

# الأكاديمية العربية الدولية



الأكاديمية العربية الدولية  
Arab International Academy

---

## الأكاديمية العربية الدولية المقررات الجامعية

---

الدكتور  
بسام المفردني

كلية العلوم - جامعة دمشق

# ميكانيكي الكم «٢»

لطلاب السنة الرابعة - قسم الفيزياء

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

١٤٠٨ - ١٤٠٩ هـ

١٩٨٨ - ١٩٨٩ م

مطبعة خالد بن الوليد

## مقدمة

يمثل هذا الكتاب حصيلة محاضرات في ميكانيك الكم القيتها على طلاب السنة الرابعة في قسم الفيزياء من كلية العلوم بجامعة دمشق خلال عدة سنوات .

يدرس الطالب هذا المقرر بعد أن يجتاز مقرري الفيزياء الكهربية وميكانيك الكم ( ١ ) حيث يجد فيهما عرضاً تاريخياً لتطور الأفكار الضرورية لفهم بنىة الذرة ونواتها ، كما يجد المعطيات التجريبية التي يستند اليها ميكانيك الكم . لذلك لا يتعرض هذا الكتاب اطلاقاً الى التطور التاريخي لنظرية الكم .

تعد الأفكار المطروحة في هذا الكتاب استمراراً للأفكار الواردة في مقرر ميكانيك الكم ( ١ ) وتكميلاً لها .

يركز هذا الكتاب بصورة رئيسة على الأفكار الفيزيائية والصيغ الرياضية لنظرية الكم التي تعالج حركة جسيم مفرد ضمن حقل خارجي ، ويظهر بشكل خاص عدم صلاحية فكرة الحركة النسبوية لجسيم مفرد . نركز الاهتمام أيضاً على نظرية التمثيل ونظرية التبعر ونظرية الانتقالات الكهربية ، ونشرح بعض التفصيل لنظرية الجمل المكونة من بوزونات متماثلة أو فيرميونات كما نخصص بعض الفقرات لدراسة الطرائق التقريبية لمعالجة الذرة والجزيئات .

تلعب نظرية التكميم الثاني دوراً هاماً كطريقة لدراسة جمل مؤلفة من عدد كبير من الجسيمات المتماثلة ، فنتطرق في هذا الكتاب الى الافكار الاساسية لطرائق تكميم حقل الميزونات وكذلك تكميم الحقل الكهروطيسي ( بدون شحنات ) .

يمكن استخدام هذا الكتاب كمنطلق لدراسة التحريك الكهربائي الكهومي والفيزياء النووية وفيزياء الجسم الصلب ، ولا بد أن يكون القارئ مطلعاً على المضمون

العادي للكتب الرياضية الجامعية والميكانيك الكلاسيكي والنظرية الكهرطيسية .  
ان الرموز المستخدمة مشروحة ضمن الكتاب كما ان المقادير المتجهة كتبت  
بحروف دابغة .

تعد مواضيع هذا الكتاب مستقلة الى حد ما ، وبهذا يمكن دراسة مجموعة  
من المواضيع دون الالتزام بالترتيب الوارد ، ولقد جاءت هذه المواضيع متفقة مع  
الخطة للموضوعة من قبل وزارة التعليم العالي لمتهج ميكانيك الكم (٢) .

دمشق في ١٥/١٢/١٩٨٧

د. بسام المقربي



## الفصل الأول

### نظرية التمثيل

## نظرية التمثيل

### ١ - التمثيلات المختلفة لشعاع الحالة :

لقد اعتدنا على وصف جملة ما بالتابع الموجي  $\psi_a(\xi, t)$  وهو تابع لجميع الاحداثيات  $\xi$  في لحظة معينة  $t$  . يشير الدليل  $a$  الى مجموعة قيم لمقادير فيزيائية ، أو يشير الى الأعداد الكمومية المقابلة لقيم المقادير التي تعين الحالة .

يدعى وصف حالة جملة ما بواسطة تابع للاحداثيات ( التابع الموجي ) بالتمثيل الإحداثي ، ويحدد مربع القيمة المطلقة للتابع الموجي المستظم ، في التمثيل الإحداثي ، احتمال الرصد في تلك الحالة المحددة بقيم الاحداثيات  $\xi$  . ويدعى الرمز  $\xi$  الممثل لمجموعة من قيم المتحولات التي يرتبط بها التابع الموجي ، بدليل التمثيل . سنعالج في الفقرات الثلاث التالية حالات في لحظة معينة ، لذلك لن نذكر الزمن بصورة صريحة ، ولسوف نستخدم ، اضافة للرمز  $\psi_a(\xi)$  للتابع الموجي في التمثيل الاحداثي ، رموز ديراك فنكتب :

$$\psi_a(\xi) \equiv \langle \xi | a \rangle \quad (1)$$

وسنوضح فيما يلي أهمية استخدام رمز البراكيت ( ديراك ) . فاستناداً الى ديراك ، يمكن التعبير عن أية حالة  $(a)$  من جملة كمومية ( بغض النظر عن طريقة التمثيل ) بواسطة مقدار يدعى بشعاع الكيت ويرمز له بالرمز  $|a\rangle$  ويمكن جمع أشعة الكيت وفقاً لمبدأ التراكم ، كما يمكن ضربها بمعاملات عقدية أو سلمية ، ونحصل على أشعة كيت جديدة . وتشكل جميع أشعة الكيت الممكنة فراغاً له عدد لا نهائي من الأبعاد يدعى فراغ هيلبرت .

يمكننا اسناد شعاع حالة ندعوه برا لكل شعاع من أشعة الكيت ونرمز له بالرمز  $|a\rangle$  حيث يرتبط بشعاع الكيت وفق العلاقة البسيطة  $\langle a| = |a\rangle^+$  . ويمكن التعبير عن أية حالة لجملة ديناميكية بشعاع الكيت أو شعاع البرا . وتشكل جميع أشعة البرا الممكنة فراغاً ازدواجياً (Dual) مع فراغ هيلبرت لشعاع الكيت . إن لشعاع الكيت طبيعة مختلفة عن شعاع البرا فهما لا يجمعان مع بعضهما وبالتالي لا يمكن فصلهما الى جزء حقيقي صرف وآخر تخيلي صرف . فهما مقداران عقديان من نوع خاص . فاذا أثر مؤثر هرميتي  $(\hat{F} = \hat{F}^+)$  من اليسار في أشعة الكيت ، حوّلها الى أشعة كيت أخرى ، وكذلك يحول المؤثر الهرميتي الذي يؤثر من اليمين في أشعة البرا ، الى أشعة برا أخرى أي :

$$|b\rangle = \hat{F} |a\rangle$$

$$\langle b| = (\hat{F} |a\rangle)^+ = \langle a| \hat{F}^+ = \langle a| \hat{F}$$

يقابل الاصطلاحان برا وكيت جزأي الكلمة الانكليزية برا كيت (bracket) ونرمز للجداء السلمي لشعاعين من أشعة الكيت  $|a\rangle$  و  $|b\rangle$  بالقوس  $\langle b|a\rangle$  ، اذ يتشكل من ضرب شعاع الكيت  $|a\rangle$  بشعاع البرا المزدوج مع شعاع الكيت  $|b\rangle$  . فالجداء السلمي هو عدد عقدي نظامي يحقق العلاقة  $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$  .

تميز حالة الجملة الكمومية ، وفقاً لمبدأ التراكب ، باتجاه الشعاع  $|a\rangle$  في فراغ هيلبرت وليس بقيمته المطلقة اذ تستنظم أشعة الحالة بشكل تكون معه قيمها المطلقة مساوية الواحد أي  $\langle a|a\rangle = 1$  ، ويعين هذا الشرط شعاع الحالة مع تجاوز فرق في الطور  $e^{i\varphi}$  حيث  $\varphi$  عدد حقيقي ، لأن للشعاعين  $|a\rangle$  و  $|a\rangle e^{i\varphi}$  القيمة المطلقة نفسها .

يوصف شعاع الحالة  $|a\rangle$  في التمثيل الاحداثي بالتابع الموجي (1) المرتبط بالاحداثيات  $\xi$  . ويمكننا استناداً الى تعريف الجداء السلمي  $\langle b|a\rangle$  عد التابع الموجي (1) جداءً سلمياً لشعاع الحالة  $|a\rangle$  بشعاع الحالة  $|a\rangle$  من أجل جميع قيم الاحداثيات  $\xi$  التي ينظر اليها كأدلة للحالة . وبتعبير آخر ان القيم  $\langle \xi|a\rangle$  هي مساقط شعاع الحالة على قاعدة تامة لأشعة البرا  $|a\rangle$  ، ويكون التابع الموجي  $\langle \xi|a\rangle$  ، مثل أي جداء سلمي ، عدداً عقدياً عادياً .

ليس التمثيل الاحداثي ، لشعاع الحالة ، وحيداً . فهو كما في الفراغ الثلاثي المؤلف ، حيث نستطيع اختيار جملة الاحداثيات ، المؤلفة من ثلاثة أشعة واحدة متعامدة متنى متنى ، بالشكل الذي نريده . أي أن شعاع الحالة في فراغ هيلبرت يُعرّف بدلالة قيم احداثياته . ونستخدم كأشعة قاعدية لفراغ هيلبرت مجموعة تامة من الاشعة المتعامدة أو التوابع القاعدية المقابلة لهذه الاشعة المتعامدة . ولما كانت جميع التوابع الذاتية ، لأي مؤثر هرميتي في ميكانيك الكم ، تشكل مجموعة تامة من التوابع المتعامدة ، فاننا نستطيع استخدام أي منها كتوابع قاعدية لفراغ هيلبرت .

تدعى مجموعة الأمثال  $\langle F|a\rangle$  في الشر

$$|a\rangle = \sum_p |F\rangle \langle F|a\rangle$$

لشعاع الحالة  $|a\rangle$  بدلالة التوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{F}$  ، بالتابع الموجي للحالة  $a$  في التمثيل المقابل للمؤثر  $\hat{F}$  ، أو التمثيل  $F$  . أي أننا نستطيع كتابة شعاع الحالة في التمثيل الطاقي (التمثيل  $E$ ) أو في التمثيل الاندفاعي (التمثيل  $p$ ) وهكذا ... لنوضح الآن بعض هذه الأفكار بالنظر الى أمثلة معينة . سنختار جملتين قاعديتين من التوابع : أ - التوابع الذاتية لمؤثر قيمه الذاتية منفصلة ، ب - التوابع الذاتية لمؤثر قيمه الذاتية مستمرة ، ونستطيع بسهولة تعميم النتائج فنحصل على الحالة المقابلة لمؤثر له قيم ذاتية منفصلة وأخرى مستمرة .

١- التمثيل الطاقي ( التمثيل E ) : سنختار التوابع الذاتية لمؤثر هاميلتون،  
 ذي القيم الذاتية المنفصلة ، كتوابع قاعدية لوصف شعاع الحالة  $|a\rangle$  ، ونرمز  
 لهذه التوابع في التمثيل الاحداثي بالرمز

$$\varphi_{E_n}(\xi) \equiv \langle \xi | E_n \rangle. \quad (2)$$

كما نستخدم للتوابع العقدية المرافقة لها الرمز

$$\varphi_{E_n}^*(\xi) \equiv \langle E_n | \xi \rangle. \quad (3)$$

أي لدينا

$$\langle E_n | \xi \rangle = \langle \xi | E_n \rangle^* \quad (4)$$

ونكتب شرط الاستنظام والتعامد للتوابع (2) بالشكل :

$$\int d\xi \varphi_{E_m}^*(\xi) \varphi_{E_n}(\xi) = \delta_{E_m E_n}. \quad (5)$$

أو باستخدام رموز ديراك

$$\int d\xi \langle E_m | \xi \rangle \langle \xi | E_n \rangle \equiv \langle E_m | E_n \rangle = \delta_{E_m E_n}.$$

فاذا رغبنا في التحول من التمثيل الاحداثي  $\varphi_a(\xi) = \langle \xi | a \rangle$   
 الى التمثيل الطاقي لشعاع الحالة  $\psi_a \equiv |a\rangle$  ، فاننا ننشر توابع التمثيل  
 بدلالة التوابع القاعدية (2) فنجد :

$$\psi_a(\xi) = \sum_{E_n} \varphi_{E_n}(\xi) \psi_a(E_n), \quad (6)$$

$$\langle \xi | a \rangle = \sum_{E_n} \langle \xi | E_n \rangle \langle E_n | a \rangle.$$

ان مجموعة أمثال النشر  $\Psi_a(E_n) \equiv \langle E_n | a \rangle$  هي التابع الموجي للحالة  $|a\rangle$  في التمثيل الطاقى •

تكون طاقة الجملة ، التي تأخذ قيماً منفصلة ، هي المتحول المستقل للتابع الموجي في التمثيل الطاقى ، ويحدد مربع القيمة المطلقة للتابع الموجي ، في التمثيل الطاقى ، احتمال وجود الجملة بطاقة تساوي قيمة الطاقة المقابلة أي :

$$W(E_n) = |\Psi_a(E_n)|^2 \equiv |\langle E_n | a \rangle|^2$$

فإذا كان التابع في التمثيل الاحداثي مستظماً ، كان هذا التابع في التمثيل الجديد مستظماً أيضاً • ونستطيع اثبات هذا الأمر كما يلي :

$$\int d\xi \langle a | \xi \rangle \langle \xi | a \rangle = 1$$

ان

$$\langle a | \xi \rangle = \sum_n \langle a | E_n \rangle \langle E_n | \xi \rangle \quad \text{and} \quad \langle \xi | a \rangle = \sum_n \langle \xi | E_n \rangle \langle E_n | a \rangle.$$

وباستخدام العلاقة (5) نجد :

$$\sum_n \langle a | E_n \rangle \langle E_n | a \rangle \equiv \sum_n |\psi_a(E_n)|^2 = 1,$$

وهو الشرط الذي يجعل التوابع الموجية ، في التمثيل الطاقى ، منظمة •

وباستخدام خاصتي التعامد والتنظيم للتوابع القاعدية (2) نستطيع

الحصول على التحويلات المعاكسة فنجد :

$$\psi_a(E_n) = \int d\xi \varphi_{E_n}^*(\xi) \psi_a(\xi), \quad (7)$$

أو

$$\langle E_n | a \rangle = \int d\xi \langle E_n | \xi \rangle \langle \xi | a \rangle$$

ب- التمثيل الاندفاعي ( التمثيل  $p$  ) : ان التوابيع القاعدية في التمثيل الاندفاعي هي التوابيع الذاتية لمؤثر الاندفاع .

$$\varphi_p(\xi) \equiv \langle \xi | p \rangle \quad (8)$$

أو

$$\int d\xi \langle p' | \xi \rangle \langle \xi | p \rangle = \langle p' | p \rangle \equiv \delta(p' - p) \quad (9)$$

وبنشر تابع الحالة  $\Psi_a(\xi)$  بدلالة مجموعة التوابيع التامة (8) نجد:

$$\Psi_a(\xi) = \int dp \varphi_p(\xi) \Psi_a(p)$$

لأن القيم الذاتية لـ  $p$  مستمرة .

أو

$$\langle \xi | a \rangle = \int dp \langle \xi | p \rangle \langle p | a \rangle \quad (10)$$

يحدد التابع  $\Psi_p(p) \equiv \langle p | a \rangle$  شعاع الحالة  $|a\rangle$  في التمثيل الاندفاعي، ويعطي مربع القيمة المطلقة لهذه التوابيع ، كثافة الاحتمال في فراغ الاندفاع

$$\rho(p) = \frac{dW(p)}{dp} = |\langle p | a \rangle|^2 \equiv |\Psi_a(p)|^2 \quad (11)$$

ويأخذ التحويل المعاكس للعلاقة (10) الشكل :

$$\langle p | a \rangle = \int d\xi \langle p | \xi \rangle \langle \xi | a \rangle$$

وبناءً على ما تقدم فإن شعاع الحالة للجملة  $|a\rangle$  يوصف بعدة توابع موجية مرتبطة بمتحولات مختلفة أي :

$$|a\rangle \left[ \begin{array}{ccc} \langle \xi | a \rangle & \xi & \text{التمثيل} \\ \langle E_n | a \rangle & E & \text{التمثيل} \\ \langle p | a \rangle & p & \text{التمثيل} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

ويتم الانتقال من التابع الموجي  $\langle m | a \rangle$  المحدد للحالة في التمثيل  $m$  الى تمثيل آخر وليكن  $q$  وفق العلاقة العامة التالية :

$$\langle q | a \rangle = \sum_m \langle q | m \rangle \langle m | a \rangle, \quad (12)$$

حيث  $\langle q | m \rangle$  هي التوابع الذاتية للمؤثر المقابل للمقدار الفيزيائي  $m$  في التمثيل  $q$ .

أما علاقة التحويل المعاكس للعلاقة (12) فهي

$$\langle m | a \rangle = \sum_q \langle m | q \rangle \langle q | a \rangle, \quad (13)$$

حيث  $\langle q | m \rangle^+ = \langle m | q \rangle$  هي التوابع الذاتية المقابلة للمقدار الفيزيائي  $q$  في التمثيل  $m$ . ويستبدل بالمجموع في العلاقتين (12) و (13) التكامل عندما تكون المتحولات  $q$  و  $m$  مستمرة، (كما في (10)).  
توضح العلاقتان (12) و (13) ملائمة استخدام رموز ديراك في وصف أشعة الحالة وخاصة عندما نود الانتقال من تمثيل الى آخر، فنستطيع استخدام علاقات التمام للتوابع الذاتية وتكتب :

$$\sum_m |a_m|^2 \equiv \sum_m |m\rangle \langle m| = 1,$$

$$\int dp |a_p|^2 \equiv \int dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad (14)$$

وهكذا نستطيع باستخدام العلاقة (14) إعادة كتابة المعادلات بشكل مختلف وتصبح العلاقة (12) من الشكل

$$\langle q|a\rangle = \int dp \langle q|p\rangle \langle p|a\rangle$$

وبتكرار هذه العملية نجد :

$$\begin{aligned} \langle q|a\rangle &= \int dp \langle q|p\rangle \langle p|a\rangle = \\ &= \int dp d\xi \langle q|p\rangle \langle p|\xi\rangle \langle \xi|a\rangle \end{aligned}$$

لننظر الآن الى الصيغ الصريحة لبعض التوابع في التمثيلات المختلفة .

أ - الصيغة الصريحة للتوابع الذاتية لمؤثر الاندفاع (8) والمنظمة وفق المعادلة (9) ، في التمثيل الاحداثي هي :

$$\langle r|p\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i(p\cdot r)/\hbar}$$

أما التحويل المعاكس فهو

$$\langle p|r\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-i(p\cdot r)/\hbar}$$

ويمثل التابع الذاتي للاحداثي في التمثيل الاندفاعي ، وهو المرافق العقدي لتابع التحويل الأصلي .

ب - تكتب التوابع الذاتية لمؤثر عزم الاندفاع (أو الاندفاع الزاوي) في التمثيل الاحداثي ، بالصيغة

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | lm \rangle \equiv \langle \frac{\mathbf{r}}{r} | lm \rangle \quad (15)$$

حيث تحدد الزاويتان  $\theta$  و  $\varphi$  اتجاه شعاع الموضع وتكون التوابع (15) منظمة أي :

$$\int Y_{lm}^* (\theta, \varphi) Y_{l'm'} (\theta, \varphi) d\Omega =$$

$$\int d\Omega \langle lm | \theta \varphi \rangle \langle \theta \varphi | l'm' \rangle = \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'} \quad (16)$$

تولد التوابع (15) تحويلاً من تمثيل الاندفاع الزاوي الى التمثيل الاحداثي وتولد التوابع  $\langle lm | \theta \varphi \rangle$  التحويل المعاكس ( من التمثيل الاحداثي الى تمثيل الاندفاع الزاوي ) . فإذا عرفنا شعاع الوحدة  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  الذي تحدد اتجاهه الزاويتان  $\theta, \varphi$  نكتب عندها  $\langle lm | \mathbf{n} \rangle = \langle lm | \theta \varphi \rangle$  وتكون هذه التوابع منظمة وفق العلاقة :

$$\sum_{l,m} \langle \mathbf{n} | lm \rangle \langle lm | \mathbf{n}' \rangle = \langle \mathbf{n} | \mathbf{n}' \rangle = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}').$$

واذا حددت الزاويتان  $\theta$  و  $\varphi$  اتجاه شعاع الاندفاع عندها تكون التوابع

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right) \equiv \langle \frac{\mathbf{p}}{p} | lm \rangle$$

هي التوابع الذاتية لمؤثر الاندفاع الزاوي في التمثيل الاندفاعي .

## ٢ - التمثيلات المختلفة للمؤثرات :

المؤثر هو الجداء  $|b\rangle \langle a|$  حيث نضع شعاع الكيت الى يسار شعاع البرا . وكما هو الحال بالنسبة لأي شعاع ، يمكن نشر الشعاع  $|a\rangle$  بدلالة مجموعة تامة من الاشعة المتعامدة  $|F_m\rangle$  المقابلة للمؤثر  $\hat{F}$  أي :

$$|a\rangle = \sum_m |F_m\rangle \langle F_m | a \rangle.$$

ويمكننا نشر أي مؤثر  $\hat{A}$  بدلالة مجموعة تامة من المؤثرات  $|F_m\rangle \langle F_n|$

فإذا كان

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn} |F_m\rangle \langle F_n|,$$

فإننا نستطيع استخدامين تعامد وتنظيم الأشعة  $|F_m\rangle$  أن نعين بصورة وحيدة عناصر المصفوفة في النشر أي :

$$A_{mn} = \langle F_m | \hat{A} | F_n \rangle$$

ويكون نشر المؤثر الواحد  $\hat{I}$  من الشكل :

$$\hat{I} = \sum_m |F_m\rangle \langle F_m|.$$

نعتبر عن المؤثرات في التمثيل الاحداثي بتوابع للاحداثيات وبمشتقات بالنسبة للاحداثيات .

فإذا أثرت هذه المؤثرات على توابع في التمثيل الاحداثي فإنها تحولها الى توابع أخرى في التمثيل نفسه . ان تأثير المؤثر  $\hat{F}$  ، مثلاً ، على التابع  $\psi_a(\xi)$  يعرف بالعلاقة

$$\psi_b(\xi) = \hat{F} \psi_a(\xi)$$

أو وفق رموز ديراك

$$\langle \xi | b \rangle = \hat{F} \langle \xi | a \rangle \quad (17)$$

فإذا انتقلنا من التمثيل الاحداثي الى تمثيل آخر لشعاع الحالة ، فلا بد

بالضرورة أن نحول المؤثرات أيضاً • لنحدد الآن شكل المؤثر  $\hat{F}$  في التمثيل الطاقى ، فنحول التوابيع كما يلي :

$$\langle \xi | a \rangle = \sum_n \langle \xi | E_n \rangle \langle E_n | a \rangle ,$$

$$\langle \xi | b \rangle = \sum_n \langle \xi | E_n \rangle \langle E_n | b \rangle$$

نعوض في المعادلة (17) ونضرب المعادلة الناتجة بالمقدار  $\langle E_n | \xi \rangle$  ثم نكامل على المتحول  $\xi$  فنجد بعد استخدام الشرط

$$\int d\xi \langle E_m | \xi \rangle \langle \xi | E_n \rangle = \delta_{mn}$$

أن

$$\langle E_m | b \rangle = \sum_n \langle E_m | \hat{F} | E_n \rangle \langle E_n | a \rangle , \quad (18)$$

حيث :

$$\langle E_m | \hat{F} | E_n \rangle \equiv \int d\xi \langle E_m | \xi \rangle F \langle \xi | E_n \rangle \equiv \int d\xi \psi_{E_m}^* \hat{F} \psi_{E_n} \equiv F_{mn} . \quad (19)$$

وبمعرفة المقدار (19) نستطيع ، مستخدمين العلاقة (18) ، التحويل من شعاع الحالة  $|a\rangle$  المعطى بالتابع  $\langle E_n | a \rangle$  في التمثيل الطاقى ، الى شعاع الحالة  $|b\rangle$  المعطى بالتابع  $\langle E_m | b \rangle$  في التمثيل الطاقى • وتمثل المقادير (19) المؤثر  $\hat{F}$  في التمثيل الطاقى •

تشكل الأعداد  $F_{mn}$  ، وهي أعداد عقدية بصورة عامة ، مصفوفة

نرمز لها بالرمز  $(F_{mn})$  وتدعى المقادير  $F_{mn} = \langle E_m | \hat{F} | E_n \rangle$

بمعاصر المصفوفة للمؤثر  $\hat{F}$  في التمثيل الطاقى • فإذا كانت مستويات الطاقة  $E_n$  غير منطبقة ، فإن المصفوفة  $(F_{mn})$  تأخذ شكلاً له عدد لا نهائي من الأسطر مرقمة بالدليل  $m$  وعدد لا نهائي من الأعمدة المرقمة بالدليل  $n$  ، أما في حالة الانطباق ، فإن كل دليل  $(m \text{ أو } n)$  يميز مجموعة كاملة من الأعداد الكمومية تكتب في بعض الحالات بصورة صريحة ، وتحدد حالة الجملة وتكون المصفوفة  $(F_{mn}) \equiv (a' b' c' \dots | \hat{F} | abc \dots >)$  متعددة الأبعاد •

واستناداً الى تعريف المرافق العقدي أو المؤثر الهرميتي ، نجد أن المرافق العقدي للمؤثر الهرميتي يوصف ، في التمثيل الطاقى أو في أي تمثيل قيمه منفصلة ، بمصفوفة هرميتية لأن المعادلة  $F_{mn} = F_{nm}^*$  محققة دوماً •

فإذا كتبنا المقدار  $\langle E_n | a \rangle$  ، الذي يعبر عن شعاع الحالة  $|a\rangle$  في التمثيل الطاقى ، على شكل مصفوفة ذات عمود واحد

$$(\langle E_n | a \rangle) = \begin{bmatrix} \langle E_1 | a \rangle \\ \langle E_2 | a \rangle \\ \langle E_3 | a \rangle \\ \vdots \end{bmatrix}$$

فإن المعادلة (18) تعبر عن جداء المصفوفات •

ان مؤثر هاميلتون  $\hat{H}$  يشكل مصفوفة قطرية في التمثيل الطاقى

$$\langle E_m | \hat{H} | E_n \rangle = E_n \delta_{mn}$$

وينتج هذا مباشرة من المعادلة (19) اذا تذكرنا أن التوابع  $\langle \xi | E_n \rangle$

هي التواب الذاتية للمؤثر  $\hat{H}$  أي :

$$\hat{H} \langle \xi | E_n \rangle = E_n \langle \xi | E_n \rangle$$

لنعين الآن شكل المؤثر  $\hat{F}$  في التمثيل الاندفاعي ، فنشر التواب (18) المكتوبة وفق التمثيل الاحداثي ، بدلالة التواب الذاتية لمؤثر الاندفاع في التمثيل الاحداثي

$$\langle \xi | a \rangle = \int dp \langle \xi | p \rangle \langle p | a \rangle$$

$$\langle \xi | b \rangle = \int dp \langle \xi | p \rangle \langle p | b \rangle$$

بالتعويض في المعادلة (17) والضرب بـ  $\langle p' | \xi \rangle$  ثم المكاملة على المتحول  $\xi$  واستخدام شرط التعامد والتنظيم

$$\int d\xi \langle p' | \xi \rangle \langle \xi | p \rangle = \delta(p' - p) \quad (20)$$

نجد

$$\langle p' | b \rangle = \int dp \langle p' | \hat{F} | p \rangle \langle p | a \rangle \quad (21)$$

حيث يدعى المقدار

$$\langle p' | \hat{F} | p \rangle = \int d\xi \langle p' | \xi \rangle \hat{F} \langle \xi | p \rangle \quad (22)$$

الذي يرتبط بالدليلين  $p, p'$  ، بعناصر المصفوفة للمؤثر  $\hat{F}$  المشكلة بواسطة تواب التحويل  $\langle \xi | p \rangle$  .

تشكل عناصر المصفوفة (22) مؤثر المقدار الفيزيائي  $\hat{F}$  في التمثيل الاندفاعي ، وتؤمن المعادلة (21) طريقة التحويل لتابع ما في التمثيل الاندفاعي الى تابع آخر في التمثيل نفسه .

وبرغم كون الأدلة  $p, p'$ ، في العلاقة (22) ، متحولات مستمرة ، إلا أنه من الملائم أن ننظر الى عناصر المصفوفة (22) على أنها مصفوفة لا نهائية الرتبة ذات عدد غير مرقم من الاسطر والاعمدة. فإذا استخدمنا هذا التفسير يمكننا اعتبار الطرف الأيمن من المعادلة (21) كجداء لمصفوفتين أدلتهما متحولات مستمرة وبالتالي ينقلب المجموع الى تكامل .

ولإيضاح ما سبق سنحسب بصورة صريحة مؤثري الاحداثيات والاندفاع في التمثيل الاندفاعي مستخدمين حركة وحيدة البعد للتبسيط . يعطى مؤثر الاندفاع في التمثيل الاحداثي بالعلاقة  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  . ويوصف المؤثر (22) في التمثيل الاندفاعي بمصفوفة مستمرة عناصرها

$$\langle p' | \hat{p} | p \rangle = \int dx \langle p' | x \rangle \hat{p} \langle x | p \rangle \quad (23)$$

أن التوابع  $\langle x | p \rangle$  هي التوابع الذاتية لمؤثر الاندفاع أي :

$\hat{p} \langle x | p \rangle = p \langle x | p \rangle$  . وباستخدام شرطي التعامد والتنظيم تتحول المعادلة (23) الى الشكل

$$\langle p' | \hat{p} | p \rangle = p \delta(p' - p) \quad (23')$$

أي أن مؤثر الاندفاع يوصف في التمثيل الاندفاعي بمصفوفة قطرية .  
بتعويض العلاقة (23') في (21) نجد :

$$\langle p | b \rangle = p \langle p | a \rangle \quad (24)$$

وهكذا نرى أن تأثير مؤثر الاندفاع على تابع في التمثيل الاندفاعي ماهو الا جداء التابع بقيمة الاندفاع ، ونستطيع تعميم هذه النتيجة الى حالة الأبعاد الثلاثة وذلك بتبديل المقدار  $p$  بالشعاع  $p$  .

لننظر الآن في مؤثر الاحداثيات في التمثيل الاندفاعي • بالعودة الى العلاقة  
(22) نجد

$$\langle p' | \hat{x} | p \rangle = \int dx \langle p' | x \rangle x \langle x | p \rangle$$

وباستخدام الشكل الصريح للتوابع الذاتية لمؤثر الاندفاع

$$\langle x | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ipx/\hbar}$$

نستطيع التحقق من أن ضرب هذه التوابع بـ  $x$  يعني التحويل

$$x \langle x | p \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle x | p \rangle$$

وتتحول المصفوفة (25) الى الشكل :

$$\begin{aligned} \langle p' | x | p \rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \int dx \langle p' | x \rangle \langle x | p \rangle = \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \delta(p' - p) \end{aligned} \quad (26)$$

أي تشكل العلاقة (26) عناصر المصفوفة المقابلة للمؤثر الاحداثي في التمثيل  
الاندفاعي •

نعوض (26) في العلاقة (21) ثم نكامل بالتجزئة فنجد

$$\langle p' | \hat{b} \rangle = -i\hbar \int dp \langle p | a \rangle \frac{\partial}{\partial p} \delta(p' - p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | a \rangle$$

ونستطيع القول ان الاحداثي  $x$  يقابل في التمثيل الاندفاعي المؤثر التفاضلي

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \quad (27)$$

### ٣ - تمثيل شرودينغر :

إذا كان طيف القيم الذاتية لمؤثر ما غير متغير مع الزمن ، فنستطيع استخدام مؤثرات لا تتعلق شكلها الرياضي بالزمن ، وفي مثل هذه الحالات يتحدد تغير الحالة مع الزمن بدوران شعاع الحالة . يدعى مثل هذا التمثيل للمؤثرات ولأشعة الحالة بتمثيل شرودينغر ، ويتحدد تغير الحالة مع الزمن بمعادلة شرودينغر

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

ونستطيع التعبير عن علاقة التوابع الموجية بالزمن في تمثيل شرودينغر بالتحويل الواحدى

$$\Psi(\xi, t) = \hat{S}(t) \Psi(\xi) \quad (28)$$

حيث  $\Psi(\xi)$  هي قيمة التابع الموجي في اللحظة  $t = 0$  ، بينما يتغير المؤثر  $\hat{S}(t)$  بصورة مستمرة مع الزمن ، ويكون مساوياً لمؤثر الوحدة  $\hat{S}(0) = 1$  في اللحظة  $t = 0$  . ويجب على المؤثر  $\hat{S}(t)$  أن يكون واحدياً أي يحقق العلاقة :

$$\hat{S}^+(t) \cdot \hat{S}(t) = 1$$

لأن ذلك يؤمن التنظيم الدائم أي ،

$$\langle \hat{S}^+ \Psi | \hat{S} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{S}^+ \hat{S} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$$

ولتعيين شكل المؤثر  $\hat{S}(t)$  نعوض المعادلة (28) في معادلة شرودينغر فنجد

$$\left[ i\hbar \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial t} - \hat{H} \hat{S}(t) \right] \Psi(\xi) = 0$$

والتي تكتب كمعادلة للمؤثر بالشكل :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial t} = \hat{H} \hat{S}(t) \quad (29)$$

فإذا لم يرتبط  $\hat{H}$  ارتباطاً صريحاً بالزمن استطعنا حل المعادلة (29) فنجد :

$$\hat{S}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \quad (30)$$

ويتحدد تغير الحالة مع الزمن بالتابع الموجي

$$\Psi(\xi, t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \Psi(\xi) \quad (31)$$

ولتحديد عمل المؤثر  $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  على التابع  $\Psi(\xi)$  نشر التابع بدلالة التوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}$  . فإذا كان  $\hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n$  فإن المعادلة (31) تصبح من الشكل :

$$\begin{aligned} \psi(\xi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \hat{H}t \right)^k \frac{1}{k!} \sum_n a_n \varphi_n \langle p|r \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-i(p\cdot r)/\hbar}, \\ &= \sum_n a_n \varphi_n \sum_k \left( -\frac{i}{\hbar} E_n t \right)^k \frac{1}{k!} = \sum_n a_n \varphi_n e^{-iE_n t/\hbar}. \end{aligned} \quad (32)$$

٤ - تمثيل هايزنبرغ :

لا يتغير التابع الموجي ، في هذا التمثيل ، مع الزمن ولكن المؤثرات المقابلة للمقادير الفيزيائية هي التي تتغير مع الزمن . ليكن  $\Psi_{sch}(\xi, t)$  هو التابع الموجي في تمثيل شرودينغر ، و  $\Psi_H(\xi)$  هو التابع الموجي المستقل عن الزمن في تمثيل هايزنبرغ باستخدام العلاقة (31) نستطيع الانتقال من تمثيل

شرودينغر الى تمثيل هايزنبرغ من خلال التحويل

$$\Psi_H(\xi) = \hat{S}^{-1}(t) \Psi_{sch}(\xi, t) \quad (33)$$

حيث  $\hat{S}(t)$  هو المؤثر (30) • لا بد عند استخدام العلاقة (33) لدى الانتقال من تمثيل شرودينغر الى تمثيل هايزنبرغ ، من تغير المؤثرات وفقاً للقاعدة :

$$\hat{F}_H(t) = \hat{S}^{-1}(t) \hat{F}_{sch} \hat{S}(t) \quad (34)$$

فإذا كان المؤثر مستقلاً عن الزمن في تمثيل شرودينغر ، فإنه يكون مرتبطاً بالزمن في تمثيل هايزنبرغ وتعطى علاقة المؤثر بالزمن كما في العلاقة (34) بينما تكون التوابع الموجية مستقلة عن الزمن لأن  $\hat{S}(0) = \hat{S}^{-1}(0) = 1$  وبالتالي يكون تمثيل شرودينغر مماثلاً لتمثيل هايزنبرغ في اللحظة  $t = 0$  ، وكذلك يكون المؤثران متماثلين في التمثيلين عند اللحظة  $t = 0$  ،  $\hat{F}_H(0) = \hat{F}_{sch}(0)$  • تحدد العلاقة (34) كيفية تغير المؤثر مع الزمن في تمثيل هايزنبرغ ويعطى مقدار التغير خلال الفترة  $\Delta t$  بالعلاقة :

$$\hat{F}(t + \Delta t) = \hat{S}^{-1}(\Delta t) \hat{F}(t) \hat{S}(\Delta t) \quad (35)$$

$$= \hat{F}(t) + \frac{1}{i\hbar} \cdot [\hat{H}, \hat{F}(t)] \Delta t + \dots$$

وتكون معادلة الحركة للمؤثر  $\hat{F}$  في تمثيل هايزنبرغ من الشكل :

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}] \quad (36)$$

## ٥ - تمثيل التفاعل :

ندرس في كثير من الأحيان جملاً مؤلفة من أجزاء متعددة تتفاعل فيما بينها، ونكتب مؤثر هاميلتون على شكل مجموع حدين

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (37)$$

حيث  $\hat{H}_0$  هو مؤثر هاميلتون عند إهمال التفاعل بين أجزاء الجملة، و  $\hat{V}$  هو مؤثر التفاعل . ونستخدم في مثل هذه الحالات تمثيل التفاعل لوصف تغير الحالة مع الزمن . ويتم الانتقال من التوابع الموجية في تمثيل شرودينغر  $\Psi_{sch}(\xi, t)$  الى التوابع الموجية في تمثيل التفاعل  $\Psi_{int}(\xi, t)$  بواسطة المؤثر الواحد

$$S(t) = e^{i \hat{H}_0 t / \hbar} \quad (38)$$

أي

$$\Psi_{int}(\xi, t) = \hat{S}(t) \Psi_{sch}(\xi, t) \quad (39)$$

وبالتعويض في معادلة شرودينغر التالية :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi_{sch}(\xi, t)}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi_{sch}(\xi, t) \quad (40)$$

$$\Psi_{sch}(\xi, t) = e^{-i \hat{H}_0 t / \hbar} \Psi_{int}(\xi, t) \quad \text{قيمة التابع الموجي}$$

نحصل على المعادلة التالية في تمثيل التفاعل :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi_{int}(\xi, t)}{\partial t} = \hat{V}_{int} \Psi_{int}(\xi, t) \quad (41)$$

حيث

$$\hat{V}_{int} = \hat{S}(t) \hat{V} \hat{S}^+(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \hat{V} e^{-iH t/\hbar} \quad (42)$$

وتكون التوابع الموجية وكذلك المؤثرات ، تابعة للزمن في تمثيل التفاعل ، ونعبر عن هذه التبعية بالعلاقة (42) أو بالمعادلة :

$$\frac{d \hat{F}_{int}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [ \hat{F}_{int}, \hat{H}_0 ] - \quad (43)$$

## ٦ - المعادلات الكلاسيكية للحركة :

سنلخص في هذه الفقرة نظرية هاميلتون الكلاسيكية اذ نستطيع التوصل الى معادلات الحركة لجملة ذات (f) درجة من الحرية اطلاقاً من تابع لاغرانج  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  المرتبط بالاحداثيات  $q_i$  والسرع  $\dot{q}_i$  والزمن  $t$  . فباستخدام التغيرات نجد :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad ; \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (44)$$

وتتوصل الى معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, f \quad (45)$$

فإذا عرفنا الاندفاع القانوني المرافق لـ  $q_i$  بالعلاقة  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

وعرفنا تابع هاميلتون بالعلاقة

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L \quad (46)$$

عندها نأخذ معادلات الحركة الشكل الهاميلتوني التالي :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, f \quad (47)$$

ويعطى الارتباط الزمني ، لأي تابع للاحداثيات والاندفاعات والزمن ، عند نقطة طور متحركة ، بالعلاقة :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

حيث تم استخدام معادلات هاميلتون (47) .

نعرف معترضة بواسون  $\{A, B\}$  لأي تابعين للاحداثيات والاندفاعات بالعلاقة :

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \quad (48)$$

فتصبح معادلة الحركة للتابع  $F$  المرتبط بمتحولات الحركة من الشكل :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \quad (49)$$

يمكن التوصل للصيغة الكوانتية لمعادلات الحركة باستبدال بمعتراضات بواسون  
 $\{ F, H \}$  الاقواس التبادلية مقسومة على  $i\hbar$  أي

$$\{ A, B \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [ A, B ] \quad (50)$$

ومن ثم استخدام تمثيل هايزنبرغ •

#### ٧ - حركة جسيم مشحون ضمن حقل كهروطيسي :

بأخذ تابع هاميلتون الكلاسيكي ، الذي يصف حركة جسيم ( يتعين موضعه بالتحول  $r$  واقدفاعه بالتحول  $p$  ) ضمن حقل كهروطيسي ( معين بالكمونين  $A(r, t)$  و  $\Phi(r, t)$  ) ، الشكل :

$$H = \frac{1}{2m} ( p - \frac{e}{c} A )^2 + e\Phi \quad (51)$$

حيث  $e$  هي شحنة الجسيم و  $c$  هي سرعة الضوء ، كما تعطى شدة الحقل الكهربائي والتحريض المغناطيسي بدلالة الكمونين بالعلاقين :

$$\vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad ; \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (52)$$

وتأخذ شروط التكميم في الاحداثيات الديكارتية الصيغ :

$$[x, p_x]_- = [y, p_y]_- = [z, p_z]_- = i\hbar \quad (53)$$

سنستخدم الآن معادلة هايزنبرغ ( العلاقة 36 ) مع الهاميلتوني ( 51 ) والعلاقات ( 53 ) من أجل حساب السرعة  $\frac{dr}{dt}$  والتسارع  $\frac{d^2r}{dt^2}$  للجسيم المشحون وقارنهما مع تلك المحسوبة في الميكانيك الكلاسيكي •

لا بد قبل حساب الاقواس التبادلية الناتجة من التعويض في العلاقة (36) ،  
من اشتقاق بعض النتائج الابتدائية • يكون التابعان للموضع بصورة عامة تبادليين  
لأن جميع مركبات شعاع الموضع  $r$  تتبادل فيما بينها ، فباستخدام العلاقات (53)  
نجد :

$$\begin{aligned} x^2 p_x - p_x x^2 &= x(p_x + i\hbar) - p_x x^2 = \\ &= (p_x x + i\hbar)x + i\hbar x - p_x x^2 = 2i\hbar x \end{aligned}$$

وبصورة عامة :

$$x^n p_x - p_x x^n = n i \hbar x^{n-1} \quad (54)$$

وإذا كان  $f(r)$  تابعاً صريحاً للموضع نستطيع كتابة العلاقة (54) بالشكل :

$$[f(r), p_x] = f(r) p_x - p_x f(r) = i \hbar \frac{\partial}{\partial x} f(r) \quad (55)$$

ونستطيع التوصل الى صيغة أعم من (55) وذلك باستخدام المؤثر  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$   
مثلاً للاندفاع  $p_x$  • فإذا أثرنا من اليسار في العلاقة (55) بتابع اختياري  
 $g(r)$  ، نجد :

$$\begin{aligned} [f(r), p_x] g(r) &= -i \hbar [f(r) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} f(r)] g(r) = \\ &= g(r) [i \hbar \frac{\partial}{\partial x} f(r)] \end{aligned}$$

كما أننا نستطيع بتكرار تطبيق العلاقة (55) أن نجد :

$$\begin{aligned} f(r) p_x^2 - p_x^2 f(r) &= i \hbar (p_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} p_x) = \\ &= 2 i \hbar \frac{\partial f}{\partial x} p_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (56)$$

نستطيع الآن كتابة تابع هاميلتون (51) بالاستعانة بالعلاقة (56) فنجد :

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (P \cdot A + A \cdot P) + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + e\phi \\
 &= \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{mc} A \cdot P + \frac{i\hbar e}{2mc} \nabla \cdot A + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + e\phi
 \end{aligned}
 \quad (57)$$

ويعطى المشتق الاول لاحدى مركبات الموضع باستخدام العلاقة (36) فنجد:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \left( P_x - \frac{e}{c} A_x \right) \quad (58)$$

وهذا على وفاق مع العلاقة الكلاسيكية بين السرعة والاندفاع لجسيم مشحون ضمن حقل كهربي . أما مركبة التسارع فتحسب بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{m} \left( \frac{dP_x}{dt} - \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt} \right) = \\
 &= - \frac{1}{i\hbar m} [P_x, H] - \frac{e}{mc} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{e}{i\hbar mc} [A_x, H] -
 \end{aligned}$$

وبالتعويض ومتابعة العمليات الجبرية الطويلة تتوصل الى الصيغة :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} &= - \frac{e}{m} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \\
 &+ \frac{e}{2m^2 c} \left[ \left( P_y - \frac{e}{c} A_y \right) \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right. \\
 &\left. + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \left( P_y - \frac{e}{c} A_y \right) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e}{2m^2c} \left[ (P_z - \frac{e}{c} A_z) \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) (P_z - \frac{e}{c} A_z) \right] \quad (59)
\end{aligned}$$

ويمكن كتابة المعادلة (59) مع معادلتين مماثلتين للمركبتين  $z, y$  في معادلة شعاعية واحدة هي :

$$\begin{aligned}
m \frac{d_2 r}{dt^2} &= e \left( - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \Phi \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left[ \frac{1}{m} (P - \frac{e}{c} A) \times (\nabla \times A) - \right. \\
&\left. - \nabla \times A \times \frac{1}{m} (P - \frac{e}{c} A) \right] \\
m \frac{d_2 r}{dt^2} &= eE + \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left( \frac{dr}{dt} \times H - H \times \frac{dr}{dt} \right) \quad (60)
\end{aligned}$$

تتفق المعادلة (60) مع مقابلتها في الفيزياء الكلاسيكية  $eE + \frac{e}{c} (V \times H)$

حيث  $V = \frac{dr}{dt}$  هي سرعة الجسيم أما الحدان  $V \times H$  و  $-H \times V$

فهما متماثلان من وجهة نظر كلاسيكية ومختلفان في الميكانيك الكمومي إذ أن  $V$  غير تبادلي مع  $H$ . أما في تمثيل شرودينغر فنستطيع كتابة العلاقة (57) مع معادلة شرودينغر وتوصل الى معادلة شرودينغر لجسيم مشحون يتحرك ضمن حقل كهرومغناطيسي وهي :

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left( - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{ie\hbar}{mc} A \cdot \nabla + \right. \\
&\left. + \frac{ie\hbar}{2mc} \nabla \cdot A + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + e\Phi \right) \Psi
\end{aligned}$$

## ٨ - الانتقال الحدي من الميكانيك الكمومي الى الميكانيك الكلاسيكي :

لا تختلف معادلة حركة الجسيم المتحرك ضمن حقول فاعمة عن معادلة نيوتن الكلاسيكية عندما يملك هذا الجسيم اندفاعاً كبيراً • ان أبسط أسلوب لدراسة الانتقال من الميكانيك الكمومي الى الميكانيك الكلاسيكي يبدأ بكتابة التابع الموجي بالشكل :

$$\Psi(r,t) = e^{is(r,t)/\hbar} \quad (61)$$

بتعويض الحل (61) في معادلة شرودينغر التي تصف حركة جسيم كتلة  $\mu$  ضمن حقل كموني طاقته  $U(r)$  نجد :

$$-\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\nabla s \cdot \nabla s}{2\mu} + U(r) - \frac{i\hbar}{2\mu} \nabla^2 s \quad (62)$$

وهي معادلة تحدد التابع العقدي  $S(r,t)$  .

