضها البعض. و بالتالي لا ينشأ أثر تراكمي عن الزيادات الطفيفة في الضغط و درجة الحرارة و سرعة الصوت.



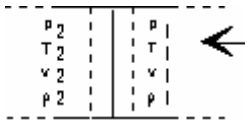
الشكل 11.4.2

أما في حال التتابع المطرد للموجات الصوتية فان الأثر التراكمي يكون كما هو مبين في الشكل (11.4.2).

الموجة الصوتية الأولى ترفع درجة الحرارة من T إلى T^+ و سرعة الصوت من c إلى c^+ . و إذا تتابعت الموجات فإنها تزيد هذه المقادير زيادات تراكمية متتابعة. و ينشأ عن ذلك أن كل موجة تتحرك بسرعة أكبر من سابقتها مما يؤدي إلى أن تدرك الموجات بعضها البعض حتى تتحد في موجة واحدة. يترتب على ذلك أن فرق الضغط بين جانبي الموجة الناشئة يساوي فرق الضغط بين أول و آخر الموجات الصوتية الأساسية. و إذا كان عدد الموجات الأساسية كبيراً فان هذا الفرق في الضغط لا يكون تفاضلياً. كما أن سرعة الموجة الناشئة أعلى من سرعة الصوت منسوبةً إلى الغاز الساكن. و بذلك تنشأ الموجة الصدمية.

11.4.2 معادلات السريان ذو الصدمة

بتطبيق معادلات الحفظ على حجم تحكمي حول صدمة متعامدة و بملاحظة أن عرض الصدمة ضئيل بما يجعل الحجم التحكمى كظيم الحرارة و لا احتكاكي يمكننا استخلاص العلاقات التكاملية بين جانبي الصدمة.



الشكل 11.4.3

1) درجة الحرارة الركودية

معادلة الطاقة

$$h_1 + ½v_1^2 = h_2 + ½v_2^2$$

$$h_{o1} = h_{02}$$

$$c_p T_{o1} = c_p T_{02}$$

$$T_{02} = T_{01} = T_0 \quad \text{.....(11.4.1)}$$

و يعني ذلك أن درجة الحرارة الركودية لا تتغير نتيجة للصدمة.

2) درجة الحرارة

من معادلة الطاقة

$$C_p T_1 + ½ c_1^2 M_1^2 = C_p T_2 + ½ c_2^2 M_2^2$$

$$\frac{kR}{k-1}T_1 + \frac{1}{2}kRT_1.M_1^2 = \frac{kR}{k-1}T_2 + \frac{1}{2}kRT_2.M_2^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2_1}{1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2_2}\right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{.....(11.4.2)}$$

3) الضغط

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة

$$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m}\, v) = 0$$

$$p_2A_2 - p_1A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_1 v_1^2 A_1 = 0$$

$$p_2 - p_1 = -\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2$$

$$p_1 \left(1+\frac{\rho_1 v_1^2}{p_1}\right) = p_2 \left(1+\frac{\rho_2 v_2^2}{p_2}\right)$$

معادلة الغاز الكامل

$$p = R\rho T$$

$$p_1 \left(1+\frac{k v_1^2}{kRT_1}\right) = p_2 \left(1+\frac{k v_2^2}{kRT_2}\right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right) \quad \text{.....(11.4.3)}$$

4) عدد ماخ

قانون حفظ الكتلة

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho = p/RT, \quad v = cM, \quad c = \sqrt{kRT}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

و بالتعويض ل p_2/p_1 و T_2/T_1 من المعادلات (11.4.2) و (11.4.3)

$$\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{M_1}{M_2}\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2}} \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{M_2\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2}}{1 + kM_2^2} = \frac{M_1\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}}{1 + kM_1^2}$$

بتربيع الجانبين:

$$\frac{M_2^2\left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2\right]}{[1 + kM_2^2]^2} = \frac{M_1^2\left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2\right]}{[1 + kM_1^2]^2}$$

و بجعل N تساوي جانب المعادلة الأيمن و إعادة ترتيب الحدود

$$[\ ½(k-1) - k^2 N\ ]\ M_2^4 + [\ 1 - 2kN]\ M_2^2 - N = 0$$

و باستخدام قاعدة المعادلات من الدرجة الثانية للمجهول M_2^2

$$M_2^2 = \frac{\sqrt{(2kN-1) \pm \left(1 - 2kN\right)^2 - 4\left(\frac{k-1}{2} - k^2N\right)(-N)}}{2\left(\frac{k-1}{2} - k^2N\right)}$$

حلا المعادلة:

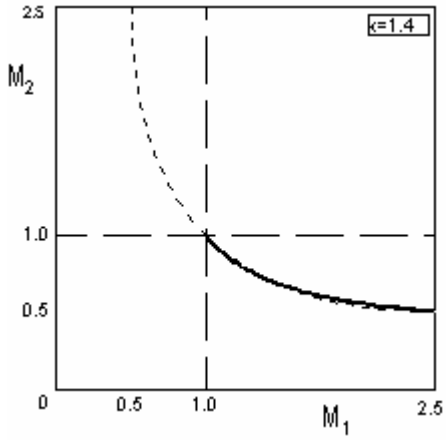
$$M_2^2 = M_1^2$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_1^2 - 1}$$

بما أن الحـل الأول غيـر ذي أهميـة فان العلاقة بين M_1 و M_2 تصبح:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_1^2 - 1} \quad \text{.....(11.4.4)}$$

الـشكل (11.4.4) يوضـح العلاقـة (11.4.4) .



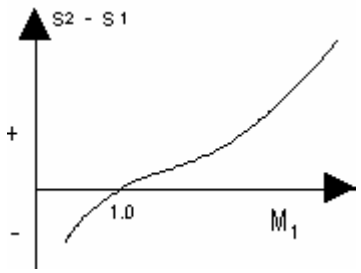
الشكل 11.4.4

و يمكن التدليل منهما على الإمكانية النظرية لحدوث الصدمة سواء كان السريان فوق صوتي أم دون صوتي. إلا أن التجربة تدل على اقتصار حدوث الصدمة على السريان فوق الصوتي. و يمكن تفسير ذلك بالرجوع إلى القانون الثاني للحركية الحرارية.

المعادلة (11.1.9) :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

بالتعويض في(11.1.9) من المعادلتين (11.4.2) و (11.4.3) ل: T_2/T_1 و p_2/p_1 ثم التعويض من (11.4.4) ل M_2 نحصل على علاقة معقدة بعض الشيء تربط s_2-s_1 ب M_1 و k . يوضح الشكل (11.4.5) منحناً لهذا الحل.



الشكل (11.4.5)

بالنظر إلى أن القانون الثاني لحركة الحرارة ينص على أن الشرط اللازم لحدوث أي عملية **1- 2** هو أن يكون فرق التبديد s_2- s_1 موجباً. و يدل المنحنى في الشكل (11.4.5) أن ذلك يحدث فقط عندما تكون M_1 >1.

5) الضغط الركودي

المعادلتان (11.4.3) و (11.3.4) تعطيان

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left[\frac{1+kM_1^{\,2}}{1+kM_2^{\,2}}\right]=\frac{p_{02}}{p_{01}}$$

و بالتعويض في القوس المربع من المعادلة (1)

$$\frac{p_{02}}{p_{01}}=\frac{M_1}{M_2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad \text{.....(11.4.5)}$$

6) المساحة الحرجة *A

باعتبار A هي المساحة عند مقطع الصدمة

$$\frac{A/A^*_2}{A/A^*_1}=\frac{A^*_1}{A^*_2}$$

و بالتعويض من المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A^*_1}{A^*_2}=\frac{M_1}{M_2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad \text{.....(11.4.6)}$$

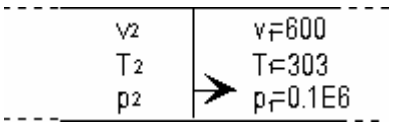
عند مقارنة المعادلتين (11.4.5) و (11.4.6) نستنتج

$$\frac{A^*_1}{A^*_2}=\frac{p_{02}}{p_{01}} \qquad \text{.....(11.4.7)}$$

مثال

موجة صدمية متعامدة تتحرك في أنبوب بسرعة 600m/s . درجة الحرارة و الضغط في الهواء الساكن قبل مرور الموجة 30°C و 0.1MPa ، على التوالي.

