الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الوحدة

٣

المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinants

توزيع أعداد الطلبة في بعض محافظات فلسطين للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥ (حكومية وخاصة ووكالة)

الرقم	المديرية	اللون	عدد الطلبة		
			ذكور	اناث	المجموع
1	القدس		19430	21312	40742
2	شمال غزة		42721	43850	86571
3	جنوب نابلس		12873	13316	26189
4	جنوب الخليل		24360	25227	49587
5	الوسطى		37081	36837	73918
6	طولكرم		22858	22942	45800
7	رام الله		40889	41610	82499
8	بيت لحم		25931	26405	52336
المجموع			226143	231499	457642

إذا طلب منك إعادة تنظيم بيانات المديريات حسب اللون المجاور لكل منها، فكيف يمكنك ترتيبها بطريقة منظمة تساعد في دراستها؟ ماذا يمثل كل لون؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والمحددات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.

٢ إيجاد رتبة المصفوفة، وعدد مدخلاتها.

٣ التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.

٤ إجراء العمليات على المصفوفات.

٥ التعرف إلى مفهوم المحددات، وخصائصها.

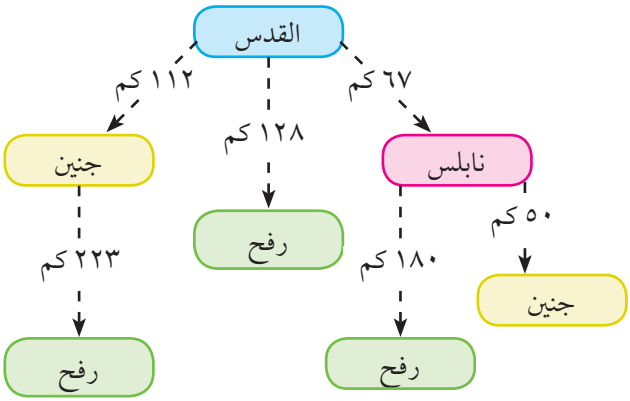
٦ حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.

٧ إيجاد النظير الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.

٨ توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطّيّة.

١ - ٣ المصفوفة (Matrix)*

نشاط ١: تريد مجموعة من السياح التنقل بين بعض مدن فلسطين، فجمعت المعلومات الخاصة بالمسافات بين هذه المدن وهي: من القدس: إلى جنين ١١٢ كم، وإلى نابلس ٦٧ كم، وإلى رفح ١٢٨ كم ومن نابلس: إلى جنين ٥٠ كم، وإلى رفح ١٨٠ كم. ومن جنين إلى رفح ٢٢٣ كم.
ولتسهيل التعامل مع هذه المعلومات، رتبها أحد السياح كما يأتي:



ما رأيك بهذا التمثيل؟ هل يعطي الصورة الحقيقية للمسافات بين المدن؟ حاول تمثيل المعلومات السابقة بطرق أخرى؟

إن تنظيم هذه المعلومات له طرق متعددة، وسيتم التعرف على تنظيم جديد للبيانات، يسمى «المصفوفة».

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، ..... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو م × ن حيث م يمثل عدد صفوفها، ن يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ م في ن).

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها.

* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A .A. Cayley عام ١٨٥٧م.

الصورة العامة للمصفوفةمن الرتبة م × ن تكون على النحو:

$$\text{أ}_{م\times ن} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \dots(\text{أ}_{1هـ})\dots & \text{أ}_{1ن} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \dots\dots & \text{أ}_{2ن} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\text{أ}_{ي1}) & (\text{أ}_{ي2}) & \dots(\text{أ}_{يهـ})\dots & \text{أ}_{ين} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{م1} & \text{أ}_{م2} & \dots\dots & \text{أ}_{من} \end{bmatrix}$$

وتتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة $\text{أ}_{يهـ}$.

مثال ١ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

١ جد رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب ٢ جد أ_{21} ، ب_{12}

الحل :

١ المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة ٣ × ٢
والمصفوفة ب من الرتبة ٢ × ٣

٢ قيمة المدخلة $\text{أ}_{21} = -٢$ ، $\text{ب}_{12} = ١$

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدتها = ن، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢ مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$\text{م}_{يهـ} = \begin{cases} ١ & ، \ ي = هـ \\ ٠ & ، \ ي \neq هـ \end{cases}$$

فمثلاً $\text{م}_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{م}_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا ...

٣ المصفوفة الصفرية (و): هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل $\text{و}_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل ص = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \end{bmatrix}$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل جـ = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٦ المصفوفة القطرية: هي المصفوفة المربعة س بحيث س$_{ي هـ}$ = ٠ ، ∀ ي ≠ هـ

مثل س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & س_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، ونسمي القطر الذي مدخلاته: س$_{ي هـ}$ ، ∀ ي = هـ بالقطر الرئيسي للمصفوفة س.

٧ المصفوفة المثلثية العلوية: هي المصفوفة المربعة التي تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي أصفاراً،

مثل: أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ ٠ & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & س_{٣١} \\ ٠ & س_{٢٢} & س_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$

مثال ٢ : لديك المصفوفات أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

١ ما نوع المصفوفة جـ؟

٢ هل ب مصفوفة وحدة؟

٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ ؟

الحل :

١ المصفوفة جـ هي مصفوفة عمود.

٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)

٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢

نشاط ٢: كوّنت ياسمين المصفوفة ك من الرتبة ٣ × ٣ حسب الشروط الآتية

$$ك_{ي هـ} = \begin{cases} ي + هـ & ، \quad ي < هـ \\ ي - هـ & ، \quad ي > هـ \\ \frac{ي}{ي + هـ} & ، \quad ي = هـ \end{cases}$$

فكانت قيمة المدخلة ك$_{١٢}$ = ١، قيمة المدخلة ك$_{٢١}$ = ... ، $\sum_{ي=١}^{٣}$ ك$_{ي ٣}$ = ...

مدخلات القطر الرئيسي هي .....

تساوي مصفوفتين

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا كان أ$_{ي هـ}$ = ب$_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ .

مثال ٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ \sqrt{ع} & ص^{٢} \end{bmatrix}$

١ هل أ = ب؟ ولماذا؟

٢ جد قيم س، ص، ع التي تجعل أ = جـ

الحل :

١ أ ≠ ب لأن أ$_{١١}$ ≠ ب$_{١١}$

٢ بما أن أ = جـ ، فتكون مدخلاتهما المتناظرة متساوية، ومنها س = ٢ ، ص^{٢} = ٤

أي أن ص = ±٢ وكذلك $\sqrt{ع}$ = ٥ ومنها ع = ٢٥.

تمارين ٣ - ١

١ ينتج مصنع ألبان نوعين من العبّوات: حجم كبير، وحجم صغير، فإذا كان لهذا المصنع فروع في كل من: الخليل وطولكرم وغزة، وكان عدد العبّوات التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:

فرع الخليل: ٨٠٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٩٠٠ عبّوة من الحجم الصغير.

فرع طولكرم: ٦٠٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٤٥٠ عبّوة من الحجم الصغير.

فرع غزة: ٧٥٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٦٥٠ عبّوة من الحجم الصغير.

أ نظم المعلومات السابقة بمصفوفة، بحيث تمثل الصفوف فيها أنواع العبّوات، ثم اكتب رتبتها؟

ب ماذا يمثل مجموع مدخلات العمود الثاني؟

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٢ & س \\ ١ & -س & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$ فجد:

أ رتبة المصفوفة أ ب قيمة $(أ_{٣١} + أ_{١٢})$ جـ قيمة س بحيث إن: $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & س^{٢} + ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س - ١ \end{bmatrix}$، فجد قيمة / قيم س.

٤ كوّن مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ بحيث تعطى مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{يهـ} = ٢^{ي - هـ}$

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & -٣ & ٥ \end{bmatrix}$، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث إن $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ

أولاً: جمع المصفوفات:

نشاط ١: تبيع شركة ألبسة بدلات رياضية في فرعيها في كل من بيت لحم ونابلس، فإذا كانت ألوان البدلات المبيعة أحمر وأزرق وأبيض، وسجلت أعداد البدلات التي تم بيعها في الفرعين خلال شهري أيلول وتشرين أول من العام ٢٠١٦ فكانت كما في الجدول الآتي:

الفرع	الشهر	اللون		
		أحمر	أزرق	أبيض
نابلس	أيلول	٤٠٠	٤٠٠	٥٠٠
	تشرين ١	٣٠٠	٥٠٠	٢٨٠
بيت لحم	أيلول	٥٠٠	٤٠٠	٨٠٠
	تشرين ١	٣٠٠	٣٥٠	٢٥٠

١ إذا مثلنا ما باعه فرع نابلس في الشهرين المذكورين بالمصفوفة س = $\begin{bmatrix} ٤٠٠ & ٤٠٠ & ٥٠٠ \\ ٣٠٠ & ٥٠٠ & ٢٨٠ \end{bmatrix}$ فإن رتبتها.....

٢ مثل ما باعه فرع بيت لحم في الشهرين المذكورين بالمصفوفة ص، وعين رتبتها.

٣ هل المصفوفتان س ، ص من نفس الرتبة؟

٤ هل يمكن إيجاد مصفوفة (ع) تمثل مجموع ما باعته الشركة من البدلات في فرعيها في المدينتين؟

٥ كوّن المصفوفة ع (إن أمكن).

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب أي أن: جـ$_{يهـ}$ = أ$_{يهـ}$ + ب$_{يهـ}$

مثال ١ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٣- & ٧ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ١ س + ص ٢ ص + س ٣ ص + ع

الحل :

١ س + ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ + ٥ & ٣ + ٧- \\ ٥ + ٣ & ٤ + ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٤- \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$

٢ ص + س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٤- \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$ (ماذا تلاحظ؟)

٣ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص ≠ رتبة ع.

ثانيًا: ضرب المصفوفة بعددٍ حقيقيٍ

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً من الرتبة م × ن ، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخلاتها على النحو: جـ$_{ي هـ}$ = ك أ$_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ.

مثال ٢ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ١ \\ ٢- & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد ١ ٢أ ٢ -أ ٣ أ + (-أ)

الحل :

١ ٢أ = $\begin{bmatrix} ٢ \times ٣- & ٢ \times ٤ & ٢ \times ١ \\ ٢ \times ٢- & ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٨ & ٢ \\ ٤- & ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

٢ -أ = (-١)أ = -١ $\begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ١ \\ ٢- & ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤- & ١- \\ ٢ & ٠ & ٥- \end{bmatrix}$

٣ أ + (-أ) = $\begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ١ \\ ٢- & ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤- & ١- \\ ٢ & ٠ & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (فسّر الإجابة).