عندما يكون الحد الأخير في الجانب الأيمن من المعادلة (62) صغيراً بالمقارنة مع باقي حدود المعادلة نستطيع اهماله ونحصل على معادلة هاميلتون - جاكوبي المعروفة في الميكانيك الكلاسيكي

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{(\nabla S_0)^2}{2\mu} + U(r) \quad (63)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى لتابع الفعل المعروف بدلالة تابع لاغرانج  $L$  من خلال التكامل

$$S_0(r,t) = \int_0^t L(r, \dot{r}, t') dt'$$

ويرتبط الاندفاع بتابع العمل وفق العلاقة

$$p = \vec{\nabla} S_0$$

نجد بمقارنة العلاقتين (62) و (63) أن الانتقال من الميكانيك الكمومي الى الميكانيك الكلاسيكي يتم بجعل  $\hbar \rightarrow 0$  وهذا مبرر فقط عندما يكون الحد الذي يحوي  $\hbar$  في المعادلة (62) صغيراً بالمقارنة مع باقي حدود المعادلة .

ولتبسيط دراسة الشروط التي نستطيع معها وصف الجمل الكمومية بطريقة كلاسيكية سنعالج الحالات المستقرة حيث تكون طاقة الجملة معروفة تماماً ويكون ارتباط التابع الموجي بالزمن محدداً بالعلاقة

$$\Psi(r, t) = \Psi(r) e^{-iEt/\hbar}$$

أي أننا نستطيع في هذه الحالة كتابة التابع  $S(r, t)$  بالشكل

$$S(r, t) = \sigma(r) - Et \quad (64)$$

وتأخذ المعادلة (62) الشكل :

$$\frac{(\vec{\nabla} \sigma)^2}{2\mu} + U(r) - E - \frac{i\hbar \nabla^2 \sigma}{2\mu} = 0 \quad (65)$$

ويتم الانتقال من ميكانيك الكم الى الميكانيك الكلاسيكي بحذف الحد الأخير من المعادلة (65) فتصبح :

$$\frac{(\vec{\nabla} \sigma_0)^2}{2\mu} + U(r) - E = 0 \quad (66)$$

وهي معادلة تعطي التابع  $\sigma_0$  الذي يتعلق باحداثيات الجسم فقط ويرتبط

باندفاع الجسم من خلال العلاقة :

$$\mathbf{P} = \vec{\nabla} \sigma_0 \quad (67)$$

ونستطيع استخدام المعادلة (66) عوضاً عن المعادلة (67) عند تحقق الشرط

$$(\vec{\nabla} \sigma_0)^2 \gg \hbar |\Delta \sigma_0| \quad (68)$$

الذي يكتب بدلالة الاندفاع المعرّف بالعلاقة (67) على الشكل :

$$P^2 \gg \hbar |(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P})| \quad (69)$$

أو

$$P^3 \gg \mu \hbar |dU/dx| \quad (80)$$

يمكن عند تحقق المتراجحة (69) تطوير طريقة تقريبية لحل مسائل ميكانيك الكم انطلاقاً من ادخال تصحيحات على الوصف الكلاسيكي • تدعى هذه الطريقة بالتقريب شبه الكلاسيكي أو تقريب (WKB) نسبة الى Wentzel - Kramers -

Brillouin

## ٩ - التقريب شبه الكلاسيكي :

هي طريقة تقريبية لحل المعادلة الكمومية (65) وإيجاد التابع  $\sigma(\mathbf{r})$  الذي يحدد التابع الموجي للحالة المستقرة من خلال العلاقة

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\sigma(\mathbf{r})/\hbar} \quad (71)$$

يكتب حل المعادلة (65) وفق النشر التالي :

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i} \sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \sigma_2 + \dots \quad (72)$$

فإذا تحقق الشرط (69) تكون الحدود أقل بكثير من التي تسبقها ونستطيع استخدام طريقة التقريب المتتالي لحل المعادلة (65) .

بتعويض العلاقة (72) في المعادلة (65) ومقارنة أمثال الحدود التي لها مرتبة  $n$  نفسها نحصل على جملة المعادلات المترابطة التالية :

$$\left. \begin{aligned} (\vec{\nabla} \sigma_0)^2 + 2\mu [U(r) - E] &= 0 \\ (\vec{\nabla} \sigma_1 \cdot \vec{\nabla} \sigma_0) + \frac{1}{2} \nabla^2 \sigma_0 &= 0 \\ (\vec{\nabla} \sigma_1 \cdot \vec{\nabla} \sigma_1) + 2(\vec{\nabla} \sigma_0 \cdot \vec{\nabla} \sigma_2) + \sigma_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

بحل المعادلة الاولى من المجموعة (73) نحصل على  $\sigma_0$  ، نضعها في المعادلة الثانية ونحلها فنحصل على  $\sigma_1$  وهكذا ... ويكتفى عادة بـ  $\sigma_0$  و  $\sigma_1$  . ولايضاح هذه الطريقة سنعالج حالة وحيدة البعد فتأخذ مجموعة المعادلات (73) الشكل :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma'_1)^2 &= P^2(x) \\ 2\sigma'_1 &= -\frac{\sigma''_0}{\sigma'_0} \\ 2\sigma'_2 &= -\frac{\sigma''_1 + (\sigma'_0)^2}{\sigma'_0} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

وتشير الفتحة في هذه المعادلات الى الاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  . وهكذا نحصل على التقريبات المتتالية  $\sigma'_1$  و  $\sigma'_2$  من التقريب الصفري

$$\sigma'_0 = \pm P(x) = \pm \sqrt{2\mu [E - U(x)]} \quad (15)$$

فمن المعادلة الثانية في المجموعة (74) نجد :

$$\sigma_1 = - \ln \sqrt{p} + \ln c \quad (76)$$

وبمكاملة العلاقة (75) بالنسبة لـ  $x$  نحصل على  $\sigma_0$  ونستطيع بعد ذلك استخدام العلاقات (76), (72), (71) كتابة التابع الموجي في التقريب شبه الكلاسيكي وهو يحقق معادلة شرودينغر الى حدود من المرتبة  $\hbar^2$ .

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \frac{c}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ i \int_0^x k(x') dx' \right\} + \\ & + \frac{c_1}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ - i \int_0^x k(x') dx' \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

$$K(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu [E - U(x)]} \quad \text{حيث}$$

يدعى المجال الذي يحقق المتراجحة  $E > U(x)$  بمجال الحركة المسموح كلاسيكياً ويكون التابع  $K(x)$  في هذا المجال حقيقياً ، ونعبر عن اندفاع الجسيم بدلالة الاحداثيات ، ونستطيع دوماً ضمن هذا المجال كتابة التابع الموجي  $\hbar K(x)$  (77) كتابع مرتبط بثابتين :

$$\Psi(x) = \frac{A}{\sqrt{P}} \sin \left\{ \int_0^x K(x') dx' + \alpha \right\}$$

وتكون سعة هذا التابع متناسبة مع  $\frac{1}{\sqrt{P}}$  أي أن احتمال رصد الجسيم ضمن عنصر حجمي صغير ، متناسب مع  $\frac{1}{P}$  فهو يتناسب عكساً مع السرعة الكلاسيكية للجسيم ، وتعكس هذه النتيجة انخفاض الاحتمال ، إذ أن تيار

الاحتمال ضمن هذا التقريب متناسب مع  $|A(x)|^2 P(x) = \text{const}$

ندعى قيم  $x_i$  التي تتحقق عندها المساواة  $E = U(x_i)$  بنقاط الانعطاف الكلاسيكية وتقابل نقاط الفراغ التي يصل الجسم الكلاسيكي فيها الى حالة الوقوف  $P(x_i) = 0$  ثم الحركة وفق الاتجاه المعاكس . يصبح التابع الموجي عند هذه النقاط لا نهائياً ، ويرجع هذا التباعد الى عدم صلاحية التقريب شبه الكلاسيكي عندما يكون الاندفاع صغيراً ، ولتحديد المسافة  $|x - x_0|$  التي نستطيع عندها استخدام التقريب شبه الكلاسيكي نشر الطاقة الكامنة على شكل سلسلة بجوار نقطة الانعطاف  $x_0$  فنكتب :

$$P^2 = 2\mu [E - U(x)] \simeq 2\mu \left| \frac{du}{dx} \right| |x - x_0|$$

بالتعويض في العلاقة (70) نجد أن التقريب شبه الكلاسيكي يصح عند نقطة تبعد عن نقطة الانعطاف مسافة تحقق المتراجحة

$$|x - x_0| \gg \frac{1}{2} \left[ \frac{\hbar^2}{\mu \left| \frac{du}{dx} \right|} \right]^{1/3} \quad (78)$$

أو

$$|x - x_0| \gg \frac{\hbar}{2p} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (79)$$

حيث  $\lambda$  هو طول الموجة المقابلة لقيمة الاندفاع عند النقطة  $x$  .

يدعى المجال الذي يحقق المتراجحة  $E < U(x)$  بالمجال غير المسموح كلاسيكياً ، ويكون التابع  $K(x)$  في هذا المجال تخيلاً فنكتب  $K(x) = i\chi(x)$  حيث

$$\chi(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu [U(x) - E]}$$

هو تابع حقيقي ، ونستطيع كتابة العلاقة (77) بالشكل :

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \frac{c}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ - \int_0^x \chi(x') dx' \right\} + \\ & + \frac{c_1}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ \int_0^x \chi(x') dx' \right\} \quad (80) \end{aligned}$$

يتناقص الحد الاول في العلاقة (80) أسياً مع ازدياد  $x$  بينما يتزايد الحد الثاني بشكل أسي ، ونستطيع استخدام التقريب شبه الكلاسيكي عندما نعلم مسبقاً كيفية ارتباط الحلين الاهتزازي والأسّي عندما نعبّر نقطة الانعطاف ، ففي المجال الصغير  $(a, b)$  ذي الطول  $\left| \frac{du}{dx} \right|^{-1/3} \hbar^{2/3} \mu^{-1/3}$  حول نقطة الانعطاف لا نستطيع استخدام التقريب شبه الكلاسيكي ، ويجب علينا حل معادلة شرودينغر .

#### ١٠ - تطبيق طريقة التغيرات في الحسابات التقريبية :

نستطيع في معظم الاحيان استخدام طريقة التغيرات لحساب الحالات المنفصلة الاولى للجملة الكمومية . لا تتطلب طريقة التغيرات معرفة جميع حلول المعادلات الأبسط ، كما لا تحتاج الى نظرية الاضطراب عند حساب القيم الذاتية الاولى لمؤثر هاميلتون .

لحساب طاقة الحالة الاساسية  $E_0$  لجملة ما تؤول طريقة التغيرات الى تطبيق المراجعة

$$E_0 \leq \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\xi \quad (81)$$

حيث  $\Psi$  هو أي تابع منظم

$$\int \Psi^* \Psi d\xi = 1 \quad (82)$$

و  $\hat{H}$  هو مؤثر هاميلتون الكلي للجملة .

نستطيع بسهولة اثبات صحة المتراجحة (81) باستخدام التمثيل الطاقى ،  
فإذا رمزنا لمجموعة التوابع الذاتية التامة للمؤثر  $\hat{H}$  بـ  $\varphi_n$  ، فيمكننا نشر أي  
تابع  $\Psi$  بدلالة  $\varphi_n$  أي :

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = 1. \quad (83)$$

بالتعويض في المعادلة (81) نجد :

$$\int \Psi^* \hat{H} \Psi d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 E_n \geq E_0 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = E_0.$$

وهكذا نرد حساب الحالة الاساسية للجملة الى ايجاد النهاية الصغرى للتكامل  
 $\int \Psi^* \hat{H} \Psi d\xi$  أي :

$$E_0 = \text{Min} \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\xi \quad (84)$$

ان الحساب العملي لطاقة الحالة الاساسية باستخدام العلاقة (84) ينطلق  
من اختيار تابع تجربى مناسب  $\Psi$  يحوي عدداً من المعاملات المجهولة  $\alpha, \beta, \dots$  ،  
فبعد حساب التكامل  $\int \Psi^* (\xi; \alpha, \beta, \dots) \hat{H} \Psi (\xi; \alpha, \beta, \dots) d\xi$   
نحصل على الصيغة  $J(\alpha, \beta, \dots)$  المرتبطة بالمعاملات  $\alpha, \beta, \dots$  ،

ان تحديد قيم المعاملات المطلوبة يتم بالبحث عن النهاية الصغرى لـ  $J(\alpha, \beta, \dots)$   
أي حل المعادلات

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial \beta} = \dots = 0$$

فإذا كان اختيار تابع التجريب ملائماً فإن القيمة

$$E = J(\alpha_0, \beta_0, \dots)$$

التي حصلنا عليها بالأسلوب المذكور أعلاه تكون أقرب ما يمكن للقيمة الفعلية  $E_0$  وكذلك يعطى التابع الموجي للحالة الأساسية بصورة تقريبية بالتابع

$$\Psi(\xi; \alpha_0, \beta_0, \dots)$$

إذا رمزنا للتابع الموجي الممثل للحالة الأساسية بـ  $\Psi_0$  فإن حساب الطاقة  $E_1$  للحالة المثارة الأولى يؤول إلى حل مسألة المتغيرات

$$E_1 = \text{Min} \int \Psi^*_1 \hat{H} \Psi_1 d\xi \quad (85)$$

الخاضعة للشرطين

$$\int \Psi^*_1 \Psi_1 d\xi = 1, \quad \int \Psi^*_1 \Psi_0 d\xi = 0 \quad (86)$$

ولاثبات هذا الأمر تتبع الأسلوب نفسه كما في الحالة الأساسية متبهمين إلى غياب  $\Psi_0$  من نشر  $\Psi_1$  نتيجة شرط التعامد (86) أي

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 1.$$

ان حساب طاقة الحالة المثارة الثانية  $E_2$  ماهو الا حل مسألة التغيرات

$$E_2 = \text{Min} \int \Psi^*_2 \hat{H} \Psi_2 d\xi \quad (87)$$

الخاضعة للشروط

$$\int \Psi^*_2 \Psi_2 d\xi = 1, \quad \int \Psi^*_2 \Psi_1 d\xi = \int \Psi^*_2 \Psi_0 d\xi = 0 \quad (88)$$

## مسائل

١ - أثبت أنه إذا حققت المقادير  $L, M, N$  علاقة التبادل  $[L, M] = iN$  في تمثيل شرودينغر فإن هذه العلاقة تبقى محققة في التمثيلات الأخرى .

٢ - إذا عاملنا الاحداثي  $x$  كمؤثر في تمثيل شرودينغر فما هو المؤثر  $x_H$  المقابل في تمثيل هايزنبرغ في حالة جسيم حر ؟ وفي حالة الهزاز التوافقي ؟

٣ - أوجد العلاقات التبادلية التالية في حالة الهزاز التوافقي

$$[P_H(t_1), x_H(t_2)], [P_H(t_1), P_H(t_2)], [X_H(t_1), X_H(t_2)]$$

٤ - إذا رمزنا لمؤثر التحويل بين تمثيل هايزنبرغ وتمثيل التفاعل بالرمز

$$S(t, t_0) = U^{(0)+}(t, t_0) U(t, t_0)$$

أثبت أن هذا المؤثر هو حل المعادلة التفاضلية

$$i\hbar \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = H'_I S(t, t_0)$$

التي تحقق الشرط  $S(t_0, t_0) = 1$  .

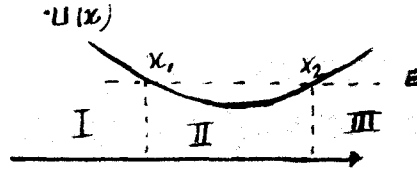
٥ - عيّن صيغة المؤثر  $S(t, 0)$  في المسألة (٤) من أجل هزاز توافقي

وحيد البعد كتلته  $m$  وشحنته  $e$  موجود ضمن حقل كهربائي ثابت الشدة  $E$  أي :

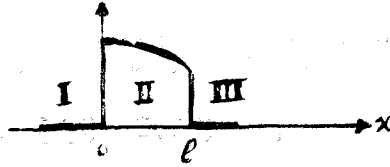
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eEx, H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$H' = -eEx$$

٦ - استخدم التقريب شبه الكلاسيكي لحساب سويات الطاقة والتابع الموجي لجسيم كتلته  $\mu$  يتحرك ضمن البئر الكموني المجاور.



٧ - استخدم التقريب شبه الكلاسيكي لدراسة حركة جسيم ضمن حقل الطاقة الكامنة المبينة بالشكل المجاور.



٨ - أوجد مستخدماً طريقة المتغيرات القيم الذاتية والتوابع الموجية لجهاز توافقي وحيد البعد منطلقاً من التابع

$$\psi(x; \alpha) = A e^{-\frac{1}{2} \alpha x^2} \quad \hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2$$

٩ - أوجد مستخدماً طريقة المتغيرات الطاقة والتابع الموجي لذرة الهيدروجين

$$\psi = A e^{-\beta r} \quad \text{منطلقاً من التابع} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$$



## الفصل الثاني

### النظرية النسبوية الكمومية

# النظرية النسبوية الكمومية لحركة جسيم ضمن حقل خارجي

## ١ - الجسيمات الأولية في الميكانيك الكمومي :

يوجد ، في الوقت الحالي ، عدد كبير من الجسيمات مثل الالكترونات Electrons والبروتونات Protons والنترونات Netrons والبيونات Pions والميونات Muons والكاونات Kaons ، وغيرها تدعى بالجسيمات الأولية ( انظر ملحق تصنيف الجسيمات الأولية ) • لا نستطيع في هذه المرحلة من معرفتنا أن نتحدث عن بنائها الداخلي • تتميز هذه الجسيمات بكتل سكونية محددة القيم ، ويمكن أن تكون معتدلة كهربائياً أو تحمل شحنة موجبة أو سالبة •

تتميز الجسيمات الأولية أيضاً بشحنة غير كهربائية ، فللجسيمات الخفيفة مثل الالكترونات والميونات والنترينوات Neutrinos ، شحنة باريونية Baryon بينما لا تملك البيونات والكاونات والميزونات الثقيلة الاخرى شحنة باريونية أو شحنة ليبتونية Lipton •

ومن أهم الخواص المميزة للجسيمات الأولية ، امكان احداثها وامكان افنائها أو تحويلها من شكل لآخر كنتيجة للتفاعل • يتم مثلاً احداث فوتونات عندما تغير الالكترونات في الذرة أو النكليونات في نواة الذرة ، طبيعة حركاتها • كما يتم احداث البيونات عند تصادم نكليونين لكل منهما طاقة عالية • يصدر النترون الكترونًا وتروناً مضاداً عندما يتحول الى بروتون • كما يتحول البيون المشحون الى ميون وتريينو ، ويمكن للفوتونات أن تتحول ضمن حقل النواة الى الكترون وبوزيترون وهكذا ...

اذ اكتشاف امكان احداث الجسيمات الاولية ، وافنائها أو تحويلها وارتباط هذه العمليات بانحفاظ الطاقة وانحفاظ الشحنة ، يعد مفتاحاً مهماً لإدراك وفهم خواص عالمنا ، وكذلك ادراك العلاقة بين مختلف الظواهر الطبيعية وفهمها . تتفاعل الجسيمات من نوع معين بواسطة جسيمات من نوع آخر فتقوم البيونات المشحونة والبيونات المعتدلة ، مثلاً ، بنقل التفاعلات النووية بين النكليونات ، أي أن البروتونات والنترونات تحاط بسحابة ميزونية تؤمن التفاعل فيما بينها . وتشكل هذه السحابة الميزونية جزءاً أساسياً من البروتونات والنترونات وتحدد خواصها ، وبالمقابل تحدد البروتونات والنترونات خواص البيونات ولا يبقى لمفهوم الجسيم المعزول أي معنى .

أي أن الحركة الحرة للجسيم ماهي الا وصف تقريبي للواقع . كما أن فكرة ثبات عدد الجسيمات تفقد معناها وخاصة عند دراسة الظواهر المتضمنة جسيمات ذات طاقة عالية . فالإلكترون السريع الطائر في حقل النواة يُنتج فوتونات كما تنتج الفوتونات في حقل النواة زوجاً من الجسيمات ( الكترون وبوزيترون ) وهي بدورها تنتج فوتونات .

لا بد من استخدام المعادلات الموجية النسبوية عند معالجة الظواهر التي تحدث في الطاقات العالية، أي أننا نحتاج الى معادلات صامدة عند تطبيق تحويلات لورنتز عليها . يتطلب الانتقال من الوصف غير النسبوي الى الوصف النسبوي إعادة النظر في عدد من الافكار ، وكخطوة أولى يجب تغيير فكرة احداثيات الجسيم المنفصل ، فمن الممكن في ميكانيك الكم غير النسبوي تحديد موضع الجسيم في المكان والزمان بدقة اختيارية ، أما في حالة الجسيمات النسبوية مثل فوتونات الضوء فلا يكون لفكرة احداثيات الجسيم أي معنى على الاطلاق .

واذا كان الموضع غير محدد بصورة دقيقة  $\Delta x > \frac{h}{mc}$  ، يكون الزمن

أيضاً غير محدد  $\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c}$  ، لذلك لا بد من إعادة النظر في فكرة كثافة الاحتمال  $\rho(x, y, z, t)$  التي تعطي احتمال موضع جسيم يملك اندفاعاً محدداً. ففي النظرية غير النسبوية نجعل  $c \rightarrow \infty$  ويمكن لـ  $\Delta t$  أن تأخذ قيمة معدومة. أما الفكرة الأساسية الثانية في النظرية غير النسبوية فهي اندفاع الجسيم ، ان الريبة في قيمة الاندفاع تتحدد بالعلاقة  $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$  ، وبما أن الريبة في سرعة الجسيم لا تزيد على  $c$  في النظرية النسبوية ، فإن  $\Delta x \sim c\Delta t$  ، حيث  $\Delta t$  هي فترة التأكد من حالة الحركة . لذلك نجد  $\Delta p \sim \hbar/c\Delta t$  . ففي الحالة المستقرة للجسيم الحر  $\Delta t \sim \infty$  يكون  $\Delta p = 0$  أي أنه في حالة الحركة الحرة للجسيم وعندما لا يتغير الاندفاع مع الزمن ، لا يكون هناك معنى للحديث في حالات توصف بالسحابة الموجية ، عن كثافة الاحتمال في فراغ الاندفاعات من أجل قيمة محددة للاندفاع ، لذلك يفضل استخدام تمثيل الاندفاعات عوضاً عن تمثيل الموضع في النظرية النسبوية .

طورت في السنوات الأخيرة النظرية النسبوية للجسيمات الأولية انطلاقاً من فكرة الحقول المتفاعلة ، أي عدت الجسيمات حبيبات للحقل . يؤمن مثل هذا العد تفسيراً بسيطاً لعمليات الخلق والافناء والتحول في الطاقات العالية . وتعرض مثل هذه النظرية صعوبات رياضية كثيرة متمركزة في التحريك الكهربائي الكمومي، حيث يُدرس التفاعل بين الالكترونات والحقول الكهرومغناطيسية .

إن نظرية التفاعل للميزونات مع الجسيمات الأولية الأخرى مثل الهايبرونات وكذلك نظرية الجسيمات الأولية نفسها ، لا تزال في مراحل تطورها الابتدائية في الوقت الحاضر . وبرغم كون فكرة تكوين الجمل من عدد محدود من الجسيمات هي فكرة تقريبية للظاهرة التي تحدث في الطاقات العالية ، إلا أنه يمكن استخدامها كمرحلة أولى في تطوير نظرية أكثر اقتراباً من الواقع . وسوف ينشأ عن هذا التبسيط عدد من الصعوبات مردّها إهمال العلاقة المستمرة بين مختلف الجسيمات، وتحول مجموعة منها إلى أشكال مختلفة .

## ٢ - المعادلة النسبوية لجسيم معنوم السبن :

ان معادلة شرودينغر لجسيم كتلته  $M$  ويخضع لتأثير الكمون  $U(x)$  هي :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(x) \right] \Psi \quad (1)$$

وتقابل العلاقة غير النسبوية

$$E = \frac{P^2}{2M} + U(x) \quad (2)$$

بين الطاقة والاندفاع لجسيم كتلته  $M$  . وبالطبع نستطيع أن نتوصل الى المعادلة (1) من المعادلة (2) باستخدام التحويل :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} ; \quad \hat{P} = \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (3)$$

فإذا أردنا الحصول على المعادلة الموجية لحركة جسيم طاقته أكبر بكثير من كتلته السكونية ، يجب أن نبدأ من العلاقة النسبوية بين الطاقة والاندفاع . ففي حالة الجسيم الحر لدينا :

$$\frac{E^2}{C^2} = P^2 + M^2 C^2 \quad (4)$$

فإذا استخدمنا التحويل (3) في المعادلة (4) نحصل على المعادلة الموجية النسبوية للجسيم الحر :

$$\frac{\hbar^2}{C^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = [\hbar^2 \nabla^2 - M^2 C^2] \Psi \quad (5)$$

تدعى هذه المعادلة بمعادلة كلاين - غوردن .

يمكن اظهار خاصية الصمود النسبوي للمعادلة ( 4 ) بتعريف شعاع الاندفاع رباعي المركبات  $P_\mu \{ P_1, P_2, P_3, i \frac{E}{C} \}$  فتصبح المعادلة ( 4 ) بالشكل

$$\sum_{\mu=1}^4 p_\mu^2 = - M^2 c^2.$$

أما المعادلة ( 3 ) فتصبح من الشكل  $P_\mu \rightarrow \hat{P}_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  حيث

( 5 )  $x_\mu \equiv (x, y, z, ict)$  • فباستخدام هذه الرموز تأخذ المعادلة ( 5 )

الصيغة :

$$[\sum_\mu \hat{p}^2 + M^2 c^2] \psi = 0. \quad (6)$$

إذا ضربنا طرفي العلاقة ( 5 ) بـ  $\psi^*$  وطرحنا من المعادلة الناتجة مرافقها العقدي نحصل على معادلة الاستمرار

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (7)$$

حيث

$$j = \frac{\hbar}{2Mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (8)$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2Mc^2} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}) \quad (9)$$

وتأخذ المعادلة ( 7 ) الشكل الصامد

$$\sum_\mu \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad j_\mu = \frac{\hbar}{2Mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \right),$$

حيث  $j_\mu \equiv (j_1, j_2, j_3, ic\rho)$

نستطيع الانتقال من المعادلة النسبوية (5) الى معادلة شرودينغر غير النسبوية من خلال التحويل الواحدى (Unitary)

$$\Psi(r, t) = \varphi(r, t) e^{-Mc^2 t/\hbar} \quad (10)$$

ففي الحالة غير النسبوية تختلف قليلا الطاقة الكلية للجسيم ، عن طاقة الكتلة السكونية أي  $E = E' + Mc^2$   $E' \ll Mc^2$

$$|i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}| \sim E' \varphi \ll Mc^2 \varphi$$

لذلك نستطيع أن نكتب

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{iMc^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-iMc^2 t/\hbar} \simeq - \frac{iMc^2}{\hbar} \varphi e^{-iMc^2 t/\hbar} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \simeq - \left[ \frac{2iMc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-iMc^2 t/\hbar} \quad (12)$$

باستخدام المعادلة (10) و (12) نحصل على المعادلة (5) وهي معادلة شرودينغر غير النسبوية للتابع  $\varphi$ .

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \varphi$$

بتعويض المعادلة (10) في (8) و (9) نستطيع مشاهدة النهاية غير النسبوية فإذا استخدمنا المعادلة (11) تأخذ المعادلات (8) و (9) الاشكال المعروفة في الميكانيك الكمومي غير النسبوي لكل من التيار والكثافة

$$\rho = \varphi^* \varphi ; \quad j = \frac{\hbar}{2Mi} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*)$$

ان الخاصة الأساسية للمعادلة النسبوية (5) هي كونها معادلة من المرتبة الثانية بالنسبة للزمن • ولتعين تغير التابع الموجي مع الزمن يجب معرفة قيم التابع وقيم مشتقه الأول بالنسبة للزمن في لحظة معينة • وبما أن قيم  $\Psi$  و  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  في لحظة معينة هي اختيارية ، فإن  $\mu$  المعرفة بالعلاقة (9) تأخذ قيماً موجبة أو سالبة أو الصفر • لذلك لا يمكن عد  $\mu$  أنها كثافة الاحتمال لقيم محددة من احداثيات الجسيم •

ترتبط الخاصة الثانية للمعادلة (5) بقواعد التحويل للتوابع الموجية  $\Psi$  فمن أجل التحويلات الى جمل من احداثيات متعامدة

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \quad \sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} \quad (13)$$

حيث  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$  ، لا تتغير قيمة الشعاع ( طوله ) نتيجة الانتقال من جملة احداثيات رباعية الى جملة أخرى • وتقابل دوراً في الفراغ الثلاثي ( تحويل لورنتزي ملائم ) أو انعكاساً • يجب أن تحافظ المعادلات الموجية النسبوية على شكلها عند خضوعها الى التحويلات (13) • ومن الملائم أن نستخدم الشكل الصامد (6) لمعادلة كلاين غوردن من أجل دراسة خواص التحويل للتوابع الموجية •

بما أن طول الشعاع رباعي المركبات لا يتغير مع تحويل الاحداثيات (13) لذلك ينتج من المعادلة (6) أن عملية التحويل تكافئ ضرب التابع الموجي بمعامل قيمته الواحد ، فعندما نجري تحويل الاحداثيات وفق العلاقة (13) والتي نكتبها بالشكل :

$$x \longrightarrow x' = ax \quad (13')$$

يأخذ التابع الموجي للمعادلة (5) الشكل

$$\Psi(\mathbf{x}) \longrightarrow \Psi'(\mathbf{x}') = \lambda \Psi(\mathbf{x}) \quad (14)$$

حيث  $|\lambda| = 1$  . إذا كان  $\lambda = +1$  أي  $\Psi'(-r, t) = \Psi(r, t) = \Psi(r', t')$  أي  $\Psi$  تابع سلمي (scalar) . أما إذا كان  $\lambda = -1$  أي  $\Psi'(-r', t') = -\Psi(r^*, t^*)$  أي  $\Psi$  تابع سلمي كاذب (pseudoscalar) .

تصف التوابع السلمية والتوابع السلمية الكاذبة جسيمات ذات سبن معدوم وبسبب امكان خلق أزواج الجسيمات وافنائها لا يكون عدد الجسيمات محافظاً في النظرية النسبوية ، ولكن الشحنة الكلية محافظة لذلك يفضل استخدام التوزع الاحتمالي للشحنة الكهربائية عوضاً عن التوزع الاحتمالي لاحداثيات الجسيم .

نجد بضرب العلاقتين (8) ، (9) بشحنة الالكترون :

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2Mi} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \quad (15)$$

$$\rho = \frac{ieh}{2Mc^2} (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}) \quad (16)$$

وفي هذه الحالة تمثل  $\mathbf{j}$  كثافة التيار الكهربائي ، وكذلك تمثل  $\rho$  كثافة الشحنة الكهربائية وتستطيع تفسير القيمة السالبة والموجبة والصفر فهي تشير الى نوع الشحنة . فاذا استخدمنا معادلة الاستمرار (7) تتوصل الى قانون انحفاظ الشحنة الكلية :  $\int \rho d_3r = c$  . تحدد كثافة الشحنة  $\rho$  الفرق بين عدد الشحنات الموجبة وعدد الشحنات السالبة ، ولا تأخذ العلاقتان (15) ، (16) دورهما الا عند تفاعل الجسيمات مع الحقول الكهرومغناطيسية .

### ٣ - الجسيمات الحرة ذات السبين المعلوم :

ان فكرة الحركة الحرة للجسيم بعيدة عن الواقع في حالة الجسيمات ذات السبين المعلوم مثل البيونات والكاونات لأنها تتفاعل بشدة مع الجسيمات الأخرى ومع الحقول . ومع ذلك فافتنا سندرس حلول المعادلة (5) من أجل جسيم حر ممدوم السبين لأن للأسلوب المتبع أهمية كبيرة .

سنبحث عن حل للمعادلة (5) يقابل حالة ذات اندفاع محدد أي من

الشكل :

$$\psi = e^{i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \epsilon t] / \hbar} \quad (17)$$

بتعويض الحل (17) في المعادلة (5) نجد أن هذا الحل يحقق المعادلة من

أجل :

$$E_p = c \sqrt{p^2 + M^2 c^2} \quad (18)$$

$$\epsilon = \pm E_p \quad \text{حيث}$$

فالمعادلة (5) نوعان من الحلول

$$\psi (+) = A_1 e^{i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - E_p t] / \hbar} \quad (19)$$

$$\psi (-) = A_2 e^{i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + E_p t] / \hbar} \quad (20)$$

بالتعويض في المعادلة (16) نجد :

$$\rho_{\lambda} = \frac{\lambda e E p}{Mc^2} \Psi_{\lambda}^* \Psi_{\lambda} \quad (21)$$

يقابل الحل  $\Psi (+)$  حركة حرة لجسيم اندفاعه  $p$  وشحنته  $e$  ، بينما تقابل الحلول  $\Psi (-)$  حركة حرة لجسيم اندفاعه  $p$  وشحنته سالبة . اذا طبقنا على الحركة الحرة للجسيمات شروطاً حديثة دورية بدور كبير  $L$  وفق المحاور الديكارتية ، أخذت مركبات الشعاع الموجي قيماً منفصلة

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i ; n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

وفي هذه الحالة يأخذ الحل العام الشكل :

$$\psi_{\lambda} = L^{-3/2} \sum_k A_k e^{i[k \cdot r - \lambda \omega(k) t]}, \quad \omega(k) = E_p / \hbar. \quad (23)$$

أي أن الانتقال الى الميكانيك الكمومي النسبوي أدى الى ظهور درجة جديدة من الحرية بالمقارنة مع المعادلة غير النسبوية . ففي النظرية غير النسبوية يوجد حالة واحدة للحركة الحرة من أجل اندفاع محدد ، بينما نجد في النظرية النسبوية للجسيمات المشحونة عديمة السبن ثلاثة حلول تقابل ثلاث قيم ممكنة لشحنة الجسيم ، أي أن درجة الحرية الجديدة ترتبط بالشحنة الكهربائية للجسيم .

ولكي نرى هذه الدرجة الجديدة من الحرية بوضوح أكثر سنعيد كتابة المعادلة (5) للتابع الموجي المركب ، على شكل مجموعة من معادلتين تفاضليتين خطيتين من المرتبة الاولى بالنسبة للزمن للتابعين الموجيين  $\varphi$  ,  $x$  فنكتب :

$$\Psi = \varphi + x ; i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = Mc^2 (\varphi - x) \quad (24)$$

ويمكننا بسهولة أن نتأكد أن مجموعة المعادلتين

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 (\varphi + x) + Mc^2 \varphi \\ i\hbar \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 (\varphi + x) - Mc^2 x \end{aligned} \right] \quad (25)$$

تكافئ تماماً المعادلة (5) .

ولتبسيط هذه المعادلات نفترض أن  $\varphi$  ,  $x$  هما مركبتا التابع  $\Psi$  الذي يكتب على شكل مصفوفة من عمود واحد :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix} \quad (26)$$

سنعرف الآن المصفوفات الأربع التالية :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \\ \hat{\tau}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

التي تحقق العلاقات :

$$\hat{\tau}_k^2 = \hat{I}, \quad \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l = -\hat{\tau}_l \hat{\tau}_k = i\hat{\tau}_m,$$

تأخذ الأدلة  $k, l, m$  القيم 1, 2, 3 بترتيب دوري . نستطيع أن نكتب مجموعة المعادلات (25) على شكل معادلة واحدة وفق الصيغة الهاميلتونية :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f) \Psi = 0. \quad (28)$$

وهي معادلة كلاين - غوردن حيث يأخذ مؤثر هاميلتون الصيغة :

$$\hat{H}_f = (\hat{\tau}_3 + i \hat{\tau}_2) \frac{p^2}{2M} + Mc^2 \hat{\tau}_3 \quad (29)$$

بتطبيق المؤثر  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}_f$  على المعادلة (28) وباستخدام العلاقة

$$\hat{H}_f^2 = c^2 p^2 + M^2 c^4$$

نحصل على معادلة من المرتبة الثانية هي :

$$[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 p^2 + M^2 c^4] \psi = 0$$

والتي تشير الى أن كل مركبة من التابع (26) تحقق المعادلة (5) • بتعويض المعادلة (24) في المعادلة (16) وباستخدام المعادلة (26) و (27) نحصل على الصيغة التالية التي تعطي كثافة الشحنات الكهربائية

$$\rho = e(\psi^* \psi - \chi^* \chi) = e \psi^+ \hat{\tau}_3 \psi \quad (30)$$

حيث  $\psi^+ = (\psi^*, \chi^*)$  هو المرافق الهرميتي للتابع (26) • وبالمثل نستطيع كتابة العلاقة (15) التي تعطي كثافة التيار بالشكل :

$$j = \frac{e\hbar}{2Mi} [\psi^+ \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i \hat{\tau}_2) \nabla \psi - (\Delta \psi^+) \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i \hat{\tau}_2) \psi] \quad (31)$$

ولقد ذكرنا سابقاً أن معادلة الاستمرار (7) تقود الى انحفاظ الشحنة ا

$$\int \rho d_3 r = e \int \psi^+ \hat{\tau}_3 \psi d_3 r$$

وذلك باجراء المكاملة على كل قيم متحولات التابع • فمن أجل حركة حرة لجسيم واحد يُنظَّم هذا المقدار الى القيمة  $+e$  أو  $-e$  وفقاً لاشارة شحنة الجسيم •

ويؤدي شرط التنظيم الى العلاقة :

$$\int \Psi^+ \hat{\tau}_3 \Psi d_3 r = \int (\varphi^* \varphi - x^* x) d_3 r = \pm 1 \quad (32)$$

لندرس الآن الحركة الحرة لجسيم معدوم المspin ضمن الحجم  $V$  فاذا كتبنا

$$\Psi = V^{-1/2} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ x_0 \end{pmatrix} e^{i[(p \cdot r) - Et]/\hbar} \quad (33)$$

وعوضنا هذا الحل في المعادلة (28) حصلنا على مجموعة المعادلتين :

$$(\epsilon - Mc^2) \varphi_0 = \frac{p^2}{2M} (\varphi_0 + x_0)$$

$$(\epsilon + Mc^2) x_0 = \frac{-p^2}{2M} (\varphi_0 + x_0)$$

ان شرط وجود حل غير تافه لهاتين المعادلتين هو :

$$E_p = c \sqrt{p^2 + M^2 c^2} ; \quad \epsilon = \pm E_p$$

فاذا كان  $\epsilon = E_p$  يكون للتابع  $\Psi(+)$  المركبات

$$\varphi_0(+) = \frac{E_p + Mc^2}{2 \sqrt{Mc^2 E_p}} ; \quad x_0(+) = \frac{Mc^2 - E_p}{2 \sqrt{Mc^2 E_p}} \quad (34)$$

وقد تم حساب ثابت التنظيم باستخدام المعادلة :

$$\varphi_0(+) \varphi_0(+) - x_0(+) x_0(+) = 1 \quad (35)$$

تمثل الطول المقابلة لـ  $E_p = \epsilon$  حركة جسيم يملك شحنة موجبة ونطلق على هذه الحلول اسم الحلول الموجبة وتقابل التنظيم الموجب في العلاقة (32) .

أما إذا كان  $\epsilon = -E_p$  فيكون التابع  $\psi(-)$  المركبتان

$$\varphi_0(-) = \frac{Mc^2 - E_p}{2 \sqrt{Mc^2 E_p}} ; \quad x_0(-) = \frac{Mc^2 + E_p}{2 \sqrt{Mc^2 E_p}} \quad (36)$$

وفي هذه الحالة يكون :  $\varphi_0(-) \varphi_0(-) - x_0(-) x_0(-) = -1$  وتقابل حركة جسيم شحنته سالبة وتدعى بالحلول السالبة وتقابل التنظيم السالب في العلاقة (32) .

