الأكاديمية العربية الدولية

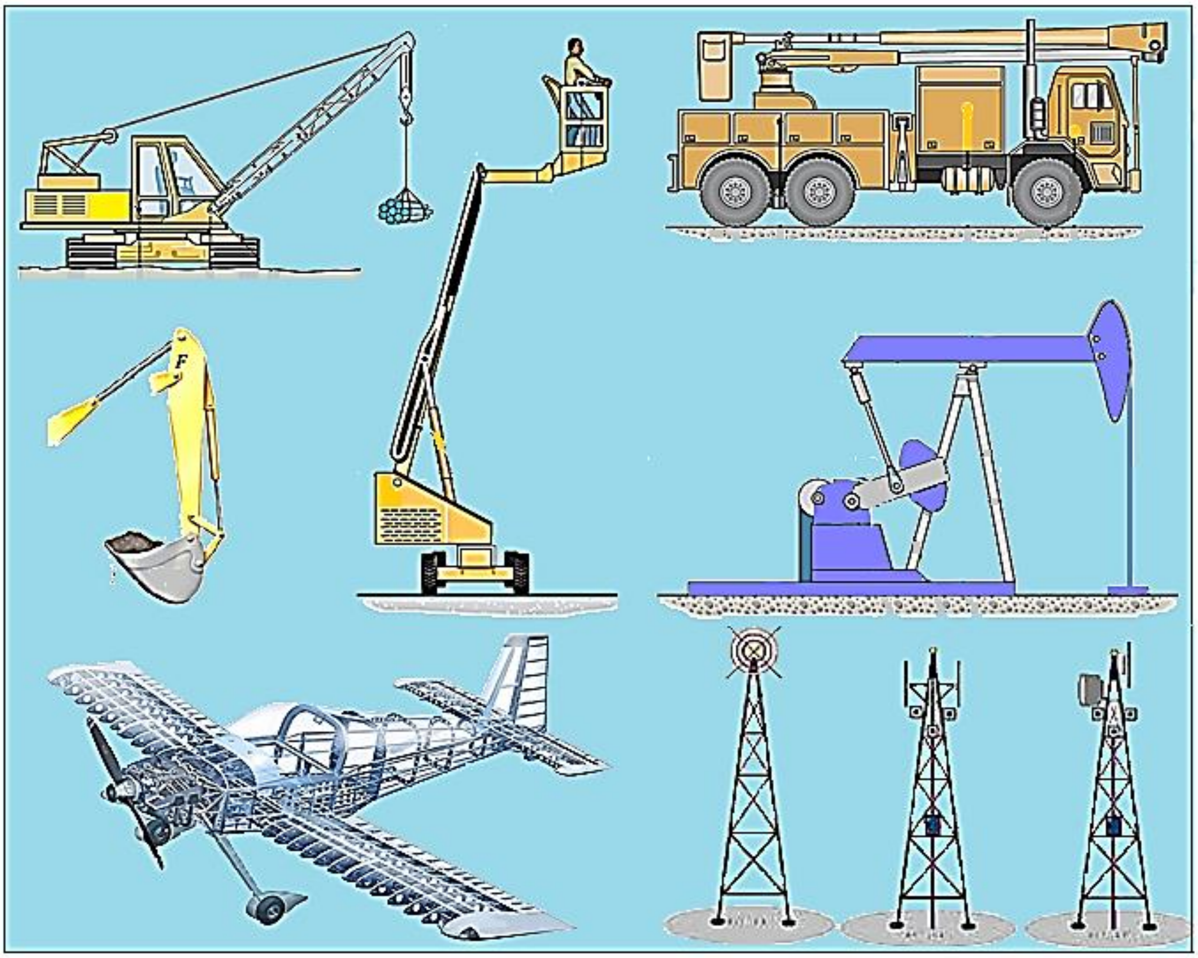
الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية
المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الميكانيك الهندسي المبسط

علم السكون



إسماعيل خضير عبدالله الجبوري

جامعة نينوى - كلية هندسة الالكترونيات

١٤٤٥ هـ

٢٠٢٣ م

الميكانيك الهندسي المبسط (علم السكون)

- **العنوان:** الميكانيك الهندسي المبسط (علم السكون)

- **التأليف:** إسماعيل خضير عبدالله الجبوري

الطبعة الأولى

١٤٤٥ هـ – ٢٠٢٣م

ISBN: 978-9922-8710-6-6

رقم الإيداع في دائرة الكتب والوثائق الوطنية ببغداد (٣٥١٠)

الآراء الواردة في هذا الكتاب تعبر عن وجهة نظر المؤلف

طباعة: مطبعة نركال، العراق / الموصل / المجموعة الثقافية

الناشر: دار نون للطباعة والنشر

القياس: ١٧*٢٤

Email: muhammedyounes51@gmail.com

07709176176

07507070150

صفحتنا على ا لفيسبوك: منشورات نون

دار نون للطباعة والنشر

الميكانيك الهندسي المبسط

علم السكون

إسماعيل خضير عبدالله الجبوري

ماجستير هندسة ميكانيكية / تصاميم طائرات

١٤٤٥ هـ

٢٠٢٣ م

بسم الله الرحمن الرحيم

يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ

صدق الله العظيم

(المجادلة ــ ١١)

الخلاصة

الميكانيك الهندسي بفرعيه علم السكون (الستاتيكا) وعلم الحركة (الديناميكا) موضوع موسع جداً يحتاجه مهندسو الاختصاصات الميكانيكية والانشائية، أما الاختصاصات الكهربائية والالكترونية فلا تحتاج التوسع في هذا المجال مما دفع الى التفكير في اعداد كتب ستاتيك وديناميك مختصرة ومبسطة تتطرق الى المعلومات الكافية لهذه الاختصاصات من المجالات الهندسية.

يتألف هذا الكتاب من ثمانية فصول، يتضمن الفصل الأول التعاريف والقوانين المتخصصة في مجال الميكانيك الهندسي بشكل عام وعلم السكون (الستاتيكا) بشكل خاص، ويتطرق الى قوانين نيوتن في الحركة وفي الجاذبية الكونية، ويتطرق أيضاً الى انظمة الاحداثيات وأنظمة الوحدات المستخدمة عالمياً وتحويلاتها. ويتضمن الفصل الثاني تحليل القوى المسلطة على الأجسام وبيان أنواعها وانظمتها وايجاد محصلة تلك القوى. ويتضمن الفصل الثالث العزوم المسلطة حول محاور الأجسام وطرق استنتاجها وايجاد محصلاتها وكيفية تحليل القوى واستنتاج محصلة القوى والعزوم معاً. يبين الفصل الرابع كيفية تحقيق توازن القوى والعزوم المطلوبة لتحقيق الاستقرار السكوني للأجسام ويتفرع الى فرعين، الأول يبين كيفية تحقيق التوازن للجسيمات النقطوية، والثاني يبين كيفية تحقيق التوازن للأجسام الجاسئة. يتضمن الفصل الخامس الهياكل الهندسية وآلية استنتاج القوى والعزوم المطلوبة لاجراء التصاميم المثالية لهذه الهياكل، وينشطر الى شطرين، الشطر الأول يبحث في تحليل هياكل المسنمات التي تتألف منها الجسور والابراج والمنشآت الحديدية، أما الشطر الثاني فيبحث في تحليل هياكل الآلات والمكائن. يتضمن الفصل السادس موضوع الاحتكاك بين الأسطح المتلامسة أثناء الحركة الانزلاقية مع بيان أنواعه وخصائصه. ويتضمن الفصل السابع طرائق ايجاد مراكز الكتل والأبعاد (الأطوال والمساحات والحجوم) للأجسام. وأخيراً يتضمن الفصل الثامن طرق احتساب عزم القصور الذاتي للأجسام، وهذا ضروري جداً في حساب الاجهادات والتشوهات للأجزاء الميكانيكية المطلوبة في اعداد الحسابات التصميمية لهذه الأجزاء، ويتفرع هذا الفصل الى فرعين، الفرع الأول يبين كيفية احتساب عزم القصور الذاتي للمساحات، أما الفرع الثاني فيبين كيفية احتساب عزم القصور الذاتي للكتل. يختم الكتاب ببعض الملاحق الضرورية في دراسة الميكانيك الهندسي.

الفصل الأول

أساسيات علم السكون

STATICS FUNDAMENTALS

مقدمة:

علم الميكانيك الهندسي هو فرع من فروع علم الفيزياء يدرس حالات السكون والحركة للأجسام تحت تأثير القوى والعزوم الخارجية والداخلية وردود الأفعال المسلطة عليها، والسكون هو حالة خاصة من حالات الحركة تكون فيها قيم مفردات الحركة (السرعة والتعجيل) مساوية للصفر، أو تكون الحركة منتظمة، أي أن الحركة تكون بسرعة ثابتة.

دراسة الميكانيك الهندسي مهمة في تطوير القدرة على التنبؤ بتأثير القوى والعزوم والحركات الخطية والدورانية أثناء اعداد التصاميم الخاصة في تصنيع المنظومات والمكائن والآلات، كذلك تنمي القدرة على تصور المكونات المادية والقوى والعزوم وردود الأفعال التي تتحكم في سلوك الآلات والمنظومات والهياكل. كما هو مهم في القدرة على معرفة المباديء الفيزيائية والرياضية وبناء النماذج الرياضية المطلوبة لاعداد التصاميم المطلوبة.

الميكانيك الهندسي يتفرع الى فرعين رئيسيين، يهتم الفرع الأول بدراسة حالة الأجسام الصلبة تحت تأثير القوى والعزوم المسلطة عليها والتي تنشطر بدورها الى الأجسام الجاسئة والأجسام المرنة، ويتم دراسة مواضيع هذا الفرع في مجالات علم السكون، وعلم الحركة، ونظرية المرونة واللدونة. أما الفرع الثاني فيهتم بدراسة حركة الموائع (السوائل والغازات) ويتم دراستها في مجالات ميكانيك الموائع وديناميك الغازات وديناميك الهواء.

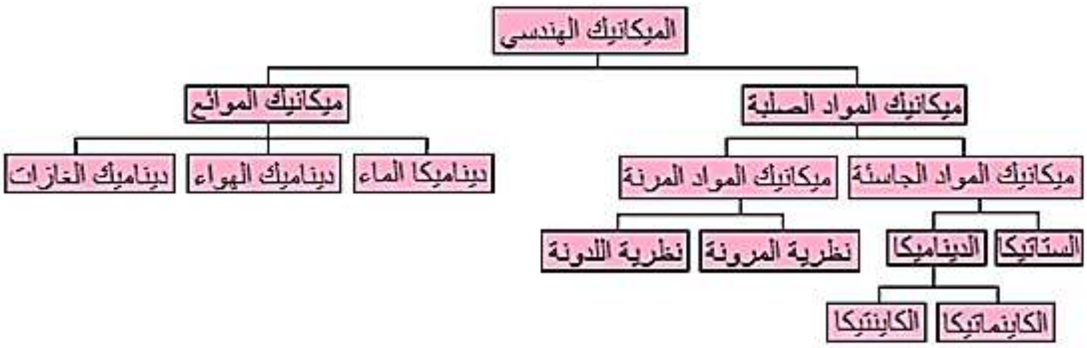
يعتبر الميكانيك الهندسي بفرعيه (علم السكون وعلم الحركة) موضوع أساسي في عمل معظم مجالات الهندسة (الميكانيكية والمدنية والفضائية والزراعية)، وكذلك في مجال الهندسة الكهربائية والالكترونية قد يجد المهندسون المختصون أنفسهم مضطرون للتعامل مع الميكانيك الهندسي أثناء النظر في مكونات الأجهزة الكهربائية والالكترونية. كما أن الميكانيك الهندسي مهم في مجالات الرياضيات التطبيقية والفيزياء التطبيقية.

يعد الميكانيك الهندسي من أقدم العلوم الطبيعية، حيث كانت للعالم " أرخميدس - Archimedes " (٢٨٧ – ٢١٢ ق. م.) كتابات تهتم بمباديء الرافعة وطفو الأجسام. وشرح العالم " ستيفن - Stevinus " (١٥٤٨ – ١٦٢٠ م) مبدأ المستوي المائل واستخدام متوازي الأضلاع في تحليل القوى. واهتم العالم " غاليلو - Galileo " (١٥٦٤ – ١٦٤٢ م) بمباديء الحركة وخاصة الحركة البندولية وقام باجراء تجارب تختص بالسقوط الحر للأجسام. أما " إسحاق نيوتن - Isaac Newton " (١٦٤٢ – ١٧٢٧ م) فقد وضع قوانين في الحركة والجاذبية الكونية عرفت باسمه وتدرس في كتب الميكانيك الهندسي.

العلماء العرب أيضاً كان لهم دور في مجال الميكانيك الهندسي، فقد بحث العالم العربي " ثابت بن قرة" (٨٣٦ – ٩٠١ م) في نظرية الدافع بالطريقة السكونية الهندسية البحتة، ثم وضع نظرية حركية أستعمل فيها مفهوم القوة لاثباتها. ودرس العالم العربي " ابن الهيثم " (٩٦٥ – ١٠٤٠ م) حركة تصادم الأجسام وتمكن من التوصل الى القواعد الأساسية التي تسيطر على الحركة. واهتم العالم العربي " عبدالرحمن الخازاني " (١٠٧٧ – ١١٥٥ م) بمجال حركة المقذوفات وتحديد السرعة المتصاعدة (التعجيل الأرضي).

تعريف الميكانيك الهندسي:

الميكانيك الهندسي (Engineering Mechanics): هو العلم الفيزيائي الذي يصف الحالة الحركية للأجسام (السكون أو الحركة) تحت تأثير القوى المسلطة عليها. ويتفرع الى فرعين، وكما موضح في الشكل أدناه.



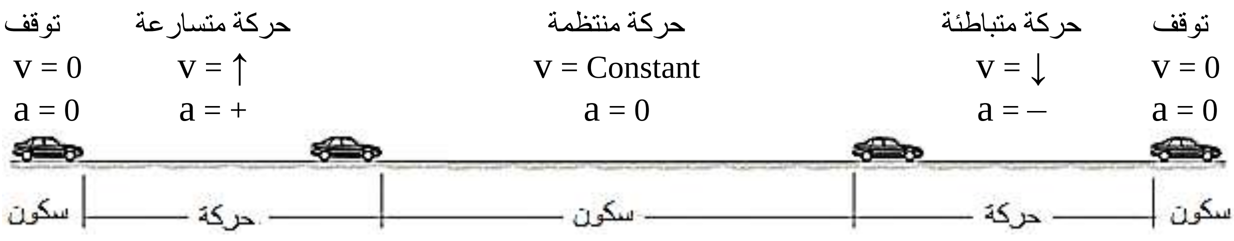
شكل (١-١) فروع الميكانيك الهندسي

علم السكون (Statics):

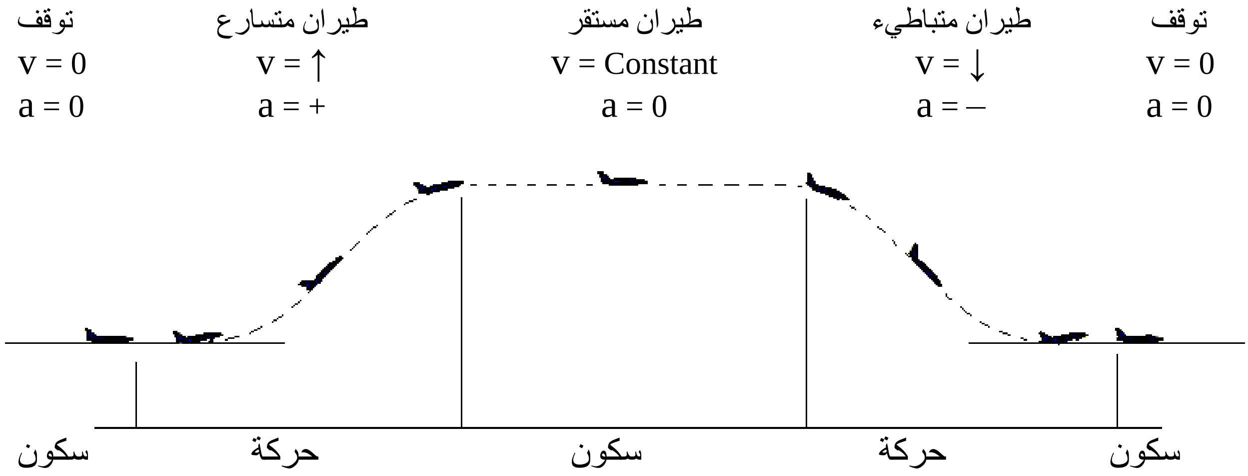
هو العلم الميكانيكي الذي يدرس حالات الأجسام تحت تأثير القوى في حالة الاستقرار (التوقف أو الحركة المنتظمة).

علم الحركة (Dynamics):

هو العلم الميكانيكي الذي يدرس حالات الأجسام تحت تأثير القوى في حالة الحركة الغير منتظمة.



شكل (١-٢) حالات الحركة والسكون أثناء انتقال سيارة من بداية الحركة الى حالة التوقف



شكل (١-٣) حالات الحركة والسكون أثناء انتقال الطائرة من بداية الحركة الى حالة التوقف

<u>مفاهيم أساسية (Basic concepts):</u>

الفضاء (Space): هو الفراغ أو الموقع الهندسي الذي يشغله الجسم، حيث يوصف هذا الفراغ أو الموقع بالقياسات الخطية والزاوية اعتماداً على نظام الاحداثيات المتبع.

الوقت (Time): مقياس يعبر عن فترات تعاقب الأحداث، وهو كمية أساسية في تحليل المسائل الديناميكية. ولا يعتمد بشكل مباشر في تحليل المسائل الستاتيكية.

الكتلة (Mass): هي مقياس مقاومة الجسم لتغير حالته الحركية (القصور الذاتي للجسم). ويمكن تعريف الكتلة على أنها كمية المادة في الجسم.

القوة (Force): التأثير الخارجي أو الداخلي على الأجسام أو بين الأجسام. أو التأثير الخارجي الذي يغير أو يحاول تغيير شكل الجسم أو حالته الحركية.

الجسيم (Particle): جسم ذو أبعاد مهملة بالمعنى الرياضي، أو هو جسم تعتبر أبعاده قريبة من الصفر بحيث يمكن تحليله على أنه كتلة نقطوية (يمكن تمثيله بنقطة).

الجسم الجاسيء (Rigid body): يعبر عن الجسم بأنه جسم جاسيء عندما يكون التغيير في المسافة بين أي نقطتين منه نتيجة القوى المسلطة عليه مهملاً.

القوة المركزة (Concentrated Force): هي القوة المؤثرة على جسم ويركز تأثيرها على نقطة واحدة على الجسم.

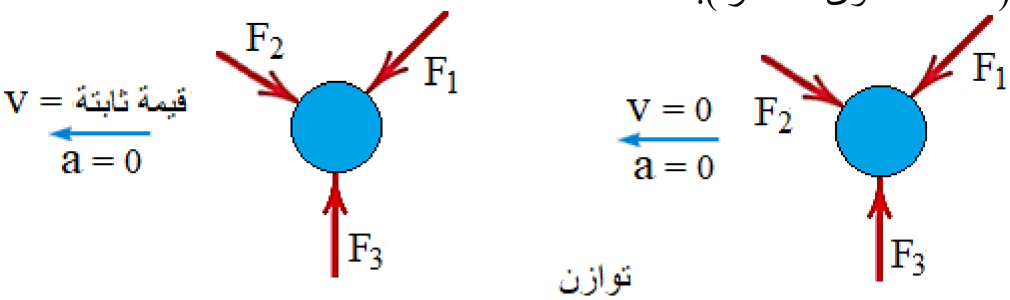
القوة الموزعة (Distributed Force): هي القوة المؤثرة على جسم ويوزع تأثيرها على مسافة أو مساحة محددة على الجسم.

قوانين نيوتن الأساسية الثلاث في الحركة:

السيد اسحاق نيوتن

قانون نيوتن الأول:

يبقى الجسم في حالة السكون أو يستمر على حالته الحركية بسرعة ثابتة ما لم تؤثر عليه قوى غير متوازنة (محصلة القوى = صفر).

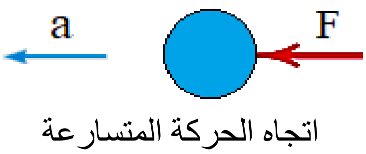


شكل (١-٤) تطبيق قانون نيوتن الأول

قانون نيوتن الثاني:

تعجيل أي جسم متحرك يتناسب طردياً مع محصلة القوى المؤثرة عليه ويكون اتجاهه باتجاه محصلة القوى.

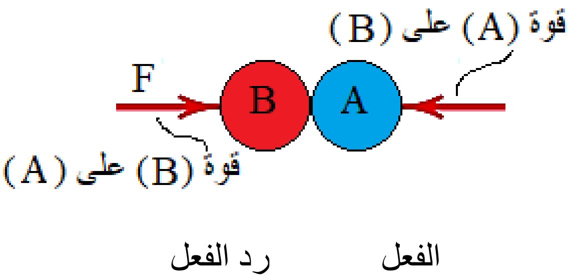
$$F = ma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{-}2)$$



شكل (١-٥)
تطبيق قانون نيوتن الثاني

قانون نيوتن الثالث:

لكل قوة فعل قوة رد فعل تسويها في المقدار وتعاكسها في الاتجاه، وتكون معها على نفس خط التأثير (Collinear).



شكل (١-٦)
تطبيق قانون نيوتن الثالث

قانون نيوتن في الجاذبية:

أي جسمين في الكون يجذب احدهما الأخرى بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع البعد بين مركزيهما.

يعبر عن القانون الرياضي للجاذبية بالمعادلة:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{-}2)$$

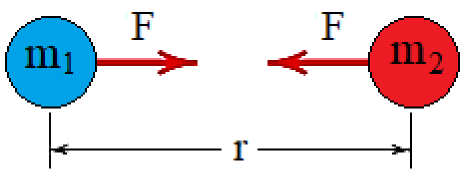
حيث:

(F) : قوة التجاذب بين الجسمين.

(G) : ثابت الجاذبية = ٦٦,٧٣ × $١٠^{-١٢}$ م^{٣} / (كغم . ثا^{٢}).

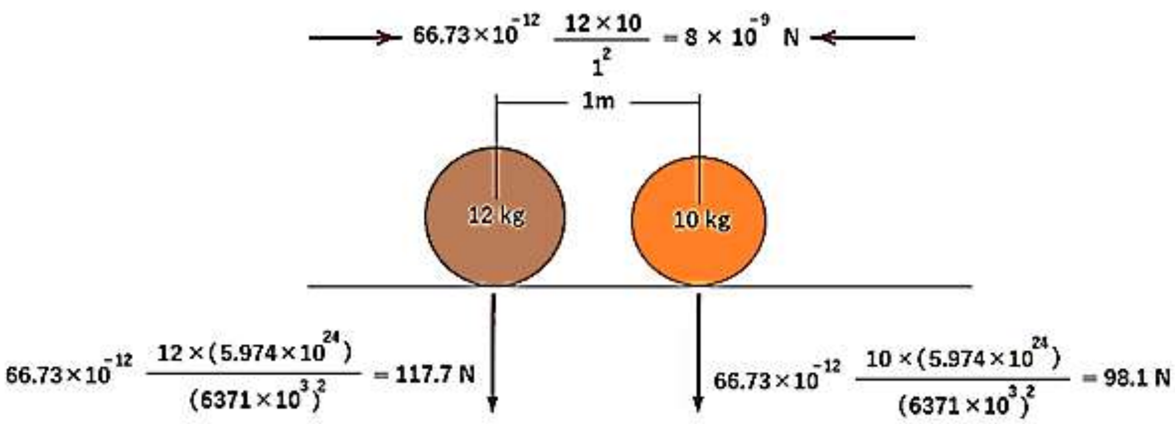
(m_1) ، (m_2) : كتل الجسمين المتجاذبين.

(r) : المسافة بين مركزي الجسمين المتجاذبين.



شكل (١-٧) تطبيق قانون نيوتن في الجاذبية

الوزن (Weight): هو قوة جاذبية الأرض للجسم.



شكل (١-٨) الفرق بين قوة الجاذبية بين الأجسام وقوة جاذبية الأرض لها (الوزن)

- أي جسمين في الطبيعة بينهما قوة تجاذب متبادلة.
- لايجاد وزن أي جسم (W) على سطح الأرض، يمكن اعتبار كتلته ($m_1 = m$).
- اذا افترضنا أن الأرض كرة غير دوارة ذات كثافة ثابتة ولها كتلة مقدارها ($m_2 = M_e$).
- اذا كانت (r) هي المسافة بين مركز الأرض ومركز الجسم والذي يمثل نصف قطر الأرض، فسيكون الوزن:

$$W = G\,\frac{M_e m}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{-}3)$$

ثابت الجاذبية (G) وكتلة الأرض (M_e) ونصف قطر الأرض (r) في المعادلة (1-3) هي قيم ثابتة ويمكن تبديلها بقيمة ثابتة واحدة يمكن تسميتها { التعجيل الأرضي (g) }.

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \quad \text{……………..} \quad (1\text{-}4)$$

فيكون الوزن في المعادلة (1-3) كما يلي:

$$W = mg \quad \text{……………..} \quad (1\text{-}5)$$

في أغلب الحسابات الهندسية يتم تحديد التعجيل الأرضي (g) عند مستوى سطح البحر وعلى خط عرض (٤٥) درجة باعتباره الموقع القياسي:

$$g = 9.81\ m/s^2$$

جدول (١-١) الخواص المدارية والفيزيائية للشمس، القمر، وبعض الكواكب

الشمس والكواكب			الكتلة ×١٠ ^{٢٤} كغم	متوسط نصف القطر كم	البعد عن الشمس ×١٠ ^{٦} كم	متوسط السرعة المدارية كم/ثا	الملاحظات
الشمس			١٩٨٩٠٠٠	٦٩٦٠٠٠			
القمر			٠,٠٧٣٥	١٧٣٧		١,٠٢٢ (حول الأرض)	البعد عن الأرض: ٣٨٤٣٩٩ كم
عطارد	الداخلية (الصخرية)	الكواكب	٠,٣٣	٢٤٣٠	٥٧,٩١	٤٧,٨٧	
الزهرة			٤,٨٦٩	٦٠٥٢	١٠٨,٢١	٣٥,٠٢	
الأرض			٥,٩٧٣٦	٦٣٧١	١٤٩,٦	٢٩,٧٨	
المريخ			٠,٦٤٢	٣٣٨٧	٢٢٧,٩٩	٢٤,٠٧٧	
المشتري	الخارجية (الغازية)		١٨٩٨,٦	٦٩٩١٠	٧٧٨,٥٥	١٣,٠٧	
زحل			٥٧٨,٤٦	٥٧٣٢٠	١٤٣٣,٤	٩,٦٩	
أورانوس			٨٦,٨١	٢٥٢٧٠	٢٨٧٦,٧	٦,٨١	
نبتون			١٠٢,٤٣	٢٤٥٥٠	٤٤٩٨,٣	٥,٤٣٢	

التوازن بين الأرض والقمر:

قانون نيوتن في الجاذبية:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$F = 66.73 \times 10^{-12} \frac{5.9736 \times 10^{24} \times 7.3477 \times 10^{22}}{(384399 \times 10^3)^2}$$

$$= 66.73 \frac{5.9736 \times 7.3477 \times 10^{28}}{384399^2} = 2 \times 10^{20}\ N$$

قانون القوة الطاردة المركزية:

$$F_c = mr\omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}6) \qquad v = \omega r \ , \quad \omega = v/r$$

$$F_c = mr\,(v/r)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}7)$$

$$F_c = mv^2/r \ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}8)$$

$$F_c = \frac{7.3477 \times 10^{22} \times 1022^2}{384399 \times 10^3} = \frac{7.3477 \times 1022^2 \times 10^{19}}{384399}$$

$$= 2 \times 10^{20}\ N$$

التوازن بين الشمس والأرض:

قانون نيوتن في الجاذبية:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$F = 66.73 \times 10^{-12} \frac{5.9736 \times 10^{24} \times 1.989 \times 10^{30}}{(149.6 \times 10^9)^2}$$

$$= 66.73 \frac{5.9736 \times 1.989 \times 10^{24}}{149.6^2} = 3.54 \times 10^{22}\ N$$

قانون القوة الطاردة المركزية:

$$F_c = mv^2/r$$

$$F_c = \frac{5.9736 \times 10^{24} \times 29780^2}{149.6 \times 10^9} = \frac{5.9736 \times 29780^2 \times 10^{15}}{149.6}$$

$$= 3.54 \times 10^{22}\ N$$

تعجيل الجاذبية المركزي على سطح الأرض (التعجيل الأرضي):

$$g = \frac{Mm}{r^2} = \frac{66.73 \times 10^{-12} \times 5.9736 \times 10^{24}}{(6371 \times 10^3)^2} = \frac{66.73 \times 5.9736 \times 10^6}{(6371)^2}$$

$$= 9.80665 \text{ m/s}^2 = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$= \frac{9.81}{0.3048} = 32.2 \text{ ft/s}^2$$

تعجيل الجاذبية المركزي على سطح القمر:

$$g_m = \frac{Gm}{{r_m}^2} = \frac{66.73 \times 10^{-12} \times 7.3477 \times 10^{22}}{(1737.35 \times 10^3)^2} = \frac{66.73 \times 7.3477 \times 10^4}{(1737.35)^2}$$

$$= 1.6244 \text{ m/s}^2$$

$$= 5.33 \text{ ft/s}^2$$

$$= 0.1656\, g_e$$

تعجيل الجاذبية المركزي على سطح الشمس:

$$g_s = \frac{Gm}{{r_s}^2} = \frac{66.73 \times 10^{-12} \times 1.989 \times 10^{30}}{(696 \times 10^6)^2} = \frac{66.73 \times 1.989 \times 10^6}{(696)^2}$$

$$= 274 \text{ m/s}^2$$

$$= 899.368 \text{ ft/s}^2$$

$$= 27.93\, g_e$$

جدول (١-٢) تعجيل الجاذبية المركزي على أسطح الكواكب وقوة الجاذبية بين الشمس والكواكب

الكواكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون
تعجيل الجاذبية المركزي (م/ثا^{٢})	٣,٧٣	٨,٨٧	٩,٨١	٣,٧٣	٢٥,٩٢	١١,٧٥	٩,٠٧	١١,٣٤
قوة الجاذبية بين الشمس والكوكب (× ١٠ ^{٢٢} نيوتن)	١,٣١	٥,٥٢	٣,٥٤	٠,١٦٣	٤١,٦	٣,٧	٠,١٤	٠,٠٦٧٢

مثال (١–١):

أحسب قوة الجاذبية المتولدة بين جسمين كتلتيهما (10 kg) و (15 kg) على التوالي، والمسافة بين مركزيهما (750 mm)، ثم احسب وزن كل جسم منهما.

الحل:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث:

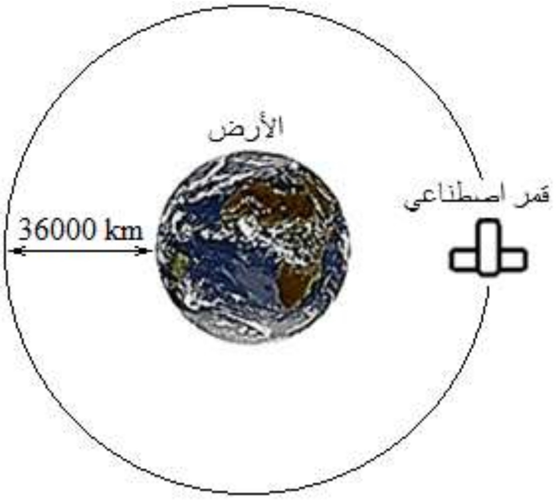
$$G = 66.73 \times 10^{-12}\ m^3 / (Kg\ .\ s^2)$$

$$F = 66.73 \times 10^{-12}\left[\frac{(10)(15)}{(0.75)^2}\right] = 17.795\ (10^{-9})\ N = 17.8\ nN$$

$$W_1 = (10)(9.81) = 98.1\ N$$

$$W_2 = (15)(9.81) = 147.15\ N$$

مثال (١–٢):



شكل (مث. ١ـ ٢)

قمر اصطناعي وزنه (700 Ib) على سطح الارض. احسب قوة جاذبية الأرض لهذا القمر عندما يكون على مسافة (36000 km) من سطح الأرض حيث تكون سرعة دورانه حول الأرض مساوية لسرعة دوران الأرض حول نفسها.

- كتلة الأرض:

$$M_e = 5.97 \times 10^{24}\ kg$$

- نصف قطر الأرض ($R_e = 6371\ km$).

الحل:

$$W = 700\ Ib = 700 \times 4.448 = 3113.6\ N$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{3113.6}{9.81} = 317.4\ kg$$

$$r = R_e + 36000 = 6371 + 36000 = 42371\ km = 42371 \times 10^3\ m$$

$$F = G\,\frac{M_e \times m}{r^2} = 66.73 \times 10^{-12}\ \frac{5.97 \times 10^{24} \times 317.4}{(42371 \times 10^3)^2}$$

$$= 70.43\ N$$

مثال (١–٣):

مركبة فضائية كتلتها (٣٠٠٠ كغم) تنطلق من الأرض إلى القمر.

١- احسب المسافة من سطح الأرض التي تتساوى فيها قوة الجاذبية بين المركبة الفضائية وكلاً من الأرض والقمر.

٢- احسب قوة جاذبية كل من الأرض والقمر للمركبة الفضائية عند هذه المسافة.

- المسافة بين مركزي الارض والقمر = ٣٨٤٤٠٠ كم.
- كتلة الأرض = ٥,٩٧ × ١٠ ^٢٤^ كغم.
- كتلة القمر = ٧,٣٥ × ١٠ ^٢٢^ كغم.
- نصف قطر الأرض = ٦٣٧١ كم.
- نصف قطر القمر = ١٧٣٧ كم.

شكل (مث. ١- ٣)

الحل:

$$F_e = G\,\frac{M_e\ M_s}{{r_e}^2} \qquad\qquad F_m = G\,\frac{M_m\ M_s}{{r_m}^2}$$

$$F_e = 66.73\ \times 10^{-12}\ \frac{5.9736\times\ 10^{24}\times 3\times\ 10^{3}}{{r_e}^2} = \frac{1.196\times\ 10^{18}}{{r_e}^2}$$

$$F_m = 66.73\ \times 10^{-12}\ \frac{7.3477\times\ 10^{22}\times 3\times\ 10^{3}}{{r_m}^2} = \frac{1.471\times\ 10^{16}}{{r_m}^2}$$

$$F_e = Fm$$

$$\frac{1.196\times\ 10^{18}}{{r_e}^2} = \frac{1.471\times\ 10^{16}}{{r_m}^2}$$

$$\frac{1.196\times\ 10^{18}}{1.471\times\ 10^{16}} = \frac{{r_e}^2}{{r_m}^2}$$

$$\frac{r_e{}^2}{r_m{}^2} = 81.3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{r_e}{r_m} = 9.02$$

$r_e = 9.02\ r_m$ .... (1)

$r_e + r_m = 384400$ .... (2)

$9.02\ r_m + r_m = 384400$

$10.02\ r_m = 384400 \quad \Rightarrow \quad r_m = 38363.27\ km$

$r_e = 9.02 \times 38363.27 = 346036.73\ km$

$h_e = r_e - R_e = 346036.73 - 6371 = 339665.73\ km$

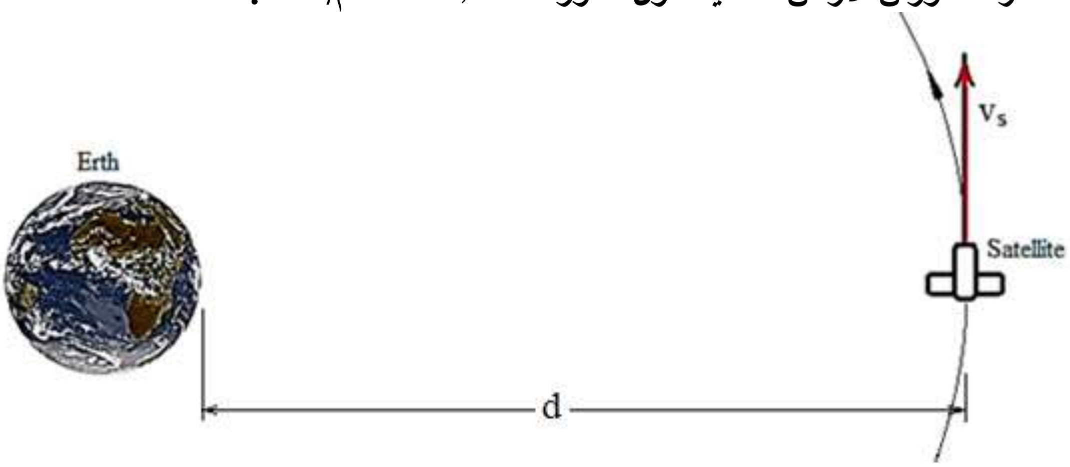
$$F_e = \frac{1.196 \times 10^{18}}{(346036730)^2} = 10\ N \qquad F_m = \frac{1.471 \times 10^{16}}{(38363270)^2} = 10\ N$$

(r_m): المسافة بين المركبة الفضائية ومركز القمر.
(r_e) : المسافة بين المركبة الفضائية ومركز الأرض.
(R_e): نصف قطر الأرض.
(h_e) : المسافة بين المركبة الفضائية وسطح الأرض.
(F_m): قوة الجاذبية بين المركبة الفضائية والقمر.
(F_e) : قوة الجاذبية بين المركبة الفضائية والأرض.

مثال (١ـ٤):

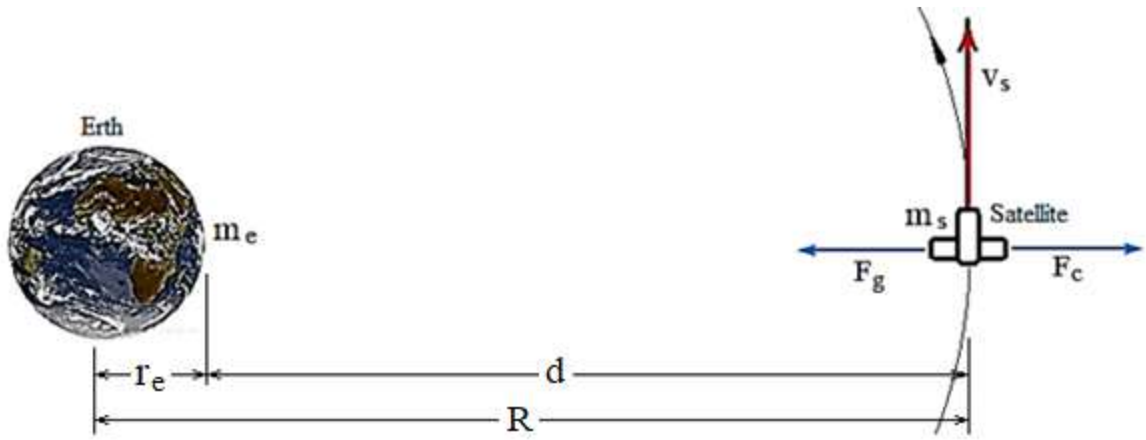
احسب المسافة بين القمر الاصطناعي وسطح الأرض التي تجعل القمر الاصطناعي يواجه منطقة واحدة من سطح الارض باستمرار.

- **كتلة الأرض = ٥,٩٧ × ١٠ ^٢٤ كغم.**
- **نصف قطر الأرض = ٦٣٧١ كم.**
- **سرعة دوران الأرض الخطية حول محورها = ١٦٧٤,٤ كم/ساعة.**



شكل (مث. ١ـ ٤)

الحل:



$F_g = G \dfrac{m_e \ m_s}{R^2}$ (قوة الجاذبية)

$F_c = m_s R \omega_s^2$ (القوة الطاردة المركزية)

$G \dfrac{m_e \ m_s}{R^2} = m_s R \omega_s^2$

$\dfrac{G\, m_e}{R^2} = R\, \omega_s^2$

$G\, m_e = R^3 \omega_s^2$

$V_e = 1674.4$ km/hr $= 465$ m/s

(سرعة دوران الأرض حول محورها)

$r_e = 6371$ km $= 6371000$ m (نصف قطر الأرض)

$\omega_e = V_e / r_e$ (السرعة الدورانية للأرض حول مركزها)

$\omega_e = 465 / 6371000 = 7.3 \times 10^{-5}$ rad/s $= \omega_s$

$m_e = 5.97 \times 10^{24}$ kg (كتلة الأرض)

$G = 66.73 \times 10^{-12}$ (ثابت الجاذبية)

$66.73 \times 10^{-12} \times 5.97 \times 10^{24} = R^3 (7.3 \times 10^{-5})^2$

$R^3 = \dfrac{66.73 \times 5.97 \times 10^{12}}{(7.3 \times 10^{-5})^2} = 7.48 \times 10^{22}$

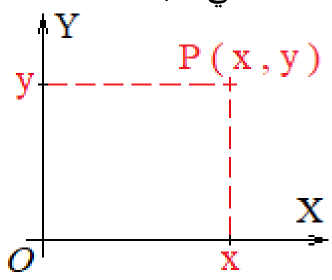
$R = 42125970$ m

$d = R - r_e = 42125970 - 6371000 = 35754970$ m $= 35755$ km

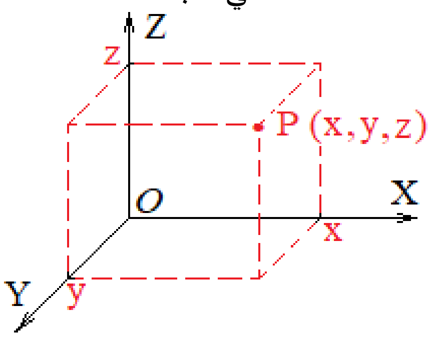
أنظمة الاحداثيات (Coordinates systems):

- نظام الاحداثيات الديكارتي (Cartesian coordinate system):

ثنائي الأبعاد

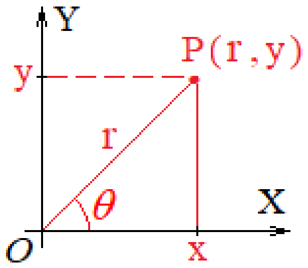


ثلاثي الأبعاد



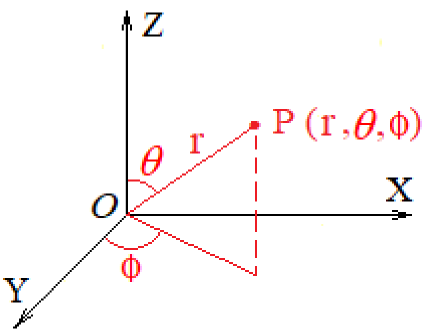
شكل (١-٩)
نظام الاحداثيات الديكارتي

- نظام الاحداثيات القطبي (Poler coordinate system):



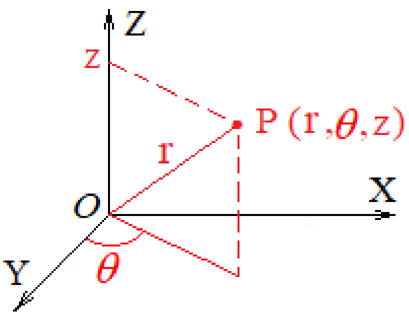
شكل (١-١٠)
نظام الاحداثيات القطبي

- نظام الاحداثيات الكروي (Spherical coordinate system):



شكل (١-١١)
نظام الاحداثيات الكروي

- نظام الاحداثيات الاسطواني (Cylindrical coordinate system):



شكل (١-١٢)
نظام الاحداثيات الاسطواني

نظام الوحدات (System of units):

تعتبر وحدات الطول والكتلة والزمن هي الوحدات الأساسية التي تشتق منها باقي الوحدات، وتم اضافة وحدة القوة لاهميتها في موضوع الميكانيك الهندسي.

	الطول	الكتلة	الزمن	القوة
نظام الوحدات العالميــــة SI	متر (م) (m)	كيلو غرام (كغم) (kg)	ثانية (ثا) (s)	نيوتن (N)
نظام الوحدات البريطانية FPS	قدم (ft)	(slug)	ثانية (ثا) (s)	باوند (Ib)

1 Ib = 4.448 N
1 slug = 14.59 kg
1 ft = 0.3048 m

تحويل الوحدات (Conversation of units):

1 ft (foot) = 12 in. (inches).
1 yd (yard) = 3 ft = 36 in.
1 mi (mile) = 1760 yd = 5280 ft = 63360 in.
1 kip (kilo-pound) = 1000 lb (pound)
1 Ib = 0.453 kg.
1 kg = 2.205 Ib.
1 ton = 2205 Ib = 2.205 kip.
1 ton = 1000 kg
1 in. = 2.54 cm = 25.4 mm
1 ft = 0.3048 m = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 1609.34 m = 1.609 km

البادئات (Prefixes):

اذا كانت الكمية المراد قياسها كبيرة جدًا أو صغيرة جدًا، يمكن التعبير عنها بمضاعفات أو أجزاء الوحدات المستخدمة لتحديد قيمتها بشكل منطقي.

الجدول (١-٣) يبين البادئات المستخدمة في النظام العالمي. حيث يمثل كل منها مضاعفاً أو كسرًا لوحدة معينة. *الكيلوغرام هو الوحدة الأساسية الوحيدة المحددة ببادئة.*

على سبيل المثال:
٤٠٠٠٠٠٠ نيوتن = ٤٠٠٠ كيلو نيوتن = ٤ ميكا نيوتن.
٠,٠٠٥ م = ٥ ملم.

جدول (١-٣) يبين مضاعفات وأجزاء الوحدات

Multiplication Factor		Prefix	Symbol
1 000 000 000 000	$= 10^{12}$	Tera	T
1 000 000 000	$= 10^{9}$	Giga	G
1 000 000	$= 10^{6}$	Mega	M
1 000	$= 10^{3}$	Kilo	k
100	$= 10^{2}$	Hecto	h
10	$= 10^{1}$	Deka	da
0.1	$= 10^{-1}$	Deci	d
0.01	$= 10^{-2}$	Centi	c
0.001	$= 10^{-3}$	Milli	m
0.000 001	$= 10^{-6}$	Micro	μ
0.000 000 001	$= 10^{-9}$	Nano	n
0.000 000 000 001	$= 10^{-12}$	Pico	p

مثال (١ــ٥):

عبر عن الوحدات التالية بالصيغة الصحيحة حسب النظام العالمي للوحدات (SI) باستخدام بادئة مناسبة:

(أ) MN/μs.

(ب) Gg/mN.

(جـ) GN/(kg.ms).

الحل:

(أ)
$$\mathrm{MN/\mu s} = \frac{(10^6)\mathrm{N}}{(10^{-6})\mathrm{s}} = \frac{(10^{12})\mathrm{N}}{\mathrm{s}} = \mathrm{TN/s}$$

(ب)
$$\mathrm{Gg/mN} = \frac{(10^9)\mathrm{g}}{(10^{-3})\mathrm{N}} = \frac{(10^{12})\mathrm{g}}{\mathrm{N}} = \mathrm{Tg/N}$$

(جـ)
$$\mathrm{GN/(kg.ms)} = \frac{(10^9)\mathrm{N}}{\mathrm{kg}(10^{-3})\mathrm{s}} = \frac{(10^{12})\mathrm{N}}{\mathrm{kg.s}} = \mathrm{TN/(kg.s)}$$

مثال (١–٦):

ماهي كثافة الخشب معبر عنها بالوحدات العالمية (SI – units)، اذا كانت قيمتها حسب نظام الوحدات البريطاني (FBS – units) ($4.7\ slug/ft^3$) ؟

الحل:

$$(4.7\ slug/ft^3) = 4.7\ \frac{(14.59)}{(0.3048)^3} = 2421.6\ kg/m^3 = 2.42\ Mg/m^3$$

مثال (١–٧):

أوجد سـرعة السـيارة المبينة في الشـكل (مث. ١-٧) بوحدة (الكيلومتر لكل ساعة) ووحدة (المتر لكل ثانية)، حيث أن السيارة تسير بسـرعة (60 mi/h).

شكل (مث. ١-٧)

الحل:

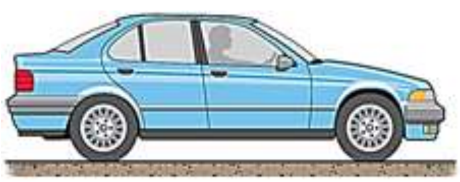
60 mi/h = (60)(5280)(0.3048)/(1000) = 96.56 km/h

96.56 km/h = (96.56)(1000)/(3600) = 26.8 m/s

= 96.56 /3.6 = 26.8 m/s

مثال (١–٨):

سيارة كتلتها (١٤٠٠ كغم).
(أ)- أوجد وزن السيارة بالنيوتن.
(ب)- حول كتلة السيارة الى الوحدة الانكليزية.
(جـ)- أوجد وزن السيارة بالباوند.



شكل (مث. ١-٨)

الحل:

(أ)- $W = mg = 1400 \times 9.81 = 13730\ N$

(ب)- $m = \frac{1400}{14.59} = 95.96\ slugs$

(جـ)- $W = mg = 95.96 \times 32.2 = 3090\ Ib$

مثال (١–٩):

كتلة المركبة الفضائية المبينة في الشكل (مث. ١-٩) تبلغ (250×10^3 slugs) على سطح الأرض.
أوجد:

شكل (مث. ١- ٩)

(أ)- كتلتها بالوحدات العالمية (SI).
(ب)- وزنها بالوحدات العالمية (SI).

إذا كانت المركبة الفضائية على سطح القمر، حيث أن التعجيل المركزي ($g_m = 5.3$ ft/s^2)، أوجد:

(جـ)- وزنها بالوحدات العالمية (SI).
(د)- كتلتها بالوحدات العالمية (SI).

الحل:

(أ)- $250 \times 10^3 \text{ slugs} = (250 \times 10^3)(14.59)$
$= 3.6475 \times 10^6 \text{ kg} = 3.65 \text{ Gg}$

(ب)- $W_e = m.g = (3.6475 \times 10^6)(9.81)$
$= 35.792 \times 10^6 \text{ N} = 35.8 \text{ MN}$

(ج)- $W_m = m.g_m = (250 \times 10^3)(5.3) = 1.325 \times 10^6 \text{ Ib}$
$= (1.325 \times 10^6)(4.448) = 5.894 \times 10^6 \text{ N} = 5.89 \text{ MN}$

أو:

$$W_m = W_e\,(g_m / g) = (35.792)\left(\frac{5.30 \text{ ft/s}^2}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right) = 5.89 \text{ MN}$$

(د)- بما أن الكتلة لا تعتمد على موقع الجسم.

$m_m = m_e = 3.65 \times 10^6 \text{ kg} = 3.65 \text{ Gg}$

مثال (١–١٠):

رجل يزن (180 Ib) على سطح الأرض.

(أ) - أوجد كتلته بالوحدة الإنكليزية (slug).
(ب) - أوجد كتلته بالكيلوغرام. (جـ) - أوجد وزنه بالنيوتن.

إذا كان الرجل على سطح القمر حيث أن التعجيل المركزي ($g_m = 5.3$ ft/s^2).

(د) - أوجد وزنه بالباوند. (هـ) - أوجد كتلته بالكيلوغرام.

الحل:

(أ) - $m = \frac{180}{32.2} = 5.59 \text{ slug}$

(ب) - $m = 5.59 \times 14.59 = 81.56 \text{ kg}$

(جـ) - $W = 180 \times 4.4482 = 800 \text{ N} \quad \text{or} \quad 81.56 \times 9.81 = 800 \text{ N}$

(د) - $W = 5.59 \times 5.3 = 29.63 \text{ Ib}$

(هـ) - $m = 5.59 \times 14.59 = 81.56 \text{ kg}$

مسائل:

١-١) عبر عن كل من الوحدات التالية حسب النظام العالمي (SI) باستخدام بادئة مناسبة:
أ)- (μm / ms) ، ب)- (mkm) ، جـ)- (Gg / ks) ، د)- (μN.Gm).

الجواب: (mm/s, m, Ts/g, kN.m).

١-٢) كثافة البراص هي ($8.33\ Mg/m^3$). أوجد وزنها النوعي (الوزن / الحجم) حسب نظام الوحدات الإنجليزي. استخدم بادئة مناسبة.

الجواب: ($81.717\ kN/m^3$)

١-٣) حول الكميات التالية من النظام العالمي (SI) الى النظام الانكليزي (FPS)، مستخدماً بادئة مناسبة:
(أ) - ($27.5\ kN/m^3$) إلى (lb/ft^3). (ب) - (0.5 mm/s) إلى (ft/h).
(جـ) - (1.13 kN.m) إلى (Ib.ft).

الجواب: (175 Ib/ft3, 5.9 ft/h, 833.5 Ib.ft)

١-٤) أوجد كتلة جسم وزنه:
(أ) – (35 mN). (ب) – (200 kN). (جـ) – (50 MN).

الجواب: (3.57 g, 20.39 Mg, 5.1 Gg)

١-٥) أوجد الوزن حسب الوحدات العالمية (SI) لجسم كتلته:
(أ) - (15 kg) (ب) - (0.75 g) (جـ) - (7.5 Mg)

الجواب: (147.15 N , 7.36 mN , 73.6 kN)

١-٦) كرتان كل منهما بكتلة (250 kg) ونصف قطر (350 mm) في حالة تلامس مع بعضهما البعض. أوجد قوة الجاذبية المؤثرة بين الكرتين.

الجواب: (34 μN)

١-٧) كثافة الماء ($1\ Mg/m^3$). ما هي كثافته معبر عنها بالوحدات الإنجليزية؟
الجواب: (1.94 slug/ft3)

١-٨) مركبة فضائية كتلتها (٣٠٠٠ كغم) أطلقت من الأرض إلى القمر.

١- احسب وزن وكتلة المركبة الفضائية على سطح الأرض وعلى سطح القمر.
٢- احسب قوة الجاذبية بين المركبة الفضائية وكل من الأرض والقمر عندما تكون المركبة الفضائية على مسافة (١٠٠٠٠٠) كيلومتر من سطح الأرض.

- المسافة بين مركزى الارض والقمر = ٣٨٤٤٠٠ كم.
- كتلة الأرض = ٥,٩٧ × ١٠ ^٢٤ كغم.
- كتلة القمر = ٧,٣٥ × ١٠ ^٢٢ كغم.
- نصف قطر الأرض = ٦٣٧١ كم.
- نصف قطر القمر = ١٧٣٧ كم.

شكل (مس. ١-٨)

الجواب:

للأرض

$W_e = 29340\ N \qquad m = 3000\ kg$

$F_{se} = 105.6\ N$

للقمر

$W_m = 4873\ N \qquad m = 3000\ kg$

$F_{sm} = 0.19\ N$

الفصل الثاني

تحليل القوى

FORCE ANALYSIS

الكميات العددية والكميات المتجهة (Scalars and Vectors):

الكمية العددية (Scalar)(A):

هي أي كمية فيزيائية موجبة أو سالبة يمكن التعبير عنها بذكر القيمة فقط.
على سبيل المثال: الطول ، الكتلة ، الوقت ، الكثافة ، الحجم.

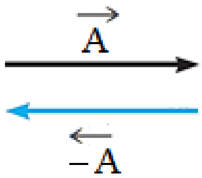
الكمية المتجهة (Vector)($\vec{A}$):

هي أي كمية فيزيائية لا يكتمل التعبير عنها الا بذكر القيمة والاتجاه.
على سبيل المثال: القوة ، الموقع ، العزم ، الوزن ، السرعة ، الإزاحة ، التعجيل.

- طول السهم يعبر عن قيمة المتجه (الكمية المتجهة).
- الزاوية (θ) بين المتجه ومحور ثابت تمثل اتجاه خط تأثير المتجه.

اتجاه المتجه:

الاشارة السالبة تعبر عن الاتجاه المعاكس للمتجه.



أنواع المتجهات:

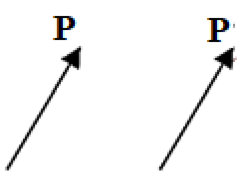
هناك ثلاثة أنواع من المتجهات:

١- **المتجه الحر (Free vector):**
هو متجه يمكن تحريكه بحرية لإنشاء عزم مزدوج في الفضاء.

٢- **المتجه الانزلاقي (Sliding vector):**
هو متجه يمكنه أن يمثل القوة المؤثرة على جسم صلب ويمكن تحريكه على خط تأثير القوة بدون أي تأثير على الجسم.

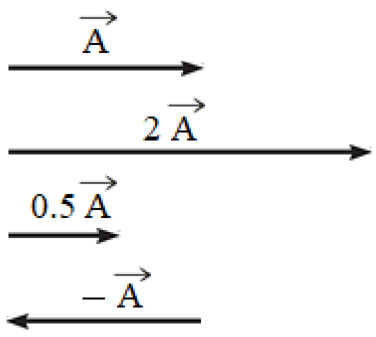
٣- **المتجه الثابت أو المحدد (Bound vector or Fixed vector):**
هو متجه يتطلب تحريكه تغيير ظروف المسألة.

لكي يتساوى متجهان يجب أن يكون لهما نفس القيمة والاتجاه، ولا يشترط أن يكون لهما نفس نقطة البداية (التأثير):



ضرب وقسمة المتجهات بعدد مطلق:

- ضرب متجه بعدد مطلق موجب، يؤدي الى زيادة أو نقصان قيمته بمقدار هذا العدد.
- ضرب متجه بعدد مطلق سالب، يؤدي الى تغيير اتجاهه بالاتجاه المعاكس مع زيادة أو نقصان قيمته حسب مقدار هذا العدد.

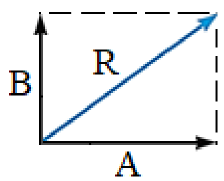


جمع المتجهات:

- اذا كان المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) على خط تأثير واحد، فيمكن استخدام طريقة الجمع الجبري أو العددي في جمعهما، كما في الشكل:

$$(\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}1)$$

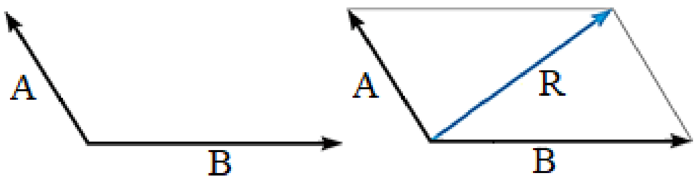
- اذا كان المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) متعامدان، فيمكن جمعهما باستخدام نظرية فيثاغورس.



$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}2)$$

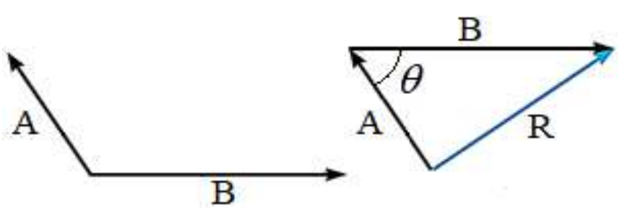
- اذا كان المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) ليسا على خط تأثير واحد، هناك طريقتان للجمع:

١- قانون متوازي الأضلاع.



$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}3)$$

٢- طريقة المثلث.



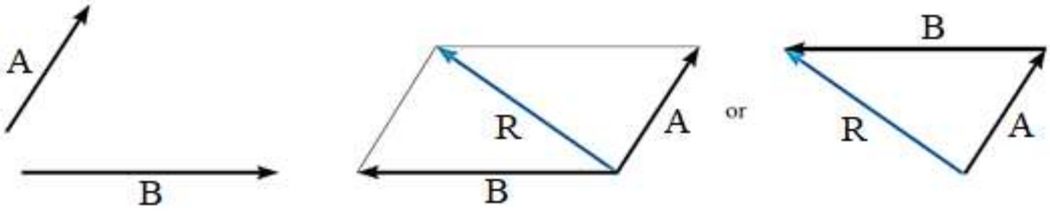
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

طرح المتجهات:

اذا كان المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) بنفس الاتجاه، يمكن إيجاد الفرق بينهما كما يلي:

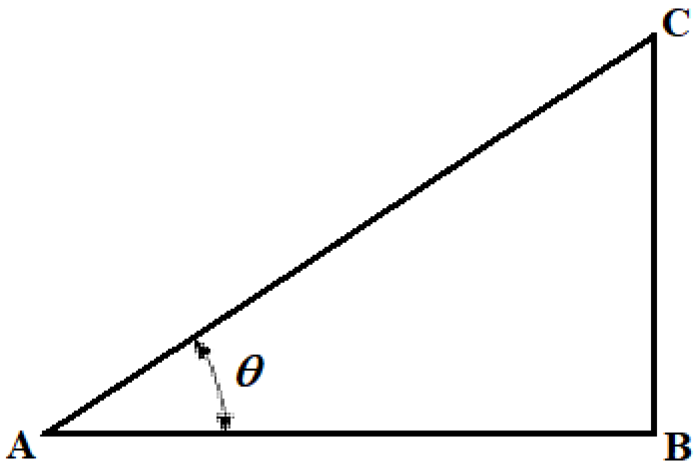
$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \;\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}4)$$

أي أن الطرح هو حالة خاصة من حالات الجمع، ويمكن استخدام قوانين جمع المتجهات في طرح المتجهات بقلب اتجاه المتجه المطروح.



قانون متوازي الأضلاع طريقة المثلث

العلاقات المثلثية (Trigonometric relations):

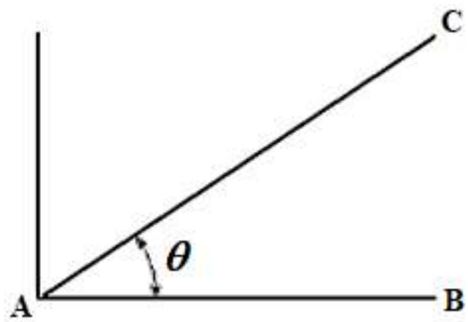


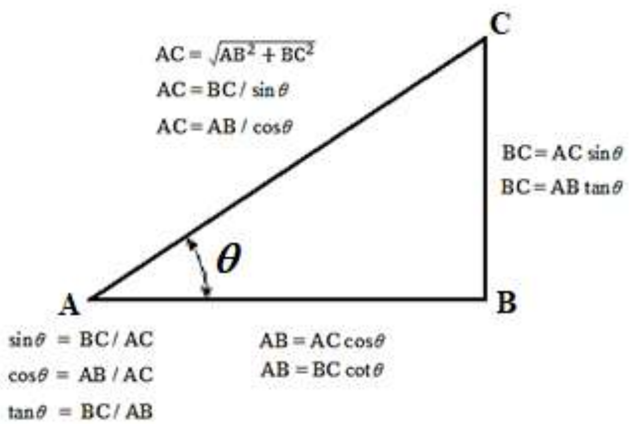
$AB = AC\cos\theta \qquad BC = AC\sin\theta$

$AB = BC\cot\theta \qquad BC = AB\tan\theta$

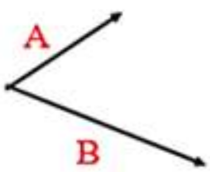
$$\left.\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ AC &= BC / \sin\theta \\ AC &= AB / \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}5)$$

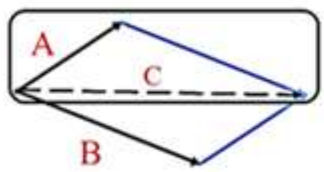
$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= BC / AC \\ \cos\theta &= AB / AC \\ \tan\theta &= BC / AB \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}6)$$

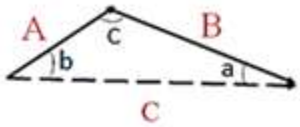




يمكن استخدام علم المثلثات لإيجاد محصلة القوى:







من قانون الجيب تمام (Cosines Law):

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}7)$$

من قانون الجيب (Sines Law):

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}8)$$

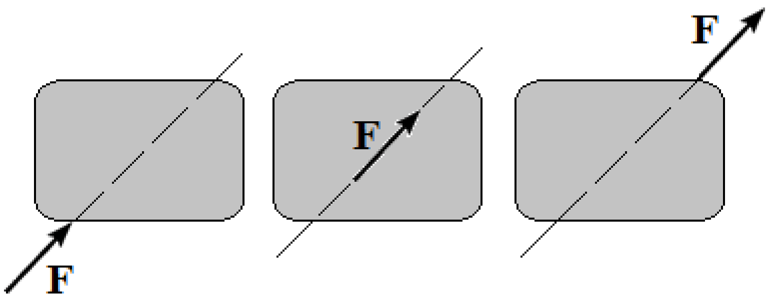
أنواع أنظمة القوى:

نظام القوى هو مجموعة قوى (قوتين أو أكثر) تؤثر في وضع معين على جسم أو مجموعة أجسام، ويمكن تصنيفها الى:

١- نظام القوى الواقعة على خط تأثير واحد (Collinear system).
٢- نظام القوى المتوازية (Parallel system).
٣- نظام القوى الواقعة في مستو واحد (Coplanar system).
٤- نظام القوى المتلاقية (Concurrent system).
٥- نظام القوى المتوازية الواقعة في مستو واحد (Parallel, Coplanar system)، وفيها تكون خطوط تأثير القوى متوازية وتقع في مستو واحد.
٦- نظام القوى المتلاقية الواقعة في مستو واحد (Concurrent, Coplanar system)، وفيها تتقاطع خطوط تأثير القوى في نقطة مشتركة وتكون في مستو واحد.
٧- نظام القوى المتلاقية وغير متوازية وتقع في مستو واحد (Concurrent, Nonparallel, Coplanar system)، وفيها تكون خطوط تأثير القوى متقاطعة وغير متوازية وتقع في مستو واحد.
٨- نظام القوى المتوازية ولا تقع في مستو واحد (Parallel, Noncoplanar system)، وفيها تكون خطوط تأثير القوى متوازية ولا تقع في مستو واحد.
٩- نظام القوى المتلاقية ولا تقع في مستو واحد (Concurrent, Noncoplanar system)، وفيها تتقاطع خطوط تأثير القوى في نقطة مشتركة ولا تقع في مستو واحد.
١٠- نظام القوى الغير متوازية وغير متقاطعة ولا تقع في مستو واحد (Nonparallel, Nonconcurrent, Noncoplanar system)، حيث تكون خطوط تأثير القوى غير متوازية وغير متقاطعة ولا تقع في مستو واحد.

مبدأ نقل القوة على خط تأثيرها:

اذا تم نقل قوة (F) مؤثرة على جسم معين على طول خط تأثيرها بدون تغيير اتجاهها فان تأثير القوة على الجسم لا يتغير.



شكل (٢-١) مبدأ نقل القوة على خط تاثيرها

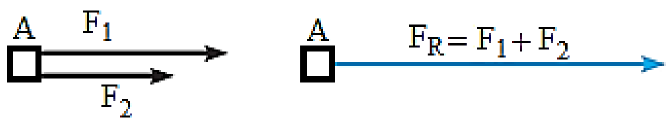
محصلة القوى:

إذا تم استبدال القوتين (F_1) و (F_2) المؤثرين على الجسم (A) بقوة واحدة مقدارها (F_R)، لها نفس التأثير على الجسم، فإن هذه القوة تسمى محصلة القوتين (F_1) و (F_2).

اذا كانت القوى على خط تأثير واحد (Collinear):

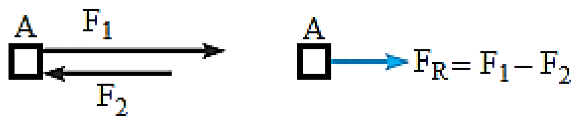
اذا كانت القوى بنفس الاتجاه، تكون محصلتها حسب المعادلة (2-1):

$$F_R = F_1 + F_2$$



اذا كانت القوى باتجاهين متعاكسين، تكون محصلتها حسب المعادلة (2-4):

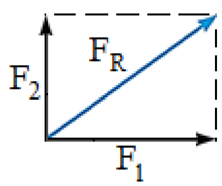
$$F_R = F_1 - F_2$$



اذا كانت القوى متلاقية ومتعامدة في مستو واحد (Concurrent, perpendicular, Coplanar):

يمكن إيجاد المحصلة باستخدام نظرية فيثاغورس، ومن المعادلة (2-2):

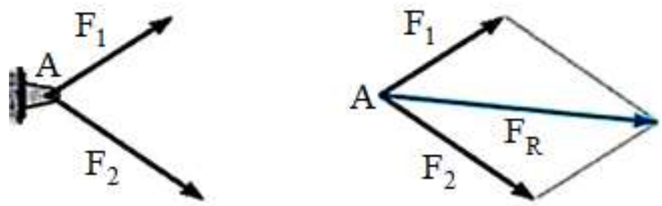
$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$



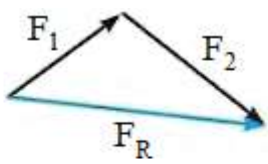
اذا كانت القوى متلاقية في مستو واحد (Concurrent, Coplaner):

يمكن الحصول على المحصلة من خلال:

١- متوازي الأضلاع، باستخدام (F_1) و (F_2) كضلعين متجاورين لمتوازي الأضلاع، فيكون القطر (F_R) الذي يمر من النقطة (A) هو محصلة القوتين (F_1) و (F_2). يُعرف هذا بقانون متوازي الأضلاع.



٢- مثلث القوى، حيث يتم رسم القوة (F_1)، ومن نهايتها يتم رسم القوة (F_2)، فتكون المحصلة هي القوة التي تبدأ من بداية (F_1) وتنتهي بنهاية (F_2). يُعرف هذا بقانون مثلث القوى.

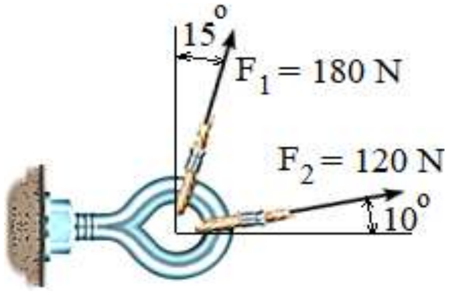


$$F_R = F_1 + F_2$$

٣- باستخدام مثلث القوى، يمكن ايجاد قيمة المحصلة باستخدام قانون الجيب تمام، وإيجاد اتجاهها من قانون الجيب. من المعادلتين (2-7) و (2-8).

مثال (٢-١):

قوتين (180 N) و (120 N) مسلطتان على الحلقة المبينة في الشكل (مث. ٢-١). أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين.

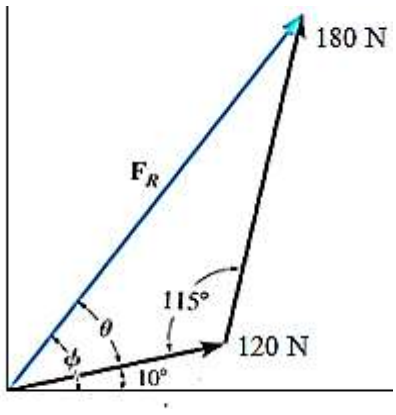


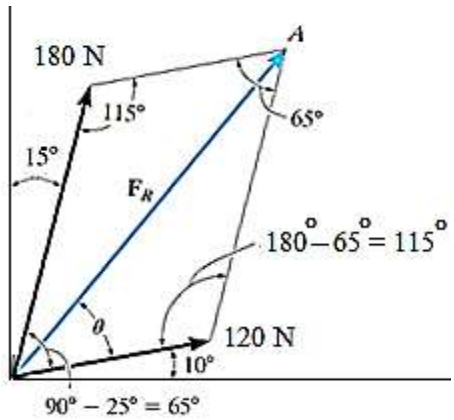
شكل (مث. ٢- ١)

الحل:

قانون متوازي الأضلاع.

يتم رسم متوازي الأضلاع من رسم خط يبدأ من رأس القوة (180 N) ويوازي القوة (120 N)، وخط آخر يبدأ من رأس القوة (120 N) ويوازي القوة (180 N)، ستكون محصلة القوتين (F_R) من نقطة بداية القوتين الى نقطة تقاطع هذين الخطين عند النقطة (A).





قوانين المثلثات.

من متوازي الأضلاع. يتم إنشاء مثلث القوى.

استخدام قانون جيب التمام.

$$F_R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2\,F_1\,F_2 \cos\alpha}$$

$$F_R = \sqrt{(180)^2 + (120)^2 - 2\,(180)\,(120)\cos 115}$$

$$= \sqrt{32400 + 14400 - 43200\,(\,-0.4226\,)} \;=\; 255\text{ N}$$

استخدام قانون الجيب لايجاد (θ).

$$\frac{180}{\sin\theta} = \frac{255}{\sin 115^{o}} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta = \frac{180\;\sin 115^{o}}{255} = 0.64 \quad\Rightarrow\quad \theta = 39.8^{o}$$

وبالتالي فإن اتجاه المحصلة (ϕ) مقاساً من الأفق هو:

$$\theta = 39.8^{o} + 10^{o} = 49.8^{o}$$

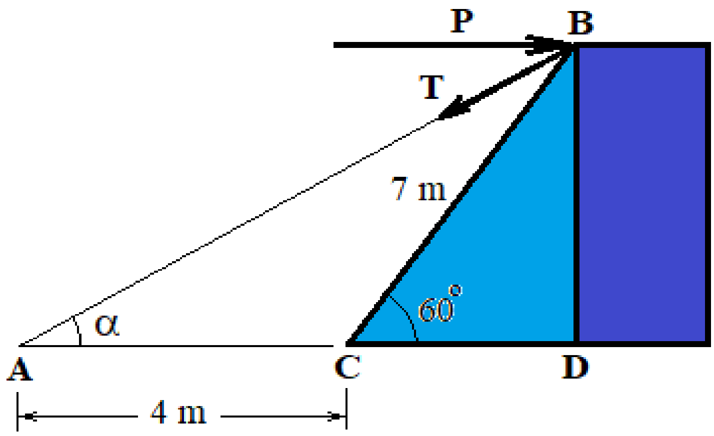
مثال (٢-٢):

في الهيكل الثـــابت المبين في الشكل (مث. ٢-٢).

P = 400 N

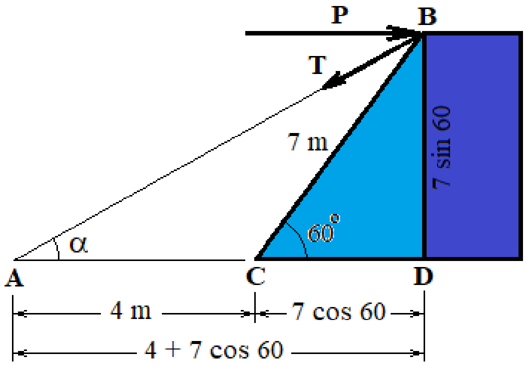
T = 150 N

استبدل القوتين (P) و (T) بقوة واحدة (R) لها نفس التأثير على الهيكل الثابت.



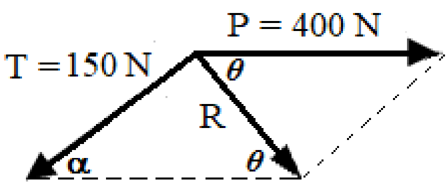
شكل (مث. ٢ـ ٢)

الحل:



$$\tan\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{7\sin 60°}{4 + 7\cos 60°} = 0.81$$

$$\alpha = 38.9°$$

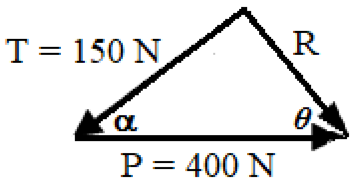


قانون الجيب تمام:

$$R = \sqrt{T^2 + P^2 - 2TP\cos 38.9°}$$

$$= \sqrt{150^2 + 400^2 - 2(150)(400)\cos 38.9°}$$

$$= 298.5 \text{ N}$$



قانون الجيب:

$$\frac{150}{\sin\theta} = \frac{350}{\sin 38.9°}$$

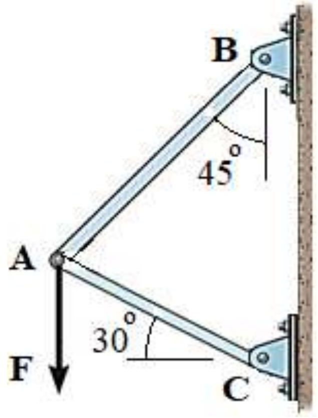
$$\sin\theta = \frac{150\sin 38.9°}{298.5} = 0.316$$

$$\theta = 18.4°$$

$$R = 298.5 \text{ N} \qquad 18.4°$$

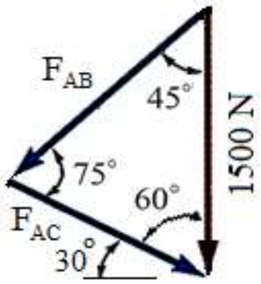
مثال (٢-٣):

هيكل مكون من ضلعين، تؤثر عليه قوة (F) بمقدار (1500 N) عند النقطة (A) الى الأسفل. أوجد مركبتي القوة المؤثرتين على طول ضلعي الهيكل (AB) و (AC).



شكل (مث. ٢-٣)

الحل:



$$\frac{F_{AB}}{\sin 60} = \frac{1500}{\sin 75}$$

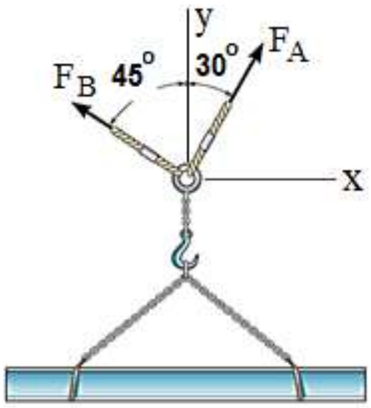
$F_{AB} = 1344.86$ N

$$\frac{F_{AC}}{\sin 45} = \frac{1500}{\sin 75}$$

$F_{AC} = 1098.08$ N

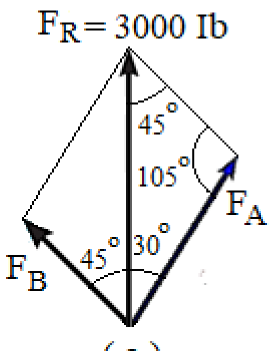
مثال (٢-٤):

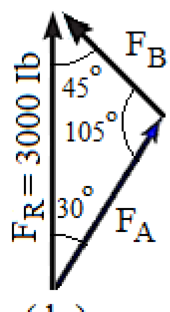
شيلمانة ذات مقطع عرضي حرف (I) معلقة بواسطة سلكين كما موضح في الشكل (مث. ٢-٤). أوجد قيمة قوتي الشد (F_A) و (F_B) في كل سلك بحيث يكون مقدار محصلتهما (3000 Ib) متجهة باتجاه المحور العمودي الموجب.



شكل (مث. ٢-٤)

الحل:





$$\frac{F_A}{\sin 45°} = \frac{3000}{\sin 105°}$$

$$F_A = \frac{3000 \sin 45°}{\sin 105°} = 2196 \text{ Ib}$$

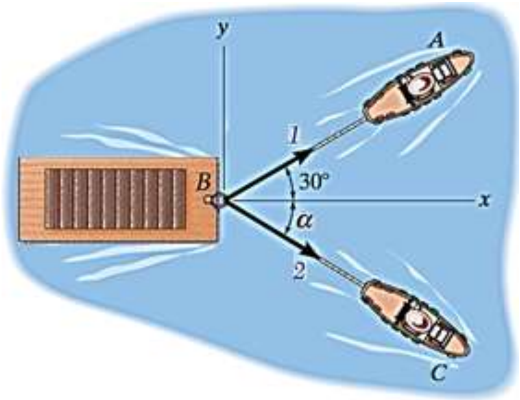
$$\frac{F_B}{\sin 30°} = \frac{3000}{\sin 105°}$$

$$F_B = \frac{3000 \sin 30°}{\sin 105°} = 1553 \text{ Ib}$$

مثال (٢-٥):

بارجة سحبت بواسطة زورقين كما مبين في الشكل (مث. ٢-٥). إذا كانت محصلة القوى المسلطة من قبل الزورقين (2500 N) باتجاه محور البارجة. أوجد:

أ) قوة الشد في كل من الحبلين اذا كانت ($\alpha = 40^o$).
ب) قيمة (α) التي يكون شد الحبل (2) عندها أقل ما ممكن.



شكل (مث. ٢-٥)

الحل:

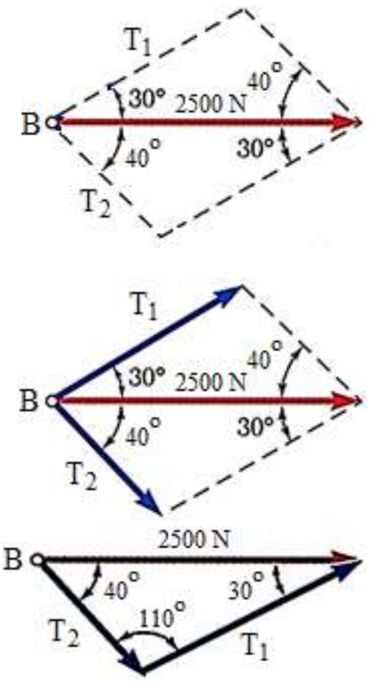
أ)

$$\frac{2500}{\sin 110} = \frac{T_1}{\sin 40}$$

$$T_1 = 1710 \text{ N}$$

$$\frac{2500}{\sin 110} = \frac{T_2}{\sin 30}$$

$$T_2 = 1330 \text{ N}$$

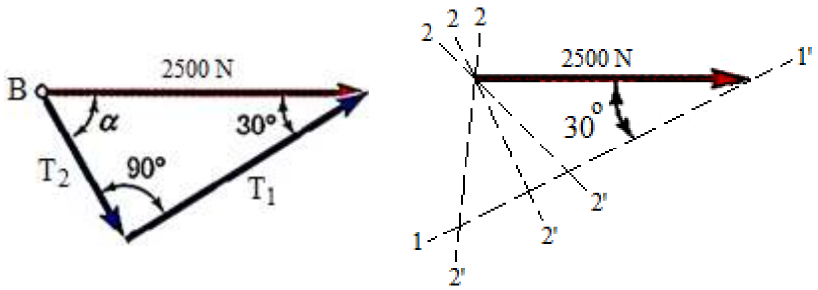


ب)

$$T_1 = 2500 \cos 30$$
$$= 2165 \text{ N}$$

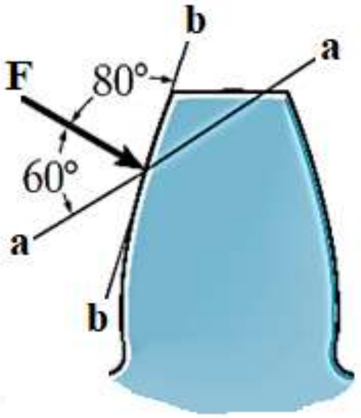
$$T_2 = 2500 \sin 30$$
$$= 1250 \text{ N}$$

$$\alpha = 90 - 30 = 60^o$$



مثال (٢-٦):

حلل القوة (F = 15 lb) المؤثرة على سن الترس المبين في الشـــكل (مث. ٢-٦) الى مركبتين باتجاه المحورين (a - a) و (b - b).

