

الأكاديمية العربية الدولية



الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية المقررات الجامعية

الباب الأول

المصادر والمجالات الكهربائية والمغناطيسية الثابتة مع الزمن

Static Sources, Electric and Magnetic Fields

شهدت العقود الأخيرة تقدماً سريعاً في مسارات الهندسة الكهربائية المختلفة وخاصة مساري الاتصالات والحاسبات بحيث إن البيئة العامة أصبحت بحراً من الإشارات الكهربائية والمغناطيسية. ومن هذه الإشارات على سبيل المثال لا الحصر ما يلي:-

- المجالات الناتجة عن خطوط الضغط المنخفض والمتوسط والعالي والتي تغذي المدن والتجمعات السكانية والمصانع والبيوت .
- الإشارات الناتجة عن المحطات الإذاعية والتلفازية وأجهزة الاتصالات المتنقلة والثابتة.
- الإشعاعات الناتجة عن أجهزة الحاسوب الشخصية والتي تشهد نمواً مطرداً وتزداد سرعتها بشكل يكاد يكون قياسياً.
- المجالات الكهربائية والمغناطيسية التي تولدها أجهزة التلفاز والأجهزة المختلفة الأخرى التي باتت تملأ البيوت العصرية. وقد يكون مستوى هذه المجالات الناتجة عن بعض هذه الأجهزة مرتفعاً بعض الشيء لدرجة قد يؤثر على صحة الإنسان.
- الإشعاعات الناتجة عن أنظمة الاتصالات الأخرى.

وهذا يجعل من الضرورة بمكان التعرف على الإشارات والمجالات الكهربائية والمغناطيسية (الكهرومغناطيسية) وفهم ارتباطها مع بعضها ومع المصادر التي تنتجها. سيتم في هذا الكتاب محاولة وضع الأسس الضرورية لموضوع الكهرومغناطيسية الهندسية ويكون التركيز بشكل رئيسي على المجالات المتغيرة مع الزمن، إلا أنه لا بد من أن يتم تقديم الأساس الضروري واللازم لهذا الموضوع في صورة المصادر والمجالات الكهربائية والمغناطيسية الثابتة مع

الزمن لأنها تعتبر متطلباً أساسياً لموضوع هذا الكتاب. سيقدم هذا الباب شرحاً مختصراً لكل من المصادر والمجالات الكهربائية الثابتة مع الزمن وكذلك المصادر والمجالات المغناطيسية الثابتة مع الزمن. ويشكل هذا الباب الأساس للأبواب الأخرى ويتم تقسيمه إلى خمسة أجزاء. يغطي الجزء الأول المصادر والمجالات الكهربائية الثابتة مع الزمن ويتم تقديم المصادر الكهربائية (الشحنات) وما ينتج عنها من قوى ومجالات وجهد كهربائي، ويتم كذلك بحث خصائص المواد العازلة واستقطابها وشرح المواسع وطريقة إيجاد سعته. أما في الجزء الثاني فإنه يعالج التيار المستمر (الثابت مع الزمن) والخصائص الموصيلية للأوساط المختلفة. أما الجزء الثالث فيتم تقديم المصادر المغناطيسية (التيارات) وما ينتج عنها من قوى ومجالات وجهد مغناطيسي وسيتم بحث خصائص المواد المغناطيسية وإيجاد المحاثة. و يغطي الجزء الرابع تفاعل الشحنات مع المجالات الكهربائية والمغناطيسية. أما الجزء الخامس فيقدم الصور في المصادر الكهربائية.

-1-1-1 المصادر والمجالات الكهربائية الثابتة مع الزمن

إن المصادر والمجالات الكهربائية الناتجة عنها لا تكون بالمفهوم المطلق ثابتة مع الزمن (أو غير متحركة) وإنما تكون شبه ثابتة. ويسهل افتراض أنها ثابتة مع الزمن التعامل معها في هذه المرحلة. وسيتم لاحقاً في هذا الباب، معالجة خاصة للمصادر المتحركة. ولكن سيتم أولاً تعريف المصادر (الشحنات) وبعدها يتم الانتقال إلى إيجاد المجالات الكهربائية الناتجة ومن ثم إيجاد الآليات التي تربط بينهما.

-1-1-1-1 الشحنات الكهربائية Electric Charges

تتكون المواد من ذرات وتتكون الذرة من نواة تحوي على نيوترونات وهي أجسام غير مشحونة وبروتونات، وزن البروتون 1.67×10^{-27} kg ، وهي أجسام اصطلح على اعتبار أن شحنتها موجبة (+) . ويدور حول النواة مجموعة من الإلكترونات في مدارات مختلفة ، وزن الإلكترون 9.11×10^{-31} kg ، وهي أجسام اصطلح على أخذ شحنتها سالبة (-) ، وتستخدم وحدة الكولومب C للتعبير عن قيمة هذه الشحنات علماً بأن القيمة العددية

لشحنة البروتون هي نفسها لشحنة الإلكترون أو $1.67 \times 10^{-19} \text{ C}$. وتمثل هذه البروتونات والإلكترونات الأساس للشحنات الكهربائية (أو المصادر الكهربائية) وتأتي هذه المصادر (الشحنات) بأشكال مختلفة كما يلي:-

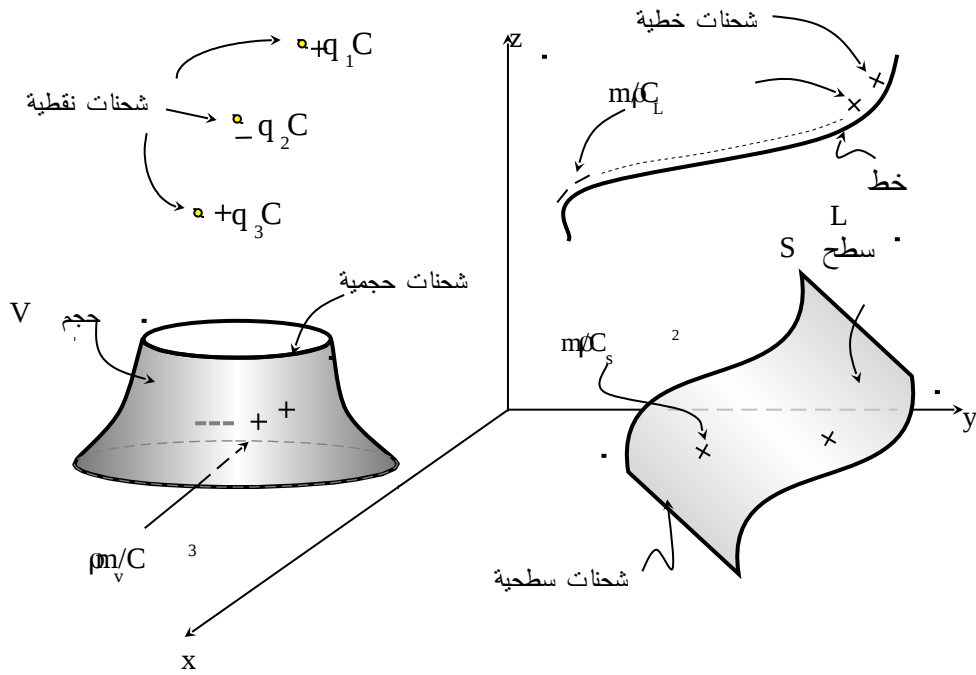
- شحنة نقطية :- **(Point Charge)** وهي شحنة (أو عدة شحنات) مركزة عند نقطة (أو مجموعة من النقاط) ويرمز لها بالرمز q ووحداتها كولومب C .
 - شحنة خطية :- **(Line Charge)** وهي شحنة مقدارها، مثلاً، $q \text{ C}$ موزعة بشكل منتظم أو غير منتظم على خط L ويعبر عنها بكثافة الشحنة الخطية ويرمز لها بالرمز ρ_L ووحداتها كولومب/متر أو C/m .
 - شحنة سطحية :- **(Surface Charge)** وهي شحنة مقدارها، مثلاً، $q \text{ C}$ موزعة بشكل منتظم أو غير منتظم على سطح S ويعبر عنها بكثافة الشحنة السطحية ويرمز لها بالرمز ρ_s ووحداتها كولومب/متر مربع أو C/m^2 .
 - شحنة حجمية :- **(Volume Charge)** وهي شحنة مقدارها، $q \text{ C}$ موزعة بشكل منتظم أو غير منتظم في حجم V و يعبر عنها بكثافة الشحنة الحجمية ويرمز لها بالرمز ρ_v ووحداتها كولومب/متر مكعب أو C/m^3 .
- ويبين الشكل (1-1) هذه الأنماط المختلفة من الشحنات الكهربائية. وتجدر الإشارة إلى أن الشحنات المتشابهة (موجبة وموجبة أو سالبة وسالبة) تتنافر وأن الشحنات المختلفة (موجبة وسالبة أو سالبة وموجبة) تتجاذب.

-1-2- القوة الكهربائية والمجال الكهربائي **Electric Force and Field**

يمكن أن يتم فعلياً قياس ما ينتج عن الشحنات الكهربائية وبالتالي فإن معظم القوانين التي تضبط العلاقة بين الشحنات وما ينتج عنها هي في أساسها تجارب يمكن تصميمها وإجرائها وأولها قانون كولومب (Coloumb Law) الذي يحدد القوة الكهربائية ((Electric Force F (سيتم استخدام حرفاً داكناً لتمثيل الكميات المتجهة) بين شحنتين $q_1 \text{ C}$ و $q_2 \text{ C}$ تفصل بينهما مسافة R_{12} ، أنظر الشكل (1-2)، وهذه القوة الكهربائية تكون كما يلي:-

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon R_{12}^2} \mathbf{a}_{R_{12}} \quad \text{N} \quad (1-1)$$

حيث إن \mathbf{F}_{12} هي القوة التي تؤثر بها الشحنة q_1 على الشحنة q_2 علماً بأن $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ و $R_{12} = |\mathbf{R}_{12}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ هي المسافة التي تفصل بين الشحنتين q_1 و q_2 و $\mathbf{a}_{R_{12}}$ يمثل متجه وحدة طول و \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 يمثلان متجهات موضعية و ϵ هو ثابت الوسط أو سماحيته وتكون قيمته للفراغ (أو للهواء) $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36 \pi) \text{ F/m}$.



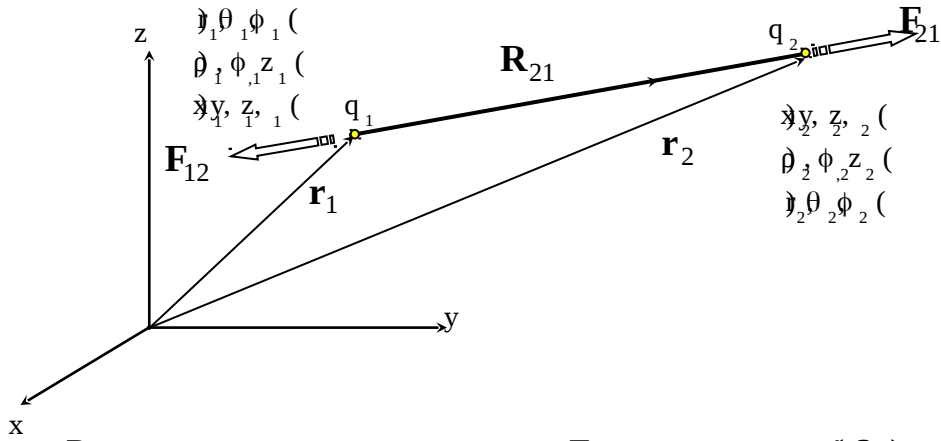
الشكل (1-1) :- الأشكال المختلفة للشحنات الكهربائية:- الشحنات النقطية $q_1 C$ و $q_2 C$ و $q_3 C$ والشحنة الخطية $\rho_L C/m$ والشحنة السطحية $\rho_s C/m^2$ والشحنة الحجمية $\rho_v C/m^3$.

و يمكن من الشكل (1-2) كتابة \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 و \mathbf{R}_{12} و $\mathbf{a}_{R_{12}}$ باستخدام الإحداثيات الكارتيزية والأسطوانية والكروية كما يلي:-

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2} &= x_{1,2} \mathbf{a}_x + y_{1,2} \mathbf{a}_y + z_{1,2} \mathbf{a}_z = r_{1,2} \mathbf{a}_{r_{1,2}} + z_{1,2} \mathbf{a}_z = r_{1,2} \mathbf{a}_{r_{1,2}} \\ &= \rho_{1,2} \cos \phi_{1,2} \mathbf{a}_x + \rho_{1,2} \sin \phi_{1,2} \mathbf{a}_y + z_{1,2} \mathbf{a}_z \\ &= r_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \phi_{1,2} \mathbf{a}_x + r_{1,2} \sin \theta_{1,2} \sin \phi_{1,2} \mathbf{a}_y + r_{1,2} \cos \theta_{1,2} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$R_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\mathbf{a}_{R_{12}} = [(x_2 - x_1) \mathbf{a}_x + (y_2 - y_1) \mathbf{a}_y + (z_2 - z_1) \mathbf{a}_z] / R_{12}$$



الشكل (2):- القوة الكهربائية F_{21} بين شحنتين q_1 و q_2 تفصل بينهما مسافة R_{21}

وتعرف العلاقة المبينة في المعادلة (1-1) بقانون التربيع العكسي ويتكرر هذا القانون في المصادر والمجالات المغناطيسية وقوى الجاذبية ومسائل فيزيائية أخرى. وتبين هذه العلاقة أن هناك تماثلاً في ناتج الشحنة النقطية q_1 (في هذه الحالة)، ويتوزع هذا الناتج بشكل منتظم على سطح كرة مساحتها $4 \pi R_{12}^2 \text{ m}^2$ وتؤثر هذه الشحنة بشكل طردى على الشحنة النقطية الأخرى q_2 وذلك كما تبينه العلاقة المذكورة.

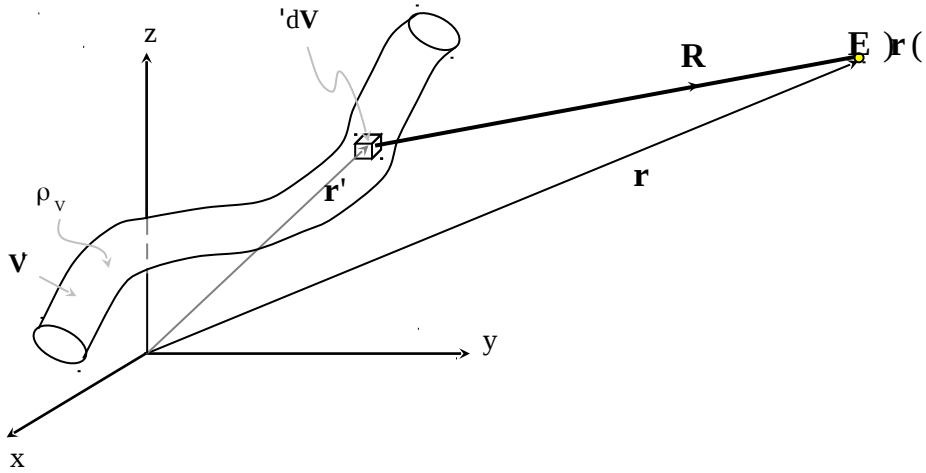
يتم الآن تعريف المجال الكهربائي (Electric Field) \mathbf{E} على أنه القوة الكهربائية لكل وحدة شحنة أو أن المجال الكهربائي \mathbf{E}_1 عند النقطة (x_2, y_2, z_2) الناتج عن الشحنة q 1 الموضوعة عند النقطة (x_1, y_1, z_1) هو كما يلي:-

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon R_{12}} \mathbf{a}_{R12} \quad \text{V/m} \quad (2-1)$$

وتكون وحداته N/C أو V/m. وإذا كان هناك شحنة حجمية موجودة في الحجم V' وكثافتها هي ρ_V كما هو مبين في الشكل (1-3) فإن المجال الكهربائي الناتج عند النقطة (x, y, z) يكون كما يلي:-

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}') dV'}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{a}_R \quad \text{V/m} \quad (3-1)$$

حيث إن $\mathbf{a}_R = \mathbf{R} / |\mathbf{R}|$ و $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$



الشكل (3):- المجال الكهربائي الناتج عن شحنة حجمية.

مثال (1-1):- يبين الشكل (1-4) ثلاث شحنات نقطية موضوعة في الفراغ، الأولى $q_1 = 1 \text{ nC}$ عند النقطة $(0, 0, 1)$ والثانية $q_2 = -2 \text{ nC}$ عند النقطة $(0, 0, 0)$ والثالثة $q_3 = 1 \text{ nC}$ عند النقطة $(0, 0, -1)$ أوجد القوة التي تؤثر بها الشحنة الأولى على كل من الشحنة الثانية والثالثة. (ii) أوجد ناتج القوة التي تؤثر بها الشحنة الثانية والشحنة الثالثة على الشحنة الأولى. (iii) أوجد المجال الكهربائي الناتج عن هذه الشحنات عند النقطة $P_1(x, y, z)$ والنقطة $P_2(0, 0, 1)$ والنقطة $P_3(2, 0, 0)$.

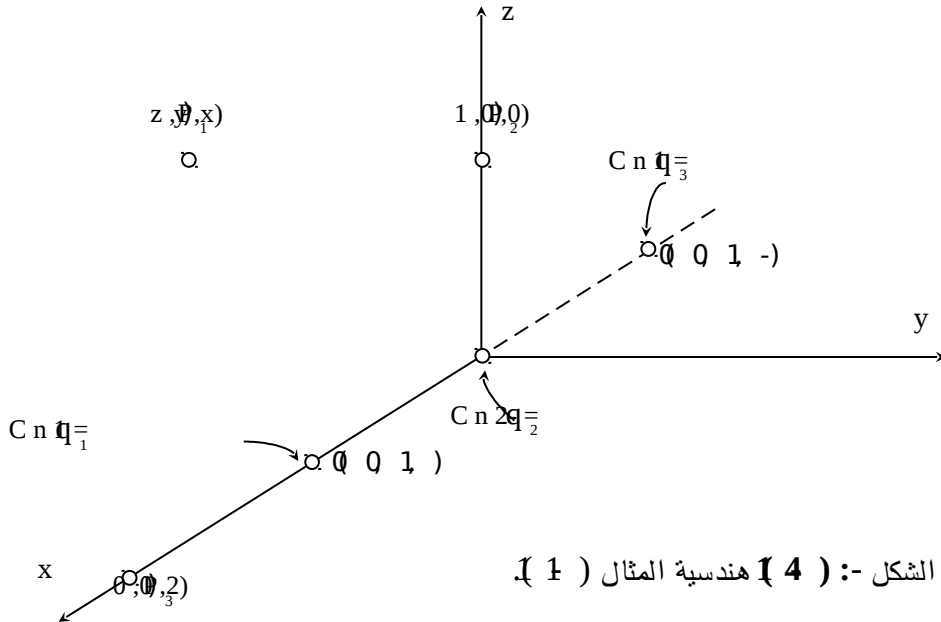
الحل:-

(i) القوة التي تؤثر بها الشحنة الأولى على الثانية

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{(1 \times 10^{-9})(-2 \times 10^{-9})(-\mathbf{a}_x)}{4\pi \times (10^{-9}/36\pi) \times 1^2} = 18 \mathbf{a}_x \text{ nN}$$

القوة التي تؤثر بها الشحنة الأولى على الثالثة

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{(1 \times 10^{-9})(1 \times 10^{-9})(-\mathbf{a}_x)}{4\pi \times (10^{-9}/36\pi) \times 2^2} = -2.25 \mathbf{a}_x \text{ nN}$$



الشكل (1-4) هندسية المثال (1-1)

(ii) أما ناتج القوة التي تؤثر بها الشحنتين الثانية والثالثة على الشحنة الأولى فهي كما يلي :-

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = -\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{13} = -18 \mathbf{a}_x + 2.25 \mathbf{a}_x = 15.75 \mathbf{a}_x \quad \text{nN}$$

(iii) المجال الكهربائي الكلي عند النقطة P_1 هو المجموع الاتجاهي للمجال الكهربائي الناتج عن كل شحنة على حدة، أو

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{10^{-9}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)} \left[\frac{(x-1)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{2(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{(x+1)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{[(x+1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \text{ V/m}$$

أما المجال الكهربائي الكلي عند النقطة P_2 كما يلي :-

$$\mathbf{E}(0, 0, 1) = 9 \left[(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) / (2\sqrt{2}) - 2\mathbf{a}_z + (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) / 2\sqrt{2} \right] \\ = -11.64 \mathbf{a}_z \quad \text{V/m}$$

ويكون المجال الكهربائي الكلي عند النقطة P_3 كما يلي :-

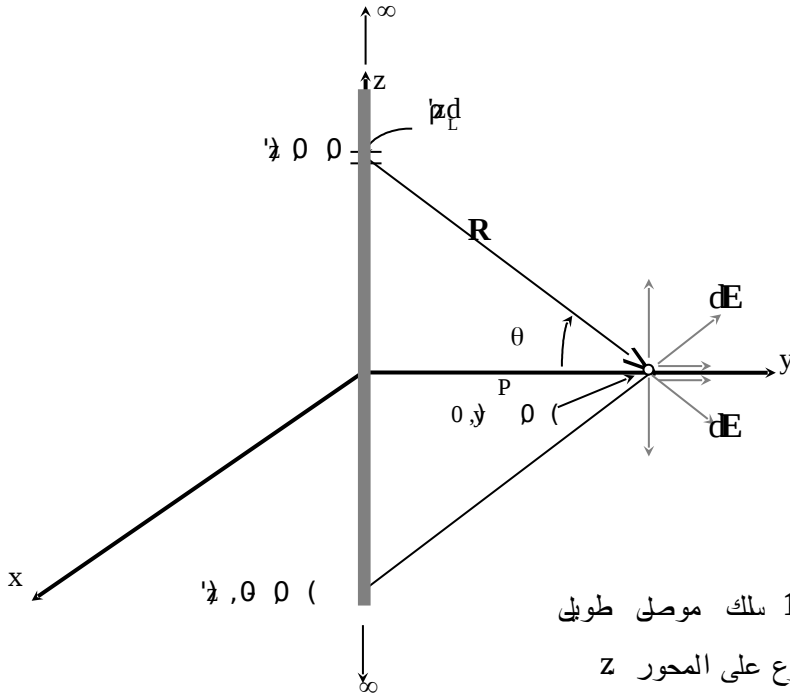
$$\mathbf{E}(2, 0, 0) = 9 \left[(\mathbf{a}_x - 0.5\mathbf{a}_x + 0.11\mathbf{a}_x) \right] = 5.5 \mathbf{a}_x \quad \text{V/m}$$

مثال :- (1-2) يبين الشكل (1-5) سلكاً موصلاً طويلاً يحمل شحنة خطية كثافتها $\rho_L \text{ C/m}$ وموضوع باتجاه المحور z في الهواء، أوجد المجال الكهربائي الناتج عن هذا السلك عند النقطة $(P(0, y, 0))$.

الحل :-

إذا أخذ جزءاً صغيراً من السلك dz' والذي يحمل شحنة مقدارها $\rho_L dz'$ فإن المجال

الكهربائي $d\mathbf{E}$ الناتج يكون كما يلي :-



الشكى :- (5) سلك موصل طويل مشحون وموضوع على المحور z

$$d\mathbf{E}(0, y, 0) = \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad \text{V/m}$$

$$\text{حيث إن } R = (y^2 + z'^2)^{1/2} \text{ و } \mathbf{a}_r = (y \mathbf{a}_y - z' \mathbf{a}_z) / (y^2 + z'^2)^{1/2}$$

أو أن المجال الكهربائي الكلي الناتج عن السلك يكون كما يلي :-

$$\mathbf{E}(0, y, 0) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y \mathbf{a}_y - z' \mathbf{a}_z)}{(y^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \quad \text{V/m}$$

ومن التماثل في هذه المسألة فإن المجال الكهربائي سيكون له عنصر في اتجاه \mathbf{a}_y فقط (بلا حظ أن التكامل الثاني يتم على دالة مفردة وبالتالي فإن نتيجته تكون صفراً) أو أن $\mathbf{E} = E_y \mathbf{a}_y$ أو

$$E_y(0, y, 0) = \frac{2 \rho_L y}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(y^2 + z'^2)^{3/2}}$$

وتستخدم طريقة التعويض لإجراء هذا التكامل الأخير أو باستخدام $z' = y \tan \theta$ وبالتالي فإن $dz' = y d\theta / \cos^2 \theta$ و $(y^2 + z'^2)^{3/2} = y^3 / \cos^2 \theta$ ، أو

$$\int_0^{\infty} \frac{dz'}{(y^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 1/y^2$$

ويصبح المجال الكهربائي عند النقطة $(y, 0, 0)$ كما يلي:-

$$E_y(0, y, 0) = \rho_L / (2 \pi \epsilon_0 y) \quad V/m$$

إذا استخدمت الإحداثيات الأسطوانية في حل هذه المسألة فإن المجال الكهربائي الناتج

$$E_\rho(r, \phi, z) = \frac{\rho_L}{2 \pi \epsilon_0 \rho} \quad V/m \quad \text{ويكون } \mathbf{a}_\rho \text{ يكون فقط باتجاه } \mathbf{a}_\rho \text{ حيث إن } \rho \text{ هي}$$

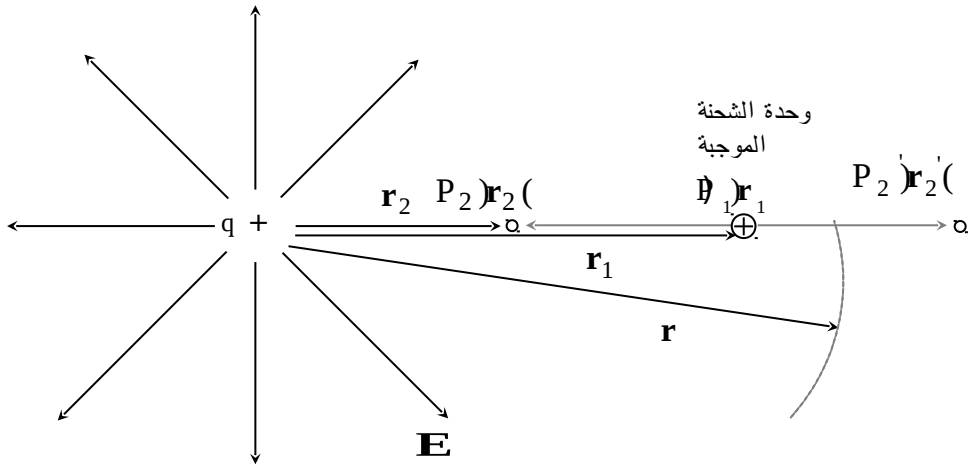
المسافة التي تفصل النقطة المراد إيجاد المجال الكهربائي عندها عن السلك في الإحداثيات الأسطوانية.

-1-3 الجهد الكهربائي (Electric Potential)

يعرف الجهد الكهربائي بأنه كمية الشغل المبذول لنقل وحدة شحنة موجبة من نقطة إلى أخرى بوجود مجال كهربائي. ويبين الشكل (1-6) وجود شحنة نقطية $q+$ وخطوط مجالها الكهربائي ووحدة شحنة موجبة تقع عند النقطة $(P_1(\mathbf{r}_1))$. يلاحظ أنه سيتم بذل جهد موجب إذا ما حركت وحدة الشحنة الموجبة من النقطة $(P_1(\mathbf{r}_1))$ إلى النقطة $(P_2(\mathbf{r}_2))$ أي باتجاه معاكس لاتجاه خطوط المجال الكهربائي. كذلك فإنه سيتم بذل جهد سالب إذا ما حركت وحدة الشحنة الموجبة من النقطة $(P_1(\mathbf{r}_1))$ إلى النقطة $(P_2(\mathbf{r}_2))$ أي باتجاه خطوط المجال الكهربائي. ويعطى الجهد الكهربائي بالعلاقة التالية:-

$$V_{12} = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (4-1)$$

وتأتي الإشارة السالبة للتعبير عن أن بذل جهد موجب ينتج من تحريك وحدة الشحنة الموجبة باتجاه معاكس لاتجاه خطوط المجال الكهربائي \mathbf{E} . ويؤكد الضرب النقطي (\bullet) على أن الجهد سيكون بأعلى قيمة له إذا كانت $d\mathbf{L}$ و $d\mathbf{E}$ متوازيان ويكون صفرًا إذا كانت حركة وحدة الشحنة باتجاه عمودي على خطوط المجال الكهربائي. أما $d\mathbf{L}$ فتمثل وحدة الطول التفاضلية أو $d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$ للإحداثيات الكارتيزية و $d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$ للإحداثيات الأسطوانية و $d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$ للإحداثيات الكروية.



الشكل (1-6):- شحنة نقطية $q+$ وخطوط مجالها الكهربائي وحركة وحدة الشحنة الموجبة.

ومن الشكل (1-6) فإن $d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r$ والمجال الكهربائي $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ V/m

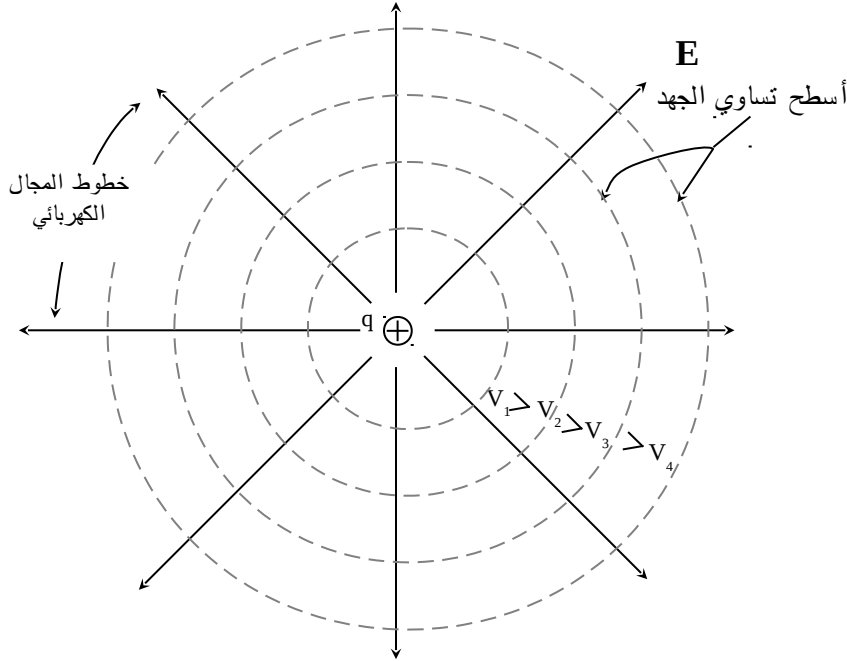
وبالتالي فإن الجهد الكهربائي V_{12} يصبح كما يلي :-

$$V_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad V$$

وإذا كانت $r_2 = r$ و $r_1 \rightarrow \infty$ فإن الجهد الكهربائي للنقطة $P(\mathbf{r})$ مقارنة بنقطة يكون عندها الجهد مساوياً لصفر هو

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad V \quad (5-1)$$

وتمثل العلاقة الأخيرة قيمة الجهد عند أي نقطة على سطح كرة نصف قطرها r ويكون جهد أي نقطة على سطحها مساوياً $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ويسمى هذا بسطح تساوي الجهد. ويلاحظ من الشكل (1-7) أن خطوط المجال الكهربائي تكون عمودية على هذا السطح وهذه قاعدة عامة مفادها أن خطوط المجال الكهربائي تكون دائماً عمودية على أسطح تساوي الجهد. ويمكن إعادة كتابة المعادلة (1-5) إذا كانت الشحنة موزعة في حجم dV' كما يلي:-



الشكل (7):- تعامد خطوط المجال الكهربائي \mathbf{E} على أسطح تساوي الجهد.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_R \frac{\rho_v dV'}{R} \quad (6-1)$$

حيث إن R تمثل المسافة بين النقطة التي يكون عندها $\rho_v dV'$ والنقطة التي يتم حساب جهدها. ويلاحظ أن العلاقة التي تحدد الجهد هي أبسط من تلك التي تحدد المجال الكهربائي إضافة إلى أن الجهد كمية قياسية في حين إن المجال كمية متجهة وبالتالي قد يكون من السهل، في حالات عدة وخاصة تلك التي تفتقد إلى التماثل، إيجاد الجهد ومن ثم (سيتم بيان ذلك فيما بعد) يتم استنتاج المجال الكهربائي.

مثال :- (1-3) في المثال (1-2) أوجد فرق الجهد V_{12} الناتج بين نقطتين الأولى تقع على بعد ρ_1 من السلك والثانية تقع على بعد ρ_2 من السلك علماً بأن $\rho_2 < \rho_1$ إذا كان طول السلك $2L$ وموضوع بشكل متماثل على المحور z ، بين $z = -L$ و $z = L$ ، فأوجد جهد النقطة $(y, 0, 0)$ إذا كانت كثافة الشحنة الخطية له $\rho_L C/m$.