يكون في التقريب غير النسبوي  $E_p \simeq Mc^2 + \frac{p^2}{2M}$  ويكون للتوابع الموجية قيم من المرتبة التالية :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(+) \sim 1 \quad |x_0(+)| \sim \left(\frac{p}{2Mc}\right)^2 = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \ll 1 \\ | \varphi_0(-) | \sim \left(\frac{p}{2Mc}\right)^2 = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \ll 1 ; \quad x_0(-) \sim 1 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

يتضح من العلاقات (33)، (35)، (36) أنه إذا قابل التابع  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix}$  حلاً لجسيم شحنته موجبة فإن التابع  $\psi = \begin{pmatrix} x^* \\ \varphi^* \end{pmatrix}$  يقابل حلاً لجسيم شحنته سالبة والعكس بالعكس . ويدعى أحدهما بالمرافق الشحني للآخر ويرتبطان بالعلاقة

$$\psi_c = \hat{\tau}_1 \psi^*$$

٤ - التفاعل بين الجسيم عديم السبن والحقول الكهروطيسية :

من المعروف في ( الإلكتروديناميك ) الكلاسيكي أننا نستطيع الانتقال من التابع الهاميلتوني للجسيم الحر  $E = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2}$  الى التابع الهاميلتوني لجسيم مشحون يتحرك ضمن حقل كهروطيسي معين بالكومونين

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, iA_0) \quad (38)$$

وذلك باستخدام التحويل

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \quad \text{أو} \quad \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E - e A_0 \\ P \longrightarrow P - \frac{e}{c} A \end{array} \right. \quad (39)$$

ان الانتقال من المعادلة الكمومية (6) الممثلة للحركة الحرة ، الى المعادلة الكمومية الممثلة لحركة جسيم مشحون ، يتم كما في الميكانيك الكلاسيكي وذلك باجراء التحويل

$$\hat{P}_\mu \longrightarrow \hat{P}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \quad (40)$$

على المعادلة (6) ، فنحصل على المعادلة الموجية النسبوية :

$$\left\{ \sum_\mu \left( \hat{P}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 + M^2 c^2 \right\} \psi = 0, \quad (41)$$

أو

$$\frac{1}{c} \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right]^2 \psi = \left[ \left( \hat{P} - \frac{e}{c} A \right)^2 + M^2 c^2 \right] \psi \quad (42)$$

يكون التابع  $\Psi$  في المعادلة (41) عقدياً لأن الجسيمات المشحونة توصف بتتابع عقدي. إذا ضربنا المعادلة (42) من اليسار بالتابع  $\Psi^*$  وطرحنا من المعادلة الناتجة مرافقها العقدي حصلنا على معادلة الاستمرار (7) • وتعطى كثافة الشحنات الكهربائية وكثافة التيار بوجود الحقل الكهرطيسي بالعلاقين :

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2Mc} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{e^2 A_0}{Mc} \Psi^* \Psi \quad (43)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2Mi} \left( \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) - \frac{e^2 \mathbf{A}}{Mc} \Psi^* \Psi \quad (44)$$

وينتج عن الشكل الصامد (41) أن وجود الحقل الكهرطيسي لا يؤثر على خاصية الصمود عند التحويل اللورنتزي ، ومن المعروف أننا نستطيع وصف الحقل الكهرطيسي بكمونات مختلفة ترتبط فيما بينها بالتحويل القياسي « gauge »

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} G$$

حيث  $G$  تابع اختياري • وهذا يعني :

$$\left( \hat{P}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) e^{ieG/\hbar c} \Psi' = e^{ieG/\hbar c} \left( \hat{P}_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \Psi$$

وإذا كان التحويل القياسي للكمونات مصحوب بتحويل طورى واحد

$$\Psi = \Psi' e^{ieG/\hbar c}$$

مؤدياً الى بقاء المعادلة (41) صامدة • وبما أن التحويلات الواحدة لا تغير من الخواص الفيزيائية للجملة نستطيع أن نقول ان المعادلة (41) لا تتأثر بالتحويل

القياسي للكمونات • ونستطيع باستخدام التحويل القياسي التوصل الى كمونات تحقق العلاقة :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + (\nabla \cdot A) = 0 \quad (45)$$

فباجراء التحويل

$$\Psi(r,t) = \varphi(r,t) e^{-iMc^2 t/\hbar} \quad (46)$$

نجد

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e A_0)^2 \Psi(r,t) \simeq e^{-iMc^2 t/\hbar}$$

$$\times [M^2 c^4 - 2Mc^2 e A_0 + 2Mc^2 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - ie\hbar \frac{\partial A_0}{\partial t}] \varphi$$

$$(\hat{P} - \frac{e}{c} A)^2 \Psi(r,t) \simeq e^{-iMc^2 t/\hbar}$$

$$\times [ \hat{P}^2 - \frac{2e(A \cdot \hat{P})}{c} + \frac{e^2}{c^2} A^2 + \frac{ie\hbar}{c} (\nabla \cdot A) ] \varphi$$

بتعويض هاتين المعادلتين في (42) واستخدام (45) نتوصل الى معادلة شرودينغر غير النسبوية التي تصف حركة جسيم مشحون عديم السبن في حقل كهرومغناطيسي

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = [ \frac{\hat{P}^2}{2M} - \frac{e}{Mc} A \cdot \hat{P} + \frac{e^2}{2Mc^2} A^2 + e A_0 ] \varphi \quad (47)$$

ولدراسة الحالات المستقرة للجسيم في حقل كهرومغناطيسي يجب وضع

$$\Psi(r,t) = \Psi(r) e^{-iEt/\hbar} \quad (48)$$

في المعادلة (42) عندها سيحقق التابع  $\psi(r)$  المعادلة:

$$\frac{1}{c^2} (\epsilon - eA_0)^2 \psi(r) = \left[ \hat{P}^2 - \frac{2e}{c} (A \cdot \hat{P}) - \frac{e^2}{c^2} A^2 + M^2 c^2 \right] \psi(r) \quad (49)$$

ففي الحالات المستقرة (48) تعطى كثافة الشحنة الكهربائية بالعلاقة:

$$\rho = \frac{e[\epsilon - eA_0]}{Mc^2} \psi^* \psi$$

اذا كان  $\epsilon = E > eA_0$  تكون لإشارة الكثافة إشارة الشحنة  $e$  نفسها أما عندما يكون الكمون كبيراً  $eA_0 > E$  ، فتخالف إشارة الكثافة إشارة الشحنة  $e$  أي يجب أن نتخلى عن فكرة الجسم المستقل في المكان الذي يكون فيه الحقل قوياً . ولتوضيح استخدام المعادلة (49) سندرس حركة جسيم معدوم السبين ذي شحنة سالبة في حقل نواة الذرة . فاذا أهملنا حجم النواة المحدود ، وجدنا :

$$eA_0 = -\frac{ze^2}{r} ; A = 0$$

فمن أجل  $\epsilon = E > 0$  تصبح المعادلة (49) من الشكل

$$\left[ \left( E + \frac{ze^2}{r} \right)^2 - M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right] \psi(r) = 0$$

وباستخدام الاحداثيات القطبية الكروية وبالنظر الى الحلول المقابلة الى الاندفاعات الزاوية المهمة فقط فكتب :

$$\psi(r) = \frac{1}{r} R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad l = 0, 1, 2, \quad (50)$$

يحقق تابع الموضع المعادلة :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) - z^2 \alpha^2}{r^2} + \frac{2z\alpha E}{\hbar c r} - \frac{M^2 c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2} \right] R_l(r) = 0 \quad (51)$$

حيث  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  ويدعى بثابت البنية الدقيقة ، اذا كتبنا

$$\beta^2 = \frac{4(M^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2} \quad (52)$$

واستخدمنا المتحول الجديد  $\rho = \beta r$  تصبح المعادلة (51) من الشكل :

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1) - z^2 \alpha^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right] R_l = 0 \quad (53)$$

حيث

$$\lambda = \frac{2z\alpha E}{\hbar c \beta} > 0 \quad (54)$$

وبتعويض  $R_l = \rho^{s+1} W(\rho) e^{-\rho/2}$  في المعادلة (53) تتوصل الى معادلة تعطي

$W(\rho)$  وهي :

$$\rho \frac{d^2 W}{d\rho^2} + (2s + 2 - \rho) \frac{dW}{d\rho} + (\lambda - s - 1) W = 0 \quad (55)$$

حيث

$$s(s+1) = l(l+1) - z^2 \alpha^2 \quad (56)$$

ان حل المعادلة (55) هو التابع فوق الهندسي

$$w(\rho) = F(-\lambda + s + 1, 2s + 2, \rho) \quad (57)$$

يجب على  $R_l$  أن يتناقص عندما  $\rho \rightarrow \infty$  وهذا يقتضي أن تكون سلسلة القوى في التابع فوق الهندسي (57) عبارة عن كثير حدود محدود، ولكي يتحقق ذلك يجب أن يكون:

$$\lambda - s - 1 = \nu = 0, 1, 2,$$

أو

$$\lambda = \nu + s + 1$$

يحل المعادلة (56) واختيار الجذر

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - z^2 \alpha^2} \quad (58)$$

الذي يضمن بقاء  $\lambda$  موجباً ، نجد :

$$\lambda = \nu + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - z^2 \alpha^2} \quad ; \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (59)$$

وباستخدام المعادلتين (52) ، (54) نجد بعد التخلص من  $\beta$  :

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + z^2 \alpha^2 \lambda^{-2}}} \quad (60)$$

ان ثابت البنية الدقيقة  $\alpha$  صغير وبالتالي يكون العامل  $z\alpha$  صغيراً بالمقارنة مع

أبعاد الذرة ، فتبديل (59) بـ (60) ثم النشر وفق قوى  $z\alpha$  نجد :

$$E = MC^2 \left[ 1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4 \alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right] \quad (61)$$

حيث  $n = \nu + l + 1$  هو العدد الكمومي الرئيسي • بتعويض (61) في (52) نجد

$$Z\alpha \ll 1 \quad \text{من أجل} \quad \beta = \frac{2ZMe^2}{n\hbar^2}$$

يمثل الحد الأول في المعادلة (61) الطاقة السكونية للجسيم ، أما الحد الثاني :

$$- \frac{M^2 C^2 Z^2 \alpha^2}{2n^2} = \frac{-MZ^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} = E_n^0$$

فهو طاقة جسيم كتلة  $M$  في حقل كولوني محسوب بطريقة غير نسبية ،  
والحد الثالث :

$$\Delta E_{nl} = \frac{E_n^0 Z^2 \alpha^2}{n} \left[ \frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right] \quad (63)$$

يعطي التصحيح النسبوي للطاقة ويرتبط بالعدد الكمومي  $l$  مؤدياً الى ازالة الانطباق في التقريب غير النسبوي •



## مسائل

١ - أوجد منطقاً من معادلة كلاين - غوردن ، معادلة الانحفاظ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

٢ - أثبت مستخدماً المصفوفات

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أن معادلة كلاين غوردن ترد الى المعادلة  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$  حيث  $\Psi = \begin{bmatrix} \Phi \\ \chi \end{bmatrix}$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Psi - \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \right) ; \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Psi + \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \right)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\tau_3 + i\tau_2) \nabla^2 + mc^2 \tau_3$$

٣ - أثبت أن معادلة الحركة لجسيم مشحون عديم السبن ضمن حقل كهرومغناطيسي توصف في الميكانيك الكمومي النسبوي بالعلاقة :

$$\left( \square - k^2 + \frac{e^2 A_0^2}{\hbar^2 c^2} - 2 \frac{ie}{\hbar^2} A_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(r, t) = 0$$



## الفصل الثالث

# النظرية الكمومية لجمل الجسيمات المتماثلة

## النظرية الكمومية للجمل المؤلفة من جسيمات متماثلة

### ١ - معادلة شرودينغر لجملة مؤلفة من جسيمات متماثلة :

سندرس الآن تعميم النتائج ، المقابلة لحركة جسيم واحد ضمن حقل خارجي ، في حالة جسيمات متعددة . عندما تتكون الجملة من  $N$  جسيماً ، يرتبط التفاعل بين الجسيمات وبين الحقل الخارجي بكامل التاريخ السابق للجملة وليس بوضع الجسيمات في لحظة ما ، وذلك عند ادخال أثر الاعاقة بعين الاعتبار ، فاذا كانت السرعات النسبية للجسيمات صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء ، فان التوزيع الموضعي ( التشكيل ) للجسيمات يتغير قليلاً خلال الزمن اللازم لانتقال التفاعل ، ونستطيع في هذه الحالة كتابة التابع الهاميلتوني الكلاسيكي كتابع لاحداثيات واندفاعات جميع الجسيمات في الجملة حتى المرتبة  $^2 (v/c)$  ، أما اذا كانت سرعات الجسيمات من مرتبة سرعة الضوء ، عندها يجب أن نأخذ الحقل الذي ينقل التفاعل بعين الاعتبار اضافة الى احداثيات الجسيمات واندفاعاتها ، ويكون للجملة عدد لا نهائي من درجات الحرية .

سنبدأ بدراسة جملة نستطيع فيها استخدام التقريب غير النسبوي ، فنكتب مؤثر هاميلتون بالشكل :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \hat{V}(r_1, r_2, \dots) + \hat{V} \quad (1)$$

حيث  $\hat{V}$  هو مؤثر الطاقة الكامنة للتفاعل بين الجسيمات وهو تابع لإحداثيات الجسيمات جميعاً . والمقدار  $\hat{W}$  هو مؤثر التفاعل بين الاندفاع المداري والspin ،

أي هو التفاعل بين سبينات الجسيمات وبين جزء الطاقة الكامنة المرتبط باندفاعات الجسيمات والذي يأخذ بعين الاعتبار أثر تفاعلات الاعاقة بصورة جزئية ، فهو تابع لمؤثرات السبن ولاندفاعات هذه الجسيمات ويكون عادة من المرتبة  $(v/c)^2$  ويحسب باستخدام نظرية الاضطراب .

وتأخذ معادلة شرودينغر الصيغة :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}) \Psi = 0 \quad (2)$$

حيث  $\hat{H}$  هو مؤثر هاميلتون المعين بالعلاقة (1) . يكون التابع الموجي  $\Psi$  مرتبطاً بالزمن والسبن واحداثيات الموضع للجسيمات أو هو تابع للزمن والسبن والاندفاعات وذلك حسب اختيار طريقة التمثيل .

فإذا كانت جميع الجسيمات في الجملة متماثلة ( $m = m_i, i = 1, \dots, N$ ) أي غير متميزة ، عندها يكون مؤثر هاميلتون  $\hat{H}$  صامداً لدى تبديل جسيمين من الاجسام في الجملة . نرمز الى مؤثر التبديل الذي يغير رقمي الجسيمين  $k$  و  $l$  بالرمز  $\hat{P}_{kl}$  ، ويعبر عن شرط تماثل الجسيمات في الجملة بضرورة كون مؤثر هاميلتون  $\hat{H}$  تبادلياً مع مؤثر التبديل أي :

$$\hat{P}_{kl} \hat{H} = \hat{H} \hat{P}_{kl} \quad (3)$$

وبما أن المؤثرين  $\hat{H}$  و  $\hat{P}_{kl}$  تبادليان مع بعضهما فان القيم الذاتية للمؤثر

$\hat{P}_{kl}$  هي من ثوابت الحركة .

ولتعيين التوابع الذاتية والقيم الذاتية للمؤثر  $\hat{P}_{1,2}$  والذي يدل موضعي الجسيمين 1 , 2 ، ننظر الى جملة مؤلفة من جسيمين متماثلين . عندها يجب

تلى النوابع الموجية أن تحقق المعادلة :

$$\hat{P}_{1,2} \Psi(1,2) = \lambda \Psi(1,2) \quad (4)$$

حيث  $\lambda$  هي قيمة ذاتية حقيقية لأن المؤثر  $\hat{P}_{1,2}$  هرميتي . فإذا طبقنا على المعادلة (4) مؤثر التبديل مرة أخرى نجد :

$$\hat{P}_{1,2}^2 \Psi(1,2) = \lambda^2 \Psi(1,2) \quad (5)$$

ومن جهة أخرى ، وانطلاقاً من تعريف مؤثر التبديل لدينا :

$$\hat{P}_{1,2} \Psi(1,2) = \Psi(2,1)$$

وكذلك  $\hat{P}_{1,2}^2 \Psi(1,2) = \Psi(1,2)$  . باستخدام هذه النتيجة في المعادلة (5) :  
نجد :  $\lambda^2 = 1$  أو  $\lambda = \pm 1$

أي أن لمؤثر التبديل  $\hat{P}_{1,2}$  قيمتين ذاتيتين فقط هما  $\pm 1$  . يدعى التابع الذاتي  $\Psi_s(1,2)$  المقابل للقيمة الذاتية  $\lambda = 1$  بالتابع المتناظر ويعرف بالعلاقة :

$$\hat{P}_{1,2} \Psi_s(1,2) = \Psi_s(1,2) \quad (6)$$

كما يدعى التابع الذاتي  $\Psi_a(1,2)$  المقابل للقيمة الذاتية  $\lambda = -1$  بالتابع ذي التناظر المضاد ويعرف بالعلاقة :

$$\hat{P}_{1,2} \Psi_a(1,2) = -\Psi_a(1,2)$$

وتظهر التجارب على أن الجملة المؤلفة من الكترونين ، أو بروتونين أو ترونين توصف في جميع حالاتها بتوابع ذات تناظر مضاد ، بينما توصف الجملة

المؤلفة من جزئيتين من جزئيات  $\alpha$  بتابع متناظر • أي أن خاصة التناظر بالنسبة لتبديل جسيمين هي إحدى ثوابت الحركة — لأن المؤثرين  $\hat{H}$  ,  $\hat{P}_{1,2}$  تبادليان — وتتعين هذه الخاصة بنوع الجسيمات المشكلة للجملة •

يمكننا تعميم ماسبق ليشمل جمل مؤلفة من عدد اختياري من الجسيمات المتماثلة • فبسبب التماثل يجب أن يكون للتابع الموجي الذي يصف الجملة خواص تناظرية ( إما تناظر أو تناظر مضاد ) بالنسبة لتبديل مواضع أي زوج من جسيماتها • لا تتغير الخواص التناظرية للتابع الموجي بواسطة مؤثر اضطراب خارجي لأن المؤثر الخارجي متناظر بالنسبة لاضطراب أي زوج من الجسيمات بسبب تماثل الجسيمات، فتبعاً لطبيعة الجسيمات توصف حالات الجملة المكونة من جسيمات متماثلة بتوابع موجية متناظرة أو بتوابع موجية ذات تناظر مضاد •

توصف حالات الجمل المؤلفة من البكترونات ، أو بروتونات ، أو قترونات أو أي جسيمات بسيطة كانت أم مركبة بتوابع موجية ذات تناظر مضاد إذا كان لها سبين مساوٍ عدداً فردياً من أنصاف  $\pi$  (  $\frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi, \dots$  ) •

كما توصف جمل الجسيمات مركبة كانت أم بسيطة بتوابع موجية متناظرة إذا كان لها سبين معدوم أو مساوٍ عدداً صحيحاً من  $\pi$  (  $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  ) •

هاتان القاعدتان هما قاعدتان تجريبيتان تؤكدان على المسلكة الأساسية وهي عدم تمايز الجسيمات المتماثلة • تدعى الجسيمات المشكلة لجملة توصف بتوابع موجية متناظرة بالبوزونات كما تدعى الجسيمات المشكلة لجملة توصف بتوابع موجية ذات تناظر مضاد بالفرميونات • وإن جميع الجسيمات الموجودة في الطبيعة تكون إما بوزونات أو فرميونات •

وارتباطاً بمبدأ عدم التمايز للجسيمات المتماثلة يجب أن يتم تعريف مبدأ تراكم الحالات بدقة • إذ أنه ليس ضرورياً أن يصفه أي مجموع خطي

لحلول اختيارية ، من حلول معادلة شرودينغر لجملة من الجسيمات المتماثلة ، حالة هذه الجملة . تتعين الحالات الممكنة للجملة بالمجموع الخطي للتابع التي لا تغير الخواص التناظرية نتيجة تبديل أي زوج من الجسيمات . فمثلاً تقبل التتابع ذات التناظر المضاد في المجموع الخطي اذا كنا نتعامل مع جملة من الالكترونات .

## ٢ - التتابع الموجية المتناظرة والتتابع الموجية ذات التناظر المضاد :

لمعادلة شرودينغر (2) حلول عامة متناظرة وأخرى ذات تناظر مضاد. فحينما نتعامل مع جملة من الفرميونات يجب علينا أن نختار الحلول العامة ذات التناظر المضاد ، كما يجب اختيار الحلول المتناظرة حين التعامل مع جملة من البوزونات ، ولسوف نوضح كيفية اختيار الحلول حسب الخواص التناظرية المطلوبة .

لنفترض أن لدينا جملة مؤلفة من جسيمين وأن  $\Psi(1,2)$  هو أحد حلول المعادلة (2) . فبسبب تماثل الجسيمين نستطيع تشكيل التابع  $\Psi(2,1)$  بتبديل رقمي الجسيمين (1) ، (2) في التابع  $\Psi(1,2)$  ونحصل على حل آخر للمعادلة (2) ، ونستطيع بسهولة ويسر أن نميز الحل الذي يتمتع بالتناظر المطلوب . فبغض النظر عن معامل التنظيم سيكون للتابع المتناظر  $\Psi_s$  وللتابع ذي التناظر المضاد  $\Psi_a$  الشكلان :

$$\Psi_s = B [\Psi(1,2) + \Psi(2,1)]$$

$$\Psi_a = A [\Psi(1,2) - \Psi(2,1)]$$

يمكننا تعميم عملية التنظير والتنظير المضاد الى حالة جملة مؤلفة من N جسيماً ، وفي هذه الحالة يكون لدينا ! N من التباديل الممكنة ونستطيع أن نتوصل للتابع المقابل لأحد هذه التباديل من التابع  $\Psi(1,2,3,\dots,N)$  بالتبديل المتتابع لأزواج الجسيمات . ليكن  $\hat{P} \Psi(1,2,\dots,N)$  هو التابع الذي نحصل

عليه من التابع  $\Psi(1, 2, \dots, N)$  بعد عملية تبديل متتابعة لأزواج الجسيمات .  
عندها نحصل على التابع المتناظر وعلى التابع ذي التناظر المضاد بالعلاقين :

$$\psi_s = A \sum \hat{P}_s \psi(1, 2, \dots, N), \quad (7)$$

$$\psi_a = B \sum (-1)^s \hat{P}_s \psi(1, 2, \dots, N), \quad (8)$$

حيث يتم الجمع من أجل جميع الـ  $N!$  تابعا ، المقابلة للتباديل المختلفة الممكنة لـ  $N$  جسيما في هذه الجملة .

تفترض الحل التام لمسألة الاجسام المتعددة في الميكانيك الكمومي صعوبات رياضية كبيرة ، ومع ذلك فانه يوجد عدد كبير من الحالات ، نستطيع فيها التعرف على الخواص الاساسية للجمال الكمومية باستخدام طريقة التقريب المتتالي تفترض فيها استقلال الجسيمات عن بعضها في التقريب الصفري ، وتأخذ التفاعل بين الجسيمات بعين الاعتبار في التقريب الأعلى من خلال نظرية الاضطراب .

يأخذ مؤثر هاميلتون لجملة الجسيمات في التقريب الصفري صيغة مجموع المؤثرات الهاميلتونية لكل جسيم أي :

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{H}(i).$$

ويمكن كتابة التوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}_0$  على شكل جداء أو مجموع خطي لجداءات التوابع الذاتية للمؤثرات  $\hat{H}(i)$  . بينما تكون القيم الذاتية للمؤثر  $\hat{H}_0$  مساوية لمجموع القيم الذاتية للمؤثرات  $\hat{H}(i)$  . لنفترض أن التابع  $\varphi_{n_l}(i)$  هو حل للمعادلة  $[\hat{H}(i) - \epsilon_{n_l}] \varphi_{n_l}(i) = 0$  حيث تشير الأدلة  $n_l$

الى مجموعة الأعداد الكمومية المميزة لحالة الجسيم  $i$  • ان التتابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}_0$  والمقابلة للقيمة الذاتية  $E = \sum_i \epsilon_{ni}$  ، ستكون على شكل مجموع خطي للتتابع  $\varphi_{n_1}(1) ; \varphi_{n_2}(2) ; \dots ; \varphi_{n_N}(N)$  • فمن أجل جملة من البوزونات يجب أن يكون التابع الموجي الذي يصف هذه الجملة متناظراً

$$\psi_s = A \sum \hat{P}_s \varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) \dots \varphi_{n_N}(N),$$

حيث  $A$  هو معامل التنظيم • أما في حالة جملة من الفيرميونات فيجب أن يكون للتابع الموجي تناظر مضاد أي :

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum (-1)^s \hat{P}_s \varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) \dots \varphi_{n_N}(N).$$

نستطيع كتابة التابع الموجي ذي التناظر المضاد على شكل معين يدعى معين سلاتر ويأخذ الشكل :

$$\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{n_1}(1) & \varphi_{n_1}(2) & \dots & \varphi_{n_1}(N) \\ \varphi_{n_2}(1) & \varphi_{n_2}(2) & \dots & \varphi_{n_2}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n_N}(1) & \varphi_{n_N}(2) & \dots & \varphi_{n_N}(N) \end{vmatrix} \quad (10)$$

ان تغير اشارة التابع (10) نتيجة تبديل رقمي جسيمين ، محقق لأن اشارة المعين تتغير عند تبديل موضع زوج من أعمدته • ويمكننا انطلاقاً من العلاقة (10) التوصل الى مبدأ باولي • فاستناداً الى هذا المبدأ لا يمكن أن يصف التابع (10) حالة جملة من الفيرميونات المتماثلة تحوي جسيمين لهما الحالة الكمومية نفسها • فإذا كان بين الحالات الافرادية  $n_1 ; n_2 ; \dots ; n_N$  اثنتان متماثلتان انعدم معين

سلاقر • لهذا ، فمن المستحيل أن يتواجد في جملة من الفيرميونات المتماثلة جسيمان أو أكثر للحالة الكمومية نفسها • وبالطبع يطبق مبدأ باولي بهذه الطريقة من أجل جمل يكون فيها التفاعل بين الجسيمات ضعيفا وباتتالي نستطيع التحدث عن حالات لجسيمات منفصلة ولو بطريقة تقريبية • وبصورة عامة نستطيع القول ان الجملة تحقق مبدأ باولي اذا أمكن وصفها بتوابع موجية ذات تناظر مضاد بالنسبة لعملية تبديل أزواج الجسيمات • وعلى الرغم من كون العلاقة (10) مميزة لحالة جملة تكون فيها الجسيمات في حالات منفصلة  $n_1, n_2, \dots, n_N$  الا أنه من المستحيل تحديد الجسيم الموجود في كل حالة •

يكتب مؤثر هاميلتون لجملة الجسيمات المتماثلة بالعلاقة :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i^2 + \hat{V}(r_1, r_2, \dots, r_N),$$

وهي لا تتضمن مؤثرات السبن للجسيمات في التقريب غير النسبوي وبغيا ب الحقل المغناطيسي الخارجي • لذلك يمكن كتابة التابع الموجي للجملة على شكل جداء لتابع الموضع  $\Phi$  وتابع السبن  $x$  كما يلي :

$$\Psi(r_1 s_1, r_2 s_2, \dots) = \Phi(r_1, r_2, \dots) x(s_1, s_2, \dots) \quad (11)$$

أو على شكل مجموع خطي لمثل هذا الجداء • ويستخدم هذا التابع كتقريب أول من أجل دراسة جملة يحتوي مؤثر هاميلتون المثل لها ، تفاعلا بين الاندفاع المداري والسبن •

تشير ضرورة تناظر التوابع الموجية بالنسبة الى تبديل أرقام الجسيمات الى كون التوابع الموجية توابع تامة ، لأن تبديل أرقام الجسيمات يؤدي الى اضطراب في متحولات الموضع والسبن ، فاذا كان التابع  $\Psi$  على شكل جداء لتوابع الموضع بتوابع السبن أو على شكل مجموع خطي لمثل هذه الجداءات ، عندها نستطيع تأمين تناظر التابع (11) بتشكيلات مختلفة لكل من  $\Phi$  و  $x$

وهي ذات تناظر مختلف عند تبديل الاحداثيات الملائمة . ولدراسة هذه الاحتمالات نستخدم مخططات يونغ .

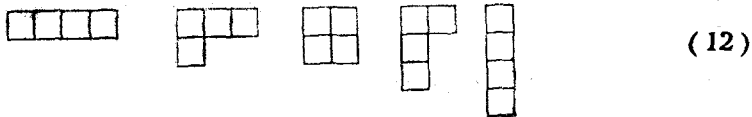
يرمز كل مخطط من مخططات يونغ الى نوع محدد تماماً من أنواع التناظر، وتعين مخططات يونغ لتابع الموضع  $\phi$  الذي يحوي  $N$  متحولاً  $r_1, r_2, \dots, r_N$  بتقسيم العدد  $N$  بكل الطرق الممكنة وفق مجموع حدود من الشكل :

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots$$

يمكننا توضيح هذا التقسيم بوضع  $N$  مربعات في سطور يحوي كل منها  $N_1$  و  $N_2$  .. مربعات وفق ترتيب تناقصي . يمكننا مثلاً تقسيم العدد  $N = 4$  وفق خمس طرائق :

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

وتأخذ مخططات يونغ المقابلة الاشكال التالية :



وللتعبير عن مخططات يونغ نستخدم أحياناً أقواساً مربعة يكتب ضمنها عدد المربعات في كل سطر من المخطط ، ففي الحالة  $N = 4$  نكتب :

$$[4] , [3, 1] , [2, 2] , [2, 1, 1] , [1, 1, 1, 1]$$

ونحصل على توابع موجية مقابلة لمخطط محدد من مخططات يونغ بالتنظير بالنسبة للمتحويلات الموجودة في السطر نفسه، وبالتنظير المضاد بالنسبة للمتحويلات الموجودة في العمود نفسه مبتدئين دوماً بالعمود الاول .

يرمز المخطط [4] الى تابع متناظر كلياً ، ويرمز المخطط [1,1,1,1] الى تابع ذي تناظر مضاد كلياً ، وترمز المخططات الباقية الى توابع ذات تناظر مختلط . تأخذ المتحولات في تابع السبن قيمتين فقط هما  $s = \pm 1/2$  ، فلا يمكن للتابع  $x$  أن يملك تناظراً مضاداً بالنسبة لأكثر من متحولين . وبتعبير آخر يقابل التابع  $x$  مخططات لها سطران على الاكثر . يمكن مثلاً لتابع السبن الموجي لجملة مؤلفة من أربعة جسيمات أن يقابل المخططات التالية فقط .



تشير الأسهم ضمن المربعات الى قيمة متحول السبن .

تصف التوابع الموجية لجملة من الجسيمات سبن كل منها  $(\frac{1}{2})$  والمقابلة لمخطط ما حالات يكون فيها السبن الكلي  $s$  ( في وحدات  $\hbar$  ) للجملة محدداً تماماً . فالمخططات (13) مثلاً تصف على الترتيب من اليسار نحو اليمين حالات لها سبن كلي يساوي 0, 1, 2 . يصف المخططان



لتوابع السبن الموجية من أجل جملة مؤلفة من ثلاثة جسيمات لها السبن  $(1/2)$  الحالتين الممكنتين بسبن كلي قدرهما  $1/2$  ,  $3/2$  على الترتيب . كما يصف المخططان لجملة مؤلفة من جسيمين لكل منهما سبن قدره  $(1/2)$  ، الحالتين  $s = 0$  ,  $s = 1$  على الترتيب .

ترتبط مخططات يوقع لتوابع السبن بالسبن الكلي للجملة . يصف كل مخطط  $(2s + 1)$  حالة سبينية مختلفة ، تختلف عن بعضها بمركبة السبن الكلي وفق المحور  $OZ$  .

فإذا رمزنا للتابعين الموجيين لحالتي السبن الممكنتين لجسيم سبينه  $(1/2)$

بالرمزين  $\alpha$  ,  $\beta$  أمكننا كتابة تابع السبن المقابل للمخطط والممثل للحالة

$s = 0$  بالشكل :

$$x_a(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)] \quad (14)$$

وتكون التوابع المقابلة للمخطط  ذي السبن  $s = 1$  بالشكل :

$$x_{s_1}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)]$$

$$x_{s_2}(1,2) = \alpha(1)\alpha(2) \quad (15)$$

$$x_{s_3}(1,2) = \beta(1)\beta(2)$$

يمكن ، من أجل كل حالة سبن للجملة المؤلفة من  $N$  جسيماً ، أي من أجل كل مخطط مقابل لتابع السبن  $x$  ، أن نجد مخططاً ملائماً لتابع الموضع  $\Phi$  بشكل يكون فيه للتابع الكلي تناظر مضاد بالنسبة لتبديل متحولات السبن ومتحولات الموضع في وقت واحد . فإذا كانت الجملة مؤلفة من أربعة جسيمات مثلاً وكان تابع السبن  $x$  هو المقابل للمخطط [4] ، فيجب ضرب هذا التابع بتابع الموضع المقابل للمخطط [1, 1, 1, 1] . وبصورة عامة يكون التابع الكلي  $\Psi$  ذا تناظر مضاد ، إذا ضرب تابع السبن المقابل لجميع المخططات الممكنة بتابع الموضع المقابل الى منقول ذلك المخطط . ففي حالة جملة مؤلفة من أربعة جسيمات ، توجد ثلاثة توابع ممكنة ذات تناظر مضاد هي :

$$\Psi_2 = \Phi$$

$$\left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

$$\Psi_1 = \Phi$$

$$\left( \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \right)$$

$$\Psi_0 = \Phi$$

$$\left( \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \right)$$

و يشير دليل التابع  $\Psi$  الى قيمة السبن الكلي للحالة .

اذا حوت الجملة جسيمات سبينها  $s > 1/2$  ( نصف عدد فردي ) يكون لتابع السبن الموجي  $(2s + 1)$  سطر على الأكثر ولا يتعين السبن الكلي في هذه الحالة بصورة وحيدة وفق مخططات يونغ . وتكون التتابع الموجية للجمال المؤلفة من جسيمات ذات سبن صحيح ، متناظرة وتوصف بجداء توابع الموضع وتوابع السبن التي لها المخطط نفسه أو أي مجموع خطي لمثل هذه الجداءات .

## ٢ - النظرية الابتدائية للحالة الاساسية لفرة ذات الكترونين :

سندرس الآن حالات الطاقة لجملة مؤلفة من الكترونين يتحركان في الحقل الكولوني لنواة شحنتها  $ze$  . مثل ذرة الهليوم ، فهي تتألف من الكترونين ونواة عددها الذري  $z = 2$  وذرة الليثيوم المؤينة ( بانتزاع أحد الكتروناتها الثلاثة ) ، وذرة البيريليوم ( بعد نزع الكترونين من الكتروناتها الاربعة ) ، وكذلك كل الذرات المشابهة للهليوم بعد نزع عدد من الكتروناتها .

يُهمل التفاعل بين الاندفاع الزاوي المداري والسبن ، نكتب مؤثر هاميلتون لمثل هذه الجملة بالشكل :

$$\hat{H} = \hat{H}_0(1,2) + \hat{V}_{12} \quad (16)$$

حيث :

$$H_0(1,2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - ze^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

هو مؤثر هاميلتون لالكترونين في الحقل الكولوني للنواة • و  $V_{12} = \frac{e^2}{r_{12}}$  هو مؤثر التفاعل بين الالكترونين •

في التقريب الصفري - عندما نهمل التفاعل بين الالكترونين - نعالج مسألة كل منهما كحركة الالكترون في الحقل الكولوني للنواة  $-\frac{ze^2}{r}$  • تتحدد طاقة كل منهما بالعلاقة :

$$\epsilon_n = \frac{ze^2}{2a_0 n^2}$$

حيث  $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$  هو نصف قطر بور ، و  $n$  هو العدد الكمومي الرئيس ، وتعطى التوابع الموجية المقابلة لسويات الطاقة  $\epsilon_n$  بالعلاقة :

$$\psi_{n,lm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

حيث

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} e^{-\rho} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \quad \rho = \frac{2Z}{na_0} r$$

وتعطى كثيرات حدود لاغير (Laguerre) بالعلاقة :

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+l+1} \frac{[(n+l)!]^2 \rho^k}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}$$

كما تعطى التوابع التوافقية الكروية بالعلاقة :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \epsilon \left[ \frac{2(l+1)}{4\pi} \frac{(1-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

حيث  $\epsilon = (-1)^m$  من أجل  $m > 0$  و  $\epsilon = 1$  من أجل  $m \leq 0$  أما كثيرات حدود ليجنדר فتعطى بالعلاقة :

$$P_l(x) = \frac{1}{l!2^l} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$$

ويكون :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x)$$

ونجد في الجدول التالي صيغاً صريحة لبعض التوابع الأولى :

$$R_{10}(r) = \left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} 2 e^{-\frac{zr}{a_0}}$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{zr}{a_0}\right) e^{-\frac{zr}{2a_0}}$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{zr}{a_0 \sqrt{3}} e^{-\frac{zr}{2a_0}}$$

$$Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i\varphi}$$

تكون الحالة الأساسية لجملة الكترولين في التقريب الصفري ماثلة لكون  
الالكترولين في الحالة  $1s$  بطاقة قدرها :

$$E_0 = 2 \epsilon_1 = - \frac{z^2 e^2}{a_0} \quad (17)$$

وتابعها الموجي هو :

$$\Psi_0 = \varphi_{1s}(1) \varphi_{1s}(2) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{z}{a_0} \right)^3 \exp \left[ - \frac{z}{a_0} (r_1 + r_2) \right] \quad (18)$$

وهو تابع متناظر بالنسبة لتبديل رقمي الالكترولين ، وللحصول على تابع ذي تناظر  
مضاد يجب أن نضرب التابع (18) بتابع موجي للسبين ذي تناظر مضاد  $\chi_a(1,2)$

لهذين الالكترونين ويقابل المخطط  $\left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right]$  الذي يصف الحالة ذات السبين المعلوم.

نحصل بتطبيق نظرية الاضطراب من المرتبة الاولى على طاقة الحالة الاساسية

$$E = E_0 + Q \quad (19)$$

حيث :

$$Q = \int \varphi_{1s}^2(1) \frac{e}{r_{12}} \varphi_{1s}^2(2) d_3 r_1 d_3 r_2 \quad (20)$$

هو متوسط الطاقة للتفاعل الكولوني بين الالكترونين في الحالة (18) ولحساب هذا التكامل يفضل نشر المقدار  $\frac{1}{r_{12}}$  بدلالة التوابع التوافقية الكروية :

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|r_1 - r_2|} = \begin{cases} \frac{4\pi}{r_1} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l Y_{lm}^*(\theta_1 \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2 \varphi_2), & \text{if } r_1 > r_2; \\ \frac{4\pi}{r_2} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l Y_{lm}^*(\theta_1 \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2 \varphi_2), & \text{if } r_2 > r_1, \end{cases}$$

حيث  $\theta_1, \varphi_1$  هما الزاويتان القطبيتان للشعاع  $r_1$  و  $\theta_2, \varphi_2$  هما الزاويتان القطبيتان للشعاع  $r_2$ . اذا عوضنا هذا النشر وكذلك العلاقة (18) في العلاقة (20) متذكرين أن التابع (18) لا يتعلق بالمتحولات الزاوية فان جميع الحدود باستثناء  $l = m = 0$  ستلاشى عند المكاملة على المتحولات الزاوية ونجد :

$$Q = \frac{4e^2}{\pi} \left(\frac{Z}{a}\right)^6 \int_0^\infty e^{-2Zr_1/a} \left[ \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-2Zr_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^\infty e^{-2Zr_2/a} r_2 dr_2 \right] r_1^2 dr_1$$

تكمال بالتجزئة فنجد :

$$Q = \frac{5 z e^2}{8 a_0} \quad (21)$$

وتكون طاقة الحالة الاساسية لجملة الالكترونين باستخدام نظرية الاضطراب من المرتبة الاولى

$$E = -\frac{z e^2}{a_0} \left( z - \frac{5}{8} \right) \quad (22)$$

لنحسب الآن طاقة التأين لذرة الهليوم وكذلك للأيونات الشبيهة بها . ان طاقة التأين  $J$  ، وهي الطاقة اللازمة لنزع الكترون واحد من الذرة ، تساوي الفرق بين طاقة الالكترون المتبقي في حقل الشحنة  $\left( -\frac{z e^2}{2 a_0} \right)$  والطاقة المحسوبة بالعلاقة (22) أي :

$$J = \frac{z e^2}{a_0} \left( z - \frac{5}{8} \right) - \frac{z e^2}{2 a_0} = \frac{z e^2}{2 a_0} \left( z - \frac{5}{4} \right) \quad (23)$$

يمكننا أن نتوصل الى قيمة أدق للطاقة وللتابع الموجي في الحالة الاساسية لجملة الكترونين بتطبيق طريقة المتغيرات . ففي الحالة الاساسية يكون للالكترونين اندفاع زاوي معدوم ويكون سينيتهما متعاكسين . نستطيع اختيار تابعنا التجريبي كما في العلاقة (18) ونستبدل بالشحنة  $z$  معامل متغير  $\beta$  فنجد :

$$\Psi_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\beta}{a_0} \right)^3 \exp \left[ -\frac{\beta (r_1 + r_2)}{a_0} \right] \quad (24)$$

وتعود مسألة تعيين طاقة الحالة الاساسية الى حساب التكامل:

$$E(\beta) = \int \Psi_0 \hat{H} \Psi_0 d_3 r_1 d_3 r_2$$

حيث  $\hat{H}$  هو مؤثر هاميلتون المعروف بالعلاقة (16) • بتعويض الصيغة الصريحة لـ  $\hat{H}$  في  $E(\beta)$  وباستخدام العلاقة  $\frac{\hbar^2}{\mu} = a_0 e^2$  نستطيع كتابة

$E(\beta)$  على شكل مجموع لثلاثة حدود:

$$E(\beta) = E_1(\beta) + E_2(\beta) + E_3(\beta)$$

حيث:

$$E_1(\beta) = -\frac{1}{2} a_0 e^2 \int \Psi_0 (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \Psi_0 d_3 r_1 d_3 r_2 = \beta^2 \frac{e^2}{a_0}$$

$$E_2(\beta) = -z e^2 \int \Psi_0 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) d_3 r_1 d_3 r_2 = -2z\beta \frac{e^2}{a_0}$$

$$E_3(\beta) = e^2 \int \Psi_0 \frac{1}{r_{12}} d_3 r_1 d_3 r_2 = \frac{5}{8} \beta \frac{e^2}{a_0}$$

ونحصل على طاقة الجملة كتابع للمعامل  $\beta$

$$E(\beta) = \frac{e^2}{a_0} \left[ \beta^2 - \left( 2z - \frac{5}{8} \right) \beta \right]$$

فاذا استخدمنا شرط النهاية الصغرى أي:  $\frac{dE}{d\beta} = 0$

$$\beta_0 = z - \frac{5}{16} \quad (25)$$

ونحصل على طاقة الحالة الاساسية للجملة

$$E = E(\beta_0) = - \left[ z^2 - \frac{5}{8} z + \frac{25}{256} \right] \frac{e^2}{a_0} \quad (26)$$

وكذلك نحصل على التابع الموجي

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{z - 5/16}{a_0} \right)^3 \exp \left\{ - \frac{(z - 5/16)(r_1 + r_2)}{a_0} \right\} \quad (27)$$

ويسمى المقدار  $z^* = (z - 5/16)$  بالشحنة النووية الفعالة •

يختلف التابع الموجي (27) عن التابع الموجي (18) بأن الشحنة النووية الفعالة تأخذ بعين الاعتبار الحجب الجزئي للإلكترون عن النواة بواسطة الإلكترونات الأخرى • وباستخدام العلاقة (26) نجد أن طاقة التأين هي :

$$J = - E_0 - \frac{z e^2}{2 a_0} = \frac{e}{2 a_0} \left[ z^2 - \frac{5}{4} z + \frac{25}{128} \right] \quad (28)$$

يُدرج في الجدول التالي القيم التجريبية لطاقة التأين مقرونة بالقيم المحسوبة وفق العلاقتين (23) ، (28) مقاسة بالوحدات الذرية •

| القيم التجريبية  |         | القيم وفق العلاقة (23) | القيم وفق العلاقة (28) |
|------------------|---------|------------------------|------------------------|
| He               | 0.9035  | 0.75                   | 0.85                   |
| Li <sup>+</sup>  | 2.7798  | 2.62                   | 2.72                   |
| Be <sup>++</sup> | 5.6560  | 5.50                   | 5.60                   |
| B <sup>+++</sup> | 14.4070 | 14.25                  | 14.35                  |

ويتضح من هذا الجدول أن طريقة التغيرات البسيطة تعطي نتائج مرضية بالمقارنة مع القيم التجريبية • ولقد استخدم هيليراس تابعاً اختيارياً بعدة معاملات وترصل إلى القيمة  $J_0 = 0.9037$  في حالة ذرة الهليوم •

### ٤ - الحالات المثارة لذرة الهليوم : أورثو - بارا :

يتوضع الالكترونات في الحالة الاساسية لذرة الهليوم كما في الحالة  $1s$  لشيئات الهيدروجين ولسوف نستخدم الرمز  $(1s)^2$  للتعبير عن هذه الحالة الاساسية ، فنضع حالة الالكترون ضمن القوس ونرمز بالدليل العلوي لعدد الالكترونات في تلك الحالة . يدعى مثل هذا التمثيل بالتشكيل الالكتروني . تقابل الحالة المثارة الاولى في ذرة الهليوم التشكيل  $(1s)(2s)$  وتمثل التوابع الموجية المقابلة لهذا التشكيل بالمخططات  $\square$  أو  $\square$  وتكتب كما يلي :

$$\Phi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{1s}(1) \varphi_{2s}(2) + \varphi_{1s}(2) \varphi_{2s}(1)] \quad (29)$$

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{1s}(1) \varphi_{2s}(2) - \varphi_{1s}(2) \varphi_{2s}(1)]$$

يجب أن يكون للتابع الموجي تناظر مضاد أي يجب أن يقابل التابع  $\Phi_s$  حالة السبن المتعاكس ويكون السبن الكلي معدوماً ، بينما يقابل التابع  $\Phi_a$  حالة السبن المتوازي ويكون السبن الكلي مساوياً الواحد . تدعى الحالات المقابلة للسبن المتعاكس بالحالات من النوع بارا ويكون التابع الموجي للموضع  $\Phi_s$  ، فالحالة الاساسية لذرة الهليوم هي حالة بارا . وتدعى الحالات المقابلة للسبن المتوازي بالحالات من النوع أورثو .

يكون للحالتين بارا وأورثو المقابلتين للتشكيل  $(1s)(2s)$  ، في التقريب الصفري ، الطاقة نفسها أما اذا أخذنا التأثير المتبادل بين الالكترونين بعين الاعتبار عندها تختلف الحالتان . وتكون طاقة الحالة بارا أعلى من طاقة الحالة أورثو .

سوف نستخدم نظرية الاضطراب من المرتبة الاولى من أجل إيجاد طاقة الحالتين بارا واورثو، أي يجب أن نحسب القيمة المتوسطة لمؤثر هاميلتون (16) في هذه الحالات، متذكرين أن  $\varphi_{2s}$  و  $\varphi_{1s}$  هما التابعان المقابلان للطاقتين  $\epsilon_{2s}$  و  $\epsilon_{1s}$  لشبهات الهيدروجين. فمن أجل الحالة بارا نجد:

$$E_s = \int \Phi_s \hat{H} \Phi_s d\tau = \epsilon_{1s} + \epsilon_{2s} + Q + A \quad (30)$$

وفي حالة الأورثو لدينا:

$$E_a = \int \Phi_a \hat{H} \Phi_a d\tau = \epsilon_{1s} + \epsilon_{2s} + Q - A \quad (31)$$

حيث

$$Q = \int \varphi_{1s}^2(1) \varphi_{2s}^2(2) \frac{e^2}{r_{12}} d_3 r_1 d_3 r_2 \quad (32)$$

$$A = \int \varphi_{1s}(1) \varphi_{2s}(2) \frac{e^2}{r_{12}} \varphi_{1s}(2) \varphi_{2s}(1) d_3 r_1 d_3 r_2 \quad (33)$$

يدعى التكامل  $Q$  بتكامل كولون فهو يعين القيمة المتوسطة لطاقة التفاعل الكولوني بين الإلكترونين عند إهمال الارتباط بين حركتي الإلكترونين وينتج عن تناظر التوابع. أما التكامل  $A$  فيدعى بتكامل التبادل ويحدد جزء الطاقة الكولونية المرتبط بحركة الإلكترونين. لحساب التكاملين  $Q$ ،  $A$  لا بد من تعويض التوابع الموجية:

$$\varphi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-zr/a_0}$$

$$\varphi_{2s} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{zr}{a_0} \right) e^{-zr/2a_0}$$

في العلاقتين (32) ، (33) • ان القيم التجريبية لطاقة الحالتين بارا وأورثو في ذرة الهليوم ذات التشكيل (1s) (2s) هي :

$$E_s = -2.146 \frac{e^2}{a_0} ; E_a = -2.175 \frac{e^2}{a_0}$$

يمكن تقسيم الحالات المثارة المقابلة للتشكيل (1s) (2p) أيضاً الى بارا وأورثو والتي تقابل توابع الموضع :

$$\Phi'_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [ \varphi_{1s}(1) \varphi_{2p}(2) + \varphi_{1s}(2) \varphi_{2p}(1) ] \quad (34)$$

$$\Phi'_a = \frac{1}{\sqrt{2}} [ \varphi_{1s}(1) \varphi_{2p}(2) - \varphi_{1s}(2) \varphi_{2p}(1) ]$$

والقيم التجريبية لطاقة الحالتين هي :

$$E'_s = -2.124 \frac{e^2}{a_0} \quad E'_a = -2.133 \frac{e^2}{a_0}$$

يجب لايجاد التوابع الموجية لحالتي بارا وأورثو المقابلتين للتشكيل (1s) (2s) ضرب التوابع (29) بتابع السبن الملائم لذلك نجد :

$$\Psi_{para}^{(1)} = \Phi_s(1,2) \chi_a(1,2)$$

حيث تم تعريف التابع  $\chi_a(1,2)$  بالعلاقة (14) وبالمثل تتعين الحالة أورثو بالتوابع الموجية :

$$\Psi_{\text{ortho}}^{(1)} = \Phi_{\text{a}}(1,2) \times s_1(1,2)$$

$$\Psi_{\text{ortho}}^{(2)} = \Phi_{\text{a}}(1,2) \times s_2(1,2)$$

$$\Psi_{\text{ortho}}^{(3)} = \Phi_{\text{a}}(1,2) \times s_3(1,2)$$

والتي تقابل حالات السبن الثلاث الممكنة ، والتي تختلف عن بعضها بتوجه السبن الكلي  $(-1, 0, 1)$  .

