الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الوحدة

١

حساب التفاضل

Differentiation

تكثر في ربوع فلسطين الشوارع والطرق الملتوية والخطرة في المناطق الجبلية، هل تعتقد أن تصميم هذه الشوارع في تلك المناطق مشابه لتصميمها في المناطق المستوية الأفقية؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حساب التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير، وتفسيره هندسياً وفيزيائياً.
٢. حساب المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام قواعد الاشتقاق.
٣. التعرف إلى المشتقات العليا للاقتران، وإجراء بعض التطبيقات عليها.
٤. إيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.
٥. التعرف إلى مشتقة الاقتران الأسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.
٦. إيجاد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.
٧. التعرف إلى قاعدة السلسلة، واستخدامها في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
٨. حساب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
٩. التعرف إلى المعنى الهندسي والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليهما.

١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)

نشاط ١: عائلة فلسطينية مكونة من: أم محمد وولديها التوأمين محمد وخالد كانت كتلة محمد قبل عشر سنوات ٣٢ كغم، وأصبحت اليوم ٦٢ كغم، أما كتلة خالد فكانت ٢٩ كغم، ولكنها اليوم ٥٢ كغم. ارتاحت أم محمد للتغير في كتلة محمد، بينما ذهبت بابنها خالد إلى الطبيب ... برأيك لماذا؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $\text{س}_١$ إلى $\text{س}_٢$ ، $\text{س}_١ \neq \text{س}_٢$ فإن:

- التغير في س يساوي $\text{س}_٢ - \text{س}_١$ ونرمز له بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .
- التغير في الاقتران ق(س) يساوي ق($\text{س}_٢$) – ق($\text{س}_١$) ويرمز له بالرمز Δص.
- متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$$= \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

ويمكن كتابته على الصورة $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$

حيث هـ = Δس ≠ ٠ ، ونسميه اقتران متوسط التغير عند $\text{س}_١$.

مثال ١ : إذا كان ص = ق(س) = $\text{س}^٣$ – ٥س + ٣ ، جد:

١) Δس عندما تتغير س من ⁻١ إلى ٢.

٢) التغير في ق(س) عندما تتغير س من ⁻١ إلى ٢.

٣) متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من ⁻١ إلى ٢.

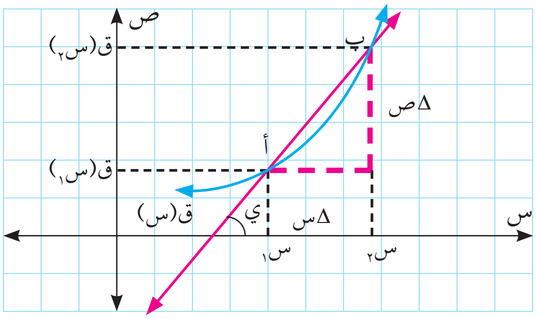
الحل :

١) بما أن $\text{س}_١$ = ⁻١ ، $\text{س}_٢$ = ٢ ، فإن Δس = $\text{س}_٢ - \text{س}_١$ = ٣

٢) Δص = ق($\text{س}_٢$) – ق($\text{س}_١$) = ق(٢) – ق(⁻١) = ١ – ٧ = ⁻٦

٣) متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{-٦}{٣} = -٢$

المعنى الهندسي لمتوسط التغير:



الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) والمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون

$$\text{ميله} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

تعريف:

متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $\text{س}_١$ إلى $\text{س}_٢$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين، $(\text{س}_١ ، \text{ق}(\text{س}_١))$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ق}(\text{س}_٢))$ ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).

مثال ٢ : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) = س + جا٢س في النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، $(\frac{\pi}{٢} ، \text{ق}(\frac{\pi}{٢}))$

١ احسب ميل المستقيم ل.

٢ جد قياس زاوية ميل المستقيم ل.

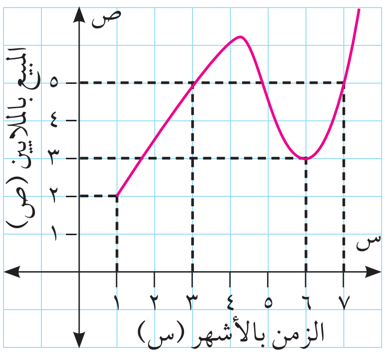
الحل :

١ ميل المستقيم ل = متوسط تغير ق(س) في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$$= \frac{\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) - \text{ق}(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{\frac{\pi}{٢} + \text{جا}(٢ \times \frac{\pi}{٢}) - (٠ + \text{جا}٠)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = ١$$

٢ ميل المستقيم ل = ظا ي = ١ ومنها قياس زاوية ميل المستقيم ل هو $\frac{\pi}{٤}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) في الشكل المجاور مبيع شركة سيارات حيث ص: المبيع بالملايين خلال س شهراً ، أراد عمر من الرسم إيجاد متوسط التغير في المبيع عندما تتغير س من ١ إلى ٣، فكتب



$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٣}{٢}$$

والآن أكمل: متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٧ يساوي ....

متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ يساوي........

مثال ٣: إذا كان ص = ق(س) = $\sqrt{٢س + ١}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ب يساوي $\frac{١}{٢}$. احسب قيمة ب حيث ب > ٠

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(ب) - ق(٠)}{ب - ٠} = \frac{\sqrt{٢ب + ١} - \sqrt{١}}{ب - ٠} = \frac{١}{٢}$$

أي أن $٢\sqrt{٢ب + ١} - ٢ = ب$

$٢\sqrt{٢ب + ١} = ب + ٢$

وبالتربيع، وحل المعادلة ينتج أن: ب = ٠ أو ب = ٤ (القيمة ب = ٠ تهمل ، لماذا؟)

نشاط ٣: ليكن ص = ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

لبيان أن متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

هو $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \begin{cases} ٢ + هـ & ، هـ < ٠ \\ ٢ & ، هـ > ٠ \end{cases}$ ، فإننا نجد

١ عندما هـ < ٠ : متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

$$= \frac{(١ + هـ)^٢ - (١)^٢}{هـ} = ٢ + هـ$$

٢ أكمل: عندما هـ $>$ ٠ فإن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = ...$

٣ اعتمد على ما سبق في إيجاد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

- عندما تتغير س من ١ إلى ٣
- عندما تتغير س من ١ إلى $^-$٢

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

إذا كانت ف = ق(ن) حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم، ن الزمن، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير ن من ن_1 إلى ن_2 هو $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}_2 - \text{ف}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \frac{\text{ق}(\text{ن}_2) - \text{ق}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

ويسمى السرعة المتوسطة في الفترة [ن_1 ، ن_2].

مثال ٤ : يتحرك جسم على خط مستقيم، بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة (و) بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = ن^2 + ٨ ن ، جد:

١ السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣].

٢ إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، أ] تساوي ١٣ م/ ث جد قيمة أ.

الحل :

١ ن_1 = ٠ ، ن_2 = ٣

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٣^2 + ٨ \times ٣ - ٠}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$ م/ ث

٢ السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(١)}{\text{أ} - ١} = \frac{\text{أ}^2 + ٨ \times \text{أ} - ٩}{\text{أ} - ١} = ١٣$

بالتبسيط ينتج أن: $\text{أ}^2 - ٥\text{أ} + ٤ = ٠$ ، وبحل المعادلة ينتج أن قيمة أ المطلوبة هي ٤

تمارين ١ - ١

١ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ + س^{٢}، جد:

أ التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥.

ب متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ إلى ١.

٢ إذا كان ق(س) = جتاس – ٣ جاس جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$، π].

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٦ - س & ، س < ٢ \\ س^{٢} + أس & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى أ ، أ > ٢ يساوي ٩، احسب قيمة أ.

٤ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣]، يساوي ٤، وكان ك(س) = س^{٢} + ٣ق(س)، جد متوسط التغير للاقتران ك(س) في نفس الفترة.

٥ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١ ، أ) ، (٣ ، ب) وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س^{٢} – ١ في الفترة [١ ، ٣].

٦ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن نقطة الانطلاق بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ق(ن) = ن^{٢} + ب ن وكانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٣] تساوي ٦ م/ ث. فما قيمة الثابت ب؟

٧ إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ. أثبت أن متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ن يساوي أ(ن + ٢) + ب

٨ أ إذا كان ق(س) = س + هـ$^{س+١}$ ، (هـ العدد النيبيري)

جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

ب إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = س + لـو$_{هـ}$س^{ن}، س > ٠ عندما تتغير س من ١ إلى هـ يساوي $\frac{٣ - هـ}{١ - هـ}$، احسب قيمة ن.

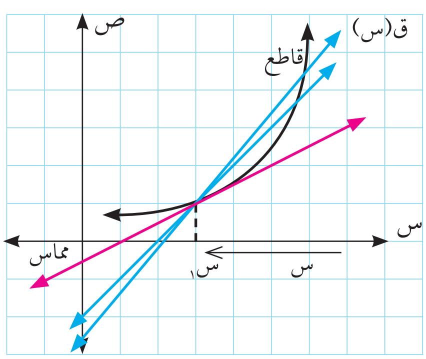
نشاط ١: أنشأ السيد مراد مصنعاً للألبان في إحدى المدن الفلسطينية، ليزود السوق الفلسطيني بمنتجات الألبان، بعد النقص الحاصل من مقاطعة بضائع الاحتلال، والذي يعتبر شكلاً من أشكال المقاومة السلمية، فإذا كان بهذا المصنع خطّان للإنتاج، بحيث ينتج الخطّ الأول عبوات من الألبان وَفق الاقتران ق(ن) = ن^{٢} + ن.

أما الخطّ الثاني فينتج عبوات وَفقَ الاقتران هـ(ن) = ن^{٢} + ٢ن حيث ن الزمن بالساعات.

- يكون معدل التغير في إنتاج الخطّ الأول من العبوات بعد ن ساعة يساوي قَ(ن) = ٢ن + ١
- أما معدل التغير في إنتاج الخطّ الثاني من العبوات فيساوي ....
- كمية إنتاج الخطّين من العبوات بدلالة ن يساوي ....
- معدل التغير في إنتاج المصنع بدلالة ن يساوي.................. ماذا تستنتج؟

تعلمت في الدرس السابق مفهوم متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى

س$_{١}$ + Δس وكان $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{١} + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\Delta \text{س}}$ ، Δس $\neq$ ٠



وإذا أخذنا $\lim\limits_{\Delta \text{س} \to ٠} \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ وكانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها معدل التغير للاقتران ق(س) عند س$_{١}$ أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = س$_{١}$ ونقول إن ق(س) قابل للاشتقاق عند س$_{١}$ (أي كلما اقتربت س من س$_{١}$ فإن متوسط تغير الاقتران (ميل القاطع) يؤول إلى معدل تغير الاقتران ق(س) (ميل المماس) عند س = س$_{١}$، انظر الشكل المجاور.

تعريف (١)*:

إذا كانت ص = ق(س) اقتراناً معرفاً عند $س_١$ في مجاله، وكانت $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(س_١+هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند $س_١$،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية: $قَ(س_١)$ أو $صَ\Big|_{س = س_١}$ أو $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = س_١}$

ويمكن كتابتها على النحو $قَ(س_١) = \underset{س \leftarrow س_١}{نهـا} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$

تعريف (٢):

ليكن الاقتران ق(س) معرفاً عندما س = $س_١$ فإن:

$قَ(س_١)^+ = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$ (مشتقة ق(س) من يمين العدد $س_١$)

$قَ(س_١)^- = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$ (مشتقة ق(س) من يسار العدد $س_١$)

وعندما $قَ(س_١)^+ = قَ(س_١)^-$ = ل، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $س_١$ وتكون $قَ(س_١)$ = ل

تعريف (٣):

- إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على [أ ، ب] فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة [أ ، ب].
- يكون ق(س) قابلاً للاشتقاق على]أ ، ب[إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة فيها.

فكّر وناقش:

مجال قَ(س) ⊆ مجال ق(س).

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ ح.

* لا يطلب من الطلبة إيجاد المشتقة بالتعريف.

مثال ١ : جد قَ(س) لكل مما يأتي: ① ق(س) = ٥ ② ق(س) = جتا π

الحل :
١ قَ(س) = ٠
٢ قَ(س) = ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = س فإن قَ(س) = ١

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان جـ ∈ ح فإن ك(س) = جـ ق(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = جـ قَ(س).

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد قَ(س)

الحل : قَ(س) = ٥ × ١ = ٥

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ك(س) = ق(س) ± هـ(س) قابل للاشتقاق، وتكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

ملاحظة:

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين.

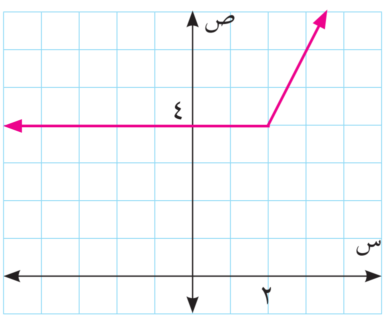
مثال ٣ : إذا كان قَ(١) = ٥ ، كَ(١) = ⁻٣ ، وكان ل(س) = ٢س + ق(س) − ٣ك(س) ، جد لَ(١).

الحل : لَ(س) = ٢ + قَ(س) − ٣ كَ(س)

لَ(١) = ٢ + قَ(١) − ٣ كَ(١)

وبالتعويض ينتج أن: لَ(١) = ١٦

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = { ٢س ، س ≤ ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ } ، جد قَ(٢)



الحل : ق(س) متصل على مجاله (تحقق من ذلك)، ومنها يكون

قَ(س) = { ٢ ، س < ٢ ؛ ٠ ، س > ٢ }

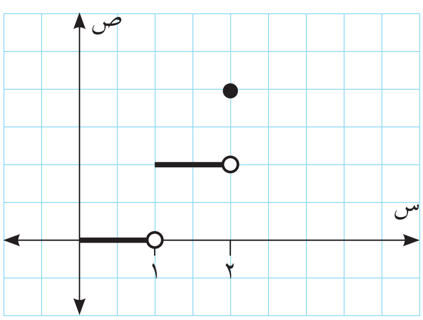
أما عند س = ٢ فنبحث بالمشتقة عن يمينها وعن يسارها

فتكون قَ(٢)⁺ = ٢ ، قَ(٢)⁻ = ٠ ، ومنها قَ(٢) غير موجودة. (لماذا؟)

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد قَ(س)

الحل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = { ٠ ، ٠ ≥ س > ١ ؛ ١ ، ١ ≥ س > ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ }



لاحظ أن ق(س) منفصلاً عند س = ١

قَ(س) = { ٠ ، ٠ < س > ١ ؛ ٠ ، ١ < س > ٢ }

قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٢) غير موجودة ..... (لماذا؟)

و قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

أتعلم:

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق، لا بد من بحث الاتصال أولاً.

قاعدة (٥):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ك(س) = ق(س) × هـ(س)

قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = (٥س − ١)(٢ − س) جد قَ(س)، ثم قَ($^{-}$١).

الحل :

قَ(س) = (٥س − ١) × ($^{-}$١) + (٥) (٢ − س)

ومنها قَ(س) = $^{-}$٥س + ١ + ١٠ − ٥س = $^{-}$١٠س + ١١

وتكون قَ($^{-}$١) = $^{-}$١٠ × $^{-}$١ + ١١ = ٢١

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س ك(س) جد قَ(٢) علماً بأن ق(٢) = $^{-}$٦ ، كَ(٢) = ٤

الحل :

قَ(س) = س × كَ(س) + ١ × ك(س)

قَ(٢) = ٢كَ(٢) + ك(٢) = ٨ + ك(٢)

لكن ق(٢) = ٢ × ك(٢) ، ومنها ك(٢) = $^{-}$٣

قَ(٢) = ٨ − ٣ = ٥

نظرية:

إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن قَ(س) = ن س$^{ن-١}$، ن ≠ ١ ، ن ∈ ص$^{+}$

مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س^{٣} – ٢س + ٥، جد قَ(س)، ثم قَ(–٢).

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} – ٢ ومنها قَ(–٢) = ٣(–٢)^{٢} – ٢ = ١٠

أتعلم:

إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق.