الحل:-

بما أن المجال الكهربائي لهذا السلك هو $E_\rho = \rho_L / (2\pi\epsilon_0\rho)$ فإن فرق الجهد V_{12} بين نقطتين ($\rho = \rho_1$) هو كما يلي:-

$$\begin{aligned} V_{12} &= - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) \\ &= - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad V \end{aligned}$$

أما في حالة السلك الواقع في المدى $-L \leq z \leq L$ فقط فسيكون من الأسهل إيجاد الجهد V عند النقطة $(y, 0, 0)$ مباشرة كما يلي:-

$$V(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\rho_L dz'}{R} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{y^2 + z'^2}}$$

يتم إجراء هذا التكامل بطريقة التعويض $z' = y \tan \theta$ أو

$$\sqrt{y^2 + z'^2} = y / \cos \theta \quad \text{وكذلك} \quad dz' = y d\theta / \cos^2 \theta$$

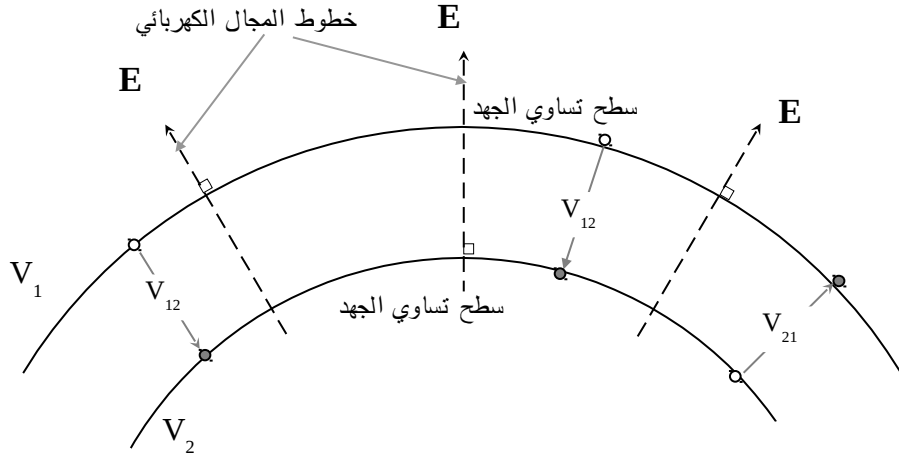
V يصبح كما يلي:-

$$V(0, y, 0) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{1 - \sin \theta_1} \right)$$

حيث إن $\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{L}{y} \right)$ أو

$$V(0, y, 0) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{L^2 + y^2} + L}{\sqrt{L^2 + y^2} - L} \right) \quad V$$

يلاحظ مما سبق أن خطوط المجال الكهربائي تكون متعامدة على أسطح تساوي الجهد وبالتالي وبالتالي وبالنظر إلى الشكل (1-8) فإن فرق الجهد بين أي نقطة على سطح تساوي الجهد V_1 وأي نقطة أخرى على سطح تساوي الجهد V_2 يكون $V_1 - V_2$ أو $V_2 - V_1$. وبالتالي فليس لتفاصيل المسار بين نقطتين أثر على فرق الجهد بينهما وإنما فقط جهدي نقطتي البداية والنهاية. ونظراً لأن فرق الجهد بين نقطتين هو ناتج عن ضرب نقطي بين E و dL فإنه سيكون بقيمته العظمى عندما يكون الخط الممثل للمجال الكهربائي E موازياً للخط الممثل للمسار dL أو عندما يكون عمودياً على سطح تساوي الجهد. ويكون صفرًا عندما يكون E عمودياً على المسار dL أو عندما يكون المسار dL مماساً لسطح تساوي الجهد.



الشكل :- (8) خطوط المجال الكهربائي وأسطح تساوي الجهد.

4-1-1- تدرج الجهد Voltage Gradient

إذا كان هناك سطحي تساوي جهد V و $V + \Delta V$ تفصل بينهما مسافة ΔL بوجود مجال كهربائي E عمودي عليهما كما يبين الشكل (1-9) فإن فرق الجهد يكون كما يلي:-

$$V_{12} = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \Delta V \cong - E_L \Delta L$$

حيث إن E_L هو المجال الكهربائي باتجاه ΔL ، أو

$$E_L \approx - \Delta V / \Delta L \quad (7 - 1)$$

وتبين العلاقة الأخيرة أن المجال الكهربائي هو معدل تغير الجهد في الاتجاه

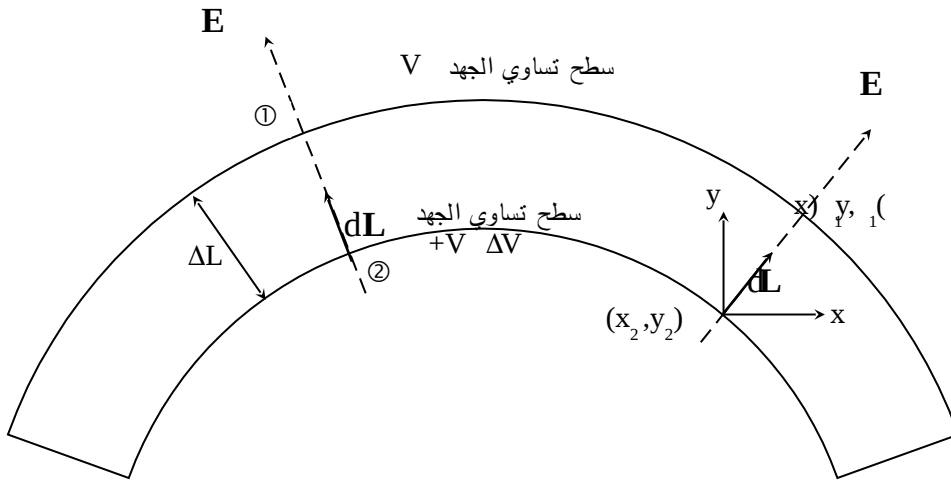
العمودي على السطح الذي يمثل ذلك الجهد. فإذا كان $d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x$ فإن $E_x \approx - \frac{\Delta V}{\Delta x}$

أو $(\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x \approx - \frac{\Delta V}{\Delta x} \mathbf{a}_x)$ وإذا كانت $d\mathbf{L} = dy \mathbf{a}_y$ فإن $E_y \approx - \frac{\Delta V}{\Delta y}$ ، أما إذا

كان $dL = dz \mathbf{a}_z$ فإن $E_z \approx -\frac{\Delta V}{\Delta z}$ وبالتالي إذا كان $dL = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$

\mathbf{a}_z فإن المجال الكهربائي \mathbf{E} يكون كما يلي:-

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z \approx - \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \mathbf{a}_x + \frac{\Delta V}{\Delta y} \mathbf{a}_y + \frac{\Delta V}{\Delta z} \mathbf{a}_z \right)$$



الشكل (1-9):- سطحا تساوي الجهد V و $V + \Delta V$ تفصل بينهما مسافة ΔL بوجود مجال كهربائي \mathbf{E} .

وعندما تؤول $\Delta L \rightarrow dL \rightarrow 0$ فإن العلاقة الأخيرة تكتب كما يلي:-

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) V(x, y, z) \end{aligned} \quad (8a-1)$$

أو

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (8b-1)$$

حيث إن $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$ ويدعى بالتدرج (gradient) أو

بمعدل التغير، ويكون في الإحداثيات الأسطوانية كما يلي:-

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

أما في الإحداثيات الكروية فيكون كما يلي:-

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{\partial}{r \partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

مثال :- (1-4) إذا كان جهد مصدر معين معطى بما يلي:- (i) $V(r, \theta, \phi) = 50/r$ V أو $V(x, y, z) = 5x^2y$ V (ii) أوجد المجال الكهربائي لكل حالة.

الحل:-

(i) يتم استخدام العلاقة (8a-1) في الإحداثيات الكروية أو

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{50}{r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{V/m}$$

(ii) يتم استخدام العلاقة (8a-1) في الإحداثيات الكارتيزية أو

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -10xy \mathbf{a}_x - 5x^2 \mathbf{a}_y \quad \text{V/m}$$

5-1-1-1:- كثافة الفيض الكهربائي D وقانون جاوس

تبين المعادلة (1-3) المجال الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية وسيتم كتابتها هنا كما يلي:-

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{V/m}$$

ويمكن النظر إليها على أساس أن المجال الكهربائي ينتج عن شحنة نقطية يتوزع أثرها بشكل منتظم على مساحة كرة نصف قطرها r في وسط سماحيته ϵ . وسيتم تعريف الكمية C/m^2 ($q/4\pi r^2$) على أنها كثافة الفيض الكهربائي (electric flux density) \mathbf{D} , أو متجه الإزاحة displacement vector ، أو

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{C/m}^2 \quad (9a-1)$$

وبالتالي فإن

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{C/m}^2 \quad (9b-1)$$

ويلاحظ أن خصائص الوسط ϵ لم تظهر في المعادلة (9a-1). أما إذا كان المصدر موجوداً على شكل شحنات حجمية ρ_v في حجم V' فيمكن كتابة \mathbf{D} كما يلي:-

$$\mathbf{D} = \int_{V'} \int \int \frac{\rho_v dV'}{4\pi R^2} \mathbf{a}_r \quad \text{C/m}^2 \quad (10-1)$$

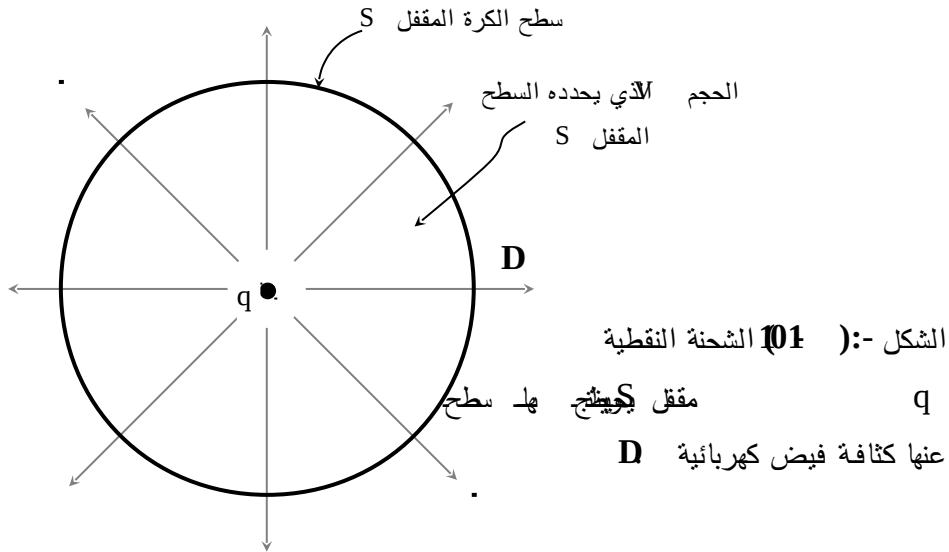
يمكن النظر إلى المعادلة (9a-1) على أن الشحنة النقطية q تنتج آثاراً على شكل كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} تم بيانها على شكل خطوط تخترق سطح الكرة المقفل وذلك كما يبينه الشكل (1-10). وإذا ما تم حساب كل الفيض الكهربائي أو كل الآثار الناتجة عن الشحنة q , فإن الناتج سيكون هو الشحنة النقطية q (مصدر هذه الآثار). ويتم حساب الفيض الكهربائي من خلال تجميع كل الخطوط الممثلة لكثافة الفيض الكهربائي التابع من سطح الكرة المقفل كما يلي:-

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r = q$$

أو يمكن كتابتها على الشكل التالي:-

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q = \int_V \rho_v dV \quad (11-1)$$

وتربط العلاقة (11-1) بين المصدر (الشحنة q) وبين ما ينتج عنه من كثافة فيض كهربائية \mathbf{D} من خلال سطح مقفل S (والذي يمكن أن يكون له أي شكل) يحوي بداخله حجماً V حيث إن المصدر يوجد بداخل هذا الحجم. ويكون المصدر على شكل شحنة (أو شحنات) نقطية أو على شكل شحنات حجمية أو على أي شكل آخر. وتعرف العلاقة (11-1) بقانون جاوس (Gauss Law) ويطلق على السطح المقفل S (Closed Surface) بـ سطح جاوس (Gauss Surface). ويربط هذا القانون المصدر بما ينتج عنه وسيتم استخدامه لإيجاد متجه الإزاحة \mathbf{D} من هذه المعادلة التكاملية والتي لن يكون حلها ميسراً إلا في بعض الحالات الخاصة والتي تتسم بالتمائل الهندسي والكهربائي في طبيعتها.

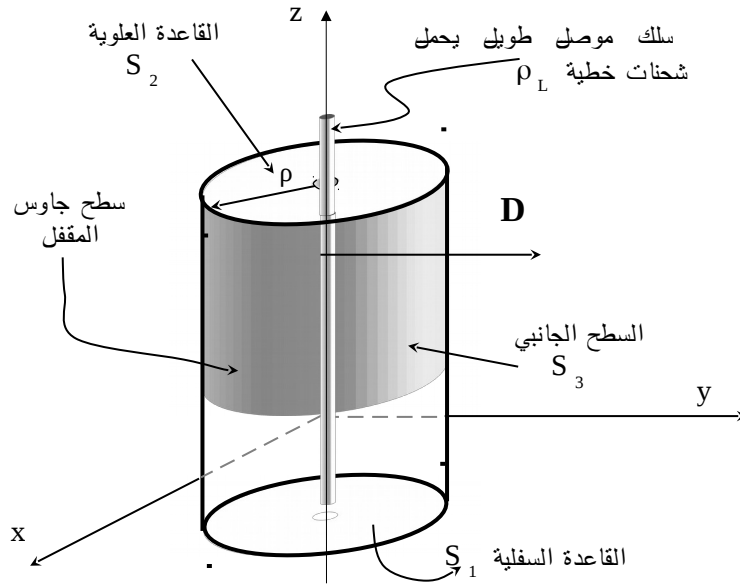


مثال :- (1-5) يبين الشكل (1-11) سلك موصل طويل يحمل كثافة شحنات خطية ρ_L C/m، أوجد كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} وشدة المجال الكهربائي \mathbf{E} الناتجين عنه.

الحل :-

في ضوء التماثل فإن قانون جاوس سيستخدم لحل هذا المثال حيث يتم اختيار سطح جاوس المقفل ليلائم إحداثيات وهندسية المسألة والذي يكون هنا عبارة عن اسطوانة محورها هو السلك الموصل بطول L وذلك كما هو مبين في الشكل (1-11). وباستخدام الإحداثيات الأسطوانية وملاحظة انه ومن التماثل في هذا المثال فإن \mathbf{D} لن يكون له عنصر إلا في اتجاه \mathbf{a}_ρ وكذلك فإنه لن يتغير مع z أو ϕ أو أن $\mathbf{D} = D_\rho(\rho) \mathbf{a}_\rho \text{ C/m}^2$ وبالتالي فإن قانون جاوس يصبح كما يلي :-

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_{S_1} \int_{S_2} \int_{S_3} \right] (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \int_L \rho_L dz$$



الشكل :- (1-11) سلك موصل طويل يحمل كثافة شحنات خطية $\rho_L \text{ C/m}$ مبيناً عليه المقفل. سطح جاوس

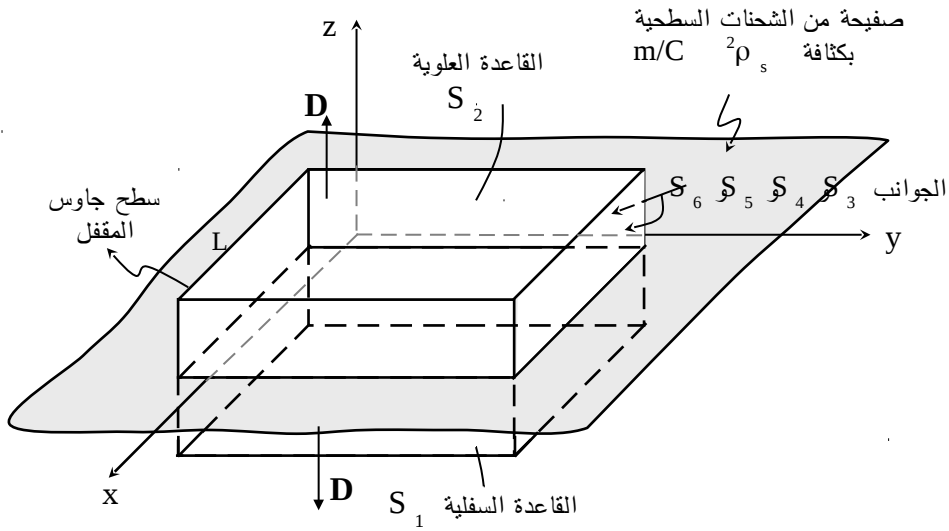
في ضوء ما سبق يؤول التكاملان على S_1 و S_2 إلى الصفر ويتبقى التكامل على S_3 كما يلي:-

$$D_\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_0^L \rho d\phi dz = \rho_L L \Rightarrow 2\pi \rho L D_\rho = \rho_L L \Rightarrow D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \text{ C/m}^2$$

$$E_\rho = D_\rho / \epsilon_0 = \rho_L / (2\pi \epsilon_0 \rho) \quad \text{V/m} \quad \text{ويكون المجال الكهربائي}$$

يلاحظ من هذا المثال سهولة الحصول على الناتج مقارنة بالمثال 1-2 .

مثال :- (1-6) أوجد كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} وشدة المجال الكهربائي \mathbf{E} الناتجين عن صفيحة من الشحنات السطحية بكثافة $\rho_s \text{ C/m}^2$ ، الصفيحة لا نهائية في أبعادها وموضوعة في المستوى xy عند $z = 0$ كما هو مبين في الشكل (1-12).



الشكل :- (1-6) صفيحة من الشحنات السطحية بكثافة ρ_s مبيناً عليها سطح جاوس المقفل.

الحل:-

في ضوء التماثل فإن كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} لا تتغير مع x أو مع y ولا يكون لها إلا عنصر واحد في اتجاه z أو أن $\mathbf{D} = D_z \mathbf{a}_z$ ، فإذا تم اختيار سطح جاوس المقفل على شكل مكعب طول ضلعه L كما في الشكل (1-12) فإن قانون جاوس يعطي ما يلي:-

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_{S_1} \int_{S_2} \int_{S_3 + S_4 + S_5 + S_6} \right] (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \int_S \rho_s dS$$

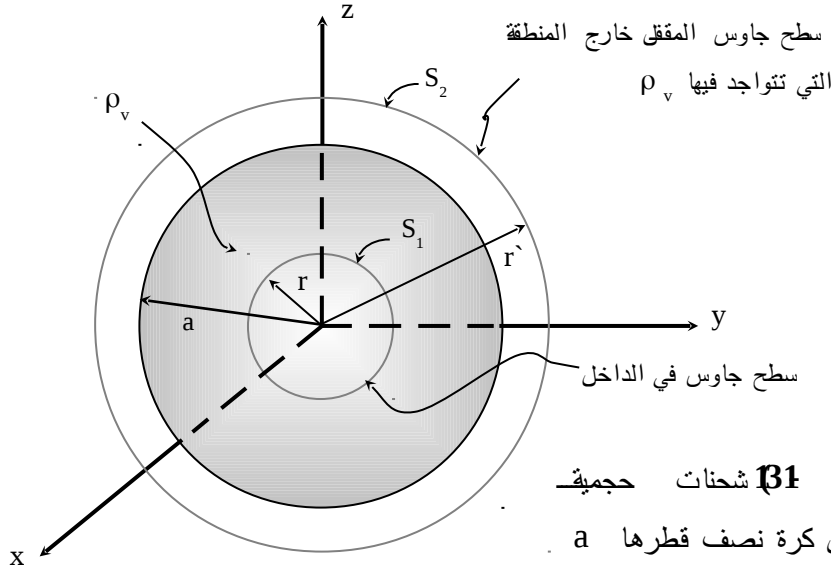
في ضوء ما سبق تكون نتيجة التكامل على الأسطح S_3 و S_4 و S_5 و S_6 صفراً ويبقى ما يلي:-

$$D_z L^2 + D_z L^2 = \rho_s L^2 \Rightarrow D_z = \rho_s / 2 \quad C/m^2$$

أو إن أثر سطح الشحنات هذا ثابت لا يتغير. وتجدر الإشارة إلى أن كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} تتغير مع مربع مقلوب المسافة التي تفصل بين الشحنة النقطية ونقطة المراقبة ومع مقلوب المسافة التي تفصل خط الشحنات الطويل عن نقطة المراقبة، أما في هذه الحالة فإن كثافة الفيض الكهربائي تكون ثابتة. أما المجال الكهربائي فيكون

$$E_z = \rho_s / 2 \varepsilon \quad V/m$$

مثال:- (1-7) يبين الشكل (1-13) حجماً على شكل كرة نصف قطرها a ويوجد داخلها توزيع من الشحنات الحجمية المنتظمة بكثافة $\rho_v C/m^3$. أوجد كثافة الفيض الكهربائي والمجال الكهربائي داخل وخارج الكرة وكذلك أوجد الجهد الكهربائي داخل وخارج الكرة، إذا كانت سماحية الوسط داخل وخارج الكرة هي ε .



الحل:-

في هذا المثال وفي ضوء التماثل فإن كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} لا تتغير مع θ أو ϕ ولا يكون لها إلا عنصراً واحداً في اتجاه r أو أن $\mathbf{D} = D_r(r) \mathbf{a}_r$ ، أو أن \mathbf{D} في المنطقة $0 \leq r \leq a$ أو داخل الكرة تكون

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \rho_v \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$$

$$4\pi r^2 D_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_v \Rightarrow D_r = \frac{\rho_v r}{3} \quad \text{أو} \quad C/m^2$$

$$E_r = \frac{\rho_v r}{3\epsilon} \quad \text{V/m} \quad \text{ويكون المجال الكهربائي}$$

أما في المنطقة خارج الكرة أو $r > a$ فإن

$$\oint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \rho_v \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$4\pi r^2 D_r = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_v \Rightarrow D_r = \frac{a^3 \rho_v}{3r^2} \quad \text{أو } C/m^2$$

$$E_r = \frac{a^3 \rho_v}{3r^2 \epsilon} \quad V/m \quad (r > a) \quad \text{ويكون المجال الكهربائي خارج الكرة}$$

لإيجاد الجهد الكهربائي، يجب أن يكون جهد نقطة البداية معروفاً وفي هذه الحالة فهي النقطة $r \rightarrow \infty$ حيث يكون جهدها مساوياً للصفر. في المنطقة $\infty > r > a$ يكون الجهد كما يلي:-

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\infty}^r \frac{a^3 \rho_v}{3\epsilon r'^2} \mathbf{a}_r \cdot dr' \mathbf{a}_r = \frac{a^3 \rho_v}{3\epsilon r} \quad V$$

وفي المنطقة $0 \leq r \leq a$:-

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \left[\int_{\infty}^a + \int_a^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \right]$$

$$= \frac{a^2 \rho_v}{3\epsilon} - \int_a^r \frac{\rho_v r'}{3\epsilon} \mathbf{a}_r \cdot dr' \mathbf{a}_r = \frac{a^2 \rho_v}{3\epsilon} + \frac{\rho_v}{6\epsilon} (a^2 - r^2) \quad V$$

6-1-1- تشتت كثافة الفيض الكهربائي $(\nabla \cdot \mathbf{D})$

بالرجوع إلى قانون جاوس المبين في العلاقة (1-11) والذي إذا تم تطبيقه على سطح صغير مقفل ΔS يحوي حجماً صغيراً ΔV فإنه يمكن كتابته كما يلي:-

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \rho_v dV \approx \rho_v \Delta V$$

وتصبح العلاقة الأخيرة صحيحة تماماً إذا ما آلت ΔS إلى الصفر وعندها فإن ΔV ستؤول إلى الصفر ويتم الحصول على ما يلي :-

$$\rho_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

ويمكن أن يتم تطبيق ذلك على متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه Δx و Δy و Δz وإذا آلت هذه الأطوال إلى الصفر فإن هذا يؤدي إلى

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{D}$$

أو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (12-1)$$

حيث إن $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$ ، و تحدد العلاقة (12-1) أن التشتت في

(D (Divergence of D هو كثافة الشحنات الحجمية. وبين الملحق (III-6) التشتت في \mathbf{D} للإحداثيات الأسطوانية والكروية.

مثال :- (8-1) إذا كانت كثافة الفيض الكهربائي في وسط ما

$$\mathbf{D} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \text{ n C/m}^2$$

أوجد الشحنات الحجمية في هذا الوسط وكمية الشحنات الكلية في مكعب طول ضلعه m .

الحل:-

يتم إيجاد كثافة الشحنات الحجمية من المعادلة (12-1) كما يلي :-

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 1+1+1 = 3 \text{ nC/m}^2$$

أما الشحنات الكلية في المكعب المذكور فتكون كما يلي :-

$$Q = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 3 \, dx \, dy \, dz = 24 \, \text{nC}$$

مثال :- (1-9) في المثال (1-7) أوجد $\nabla \cdot \mathbf{D}$ في المنطقة $a < r < \infty$.

الحل :-

من المثال (1-7) وفي المنطقة $a < r < \infty$ تكون كثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} كما يلي :-

$$D_r = \frac{a^3 \rho_v}{3 r^2} \quad \text{C/m}^2$$

من الملحق (III-6) يتم إيجاد $\nabla \cdot \mathbf{D}$ في الإحداثيات الكروية ($\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r$) كما يلي :-

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + 0 + 0 = 0 \quad \text{C/m}^3$$

وهذا يتفق مع الحقيقة أنه ليس هناك شحنات في المنطقة $a < r < \infty$.

7-1-1:- معادلات لابلاس وبوسان Poisson's & Laplace's equations

يمكن أن يتم ربط الجهد الكهربائي $V(\mathbf{r})$ مع الشحنات الحجمية $\rho_v(\mathbf{r})$ من خلال استخدام تشتت كثافة الفيض الكهربائي $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ وتدرج الجهد الكهربائي $V(\mathbf{r})$ أو $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ و $\mathbf{E} = -\nabla V = \mathbf{D}/\epsilon$ أو أن

$$-\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \right)$$

وإذا كان الوسط متجانساً وأحادي الاتجاه أو أن السماحية هي كمية قياسية وليست دالة في

$$\mathbf{r} \text{ أو } \varepsilon \neq \varepsilon(\mathbf{r}), \text{ فإن } \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \right) \text{ أو أن}$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\rho_v / \varepsilon \quad (13-1)$$

حيث إن $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ في الإحداثيات الكارتيزية ويطلق عليها اسم

لابلاسيان (Laplacian) ويمكن إيجاد قيمتها في الإحداثيات الأخرى من الملحق (6-III).

تدعى العلاقة (1-13) بمعادلة بوسان والتي تربط الجهد الكهربائي بكثافة الشحنات الحجمية في وسط معين وهي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية وغير متجانسة. وفي غياب الشحنات الحجمية فإن معادلة بوسان تصبح كما يلي:-

$$\nabla^2 V = 0 \quad (14-1)$$

وهذه هي معادلة لابلاس وهي معادلة تفاضلية جزئية متجانسة من الدرجة الثانية وسيتم فيما يلي تقديم مثال لتوضيح حل هذه المعادلة.

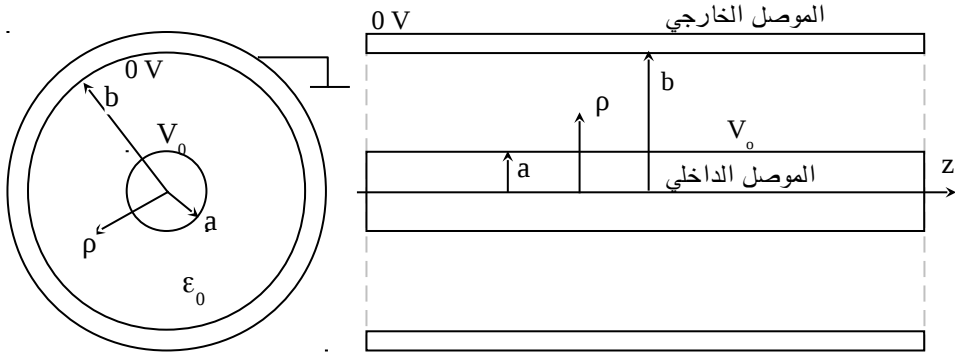
مثال (1-10):- يبين الشكل (1-14) كابل محوري يتكون من موصل داخلي نصف قطره a وموصل خارجي نصف قطره b ويفصل بينهما وسط من الهواء خالي من الشحنات، فإذا كان جهد الموصل الداخلي V_0 وجهد الموصل الخارجي $0V$ وكان هذا الكابل يمتد إلى ما لانهاية فأوجد الجهد الكهربائي $V(\rho, \phi, z)$ بين الموصلين.

الحل:-

بما أن الشكل الهندسي هو أسطواني فسيكون من الأنسب والأسهل حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية. ونظراً للتماثل في الجهد الكهربائي في ϕ و z فإن $V(\rho, \phi, z)$ لا يتغير مع ϕ أو z وإنما يعتمد على ρ أو أن معادلة لابلاس تصبح كما يلي :-

$$\nabla^2 V(\rho, \phi, z) = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + 0 + 0$$

$$\frac{d^2 V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \quad \text{أو}$$



الشكل :- (1-14) كابل محوري موصله الداخلي موصل بمصدر فولطيته V_0 V والخارجي مؤرض.

يكون حل المعادلة الأخيرة كما يلي :- $V(r) = A \ln(\rho) + B$ وبما أن $V(b) = 0$ و $V(a) = V_0$ فإن $V_0 = A \ln(a) + B$ وكذلك $0 = A \ln(b) + B$ أو أن

$$B = \frac{V_0 \text{Ln}(b)}{\text{Ln}(b/a)} \quad \text{و} \quad A = -V_0 / \text{Ln}(b/a)$$

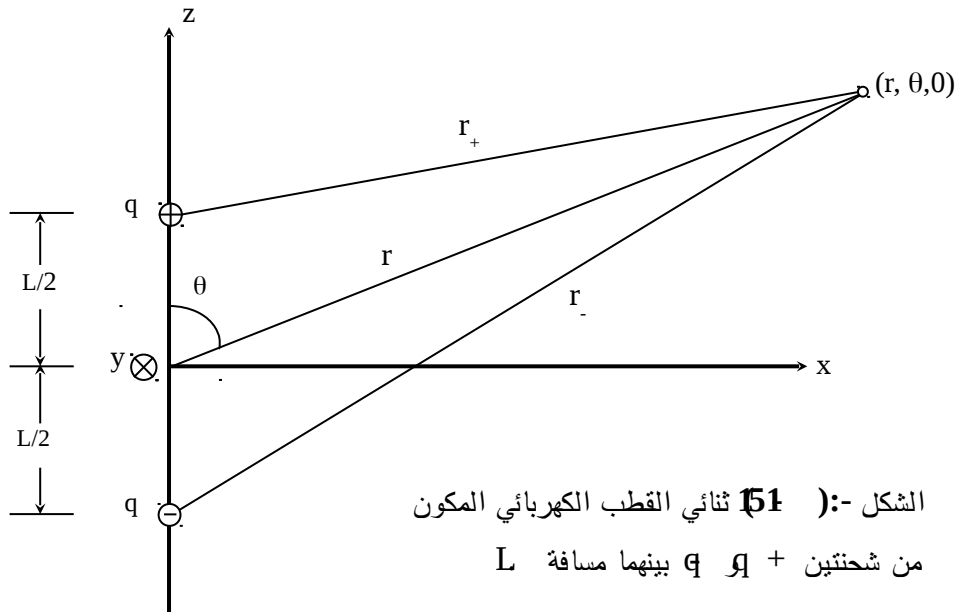
$$V(r) = \frac{V_0 \text{Ln}(b/\rho)}{\text{Ln}(b/a)} \quad V \quad \text{وبالتالي فإن الجهد في الوسط بين الموصلين يصبح}$$

8-1-1:- ثنائي القطب الكهربائي Electric Dipole

قبل الانتقال لبحث خصائص المواد العازلة سيتم إيجاد الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي نظراً لأهميته وخاصة في دراسة هذه المواد. يتكون ثنائي القطب من شحنتين متساويتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة يفصل بينهما مسافة L وسيتم إيجاد الجهد والمجال الكهربائي بعيداً عن هذا الثنائي، عند النقطة r حيث إن $r \gg L$ وذلك كما هو مبين في الشكل (1-15). يلاحظ أن هناك تماثلاً هندسياً وكهربائياً في المتغير ϕ وبالتالي فإن كلا من الجهد والمجال الكهربائي لا يتغيران مع تغير ϕ وعليه فسيتم أولاً إيجاد الجهد الكهربائي عند النقطة $(r, \theta, 0)$ كما يلي :-

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad V$$

$$\cdot r_{\pm} = \sqrt{r^2 + (L/2)^2 \mp rL \cos \theta} = r \left(1 + (L/2r)^2 \mp (L/r) \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث إن}$$



وبما أن $r \gg L$ فيمكن إعادة كتابة r_{\pm} باستخدام سلسلة تيلور (Taylor)

أو (Series)

$$r_{\pm} = r \left[1 \mp (L/2r) \cos \theta + \dots \right] \approx r \mp (L/2) \cos \theta$$

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{4 \pi \epsilon} \frac{L \cos \theta}{r^2 - (L/2)^2 \cos^2 \theta}$$

أو

$$V(r, \theta) = \frac{qL}{4 \pi \epsilon r^2} \cos \theta \quad V \quad (15-1)$$

يتم إيجاد المجال الكهربائي \mathbf{E} باستخدام تدرج الجهد $\mathbf{E} = -\nabla V$ أو أن

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_{\theta} \mathbf{a}_{\theta} = \frac{qL}{4 \pi \epsilon r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_{\theta}] \quad (16-1)$$

وتعرف الكمية qL على أنها العزم الكهربائي لثنائي القطب واتجاهها باتجاه \mathbf{a}_z أو

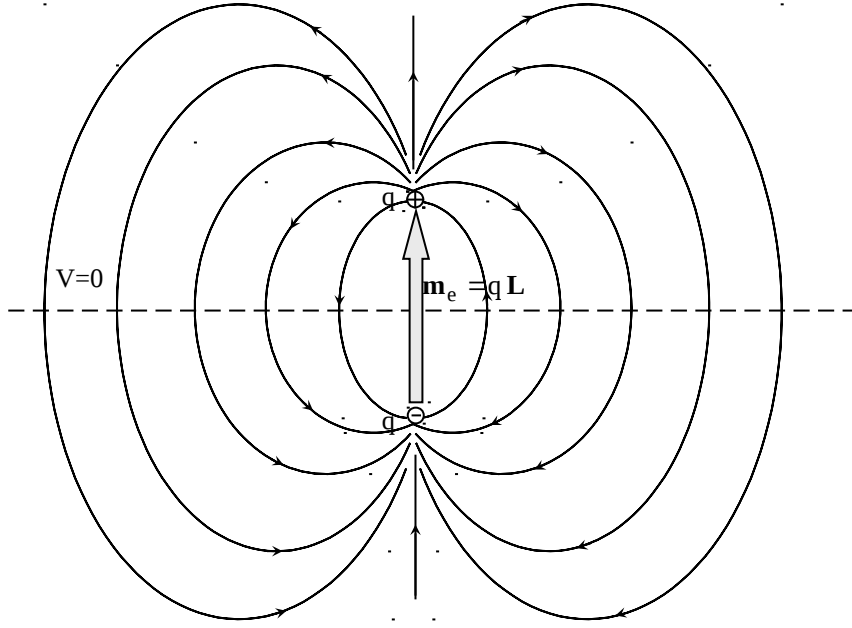
$$\mathbf{m}_e = qL = qL \mathbf{a}_z \quad \text{Cm} \quad (17-1)$$

حيث إن اتجاه عزم ثنائي القطب (Electric Dipole Moment) يؤخذ بالمتجه التابع من الإشارة السالبة ومتجهاً إلى الإشارة الموجبة وفي ضوء ذلك يمكن إعادة كتابة المعادلتين (1-15) و (1-16) كما يلي :-

$$V(r, \theta) = \frac{\mathbf{m}_e \cdot \mathbf{a}_r}{4 \pi \epsilon r^2} \quad V \quad (18 a-1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{|\mathbf{m}_e|}{4 \pi \epsilon r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad V/m \quad (18 b-1)$$

ويبين الشكل (1-16) المجالات الكهربائية الناتجة عن هذا الثنائي الذي استبدل بمتجه ذي العزم \mathbf{m}_e .



