الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

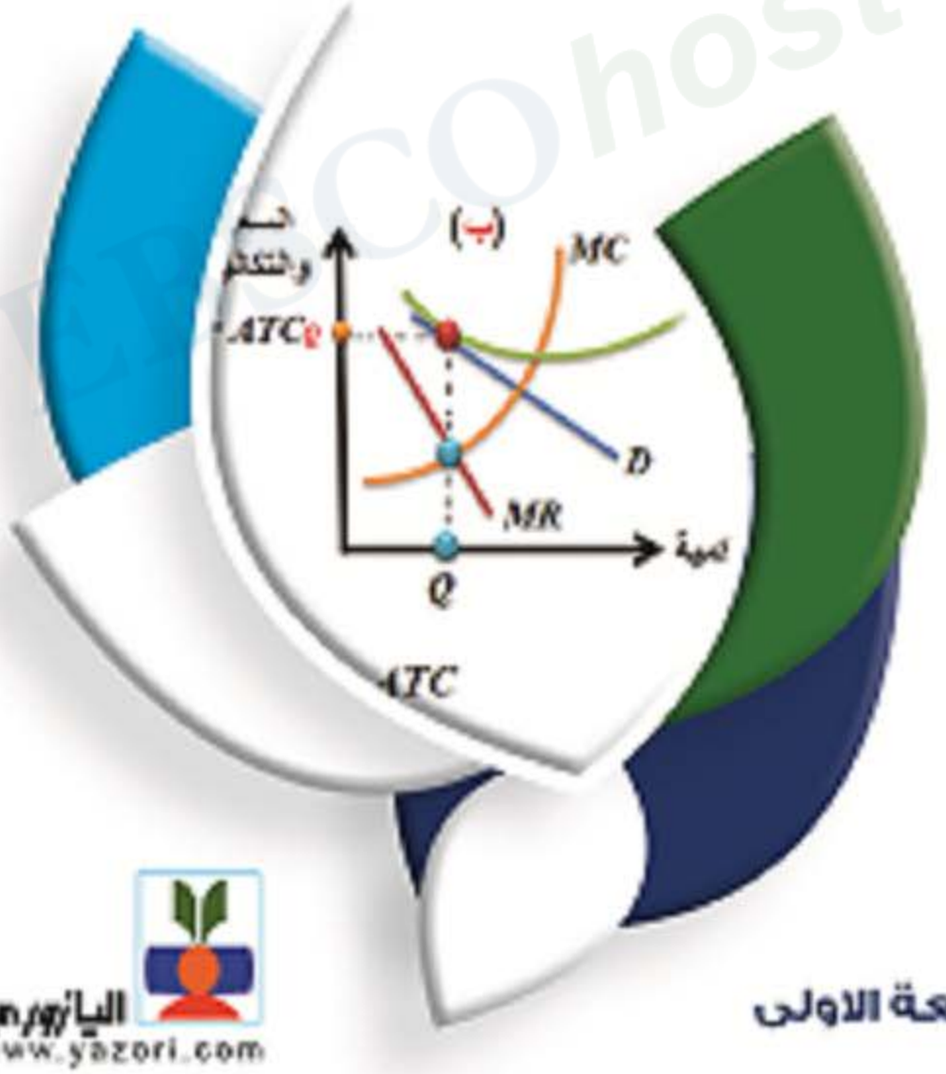
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

طبعة ملونة

مبادئ الاقتصاد الرياضي

عبد الرزاق بنى هاني



الطبعة الاولى

اليازوري
www.yazori.com

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدُ لله وحده، والصلاة والسلام على سيدنا محمدٍ بن عبدالله النبي الأمي.

بقي هذا الكتاب مكتوباً على شكل مخطوطٍ على أوراقٍ متناثرة لمدة لاتقل عن عشرين عاماً،كنت خلالها قد عللت نفسي بكتابة موضوعات أخرى في الاقتصاد. لكنني أدركت مؤخراً بأن المكتبة العربية في حاجة ماسة إلى كتابٍ في الاقتصاد الرياضي، يخرجُ عن التقليد الذي اعتاد عليه طلبتنا المرعوبين من الموضوع وما يحتويه من تحليلات مجردة. وقد منحني الله عزيمة القراءة المتأنية خلال السنتين الماضيتين كي أعيدَ كتابة تلك المخطوطات وأضعها بين جلدتي هذا الكتاب.

اخترت أن يكون الكتاب محتوياً لعشرة فصول فقط، مما قد يواجهه الطلبة والباحثون، على مختلف مستوياتهم العلمية في تخصص الاقتصاد، واقتصاد المال والأعمال. وخلال تجربتي العلمية والعملية، كمدرسٍ لمادة الاقتصاد والاقتصاد القياسي والرياضيات والاحصاء، وممارس في صناعة السياسة الاقتصادية والمالية إبان عملي مديراً لدائرة السياسات الاقتصادية في وزارة التخطيط، وأميناً عاماً للوزارة، ثم مفوضاً في هيئة الأوراق المالية، أكتشفت مكمن الضعف الذي يعاني منه طلبتنا، ومتخذو القرار في وطننا، في ما يتعلق بضعف التجريد الرياضي، وتطبيقه في مواجهة كثيرٍ من التحديات الاقتصادية، وخاصة في مجال الاقتصاد الكلي التطبيقي.

يزخر هذا الكتاب بالأمثلة والاشتقاقات الضرورية. وقد وضعته على نحوٍ متسلسل، ابتداءاً من الأعداد الحقيقية، والمتباينة والمعادلة، ثم الاقتران (الدالة) وانتهاءاً بأعقد النظريات الكمية التي تستند إليها النظرية الاقتصادية: الجزئية والكلية. وقد بنيتهُ بشكلٍ، لو أن شخصاً غيرُ متخصصٍ ولايحمل من العلم إلا القليل، ابتدأ به من معنى العدد وخواصه، ثم تدرج به رويداً رويداً، لتمكن في نهاية المطاف أن يجاري علماء الرياضيات في نظريات على درجة عالية من التعقيد. وقد قصدت بذلك أن أهونه على عقول طلبتنا الذين يكرهون التفكير المجرد. سائلاً المولى أن يجعله في ميزان الحسنات يوم لاينفعُ مالٌ ولا بنون إلا من أتى الله قلب سليم.

أرجو أن اغتنم هذه الفرصة كي أتقدم إلى كل الأحبة على صبرهم خلال الأيام والليالي التي استغرقتني وأنا أطبع المخطوطة: زوجتي عزيزة، وابنتي د. فاطمة، ود. نور، وولدي عبدالرحمن ومحمد، وحفيدي كريم وراية، وأحبائي علي وأحمد، وكل من ساهم في إنجازه.

عمان – الأردن

14/03/2012

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

المحتويات

الحجاج بن مطر XIV

1 2

I. المبادىء الأولية 2

1. المتباينة الصارمة (التامة أو الدقيقة) (strict inequality):
حيث تأخذ الشكل: 35

B. مثال (1.7) قيمة المتباينة: 39

C. مثال (1.8) قيمة المتباينة: 40

D. مثال (1.9) قيمة المتباينة: 41

E. مثال (1.10) قيمة المتباينة: 42

F. مثال (1.11) قيمة المتباينة: 42

G. مثال (1.12) قيمة المتباينة المركبة: 43

H. مثال (1.13) قيمة المتباينة التربيعية: 44

I. (1.5)المعادلة(Equation): 44

معادلة تعريفية (definitional equation): 46

معادلة سلوكية (behavioural equation): 47

J. حيث ترمز (Q) لكمية الإنتاج. 49

K. (1.9)الدالة (الاقتران)(Function) : 68

L. (1.11)المعلمة، (الوسيط، المعامل)(Parameter): 78

M. مثال (1.25)قيمة ومجال ومدى الدالة: 80

N. مثال (1.26)قيمة ومجال ومدى الدالة التربيعية: 81

O. مثال (1.27) قيمة ومجال ومدى دالة الاستهلاك: 82

P. مثال (1.28)دالة الاستهلاك: 84

Q. مثال (1.29)قيمة ومجال ومدى دالة الطلب على لحوم الضأن:
85

R. مثال (1.30) قيمة ومجال ومددالة الأرباح(Profit Functi)
86

S. مثال (1.31)الدالة متعددة المتغيرات: 87

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

T. (1.12) التمثيل البياني للامتساوية والدالة: 88
U. (1.13) المسافة بين نقطتين: 92
V. مثال (1.32)المسافة بين نقطتين على المستوى الديكارتي:94
W. مثال (1.34) رسم المعادلة ($x+y=7$)والمتباينة($1<x<4$ 97
):
X. مثال (1.36) رسم المتباينة: 99
Y. مثال (1.37) رسم المتباينة: 99
Z. مثال (1.39) رسم المتباينة: 103
AA. مثال () رسم الدالة الخطية ($y=f(x)=2+3x$): 103
BB. مثال (1.40) رسم الدالة التربيعية: 106
CC. شكل (1.37): مجال ومدى الدالة 108
DD. مثال (1.41) الصورة البيانية لدالة الأرباح: 109
EE. مثال (1.42) رسم الدالة: 110
FF. مثال (1.43) رسم الدالة: 111
GG. (1.15)اختبار وجود الدالة: 120
HH. (1.15) أشكال الدوّال(الاقترانات)وأنواعها: 121
II. الدوال الثابتة(constant functions): يكون طرفا الدالة ثابتين، كما في الشكل (1.45). ومثال عليها: 122
1. الدوال الخطية(linear functions):تكون الدالة إما متصاعدةأو متناقصة، كما في الشكل (1.46). ومثال عليها 122
2. الدوال الجبرية (algebraic functions): تكون متعددة الحدود، ويكون المتغير المستقل فيها مرفوعاً لقوةٍ كاملة (integer) أعلى من الواحد الصحيح. ومثال عليها: 123
3. الدوال التربيعية (quadratic functions): كما في الشكل (1.47)، ومثال عليها 123
JJ. الدوال التكعيبية(cubical functions): كما في الشكل (1.48)، ومثال عليها 125
1. الدوال المتعالية (transcendental functions): تُسمى الدالة التي لايمكن التعبير عنها بصيغة جبرية دالة متعالية. ومثال عليها: 127

