الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

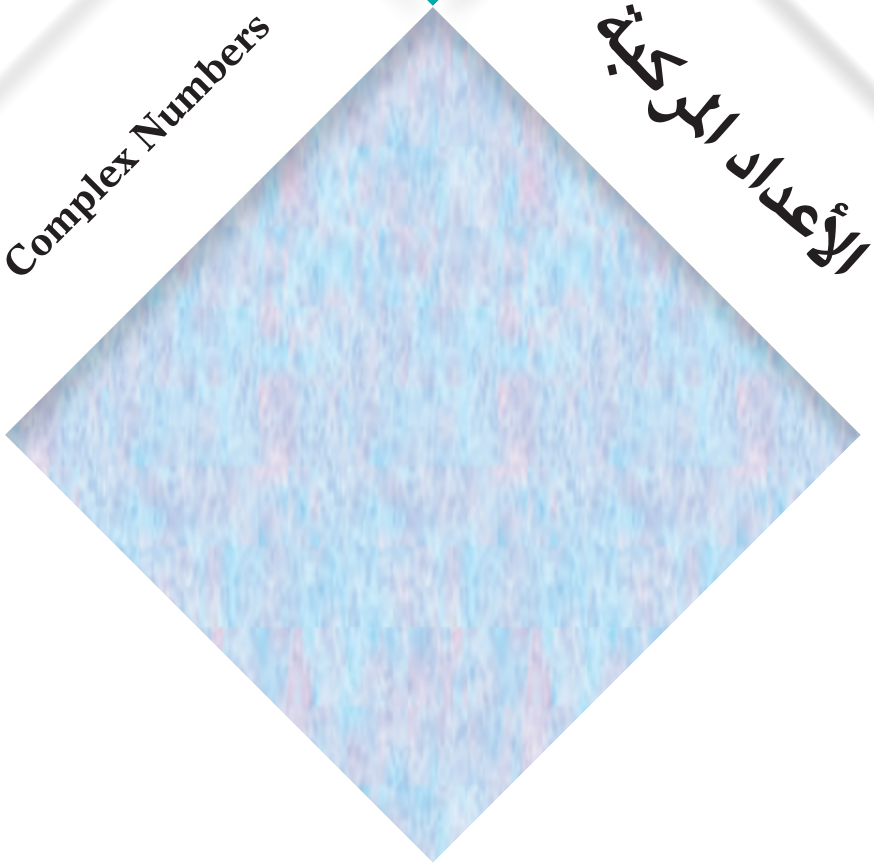
www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الوحدة

٦

الأعداد المركبة

Complex Numbers



طلبت شركة للاتصالات من مكتب للإعلانات تصميم لوحة إعلانية مستطيلة الشكل محيطها ٨م ومساحتها ٨م^{٢}، رفض المكتب ذلك؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأعداد المركبة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مجموعة الأعداد المركبة.
٢. إيجاد ناتج: الجمع، والطرح، والضرب على الأعداد المركبة.
٣. التعرف إلى خصائص العمليات على الأعداد المركبة.
٤. التعرف إلى مقياس العدد المركب، ومرافقه، وخصائصها.
٥. إيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.
٦. حل المعادلات التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة.
٧. تمثيل العدد المركب بيانياً (بنقطة ومتجه).
٨. كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.
٩. إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة.

نشاط ١: أراد أبو محمود شراء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (س^{٢} – ٥س + ٨)م^{٢} وأحد أبعادها (س + ٣)م. لم يقبل محمود فكرة أبيه وقال له إن هذه القطعة ليست مستطيلة الشكل، كيف عرف محمود ذلك؟

درست في السنوات السابقة مجموعة الأعداد الطبيعية، ثم الأعداد الصحيحة، إلى أن تعرفت أخيراً إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، وقد لاحظت وجود قصور في نظام الأعداد الحقيقية، حيث إننا لا نستطيع إيجاد حلول للمعادلات كافةً باستخدام هذا النظام، وخاصةً المعادلة التربيعية التي مميزها سالب، فمن أجل وجود حلول للمعادلة التربيعية في نظام الأعداد الحقيقية، لا بد أن يكون المميز غير سالب؛ لأن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف في هذا النظام.