الشكل (1-16):- خطوط المجال الكهربائي الناتجة عن ثنائي قطب كهربائي بعزم $\mathbf{m}_e = qL$ Cm.

9-1-1:- Dielectric Materials المواد العازلة

كما سبق ذكره فإن المواد تتكون من ذرات وتتكون الذرة من نواة تحتوي على شحنات موجبة (بروتونات) وأجسام أخرى غير مشحونة وحول هذه النواة هناك شحنات سالبة (الكترونات) تدور في مدارات حول النواة. يمكن النظر إلى هذه الذرة (أو مجموعة من تلك الذرات) المكونة من مجموعتين متساويتين من الشحنات (موجبة

وسالبة) على أنها، ومن منظور خارجي، ثنائي قطب كهربائي وعزمه هو $m_e = qL$ Cm ، حيث إن L يتناسب مع نصف قطر الذرة (أو نصف قطر الفراغ الذي تشغله مجموعة من الذرات). إذا كان هناك عدد من هذه الثنائيات يساوي N في حجم مقداره $\Delta V m^3$ فإن كثافة هذه الثنائيات هي كما يلي :-

$$\frac{m_e N}{\Delta V} \equiv P \quad C/m^2 \quad (19-1)$$

حيث إن **P** هو متجه الاستقطاب (polarization vector) ويمثل كثافة ثنائيات القطب لمادة معينة ووحداته تناظر الوحدات الخاصة بكثافة الفيض الكهربائي **D** أو كثافة الشحنات السطحية، وبالتالي إذا كان هناك مادة عازلة بحجم V وكان بها عدد من ثنائيات القطب (مقداره N) فإنه إذا تأثرت بمجال كهربائي خارجي فإن هذه الثنائيات تصطف باتجاه المجال الكهربائي المؤثر وتضيف مجالاً كهربائياً إضافة إلى المجال الكهربائي الخارجي، أو بمنظور آخر، إذا ما تم أخذ الشكل (1-17) والذي يبين لوحين موصلين تفصل بينهما مسافة d وتم وصلهما ببطارية فولطيتها V_0 V فإذا كان الوسط بين اللوحين هو الفراغ (vacuum) فإن المجال الكهربائي، الشكل (1-17a)، بين اللوحين يكون كما يلي :-

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \quad V/m \quad (20a-1)$$

وذلك بإهمال انحرافات (شراريب fringing) المجال الكهربائي بين اللوحين، وتكون كثافة الفيض الكهربائي في هذه الحالة

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad V/m \quad (20b-1)$$

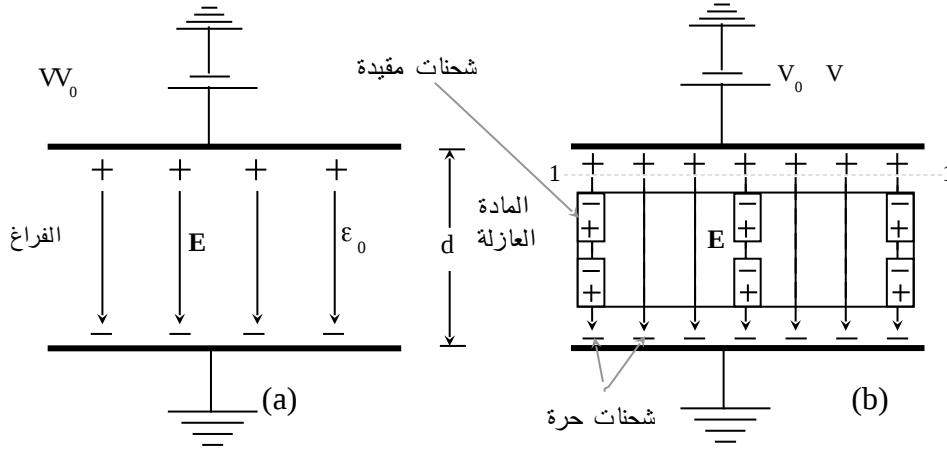
أما إذا كان الوسط بين اللوحين هو مادة عازلة فإن المجال الكهربائي يعمل على اصطفاف ثنائيات القطب الكهربائية لهذه المادة كما هو مبين في الشكل (1-17b). ويخلق هذا الاصطفاف شحنات مقيدة (bounded charges)، أو متجه الاستقطاب،

حيث يمكن للمراقب ملاحظتها من أحد أطراف المادة (فمثلاً إذا وقف عند المستوى 1-1 ونظر إلى الأسفل فإنه يرى شحنات سالبة). وتدعى بالشحنات المقيدة لأنها تظهر كزوج (أو ثنائي) من الشحنات موجبة وسالبة ويصعب فصلها عن بعضها. وتجذب هذه الثنائيات أو الشحنات المقيدة شحنات حرة إضافية من المصدر. وبالتالي فإن الشحنات التي تتواجد على اللوح العلوي (أو السفلي) تزداد في هذه الحالة مقارنة بالحالة السابقة. وتكون كثافة الفيض الكهربائي لهذه الحالة مساوية لكثافة الفيض الكهربائي السابقة إضافة لكمية أخرى تنتج عن استقطاب المادة العازلة على شكل متجه الاستقطاب P أو أن $D = D_0 + P$ أو

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon E = \epsilon V_0 / d \quad (21-1)$$

وتمثل ϵ سماحية المادة العازلة أو قدرة المادة على الاستقطاب أو كثافة ثنائيات القطب للمادة وتعطى قيمتها بما يلي :-

$$\epsilon = D/E = \epsilon_0 + P/E \quad (22-1)$$



الشكل:- (1-17) لوحان موصلان موصولان ببطارية فولطيتها (a) V_0 عندما يكون الفراغ فاصلاً بينهما (b) عندما تستخدم مادة عازلة لتفصل بينهما.

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (1-22) كما يلي :-

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon_0 (1 + P/D) \quad (23-1)$$

وتمثل ϵ_r قيمة السماحية النسبية للمادة ويبين الجدول (1-1) قيمة ϵ_r لمواد مختلفة. ومن المعادلات السابقة فإن متجه الاستقطاب P يعطى بما يلي :-

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) D \quad (24-1)$$

وتجدر الإشارة إلى أن المتجه D مرتبط مع كثافة الشحنات الحرة، أما المتجه P فهو مرتبط مع كثافة الشحنات المقيدة (ثنائيات القطب)، وسيتم ربط هذه الكميات ببعضها عند معالجة شروط الحدود.

الجدول :- (1-1) قيمة ϵ_r لعدد من المواد المختلفة.

قيمة ϵ_r	اسم المادة
1	الفراغ
1.0006	الهواء (ضغط جوي واحد)
2.1	الخشب الجاف
3	المطاط
4	الكوارتز
6	الزجاج
81	الماء المقطر

10-1-1:- شروط الحدود Boundary Conditions

إذا كان هناك وسطان وخصائصهما كما هو مبين على الشكل (1-18) وكان المجال الكهربائي وكثافة الفيض الكهربائي في الوسط العلوي E_1 و D_1 وفي الوسط السفلي E_2 و D_2 ، فإن السؤال الذي يمكن طرحه هو كيف ترتبط هذه الكميات مع بعضها عند السطح الفاصل بين الوسطين؟ وللإجابة على هذا السؤال يتم تصنيف المجالات الكهربائية إلى نوعين: الأول مماس للسطح الفاصل بين الوسطين E_{1t} و E_{2t} والنوع الثاني عمودي على هذا السطح E_{1n} و E_{2n} و D_{1n} و D_{2n} ، وسيتم فيما يلي معالجة كل صنف من هذه المجالات الكهربائية.

- كثافة الفيض الكهربائي العمودي D_n :- يتم في هذه الحالة اعتماد أسطوانة صغيرة (سطح جاوس المقفل) بارتفاع Δh ومساحة كل من القاعدتين $\Delta S_{1,2}$ كما يبين الشكل (1-18)، وتؤخذ لتكون عمودية على السطح الفاصل بين الوسطين. يطبق قانون جاوس كما يلي:-

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_{\Delta S_1} \int_{\Delta S_2} \int_{\Delta S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \right]$$

$$= \int_V \rho_v dV = \int_{\Delta S} \int_{\Delta h} \rho_v dh \quad (25-1)$$

ولتركيز على المجالات العمودية على السطح الفاصل بين الوسطين يتم جعل Δh تؤول إلى الصفر وبالتالي فإن التكامل على ΔS_3 (السطح الجانبي للأسطوانة) يؤول إلى الصفر وكذلك فإن التكامل الداخلي $\int_{\Delta h} \rho_v dh$ يؤول إلى الصفر إلا إذا كان هناك كثافة شحنات سطحية وفي هذه الحالة فإن

وبالتالي فإن المعادلة (1-25) تصبح $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta h} \rho_v dh = \rho_s \text{ C/m}^2$

كما يلي:-

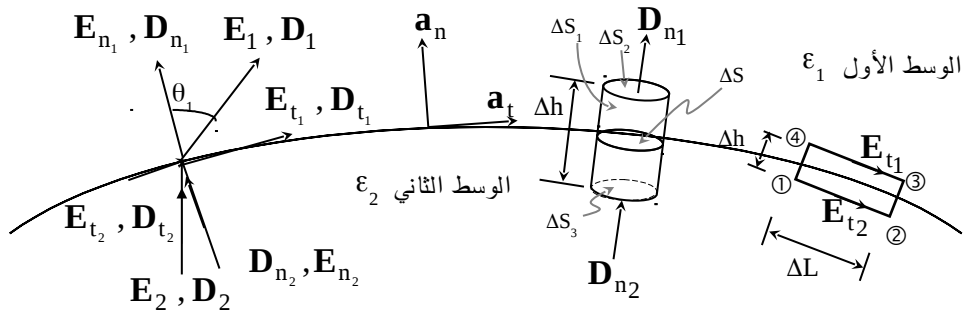
$$D_{n1} \Delta S_1 - D_{n2} \Delta S_2 \cong \rho_s \Delta S$$

وتتحول علاقة التساوي بالتقريب إلى تساوي عندما تؤول كل من ΔS_1 و ΔS_2 إلى الصفر (وبالتالي تؤول ΔS إلى الصفر)، وعندها فإن العلاقة الأخيرة تصبح كما يلي:-

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \text{ C/m}^2 \quad (26a-1)$$

أي أن عدم الاستمرارية في قيم كثافة الفيض الكهربائي العمودي D_n يعزى إلى وجود كثافة شحنات سطحية عند السطح الفاصل بين الوسطين وينتج عن غياب هذه الشحنات السطحية استمرارية في قيم كثافة الفيض الكهربائي العمودي أو

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (26b-1)$$



الشكل (1-18):- المجالات الكهربائية E و D في الوسطين الأول وسماحيته ϵ_1 والثاني وسماحيته ϵ_2 .

أو أن المجالات الكهربائية العمودية على السطح ترتبط مع بعضها كما يلي:-

$$\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \rho_s \quad C/m^2 \quad (27a-1)$$

بوجود كثافة الشحنات السطحية، و

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \quad (27b-1)$$

في غياب كثافة الشحنات السطحية.

- المجالات الكهربائية المماسية للسطح E_t :- يتم اعتماد المستطيل 1-2-3-4-1 كما

يبين الشكل (1-18)، مع ملاحظة أن $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ ، وتصبح مساهمة تكامل

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ حول هذا المسار المقفل مساوية للصفر أو

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right] \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

وللتركيز على المجالات الكهربائية المماسية للسطح E_t يتم جعل Δh تؤول إلى الصفر وفي

هذه الحالة يؤول التكاملين \int_2^3 و \int_4^1 إلى الصفر ويتبقى من العلاقة الأخيرة ما يلي:-

$$E_{t2} \Delta L - E_{t1} \Delta L \approx 0$$

وعندما تؤول ΔL إلى الصفر يتم الحصول على العلاقة التالية:-

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (28-1)$$

أو أن المجالات الكهربائية المماسية للسطح الفاصل بين الوسطين تكون مستمرة عند الانتقال

من الوسط السفلي إلى الوسط العلوي (في حدود سمك صغيرة يؤول إلى الصفر). أما

كثافات الفيض الكهربائي المماسية للسطح فترتبط مع بعضها كما يلي:-

$$D_{t1}/\varepsilon_1 = D_{t2}/\varepsilon_2 \quad (29-1)$$

وفي ضوء المعادلتين (27b-1) و(1-28) يلاحظ أن $\theta_1 \neq \theta_2$ وبالتالي فإن خطوط المجال الكهربائي تبدو وكأنها مكسورة عند الانتقال من وسط لآخر.

تم في المعادلة (26a-1) ربط كثافة الفيض الكهربائي بكثافة الشحنات السطحية الحرة ρ_s والتي تكون في العادة متوفرة للأوساط الموصلة. أما في الأوساط العازلة حيث تتواجد الشحنات المقيدة فيمكن ربطها مع متجه الاستقطاب. فإذا كان هناك وسطين عازلين متلامسين فإن كثافة الشحنات السطحية المقيدة ρ_{sb} تصبح كما يلي :-

$$P_{n1} - P_{n2} = - \rho_{sb} \quad (30a-1)$$

حيث إن P_{n1} و P_{n2} هما متجها الاستقطاب للوسط الأول والثاني على التوالي، وإذا كان الوسط الثاني فراغاً ($P_{n2} = 0$) فإن :-

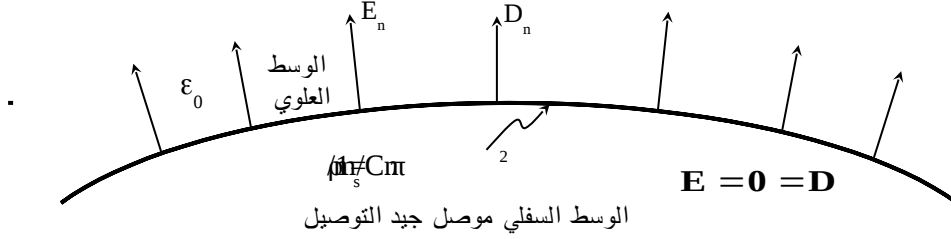
$$P_{n1} = - \rho_{sb} \quad (30b-1)$$

مثال :- (1-11) إذا كان الوسط العلوي في الشكل (1-18) هو الهواء F/m ε_0 والوسط السفلي هو مادة موصلة جيدة التوصيل، أوجد المجالات الكهربائية في الوسطين إذا كانت كثافة الشحنات السطحية على السطح الفاصل بين الوسطين nC/m^2 $(1/\pi)$.

الحل :-

من المعلوم أن الأوساط الموصلة متساوية الجهد وبالتالي فإن المجالات الكهربائية بداخلها تساوي صفراً أو أن $D = 0$ و $E = 0$ داخل الوسط السفلي. في ضوء ذلك فإن $E_{t2} = 0 = E_{t1}$ و $D_{t2} = 0 = D_{t1}$ وكذلك فإن $D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$ وحيث إن $D_{n2} = 0$ فإن المجال الكهربائي في الوسط العلوي هو $D_{n1} = \frac{1}{\pi} nC/m^2$ و

ويبين الشكل (1-19) المجالات الكهربائية لهذا المثال في كلا الوسطين. $E_{n1} = D_{n1} / \epsilon_0 = 36 \text{ V/m}$



1-1-1-10 المجالات الكهربائية داخل وخارج وسط موصل جيد التوصيل

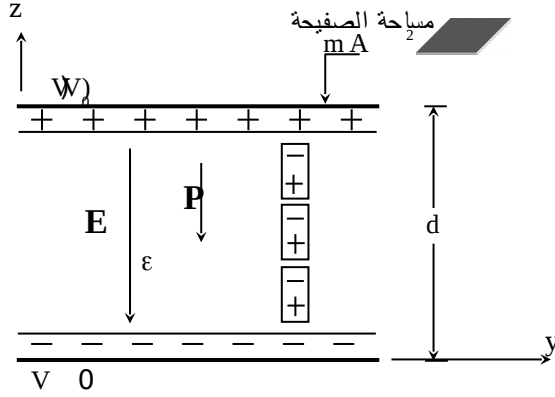
الموسع أو المكثف (capacitor) هو النبيطة التي تقوم بخزن الطاقة الكهربائية أو أنه ومن خلاله يتم ربط الدارات الكهربائية مع بعضها كهربائياً (عبر خطوط المجال الكهربائي أو عبر ما يسمى في بعض الأحيان بالمواسعات الشاردة stray capacitors). ويتكون المواسع من موصلين على أحدهما شحنة موجبة $q+$ وعلى الآخر شحنة سالبة $q-$ وبينهما فرق جهد V وتعرف سعة المواسع C بما يلي :-

$$C \equiv \frac{q}{V} = \frac{\int_S \rho_f dS}{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \quad (30-1)$$

وتعطى وحداته بالفاراد (Farad, F).

مثال (1-12):- يبين الشكل (1-20) مواسعاً ذا صفيحتين متوازيتين (parallel plate) فإذا كانت مساحة كل صفيحة $A \text{ m}^2$ والمسافة بينهما d وكان جهد الصفيحة السفلية V_0 والعلوية V_0 وسماحية الوسط العازل بين الصفيحتين $\epsilon_r \epsilon_0 \text{ F/m}$. أوجد كثافة الشحنات السطحية الحرة على كل من الوجه السفلي والعلوي للصفيحتين والعلوية والسفلية وذلك على التوالي. أوجد كذلك كثافة الشحنات السطحية المقيدة على الوجه العلوي والسفلي

المادة العازلة. أوجد كذلك سعة هذا المواسع. أهمل الانحناءات (الشراريب) في خطوط المجال الكهربائي.



الشكل :- (102) المواسع ذو الصفحتين المتوازيتين.

الحل :-

$$E_z = - V_0 / d \quad V/m$$

يكون المجال الكهربائي بين اللوحين كما يلي :-

$$D_z = - V_0 \epsilon_r \epsilon_0 / d \quad C/m^2$$

وكثافة الفيض الكهربائي

$$P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

أما متجه الاستقطاب فيكون كما يلي :-

$$P_z = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 V_0 / d \quad C/m^2$$

أو

وبالتالي فإن كثافة الشحنات السطحية الحرة تكون كما يلي :-

$$\rho_s = V_0 \epsilon_r \epsilon_0 / d \quad C/m^2$$

للسطح السفلي للصفحة العلوية، و

$$\rho_s = - V_0 \epsilon_r \epsilon_0 / d \quad C/m^2$$

للسطح العلوي للصفحة السفلية. أما كثافة الشحنات السطحية المقيدة فهي كما يلي :-

$$\rho_{sb} = - (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 V_0 / d \quad C/m^2$$

للوحة العلوية للمادة العازلة، و

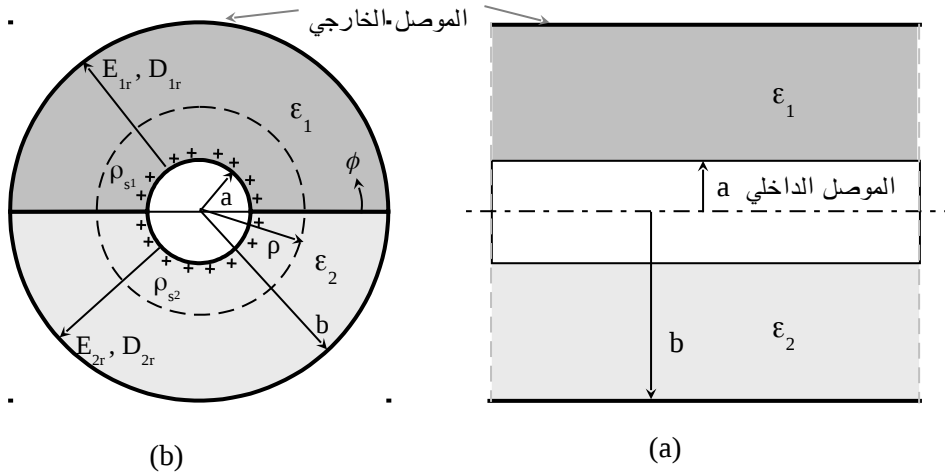
$$\rho_{sb} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 V_0 / d \quad C/m^2$$

للوحة السفلية للمادة العازلة. أما سعة المواسع C فهي كما يلي :-

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{\rho_s A}{V_0} = \frac{V_0 \epsilon_r \epsilon_0 A}{V_0 d} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} F$$

وبالتالي فإن سعة المواسع لا تعتمد على الشحنات المخزنة أو فرق الجهد بين الصفيحتين وإنما على خصائص الوسط ϵ ومساحة الصفيحتين A والمسافة بينهما d . وبالتالي فإن قيمتها يجب أن تكون دائماً موجبة.

مثال **(1-13)**:- يبين الشكل (1-21) الكابل المحوري الذي يتكون من موصل داخلي نصف قطره a وموصل خارجي نصف قطره b يفصل بينهما في المنطقة $0 \leq \phi < \pi$ مادة عازلة سماحياتها $\epsilon_1 F/m$ وأما المنطقة $\pi \leq \phi < 2\pi$ فإن سماحيها مادتها $\epsilon_2 F/m$ ، في ضوء ذلك **(i)** أوجد مواسعة هذا الكابل C لكل وحدة طول **(ii)** (F/m) إذا كان فرق الجهد بين الموصلين هو $V = 100$ وكانت $a = 2 \text{ mm}$ و $b = 10 \text{ mm}$ و $\epsilon_1 = \epsilon_0$ و $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ فأوجد كثافة الشحنات السطحية على سطح الموصل الداخلي $\rho = a$ وعلى سطح الموصل الخارجي $\rho = b$ وأوجد سعة الكابل لكل وحدة طول في هذه الحالة.



الشكل **(1-21)**:- الكابل المحوري بمادتين عازلتين تفصلان الموصل الداخلي عن الخارجي (a) مقطع طولي (b) مقطع أمامي.

الحل:-

(i) إذا كان جهد الموصل الداخلي V_0 وجهد الموصل الخارجي V_0 وكذلك إذا كانت كثافة الشحنات السطحية على الموصل الداخلي في المنطقة $0 \leq \phi < \pi$ هي $\rho_{S1} \text{ C/m}^2$ (أو كثافة الشحنات الخطية $\rho_{L1} \text{ C/m}$) وفي المنطقة $\pi \leq \phi < 2\pi$ هي $\rho_{S2} \text{ C/m}^2$ (أو كثافة الشحنات الخطية $\rho_{L1} \text{ C/m}$)، وبتطبيق قانون جاوس على أسطوانة نصف قطرها $a < \rho < b$ بطول L ومن التماثل (لن يكون هناك سوى D_ρ أو E_ρ) ينتج ما يلي :-

$$(D_{\rho 1} + D_{\rho 2}) \pi \rho L = (\rho_{S1} + \rho_{S2}) \pi a L$$

$$D_{\rho 1} + D_{\rho 2} = \frac{a}{\rho} (\rho_{S1} + \rho_{S2}) \text{ C/m}^2 \quad \text{أو}$$

وبما أن $D_{\rho 1} = \epsilon_1 E_{\rho 1}$ و $D_{\rho 2} = \epsilon_2 E_{\rho 2}$ وحيث إن $E_{\rho 1} = E_{\rho 2} (= E_\rho)$ (المجالات الكهربائية الماسة للسطح الفاصل بين الوسطين ϵ_1 و ϵ_2 عند $\phi = 0$ أو $\phi = \pi$ مستمرة) فيمكن كتابة العلاقة الأخيرة كما يلي :-

$$E_\rho (\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{a}{\rho} (\rho_{S1} + \rho_{S2})$$

أو أن

$$E_\rho = \frac{a}{\rho (\epsilon_1 + \epsilon_2)} (\rho_{S1} + \rho_{S2})$$

يتم الحصول من العلاقة التي تربط المجال الكهربائي مع فرق الجهد بين الموصلين على

$$-V_0 = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{a (\rho_{S1} + \rho_{S2})}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \text{Ln} (b/a)$$

$$V_0 = \pi a (\rho_{S1} + \rho_{S2}) \frac{\text{Ln} (b/a)}{\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} = (\rho_{L1} + \rho_{L2}) \frac{\text{Ln} (b/a)}{\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \text{أو أن}$$

وبالتالي فإن سعة الكابل لكل وحدة طول هي

$$C = \frac{(\rho_{L1} + \rho_{L2})}{V_0} = \frac{\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\text{Ln} (b/a)} \quad \text{F/m}$$

وتبين العلاقة الأخيرة أن سعة الكابل لكل وحدة طول تكون مكونة من جزأين

$$\text{حيث يمثل كل جزء منطقة. فالجزء } \frac{\pi \epsilon_1}{\text{Ln} (b/a)} \text{ F/m يمثل السعة للمنطقة}$$

$$0 \leq \phi < \pi \text{ والجزء } \frac{\pi \epsilon_2}{\text{Ln} (b/a)} \text{ F/m يمثل السعة للمنطقة } \pi \leq \phi < 2\pi \text{ وحيث}$$

أنهما متصلان على التوازي فإن مجموعها يشابه وصل مقاومتين على التوالي (كما هو معروف). وإذا كانت $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ فإن سعة الكابل المحوري لكل وحدة طول تصبح $C = 2\pi \epsilon / \text{Ln} (b/a) \quad \text{F/m}$

(ii) من شروط الحدود وعلى السطح الداخلي $\rho = a$ فإن

$$D_{\rho 1} = \epsilon_1 E_{\rho 1} = \rho_{s1} = \epsilon_1 E_{\rho} \quad \text{و} \quad D_{\rho 2} = \epsilon_2 E_{\rho 2} = \rho_{s2} = \epsilon_2 E_{\rho} \quad \text{أو أن}$$

$$\text{وبالتالي فإن} \quad \frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \text{و} \quad \frac{D_{\rho 1}}{D_{\rho 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$V_0 = a \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \rho_{s1} \frac{\text{Ln} (b/a)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} = \frac{a \rho_{s1}}{\epsilon_1} \text{Ln} (b/a) \quad V$$

$$V_0 = \frac{a \rho_{s2}}{\epsilon_2} \text{Ln} (b/a) \quad V \quad \text{أو}$$

$$\text{وبالتالي فإن} \quad \rho_{s1} = \frac{\epsilon_1 V_0}{a \text{Ln} (b/a)} \text{ C/m}^2 \quad \text{و} \quad \rho_{s2} = \frac{\epsilon_2 V_0}{a \text{Ln} (b/a)} \text{ C/m}^2$$

وعند السطح الداخلي للموصل الخارجي $\rho = b$ فهي كما يلي:-

$$\rho_{S2} = \frac{\epsilon_2 V_0}{b \ln(b/a)} \text{ C/m}^2 \quad \text{و} \quad \rho_{S1} = \frac{\epsilon_1 V_0}{b \ln(b/a)} \text{ C/m}^2$$

وللقيم المعطاة في هذا المثال فإن كثافة الشحنات السطحية عند $\rho = a$ تكون كما يلي:-

$$\rho_{S2} = 0.55 \text{ } \mu\text{C/m}^2 \quad \text{و} \quad \rho_{S1} = \frac{10^{-4}}{72 \pi \ln 5} = 0.275 \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

أما على السطح الداخلي للموصل الخارجي $\rho = b$ فتكون:-

$$\rho_{S2} = 0.11 \text{ } \mu\text{C/m}^2 \quad \text{و} \quad \rho_{S1} = 0.55 \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

ولهذه القيم فإن سعة هذا الكابل لكل وحدة طول تصبح $C = 51.8 \text{ pF/m}$

- الطاقة الكهربائية:- يمثل وجود الشحنات على موصلي المواسع طاقة كهربائية مخزنة في هذا المواسع (في الوسط الفاصل بين الموصلين) وتتكون هذه الطاقة نتيجة للطاقة التي بذلت لشحن المواسع. وكما هو معروف فإن الجهد V يمثل كمية الشغل المبذول لنقل وحدة شحنة من نقطة إلى أخرى ويمكن كتابته كما يلي:-

$$V = \frac{dW_e}{dq} \quad V \quad (32-1)$$

حيث إن dW_e يمثل الشغل الكهربائي المبذول على شحنة dq . أو أن $V = \frac{q}{C} = \frac{dW_e}{dq}$

وبالتالي فإن $dW_e = \frac{1}{C} q dq$ ، وبمكاملة الطرفين ينتج ما يلي:-

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad J \quad (33a-1)$$

أو

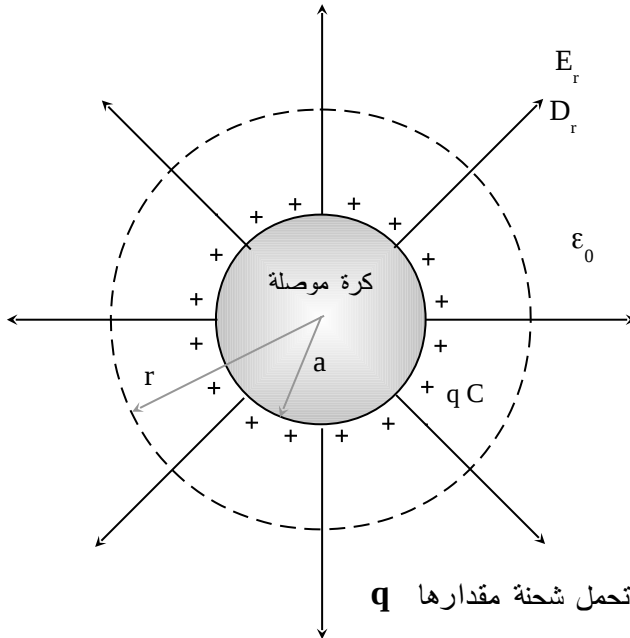
$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad dV \quad J \quad (33b-1)$$

وتمثل العلاقة (1-33) كمية الطاقة الكهربائية المخزنة في مواسع أو كمية الشغل المبذول في شحن هذا المواسع. وإذا أُعتبر حيزاً صغيراً أو حجماً صغيراً على شكل متوازي مستطيلات في وسط سماحيته $\epsilon F/m$ ومساحة قاعدة هذا المتوازي S وارتفاعه d بحيث إن $V = Sd \text{ m}^3$ تمثل الحجم المحصور بين لوحي المواسع فإن كثافة الطاقة تصبح كما يلي :-

$$\frac{W_e}{V} = w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \text{J/m}^3 \quad (34a-1)$$

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad \text{J/m}^3 \quad (34b-1)$$

مثال :- (1-14) يبين الشكل (1-22) كرة موصلة جيدة التوصيل نصف قطرها a وموضوعة في الفراغ الحر، فإذا كانت الشحنات التي تحملها هي q فأوجد:- (i) المجال الكهربائي وكثافة الفيض الكهربائي الناتج عن هذه الكرة في المنطقة $0 \leq r < \infty$. (ii) جهد هذه الكرة. (iii) الطاقة الكهربائية المخزنة في الفراغ الحر حول هذه الكرة.



الشكل :- (22) كرة موصلة تحمل شحنة مقدارها q وموضوعة في الفراغ الحر.

الحل:-

تتوزع الشحنة q على سطح الكرة بشكل منتظم على شكل كثافة شحنات سطحية $\rho_S = q/(4\pi a^2) \text{ C/m}^2$.

(i) في هذه الحالة ومن التماثل يكون كل من المجال الكهربائي \mathbf{E} وكثافة الفيض الكهربائي \mathbf{D} باتجاه \mathbf{a}_r فقط ولا يتغيران مع ϕ و θ ، أو أن $\mathbf{D} = D_r(r) \mathbf{a}_r$ و $\mathbf{E} = E_r(r) \mathbf{a}_r$ وإذا ما تم اختبار سطح جاوس المقفل على شكل سطح كرة نصف قطرها $0 \leq r < \infty$ فإنه وبعد تطبيق قانون جاوس وفي ضوء ما سبق يتم الحصول على ما يلي:-

$$D_r 4\pi r^2 = q \Rightarrow D_r = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ C/m}^2$$

أو أن $E_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \text{ V/m}$ ، أما \mathbf{E} و \mathbf{D} للمنطقة $r < a$ فإن كلاهما يكون مساوياً للصفر.

(ii) لإيجاد الجهد يتم استخدام العلاقة $V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ أو أن الجهد للمنطقة

$a \leq r < \infty$ هو كما يلي:-

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad V$$

أما في المنطقة $0 \leq r < a$ فهو كما يلي:-

$$V = - \left[\int_{\infty}^a + \int_a^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad V$$

يلاحظ أن الكرة سطح ووسط متساوي الجهد لأن المجال الكهربائي فيها يكون مساوياً للصفر.