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

KK. (1.17) معدل التغير(Rate of Change): 131
LL. مثال (1.44) ميل الدالة الخطية ونقطتا التقاطع: 134
MM. مثال (1.45) ميل الدالة الخطية ونقطتا التقاطع: 137
1. النقطة الأفقية: 138
2. النقطة العمودية: 138
NN. مثال (1.46) ميل الدالة الثابتة: 140
OO. مثال (1.47) ميل الدالة التربيعية: 143
PP. مثال (1.48) ميل الدالة التكعيبية: 145
II. 2 157
A. المعادلات الآنية 157
Simultaneous Equations System 157
B. منظومة المعادلات الآنية(simultaneous equations system) هي مجموعة من معادلتين أو أكثر، وتتشكل كل معادلة من متغيرين أو أكثر، ويتم تحديد قيمة كل متغير من خلال تفاعله مع المتغيرات كلها داخل المنظومة. 157
C. (2.1) المعادلات التابعة (Dependent Equations):158
D. مثال (2.1)تطابق الخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين الآنيتين: 158
III. (2.2) المعادلات المُتسقة–المُستقلة (Consistent Equations): 160
A. مثال (2.2) تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين لمعادلتين آنيتين: 160
B. مثال (2.3) تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين الآنيتين: 162
C. (2.3) المعادلات غير المتسقة – المتوازية(Inconsistent Equations): 163
D. مثال (2.4) توازي الخطين المستقيمين: 163
E. (2.4) المعادلات المتعامدة(Perpendicular Equations): 164
F. مثال (2.5) تعامد الخطين المستقيمين: 165

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

G.	مثال (2.6) تعامد الخطين المستقيمين:	165
H.	مثال (2.7) معادلات الطلب والعرض:	166
I.	مثال (2.8) تحليل الطلب والعرض(Demand & Supply Analysis):	167
J.	مثال (2.9) الطلب والعرض على العمالة:	170
K.	مثال (2.12) منظومة المعادلات التربيعية ():	175
IV.	المصطلحات الرئيسية للفصلين الأول والثاني	192
V.	اسئلة وتمارين الفصل الثاني	193
VI.	ابن رشد	195
A.	3	197
B.	أسُسُ التفاضل والتكامل	197
C.	(3.2) كيف تنشأ الدالة الأسية؟	201
D.	مثال (3.3)الفرق بين الفائدة المركبة والفائدة البسيطة:	211
E.	مثال (3.4)سعر الفائدة المركب لفترات أقل من سنة كاملة:	212
1.	(3.3)اللوغاريثم(اللوغ)(Logarithm):	216
2.	مثال (3.5)معنى اللوغ:	217
3.	(3.6)قوانين اللوغ لأي عدد حقيقي وموجب:	218
4.	مثال (3.7)حساب اللوغ:	219
5.	مثال (3.8)تطبيق قوانين اللوغ:	219
6.	مثال (3.9) تطبيق معنى اللوغ:	220
7.	مثال (3.10) معنى اللوغ:	221
8.	مثال (3.11) حساب اللوغ:	221
9.	مثال (3.14) تطبيق قوانين اللوغ:	224
10.	مثال(3.18) معادلات اللوغ الآنية:	227
F.	مثال (3.21) حصة الفرد من الناتج المحلي الإجمالي:	237
G.	مثال (3.22)نهاية دالةالطاقة الإنتاجية:	238
H.	مثال (3.23) نهاية دالة التكاليف الحدية:	240
I.	مثال (3.24) نهاية دالة الطاقة القصوى للإنتاج:	244

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

J. مثال (3.26) النهاية غير المعرفة: 245
K. مثال (3.28) اللوغ في معادلة: 253
L. مثال (3.30) استعمال اللوغ والعدد (e): 255
M. (3.8)الدوال المركبة والعكسية(Composite and Inverse Functions): 259
N. مثال (3.31) الدالة المركبة: 260
O. مثال(3.32)الدالة العكسية: 266
P. مثال (3.33) الدالة العكسية: 267
Q. مثال (3.35) دالتا العرضوالطلب العكسيتان(Inverse Supply and Demand Functions): 272
R. مثال (3.37)استخدام (e)في حساب الفائدة: 275
S. مثال (3.39)دالة الإدخار العكسية: 279
T. مثال (3.40) اللوغ في العمليات الحسابية والدوال العكسية: 281
U. مثال (3.41)اللوغ الطبيعي وحساب متوسط نسبة النمو:284
VII. مبادىء الرياضيات المالية 289
VIII. في ما يلي القواعد العامة لاستعمال إشارة الجمع: 293
A. (4.4) معدل العائد على الاستثمار(Rate of Return on Invesrment(RoR)): 296
B. (4.5) القيمة الحالية للتدفق النقدي (Present Discounted Value(PDV)): 297
C. مثال (4.12) سعر الفائدة الفعّال: 301
D. (4.9) سعر الفائدة الحقيقي ((Real Interest Rate (rr)): 302
E. مثال (4.13)سعر الفائدة الحقيقي: 303
F. مثال (4.15) معدل العائد الداخلي: 306
G. (4.11) متوسط العائد المُركب (المتوسط الهندسي) (Geometric Rate of Return or Average Rate of Return (GRR)):307

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

H. (4.12) المدة التي يحتاجها مشروعٌ استثماري لاستعادة الكلفة(Payback Period): 308
I. (4.13) السُناهيّة ((Annuity (An): 312
J. (4.13.1) القيمة المستقبلية للسُناهية العادية (AO): 313
K. معامل القيمة المستقبلية للسُناهية العادية (future value factor of an annuity (FV(F(Ao)). 318
L. معامل القيمة الحالية للسُناهية العادية (present value factor of an ordinary annuity(PV(FAo)). 320
M. مثال (4.18) الدفعات المطلوب لإطفاء السند: 326
N. (4.14) السُناهية المؤجلة (Deffered Annuity): 327
O. مثال (4.19): السناهية المؤجلة: 329
P. مثال(4.20) تقسيط مبلغ الدينباستعمال السناهية المستحقة:331
Q. (4.15) حساب سعر السهم: 332
R. (4.16) سوق السندات (Bonds' Market): 335
S. (4.17) أنواع السندات: 337
T. السند المُعاير على معدل التضخم (Inflation-indexed Treasury): 339
U. (4.18) حساب سعر السند: 341
V. مثال(4.21)سعر السند: 344
W. مثال (4.22)سعر السند: 346
X. (4.19) مؤشرات العائد على السند: 347
(4.19.2) معدل العائد على السند العادي 348
Y. الربح الرأسمالي (capital gain CG) 350
Z. (4.20) منحنى العائدعلى السند (Yield Curve): 354
IX. منحى العائد العادي (الطبيعي) 355
A. منحنى العائد الأفقي (المستوي) (flat yield curve): يتخذُ هذا المنحنى، من تسميته، الوضع الأفقي (المستوي)، كما في الشكل (4.12). وهو يعطي المستثمرين معلوماتٍ وإشاراتٍ مختلفة، وعلى نحوٍ لايُمكّن المستثمرين، كجماعة، من تقرير توقعات المستقبل. ويفسره كلُ واحدٍ منهم بطريقته الخاصة. 356

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

B.	منحنى العائد المعكوس (المقلوب)	357
C.	(4.21) السُناهية الأبدية(Perpetuity):	358
X.	5	363
A.	المشتقة وتطبيقاتها الاقتصادية	363
1.	(5.1) المشتقة:	363
B.	مثال (5.1)مشتقة الدالة باستخدام النهاية:	364
1.	مثال (5.3) مُشتقة الدالة التربيعية بالأرقام:	375
C.	مثال (5.5)المشتقة بواسطة النهاية:	379
D.	(5.2) قوانين ومبادئ الاشتقاق:	380
E.	اشتقاق الثابت:	380
F.	قانون القوة:	381
G.	مثال (5.6) الدالة الخطية:	381
H.	مثال (5.9) مشتقةالدالة:	383
1.	د- قانون الضرب:	383
I.	مثال (5.10) المشتقة:	383
1.	هـ- قانون الكسر:	384
J.	مثال (5.11)مشتقة الكسر:	384
K.	مثال (5.12) مشتقة الكسر:	385
L.	مثال (5.13)مشتقة اللوغ:	385
M.	مثال (5.14)مشتقة دالة اللوغ:	386
N.	مثال ()مشتقة دالة اللوغ:	386
O.	مثال (5.15) مشتقةالدالة:	387
P.	مثال (5.16) مشتقةالدالة:	387
Q.	مثال (5.17) المشتقة:	388
R.	مثال (5.18) مشتقةالدالة:	388
S.	(5.3) المرونات(Elasticities):	389
T.	مثال (5.19) مرونة الطلب السعرية(Price Elasticity of Demand):	391

