الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الـــتـــكامـــل

أولاً تعريف التكامل الغير محدد:-

هو العملية العكسية لعملية الاشتقاق. فإذا كانت F(x) دالة ما فإن علم التفاضل يختص بإيجاد مشتقة هذه الدالة $F'(x)$ بينما علم التكامل الغير محدود يختص بإيجاد الدالة F(x)

توضيح لمفهوم التكامل المحدد :-

إذا كانت $F'(x)=2x$ وطلب منا إيجاد F(x) ، فمن خلال خبرتنا بعلم التفاضل نستطيع أن نخمن أن الدالة المطلوبة قد تكون هي $F(x)=x^2$ مع أخذ العلم أن هذا الجواب ليس وحيداً لأن هناك العديد من الدوال F(x) لها نفس التفاضل $F'(x)$ نحو:

$$F(x)=x^2+4$$
$$F(x)=x^2-3$$
$$F(x)=x^2+\sqrt{2}$$
$$\vdots$$

ولهذا كل الأجوبة السابقة تعتبر صحيحة ولتعميم الجواب نضع ثابت اختياري وليكن C يعبر عن أي عدد حقيقي أي أن الدالة المطلوبة هي :-

$$F(x)=x^2+c$$

ومن ذلك اتضح لنا سبب تسميته بالتكامل غير محدد وذلك لأنه لا يعبر عن دالة محددة بل يعبر عن مجموعة من الدوال .

الرموز العلمية لعملية التكامل :-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ فإن عملية التكامل المستخدمة لإيجاد الدالة $F(x)$ يرمز لها كالتالي :- $f(x)=F'(x)$, $\int f(x)\,dx=F(x)+c$

وتقرأ هذه العملية تكامل $f(x)$ بالنسبة لـــ x .

عند حل مسائل التكامل يجب أن نتبع الآتي :-

(1) إذا كانت المسألة على صورة أحد قوانين التكامل فإننا نكامل المسألة مباشرة باستخدام القانون المناسب .

(2) إذا كانت المسألة ليست على صورة أحد قوانين التكامل فإننا نحاول تبسيط المسألة باستخدام العمليات الجبرية أوباستخدام المتطابقات المثلثية حتى نصل بالمسألة إلى صورة من صور قوانين التكامل إن أمكن ذلك .

(3) إذا لم نتمكن من استخدام قوانين التكامل مباشرة ولم نتمكن من تبسيط المسألة أو تم تبسيطها ولكن لم تصل إلى صورة من صور قوانين التكامل فإننا نستخدم أحد طرق التكامل المناسبة .

قـــوانـــيـــن الـــتـــكـــامـــل :-

$$(1)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ n\neq -1$$

$$(2)\ \int a\,dx = ax+c\ ,\ a\in R$$

$$(3)\ \int dx = x+c$$

مسائل متنوعة على التكامل

(1) $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(2) $\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

(3) $\int \frac{3}{x^4}\, dx = \int 3x^{-4}\, dx = -x^{-3} + c = -\frac{1}{x^3} + c$

(4) $\int \sqrt{y}\, dy = \int y^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + c$

(5) $\int \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int 5x\, x^{-\frac{1}{3}} dx = \int 5x^{\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{2}{3}} + c$

$= 3\sqrt[3]{x^2} + c$

(6) $\int 4t\sqrt{t^3}\, dt = \int 4t\, t^{\frac{3}{2}}\, dt = \int 4t^{\frac{5}{2}}\, dt = \frac{8}{7}t^{\frac{7}{2}} + c$

$= \frac{8}{7}\sqrt{t^7} + c$

(7) $\int \sqrt{3t^3}\, dt = \int \sqrt{3}\, t^{\frac{3}{2}}\, dt = \frac{2\sqrt{3}}{5}t^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{t^5}$

(8) $\int 8\, dx = 8x + c$

(9) $\int \sqrt{3}\, dx = \sqrt{3}\, x + c$

(10) $\int 3^2\, dx = 3^2 x + c = 9x + c$

(11) $\int \ln 3 \, dx = (\ln 3)x + c$

(12) $\int e^3 \, dx = e^3 x + c$

(13) $\int \frac{1}{e^2} \, dx = \frac{1}{e^2} x + c$

(14) $\int 0 \, dx = c$

(15) $\int \sin 30^\circ \, dx = x \sin 30^\circ + c$

(16) $\int 2^e \, dx = 2^e x + c$

(17) $\int \log 22 \, dx = (\log 22) x + c$

(18) $\int \sin^{-1} 3\pi \, dx = (\sin^{-1} 3\pi) x + c$

(19) $\int (r + 3x) dx = rx + \frac{3}{2} x^2 + c$

(20) $\int (2x^2 + 5x) dx = \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + c$

(21) $\int (x^3 - 5x + 9) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{5}{2} x^2 + 9x + c$

$$(22)\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^2}+x\right)dx=\int(2x^{-3}-5x^{-2}+x)dx$$

$$=-x^{-2}+5x^{-1}+\frac{1}{2}x^2+c=-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$(23)\int\left(\frac{x^4+2x^3-7}{x^3}\right)dx=\int\left(\frac{x^4}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}-\frac{7}{x^3}\right)dx$$

$$\int(x+2-7x^{-3})dx=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{7}{2}x^{-2}+c=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{7}{2x^2}+c$$

$$(24)\int\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)dx=\int\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}dx=\int(x+5)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+5x+c$$

$$(25)\int\left(\frac{4x^3-12x^2}{x-3}\right)dx=\int\frac{4x^2(x-3)}{x-3}dx=\int 4x^2dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3+c$$

$$(26)\int\left(\frac{x\ln 3+2\ln 3}{x+2}\right)dx=\int\frac{(x+2)\ln 3}{x+2}dx=\int\ln 3dx=x\ln 3+c$$

$$(27)\int(x-2)(x+3)\,dx=\int(x^2+x-6)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+c$$

$$(28)\int t^2(\sqrt{t^3}+\sqrt[3]{t})dt=\int t^2(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{3}})dt=\int(t^{\frac{7}{2}}+t^{\frac{7}{3}})dt$$

$$=\frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}}+\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+c=\frac{2}{9}\sqrt{t^9}+\frac{3}{10}\sqrt[3]{t^{10}}+c$$

$$(29)\int(\frac{x^2-5x+6}{x-3})dx=\int\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}dx=\int(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x+c$$

$$(30)\int[x-\frac{1}{x}]^2dx=\int[x^2-2+\frac{1}{x^2}]dx=\int[x^2-2+x^{-2}]dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+c$$

$$(31)\int x[x-1]^2dx=\int x[x^2-2x+1]dx=\int[x^3-2x^2+x]dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$(32)\int\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2+2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int(x^2+2x+1)x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$$