(iii) تكون سعة الكرة كما يلي:-

$$C = q/V = 4\pi\epsilon_0 a \quad F$$

وبالتالي فإن الطاقة المخزنة في الفراغ الحر المحيط بالكرة هي كما يلي :-

$$W \left(= \frac{1}{2} qV \right) = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 a \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 a)^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad J$$

-1-2 التيار المستمر (Direct Current DC) وموصلية الأوساط

إذا تركت شحنة كهربائية حرة في مجال كهربائي فإنها ستتحرك تبعاً للقوى التي تؤثر عليها وتمثل حركتها التيار الكهربائي I (أو i) ووحداته C/s أو أمبير A. ويمكن تعريف التيار الكهربائي من خلال تحديد الشحنات التي تمر مثلاً عبر مساحة معينة في فترة زمنية معينة أو أنه يمثل معدل تغير الشحنات مع الزمن كما يلي:-

$$i = \frac{dq}{dt} \quad A \quad (35-1)$$

تتكون المواد، كما سبق ذكره، من ذرات وتتكون الذرة من نواة بها شحنات موجبة وأجسام غير مشحونة ويدور حولها في مدارات مختلفة عدد من الشحنات السالبة والتي تكون مساوية للشحنات الموجبة. ومن البديهي أن تتأثر الشحنات السالبة الواقعة في أبعد المدارات عن النواة لأدنى قوة جذب تربطها بالنواة. يمكن أن تكون هذه القوة متدنية في قيمتها بحيث إنها تكون أقل من أو تساوي على وجه

التقريب القوة التنافرية بين الشحنات السالبة والقوة العشوائية الناتجة عن الطاقة الحرارية التي تكتسبها الشحنات السالبة. وفي هذه الحالة فإن الشحنات السالبة الواقعة في ابعـد المدارات تنفصل عن ذراتها وتصبح حرة في حركتها وتجوأها وينتج عن ذلك عدد هائل من الشحنات الحرة التي يمكن أن تتحرك بشكل منتظم إذا ما تأثرت بمجال كهربائي خارجي. ويطلق على المادة في هذه الحالة بأنها مادة موصلة (جيدة التوصيل). أما إذا كانت القوة التجاذبية المشار إليها أعلاه أكبر بكثير من القوة التنافرية والعشوائية فإن فرصة انتزاع هذه الشحنات من ذراتها بمجالات كهربائية خارجية تصبح ضئيلة إلا إذا وصلت شدة هذه المجالات إلى قيم عالية جداً تدعى بـقيم الانهيار كما يحدث مثلاً في حالة البرق وأنابيب الإنارة التفريغية. ويطلق على المادة في هذه الحالة بالمادة العازلة حيث إن عدد الإلكترونات (الشحنات السالبة) الحرة يكون متدنياً. وما بين المواد الأولى والثانية تقع المواد شبه الموصلة. فمثلاً يتوفر في المواد الموصلة عدد كبير من الشحنات السالبة الحرة التي تركت ذراتها وهي صغيرة في حجمها ووزنها وقادرة على الحركة في أي اتجاه تقريباً تبعاً للقوى المؤثرة عليها. أما الذرات المتروكة فإنها تمثل شحنات موجبة غير أنها كبيرة في حجمها وثقيلة جداً (مقارنة بالشحنات السالبة) ويصعب عليها الحركة فعلياً. تتحرك الشحنات السالبة التي تركت ذراتها نتيجة لعدة قوى تؤثر عليها منها التنافر مع شحنات سالبة أخرى وتجاذبا مع شحنات موجبة إضافة لأثر الطاقة الحرارية التي تكتسبها من المحيط التي تتواجد فيه، ويمكن أن تصطدم هذه الشحنات السالبة أثناء حركتها بأجسام غير مشحونة تتواجد في طريق حركتها. إذا ما أثر على الوسط الذي به هذه الشحنات السالبة مجال كهربائي خارجي فإنه يحرك هذه الشحنات باتجاهه. فمثلاً يمكن أن تبدأ الشحنة من سرعة ابتدائية تساوي الصفر ثم تبدأ بالتسارع نتيجة هذا المجال المؤثر وتصل سرعتها إلى قيمة عظمى تؤول بعدها إلى الصفر وذلك إما لكونها اقتربت من شحنة سالبة أخرى أو لأنها اجتذبت إلى شحنة موجبة أو لأنها اصطدمت مع جسم آخر غير مشحون. ثم تبدأ تسارعها من جديد لتقطع في كل مرة مسافة قد تختلف عن

سابقتها وتنتهي بسرعة قصوى تختلف عما قبلها. ولكن إذا ما تم اختيار نقطتين متباعدتين مثلاً x_1 و x_2 والمسافة ما بينهما Δx (أكبر بكثير من قطر الذرة) وتم توقفت الزمن اللازم لشحنة أو مجموعة من الشحنات لتنتقل من النقطة x_1 إلى النقطة x_2 تحت تأثير مجال كهربائي خارجي E ، ووجد أنه يساوي Δt فإنه يمكن تعريف الكمية $(\Delta x / \Delta t)$ على أنها سرعة جريان الشحنة (أو مجموعة الشحنات) وهي لا تساوي سرعتها اللحظية. ويمكن القول أن هذه السرعة تمثل معدل سرعة الشحنة السالبة وتسمى بسرعة الجريان (Drift Velocity) v_d أو

$$v_d = \mu E \quad (37-1)$$

حيث إن μ تمثل سهولة تنقل الشحنات السالبة في الوسط ويطلق عليه أسم التنقلية (Mobility) وتكون وحداتها (m^2 / sV) . فإذا كانت كثافة هذه الشحنات الحجمية في وسط ما هي $\rho_v \text{ C/m}^3$ وتسير بسرعة جريان $v_d \text{ m/s}$ عابرة مثلاً مساحة مقطع $A \text{ m}^2$ فإنه يمكن تعريف ذلك على انه التيار أو

$$i = \rho_v v_d \quad (38a-1)$$

أو أن كثافة التيار السطحية تكون كما يلي:-

$$J = i / A = \rho_v v_d \quad (38b-1)$$

وتكون كثافة التيار J متجهها (J) يحدد من متجه المساحة A أو من خلال اتجاه سرعة الجريان v_d ومن قانون أوم (Ohm's Law) الذي يربط الجهد بالتيار عبر المقاومة ($V = IR$) وحيث إن $V = EL$ و $I = JA$ و $R = L / (\sigma A)$ ، علماً بأن L يمثل مسار التيار (طول على الخط الممثل للمجال الكهربائي) فإن

$$J = \sigma E \quad A/m^2 \quad (39-1)$$

حيث إن σ هي موصليّة (Conductivity) الوسط. وتمثل المعادلة (1-39) قانون أوم عند أي نقطة لوسط له موصليّة $\sigma (\Omega m)^{-1}$ ويبيّن هذا القانون أن كثافة التيار السطحية $J A/m^2$ (والتي تمثل حركة الشحنات) تتناسب مع المجال الكهربائي الخارجي E الذي ينتج هذا التيار عبر ثابت الوسط (الموصليّة σ). وتعتبر الموصليّة σ مقلوب المقاومة (Resistivity) $\rho = \sigma^{-1} \Omega m$. وتعكس المقاومة المشار إليها أعلاه أنه لتحريك شحنة من نقطة إلى أخرى في وسط ما فلا بد من بذل شغل للتغلب على القوى العديدة التي تؤثر على هذه الشحنة مثل القوى التنافرية والتجاذبية والتصادمية والعشوائية الناجمة عن الطاقة الحرارية والتي في مجملها تشكل مقاومة لحركة الشحنات من نقطة إلى أخرى. وتقل موصليّة معظم المواد (أو تزداد مقاومتها) مع زيادة درجة الحرارة نظراً لأن ذلك يرفع من القوى العشوائية الناجمة عن الطاقة الحرارية. ويبيّن الجدول (1-2) عدداً من المواد وموصليتها عند درجة حرارة الغرفة $20^\circ C$.

الجدول (1-2):- موصليّة عدد من المواد $\sigma (\Omega m)^{-1}$.

اسم المادة	تصنيف المادة	موصليتها $\sigma (\Omega m)^{-1}$
الكوارتز	عازل	10^{-17}
المطاط	عازل	10^{-15}
الزجاج	عازل	10^{-12}
ماء مقطر	عازل ضعيف	10^{-4}
التربة الرملية الجافة	عازل ضعيف	10^{-3}
جسم الحيوان	موصل ضعيف	0.2
جرمانيوم	موصل ضعيف	2
ماء البحر	موصل متوسط	4
السليكون	موصل	10^3

الكربون	موصل	$\times 10^4$ 3
الحديد الزهر	موصل جيد	10^6
القصدير	موصل جيد	$\times 10^6$ 5
الألمنيوم	موصل جيد	$\times 10^7$ 3.5
الذهب	موصل جيد	$\times 10^7$ 4.1
النحاس	موصل جيد	$\times 10^7$ 5.7

يمكن كتابة العلاقة التي تحدد المقاومة R أو الموصلية G (Conductance) كما يلي:-

$$R = \int dR = \int_L dL / (\sigma A) \quad \Omega \quad (39a-1)$$

$$G = \int dG = \int_A \sigma dA / L \quad (\Omega)^{-1} \quad (39b-1)$$

ويتم من العلاقات (1-37) - (1-39) استنتاج أن $J = \sigma E = \rho_v v_d = \rho_v \mu E$ أو

$$\sigma = \rho_v \mu \quad (\Omega m)^{-1} \quad (40a-1)$$

$$\mu = \sigma / \rho_v \quad m^2 / sV \quad (40b-1)$$

وتبين العلاقة (40a-1) أن موصلية الوسط تزداد بازدياد كثافة الشحنات والتنقلية. وتبين العلاقة (40b-1) أن التنقلية أو سهولة حركة الشحنات تتناقص بازدياد كثافة الشحنات نظراً لأن تزايد الشحنات يزيد من تنافرها مع بعضها ويؤدي إلى ازدحام الوسط بهذه الشحنات. ومن الجدير بالذكر أن التيار المستمر (DC) ينتج عن حركة الشحنات الحجمية التي تسير بسرعة ثابتة تمثل سرعة الجريان. وفي الواقع إن كمية الشحنات في أي حجم من المادة يبقى مساوياً للصفر سواءً

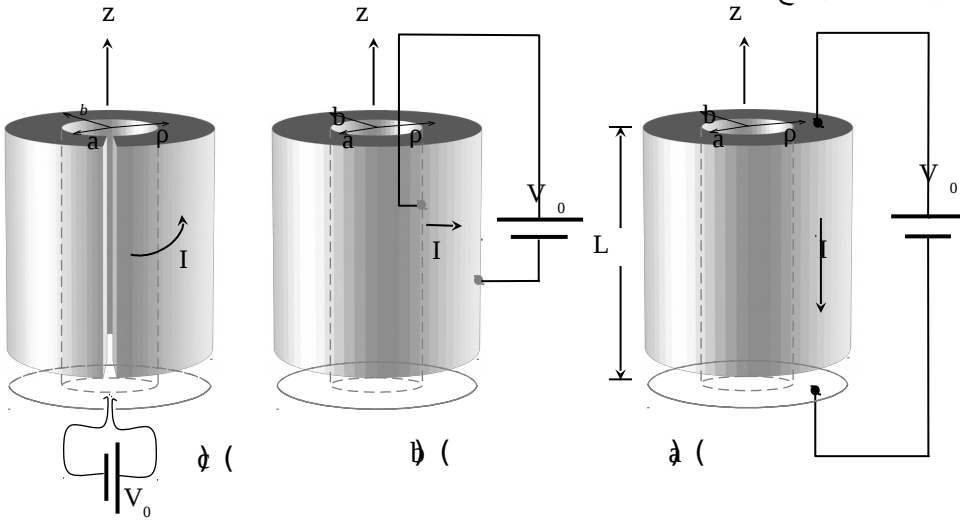
أكان هناك تيار أم لم يكن (مجموع الشحنات الموجبة والشحنات السالبة متساويان وبالتالي فإن مجموع الشحنات يكون صفراً). في ضوء ذلك إذا تم تطبيق قانون جاوس على كثافة التيار المبين في العلاقة (38a-1) فإنه يتم استنتاج قانون كيرشوف للتيار لسطح مقفل S ($\sum I = 0$) أو عند نقطة كما يلي:-

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (41a-1)$$

وبالتالي

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (41b-1)$$

مثال :- (1-15) يبين الشكل (1-23) اسطوانة نحاسية مفرغة وموصولة بمصدر في ثلاثة أوضاع ، فإذا كان طولها L ونصفا قطريها الداخلي والخارجي هما a و b على التوالي فأوجد مقاومتها لكل وضع.



الشكل :- (1-23) اسطوانة نحاسية مفرغة وموصولة مع مصدر يصدر تياراً باتجاه (a) محور الاسطوانة (b) قطر الاسطوانة (c) باتجاه التفافي.

الحل:-

عندما يكون التيار باتجاه محور الاسطوانة، الشكل (23a-1) ، تكون المقاومة dR كما يلي:-

$$dR = \frac{dz}{\sigma \rho d\phi} \quad \Omega$$

$$G = \frac{\sigma 2\pi}{L} \int_a^b \rho d\rho = \frac{\sigma \pi (b^2 - a^2)}{L} (\Omega)^{-1} \quad \text{أو}$$

$$R = L / \left\{ \sigma \pi (b^2 - a^2) \right\} \quad \Omega \quad \text{أو أن المقاومة تكون}$$

وعندما يكون التيار باتجاه قطري، الشكل (23b-1) ، تكون المقاومة dR كما يلي:-

$$dR = \frac{d\rho}{\sigma \rho d\phi dz} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi\sigma L} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow R = \frac{\text{Ln}(b/a)}{2\pi\sigma L} \quad \Omega$$

أما عندما يكون التيار باتجاه التفاضلي، الشكل (23c-1) ، فإن المقاومة dR تكون كما يلي:-

$$dR = \frac{\rho d\phi}{\sigma d\rho dz} \Rightarrow G = \frac{\sigma L}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sigma L}{2\pi} \text{Ln}(b/a)$$

أو أن المقاومة في هذه الحالة تكون

$$R = 2\pi / \left\{ \sigma L \text{Ln}(b/a) \right\} \quad \Omega$$

3-1:- المصادر والمجالات المغناطيسية الثابتة مع الزمن

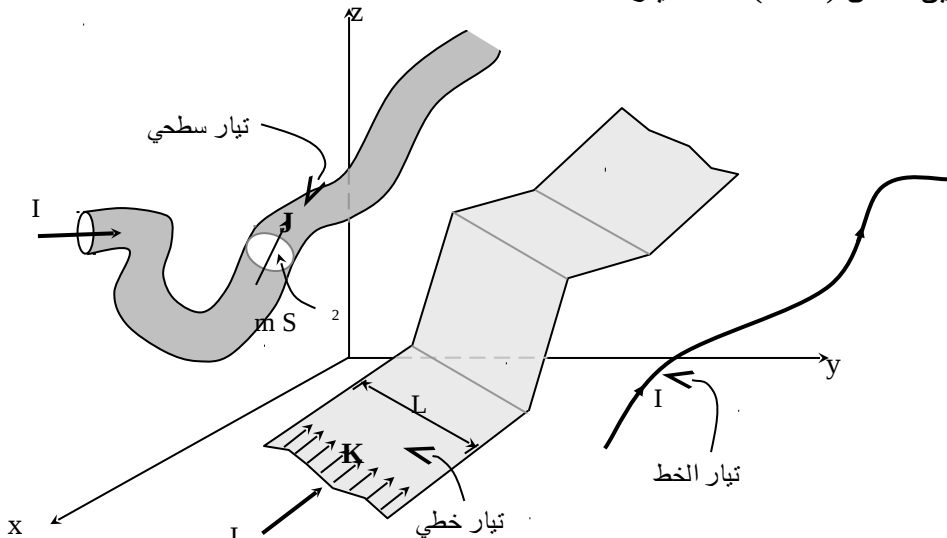
يبحث هذا الباب في المصادر والمجالات الكهرومغناطيسية (Magnetic Fields) الثابتة مع الزمن، هذا وقد سبق وتم تقديم المصادر والمجالات الكهربائية الثابتة مع الزمن والتي تمثل النصف الأول وسيتم هنا تقديم النصف الثاني وهي المصادر والمجالات المغناطيسية الثابتة مع الزمن. سيتم أولاً تقديم المصادر المغناطيسية (التيارات الكهربائية) وبعد ذلك يتم

الانتقال إلى إيجاد المجالات المغناطيسية المختلفة الناتجة من هذه المصادر وكذلك إيجاد الآليات التي تربط بين هذه المصادر والمجالات.

1-3-1- المصادر المغناطيسية Magnetic Sources

تعرف الإنسان على المصادر المغناطيسية منذ زمن بعيد وذلك على شكل حجر أسود (مكون من الحديد) كان موجوداً في الطبيعة وكانت له خصائص جذب المواد الحديدية الأخرى. وسيتم بحث هذا النوع من المصادر عند معالجة المواد المغناطيسية في الفصول القادمة. أما المصادر التي سيتم التركيز عليها هنا فهي التيارات الكهربائية وهنا فإن الحديث سيكون عن التيار المستمر الذي سبق وتم تقديمه في الفصل السابق. وتأتي هذه التيارات بأشكال مختلفة وذلك كما يلي :-

- تيار الخط (Line Current) أو التيار :- وهو تيار يسري في سلك موصل رفيع ويرمز له بالرمز I ووحدته الأمبير A .
 - تيار خطي (Linear Current) :- وهو تيار مقداره مثلاً IA يسري بشكل منتظم أو غير منتظم في صفيحة معدنية رقيقة جداً عرضها L (قد لا يكون ثابتاً) ويعبر عنه بكثافة التيار الخطي ويرمز له بالرمز $K = I/L \text{ A/m}$.
 - تيار سطحي (Surface Current) :- وهو تيار مقداره IA يسري في سلك منتظم أو غير منتظم في موصل مساحة مقطعه (ثابتة أو متغيرة) S ويعبر عنه عادة بكثافة التيار ويرمز له بالرمز $J (=I/S) \text{ A/m}^2$.
- ويبين الشكل (1-24) هذه التيارات المختلفة.

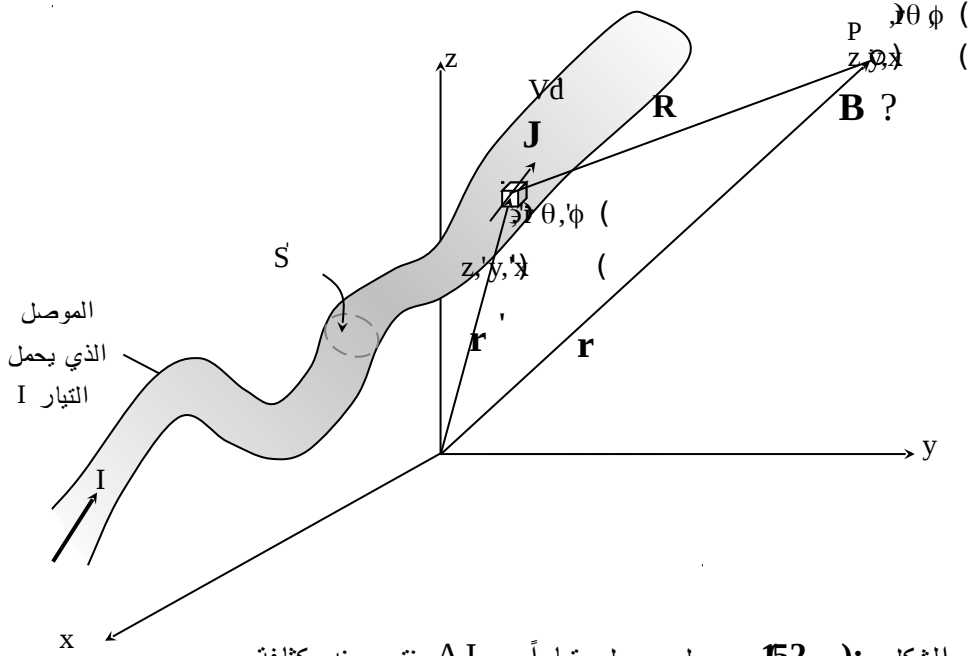


الشكل :- (1-24) الأشكال المختلفة للتيارات الكهربائية، تيار الخط $I A$ وكثافة التيار الخطي $K A/m$ وكثافة التيار $J A/m^2$.

1-3-2 كثافة الفيض المغناطيسي وقانون بيوت- سافارت
إذا كان المصدر عبارة عن تيار يمر في موصل مساحة مقطعه $S' m^2$ وكانت كثافة التيار التي تمر في هذا الموصل هي $J A/m^2$ كما هو مبين في الشكل (1-25) فإن قانون بيوت - سافارت (Biot-Savart Law) يربط بين كثافة الفيض المغناطيسي (\mathbf{B}) (Magnetic Flux density) وهذا التيار. فإذا أخذ حجم صغير من هذا الموصل dV' بمساحة مقطع S' وطول dL' عند النقطة (x', y', z') فإن كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن هذا الجزء من المصدر عند النقطة $(P(x, y, z))$ أو $P(r, \theta, \phi)$ هي $d\mathbf{B}$. يمكن اعتبار هذا الجزء الصغير من المصدر على أنه مصدر نقطي وبالتالي فإن ناتجه يكون متماثلاً وتكون العلاقة بين $d\mathbf{B}$ و J كما يلي :-

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{Wb/m}^2 \quad (42-1)$$

حيث إن μ هي الخاصية المغناطيسية للوسط أو ثابت الوسط وتدعى بالنافذية ووحداتها H/m ، و $\mathbf{a}_R \equiv \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ متجه وحدة يؤخذ باتجاه \mathbf{R} .

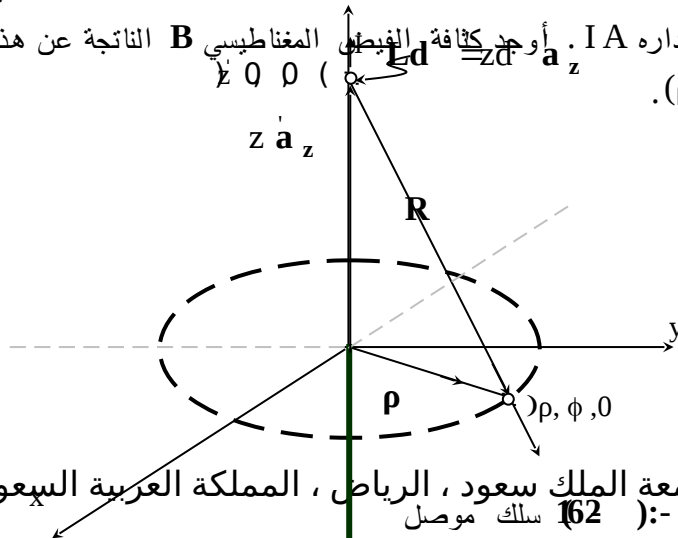


الشكل :- (52) موصل يحمل تياراً AI وينتج عنه كثافة

بلا فيض من مغناطيسية $(1-42)$ عند النقطة التربيع العكسي إضافة إلى أن اتجاه dB مرتبط باتجاه J وذلك تبعاً لقاعدة اليد اليمنى. أي أنه إذا ما تم تجهيز اليد اليمنى بحيث تكون أصابعها باتجاه J ويتم ثني الأصابع باتجاه a_R فإن الإبهام يكون محدداً لاتجاه dB . وبالتالي فإن قيمة B عند النقطة P تصبح كما يلي :-

$$B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \int_{R^2} \frac{J(r') \times a_R}{R^2} dV' \quad (43-1)$$

مثال: (1-16) - يبين الشكل (1-26) سلكاً موثقاً طويلاً يمتد إلى ما لانهاية في اتجاه Z ويحمل تياراً مقداره IA . أوجد كثافة الفيض المغناطيسي B الناتجة عن هذا السلك عند النقطة $(\rho, \phi, 0)$.



الشكل :- (52) سلك موصل

طويل يحمل تياراً مقداره I

الحل:-

نظراً للتماثل فإن كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} لن تعتمد على Z و ϕ وإنما فقط على ρ وبتطبيق العلاقة (1-43) علماً بأن التكامل الحجمي يتم استبداله بتكامل خطي كما يلي:-

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{I} d\mathbf{L}' \times \mathbf{a}_R}{R^2}$$

حيث إن $d\mathbf{L}' = dz' \mathbf{a}_z$ و $\mathbf{R} = \rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z$ و $|\mathbf{R}| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$ و $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$

وبالتالي

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu I \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu I \rho}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

يتم إجراء التكامل الأخير عن طريق التعويض أو $z' = \rho \tan \theta$ و

$$dz' = \rho d\theta / \cos^2 \theta \quad \text{و} \quad (\rho^2 + z'^2)^{3/2} = \rho^3 / \cos^3 \theta$$

فإن $\theta = 0$ وعندما تكون $z = \infty$ فإن $\theta = \pi/2$ ، أو

$$B_{\phi}(\rho) = \frac{\mu I \rho}{2 \pi \rho^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu I}{2 \pi \rho} \quad \text{Wb/m}^2$$

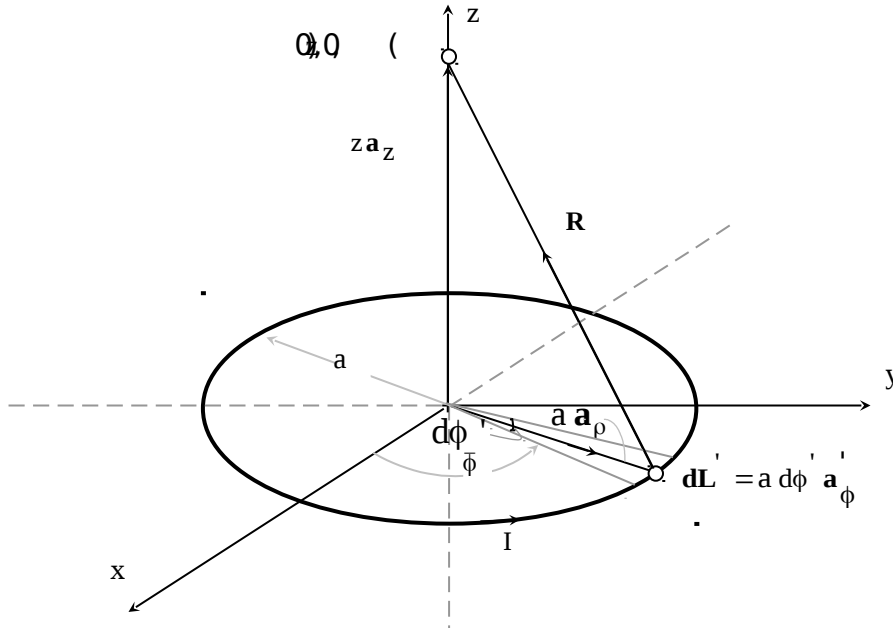
مثال :- (1-17) يبين الشكل (1-27) حلقة مكونة من سلك موصل يسري فيها تيار IA . إذا كان نصف قطر الحلقة a وموضوعة في المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل فأوجد كثافة الفيض المغناطيسي عند النقطة $(0,0,z)$ وكذلك عند مركز الحلقة.

الحل :-

من التماثل، يتوقع أن تكون كثافة الفيض المغناطيسي على محور الحلقة في اتجاه واحد هو اتجاه z ولا تعتمد على ϕ (يتغير ذلك إذا كانت النقطة المراد إيجاد B عندها تقع بعيداً عن المحور). بتطبيق العلاقة (1-43) بعد استبدال التكامل الحجمي بتكامل خطي، أو أن

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu}{4 \pi} \int_L \frac{I d\mathbf{L}' \times \mathbf{a}_R}{R^2}$$

حيث إن $d\mathbf{L}' = a d\phi \mathbf{a}_{\phi}$ و $\mathbf{R} = z \mathbf{a}_z - a \mathbf{a}_{\rho}$ و $|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + a^2}$ و $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$



الشكل :- (2) حلقة موصلة تحمل تياراً I وموضوعة في المستوى xy

وبالتالي يتم الحصول على ما يلي :-

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{d\phi' \mathbf{a}'_{\phi} \times (z \mathbf{a}_z - a \mathbf{a}_{\rho})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z \mathbf{a}_{\rho} + a \mathbf{a}_z)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi'$$

وفي ضوء التماثل فإن B_{ρ} يصبح صفراً (\mathbf{a}_{ρ} تتغير مع تغير ϕ' بحيث إن مجموع عناصر B_{ρ} لكل المدى تؤول إلى الصفر) ويتم استنتاج كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} كما يلي :-

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \text{ Wb/m}^2$$

وعند مركز الحلقة فإن قيمة \mathbf{B} تصبح

$$B_z(0, 0, 0) = \frac{\mu I}{2a} \text{ Wb/m}^2$$

-1-3-3 القوة المغناطيسية

تعتبر القوة المغناطيسية (magnetic force) ذات أهمية قصوى في تطبيقات متعددة أهمها الآلات الكهربائية وسيتم هنا معالجة الموضوع بصورة مبسطة. إذا كانت هناك دائرة كهربائية (مثلاً على شكل سلك موصل طويل) تحمل تياراً كهربائياً $I_1 A$ وتقع هذه الدارة ضمن المجال المغناطيسي لمصدر مغناطيسي مجاور (مثلاً سلك موصل آخر يحمل تياراً كهربائياً $I_2 A$) فإن القوة المغناطيسية من هذا المصدر على طول صغير dL من الدارة الكهربائية تكون كما يلي :-

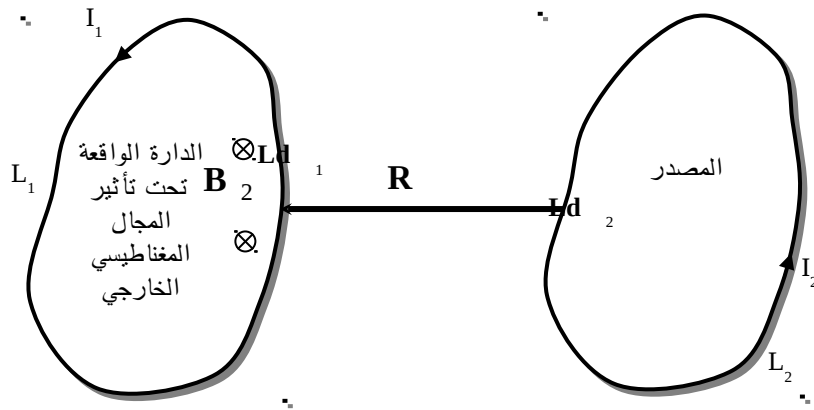
$$d\mathbf{F} = I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_2 \quad \text{N} \quad (44-1)$$

حيث إن $d\mathbf{L}_1$ يمثل طولاً تفاضلياً من الدارة الكهربائية التي تقع تحت تأثير المجال المغناطيسي الخارجي و \mathbf{B}_2 هي كثافة الفيض المغناطيسي الناتجة عن المصدر المجاور للدارة الكهربائية. وبالتالي فإن القوة الكلية هي كما يلي:-

$$\mathbf{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{d\mathbf{L}_1 \times (d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{a}_R)}{R^2} \quad (45-1)$$

حيث تم استخدام قانون بيوت-سافارت لكتابة \mathbf{B}_2 علماً بأن R تمثل المسافة بين الطولين التفاضليين $d\mathbf{L}_1$ و $d\mathbf{L}_2$. إذا كانت الدارة الكهربائية محدودة في أبعادها وكان المصدر المجاور عبارة عن دارة كهربائية محدودة الأطوال، كما هو مبين في الشكل (1-28)، فيمكن استبدال التكاملين على L_1 و L_2 بتكاملين مقفلين يتم إجراؤهما على L_1 و L_2 كما يلي:-

$$\mathbf{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{L}_1 \times (d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{a}_R)}{R^2} \quad (46-1)$$



الشكل (1-28):- دارتان متجاورتان الأولى يمر بها تيار I_1 وتتأثر من الثانية التي يمر فيها تيار I_2 .

مثال (1-18):- يبين الشكل (1-29) حلقة مستطيلة $L_2 \times L_1$ مكونة من سلك موصل يمر فيها تيار مقداره IA وتقع تحت تأثير كثافة فيض مغناطيسي B Wb/m². أوجد القوة المؤثرة على هذه الحلقة في الحالتين التاليتين:- (i) إذا كانت $B = B_1 a_z$ Wb/m² (ii) إذا كانت $B = B_2 a_y$ Wb/m².

افتراض أن الحلقة واقعة في المستوى XY ويقع مركزها عند نقطة الأصل.

الحل:-

(i) إذا كانت $B = B_1 a_z$ فإن القوة المؤثرة على أضلاع الحلقة هي كما يلي :-

$$F_{1bc} = I L_1 B_1 a_y \quad N \quad \text{و} \quad F_{1ab} = I L_2 B_1 a_x \quad N$$

$$F_{1da} = - I L_1 B_1 a_y \quad N \quad \text{و} \quad F_{1cd} = - I L_2 B_1 a_x \quad N$$

وكما يلاحظ فإن القوى المؤثرة على الحلقة تحاول توسعتها .

(ii) إذا كانت $B = B_2 a_y$ فإن القوة المؤثرة على الإضلاع هي كما يلي :-

$$F_{2bc} = - I L_1 B_2 a_z \quad N \quad \text{و} \quad F_{2ab} = 0 \quad N$$

$$F_{2da} = + I L_1 B_2 a_z \quad N \quad \text{و} \quad F_{2cd} = 0 \quad N$$

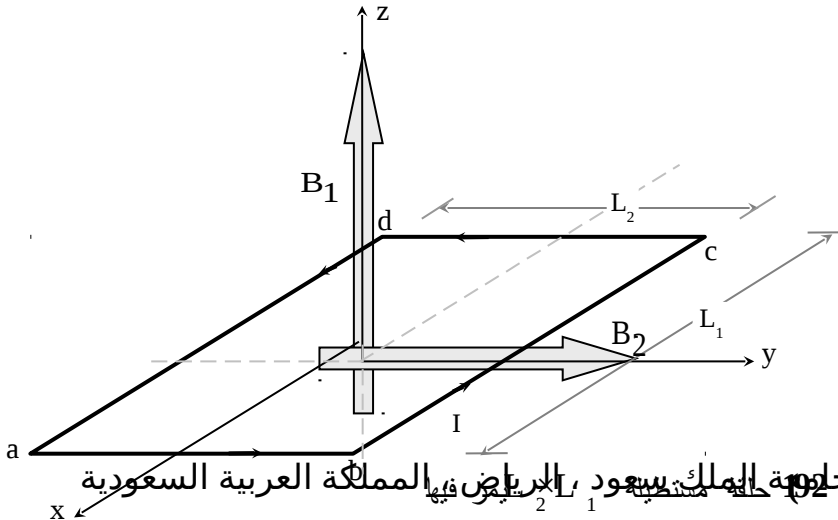
بلاحظ هنا أن القوى المؤثرة محصورة في الضلع bc و da وإذا كان هناك محور

للحلقه باتجاه المحور X فلن للقوى المؤثرة على الحلقة عزم دوران مقداره

$$m = I L_1 L_2 B_2 a_x \quad Nm$$

فإن عزم الدوران لها يساوي $T = m \times B$ Nm ومما سبق فإن عزم الدوران للحلقة

يتناسب مع مساحتها والتيار المار بها وكثافة الفيض المغناطيسي المؤثر عليها.



