الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الوحدة

٥

التكامل المحدود وتطبيقاته

Definite Integration and its Applications

قلعة برقوق تاريخ وتراث، تقاوم من أجل البقاء، فهي شاهد حقيقي على التطور الحضاري والثقافي لمدينة خان يونس عبر العصور. يراد تغطية قوس القلعة بزجاج، اقترح طريقة لحساب مساحة الزجاج المستخدم.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى التجزئة، وحساب مجموع ريمان.
٢. إيجاد التكامل لاقتران خطّي باستخدام التعريف.
٣. التعرف إلى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
٤. التعرف إلى خصائص التكامل المحدود.
٥. حساب التكامل المحدود.
٦. إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدود.
٧. توظيف التكامل المحدود في حساب حجم الجسم الدوراني، الناتج من الدوران لمنطقة محدّدة حول محور السينات.

١ - ٥ التجزئة ومجموع ريمان (Partition and Riemann Sum)

نشاط ١: للحفاظ على جودة البيئة، وتجميل شوارع مدينة غزة، قررت البلدية تزيين شارع صلاح الدين بزراعة أشجار النخيل على امتداد الشارع بطول ١كم، فكم شجرة نخيل يلزم لزراعة شجرة كل ٥٠م؟

تعريف:

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة، وكانت:

$\sigma_ن = \{أ = س_٠ ، س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن = ب\}$ حيث:

$س_٠ < س_١ < س_٢ < س_٣ < ... < س_ن$ فإننا نسمى $\sigma_ن$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[س_{ر-١} ، س_ر]$ الفترة الجزئية الرائية، وطولها $\Delta س_ر = س_ر - س_{ر-١}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - س_{ر-١}) = ب - أ$

نلاحظ من التعريف، أنه لكتابة أي تجزئة $\sigma_ن$ لفترة ما يجب أن تكون:

١. الفترة مغلقة.
٢. تبدأ التجزئة من بداية الفترة، وتنتهي بنهايتها.
٣. عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

مثال ١ : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة [−١ ، ٣] .

١ $\sigma_٤ = \{-١ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

٢ $\sigma_٤ = \{٠ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

٣ $\sigma_٤ = \{-١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$

٤ $\sigma_٤ = \{-١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

الحل :

١ $\sigma_٤$ تعتبر تجزئة للفترة، لأن $س_٠ = -١$ ، $س_٤ = ٣$ وعناصرها مرتبة تصاعدياً

٢ $\sigma_٤$ ليست تجزئة، لأن $س_٠ \neq -١$

٣ $\sigma_٤$ ليست تجزئة، لأن $٤ \notin [-١ ، ٣]$

٤ $\sigma_٤$ ليست تجزئة للفترة [−١ ، ٣] لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال ٢ : اكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل :

$\sigma_٥ = \{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_٥ = \{٢ ، \frac{٥}{٢} ، ٤ ، \frac{٩}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_٥ = \{٢ ، \frac{٧}{٣} ، ٣ ، \frac{١١}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

فكّر وناقش:

كم تجزئة خماسية للفترة [٢ ، ٧] يمكن تكوينها؟

مثال ٣ : إذا كانت $\sigma_٣ = \{-١ ، ٣ ، ٤ ، ٦\}$ تجزئة ثلاثية للفترة [−١ ، ٦]

اكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٣$ ، ثم احسب طول كل منها.

الحل : الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٣$ هي: [−١ ، ٣] ، [٣ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

وأطوالها على الترتيب ٤ ، ١ ، ٢

تلاحظ من المثال السابق أن:

عدد عناصر التجزئة $\sigma_٣$ = ٤ ، عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٣$ = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية.

نشاط ٢ : إذا كانت $\sigma_{٤}$ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} تجزئة رباعية للفترة [٢ ، ١٠]

١ الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي [٢ ، ٤] ، [٤ ، ٦] ، [٦ ، ٨] ، [٨ ، ١٠]

٢ العلاقة بين أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي: .....

٣ عدد الفترات الجزئية = ...

٤ عدد عناصر التجزئة = ... (ماذا تلاحظ؟)

تعريف:

تسمى التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{ب - أ}{ن}$

مثال ٤ : اكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [−٢ ، ١٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٣ - (-٢)}{٥} = ٣$

ومنها تكون $\sigma_{٥}$ = {−٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣}

فكّر وناقش:

هل هناك تجزئات خماسية منتظمة أخرى للفترة [−٢ ، ١٣]؟

مثال ٥ : إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$، جد قيمة ب

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١}{٣}$

ومنها $\frac{ب - ٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ فيكون ٣ب − ١٥ = ٦ وينتج أن ب = ٧

لإيجاد قيمة أي عنصر في التجزئة المنتظمة $\sigma_{ن}$

يكون العنصر الأول $س_{.} = أ$

العنصر الثاني $س_{١} = أ + \frac{ب - أ}{ن}$

والعنصر الثالث $س_{٢} = س_{١} + \frac{ب - أ}{ن} = أ + ٢(\frac{ب - أ}{ن})$ ..... (لماذا؟)

⋮

العنصر الرائي $س_{ر-١} = أ + (ر - ١)\frac{ب - أ}{ن}$

وبشكل عام، فإن: $س_{ر} = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$

مثال ٦ : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[-١ ، ١٩]$، فجد كلاً من:

١ $س_{٢}$ ، $س_{٩}$ ٢ العنصر الثامن ٣ الفترة الجزئية الخامسة

الحل :

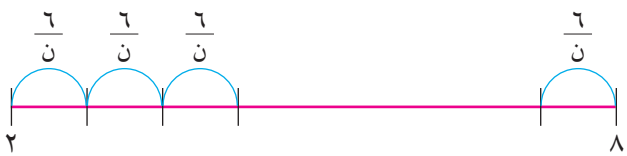
١ $س_{ر} = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ ومنها $س_{٢} = -١ + \frac{١ + ١٩}{١٢} \times ٢ = \frac{٧}{٣}$

$س_{٩} = -١ + \frac{١ + ١٩}{١٢} \times ٩ = ١٤$

٢ العنصر الثامن $س_{٧} = -١ + \frac{١ + ١٩}{١٢} \times ٧ = \frac{٣٢}{٣}$

٣ الفترة الجزئية الخامسة $= [س_{٤} ، س_{٥}] = [\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}]$ (تحقق من ذلك)

نشاط ٣ : الشكل المجاور يبين التجزئة $\sigma_{ن}$ للفترة $[٢ ، ٨]$، لاحظ أن التجزئة $\sigma_{ن}$ منتظمة وطول الفترة الجزئية فيها $= \frac{٦}{ن}$



١ طول الفترة الكلية = ...

٢ عدد عناصر التجزئة $\sigma_{ن}$ = ...

٣ $س_{٧}$ = ...

٤ العنصر السابع = ...

٥ الفترة الجزئية السابعة = ...