★ ★ ★

## مسائل

١ - أثبت أن مؤثري التناظر والتناظر المضاد هما مؤثرا اسقاط متعامدة أي يحققان العلاقة :

$$S^2 = S, \quad A^2 = A, \quad SA = AS = 0$$

٢ - أوجد أشعة الحالة لجملة مؤلفة من جسيمين لكل منهما سبين قدره  $\frac{1}{2}$ ، بحيث تكون أشعة ذاتية للمؤثرين  $S^2, S_z$ ، حيث  $S$  هو مؤثر السبن الكلي للجملة . ناقش تناظر أشعة الحالة هذه .

٣ - أعد المسألة السابقة بالنسبة لجسيمين لكل منهما سبين قدره 1

٤ - أثبت أنه إذا كان التابع الموجي لجملة مؤلفة من جسيمين عديمي السبن ، هو التابع الذاتي للاندفاع الزاوي المداري للحركة النسبية للجسيمين ، عندها سيأخذ الاندفاع المداري 1 قيمة زوجية أو صفراً .

٥ - استخدم نتيجة المسألة ( ٤ ) لدراسة احتمال التفكك  ${}^8_4\text{Be} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$  إذا كان البريليوم في حالة مثارة ذات عزم زاوي مداري كلي يساوي الواحد .



## الفصل الرابع

### التكميم الثاني

لحمل البوزونات والفيرميونات

## التكميم الثاني لجمل البوزونات والفرميونات

١ - التكميم الثاني للحقل الكهرطيسي في غياب الشحنات الكهربائية :

يجب ألا يتعلق وصف حالة جملة من الجسيمات المتماثلة بترقيم هذه الجسيمات ، ويُعبّر عن هذه الخاصة بشكل متناظرٍ للتابع الموجي عند تبديل أي زوج من هذه الجسيمات ، ولقد وجدنا أن حالات جمل البوزونات ( جسيمات لها سبين صحيح ) توصف بتوابع متناظرة . تتم دراسة مثل هذه الجمل باستخدام تمثيل يدعى بعدد الشغل  $^{\circ}$  occupation number ، أو التكميم الثاني ، ويتم في هذا التمثيل اختيار التوابع ذات التناظر المطلوب بصورة ذاتية .

ترتبط التوابع الموجية لجملة مؤلفة من  $N$  جسيماً لكل منها  $\sigma$  درجة من الحرية بعدد من المتحولات قدره  $N\sigma$  وذلك عند استخدام تمثيل الاحداثيات . بينما نعبر عن المؤثرات في تمثيل التكميم الثاني بدلالة مؤثرات الخلق والإفناء للجسيمات وبذلك نعطي درجة واحدة من الحرية لكل جسيم ، وتوصف الجملة بكاملها بتوابع تتعلق بعدد يشير الى عدد الجسيمات في كل حالة ، وينتج من ذلك تسهيلٌ لدراسة الجمل المؤلفة من عدد كبير من الجسيمات . ولا يوجد طريقة عملية أخرى لدراسة جمل تتغير فيها أعداد الجسيمات ، أي جمل تتحول فيها الجسيمات من نوع الى آخر ، وفي هذه الحالة نستخدم نظرية الحقول ونعد الجسيمات بمثابة كمات لحقل معين . ويكون التفاعل بين الجسيمات على شكل تفاعل بين الحقول المختلفة ، وتعد حقول هذه الجسيمات متحولات ديناميكية ، فهي توابع للموضع والزمن ، ولكن الاحداثيات في هذه الحالة هي احداثيات نقاط الفراغ وليست احداثيات الجسيمات .

سنستخدم الآن طريقة التكميم الثاني لدراسة مجموعة من الفوتونات أي كمات الحقل الكهرطيسي • يوصف الحقل الكهرطيسي في النظرية الكلاسيكية بالتابع اللاغرانجي :

$$L = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \times A)^2 \right\} \quad (1)$$

حيث  $A$  هو الكمون المتجه الذي يحقق العلاقة :  $\text{div } A = 0$  ، وتعطى شدة الحقل الكهرطيسي  $E$  والتخريض المغناطيسي  $B$  بدلالة  $A$  بالعلاقين :

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} ; \quad B = \vec{\nabla} \times A \quad (2)$$

وباستخدام العلاقة :  $\frac{\partial L}{\partial A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A)$  ، وكذلك بحل معادلة لاغرانج

، نحصل من المعادلة (1) على معادلة ماكسويل الأولى :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{\nabla} \times B \quad (3)$$

أما معادلات ماكسويل الثلاث الباقية فهي :

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0 ; \quad \vec{\nabla} \cdot E = 0 \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times E$$

نحصل من المعادلتين (1) ، (3) على معادلة الحركة للكمون المتجه :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 A = 0 \quad (4)$$

ويتعين الاندفاع المعمم  $\mathbf{p}$  المرافق للكمون المتجه  $\mathbf{A}$  وفق العلاقة (1) بالعلاقة:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \quad (5)$$

وبناءً عليه يكتب تابع هاميلتون بدلالة الكمون المتجه والاندفاع المعمم للحقل الكهرطيسي بالعلاقة:

$$H = - \int \left\{ 2\pi c^2 \mathbf{P}^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right\} d_3 \mathbf{r} \quad (6)$$

سنفترض أن الحقل الكهرطيسي محصور ضمن حجم كبير  $V$  على شكل مكعب ضلعه  $V^{1/3}$  ويحقق الشروط الحدية الدورية بدور قدره  $V^{1/3}$  عندها تكتب تحويلات فورييه لكل من الكمون المتجه والاندفاع المعمم بالعلاقين:

$$A(\mathbf{r}, t) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} e_{\alpha}(\mathbf{Q}) A_{\mathbf{Q}\alpha}(t) e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})}, \quad A_{\mathbf{Q}\alpha} = A_{-\mathbf{Q}, \alpha}^* \quad (7)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} e_{\alpha}(\mathbf{Q}) P_{\mathbf{Q}\alpha}(t) e^{-i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})}, \quad P_{\mathbf{Q}\alpha} = P_{-\mathbf{Q}, \alpha}^* \quad (8)$$

وتأخذ مركبات الشعاع الموجي  $\mathbf{Q}$  سلسلة لانهاية من القيم المتقطعة

$$\mathbf{Q}_l = 2\pi V^{-1/3} \mathbf{v}_l \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad ; \quad \mathbf{v}_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

أما الشعاع  $\mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q})$  فهو شعاع الوحدة للاستقطاب ويحقق الشروط

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q})) = 0 \quad ; \quad (\mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{Q})) = \delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (9)$$

يحق الكمون المتجه (7) المعادلة (4) ، لذلك فإن  $A_{Q,\alpha}(t)$  تتغير بصورة

توافقية مع الزمن

$$A_{Q\alpha}(t) = A_{Q\alpha}(0) e^{-i\omega_Q t} ; \quad \omega_Q^2 = c^2 Q^2 \quad (10)$$

يتم الانتقال من الحالة الكلاسيكية الى الحالة الكمومية باستبدال  $A_{Q\alpha}$  و  $P_{Q\alpha}$  بالمتغيرات التبادلية التالية :

$$[\hat{A}_{Q\alpha}(t), \hat{P}_{Q'\alpha'}(t)] = i\hbar \delta_{QQ'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (11)$$

ويعبر عن هذه المؤثرات ، في تمثيل التكسيم الثاني ، بدلالة مؤثرات البوزون  $\hat{a}_{Q\alpha}$  و  $\hat{a}_{Q\alpha}^+$  من أجل خلق وافناء اثارات ابتدائية للحقل ذات شعاع موجي  $Q$  واستقطاب  $e_\alpha$  ونعرفها بالعلاقين :

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_{Q\alpha}(t) &= \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_Q} \right)^{1/2} [\hat{a}_{Q\alpha}(t) + \hat{a}_{-Q\alpha}^+(t)] \\ \hat{P}_{Q\alpha}(t) &= i \left( \frac{\hbar \omega_Q}{8\pi c} \right)^{1/2} [\hat{a}_{Q\alpha}^+(t) - \hat{a}_{-Q\alpha}(t)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

حيث :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{a}_{Q\alpha}(t), \hat{a}_{Q'\alpha'}^+(t)]_- &= \delta_{QQ'} \delta_{\alpha\alpha'} ; \\ [\hat{a}_{Q\alpha}(t), \hat{a}_{Q'\alpha'}(t)]_- &= 0 \\ [\hat{a}_{Q\alpha}^+(t), \hat{a}_{Q'\alpha'}^+(t)]_- &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

نحصل باستخدام هذه التحويلات من المعادلة (7) والمعادلة (8) على مؤثر الكمون الشعاعي ومؤثر الاندفاع المرافق ، بدلالة مؤثرات الخلق والإفناء للفوتونات :

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{Q}}} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q}) [\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(t) + \hat{a}_{-\mathbf{Q}, \alpha}^{\dagger}(t)], \\ \hat{P}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{Q}}}{8\pi c^2 V} \right)^{1/2} e^{-i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q}) [\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^{\dagger}(t) - \hat{a}_{-\mathbf{Q}, \alpha}(t)]. \end{aligned} \right\} (14)$$

بتعويض المؤثرات (14) في المعادلة (6) وبالمكاملة على الحجم  $V$  واستخدام العلاقات :

$$\int e^{i([\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'] \cdot \mathbf{r})} d_3\mathbf{r} = V \delta_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'}$$

$$[\mathbf{Q} \wedge \mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{Q})] \cdot [\mathbf{Q} \wedge \mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{Q})] = Q^2 \delta_{\alpha\beta}$$

نحصل على مؤثر هاميلتون للحقل الكهرومغناطيسي في تمثيل التكميم الثاني :

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{Q}} (\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha} + \frac{1}{2}) \quad (15)$$

وينتج عن العلاقة (15) ، أنه في تمثيل هايزنبرغ ، يعطى المؤثر المرتبط بالزمن  $\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}$  بالعلاقة :

$$i\hbar \frac{d \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}}{dt} = [\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}, \hat{H}] = \hbar\omega_{\mathbf{Q}} \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}$$

أو

$$\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(t) = \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{Q}} t}$$

نحصل بتعويض المؤثرات (14) في المعادلة (2) على مؤثرات شدة الحقل الكهربائي والتحريض المغناطيسي :

$$\left. \begin{aligned} \hat{E} &= i \sum_{Q,\alpha} \left( \frac{2\pi\hbar\omega_Q}{V} \right)^{1/2} e_\alpha(Q) e^{i(Q \cdot r)} (\hat{a}_{Q\alpha} - \hat{a}_{-Q,\alpha}^\dagger), \\ \hat{B} &= i \sum_{Q,\alpha} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_Q} \right)^{1/2} [Q \wedge e_\alpha(Q)] e^{i(Q \cdot r)} (\hat{a}_{Q\alpha} - \hat{a}_{-Q,\alpha}^\dagger). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

لنحسب الآن مؤثر الاندفاع الكلي في الحقل ، إن كثافة الاندفاع ، وفق النظرية الكلاسيكية ، تساوي شعاع بوينتنغ مقسماً على  $c^2$  ، فيكون الاندفاع الكلي في واحدة الحجم

$$\hat{P} = (4\pi c^2 V)^{-1} [E \wedge B] d_2 r$$

وباستخدام المؤثرات (16) نجد :

$$\hat{P} = \sum_{Q,\alpha} \hbar Q (\hat{a}_{Q\alpha}^\dagger \hat{a}_{Q\alpha} + \frac{1}{2}).$$

وبسبب وجود شعاع  $Q$  - مقابل لكل شعاع  $Q$  ، في المجموع أعلاه يكون

$$\hat{P} = \sum_{Q,\alpha} \hbar Q \hat{a}_{Q\alpha}^\dagger \hat{a}_{Q\alpha}. \quad (17)$$

إن مؤثر الطاقة (15) ومؤثر الاندفاع (17) قطريان في تمثيل التكميم الثاني ، فهما يحويان المؤثرات  $\hat{a}_{Q\alpha}^+$   $\hat{a}_{Q\alpha}$  فقط . ففي الحالات التي تحوي عددا محدودا من الجسيمات  $|n_{Q\alpha}\rangle$  تعطى الطاقة والاندفاع بالصيغتين :

$$E = \sum_{Q,\alpha} \hbar \omega_Q (n_{Q\alpha} + \frac{1}{2}), \quad \mathcal{P} = \sum_{Q,\alpha} \hbar Q n_{Q\alpha}.$$

أي أن تكسيم الحقل الكهرطيسي يعني اثارا ابتداءية ، فوتونات ، طاقتها  $\hbar \omega_Q$  واندفاعها  $\hbar Q$  واستقطابها  $e_\alpha(Q)$  . إن طاقة حالة الفراغ ، أي حالة بدون فوتونات هي  $E_0 = \frac{1}{2} \sum_Q \hbar \omega_Q = \infty$  ، لأن عدد الحالات الممكنة لانهاضي . أما في الظواهر الفيزيائية فإننا نهتم بفروق الطاقة وبالتالي نستطيع مقارنة طاقة الحقل .

إن الانتقال من المقادير الكلاسيكية  $A$  ،  $E$  ،  $B$  التي تصف الحقل الكهرطيسي الى المؤثرات ، يدعى بتكسيم الحقل ومثل هذا التكسيم يدعى بالتكسيم الثاني ، ويكون الانتقال من المقادير الكلاسيكية الى المؤثرات الكمومية لمرة واحدة ، وتلعب احداثيات  $A$  ،  $B$  ،  $E$  دور المعاملات وليست احداثيات الجسيم .

تكون الفوتونات ، المقابلة لحالة كمومية معينة ، متماثلة ويعطى التابع الموجي الممثل لحالة  $n$  فوتوناً من نوع واحد بالعلاقة :

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (18)$$

وهو تابع متناظر بالنسبة لتبديل الفوتونات لأنها بوزونات ، وتتحرك الفوتونات دوماً بسرعة الضوء وتكون كتلتها السكونية معدومة دوماً . نستطيع باستخدام العلاقتين (13) ، (14) التوصل الى العلاقات المستمرة لمركبات مؤثر الكمون المتجه عند نقاط مختلفة ولكن في اللحظة نفسها نجد :

$$[\hat{A}_l(r,t) , \hat{A}_k(r',t)]_- = 0 ; \quad (19)$$

$$[\hat{A}_l(r,t) , \frac{\partial \hat{A}_k(r',t)}{\partial t}] = 4\pi i \hbar c^2 \delta_{lk} \delta(r-r')$$

حيث  $(l, k = x, y, z)$

ونستطيع بسهولة حساب علاقات التبادل لمركبات شدة الحقل ،

$$[ \hat{E}_k(r,t) , \hat{E}_l(r',t) ]_- = [ \hat{B}_k(r,t) , \hat{B}_l(r',t) ]_- = 0 \quad (20)$$

كما تتبادل المركبات المتوازية لكل من فنجد :

$$[ \hat{E}_k(r,t) , \hat{B}_k(r',t) ]_- = 0 \quad (21)$$

بينما تكون المركبات المتعامدة لشدة الحقل الكهربائي والتحريض المغناطيسي غير تبادلية

$$[ \hat{E}_x(r,t) , \hat{B}_y(r,t) ]_- = 4 \pi i \hbar c \frac{\partial}{\partial t} \delta(r - r') \quad (22)$$

ونحصل على العلاقات الأخرى بتبديل دوري للمركبات . ويتضح من العلاقات التبادلية للمركبات عدم إمكانية تحديد المركبات المتعامدة من E و B باللمحة نفسها في النقطة نفسها من الفراغ .

## ٢ - التكميم الثاني لحقل الميزونات ★ :

تظهر التجارب وجوب بيونات مشحونة وأخرى معتدلة ، ويمكن لليونات المشحونة أن تملك شحنة موجبة أو سالبة وتكون كتلتها أكبر من كتلة الإلكترون بـ 273 مرة ، بينما تكون كتلة البيونات المعتدلة أكبر من كتلة الإلكترون بـ 264 مرة ، ويكون لليون سبين معدوم وله زوجية سالبة .

لقد ذكرنا أنه من المستحيل ، في النظرية النسبوية ، الحفاظ على وصف يستند إلى حركة الجسيم الوحيد ، ولكي تتمكن من وصف حالات الجمل ذات الأعداد

★ انظر ملحق تصنيف الجسيمات الأولية .

المتغيرة من الجسيمات ، يجب أن تتحول الى الوصف الحقل الذي تظهر فيه الجسيمات على شكل كمات للحقل .

تقابل البيونات المشحونة حقلاً  $\psi(r)$  حقيقياً . ويكون المتحول الديناميكي للحقل تابعاً سلمياً كاذباً لاحداثيات الموضع والزمن . ففي الوصف الحقل يلب الإحداثي  $r$  دور احداثي الموضع وليس احداثي الجسيم ، لذلك لن تعترضنا صعوبة استخدام فكرة احداثيات الجسيم في النظرية النسبوية .

لننظر الى الحقل السلمي العقدي لجسيم كتلته  $M$  ، يجب على التابع  $\psi(r)$  أن يحقق معادلة كلاين - غوردن

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (23)$$

تصف هذه المعادلة الحركة الحرة ، وتقابل البيونات غير المتفاعلة ، ولكي نتمكن من وصف التفاعل يجب علينا أن نستخدم حقلاً آخر يقوم بنقل التفاعل . تعطى كثافة الشحنة الكهربائية وكثافة التيار بالعلاقين

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2Mc} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) ; \quad j = \frac{e\hbar}{2Mi} \left( \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \quad (24)$$

وتشكل شعاعاً رباعي الأبعاد ، كما أن الحقل العقدي  $\psi$  الذي يحقق المعادلة (23) يقابل كثافة الاغرانجي :

$$L = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{c^2}{2} \left( \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi \right) - \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} \psi^* \psi$$

ويكون لاحداثي الحقل  $\psi$  و  $\psi^*$  الاندفاعان المرافقان قانونياً :

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}, \quad \pi^* = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (25)$$

فتكون كثافة الهاميلتوني :

$$H = c^2 \left( \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi \right) + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} \Psi^* \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ولتكميم الحقل يجب استبدال بالمتحول الديناميكي  $\Psi$  واندفاعه المرافق  $\pi = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$  المؤثرات الملائمة التي تحقق العلاقات التبادلية التالية :

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}',t), \hat{\Psi}^+(\mathbf{r},t)]_- &= [\hat{\Psi}(\mathbf{r}',t), \frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}]_- = \\ &= [\frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\Psi}^+(\mathbf{r},t)}{\partial t}]_- = 0 \\ [\hat{\Psi}(\mathbf{r}',t), \Psi(\mathbf{r},t)] &= [\frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}',t)}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t}]_- = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$[\Psi(\mathbf{r}',t), \frac{\partial \hat{\Psi}^+(\mathbf{r},t)}{\partial t}]_- = i\hbar \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

نحصل بالتبديل في المعادلة (26) وبالتكامل على كل الفراغ على مؤثر هاميلتون الهرميتي للحقل :

$$\hat{H} = \int \left[ -\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + c^2 \left( \vec{\nabla} \hat{\Psi}^+ \cdot \vec{\nabla} \Psi \right) + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} \hat{\Psi}^+ \Psi \right] d_3 r \quad (28)$$

ولكي نتقل لتمثيل التكميم الثاني ، نعرّف مجموعة التوابع المتعامدة ، وهي حلول المعادلة (23) • وتأخذ الحلول المقابلة لقيمة محددة من قيم الاندفاع  $\hbar k$  فنجد حلين مستقلين لكل قيمة •

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i[(k \cdot r) - \omega_k t]} ; \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i[(k \cdot r) + \omega_k t]} \end{aligned} \quad (29)$$

حيث

$$\omega_k = c \sqrt{k^2 + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2}}$$

ولتبسيط الرموز نستخدم شروطاً حدية دورية بدور كبير  $L$  فنجد

$$n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{حيث} \quad k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$$

سوف نشر مؤثرات الحقل  $\hat{\Psi}$  ، بدلالة مجموعة تامة من التوابع

(29) فنجد :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t}] e^{i(k \cdot r)} , \\ \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} &= -i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V}} [\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t}] e^{i(k \cdot r)} . \end{aligned} \quad (30)$$

حيث  $V = L^3$

نجد بتعويض المعادلات (30) في العلاقات التبادلية (27) أنها محققة إذا كانت المؤثرات الجديدة تحقق العلاقات التبادلية البوزونية :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+]_- &= [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+]_- = \delta_{kk'} \\ [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]_- &= [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}]_- = [\hat{a}_k, \hat{b}_k^+]_- = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

بتعويض العلاقة (30) في العلاقة (28) واستخدام العلاقات (31) نحصل على  
مؤثر هاميلتون للحقل في تمثيل التكميم الثاني :

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + 1]. \quad (32)$$

بتعويض القيم (30) في المعادلة (24) ثم المكاملة على كل الحجم نحصل على  
مؤثر الشحنة الكهربائية الكلية للحقل :

$$\hat{Q} = \int \hat{\rho} d^3r = e \sum_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k]. \quad (33)$$

فإذا عرفنا عدد الجسيمات بالمؤثرات

$$n_k^{(+)} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad \text{و} \quad n_k^{(-)} = \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$$

وهما مؤثران تبادليان مع مؤثر هاميلتون (32) ومع مؤثر الشحنة (33) ، نستطيع  
وصف الحالات المستقرة بالتتابع الموجية :

$$|n_k^{(+)} \dots n_k^{(-)} \dots \rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k^{(+)}}}{(n_k^{(+)}!)^{1/2}} \dots \frac{(\hat{b}_k^\dagger)^{n_k^{(-)}}}{(n_k^{(-)}!)^{1/2}} \dots |0\rangle \quad (34)$$

ستنتج من المعادلتين (33) ، (32) أن التابع الموجي  $|n_k^{(+)} \rangle$  يقابل حالة

فيها  $n_k^{(+)}$  جسيماً يملك كل منها اندفاعاً قدره  $\hbar k$  وشحنة قدرها  $Q = e n_k^{(+)}$

وطاقة قدرها  $n_k^{(+)} \hbar \omega_k$  • بينما يقابل التابع الموجي  $n_k^{(-)}$  حالة فيها  $n_k^{(-)}$  جسيماً يملك كل منها اندفاعاً قدره  $\hbar k$  وشحنة تساوي  $Q = -en_k^{(-)}$  وطاقته قدرها  $n_k^{(-)} \hbar \omega_k$  • تقود الحالات المكتملة لحقل الميزونات المشحونة الى كمات حقلية (جسيمات) تأخذ شحنة موجبة أو سالبة • إن القيم الذاتية لمؤثر هاميلتون (32) موجبة دوماً بينما تكون القيم الذاتية لمؤثر الشحنة الكهربائية للحقل موجبة أو سالبة تبعاً لعدد الجسيمات المشحونة ايجاباً وعدد الجسيمات المشحونة سلباً • توصف حالات جملة البيونات ، استناداً الى علاقات التبادل (31) بالتوابع (34) • وهي توابع متناظرة بالنسبة لتبديل أزواج الجسيمات فالبيونات هي بوزونات تخضع لقوانين بوزة - اينشتاين الاحصائية •

توصف الميزونات المعتدلة بحقل حقيقي فالمؤثر (30) يستطيع أن يصف الجسيمات المعتدلة إذا وضعنا

$$\hat{\Psi}(r) = \hat{\Psi}^+(r) \quad (35)$$

عندها يرتبط المؤثران  $\hat{a}_k$  ,  $\hat{b}_k$  بالعلاقة :

$$\hat{b}_k = \hat{a}_{-k} \quad (36)$$

أي أن مؤثرات حقل الميزون المعتدل توصف بشكل وحيد بدلالة مؤثرات الخلق  $\hat{a}_k^+$  ومؤثرات الإفناء  $\hat{a}_k$  كما يلي :

$$\hat{\psi} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t}] e^{i(k \cdot r)}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = -i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2V}} [\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t}] e^{i(k \cdot r)}.$$

وتحقق هذه المؤثرات العلاقات التبادلية :

$$[\hat{\Psi}, \hat{\Psi}]_- = \left[ \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} \right]_- = 0 ;$$

$$\left[ \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right]_- = i\hbar \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

فإذا حقق المؤثران  $\hat{a}_k$  ,  $\hat{a}_k^+$  علاقات التبادل

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]_- = [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+]_- = 0 ; [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+]_- = \delta_{kk'}$$

وعوضنا العلاقتين (37) في (28) نحصل على مؤثر هاميلتون لحقل الميزونات المعتدلة

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}].$$

ويتلاشى مؤثر الشحنة الكهربائية الكلية في الحقل المعتدل .

$$\hat{Q} = e \sum_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k}] = 0.$$

### ٣ - التكميم الثاني لجمل من الفيرميونات غير المتفاعلة :

توصف الجمل المكونة من فيرميونات متماثلة بتوابع موجية ذات تناظر بالنسبة لتبديل موضعي فيرميونين منها . ويتحقق مبدأ باولي عندما نتحدث عن تقريب لحالة الجملة يكون فيه لكل فيرميون حالة منفصلة ولايسمح لفيرميونين أن يكون لهما الحالة نفسها . سوف نبدأ دراسة جملة الفيرميونات المتماثلة بأبسط حالة للجملة تحوي N فيرميوناً غير متفاعلة مع بعضها ، وهي في أخفض طاقة لها بحيث لايمكن أن يتشكل في الجملة جسيم مضاد .

سنفترض أن حالة الفيرميون المنفصل ( في حقل خارجي متولد بواسطة جسيمات أخرى مثل نوى الذرات ) تتعين بمؤثر هاميلتون  $\hat{H}(\xi)$  حيث تعبر  $\xi$  عن احداثيات الموضع والسبن . كما سنفترض أن  $\epsilon_s$  و  $\phi_s(\xi)$  هما القيمة الذاتية والتابع الذاتي للمؤثر  $\hat{H}(\xi)$  . يميز الدليل  $s$  جميع الأعداد الكمومية المعنية بحالة الجسيم الوحيد . ففي التمثيل الاحداثي يكتب مؤثر هاميلتون كما يلي:

$$\hat{H}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \sum_{i=1}^N \hat{H}(\xi_i). \quad (40)$$

ويكون التابع الموجي في هذا التمثيل  $\Psi(\xi_1, \dots, \xi_N)$  ذا تناظر مضاد ويتضمن  $4N$  متحولاً لأن  $\xi_i$  تعبر عن الموضع والسبن للجسيم .

تحدد حالة الجملة في تمثيل التكميم الثاني بعدد الجسيمات في كل حالة من حالات الجسيم الوحيد . لنفترض أن عدد الجسيمات في الحالة  $s$  هو :

$$n_s = \alpha_s^+ \alpha_s \quad (41)$$

ولكي يصف المؤثر (41) حالات جملة الفيرميونات يجب أن لا يكون له أكثر من قيمتين ذاتيتين هما : 0 , 1 وذلك وفق مبدأ باولي ، ونعبر عن المؤثر الهرميتي  $\hat{n}_s$  بالمصفوفة القطرية :

$$\hat{n}_s = \alpha_s^+ \alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

ويعطى التابعان الذاتيان للمؤثر (42) ، المقابلان للقيستين الذاتيتين 0 , 1

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

لنفترض أن المؤثر  $\alpha_s^+$  يخفض من عدد الجسيمات الموجودة في الحالة  $s$

بمقدار جسيم واحد أي :

$$\hat{\alpha}_s |0\rangle = 0 \quad ; \quad \hat{\alpha}_s |1\rangle = |0\rangle \quad (44)$$

فتكون المصفوفة غير الهرميتية المقابلة للمؤثر  $\hat{\alpha}_s$  وتلك المقابلة للمؤثر  $\hat{\alpha}_s^+$

$$\hat{\alpha}_s^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\alpha}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

ويحقق المؤثر  $\hat{\alpha}_s^+$  العلاقات :

$$\hat{\alpha}_s^+ |0\rangle = |1\rangle \quad , \quad \hat{\alpha}_s^+ |1\rangle = 0 \quad (46)$$

أي أن المؤثر  $\hat{\alpha}_s^+$  يزيد عدد الجسيمات في الحالة  $s$  بمقدار جسيم واحد عندما تكون الحالة  $s$  خالية ، كما يعدم التابع المقابل لحالة تحوي جسيماً • وباستخدام التعريف (45) يمكننا أن نتوصل الى علاقات التبادل للمؤثرات المذكورة والتي سندعوها بمؤثرات فيرمي :

$$[\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s]_+ = [\hat{\alpha}_s^+, \hat{\alpha}_s^+]_+ = 0 \quad [\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s^+]_+ = 1 \quad (47)$$

$$[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]_+ = \hat{\alpha} \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha} \quad \text{حيث}$$

لاتعين المؤثرات  $\hat{\alpha}_s^+$  و  $\hat{\alpha}_s$  بالمصفوفات (45) بصورة كاملة إذ يجب الإشارة الى علاقتهما بالمؤثرين  $\hat{\alpha}_s^+$  و  $\hat{\alpha}_s$  المقابلة للحالات الأخرى • وكما في البوزونات سنفترض وجود علاقة مثل  $[\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s]_+ = 0$  من أجل جميع المؤثرات باستثناء  $\hat{\alpha}_s^+$  و  $\hat{\alpha}_s$  لكل حالة  $s$  حيث  $[\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s^+]_+ = 1$

وبتعبير آخر سنطلب أن تحقق المؤثرات  $\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s^+, \dots$  العلاقات :

$$[\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_l]_+ = [\hat{\alpha}_s^+, \hat{\alpha}_l^+]_+ = 0, \quad [\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_l^+]_+ = \delta_{sl} \quad (48)$$

إذا رقمنا حالات الجسيم الوحيد بترتيب معين ورمزنا لعدد الجسيمات بالحالة  $s$  بالعدد  $n_s$  (ويأخذ القيمتين 0 و 1) ، يمكننا عندها كتابة المؤثرات المحققة للعلاقات (48) في تمثيل تكون فيه المؤثرات  $\hat{n}_s$  قطرية أي :

$$\hat{\alpha}_s = (-1)^{n_s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_s^+ = (-1)^{n_s} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث  $n_s$  هو عدد الحالات المشغولة التي تسبق الحالة  $s$  • يتميز تأثير المؤثرين  $\hat{\alpha}_s^+, \hat{\alpha}_s$  في التتابع الموجبة  $|\dots n_s \dots\rangle$  (يرتبط هذا التأثير بعدد الجسيمات في كل حالة من الحالات وحيدة الجسيم) بالمعادلتين :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_s |\dots n_s \dots\rangle &= (-1)^{n_s} |\dots 1 - n_s \dots\rangle \\ \hat{\alpha}_s^+ |\dots n_s \dots\rangle &= (-1)^{n_s} (1 - n_s) |\dots 1 - n_s \dots\rangle \end{aligned} \quad (50)$$

وكذلك نستطيع استنتاج المعادلات التالية متذكرين أن

$$1 - n_s^2 = 1 - n_s \quad \text{و} \quad n_s^2 = n_s$$

$$\hat{\alpha}_s \hat{\alpha}_s^+ |\dots n_s \dots\rangle = (1 - n_s) |\dots n_s \dots\rangle$$

$$\hat{\alpha}_s^+ \hat{\alpha}_s |\dots n_s \dots\rangle = n_s |\dots n_s \dots\rangle$$

$$\hat{\alpha}_s \hat{\alpha}_s | \dots n_s \dots \rangle = n_s (1 - n_s) | \dots n_s \dots \rangle = 0$$

$$\hat{\alpha}_s^+ \hat{\alpha}_s^+ | \dots n_s \dots \rangle = 0$$

ومن أجل  $s > l$  نجد:

$$\hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_s | \dots n_l \dots n_s \dots \rangle =$$

$$(-1)^{v_s + v_l} n_l n_s | \dots 1 - n_l \dots 1 - n_s \dots \rangle$$

$$\hat{\alpha}_s \hat{\alpha}_l | \dots n_l \dots n_s \dots \rangle =$$

$$(-1)^{v_s + v_l - 1} n_l n_s | \dots 1 - n_l \dots 1 - n_s \dots \rangle$$

أي أن

$$\hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_s | \dots n_l \dots n_s \dots \rangle = - \hat{\alpha}_s \hat{\alpha}_l | \dots n_l \dots n_s \dots \rangle$$

نربط مؤثرات فيرمي بعدد الجسيمات في الحالة  $(n_s)_s$  وكذلك بالحالات المشغولة التي تليها فالمؤثران  $\hat{\alpha}_s$  و  $\hat{\alpha}_l$  غير مستقلين تماماً . فإذا عينت المعادلة  $[\hat{H}(\xi) - \xi_s] \varphi_s = 0$  حالات الجسيم الوحيد ، عندها يكتب مؤثر هاميلتون للجمله المؤلفة من فيرميونات مستقلة بالشكل

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^+ (\xi) \hat{H} (\xi) \hat{\Psi} (\xi) d\xi \quad (51)$$

ونعبر عن مؤثر الحقل  $\hat{\Psi}$  بدلالة المؤثرات  $\hat{\alpha}_s$  من خلال المعادلة :

$$\hat{\Psi}(\xi, t) = \sum_s \hat{\alpha}_s \varphi_s(\xi) e^{-i\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{e_s}{\hbar}. \quad (52)$$

باستخدام العلاقة (48) وكذلك لأن  $\varphi_s$  تشكل مجموعة تامة من التوابع المتعامدة نستطيع البرهان على أن مؤثرات الحقل تحقق علاقات التبادل :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{\Psi}(\xi'), \hat{\Psi}^\dagger(\xi)]_+ &= \sum_{s,t} \varphi_s(\xi') \varphi_t^*(\xi) [\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_t^\dagger]_+ = \delta(\xi' - \xi), \\ [\hat{\Psi}(\xi'), \hat{\Psi}(\xi)]_+ &= [\hat{\Psi}^\dagger(\xi'), \hat{\Psi}^\dagger(\xi)]_+ = 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

بتعويض المعادلات (52) في (51) نحصل على مؤثر هاميلتون لجملة الفيرميونات:

$$\hat{H} = \sum_s e_s \hat{\alpha}_s^\dagger \hat{\alpha}_s = \sum_s e_s \hat{n}_s.$$

إن الطاقات  $e_s$  والتوابع الموجية  $\varphi_s$  ماهي الا حالات الالكترين في الذرات أو الجزيئات أو المادة الصلبة ، طالما بقي التفاعل بين الالكترونات مهملًا . يعطى مؤثر العدد الكلي للجسيمات في الجملة (N) بالعلاقة :

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\xi) \hat{\Psi}(\xi) d\xi$$

كما تعطى كثافة عدد الجسيمات عند النقطة  $\xi$  بالتكامل

$$\hat{\rho}(\xi) = \int \hat{\Psi}^\dagger(\xi) \delta(\xi - \xi') \hat{\Psi}(\xi') d\xi'$$

وباستخدام العلاقة (52) نجد :

$$\hat{N} = \sum_s \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s, \quad \hat{\rho}(\xi) = \sum_{s,t} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_t \varphi_s(\xi) \varphi_t^*(\xi). \quad (53)$$

ونستطيع الحصول على مؤثرات المقادير الفيزيائية المختلفة لجملة الفيرميونات باتباع مايلي : اذا كان المؤثر  $\hat{F}$  في التمثيل الاحداثي مؤلفاً من مجموع المؤثرات  $\hat{F}(\xi)$  العاملة على احداثيات الالكترونات ، فإنه يكتب في تمثيل التكميم الثاني بالشكل :

$$\hat{F} = \int \hat{\Psi}^+(\xi) F(\xi) \hat{\Psi}(\xi) d\xi \quad (54)$$

باستخدام المعادلة (52) نجد :

$$\bar{F} = \sum_{s,l} \alpha_s^\dagger \alpha_l \langle s | \hat{F} | l \rangle, \quad (55)$$

حيث  $\langle s | \hat{F} | l \rangle = \int \varphi_s^*(\xi) \hat{F}(\xi) \varphi_l(\xi) d\xi$  هي عناصر مصفوفة المؤثر في التمثيل الاحداثي بينما  $\varphi_l(\xi)$  هي التوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}(\xi)$ .



الفصل الخامس

# نظرية الانتقالات الكمومية

**The theory of quantum transitions**

## نظرية الانتقالات الكمومية

### ١ - نظرية الاضطراب التابع للزمن :

لنفترض أن لدينا مؤثراً اضطراباً صيفته

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} W(t) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

يؤثر خلال فترة زمنية محددة ، في جملة مؤثرها الهاميلتوني مستقل عن الزمن  $\hat{H}_0$  . يعطى مؤثر هاميلتون الكلي لهذه الجملة بالعلاقة  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$  ويكون تابعاً للزمن . كما تعطى معادلة شرودينغر المرتبطة بالزمن ، المقابلة لهذا المؤثر بالعلاقة

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [ \hat{H}_0 + \hat{V}(t) ] \Psi \quad (1)$$

يمكن للمؤثر  $\hat{V}(t)$  أن يصف التفاعل بين جملة ما وبين أجسام أخرى ، وفي أبسط الحالات يأتي التفاعل المرتبط بالزمن نتيجة تغير في المعاملات الخارجية مثل تغير المسافة أو تغير شدة الحقل الخارجي .. الخ

لتعيين التابع الموجي الذي يحقق المعادلة (1) فكتب التابع  $\Psi$  على النحو التالي

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \varphi_n e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2)$$

حيث  $E_n$  و  $\varphi_n$  هي القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}_0$  . سنفترض أن

الجملة كانت مستقرة ، قبل تطبيق المؤثر الاضطرابي ، بطاقة قدرها  $E_m$  . أي  
أن التابع الموجي الذي يصف الحالة الابتدائية هو

$$\Psi_{init} = \varphi_m e^{-i E_m t / \hbar}$$

وذلك من أجل  $t < 0$  . تصل الجملة ، بعد انتهاء فترة تطبيق المؤثر  $t \geq \tau$  ، الى  
حالة جديدة تقابل القيمة  $a_{nm}(\tau)$  المرتبطة بمؤثر الاضطراب  $\hat{W}(t)$  ، ويكون  
التابع الموجي الذي يصف الجملة من أجل  $t > \tau$

$$\Psi_{fin} = \sum_n a_{nm}(\tau) \varphi_n e^{-i E_n t / \hbar}. \quad (3)$$

يعطى احتمال وجود الجملة في حالة مستقرة طاقتها  $E_n$  بمربع القيمة المطلقة  
للأمثال  $a_{nm}(\tau)$  أي :

$$w_{nm}(\tau) = |a_{nm}(\tau)|^2 \quad (4)$$

ويساوي احتمال انتقال الجملة من الحالة الابتدائية  $m$  الى الحالة النهائية  $n$   
خلال الفترة الزمنية  $\tau$  . ولحساب الأمثال  $a_{nm}$  نعوض المعادلة (2) في  
المعادلة (1) ثم نضربها بـ  $\varphi_n^*$  ونكامل فنحصل على مجموعة المعادلات :

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_n(t) = \sum_l \langle n | \hat{W}(t) | l \rangle e^{i\omega_{nl}t} a_l(t), \quad (5)$$

حيث

$$\langle n | \hat{W}(t) | l \rangle = \int \varphi_n^* W(t) \varphi_l d\xi \quad (6)$$

و

$$\hbar \omega_{nl} = E_n - E_l$$

سنأخذ بعين الاعتبار في كل مايلي ، الاضطرابات ذات العناصر القطرية المعدومة أي:

$$\langle n | W(t) | n \rangle = 0$$

وفي هذه الحالة لا يحوي المجموع (5) حدوداً يكون فيها  $n = l$ .

يجب لإيجاد احتمالات الانتقال حل المعادلات (5) الخاضعة للشرط الحدي:

$$a_n(0) = \delta_{nm} \quad (8)$$

إذا كانت عناصر المصفوفة (6) صغيرة والفترة الزمنية  $\tau$  ليست طويلة جداً (بمعنى أن الاختلاف بين قيم الأمثال  $a_n(\tau)$  والقيم الابتدائية لها صغير) نستطيع حل المعادلات (5) بطريقة التقريب المتتالي.

ففي التقريب الأول نعين قيمة  $a_n(t)$  بتعويض القيم الابتدائية  $a_n(0)$  في الطرف الايمن من المعادلة (5) فنحصل على مجموعة المعادلات التالية من أجل  $n \neq m$ :

$$i\hbar \frac{d a_{nm}^{(1)}}{dt} = \langle n | \hat{W}(t) | m \rangle e^{i\omega_{nm}t}$$

وباستخدام الشرط (8) نجد:

$$a_{nm}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle n | \hat{W}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'} dt' \quad (9)$$

بتعويض هذه القيمة في الطرف الأيمن من المعادلة (5) نجد قيمة التقريب الثاني:

$$i\hbar \frac{d a_{nm}^{(2)}}{dt} = \langle n | \hat{W}(t) | m \rangle e^{i\omega_{nm}t} + \frac{1}{i\hbar} \sum_{n' (\neq m)} \langle n | \hat{W}(t) | n' \rangle e^{i\omega_{nm'}(t)} \int_0^t \langle n' | \hat{W}(t') | m \rangle e^{i\omega_{n'm'}t'} dt'$$

ونكتب حل هذه المعادلة بالشكل :

$$a_{nm}^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle n | \hat{W}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'} dt' \quad (10)$$

$$+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \sum_{n' (\neq m)} \int_0^t \langle n | \hat{W}(t') | n' \rangle e^{i\omega_{nn'}t'} \int_0^{t'} \langle n' | \hat{W}(t'') | m \rangle e^{i\omega_{n'm}t''} dt'' dt'.$$

بتعويض هذه القيمة في الطرف الأيمن من المعادلة (5) نجد قيمة التقريب الثالث وهكذا نتوصل إلى الحل على شكل سلسلة لانهاية تكتب كما يلي

$$a_{nm}(t) = \langle n | \hat{p} \exp \left[ - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{W}(t') dt' \right] | m \rangle \quad (11)$$

حيث :

$$\hat{p} \exp \left[ - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{W}(t') dt' \right] = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{\tilde{W}}(t') dt'$$

$$+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_0^t \hat{\tilde{W}}(t') \int_0^{t'} \hat{\tilde{W}}(t'') dt'' dt' \quad (12)$$

$$+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^3 \int_0^t \hat{\tilde{W}}(t') \int_0^{t'} \hat{\tilde{W}}(t'') \int_0^{t''} \hat{\tilde{W}}(t''') dt''' dt'' dt' + \dots$$

أما  $\hat{\tilde{W}}(t)$  فهو مؤثر الاضطراب ويكتب بالشكل :

$$\hat{\tilde{W}}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \hat{W}(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (13)$$

نتوقف عادة في كثير من مسائل الفيزياء الذرية والفيزياء النووية عند التقريب الأول أي نعد العلاقة (9) تقريباً كافياً لقيم  $a_{nm}$  ويكون احتمال الانتقال

من الحالة  $m$  الى الحالة  $n$  خلال فترة تطبيق الاضطراب مساوياً :

$$w_{nm}(\tau) = |a_{nm}^{(1)}(\tau)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\tau \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle e^{i\omega_{nm}t} dt \right|^2 \quad (14)$$

فنتيجة للانتقالات الكوانتية من الحالة  $|m\rangle$  الى حالة مختلفة  $|n\rangle$  ، يتلخص احتمال وجود الجملة في الحالة  $|m\rangle$  ( والذي كان مساوياً الواحد في اللحظة  $t = 0$  ) فإذا كان هذا التناقص اسياً أي

$$|a_{nm}(t)|^2 = e^{-t/T} \quad (15)$$

فيدعى المقدار  $T$  بعمر الحالة  $|m\rangle$  . ومن الواضح أن التقريب الأول (14) يصلح عندما تكون فترة تطبيق الاضطراب  $\tau$  أصغر بكثير من عمر الحالة  $|m\rangle$  .

## ٢ - اثارة الذرة بقذفها بجسيم ثقيل :

سنطبق العلاقة (14) في حساب احتمال انتقال الكترون الذرة من الحالة  $|m\rangle$  الى الحالة  $|n\rangle$  نتيجة التفاعل بين الالكترون و بين جسيم ثقيل مشحون مارٍ بجواره ، وبسبب ثقل الجسيم لن تتغير طبيعة حركته كنتيجة لتفاعله مع الالكترون ، لذلك نفترض أن الجسيم يتحرك بسرعة ثابتة ، ونأخذ مركز احداثيات الجملة منطبقاً على مركز الذرة ، والمحور  $ox$  باتجاه حركة الجسيم .