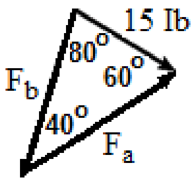


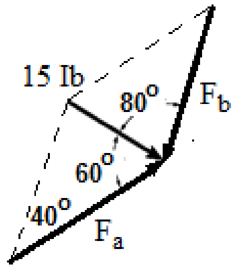
شكل (مث. ٢- ٦)

الحل:

$$\frac{15}{\sin 40°} = \frac{F_a}{\sin 80°} \Rightarrow F_a = 22.98 \text{ lb}$$

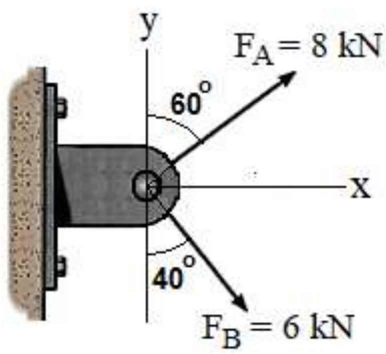
$$\frac{15}{\sin 40°} = \frac{F_b}{\sin 60°} \Rightarrow F_b = 20.21 \text{ lb}$$





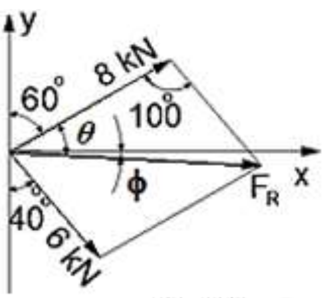
مثال (٢-٧):

القوتين (8 kN) و (6 kN) مسلطتان على الهيكل المبين في الشكل (مث. ٢-٧). أوجد قيمة محصلة القوتين واتجاهها مقاساً باتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي.



شكل (مث. ٢- ٧)

الحل:



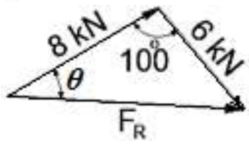
$$F_R = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2(F_1)(F_2)\cos\phi}$$

$$F_R = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 100°} = 10.8 \text{ kN}$$

$$\frac{6}{\sin\theta} = \frac{10.8}{\sin 100°}$$

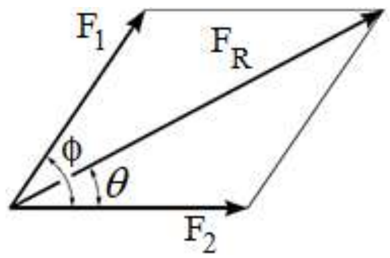
$\sin\theta = 0.547 \quad \Rightarrow \quad \theta = 33.17°$

$\phi = 33.17° - 30° = 3.17°$



مثال (٢-٨):

عبر عن قيمة المحصلة (F_R) واتجاهها (θ) بدلالة قيم المركبات (F_1) و (F_2) والزاوية (ϕ).



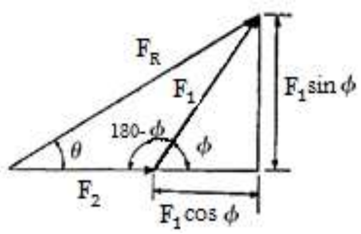
شكل (مث. ٢-٨)

الحل:

$$F_R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2F_1F_2\cos(180 - \phi)}$$

بما أنه $\{\cos(180-\phi) = -\cos\phi\}$:

$$F_R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\phi}$$



من الشكل:

$$\tan\theta = \frac{F_1 \sin\phi}{F_2 + F_1\cos\phi}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_1 \sin\phi}{F_2 + F_1\cos\phi}\right)$$

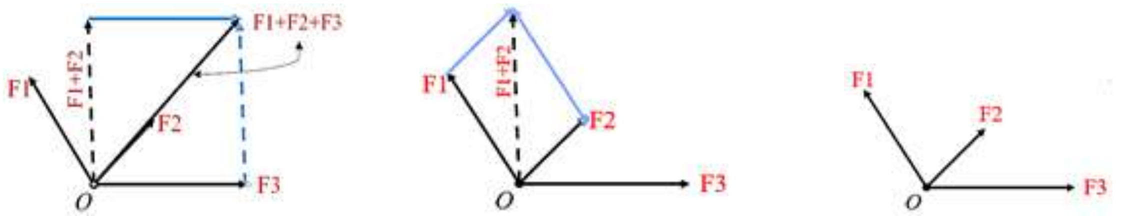
محصلة عدة قوى (أكثر من قوتين):

يمكن إيجاد محصلة أكثر من قوتين بتطبيق قانون متوازي الأضلاع على مرحلتين:

١- ايجاد محصلة القوتين الأولى والثانية.

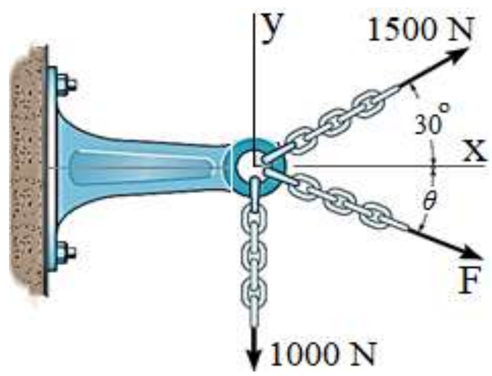
٢- أخذ محصلة القوتين تلك كقوة ثم نوجد محصلتها مع القوة الثالثة فنحصل على محصلة القوى الثلاث.

على سبيل المثال، إذا كانت ثلاث قوى (F_1) , (F_2) , (F_3) تؤثر على نقطة (O)، تكون محصلتها كما يلي:



(٣) (٢) (١)

مثال (٢-٩):



شكل (مث. ٢- ٩)

ثلاث سلاسل مرتبطة بحلقة براكيت كما موضح في الشكل (مث. ٢-٩)، يسلط على كل سلسلة قوة شد بحيث تكون محصلة القوى الثلاث بقيمة (2500 N). اذا تأثرت سلسلتان منها بقوى معلومة، جد زاوية السلسلة الثالثة مقاسة مع اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب بحيث يكون مقدار القوة (F) في هذه السلسلة أقل ما ممكن، ثم أوجد قيمة القوة (F).

تلميح: أوجد قيمة واتجاه محصلة القوتين المعلومتين، يكون اتجاهها هو نفسه اتجاه القوة (F).

الحل:

قانون الجيب تمام:

$$F_{R1} = \sqrt{1500^2 + 1000^2 - 2(1500)(1000)\cos 60°} = 1322.9 \text{ N}$$

قانون الجيب:

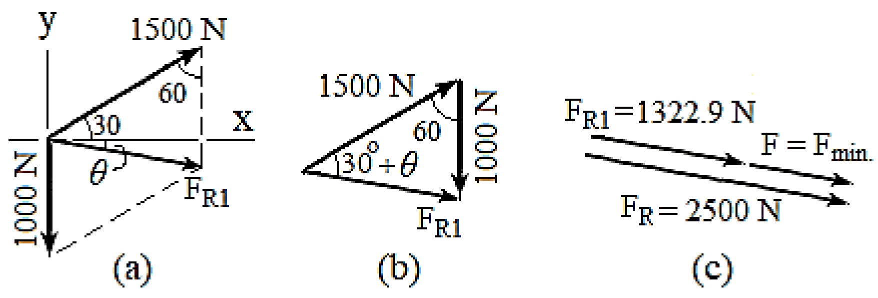
$$\frac{1000}{\sin(30+\theta)} = \frac{1322.9}{\sin 60}$$

$$\sin(30+\theta) = \frac{1000 \sin 60}{1322.9} = 0.65$$

$$30 + \theta = 40.89° \quad \Rightarrow \quad \theta = 10.89°$$

للحصول على المحصلة المطلوبة بأقل قيمة للقوة (F)، يجب أن يكون اتجاه القوة (F) بنفس اتجاه محصلة القوتين المعلومتين (F_{R1}).

$$F_R = F_{R1} + F$$
$$2500 = 1322.9 + F_{min}$$
$$F_{min} = 1177.1 \text{ N}$$



محصلة القوى ثنائية الأبعاد بطريقة التحليل:

يمكن تحليل أي قوة في مستو معين وليكن المستو (x - y) إلى مركبتين متعامدتين على طول المحورين (x) و (y)، ويطلق على هاتين المركبتين " المركبات الديكارتية (المستطيلة) ".

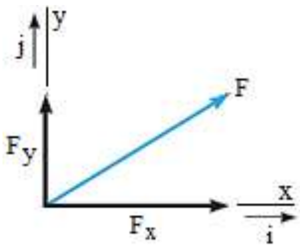
المركبات الديكارتية

التحليل الاتجاهي الديكارتي | التحليل العددي

$$F = F_x i + F_y j$$

i: متجه الوحدة في الاتجاه x

j: متجه الوحدة في الاتجاه y



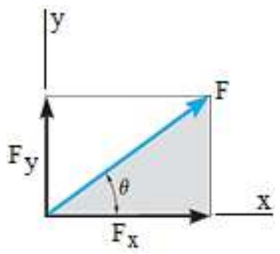
$F_x = F \cos \theta$

$F_y = F \sin \theta$

$F = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{Fy}{Fx}$

F_x و F_y همــا مـــــركبات القوة F



شكل (٢-٢) التحليل الاتجاهي و التحليل العددي للقوة

$$F_x = F \cos \theta \quad \text{..................................} \quad (2\text{-}9)$$

$$F_y = F \sin \theta \quad \text{..................................} \quad (2\text{-}10)$$

القيمة الاتجاهية:

$$F = F_x i + F_y j \quad \text{..............................} \quad (2\text{-}11)$$

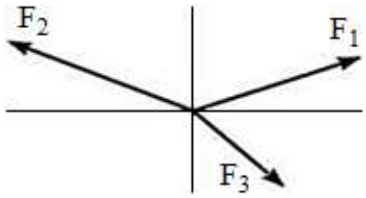
القيمة العددية (المطلقة):

$$F = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2} \quad \text{.......................} \quad (2\text{-}12)$$

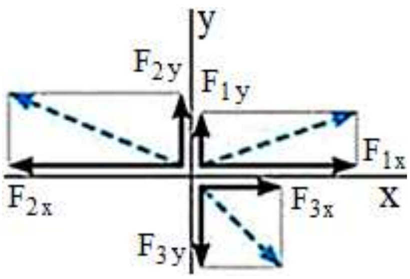
الاتجاه:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Fy}{Fx} \quad \text{...........................} \quad (2\text{-}13)$$

ايجاد المحصلة:



١- كل قوة تحلل إلى مركبتيها مع المحورين (x) و (y).
٢- تُجمع المركبات المنطبقة على المحور الأفقي (x) لتكون المركبة الأفقية للمحصلة.
٣- تُجمع المركبات المنطبقة على المحور العمودي (y) لتكون المركبة العمودية للمحصلة.
٤- باستخدام المتجه الديكارتي، يتم تمثيل المحصلة كمتجه ديكارتي.



$F_R = (F_{Rx})\, i + (F_{Ry})\, j$

$F_{Rx} = \sum F_x$

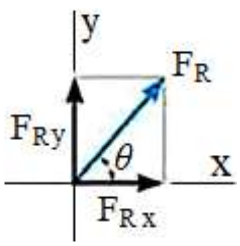
$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$

$F_{Ry} = \sum F_y$

$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$

$F_R = (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\, i + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\, j$

٥- ايجاد قيمة المحصلة (F_R) باستخدام نظرية فيثاغورس:



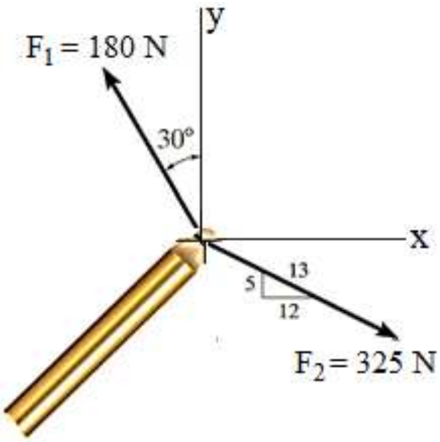
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^{\ 2} + F_{Ry}^{\ 2}}$$

٦- ايجاد الزاوية (θ) التي تمثل اتجاه المحصلة من قوانين المثلثات:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right)$$

مثال (٢-١٠):

أوجد المركبتين الأفقية والعمودية للقوتين (F_1) و(F_2) المؤثرتين على الذراع المبين في الشكل (مث. ٢-١٠). ثم عبر عن كل قوة بصيغة المتجه الديكارتي. ثم أوجد قيمة واتجاه المحصلة.



شكل (مث. ٢-١٠)

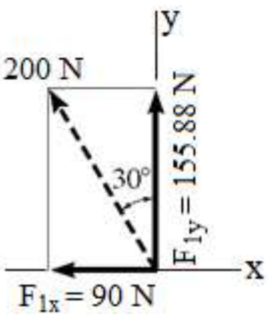
الحل:

$$F_{1x} = -180 \sin 30° = -90 \text{ N} = 90 \text{ N} \leftarrow$$

$$F_{1y} = 180 \cos 30 = 155.88 \text{ N}$$

$$F_{2x} = 325\,(12/13) = 300 \text{ N}$$

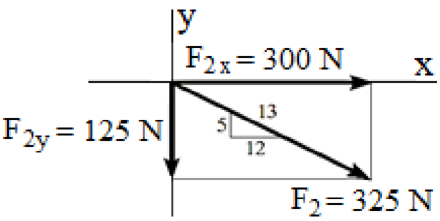
$$F_{2y} = -325\,(5/13) = -125 \text{ N} = 125 \text{ N} \downarrow$$



المتجه الديكارتي:

$$F_1 = \{-90\,i + 155.88\,j\} \text{ N}$$

$$F_2 = \{300\,i - 125\,j\} \text{ N}$$



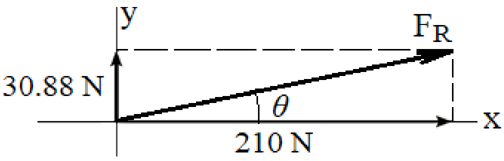
المحصلة:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^{\ 2} + F_{Ry}^{\ 2}}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = -90 + 300 = 210 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 155.88 - 125 = 30.88 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{210^2 + 30.88^2} = 212.258 \text{ N}$$

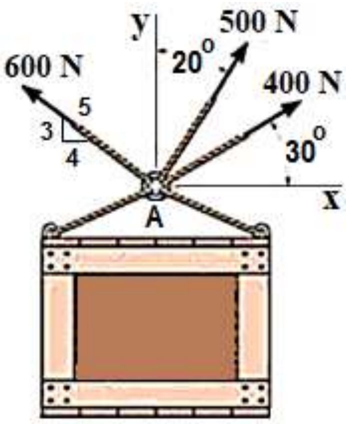


الاتجاه (θ):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{30.88}{210}\right) = 8.37°$$

مثال (٢-١١)

أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الثلاث المؤثرة على الحلقة (A) مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).



شكل (مث. ٢ـ ١١)

الحل:

$$F_R = \sum F$$

$$F_{Rx} = \sum F_x = -600\left(\frac{4}{5}\right) + 500 \sin 20^\circ + 400 \cos 30^\circ = 37.42 \text{ N}$$

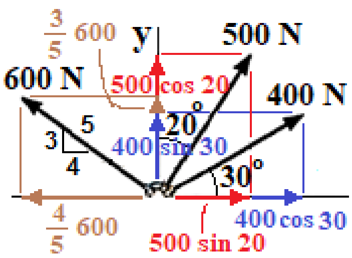
$$F_{Ry} = \sum F_y = 600\left(\frac{3}{5}\right) + 500 \cos 20^\circ + 400 \sin 30^\circ = 1029.85 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(37.42)^2 + (1029.85)^2} = 1030.5 \text{ N}$$

$$\tan\theta = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

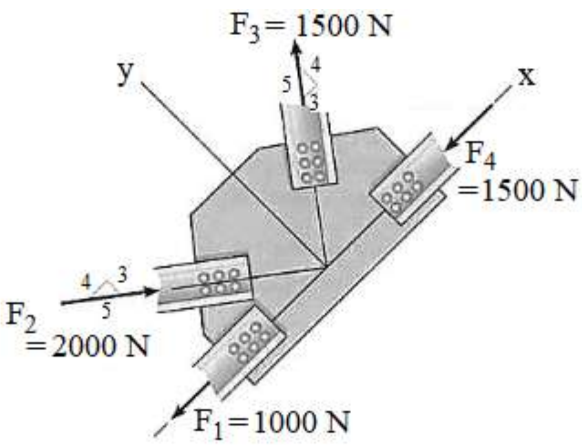
$$\theta = \tan^{-1}\frac{1029.85}{37.42}$$

$$= 87.92^\circ$$



مثال (٢-١٢):

أوجد مركبات محصلة القوى المسلطة على لوح تثبيت أضلاع جسر باتجاه المحور (x) والمحور (y). ثم أثبت أن المحصلة تساوي صفر.



شكل (مث. ٢ـ ١٢)

الحل:

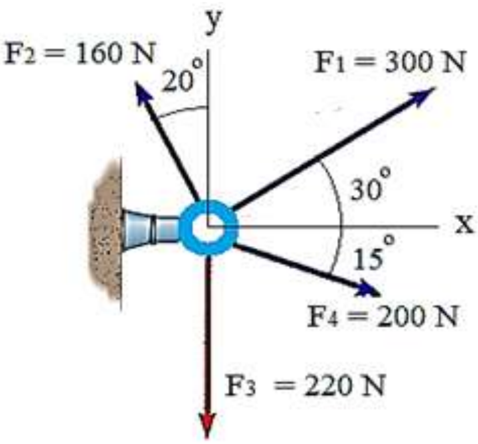
$$F_R = \sum F$$

$$F_{Rx} = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -1000 + 2000\left(\frac{4}{5}\right) + 1500\left(\frac{3}{5}\right) - 1500 = 0$$

$$F_{Ry} = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 - 2000\left(\frac{3}{5}\right) + 1500\left(\frac{4}{5}\right) - 0 = 0$$

مثال (٢-١٣):

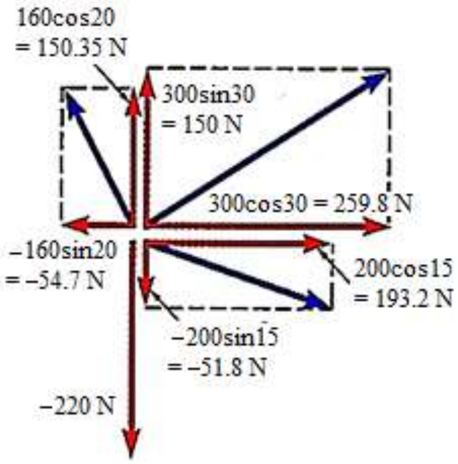
أربع قوى تؤثر على هيكل ثابت كما هو موضح في الشكل (مث. ٢-١٣). أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.



شكل (مث. ٢-١٣)

الحل:

$$(F_1)_x = 300 \cos 30° = 259.8 \text{ N}$$
$$(F_1)_y = 300 \sin 30° = 150 \text{ N}$$



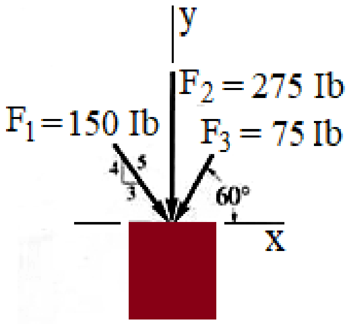
$$(F_2)_x = -160 \sin 20° = -54.7 \text{ N}$$
$$(F_2)_y = 160 \cos 20° = 150.35 \text{ N}$$
$$(F_3)_x = 0$$
$$(F_3)_y = -220 \text{ N}$$
$$(F_4)_x = 200 \cos 15° = 193.2 \text{ N}$$
$$(F_4)_y = -200 \sin 15° = -51.8 \text{ N}$$
$$R_x = 259.8 - 54.7 + 0 + 193.2 = 398.3 \text{ N}$$
$$R_y = 150 + 150.35 - 220 - 51.8 = 28.55 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = \sqrt{398.3^2 + 28.55^2} = 399.3 \text{ N}$$

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{28.55}{398.3} = 4.1°$$

مثال (٢-١٤):

عبر عن القوى (F_1) ، (F_2) ، و (F_3) المؤثرة على الجسم الموضح في الشكل (مث. ٢-١٤) بصيغة المتجه الديكارتي، ثم اوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الثلاث.



شكل (مث. ٢-١٤)

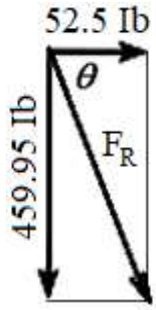
الحل:

$$F_1 = 150\left(\frac{3}{5}\right) i - 150\left(\frac{4}{5}\right) j = 90 \text{ Ib } i - 120 \text{ Ib } j$$

$$F_2 = 0\, i - 275 \text{ Ib } j$$

$$F_3 \quad - 75 \cos 60^o\, i - 75 \sin 60^o\, j$$

$$= - 37.5 \text{ Ib } i - 64.95 \text{ Ib } j$$



$$F_R = \sum F$$

$$F_{Rx} = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$= 90 + 0 - 37.5 = 52.5 \text{ Ib}$$

$$F_{Ry} = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$= - 120 - 275 - 64.95 = - 459.95 \text{ Ib}$$

$$F_R = \sqrt{(52.5)^2 + (-459.95)^2} = 462.94 \text{ Ib}$$

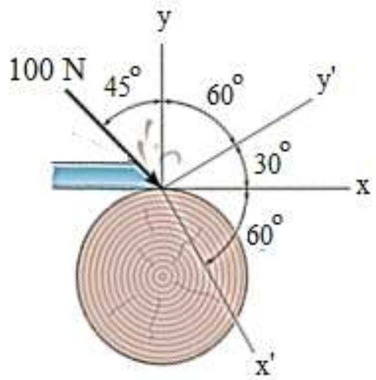
$$\tan\theta = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{-459.95}{52.5} = -83.49^o$$

مثال (٢-١٥):

وتد خشبي يدور في مخرطة وتســلط عليه قوة مقدارها (**100 N**) من قبل قلم القطع الخاص بالمخرطة كما موضح في الشكل (مث. ٢-١٥). حلل هذه القوة الى مركباتها المؤثرة:

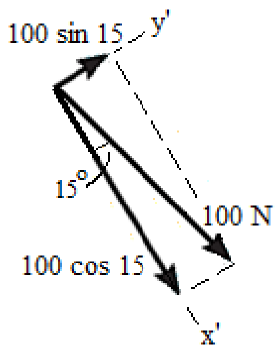
أ) على طول المحورين (**x**) و (**y**).

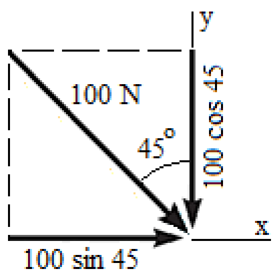
ب) على طول المحورين (**x'**) و (**y'**).



شكل (مث. ٢-١٥)

الحل:





أ)

$$F_x = 100 \sin 45° = 70.7 \text{ N}$$

$$F_y = - 100 \cos 45° = - 70.7 \text{ N}$$

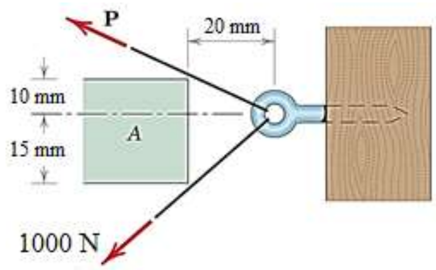
ب)

$$F_{x'} = 100 \cos 15° = 96.6 \text{ N}$$

$$F_{y'} = 100 \sin 15° = 25.88 \text{ N}$$

مثال (٢-١٦):

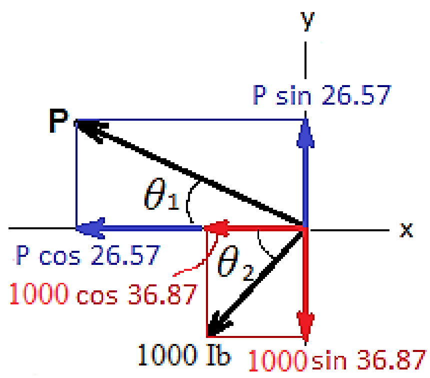
مطلوب إزالة البرغي من الخشب عن طريق تسليط قوة على طول محوره الأفقي. العائق (A) يمنع تسليط القوة بشكل مباشر، فيتم تسليط قوتين، قوة مقدارها (1000 N) والأخرى مقدارها (P)، بواسطة اسلاك كما هو موضح في الشكل (مث. ٢-١٦). أوجد قيمة القوة (P) المطلوبة للحصول على محصلة القوتين (T) متجهة على طول محور البرغي. ثم أوجد قيمة (T).



شكل (مث. ٢- ١٦)

الحل:

الطريقة الأولى:



$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{10}{20} = 26.57°$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{15}{20} = 36.87°$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$P \sin 26.57° - 1000 \sin 36.87° = 0$$

$$P \sin 26.57° = 1000 \sin 36.87°$$

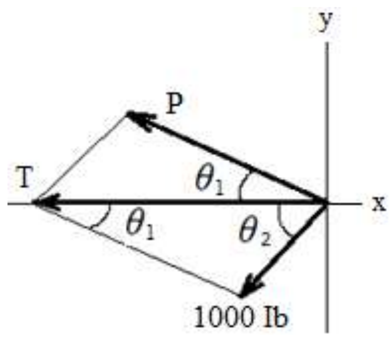
$$P = \frac{1000 \sin 36.87°}{\sin 26.57°} = 1341.4 \text{ N}$$

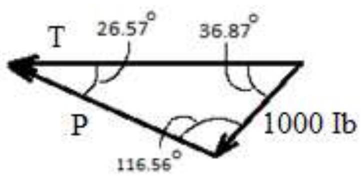
$$T = R_x = \sum F_x$$

$$= 1341.4 \cos 26.57° + 1000 \cos 36.87°$$

$$= 2000 \text{ N}$$

الطريقة الثانية:





$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{10}{20} = 26.57°$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{15}{20} = 36.87°$$

$$\frac{P}{\sin 36.87} = \frac{1000}{\sin 26.57}$$

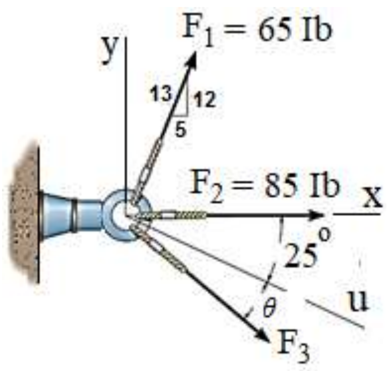
$$P = \frac{1000 \sin 36.87°}{\sin 26.57°} = 1341.4 \text{ N}$$

$$\frac{T}{\sin 116.56} = \frac{1000}{\sin 26.57}$$

$$T = \frac{1000 \sin 116.56}{\sin 26.57} = 2000 \text{ N}$$

مثال (٢-١٧):

ثلاث قوى مسلطة على البراكيت المبين في الشكل (مث. ٢-١٧). أوجد قيمة واتجاه القوة (F_3) التي تجعل محصلة القوى الثلاث (100 lb) متجهة بالاتجاه الموجب للمحور (u).



شكل (مث. ٢-١٧)

الحل:

$+\uparrow \quad \sum F_{Rx} = \sum F_x \qquad 100 \cos 25° = 85 + 65\left(\frac{5}{13}\right) + F_3 \cos(25° + \theta)$

$F_3 \cos(25° + \theta) = -19.37$ …………….. (1)

$+\rightarrow \sum F_{Ry} = \sum F_y \qquad -100 \sin 25° = 65\left(\frac{12}{13}\right) - F_3 \sin(25° + \theta)$

$F_3 \sin(25° + \theta) = 102.26$ ……………... (2)

حل المعادلتين (1) و (2):

الطريقة الأولى:

من المعادلة (1):

$$F_3 = \frac{-19.37}{\cos(25° + \theta)}$$

بالتعويض في المعادلة (2):

$$\frac{-19.37}{\cos(25° + \theta)} \sin(25° + \theta) = 102.26$$

$$-19.37 \tan(25° + \theta) = 102.26$$

$$(25° + \theta) = \tan^{-1}\frac{102.26}{-19.37} = -79.27° = 79.27°$$

$$\theta = 79.27 - 25 = 54.27°$$

$$F_3 = \frac{-19.37}{\cos(25° + 54.27°)} = 104 \text{ Ib}$$

الطريقة الثانية:

$F_3 \sin(25° + \theta) = 102.26$ ………….. (2)

$F_3 \cos(25° + \theta) = -19.37$ ………..... (1)

----------------------------------- (بالقسمة)

$$\tan(25° + \theta) = -5.28$$

$$25° + \theta = \tan^{-1} -5.28 = -79.27° = 79.27°$$

$$\theta = 79.27 - 25 = 54.27°$$

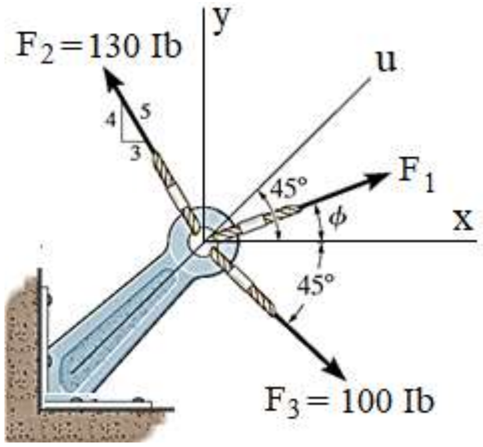
بالتعويض في المعادلة (1):

$$F_3 \cos(-79.27°) = -19.37$$

$$F_3 = \frac{-19.37}{\cos(-79.27°)} = 104 \text{ Ib}$$

مثال (٢-١٨):

القوى (F_1) ، (F_2) ، و (F_3) مسلطة على البراكيت المبين في الشكل (مث. ٢-١٨) بحيث تكون محصلتها (120 Ib) بالاتجاه الموجب للمحور (u).
أوجد قيمة القوة المجهولة (F_1) واتجاهها (ϕ).



شكل (مث. ٢-١٨)

الحل:

$F_1)_x = F_1 \cos\phi$ $\qquad$ $(F_1)_y = F_1 \sin\phi$

$(F_2)_x = -130\left(\frac{3}{5}\right) = -78$ Ib $\qquad$ $(F_2)_y = 130\left(\frac{4}{5}\right) = 104$ Ib

$(F_3)_x = 100\cos 45° = 70.7$ Ib $\qquad$ $(F_3)_y = -100\sin 45° = -70.7$ Ib

$(F_R)_x = 120\cos 45° = 84.84$ Ib $\qquad$ $(F_R)_y = 120\sin 45° = 84.84$ Ib

$\xrightarrow{+} F_{Rx} = \sum F_x$ $\qquad$ $84.84 = F_1\cos\phi - 78 + 70.7$

$F_1\cos\phi = 92.14$ ………………..……. (1)

$+\uparrow F_{Ry} = \sum F_y$ $\qquad$ $84.84 = F_1\sin\phi + 104 - 70.7$

$F_1\sin\phi = 51.54$ ……………….. (2)

From Eq. (1): $\qquad F_1 = \dfrac{92.14}{\cos\phi}$

Sub. in Eq. (2): $\qquad \dfrac{92.14}{\cos\phi}\sin\phi = 51.54$

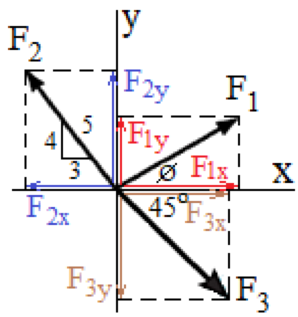
$92.14\tan\phi = 51.54$

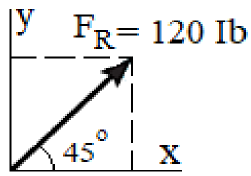
$\tan\phi = \dfrac{51.54}{92.14} = 0.56$

$\phi = \tan^{-1} 0.56 = 29.22°$

$F_1 = \dfrac{92.14}{\cos\phi}$

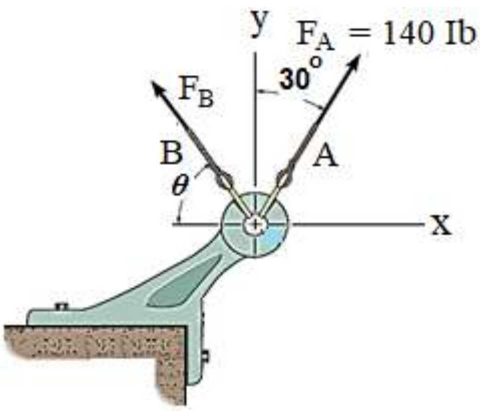
$= \dfrac{92.14}{\cos 29.23°} = 105.57$ Ib





مثال (٢-١٩):

اذا كانت محصلة القوتين المبينتين في الشكل (مث. ٢-١٩) موجهة بالاتجاه الموجب للمحور العمودي وبقيمة (**300 Ib**). أوجد قيمة القوة ($\mathbf{F_B}$) واتجاهها ($\boldsymbol{\theta}$).



شكل (مث. ٢-١٩)

الحل:

طريقة (١):

$+ \rightarrow F_{Rx} = \sum F_x$ $\quad 0 = 140 \sin 30° - F_B \cos\theta$

$F_B \cos\theta = 70$ ……………..……. (1)

$+ \uparrow F_{Ry} = \sum F_y$ $\quad 300 = 140 \cos 30° + F_B \sin\theta$

$F_B \sin\theta = 178.76$ ..……………… (2)

$F_B \sin\theta = 178.76$ ..……………… (2)

$F_B \cos\theta = 70$ ……………..……. (1)

---------------------------------- (بالقسمة)

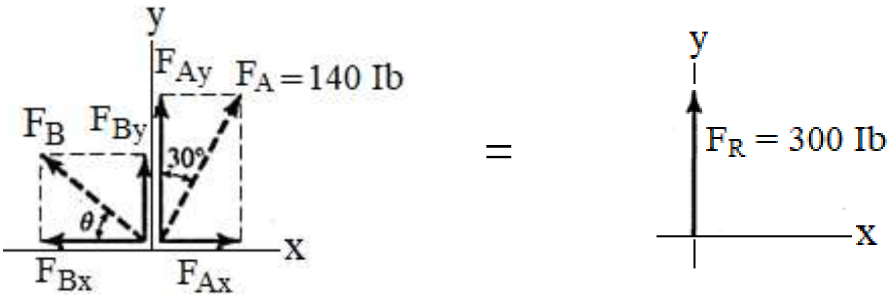
$\tan\theta = 2.55$

$\theta = 68.6°$

بالتعويض في المعادلة (2):

$F_B \sin(68.6°) = 178.76$

$F_B = 192$ Ib



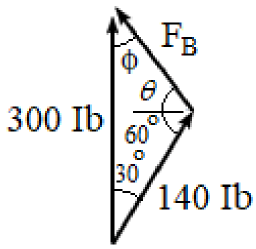
طريقة (٢):

$$F_B = \sqrt{(300)^2 + (140)^2 - 2(300)(140)\cos 30} = 192 \text{ Ib}$$

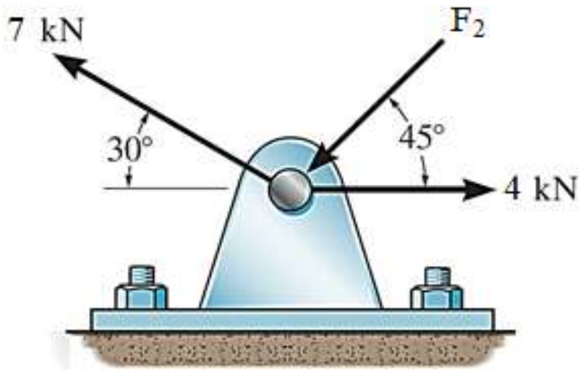
$$\frac{140}{\sin\phi} = \frac{192}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad \phi = 21.4°$$

$\theta + 60 = 180 - 30 - 21.4 = 128.6°$

$\theta = 68.6°$



مثال (٢-٢٠):



شكل (مث. ٢- ٢٠)

اذا كانت القوى ($F_1 = 7\ kN$) ، (F_2) و ($F_3 = 4\ kN$) تؤثر على البراكيت كما موضح في الشـــكل (مث. ٢-٢٠). أوجــــد مقدار القوة (F_2) بحيث تكون محصلة القوى الثلاث أصغر ما ممكن. ثم أوجد قيمة المحصلة.

الحل:

$+\rightarrow\ F_{Rx} = \sum F_x$

$F_{Rx} = 4 - F_2 \cos 45° - 7 \cos 30°$

$F_{Rx} = -2.06 - 0.707\ F_2$

$+\uparrow\ \ F_{Ry} = \sum F_y$

$F_{Ry} = -F_2 \sin 45° + 7 \sin 30°$

$F_{Ry} = 3.5 - 0.707\ F_2$

$F_R^2 = (-2.06 - 0.707\ F_2)^2 + (3.5 - 0.707\ F_2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2F_R \dfrac{dF_R}{dF} = 2(-2.06 - 0.707\ F_2)(-0.707)$

$+ 2(3.5 - 0.707\ F_2)(-0.707) = 0$

$2(1.456 + 0.5\ F_2 - 2.475 + 0.5\ F_2) = 0$

$1.456 + 0.5\ F_2 - 2.475 + 0.5\ F_2 = 0$

$F_2 = 1.02\ kN$

بالتعويض في المعادلة (1):

$F_R^2 = [-2.06 - 0.707(1.02)]^2 + [3.5 - 0.707(1.02)]^2$

$F_R^2 = (-2.78)^2 + (2.78)^2$

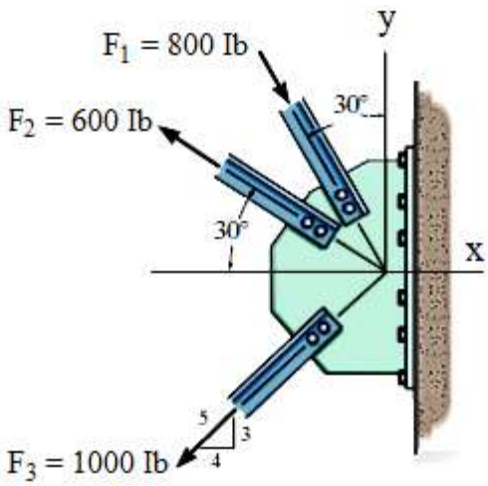
$F_R = 3.93\ kN$

مسائل:

٢-١) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على الصفيحة المبينة في الشـــــكل (مس. ٢-١) واتجاهها مقاساً مع اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).

الجواب:

$R = 1353\ Ib\ ,\ \ \phi = 132.8°$

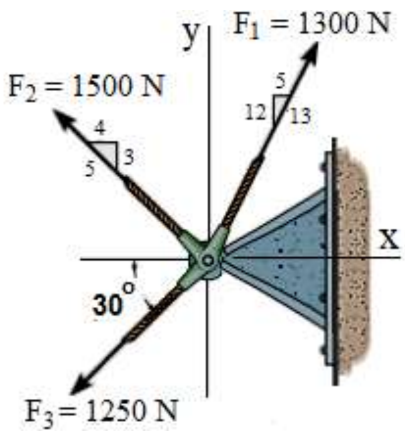


شكل (مس. ٢-١)

٢-٢) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على البراكيت واتجاهها مقاســـــاً عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).

الجواب:

$R = 2313.6\ N\ ,\ \ \phi = 140.4°$

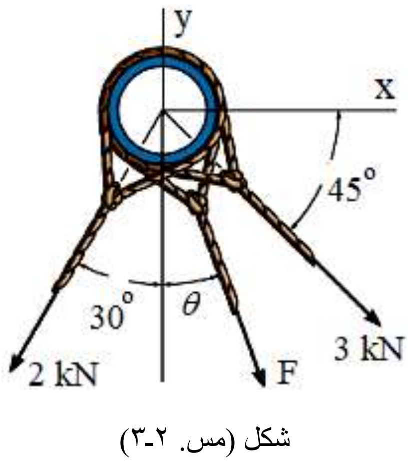


شكل (مس. ٢-٢)

٢-٣) أنبوب يسحب بواسطة ثلاثة حبال وبقوى شد مبينة في الشكل (مس. ٢-٣) بحيث تولد محصلة قوى تبلغ قيمتها (5 kN). فإذا كانت قوى الشد في حبلين منها معلومة، أوجد زاوية الحبل الثالث (θ) بحيث يكون مقدار قوة الشد (F) فيه عند أدنى حد. ما هو مقدار القوة؟

الجواب:

$F = 1\ kN\ ,\ \ \theta = 16.12°$

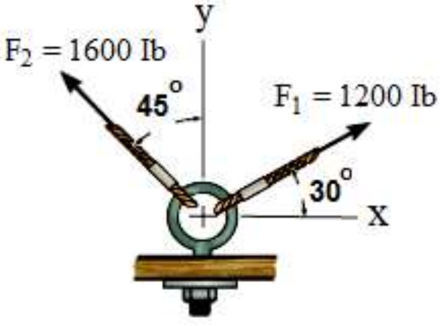


شكل (مس. ٢-٣)

٢-٤) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على عين البرغي المبين في الشـــــكل (مس. ٢-٤) واتجاهها مقاساً بعكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).

الجواب:

$F_R = 1733.82\ Ib\ ,\ \ \phi = 93°$

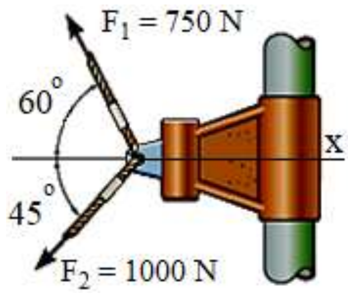


شكل (مس. ٢-٤)

٢-٥) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على البراكيت المبين في الشكل (مس. ٢-٥) واتجاهها مقاساً عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي السالب (x).

الجواب:

$F_R = 1083.5\ N\ ,\ \theta = 3°$

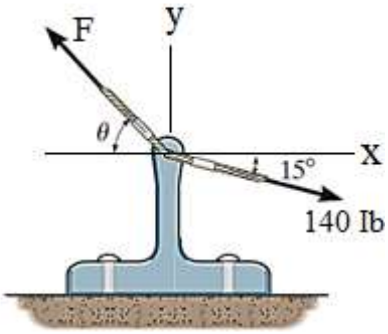


شكل (مس. ٢-٥)

٢-٦) أوجد مقدار القوة (F) واتجاهها (θ) لتحقيق محصلة قوى تؤثر على البراكيت المبين في الشـــكل (مس. ٢-٦)، قيمتها (100 N) موجهة على طول المحــــور العمودي الموجب (y).

الجواب:

$F = 192\ Ib\ ,\ \theta = 45.2°$

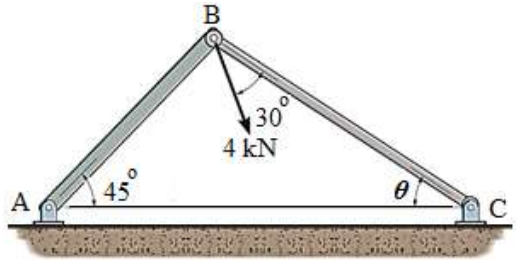


شكل (مس. ٢-٦)

٢-٧) قوة مقدارها (4 kN) تؤثر على الهيكل المبين في الشكل (مس. ٢-٧)، فاذا كانت مركبتها المؤثرة على طول الضلع (BC) بقيمـــــة (3 kN) موجه من (B) باتجـــــاه (C)، فما مقدار الزاوية المطلوبة (θ) والمركبة التي تؤثر على طول الضلع (AB).

الجواب:

$F_{AB} = 2.05\ kN\ ,\ \theta = 32°$

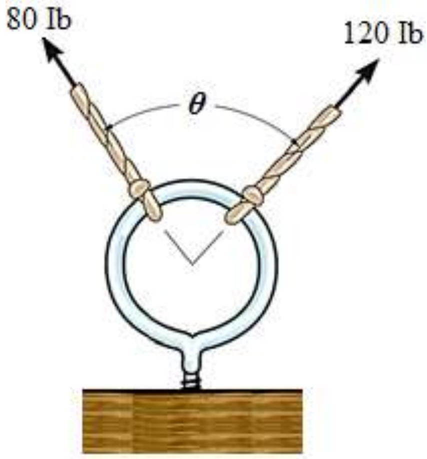


شكل (مس. ٢-٧)

٢-٨) أوجد الزاوية (θ) المحصورة بين القوتين المؤثرتين على عين البرغي، بحيث يكون مقدار محصلة القوتين (160 Ib).

الجواب:

$\theta = 75.5°$

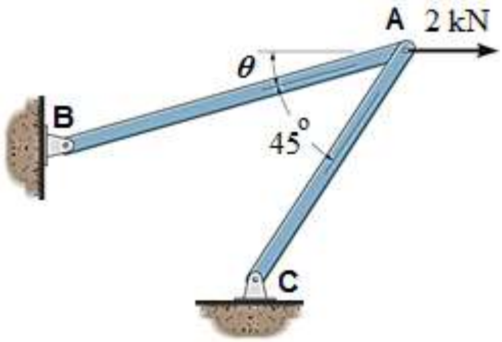


شكل (مس. ٢-٨)

٢-٩) أوجد الزاوية (θ) المطلوبة في تصميم الدعامة المبينة في الشكل (مس. ٢-٩) بحيث يكون للقوة الأفقية (2 kN) مركبة بقيمة (2.5 kN) موجهة من (A) باتجاه (C). وما هي مركبة القوة المؤثرة على طول الضلع (AB)؟

الجواب:

$\theta = 62.1°$, $F_{AB} = 2.7\ kN$

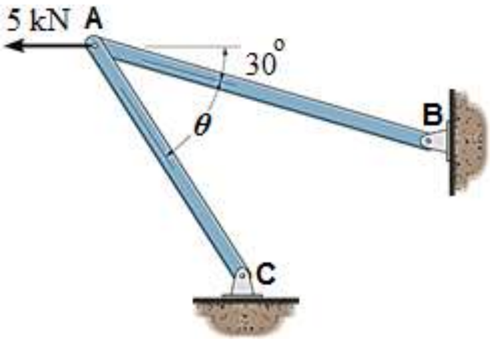


شكل (مس. ٢-٩)

٢-١٠) أوجد الزاوية (θ) المطلوبة في تصميم الدعامة المبينة في الشكل (مس. ٢-١٠) بحيث يكون للقوة الأفقية (5 kN) مركبة بقيمة (3 kN) موجهة من (B) باتجاه (A).

الجواب:

$\theta = 53.1°$

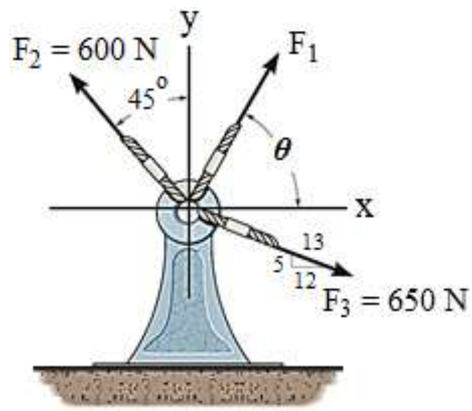


شكل (مس. ٢-١٠)

٢-١١) أوجد مقدار القوة (F_1) واتجاهها (θ)، إذا كانت محصلة القوى الثلاث هي (1000 N) متجهة (45°) عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).

الجواب:

$F_1 = 753.66\ N$, $\theta = 45°$

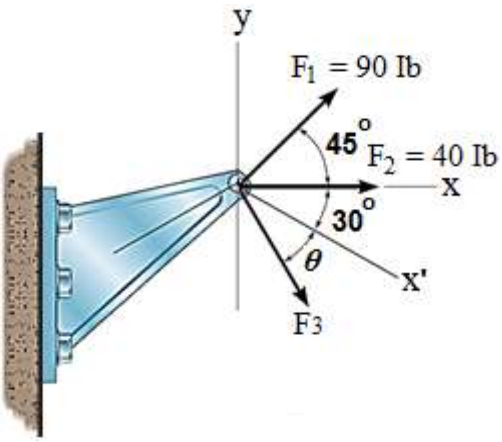


شكل (مس. ٢-١١)

٢-١٢) أوجد مقدار القوة (F_3) واتجاهها (θ) لتحقيق محصلة قوى تؤثر على البراكيت المبين في الشكل (مس. ٢-١٢) قيمتها (200 Ib) موجهة على طول المحور (x') الموجب.

الجواب:

$F_1 = 178\ Ib$, $\theta = 37°$

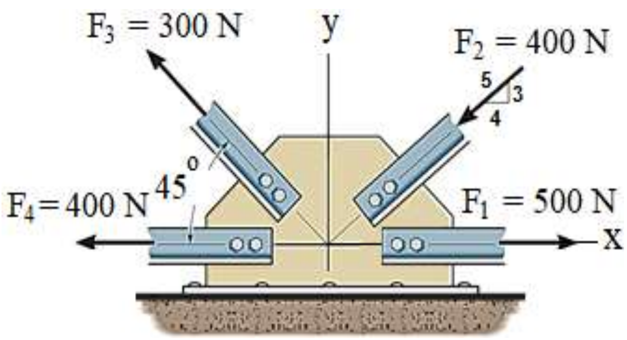


شكل (مس. ٢-١٢)

٢-١٣) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على الصفيحة المبينة في الشكل (مس. ٢-١٣) واتجاهها مقاساً بعكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x).

الجواب:

$F_R = 433\ N\ ,\ \ \theta = 183.68°$

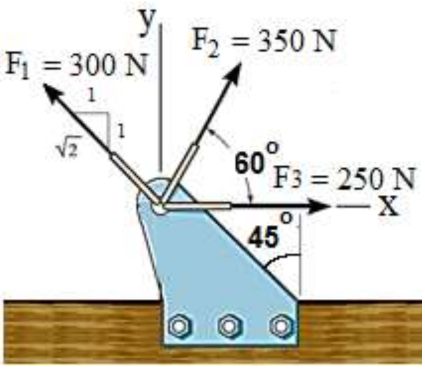


شكل (مس. ٢-١٣)

٢-١٤) القوى (F_1) ، (F_2) ، و (F_3) مسلطة على البراكيت المبين في الشكل (مس. ٢-١٤). ما مقدار محصلة القوى واتجاهها مقاساً عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي الموجب (x) للبراكيت.

الجواب:

$F_R = 557.48\ N,\ \ \theta = 67.55°$

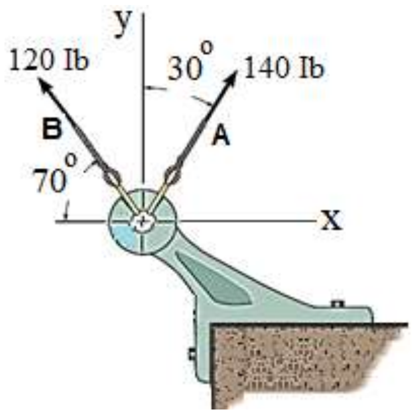


شكل (مس. ٢-١٤)

٢-١٥) أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة على البراكيت المبين في الشكل (مس. ٢-١٥) واتجاهها مقاساً مع اتجاه عقارب الساعة من المحور العمودي الموجب (y).

الجواب:

$F_R = 235.79\ Ib\ ,\ \ \phi = 7.06°$

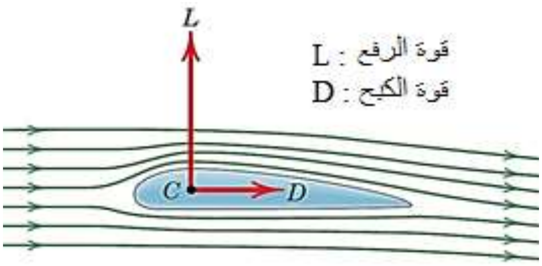


شكل (مس. ٢-١٥)

٢-١٦) إذا كانت قوة الرفع على مقطع عرضي للجناح (مطيار) (600 N) وكانت نسبة قوة الرفع (L) إلى قوة الكبح (D) للجناح هي (L / D = 12)، احسب محصلة القوى (R) والزاوية (θ) التي تصنعها مع الأفق.

الجواب:

$R = 602\ N\ ,\ \ \theta = 85.24°$



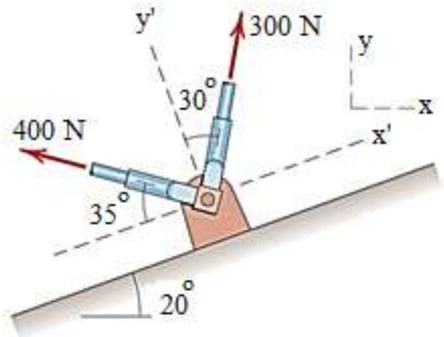
شكل (مس. ٢-١٦)

٢-١٧) قوتان مسلطتان على البراكيت الموضح في الشـــكل (مس. ٢-١٧). أوجد محصلة القوتين (F_R)، ثم أوجد قيمة (F_R) بصيغة المتجهات الديكارتية على طول المحورين ('x) و ('y).

الجواب:

$F_R = 520.5 \text{ N}$

$F_R = -334.57 \text{ N } i + 398.73 \text{ N } j$

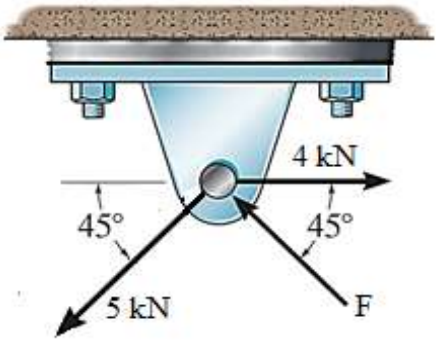


شكل (مس. ٢-١٧)

٢-١٨) في الهيكل المبين في الشكل (مس. ٢-١٨)، أوجد قيمة القوة المجهولة (F) التي تجعل محصلة القوى الثلاث (F_R) أصغر ما ممكن. ثم أوجد قيمة المحصلة (F_R).

الجواب:

$F = 2.825 \text{ kN}, \; F_R = 2.18 \text{ kN}$

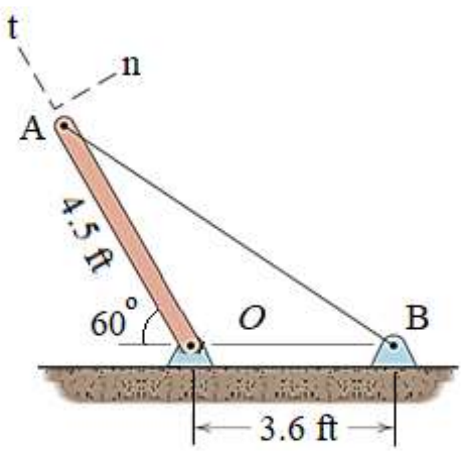


شكل (مس. ٢-١٨)

٢-١٩) قوة الشد في السلك (AB) التي تمنع العمود (OA) من الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة حول المحور (O) هي (150 Ib). أوجد المركبة (n) والمركبة (t) لهذه القوة التي تؤثر على النقطة (A) من العمود.

الجواب:

$F_n = 66.46 \text{ Ib}, \quad F_t = 134.47 \text{ Ib}$

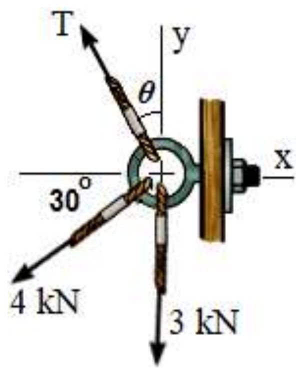


شكل (مس. ٢-١٩)

٢-٢٠) أوجد مقدار القوة (T) واتجاهها (θ) للحصول على محصلة قوى يتعلق بها عين البرغي مقدارها (7.5 kN) أفقياً إلى اليسار.

الجواب:

$T = 6.4 \text{ kN}, \; \theta = 38.66°$



شكل (مس. ٢-٢٠)

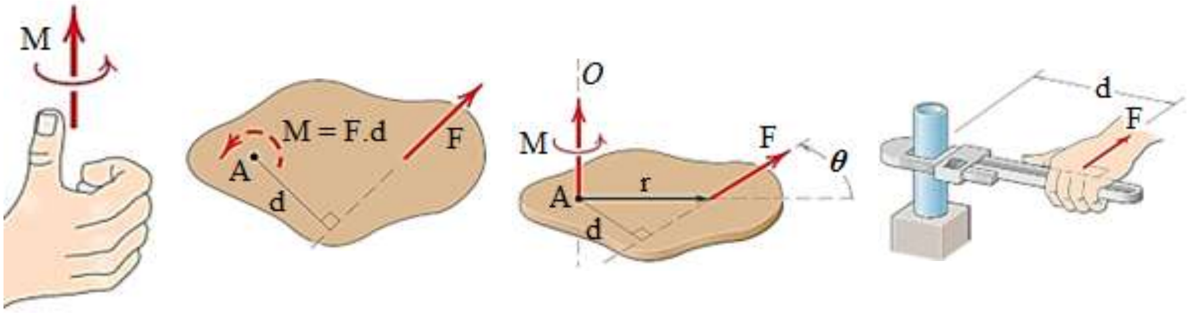
الفصل الثالث

العـــــــــزوم

THE MOMENTS

تعريف العزم (Definition of the moment):

عند تسليط قوة ما على جسم معين فان الجسم يتحر ك باتجاه خط تأثير تلك القوة. فاذا كان خط تأثير القوة يمر من مركز كتلة الجسم فانه سيتحرك حركة خطية فقط بتاثير القوة، أما اذا كان خط تأثير القوة لا يمر من مركز كتلته فانه سيتحرك حركة زاوية حول مركز كتلته بتأثير القوة بالاضافة الى الحركة الخطية.
هذا التأثير الذي يولد الحركة الزاوية يسمى العزم { moment – or – torque (M) }.



شكل (٣-١) مخططات توضيحية للعزوم

المخططات في الشكل (٣-١) تبين تأثير القوة (F) على جسم ثنائي الأبعاد في مستوي أبعاده. هذه القوة تولد عزم يدور الجسم حول المحور ($O - O$) العمودي على مستوي أبعاده، مقدار العزم يساوي حاصل ضرب مقدار القوة (F) مع المسافة العمودية بين هذا المحور وخط تأثير القوة الذي يسمى ذراع القوة (d). أي أن مقدار العزم الناتج من هذه القوة هو:

$$M = F.d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}1)$$

طرق الحل:

- نظرية فاريجنون (Varignon's theorem):

تنص هذه النظرية على أن (عزم القوة حول أي نقطة أو محور تساوي مجموع عزوم مركبات القوة حول نفس النقطة أو المحور).

- المسافة العموية (Normal distance):

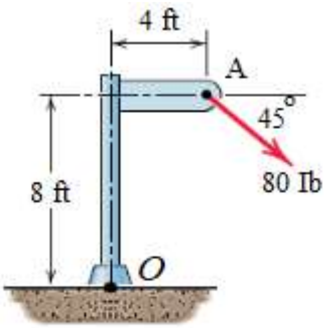
في هذا المبدأ (يمكن إيجاد عزم أي قوة حول محور معين بضرب القوة في المسافة العموية بين خط تأثير القوة والمحور المعطى).

- مبدأ نقل القوة (Principle of transmissibility):

في هذا المبدأ (يمكن إيجاد عزم القوة عن طريق نقل القوة إلى المحور الأفقي أو المحور العمودي للنقطة المطلوب العزم حولها).

مثال (٣-١):

أحسب قيمة العزم حول نقطة مركز القاعدة (O) للقوة (80 Ib) بأربع طرق مختلفة.



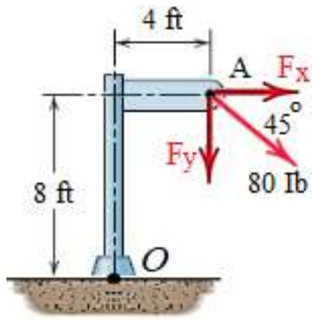
شكل (مث. ٣- ١)

الحل:

١) استبدال القوة بمركباتها الديكارتية:

$F_1 = 80 \cos 45^o = 56.57$ Ib

$F_2 = 80 \sin 45^o = 56.57$ Ib

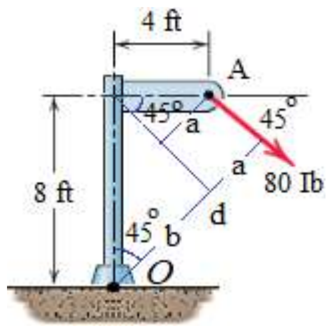


باستخدام نظرية فاريجنون (Varignon's theorem):

$M_o = -(56.57 \times 8) - (56.57 \times 4) = -678.8$ Ib.ft

$= 678.84$ Ib.ft (C.W)

٢) باستخدام طرقة المسافة العمودية. حيث أن ذراع القوة (80 Ib) هو:



$d = a + b = 4 \sin 45^o + 8 \cos 45^o$

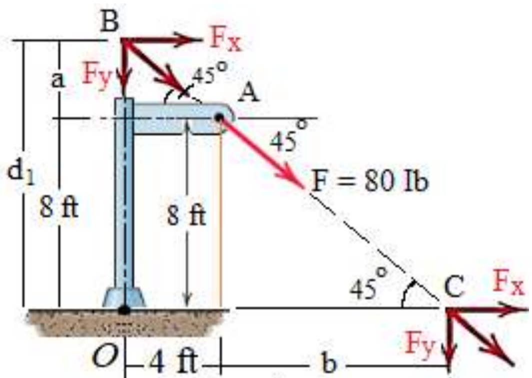
$= 8.485$ft

$M_o = Fd$

$M_o = -80 \times 8.484 = -678.8$ Ib.ft

$= 678.8$ Ib.ft (CCW)

٣) باســـتخدام مبدأ نقل القوة. يمكن نقل القـــوة (80 Ib) على طول خط تأثيرها الى النقطة (B)، تهمل المركبة العمودية (F_2) لأن خط تأثيرهــا يمــر بالنقطة (O). ذراع المركبة (F_1) سيكون:



$d_1 = 8 + 4 \tan 45^o = 12$ ft

$F_1 = 80 \cos 45^o = 56.57$ Ib

العزم سيكون:

$M_o = -56.57 \times 12 = -678.8$ Ib.ft

$= 678.8$ Ib.ft (C.W)

٤) يمكن نقل القوة (80 Ib) على طول خط تأثيرها الى النقطة (C)، تهمل المركبة الأفقية (F_1) لأن خط تأثيرها يمر بالنقطة (O). ذراع المركبة (F_2) سيكون:

$d_2 = 4 + 8 \cot 45^o = 12$ ft , $F_2 = 80 \sin 45^o = 56.57$ Ib

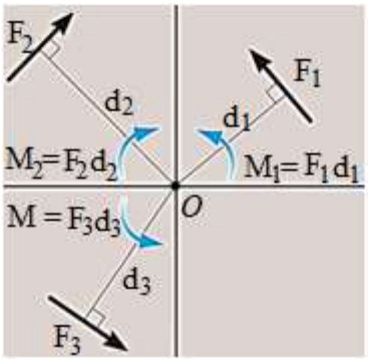
العزم سيكون:

$M_o = -56.57 \times 12 = -678.8$ Ib.ft $= 678.8$ Ib.ft (C.W)

محصلة العزوم (Resultant moment):

في المسائل ثنائية الأبعاد، تقع جميع القوى في مستوٍ واحد وليكن المستوي (x – y)، كما مبين في الشكل (٣-٢)، يمكن تحديد محصلة العزوم $(M_R)_o$ حول النقطة (*O*) (المحور - z) من خلال إيجاد الجمع الجبري للعزوم الناتجة من كل قوة في النظام. تكون قيمة العزم موجبة اذا كان اتجاه العزم عكس اتجاه عقارب الساعة حيث يتم توجيهها حول المحور (z) الموجب (خارج الصفحة) وبالعكس تكون قيمة العزم سالبة اذا كان اتجاه العزم مع اتجاه عقارب الساعة.

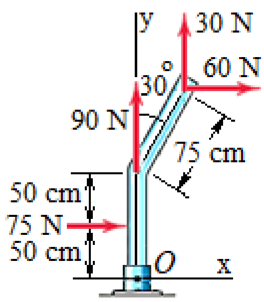
$$\circlearrowleft + (M_R)_o = \sum F\,d \; ; \qquad (M_R)_o = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \;\ldots\ldots \quad (3\text{-}2)$$



شكل (٣-٢) محصلة العزوم

مثال (٣-٢):

أوجد محصلة العزوم للقوى الأربع المؤثرة على القضيب المبين في الشكل (مث. ٣-٢) حول النقطة (*O*).



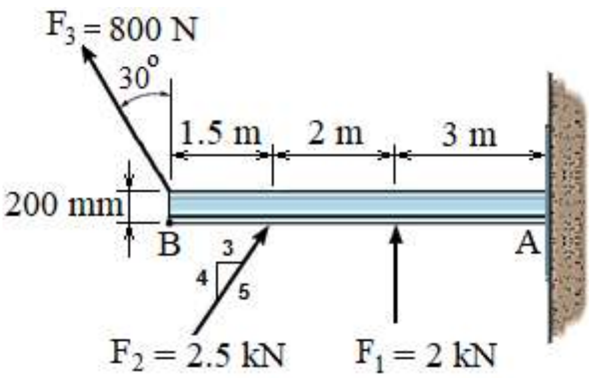
شكل (مث. ٣-٢)

الحل:

$$\begin{aligned} (M_R)_o &= -75 \times 0.5 + 90 \times 0 \\ &\quad + 30 \times 0.75 \sin 30^\circ \\ &\quad - 60 \times (1 + 0.75 \cos 30^\circ) \\ &= -125.22 \text{ N.m} = 125.22 \text{ N.m} \circlearrowright \end{aligned}$$

مثال (٣-٣):

ثلاث قوى تؤثر على قضيب مثبت من احدى نهايتيه كما موضح في الشكل (مث. ٣-٣)، أوجد عزم كل قوة من القوى الثلاث حول النقطة (A) ومحصلة العزوم لهذه القوى حول نفس النقطة.



شكل (مث. ٣-٣)

الحل:

$\circlearrowleft + (M_{F1})_A = -(2000)(3)$

$= -6000\ N.m = 6\ kN.m$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

$\circlearrowleft + (M_{F2})_A = -(2500)(4/5)(5)$

$= -10000\ N.m = 10\ kN.m$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

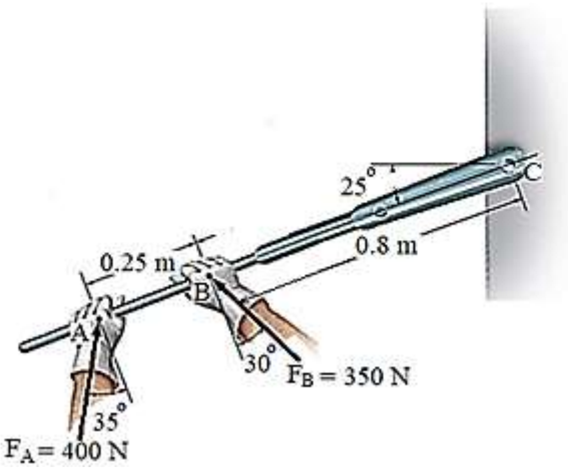
$\circlearrowleft + (M_{F3})_A = -(800)(\cos 30^\circ)(6.5) + 800 \sin 30^\circ (0.2)$

$= -4423\ N.m = 4.4\ kN.m$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

$\circlearrowleft + (M_R)_A = 6 + 10 + 4.4 = 20.4\ kN.m$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-٤):

أوجد عزم القوتين (F_A) و (F_B) حول البرغي عند النقطة (C).



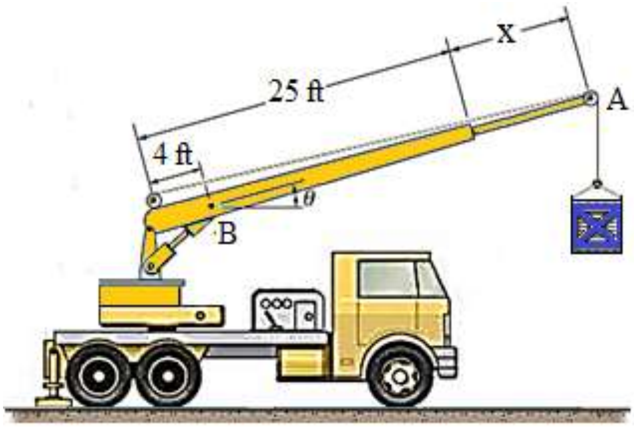
شكل (مث. ٣-٤)

الحل:

$$+ M_A = -(400 \cos 35^\circ)(1.05) - (350 \cos 30^\circ)(0.8) = -586.53\ N.m$$

$$= 586.53\ N.m \circlearrowright$$

مثال (٣-٥):



شكل (مث. ٣-٥)

يمكن تحديد ذراع الرافعة المبينة في الشكل (مث. ٣-٥) عند زاوية (θ) محصورة بين (0^o) و (90^o) ضمن استطالة (x) محددة بين (0 ft) و(12 ft). اذا كانت الكتلة المعلقة مقدارها (120 kg)، أوجد العزم الناتج عن هذه الكتلة عند النقطة (B) بدلالة (x) و (θ)، ثم أوجد قيم كل من (x) و (θ) لتحقيق أقصى عزم ممكن عند النقطة (B)، وماهي قيمة هذا العزم؟ إهمل حجم البكرة عند النقطة (A).

الحل:

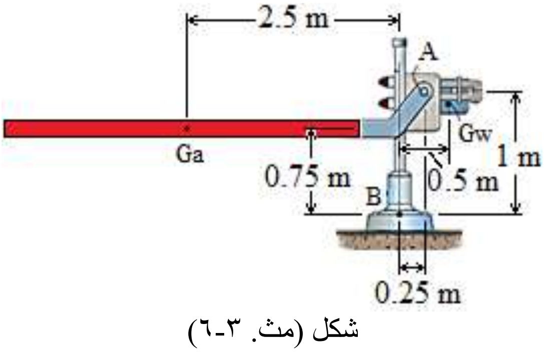
$$W = m\,g = 120 \times 9.81 = 1177.2 \text{ N} = \frac{1177.2}{4.448} = 264.66 \text{ Ib}$$

$$\curvearrowright + M_A = -(264.66)(21 + x)\cos\theta$$
$$= (264.66 \cos\theta)(21 + x) \text{ Ib.ft}$$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

أقصى عزم عند النقطة (A) يحدث عندما ($\theta = 0^o$) و (x = 12 ft).

$$\curvearrowright + (M_A)_{max} = \{(264.66 \cos 0^o)(21 + 12)\} \text{ Ib.ft}$$
$$= 8733.78 \text{ Ib.ft}$$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-٦):



شكل (مث. ٣-٦)

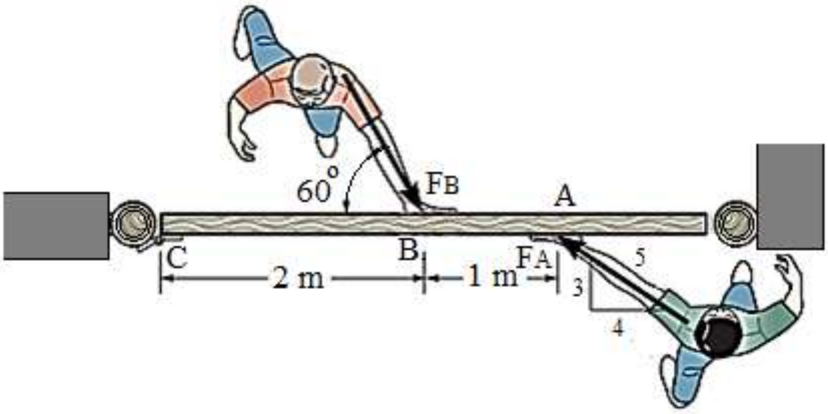
تتكون البوابة المبينة في الشكل (مث. ٣-٦) من ذراع كتلته (75 kg) ومركز كتلته عند (G_a) وثقل توازن كتلته (200 kg) ومركز كتلته عند (G_W). أوجد مقدار واتجاه العزم الناتج عن أوزان أجزاء البوابة حول النقطة (A).

الحل:

$$\curvearrowleft +(M_R)_A = \sum F\,d$$
$$(M_R)_A = (75)(9.81)(2.5 + 0.25) - (200)(9.81)(0.5 - 0.25)$$
$$= 1532.8 \text{ N.m} = 1.53 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-٧):

بوابة متمفصلة عند النقطة (C)، يدفعها من كلتا جهتيها صبيان بقوتين مختلفين في القيمة والاتجاه مقدارهما ($F_A = 150$ N) و ($F_B = 250$ N)، كما هو موضح في الشكل (مث. ٣-٧). أوجد عزم كل قوة حول نقطة التمفصل (C). ثم بين بأي اتجاه ستدور البوابة؟ إهمل سمك البوابة.



شكل (مث. ٣-٧)

الحل:

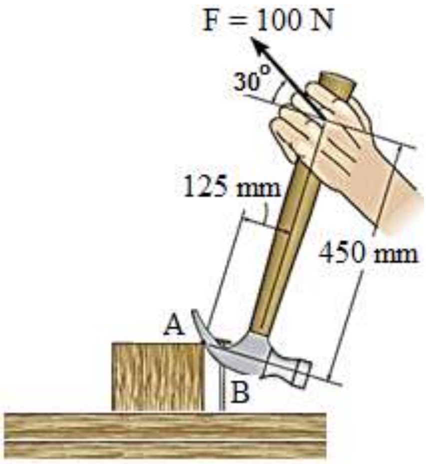
$$\circlearrowleft + (M_{FA})_C = 150 \times \frac{3}{5} \times 3 = 270 \text{ N.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

$$\circlearrowleft + (M_{FB})_C = 250 \sin 60^o \times 2 = -433 = 433 \text{ N.m}$$ (مع اتجاه عقارب الساعة)

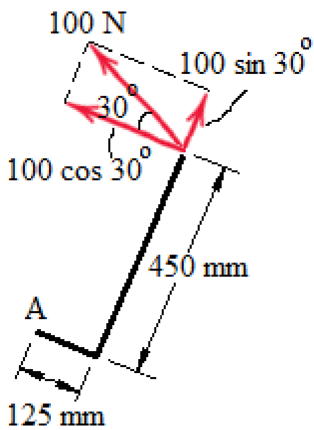
بما أن { $(M_{FA})_C > (M_{FB})_C$ }، البوابة ستدور مع اتجاه عقارب الساعة.

مثال (٣-٨):

قوة مقدارها (100 N) مسلطة على مقبض مطرقة. أوجد عزم هذه القوة حول النقطة (A).



شكل (مث. ٣-٨)

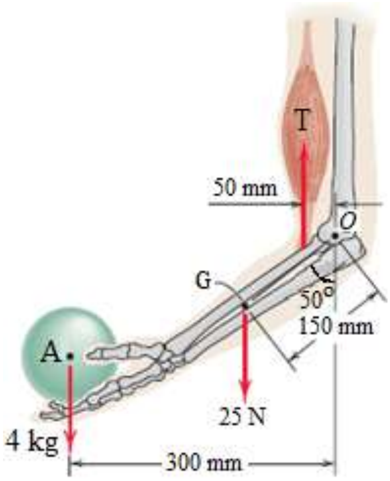


الحل:

$$\circlearrowleft + \sum M_A = (100 \cos 30^o)(0.45) + (100 \sin 30^o)(0.125)$$
$$= 45.22 \text{ N.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-٩):

يظهر الشـكل (مث. ٣-٩) أعضاء الجزء السـفلي من الذراع. وزن السـاعد (25 N) ومركز كتلته عند النقطة (G).عندما يحمل الكف ثقل بكتلة (4 kg)، أحسب قوة شـد العضلة ذات الرأسـين (T) بحيث تكون محصلة العزوم حول النقطة (*O*) تساوي صفر (حالة توازن).



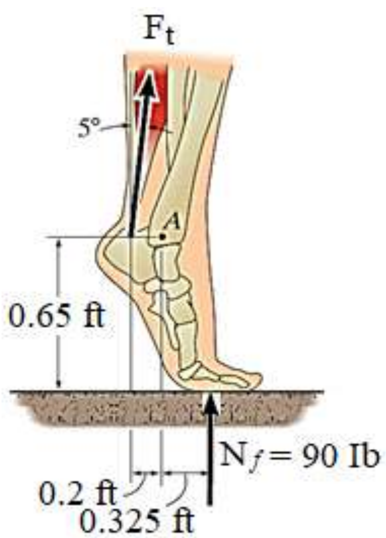
شكل (مث. ٣-٩)

الحل:

$$\circlearrowleft + (\sum M_R)_o = \sum F\, d$$
$$0 = (40)\,(300) + (25)\,(150 \sin 50) - (T)\,(50)$$
$$50\,T = 14872.67$$
$$T = 297.5 \text{ N}$$

مثال (٣-١٠):

عندما حاول رجل الوقوف على أصابع قدميه تحرك وتر العرقوب بقوة مقدارها (F_t = 145 Ib)، وكانت قوة رد فعل الأرض على كل قدم من قدميه مقدارها (N_f = 90 Ib). أوجد محصلة العزوم الناتجة من القوتين (F_t) و (N_f) حول مفصل الكاحل (A).



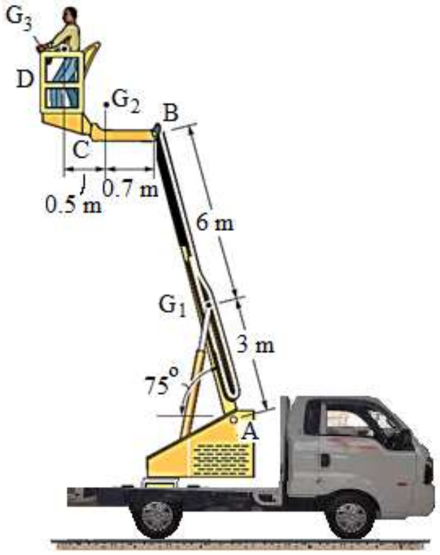
شكل (مث. ٣-١٠)

الحل:

$$\circlearrowleft + (\sum M_R)_A = \sum F\, d$$
$$(M_R)_A = (90)\,(0.325) - (145 \cos 5^o)\,(0.2)$$
$$= 0.36 \text{ Ib.ft}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-١١):

رافعة تخصصية في مجال صيانة الكهرباء، كتلة ذراعها (AB) هي (750 kg) وكتلـــة القفص (BCD) هي (100 kg) وكتلة عامل الكهرباء (80 kg) ومراكز الثقل تقع عند النقاط (G_1) ، (G_2) و (G_3) على التوالي. أوجد العزم الناتج عن كل جزء حول النقطة (A)، ثم أوجد محصلة العزوم حول نفس النقطة.



شكل (مث. ٣-١١)

الحل:

$$\curvearrowleft + (M_{ar})_A = (750\times9.81)(3\cos 75°) = 5712.8 \text{ N.m}$$
$$= 5.7 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

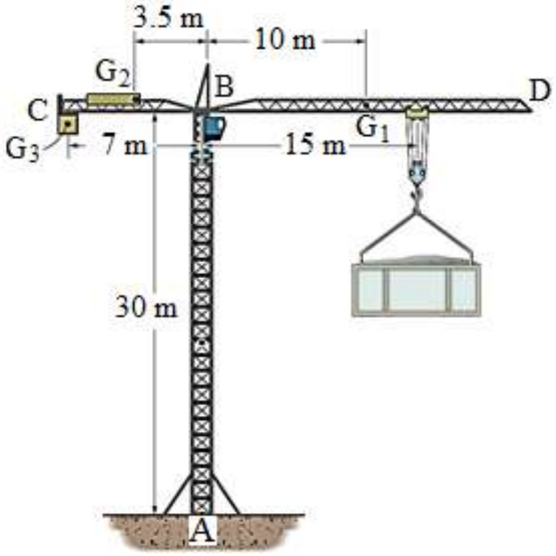
$$\curvearrowleft + (M_c)_A = (100\times9.81)(9\cos 75° + 0.7) = 2971.8 \text{ N.m}$$
$$= 3 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

$$\curvearrowleft + (M_m)_A = (80\times9.81)(9\cos 75° + 1.2) = 2769.8 \text{ N.m}$$
$$= 2.8 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

$$\curvearrowleft + (M_R)_A = 5.7 + 3 + 2.8 = 11.5 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-١٢):

تستخدم الرافعة البرجية المبينة في الشكل (مث. ٣-١٢) لرفع الحمولة (2000 kg) للأعلى بسرعة ثابتة. كتلة ذراعها الرئيسي (BD) هي (1500 kg) ومركز ثقله عند النقطة (G_1)، وكتلة ذراع الموازنة (BC) هي (500 kg) ومركز ثقله عند النقطة (G_2)، وكتلة الثقل الموازن عند النقطة (C) هي (7000 kg) ومركز ثقله عند النقطة (G_3). أوجد العزم الناتج عن الحمل وأوزان أذرع الرافعة البرجية والثقل الموازن حول النقطة (A) وحول النقطة (B).



شكل (مث. ٣-١٢)

الحل:

نظراً لأن أذرع الأوزان والحمل المقاسة بالنقطتين (A) و (B) هي نفسها، فإن العزوم الناتجة عن الحمل والأوزان حول النقطتين (A) و (B) هي نفسها.

$$\curvearrowleft + (M_R)_A = (M_R)_B = \sum Fd$$

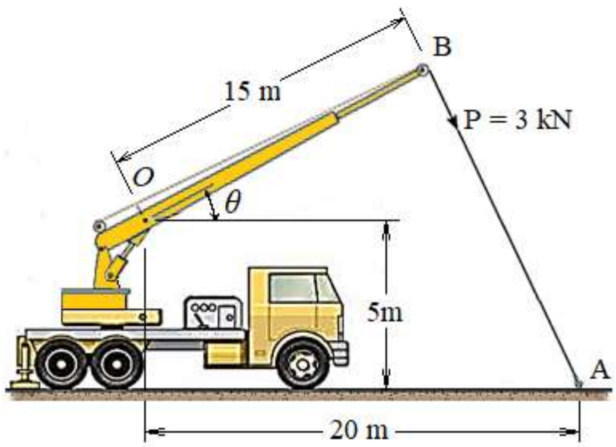
$$(M_R)_A = (M_R)_B = (7000)(9.81)(7) + (500)(9.81)(3.5) - (1500)(9.81)(10) - (2000)(9.81)(15)$$

$$= 480690 + 17167.5 - 147150 - 294300$$

$$= 56407.5 \text{ N.m} = 56.4 \text{ kN.m}$$ (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-١٣):

رافعة طول ذراعها (15 m)، خط السحب يسلط قوة مقدارها (P = 3 kN) في نهاية ذراعها. أوجد زاوية الذراع (θ) بحيث تحقق هذه القوة أقصى عزم حول النقطة (O)، ثم أوجد مقدار هذا العزم.