قـوانـيـن الـتـكـامـل

$$(4)\int e^{F(x)}\, F'(x)\, dx = e^{F(x)} + c$$

$$(5)\int a^{F(x)}\, F'(x)\, dx = \frac{a^{F(x)}}{\ln a} + c$$

قوانـين الأســس واللوغاريتمات:-

$$(1)\ A^{n} A^{m} = A^{n+m}$$

$$(2)\ \frac{A^{n}}{A^{m}} = A^{n-m}$$

$$(3)\ (A^{n})^{m} = A^{nm}$$

$$(4)\ (A \cdot B)^{m} = A^{m} B^{m}$$

$$(5)\ \left(\frac{A}{B}\right)^{n} = \frac{A^{n}}{B^{n}}$$

$$(6)\ \sqrt[n]{A^{m}} = A^{\frac{m}{n}}$$

$$(1)\ \log_{e} A = \ln A$$

$$(2)\ \log_{10} A = \log A$$

$$(3)\ \log_{a} AB = \log_{a} A + \log_{a} B$$

$$(4)\ \log_{a} \frac{A}{B} = \log_{a} A - \log_{a} B$$

$$(5)\ e^{\ln F(x)} = F(x)$$

$$(6)\ a^{\log_{a} F(x)} = F(x)$$

$$(7)\ \ln e = 1$$

$$(8)\ \log_{a} a = 1$$

$$(9)\ \log_{a} B^{n} = n \log_{a} B$$

مسائل متنوعة على التكامل

(1) $\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$

(2) $\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

(3) $\int e^{-7x+2}\,dx=-\frac{1}{7}\int -7e^{-7x+2}dx=-\frac{1}{7}e^{-7x+2}+c$

(4) $\int e^{\frac{3}{2}x}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+c$

(5) $\int xe^{4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int 8xe^{4x^2}dx=\frac{1}{8}e^{4x^2}+c$

(6) $\int x^2e^{-x^3}\,dx=-\frac{1}{3}\int -3x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$

(7) $\int x^{-2}e^{\frac{1}{x}}\,dx=-\int -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}+c$

(8) $\int \frac{e^{x^{-2}}}{x^3}\,dx=\int x^{-3}e^{x^{-2}}dx=-\frac{1}{2}\int -2x^{-3}e^{x^{-2}}dx=-\frac{1}{2}e^{x^{-2}}+c$

(9) $\int(e^{2x}+e^{-8x})dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{8}\int -8e^{-8x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-8x}+c$

(10) $\int e\,dx=ex+c$

(11) $\int\frac{3}{e^{4x}}dx=3\int e^{-4x}\,dx=-\frac{3}{4}\int -4e^{-4x}\,dx=-\frac{3}{4}e^{-4x}+c$

(12) $\int\sqrt{e^{3x}}\,dx=\int(e^{3x})^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\,dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+c$

(13) $\int e^{-1}\,dx=e^{-1}x+c$

(14) $\int \ln e\,dx=x\ln e+c=x+c$

(15) $\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}}dx=\int e^{5x-2x}\,dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$

(16) $\int\frac{e^{5x}}{e}dx=\int e^{5x-1}\,dx=\frac{1}{5}\int 5e^{5x-1}\,dx=\frac{1}{5}e^{5x-1}+c$

(17) $\int e^{-e}\,dx=e^{-e}x+c$

(18) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{e^{3x}}\,dx=\int \frac{e^x}{e^{3x}}\,dx+\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}\,dx-\int -e^{-x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+c$

(19) $\int (e^x+e^{2x})(e^x-e^{2x})\,dx=\int (e^{2x}-e^{4x})dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{4}\int 4e^{4x}dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{4x}+c$

(20) $\int \ln\left(\frac{e^x}{e^{3x}}\right)dx=\int \ln(e^x e^{-3x})\,dx=\int \ln e^{-2x}\,dx=\int -2x\ln e\,dx$

$=\int -2x\,dx=-x^2+c$

(21) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx=\int e^{\frac{1}{x}}x^{-2}\,dx=-\int -e^{\frac{1}{x}}x^{-2}\,dx=-e^{\frac{1}{x}}+c$

(22) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+c$

(23) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx=\int e^{\ln x}\frac{1}{x}dx=e^{\ln x}+c=x+c$

(24) $\int \frac{e^{\log x}}{x}\,dx = \ln 10 \int e^{\log x}\,\frac{1}{x\ln 10}\,dx = (\ln 10)e^{\log x} + c$

(25) $\int 3^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(3^{2x})dx = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + c$

(26) $\int 5^{-7x+2}\,dx = -\frac{1}{7}\int -7(5^{-7x+2})dx = -\frac{5^{-7x+2}}{7\ln 5} + c$

(27) $\int (5^{2x} + 7^{-8x})dx = \frac{1}{2}\int 2(5^{2x})dx - \frac{1}{8}\int -8(7^{-8x})dx$

$= \frac{5^{2x}}{2\ln 5} - \frac{7^{-8x}}{8\ln 7} + c$

(28) $\int \frac{3}{5^{4x}}\,dx = 3\int 5^{-4x}\,dx = -\frac{3}{4}\int -4(5^{-4x})\,dx = -\frac{3(5^{-4x})}{4\ln 5} + c$