يتعين موضع هذا الجسيم بالشعاع  $R(vt, D, 0)$  حيث  $D$  هي أقرب مسافة يصل إليها الجسيم من مركز الذرة وتحدث في اللحظة  $t = 0$  . فإذا عثين موضع الالكترون في الذرة بالشعاع  $r(x, y, z)$  ، عندها نستطيع كتابة مؤثر التفاعل بين الالكترون والجسيم المشحون كما يلي :

$$\hat{W}(t) = - \frac{ze^2}{|R-r|} \simeq - \frac{ze^2}{R} - \frac{ze^2 (xvt + Dy)}{R^3} + \dots \quad (16)$$

حيث :  $R = \sqrt{(vt)^2 + D^2}$  ، فإذا كان كل من  $x$  و  $y$  صغيرا بالمقارنة مع  $R$  ، نكتفي بالحدين الأولين في العلاقة (16) . لا يحتوي الحد الأول في العلاقة (16) على أحداثيات الالكترون ويحسب عنصر مصفوفته المعين بالعلاقة (14) كما يلي :

$$\langle n | \hat{W}(t) | m \rangle = - \frac{ze^2}{R^3} (x_{nm} vt + Dy_{nm}) \quad (17)$$

حيث

$$\varphi_n, \varphi_m, y_{nm} = \int \varphi_n^* y \varphi_m d_3 r, \quad x_{nm} = \int \varphi_n^* x \varphi_m d_3 r$$

هي التوابع الموجية للحالات المستقرة للالكترون في الذرة .

بتعويض العلاقة (17) في العلاقة (14) وتمديد التكامل من  $-\infty$  الى  $+\infty$  نحصل على صيغة تعطي احتمال انتقال الكترون الذرة من الحالة  $m$  الى الحالة  $n$

$$w_{nm} = \frac{ze^4}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{nm} vt + Dy_{nm}}{[(vt)^2 + D^2]^{3/2}} e^{i\omega_{nm} t} dt \quad (18)$$

تتناقص قيمة التكامل في المعادلة (18) بشدة مع ازدياد المسافة ، ويكون للتفاعل قيمة ملموسة ضمن نطاق أقرب مسافة يصلها الجسيم من الذرة . لذلك نستطيع الافتراض بأن الزمن الفعلي للتصادم معين بالمقدار  $\frac{D}{v}$  .

يدعى مثل هذا التصادم بالكلوم إذا كان زمن التصادم الفعلي كبيراً بالمقارنة مع الفترة  $\omega_{nm}^{-1}$  المميزة للجمله الكسومية ، أي عند تحقق الشرط

$$\omega_{nm} \frac{D}{v} \gg 1 \quad (19)$$

عندما تتحقق هذه المتراجحة تهتز قيمة التكامل في العلاقة (18) مرات عديدة خلال الزمن الفعلي للتصادم وتنعدم تقريباً قيمة التكامل . أي أن الاصطدامات الكلومة لا تكون مصحوبة بإثارة الذرة .

أما إذا تحققت المتراجحة  $\omega_{nm} \frac{D}{v} \leq 1$  فتكون  $e^{i\omega_{nm} t} \simeq 1$  خلال فترة التصادم الفعال ويمكننا بسهولة اجراء التكامل (18) بجعل  $\frac{vt}{D} = \tan \theta$  فنجد :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{nm} vt + Dy_{nm}}{[(vt)^2 + D^2]^{3/2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Dy_{nm}}{[(vt)^2 + D^2]^{3/2}} dt = \frac{2y_{nm}}{vD}$$

ويكون احتمال الانتقال من الحالة  $m$  الى الحالة  $n$  نتيجة مرور جسيم مشحون على مسافة  $D$  من الذرة مساوياً :

$$w_{nm}(D) = \frac{4z^2 e^4 |y_{nm}|^2}{\hbar^2 D^2 v^2}$$

منتبهين أن  $D \geq a$  حيث  $a$  هو نصف قطر الذرة .

إذا كان تدفق الجسيمات ، من خلال واحدة السطوح وخلال واحدة الزمن ، هو  $N$  ، فيكون احتمال اثارة الذرة خلال واحدة الزمن مساوياً

$$P_{nm} = N \int_0^{v/\omega_{nm}} 2\pi D w_{nm}(D) dD =$$

$$= \frac{8\pi N e^4 z^2}{\hbar^2 v^2} |y_{nm}|^2 \ln \frac{v}{a \omega_{nm}} \quad (20)$$

ونستنتج من هذه الصيغة أن احتمال إثارة الذرة يتناقص مع ازدياد سرعة الجسيم طالما اختلفت قيمة  $\frac{v}{\omega_{nm}}$  عن نصف قطر الذرة .

عندما تتناقص سرعة الجسيم بحيث تتحقق للمتراجحة

$$a \omega_{nm} v^{-1} \geq 1 \quad (21)$$

تصبح المعادلة (20) غير صحيحة بسبب عدم تحقق المتراجحة  $\omega_{nm} \frac{D}{v} \leq 1$  ومع ذلك فإن المتراجحة (19) محققة بسبب كون  $D \geq a$  من أجل جميع قيم  $D$  ، وبذلك تتحقق المتراجحة (21) ويكون احتمال إثارة الذرة نادراً . إن الاحتمال الأعظمي للإثارة يقابل سرعة تساوي  $v = a \omega_{nm}$  .

نستطيع استخدام التقريب شبه الكلاسيكي من أجل الحالات عالية الإثارة في الذرة . وفي هذه الحالات تقابل  $\omega_{nm}$  التواتر الزاوي لدوران الإلكترون حول النواة ، ويكون احتمال إثارة الذرة أعظماً عندما يكون للجسيم سرعة الإلكترون في الذرة . ومع ذلك ، فعندما تتحقق المتراجحة (19) لا يحدث أي انتقال كمومي في الذرة ، ويحدث الجسيم المار اضطراباً في الذرة ، مرتبطاً بحركة الجسيم . يتلاشى هذا الاضطراب عندما يبتعد لجسيم . ويسمى مثل هذا التفاعل بالتفاعل الكظوم . أي أن التفاعلات الكظومة لا تسبب انتقالات كمومية ضمن حالات الطيف المنفصل .

### ٣ - الكظم والفتح المفاجيء والاغلاق المفاجيء للتفاعل :

أ - التغير الكظوم في التفاعل : يكون تغير طاقة التفاعل ، في هذه الحالة خلال دور واحد من اهتزاز الجملة الذرية ، صغيراً بالمقارنة مع القيمة المطلقة للفرق بين الحالتين المشاركتين أي :

$$| \omega_{nm}^{-1} \frac{d}{dt} \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle | \ll | E_n - E_m | \quad (22)$$

ب - التغير الفجائي في التفاعل : تتحقق ، في هذه الحالة ، المتراجحة التالية:

$$| \omega_{nm}^{-1} \frac{d}{dt} \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle | \gg | E_n - E_m | \quad (23)$$

في لحظة ما ( مثل لحظة بدء تشغيل التفاعل ) • ومن الملائم عند دراسة هذه الحالة الحديثة أن نستخدم العلاقة :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{i \omega_{nm} t} \frac{d}{dt} \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle dt = \\ \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle e^{i \omega_{nm} t} \Big|_0^\tau \\ - i \omega_{nm} \int_0^\tau \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle e^{i \omega_{nm} t} dt \end{aligned} \quad (24)$$

في العلاقة (14) • فبتعويض العلاقة (24) في العلاقة (14) متبھين الى انعدام المقدار  $\langle n | \hat{w}(t) | m \rangle$  عند النهايتين ، فنجد :

$$w_{nm} = \frac{1}{\hbar^2 \omega_{nm}^2} \left| \int_0^\tau e^{i \omega_{nm} t} \frac{d}{dt} \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle dt \right|^2 \quad (25)$$

فإذا تحققت المتراجحة (22) فإن العامل المضروب بـ  $e^{i\omega_{nm}t}$  يتغير قليلا خلال فترة التفاعل ونستطيع اخراجه خارج اشارة التكامل ، وباجراء المكاملة نجد :

$$w_{nm} = \frac{4}{\hbar^2 \omega_{nm}^4} \left| \frac{d}{dt} \langle n | \hat{w}(t) | m \rangle \right|^2 \sin^2 \left( \frac{\omega_{nm} \tau}{2} \right) \quad (26)$$

أي أن  $w_{nm} \ll 1$  وبتعبير آخر نقول ، اذا فتح التفاعل أو أغلق ببطء ، أي عندما تتحقق المتراجحة (22) ، فإن الجملة الكمومية الموجودة في الحالة غير المنطبقة  $m$  قبل فتح التفاعل ، تبقى في الحالة نفسها بعد اغلاق التفاعل . أما اذا فتح الاضطراب بشكل مفاجئ ، أي أن  $\hat{w}(t)$  قد تغير بصورة لحظية ( خلال زمن  $\Delta t$  صغير بالمقارنة مع  $\omega_{nm}^{-1}$  ) وتغير بعد ذلك بصورة كظومة ثم أغلق بصورة كظومة ، فإن الإسهام الرئيسي في التكامل (25) يأتي من الاضطراب لحظة فتحه . يتغير العامل  $e^{i\omega_{nm}t}$  خلال هذه الفترة الصغيرة تغيراً طفيفاً ، لذلك يمكن اخراجه خارج اشارة التكامل ثم نجري المكاملة لنحصل على الصيغة البسيطة التالية التي تعطي احتمال الانتقال

$$w_{nm} = \frac{|\langle n | \hat{w}(t) | m \rangle|^2}{\hbar^2 \omega_{nm}^2} \quad (27)$$

حيث يمثل المقدار  $\hat{w}$  في هذه العلاقة ، القيمة العظمى للتفاعل خلال عملية فتح الاضطراب . اذا كان تغير الاضطراب سريعاً وكبيراً ، مثل اصدار أشعة بيتا من النوى الخفيفة ، فإن شحنة النواة تتغير بمقدار وحدة كاملة خلال زمن من رتبة  $a/c$  وهو أصغر بكثير من دور الالكترونات في حركته حول النواة . ان تغير الشحنة الكهربائية للنواة يتبعه اعادة ترتيب الالكترونات في الطبقات المختلفة ينتج عنه اصدار للفوتونات . نستطيع بسهولة حساب احتمالات الانتقال الناتجة

عن مثل هذا التغير السريع في مؤثر هاميلتون وذلك بافتراض عدم تغير التابع الموجي للحالة الابتدائية خلال هذه الفترة القصيرة التي يتغير فيها الكمون .

لنأخذ مثلاً جملة كمومية موجودة في الحالة الموصوفة بالتابع الموجي  $\varphi_m$  (حيث  $\varphi_m$  هو التابع الذاتي لمؤثر هاميلتون  $\hat{H}_0$ ) في اللحظة  $t = 0$  . سنفترض أنه في اللحظة  $t = 0$  تغير مؤثر هاميلتون فجأة ثم لم يتغير بعد ذلك وبقي مساوياً  $\hat{H}$  . لنرمز للتابع الموجي الذاتي للمؤثر  $\hat{H}$  بـ  $\psi_n$  ولقيمته الذاتية بـ  $E_n$  . كما أن الجملة بقيت ممثلة بالتابع الموجي  $\varphi_m$  بعد انتهاء التغير الفجائي لـ  $\hat{H}_0$  ، لذلك نكتب

$$\Psi(r, 0) = \varphi_m(r) = \sum A_{nm} \psi_n(r) \quad (28)$$

حيث

$$A_{nm} = \int \varphi_m(r) \psi_n^*(r) d_3 r \quad (29)$$

تعيين القيمة المطلقة للأمثال (29) ، احتمال تغير الجملة من الحالة الابتدائية  $\varphi_m$  الى الحالة النهائية  $\psi_n$  ، ويعطى تغير التابع (28) مع الزمن بحل المعادلة :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$$

لذلك نكتب :

$$\Psi(r, t) = \sum_n A_{nm} \psi_n(r) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

وسنحسب ، كمثال ، احتمال اثاره الكترون ذرة عندما تتغير شحنة نواتها بشكل مفاجيء من القيمة  $z$  الى القيمة  $z \pm 1$  وهي حالة اصدار الكترون أو بوزيترون

من النواة • وللتسهيل سنأخذ ذرة تملك الكترونًا واحدًا يتحرك في حقل نواة شحنتها  $ze$  • ان الحالة الابتدائية لهذه الذرة توصف بالتابع الموجي

$$\psi_{10} = 2 \left( \frac{z}{a} \right)^{3/2} e^{-zr/a} Y_{00} \quad (31)$$

حيث  $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$  • وبعد التغير التبعائي في شحنة النواة يكون للحالات المستقرة المستقرة توابع موجية مماثلة للتوابع الموجية في شبيهات الهيدروجين لنواة عددها الذري  $z \pm 1$  •

$$\psi_{nl}(r, \theta, \varphi) = f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (32)$$

فإذا استخدمنا العلاقة (29) نجد أن احتمال الاثارة الى السوية  $nl$  خلال اصدار النواة يعطى بمربع العلاقة :

$$A_{nl,10} = \int \psi_{nl}^* \psi_{10} d_3 r$$

وباستخدام العلاقتين (31) ، (32) نجد أن الانتقال الوحيد الذي يقابل قيماً غير معدومة للأمثال  $A_{nl,10}$  هو الانتقال الى الحالات  $s$  • فباستخدام الصيغة الصريحة لتابع الموضع  $f_{nl}(r)$  من أجل نواة عددها الذري  $z \mp 1$  نحسب الأمثال  $A_{n0,10}$  • فمن أجل الحالة  $2s$  مثلاً ، لدينا :

$$f_{20}(r) = \left( \frac{z \pm 1}{2a} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{(z \pm 1)r}{a} \right) e^{-(z \mp 1)r/2a}$$

وبناءً عليه نجد

$$A_{20,10} = 2 \left( \frac{z}{a} \right)^{3/2} \int f_{20}(r) e^{-\frac{zr}{a}} r^2 dr = \mp 2 \frac{[2^3 z(z \pm 1)]^{3/2}}{(3z \pm 1)} \quad (33)$$

ويكون احتمال الانتقال ( $1s \rightarrow 2s$ ) عندما تتغير شحنة النواة من  $ze$  الى  $e$  ( $z \mp 1$ ) هو:

$$w(1s \rightarrow 2s) = \frac{2^{11} z^3 (z \pm 1)^2}{(3z \pm 1)^8} \quad (34)$$

عندما يكون العدد الذري  $z$  كبيراً يكون تغير الطاقة الكامنة  $w = \pm \frac{e^2}{r}$

صغيراً ونستطيع عندها استخدام العلاقة (27) من أجل إيجاد احتمالات الناتجة عن تغير مفاجيء في مؤثر هاميلتون . وبما أن للنواة عدداً ذرياً قدره  $z$  فيكون  $E_{2s} - E_{1s} = \frac{3z^2 e^2}{8a}$  ويكون عنصر المصفوفة لمؤثر الاضطراب  $\hat{W}$  لتوابع شبيهات الهيدروجين

$$\langle 1s | \hat{W} | 2s \rangle = 4 \sqrt{2} z e^2 / 27 a$$

وباستخدام العلاقة (27) نجد:

$$w(1s \rightarrow 2s) = 2^{11} 9^{-4} z^{-2} \simeq 0.312 z^{-2}$$

وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها من العلاقة (34) من أجل قيم كبيرة لـ  $z$ .

**تعرين:** أوجد الاحتمال الكلي لتأين أو إثارة ذرة التريتيوم عندما تصدر نواتها أشعة بيتا .

**تعرين:** أوجد احتمال الإثارة الى السوية  $n$  في ذرة التريتيوم عندما تصدر نواتها أشعة بيتا .

#### ٤ - احتمال الانتقال خلال واحدة الزمن :

إذا كان لمؤثر الاضطراب قيمة ثابتة بين لحظة فتحه ولحظة اغلاقه ، وكان معدوماً فيما عدا ذلك ، فإن العلاقة التي تعطي احتمال الانتقال (14) تصبح سهلة عملياً ، ويمكننا التحدث عن انتقالات تحت تأثير اضطراب ثابت . وبما أن عنصر المصفوفة  $\langle n | \hat{W} | m \rangle$  مستقل عن الزمن ، فإننا نستطيع حساب التكامل في العلاقة (14) فنجد :

$$\int_0^{\tau} \langle n | \hat{W} | m \rangle e^{i\omega_{nm} t} dt = \langle n | \hat{W} | m \rangle \frac{e^{i\omega_{nm} \tau} - 1}{i\omega_{nm}}$$

ويكون احتمال الانتقال خلال فترة تطبيق الاضطراب مساوياً

$$w_{nm}(\tau) = \frac{2}{\hbar^2} |\langle n | \hat{W} | m \rangle|^2 F(E_n - E_m) \quad (35)$$

حيث

$$F(x) = \frac{1 - \cos\left(\frac{x\tau}{\hbar}\right)}{(x/\hbar)^2}$$

يأخذ التابع  $F(E_n - E_m)$  قيمته العظمى  $\frac{1}{2}$  عندما تكون  $E_m = E_n$  ، كما ينعدم من أجل  $E_n - E_m = \frac{2\pi\hbar}{\tau}$  ومضاعفاتها . ويكون احتمال الانتقال متناسباً مع  $\tau^2$  من أجل قيم صغيرة لـ  $\tau$  أي  $\hbar/E_n \ll \tau$  . أما إذا كان  $\tau$  كبيراً بالمقارنة مع الدور  $\frac{\hbar}{E_n - E_m}$  المميز للجملة ، عندها يمكن أن نعبر عن التابع  $F$  بدلالة التابع دلتا فنكتب :

$$F(E_n - E_m) = \pi \tau \hbar \delta(E_n - E_m)$$

ويكون احتمال الانتقال في هذه الحالة مساوياً

$$w_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{W} | m \rangle|^2 \tau \delta(E_n - E_m) \quad (36)$$

ولقد وجد أن احتمال الانتقال متناسب مع  $\tau$  لذلك يمكننا تعريف احتمال الانتقال خلال واحدة الزمن بالعلاقة :

$$P_{nm} = \frac{w_{nm}}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{W} | m \rangle|^2 \delta(E_n - E_m) \quad (37)$$

ويصح هذا التعريف عند تحقق المتراجحة المضاعفة

$$\hbar E_m^{-1} \leq \tau \leq T$$

تقع الحالة النهائية ، وأحياناً الحالة الابتدائية ، للجمل الفيزيائية ضمن زمرة الحالات المستمرة أو المستمرة تقريباً . وتقارن القياسات التجريبية مع الاحتمال الكلي للانتقال الى كل الحالات  $n$  التي لها الطاقة نفسها وعناصر المصفوفة  $\langle n | \hat{W} | m \rangle$  نفسها . وللحصول على هذا الاحتمال يجب اجراء جمع العلاقة (37) على كل الحالات  $n$  .

إذا رمزنا لعدد الحالات النهائية ، من أجل نوع معين ضمن مجال طاقة وحيد  $E_n$  ، بـ  $\rho(E_n)$  عندها يعطى الاحتمال الكلي للانتقال خلال واحدة الزمن بالعلاقة

$$P_{nm} = \int \tilde{P}_{nm} \rho(E_n) dE_n = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{W} | m \rangle|^2 \rho(E_n) \quad (38)$$

مع الشرط  $E_m = E_n$  الذي يعبر عن انخفاض الطاقة خلال الانتقال الكواطي،  
تدعى العلاقة (38) بقاعدة فيرمي الذهبية .

### ٥ - التفاعل بين الجمل الكمومية والاشعة الكهرطيسية :

نعتبر عن التفاعل بين جسيم كتلته  $\mu$  معدوم السبن شحنته  $e$  ، مع الحقل  
الكهرطيسي الممثل بالكمون المتجه  $\mathbf{A}$  بالعلاقة الرياضية :

$$\hat{W}(t) = -\frac{e}{\mu c} (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}}) + \frac{e^2}{2\mu c} \hat{\mathbf{A}}^2 \quad (39)$$

حيث  $\hat{\mathbf{A}}$  هو مؤثر الكمون المتجه و  $\hat{\mathbf{P}}$  هو مؤثر الاندفاع للجسيم . فاذا  
استخدمنا نظرية الاضطراب لحساب احتمال الانتقال ستكون على شكل سلسلة  
قوى لمؤثر التفاعل  $\hat{W}(t)$  . فمن أجل التقريب الأول نستطيع الإبقاء على  
الحد الأول فقط من المعادلة (39) أي :

$$\hat{W}(t) = -\frac{e}{\mu c} (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \quad (40)$$

عند اهمال المؤثر (40) يتألف مؤثر هاميلتون للجملية كليهما من مجموع مؤثر  
هاميلتون للذرة  $H_a$  ومؤثر هاميلتون للحقل الكهرطيسي  $H_{ph}$  . ولسوف  
نفترض أننا نعرف حل معادلة شرودينغر للذرة

$$(H_a - E_m) \varphi_m = 0$$

واخترنا هاميلتوني الحقل الكهرطيسي مثلاً وفق التكميم الثاني

$$H_{ph} = \sum_{q,z} (\hat{a}_{qz}^\dagger \hat{a}_{qz} + \frac{1}{2}).$$

وفي هذه الحالة يقابل التابع الذاتي  $|n_{Q\alpha}|$  الفوتون  $n_{Q\alpha}$  في ذلك الحقل ،  
وتتميز حالات الجملة الكاملة - الذرة والحقل دون تفاعل - بالتتابع

$$|n_{Q\alpha}| > \varphi_m \quad (41)$$

فإذا عوضنا في المعادلة (40) مؤثر الحقل

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(r, t) &= \sum_{Q, \alpha} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_Q} \right)^{1/2} e^{i(Q \cdot r)} e_{\alpha}(Q) [\hat{a}_{Q\alpha}(t) + \hat{a}_{-Q, \alpha}^{\dagger}(t)], \\ \hat{P}(r, t) &= i \sum_{Q, \alpha} \left( \frac{\hbar\omega_Q}{8\pi c^2 V} \right)^{1/2} e^{-i(Q \cdot r)} e_{\alpha}(Q) [\hat{a}_{Q\alpha}^{\dagger}(t) - \hat{a}_{-Q, \alpha}(t)]. \end{aligned} \right\}$$

عندها يكون لمؤثر الاضطراب الصيغة :

$$\hat{W}(t) = - \frac{e}{\mu} \sum_{Q, \alpha} \left( \frac{2\pi\hbar}{V\omega_Q} \right)^{1/2} e^{i(Q \cdot r)} (e_{\alpha}(Q) \cdot \hat{P}) [\hat{a}_{Q\alpha}(t) + \hat{a}_{-Q, \alpha}^{\dagger}(t)], \quad (42)$$

حيث  $\hat{a}_{Q, \alpha}^{\dagger}(t) = \hat{a}_{Q, \alpha}^{\dagger} e^{-i\omega_Q t}$  هو تمثيل هايزنبرغ لمؤمر الإفناء للفوتون  $Q_{\alpha}$   
و  $\hat{a}_{Q, \alpha}^{\dagger}(t)$  هو مؤثر الخلق للفوتون نفسه . أي تميز كل حد من مؤثر التفاعل  
بعملية امتصاص (إفناء) أو اصدار (خلق) فوتون للجملة الذرية .

ننظر الى جزء المؤثر (42) المقابل لإصدار الفوتون  $Q_{\alpha}$  ، والذي نكتبه  
بالشكل

$$\hat{W}^+ e^{-i\omega_Q t}$$

حيث

$$\hat{W}^+ = - \frac{e}{\mu} \left( \frac{2\pi\hbar}{V\omega} \right)^{1/2} e^{i(Q \cdot r)} (e_{\alpha}(Q) \cdot \hat{P}) \hat{a}_{Q, \alpha}^{\dagger}; \quad \omega = Qc \quad (43)$$

إذا تميزت الحالة الابتدائية للجملة الكاملة (دون تفاعل متبادل) بالتابع  
 $|init\rangle = |n_{Q\alpha} > \varphi_m$  فإن المؤثر (43) ينقل الجملة الى الحالة

$$|fin\rangle = |n_{Q\alpha} + 1 > \varphi_n$$

فإذا تذكرنا أن مؤثرات الخلق للفوتون تحقق العلاقة :

$$a_{Q\alpha}^{+} |n_{Q\alpha} > = (n_{Q\alpha} + 1)^{1/2} |n_{Q\alpha} + 1 >$$

نجد :

$$\begin{aligned} <fin| \hat{W}^{+} |init > = \\ &= - \frac{e}{\mu} \left( \frac{2\pi\hbar}{V\omega} \right)^{1/2} (n_{Q\alpha} + 1)^{1/2} (e_{\alpha}(Q) \cdot <\varphi_n | e^{-iQ \cdot r} | \varphi_m > \end{aligned} \quad (44)$$

ويكون احتمال اصدار الجملة الذرية لفوتون خلال واحدة الزمن ، استناداً الى  
 العلاقة (38) :

$$P_{nm}^{(+)} = \frac{2\pi}{\hbar} | <fin| \hat{W}^{+} |init > |^2 \rho(E_{fin}^{+}) \quad (45)$$

حيث  $\rho(E_{fin}^{+})$  هي كثافة الحالات النهائية .

نستطيع نشر الأس في عنصر المصفوفة على شكل سلسلة قوى :

$$e^{-i(Q \cdot r)} = 1 - i(Q \cdot r) - \frac{(Q \cdot r)^2}{2!} + \dots \quad (46)$$

فإذا أخذنا الحد الأول فقط أي :

$$<n| e^{-i(Q \cdot r)} \cdot \hat{p} |m > \simeq <n| \hat{p} |m > \quad (47)$$

نحصل على ما يدعى بتقريب الموجات الطويلة ، فإذا انعدم هذا الحد تأخذ الحد الثاني في النشر ( 46 ) .

نستطيع أيضاً استبدال بمؤثر الاندفاع الوارد في العلاقة ( 47 ) مؤثر الموضع من خلال العلاقة :

$$\langle n | \hat{p} | m \rangle = \frac{i\hbar}{\hbar} (E_n - E_m) \langle n | \hat{r} | m \rangle \quad (48)$$

نحصل بالتعويض في العلاقة ( 44 ) على عنصر مصفوفة الانتقال لذي القطبين الكهربائي وفق تقريب الموجات الطويلة أي :

$$\begin{aligned} \langle fin | \hat{w}^+ | i init \rangle = \\ - i\omega_{nm} \left( \frac{2\pi\hbar(n_{Q\alpha} + 1)}{V\omega} \right)^{1/2} (e_{\alpha} (Q \cdot d_{nm})) \end{aligned} \quad (49)$$

حيث يدعى المقدار  $d_{nm} = e \langle n | \hat{r} | m \rangle$  بعزم ذي القطبين الكهربائي في حالة الانتقال  $(m \rightarrow n)$  . وتدعى الأشعة الكهرومغناطيسية المنتجة لعنصر المصفوفة  $d_{nm}$  غير المعدوم بأشعاع ذي القطبين ويرمز لها بالرمز  $E_I$  .

لا بد لحساب العلاقة ( 45 ) التي تحدد احتمال اصدار الكم  $\hbar\omega$  خلال واحدة الزمن من حساب كثافة الحالات  $(E_{fin}^+)_m$  . يحدد عدد الحالات للحقل في الحجم  $V$  من أجل استقطاب فوتوني معين واندفاع قيمته بين  $p$  و  $p + dp$  ، وضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  بالعلاقة :

$$dN_p = \frac{VP^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V\epsilon^3 dp d\Omega}{c^2 (2\pi\hbar)^3}$$

وبما أن  $\frac{dp}{d\epsilon} = \frac{1}{c}$  لذلك تكون كثافة الحالات المقابلة :

$$d\rho(E) = \frac{dN_p}{d\epsilon} \frac{V \omega^2 d\Omega}{(2\pi c)^3 \hbar} \quad (50)$$

بتعويض العلاقة (49) والعلاقة (50) في العلاقة (45) نحصل على احتمال اصدار فوتون استقطابه  $e_\alpha(Q)$  وتواتره  $\omega = \omega_{nm}$  ضمن عنصر الزاوية المجسة  $d\Omega$  وخلال واحدة الزمن أي :

$$dp_{nm}^+ = \frac{\omega^3 (n_{Q\alpha} + 1)}{2\pi c^3 \hbar} |e_\alpha \cdot d_{nm}|^2 d\Omega \quad (51)$$

إن شعاع الاستقطاب  $e_\alpha$  يعامد شعاع انتشار الضوء  $Q$  فإذا رمزنا للزاوية بين  $Q$  واتجاه عزم ثنائي اقطاب الانتقال  $d_{nm}$  بـ  $\theta$  ، فنجد :

$$|e_\alpha \cdot d_{nm}|^2 = |d_{nm}|^2 \sin^2 \theta$$

ونستطيع إعادة كتابة المعادلة (51) لتأخذ الشكل :

$$dp_{nm}^+ = (n_{Q\alpha} + 1) \frac{\omega^3 |d_{nm}|^2}{2\pi c^3 \hbar} \sin^2 \theta d\Omega \quad (51)'$$

إذا ضربنا العلاقة (51)' بطاقة الفوتون  $\hbar\omega$  نحصل على كثافة الاشعاع الصادر خلال واحدة الزمن ضمن عنصر الزاوية المجسة  $d\Omega$  :

$$dJ_{nm} = \frac{(n_{Q\alpha} + 1) \omega^4}{2\pi c^3} |d_{nm}|^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (51)''$$

يتضح من هذه العلاقات أن احتمال اصدار الفوتون غير معدوم حتى ولو لم يتوافر أي فوتون في الحالة الابتدائية ( $n_{Q\alpha} = 0$ ) ويدعى مثل هذا الاصدار بالاصدار التلقائي ، أما الاصدار الذي تتناسب كثافته مع عدد الفوتونات في الحالة الابتدائية  $n_{Q\alpha}$  فيدعى بالاصدار المحثوث وهو أساس عمل الاجهزة الليزرية .

إن كثافة الاصدار التلقائي " (51) ماهي الا متوسط الطاقة الصادرة عن ثنائي أقطاب كهربائي خلال واحدة الزمن وضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  .

$$d(t) = 2 \sqrt{|d_{nm}|^2} \cos \omega t$$

بمكاملة العلاقة (51) مع جعل  $n_{Q\alpha} = 0$  ، على كل اتجاهات الاشعاع نحصل على الاحتمال الكلي للانتقال خلال واحدة الزمن من أجل اصدار فوتون واحد :

$$P_{nm} = \frac{2\omega^3}{3\hbar c} |d_{nm}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|r_{nm}|^2}{c^2} \omega^3 \quad (52)$$

ولكي نأخذ فكرة عن قيمة هذا الاحتمال نضع  $r_{nm} = a$  فنجد :

$$P_{nm} \simeq \frac{e^2 \omega}{\hbar c} \left( \frac{\omega a}{c} \right)^2 \simeq \frac{\omega}{137} \left( \frac{\omega a}{c} \right)^2 \quad (53)$$

ففي حالة التفاعل الكولوني يكون  $a \simeq \frac{e^2}{\hbar \omega}$  ومنه

$$P_{nm} \simeq \frac{\omega}{(137)^3} \quad (53)'$$

فمن أجل الأشعة الضوئية تكون  $\omega \sim 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  ويكون احتمال الانتقال  $\cdot P_{nm} \sim 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  ومن أجل أشعة غاما  $\omega \sim 10^{21} \text{ sec}^{-1}$  يكون  $\sim 10^{-9} \text{ sec}^{-1}$

إذا أعدنا الدراسة السابقة من أجل المؤثر  $\hat{H} = e^{-i\omega t}$  نستطيع تعيين احتمال امتصاص الفوتون خلال انتقال الجملة الذرية من الحالة  $m$  الى الحالة  $n$ ، ونجد أن احتمال امتصاص ضوء استقطابه  $e_\alpha$  خلال واحدة الزمن ضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  هو

$$dp_{nm}^- = \frac{n Q_\alpha \omega^3}{2 \pi c^3 \hbar} |e_\alpha \cdot d_{nm}|^2 d\Omega \quad (54)$$

إذا كان الاشعاع الكهرومغناطيسي في الحالة الابتدائية متوازناً مع اشعاع الجسم الاسود في الدرجة  $T$ ، نستبدل بعدد الفوتونات  $n_{Q_\alpha}$  في العلاقتين (51) و (54) متوسط عدد الفوتونات في تلك الدرجة أي

$$\bar{N} = [e^{\hbar \omega / KT} - 1]^{-1}$$

وفي هذه الحالة يكون اتجاه واستقطاب الأشعة اختياريين ، لذلك يجب اجراء الجمع في العلاقتين (51) و (52) فنحسب احتمال الامتصاص والإصدار المحثوث الكلي خلال واحدة الزمن لفوتون تواتره  $\omega$  فنجد:

$$P_{nm}^+ = \bar{N} \frac{2 \omega}{3 \hbar c^3} |d_{nm}|^2$$

$$P_{nm}^- = \bar{N} \frac{2 \omega}{3 \hbar c^3} |d_{nm}|^2$$

تمرين : وضعت ذرة هيدروجين ، مثارة الى الحالة  $2p$  الاولى ، في فجوة .  
ماهي درجة حرارة هذه الفجوة التي يتساوى فيها احتمال الاصدار التلقائي مع  
احتمال الاصدار المحثوث ؟

تمرين : ماهو احتمال الاصدار التلقائي خلال واحدة الزمن لذرة هيدروجين  
في الحالة المثارة الأولى ؟

★ ★ ★

## - مسائل -

١ - يهتز جسم مشحون بحركة توافقية خطية تحت تأثير حقل كهربائي معطى بالعلاقة

$$E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi} \tau} e^{-(t/\tau)}$$

حيث  $A$  و  $\tau$  ثوابت . فإذا كان الهزاز في حالته الأساسية في اللحظة  $t = -\infty$  ، أوجد احتمال وجود الهزاز في الحالة المثارة الأولى في اللحظة  $t = \infty$  .

٢ - وضعت ذرة هيدروجين ضمن حقل كهربائي معطى بالعلاقة

$$E(t) = \frac{\beta \tau}{2\pi} \frac{1}{\tau^2 + t^2}$$

حيث  $\beta$  و  $\tau$  ثابتان . فإذا كانت ذرة الهيدروجين في حالتها الأساسية في اللحظة  $t = -\infty$  احسب احتمال وجودها في الحالة المثارة  $2P$  في اللحظة  $t = \infty$  .



## الفصل السادس

### نظرية التبعر الكلاسيكية

## نظرية التبعثر Theory of Scattering

### ١ - مقدمة :

عندما توجه حزمة من الجسيمات ، مهما كان نوعها ، نحو مادة ما ، تنحرف جسيمات الحزمة مبتعدة عن مسارها الأصلي نتيجة للتصادم مع جسيمات المادة التي تتجه نحوها . وتتجلى أهمية دراسة عملية التبعثر في تحديد ظواهر كثيرة ، ولو بصورة جزئية مثل ايقاف الالكترونات ضمن الغازات المؤينة ، وتصادم جزئيات الغاز ، وايقاف الجسيمات والاشعة الكونية . كذلك تهي لنا الدراسة التفصيلية لعملية التبعثر ونتائجها معرفة طبيعة الجسيمات المتبعثرة ، ولقد أتى الجزء الأكبر مما نعرفه اليوم في الفيزياء الذرية والنوية من دراسات ترتبط بالتبعثر والقياسات المثلة لعملية التبعثر .

### ٢ - النظرية الكلاسيكية للتبعثر :

استندت الفكرة المبكرة حول الذرة على أنها شيء تام المرونة له شكل كروي تقريباً وبسبب الحركة العشوائية لذرات الغاز تتصادم الذرات مع بعضها وتعاني من انحرافات في اتجاه حركاتها . يرتبط احتمال تصادم الذرات بثلاثة عوامل هي كثافة الجسيمات وحجمها ومتوسط سرعتها . فإذا كان للجسيمات شكل كروي نصف قطره  $a$  ، فسيحدث الاصطدام كلما اقترب مركزا جسيمين الى مسافة  $d = 2a$  . ولحساب احتمال اصطدام جسيم مع آخر خلال فترة قصيرة  $dt$  ، نأخذ اسطوانة سطح قاعدتها  $\pi d^2$  وارتفاعها  $dx = v dt$  وهي المسافة التي يقطعها الجسيم خلال الفترة  $dt$  . إن احتمال التصادم يساوي احتمال تواجد مركز جسيم آخر ضمن هذه الاسطوانة أي

$$dP = \rho \pi d^2 v dt \quad (1)$$

حيث  $\rho$  هي كثافة الجسيمات • ويكون هذا الاحتمال صحيحاً من أجل زمن  $dt$  صغير لدرجة كافية لجعل  $dv$  صغيراً ، إذ أن الانتظار يؤدي الى وجود جسيمات كثيرة ضمن هذه الاسطوانة فتجب بعضها بعضاً وعندها يجب مناقشة امكانية حدوث أكثر من اصطدام واحد ، وهو أمر ندرسه في اطار نظرية التبعثر المتعدد • سنركز الاهتمام على حالات تكون فيها المادة المبعثرة رقيقة جداً بحيث نستطيع اهمال احتمال حدوث التبعثر المتعدد أي سندرس حالة أهداف رقيقة •

### ٣ - تعريف المقطع الفعال :

يمكن التعبير عن احتمال تبعثر الجسيم نتيجة اجتيازه للمسافة  $dx$  من مادة ما بدلالة ما يدعى بالمقطع الفعال للتبعثر • ان كل جسيم من جسيمات الهدف سيظهر للجسيم القادم على شكل هدف مساحته  $\pi d^2$  وهو المقطع الفعال للمجال الذي يمكن خلاله أن يحدث الاصطدام كما يثرى وفق اتجاه حركة الحزمة الواردة ومن هنا أتت عبارة المقطع الفعال للتبعثر • فإذا كنا نتعامل ، كما هو الحال عادة ، مع نموذج يحوي العديد من الجسيمات ، عندها تكون مساحة الهدف الكلي مساوية لمجموع المقاطع الفعالية للجسيمات المنفردة وهو أمر يصح في حالة نموذج رقيق فقط ، حيث يكون احتمال وجود أحد الجسيمات في طريق جسيم آخر ، نادراً • وعند عدم توافر ذلك تكون مساحة الهدف الكلي أصغر من مجموع المقاطع الفعالة للجسيمات • اذا كان الهدف رقيقاً لدرجة كافية أي اذا كان لدينا قطعة من مادة سطحها  $A$  وسماكتها  $dx$  ( تحوي  $\rho A dx$  جسيماً فإنها ستظهر كهدف فعال سطحه  $\rho A \sigma dx$  • وتكون نسبة الجزء المغطى بالجسيمات الى سطح هذه القطعة مساوية  $\frac{\rho A \sigma dx}{A} = \rho \sigma dx$  ويكون احتمال اصطدام الجسيم القادم مساوياً نسبة الجزء المغطى الى السطح الكلي أي

$$dP = \rho \sigma dx \quad (1')$$

• وتعويض  $\sigma = \pi d^2$  في العلاقة (1') نتوصل الى العلاقة (1) نفسها .  
• تعطي العلاقة (1') الارتباط الأساسي بين احتمال التصادم والمقطع الفعال للتبعثر .

#### ٤ - توزيع المسارات الحرة :

نعرّف المسار الحر بأنه المسافة التي يقطعها الجسم بين اصطدامين متتاليين، وتتغير هذه المسافة بصورة عشوائية مرتبطة بمكان وجود الجسيمات المبعثرة ، وقد يأخذ المسار الحر قيمة كبيرة بسبب التوزيع العشوائي للمبعثرات ولكننا سنبحث عن قيمة احصائية للمسار الحر تقترب منها معظم قيم المسارات الحرة وتدعى بالمسار الحر الوسطي . نبدأ بحساب احتمال عدم حدوث اصطدام خلال المسافة  $x$  وهذا يمثل احتمال كون المسار مساوياً  $x$  أو أكبر من  $x$  . يتناقص هذا الاحتمال  $Q(x)$  خلال المسافة  $dx$  بمقدار يساوي احتمال حدوث الاصطدام خلال  $dx$  ، وهذا يساوي احتمال وصول الجسم الى النقطة  $x$  دون اصطدام مضروباً باحتمال حدوث اصطدام عند وجود الجسم ضمن  $dx$  .

ان احتمال حدوث اصطدام عند وجود الجسم ضمن  $dx$  هو  $\rho \sigma dx$  وذلك استناداً الى العلاقة (1') وبالتالي يكون  $dQ = -Q \rho \sigma dx$  وبالتكامل نجد  $Q = e^{-\rho \sigma x}$  مع الملاحظة أن  $Q = 1$  من أجل  $x = 0$

ان احتمال كون المسار الحر مساوياً قيمة ما بين  $x$  و  $x + dx$  يساوي مشتق العلاقة السابقة أي :

$$R(x) = \left| \frac{dQ}{dx} \right| = \rho \sigma e^{-\rho \sigma x}$$

ويكون المسار الحر الوسطي مساوياً :

$$l = \int_0^{\infty} x R(x) dx = \int_0^{\infty} \rho \sigma e^{-\rho \sigma x} x dx = \frac{1}{\rho \sigma} \quad (2)$$

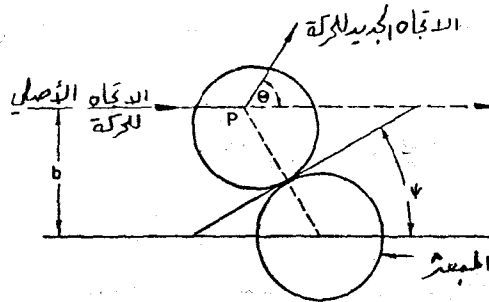
## ٥ - المقطع الفعال كنابع لزواية التبعثر :

سنناقش الآن توزيع زوايا التبعثر الناتج عن الاصطدام مبتدئين بحالة خاصة يكون فيها الجسم المتبعثر أخف بكثير من الجسم المبعثر بحيث يمكن عد الجسم المبعثر ساكناً خلال عملية الاصطدام ، ثم نعود الى الحالة العامة في الفقرة (١٢) .

سنفترض أيضاً أن للجسيمات شكلاً كروياً مرة نصف قطره  $a$  ونعرف الانحراف الزاوي  $\theta$  للجسيم بأنه الزاوية بين اتجاهي الحركة قبل الاصطدام وبعده ، سترتبط زاوية الاصطدام بكيفية الاصطدام المباشر بين الجزيئات ، فهناك مثلاً حالة الاصطدام المباشر (الرأسي) ويؤدي الى زاوية انحراف قريبة من  $\pi$  ، وهناك الاصطدام المماس ويؤدي الى زاوية انحراف صغيرة نسبياً .

يرتبط الانحراف الزاوي  $\theta$  وضوحاً بالمسافة  $b$  ( وهي المسافة بين مركز الجسم المبعثر وخط الاقتراب الأصلي للجسيم المتبعثر ) والتي تدعى بمعامل الاصطدام . انظر الشكل ( ١ ) . فإذا كانت الكرات تامة المرونة ستكون زاوية الانحراف مساوية ضعف الزاوية  $\psi$  بين الاتجاه الأصلي للحركة ومماس الكرتين عند نقطة الالتقاء أي  $\theta = 2\psi$  . وباستخدام الهندسة المستوية يمكننا أن نكتب

$$\cos \psi = \frac{b}{2a} \quad \text{أو} \quad \theta = 2 \cos^{-1} \left( \frac{b}{2a} \right)$$



الشكل (1)

ستتحرف جميع الجسيمات القادمة بمعامل اصطدام  $b$  أصغر من  $2a \cos \Psi$  ،  
 بزاوية أكبر من  $\theta = 2\Psi$  .

إذا عرفنا المقطع الفعال  $S(\theta)$  بأنه المساحة الفعالة التي تؤدي الى انحراف أكبر من  $\theta$  (في حالة نموذج الكرة المرنة) نجد :

$$S(\theta) = \pi b^2 = 4\pi a^2 \cos^2 \Psi = 4\pi a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

يدعى  $S(\theta)$  بالمقطع الفعال الكلي للتبعثر بزاوية تساوي  $\theta$  أو تزيد عليها .  
 ومن الواضح أن جزءاً معيناً من الكرة المبعثرة يكون فعالاً في إنتاج الانحرافات الكبيرة وبالتالي فإن  $S(\theta)$  يتناقص مع ازدياد  $\theta$  .

#### ٦ - المقطع الفعال التفاضلي :

نعرف المقطع الفعال التفاضلي  $q(\theta) d\theta$  بأنه المقطع الفعال الذي يؤدي الى انحرافات تأخذ القيم بين  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  ونحصل عليه باشتقاق  $S(\theta)$  أي :

$$q(\theta) = \left| \frac{dS}{d\theta} \right| \quad (4)$$

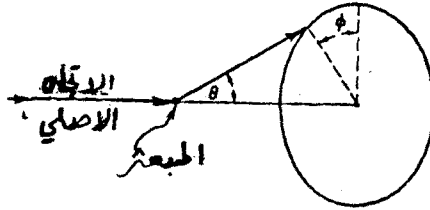
ففي حالة الكرات الصلبة المرنة نجد :

$$q(\theta) = 4\pi a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2\pi a^2 \sin \theta \quad (5)$$

نعرف المقطع الفعال لواحدة الزوايا المجسمة  $\sigma(\theta, \Phi)$  بأنه المساحة الفعالة المؤدية الى انحراف يقع ضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\Phi$  ويساوي

$$\sigma(\theta, \Phi) \sin \theta d\theta d\Phi$$

- لتوضيح الزوايا الموجودة في هذه العلاقة ننظر الى الشكل (2) الزاوية  $\theta$  هي زاوية الانحراف والزاوية  $\phi$  هي زاوية خط الطول المتشكل بحركة الجسم المنحرف نسبة الى اتجاه قياسي .