مثال ٣ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ فجد ٣أ + ٢ب

الحل :

$$٣أ + ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨- & ٦ \\ ٦ & ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٢١ & ١٧ \end{bmatrix}$$

ثالثاً: طرح المصفوفات

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن ، فإن أ – ب = أ + (– ب)

مثال ٤ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة ب – أ

الحل :

ب – أ = ب + (–أ) = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

أو : ب – أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ - ٣ & ٣- - ٢ \\ ٠ - ١ & ٥ - ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات ب – أ تنتج من طرح مدخلات المصفوفة أ من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة ب

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∋ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ ..... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ ..... (المصفوفة الصّفريّة المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (–أ) = (–أ) + أ = و ..... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ..... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥ : حل المعادلة المصفوفية س + $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\left(\text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

ومنها س + $\left(\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\right)$ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

أي أن س + و = $\begin{bmatrix} -٦ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ومنها س = $\begin{bmatrix} -٦ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

تدريبات:

١ أ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فجد ب + ٢أ ، ٣أ − ٢ب

ب إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: جـ + د = ٩م$_{٢}$

٢ حل المعادلة المصفوفية: ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ − ٣س = س + م$_{٢}$

٣ إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث: ٢أ + جـ = و

٤ جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

٥ إذا كانت س + ٢ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$ ، ٣س − ص = $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفتين س ، ص.

رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

نشاط ٢: بعد انتهاء المرحلة الأولى من دوري كرة القدم الفلسطيني في المحافظات الشمالية للعام ٢٠١٦/ ٢٠١٧م، كانت الفرق الثلاثة الأولى، هي: (ثقافي طولكرم(ط)، وهلال القدس(ق)، وشباب السمّوع (س)، فإذا علمت أن مصفوفة نتائج مباريات هذه الفرق هي:

$$ش = \begin{matrix} \\ \text{فوز} \\ \text{تعادل} \\ \text{خسارة} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{ط} & \text{ق} & \text{س} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٣ \end{bmatrix} \end{matrix}$$

وأن الفريق الفائز يحصل على ٣ نقاط، والمتعادل يحصل على نقطة واحدة، والخاسر لا يحصل على أي نقطة.

١ إذا كانت المصفوفة ص = [٣ ١ ٠] تمثل النقاط التي يحصل عليها الفريق في أي مباراة يلعبها، والمصفوفة ع = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ تمثل نتائج مباريات فريق هلال القدس، كم نقطة يكون رصيد هذا الفريق؟

٢ كوّن مصفوفةً تمثل نتائج الفرق الثلاثة من النقاط، ثم رتّب الفرق تنازليًا حسب عدد النقاط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$$جـ_{ي هـ} = أ_{ي ١} \times ب_{١ هـ} + أ_{ي ٢} \times ب_{٢ هـ} + \ldots + أ_{ي ن} \times ب_{ن هـ}$$

مثال ٦: لتكن أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ١ أ . جـ ٢ أ . ب ٣ ب . جـ

الحل :

١ أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . جـ غير معرفة. (لماذا؟)

٢ أ . ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.

٣ ب . جـ معرفة أيضاً. (لماذا؟)

مثال ٧ :

يعمل ثلاثة خيّاطين في مشغلٍ للخياطة، ينتج ثلاثة أنواع من الألبسة (قميص، بنطال، بلوزة)، فإذا كانت أجرة خياطة القميص ٥ دنانير، وأجرة خياطة البنطال ٦ دنانير، وأجرة خياطة البلوزة ٣ دنانير، وفي أحد الأيام كان إنتاجهم كما في الجدول المجاور.

العدد	خيّاط١	خيّاط٢	خيّاط٣
قميص	٢	٣	٢
بنطال	٤	٢	٥
بلوزة	٦	٥	٢

ما الأجرة التي حصل عليها كل خياط في ذلك اليوم؟

الحل :

لحساب أجرة الخيّاط الأول مثلاً، فإننا نجري العمليات الآتية:

٥ × ٢ + ٦ × ٤ + ٣ × ٦ = ٥٢ ديناراً.

ولكن باستخدام المصفوفات يمكن تحديد أجرة كل خيّاط، بحيث نكون مصفوفتين: الأولى مصفوفة أجرة خياطة القطعة الواحدة من كل نوع، وهي س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

والثانية مصفوفة كميات إنتاج الخيّاطين ذلك اليوم وهي جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

وعليه فأجرة كل خيّاط تستخرج من ناتج الضرب س . جـ

أي أن: س . جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥×٢ + ٦×٤ + ٣×٦ & ٥×٣ + ٦×٢ + ٣×٥ & ٥×٢ + ٦×٥ + ٣×٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥٢ & ٤٢ & ٤٦ \end{bmatrix}$

وتكون أجرة الخيّاط الأول ٥٢ ديناراً، والثاني ٤٢ ديناراً، والثالث ٤٦ ديناراً.

مثال ٨ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ -٢ & ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ فجد (إن أمكن):

١ أ . جـ ٢ جـ . أ

الحل :

١ بما أن رتبة أ هي ٢×٢ ، رتبة جـ هي ٢×٣

فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ -٢ & ٩ & -٥ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -٣\times٤ + ٥\times-٥ & -٣\times١ + ٥\times٩ & -٣\times٢ + ٥\times-٢ \\ ١\times٤ + ٦\times-٥ & ١\times١ + ٦\times٩ & ١\times٢ + ٦\times-٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٣٧ & ٤٢ & -١٦ \\ -٢٦ & ٥٥ & -١٠ \end{bmatrix} = \text{ل}$$

لاحظ أن المدخلة ل$_{٢١}$ = ٤٢ ، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من جـ.

٢ لا يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ . أ (لماذا؟)

نشاط ٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فجد(إن أمكن) كلاً من: أ . ب ، ب . أ

١ أ . ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٩ & ٤١ \\ -٤ & -٦ \end{bmatrix}$

٢ ب . أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ = ... ماذا تستنتج؟

مثال ٩ : لتكن أ مصفوفةً من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفةً من الرتبة ٥ × ك

فما قيم كل من ن، ك التي تجعل أ . ب ، ب . أ معرفتين؟

الحل : حتى يكون أ . ب معرفاً فإن قيمة ن = ٥، وليكون ب . أ معرفاً فإن قيمة ك = ٢(لماذا؟)

مثال ١٠: جد ناتج $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \right)$

الحل : $\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٦ \end{bmatrix}$، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∋ ح فإنّ:

١ (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) ..... الخاصيّة التجميعيّة.

٢ أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

٣ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

٤ أ . م = م . أ = أ ..... (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

مثال ١١: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$، جـ = $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد أ . ب ، أ . جـ

الحل : أ . ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

لاحظ أن أ . ب = أ . جـ ، لكن ب ≠ جـ (ماذا تستنتج؟)

تمارين ٣ - ٢

١ إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب = جـ فما رتبة ب في كل مما يلي:

أ أ$_{٥\times٢}$ ، جـ$_{٤\times٢}$ ب أ$_{٣\times٣}$ ، جـ$_{٥\times٣}$

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

أ أ . ب ب جـ . ب جـ أ^{٢}

٣ جد قيم س ، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: س = ٥ ص

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فبيّن أن: أ^{٢} – ب^{٢} ≠ (أ – ب) (أ + ب)

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: أ^{٢} = ب؟

٧ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & -١ \end{bmatrix}$

أ جد المصفوفة د بحيث أن: أ + د = ب . د

ب بيّن أن: جـ^{٣} = جـ

نشاط ١: اتفق سليم وأخته منال على طريقةٍ لتشفير الأعداد، وذلك بربط العدد المشفَّر (أ) بالشكل | س | ص | ل | ع | حيث س × ع – ص × ل = أ

فمثلاً تشفير العدد ٥ يمكن أن يكون | ٤ | ٣ | ١ | ٢ |

وتشفير العدد –٥ هو | ١ | ٢ | ٤ | ٣ |، وهكذا ... ، تشفير العدد ٦ هو .....،

تشفير العدد ٠ هو ..... ، هل يكون تشفير العدد وحيداً؟

ما رأيك لو مثلنا تشفير العدد ١٠ وهو | ٣ | –٧ | –٢ | ٨ |

بمصفوفةٍ مربعةٍ على النحو $\begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ .....

اكتب ٣ مصفوفات تمثل تشفيراً للعدد (٠).

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة ، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقيٍ، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز لمحددها بالرمز | أ | :

١ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = أ_{١١}$

٢ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

٣ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$

مثال ١ : إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}$، فجد: ١ | أ | ، | ب | ٢ | أ + ب |

الحل :

١ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ٥ \times ٣ = ١٣-$

$|ب| = \begin{vmatrix} ٢- & ١- \\ ٣ & ٤- \end{vmatrix} = ١- \times ٣ - (٤-) \times (٢-) = ١١-$

٢ أ + ب $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، $|أ + ب| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٤ - ١ = ٣$ (ماذا تلاحظ؟)

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

مثال ٢ : جد $\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٥- & ٤ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix}$ ١ باستخدام التعريف ٢ بدلالة مدخلات العمود الثاني

الحل :

١ بالتعريف يكون $\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٥- & ٤ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٥- & ٤ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} - ٣- \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٥- \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} = ١٣$

٢ بدلالة مدخلات العمود الثاني يكون $\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٥- & ٤ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix}$

$= (-١)^{٢+١} (٣-) \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + (-١)^{٢+٢} (٥-) \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + (-١)^{٢+٣} (٦) \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} - ٦ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ٣ (٢٦) - ٥ (١٣) - ٦ (٠) = ٧٨ - ٦٥ = ١٣$ (ماذا تلاحظ؟)

مثال ٣ : جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$

الحل : نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

أي أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٥(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٢٠$ ومنها $٥(س - ٤) = ٢٠$ أي $س = ٨$

بعض خصائص المحددات:

يلزمنا في كثير من الحالات حساب قيم المحددات بصورةٍ سريعةٍ، وخاصة عندما تكون المدخلات أعداداً كبيرةً، ولتحقيق ذلك، وتوفيراً للوقت والجهد، سوف نتعرف على بعض خصائص المحددات:

١ عند تبديل صف مكان صف، أو عمود مكان آخر، فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١) .

فمثلاً $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = (-١) \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ (تحقق من ذلك).

٢ يمكن إخراج عامل مشترك من أي صف، أو أي عمود،

فمثلاً $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ١٥ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$

(بإخراج العدد ٣ كعامل مشترك لمدخلات الصف الثالث وضربه بمحدد المصفوفة الناتجة).
تحقق من تساوي المحددين

٣ إذا أضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صفٍ آخر، أو عمودٍ آخر، فلا تتغير قيمة المحدد، فمثلاً $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ \times ٤ + ٣ & ٥ \times ٤ + ٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix}$ (تحقق من ذلك)

(ضرب مدخلات الصف الثاني بـ ٤ واضافتها لنظائرها في مدخلات الصف الأول)

٤ إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أوفي عمودين في مصفوفة فإن محددها يساوي صفراً.

فمثلاً يكون $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = ٠$ (تحقق من ذلك)

٥ إذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي فمثلاً اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

فكّر وناقش:

ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صفٍ، أو عمودٍ، كل مدخلاته أصفار؟

نشاط ٢: إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن:

١ قيمة $|أ| =$ .....