(29) $\int \sqrt{7^{3x}}\,dx = \int (7^{3x})^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}(7^{\frac{3}{2}x})\,dx = \frac{2(7^{\frac{3}{2}x})}{3\ln 7} + c$

(30) $\int 4^2\,dx = 4^2 x + c$

(31) $\int \frac{5^{5x}}{5^{2x}}\,dx = \int 5^{5x-2x}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(5^{3x})\,dx = \frac{5^{3x}}{3\ln 5} + c$

(32) $\int x^2 5^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 5^{-x^3}\,dx = -\frac{5^{-x^3}}{3\ln 5} + c$

(33) $\int \frac{3^{x^{-2}}}{x^3}\,dx = \int x^{-3} 3^{x^{-2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x^{-3} 3^{x^{-2}}\,dx = -\frac{3^{x^{-2}}}{2\ln 3} + c$

(34) $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int 7^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{2(7^{\sqrt{x}})}{\ln 7} + c$

(35) $\int \log\left(\frac{10^x}{10^{3x}}\right) dx = \int \log(10^{x-3x})\,dx = \int \log 10^{-2x}\,dx = \int -2x \log 10\,dx$

$= \int -2x\,dx = -x^2 + c$

(36) $\int \frac{4^x + 6^x}{2^x}\,dx = \int \frac{4^x}{2^x}\,dx + \int \frac{6^x}{2^x}\,dx = \int (\frac{4}{2})^x\,dx + \int (\frac{6}{2})^x\,dx$

$\int 2^x\,dx + \int 3^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + c$

(37) $\int 3(\frac{5}{3})^{2x}\,dx = \frac{3}{2}\int 2(\frac{5}{3})^{2x}\,dx = \frac{3(\frac{5}{3})^{2x}}{2\ln\frac{5}{3}} + c$

(38) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}\,dx=\int \frac{2^{x+1}}{10^x}\,dx-\int \frac{5^{x+1}}{10^x}\,dx=\int \frac{2^x 2}{10^x}\,dx-\int \frac{5^x 5}{10^x}\,dx$

$=2\int (\frac{2}{10})^x\,dx-5\int (\frac{5}{10})^x\,dx=2\int (\frac{1}{5})^x\,dx-5\int (\frac{1}{2})^x\,dx$

$=\frac{2(\frac{1}{5})^x}{\ln\frac{1}{5}}-\frac{5(\frac{1}{2})^x}{\ln\frac{1}{2}}+c$

(39) $\int \pi^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int 2\,(\pi^{2x})dx=\frac{\pi^{2x}}{2\ln\pi}+c$

(40) $\int \log\left(\frac{2^{x+1}}{3^x}\right)dx=\int (\log 2^{x+1}-\log 3^x)\,dx$

$=\int (x+1)\log 2\,dx-\int x\log 3\,dx=(\frac{1}{2}x^2+x)\log 2-\frac{1}{2}x^2\log 3+c$

(41) $\int (2^x+3^x)^2\,dx=\int (2^{2x}+2\,2^x 3^x+3^{2x})\,dx$

$=\frac{1}{2}\int 2\,2^{2x}\,dx+\int 2\,(2\cdot 3)^x\,dx+\frac{1}{2}\int 2\,3^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int 2\,2^{2x}\,dx+2\int 6^x\,dx+\frac{1}{2}\int 2\,3^{2x}\,dx=\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+c$

(42) $\int(2^x+3^{2x})(2^x-3^{2x})\,dx=\int(2^{2x}-3^{4x})dx=\frac{1}{2}\int 2^{2x}2dx-\frac{1}{4}\int 3^{4x}4dx$

$=\frac{2^{2x}}{2\ln 2}-\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+c$

(43) $\int\frac{2^{\log x}}{x}\,dx=\ln 10\int 2^{\log x}\,\frac{1}{x\ln 10}dx=\frac{2^{\log x}\ln 10}{\ln 2}+c$

(44) $\int 2^x\cdot 3^{2x}\,dx=\int(2\cdot 3^2)^x\,dx=\int(18)^x dx=\frac{(18)^x}{\ln 18}+c$

(45) $\int e^x\cdot 3^{2x}\,dx=\int(e\cdot 3^2)^x\,dx=\int(9e)^x dx=\frac{(9e)^x}{\ln 9e}+c$

(46) $\int\frac{5^{2x}}{e^x}\,dx=\int(\frac{5^2}{e})^x\,dx=\int(\frac{25}{e})^x\,dx=\frac{(\frac{25}{e})^x}{\ln\frac{25}{e}}+c$

(47) $\int(2+e)^x\,dx=\frac{(2+e)^x}{\ln(2+e)}+c$

(48) $\int(2+\pi)^x\,dx=\frac{(2+\pi)^x}{\ln(2+\pi)}+c$

$$(49)\int (\ln 3)^x\,dx=\frac{(\ln 3)^x}{\ln(\ln 3)}+c$$

$$(50)\int (\sin 30^\circ)^x\,dx=\frac{(\sin 30^\circ)^x}{\ln(\sin 30^\circ)}+c$$

$$(51)\int x^\pi\,dx=\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}+c$$

$$(52)\int x^e\,dx=\frac{x^{e+1}}{e+1}+c$$

$$(53)\int e^{e^x+x}\,dx=\int e^{e^x}e^x\,dx=e^{e^x}+c$$

$$(54)\int e^{2x^2+\ln x}\,dx=\int e^{2x^2}e^{\ln x}\,dx=\frac{1}{4}\int 4e^{2x^2}x\,dx=\frac{1}{4}e^{2x^2}+c$$

$$(55)\int e^{-\frac{1}{x}-2\ln x}\,dx=\int e^{-\frac{1}{x}}e^{-2\ln x}\,dx=\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,dx=e^{-\frac{1}{x}}+c$$

$$(56)\int \frac{(e^x+3)^2}{e^{-x}}\,dx=\int \frac{e^{2x}+6e^x+9}{e^{-x}}\,dx=\int (e^{2x}+6e^x+9)e^x dx$$