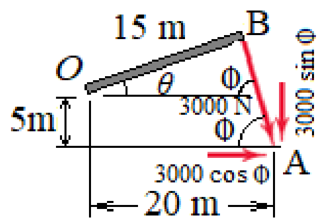


شكل (مث. ٣-١٣)

:الحل

:عند أقصى عزم

$OB \perp BA$



$\curvearrowleft + (M_o)_{max} = -(3000)(15) = -45000 \text{ N.m}$

$-(3000 \sin\phi)(20) + (3000 \cos\phi)(5) = -45000$

$-60000 \sin\phi + 15000 \cos\phi = -45000 \qquad \div -15000$

$4 \sin\phi - \cos\phi = 3$

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi}$

$4\sqrt{1-\cos^2\phi} - \cos\phi = 3 \qquad \text{Let} \quad x = \cos\phi$

$4\sqrt{1-x^2} - x = 3$

$4\sqrt{1-x^2} = x + 3$

$16(1-x^2) = x^2 + 6x + 9$

$16 - 16x^2 - x^2 - 6x - 9 = 0$

$-17x^2 - 6x + 7 = 0 \qquad \div -17$

$x^2 + 0.353x - 0.412 = 0$

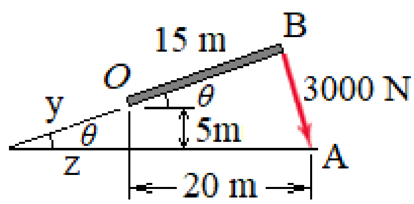
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(0.353) \pm \sqrt{(0.353)^2 - 4(1)(-0.412)}}{2(1)}$$

$= 0.489 \quad \text{or} \quad -0.842$

$\phi = \cos^{-1} 0.489 = 60.7^\circ$

$\theta = 90^\circ - 60.7^\circ = 29.3^\circ$

:طريقة ثانية للحل



$(5)^2 + z^2 = y^2$

$25 + z^2 = y^2$

:من تشابه المثلثات

$\frac{15+y}{z} = \frac{20+z}{y} \quad \Rightarrow \quad 15y + y^2 = 20z + z^2$

$15(\sqrt{25+z^2}) + 25 + z^2 = 20z + z^2$

$15(\sqrt{25+z^2}) = 20z + z^2 - 25 - z^2$

$15(\sqrt{25+z^2}) = 20z - 25$

$225(25 + z^2) = 400z^2 - 1000z + 625$

$5625 + 225z^2 - 400z^2 + 1000z - 625 = 0$

$-175z^2 + 1000z + 5000 = 0$

$z^2 - 5.7z - 28.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z - 8.91)(z + 3.21) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 8.91 \text{ m}$

$y = \sqrt{25+z^2} = \sqrt{25 + (8.91)^2} = 10.22 \text{ m}$

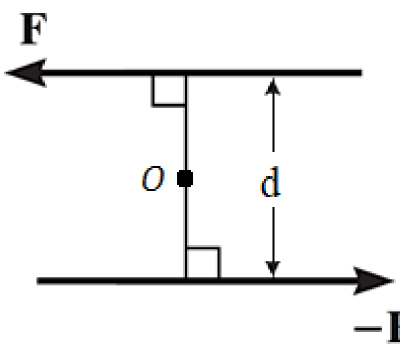
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8.91}{10.22}\right) = 29.3^\circ$

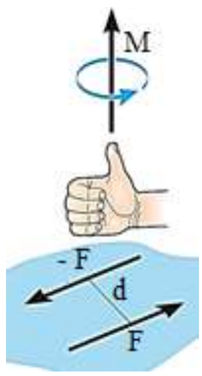
العزم المزدوج (The moment of couple):

يتشكل العزم المزدوج من قوتين متوازيتان متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وليستا على خط تأثير واحد، أي تفصل بين خطوط تأثيرهما مسافة عمودية (d)، كما هو موضح في الأشكال (٣-٣) و (٣-٤). وبما أن القوتين في العزم المزدوج متساويتين وباتجاهين متعاكسين فان محصلتهما ستكون مساوية للصفر، فيكون التأثير الوحيد له هو إنتاج دوران أو محاولة للدوران في اتجاه محدد. على سبيل المثال، تخيل أنك تقود سيارة وتمسك مقودها بكلتا يديك وأنت تقوم باستدارة، ستدفع إحدى اليدين مقود السيارة الى الأعلى بينما تسحبه اليد الأخرى الى الأسفل، فينتج عزم مزدوج على مركز المقود يؤدي إلى تدويره باتجاه الاستدارة المطلوبة للسيارة.

$$M = \left(\frac{d}{2} \times F\right) + \left(\frac{d}{2} \times F\right)$$

$$M = d \times F \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3\text{-}3)$$



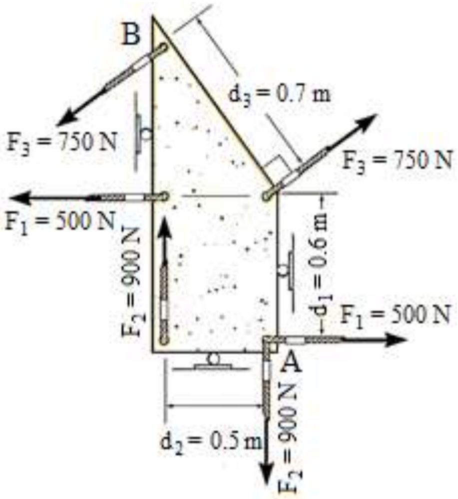


شكل (٣-٣) العزم المزدوج

شكل (٣-٤) العزم المزدوج

مثال (٣-١٤):

أوجد محصلة العزوم المزدوجة الثلاثة المسلطة على الصفيحة المبينة في الشكل (مث. ٣-١٤):



شكل (مث. ٣-١٤)

الحل:

$d_1 = 0.6$ m , $d_2 = 0.5$ m , and $d_3 = 0.7$ m.

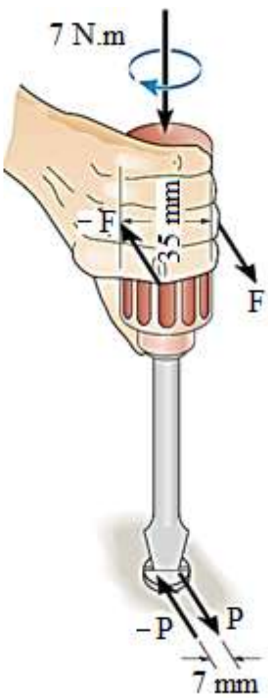
$$\curvearrowleft + \; M_R = \sum M \qquad M_R = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3$$

$$= (500)(0.6) - (900)(0.5) + (750)(0.7)$$

$= 375$ N.m (عكس اتجاه عقارب الساعة)

مثال (٣-١٥):

عزم مزدوج قيمته (7 N.m) مسلط على مقبض مفك البراغي. حلل هذا العزم الى قوتي عزم مزدوج، (F) عند نـهاية المقبض و(P) عند نـهاية النصل.



شكل (مث. ٣-١٥)

الحل:

عند المقبض:

$M_C = F \cdot d \qquad (F)(0.035) = 7$

$F = 200$ N

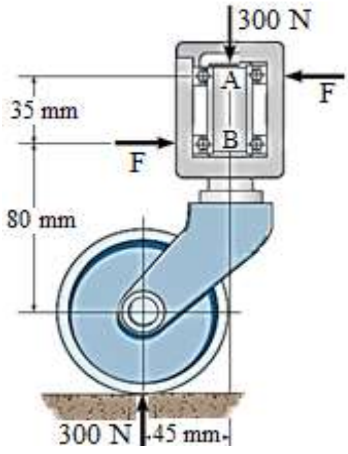
عند النصل:

$M_C = P \cdot d \qquad (P)(0.007) = 7$

$P = 1000$ N

مثال (٣-١٦):

عجلة محمل أجهزة مسلط عليها عزمين مزدوجين. أوجد القوى (F) المسلطة على المرتكزات الكروية في عمود حمل العجلة بحيث تكون محصلة العزمين المزدوجين المسلطة على العجلة صفرًا.



شكل (مث. ٣-١٦)

الحل:

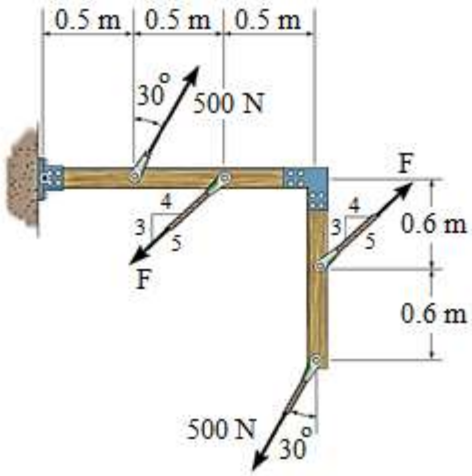
$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \qquad (F)(35) - 300(45) = 0$$

$$35F = 13500$$

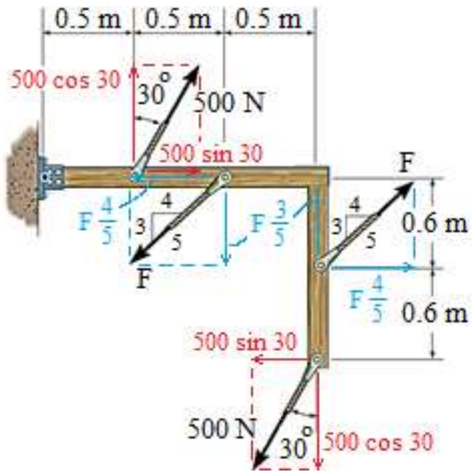
$$F = 385.7 \text{ N}$$

مثال (٣-١٧):

إذا كانت محصلة العزوم المزدوجة المسلطة على الهيكل المبين في الشكل (مث. ٣-١٧) هي (500 N.m) باتجاه عقارب الساعة، أوجد قيمة القوة (F).



شكل (مث. ٣-١٧)



الحل:

$$\circlearrowleft + (M_C)_1 = (F)(4/5)(0.6) + (F)(3/5)(0.5)$$

$$= 0.78F$$

$$\circlearrowleft + (M_C)_2 = -(500\cos 30^\circ)(1) - (500\sin 30^\circ)(1.2)$$

$$= -433 - 300$$

$$= -733 \text{ N.m} = 733 \text{ N.m} \circlearrowright$$

$$\circlearrowleft + (M_C)_R = (M_C)_1 + (M_C)_2$$

$$-500 = 0.78F - 733$$

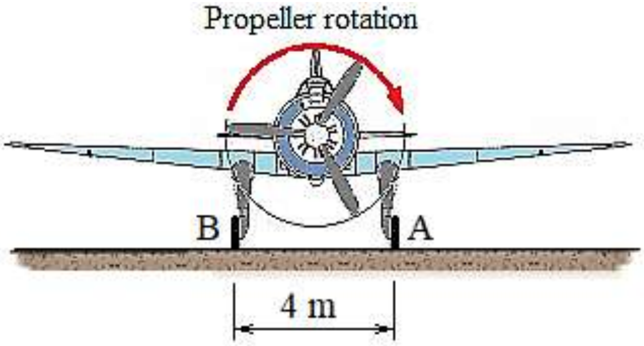
$$733 - 500 = 0.78F$$

$$0.78F = 233$$

$$F = 298.7 \text{ N}$$

مثال (٣-١٨):

رد الفعل العمودي للأرض على العجلتين الرئيسيتين لطائرة عند النقطتين (A) و (B) قبل اشتغال محرك الطائرة هو (275 N) لكل من العجلتين، وعند اشـــتغال المحـــرك يكون رد الفعـــل (350 N) عند النقطة (A).

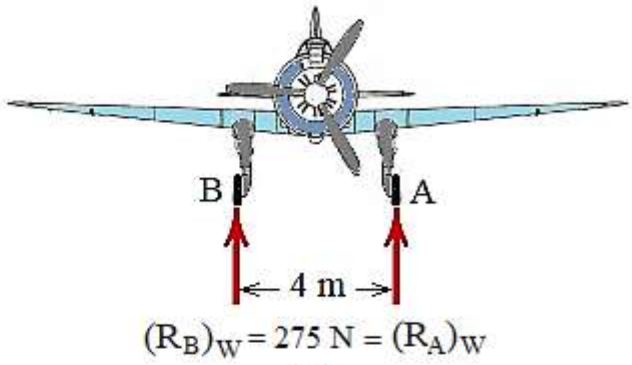


شكل (مث. ٣-١٨)

الاختلاف في رد الفعل عند (A) ناتج من عزم المروحة المزدوج أثناء تشغيل المحرك ويكون اتجاهه مع اتجاه عقارب الساعة، كما مبين في الشكل (مث. ٣-١٨). أوجد مقدار هذا العزم المزدوج ومقدار قوة رد فعل الأرض المؤثرة عند النقطة (B) أثناء تشغيل المحرك.

الحل:

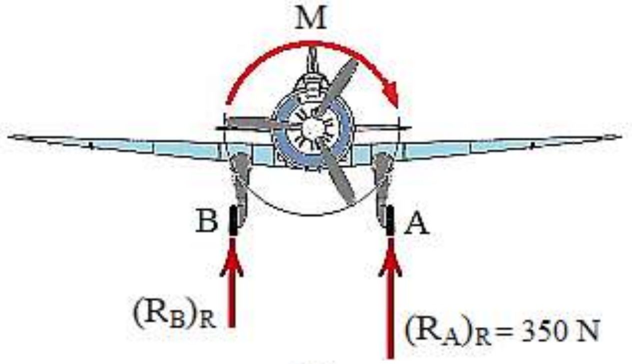
بسبب الوزن:



$(R_A)_W = 275\ N$

$(R_B)_W = 275\ N$

بسبب الوزن والعزم المزدوج للمروحة:



$(R_A)_R = 350\ N$

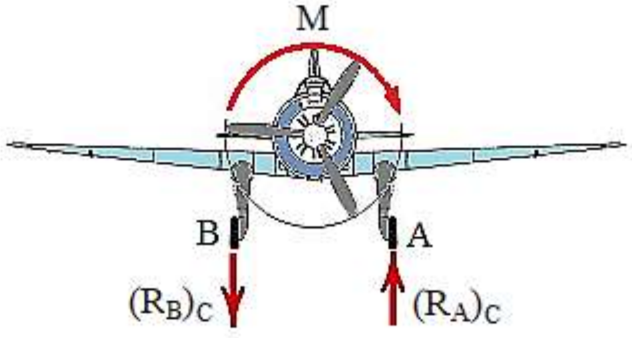
$(R_B)_R = ?$

بسبب العزم المزدوج للمروحة:

$(R_A)_C = 350 - 275 = 75\ N$

$(R_B)_C = 75\ N$

$(R_B)_R = 275 - 75 = 200\ N$



$\circlearrowright + \sum M_C = 0$

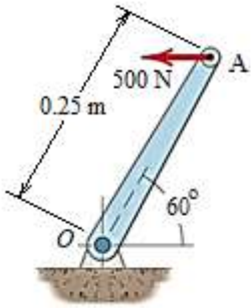
$75 \times 4 = 300\ N.m$

نقل القوة الى خط تأثير موازي لخط تأثيرها:

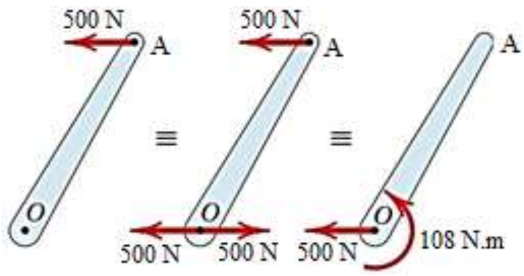
إذا تحركت قوة على جسم معين من نقطة إلى نقطة أخرى ليست على نفس خط تأثير القوة، يتم نقلها بشكل قوة لها نفس القيمة والاتجاه وعزم قيمته مساوية لحاصل ضرب القوة في المسافة العمودية على خط تأثير القوة بين النقطتين.

مثال (٣-١٩):

استبدل القوة الأفقية (500 N) المؤثرة على النقطة (A) في ذراع الرافعة بنظام قوى مكافيء يتألف من قوة وعزم على النقطة (*O*).



شكل (مث. ٣-١٩)



الحل:

عند تســـليط قوتين بقيمة (500 N) على النقطة (*O*) باتجاهين متعاكسين، تكون محصلتها مساوية للصفر، فتولد القوتين (500 N) على النقطة (A) والمعاكسة لها في الاتجاه عند النقطة (*O*) عزم مزدوج بعكس اتجاه عقارب الساعة.

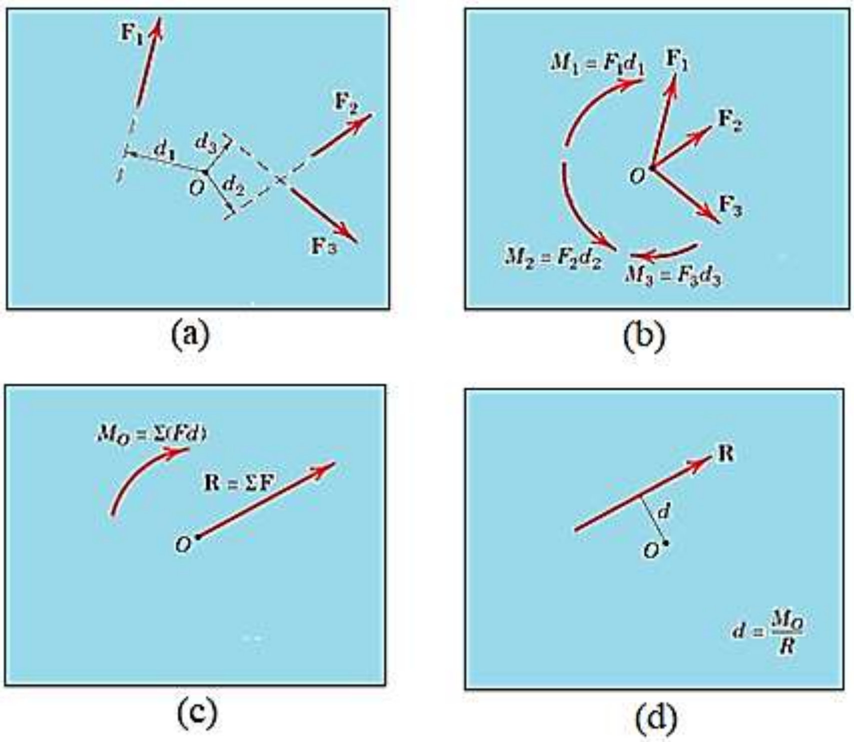
$$M = Fd$$

$$M = 500 \times 0.25 \sin 60^{o} = 108 \text{ N.m}$$

وبالتالي، فان القوة (500 N) على النقطة (A) ستتكافأ بقوة قيمتها (500 N) بنفس الاتجاه وعزم مقداره (108 N.m) بعكس اتجاه عقارب الساعة عند النقطة (*O*)

محصلة منظومة القوى المستوية الغير متلاقية (قوى وعزوم):

عندما تؤثر عدة قوى غير متلاقية وتقع في مستو واحد على جسم ما وتبعد بمسافات محددة عن نقطة معينة ولتكن نقطة (O)، فانه يمكن حساب محصلة تلك القوى على النقطة المعلومة ومحصلة العزوم حول تلك النقطة، وبعدها يمكن تحويل تلك القوى الى قوة واحدة تبعد مسافة محسوبة عن النقطة المعلومة، كما موضح في الشكل (٣-٥).



شكل (٣-٥) محصلة منظومة القوى المستوية غير المتلاقية

يمكن حساب المحصلة (قيمةً واتجاهاً) وفقًا للمعادلات التالية:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \;\dots\; = \sum F \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3\text{-}4)$$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \dots\dots \quad (3\text{-}5)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3\text{-}6)$$

يمكن حساب قيمة العزم والمسافة العمودية (موقعها) وفقًا للمعادلات التالية:

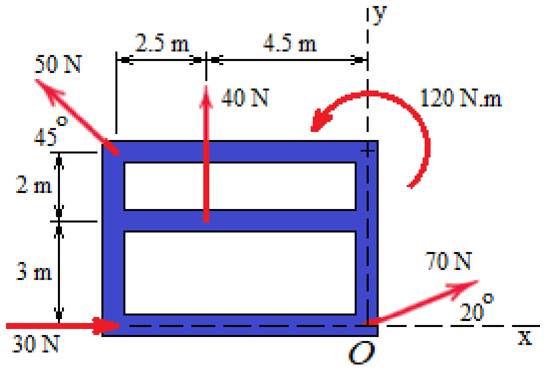
$$R = \sum F \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3\text{-}7)$$

$$M_o = \sum M = \sum (Fd) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3\text{-}8)$$

$$Rd = M_O \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3\text{-}9)$$

مثال (٣-٢٠):

أربع قوى وعزم مزدوج تؤثر على البراكيت المبين في الشكل (مث. ٣-٢٠). أوجد محصلة القوى والعزم المزدوج، ثم بين نقطة تأثير المحصلة على المحور الأفقي نسبة الى نقطة الأصل (*O*).



شكل (مث. ٣-٢٠)

الحل:

$R_x = \sum F_x$

$R_x = 30 + 70 \cos 20^\circ - 50 \cos 45^\circ$

$\quad = 60.4$ N

$R_y = \sum F_y$

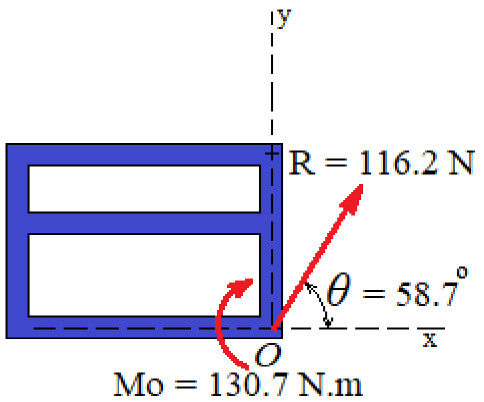
$R_y = 40 + 70 \sin 20^\circ + 50 \sin 45^\circ$

$\quad = 99.3$ N

$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$

$R = \sqrt{(60.4)^2 + (99.3)^2} = 116.2$ N

$\theta = \tan^{-1} \dfrac{R_y}{R_x} \qquad \theta = \tan^{-1} \dfrac{99.3}{60.4} = 58.7^\circ$



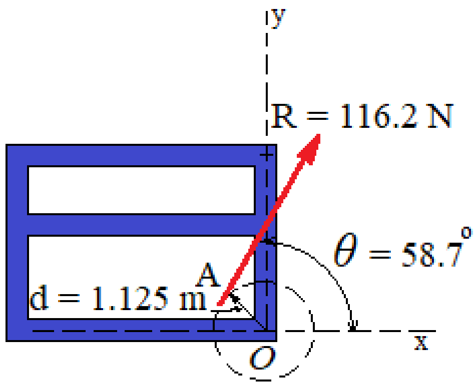
$M_o = \sum (Fd)$

$M_o = 120 - (40 \times 4.5)$

$\qquad + (50 \cos 45^\circ \times 5)$

$\qquad - (50 \sin 45^\circ \times 7)$

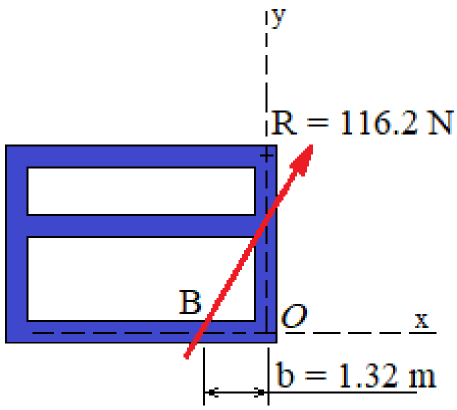
$\quad = -130.7 = 130.7$ N.m (C.W.)



$R\, d = M_o$

$116.2\, d = 130.7$

$d = 1.125$ m



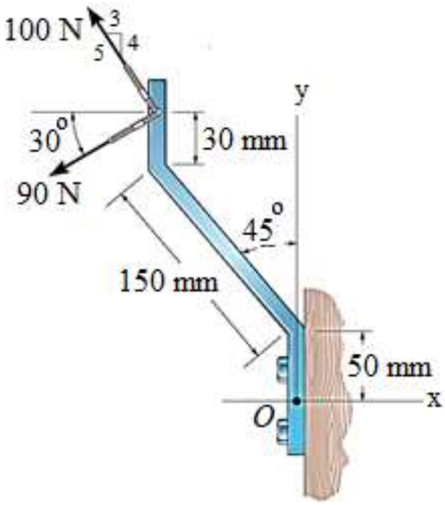
$R_y\, b = M_O$

$R_y = R \sin 63.2 = 99.3$ N

$b = \dfrac{130.7}{99.3} = 1.32$ m

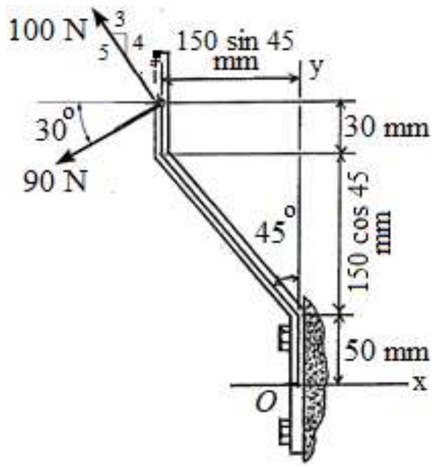
مثال (٣-٢١):

استبدل القوتين المؤثرتين على الهيكل المبين في الشكل (مث. ٣-٢١) بقوة وعزم مكافئين عند النقطة (*O*).



شكل (مث. ٣-٢١)

الحل:



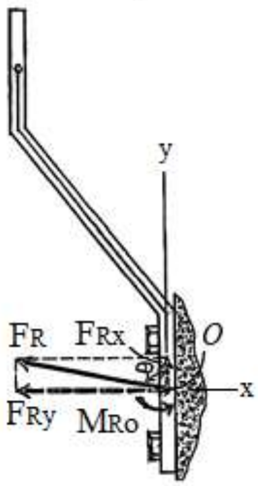
$\xrightarrow{+}$ $F_{Rx} = \sum F_x$ $\qquad F_{Rx} = -(100)(3/5) - 90\cos 30^\circ = -138 = 138\ N \leftarrow$

$+\uparrow$ $F_{Ry} = \sum F_y$ $\qquad F_{Ry} = (100)(4/5) - 90\sin 30^\circ = 35\ N$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^{\ 2} + F_{Ry}^{\ 2}} = \sqrt{(138)^2 + (35)^2} = 142.4\ N$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \tan^{-1}\frac{35}{138} = 14^\circ$$

||



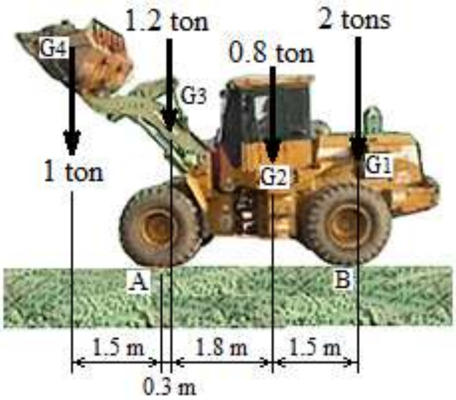
$\circlearrowleft + M_{Ro} = \sum M_O$

$$M_{Ro} = (90\sin 30^\circ)(0.15\sin 45^\circ) + (90\cos 30^\circ)(0.08 + 0.15\cos 45^\circ) - (100)(4/5)(0.15\sin 45^\circ) + (100)(3/5)(0.08 + 0.15\cos 45^\circ)$$

$$= 4.773 + 14.502 - 8.485 + 11.164$$

$$= 22\ N.m \circlearrowleft$$

مثال (٣-٢٢):



شكل (مث. ٣-٢٢)

الشفل الموضح في الشكل (مث. ٣-٢٢) يتكون من أربع أجزاء رئيسية، جزء المحرك كتلته (2 tons) ومركز ثقله (G_1)، جزء المقصـــورة كتلته (0.8 ton) ومركـــز ثقله (G_2)، جزء منظومة الحركة كتلته (1.2 ton) ومركز ثقله (G_3)، وجزء الكيلة كتلته (1 ton) ومركـــز ثقله (G_4). استبدل القوى الناتجة من هذه الكتل بمحصلة مكافئة لها وبين موقع هذه المحصلة مقاساً من نقطة (A).

الحل:

$+\uparrow F_R = \sum F_y$

$$F_R = -(1000 \times 9.81) - (1200 \times 9.81) - (800 \times 9.81) - (2000 \times 9.81)$$
$$= -49050 = 49050 \text{ N} \downarrow$$

$\curvearrowright + M_{RA} = \sum M_A$

$$-(49050 \times d) = (1000 \times 9.81 \times 1.5) - (1200 \times 9.81 \times 0.3)$$
$$- (800 \times 9.81 \times 2.1) - (2000 \times 9.81 \times 3.6)$$

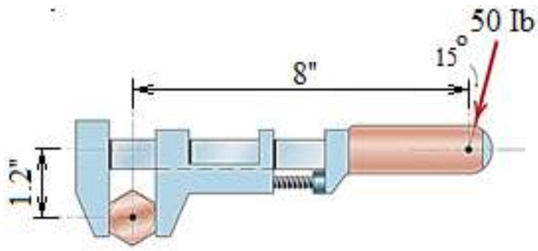
$d = 1.548 \text{ m}$

مسائل:

٣-١) احسب عزم القوة (50 Ib) على مقبض مفك البراغي حول مركز البرغي.

الجواب:

$M = 370.8\ Ib.in \quad (CW)$



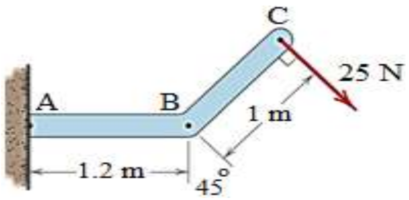
شكل (مس. ٣-١)

٣-٢) قضيب مثني بزاوية منفرجة كما في الشكل (مس. ٣-٢)، ومسلط على الجزء (BC) منه قـوة مقدارها (25 N) بشـــــكل عمودي على محوره. أوجد عزم هذه القوة حول النقطة (B) وحول النقطة (A).

الجواب:

$M_B = 25\ N.m \quad (CW)$

$M_A = 46.2\ N.m \quad (CW)$



شكل (مس. ٣-٢)

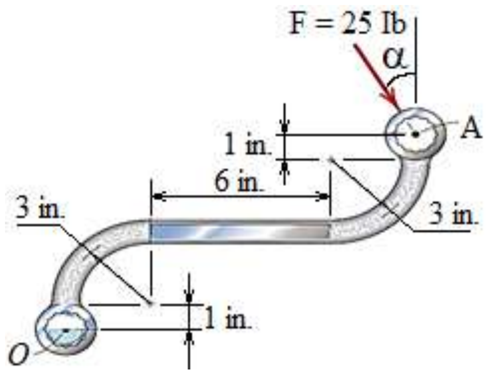
٣-٣) القوة (25 Ib) مسلطة على أحد طرفي مفك البراغي المنحني، كما هو موضح في الشكل (مس. ٣-٣). إذا كانت ($\alpha = 30^o$)، احسب عزم القوة (F) حول مركز البرغي (O). أوجد قيمة (α) التي تزيد العزم حول (O) الى أقصى ما ممكن، ثم أوجد قيمة أقصى عزم.

الجواب:

$M_o = 359.8\ Ib.in. \quad (CW)$

$\alpha = 33.7^o$

$(M_O)_{max} = 360\ Ib.in. \quad (CW)$

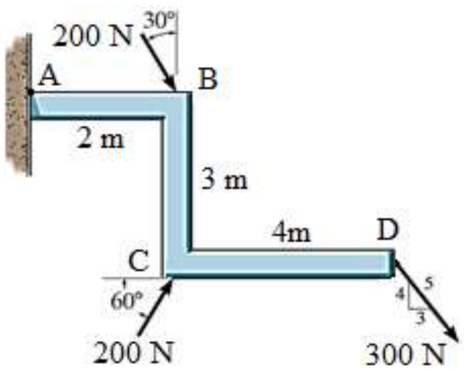


شكل (مس. ٣-٣)

٣-٤) في الهيكل المبين في الشكل (مس. ٣-٤). أوجد محصلة عزوم القوى الثلاث حول النقطة (A). إهمل سمك الهيكل.

الجواب:

$M_A = 600\ N.m \quad (CW)$

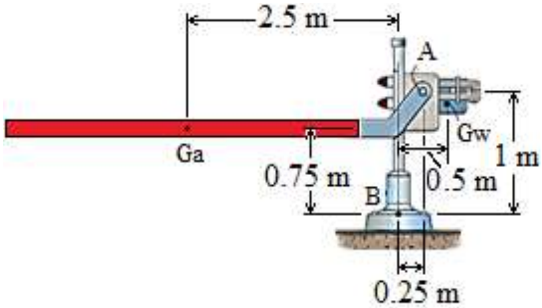


شكل (مس. ٣-٤)

٣-٥) يقع مركز كتلة ذراع البوابة المبينة في الشكل (مس. ٣-٥)، عند النقطة (G_a) ومركز ثقل كتلة التوازن (200 kg) يقع عند النقطـة (G_W). إذا كانت محصلة العـزوم الناتجـة حول النقطـة (A) هي (4.6 kN.m) عكس اتجاه عقارب الساعة، أوجد مقدار كتلة ذراع البوابة.

الجواب:

$m_G = 188.5\ kg$

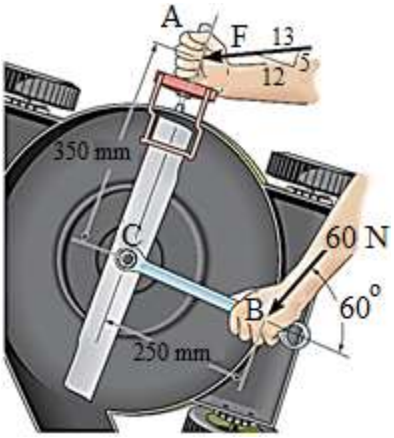


شكل (مس. ٣-٥)

٣-٦) تُستخدم الأداة المبينة في الشكل (مس. ٣-٦) لتثبيت شفرة جزازة العشب أثناء فك الجوزة باستخدام مفك البراغي. إذا تم تسليط قوة مقدارها (60 N) على المفك عند النقطة (B) في الاتجاه الموضح في الشكل، أوجد العزم الناتج حول مركز الجوزة عند النقطة (C). ما مقدار القوة (F) عند النقطة (A) بحيث تنتج العزم المعاكس حول النقطة (C)؟

الجواب:

$M_C = 13\ N.m, \quad F = 40.2\ N$

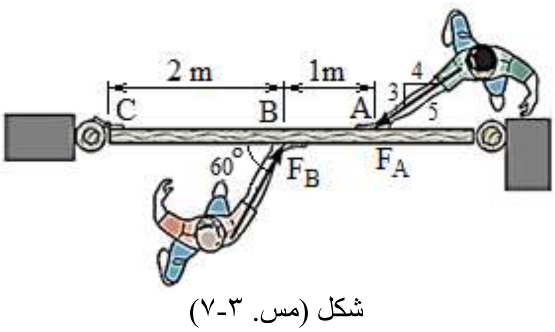


شكل (مس. ٣-٦)

٣-٧) شخصان يدفعان بوابة من كلا جانبيها كما هو موضح في الشكل (مس. ٣-٧). إذا كانت القوة المسـلطة من قبل الشـخص عند النقطة (B) مقدارها ($F_B = 150\ N$)، أوجد مقدار القوة (F_A) المطلوبة من الشخص عند النقطة (A) لمنع البوابة من الدوران. إهمل سمك البوابة.

الجواب:

$F_A = 144.3\ N$

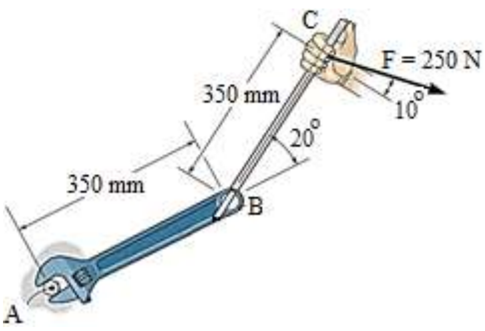


شكل (مس. ٣-٧)

٣-٨) لزيادة العزم المطلوب لفك البرغي عند النقطة (A) يتم اطالة ذراع مفك البراغي باستخدام القضيب (BC) كما هو موضح في الشـــكل (مس. ٣-٨). أوجد العزم الذي تنتجه القوة (250 N) حول محور البرغي عند النقطة (A).

الجواب:

$M_A = 102\ N.m\ \ (CW)$

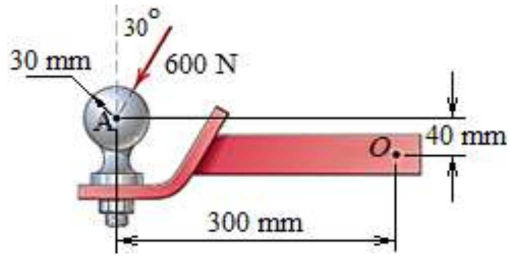


شكل (مس. ٣-٨)

٣-٩) في سيارة الحمل (ساحبة ومقطورة)، عند سـحب المقطورة في الاتجاه الأمامي، يتم تسـليط القوة (600 N) على كرة وصـلة المقطـورة، كما موضـح في الشـكل (مس. ٣-٩). أوجد عزم هذه القوة عند النقطة (O).

الجواب:

$M_O = = 167.88$ N.m (CCW)

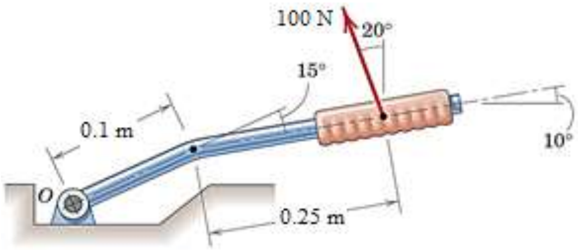


شكل (مس. ٣-٩)

٣-١٠) في الشـكل (مس. ٣-١٠)، قوة مقدارها (100 N) مسلطة على ذراع فرامل سيارة. استبدل القوة بنظام قوة - عزم مكافئ عند النقطة المحورية (O).

الجواب:

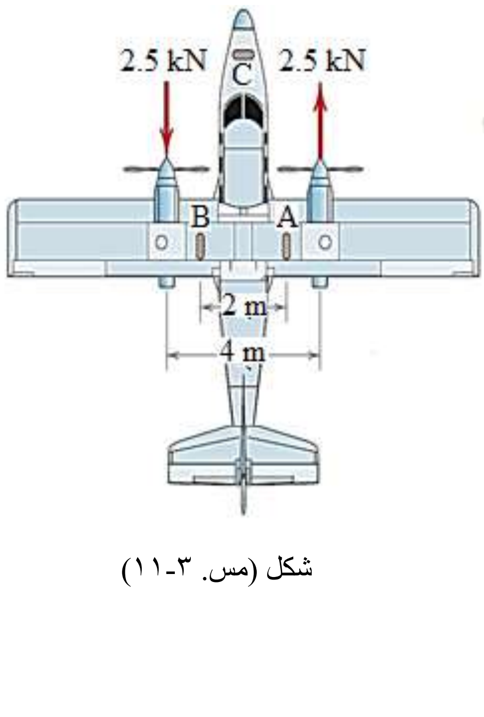
$M_O = 34.58$ N.m (CCW)



شكل (مس. ٣-١٠)

٣-١١) أثناء اختبار عمل الطائرة يتم تسريع محركيها وتعديل اتجاه عمل المروحتين بحيث ينتج عنها دفع أمامي ودفع خلفي كما موضح في الشـكل (مس. ٣-١١). احسب قوة الاحتكاك (F) التي تسلطها الأرض على كل من العجلات الرئيسـية ذات الفرامل عند النقطتين (A) و (B) لمقاومـة تأثير قوتي دفع المحركين. إهمل تأثير العجلة الأماميـة (C) التي تدور بزاوية (90°).

الجواب: $M_O = 5$ kN

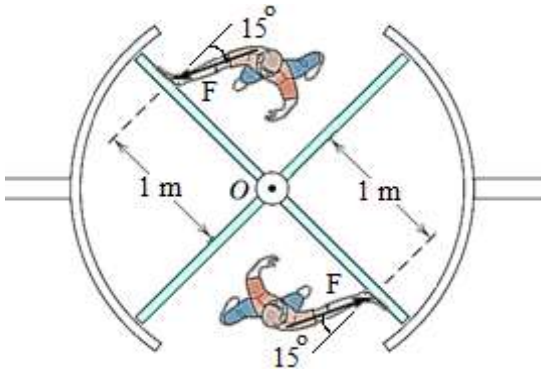


شكل (مس. ٣-١١)

٣-١٢) يبين الشكل (مس. ٣-١٢) المنظر العلوي لباب المدخل الدوار. يقترب شخصان من الباب في نفس الوقت ويدفعان الباب بقوتين بنفس المقدار كما موضح في الشكل. إذا كان العزم الناتج حول محور الباب عند النقطة (O) هـو (30 N.m)، أوجد مقدار القوة (F).

الجواب:

$M_O = 15.5$ N

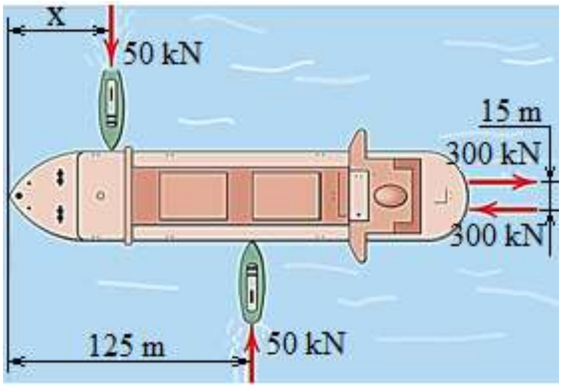


شكل (مس. ٣-١٢)

٣-١٣) كل مروحة في السفينة ثنائية المحرك تدور بسرعة لتولد قوة دفع (300 kN). أثناء حركة المناورة للسفينة، تدور إحدى المراوح بأقصى سرعة للأمام والأخرى بأقصى سرعة الى الخلف، كما مبين في الشكل (مس. ٣-١٣). كل قارب يسلط قوة مقدارها (50 kN) على السفينة لمقاومة تأثير مراوح السفينة. أوجد المسافة (x).

الجواب:

X = 35 m

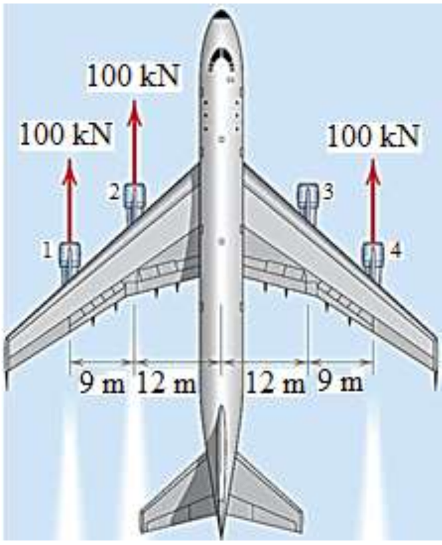


شكل (مس. ٣-١٣)

٣-١٤) الطائرة المبينة في الشكل (مس. ٣-١٤) ذات أربع محركات نفاثة، كل منها يولد قوة دفع مقدارها (100 kN). أثناء الطيران المستقر، المحرك رقم (٣) تعطل فجأة. أوجد قيمة وموقع محصلة قوى الدفع للمحركات الثلاثة المتبقية.

الجواب:

R = 300 kN, x = 4 m

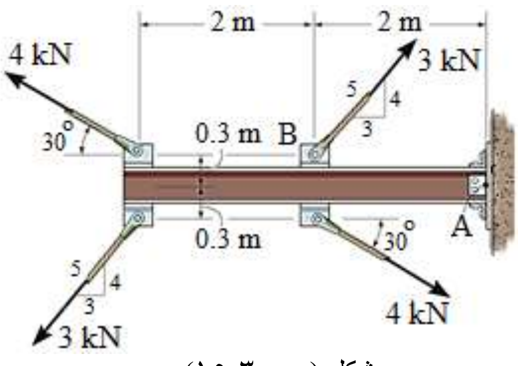


شكل (مس. ٣-١٤)

٣-١٥) في الشكل (مس. ٣-١٥) عزمان مزدوجان على قضيب مثبت من طرفه. أوجد محصلة العزمين المزدوجين.

الجواب:

(Mc)$_R$ = 1.8 kN.m

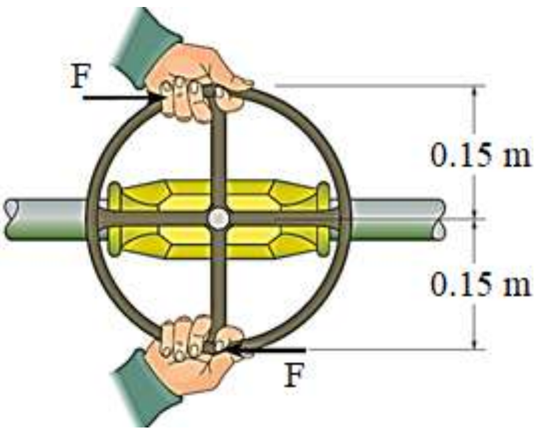


شكل (مس. ٣-١٥)

٣-١٦) يبين الشكل (مس. ٣-١٦) صمام فتح وغلق أنبوب الماء، حاول رجل فتح الصمام عن طريق تطبيق قوى مزدوجة بقيمة (F = 100 N) على عتلة الصمام. أوجد العزم المزدوج الناتج من القوتين.

الجواب:

Mc = 30 N. m (CW)

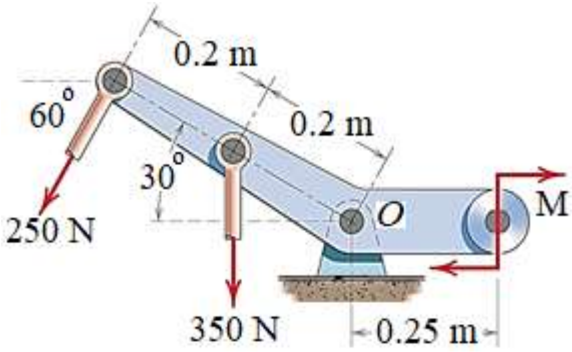


شكل (مس. ٣-١٦)

٣-١٧) اذا كانت محصلة القوتين والعزم المزدوج (M) تمر في النقطة (O)، أوجد قيمة العزم المزدوج (M).

الجواب:

$M = 160.6\ N.m$

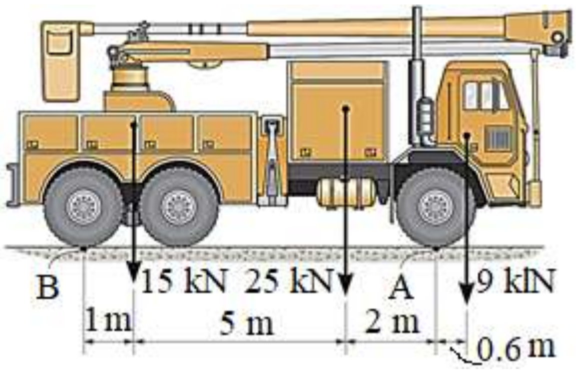


شكل (مس. ٣-١٧)

٣-١٨) الشاحنة التخصصية الموضحة في الشكل (مس. ٣-١٨) مكونة من ثلاثة أجزاء رئيسية وموضح على كل جزء وزنه ومركز ثقله. استبدل نظام القوى الناتج من أوزان هذه الأجزاء بقوة محصلة مكافئة وحدد موقعها نسبة الى النقطة (A).

الجواب:

$F_R = 49\ kN \downarrow,\quad d = 3\ m$

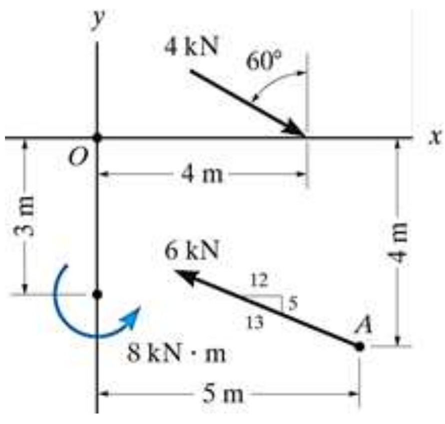


شكل (مس. ٣-١٨)

٣-١٩) استبدل نظام القوى والعزم المبين في الشكل (مس. ٣-١٩) بقوة مكافئة وعزم مزدوج عند النقطة (O).

الجواب:

$F_R = 2.07\ kN,\ \theta = 8.5^o,\ M = 10.62\ k\ N.m\ \ CW$

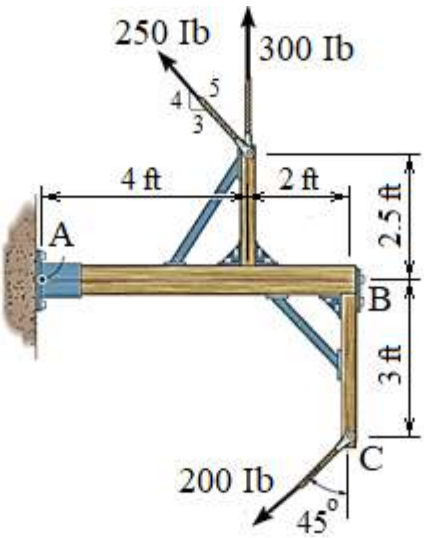


شكل (مس. ٣-١٩)

٣-٢٠) استبدل نظام القوى المؤثرة على الهيكل المبين في الشكل (مس. ٣-٢٠) بقوة مكافئة، وحدد مكان تقاطع خط تأثيرها مع الضلع (AB)، نسبة الى النقطة (A).

الجواب:

$F_R = 462\ Ib,\ \ \theta = 50.1^o,\ \ d = 3.07\ ft$



شكل (مس. ٣-٢٠)

الفصل الرابع

التـــــــــوازن

EQUILIBRIUM

في الفصلين السابقين تم دراسة تحليل القوى والعزوم على الجسيمات النقطوية والأجسام الصلبة، وكيفية استنتاج محصلة القوى في القيم والاتجاهات المختلفة على هذه الجسيمات النقطوية والأجسام الصلبة، وكيفية استنتاج محصلة العزوم ومحصلة القوى والعزوم معاً.

في هذا الفصل، سيتم دراسة حالات التوازن بين هذه القوى والعزوم على الجسيمات النقطوية والأجسام الصلبة، وسيتم تقسيم هذا الموضوع إلى جزئين، الجزء الأول يوضح حالة التوازن في القوى على الجسيمات النقطوية، والجزء الثاني يوضح حالة التوازن في القوى والعزوم على الأجسام الصلبة.

يكون الجسم في حالة توازن (Equilibrium) اذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر. وهذه الحالة تكون في الأجسام الثابتة والأجسام المتحركة بحركة منتظمة (حركة بسرعة ثابتة).

الجزء الأول: توازن الجسيمات النقطوية (EQUILIBRIUM OF THE PARTICLES):

في هذا الجزء من التوازن لا تؤخذ ابعاد الجسم بنظر الاعتبار ويتم افتراض الجسم كنقطة، فيكون الجسم في حالة توازن عندما تكون محصلة القوى المسلطة عليه مساوية للصفر، ولا تؤخذ العزوم بنظر الاعتبار وذلك لاهمال تأثير الأبعاد، فتكون القوة المؤثرة عليه متلاقية افتراضياً. لذلك تكون معادلة التوازن:

$$R = \sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\text{-}1)$$

ظروف توازن الجسيمات النقطوية:

إذا كان الجسيم أصلاً في حالة سكون (بدون حركة) يقال إنه في حالة توازن إذا استمر على حالة سكونه، وإذا كان أصلاً في حالة حركة منتظمة بسرعة ثابتة وتعجيل صفري يقال إنه في حالة توازن إذا استمر على حالة حركته المنتظمة بدون تغيير. في أغلب الأحيان، يتم استخدام مصطلح "التوازن" أو، بدقة أكثر، "التوازن الستاتيكي" لوصف جسم معين في حالة السكون. للحفاظ على التوازن، من الضروري تطبيق قانون نيوتن الأول للحركة وهو القانون الأساسي لمعادلات التوازن في مجال علم السكون، ويتطلب قانون نيوتن الأول للحركة أن تكون القوة أو محصلة القوى المسلطة على الجسيم مساوية للصفر. يمكن التعبير عن ذلك رياضيًا كما يلي:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagram):

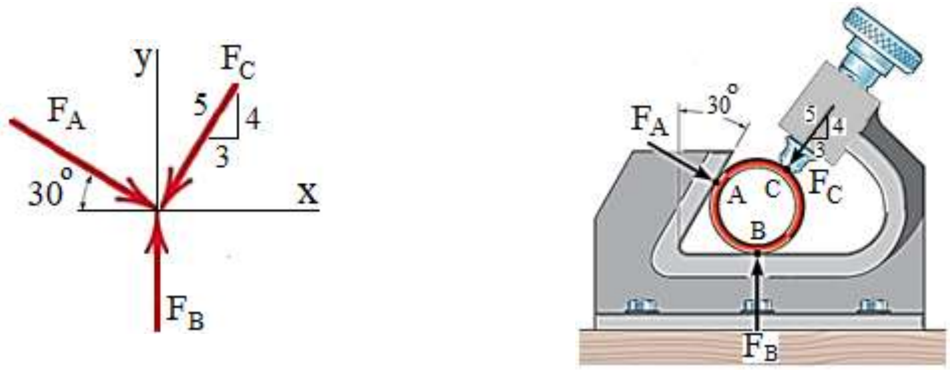
أفضل طريقة لتوضيح القوى المعلومة والمجهولة المسلطة على الجسيم، وتطبيق معادلة التوازن لحساب القوى المجهولة ($\sum F_x = 0$)، ($\sum F_y = 0$)، هي التفكير في أن يكون الجسيم معزول و "حر" عن محيطه. يُطلق على الرسم الذي يُظهر الجسم بكل القوى المؤثرة عليه مخطط الجسم الحر (FBD).

طريقة رسم مخطط الجسم الحر:

لامكانية حساب جميع القوى المؤثرة على الجسيم عند تطبيق معادلات التوازن، يجب رسم مخطط الجسم الحر أولاً.

الخطوات التالية ضرورية لإنشاء مخطط الجسم الحر.

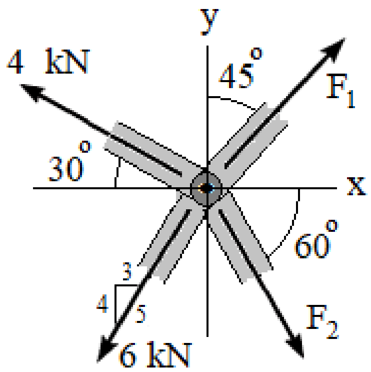
١- نفترض أن الجسيم منعزل عن محيطه ثم نرسم شكله المحدد (مخطط الجسم الحر).
٢- وضع القوى المعلومة والمجهولة على مخطط الجسيم.
٣- رسم الأبعاد والزوايا المطلوبة.
٤- تطبيق معادلات التوازن لايجاد القوى المجهولة.



شكل (٤-١) طريقة رسم مخطط الجسم الحر

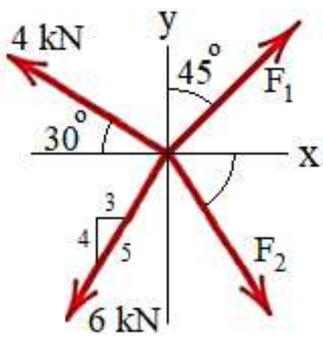
مثال (٤-١):

أوجد مقدار كل من القوتين المجهولتين (F_1) و (F_2) المطلوبة لتحقيق التوازن في أعضاء المسنم الموضح في الشكل (مث. ٤-١) المربوطة مفصلياً عند المفصل (*O*).



شكل (مث. ٤-١)

الحل:



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_1 \sin 45° + F_2 \cos 60° - 4 \cos 30° - 6\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$0.707\ F_1 + 0.5\ F_2 = 7.064 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_1 \cos 45° + 4 \sin 30° - F_2 \sin 60° - 6\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$0.707\ F_1 - 0.866\ F_2 = 2.8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$0.707\ F_1 + 0.5\ F_2 = 7.064$$
$$0.707\ F_1 - 0.866\ F_2 = 2.8$$

-------------------------------- بالطرح

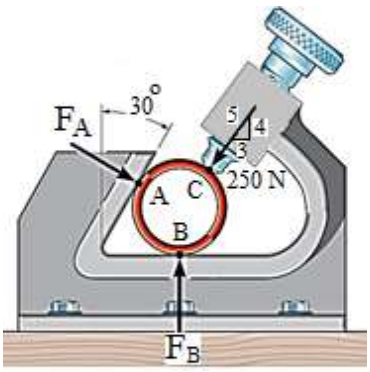
$$1.366\ F_2 = 4.264 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 3.12\ \text{kN}$$

Sub. in Eq. (1): $0.707\ F_1 + 0.5\ (3.12) = 7.064$

$$0.707\ F_1 = 5.504 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 7.78\ \text{kN}$$

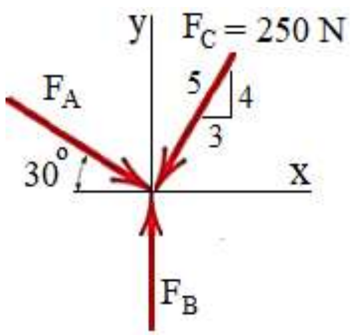
مثال (٤-٢):

أنبوب مثبت بواسطة ماسكة الأنابيب (المنكنة). إذا سلط برغي التثبيت قوة مقدارها (250 N) على الأنبوب في الاتجاه الموضح في الشكل (مث. ٤-٢)، أوجد القوى (F_A) و (F_B) التي تسلطها الأسطح الملساء في النقاط (A) و (B) على الأنبوب.



شكل (مث. ٤-٢)

الحل:



$$+\uparrow \sum F_x = 0, \qquad F_A \cos 30° - 250\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

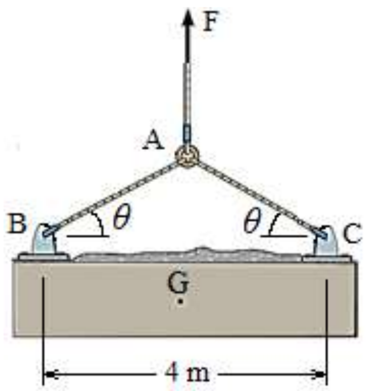
$$F_A = 173.2\ \text{N}$$

$$+\rightarrow \sum F_y = 0, \qquad F_B - 173.2 \sin 30° - 250\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$F_B = 286.6\ \text{N}$$

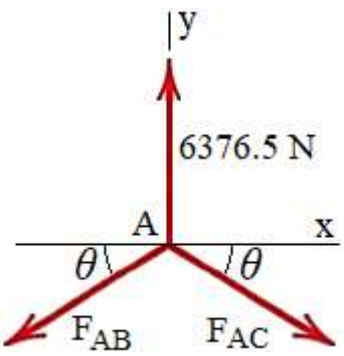
مثال (٤-٣):

أوجد قوة الشد في كل من الحبلين (AB) و (AC) المستخدمان لرفع حاوية كتلتها (650 kg) بدلالة الزاوية (θ). إذا كان الحد الأقصى للشد المسموح به في كل حبل (6.5 kN)، أوجد أقصر طول لكل من االحبال (AB) و (AC) التي يمكن استخدامها للرفع. حيث أن مركز ثقل الحاوية يقع عند النقطة (G).



شكل (مث. ٤-٣)

الحل:



$$W = m\,g = 650 \times 9.81 = 6376.5 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{AC}\cos\theta - F_{AB}\cos\theta = 0$$

$$F_{AC} = F_{AB} = F$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 6376.5 - 2F\sin\theta = 0$$

$$2F\sin\theta = 6376.5$$

$$F = \frac{6376.5}{2\sin\theta} = \frac{3188.25}{\sin\theta}$$

لذلك:

$$F_{AC} = F_{AB} = F = \frac{3188.25}{\sin\theta}\ \text{N}$$

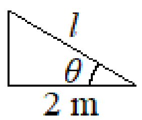
إذا كان الحد الأقصى المسموح به للشد في الحبل (6.5 kN) **، فعندئذٍ:**

$$\frac{3188.25}{\sin\theta} = 6500$$

$$3188.25 = 6500\sin\theta$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{3188.25}{6500} = 29.37°$$

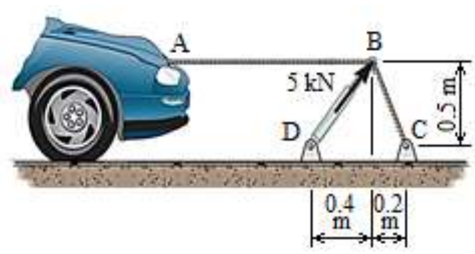
من المخطط ($l = \frac{2}{\cos\theta}$) و ($\theta = 29.37°$):



$$l = \frac{2}{\cos 29.37°} = 2.3 \text{ m}$$

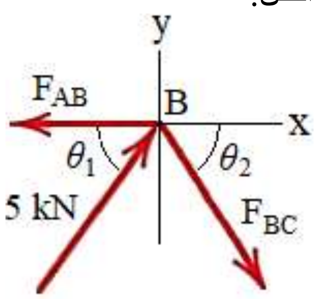
مثال (٤-٤):

الجهاز المبين في الشكل (مث. ٤-٤) يُستخدم في تقويم هياكل السيارات المحطمة. يتكون من سلسلة تتحمل قوى كبيرة، مربوطة من أحدى طرفيها بنقطة ثابتة وتربط من الطرف الثاني بجزء السيارة المراد تقويمه. يسلط على نقطة في الجزء الوسطي منها قوة تسلطها أسطوانة هيدروليكية. أوجد قوة الشد كل جزء من جزئي السلسلة (AB) و (BC)، إذا كانت القوة التي تسلطها الأسطوانة الهيدروليكية (DB) على النقطة (B) هي (5 kN).



شكل (مث. ٤-٤)

الحل:



$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{0.5}{0.4} = 51.3^\circ \quad , \quad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{0.5}{0.3} = 59^\circ$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$5 \sin 51.3^\circ - F_{BC} \sin 59^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 4.55 \text{ kN}$$

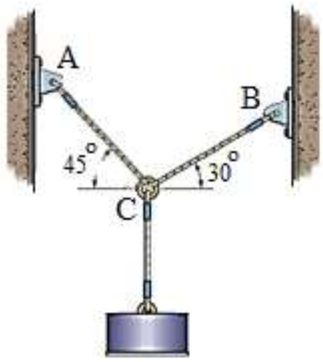
$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$5 \cos 51.3^\circ + 4.55 \cos 59^\circ - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 5.47 \text{ kN}$$

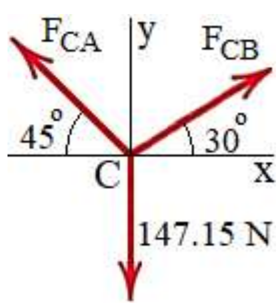
مثال (٤-٥):

في منظومة الأسلاك الموضحة في الشكل (مث. ٤-٥)، اذا كانت كتلة الأسطوانة (15 kg)، أوجد قوة الشد المطلوبة في الأسلاك (CA) و (CB) لتحقيق التوازن.



شكل (مث. ٤-٥)

الحل:



$$W = m\,g = 15 \times 9.81 = 147.15 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{CB} \cos 30^\circ - F_{CA} \cos 45^\circ = 0$$

$$0.866\, F_{CB} - 0.707\, F_{CA} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \quad F_{CB} \sin 30^\circ + F_{CA} \sin 45^\circ - 147.15 = 0$$

$$0.5\, F_{CB} + 0.707\, F_{CA} - 147.15 = 0 \ \ldots. \ (2)$$

من المعادلة (1): $F_{CB} = 0.816\, F_{CA}$

بالتعوض في المعادلة (2):

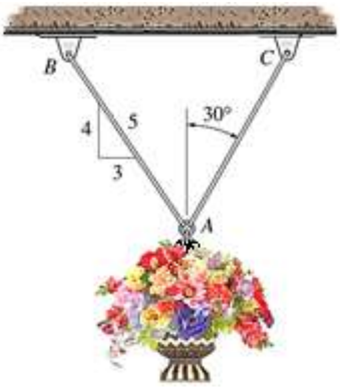
$$0.5\,(0.816\, F_{CA}) + 0.707\, F_{CA} - 147.15 = 0$$

$$1.115\, F_{CA} = 147.15 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = 132 \text{ N}$$

$$F_{CB} = 0.816\,(132) = 107.7 \text{ N}$$

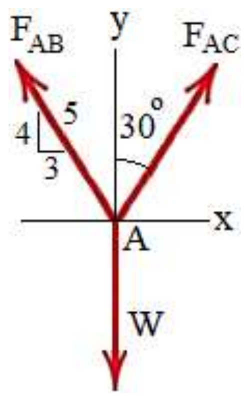
مثال (٤-٦):

أوجد الحد الأقصى لوزن المزهرية بحيث يمكن حملها دون تجاوز شد السلك البالغ (250 N) في كل من السلكين (AB) أو (AC).



شكل (مث. ٤-٦)

الحل:



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_{AC} \sin 30° - F_{AB} \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$F_{AC} = 1.2\, F_{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_{AC} \cos 30° + F_{AB} \left(\frac{4}{5}\right) - W = 0$$

$$0.866\, F_{AC} + 0.8\, F_{AB} = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

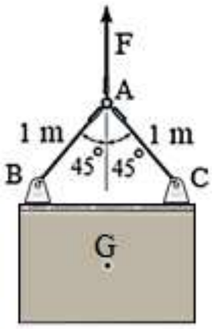
نظرًا لأن قوى الشد ($F_{AC} > F_{AB}$) سيحدث الفشل أولاً عند السلك (AC) حيث ($F_{AC} = 250$ N). وبحل المعادلتين (1) و (2):

$$250 = 1.2\, F_{AB} \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 208.33$$

$$(0.866)(250) + (0.8)(208.33) = W \quad \Rightarrow \quad W = 383.17 \text{ N}$$

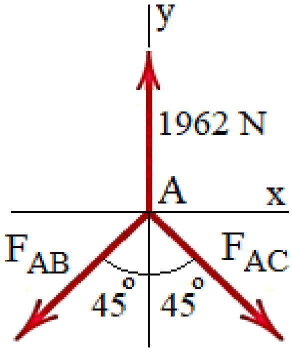
مثال (٤-٧):

أوجد قوة الشد الرئيسية (F) وقوة الشد في كل من السلكين (AB) و (AC) اللازمة لحمل الحاوية التي تبلغ كتلتها (200 kg) ويقع مركز ثقلها عند النقطة (G).



شكل (مث. ٤-٧)

الحل:



$$F = W = m\, g = 200 \times 9.81 = 1962 \text{ N}$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_{AC} \sin 45° - F_{AB} \sin 45° = 0$$

$$F_{AC} = F_{AB}$$

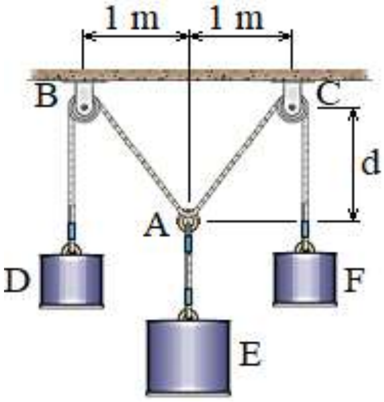
$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$1962 - 2\, F_{AB} \cos 45° = 0$$

$$F_{AB} = F_{AC} = 1387.34 \text{ N}$$

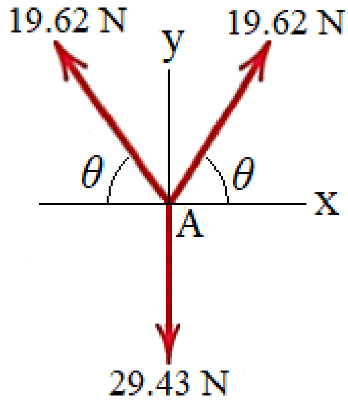
مثال (٤-٨):

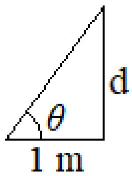
إذا كانت كتلة كل من الاسطوانات (D) و (F) تســـــاوي (2 kg) وكتلة الاسطوانة (E) تساوي (3 kg). أوجد المسافة (d) لتحقيق التوازن. إهمل حجم البكرات.



شكل (مث. ٤-٨)

الحل:



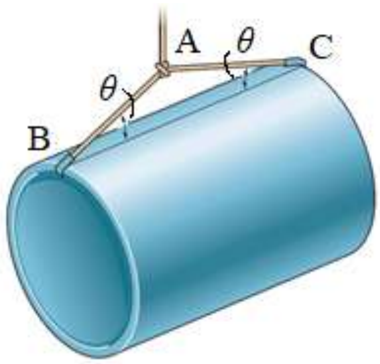


$$W_D = 2 \times 9.81 = 19.62 \text{ N}$$
$$W_E = 3 \times 9.81 = 29.43 \text{ N}$$
$$W_F = 2 \times 9.81 = 19.62 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$2\,(19.62) \sin\theta - 29.43 = 0$$
$$\theta = \sin^{-1}(\,0.75\,) = 48.6°$$
$$\tan\theta = \frac{d}{1}$$
$$d = \tan 48.6° = 1.13 \text{ m}$$

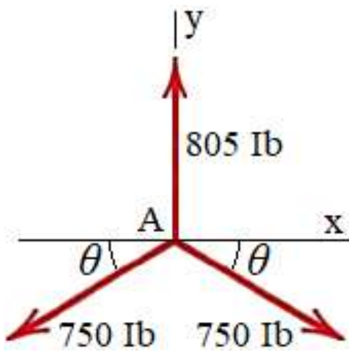
مثال (٤-٩):

اذا علمت أن أقصى شـــــد يتحمله كل من الحبلين (AB) و (AC) هـــو (750 Ib)، وأن كتلـــة الأســـــطوانة (25 slugs)، أوجد أصغر زاوية (θ) يمكن عندها رفع الأسطوانة ضمن حدود تحمل الحبلين.



شكل (مث. ٤-٩)

الحل:

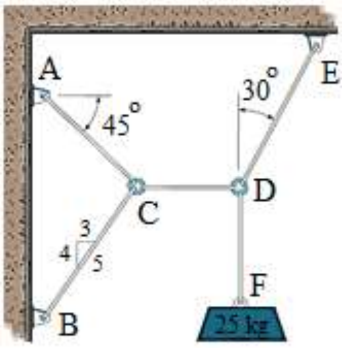


$$W = m\,g = 25 \times 32.2 = 805 \text{ Ib}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 805 - 2(750)\sin\theta = 0$$
$$\theta = 32.5°$$

مثال (٤-١٠):

أوجد قوة الشد في كل سلك في منظومة الأسلاك المبينة في الشكل (مث. ٤-١٠) بحيث تحقق التوازن مع الحمل (25 kg).

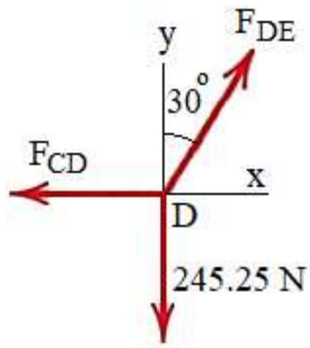


شكل (مث. ٤-١٠)

الحل:

$$W = m\,g = 25 \times 9.81 = 245.25 \text{ N}$$

التوازن عند النقطة (D):



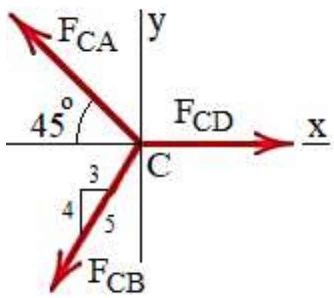
$+ \rightarrow \sum F_y = 0 \qquad F_{DE} \cos 30° - 245.25 = 0$

$F_{DE} = 283.2 \text{ N}$

$+ \uparrow \sum F_x = 0 \qquad 283.2 \sin 30° - F_{CD} = 0$

$F_{CD} = 141.6 \text{ N}$

التوازن عند النقطة (C):



$+ \rightarrow \sum F_x = 0$

$$141.6 - F_{CA} \cos 45° - F_{CB} \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$141.6 - 0.707\, F_{CA} - 0.6\, F_{CB} = 0$$

$$0.707\, F_{CA} + 0.6\, F_{CB} = 141.6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_{CA} \sin 45° - F_{CB} \left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$$0.707\, F_{CA} - 0.8\, F_{CB} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

من المعادلة (2):

$$F_{CA} = 1.13\, F_{CB}$$

نعوض في المعادلة (1):

$$0.707\,(1.13\, F_{CB}) + 0.6\, F_{CB} = 141.6$$

$$1.4\, F_{CB} = 141.6$$

$$F_{CB} = 101.15 \text{ N}$$

$$F_{CA} = 1.13\,(101.15) = 114.3 \text{ N}$$

أو

$$0.707\, F_{CA} + 0.6\, F_{CB} = 141.6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$0.707\, F_{CA} - 0.8\, F_{CB} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

------------------------------------ بالطرح

$$1.4\, F_{CB} = 141.6 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 101.15 \text{ N}$$

نعوض في المعادلة (1):

$$0.707\, F_{CA} + 0.6\,(101.15) = 141.6$$

$$0.707\, F_{CA} + 60.69 = 141.6$$

$$0.707\, F_{CA} = 141.6 - 60.69 = 80.91$$

$$F_{CA} = 114.3 \text{ N}$$

الجزء الثاني: توازن الأجسام الصلبة (EQUILIBRIUM OF RIGID BODIES):

في هذا الجزء من التوازن تؤخذ أبعاد الجسم بنظر الاعتبار ويكون لها تأثير في احتساب القوى والعزوم المسلطة عليه، ويكون الجسم في حالة توازن عندما تكون محصلة كل القوى والعزوم أو العزوم المزدوجة المسلطة عليه مساوية للصفر. لذلك ستكون معادلات التوازن:

$$F_R = \sum F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\text{-}2)$$
$$M_R = \sum M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\text{-}3)$$

عزل النظام ومخطط الجسم الحر (FBD):

يمكن عزل النظام الميكانيكي افتراضياً عن محيطه بما يسمى بمخطط الجسم الحر (FBD). قد يكون النظام الميكانيكي عبارة عن جسم واحد أو مجموعة من الأجسام مرتبطة بطريقة ملائمة لأداء الغرض المطلوب من النظام، وقد تكون الأجسام صلبة أو غير صلبة، وقد يكون النظام أيضاً عبارة عن كتلة مائع يمكن تحديدها، إما سائلة أو غازية، أو مزيج من السوائل والمواد الصلبة.

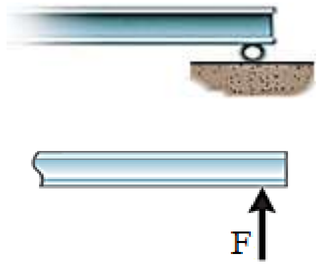
في الفرع الخاص بعلم السكون (statics) من الميكانيك الهندسي، ندرس بشكل أساسي القوى المسلطة على الأجسام الصلبة أثناء حالة السكون.

لرسم مخطط الجسم الحر، يجب اتباع الخطوات التالية:

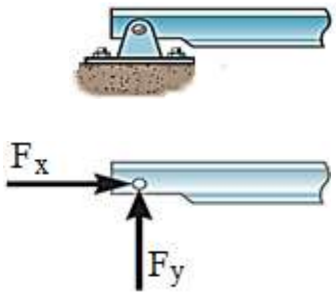
١- نفترض أن الجسم الصلب منعزل عن محيطه ثم نرسم شكله المعزول (مخطط الجسم الحر).
٢- وضع القوى المعلومة والمجهولة على مخطط الجسم الحر.
٣- استبدال المرتكزات بقوى ردود فعل.
٤- رسم الأبعاد والزوايا المطلوبة.
٥- تطبيق معادلات التوازن لايجاد القوى المجهولة.

نمذجة تأثير القوى (Modeling the action of forces):

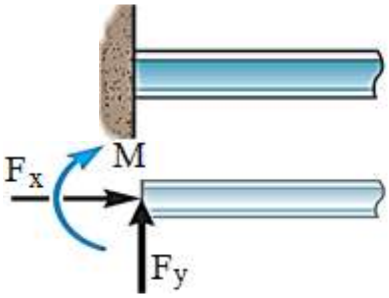
توضح الأشكال التالية الأنواع الشائعة للمرتكزات المستخدمة في الأنظمة الميكانيكية وما يناظرها من قوى ردود أفعال على مخطط الجسم الحر (FBD) لتحليلها في المستوٍ ثنائي الأبعاد. حيث يوضح كل مثال من الأمثلة التالية القوى المؤثرة على الجسم باعتباره جسم معزول عن محيطه. يجب مراعاة قانون نيوتن الثالث عند استبدال المرتكزات التي تستند عليها الأجسام بقوى رد فعل، الذي يشير إلى أنه يوجد لكل قوة فعل قوة رد فعل تساويها في المقدار وتعاكسها في الاتجاه. إن قوى رد الفعل التي تسلط على جسم معين نتيجة اتصاله بمرتكز أو بجسم آخر تكون دائماً معاكسة لاتجاه حركة الجسم المعزول التي قد تحدث إذا تمت إزالة المرتكز أو الجسم الملامس.



شكل (٤-٢) مرتكز كروي

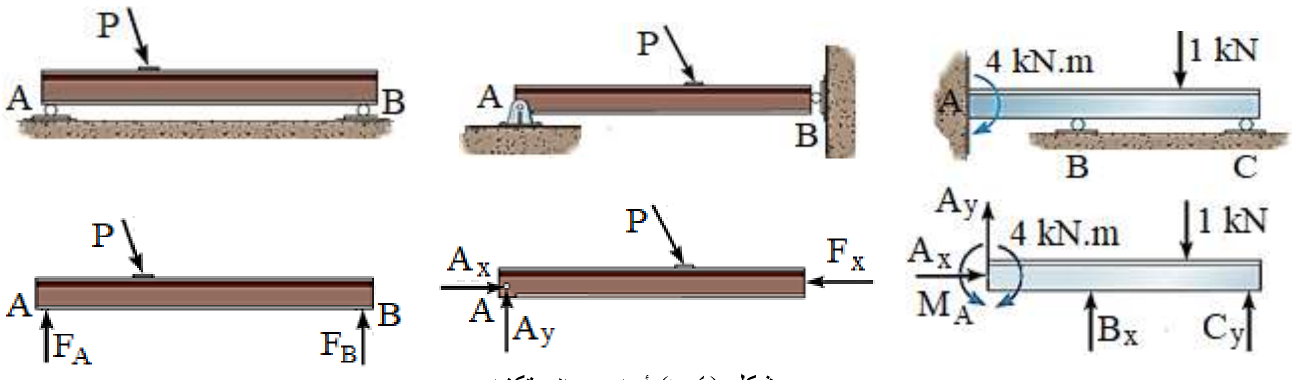


شكل (٤-٣) مرتكز مفصلي



شكل (٤-٤) مرتكز ثابت

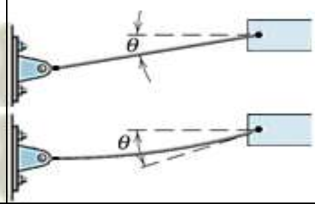
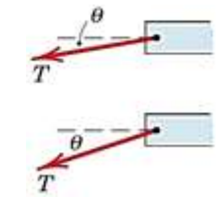
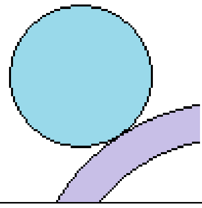
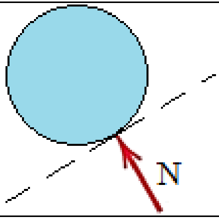
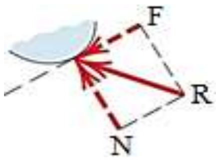
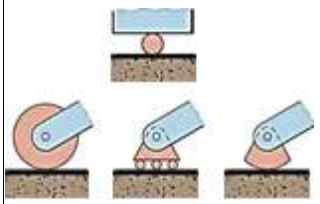
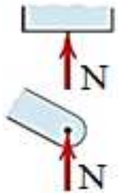
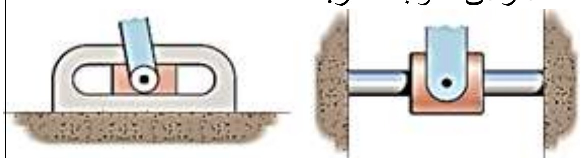
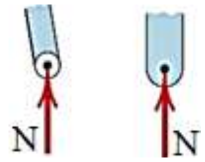
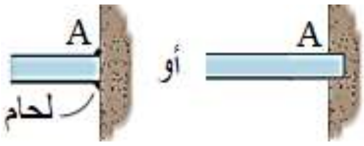
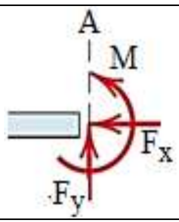
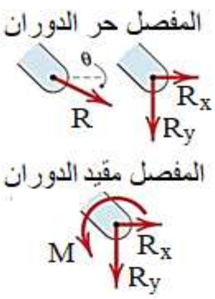
شكل (٤-٥) مجمع مرتكز مفصلي



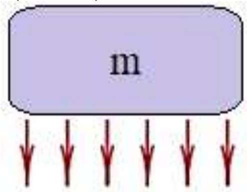
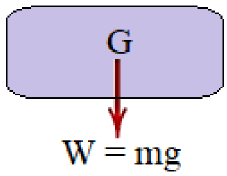
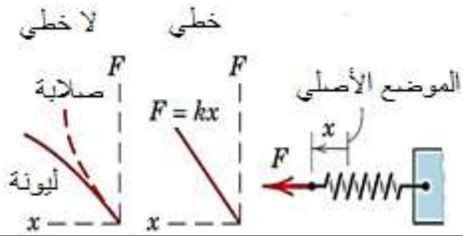
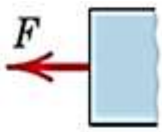
شكل (٤-٦) أنواع من المرتكزات

نمذجة تأثير القوى في التحليل ثنائي الأبعاد:

جدول (٤-١) نمذجة تأثير القوى في التحليل ثنائي الأبعاد

نوع الربط والقوة الأصلية		تمثيل القوى على الجسم باعتباره جسم معزول	
١- سلك مرن، حزام، سلسلة، أو حبل. وزن السلك مهمل. وزن السلك معتبر.			القوة التي يسلطها سلك مرن أو حزام أو سلسلة أو حبل على جسم معين تمثل بقوة شد تبدأ من الجسم باتجاه السلك أو باتجاه المماس للسلك.
٢- سطح أملس.			قوة رد الفعل نتيجة التلامس تمثل بقوة ضغط عمودية على السطح.
٣- سطح خشن.			قوة رد الفعل نتيجة التلامس تمثل بقوة ضغط (R) مائلة على السطح، وتحلل الى مركبتين، مركبة مماسية (F) (قوة الاحتكاك) ومركبة عمودية (N).
٤- مرتكزات متدحرجة.			المرتكز الاسطواني، التأرجحي، أو الكروي يتمثل بقوة رد فعل على شكل قوة ضغط عمودية على سطح التلامس.
٥- الانزلاق الموجه الحر.			طوق أو شريط تمرير للحركة على طول سكة ناعمة، يمكن تمثيله بقوة عمودية على سكة الحركة..
٦- مرتكز ثابت.			المرتكز الثابت يتمثل بقوة محورية (F_x)، وقوة عرضية (F_y) (قوة قص)، وعزم (M) حول نقطة التثبيت لمنع الدوران.
٧- ربط مفصلي.			في الربط المفصلي ذو الحركة الدورانية الحرة يمكن تمثيل قوة رد الفعل اما بمركبتين أفقية (R_x) وعمودية (R_y) أو بقوة (R) مع اتجاهها (θ). أما الربط المفصلي ذو الحركة الدورانية المقيدة فتضاف الى ردود الفعل أعلاه عزم (M) حول نقطة التثبيت.