٢ $|٢أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٦ \times ٤ = -٨ = ٤|أ| = (٢)^{٢}|أ|$

٣ $|-٣أ| =$ .....

٤ $|ك أ| =$ .....

قاعدة (١):

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة ن ، فإن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$، حيث ك ∈ ح

مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً، وكان $|أ| = ٥$، $|٢أ| = ٤٠$، فما رتبة المصفوفة أ؟

الحل : نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبما أن $|٢أ| = ٤٠$ فإن $٢^{ن}|أ| = ٤٠$

ومنها $٢^{ن} \times ٥ = ٤٠$ أي أن $٢^{ن} = ٨$ ومنها ينتج أن: ن = ٣

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

قاعدة (٢):

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن | أ . ب| = | أ | × |ب|

مثال ٥ : إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد | أ . ب|

الحل : | أ | = $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ -٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٢ − ١٠ = ٢

وكذلك |ب| = $\begin{vmatrix} -٤ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ − ١٢ = −١٠

ومنه | أ . ب| = | أ | × |ب| = −٢ × −١٠ = ٢٠

هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

نشاط ٣: إذا كانت س = [٤ ٥] ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، فلإيجاد |س . ص| فإننا نجد

س . ص = [٢٣] ومنها |س . ص| = ٢٣

١ ص . س = ...

٢ |ص . س| = ...

ماذا تلاحظ؟

تمارين ٣ – ٣

١ جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ جـ $|م_{٣٥}|$

٢ حل المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$

٣ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث إن: $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ \cdot ب| = -١٢$ فما قيمة $|٢أ| + |٥ب|$ ؟

٤ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{٣}| = ١٢٥$ ، فما قيمة/ قيم س؟

٥ إذا علمت أن معادلة المستقيم في المستوى والمار بالنقطتين $(س_{١}، ص_{١})$ ، $(س_{٢}، ص_{٢})$ تعطى بالقاعدة $\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ س_{١} & ص_{١} & ١ \\ س_{٢} & ص_{٢} & ١ \end{vmatrix} = ٠$

فاستخدم القاعدة في إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣)، (٥، ٧).

٦ اذكر خاصية/ خصائص المحددات التي استخدمت في كل من المتساويات الآتية:

أ $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ جـ $\begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix}$

٧ باستخدام خصائص المحددات أثبت ما يلي:

أ $\begin{vmatrix} ١ & أ & ب+جـ \\ ١ & جـ & أ+ب \\ ١ & ب & أ+جـ \end{vmatrix} = ٠$ ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$

٣ - ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي أ . م = م . أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

نشاط ١ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} \frac{٢-}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{٤-}{٦} & \frac{٥}{٦} \end{bmatrix}$

١ $|أ| = ٦$

٢ $أ . ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٤- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{٢-}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{٤-}{٦} & \frac{٥}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$

٣ ب . أ = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ ونكتب (ب = $أ^{-١}$) ويكون أ . $أ^{-١}$ = $أ^{-١}$. أ = م

مثال ١ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ فبيّن فيما إذا كانت ب = $أ^{-١}$

الحل : $أ . ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$

$ب . أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$

ومنها ب = $أ^{-١}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix}$

أ . ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} =$ ..... ماذا تستنتج ؟

مثال ٢ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، تحقق فيما إذا كان للمصفوفة س نظيراً ضربياً أم لا؟

الحل : نفرض أن للمصفوفة س نظيراً ضربياً هو ص = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ ، ومن التعريف يكون

س . ص = ص . س = م$_٢$

أي أن: س . ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣أ + ٢جـ & ٣ب + ٢د \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

لكن $\begin{bmatrix} ٣أ + ٢جـ & ٣ب + ٢د \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

∴ لا يوجد للمصفوفة س نظير ضربي.

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان | أ | = ٠

مثال ٣ : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ٣٢ \neq$ صفر ، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

$|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ٠$ أي أن المصفوفة ب منفردة.

مثال ٤ : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (س+١) \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (س+١) \end{vmatrix} = ٢(س + ١) - ٢٤$

وبما أن أ مصفوفة منفردة فيكون |أ| = ٠

$٢(س + ١) - ٢٤ = ٠$

$٢س + ٢ - ٢٤ = ٠$ ومنها س = ١١

خصائص النظير الضربي:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة ، وكان ك عدداً حقيقياً ≠ ٠ ، فإن:

١ $(أ^{-١})^{-١} = أ$ ٢ $(ك أ)^{-١} = \frac{١}{ك} (أ^{-١})$ ٣ $(أ . ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١}$

إثبات الخاصية الثالثة:

(البرهان للمعرفة فقط)

$(أ . ب) (أ . ب)^{-١} = م$ بضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة $أ^{-١}$ من اليمين ينتج أن:

$أ^{-١} . (أ . ب) . (أ . ب)^{-١} = أ^{-١} . م$ ومنها ينتج $(أ^{-١} . أ) . ب . (أ . ب)^{-١} = أ^{-١} . م$

أي أن $ب . (أ . ب)^{-١} = أ^{-١} . م$ وبضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة $ب^{-١}$ من اليمين ينتج أن:

$ب^{-١} . ب . (أ . ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١} . م$ ومنها $(ب^{-١} . ب) . (أ . ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١} . م$

أي أن: $(أ . ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١}$، وبنفس الطريقة نثبت أن $(أ . ب)^{-١} \times (أ . ب) = م$

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

مثال ٥ : جد النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ (إن وجد).

الحل : نفرض أن: أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$

أ . أ$^{-١}$ = م$_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} ٥س+٣ع & ٥ص+٣ل \\ ٦س+٤ع & ٦ص+٤ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

كما أن أ$^{-١}$. أ = م$_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥س+٦ص & ٣س+٤ص \\ ٥ع+٦ل & ٣ع+٤ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

ينتج أن: س = ٢ ، ع = −٣ ، ص = $\frac{-٣}{٢}$ ، ل = $\frac{٥}{٢}$

أي أن: أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} \frac{-٣}{٢} & ٢ \\ \frac{٥}{٢} & -٣ \end{bmatrix}$ (تحقق من ذلك)

تعميم:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ مصفوفةً غير منفردةٍ فإن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن: أ$^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال ٦ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد س$^{-١}$ (إن أمكن).

الحل : |س| = ٦ − (−٢) = ٨ ≠ ٠

المصفوفة س لها نظير ضربي، وتكون س$^{-١}$ = $\frac{١}{٨}\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٨} & \frac{١}{٨} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

نشاط ٣: حاولت مريم إيجاد العلاقة بين قيمة |أ$^{-١}$|، وقيمة | أ |، فجربت عدة مصفوفات من الرتبة الثانية، وحصلت على النتائج الآتية:

١ | أ | = ٢ ، |أ$^{-١}$| = $\frac{١}{٢}$

٢ | أ | = $\frac{١}{٧}$ ، |أ$^{-١}$| = ٧

٣ | أ | = ك ، ك ≠ ٠ ، |أ$^{-١}$| = ... ، واستنتجت العلاقة |أ$^{-١}$| = $\frac{١}{|أ|}$

هل العلاقة التي حصلت عليها مريم صحيحة دائماً؟ فسّر إجابتك.

تمارين ٣ – ٤

١ بيّن أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} \text{جاس} & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \text{د} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$$

٢ ما قيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردةً ؟ أ $= \begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ ٤ & ٢\text{ك} \end{bmatrix}$ ب $= \begin{bmatrix} ٤ & \text{ك} \\ ١ & \text{ك} \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، فجد: أ $\text{أ}^{-١}$ (إن أمكن) ب $(\text{أ}^{-١})^{-١}$

٤ إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، وكان $|\text{أ}^{-١}| = \frac{١}{٥}$، فما قيمة س؟

٥ إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} \text{س} & -٣ \\ ١ & \text{ص} \end{bmatrix}$، وكان $|\text{أ}^{-١}| = |\text{أ}|$ فما قيمة/ قيم المقدار (س ص)؟

٦ إذا علمت أن أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، وكان أ . جـ = ب ، فجد جـ$^{-١}$

٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين وكانت أ مصفوفةً غير منفردةٍ بحيث أ . ب = أ . جـ فأثبت أن: ب = جـ ، بحيث جـ مصفوفة.

٣ - ٥ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Systems of Linear Equations)

نشاط ١: يزرع الحاج أبو رفيق أرضه سنوياً بالقمح والشعير، ويبيع المحصول في السوق الفلسطيني، فإذا كان ثمن ٣ أكياس من القمح مع ٥ أكياس من الشعير يساوي ١٤٠ ديناراً، وكان ثمن ٥ أكياس من القمح يزيد عن ثمن ٤ أكياس من الشعير بمقدار ٣٦ ديناراً.

حاول أحمد كتابة النظام المكون للمسألة من معادلتين، بفرض أن س تمثل سعر الكيس الواحد من القمح ، ص سعر الكيس الواحد من الشعير، فحصل على المعادلتين

٣س + ٥ص = ١٤٠ ..... (١)

٥س – ٤ص = ٣٦ ..... (٢)

وكتب مصفوفة المعاملات أ = $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات ك = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ومصفوفة الثوابت جـ = $\begin{bmatrix} \triangle \\ \square \end{bmatrix}$

ثم كتب المعادلة المصفوفية أ . ك = جـ

وتعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطّيّة (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وسنتناول ثلاث طرق:

١ طريقة النظير الضربي*

٢ طريقة كريمر*

٣ طريقة جاوس

* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطّيّة على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت جـ .

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطّيّة الآتي:

٢س + ٣ص = ١٠ ، −٣س +٥ص = ٤ ، فإن مصفوفة المعاملات هي: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات هي: ك = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ومصفوفة الثوابت هي: جـ = $\begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ كما يأتي:

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ وهي على الصورة أ . ك = جـ وبالتالي:

تكون ك = $أ^{-١}$. جـ بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

مثال ١ : حل النظام : ٢س + ص = −١ ، ٤س + ص = ١ ، باستخدام طريقة النظير الضربي.

الحل : نكتب المعادلة المصفوفية على النحو: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٤ = -٢$ ومنها $أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \\ -١ + -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن: س = ١ ، ص = −٣

فكّر وناقش:

ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

٤س + ص = ١ ، ٢س + ص = −١

نشاط ٢ : عند حل نظام المعادلات الآتي: ٣ س − ب ص = ٣ ، ب س − ٣ ص = ب، باستخدام طريقة النظير الضربي، حيث ب > ٣. حوّل سفيان النظام إلى المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٣ & -ب \\ ب & -٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ب \end{bmatrix}$$ وهي على الصورة أ . ك = جـ

١ ما إشارة | أ |؟

٢ $أ^{-١}$ = ...

٣ قيمة ص = ...