نظرية:

يكون ق قابلاً للاشتقاق عند س = س$_{١}$

إذا وفقط إذا كان ق(س) متصلاً عند س$_{١}$ و قَ(س$_{١}$)$^{+}$ = قَ(س$_{١}$)$^{-}$

مثال ٩ : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب} & \text{، س} \le ١ \\ \text{س}^{٣} + \text{س} & \text{، س} > ١ \end{cases} \text{،}$$

أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق على ح

الحل : نعلم أن ق(س) متصل عند س = ١ ..... (لماذا؟)

ومنها $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(١) أي أن أ + ب = ٢

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢أ س} & \text{، س} \le ١ \\ ٣\text{س}^{٢} + ١ & \text{، س} > ١ \end{cases} \text{،}$$

وكذلك قَ(١)$^{+}$ = قَ(١)$^{-}$ ومنها ٢أ = ٤

أي أن أ = ٢ ، ب = ٠

قاعدة (٦):

إذا كان $ك(س)$ ، $م(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ق(س) = \frac{ك(س)}{م(س)}$ ، $م(س) \neq ٠$

قابل للاشتقاق وتكون $ق\prime(س) = \frac{م(س) \times ك\prime(س) - ك(س) \times م\prime(س)}{(م(س))^٢}$

نتيجة:

إذا كان $ق(س) = س^ن$ ، فإن $ق\prime(س) = ن\, س^{ن-١}$ ، $ن \in ص$ ، $س \neq ٠$

مثال ١٠: إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س^٣} + \frac{س^٢}{س - ١}$ ، جد $ق\prime(-١)$.

الحل : $ق(س) = س^{-٣} + \frac{س^٢}{س - ١}$

$$ق\prime(س) = -٣ \times س^{-٤} + \frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢ \times ١}{(س - ١)^٢}$$

$$ق\prime(س) = \frac{-٣}{س^٤} + \frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢}{(س - ١)^٢}$$ ومنها $ق\prime(-١) = \frac{-٩}{٤}$ (تحقّق من ذلك)

مثال ١١: إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ - ٢}{س + ٣}$ ، $س \neq -٣$. جد قيمة/ قيم س التي تجعل $ق\prime(س) = \frac{-٣}{٤}$

الحل : $ق\prime(س) = \frac{(س + ٣) \times ٢س - (س^٢ - ٢) \times ١}{(س + ٣)^٢}$ بالتبسيط والاختصار، ينتج أن:

$ق\prime(س) = \frac{س^٢ + ٦س + ٢}{(س + ٣)^٢}$ ، لكن $ق\prime(س) = \frac{-٣}{٤}$

$$\frac{س^٢ + ٦س + ٢}{(س + ٣)^٢} = \frac{-٣}{٤}$$

وبالضرب التبادلي والاختصار، ينتج أن: $س = -١$ ، $س = -٥$

المشتقات العليا (Higher Derivatives)

إذا كان ص = ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} − ٢، جد قَ(س).

هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة لـ س؟ ولماذا؟

نسمي المشتقات التي تلي المشتقة الأولى بالمشتقات العليا.

وإذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى هي صَ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ(س) تمثل اقتراناً جديداً. وإذا كانت المشتقة الأولى قابلةً للاشتقاق، فإن مشتقتها $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$ تسمى المشتقة الثانية، ويرمز لها بالرمز صً أو قً(س) أو $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدى الصور الآتية:

ص$^{(ن)}$ أو $\frac{\text{د}^{ن}\text{ص}}{\text{د س}^{ن}}$ أو ق$^{(ن)}$(س)، حيث ن ∈ ص$^{+}$ ، ن > ٢

فكّر وناقش:

هل يوجد اختلاف بين كل من $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ و $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}$ ؟

مثال ١٢: إذا كان ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٣} − ١، جد ق$^{(٥)}$(س). ثم جد ق$^{(٤)}$(٢).

الحل :

قَ(س) = ٥س^{٤} + ١٢س^{٢} ، قً(س) = ٢٠س^{٣} + ٢٤س

ق$^{(٣)}$(س) = ٦٠س^{٢} + ٢٤ ، ق$^{(٤)}$(س) = ١٢٠س ، ق$^{(٥)}$(س) = ١٢٠

ق$^{(٤)}$(٢) = ١٢٠ × ٢ = ٢٤٠

نشاط ٤: إذا كان ق(س) كثير حدود، وكان ق(س) + قً(س) = ٢س^{٣} − ٣س ، فلإيجاد قَ(١) نجد:

أولاً قاعدة ق(س)، لاحظ أن ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة ..... (لماذا؟)

ومنه ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د والآن أكمل:

قً(س) = ...

ق(س) + قً(س) = ... = ٢س^{٣} − ٣س ومنها أ = ... ، ب = ... ، جـ = ... ، د = ...

ومنها ق(س) = ... ، قَ(س) = ... ، ومنها قَ(١) = ...

مثال١٣: إذا كان $ص = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أثبت أن: $س^{٢}ص'' + س\,ص' = ص$

الحل : $ص = \frac{١}{س}$ ، $ص' = \frac{-١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢}{س^{٣}}$

ومنها $س^{٢}ص'' + س\,ص' = س^{٢} \times \frac{٢}{س^{٣}} + س \times \frac{-١}{س^{٢}}$

$= \frac{٢}{س} - \frac{١}{س} = \frac{١}{س} = ص$ وهو المطلوب

تمارين ١ - ٢

١ جد $ق'(س)$ في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كلّ منها:

أ $ق(س) = س^{٥} - س^{٢} + جـ$ ، حيث جـ ثابت ، عندما $س = -١$

ب $ق(س) = (س^{٣} - ١)(١٢ + س)$ ، عندما $س = ٣$

جـ $ق(س) = \frac{س^{٢}}{٥ - س^{٢}}$ ، عندما $س = -٢$

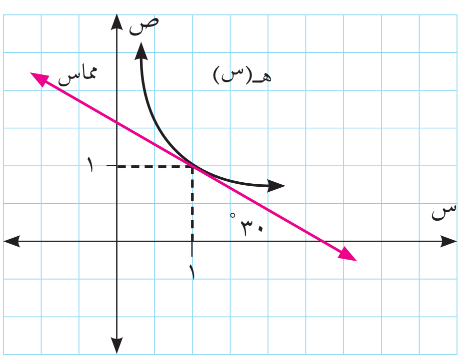
٢ بالاعتماد على المعطيات في الجدول المجاور، جد ما يأتي:

أ $(ق + هـ^{٢})'(١)$

ب $\left(س^{٢}\,ق - \frac{٣}{هـ}\right)'(١)$

ق(١)	ق'(١)	هـ(١)	هـ'(١)
٢	٣	-١	-٣

٣ إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س)، فجد $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(١)$



٤ أ إذا كانت ص = $\frac{س}{س + ١}$ ، س ≠ $^{-}$١ ، أثبت أن: ٢ص صَ + س صً = ٠

ب إذا كانت ص = أ س^{٥} + $\frac{٥}{س^{٤}}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: صً = $\frac{٢٠ص}{س^{٢}}$

٥ إذا كان ق(س) = (١ – س)(١ + س)(١ + س^{٢}) (١ + س^{٤}) (١ + س^{٨})، جد قَ(١).

٦ إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = [٢س]

أولاً: جد: أ قَ(٠) ب هـَ(٠)

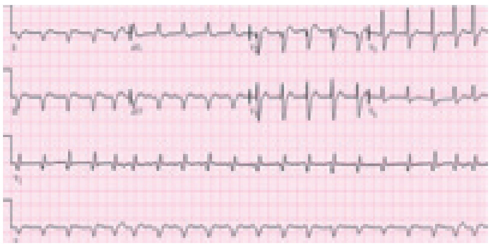
جـ (ق × هـ)(س) د (ق × هـ)َ(٠)

ثانياً: هل هذا يتناقض مع قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانيين؟ فسّر إجابتك.

٧ إذا كان ق(س) = س^{٤} + أ س^{٣} – ٣ ، جد قيمة أ ، حيث ق$^{(٣)}$(٢) = ١٨

٨ إذا كان ق(س) = س^{ن} ، ن ∋ ص ، وكان ق$^{(٣)}$(س) = أ س ، جد قيمة أ

١ – ٣ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)



نشاط ١: أظهر التقرير الصحي السنوي لفلسطين للعام ٢٠١٤ أن أمراض القلب والأوعية الدموية المسبب الأول لوفيات الفلسطينيين، وبنسبة بلغت ٢٩,٥٪ من مجموع الوفيات المبلّغ عنها.

١ هل سبق أن سمعت بحاجة مريض لتخطيط قلب؟ وهل شاهدت تخطيط قلب؟

٢ سبق ودرست الاقترانات المثلثية ، ما وجه الشبه بين تخطيط القلب ومنحنى بعض الاقترانات المثلثية؟

لقد تعرفت في الدروس السابقة اشتقاق الاقترانات كثيرة الحدود، والاقترانات النسبية، وستتعرف في هذا الدرس على قواعد خاصة لإيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري فإن قَ(س) = جتاس

مثال ١ : إذا كان ق(س) = س جاس ، جد قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل :

ق(س) = س جاس

قَ(س) = جاس + س جتاس

قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ١

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = جتاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س) = ⁻جاس

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جتاس}}$ ، جد ق$'$(س)

الحل : ق$'$(س) = $\frac{\text{جتاس} \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times {}^{-}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

= $\frac{٢\text{س جتاس} + \text{س}^{٢}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

قاعدة (٣):

- إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن ق$'$(س) = قا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن ق$'$(س) = $^{-}$قتا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = قاس ، فإن ق$'$(س) = قاس ظاس .
- إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن ق$'$(س) = $^{-}$قتاس ظتاس.

فكّر وناقش:

تحقّق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بدلالة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد الاشتقاق.

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، جد ق$'$(س) ، ق$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

الحل : ق$'$(س) = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس(ظاس + قاس)

ق$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = قا$\frac{\pi}{٤}\left(\text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ + $\sqrt{٢}$ (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قتاس − ٢ قتا^{٣}س

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $^{-}$قتاس ظتاس ظتاس + قتاس × $^{-}$قتا^{٢}س = $^{-}$قتاس ظتا^{٢}س − قتا^{٣}س

= $^{-}$قتاس ($^{-}$١ + قتا^{٢}س) − قتا^{٣}س

= قتاس − قتا^{٣}س − قتا^{٣}س = قتاس − ٢ قتا^{٣}س

تمارين ١ - ٣

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍ مما يأتي:

أ ص = ٢ جتاس − ٢ ظاس

ب ص = $\frac{١ - قاس}{١ + قاس}$

جـ ص = $\frac{س}{قتاس + ظتاس}$

د ص = س^{٢}قاس

٢ إذا كانت ص = ظاس ، س زاوية حادة أثبت أن: $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٢ص(١ + ص^{٢}).

٣ إذا كانت ص = $\frac{جاس}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: صً + $\frac{٢}{س}$ صَ + ص = ٠

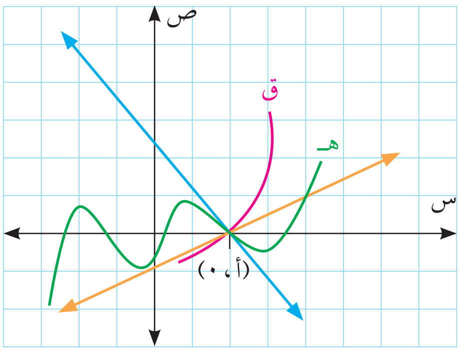
٤ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − جتاس ، س ∈ [−٢π ، ٢π] ،

جد مجموعة قيم س التي تجعل قً(س) = ٠

١ – ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)

أولاً: قاعدة لوبيتال

نشاط ١: قال أحمد لمعلم الرياضيات: اتفقت أنا وزملائي بأن نسمي النقطة (أ ، ٠) بالنقطة الذهبية قال له المعلم: لماذا يا أحمد، أجاب أحمد: لأنه إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين كثيري حدود يمران بالنقطة (أ ، ٠) فإن:



١) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} (ق(س) \pm هـ(س)) = ٠$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} (ق(س) \times هـ(س)) = ٠$

أما $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ بالتعويض المباشر $\dfrac{ق(أ)}{هـ(أ)} = \dfrac{٠}{٠}$

تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية إيجاد النهايات التي تكون على الصورة غير المعينة ($\dfrac{٠}{٠}$) ولاحظت أن كثيراً منها يحتاج إلى خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة لحساب قيمة بعض هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال:

إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة س = أ ، ل ∈ ح ، وكانت

$\dfrac{ق(أ)}{هـ(أ)} = \dfrac{٠}{٠}$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{قَ(س)}{هـَ(س)} = ل$ فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)} = ل$

البرهان: **(للمعرفة فقط)** بما أن ق(أ) = ٠ ، هـ(أ) = ٠

فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)} = \lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)} \times \dfrac{(س - أ)}{(س - أ)}$

$$= \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{(س} - \text{أ)}} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س} - \text{أ)}}{\text{هـ(س)} - \text{هـ(أ)}}$$

$$= \frac{\text{ق}'\text{(أ)}}{\text{هـ}'\text{(أ)}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(لماذا؟)}$$

ملاحظة:

سوف لا نتعرض لحالات لوبيتال الأخرى.

مثال ١ : جد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{\text{جا٠}}{\text{٠}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

فتكون $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{\text{١}} = \text{جتا ٠} = \text{١}$

نشاط ٢: استخدمت سعاد المشتقة الأولى في إيجاد قيمة $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١} - \text{جتاس}}{\text{س}}$ فكتبت:

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١} - \text{جتاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا ٠} - \text{جتاس}}{\text{س} - \text{٠}} = -\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا ٠}}{\text{س} - \text{٠}}$$

وهي على الصورة $-\left(\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٠)}}{\text{س} - \text{٠}}\right) = -\text{ق}'\text{(٠)} = \text{جا ٠} = \text{٠}$ ..... (لماذا؟)

وعند استخدام قاعدة لوبيتال في إيجاد قيمة النهاية

فإن $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١} - \text{جتاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

مثال ٢ : جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س} - \text{٢}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{\text{٢}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{٢} - \text{٢}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

ومنها $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س} - \text{٢}} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س}}{\text{١}} = \text{٤}$

ملاحظة:

عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت $\frac{\text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})} = \frac{\cdot}{\cdot}$

فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل على عدد حقيقي.

مثال ٣ : جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \cdot} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{١ - \text{جتا}\cdot}{\cdot^{٢}} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \cdot} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \cdot} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جا}\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot}$$

نطبق قاعدة لوبيتال مرةً أخرى

فتكون $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \cdot} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \cdot} \frac{\text{جتاس}}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق}'(٢) = ٥$ جد:

$$\lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(٢ - ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

الحل : نفرض $٢ - ٥\text{هـ} = \text{و}$ ، ومنها $\text{هـ} = \frac{٢ - \text{و}}{٥}$ ، وعندما $\text{هـ} \leftarrow \cdot$ فإن $\text{و} \leftarrow ٢$

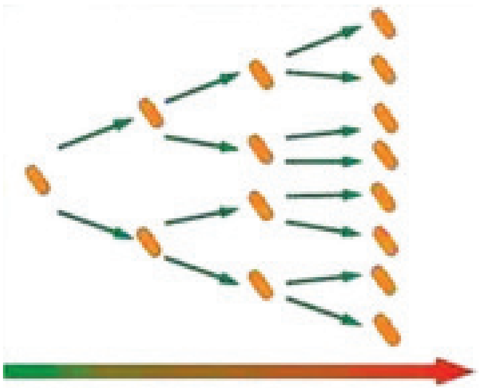
$$\lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(٢ - ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim\limits_{\text{و} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(\text{و}) - \text{ق}(٢)}{\frac{٢ - \text{و}}{٥}}$$

$$= -٥ \lim\limits_{\text{و} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(\text{و}) - \text{ق}(٢)}{\text{و}}$$

$$= -٥ \times \text{ق}'(٢) = -٥ \times ٥ = -٢٥$$

ثانياً: مشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي

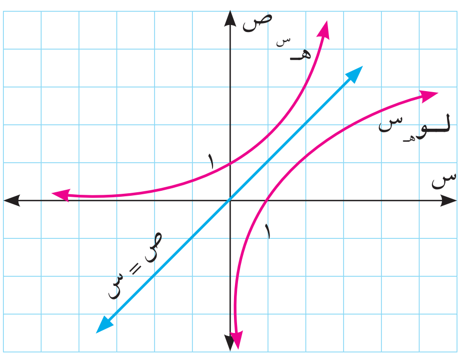


نشاط ٣: تعتبر البكتيريا من الكائنات المجهرية الدقيقة بدائية النواة، وواسعة الانتشار، نتعامل معها يومياً دون أن نراها وتعتبر من أوائل الكائنات الحية التي وجدت على الأرض.