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفًا في الفترة [أ ، ب]، وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً نونيةً للفترة [أ ، ب]،

فإن المقدار $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق(س$_{ر}^{*}$) (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$) حيث س$_{ر}^{*} \in$ [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$]

يسمى مجموع ريمان، ويرمز له بالرمز م($\sigma_{ن}$ ، ق)

وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن م($\sigma_{ن}$ ، ق) = $\frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن}$ ق(س$_{ر}^{*}$)

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س − ٢ ، وكانت $\sigma_{٣}$ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} تجزئةً ثلاثية للفترة [٣ ، ٦]، فاحسب م($\sigma_{٣}$ ، ق) معتبراً س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

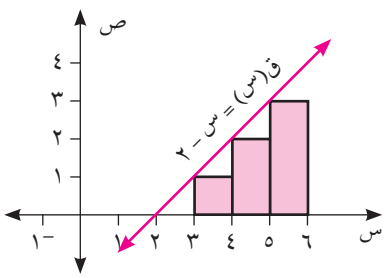
الحل : نكوّن الجدول الآتي:

الفترات الجزئية	س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$	س$_{ر}^{*}$	ق(س$_{ر}^{*}$)	ق(س$_{ر}^{*}$) × (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$)
[٣ ، ٤]	١	٣	١	١
[٤ ، ٥]	١	٤	٢	٢
[٥ ، ٦]	١	٥	٣	٣
المجموع				٦

أي أن م($\sigma_{٣}$ ، ق) = $\sum_{ر=١}^{٣}$ ق(س$_{ر}^{*}$) (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$) = ٦

لاحظ من الشكل المجاور أن مجموع مساحات المستطيلات

تساوي م($\sigma_{٣}$ ، ق) = ٦



مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٢س ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئةً رباعيةً منتظمةً للفترة [−٣ ، ٥]، فاحسب م($\sigma_{٤}$ ، ق) حيث س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

الحل : بما أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفترة الجزئية = $\frac{٨}{٤}$ = ٢ ،

وتصبح $\sigma_{٤}$ = {−٣ ، −١ ، ١ ، ٣ ، ٥}

الفترات الجزئية الناتجة عن σ_4 هي:

$[-3، -1]$، $[-1، 1]$، $[1، 3]$، $[3، 5]$

$س_ر^*$ المناظرة = $-3، -1، 1، 3$ (لماذا؟)

$$م(\sigma_ن، ق) = \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*)(س_ر - س_{ر-1}) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*)$$ (لماذا؟)

$$م(\sigma_4، ق) = ٢ \sum_{ر=1}^{4} ق(س_ر^*) = ٢(ق(-3) + ق(-1) + ق(1) + ق(3))$$

$$= ٢(١٥ + ٣ + -١ + ٣) = ٤٠$$

مثال ٩ : إذا علمت أن ق(س) = لـــو$_هـ$ س وكانت $\sigma_3 = \{1، هـ، هـ^2، هـ^3\}$ تجزئةً للفترة $[1، هـ^3]$، فاحسب $م(\sigma_3، ق)$ معتبراً $س_ر^* = س_ر$

الحل : الفترات الجزئية الناتجة عن σ_3 هي: $[1، هـ]$، $[هـ، هـ^2]$، $[هـ^2، هـ^3]$

$$م(\sigma_3، ق) = (هـ - 1) ق(هـ) + (هـ^2 - هـ) ق(هـ^2) + (هـ^3 - هـ^2) ق(هـ^3)$$

$$= (هـ - 1)(1) + (هـ^2 - هـ)(2) + (هـ^3 - هـ^2)(3)$$

$$= ٣هـ^3 - هـ^2 - هـ - 1$$

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = أس ، س ∈ $[-1، 1]$، وكانت σ_4 تجزئةً منتظمةً للفترة $[-1، 1]$ فجد قيمة أ علماً بأن $م(\sigma_4، ق) = ٢$ ، $س_ر^* = س_{ر-1}$

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{1}{2}$ ، $\sigma_4 = \{-1، \frac{-1}{2}، ٠، \frac{1}{2}، 1\}$

$$م(\sigma_4، ق) = \frac{1}{2} \sum_{ر=1}^{4} ق(س_ر^*) = \frac{1}{2}(ق(س_0) + ق(س_1) + ق(س_2) + ق(س_3))$$

$$= \frac{1}{2}(ق(-1) + ق(\frac{-1}{2}) + ق(٠) + ق(\frac{1}{2}))$$

$$= \frac{1}{2}(-أ + \frac{-1}{2}أ + ٠ + \frac{1}{2}أ) = ٢$$

$-أ = ٤$ ومنها $أ = -٤$

تمارين ٥ - ١

١ إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[-١ ، ٢]$، فجد:

أ العنصر الثالث في التجزئة ب الفترة الجزئية الرابعة

٢ إذا كان العنصر الخامس في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٠}$ للفترة [جـ ، ٧] يساوي ٤، جد قيمة جـ.

٣ إذا كان ق(س) = ٦ - س^{٢} معرفاً في الفترة [١ ، ٥] ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها، فجد م($\sigma_{٤}$ ، ق) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$

٤ إذا كان ق(س) = ٢ + هـ$^{-س}$ معرفاً في الفترة $[-١ ، ٢]$ ، وكانت $\sigma_{٣}$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها، فجد م($\sigma_{٣}$ ، ق) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

٥ إذا كان ق(س) = $\frac{\text{أ س}}{\text{س} + ٢}$ معرفاً على $[-١ ، ٨]$، وكانت $\sigma_{٥}$ = $\{-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨\}$ تجزئة للفترة $[-١ ، ٨]$ ، فاحسب قيمة أ علماً بأن م($\sigma_{٥}$ ، ق) = ٥,٦ ، اعتبر س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

٦ إذا كانت $\sigma_{٨}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الثالث فيها يساوي ٢ ، وكانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الخامس فيها يساوي ٤ ، جد قيم أ ، ب.

٧ إذا كان ق(س) = جاس ، س $\in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ ، وكانت $\sigma_{٤} = \left\{٠ ، \frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi}{٢}\right\}$

أوجد م($\sigma_{٤}$ ، ق) معتبراً س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً ومحدوداً في الفترة [٠ ، ١] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة نفسها، وكانت م($\sigma_{ن}$ ، ق) = ل ، عندما س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$ و م($\sigma_{ن}$ ، ق) = ك ، عندما س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

أثبت أن: ل - ك = $\frac{١}{ن}$ (ق(١) - ق(٠))

نشاط ١: يعتبر تل العاصور من الجبال العالية الواقعة شرق رام الله، يريد السيد جهاد حساب مساحة قطعة أرض له واقعة هناك (المنطقة المحدودة باللون الأحمر في الشكل المجاور)، لاحظ أنه لا يمكن تقسيمها إلى أشكال منتظمة، ولا يمكن إيجاد مساحتها باستخدام قوانين المساحة المعروفة. كيف يمكنك مساعدة جهاد في حساب مساحة قطعة الأرض؟

أتذكر

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ك_ر \pm ع_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ(ك_ر) = أ \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ = أ\,ن$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

مثال ١ : *إذا كان ق(س) = ٢س + ٣ معرفاً في الفترة [٢ ، ٦]، ولتكن $\sigma_ن$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة نفسها فاحسب م($\sigma_ن$ ، ق) معتبرًا $س_ر^* = س_ر$

الحل :

$$م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$$

لكن $س_ر^* = س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$

فيكون $س_ر = ٢ + \frac{٤}{ن} ر$

$$م(\sigma_ن ، ق) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(٢ + \frac{٤}{ن} ر)$$

$$= \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (٧ + \frac{٨}{ن} ر) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٧ + \frac{٤}{ن} \times \frac{٨}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر$$

$$= \frac{٤}{ن} \times ٧ن + \frac{٣٢}{ن^٢} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}$$ وبعد التبسيط

يكون $م(\sigma_ن ، ق) = ٤٤ + \frac{١٦}{ن}$

* سوف نقتصر دراستنا في إيجاد م($\sigma_ن$ ، ق) (ن غير محددة) على اقترانات كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر.