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

U. مثال (5.20) مرونة الطلب السعرية: 392
V. مثال (5.21) مرونة الطلب السعرية المتغيرة (Variable Price Elasticity of Demand): 393
W. مثال (5.22) قيمةالناتج الحدي للعمالة(Marginal Revenue Product) (MRP): 395
X. مثال (5.24) أقصى 411
Y. ناتج حدي للعمالة: 411
Z. مثال (5.25) النهاية العظمى لنمو الناتج المحلي الإجمالي:413
AA. مثال (5.26)متوسط التكاليف الكلية: 414
BB. مثال (5.27) أعظم الإيرادات: 417
CC. (5.5) الدالة الضمنية(Implicit Function): 429
DD. مثال (5.32) دالة الإنتاج والمشتقة الضمنية: 432
EE. (5.6)المشتقة الجزئية(Partial Derivative): 435
FF. مثال (5.34) المشتقة الجزئية، الأولى والثانية للدالة متعددة المتغيرات: 437
GG. مثال (5.35) المشتقات الجزئية للدالة ذاتالمتغيراتالمتعددة:440
HH. مثال (5.36) المشتقة الجزئية: 443
II. مثال (5.37)المشتقة الجزئية: 444
JJ. مثال (5.38)مرونات 444
KK. الطلب: 444
LL. مرونة الطلب السعرية: 446
MM. مرونة الطلب بالنسبة للدخل: 447
NN. مثال (5.39) دالة إنتاج كوب- دوغلاس(Cobb-Douglas): 449
OO. مثال (5.40)نقطة السرج: 458
PP. مثال () النهاية الصغرى لدالة في متغيرين: 459
QQ. مثال (5.41) دخل الفرد والزمن المبذول على قراءة الصحف اليومية: 461

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

RR.	مثال (5.42) المشتقة الكلية:	464
SS.	مثال (5.43) المشتقة الكلية:	465
TT.	مثال (5.44) المشتقة الكلية:	465
XI.	اسئلة وتمارين الفصل الخامس	467
A.	مثال (6.1) الحالة الفُضلى من عناصر الإنتاج:	473
B.	مثال (6.4)الكمية القصوى من الإنتاج:	494
C.	مثال (6.5) أعظم إنتاج وأقل كلفة – الحالة المُثلى:	496
D. Maximization):	مثال (6.7)سلوك المُستهلك (تعظيم المنفعة) (Utility)	499
E. Function):	مثال (6.8)اشتقاق دالة إنفاق المستهلك (Expenditure)	503
XII.	اسئلة وتمارين الفصل السادس	514
XIII.	7	517
XIV.	الدوال المثلثية	517
XV.	اسئلة وتمارين الفصل السابع	528
XVI.	سلسلة تايلور	529
A.	مثال (8.3)الدالة متعددة الحدود:	533
XVII.	(8.2) سلسلة تايلور (Taylor series):	533
A.	مثال (8.4) تمديد الدالة بسلسلة من الدرجة الرابعة:	534
B.	مثال (8.5) سلسلة تايلور بالأرقام:	535
C.	مثال (8.6) تمديد الدالة:	536
D.	مثال (8.7) سلسلة تايلور بالأرقام:	537
E.	مثال (8.8) سلسلة تايلور:	540
F.	مثال (8.9) دالة التكاليف الكلية:	541
G.	مثال (8.10) سلسلة تايلور من متغيرين:	542
XVIII.	اسئلة الفصل الثامن	546
XIX.	9	547
XX.	مبادىء التكامل	547

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

XXI. (9.2)قوانين التكامل: 552
A. مثال (9.2) تكامل الثابت: 553
B. ج–تكامل معكوس المتغير (X)، أي (1/X) هو 554
C. د–تكامل ثابت نابير (e) مرفوع لمتغير (x)هو 554
D. هـ-تكامل الثابت مرفوع لدالة(a^{bx})هو 555
E. مثال (9.7) تكامل متغير مضروب بعدد: 556
F. مثال (9.8) تكامل الدالة: 557
G. مثال (9.9) التكامل بالتعويض: 558
H. مثال (9.10)التكامل بالتعويض: 559
I. مثال (9.11) التكامل المُحدد: 560
J. مثال (9.12) المساحة تحت المنحنى: 561
K. فائض المستهلك ((consumer surplus (CS) هو المساحة المحصورة بين السعر التوازني ونقطة التقاء منحنى الطلب مع المحور العمودي. إذن 564
XXII. فائض المنتج ((producer's surplus (PS) هو المساحة المحصورة بين السعر التوازني ونقطة التقاء منحنى العرض مع المحور العمودي. إذن 565
A. مثال (9.17) توزيع الدخل ومنحنى لورنز ومعامل جيني:566
XXIII. اسئلة الفصل التاسع 570
XXIV. ملحق(1) 571
XXV. مراجع الهندسة التحليلية والتفاضل 574
XXVI. إمانيويل كانط 575
XXVII. 10 577
XXVIII. الجبر الخطي 577
A. قاعدة الناتج الداخلي (حصيلة النقطة)(inner or dot product)، وتُسمى في بعض الأحيان ناتج الضرب الكمي الثابت(scalar product). وتتم كما في المثال التالي: لو افترضنا أن لدينا متجهي الأسعار والكميات المذكورين أعلاه. يتم الحصول على ناتج ضربهما حسب القاعدة أعلاه بجعل أحدهما متجه صف،

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

والثاني متجه عمود (شريطة أن يكون عدد القيم متساوياً في الجهتين)، وتتم عملية الضرب القبلي بضرب الصف بالعمود 578
B. مثال (10.1) طرح (جمع) المتجهات: 582
C. مثال (10.3) منقول المصفوفة: 589
D. (10.4)جمع وطرح المصفوفات: 591
E. مثال (10.9) ضرب المصفوفة بمنقولها: 596
F. مثال (10.10) ضرب المصفوفات: 600
G. (10.7)معكوس المصفوفة(Inverse Matrix): 611
H. مثال (10.17) محددة مصفوفة رباعية: 617
I. مثال (10.20) المصفوفة المجاورة: 627
J. مثال (10.23) المصفوفة المعكوسة وحل المعادلات الآنية: 629
XXIX. (10.11) خواص المصفوفة المعكوسة: 632
XXX. (10.13)رتبة المصفوفة(Matrix Rank): 640
A. مثال (10.28) رتبة المصفوفة: 641
B. مثال (10.37) حركة البناء السكني وقيم ومتجهات أيغن:670
C. (10.17) مصفوفة هيشيان(Hessian matrix): 679
D. مثال (10.39) النهاية باستخدام المصفوفات: 685
E. مثال (10.41) النهاية لدالة في ثلاثة متغيرات: 690
F. (10.20) طريقة نيوتن – رافسون: 702
G. مثال (10.44) طريقة نيوتن – رافسون والنهاية: 709
XXXI. المصطلحات الرئيسة 719
XXXII. أسئلة وتمارين 721
XXXIII. مراجع مختارة 724
A. أولاً: الجبر الخطي: 724
B. ثانياً: المفاهيم الأساسية والهندسة التحليلية والتفاضل: 724
C. ثالثاً: مراجع حديثة متعددة: 725
D. رابعاً:المصفوفات: 727

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

الحجاج بن مطر

عالم رياضيات عربي، عاش بين 786 و833. وكان أول من ترجم كتاب العناصرلإقليدس. وترجمه مرةثانية للخليفة العباسي أبي العباس، عبد الله المأمون. وأعاد ترجمة كتاب المجسطيلبطليموس.

EBSCOhost

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

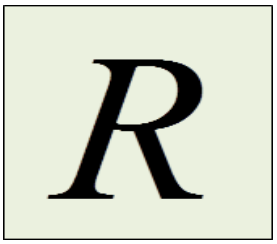
Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCOhost®

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

1

I. المبادىء الأولية

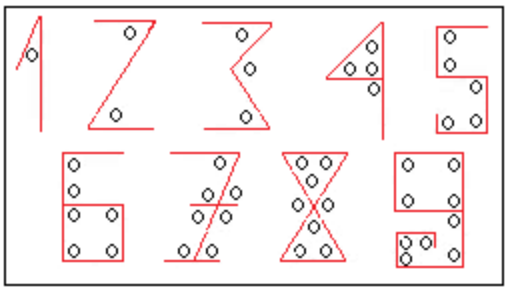


(1.1) الأعداد الحقيقية(*Real Numbers*):

دعنا نُعرّف**الأعداد الطبيعية** (*natural numbers*) بأنها مجموعة الأعداد التي نستعملها في عَدِّ أو قياسِ الأشياءِ من حولنا، (... 0,1,2,3)، مثل: (3) رجالٍ و(5) نساءٍ، و(4) تفاحاتٍ و(50) ديناراً، و(10041.3) م^2 من البناء. ونُعرّف**الأعداد الكاملة**(*integers*) بأنها مجموعة الأعداد التي لا تحتوي كسوراً، لكنها تحمل اشارات (سالبة، أو موجبة)، مثل: جاء (3) رجالٍ، واشتريت (5) حواسيب ، وأفلست (3) شركات، وخسرت (5) دنانير.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310



ونُعرّف **الكسر** (*rational*)، بأنه نسبة عددٍ كامل إلى عدِد طبيعي، مثل (1/2) كغم من التفاح، و(3/4) م^{3}من الماء.