الشكل (2)

ففي حالة الكرات الصلبة يكون المقطع الفعال  $\sigma(\theta, \phi)$  مستقلا عن  $\phi$  أما اذا كان للجسم شكل غير كروي فسيرتبط احتمال الانحراف بالزاوية  $d\phi$  . إن العلاقة بين  $\sigma(\theta, \phi)$  و  $q(\theta)$  هي بصورة عامة من الشكل :

$$q(\theta) = \sin \theta \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \phi) d\phi \quad (6)$$

وفي حالة عدم ارتباط  $\sigma$  بالزاوية  $\phi$  نجد :

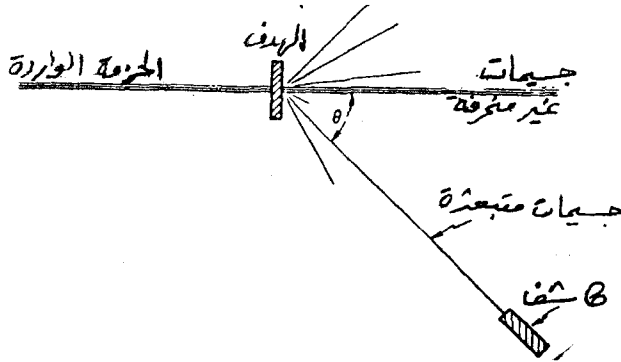
$$q(\theta) = 2\pi \sin \theta \sigma(\theta) \quad (6')$$

فمن أجل الكرات الصلبة نجد :

$$\sigma = a^2 \quad (6'')$$

وهذا يعني تساوي احتمالات التبعثر في الاتجاهات كافة . ويبين الشكل (3) ترتيبات مخبرية لمسألة التبعثر ، وتحصى الجسيمات المتبعثرة بمساعدة

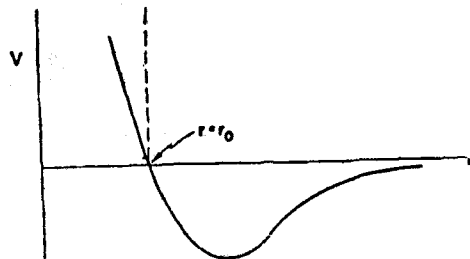
كاشف ، ويكون عدد الجسيمات المتبعثرة الملتقطة بالكاشف في واحدة الزمن مساوياً  $\int \rho \sigma dx d\Omega$  حيث  $\rho$  هو كثافة تيار الجسيمات الواردة و  $d\Omega$  هي الزاوية الجسمة للكاشف من الهدف . فإذا قسنا عدد الجسيمات المتبعثرة نستطيع حساب  $\sigma$  عند معرفة كل من  $\rho$  و  $\rho$  .



الشكل (3)

#### ٧ - النظرية العامة للتبعثر :

لقد عالجتنا حتى الآن مسألة التبعثر مفترضين أن الجسيمات تسلك سلوك الكرات الصلبة المرنة ، ولكننا نعلم عدم صحة هذا الافتراض بصورة عامة . يمكن التعبير عن القوى بين الذرات بمنحني الكمون المبين بالشكل (4) . فالذرات تتجاذب اذا كانت المسافة بينها كبيرة وتدافع في حالة المسافة الصغيرة ، ويوجد



الشكل (4)

قيمة معينة  $r_0$  للمسافة بين ذرتين ، يصعب تقريب الذرات الى مسافة أصغر منها ، ويمكن استخدامها كتعريف للقيمة التقريبية لنصف قطر الذرة الفعال .

فللكرة الصلبة كمون معدوم من أجل  $r > r_0$  وتصبح قيمته لانهائية من أجل  $r \leq r_0$  ، وتقرب بعض الجمل من كونها كرات صلبة أكثر من جمل أخرى ففي ذرات الغازات النبيلة تكون القوة الجاذبة صغيرة جداً بينما تزداد القوة الدافعة بشكل حاد وتتصرف الذرات ككرات صلبة ، بينما لا تظهر القوة الدافعة بصورة حادة في حالة ذرات الصوديوم اذ يؤمن الكمون بين الجسيمات المشحونة  $v = \frac{e^2}{r}$  قوة لينة لدرجة لا يمكن معها استخدام الكرات الصلبة كتقريب جيد .

يجب علينا اذن أن نعمم معالجتنا بشكل نستطيع معه حساب المقاطع الفعالة من أجل أي قانون للقوة متناظر كروياً . إننا نعلم أن مسار الجسيم الخاضع الى قوة مركزية (متناظرة كروياً) يقع دوماً في مستوى واحد كما في الشكل (5) . سنعرّف أولاً معامل الاصطدام  $b$  وهي المسافة بين مركز القوة المبعثرة وخط الاقتراب الأصلي ، سيسلك الجسيم مساراً ما كما في الشكل (5) ، الحالة المرسومة في الشكل من أجل قوة دافعة أما في حالة قوة جاذبة فسينحني المسار نحو الجهة الأخرى ، نرمز لزاوية الانحراف النهائي بـ  $\theta$  ولأقرب مسافة يصلها الجسيم من مركز القوة بـ  $a$  . يتعين موضع الجسيم في أية لحظة بالزاوية القطبية  $\phi$  وشعاع الموضع  $r$  .

في الحالة العامة، وبعد حل معادلات الحركة ، تتبع زاوية الانحراف  $\theta$  معامل الاصطدام  $b$  أي  $\theta = \theta(b)$  أو  $b = b(\theta)$  ويكون المقطع الفعال للتبعثر ضمن زاوية تقع بين  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  مساوياً مساحة الحلقة  $(2\pi b db)$  التي يجب أن تكون الجسيمات ضمنها لتتبعثر ضمن المجال  $(\theta + d\theta , \theta)$  أي :

$$q(\theta) d\theta = 2\pi b \frac{db}{d\theta} d\theta \quad (7)$$

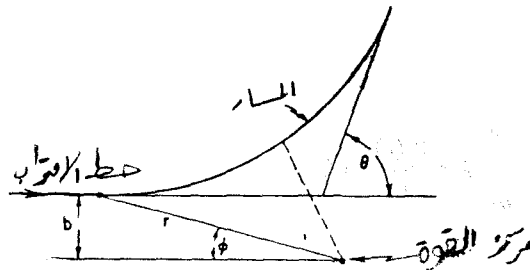
ونحصل على المقطع الفعال الكلي للتبعثر وفق الزاوية  $\theta$  أو أكبر بمكاملة العلاقة (7) من  $b=0$  الى  $b=b(\theta)$  فنجد:

$$S(\theta) = \int_0^{b(\theta)} 2\pi b db = \pi b^2(\theta) \quad (7')$$

وهي مساحة دائرة نصف قطرها  $b(\theta)$  ونحصل على المقطع الفعال الكلي من أجل التبعثر وفق كل الزوايا الممكنة بوضع  $\theta = 0$  في الصيغة (7') فنجد:

$$S(0) = \int_0^{\pi} q(\theta) d\theta = \pi b^2(0) \quad (7'')$$

ولكي نستطيع حساب مختلف المقاطع الفعالة لابدء من حيث المبدأ على الاقل من معرفة مسار الجسيم واستخدام معادلة هذا المسار من أجل ايجاد زاوية الانحراف  $\theta$  كتابع لمعامل الاصطدام  $b$ .



الشكل (5)

#### ٨ - تقرب الانحرافات الصغيرة ( نظرية الاضطراب الكلاسيكية ):

سنطرح الآن طريقة تقريبية للحل من أجل  $b(\theta)$  ، وهي طريقة جيدة عندما

تكون الزاوية  $\theta$  صغيرة • وتنتج الانحرافات الصغيرة عادة من القوى الضعيفة، وتكون القوة ضعيفة عندما يكون الجسم أبعد ما يمكن عن المركز أي عندما يكون معامل الاصطدام (b) كبيراً • سنبدأ بإيجاد صيغة لزاوية الانحراف  $\theta$  فنختار المحور x وفق الاتجاه الأصلي للحركة ونختار المحور y معامداً له، ولنفترض أن p هو الاندفاع الابتدائي وبالطبع هو باتجاه المحور x • سيكتسب الجسم تحت تأثير القوة ، مركبة للاندفاع باتجاه المحور y ولتكن  $P_y$  وتعطى زاوية الانحراف بالعلاقة :  $\sin \theta = \frac{P_y}{p}$

الخطوة التالية هي الحل من أجل  $P_y$ ، فبما أن  $P_y$  معلوم القيمة لحظة البدء فإننا نستطيع ، مستخدمين قانون نيوتن في الحركة ، أن نكتب :

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt$$

فمن أجل قوة متناظرة كروياً لدينا  $F_y = \frac{y}{r} F$  حيث F هي القوة الكلية ومنه

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{F(r)}{r} dt$$

ولتنفيذ هذا التكامل لابد من معرفة كل من y و r كتابعين للزمن t وهذا يعني حل معادلات الحركة • تستند طريقتنا في التقريب الى حقيقة كون زاوية الانحراف صغيرة ، وسيتابع الجسم في مسار خطي له الاتجاه الاصلي نفسه تقريباً ، وبسرعة ثابتة تقريباً • وبما أن الإندفاع المكتسب  $P_y$  صغير فإن

اختلاف النتيجة في حساب  $\theta$  مما لو حسبنا بغياب القوة سيكون من الدرجة الثانية . أي أننا سنفترض أن الجسم سيتابع المسار الذي كان سيأخذه فيما لو كانت القوة معدومة فنجد :

$$y \simeq b, \quad x = vt, \quad r \simeq \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$$

ومنه

$$\theta \simeq \sin \theta = \frac{P y}{P} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b F(\sqrt{b^2 + v^2 t^2}) dt}{P \sqrt{b^2 + v^2 t^2}}$$

من الملائم هنا تغيير المتحولات فنستبدل  $t = b \frac{u}{v}$  ونستخدم  $P = mv$

$$\text{و } E = \frac{mv^2}{2} \text{ فنجد :}$$

$$\theta \simeq \frac{b}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(b \sqrt{1 + u^2})}{\sqrt{1 + u^2}} du \quad (8)$$

ولسوف نطبق هذه النتيجة على أمثلة مختلفة .

### ١ - قوة كولون :

لدينا في هذه الحالة  $F = \frac{z_1 z_2 e^2}{r^2}$  حيث  $z_1 e$  هي شحنة الجسم المتبعثر و

$z_2 e$  هي شحنة الجسم المبعثر . باستخدام العلاقة (8) نجد

$$\theta \simeq \frac{z_1 z_2 e^2}{2 b E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{z_1 z_2 e^2}{E b} \quad (9)$$

تشير العلاقة (9) الى تناسب زاوية الانحراف عكساً مع معامل الاصطدام b وهي نتيجة مهمة. أما المقطع الفعال فيساوي

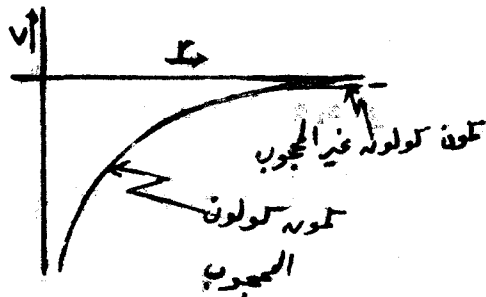
$$q(\theta) = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{2\pi (z_1 z_2 e^2)^2}{E^2 \theta^3} \quad (9')$$

ولهذه النتيجة عدة خصائص هامة :

١ - يتناقص المقطع الفعال ، من أجل زاوية معينة  $\theta$  ، بسرعة كتابع للطاقة ويمكن تعليل هذا الامر بأن الجسم الأسرع يحتاج الى قوة أكبر ، وتأمين هذه الزيادة في القوة عن طريق معامل اصطدام أصغر وبالتالي تناقص سريع لـ  $\theta$  مع E .

٢ - يتناهي المقطع الفعال الى اللانهاية عندما تقترب  $\theta$  من الصفر ، كما يتناهي المقطع الفعال المكامل  $s(\theta)$  الى اللانهاية أيضاً ويرجع ذلك الى المدى الطويل لقوة كولون، فإذا نظرنا الى انحرافات أصغر نستطيع دوماً التوصل اليها بمعاملات أكبر للتصادم وبالتالي مقاطع فعالة أكبر .

٣ - تحجب القوة الكولونية الناتجة عن نوى الذرات بواسطة الالكترونات الذرية عند مسافة عدة أنصاف أقطار ذرية ويعيدو شكل الكمون كما في الشكل (6) .



الشكل (6)

وهي حالة الغازات المؤينة والكتروليت أيضاً ، فالايونات ذات الاشارة المتماثلة تحاط بغمامة من الشحنة تتألف من الايونات ذات الاشارة المخالفة وبالتالي تحجب الكمون الكولوني بعيداً عن هذه الايونات وبصورة عامة يتواجد مثل هذا الحجب دوماً في المسائل التطبيقية ونستخدم الكمون التالي

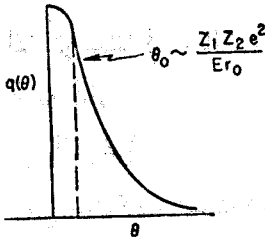
$$V = \frac{ze^2}{r} \exp \left( - \frac{r}{r_0} \right) \quad (10)$$

كتقريب جيد للكمون الكولوني المحجوب اذ يجعل العامل الاسي القوة مهملة عندما يصبح المقدار  $\frac{r}{r_0}$  أكبر بكثير من الواحد .

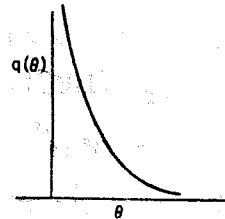
٤ - تقترب الزاوية  $\theta$  من الصفر ، في حالة الكمون الكولوني المحجوب ، بازدياد معامل الاصطدام  $b$  بسرعة أكبر من  $\frac{1}{b}$  في اللحظة التي تأخذ  $b$  قيمة أكبر من نصف قطر الحجب  $r_0$  . ويمكننا اهمال أثر التبعر كله بعد نصف قطر الحجب بقليل وتحسب الزاوية الصغرى التي لا يزداد بعدها المقطع الفعال بجعل  $b = r_0$  في المعادلة (9) فنجد

$$\theta_{\min} = \frac{z_1 z_2 e^2}{E r_0} \quad (11)$$

يبين الشكل (7) المقاطع الفعالة للكمون الكولوني غير المحجوب كتابع لزاوية الانحراف ، كما نجد في الشكل (8) المقاطع الفعالة للكمون الكولوني المحجوب .



الشكل (8)



الشكل (7)

٥ - يجب التذكير أن نظرية الاضطراب تفشل اذا كانت  $\theta$  كبيرة ( $\simeq 1/2$ ) ولسوف نحصل على النتيجة الدقيقة من أجل جميع قيم  $\theta$  في الفقرة (١٠).

ب - قانون القوة :  $\frac{1}{r^3}$

لدينا في هذه الحالة  $F = \frac{k}{r^3}$  ، وبالعودة الى العلاقة (8) نجد :

$$\theta = \frac{k}{2b^2 E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi k}{4b^2 E} \quad (12)$$

أو

$$b^2 = \frac{\pi k}{4E\theta} \quad (12')$$

ويعطى المقطع الفعال التفاضلي بالعلاقة

$$q(\theta) = \pi \left| \frac{d}{d\theta} [b^2(\theta)] \right| = \frac{\pi^2 k}{4E\theta^2} \quad (12'')$$

تمرين : أوجد المقطع الفعال التفاضلي من أجل قانون القوة  $\frac{1}{r^n}$ .

#### ٩ - المقطع الفعال في حالة انتقال الطاقة والاندفاع :

لقد توصلنا في حالات متعددة (العلاقات (9) و (12'')) الى مقاطع فعالة لانتهائية من أجل  $\theta = 0$  وكذلك نتائج لانتهائية عند المكاملة على مجال  $\theta$  . وكما نوهنا في الفقرة (٨) فإن مثل هذه القيم اللانتهائية تأتي من الانحرافات الصغيرة الناتجة من معاملات اصطدام كبيرة ، وتقابل آثاراً فيزيائية صغيرة جداً . إن قوة إيقاف المادة للجسيمات المشحونة ، مثلاً ، ترتبط بمتوسط انتقال الطاقة من

الاتجاه الأصلي للحركة الى اتجاه معامد • يعطى ضياع الطاقة من الاتجاه الأصلي للحركة في عملية التصادم بالعلاقة :

$$\Delta E = \frac{(\Delta P)^2}{2m} = \frac{P^2 \sin^2 \theta}{2m} \simeq \frac{P^2 \theta^2}{2m}$$

ويعطى متوسط الطاقة المنتقلة بالعلاقة :

$$\overline{\Delta E} = \int_0^\pi q(\theta) \Delta E(\theta) d\theta \simeq \frac{P^2}{2m} \int_0^\pi q(\theta) \theta^2 d\theta$$

وكقاعدة يجب عدم تجاوزها ، يكون متوسط الطاقة المنتقلة محدود القيمة دوماً حتى في حالة تنامي المقاطع الفعالة الى اللانهاية • ففي حالة قانون القوة  $F = \frac{k}{r^3}$  مثلاً نجد

$$\overline{\Delta E} \simeq \frac{P^2}{2m} \frac{\pi^2 k}{4E} \int_0^\pi \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^2} = \frac{\pi^3 P^2 k}{8mE} \quad (13)$$

وفي حالة قانون كولون نجد :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta E} &\simeq \frac{P^2}{2m} \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{E^2} \int_{\theta_{\min}}^\pi \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^3} = \\ &= \frac{\pi P^2}{m} \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{E^2} \ln \left( \frac{\pi}{\theta_{\min}} \right) \end{aligned} \quad (13')$$

حيث  $\theta_{\min}$  هي الزاوية الصغرى لتبعثر كولون والمحددة بنصف قطر الحجب •

# ١٠ - الحل الدقيق للتبعثر :

لا بد من أجل الحصول على نظرية تصلح لزوايا التبعثر الكبيرة من الحل التام لمعادلة حركة الجسم • ومن أجل ذلك سننطلق من المعادلتين

$$mr^2 \frac{d\Phi}{dt} = mvb \quad (14) \quad (\text{معادلة انحفاظ الزاوي})$$

$$(14') \quad (\text{معادلة انحفاظ الطاقة})$$

$$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right] + V(r) = \frac{mv^2}{2}$$

افترضنا هنا أن  $V(r) \rightarrow 0$  عندما  $r \rightarrow \infty$  • بتعويض المعادلة (14') في المعادلة (14) نجد :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{v^2 - \frac{b^2 v^2}{r^2} - \frac{2}{m} V(r)}$$

بالنقسيم على (14) نجد :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \pm \frac{vb}{r^2 \sqrt{v^2 - \frac{b^2 v^2}{r^2} - \frac{2}{m} V(r)}}$$

نستطيع الآن التوصل الى الزاوية  $\theta$  بتكامل هذه العلاقة من  $r = \infty$  حتى  $r = a$  ، وهي أقرب مسافة يصلها الجسم من مركز القوة ، ثم الى  $r = \infty$  • وبالنظر الى الشكل (5) نجد أننا اذا بدأنا بـ  $\Phi = 0$  نحصل بعد

التكامل على  $\Delta\Phi = \pi - \theta$  أو  $\theta = \pi - \Delta\Phi$  وبما أن التكامل يجري على الحدود نفسها وقيمها نستطيع بسهولة مضاعفة نتيجة التكامل على  $r$  من القيمة  $a$  الى  $\infty$  ونكتب

$$\Delta\Phi = 2vb \int_a^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{v^2 - \frac{2V(r)}{m} - \frac{b^2 v^2}{r^2}}} \quad (15)$$

بالتعويض من أجل أي قيمة خاصة لـ  $V(r)$  في المعادلة (15) نستطيع من حيث المبدأ حساب  $\theta(b)$  ومنها  $b(\theta)$  وبعدها  $q(\theta)$ .

مثال: تبعر كولون (مقاطع رزفورد)

بوضع  $V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$  في المعادلة (15) نجد:

$$\Delta\Phi = 2vb \int_a^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{v^2 - \frac{2z_1 z_2 e^2}{mr} - \frac{b^2 v^2}{r^2}}}$$

لإنجاز التكامل نغير المتحول  $r = \frac{1}{u}$  ←  $du = \frac{-dr}{r^2}$  فنجد:

$$\Delta\Phi = 2vb \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{du}{\sqrt{v^2 - \frac{2z_1 z_2 e^2}{m} u - b^2 v^2 u^2}}$$

$$= 2 \int_0^{1/a} \frac{du}{\left( \frac{1}{b^2} - \frac{2z_1 z_2 e^2}{mb^2 v^2} u - u^2 \right)^{1/2}}$$

لقد تم تعريف  $a$  بأنه المكان حيث  $\frac{dr}{dt} = 0$  وهو بالتحديد المكان الذي  
ينعدم فيه مخرج التكامل • وبإجراء التكامل نجد :

$$\Delta\Phi = \pi - \theta = 2 \cos^{-1} \frac{z_1 z_2 e^2}{m v^2 b}$$

أو

$$\frac{z_1 z_2 e^2}{m v^2 b} = \sin \frac{\theta}{2}$$

ومنه

$$b = \frac{z_1 z_2 e^2}{m v^2 \sin \theta/2} = \frac{z_1 z_2 e^2}{2 E \sin \theta/2} \quad (16)$$

ويعطى المقطع الفعال التفاضلي بالعلاقة :

$$q(\theta) = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\pi (z_1 z_2 e^2)^2}{4 E^2} \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2}$$

فمن أجل الزوايا الصغيرة نجد :

$$q(\theta) = 2\pi \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{E^2 \theta^3} \quad (16')$$

وهي العلاقة (9) نفسها التي استخرجناها وفق الطريقة التقريبية ويكون  
المقطع الفعال من أجل واحدة الزوايا المجسمة مساوياً

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{q(\theta)}{\sin \theta} = \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{16 E^2 \sin^4 (\theta/2)} \quad (16'')$$

وهي علاقة رزفورد المعروفة •

## ١١ - استخدام المقاطع الفعالة في التحري عن قانون القوة :

لقد افترضنا حتى الآن أن قانون القوة معروف وحاولنا البحث عن المقاطع الفعالة . ولكننا نستطيع مستخدمين النتائج التجريبية للمقاطع الفعالة البحث عن قانون القوة ، ويوجد طرائق متعددة للقيام بذلك وأكثرها شيوعاً هي افتراض شكل بسيط للكمون مثل  $\frac{k e^{-r/r_0}}{r^n}$  ومحاولة البحث عن قيم الثوابت  $k$  و  $r_0$  و  $n$  بحيث تتوافق النتائج المحسوبة مع النتائج التجريبية .

## ١٢ - التحويل من جملة مركز الكتلة الى جملة الاحداثيات المخبرية :

تم استنتاج جميع العلاقات السابقة مفترضين بقاء المبعثر ساكناً خلال الاصطدام ، ولكي ندرس الحالة العامة سننطلق من النتيجة المعروفة في الميكانيك الكلاسيكي وهي أن معادلات الحركة للاحداثيات النسبية للجسمين المتصادمين في جملة الاحداثيات المتحركة مع مركز الكتلة ، مماثلة تماماً لمعادلات الحركة لجسيم وحيد خاضع الى تأثير الكمون  $V(\xi)$  نفسه ويمتلك الكتلة المختزلة  $\mu = \frac{m_1 * m_2}{m_1 + m_2}$  والطاقة الحركية المختزلة  $E = \frac{\mu}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2$  . وتبقى هذه النتيجة صالحة في الميكانيك الكمومي أيضاً . يمكننا اذن حل معادلة التبعثر تماماً بالأسلوب نفسه الذي اتبعناه مع الالتباه لتعريف الثوابت بصورة صحيحة .

ففي جملة احداثيات مركز الكتلة يتجه كل جسيم نحو مركز الكتلة بشكل يكون فيه مجموع الاندفاع معدوماً أي  $m_1 v_1 = m_2 v_2$  ، ويتبعثر الجسيمن باتجاهين متعاكسين لكي يبقى مجموع الاندفاع معدوماً بعد الاصطدام . والمسألة

هي تحويل المقطع الفعال  $q(\theta')$  المحسوب في جملة احداثيات مركز الكتلة الى جملة احداثيات المختبر التي تتم الملاحظات التجريبية فيها دوماً .

لابد أولاً من تحويل الزوايا  $\theta'$  المقاسة في جملة احداثيات مركز الكتلة الى الجملة المخبرية . يتم عادة في عملية الاصطدام توجيه الجسيمات نحو الهدف الثابت في الجملة المخبرية ، سنرمز لكتلة الجسيم الثابت بالرمز  $m_1$  وكتلة الجسيم المتحرك بالرمز  $m_2$  ولنفترض أن الجسيمات المتحركة تسير بسرعة ابتدائية قدرها  $v$  وفق الاتجاه الموجب للمحور  $x$  . تكون لسرعة مركز الكتلة الاتجاه نفسه وتساوي  $\vec{v} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$  . وتكون السرعة النسبية في جملة مركز الكتلة  $\left| \frac{d\xi}{dt} \right|$  مساوية  $v$  ولكل جسيم سرعة تتناسب عكساً مع كتلته . فلدينا قبل الاصطدام

$$(u_{10})_x = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2} ; (u_{10})_y = 0 \quad \text{بالنسبة للجسيم الأول}$$

وكذلك

$$(u_{20})_x = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} ; (u_{20})_y = 0 \quad \text{بالنسبة للجسيم الثاني}$$

أما بعد الاصطدام المسبب للتبعثر وفق زاوية قدرها  $\theta'$  في جملة مركز الكتلة فيكون لدينا

$$(u_1)_x = -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v \cos \theta'$$

$$(u_1)_y = -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v \sin \theta'$$

$$(u_2)_x = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v \cos \theta'$$

$$(u_2)_y = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v \sin \theta'$$

وتبقى السرعة  $v$  دون تغير بعد الاصطدام .  
للحصول على السرعة في الجملة المخبرية بعد التبعر نجعل سرعة مركز الكتلة الى المركبة وفق المحور  $x$  للسرعة أعلاه فنجد :

$$(u_1)_x = \frac{(m_2 - m_1 \cos \theta')}{(m_1 + m_2)} v \quad , \quad (u_1)_y = - \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v \sin \theta'$$

$$(u_2)_x = \frac{(m_2 + m_1 \cos \theta')}{(m_1 + m_2)} v \quad , \quad (u_2)_y = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v \sin \theta'$$

وتعطى زوايا الحركة في الجملة المخبرية بالعلاقات :

$$\tan \theta_1 = \frac{(u_1)_y}{(u_1)_x} = \frac{- \sin \theta'}{1 - \cos \theta'} = - \cotg \left( \frac{\theta'}{2} \right) \quad (17)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{(u_2)_y}{(u_2)_x} = \frac{m_1 \sin \theta'}{m_2 + m_1 \cos \theta'} \quad (18)$$

تحدد هاتان العلاقاتان بشكل وحيد الزاويتين اللتين ينطلق بهما الجسيمان كتابعين لزاوية التبعر في جملة مركز الكتلة . وللحصول على المقطع الفعال في جملة المختبر نستخدم حقيقة تناسب  $q(\theta') d\theta'$  مع عدد الجسيمات المتبعثرة ضمن زاوية محددة بـ  $\theta'$  و  $\theta' + d\theta'$  . بينما يمثل  $q(\theta) d\theta$  العدد المتبعثر ضمن زاوية محددة بـ  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  ، فإذا اخترنا  $\theta$  بحيث ترتبط بـ  $\theta'$  بعلاقة تؤمن تساوي العدد المتبعثر في كل من  $d\theta$  و  $d\theta'$  أي أن

$$q(\theta) d\theta = q(\theta') d\theta'$$

أو

$$q(\theta) = q(\theta') \frac{d\theta'}{d\theta}$$

فمن أجل الجسيم المتبعثر تعطى  $\theta$  بالعلاقة (18) وباشتقاق هذه العلاقة نجد :

$$\sec^2 \theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta'} = m_1 \frac{(m_1 + m_2 \cos \theta')}{(m_2 + m_1 \cos \theta')^2}$$

وبالتالي يكون

$$q(\theta) = q(\theta') \frac{\sec^2 \theta (m_2 + m_1 \cos \theta')^2}{m_1 (m_1 + m_2 \cos \theta')} \quad (19)$$

وللحصول على المقطع الفعال كتابع لـ  $\theta$  لابد من التخلص من  $\theta'$  باستخدام العلاقة (18) .

### ١٣ - مناقشة النتائج :

فمن أجل الحالة  $m_2 < m_1$  وفيها يكون الجسيم الوارد أخف من الهدف ، تصبح العلاقة (18) في حالة الزوايا الصغيرة من الشكل :

$$\theta \cong \frac{m_1}{m_1 + m_2} \theta' \quad (20)$$

وتكون العلاقة بين  $\theta$  و  $\theta'$  معقدة في حالة الزوايا الكبيرة . ونحصل مثلاً على  $\theta = \pi/2$  عندما تكون  $\cos \theta' = -m_2/m_1$  وهذا يحدث دائماً من أجل  $\theta' > \pi/2$  . وتكون أكبر قيمة لزاوية التبعثر مساوية  $\pi$  .

أما في الحالة  $m_2 > m_1$  فتكون القيمة العظمى للزاوية  $\theta$  أقل من  $\pi/2$  وتبقى العلاقة (20) صالحة من أجل الزوايا الصغيرة .

وفي حالة تساوي الكتلتين  $m_1 = m_2$  نحصل على العلاقة  $\theta = \theta'/2$  وتكون القيمة العظمى لـ  $\theta$  هي  $\pi/2$  .

ونقيس أحياناً زاوية تبعثر الهدف  $\theta_1$  ونجد باستخدام العلاقة (17) أنها تساوي

$$\theta_1 = - \left( \frac{\pi}{2} - \theta'/2 \right)$$



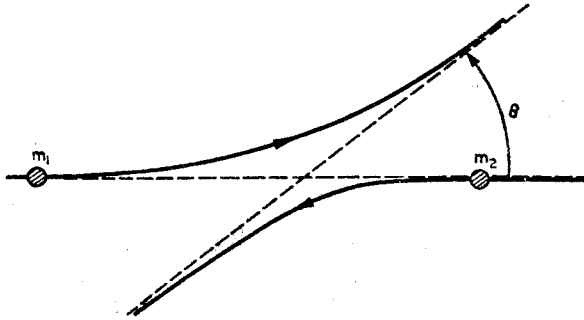
## الفصل السابع

# النظرية الكمومية للتبعثر

## النظرية الكمومية للتبعثر

### ١ - التبعثر المرن لجسيمات معدومة السبين :

تطلق عبارة التبعثر المرن على عملية التبعثر التي لا تتغير خلالها الحالات الداخلية والبنياز للجسيمات المتصادمة . سوف ندرس هذه المسألة مستخدمين جملة الاحداثيات المرتبطة بمركز الكتلة ، تكون المرحلة الأولى في عملية التبعثر على شكل حركة للجسمين المتصادمين نحو بعضهما ، قادمين من مسافة بعيدة كما في الشكل (١) .



الشكل ( ١ ) التبعثر في جملة مركز الكتلة ؛  $\theta$  : هي زاوية التبعثر

عندما يقترب كل منهما من الآخر ، يغير التفاعل بين الجسمين حركتهما ويتعد كل منهما عن الآخر وفق اتجاه مختلف عن الاتجاه الاصلي ، وتكون المرحلة النهائية للتبعثر على شكل حركة لجسمين يتعدان عن بعضهما . يفضل في غالب الأحيان رد مسألة التبعثر هذه الى مسألة مستقرة عوضاً عن الوصف اللحظي للحركة ، ويتم ذلك بافتراض وجود تيار مستمر من الجسيمات ، قادم من اللانهاية ، ويعاني تغيرات

بسبب التفاعل مع مركز التبعثر ، ويتحول الى تيار من الجسيمات المتبعثرة وتتحدد المسألة في دراسة تيار الجسيمات المتبعثرة ، بعيداً عن مركز التبعثر ، كنابع لتيار الجسيمات القادمة ضمن حقل قوة معين .

تتحرك الجسيمات المتبعثرة كجسيمات حرة عندما تكون بعيدة عن مركز التبعثر وتكون طاقة حركاتها النسبية موجبة دوماً وغير مكممة . أي أننا نتعامل مع طيف مستمر عندما ندرس مسألة التبعثر . وهكذا فإن مسألة التبعثر لجسيم كتلته  $\mu$  وطاقته النسبية موجبة  $E$  في حقل الكمون  $V(r)$  ، في الصيغ المستقرة تؤول الى حل لمعادلة شرودينغر .

$$(\nabla^2 + K^2) \Psi(r) = \frac{2\mu \hat{V}(r)}{\hbar^2} \Psi(r) \quad (1)$$

حيث :

$$K^2 = 2\mu E/\hbar^2 \quad (2)$$

سنفترض أن  $V(r)$  غير معدوم ضمن مجال محدد من الفراغ  $|r| \leq d$  وندعو هذا الجزء من الفراغ بمجال القوة او بمجال التبعثر . تتحرك الجسيمات خارج مجال التبعثر كأجسام حرة وتتعين حالتها بالموجة المستوية

$$\varphi_a(r) = \exp i(k_a \cdot r) ; K_a^2 = K^2 \quad (3)$$

محقة المعادلة (1) بعد وضع  $V(r)$  مساوياً للصفر فيها ( بدون طرف ثان ) . يرتبط الشعاع الموجي  $k_a$  باندفاع الحركة النسبية  $p$  وفق العلاقة البسيطة  $p = \hbar k_a$  وينظم التابع  $\varphi_a(r)$  بجعل كثافة التدفق للجسيمات مساوية عددياً لسرعة الحركة النسبية

$$\mathbf{J}_a = \frac{\hbar}{2\mu i} (\varphi^* \vec{\nabla} \varphi_a - \varphi_a \vec{\nabla} \varphi_a^*) = \frac{\hbar \mathbf{k}_a}{\mu} \quad (4)$$

إذا كان  $\mathbf{J}_a$  ممثلاً تدفق الجسيمات القادمة ذات الحالة المعينة بالمعادلة (3) فإن هذه الجسيمات ستتبعثر بسبب التفاعل مع حقل الكمون ، وتحدد المسألة بالبحث عن حلول ( للمعادلة (1) ) يمكن كتابتها كتراكب للموجة المستوية (3) والامواج المتبعثرة الآتية من مجال التبعثر . نستطيع بسهولة الحصول على مثل هذا الحل باستخدام تابع غرين للمؤثر الموجود في الطرف الايسر من المعادلة (1) ، وهو بالتحديد مؤثر الحركة لجسيم حر .

ان تابع غرين للجسيم الحر هو  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  ، وهو يحقق المعادلة (1) في حالة المنبع النقطي أي

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5)$$

فإذا عرفنا حل المعادلة (5) نستطيع دوماً كتابة الحل العام للمعادلة

$$(\nabla^2 + k^2) \Phi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \quad (6)$$

بالشكل

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') A(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (6')$$

حيث  $\varphi(\mathbf{r})$  هو حل للمعادلة (6) بدون طرف ثان . ان حل المعادلة (5) الممثل للامواج المتبعثرة يأخذ الشكل :

$$G_{(+)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = - \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7)$$

ونستطيع كتابة حل المعادلة (1) على الشكل :

$$\Psi_a(\mathbf{r}) = \varphi_a(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \Psi_a(\mathbf{r}') d_3\mathbf{r}' \quad (8)$$

وهي معادلة تكاملية تعطي التابع الموجي الكامل  $\Psi_a$  لمسألة التبعثر .

ففي حالة المسافات البعيدة  $r \gg d$  نستطيع أن نكتب

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx kr - (\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}')$$

حيث  $k_b = \frac{kr}{r}$  ويأخذ التابع  $\Psi_a(\mathbf{r})$  الشكل التقاربي

$$\Psi_a(\mathbf{r}) = \varphi_a(\mathbf{r}) + A_{ba} \frac{e^{ikr}}{r} ; \quad r \gg d \quad (9)$$

حيث

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}')} V(\mathbf{r}') \Psi_a(\mathbf{r}') d_3\mathbf{r}' \quad (10)$$

فإذا تذكرنا أن  $\varphi_b = \exp(i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r})$  هي الموجة المستوية المثلثة لحركة جسيم

حر اندفاعه  $\mathbf{p}_b = \hbar \mathbf{k}_b$  نستطيع كتابة المعادلة (10) بالشكل :

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | \hat{V} | \Psi_a \rangle \quad (11)$$

ويدعى التابع  $A_{ba}$  سعة التبعثر ويتناسب مع الكتلة المختزلة  $\mu$  ، كما

يرتبط بطاقة الحركة النسبية وبالزاوية بين الشعاعين  $\mathbf{k}_b$  و  $\mathbf{k}_a$  وبكمون التبعثر .

ويتضح من المعادلة (9) أنه من أجل المسافة البعيدة عن مركز التبعثر . يحدد

التابع  $\Psi_{sc} = A_{ba} \frac{e^{ikr}}{r}$  سعة التبعثر بشكل كامل .

يعبر عن التبعر عادة بالمقطع الفعال التفاضلي  $d\sigma(\theta, \varphi)$  ويمثل النسبة بين عدد الجسيمات المتبعثرة خلال واحدة الزمن ضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  الى كثافة تدفق الجسيمات الواردة • ففي ثانية واحدة يعبر عدد من الجسيمات قدره  $j_r r^2 d\Omega$  العنصر السطحي  $r^2 d\Omega$  حيث تعطى كثافة التدفق وفق اتجاه شعاع الموضع بالعلاقة :

$$j_r = \frac{\hbar}{2\mu i} \left[ \Psi_{sc}^* \frac{\partial \Psi_{sc}}{\partial r} - \Psi_{sc} \frac{\partial \Psi_{sc}^*}{\partial r} \right] = \frac{\hbar k}{\mu r} |A_{ba}(\theta, \varphi)|^2$$

وذلك باستخدام العلاقة (4) • وبناء عليه تعطى العلاقة بين المقطع التفاضلي الفعال للتبعثر وبين سعة التبعر بالصيغة

$$d\sigma = \frac{j_r r^2 d\Omega}{|j_a|} = \frac{k}{k_a} |A_{ba}|^2 d\Omega \quad (12)$$

ففي حالة التبعر المرن لدينا  $k = k_a$  •

أي أن المقطع الفعال التفاضلي يتحدد بصورة وحيدة بسعة التبعر  $A_{ba}$  •

ولحساب سعة التبعر من المعادلة (11) يجب معرفة حل المعادلة التكاملية (8) فإذا نظرنا الى كمون التأثير المتبادل  $V(r)$  كإضطراب صغير ، نستطيع حل المعادلة (8) مستخدمين طريقة التقريب المتتالي فنجد :

$$\Psi_a(r) = \varphi_a(r) - \frac{\hbar}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \varphi_a(r') d_3 r' + \dots \quad (13)$$

بتعويض (13) في المعادلة (11) نجد النشر السلسلي لسعة التبعر

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle + \\ + \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int \varphi_b^*(\mathbf{r}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}') \varphi_a(\mathbf{r}') d_3\mathbf{r} d_3\mathbf{r}' + \dots$$

إذا تقاربت هذه السلسلة وأبقينا  $N$  حداً منها نحصل على مايلسمى بتقريب بورن من المرتبة الأولى الشكل

$$A_{ba}^{(B)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle \quad (14)$$

بتعويض العلاقة (14) في العلاقة (12) نحصل على المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر المرن ضمن تقريب بورن من المرتبة الأولى

$$d\sigma^{(B)} = \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 d\Omega \quad (14')$$

أي يجب تبديل  $\varphi_a$  في المعادلة (11) بالموجة الواردة  $\varphi_a$  عند حساب سعة التبعثر في تقريب بورن من المرتبة الأولى.

لندرس الآن حدود استخدام هذا التقريب. يتضح من المعادلة (13) أن تبديل  $\varphi_a$  بـ  $\Psi_a$  في المعادلة (11) يصح عند تحقق المتراجحة

$$|\varphi_a(\mathbf{r})| \gg \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \varphi_a(\mathbf{r}') d_3\mathbf{r}' \right|$$

يكون  $V(\mathbf{r})$  كبيراً ضمن مجال التبعثر ويأخذ قيمته العظمى من أجل

$r = 0$  فإذا وضعنا  $\varphi_a(r)$  في المتراجحة السابقة وعوضنا عن  $r = 0$  بصيغتها فنحصل على الشرط العام لتطبيق تقريب بورن وهو

$$\left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{V(r)}{r} \exp i [kr + (\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r})] d_3r \right| \ll 1 \quad (15)$$

فمن أجل قيم صغيرة لطاقة الحركة النسبية ( $kd \ll 1$ ) نستطيع استبدال الواحد بالتابع الأسّي في العلاقة (15) فتصبح من الشكل

$$2\mu d^2 \bar{V} \ll \hbar^2 \quad (15')$$

$$\bar{V} = \frac{1}{4\pi d^2} \left| \int \frac{V(r)}{r} d_3r \right| \quad \text{حيث}$$

واستناداً الى علاقة الشك ، فإن المقدار  $\frac{\hbar^2}{2\mu d}$  يميز الطاقة الحركية للجسيم

ضمن مجال وحيد البعد طوله  $d$  ، وبالتالي فإن المتراجحة تشير الى ضرورة كون الطاقة الحركية للجسيم أكبر بكثير من الطاقة الكامنة . إذا كانت الطاقة الكامنة متناظرة كروياً نستطيع اجراء المكاملة في العلاقة (15) على المتحولات الزاوية . لذلك نختار المحور  $Z$  باتجاه  $\mathbf{K}_a$  ، كما أن  $K = |\mathbf{K}_a|$  ، ونكامل فتوصل الى الشرط اللازم لتطبيق تقريب بورن بالنسبة لكون متناظر كروياً أي

$$\mu \left| \int_0^\infty V(r) [e^{2ikr} - 1] dr \right| \ll k\hbar^2 \quad (16)$$

وفي حالة قيم كبيرة لطاقة الحركة النسبية ( $kd \gg 1$ ) يتلاشى إسهام الحد الأسّي ويصبح الشرط (16) من الشكل

$$\mu \bar{V} d^2 \ll k\hbar^2 d$$

$$\tilde{V} = d^{-1} \int_0^{\infty} V(r) dr \quad \text{حيث}$$

وفي حالة القيم الصغيرة لطاقة الحركة النسبية ( $kd \ll 1$ ) نستطيع نشر الحد الأسّي في العلاقة (16) • ويأبىء الحدين الأولين في ذلك النشر تتوصل إلى العلاقة  $2\mu d^2 \bar{V} \ll \hbar^2$  نفسها التي سبق ذكرها •

لننظر إلى صلاحية استخدام تقريب بورن من أجل بعض أنواع الطاقة الكامنة:

$$V(r) = V_0 \exp(-r/r_0) : \text{أ- الكمون الأسّي}$$

لدينا في هذه الحالة :

$$\int_0^{\infty} V(r) [e^{2ikr} - 1] dr = - \frac{2V_0 i K r_0^2}{2iK r_0 - 1}$$

ويصبح الشرط (16) من الشكل :

$$2\mu V_0 r_0^2 \ll \hbar^2 \sqrt{1 + 4K^2 r_0^2}$$

فإذا كان  $K r_0 \ll 1$  تأخذ المتراجحة الشكل  $2\mu V_0 r_0^2 \ll \hbar^2$

أما إذا كان  $K r_0 \gg 1$  فنجد  $\mu V_0 r_0 \ll K \hbar^2$

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \exp(-r/r_0) : \text{ب- الكمون الكولوني المحجوب}$$

$$a = \frac{1}{r_0} \quad \text{ليكن}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ar} [e^{2ikr} - 1] \frac{dr}{r} \quad \text{لحساب التكامل}$$

نشتقه بالنسبة للمعامل  $a$  فنجد

$$\frac{\partial I}{\partial a} = - \int_0^{\infty} e^{-ar} [e^{2ikr} - 1] dr = \frac{1}{a} - \frac{1}{a - 2ik}$$

نكامل بالنسبة لـ  $a$  فنجد :

$$I = \ln a - \ln(a - 2ik) + c$$

إن  $I = 0$  عندما  $a \rightarrow \infty$  أي أن  $c = 0$  ومنه :

$$I = -\ln(1 - 2ikr_0) = -\ln \sqrt{1 + 4k^2 r_0^2} + i\Phi$$

حيث  $\Phi = 2kr_0$  ويصبح الشرط (16) من الشكل :

$$\mu z_1 z_2 e^2 \left[ (\ln \sqrt{1 + 4k^2 r_0^2} + \Phi^2)^{1/2} \right] \ll k\hbar^2$$

لا تتجاوز قيمة  $\Phi$  المقدار  $\pi/2$  ، كما تتغير قيمة الحد اللوغاريتمي تغيراً طفيفاً مع تغير نصف قطر الحجب  $r_0$  ، وبالتالي نستطيع كتابة الشرط (16) لهذه الحالة بالشكل :

$$z_1 z_2 e^2 \ll \hbar v \quad (17)$$

حيث  $v = \frac{\hbar k}{\mu}$  هي السرعة النسبية للجسمين المتصادمين

ج - البئر الكموني المربع :  $V(r) = -V_0$  من أجل  $r \leq d$  و  $V(r) = 0$

من القيم الأخرى لـ  $r$  تأخذ المتراجحة (16) في هذه الحالة الشكل

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{k \hbar^2} \left| \int_0^d V_0 [e^{2 i k r} - 1] dr \right| = \\
& = \frac{\mu V_0}{k \hbar^2} \left\{ \sin^2 kd + kd [kd - \sin 2 kd] \right\}^{1/2} \\
& \simeq \frac{\mu V_0}{k \hbar^2} \ll 1
\end{aligned}$$

وبما أن  $2E = \frac{k^2 \hbar^2}{\mu}$  حيث  $E$  هي طاقة الحركة النسبية ، فإننا نكتب هذه المتراجعة بالشكل

$$V_0 \ll 2E \quad (18)$$

من المعروف في الفيزياء النووية أننا نستطيع وصف التبعثر المرن للنترونات من قبل نوى الذرات باستخدام بئر كموني شدته  $V_0 \cong 50 \text{ MeV}$  ومجال تأثيره  $d = 1.3 \times A^{1/3} \text{ fm}$  حيث  $A$  هو العدد الكتلي للنواة . أي أننا نستطيع استخدام تقريب بورن لدراسة تبعثر النترونات من قبل نوى العناصر إذا حققت طاقة الحركة النسبية المتراجعة .

$$E \gg 25 \text{ MeV} \quad (19)$$

وتكون سعة التبعثر في هذه الحالة  $\psi_a \rightarrow \varphi_a = e^{i \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}}$  استناداً إلى العلاقة (10) من الشكل

$$A_{ba}^{(B)}(\mathbf{q}) = - \frac{\mu}{2 \pi \hbar^2} \int e^{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d_3 \mathbf{r} \quad (20)$$

حيث  $\hbar \mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)$  هو الاندفاع المنتقل في عملية التبعثر .