في القرن السادس عشر قام العالم كاردانو (Gerolamo Cardano) بتعريف نظام جديد في محاولته لإيجاد حلول للمعادلة التربيعية بشكل عام، فقام بتعريف عدد جديد هو ت = $\sqrt{-١}$ ثم قام بتعريف نظام جديد للأعداد أسماه الأعداد المركبة (ك) والتي لها تطبيقات مهمة في مختلف العلوم، مثل: الهندسة، والفيزياء وغيرها...

نشاط ٢: لإيجاد مجموعة حل المعادلة س^{٣} + س = ٠ في ك ، فإننا نضع

س^{٣} + س = ٠ ومنها س(س^{٢} + ١) = ٠ وينتج أن: س = ٠، (س^{٢} + ١) = ٠

فتكون: س^{٢} = ...، س = ± ..... ومنها س = ±ت

مجموعة الحل = {٠ ، ..... ، .....}

تعريف:

١ العدد المركب هو مقدار جبري على الشكل ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$

ويسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب، ويسمى ص الجزء التخيلي له.

٢ مجموعة الأعداد المركبة = {س + ص ت، س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$ } ، ويرمز لها بالرمز ك.

مثال ١ : جد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل من:

١ ع = ٤ − ت

٢ ع = $\frac{\sqrt{٢ + ت}}{٢}$

الحل :

١ الجزء الحقيقي للعدد ع = ٤ − ت هو ٤ ، بينما الجزء التخيلي هو −١

٢ الجزء الحقيقي للعدد ع = $\frac{\sqrt{٢ + ت}}{٢}$ هو $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

بينما الجزء التخيلي هو $\frac{١}{٢}$

ملاحظة:

يكون العدد المركب ع = س + ص ت

- عدداً حقيقياً إذا كانت ص = ٠
- عدداً تخيلياً إذا كانت س = ٠
- صفراً إذا كانت ص = ٠ ، س = ٠

نشاط ٣: أكمل بناء الجدول الآتي:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{١}{٢}$		٠
٢ت		
$\frac{٢ - ٣ت}{٢}$	١	
$\sqrt{-١٢}$		
٣ + ت^{٧}	٣	

نشاط ٤: أوجد كل من أشرف وخالد قيمة المقدار $\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

كانت إجابة أشرف كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{-٤ \times -٩}$

$= \sqrt{٣٦}$

$= ٦$

أما إجابة خالد فكانت كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{-١ \times ٤} \times \sqrt{-١ \times ٩}$

$= \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{٩}$

$= ٢ت \times ٣ت = ٦ت^{٢} = -٦$

أيهما كانت إجابته صحيحة؟ ولماذا؟

فكّر وناقش:

إذا كان س ، ص ∈ ح فإن $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} \neq \sqrt{س \times ص}$ دائماً. ولماذا؟

تعلم من التعريف أن $ت = \sqrt{-١}$ ومنها $ت^{٢} = ت \times ت = \sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = (\sqrt{-١})^{٢} = -١$

وكذلك فإن $(ت)^{٣} = -ت$ ، $ت^{٤} = ١$ ..... (لماذا؟)

وبشكل عام إذا كانت ن ∈ ص$^{+}$ فإن $ت^{ن} = ت^{م}$ حيث م هي باقي قسمة ن على ٤ ، ٠ ≤ م < ٤

مثال ٢ : جد قيمة : ① $ت^{٩٩}$ ② $\frac{١}{ت^{٢٢}}$ ③ $ت^{-٤ن+٢}$

الحل :

① لاحظ أن باقي قسمة ٩٩ على ٤ يساوي ٣، ومنها فإن $ت^{٩٩} = ت^{٣} = -ت$

② $\frac{١}{ت^{٢٢}} = \frac{١}{ت^{٢}} = -١$ (لماذا؟)

③ $ت^{-٤ن+٢} = ت^{-٤ن} \times ت^{٢} = (ت^{٤})^{-ن} \times -١ = -١$

مثال ٣ : جد قيمة ١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣}

الحل : بالتبسيط والاختصار فإن:

١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} = ١ + ت + $-$١ + $-$ت = ٠

طريقة أخرى: باستخدام التحليل للعوامل:

(١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣}) = (١ + ت) + ت^{٢} (١ + ت)

= (١ + ت) (١ + ت^{٢}) = ٠ (لماذا؟)

تمارين ٦ - ١

١ اكتب ما يلي على الصورة س + ص ت:

أ) ٢ + $\sqrt{-٢}$ ب) $\sqrt{-٣٢}$ + $\sqrt{-٢}$ جـ) $\sqrt{-٨}$ × $\sqrt{-٢}$

٢ حدد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل مما يأتي:

أ) $\frac{٢}{٥}$ ت $-$ ٣ ب) $\sqrt{-٩}$ جـ) ١ $-$ $\sqrt{-١}$

د) $\sqrt{٩ \times -٤}$ هـ) $-$٢ت و) $\frac{١}{٣}$

٣ بيّن أن: (١ + ت + ت^{٢})^{٣} (١ $-$ ت + ت^{٢})^{٣} = ١

٤ اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

أ) ت^{٤٣} ب) $\frac{١}{ت^{٦٥}}$ جـ) ت^{٢٧} + $\frac{١}{ت^{٢٧}}$

٥ أثبت أن: $\frac{١ + ٢ت^{٢} + ت^{٣} + ٢ت}{ت^{٣} + ت^{٤}}$ = $-$١

نشاط ١ : يستخدم الفيزيائيون الأعداد المركبة في الدارات الكهربائية ذات التيار المتردد لحساب الجهد

حيث أن: فرق الجهد يعرف بالقانون جـ = م ش

حيث م: المقاومة، ش: شدة التيار

ولإيجاد فرق الجهد في دارة كهربائية ذات تيار متردد عندما تكون:

شدة التيار = ٣ أمبير، المقاومة = ٧ أوم، فإن جـ = م ش = ٧ × ٣ = ٢١ فولت

والآن إذا كانت شدة التيار = ٢ + ٢ت أمبير، المقاومة = ٩ − ٣ت أوم.

فإن جـ = م ش = (٩ − ٣ت) × (٢ + ٢ت) = ... أكمل

بما أن العدد المركب هو مقدار جبري يُكتب على الصورة س + ص ت فإنه يمكن تعريف الجمع والضرب على الأعداد المركبة، من خلال عملية جمع وضرب مقدارين جبريين، ويكون لهما نفس خصائص عمليتي الجمع والضرب للمقادير الجبرية، مع مراعاة خصائص قوى ت.

تساوي عددين مركبين:

تعريف:

يتساوى العددان المركبان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ص$_{١}$ت ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ص$_{٢}$ت إذا وفقط إذا كان لهما الجزء الحقيقي نفسه، والجزء التخيلي نفسه، أي أن س$_{١}$ = س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

مثال ١ : إذا كان ٢س + ٣ت = (ص + س) + ص ت، جد كلاً من س ، ص في ح

الحل : بما أن العددين متساويان، فإن: ٢س = س + ص ..... (١)

٣ = ص ..... (٢)

بالتعويض في (١) ينتج أن: س = ٣

جمع الأعداد المركبة، وطرحها:

تعريف:

إذا كان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ص$_{١}$ ت ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ص$_{٢}$ ت

فإن ع$_{١}$ ± ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ ± س$_{٢}$) + (ص$_{١}$ ± ص$_{٢}$) ت

مثال ٢ : جد ناتج (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت)

الحل : (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت) = (٢ + ٣) + ت(−٣ − ٤)

= ٥ − ٧ت

مثال ٣ : إذا كان ع$_{١}$ = ٣ − ت ، ع$_{٢}$ = ١ + ٢ت ، ع$_{٣}$ = −٥ت ، جد:

١ (ع$_{١}$ − ع$_{٢}$) ٢ (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$) − ع$_{٣}$

الحل :

١ ع$_{١}$ − ع$_{٢}$ = (٣ − ت) − (١ + ٢ت) = (٣ − ١) + (−١ − ٢) ت = ٢ − ٣ت

٢ (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$) − ع$_{٣}$ = ((٣ − ت) + (١ + ٢ت)) − (−٥ت)

= ٤ + ٦ت

خصائص عملية الجمع على الأعداد المركبة:

١ عملية الجمع عملية مغلقة: أي أنه ∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ك فإن ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ ∈ ك

٢ عملية الجمع عملية تجميعية:

أي أنه ∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ∈ ك فإن (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$) + ع$_{٣}$ = ع$_{١}$ + (ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$)

٣ العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع على الأعداد المركبة هو الصفر

حيث ∀ ع ∈ ك ، ٠ + ع = ع + ٠ = ع

٤ لكل عنصر نظير جمعي: إذا كان ع ∈ ك فإن −ع ∈ ك

ويكون ع + (−ع) = (−ع) + ع = ٠ ويسمى −ع النظير الجمعي للعدد ع.