$$=\int (e^{3x}+6e^{2x}+9e^x)dx=\frac{1}{3}e^{3x}+3e^{2x}+9e^x+c$$

$$(57)\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx=\int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}\,dx=\int (e^x-1)\,dx=e^x-x+c$$

$$(58)\int x^3\ e^{\ln x}\,dx=\int x^3\ x\,dx=\int x^4\ dx=\frac{1}{5}x^5+c$$

$$(59)\int e^x \tan^{-1}(3)\ dx=\tan^{-1}(3)\int e^x\ dx=\tan^{-1}(3)e^x+c$$

$$(60)\int e^{\ln x+1}\,dx=\int e^{\ln x}e\,dx=e\int x\,dx=\frac{e}{2}x^2+c$$

$$(61)\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=2\int 2^{\sqrt{x}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{\ln 2}2^{\sqrt{x}}+c$$

$$(62)\int 2^{3^x}\ 3^x\,dx=\frac{1}{\ln 3}\int 2^{3^x}\ 3^x(\ln 3)\,dx=\frac{2^{3^x}}{(\ln 3)(\ln 2)}+c$$

$$(63)\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}\,dx=\int (e^{2x}-e^x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\int e^x dx+\int x dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+c$$

$$(63)\int (e^x+e^{-x})^2 dx=\int (e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx+\int 2dx-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$$

قـوانـيـن الـتـكـامـل

$$(6)\int \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = \ln|F(x)| + c$$

$$(7)\int [F(x)]^n F'(x)\,dx = \frac{[F(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad ,n \neq -1$$

قـوانـيـن اللـوغـاريتمات :-

$(1)\ \log_e A = \ln A$

$(2)\ \log_{10} A = \log A$

$(3)\ \log_a A\,B = \log_a A + \log_a B$

$(4)\ \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$(5)\ e^{\ln F(x)} = F(x)$

$(6)\ a^{\log_a F(x)} = F(x)$

$(7)\ \ln e = 1$

$(8)\ \log_a a = 1$

$(9)\ \log_a B^n = n \log_a B$

مسائل متنوعة على التكامل

(1) $\int \frac{dx}{2+x} = \ln|2+x| + c$

(2) $\int \frac{3dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\int \frac{5dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\ln|5x+3| + c$

(3) $\int \frac{2dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\int \frac{-3dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\ln|4-3x| + c$

(4) $\int \frac{x+5}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+10x+5| + c$

(5) $\int \frac{x^2+4x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+12x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+2x^6| + c$

(6) $\int \frac{2e^x}{2+e^x}dx = 2\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = 2\ln|2+e^x| + c$

(7) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \ln|e^x+x| + c$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln|e^x+e^{-x}| + c$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int (3x^2+2x)(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x^3+x^2} + c$

(10) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}dx = \int (4x+1)(2x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(2x^2+x+3)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{2x^2+x+3} + c$

(11) $\int \frac{e^x - x}{\sqrt[3]{2e^x - x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (2e^x - 2x)(2e^x - x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}(2e^x - x^2)^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2e^x - x^2)^2} + c$

(12) $\int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x} - e^{-2x}\right| + c$

(13) $\int \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \ln 2 + 2^{-x}\ln 2}{2^x - 2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x - 2^{-x}\right| + c$

(14) $\int \frac{dx}{e+x} = \ln|e+x| + c$

(15) $\int \frac{dx}{\pi + x} = \ln|\pi + x| + c$

(16) $\int \frac{(2+\ln x)^{10}dx}{x} = \int (2+\ln x)^{10}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{11}(2+\ln x)^{11} + c$

مسائل متنوعة على التكامل

(1) $\int \frac{dx}{2+x} = \ln|2+x| + c$

(2) $\int \frac{3dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\int \frac{5dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\ln|5x+3| + c$

(3) $\int \frac{2dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\int \frac{-3dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\ln|4-3x| + c$

(4) $\int \frac{x+5}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+10x+5| + c$

(5) $\int \frac{x^2+4x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+12x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+2x^6| + c$

(6) $\int \frac{2e^x}{2+e^x}dx = 2\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = 2\ln|2+e^x| + c$

(7) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \ln|e^x+x| + c$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln|e^x+e^{-x}| + c$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int (3x^2+2x)(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x^3+x^2} + c$

(10) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}dx = \int (4x+1)(2x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(2x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}+c$

$=2\sqrt{2x^2+x+3}+c$

(11) $\int \frac{e^x-x}{\sqrt[3]{2e^x-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (2e^x-2x)(2e^x-x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}(2e^x-x^2)^{\frac{2}{3}}+c$

$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2e^x-x^2)^2}+c$

(12) $\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-e^{-2x}\right|+c$

(13) $\int \frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2}{2^x-2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x-2^{-x}\right|+c$

(14) $\int \frac{dx}{e+x} = \ln|e+x|+c$

(15) $\int \frac{dx}{\pi+x} = \ln|\pi+x|+c$

(16) $\int \frac{(2+\ln x)^{10}dx}{x} = \int (2+\ln x)^{10}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{11}(2+\ln x)^{11}+c$

$$(17)\int \frac{e^{x^2}x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{x^2}x(1-e^{x^2})^{-\frac{1}{2}}dx=-(1-e^{x^2})^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=-\sqrt{1-e^{x^2}}+c$$

$$(18)\int \frac{\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int x^{-2}(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{4}}dx=\frac{4}{5}(1-\frac{1}{x})^{\frac{5}{4}}+c$$

$$(19)\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx=2\int(1+\sqrt{x})^3\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^4+c$$

$$(20)\int(1+\frac{1}{x})^{-3}\frac{1}{x^2}dx=\int(1+x^{-1})^{-3}x^{-2}dx=-\int -(1+x^{-1})^{-3}x^{-2}dx$$

$$=-\frac{(1+x^{-1})^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{2(1+\frac{1}{x})^2}+c$$

$$(21)\int x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{4}{3}}-1}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{4}\int\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{3}{4}\frac{(x^{\frac{4}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{2}(x^{\frac{4}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt[3]{x^4}-1)^3}+c$$

$$(22)\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)}dx=2\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)}dx=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$$

$$(23)\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}=\int(\ln x+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx=2(\ln x+1)^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{\ln x+1}+c$$

$$(24)\int\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}dx=-(\ln x)^{-1}+c=-\frac{1}{\ln x}+c$$

$$(25)\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(1+e^{2x})^3}+c$$

$$(26)\int\frac{\sqrt{\ln x+1}dx}{x}=\int(\ln x+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}(\ln x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3}+c$$

$$(27)\int\frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{2}{3}\ln\left|1+x^{\frac{3}{2}}\right|+c$$