جدول (٤-١) نمذجة تأثير القوى في التحليل ثنائي الأبعاد

نوع الربط وأصل القوة	تمثيل القوى على الجسم باعتباره جسم معزول	
٨- قوة الجاذبية الأرضية (الوزن). 		محصلة قوى الجاذبية الناتجة من عناصر جسم كتلته (m) هو الوزن $(W = mg)$، يتمثل الوزن بقوة متجهة الى مركز الأرض مبتدئة من مركز ثقل الجسم (G).
٩- قوة النابض. 		القوة الناتجة من النابض تنتج من حاصل ضرب الاستطالة في معامل الصلابة للنابض، وتكون قوة شد إذا استطال النابض وقوة ضغط اذا تقلص. معامل الصلابة للنابض (k) هي القوة المطلوبة لتشويه النابض بمسافة وحدة مسافة.

إنشاء مخططات الجسم الحر (Construction of free – body diagrams):

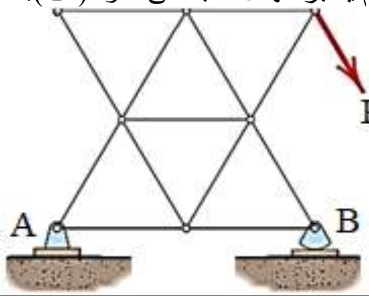
أمثلة على مخططات الجسم الحر:

الجدول (٤-٢) يبين أربعة أمثلة لتراكيب وهياكل مع مخططات الجسم الحر الخاصة بها. تم حذف الأبعاد والمقادير باعتبارها أمثلة عامة. في كل حالة يتم التعامل مع التركيب أو الهيكل بأكمله كجسم واحد، بحيث لا تظهر القوى الداخلية. الأمثلة الأربعة المبينة في الجدول تبين القوى المعلومة والمجهولة وردود الأفعال لمختلف أنواع المرتكزات.

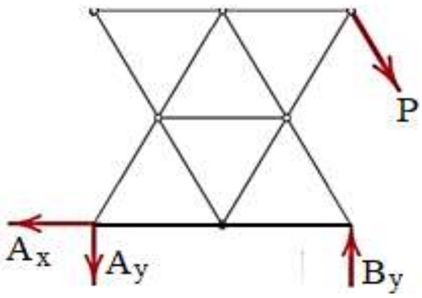
جدول (٤-٢) نماذج لمخططات الجسم الحر

<table>
<tr><th>النظام الميكانيكي</th><th>مخطط الجسم الحر للهيكل المنعزل</th></tr>
<tr><td>

١- المسنم المستوي:
وزن المسنم يعتبر مهمل نسبة الى القوة (P).

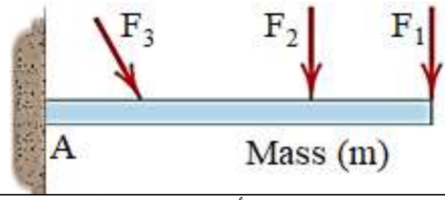


</td><td>

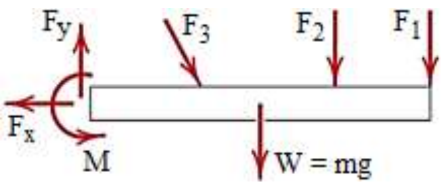


</td></tr>
<tr><td>

٢- القضيب المثبت من أحد الأطراف.

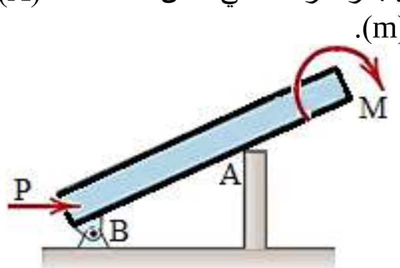


</td><td>

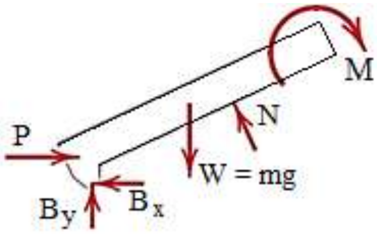


</td></tr>
<tr><td>

٣- قضيب: ارتكاز تلامسي أملس عند النقطة (A)، و كتلة (m).

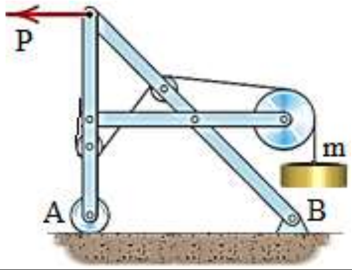


</td><td>

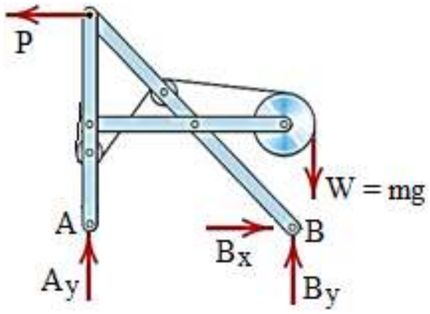


</td></tr>
<tr><td>

٤- تم تحليل نظام الأجسام الصلبة المترابطة كوحدة واحدة، مع اعتبار وزن التركيبة مهمل.



</td><td>

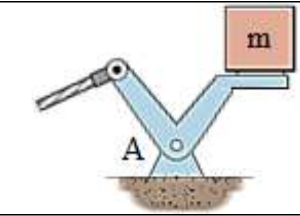
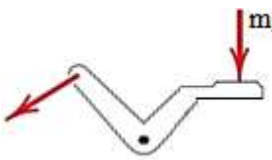
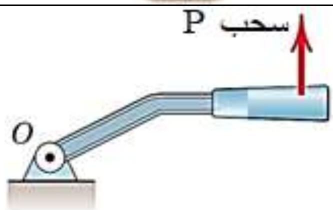
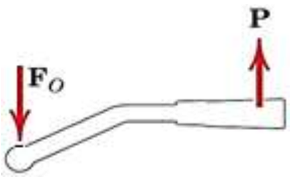
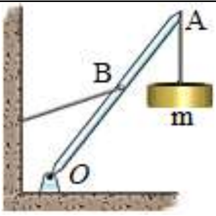
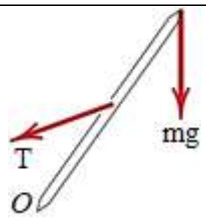
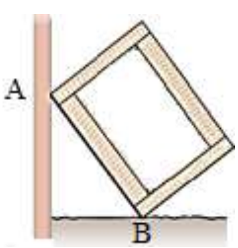
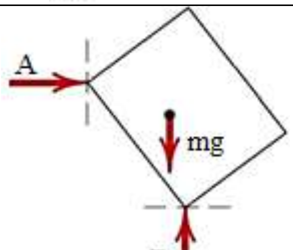
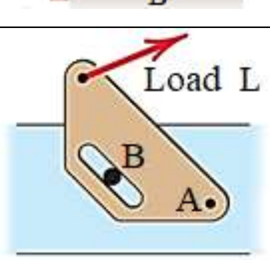
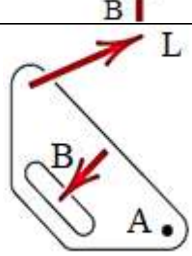


</td></tr>
</table>

تمارين لمخططات الجسم الحر:

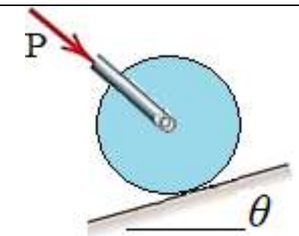
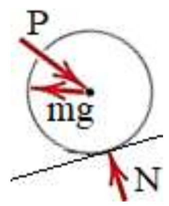
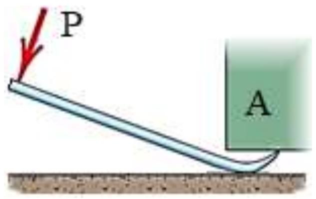
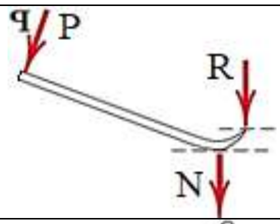
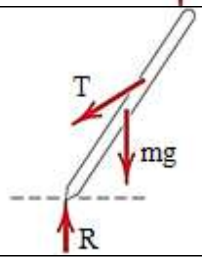
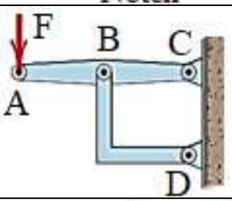
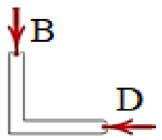
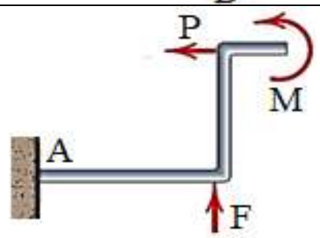
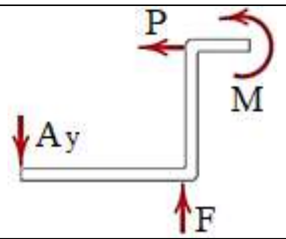
في الجدول (٤-٣) يمثل العمود الوسطي تراكيب معينة، ويمثل العمود الأيمن تفاصيل موجزة عن هذه التراكيب، ويمثل العمود الأيسر مخططات الجسم الحر (FBD) للجسم المعزول غير كامل.
المطلوب اكمال مخططات الجسم الحر للتراكيب في العمود الأيسر.
أوزان الأجسام مهملة ما لم يذكر خلاف ذلك.
تم حذف الأبعاد والقيم العددية للتبسيط.

جدول (٤-٣) تمارين لمخطط الجسم الحر

	الجسم	**مخطط الجسم الحر (FBD) الغير كامل**
أ - محور قلاب يسند الكتلة (m) ويرتكز ارتكاز مفصلي عند النقطة (A).		
ب - ذراع تحكم يسلط عزم دوران على العمود عند (*O*).		
جـ - ذراع الرافعة (OA)، ذو كتلة مهملة مقارنة بالكتلة (m). الذراع متمفصل عند النقطة (*O*) ومشدود بسلك عند النقطة (B).		
د - صندوق منتظم الكتلة (m) يستند إلى جدار عمودي أملس ومرتكز على سطح أفقي خشن.		
هـ - براكيت مسلط عليه حمل ومرتكز مفصلياً عند النقطة (A) ومسمار ثابت في مسار أملس عند النقطة (B).		

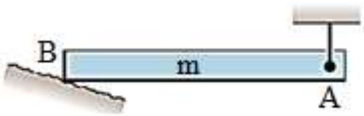
في الجدول (٤-٤) يمثل العمود الوسطي تراكيب معينة، ويمثل العمود الأيمن تفاصيل موجزة عن هذه التراكيب، ويمثل العمود الأيسر مخططات الجسم الحر (FBD) للجسم المعزول خاطيء أو غير كامل.
المطلوب تصحيح أو اكمال مخططات الجسم الحر للتراكيب في العمود الأيسر.
أوزان الأجسام مهملة ما لم يذكر خلاف ذلك.
تم حذف الأبعاد والقيم العددية للتبسيط.

جدول (٤-٤) تمارين لمخطط الجسم الحر

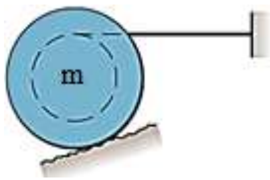
	الجسم	**مخطط الجسم الحر (FBD) الخطأ أو الناقص**
أ - أسطوانة كتلتها (m) يتم دفعها لأعلى منحدر يميل بزاوية (θ).		
ب - أداة رفع ترفع الجسم (A) ذات السطح الأفقي الأملس. ترتكز الأداة على سطح أفقي خشن.		
جـ - عمود منتظم الكتلة وكتلته (m) معلق في موضعه بواسطة سلك. مرتكز في سطح أفقي محزوز لمنع انزلاق العمود.		
د - الضلع (BD) بشكل زاوية قائمة مرتبطة تمفصلياً مع الضلع الأفقي عند النقطة (B).		
هـ - قضيب مثني ملحوم بجدار عند النقطة (A) ومسلط عليه قوتين وعزم.		

أرسم مخطط الجسم الحر لكل من التراكيب المبينة أدناه يوضح جميع القوى المعلومة والمجهولة، علماً أن أوزان الأجسام غير مطلوبة إلا إذا تم تحديد الكتلة.

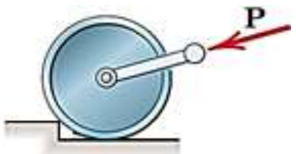
أ ـ قضيب أفقي كتلته (m) معلق بسلك شاقولي عند النقطة (A) ويرتكز على سطح خشن مائل عند النقطة (B).



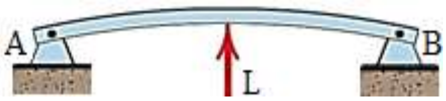
ب ـ قرص محزز منتظم الكتلة، كتلته (m) مسحوب بسلك أفقي ويرتكز على سطح خشن.



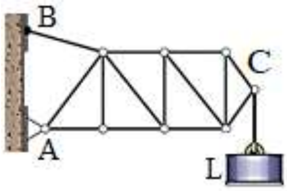
جـ ـ قرص كتلته (m) على وشك الانقلاب على الرصيف بسبب قوة دفع مائلة (P).



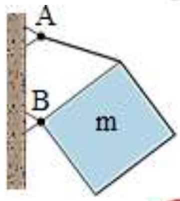
د ـ قضيب أفقي محني بسبب الحمل (L). مثبت من طرفيه بمرتكزات مفصلية.



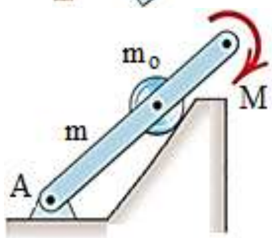
هـ ـ مسنم مرتكز مفصلياً عند النقطة (A) ومشدود بسلك عند النقطة (B) ويحمل الثقل (L) عند النقطة (C).



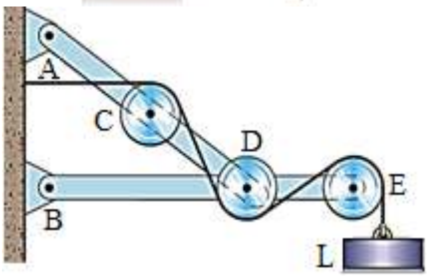
و ـ صفيحة منتظمة الكتلة وكتلتها (m) مرتكزة مفصلياً عند النقطة (B) ومشدودة بواسطة سلك عند النقطة (A).



ز ـ تركيب يتكون من قضيب منتظم كتلته (m) وبكرة كتلها (m_o). يسلط عليه عزم (M) ويرتكز مفصلياً عند النقطة (A).

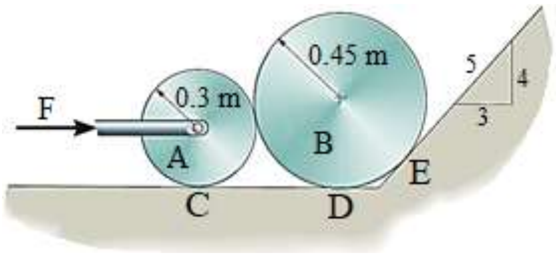


ح ـ هيكل يتكون من قضبان وبكرات مرتبطة مفصلياً مع بعضها، وسلك ربط يحمل الكتلة (L).



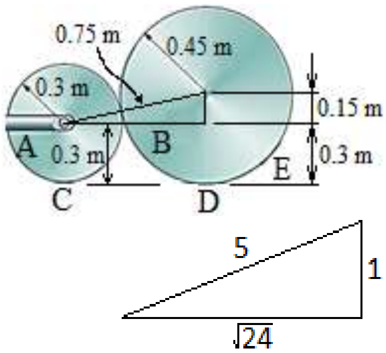
مثال (٤-١١):

القرص الأملس (A) بكتلة (50 kg) والقرص الأملس (B) بكتلة (100 kg)، تم تسليط قوة أفقية على مركز القرص (A) قيمتها (F = 1000 N). أوجد ردود الأفعال العمودية على أسطح الاستناد عند النقاط (C) ، (D) ، و (E).



شكل (مث. ٤-١١)

الحل:



القرص (A):

$$W = 50 \times 9.81 = 490.5 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

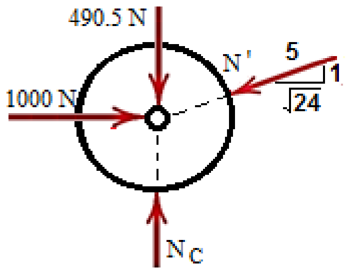
$$1000 - N'\left(\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = 0$$

$$N' = 1020.6 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$N_C - 490.5 - 1020.6\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

$$N_C = 694.6 \text{ N}$$



القرص (B):

$$W = 100 \times 9.81 = 981 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

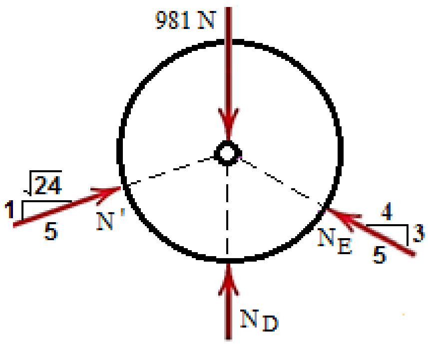
$$N_E\left(\frac{4}{5}\right) - 1020.6\left(\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = 0$$

$$N_E = 1250 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

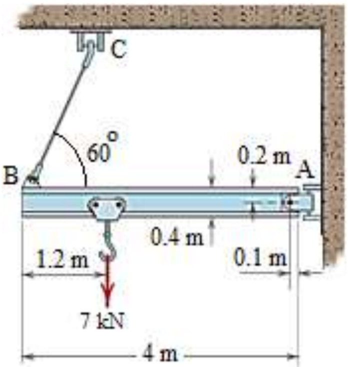
$$1250\left(\frac{3}{5}\right) + N_D - 981 + 1020.6\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

$$N_D = 26.88 \text{ N}$$



<u>مثال (٤-١٢):</u>

في ذراع الرافعة المبين في الشكل (مث. ٤-١٢)، أوجد قوة الشد (T) في سلك الارتكاز وقيمة قوة رد الفعل على النقطة (A). القضيب (AB) قياسي (0.4-m / I-beam) وبكتلة (80 kg) لكل متر طول.

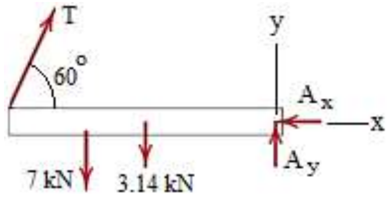


شكل (مث. ٤-١٢)

الحل:

الحل الجبري:

$$W = m\,g = (80 \times 4)(9.81) = 3139.2\ \text{N} = 3.14\ \text{kN}$$



$\sum M_A = 0,$

$-T\cos 60^{o} \times 0.2 - T\sin 60^{o} \times (4 - 0.1)$

$+ 7\,(4 - 1.2 - 0.1)$

$+ 3.14\,(2 - 0.1) = 0$

$-0.1\,T - 3.38\,T + 18.9 + 5.97 = 0$

$3.48\,T = 24.87$

$T = 7.15\ \text{kN}$

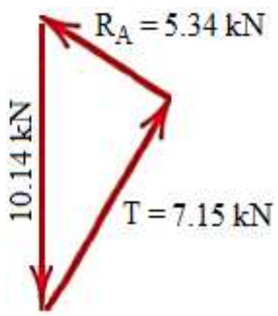
$\sum F_x = 0 \qquad 7.15\cos 60^{o} - A_x = 0 \qquad A_x = 3.6\ \text{kN}$

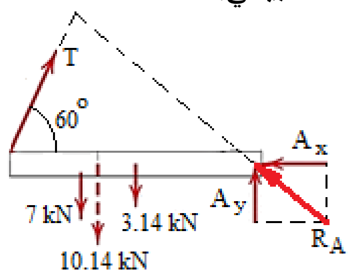
$\sum F_y = 0 \qquad A_y + 7.15\sin 60^{o} - 3.14 - 7 = 0$

$A_y = 3.95\ \text{kN}$

$$R_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2} = \sqrt{(3.6)^2 + (3.95)^2} = 5.34\ \text{kN}$$

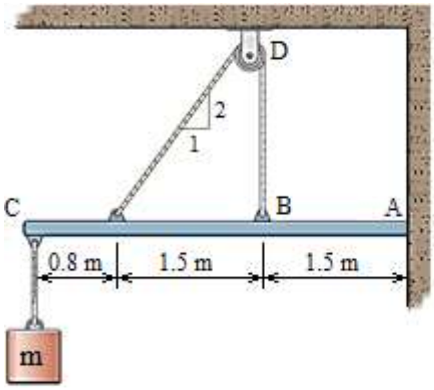
الحل البياني:





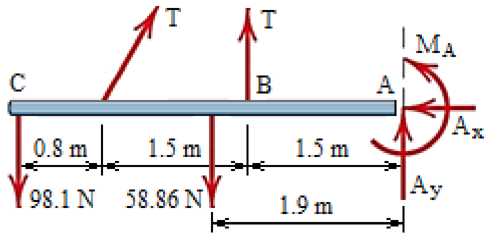
مثال (٤-١٣):

المنظومة المبينة في الشكل (مث. ٤-١٣) تحمل اسطوانة كتلتها (10 kg). اذا كانت كتلة القضيب المنتظم الكتلة (6 kg)، والبكرة عند النقطة (D) عديمة الاحتكاك، أوجد قوة الشد في السلك ومركبات رد الفعل عند النقطة الثابتة (A).



شكل (مث. ٤-١٣)

الحل:



$$M_{cy} = 10 \times 9.81 = 98.1 \text{ N}$$
$$M_{sh} = 6 \times 9.81 = 58.86 \text{ N}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$-(T)(1.5) - (T)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(3) + (98.1)(3.8) + (58.86)(1.9) = 0$$
$$4.18\, T = 484.61$$
$$T = 115.94 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad (115.94)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - A_x = 0$$
$$A_x = 51.85 \text{ N}$$

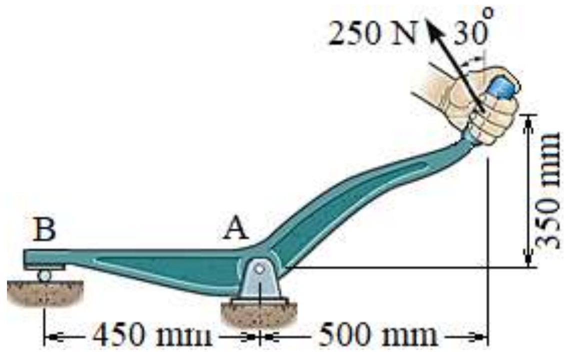
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y + 115.94 + (115.94)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 98.1 - 58.86 = 0$$
$$A_y = -62.68 = 62.68 \text{ N} \downarrow$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$M_A - (115.94)(1.5) - (115.94)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(3) + (98.1)(3.8) + (58.86)(1.9) = 0$$
$$M_A - 173.91 - 311.1 + 372.78 + 111.83 = 0$$
$$M_A = 0.4 \text{ N.m}$$

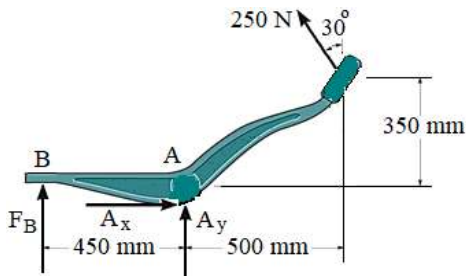
مثال (٤-١٤):

في الذراع الموضح في الشكل (مث. ٤-١٤)، أوجد المركبات الأفقية والعمودية لقوة رد الفعل على المفصل عند النقطة (A) وقوة رد فعل الأسطوانة عند النقطة (B).



شكل (مث. ٤-١٤)

الحل:



$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \qquad (250 \cos 30°)(0.5) + (250 \sin 30°)(0.35) - (F_B)(0.45) = 0$

$152 = 0.45\, F_B$

$F_B = 337.78 \text{ N}$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad A_x - 250 \sin 30° = 0$

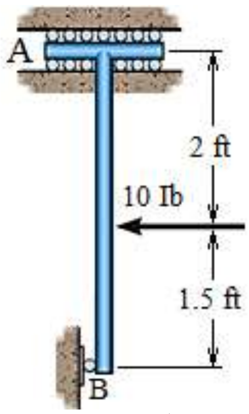
$A_x = 125 \text{ N}$

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y + 250 \cos 30° + 337.78 = 0$

$A_y = -554.29 = 554.29 \text{ N} \downarrow$

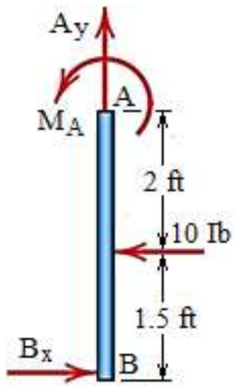
مثال (٤-١٥):

في القضيب الموضح في الشكل (مث. ٤-١٥)، أوجد ردود الأفعال عند المرتكزات (A) و (B).



شكل (مث. ٤-١٥)

الحل:



$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad B_x - 10 = 0$

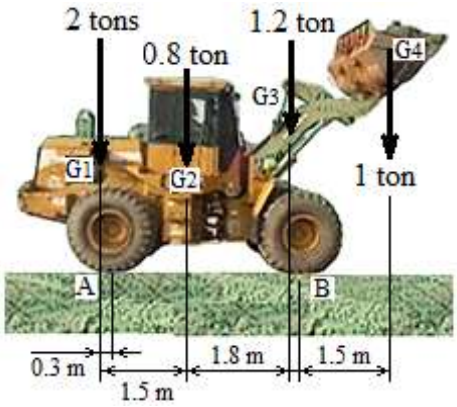
$B_x = 10 \text{ Ib}$

$+ \rightarrow \sum F_y = 0 \qquad A_y = 0$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \qquad M_A + 10\,(3.5) - 10\,(2) = 0$

$M_A = -15 = 15 \text{ Ib.ft} \qquad \text{(C.W)}$

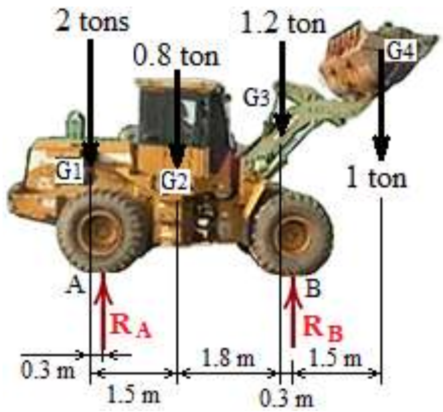
مثال (٤-١٦):



شكل (مث. ٤-١٦)

احسب ردود فعل الأرض على عجلات الشفل المبين في الشكل (مث. ٤-١٦) عند النقطتين (A) و (B). اعتبر المسألة ثنائية الأبعاد.

الحل:



$$\circlearrowright + \sum M_B = 0$$

$$(2000 \times 9.81 \times 3.6) + (800 \times 9.81 \times 2.1) + (1200 \times 9.81 \times 0.3) - (1000 \times 9.81 \times 1.5) - (R_A \times 3.3) = 0$$

$$70632 + 16480.8 + 3531.6 - 14715 = 3.3\, R_A$$

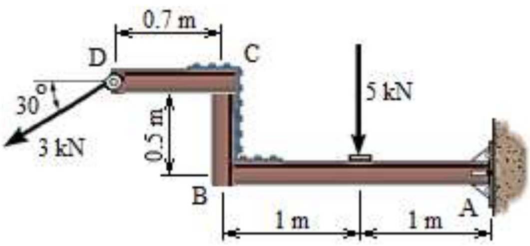
$$R_A = 23009 \text{ N} = 23 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_B + 23009 - (2000 \times 9.81) - (800 \times 9.81) - (1200 \times 9.81) - (1000 \times 9.81) = 0$$

$$R_B = 26041 \text{ N} = 26 \text{ kN}$$

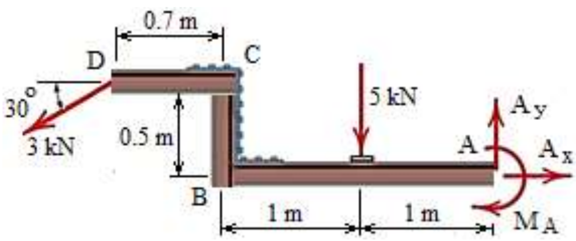
مثال (٤-١٧):



شكل (مث. ٤-١٧)

في الهيكل المثبت من احدى نهايتيه والموضح في الشكل (مث. ٤-١٧)، أوجد مركبات رد الفعل عند مرتكز التثبيت (A).

الحل:



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 3\cos 30^\circ = 0$$

$$A_x = 2.6 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 5 - 3\sin 30^\circ = 0$$

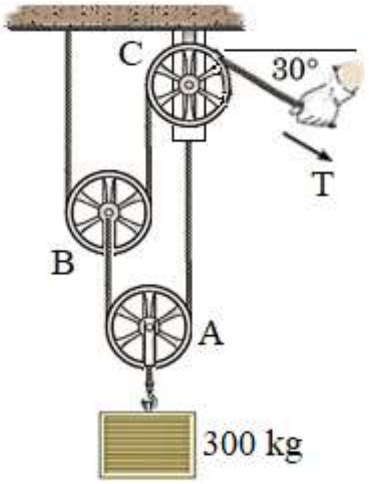
$$A_y = 6.5 \text{ kN}$$

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0$$

$$(5)(1) + (3\cos 30^\circ)(0.5) + (3\sin 30^\circ)(2.7) - M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 10.35 \text{ kN.m}$$

مثال (٤-١٨):

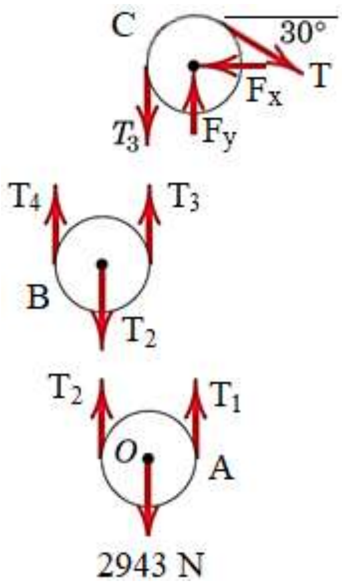
احسب قوة الشد (T) في السلك الذي يحمل كتلة مقدارها (300 kg) بنظام البكرات الموضح في الشكل (مث. ٤-١٨)، ثم أوجد مقدار القوة الكلية المؤثرة على مرتكز البكرة (C).
جميع أوزان الأجزاء مهملة مقارنةً بالحمل، وجميع البكرات تدور بحرية حول محورها.



شكل (مث. ٤-١٨)

الحل:

$$W = m\,g = 300 \times 9.81 = 2943 \text{ N}$$



البكرة (A):

$\sum M_o = 0$ $\quad\quad T_2\, r - T_1\, r = 0 \quad\quad T_1 = T_2$

$\sum F_y = 0$ $\quad\quad T_1 + T_2 - 2943 = 0$

$T_1 = T_2 = 1471.5 \text{ N}$

البكرة (B):

$$T_3 = T_4 = T_2 / 2 = 735.75 \text{ N}$$

البكرة (C):

$$T = T_3 \quad\quad \text{or} \quad\quad T = 735.75 \text{ N}$$

التوازن في البكرة بالاتجاهين الأفقي والعمودي يتطلب:

$\sum F_x = 0$ $\quad\quad 735.75 \cos 30^o - F_x = 0$

$F_x = 637.2 \text{ N}$

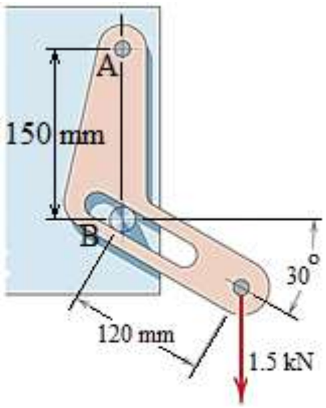
$\sum F_y = 0$ $\quad\quad F_y - 735.75 \sin 30^o - 735.75 = 0$

$F_y = 1103.6 \text{ N}$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(637.2)^2 + (1103.6)^2} = 1274.4 \text{ N}$$

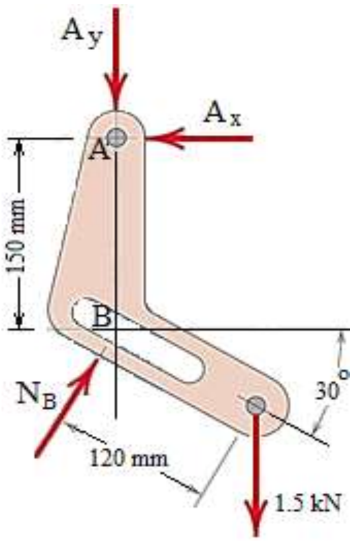
مثال (٤-١٩):

احسب مقدار القوة المسلطة على المسمار عند النقطة (A) الناتجة من تأثير الحمل (1.5 kN) المسلط على البراكيت. إهمل الاحتكاك في فتحة التوجيه الانزلاقي.



شكل (مث. ٤-١٩)

الحل:



$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$(N_B \sin 30°)(0.15) - (1.5)(0.12 \cos 30°) = 0$$

$$N_B = 2.1 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 2.1 \sin 30° - A_x = 0$$

$$A_x = 1.05 \text{ kN}$$

$$A_x = 0.3 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

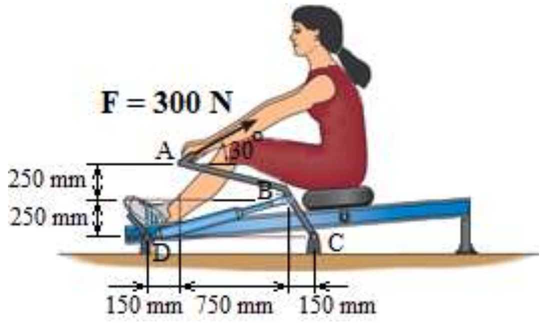
$$2.1 \cos 30° - A_y - 1.5 = 0$$

$$A_y = 0.3 \text{ kN}$$

$$R_A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} = \sqrt{(1.05)^2 + (0.3)^2} = 1.09 \text{ kN}$$

مثال (٤-٢٠):

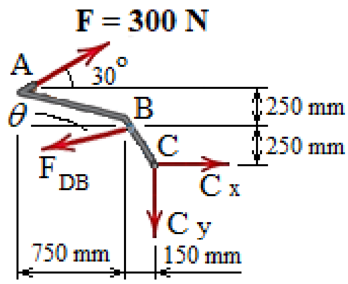
في الشكل (مث. ٤-٢٠) تتدرب فتاة على آلة التجذيف. إذا بذلت الفتـاة قوة سـحب مقدارهـا (F = 300 N) على مقبض الآلة (ABC)، أوجد القوة المسـلطة من قبل الأسـطوانة الهيدروليكية (BD) على المقبض، والمركبات الأفقية والعمودية لقوة رد الفعل عند المفصل (C).



شكل (مث. ٤-٢٠)

الحل:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0.25}{0.75} = 18.4$$



$+\sum M_C = 0$

$-(300\cos 30)(0.5) - (300\sin 30)(0.9) + (F_{DB}\cos 18.4)(0.25) + (F_{DB}\sin 18.4)(0.15) = 0$

$-129.9 - 135 + 0.237\,F_{DB} + 0.047\,F_{DB} = 0$

$0.284\,F_{DB} = 232.7$

$F_{DB} = 819.4\ N$

$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$C_x + 300\cos 30 - 819.4\cos 18.4 = 0$

$C_x = 777.51 - 259.81 = 517.7\ N \rightarrow$

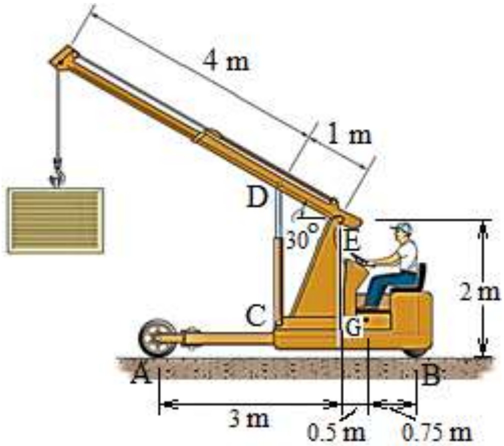
$+\uparrow \sum F_y = 0$

$300\sin 30 - 819.4\sin 18.4 - C_y = 0$

$C_y = 150 - 258.64 = -108.64 = 108.64\ N \uparrow$

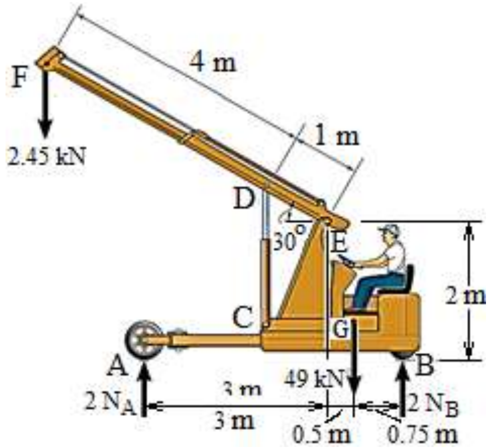
مثال (٤-٢١):

الكتلة الإجمالية للرافعة الأرضية وســـــــائقها تبلغ (5 tons) مع مركز ثقل عند النقطة (G). إذا كان المطلوب أن ترفع الرافعة الصندوق البالغ (250 kg)، أوجد قوى رد فعل الأرض على كلتا العجلتين عند (A) وكلتا العجلتين عند (B) عندما يكون ذراع الرافعة في الموضع الموضح في الشكل (مث. ٤-٢١).



شكل (مث. ٤-٢١)

الحل:



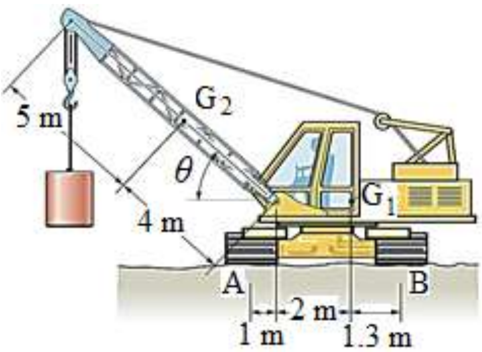
$W_{cr} = 5000 \times 9.81 = 49050$ N = 49 kN
$W_b = 250 \times 9.81 = 2452.5$ N = 2.45 kN

$$\circlearrowright + \sum M_B = 0$$
$$(2.45) (5 \cos 30 + 1.25) + (49) (0.75) - (2 N_A) (4.25) = 0$$
$$2 N_A = 11.86 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad N_A = 5.93 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$11.86 - 49 - 2.45 + 2 N_B = 0$$
$$2 N_B = 39.59 \text{ kN} \Rightarrow N_A = 19.79 \text{ kN}$$

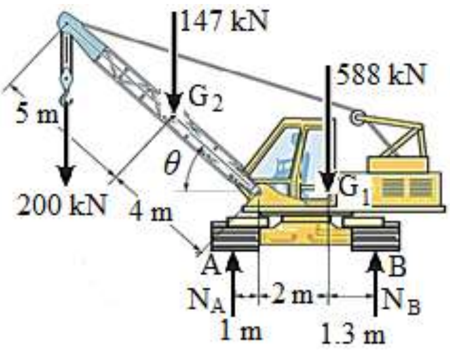
مثال (٤-٢٢):

كتلة الرافعة المتحركة (60 tons) مع مركز ثقل عند (G_1) وكتلة ذراع الرافعة (15 tons) مع مركز ثقل عند (G_2). أوجد أصغر زاوية ميل (θ) لذراع الرافعة، دون التســـبب في انقـلاب الرافعـــة إذا كـــان الحمـــل المعلق (W = 200 kN). إهمل ســمك العجلات عند (A) و (B).



شكل (مث. ٤-٢٢)

الحل:

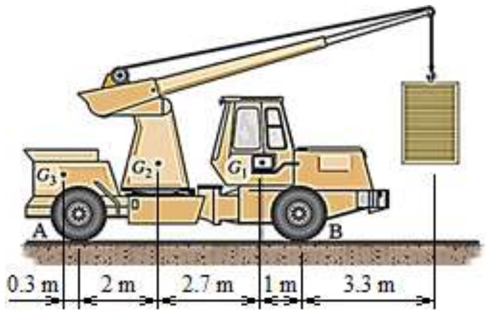


$W_c = 60000 \times 9.81 = 588600$ N = 588 kN
$W_b = 15000 \times 9.81 = 147150$ N = 147 kN

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0$$
$$(200)(9 \cos \theta - 1) + (147)(4 \cos \theta - 1) + (0)(4.3) - (588)(3) = 0$$

$$1800 \cos \theta - 200 + 588 \cos \theta - 147 - 1764 = 0$$
$$2388 \cos \theta - 2111 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2388 \cos \theta = 2111$$
$$\cos \theta = 0.884 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(0.884) = 27.87°$$

مثال (٤-٢٣):



شكل (مث. ٤-٢٣)

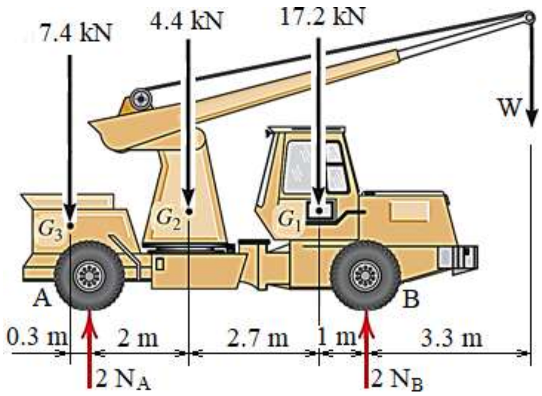
الرافعة المبينة في الشكل (مث. ٤-٢٣) تتألف من ثلاثة أجزاء، كتلها ($m_1 = 1750$ kg)، ($m_2 = 450$ kg)، و ($m_3 = 750$ kg) ومراكز ثقلها عند (G_1)، (G_2)، و (G_3) على التوالي. أوجد:

(أ) رد فعل الأرض على كل عجلة من العجلات الأربع اذا كان وزن الحمل المعلق (4 kN) ويسحب بسرعة ثابتة.

(ب) الحمل الأقصى الذي يمكن للرافعة رفعه بدون أن تنقلب، خلال موقع الذراع المبين.

أهمل وزن الذراع.

الحل:



$W_1 = 1750 \times 9.81 = 17167.5$ N $= 17.2$ kN
$W_2 = 450 \times 9.81 = 4414.5$ N $= 4.4$ kN
$W_3 = 750 \times 9.81 = 7357.5$ N $= 7.4$ kN

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0$$
$$(2N_B)(5.7) - (W)(9) - (17.2)(4.7) - (4.4)(2) + (7.4)(0.3) = 0$$
$$11.4\, N_B - 9W - 80.84 - 8.8 + 2.22 = 0$$
$$11.4\, N_B = 9W + 87.42$$
$$N_B = 0.79W + 7.67 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

باستخدام النتيجة ($N_B = 0.79W + 7.67$):

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$2N_A + 2N_B - W - 17.2 - 4.4 - 7.4 = 0$$
$$2N_A + 2\,(0.79W + 7.67) - W - 17.2 - 4.4 - 7.4 = 0$$
$$2N_A + 1.58W + 15.34 - W - 29 = 0$$
$$2N_A = -0.58W + 13.66$$
$$N_A = -0.29W + 6.83 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(أ) بتعويض الحمل (W = 4 kN) في المعادلات (1) و (2):

$$N_A = -0.29(4) + 6.83 = 5.67 \text{ kN}$$
$$N_B = 0.79(4) + 7.67 = 10.83 \text{ kN}$$

(ب) لحضة انقلاب الرافعة تكون ($N_A = 0$). ومن المعادلة (2):

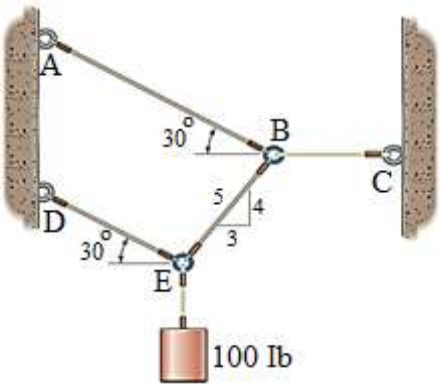
$$0 = -0.29W + 6.83 \quad \Rightarrow \quad W = 23.55 \text{ kN}$$

مسائل:

٤-١) أوجد قوة الشد في كل سلك من أسلاك منظومة الأســـلاك المبينة في الشــكل (مس. ٤-١).

الجواب:

$F_{ED} = 60.6\ Ib$, $F_{EB} = 87.27\ Ib$
$F_{BC} = 120.9\ Ib$, $F_{BA} = 139.6\ Ib$

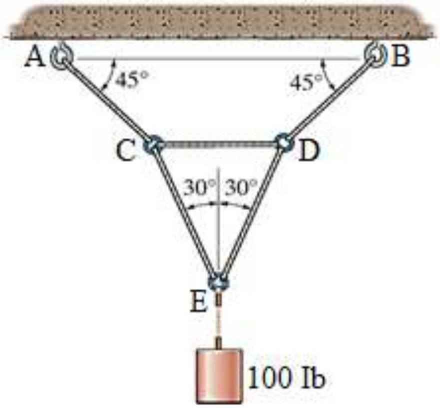


شكل (مس. ٤-١)

٤-٢) أوجد قوة الشد في كل سلك من أسلاك منظومة الأســــــلاك المبينة في الشــكل (مس. ٤-٢).

الجواب:

$F_{ED} = F_{EC} = 57.74\ Ib$
$F_{DB} = F_{CA} = 70.7\ Ib$, $F_{CD} = 21.13\ Ib$

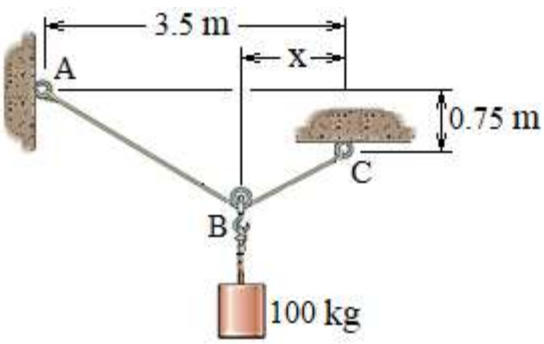


شكل (مس. ٤-٢)

٤-٣) يبلغ طول السلك (ABC) (5 m).أوجد المسافة (x) وقوة الشد المسلطة في السلك (ABC) المطلوبة لتحقيق التوازن مع كتلة الأسطوانة البالغة (100 kg). إهمل حجم البكرة عند (B).

الجواب:

$x = 1.38\ m$, $T = 686.87\ N$

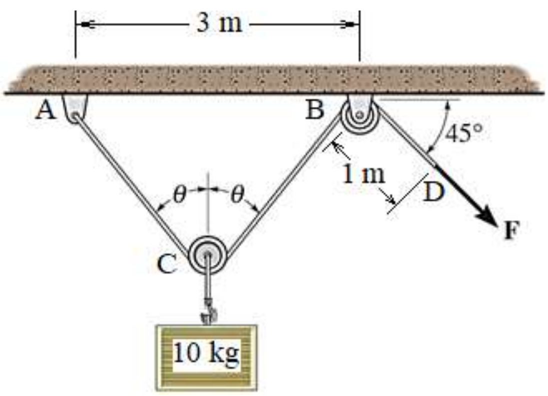


شكل (مس. ٤-٣)

٤-٤) الطول الكلي للحبل (ABCD) الموضح في الشكل (مس. ٤-٤) هو (6 m)، أوجد مقدار الزاوية (θ) والقوة (F) لتحقيق التوازن مع الكتلة (10 kg).

الجواب:

$\theta = 36.87^o$, $F = 61.3\ N$

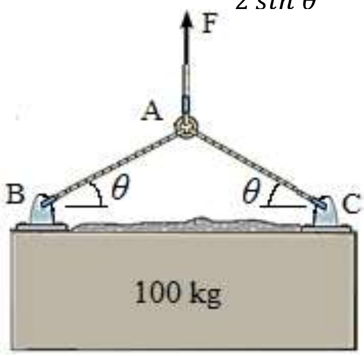


شكل (مس. ٤-٤)

٤-٥) حاوية سعة (100 kg) ترفع بواسطة الرافعة (BAC) بسرعة ثابتة. أوجد قوة الرافعة (F)، وقوة الشد (T) في كل من الحبال (AB) و (AC) بدلالة الزاوية (θ)، حيث ($0° \le \theta \le 90°$).

الجواب:

$$F = 981\ N,\ T = \frac{981}{2 \sin \theta}$$

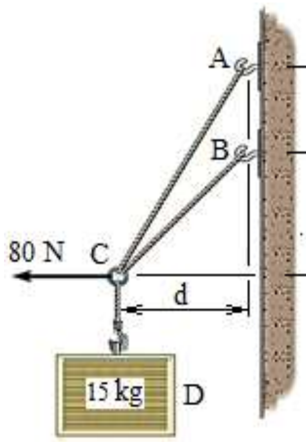


شكل (مس. ٤-٥)

٤-٦) الصندوق (D) كتلته (15 kg). إذا تم تسليط قوة (F = 80 N) أفقيًا على الحلقة (C)، أوجد أقصى مسافة (d) بحيث تكون القوة في السلك (CB) مساوية للصفر.

الجواب:

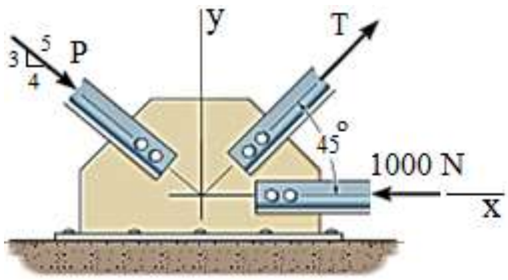
$d = 2.17\ m$



شكل (مس. ٤-٦)

٤-٧) أحسب قيم قوة الشد (T) وقوة الكبس (P) في البراكيت المبين في الشكل (مس.٤ -٧) لتحقيق التوازن.

الجواب: $P = 714.3\ N,\ T = 606.2\ N$

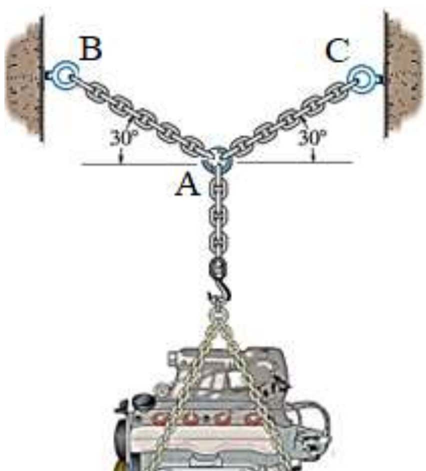


شكل (مس. ٤-٧)

٤-٨) محرك معلق بمنظومة السلاسل المبينة في الشكل (مس. ٤-٨). أوجد الوزن الأقصى للمحرك الذي يمكن تعليقه دون تجاوز قوة الشد البالغة (500 Ib) في كلا السلسلتين (AB) و (AC).

الجواب:

$W = 500\ Ib$

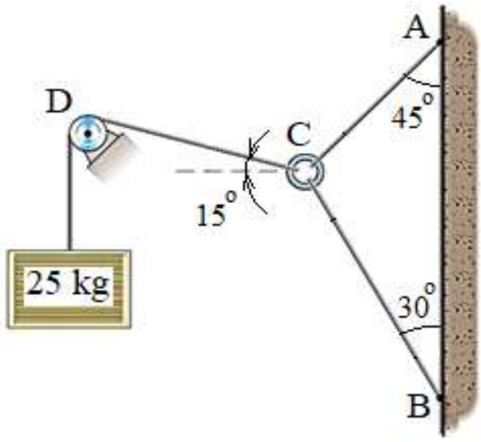


شكل (مس. ٤-٨)

٤-٩) في تركيبة الأسلاك الموضح في الشكل (مس. ٤-٩)، أوجد قوى الشد في الأسلاك (AC) و (BC) الناتجة عن وزن الصندوق ذو الكتلة (25 kg).

الجواب:

$T_{AC} = 179.6\ N,\ \ T_{BC} = 219.9\ N$

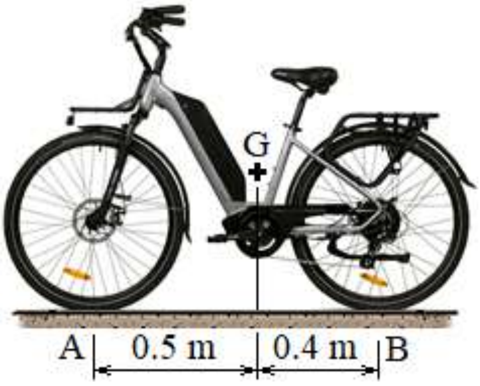


شكل (مس. ٤-٩)

٤-١٠) إذا كانت كتلة الدراجة (15 kg) ومركز جاذبيتها (G). أوجد ردود الأفعال العمودية عند (A) و (B) عندما تكون الدراجة في حالة توازن.

الجواب:

$R_A = 81.75\ N,\ \ R_B = 65.4\ N$



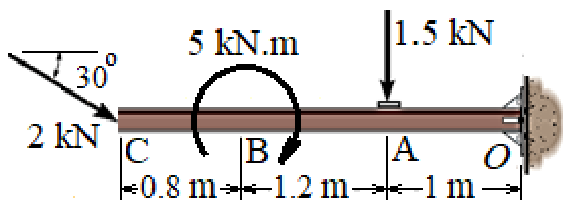
شكل (مس. ٤-١٠)

٤-١١) يخضع القضيب المثبت من احدى نهايتيه والموضح في الشكل (مس. ٤-١١) لقوتين خارجيتين وعزم مزدوج. احسب ردود الفعل عند نقطة الارتكاز (*O*).

الجواب:

$O_x = 1.73\ kN,\ \ O_y = 2.5\ kN,$

$M_o = 0.5\ k\ N.m\ (CW)$

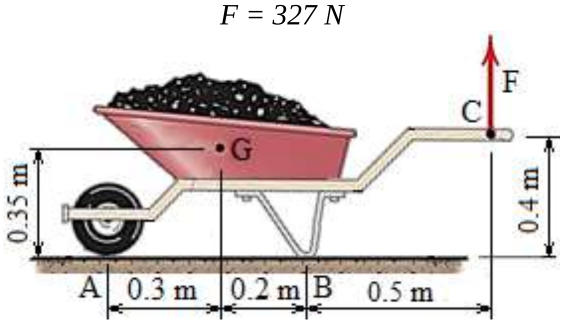


شكل (مس. ٤-١١)

٤-١٢) الكتلة الكلية لعربة اليد مع حمولتها تبلغ (120 kg) ومركز ثقلها عند النقطة (G). أوجد مقدار الحد الأدنى للقوة العمودية (F) المطلوبة لرفع عربة اليد للانفصال عن الأرض عند النقطة (B).

الجواب:

$F = 327\ N$

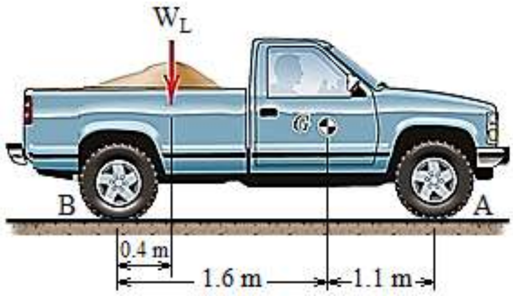


شكل (مس. ٤-١٢)

٤-١٣) مركز ثقل سيارة الحمل ذات الكتلة (1.6 tons) يقع عند النقطة (G) عندما تكون فارغة. إذا تمت إضافة حمولة مركز ثقلها (0.4 m) أمام محور الاطارات الخلفية للسيارة، أوجد وزن الحمولة (W_L) الذي تتساوى فيه ردود الأفعال العمودية أسفل العجلات الأمامية والخلفية.

الجواب:

$W_L = 4.13\ kN$

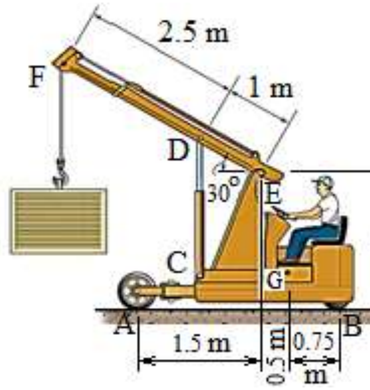


شكل (مس. ٤-١٣)

٤-١٤) الكتلة الكلية للرافعة الأرضية وسائقها تبلغ (5 tons) ومركز ثقلها عند النقطة (G). أوجد الوزن الأكبر للصندوق الذي يمكن رفعه دون التسبب في انقلاب الرافعة عندما يكون ذراع الرافعة في الوضع الموضح في الشكل (مس. ٤-١٤).

الجواب:

$W_b = 64\ kN$

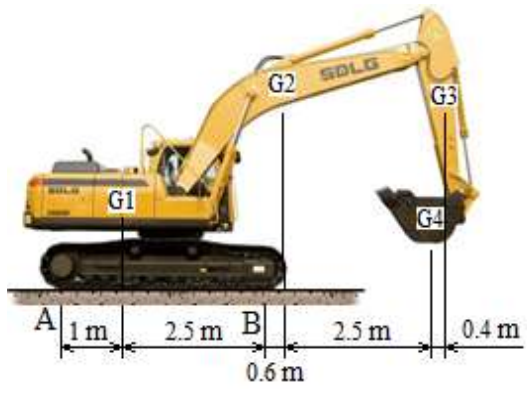


شكل (مس. ٤-١٤)

٤-١٥) حفارة وزنها (400 kN) عند مركز الثقل (G_1) ووزن ذراعها الرئيسي (50 kN) عند مركز الثقل (G_2) ووزن ذراعها من جهة الكيلة (30 kN) عند مركز الثقل (G_3) ووزن الكيلة (10 kN) عند مركز الثقل (G_4). أوجد ردود الأفعال عند (A) و(B).

الجواب:

$N_A = 238.3\ kN,\ \ N_B = 251.7\ kN$

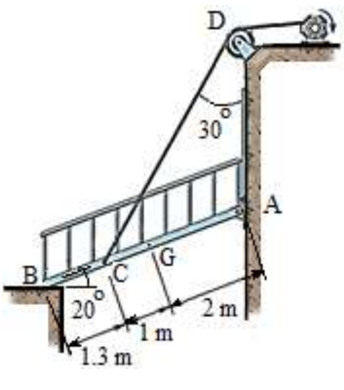


شكل (مس. ٤-١٥)

٤-١٦) كتلة الرمبة الموضحة في الشكل (مس. ٤-١٦) تبلغ (100 kg) ومركز ثقلها عند (G). أوجد قوة الشد في السلك (CD) المطلوبة لبدء رفع الرمبة، والمركبات الأفقية والعمودية لقوة رد الفعل عند المفصل (A).

الجواب:

$T = 955.3\ N,\ \ A_x = 477.65\ N,\ A_y = 153.7\ N$

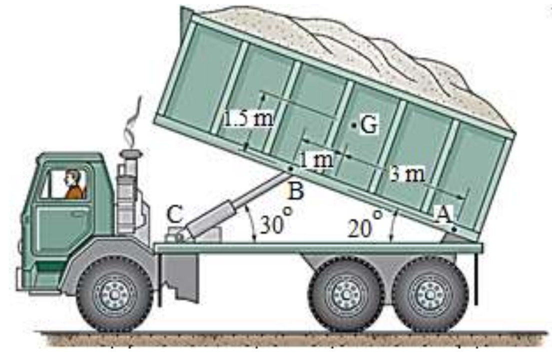


شكل (مس. ٤-١٦)

٤-١٧) حاويــــة حمولة الشــــاحنة القلابة وزنها (25 kN) ومـــركز ثقلها عند النقطة (G)، ترتكز مفصلياً مع هيكل الشاحنة عند النقطة (A)، والاسطوانة هيدروليكية مرتكزة مفصلياً مع هيكل الشاحنة عند النقطة (C) ومع حاوية الحمولة عند النقطة (B). أوجد قوة الأسطوانة الهيدروليكية (F_{CB}) المطلوبة لتحقيق التوازن والمركبات الأفقية والعمودية لقوة رد الفعل عند المفصل (A).

الجواب:

$F_{CB} = 23.03\ kN,\ A_x = 19.95\ kN,$
$A_y = 13.49\ kN$

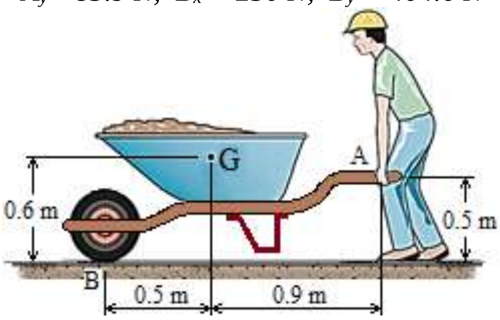


شكل (مس. ٤-١٧)

٤-١٨) عامل يرفع مقابض عربة يدوية مخصصة لنقل مواد البناء لأعلى ويدفعها للأمام بقوة مقدارها (250 N). إذا كانت كتلة عربة اليد ومحتوياتها (50 kg) ومركز الكتلة عند النقطة (G)، أوجد ردود الفعل على الإطار.

الجواب:

$A_y = 85.9\ N,\ B_x = 250\ N,\ B_y = 404.6\ N$

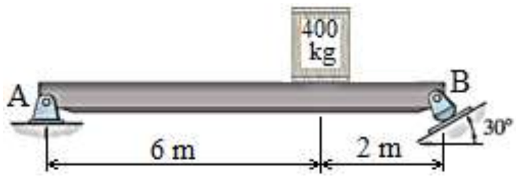


شكل (مس. ٤-١٨)

٤-١٩) القضيب الموضح في الشكل (مس. ٤-١٩) يحمل صندوق كتلته (400 kg). أوجد المركبات الأفقية والعمودية لقـــوة رد الفعل عند المفصـــل (A) وقـــوة رد الفعل عند المـــرتكز التأرجحي (B) على القضيب.

الجواب:

$N_B = 3.4\ k\ N,\ A_x = 1.7\ k\ N,\ A_y = 0.98\ k\ N$

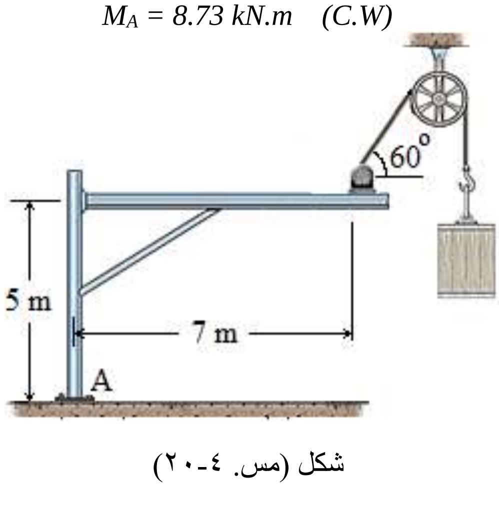


شكل (مس. ٤-١٩)

٤-٢٠) يتم تثبيت الرافعة الذراعية عند (A) وتحمل صندوقًا كتلته (250 kg) كما هو موضح في الشكل (مس. ٤-٢٠). أوجد ردود الأفعال على الرافعة عند النقطة (A).

الجواب:

$A_x = 1.225\ kN,\ A_y = 2.122\ kN$
$M_A = 8.73\ kN.m \quad (C.W)$



شكل (مس. ٤-٢٠)

الفصل الخامس

الهياكل الهندسية

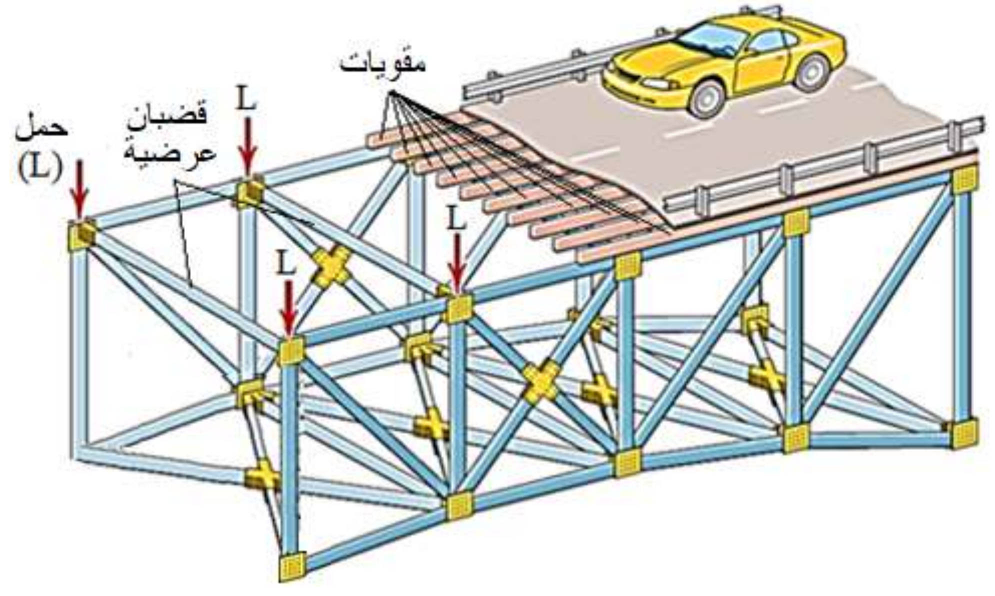
ENGINEERING STRUCTURES

الهيكل الهندسي هو نظام يتكون من مجموعة من الأجزاء (الأضلاع) المرتبطة مع بعضها ارتباطاً يؤهلها لدعم أو نقل القوى وتحمل الأحمال المسلطة عليه بأمان. لتحديد القوى الداخلية للهيكل الهندسي، يجب تفكيك الهيكل وتحليل مخططات الجسم الحر المنفصلة للأضلاع بشكل منفرد أو مجموعات الأضلاع. يتطلب هذا التحليل تطبيقاً دقيقاً لقانون نيوتن الثالث، والذي ينص على أن لكل قوة فعل قوة رد فعل تساويها في المقدار وتعاكسها في الاتجاه .

في الفصل الرابع تم دراسة توازن جسم صلب واحد أو منظومة من الأجزاء المتصلة تم التعامل معها كجسم صلب واحد، وذلك برسم مخطط الجسم الحر يبين جميع القوى الخارجية للجسم المعزول، وتطبيق معادلات التوازن عليه لايجاد القوى والعزوم المجهولة.

في هذا الفصل سيتم التركيز على تحديد القوى الداخلية للهيكل، أي قوى الفعل ورد الفعل بين الضلعين المتصلين، وسيتم تحليل القوى الداخلية المؤثرة في عدة أنواع من الهياكل - وهي المسنمات والمكائن والآلات. في هذه الاجراء سيؤخذ بنظر الاعتبار الهياكل المحددة بشكل ثابت فقط، والتي لا تحتوي على قيود داعمة أكثر مما هو ضروري للحفاظ على تكوين التوازن. وهكذا، فإن معادلات التوازن كافية لايجاد جميع ردود الأفعال المجهولة.

ان حل مسائل الهياكل الهندسية (المسنمات، المكائن والآلات) ما هو الا تطبيق مباشر لما تم دراسته في الفصول السابقة.



شكل (٥-١) هيكل جسر

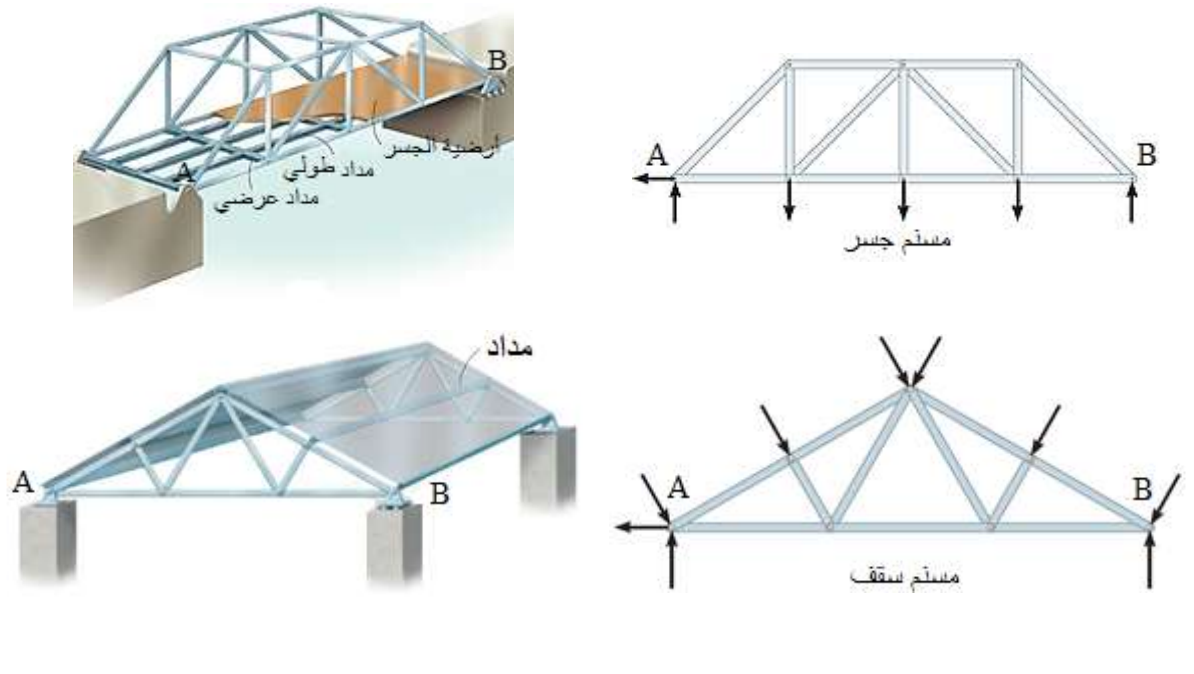
الجزء الأول - المسنمات البسيطة (THE SIMPLE TRUSSES):

المسنم (الجمالون) عبارة عن هيكل يتكون من أضلاع بسيطة متصلة ببعضها البعض عند نقاط نهاياتها. تتكون الأضلاع المستخدمة غالباً من دعامات خشبية أو قضبان معدنية، وعادة ما يتم تشكيل الوصلات المشتركة عن طريق تثبيت أطراف الأضلاع أو ربطها بلوحات مشتركة تسمى لوحة المجمع، أو ربطها مفصلياً بواسطة مسامير أو دبابيس عند نهايتي كل ضلعين مترابطين. ومن الأمثلة على المسنمات (الجسور ، حاملات السقوف ، أبراج نقل الطاقة الكهربائية ، والهياكل الرافعة).

شكل (٥-٢) ربط الوصلات

المسنمات المستوية (Planer trusses):

المسنمات المستوية هي المسنمات التي تقع أضلاعها الرئيسية في مستوى واحد وتستخدم لدعم الجسور وسقوف المباني ذات الهياكل المعدنية، حيث تصمم كأزواج من المسنمات، يوضع مسنم على كل جهة ويربط بينهما بواسطة دعامات عرضية.



شكل (٥-٣) مسنمات مستوية

افتراضات تصميمية (Assumptions for design):

تستخدم الفرضيات التالية في تحليل المسنمات:

١- تعتبر كافة الأضلاع ثنائية القوة.
٢- عند التحليل تهمل أوزان لأضلاع.
٣- القوى الخارجية (الأحمال وردود الأفعال) تكون مسلطة على نقاط ربط الأضلاع مع بعضها البعض (المفاصل أو الوصلات).
٤- يجب توجيه القوى الموجودة في نهايات الأضلاع على طول محور الضلع، وتعتبر قوة شد (T) اذا كانت تحاول اطالة ضلع الهيكل، بينما إذا كانت تميل إلى تقصير الضلع، فهي قوة ضغط (C).

شكل (٥-٤) طبيعة القوى على أضلاع المسنم

تحليل المسنمات (Analysis of the trusses):

تحليل المسنمات يعني إيجاد ردود الأفعال والقوى المسلطة على أضلاع المسنمات. وهناك طريقتان لإيجاد القوى المسلطة على أضلاع المسنم:

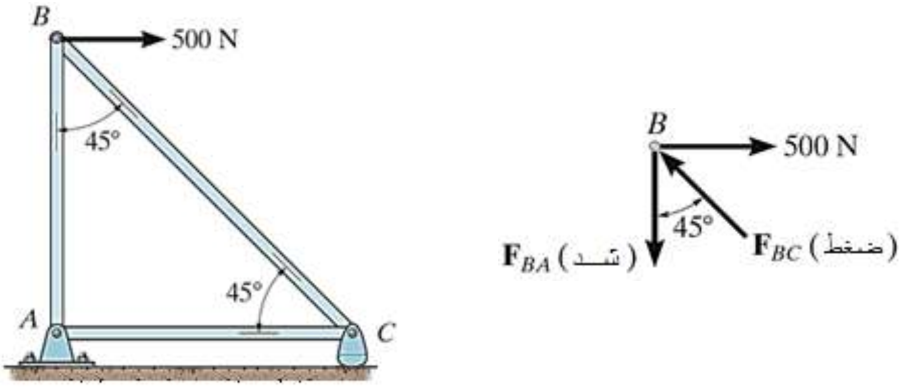
١- طريقة المفاصل.
٢- طريقة المقاطع.

١ - طريقة المفاصل (Joints method):

في هذه الطريقة يتم افتراض جميع أضلاع المسنم من الأضلاع ثنائية القوى وتنتقل القوى فيها بشكل محوري، فيتم في هذه الطريقة رسم مخطط الجسم الحر (F.B.D.) لكل مفصل، ثم يتم تطبيق معادلتي التوازن ($\sum F_x = 0$) و ($\sum F_y = 0$) لايجاد القوى المجهولة في الأضلاع المتجاورة والمرتبطة مفصلياً مع بعضها. أي أن القوى المؤثرة هي مجاميع مساوية لمفاصل المسنم، ويجب أن لا يزيد عدد القوى المجهولة في كل مفصل عن قوتين وذلك لامكانية استنتاجها من معادلتين.
في طريقة المفاصل يتوجب تحليل المفاصل الواحد تلو الآخر وصولاً الى المفصل الذي يؤثر فيه الضلع المطلوب.
إذا كانت معرفة اتجاه القوة في الضلع غير ممكنة، يتم افتراض أن القوة هي قوة شد (T) ويقلب اتجاه القوة اذا تم استنتاج قيمتها سالبة.
قوة الشد هي القوة التي تسحب المفصل بينما قوة الضغط هي القوة التي تكبس المفصل.

طريقة التحليل:

١- إهمال أوزان جميع الأضلاع.
٢- رسم مخطط الجسم الحر للمفصل بقوة واحدة غير معروفة على الأقل وقوة لضلعين غير معروفين على الأكثر.
٣- إذا كانت معرفة اتجاه القوة في الضلع غير ممكنة، يتم افتراض أن القوة هي قوة شد (T) ويقلب اتجاه القوة اذا تم استنتاج قيمتها سالبة.
٤- تطبيق معادلات التوازن ($\sum F_x = 0$) و ($\sum F_y = 0$) لإيجاد قوى الضلع المجهولة.
٥- تكرار الخطوات من (٢) إلى (٤) للمفاصل الأخرى.



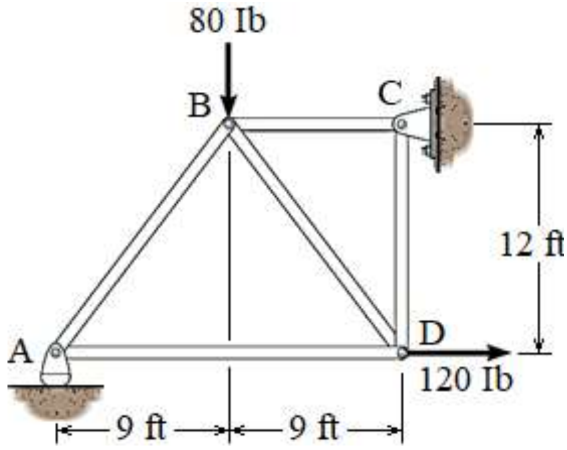
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

شكل (٥-٥) طريقة المفاصل في التحليل

<u>مثال (٥-١):</u>

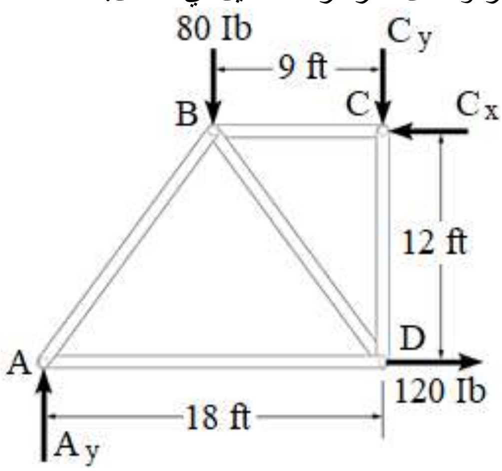
في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-١)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-١)

الحل:

ردود أفعال المرتكزات: بما أنه يوجد على الأقل ثلاث قوى مجهولة مسلطة على كل مفصل، فيتطلب تحديد ردود فعل المرتكزات لتحليل أي مفصل.



$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 120 - C_x = 0$

$C_x = 120\ \text{Ib}$

$\circlearrowright + \sum M_C = 0$

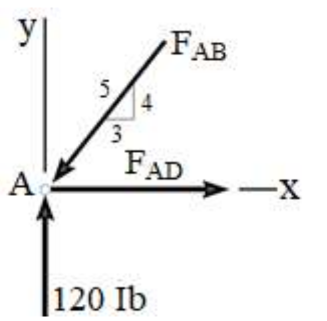
$-(A_y)(18) + (80)(9) + (120)(12) = 0$

$A_y = 120\ \text{Ib}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 120 - 80 - C_y = 0$

$C_y = 40\ \text{Ib}$

المفصل (A):



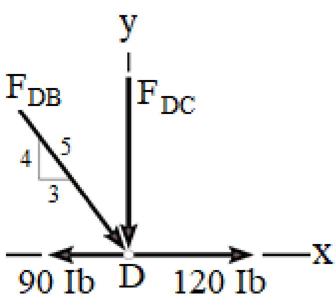
$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 120 - (4/5)\,F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 150\ \text{Ib}$ (C)

$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{AD} - (3/5)(150) = 0$

$F_{AD} = 90\ \text{Ib}$ (T)

المفصل (D):



$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad -90 + (3/5)\,F_{DB} + 120 = 0$

$F_{DB} = -50\ \text{Ib}$

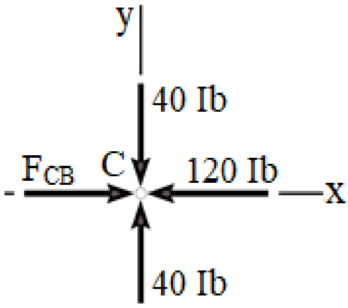
الاشارة السالبة تشير الى أن القوة (F_{DB}) تؤثر بعكس الاتجاه.

$F_{DB} = 50\ \text{Ib}$ (T)

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad -F_{DC} + (4/5)(50) = 0$

$F_{DC} = 40\ \text{Ib}$ (C)

المفصل (C):

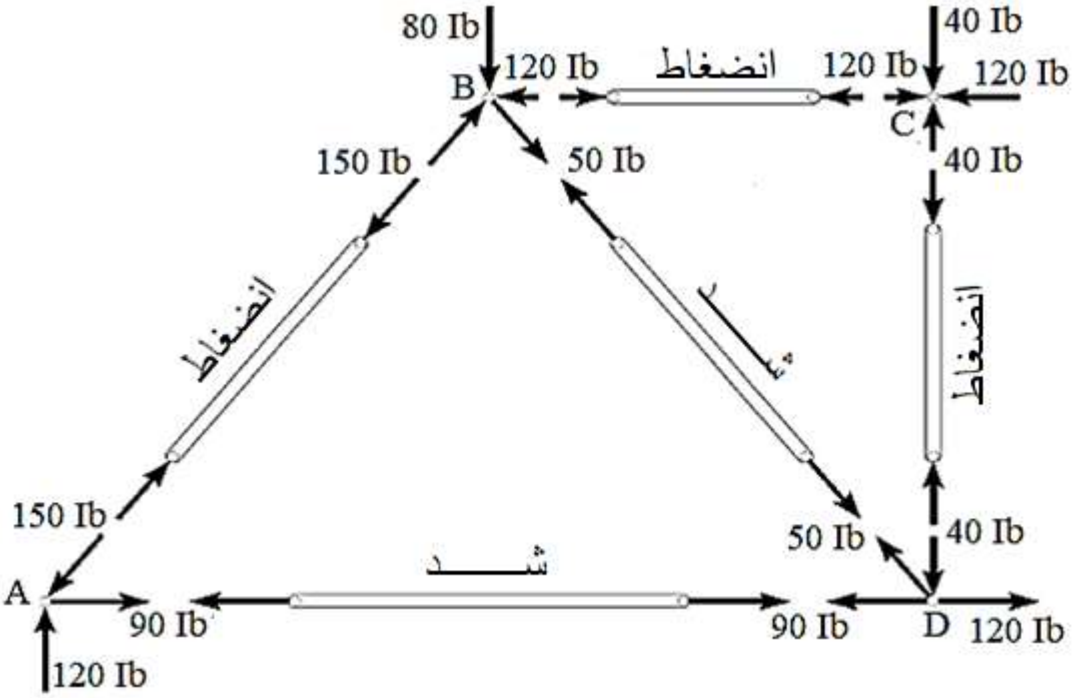


$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{CB} - 120 = 0$

$F_{CB} = 120\ Ib \qquad (C)$

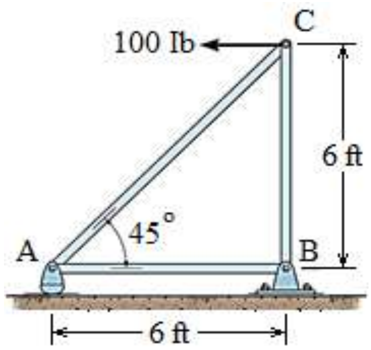
$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad 40\ Ib - 40\ Ib = 0$

(تدقيق)



مثال (٥-٢):

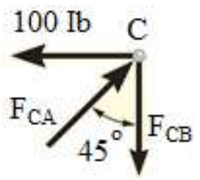
في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٢)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٢)

الحل:

المفصل (C):



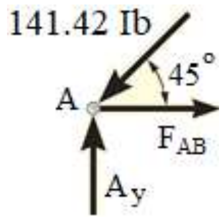
$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{CA}\sin 45^\circ - 100 = 0$

$F_{CA} = 141.42$ Ib (C)

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 141.42\cos 45^\circ - F_{CB} = 0$

$F_{CB} = 100$ Ib (T)

المفصل (A):



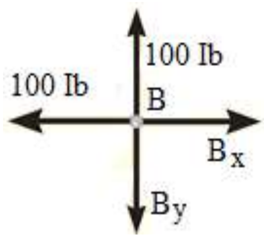
$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{AB} - 141.42\cos 45^\circ = 0$

$F_{AB} = 100$ Ib (T)

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y - 141.42\sin 45^\circ = 0$

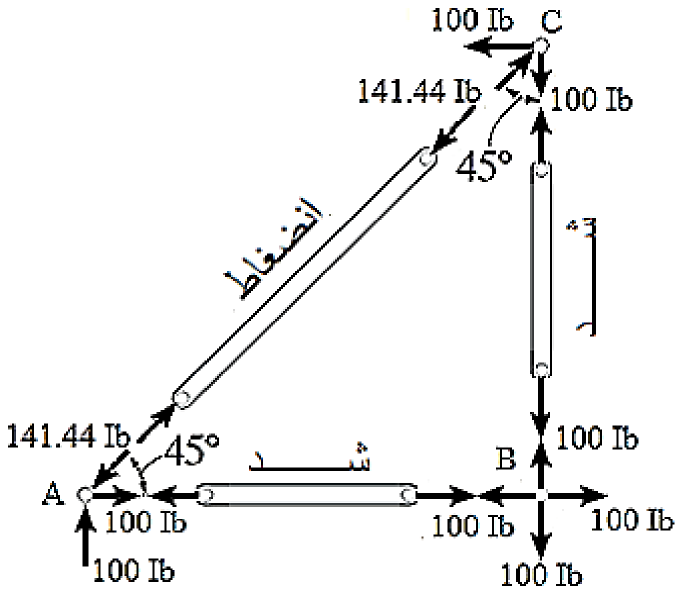
$A_y = 100$ Ib

المفصل (B):



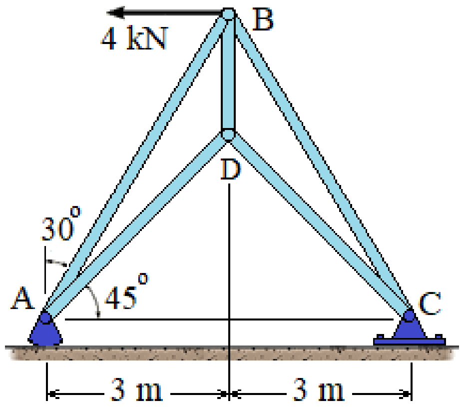
$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad B_x - 100 = 0 \qquad B_x = 100$ Ib

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 100 - B_y = 0 \qquad B_y = 100$ Ib



مثال (٥-٣):

في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٣)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

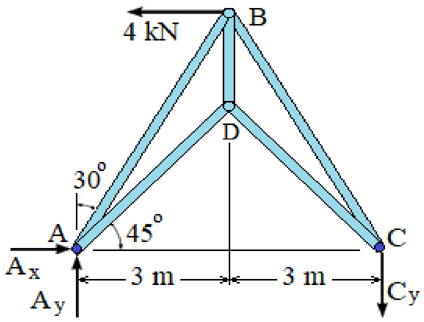


شكل (مث. ٥-٣)

الحل:

ردود أفعال المرتكزات:

متوقع وجود أكثر من مجهول في كل مفصل.