أحسب عدد ماخ على جانبي الموجة بالنسبة إلى مناط مثبت على الموجة. أحسب أيضاً الزيادة في درجة الحرارة و الضغط بسبب مرور الموجة الصدمية.



الشكل 11.4.6

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$T_1 = 30 + 273 = 303K$$

$$\rightarrow \quad M_1 = \frac{600}{\sqrt{1.4(287)\ (303)}} = \mathbf{1.72}$$

المعادلة (11.4.4) تعطي $\mathbf{M_2 = 0.64}$

و المعادلة (11.4.3) تعطي

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

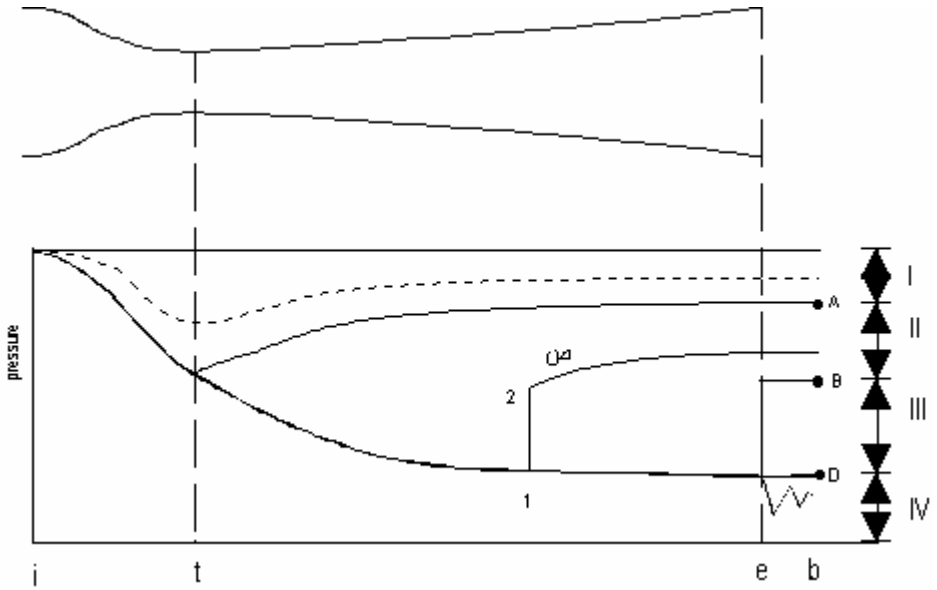
$\mu_1 = 1.59, \ \mu_2 = 1.08 \ \rightarrow T_2 = 445 = \mathbf{172°C}$

$$\Delta t = 172\text{-}30 = \mathbf{142°C}$$

$$p_2 = p_1 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \mathbf{0.33\ MPa}$$

$$\Delta p = (0.33 - 0.1)E6 = \mathbf{0.23\ MPa}$$

11.4.3 الموجة الصدمية فى المنفث اللام-الناشر



الشكل 11.4.7

عند دراسة السريان اللاتبديدى فى المنفث اللام-الناشر في القسم (11.3) أغفلنا ما يحدث عندما يكون الضغط النهائي في المدى A – D [**II** و **III** في الشكل (11.4.7)] . السريان في هذا المدى **تبديدي** في بعض أجزائه و تتخلله صدمة، كما هو مبين في السلوك **ص** في الشكل (11.4.7) .

في هذه الحالة و بسبب وقوع الضغط النهائي في المدى **II** فان الصدمة تحدث عند الموضع (1) حيث السريان فوق صوتي فيرتفع الضغط إلى المستوى (2) و تنخفض قيمة عدد ماخ إلى قيمة دون صوتية. فيما يلي الموضع (2) يكون السريان لاتبديدى و لكن بثوابت تختلف عن تلك التي تسود في الجزء الذي يسبق الموضع (1) .

تكون الصدمة متعامدة و داخل المنفث في الحالة المذكورة و لمدى الضغط النهائي **II**. و بخفض الضغط النهائي يقترب مقطع الصدمة من المقطع الخروجي حتى يبلغه عند انخفاض الضغط النهائي إلى المستوى B .

عندما يكون الضغط النهائي في المدى **III** تصبح الصدمة مائلة و تكون خارج المنفث. يستمر هذا السلوك حتى ينخفض الضغط النهائي إلى القيمة التصميمية p_D .
تعرف المستويات A وB وD بأنها **الحدود التشغيلية** للمنفث.

عدد ماخ الخروجي M_e :

يحتاج تحديد قيمة M_e في العادة لمعالجة خاصة.
بتذكر أن $A_2^* \neq A_1^*$ في حالة الصدمة فان كل المتغيرات اللابعدية التي تسبق الصدمة (قبل الموضع (1)) تحمل قيمها المرجعية اللاحقة **1** ، مثلاً A/A_1^* و p/p_{01} . بينما المتغيرات اللابعدية التي تلي الصدمة (بعد الموضع (2)) تحمل قيمها المرجعية الرمز **2** ، مثلاً A_e/A_2^* و p_e/p_{02} . و بذلك فان M_e تحسب من المقادير اللابعدية ذات اللاحقة **2.**

يعتمد التحليل التالي على حاصل الضرب $\frac{A}{A^*}\frac{p}{p_0}$

$$\frac{A_e}{A_2^*}\frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}}\left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\frac{p_{01}}{p_{02}}\right)$$

المقدار داخل القوس = 1 - المعادلة (11.4.7).

$$\frac{A_e}{A_2^*}\frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}} \quad \text{.....(11.4.8)}$$

و من المعادلتين (11.3.4) و (11.3.6)

$$\frac{A_e}{A_2^*}\frac{p_e}{p_{02}} = \frac{1}{M_e}\left(\frac{2\mu_e}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{A_e}{A_2^*}\frac{p_e}{p_{02}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{M_e\sqrt{\mu_e}} \quad \text{.....(1)}$$

المعادلتان (1) و (11.4.8) تعطيان

$$M_e\sqrt{\mu_e} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}}}$$

$$M_e^{\,2}\,\mu_e = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}}\right)^2}$$

و بتسمية الجانب الأيمن B

$$M_e^{\,2}\,\mu_e = B$$

$$M_e^{\,2}\,[\,1 + \frac{1}{2}(k\text{-}1)M_e^{\,2}] = B$$

و باتخاذ $N = M_e^{\,2}$

$$N\,[\,1 + \frac{1}{2}(k\text{-}1)N] = B$$

$$\frac{1}{2}(k\text{-}1)N^2 + N - B = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

حل المعادلة (2) يعطي

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(k-1)B}}{k-1}$$

و بإبعاد الحل السالب لأنه يعطي قيمة خيالية

$$M_e^{\,2} = \frac{\sqrt{1 + 2(k-1)B} - 1}{k-1} \qquad \text{.....(11.4.9)}$$

حيث

$$B = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}}\right)^2}$$

و يمكن استخدام قوائم الغاز أيضاً من العمود $\frac{p}{p_0}\ \frac{A}{A^*}$ لمعرفة M_e و القيم اللابعدية الأخرى – الملحق د.

مثال

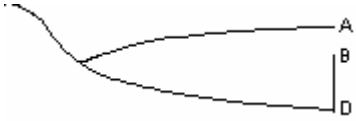
الضغط في مستودع هواء يساوي 2.0MPa . يُصرِّف المستودع الهواء عبر منفث لام-ناشر قطر حلقه 10mm و قطر مقطعه الخروجي 27mm

أ) حدد الحدود التشغيلية للمنفث.