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س − ٢ معرفاً في الفترة [١ ، ب] ، وكانت σ_5 تجزئةً خماسيةً منتظمةً لهذه الفترة بحيث ، م(σ_5 ، ق) = ٣٦، جد قيمة ب حيث $س_ر^* = س_ر$

الحل :

$$م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$$

$$س_ر^* = س_ر = ١ + \frac{ب - ١}{٥} ر$$

$$م(\sigma_5 ، ق) = \frac{ب - ١}{٥} \sum_{ر=١}^{5} ق(س_ر^*) = \frac{ب - ١}{٥} \sum_{ر=١}^{5} ق(١ + \frac{ب - ١}{٥} ر)$$

$$= \frac{ب - ١}{٥} \sum_{ر=١}^{5} (٣ + (ب - ١) ر))$$

ومنها يكون $\frac{ب - ١}{٥} (٣ \times ٥ + (ب - ١) \frac{٥ \times ٦}{٢}) = ٣٦$

وينتج بعد التبسيط أن: $ب^٢ - ب - ١٢ = ٠$ ، وبحل المعادلة، ينتج أن:

ب = ٤ ، ب = -٣ (مرفوضة) ..... (لماذا؟)

تعريف التكامل المحدود:

إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً* في الفترة [أ ، ب]،

وكانت $\lim_{ن \to \infty}$ م($\sigma_ن$ ، ق) = ل لجميع قيم $س_ر^* \in [س_{ر-١} ، س_ر]$ فإن الاقتران ق(س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]، ويكون $\int_أ^ب$ ق(س) دس = ل

(نسمي أ ، ب حدود التكامل)

* يكون الاقتران ق(س) محدوداً إذا وجد عددان حقيقيان م ، ن حيث م ≤ ق(س) ≤ ن ∀ س ∈ مجال الاقتران

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٥ − ٤س حيث س ∈ [٠ ، ٣]، معتبراً س$_ر^*$ = س$_ر$ ، احسب $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس باستخدام تعريف التكامل المحدود .

الحل :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$$

$$\text{إذن } \int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس = \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٣ - ٠}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر)$$

$$= \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٣}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(٥ - ٤\left(\frac{٣}{ن}ر\right)\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٣}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٥ - \frac{١٢}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ر\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٣}{ن} \left(٥ن - \frac{١٢}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$

$$= \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٣}{ن} (-٦ن - ٦)$$

$$= \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \left(-٣ - \frac{١٨}{ن}\right) = -٣$$

أتذكر:

إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، فإن نهـــا$_{س\to\pm\infty}$ ق(س) =

- عدداً حقيقياً ≠ ٠، إذا كانت درجة البسط = درجة المقام،

وتكون قيمة النهاية = معامل س^ن في البسط ÷ معامل س^ن في المقام حيث ن أعلى أس في البسط والمقام.

- صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- إما ∞ ، أو − ∞ ، إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

مثال ٤ : إذا علمت أن $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = ٩ ، وكان م($\sigma_{ن}$ ، ق) = $\frac{(ن + ١)(٢أ ن + ١)}{ن^{٢}}$

حيث $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [−١ ، ٤] ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل : $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = $\lim_{ن \to \infty}$ م($\sigma_{ن}$ ، ق)

إذن $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = $\lim_{ن \to \infty} \frac{(ن + ١)(٢أ ن + ١)}{ن^{٢}}$ = ٩

ومنها يكون ٢أ = ٩ ومنها أ = $\frac{٩}{٢}$ ..... (لماذا؟)

قابلية الاقتران ق(س) للتكامل في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب].

مثال ٥ : هل الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٥ قابل للتكامل في الفترة [−٢ ، ٤]. ولماذا؟

الحل : ق(س) = س^{٢} + ٥ قابل للتكامل في الفترة [−٢ ، ٤]

لأنه متصل في الفترة [−٢ ، ٤] كونه كثير حدود.

نظرية (٢):

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]، وكان الاقتران هـ(س) = ق(س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، عدا عند مجموعة منتهية من قيم س في تلك الفترة ، فإن هـ(س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس

مثال ٦ : ابحث في قابلية التكامل للاقتران ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}\text{ س}\right]$ في الفترة [٤ ، ٦].

الحل : تعلم أن ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}\text{ س}\right] = \begin{cases} ٢ & ، \ ٤ \leq \text{س} < ٦ \\ ٣ & ، \ \text{س} = ٦ \end{cases}$

نفرض أن هـ(س) = ٢ حيث س ∈ [٤ ، ٦] ، لاحظ أن هـ(س) قابل للتكامل لأنه متصل

وبما أن هـ(س) = ق(س) لجميع قيم س ∈ [٤ ، ٦] ما عدا عند س = ٦

فإن الاقتران ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}\text{ س}\right]$ يكون قابلاً للتكامل على [٤ ، ٦].

مثال ٧ : بيّن أن الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١}$ قابل للتكامل في الفترة [−٢ ، ٢]

الحل : نفرض أن هـ(س) = س − ١ حيث س ∈ [−٢ ، ٢]

لاحظ أن هـ(س) اقتران متصل؛ لأنه كثير حدود فهو قابل للتكامل في الفترة [−٢ ، ٢]

وبما أن هـ(س) = ق(س) عند جميع قيم س ∈ [−٢ ، ٢] ما عدا عند س = −١

فإن الاقتران ق(س) يكون قابلاً للتكامل في [−٢ ، ٢]

تمارين ٥ - ٢

١ إذا كان ق(س) = ٢ − ٥س، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [−١ ، ٣]،
فاحسب م($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) معتبرًا $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}}$

٢ إذا كان ق(س) = أ هـ(س) + ب وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [٠ ، ١]،
فأثبت أن: م($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) = أم($\sigma_{\text{ن}}$ ، هـ) + ب لجميع اختيارات $\text{س}_{\text{ر}}^{*}$

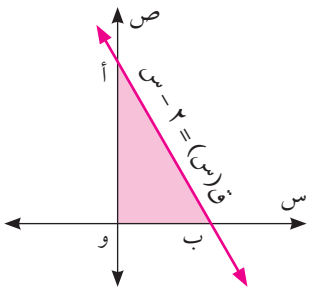
٣ إذا كان ق(س) = ٢س معرفاً في الفترة [١ ، ب]، وكان م($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) = ٣٥ + $\frac{٢٥}{\text{ن}}$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٤ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة كل من:

أ $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢}\,\text{دس}$ ب $\int_{١}^{٢} (٤ - ٦\text{س})\,\text{دس}$

٥ بيّن أن الاقتران ق(س) = $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ١}{\text{جتاس} - ١}$ قابل للتكامل في الفترة $\left[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$

نشاط ١ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ – س،
والمار بالنقطتين أ ، ب



١ مساحة المثلث أ و ب = ...

٢ إذا كان م(س) هو الاقتران الأصلي للاقتران ق(س)

فإن م(س) = $\int$ (٢ – س) دس = ٢س – $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

٣ قيمة م(٢) – م(٠) = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

إذا كان م(س) هو أحد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [أ ، ب]،
فإن المقدار م(ب) – م(أ) يساوي التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ونرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

١ إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = م(ب) – م(أ)

٢ أ إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

فإن ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) دص لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]

ويسمى ت(س) الاقتران المكامل للاقتران ق(س).

ب إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، فإن تَ(س) = ق(س) لكل س ∈] أ ، ب [

مثال ١ : جد قيمة كل مما يأتي:

١ $\int_{-٢}^{٣} (٤س^{٣} - ١)\, دس$

٢ $\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{س}\, دس$

٣ $\int_{١}^{٢} هـ^{س}\, دس$

الحل :

١ ق(س) = ٤س^{٣} − ١ متصل على ح ، م(س) = س^{٤} − س اقتران أصلي للاقتران ق(س)

إذن $\int_{-٢}^{٣} (٤س^{٣} - ١)\, دس = م(س)\Big|_{-٢}^{٣} = (س^{٤} - س)\Big|_{-٢}^{٣}$

$= [(٣)^{٤} - (٣)] - [(-٢)^{٤} - (-٢)] = ٦٠$

٢ لاحظ أن أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ٣$\sqrt{س}$ هو ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{س}\, دس = \int_{٤}^{٩} ٣س^{\frac{١}{٢}}\, دس = ٢س^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{٤}^{٩} = ...$ (أكمل)

٣ $\int_{١}^{٢} هـ^{س}\, دس = هـ^{س}\Big|_{١}^{٢} = هـ^{٢} - هـ$ (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

وكانت م(−٣) = ٤ ، م(٧) = ١٢ ، فجد $\int_{-٣}^{٧} ق(س)\, دس$

الحل :