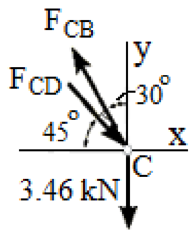


$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0,$$
$$(4)(3 \tan 60) - (C_y)(6) = 0$$
$$C_y = 3.46 \text{ kN}$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0, \quad A_x - 4 = 0, \quad A_x = 4 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0, \quad A_y - 3.46 = 0, \quad A_y = 3.46 \text{ kN}$$

المفصل (C):



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{CD} \cos 45^\circ - F_{CB} \sin 30^\circ = 0$$
$$0.707 F_{CD} - 0.5 F_{CB} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0, \quad F_{CB} \cos 30^\circ - F_{CD} \sin 45^\circ - 1.5 = 0$$
$$0.866 F_{CB} - 0.707 F_{CD} - 1.5 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

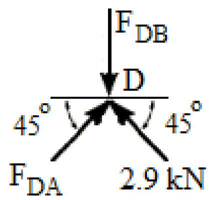
من المعادلة (١):

$$F_{CB} = 1.414 F_{CD}$$

بالتعويض في المعادلة (٢):

$$0.866 (1.414 F_{CD}) - 0.707 F_{CD} - 1.5 = 0$$
$$1.225 F_{CD} - 0.707 F_{CD} - 1.5 = 0$$
$$0.518 F_{CD} = 1.5$$
$$F_{CD} = 2.9 \text{ kN} \quad (C)$$
$$F_{CB} = 1.414 (2.9) = 4.1 \text{ kN} \quad (T)$$

المفصل (D):

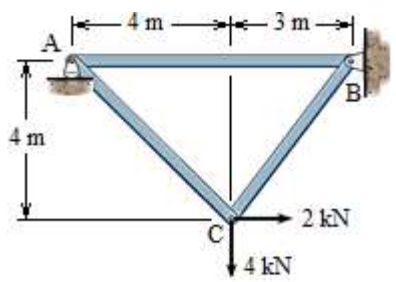


$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad F_{DA} \cos 45^\circ - 2.9 \cos 45^\circ = 0$$
$$F_{DA} = 2.9 \text{ kN} \quad (C)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 2 (2.9 \sin 45^\circ) - F_{DB} = 0$$
$$F_{DB} = 4.1 \text{ kN} \quad (C)$$

مثال (٥-٤):

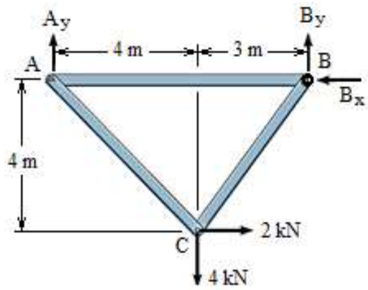
في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٤)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٤)

الحل:

ردود أفعال المرتكزات:



$\circlearrowright + \sum M_B = 0 \qquad (4)(3) + (2)(4) - (A_y)(7) = 0$

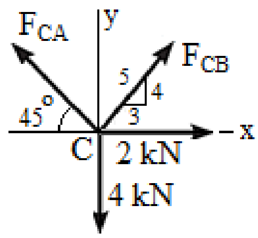
$A_y = 2.86\ kN$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 2 - B_x = 0 \qquad B_x = 2\ kN$

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad B_y + 2.86 - 4 = 0$

$B_y = 1.14\ kN$

المفصل (C):



$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{CB}\ (3/5) - F_{CA} \cos 45^\circ + 2 = 0$

$0.6\ F_{CB} - 0.707\ F_{CA} + 2 = 0 \quad \ldots\ldots. (1)$

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_{CB}\ (4/5) + F_{CA} \sin 45^\circ - 4 = 0$

$0.8\ F_{CB} + 0.707\ F_{CA} - 4 = 0 \quad \ldots\ldots.. (2)$

من المعادلة (١):

$F_{CB} = 1.178\ F_{CA} - 3.333$

بالتعويض في المعادلة (٢):

$0.8\ (1.178\ F_{CA} - 3.333) + 0.707\ F_{CA} - 4 = 0$

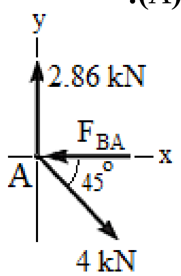
$0.94\ F_{CA} - 2.66 + 0.707\ F_{CA} - 4 = 0$

$1.65\ F_{CA} = 6.66$

$F_{CA} = 4\ kN \qquad (T)$

$F_{CB} = 1.178\ (4) - 3.333 = 1.4\ kN \qquad (T)$

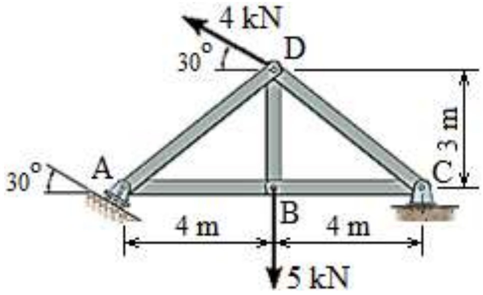
المفصل (A):



$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 4 \cos 45^\circ - F_{BA} = 0$

$F_{BA} = 2.83\ kN \qquad (C)$

<u>مثال (٥-٥):</u>

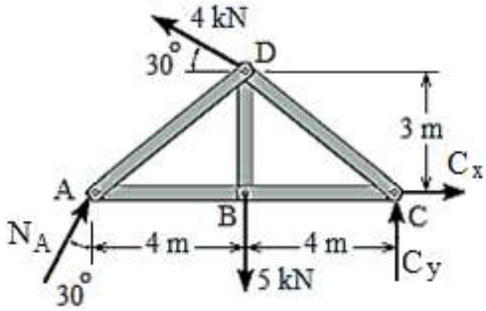


شكل (مث. ٥-٥)

في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٥)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الحل:

ردود أفعال المرتكزات:



$$\circlearrowright + \sum M_C = 0 \qquad -(N_A \cos 30°)(8) + (4 \cos 30°)(3) - (4 \sin 30°)(4) + (5)(4) = 0$$

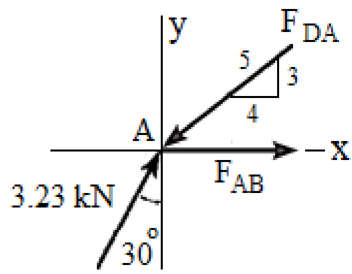
$$-6.93\, N_A + 10.39 - 8 + 20 = 0$$

$$N_A = 3.23 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad C_x + 3.23 \sin 30° - 4 \cos 30° = 0 \qquad C_x = 1.85 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad C_y + 3.23 \cos 30° + 4 \sin 30° - 5 = 0 \qquad C_y = 0.2 \text{ kN}$$

المفصل (A):



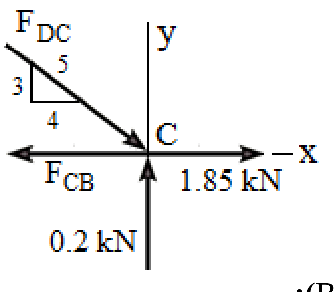
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 3.23 \cos 30° - F_{DA}\,(3/5) = 0$$

$$F_{DA} = 4.66 \text{ kN} \qquad (C)$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{AB} + 3.23 \sin 30° - 4.66\,(4/5) = 0$$

$$F_{AB} = 2.1 \text{ kN} \qquad (T)$$

المفصل (C):



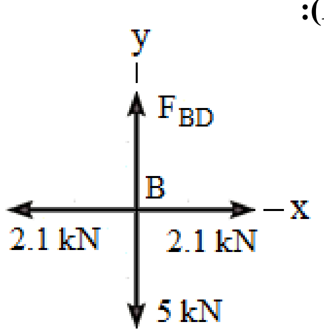
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 0.2 - F_{DC}\,(3/5) = 0$$

$$F_{DC} = 0.33 \text{ kN} \qquad (C)$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 1.85 - F_{CB} + 0.33\,(4/5) = 0$$

$$F_{CB} = 2.1 \text{ kN} \qquad (T)$$

المفصل (B):



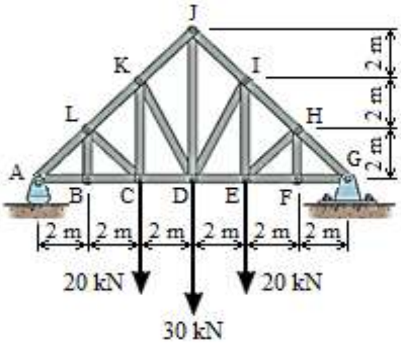
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_{BD} - 5 = 0$$

$$F_{BD} = 5 \text{ kN} \qquad (T)$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 2.1 - 2.1 = 0$$ (فحص!)

<u>مثال (٥-٦):</u>

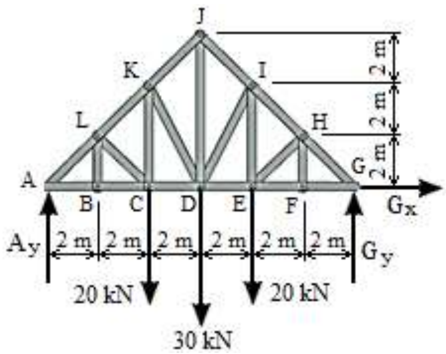
في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٦)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٦)

الحل:

ردود أفعال المرتكزات:

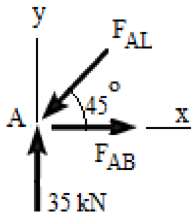


$$\circlearrowleft + \sum M_G = 0,$$
$$-(A_y)(12) + (20)(8) + (30)(6) + (20)(4) = 0$$
$$A_y = 35 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0, \qquad G_x = 0$$

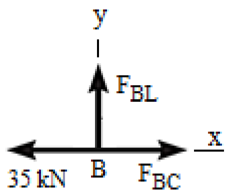
$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad G_y + 35 - 20 - 30 - 20 = 0$$
$$G_y = 35 \text{ kN}$$

المفصل (A):



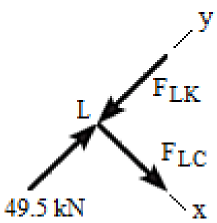
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 35 - F_{AL} \sin 45° = 0$$
$$F_{AL} = 49.5 \text{ kN} \quad (C)$$
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{AB} - 49.5 \cos 45° = 0$$
$$F_{AB} = 35 \text{ kN} \quad (T)$$

المفصل (B):



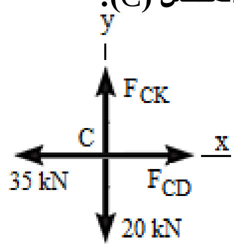
$$+\rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{BC} - 35 = 0 \qquad F_{BC} = 35 \text{ kN} \quad (T)$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0, \quad F_{BL} = 0$$

المفصل (L):



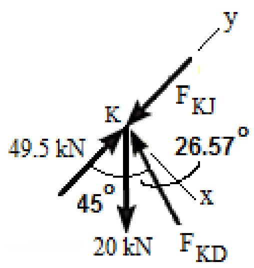
$$+\searrow \sum F_x = 0 \qquad F_{LC} = 0$$
$$+\nearrow \sum F_y = 0 \qquad 49.5 - F_{LK} = 0$$
$$F_{LK} = 49.5 \text{ kN} \quad (C)$$

المفصل (C):



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_{CD} - 35 = 0$$
$$F_{CD} = 35 \text{ kN} \quad (T)$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_{CK} - 20 = 0$$
$$F_{CK} = 20 \text{ kN} \quad (T)$$

المفصل (K):



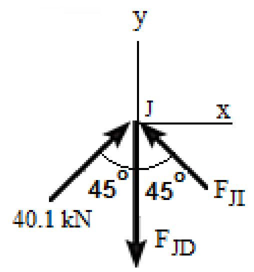
$+ \searrow \sum F_x = 0 \qquad 20 \sin 45° - F_{KD} \cos (45° - 26.57°) = 0$

$F_{KD} = 14.9 \text{ kN} \qquad (C)$

$+ \nearrow \sum F_y = 0 \qquad 49.5 - 20 \cos 45° + 14.9 \sin (45° - 26.57°) - F_{KJ} = 0$

$F_{KJ} = 40.1 \text{ kN} \qquad (C)$

المفصل (J):



$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 40.1 \sin 45° - F_{JI} \sin 45° = 0$

$F_{JI} = 40.1 \text{ kN} \qquad (C)$

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad 2\,(40.1 \cos 45°) - F_{JD} = 0$

$F_{JD} = 56.67 \text{ kN} \qquad (T)$

بسبب التناظر:

$F_{KD} = F_{ID} = 14.9 \text{ kN} \qquad (C)$

$F_{CK} = F_{EI} = 20 \text{ kN} \qquad (T)$

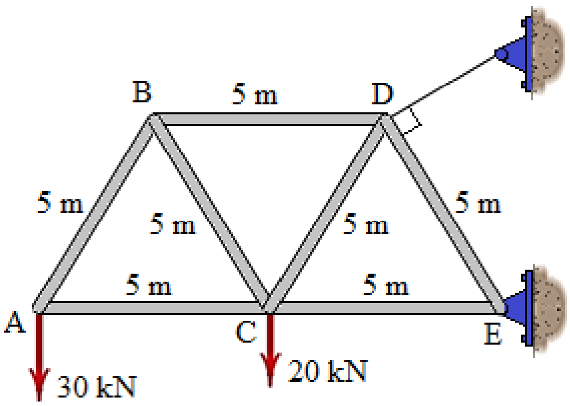
$F_{AB} = F_{GF} = F_{BC} = F_{FE} = F_{CD} = F_{ED} = 35 \text{ kN} \qquad (T)$

$F_{AL} = F_{GH} = F_{LK} = F_{HI} = F_{KJ} = F_{IJ} = 40.1 \text{ kN} \qquad (C)$

$F_{BL} = F_{FH} = F_{LC} = F_{HE} = 0$

مثال (٥-٧):

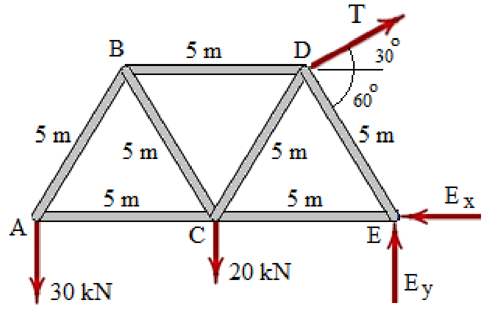
في المسنم الموضح في الشكل (مث. ٥-٧)، أوجد القوى المسلطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٧)

الحل:

ردود أفعال المرتكزات:



$\sum M_E = 0 \qquad 5T - 20(5) - 30(10) = 0$

$T = 80 \text{ kN}$

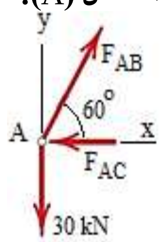
$\sum F_x = 0 \qquad 80 \cos 30° - E_x = 0$

$E_x = 69.3 \text{ kN}$

$\sum F_y = 0 \qquad 80 \sin 30° + E_y - 20 - 30 = 0$

$E_y = 10 \text{ kN}$

المفصل (A):



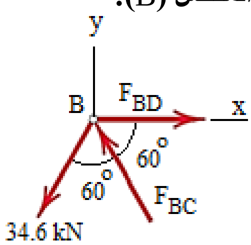
$\sum F_y = 0 \qquad 0.866\, F_{AB} - 30 = 0$

$F_{AB} = 34.6 \text{ kN} \qquad (T)$

$\sum F_x = 0 \qquad F_{AC} - 0.5(34.6) = 0$

$F_{AC} = 17.32 \text{ kN} \qquad (C)$

المفصل (B):



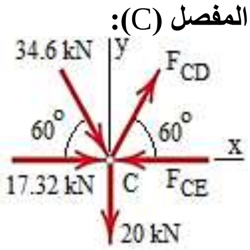
$\sum F_y = 0 \qquad 0.866\, F_{BC} - 0.866\,(34.6) = 0$

$F_{BC} = 34.6 \text{ kN} \qquad (C)$

$\sum F_x = 0 \qquad F_{BD} - 2(0.5)(34.6) = 0$

$F_{BD} = 34.6 \text{ kN} \qquad (T)$

المفصل (C):



$\sum F_y = 0$

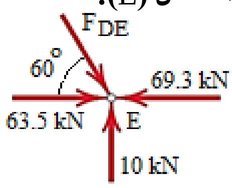
$0.866\, F_{CD} - 0.866\,(34.6) - 20 = 0$

$F_{CD} = 57.7 \text{ kN} \qquad (T)$

$\sum F_x = 0 \qquad 17.32 + (0.5)(34.6) + (0.5)(57.7) + F_{CE} = 0$

$F_{CE} = 63.5 \text{ kN} \qquad (C)$

المفصل (E):



$\sum F_y = 0 \qquad 10 - 0.866\, F_{DE} = 0$

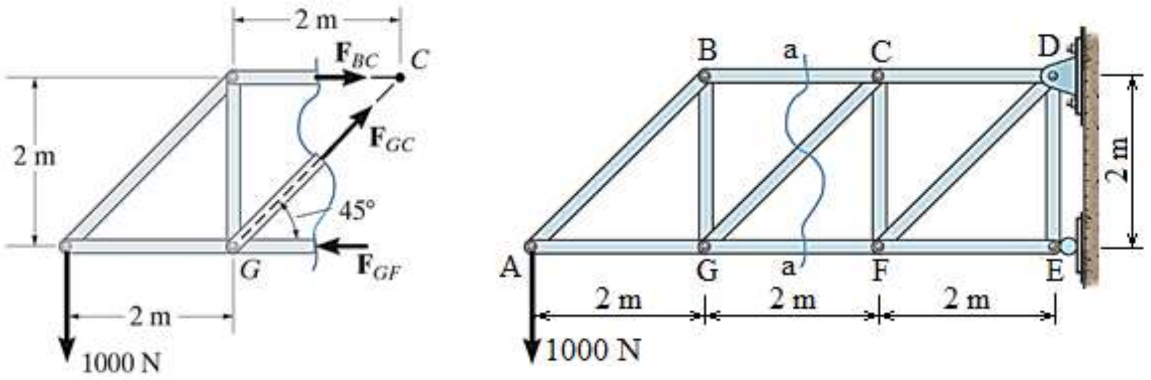
$F_{DE} = 11.55 \text{ kN} \qquad (C)$

٢ - طريقة المقاطع (Sections method):

تعتمد هذه الطريقة على مبدأ أنه إذا كان الجسم في حالة توازن، فإن أي جزء من الجسم يكون في حالة توازن أيضاً. في هذه الطريقة ليس من الضروري أن تكون القوى متلاقية فيمكن تطبيق ثلاث معادلات لتحقيق التوازن على الجزء المعزول من المسنم وهي ($\sum F_x = 0$)، ($\sum F_y = 0$) و ($\sum M_o = 0$). تتضمن طريقة المقاطع قطع المسنم إلى جزئين عن طريق تمرير خط قاطع وهمي من خلال الأضلاع المطلوب استنتاج القوى المسلطة عليها، على أن لا يزيد عدد الأضلاع المقطوعة عن ثلاثة أضلاع. من فوائد هذه الطريقة إمكانية إيجاد القوى في أي ضلع بشكل مباشر بدون تحليل المفاصل التي تسبقه في تركيبة المسنم.

طريقة التحليل:

١- تمرير خط قاطع وهمي من خلال الأضلاع المطلوب استنتاج القوى المسلطة عليها، على أن لا يزيد عدد الأضلاع المقطوعة مجهولة القوى عن ثلاثة أضلاع.
٢- رسم مخطط الجسم الحر لجزء المسنم الذي يحتوي على أقل عدد من القوى المؤثرة عليه.
٣- تطبيق معادلات التوازن لإيجاد المجاهيل.



شكل (٥-٦) طريقة المقاطع التحليل

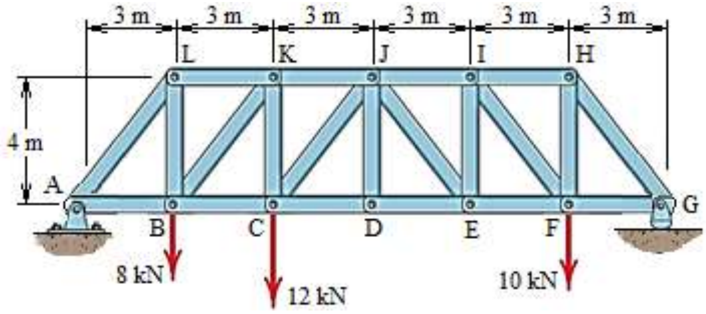
$\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$
$\sum M = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0$
$-1000 + F_{GC} \sin 45° = 0$
$F_{GC} = 1.41 \text{ kN} \quad (T)$

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0$
$1000 (4 \text{ m}) - F_{GF} (2 \text{ m}) = 0$
$F_{GF} = 2 \text{ kN (C)}$

مثال (٥-٨):

أوجد القوى المسـلطة على الضلعين (EI) و (JI) من المسنم الذي يعمل على اسناد سطح جسر، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٨)

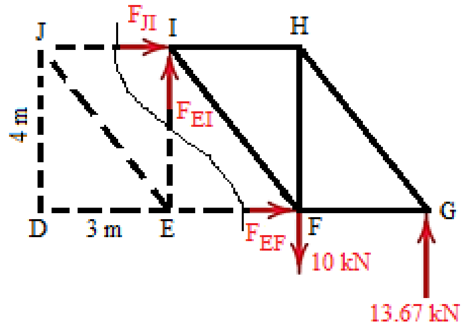
الحل:

ردود أفعال المرتكزات:

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0$$

$$(G_y)(18) - (10)(15) - (12)(6) - (8)(3) = 0$$

$$G_y = 13.67 \text{ kN}$$



$$\circlearrowright + \sum M_E = 0$$

$$13.67(6) - 10(3) - F_{JI}(4) = 0$$

$$F_{JI} = 13 \text{ kN} \qquad (C)$$

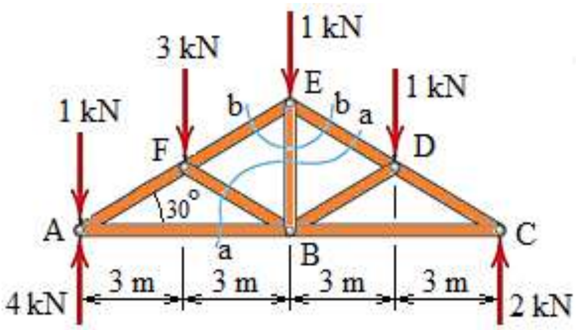
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$13.67 - 10 + F_{EI} = 0$$

$$F_{EI} = -3.67 = 3.67 \text{ kN} \downarrow \qquad (T)$$

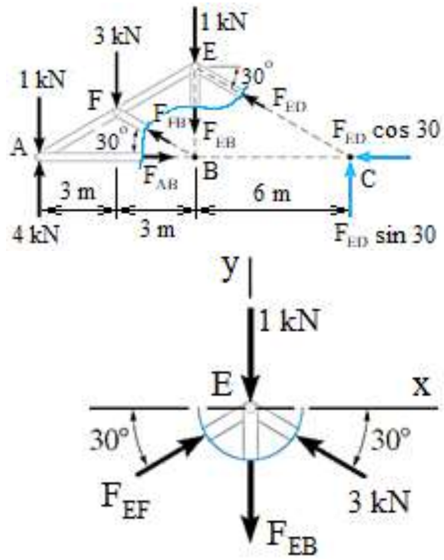
مثال (٥-٩):

أوجد القوى المسلطة على الأضلاع (ED)، (EF) و (EB) من مسنم السقف الموضح في الشكل (مث. ٥-٩)، ثم بين إن كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.



شكل (مث. ٥-٩)

الحل:



$$\circlearrowright + \sum M_B = 0$$

$$(1)(6) + (3)(3) - (4)(6) + (F_{ED} \sin 30°)(6) = 0$$

$$F_{ED} = 3 \text{ kN} \qquad (C)$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_{EF} \cos 30° - 3 \cos 30° = 0$$

$$F_{EF} = 3 \text{ kN} \qquad (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$2(3 \sin 30°) - 1 - F_{EB} = 0$$

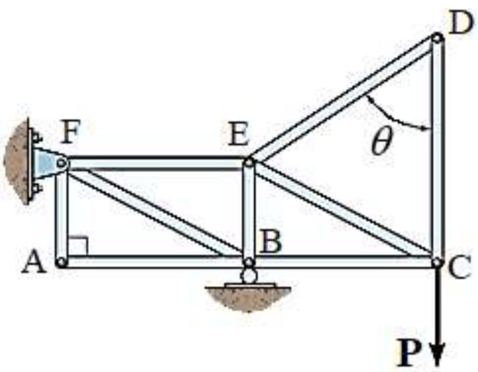
$$F_{EB} = 2 \text{ kN} \qquad (T)$$

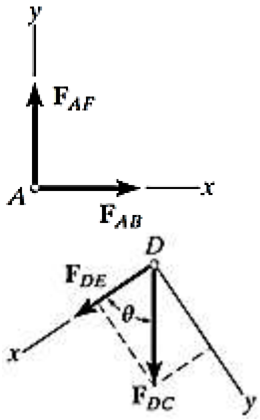
أضلاع القوى الصفرية (Zero-Force Members):

تستخدم أضلاع القوى الصفرية لزيادة استقرارية المسنم أثناء الانشاء ولتوفير الاسناد إذا تم تغيير الأحمال المسلطة. ويمكن تحديد أضلاع القوى الصفرية عن طريق التخمين.

بشكل عام هناك حالتان لمعرفة أضلاع القوى الصفرية:

١- إذا كان هناك ضلعان في مفصل مسنم ولم يتم تسليط أي حمل خارجي على ذلك المفصل أو رد فعل مرتكز عليه، فإن هذين الضلعين يكونان أضلاع بدون قوى (أضلاع قوى صفرية).





$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$F_{AB} = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$F_{AF} = 0$

$+ \searrow \sum F_y = 0$

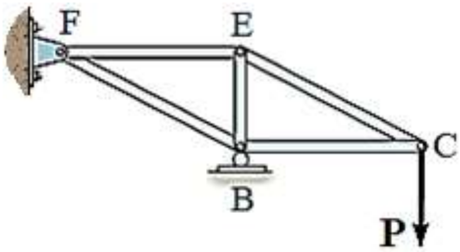
$F_{DC} \sin\theta = 0$

$F_{DC} = 0$

$+ \swarrow \sum F_x = 0$

$F_{DE} + 0 = 0$

$F_{DE} = 0$

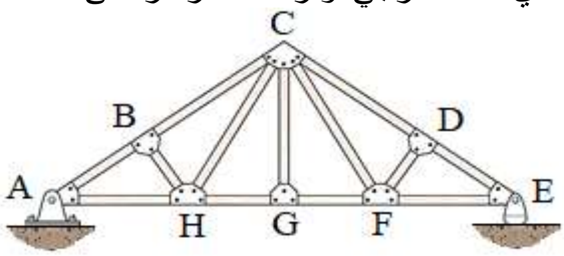


شكل (٥-٧) أضلاع القوى الصفرية

٢- إذا كان هناك ثلاثة أضلاع من مفصل المسنم يكون اثنان منها على خط تأثير واحد ولم يتم تسليط أي حمل خارجي أو رد فعل مرتكز على المفصل، فإن الضلع الثالث يكون ضلعاً ذو قوة صفرية.

$+\uparrow \sum F_y = 0$

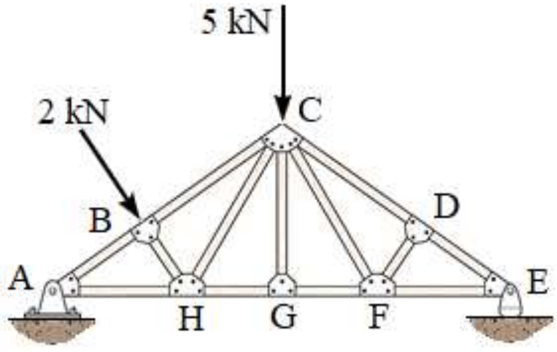
$F_{GC} = 0$



شكل (٥-٨) أضلاع القوى الصفرية

<u>مثال (٥-١٠):</u>

باستخدام طريقة المفاصل، أوجد جميع أضلاع القوة الصفرية في مسنم الســـقف الموضح في الشكل (مث. ٥-١٠). افترض أن جميع المفاصل متصلة مفصلياً.



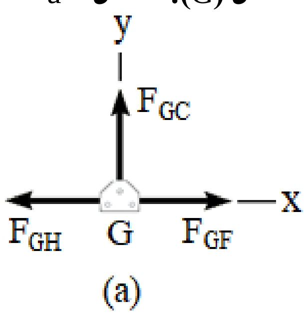
شكل (مث. ٥-١٠)

الحل:

من خلال البحث عن الأشكال الهندسية للمفاصل التي تحتوي على ثلاثة أضلاع بحيث يكون اثنان على خط واحد:

المفصل (G): الشكل – a

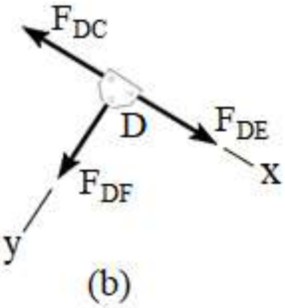
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_{GC} = 0$$



يوجد خمسة مجاهيل عند المفصل (C). وبما أن الضلع (GC) هو ضلع ذو قوة صفرية، فهذا يعني أن الحمل (5 kN) عند المفصل (C) يجب أن يوزع على الأضلاع (CB)، (CH)، (CF) و (CD).

المفصل (D): الشكل – b

$$+\swarrow \sum F_y = 0 \qquad F_{DF} = 0$$

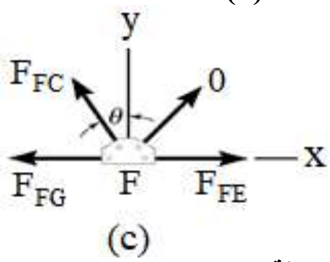


المفصل (F): الشكل – c

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

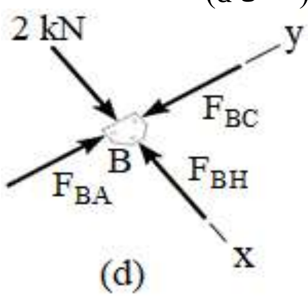
$$F_{FC} \cos\theta + 0 \cos\theta = 0$$

$$F_{FC} = 0$$

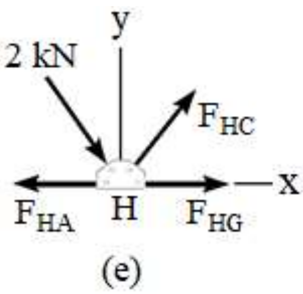


ملاحظة: إذا تم تحليل المفصل (B)، (الشكل d)،

$$+\searrow \sum F_x = 0 \qquad 2\text{ kN} - F_{BH} = 0 \qquad F_{BH} = 2\text{ kN} \quad (C)$$



أيضـــــاً، (F_{HC}) يجب أن يحقـــق ($\sum F_y = 0$)، (الشـــكل - e) ، وبالتالي (HC) ليس ضلعاً ذو قوة صفرية.

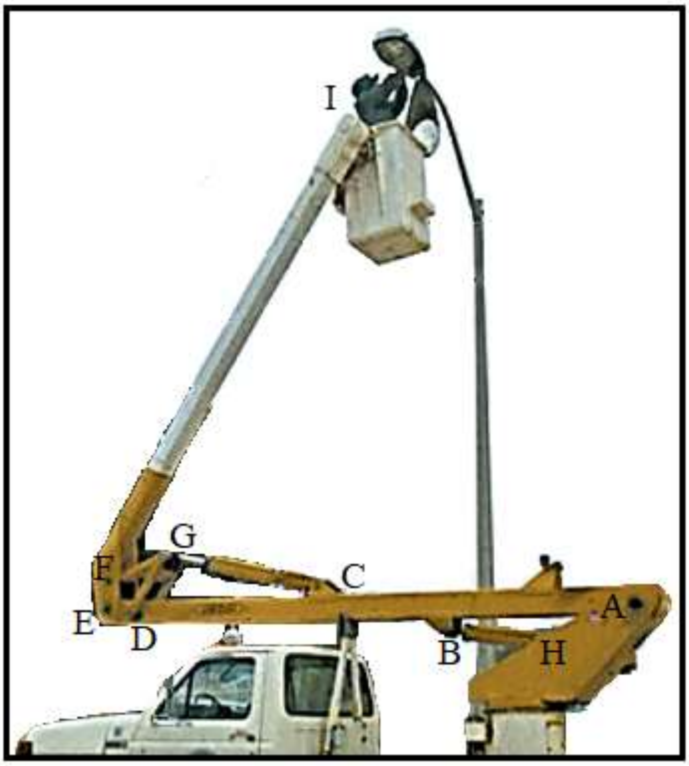


الجزء الثاني - المكائن وهياكل الآلات (FRAMES AND MACHINES):

المكائن هي تراكيب تتكون من أجزاء متحركة مرتبطة مع بعضها بأساليب ملائمة لنقل وتغيير تأثير القوى لاداء المهام المطلوبة، وتخضع هذه الأجزاء لمختلف القوى، قد تكون قوى شد أو كبس أو انحناء أو لوي نتيجة لطبيعة حركة ومهمة تلك الأجزاء.

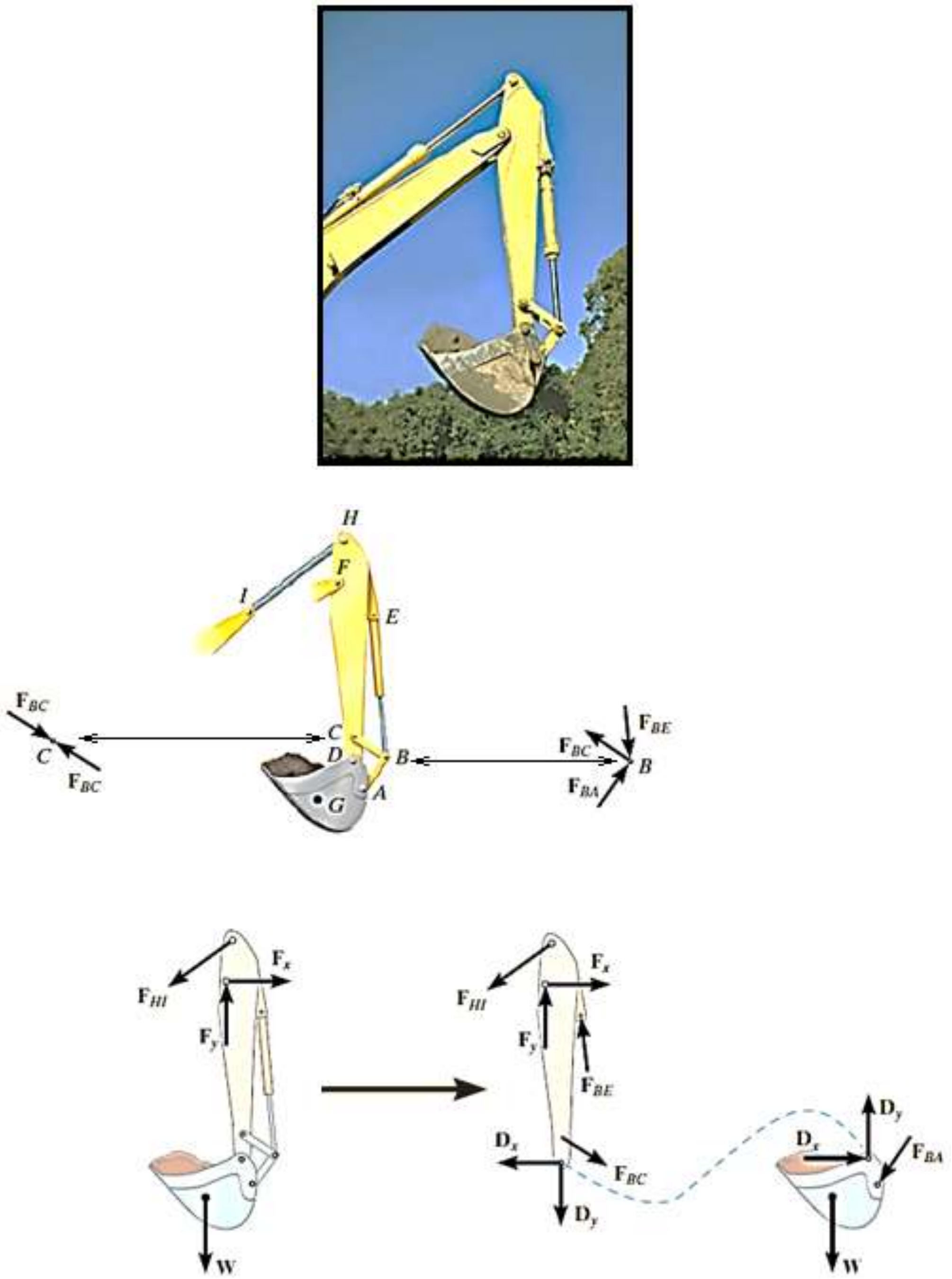
الآلات تراكيب تتكون غالباً من أعضاء متعددة متصلة مع بعضها مفصلياً تلائم القوى والعزوم المصممة لاسنادها، وتخضع لأكثر من قوتين، قد تكون قوى شد أو كبس أو انحناء. يشترط ألا يحتوي هيكل الآلة أو الماكنة على عدد كبير من المرتكزات أو الأعضاء أكثر مما هو ضروري لمنع انهياره.

يمكن تحديد القوى التي تؤثر في المفاصل والمرتكزات من خلال تطبيق معادلات التوازن على كل من أعضائها، وعند الحصول على هذه القوى يمكن تصميم حجم الأضلاع ومفاصل الربط والمرتكزات باستخدام نظرية ميكانيك المواد (نظرية المكائن)، كذلك يمكن تحديد أبعاد هذه الأعضاء وأشكالها والمعادن أو المواد التي تتكون منها باستخدام موضوع تحليل الاجهادات (مقاومة المواد).


I
G
F
C
A
E
D
B
H

طريقة التحليل:

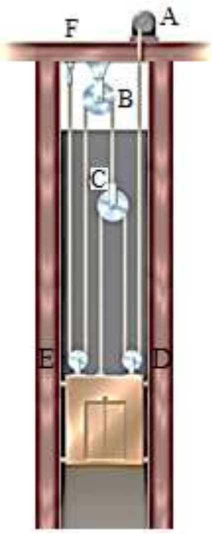
١- رسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله أو لجزء من الهيكل أو لكل عضو. ويجب أن يتم الاختيار بحيث يؤدي إلى الحل الأكثر مباشرة.
٢- تطبيق معادلات التوازن لكامل الهيكل أو لجزء من الهيكل لإيجاد المجاهيل.



شكل (٥-٩) تحليل المكائن وهياكل الآلات

مثال (٥-١١):

كتلة حجرة المصعد الموضح في الشكل (مث. ٥-١١) هي (500 kg) ويتم رفعها بواسطة المحرك (A) باستخدام نظام البكرات المبين. إذا كانت الحجرة ترتفع بسرعة ثابتة، أوجد القوى الناتجة في الأسلاك. إهمل كتلة الأسلاك والبكرات.



شكل (مث. ٥-١١)

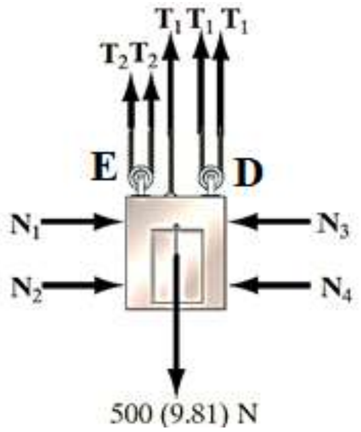
الحل:

البكرة (C):

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$T_2 - 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1 \;\ldots\ldots\; (1)$$

حجرة المصعد:



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$3T_1 + 2T_2 - (500 \times 9.81) = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

بتعويض المعادلة (1) بالمعادلة (2) ينتج:

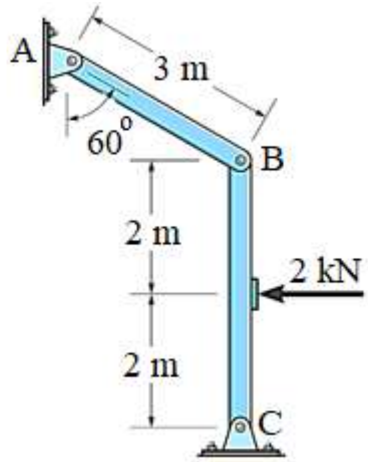
$$3T_1 + 2(2T_1) - 4905 = 0$$
$$T_1 = 700.71 = 0.7 \text{ kN}$$

بتعويض هذه النتيجة بالمعادلة (1):

$$T_2 = 2(700.71) = 1401.4 \text{ N} = 1.4 \text{ kN}$$

مثال (٥-١٢):

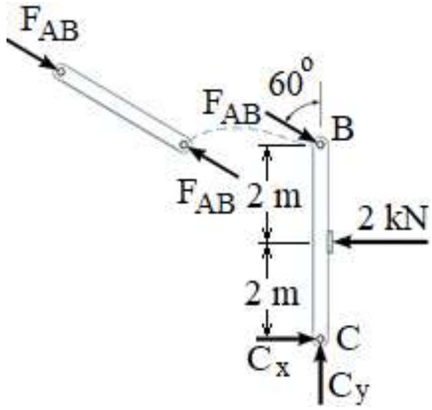
في الهيكل المبين في الشكل (مث. ٥-١٢)، أوجد المركبات الأفقية والعمودية للقوة التي يسندها المفصل (C).



شكل (مث. ٥-١٢)

الحل:

الطريقة الأولى:



$\curvearrowright + \sum M_C = 0$

$(2000)(2) - (F_{AB} \sin 60°)(4) = 0$

$F_{AB} = 1154.7\ N = 1.15\ kN$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0$

$C_x + 1154.7 \sin 60° - 2000 = 0$

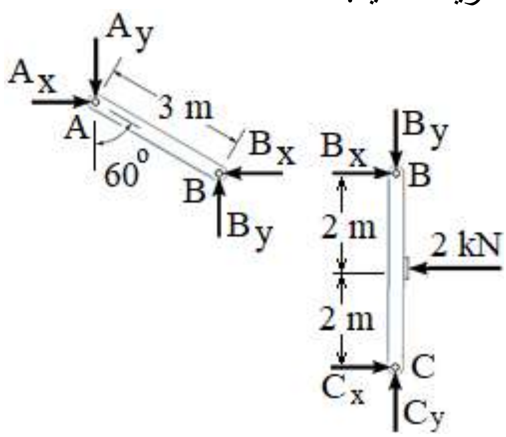
$C_x = 1000\ N = 1\ kN$

$+ \uparrow \sum F_y = 0$

$C_y - 1154.7 \cos 60° = 0$

$C_y = 577.35\ N = 0.577\ kN$

الطريقة الثانية:



الضلع (AB):

$\curvearrowright + \sum M_A = 0$

$(B_y)(3 \sin 60°) - (B_x)(3 \cos 60°) = 0$ …….(1)

$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad A_x - B_x = 0$ …….(2)

$+ \uparrow \sum F_y = 0 \qquad B_y - A_y = 0$ …….(3)

الضلع (BC):

$\curvearrowright + \sum M_C = 0, \qquad (2000)(2) - (B_x)(4) = 0$ ……….(4)

$+ \rightarrow \sum F_x = 0, \qquad B_x + C_x - 2000 = 0$ ….(5)

$+ \uparrow \sum F_y = 0, \qquad C_y - B_y = 0$ ……(6)

$B_x = 1000\ N = 1\ kN$ من المعادلة (4)

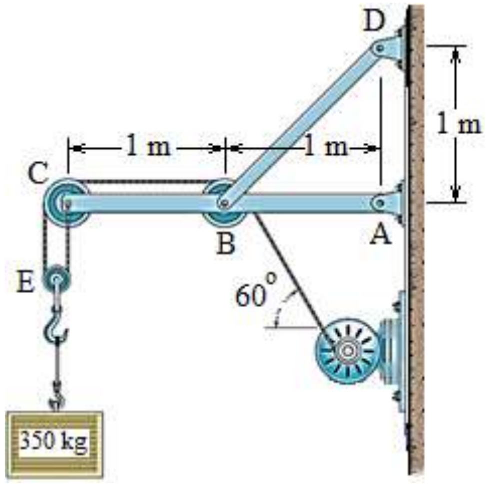
بالتعويض في المعادلة (1) $B_y (3 \sin 60°) - 1 (3 \cos 60°) = 0$ $\quad B_y = 0.577\ kN$

تعويض (B_x) في (2) $A_x = 1000\ N = 1\ kN$ ؛ تعويض (B_y) في (3) $A_y = 0.577\ kN$

تعويض (B_x) في (5) $C_x = 1000\ N = 1\ kN$ ؛ تعويض (B_y) في (6) $C_y = 0.577\ kN$

مثال (٥-١٣):

الرافعة الجدارية تحمل كتلة (350 kg). أوجد قوة الشد (T) في السلك والمركبات الأفقية والعمودية لردود الفعل عند المفاصل (A) و (D). إهمل أحجام البكرات.



شكل (مث. ٥-١٣)

الحل:

$$W = 350 \times 9.81 = 3433.5\ N = 3.4\ kN$$

البكرة (E):

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 2T - 3433.5 = 0$

$T = 1716.75\ N = 17.2\ kN$

الضلع (ABC):

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \qquad (3433.5)(2) - (F_{BD} \sin 45^o)(1) + (1716.75 \sin 60^o)(1) = 0$

$F_{BD} = 11815.7\ N = 11.8\ kN$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y + 11815.7 \sin 45^o - 1716.75 \sin 60^o - 3433.5 = 0$

$A_y = -3433.5 = 3.4\ kN \downarrow$

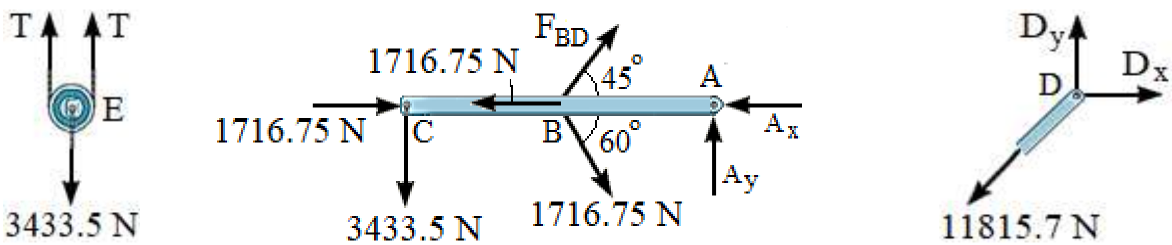
$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 1716.75 + 11815.7 \cos 45^o + 1716.75 \cos 60^o - A_x - 1716.75 = 0$

$A_x = 9212\ N = 9.2\ kN$

عند النقطة (D):

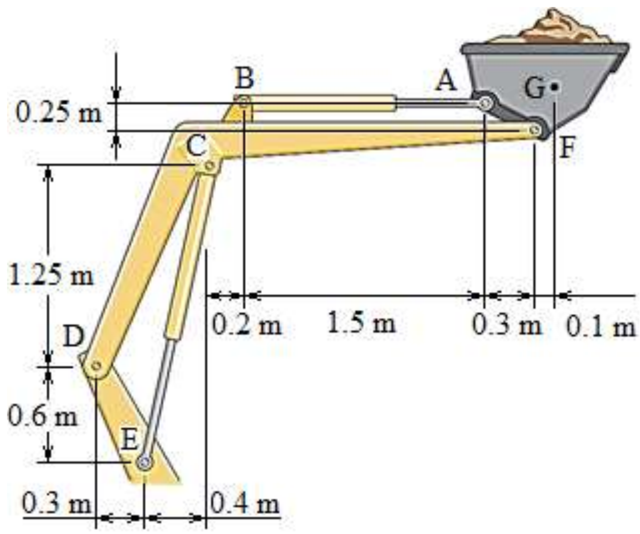
$D_x = 11815.7 \cos 45° = 8353.7\ N = 8.4\ kN$

$D_y = 11815.7 \sin 45° = 8353.7\ N = 8.4\ kN$



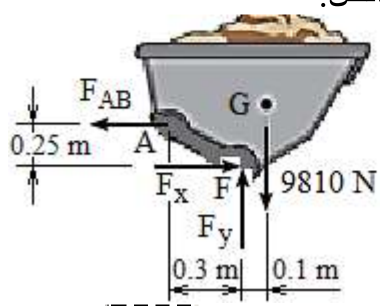
<u>مثال (٥-١٤):</u>

الذراع الموضح في الشكل (مث. ٥-١٤) يرفع الكتلة المنتظمة البالغة (1 ton) في الجرافة التي يكون مركز ثقلها عند (G). أوجد القوى في كل من الأسطوانات الهيدروليكية (AB) و(CE) ومحصلات القوى عند المفاصل (F) و(D). اعتبر المثال مسألة ثنائية الأبعاد.



شكل (مث. ٥-١٤)

الحل:

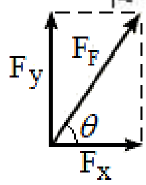


$$W = m\,g = 1000 \times 9.81 = 9810\text{ N} = 9.81\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_F = 0$$

$$(F_{AB})(0.25) - (9810)(0.1) = 0$$

$$F_{AB} = 3924\text{ N} = 3.9\text{ kN}$$



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad F_x - 3924 = 0$$

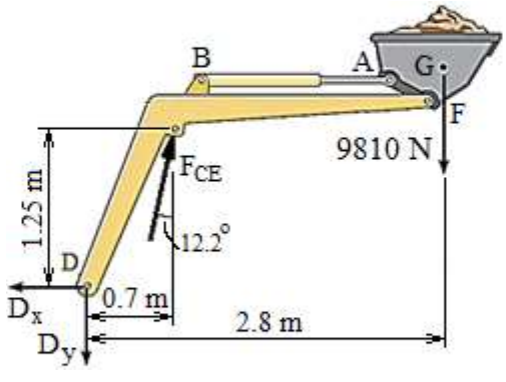
$$F_x = 3924\text{ N} = 3.9\text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_y - 9810 = 0$$

$$F_y = 9810\text{ N} = 9.81\text{ kN}$$

$$F_F = \sqrt{(3924)^2 + (9810)^2} = 10565.7\text{ N} = 10.6\text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0.4}{1.85} = 12.2^{\circ}$$



$$F_D = \sqrt{(13820.6)^2 + (54113)^2} = 55850\text{ N} = 55.8\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_D = 0$$

$$(F_{CE}\cos 12.2)(0.7) - (F_{CE}\sin 12.2)(1.25) - (9810)(2.8) = 0$$

$$0.684\,F_{CE} - 0.264\,F_{CE} - 27468 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 65400\text{ N} = 65.4\text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 65400\sin 12.2 - D_x = 0 \qquad D_x = 13820.6\text{ N} = 13.8\text{ kN}$$

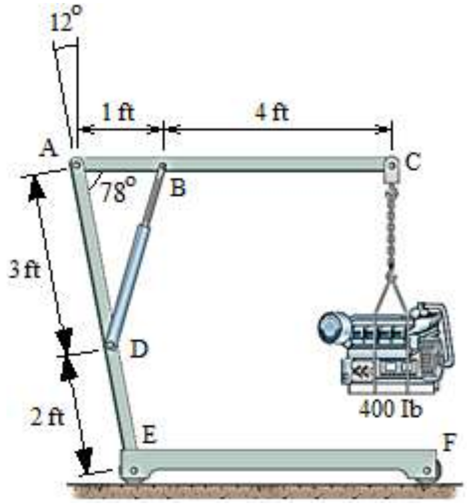
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 65400\cos 12.2 - D_y - 9810 = 0 \qquad D_y = 54113\text{ N} = 54.1\text{ kN}$$

$$F_D = \sqrt{(13820.6)^2 + (54113)^2} = 55850\text{ N} = 55.8\text{ kN}$$

مثال (٥-١٥):

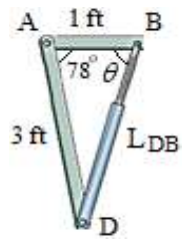
تم رفع المحرك (400 Ib) بواسطة رافعة المحركات كما هو مبين في الشكل (مث. ٥-١٥). أوجد:

- القوة المؤثرة في الاسطوانة الهيدروليكية (DB).
- مركبات القوة الأفقية والعمودية عند المفصل (A).
- ردود الفعل عند المرتكز الثابت (E).



شكل (مث. ٥-١٥)

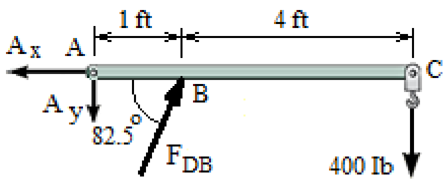
الحل:



$$L_{DB} = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2(1)(3)\cos 78^\circ}$$
$$= 2.96 \text{ ft}$$

$$\frac{\sin\theta}{3} = \frac{\sin 78^\circ}{2.96} \qquad \theta = 82.5^\circ$$

من (ABD):

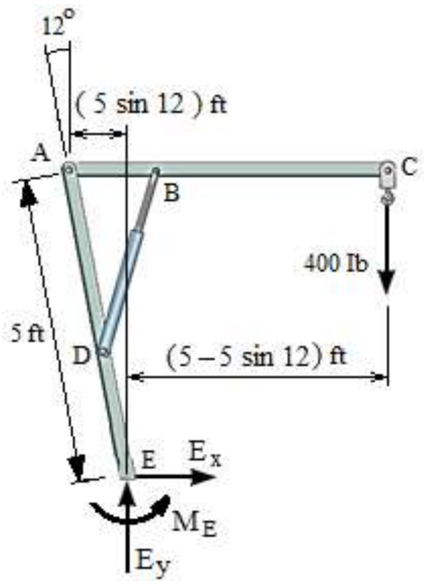


$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$
$$(F_{DB} \sin 82.5^\circ)(1) - (400)(5) = 0$$
$$F_{DB} = 2017.3 \text{ Ib}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 2017.3 \cos 82.5^\circ - A_x = 0$$
$$A_x = 263.3 \text{ Ib}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$2017.3 \sin 82.5^\circ - 400 - A_y = 0$$
$$A_y = 1600 \text{ Ib}$$

من (CAE):

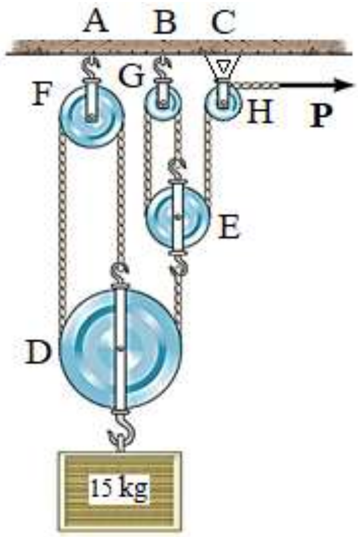


$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad E_x = 0$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad E_y - 400 = 0$$
$$E_y = 400 \text{ Ib}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_E = 0$$
$$M_E - (400)(5 - 5\sin 12^\circ) = 0$$
$$M_E = 1584.2 \text{ Ib.ft}$$

مثال (٥-١٦):

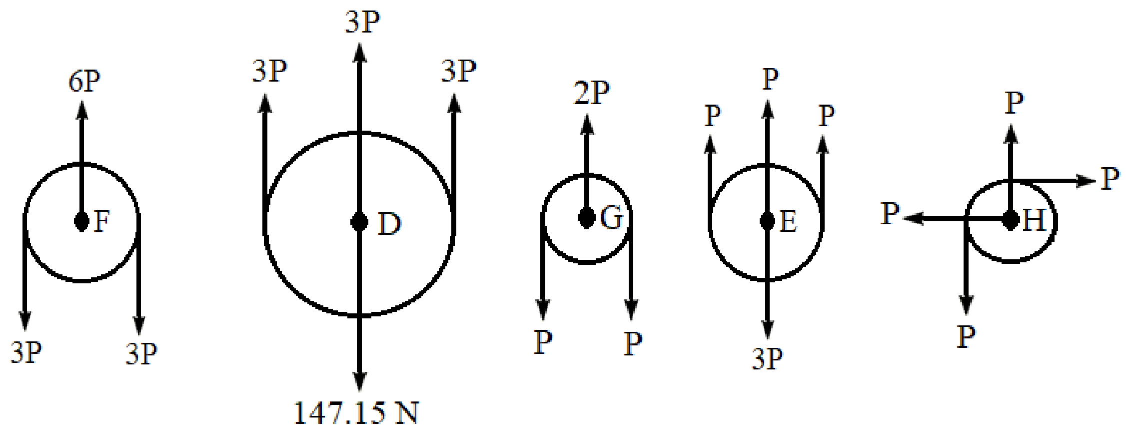
أوجد القوة (P) اللازمة لرفع الكتلة (15 kg)، وردود الأفعال عند خطافات الارتكاز (A) و (B) والمرتكز الثابت (C).



شكل (مث. ٥-١٦)

الحل:

$$W = 15 \times 9.81 = 147.15 \text{ N}$$



البكرة (D):

$$+\uparrow \sum F_y = 0,$$
$$9P - 147.15 = 0$$
$$P = 16.35 \text{ N}$$

عند (A):

$$R_A = 6P = 98.1 \text{ N}$$

عند (B):

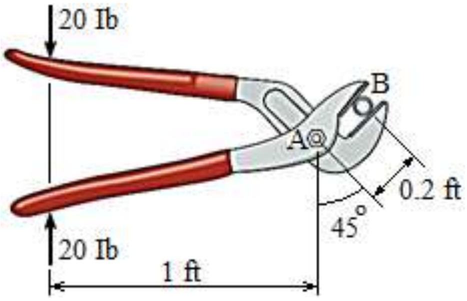
$$R_B = 2P = 32.7 \text{ N}$$

عند (C):

$$R_{Cx} = P = 16.35 \text{ N}$$
$$R_{Cy} = P = 16.35 \text{ N}$$

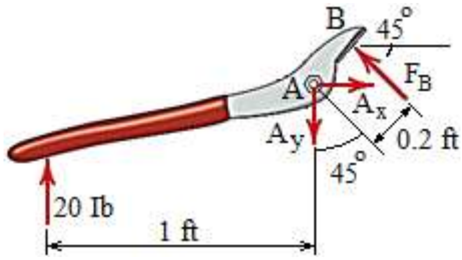
<u>مثال (٥-١٧):</u>

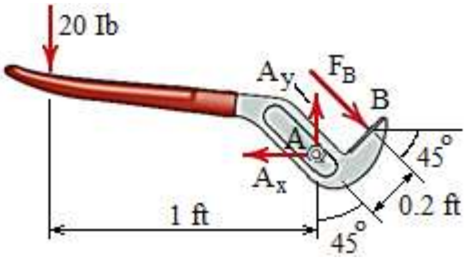
إذا تم تسليط قوة مقدارها (20 Ib) على مقابض الكماشة المبينة في الشكل (مث. ٥-١٧)، أوجد قوة التثبيت المسلطة على الأنبوب الأملس (B) وقيمة محصلة القوى التي يسلطها أي من شطري الكماشة على الدبوس (A).



شكل (مث. ٥-١٧)

الحل:





$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$-(20)(1) + (F_B)(0.2) = 0$$

$$0.2\, F_B = 20$$

$$F_B = 100 \text{ Ib}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 100 \cos 45 = 0$$

$$A_x = 70.7 \text{ Ib}$$

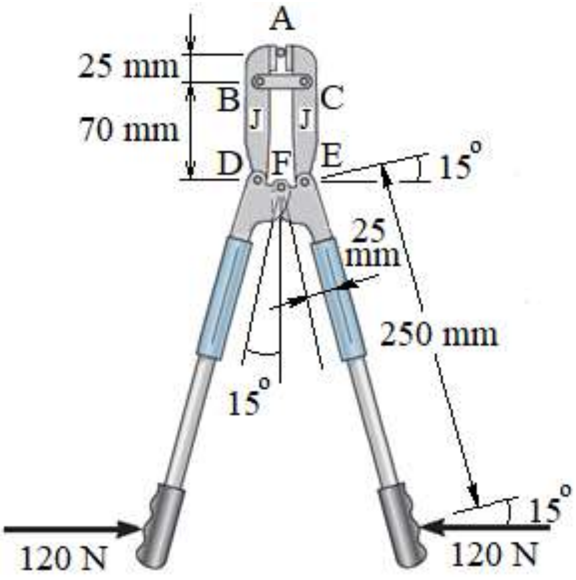
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$100 \sin 45 - A_y = 0$$

$$A_y = 100 \text{ Ib}$$

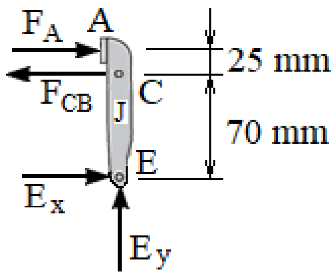
مثال (٥-١٨):

فكي مقص المعادن الموضـــح في الشكل (مث. ٥-١٨) مثبتة مفصلياً عند النقاط (B)، (C)، (D)، (E)، ومقابضه مثبتة مفصلياً عند النقطة (F). أوجـد القوة التي يبذلها فكي المقص (J) على السلك الأملس (A) إذا تم تسليط القوى (120 N) على المقابض.



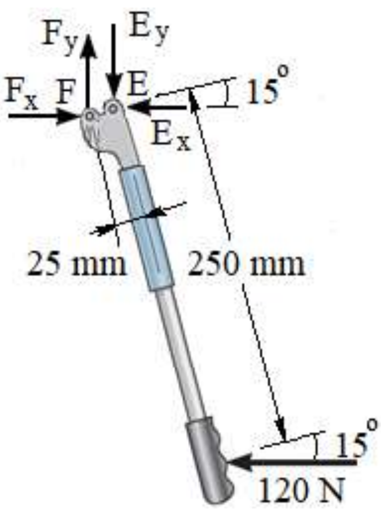
شكل (مث. ٥-١٨)

الحل:



من مخطط الجسم الحر للفك:

$$+\rightarrow \sum F_y = 0 \qquad E_y = 0$$



من مخطط الجسم الحر للمقبض:

$$\circlearrowleft + \sum M_F = 0$$

$$(E_x)(0.025 \sin 15°) - (E_y)(0.025 \cos 15°) - (120 \sin 15°)(0.025) - (120 \cos 15°)(0.25) = 0$$

$$(E_x)(0.025 \sin 15°) - (0)(0.025 \cos 15°) - (120 \sin 15°)(0.025) - (120 \cos 15°)(0.25) = 0$$

$$0.00647\ E_x - 0.776 - 28.98 = 0$$

$$E_x = 4599.14\ N = 4.6\ kN$$

من مخطط الجسم الحر للفك:

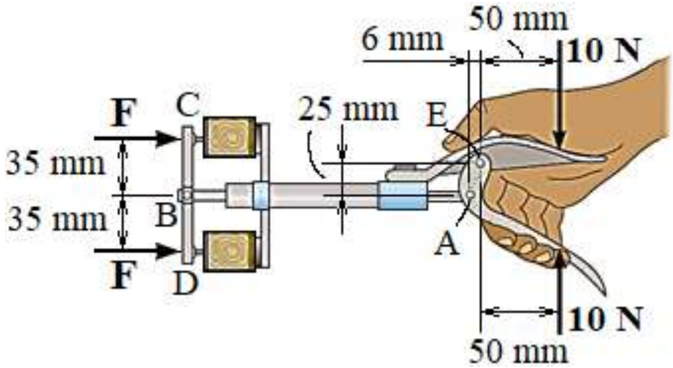
$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0$$

$$(4599.14)(0.07) - (F_A)(0.025) = 0$$

$$F_A = 12877.4\ N = 12.9\ kN$$

مثال (٥-١٩):

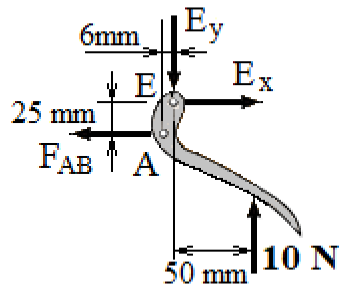
عند تسليط قوة مقدارها (10 N) على مقابض العصارة، فإنها تسحب القضيب الأملس (AB). أوجد القوة (F) المؤثرة على كل من المشابك الملساء عند (C) و (D).



شكل (مث. ٥-١٩)

الحل:

المقبض:

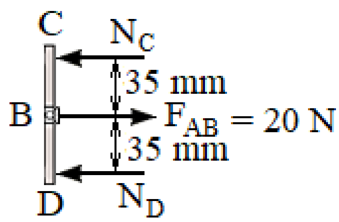


$\circlearrowleft + \sum M_E = 0$

$(10)(0.05) - (F_{AB})(0.025) = 0$

$F_{AB} = 20$ N

المشبك الأملس:



$\circlearrowleft + \sum M_B = 0$

$(N_C)(0.035) - (N_D)(0.035) = 0$

$N_C = N_D$ .... (1)

$+ \rightarrow \sum F_x = 0$

$20 - N_C - N_D = 0$ .... (2)

عوض المعادلة (1) في (2):

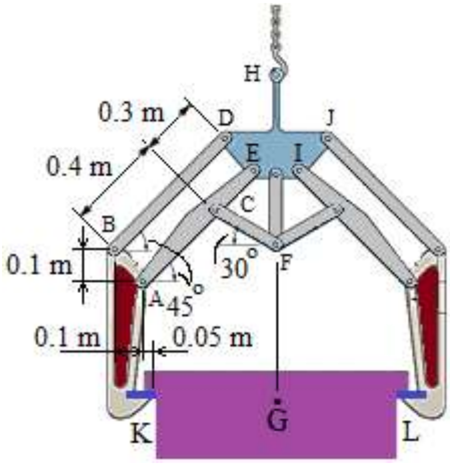
$20 - N_D - N_D = 0$

$20 = 2\, N_D$

$N_D = 10$ N $\qquad\qquad N_C = 10$ N

مثال (٥-٢٠):

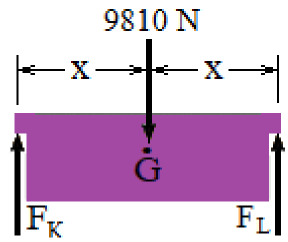
ملف كتلته (1 ton) ومركز الكتلة عند (G) مسحوب بكماشة ملفوفة متماثلة. أوجد المركبات الأفقية والعمودية للقوة التي تسلطها حافات ارتباط الكماشة على اللوحة (DEIJH) عند النقطتين (D) و (E). الملف يؤثر بردود فعل عمودية فقط عند (K) و (L).



شكل (مث. ٥-٢٠)

الحل:

من مخطط الجسم الحر (a):



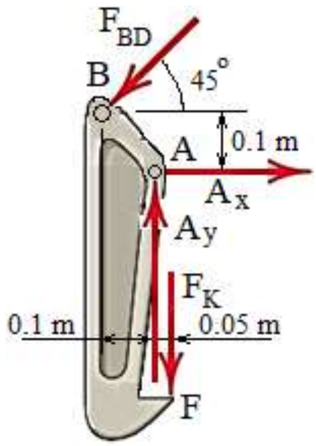
(a)

$W_C = 1000 \times 9.81 = 9810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$

$\circlearrowright + \sum M_L = 0 \qquad (9.81)(x) - (F_K)(2x) = 0$

$F_K = 4.905 \text{ kN}$

من مخطط الجسم الحر (b):



(b)

$\circlearrowright + \sum M_A = 0$

$(F_{BD} \cos 45°)(0.1) + (F_{BD} \sin 45°)(0.1) - (4.905)(0.05) = 0$

$F_{BD} = 1.73 \text{ kN}$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad A_x - 1.73 \cos 45° = 0$

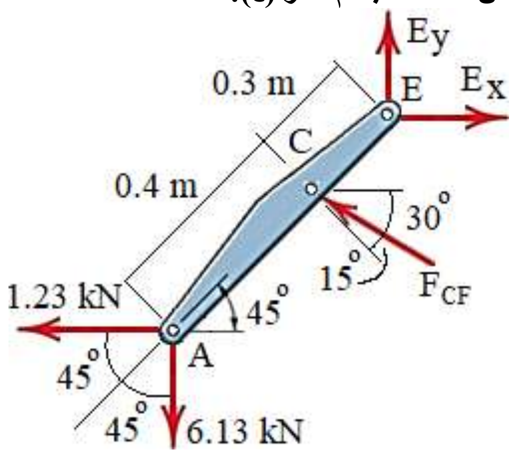
$A_x = 1.23 \text{ kN}$

$+ \uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 4.905 - 1.73 \sin 45° = 0$

$A_y = 6.13 \text{ kN}$

من مخطط الجسم الحر (c):



(c)

$\circlearrowright + \sum M_E = 0$

$(6.13)(0.7 \cos 45°) - (1.23)(0.7 \sin 45°) - (F_{CF} \cos 15°)(0.3) = 0$

$F_{CF} = 8.36 \text{ kN}$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0, \quad E_x - 1.23 - 8.36 \cos 30° = 0$

$E_x = 8.47 \text{ kN}$

$+ \uparrow \sum F_y = 0, \quad E_y + 8.36 \sin 30° - 6.13 = 0$

$E_y = 1.95 \text{ kN}$

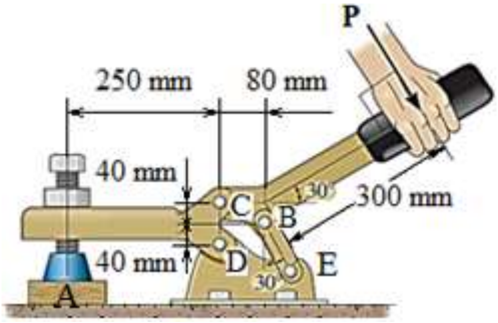
عند النقطة (D):

$D_x = F_{BD} \cos 45° = 1.73 \cos 45° = 1.22 \text{ kN}$

$D_y = F_{BD} \sin 45° = 1.73 \sin 45° = 1.22 \text{ kN}$

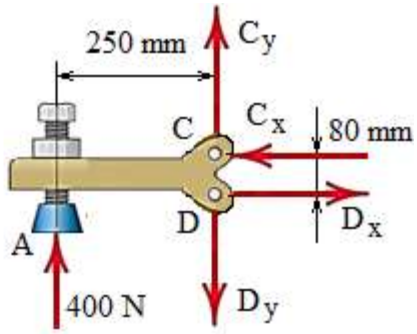
مثال (٥-٢١):

أوجد مقدار القوة (P) التي يجب تسليطها على مقبض آلة التثبيت المبينة في الشكل (مث. ٥-٢١)، إذا كانت قوة التثبيت المطلوبة عند النقطة (A) تساوي (400 N).



شكل (مث. ٥-٢١)

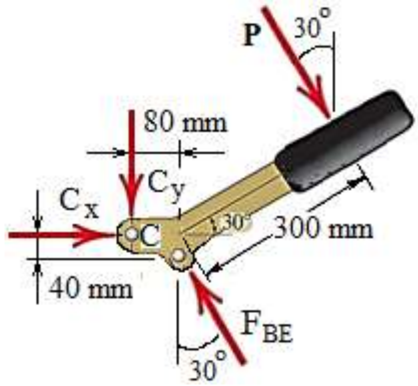
الحل:



$\circlearrowright + \sum M_D = 0 \qquad (C_x)(80) - (400)(250) = 0$

$C_x = 1250 \text{ N}$

عند المقبض:



$\circlearrowright + \sum M_C = 0$

$(F_{BE} \cos 30°)(80) - (F_{BE} \sin 30°)(40)$
$- (P \cos 30°)(300 \cos 30° + 80)$
$- (P \sin 30°)(300 \sin 30°) = 0$

$69.28\, F_{BE} - 20\, F_{BE} - 294.28\, P - 75\, P = 0$

$49.28\, F_{BE} - 369.28\, P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0$

$1250 + P \sin 30° - F_{BE} \sin 30° = 0$

$0.5\, F_{BE} - 0.5\, P = 1250 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

من المعادلة (٢):

$F_{BE} = 2\,(0.5\, P + 1250)$

$F_{BE} = P + 2500$

بالتعويض في المعادلة (١):

$49.28\,(P + 2500) - 369.28\, P = 0$

$49.28\, P + 123200 - 369.28\, P = 0$

$123200 - 320\, P = 0$

$P = 385 \text{ N}$

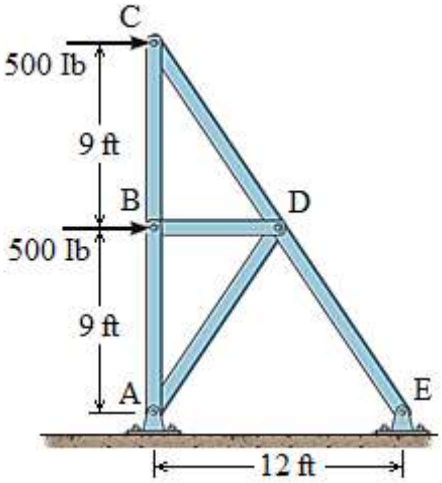
$F_{BE} = 385 + 2500 = 2885$
N

مسائل:

٥-١) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-١)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

F_{CD} = 901.4 Ib (C), F_{CB} = 750 Ib (T), F_{AB} = 750 Ib (T)
F_{BD} = 500 Ib (C), F_{AD} = 450 Ib (T), F_{DE} = 1352.7 (C)

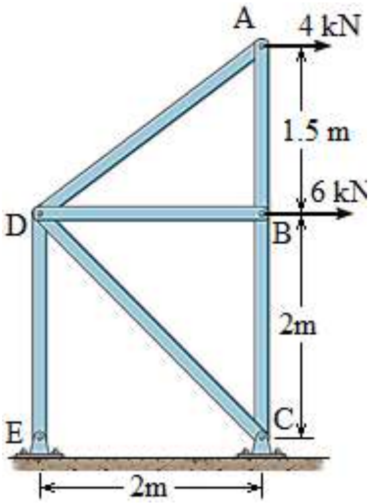


شكل (مس. ٥-١)

٥-٢) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٢)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

F_{AB} = 3 kN (C), F_{AD} = 5 kN (T), F_{BD} = 6 kN (T)
F_{BC} = 3 kN (C), F_{CD} = 14.14 kN (C).

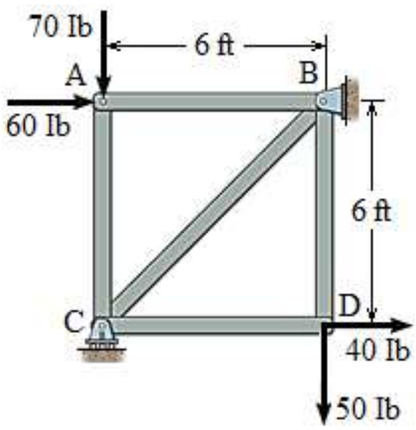


شكل (مس. ٥-٢)

٥-٣) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٣)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

F_{AB} = 60 Ib (C), F_{AC} = 70 Ib (C),
F_{CD} = 40 Ib (T), F_{BD} = 50 Ib (T),
F_{CB} = 56.57 Ib (C)

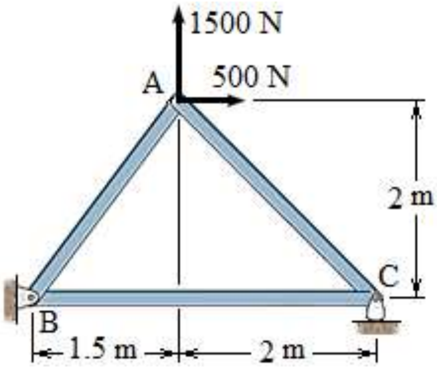


شكل (مس. ٥-٣)

٥-٤) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٤)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

F_{AB} = 1428.28 N (T), F_{AC} = 505.05 N (T),
F_{BC} = 357.07 N (C)

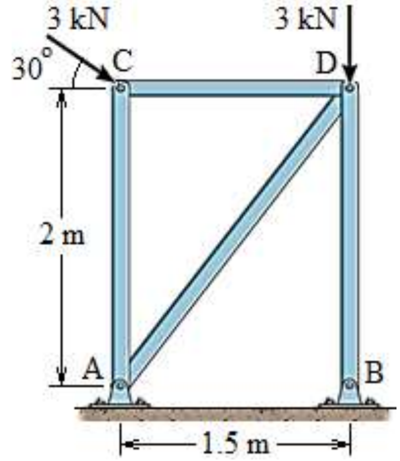


شكل (مس. ٥-٤)

٥-٥) أوجد القوى في كل ضلع من أضـــلاع المســنم المبين في الشكل (مس. ٥-٥)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{CD} = 2.6\ kN\ (C), F_{AC} = 1.5\ kN\ (C)$
$F_{AD} = 4.33\ kN\ (T), F_{BD} = 6.467\ kN\ (C)$

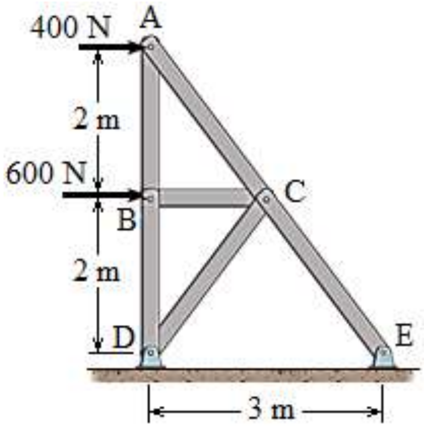


شكل (مس. ٥-٥)

٥-٦) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٦)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{AC} = 666.67\ N\ (C),\ F_{AB} = 533.33\ N\ (T),$
$F_{BC} = 600\ N\ (C),\ F_{BD} = 533.33\ N\ (T),$
$F_{DC} = 500\ N\ (T), F_{CE} = 1166.67\ kN\ (C)$

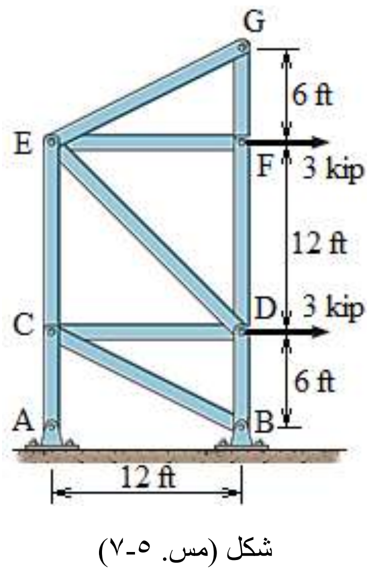


شكل (مس. ٥-٦)

٥-٧) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٧)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{AC} = 6\ kip\ (T), F_{CB} = 6.7\ kip\ (C), F_{BD} = 3\ kip\ (C),$
$F_{CD} = 6\ kip\ (T), F_{CE} = 3\ kip\ (T), F_{ED} = 4.24\ kip\ (C),$
$F_{FD} = 0,\ F_{EF} = 3\ kip\ (T), F_{GF} = 0, F_{ED} = 0$

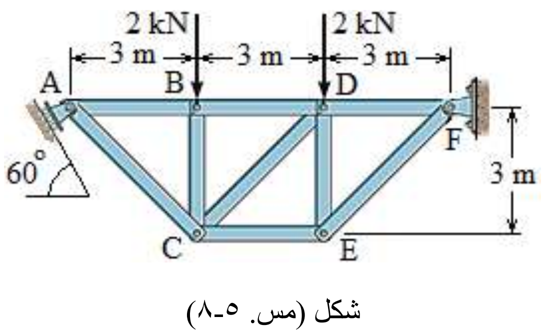


شكل (مس. ٥-٧)

٥-٨) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٨)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{AB}= 3.46\ kN\ (C), F_{AC}= 2.83\ kN\ (T), F_{BD}= 3.46\ kN\ (T)$
$F_{BC} = 2\ kN\ (C), F_{CD} = 0, F_{CE} = 2\ kN\ (C)$
$F_{FD} = 3.46\ kN\ (C), F_{ED} = 2\ kN\ (C), F_{EF} = 2.83\ kN\ (C)$

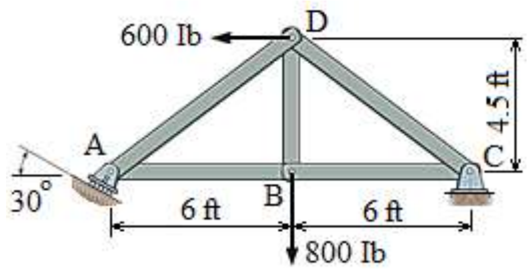


شكل (مس. ٥-٨)

٥-٩) أوجد القوى في كل ضلع من أضلاع المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-٩)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

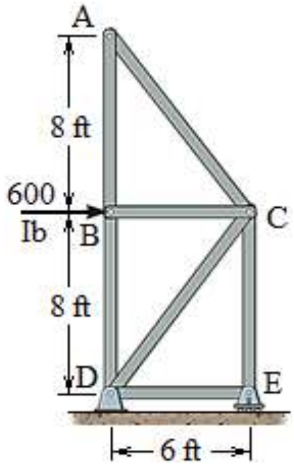
الجواب:

F_{AD}= 1041.68 Ib (C), F_{AB} = 472.5 Ib (T),
F_{CD} = 291.67 Ib (C) F_{CB} = 472.5 Ib (T),
F_{BD} = 800 Ib (T),



شكل (مس. ٥-٩)

٥-١٠) حدد أضلاع القوة الصفرية في المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-١٠).