الشكل (1-29) حلقة مستطيلة $L_2 \times L_1$ يمر فيها تيار I تحت تأثير كثافة فيض مغناطيسي B

-1-4-3 المجال المغناطيسي وقانون أمبير

تكتب العلاقة (1-42) لتيار خط يسري في سلك بعد أخذ طول تفاضلي $d\mathbf{L}'$ كما يلي:-

$$d\mathbf{B} = \mu \frac{I d\mathbf{L}' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{Wb/m}^2$$

فإذا تم استثناء ثابت الوسط المغناطيسي μ فإن للكمية $\frac{I d\mathbf{L}' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$ وحدات كثافة

التيار السطحية (A/m) ولا تعتمد على خصائص الوسط المغناطيسية وسيتم تعريفها على أنها تمثل شدة المجال المغناطيسي (magnetic field intensity) أو ببساطة المجال المغناطيسي $d\mathbf{H}$ وبشكل عام فإن هذا المجال المغناطيسي \mathbf{H} يرتبط مع كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} كما يلي:-

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (47a-1)$$

علماً بأنه يمكن التعبير عن المجال المغناطيسي \mathbf{H} كما يلي:-

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_R}{R^2} dV' \quad (47b-1)$$

ويكون هذا المجال المغناطيسي عند النقطة $(r, \phi, 0)$ لسلك موصل طويل موضوع على محور z يحمل تياراً $I A$ ، أنظر المثال (1-16)، كما يلي:-

$$H_{\phi} = \frac{I}{2 \pi \rho}$$

فإذا تم أخذ طول تفاضلي على الدارة التي تمثل \mathbf{H} أو $d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_{\phi}$ فإن

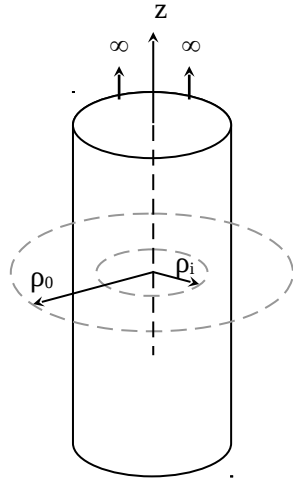
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{\phi} \frac{I}{2 \pi \rho} \rho d\phi = \int_{\phi=0}^{2 \pi} \frac{I}{2 \pi} d\phi = I$$

ويمكن إعادة العلاقة الأخيرة كما يلي :-

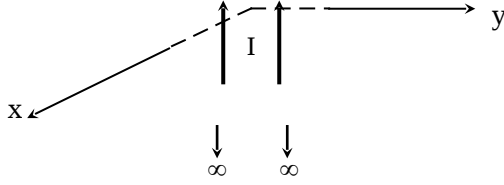
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (48-1)$$

وتمثل العلاقة الأخيرة قانون أمبير (Amper's Law) الذي يربط المصدر I (أو \mathbf{J}) بالنتائج \mathbf{H} وهو يناظر قانون جاوس في المجالات الكهربائية الثابتة في الزمن. ويتم استخدام هذا القانون لإيجاد المجالات المغناطيسية إذا توافرت شروط التماثل وعدم تغير المجال المغناطيسي أثناء إجراء التكامل على المسار المقفل L .

مثال :- (1-19) يبين الشكل (1-30) موصلاً طويلاً نصف قطره a ويحمل تيار خط $I A$ موضوع ومحوره منطبق على المحور z . أوجد المجال المغناطيسي \mathbf{H} وكثافة الفيض المغناطيسية \mathbf{B} في المنطقة $0 \leq \rho < \infty$.



الشكل :- (1-30) موصل طويل بنصف قطر a ويحمل تيار $I A$ مبين عليه المسار المقفل داخل الموصل وخارجه.



الحل:-

نظراً للتماثل في هذه المسألة فإن \mathbf{H} سوف لن يتغير مع Φ أو z وبما أن المسار الذي سيتم إجراء التكامل عليه (باستخدام قانون أمبير) هو باتجاه \mathbf{a}_ϕ فإن تطبيق العلاقة (1-48) على المسار الذي يكون نصف قطره $0 \leq \rho_i \leq a$ يعطي ما يلي:-

$$H_\phi 2\pi\rho_i = \frac{I}{\pi a^2} \pi\rho_i^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{I\rho_i}{2\pi a^2} \quad \text{A/m}$$

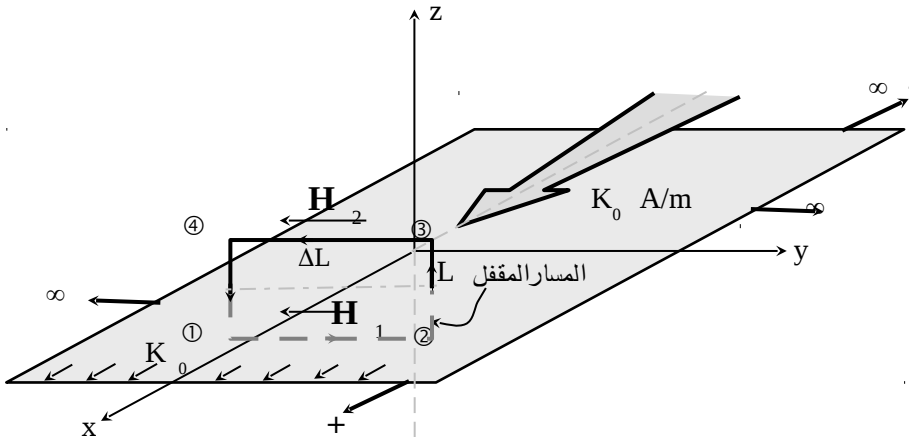
$$B_\phi = \mu I\rho_i / (2\pi a^2) \quad \text{Wb/m}^2 \quad \text{ويكون } \mathbf{B} \text{ كما يلي:-}$$

أما في المنطقة $\rho > a$ فإن المسار الذي يكون نصف قطره $\rho_0 \geq a$ قد تم اختياره و يتم الحصول على ما يلي:-

$$H_\phi 2\pi\rho_0 = I \Rightarrow H_\phi = I / (2\pi\rho_0) \quad \text{A/m}$$

$$B_\phi = \mu I / (2\pi\rho_0) \quad \text{Wb/m}^2 \quad \text{ويكون } \mathbf{B} \text{ كما يلي:-}$$

مثال (1-20) :- يبين الشكل (1-31) صفيحة معدنية رقيقة موضوعة في المستوى xy وتمتد في اتجاه x و y إلى ما لانهاية. إذا كانت كثافة التيار الخطي في هذه الصفيحة $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_x \quad \text{A/m}$ فأوجد المجال المغناطيسي \mathbf{H} وكثافة الفيض المغناطيسي فوق وتحت الصفيحة مباشرة.



الشكل (1-31) :- صفيحة معدنية رقيقة موضوعة في المستوى xy ، عند $z = 0$ ، وتحمل تياراً خطياً كثافته $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_x$ A/m

الحل:-

من التماثل في هذا المثال فإن \mathbf{H} لا تتغير مع x أو مع y وبالتالي إذا ما أخذنا المسار المقفل المبين على الشكل (1-31) وهو عبارة عن مستطيل طول ضلعه الموازي لمحور y هو ΔL ، فإن قانون أمبير يعطي ما يلي :-

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right] \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = K_0 \Delta L$$

وبما أنه لن يكون هناك عناصر للمجال المغناطيسي في اتجاه \mathbf{a}_z فإن كلا من التكامل الثاني والأخير يؤولان إلى الصفر ويلاحظ كذلك أن $|\mathbf{H}_1| = |\mathbf{H}_2|$ ، أو

$$\int_{-\Delta L/2}^{\Delta L/2} H_{y1} \mathbf{a}_y \cdot d_y \mathbf{a}_y + \int_{\Delta L/2}^{-\Delta L/2} H_{y2} \mathbf{a}_y \cdot d_y \mathbf{a}_y = K_0 \Delta L$$

$$H_{y1} = H_{y2} = K_0 / 2 \quad \text{A/m} \quad \text{أو أن}$$

$$B_{y1} = B_{y2} = \mu K_0 / 2 \quad \text{Wb/m}^2 \quad \text{وبالتالي فإن}$$

1-3-5 الالتفاف ونظرية ستوك The Curl & Stock's Theory

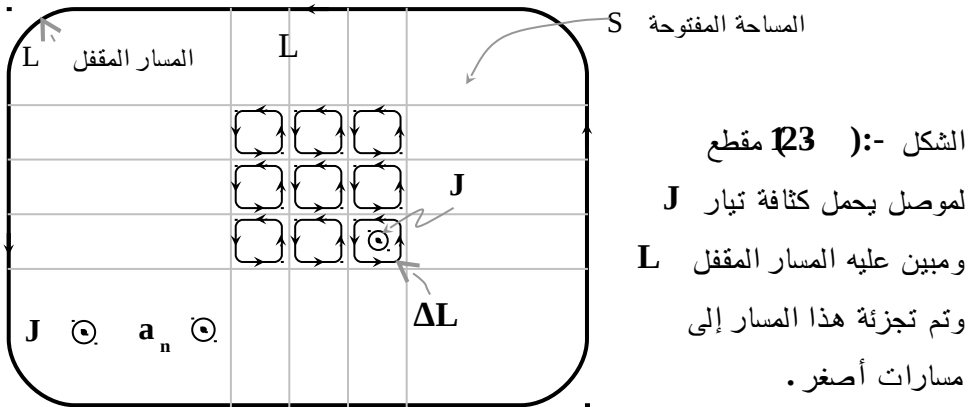
تبين العلاقة (1-48) ارتباط المجال المغناطيسي H مع المصدر J عبر إيجاد حسيمة الأول على مسار مقفل L وإيجاد الثاني المار في مساحة مفتوحة S محددة بالمسار المقفل L . وإذا ما آل المسار المقفل L إلى ΔL وبالتالي إلى الصفر فإن S تؤول إلى ΔS وبالتالي إلى الصفر وفي ضوء ذلك يمكن كتابة المعادلة (1-48) كما يلي:-

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \approx \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

أو

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_n = \lim_{\substack{\Delta L \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} \equiv (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_n \quad (49-1)$$

حيث إن \mathbf{a}_n هو متجه وحدة طول ويكون عمودياً على ΔS ، وتمثل المعادلة (49-1) علاقة كثافة التيار السطحي \mathbf{J} مع المجال المغناطيسي عبر علاقة الالتفاف. يبين الشكل (1-32) مقطعاً في موصل أو في وسط يحمل تياراً مقداره $I A$ ($J A/m^2$) تم تجزئته إلى مسارات مقفلة صغيرة ويعطي تطبيق قانون أمبير على أي جزء من هذه الأجزاء عندما يؤول طول المسار إلى الصفر العلاقة (1-49) المبينة أعلاه. يلاحظ أن أجزاء المسارات المتلاصقة تكون باتجاهات متعاكسة وبالتالي فإنها تلغي بعضها البعض عند إيجاد حاصلتها.



في ضوء المعادلة (1-49) يمكن أن يتم إعادة كتابة قانون أمبير كما يلي :-

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (50-1)$$

وتمثل العلاقة الأخيرة نظرية ستوك والتي تحول التكامل على مسار مقفل إلى تكامل على مساحة مفتوحة لنفس الكمية (المتجه) وهي في هذه الحالة المجال المغناطيسي \mathbf{H} .

لقد أصبح واضحاً حتى الآن أن التيار المستمر بحاجة إلى مسار مقفل أو أن الشحنات تبدأ حركتها مثلاً من نقطة معينة وينتهي بها المطاف إلى نفس النقطة. كذلك فإن المجالات المغناطيسية بشكل عام هي خطوط مقفلة بحيث إن الخط الممثل للمجال المغناطيسي \mathbf{H} أو لكثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} ليس له بداية أو نهاية. وفي ضوء ذلك فإنه إذا ما تم تطبيق قانون جاوس على التيار نحصل على قانون كيرشوف للتيار وكذلك إذا تم تطبيق قانون جاوس على المجالات المغناطيسية فإن الناتج يصبح صفرًا وكذلك الحال بالنسبة للتشحنات أو

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Psi_m = 0 \quad (51a-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (51b-1)$$

حيث إن Ψ_m هي كمية الفيض المغناطيسية الكلية التي تخرج من سطح مقفل (وتساوي صفرًا). وهذا يعني غياب الشحنات المغناطيسية أو عدم وجود مثل هذه الشحنات فيزيائياً . وسيتم معالجة هذا الأمر مرة أخرى عند النظر في أمر المواد المغناطيسية وخصائصها.

6-3-1:- الجهد الاتجاهي المغناطيسي Magnetic Vector Potential

تم في الفصول السابقة الحصول على المجالات المغناطيسية الناتجة عن مصدر مغناطيسي باستخدام قانون بيوت - سافارت عبر عملية تكاملية. أما هنا فإنه سيتم الحصول على المجال المغناطيسي الناتج من مصدر مغناطيسي عبر عمليتين الأولى من خلال إجراء عملية تكاملية للتيار للحصول على ما يعرف بالجهد الاتجاهي المغناطيسي \mathbf{A} والثانية تفاضلية حيث تتم مفاضلة هذا الجهد الاتجاهي المغناطيسي عبر علاقة الالتفاف للحصول على كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} كما يلي:-

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (52a-1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (52b-1)$$

ويلاحظ أن اتجاه \mathbf{A} يحدد مباشرة من اتجاه \mathbf{J} إضافة إلى أن التكامل المبين في المعادلة (52a-1) أبسط بكثير من ذلك المعطى في المعادلة (1-43). ولإثبات أن نتيجة المعادلة (1-52) تؤدي إلى المعادلة (1-43) يتم التعويض بالمعادلة (52a-1) في (52b-1) أو

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

وحيث إن ∇ تعمل على \mathbf{r} وليس على \mathbf{r}' (على x و y و z وليس على x' و y' و z') فإنه يمكن إدخالها داخل التكامل أو أن

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V' \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' \quad (53-1)$$

ومن الملحق III العلاقة (21h-III) يتم كتابة الكمية $\nabla \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}')/R)$ كما يلي:-

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}')) + \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}$$

ولكن $\nabla \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}')) = 0$ لان التفاضل هنا يكون بالنسبة للمتغير \mathbf{r} وليس \mathbf{r}' وكذلك فإن $\nabla(1/R) = -\mathbf{a}_R / R^2$ أو أن المعادلة (1-53) تصبح كما يلي:-

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V' \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$$

أو

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V' \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV' \quad (54-1)$$

وهي نفس المعادلة (1-43).

مثال :- (1-21) يبين الشكل (1-33) سلكاً موصلأ صغيراً بطول L يحمل تياراً مستمراً I A (يمكن اعتماد هذا المثال من الناحية النظرية أو الرياضية فقط وسيتم توضيح إمكانية وجوده في الواقع في الباب السابع) والسلك موضوع بشكل متماثل على المحور z (هذا ما يدعى بثنائي القطب الكهربائي). أوجد الجهد الاتجاهي المغناطيسي \mathbf{A} وكثافة الفيض المغناطيسي عند النقطة $P(r, \theta, \phi)$ علماً بأن $r \gg L$.

الحل:-

يتم إيجاد \mathbf{A} من العلاقة (52a-1) إلا أنه يتم في هذه الحالة استبدال $\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$ بالكمية $I d\mathbf{L}' = I dz' \mathbf{a}_z$ أو

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{R}$$

علماً بأن $R = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}$ وبما أن $r \gg L$ فإنه يمكن تقريب R أو $R \sim r$ وبالتالي فإن A_z تصبح

$$A_z = \frac{\mu I L}{4\pi r} \quad \text{Wb/m}$$

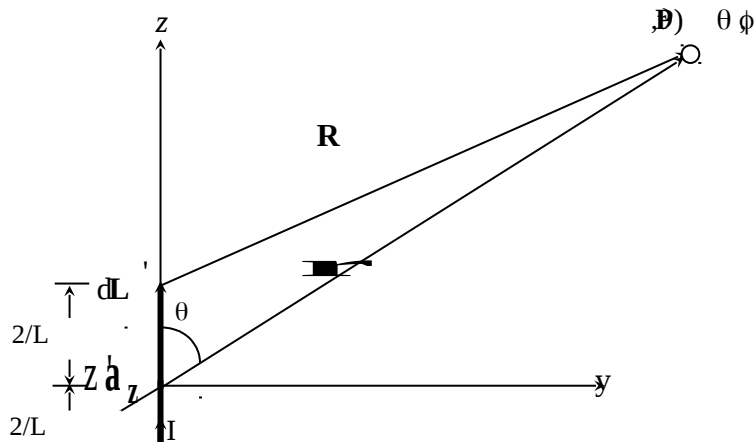
أو $\mathbf{A} = A_z \cos \theta \mathbf{a}_r - A_z \sin \theta \mathbf{a}_\theta$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I L}{4 \pi r} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

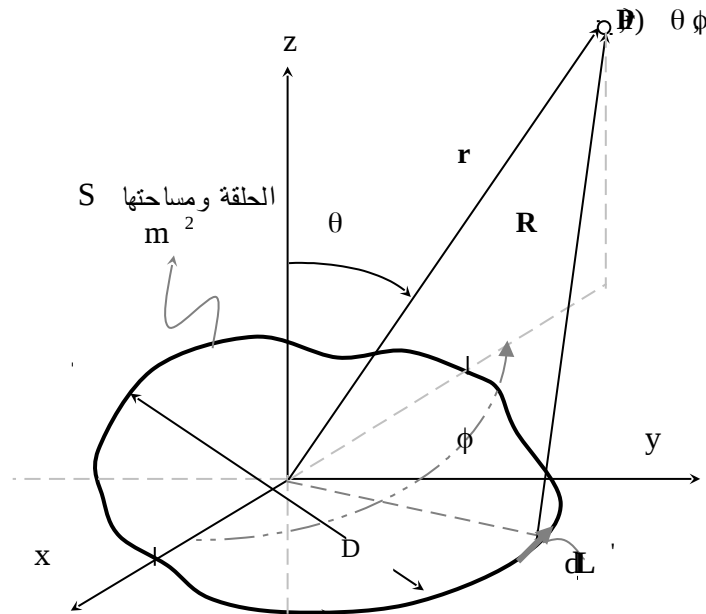
أو

ومن الملحق III العلاقة (19c-III) يتم إيجاد $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ أو

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\mu I L}{4 \pi r^2} \sin \theta \mathbf{a}_\phi \text{ Wb/m}^2$$



مثال البرهان (1-2) يبين الشكل (1-33) حلقة موصلة (القطب) يمكن أن تكون دائرية أو قطع ناقص أو مربع أو أي شكل آخر ومساحتها $S \text{ m}^2$ ويمر فيها التيار $I \text{ A}$ وموضوعة في المستوى xy . أوجد الجهد الاتجاهي المغناطيسي \mathbf{A} وكثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} عند النقطة $P(r, \theta, \phi)$ علماً بأن $r \gg D$ حيث إن D يمثل أكبر أبعاد هذه الحلقة (يطلق على هذه الحلقة أسم ثنائي القطب المغناطيسي).



الشكل :- (143) حلقة موصلة موضوعة في المستوى xy ويمر فيها تيار I (ثنائي القطب المغناطيسي).
جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية

الحل:-

يمكن إيجاد الجهد الاتجاهي المغناطيسي A من العلاقة (52a-1) علماً بأن
 $\mathbf{J} dV' = I dL'$ أو

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{I dL'}{R}$$

تم كتابة التكامل على المسار المقفل (الذي يمثل السلك الحامل للتيار) في
المعادلة أعلاه. بالرجوع إلى الملحق III العلاقة (22e-III) يمكن أن يعاد
كتابة العلاقة الأخيرة كما يلي:-

$$A = \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \mathbf{a}_n \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dS$$

حيث إن \mathbf{a}_n (أو \mathbf{a}_z) يمثل العمودي على مستوى الحلقة، و

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{a}_z$$

علماً بأن النقطة (x', y', z')

تمثل نقطة على المصدر وبالتالي فإن $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$ وإذا

كانت $r \gg D$ فإن $R \sim r$ و $\mathbf{a}_R \sim \mathbf{a}_r$ وبالتالي فإن الجهد الاتجاهي المغناطيسي \mathbf{A} يصبح كما يلي :-

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I S}{4 \pi r^2} \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \frac{\mu I S}{4 \pi r^2} \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

وإذا تم تعريف الكمية IS بأنها العزم المغناطيسي m_m لهذه الحلقة (التي تمثل ثنائي القطب المغناطيسي) أو أن $m_m = IS A m^2$ (في هذه الحالة $m_m = IS \mathbf{a}_z$) وبالتالي يمكن إعادة كتابة \mathbf{A} كما يلي :-

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4 \pi r^2} m_m \times \mathbf{a}_r$$

أما كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} فيتم إيجادها من $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ أو

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r) \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I S}{4 \pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta] \text{ Wb/m}^2 \quad \text{أو أن}$$

إذا كان عدد لفات الحلقة N لفة فإنه يتم ضرب الكميات السالفة الذكر بالعدد N لإيجاد القيمة الكلية.

سبق وتم تقديم العلاقتين التاليتين $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ و $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ويمكن إعادة كتابتهما كما يلي :-

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mu \mathbf{H}) = \mu \mathbf{J}$$

وإذا كان الوسط متجانساً وأحادي الخصائص (أي أن μ لا تتغير مع المسافة) فإنه وباستخدام العلاقة (III-21L) من الملحق III يتم استنتاج العلاقة التالية

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (55a-1)$$

وحيث أن \mathbf{A} تتناسب مع التيار فيمكن اختيار $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، أي أن

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (55b-1)$$

وهي علاقة تفاضلية تربط \mathbf{A} مع \mathbf{J} وتستخدم في حل مسائل الهوائيات.

-:1-3-7 المواد المغناطيسية Magnetic Materials

تتكون المواد عامة من ذرات وتتكون الذرة من نواة تحوي شحنات موجبة وأجسام أخرى غير مشحونة. ويدور حول هذه الذرة شحنات سالبة (إلكترونات) في مدارات وتقوم كذلك أثناء دورانها بالغزل (spinning) أو الالتفاف حول نفسها تماماً كما يحدث في حركة الأرض حول الشمس وكذلك حول نفسها في آن واحد. ويمكن التعبير عن مجمل حركة هذه الشحنات، لذرة واحدة مثلاً أو مجموعة من الذرات، باستخدام حلقة من لفة واحدة أو عدد من اللفات مساحتها S m^2 ويمر فيها تيار IA وعزمها المغناطيسي $m_m = ISAm^2$ (أو ثنائي القطب

المغناطيسي). ويتم تحديد هذا العزم المغناطيسي من قياس ومشاهدة المجالات المغناطيسية الناتجة عن حركة شحنات الذرة أو مجموعة الذرات ومساواتها بتلك الناتجة عن الحلقة. ويمكن النظر إلى ثنائي القطب المغناطيسي على أنه مغناطيس صغير ذي قطبين أحدهما القطب الشمالي (N) والأخر القطب الجنوبي (S) أو على أنه مكون من شحنتين مغناطيسيتين q_m و $-q_m$ (هذه كميات رياضية وليست فيزيائية) ووحداتها Wb تفصل بينهما مسافة L وبالتالي فإن عزم هذا المغناطيس المناظر هو $q_m L$. ويمكن النظر لهذا الثنائي على أنه مناظر لثنائي القطب الكهربائي الذي ورد في المثال (1-21) ولكن الحديث هنا عن تيار مغناطيسي I_m (هذا تيار رياضي وغير موجود فيزيائياً) في سلك طوله L بحيث يكون عزمه مساوياً $I_m L$ وفي جميع الحالات السابقة فإن

$$IS \equiv I_m L \equiv q_m L \quad (56-1)$$

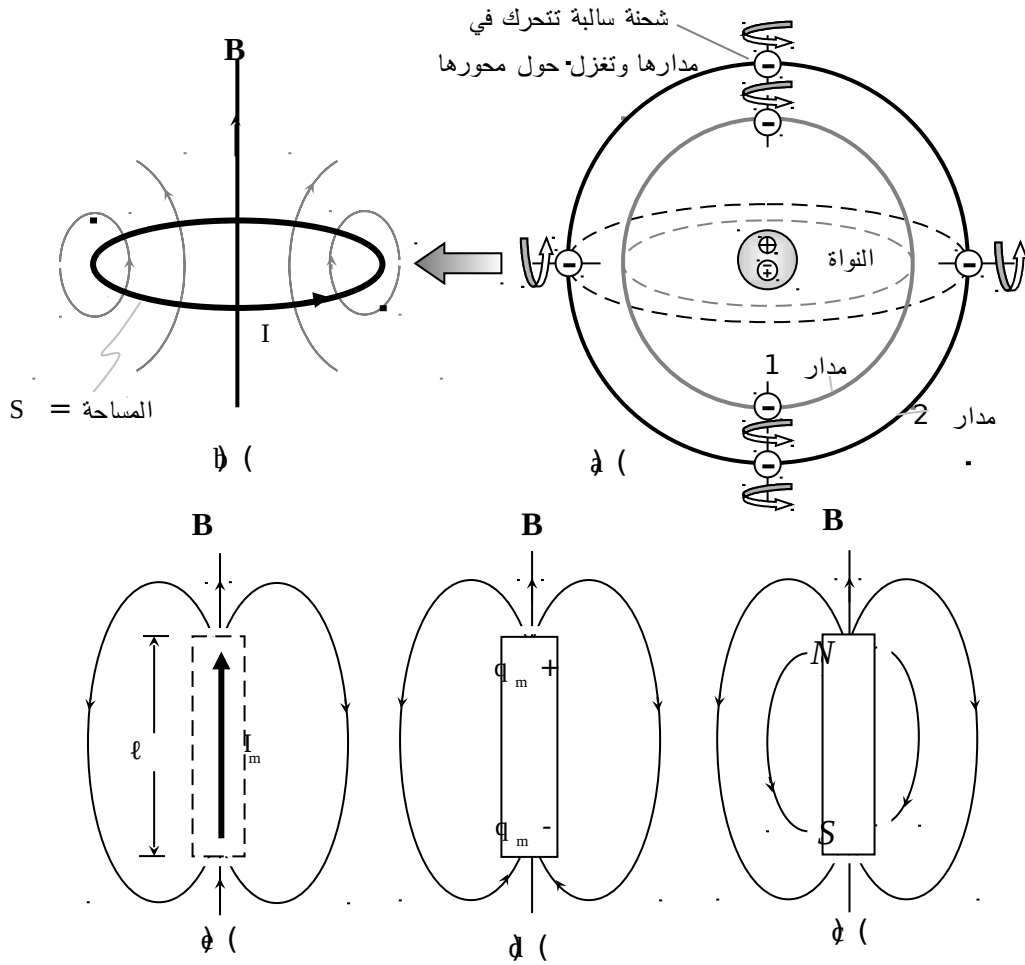
ويبين الشكل (1-35) الوضع الفعلي لذرة بها مجموعة من الشحنات والتي تتحرك وتغزل في نفس الوقت وما يناظرها من حلقة (من مجموعة من اللفات) أو مغناطيس صغير أو ثنائي قطب مغناطيسي بتيار I_m . وتتأثر ثنائيات القطب لمادة ما بقوى التجاذب والتنافر فيما بينهما داخلياً إضافة إلى القوى العشوائية التي تكتسبها من الطاقة الحرارية لمحيطها الخارجي. يصطف كل ثنائي باتجاه قد يختلف عن اتجاه الثنائي الآخر بحيث أن مجمل الأثر الخارجي لهذه الثنائيات يصبح صفراً وهذا ناتج عن الاصطفاف العشوائي لهذه الثنائيات. إذا ما تم التأثير على هذه المادة بمجال مغناطيسي خارجي فإن هذا المجال يحاول تنظيم اصطفاف هذه الثنائيات باتجاهه، وإذا ما نجح في ذلك فينتج عن ذلك مجال مغناطيسي داخلي إضافة للمجال الخارجي. ويعتمد ذلك على خاصية المادة حيث إن هناك مواداً تكون فيها هذه القوى الداخلية والعشوائية الخارجية أكبر بكثير من المجالات المغناطيسية الخارجية التي تحاول تنظيم اصطفافها وبالتالي فإن مجمل المجالات المغناطيسية الداخلية والكلية الناتجة عن هذه الثنائيات تبقى مساوية للصفر وتدعى هذه المواد بأنها مواد غير مغناطيسية ويكون ثابت الوسط لها أو نفاذيتها هو $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ويرتبط المجال المغناطيسي H بكثافة الفيض المغناطيسي B داخلها كما يلي :-

$$B = \mu_0 H \quad \text{Wb/m}^2 \quad (57-1)$$

أما إذا اصطفت هذه الثنائيات نتيجة تأثيرها بمجال مغناطيسي خارجي لمواد أخرى فإنه وفي حجم مقداره ΔV مثلاً يمكن وجود N من هذه الثنائيات والتي يكون مجمل عزومها هو $N m_m \text{ Am}^2$ ، وعليه فإن كثافة هذه الثنائيات تصبح $N m_m / \Delta V \text{ A/m}$ ويلاحظ أن وحداتها تشابه وحدات المجال المغناطيسي H أو وحدات كثافة التيار الخطي وتدعى هذه

الكمية بأنها متجه المغنطة (magnetization vector) أو متجه الاستقطاب المغناطيسي
(\mathbf{M} magnetic polarization) أو

$$\mathbf{M} = N \mathbf{m}_m / \Delta V \quad \text{A/m} \quad (58-1)$$



الشكل (1-35):- حركة الشحنات داخل الذرة ومكافئاتها (a) الشحنات السالبة المتحركة في مداراتها والتي تغزل حول محورها (b) حلقة منظرية تحمل تياراً I ومساحتها S

مغناطيس صغير (d) ثنائي قطب مكون من شحنتين مغناطيسيتين (e) تيار مغناطيسي يمر في سلك صغير.

تسمى مثل هذه المواد بأنها مواد مغناطيسية استقطبت نتيجة تأثرها بمجال مغناطيسي خارجي ويكون المجال المغناطيسي الكلي داخلها هو مجموع الداخلي والخارجي أو $H + M$ وتكون كثافة الفيض المغناطيسي B داخل مثل هذه المواد كما يلي :-

$$B = \mu_0 (H + M) \equiv \mu H \quad (59a-1)$$

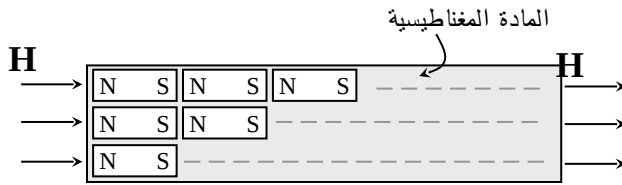
حيث إن μ هو ثابت الوسط المغناطيسي أو نفاذية الوسط وتعطى قيمته بما يلي :-

$$\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0 (1 + M/H) \quad H/m \quad (59b-1)$$

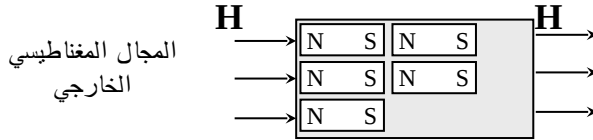
ويمكن النظر إلى μ على أنه يمثل مقدرة الوسط على الاستقطاب المغناطيسي وتعرف الكمية μ_r على أنها قيمة النفاذية النسبية للمواد وتكون قيمتها للمواد المغناطيسية اكبر من الواحد الصحيح وقد تصل إلى بضعة آلاف وهناك ثلاث مواد لها خاصية المغنطة وهي الحديد والكوبالت والنيكل أو أي خليط به هذه المواد. ويبين الشكل (1-36) مادة مغناطيسية على شكل قضيب تم وضعه تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي وقد تم توضيح الاستقطاب المغناطيسي عليه وذلك على شكل عدد من ثنائيات القطب المغناطيسية (مغناطيسيات صغيرة). ويلاحظ أنه إذا ما تم قطعه إلى نصفين فإن كل نصف سيحوي على نصف هذه الثنائيات. وإذا ما استمرت عملية القطع هذه حتى الوصول إلى ثنائي واحد فإننا نحصل في كل مرة على قطب شمالي يرافقه دائماً قطب جنوبي ولا يمكن الحصول على أقل من ذلك (إلا نظرياً) إذا تم تجميد الشحنات وعدم السماح لها بالتحرك أو الغزل وفي هذه الحالة فإن مجالها المغناطيسي سيتلاشى تبعاً لغياب حركة الشحنات (غياب التيار). أي أن القطب الشمالي والقطب

الجنوبي ينتجان معاً ومن غير الممكن الحصول على قطب واحد معزول وبالتالي فإن هذا يعني غياب الشحنات المغناطيسية أو أن

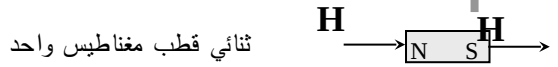
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{\beta} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (60-1)$$



(أ)



(ب)



(ج)

الشكل :- (63 مادة

مغناطيسية تحت تأثير مجال

مغناطيسي خارجي (أ)

كامل المادة (ب) نصفها

(ج) أصغر جزء فيها.

ويمكن تقسيم المواد المغناطيسية بشكل عام ولغرض هذا الكتاب إلى مواد مغناطيسية حديدية والفرانيت (Ferromagnetic and Ferrite) وكلا المادتين لهما نفاذية نسبية $\mu_r \gg 1$ قد تصل إلى بضعة آلاف إلا أن موصلية المادة الأولى عالية وقد تصل إلى $10^6 (\Omega m)^{-1}$ أما موصلية المادة الثانية فهي متدنية وقد تصل إلى $10^{-6} (\Omega m)^{-1}$.

8-3-1:- شروط الحدود Boundary Conditions

إذا كان هناك وسطان وخصائصهما كما هو مبين على الشكل (1-37) وكان

المجال المغناطيسي وكثافة الفيض المغناطيسي في الوسط الأول \mathbf{H}_1 و \mathbf{B}_1 و

وفي الوسط الثاني \mathbf{H}_2 و \mathbf{B}_2 والمطلوب هو ربط هذه المجالات مع

بعضها ومن خلال خصائص الوسطين. سيتم تصنيف هذه المجالات، كما ورد في حالة المجالات الكهربائية، إلى عمودي على السطح الفاصل بين الوسطين

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{و يتم ربط } \mathbf{B}_{n1} \text{ و } \mathbf{B}_{n2} \text{ عبر استخدام العلاقة}$$

ويستخدم سطح الأسطوانة المقفل لهذه الغاية ويتم ربط \mathbf{H}_{t1} و \mathbf{H}_{t2} عبر استخدام مسار مقفل، وتم بيان ذلك على الشكل (1-37).