ب) حدد سلوك السريان في المنفث للحالتين:

ب1) الضغط النهائي 0.5MPa

ب2) الضغط النهائي 0.1MPa



الشكل 11.4.8

أ) الحدود التشغيلية للمنفث: A وB وD

$$A^* = A_t$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \left(\frac{0.027}{0.010}\right)^2 = 7.45$$

باستخدام قوائم السريان اللاتبديدى

p/p_0	M	A/A*	
0.01138	3.6	7.45	عند D
0.995	0.08	7.45	عند A

$p_D = (0.01138)2.0E6 =$ ***0.02276E6 Pa***

$p_A = (0.995)2.0E6 =$ ***1.99E6Pa***

و لحساب p_B :

تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة عند المقطع الخروجي:

p_2/p_1	M_2	M_1
14.95	0.447	3.6

$p_1 = p_D = 0.02276E6\ Pa$

$p_2 = p_B = (14.95)0.02276E6 = \mathbf{0.34E6\ Pa}$

ب1) الضغط النهائي p_b = 0.5E6

$p_B < p_b < p_A$

و يعني ذلك حدوث موجة صدمية في الجانب الناشر من المنفث.

لحساب قيم M_1 و M_2 و M_e

$$\frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}} = 7.45\,\frac{0.5E6}{2.0E6} = 1.863$$

قيمة B في المعادلة (11.4.9)

B = 0.0965

و بالتعويض في (11.4.9)

$M_e = \mathbf{0.31}$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1)M_e^2 = 1.019$$

$$\frac{p_e}{p_{02}} = \mu_e^{\frac{-k}{k-1}} = 0.936$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e}\frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936}\frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

يمكن استخدام قوائم السريان اللاتبديدى

$$\frac{A_e}{A_2^*}\frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*}\frac{p_e}{p_{01}} = 1.863$$

و تعطي القائمة

P/p_0	$\frac{A}{A^*}\frac{p}{p_0}$
0.936	1.863

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e}\frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936}\frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

لحساب M_1 و M_2 تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة

P_{02}/p_{01}	M_1	M_2
0.267	3.24	0.46

ب) الضغط النهائي p_b = 0.1E6

$$p_D < p_b < p_B$$

و يعني ذلك أن السريان لاتبديدى في المنفث مصحوب بصدمة مائلة سافل المنفث.

مسائل

11.4.1 يؤدي اختبار لقنبلة ذرية إلى بعث موجة صدمية بسرعة 60km/s في هواء ساكن الضغط الجوي فيه 0.1MPa و درجة حرارته الابتدائية 30°C . قدّر التغيرات الناشئة في الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند نقطة ثابتة.

11.4.2 ينفذ هواء مضغوط من مستودع الضغط فيه 0.7MPa و درجة الحرارة 340K عبر منفث لام-ناشر. لوحظت موجة صدمية ساكنة عند مقطع الضغط فيه 0.2MPa . أحسب الضغط الخروجي و قطر مقطع الخروج إذا كان معدل السريان 0.5kg/s و عدد ماخ الخروجي 0.5. [0.554MPa, 24mm]

11.4.3 صمم منفث لام-ناشر لنقل غاز (k=1.3, R=300 J/kg-K) ضغطه و درجة حرارته الركوديتين 1.0MPa و 400K على التوالي لينفث في مستودع مستقبل الضغط فيه 0.2MPa بمعدل 0.4kg/s .

أ) أحسب قطري المنفث.

ب) إذا ارتفع ضغط الاستقبال إلى 0.8MPa أحسب:

ب1) عدد ماخ الخروجي

ب2) عددي ماخ قبل و بعد الصدمة الناشئة

ب3) قطر المعجل في موقع الصدمة.

[16mm, 19mm, 0.51, 1.345, 0.76, 17mm]

11.4.4 صمم منفث لمحرك صاروخي ليعمل بكفاءته الفضلى على ارتفاع 30km فوق سطح الأرض. نسبة مساحة المخرج لمساحة الحلق 5.0 . باعتبار أن الضغط الجوي على سطح الأرض 0.1MPa و الضغط داخل حجرة الاحتراق 2.0MPa و أن قيمة k لغازات الاحتراق 1.2 أحسب نسبة قوة الدفع عند سطح الأرض إلى نظيرتها عند الارتفاع 30km [0.94]

11.5 السريان الانضغاطي الاحتكاكي

11.5.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطي الاحتكاكي في صورته العامة معقدة. إلا أنه يمكن تبسيط الدراسة كثيراً إذا حصرت في الافتراضات الآتية:

1) السريان أحادى البعد
2) كظيم الحرارة
3) مساحة مقطع السريان ثابتة
4) السريان رتيب.
5) غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفي الافتراضات أعلاه **سريان فانو** .

تعاريف:

1) $$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

العلاقة أعلاه تعرّف **معامل الاحتكاك** f بدلالة الإجهاد القصي و السرعة المتوسطة عند مقطع التحليل ومتوسط الكثافة عند نفس المقطع. سبق استخدام f بنفس التعريف في علاقة دارسي للسريان اللاإنضغاطى - المعادلة (4.3). و يعتمد المعامل f على كل من عدد رينولز Re و الخشونة اللابعدية k/d .

2) يعرّف **القطر السرياني** D بالعلاقة:

D = 4 [محيط المقطع \ مساحة مقطع السريان]

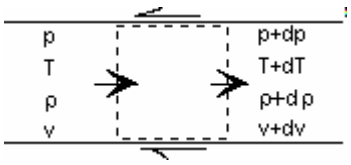
لاحظ أن قيمة D للمقطع الدائري تساوي d (قطر المقطع).

3) المقدار اللابعدي $f\frac{x}{D}$ يبرز مراراً في معادلات السريان الاحتكاكي. و يمكن، بداعي الاختصار، تعريف معامل الاحتكاك φ : $\varphi = \frac{fx}{D}$ و بالتالي: $d\varphi = \frac{f}{D}dx$

11.5.2 المعادلات التفاضلية للسريان الاحتكاكي

نسعى هنا لتكوين علاقات تفاضلية تربط المتغيرات: $p, T, \rho, p_0, v, \varphi, M$ و نبدأ من علاقات الحفظ و بعض العلاقات الثانوية.

بالتطبيق على حجم التحكم التفاضلي:



الشكل 11.5.1

معادلة الاستمرارية:

$$\rho v = const.$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{.....(1)}$$

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{.....(2)}$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}, \; M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \quad \text{.....(3)}$$

معادلة الطاقة:

$$h + \tfrac{1}{2}v^2 = const$$

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$C_p\, dT + v dv = 0$$

$$\frac{kRT}{k-1}\frac{dT}{T} + v dv = 0$$

$$\frac{c^2}{k-1}\frac{dT}{T} + v dv = 0$$

$$\frac{c^2}{v^2}\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2\frac{dv}{v} \quad \text{.....(4)}$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(pA) + d(\rho v^2 A) + d(\tau_w A_w) = 0$$

$$A\,dp + d(\rho v^2 A) + \tau_w\,dA_w = 0$$

بما أن: ثابت $= \rho vA$

$$d(\rho v^2 A) = \rho vA\,dv$$

$$A\,dp + \rho vA\,dv + \tau_w\,dA_w = 0$$

$$dp + \tau_w \frac{dA_w}{A} + \rho v^2 \frac{dv}{v} = 0 \qquad \text{.....(4b)}$$

$$\frac{dA_w}{A} = 4\frac{dx}{D}$$

و من تعريف المعامل f

$$\tau_w = \tfrac{1}{2}\rho v^2 (f/4)$$

$$\rho v^2 = \frac{p}{RT} c^2 M^2 = \frac{pkRTM^2}{RT} = kpM^2$$

$$\tau_w = \tfrac{1}{2} kpM^2 \cdot f/4$$

$$\tau_w \frac{dA_w}{A} = \tfrac{1}{2} kpM^2 \frac{f}{4}(4\frac{dx}{D}) = \tfrac{1}{2} kpM^2 f \frac{dx}{D} = \tfrac{1}{2} kpM^2 d\varphi$$

و بالتعويض في (4b)

$$\frac{dp}{p} + \tfrac{1}{2} kM^2 d\varphi + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

الضغط الركودي:

$$p_0 = p[1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]} \frac{dM}{M} \qquad \text{.....(6)}$$

تلك ست معادلات تضم سبعة مجاهيل هي:

$$\frac{dM}{M}\ ,\ \frac{dp}{p}\ ,\ \frac{dT}{T}\ ,\ \frac{d\rho}{\rho}\ ,\ \frac{dv}{v}\ ,\ \frac{dp_0}{p_0}\ ,\ d\varphi$$

و بذلك يمكن صياغة المعادلات الستة الأولى بدلالة المتغير السابع $d\varphi$.