هناك بعض أنواع البكتيريا تنشطر الخلية الواحدة فيها كل ٢٠ دقيقة إلى خليتين.

توصل العلماء إلى أن عدد البكتيريا في الساعة ن يساوي $٢^{٣ن}$.

بعد كم دقيقة سيكون عدد خلايا البكتيريا ١٠٧٣٧٤١٨٢٤ خلية؟



تعلمت سابقاً الاقتران الأسّي الذي يكتب على الصورة ق(س) = $أ^{س}$ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ والاقتران اللوغاريتمي على الصورة ل(س) = $لـو_{أ}$س ، س > ٠ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠

وسوف نقتصر دراستنا على الاقتران الأسّي الطبيعي ق(س) = $هـ^{س}$ ، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ق(س) = $لـو_{هـ}$س ، حيث هـ تسمى العدد النيبيري.

تعريف:

العدد النيبيري هو العدد الحقيقي، غير النسبي، الذي قيمته التقريبية هـ ≅ ٢,٧١٨٢٨١٨

ويحقق العلاقة الآتية: $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١$

ونورد بعض خصائص الاقترانين:

الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١) $\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}}$

٢) $\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}$

٣) $(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س ص}}$

٤) $\text{هـ}^{\text{٠}} = \text{١}$

٥) $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س} \text{ ، } \text{س} > \text{٠}$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح^+

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن لو}_{\text{هـ}}\text{س} \text{ ، } \text{س} > \text{٠}$

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$

قاعدة (١):

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، فإن $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س} \text{ ، } \text{ص} > \text{٠}$

قاعدة (٢):

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{قَ(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان (للمعرفة فقط):

$$\text{قَ(س)} = \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{\text{ق(س + و) − ق(س)}}{\text{و}} = \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}+\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}}$$

$$= \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}} = \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{و}} - \text{١})}{\text{و}}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(\text{هـ}^{\text{و}} - \text{١})}{\text{و}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{١} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{قتاس}$ ، فجد $\text{قَ}(\text{س})$.

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{قتاس ظتاس}$

قاعدة (٣):

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، س > ٠ ، فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

مثال ٥ : إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{١٠}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٥

الحل : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{١٠} = ١٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

ومنها يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٠ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١٠}{\text{س}}$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

مثال ٦ : بيّن باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأتي:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{١}{٢}$

الحل : ١) بالتعويض المباشر $\frac{\text{هـ}^{٠} - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١} = \text{هـ}^{٠} = ١$

٢ بالتعويض المباشر تكون $\frac{\text{لـو}_{\text{هـ}} ١}{١^{٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{١}{\text{س}}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}$

مثال ٧ : جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

١ $\text{ق(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}}$

٢ $\text{ع(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}$ حيث $\text{س} > ٠$

الحل :

١ $\text{قَ(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

٢ $\text{عَ(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} (\frac{١}{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س})$

تمارين ١ - ٤

١ احسب النهايات الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال:

أ $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ١} \frac{هـ^{س-١} - س}{لو_{هـ} س}$ ب $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٤س}{ظاس}$ جـ $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{س - جاس}{س^{٣}}$

٢ جد $\dfrac{د ص}{د س}$ في كلّ مما يأتي:

أ $ص = هـ^{س} جتاس$ ب $ص = لو_{هـ} \sqrt{س}$ ، $س > ٠$

جـ $ص = لو_{هـ} \sqrt{\dfrac{س^{٣}}{س^{٨}}}$ ، $س > ٠$ د $ص = (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$

٣ إذا كان $قَ(١) = ^{-}٢$ ، $ق(٣) = ^{-}٢$ ، $قَ(٣) = ٤$ جد قيمة النهايات الآتية:

أ $\displaystyle \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٣ + ٥هـ) - ق(٣)}{١٠هـ}$

ب $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ١}{ق(١) - ق(س)}$

٤ إذا كانت $ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ، فجد قيمة/ قيم س التي تجعل $صَ = ص$

٥ أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن: $\displaystyle \lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} (أ)^{ن-م}$ ، $أ \neq ٠$

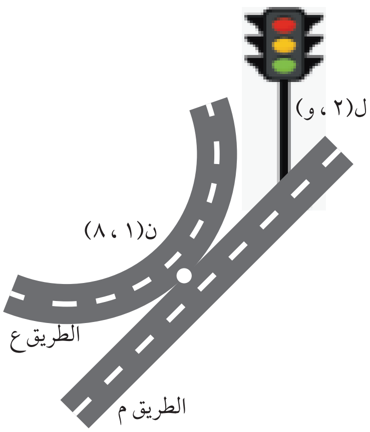
٦ جد $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ١} \frac{س ق(١) - ق(س)}{س - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال، علماً بأن $قَ(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٦$

٧ إذا كان $قَ(٢) = ٣$ ، $قً(٢) = ٥$ ، جد $\displaystyle \lim_{س \leftarrow ١} \frac{قَ(٢س) - قَ(٢)}{س - ١}$

أولاً: تطبيقات هندسية:

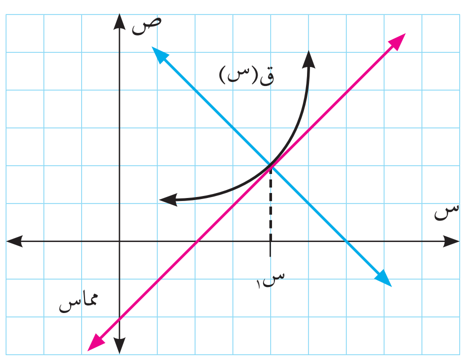
نشاط ١: يمثل الشكل المجاور طريقين م ، ع أحدهما مستقيم والآخر منحني، يلتقيان عند الموقع ن، والذي تمثله النقطة (١ ، ٨) في مستوى إحداثي متعامد، فإذا كانت معادلة الطريق ع هي:

ص = ٤ س^{٢} + ٤ س



١ جد معادلة الطريق م علماً بأن الطريقين متماسان عند النقطة ن.

٢ إذا كانت النقطة ل (٢ ، و) تمثل موقع إشارة ضوئية في مستوى الطريقين، فما قيمة (و) بحيث تقع الإشارة الضوئية على الطريق م؟



نلاحظ في الشكل المجاور أن معدل التغير للاقتران ق(س) (ميل المنحنى) عند س$_{١}$ هو ميل المماس المرسوم للمنحنى وتساوي قَ(س$_{١}$) ونسمي النقطة (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) نقطة التماس.

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة أ (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$))، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س)، ويساوي قَ(س$_{١}$) .

ويعرف العمودي على منحنى الاقتران، بأنه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٥س عند س = ١، ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة.

الحل : ميل المنحنى عند س = ١ يساوي قَ(١)

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٥ ومنها قَ(١) = ٨ = ميل المماس

لكن نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٦)

معادلة المماس هي: ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

أي: ص − ٦ = ٨(س − ١) ومنها ص = ٨س − ٢

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودي على المماس هي:

٨ص + س − ٤٩ = ٠ (تحقق من ذلك)

مثال ٢ : إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{٤}{س}$ ، س > ٠ ، يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠).

الحل : نفرض نقطة التماس أ(س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

ميل المماس = ظا ١٣٥ = −١ ، قَ(س) = $\frac{-٤}{س^{٢}}$

لكن ميل المنحنى عند س$_{١}$ = $\frac{-٤}{س_{١}^{٢}}$

ومنها −١ = $\frac{-٤}{س_{١}^{٢}}$

إذن س$_{١}$ = ٢ لأن س$_{١}$ > ٠

نقطة التماس هي (٢ ، ٢)، ومنها ميل العمودي = $\frac{-١}{-١}$ = ١

معادلة العمودي هي ص − ٢ = ١(س − ٢) ومنها ص = س

النقطة (٠ ، ٠) تقع على العمودي على المماس.

أي أن العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢}{هـ^س}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

الحل : قَ(س) = $\frac{٢س هـ^س - س^٢ هـ^س}{(هـ^س)^٢}$ ومنها يكون ميل المماس = قَ(١) = $\frac{١}{هـ}$ (لماذا ؟)

عندما $س_١$ = ١، فإن $ص_١$ = $\frac{١}{هـ}$ فتكون معادلة المماس هي:

ص - $\frac{١}{هـ}$ = $\frac{١}{هـ}$ (س - ١) ، ومنها هـ ص = س

مثال ٤ : إذا كان المستقيم ص = ⁻٣س + جـ يمس منحنى ق(س) = ⁻٢$س^٢$ + ٥س + ١

جد نقطة/ نقط التماس.

الحل : نفرض أن نقطة التماس ($س_١$ ، $ص_١$) ، قَ(س) = ⁻٤س + ٥

وبما أن ميل المماس = ميل المنحنى

إذن ⁻٣ = ⁻٤$س_١$ + ٥ ومنها $س_١$ = ٢

نقطة التماس = (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) (تحقق من ذلك)

مثال ٥ : إذا كان المستقيم ص = جـ س + ٥ يمس منحنى الاقتران ق(س) = أ $س^٣$ + ب $س^٢$

عند النقطة (⁻١ ، ⁻٣) جد قيم أ ، ب ، جـ

الحل : النقطة (⁻١ ، ⁻٣) تحقق معادلة المستقيم، ومنها ⁻٣ = جـ × ⁻١ + ٥

⁻٨ = ⁻جـ أي أن جـ = ٨ ومنها ص = ٨س + ٥

لكن النقطة (⁻١ ، ⁻٣) تحقق معادلة المنحنى

⁻٣ = أ × $(⁻١)^٣$ + ب × $(⁻١)^٢$ أي أن ⁻٣ = ⁻أ + ب ... (١)

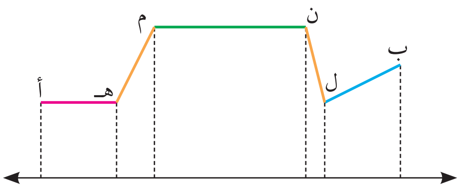
كما أن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (⁻١ ، ⁻٣)

ومنها $\left. ٣أس^٢ + ٢ب س \right|_{س=⁻١}$ = ٨ ومنها ٣أ - ٢ب = ٨ ... (٢)

وبحل المعادلتين ينتج أن: أ = ٢ ، ب = ⁻١

ثانياً: تطبيقات فيزيائية:

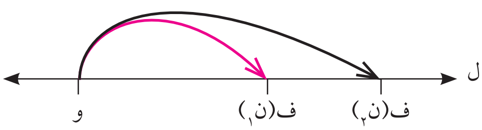
نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل المسار (الملون) بين مدينتين أ ، ب ، انتقلت سيارة من المدينة أ باتجاه المدينة ب، ثم عادت إلى المدينة أ. هل الزمن الذي تستغرقه السيارة في الإياب يتساوى مع الزمن الذي استغرقته في الذهاب؟



لتكن (و) نقطة على المستقيم ل وتحرك جسم عليه بحيث كانت ف تمثل بعد الجسم عن النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:

السرعة المتوسطة في الفترة $[\text{ن}_1 ، \text{ن}_2]$

تساوي $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$



تعريف:

السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع(ن) $= \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{ف}'$

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د}^2 \text{ف}}{\text{د ن}^2} = \text{ف}''$

مثال ٦ : تحرك جسم على خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة $\text{ف} = \text{ن}^3 - 9\text{ن}^2 + 7$ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، جد:

١ السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

٢ تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل : $\text{ف} = \text{ن}^3 - 9\text{ن}^2 + 7$

١ السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(3) - \text{ف}(1)}{3 - 1} = \frac{-47 - -1}{3 - 1} = -23$ م/ ث.

٢ ف̅(ن) = ع(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن

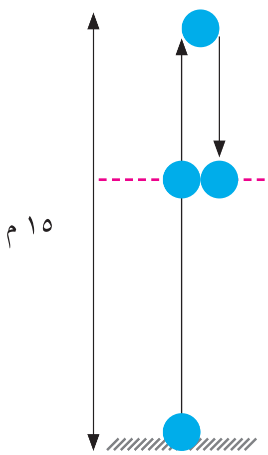
يعكس الجسم اتجاه حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع

أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها ٣ن^{٢} − ١٨ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن − ٦) = ٠ ، ن = ٠، ن = ٦ ثوانٍ

يعكس الجسم اتجاه حركته بعد ٦ ثوانٍ

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ت(٦) = ٦ × ٦ − ١٨ = ١٨ م/ ث^{٢}

مثال ٧ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢} ، حيث ف: ارتفاع الجسم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد:



١ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥ م من سطح الأرض.

٣ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى.

الحل : ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢}

١ عندما يصل الجسم أقصى ارتفاع فإن ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن = ٠ أي أن ن = ٢ ثانية

∴ أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥ × ٤ = ٢٠م

٢ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥م فإن ف(ن) = ١٥

⇐ ٢٠ن − ٥ن^{٢} = ١٥ ⇐ ٥ن^{٢} − ٢٠ن + ١٥ = ٠

⇐ (ن − ١)(ن − ٣) = ٠ ومنها ن = ١ ، ن = ٣

يكون الجسم على ارتفاع ١٥م عندما:

- ن = ١ أي أن ع(١) = ٢٠ − ١٠ × ١ = ١٠ م/ ث، الجسم صاعد.
- ن = ٣ ، أي أن ع(٣) = ٢٠ − ١٠ × ٣ = $^{-}$١٠ م/ ث، (ماذا تعني السرعة السالبة؟)

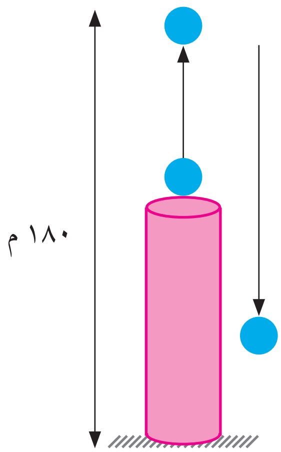
٣ عندما ن = ٤ ثانية يكون الجسم على ارتفاع : ف(٤) = ٢٠ × ٤ − ٥ × ١٦ = ٠م ،

أي يكون الجسم قد وصل سطح الأرض،

وتكون المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤) = ٤٠م

مثال ٨ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث إن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن٢ ، جد:



١ ارتفاع البرج علماً بان أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ١٨٠م

٢ سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

٣ المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني السبعة الأولى.

الحل :

١ عند أقصى ارتفاع عن قمة البرج تكون ع(ن) = ٠

ع(ن) = فَ(ن) = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ومنها ن = ٣

أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ف (٣) = ٤٥م

لكن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ١٨٠م ، ارتفاع البرج = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥م

٢ يرتطم الجسم بالأرض عندما تكون ف(ن) = −١٣٥م (فسّر).

بحل المعادلة ينتج أن ن = ٩ ومنها السرعة ٣٠ − ١٠ × ٩ = −٦٠ م/ ث

٣ عندما ن = ٧ الإزاحة = −٣٥ أي أن المسافة المقطوعة = ١٢٥م (لماذا؟)

تمارين ١ - ٥

١ جد النقطة/ النقط على منحنى ق(س) = $س^٢$ -٢س + ١ التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم س + ٢ص - ٤ = صفر

٢ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ٣ - $ظا^٢$س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٣ إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ عندما س = ٢ يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب ، جـ على الترتيب، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل.

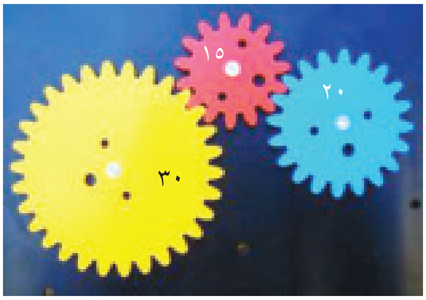
٤ إذا كان المستقيم س = أ - ٦ص يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، جد قيم أ.

٥ قذف جسم رأسياً إلى أعلى وَفق العلاقة ف = ٤٠ن - ٥$ن^٢$، حيث ف ارتفاعه بالأمتار، ن بالثواني. جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م.

٦ من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ٣٠ن - ٥$ن^٢$،
جد:
أ أقصى ارتفاع يصله الجسم.
ب سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على مستوى سطح العمارة التي ترتفع ٤٠ م.

١ - ٦ قاعدة السلسلة (Chain Rule)

نشاط ١: تعتبر التروس (المسننات) من الأجزاء الميكانيكية المهمة التي تسهم في نقل الحركة وهي عبارة عن عجلات دائرية لها بروزات تتشابك مع أسنان الترس الآخر، وهكذا لتشكل سلسلة من التروس بأحجام مختلفة، تسهم في تسهيل الحركة المطلوبة ونقلها.