(28) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^2} = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-2}dx = -\frac{3}{2}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}+c$

$= -\frac{3}{2+2x^{\frac{2}{3}}}+c$

(29) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \ln|\ln x|+c$

(30) $\int \frac{dx}{x\ln x+x} = \int \frac{dx}{x(\ln x+1)} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{(\ln x+1)} = \ln|\ln x+1|+c$

(31) $\int (x^2-x)^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}\int (x^2-x)^{\frac{1}{2}}(2x-1)dx = \frac{1}{3}(x^2-x)^{\frac{3}{2}}+c$

(32) $\int \frac{3x^2dx}{(9+x^3)\sqrt{\ln(9+x^3)}} = \int \frac{3x^2}{(9+x^3)}\cdot[\ln(9+x^3)]^{-\frac{1}{2}}dx$

$= 2[\ln(9+x^3)]^{\frac{1}{2}}+c = 2\sqrt{\ln(9+x^3)}+c$

(33) $\int 4^x(1+2^{2x})^5\,dx=\frac{1}{\ln 4}\int(\ln 4)\,4^x(1+4^x)^5\,dx=\frac{(1+4^x)^6}{6\ln 4}+c$

(34) $\int\frac{\sqrt{1+e^{-4x}}}{e^{-6x}}dx=\int\sqrt{1+\frac{1}{e^{4x}}}\;e^{6x}\,dx=\int\sqrt{\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}}}\;e^{6x}\,dx$

$\int\frac{\sqrt{e^{4x}+1}}{e^{2x}}\;e^{6x}\,dx=\frac{1}{4}\int(e^{4x}+1)^{\frac{1}{2}}\,4e^{4x}\,dx=\frac{1}{6}(e^{4x}+1)^{\frac{3}{2}}+c$

(35) $\int\frac{2^x}{2+2^x}dx=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{2^x\ln 2}{2+2^x}dx=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|2+2^x\right|+c$

(36) $\int\frac{3}{(1+x)^5}dx=3\int(1+x)^{-5}\,dx=-\frac{3(1+x)^{-4}}{4}+c$

$=-\frac{3}{4(1+x)^4}+c$

(37) $\int(1+x^2)^2\,dx=\int(1+2x^2+x^4)dx=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+c$

$$(38)\int\frac{8-2x}{\sqrt{4-x}}dx=2\int\frac{4-x}{\sqrt{4-x}}dx=2\int(4-x)(4-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-2\int-(4-x)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{4}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{4}{3}\sqrt{(4-x)^3}+c$$

$$(39)\int\frac{dx}{x^2+4x+4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\int(x+2)^{-2}dx=\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{1}{-x-2}+c$$

$$(40)\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+4}}=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2}}=\int\frac{dx}{(x+2)(x+2)}$$

$$=\int(x+2)^{-2}dx=\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{-x-2}+c$$

$$(41)\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{-x}e^x}dx$$ بضرب البسط والمقام في e^{-x}

$$=-\int\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln\left|e^{-x}+1\right|+c$$

$$(42)\int\frac{dx}{1+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}e^x}dx$$ بضرب البسط والمقام في e^x

$$=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left|e^x+1\right|+c$$

$$(43)\int\frac{dx}{1+2^{-x}}=\int\frac{2^x}{2^x+2^{-x}2^x}dx$$ بضرب البسط والمقام في 2^x

$$=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x+1\right|+c$$

$$(44)\int\frac{dx}{1+3^x}=\int\frac{3^{-x}}{3^{-x}+3^{-x}3^x}dx$$ بضرب البسط والمقام في 3^{-x}

$$=-\frac{1}{\ln 3}\int\frac{-3^{-x}\ln 3}{3^{-x}+1}dx=-\frac{1}{\ln 3}\ln\left|3^{-x}+1\right|+c$$

$$(45)\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^xe^x}{e^xe^x+e^xe^{-x}}dx$$ بضرب البسط والمقام في e^x

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+c$$

$$(46)\int\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\int\tan^{-1}x\ \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2+c$$

$$(47)\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+2e^x+1}=\int\frac{e^xdx}{(e^x+1)^2}=\int e^x(e^x+1)^{-2}dx=\frac{(e^x+1)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{1}{-e^x-1}+c$$

48) $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{3+(\ln x)^2}} = \int \frac{\ln x}{x}[3+(\ln x)^2]^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\frac{\ln x}{x}[3+(\ln x)^2]^{-\frac{1}{2}}dx = [3+(\ln x)^2]^{\frac{1}{2}} + c$

$= \sqrt{3+(\ln x)^2} + c$

49) $\int \frac{\ln\sqrt[6]{e^{6x}-6}}{1-6e^{-6x}}dx = \int \frac{\ln(e^{6x}-6)^{\frac{1}{6}}}{1-6e^{-6x}}dx$

$= \frac{1}{6}\int \frac{\ln(e^{6x}-6)}{1-6e^{-6x}}dx = \frac{1}{6}\int \ln(e^{6x}-6)\ \frac{1}{1-6e^{-6x}}dx$

(بضرب البسط والمقام في e^{6x})

$= \frac{1}{36}\int \ln(e^{6x}-6)\ \frac{6e^{6x}}{e^{6x}-6}dx = \frac{1}{72}[\ln(e^{6x}-6)]^2 + c$

0) $\int \frac{\ln\sqrt{1-2^{3x}}}{2^{-3x}-1}dx = \int \frac{\ln(1-2^{3x})^{\frac{1}{2}}}{2^{-3x}-1}dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{\ln(1-2^{3x})}{2^{-3x}-1}dx = \frac{1}{2}\int \ln(1-2^{3x})\ \frac{1}{2^{-3x}-1}dx$