نبدأ بوضع النسبة $\frac{dM}{M}$ كمتغير مستقل:

(3) و (4) تعطيان

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2\frac{dv}{v} = [1 + \tfrac{k-1}{2}M^2]\frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(7)}$$

(1) و (7) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(8)}$$

(4) و (7) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)M^2}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(9)}$$

(2) و (8) و (9) تعطي

$$\frac{dp}{p} = -\frac{[1+(k-1)M^2]}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(10)}$$

(6) و (10) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{(1-M^2)}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11)}$$

و بتعويض (10) و (7) في(5)

$$\tfrac{1}{2}kM^2 d\varphi = \frac{[1 + (k-1)M^2 - kM^2}{\mu}\frac{dM}{M} = \frac{(1-M^2)}{\mu}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{kM^2}{2\left(1-M^2\right)}\mu d\varphi \quad \text{.....(11.5.1)}$$

(10) و (11.5.1) تعطيات

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2[1-(k-1)M^2]}{2(1-M^2)}d\varphi \quad \text{.....(11.5.2)}$$

(9) و (11.5.1) تعطيات

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)kM^4}{2(1-M^2)}d\varphi \quad \text{.....(11.5.3)}$$

(8) و (11.5.1) تعطيات

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)}d\varphi \quad \text{.....(11.5.4)}$$

(1) و (11.5.4) تعطيات

$$\frac{dv}{v} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)}d\varphi \quad \text{.....(11.5.5)}$$

(11) و (11.5.1) تعطيات

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\tfrac{1}{2}\,kM^2\,d\varphi \quad \text{.....(11.5.6)}$$

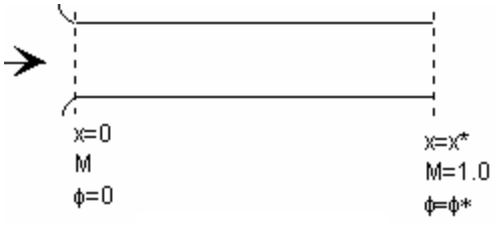
لاحظ أن تزايد و تناقص المتغيرات $M,\ p,\ T,\ \rho,\ v$ يعتمد على ما إذا كانت قيمة M أعلى أم اقل من 1.0 بسبب احتواء التعابير على الحد $1-M^2$. إلا أن p_0 ، الضغط الركودي، يتناقص مطلقاً في اتجاه السريان.

دراسة المعادلة (11.5.1) توضح سمة هامة للسريان الانضغاطي الاحتكاكي في الأنابيب: تزداد قيمة عدد ماخ في السريان دون الصوتى و تتناقص في السريان فوق الصوتى. ويعني ذلك أن عدد ماخ يتجه نحو القيمة الصوتية في كل الأحوال.

دراسة المعادلة (11.5.2) توضح أن تغير الضغط في المدى فوق الصوتي يعتمد أيضاً على عدد حرج اضافي هو $M = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$.

11.5.3 المعادلات التكاملية للسريان الاحتكاكي

بدراسة السريان الموضح في الشكل (11.5.2) داخل أنبوب قطره السرياني D نسعى لايجاد المسافة x^* اللازمة لرفع قيمة M إلى 1.0 .



الشكل 11.5.2

بدءً من المعادلة (11.5.1) نعوض ل dφ بالمقدار $f\frac{dx}{D}$ و نكامل من $x = 0$ إلى $x = x^*$ المناظرتين ل M و 1.0 = M، على التوالي

$$d\varphi = \frac{f}{D}dx = \frac{2(1 - M^2)}{kM^3\mu}dM$$

$$\frac{1}{D}\int_0^{x^*} f dx = \frac{2}{k}\int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3\mu}dM$$

الجانب الأيسر = $\varphi^* = \overline{f}\frac{x^*}{D}$

و يمكن مكاملة الجانب الأيمن بطريقة الكسور الجزئية

الجانب الأيمن =

$$\frac{2}{k}\int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3\mu}dM = \frac{2}{k}I$$

$$\frac{1 - M^2}{M^3[1 + \frac{k-1}{2}M^2]} = \frac{A}{M} + \frac{B}{M^2} + \frac{C}{M^3} + \frac{DM + E}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}$$

$$1 - M^2 = A[M^2 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^4] + B[M + \tfrac{1}{2}(k-1)M^3] + C[1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2] + DM^4 + EM^3$$

$$0 = A.\tfrac{1}{2}(k-1) + D$$
$$0 = B.\tfrac{1}{2}(k-1) + E$$
$$-1 = A + C.\tfrac{1}{2}(k-1)$$
$$0 = B$$
$$1 = C$$

A	B	C	D	E
-½(k+1)	0	1	(k+1)(k-1)/4	0

$$\frac{1 - M^2}{M^3 \mu} = -\frac{k + 1}{2M} + \frac{1}{M^3} + \frac{(k + 1)(k - 1)M}{4\mu}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \tfrac{1}{2}(k+1) \ln M$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2} \frac{1 - M^2}{M^2}$$

$$I_3 = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{M dM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_{M^2}^{1.0} \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \mu$$

$$d\mu = \frac{k-1}{2} dM^2$$

$$I_3 = \frac{(k+1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{(k+1)}{4} \left[\ln \mu\right]_{M^2}^{1.0} = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{k+1}{2\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]}$$

$$I = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{(k+1) M^2}{2\mu} + \frac{1 - M^2}{2 M^2}$$

$$\varphi^* = + \frac{1 - M^2}{k M^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1) M^2}{2\mu} \quad \text{.....(11.5.7)}$$

و يمكن على هذا النسق استخلاص معادلات ل: p, T, v, p_0 عند أي مقطع في المجرى متخذين القيم الصوتية كمرجع.

بدءً من المعادلة (11.5.2) و بالتعويض من المعادلة (11.5.1) ل $d\varphi$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1 + (k-1) M^2}{M \mu} dM$$

نكامل في المدى p إلى *p المناظر للمدى M إلى 1.0

$$\int_{p}^{p^*} \frac{dp}{p} = -\int_{M}^{1} \frac{1+(k-1)M^2}{M\mu} dM$$

الجانب الأيسر $\ln \frac{p^*}{p}$

و باستخدام الكسور الجزئية في الجانب الأيمن

$$- \frac{1+(k-1)M^2}{M[1+\frac{k-1}{2}M^2]} = -\frac{1}{M} - \frac{(k-1)M}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$I = -\int_{M}^{1} \frac{dM}{M} - \frac{k-1}{2}\int_{M}^{1} \frac{MdM}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \frac{k-1}{4}\int_{M}^{1} \frac{dM^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2}\ln [1+\frac{k-1}{2}M^2]\Big|_{M}^{1.0}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2}\ln \frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \ln \sqrt{\frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}}$$

$$\ln \frac{p^*}{p} = \ln \frac{M}{\sqrt{\frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \quad \text{.....(11.5.8)}$$

و بنفس الأسلوب يمكن استخلاص المعادلات الآتية:

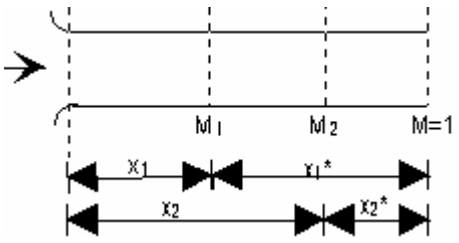
$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu} \quad \text{.....(11.5.9)}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{2\mu}{k+1}} \quad \text{.....(11.5.10)}$$

$$\frac{v}{v^*} = M\sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \quad \text{.....(11.5.11)}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{2\mu}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{.....(11.5.12)}$$

مستعينين بالشكل (11.5.3) يمكن ربط معاملات الاحتكاك الموضعية φ^*_1 و φ^*_2 و المعامل الكلي φ_{12} كما يلي



الشكل 11.5.3

$$x_2 - x_1 = x_1^* - x_2^*$$

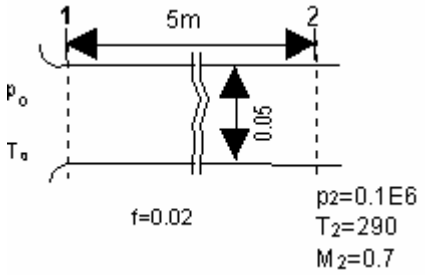
$$\frac{\overline{f}}{D}(x_2 - x_1) = \frac{\overline{f}}{D}(x^*_1 - x^*_2)$$

$$= \overline{f}\frac{x^*_1}{D} - \overline{f}\frac{x^*_2}{D}$$

$$\varphi_{12} = \varphi^*_1 - \varphi^*_2 \quad \text{.....(11.5.13)}$$

مثال

أنبوب قطره 50mm موصل بمستودع هواء. الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ يعادلوا 0.1MPa و 290K و 0.7 ، على التوالي، عند مقطع على مسافة 5m سافل مدخل الأنبوب. متوسط قيمة معامل الاحتكاك f 0.02 . يمكن افتراض أن السريان كظيم الحرارة في الأنبوب و لاتبديدى في المنفث. قدّر قيم الضغط و درجة الحرارة في المستودع.