تسمح العلاقة (20) بالتفسير البسيط التالي : تسهم كل وحدة حجم في سعة التبعر بالمقدار  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\mu/2\pi\hbar^2)$   $V(\mathbf{r})$  ويحدد العامل  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  الانزياح الطوري للموجة المتبعثرة بواسطة عنصر الحجم عند  $\mathbf{r}$  بالنسبة للموجة المتبعثرة بواسطة عنصر الحجم عند  $\mathbf{r} = 0$  . فإذا كان  $V(\mathbf{r})$  الإشارة نفسها خلال التبعر الجبهي ( $\mathbf{q} = 0$ ) فكل العناصر الحجمية تسهم محافظة على الطور نفسه وتأخذ سعة التبعر قيمتها العظمى

$$A_{ba}^{(B)}(0) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}) d_3\mathbf{r}$$

وتكون اسهامات العناصر الحجمية المختلفة وفق الاتجاهات الاخرى مختلفة في الطور . ويمكن أخذ أثر تداخل الامواج المتبعثرة من قبل العناصر الحجمية بعين الاعتبار بحساب النسبة  $F_q = \frac{A_{ba}^{(B)}(\mathbf{q})}{A_{ab}^{(B)}(0)}$  والتي تدعى عادة بعامل الشكل

• ( Form factor )

## ٢ - نظرية التبعر المرن وفق تقريب بورن :

يمكن معالجة تبعر الجسيمات عند اصطدامها كاتقالات كمومية ، ضمن حالات الطيف المستمر ، من حالة ابتدائية تقابل حركة حرة اندفاعها  $p_a = \hbar k_a$  الى حالة نهائية اندفاعها  $p_b = \hbar k_b$  ، تحت تأثير مؤثر اضطراب  $\hat{V}(\mathbf{r})$  يحدد الطاقة المتبادلة بين الجسيمين المتصادمين . سنبرهن أن احتمال مثل هذا الانتقال محسوباً باستخدام نظرية الاضطراب من المرتبة الاولى ماهو إلا تقريب بورن من المرتبة الاولى في نظرية التبعر .

إذا مثلنا الحالة الابتدائية للموجة المستوية بالعلاقة :

$$\varphi_a = e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r})} \quad (21)$$

منظمة على شكل جسيم واحد في واحدة الحجم • وكذلك الامر بالنسبة للحالة النهائية •

$$\varphi_b = e^{i(k_b \cdot r)} \quad (22)$$

عندها نحصل على احتمال الانتقال من الحالة  $\varphi_a$  الى الحالة  $\varphi_b$  حسب نظرية الاضطراب في التقريب من المرتبة الاولى

$$dp_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 d\rho \quad (23)$$

حيث

$$d\rho = \frac{\mu^2 v_b^2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad (24)$$

هو عدد الحالات النهائية ضمن واحدة الحجم تكون فيها الاندفاعات موجهة ضمن الزاوية المجسمة  $d\Omega$  و  $v_b$  هي السرعة النسبية للجسيم في الحالة النهائية •

إذا قسمنا احتمال الانتقال (23) على كثافة التدفق للجسيمات الواردة والتي تساوي القيمة العددية للسرعة  $v_b$  • ثم استخدمنا العلاقة (24) نحصل على المقطع الفعال التفاضلي ضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  •

$$d\sigma = \frac{dp_{ba}}{v_a} = \frac{\mu^2 v_b^2}{(2\pi\hbar)^2 v_a} |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 d\Omega \quad (25)$$

وفي حالة التبعثر المرن لدينا  $v_a = v_b$  وبذلك ترد المعادلة (25) الى المعادلة

(14) التي حصلنا عليها باستخدام تقريب بورن من المرتبة الأولى •

عند استخدام الصيغ الصريحة للتوابع الموجية نستطيع كتابة مصفوفة الانتقال بالشكل :

$$\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle = \int V(r) e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r})} d_3 r \equiv V(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a) \quad (26)$$

أي أن عنصر المصفوفة الذي يحدد المقطع الفعال ماهو إلا تحويل فورييه للكمون المقابل للاندفاع المنتقل خلال التبعثر • وفي حالة التبعثر المرن لدينا

$$|\mathbf{k}_b| = |\mathbf{k}_a| = k ; \quad |\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a| = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (27)$$

حيث  $\theta$  هي زاوية التبعثر • أي أن احتمال التبعثر وفق زاوية قدرها  $\theta$  مرتبط باحتمال انتقال اندفاع قدره  $\Delta p = 2\hbar k \sin \theta/2$  • فإذا كان الكمون متناظراً كروياً ، نستطيع مكاملة العلاقة (26) بالنسبة للمتحويلات الزاوية فنجد:

$$V(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a) = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|} \int_0^\infty V(r) r \sin(|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a| r) dr \quad (28)$$

وفي هذه الحالة يرتبط تحويل فورييه للكمون بالقيمة المطلقة للاندفاع المنتقل ويصبح المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر المرن من الشكل

$$d\sigma = \frac{\mu^2}{(2\pi\hbar)^2} |V(2k \sin \frac{\theta}{2})|^2 d\Omega \quad (28')$$

إذا كان  $V(r)$  زوجياً تكتب العلاقة (28) بالشكل :

$$V(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a) = \frac{2\pi}{i|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|} \int_{-\infty}^{\infty} V(r) e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a)} r dr \quad (28'')$$

سنقوم الآن بحساب المقاطع الفعالة التفاضلية للتبعثر المرن في حالة توابع كمون بسيطة .

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \exp(-r/r_0) \quad : \text{ا- حقل كولون المحجوب}$$

في هذه الحالة لدينا :

$$V(|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|) = \frac{4\pi z_1 z_2 e^2}{|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|^2 + \frac{1}{r_0^2}}$$

باستخدام العلاقة (27) وتعويضها بالعلاقة (28) نجد :

$$d\sigma = \left[ \frac{2\mu z_1 z_2 e^2}{4p^2 \sin^2(\theta/2) + \hbar^2/r_0^2} \right]^2 d\Omega \quad (29)$$

نجعل  $r_0 \rightarrow \infty$  يتلاشى أثر الحجب وتأخذ المعادلة (29) الشكل

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{\mu z_1 z_2 e^2}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \right]^2 = \left[ \frac{z_1 z_2 e^2}{2\mu v^2 \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

وهي علاقة رزفورد المعروفة حيث  $v$  هي السرعة النسبية .

بمقارنة العلاقة (29) مع العلاقة (28) نجد أن حجب الحقل الكولوني لا يؤثر على التبعثر المرن من أجل الزوايا التي تحقق المتراجحة  $\theta > \theta_0$  وتحسب  $\theta_0$  من العلاقة  $2pr_0 \sin \theta/2 = \hbar$  ، تتغير مقاطع التبعثر ببطء في الحالة  $\theta < \theta_0$  لتأخذ قيمة محدودة من أجل  $\theta = 0$  .

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/2r_0^2} \quad \text{ب - الكمون الفاوصي :}$$

هو تابع زوجي ويعطي

$$V(|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|) = (2\pi)^{3/2} r_0^3 V_0 \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a)^2 r_0^2\right]$$

وبناء عليه يكون المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر مساوياً

$$d\sigma = \frac{2\pi \mu^2 r_0^6 V_0^2}{\hbar^2} \exp\left[-4k^2 r_0^2 \sin^2(\theta/2)\right] d\Omega \quad (30)$$

يتناقص المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر في هذه الحالة بازدياد زاوية التبعثر.

$$r < r_0 \quad \text{من أجل} \quad V(r) = -V_0 \quad \text{ج - البئر الكروي :}$$

$$r > r_0 \quad \text{من أجل} \quad V(r) = 0$$

إن تابع الكمون في هذه الحالة هو تابع زوجي أيضاً ويعطي

$$V(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a) = \frac{4\pi V_0}{|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|^2} \left\{ r_0 \cos(|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a| r_0) - \frac{\sin(|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a| r_0)}{|\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a|} \right\} \quad (31)$$

بتعويض العلاقة (31) في العلاقة (28) نحصل على المقطع الفعال التفاضلي

للتبعثر يتميز المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر المرن بواسطة كمون بئر كروي باهتزاز قيمه مع تغير زاوية التبعثر في حالة طاقات نسبية عالية • أما من أجل طاقات نسبية صغيرة أي من أجل  $1 \gg k r_0 = \xi$  ، نستطيع نشر المقطع الفعال التفاضلي وفق سلسلة قوى  $\xi$  ونرى ان المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر المرن مستقل عن زاوية التبعثر من أجل حدود أقل مرتبة من  $\xi^2$  • وهي خاصة عامة تتمتع بها جميع الكمونات ذات المدى المحدود • أي أننا لانستطيع تمييز شكل كمون عن آخر باستخدام تبعثر مرن لجسيمات بطيئة •

### ٣ - طريقة الامواج الجزئية في طريقة التبعثر :

عندما يكون كمون الحقل للسبب للتبعثر ، متناظراً كروياً • يكون الاندفاع لزاوي أحد ثوابت الحركة • وبتعبير آخر تسهم الحالات المقابلة لقيم مختلفة من قيم الاندفاع الزاوي ، بصورة مستقلة في التبعثر • لذلك فمن الملائم كتابة الامواج القادمة كتركيب لامواج جزئية يقابل كل منها قيمة معينة من قيم الاندفاع الزاوي سنختار المحور  $z$  من جملتنا الاحداثية منطبقاً على اتجاه الاندفاع للامواج القادمة فنكتب :

$$\varphi_0(r) = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (32)$$

حيث  $j_l(kr)$  هي توابع بسل الكروية • متذكرين الشكل التقاربي لتوابع بسل

$$j_l(kr) \simeq \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} ; \quad kr \gg 1$$

نستطيع كتابة العلاقة (32) بالشكل :

$$\varphi_o(r) \approx (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \rho_l(r), \quad (32')$$

حيث :

$$\rho_l(r) = \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) = \frac{1}{2} i \left[ e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] \quad (33)$$

يمثل الحد الأول من العلاقة (33) أمواجاً كروية قادمة ، ويمثل الحد الثاني أمواجاً كروية مبتعدة أي أن هناك موجتين كرويتين احدهما مبتعدة والأخرى مقتربة ، تقابلان كل موجة جزئية في المعادلة (32) عند المسافات البعيدة . إذن يجب علينا أن نبحث عن حل للمعادلة (1) يحدد تبعثر الجسيمات ضمن حقل كمون متناظر كروياً وله مجال محدد  $V(r)$  . نستطيع كتابة هذا الحل على شكل تراكم أمواج جزئية من الشكل

$$\psi(r) = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (34)$$

نجد بالتحويل الى الاحداثيات القطبية الكروية وتعويض الحل (34) في المعادلة (1) :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) R_l(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} R_l(r) \quad (35)$$

يجب أن يكون التابع (34) محدوداً عند  $r=0$  وبالتالي يجب أن يحقق  $R_l(r)$  الشرط الحدي

$$R_l(0) = 0 \quad (36)$$

فإذا لم يكن الكمون  $V(r)$  أسرع تغيراً من  $\frac{1}{r}$  عندما  $r \rightarrow 0$  تصبح

المعادلة (35) في الحالة  $r \rightarrow 0$  من الشكل

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0$$

بالنظر إلى هذه المعادلة وإلى الشرط الحدي (36) نجد أن  $R_l(r) \sim r^{l+1}$

عندما  $r \rightarrow 0$  • نحن مهتمون بحلول المعادلة (35) التي تشكل تراكباً للقسم الموضعي (33) من الموجة الجزئية عند المسافات الكبيرة والتي تقابل العدد الكمومي  $l$  في الموجتين القادمة والمتباعدة • يؤثر التفاعل بين الجسيمات القادمة وحقل التبعثر ، على سعة الموجة المتبعثرة في العلاقة (33) لذلك نستطيع كتابة الشكل المقارب لتابع الموضع  $R_l(r)$  في العلاقة (35) كما يلي :

$$\begin{aligned} R_l(r) &= \frac{1}{2} i \left[ e^{-\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} - s_l e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} \right] \\ &= \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right) + \frac{1}{2} i (-i)^l (1 - s_l) e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (37)$$

وذلك من أجل  $kr \gg 1$  •

تحدد الامثال  $s_l$  في العلاقة (37) تغير الامواج المتباعدة مرتبطة بطاقة الحركة النسبية ، وتدعى بالعناصر القطرية لمصفوفة التبعثر المقابلة للاندفاع الزاوي المداري  $l$

تحدد بتعويض العلاقة (37) في المعادلة (34) استخدام العلاقة (32)

$$\Psi(r) \simeq \varphi_a(r) + A(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad kr \gg 1$$

وإذا كتبنا سعة التبعثر  $A(\theta)$  بدلالة عناصر مصفوفة التبعثر نجد :

$$A(0) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - S_l) P_l(\cos \theta) \quad (38)$$

تحدد عناصر مصفوفة التبعثر  $s_l$  سعة التبعثر بشكل وحيد وهي أعداد عقدية ، ويمكن التعبير عن عناصر مصفوفة التبعثر ، في حالة التبعثر المرن بدلالة انزياحات الطور الحقيقية أو طور التبعثر  $\delta_l$  من خلال العلاقة

$$s_l = e^{2i\delta_l} \quad \text{أو} \quad s_l - 1 = 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (39)$$

وبما أن التابع الاسي في هذه العلاقة هو تابع دوري فلا تتحدد أطوار الانزياح بشكل وحيد . فإذا اشترطنا انعدام انزياح الطور عند تلاشي التفاعل  $V(r)$  ، فيمكن لانزياحات الطور أن تأخذ قيمتها في المجال  $(0, \pi)$  أو في المجال  $(-\pi/2, \pi/2)$  ولسوف نأخذ المجال الثاني .

إن توابع ليجنדר تأخذ القيمة 1 من أجل  $\theta = 0$  وبالتالي نحصل على علاقة بسيطة انطلاقاً من (38) بين سعة التبعثر الجبهي  $A(0)$  وعناصر مصفوفة التبعثر

$$A(0) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - S_l) \quad (40)$$

ويكتب المقطع الفعال التفاضلي للتبعثر المرن ضمن عنصر الزاوية المجسمة  $d\Omega$  بدلالة انزياحات الطور مستعينين بالمعادلتين (38) ، (39) بالشكل

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 = k^{-2} \sum_{l,l'} (2l+1) (2l'+1) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \quad (41)$$

بتكامل هذه العلاقة على جميع الزوايا واستخدام علاقة التعامد

$$\int p_l(\cos \theta) p_{l'}(\cos \theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$$

نحصل على المقطع الفعال الكلي للتبعثر المرن

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (42)$$

ويمكن كتابة المقطع الفعال الكلي كمجموع لمقاطع فعالة جزئية  $\sigma_l$  تشير إلى

قيمة محددة للعدد  $l$  حيث  $\sum_{l=0}^{\infty} 1 = \infty$

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - s_l|^2 \quad (43)$$

يمكن عد العامل  $(2l+1)$  في العلاقة (43) وزناً احصائياً للسوجة الجزئية  $l$  أي إلى عدد الحالات التي تختلف بعددها الكمومي  $m$ .

نستنتج من العلاقة (43) أن أعظم قيمة للمقطع الفعال للتبعثر هي

$$(\sigma_l)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad (44)$$

وباستخدام العلاقة (39) نجد من العلاقة (38) أن الجزء التخيلي من سعة التبعثر الجبهي يعطى بالعلاقة

$$\text{Im } A(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

بمقارنة هذه القيمة مع العلاقة (32) نجد أن المقطع الفعال الكلي للتبعثر المرن

مرتبط بالجزء التخيلي لسعة التبعثر الجبهي بالعلاقة البسيطة التالية

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } A(0) \quad (45)$$

وهذا ما يدعى بالنظرية الضوئية Optical Theorem .

إن طريقة الامواج الجزئية ملائمة للاستخدام وخاصة في حالة الكمونات قصيرة المدى مثل القوى النووية أو القوى بين الذرات المعتدلة ، وفي هذه الحالة تسهم القيم الصغيرة فقط من قيم  $l$  في تبثر الجسيمات ذات الطاقة الحركية المنخفضة ويمكننا إدراك هذا الامر من اعتبارات وصفية . فمن أجل مسافات كبيرة،  $r$  أكبر من المجال  $d$  ، ستؤثر القوة النابذة المركزية بطاقة قدرها  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$  على الجسيم في الحالة الكمومية ذات العدد  $l$  وسيتحرك الجسيم عند المسافة  $r$  محققاً المتراجحة

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \leq \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = E \quad (46)$$

حيث  $E$  هي طاقة الحركة النسبية . ونستطيع تسمية المسافة  $r_{0l} = \sqrt{l(l+1)/k}$  بأصغر مسافة اقتراب . إذا كان  $r < r_{0l}$  يكون احتمال مشاهدة الجسيم صغيراً وإذا كان المجال  $a$  أصغر من  $r_{0l}$  فإن الموجة الجزئية المقابلة لن تصل الى مجال التأثير ولن تسهم في التبثر ، وبناء عليه فإن الأمواج الجزئية ذات الاعداد الكمومية  $l$  المحققة للمتراجحة

$$kd < \sqrt{l(l+1)} \quad (47)$$

لن تسهم بصورة عملية في التبثر .

تربط العلاقة (43) بين المقطع الفعال الكلي وزاوية انزياح الطور  $\delta_l$  ،

وهكذا نجد أنه لا بد من حساب  $\delta_l$ .

يعطى التابع  $R_l$  بالمعادلة :

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \right] R_l = 0$$

وبالشرط الحدي  $R_l(0) = 0$

كما يتعين موضع الجسيم الحر بالمعادلة :

$$\frac{d^2 g_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = 0$$

وبالشرط الحدي  $g_l(0) = 0$

فإذا ضربنا المعادلة الاولى بـ  $g_l$  والثانية بـ  $R_l$  وطرحنا الثانية من الاولى

ثم كاملنا من الصفر الى  $\rho$  نجد :

$$\left[ g_l \frac{dR_l}{dr} - R_l \frac{dg_l}{dr} \right]_{r=\rho} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\rho V(r) R_l g_l dr \quad (48)$$

إن حل معادلة الجسيم الحر هو :

$$g_l(r) = kr j_l(kr) \quad (49)$$

حيث  $j_l(kr)$  هو تابع بسل . فإذا اخترنا  $\rho$  كبيرة لدرجة كافية فإن الحل

$g_l$  يأخذ شكله التقاربي  $g_l(r) = \sin(kr - l\pi/2)$  من أجل  $kr \gg l$

وعندها نبحث عن شكل تقاربي للتابع  $R_l$  فنجد

$$R_l(r) = \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \quad (50)$$

بتعويض الصيغ التقريبية لكل من  $R_l$  و  $g_l$  في الطرف الايسر من المعادلة

(48) نحصل على معادلة تعطينا  $\delta_l$  بدلالة الحل  $R_l$  أي :

$$k \sin \delta_l = - \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\rho} V(r) R_l(r) g_l(r) dr \quad (51)$$

وللحصول على قيمة تقريبية لانزياح الطور  $\delta_l$  يمكننا استبدال  $R_l$  في

العلاقة (51) فنجد :

$$k \sin \delta_l \cong - \frac{2\mu k^2}{\hbar^2} \int_0^{\rho} V(r) j_l^2(kr) r^2 dr \quad (52)$$

إذا رمزنا لمجال تأثير الكمون بـ  $d$  وكان  $kd \ll 1$  نستطيع استخدام

القيمة المقاربة لتابع بسل  $j_l(kr) = \frac{(kr)^l}{1,3,5 \dots (2l+1)}$  وتصبح المعادلة (52)

من الشكل :

$$\sin \delta_l = - \frac{2\mu (kd)^{2l+1}}{\hbar^2 [1.3.5 \dots (2l+1)]^2} \int_0^d V(r) \left(\frac{r}{d}\right)^{2l+1} r dr \quad (53)$$

وهي حالة الجسيمات البطيئة . توضح العلاقة (53) مع العلاقة (47) أن

الموجة  $s$  ( $l=0$ ) هي التي تسهم فقط في تبشر الجسيمات البطيئة لذلك سندرس تبشر الموجة  $s$  فقط وهذا يعني حل المعادلة :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) R_0(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} R_0(r) \quad (54)$$

الخاضعة للشرط •  $R_0(0) = 0$

إن الشكل المقارب للحل هو :

$$R_0(r) = c \sin(kr + \delta_0) \quad (55)$$

ولسوف نناقش بعض الأمثلة البسيطة •

٤ - التبثر المرن للجسيمات البطيئة :

١ - التبثر بواسطة بئر كهوني كروي :  $V(r) = -V_0$  من أجل  $r \leq d$

من أجل  $r > d$   $V(r) = 0$

وهو بئر جاذب • إن الحل (55) يحقق المعادلة (54) خارج البئر أما داخل البئر فتأخذ المعادلة (54) الشكل :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) R_{01}(r) = 0 ; R_{01}(0) = 0 \quad (99)$$

حيث :

$$k^2 = k_0^2 + k^2 ; k_0^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \quad (57)$$

يحقق التابع  $R_{01}(r) = c_1 \sin \bar{k} r$  المعادلة (56) وبما أننا مهتمون بانزياح الطور فقط سنطابق بين المشتق اللوغاريتمي للحلين عند  $r = d$  أي :

$$k \cotg(kd + \delta_0) = \bar{k} \cotg \bar{k} d \quad (58)$$

فإذا استخدمنا الرمز  $D^{-1} = \bar{k} \cotg \bar{k}d$  للمشتق اللوغاريتمي للتابع الموجي في المجال الداخلي عند النقطة  $r = d$  فإننا نجد من المعادلة (58) أن

$$\tan \delta_0 = \frac{KD - \tan kd}{1 + KD \tan kd} \quad (59)$$

أو :

$$\delta_0 = \tan^{-1} (KD) - kd \quad (60)$$

ونهتم عادة بالقيمة الأساسية للانزياح ضمن المجال  $-\pi/2 \leq \delta_0 \leq \pi/2$  فمن

$$\tan kd \simeq kd + \frac{(kd)^3}{3} + \dots$$

أجل قيم صغيرة لطاقة الحركة النسبية نكتب

وتأخذ العلاقة (59) الشكل البسيط

$$\tan \delta_0 = \frac{(K(D - d - \frac{(kd)^3}{3k}))}{1 + K^2 Dd}$$

وإذا تحققت المتراجحتان  $kd \ll 1$  ,  $K^2 Dd \ll 1$  في آن واحد يمكننا تبسيط العلاقة السابقة لتصبح

$$\tan \delta_0 \simeq k(D - d) = kd \left[ \frac{\tan \bar{k}d}{\bar{k}d} - 1 \right] \quad (61)$$

ويعطى المقطع الفعال الكلي بالعلاقة

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \sin^2 \delta_0 \simeq 4\pi (D - d)^2 = 4\pi d^2 \left[ 1 - \frac{\tan \bar{k}d}{\bar{k}d} \right] \quad (62)$$

ب - التبعثر بواسطة حاجز كهوني كروي :  $V(r) = V_0$  من أجل  $r \leq d$

$V(r) = 0$  من أجل  $r > d$

$$\sigma_0 = 4\pi d^2 \left[ \frac{\tanh \bar{k}_0 d}{\bar{k}_0 d} - 1 \right]^2 \quad \text{أثبت أن}$$

ج - التبعثر بواسطة كرة صلبة :  $V(r) = \infty$  من أجل  $r \leq d$

$V(r) = 0$  من أجل  $r > d$

$$\sigma \cong 4\pi d^2 \quad \text{في الحالة } kd \ll 1 \quad \text{أثبت أن}$$

$$\sigma \cong 2\pi d^2 \quad \text{في الحالة } kd \gg 1$$



## الفصل الثامن

# الطرائق التقريبية في دراسة البنية الذرية

## الطرائق التقريبية في دراسة البنية الذرية

يمكننا التوصل الى الحالة الأساسية والحالات المثارة لذرة الهيدروجين بصورة تحليلية وذلك بحل معادلة شرودينغر وايجاد التوابع الموجية والقيم الذاتية ، كما نستطيع باستخدام طريقة المتغيرات التوصل الى التوابع الموجية والقيم الذاتية ( سويات الطاقة ) لذرة الهليوم وبعض الذرات الخفيفة الأخرى . سندرس في هذه الفقرة بعض الطرائق التقريبية المستخدمة في وصف الذرات الثقيلة .

### ١ - طريقة الحقل المركزي :

هي نقطة البداية في الحساب لجميع الذرات باستثناء الذرات الخفيفة . نفترض في طريقة الحقل المركزي أن كل الالكترون يتحرك ضمن كمون متناظر كروياً  $V(r)$  ناتج عن النواة وعن باقي الالكترونات ، وهي فرضية جيدة عندما يكون الانحراف عن التابع  $V(r)$  ( الانحراف الذي يسببه مرور الالكترونات الأخرى بجوار الالكترون المدروس ) صغيراً نسبياً ، وهذا هو واقع الحال لأن كمون النواة أكبر بـ  $z$  مرة من الانحراف الذي يسببه الالكترون المجاور فهو يتناسب عكساً مع المسافة الفاصلة ويتغير ببطء . ولابد من التصدي لمشكلتين رئيسيتين هما حساب الحقل المركزي ثم تصحيح النتائج المترتبة على استخدامه . وقبل أن نبدأ بمعالجة هاتين المشكلتين سنتعرف على الخواص العامة للحقل المركزي . يكون للطاقة الكامنة  $V(r)$  في الذرة المعتدلة شكل تابع كولون  $-\frac{e^2}{r}$  عند المسافات البعيدة عن النواة لأن نزع الالكترون المدروس يترك خلفه أيوناً مشحوناً بشحنة موجبة تساوي شحنة الالكترون ، ففي ذرة الهيدروجين تأخذ الطاقة الكامنة القيمة

$-\frac{e^2}{r}$  من أجل جميع قيم  $r$  وتعطي عدداً لانهائياً من سويات الطاقة المرتبطة المميزة بالاعداد الكمومية  $n, l, m$  • لذلك فإننا نتوقع وجود عدد لانهائي من سويات الطاقة المرتبطة بالكمون  $V(r)$  • وبسبب صغر التابع الموجي للالكترون بجوار النواة ، في حالة قيم كبيرة للعدد  $n$  ، يكون اسهام شكل التابع  $V(r)$  ، بعيداً عن النواة ، هو الاسهام الاساسي • وإن أحد الفوارق الهامة ، بين حالات ذرة الهيدروجين والحالات الناتجة من استخدام  $V(r)$  للذرات الثقيلة ، هو ازالة الانطباق بين الحالات التي لها العدد الكمومي  $n$  نفسه ولها قيم مختلفة للعدد الكمومي  $l$  ، والتي كانت منطبقة في ذرة الهيدروجين • ويرجع ازالة الانطباق الى امكان اقتراب الالكترونات ذات الاعداد الكمومية الرئيسية الصغيرة ( $n$ ) من النواة وبالتالي يصبح التابع  $V(r)$  أقوى ( أكثر سلبية ) من  $-\frac{e^2}{r}$  لأن النواة تكون أقل حجماً من قبل الالكترونات الاخرى • لذلك تملك الحالة المقابلة لأخفض قيمة من قيم العدد الكمومي  $l$  طاقة أقل من جميع الحالات التي لها العدد الكمومي الرئيسي  $n$  نفسه وتختلف عن بعضها بعضاً بالعدد  $l$  • ولا تتأثر حالة الانطباق بالنسبة للعدد الكمومي  $m$  لأن التابع  $V(r)$  متناظر كروياً • وبالطبع نحتاج إلى عدد كمومي رابع لتعيين حالة الالكترون وهو السبن أي أننا نحتاج الى الأعداد  $n, l, m_l, m_s$  • فالاعداد  $l$  و  $m_l$  تقابل العددين  $l$  و  $m$  في ذرة الهيدروجين أما ( $m_s = \pm 1/2$ ) فتعين توجه السبن • يتحدد عدد العقد للتابع الموجي في ذرة الهيدروجين بالعلاقة  $n - l - 1$  وينطبق هذا الامر عند استخدام تقرب الحقل المركزي أي أن  $l$  لا تتجاوز القيمة  $n - 1$  .

## ٢ - دورية العناصر :

ينص مبدأ باولي على عدم وجود الكترونين في الحالة الكمومية ذاتها أي لا يمكن

لإلكترونين في الذرة نفسها أن يكون لهما الأعداد الكمومية الأربعة نفسها فمع ازدياد العدد الذري  $z$  تتوضع الإلكترونات بحيث تملأ الحالات ذات الطاقة المنخفضة أولاً • فالحالة الأساسية للذرة ، في تقريب الحقل المركزي، تقابل تواضعاً الكترونيّاً لا تشغل فيه سوية عليا قبل ملء جميع السويات الأدنى منها • وبسبب الانطباق للعددين  $m_s$  و  $m_l$  يمكن للطبقة المحددة بالعددين  $n$  و  $l$  أن تحوي  $2(2l + 1)$  الكتروناً ، ويتضح أن تشكيل الحالة الأساسية للإلكترونات في ذرة ما يمكن أن يوصف بتحديد عدد الإلكترونات في كل طبقة ، ففي التقريب المسمى بتقريب الحقل المركزي تملأ جميع الطبقات ماعدا الطبقة ذات الطاقة العليا فيمكن أن تكون ممثلة كلياً أو جزئياً •

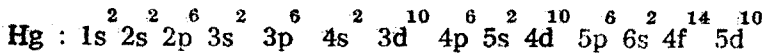
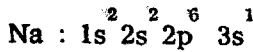
تحدد معظم الخواص الكيميائية للذرات بالإلكترونات الموجودة في آخر طبقة وتدعى بالإلكترونات التكافؤ ، والعامل الرئيسي هنا هو عدد حالات الإلكترون المشغولة والخالية في هذه الطبقة ، وكذلك فجوة الطاقة بين هذه الطبقة والطبقة التي تليها والتي تكون خالية من الإلكترونات ففي الذرة التي تكون فيها الطبقة الأخيرة ممثلة وتكون الفجوة بين هذه الطبقة والطبقة الخالية التي تليها كبيرة ، تسيل إلى العطالة الكيميائية • يمثل العدد الرئيسي  $n$  بعدد ، والعدد الكمي الثانوي  $l$  بحرف ، وعدد الإلكترونات في الطبقة بدليل عددي وفق مايلي :

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

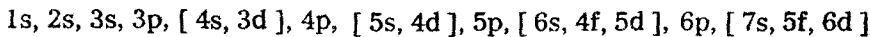
$$s, p, d, f, g, h, \dots$$

$$2(2l + 1) = 2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots$$

تمثل الحالة الأساسية لذرة الصوديوم ( $Z = 11$ ) ولذرة الزئبق ( $Z = 80$ ) مثلاً :



نستطيع كتابة التشكيل الالكتروني لمختلف العناصر انطلاقاً من معرفة ترتيب ازدياد الطاقة للطبقات والذي يأخذ الشكل التالي :



وضع بين الأقواس الطبقات ذات الطاقة المتماثلة والتي لا تملأ دوماً بالترتيب نفسه ، ويعود سبب تماثل الطاقة الى أن الزيادة التي يسببها العدد  $n$  تساوي النقصان الذي يسببه صغر العدد  $l$  ، فالحالة  $4s$  مثلاً وهي أعلى طاقة من الحالة  $3d$  في ذرة الهيدروجين تنخفض بسبب الاقتراب من النواة الناتج من انخفاض الارتفاع الزاوي . تملأ الطبقة  $s$  أولاً ضمن هذه الأقواس ومن الممكن أن تخسر أحد الكتروناتها أو كليهما وتملأ الطبقات الأخرى ضمن القوس .

### ٣ - نموذج توماس - فيرمي الاحصائي :

لندرس الآن أول المسائل المرتبطة بتقريب الحقل المركزي . نستخدم عادة طريقتين لتحديد الطاقة الكامنة  $V(r)$  أوجد الطريقة الاولى كل من العالم توماس والعالم فيرمي أما الثانية فاقترحها العالم هارترى .

يفترض في نموذج توماس - فيرمي الاحصائي أن  $V(r)$  يتغير ببطء كاف ضمن مسافة تساوي طول موجة الالكترون ، وبذلك يمكن ان يتوضع العديد من الالكترونات ضمن حجم يكون فيه تغير الطاقة الكامنة صغيراً نسبياً . عندها نستطيع استخدام الميكانيك الاحصائي في معالجة الالكترونات التي تخضع

إلى احصاء فيرمي - ديراك ، أي توصف بتوابع موجية ذات تناظر مضاد .  
 ففي درجة الحرارة النظامية تكون الطاقة الحرارية  $KT$  صغيرة بالمقارنة مع  $V(r)$  في كل مكان باستثناء حدود الذرة حيث يكون احتمال وجود الإلكترون صغيراً . وفي هذه الحالة تتطلب احصائيات فيرمي ديراك ملء الحالات الإلكترونية وفق ازدياد الطاقة اضافة الى افتراض جديد هو ثبات  $V(r)$  على المناطق التي يمكن أن يتوضع فيها عدد كبير من الإلكترونات .

إن عدد الحالات الإلكترونية ضمن مكعب طول حرفه  $L$  تتحقق على جدرانه الشروط الحدية الدورية هو  $(\frac{L}{2\pi})^3 dk_x dk_y dk_z$  . يجب ضرب هذا العدد بـ 2 لكي نأخذ بعين الاعتبار حالات السبن الممكنة ، ويكون عدد الحالات التي يكون فيها الاندفاع  $p = \hbar k$  مساوياً  $p_0$  أو أصغر منه هو :

$$2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int_0^{p_0/\hbar} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p_0^3 L^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (1)$$

فإذا شغلت جميع هذه الحالات يكون عدد الإلكترونات في واحدة الحجم والتي لا تزيد طاقتها الحركية على  $\frac{p_0^2}{2m}$  هو  $\frac{p_0^3}{4\pi^2 \hbar^3}$  . وتكون الطاقة الحركية العظمى عند أي مسافة  $r$  من النواة مساوية  $-V(r)$  . وإلا غادرت الإلكترونات ذراتها . نتوصل استناداً الى ماسبق ، الى علاقة بين الكثافة الحجمية للإلكترونات  $n(r)$  والطاقة الكامنة

$$n(r) = \frac{[-2mV(r)]^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (2)$$

ويتعين الكمون الكهربائي الساكن  $\frac{V(r)}{e}$  بمعادلة بواسون بدلالة كثافة الشحنات  $-n(r)e$

$$-\frac{1}{e} \nabla^2 V = -\frac{1}{er^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dV}{dr}) = 4\pi en(r) \quad (3)$$

تشكل المعادلتان السابقتان مجموعة آنية لكل من  $n$  و  $V$  ويمكن التعبير عن الشروط الحدية التي يجب تطبيقها على الحلول بدلالة الطاقة الكامنة  $V$  لذرة طبيعية عددها الذري  $Z$  . فعندما تنتهي  $r$  نحو الصفر يكون الحد المسيطر في الطاقة الكامنة هو أثر النواة فقط أي  $\frac{-Zr^2}{r}$  . وعندما تنتهي  $r$  اللانهاية يجب ألا يكون بداخل الكرة التي نصف قطرها  $r$  شحنة كهربائية صافية (لأن الذرة معتدلة كهربائياً) . لذلك تتناقص  $V$  بسرعة أكبر من  $\frac{1}{r}$  وينتهي المقدار  $rV(r)$  الى الصفر . وهذا الشرط الحدي يختلف عن سابقه حيث يأخذ الكمون الشكل  $\frac{e^2}{r}$  . ان الفرق بين الكمون الحقيقي الذي تخضع له الالكترونات وكمون توماس - فيرمي أن الأخير هو الكمون الذي تخضع له شحنة اختيارية صغيرة وبالتالي يعبر عن الطبيعة الاحصائية للتقريب في طريقة فيرمي - توماس ويكون الحل ، باستخدام كمون توماس - فيرمي ، دقيقاً عندما تصبح الكتلة  $m$  كبيرة جداً والشحنة  $e$  صغيرة جداً وبالتالي يصبح المقدار  $m^3 e^4$  ثابتاً ويصبح طول موجة الالكترون معدوماً وكثافة الجسيمات لانهاية . وفي هذه الحالة يكون الكمون ثابتاً ويتواجد عدد كاف من الالكترونات يجوز معها تطبيق الميكانيك الاحصائي .

#### ٤ - حساب الكمون :

نجد بحذف  $n(r)$  من المعادلتين السابقتين :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \frac{d(-V)}{dr}] = \frac{4e^2 [-2mV(r)]^{3/2}}{3\pi\hbar^3} \quad (4)$$

باستخدام هذه المعادلة ، وكذلك باستخدام الشروط الحدية المذكورة أعلاه ،  
وباستخدام المتحولات عديمة الابعاد التابعة لكل من  $Z, E, m, \hbar$  نجد :

$$V(r) = - \frac{Z e^2}{r} X \quad r = bx$$

$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar}{m e^2 Z^{1/3}} = \frac{0.885}{Z^{1/3}} a_0 \quad (5)$$

حيث  $a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$  بالتعويض في معادلة  $V(r)$  نجد :

$$x^{1/2} \frac{d^2 X}{dx^2} = X^{3/2} \quad (6)$$

وتخضع للشرطين  $x \rightarrow \infty \rightarrow X = 0$  ,  $x \rightarrow 0 \rightarrow X = 1$

حسب الحل الدقيق للمعادلة الأخيرة من قبل العالمين بوش وكالدول ووضع في  
جداول .

وتشير معاملات المعادلة أعلاه الى تناسب نصف قطر الذرة عكساً مع الجذر  
التكعيبي للعدد الذري ، كما تظهر أن تقريب توماس - فيرمي يتحسن بازدياد العدد  
الذري ، فالكمون عند مسافة تساوي نصف قطر الذرة متناسب مع  $Z^{4/3}$  ، وطول  
موجة الالكترتون متناسب مع  $Z^{-2/3}$  .  
أما حلول المعادلة فهي :

$$X(x) = 1 - 1.588 x + \frac{4}{3} x^{3/2} + \dots \quad \text{من أجل قيم صغيرة لـ } x \quad (7)$$

$$X(x) = \left[ 1 + \left( \frac{x}{144} \right)^{\lambda/3} \right]^{3/\lambda} ; \quad \lambda = 0.772 \quad \text{من أجل قيم كبيرة لـ } x$$

## ٥ - حقول هارترى غير المتناقضة :

افتراض العالم هارترى أن كل الكترون يتحرك في حقل مركزي يمكن حسابه من كمون النواة ومن التوابع الموجية للالكترونات الاخرى منطلقاً من أن كثافة الشحنة المرتبطة بالالكترتون تساوي  $e$  - مضروباً بكثافة الاحتمال الموضعي ويتم ذلك بحل معادلة شرودينغر من أجل كل الكترون في حقله المركزي ثم جعل التوابع الموجية الناتجة غير متناقضة مع الحقول التي حسبت منها ، أي يوصف الالكترتون  $k$  بالتابع الموجي المنظم  $u_k(r_k)$  المحقق للمعادلة :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{j \neq k} \int |u_j(r_j)|^2 \frac{e^2}{r_{jk}} d^3r_j \right] u_k(r_k) = \epsilon_k u_k(r_k) \quad (8)$$

حيث  $|r_{jk}| = |r_j - r_k|$  فإذا وجد  $Z$  الكتروناً في الذرة ، عندها تتألف هذه المعادلة من مجموعة مؤلفة من  $Z$  معادلة آنية غير خطية تكاملية تفاضلية لـ  $Z$  من التوابع الموجية  $u_k(r_k)$  ولقد استخدم هارترى طريقة التقريب المتتالي لحلها . ففي حالة ذرة بالكترونين فقط ( مثلاً ) لدينا :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_1} + \int |u_2(r_2)|^2 \frac{e^2}{r_2 - r_1} d^3r_2 \right] u_1(r_1) = \epsilon_1 u_1(r_1) \quad (9)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{r_2} + \int |u_1(r_1)|^2 \frac{e^2}{r_1 - r_2} d^3r_1 \right] u_2(r) = \epsilon_2 u_2(r_2)$$

نستبدل بالحدين الثاني والثالث في كل معادلة كمونين افتراضيين ونحسب التوابع الموجية للالكترونات ثم نستخدم هذه التوابع الموجية من أجل التوصل إلى كمون جديد وهكذا نكرر العملية حتى نتوصل الى الدقة المطلوبة . والتقريب الاساسي المطبق هو أخذ متوسط الطاقة الكامنة في الحد الثالث على الزوايا لجعل

تابع الكمون متناظراً كروياً • وعندها نستطيع كتابة الحقل على شكل جداء لتابع الموضوع بتابع الزوايا • كما نطبق تبسيطاً آخر هو جعل  $(2l+1)$  الكترونات أو أقل تتحرك ضمن الكمون نفسه ويكون لها التابع الموجي نفسه ، ومن الواضح أن تقريب هارتراي يهمل العلاقة بين مواضع الالكترونات بافتراض أن التابع الموجي هو جداء التوابع الموجية للالكترونات المختلفة ، وكذلك لم يؤكد على التناظر المضاد للتوابع ، وكل ماطبق هو مبدأ باولي في الاستبعاد •

## ٦ - تصحيح تقرب الحقل المركزي :

سندرس الآن المشكلة الثانية في تقرب الحقل المركزي ألا وهي تصحيح النتائج المترتبة على استخدام الحقل المركزي • لقد تم حذف حدين في هذا التقريب الأول هو الفرق بين التفاعل الكهربائي الساكن الفعلي بين الالكترونات والمتوسط الذي استخدم في الحقل المركزي • والثاني هو طاقة التفاعل بين الاندفاع المداري والسبن ويأخذ الصيغة

$$\sum_k \xi(r_k) L_k \cdot S_k \quad (10)$$

حيث  $L_k$  هو الاندفاع الزاوي المداري ( ويساوي  $\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k$  ) للالكترون  $k$  ، وتعطى القيمة الذاتية لكل من  $L_{kz}$  و  $L_k^2$  بدلالة الاعداد الكمومية  $l, m_l$  وفق العلاقتين  $l(l+1)$  و  $m_l \hbar$  على الترتيب •  $s_k$  هو السبن  $\frac{1}{2} \hbar \sigma_k$  للالكترون  $k$  ، أما التابع  $\xi(r)$  فيأخذ الصيغة

$$\xi(r) = \frac{1}{2 m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (11)$$

وذلك بدلالة كمون الحقل المركزي  $V(r)$  •

ففي العناصر القلوية مثلاً يوجد الكترون واحد ( الكترون تكافؤ ) تحت تأثير النواة وباقي الالكترونات الاخرى في الذرة • ونحتاج الى عددين كمومين فقط ، في حالة غياب الحقل الخارجي ، هما  $l$  و  $n$  • ويأخذ مؤثر هاميلتون الصيغة •

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + \xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (12)$$

إن الاندفاع الزاوي الكلي  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  هو أحد ثوابت الحركة وبالتالي فإن

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2 \quad \text{و} \quad J_z = m\hbar \quad (13)$$

تملك الحالات التي لها قيم مختلفة من قيم  $j$  طاقات مختلفة مع بقاء الانطباق  $(2j+1)$  والذي يمكن ازالته بتطبيق حقل خارجي • ان اختلاف طاقة حالات  $j$  يرجع للحد  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  ويحسب كما يلي :

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

$$\langle l j | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | l j \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - 3/4] \hbar^2$$

فإذا كان  $l$  قيمة غير معدومة فإن التصحيح الناتج من  $\xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  هو :

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{من أجل} \quad \frac{1}{2} l \eta_{nl} \quad (15)$$

$$j = l - \frac{1}{2} \quad \text{من أجل} \quad -\frac{1}{2} (l+1) \eta_{nl} \quad \text{و}$$

حيث

$$\eta_{nl} = \hbar^2 \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 \xi(r) r^2 dr \quad (16)$$

فإذا أخذنا التابع  $V(r)$  من الشكل  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$  واستخدمنا خواص  
تابع لاغير  $R_{nl}(r)$  نجد :

$$\begin{aligned} \eta_{nl} &= \frac{\hbar^2 Z e^2}{2 m^2 C^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} R_{nl}^2(r) dr = \\ &= \frac{e^2 \hbar^2 Z^4}{2 m^2 C^2 a_0^3 n^3 l(l + \frac{1}{2})(l+1)} \end{aligned} \quad (17)$$

وهذا ما يفسر وجود التضاعف في خطوط الطيف فالطاقة المقابلة للعزم الزاوي  
الكلي  $J = l + \frac{1}{2}$  مختلفة عن الطاقة المقابلة للعزم الزاوي الكلي  $J = l - \frac{1}{2}$ .  
ينطبق هذا الامر على جميع العناصر القلوية .

**تعرين :**

قدر بصورة تقريبية كلا من المقادير التالية مستخدماً نموذج توماس - فيرمي

- أ - متوسط المسافة بين الالكترونات والنواة .
- ب - متوسط الطاقة الحركية للالكترون .
- ح - الطاقة اللازمة لتأين الذرة .
- د - متوسط العزم الزاوي للالكترون .