(بضرب البسط والمقام في 2^{3x})

$\frac{1}{-6\ln 2}\int \ln(1-2^{3x})\ \frac{-2^{3x}3\ln 2}{1-2^{3x}}dx = -\frac{1}{12\ln 2}[\ln(1-2^{3x})]^2 + c$

$$(51)\ \int \frac{\sqrt{4-9^x}}{3^{-2x}}dx = \int (4-9^x)^{\frac{1}{2}} 3^{2x}\ dx$$

$$= \frac{-1}{\ln 9}\int -(4-9^x)^{\frac{1}{2}} 9^x \ln 9\ dx$$

$$= \frac{-2}{3\ln 9}(4-9^x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-2}{3\ln 9}\sqrt{(4-9^x)^3} + c$$

$$(52)\ \int \frac{2^x dx}{4^x + 2^{x+1} + 1} = \int \frac{2^x}{2^{2x} + 2(2^x) + 1} dx$$

$$= \int \frac{2^x}{(2^x+1)(2^x+1)} dx = \int \frac{2^x}{(2^x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int 2^x (2^x+1)^{-2} \ln 2\ dx = \frac{-1}{\ln 2}(2^x+1)^{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{(\ln 2)\ (2^x+1)} + c$$

$$(53)\ \int \frac{dx}{x(\ln x)^2 + 2x\ln x + x} = \int \frac{dx}{x[(\ln x)^2 + 2\ln x + 1]}$$

$$= \int \frac{1dx}{x(\ln x+1)(\ln x+1)} = \int \frac{1}{x(\ln x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x}(\ln x+1)^{-2} dx = -(\ln x+1)^{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{\ln x+1} + c$$

$$(54)\ \int \frac{\ln x}{x}\, e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3+(\ln x)^2}}\right)} dx = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{3+(\ln x)^2}} dx$$

$$= \int \frac{\ln x}{x}(3+(\ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\frac{\ln x}{x}(3+(\ln x)^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= (3+(\ln x)^2)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{3+(\ln x)^2} + c$$

$$(55)\ \int \frac{1+\ln x}{3+2x\ln x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2+2\ln x}{3+2x\ln x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3+2x\ln x) + c$$

$$(56)\ \int \frac{\ln x}{x(\ln x)^2 + x} dx = \int \frac{\ln x}{x[(\ln x)^2+1]} dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln\left|(\ln x)^2+1\right|$$

$$(57)\ \int \frac{e^x x+1}{2x\sqrt{e^x+\ln x}} dx = \int \left(\frac{e^x x+1}{2x}\right)(e^x+\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{e^x x+1}{x}\right)(e^x+\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= (e^x+\ln x)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{e^x+\ln x} + c$$

$$(58)\ \int \frac{\sqrt{1+\ln(1+4^x)}}{2^{-2x}(1+4^x)}dx=\int [1+\ln(1+4^x)]^{\frac{1}{2}}\ \frac{2^{2x}}{1+4^x}\ dx$$

$$=\frac{1}{\ln 4}\int [1+\ln(1+4^x)]^{\frac{1}{2}}\ \frac{4^x}{1+4^x}\ln 4\ dx$$

$$=\frac{2}{3\ln 4}[1+\ln(1+4^x)]^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3\ln 4}\sqrt{[1+\ln(1+4^x)]^3}+c$$

$$(59)\ \int \frac{\sqrt{1+\ln(1+e^x)}}{e^{-x}(1+e^x)}dx=\int [1+\ln(1+e^x)]^{\frac{1}{2}}\ \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$$

$$=\frac{2}{3}[1+\ln(1+e^x)]^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{[1+\ln(1+e^x)]^3}+c$$

$$(60)\ \int \frac{\sqrt{1+\ln(1+e^{-x})}}{(1+e^x)}dx=\int [1+\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{1+e^x}\ dx$$

بضرب البسط والمقام في e^{-x}

$$=-\int [1+\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{2}}\ \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\ dx$$

$$=-\frac{2}{3}[1+\ln(e^{-x}+1)]^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln[e^{-x}+1])^3}+c$$

(61) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}dx = -\int [\ln(1+x)-\ln x]\frac{-1}{x(x+1)}dx$

$= -\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln x]^2 + c$

(62) $\int \sqrt{\frac{\cos^{-1}3x}{1-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\sqrt{\cos^{-1}3x}\,dx$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}(\cos^{-1}3x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2}{9}(\cos^{-1}3x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{2}{9}\sqrt{(\cos^{-1}3x)^3} + c$

(63) $\int \sqrt{\frac{\sin^{-1}2x}{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\sqrt{\sin^{-1}2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}(\sin^{-1}2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}(\sin^{-1}2x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sin^{-1}2x)^3} + c$

(64) $\int \frac{x+\cos^{-1}2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx + \int \frac{\cos^{-1}2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{8}\int -8x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\cos^{-1}2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}(\cos^{-1}2x)^2+c=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}-\frac{1}{4}(\cos^{-1}2x)^2+c$$

(65) $\int\frac{3^x-1}{9^x-1}dx=\int\frac{3^x-1}{3^{2x}-1}dx=\int\frac{3^x-1}{(3^x-1)(3^x+1)}dx$

$$=\int\frac{1}{3^x+1}dx=\int\frac{3^{-x}}{3^{-x}3^x+3^{-x}}dx=\int\frac{3^{-x}}{1+3^{-x}}dx$$

$$=-\frac{1}{\ln 3}\int\frac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}dx=-\frac{1}{\ln 3}\ln\left|1+3^{-x}\right|+c$$