$\int_{-٣}^{٧} ق(س)\, دس = م(س)\Big|_{-٣}^{٧}$

$= م(٧) - م(-٣) = ٨$

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} معرفاً في الفترة [−٢ ، ٤]، فجد ت(س)، ثم احسب ت(−٢) ، ت(١)

الحل :

$$ت(س) = \int_{أ}^{س} ق(ص)\,دص$$

$$= \int_{-٢}^{س} ق(ص)\,دص$$

$$= \int_{-٢}^{س} ٤ص^{٣}\,دص = ص^{٤}\Big|_{-٢}^{س}$$

$$= س^{٤} - ١٦$$

ومنها ت(−٢) = ١٦ − ١٦ = ٠ ، ت(١) = ١ − ١٦ = −١٥

فكّر وناقش:

كيف يمكنك إيجاد ت(١) دون إيجاد ت(س)؟

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = س^{٢} + جا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، فجد:

١ الاقتران المكامل ت(س) ٢ ت(٠) ٣ $\int_{ب}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,دس$

الحل :

١ $$ت(س) = \int_{ب}^{س} ق(ص)\,دص = \int_{ب}^{س} (ص^{٢} + جا٢ص)\,دص$$

$$= \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{جتا٢س}{٢} + \frac{١}{٢}$$ (لماذا؟)

٢ $$ت(٠) = \frac{(٠)^{٣}}{٣} - \frac{جتا٢(٠)}{٢} + \frac{١}{٢} = ٠$$

٣ $$\int_{ب}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,دس = ت(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi^{٣}}{١٩٢} + \frac{١}{٢}$$ (لماذا؟)

سوف نقدم الاقتران المكامل لاقتران متعدد القاعدة في الدرس التالي:

نظرية:

إذا كان ت(س) هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) المعرف في الفترة [أ ، ب] فإن:

١ ت(س) اقتران متصل دائماً في الفترة [أ ، ب].

٢ ت(أ) = ٠

مثال ٥ : جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٥}س ظاس دس

الحل : نفرض ص = قاس فيكون دص = قاس ظاس دس ومنها دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$\int$ قا^{٥}س ظاس دس = $\int$ ص^{٥} ظاس $\frac{\text{دص}}{\text{ص ظاس}}$ = $\int$ ص^{٤} دص = $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ

$\int$ قا^{٥}س ظاس دس = $\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$ + جـ ، لاحظ أن $\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$ هو أحد الاقترانات الأصلية

ومنها $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٥}س ظاس دس = $\left[\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$

$\frac{\text{قا}^{٥}\frac{\pi}{٣}}{٥} - \frac{\text{قا}^{٥}(٠)}{٥} = \frac{٣١}{٥}$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٥ - ٣

١ جد قيم التكاملات المحدودة الآتية:

أ $\int_{1}^{4} (٣ + \sqrt{س})^{٢}$ دس

ب $\int_{1}^{2} س(س^{٢} - ٣)^{٣}$ دس

جـ $\int_{1}^{هـ} لـو_{هـ} س$ دس

د $\int_{1}^{2} ١٢٠ س^{٢}(س - ١)^{٣}$ دس

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٤] ، أوجد ت(س)

٣ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + أ & ، \ -٢ \leq س \leq ٣ \\ ب س + ١ & ، \ ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س)

في الفترة [−٢ ، ٥] ، فجد قيم الثابتين أ ، ب .

٤ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، وكان $\int_{\frac{١}{٢}}^{س}$ ق(ص) دص = س + جا π س + جـ

فجد قيمة الثابت جـ ، ثم ق(٢) حيث س ≤ $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان ت(س) = $\int_{1}^{س}$ (أ + هـ^{ص}) دص وكان تَ(٢) = −١ ، احسب قيمة أ .

٦ جد $\int_{1}^{١}$ (س^{٢} − ٢س) (س − ١)^{٥} دس

٥ - ٤ خصائص التكامل المحدود (Properties of Definite Integral)

للتكامل المحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن:

١ $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$

٢ $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = ٠$

٣ $\int_{أ}^{ب} ك\,دس = ك\,(ب - أ)$ حيث ك ∈ ح

٤ $\int_{أ}^{ب} ك\,ق(س)\,دس = ك\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ حيث ك ∈ ح

٥ $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$ (يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين)

مثال ١ : جد قيمة ما يأتي:

١ $\int_{-٤}^{٦} دس$ ٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}} -٣\,جاس\,دس$ ٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\,دس$

الحل :

١ $\int_{-٤}^{٦} دس = (٦ - (-٤)) = ١٠$

٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}} -٣\,جاس\,دس = ٠$ (لماذا؟)

٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\,دس = \int_{١}^{٢} \left(\frac{٣س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٧س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٢}}\right) دس$

$\int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٧ + ٥س^{-٢})\,دس = \left(س^{٣} - ٧س - \frac{٥}{س}\right)\Big|_{١}^{٢} =$ ..... (أكمل)

مثال ٢ : إذا كان $\int_{١+أ٣}^{٢+أ٥} ٤ \, دس = ٣٦$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : حسب الخاصية (٣) يكون $\int_{١+أ٣}^{٢+أ٥} ٤ \, دس = ٤((٢ + أ٥) - (أ٣ + ١)) = ٣٦$

أي أن $٨أ + ٤ = ٣٦$ ومنها $أ = ٤$

مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان $\int_{٣}^{٦} ق(س) \, دس = ١٠$ ، فجد:

١) $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, دس$ ٢) $\int_{٦}^{٣} ق(س) \, دس$

الحل :

١) $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, دس = ٠$

٢) $\int_{٦}^{٣} ق(س) \, دس = - \int_{٣}^{٦} ق(س) \, دس = -١٠$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان ق(س) ≤ ٠

لكل س ∈ [أ ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \leq ٠$

مثال ٤ : بدون حساب التكامل بيّن أن: $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \, دس \leq ٠$

الحل : نبحث في إشارة المقدار $\frac{٣س}{س^{٢} + ٤}$ في الفترة [٠ ، ٥]، وبما أن ٣س ≥ ٠ ، ∀ س ∈ [٠ ، ٥]

وكذلك $س^{٢} + ٤ \geq ٤ > ٠$ ، ∀ س ∈ [٠ ، ٥]

إذن $\frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \geq ٠$ ∀ س ∈ [٠ ، ٥] ومنها $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \, دس \geq ٠$

خاصية المقارنة:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [أ ، ب]، فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

مثال ٥ : بدون إجراء عملية التكامل بيّن أن: $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس ≥ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس

الحل : نفرض أن ق(س) = (س^{٢} − ١) − (٢س + ٢) = س^{٢} − ٢س − ٣

نبحث في إشارة الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

فنلاحظ أن ق(س) ≥ ٠ في الفترة [١ ، ٢]،

أي أن س^{٢} − ٢س − ٣ ≥ ٠ (انظر الشكل المجاور)

وبالتالي يكون (س^{٢} − ١) ≥ (٢س + ٢) في الفترة [١ ، ٢]

أي أن $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس ≥ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس

مثال ٦ : إذا كان ق(س) ≥ ٤ لجميع قيم س ∈ [١ ، ٣]، فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس؟

الحل : بما أن ق(س) ≥ ٤ لجميع قيم س ∈ [١ ، ٣]،

فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس ≥ $\int_{١}^{٣}$ ٤ دس

أي أن: $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس ≥ ٨

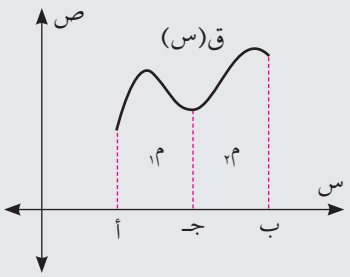
إذن المقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس = ٥ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس ≥ ٥ × ٨

أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس هي ٤٠.