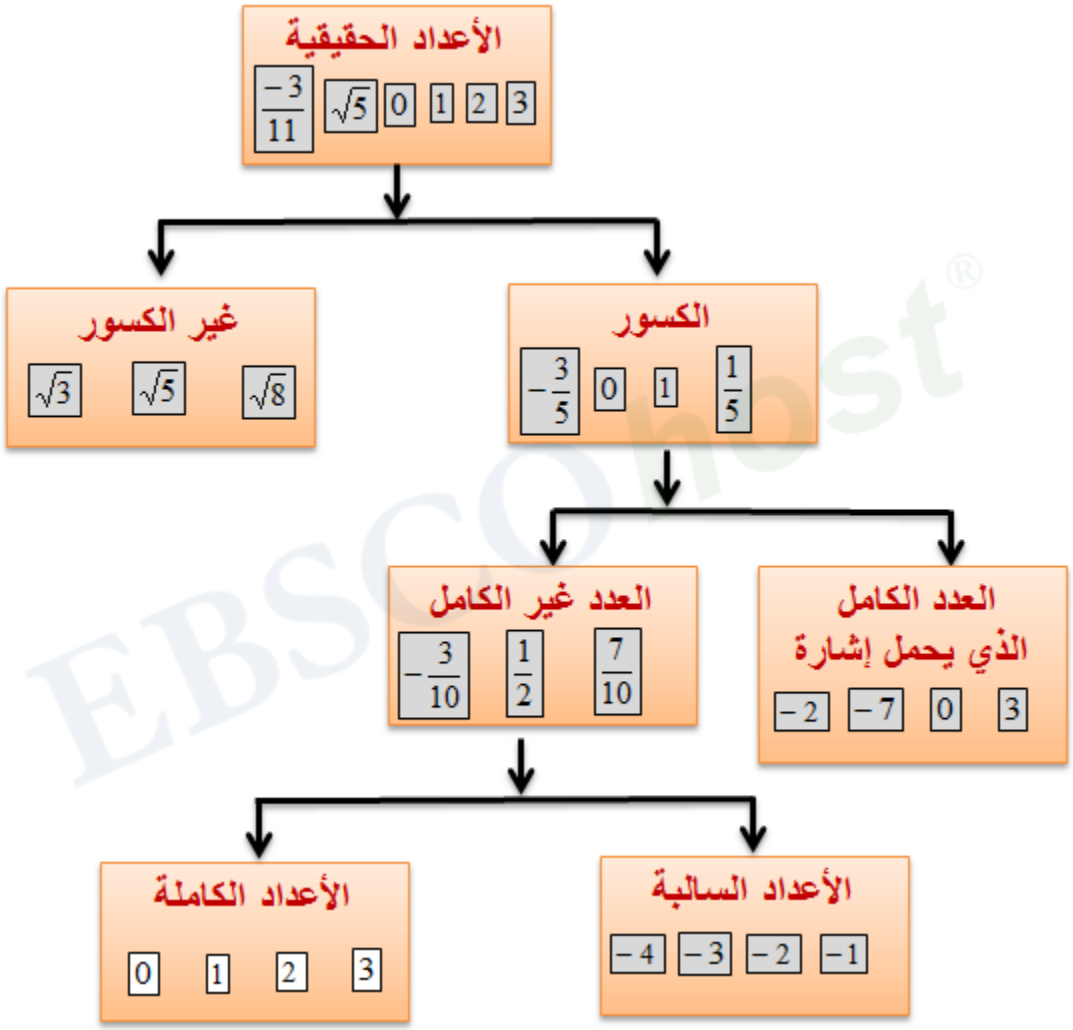
من هذه التعريفات البسيطة والمهمة، نشكّل ما يسمى مجموعة**الأعداد الحقيقية**، وهي **المجموعة الكونية** (*universal set*) التي تضم مجموعة الأعداد الطبيعية، والكاملة، والكسور. وعادة ما يُرمز لها بـ ($\mathbb{R}$)، ويتم تخيُلها على شكلِ خطٍ مستقيم، لانهائي الطول، بحيث يقابل كل نقطة عليه عددٌ **فريدٌ** (*unique*)، لا مثيل له، وغيرُ متكرر على نفس الخط، ويُسمى**خط الأعداد**(*numbers' line*) . فمثلاً

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

($\sqrt{2}$) ليس موجوداً إلا في موقعٍ واحدٍ، وواحدٍ فقط، فريد من نوعه، على خط الأعداد.

شكل (1.1)



وكذلك (**ط**)، النسبة التقريبية (π)، ليست موجودة إلا في موقعٍ واحدٍ، وواحدٍ فقط، على خط الأعداد. وفي

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

سبيل تأكيد المفهوم وترسيخه ونفي اللُبس عنه، يمكننا تمثيل خط الأعداد بأفراد البشر جميعاً، الذين وُجدوا سابقاً، والموجودين حالياً، والذين سيكونوا في المستقبل. فكل شخصٍ منهم هو فريدٌ من نوعه، ولا يُتخيل إلا أن يكون نفسه وليس غيره، ولا يتكرر أبداً. ويمكنُ تمثيل الفكرة نفسها في بصمة الفرد الإنسان التي لا تتكرر، فهي فريدة لكل فردٍ إنسان.

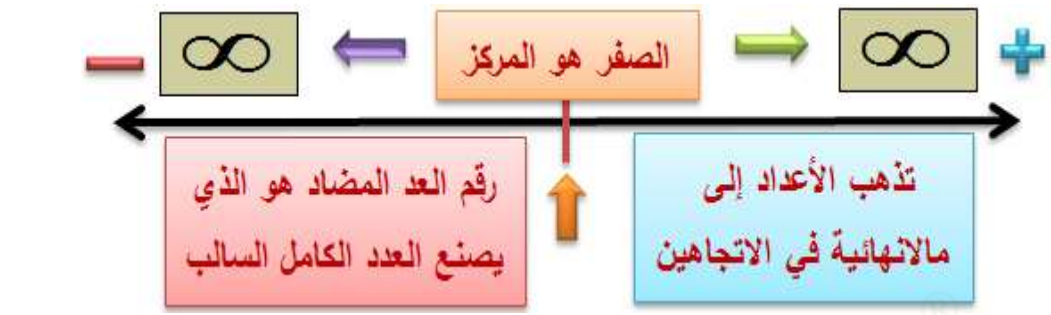
يُعزى أختراع الأرقام (**1, 2, 3,...**) إلى العرب، ولهذا السبب تُسمى (*Arabic numerals*). ويقال بأن الذي ابتدعها أراد تمييز كل رقم عن الآخر بعدد الزوايا الموجودة في شكل الرقم. فيحتوى الواحد زاوية واحدة، ويحتوي الإثنان زاويتين، وهكذا. وكان أهمُ إبداعات العرب اختراع **الصفر**. ويعتبر **علم الجبر** (*algebra*) من اختراع علماء الحساب العرب في القرنين الثامن والتاسع.

توضح الأشكال (1.1، 1.2، 1.3، 1.4، 1.5، 1.6، 1.7، 1.8،) مفهوم الأعداد الحقيقية ومبادئها الأساسية، وما ينتجُ عنها عندما تتفاعل مع بعضها . وتشرح هذه الأشكال نفسها بنفسها.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

شكل (1.2): امتداد الأعداد إلى يمين ويسار الصفر (المركز)

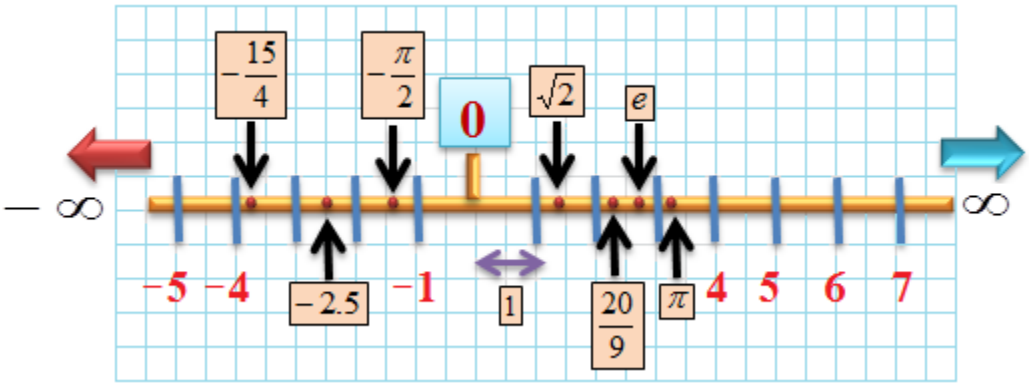


EBSCOhost®

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

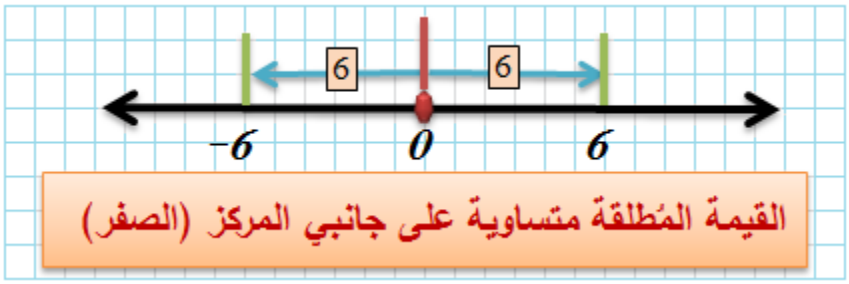
EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