(66) $\int\frac{1}{\ln 2^x-1}dx=\int\frac{1}{x\ln 2-1}dx=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln 2}{x\ln 2-1}dx$

$$=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|x\ln 2-1\right|+c$$

(67) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\ \ln(x+\sqrt{x^2+1})}dx=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}dx$

$$=\ln\left|\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right|+c$$

$(68)\ \int x^x[x^x + x^x \ln x]dx$

لا حظ أن الدالة $y=x^x$ يمكن أن نفاضلها كالتالي :-

$(1)\ y = x^x$

$(a)\ \ln y = \ln x^x$

$(b)\ \ln y = x \ln x$

$(c)\ \frac{1}{y} y' = x\frac{1}{x} + \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} y' = 1 + \ln x$

$(d)\ y' = y + y \ln x$

$(e)\ y' = x^x + x^x \ln x$

$$\int x^x[x^x + x^x \ln x]dx = \frac{1}{2}[x^x]^2 + c = \frac{1}{2}x^{2x} + c$$

$(69)\ \int (x^{2x}+1)[x^{2x} + x^{2x} \ln x]dx$

لا حظ أن الدالة $y=x^{2x}+1$ يمكن أن نفاضلها كالتالي :-

$y = e^{\ln x^{2x}} + 1$

$y = e^{2x \ln x} + 1$

$y' = e^{2x \ln x}(2x\frac{1}{x} + 2\ln x)$

$y' = e^{\ln x^{2x}}(2 + 2\ln x) = x^{2x}(2 + 2\ln x)$

$y' = 2x^{2x} + 2x^{2x} \ln x$

$$\frac{1}{2}\int (x^{2x}+1)[2x^{2x} + 2x^{2x} \ln x]dx = \frac{1}{2}[x^{2x}+1]^2 + c$$

ثانياً تعريف التكامل المحدد:-

هو عملية تجميع لعناصر { أطوال ، مساحات ، حجوم } بطريقة معينة وقد قام العالم الألماني ريمان بتوضيح عملية الجمع هذه والتي تعرف باسمه (مجموع ريمان) وأثبت أن هذا المجموع ما هو في الحقيقة إلا التكامل المحدد .

الرموز العلمية لعملية التكامل المحدد:-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن عملية التكامل المحدد يرمز لها كالتالي :-

$$\int_a^b F'(x)\,dx$$

حساب التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتكامل :-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \quad , f(x)=F'(x)$$

$$EX : \int_1^2 2x\,dx = x^2\Big|_1^2 = (2)^2-(1)^2 = 4-1=3$$

توضيح لمفهوم التكامل المحدد :-

سبق أن ذكرنا أن التكامل المحدد يستخدم لحساب الأطوال و المساحات والحجوم والآن سوف نوضح كيف أن التكامل المحدد يستخدم لإيجاد المساحات .

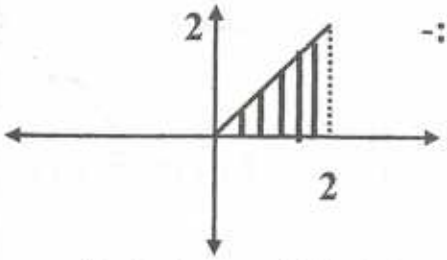
$$\int_0^2 x\,dx$$

$f(x)=x \quad ، \quad x\in[0,2]$

أولاً نعين قيمة التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتكامل :-

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = 2$$

ثانياً نعين قيمة التكامل المحدد هندسياً :-



لاحظ من بيان الدالة أن المطلوبة هو المساحة المظللة تحت بيان الدالة وهي عبارة عن مثلث قائم الزاوية طول قاعدته 2 وحدة طولية وارتفاعه 2 وحدة طولية

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$$ وحدة مربعة

نبذة مختصرة عن المتسلسلات

المتسلسلة هي منظومة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة

طرق التعبير عن المتسلسلات :-

أولاً طريقة السرد :- وهي عبارة عن سرد حدود المتسلسلة كالتالي :-

$1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$2+4+6+8+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1-3+5-7+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ثانياً طريقة $\sum$:-

$\sum$ وهو عبارة عن رمز يكون بديل عن كتابة حدود المتسلسلة {ويعني مجموع} بحيث يوضع داخل هذا الرمز قانون الحد العام ويعطينا هذا القانون حدود المتسلسلة وبالتالي يمكن تحويل أي متسلسلة في هذه الصورة إلى متسلسلة على صورة حدود (أي بطريقة السرد)

$$\sum_{i=1}^{14}(i+1)=2+3+4+\ldots\ldots\ldots+15$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}i^2=1+4+9+16+\ldots\ldots$$

حـــالات خاصة من المتسلسلات :-

(1)المتسلسلة الحسابية :- هي مجموعة حدود رتبت بحيث يكون الفرق بين أي حد والحد السابق له مباشرة مقدارا ً ثابتا ً يسمى أساس المتسلسلة ويرمز له بالرمز d .

مـــثـــال :- بين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية حسابية أم لا :

$(A)\ 2+5+8+11+.....$

$d=5-2=3$
$d=8-5=3$

المتسلسلة حسابية

$(B)\ 1+4+6+10+.....$

$d=4-1=3$
$d=6-4=2$

المتسلسلة ليست حسابية

قانون الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$$\sum_{i}^{k} a_i = \sum_{i}^{k} [a_1 + d(i-1)]$$

حيث i رتبة أي حد

d أساس المتسلسلة حيث **الحد السابق له مباشرة – أي حد = d**

a_i قانون الحد العام

a_1 قيمة الحد الأول في المتسلسلة

k رتبة الحد الأخير في المتسلسلة أو عدد الحدود المتسلسلة

ـتخدمات قانون الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

- ـتخدم لإيجاد قيمة أي حد إذا علم a_1 , i , d
- ـتخدم لإيجاد رتبة أي حد i إذا علم a_1 , d , a_i
- ـتخدم لإيجاد الحد العام لأي متسلسلة حسابية وذلك بأن نعوض بـ a_1 , d , a في قانون الحد العام

المتسلسلة الهندسية:- هي مجموعة حدود رتبت بحيث يكون حاصل قسمة أي حد على الحد السابق له مباشرة مقدارا ً ثابتاً يسمى أساس المتسلسلة ويرمز له بالرمز d .