خاصية الإضافة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف ⊇ ح
وكان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,دس$$



مثال ٧ : عبّر بتكامل واحد عما يأتي: $\int_{-١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{٤}^{٩} ق(س)\,دس$

الحل :

$$\int_{-١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{٤}^{٩} ق(س)\,دس = \int_{-١}^{٩} ق(س)\,دس$$

مثال ٨ : إذا كان $\int_{٢}^{٦} ق(س)\,دس = ٣$ ، وكان $\int_{٨}^{٦} ق(س)\,دس = -٥$ ، فجد $\int_{٢}^{٨} ٢ق(س)\,دس$

الحل :

$$\int_{٢}^{٨} ق(س)\,دس = \int_{٢}^{٦} ق(س)\,دس + \int_{٦}^{٨} ق(س)\,دس$$

$$= \int_{٢}^{٦} ق(س)\,دس - \int_{٨}^{٦} ق(س)\,دس = ٣ - (-٥) = ٨$$

أي أن $\int_{٢}^{٨} ٢ق(س)\,دس = ٢ \int_{٢}^{٨} ق(س)\,دس = ١٦$

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} & ، \ -١ \leq س \leq ٢ \\ ٤س + ٢ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$ ، فجد الاقتران المكامل ت(س)

الحل :

١ عندما $-١ \leq س \leq ٢$ فإن ت(س) = $\int_{-١}^{س} ق(ص)\,دص = \int_{-١}^{س} ٣ص^{٢}\,دص = س^{٣} + ١$

٢ عندما $٢ < س \leq ٤$ فإن:

$$ت(س) = \int_{-١}^{س} ق(ص)\,دص = \int_{-١}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{س} ق(ص)\,دص$$

$$= ٩ + \int_{٢}^{س} (٤ص + ٢)\,دص = ٢س^{٢} + ٢س - ٣ \qquad (لماذا؟)$$

ومنها ت(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ١ & ، \ -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س^{٢} + ٢س - ٣ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

لاحظ أن ت(س) متصل ، ت(−١) = ٠

نشاط : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} - ٧ & ، \ س < ٢ \\ ٢س & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$ ،

فإن $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{-٢}^{٢}$ ٢س دس + $\int_{٢}^{٣}$ (.....) دس

= $س^{٢}\Big|_{-٢}^{٢} + س^{٣} - ٧س\Big|_{٢}^{٣}$ = صفر + ...

مثال ١٠: جد $\int_{١}^{٢} \frac{١}{١ + هـ^{س}}$ دس

الحل : بإضافة وطرح $هـ^{س}$ للبسط يصبح $\int_{١}^{٢} \frac{١ + هـ^{س} - هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}$ دس

= $\int_{١}^{٢} \left(١ - \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}\right)$ دس

= $(س - لـو_{هـ}|١ + هـ^{س}|)\Big|_{١}^{٢}$

= $(٢ - لـو_{هـ}(١ + هـ^{٢}) - (١ - لـو_{هـ}(١ + هـ))$

= $١ + لـو_{هـ}\left(\frac{١ + هـ}{١ + هـ^{٢}}\right)$ (لماذا؟)

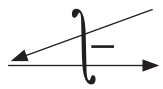
فكّر وناقش:

جد التكامل السابق بالتكامل بالتعويض بفرض ص = ١ + $هـ^{س}$

مثال ١١ : إذا كان $\int_{ب}^{٢} س\, ق(س)\, دس = ٨$ ، ق(٢) = ٥ ، فجد $\int_{ب}^{٢} س^{٢}\, ق'(س)\, دس$

الحل : نفرض أن: م = $س^{٢}$ ، دع = ق'(س) دس

دم = ٢س دس ، ع = ق(س)



ومنها ينتج أن: $\int_{ب}^{٢} س^{٢}\, ق'(س)\, دس = س^{٢}\, ق(س) - \int_{ب}^{٢} ٢س\, ق(س)\, دس$

$$\int_{ب}^{٢} س^{٢}\, ق'(س)\, دس = س^{٢}\, ق(س)\Big|_{ب}^{٢} - ٢ \int_{ب}^{٢} س\, ق(س)\, دس$$

$$= (٤ \times ق(٢) - ٠ \times ق(٠)) - ٢ \times ٨$$

$$= ٢٠ - ١٦ = ٤$$

مثال ١٢ : اذا كان $\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس = ٢ لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$ فما قيمة الثابت أ حيث أ > ١ ؟

الحل : نجد $\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس$ بطريقة الكسور الجزئية

نفرض أن $\frac{٤}{س^{٢} - ١} = \frac{ل}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$ ، فتكون ل = ٢ ، ب = -٢ (تحقق من ذلك)

$$\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس = (٢ لـو_{هـ} |س - ١| - ٢ لـو_{هـ} |س + ١|)\Big|_{٢}^{أ}$$

$$= ٢ لـو_{هـ} \left|\frac{أ - ١}{أ + ١}\right| - ٢ لـو_{هـ} \left|\frac{٢ - ١}{٢ + ١}\right|$$

ويكون $٢ لـو_{هـ} \left|\frac{أ - ١}{أ + ١}\right| - ٢ لـو_{هـ} \left|\frac{٢ - ١}{٢ + ١}\right| = ٢ لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$

وبحل المعادلة $لـو_{هـ} \frac{أ - ١}{أ + ١} - لـو_{هـ} \frac{١}{٣} = لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$

وينتج أن $٣ \times \frac{أ - ١}{أ + ١} = \frac{٣}{٢}$ ومنها أ = ٣ (لماذا؟)

تمارين ٥ - ٤

١ جد قيمة التكاملات الآتية:

أ $\int_{0}^{\pi} جا^{٢}س \, دس$

ب $\int_{0}^{٢} (١ + هـ^{س})^{٢} \, دس$

جـ $\int_{-\sqrt[٣]{٧}}^{\sqrt[٣]{٧}} (س + ١)(س^{٢} + ٤) \, دس$

د $\int_{-٢}^{١} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٣س + ٩} \, دس$

٢ أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيما يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} (س^{٢} + ٢) \, دس \leq \int_{١}^{٢} (٢س - ١) \, دس$

ب $\int_{٢}^{٣} (س^{٢} + ٢) \, دس \leq ٠$

٣ عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:

أ $\int_{٥}^{٧} س^{٣} \, دس + \int_{١}^{٥} س^{٣} \, دس$

ب $\int_{١}^{٢} \sqrt{س + ٢} \, دس - \int_{٤}^{٢} \sqrt{س + ٢} \, دس$

جـ $\int_{١}^{٣} س^{٢} \, دس - \int_{٣}^{١} ٤ \, دس + \int_{٣}^{٥} (س^{٢} + ٤) \, دس$

د $\int_{٢}^{٥} (س - ١) \, دس + \int_{٧}^{٥} \frac{١ - س^{٢}}{س + ١} \, دس$

٤ إذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س) \, دس = ٧$

أ جد $\int_{١}^{٥} (٢ق(س) - ٣س + ١) \, دس$

ب احسب قيمة أ علماً بأن $\int_{١}^{٥} ٢أق(س) \, دس = ١$

٥ إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = ٨ فما قيمة؟

أ $\int_{١}^{٥}$ (٣ق(س) – ٢) دس

ب $\int_{٣}^{٧}$ (٤ق(س – ٢) – ٢س) دس

٦ إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س) دس = ٩ ، وكان $\int_{٢}^{٤}$ ٥ق(س) دس = ١٠، فما قيمة $\int_{٤}^{٧}$ ٢ق(س) دس ؟

٧ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س + ١ & ، ١ \geq س \geq ٢ \\ ٣س^{٢} & ، ٢ < س \geq ٥ \end{cases}$ ،فجد قيمة الثابت أ علماً بأن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ١٨

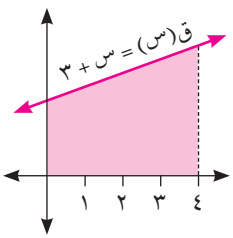
٨ إذا كان $\int_{١}^{ب}$ (٤س – $\int_{-١}^{٢}$ ٣ع^{٢} دع) دس = ١٢، فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

٩ إذا كان ق(س) = |٢ – س| ، س ∈ [٠ ، ٥] ، أوجد الاقتران المكامل ت(س).