بالاعتماد على الشكل المجاور.

١) حدد اتجاه الحركة للترسين: الأحمر والأصفر علماً بأن حركة الأزرق باتجاه عقارب الساعة.

٢) إذا فرضنا أن الترس الأزرق يدور س مرة، فإن الأحمر (ح) يدور $\frac{٤}{٣}$ س مرة (ح = $\frac{٤}{٣}$ س)، أما الأصفر (ص) فيدور $\frac{١}{٢}$ ح مرة (ص = $\frac{٢}{٣}$ س).
(لاحظ عدد المسننات في كل ترس). هل يمكن إيجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$؟

تواجهنا بعض الاقترانات مثل ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، والمطلوب إيجاد قَ(س)، وهنا نلجأ إلى فك المقدار أولاً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الضرب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبةً وتعقيداً كلما كان الأسّ كبيراً، وهذا يدعو إلى البحث عن طريقة أسهل لإيجاد مشتقة هذه الاقترانات. فمثلاً، إذا كان ص = ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، وفرضنا أن ع = هـ(س) = س^{٢} + ١ فيكون ص = ق(ع) = ع^{٣}

أتذكر:

(ق ∘ هـ) (س) = ق(هـ(س)) هو الاقتران المركب من ق ، هـ

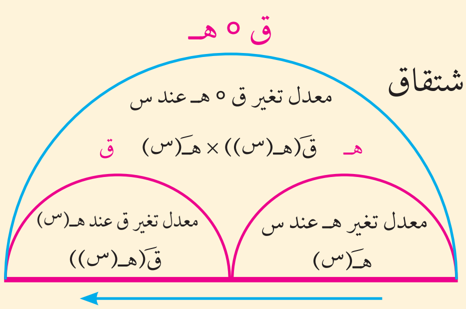
قاعدة السلسلة:

إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق و ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) ، مدى هـ ⊇ مجال ق

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

أي أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)



مثال ١ : إذا كان ق(س) = س^{٣} + س ، هـ(س) = س^{٢} ، جد:

١ (ق ∘ هـ)َ (س) ٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢)

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} + ١ ، هـَ(س) = ٢س

١ (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ(س^{٢}) × ٢س = (٣(س^{٢})^{٢} + ١) × ٢س = ٦س^{٥} + ٢س

٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢) = هـَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= هـَ(٤) × هـَ(٢) =٨ × ٤ = ٣٢

مثال ٢ : إذا كان ص = ع^{٢} − ٥ع ، ع = $\frac{١}{س + ١}$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٠

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$ = (٢ع − ٥) × $\frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$ ، عندما س = ٠ فإن ع = ١

ومنها $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠، ع = ١}$ = (٢ − ٥) × $\frac{-١}{(٠ + ١)^{٢}}$ = −٣ × −١ = ٣

مثال ٣: جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة ص = س ق(س^{٢} + ١) عندما س = ٢، علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق، قَ(٥) = ٣ ، ق(٥) = −١

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = ١ × ق(س^{٢} + ١) + س × ٢س قَ(س^{٢} + ١)

ميل المماس = $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٢}$ = ق(٥) + ٨ قَ(٥) = −١ + ٢٤ = ٢٣

ميل المماس = ٢٣ ، نقطة التماس هي (٢ ، −٢) . (لماذا؟)

معادلة المماس هي ص − −٢ = ٢٣(س − ٢) ومنها ص = ٢٣س − ٤٨

نتيجة:

إذا كان ص = (هـ(س))^{ن} ، وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق ، ن ∋ ص

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ن(هـ(س))$^{ن-١}$ × هـَ(س)

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = $\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥}$ ، جد قَ(٢)

الحل : قَ(س) = ٥$\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٤}$ × $\frac{(س - ١) × ١ - ١(س + ١)}{(س - ١)^{٢}}$

= ٥$\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٤}$ × $\frac{-٢}{(س - ١)^{٢}}$

قَ(٢) = ٥ × ٣^{٤} × −٢ = −٨١٠

نشاط ٢ : إذا كان ص = (قاس + ظاس)^{ن} فإن:

$\frac{د ص}{د س}$ = ن(قاس + ظاس)$^{ن-١}$ (..........)

= ن قاس(قاس + ظاس)$^{ن-١}$ (قاس + ظاس) = ...

ملاحظة:

يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال ٥ : إذا كان ص = (ع^{٢} + $\frac{٦٤}{ع}$) ، ع = س^{٣} ، س = أ م + ٤ ، جد أ بحيث $\left.\frac{د ص}{د م}\right|_{س = ٢}$ = ٩٠

الحل : $\frac{د ص}{د م}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$ × $\frac{د س}{د م}$

أي أن $\frac{د ص}{د م}$ = (٢ع − $\frac{٦٤}{ع^{٢}}$) × ٣س^{٢} × أ ، عندما س = ٢ ، فإن ع = ٨

ومنها $\left.\frac{د ص}{د م}\right|_{س = ٢}$ = (١٦ − ١) × ١٢ × أ = ٩٠ ومنها أ = $\frac{١}{٢}$

قاعدة:

إذا كان ك(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

- ق(س) = $\text{هـ}^{\text{ك(س)}}$ قابل للاشتقاق، وتكون قَ(س) = كَ(س) $\text{هـ}^{\text{ك(س)}}$
- م(س) = لــو$_{\text{هـ}}$ ك(س) ، ك(س) > ٠ قابل للاشتقاق وتكون مَ(س) = $\frac{\text{كَ(س)}}{\text{ك(س)}}$

مثال ٦ :

١ إذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$ فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

٢ إذا كان ص = لــو$_{\text{هـ}}$ س^{٢} ، فبيّن أن: صً . $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = $^{-}$٢

الحل :

١ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $^{-}$جاس $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ومنها $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}}$ = $^{-}$١ $\text{هـ}^{٠}$ = $^{-}$١

٢ ص = ٢لــو$_{\text{هـ}}$ س ومنها صَ = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، صً = $\frac{^{-}٢}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{^{-}٢}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ (لماذا؟)

أي أن صً . $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = $^{-}$٢

تمارين ١ - ٦

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١ لكل مما يأتي:

أ) $ص = (س^٢ + س + ١)^{-٣}$

ب) $ص = س^٢ قا \frac{\pi}{س}$ ، $س \neq ٠$

جـ) $ص = ٥ع^٢ - ٧$، $ع = \frac{١}{س^٢ + ١}$

د) $ص = ظا\left(\frac{\pi}{س}\right) + جتا^٢(\pi س)$ ، $س \neq ٠$

هـ) $ص = (لــو_{هـ} س)^٣$ ، $س > ٠$

٢ إذا كان $ق(س) = \frac{لــو_{هـ}(م(س))}{٢س}$ ، وكان $م(١) = هـ^٢$ ، $مَ(١) = ٢هـ$ ، فجد $قَ(١)$.

٣ جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = هـ^{س^٢+س}$

ب) $ع(س) = لــو_{هـ}(س^٣ - ٣س^٢)$ ، $س > ٣$

٤ إذا كان $ق(س) = س^٢م(س^٢ + ١)$ اعتمد على الجدول المجاور في إيجاد $قً(١)$.

م(٢)	مَ(٢)	مً(٢)
٥	-١	١

٥ إذا كان $ص = ق^٣(س) - ق(س^٣)$، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٢

علماً بأن $ق(٢) = ١$ ، $قَ(٢) = -٢$ ، $قَ(٨) = ٢$.

٦ إذا كان $ص = ن^٢ + ٥ن$ وكانت $\left.\frac{د ن}{د س}\right|_{ن=١} = ٢$ ، جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ن=١}$.

٧ إذا كان $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = جتاس$ ، $س \neq ٠$ ، أثبت أن: $(ق \circ هـ)َ(س) = جا^٣س قا^٢س$.

٨ جد: أ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س + هـ) - ظا ٢س}{هـ}$

ب) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + ٣هـ) - ق(١ - ٣هـ)}{١٠ هـ}$ ، علماً بأن $قَ(١) = -٢$

١ - ٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

نشاط ١: شب حريق في إحدى البنايات، وهرعت قوات الدفاع المدني للمشاركة في إطفاء الحريق وإنقاذ المواطنين، فاستخدم أحد رجال الإطفاء سلّماً طوله ٢٠ متراً للوصول إلى أحد شبابيك البناية، ولكن السلّم بدأ بالتزحلق بحيث يبتعد أسفل السلّم عن البناية بشكلٍ أفقيٍّ.

تلاحظ من الشكل أن العلاقةَ بين س ، ص هي $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠$

ما اتجاه سير أعلى السلّم ؟ وهل يمكنك إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ بناءً على ما تعلمته سابقاً؟

يمكنك كتابة العلاقة السابقة على الصورة $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$ ، واستخدام قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة العلاقة.

سبق لك إيجاد مشتقة الاقتران ص = ق(س) عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة س)، ولكن في العلاقة $س^{٢} + ٥ص^{٢} = س ص - ٣$ ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقةً ضمنيةً، ونجد $\frac{د ص}{د س}$ بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ضمن قواعد الاشتقاق.

مثال ١ : إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٤س - ص$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، ثم جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١)

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

$٢س + ٢ص ص' = ٤ - ص'$

$٢ص ص' + ص' = ٤ - ٢س$ (تجميع الحدود التي تحوي صَ على جهة واحدة)

$ص'(٢ص + ١) = ٤ - ٢س$ (إخراج عامل مشترك صَ من الطرف الأيمن)

$\Leftarrow ص' = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ١}$ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١ ، ١) = \frac{٤ - ٢}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢ : إذا كان ٣ص = جاس جتا٢ص ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س

٣صَ = جتاس جتا٢ص + جاس × − ٢ جا٢ص × صَ

٣صَ + ٢ جاس × جا٢ص × صَ = جتاس جتا٢ص

ومنها صَ = $\frac{\text{جتاس × جتا٢ص}}{\text{٣ + ٢ جاس × جا٢ص}}$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة (س + ص)^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥ ، ص > ٠ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم س + ص = ٢

الحل : بالتعويض بدل س + ص بالعدد ٢ في معادلة المنحنى ينتج أن: ٢ ^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥

إذن ص = ١ ، ومنها نقطة التقاطع هي(١ ، ١)

لكن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ١)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س فينتج ٣(س + ص)^{٢} (١ + صَ) − ٦ص صَ = ٠

وبتعويض النقطة (١ ، ١) ينتج أن: ٣(١ + ١)^{٢} (١ + صَ) − ٦ صَ = ٠ ومنها صَ = −٢

ميل المماس = −٢ وتكون معادلة المماس هي: ص = −٢س + ٣

مثال ٤ : إذا كانت ص = ع^{٣} + ١ ، س^{٢}ع = ع^{٢} − ٢ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، عندما ع = ٢ ، س > ٠

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$

لإيجاد $\frac{د ع}{د س}$ نشتق العلاقة س^{٢}ع = ع^{٢} − ٢ ضمنياً بالنسبة إلى س وينتج

س^{٢} $\frac{د ع}{د س}$ + ٢س ع = ٢ع $\frac{د ع}{د س}$

ومنها $\frac{دع}{دس}$ (س^{٢} − ٢ع) = −٢س ع

أي أن: $\frac{دع}{دس} = \frac{-٢س ع}{س^{٢} - ٢ع}$

وبما أن: $\frac{دص}{دع} = ٣ع^{٢}$ فإن $\frac{دص}{دس} = ٣ع^{٢} \times \frac{-٢س ع}{(س^{٢} - ٢ع)} = \frac{-٦س ع^{٣}}{س^{٢} - ٢ع}$

عندما ع = ٢ ، س = ١ (لماذا)

$$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = ١} = ١٦$$

قاعدة:

إذا كانت ص = س$^{\frac{م}{ن}}$ ، م ، ن ∈ ص ، م ≠ ن ، ن ≠ ٠ ، فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{م}{ن}$ س$^{\frac{م}{ن} - ١}$

نتيجة:

إذا كان ق(س) = (هـ(س))^{ن} ، ن ∈ ح

وكان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن قَ(س) = ن (هـ(س))$^{ن-١}$ × هـَ(س)

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = (س^{٣} + ٥س − ٢)$^{\frac{٣}{٤}}$ ، جد قَ(٢)

الحل : قَ(س) = $\frac{٣}{٤}$ (س^{٣} + ٥س − ٢)$^{-\frac{١}{٤}}$ × (٣س^{٢} + ٥)

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣س^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{س^{٣} + ٥س - ٢}}$$

$$قَ(٢) = \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣ \times ٢^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{٢^{٣} + ٥ \times ٢ - ٢}}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{١٧}{٢} = \frac{٥١}{٨}$$

مثال ٦ : احسب $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : بالتعويض المباشر تكون $\dfrac{\sqrt[٣]{١ + ٧} - ٢}{١ - ١} = \dfrac{٠}{٠}$ وبتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{\frac{١}{٣}(س + ٧)^{\frac{-٢}{٣}}}{١} = \frac{١}{١٢} \quad ..... \quad (لماذا؟)$$

مثال ٧ : جد النقط على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $ص + ٢س = ٥$

الحل : ميل المماس = ميل المستقيم الموازي له = $^{-}٢$ (لماذا؟)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س : $\dfrac{١}{٢\sqrt{س}} + \dfrac{صَ}{٢\sqrt{ص}} = ٠$ (لماذا)

ومنها $صَ = \dfrac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

لكن $\sqrt{ص} = ٣ - \sqrt{س}$

ومنها $صَ = \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{\sqrt{س}} = ^{-}٢$

أي أن: $٣\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ١ \Leftarrow س = ١$ ومنها $ص = ٤$

أي أن: النقطة المطلوبة هي (١ ، ٤).

نشاط ٢: إذا كان $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥س ص$ ، س ، ص $\neq$ ٠

١ بضرب طرفي المعادلة بالمقدار (س ص) ينتج ٢ص +٣س = ٥س^{٢}ص^{٢}

٢ نشتق طرفي المعادلة ضمنياً: ....

٣ $\frac{د ص}{د س}$ ....

٤ $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(١ ، ١)}$ تساوي ....

٥ هل يمكن إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (٢ ، ٣)؟ ..... (لماذا؟)

نشاط ٣: إذا كانت ص = $\frac{(س + ١)^{٥} (٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

لإيجاد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فيصبح:

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} \frac{(س + ١)^{٥} (٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$$

وبتطبيق قوانين اللوغاريتمات تصبح:

$$لو_{هـ} ص = ٥لو_{هـ}(س + ١) + ٤لو_{هـ}(٢ + س) - ٣لو_{هـ}(س^{٢} + ١)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تكون $\frac{د ص}{د س}$ = ...

ومنها $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$ = ...

تمارين ١ - ٧

١ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يأتي :

أ $\text{س}^{٣} + \text{س ص} + ٢\text{ص}^{٢} = ٥$

ب $\text{ص} = \sqrt[٥]{١ - \text{س}^{٢}} + ٣$

جـ $\text{ص} = \text{جا}(\text{س} + \text{ص})$

د $\frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{س}} = ٢$

٢ جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ ، عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥$

٣ يتحرك جسم على خط مستقيم وَفق العلاقة $\text{ف}^{٢} = \text{أن}^{٢} + ٢٤$ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد قيمة أ الموجبة. علماً بأن سرعته بعد ٢ ثانية تساوي ١ م/ ث.

٤ إذا كانت $\text{ف} = \text{أجا}(٢\text{ن} + \text{م})$، $\text{أ} \neq ٠$ هي معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم، حيث أ ، م عددان ثابتان، أثبت أن: $\text{ت} = {}^{-}٤\text{ف}$ عددياً. ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني.

٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطة $({}^{-}٢ ، ٠)$ يمس منحنى العلاقة $٤\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤$، جد نقطة/ نقط التماس.

٦ إذا كان $\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{ص}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة $(-١ ، ١)$.

٧ إذا كانت $\text{س}^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س ص})$ ، س ، ص > ٠ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة (١ ، هـ).