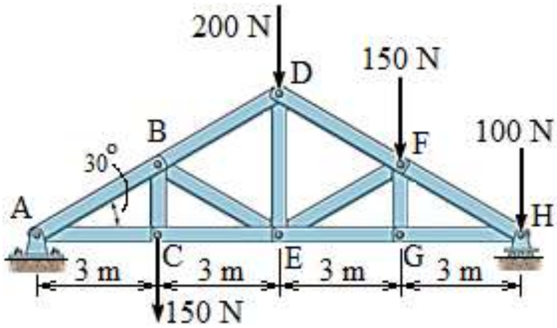


شكل (مس. ٥-١٠)

٥-١١) أوجد القوى في الضلع (BD) من المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-١١)، واذكر ما إذا كان هذا الضلع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

F_{BD} = 350 N (C)

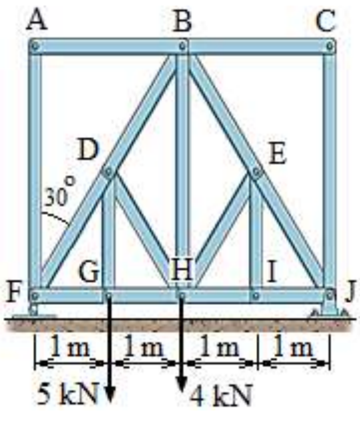


شكل (مس. ٥-١١)

٥-١٢) أوجد القوة في الأضـــــلاع (DB) و(BH) من المســنم المبين في الشــكل (مس. ٥-١٢)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط. ثم حدد الأضلاع ذات القوى الصفرية.

الجواب:

F_{DB} = 3.75 kN (C), F_{BH} = 6.5kN (T)

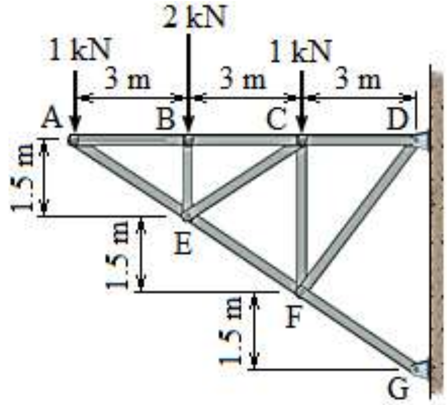


شكل (مس. ٥-١٢)

٥-١٣) أوجد القوى في الأضلاع (CD)، (CF) و (EF) من المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-١٣)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{CD} = 4\ kN\ (T), F_{CF} = 2\ kN\ (C), F_{EF} = 4.47\ kN\ (C)$

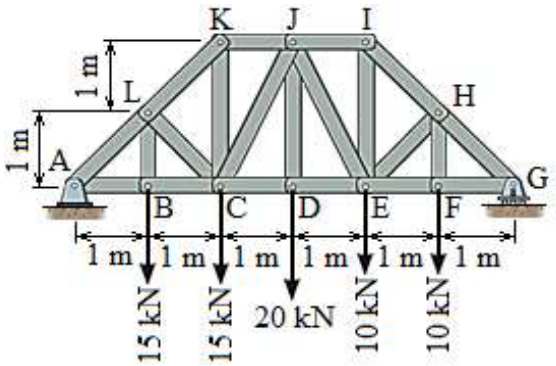


شكل (مس. ٥-١٣)

٥-١٤) أوجد القوى في الأضلاع (LK)، (LC) و (BC) من المسنم المبين في الشكل (مس. ٥-١٤)، واذكر ما إذا كانت الأضلاع في حالة شد أو انضغاط.

الجواب:

$F_{LK}= 63.65\ kN\ (C), F_{LC}= 10.6\ kN\ (C),$
$F_{BC}= 37.5\ kN\ (T)$

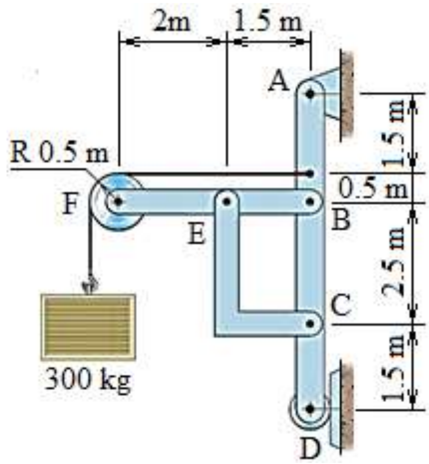


شكل (مس. ٥-١٤)

٥-١٥) هيكل يحمل الصندوق (300 kg) بالطريقة الموضحة في الشكل (مس. ٥-١٥). أوجـــد المركبات الأفقية والعمودية لجميع القوى المؤثرة على كل ضلع. إهمل أوزان الأضلاع.

الجواب:

$A_x= 1.96\ kN,\ A_y= 2.943\ kN,\ B_x= 1.16\ kN$
$B_y= 3.93\ kN, C_x= 1.78\ kN,\ C_y= 6.87\ kN$
$D_x = 1.96\ kN,\ E_x= 1.78\ kN, E_y= 6.87\ kN$

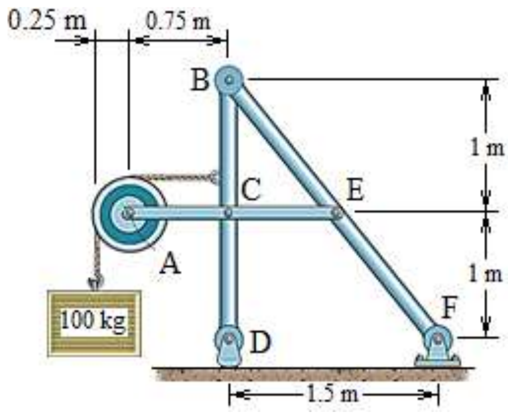


شكل (مس. ٥-١٥)

٥-١٦) أوجد المركبات الأفقية والعمودية للقوة عند (B) التي يسلطها الضلع (BEF) على الضلع (BCD).

الجواب:

$D_y= 1635\ N,\ F_x= 0,\ F_y= 654\ N, C_x= 635.75\ N,$
$C_y= 1962\ N,\ B_x= 245.25\ N,\ B_y= 327\ N,$
$E_x= 245.25\ N,\ E_y= 981\ N$

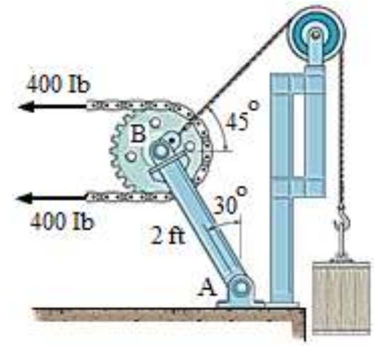


شكل (مس. ٥-١٦)

٥-١٧) في الآلية الموضـــــــحة في الشكل (مس. ٥-١٧). أوجـــــــد الوزن المطلوب للأســـطوانة المعلقة ومحصلة القوة على المفصل (A)، إذا كان الشـــد في السلسلة الملتفة حول الترس الذي يدور بحرية يجب أن يكون (400 Ib).

الجواب:

W = 717.26 Ib , F_A = 585.6 Ib

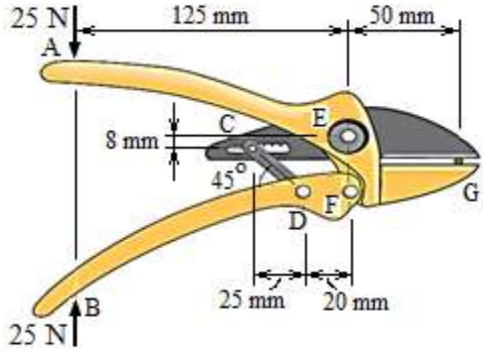


شكل (مس. ٥-١٧)

٥-١٨) يضاعف المقلم الموضح في الشـــكل (مس. ٥-١٨) قوة قطع الشفرة بآلية التركيب. أوجد قوة القطع المتولدة عند (G)، إذا تم تسليط قوة مقدارها (25 N) على المقابض. افترض أن سطح التلامس عند (G) أملس.

الجواب:.

N_G= 192.1 N

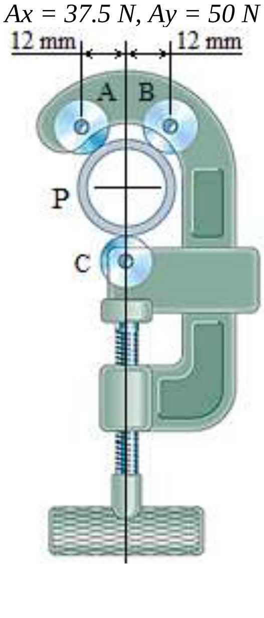


شكل (مس. ٥-١٨)

٥-١٩) يتم تثبيت قاطع الأنابيب الموضح في الشكل (مس. ٥-١٩) حول الأنبوب (P) بواسطة ثلاث عجلات قطع (A) و (B) و (C)، ويكون نصف قطر الأنبوب الخارجي (12 mm) وعجلات القطع الثلاثة لكل منها نصف قطر (8 mm). إذا كانت العجلة عند (C) تسلط قوة عمودية مقدارها (100 N) على الأنبوب، أوجد القوى العمودية للعجلات (A) و (B) على الأنبوب.

الجواب:

N_A = N_B = 62.5 N, Ax = 37.5 N, Ay = 50 N

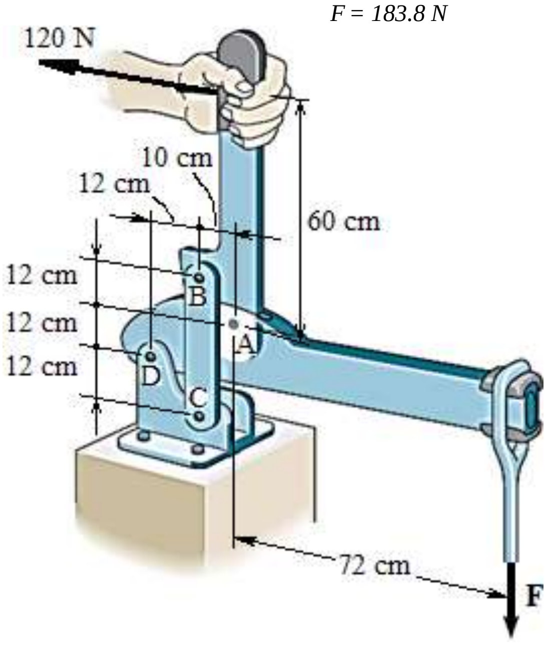


شكل (مس. ٥-١٩)

٥-٢٠) إذا تم تسليط قوة مقدارها (120 N) بشكل عمودي على مقبض الآلية الموضحة في الشكل (مس. ٥-٢٠)، أوجد مقدار القوة (F) لتحقيق التوازن. الأضـــلاع مرتبطة مفصـــلياً عند (A)، (B)، (C) و (D).

الجواب:

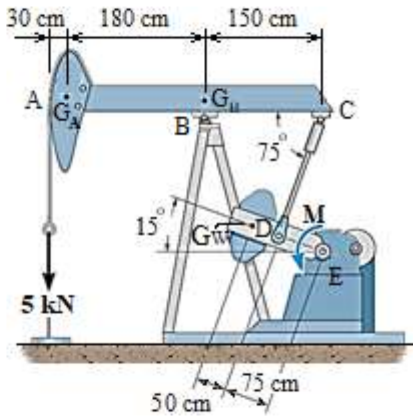
F = 183.8 N



شكل (مس. ٥-٢٠)

٥-٢١) في وحدة الضخ المستخدمة في عمليات استخراج النفط المبينة في الشكل (مس. ٥-٢١). تكون القوة المؤثرة في خط الأسلاك عند رأس البئر (5 kN) عندما يكون عمود الحركة (ABC) أفقياً، ما مقدار عزم الدوران (M) الذي يجب أن يبذله المحرك للتغلب على هذا الحمل؟ علماً أن رأس الحصان (A) يزن (1.2 kN) وله مركز ثقل عند النقطة (G_A)، وأن عمود الحركة (ABC) يزن (2.6 kN) ومركز ثقله (G_B)، ويبلغ وزن الثقل الموازن (4 kN) ومركز ثقله عند النقطة (G_W)، أنبوب نقل الحركة (CD) متصل بنهايتيه مع عمود الحركة والمحور القلاب للمحرك وله وزن مهمل.

الجواب: $M = 172.37\ kN.cm$



شكل (مس. ٥-٢١)

الفصل السادس

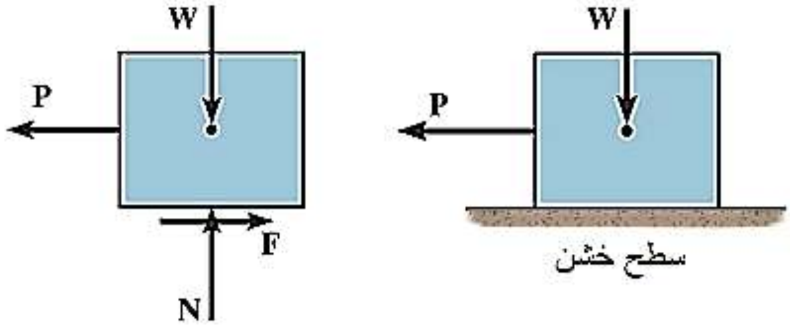
الاحتكاك

FRICTION

في الفصول السابقة، تم افتراض أسطح التلامس بين الأجسام المتلامسة ملساء، أي أن رد فعل أحد الجسمين على الآخر يكون عمودياً على سطح التلامس. ولكن في الحياة العملية لا يكون سطح التلامس أملس ويؤدي ذلك الى أن رد الفعل لا يكون عمودياً على سطح التلامس. وعند تحليل رد فعل القوة الى مركبتين احداهما عمودية على سطح التلامس والثانية مماسية مع سطح التلامس، فان المركبة المماسية تدعى قوة الاحتكاك، وعادةً يكون تأثير هذه القوة معاكساً لاتجاه الحركة.

تعريف الاحتكاك(Definition of Friction):

الاحتكاك هو التفاعل الذي يحدث عندما تتلامس سطحين مع بعضهما البعض ويتحركان أحدهما أو كلاهما بالنسبة للآخر. وقوة الاحتكاك هو القوة التي تقاوم حركة سطحين متصلين ينزلقان على بعضهما. وعادةً يكون تأثير هذه القوة معاكساً لاتجاه الحركة. وغالباً توجد قوى الاحتكاك بين سطحين خشنين متلامسين مع وجود حركة نسبية بينهما وتعمل هذه القوى على الجسم لتعارض حركته أو ميله للحركة.



شكل (٦-١) الاحتكاك

أهمية الاحتكاك واستخداماته (The importance of friction and its uses):

يُعتبر الاحتكاك ظاهرة طبيعية وشائعة تحدث في الحياة اليومية وفي العديد من الصناعات. وهناك العديد من الاستخدامات المختلفة للتحكم والاستفادة من الاحتكاك، ومن بينها:

١- توليد الحرارة: يُمكن استخدام الاحتكاك لتوليد الحرارة، وهذا ما يحدث عندما تُفرك يديك معًا بسرعة أو عندما يتحرك جسم بشكل سريع على سطح آخر. يُمكن استغلال هذه الحرارة في عمليات مثل تسخين الأطعمة أو تشغيل الآلات الحرارية.

٢- السيطرة على الحركة: يُستخدم الاحتكاك في أنظمة الكوابح (Brakes) والفواصل (Clutches) للمركبات والقطارات والعديد من المعدات للسيطرة على الحركة وإيقاف الجسم بأمان.

٣- الاستفادة من الكهرباء الساكنة: يُمكن للانزلاق والاحتكاك بين سطحين أن يُولد شحنات كهربائية ساكنة، ويتم استخدام هذه الظاهرة في أجهزة قياس الكهرباء الساكنة والطابعات الكهروستاتيكية.

٤- الحركة الديناميكية والحركة السطحية: يمكن استخدام الاحتكاك لتحويل الحركة بين السطحين، مثل استخدام الأحذية على الأرض للمشي واستخدام إطارات السيارات للقيادة، كذلك يُستخدم الاحتكاك في أحزمة التسيير (Belt drives) والأوتاد أو الأسفينات (Wedges) وغيرها من تطبيقات الحياة العملية، اذ أنه بدون الاحتكاك لا يمكن لهذه الأجهزة أن تؤدي وظائفها.

٥- تقليل الانزلاق: يمكن أن يُستخدم الاحتكاك لزيادة الثبات والحد من الانزلاق، وهذا يتم بواسطة الأحذية الرياضية أو الإطارات المصممة خصيصًا للطرق الوعرة.
٦- التصنيع والإنتاج: يُستخدم الاحتكاك في عمليات التصنيع مثل القطع والطحن واللحام والتشكيل لتحقيق التغيرات المطلوبة في الشكل والحجم.

مساوئ الاحتكاك (Disadvantages of friction):

يمكن أن يؤدي الاحتكاك إلى تآكل الأسطح، وقد تؤدي هذه الظاهرة إلى تلف المواد والآلات. ومع ذلك، يمكن التحكم فيها والتقليل منها باستخدام تزييت أو استخدام مواد أقل عرضة للتآكل.

معامل الاحتكاك (Friction coefficient):

ان المجال لغاية نقطة بداية الانزلاق أو الشروع بالانزلاق يدعى بمجال الاحتكاك، وان قيمة قوة الاحتكاك يمكن احتسابها بواسطة معادلات التوازن حيث تنحصر هذه القوة بين الصفر والقيمة العضمى لها. ونلاحظ أن القيمة العضمى للاحتكاك السكوني (Static friction) لسطحين متلامسين تتناسب طردياً مع القوة العمودية (N).

$$F_s \propto N$$
$$F_s = \mu_s N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (6\text{-}1)$$

حيث أن (μ_s) هو ثابت التناسب ويعرف بمعامل الاحتكاك السكوني، وهذه المعادلة تصف القيمة العظمى للاحتكاك السكوني، وعليه فان المعادلة تنطبق عند لحظة الشروع بالحركة وليس قبلها أو بعدها.
بعد حصول الانزلاق، يصاحب حالة الحركة مايسمى بالاحتكاك الحركي، والقوة الناتجة من هذا الاحتكاك تسمى قوة الاحتكاك الحركي وتكون عادةً أقل من قوة الاحتكاك السكوني باعتبار أن قوة الاحتكاك السكوني تمثل القوة العضمى للاحتكاك. ونلاحظ أن قيمة الاحتكاك الحركي (Kinetic friction) لسطحين متلامسين أيضاً تتناسب طردياً مع القوة العمودية (N).

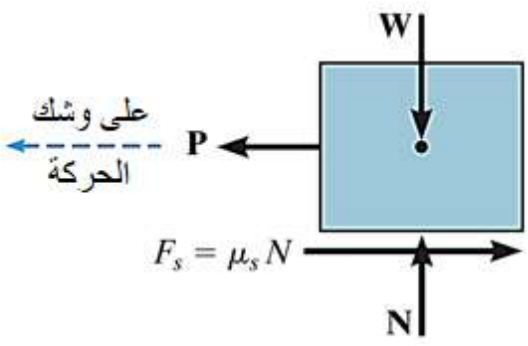
$$F_k \propto N$$
$$F_k = \mu_k N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (6\text{-}2)$$

حيث أن (μ_k) هو ثابت التناسب ويعرف بمعامل الاحتكاك الحركي، وهذه المعادلة تصف قيمة الاحتكاك خلال الحركة أي بعد لحضة الشروع بالحركة.

أنواع الاحتكاك (Types of Friction):

الاحتكاك السكوني (الشروعي): Static friction

الاحتكاك السكوني (الشروعي) هو الاحتكاك الناتج عند بداية الحركة حيث يحاول منع الجسم من الحركة، وتقترب قوة الاحتكاك الشروعي من القيمة القصوى ($F_s = \mu_s N$)، حيث أن (μ_s) هي معامل الاحتكاك الشروعي.



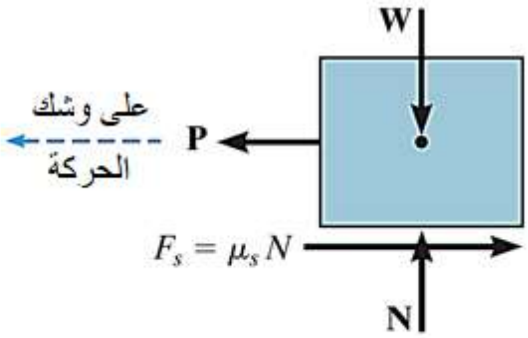
شكل (٦-٢) الاحتكاك السكوني

الاحتكاك الحركي (الانزلاقي):

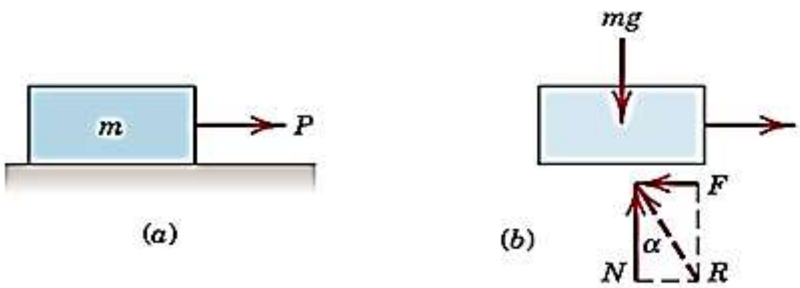
Kinetic friction

الاحتكاك ألحركي (الانزلاقي) هو الاحتكاك الناتج أثناء الحركة وفي حالة حدوث الانزلاق، تبقى قوة الاحتكاك ثابتة أثناء فترة الحركة وتساوي ($F_k = \mu_k N$).

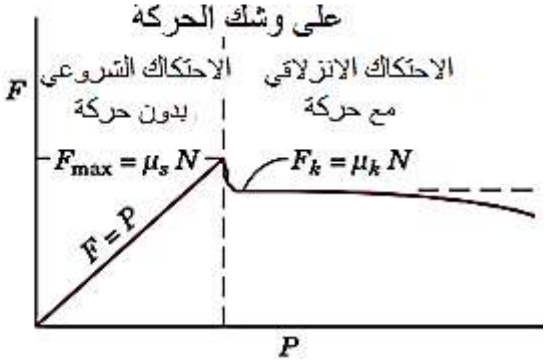
هنا (μ_k) هو معامل الاحتكاك الانزلاقي ويكون دائماً أقل من معامل الاحتكاك الشروعي.



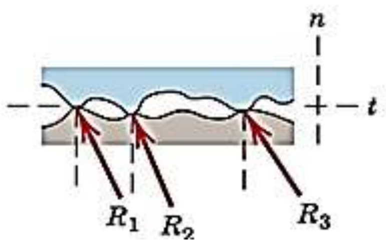
شكل (٦-٣) الاحتكاك الحركي



شكل (٦-٤) القوى التي تؤثر على الجسم أثناء حركته على سطح ملامس له

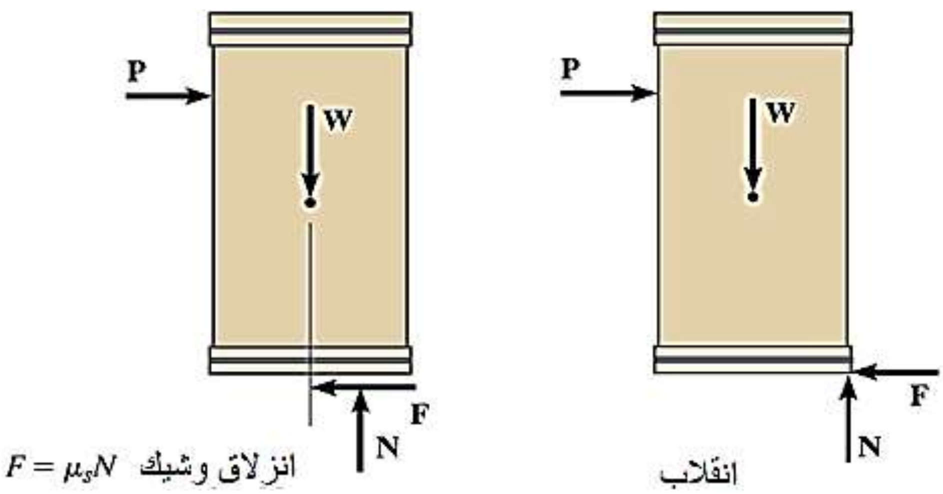


شكل (٦-٥) العلاقة بين القوة المسببة لحركة الجسم وقوة الاحتكاك المقاومة لحركته



شكل (٦-٦) قوى الاحتكاك المقاومة للحركة بين سطحين خشنين

من الضروري رسم مخطط الجسم الحر لحل مسألة الاحتكاك.



شكل (٦-٧) مخطط الجسم الحر

خصائص الاحتكاك (Characteristics of Friction):

١- أثناء الحركة تكون قوة الاحتكاك الناتجة بين الأسطح المتلامسة في اتجاه معاكس لاتجاه الحركة أو الميل للحركة لسطح ما بالنسبة للسطح الآخر (أي تكون قوة مقاومة للحركة) وتكون مماسة للسطحين المتلامسين.

٢- يجب أن لا تكون القوة العمودية للحصول على الحد الأقصى لقوة الاحتكاك الساكن (F_s) لأسطح التلامس منخفضة جداً ولا كبيرة جداً لدرجة أنها تشوه أو تسحق الأسطح الملامسة للأجسام بشدة.

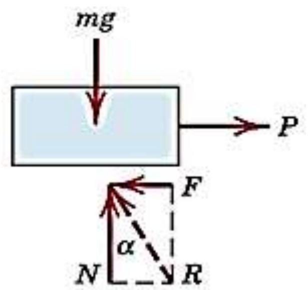
٣- بشكل عام تكون القوة القصوى للاحتكاك السكوني أكبر من قوة الاحتكاك الحركي لأي سطحين متلامسين. ومع ذلك، إذا كانت سرعة الحركة بين الجسمين المتلامسين منخفضة جدًا، تصبح قوة الاحتكاك الحركي (F_k) مساوية تقريبًا لقوة الاحتكاك السكوني (F_s)، أي ($\mu_s \approx \mu_k$).

٤- تتناسب قوة الاحتكاك السكوني بين السطحين المتلامسين مع القوة العمودية، عندما يكون الانزلاق على أسطح التلامس على وشك الحدوث، ($F_s = \mu_s N$).

٥- تتناسب قوة الاحتكاك الحركي بين السطحين المتلامسين مع القوة العمودية، عند حدوث الانزلاق على سطح التلامس، ($F_k = \mu_k N$).

زاوية الاحتكاك (Friction angle):

يبين الشكل (٦-٨) الاتجاه (α) بين المحصلة (R) والقوة العمودية (N) وهي قوة رد فعل الأرض للجسم.



شكل (٦-٨) زاوية الاحتكاك

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\text{-}3)$$

من القانون الرياضي للاحتكاك:

$$(F_s = \mu_s N) \text{ or } (F_k = \mu_k N) \text{ or } (F = \mu N) \Rightarrow \mu = \frac{F}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\text{-}4)$$

$$\therefore\ \mu = \tan\alpha \qquad \mu_s = \tan\alpha_s \qquad \mu_k = \tan\alpha_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\text{-}5)$$

حيث تمثل:

(α): زاوية الاحتكاك.

(α_s): زاوية الاحتكاك الشروعي.

(α_k): زاوية الاحتكاك الانزلاقي.

قوانين الاحتكاك (Friction laws):

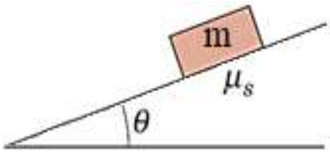
١- قوة الاحتكاك تتناسب طردياً مع القوة العمودية.
٢- لا تعتمد قوة الاحتكاك على مساحة الأسطح المتلامسة.
٣- الحد الأقصى لقوة الاحتكاك السكوني يفوق قوة الاحتكاك الحركي.
٤- لا تعتمد قوة الاحتكاك الحركي على الحركة النسبية بين الأسطح المتلامسة.
٥- نوعاً ما يزداد معامل الاحتكاك السكوني في حالة الضغوط الواطئة جداً وفي حالة الضغوط العالية جداً يزداد الى الحد الذي يسبب تشوهات في الأجسام المتلامسة.
٦- عند السرع النسبية الواطئة بين الأسطح المتلامسة نلاحظ أن معامل الاحتكاك الحركي يزداد ويتساوى ظاهرياً مع معامل الاحتكاك السكوني.
٧- عند السرع العالية جداً يقل معامل الاحتكاك الحركي بشكل ملحوظ.
٨- لا تؤثر التغيرات الاعتيادية في درجات الحرارة على معامل الاحتكاك.

جدول (٦-١) القيم النموذجية لمعامل الاحتكاك لبعض الأسطح المتلامسة

أسطح التلامس	معامل الاحتكاك السكوني (μ_s)	معامل الاحتكاك الحركي (μ_k)
فولاذ على فولاذ (جاف)	0.6	0.4
فولاذ على فولاذ (تزييت)	0.1	0.05
تفلون عى فولاذ	0.04	0.04
خشب على خشب	0.5	0.2
خشب على معدن	0.6	0.2
حديد صب على حديد صب	0.4	0.3
براص على فولاذ (جاف)	0.5	0.4
مطاط عل خرسانة	0.8	0.6
حبل على بكرة حديد (جاف)	0.2	0.15
معدن على حجر	0.5	0.2
معدن على جليد		0.02
مطاط عى جليد	0.2	0.05

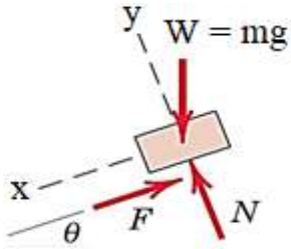
مثال (٦-١):

أوجد أعلى قيمة لزاوية ميلان السطح المائل (θ) مع المستوي الأفقي قبل أن يبدأ البلوك الذي كتلته (m) بالانزلاق علماً أن معامل الاحتكاك بين الكتلة والسطح المائل هي (μ).



شكل (مث. ٦-١)

الحل:



لتحقيق التوازن باتجاه المحاور (x) و (y):

$\sum F_x = 0 \qquad mg\sin\theta - F = 0 \qquad F = mg\sin\theta \;\ldots\ldots (1)$

$\sum F_y = 0 \qquad -mg\cos\theta + N = 0 \qquad N = mg\cos\theta \;\ldots. (2)$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2):

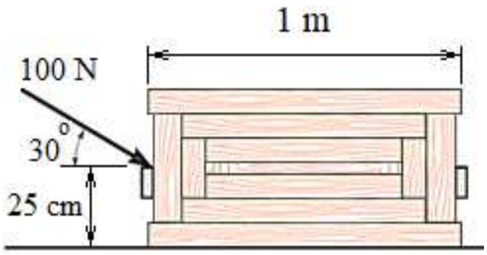
$$\frac{F}{N} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta$$

نظرًا لأن الحد الأقصى للزاوية يحدث عند ($F = F_{max} = \mu_s N$) ، فيكون عند الحركة الوشيكة:

$$\mu_s = \tan\theta_{max} \qquad \text{or} \qquad \theta_{max} = \tan^{-1}\mu_s$$

مثال (٦-٢):

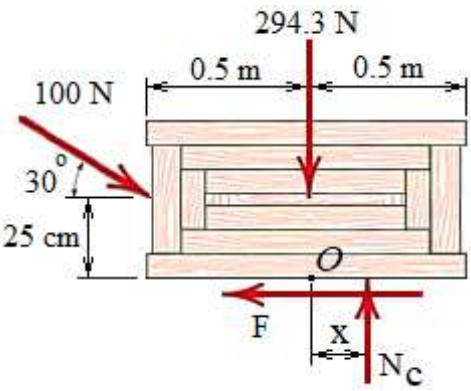
كتلة الصندوق الموضح في الشكل (مث. ٦-٢) تبلغ (30 kg). إذا تم تسليط القوة (P = 100 N) على الصندوق، بين حالة حركة الصندوق.
معامل الاحتكاك السكوني هو ($\mu_s = 0.3$).



شكل (مث. ٦-٢)

الحل:

$$W = m\,g = 30 \times 9.81 = 294.3 \text{ N}$$



$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 100\cos 30° - F = 0$

$F = 86.6 \text{ N}$

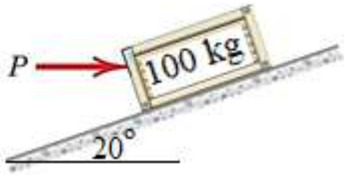
$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad -100\sin 30° + N_C - 294.3 = 0$

$N_C = 344.3 \text{ N}$

$F_{max} = \mu_s N_C = 0.3\,(344.3) = 103.29$ N

نظرًا لأن ($F = 86.6 \text{ N} < 103.29 \text{ N}$)، **لن ينزلق الصندوق.**

مثال (٦-٣):



شكل (مث. ٦-٣)

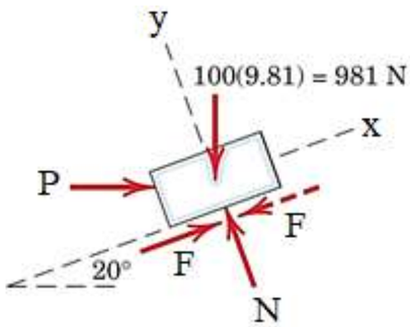
اذا كانت كتلة البلوك الموضح في الشكل (مث. ٦-٣) مقدارها (100 kg)، أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك المؤثرة على البلوك في حالة:

أ- (P = 500 N).

ب- (P = 100 N).

معامل الاحتكاك السكوني هو (0.2)، ومعامل الاحتكاك الحركي (0.17). تم تسليط القوى عندما كان البلوك ساكناً بدايةً.

الحل:



$$+\rightarrow \sum F_x = 0, \qquad P\cos 20° + F - 981 \sin 20° = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad N - P\sin 20° - 981\cos 20° = 0$$

الحالة الأولى: (P = 500 N):

$$F = -134.3\ N = 134.3\ N \swarrow$$

$$N = 1093\ N$$

$$F_{max} = \mu_s N \qquad F_{max} = 0.2 \times 1093 = 219\ N$$

نلاحظ أن القوة (P) أكبر من القوة المطلوبة للتوازن (F)، وهذا يعني أن افتراض التوازن صحيحًا. فيكون الجواب:

$$F = 134.3\ N$$

الى الأسفل

الحالة الثانية: (P = 100 N):

بالتعويض في معادلتي التوازن:

$$F = 242\ N \qquad N = 956\ N$$

لكن أقصى قوة احتكاك ساكن ممكنة هي:

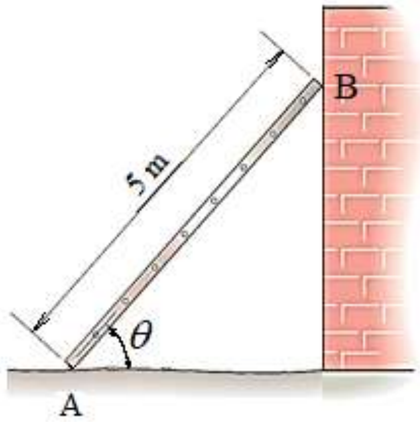
$$F_{max} = \mu_s N \qquad F_{max} = 0.2(956) = 191.2\ N$$

نلاحظ أن القوة (P) أصغر من القوة المطلوبة للتوازن (F). لذلك، لا يمكن أن يتحقق التوازن، ونحصل على القيمة الصحيحة لقوة الاحتكاك باستخدام معامل الاحتكاك الحركي المصاحب للحركة أسفل المستوى. وبذلك فإن الجواب هو:

$$F_k = \mu_k N \qquad F = 0.17(956) = 162.5\ N$$

الى الأعلى

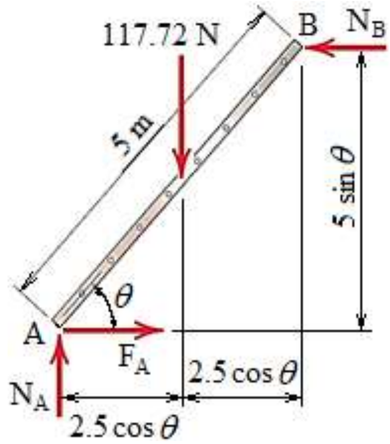
مثال (٦-٤):



شكل (مث. ٦-٤)

سلم منتظم كتلته (12 kg) يرتكز على الجدار الأملس عند (B)، ويستند الطرف (A) على المستوى الأفقي الخشن الذي يكون معامل الاحتكاك السكوني فيه ($\mu_s = 0.3$). أوجد زاوية ميل السلم (θ) ورد الفعل العمودي عند (B) إذا كان السلم على وشك الانزلاق.

الحل:



$$W = m\,g = 12 \times 9.81 = 117.72 \text{ N}$$

$$F_A = \mu_s N_A = 0.3 N_A$$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad N_A - 117.72 = 0$

$N_A = 117.72 \text{ N}$

$$F_A = 0.3 \times 117.72 = 35.316 \text{ N}$$

$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 35.316 - N_B = 0$

$N_B = 35.316 \text{ N}$

$+\sum M_B = 0$

$$(35.316)(5\sin\theta) - (117.72)(5\cos\theta) + (117.72)(2.5\cos\theta) = 0$$

$$176.58\sin\theta - 588.6\cos\theta + 294.3\cos\theta = 0$$

$$176.58\sin\theta - 294.3\cos\theta = 0 \qquad \div \cos\theta$$

$$176.58\tan\theta - 294.3 = 0$$

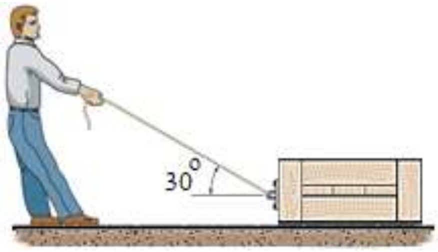
$$176.58\tan\theta = 294.3$$

$$\tan\theta = 1.667$$

$$\theta = 59^\circ$$

<u>مثال (٦-٥):</u>

أوجد الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك السكوني بين حذاء الرجل وسطح الأرض حتى يتمكن الرجل من تحريك الصندوق، إذا علمت أن معامل الاحتكاك السكوني بين الصندوق وسطح الأرض هو ($\mu_s = 0.3$)، وكتلة الصندوق (120 kg)، وكتلة الرجل (75 kg).

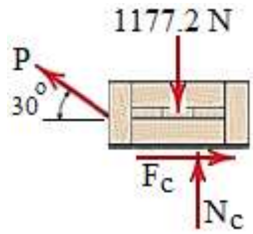


شكل (مث. ٦-٥)

الحل:

$$W_c = 120 \times 9.81 = 1177.2 \text{ N}$$
$$W_m = 75 \times 9.81 = 735.75 \text{ N}$$

للصندوق:



$$F_C = \mu_s N_C = 0.3 N_C$$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$$N_C + P \sin 30° - 1177.2 = 0$$
$$N_C + 0.5 P - 1177.2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$$F_C - P \cos 30° = 0$$
$$0.3 N_C - 0.866 P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

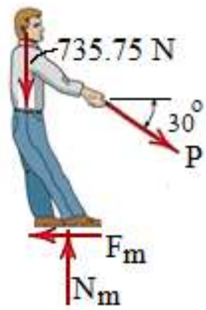
من المعادلة (2):

$$N_C = 2.887 P$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$2.887 P + 0.5 P - 1177.2 = 0$$
$$3.387 P = 1177.2 \quad \Rightarrow \quad P = 347.56 \text{ N}$$
$$N_C = 2.887 \times 347.56 = 1003.4 \text{ N}$$

للرجل:



$+\uparrow \sum F_y = 0$

$$N_m - 347.56 \sin 30° - 735.75 = 0$$
$$N_m = 909.53 \text{ N}$$

$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$$347.56 \cos 30° - F_m = 0$$
$$F_m = 301 \text{ N}$$

وبالتالي، فإن معامل الاحتكاك السكوني الأدنى المطلوب بين حذاء الرجل والأرض يتم الحصول عليه من خلال:

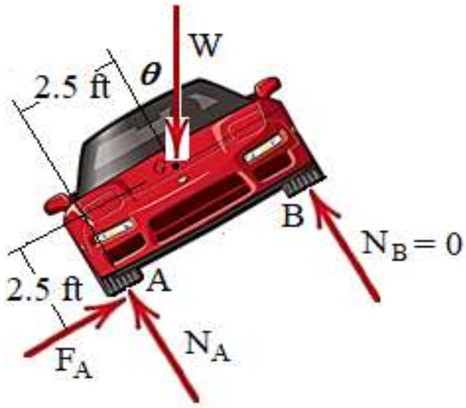
$$\mu'_s = \frac{F_m}{N_m} = \frac{301}{909.53} = 0.3$$

مثال (٦-٦):

يقع مركز ثقل السيارة الموضحة في الشكل (مث. ٦-٦) عند النقطة (G). إذا كانت السيارة تتحرك على طريق جانبي بسرعة ثابتة، وكان معامل الاحتكاك السكوني بين كتف الطريق والإطارات ($\mu_s = 0.4$)، أوجد أكبر ميلان يمكن أن يكون للكتف دون التسبب في انزلاق أو انقلاب السيارة إذا كانت تتحرك على طول الكتف بسرعة ثابتة.

شكل (مث. ٦-٦)

الحل:



انقلاب:

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0$$

$$-(W\cos\theta)(2.5) + (W\sin\theta)(2.5) = 0$$

$$(W\cos\theta)(2.5) = (W\sin\theta)(2.5)$$

$$\tan\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^\circ$$

انزلاق:

$$\nearrow + \sum F_x = 0$$

$$0.4\,N - W\sin\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

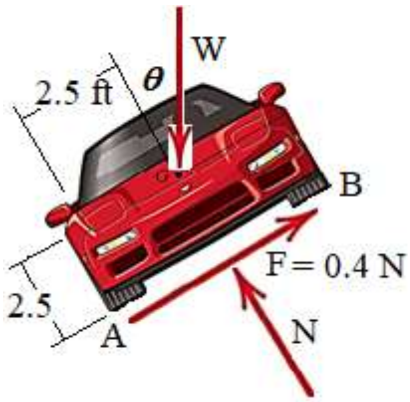
$$\nwarrow + \sum F_y = 0$$

$$N - W\cos\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

------------------------ (بالقسمة)

$$0.4 - \tan\theta = 0$$

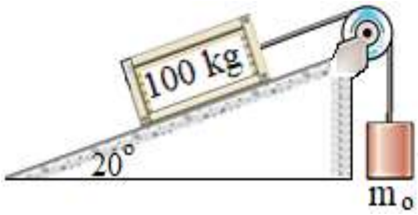
$$\tan\theta = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \theta = 21.8^\circ$$



السيارة تنزلق قبل أن تنقلب.

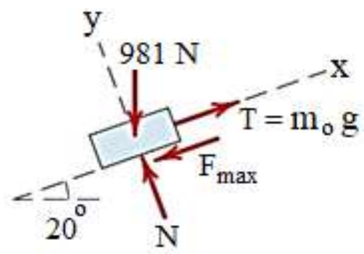
مثال (٦-٧):

حدد مـدى قــيم الكتلــة (m_o) بحيث لا تبــدأ الكتلــة (100 kg) الموضحة في الشكل (مث. ٦-٧) بالحركة لأعلى المستوي أو الانزلاق إلى أسفل المستوى. معامل الاحتكاك السكوني للأسطح المتلامسة هو (0.3).



شكل (مث. ٦-٧)

سيتم إعطاء القيمة القصوى لـ (m_o) من خلال متطلبات الحركة الوشيكة الى الأعلى.



$$W = m\,g = 100 \times 9.81 = 981 \text{ N}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad N - 981 \cos 20° = 0$

$N = 922 \text{ N}$

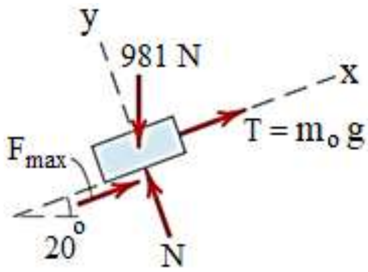
$F_{max} = \mu_s N \qquad F_{max} = 0.3 \times 922 = 277 \text{ N}$

$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$$m_o \times 9.81 - 227 - 981 \sin 20° = 0$$

$$m_o = 57.3 \text{ kg}$$

يتم تحديد الحد الأدنى لقيمة (m_o) عندما تكون الحركة وشيكة للأسفل.



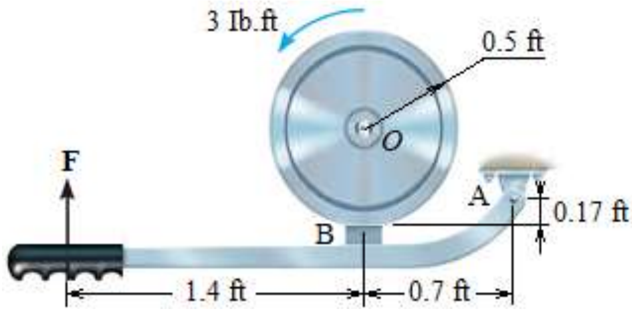
$+\rightarrow \sum F_x = 0$

$$m_o \times 9.81 + 227 - 981 \sin 20° = 0$$

$$m_o = 11.06 \text{ kg}$$

وبالتالي تكون قيمة (m_o) محصورة بين (57.3 kg - 11.06 kg).

مثال (٦-٨):



شكل (مث. ٦-٨)

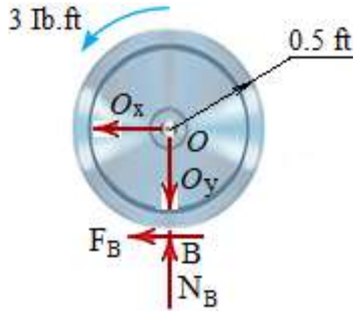
تتكون منظومة فرامل التوقف المبينة في الشكل (مث. ٦-٨) من ذراع متصل مفصلياً بكتلة احتكاك عند (B). اذا علمت أن معامل الاحتكاك السكوني بين العجلة والذراع هو ($\mu_s = 0.3$)، وتم تسليط عزم دوران قدره (3 Ib.ft) على القرص، حدد ما إذا كانت الفرامل قادرة على تثبيت العجلة عندما تكون القوة المسلطة على الذراع:

(أ) (F = 6 Ib).

(ب) (F = 14 Ib).

الحل :

القرص:



$$\curvearrowleft + \sum M_o = 0$$

$$3 - F_B\,(0.5) = 0$$

$$F_B = 6\ \text{Ib}$$

$$F_B = \mu_s N_B$$

$$N_B = \frac{F_B}{\mu_s} = \frac{6}{0.3} = 20\ \text{Ib}$$

الذراع:

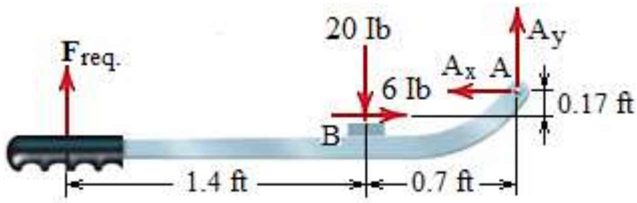
$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$(20)(0.7) + (6)(0.17) - (F_{Req})(2.1) = 0$$

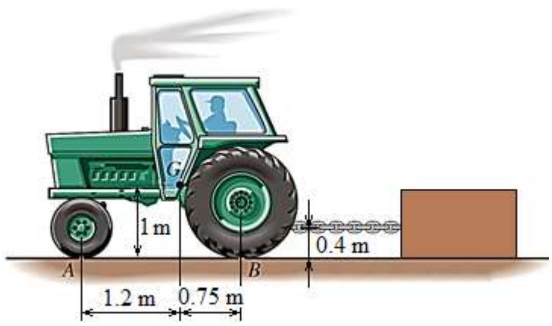
$$F_{Req.} = 7.15\ \text{Ib}$$

(a) $F = 6\ \text{Ib} < 7.15\ \text{Ib}$ كلا

(b) $F = 14\ \text{Ib} > 7.15\ \text{Ib}$ نعم



مثال (٦-٩):



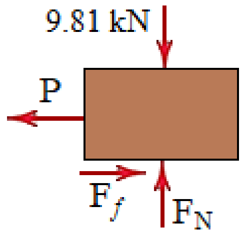
شكل (مث. ٦-٩)

كتلة الجرار الموضح في الشكل (مث. ٦-٩) هي (2.5 tons) ومركز ثقله عند (G). العجلات الخلفية تسلط قوة جر عند النقطة (B)، بينما تكون العجلات الأمامية عند النقطة (A) حرة في التدحرج. إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين العجلات والأرض عند (B) هو (μ_s = 0.45)، وبين الحاوية (1 ton) والأرض هو (μ_s = 0.45)، حدد ما إذا كان من الممكن سحب الحاوية دون التسبب في انزلاق العجلات الخلفية عند (B) أو رفع العجلات الأمامية عن الأرض عند (A).

الحل:

$$W_t = 2500 \times 9.81 = 24525\ \text{N}$$
$$= 24.525\ \text{kN}$$
$$W_c = 1000 \times 9.81 = 9810\ \text{N}$$
$$= 9.81\ \text{kN}$$

للحاوية:

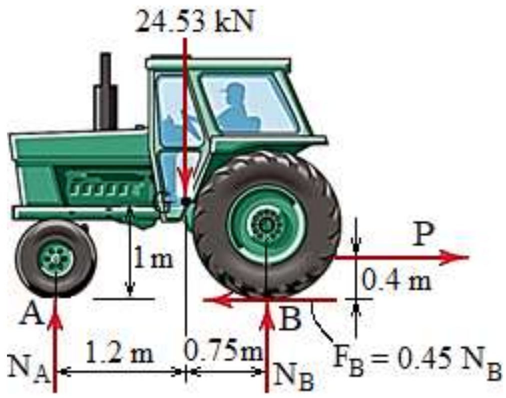


$$+\uparrow \sum F_x = 0$$
$$F_N - 9.81 = 0 \qquad F_N = 9.81\ \text{kN}$$
$$F_f = \mu_s F_N = 0.5 \times 9.81 = 4.905\ \text{kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad 4.905 - P = 0$$
$$P = 4.905\ \text{kN}$$

للجرار:

انزلاق:



$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$
$$-(24.525)(1.2) - (4.905)(0.4) + N_B\,(1.95) = 0$$
$$N_B = 16.1\ \text{kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad P = F_B = 0.45\ N_B$$
$$= 0.45 \times 16.1 = 7.25\ \text{kN}$$

انقلاب:

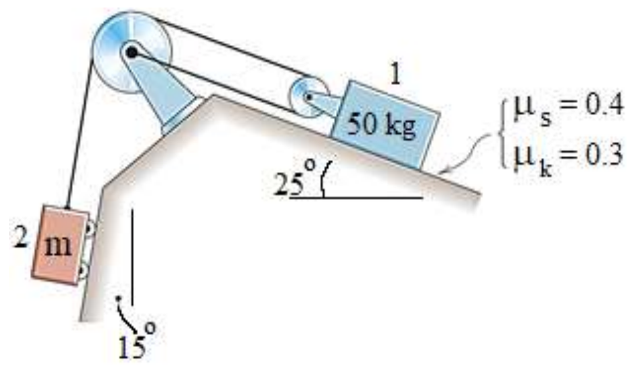
$$\curvearrowright + \sum M_B = 0 \qquad -(P)(0.4) + (24.525)(0.75) = 0 \qquad P = 46\ \text{kN}$$

Since $P_{Required} = 4.905\ \text{kN} < 7.25\ \text{kN} < 46\ \text{kN}$

من الممكن سحب الحمولة بدون انزلاق أو انقلاب.

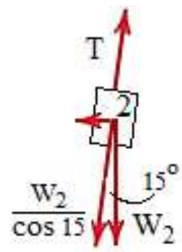
مثال (٦-١٠):

في الشكل (مث. ٦-١٠)، حدد مدى الكتلة (m) التي يكون فيها البلوك ذو الكتلة (50 kg) في حالة توازن. الاحتكاك في جميع العجلات والبكرات يكون مهمل.



شكل (مث. ٦-١٠)

الحل:



$W_1 = 50 \times 9.81 = 490.5$ N

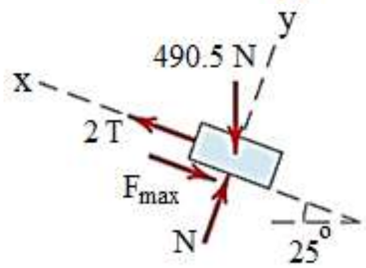
$$T = \frac{W_2}{\cos 15}$$

$\sum F_y = 0$

$N - 490.5 \cos 25 = 0$

$N = 444.54$ N

$F = \mu_s N = 0.4 \times 444.54 = 177.82$ N



$\sum F_x = 0$

$2T - F_{max} - W_1 \sin 25 = 0$

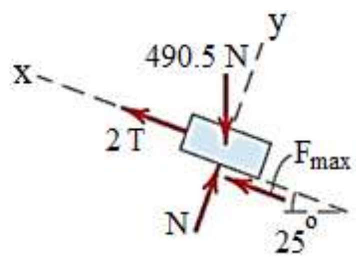
$$2\left(\frac{W_2}{\cos 15}\right) - 177.82 - 490.5 \sin 25 = 0$$

$2.07\, W_2 - 177.82 - 207.29 = 0$

$2.07\, W_2 = 385.11$ N

$W_2 = 186$ N

$$m_2 = \frac{W_2}{g} = \frac{186}{9.81} = 18.96 \text{ kg}$$



$$2\left(\frac{W_2}{\cos 15}\right) + 177.82 - 490.5 \sin 25 = 0$$

$2.07\, W_2 + 177.82 - 207.29 = 0$

$2.07\, W_2 = 29.47$ N

$W = 14.24$ N

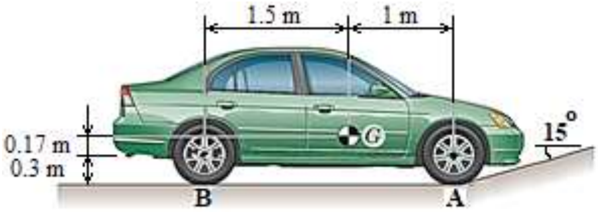
$$m_2 = \frac{W_2}{g} = \frac{14.24}{9.81} = 1.45 \text{ kg}$$

مدى الكتلة هو:

(1.45 kg - 18.96 kg)

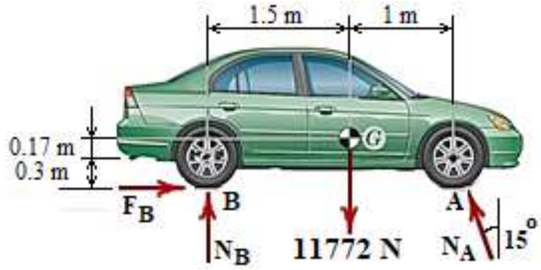
مثال (٦-١١):

السيارة الموضحة في الشكل (مث. ٦-١١) بدأت للتو في الصعود على المرتفع (15°). إذا كانت كتلة السيارة (1.2 ton) ولها دفع خلفي، أوجد الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك السكوني المطلوب عند (B).



شكل (مث. ٦-١١)

الحل:



$$W = m\,g = 1200 \times 9.81 = 11772 \text{ N}$$

$$\circlearrowright + \sum M_B = 0$$

$$(N_A \cos 15)(2.5) + (N_A \sin 15)(0.3) - (11772)(1.5) = 0$$

$$2.415\, N_A + 0.078\, N_A = 17658$$

$$N_A = 7083 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$7083 \cos 15 + N_B - 11772 = 0$$

$$6841.65 + N_B - 11772 = 0 \qquad N_B = 4930.35 \text{ N}$$

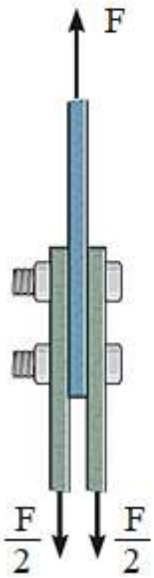
$$\sum F_x = 0$$

$$F_B - 7083 \sin 15 = 0 \qquad F_B = 1833.22 \text{ N}$$

$$F_B = \mu_s N_B \quad \Rightarrow \quad \mu_s = F_B / N_B = 1833.22 / 4930.35 = 0.37$$

مثال (٦-١٢):

تستخدم أربعة براغي لربط الألواح المبينة في الشكل (مث. ٦-١٢)، كل منها مشـــدود بحيث يتعرض لقوة شـــد مقدرها (5 kN).أوجد القيمة العظمى للقوة (F) التي يمكن أن يدعمها هذا الربط بحيث لا يحدث أي انزلاق بين الألواح. علماً أن معامل الاحتكاك السكوني بين كل لوحين ($\mu_s = 0.45$).



شكل (مث. ٦-١٢)

الحل:

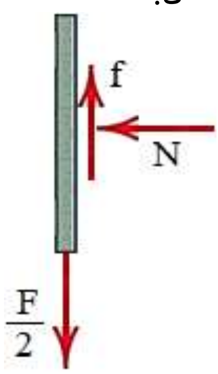
الشد المسلط على البراغي الأربع:

$$T = N = 5 \times 4 = 20 \text{ kN}$$

$$f = \mu_s N = 0.45 \times 20 = 9 \text{ kN}$$

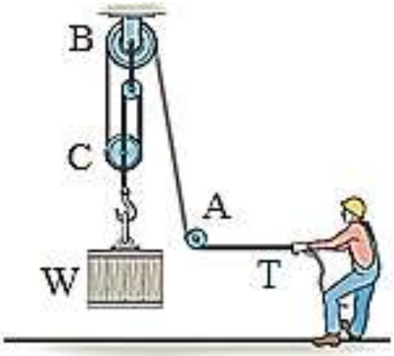
$$\sum F_y = 0 \qquad f - \frac{F}{2} = 0 \qquad 9 - \frac{F}{2} = 0$$

$$F = 18 \text{ kN}$$



<u>مثال (٦-١٣):</u>

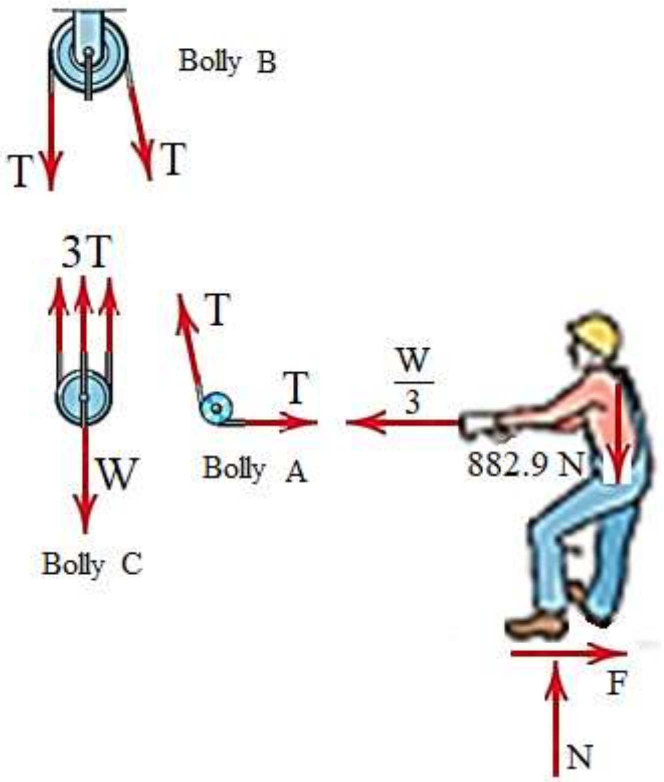
رجل كتلته (90 kg) ومعامل الاحتكاك السكوني بين قدميه والأرض ($\mu_s = 0.45$)، يستخدم نظام بكرات لرفع صندوق كما في الشكل (مث. ٦-١٣). أوجد الوزن الأقصى (W) الذي يمكن أن يرفعه الرجل بسرعة ثابتة باســـــــــتخدام بكرة التوجيه عند (A).



شكل (مث. ٦-١٣)

الحل:

$$W_m = m_m\, g = 90 \times 9.81 = 882.9 \text{ N}$$



<u>البكرة (C):</u>

$$3T - W = 0$$

$$T = \frac{W}{3}$$

<u>الرجل:</u>

$$\sum F_y = 0 \qquad N - 882.9 = 0$$

$$N = 882.9 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F - \frac{W}{3} = 0$$

$$0.45\, N - \frac{W}{3} = 0$$

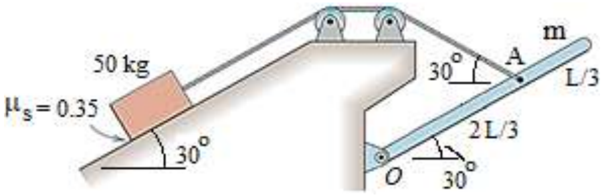
$$0.45\,(882.9) - \frac{W}{3} = 0$$

$$1324.35 - W = 0$$

$$W = 1192 \text{ N}$$

مثال (٦-١٤):

لتحقيق التــوازن، حدد مــدى الكتل (m) للقضيب المنتظم. إهمل الاحتكاك في جميع المحامل.

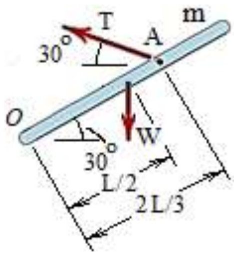


شكل (مث. ٦-١٤)

الحل:

$$W_{block} = 50 \times 9.81 = 490.5 \text{ N}$$

القضيب:



$$\circlearrowright + \sum M_o = 0$$

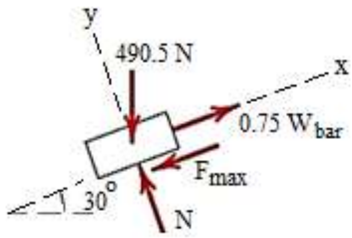
$$(W_{bar})\left(\frac{L}{2}\cos 30\right) - (T\sin 60)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

$$0.433\, L\, W_{bar} - 0.577\, L\, T = 0$$

$$0.433\, W_{bar} - 0.577\, T = 0$$

$$T = 0.75\, W_{bar}$$

البلوك:



$\sum F_y = 0$ $\quad$ $N - 490.5\cos 30 = 0$

$$N = 424.79 \text{ N}$$

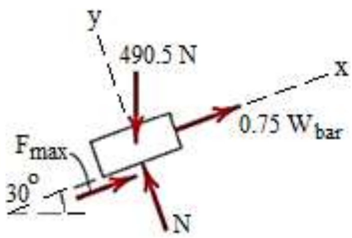
$$F_{max} = \mu N = 424.79 \times 0.35 = 148.67 \text{ N}$$

$\sum F_x = 0$

$$0.75\, W_{bar} - 148.67 - 490.5\sin 30 = 0$$

$$W_{bar} = 525.23 \text{ N}$$

$$m_{bar} = \frac{W}{g} = \frac{525.23}{9.81} = 53.54 \text{ kg}$$



$$0.75\, W_{bar} + 148.67 - 490.5\sin 30 = 0$$

$$W_{bar} = 128.77 \text{ N}$$

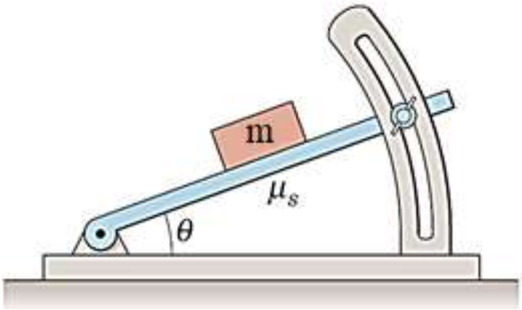
$$m_{bar} = \frac{W}{g} = \frac{128.77}{9.81} = 13.13 \text{ kg}$$

مدى الكتل هو:

(13.13 kg - 53.54 kg)

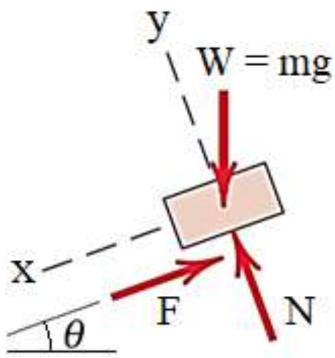
<u>مثال (٦-١٥):</u>

حدد الزاوية القصوى (θ) التي يمكن أن يميل بها الذراع القابل لضبط الزاوية مع الأفق قبل أن تبدأ الكتلة (m) في الانزلاق. معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والسطح المائل هو (μ_s).



شكل (مث. ٦-١٥)

الحل:



$\sum F_x = 0$

$mg\sin\theta - F = 0 \qquad F = mg\sin\theta \quad \ldots\ldots (1)$

$\sum F_y = 0$

$-mg\cos\theta + N = 0 \qquad N = mg\cos\theta \quad \ldots\ldots (2)$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2):

$$\frac{F}{N} = \tan\theta$$

نظرًا لأن الحد الأقصى للزاوية يحدث عند ($F = F_{max} = \mu_s N$) بالنسبة للحركة الوشيكة:

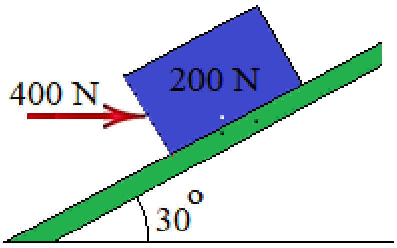
$$\mu_s = \tan\theta_{max} \qquad \text{or} \qquad \theta_{max} = \tan^{-1}\mu_s$$

مسائل:

٦-١) الجسم ذو الوزن (200 N) الموضح في الشكل (مس. ٦-١) تحرك تحت تأثير قوة أفقية قيمتها (400 N)، ما هو معامل الاحتكاك بين أسطح التلامس.

الجواب:

$\mu = 0.66$



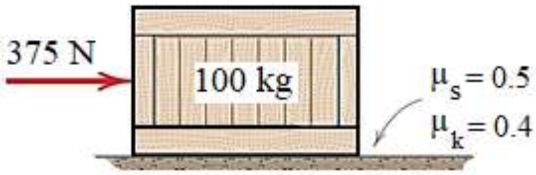
شكل (مس. ٦-١)

٦-٢) تم تسليط القوة (P = 375 N) على الصندوق (100 kg) الذي كان ثابتاً قبل تسليط القوة. أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك (F) التي يسلطها السطح الأفقي للصندوق.

الجواب:

$F = 490.5\ N \leftarrow$

$F > P$ لايوجد حركة



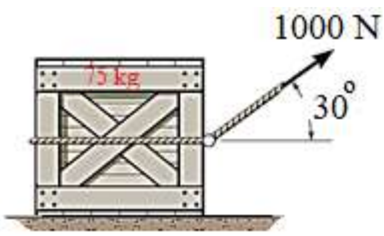
شكل (مس. ٦-٢)

٦-٣) كتلة الصندوق الموضح في الشكل (مس. ٦-٣) هي (75 kg)، ومعاملات الاحتكاك السكوني والحركي هي ($\mu_s = 0.3$) و ($\mu_k = 0.2$) على التوالي. أوجد قوة الاحتكاك بين الصندوق والأرض.

الجواب:

$(F_f)\ max = 70.725\ N$

$F_f = 47.15\ N.$

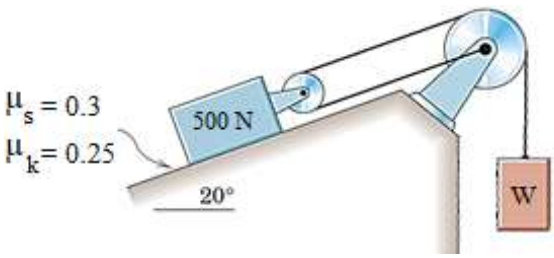


شكل (مس. ٦-٣)

٦-٤) أوجد حدود قيم الوزن (W) التي يكون فيها البلوك (500 N) في حالة توازن. جميع البكرات في النظام ذات احتكاك مهمل.

الجواب:

(15 N - 156 N)

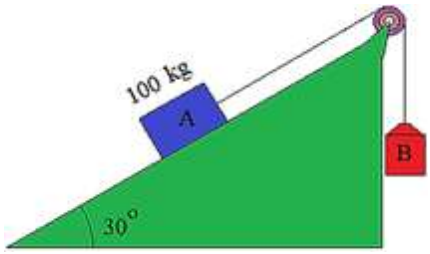


شكل (مس. ٦-٤)

٦-٥) أوجد حدود قيم الكتلة للجسم (B) التي تؤثر على الجسم (A) الذي تبلغ كتلته (100 kg) بحيث تمنع حركته صعودًا و هبوطًا على السطح المائل الموضح بالشكل (مس. ٦-٥)، مع العلم أن قيمة معامل الاحتكاك بين أسطح التلامس هي ($\mu_s = 0.3$).

الجواب:

(24 kg - 76 kg)

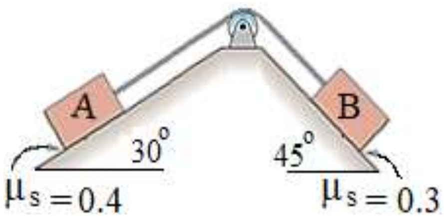


شكل (مس. ٦-٥)

٦-٦) الصندوقان (A) و (B) الموضحان في الشكل (مس. ٦-٦) مربوطان بحبل مرن غير قابل للاستطالة يمر فوق بكرة ملساء (عديمة الاحتكاك). إذا كانت كتل الصندوقين (A) و (B) هي (200 N) و (150 N) على التوالي، بين اتجاه الحركة.

الجواب:

الحركة باتجاه الصندوق B

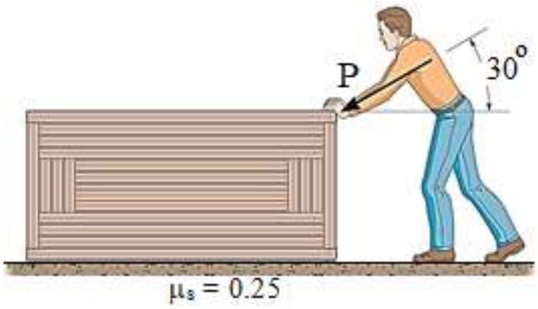


شكل (مس. ٦-٦)

٦-٧) الصندوق ذو الكتلة المنتظمة (100 Ib) يستقر على أرضية قرميدية بمعامل احتكاك سكوني ($\mu = 0.25$). أوجد أصغر مقدار للقوة (P) اللازمة لتحريك الصندوق. إذا كان وزن الرجل الذي يدفع الصندوق (140 Ib)، أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين حذائه والأرض حتى لا ينزلق.

الجواب:

$P = 33.7\ Ib,\ \mu_s = 0.24$

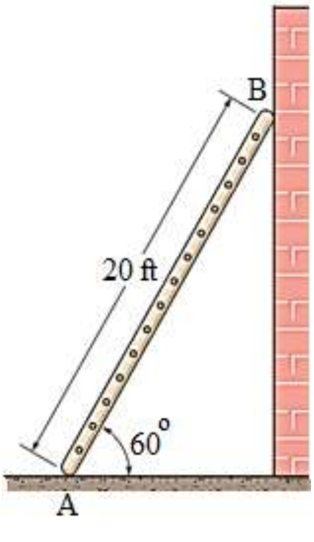


شكل (مس. ٦-٧)

٦-٨) سلم بطول (20 ft) له وزن منتظم (100 Ib) ويستقر على جدار أملس عند النقطة (B). إذا كان معامل الاحتكاك السكوني عند النقطة (A) هو ($\mu = 0.4$)، حدد ما إذا كان السلم سينزلق.

الجواب:

السلم لن ينزلق

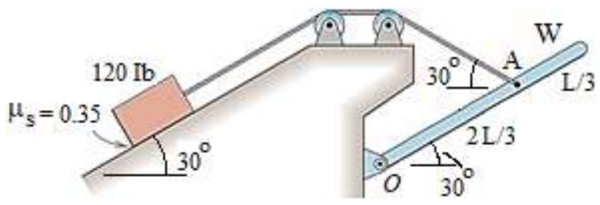


شكل (مس. ٦-٨)

٦-٩) لتحقيق التوازن في المنظومة المبينة في الشكل (مس. ٦-٩)، حدد قيم الوزن (W) للقضيب المنتظم. إهمل الاحتكاك في جميع المحامل.

الجواب:

(31.5 Ib - 128.5 Ib)

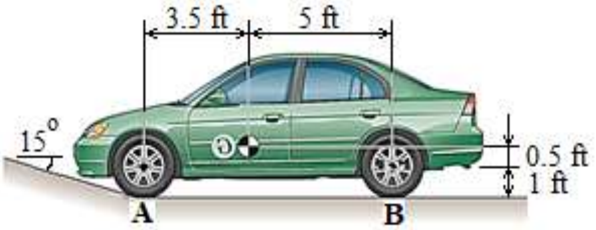


شكل (مس. ٦-٩)

٦-١٠) السيارة (3000 Ib) بدأت للتو في الصعود على مرتفع (15°). إذا كانت السيارة مزودة بدفع خلفي، أوجد الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك السكوني المطلوب عند (B).

الجواب:

$\mu_s = 0.356$

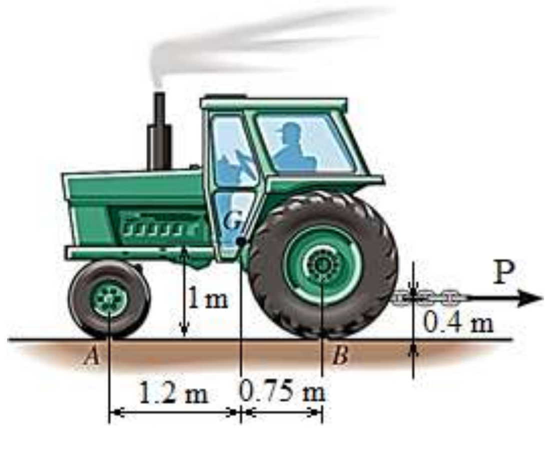


شكل (مس. ٦-١٠)

٦-١١) كتلة الجرار الموضح في الشكل (مس. ٦-١١) هي (2.5 tons) ومركز ثقله عند (G). العجلات الخلفية تسلط قوة جر عند النقطة (B)، بينما تكون العجلات الأمامية عند النقطة (A) حرة في التدحرج. إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين العجلات والأرض عند (B) هو ($\mu_s = 0.45$)، حدد ما إذا كان من الممكن سحب حمولة (P = 6 kN) دون التسبب في انزلاق العجلات الخلفية عند (B) أو رفع العجلات الأمامية عن الأرض عند (A).

الجواب:

من الممكن سحب الحمولة بدون انزلاق أو انقلاب.

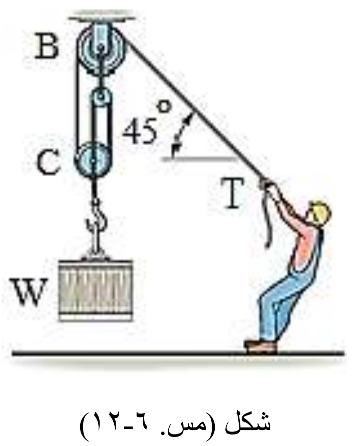


شكل (مس. ٦-١١)

٦-١٢) رجل كتلته (90 kg) ومعامل الاحتكاك السكوني بين قدميه والأرض ($\mu_s = 0.5$)، يستخدم نظام بكرات لرفع صندوق كما في الشكل (مس. ٦-١٢). أوجد الوزن الأقصى (W) الذي يمكن أن يرفعه الرجل بسرعة ثابتة.

الجواب:

W = 1250 N



شكل (مس. ٦-١٢)

الفصل السابع

مراكز الكتل والنقاط الوسطى

CENTERS OF MASS AND CENTROIDS

مراكز الكتل والنقاط الوسطى هي مفاهيم شائعة الاستخدام في الفيزياء والهندسة والرياضيات لوصف متوسط الموضع أو المركز المرجح لتوزيع الكتلة أو النقاط في الفضاء.

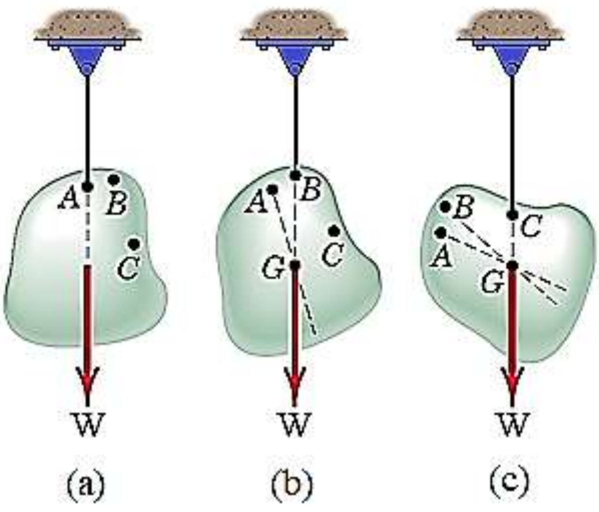
مركز الكتلة:

مركز كتلة الجسم هو النقطة التي يتم فيها تركيز كتلة الجسم بأكمله. بالنسبة لنظام الجسيمات، ويمكن تعريف مركز الكتلة أيضاً بأنه متوسط الموضع لجميع الجسيمات أو العناصر التي يتكون منها الجسم.

النقطة الوسطى:

النقطه الوسطى هو مفهوم يستخدم على وجه التحديد في الهندسة لوصف مركز شكل ثنائي الأبعاد أو جسم ثلاثي الأبعاد بكثافة موحدة. بمعنى آخر، النقطه الوسطى هي متوسط موضع جميع النقاط التي يتكون منها الشكل أو الجسم (مركز طول أو مساحة أو حجم الجسم).

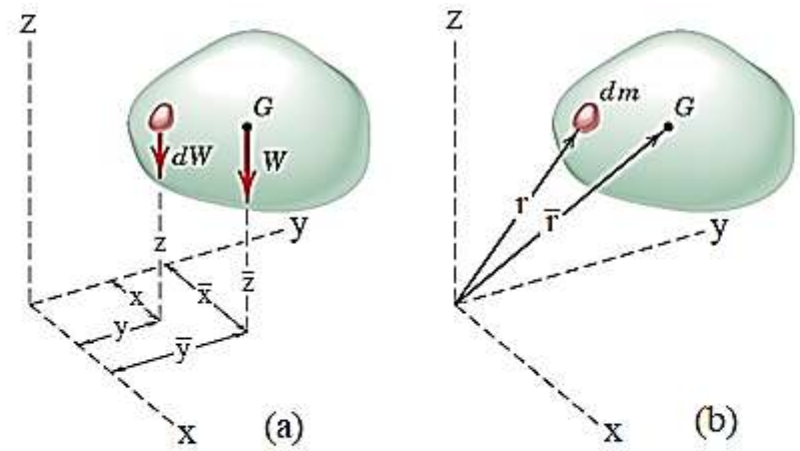
في تجربة عملية تم أخذ جسم ثلاثي الأبعاد بحجم وشكل معينين وله كتلة قيمتها (m). تم تعليق الجسم بسلك بالطريقة الموضحة في الشكل (٧-١) من أي نقطة ولتكن نقطة (A)، سيكون الجسم في حالة توازن تحت تأثير قوة شد السلك ومحصلة قوى الجاذبية الأرضية لجزيئات الجسم (W). ونلاحظ أن قوة شد السلك ومحصلة قوى الجاذبية الأرضية لجزيئات الجسم تكون على خط تأثير واحد وباتجاهين متعاكسين. لو افترضنا أن خط تأثير القوى هذا يتمثل بخط وهمي. ثم يتم تعليق الجسم من نقاط أخرى مثل (B) و (C) وتكرار العملية، نلاحظ خطوط تأثير القوى تتقاطع بنقطة واحدة يرمز لها بالرمز (G)، تسمى هذه النقطة مركز ثقل الجسم.



شكل (٧-١) إيجاد مركز ثقل الجسم بالتجربة

رياضياً يتم تحديد موقع مركز الجاذبية لأي جسم بتطبيق مبدأ االعزوم حول المحور الموازي لقوى الجاذبية. عزم محصلة قوى الجاذبية (W) للجسم حول أي محور يساوي مجموع عزوم قوى الجاذبية لجزيئات هذا الجسم (dW) حول نفس المحور. ناتج قوى الجاذبية المؤثرة على جميع الجزيئات هو وزن الجسم ويعطى بالتكامل ($W = \int dW$). إذا طبقنا مبدأ العزوم حول المحور (y) على سبيل المثال، فإن العزم حول هذا المحور لوزن الجزيء هو (x dW)، ومجموع هذه االعزوم لجميع جزيئات الجسم هو ($\int x\, dW$). يجب أن يتساوى العزم الناتج من محصلة قوى الجاذبية للجسم بشكل عام مع مجموع العزوم الناتجة من قوى الجاذبية لجزيئاته. وكما يلي:

$$\bar{x}\, W = \int x\, dW \qquad \bar{y}\, W = \int y\, dW \qquad \bar{z}\, W = \int z\, dW \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}1)$$



شكل (٧-٢) إيجاد مركز ثقل الجسم رياضياً

من المعادلات السابقة، يمكن التعبير عن إحداثيات مركز الجاذبية (G) على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dW}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}2)$$

مع استبدال ($W = mg$) و ($dW = g\, dm$)، تصبح المعادلات الخاصة بإحداثيات مركز الثقل كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dm}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}3)$$

<u>أهمية تعيين المراكز (Importance of centers):</u>

تتوضح أهمية تعيين مراكز الأجسام من حيث (الكتلة، الوزن، الحجم، المساحة، والطول) خلال دراسة موضوع مقاومة المواد (تحليل الاجهادات):

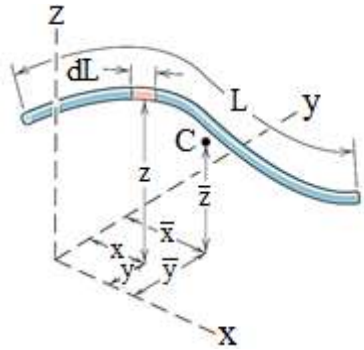
- للحصول على اجهادات منتظمة على سطح أي مقطع انشائي أو صناعي يجب أن يمر خط تأثير محصلة الأحمال المسلطة عليه في مركزه.
- معرفة مركز المساحة مهم في تعيين المحور المركزي (Neutral axis)، وهو الخط الوهمي الذي يكون الاجهاد على طوله مساوياً للصفر.
- معرفة مراكز المساحات مهمة جداً في موضوع عزم القصور الذاتي، حيث أن المحور الذي يمر في مركز المساحة يسمى محوراً مركزياً وهذا مهم جداً في احتساب عزم القصور الذاتي.
- معرفة مركز المساحة له أهمية عندما يتطلب استخدام عزم المساحة، حيث أن عزم المساحة بالنسبة لأي محور يساوي حاصل ضرب المساحة في المسافة العمودية من مركزها الى محور العزم.