٥ عملية الجمع عملية تبديلية: ∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ك ، ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ع$_{٢}$ + ع$_{١}$

ضرب الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ص$_{١}$ت ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ص$_{٢}$ت ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ∈ ح

فإن ع$_{١}$ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + (س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$)ت

نتيجة:

إذا كانت جـ ∈ ح فإن جـ (س + ص ت) = جـ س + جـ ص ت

مثال ٤ : جد ناتج: ١ (٣ + ت)(٢ − ٥ت) ٢ ت(ت + ٥)(٣ − ت°)

الحل :

١ (٣ + ت)(٢ − ٥ت)

= (٣ × ٢ − ١ × −٥) + (٣ × −٥ + ١ × ٢)ت

= ١١ − ١٣ت (من تعريف عملية الضرب)

٢ ت(ت + ٥)(٣ − ت°)

= (−١ + ٥ت)(٣ − ت)

= ٢ + ١٦ت (لماذا؟)

مثال ٥ : ليكن ع$_{١}$ = ٣ + ٥ت ، ع$_{٢}$ = ٦ − ٥ت فجد قيمة كل مما يأتي:

١ ٥ع$_{١}$ ٢ ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت

٣ م حيث ٤ − ت ع$_{١}$ = م(ت − ٣)، م ∈ ح

الحل :

١ ٥ع$_{١}$ = ٥(٣ + ٥ت)

= ١٥ + ٢٥ت

٢ ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت

= ٣(٦ − ٥ت) + ٥(٣ + ٥ت) − ٢ت

= ٣٣ + ٨ت

٣ $٤ - ت ع_{١}$ $= ٤ - ت(٣ + ٥ت)$

$= ٤ - ٣ت - ٥ت^{٢}$

$= ٩ - ٣ت = م(ت - ٣)$

أي أن $٩ - ٣ت = -٣م + مت$

ومنها $م = -٣$

خصائص عملية الضرب على الأعداد المركبة:

١ عملية الضرب مغلقة: $\forall ع_{١}، ع_{٢} \in ك ، ع_{١} \times ع_{٢} \in ك$

٢ عملية الضرب تجميعية: $\forall ع_{١}، ع_{٢}، ع_{٣} \in ك ، (ع_{١} \times ع_{٢}) \times ع_{٣} = ع_{١} \times (ع_{٢} \times ع_{٣})$

٣ العنصر المحايد لعملية الضرب هو العدد ١ ، حيث $\forall ع \in ك$

يكون $١ \times ع = ع \times ١ = ع$

٤ النظير الضربي: $\forall ع \in ك ، ع \neq ٠$ يوجد $\frac{١}{ع} \in ك$ بحيث $\frac{١}{ع} \times ع = ع \times \frac{١}{ع} = ١$

ويسمى $\frac{١}{ع}$ النظير الضربي للعدد ع ونرمز له بالرمز $ع^{-١}$

٥ عملية الضرب تبديلية: $\forall ع_{١}، ع_{٢} \in ك ، ع_{١} \times ع_{٢} = ع_{٢} \times ع_{١}$

نشاط ٢: لإيجاد النظير الضربي $ع^{-١}$ للعدد المركب ع = ٣ + ٤ت باستخدام التعريف

نفرض $ع^{-١} = س + ص ت$ فيكون $ع^{-١} \times ع = ١$

أي أن $(س + ص ت)(٣ + ٤ت) = ١$

ومنها $٣س - ٤ص = ١$ ، $٤س + ٣ص = ...$

وبحل المعادلتين، ينتج أن س = ... ص = ...،

ومنها النظير الضربي $ع^{-١} = ...$

ملاحظة:

النظير الضربي للعدد المركب (س + ص ت) هو $\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} + \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}} ت$

مثال ٦ : جد النظير الضربي للعدد ع = ١ + $\sqrt{٢}$ ت

الحل : باستخدام القاعدة السابقة، حيث س = ١ ، ص = $\sqrt{٢}$ ، وينتج أن:

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} + \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}} ت$$

$$= \frac{١}{٩} - \frac{\sqrt{٢}}{٩} ت \qquad \text{(تحقق من ذلك)}$$

تمارين ٦ - ٢

١ اكتب كلاً مما يأتي على الصورة أ + ب ت

أ) ٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ − ٢ت) ب) (٣ + ٤ت)(٣ − ٥ت)

جـ) (٣ + ٤ت)^{٣} د) ٤ت(١ − ٥ت)^{٢}

هـ) (١ − ت)^{٦}

٢ إذا كانت س = أ + ب ت ، فما قيم س التي تحقق المعادلة س + ٢س ت = -٥(س − ٤ت)؟

٣ جد قيم س ، ص ∈ ح والتي تحقق المعادلة س − ص − ٢ = ص^{٢} ت − س ت

٤ بيّن أن: ع = ت تحقق المعادلة ع^{٥} + ع^{٢} = ع − ١

٥ بيّن أن: ع = -١ + ت تحقق المعادلة ع^{٢} + ٢ع + ٢ = ٠

٦ إذا كان $\frac{ت}{ت + ٣} = \frac{١ + ٣ت}{أ}$ ، جد قيمة الثابت أ حيث أ ∈ ح.

٧ جد ع$^{-١}$ لكل مما يأتي، واكتبه على الصورة أ + ب ت:

أ) ٢ + $\sqrt{١٢}$ ت ب) $\frac{ت}{ت - ٣}$ جـ) (١ + ت)^{١٣}

٨ حِل النظام الآتي:

ع$_{١}$ + ٣ع$_{٢}$ = $-\sqrt{٨}$ ت

٢ع$_{١}$ − ٣ع$_{٢}$ = $\sqrt{٥٠}$ ت حيث ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ك

٦ - ٣ قسمة الأعداد المركبة (Division Of Complex Numbers)

نشاط ١: رسم محمد لوحة مستطيلة الشكل مستخدماً الألوان الزيتية أبعادها $(٢٨ + ١٤\sqrt{٥})$ سم، $\frac{١٤}{٢ - \sqrt{٥}}$ سم . وعندما رآها معلم الرياضيات قال إنها مربعة الشكل. ما رأيك؟

نشاط ٢: لإنطاق المقام للمقدار $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}}$

نعلم أن مرافق العدد $١ - \sqrt{٢}$ هو $١ + \sqrt{٢}$

نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقام

أي أن $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}} = \frac{١}{١ - \sqrt{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}}{١ + \sqrt{٢}} =$ ..... (أكمل)

تعتبر عملية القسمة في الأعداد المركبة مشابهة إلى حد كبير لعملية إنطاق المقام،

وذلك بكتابة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة ع = س + ص ت

تعريف:

إذا كان ع = س + ص ت

١ نسمي المقدار $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ مقياس العدد المركب ع ويرمز له |ع|

أي أن: $|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٢ ونسمي العدد س - ص ت مرافق (conjugate) العدد المركب ع = س + ص ت

ويرمز له $\overline{ع}$ أي أن: $\overline{ع}$ = س - ص ت

مثال ١: إذا كان ع = ٣ + ٤ت ، جد: ١ $\overline{ع}$ ٢ |ع| ٣ $|\overline{ع}|$

الحل:

١ $\overline{ع}$ = ٣ - ٤ت

٢ $|ع| = |٣ + ٤ت| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = ٥$

٣ $|\overline{ع}| = |٣ - ٤ت| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = ٥$ ماذا تلاحظ؟

نشاط ٣: إذا كان ع$_١$ = ٢ + ت ، ع$_٢$ = ١ − ٣ت فإن:

١ |ع$_١$| = $\sqrt{٥}$

٢ |ع$_٢$| = ...