شكل (1.3): صفة كثافة خط الأعداد



شكل (1.4): صفة فردية (*uniquness*) الأعداد

شكل (1.5):القيمة المطلقة



Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

عادة ما تكتب**القيمة المطلقة** (*absolute value*)، أي التي نأخذها ككمية موجبة، حتى لو كانت سالبة أصلاً، كما يلي:

$$|1|,\ |10|,\ ,...,|-6|$$

حيث

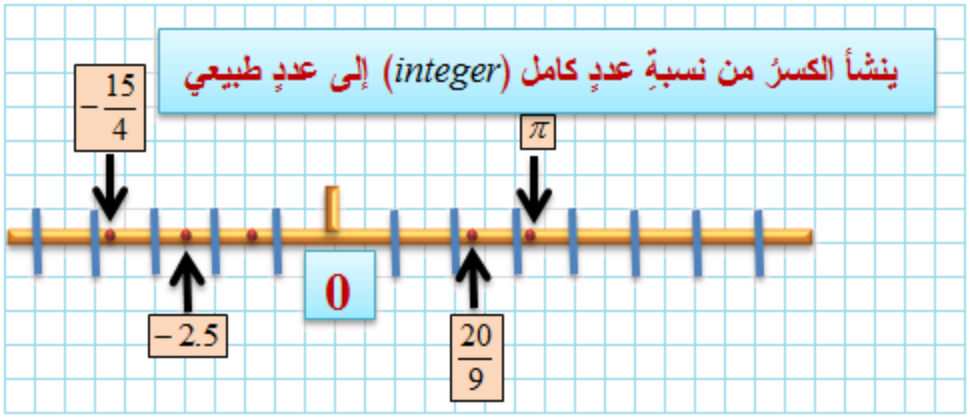
$$|1|=1,\ |10|=10,\ |-6|=6$$

ويُقصَد بذلك أن المسافة إلى يسار الصفر تساوي المسافة إلى يمينه إذا كان العدد متشابهاً، ويحمل إشارة معاكسة. ومثال على ذلك العدد (6) في الشكل (1.5).

شكل (1.6): نشوء الكسر

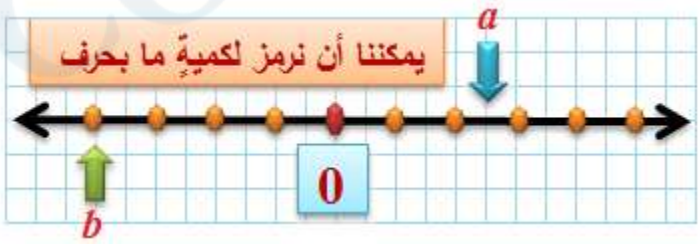
Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310



تنشأ الكمية (15/4-) من نسبة (15-) إلى (4)، أو من نسبة (15) إلى (4-) كما في الشكل (1.6).

شكل (1.7)



من الشكل (1.7) تكون قيمة (a) و (b)، بالنظر فقط، ($a = 2.5$) و ($b=-4$)، على التوالي. وأخيراً فإن الشكل (1.8) يوضح **مجموعة الأعداد الحقيقية**،

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

والمجموعات الفرعية المنبقثة عنها، وهي تختصر الشكل (1.1).

EBSCOhost®

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

شكل (1.8)

تتميز **الأعداد الحقيقية** بمجموعة من الصفات الهامة، لابد منالتقيد بها عند التعامل معها. وفي الجدول أدناه قائمة الصفات وأمثلة على كل واحدة منها:

الصفة	مثال
الصفةالتبادليةفي الجمع ***Commutative in Addintion***	$X+Y=Y+X$ $5+4=4+5$
الصفة التبادلية في الضرب ***Commutattive***	$X\times Y=Y\times X$ $5\times 4=4\times 5$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

in Muliplication	
الصفة الترابطية في الجمع Associative in Addition	$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$ $5+(4+3)=(5+4)+3$
الصفة الترابطية في الضرب Associative in Multiplication	$X\times(Y\times Z)=(X\times Y)\times Z$ $5\times(4\times3)=(5\times4)\times3$
الصفةالتوزيعية Distributive	$X\times(Y+Z)=X\times Y+X\times Z$ $5\times(4+3)=5\times4+5\times3$
الصفةالجمعية للمتساوية Additive Identity	$X+0=X$ $5+0=5$
الصفة الضربية	$X\times1=X$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

للمتساوية *Multiplicative Identity*	$5\times1=5$
الصفةالجمعية المعاكسة *Additive Inverse*	$X+(-X)=0$ $5+(-5)=0$
الصفةالضربية المعاكسة *Multiplicative Inverse*	$X\left(\frac{1}{X}\right)=1,\quad X\neq0$ $5\left(\frac{1}{5}\right)=1$
صفةالصفر *Zero Property*	$X\times0=0$

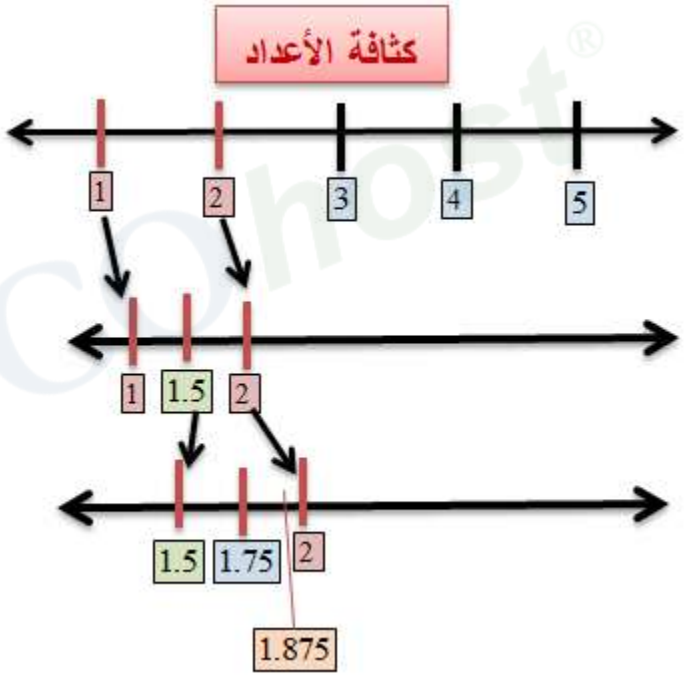
تُضافُ إلى كل ما ذُكر**صفة الكثافة** (*density property*)، التي تقول بأن بين كلِ عددٍ حقيقي

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

وعددٍ حقيقي آخر يوجد عدد حقيقي، كما في الشكل (1.9).

شكل (1.9)



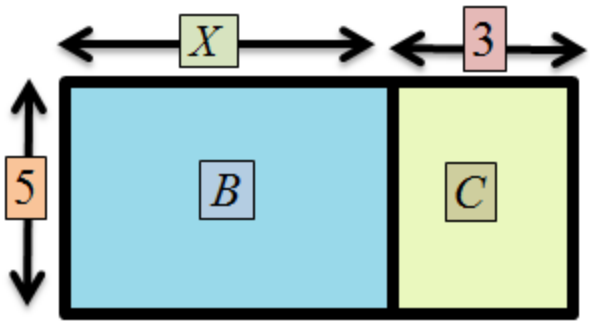
مثال (1.1) الصفة التوزيعية:

لدينا قطعة الأرض المُبينة في الشكل (1.10)، والأبعاد المثبتة عليها.

شكل (1.10)

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310



يمكننا حساب المساحة (A) بطريقتين: **1**) كجزءٍ واحد، وذلك بضرب الطول في العرض. أو **2**) بجمع الجزء (B) مع الجزء (C).

حسابها كجزء واحد:

$$A = 5 \times (X + 3) = 5X + 15$$

حسابها بجمع الجزء (B) إلى الجزء (C).

$$B = 5 \times X = 5X$$
$$C = 3 \times 5 = 15$$
$$A = B + C = 5X + 15$$

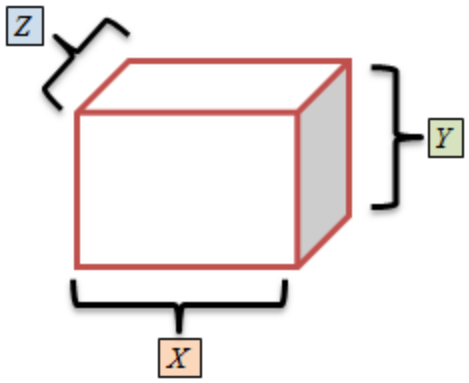
مثال (1.2) الصفة الترابطية:

لدينا الخزان المُبين في الشكل (1.11)، وعليه الأبعاد مثبتة.