أولاً: المساحة (Area)

نشاط ١ : الشكل المجاور يبين مبنى وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية، يراد طلاء المنطقة المحددة بالألوان فوق مدخل المبنى، فإذا علمت أن المنحنى الأزرق يمثل تقريباً منحنى الاقتران ق(س) = ٦ - ٣س^{٢}، فكيف يمكننا تحديد المساحة المراد طلاؤها؟

نشاط ٢ : إذا مثلنا منحنى الاقتران ق(س) = س + ٣ بيانياً في الفترة [٠ ، ٤] كما في الشكل المجاور، فإن:



١ المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ هي مساحة شبه منحرف طولي قاعدتيه ..... ، ..... وارتفاعه ٤ وحدات، وتكون قيمتها ..... وحدة مربعة.

٢ قيمة $\int_{٠}^{٤}$ (س + ٣) دس = ...

٣ العلاقة بين مساحة شبه المنحرف وناتج التكامل للاقتران ق(س) في [٠ ، ٤] هي ..... ، ماذا تستنتج؟

الحالة الأولى: مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

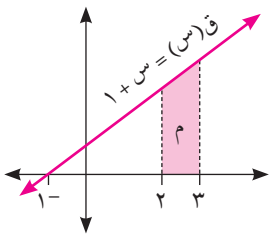
إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : م = $\int_{أ}^{ب}$ |ق(س)| دس

مثال ١ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣

الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

وذلك بوضع س + ١ = ٠ ومنها س = $-١ \notin [٢ ، ٣]$

$\forall$ س $\in [٢ ، ٣]$ ، س + ١ > ٠



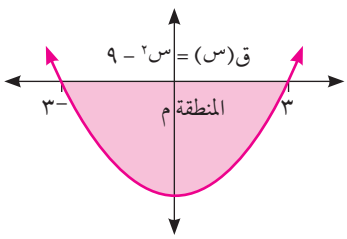
$$م = \int_{٢}^{٣} |ق(س)| \, دس = \int_{٢}^{٣} |س + ١| \, دس = \left| \frac{س^{٢}}{٢} + س \right|_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٣^{٢} - ٢^{٢}}{٢} + ١(٣ - ٢) = \frac{٧}{٢}$$ وحدة مربعة.

مثال ٢ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢} - ٩$ ومحور السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ومحور السينات

بوضع $س^{٢} - ٩ = ٠$ ومنها س = ± ٣



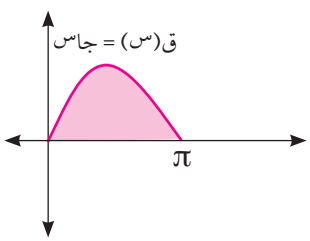
$$م = \int_{-٣}^{٣} |ق(س)| \, دس = \int_{-٣}^{٣} |(س^{٢} - ٩)| \, دس$$

$$= \left| \left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٩س \right) \right|_{-٣}^{٣} = \left| \frac{-١٠٨}{٣} \right| = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦$$ وحدة مربعة

مثال ٣ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في $[٠ ، \pi]$

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات

يوضع جاس = ٠ ومنها س = $٠ ، \pi$



$$م = \int_{٠}^{\pi} |ق(س)| \, دس = \int_{٠}^{\pi} |جاس| \, دس$$

$$= \left| -جتاس \right|_{٠}^{\pi} = ١ + ١ = ٢$$ وحدة مربعة

الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، أو أكثر:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) ، هـ(س) في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)| \, دس$$

مثال ٤ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٨ − س^{٢} ، هـ(س) = س^{٢}

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

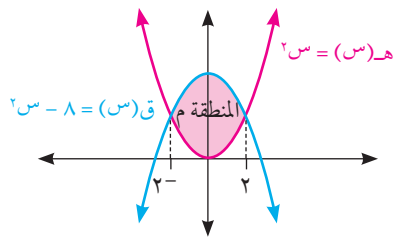
بوضع ق(س) = هـ(س) فتكون ق(س) − هـ(س) = ٠

أي أن ٨ − ٢س^{٢} = ٠ ومنها س = ±٢

$$م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س) - هـ(س)| \, دس$$

$$م = \int_{-٢}^{٢} |(٨ - ٢س^{٢})| \, دس$$

$$= \left| \left(٨س - \frac{٢}{٣} س^{٣} \right) \right|_{-٢}^{٢} = \frac{٦٤}{٣}$$ وحدة مربعة



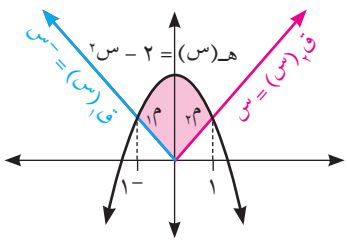
مثال ٥ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = |س| ، هـ(س) = ٢ − س^{٢}

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س)

لكن ق(س) = $\begin{cases} -س & ، \ س \geq ٠ \\ س & ، \ س < ٠ \end{cases}$

عندما س ≥ ٠ ، ٢ − س^{٢} = −س ومنها س = −١ (لماذا؟)

عندما س < ٠ ، ٢ − س^{٢} = س ومنها س = ١ (لماذا؟)



$$م = \int_{-1}^{1} |هـ(س) - ق(س)| \, دس = م_1 + م_2$$

$$م_1 = \int_{-1}^{0} |(٢ - س^٢) - (-س)| \, دس$$

$$= \int_{-1}^{0} |(٢ - س^٢ + س)| \, دس = \left| (٢س - \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{٢} س^٢) \right|_{-1}^{0} = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

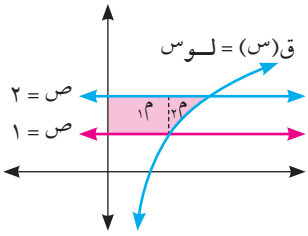
$$م_2 = \int_{0}^{1} |(٢ - س^٢ - س)| \, دس = \left| (٢س - \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢) \right|_{0}^{1} = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = م_1 + م_2 = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

نلاحظ أن: $م_1 = م_2$ ، وبالتالي $م = ٢ \times م_1 = ٢ \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٣}$

مثال ٦ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{هـ}$ س والمستقيمين: ص = ١، ص = ٢ ومحور الصادات.

الحل : نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع المستقيمين ص = ١ ، ص = ٢، كما يأتي:



نضع لـو$_{هـ}$ س = ١ ومنها س = هـ

نضع لـو$_{هـ}$ س = ٢ ومنها س = هـ^٢

$$م_1 = \int_{هـ}^{هـ^٢} (٢ - ١) \, دس = هـ \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_2 = \int_{هـ}^{هـ^٢} (٢ - \text{لـو}_{هـ} س) \, دس = ٢(هـ^٢ - هـ) - \int_{هـ}^{هـ^٢} \text{لـو}_{هـ} س \, دس$$

$$= ٢هـ^٢ - ٢هـ - \left| (س \text{ لـو}_{هـ} س - س) \right|_{هـ}^{هـ^٢} \quad \text{(لماذا؟)}$$

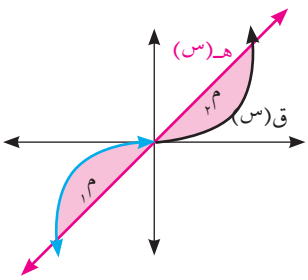
$$= ٢هـ^٢ - ٢هـ - (٢هـ^٢ - هـ^٢)$$

$$= هـ^٢ - ٢هـ$$

مساحة المنطقة المطلوبة = $م_1 + م_2 = هـ^٢ - هـ$ وحدة مربعة

مثال ٧ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)



بوضع ق(س) = هـ(س) اذن س^{٣} – س = ٠

ومنها س = ٠ ، س = ١ ، س = –١

$$م = \int_{-١}^{١} |ق(س) - هـ(س)| \, دس = م_{١} + م_{٢}$$

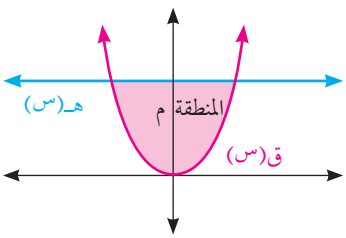
$$م = \int_{-١}^{٠} (س^{٣} - س) \, دس + \int_{٠}^{١} (س - س^{٣}) \, دس$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ وحدة مربعة} \qquad (\text{لماذا؟})$$

مثال ٨ : إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = جـ

جـ ∈ ح هي ٣٦ وحدة مربعة ، فجد قيمة/ قيم جـ .