٣ |ع$_١$ ع$_٢$| = ... ماذا تلاحظ؟

٤ |−٢ع$_١$| = ٢$\sqrt{٥}$

٥ |ع$_١$|−٢ = ... ماذا تلاحظ؟

نشاط ٤: أكمل ما يأتي:

١ $\overline{١ + ت}$ = ...

٢ $\overline{١ - ت}$ = ١ + ت

٣ $\overline{٥}$ = ٥

٤ $\overline{-٣}$ = ...

٥ $\overline{ت}$ = ...

٦ $\overline{٢ت + \sqrt{٢}ت}$ = ...

خصائص المقياس، والعدد المرافق:

إذا كان ع ∈ ك فإن:

١ $\overline{(\overline{ع})}$ = ع

٢ ع $\overline{ع}$ = $\overline{ع}$ ع = |ع|^٢

٣ |ع| = |$\overline{ع}$|

٤ |جـع| = |جـ| |ع| ، جـ ∈ ح

٥ إذا كان ع = أ + ب ت فإن ع + $\overline{ع}$ = ٢أ ، ع − $\overline{ع}$ = ٢ب ت

٦ إذا كان ع$_١$ ، ع$_٢$ ∈ ك ، فإن |ع$_١$ ع$_٢$| = |ع$_١$| |ع$_٢$|

٧ إذا كان ع$_١$ ، ع$_٢$ ∈ ك ، ع$_٢$ ≠ ٠ فإن $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$

نشاط ٥: أكمل الجدول الآتي:

العدد المركب ع	المرافق $\overline{ع}$	المقياس $|ع|$	النظير الضربي $ع^{-1}$
ت + ٢		$\sqrt{٥}$	
$\sqrt{٣}$ − ت	$\sqrt{٣}$ + ت		
٢ت			$\frac{-١}{٢}$ ت

تعريف:

إذا كان $ع_١ ، ع_٢ \in ك ، ع_٢ \neq ٠$ فإن $ع_١ \div ع_٢ = \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ع_١ \overline{ع_٢}}{ع_٢ \overline{ع_٢}} = \frac{ع_١ \overline{ع_٢}}{|ع_٢|^٢}$

ملاحظة:

إذا كان $ع \neq ٠$ فإن $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{\overline{ع}}{ع \overline{ع}} = \frac{\overline{ع}}{|ع|^٢}$

مثال ٢ : اكتب المقدار $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت}$ على الصورة س + ص ت:

١ باستخدام الضرب بالمرافق ٢ باستخدام النظير الضربي

الحل :

١ باستخدام الضرب بالمرافق:

$$\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت} = \frac{(٢ - ٣ت)(٣ - ٤ت)}{(٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت)} = \frac{(٦ - ٨ت - ٩ت - ١٢)}{(١٦ + ٩)}$$

$$\frac{-٦ - ١٧ت}{٢٥} = \frac{-٦}{٢٥} + \frac{-١٧}{٢٥} ت$$

٢ باستخدام النظير الضربي:

النظير الضربي للعدد ٣ + ٤ت هو $\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت

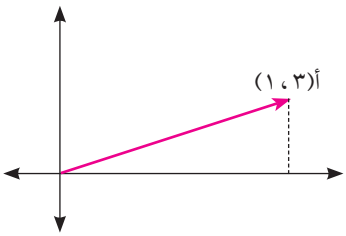
إذن: $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت} = (٢ - ٣ت)(\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت)

$= \frac{-٦}{٢٥} + \frac{-١٧}{٢٥}$ ت (ماذا تلاحظ؟)

أولاً: التمثيل البياني للأعداد المركبة:

يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في المستوى الديكارتي بالنقطة، أ (س ، ص)*، فالعدد المركب ٣ + ت يمثل بالنقطة أ(٣ ، ١) في المستوى كما في الشكل المجاور.

يسمى هذا المستوى الإحداثي بالمستوى المركب (مستوى أرجاند).