٨ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكانت $\text{ص} = (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}} \times (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}}$

أثبت أن : $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{م}\left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}} + \frac{\text{هـ}'}{\text{هـ}}\right)(\text{س})$ ، حيث $\text{م} \neq ٠$ ، ق(س) ، هـ(س) $\neq ٠$

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي:

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٣ ، ٧] يساوي ⁻٥، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١ ، ٧]؟

أ) ٢ ب) ١ جـ) ⁻١ د) ⁻٢

٢) إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، ⁻١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$؟

أ) ⁻١ ب) $\frac{⁻١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣) إذا كان ق(س) = جتا٢س، فما قيمة قً(س) + ٦ق(س) ؟

أ) جتا٢س ب) جا٢س جـ) ٢جتا٢س د) ٢جا٢س

٤) إذا كان ق($\sqrt{٢س + ١}$) = $س^٣$ + ٢ وكان ق قابلاً للاشتقاق، فما قيمة قَ(٣) ؟

أ) ١٦ ب) ٢٩ جـ) ٤٨ د) ١٤٤

٥) إذا كان $س^٢$ − س ص + $ص^٢$ = ٣، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ⁻١) ؟

أ) ⁻٢ ب) ⁻١ جـ) ١ د) ٢

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ &، س \neq ٥ \\ ١٠س &، س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة قَ(٥) ؟

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ١٠ د) غير موجودة

٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم وَفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن
ف: المسافة بالأمتار، ن : الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ ث، فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

أ) ⁻٨ م/ث^٢ ب) ٨م / ث^٢ جـ) ١٢ م / ث^٢ د) ⁻١٢م/ ث^٢

٨ إذا كان $ق'(س) = \frac{١}{١ + س^٢}$ ، هـ(س) = ظاس ، فما قيمة (ق ٥ هـ)' (س) ؟

أ) $قا^٢س$ ب) $جتا^٢س$ جـ) ١ د) $قا^٢س ظا^٢س$

٩ إذا كانت $ق(س) = (س^٢ + ٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة $ق''(١)$ ؟

أ) $\frac{١١}{١٨}$ ب) $\frac{٤}{٩}$ جـ) $\frac{١٥}{١٨}$ د) $\frac{١}{٢}$

١٠ إذا كانت س = جتاص ، ص ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ) $\frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ ب) $\frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ جـ) $\frac{-س}{\sqrt{١ - س^٢}}$ د) $\frac{س}{\sqrt{١ - س^٢}}$

١١ إذا كان (ق ٥ هـ)' (٣) = ١٥ ، وكان ق(س) = $س^٢ - ٩$ ، هـ'(٣) = ٥ ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ) ٠ ب) ١,٥ جـ) ٢ د) ٣

١٢ أي الاقترانات الآتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله؟

أ) ق(س) = [س - ٢] ب) ق(س) = |س - ٢| - |س|

جـ) ق(س) = $\sqrt{س^٢ + ٢س + ١}$ د) ق(س) = [س + ٢] - [س]

٢ إذا كان ق'(١) = -٢ ، ق(٣) = -٢ ، ق'(٣) = ٤ ، جد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١ + ٩هـ) - ق(١)}{\sqrt{١ + هـ} - ١}$

٣ جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) = (س + ١)$هـ^{س^٢ - س}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٤ إذا كان ق(٢) = ٣ ، ق'(٢) = -١ ، جد $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س^٢ + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^٢ - ١}$.

٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{٤س} - ١}{ظاس}$ ب $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{س^٢} - هـ^{س}}{٢س}$

جـ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٢س - جاس}{٢س}$ د $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتاس}{س جاس}$

٦ إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ق(س – ١)} &، \text{س} \geq ١ \\ \text{ق(س)} &، \text{س} < ١ \end{cases}$ ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٣ جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٠ ، ٣]

٧ إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - ٢}{\text{س} - ١} = ٣$، ق متصلاً على ح.

جد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}\text{ق(س)} - \text{ق(١)}}{\text{س} - ١}$

٨ يقف أحمد ونزار على سطح بناية، أفلت أحمد كرةً من السكون وَفق العلاقة $\text{ف}_{١}\text{(ن)} = ٥\text{ن}^{٢}$، وفي اللحظة نفسها، رمى نزار كرةً أخرى عمودياً إلى أسفل وَفق العلاقة $\text{ف}_{٢}\text{(ن)} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$، فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض؟
(ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

٩ إذا كان ق(س) = أجاس ، هـ(س) = $\frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ فجد قيمة أ بحيث $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\frac{\pi}{٦}) = ٠$ ، أ ≠ ٠

١٠ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [٢ - \text{س}] + \text{س}^{٢} &، ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ \frac{٢}{\text{س} + ١} &، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ ،

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

١١ يتحرك جسم على خط مستقيم وَفق العلاقة ف = ٢(هـ$^{٢\text{ن}}$ – هـ$^{-٢\text{ن}}$)، بيّن أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ف عددياً. (ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

١٢ إذا كان ق(س) = جا^{٣}س – جتا^{٣}س ، جد $\text{ق}''(\frac{\pi}{٤})$.

١٣ جد مجموعة قيم س التي تكون عندها ق$'$(س) = ٠ في كل مما يأتي:

أ ق(س) = $(\text{س} - ٢)^{٣}(٢\text{س} + ٣)^{٤}$، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = جاس (١ + جتاس) ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

١٤ جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ ص = ق(س) = $\frac{س هـ^{٦س}}{جاس}$ ، جاس ≠ ٠

ب ص = ق(س) = $\frac{س لــوهـ س}{جتاس}$ ، حيث س > ٠ ، جتاس ≠ ٠

١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن) حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)؟

١٦ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ موازياً للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

١٧ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد متوسط التغير جبريا وهندسيا			
استخدم قاعدة لوبيتال في ايجاد المشتقات			
أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها			
أجد مشتقة اقترانات ليست كثيرة حدود			
أوظف قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني في ايجاد مشتقة اقترانات			

الوحدة

٢

تطبيقات التفاضل

Differentiation Applications

ما سبب انهيار بعض السدود؟

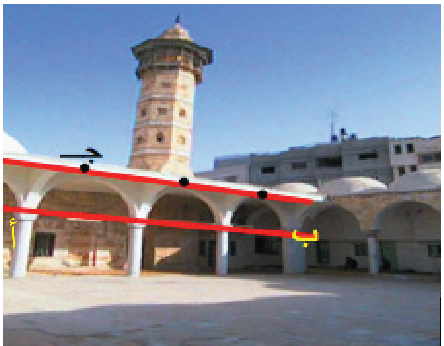
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
٢. التعرف إلى نظرية القيمة المتوسطة، ونظرية رول، وبعض التطبيقات عليها.
٣. إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
٤. إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
٥. تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
٦. توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.

٢ - ١ نظريتا رول والقيمة المتوسطة (Rolle's Theorem)

أولاً: نظرية رول*

نشاط ١: الشكل المجاور يمثل جزءاً من الأقواس التي تزين المسجد العمري الكبير بغزة حيث الخط أ ب يمثل خطاً أفقياً يصل بين نهايات الأعمدة.
ما ميل الخط الأفقي أ ب ، وما ميل الخط الأفقي المار بالنقطة (جـ)؟ وما قيمة قَ(جـ)؟



المسجد العمري الكبير

نظرية رول*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ) = ٠

مثال ١: بيّن أن الاقتران ق(س) = س^{٢} – س – ٦ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠ ، ١]. ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل:

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ١]
ق(س) متصل في الفترة [٠ ، ١] وقابل للاشتقاق في الفترة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود
ق(٠) = –٦ ، ق(١) = –٦ ، ومنها ق(٠) = ق(١)
تحققت شروط نظرية رول
إذن يوجد على الأقل جـ ∈]٠ ، ١[بحيث قَ(جـ) = ٠

٢ نجد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية:
قَ(س) = ٢س – ١ ومنها قَ(جـ) = ٢جـ – ١ = ٠
جـ = $\frac{١}{٢}$ ∈]٠ ، ١[

* ميشيل رول : هو عالم رياضيات فرنسي اشتهر بوضعه مبرهنة رول (١٦٩١)

مثال ٢ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]
حيث أ > ٠ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]
فإن ق(أ) = ق(π) ومنها جتا٢أ + ٢جاأ = ١ (لماذا؟)
إذن $^{-}$٢جا^{٢}أ + ٢جاأ = ٠ ..... (لماذا؟)
٢جاأ(جاأ − ١) = ٠ ومنها إما جاأ = ٠ فتكون أ = ٠ ، π (مرفوضة)
أو (جاأ − ١) = ٠ ومنها جاأ = ١ فتكون أ = $\frac{\pi}{٢}$

مثال ٣ : ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ \text{ ، } ^{-}٤ \le \text{س} < ^{-}١ \\ \text{س}^{٢} - ٧ \text{ ، } ^{-}١ \le \text{س} \le ١ \end{cases}$
في الفترة [$^{-}$٤ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت).

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [$^{-}$٤ ، ١]

١) ق(س) متصل في [$^{-}$٤ ، $^{-}$١[لأنه كثير حدود
ق(س) متصل في]$^{-}$١ ، ١] لأنه كثير حدود
لكن ق(س) غير متصل عند س = $^{-}$١ ..... (لماذا؟)
ومنها فإن ق(س) غير متصل على [$^{-}$٤ ، ١]

٢) ق$'$(س) = $\begin{cases} ١ \text{ ، } ^{-}٤ < \text{س} < ^{-}١ \\ ٢\text{س} \text{ ، } ^{-}١ < \text{س} < ١ \end{cases}$ ،
ق$'$($^{-}$١) غير موجودة (لماذا؟)
إذن ق(س) غير قابل للاشتقاق على]$^{-}$٤ ، ١[

٣) ق($^{-}$٤) = ق(١) = $^{-}$٦

لم تتحقق شروط نظرية رول على [$^{-}$٤ ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث ق$'$(جـ) = ٠ فإنه:
عندما $^{-}$٤ < س < $^{-}$١ تكون ق$'$(س) ≠ ٠ ، لا يوجد جـ في هذه الفترة
عندما $^{-}$١ < س < ١ فإن ٢جـ = ٠ ، أي أن جـ = ٠ ∈]$^{-}$١ ، ١[
هل يتعارض هذا مع نظرية رول ؟ ..... (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^٢ - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$ ، س ∈ [⁻١ ، ب] يحقق شروط نظرية رول في [⁻١ ، ب]، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠، فجد الثابتين أ ، ب

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [⁻١ ، ب] فإن:

ق(س) متصل في [⁻١ ، ب] ومنها فإن ب < ٣، ..... (لماذا؟)

وبالتالي ق(س) = (س − ٢)(س + أ) = س^٢ + أس − ٢س − ٢أ ، س ≠ ٣ (لماذا؟)

وبما أن ق(ب) = ق(⁻١) فان ب^٢ − ٢ب + أب = ٣ − أ .... (١) (لماذا؟)

لكن قَ(س) = ٢س + أ − ٢ ، س ∈]⁻١ ، ب[

وبما أن جـ = ٠ فإن قَ(٠) = ٠ ومنها أ = ٢ (لماذا؟)

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) نحصل على أن قيمة ب = ١

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، جـ] بحيث قً(س) موجودة في]أ ، جـ[،
وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)، حيث أ < ب < جـ.
أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∈]أ ، جـ[بحيث قً(د) = ٠

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [أ ، ب]
وحيث أن قً(س) موجودة في]أ ، جـ[فإن:
ق(س) متصل على [أ ، ب] و قابل للاشتقاق على]أ ، ب[، ق(أ) = ق(ب)
∴ تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ$_١$ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ$_١$) = ٠

٢ نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [ب ، جـ]
ق(س) متصل على [ب ، جـ] وقابل للاشتقاق على]ب ، جـ[، ق(ب) = ق(جـ)
∴ تحققت شروط نظرية رول ، ومنها يوجد جـ$_٢$ ∈]ب ، جـ[بحيث قَ(جـ$_٢$) = ٠
لاحظ أن جـ$_١$ < جـ$_٢$ ..... (لماذا؟)

٣ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران قَ(س) في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$]
قَ(س) متصل في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$] وقابل للاشتقاق في]جـ$_١$ ، جـ$_٢$[(لماذا؟)
قَ(جـ$_١$) = قَ(جـ$_٢$)

∴ تحققت شروط نظرية رول على قَ(س) في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$]
يوجد على الأقل عدد مثل د ∈]جـ$_١$ ، جـ$_٢$[⊆] أ ، جـ [بحيث قً(د) = ٠

ثانياً: نظرية القيمة المتوسطة (Mean Value Theorem) *

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب] .

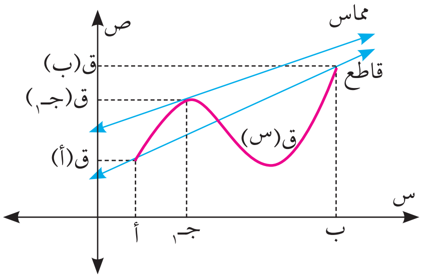
هل ق(س) متصل في [أ ، ب]، وقابل للاشتقاق في]أ ، ب[؟

ما ميل القاطع الواصل بين النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب))؟

هل ميل مماس المنحنى عند س = جـ$_{١}$

يساوي ميل القاطع؟ ..... (لماذا؟)

هل يوجد في الشكل مماسات أخرى لها نفس الميل؟



نظرية القيمة المتوسطة:

إذا كان ق(س) اقترانا متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[

فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∋]أ ، ب[بحيث أن قَ(جـ) = $\frac{\text{ق(ب) − ق(أ)}}{\text{ب − أ}}$

مثال ٦ : بيّن أن الاقتران ق(س) = س^{٣} + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−٢ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [−٢ ، ١]

الاقتران ق(س) متصل في الفترة [−٢ ، ١]، وقابل للاشتقاق في الفترة]−٢ ، ١[لأنه كثير حدود، إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [−٢ ، ١]

يوجد على الأقل جـ ∋]−٢ ، ١[بحيث قَ(جـ) = $\frac{\text{ق(١) − ق(−٢)}}{\text{١ − (−٢)}}$

ومنها ٣جـ^{٢} = $\frac{\text{٢ − (−٧)}}{\text{٣}}$ أي أن جـ = ± ١

ومنها جـ = −١ ∋]−٢ ، ١[.....(لماذا ؟)

* تنسب نظرية القيمة المتوسطة للرياضي الفرنسي لاغرانج Lagrange (١٧٣٦-١٨١٣)

مثال ٧ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{أس + ب} & \text{، } ^{-}٣ \le \text{س} \le ^{-}١ \\ ^{-}\text{س}^{٢} & \text{، } ^{-}١ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [$^{-}$٣ ، ٥] ، جد الثابتين أ ، ب.

الحل : بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [$^{-}$٣ ، ٥] فإن:

ق(س) متصل على [$^{-}$٣ ، ٥] ومنه ق(س) متصل عند س = $^{-}$١

أي أن: $^{-}$أ + ب = $^{-}$١ .... (١)

كما أن: ق(س) قابل للاشتقاق في]$^{-}$٣ ، ٥[:

ق$'$(س) = $\begin{cases} \text{أ} & \text{، } ^{-}٣ < \text{س} \le ^{-}١ \\ ^{-}٢\text{س} & \text{، } ^{-}١ < \text{س} < ٥ \end{cases}$ ، أ ، ب ∈ ح

وتكون ق$'$($^{-}$١)$^{+}$ = ق$'$($^{-}$١)$^{-}$ وينتج أن: أ = ٢

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) ينتج أن ب = ١

مثال ٨ : ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠ ، ١]، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).

الحل : نكتب الاقتران ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = $\begin{cases} ١ & \text{، } ٠ \le \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢ & \text{، } \frac{١}{٢} \le \text{س} < ١ \\ ٣ & \text{، } \text{س} = ١ \end{cases}$ ومنها ق$'$(س) = $\begin{cases} ٠ & \text{، } ٠ < \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٠ & \text{، } \frac{١}{٢} < \text{س} < ١ \end{cases}$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [٠ ، ١]

ق(س) غير متصل في [٠ ، ١] (لماذا؟)

ق(س) غير قابل للاشتقاق في]٠ ، ١[(لماذا؟)

لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠ ، ١] ، وهذا لا يعني عدم وجود قيم لـ جـ، وللبحث عن قيمة / قيم جـ (إن وجدت)

ق$'$(جـ) = $\frac{\text{ق(١)} - \text{ق(٠)}}{١ - ٠}$ = ٢

لكن ق$'$(س) ≠ ٢ ، ∀ س ∈]٠ ، ١[، وبالتالي لا يوجد جـ ∈]٠ ، ١[

تمارين ٢ - ١

١ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت).