شكل (1.11)

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310



يبلغ حجم (V) الخزان:

$$V = X \times Y \times Z = Y \times Z \times X = Z \times X \times Y = \ldots$$

مثال (1.3) أين المشكلة:

لنفترض بأن ($A=X$)، ولذلك تكون

$$A + A = A + X$$
$$2A = A + X$$
$$2A - 2X = A + X - 2X$$
$$2(A - X) = A - X$$

بقسمة الطرفين على (A-X)، نحصل على

$$\frac{2(A-X)}{A-X} = \frac{A-X}{A-X}$$
$$\therefore 2 = 1$$

هل هذا منطقي وصحيح؟ أين المشكلة؟

(1.2) المتغير (*Variable*):

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

يُعرّف المتغير بأنه كمية حقيقية، متجانسة، من شيء ما، تتغير قيمتها من حين لآخر،ومن حالة إلى أخرى، تبعاً لآلية معينة، أو أنه نوعٌ أو جوهرٌ أو صفة تتغير من حالة إلى أخرى. وفي العالم الذي نعيش تحيطُ بنا المتغيرات من كل جانب. فأطوال الأشخاص وأوزانهم ودخولهم وأذواقهم وعدد السكان والحوادث وحجم الاستهلاك والإنتاج والإستثمار والصادرات والدخول وأسعار السلع والأسهم ... والجنس واللون والصفات المتعددة ...إلخ، هي أمثلةٌ على متغيراتٍ بسيطة. فهذه الكميات أو الصفات تختلف من حالة إلى أخرى، فطول محمد مثلاً يختلف عن طول علي، ووزن الجمل يختلف عن وزن الفيل، والدخل الوطني للأردن يختلف عن الدخل الوطني للمغرب، وثقافة الشرق تختلف عن ثقافة الغرب،

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

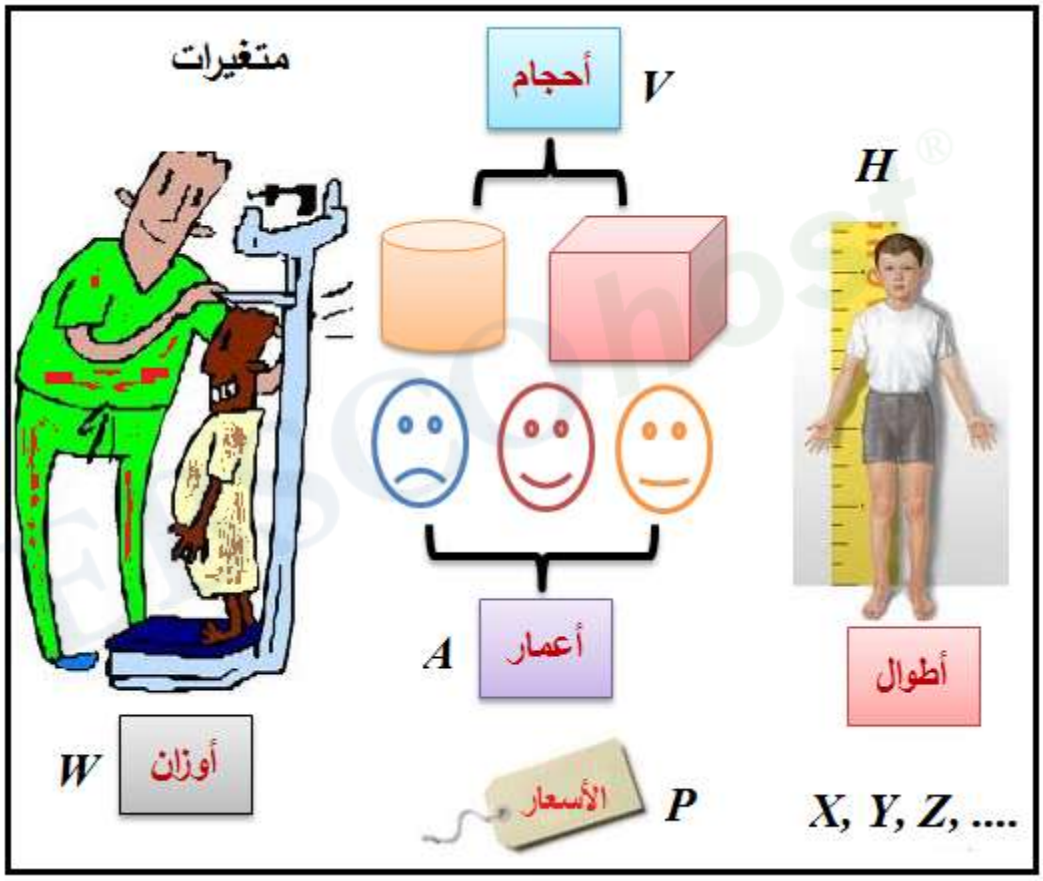
وأسعار القمح تتغير حسب المواسم، والذكر يختلف عن الأنثى ... وهكذا.

وعادة ما تُصَنَف المتغيرات، في إطار البحث العلمي الصرف، تحت مسميات مختلفة، وذلك تبعاً للدور الذي يؤديه المتغير. فإما أن يكون المتغير **مستقلاً**(*independent*)، أي هو الذي يُحدد قيمة متغير آخر، أو **تابعاً**(*dependent*)، أي يتم تحديده من متغير آخر،أو **وسيطاً**(*moderating*)، أي يُحدد اتجاه وقوة العلاقة بين متغيرين، أو **متدخلاً**(*intervening*)، أي يُساعد على بلورة نتيجة التفاعل بين متغيرين. وقد يختلف الدور الذي يؤديه المتغير من حالة إلى أخرى، فربما يكون مستقلاً في وضع، ثم يصبح تابعاً في وضع آخر، وسيطاً في ظاهرة ودخيلاً في ظاهرةٍ أخرى.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

يأتي المتغيرُ على نوعين: الأول هو **المتغير العددي** (أو الرقمي، أو الكمي) (*numerical or quantitative variable*) كالأطوال، والأوزان، والأسعار، والأعمار...إلخ.



أما الثاني فهو**المتغير النوعي** (أو الكيفي أو الصوري، أو الوهمي) (*qualitative variable*)، كالنوع (ذكر

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

أو أنثى)، واللون (أبيض، أسود، ...)، والرأي (نعم، لا)، والجهة الجغرافية (شمال، جنوب ...) ...الخ.ويوصفُ العدد من حيث المقياس الذي يندرجتحته، في إطار أربعة مقاييس:**مقياس الفترة**(*interval scale*)، وهو المقياس الذي ليس له صفر حقيقي. ومن الأمثلة عليه مقياس الحرارة (فهرينهايت، مئوية أو درجة كالفين)، فقد نختار أية قيمة باعتبارها الصفر. وتعتبر خطوط الطول والعرض التي نستخدمها في الملاحة الجوية والبحرية من مقاييس الفترة، حيث تم استخدام بلدة غرينتش قرب لندن المكان الذي تنطلق منه الخطوط إلى الشرق والغرب. أما المقياس الثاني فهو **مقياس النسبة**(*ratio scale*)، ولهذا المقياس صفر حقيقي، ومثال عليه أطوال الأشياء وأوزانها وأبعادها. والمقياس الثالث هو**المقياس الإسمي أو التصنيفي**،(*nominal*

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

orcategorical scale).ومثال عليه تصنيف الأشخاص تحت أوصاف مثل ذكر أو أنثى. أما المقياس الرابع والأخير فهو**المقياس الترتيبي**(*ordinal scale*)، ومن خلاله يتم ترتيب الأشياء حسب نظام معين: تصاعدي، تنازلي من حيث التفضيل (أو عدمه) ...الخ. ومثال على هذا الأخير أن يقوم الشخص بترتيب الأشياء حسب تفضله لها، كأن نقول أن فلان يُحب التفاح أكثر من البرتقال، ويحب البرتقال أكثر من المشمش، فيكون التفاح، بالضرورة، أفضل من المشمش.

المتغير وصفته	وصفه ووظيفته
الثنائي (*Binary or Dichotomous*)	عادة ما يكون تابعاً، ويأخذ إحدى قيمتين: صفر أو واحد صحيح

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

	ليرمز إلى حالة وحالة معاكسة:(نجاح، فشل)، (تحسن،لاتحسن)...إلخ
التصنيفي (الإسمي) *Categorical or Nominal)*	عادة ما يكون مستقلاً أو متنبئاً (*predictor*) ويأخذ إحدى قيمتين: صفر أو واحد صحيح ليرمز إلى نوع أو جنس أو صفة: (ذكر، أنثى)، (متزوج، خلاف ذلك).
المُربك (الغامض) *(Confounding)*	يتراقى فعل هذا المتغير إذا تم استخدام متغيرات مختلفة لقياس نفس الأثر. وعلى سبيل المثال

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

	استخدام أساليب تدريسية مختلفة من قبل مدرسين مختلفين لمعرفة تطور معرفة الطالب.
المُتصل (الفترة) (*Continuous or Interval*)	ليس مقيداً أو محصوراً في قيم معينة. ومثالاً عليه الزمن.
المضبوط (المُشترك، الدخيل أو العرضي) (*Control or Covariate*)	متغير دخيل لايرغب الباحث في اختباره، وعادة ما يرغب في ضبطه.
المعيار (*Criterion*)	الأثر المفترض في دراسة **غير تجريبية**. وهو الظاهرة أو المُتغير المراد

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

	التنبؤ به.
التابع (الظاهرة) (*Dependent*)	الأثر المفترض في **دراسة تجريبية**. أي المُتغير المراد قياسه والتنبؤ به، وهو الظاهرة نفسها.
متقطع (منفصل) (*Discrete*)	لايأخذ إلا قيمة **كاملة** (*Integer*)، سالبة أو موجبة. قد يكون تابعاً أو مستقلاً.
وهمي (صورّي) (*Dummy*)	متغير **تصنيفي**، يأخذ أكثر من قيمتين. ومثالاً الجهات الجغرافية، أو الحالة الإجتماعية: متزوج، أعزب، مُطلق،

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

	أرمل.
داخلي (جواني) (*Endogenous*)	متغير مُحدد القيمة والسلوك **داخل** منظومة آنية، أي المنظومة السببية (*causal system*).
خارجي (براني) (*Exogenous*)	متغير مُحدد القيمة والسلوك **خارج** منظومة آنية، أي المنظومة السببية(*causal system*).
مُستقل (*Independent*)	المُتغير المُسبب في **دراسة تجريبية**. وعادة ما يتم ضبط بقية المتغيرات المُسببة الأخرى.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