- كثافة الفيض المغناطيسي العمودي \mathbf{B}_n :- باعتماد اسطوانة مساحة قاعدتيها $\Delta S_{1,2}$ وارتفاعها Δh وبالتالي فإن

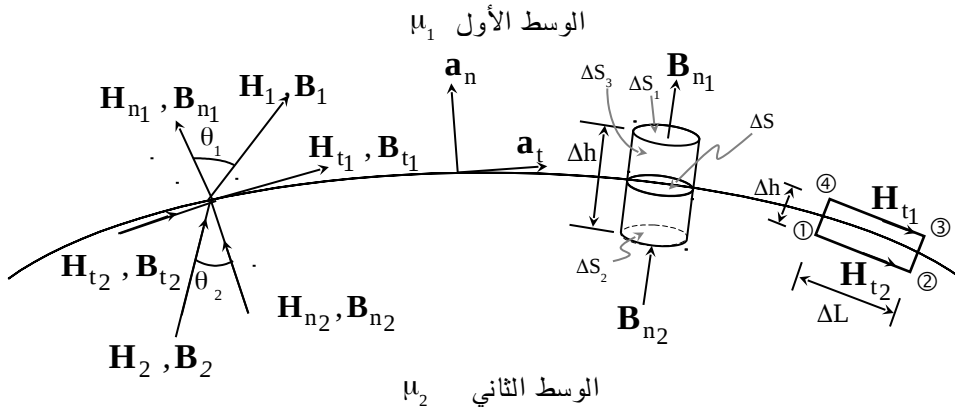
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{\Delta S_3} \right] (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = 0$$

وإذا آلت $\Delta h \rightarrow 0$ فإن $\Delta S_3 \rightarrow 0$ وعندما تؤول كل من $\Delta S_{1,2} \rightarrow 0$ فإن ناتج العلاقة الأخيرة هو

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \quad (61a-1)$$

أي أن كثافة الفيض المغناطيسي العمودية مستمرة وذلك نظراً لغياب الشحنات المغناطيسية، وهذه العلاقة تناظر العلاقة الواردة في المعادلة (1-28)، وبالتالي فإن

$$\mu_1 \mathbf{H}_{n1} = \mu_2 \mathbf{H}_{n2} \quad (61b-1)$$



الشكل (1-37) المجالات المغناطيسية H و B في وسطين الأول ونفاذيته μ_1 والثاني ونفاذيته μ_2 .

- المجالات المغناطيسية الماسة للسطح H_t :- يتم تنفيذ قانون أمبير على المستطيل المبين في الشكل (1-37) ، على 1-2-3-4 ، أو أن

$$\oint_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right] (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

وإذا آلت Δh إلى الصفر فإن التكامل الثاني والرابع يؤولان إلى الصفر إضافة إلى أن الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة سيؤول إلى الصفر إلا إذا كان هناك تيار خطي K على السطح الفاصل بين الوسطين (هذا في واقع الحال لا يحدث إلا إذا كان أحد الوسطين موصلاً جيد التوصيل) وفي هذه الحالة تصبح المعادلة الأخيرة كما يلي:-

$$H_{t2} \Delta L - H_{t1} \Delta L \approx K \Delta L$$

وعندما تؤول ΔL إلى الصفر (بعد أن يتم القسمة عليها) يتم الحصول على ما يلي:-

$$H_{t2} - H_{t1} = K \quad (62a-1)$$

وأما كثافة الفيض المغناطيسي الماسة للسطح فترتبط كما يلي:-

$$B_{t2} / \mu_2 - B_{t1} / \mu_1 = K \quad (62b-1)$$

أي أن عدم الاستمرارية في قيم المجال المغناطيسي الماس للسطح الفاصل بين الوسطين (إن وجدت) تساوي كثافة التيار الخطية K . ونظراً للارتباط التعامدي بين المجال المغناطيسي وكثافة التيار فيتم كتابة المعادلة (62a-1) كما يلي:-

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \quad (63-1)$$

يتم تنفيذ العلاقة الأخيرة عند السطح الفاصل بين الوسطين علماً بأن \mathbf{a}_n هو متجه وحدة طول عمودي على السطح الفاصل كما هو مبين في الشكل أعلاه.

-:1-3-9 المحث والطاقة المغناطيسية

يعتبر المحث (Inductor) بأنه النبيلة التي تقوم بخزن الطاقة المغناطيسية (magnetic energy) أو أنه ومن خلاله يتم ربط الدارات الكهربائية مع بعضها مغناطيسياً عبر خطوط المجال المغناطيسي أو الفيض المغناطيسي Ψ_m . وتعرف محاثته (Inductance) L كما يلي:-

$$L = \Psi_{mL} / I \quad \text{H} \quad (64-1)$$

حيث إن Ψ_{mL} هي كمية الفيض المغناطيسي الترابطي، و I هو التيار المنتج لهذا الفيض. وبما أن المحث هو نبيلة لتخزين الطاقة المغناطيسية فإن المحاثته تتناسب مع هذه الطاقة المخزنة وتمثل الطاقة المخزنة أو الشغل المبذول لخزن هذه الطاقة في حجم V ويمكن الاستفادة من العلاقات التي تم اشتقاقها للمواسع، المعادلة (1-33). وتطبيقها على المحث كما يلي:-

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \, dV \quad (65a-1)$$

أو أن الطاقة المغناطيسية المخزنة W_m هي كما يلي:-

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu}{2} \int_V \mathbf{H}^2 \, dV \quad \text{J} \quad (65b-1)$$

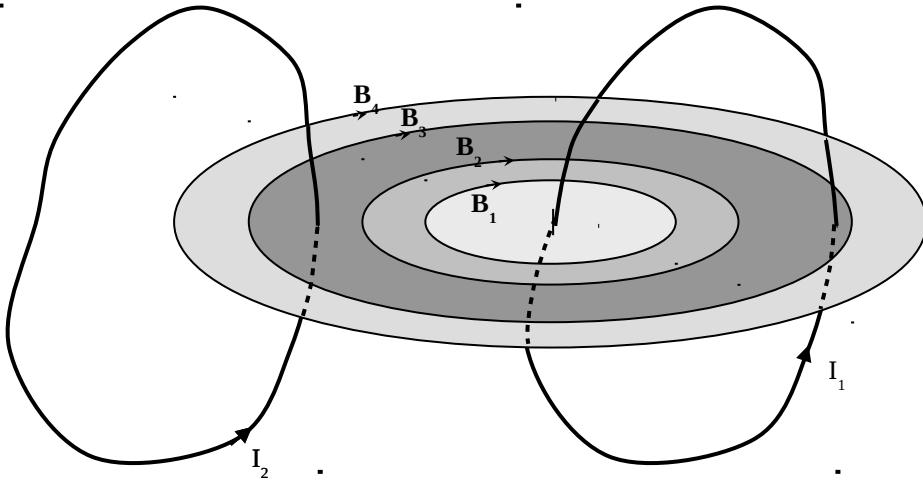
ويمكن من المعادلة (65a-1) إيجاد صيغة أخرى للمحاثته كما يلي:-

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV \quad (66-1)$$

حيث إن V يمثل الحجم الذي يخزن فيه الطاقة المغناطيسية. كذلك من العلاقة (1-65) يمكن إيجاد كثافة هذه الطاقة المغناطيسية المخزنة أو

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 \quad \text{J/m}^3 \quad (67-1)$$

ولتوضيح المحاثة سواءً كان ذلك عبر العلاقة (1-64) أو (1-66) فقد تم أخذ الشكل (1-38) الذي يبين دارتين متجاورتين مبيناً عليهما خطوط \mathbf{B} الناتجة عن الدارة التي تحمل تياراً مقداره I_1 . ويلاحظ أن هناك أربعة خطوط \mathbf{B}_1 و \mathbf{B}_2 وهي خطوط محصورة في الدارة الأولى وحولها، أما \mathbf{B}_3 و \mathbf{B}_4 فهي خطوط تربط الدارة الأولى مع الدارة الثانية. وبالتالي فإن الخطوط \mathbf{B}_1 و \mathbf{B}_2 يمثلان محاثة ذاتية L_1 للدارة الأولى أما \mathbf{B}_3 و \mathbf{B}_4 فيمثلان محاثة تبادلية L_{12} وسيتم تقديم عددٍ من الأمثلة لتوضيح كل من المحاثة الذاتية والمحاثة التبادلية والطاقة المغناطيسية المخزنة.



الشكل (1-38):- دارتان متجاورتان الأولى تحمل تياراً I_1 والثانية تحمل تياراً I_2 وخطوط B الناتجة من الدارة الأولى التي تربط الدارة الأولى بالثانية.

مثال (1 23):- يبين الشكل (1-39) كابل محوري مكون من موصل داخلي نصف قطره a ونفاذيته μ_0 H/m ويحمل تياراً I وموصل خارجي رقيق نصف قطره b ونفاذيته μ_0 H/m ويحمل تياراً $-I$. إذا كان الوسط بين الموصلين غير مغناطيسي ونفاذيته μ_0 H/m فأوجد الطاقة المغناطيسية المخزنة في الموصل الداخلي وفي المنطقة بين الموصلين لكل وحدة طول وكذلك أوجد المحاطة الكلية لهذا الكابل لكل وحدة طول.

الحل:-

يتم إيجاد المجالات المغناطيسية في المناطق المختلفة ومنها يستنتج ما هو مطلوب في هذا المثال. يلاحظ أنه وبسبب التماثل في الكابل المحوري فإن المجال المغناطيسي لا يتغير مع ϕ أو z وليس له إلا عنصراً واحداً باتجاه \mathbf{a}_ϕ . وتكون المجالات المغناطيسية في المنطقة $0 \leq \rho \leq a$ كما يلي:-

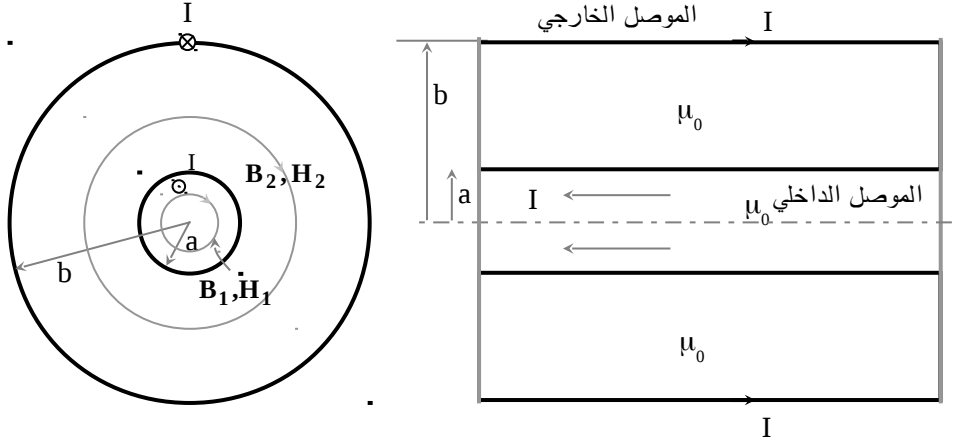
$$\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow 2\pi\rho H_{\phi 1} = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$B_{\phi 1} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \text{ Wb/m}^2 \quad \text{و} \quad H_{\phi 1} = \frac{I \rho}{2\pi a^2} \text{ A/m} \quad \text{أو}$$

وبالتالي فإن الطاقة المغناطيسية لكل وحدة طول لهذا الموصل هي كما يلي:-

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^1 \frac{I^2 \rho^3}{4\pi^2 a^4} d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^a = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \text{ J/m}$$



الشكل:- (1-19) الكابل المحوري بنصفي قطر داخلي وخارجي للموصلين a و b على التوالي.

أما المحاثة لهذا الموصل فهي المحاثة الذاتية له وتساوي

$$\frac{1}{2} L_i I^2 = W_m = \frac{\mu_0 I^2}{16 \pi} \Rightarrow L_i = \frac{\mu_0}{8 \pi} \quad \text{H/m}$$

في المنطقة $a \leq \rho < b$

$$\oint_L \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{L} = 2 \pi \rho H_{\phi_2} = I \Rightarrow H_{\phi_2} = \frac{I}{2 \pi \rho} \text{ A/m} \Rightarrow B_{\phi_2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi \rho} \text{ Wb/m}^2$$

وتصبح الطاقة المغناطيسية المخزنة لكل وحدة طول كما يلي:-

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{4 \pi^2} \text{Ln}(b/a) 2\pi 1 = \frac{\mu_0 I^2 \text{Ln}(b/a)}{4 \pi} \quad \text{J/m}$$

أما المحاثة التبادلية بين الموصلين فهي

$$\frac{1}{2} L_0 I^2 = \frac{\mu_0 I^2 \text{Ln}(b/a)}{4\pi} \Rightarrow L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln}(b/a) \quad \text{H/m}$$

وبالتالي فإن المحاثة الكلية لهذا الكابل لكل وحدة طول هي

$$L = L_i + L_0 = \mu_0/8\pi + (\mu_0/2\pi) \text{Ln}(b/a) \quad \text{H/m}$$

مثال :- (1-24) يبين الشكل (1-40) ملفاً لولبياً (Solenoid) عدد لفاته N (اللفات متلاحقة مع بعضها) طوله L ونصف قطره a وقلبه من الهواء. إذا كان التيار المار فيه I فأوجد محاثة هذا الملف. (ملاحظة :- أوجد كثافة الفيض المغناطيسي في وسط الملف وأفترض أن $L \gg a$).

الحل:-

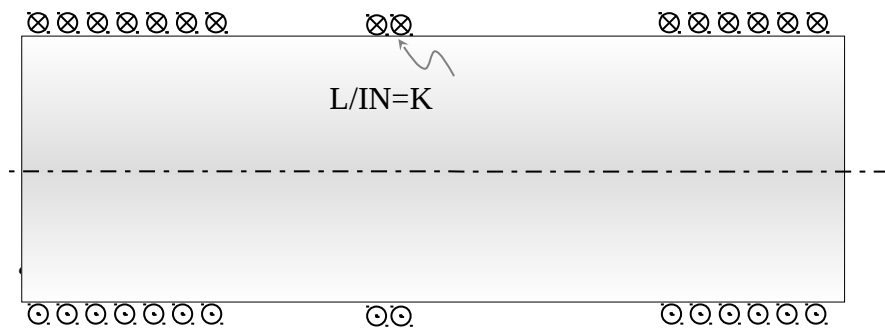
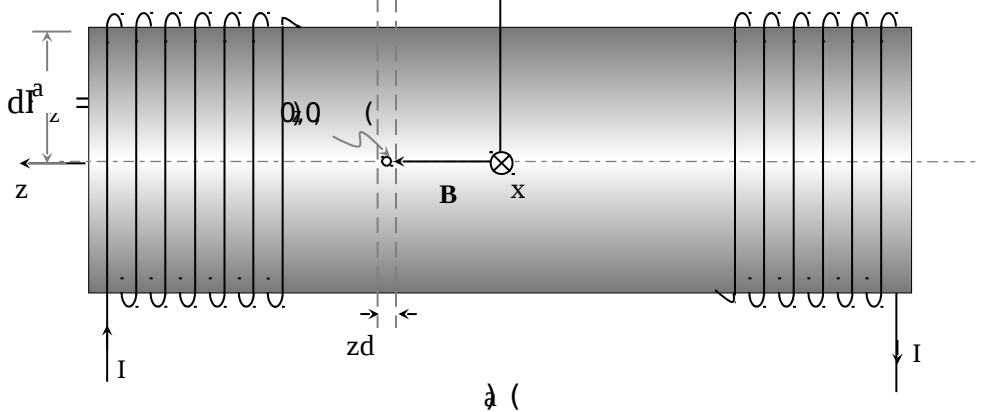
إذا كانت اللفات متلاحقة بما فيه الكفاية فيمكن أن يتم تعريف الكمية $N I/L \text{ A/m}$

على أنها كثافة التيار الخطي وذلك مناظراً لصفيحة تحمل هذا التيار

$K = N I/L \text{ A/m}$. وبالتالي فإذا ما استخدمت نتيجة المثال (1-17) حيث إن

التيار في ذلك المثال يستبدل بالكمية $K dz = N I dz/L$ وبالتالي فإن كثافة

الفيض المغناطيسي لهذا الجزء من الملف اللولبي تكون كما يلي:-



الشكل - (1-40) (a) ملف لولبي بطول L ونصف قطر a وعدد لفاته N ويسري فيه تيار I (b) مقطع في الملف مبين عليه كثافة التيار الخطي $K = NI/L$. وبالتالي فإن كثافة الفيض المغناطيسي للملف عند نقطة الأصل تكون كما يلي:-

$$B_z = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu a^2 NI dz}{2L (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu a^2 NI}{2L} \frac{L}{a^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$B_z = \frac{\mu NI}{\sqrt{L^2 + 4a^2}} \quad \text{Wb/m}^2 \quad \text{أو}$$

وإذا كانت $a \gg L$ فإن $L \approx \sqrt{L^2 + 4a^2}$ أو أن كثافة الفيض المغناطيسي في مركز

الملف تصبح

$$B_z = \mu NI/L \quad \text{Wb/m}^2$$

أما إذا كان المطلوب إيجاد كثافة الفيض المغناطيسي عند أحد طرفيه فإنها تكون كما يلي:-

$$B_z = \int_0^L \frac{\mu a^2 N I d_z}{2 L (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu N I}{2 L} \frac{L}{a^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \Big|_0^L$$

$$B_z = \frac{\mu N I}{2 \sqrt{L^2 + a^2}} \sim \frac{\mu N I}{2 L} \quad \text{Wb/m}^2 \quad \text{أو}$$

ويمكن إيجاد المحاثة لهذا الملف من العلاقة (1-64) حيث إن الفيض المغناطيسي الذي يربط كل لفة هو

$$\Psi_{mL} = (\mu N I / L) \pi a^2 \quad \text{Wb}$$

وحيث إن هناك N لفة فإن كل الفيض الترابطي هو

$$\Psi_{mt} = (\mu N^2 I / L) \pi a^2 \quad \text{Wb}$$

وتكون محاثة الملف كما يلي:-

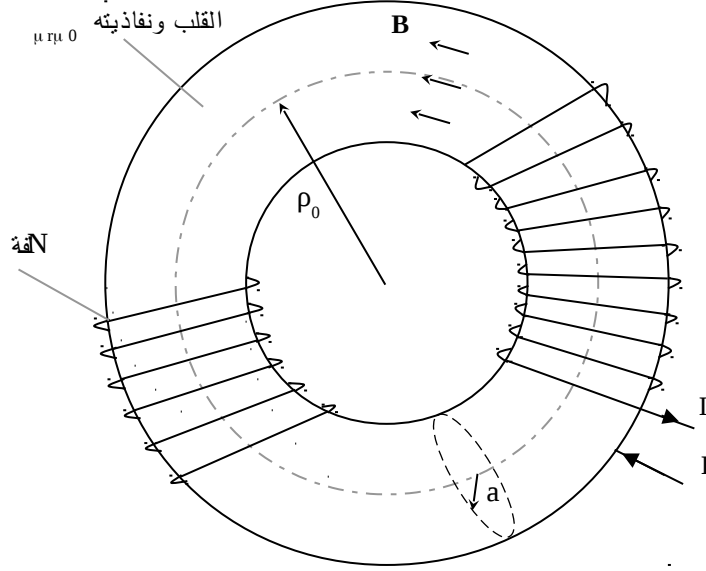
$$L = \Psi_{mt} / I = (\mu N^2 / L) \pi a^2 \quad \text{H}$$

مثال:- (1-25) يبين الشكل (1-41) ملفاً حلقياً (toroidal coil) عدد لفاته N لفة ونصف قطر الحلقة ρ_0 ونصف قطر الملف a ، فإذا كان قلب هذا الملف هو من مادة حديدية نفاذيتها $\mu_r \mu_0$ فأوجد حاثية هذا الملف.

الحل:-

يمكن القول أن الملف الحلقي هو ملف لولبي تم ثنيه ليصبح كما هو مبين في الشكل (1-41) وطوله $L = 2 \pi \rho_0$ وبالتالي فإن المحاثة لهذا الملف الحلقي تكون كما يلي:-

$$L = \frac{\mu N^2}{L} \pi a^2 = \frac{\mu N^2}{2 \pi \rho_0} \pi a^2 = \frac{\mu N^2 a^2}{2 \rho_0} \quad \text{H}$$

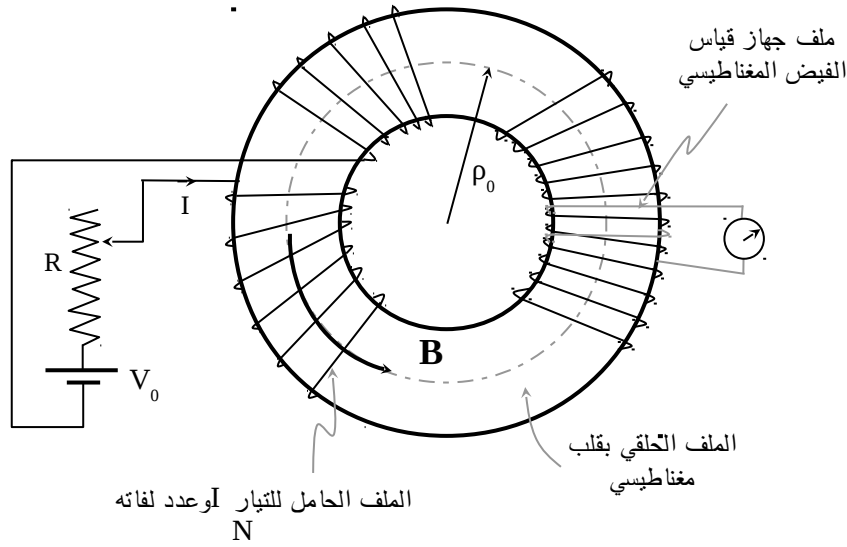


الشكل (1-41) ملف حلقي مكون من N لفة وقلبه من مادة حديدية نفاذيتها $\mu_r \mu_0$

10-3-1-1: منحنى B-H أو الأنشطة التخلفية Hysteresis loop

تم سابقاً اقتراح العلاقة بين كثافة الفيض المغناطيسي B والمجال المغناطيسي H لمادة ما (أو لوسط ما) وذلك على الشكل $B = \mu H$ حيث إن μ يمكن أن ينظر لها على أنها كمية تتناسب مع عدد ثنائيات القطب المغناطيسية للمادة. وهذه العلاقة تبين أن B و H يرتبطان بعلاقة خطية وهذا ينطبق فقط على المواد غير المغناطيسية حيث إن $\mu = \mu_0$ وينظر إلى μ_0 على أنها ثابت الوسط المغناطيسي. أما في حالة المواد المغناطيسية فإن العلاقة بين B و H ليست خطية ويمكن في الواقع قياس هذه العلاقة وذلك من خلال استخدام ملف حلقي قلبه من مادة مغناطيسية. ويتم استخدام ملف آخر لأجل قياس الفيض المغناطيسي داخل القلب الناتج عن التيار الذي يمر في الملف الأصلي والذي ينتج مجالاً مغناطيسياً داخل قلبه $H = IN/L$ حيث إن L يمثل

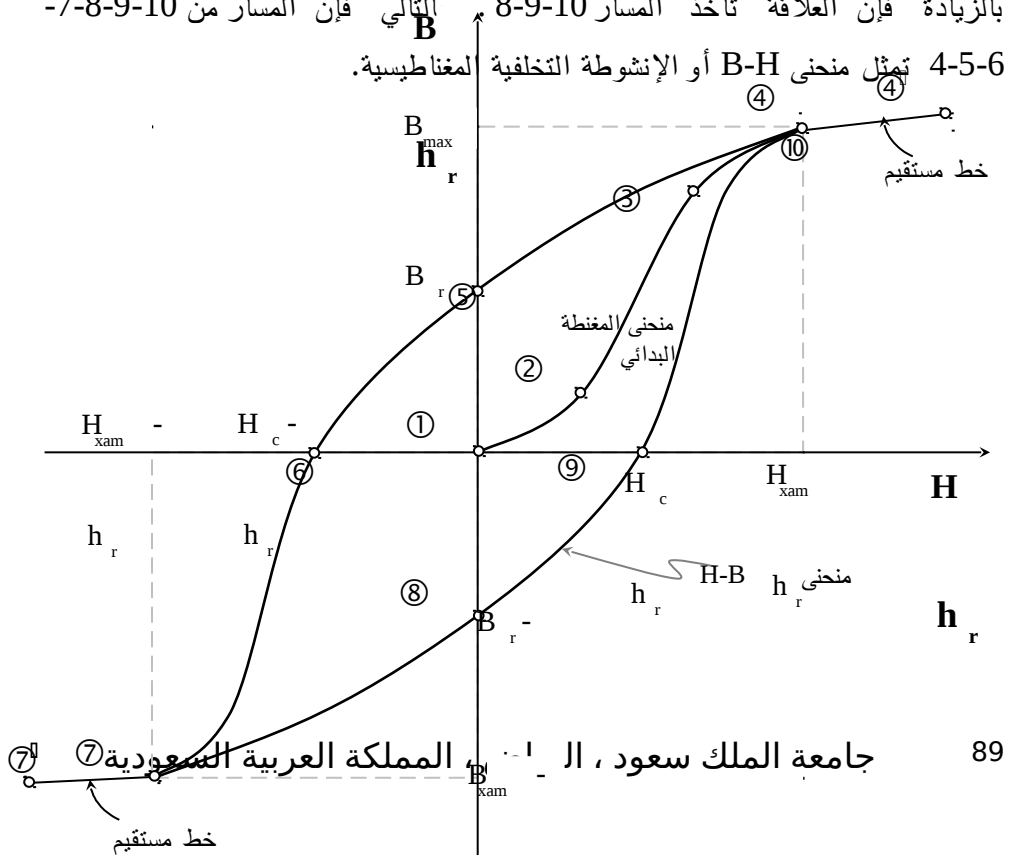
$2\pi\rho_0$. ويبين الشكل (1-42) التفاصيل المستخدمة لقياس العلاقة بين H و B حيث يتم قياس B باستخدام جهاز قياس الفيض المغناطيسي.



الشكل (1-42): الملف الحلقي المستخدم لقياس العلاقة بين H و B .

يتم افتراض أن القلب المغناطيسي لم يتعرض قبل ذلك لأي مجالات مغناطيسية وبالتالي فإنه لا يحوي أي اصطفاة لتنايات القطب المغناطيسية. في ضوء ذلك إذا كان التيار $I = 0$ فإن $H = 0$ وبالتالي فإن $B = 0$ وبعد هذا إذا ما تم زيادة H بعض الشيء فإن القوى الداخلية والعشوائية الخارجية تكون عالية وعليه فإن تغير B مع ازدياد H يكون بطيئاً حتى تصل H إلى قيمة معتبرة تكون أعلى من القوى الأخرى وعندها فإن تغير B مع ازدياد H يصبح أوضح وبشكل متسارع. ويدعى هذا الجزء بالمنطقة سهلة المغنطة. وعندما يزداد H بعد ذلك نرى أن التغير في B قد تباطئ وبشكل واضح وهذا مرده أن هناك عدداً قليلاً من تنايات القطب المتبقية والتي لم تصطف باتجاه H ولذلك يصعب تغيير موقعها. ولكن وبوصول H إلى H_{max} (أعلى قيمة لازمة

لجعل كل ثنائيات القطب المغناطيسي داخل القلب تصطف باتجاه H فإن $B = B_{max}$ وبعد ذلك فإنه لن يكون هناك ثنائيات قطب إضافية للاصطفاف وعليه فإنه ولكل القيم $H > H_{max}$ فإن B تزداد تبعاً لثابت الوسط μ_0 (خط مستقيم)، ويبين الشكل (1-43) منحنى $B-H$ (B-H Curve) أو الأنشطة التخلفية (hysteresis loop). يلاحظ أنه إذا ما تم تخفيض H إلى قيم أقل من H_{max} فإن مسار العلاقة بين B و H لا ترجع إلى المنحنى الموسوم 1-2-3-4 وإنما يرجع بمسار آخر هو 4-5. وعندما تصل H إلى الصفر، يلاحظ أن B لن تكون صفراً وإنما تأخذ قيمة يطلق عليها اسم كثافة الفيض المغناطيسي المتبقية (أو المتبقية B_r). وللتخلص من ثنائيات القطب المغناطيسية المتبقية (B_r) فإنه لا بد من تخفيض قيمة H في الاتجاه الآخر حتى تصل إلى قيمة سالبة يطلق عليها اسم المجال المغناطيسي القهري (H_c - coersive). عندما تصل H إلى H_c فإن B تصبح صفراً أو بالتالي فإن ثنائيات القطب المغناطيسية تكون قد اختفت كلياً في المادة. وإذا ما استمرت عملية تخفيض المجال المغناطيسي فإن العلاقة بين B و H تأخذ المسار 5-6-7 حتى تصل قيمة H إلى $-H_{max}$. عند هذه القيمة فإن $B = B_{max}$ وتكون كل ثنائيات القطب المغناطيسية قد اصطفت في الاتجاه المعاكس وإذا ما تم زيادة H من $-H_{max}$ إلى الصفر فإن العلاقة بين B و H تأخذ المسار 7-8 وإذا ما استمرت بالزيادة فإن العلاقة تأخذ المسار 8-9-10. التالي فإن المسار من 7-8-9-10



الشكل -(1-43) منحنى B - H أو الأنشطة التخلفية المغناطيسية.

و تمثل المساحة المحددة داخل هذه الأنشطة كمية الشغل المبذول لاصطاف ثنائيات القطب المغناطيسية وإعادة اصطافها وتدعى بالطاقة المهدورة في مغنطة وإعادة مغنطة المادة أو ببساطة فإن هذه المساحة تدعى بفقدان التخلفية (hysteresis loss). وتتغير تفاصيل هذا المنحنى من مادة لأخرى ويمثل الثنائي B_r و H_c معياراً لخاصية المادة المغناطيسية. فإذا كانت H_c صغيرة فإن المادة تعتبر مادة مغناطيسية ضعيفة أي أنها لاتحافظ على اصطاف ثنائيات القطب المغناطيسية تحت تأثير قوة خارجية متدنية. أما إذا كانت قيم B_r مرتفعة نسبياً وكذلك H_c فإن هذا يعكس خصائص مغناطيسية قوية للمادة أي أنه إذا تم مغنطة المادة أو اصطاف عدد من ثنائيات القطب المغناطيسية فإن هذه المغنطة أو هذا الاصطاف سيبقى حتى بعد زوال المجال المغناطيسي المؤثر ولن يتغير الوضع تحت قوى خارجية متدنية أو متوسطة. ويستخدم النوع الأخير من المواد لتصنيع المغناطيس الدائم أو أوساط تسجيل البيانات والمعلومات مغناطيسياً مثل الأشرطة المغناطيسية لتسجيل الصوت وكذلك الصور وأقراص الحاسوب الممغنطة. وتجدر الإشارة إلى أن منحنى B-H

يعطي قيمةً للنفاذية μ تجعلها تفقد معناها الذي تم تقديمه سابقاً. فمثلاً تكون $\mu \approx \pm 0$ عند كل من النقطة 6 والنقطة 9 وكذلك فإنها تكون $\mu \rightarrow \pm \infty$ عند النقطتين 5 و 8. يبين منحنى B-H أن قيم μ تتراوح ما بين $-\infty$ و $+\infty$ مروراً في الصفر وذلك على المنحني 4-5-6-7-8-9-10 الذي يطلق عليه بأنه منحنى B-H. وتكون قيم μ في المنطقة $4' - 4$ و $7' - 7$ مساوية لنفاذية الهواء μ_0 . ويطلق على المنحني 1-2-3-4 بأنه منحنى المغنطة البدائي أو الأولي.

11:- 3-1 الدارات المغناطيسية Magnetic Circuits

تتكون الدارات الكهربائية للتيار المستمر من مصدر جهده V_b (بطارية) يتم وصله إلى مقاومة R أو مجموعة من المقاومات R_1, R_2, \dots (موصولة بشكل معين) وذلك كما هو مبين في الشكل (44a-1). ويتم استخدام قوانين الدارات الكهربائية (مثلاً قانون أوم وقانوني كيرشوف للفولطية والتيار... الخ) لتحليل هذه الدارات. ويبين هذا الشكل أن المصدر الكهربائي V_b يتغلب على المقاومة الكهربائية R لتسيير تيار كهربائي I فيها. أما الشكل (44b-1) فإنه يبين ملفاً حلقياً عدد لفاته N بقلب من مادة مغناطيسية حيث ينتج عن التيار I المار في هذا الملف فيض مغناطيسي مقداره $\Psi_m (=BA) Wb$. ويمكن القول هنا أن هذا المصدر المغناطيسي NI يتغلب على المقاومة المغناطيسية أو المقاصرة \mathcal{R} (Reluctance) للقلب الحلقي لتسيير فيض مغناطيسي Ψ_m في هذا القلب، ويبين الشكل (44c-1) تمثيلاً لهذه الدارة المغناطيسية المكافئة. وتحكم الدارة الكهربائية العلاقات التالية:-

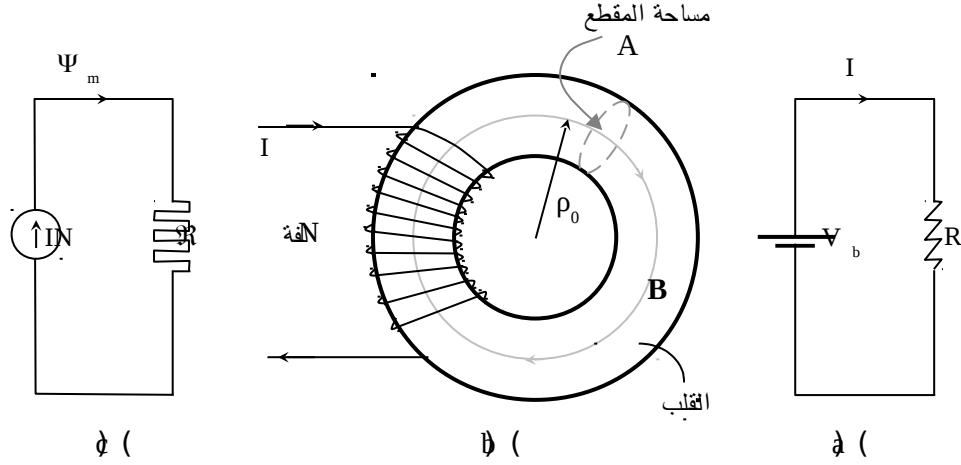
$$R = V_b / I \quad (=L/(\sigma A)) \quad \Omega \quad \text{و} \quad I = V_b / R \quad A \quad \text{و} \quad V_b = IR \quad V$$

أما العلاقات التي تحكم عمل الدارة المغناطيسية فيمكن كتابتها اعتماداً على العلاقات السابقة والدارة المبينة في الشكل (44c-1) كما يلي :-

$$NI = \Psi_m \mathcal{R} \quad A \quad (67a-1)$$

$$\Psi_m = NI / \mathcal{R} \quad Wb \quad (67b-1)$$

$$\mathcal{R} = NI / \Psi_m (=HL/(\mu H A) = L/(\mu A)) \quad H^{-1} \quad (67c-1)$$

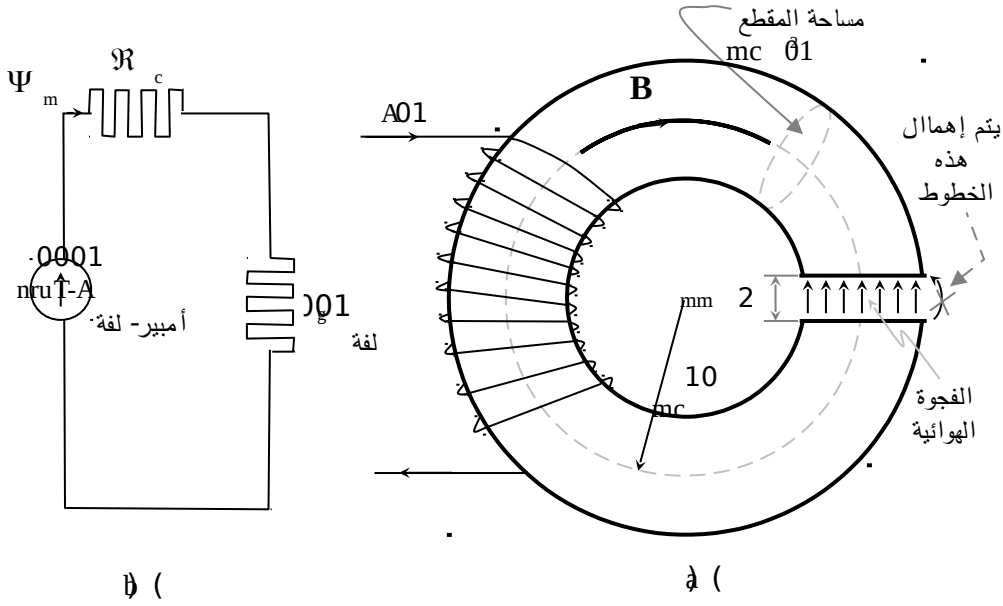


الشكل (1-44) (a) الدارة الكهربائية (b) ملف حلقي بعدد لفات N لفة (c) الدارة المغناطيسية المكافئة.