أ ق(س) = $\sqrt{٤س - س^٢}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

ب ق(س) = $س^٢ - ٢س - ٣$ ، س ∈ [$^-١$ ، ٣]

جـ ق(س) = لــوهـ (س + $\frac{١}{س}$)، س ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

د ق(س) = جا٢س + ٢جاس، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

٢ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت):

أ ق(س) = $س^٣ - س^٢ - س - ١$ ، س ∈ [$^-١$ ، ٢]

ب ق(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ، س ∈ [$^-١$ ، ٢]

جـ ق(س) = $\sqrt{س}$ + ٢س ، س ∈ [٤ ، ٩]

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^٢ + ٢س & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٣ - ب س + ١٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ،٣] ، جد قيم الثابتين أ ، ب، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

٤ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [أ ، ب] ، س > صفر، فأثبت باستخدم نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الاقل جـ ∈] أ ، ب [، بحيث $جـ^٢$ = أ . ب

٥ إذا كان ع(س) = (ق ∘ هـ)(س)، س ∈ [أ ، ب]، ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان هـ(أ)= ب، هـ(ب) = أ.
أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث ع(أ) - ع(ب) = قَ(جـ)(ب - أ)

٦ إذا كان ق(س) = سجتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتاس.

نشاط ١: أراد أحد المغامرين السير بسيارته على شارع فوق سلسلة الجبال التي تراها في الصورة، مبتدئاً من النقطة (أ) ومنتهياً بالنقطة (و)، بحيث يلتزم بخط السير الظاهر في الصورة.
تلاحظ أن السيارة أثناء سيرها بين (أ) ، (ب) تكون في حالة صعود.

حدد نقطتين على الصورة تكون السيارة بينهما في حالة نزول. إذا كانت إحداثيات النقطة ب(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) وإحداثيات النقطة جـ(س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)، أيهما أكبر ص$_{٢}$ أم ص$_{١}$ ؟

تعريف:

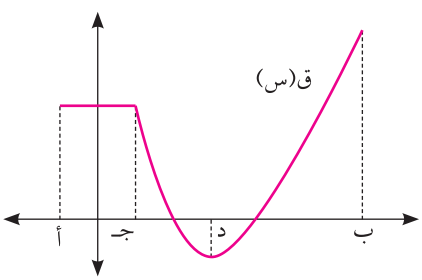
يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب] ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∋ [أ ، ب]

١ متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) < ق(س$_{٢}$)

٢ متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) > ق(س$_{٢}$)

٣ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) = ق(س$_{٢}$)

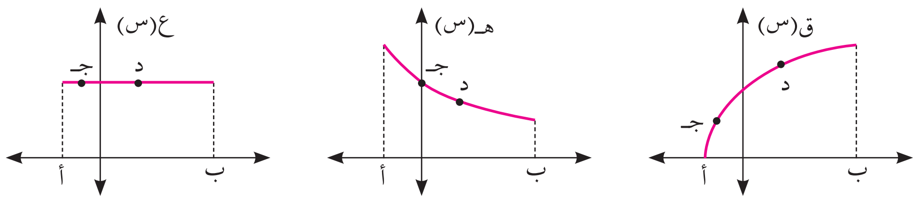
مثال ١ : في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.



الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، جـ] ويكون متناقصاً في [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د ، ب] (لماذا؟)

(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

نشاط ٢: الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب] ، معتمداً عليها قم بما يأتي:



١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].

٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.

٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي ....

٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي .... (لماذا؟)

٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) في] أ، ب[؟

٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في] أ، ب[فإن منحنى :

١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

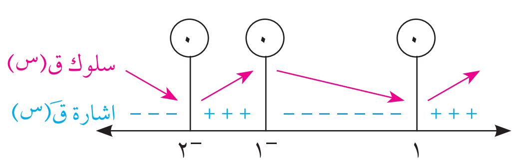
مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

قَ(س) = (س^{٢} − ١)(س + ٢)، س ∈ ح

الحل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س^{٢} − ١)(س + ٢) = ٠

ومنها (س − ١) (س + ١) (س + ٢) = ٠

فينتج أن س = ١ أو س = −١ أو س = −٢



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون:

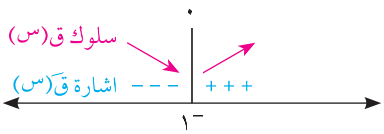
منحنى ق(س) متناقصاً في]−∞ ، −٢] ، [−١ ، ١] ، ومتزايداً في [−٢ ، −١] ، [١، ∞[.

مثال ٣ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س⁴ + ٤س + ٥، س ∈ ح

الحل : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س³ + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س³ + ١ = ٠ فتكون س = ⁻١ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور:



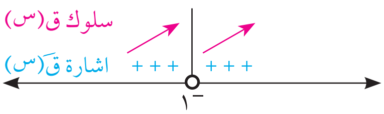
يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة [⁻١ ، ∞[

ومتناقصاً في الفترة]⁻∞ ، ⁻١].

مثال ٤ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١

الحل : ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١ متصل في ح - {⁻١}

قَ(س) = $\frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$



قَ(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح - {⁻١}

والشكل المجاور يبيّن إشارة قَ(س)

ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين]⁻∞ ، ⁻١[،]⁻١، ∞[

فكّر وناقش

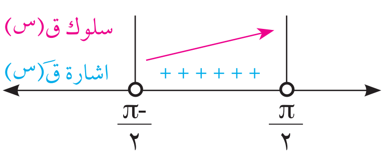
في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح - {⁻١}؟

مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة]$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة]$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[(لماذا؟)

قَ(س) = (٢ + قا²س) ≠ ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة]$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{جاس} & ، \; ٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{٢} \\ \text{س + جتاس} & ، \; \frac{\pi}{٢} < \text{س} \leq \pi \end{cases} \quad ، \text{ في الفترة } [٠ ، \pi]$$

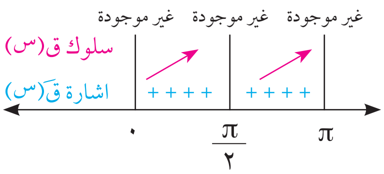
الحل :

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{جتاس} & ، \; ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{١ − جاس} & ، \; \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \end{cases} \quad ،$$

قَ$(\frac{\pi}{٢})$ غير موجودة. (لماذا؟)

وتكون قَ(س) $\neq$ ٠ ، $\forall$ س $\in$]٠ ، π[(لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترتين $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $]\frac{\pi}{٢} ، \pi]$

مثال ٧ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $|$س^٢ − ٤$|$ ، س $\in$ [−٣ ، ٢]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\text{ق(س)} = |\text{س}^٢ - ٤| = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٤ & ، \; -٣ \leq \text{س} < -٢ \\ ٤ - \text{س}^٢ & ، \; -٢ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

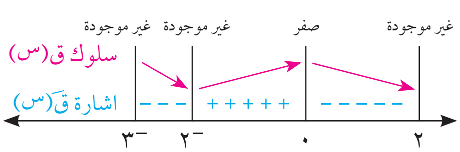
ق(س) متصل في الفترة [−٣ ، ٢] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \; -٣ < \text{س} < -٢ \\ -٢\text{س} & ، \; -٢ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

قَ(س) غير موجودة عندما س = −٣ ، −٢ ، ٢ (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون



منحنى ق(س) متزايداً في [−٢ ، ٠]

ومتناقصاً في [−٣ ، −٢] ، [٠ ، ٢]

تمارين ٢ - ٢

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} ، س ∈ [$-$٢ ، ٥]

ب ق(س) = س + جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

جـ ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$ ، س ∈ ح

٢ إذا كان ق(س) = ٢س − لو$_{\text{هـ}}$ (س + ١) ، س > $-$١، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح$^{+}$.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} - ٢ & ، ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ، في الفترة [٠، ٢]

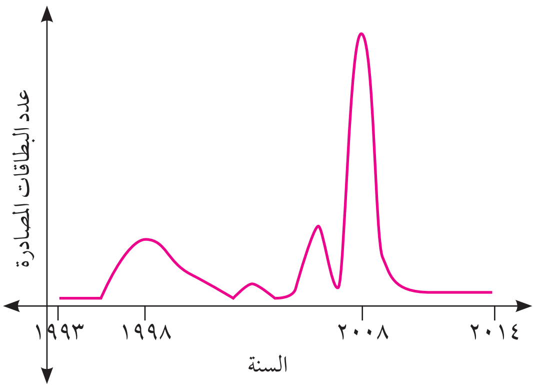
٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) = ق^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س) = $-$ق(س).

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح، وكان ك(س) = ق(س^{٢} − ٤س)، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س).

٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠، ٤]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠، ٤].

٧ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$، فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران قَ(س).

نشاط ١: تعرض آلاف الفلسطينيين المقدسيين إلى فقدان حق الإقامة في مدينتهم القدس، منذ زمن طويل، والشكل المجاور يمثل مخططاً بيانياً لعدد بطاقات الهوية المقدسية المصادرة خلال الأعوام ١٩٩٣-٢٠١٤.



كان عدد البطاقات المصادرة عام ٢٠٠٨ أكبر ما يمكن. (لماذا؟)

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∋ ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١ قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∋ (ف ∩ ع)

٢ قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∋ (ف ∩ ع)

٣ قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∋ ع

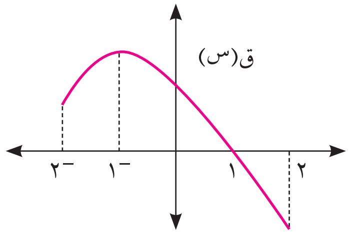
٤ قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∋ ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

فكّر وناقش

هل كل قيمة قصوى محلية هي قيمة قصوى مطلقة، أم العكس هو الصحيح؟

مثال ١ : يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [−٢ ، ٢]، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



الحل :

يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = −٢ هي ق(−٢)

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف =]−٣ ، −١[تحوي العدد −٢

بحيث أن ق(−٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ ف ∩ [−٢ ، ٢] = [−٢ ، −١[

قَ(−٢) غير موجودة (لماذا؟)

وأيضاً ق(−١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق(−١) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]

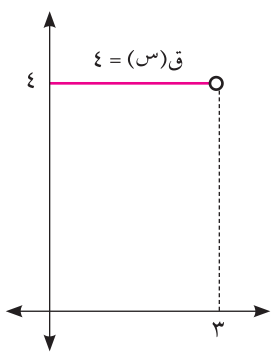
قَ(−١) = ٠ (لماذا؟)

ق(٢) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]

قَ(٢) غير موجودة (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠ ، ٣[

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).



الحل :

ق(س) متصل في [٠ ، ٣[

قَ(س) = ٠ ∀ س ∈]٠ ، ٣[

وحسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≥ ٤ ∀ س في تلك الفترة

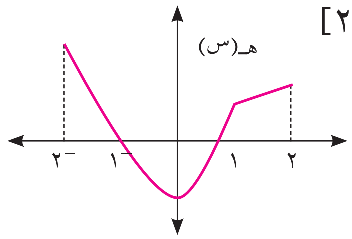
كما أنه حسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≤ ٤ ∀ س في تلك الفترة

فكّر وناقش:

ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س) في الفترة [⁻٢ ، ٢]



١ يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ⁻٢ والسبب ....

٢ عند س = ٠ يوجد قيمة .... محلية والسبب ....

٣ هـَ(٢) = ... ، هـَ(٠) = ... ، هـَ(⁻٢) = ...

تعريف:

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١ أ ∈ مجال ق(س)

٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

مثال ٣ : عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} س^٢ - ٣ &، ⁻١ < س \le ٢ \\ ٣ - س &، ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$
، في]⁻١ ، ٣]

الحل : ق(س) متصل عند س = ٢ ، قَ(س) =
$$\begin{cases} ٢س &، ⁻١ < س < ٢ \\ ⁻١ &، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

قَ(٢) غير موجودة ، قَ(٣) غير موجودة، ..... (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠ ∈]⁻١ ، ٢[

لا يوجد قيم لـــ س ∈]٢ ، ٣[بحيث قَ(س) = ٠ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند س = ⁻١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي (٠ ، ⁻٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

مثال ٤ : عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} س^٣ &، ١ \le س \le ٢ \\ [س + ٣] &، ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$
، في [١ ، ٣]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح

ق(س) =
$$\begin{cases} س^٣ &، ١ \le س \le ٢ \\ ٥ &، ٢ < س < ٣ \\ ٦ &، س = ٣ \end{cases}$$
، س ∈ [١ ، ٣]

ق(س) غير متصل عند س = ٢، وعند س = ٣ ومنها قَ(٢) غير موجودة، قَ(٣) غير موجودة،

كذلك قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

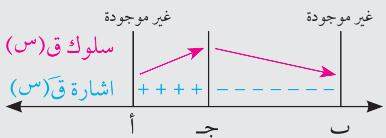
قَ(س) = { ٣س^٢ ، ١ < س < ٢ ؛ ٠ ، ٢ < س < ٣ } ، س ∈]١ ، ٣[

∀ س ∈ [٢ ، ٣[∪ {١} فإن (س ، ق(س)) نقطة حرجة للاقتران ق(س). (لماذا؟)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ ∈]أ ، ب[فإنه:

١ إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)



٢ إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

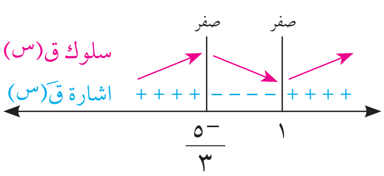
مثال ٥ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^٣ + س^٢ – ٥س – ٥

الحل : ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٣س^٢ + ٢س – ٥ ، ∀ س ∈ ح ، نجعل قَ(س) = ٠

ومنها ٣س^٢ + ٢س – ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س – ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{-٥}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون



ق($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٤٠}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = -٨ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

فكّر وناقش:

هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = (٨ − س) $\sqrt[٣]{\text{س}}$

الحل : ق(س) متصل في ح

ق̀(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ (١⁻) + (٨ − س) × $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$

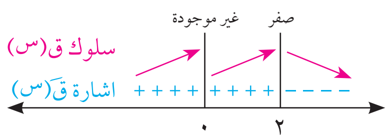
ق̀(س) = − $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + $\frac{(٨ - \text{س})}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$ ، س ∈ ح − {٠} (لماذا؟)

إذن ق̀(س) = $\frac{(٨ - ٤\text{س})}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

نجعل ق̀(س) = ٠ ومنها ٨ − ٤س = ٠ ومنها س = ٢

ق̀(س) غير موجودة عند س = ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة ق̀(س) في الشكل المجاور،



يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند س = ٢

قيمتها ق(٢) = ٦ $\sqrt[٣]{٢}$

فكّر وناقش:

هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

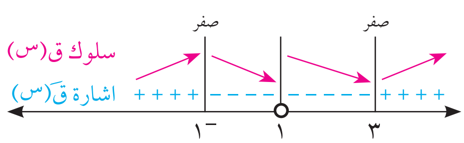
مثال ٧ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١

الحل : ق(س) متصل في ح − {١}

ق̀(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ ، س ≠ ١

وبوضع ق̀(س) = ٠ ينتج أن س = ٣ أو س = ١⁻

ومن إشارة ق̀(س) في الشكل المجاور تكون



ق(١⁻) = ٢⁻ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

مثال ٨ : إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ⁻١ قيمتها ٢ وقيمة صغرى محلية عند س = ١ قيمتها ⁻١ ، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ ، د.

الحل :

ق(⁻١) = ٢ ومنها ٢ = ⁻أ + ب − جـ + د .... (١)

ق(١) = ⁻١ ومنها ⁻١ = أ + ب + جـ + د .... (٢)

قَ(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

قَ(⁻١) = ٠ ومنها ٣أ − ٢ب + جـ = ٠ .... (٣)

قَ(١) = ٠ ومنها ٣أ + ٢ب + جـ = ٠ .... (٤)

بحل النظام الناتج من المعادلات الأربع فإن:

أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ب = ٠ ، جـ = $\frac{⁻٩}{٤}$ ، د = $\frac{١}{٢}$

اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س > أ (بداية تزايد)

٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س > أ (بداية تناقص)

٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س < ب (نهاية تزايد)

٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س < ب (نهاية تناقص)

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، ⁻١ \leq س \leq ٢ \\ ٤ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

٢ حدّد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [⁻١ ، ٣[

قَ(س) = $\begin{cases} ٢س & ، ⁻١ < س < ٢ \\ ٠ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

أولاً:   عندما س ∈]⁻١ ، ٢[نجعل قَ(س) = ٠

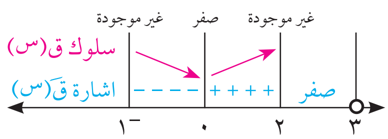
فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة

ثانياً:   عندما ٢ < س < ٣ تكون قَ(س) = ٠

وهذا يعني أنه عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد نقطة حرجة

قَ(٢) غير موجودة، قَ(⁻١) غير موجودة

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة {٠ ، ⁻١،]٢ ، ٣[}



٢ من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون

عند س = ⁻١   يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص

عند س = ٠   يوجد قيمة صغرى محلية

عند س = ٢   يوجد قيمة عظمى محلية

عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٢لــوهـ س ، س ∈]٠ ، ٥] ، فحدد القيم المحلية التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية.