ثانياً: طريقة كريمر

سبق وأن مثلنا أي نظام من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ على النحو أ . ك = جـ
حيث إن مصفوفة المعاملات أ غير منفردةٍ، ك مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام يتضمن المتغيرين س ، ص ، فإننا نجدهما على النحو: س = $\frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، ص = $\frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$

حيث إن: $أ_{س}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.
$أ_{ص}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

مثال ٢ : باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي: ٣ س + ٥ ص = ١، ٢ س + ٣ ص = ٠

الحل : نكون المصفوفات: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فيكون:

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ١٠ = -١ \text{ ، } |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٠ = ٣ \text{ ، } |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$$

$$\therefore \text{ س} = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٣}{-١} = -٣ \quad \text{ ، ص} = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٢}{-١} = ٢$$

نشاط ٣: قامت حنين بحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص، فوجدت أن المصفوفة

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، والمصفوفة $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ فإن:

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلّته حنين هي: .....

س = ... ، ص = ...

ثالثاً: طريقة جاوس

لقد قدم الرياضي الألماني كارل جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) هذه الطريقة التي تعتمد على تكوين مصفوفة ممتدة (تشمل المعاملات والثوابت في نظام المعادلات)، فإذا كان لدينا النظام:

$$أ_{١١} س + أ_{٢١} ص + أ_{٣١} ع = جـ_{١}$$
$$أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص + أ_{٣٢} ع = جـ_{٢}$$
$$أ_{١٣} س + أ_{٢٣} ص + أ_{٣٣} ع = جـ_{٣}$$

فإن المصفوفة الممتدة للنظام هي $\overline{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} & جـ_{١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & جـ_{٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & جـ_{٣} \end{array}\right]$

وللحصول على حل للنظام، نجري بعض العمليات على صفوف $\overline{أ}$ ، لنحصل على مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ ونجد منها أولاً قيمة المتغير ع ، ثم بالتعويض العكسي نجد قيمة المتغير ص، ثم المتغير س.

والعمليات التي يمكن إجراؤها على صفوف المصفوفة أ :

١. تبديل صف مكان صف آخر.
٢. ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً.
٣. ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً، وإضافتها إلى صف آخر.

ملاحظة:

إذا كانت $أ_{١١} = ٠$ ، فيمكن تبديل صف مدخلته الأولى $\neq ٠$ مكان الصف الأول في المصفوفة الممتدة $\overline{أ}$

مثال ٣ : استخدم طريقة جاوس لحل النظام: ٣ س + ٧ ص = ١٠ ، ٢ س − ٥ ص = -٣

الحل : المصفوفة الممتدة للنظام هي $\overline{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & ٧ & ١٠ \\ ٢ & -٥ & -٣ \end{array}\right]$ ونجري العمليات على النحو الآتي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & ٧ & ١٠ \\ ٢ & -٥ & -٣ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٢ + \frac{-٢}{٣} ص_١} \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & ٧ & ١٠ \\ ٠ & \frac{-٢٩}{٣} & \frac{-٢٩}{٣} \end{array}\right]$$

ومنها تكون $\frac{-٢٩}{٣}$ ص = $\frac{-٢٩}{٣}$ ، أي أن ص = ١

وبالتعويض العكسي ٣س + ٧(١) = ١٠ ومنها س = ١

مثال ٤ : استخدم طريقة جاوس لحل النظام: س + ص − ع = ٩ ، ص + ٣ع = ٣ ، $-$س − ٢ع = ٢

الحل : نكون المصفوفة الممتدة $\overline{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٣ \\ -١ & ٠ & -٢ & ٢ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٣ \\ -١ & ٠ & -٢ & ٢ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٣ + ص_١} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & -١ & -٣ & ١١ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٣ - ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -٦ & ٨ \end{array}\right]$$

وبهذا حصلنا على مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسي

فتكون $-$٦ع = ٨ ، ومنها ع = $\frac{-٤}{٣}$ كذلك ص + ٣ع = ٣ ، ومنها ص = ٧

كما أن: س + ص − ع = ٩ ومنها س = $\frac{٢}{٣}$

تمارين ٣ - ٥

١ حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

أ) س – ص = ٣
٢س + ص = ٦

ب) س + ص = ٢
١٠س + ص = ١١

٢ حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

أ) س – ص = ٥
س + ٢ص = ٢

ب) س + ص = -٣
٢ص + س = -٢

٣ عند حل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة س ، ص

٤ استخدم طريقة جاوس في حل الأنظمة الآتية:

أ) ٣س – ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

ب) س – ص + ع = ٦ ، س + ٢ص + ع = ٣ ، ٢س + ص – ع = ٠

تمارين عامة

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

أ) ٤ ب) -١ جـ) ١ د) -٣

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ س^{٢} + س & ٥ \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س ؟

أ) $\{٣ ، -٢\}$ ب) $\{-٣\}$ جـ) $\{٢\}$ د) $\{-٣ ، ٢\}$

٣ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة $٢٢أ - ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب$؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين، فما العبارة الصحيحة دائما فيما يأتي؟

أ) $|٢أ| = ٤ |أ|$ ب) $|أ + ب| = |أ| + |ب|$

جـ) $أ . ب = ب . أ$ د) $|ب . أ^{-١}| = \frac{|ب|}{|أ|}$

٥ إذا كان س . ص = ص . س = م ، فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يأتي: (س ، ص مربعتان من نفس الرتبة)

أ) $س^{-١} = ص$ ب) ص مصفوفة منفردة جـ) س = ص د) س = $-$ص

٦ إذا كانت س مصفوفة بحيث س . $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ فماذا يمكن أن تكون المصفوفة س؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \end{bmatrix}$

٧ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي أ$^{-١}$ + أ ، حيث أ$^{-١}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ؟

أ) و ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$ د) ٧ م$_{٢}$

٨ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين
بحيث إن: | أ . ب| = ١٨، | أ | + |ب| = ١١، وكان| أ | ≤ |ب| فما قيمة | أ | ؟
أ) ٧ ب) ٩ جـ) ٢ د) ٦

٩ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$، فما قيمة أ^{٢} – أ ؟

أ) ١٠ م$_{٢}$ ب) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$ د) ٨ م$_{٢}$

١٠ استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين في المتغيرين س ، ص
فوجد أن: |أ$_{س}$| = ٢| أ | = $-\frac{١}{٢}$|أ$_{ص}$| ، فما قيم س، ص على الترتيب؟
أ) ٢ ، -٤ ب) -٤ ، ٢ جـ) ١، -٢ د) ٢ ، $\frac{-١}{٢}$

٢ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix}$ = ٧ ، فما قيم س ، ص؟

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ فجد : أ | أ | أ$^{-١}$ ب | ٣أ | جـ (-٢أ)$^{-١}$

٤ جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix}$ = -٩

٥ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

ب $\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ١- & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ١١ \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أ$^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ص \\ ٥- & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيم س ، ص؟

٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير صفريتين، بحيث أن أ . ب = و ، فأثبت أن:
إحدى المصفوفتين أ ، ب على الأقل ليس لها نظير ضربي.

٨ عند حل المعادلتين ن س − ص = ٥ ، ك س + ص = ٣ ، ن ، ك عددان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كريمر، إذا كانت $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ تمثل محدد أ$_{ص}$

جد قيمة: أ ن ، ك ب س ، ص

٩ إذا كانت أ$^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد (أ^{٢})$^{-١}$ ، (أ$^{-١}$)^{٢} (ماذا تلاحظ؟)

١٠ استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات: ٣س + ٢ ص = ٤$^{-}$ ، ٥ ص + س = ٣

١١ استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي:

س − ص + ٤ع = ٩ ، ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢ ، ٣ص + س − ع = ٤$^{-}$

١٢ إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & ٤- & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢} س \end{vmatrix} = ٥٠-$ ، فجد قيم س مستخدماً خصائص المحددات.

١٣ أقيّم ذاتي: أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر إثارة في هذه الوحدة.

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة

٤

التكامل غير المحدود وتطبيقاته

Indefinite Integral and its Applications

كيف يستطيع المهندسون تصميم المباني ذات المنحنيات والمنحدرات المعقدة؛ لتبدو في النهاية في غاية الإبداع والإتقان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل غير المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ إيجاد الاقتران الأصلي لاقتران معطى (إن أمكن) وتحديد العلاقة بين التفاضل والتكامل.

٢ التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود، واستخدامها في إيجاد تكاملات معطاة.

٣ إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرة حدود، ومثلثية، وأسّية، ولوغاريتمية، ونسبية.

٤ استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وبالأجزاء، وبالكسور الجزئية في إيجاد تكاملات معطاة.

٥ توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية.

٤ - ١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

تعاني محافظات الوطن من شحّ في المياه، وتعتبر مشكلة المياه من أبرز معوّقات التنمية في فلسطين بشكل عام، لذلك يعكف المهتمون بالتنقيب عن المياه الجوفية وحفر الآبار الارتوازية، للتغلب على أسباب شحّ المياه، والتفكير في البحث عن مصادر متجددة.

نشاط ١: كان معدل تسرب الماء من خزان رئيسي يعطى بالعلاقة $\frac{د\,ص}{د\,ن} = ٣ن$ م^{٣} / ساعة حيث ن تمثل الزمن بالساعة، برأيك كيف يمكن تحديد قاعدة الاقتران (ص) الذي يمثل كمية الماء المتسرب من هذا الخزان بعد فترة محددة من الزمن؟

نشاط ٢: من خلال ما تعلمته في التفاضل، أكمل الجدولين الآتيين، ثم أجب عن الأسئلة التي تليهما:

الجدول (أ)	
ق(س)	قَ(س)
س	
س + ٥	
جاس	
س^{٢} + ٤	٢س
هـ^{س}	

الجدول (ب)	
قَ(س)	ق(س)
٧	
٢س	
٣س^{٢}	س^{٣} + ٣
قا^{٢}س	
$\frac{١}{س}$	

١ تسمى العملية في الجدول (أ) عملية اشتقاق.

٢ اقترح اسمًا للعملية في الجدول (ب).....

٣ ما العلاقة بين العمليتين؟.....

٤ هل الاقتران ق(س) يكون وحيدًا لكل حالة في الجدول (ب)؟ أعط أمثلة.

تعريف: معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوس المشتقة (اقتران أصلي) للاقتران ق(س) إذا كان: مَ(س) = ق(س) ، ∀ س ∈] أ ، ب[

مثال ١ : تحقق من أن الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} اقتران أصلي للاقتران ق(س) = س^{٣}

الحل : الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) لأن $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{٤}$ س^{٤}) = س^{٣}

(لاحظ أن ق(س) متصل لأنه كثير حدود).

نشاط ٣: جد اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) = ٢س

حسب التعريف يكون أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) هو م(س) = س^{٢}

لأن $\frac{د}{د س}$ (س^{٢}) = ٢س

١ هل م$_{١}$(س) = س^{٢} − ٢ ، م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥ اقترانان أصليان آخران للاقتران ق(س)؟

٢ هل يوجد عدد محدد من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س). ما العلاقة بينها؟

قاعدة:

إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.

أتعلم:

الفرق بين أي اقترانين أصليين لاقتران معين يساوي اقتراناً ثابتاً دائماً.