ونظراً للتشابه بين الدارة المغناطيسية والكهربائية ($\Psi_m \rightarrow I$ و $V_b \rightarrow NI$) و ($\mathcal{R} \rightarrow R$) فإنه يتم استخدام القوانين والنظريات المستخدمة في الدارات الكهربائية لتحليل الدارات المغناطيسية. ولهذه الدارات المغناطيسية أهميتها في دراسة المحولات الكهربائية والآلات الكهربائية، وسيتم فيما يلي تقديم مثالين لتوضيح فكرة تحليل هذه الدارات.

مثال (1-26):- يبين الشكل (1-54) ملفاً حلقياً نصف قطره 10 cm بفجوة أو ثغرة هوائية (air gap) سمكها 2 mm، فإذا كانت مساحة مقطعه تساوي 10 cm² وكانت نفاذية مادته هي $1000 \mu_0 H/m$ وعدد لفاته 100 لفة ويمر فيه تيار يساوي 10 A فأوجد الفيض المغناطيسي Ψ_m وكثافة B في الفجوة

الهوائية (يستخدم مثل هذا الملف الحلقي في القراءة من والكتابة على شريط مغناطيسي يمر من خلال هذه الفجوة). أهمل تسريب خطوط المجال عند الفجوة.



الشكل (1-45) (a) ملف حلقي بفجوة هوائية (b) الدارة المغناطيسية المكافئة.

الحل:-

يتكون مسار الفيض المغناطيسي من مقاصرتين R_c للقلب الحلقي المغناطيسي و R_g للفجوة الهوائية ويبين الشكل (1-45b) الدارة المغناطيسية المناظرة حيث إن

$$R_c = \frac{L}{\mu A} = \frac{2\pi \times 10 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-3}}{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10^{-4}} = 4.98 \times 10^5 \quad H^{-1}$$

$$R_g = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10^{-4}} = 15.92 \times 10^5 \quad H^{-1}$$

يلاحظ أن المقاومة المغناطيسية للفجوة (بطول 2 mm) تزيد على ثلاثة أضعاف المقاومة المغناطيسية للقلب المغناطيسي الذي يبلغ طوله 62.63 mm. وبالتالي فإن خطوط

المجال المغناطيسي المتسربة من القلب الحديدي (المغناطيسي) تكون قليلة (الخطوط المعنية هنا ليست المبينة عند الفجوة الهوائية). في ضوء ما سبق فإن الفيض المغناطيسي في الفجوة أو في القلب يكون كما يلي:-

$$\Psi_m = \frac{N I}{\mathcal{R}} = \frac{100 \times 10}{\mathcal{R}_g + \mathcal{R}_c} = 0.48 \text{ mWb}$$

$$B_g = \frac{\Psi_m}{A} = 0.48 \text{ Wb/m}^2 \quad \text{أما كثافة الفيض في الفجوة } B_g \text{ فهي}$$

مثال :- (1-27) في المثال (1-26) إذا كان المطلوب توفير كثافة فيض مغناطيسية في الفجوة الهوائية بمقدار 10 m Wb/m^2 فأوجد التيار المار في الملف الحلقي المذكور أعلاه لتوفير مثل هذه القيمة.

الحل:-

$$\Psi_m = 10 \times 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-5} \text{ Wb}$$

من قيم \mathcal{R}_g و \mathcal{R}_c والفيض المطلوب في الفجوة Ψ_m

$$\Psi_m = NI / \mathcal{R} \Rightarrow I = \mathcal{R} \Psi_m / N = 0.21 \text{ A}$$

يمكن استنتاج التيار من العلاقة التالية

4-1:- تفاعل الشحنات مع المجالات الكهربائية والمغناطيسية

تم في الفصول السابقة تقديم القوة الكهربائية بين مجال كهربائي خارجي E وشحنة q أو جسم مشحون بشحنة q كما يلي :-

$$F = q E \quad N$$

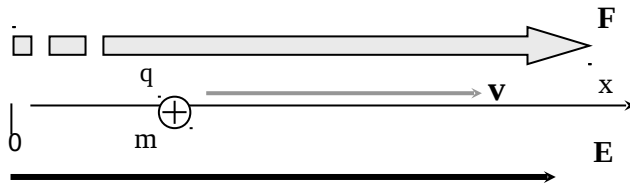
ينتج عن هذه القوة حركة أو إزاحة للشحنة أو الجسم المشحون والذي تبلغ كتلته مثلاً m kg ويتحرك الجسم المشحون، مثلاً، بتسارع مقداره $a \text{ m/s}^2$ وبالتالي فإنه، حسب قانون نيوتن، يتم إعادة كتابة العلاقة السابقة كما يلي:-

$$F = q E = m a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (68-1)$$

حيث إن a هو تسارع الشحنة m/s^2 ، و v هي سرعة الشحنة m/s ، و x هي إزاحة الشحنة (في اتجاه x مثلاً) m .

ويبين الشكل (1-46) توضيحاً لهذه الكميات ويمكن من العلاقات المبينة في المعادلة (1-68) استنتاج تسارع وسرعة وإزاحة الشحنة أو المجال الكهربائي. ولهذا التفاعل بين الشحنة والمجال الكهربائي تطبيقاته في الحياة العملية فمثلاً في راسم الموجة (oscilloscope) تكون الشحنة (الشحنات) إلكترونات ينطلق من المهبط (cathode) يتم جره بواسطة مجال كهربائي بين المهبط والمصعد (anode). ويرمز عادة لشحنة الإلكترون بالرمز e وبالتالي فإن العلاقة (1-68) تعطي

$$e E = m a$$



الشكل :- (164) شحنة

كتلتها m وشحنتها q تحت

تأثير مجال خارجي E

ويمكن من العلاقة الأخيرة استنتاج الطاقة اللازمة لجر هذا الإلكترون من x_1 إلى x_2 كما يلي:-

$$W = m \int_{x_1}^{x_2} a \cdot dx \mathbf{a}_x = e \int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx = e V_{12}$$

أو

$$W = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} \cdot dx \mathbf{a}_x = e V_{12}$$

ولكن $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ أو أن

$$m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = e V_{12}$$

فإذا كانت السرعة الابتدائية للإلكترون مساوية للصفر وكان فرق الجهد بين النقطتين يساوي V_0 فإن السرعة الأخيرة لهذه الشحنة تصبح كما يلي:-

$$v = \sqrt{\frac{2 e V_0}{m}} = 5.9 \times 10^5 \sqrt{V_0} \text{ m/S}$$

كذلك تم في السابق تقديم القوة بين المجال المغناطيسي وطول تفاضلي $d\mathbf{L}$ ، كجزء من دارة، يحمل تيار I (وهو عبارة عن شحنات متحركة) كما يلي:-

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} dV \times \mathbf{B}$$

وبما أن التيار مرتبط مع كثافة الشحنات والسرعة كما يلي:-

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \quad \text{فإن القوة تعطي بما يلي:-}$$

$$d\mathbf{F} = \rho_v (dV) \mathbf{v} \times \mathbf{B} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

أو أن القوة الكلية تصبح كما يلي:-

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (69-1)$$

إذا كانت كتلة الشحنة m kg فيمكن، باستخدام قانون نيوتن، إعادة كتابة المعادلة (69-

1) كما يلي:-

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = m \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (70-1)$$

حيث إن \mathbf{a} تمثل تسارع الشحنة و \mathbf{v} تمثل سرعتها وبالتالي فإنه يتم تحديد القوة المؤثرة على شحنة متحركة في مجال مغناطيسي من خلال قاعدة اليد اليمنى،

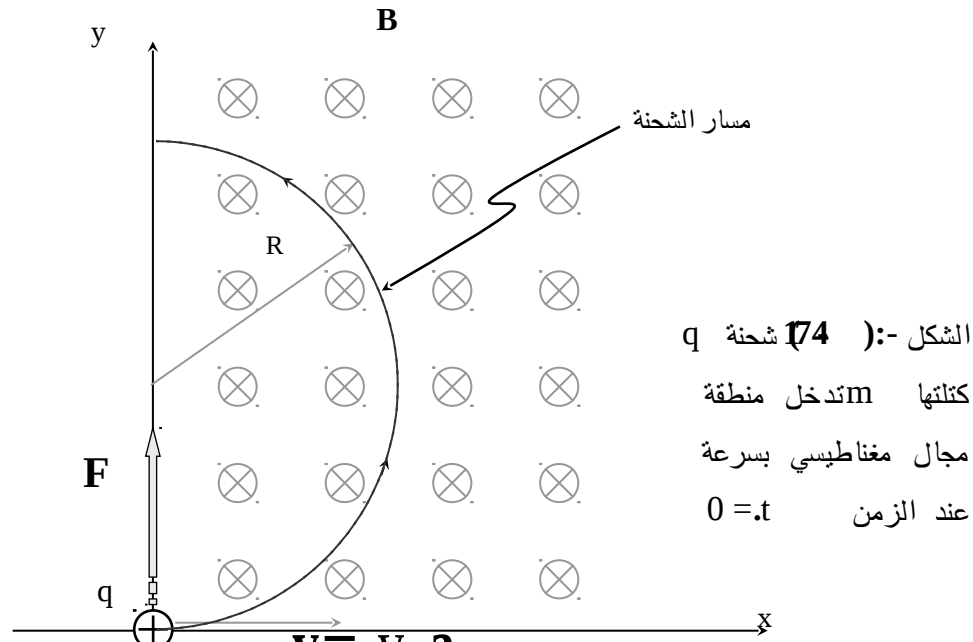
ويبين الشكل (1-47) كل من الشحنة المتحركة وكثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B}

والقوة الناتجة. فإذا افترض أن هناك شحنة دخلت منطقة المجال المغناطيسي

بسرعة $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_x$ عند الزمن $t = 0$ وكانت كثافة الفيض المغناطيسي

سيحدث لهذه الشحنة (على افتراض أن شحنتها q C وكتلتها m kg) بعد دخولها. يتم كتابة المعادلة (1-70) وذلك كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix} = \frac{m}{q} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x & \mathbf{a}_x \\ v_y & \mathbf{a}_y \\ v_z & \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (71-1)$$



تحدد هذه المعادلة العلاقة بين سرعة الشحنة v (أو dv/dt) وكتلتها m وشحنتها q وكثافة الفيض المغناطيسي B ($B = -B_0 \mathbf{a}_z$) المؤثر عليها ويمكن كتابتها كما يلي:-

$$-B_0 v_y = \frac{m}{q} \frac{dv_x}{dt} \quad (72a-1)$$

$$B_0 v_x = \frac{m}{q} \frac{dv_y}{dt} \quad (72b-1)$$

$$0 = \frac{m}{q} \frac{dv_z}{dt} \quad (72c-1)$$

ومن المعادلة (72c-1) يمكن استنتاج التالي:-

$$v_z = v_{0z} \quad \text{m/s} \quad (73-1)$$

حيث إن v_{0z} هو ثابت ويعني انه إذا دخلت شحنة في مجال مغناطيسي باتجاه \mathbf{a}_z بسرعة معينة في اتجاه \mathbf{a}_z فستبقى محافظة على تلك السرعة. ويمكن من المعادلتين (72a-1) و (72b-1) استنتاج v_x و v_y وذلك من خلال مفاضلة أحدهما والتعويض فيها بالأخرى أو

$$- B_0 \frac{dv_y}{dt} = - B_0 \left(\frac{qB_0}{m} \right) v_x \frac{m}{q} \frac{d^2v_x}{dt^2}$$

أو أن

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0 \quad (73a-1)$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad (73b-1)$$

حيث إن $\omega \equiv \frac{q B_0}{m}$ و $f = \frac{q B_0}{2 \pi m}$ يمثل التردد الجيروسكوبي (أو التردد الدوراني).

وبالتالي فإن السرعة في اتجاه x (أو اتجاه y) تكون كما يلي:-

$$v_x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (74a-1)$$

وأما السرعة في اتجاه y فيمكن اشتقاقها من العلاقة (72a-1) أو

$$v_y = A \sin \omega t - B \cos \omega t \quad (74b-1)$$

يتم إيجاد A و B من الشروط الابتدائية أو الأولية (initial conditions) حيث إن $v_x = v_0$ و $v_y = 0$ عند $t = 0$ أو أن $A = V_0$ و $B = 0$ وبالتالي فإن السرعة في اتجاه x و y تصبح كما يلي:-

$$\mathbf{v}_{xy} = v_0 (\cos \omega t \mathbf{a}_x + \sin \omega t \mathbf{a}_y) \quad \text{m/s} \quad (75-1)$$

ويلاحظ أن قيمة السرعة $|\mathbf{v}_{xy}|$ هي كمية ثابتة وتساوي v_0 وبالتالي فإن حركة الشحنة ستكون في دائرة نصف قطرها $R = v_0 / \omega = v_0 m / (qB_0)$.

ويمكن استنتاج نصف القطر هذا من التوازن الذي يحدث للشحنة بعد دخولها المجال المغناطيسي العمودي على اتجاه حركتها بين $F = q v B$ وبين القوة الطاردة المركزية $F = m v^2 / R = q v B$ أو انه في هذه الحالة

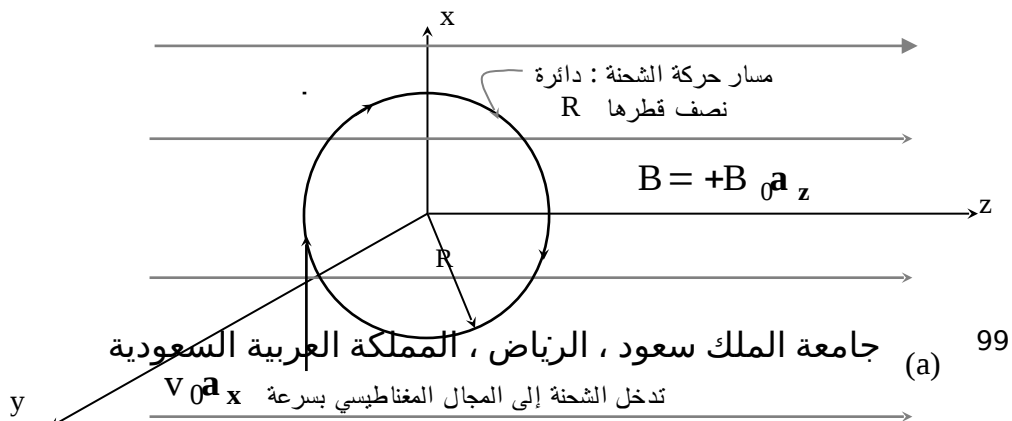
$$R = v_0 m / (qB_0) \quad \text{m kg}$$

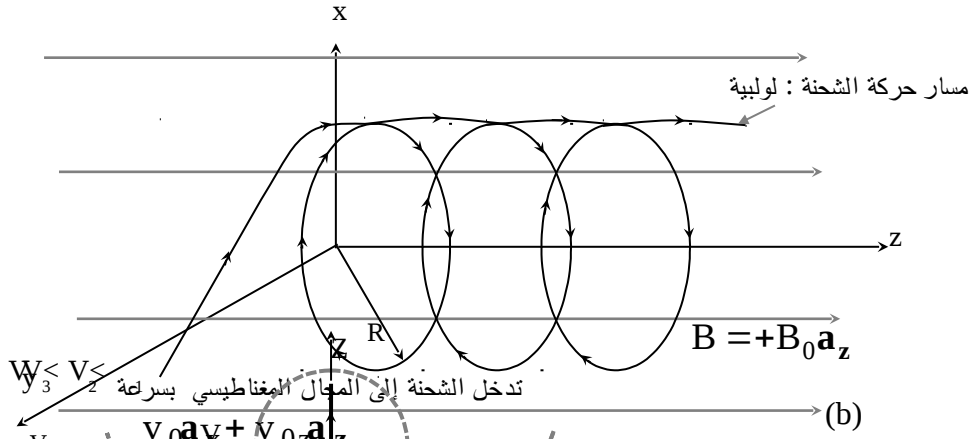
وشحنتها q C في مجال مغناطيسي كثافة فيضه مثلاً $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$ بسرعة عمودية على \mathbf{B} مقدارها مثلاً $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_x$ فإنها ستتحرك في دائرة نصف قطرها $R = v_0 m / (qB_0)$ بتردد جيروسكوبي

$$f = v_0 / \omega = q B_0 / (2\pi m) \quad \text{Hz}$$

دخولها المجال المذكور هي $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_x + v_{0z} \mathbf{a}_z$ m/s فإن حركتها ستصبح

لولبية وذلك كما هو مبين في الشكل (1-48). ومن الجدير بالذكر أن هناك فوائد جمة للانحراف الدائري الذي يحدثه المجال المغناطيسي لشحنة تدخله. في شاشة التلفاز، يتم استخدام ملف بطول محدود لإنتاج مجال مغناطيسي من أجل التحكم في مسار الشعاع الإلكتروني الصادر من مهبط الشاشة وإدخال انحراف كبير في هذا الشعاع. في هذه الحالة، يكون طول الشاشة (من المصعد إلى المهبط) قليلاً جداً إذا ما قورن باستخدام المجالات الكهربائية لإدخال الانحراف في الشعاع الإلكتروني كما هو الحال في راسم الموجة وذلك ما اخذ في الاعتبار في نفس أبعاد الشاشة المرئية.



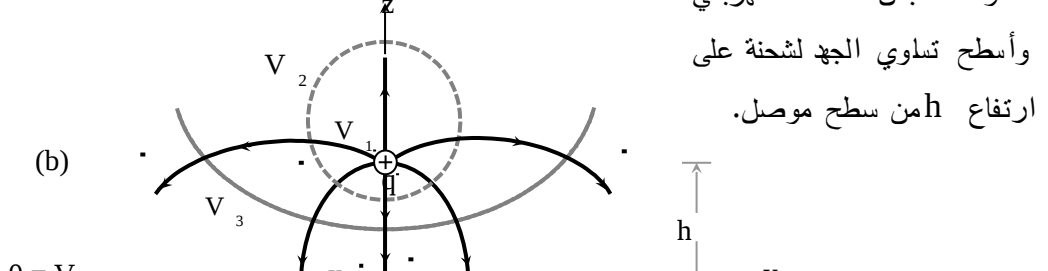


الشكل (1-48):- دخول شحنة إلى مجال مغناطيسي كثافة الفيض $B = B_0 \mathbf{a}_z$ Wb/m² بسرعة دخولها (a) $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_x + v_0 z \mathbf{a}_z$ (b) $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_x$ Wb/m²

5-1:- نظرية الصور في المصادر الكهربائية

الشكل (194):- خطوط المجال الكهربائي وأسطح تساوِي الجهد لثنائي القطب (h) خطوط المجال الكهربائي وأسطح تساوِي الجهد لشحنة على ارتفاع h من سطح موصل.

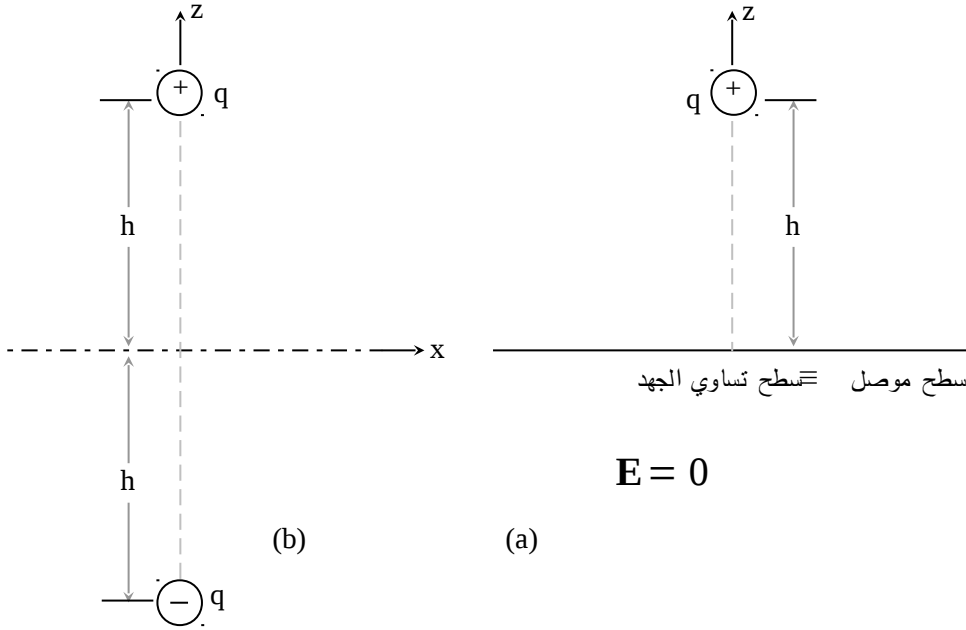
بيان أسطح تساوي المجال الكهربائي وأسطح تساوي الجهد. يلاحظ أن جهد السطح $z = 0$ يساوي صفراً موصل جيد التوصيل أو اعتباره مستوى



ارضي. يلاحظ تماثل خطوط المجال الكهربائي وأسطح تساوي الجهد في الحالتين المبينتين في الشكل (1-49) للمنطقة $z \geq 0$ ، أو أن هناك تناظراً بين الحالتين.

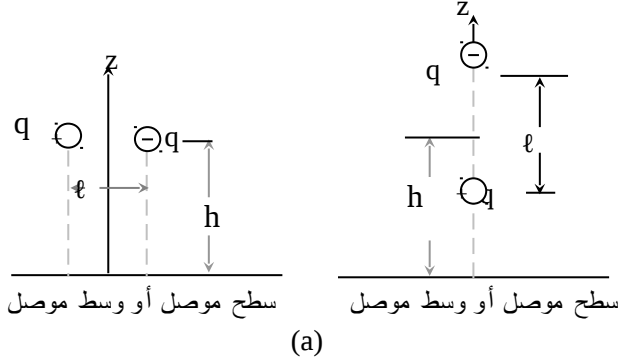
وبالتالي إذا كان هناك شحنة $q+$ موضوعة على ارتفاع $z = h$ من سطح موصل (السطح الموصل متساوي الجهد وجهه يساوي صفراً إذا كان مؤرضاً) والذي يكون فيه المجال الكهربائي مساوياً للصفر كما يبين الشكل (50a-1) فإن المسألة المناظرة لهذا الوضع مبينة في الشكل (50b-1). ويطلق على الشحنة التي وضعت عند النقطة $z = h$ بأنها صورة (image) للشحنة العلوية

الموضوعة عند النقطة $z = h$. ونظراً للتناظر بين المسألتين في المنطقة $z \geq 0$ فإن إيجاد المجالات الكهربائية وأسطح تساوي الجهد الناتجة عن المسألة المناظرة والمكونة من الشحنة وصورتها تكون أسهل بكثير من إيجادها للمسألة الأصلية، حيث إنه قد تم إيجاد المجالات الكهربائية وأسطح تساوي الجهد للمسألة المناظرة في فصول سابقة.



الشكل - (1-50) (a) شحنة $q+$ موضوعة فوق سطح موصل وعلى ارتفاع h ((b) المسألة المناظرة والمكونة من الشحنة الأصلية وصورتها $q-$.
يبين الشكل (51a-1) شحنتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة حيث تم وضع هاتين الشحنتين فوق سطح موصل وتم افتراض وضعين مختلفين لهاتين الشحنتين. هذا ويبين الشكل (51b-1) المسألة المناظرة حيث تم استبدال السطح الموصل بمجموعة من صور هذه الشحنتات وذلك حسب ما تم توضيحه وتصحيح المسألتان متناظرتين في المنطقة $z \geq 0$. ومن المعروف أن التيار إذا نشأ فإنه يبدأ من

نقطة الجهد المرتفع متجهاً إلى نقطة الجهد المنخفض وبالتالي فإنه يمكن استبدال الشحنات الواردة في الشكل (1-51) بتيارات كهربائية.



الشكل (15) :-

شحنتان في وضعين

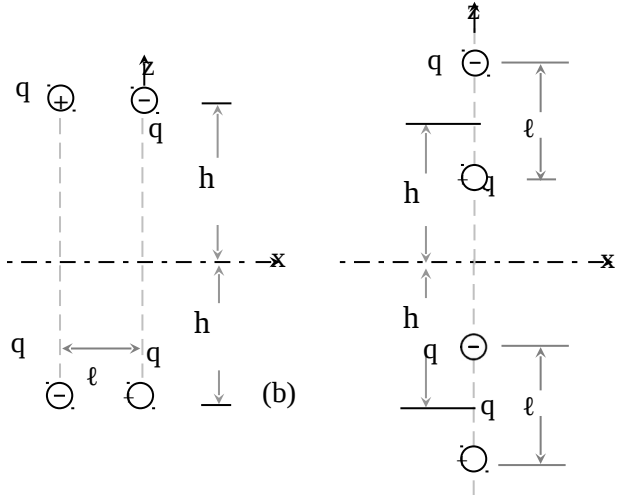
مختلفين فوق سطح

موصل (المسألة 14)

المناظرة حيث تم

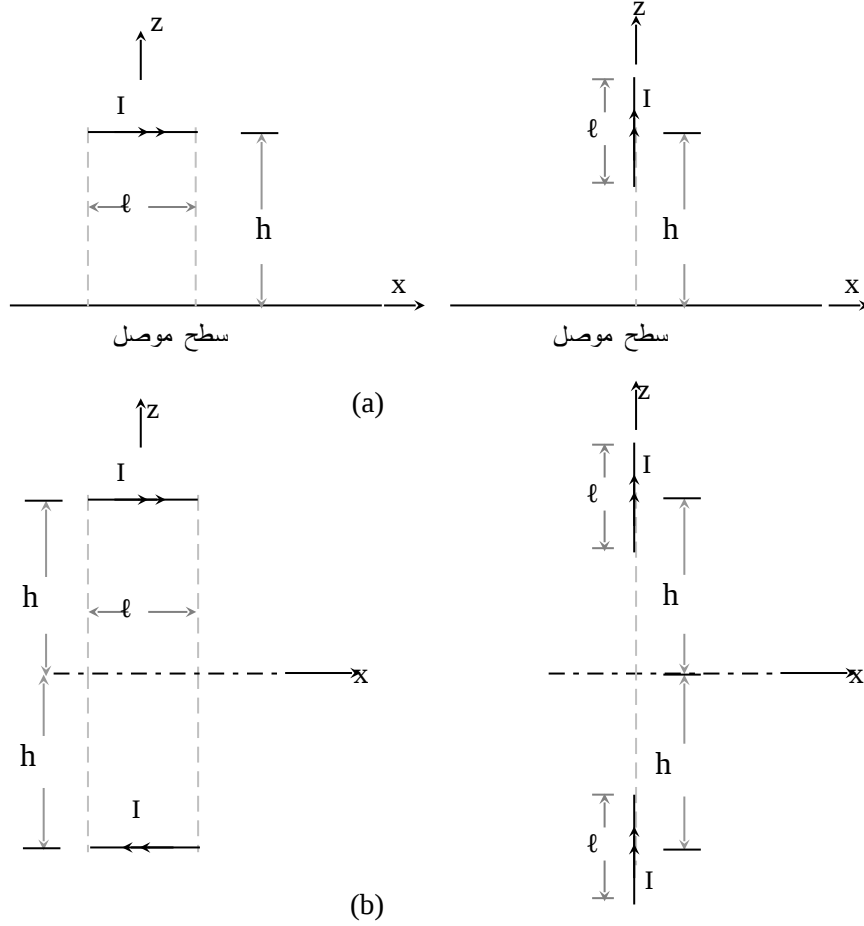
استبدال السطح الموصل

بصور هذه الشحنات.



في ضوء ذلك فإن الشكل (1-52) يبين سلكين صغيرين يحملان تياراً كهربائياً وموضوعين فوق سطح موصل وكذلك المسألة المناظرة حيث إنه قد تم استبدال السطح الموصل بصورة للتيارات الكهربائية المشار إليها أعلاه. يلاحظ أن تيار صورة السلك الأفقي الموازي للسطح الموصل يكون باتجاه معاكس للتيار الأصلي. أما تيار صورة السلك العمودي على السطح الموصل فيكون في نفس اتجاه التيار الأصلي. ويستفاد من هذا عند دراسة الهوائيات التي تكون موضوعة

فوق سطح موصل حيث إن معالجة المسألة المناظرة (باستخدام نظرية الصور) تكون أسهل بكثير من معالجة المسألة الأصلية.



الشكل - (1-52) (a) تيارات كهربائية موضوعة فوق سطح موصل (b) المسائل المناظرة حيث تم استبدال السطح الموصل بصورة لهذه التيارات.

من الجدير بالذكر أن نظرية الصور المذكورة أعلاه لا تختلف عما هو معروف في موضوع المرايا في علم الضوء. في ضوء ذلك فإنه يمكن اعتبار الأسطح الموصلة كأنها مرايا كهربائية أو بمعنى أعم هي مرايا كهرومغناطيسية. ولابد من

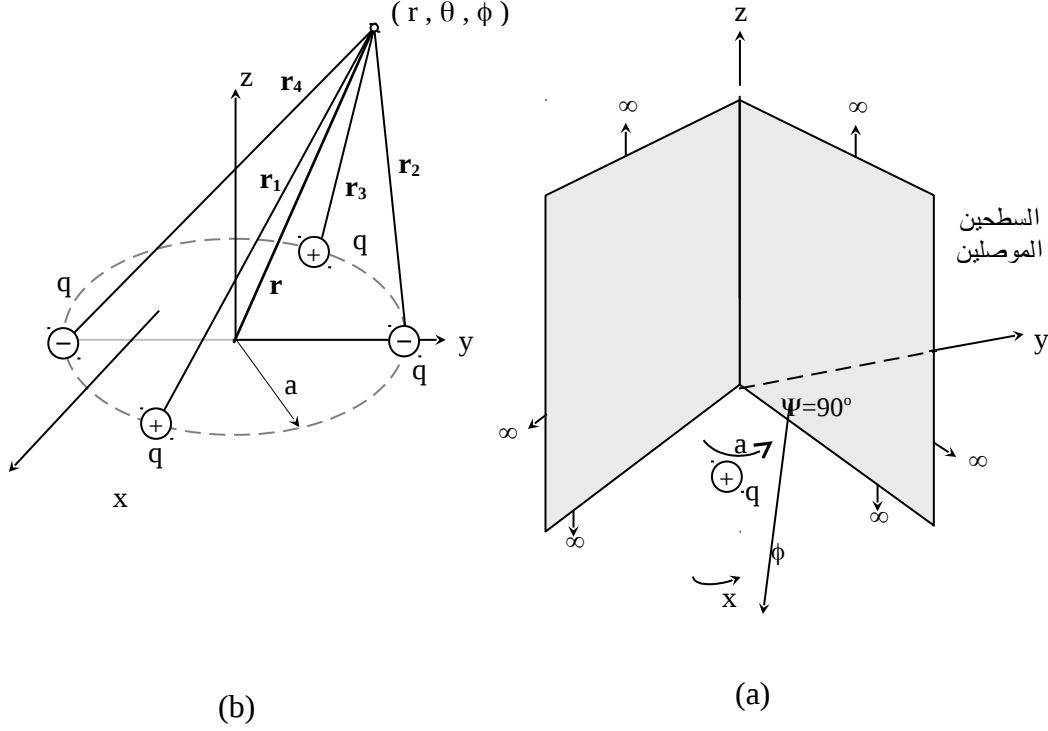
التذكير بأن الضوء مكون من مجالات كهربائية ومغناطيسية (كهرومغناطيسية). ويمكن استخدام هذا التناظر بين صور المصادر الكهربائية والمرآيا في حالة إذا كان المصدر موضوعاً أمام سطحين موصلين مستويين يشكلان مع بعضهما زاوية مقدارها ψ وهذا ما يدعى بالعاكس الزاوي (corner reflector). ويعتبر العاكس المستوي حالة خاصة من هذا النوع حيث إن الزاوية ψ له تكون مساوية 180° . ويتم عادة اختيار الزاوية ψ ليكون خارج قسمة 360° عليها مساوياً لعدد صحيح ويكون عدد الصور الناتجة في هذه الحالة مساوياً $1 - \frac{360^\circ}{\psi}$ ويكون عدد المصادر في المسألة المناظرة هو $360^\circ / \psi$. ويتم عادة في الهوائيات اختيار ψ لتكون 90° أو 60° ويبين المثال التالي العاكس الزاوي.