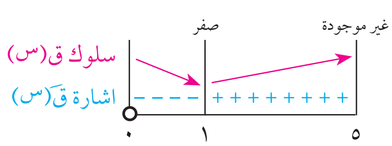
الحل : ق(س) متصل في الفترة]٠ ، ٥]   ،   قَ(س) = ٢س − $\frac{٢}{س}$

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٢س − $\frac{٢}{س}$ = ٠

أي أن س^{٢} = ١ وتكون س = ١   (لماذا؟)

قَ(٥) غير موجودة، فتكون مجموعة قيم س التي يكون

عندها نقط حرجة هي   {١ ، ٥}



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور

ق(١) = ١   قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

ق(٥) = ٢٥ − ٢لــوهـ ٥   قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) (نهاية تزايد)

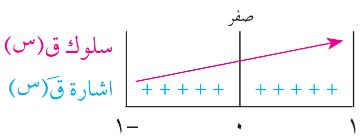
مثال ١١: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ^{-}١ \le \text{س} < ١ \\ \frac{١}{٢} & ، \ \text{س} = ١ \end{cases}$ ، س ∈ [$^{-}$١ ، ١]

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل : ق(س) متصل في [$^{-}$١ ، ١[

قَ(س) = ٣س^{٢} ، س ∈]$^{-}$١ ، ١[

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠



ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور

عند س = $^{-}$١ يوجد قيمة صغرى محلية، قيمتها ق($^{-}$١) = $^{-}$١

أما عند س = ١ فإن ق(س) منفصل، فلا يمكن الحكم عليها من خلال إشارة المشتقة الأولى؛

لذا نلجأ إلى مقارنة ق(١) مع $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) وبما أن ق(١) < $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) فإن ق(١) = $\frac{١}{٢}$ قيمة صغرى محلية.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].

مثال ١٢: جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = س$\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل : بحل المتباينة ٤ − س^{٢} ≥ ٠ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو [−٢ ، ٢]

ق(س) متصل على [−٢ ، ٢] ، قَ(س) = $\frac{٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٢ ، ٢[

وعندما قَ(س) = ٠ يكون س = $\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

س = −$\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

ويكون ق(−٢) = ٠ ، ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

ق($\sqrt{٢}$) = ٢ ، ق(٢) = ٠

أصغر قيمة للاقتران هي ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

وأكبر قيمة للاقتران هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

والصغرى المطلقة هي ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ٢ - ٣

١ جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

ب ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [−٨ ، ٨]

٢ في التمارين من (أ − و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ ق(س) = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س ، س ∈ ح

ب ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

جـ ق(س) = (س^{٢} − ٣)هـ^{س} ، س ∈ ح

د ق(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ س ≠ ١

هـ ق(س) = جتا^{٢}س − جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

و ق(س) = هـ$^{-(س - ٢)^{٢}}$ ، س ∈ ح

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} ، & ٠ \le س \le ٢ \\ س^{٢} + ٤ ، & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = هـ^{س} − هـ س ، س ∈ [٠ ، ٣]

جـ ق(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س ، س ∈ $\left[\frac{π}{٢} ، \frac{٣π}{٢}\right]$

٤ إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، أ ،ب ∈ ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٥ باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار ٤س^{٣} − س^{٤} − ٢٩ سالب دائماً.

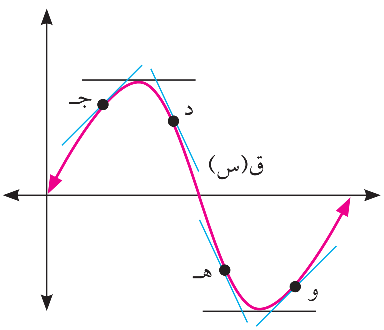
نشاط ١: تزخر فلسطين بالأماكن الترفيهية وتحتوي بعض هذه الأماكن ألعاباً مرعبة، مثل القطار الموجود في الصورة المجاورة. هل سبق وركبت مثل هذا القطار؟

حدد مستعيناً بالرموز المدرجة على الصورة المناطق التي يشعر فيها راكب القطار بالرعب والخطر، والمناطق التي تكون أكثر أماناً. فسّر إجابتك.

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)

١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من جـ ، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند جـ ، د يقعان فوق منحناه)

٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ ، و يقعان تحت منحناه).



تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة]أ، ب[وأنه مقعّر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة]أ، ب[.

اختبار التقعّر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة]أ ، ب[، وكان قً (س) معرفاً في الفترة]أ ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون:

١ مقعّراً للأعلى في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) > ٠ لجميع قيم س ∋]أ،ب[.

٢ مقعّراً للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∋]أ،ب[.

٣ غير مقعّر للأعلى أو للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) = ٠ لجميع قيم س ∋]أ، ب[.

* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

مثال ١ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣$\text{س}^{٢}$ – $\text{س}^{٣}$ ، س ∈]–٢ ، ٥[

الحل : ق(س) متصل في]–٢ ، ٥[لأنه كثير حدود

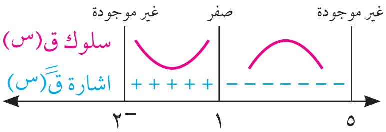
قَ(س) = ٦س – ٣$\text{س}^{٢}$ ،   قً(س) = ٦ – ٦س

بوضع قً(س) = ٠ تكون ٦ – ٦س = ٠ ، أي س = ١

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في الفترة]–٢، ١[، ومقعّراً للأسفل في الفترة]١ ، ٥[



مثال ٢ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

الحل : ق(س) متصل على مجاله

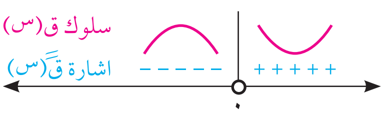
ق(س) = س + $\dfrac{١}{\text{س}}$ ومنها قَ(س) = ١ – $\dfrac{١}{\text{س}^{٢}}$

قً(س) = $\dfrac{٢}{\text{س}^{٣}}$ ≠ ٠ ،

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:

منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في الفترة]–∞ ، ٠[،

ومقعّراً للأعلى في الفترة]٠ ، ∞[.....   (لماذا؟)



مثال ٣ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = لـوهـ جتاس ، س ∈]٠ ، $\dfrac{\pi}{٣}$[مقعر للأسفل.

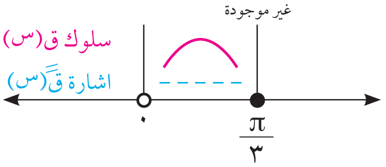
الحل : ق(س) متصل في]٠ ، $\dfrac{\pi}{٣}$[(لماذا؟)

قَ(س) = $\dfrac{\text{–جاس}}{\text{جتاس}}$ = –ظاس

قً(س) = –$\text{قا}^{٢}$س

وبما أن قً(س) ≠ ٠ ، قً(س) < ٠ ، ∀ س ∈]٠ ، $\dfrac{\pi}{٣}$[

فإن ق(س) مقعّر للأسفل في]٠ ، $\dfrac{\pi}{٣}$[



تعريف:

١ تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغيِّرَ الاقتران اتجاه تقعّر منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.

٢ زاوية الانعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف.

٣ إذا كانت (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان قَ(جـ) = ٠ فتسمى النقطة (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف أفقي.

مثال ٤ : جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈]٠ ، π[

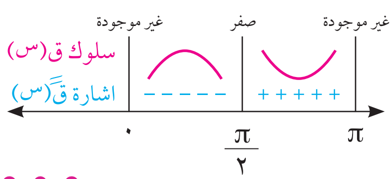
الحل :

قَ(س) = −٣جا²س + ٣جتا²س = ٣جتا٢س ، س ∈]٠ ، π[

قً(س) = −٦جا٢س

نجعل قً(س) = ٠ فيكون −٦جا٢س = ٠ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$

وبما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من اتجاه تقعّره عندها (كما تشير إشارة قً(س) في الشكل المجاور)



فإن النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$)) = ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف

هل النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف أفقي؟ فسّر إجابتك.

مثال ٥ : بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = √(٩ − س²) نقطة انعطاف في الفترة]−٣ ، ٣[

الحل :

ق(س) = √(٩ − س²) متصل في الفترة]−٣ ، ٣[

قَ(س) = $\frac{-س}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٣ ، ٣[

قً(س) = $\frac{-٩}{\sqrt{(٩ - س^{٢})^{٣}}}$ ≠ ٠ ، ∀ س ∈]−٣ ، ٣[ولكن قً(س) < صفر دائماً

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في]−٣ ، ٣[

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في]−٣ ، ٣[

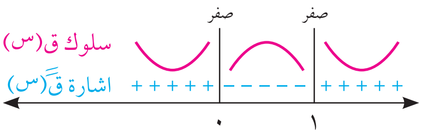
مثال ٦ : إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط وزوايا الانعطاف (إن وجدت).

الحل : ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} ، قً(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س

بوضع قً(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة]−∞ ، ٠] ،

وكذلك في الفترة [١ ، ∞[

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة [٠ ، ١]

النقطتان (٠ ، ٠) ، (١ ، −١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

لإيجاد زوايا الانعطاف

نفرض هـ$_{١}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (٠ ، ٠)

ظا هـ$_{١}$ = قَ(٠) = ٠ ومنها هـ$_{١}$ = ٠

نفرض هـ$_{٢}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (١ ، −١)

ظا هـ$_{٢}$ = قَ(١) = −٢ ومنها هـ$_{٢}$ = ظا$^{-١}$(−٢)

مثال ٧ : عيّن مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & ،\ ٠ < \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} & ،\ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$$

الحل : ق(س) غير متصل عند س = ٢ ومنها قَ(٢) غير موجودة

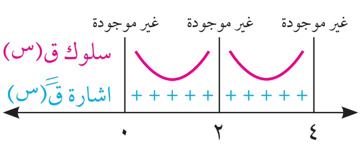
$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٣س}^{٢} & ،\ ٠ < \text{س} < ٢ \\ \text{٢س} & ،\ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases} \quad ، \quad \text{قً(س)} = \begin{cases} \text{٦س} & ،\ ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢ & ،\ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$$

١) قً(س) = ٠ ، عندما ٠ < س < ٢

فيكون ٦س = ٠ ومنها س = ٠ ترفض (لماذا؟)

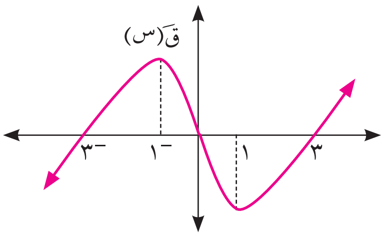
٢) عندما ٢ < س < ٤ فإن قً(س) ≠ ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون



منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى في]٠ ، ٢[كذلك في]٢ ، ٤[

مثال ٨ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س)



معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:

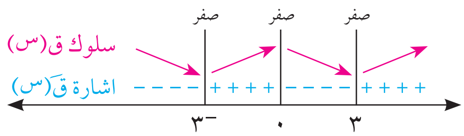
١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

٣ مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

٤ قيم س التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت) .

الحل : نمثل إشارة قَ(س) كما في الشكل المجاور:



١ يكون منحنى ق(س)

متزايداً في]⁻٣ ، ٠[وفي]٣ ، ∞[

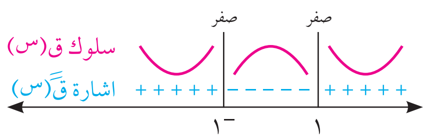
ومتناقصاً في]⁻∞ ، ⁻٣[وفي]٠ ، ٣[

٢ ق(⁻٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة قً(س) كما في الشكل المجاور:



٣ يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في]⁻∞ ، ⁻١[وكذلك في]١ ، ∞[

ومقعّراً للأسفل في]⁻١ ، ١[

٤ نقاط الانعطاف تكون عند س = ⁻١ ، س = ١ ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س ، ق(س$_1$)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإن قً(س$_1$) = صفر.

نشاط ٢: إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) وله نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (٢ ، ١)، جد قاعدة الاقتران ق(س)

نفرض أن ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ∋ ح ، أ ≠ ٠

بما أن ق(٠) = ٥ فإن قيمة الثابت د هي ....

وبما أن (٢ ، ١) نقطة انعطاف أفقي فإن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = ٠ ، قً(٢) = ...

ق(٢) = ١ ومنها ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ .... (١)

قَ(س) = ...

قَ(٢) = ٠ ومنها ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠ .... (٢)

قً(س) = ...

قً(٢) = ... ومنها .... (٣)

وبحل المعادلات الناتجة يكون الاقتران ق(س) = ...

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:

١ ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قً(جـ) < ٠

٢ ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قً(جـ) > ٠

٣ يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو قً(جـ) غير موجودة.

مثال ٩ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^{٤} – ٨س^{٣} + ٦س^{٢}، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س

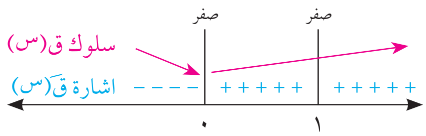
قَ(س) = ٠ ومنها ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س = ٠

١٢س(س^{٢} – ٢س + ١) = ١٢س(س – ١)^{٢} = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س = ١

$ق''(س) = ٣٦س^{٢} - ٤٨س + ١٢$

$ق''(٠) = ١٢ > ٠$ إذن $ق(٠) = ٠$ قيمة صغرى محلية.

بما أن $ق''(١) = ٠$ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى $ق(١)$ باستخدام اختبار المشتقة الثانية لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.



من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى محلية عند $س = ١$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٢ - ٤

١ عيّن فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ $ق''(س) = (س^{٢} - ٣س - ٤)(س + ٢)$ ، $س \in ح$

ب $ق'(س) = $ جاس $-$ س ، $س \in \left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

جـ $ق(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} + س$ ، $س \in]٠ ، ٤[$

د $ق(س) = (س - ٣)^{\frac{٣}{٢}}$ ، $س > ٣$

هـ $ق(س) = $ جا $\frac{س}{٢}$ ، $س \in]٠ ، \pi[$

و $ق(س) = $ هـ^{س} جتاس ، $س \in]٠ ، ٢\pi[$

ز $ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{١}{٣} س - ١\right] & ، ١ < س \leq ٣ \\ س^{٣} & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ $ق(س) = س^{٣} + س$

ب $ق(س) = $ جتاس ، $س \in]٠ ، ٢\pi[$

جـ $ق(س) = \sqrt[٣]{٥ - س}$

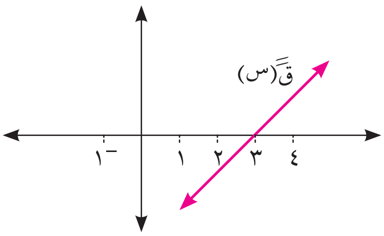
٣ جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

أ ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢}

ب ق(س) = |س + ٦|

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} + س^{٣} نقطة انعطاف عند س = ⁻١ ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قً(س)



إذا علمت أن قَ(٠) = قَ(٦) = ٠ ، جد كلاً مما يأتي:

أ فترات التقعّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٦ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ بحيث إن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي: ٣س + ص = ٧ ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

٧ إذا كان للاقتران كثير الحدود ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ك(س) نقطة انعطاف أفقي هي (١ ، ٢) ، وكان ع(س) = ك^{٢}(س)، احسب عً(١).