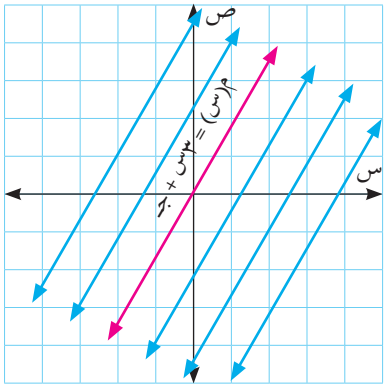
مثال ٢ : إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، فجد لَ(٣).

الحل : الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان للاقتران المتصل ق(س)

إذن م(س) − هـ(س) = جـ (ثابت)، ومنه ل(س) = جـ

لَ(س) = ٠ ومنها لَ(٣) = ٠

مثال ٣ : بيّن أن مجموعة الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = ٣ هي مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية.



الحل : جميع الاقترانات الأصلية تكون على الصورة:

م(س) = ٣س + جـ ، حيث جـ ∈ ح، وهي عبارة عن مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية،

فمثلاً إذا كان جـ = ٥ فإن م$_{١}$(س) = ٣س + ٥

وإذا كانت جـ = −٣ فإن م$_{٢}$(س) = ٣س − ٣ وهكذا ...

مثال ٤ : بيّن فيما إذا كان الاقتران م(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ اقترانًا أصليًا للاقتران

ق(س) = ١ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ ، س ≠ ٠

الحل : م(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ = س − $\frac{١}{س^{٢}}$ = س − س$^{-٢}$

ومنها مَ(س) = ١ − (−٢)س$^{-٢-١}$ = ١ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ = ق(س)

∴ م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س).

تعريف:

١ تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز ∫ق(س) دس ويقرأ تكامل ق(س) دال س.

٢ إذا كان مَ(س) = ق(س) فإن ∫ق(س) دس = م(س) + جـ حيث جـ ثابت. (ثابت التكامل).

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً فإن $\frac{د}{د س}$ (∫ق(س) دس) = ق(س).

نشاط ٤: لاحظ أن $\int س^{٣}\,دس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$ وذلك لأن $\frac{د}{د س}\left(\frac{س^{٤}}{٤} + جـ\right) = س^{٣}$

وكذلك $\int ص^{-٢}\,دص = \frac{-١}{ص} + جـ$ وذلك لأن .....

وبالمثل $\int جتاس\,دس = جاس + جـ$ وذلك لأن .....

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان $\int ق(س)\,دس = س^{٣} - ٣س + ٥$

جد ق(٢) ، قَ(٢).

الحل : بما أن ق(س) اقتران متصل

إذن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\,دس\right) = ق(س) = ٣س^{٢} - ٣$

ومنها ق(٢) = ٣(٢)^{٢} − ٣ = ٩

قَ(س) = ٦س ومنها قَ(٢) = ١٢

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = $\int هـ^{س}\,دس$ ، وكان ق(٠) = ٣ ، فجد ق(١).

الحل : ق(س) = $\int هـ^{س}\,دس = هـ^{س} + جـ$

لكن ق(٠) = ٣ ، ومنها يكون هـ^{٠} + جـ = ٣

أي أن ١ + جـ = ٣ ومنها جـ = ٢

ق(س) = هـ^{س} + ٢ ومنها ق(١) = هـ^{١} + ٢ = هـ + ٢

تمارين ٤ - ١

١ بيّن فيما إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) في كل مما يأتي:

أ) م(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ ، ق(س) = س $\sqrt{٢ + س^{٢}}$

ب) م(س) = قا^{٣}س ، ق(س) = ٣ قا^{٢}س ظاس

جـ) م(س) = لـــو$_{هـ}$(س^{٣} + هـ^{٢س}) ، ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

٢ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)،
وكان م(س) = س^{٢} − ٤س + ٦ ، هـ(٣) = ٤، فجد هـ(١).

٣ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ق(٤) = ٧ ، قَ(٤) = ١٠،
فما قيمة (٣م − هـ)َ(٤)؟

٤ إذا كان م(س) = ٢ظاس − ٢قاس أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = $\frac{أ}{١ + جاس}$ ،
س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$. احسب قيمة الثابت أ.

٥ إذا كان $\int$ق(س) دس = أ س^{٣} + جـ س ، حيث ق(س) اقتران متصل،
وكان ق(−١) = ٤ ، قَ(٢) = ٢٤، فجد قيمة كلٍ من أ ، جـ .

٤ - ٢ قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integrals)

نشاط ١: تكثر الآبار الجوفية في مَسافِرْ بني نعيم شرق الخليل، فإذا ضُخّت المياه من بئرين في التوقيت نفسه، الأول بمعدل (٢٠ن)م^{٣} / ساعة، والثاني بمعدل (٣٠ن)م^{٣} / ساعة، حيث ن تمثل الزمن بالساعة فإن:

١. كمية المياه التي تضخ من البئر الأول في أي زمن ن تساوي ١٠ن^{٢} (لماذا؟)

٢. العلاقة التي تحدد كمية المياه التي يتم ضخها من البئر الثاني هي .....

٣. معدل ضخ الماء من البئرين معاً = ٥٠ن (لماذا؟)

٤. العلاقة التي تحدد كمية الماء التي يتم ضخها من البئرين معاً هي:.....

ماذا تلاحظ؟

يتطلب إيجاد الاقتران الأصلي من خلال عمليات الاشتقاق كثيراً من الوقت والجهد، لذلك سنستخدم قواعد سيتم التعرف على بعض منها من خلال النشاط الآتي.

نشاط ٢: أكمل الجدول الآتي حيث أ ∋ ح ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ق(س)	قَ(س)	⌠ قَ(س) دس
٥		جـ
أ س		أ س + جـ
س^{٣}		
س^{ن}	ن س$^{ن-١}$	
لـــو$_{هـ}$ س ، س > ٠		

لاحظ أن المقدارين ق(س) ، ⌠ قَ(س) دس ، في كل حالة يختلفان بمقدار ثابت.

١. ما العلاقة بين نواتج العمود الثاني، ونواتج العمود الثالث؟

٢. بالاعتماد على النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك التحقق من صحة القواعد الآتية:

قواعد التكامل غير المحدود:

١ $\int أ\,دس = أ\,س + جـ$ ، $أ \in ح$

٢ $\int س^{ن}\,دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$ ، $ن \neq -١$

٣ $\int \frac{١}{س}\,دس = لـو_{هـ}|س| + جـ$

٤ $\int هـ^{س}\,دس = هـ^{س} + جـ$

٥ $\int جاس\,دس = -جتاس + جـ$

٦ $\int جتاس\,دس = جاس + جـ$

٧ $\int قا^{٢}س\,دس = ظاس + جـ$

٨ $\int قتا^{٢}س\,دس = -ظتاس + جـ$

٩ $\int قاس\,ظاس\,دس = قاس + جـ$

١٠ $\int قتاس\,ظتاس\,دس = -قتاس + جـ$

خواص التكامل غير المحدود:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن:

١ $\int أ\,ق(س)\,دس = أ \int ق(س)\,دس$ ، $أ \neq ٠$

٢ $\int (ق(س) \pm هـ(س))\,دس = \int ق(س)\,دس \pm \int هـ(س)\,دس$

ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين.

مثال ١ : جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int (\frac{١}{س} + ٣)\,دس$

٢ $\int قاس\,(قاس + ظاس)\,دس$

٣ $\int (س^{٢} + هـ^{س})\,دس$

٤ $\int (٢ - ظا^{٢}س)\,دس$

الحل :

١ $\int (\frac{١}{س} + ٣)\,دس = \int \frac{١}{س}\,دس + \int ٣\,دس = لـو_{هـ}|س| + ٣س + جـ$

٢ $\int قاس\,(قاس + ظاس)\,دس = \int (قا^{٢}س + قاس\,ظاس)\,دس$

$= \int قا^{٢}س\,دس + \int قاس\,ظاس\,دس$

$= ظاس + قاس + جـ$

٣ $\int (س^{٢} + هـ^{س})\, دس = \int س^{٢}\, دس + \int هـ^{س}\, دس = \frac{س^{٣}}{٣} + هـ^{س} + جـ$

٤ $\int (٢ - ظا^{٢}س)\, دس = \int (٢ - (قا^{٢}س - ١))\, دس = \int (٣ - قا^{٢}س)\, دس$

$= ٣س - ظاس + جـ$

مثال ٢ : جد $\int \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{س^{٢}}\, دس$

الحل : $\int \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{س^{٢}}\, دس = \int \left(\frac{س^{٢} + ١}{س}\right)^{٢} دس = \int (س + س^{-١})^{٢}\, دس$

$= \int (س^{٢} + ٢ + س^{-٢})\, دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س - \frac{١}{س} + جـ$

فكّر وناقش:

هل يمكنك إيجاد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟

نشاط ٣: إذا كان قَ(س) = (٥س^{٤} − ١)، وكان ق(١) = ٥، فلإيجاد ق(٢) لاحظ أن:

ق(س) = $\int$ قَ(س) دس = $\int$ (٥س^{٤} − ١) دس = س^{٥} − س + جـ

لكن ق(١) = ... = ٥ ومنها جـ = ...

فيكون ق(س) = ...

ق(٢) = ...

فكّر وناقش:

ما الفرق بين: $\frac{د}{د س}$ $\int$ ق(س) دس ، $\int$ قَ(س) دس، علماً بأن ق(س) اقتران متصل؟

تمارين ٤ - ٢

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int ٨ \, دس$

ب $\int \left(٧س^{٢} - ٤س + \frac{٣}{س^{٤}} \right) دس$

جـ $\int (٣ + س) \sqrt{س} \, دس$

د $\int (٥س + قاس ظاس) \, دس$

هـ $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س - ١}} \, دس$

و $\int \frac{٢س^{٣} + ٥س^{٢} - ١}{س^{٢}} \, دس$

ز $\int \frac{١}{جتا^{٢}س} \, دس$

حـ $\int (٥هـ^{س} + \frac{٢}{س}) \, دس$

٢ إذا كان $ق'(س) + هـ^{س} = جتاس$ ، جد ق(س) حيث $ق(٠) = -١$

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int ق(س) \, دس = جاس - جتاس + ٢$

أثبت أن: $ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) - ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٢$

٤ إذا كان $\int (ق'(س) + س^{٢}) \, دس = ٢س^{٣} + جـس^{٢} + ٢$، وكان $ق'(١) = ٤$، $ق(٢) = ٦$، فجد $ق(-١)$

٤ - ٣ تطبيقات التكامل غير المحدود (Applications of Indefinite Integrals)

أولاً: تطبيقات هندسية: Geometric Applications

نشاط ١: يسير رجل على طريق منحنٍ بحيث يكون ميل المماس عند أي نقطة أ (س ، ص) على الطريق يساوي (٢س + ١). (لاحظ أن ميل المماس هو صَ = ٢س + ١)

١ الاقتران الذي يمثل معادلة الطريق هو اقتران تربيعي قاعدته ص = ...