\* \* \*

## الفصل التاسع

# النظرية الكمومية للجزيئات

## النظرية الكمومية للجزيئات

### ١ - نظرية التقريب الكظوم Adiabatic Approximation :

عند دراسة الخواص الكمومية للجزيئات وللأجسام الصلبة ، يجب علينا أن نأخذ الإلكترونات ونوى الذرات بعين الاعتبار وتكون النوى أثقل من الإلكترونات فنواة الرصاص مثلاً أثقل من الإلكترون بـ 380 ألف مرة ونواة الصوديوم أثقل بـ 42 ألف مرة تقريباً من الإلكترون . لذلك تكون حركة النواة أبطأ بكثير من حركة الإلكترون ، ويمكننا تنفيذ دراسة تقريبية لخواص الجزيئات والأجسام الصلبة مفترضين ثبات النوى في التقريب الصفري وإدخال حركاتها في التقريبات الأعلى مستخدمين نظرية الاضطراب ويدعى هذا الأسلوب بالتقريب الكظوم . ولتوضيح الأفكار الأساسية التي تستند إليها هذه الطريقة سندرس جملة تحوي بعض الإلكترونات لكل منها كتلة قدرها  $\mu$  وبعض نوى الذرات لكل منها كتلة قدرها  $M$  ولنرمز بـ  $\mathbf{r}$  لمجموعة جميع إحداثيات الإلكترون مقاسة في جملة الإحداثيات المرتبطة بمركز كتلة الجملة وبالرمز  $\mathbf{R}$  لمجموعة إحداثيات النواة . نستطيع كتابة مؤثر هاميلتون الذي يعين الحالات الداخلية للجملة كما يلي :

$$\hat{H} = \hat{T}_R + \hat{T}_r + \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (1)$$

حيث  $\hat{T}_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$  هو مؤثر الطاقة الحركية للإلكترونات

و  $\hat{T}_R = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_I \frac{\partial^2}{\partial R_I^2}$  هو مؤثر الطاقة الحركية للنوى

و  $\hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  هو مؤثر الطاقة الكامنة للتفاعل بين جميع الجسيمات .

تستند طريقة التقريب الكظوم على افتراض صغر مؤثر الطاقة الحركية للجسيمات الثقيلة ( $\hat{T}_R$ ) لذلك يعامل كمؤثر اضطراب ، وهنا نتذكر أننا كنا نعد مؤثر الاضطراب جزءاً من مؤثر الطاقة الكامنة لذلك نعيد كتابة المعادلة (1) فتصبح

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T}_R ; \quad \hat{H}_0 = \hat{T}_r + \hat{V}(r, R) \quad (2)$$

ففي التقريب الصغري نترد مسألة الحالات المستقرة للجسملة الى حل معادلة شرودينغر

$$[\hat{H}_0 - \epsilon_n(R)] \varphi_n(R, r) = 0 \quad (3)$$

وذلك من أجل قيمة ثابتة للاحداثيات الجسم الثقيل  $R$  . ويحدد الدليل  $n$  جميع الأعداد الكمومية المميزة للحالات المستقرة . وتكون طاقات هذه الحالات  $(\epsilon_n)$  تابعة للاحداثيات الجسم الثقيل  $R$  . وكذلك تكون التوابع الموجية  $\varphi_n(R, r)$  لهذه الحالات تابعة أيضاً للاحداثيات  $R$  . أي أن التوابع الموجية  $\varphi_n(R, r)$  تصنف حالات الحركة للجسيمات الخفيفة من أجل قيم محددة للاحداثيات الجسم الثقيل  $R$  أو من أجل تغيرات بطيئة جداً ( كظومة ) للاحداثيات  $R$  .

لنفترض أننا نعرف حلول المعادلة (3) عندها نستطيع البحث عن الحالات المستقرة للجسملة ذات المؤثر (1) أي البحث عن حل للمعادلة :

$$(\hat{H} - E) \Psi(R, r) = 0 \quad (4)$$

الذي يأخذ الشكل :

$$\Psi(R, r) = \sum_n \Phi_n(R) \varphi_n(R, r), \quad (5)$$

حيث  $\varphi_n(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  هي التوابع الذاتية للمؤثر  $\hat{H}_0$  في التقريب الكظوم •

وبما أن المؤثر  $\hat{H}_0$  يأخذ قيماً ذاتية منفصلة وأخرى مستمرة ( طيف منفصل ومستمر ) يجب أن نفهم المجموع في العلاقة (5) بالمعنى المعمم فهو مجموع على الحالات المنفصلة وتكامل على الحالات المستمرة • نحصل بتعويض العلاقة (5) في المعادلة (4) وبالضرب بـ  $\varphi_n^*(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  ثم بالمكاملة على إحداثيات الجسيمات الخفيفة ، على مجموعة المعادلات

$$(\hat{T}_R + \varepsilon_m(R) - E) \Phi_m(R) = \sum_n \hat{A}_{mn} \Phi_n(R) \quad (6)$$

حيث يعطى المؤثر  $\hat{A}_{mn}$  بالعلاقة

$$\hat{A}_{mn} = \frac{\hbar^2}{M} \sum_j \int \varphi_m^*(R, r) \frac{\partial}{\partial R_j} \varphi_n(R, r) dr \frac{\partial}{\partial R_j} - \int \varphi_m^*(R, r) \hat{T}_R \varphi_n(R, r) dr \quad (7)$$

لحل مجموعة المعادلات (6) نستطيع عد المؤثر (7) صغيراً ونعالج المجموعة (6) بطريقة التقريب المتتالي • ففي التقريب الصفري نستبدل الصفري بالطرف الأيمن في المعادلة (6) ، فتنصل المعادلات (6) الى مجموعة من المعادلات المستقلة هي

$$[\hat{T}_R + \varepsilon_m(R)] \Phi_{m\nu}^0(R) = E_{m\nu}^0 \Phi_{m\nu}^0 \quad (8)$$

تمثل كل منها حالة حركة من حركات الجسيمات الخفيفة ، محددة بالعدد الكمومي  $m$  •

تشير المعادلة (8) الى أن حركة الجسيمات الثقيلة تتميز بالطاقة الكامنة المقابلة لطاقت الجسيمات الخفيفة في المعادلة (3) من أجل أوضاع محددة للجسيمات الثقيلة •

يُركِّد التابع الموجي (5) للجملة ، في التقريب الصفري الى الجداء البسيط

$$\Psi_{m\nu} = \Phi_{m\nu}^0(R) \varphi_m(R, r) \quad (9)$$

أي أن لكل حالة حركة من حركات الجسيمات الخفيفة المعينة بالاعداد الكمومية  $m$  ، حالات حركة للجسيمات الثقيلة تختلف عن بعضها بعضا بالعدد الكمومي  $\nu$  .

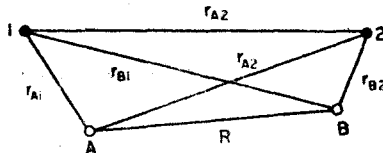
يصح استخدام التقريب الكظوم عندما يكون حل المعادلة (6) الدقيق قريباً جداً من حل معادلة التقريب الصفري (8) ، ونستطيع باستخدام نظرية الاضطراب البرهان على أن شرط تطبيق التقريب الكظوم هو تحقق المتراجحة التالية :

$$\langle \Phi_{m\nu}^0 | \hat{A}_{nm} | \Phi_{n\nu'}^0 \rangle \ll \langle E_{m\nu}^0 - E_{n\nu'}^0 \rangle \quad (10)$$

وذلك من أجل  $m \neq n$  وفي حالة قيم اختيارية لكل من  $\nu$  و  $\nu'$  .

## ٢ - جزيء الهيدرجين :

سندرس الآن المعادلة (3) المحددة لطاقة الالكترونات في جزيء الهيدرجين مفترضين ثبات قيم احداثيات النواة ، أي بتطبيق التقريب الكظوم . يتكون جزيء الهيدرجين من نواتين A و B تفصلهما مسافة R ، والكترونين 1 و 2 كما في الشكل :



بكتب مؤثر هاميلتون لهذا الجزيء بالشكل

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - e^2 \left( \frac{1}{r_{A_1}} + \frac{1}{r_{A_2}} + \frac{1}{r_{B_1}} + \frac{1}{r_{B_2}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} \right) \quad (11)$$

سنفترض أن الذرتين بعيدتان عن بعضهما بعضاً بعداً كافياً عندها تصبح مسألة حل المعادلة :

$$[\hat{H}_0 - \epsilon(R)] \varphi(R, 1, 2) = 0 \quad (12)$$

هي البحث عن الحالات المستقرة لجملة تكون فيها مواضع النوى ثابتة ، وتحل باستخدام نظرية الاضطراب . طبقت هذه الطريقة على جزيء الهيدروجين من قبل لندن وهيتلر عام ١٩٢٧ •

يُبنى التابع الموجي للجزيئة في التقريب الصفري من التوابع الموجية للذرات المعزولة ، وتعين طاقة الجملة بالقيمة المتوسطة للمؤثر  $\hat{H}_0$  في الحالة المقابلة للتقريب الصفري في التوابع الموجية . أي أن التابع الموجي للجزيء في حالته الأساسية ، يُبنى من التوابع الموجية للحالة الاساسية  $1s$  لذرات الهيدروجين . وعند اختيار التوابع الموجية في التقريب الصفري يجب الانتباه الى تناظر التوابع الموجية لان الالكترونين متشابهان . توجد حالتان ممكنتان لحالات السبن ، المفردة Singlet ، والثلاثية Triplet ، وتقابلان نوعين من توابع الاحداثيات :

$$\varphi_s = [2(1 + s^2)]^{-1/2} \{ \psi_A(1) \psi_B(2) + \psi_A(2) \psi_B(1) \} \quad (13)$$

$$\varphi_t = [2(1 - s^2)]^{-1/2} \{ \psi_A(1) \psi_B(2) - \psi_A(2) \psi_B(1) \} \quad (14)$$

حيث :

$$\Psi_A (1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{A1}}{a}} ; \quad \Psi_A (2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{A2}}{a}}$$

$$\Psi_B (1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{B1}}{a}} ; \quad \Psi_B (2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{B2}}{a}} \quad (15)$$

$$a = \frac{\hbar^2}{\mu e}$$

$$S = \int \Psi_A (1) \Psi_B (1) d\tau = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_{A1} + r_{B1})/a} \cdot d\tau \quad (17)$$

يدعى S بتراكم التكامل للتابع الموجي . ونستطيع بسهولة انجاز هذا التكامل مستخدمين الاحداثيات القطعية

$$\mu = \frac{r_{A1} + r_{B1}}{R} ; \quad \nu = \frac{r_{A1} - r_{B1}}{R} ; \quad \varphi \quad (17)$$

حيث  $\varphi$  هي الزاوية مع المحور الواصل بين النواتين . إن عنصر الحجم في جملة الاحداثيات القطعية هو :

$$d\tau = \frac{1}{8} R^3 (\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu d\varphi$$

وحدود التكامل هي

$$1 \leq \mu \leq \infty ; \quad -1 \leq \nu \leq 1 ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

باستخدام هذه الاحداثيات يصبح التكامل (16) من الشكل :

$$S = \frac{\rho}{8\pi} \int_1^{\infty} e^{-\rho\mu} d\mu \int_{-1}^{+1} (\mu^2 - \nu^2) d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi = (1 + \rho + \frac{1}{3}\rho^2) e^{-\rho} \quad (18)$$

حيث  $\rho = \frac{R}{a}$  ولقد تم استخدام العلاقة :

$$\int_1^{\infty} \mu^n e^{-\rho\mu} d\mu = \frac{n! e^{-\rho}}{\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \equiv D_n(\rho) \quad (19)$$

ولحساب طاقة الجملة في الحالة المفردة وفي الحالة الثلاثية من حالات السبن في التقريب الاول لنظرية الاضطراب يجب أن نحسب قيم التكاملين

$$\varepsilon_s = \int \varphi_s^* \hat{H}_0 \varphi_s d\tau \quad \text{و} \quad \varepsilon_t = \int \varphi_t^* \hat{H}_0 \varphi_t d\tau$$

بتعويض الصيغ (11) و (13) و (14) في هذين التكاملين متذكرين أن التوابع الموجية (11) هي التوابع الذاتية لمؤثرات الذرات المعزولة المقابلة للطاقة  $E_{1s}$  أي :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{e^2}{r_{A_1}} \right) \psi_A(1) = E_{1s} \psi_A(1)$$

نجد :

$$\Delta \varepsilon_s = \varepsilon_s - 2E_{1s} = \frac{Q + A}{1 + s^2}$$

(20)

$$\Delta \varepsilon_t = \varepsilon_t - 2E_{1s} = \frac{Q - A}{1 - s^2}$$

حيث :

$$Q = \int \Psi_A^2(1) \Psi_B^2(2) \left[ \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_{B1}} - \frac{e^2}{r_{A2}} \right] d\tau + \frac{e^2}{R} \quad (21)$$

$$= - \int \Psi_A^2(1) \frac{e^2}{r_{B1}} d\tau_1 - \int \Psi_B^2(2) \frac{e^2}{r_{A2}} d\tau_2 +$$

$$\int \Psi_A^2(1) \frac{e^2}{r_{12}} \Psi_B^2(2) d\tau + \frac{e^2}{R}$$

يعين الحد الاول من هذه الصيغة القيمة المتوسطة للتفاعل الكولوني بين النواة B والالكترون 1 وتقابل كثافة الكترونية  $\rho_A(1) = -\Psi_A^2(1)$  وذلك عند إهمال الترابط الذي يسببه تناظر التوابع الموجية (13) و (14) وبالمثل يحدد التكامل الثاني التفاعل بين الالكترون 2 والنواة A ويكون هذان التكاملان متساويين عددياً • يحدد التكامل الثالث التفاعل بين الالكترونين، أما الحد الأخير فيمثل التدافع بين النواتين • يدعى التكامل Q بتكامل كولون •

تحدد طاقة التفاعل بالتكامل :

$$A = \int \Psi_A(1) \Psi_B(2) \left[ \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_{B1}} - \frac{e^2}{r_{A2}} \right] \Psi_A(2) \Psi_B(1) d\tau$$

$$= \frac{e^2}{R} + \int \Psi_A(1) \Psi_B(2) \frac{e^2}{r_{12}} \Psi_A(2) \Psi_B(1) d\tau -$$

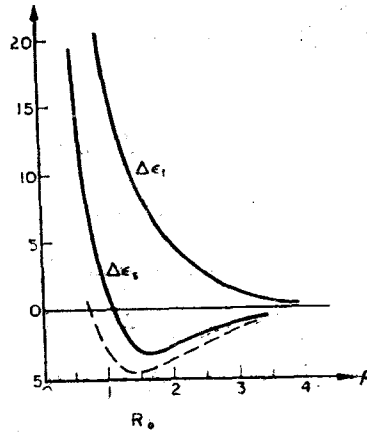
$$- s \int \Psi_A(1) \frac{e^2}{r_{B1}} \Psi_B(1) d\tau - s \int \Psi_B(2) \frac{e^2}{r_{A2}} \Psi_A(2) d\tau_2$$

(22)

ويدعى عادة بتكامل التبادل لأنه يقابل الجزء ، من التفاعل الكولوني بين الالكترونات والنوى ، المرتبط بالعلاقة بين الكترونات في أثناء حركتها ، وينشأ عن التناظر المضاد للتوابع الموجية وفقاً لمبدأ باولي .

يكون التكاملان  $A$  و  $Q$  تابعين للمسافة بين النواتين ونجد في الشكل أدناه الطاقات  $\Delta \epsilon_s$  و  $\Delta \epsilon_t$  مقبورة بالالكترتون فولطه كتابع للمسافة بين النواتين

$$\bullet \quad \epsilon = \frac{R}{a}$$



يبين هذا الشكل أنه عندما تقترب ذرتا الهيدروجين من بعضهما بعضاً في حالة السبن المفردة ( تعاكس في السبن ) تنخفض الطاقة لتبلغ نهايتها الصغرى عند  $R_0 = 1.51 a$  ، ترتفع بعدها الطاقة بشكل حاد مع اقتراب الذرتين نحو بعضهما بعضاً . أما عندما تقترب الذرتان من بعضهما بعضاً في حالة السبن الثلاثية ( اتفاق في جهة السبن ) تزايد الطاقة  $\Delta \epsilon_t$  وهذا يعني تدافعا بين الذرتين .

أي أن ذرتي الهيدروجين تشكل جزيئاً عندما تقتربان من بعضهما بعضاً في الحالة المفردة للسبن فقط ، ويجب أن تقابل مسافة التوازن  $R_0$  بين النواتين في الجزيئات المستقرة ، أصغر قيمة للطاقة  $\Delta \epsilon_s$  ، استطاع لندن وهيتلر باستخدام

نظرية الاضطراب التوصل الى القيمة  $R_0 = 1.51 a \simeq 8 \text{ nm}$  أما القيمة التجريبية

$$\bullet \quad R_0 = 7.395 \text{ nm}$$

أي أنه التوافق بين القيمتين رديء وهذا يعود الى مجال استخدام نظرية الاضطراب فهي جيدة من أجل  $R > R_0$  • ولكن الوصف الكيفي لسلوك التفاعل بين ذرات الهيدروجين في الحالة المفردة والحالة الثلاثية للسبن صحيح • أعطى استخدام طريقة التغيرات توافق أفضل بكثير مع القيم التجريبية ، فتوصل وانغ الى القيمة  $R_0 = 7.6 \text{ nm}$  •

تمرين : استخدم الاحداثيات القطعية واحسب كل من Q و A •

الجواب:

$$Q = \frac{e^2}{a\rho} e^{-2\rho} \left[ 1 + \frac{5}{8}\rho - \frac{3}{4}\rho^2 - \frac{1}{b}\rho^3 \right]$$

$$A = \frac{e^2}{a} \left\{ \frac{s^2}{\rho} \left( 1 + \frac{6}{5}(c + \ln \rho) \right) + \right. \\ \left. + e^{-2\rho} \left( \frac{11}{8} + \frac{103}{20}\rho + \frac{94}{15}\rho^2 + \frac{11}{15}\rho^3 \right) \right. \\ \left. + \frac{6M}{5\rho} (MEi(-4\rho) - 2sEi(-2\rho)) \right\}$$

حيث  $c = 0.57722$  هو ثابت أولر

$$M = e^s \left( 1 - \rho - \frac{\rho^2}{3} \right) \quad \text{و} \quad Ei(x) = - \int_{-x}^{\infty} (e^{-\xi} / \xi) d\xi$$

٣ - كمون مورس :

لندرس الآن الجزيئات ثنائية الذرة ولننظر الى طبيعة حلول المعادلة :

$$\left[ - \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(R_j) \right] w(R_j) = E w(R_j) \quad (23)$$

الممثلة لحركات النوى • فإذا كان للنواتين الكتلتان  $M_1$  و  $M_2$  وكان للشعاع الواصل بينهما  $(R)$  الاحداثيات القطبية  $R, \theta, \varphi$  تصبح معادلة الحركة النسبية لهما من الشكل :

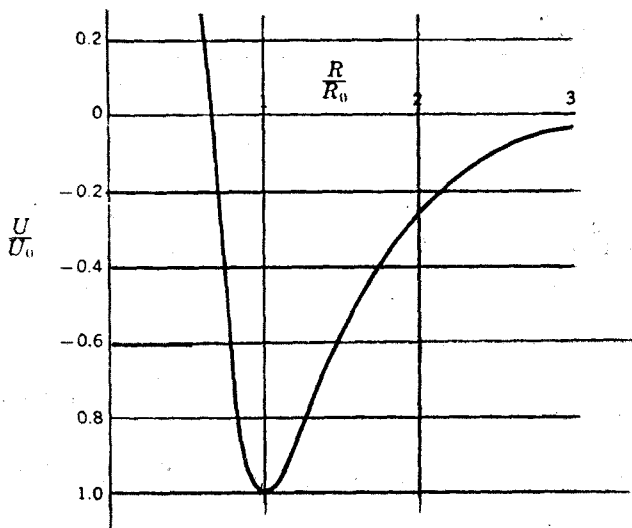
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(R) \right] w(R, \theta, \varphi) = E w(R, \theta, \varphi) \quad (42)$$

حيث  $M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  هي الكتلة المختزلة •

وكما وجدنا في حالة جزيء الهيدروجين ، يأخذ تابع الطاقة الكامنة ، لأخفض الحالات الالكترونية للجزيئات الحقيقية ثنائية الذرة ، شكلاً رياضياً بسيطاً يمكن تمثيله بدقة جيدة بواسطة تابع تحليلي يتضمن ثلاثة وسطاء تتعين قيمها بالمقارنة مع القيمة التجريبية ، ويأخذ الصيغة :

$$U(R) = U_0 \left( e^{-2(R-R_0)/a} - 2e^{-(R-R_0)/a} \right) \quad (25)$$

يدعى هذا التابع بتابع مورس أو بكمون مورس وله الشكل المبين أدناه •



كمون مورس ورسم من أجل  $a = \frac{R_0}{2}$

يتناهى التابع  $U$  الى الصفر عند المسافات الكبيرة ويأخذ قيمته الصغرى  $U_0 -$  عند  $R = R_0$  ويصبح كبيراً وموجباً عندما تقترب  $R$  من الصفر وذلك في حالة كون عرض مجال الجذب (a) أصغر من مسافة الاستقرار  $R_0$ . يظهر شكل التابع  $U$  المظهر العام المتوقع بالنسبة للجزيئات ثنائية الذرة • ولقد تم اختيار القيمة صفر للطاقة الكامنة عندما تكون الذرتان بعيدتين عن بعضهما بعضاً • يأخذ التابع  $U$  قيماً سالبة مع تناقص  $R$  بسبب قوة فان درفالس الجاذبة ، أما عندما تتناقص  $R$  أكثر من حد معين تحل قوة جذب أكبر من قوة فان درفالس وتدعى بجذب هيتلر - لندن التجاوبي ، ومع استمرار تناقص  $R$  تبدأ قوة التدافع بين النوى فيصبح التابع موجباً وكبيراً •

#### ٤ - دوران الجزيئات ثنائية الذرة واهتزازها :

يمكن فصل المتحولات في المعادلة (24) ونستطيع كتابة الحل بالشكل :

$$w(R, \theta, \varphi) = \frac{\chi(R)}{R} \cdot Y_{K M_k}(\theta, \varphi)$$

حيث  $K$  و  $M_k$  هما العددان الكوانتيان للعزم الزاوي في حالة جسيم وحيد ضمن حقل مركزي (l و m) ، وتأخذ معادلة الموضع الشكل :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} + W(R) \chi = E \chi \quad (26)$$

حيث

$$k = 0, 1, 2, \dots \text{ و } W(R) = U(R) + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2MR^2}$$

تمثل المعادلة (26) حركة جسيم كتلته  $M$  ضمن الكمون  $W(R)$  ، وتخضع

للشروط الحدي  $x=0$  ،  $R \rightarrow 0$  ، فإذا لم يكن العدد  $K$  كبيراً، يتشابه التابع  $W(R)$  مع التابع  $U(R)$  ، وفي هذه الحالة نهتم بصورة رئيسة بالاهتزازات ذات السعات الصغيرة حول النهاية الصغرى لذلك تشر التابع  $W$  حول تلك النهاية  $R_1$  والتي تأخذ القيمة  $R_0$  من أجل  $K=0$  ، أي :

$$W(R) = W_0 + \frac{1}{2} K_0 (R - R_1)^2 + b(R - R_1)^3 + c(R - R_1)^4 \dots \quad (27)$$

حيث أهملنا حدود المراتب العليا . فإذا أهملنا الحدين  $c$  و  $b$  أيضاً ، ومددنا المجال  $R$  الى  $\infty$  - عندها يكون للمعادلة (26) قيم ذاتية مماثلة للقيم الذاتية لهزاز توافقي مع اضافة ثابت هو  $w_0$  . وتشكل هذه القيم تقريباً جيداً من أجل قيم معتدلة للعدد الكواتي الاهتزازي  $\nu$  . ويمكن التوصل الى تقريب أفضل بادخال الحدين  $b$  و  $c$  في المعادلة (27) كمؤثرات اضطراب على الهزاز .

#### ٥ - سويات الطاقة :

إن القيم الذاتية للمعادلة (26) هي :

$$E = W_0 + \hbar \left( \frac{K_0}{M} \right)^{1/2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2 b^2}{MK_0^2} \left[ \frac{15}{4} \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] + \frac{3\hbar^3 c}{2MK_0^2} \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{4} \right] \quad (28)$$

حيث  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  و  $W_0$  ،  $K_0$  ،  $b$  ،  $c$  يمكن التعبير عنها

بدلالة سلاسل قوى من  $\hbar (K+1)$  ترتبط هذه الثوابت بوسطاء التابع  $U(R)$  فإذا كان للتابع  $U$  الصيغة (25) نجد :

$$R_1 = R_0 + \frac{\hbar^2 K(K+1) a^2}{2 M R_0^3 U_0} ;$$

$$b = -\frac{U_0}{a^3} ; \quad c = \frac{7 U_0}{12 a^4}$$

$$U_{W_0} = U_0 + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2 M R_0^2} - \frac{\hbar^4 K^2 (K+1)^2 a^2}{4 M^2 R_0^6 U_0}$$

$$K_0 = \frac{2 U_0}{a^2} - \frac{3 \hbar^2 K(K+1)}{M R_0^2 a^2} - \frac{a}{R_0} \left(1 - \frac{a}{R_0}\right)$$

لقد أبقينا من النشور حدوداً كافية من أجل قيم صحيحة للطاقة  $E$  من المرتبة الثانية في كل من  $\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$  و  $K(K+1)$ .

تشير المعادلة الأولى من المجموعة (29) إلى أن الجزئية تمتد بسبب الدوران، وتعطي المعادلة الثانية طاقة الاستقرار  $U_0$  مع طاقة الدوران محسوبة للمرتبة

الثانية أما الحد الأول فهو طاقة الدوران  $\frac{\hbar^2 K(K+1)}{2 I_0}$ ، حيث  $I_0 = M R_0^2$

هو عزم العطالة للجزئية حول محور معامد للمستقيم الواصل بين النواتين، وهي طاقة جسم صلب يدور حول المحور نفسه. أما المعادلة الثالثة فتعطي تغير المرونة بسبب الامتطاط.

يمكن نشر الحد الثاني في المعادلة (28) باستخدام صيغة  $K_0$  المعطاة بالعلاقة

(29) فنجد :

$$\hbar^2 \left( \frac{2 U_0}{M a^2} \right)^{1/2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \frac{3 \hbar^2 K (K+1)}{4 M R_0^2 U_0} \frac{a}{R_0} \left( 1 - \frac{a}{R_0} \right) \right]$$

ويعطي الحد الاخير في العلاقة (28) الطاقة الاهتزازية مقدرة حتى المرتبة الثانية.

$$\left( -\frac{15}{16} + \frac{7}{16} \right) \frac{\hbar^2}{M a^2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 = - \frac{\hbar^2}{2 M a^2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (30)$$

## ٦ - تأثير التماثل بين النواتين :

اذا كانت النواتان متماثلتين في جزيء ثنائي الذرة عندها يجب أن يكون التابع الموجي متناظراً بالنسبة لتبادل النواتين في الموضع والسبن اذا كان لهما سبين معدوم أو مساوٍ عدداً صحيحاً من  $\hbar$  ، كما يجب أن يكون التابع الموجي ذا تناظر مضاد اذا كان لهما سبين مساوٍ عدداً نصف فردي من  $\hbar$  . وتتحدد نوعية التابع الموجي النووي بالتابع  $Y_{KM_k}(\theta, \varphi)$  فتكون زوجية اذا كان  $K$  زوجياً ، وفردية اذا كان

$K$  فردياً . إن تبديل موضعي النواتين يكافئ تغيير اشارة شعاع موضعهما النسبي ( $R$ ) وهكذا تحدد الزوجية التناظر الفراغي للتابع الموجي ، فمن أجل نواتين لكل منهما سبين معدوم أو مساوٍ عدداً صحيحاً من  $\hbar$  يكون تابع السبن متناظراً من أجل قيم زوجية لـ  $K$  وذا تناظر مضاد من أجل قيم  $K$  الفردية ، أما في حالة نواتين لكل منهما سبين مساوٍ نصف عدد فردي من  $\hbar$  فيكون التابع الموجي للسبن ذا تناظر مضاد من أجل قيم زوجية لـ  $K$  ، ومتناظراً من أجل القيم الفردية لـ  $K$  . ففي حالة نواتين لكل منهما سبين قدره  $I\hbar$  تنقسم حالات السبن الكلية  $(2I+1)^2$  الى  $(I+1)(2I+1)$  حالة متناظرة و  $I(2I+1)$  حالة ذات تناظر مضاد . فمن أجل الغازات حيث التوازن الاحصائي تكون نسبة الجزيئات ذات العدد الزوجي من  $K$  الى الجزيئات ذات العدد الفردي من  $K$

مساوية  $\frac{I+1}{I}$  اذا كان  $I$  صفراً أو عدداً صحيحاً وتساوي  $\frac{I}{I+1}$  اذا كان  $I$  مساوياً نصف عدد فردي ، وهذا يؤدي الى شدة كثافة متناوبة في حزمة الطيف ( الدورانية ) للجزيئات أحادية الذرة وثنائيتها ، ونستطيع بهذا الأسلوب تحديد السبن والاحصائيات المطلوبة للنوى المدروسة .

## مسائل

١ - أوجد مستخدماً الكمون  $V(x) = V_0(1 - e^{-\mu x})^2$  سويات الطاقة الاهتزازية للجزيء .

٢ - أوجد سويات الطاقة الدورانية مستخدماً الكمون

$$V(\rho) = V_0 \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \right)$$

حيث  $r = \frac{\rho}{a}$  هي المسافة بين نواتي الجزيء .



يتضمن الجدول التالي جميع الجسيمات الأولية المشاهدة باستثناء جسيمات التجارب ، كما يلخص بعض خواصها الهامة

- ۲۲۸ -

| الميزونية |  | دلتا                          | لامبدا                | الميزونية            | كاون                  | بيون                 | اينيتا                | الميزونية             | ميون                  | الكترن               | نترينو        | نترينو        | الفوتون       |               |          |
|-----------|--|-------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|
|           |  | $\Delta^*$                    | $\bar{\Delta}^*$      | $\Lambda^0$          | $k^{\mp}$             | $k^0$                | $\pi^{\mp}$           | $\pi^0$               | $\eta$                | $\eta'$              | $\mu^-$       | $e^-$         | $\nu_\mu$     | $\nu_e$       | $\gamma$ |
|           |  | $\Delta^*$                    | $\bar{\Delta}^*$      | $\Lambda^0$          | $k^{\pm}$             | $k^0$                | $\pi^{\pm}$           | $\pi^0$               | $\eta$                | $\eta'$              | $\mu^+$       | $e^+$         | $\nu_\mu$     | $\nu_e$       | $\gamma$ |
|           |  | 0                             | -1                    | -1                   | $\pm 1$               | +1                   | 0                     | 0                     | 0                     | 0                    | 0             | 0             | 0             | 0             | 0        |
|           |  | -1,0,1,2                      | 0                     | 0                    | $\pm 1$               | 0                    | $\pm 1$               | 0                     | 0                     | 0                    | -1            | -1            | 0             | 0             | 0        |
|           |  | $\frac{3}{2}$                 | $\frac{-1}{2}$        | $\frac{-1}{2}$       | 0                     | 0                    | 0                     | 0                     | 0                     | 0                    | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1        |
|           |  | $6 \times 10^{-24}$           | $2.6 \times 10^{-10}$ | $1.2 \times 10^{-8}$ | $0.9 \times 10^{-10}$ | $2.6 \times 10^{-8}$ | $8.3 \times 10^{-17}$ | $7.7 \times 10^{-19}$ | $2.4 \times 10^{-21}$ | $2.2 \times 10^{-6}$ | $\infty$      | $\infty$      | $\infty$      | $\infty$      | $\infty$ |
|           |  | 1232                          | 115.6                 | 439.7                | 497.7                 | 139.6                | 135.0                 | 548.8                 | 957.6                 | 105.7                | 0.511         | 0             | 0             | 0             | 0        |
|           |  | $p + \pi ; p + \pi ; n + \pi$ | $p + \pi$             | $p + \pi$            | $p + \pi$             | $\mu + \nu$          | $\gamma + \gamma$     | $\gamma + \gamma$     | $\gamma + \pi + \pi$  | $e + \nu$            | مستقر         | مستقر         | مستقر         | مستقر         | مستقر    |

## المصطلحات

### — A —

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Adjoint operator      | مؤثر مرافق        |
| Angular momentum      | اندفاع زاوي       |
| Annihilation operator | مؤثر الافناء      |
| Antisymmetric         | تناظر عكسي (مضاد) |
| Approximation         | تقريب             |
| Associative           | تجميعي            |
| Asymptotic            | مقارب             |
| Average value         | قيمة وسطى         |
| Axial vector          | متجهة محورية      |
| Azimuthal angle       | زاوية سمتية       |

### — B —

|             |              |
|-------------|--------------|
| Bilinear    | ثنائي الخطية |
| Bound state | حالة مرتبطة  |

### — C —

|                          |              |
|--------------------------|--------------|
| Cononical transformation | تحويل قانوني |
| Centre of mass           | مركز الكتلة  |
| Centrel field            | حقل مركزي    |
| Cenrifugal force         | قوة نابذة    |
| Character                | مميز         |
| Classical                | كلاسيكي      |
| Class                    | صف           |

|                         |                  |
|-------------------------|------------------|
| Closed set              | مجموعة مغلقة     |
| Closure relation        | علاقة الاغلاق    |
| Collision               | تصادم            |
| Comute                  | يتبادل           |
| Complete                | تام              |
| Complex                 | عقدي             |
| Composition             | تركيب            |
| Continuous eigen values | قيم ذاتية مستمرة |
| Continuous spectrum     | طيف مستمر        |

— D —

|                            |                        |
|----------------------------|------------------------|
| Degeneracy                 | انطباق                 |
| Degrees of freedom         | درجات الحرية           |
| Density of state           | كثافة الحالات          |
| Diagenal                   | قطري                   |
| Differential cross section | المقطع الفعال التفاضلي |
| Dirac notations            | رموز ديراك             |
| Distribution function      | تابع التوزيع           |

— E —

|                       |                  |
|-----------------------|------------------|
| Eigen function        | تابع ذاتي        |
| Eigen value           | قيمة ذاتية       |
| Electromagnetic field | حقل كهرومغناطيسي |
| Electron spin         | سبين الالكترون   |
| Energy dencity        | كثافة الطاقة     |
| Energy flux           | تدفق الطاقة      |

|                     |                |
|---------------------|----------------|
| Energy states       | حالات الطاقة   |
| Equivalence         | تكافؤ          |
| Even function       | تابع زوجي      |
| Excitation          | إثارة          |
| Exclusion principle | مبدأ الاستبعاد |
| Expectation value   | قيمة متوقعة    |

— F —

|                       |                 |
|-----------------------|-----------------|
| Fine structure        | بنية دقيقة      |
| Forbidden transitions | انتقالات محظورة |
| Free particle         | جسيم حر         |

— G —

|                |                 |
|----------------|-----------------|
| Group          | زمرة            |
| Green function | تابع غرين       |
| Ground state   | الحالة الأساسية |

— H —

|                      |                                |
|----------------------|--------------------------------|
| Hamiltonian operator | مؤثر هاميلتون                  |
| Heisenberg picture   | صورة هايزنبرغ                  |
| Hermite polynomials  | كثيرات حدود هيرميت             |
| Hermitian operator   | مؤثر هرميتي                    |
| Hilbert space        | فضاء هيلبرت                    |
| Hyperfine structure  | البنية الناعمة ( فائقة الدقة ) |

— I —

|           |                    |
|-----------|--------------------|
| Ideal gas | غاز مثالي ( كامل ) |
|-----------|--------------------|

|                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| Imaginary matrix        | مصفوفة تخيلية         |
| Infinitesimal generator | مولد لامتناه في الصفر |
| Ingoing wave            | موجة قادمة            |
| Inner product           | جداء داخلي            |
| Interaction             | تفاعل                 |
| Internal energy         | طاقة داخلية           |
| Invariant               | صامد                  |
| Invariance              | صمود                  |

— K —

|                 |             |
|-----------------|-------------|
| Kinetic energy  | طاقة حركية  |
| Kronecker delta | دلتا كرونكر |

— L —

|                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| Laboratory system     | جملة المختبر       |
| Laguerre polynomials  | كثيرات حدود لاغير  |
| Legendre polynomials  | كثيرات حدود ليجندر |
| Linear transformation | تحويل خطي          |
| Linear operator       | مؤثر خطي           |
| Localized             | متوضع              |
| Lorentz equation      | معادلة لورنتز      |

— M —

|                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| Magnetic dipole         | ذو القطبين المغناطيسي     |
| Magnetic moment         | عزم مغناطيسي              |
| Magnetic resonance      | تجاوب مغناطيسي            |
| Magnetic susceptibility | طواعية مغناطيسية ( سماحية |

|             |               |
|-------------|---------------|
| Matrix      | مصفوفة        |
| Maximum     | قيمة عظمى     |
| Mean value  | القيمة الوسطى |
| Mixed state | حالة مختلطة   |
| Momentum    | اندفاع        |

— N —

|                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| Normal operator     | مؤثر نظامي        |
| Normalized function | تابع منظم (منتظم) |
| Normalization       | تنظيم - استنظام   |
| Null matrix         | مصفوفة تافهة      |

— O —

|                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| Observable               | قابل للملاحظة (الرصد)    |
| Operator                 | مؤثر                     |
| Ordered                  | مرتّب                    |
| Orbital angular momentum | اندفاع زاوي مداري        |
| Orthogonal               | متعامد                   |
| Orthonormal              | متعامد منظم              |
| Outward particle flux    | تدفق الجسيمات نحو الخارج |
| Orbit                    | مدار                     |
| Optical                  | ضوئي                     |
| Order of a group         | رتبة الزمرة              |

— P —

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| Para - hydrogen | بارا - هيدروجين |
| Parity          | زوجية           |

|                     |                 |
|---------------------|-----------------|
| Partial waves       | أمواج جزئية     |
| Permutation         | تبديل           |
| Period              | دور             |
| Permeability        | نفوذية          |
| Permittivity        | سماحية          |
| Perturbation theory | نظرية الاضطراب  |
| Phase shift         | الانزياح الطوري |
| Plane wave          | موجة مستوية     |
| Precession          | ترنج            |
| Probability         | احتمال          |
| Projection operator | مؤثر إسقاط      |
| Propagation vector  | شعاع الانتشار   |
| Pure state          | حالة صرفة       |

— Q —

|                   |              |
|-------------------|--------------|
| Quantum Mechanics | ميكانيك الكم |
| Quantum numbers   | اعداد كمومية |
| Quantization      | تكميم        |

— R —

|                                |                      |
|--------------------------------|----------------------|
| Recurisim relation             | علاقة تدرجية         |
| Reduced mass                   | كتلة مختزلة          |
| Reflection                     | انعكاس               |
| Relative coordinates           | احداثيات نسبية       |
| Relative momenta               | اندفاعات نسبية       |
| Relativistic quantum Mechanics | ميكانيك الكم النسبوي |

Representation :

تمثيل

Resonance :

استجاب

— S —

Scalar product

جداء سلمي

Scattering

تبثر

Scatterer

مبعثر

Selection rules

قواعد الانتقاء ( الاصطفاء )

Spherical waves

امواج كروية

Spectral theory

النظرية الطيفية

Splitting of spectral lines

انقسام الخطوط الطيفية

Symmetry

تناظر

— T —

Total

كلي

Trace

اثر

Transformation

تحويل

Transpose

منقول

— U — V — W

Uncertainty relation

علاقة الشك ( الارتياب )

Uniform

متجانس

Unitary

واحدى

Variational methods

طرائق التغيرات

Wave packet

سحابة موجية ( حزمة امواج )

Wave - particle duality

الازدواجية - موجة - جسيم

## - المراجع الأساسية -

- |                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1 — Quantum Mechanics                | A.S. Davydov 1976           |
| 2 — Quantum Mechanics                | L. I. Schiff 1968           |
| 3 — Quantum theory                   | D. Bohm 1954                |
| 4 — Quantum Mechanics                | A. Messiah 1974             |
| 5 — Quantum Mechanics                | L.D. London & Lifshits 1965 |
| 6 — Advanced Engineering Mathematics | C. R. Wylie JR. 1966        |
| 7 — Methods of theoretical physics   | Mors and Feshback 1943      |
| 8 — Principles of quantum Mechanics  | P. Dirac 1956               |
| 9 — Advanced quantum theory          | M. Scadron 1979             |
| 10 — Classical Groups of physics     | B. Wgbourne 1974            |
| 11 — Quantum Mechanics               | Arno Bohm 1986              |

## - الفهرس -

الصفحة

٣

١ - مقدمة

٥

### الفصل الأول - نظرية التمثيل

٧

١ - التمثيلات المختلفة لشعاع الحالة

١٥

٢ - التمثيلات المختلفة للمؤثرات

٢٢

٣ - تمثيل شرودينغر

٢٣

٤ - تمثيل هايزنبرغ

٢٥

٥ - تمثيل التفاعل

٢٦

٦ - المعادلة الكلاسيكية للحركة

٢٨

٧ - حركة جسيم مشحون ضمن حقل كهرومغناطيسي

٣٢

٨ - الانتقال الحدي من ميكانيك الكم الى الميكانيك الكلاسيكي

٣٤

٩ - التقريب شبه الكلاسيكي (WKB)

٣٨

١٠ - تطبيق طريقة التغيرات في الحسابات التقريبية

٤٣

### الفصل الثاني - النظرية النسبوية الكهومية لحركة جسيم ضمن حقل خارجي

٤٥

١ - الجسيمات الأولية في الميكانيك الكومي

٤٨

٢ - المعادلة النسبوية لجسيم معدوم السبن

٥٣

٣ - الجسيمات الحرة ذات السبن المعدوم

٥٩

٤ - التفاعل بين الجسيم عديم السبن والحقول الكهرومغناطيسية

٦٦

٥ - مسائل

٦٧

### الفصل الثالث - النظرية الكهومية للجمل المؤلفة من جسيمات متماثلة

٦٩

١ - معادلة شرودينغر لجملة مؤلفة من جسيمات متماثلة

٧٣

٢ - التوابع الموجبة المتناظرة وذات التناظر المضاد

٨٠

٣ - النظرية الابتدائية للحالة الأساسية لذرة ذات الكترونين

٨٨

٤ - الحالات المثارة لذرة الهليوم (اورشو - بارا)

٩٢

٥ - مسائل

## الفصل الرابع - التكميم الثاني لجمل البوزونات والفيرميونات

١ - التكميم الثاني للحقل الكهروطيسي في غياب الشحنات

الكهربائية

٢ - التكميم الثاني لحقل الميزونات

٣ - التكميم الثاني لجمل من الفيرميونات غير المتفاعلة

## الفصل الخامس - نظرية الانتقالات الكمومية

١ - نظرية الاضطراب التابع للزمن

٢ - اثار الذرة بقذفها بجسيم ثقيل

٣ - الكظم والفتح المفاجيء والاغلاق المفاجيء للتفاعل

٤ - احتمال الانتقال خلال واحدة الزمن

٥ - التفاعل بين الجمل الكمومية والاشعة الكهروطيسية

٦ - مسائل

## الفصل السادس - نظرية التبعثر

١ - مقدمة

٢ - النظرية الكلاسيكية للتبعثر

٣ - تعريف المقطع الفعال

٤ - توزيع المسارات الحرة

٥ - المقطع الفعال كتابع لزاوية التبعثر

٦ - المقطع الفعال التفاضلي

٧ - النظرية العامة للتبعثر

٨ - تقريب الانحرافات الصغيرة ( نظرية الاضطراب

الكلاسيكية)

٩ - المقطع الفعال في حالة انتقال الطاقة والاندفاع

١٠ - الحل الدقيق لمسألة التبعثر

١١ - استخدام المقاطع الفعالة في التحري عن قانون القوة

١٢ - التحويل من جملة مركز الكتلة الى جملة المختبر

|     |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|
| ١٦٤ | ١٣ - مناقشة النتائج                                            |
| ١٦٧ | <b>الفصل السابع - النظرية الكمومية للتبعثر</b>                 |
| ١٦٩ | ١ - التبعثر المرن لجسيمات معدومة السبين                        |
| ١٧٩ | ٢ - نظرية التبعثر المرن وفق تقريب بورن                         |
| ١٨٤ | ٣ - طريقة الأمواج الجزئية                                      |
| ١٩٢ | ٤ - التبعثر المرن للجسيمات البطيئة                             |
| ١٩٣ | <b>الفصل الثامن - الطرائق التقريبية في دراسة البنية النرية</b> |
| ١٩٥ | ١ - طريقة الحقل المركزي                                        |
| ١٩٧ | ٢ - دورية العناصر                                              |
| ١٩٨ | ٣ - نموذج توماس - فيزمي                                        |
| ٢٠٠ | ٤ - حساب الكمون                                                |
| ٢٠٢ | ٥ - حقول هارترتي المنسجمة                                      |
| ٢٠٤ | ٦ - تصحيح تقريب الحقل المركزي                                  |
| ٢٠٥ | ٧ - مسائل                                                      |
| ٢٠٩ | <b>الفصل التاسع - النظرية الكمومية للجزيئات</b>                |
| ٢١١ | ١ - نظرية التقريب الكظوم                                       |
| ٢١٤ | ٢ - جزيء الهيدروجين                                            |
| ٢٢١ | ٣ - كمون مورس                                                  |
| ٢٢٣ | ٤ - دوران واهتزاز الجزيئات ثنائية الذرة                        |
| ٢٢٤ | ٥ - مستويات الطاقة                                             |
| ٢٢٦ | ٦ - تأثير التماثل بين التواتين                                 |
| ٢٢٧ | ٧ - مسائل                                                      |
| ٢٢٨ | <b>ملحق الجسيمات الأولية</b>                                   |
| ٢٣٠ | <b>المصطلحات العلمية</b>                                       |
| ٢٣٧ | <b>المراجع</b>                                                 |
| ٢٣٨ | <b>الفهرس</b>                                                  |