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [⁻٣ ، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، قَ(١) = ٠ ، قَ(⁻٢) = ٠ ، قً(س) < ٠ عندما س < ٠ ، قً(س) > ٠ عندما س > ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

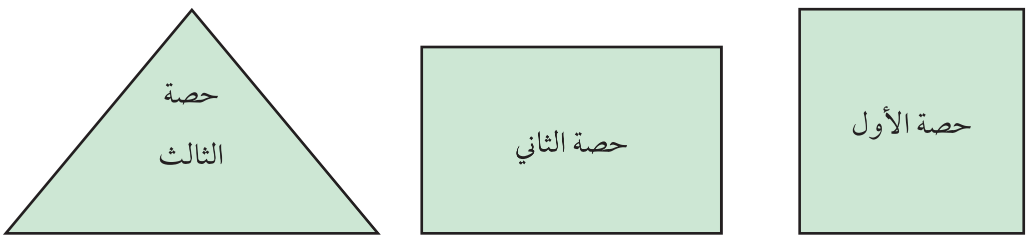
أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

جـ ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

نشاط ١: أحمد مزارع فلسطيني يسكن مدينة يافا، ويملك أراضٍ واسعةٍ من حقول البرتقال، أراد في أحد الأيام أن يختبر ذكاء أبنائه الثلاثة، فاشترى سياجاً طويلاً وقسّمَه إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول، وأعطى كلاَ منهم جزءاً من السياج، وطلب أن يحيط كل واحد منهم جزءاً من الأرض بالسياج الذي أخذه؛ لتصبح الأرض التي أحاطها ملكاً له. سرَّ الأبناء بهدية والدهم، وأراد كل منهم أن يحصل على أكبر مساحة ممكنة فاختار أحدهم جزءاً مربعاً من الأرض، واختار الثاني جزءاً مستطيلاً، أما الثالث فقد اختار جزءاً على شكل مثلث متساوي الساقين.

لو كنت أحد الأبناء، ما الشكل الذي ستختاره ؟ (ولماذا؟)



نشاط ٢: قررت إحدى بلديات الوطن إنشاء مُتَنَزَّهٍ على شكل مستطيل، باسم الشهيد الراحل ياسر عرفات، أمام مبنى المقاطعة الذي دمره الاحتلال. وقد لاحظ مهندسو البلدية وجود شارعين متقاطعين وقرروا أن يكون رأسان من رؤوس المتنزه على الشارعين، والرأسان الآخران على شارع الشهداء (انظر الشكل) فإذا كانت معادلة الشارع الأول (شارع الأمة) على الخريطة هي ص = هـ(س) = ٢٠س ومعادلة الشارع الثاني (شارع الكرامة) هي ص = ق(س) = ٤٢ - س وشارع الشهداء أفقي معادلته ص = ٠، فلمعرفة مساحة أكبر متنزه يمكن إنشاؤه نتبع ما يلي:

نفرض أن طول المتنزه (س)

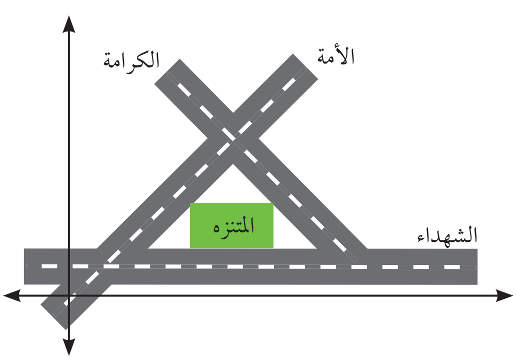
فيكون عرضه هو هـ(ع) = ٢٠ع

وتكون مساحة المتنزه = الطول × العرض

أي أن م = س × ٢٠ع = ٢٠س ع (لماذا؟)

لكن هـ(ع) = ق(س + ع) (لماذا؟)

ومنها فإن ٢٠ع = ٤٢ - س - ع (لماذا؟)



أي أن ع = ... وتصبح المساحة م(س) = $\frac{٢٠}{٢١}$ س (٤٢ − س)

ولتحديد أكبر قيمة للمساحة فإننا نستخدم مفهوم القيم القصوى

مَ = ... ومنها س = ...

وللتأكد من أن قيمة س السابقة تجعل المساحة أكبر ما يمكن نجد مً ونكمل الحل.......

إذن مساحة أكبر متنزه = ...

مثال ١ : عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن العددين هما س ، ص وأن حاصل ضربهما هو م فيكون

م = س × ص

لكن س + ص = ٦٠ ومنه ص = ٦٠ − س

م = س × ص = س × (٦٠ − س) = ٦٠س − س^٢

مَ = ٦٠ − ٢س

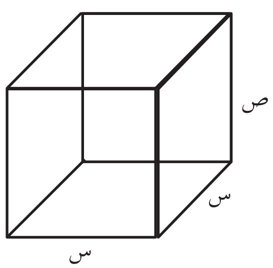
نجعل مَ = ٠ ومنها ٦٠ − ٢س = ٠ أي س = ٣٠

للتحقق مً = −٢ ومنها $\left.مً\right|_{س = ٣٠}$ = −٢ < ٠

(عند س = ٣٠ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠ ، ٣٠

مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ دسم^٣، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر ثابت)



الحل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س^{٢}ص ومنها س^{٢}ص = ٨

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

ت = ٤س × ص + ٢س^{٢} ، لكن ص = $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$

ومنها ت = ٤س × $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$ + ٢س^{٢} = $\frac{٣٢}{\text{س}}$ + ٢س^{٢}

وبالاشتقاق ينتج أن: تَ = $\frac{-٣٢}{\text{س}^{٢}}$ + ٤س وبوضع تَ = ٠

$\frac{٣٢}{\text{س}^{٢}}$ = ٤س ، أي أن س^{٣} = ٨ ، ومنها س = ٢دسم

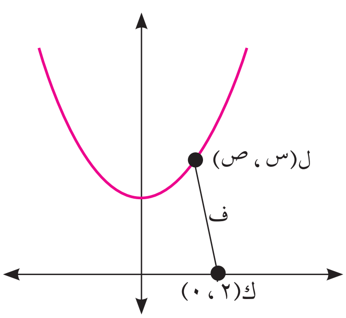
تً = $\frac{٦٤}{\text{س}^{٣}}$ + ٤

ومنها تً$\Big|_{\text{س} = ٢}$ = $\frac{٦٤}{٨}$ + ٤ = ١٢ > ٠ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها ٢دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.

مثال ٣ : جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة ص^{٢} − س^{٢} = ٨

الحل : نفرض النقطة ل(س ، ص) على منحنى العلاقة



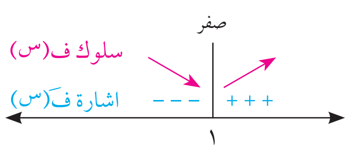
ونفرض ف = المسافة بين ك ، ل

حسب قانون المسافة بين نقطتين ف = $\sqrt{(\text{س} - ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

لكن ص^{٢} = س^{٢} + ٨ ، فتكون ف = $\sqrt{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}$

فَ = $\frac{٤\text{س} - ٤}{٢\sqrt{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}}$

بوضع فَ = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)



ومن إشارة فَ في الشكل المجاور

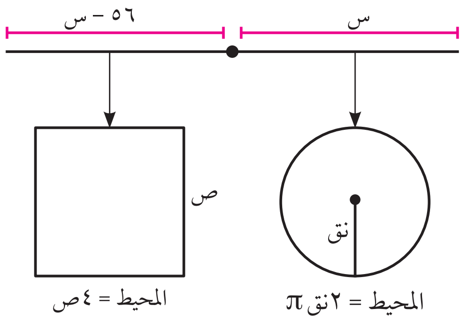
تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ± ٣

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي ف = $\sqrt{١٠}$ وحدة.

مثال ٤ : سلك طوله ٥٦سم قسم إلى جزأين، ثني أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن؟

الحل : نفرض طول الجزء الذي صنع منه دائرة (س)



فيكون طول الجزء الثاني ٥٦ – س

$\text{س} = ٢\text{نق}\,\pi$ ومنها $\text{نق} = \frac{\text{س}}{٢\pi}$

كما أن $٥٦ - \text{س} = ٤\text{ص}$ ومنها $\text{ص} = ١٤ - \frac{١}{٤}\text{س}$

مجموع مساحتيهما $\text{م} = \text{نق}^٢\,\pi + \text{ص}^٢$

$\text{م} = \frac{\text{س}^٢}{٤\pi} + \left(١٤ - \frac{١}{٤}\text{س}\right)^٢$

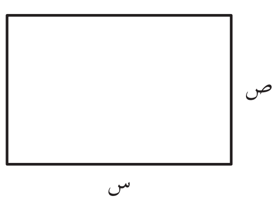
ومنها $\text{م}' = \frac{٢\text{س}}{٤\pi} + ٢\left(١٤ - \frac{١}{٤}\text{س}\right)\left(-\frac{١}{٤}\right) = \frac{\text{س}}{٢\pi} + \frac{١}{٨}\text{س} - ٧$

نضع $\text{م}' = ٠$ ومنها $\frac{\text{س}}{٢\pi} + \frac{١}{٨}\text{س} - ٧ = ٠$ وبعد التبسيط ينتج أن $\text{س} = \frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}$

ومنها $\text{نق} = \frac{٢٨}{٤ + \pi}$ ، $\text{ص} = ١٤ - \frac{١}{٤}\left(\frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}\right) = ١٤ - \frac{١٤\pi}{٤ + \pi} = \frac{٥٦}{٤ + \pi}$

$\text{م}'' = \frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨} > ٠$ (يوجد قيمة صغرى محلية، وبما أنها وحيدة فهي صغرى مطلقة)

مثال ٥ : أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^٢



الحل : نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

مساحة المستطيل $\text{م} = \text{س ص} = ١٦$ ومنها $\text{ص} = \frac{١٦}{\text{س}}$

محيط المستطيل $\text{ح} = ٢\text{س} + ٢\text{ص}$ ومنها يكون $\text{ح} = ٢\text{س} + \frac{٣٢}{\text{س}}$

$\text{ح}' = ٢ - \frac{٣٢}{\text{س}^٢}$ وعندما $\text{ح}' = ٠$ يكون $٢ - \frac{٣٢}{\text{س}^٢} = ٠$ ومنها $\text{س} = ٤$

$\text{ح}'' = \frac{٦٤}{\text{س}^٣}$ ومنها $\text{ح}''(٤) = ١$ (موجب) ⟵ المحيط أقل ما يمكن

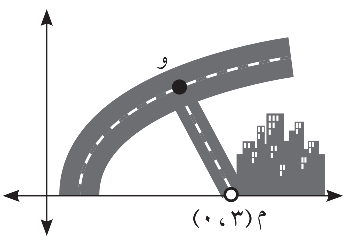
فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

تمارين ٢ - ٥

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم^{٣} فإذا علمت أن سعر كل ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي



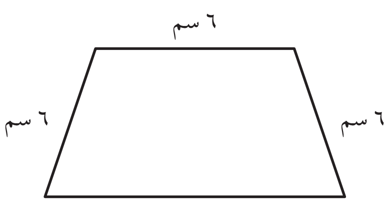
ص = ق(س) = $\sqrt{\text{٢س} - \text{١}}$ ، النقطة م(٣، ٠) تمثل موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى(م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن . (انظر الشكل المجاور).

٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف = أ جتا $\frac{\pi}{\text{٤}}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{\text{٤}}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي ١٠م/ ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ث. احسب الثابتين أ ، ب.

٥ في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم / الساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠كم في الساعة، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟

٦ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم ، ونصف قطر قاعدته ٤سم.



٧ شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.

٨ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ن جـ = $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن.

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١-١٤):

١ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - س &، \quad ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ &، \quad ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة [٠ ، ٣]؟

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب) {٠ ، ٣} ج) {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣} د) {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٣}

٢ ليكن ق(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ ، س ∈ [-٢ ، ٢]، فما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة عظمى مطلقة؟

أ) -٢ ب) ٠ ج) ١ د) ٢

٣ إذا كان قَ(س) = (س^٢ - ١)^٣ (س - ٢)^٤ فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟

أ)]-∞ ، -١] ب) [-١ ، ١] ج) [١ ، ٢] د) [٢ ، ∞[

٤ إذا كان ق(س) = س^٣ - ٣س معرفاً في الفترة [-٣ ، ١]، فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق(س)؟

أ) -٣٦ ب) -١٨ ج) -٣ د) -٢

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان قً(س) > ٠ عندما س < ٤ ، قً(س) < ٠، عندما س > ٤ وكان قَ(٣) = ٠ ، فما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية؟

أ) قً(٣) = ٠ ب) قَ(٤) = ٠

ج) ق(٣) قيمة عظمى محلية د) ق(٣) قيمة صغرى محلية

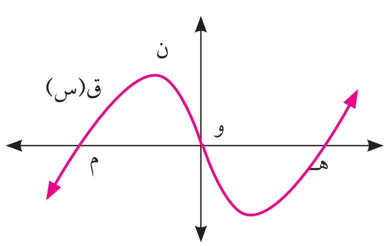
٦ ما مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٨ في الفترة [٠ ، ١] ؟

أ) { } ب) {٠} ج)]٠ ، ١[د) [٠ ، ١]

٧ بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى ق(س) ما النقطة التي يكون عندها قَ(س)، قً(س) موجبتين:

أ) هـ ب) ن

ج) م د) و



٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١ ، ٣] وكان قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]١ ، ٣[، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١ ، ٣] وكان قَ(٢) = ٠، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) ق($\frac{٥}{٢}$) < ٠
ب) ق($\frac{٥}{٢}$) < ق(٢)
ج) ق($\frac{٥}{٢}$) = ق(٢)
د) ق($\frac{٥}{٢}$) > ق(٢)

٩ ما قيمة الثابت م التي تجعل لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + م س^{٢} – ٩س نقطة انعطاف عند س = ⁻١ ؟

أ) ٣
ب) ٦
ج) ⁻٣
د) ⁻٤

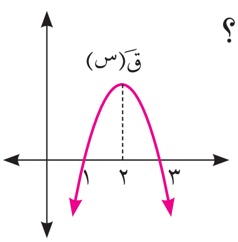
١٠ ما قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = س^{٢} + س – ٦ في [⁻١ ، ٢]؟

أ) $\frac{٥}{٢}$
ب) $\frac{٣}{٢}$
ج) $\frac{١}{٢}$
د) $\frac{⁻١}{٢}$

١١ إذا كان ق(س) = س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي؟

أ) قَ(١) غير موجودة
ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية
ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية
د) (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

١٢ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما مجموعة حل المتباينة قً(س) < ٠ ؟



أ)]١ ، ٣[
ب)]٢ ، ∞[
ج)]⁻∞ ، ٢[
د)]⁻∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

١٣ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على [أ ،ب] ، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤

١٤ إذا كان ق(س) = لـوهـ جاس ، س ∈]$\frac{\pi}{٤}$ ، π[، متى يكون منحنى ق(س) متزايداً؟

أ) [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]
ب) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π[
ج) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π[
د) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

أجب عن الأسئلة الآتية (٢ – ١٣):

٢ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤} \right]$ أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٣ جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + ٣}$.

٤ إذا كان ق(س) = س^٢ – ٣س – أ يحقق شروط نظرية رول على [$^-$١ ، أ] جد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) = س^٣ – ٣س^٢ – ٩س + ٥ معرفاً في الفترة]$^-$٢ ، ٦[جد:

أ القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(س).

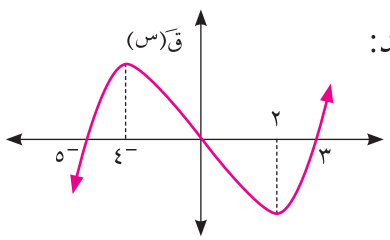
ب فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

جـ نقط الانعطاف، وزوايا الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).

٦ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) جد:

أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

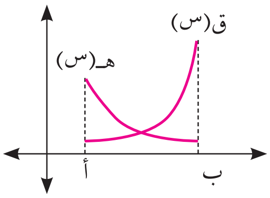


٧ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على مجاله، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ – س بيّن أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦].

٨ ما أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

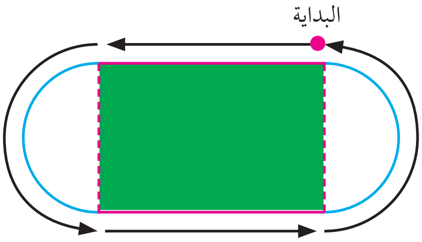
٩ إذا كان ق(س) = جتاس – هـ(س) + ٣س ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right]$، حيث هـ(س) قابل للاشتقاق، أثبت أن الاقتران (ق + هـ)(س) متزايد في تلك الفترة.

١٠ الشكل المجاور يبيّن منحنى الاقترانين ق ، هـ المعرفين على [أ ، ب] بيّن أن الاقتران $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ هو اقتران متزايد على]أ ، ب[.



١١ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن النقطة (٢ ، ⁻١) هي نقطة قيمة صغرى محلية، وأن النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س).

١٢ مسار للسباق طوله ٤٠٠ م، يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟



١٣ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

١٤ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
احل مسائل منوعة على نظريتي رول والمتوسطة			
احدد مجالات التزايد والتناقص للاقترانات			
احدد مجالات التقعر للاقترانات			
احل مشكلات وتطبيقات حياتية على المشتقات			