٢ إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على الطريق، فإن قاعدة الاقتران ص = ...

مثال ١: إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠
وكان قَ(س) = ٦س ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل:

$$ق(س) = \int ق'(س)\,دس$$

$$= \int ٦س\,دس = ٣س^{٢} + جـ_{١}$$

لكن ق(٠) = ١ (لماذا؟)

ومنها جـ$_{١}$ = ١ ، قَ(س) = ٣س^{٢} + ١

وأيضاً ق(س) $= \int$ قَ(س) دس

$$= \int (٣س^{٢} + ١)دس = س^{٣} + س + جـ_{٢}$$

وبما أن النقطة (٠ ، ٢) هي نقطة تماس

فإن ق(٠) = ٢ ومنها جـ$_{٢}$ = ٢

ق(س) = س^{٣} + س + ٢

مثال ٢ : إذا كان قَّ(س) = ١٢ س فجد معادلة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (−١ ، ١).

الحل : بما أن قَ(س) = $\int$ قَّ(س) دس

فإن قَ(س) = $\int$ ١٢ س دس = ٦س^{٢} + جـ$_{١}$

كما أن ق(س) = $\int$ (٦س^{٢} + جـ$_{١}$) دس = ٢س^{٣} + جـ$_{١}$ س + جـ$_{٢}$ (لماذا؟) ..... (١)

لكن ق(١) = ٣ ، ق(−١) = ١

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ١ ، −جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ٣

وبحل المعادلتين معاً نحصل على قيمة: جـ$_{١}$ = −١ ، جـ$_{٢}$ = ٢

معادلة المنحنى المطلوبة هي: ق(س) = ٢س^{٣} − س + ٢

ثانياً: تطبيقات فيزيائية Physical Applications

نشاط ٢: نظّمت وزارة التربية والتعليم العالي المرحلة النهائية من مسابقة العدو لمسافة ١٠٠ متر، وشارك فيها ١٧ متسابقاً على مستوى المحافظات الشمالية، وكان من المتسابقين حامد وحاتم، فإذا انطلقا معاً، بحيث كانت سرعة حامد (ن) م/ ث وسرعة حاتم $\left(\frac{ن^{٢}}{٢}\right)$ م/ ث.

لاحظ أن سرعة حامد ع$_{١}$(ن) = ن

فتكون القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حامد هي:

ف$_{١}$(ن) = $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + جـ

وبما أن ف$_{١}$(٠) = ٠ فتكون ف$_{١}$(ن) = $\frac{ن^{٢}}{٢}$

ولإيجاد زمن وصول حامد نهاية السباق

نجعل ف$_{١}$(ن) = ١٠٠ متر ومنها ن = $\sqrt{٢٠٠}$ ثانية

١ القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حاتم هي : .....

٢ الزمن الذي استغرقه حاتم في قطع السباق يساوي .....

٣ أيهما قطع مسافة السباق أولاً؟

تأمل المخطط الآتي، ولاحظ العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل.

ف(ن) ⇄ ع(ن) ⇄ ت(ن)

بالتكامل (بين ف(ن) وع(ن)) — بالاشتقاق (بين ف(ن) وع(ن))

بالتكامل (بين ع(ن) وت(ن)) — بالاشتقاق (بين ع(ن) وت(ن))

مثال ٣ : بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن ، فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة؟

الحل : ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن

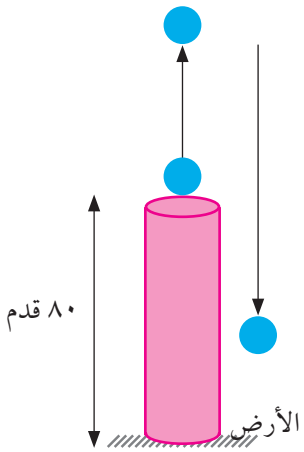
ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن = $\int$ (٣ن^{٢} + ٢ن) دن = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ

وبما أن ف(٠) = ٠ فإن جـ = ٠

أي أن ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}

بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين = ف(٢) = ١٢ متراً

مثال ٤ : قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدماً. جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علماً بأن تسارعها يساوي -٣٢ قدم/ ث^{٢}.



الحل :

$$ع(ن) = \int ت(ن)\,دن$$

$$= \int -٣٢\,دن = -٣٢ن + جـ_{١}$$

لكن ع(٠) = ٦٤ ومنها $جـ_{١} = ٦٤$

$$ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤$$

تصل الكرة لأقصى ارتفاع بعد ثانيتين ..... (لماذا؟)

$$ف(ن) = \int (-٣٢ن + ٦٤)\,دن = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ_{٢}$$

لكن ف(٠) = ٨٠ ومنها $جـ_{٢} = ٨٠$

$$ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٨٠$$

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ١٤٤ قدماً.

تمارين ٤ - ٣

١ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي س(٣س − ٢) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٥

٢ إذا كان قَ(س) = أس − ٣س^{٢} ، فجد قاعدة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)).

٣ جد قاعدة منحنى الاقتران ص = ق(س) الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة (١ ، ٢) علماً بأن ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٢$\sqrt{\text{أ س}}$ حيث أ ثابت، أ > ٠ .

٤ إذا كان قَ(س) = جتاس وكان قَ(π) = ٢ ، ق(π) = ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س).

٥ تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ ث^{٢}، فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة، وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني؟

٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي $\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، $\frac{٢}{٣}$).

٧ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متراً عن سطح الأرض، وكانت السرعة في اللحظة ن تساوي (−١٠ن + ٤٠)م/ ث، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى سطح الأرض.

٤ - ٤ طرق التكامل (Methods of Integration)

يصادفنا في كثير من الأحيان تكاملات لا يمكن إيجادها باستخدام قواعد التكامل غير المحدود، وسنتعرف في هذا الدرس على ثلاث طرق لإيجاد التكامل غير المحدود، وهي:

١ التكامل بالتعويض.

٢ التكامل بالأجزاء.

٣ التكامل بالكسور الجزئية.

أولاً: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

نشاط ١: إذا كان ق(س) = ٢س (٢ + س^{٢})^{٢}

١ تحقق أن: م(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢ + س^{٢})^{٣} اقتران أصلي للاقتران ق(س).

٢ $\int$ ٢س (٢ + س^{٢})^{٢} دس = ...

٣ ليكن هـ(س) = ٢ + س^{٢} فإن هـ$'$(س) = ...

٤ العلاقة بين ٢س ، ٢ + س^{٢} هي .....

فكّر وناقش:

هل $\int$ س $\sqrt{\text{س}}$ دس = $\int$ س دس . $\int \sqrt{\text{س}}$ دس ؟ ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الفصل الأول بأن $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ق(س))$^{\text{ن}}$ = ن(ق(س))$^{\text{ن}-١}$ ق$'$(س)

أي أن (ق(س))$^{\text{ن}}$ هو اقتران أصلي للاقتران ن(ق(س))$^{\text{ن}-١}$ ق$'$(س)

وبذلك يكون: $\int$ (ق(س))$^{\text{ن}-١}$ ق$'$(س) دس = $\frac{١}{\text{ن}}$ (ق(س))$^{\text{ن}}$ + جـ

وبشكل عام:

إذا كان هـ(س) = ع فإن: $\int$ ق(هـ(س)) هـ$'$(س)) دس = $\int$ ق(ع) دع

علماً بأن ق(س) ، هـ(س) اقترانان متصلان.

مثال ١ : جد $\int ٢س \sqrt{س^٢ + ٤}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = $س^٢ + ٤ \Leftarrow$ دع = ٢س دس ومنها دس = $\frac{دع}{٢س}$

وبالتعويض، ينتج أن:

$$\int ٢س \sqrt{س^٢ + ٤} \text{ دس} = \int ٢س \sqrt{ع} \frac{دع}{٢س} = \int \sqrt{ع} \text{ دع} = \frac{٢ع^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

$$= \frac{٢(س^٢ + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

مثال ٢ : جد $\int (٢س + ١)^٥$ دس

الحل : نفرض أن: ع = ٢س + ١ ومنها يكون دع = ٢دس ، أي أن دس = $\frac{دع}{٢}$

$$\int (٢س + ١)^٥ \text{ دس} = \int ع^٥ \frac{دع}{٢} = \frac{ع^٦}{١٢} + جـ$$

$$= \frac{١}{١٢} (٢س + ١)^٦ + جـ$$

نشاط ٢: لإيجاد $\int$ قا^٢(٣س + ٢) دس

نفرض ع = ٣س + ٢ ، فيكون دع = ٣ دس ومنها دس = ...

فيصبح $\int$ قا^٢(٣س + ٢) دس = $\frac{١}{٣} \int$ قا^{٢}ع دع = ...

$$= \frac{١}{٣} \text{ ظا}(٣س + ٢) + جـ$$

أتعلم:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int$ قَ(أ س + ب) دس = $\frac{١}{أ}$ ق(أ س + ب) + جـ

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، أ ≠ ٠

مثال ٣ : جد $\int$ س هـ$^{س^{٢}+١}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = س^{٢} + ١ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دع}{٢س}$ وبالتعويض والاختصار، ينتج أن:

$$\int س\ هـ^{س^{٢}+١}\ دس = \frac{١}{٢}\int هـ^{ع}\ دع$$

$$= \frac{هـ^{ع}}{٢} + جـ$$

$$= \frac{هـ^{س^{٢}+١}}{٢} + جـ$$

مثال ٤ : جد $\int \frac{١ + \sqrt{٢س + ١}}{\sqrt{٢س + ١}}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = $\sqrt{٢س + ١}$

$$دع = \frac{١}{\sqrt{٢س + ١}}\ دس \quad \text{ومنها} \quad دس = ٢ع\ دع$$

$$\text{إذن } \int \frac{١ + \sqrt{٢س + ١}}{\sqrt{٢س + ١}}\ دس = \int (٢ + ٢ع)\ دع = ٢ع + ع^{٢} + جـ$$

$$= ٢\sqrt{٢س + ١} + س + جـ \quad \text{(لماذا؟)}$$

مثال ٥ : جد $\int$ جا^{٣}س دس

الحل : $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جا^{٢}س جاس دس = $\int$ (١ − جتا^{٢}س) جاس دس

إذن $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جاس دس − $\int$ جتا^{٢}س جاس دس

$$= -جتاس + \frac{جتا^{٣}س}{٣} + جـ \quad \text{(لماذا؟)}$$

مثال ٦ : جد $\int$ س^{٥}(س^{٣} + ١)^{٣} دس

الحل : نفرض أن: ع = س^{٣} + ١ $\Leftarrow$ $\frac{\text{دع}}{\text{٣س}^{٢}}$ = دس

$\int$ س^{٥}(س^{٣} + ١)^{٣} دس = $\int$ س^{٥} ع^{٣} $\frac{\text{دع}}{\text{٣س}^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int$ س^{٣} ع^{٣} دع (ماذا تلاحظ؟)