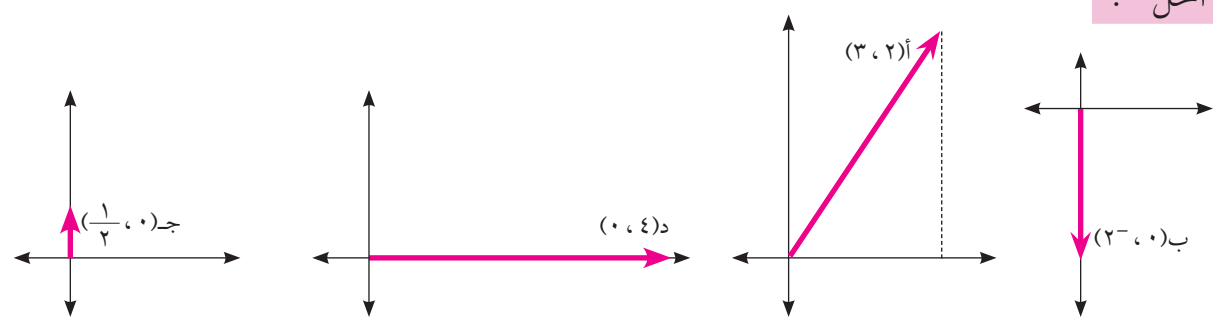
فكّر وناقش:

ماذا يمثل كل من المحور الأفقي والمحور الرأسي في المستوى المركب؟

مثال ٣ : مثّل بيانياً كلاً من الأعداد الآتية في المستوى المركب:

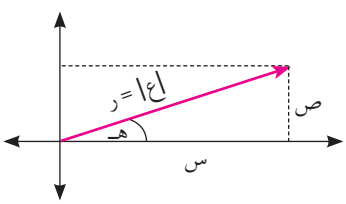
$-٢ت$ ، $٢ + ٣ت$ ، ٤ ، $\sqrt{-\frac{١}{٤}}$

الحل :



ثانياً: التمثيل القطبي للأعداد المركبة (Complex Plane and Polar Representation)

كما أشرنا أعلاه، بأنه يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في مستوى الأعداد المركبة بالنقطة، أو الزوج المرتب (س ، ص) وتتذكر أيضاً أن كل زوج مرتب، يمكن تمثيله بمتجه قياسي بدايته النقطة (٠،٠) ونهايته النقطة (س ، ص) ويصنع زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (المحور الأفقي) وتسمى هـ السعة الأساسية للعدد المركب،



* يعتبر الزوج المرتب في الأعداد المركبة متجهاً قياسياً.

حيث ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، ٠ ≤ هـ < ٢ π كما في الشكل ويكون طول المتجه = ر ، ويساوي مقياس العدد المركب ع = س + ص ت حيث ر = |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$.

نلاحظ من الشكل أعلاه أن س = رجتاهـ ، ص = رجاهـ وبذلك فإن العدد ع = س + ص ت يمكن كتابته على الصورة ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ) ويسمى هذا التمثيل بالتمثيل القطبي للعدد المركب.

تعريف:

الصورة القطبية للعدد المركب ع = س + ص ت ، ع ≠ ٠ هو ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ)
حيث ر = |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$

مثال ٤ : اكتب العدد ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت بالصورة القطبية.

الحل : ر = |ع| = $\sqrt{١^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ،

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{١}{٢}$ ومنها هـ = $\frac{\pi}{٣}$

الصورة القطبية للعدد ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

مثال ٥ : حوّل العدد المركب ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) إلى الصورة أ + ب ت

الحل : ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{ت}{\sqrt{٢}}$) = ١ + ت

نشاط ٦: إذا كان ع = ٤ − ٣ت ، فإن $\overline{ع}$ = ...

مثّل كلاً من ع ، $\overline{ع}$ هندسياً في المستوى المركب، ماذا تلاحظ؟

تمارين ٦ - ٣

١ جد $|١ + \sqrt{-٤}|$

٢ إذا كان $ع_١ = ١ + ت$ ، $ع_٢ = ١ - ت$ ، جد ما يلي:

أ $|-٣ع_١|$ ب $|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}|$ جـ $\left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right|$ د $|ع_١ ع_٢|$

٣ إذا كان $ع = \frac{٣}{٥} + \frac{-٤}{٥} ت$ ، جد:

أ $(ع)^{-١}$ ب $(٣ع)^{-١}$ جـ $|(ع)^{-١}|$ د $\left|\frac{\overline{ع}}{٥}\right|$

٤ اكتب المقادير الآتية على صورة أ + ب ت:

أ $\frac{-١ + \sqrt{-٢} ت}{٢ + ت}$ ب $\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت}$

٥ أثبت أن: $|ع - ١| = |\overline{ع} - ١|$ حيث ع ∋ ك

٦ مثّل الأعداد الآتية في المستوى المركب:

أ $ت^{٣٥}$ ب $٢ + \sqrt{-٢}$ جـ $\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩}$ د $\frac{١}{ت^{٥٢}}$

٧ إذا كان $ع^{٢} = (\overline{ع})^{٢}$ فأثبت أن ع إمّا أن تكون عدداً حقيقياً، أو أنها عدد تخيلي.

٨ اكتب ما يأتي على الصورة القطبية ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ):

أ $ع = -١ + ت$ ب $ع = \frac{-١}{٢}$ جـ $ع = \frac{-١ + \sqrt{-٣} ت}{٢}$

٩ اكتب ما يأتي على الصورة أ + ب ت:

أ $ع = ٧(جتا \frac{٣\pi}{٤} + ت جا \frac{٣\pi}{٤})$ ب $ع = ٣(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

جـ $ع = ٢(جتا \frac{\pi}{٤} - ت جا \frac{\pi}{٤})$ د $|ع| = ٣$ ، $هـ = \frac{\pi}{٣}$

تمارين عامة

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١ ما قيمة $(ت)^{٥٧}$؟

أ) ١ ب) -١ ج) ت د) $-ت$

٢ ما قيمة $(\sqrt{٢}\sqrt{٧} - ت)(١ - \sqrt{٢}\sqrt{٧} ت)$ ؟

أ) -٢ ب) $٢ت$ ج) $-٢ت$ د) ت

٣ ما قيمة $\frac{٤ + ت}{٢ - ٣ت}$ ؟

أ) $\frac{٥ - ١٤ت}{١٣}$ ب) $\frac{-٥ - ١٤ت}{٣}$ ج) $\frac{-٥ - ١٤ت}{٥}$ د) $\frac{٥ + ١٤ت}{١٣}$

٤ ما قيمة $\frac{١ + ٢ت}{٣ - ٤ت} + \frac{٢ - ت}{٥ت}$ ؟

أ) $\frac{-٢}{٥}$ ب) $\frac{-٢ت}{٥}$ ج) $\frac{-٢ - ٢ت}{٥}$ د) $\frac{٢}{٥}$

٥ ما قيمة $\overline{ع + ت}$ ؟

أ) $ع + ت$ ب) $ع - ت$ ج) $-ع + ت$ د) $-ع - ت$

٦ ما الصورة القطبية للعدد ع = ٢ + ٢ت ؟

أ) $٢\sqrt{٢}(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٤})$ ب) $٢\sqrt{٢}(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٤})$

ج) $٢\sqrt{٢}(-\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٤})$ د) $٢\sqrt{٢}(-\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٤})$

٧ ما سعة العدد المركب $(٢ + ٢ت)^{٢}$ ؟

أ) ٠ ب) $\frac{\pi}{٣}$ جـ) $\frac{\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٢}$

٢ إذا كان ع$_{١}$ = ١ + ٢ت ، ع$_{٢}$ = ٢ − ت ، جد ناتج ما يلي:

أ |ع$_{١}$|　　ب |ع$_{٢}$|　　جـ |ع$_{١}$ + ع$_{٢}$|　　د |ع$_{١}$| + |ع$_{٢}$| (ماذا تلاحظ؟)

٣ جد س ، ص ∈ ح بحيث س^{٢} + س + (ص − ١)ت = −س^{٢} ت

٤ إذا كان ل = $\frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$ ، م = $\frac{١١ت - ٢}{١ + ٢ت}$

أ بيّن أن: ل ، م مترافقان.　　ب احسب ل + م ، ل م ، ثم جد قيمة ل^{٢} + م^{٢}

٥ احسب قيمة $\left(\frac{\sqrt{٧} - ت\sqrt{٣}}{١ + ت\sqrt{٣}\sqrt{٧}}\right)^{٧}$

٦ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجري عمليات حسابية على الاعداد المركبة			
احل المعادلات واجد الجذور للاعداد المركبة			
اتحرى دقة ومعقولية الحل			