مثال **(1-28)**:- يبين الشكل (1-53) سطحين موصلين مستويين يعملان مع بعضهما زاوية $\psi = 90^\circ$ (تسمى هذه الزاوية بزاوية القمة Apex Angle) فإذا كان هناك شحنة موجبة q موضوعة في المستوى المنصف للزاوية وعلى بعد $x = a$ من الخط الممثل لتقاطع السطحين (محور Z)، فأوجد المجال الكهربائي E في كل مكان (افترض أن السطحين يمتدان إلى ما لانهاية).

الحل:-

من المعلوم أن E سيكون (في المسألة الأصلية) مساوياً للصفر في المنطقة $45^\circ < \phi < 135^\circ$ حيث إن الأسطح الموصلة ستعمل على حجب آثار q في هذه المنطقة، وسيكون من السهل معالجة هذه المسألة بحل المسألة المناظرة والتي تم استنتاجها باستخدام نظرية الصور حيث أن هناك دائرة نصف قطرها a يقع على محيطها أربعة مصادر كما هو مبين في الشكل (1-53b) عند $\phi = 0^\circ$ و $\phi = 90^\circ$ و $\phi = 180^\circ$ و $\phi = 270^\circ$. يتم إيجاد المجال الكهربائي عند أي نقطة عبر

استخدام المجموع الاتجاهي للمجالات الكهربائية الناتجة من الشحنات الأربع وذلك كما يلي:-



الشكل (1-53):- العاكس الزاوي لزاوية قمة $\psi = 90^\circ$ بوجود شحنة موجبة q على بعد a من محور (z) المسألة الأصلية (b) المسألة المناظرة باستخدام نظرية الصور.

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} - \frac{\mathbf{r}_4}{r_4^3} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r\mathbf{a}_r - a\mathbf{a}_x}{(r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi)^{3/2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{r \mathbf{a}_r - a \mathbf{a}_y}{(r^2 + a^2 - 2 r a \sin \theta \sin \phi)^{3/2}} + \frac{r \mathbf{a}_r + a \mathbf{a}_x}{(r^2 + a^2 + 2 r a \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \\
 & + \frac{r \mathbf{a}_r + a \mathbf{a}_x}{(r^2 + a^2 + 2 r a \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \\
 & - \frac{r \mathbf{a}_r + a \mathbf{a}_y}{(r^2 + a^2 + 2 r a \sin \theta \sin \phi)^{3/2}} \Bigg] \quad V/m
 \end{aligned}$$

يتم تطبيق العلاقة الأخيرة في المدى $0 \leq \theta \leq \pi$ و $45^\circ \leq \phi \leq 45^\circ -$ فقط. ويمكن إيجاد المجال الكهربائي العمودي على السطحين $\phi = \pm 45^\circ$ وبالتالي إيجاد الكثافة السطحية للشحنات ρ_s .

تم فيما سبق اعتبار الأسطح المستوية، أما في حالة الأسطح غير المستوية فيتم تطبيق نظرية الصور كما يبين المثال التالي الذي يناقش إيجاد المجال الكهربائي لشحنة كهربائية $q+$ واقعة مثلاً أمام كرة موصلة نصف قطرها a علماً بأن هذه الكرة مؤرضة. ويبين الشكل (1-54) كلاً من المسألة الأصلية والمسألة المناظرة ويلاحظ هنا أن صورة الشحنة لن تكون مساوية q وإنما q_1 كذلك فإن بعدها عن سطح الكرة لا يساوي بعد المصدر الأصلي عن سطح الكرة الموصل. ومن المرايا والعدسات المحدبة في علم الضوء فإن صورة المصدر ستكون في مركز الكرة إذا كان هذا المصدر موضوعاً في اللانهاية (بعيداً جداً عن الكرة) أما إذا كان المصدر يلاصق سطح الكرة فإن صورته ستكون أمامه مباشرة. بالتالي فإن مواقع المصدر في المدى $a \leq r < \infty$ ستتحول إلى مواقع للصورة في المدى $a \geq r > 0$. وبما أن جهد الكرة يساوي صفراً فإنه يتم اعتبار النقطتين 1 و 2 حيث إن $V_1 = 0 = V_2$ ، فمن النقطة (1)

$$V_1 = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(a-d)}$$

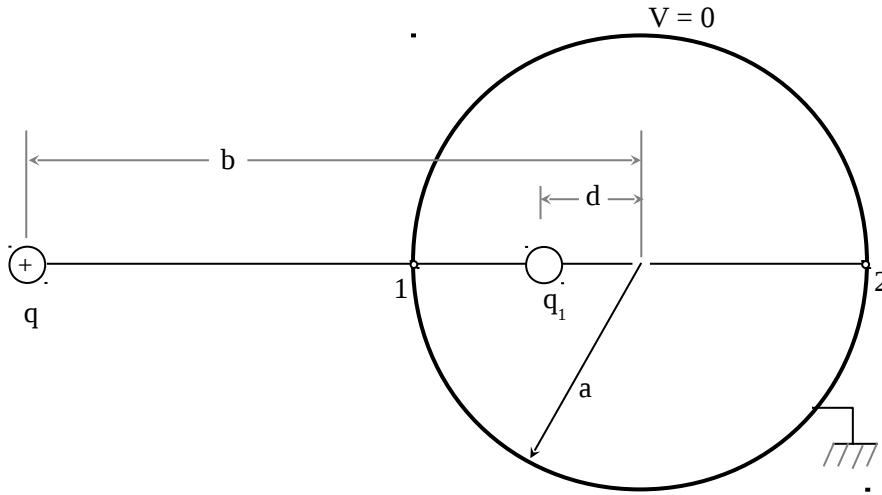
أو $\frac{q}{b-a} = -\frac{q_1}{a-d}$ ، ومن النقطة (2)

$$V_2 = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(b+a)} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(a+d)}$$

أو $\frac{q}{b+a} = -\frac{q_1}{a+d}$ ، وبالتالي يمكن إيجاد d و q_1 كما يلي:-

$$d = \frac{a^2}{b} \quad \text{m} \quad (76a-1)$$

$$q_1 = -\frac{qa}{b} \quad \text{C} \quad (76b-1)$$



الشكل:- (1-54) شحنة $q+$ موضوعة أمام كرة موصلة مؤرضة وعلى بعد b من المركز وتم بيان المسألة المناظرة من خلال صورة الشحنة q وهي q_1 (غير معروف) ومكانها على بعد d (غير معروف) من المركز.

المسائل

1-1- إذا كان هناك ثلاث شحنات $n C 1$ و $n C 2$ و $n C 3$ موضوعة على المحور x عند النقاط التالية $(0, 0, 1)$ و $(0, 0, 2)$ و $(0, 0, 3)$ على التوالي:- **(i)** أوجد المجال الكهربائي الناتج عن هذه الشحنات عند النقطة $(0, 0, 0)$. **(ii)** أوجد الجهد الكهربائي عند النقطة **(iii)** p . أوجد النقطة التي يكون عندها المجال الكهربائي يساوي صفرًا. **(iv)** أوجد القوة المؤثرة على الشحنة $n C 4$ إذا كانت موضوعة عند النقطة $(0, 0, 0)$ وإذا كانت موضوعة عند النقطة $(0, 0, 4)$ من ترتيب الشحنات المشار إليها أعلاه.

2-1- تم ربط شحنتين متساويتين وشحنة كل منها تساوي $q C$ بخيطين طول كل خيط L من نقطة واحدة. فإذا كان وزن كل شحنة $m \text{ kg}$ (أهمل وزن الخيطين) فأوجد الزاوية التي يشكلها الخيطان بين بعضهما عند الاستقرار.

3-1- إذا وضعت ست شحنات متساوية $q C$ عند كل حافة من حواف مكعب طول ضلعه L . أوجد القوة المؤثرة على كل شحنة من هذه الشحنات والقوة المؤثرة على شحنة $q_1 C$ الموضوعة في مركز المكعب.

4-1- وضع سلك ، طول L ، مشحون بكثافة شحنة خطية C/m ρ_L على المحور z من النقطة $(0, 0, 0)$ وحتى النقطة $(L, 0, 0)$. أوجد المجال الكهربائي E والجهد الكهربائي V عند النقطة $(d, 0, 0)$ أو عند النقطة $(r, \phi, 0)$.

5-1- إذا كانت هناك حلقة نصف قطرها a وكانت كثافة الشحنات الخطية عليها C/m ρ_L . وإذا كانت الحلقة موضوعة في المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل فأوجد المجال الكهربائي E والجهد الكهربائي V عند نقطة z على المحور $(z, 0, 0)$ وكذلك عند نقطة الأصل.

6-1:- إذا كان هناك قرص نصف قطره a مشحون بكثافة شحنة سطحية $\rho_s \text{ C/m}^2$ وموضوع في المستوى xy ومركزه عند نقطة الأصل. أوجد المجال الكهربائي E والجهد الكهربائي V عند النقطة $(z, 0, 0)$.

7-1:- إذا كانت كثافة الشحنات الحجمية في وسط سماحيته $\epsilon_0 \text{ F/m}$ ومحدد بالكرة $r = a$ هي $\rho_0 \text{ C/m}^3$ فأوجد المجال الكهربائي E وكثافة الفيض الكهربائي D والجهد الكهربائي V في كل مكان $0 \leq r < \infty$.

8-1:- إذا كانت كثافة الشحنات الحجمية في كرة نصف قطرها a وسماحيتها $\epsilon_0 \text{ F/m}$ هو $K r \text{ C/m}^3$ ، فأوجد المجال الكهربائي E وكثافة الفيض الكهربائي D والجهد الكهربائي V في كل مكان $0 \leq r < \infty$.

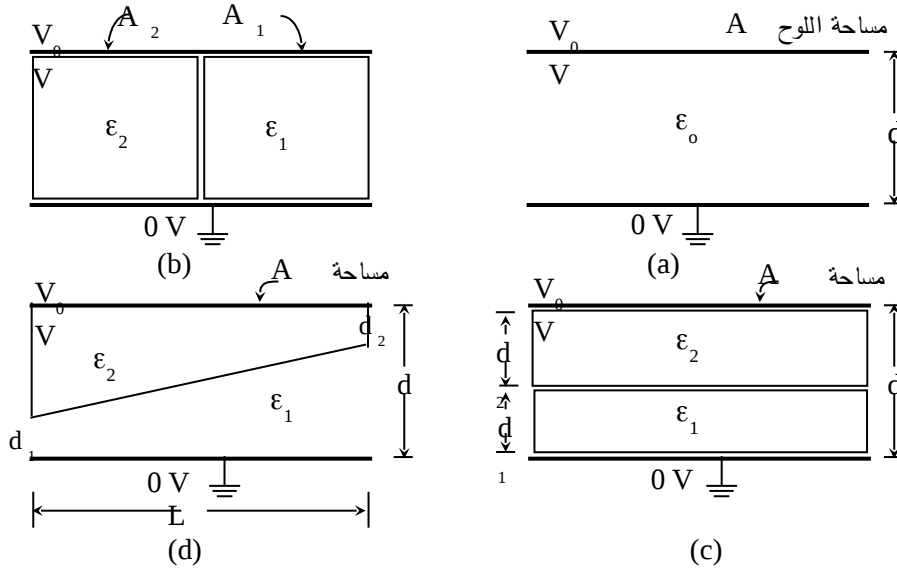
9-1:- إذا كان هناك غلاف كروي موصل نصف قطره a وتم شحنه بشحنة كلية $q \text{ C}$ ووضع في الفراغ الحر فأوجد E و D و V في كل مكان $0 \leq r < \infty$. كذلك أوجد مواصلة هذه الغلاف الكروي C .

10-1:- إذا تم وضع الغلاف المشحون المشار إليه في المسألة 9-1 في غلاف كروي موصل وغير مشحون ونصف قطره $a > b$ فأوجد E و D و V في كل مكان $0 \leq r < \infty$. كذلك أوجد C لهذا الترتيب. أعد حل المسألة (10-1) عندما يتم تأريض الغلاف الكروي الخارجي.

11-1:- إذا كان هناك مواسع ذو اللوحين المتوازيين ومساحة كل لوح $A \text{ m}^2$ والمسافة بين اللوحين d وتم استخدام مادة (أو مواد عازلة) لفصل اللوحين عن بعضهما وذلك كما هو مبين في الشكل (1-55) وذلك كما يلي:- (a) استخدام الهواء (سماحية $\epsilon_0 \text{ F/m}$). (b) استخدام طدتين طزلتين يتم وضعهما جنباً إلى جنب.

(c) استخدام مادتين عازلتين يتم وضعهما فوق بعضهما البعض. (d) استخدام مادتين عازلتين موضوعتان فوق بعضهما البعض بشكل انزلاقي كما هو مبين في الشكل. إذا كانت فولطية اللوح العلوي V_0 V وتم تأريض اللوح السفلي، فأوجد في كل حالة ما يلي:-

(i) مواسعة هذا المواسع. (ii) إيجاد كثافة الشحنات السطحية الحرة على كل لوح من لوحي المواسع. (iii) إيجاد كثافة الشحنات السطحية المقيدة على كل سطح من أسطح المواد العازلة (الموازية لألواح المواسع) المذكور في البندين b و c أعلاه. (أهمل الانحناءات في خطوط المجال الكهربائي).

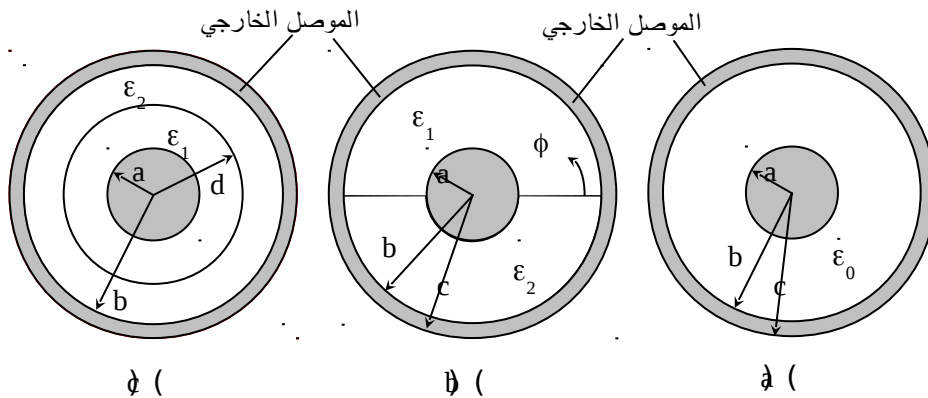


الشكل:- (1-55) مواسع اللوحين المتوازيين (a) باستخدام الهواء كمادة عازلة (b) مادتين بجانب بعضهما (c) مادتين فوق بعضهما (d) مادتين منزلقتان فوق بعضهما. -1-12 في المسألة (1-10) إذا كانت شحنة الغلاف الداخلي 10 nC ونصف قطر الغلاف الخارجي $b = 10 \text{ cm}$ فأوجد أقل نصف قطر للغلاف الداخلي قبل ان يحدث انهيار للوسط بين الغلافين (الوسط هو الهواء ويحدث انهياره

عندما يكون $(E = 30 \text{ K V/cm})$ ؛ أوجد كثافة الشحنات السطحية على كل من الغلافين في هذه الحالة.

13-1:- إذا كان هناك كرتان موصلتان نصف قطر أحدهما a ونصف قطر الأخرى $10a$ فإذا وضعنا بعيداً عن بعضهما ووصلنا بسلك طويل ورفيع وموصل بحيث لا تتأثر الكرتان ببعضهما، وتم وضع شحنة مقدارها q على أحد هاتين الكرتين فأوجد شحنة كل كرة وأوجد D على السطح الخارجي لكل كرة.

14-1:- يبين الشكل (1-56) خط نقل طويل على شكل كابل محوري نصف قطر موصله الداخلي a ونصف قطر موصله الخارجي b و c حيث $c > b$ فإذا كانت المادة (أو المواد) العازلة التي تفصل بين الموصلين هي كما يلي :-
(a) الهواء (b) مادتين عازلتين الأولى بسماحية F/m ϵ_1 للمدى $0 \leq \phi < \pi$ والثانية F/m ϵ_2 للمدى $\pi \leq \phi < 2\pi$ (c) مادتين عازلتين الأولى بسماحية F/m ϵ_1 للمدى $0 \leq \rho < d$ والثانية بسماحية F/m ϵ_2 للمدى $d \leq \rho < b$.
إذا كان جهد الموصل الداخلي V وجهد الموصل الخارجي صفرأ فأوجد:-
(i) مواسعة هذا الكابل C لكل وحدة طول لكل واحدة من الترتيبات السابقة.
(ii) كثافة الشحنات الخطية الحرة على سطح الموصل الداخلي والخارجي.
(iii) إذا تم، في الفرع a أعلاه، تثبيت نصف قطر الموصل الخارجي فأوجد قيمة نصف قطر الموصل الداخلي التي تجعل قيمة المجال الكهربائي عند سطح الموصل الداخلي أدنى ما يمكن (فرق الجهد بين الموصل الداخلي والخارجي ثابتة وتساوي V_0).



الشكل :- (1-56) الكابل المحوري بترتيبات مختلفة للوسط بين الموصلين (a) باستخدام الهواء (b) باستخدام مادتين عازلتين للمدى $0 \leq \phi < \pi$ و $\pi \leq \phi < 2\pi$ (c) باستخدام مادتين عازلتين للمدى $0 \leq \rho < d$ و $d \leq \rho \leq b$.

15-1- أوجد مقاومة التسريب ، لكل وحدة طول، بين الموصل الداخلي والخارجي لكابل محوري نصف قطره الداخلي a ونصف قطر موصله الخارجي b علماً بأن الوسط العازل بين الموصلين له موصليته σ_d (Ωm)⁻¹ (إهمل مقاومة الموصلين الداخلي والخارجي).

16-1- أوجد المقاومة بين غلافين كرويين موصلين الداخلي بنصف قطر a والخارجي بنصف قطر b إذا كانت موصلية المادة العازلة بينهما هي σ (Ωm)⁻¹.

17-1- أوجد مقاومة سلك موصل نصف قطره 1 mm لكل وحدة طول إذا كان مصنوعاً من المواد التالية:- (a) نحاس وموصليته $\sigma = 5.7 \times 10^7$ (Ωm)⁻¹. (b) ألومنيوم وموصليته $\sigma = 3.5 \times 10^7$ (Ωm)⁻¹. (c) جرمانيوم وموصليته $\sigma = 2.3$ (Ωm)⁻¹. (d) مادة عازلة مثل الزجاج وموصليتها $\sigma = 10^{-12}$ (Ωm)⁻¹.

18-1- أوجد القوة لكل وحدة طول بين سلكين موصلين كل بنصف قطر a ، صغير جداً ، يحملان تيارين متساويين ومتعاكسين ويسريان بنفس الاتجاه علماً بأن المسافة بين الموصلين هي d ونفاذية الوسط هي μ_0 H/m.

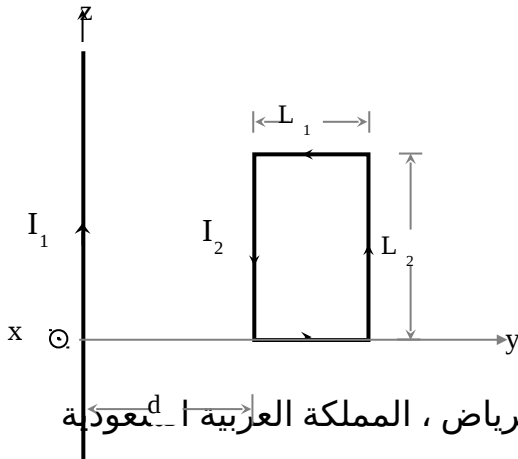
19-1- أوجد المجال المغناطيسي H وكثافة الفيض المغناطيسي B الناتجة عن حلقة مستطيلة $a \times b$ يمر فيها تيار IA بعكس اتجاه دروان عقارب الساعة CCW ، علماً بأن هذه الحلقة موضوعة في المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل وذلك عند نقطة $(z,0,0)$ تقع على محور z .

20-1- إذا كانت كثافة التيار المار في موصل أسطواني طويل هي $J_z = \alpha \rho \text{ A/m}^2$ للمدى $0 \leq \rho \leq a$ في اتجاه محوره. أوجد المجال المغناطيسي H و B في كل مكان.

21-1- يسري تيار IA في مثلث متساوي الإضلاع طول ضلعه $2a$ أوجد H و B في مركزه.

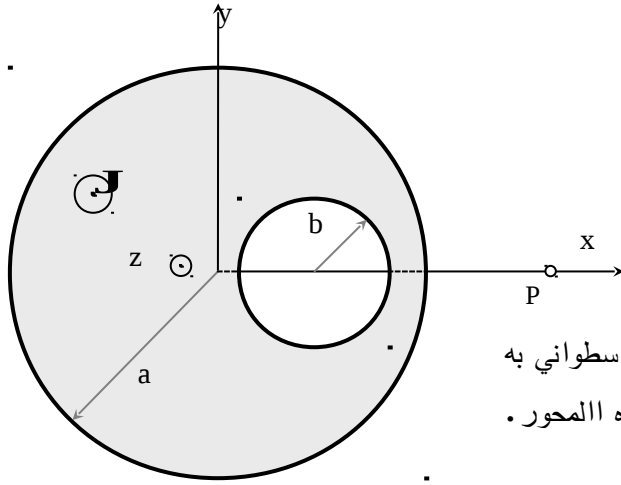
22-1- أوجد المجال المغناطيسي H وكثافة الفيض المغناطيسي B في مركز الحلقات التالية:-
(i) حلقة دائرية مساحتها $A \text{ m}^2$.
(ii) حلقة مربعة مساحتها A
(iii) حلقة مستطيلة أطوال أضلاعه هي b و $b/2$ ومساحتها $A \text{ m}^2$. علماً بأن هذه الحلقات تحمل تياراً في اتجاه دوران عقارب الساعة CW مقداره IA .

23-1- يبين الشكل (1-57) سلك موصل طويل موضوع على طول المحور z ويحمل تياراً مقداره $I_1 A$ وتم وضع حلقة مستطيلة $(L_1 \times L_2)$ أمام هذا السلك يمر فيها تيار مقداره $I_2 A$ ويبعد مركزها عن السلك مسافة $d + L_1/2$ وبالتالي أوجد:-
(i) القوة ما بين السلك والحلقة.
(ii) كمية الفيض المغناطيسي الناتج من التيار I_1 والذي يمر في الحلقة المذكورة أعلاه.
(iii) الحثية التبادلية L_{12} بين هاتين الدارتين.



الشكل :- (175) سلك يحمل تياراً I_1 أمام حلقة تحمل تياراً I_2

24-1:- يبين الشكل (1-58) موصل أسطواني نصف قطره a وعمل به ثقب بعيداً عن محوره وموازيًا لمحور الموصل بنصف قطر b ($b < a$). فإذا كانت كثافة التيار السطحي المار في هذا الموصل هو $J_z = J_0 \text{ A/m}^2$. أوجد المجال المغناطيسي H وكثافة الفيض المغناطيسي B عند أي نقطة داخل الثقب وعند النقطة p .



الشكل :- (185) موصل إسطواني به ثقب ويسري فيه تيار باتجاه المحور .

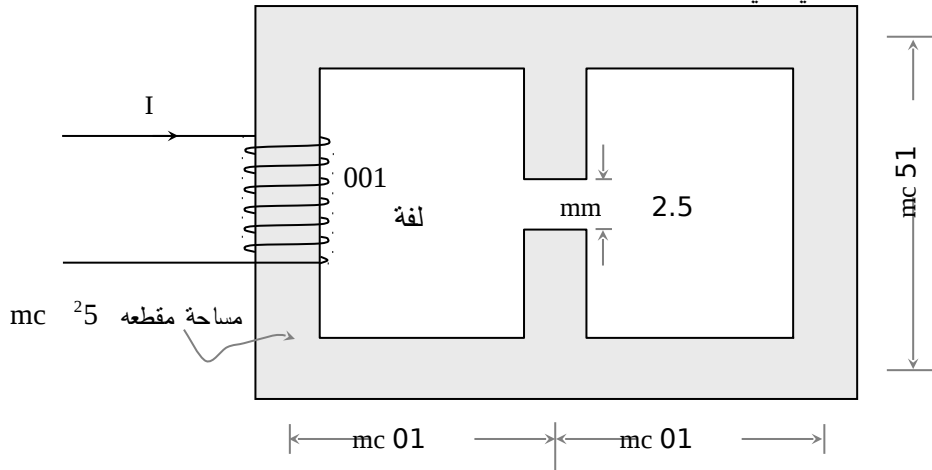
25-1:- أوجد محاثة ملف حلزوني عدد لفاته 100 لفة ونصف قطره 10 mm وطوله 60 cm علماً بأن قلبه من الهواء.

1-26- أوجد محاطة ملف حلقي عدد لفاته 100 لفة ونصف قطر حلقاته 10 cm ومساحة مقطعه 5 cm² علماً بأن قلبه من مادة حديدية نفاذيتها النسبية $\mu_r = 1000$ (لاحظ الفرق بين محاطة هذا الملف ومحاطة الملف الحلزوني).

1-27- أوجد محاطة كابل محوري طويل لكل وحدة طول إذا كان نصف قطر موصله الداخلي a أما موصله الخارجي فإن نصف قطره الداخلي b ونصف قطره الخارجي c علماً بأن $c > b$. افترض أن نفاذية الموصلين والوسط الفاصل بينهما هي H/m μ_0 .

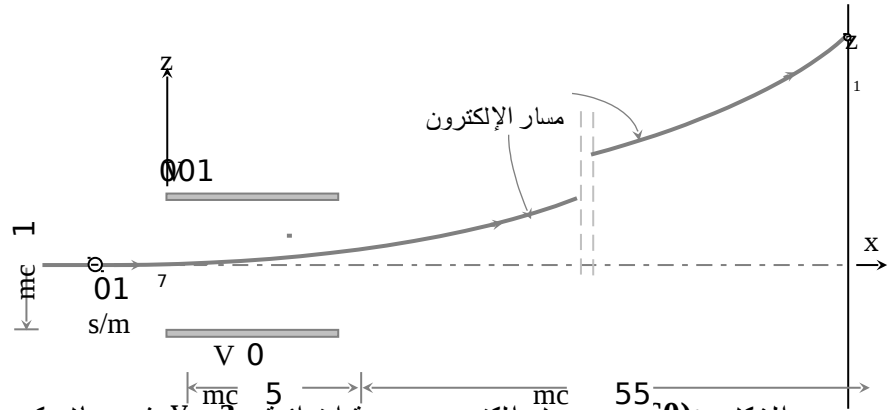
1-28- إذا كان هناك حلقتان موصلتان إحداها بنصف قطر a موضوعة في المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل والثانية موضوعة موازية للمستوى xy ومركزها على محور z عند النقطة (h,0,0) فإذا كان نصف قطر الحلقة الثانية b وكانت $a > b$ وكذلك $h \gg a$ فأوجد المحاطة التبادلية بين هاتين الحلقتين.

1-29- يبين الشكل (1-59) ملف عدد لفاته 100 لفة ملفوف على قلب حديدي مساحة مقطعه 5 cm² ونفاذيته H/m $\mu = 1000 \mu_0$ وبه فجوة هوائية طولها 2.5 mm. أوجد التيار I اللازم لإنتاج كثافة فيض مغناطيسي مقدارها 0.5 Wb/m² في هذه الفجوة. أهمل انحراف خطوط المجال المغناطيسي في الفجوة.



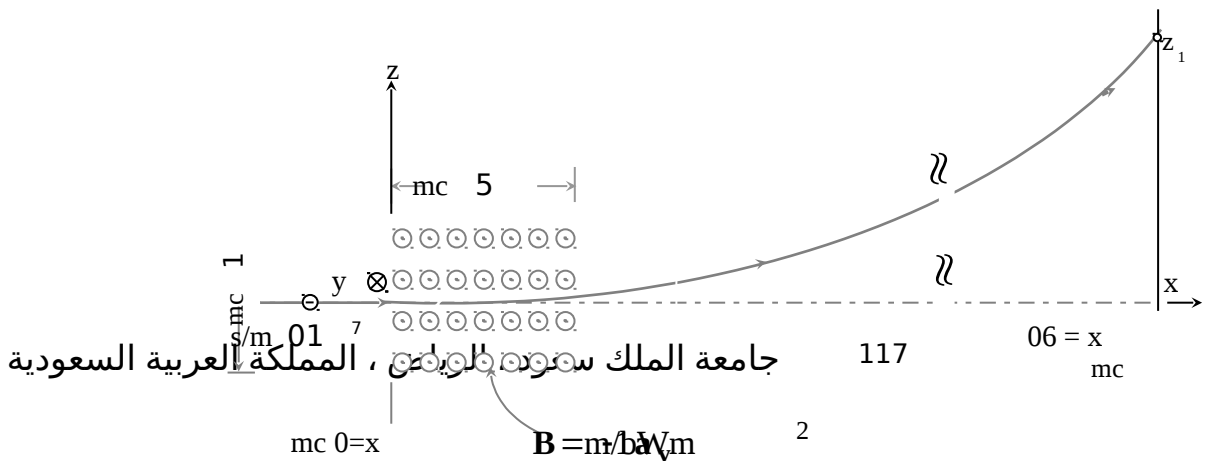
الشكل :- (1-59) ملف عدد لفاته 100 لفة حول قلب حديدي به فجوة حديدية.

-1-30 إذا دخل إلكترون بسرعة ابتدائية مقدارها $v_0 = 10^7 \text{ a}_x \text{ m/s}$ بين لوحين مواسع فرق الجهد بين لوحيه هو 100 V كما هو مبين في الشكل (1-60). فإذا كان لوحا المواسع على شكل مربع $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ وكانت المسافة بين اللوحين 1 cm فحدد مسار هذا الإلكترون وبالتالي انحرافه في اتجاه z عند النقطة $x = 60 \text{ cm}$.



الشكل :- (1-60) دخول إلكترون بسرعة ابتدائية $v_0 \text{ a}_x$ في مجال كهربائي محدد بين لوحين مواسع.

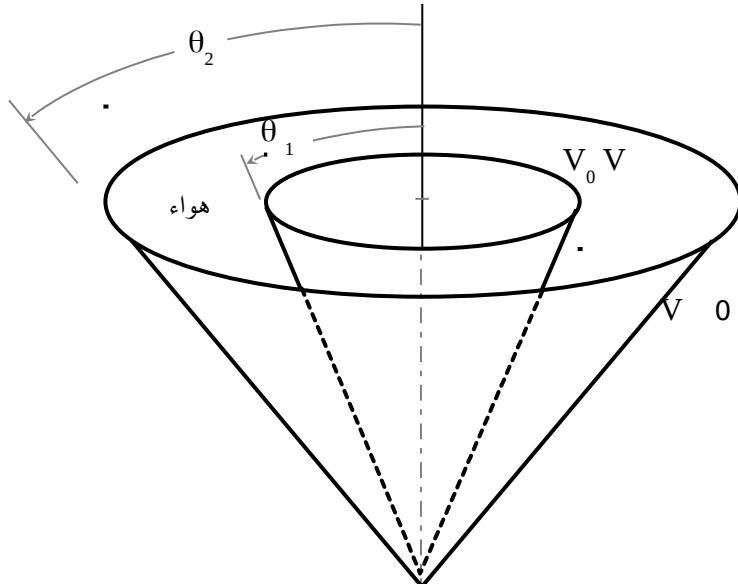
-1-31 في المسألة السابقة إذا تم استبدال المواسع بملفين ينتجان كثافة فيض مغناطيسي $B_y = 1 \text{ mWb/m}^2$ فأوجد مسار الإلكترون في هذه الحالة وحدد انحرافه في اتجاه z عند النقطة $x = 60 \text{ cm}$ ، أنظر الشكل (1-61).



الشكل (1-61) :- دخول إلكترون بسرعة ابتدائية مقدارها $v_0 = 10^7 \mathbf{a}_x$ m/s في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 1 \mathbf{a}_y$ mWb/m².

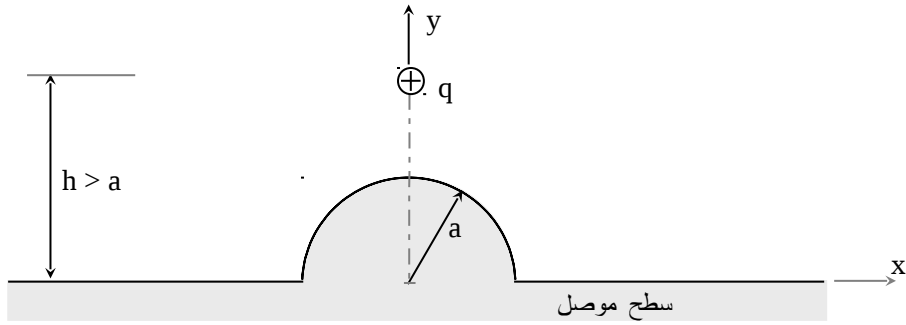
32-1- :- إذا وضع سلك موصل رفيع ومشحون بكثافة شحنة خطية ρ_L C/m على ارتفاع h من سطح موصل جيد التوصيل فأوجد المجال الكهربائي \mathbf{E} والجهد V في كل مكان.

33-1- :- يبين الشكل (1-62) غلافين مخروطيين مخروطين موصلين، فإذا كانت زاوية الداخلي θ_1 وزاوية الخارجي θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$) وكان جهد الخارجي صفراً والداخلي V_0 فأوجد المجال الكهربائي \mathbf{E} والجهد V بين هذين الغلافين (افتراض أن الغلافين يمتدان إلى ما لانهاية).



الشكل (1-62):- غلافان مخروطان موصلان غير متصلين جهد أحدهما V_0 والآخر V .

34-1:- يبين الشكل (1-63) شحنة موجبة q موضوعة أمام سطح موصل به جزء مستوي وآخر كروي أوجد المجال الكهربائي E والجهد الكهربائي في كل مكان في المستوى $x y$.



الشكل (1-62):- شحنة موجبة q أمام سطح موصل به جزء مستوي وآخر كروي.