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ (ع − ١) ع^{٣} دع = $\frac{١}{٣}$ $\int$ (ع^{٤} − ع^{٣}) دع

= $\frac{١}{٣}$ $\left(\frac{\text{ع}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ع}^{٤}}{٤}\right)$ + جـ

عوّض قيمة ع واكتب الناتج بدلالة س

نشاط ٣: جد $\int$ جا^{٢}س جتا^{٢}س دس

تعلم أن: ٢جتا^{٢}س = ١ + جتا٢س ، ٢جا^{٢}س = ١ − جتا٢س

بالتعويض في التكامل عن جا^{٢}س ، جتا^{٢}س يصبح:

$\int$ جا^{٢}س جتا^{٢}س دس = $\int$ $\frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{٢س}}{٤}$ دس

= $\frac{١}{٤}$ $\int$ (١ − جتا^{٢}٢س) دس = $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١}{٤}$ $\int$ جتا^{٢}٢س دس

= ..... (أكمل الحل)

قاعدة:

$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ دس = لـو$_{هـ}$ |ق(س)| + جـ ، ق(س) ≠ ٠

مثال ٧ : جد $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}$ دس

الحل : لاحظ أن البسط يساوي مشتقة المقام

وباستخدام القاعدة السابقة يكون $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}$ دس = لـو$_{هـ}$ |(١ + ظاس)| + جـ

تمارين (٤-٤ أ)

١ جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}}$ دس

ب) $\int (١ - س)$ جا$(س^{٢} - ٢س)$ دس

جـ) $\int \frac{لـو_{هـ} س}{س}$ دس

د) $\int (س^{٢} + ٢) \sqrt{س + ١}$ دس

هـ) $\int (س + ٢)^{٢} (س - ١)^{٦}$ دس

و) $\int$ جتا$^{٤}س$ دس

ز) $\int \frac{١}{١ + جاس}$ دس

حـ) $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س} + هـ^{٢س}}$ دس

٢ جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{\sqrt{س + ١}}{س^{٥}}$ دس

ب) $\int \frac{١}{س^{٢}}$ جا $\frac{١}{س}$ دس

جـ) $\int$ (جاس + قتاس)^{٢} دس

د) $\int \frac{(س + ٢)^{٥}}{س^{٧}}$ دس

هـ) $\int س^{٢} (س^{٧} + س^{٣})^{\frac{١}{٣}}$ دس

و) $\int$ ظا$^{٣}س$ دس

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int$ س جتاس دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

أتعلم:

$\frac{د}{د س}$ (ق × ع) = ق × $\frac{د ع}{د س}$ + ع × $\frac{د ق}{د س}$ حيث ق ، ع اقترانات قابلة للاشتقاق.

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:

ق × ع = $\int$ ق دع + $\int$ ع دق ..... (لماذا؟)

ومنها $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل بعض الاقترانات التي تكون على صورة حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقةً للآخر.

قاعدة:

قاعدة التكامل بالأجزاء: $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

مثال ١ : جد $\int$ س جتاس دس

الحل : نفرض أن: ق = س ، دع = جتاس دس

دق = دس ، ع = جاس

وحسب القاعدة $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

يكون $\int$ س جتاس دس = س جاس − $\int$ جاس دس = س جاس + جتاس + جـ

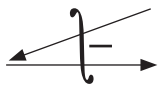
فكّر وناقش:

إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ع لا يغير من النتيجة.

نشاط ١: جد $\int$ س^{٢} جاس دس

نفرض أن: ق = س^{٢} ، دع = جاس دس

∴ دق = ٢س دس ، ع = −جتاس



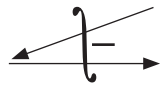
إذن $\int$ س^{٢} جاس دس = −س^{٢} جتاس + ٢ $\int$ س جتاس دس

= ..... (أكمل الحل)

مثال ٢ : جد $\int$ (س − ١)هـ^{س} دس

الحل : نفرض أن: ق = س − ١ ، دع = هـ^{س} دس

∴ دق = دس ، ع = هـ^{س}



إذن $\int$ (س − ١)هـ^{س} دس = (س − ١)هـ^{س} − $\int$ هـ^{س} دس

= (س − ١)هـ^{س} − هـ^{س} + جـ

نشاط ٢: جد $\int$ هـ$^{\sqrt{س}}$ دس

نبدأ بالتكامل بالتعويض

بفرض $\sqrt{س}$ = ص فيكون دص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس

ومنها ٢ص دص = دس

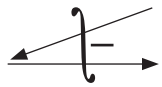
إذن $\int$ هـ$^{\sqrt{س}}$ دس = ٢ $\int$ ص هـ^{ص} دص

= ..... (أكمل مستخدماً التكامل بالأجزاء)

مثال ٣ : جد $\int \frac{س}{\sqrt{٢ + س}}$ دس

الحل : نفرض أن: ق = س ، دع = $\frac{١}{\sqrt{٢ + س}}$ دس

∴ دق = دس ، ع = $٢\sqrt{٢ + س}$



$\int \frac{س}{\sqrt{٢ + س}}$ دس = $٢س\sqrt{٢ + س} - \int ٢\sqrt{(س + ٢)}$ دس

= $٢س\sqrt{٢ + س} - \frac{٤}{٣}\sqrt{(س + ٢)^{٣}}$ + جـ (لماذا؟)

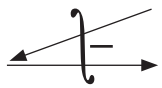
فكّر وناقش:

أوجد $\int \frac{س}{\sqrt{٢ + س}}$ دس من المثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.

مثال ٤ : جد $\int$ هـ^{س} جاس دس

الحل : نفرض أن: ق = جاس ، دع = هـ^{س} دس

∴ دق = جتاس دس ، ع = هـ^{س}

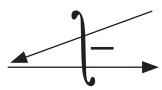


$\int$ هـ^{س} جاس دس = هـ^{س} جاس − $\int$ هـ^{س} جتاس دس

لاحظ أن: $\int$ هـ^{س} جتاس دس على نمط التكامل المطلوب نفسه.

نفرض أن: ق = جتاس ، دع = هـ^{س} دس

∴ دق = −جاس دس ، ع = هـ^{س}



$\int$ هـ^{س} جتاس دس = هـ^{س} جتاس + $\int$ هـ^{س} جاس دس (ماذا تلاحظ)؟

بالتعويض عن $\int$ هـ^{س} جتاس دس في التكامل الأصلي، فيصبح:

$\int$ هـ^{س} جاس دس = هـ^{س} جاس − هـ^{س} جتاس − $\int$ هـ^{س} جاس دس + جـ

ومنها $\int$ هـ^{س} جاس دس = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} جاس − هـ^{س} جتاس) + جـ ..... (لماذا؟)

نشاط ٣: جد $\int$ جتا(لـــو$_{هـ}$ س) دس

(افرض ص = لـــو$_{هـ}$ س واستفد من المثال السابق في إكمال الحل).

تمارين ٤ – ٤ ب

١ جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int$ س لـــو$_{هـ}$ س دس

ب) $\int$ س قا^{٢}س دس

جـ) $\int$ لـــو$_{هـ}$ (س + ٢)^{٣} دس

د) $\int$ س جا٢س دس

هـ) $\int$ س^{٣} هـ$^{س^{٢}+١}$ دس

و) $\int$ جا $\sqrt{\text{س} + ١}$ دس

ز) $\int \frac{٢\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ دس

حـ) $\int$ هـ$^{\text{س}}$ جاس جتاس دس

ط) $\int$ هـ$^{\text{س}}$ (قتاس – قتاس ظتاس) دس

ي) $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}$ جتا$(\frac{١}{\text{س}})$ دس

٢ أثبت أن: $\int \text{س}^{\text{ن}}$ لـــو$_{هـ}$ س دس $= \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١}$ (لـــو$_{هـ}$ س $- \frac{١}{\text{ن} + ١}$) + جـ ، ن $\neq -١$ ، س > ٠

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int \frac{س + ١}{س^{٢} - ٤}$ دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

لقد تعلمنا في الدروس السابقة إيجاد $\int \frac{٢س}{س^{٢} - ١}$ دس بالتكامل بالتعويض، لأن البسط مشتقة للمقام

ولكن ماذا بالنسبة للتكامل $\int \frac{س + ١}{س^{٢} - ٤}$ دس ؟

في مثل هذه الحالة نلجأ لطريقة جديدة تسمى التكامل بالكسور الجزئية، وسوف نقتصرها على الاقترانات النسبية، التي يمكن كتابة المقام فيها على شكل حاصل ضرب ثلاثة عوامل خطّيّة مختلفة على الأكثر.

نشاط ١: لكتابة ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٣} - س}$ على صورة كسور جزئية، نقوم بتحليل المقام إلى عوامله الأولية،

وكتابة ق(س) على الصورة ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٣} - س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١} + \frac{جـ}{س + ١}$

وبتوحيد المقامات، والإفادة من تساوي الاقترانات، نحصل على المعادلة:

س − ٢ = أ(س − ١) (س + ١) + بس(س + ١) + جـس(س − ١) ..... (١)

ولتحديد قيم أ ، ب ، جـ نقوم بما يلي:

نعوض س = ١ في المعادلة (١) ومنها ب = $\frac{-١}{٢}$

نعوض س = −١ في المعادلة (١) ومنها جـ = $\frac{-٣}{٢}$

ولإيجاد قيمة أ نعوض س = ... في المعادلة (١) ومنها أ = ...

فيصبح : $\frac{س - ٢}{س^{٣} - س} = \frac{٢}{س} + \frac{\frac{-١}{٢}}{س - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{س + ١}$

هل يمكنك إيجاد قيم أ ، ب ، جـ بطرق أخرى؟

نسمي كتابة المقدار $\frac{س - ٢}{س^{٣} - س}$ على الصورة $\frac{٢}{س} + \frac{\frac{-١}{٢}}{س - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{س + ١}$ بالكسور الجزئية

ملاحظة:

إذا أمكن كتابة الاقتران النسبي على الصورة $\frac{أ}{س - م} + \frac{ب}{س - ن} + \frac{جـ}{س - ل}$

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، فإن تكامله يساوي

أ لـو$_{هـ}$|س − م| + ب لـو$_{هـ}$|س − ن| + جـ لـو$_{هـ}$|س − ل| + ثابت التكامل

ويراعى في ذلك أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام،

فإذا كانت درجة البسط ≥ درجة المقام نستخدم القسمة المطولة.