مُتدخل (متوسط أو وسيط) (*Intervening*)	يُفسِر علاقة بين متغيرات أخرى، أو يُوضح العلاقة السببية بين متغيرات أخرى. ومثال عليه **دور** المؤسسات في الإنتاج والأداء الاقتصادي.
كامن (*Latent*)	غير مُلاحظ، لكنه موجود إفتراضاً كي يُفسر متغيرات أخرى. ومثلاً عليه متغير **المنفعة** (*utility*) وتفسيره لسلوك المستهلك

مثال (1.4) المتغير العددي:

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

$$Y + 5 = X = 10$$

$$\therefore Y = 5, \quad X = 5$$

مثال (1.5) المتغير العددي:

$$Y = \frac{10}{X} = 2$$

$$\therefore X = 5$$

مثال (1.6) المتغير العددي:

$$Y = 0.25X = 10$$

$$\therefore X = 40$$

فيما يلي بعض الأمثلة على متغيرات كمية تتدرج تحت المقياس النسبي:

أقوى ثلاثة اقتصادات في العالم للعام (2010)

اقتصاد	ن م ج (بالإسعار الجارية)	الاقتصاد	القوة الشرائية[1] (ترليون)

[1] – قوة العملة على شراء السلع والبضائع في دولة ما مقارنة مع القوة الشرائية لعملة دولة أخرى.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

	(ترليون دولار)		دولار)
الإتحاد الأوروبي	15.900	الولايات المتحدة	13.860
الولايات المتحدة	14.620	الصين	7.043
الصين الشعبية	5.879	اليابان	4.305

المصدر (*CIA*, Factbook, 2010). (ن م ج = الناتج المحلي الإجمالي)

مع ملاحظة الفرق بين القيمة الأسمية للناتج المحلي الإجمالي وقيمته من حيث القوة الشرائية لعملة الدولة داخل الدول ذاتها.

أعلى ثلاثة جيوش انفاقاً للعام (2009)

جيش	الإنفاق (بليون دولار)	النسبة من (ن م ج)

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

		(%)
الولايات المتحدة	663.225	3.4
الصين الشعبية	98.800	2.0
بريطانيا	69.271	2.5

المصدر: مؤسسة ستوكهولم الدولية لأبحاث السلام.

EBSCOhost

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

أعلى خمسة اقتصادات من حيث متوسط دخل الفرد (2010)

اقتصاد	متوسط دخل الفرد (ألف دولار أمريكي سنوياً)
قطر	83.841
لوكسيبورغ	78.395
النرويج	52.561

المصدر: صندوق النقد الدولي(2010)

(1.3)الفترة(*Interval*):

هي **مجموعةجزئية**(*subset*) من الأعداد الحقيقية، يحتلها المتغير على خط الأعداد، كأن نقول، مثلاً، بأن عدد السيارات (x) التي يمتلكها سمير لاتقل عن (5) سيارات:

$$x \geq 5$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

مما يعني بأن المتغير (x) يأخذ أية قيمة مساوية لـ (5) أو أكبر منها. أو أن نقول، مثلاً، بأن أحمد يحمل أقل من (5) دنانير (y) في جيبه:

$$y < 5$$

مما يعني أن المتغير (y) يأخذ أية قيمة أقل من (5). وتكون الفترة في الحالة الأولى، حيث ($x \geq 5$)، **مُغلقة من الأسفل**، وهو الحد الأدنى الذي يأخذه المتغير، (5 في هذه الحالة)، لكنها **مفتوحة من الأعلى**، أي لا نهاية لها. وتُكتب بالصيغة التالية:

$$[5, \infty)$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

إذ يعني طرف القوس المُكّعب ( ]) (*bracket*) أن الفترة مُغلقة من طرفها الأيسر، أما الطرف الأيمن، أي القوس الدائري (الهلال) (( )) (*parenthesis*) فيعني أن الفترة مفتوحة من الجهة العلوية. وتُكتب الحالة الثانية كما يلي:

$$(-\infty,5)$$

مما يعني أن الفترة مفتوحة من الجهتين. والحديث عن المتباينة في الجزء أدناه يُبين مفهوم الفترة من خلال الأمثلة.[2] ويوضح الشكل (1.12) كيفية النظر إلى الفترة والأقواس المستخدمة في الفترة.

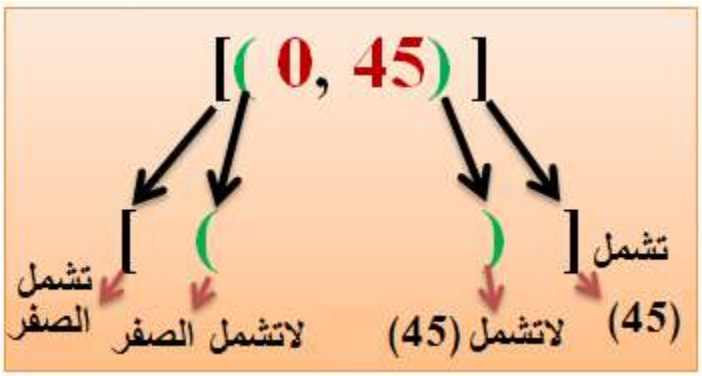
شكل (1.12)

[2]- تستخدم كتب الرياضيات في أوروبا وأمريكيا اللاتينية **المعيار الدولي**(ISO 31-11) المتعلق برموز المجموعات كما في المثالين التاليين: ($]a,b[$) وتعني أن (a)غير مشمولة في الفترة، لكن (b) مشمولة. و ($[a,b[$) وتعني أن (a) مشمولة في الفترة، لكن (b) غير مشمولة. وهكذا يمكن التعميم. أما في أمريكيا الشمالية والمنطقة العربية ومعظم الدول الأخرى، تستخدم الأقواس الدائرية والمكعبة، كما في الأمثلة أعلاه، والأمثلة الواردة عن المتباينة، أدناه.

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

الفترة والتعامل مع الأقواس



شكل (1.13)

يحتوي الشكل(1.13) الفترة التي يحتلها أطوال الرجال، بالمتر، في آخر قياس تم للقرن الميلادي العشرين والأعوام الثلاثة عشر من القرن الميلادي

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

الحادي والعشرين. ولو رمزنا للطول بالحرف (H)، لكانت فترة أطوال الرجال كما يلي:

$$0.535 \le H \le 2.72$$

بمتوسط مقداره (1.6275) متر.

ومن صفات المتغير الذي يقع في فترة ما أنه متصل (مستمر)، وليس فيه أي انقطاع، ولو من الناحية النظرية، على الأقل.

(1.4) المتباينة (اللامتساوية) (*Inequality*):

هي علاقة رياضية بين متغيرين أو أكثر. وعادة ما تأخذ أحد الشكلين التاليين:

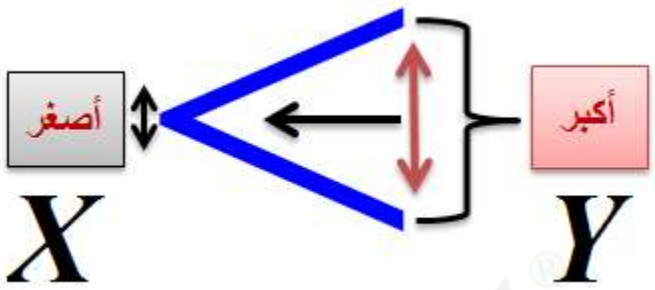
المتباينة الضعيفة (*weak inequality*)، حيث تأخذ الشكل

$$y \ge x$$
$$y \le x$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

تُقرأ الأولى: (y)**أكبر من أو تساوي**(x)، أو أن (x)**ليست أكبر من** (y). وتُقرأ الثانية: (y)**أقل من أو تساوي**(x)، أو أن (y)**ليست أكبر من**(x).



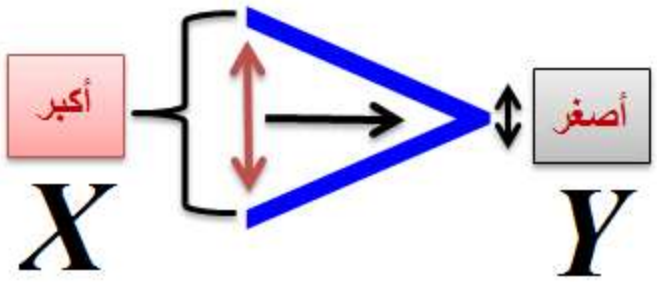
1. المتباينة الصارمة (التامة أو الدقيقة) (strict inequality): حيث تأخذ الشكل:

$$y < x$$
$$y > x$$

تُقرأ الأولى: (y) **أصغر من** (x) **دائماً**، وتقرأ الثانية أن(y)**أكبر من**(x)**دائماً**. **والأشكال** (1.14)– (1.18) توضح بيانياً معنى المتباينة والفترة التي تشغلها على خط الأعداد.