الشكل 11.5.4

السریان لاتبدیدی: $p_0 = p_{01}$

$$\frac{p_{01}}{p_2} = \frac{p_{01}}{p_0^*}\frac{p_0^*}{p_{02}}\frac{p_{02}}{p_2}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.02\frac{5}{0.05} = 2$$

س ف (2)

M	Φ_2^*	p_0/p_0^*
0.7	0.208	1.094

$\varphi^*_1=\varphi_{12} + \varphi^*_2 = 2 + 0.208$

س ف (1)

Φ^*	p_0/p_0^*
2.208	1.54

س ل ت (2):

M	p/p_0
0.7	0.721

P_{01} = 0.1E6 (1.54)(1/1.094)(1/0.721) = 0.20E6= **0.20 MPa**

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = (T_{02}/T_{01})T_2$$

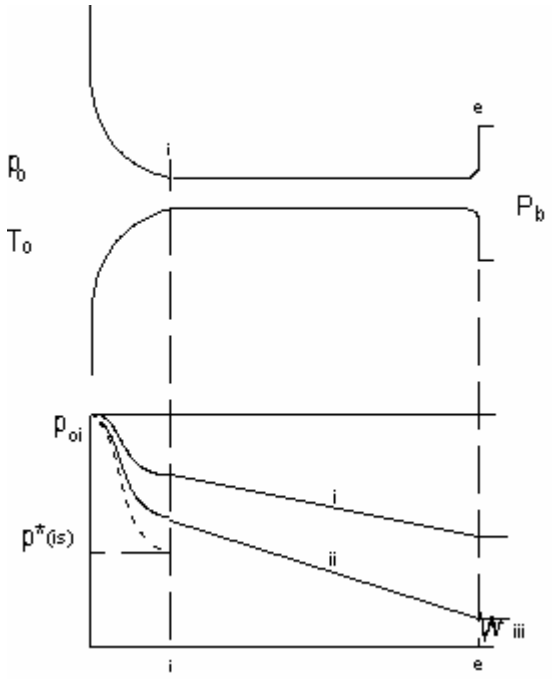
س ل ت (2):

M	T/T_0
0.7	0.911

T_0 = **318K**

11.5.4 توزيع الضغط في أنبوب موصل بمنفث لام

11.5.4.1 تأثير الضغط النهائي



الشكل 11.5.5

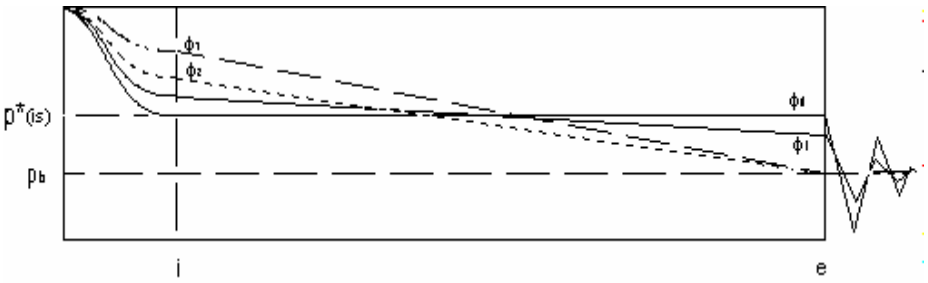
الـشكل (11.5.5) يوضـح منظومة مكونة من أنبوب رفيـع موصـل بمـستودع هواء مضغوط عبـر منفـث نـــاعم و موصـــل مـــن الجانـــب الـــسافلي بمـــستودع مـــستقبل يمكن التحكم في ضغطه الـــذي يـــشكل الـــضغط النهائي p_b للأنبوب. المراحـل المفـصلة أدنـاه توضح ما يحدث للـسريان عند تغيير الضغط النهائي p_b:

1) p_b أقـــل قيمـــة من p_{0I} يتناقص الضغط في المنفث في اتجاه السريان بسبب تناقص المساحة. و يتناقص الضغط في الأنبوب بسبب الاحتكاك.

2) السلوك الحدودي.
الضغط الخروجي = الضغط الحرج $p_e = p^*$
لاحظ أن الضغط الخروجي للمنفث أعلى من القيمة الحرجة للمنفث.

3) p_b أقل قيمة من القيمة الحدودية. لا يتأثر السريان داخل المنظومـة بإنقـاص p_b و يصير السريان شرقاً. تحدث موجة تمددية سافل المنظومة.

11.5.4.2 تأثير الاحتكاك



الشكل (11.5.6)

ندرس في هذه الحالة تأثير φ على توزيع الضغط في المنظومة مع ثبات الضغط الامدادي و الضغط النهائي.

(0 $\varphi = \varphi_0 = 0$
أنبوب ضئيل الاحتكاك. ميل الضغط في اتجاه السريان = صفر.
موجة تمددية سافل المنظومة.
$M_e = 1.0,\ p_e = p_{is}^*$

(1 $\varphi = \varphi_1 > 0$
فقد في الضغط بسبب الاحتكاك.
موجة تمددية أصغر حجماً. $M_e = 1.0$

(2 $\varphi = \varphi_2 > \varphi_1$
سلوك حدودي. $M_e = 1.0,\ p_e = p_b$

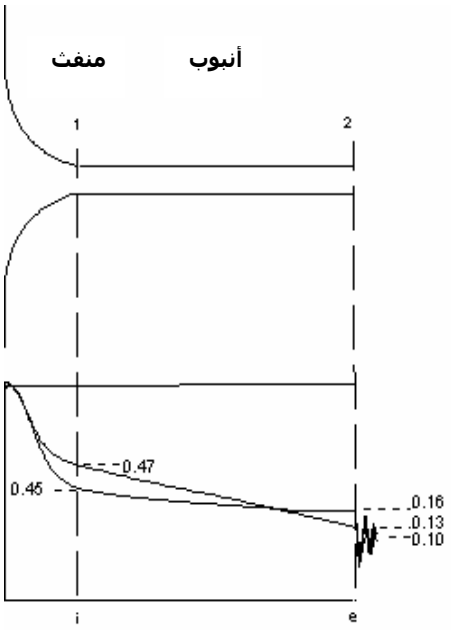
(3 $M_e < 1.0,\ p_e = p_b \quad \varphi = \varphi_3 > \varphi_2$
يصبح ميل الضغط أعلى بسبب الاحتكاك. و هذا يجعل الضغط الدخولي للأنبوب أعلى قيمة.

مثال

أنبـوب معـزول حراريـاً قطـره 80mm و طولـه 26.5mm موصل إلى مستودع هواء بواسطة منفث لام. الضغط في المـستودع 0.5MPa و درجــة الحــرارة 300K . الجانــب الــسافلي للأنبوب مفتوح للجو حيث الضغط 0.1MPa .

أ) إذا كـان متوسـط معامـل الاحتكـاك للأنبوب يعادل 0.016 أحسب الضغط و درجـة الحــرارة عنــد المخــرج و معــدل الــسريان الكتلي.

ب) إذا نعّـم سـطح الأنبـوب الـداخلي لتنقص قيمة f إلى 0.008 أحـسب الـضغط و درجة الحرارة عنـد المخـرج و أحـسب الزيـادة في المائة لمعدل السريان.