مثال ١ : جد $\int \frac{٢}{س^{٢} - ١}$ دس

الحل : لاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام، وأن البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نكتب:

$\frac{٢}{س^{٢} - ١} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$ ومنها أ = ١ ، ب = −١ (لماذا؟)

إذن $\int \frac{٢}{س^{٢} - ١}$ دس $= \int \left(\frac{١}{س - ١} + \frac{-١}{س + ١}\right)$ دس $= \int \frac{١}{س - ١}$ دس $+ \int \frac{-١}{س + ١}$ دس

= لـو$_{هـ}$|س − ١| − لـو$_{هـ}$|س + ١| + جـ

(اكتب الناتج بصورة أخرى)

مثال ٢ : جد $\int \frac{س - ٢}{س^{٣} - س}$ دس

الحل : توصلنا من النشاط (١) أن: $\frac{س - ٢}{س^{٣} - س} = \frac{٢}{س} + \frac{-١}{٢} + \frac{-٣}{٢}$

وبالتالي $\int \frac{س - ٢}{س^{٣} - س}$ دس $= \int \left(\frac{٢}{س} + \frac{-١}{٢} + \frac{-٣}{٢}\right)$ دس

= ٢ لـو$_{هـ}$|س| + $\frac{-١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|س − ١| + $\frac{-٣}{٢}$ لـو$_{هـ}$|س + ١| + جـ

مثال ٣ : جد $\int \frac{س^{٣}}{٤ - س^{٢}}$ دس

الحل : نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذا نقسم البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة.

وينتج أن: $\frac{س^{٣}}{٤ - س^{٢}} = -س + \frac{٤س}{٤ - س^{٢}}$ ومنها يكون $\frac{٤س}{٤ - س^{٢}} = \frac{أ}{٢ - س} + \frac{ب}{٢ + س}$

وبتوحيد المقامات، ومساواة الاقترانين، ينتج أن: أ = ٢ ، ب = -٢ (لماذا؟)

ويصبح $\frac{س^{٣}}{٤ - س^{٢}} = -س + \frac{٤س}{٤ - س^{٢}} = -س + \frac{٢}{٢ - س} + \frac{-٢}{٢ + س}$

ومنها $\int \frac{س^{٣}}{٤ - س^{٢}}$ دس $= \frac{-س^{٢}}{٢} - ٢$ لـو$_{هـ}$ |٢ − س| − ٢ لـو$_{هـ}$ |٢ + س| + جـ

$= \frac{-س^{٢}}{٢} - ٢$ لـو$_{هـ}$ |س^{٢} − ٤| + جـ ..... (لماذا؟)

حل آخر : $\int \frac{س^{٣}}{٤ - س^{٢}}$ دس $= \int (-س + \frac{٤س}{٤ - س^{٢}})$ دس (بعد إجراء القسمة)

ومنها $\int \left(-س + \frac{٤س}{٤ - س^{٢}}\right)$ دس $= \int (-س - ٢(\frac{-٢س}{٤ - س^{٢}}))$ دس

$= \frac{-س^{٢}}{٢} - ٢$ لـو$_{هـ}$ |س^{٢} − ٤| + جـ ..... (لماذا؟)

مثال ٤ : جد $\int \frac{\sqrt{٧}\ س}{س - ٩}$ دس

الحل : نلاحظ أن $\frac{\sqrt{٧}\ س}{س - ٩}$ ليس اقتراناً نسبياً، ولكن يمكن كتابته على الصورة $\frac{\sqrt{٧}\ س}{(\sqrt{٧}\ س)^{٢} - ٩}$

وبفرض ص = $\sqrt{٧}\ س$ فإن دص = $\frac{١}{٢\sqrt{٧}\ س}$ دس ومنها دس = ٢ص دص

إذن $\int \frac{\sqrt{٧}\ س}{س - ٩}$ دس $= \int \frac{ص}{ص^{٢} - ٩} \times ٢ص$ دص $= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢} - ٩}$ دص

(لاحظ أن درجة البسط = درجة المقام؛ لذا نقسم البسط على المقام).

وينتج أن: $\int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢} - ٩}$ دص $= \int (٢ + \frac{١٨}{ص^{٢} - ٩})$ دص وبالكسور الجزئية، تكون

$\int \frac{\sqrt{٧}\ س}{س - ٩}$ دس $= ٢\sqrt{٧}\ س - ٣$ لـو$_{هـ}$ |$\sqrt{٧}\ س$ + ٣| + ٣ لـو$_{هـ}$ |$\sqrt{٧}\ س$ − ٣| + جـ (تحقق من ذلك)

مثال ٥ : جد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس

الحل : نفرض $هـ^{س} = ص$ ومنها $دص = هـ^{س}$ دس

$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس $= \int \frac{دص}{ص^{٢} + ص - ٢}$ ، وباستخدام الكسور الجزئية، يكون:

$\frac{١}{ص^{٢} + ص - ٢} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ٢}$ ومنها (أ $= \frac{١}{٣}$ ، ب $= \frac{-١}{٣}$) (لماذا؟)

$\int \frac{دص}{ص^{٢} + ص - ٢} = \frac{١}{٣}$ لـو$_{هـ}$ |ص − ١| − $\frac{١}{٣}$ لـو$_{هـ}$ |ص + ٢| + جـ

ومنها $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس $= \frac{١}{٣}$ لـو$_{هـ}$ |$هـ^{س}$ − ١| − $\frac{١}{٣}$ لـو$_{هـ}$ ($هـ^{س}$ + ٢) + جـ

نشاط ٢: جد $\int$ قاس دس

إرشاد: لاحظ أن قاس $= \frac{١}{جتاس} = \frac{جتاس}{جتا^{٢}س} = \frac{جتاس}{١ - جا^{٢}س}$

إذن $\int$ قاس دس $= \int \frac{جتاس}{١ - جا^{٢}س}$ دس وباستخدام التكامل بالتعويض بفرض ص $=$ جاس

يصبح التكامل على الصورة $\int \frac{١}{١ - ص^{٢}}$ دص

$=$ ..... (أكمل الحل)

وبطريقة أخرى: $\int$ قاس دس $= \int \frac{قاس(قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}$ دس

(بضرب البسط والمقام بالمقدار قاس + ظاس)

فيكون $\int \frac{قاس(قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}$ دس $= \int \frac{قا^{٢}س + قاس ظاس}{قاس + ظاس}$ دس

$=$ لـو$_{هـ}$ |قاس + ظاس| + جـ (لماذا؟)

مثال ٦ : جد $\int \frac{\text{جا}^3 س}{٢ + \text{جتا} س}$ دس

الحل : $\int \frac{\text{جا}^3 س}{٢ + \text{جتا} س}$ دس $= \int \frac{\text{جاس} (١ - \text{جتا}^2 س)}{٢ + \text{جتا} س}$ دس ..... (لماذا؟)

نفرض أن: ص = جتاس ومنها دص = $-$جاس دس

$\int \frac{\text{جا}^3 س}{٢ + \text{جتا} س}$ دس $= \int \frac{\text{جاس} (١ - \text{ص}^2)}{٢ + \text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \int \frac{\text{ص}^2 - ١}{٢ + \text{ص}}$ دص (لماذا؟)

$= \int (\text{ص} - ٢ + \frac{٣}{٢ + \text{ص}})$ دص (بعد إجراء القسمة المطولة)

$= \frac{\text{ص}^2}{٢} - ٢\text{ص} + ٣\text{لـو}_هـ |٢ + \text{ص}| + \text{جـ}$

= ..... (أكمل بكتابة الناتج بدلالة س)

تمارين ٤ - ٤ ج

١ جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^2 - ٢\text{س} - ٣}$ دس

ب) $\int \frac{\text{س}^2 + ٢}{\text{س}^3 + \text{س} - ٦}$ دس

جـ) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٢}$ دس

د) $\int \frac{\text{س} + ٢}{(\text{س}^2 - \text{س})(\text{س} + ١)}$ دس

هـ) $\int$ قتاس دس

و) $\int \frac{١}{\text{س} - \text{س}(\text{لـو}_هـ \text{س})^2}$ دس

٢ جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{-\text{س} + ٧}{\text{س}^2 + \text{س} - ٢}$ دس

ب) $\int \frac{\text{جاس}}{١٦ - \text{جتا}^2 س}$ دس

جـ) $\int \frac{\text{قتا}^2 س}{٢ - \text{قتا}^2 س}$ دس

د) $\int \frac{\text{س}^2}{\text{س}^6 + \text{س}^3}$ دس

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران ق(س)،

فماذا يمثل $\int$ (م(س) – هـ(س)) دس ؟

أ) اقتراناً ثابتاً ب) اقتراناً تربيعياً ج) اقترانا خطّياً د) صفراً

٢ إذا كان ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} – ٢) دس ، وكان ق(٢) = ٩، فما قيمة ق(–٢)؟

أ) –١ ب) –٩ ج) ٤ د) ١

٣ إذا كان $\int$ ٢س لـو$_{هـ}$ س دس = س^{٢} لـو$_{هـ}$ س – $\int$ ع دق ، فما قيمة ع دق ؟

أ) لـو$_{هـ}$ س دس ب) س^{٢} دس ج) س دس د) س لـو$_{هـ}$ س دس

٤ ما قيمة $\int$ قتا^{٤}س ظتاس دس؟

أ) $\frac{-١}{٥}$ قتا^{٥}س + جـ ب) $\frac{-١}{٤}$ قتا^{٤}س + جـ

ج) $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ د) $\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ

٢ أثبت أن: الاقتران م(س) = $\sqrt{١٧ - س^{٢}}$ هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) = $\frac{-س}{\sqrt{١٧ - س^{٢}}}$

٣ إذا كانت قَ(س) = س^{٢} + ٣جاس ، قَ(٠) = ٣ ، ق(٠) = ٢ ، فجد ق(س).

٤ إذا كانت سرعة جسيم ع بعد ن دقيقة تعطى بالقاعدة: ع = ٤ن + لـو$_{هـ}$ (ن + ١)

جد إزاحة الجسيم بعد ٣ دقائق، علماً بأنه قطع مسافة ٨ أمتار بعد دقيقة واحدة.

٥ جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int س \sqrt{س^{٢} - ٣}$ دس

٢ $\int \frac{١}{س^{١٠} + س}$ دس

٣ $\int قا^{٢} \sqrt{س}$ دس

٤ $\int قا(٣س + ١)$ ظا$(٣س + ١)$ دس

٥ $\int (س^{٢} + ١)$ جتاس دس

٦ $\int لـو_{هـ} (س^{٢} - ١)$ دس

٧ $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + س}$ دس

٨ $\int \frac{قا^{٤}س}{١ - ظا^{٢}س}$ دس

٩ $\int (جتا^{٤}س - جا^{٤}س)$ دس

١٠ $\int (قتاس + ظتاس)^{٨}$ قتاس دس

١١ $\int (س^{٨} - ٦س)^{٦}$ دس

٦ يتحرك جسيم حسب العلاقة ع = أ $\sqrt{ف}$ عدديا، حيث ع السرعة (م/ ث)، ف المسافة (م) فإذا كان ف(٢) = ٩ أمتار ، ف(٤) = ١٦ متراً ، فما قيمة الثابت أ ؟

٧ إذا كانت س قَ(س) + ق(س) = جتاس ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(π) = ٠

٨ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد تكامل اقترانات غير محدودة			
اوظف قواعد التكامل في حل مسائل منتمية			
اكامل اقترانات باحد طرق التكامل			