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)،



بوضع ق(س) = هـ(س)

ومنها س^{٢} – جـ = ٠ أي أن س = $\pm \sqrt{جـ}$

$$م = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} |ق(س) - هـ(س)| \, دس \quad \text{أي أن:}$$

$$٣٦ = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} (هـ(س) - ق(س)) \, دس \quad \text{ومنها} \quad ٣٦ = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} (جـ - س^{٢}) \, دس$$

$$٣٦ = جـ(\sqrt{جـ} + \sqrt{جـ}) - \frac{(\sqrt{جـ})^{٣} - (-\sqrt{جـ})^{٣}}{٣}$$

$$\text{ينتج } ٣٦ = \frac{٤جـ\sqrt{جـ}}{٣} \text{ ومنها جـ = ٩}$$

تمارين ٥ – ٥ أ

١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.

٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – س^{٢} والمستقيم المار بالنقطتين أ(٠ ، ٠) ، ب(١ ، ٢) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول.

٣ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = (س^{٢} – ٩) (س^{٢} – ١) ومحور السينات الواقعة في الربع الثالث.

٤ جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = هـ^{س} ، ك(س) = لـو$_{هـ}$ س والمستقيمين ص = ١ ، س = $^{-}$١ ومحور السينات.

٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = $\sqrt{٢ - س}$ حيث س ≥ ٢ ، ك(س) = $^{-}$س ومحور السينات.

٦ احسب المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٤ ، ك(س) = ٢س

نشاط : تمثل الصورة المقابلة أحد المباني الغريبة في العالم، والذي يأخذ شكلاً كروياً. نلاحظ أن قاعدة الاقتران الممثل بالمنحنى المرسوم باللون الأخضر، هي:

ق(س) = $\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$ ..... (لماذا؟)

١ حجم المبنى = ...

٢ قيمة المقدار $\pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}}$ ق^2(س) دس = ...

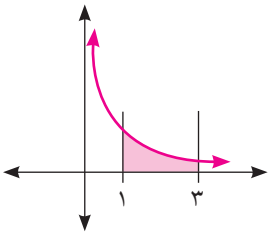
ماذا تلاحظ؟

نظرية:

إذا كان ق(س) : [أ ، ب] ⟵ ح ، وكان الاقتران ق^2(س) قابلاً للتكامل على [أ ، ب] فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

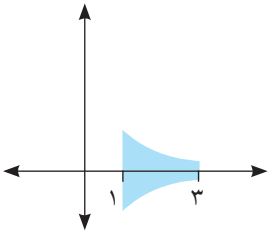
دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالقاعدة: ح = $\pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق^2(س) دس

مثال ١ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.



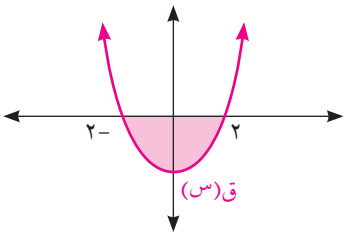
الحل : ح = $\pi \int_{١}^{٣}$ ق^2(س) دس

ح = $\pi \int_{١}^{٣} \left(\frac{٢}{\text{س}}\right)^2$ دس = $\pi \int_{١}^{٣}$ ٤ س$^{-٢}$ دس



= ٤ π $\left(\frac{-١}{\text{س}}\right)\Big|_{١}^{٣}$ = ٤ π $\left(\frac{-١}{٣} - \frac{-١}{١}\right)$ = $\frac{٨\pi}{٣}$ وحدة حجم

مثال ٢ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.



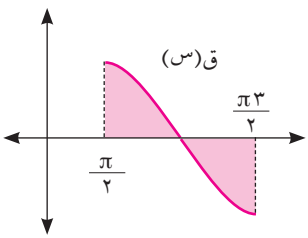
الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

بوضع ق(س) = ٠ فيكون س^{٢} – ٤ = ٠ ومنها س = ±٢

$$ح = \pi \int_{-٢}^{٢} ق^{٢}(س)\,دس = \pi \int_{-٢}^{٢} (س^{٢} - ٤)^{٢}\,دس$$

$$= \pi \int_{-٢}^{٢} (س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦)\,دس = \pi \left(\frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٨}{٣} س^{٣} + ١٦س \right) \Big|_{-٢}^{٢} = \frac{\pi ٥١٢}{١٥} \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٣ : جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi ٣}{٢} \right]$ دورة كاملة حول محور السينات.



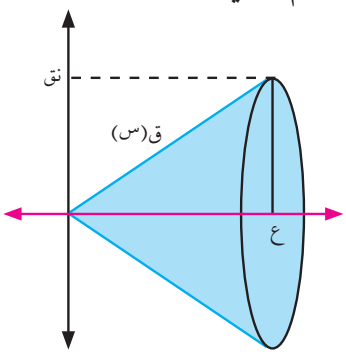
الحل :

$$ح = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi ٣}{٢}} ق^{٢}(س)\,دس$$

$$ح = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi ٣}{٢}} جا^{٢}س\,دس = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi ٣}{٢}} \frac{١}{٢} (١ - جتا٢س)\,دس$$

$$= \frac{\pi}{٢} \left(س - \frac{١}{٢} جا٢س \right) \Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi ٣}{٢}} = \frac{\pi}{٢}^{٢} \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٤ : استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع يساوي $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢}ع



الحل : ينتج المخروط من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة. نفرض أن طول أحد ضلعي القائمة يساوي (نق) والآخر (ع) كما في الشكل المجاور، فيكون وتر المثلث هو الراسم للمخروط.

نجد أولاً معادلة وتر المثلث (المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (ع ، نق))

$$\frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع} \text{ إذن } ص = \frac{نق}{ع} س$$

$$ح = \pi \int_{0}^{ع} ص^{٢} \, دص$$

$$= \frac{\pi نق^{٢}}{ع^{٢}} \int_{0}^{ع} س^{٢} \, دس = \frac{\pi نق^{٢}}{ع^{٢}} \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{0}^{ع} = \frac{\pi}{٣} نق^{٢} ع \text{ وحدة حجم.}$$

نظرية:

إذا كان ق^{٢}(س) ، هـ^{٢}(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] وكان منحنى الاقتران هـ(س) ، ومنحنى الاقتران ق(س) يقعان على جهة واحدة من محور السينات، فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بينهما دورة كاملة حول محور السينات هو

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} |هـ^{٢}(س) - ق^{٢}(س)| \, دس$$

مثال ٥ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيي الاقترانين ق(س) = هـ^{س} ، ك(س) = هـ وحور الصادات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، ك(س)

بوضع ق(س) = ك(س) ينتج أن هـ^{س} = هـ ومنها س = ١

$$ح = \pi \int_{0}^{١} |(ك^{٢}(س) - ق^{٢}(س))| \, دس$$

$$ح = \pi \int_{0}^{١} |(هـ^{٢} - هـ^{٢س})| \, دس = \pi \left| (هـ^{٢}س - \frac{١}{٢} هـ^{٢س}) \right|_{0}^{١}$$

$$= \frac{\pi(هـ^{٢} + ١)}{٢} \text{ وحدة حجم.}$$

مثال ٦ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات
ق(س) = س^{٢} − ٤س ، هـ(س) = −س دورة كاملة حول محور السينات.