الشكل 11.5.7

أ) **f = 0.016**

تحديد p* :

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p^*}{p_1}\,\frac{p_1}{p_{01}}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.016\frac{26.5}{0.08} = 5.3$$

بما أن افتراض حرج السريان عند مخرج الأنبوب يستوجب $\varphi_2^* = 0$

$$\varphi^*_1 = \varphi_{12} = 5.3$$

س ف (1)

Φ*	M	p/p*
5.3	0.3	3.619

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.3	0.940

$$p^* = 0.5E6(1/3.619)(0.940) = 0.13E6\ Pa$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرق.

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.13MPa}$$

$$P_1 = (0.94)(0.5)E6 = 0.471E6$$

و عن درجة الحرارة T_2 :

$$T_{02} = T_{01} = T_0 = 300$$

$$T_2 = (T/T_0)T_0$$

س ل ت (2):

M	T/T_0
1.0	0.833

$$T_2 = (0.833)300 = \mathbf{250K}$$

و عن $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{RT_2}}\ A_2M_2p_2 = 3.0 \text{ kg/s}$$

ب) $\mathbf{f = 0.008}$

$$\varphi_{12} = 2.65$$

تحديد p^* :

$$\varphi_1^* = \varphi_{12} = 2.65$$

س ف (1):

Φ*	M	p/p*
2.65	0.383	2.819

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.383	0.904

$$p^* = 0.5E6(1/2.819)(0.904) = 0.172E6 \text{ Pa}$$
$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرق

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.172MPa}$$

$$P_1 = (0.904)(0.5)E6 = 0.455E6$$

$$T_2 = (T/T_0)_2T_0 = \mathbf{250K}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{RT_2}}\ A_2 M_2 p_2 = \mathbf{3.825\ kg/s}$$

الزيادة في المائة في معدل السريان الكتلي =
$(3.825 - 3.01)100/3.01 = \mathbf{27\%}$

و تسبب في ذلك انخفاض قيمة f بنسبة **50%** .

مسائل

11.5.1 الضغط و عدد ماخ عند المقطع (1) لأنبوب يحوي سريان كظيم للهواء يعادلان 0.3MPa و 0.3 ، على التوالي. طول الأنبوب 15m و قطره 30mm . متوسط معامل الاحتكاك 0.01 . احسب عدد ماخ عند المقطع (2) و الانخفاض في الضغط بين المقطعين.

[0.66, 0.168MPa]

11.5.2 أنبوب معزول حرارياً قطره 100mm و متوسط معامل الاحتكاك 0.025 . يراد استخدامه لنقل هواء بمعدل 3.0kg/s . درجة الحرارة و الضغط عند المدخل 60°C و 0.2MPa ، على التوالي. ما هو الطول المطلوب ليعطي حالة خروج صوتية؟
[4.3m]

11.5.3 أثبت أن معدل السريان لغاز كامل كظيم الحرارة فى أنبوب شرق

$$\dot{m} = Ap^* \sqrt{\left[\frac{k(k+1)}{2RT_o}\right]}$$

أنبوب معزول حرارياً قطره 50mm و طوله 0.5m و متوسط معامل الاحتكاك 0.02 أوصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفث لام ناعم. الضغط فى المستودع 0.7MPa و درجة الحرارة الركودية 330K . مستوى الضغط النهائى من الانخفاض بحيث يعطي سريان شرق.

أ) قدّر معدل سريان الكتلة

ب) قارن النتيجة في (أ) بمعدل السريان الذي ينشأ إذا نزع الأنبوب و عرّض مخرج المنفث إلى نفس الضغط النهائي المنخفض.

[2.80 kg/s, 3.03kg/s]

11.5.4 ينفث هواء من مستودع إمداد عبر منفث ناعم قصير و أنبوب طوله 10m . الضغط فى المستودع 0.4MPa و درجة الحرارة الركودية 35°C . الضغط النهائي 0.1MPa . الخياران المتوفران لأقطار الأنابيب هما: 80mm و 40mm . بافتراض أن متوسط معامل الاحتكاك لكل من الأنبوبين 0.025 أحسب معدل سريان الكتلة لكل حالة.
[2.65kg/s, 0.53kg/s]

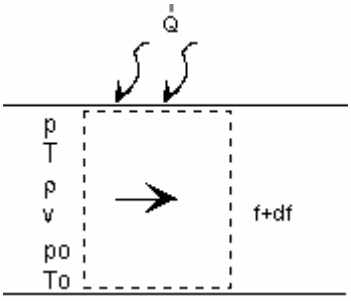
11.6 السريان الانضغاطي اللاكظمي

11.6.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطى مع انتقال الحرارة في هذا الفصل مقيّد بالافتراضات الآتية:

- السريان أحادى البعد
- ضئيل الاحتكاك
- مساحة مقطع السريان ثابتة
- السريان رتيب
- غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفي الافتراضات أعلاه **سريان ريلي** .



الشكل 11.6.1

11.6.2 المعادلات التفاضلية

محتوى الطاقة في الصورة التفاضلية:

$$d(h+\frac{v^2}{2}) = dh_0$$

$$dh + vdv = dh_0$$

$$c_p dT + vdv = c_p dT_0$$

$$\frac{kR}{k-1} T \frac{dT}{T} + v^2 \frac{dv}{v} = \frac{kR}{k-1} T \frac{T_0}{T} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + c^2 M^2 \frac{dv}{v} = \frac{c^2}{k-1} \mu \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{1}{(k-1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{(k-1)M^2} \mu \frac{dT_0}{T_0} \quad \text{.....(1)}$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(Ap) + d(\rho v^2 A) = 0$$

$$dp + \rho v\, dv = 0$$

$$dv = 0 \frac{kv}{kRT} + \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{.....(2)}$$

الاستمرارية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}$$

$$M^2 = \frac{v^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T}$$

$$2\frac{dM}{M} = 2\frac{dv}{v} - \frac{dT}{T} \quad \text{.....(4)}$$

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{.....(5)}$$

المعادلة (11.3.4)

$$p_0 = p\ \mu^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{\mu}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(6)}$$

المعادلات (2) و (3) و (4) و (5) تعطي

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{1+kM^2}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.1)}$$

(11.6.1) و (3) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{1+kM^2}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.2)}$$

(11.6.1) و (2) تعطيان

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2kM^2}{1+kM^2}\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.3)}$$

(11.6.1) و (4) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = 2\left[\frac{1-kM^2}{1+kM^2}\right]\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.4)}$$

(1) و (11.6.1) و (11.6.4) تعطي

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{2(k+1)(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu}\right]\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.5)}$$

(11.6.3) و (6) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\left[\frac{kM^2(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu}\right]\frac{dM}{M} \quad \text{.....(11.6.6)}$$

أثر عدد ماخ على سلوك المتغيرات الأخرى:

1) المعادلة الرئيسية في هذه الحالة هي (11.6.5)
إضافة حرارة تعني أن dT_0 موجبة. و يتبع ذلك أن عدد ماخ يزيد إذا كان السريان دون صوتي، و ينقص إذا كان السريان فوق صوتي.

2) ادرس التأثير المترتب من ذلك على dp وρ dp و dp_0 و dT .

3) لاحظ أن M =1 ليست قيمة حرجة للمتغير p_0 و أن $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ قيمة حرجة للمتغير T.