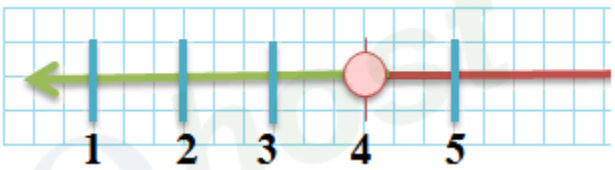
Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310



شكل (1.14): المتباينة($x<4$): وفيها القيمة (4) غير مشمولة،

فهي إذن متباينة مفتوحة الفترة



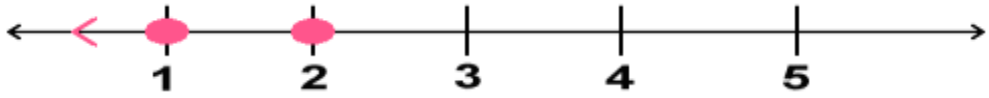
تشير الدائرة الفارغة إلى أن الـ (4) غير مشمولة في الفترة، والسهم إلى اليسار يشير إلى عدم نهايتها.

شكل (1.15): المُتباينة ($x<3$)، و (x) عدد كامل (*integer*):

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

مفتوحة الفترة، وفيها القيم دائماً أقل من (3)، وكاملة العدد.

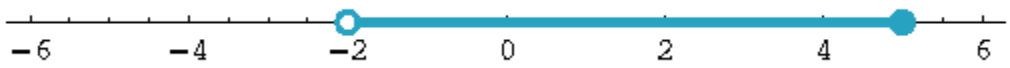


شكل (1.16): المتباينة $(-2 < x \leq 4]$: القيمة (2) غير مشمولة،

وتبدأ المتباينة عند أقصى قيمة لها وهي (4)،

أي أنها مغلقة من الأعلى ومفتوحة من السفل

شكل (1.17): الفترة 5 ,2-[) :مفتوحة من جهة الـ (2) ومغلقة من جهة الـ (5)

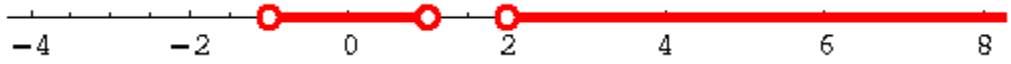


شكل (1.18): اتحاد الفترتين $(-1,\ 1) U (2, \infty)$:

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

كلاهما مفتوحتان



والصورة التالية تعطي معنى عملياً للمتباينة المفتوحة:

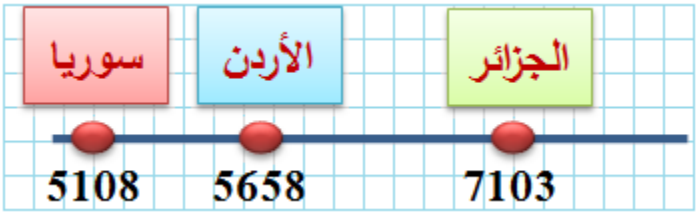
7103	5658	5108
الجزائر	> الأردن >	سوريا

تُبين الأرقام داخل المستطيل متوسط حصة الفرد من (ن م ج) مقيماً (بالدولار الأمريكي) بالقوة الشرائية للعملة الوطنية لكل دولة على التوالي– حسب إحصائيات صندوق النقد الدولي، 2010– وأن حصة الفرد في الأردن أقل من مثيلتها في الجزائر، لكنها أكبر من مثيلتها في سوريا، مثلاً. وتُمثل نفس المتباينة على خط الأعداد كما في الشكل (1.19).

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

شكل (1.19)



قد تأتي اللامتساوية على شكلٍ مركب كما يلي:

$$y + x \geq a$$

حيث ترمز (a) لقيمة ثابتة، مما يعني بأن

$$y \geq a - x$$

وبالتالي، تكون (y) أكبر من أو تساوي $(a\text{-}x)$ دائماً. وسنتعلم كيف نتعامل مع اللامتساويات المركبة من هذه الشكل، وكيف نمثلها بيانياً، في الجزء (1.12) القادم.

B. مثال (1.7) قيمة المتباينة:

لنفترض وجود المتباينة التالية :

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

$$y < 2x - 10$$

تقول هذه المتباينة بأن قيمة المتغير (y) هي أقل من ضعف قيمة المتغير (x) مطروحاً منه المقدار (10). وبعد إعادة ترتيب المتغيرين، نحصل على قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر، كما يلي:

$$y < 2x - 10$$
$$\therefore y + 10 < 2x$$
$$x > \frac{1}{2}y + 5$$

C. مثال (1.8) قيمة المتباينة:

لدينا المعادلة والمتباينة التاليتين:

$$x + y = 7$$
$$1 < x < 4$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

تخبرنا هذه المتباينة بأن مجموع قيمة المتغيرين (x) و (y) هو (7)، لكن شرطاً مسبقاً قد تم وضعه على المتغير (x)، حيث تم تقييده بين (1) و (4). وبالتالي فإن

$$y > 3$$

D. مثال (1.9) قيمة المتباينة:

لدينا المتباينة التالية:

$$-2x \leq -4$$

تخبرنا هذه المتباينة بأن القيمة السالبة لضعف قيمة المتغير (x) أقل من أو تساوي (4−).مما يعني بأن قيمة المتغير (x) لابد أن تكون أكبر من أو تساوي (2).

$$-2x \leq -4$$
$$2x \geq 4$$
$$x \geq 2$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

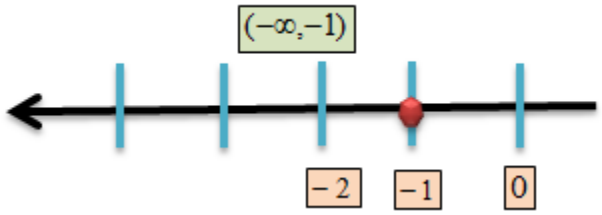
E. مثال (1.10) قيمة المتباينة:

تخبرنا المتباينة التالية بأن المتغير (y) أقل من أو يساوي مربع قيمة المتغير (x). وبالتالي فإن قيمة الجذر التربيعي للمتغير (y) لابد أن تكون أقل من أو تساوي قيمة المتغير (x).

$$y \le x^2$$
$$\therefore \sqrt{y} \le \pm\ x$$

F. مثال (1.11) قيمة المتباينة:

$$3x+10<7$$
$$3x+10-10<7-10$$
$$3x<-3$$
$$x<-1$$



Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

G. مثال (1.12) قيمة المتباينة المركبة:

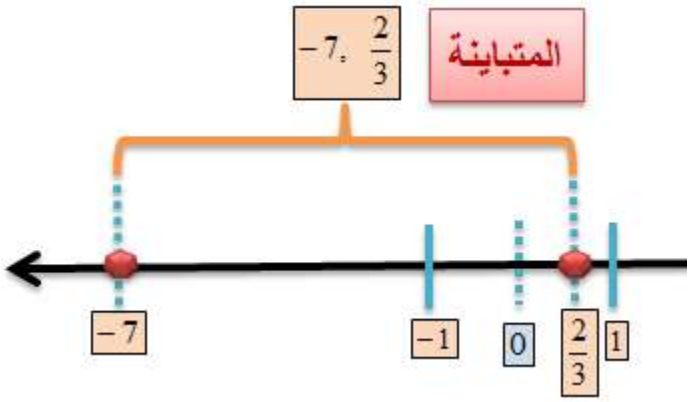
لنفترض بأن $(-15 \le 3x+6 \le 8)$. تخبرنا هذه المتباينة المركبة بأن $(-15 \le 3x+6)$، وأن $(3x+6 \le 8)$، في نفس الوقت. ويتم حل كل متباينة على حده كما يلي. بالنسبة للأولى، فهي:

$$-15 \le 3x+6$$
$$-21 \le 3x$$
$$-7 \le x$$

أما الثانية، فهي:

$$3x+6 \le 8$$
$$3x \le 2$$
$$x \le \frac{2}{3}$$

القيمتان (2/3) و (7−) مشمولتان



Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

H. مثال (1.13) قيمة المتباينة التربيعية:

لدينا المتباينة

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

يمكننا تحليل هذه المتباينة إلى عواملها الأولية كما يلي:

$$(x-2)(x-5) < 0$$

وبالتالي تكون

$$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$
$$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$$

I. (1.5) المعادلة (Equation):

المعادلة تعبيرٌ رياضي عن حالة تساوي بين طرفين، بحيث يكون المجموع الكلي في طرف، والمكونات الفردية التي شكلت المجموع الكلي في طرفٍ آخر.

ومثال عليها المعادلة

$$y = 3 + x$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310

فإذا كانت ($x = 5$)، فإن ($y = 8$)، وإذا كانت ($x = 0$) فإن ($y = 3$)، وإذا كانت ($x = -4$) فإن ($y = -1$)، وهكذا. وتأتي المعادلات على شكلين أساسيين: خطية (*linear*)، و غير خطية (*nonlinear*).

وتكون الصيغة العامة للمعادلة الخطية كما يلي:

$$ax + b = 0$$

حيث ($a \neq 0$).وفيها يكون المتغير (x) مرفوع للقوة الواحد الصحيح الموجب (+1). ومثال عليها المعادلة المبينة أعلاه. أما إذا كانت أكبر قوة مرفوع إليها المتغيرتختلف عن الواحد الصحيح الموجب، فإن المعادلة تكون غير خطية. ومثال على ذلك المعادلات:

$$y = 5 + x^2$$

$$w = x^3 - 16$$

$$z = -3 - x^4$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$\cos(x) = 0$$

Copyright © 2014. dar al-yazori. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

EBSCO Publishing : eBook Collection (EBSCOhost) - printed on 2/7/2018 12:23 PM via NAJRAN UNIVERSITY
AN: 941499 ; .;
Account: ns153310