احداثيات مراكز (الخطوط والمساحات والحجوم):

Centroids of (lines, areas, and volumes)

١- الخطوط:

اذا كان الجسم على شكل قضيب رفيع أو سلك طوله (L)، ومساحة مقطعه العرضي (A)، وكثافته (ρ)، فعند أخذ شـــــريحة بطـول (dL) يقترب الجســـم فيها من قطعة مســـــتقيمة، و ($dm = \rho A\, dL$). فإذا كانت قيمة الكثافة (ρ) والمساحة (A) ثابتين على طول القضيب، فإن إحداثيات مركز الكتلة تصبح إحداثيات النقطه الوسطى (C) للقطعة المستقيمة.

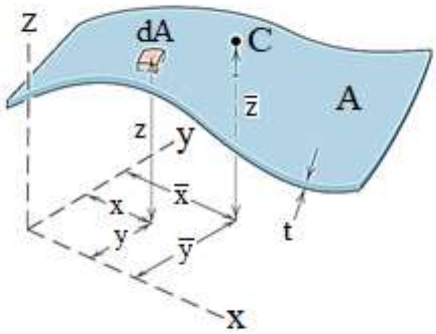


شكل (٧-٣) إيجاد مركز الثقل للخطوط

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int x\, dL}{L}\\ \bar{y} &= \frac{\int y\, dL}{L}\\ \bar{z} &= \frac{\int z\, dL}{L}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}4)$$

٢- المساحات:

عندما يكون الجسم بسمك صغير ولكنه ثابت (t) وبكثافة مقدارها (ρ)، يمكننا نمذجته كمساحة سطحية (A). تصبح كتلة العنصر ($dm = \rho\, t\, dA$). فإذا كانت الكثافة (ρ) والسمك (t) ثابتين على المنطقة بأكملها، فإن إحداثيات مركز كتلة الجسم تصبح أيضاً إحداثيات النقطه الوسطى (C) من مساحة السطح.



شكل (٧-٤) إيجاد مركز الثقل للمساحات

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int x\, dA}{A}\\ \bar{y} &= \frac{\int y\, dA}{A}\\ \bar{z} &= \frac{\int z\, dA}{A}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}5)$$

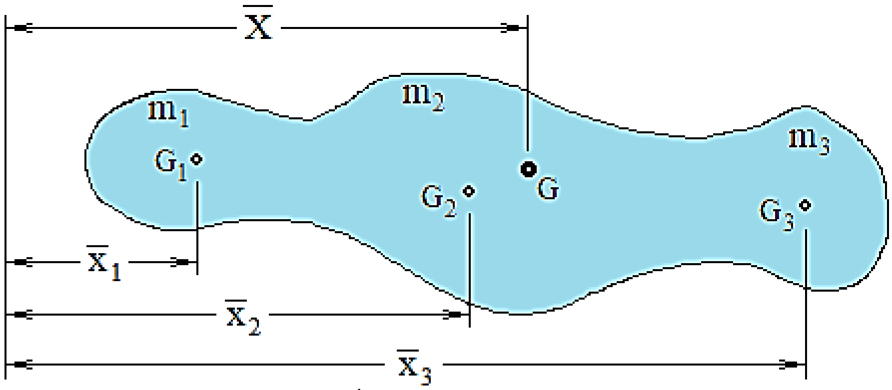
٣- الحجوم:

في حالة التعبير عن الحجم (V) والكثافة (ρ)، يكون مقدار الكتلة ($dm = \rho\, dV$). يمكن الغاء الكثافة (ρ) إذا كانت ثابتة على كامل الحجم، وتصبح إحداثيات مركز الكتلة أيضاً إحداثيات النقطه الوسطى (C) للجسم.

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}6)$$

الأجسام والأشكال المركبة (Composite bodies and figures):

في حالة امكانية تقسيم الجسم أو الشكل بسهولة إلى عدة أجزاء يمكن تحديد مراكز كتلتها بسهولة، حيث يمكن استخدام مبدأ العزوم والتعامل مع كل جزء كعنصر محدود من الكل. يتم توضيح مثل هذا الجسم بشكل تخطيطي في الشكل (٧-٥).



شكل (٧-٥) إيجاد مركز الثقل للأجسام المركبة

أجزائه لها كتل (m_1)، (m_2) و(m_3) مع إحداثيات مركز الكتلة ذات الصلة في اتجاه المحور الأفقي.

يعطي مبدأ العزوم:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, \bar{X} = m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + m_3 \bar{x}_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}7)$$

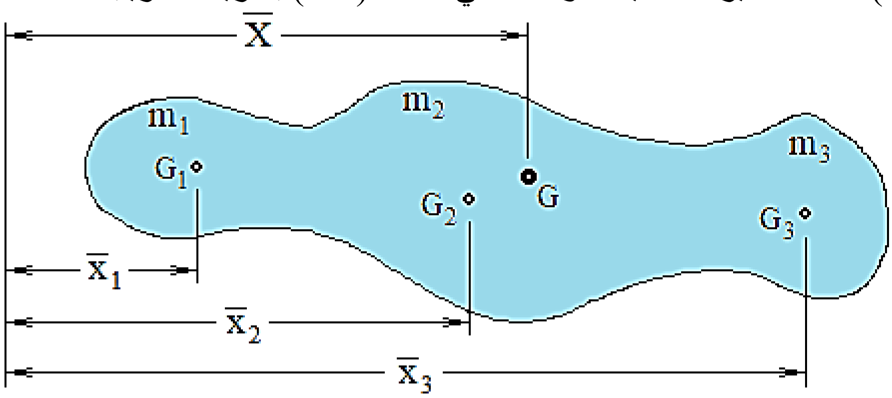
حيث أن ($\bar{X}$) هو الإحداثي الأفقي لمركز الكتلة بالنسبة للجسم الكلي. وتنطبق نفس العلاقات على الاتجاهين الآخرين.

اذن يمكن التعميم على جسم من أي عدد من الأجزاء ونعبر عن المجاميع بشكل ضمني للحصول على إحداثيات مركز الكتلة:

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \qquad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}8)$$

طريقة التقريب (Approximation method):

قد لا يمكن عملياً التعبير عن حدود منطقة أو حجم من حيث الأشكال الهندسية البسيطة أو كأشكال يمكن تمثيلها رياضيًا. في مثل هذه الحالات، يجب أن نلجأ إلى طريقة التقريب. كمثال، يمكن تحديد موقع النقطه الوسطى (G) للمنطقة غير النظامية الموضحة في الشكل (٧-٥) بطريقة التقريب.

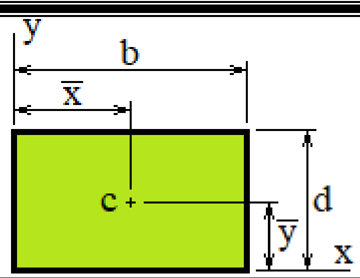
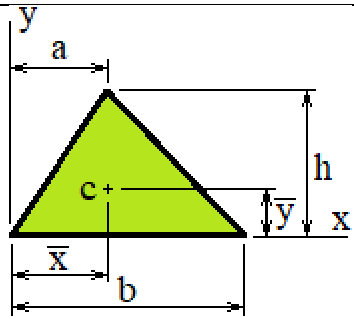
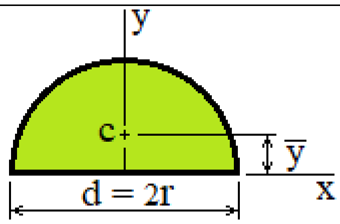
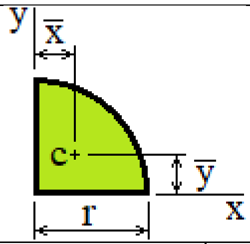
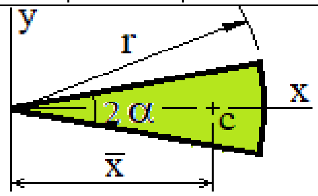
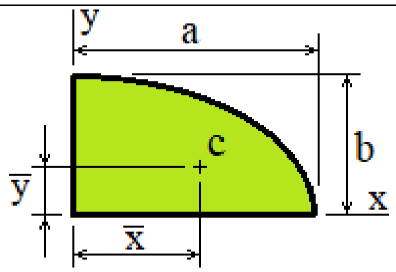


شكل (٧-٥)

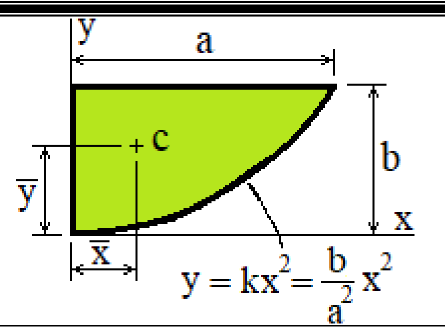
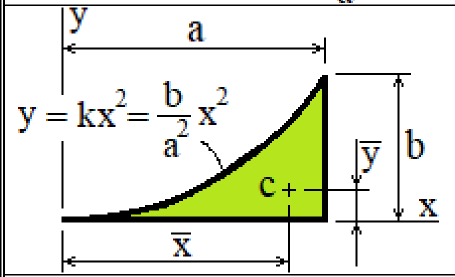
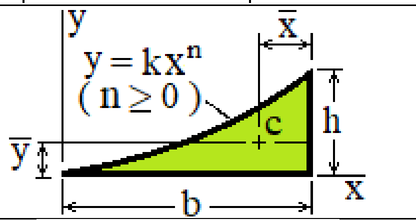
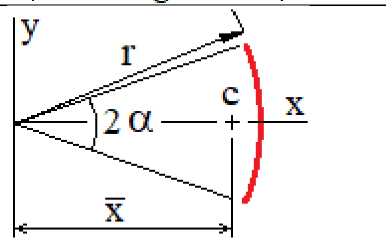
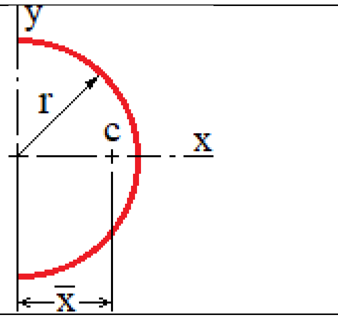
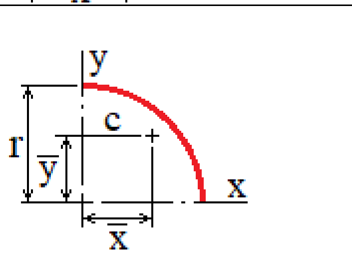
إجراءات هذه الحالة يمكن تطبيقها (للكتل، والمساحات، والخطوط، والأحجام).

مراكز الأشكال الهندسية الشائعة:

جدول (٧-١) مراكز الأشكال الهندسية الشائعة

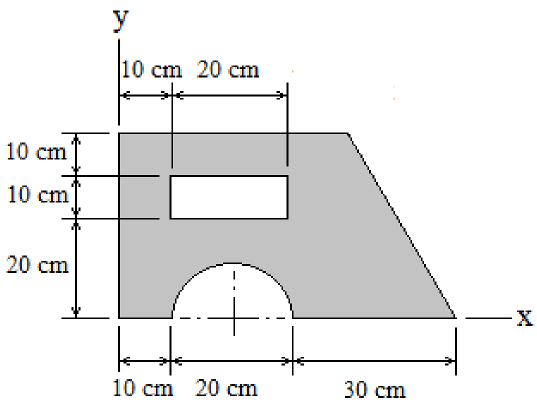
الشكل		المساحة أو الطول	$\bar{x}$	$\bar{y}$
المستطيل		$b\,d$	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}d$
المثلث		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{1}{3}h$
نصف الدائرة		$\frac{\pi r^2}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$ or $0.424\,r$
ربع الدائرة		$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$ or $0.424\,r$	$\frac{4r}{3\pi}$ or $0.424\,r$
قطاع الدائرة		$r^2\alpha$	$\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0
ربع قطع ناقص		$\frac{\pi a b}{4}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$

جدول (٧-١) مراكز الأشكال الهندسية الشائعة

الشكل		المساحة أو الطول	$\bar{x}$	$\bar{y}$
مساحة قطع مكافيء		$\frac{2\,a\,b}{3}$	$\frac{3\,a}{8}$	$\frac{3\,b}{5}$
مساحة تحت قطع مكافيء		$\frac{a\,b}{3}$	$\frac{3\,a}{4}$	$\frac{3\,b}{10}$
المساحة المثلثية تحت المنحنى		$\frac{b\,h}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$	$\frac{n+1}{4n+2}\,h$
قوس دائرة		$2\,r\,\alpha$	$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0
نصف محيط دائرة		$\pi\,r$	$\frac{2\,r}{\pi}$	0
ربع محيط دائرة		$\frac{\pi\,r}{2}$	$\frac{2\,r}{\pi}$	$\frac{2\,r}{\pi}$

<u>مثال (٧-١):</u>

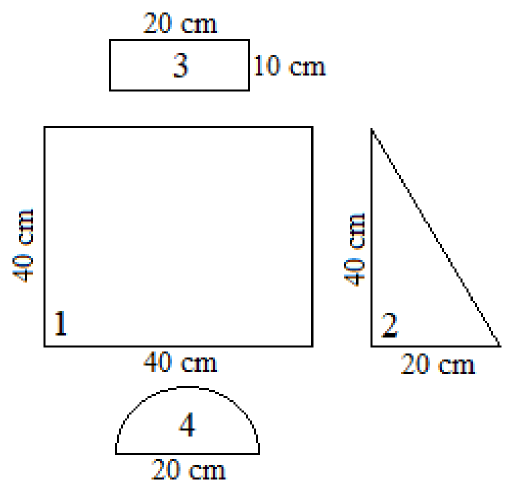
حدد مركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مث. ٧-١).



شكل (مث. ٧-١)

الحل:

المنطقة المركبة مقسمة إلى أربعة أشكال أولية منتظمة موضحة في الشكل (مث.٧-١). يمكن الحصول على مراكز جميع هذه الأشكال من الشكل الملحق أدناه. لاحظ أن الفتحات (الجزءان ٣ و ٤) تؤخذ على أنها سالبة في الجدول التالي:



$$A_1 = 40 \times 40 = 1600 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 40 = 400 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \pi = 157 \text{ cm}^2$$

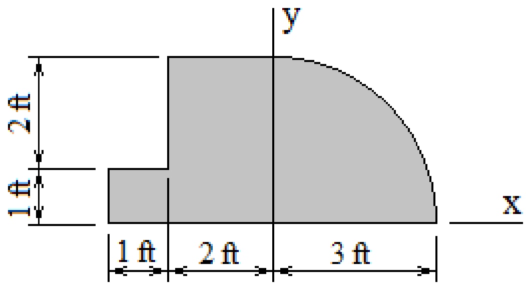
Part	**A (cm^2)**	**$\bar{x}$ (cm)**	**$\bar{y}$ (cm)**	**$A\bar{x}$ (cm^3)**	**$A\bar{y}$ (cm^3)**
1	1600	20	20	32000	32000
2	400	46.67	13.33	18666	5333
3	– 200	20	25	– 4000	– 5000
4	– 157	20	4.24	– 3140	– 666
Totals	1643			43526	31667

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{43526}{1643} = 26.49 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{31667}{1643} = 19.27 \text{ cm}$$

مثال (٧-٢):

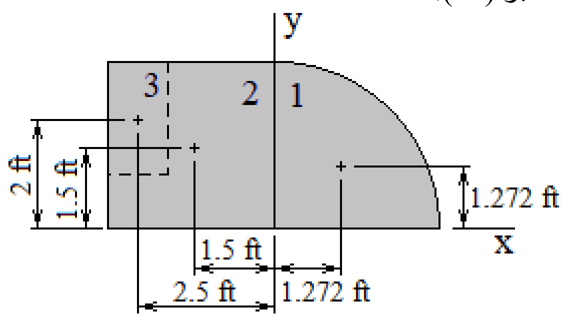
حدد مركز الصفيحة الموضحة في الشكل (مث. ٧-٢).



شكل (مث. ٧-٢)

الحل:

تنقسم اللوحة إلى ثلاثة أجزاء كما هو موضح. وتعتبر مساحة المستطيل الصغير (3) "سالبة" ويجب طرحها من المستطيل الأكبر (2).



$$A_1 = \frac{1}{4} \times 3^2 \times \pi = 7\ ft^2$$

$$A_2 = 3 \times 3 = 9\ ft^2$$

$$A_3 = 1 \times 2 = 2\ ft^2$$

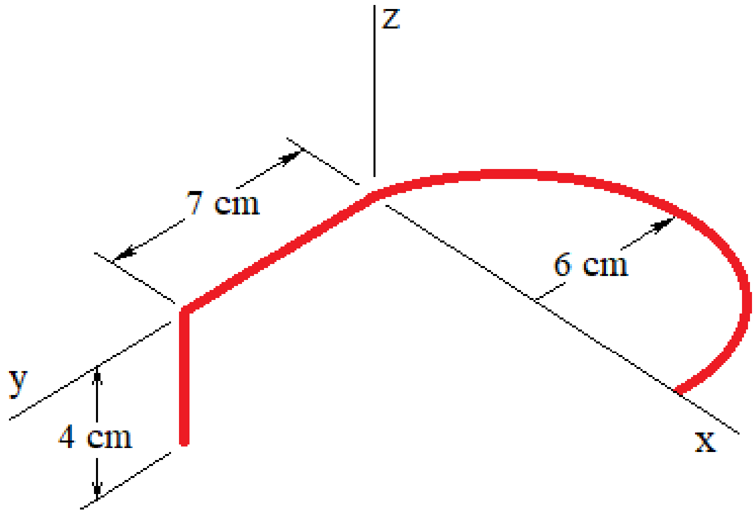
Part	A (ft^2)	$\bar{x}$ (ft)	$\bar{y}$ (ft)	$A\bar{x}$ (ft^3)	$A\bar{y}$ (ft^3)
1	7	1.272	1.272	8.9	8.9
2	9	– 1.5	1.5	– 13.5	13.5
3	– 2	– 2.5	2	5	– 4
$\sum$	$\sum A = 14$			– 0.4	18.4

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{-0.4}{14} = -0.029\ ft$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{18.4}{14} = 1.314\ ft$$

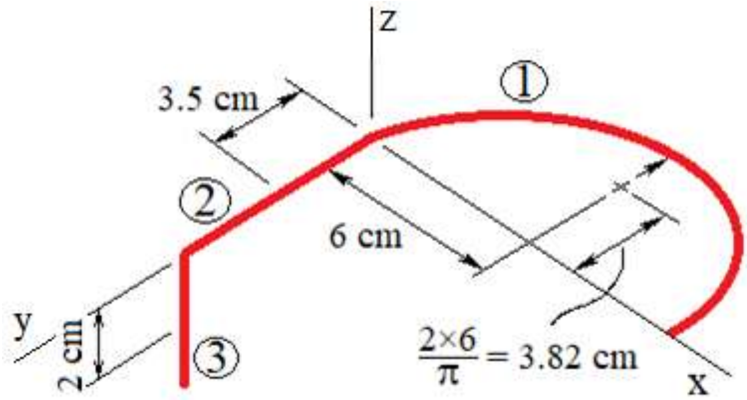
مثال (٧-٣):

حدد مركز السلك الموضح في الشكل (مث. ٧-٣).



شكل (مث. ٧-٣)

الحل:



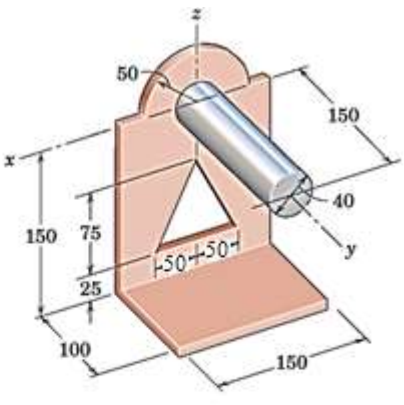
Segment	L (cm)	$\bar{x}$ (cm)	$\bar{y}$ (cm)	$\bar{z}$ (cm)	$\bar{x}$ L (cm²)	$\bar{y}$ L (cm²)	$\bar{z}$ L (cm²)
1	$\pi \times 6 = 18.85$	6	– 3.82	0	113.1	– 72	0
2	7	0	3.5	0	0	24.5	0
3	4	0	7	– 2	0	28	– 8
Total	29.85				113.1	– 19.5	– 8

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}\,L}{\sum L} = \frac{113.1}{29.85} = 3.79 \text{ cm} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}\,L}{\sum L} = \frac{-19.5}{29.85} = -0.65 \text{ cm}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum \bar{z}\,L}{\sum L} = \frac{-8}{29.85} = -0.27 \text{ cm}$$

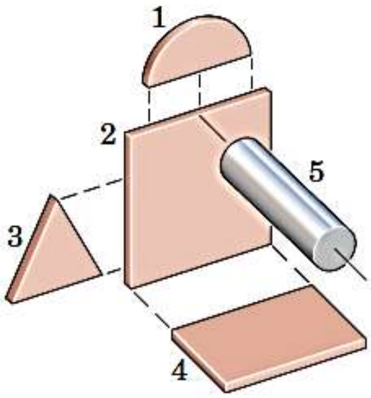
مثال (٧-٤):

في تركيبة البراكيت والعمود الموضحة في الشكل (مث. ٧-٤)، الوجه العمودي مصنوع من صفيحة معدنية كتلتها ($25\ kg/m^2$)، و الوجه الأفقي (القاعدة) مصنوع من صفيحة معدنية كتلتها ($40\ kg/m^2$)، وكثافة العمود الفولاذي ($7.83\ Mg/m^3$). أوجد موقع مركز الكتلة لمجموعة البراكيت والعمود.



Dimentions in millimeters
شكل (مث. ٧-٤)

الحل:



الجسم المركب يتكون من خمسة عناصر موضحة في الرسم التوضيحي.
وسيتم أعتبار الجزء المثلثي ككتلة سالبة.
بالنسبة للمحاور المرجعية المشار إليها، من الواضح بالتناظر أن الإحداثي (x) لمركز الكتلة هو صفر.

$$m_1 = 25 \times (1/2 \times \pi \times 0.05^2) = 0.098\ kg$$
$$m_2 = 25 \times (0.15 \times 0.15) = 0.562\ kg$$
$$m_3 = 25 \times (1/2 \times 0.1 \times 0.075) = 0.0938\ kg$$
$$m_4 = 40 \times (0.15 \times 0.1) = 0.6\ kg$$
$$m_5 = 7830 \times (0.15 \times \pi \times 0.02^2) = 1.476\ kg$$

$$\bar{z}_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times 50}{3\pi} = 21.2\ mm$$

$$\bar{z}_3 = -[\ 150 - 25 - 1/3\ (\ 75\ )\ ] = -100\ mm$$

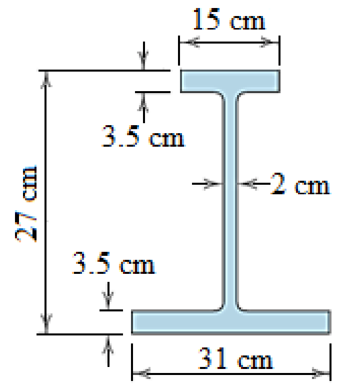
Part	m (kg)	$\bar{y}$ (mm)	$\bar{z}$ (mm)	m $\bar{y}$ (kg.mm)	m $\bar{z}$ (kg.mm)
1	0.098	0	21.2	0	2.08
2	0.562	0	– 75	0	– 42.19
3	– 0.0938	0	– 100	0	9.38
4	0.6	50	– 150	30	– 90
5	1.476	75	0	110.7	0
Total	2.642			140.7	– 120.73

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = \frac{140.7}{2.642} = 53.3\ mm$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = \frac{-120.73}{2.642} = -45.7\ mm$$

مثال (٧-٥):

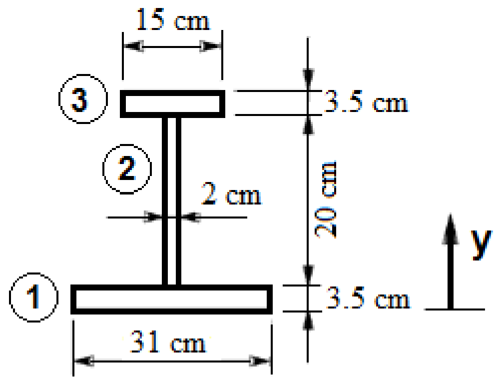
أوجد ارتفاع مركز المقطع العرضي للشيلمان المبين في الشكل (مث. ٧-٥) فوق قاعدة مساحته. إهمل انحناءات الحافات.



شكل (مث. ٧-٥)

الحل:

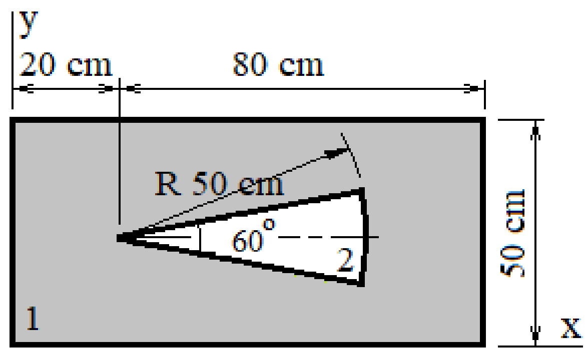
Part	A (cm^2)	$\bar{y}$ (cm)	$A\bar{y}$ (cm^3)
1	108.5	1.75	189.88
2	40	13.5	540
3	52.5	25.25	1325.63
Totals	201		2055.51



$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{2055.51}{201} = 10.23 \text{ cm}$$

مثال (٧-٦):

حدد موقع مركز اللوحة المستطيلة المجوفة بقطاع دائري كما هو موضح في الشـــكل (مث. ٧-٦).



شكل (مث. ٧-٦)

الحل:

$$\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0.5236 \text{ rad.}$$

$$A_2 = R^2\,\alpha = (50)^2 \times 0.5236 = 1309 \text{ cm}^2$$

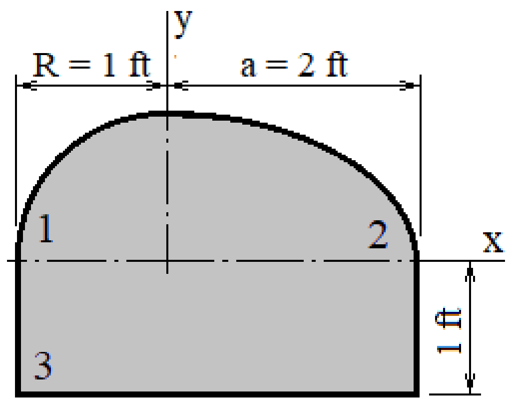
$$\bar{x}_1 = 20 + \frac{2}{3}\,\frac{R \sin\alpha}{\alpha} = 20 + \frac{2}{3}\,\frac{50 \sin 30}{0.5236} = 20 + 31.83 \text{ cm} = 51.83 \text{ cm}$$

Part	A (cm^2)	$\bar{x}$ (cm)	$A\bar{x}$ (cm^3)
1	5000	50	250000
2	– 1309	51.83	– 67847
Totals	3691		182153

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{182153}{3691} = 49.35 \text{ cm}$$

مثال (٧-٧):

حدد موقع مركز اللوحة الموضحة في الشـــكل (مث. ٧-٧)، والتي تتكون من ثلاثة أجزاء، ربع دائرة ، وربع شكل بيضوي، ومستطيل.



شكل (مث. ٧-٧)

الحل:

$A_1 = \dfrac{\pi r^2}{4} = 0.785\ ft^2 \qquad A_2 = \dfrac{\pi\, a\, b}{4} = 1.57\ ft^2 \qquad A_3 = 1 \times 3 = 3\ ft^2$

$\bar{x}_1 = -\,0.424\ r = -\,0.424\ \ ft \qquad \bar{y}_1 = 0.424\ r = 0.424\ ft$

$\bar{x}_2 = \dfrac{4\,a}{3\,\pi} = 0.849\ ft \qquad \bar{y}_2 = \dfrac{4\,b}{3\,\pi} = 0.4244\ ft$

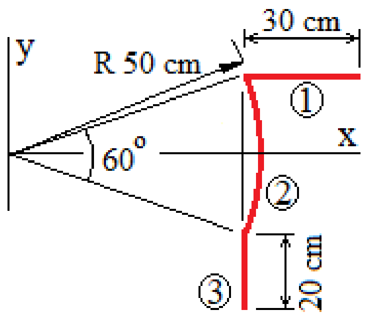
Part	**A (ft^2)**	$\bar{x}$ **(ft)**	$\bar{y}$ **(ft)**	**A**$\bar{x}$ **(ft^3)**	**A**$\bar{y}$ **(ft^3)**
1	0.785	– 0.424	0.424	– 0.333	0.333
2	1.57	0.849	0.4244	1.333	0.666
3	3	0.5	– 0.5	1.5	– 1.5
Total	$\sum A = 5.355$			2.5	– 0.501

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{2.5}{5.355} = 0.467\ ft$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{-0.501}{5.355} = -\,0.094\ ft$$

مثال (٧-٨):

حدد موقع مركز السلك المبين في الشكل (مث. ٧-٨).



شكل (مث. ٧-٨)

الحل:

$$\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0.52 \text{ rad} \qquad L_2 = 2\, r\, \alpha = 2 \times 50 \times 0.52 = 52 \text{ cm}$$

$$\bar{x}_1 = 50 \cos 30 + 15 = 58.3 \text{ cm} \qquad \bar{y}_1 = 50 \sin 30 = 25 \text{ cm}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{50 \sin 30}{0.52} = 48.08 \text{ cm} \qquad \bar{y}_2 = 0$$

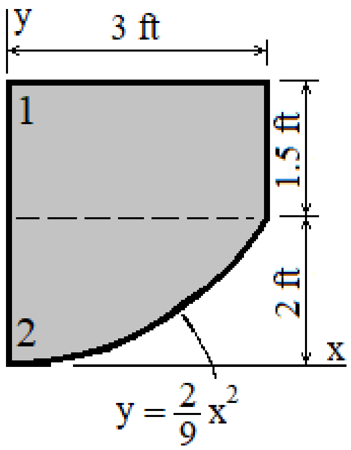
$$\bar{x}_3 = 50 \cos 30 = 43.3 \text{ cm} \qquad \bar{y}_3 = -(50 \sin 30 + 10) = -35 \text{ cm}$$

Segment	**L (ft)**	**$\bar{x}$ (ft)**	**$\bar{y}$ (ft)**	**L $\bar{x}$ (ft²)**	**L $\bar{y}$ (ft²)**
1	30	58.3	25	1749	750
2	52	48.08	0	2500	0
3	20	43.3	– 35	866	– 700
Total	102			5115	50

$$\bar{X} = \frac{\sum L \bar{x}}{\sum L} = \frac{5115}{102} = 50.15 \text{ cm} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum L \bar{y}}{\sum L} = \frac{50}{102} = 0.49 \text{ cm}$$

مثال (٧-٩):

حدد مركز اللوحة الموضحة في الشكل (مث. ٧-٩) ، والتي تتكون من جزأين، جزء قطع مكافئ وجزء مستطيل.



شكل (مث. ٧-٩)

الحل:

$$A_2 = \frac{2\,a\,b}{3} = \frac{2\times3\times2}{3} = 4 \text{ ft}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{3\,a}{8} = \frac{3\times3}{8} = 1.125 \text{ ft}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{3\,b}{5} = \frac{3\times2}{5} = 1.2 \text{ ft}$$

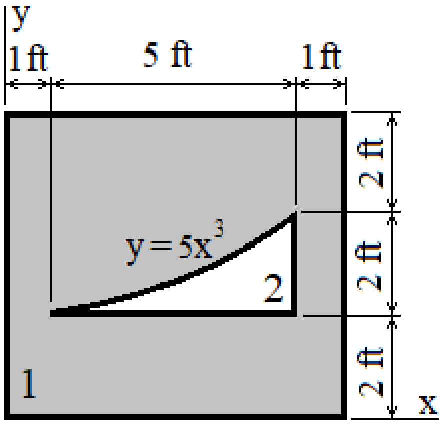
Part	**A (ft^2)**	**$\bar{x}$ (ft)**	**$\bar{y}$ (ft)**	**$A\bar{x}$ (ft^3)**	**$A\bar{y}$ (ft^3)**
1	4.5	1.5	2.75	6.75	12.375
2	4	1.125	1.2	4.5	4.8
Total	$\sum A = 8.5$			11.25	17.175

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{11.25}{8.5} = 1.32 \text{ ft}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{17.175}{8.5} = 2.02 \text{ ft}$$

مثال (٧-١٠):

حدد مركز اللوحة المستطيلة المجوفة بمنطقة أسفل منحنى ذو علاقة مثلثية كما هو موضح في الشـــكل (مث. ٧-١٠).



شكل (مث. ٧-١٠)

الحل:

$$A_2 = \frac{1}{n+1}\ b\ h = \frac{1}{3+1} \times 5 \times 2 = 2.5\ ft^2$$

$$\bar{x}_2 = 1 + \frac{1}{n+2}\ b = 1 + \frac{1}{3+2} \times 5 = 2\ ft$$

$$\bar{y}_2 = 2 + \frac{n+1}{4n+2}\ h = 2 + \frac{3+1}{12+2} \times 2 = 2.57\ ft$$

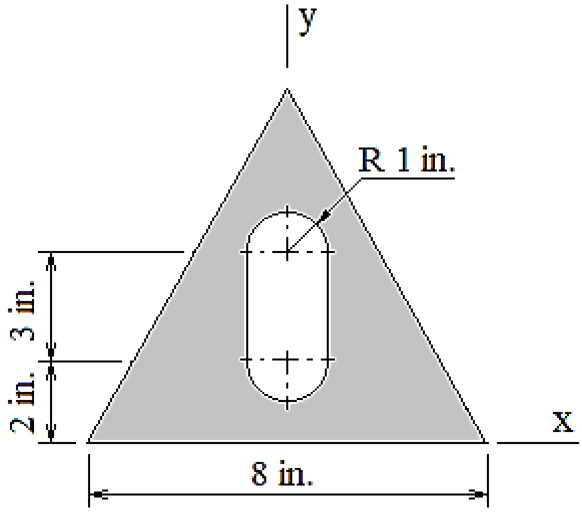
Part	A (ft^2)	$\bar{x}$ (ft)	$\bar{y}$ (ft)	$A\bar{x}$ (ft^3)	$A\bar{y}$ (ft^3)
1	42	3.5	3	147	126
2	– 2.5	2	2.57	– 5	– 6.425
Total	$\sum A = 39.5$			142	119.575

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{142}{39.5} = 3.6\ ft$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{119.575}{39.5} = 3.03\ ft$$

مثال (٧-١١):

بالنسبة للمثلث متساوي الأضلاع الموضح في الشكل (مث. ٧-١١)، أوجد الاحداثي العمودي لمركز المنطقة المظللة.



شكل (مث. ٧-١١)

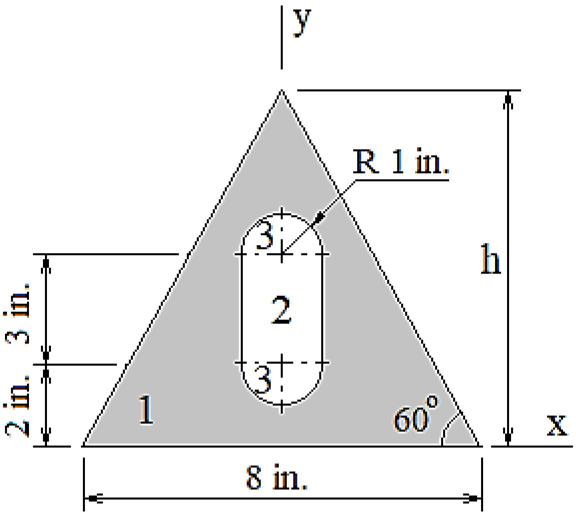
الحل:

$h = 8 \sin 60 = 6.93$ in.

$A_1 = ½ \times 8 \times 6.93 = 27.7$ in.

$A_2 = 2 \times 3 = 6$ in.

$A_3 = ½ \times 1^2 \times \pi \times 2 = 3.14$ in.

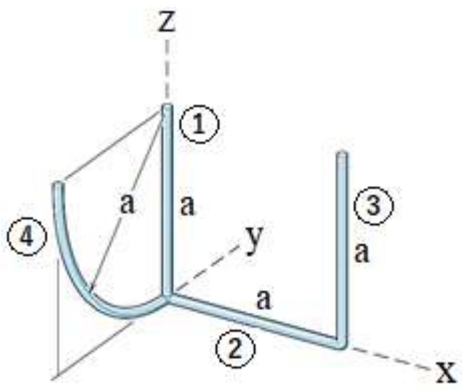


Part	A (in.²)	$\bar{y}$ (in.)	$\bar{y}A$ (in.³)
1	27.7	2.31	64
2	– 6	3.5	– 21
3	– 3.14	3.5	– 11
Totals	18.56		32

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{32}{18.56} = 1.72 \text{ in.}$$

مثال (٧-١٢):

حدد إحداثيات مركز الكتلة لمجمع االقضبان الرفيعة المنتظمة المصنوعة من نفس المعدن والملحومة مع بعضها، كما مبين في الشكل (مث. ٧-١٢).



شكل (مث. ٧-١٢)

الحل:

Segment	L	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}$ L	$\bar{y}$ L	$\bar{z}$ L
1	a	0	0	$\frac{a}{2}$	0	0	$\frac{a^2}{2}$
2	a	$\frac{a}{2}$	0	0	$\frac{a^2}{2}$	0	0
3	a	a	0	$\frac{a}{2}$	a^2	0	$\frac{a^2}{2}$
4	$\frac{\pi a}{2}$	0	$-\frac{2a}{\pi}$	$a\,(1-\frac{2}{\pi})$	0	$-a^2$	$a^2(\frac{\pi}{2}-1)$
Total	$a\,(3+\frac{\pi}{2})$				$\frac{3}{2}a^2$	$-a^2$	$\frac{\pi}{2}a^2$

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}\,L}{\sum A} = \{\frac{3}{2}a^2\} / \{a(3+\frac{\pi}{2})\} = \frac{3a}{6+\pi}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}\,L}{\sum A} = \{-a^2\} / \{a(3+\frac{\pi}{2})\} = -\frac{2a}{6+\pi}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum \bar{z}\,L}{\sum A} = \{\frac{\pi}{2}a^2\} / \{a(3+\frac{\pi}{2})\} = \frac{\pi a}{6+\pi}$$

<u>مثال (٧-١٣):</u>

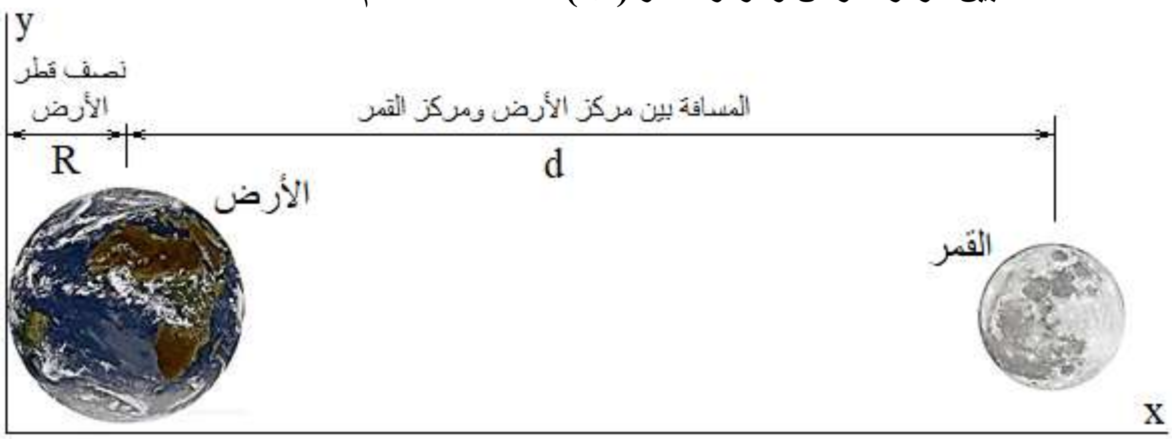
أوجد المسافة (D) بين مركز الأرض ومركز الكتلة المشتركة للأرض والقمر.

١- نصف قطر الأرض (R) = ٦٣٧١ كم.

٢- كتلة الأرض (m_E) = ٥,٩٧ × ١٠ ^٢٤^ كغم.

٣- كتلة القمر (m_M) = ٧,٣٥ × ١٠ ^٢٢^ كغم.

٤- المسافة بين مركز الأرض ومركز القمر (d) = ٣٨٤٤٠٠ كم



شكل (مث. ٧-١٣)

الحل:

Blanet	m (kg)	$\bar{x}$ (km)	m $\bar{x}$ (kg.km)
Earth	5.97×10^{24}	6371	3803.5×10^{25}
Moon	7.35×10^{22}	390771	2872.2×10^{25}
Totals	0.60435×10^{25}		6675.7×10^{25}

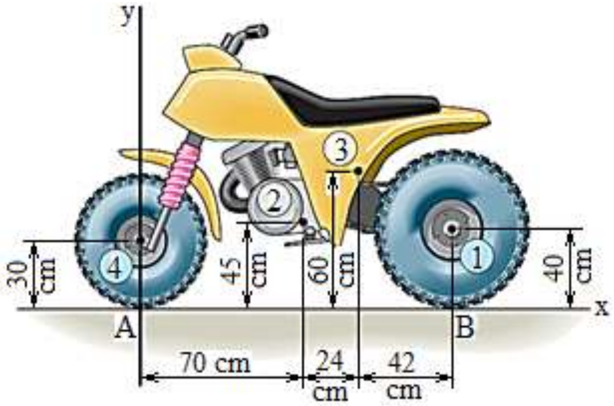
$$\bar{x} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = \frac{5937.7 \times 10^{25}}{0.60435 \times 10^{25}} = 11046 \text{ km}$$

$$D = \bar{x} - R = 11046 - 6371 = 4675 \text{ km}$$

مثال (٧-١٤):

في الدراجة النارية الموضحة في الشكل (مث. ٧-١٤)، تم جدولة موقع مركز الثقل لكل مكون وكتلته. إذا كانت الدراجة ذات الثلاث عجلات متناظرة بالنسبة إلى المستوي (x–y)، حدد موقع مركز كتلة الدراجة النارية.

١- كتلة العجلات الخلفية (9 kg).
٢- كتلة المكونات الميكانيكية (40 kg).
٣- كتلة الهيكل (60 kg).
٤- كتلة العجلة الأمامية (4kg).



شكل (مث. ٧-١٤)

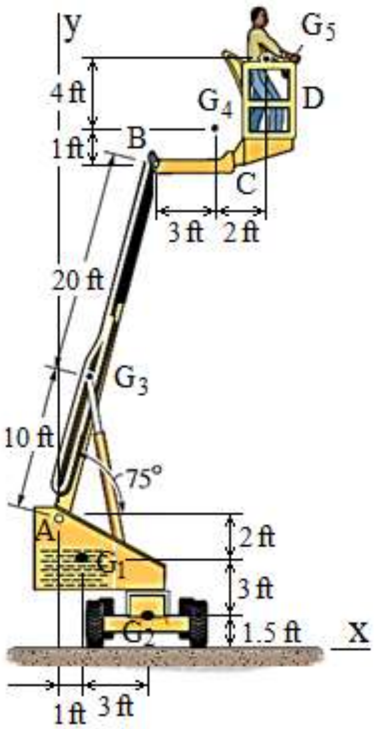
الحل:

Part	m (kg)	$\bar{x}$ (cm)	$\bar{y}$ (cm)	m $\bar{x}$ (kg.cm)	m $\bar{y}$ (kg.cm)
1	9	136	40	1224	360
2	40	70	45	2800	1800
3	60	94	60	5640	3600
4	4	0	30	0	120
Total	113			9664	5880

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = \frac{9664}{113} = 85.5 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = \frac{5880}{113} = 52 \text{ cm}$$

مثال (٧-١٥):



شكل (مث. ٧-١٥)

رافعة متخصصة في مجال الصيانة الكهربائية وزن القاعدة (2000 Ib)، وزن مجموعة العجلات (1000 Ib)، وزن الذراع (AB) (1500 Ib)، وزن القفص (BCD) (200 Ib)، ووزن الكهربائي (160 Ib)، ومراكز الثقل تقع عند النقاط (G_1)، (G_2)، (G_3)، (G_4)، (G_5). على التوالى. حدد موقع مركز وزن الرافعة في المستوى (x – y).

الحل:

$\bar{x}_3 = 10 \cos 75 = 2.6$ ft

$\bar{y}_3 = 6.5 + 10 \sin 75 = 16.16$ ft

$\bar{x}_4 = 30 \cos 75 + 3 = 10.76$ ft

$\bar{y}_4 = 6.5 + 30 \sin 75 + 1 = 36.48$ ft

$\bar{x}_4 = 30 \cos 75 + 5 = 12.76$ ft

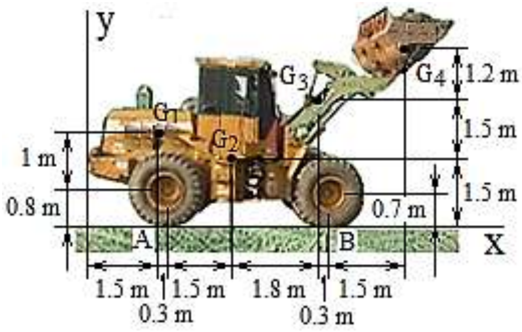
$\bar{y}_4 = 6.5 + 30 \sin 75 + 5 = 40.48$ ft

Part	W (Ib)	$\bar{x}$ (Ib)	$\bar{y}$ (Ib)	W $\bar{x}$ (Ib.ft)	W $\bar{y}$ (Ib.ft)
1	2000	1	4.5	2000	9000
2	1000	4	1.5	4000	1500
3	1500	2.6	16.16	3900	24240
4	500	10.76	36.48	5380	18240
5	160	12.76	40.48	2042	6477
Total	5160			17322	59457

$$\bar{X} = \frac{\sum W \bar{x}}{\sum W} = \frac{17322}{5160} = 3.36 \text{ ft}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum W \bar{y}}{\sum W} = \frac{48513}{5160} = 11.52 \text{ ft}$$

مثال (٧-١٦):



شكل (مث. ٧-١٦)

موقع مركز الثقل والكتلة لكل مكون من مكونات الشفل الموضح في الشكل (مث. ٧-١٦) مبينة أدناه. حدد موقع مركز كتلة الشفل في المستوي (x – y).

١- كتلة محرك الشفل (2 tons) ومركز ثقله (G_1).
٢- كتلة حجرة الشفل (0.8 ton) ومركز ثقلها (G_2).
٣- كتلة ذراع الشفل (1.2 ton) ومركز ثقله (G_3).
٤- كتلة جرافة الشفل (1 ton) ومركز ثقلها (G_4).
٥- كتلة العجلتين الخلفيتين (0.2 ton).
٦- كتلة العجلتين الأماميتين (0.18 ton).

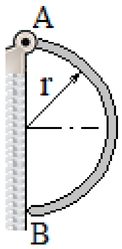
الحل:

Part	**m (ton)**	**$\bar{x}$ (m)**	**$\bar{y}$ (m)**	**m $\bar{x}$ (ton.m)**	**m $\bar{y}$ (ton.m)**
1	2	1.5	1.8	3	3.6
2	0.8	3.3	1.5	2.64	1.2
3	1.2	5.1	3	6.12	3.6
4	1	6.9	4.2	6.9	4.2
5	0.2	1.8	0.8	0.36	0.16
6	0.18	5.4	0.7	0.972	0.126
Total	5.38			19.992	12.886

$$\bar{X} = \frac{\sum m\,\bar{x}}{\sum W} = \frac{19.992}{5.38} = 3.7\ \text{m}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\,\bar{y}}{\sum W} = \frac{12.886}{5.38} = 2.4\ \text{m}$$

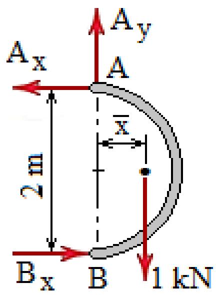
مثال (٧-١٧):



شكل (مث. ٧-١٧)

قضيب منتظم بشكل نصف دائرة وزنه (1 kN) ونصف قطره (1 m)، مثبت مفصلياً عند النقطة (A) ومستند على سطح أملس عند النقطة (B). أحسب ردود الفعل عند النقطتين (A) و (B).

الحل:



$$\bar{x} = \frac{2\,r}{\pi} = \frac{2 \times 1}{\pi} = 0.64 \text{ m}$$

$\sum M_A = 0$

$(B_x \times 2) - (1 \times 0.64) = 0$

$B_x = 0.32 \text{ kN}$

$\sum F_x = 0$

$0.32 - A_x = 0$

$A_x = 0.32 \text{ kN}$

$\sum F_y = 0$

$A_y - 1 = 0$

$A_y = 1 \text{ kN}$

$$F_A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} = \sqrt{0.32^2 + 1^2} = 1.05 \text{ kN}$$

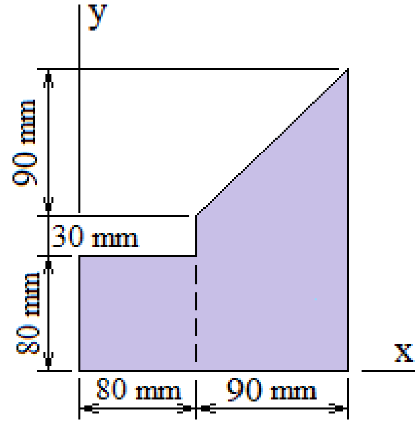
$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{0.32} = 72.3°$$

مسائل:

٧-١) أوجد الإحداثيات الأفقية والعمودية لمركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مس. ٧-١).

الجواب:

$\bar{X} = 98.95\ mm,\ \bar{Y} = 68.4\ mm$

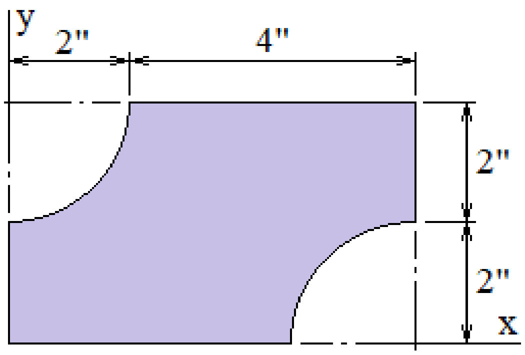


شكل (مس. ٧-١)

٧-٢) أوجد الإحداثيات الأفقية والعمودية لمركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مس. ٧-٢).

الجواب:

$\bar{X} = 3\ in.,\ \bar{Y} = 2\ in.$

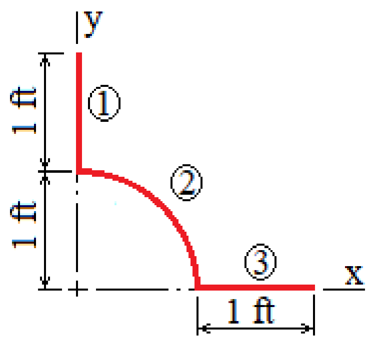


شكل (مس. ٧-٢)

٧-٣) أوجد مركز السلك الموضح في الشكل (مس. ٧-٣).

الجواب:

$\bar{X} = 0.7\ ft,\ \bar{Y} = 0.7\ ft$



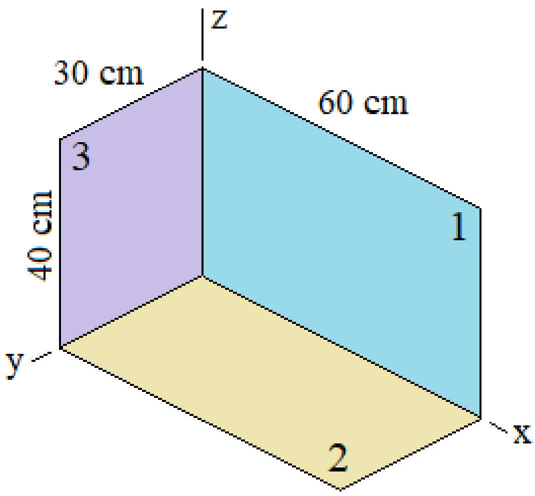
شكل (مس. ٧-٣)

٧-٤) أوجد إحداثيات مركز كتلة الجسم المكون من ثلاث قطع من الصفائح الرقيقة المنتظمة الملحومة معاً.

الجواب:

$\bar{X} = 23.33\ cm,\ \bar{Y} = 8.33\ cm$

$\bar{Z} = 13.33\ cm$

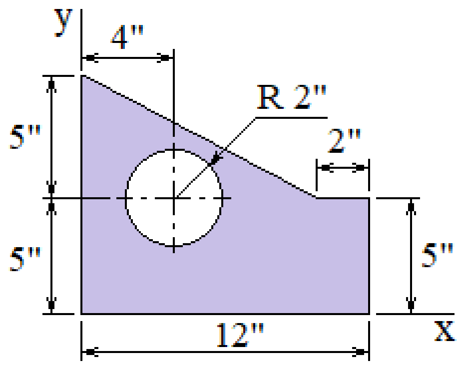


شكل (مس. ٧-٤)

٧-٥) أوجد الإحداثيات الأفقية والعمودية لمركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مس. ٧-٥).

الجواب:

$\bar{X} = 5.4\ in.,\ \bar{Y} = 3.5\ in.$

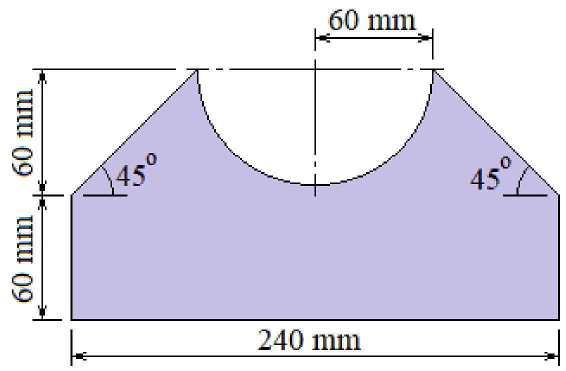


شكل (مس. ٧-٥)

٧-٦) أوجد الاحداثي العمودي (y) لمركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مس. ٧-٦).

الجواب:

$\bar{Y} = 42.64\ mm$

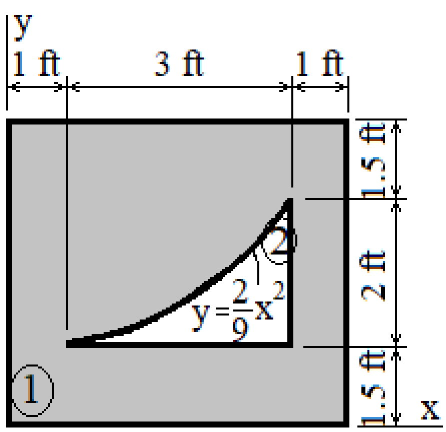


شكل (مس. ٧-٦)

٧-٧) أوجد مركز اللوحة المستطيلة التي تم تجويفها بمساحة تحت قطع مكافئ كما هو موضح في الشكل (مس. ٧-٧).

الجواب:

$\bar{X} = 2.43\ ft,\ \bar{Y} = 2.53\ ft$

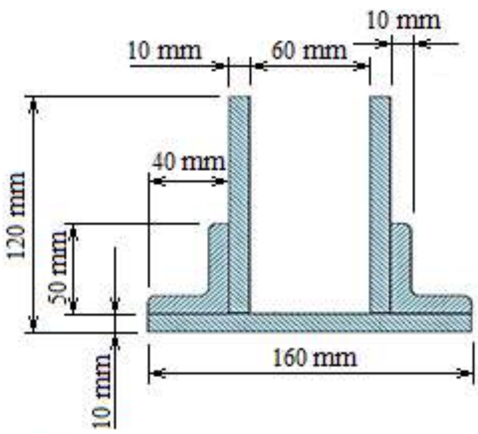


شكل (مس. ٧-٧)

٧-٨) أوجد المسافة (Y) من أسفل لوحة القاعدة إلى النقطة المركزية لمقطع المجسم الموضح في الشكل (مس. ٧-٨).

الجواب:

$\bar{Y} = 36.11\ mm$

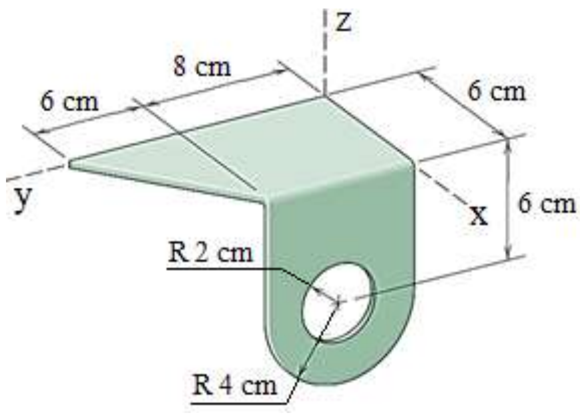


شكل (مس. ٧-٨)

٧-٩) أوجد إحداثيات مركز الكتلة للبراكيت الموضح في الشـــكل (مس. ٧-٩)، والذي يتكون من صفائح معدنية ذات سمك (موحد).

الجواب:

$\bar{X} = 4.29\ cm,\ \bar{Y} = 4.85\ cm$
$\bar{Z} = -2.07\ cm.$

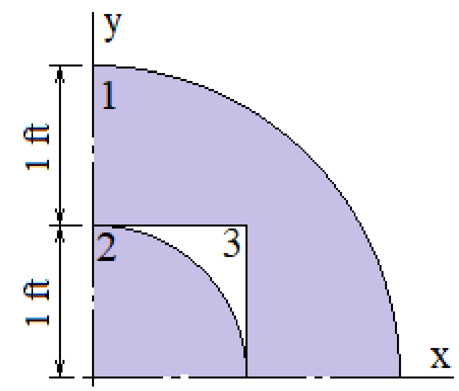


شكل (مس. ٧-٩)

٧-١٠) أوجد الإحداثيات الأفقية والعمودية لمركز المنطقة المظللة الموضحة في الشكل (مس. ٧-١٠).

الجواب:

$\bar{X} = 0.85\ ft,\ \bar{Y} = 0.85\ ft$



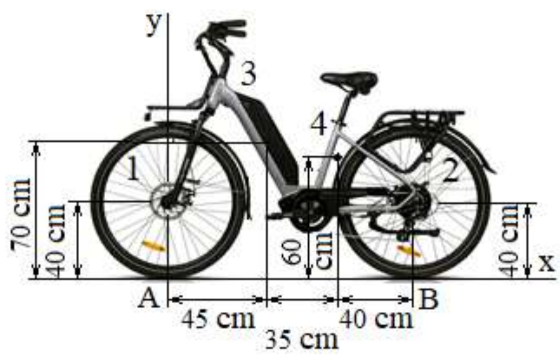
شكل (مس. ٧-١٠)

٧-١١) في الدراجة الموضحة في الشـكل (مس. ٧-١١). أدناه جدولة موقع مركز الثقل لكل مكون وكتلته. حدد موقع مركز كتلة الدراجة في المستوي (x – y).

١- كتلة العجلة الأمامية (2 kg).
٢- كتلة العجلة الخلفية (2 kg).
٣- كتلة مجمع التوجيه (5 kg).
٤- كتلة المقعـد ومجمـع تـروس القيادة (6 kg).

الجواب:

$\bar{X} = 63\ cm,\ \bar{Y} = 58\ cm$



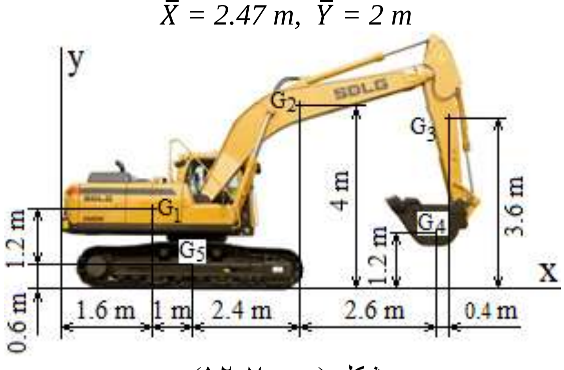
شكل (مس. ٧-١١)

٧-١٢) في الحفارة الموضحة في الشـكل (مس. ٧-١٢). أدناه جدولة موقع مركز الثقل لكل مكون ووزنه. حدد موقع مركز وزن الحفارة في المستوي (x – y).

١- وزن الحفارة (400 kN)، ومركز ثقلها (G_1).
٢- وزن ذراع الحفارة الأكبر (50 kN)، ومركز ثقله (G_2).
٣- وزن ذراع الحفـارة الأصـغر (30 kN)، ومركز ثقله (G_3).
٤- وزن الجرافة (10 kN)، ومركـز ثقلها (G_4).
٥- وزن مجموعة العجلات (40 kN) عند مركز الثقل (G_5).

الجواب:

$\bar{X} = 2.47\ m,\ \bar{Y} = 2\ m$



شكل (مس. ٧-١٢)

الفصل الثامن

عزم القصور الذاتي

THE MOMENT OF INERTIA

هذا الفصل يشرح بالتفصيل موضوع عزم القصور الذاتي بشطريه { عزم القصور الذاتي للمساحات (Aria moment of inertia) وعزم القصور الذاتي للكتل (Mass moment of inertia) }، اذ أن عزم القصور الذاتي للمساحات يستخدم من قبل المهندسين المتخصصين في مجالات الهندسة المدنية وما يناظرها، أما عزم القصور الذاتي للكتل فيستخدم من قبل المهندسين المتخصصين في مجالات الهندسة الخاصة بالتكنولوجيا، كالهندسة الميكانيكية والهندسة الكهربائية وهندسة المكائن والعدد ... الخ.

تعاريف وخصائص (Definitions and characteristics):

- القصور الذاتي هو مفهوم أســاسي في الفيزياء يشــير إلى مقاومة جسم ما لأي تغيير في حالته الحركية (حركة أو سكون)، وهو أحد قوانين نيوتن الثلاثة للحركة، والمعروف باسم قانون نيوتن الأول.
- عزم القصور الذاتي هو مقياس لمقاومة الجسم لتغيير حركته الدورانية.
- عزم القصور الذاتي للمساحة والمعروف أيضاً بالعزم الثاني للمساحة هو خاصية هندسية تُستخدم لوصف مقاومة شكل المقطع العرضي للانحناء، وهو خاصية مهمة في تحليل وتصميم أعضاء أو أضلاع الهيكل.
- عزم القصور الذاتي للكتلة هو مقياس لتوزيع الكتلة في الأجسام الدوارة نسبة الى محور الدوران، أو مقياس لمقاومة الجسم الدوار للتعجيل الزاوي. وهو خاصية مهمة في تحليل وتصميم منظومات السيطرة.

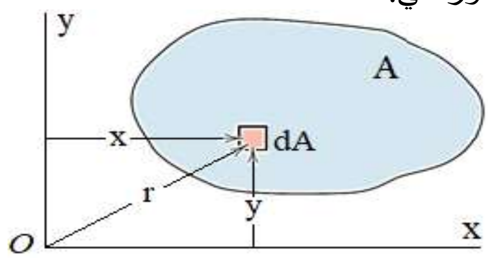
الجزء الأول - عزم القصور الذاتي للمساحات (ARIA MOMENT OF INERTIA):

عزم القصور الذاتي للمساحة والمعروف أيضاً بالعزم الثاني للمساحة هو خاصية هندسية تُستخدم لوصف مقاومة شكل المقطع العرضي للانحناء.

يتفرع عزم القصور الذاتي للمساحات الى فرعين، عزم القصور الذاتي الديكارتي أو المستطيل (Rectangular moment of inertia) وعزم القصور الذاتي القطبي (Polar moment of inertia).

عزم القصور الذاتي الديكارتي أو المستطيل (Rectangular moment of inertia):

عند تقسيم المساحة (A) المبينة في الشكل (٨-١) والواقعة في المستوي (x – y) الى عدة عناصر بمساحة (dA) لكل عنصر، فان عزم القصور الذاتي للعنصر ذو المساحة (dA) حول المحورين (x) و (y) حسب التعريف هو ($dI_x = y^2\, dA$) و ($dI_y = x^2\, dA$) على التوالي. وبذلك فإن عزوم القصور الذاتي لـلمساحة الكلية (A) حول نفس المحاور هي:



شكل (٨-١) اشتقاق عزم القصور الذاتي

$$I_x = \int y^2\, dA \quad …….. (8\text{-}1)$$

$$I_y = \int x^2\, dA \quad …….. (8\text{-}2)$$

باعتبار التكامل شاملاً لكامل المساحة (A).

بشكل عام يمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي: $(I = \int \rho^2\, dA)$

عزم القصور الذاتي القطبي (Polar moment of inertia):

حسب التعريف، يكون عزم القصور الذاتي لـلمســـاحة (dA) المبينة في الشـكل (٨-١) حول النقطة (O) التي تمثل المحور (z) العمود على مستوي الورقة هو ($dI_z = r^2\, dA$). ويكون عزم القصور الذاتي للمساحة الكلية (A) حول النقطة (O) هو:

$$I_z = J_o = \int r^2\, dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}3)$$

حسب نظرية فيثاغورس:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

بالتعويض بالمعادلة (8-3):

$$I_z = J_o = \int r^2\, dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2\, dA + \int y^2\, dA$$

وحسب المعادلات (8-1) و (8-2):

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad\qquad I_y = \int x^2\, dA$$

يكون:

$$I_z = I_x + I_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}4)$$

أي أن عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة معينة يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي لتلك المساحة نسبةً الى محورين متعامدين (x) و (y) وواقعين في مستوى المساحة ويلتقيان مع المحور (z) العمود على مستوى المساحة بنقطة واحدة (O).

وحدات القياس والاشارات:

من التعريف، الصيغة الرياضية لعزم القصور الذاتي للمساحة هي:

$$(I_z = J_o = \int r^2\, dA) \text{ ، } (I_y = \int x^2\, dA) \text{ ، } (I_x = \int y^2\, dA)$$

وحيث أن وحدات (x , y , z) هي وحدات طول، ستكون وحدات (x^2 , y^2 , z^2) هي مربع وحدات الطول، وتكون موجبة بسبب التربيع ووحدة (dA) هي وحدة مساحة وهي ايضاً مربع وحدة الطول وموجبة، وبالتالي فان وحدة عزم القصور الذاتي للمساحة هي وحدة طول مرفوعة للأس (٤) وتكون موجبة، أي (mm^4 , cm^4 , m^4) أو ما يناظرها.

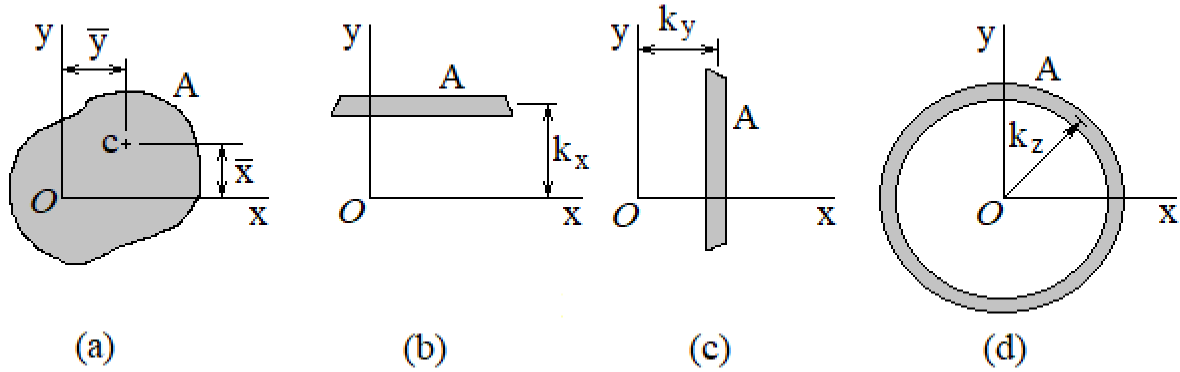
نصف القطر التدويمي (Radius of gyration - k -):

نصف القطر التدويمي، غالبًا ما يُرمز له بالرمز (k) هو خاصية تستخدم لوصف توزيع مساحة الجسم حول محور الدوران، وهو مقياس لكيفية توزيع المساحة حول المحور.
يمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي للمساحة (A) من حيث نصف القطر التدويمي بالصيغة الرياضية التالية:

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}5)$$

$$I = k^2 A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}5)$$

لتصور المعنى الهندسي للمعادلة (8-5) نفرض أن المساحة (A) تضغط لتصبح على شكل شريحة طويلة ضيقة أفقية أو عمودية أو حلقية كما مبين في الشكل (٨-٢).



شكل (٨-٢) نصف القطر التدويمي

في هذه الحالة كل مساحة تفاضلية (dA) تبعد بنفس المسافة (k) عن محور القصور الذاتي، وتكون المعادلة كالتالي:

$$I = \int k^2\, dA = k^2 \int dA = k^2 A$$

وذلك لأن البعد (k) هو قيمة ثابتة لكل المساحات التفاضلية (dA)، يمكن أن تكون الشريحة التي تمثل المساحة على أي جهة من جهات المحور وتكون قيمة (k) موجبة دائماً بسبب التربيع.

باختصار، يمكن كتابة المعادلة (8-5) كما يلي:

$$\left.\begin{array}{lcl} I_x = k_x^2 A & & k_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ I_y = k_y^2 A & \text{or} & k_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \\ I_z = k_z^2 A & & k_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{A}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (8\text{-}6)$$

نصف القطر التدويمي، هو مقياس لتوزيع المساحة من محور معين. يمكن التعبير عن عزم قصور ذاتي مستطيل أو قطبي عن طريق تحديد نصف القطر التدويمي والمساحة.

عند تعويض المعادلة (8-7) بالمعادلة (8-4) يصبح:

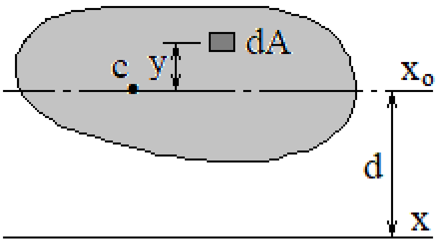
$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}7)$$

نقل عزم القصور الذاتي للمساحة الى محور آخر:

يتطلب أحياناً احتساب عزم القصور الذاتي لمساحة معينة نسبة الى محور موازي للمحور المركزي لها.

معادلة عزم القصور الذاتي لمساحة معينة نسبة الى المحور المركزي لها (x_o) هي:

$$\bar{I}_x = \int y^2 \, dA \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}8)$$



شكل (٨-٣) نقل عزم القصور الذاتي للمساحة الى محور آخر

عزم القصور الذاتي لنفس المساحة نسبة الى محور (x) موازي للمحور المركزي لها (x_o) ويبعد عنه بمسافة مقدارها (d) نحصل عليه من المعادلة التالية:

$$I_x = \int (y + d)^2 \, dA = \int (y^2 + 2dy + d^2) \, dA$$

$$I_x = \int y^2 \, dA + 2d \int y \, dA + d^2 \int dA \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}9)$$

- (d) التي تمثل المسافة بين المحورين هي كمية ثابتة ولهذا تكون خارج التكامل.
- الحد الأول ($\int y^2 \, dA$) يساوي ($\bar{I}_x$) حسب المعادلة (8-8).
- الحد الثاني ($2d \int y \, dA$) يساوي (2yAd) وقيمة (y) تساوي صفر لأنها تمثل المسافة بين مركز المساحة والمحور المركزي لها، والمحور المركزي يمر بمركز المساحة فتكون قيمة (y) مساوية للصفر وبالتالي تكون قيمة الحد الثاني مساوية للصفر.
- الحد الثالث ($d^2 \int dA$) يساوي (Ad^2).

فتكون المعادلة (8-9) كما يلي:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}10)$$

بنفس الطريقة:

$$I_y = \bar{I}_y + Ad^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}10)$$

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}10)$$

كذلك:

$$\left.\begin{aligned} k_x^2 &= \bar{k}_x^2 + d^2 \\ k_y^2 &= \bar{k}_y^2 + d^2 \\ k_z^2 &= \bar{k}_z^2 + d^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}11)$$

أي أن معادلة عزم القصور الذاتي للمساحة نسبة الى المحور (x) يساوي عزم القصور الذاتي لها نسبة الى المحور المركزي لها (x_o) يضاف اليها حاصل ضرب المساحة في مربع البعد بين المحورين.

بنفس الطريقة يمكن أن تكون معادلات عزم القصور الذاتي القطبي ولنصف القطر التدويمي القطبي بين محور معين والمحور المركزي الموازي له كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \bar{J}_x + Ad^2 \\ J_y &= \bar{J}_y + Ad^2 \\ J_z &= \bar{J}_z + Ad^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}12)$$

عزم القصور الذاتي للمساحات المركبة:

المساحة المركبة تتكون من عدد من الأجزاء أو الأشكال البسيطة نسبياً مثل المستطيلات والمثلثات والدوائر وتكون متصلة لتشكل المساحة المركبة، بشرط أن يكون عزم القصور الذاتي للمساحة لكل جزء من هذه الأجزاء معلوم أو يمكن ايجاده حول محور مشترك لكل الأجزاء. عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة حول هذا المحور يساوي المجموع الجبري لعزوم القصور الذاتية لمساحات جميع أجزائه حول هذا المحور.

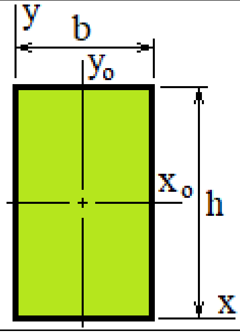
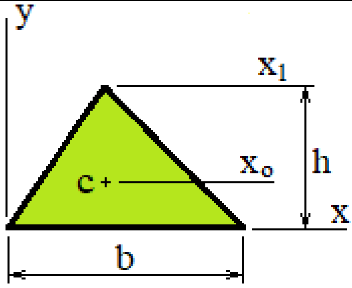
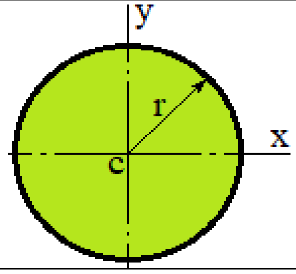
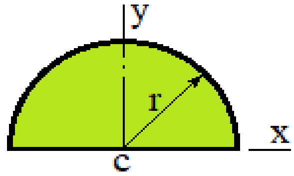
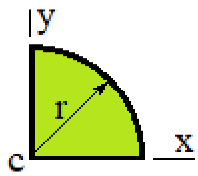
طريقة التحليل:

يمكن تحديد عزم القصور الذاتي لمساحة مركبة حول محور مرجعي باستخدام الخطوات التالية:

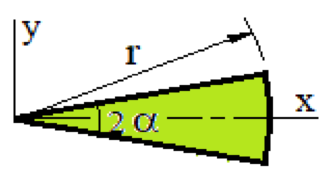
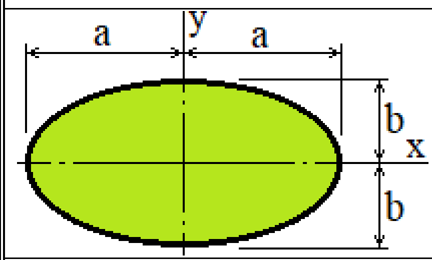
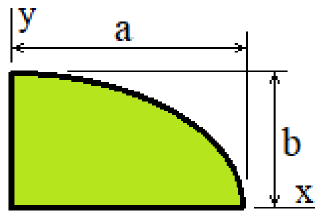
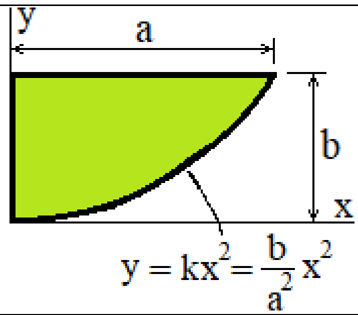
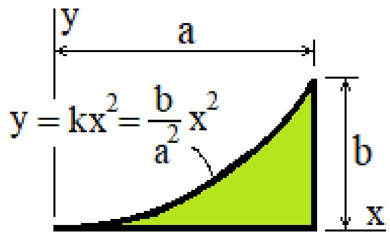
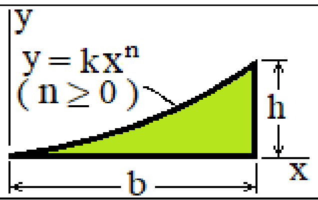
- استخدام مخطط يبن الأجزاء أو الأشكال التي تتكون منها المساحة المركبة ويوضح المسافة العمودية من النقطه الوسطى لكل جزء إلى المحور المركزي الرئيسي.
- إذا كان المحور المركزي لكل جزء لا ينطبق على المحور المركزي الرئيسي، فيجب استخدام نظرية نقل عزم القصور الذاتي ($I = \bar{I} + Ad^2$) لتحديد عزم القصور الذاتي لكل جزء حول المحور المركزي الرئيسي.
- يتم احتساب عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة بأكملها حول المحور المركزي الرئيسي من خلال جمع عزوم القصور الذاتي لأجزائها المركبة منها حول هذا المحور.
- إذا كان للمساحة المركبة " فتحة "، يتم احتساب عزم القصور الذاتي عن طريق طرح عزم القصور الذاتي للفتحة من عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة بأكمله بما في ذلك الفتحة.

خصائص الأشكال المستوية:

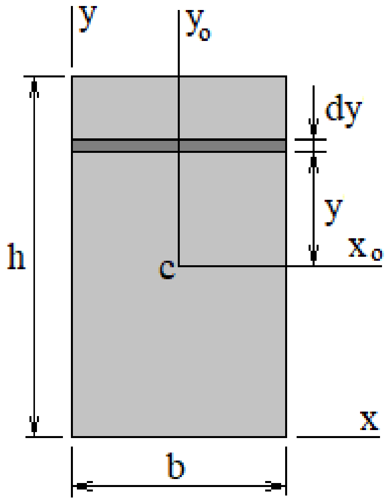
جدول (٨-١) خصائص الأشكال المستوية:

الشكل		المساحة أو الطول	عزم القصور الذاتي للمساحة
مستطيل		$b\,h$	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
مثلث		$\frac{1}{2}bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x1} = \frac{bh^3}{4}$
دائرة		πr^2	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$
نصف دائرة		$\frac{\pi r^2}{2}$	$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})\,r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
ربع دائرة		$\frac{\pi r^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = (\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi})\,r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$

جدول (٨-١) خصائص الأشكال المستوية:

الشكل		المساحة أو الطول	عزم القصور الذاتي للمساحة
قطاع دائرة		$r^2\alpha$	$I_x=\frac{r^4}{4}(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $I_y=\frac{r^4}{4}(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $I_z=\frac{1}{2}r^4\alpha$
قطع ناقص		$\pi a b$	$I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$ $I_y=\frac{\pi ba^3}{4}$
ربع قطع ناقص		$\frac{\pi a b}{4}$	$I_x=\frac{\pi ab^3}{16}$, $\bar{I}_x=(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi})\,ab^3$ $I_y=\frac{\pi ba^3}{16}$, $\bar{I}_y=(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi})\,ba^3$ $I_z=\frac{\pi ab}{16}(a^2+b^2)$
مساحة قطع مكافيء		$\frac{2\,a\,b}{3}$	$I_x=\frac{2ab^3}{7}$ $I_y=\frac{2ba^3}{15}$ $I_z=2ab\,(\frac{a^2}{15}+\frac{b^2}{7})$
مساحة تحت قطع مكافيء		$\frac{a\,b}{3}$	$I_x=\frac{ab^3}{21}$ $I_y=\frac{ba^3}{5}$ $I_z=ab\,(\frac{a^3}{5}+\frac{b^2}{21})$
المساحة المثلثية تحت المنحنى		$\frac{bh}{n+1}$	$I_x=\frac{bh^3}{3(3n+1)}$ $I_y=\frac{hb^3}{n+3}$

مثال (٨- ١):



شكل (مث. ٨-١)

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المستطيلة الموضحة في الشكل (مث. ٨-١) بالنسبة الى:

(أ) المحور المركزي (x_o)

(ب) المحور (x) الذي يمر بقاعدة المستطيل.

(جـ) القطب أو المحور (z_o) عموديًا على المستوى ($x_o - y_o$) ويمر عبر النقطه المركزية (c).

الحل:

(أ)

$$dA = b\,dy$$

$$\bar{I}_x = \int y^2\,dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2\,(\,b\,dy\,) = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy$$

$$= b\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{h/2} = b\,\frac{h^3}{3\times 8} - b\,\frac{-h^3}{3\times 8} = b\,\frac{2h^3}{3\times 8} = \frac{1}{12}\,bh^3$$

(ب)

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12}\,bh^3 + bh\,(\,\frac{h}{2}\,)^2 = \frac{1}{3}\,bh^3$$

(جـ)

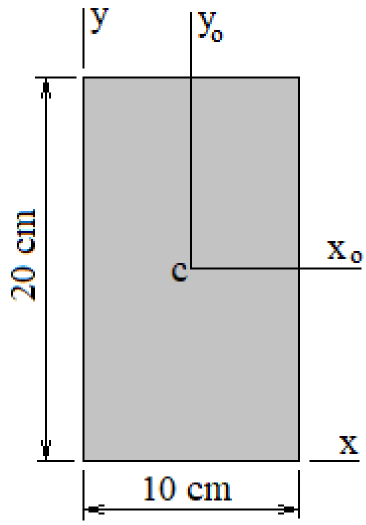
$$\bar{I}_y = \frac{1}{12}\,hb^3$$

$$\bar{I}_z = \bar{J}_o = \bar{I}_x + \bar{I}_y = \frac{1}{12}\,bh^3 + \frac{1}{12}\,hb^3 = \frac{1}{12}\,bh\,(\,h^2 + b^2\,)$$

مثال (٨- ٢):

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المستطيلة الموضحة في الشكل (مث. ٨-٢) بالنسبة الى:

(أ) المحور المركزي (x_o)
(ب) المحور (x) الذي يمر بقاعدة المستطيل.
(جـ) القطب أو المحور (z_o) عموديًا على المستوى ($x_o - y_o$) ويمر عبر النقطه المركزية (c).