11.6.3 المعادلات التكاملية

نعتبر الوضع المرجعي عند M = 1.0 و نكامل المعادلات (11.6.1) إلـى (11.6.6). لتوضـيح طريقة المكاملة خذ المعادلة (11.6.1):

$$\int_{v}^{v^*} \frac{dv}{v} = \int_{M}^{1.0} \frac{2}{M(1+kM^2)}\, dM$$

و باستخدام الكسور الجزئية للجانب الأيمن

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{A}{M} + \frac{BM+c}{1+kM^2}$$

$$2 = (Ak + B)M^2 + CM + A$$

$$\square \quad A = 2,\ C = 0,\ B = -2k$$

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{2}{M} + \frac{2kM}{1+kM^2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2\int_{M}^{1.0} \frac{dM}{M} = \ln M^2 \Big|_{M}^{1} = -\ln M^2$$

$$I_2 = -2k \int_{M}^{1.0} \frac{MdM}{1+kM^2} = -k\int_{M}^{1.0} \frac{2MdM}{1+kM^2} = -k\int_{M}^{1.0} \frac{dM^2}{1+kM^2}$$

$$1 + kM^2 = u$$
$$du = k\, dM^2$$

$$I_2 = -\int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln (1+kM^2) \Big|_{M}^{1} = \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$I = -\ln M^2 + \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$\ln \frac{v^*}{v} = \ln \frac{1+kM^2}{1+k} - \ln M^2$$

$$\frac{v^*}{v} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2}$$

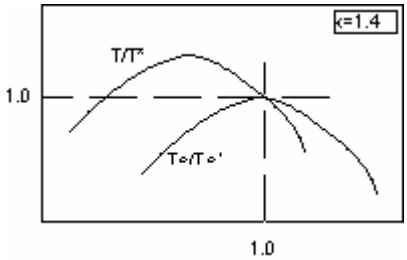
$$\frac{v}{v^*} = \frac{(1+k)M^2}{1+kM^2} \quad \text{.....(11.6.7)}$$

و يمكن على هذا النسق مكاملة المعادلات التفاضلية (11.6.2) إلى (11.6.6) لتعطي:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2} \quad \text{..... .....(11.6.8)}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{k+1}{1+kM^2} \quad \text{.....(11.6.9)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(k+1)^2 M^2}{(1+kM^2)^2} \quad \text{.....(11.6.10)}$$



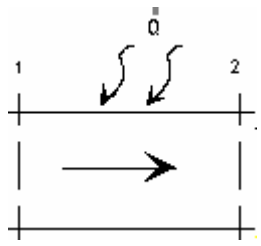
$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(1+k)M^2\mu}{(1+kM^2)^2} \quad \text{.....(11.6.11)}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left(\frac{2\mu}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{.....(11.6.12)}$$

الشكل 11.6.2

يبين الشكل (11.6.2) صورة بيانية للمعادلتين (11.6.10) و (11.6.11). و يجد القارئ جداول سريان ريلي ضمن الملحق (د) لنسبة الحرارة النوعية 1.4.

11.6.4 معادلة معدل انتقال الحرارة



الشكل 11.6.3

معادلة الطاقة للمقطع 1–2 :

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = h_{02} - h_{01}$$

$$\dot{Q} = c_p \dot{m} (T_{02} - T_{01}) \text{.....(11.6.13)}$$

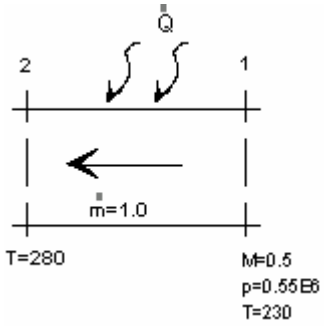
مثال 11.6.1

يسري هواء في أنبوب ضئيل الاحتكاك. الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ عند المدخل 0.55MPa، 230K و0.5 ، على التوالي. يخرج الهواء من الأنبوب بدرجة الحرارة 280K . أحسب

أ) عدد ماخ الخروجي

ب) التغير في الضغط الركودي

ج) إذا كان معدل السريان 1.0kg/s احسب معدل انتقال الحرارة.



الشكل 11.6.4

أ)

$$\frac{T_2}{T^*} = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T^*}$$

س ر (1)

M	T/T*
0.5	0.790

$T_2/T^* = 0.962$

س ر (2)

T/T*	M
0.962	0.65

$M_2 = 0.65$

ب)

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.5	0.843

$P_{01} = 0.652E6\ Pa$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_0^*}\frac{p_0}{p_{01}}$$

س ر (2)

M	P_0/p_0^*
0.65	1.058

س ر (1)

M	P_0/p_0^*
0.5	1.114

$p_{02} = 0.619E6\ Pa$

$\Delta p_0 = p_{02} - p_{01} = -32.8E3$

الانخفاض في الضغط = **32.8kPa**

ج)

$$\dot{Q} = c_p\ \dot{m}\ (T_{02} - T_{01})$$

$c_p = kR/(k-1) = 1004.5\ J/kg\text{-}K$

س ل أ (1)

M	T/T_0
0.5	0.9524

س ل أ (2)

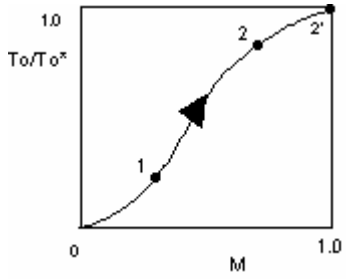
M	T/T_0
0.65	0.9221

$T_{02} = 303.7$

$T_{01} = 241.5$

$\dot{Q}$ = 1.0 (1004.5)(303.7 – 241.5) = **62.5kW**

11.6.5 الشرَق



الشكل (11.6.5)

إضافة كمية حرارة للسريان تميزه زيادة في درجة الحرارة الركودية T_0 - المعادلة (11.6.13). و بالتالي، لاستنباط أثر انتقال الحرارة على السريان يمكن دراسة تأثر السريان بتغيير قيمة T_0 .

الشكل (11.6.5) يوضح تغير درجة الحرارة الركودية اللابعدية بعدد ماخ في المدى دون الصوتي حسب المعادلة (11.6.11). و يدل المنحنى إلى أن تسخين السريان من الوضع الابتدائي ذو الإحداثيات, $\left(M_1, \frac{T_{01}}{T_0 *}\right)$ إلى الوضع النهائي $\left(M_2, \frac{T_{02}}{T_0 *}\right)$ يعني زيادة في درجة الحرارة الركودية بالمقدار $T_{02} - T_{01}$. و يرتفع الموضع **2** بزيادة التسخين حتى يصل الى الموضع ***2** . إذا وولي التسخين بعد ذلك بغرض دفع الموضع **2** إلى أعلى من ذلك بحيث $T_{02} > T_0 *$ فان الأمر يصبح غير ممكن في الطبيعة لأن $\frac{T_0}{T_0 *}$ لا تتجاوز الواحد الصحيح. الذي يحدث في الواقع هو أن يتعدل كل السريان ليستوعب كمية الحرارة المضافة. و بالنظر إلى الشكل (11.6.5) نرى أن ذلك يحدث فقط بانخفاض M_1 لتزيد $T_{02} - T_{01}$ و يصبح السريان الخروجي صوتياً. و يسمى السريان في هذه الحالة شرقاً.

مثال 11.6.2

أنبوب ذو مقطع ثابت و ضئيل الاحتكاك. في البدء دُفع الهواء إلى داخل الأنبوب بعدد ماخ 0.5 و درجة حرارة ركودية 300K . ثم سُخن المجرى حتى ارتفعت درجة الحرارة الركودية إلى 1000K .

ما هو أثر التسخين على عدد ماخ الدخولي.

$$T_{02}/T_{01} = 1000/300 = 3.333$$

$$T_{02}/T_{01} = \frac{T_0}{T_0 *}\bigg|_2 \frac{T_0 *}{T_0}\bigg|_1 \quad \text{.....(1)}$$

إذا بقيت M_1 عند 0.5 بعد التسخين
س ر (1):

M	T_0/T_0*
0.5	0.691

المعادلة (1) تعطي

$$\left.\frac{T_0}{T_0^*}\right|_2 = \frac{T_{02}}{T_{01}}\left.\frac{T_0}{T_0^*}\right|_1 = (3.333)(0.691) = 2.303$$

و هذا غير ممكن حيث $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز 1.0 .

و هذا يعني أن السريان شرق.

$M_2 = 1.0$

المعادلة (1) تعطي

$$\left.\frac{T_0}{T_0^*}\right|_1 = \frac{T_{01}}{T_{02}}\left.\frac{T_0}{T_0^*}\right|_2 = 300/1000 = 0.3$$

س ر (1):

T_0/T_0^*	M
0.3	0.274

M_1 = **0.274**

مسائل

11.6.1 يعرف الآتي عند مدخل أنبوب يحوي سريان لا احتكاكي:

M_1	T_1	P_1	A_1
0.4	300K	0.1MPa	$0.001m^2$

أ) بالرجوع إلى جداول السريان اللاتبديدي أحسب درجة الحرارة الركودية T_{01} و الضغط الركودي p_{01} .