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع
ق(س) = هـ(س) ومنها س^{٢} − ٤س = −س
أي أن س^{٢} − ٣س = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ٣

ومنها ح $= \pi \int_{٠}^{٣} |(ق^{٢}(س) - هـ^{٢}(س))\, دس| = \pi \int_{٠}^{٣} |(س^{٢} - ٤س)^{٢} - (-س)^{٢}|\, دس$

$= \pi \int_{٠}^{٣} |(س^{٤} - ٨س^{٣} + ١٥س^{٢})|\, دس$

$= \pi \left| \left(\frac{س^{٥}}{٥} - ٢س^{٤} + ٥س^{٣} \right) \right|_{٠}^{٣} = \frac{١٠٨\pi}{٥}$ وحدة حجم

تمارين ٥ - ٥ ب

١ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = ٤ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٥ دورة كاملة حول محور السينات.

٢ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = هـ^{٢} دورة كاملة حول محور السينات.

٣ استخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بشبه المنحرف أب جـ د حيث أ (٠ ، ٠) ، ب(٣ ، ٠) ، جـ (٣ ، ١) ، د (٠ ، ٤) دورة كاملة حول محور السينات.

٤ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيي الاقترانين
ق(س) = س^{٢} + ٦ ، هـ(س) = ٥س دورة كاملة حول محور السينات.

٥ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{هـ}$ س ومحور السينات والمستقيم س = هـ دورة كاملة حول محور السينات.

٦ استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) يساوي π نق^{٢}ع.

٧ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

تمارين عامة

١ ضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت $\sigma_{١٠}$ = {أ ، ١ ، ..... ، ١٧ ، ب} تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، فما قيمة أ ؟

أ) صفر ب) -١ ج) -٢ د) -٣

٢ إذا كان ق(س) = ٥ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٥٠

٣ إذا كان ق(س) = ٢س + ١ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة $\text{نهـــا}_{ن \leftarrow \infty}$ م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٤ د) غير موجودة

٤ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{٢}^{٧}$ (٤ + ق(س)) دس = ٣٠ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٧}$ ٢ق(س)) دس؟

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٦٠ د) ١٢

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int$ ق(س) دس = قا^{٢}س − ظا^{٢}س + س^{٢} + جـ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس ؟

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٦

٦ ما قيمة $\int_{١}^{٢} \sqrt{٧س^{٢} - ٢س + ١}$ دس؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٧ إذا كان $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ١}{س + ٢}$ دس = أ ، $\int_{١}^{٢} \frac{س + ١}{س + ٢}$ دس = ب ، فما قيمة أ + ب ؟

أ) $\frac{١١}{٢}$ ب) $\frac{٥}{٢}$ ج) ١ د) $\frac{١}{٢}$

٨ إذا كان ق(س) = $\int_{١}^{س} \frac{ص}{ص^{٢}+١}$ دص + $\int_{١}^{٤}$ جا^{٢}س دس فما قيمة قَ(٤) ؟

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{٤}{١٧}$ ج) $\frac{٨}{١٧}$ د) $\frac{١٦}{٦٥}$

٩ إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث قَ(س) = ٣س – ٢، فما قيمة ق(٣) – ق(–١)؟

أ) ٠ ب) ٢ ج) ٤ د) ٨

١٠ إذا كان ق(س) = س لـو$_{هـ}$ س ، فما قيمة $\int_{\frac{١}{٢}}^{هـ^{٢}}$ قً(س) دس؟

أ) –١ ب) ٠ ج) ١ د) هـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

٢ إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، وكان العنصر السابع فيها يساوي ١٢، والعنصر الرابع فيها يساوي ٧، فما قيم الثابتين أ ، ب ؟

٣ إذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين في الفترة [٢ ، ١٠] وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س
بحيث م($\sigma_{٤}$ ، ق) = ٦، جد م($\sigma_{٤}$ ، هـ) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$ علماً بأن $\sigma_{٤}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [٢ ، ١٠]

٤ استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{١}^{٥}$ ٣س دس

٥ أثبت أن : $\int_{-٢}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ دس ≥ ٨

٦ إذا كان ق(س) متصلاً على مجاله وكان $\int_{ب}^{س}$ ق(ص) دص = س^{٢} – $\sqrt{س}$ ، فجد ق(٤) ، قَ(٤).

٧ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + ٢جـس & ، ٢ \geq س \geq ٣ \\ أس - ب & ، ٣ > س \geq ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل

للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]. جد:

أ قيم أ ، ب ، جـ ب $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس

٨ جد التكاملات الآتية:

أ $\int_{1}^{2} ٥٦(س - ٢)^{٢} (س - ١)^{٥}$ دس

ب $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لـو_{هـ} س$ دس

جـ $\int_{٣}^{٥} \frac{س + ٥}{س^{٢} - س}$ دس

د $\int_{ب}^{٢} \sqrt{٧س^{٤} + س^{٢}}$ دس

هـ $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢} \sqrt{٧س^{٢} + ١}}$ دس

٩ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [١ ، ٥] وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [١ ، ٥] ، أثبت أن: $\int_{٧}^{٣} ق(س - ٢)$ دس $\geq \int_{٣}^{-١} هـ(س + ٢)$ دس

١٠ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) فيما يأتي :

أ ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٢} & ، \ س \geq ٠ \\ ٤ - س & ، \ س < ٠ \end{cases}$

ب ق(س) = ٢جاس ، هـ(س) = ١ في الفترة [٠ ، π]

١١ إذا كان $\int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{-س})$ دس = أ ، $\int_{١}^{٣} (جتا^{٢}س)$ دس = ب ، فجد قيمة أ + ب.

١٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} والمماس المرسوم له عند النقطة (٤ ، ٤) ومحور السينات.

١٣ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، والمستقيم ص = ٣ - س والمحورين الإحداثيين.

١٤ انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث تعطى سرعته ع وفق العلاقة:

ع(ن) = $\begin{cases} ٥ن^{٢} & ، \ ٠ \leq ن \leq ٢ \\ ٢٤ - ١٢ن & ، \ ٢ < ن \leq ١٢ \end{cases}$ ،

فجد : أ بعد الجسيم عن النقطة (و) عندما ن = ٥ ثوان.

ب متى يتوقف الجسم عن الحركة، وما المسافة المقطوعة عندئذ؟

١٥ إذا كان قَ(س) = ق(س) ، ق(س) ≠ ٠ ، جد:

أ $\int$ (ق(س))^{ن} دس ب قاعدة الاقتران ق(س)

١٦ إذا كان $\int_{١}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{(س+١)}$ دس = أ ، فما قيمة $\int_{\pi}^{} \frac{جتاس}{(س+٢)^{٢}}$ دس بدلالة أ ؟

١٧ إذا كان ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} \frac{س\,كَ(س) - ك(س)}{س^{٢}}$ دس ؟

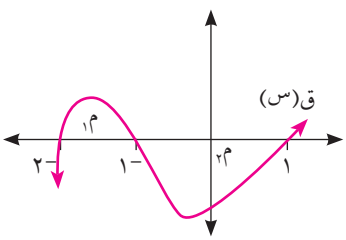
١٨ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى س ص = ٤ + س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤ دورة كاملة حول محور السينات.

١٩ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ص$_{١}$ = ظاس ومنحنى ص$_{٢}$ = قاس والمستقيمين س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ دورة كاملة حول محور السينات.

٢٠ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س دورة كاملة حول محور السينات.

٢١ في الشكل المجاور، احسب $\int_{-١}^{٢}$ س ق(س^{٢} − ٣) دس

علماً بأن م$_{١}$ = ٤ وحدات مربعة ، م$_{٢}$ = ١٢ وحدة مربعة



٢٢ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد التجزئة ومجموع ريمان لاقترانات محددة			
اوظف العلاقة بين التفاضل والتكامل			
اوظف خواص التكامل المحدود في حل المسائل المنتمية			