شكل (مث. ٨-٢)

الحل:

(أ)

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (10)\,(20)^3 = 6666.67 \text{ cm}^4$$

(ب)

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = 6666.67 + 200\,(10\,)^2 = 26666.67 \text{ cm}^4$$

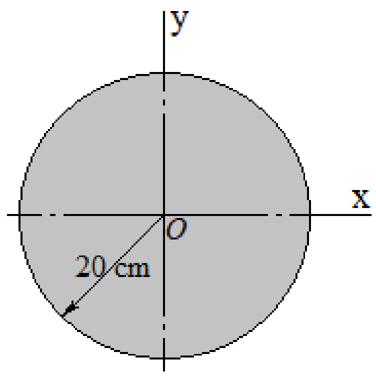
$$I_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{(10)(20)^3}{3} = 26666.67 \text{ cm}^4$$

(جـ)

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} hb^3 = \frac{1}{12} (20)\,(10)^3 = 1666.67 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_z = \bar{J}_o = \bar{I}_x + \bar{I}_y = 6666.67 + 1666.67 = 8333.33 \text{ cm}^4$$

مثال (٨- ٣):



شكل (مث. ٨-٣)

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة الدائرية الموضحة في الشكل (مث. ٨-٣) بالنسبة الى:

(أ) المحور المركزي (x).
(ب) المحور المركزي (y).
(جـ) القطب أو المحور (z) عموديًا على المستوى (x – y) ويمر عبر النقطه المركزية (c).

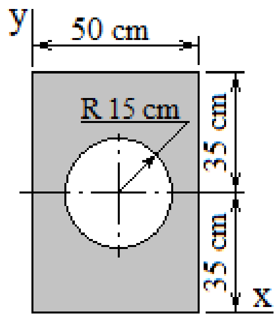
الحل:

(أ) $$I_x = \frac{\pi\, r^4}{4} = \frac{\pi\,(20)^4}{4} = 125663.7\ \text{cm}^4$$

(ب) $$I_y = \frac{\pi\, r^4}{4} = \frac{\pi\,(20)^4}{4} = 125663.7\ \text{cm}^4$$

(جـ) $$I_z = \frac{\pi\, r^4}{2} = \frac{\pi\,(20)^4}{2} = 251327.4\ \text{cm}^4$$

مثال (٨- ٤):



شكل (مث. ٨-٤)

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة الموضحة في الشكل (مث. ٨-٤) حول المحور (x).

الحل:

المستطيل:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12}\, bh^3 + Ad^2 = \frac{1}{12}\,(50)\,(70)^3 + (50)\,(70)\,(35)^2$$
$$= 1429167 + 4287500 = 5716667\ \text{cm}^4$$

الدائرة:

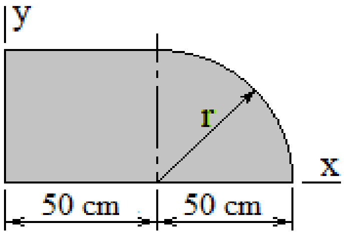
$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{\pi\, r^4}{4} + Ad^2 = \frac{\pi\,(15)^4}{4} + (15)^2\,\pi\,(35)^2 = 39761 + 865901$$
$$= 905662\ \text{cm}^4$$

عزم القصور الذاتي للمساحة:

$$5716667 - 905662 = 4811005\ \text{cm}^4$$

مثال (٨- ٥):

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة الموضحة في الشـــكل (مث. ٨-٥) حول المحور (x).



شكل (مث. ٨-٥)

الحل:

المربع:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12} bh^3 + Ad^2 = \frac{1}{12} (50)\,(50)^3 + (50)\,(50)\,(25)^2$$
$$= 520333 + 1562500 = 2082833 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{(50)(50)^3}{3} = 2082833 \text{ cm}^4$$

ربع الدائرة:

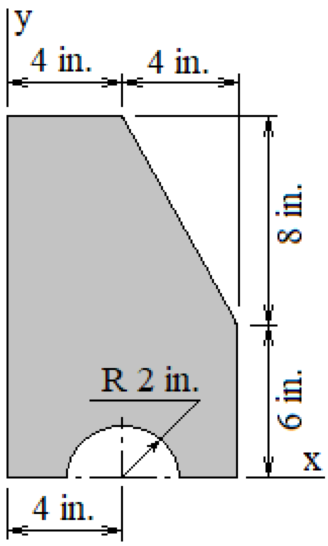
$$I_x = \frac{\pi\, r^4}{16} = \frac{\pi\,(50)^4}{16} = 1227185 \text{ cm}^4$$

عزم القصور الذاتي للمساحة:

$$2082833 + 1227185 = 3310018 = 3.31 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

مثال (٨- ٦):

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة الموضحة في الشـــكل (مث. ٨-٦) حول المحور (x).



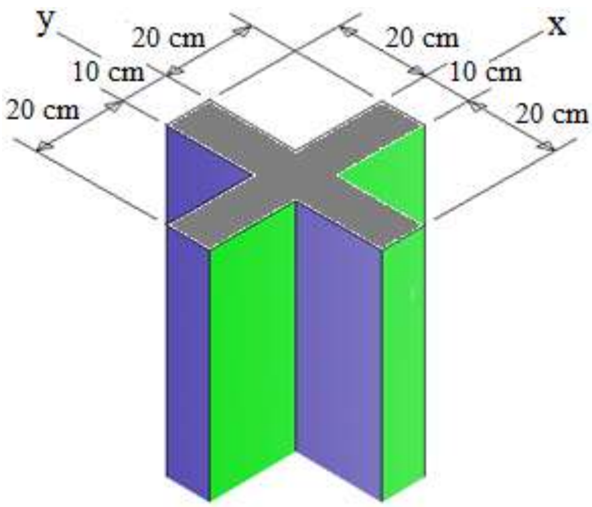
شكل (مث. ٨-٦)

الحل:

$$I_x = \frac{bh^3}{3} - \frac{\pi\, r^4}{8} - \left[\frac{bh^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 8\right)(11.333)^2\right]$$
$$= \frac{(8)(14)^3}{3} - \frac{\pi\,(2)^4}{8} - \left[\frac{(4)(8)^3}{36} + (16)\,(11.333)^2\right]$$
$$= 7317.33 - 6.28 - [\,56.9 + 2055\,] = 5211 \text{ in.}^4$$

مثال (٨- ٧):

أوجد عزم القصور الذاتي (I_x) ونصف القطر التدويمي (k_x) لمساحة المقطع العرضي للعمود الموضح في الشكل (مث. ٨-٧) حول المحور (x).



شكل (مث. ٨-٧)

الحل:

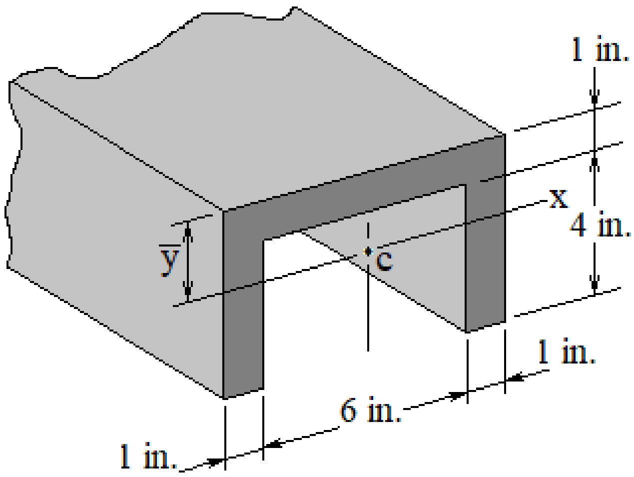
$$I_x = \left(\frac{1}{12}\right)(50)(10)^3 + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(10)(20)^3 + (10)(20)(15)^2\right]$$
$$= 4166.67 + 2\,(6666.67 + 45000) = 107500\ cm^4$$

$$A = (50 \times 10) + 2\,(10 \times 20) = 900\ cm^2$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{107500}{900}} = 10.93\ cm$$

مثال (٨- ٨):

أوجد المسافة العمودية ($\bar{y}$) لمركز المقطع العرضي للشـــيلمان المبين في الشكل (مث. ٨-٨)، ثم جد عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحور (x) الذي يمر عبر النقطه المركزية.

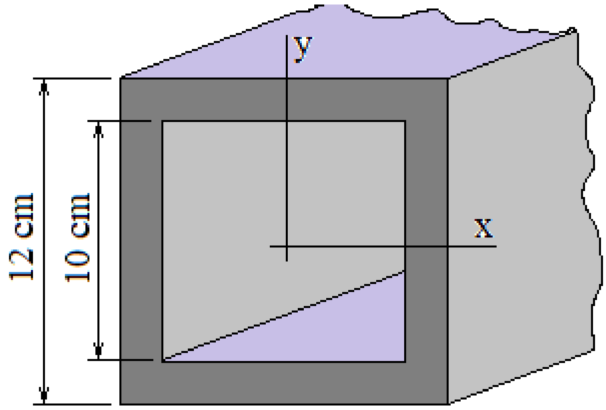


شكل (مث. ٨-٨)

الحل:

$$\bar{y} = \frac{\sum(A\,.\,y)}{\sum A} = \frac{(8)(1)(0.5)+2[(1)(4)(3)]}{(8)(1)+2[(1)(4)]} = \frac{4+24}{8+8} = 1.75\ in.$$

$$I_x = \left[\left(\frac{1}{12}\right)(8)(1)^3 + (8)(1)(1.25)^2\right] + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(1)(4)^3 + (1)(4)(1.25)^2\right]$$
$$= [\,0.667 + 12.5\,] + 2\,[\,5.333 + 6.25\,] = 36.333\ in.^4$$

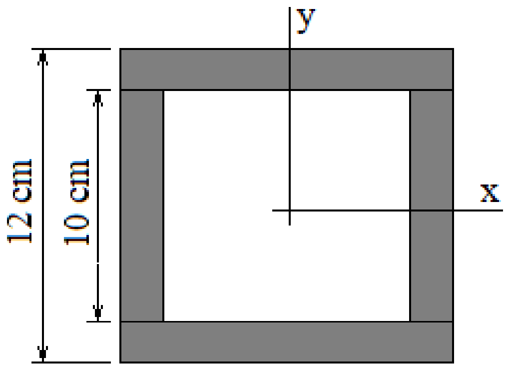


شكل (مث. ٨-٩)

<u>مثال (٨- ٩):</u>

أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للقضيب المربع المقطع حول المحورين المركزيين (x) و (y)، ونصف القطر التدويمي (k_x ، k_y).

الحل:



الطريقة الأولى:

$$I_x = I_y = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(12)^3 - \left(\frac{1}{12}\right)(10)(10)^3$$

$$= 1728 - 833.33 = 894.67\ cm^4$$

الطريقة الثانية:

$$I_x = 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(1)(10)^3\right] + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(12)(1)^3 + (12)(1)(5.5)^2\right]$$

$$= 2\,(83.33) + 2\,(1 + 363) = 894.67\ cm^4$$

$$I_y = 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(1)(12)^3\right] + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(10)(1)^3 + (10)(1)(5.5)^2\right]$$

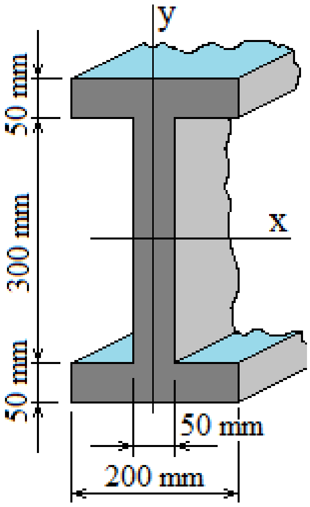
$$= 2\,(144) + 2\,(0.833 + 302.5) = 894.67\ cm^4$$

$$A = 2\,(12 \times 1) + 2\,(1 \times 10) = 44\ cm^2$$

$$k_x = k_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{894.67}{44}} = 4.5\ cm$$

مثال (٨- ١٠):

أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان حرف (I) المبين في الشكل (مث. ٨-١٠) حول المحورين المركزيين (x) و (y)، ثم أوجد نصف القطر التدويمي (k_x) و (k_y).



شكل (مث. ٨-١٠)

الحل:

$$I_x = \left(\frac{1}{12}\right)(50)(300)^3 + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(200)(50)^3 + (200)(50)(175)^2\right]$$
$$= 112500000 + 2\,(2083333 + 306250000)$$
$$= 729166666 \text{ mm}^4 = 729.17\times10^6 \text{ mm}^4$$

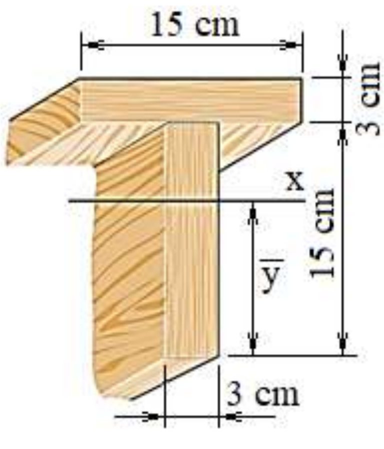
$$I_y = \left(\frac{1}{12}\right)(300)(50)^3 + 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)(50)(200)^3\right]$$
$$= 3125000 + 2\,(33333333.33) = 69791667 \text{ mm}^4 = 69.8\times10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = (50)(300) + 2(200)(50) = 35000 \text{ mm}^2$$

$$k_x = \sqrt{\frac{729166666}{35000}} = 144.34 \text{ mm} \qquad k_y = \sqrt{\frac{69791667}{35000}} = 44.65 \text{ mm}$$

مثال (٨- ١١):

أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان حرف (T) المبين في الشكل (مث. ٨-١١) حول المحور المركزي (x).



شكل (مث. ٨-١١)

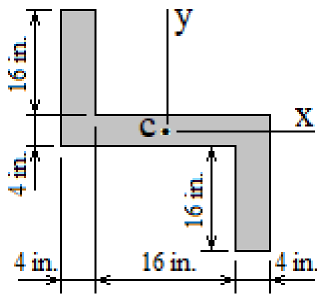
الحل:

$$\bar{y} = \frac{\sum(A\,.\,y)}{\sum A} = \frac{(15)(3)(16.5)+(3)(15)(7.5)}{(15)(3)+(3)(15)} = \frac{742.5+337.5}{45+45} = 12 \text{ cm}$$

$$I_x = \left[\left(\frac{1}{12}\right)(15)(3)^3 + (15)(3)(4.5)^2\right] + \left[\left(\frac{1}{12}\right)(3)(15)^3 + (3)(15)(4.5)^2\right]$$
$$= [\,33.75 + 911.25\,] + [\,843.75 + 911.25\,] = 945 + 1755 = 2700 \text{ cm}^4$$

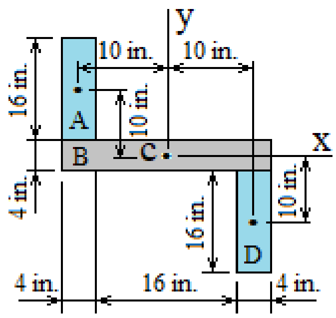
مثال (٨- ١٢):

أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للعضو الموضح في الشكل (مث. ٨-١٢) حول المحورين المركزيين (x) و (y)، ثم أوجد نصف القطر التدويمي (k_x) و (k_y).



شكل (مث. ٨-١٢)

الحل:



المستطيل (A) أو (D):

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$
$$= \left(\frac{1}{12}\right)(4)(16)^3 + (4)(16)(10)^2$$
$$= 1365.3 + 6400 = 7765.3 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad^2$$
$$= \left(\frac{1}{12}\right)(16)(4)^3 + (4)(16)(10)^2$$
$$= 85.3 + 6400 = 6485.3 \text{ in.}^4$$

المستطيل (B):

$$I_x = \left(\frac{1}{12}\right)(24)(4)^3 = 128 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12}\right)(4)(24)^3 = 4608 \text{ in.}^4$$

عزم القصور الذاتية للمساحة الكلية:

$$I_x = (2 \times 7765.3) + 128 = 15658.6 \text{ in.}^4$$
$$I_y = (2 \times 6485.3) + 4608 = 17578.6 \text{ in.}^4$$

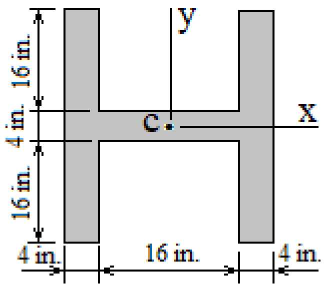
نصف القطر التدويمي:

$$A = (4 \times 24) + 2(4 \times 16) = 224 \text{ in.}^2$$

$$k_x = \sqrt{\frac{15658.6}{224}} = 8.36 \text{ in.}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{17578.6}{224}} = 8.86 \text{ in.}$$

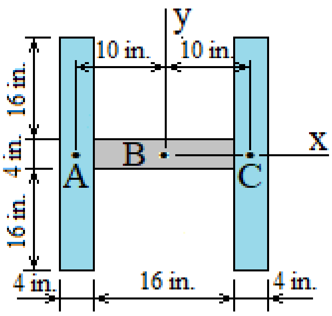
مثال (٨- ١٣):



شكل (مث. ٨-١٣)

أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للعضو الموضح في الشكل (مث. ٨-١٣) حول المحورين المركزيين (x) و (y)، ثم أوجد نصف القطر التدويمي (k_x) و (k_y).

الحل:



المستطيل (A) أو (C):

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$
$$= \left(\frac{1}{12}\right)(4)(16)^3 + (4)(16)(10)^2$$
$$= 1365.3 + 6400 = 7765.3 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad^2$$
$$= \left(\frac{1}{12}\right)(16)(4)^3 + (4)(16)(10)^2$$
$$= 85.3 + 6400 = 6485.3 \text{ in.}^4$$

المستطيل (B):

$$I_x = \left(\frac{1}{12}\right)(16)(4)^3 = 85.33 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12}\right)(4)(16)^3 = 1365.33 \text{ in.}^4$$

عزم القصور الذاتية للمساحة الكلية:

$$I_x = (2 \times 15552) + 85.33 = 31189.33 \text{ in.}^4$$
$$I_y = (2 \times 14592) + 1365.33 = 30549.33 \text{ in.}^4$$

نصف القطر التدويمي:

$$A = 2(4 \times 36) + (4 \times 16) = 352 \text{ in.}^2$$

$$k_x = \sqrt{\frac{31189.33}{352}} = 9.41 \text{ in.}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{30549.33}{352}} = 9.32 \text{ in.}$$

الجزء الثاني - عزم القصور الذاتي للكتلة (Mass Moment of Inertia):

عزم القصور الذاتي للكتلة هو مقياس لتوزيع الكتلة في الأجسام الدوارة نسبة الى محور الدوران، أو مقياس لمقاومة الجسم الدوار للتعجيل الزاوي.
عزم القصور الذاتي للكتلة هو عملية حسابية تتألف من جمع مضروب كل كتلة تفاضلية (dm) في مربع ذراع العزم لها (ρ) مقاساً نسبة الى محور القصور الذاتي.
الصيغة الرياضية لعزم القصور الذاتي للكتلة هي ($\int \rho^2 dm$)، كما أن ($\int \rho^2 dA$) هي الصيغة الرياضية لعزم القصور الذاتي للمساحة. ويستخدم الرمز (I) لعزم القصور الذاتي للكتلة كما تم استخدامه في حالة عزم القصور الذاتي للمساحة، ويمكن استخدامه بالصيغة (I_A) للمساحة وبالصيغة (I_m) للكتلة.
أي أن طريقة حساب عزم القصور الذاتي للكتلة هو تكرار لطريقة حساب عزم القصور الذاتي للمساحة.

$$\left.\begin{array}{ll} I_A = \int \rho^2 dA & I_A = \bar{I}_A + Ad^2 \\ I_m = \int \rho^2 dm & I_m = \bar{I}_m + md^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (8\text{-}13)$$

وحدات القياس والاشارات:

من التعريف، الصيغة الرياضية لعزم القصور الذاتي للكتلة هي ($I_m = \int \rho^2 \, dm$)، حيث أن (ρ) هي المسافة بين مركز الكتلة ومحور القصور الذاتي ووحدته وحدة طول وبذلك تكون وحدة (ρ^2) هي مربع وحدة طول، وتكون موجبة بسبب التربيع ووحدة (dm) هي وحدة كتلة وهي قيمة مطلقة ليس لها اشارة، بالتالي فان وحدة عزم القصور الذاتي للكتلة هي وحدة كتلة مضروبة بمربع وحدة الطول وتكون موجبة، أي ($kg.mm^2$, $kg.cm^2$, $kg.m^2$) أو ما يناظرها.

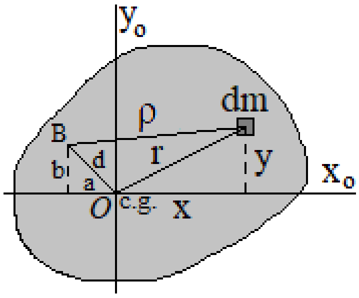
نصف القطر التدويمي (Radius of gyration - k -):

نصف القطر التدويمي، غالبًا ما يُرمز له بالرمز (k) هو خاصية تستخدم لوصف توزيع كتلة الجسم حول محور الدوران، وهو مقياس لكيفية توزيع الكتلة حول المحور. ويمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي للكتلة (m) من حيث نصف القطر التدويمي بالصيغة الرياضية التالية:

$$\left(k = \sqrt{\frac{I}{m}} \right) \quad \text{أو} \quad (I = mk^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \ (8\text{-}14)$$

حيث أن (k) هو نصف القطر التدويمي وهو المسافة من محور القصور الذاتي الى النقطة التي تتمركز عندها كتلة الجسم.

نقل عزم القصور الذاتي للكتلة الى محور آخر:



شكل (٨-٤) نقل عزم القصور الذاتي للكتلة الى محور آخر

يتطلب أحياناً احتساب عزم القصور الذاتي لكتلة معينة نسبة الى محور موازي للمحور المركزي لها.

معادلة عزم القصور الذاتي لكتلة معينة نسبة الى المحور المركزي لها (x_o) هي:

$$\bar{I}_m = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm \quad \ldots\ldots\ldots\ (8\text{-}15)$$

حيث أن (r) تمثل ذراع الكتلة التفاضلية (dm) بالنسبة الى المحور المركزي المار بالنقطة (*O*).

اذا كانت النقطة (B) تمثل نقطة تقاطع المحور الموازي للمحور المركزي مع المقطع العرضي للجسم. عزم القصور الذاتي للكتلة بالنسبة الى المحور الموازي المار في النقطة (B) نرمز له بالرمز (I_m)، وتكون قيمته المستنتجة من التكامل هي:

$$I_m = \int \rho^2\, dm \quad \ldots\ldots\ldots\ (8\text{-}16)$$

حيث أن (ρ) تمثل ذراع العزم للكتلة التفاضلية (dm) بالنسبة الى المحور المار بالنقطة (B).

من الشكل:

$$\rho^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2$$
$$= x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$$

وحيث أن:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad d^2 = a^2 + b^2$$
$$\therefore \quad \rho^2 = r^2 + d^2 + 2ax - 2by$$

بالتعويض عن (ρ^2) في معادلة التكامل لعزم القصور الذاتي:

$$I_m = \int \rho^2\, dm = \int r^2\, dm + d^2 \int dm + 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm \quad \ldots\ldots\ (8\text{-}17)$$

حيث أن:

- ($m\,\bar{x} = \int x\, dm$) ، ($m\,\bar{y} = \int y\, dm$).
- ($\bar{x}$) و ($\bar{y}$) تمثلان موقع مركز الكتلة نسبة الى محاور القياس، وفي هذه الحالة محاور القياس تمر في مركز الكتلة، فتكون قيمة كل من ($\bar{x}$) و ($\bar{y}$) مساوية للصفر وبالتالي فان الحدين الثالث والرابع في المعادلة (8-17) مساوية للصفر وتصبح المعادلة كما يلي:

$$I_m = \bar{I}_m + m\, d^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (8\text{-}18)$$

يتبين من المعادلة (8-18) أن عزم القصور الذاتي الكتلوي لأي جسم بالنسبة الى محور ما يساوي حاصل جمع عزم القصور الذاتي الكتلوي المركزي ($\bar{I}_m$) الموازي للمحور المركزي مع حاصل ضرب كتلة الجسم في مربع المسافة بين المحورين ($m\, d^2$).

يمكن كتابة المعادلة (8-18) بدلالة نصف القطر التدويمي (k):

$$m\, k^2 = m\, \bar{k}^2 + m\, d^2 \quad , \quad k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (8\text{-}19)$$

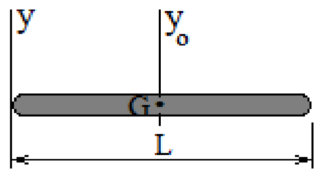
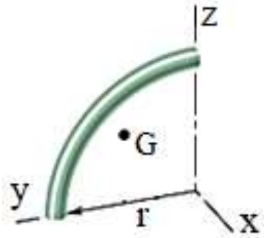
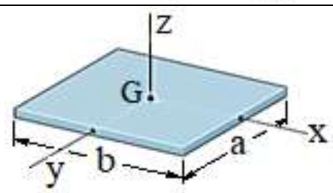
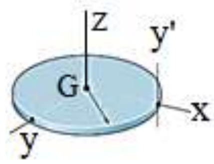
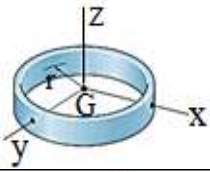
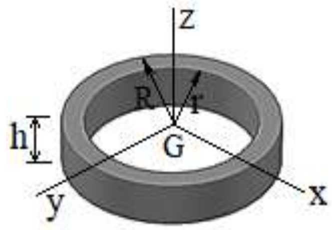
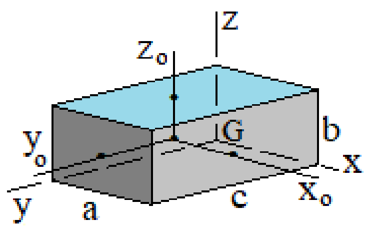
عزم القصور الذاتي الكتلوي للأجسام المركبة:

في الغالب تكون الأجسام المستخدمة في المجالات الهندسية بشكل تراكيب مكونة من عدد من الأجزاء بكتل مختلفة.

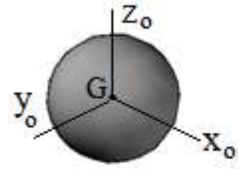
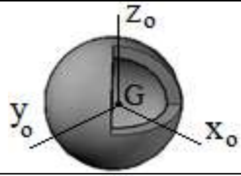
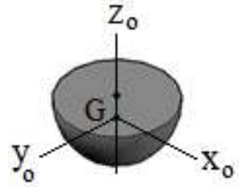
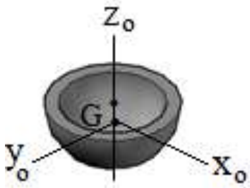
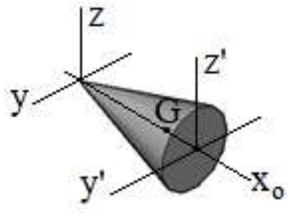
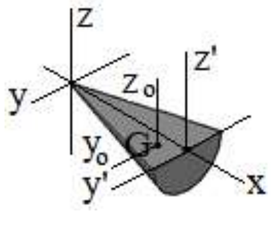
فيكون عزم القصور الذاتي الكتلوي للجسم الكلي حول محور معين مساوياً لمجموع عزوم القصور الذاتي الكتلوي للأجزاء التي يتركب منها حول نفس المحور، وكما تم ذكره في حالة عزم القصور الذاتي للمساحات، فان الجزء الذي يضاف الى الكتلة الكلية يعطى إشارة موجبة، والجزء الذي ينقص من الكتلة الكلية يعطى إشارة سالبة.

عزم القصور الذاتي لكتل بعض الأجسام المتجانسة:

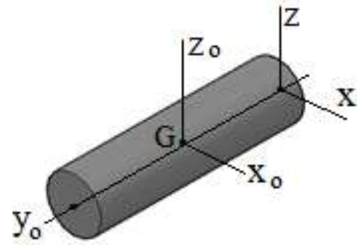
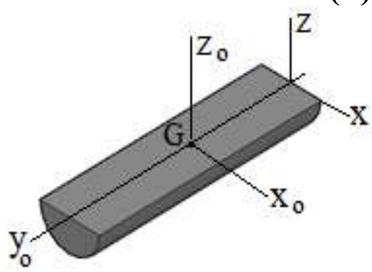
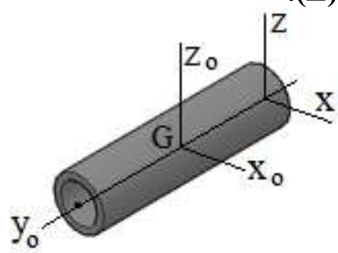
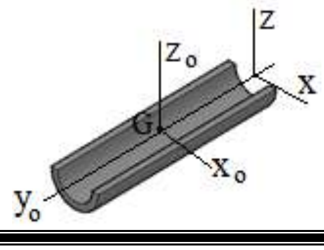
جدول (٨-٢) عزم القصور الذاتي لكتل بعض الأجسام المتجانسة

الجسم		الحجم	عزم القصور الذاتي للكتلة
قضيب رفيع بطول (L).			$I_y = \dfrac{mL^2}{3}$ $\bar{I}_y = \dfrac{mL^2}{12}$
قضيب رفيع بشكل ربع دائرة.			$I_x = m\,r^2$ $I_y = I_z = \dfrac{mr^2}{2}$
صفيحة مستطيلة رقيقة.			$\bar{I}_x = \dfrac{1}{12}m\,a^2$, $\bar{I}_y = \dfrac{1}{12}m\,b^2$ $\bar{I}_z = \dfrac{1}{12}m\,(a^2 + b^2)$
قرص جاسيء بنصف قطر (r) وكتلة (m).			$\bar{I}_z = \dfrac{mr^2}{2}$, $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \dfrac{mr^2}{4}$ $I_{z'} = \dfrac{3mr^2}{2}$
حلقة اسطوانية رقيقة.			$I_z = m\,r^2$ $I_x = I_y = \dfrac{mr^2}{2}$
حلقة اسطوانية سميكة.		$\pi h(R^2 - r^2)$	$\bar{I}_z = \dfrac{m(R^2+r^2)}{2}$
متوازي مستطيلات.		a b c	$\bar{I}_x = 1/12\,m\,(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_y = 1/12\,m\,(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_z = 1/12\,m\,(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_y = 1/12\,m\,(a^2 + b^2)$ $I_x = 1/3\,m\,(b^2 + c^2)$ $I_y = 1/3\,m\,(a^2 + b^2)$ $I_z = 1/3\,m\,(a^2 + c^2)$

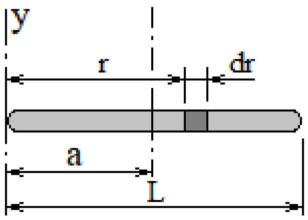
جدول (٨-٢) عزم القصور الذاتي لكتل بعض الأجسام المتجانسة

الجسم		الحجم	عزم القصور الذاتي للكتلة
كرة صلدة بنصف قطر (r).		$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\bar{I} = \frac{2}{5} m r^2$
كرة مجوفة بمعدل نصف قطر (r).			$\bar{I} = \frac{2}{3} m r^2$
نصف كرة صلدة بنصف قطر (r).		$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{83}{320} m r^2$ $I_z = \bar{I}_z = \frac{2}{5} m r^2$
نصف كرة مجوفة بمعدل نصف قطر (r).			$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{5}{12} m r^2$ $I_x = I_y = \frac{5}{12} m r^2$
مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (r) وارتفاعه (h).		$\frac{\pi r^2 h}{3}$	$\bar{I}_x = \frac{3}{10} m r^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{3}{5} m h^2$ $\bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{3}{80} m h^2$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{1}{10} m h^2$
نصف مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (r) وارتفاعه (h).		$\frac{\pi r^2 h}{6}$	$I_x = \frac{3}{10} m r^2$ $\bar{I}_x = (\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}) m r^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{3}{5} m h^2$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{1}{10} m h^2$

جدول (٨-٢) عزم القصور الذاتي لكتل بعض الأجسام المتجانسة

عزم القصور الذاتي للكتلة	الحجم	الجسم
$\bar{I}_y = \dfrac{mr^2}{2}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_z = \dfrac{1}{12} m (L^2 + 3r^2)$ $I_x = I_z = \dfrac{1}{12} m (4L^2 + 3r^2)$	$\pi r^2 L$	**أسطوانة قائمة صلدة بنصف قطر (r) وطول (L).** 
$\bar{I}_y = \dfrac{mr^2}{2} - \dfrac{16mr^2}{9\pi^2}$ $I_y = \dfrac{mr^2}{2}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_z = \dfrac{1}{12} m (L^2 + 3r^2)$ $I_x = I_z = \dfrac{1}{12} m (4L^2 + 3r^2)$	$\dfrac{\pi r^2 L}{2}$	**نصف أسطوانة قائمة صلدة بنصف قطر (r) وطول (L).** 
$I_y = \dfrac{mr^2}{2}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_z = \dfrac{1}{2} mr^2 + \dfrac{1}{12} mL^2$ $I_x = I_z = \dfrac{1}{2} mr^2 + \dfrac{1}{3} mL^2$	$\pi L(r_o^2 - r_i^2)$	**أسطوانة قائمة مجوفة بنصف قطر خارجي (r_o) ونصف قطر داخلي (r_i) ومعدل نصف قطر (r) وطول (L).** 
$\bar{I}_y = mr^2 - \dfrac{4mr^2}{\pi^2}$ $I_y = mr^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_z = \dfrac{1}{12} m (L^2 + 6r^2)$ $I_x = I_z = \dfrac{1}{12} m (4L^2 + 6r^2)$	$\dfrac{\pi L(r_o^2 - r_i^2)}{2}$	**نصف أسطوانة قائمة مجوفة بنصف قطر خارجي (r_o) ونصف قطر داخلي (r_i) ومعدل نصف قطر (r) وطول (L).** 

مثال (٨ ـ ١٤):



شكل (مث. ٨-١٤)

قضيب صلد طوله (L) وكتلته (m) وكثافته (ρ) ومساحة مقطعه العرضي (A)، كما مبين في الشكل (مث. ٨-١٤)، أوجد عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى:

- محور يمر بإحدى نهايتيه وعمودي على محوره الطولي.

- محور يمر بمركز كتلته وعمودي على محوره الطولي.

الحل:

$$m = \rho\, V = \rho\, A\, L$$

$$dm = \rho\, dV = \rho\, A\, dr$$

$$I_m = \int r^2\, dm = \int_0^L r^2\, \rho\, A\, dr = \rho\, A \int_0^L r^2\, dr = \rho\, A \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^L = \frac{1}{3}\rho\, A\, L^3$$

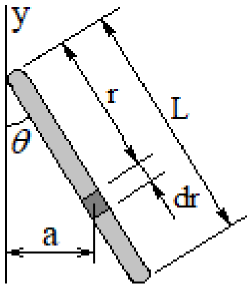
$$I_m = \frac{1}{3} m\, L^2$$

$$I_m = \bar{I}_m + m\, d^2$$

$$\frac{1}{3} m\, L^2 = \bar{I}_m + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\bar{I}_m = \frac{1}{3} m\, L^2 - \frac{1}{4} m\, L^2 = \frac{1}{12} m\, L^2$$

مثال (٨ - ١٥):



شكل (مث. ٨-١٥)

قضيب صلد طوله (L) وكتلته (m) وكثافته (ρ) ومساحة مقطعه العرضي (A)، كما مبين في الشكل (مث. ٨-١٥)، جد عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى:

- محور يمر بإحدى نهايتيه ويميل عن المحور العمودي بزاوية مقدارهـــا (θ).

- محور يمر بمركز كتلته وبنفس الميلان.

الحل:

$$m = \rho V = \rho A L$$

$$dm = \rho\, dV = \rho A\, dr$$

$$a = r \sin\theta$$

$$I_m = \int a^2\, dm = \int_0^L (r \sin\theta)^2 \rho A\, dr = \rho A \sin^2\theta \int_0^L r^2\, dr = \rho A \sin^2\theta\, \frac{r^3}{3} \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{3} \rho A L^3 \sin^2\theta$$

$$I_m = \frac{1}{3} m L^2 \sin^2\theta$$

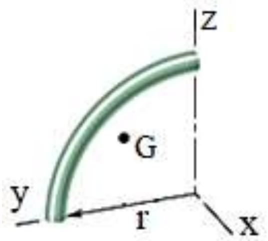
$$I_m = \bar{I}_m + m d^2$$

$$\frac{1}{3} m L^2 \sin^2\theta = \bar{I}_m + m \left(\frac{L \sin\theta}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{3} m L^2 \sin^2\theta = \bar{I}_m + \frac{1}{4} m L^2 \sin^2\theta$$

$$\bar{I}_m = \frac{1}{3} m L^2 \sin^2\theta - \frac{1}{4} m L^2 \sin^2\theta = \frac{1}{12} m L^2 \sin^2\theta$$

مثال (٨ - ١٦):



قضيب رفيع بشكل ربع دائرة نصف قطرها (0.5 m)، كتلته (5 kg)، جد عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى المحاور الثلاث المبينة في الشكل (مث. ٨-١٦).

شكل (مث. ٨-١٦)

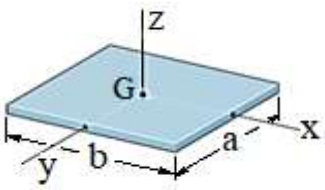
الحل:

$$I_x = m\,r^2 = 5 \times (0.5)^2 = 1.25 \text{ kg.m}^2$$

$$I_y = \frac{mr^2}{2} = \frac{5\times(0.5)^2}{2} = 0.625 \text{ kg.m}^2$$

$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{5\times(0.5)^2}{2} = 0.625 \text{ kg.m}^2$$

مثال (٨ - ١٧):



صفيحة مستطيلة رقيقة من الألمنيوم طولها (b = 500 mm) وعرضها (a = 300 mm) وسمكها (t = 3 mm)، جد عزم القصور الذاتي الكتلوي لها بالنسبة الى المحاور الثلاثة المارة بمركز كتلتها، كما مبين في الشكل (مث. ٨-١٧).
كثافة الألمنيوم هي (2690 kg/m^3).

شكل (مث. ٨-١٧)

الحل:

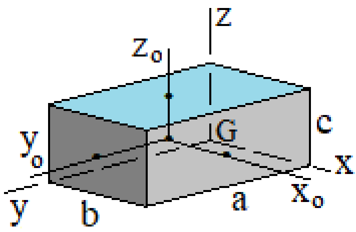
$$V = a \times b \times t = 0.3 \times 0.5 \times 0.003 = 0.45 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$m = \rho\, V = 2690 \times 0.45 \times 10^{-3} = 1.2105 \text{ kg}$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} m\,a^2 = \frac{1}{12} \times 1.2105 \times (0.3)^2 = 9.1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} m\,b^2 = \frac{1}{12} \times 1.2105 \times (0.5)^2 = 25.2 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{12} m\,(a^2 + b^2) = \frac{1}{12} \times 1.2105 \times [\,(0.3)^2 + (0.5)^2\,]$$
$$= 34.3 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

<u>مثال (٨ ـ ١٨):</u>



شكل (مث. ٨-١٨)

صندوق صلد من خشب البلوط الصلب على شكل متوازي المستطيلات طوله ($a = 0.5$ m) وعرضه ($b = 0.3$ m) وارتفاعه ($c = 0.2$ m)، كما مبين في الشكل (مث. ٨-١٨).

جد:

- **عزم القصور الذاتي بالنسبة الى المحاور الثلاثة المارة بمركز كتلته (x_o , y_o , z_o).**
- **عزم القصور الذاتي بالنسبة الى المحاور الثلاثة المارة بأحد أركانه (x , y , z).**
- **نصف القطر التدويمي حول المحور (z_o).**

كثافة خشب البلوط هي (800 kg/m^3).

الحل:

$$V = a\,b\,c = 0.5 \times 0.3 \times 0.2 = 0.03 \text{ m}^3$$

$$m = \rho\, V = 800 \times 0.03 = 24 \text{ kg}$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} m\,(b^2 + c^2) = \frac{1}{12} \times 24 \times [\,(0.2)^2 + (0.5)^2\,] = 0.58 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} m\,(a^2 + b^2) = \frac{1}{12} \times 24 \times [\,(0.3)^2 + (0.2)^2\,] = 0.26 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{12} m\,(a^2 + c^2) = \frac{1}{12} \times 24 \times [\,(0.3)^2 + (0.5)^2\,] = 0.68 \text{ kg.m}^2$$

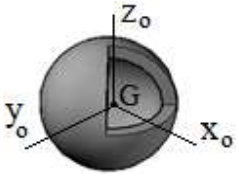
$$I_x = \frac{1}{3} m\,(b^2 + c^2) = \frac{1}{3} \times 24 \times [\,(0.2)^2 + (0.5)^2\,] = 2.32 \text{ kg.m}$$

$$I_y = \frac{1}{3} m\,(a^2 + b^2) = \frac{1}{3} \times 24 \times [\,(0.3)^2 + (0.2)^2\,] = 1.04 \text{ kg.m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3} m\,(a^2 + c^2) = \frac{1}{3} \times 24 \times [\,(0.3)^2 + (0.5)^2\,] = 2.72 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{k}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_y}{m}} = \sqrt{\frac{0.68}{24}} = 0.17 \text{ m}$$

مثال (٨ - ١٩):



شكل (مث. ٨-١٩)

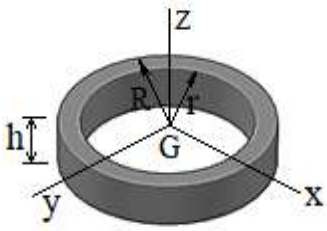
كرة مجوفة من الرصاص كتلتها (5 kg) وبمعدل نصف قطر (200 mm)، جد عزم القصور الذاتي الكتلوي لها بالنسبة الى المحاور الثلاثة المارة بمركز كتلتها، كما مبين في الشكل (مث. ٨-١٩). ثم احسب نصف القطر التدويمي حول نفس المحاور.

الحل:

$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{3}\, m\, r^2 = \frac{2}{3} \times 5 \times (0.2)^2 = 0.133 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_{x,y,z}}{m}} = \sqrt{\frac{0.133}{5}} = 0.163 \text{ m}$$

مثال (٨ - ٢٠):



شكل (مث. ٨-٢٠)

حلقة اسطوانية من النحاس نصف قطرها الخارجي (12 cm) ونصف قطرها الداخلي (10 cm) وارتفاعها (5 cm). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي لها بالنسبة الى المحور (z) المار من مركزها، كما مبين في الشكل (مث. ٨-٢٠). ثم احسب نصف القطر التدويمي حول نفس المحور.
كثافة النحاس هي (8910 kg/m^3).

الحل:

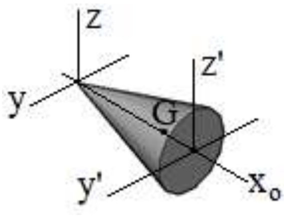
$$V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi (0.05) [(0.12)^2 - (0.1)^2] = 6.91 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$
$$m = \rho V = 8910 \times 6.91 \times 10^{-4} = 6.16 \text{ kg}$$

$$\bar{I}_z = \frac{m(R^2+r^2)}{2} = \frac{(6.16)[(0.12)^2+(0.1)^2)}{2} = 0.075 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{k}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_z}{m}} = \sqrt{\frac{0.075}{6.16}} = 0.11 \text{ m}$$

مثال (٨ - ٢١):

مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (r = 5 cm) وارتفاعه (h = 15 cm)، مصنوع من مادة الرصاص. جد:



شكل (مث. ٨-٢١)

- **عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى المحاور الثلاثة المارة بمركز كتلته.**
- **عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى المحاور (z) و (z').**
- **نصف القطر التدويمي حول المحور (x_o).**

كثافة الرصاص هي ($11370\ kg/m^3$).

الحل:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi (0.05)^2 (0.15)}{3} = 3.93 \times 10^{-4}\ m^3$$

$$m = \rho\, V = 11370 \times 3.93 \times 10^{-4} = 4.465\ kg$$

$$\bar{I}_x = \frac{3}{10} m\, r^2 = \frac{3}{10} \times 4.465 \times (0.05)^2 = 3.35 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

$$\bar{I}_y = \bar{I}_y = \frac{3}{20} m\, r^2 + \frac{3}{80} m\, h^2$$

$$= \frac{3}{20} \times 4.465 \times (0.05)^2 + \frac{3}{80} \times 4.465 \times (0.15)^2$$

$$= (1.67 \times 10^{-3}) + (3.77 \times 10^{-3}) = 5.44 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

$$I_z = \frac{3}{20} m\, r^2 + \frac{3}{5} m\, h^2$$

$$= \frac{3}{20} \times 4.465 \times (0.05)^2 + \frac{3}{5} \times 4.465 \times (0.15)^2$$

$$= (1.67 \times 10^{-3}) + (60.3 \times 10^{-3}) = 62 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

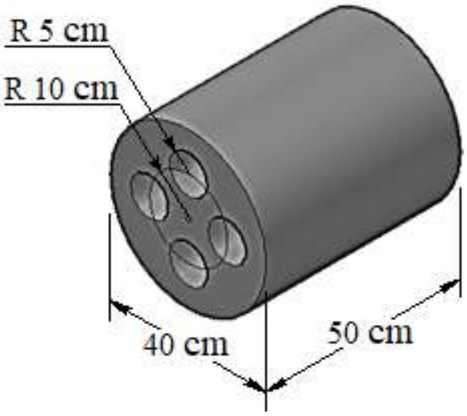
$$I_{z'} = \frac{3}{20} m\, r^2 + \frac{1}{10} m\, h^2$$

$$= \frac{3}{20} \times 4.465 \times (0.05)^2 + \frac{3}{10} \times 4.465 \times (0.15)^2$$

$$= (1.67 \times 10^{-3}) + (30.14 \times 10^{-3}) = 31.81 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

$$\bar{k}_x = \sqrt{\frac{\bar{I}_x}{m}} = \sqrt{\frac{0.00335}{4.465}} = 0.027\ m$$

<u>مثال (٨ - ٢٢):</u>



شكل (مث. ٨-٢٢)

أسطوانة قائمة قطر قاعدتها (40 cm) وطولها (L = 50 cm)، مصنوعة من مادة الفولاذ، مثقوبة طولياً بأربع ثقوب اسطوانية بنصف قطر (5 cm) لكل ثقب موزعة بشكل منتظم على محيط دائرة نصف قطرها (10 cm). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي ونصف القطر التدويمي للاسطوانة حول محورها الطولي.

كثافة الفولاذ هي ($7830\ kg/m^3$).

الحل:

الأسطوانة بدون ثقوب:

$V = \pi R^2 L = \pi \times (0.2)^2 \times (0.5) = 0.0628\ m^3$

$M = \boldsymbol{\rho}\ V = 7830 \times 0.0628 = 492\ kg$

$$\bar{I}_x = \frac{mr^2}{2} = \frac{492 \times (0.2)^2}{2} = 9.84\ kg.m^2$$

الثقب:

$v = \pi r^2 L = \pi \times (0.05)^2 \times (0.5) = 0.0039\ m^3$

$m = \boldsymbol{\rho}\ V = 7830 \times 0.0039 = 30.75\ kg$

$$\bar{I}_x = \frac{mr^2}{2} = \frac{30.75 \times (0.05)^2}{2} = 0.038\ kg.m^2$$

$I_x = \bar{I}_x + m\, d^2 = 0.038 + [\ 30.75 \times (0.1)^2\ ] = 0.34$ ٧ $kg.m^2$

الأسطوانة المثقوبة:

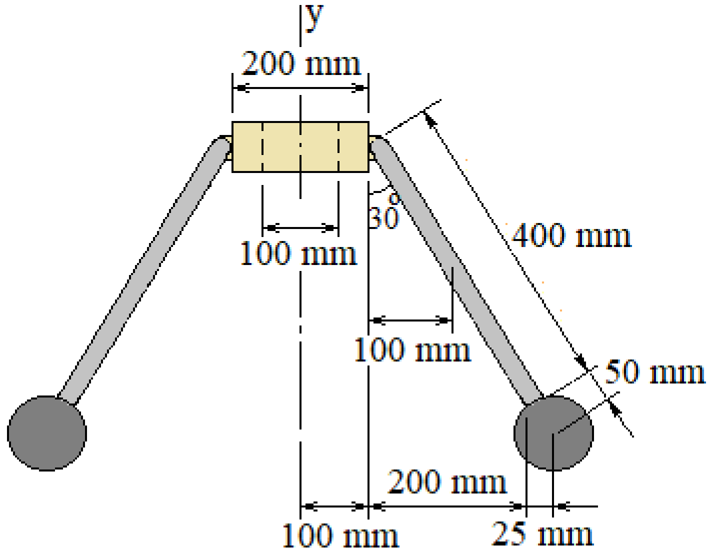
$\bar{I}_x = 9.84 - (\ 4 \times 0.346\ ) = 8.456\ kg.m^2$

$m = 492 - (\ 4 \times 30.75\ ) = 369\ kg$

$$\bar{k}_x = \sqrt{\frac{\bar{I}_x}{m}} = \sqrt{\frac{8.456}{369}} = 0.151\ m$$

مثال (٨ - ٢٣):

منظومة تمثل جزء من تركيب منظم سرعة، تتألف من حلقة وسطية كتلتها (3 kg)، يتمفصل معها قضيبان بطول (400 mm) وكتلة (1.5 kg) لكل منهما، وفي نهاية كل قضيب كرة ملحومة قطرها (100 mm) وكتلتها (1.5 kg). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي ونصف القطر التدويمي للمنظومة حول محورها العمودي (y).



شكل (مث. ٨-٢٣)

الحل:

الحلقة الوسطية:

$$\bar{I}_y = \frac{m(r_o^2+r_i^2)}{2} = \frac{1}{2} \times 3 [(0.1)^2 + (0.05)^2] = 0.019 \text{ kg.m}^2$$

القضيب:

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} m L^2 \sin^2\theta = \frac{1}{12} (1.5) (0.4)^2 \sin^2 30 = 0.005 \text{ kg.m}^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + m d^2 = 0.005 + [1.5 \times (0.2)^2] = 0.065 \text{ kg.m}^2$$

الكرة:

$$\bar{I}_y = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{2}{5} (1.5) (0.05)^2 = 0.0015 \text{ kg.m}^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + m d^2 = 0.0015 + [1.5 \times (0.325)^2] = 0.16 \text{ kg.m}^2$$

المنظومة كاملة:

$$I_y = 0.019 + (2 \times 0.065) + (2 \times 0.16) = 0.469 \text{ kg.m}^2$$

$$m = 3 + (2 \times 1.5) + (2 \times 1.5) = 9 \text{ kg}$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{0.469}{9}} = 0.228 \text{ m} = 228 \text{ mm}$$

مسائل:

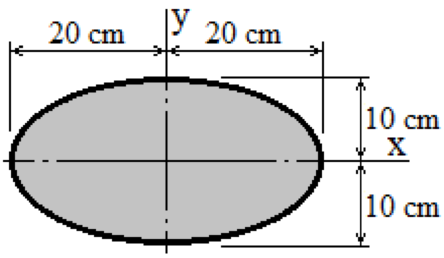
٨-١) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المنطقة البيضوية الموضحة في الشكل (مس. ٨-١) بالنسبة الى:

(أ) المحور الأفقي المركزي (x).

(ب) المحور العمودي المركزي (y).

الجواب:

$I_x = 15708\ cm^4\ ,\ \ I_y = 62832\ cm^4$

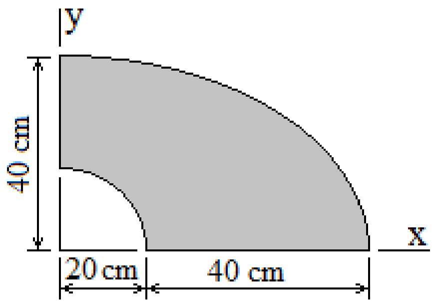


شكل (مس. ٨-١)

٨-٢) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة الربع البيضوي التي يتم قطع ربع دائرة منه كما هو مبين في الشكل (مس. ٨-٢) بالنسبة إلى المحور الأفقي (x) والمحور العمودي (y).

الجواب:

$I_x = 722566\ cm^4\ ,\ \ I_y = 1665044\ cm^4$

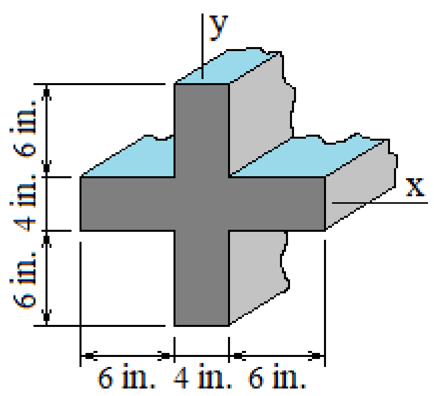


شكل (مس. ٨-٢)

٨-٣) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان المبين في الشكل (مس. ٨-٣) حول المحورين المركزيين (x) و(y)، ثم أوجد أنصاف الأقطار التدويمية (k_x) و(k_y).

الجواب:

$I_x = I_y = 1429.33\ in.^4\ ,\ \ k_x = k_y = 3.57\ \ in.$

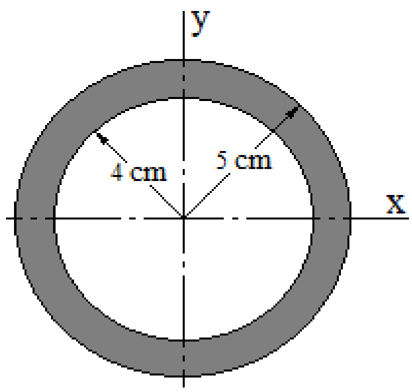


شكل (مس. ٨-٣)

٨-٤) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للأنبوب حول المحاور المركزية (x) و(y)، وأنصاف الأقطار التدويمية (k_x، k_y).

الجواب:

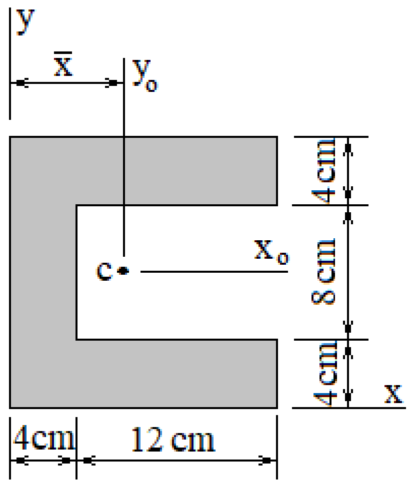
$I_x = I_y = 289.84\ \ cm^4\ ,\ \ k_x = k_y = 3.2\ cm$



شكل (مس. ٨-٤)

٨-٥) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان المبين في الشكل (مس. ٨-٥) حول المحور (x_o) ونصف القطر التدويمي (k_x).

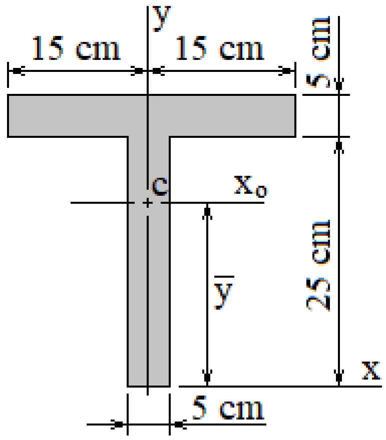
الجواب:
$I_x = 4949.33\ cm^4$, $k_x = 5.56\ cm$



شكل (مس. ٨-٥)

٨-٦) أوجد $(\bar{y})$، الذي يحدد موقع المحور المركزي (x_o) لمساحة المقطع العرضي للشيلمان حرف (T) المبين في الشكل (مس. ٨-٦)، ثم أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور (x_o) ونصف القطر التدويمي (k_x).

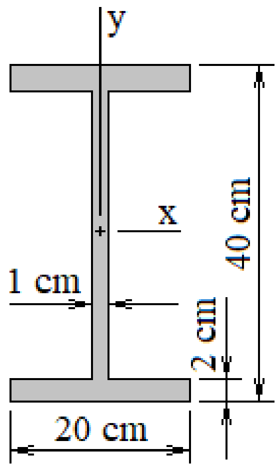
الجواب:
$\bar{y} = 20.68\ cm$, $I_x = 22163.83\ cm^4$, $k_x = 8.98\ cm$



شكل (مس. ٨-٦)

٨-٧) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان حرف (I) المبين في الشكل (مس. ٨-٧) حول المحور (x) ونصف القطر التدويمي (k_x).

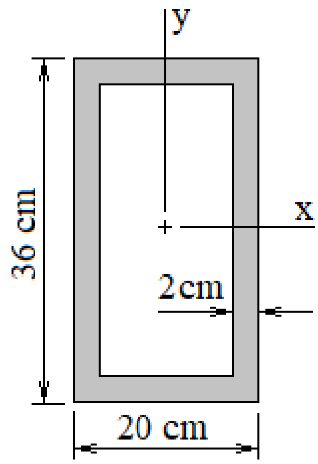
الجواب:
$I_x = 32794.67\ cm^4$, $k_x = 16.81\ cm$



شكل (مس. ٨-٧)

٨-٨) أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي للشيلمان المبين في الشكل (مس. ٨-٨) حول المحور (x) ونصف القطر التدويمي (k_x).

الجواب:
$I_x = 34070\ cm^4$, $k_x = 12.8\ cm$

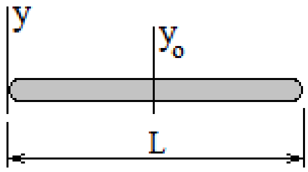


شكل (مس. ٨-٨)

٨-٩) قضيب صلب طوله (L = 50 cm) وكتلته (m = 5 kg) كما هو مبين في الشكل (مس. ٨-٩). أوجد عزم القصور الذاتي الكتلوي بالنسبة إلى:
- محور يمر بأحد طرفيه وعمودي على محوره الطولي.
- محور يمر عبر مركز كتلته وعمودي على محوره الطولي.

الجواب:

$I_m = 0.417\ kg.m^2\ ,\ \bar{I}_m = 0.104\ kg.m^2$

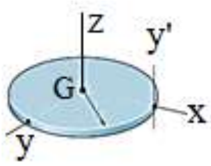


شكل (مس. ٨-٩)

٨-١٠) قرص رقيق من الالمنيوم قطره (70 cm) وسمكه (5 mm). أوجد عزم القصور الذاتي الكتلوي بالنسبة إلى المحاور الثلاثة التي تمر بمركز كتلته، كما هو موضح في الشكل (مس. ٨-١٠). ثم احسب نصف القطر التدويمي حول المحور العمودي (z).
كثافة الألمنيوم هي ($2690\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_z = 5.07\ kg.m^2\ ,\ \bar{I}_x = \bar{I}_y = 2.54\ kg.m^2$
$\bar{k}_z = 0.5\ m$

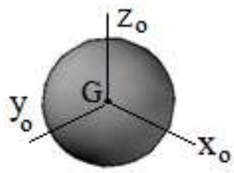


شكل (مس. ٨-١٠)

٨-١١) كرة فولاذية صلبة نصف قطرها (100 mm)، أوجد عزم القصور الذاتي الكتلوي بالنسبة إلى المحاور الثلاثة التي تمر بمركز كتلتها، كما هو موضح في الشكل (مس. ٨-١١). ثم احسب نصف القطر التدويمي حول نفس المراكز.
كثافة الفولاذ هي ($7830\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = 0.131\ kg.m^2,$
$\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 0.063\ m$



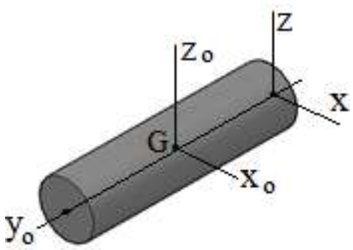
شكل (مس. ٨-١١)

٨-١٢) أسطوانة قائمة نصف قطر قاعدتها (r = 5 cm) وطولها (L = 15 cm) مصنوعة من الرصاص. أوجد:
- عزم القصور الذاتي الكتلوي حول المحاور (x_o , y_o , z_o).
- عزم القصور الذاتي الكتلوي حول المحور (z).
- نصف القطر التدويمي حول المحور (y_o).

كثافة الرصاص هي ($11370\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_y = 0.017\ kg.m^2\ ,\ \bar{I}_x = \bar{I}_z = 0.0335\ kg.m^2$
$I_z = 0.108\ kg.m^2\ ,\ \bar{k}_y = 0.035\ m$

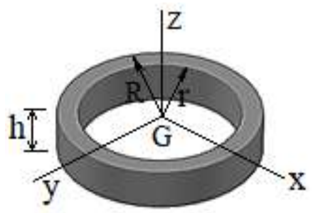


شكل (مس. ٨-١٢)

٨-١٣) حلقة اسطوانية من النحاس نصف قطرها الخارجي (15 cm) ونصف قطـرها الداخلي (12 cm) وارتفـــاعها (6 cm). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي لها بالنسبة الى المحور (z) المار من مركـــزها، كمـــا مبين في الشـــــكل (مس. ٨-١٣). ثم احسب نصف القطر التدويمي حول نفس المحور.
كثافة النحاس هي ($8910\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_z = 0.25\ kg.m^2$, $\bar{k}_z = 0.136\ m$



شكل (مس. ٨-١٣)

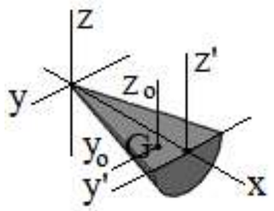
٨-١٤) نصف مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (r = 5 cm) وارتفاعه (h = 20 cm)، مصنوع من مادة الرصاص. جد:
- عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى المحور الأفقي (x) المار بمركز كتلته.
- عزم القصور الذاتي الكتلوي له بالنسبة الى المحاور (z) و (z').
- نصف القطر التدويمي حول المحور (x_o).

كثافة الرصاص هي ($11370\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_x = 0.0015\ kg.m^2$, $I_z = 0.0726\ kg.m^2$

$I_{z'} = 0.0369\ kg.m^2$, $\bar{k}_x = 0.022\ m$



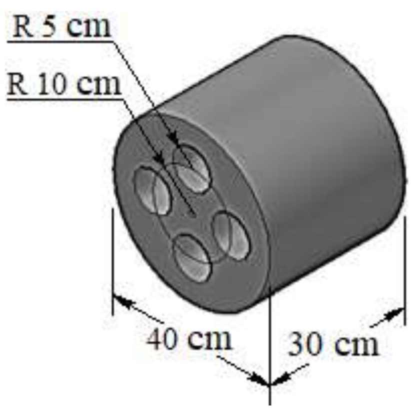
شكل (مس. ٨-١٤)

٨-١٥) أسطوانة قائمة قطر قاعدتها (40 cm) وطولها (L = 30 cm)، مصنوعة من مادة الفولاذ، مثقوبة طولياً بأربع ثقوب اسطوانية بنصف قطر (5 cm) لكل ثقب موزعة بشكل منتظم على محيط دائرة نصف قطرها (10 cm). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي ونصف القطر التدويمي للاسطوانة حول محورها الطولي.

كثافة الفولاذ هي ($7830\ kg/m^3$).

الجواب:

$\bar{I}_x = 5.07\ kg.m^2$, $\bar{k}_x = 0.151\ m$

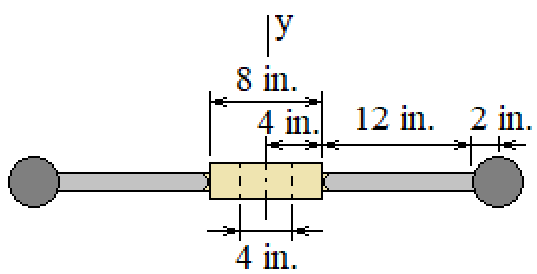


شكل (مس. ٨-١٥)

٨-١٦) تركيبة تمثـــــل جـزء من تركيب منظم ســـرعة، تتألف من حلقة وســـــطية كتلتها (4 Ib)، يتمفصـل معها قضـيبان بطـــول (12 in.) وكتلة (2 Ib) لكل منهما، وفي نهاية كل قضـــيب كرة ملحومـة قطــــرها (4 in.) وكتلتها (2 Ib)، كمـــــا مبين في الشـكل (مس. ٨-١٦). جد عزم القصور الذاتي الكتلوي ونصـــــف القطر التدويمي للمنظومة حول محورها العمودي (y).

الجواب:

$I_y = 1790.4\ Ib.in.^2$, $k_y = 12.2\ in.$



شكل (مس. ٨-١٦)

أسئلة عامة

- عرف ما يأتي:

الميكانيك الهندسي، علم السكون، علم الحركة، الفضاء، الوقت، الكتلة، القوة، الجسيم، الجسم الجاسيء، القوة المركزة، القوة الموزعة، الكمية العددية، الكمية المتجهة، محصلة القوى، مركبات القوة، العزم، محصلة العزوم، العزم المزدوج، التوازن، مخطط الجسم الحر، المرتكز المفصلي، المرتكز الثابت، المرتكز الكروي، المرتكز الاسطواني (التدحرجي)، المرتكز التأرجحي، المرتكز الانزلاقي، الهياكل الهندسية، المسنم، المسنم المستوي، أضلاع القوى الصفرية، المكائن، الآلات، الاحتكاك، معامل الاحتكاك السكوني، معامل الاحتكاك الحركي، مركز الثقل، القصور، عزم القصور الذاتي، عزم القصور الذاتي للمساحة، عزم القصور الذاتي للكتلة، نصف القطر التدويمي.

- عدد قوانين نيوتن في الحركة، ثم بين أي القوانين تختص بعلم السكون، وأيها تختص بعلم الحركة، مع بيان السبب.

- أذكر الصيغة الفيزيائية والصيغة الرياضية لقانون نيوتن في الجاذبية.

- ما هو الموقع القياسي لتحديد التعجيل الأرضي (g) المستخدم في الحسابات الهندسية؟ وماهي القيمة القياسية له؟

- ما هو سبب بقاء الكواكب السيارة في مداراتها دون الاقتراب أو الابتعاد عن الشمس التي تعتبر مركز لدورانها حوله؟

- ماهي الوحدات الأساسية؟ وماهي أنظمة الوحدات المستخدمة في القياس؟

- عدد أنواع المتجهات، مع تعريف مبسط لكل نوع.

- ماهي شروط تساوي متجهين؟

- عرف نظام القوى، وعدد أنظمة القوى التي تؤثر على جسم معين.

- ما هو وجه الاختلاف بين نقل القوة على خط تأثيرها، ونقلها خارج خط تأثيرها؟

- عدد طرق الحل المستخدمة في احتساب عزم قوة حول نقطة معينة.

- يتفرع التوازن الى فرعين رئيسيين، أذكرها مبيناً وجه الاختلاف بينها.

- ما هي الخطوات الضرورية لإنشاء مخطط الجسم الحر؟

- كيف تمثل المرتكزات التالية على مخطط الجسم الحر؟
المرتكز المفصلي، المرتكز الثابت، المرتكز الكروي، المرتكز الاسطواني (التدحرجي)، المرتكز التأرجحي، المرتكز الانزلاقي ، الربط بسلك، الارتكاز على سطح أملس، الارتكاز على سطح خشن.

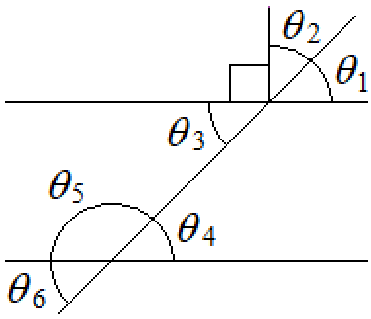
- ما الافتراضات التصميمية المستخدمة في تحليل المسنمات؟

- ماهي طرق تحليل المسنمات؟ عددها مع التوضيح.

- أذكر بعض تطبيقات الاحتكاك في الحياة اليومية.
- عدد أنواع الاحتكاك، وبين ما هو الفرق بينها.
- عدد خصائص الاحتكاك.
- أذكر بعض قوانين الاحتكاك.
- ماهي أهمية تعيين مركز الجسم؟
- ما هي وحدة قياس عزم القصور الذاتي للمساحة؟ ولماذا تكون قيمتها موجبة دائماً؟
- ما هي وحدة قياس عزم القصور الذاتي للكتلة؟ ولماذا تكون قيمتها موجبة دائماً؟

الملاحق

الملحق (أ)، مراجعة الهندسة وعلم المثلثات:

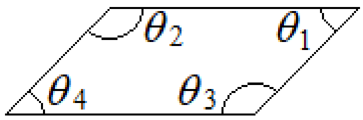


زاويتان متتامتان	$\theta_1 + \theta_2 = 90°$
زاويتان متكاملتان	$\theta_4 + \theta_5 = 180°$
زاويتان متقابلتان بالرأس	$\theta_1 = \theta_3$
زاويتان متناظرتان	$\theta_1 = \theta_4$
زاويتان متبادلتان	$\theta_3 = \theta_4$

زوايا متقابلة في متوازي الأضلاع

$\theta_1 = \theta_4$

$\theta_2 = \theta_3$



زوايا متجاورة في متوازي الأضلاع

$\theta_1 + \theta_2 = 180°$

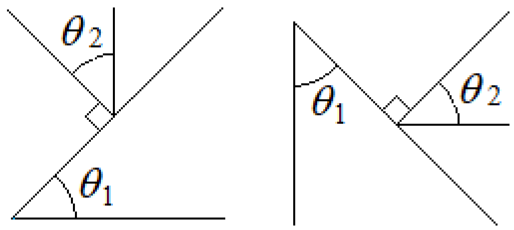
$\theta_1 + \theta_3 = 180°$

$\theta_2 + \theta_4 = 180°$

$\theta_3 + \theta_4 = 180°$

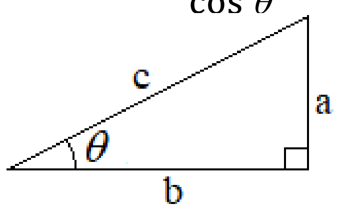
اذا تعامد حرفا زاوية مع حرفي زاوية أخرى فالزاويتان متساويتان.

$\theta_1 = \theta_2$



$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$a^2 = c^2 - b^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$c^2 = a^2 + b^2$

$a = c\sin\theta$
$b = c\cos\theta$

$a = b\tan\theta$
$b = a\cot\theta$

$2\pi \text{ rad} = 360°$
$\pi \text{ rad} = 180°$

$1 \text{ rad} = 57.29578°$

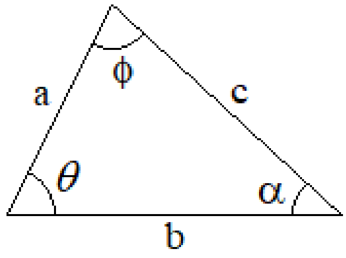
$$\theta \text{ rad} = \frac{\pi}{180}\theta°$$

زوايا المثلث:

$$\theta + \alpha + \phi = 180^\circ$$

قانون الجيب:

$$\frac{c}{n\ \theta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\phi}$$



قانون الجيب تمام:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha}$$
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\phi}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\theta}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

$$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$$
$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$$
$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = \pm\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$
$$\cos^2\theta = \pm\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\ \cos\phi + \cos\theta\ \sin\phi$$
$$\sin(\theta - \phi) = \sin\theta\ \cos\phi - \cos\theta\ \sin\phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi$$
$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\ \cos\phi + \sin\theta\ \sin\phi$$

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\ \tan\phi}$$
$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\ \tan\phi}$$

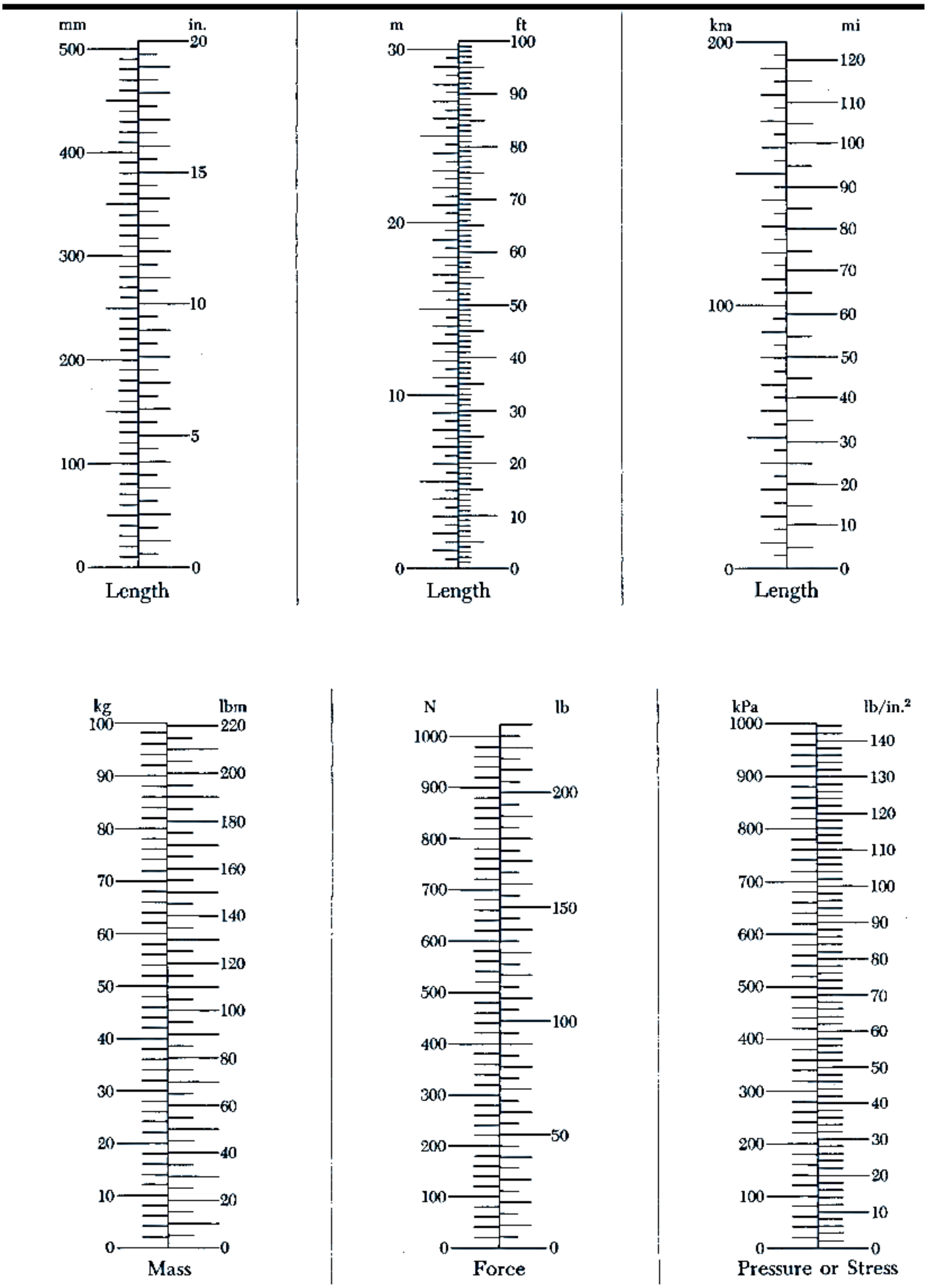
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

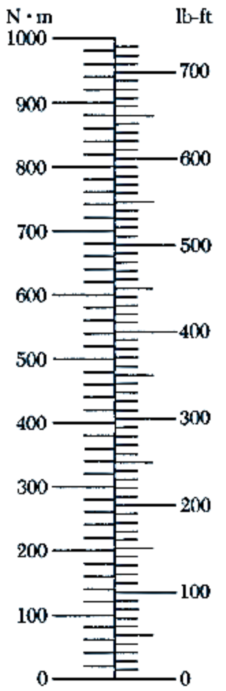
$$\sin(\theta/2) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$$
$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$$
$$\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

$$\sin\theta\ \sin\phi = 1/2\cos(\theta - \phi) - 1/2\cos(\theta + \phi)$$
$$\cos\theta\ \cos\phi = 1/2\cos(\theta - \phi) + 1/2\cos(\theta + \phi)$$
$$\sin\theta\ \cos\phi = 1/2\sin(\theta - \phi) + 1/2\sin(\theta + \phi)$$
$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin{}^1\!/_2(\theta + \phi)\cos{}^1\!/_2(\theta - \phi)$$
$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos{}^1\!/_2(\theta + \phi)\sin{}^1\!/_2(\theta - \phi)$$
$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos{}^1\!/_2(\theta + \phi)\cos{}^1\!/_2(\theta - \phi)$$
$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin{}^1\!/_2(\theta + \phi)\sin{}^1\!/_2(\theta - \phi)$$

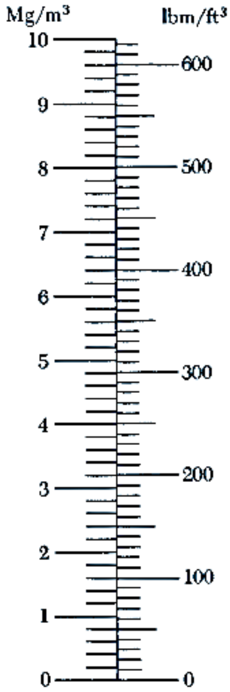
الملحق (ب)، مخططات التحويل بين الوحدات العالمية والوحدات الانكليزية:

مخططات التحويل بين الوحدات العالمية والوحدات الانكليزية

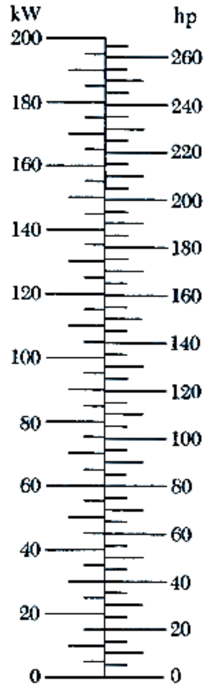




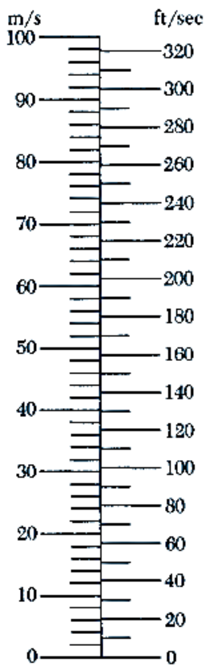
Moment or Torque



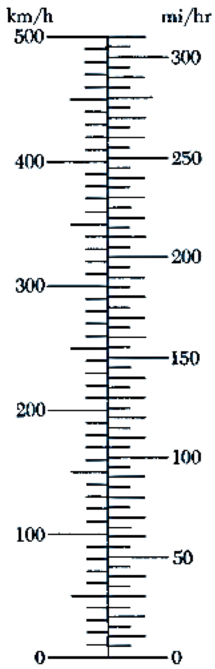
Density



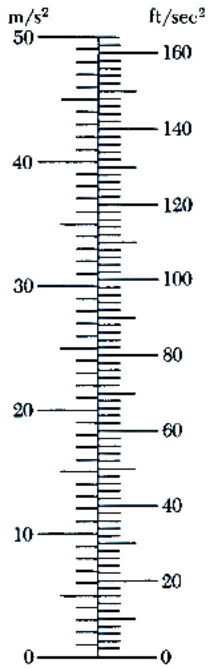
Power



Velocity



Velocity



Acceleration

المصادر

١-
Engineering Mechanics – Statics / 12th Edition / R. C. Hibbeler.

٢-
Engineering Mechanics – Statics / 13th Edition / R. C. Hibbeler.

٣-
Engineering Mechanics – Statics / 13th Edition / R. C. Hibbeler - Instructor's Solutions Manual Ch. 01 – 08 .

٤-
Engineering Mechanics – Statics / 6th Edition / J. L. Meriam, L. G. Kraige.

٥-
Solutions Manual For Engineering Mechanics – Statics / 6th Edition / J. L. Meriam, L. G. Kraige.

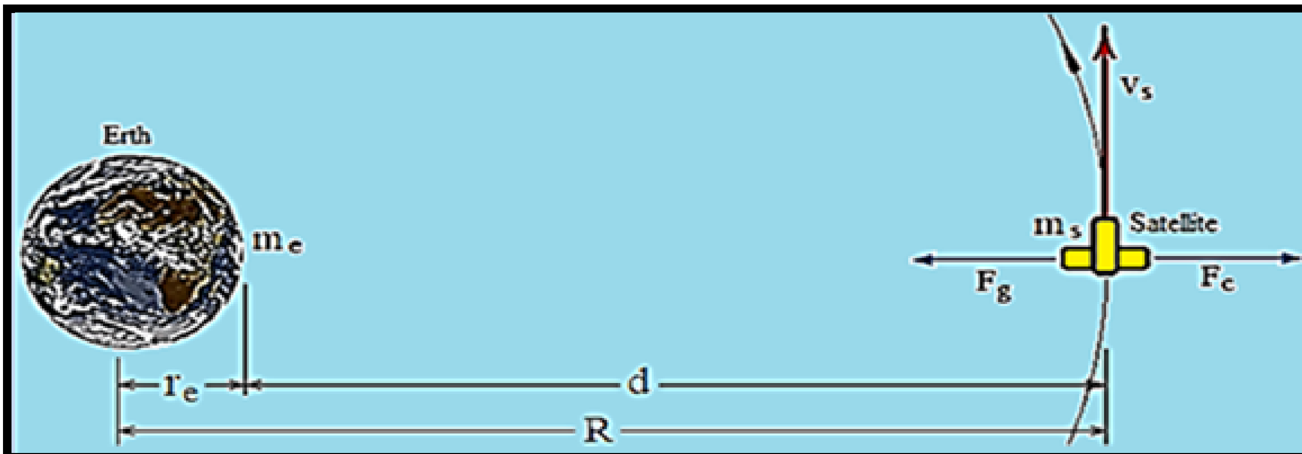
٦-
Engineering Mechanics – Statics / 7th Edition / J. L. Meriam, L. G. Kraige.

٧-
الميكانيك الهندسي ـ علم السكون / د. نزار جبرائيل الياس ، فخري ياسين محمود ، د.هشام مصطفى العناز

المحتويات

الموضوع	الصفحة

تم بعون الله تعالى



نبذة عن الكتاب:

يهدف الكتاب الى التعرف على الجزء الأول من مادة الميكانيك الهندسي وهو الجزء المتخصص بمواضيع علم السكون (الستاتيكا) بشكل واضح ومبسط في ثمانية فصول تم ترتيبها بشكل يساعد طلبة المرحلة الأولى بكليات الهندسة بكافة اختصاصاتها وطلبة المرحلة الأولى في المعاهد الفنية والتكنولوجية المتخصصة بالمجالات التطبيقية وطلبة علوم الفيزياء على بناء المعلومات المتخصصة في مجال علم السكون بناءاً رصيناً يؤهلهم الى فهم واستيعاب القوانين والنظريات الخاصة بهذا المجال وتطوير مهاراتهم في حل المسائل الخاصة بهذا المجال.

وبعونه تعالى سـيتم طبع الكتاب الخاص بالجزء الثاني من مادة الميكانيك الهندسـي وهو الجزء المتخصص بمواضيع علم الحركة (الديناميكا).

المؤلف: إسماعيل خضير عبدالله الجبوري

- بكالوريوس هندسة طائرات ـ ١٩٩١.
- ماجستير هندسة ميكانيكية ـ تصاميم طائرات ـ ١٩٩٨.
- تدريسي في جامعة نينوى ـ كلية هندسة الالكترونيات ـ قسم هندسة النظم والسيطرة.
- خبرة في مجال التصاميم الميكانيكية.