ب) سُخن الأنبوب حتى بلغت درجة الحرارة T_2 400K . أحسب قيم المتغيرات الأخرى مستعيناً بقوائم السريان الحراري.

ج) و بوسيلة أخرى، استخلص التعبير الرياضي الذي يربط المتغيرات T_1 و T_2 و M_1 و M_2 و من ثم أحسب M_2 . قارن بالإجابة في (ب).

د) أحسب معدل انتقال الحرارة بالكيلووات.

[310K, 0.112MPa, 0.52, 18kW]

11.6.2 يسري الهواء في أنبوب لا احتكاكي مساحة مقطعه $0.01m^2$. عند مدخل الأنبوب:

M	T_0	P_0
0.3	350K	0.2MPa

سخن الأنبوب و ارتفعت درجة الحرارة الركودية عند المخرج إلى 450K . أحسب معدل سريان الحرارة و عدد ماخ الخروجي و الضغط الخروجي.

[0.21MW, 0.35, 0.18MPa]

11.6.3 قُرن مخرج منفث لام بأنبوب ثابت المقطع. مساحة مدخل المنفث $0.25m^2$. مساحة مخرج المنفث و مقطع الأنبوب $0.2m^2$. استخدمت المنظومة لتسريع هواء من الحالة الدخولية الآتية:

M	T	P
0.3	300K	0.1MPa

يمكن اعتبار السريان في المنفث لاتبديدى و يمكن تجاهل الاحتكاك في الأنبوب.
قدّر عدد ماخ الخروجي و درجة الحرارة الخروجية إذا سخن الأنبوب بمعدل 1MW .

[0.42, 327K]

11.7 قياس السرعة في السريان الانضغاطى

11.7.1 السريان دون الصوتي

عنـد اسـتخدام منظومـة أنبـوب الـضغط الحركـي و المـانومتر لقيـاس الـسرعة للـسريان اللاإنـضغاطى - القـسم (6.3.1.1) – اسـتخدمت علاقـة الطاقـة المبـسطة لـربط الـسرعة بفرق الضغط لتعطي المعادلة

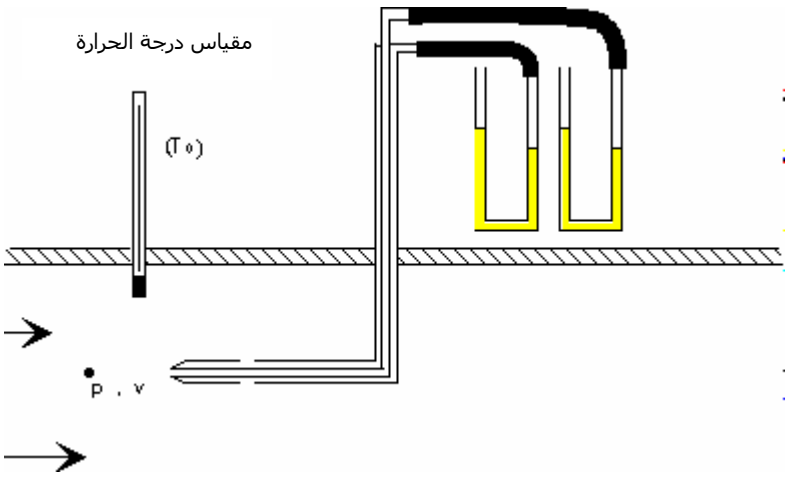
$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \quad \text{.....(1)}$$

اعتبرت الكثافة في المعادلة (1) ثابت، و هذا تبسيط مخل إذا كان السريان انضغاطياً.

عند اعتبار السريان انضغاطي مع الإبقاء على افتراض اللاتبديد بـين الموضـع العـام، حيـث الضغط p و السرعة v و المحتـوى الحـراري h ، و موضـع الركـود ، حيـث الـضغط p_0 و السرعة صفر و المحتوى الحراري h_0 .
حفظ الطاقة بين الموضعين يعطي

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0$$

$$v = \sqrt{2(h_0 - h)} = \left[2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right]^{1/2}$$



الشكل 11.7.1

و للسريان اللاتبديدي

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{T_0}$$

فتصبح السرعة

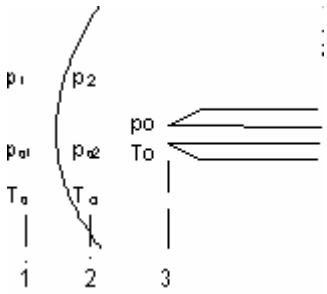
$$v = \left\{\frac{2kRT_0}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad .....(11.7.1)$$

يلاحظ أن:

- أنبوبي الضغط و الضغط الركودي موصلين بمانومترين منفصلين. بمعرفة الضغط الجوي يمكن استخلاص قيم p و p_0 .
- مقياس الحرارة يقرأ قيمة T_0 مباشرةً.

11.7.2 السريان فوق الصوتي

تدل التجربة على انه ليس بالإمكان إبطاء السريان فوق الصوتي إلى الحالة دون الصوتية دون عبور صدمة. و بذلك عند وضع أنبوب الضغط الحركي في سريان فوق صوتي فان السرعة تكون صفراً عند حافة الأنبوب و فوق صوتية على مبعدةً منه في الجانب الصعيدي. بين الموضعين يعبر السريان صدمة منحنية.
بالنظر إلى السريان في خط الانسياب المحوري يمكن اعتبار الصدمة مستقيمة و متعامدة و الاستفادة من معادلات الصدمة المتعامدة فى القسم (11.4).



الشكل 11.7.2

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right) \quad .....(11.4.3)$$

و عند الموضع (2) تعطي معادلة السريان اللاتبديدي (11.3.4)

$$\frac{p_{02}}{p_2} = [\,1 + \frac{1}{2}(k-1)\,M_2^2\,]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2}\frac{p_2}{p_1} = [\,1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2\,]^{k/(k-1)}\,\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}$$

و يمكن التعويض عن M_2 بM_1 من المعادلة (11.4.4) لتعطي

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2kM_1^2+1-k}\,(\tfrac{1}{2}M_1^2)^k\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{.....(11.7.2)}$$

يستخدم أنبوب الضغط الركودي لقياس p_{02} - p_a و أنبوب الضغط لقياس p_1 - p_a عند موضع صعيد المقطع (1) . و يقاس الضغط الجوي p_a بالبارومتر . ثم تحل المعادلة (11.7.2) بطريقة تكررية لتعطي قيمة M_1 .
لحساب السرعة v نحسب أولاً درجة الحرارة T_1 من المعادلة

$$\frac{T_1}{T_0} = [1+\tfrac{1}{2}(k-1)M_1^2]^{-1} \quad \text{.....(11.3.3)}$$

ثم تستخدم المعادلة

$$v_1 = M_1\sqrt{kRT_1} \quad \text{.....(11.7.3)}$$

مثال

تطير طائرة في جو ضغطه 0.1MPa . الطائرة مجهزة بأنبوب ضغط ركودي و مقياس للحرارة. يدل أنبوب الضغط الركودي على القراءة 0.14MPa فوق الضغط الجوي و يعطي مقياس الحرارة القراءة 440K .
قدّر سرعة الطائرة.

$$p = 0.1E6\ pa\ ,\quad p_0 = (0.14 + 0.1)E6\ Pa = 0.24\ E6\ Pa$$

$$T_0 = 440K$$

نفترض في البدء أن السريان دون صوتي

$$p/p_0 = 0.1 / 0.24 = 0.417$$

قوائم السريان اللاتبديدي تعطي

M = 1.19

مما يدل على أن السريان فوق صوتي

$$p_{02} = 0.24E6,\quad p_1 = 0.1E6$$

المعادلة (11.7.2)

$$M_1^{2.8} - 1.284M_1^2 + 0.183 = 0$$

$$M_1 = 1.2$$

قائمة السريان اللاتبديدى عند الموضع (1):

M	**T/T_0**
1.2	0.7764

$$T_1 = 440\ (0.7764) = 342K$$

$$v = M\sqrt{kRT} = \mathbf{445m/s = 1600km/h}$$