ـثال :- بين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية هندسية أم لا :

$(A)\ 2+4+8.....$

$d=\frac{4}{2}=2$

$d=\frac{8}{4}=2$

المتسلسلة هندسية

$(B)\ 3+9+18+10+.....$

$d=\frac{9}{3}=3$

$d=\frac{18}{9}=2$

المتسلسلة ليست هندسية

قانون الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

$$\sum_{i}^{k} a_i = \sum_{i}^{k} a_1 d^{i-1}$$

حيث i رتبة أي حد

d أساس المتسلسلة حيث $d = \frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

a_1 قيمة الحد الأول في المتسلسلة

k رتبة الحد الأخير في المتسلسلة أو عدد الحدود المتسلسلة

a_i قانون الحد العام

استخدمات قانون الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

(1) يستخدم لإيجاد قيمة أي حد إذا علم a_1 , i , d

(2) يستخدم لإيجاد رتبة أي حد i إذا علم a_1 , d , a_i

(3) يستخدم لإيجاد الحد العام لأي متسلسلة هندسية وذلك بأن نعوض بـ a_1 , d , a_i في قانون الحد العام

قوانيين المجاميع لمتسلسلات خاصة :-

تستخدم هذه القوانين لإيجاد مجموع حدود المتسلسلات ابتداء من الحد الأول $i=1$ وكل قانون للجمع يستخدم على حسب نوع المتسلسلة كالتالي :-

$$(1) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$(3)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(4)\sum_{i=1}^{n} a = an$$

ـــلاحـــظـــات:-

(1) n في قوانين المجاميع هي عدد الحدود المراد جمعها ابتدء من الحد الأول $i=1$ وانتهاء بـ $i=n$

(2) إذا كان عدد الحدود المراد جمعها تبدأ من $i=m$ حيث $m\neq 1$ فإننا لا نستخدم قوانين المجاميع مباشرة وإنما نستخدم القانون الآتي :-

$$\sum_{i=m}^{n} A = \sum_{i=1}^{n} A - \sum_{i=1}^{m-1} A$$

ـــثـــال:- أوجد مجموع المتسلسلات :

$$(1)\ \sum_{i=1}^{6}(2i+1) = 3+5+7+9+11+13 = 48$$

$$or\ \sum_{i=1}^{6}(2i+1) = \sum_{i=1}^{6} 2i + \sum_{i=1}^{6} 1 = 2\sum_{i=1}^{6} i + \sum_{i=1}^{6} 1$$

$$=2\sum_{i=1}^{6} i+\sum_{i=1}^{6} 1=2\frac{(6)(6+1)}{2}+6=48 \quad ,n=6$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{5} i^2=1+4+9+16+25=55$$

$$or \sum_{i=1}^{5} i^2=\frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}=55 \quad ,n=5$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{5}(i^2+1)=\sum_{i=1}^{5} i^2+\sum_{i=1}^{5} 1=\frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}+5=60$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{5}(2i^2+3i)=2\sum_{i=1}^{5} i^2+3\sum_{i=1}^{5} i$$

$$=2\ \frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}+3\ \frac{(5)(5+1)}{2}\ =2(55)+3(15)=155$$

$$(5)\ \sum_{i=1}^{5}(2i^3+3i)=2\sum_{i=1}^{5} i^3+3\sum_{i=1}^{5} i$$

$$=2[\frac{(5)(5+1)}{2}]^2+3\ \frac{(5)(5+1)}{2}=2(225)+3(15)=495$$

(6) $\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=7+9+11+13=40$

or $\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=\sum_{i=1}^{6}(2i+1)-\sum_{i=1}^{2}(2i+1)$

$$\sum_{i=1}^{6}(2i+1)=2\sum_{i=1}^{6}i+\sum_{i=1}^{6}1=2\frac{(6)(6+1)}{2}+6=48$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i+1)=2\sum_{i=1}^{2}i+\sum_{i=1}^{2}1=2\frac{(2)(2+1)}{2}+2=8$$

$$\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=48-8=40$$

(7) $\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)$

$$\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)=\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)-\sum_{i=1}^{4}(2i^2-2)$$

$$\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)=2\sum_{i=1}^{30}i^2-\sum_{i=1}^{30}2=2\frac{30[2(30)+1](30+1)}{6}-2(30)$$

$$\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)=18850$$

$$\sum_{i=1}^{4}(2i^2-2)=\sum_{i=1}^{4}2i^2-\sum_{i=1}^{4}2=2\sum_{i=1}^{4}i^2-\sum_{i=1}^{4}2$$

$$=2\frac{4[2(4)+1](4+1)}{6}-2(4)=60-8=52$$

$$\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)=18850-52=18798$$

مثـــال:- عبر عن كل مما يأتي في صورة $\sum$:-

(1) $3+5+7+9+11+13$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$d=5-3=2$
$d=7-5=2$

المتسلسلة حسابية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$a_1=3 \ , \ d=2$
$a_i=a_1+d(i-1) \rightarrow a_i=3+2(i-1)$
$a_i=3+2i-2 \rightarrow a_i=2i+1$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 6

$k=6$

$$\sum_{i=1}^{6} a_i=\sum_{i=1}^{6}[2i+1]$$

(2) $2+4+6+8+\ldots\ldots\ldots\ldots+16$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$d=4-2=2$
$d=6-4=2$

المتسلسلة حسابية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$a_1 = 2 \ , \ d = 2$

$a_i = a_1 + d(i-1) \rightarrow a_i = 2 + 2(i-1)$

$a_i = 2 + 2i - 2 \rightarrow a_i = 2i$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 8 $\quad k = 8$

$$\sum_{i=1}^{8} a_i = \sum_{i=1}^{8} 2i$$

(3) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots + 64$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$d = \frac{2}{1} = 2$

$d = \frac{4}{2} = 2$

المتسلسلة هندسية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

$a_1 = 1 \ , \ d = 2$

$a_i = 2^{i-1}$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 7 $\quad k = 7$

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = \sum_{i=1}^{7} (1)2^{i-1} = \sum_{i=1}^{7} 2^{i-1}$$

$(4)\ 1+3+9+27+81$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$$d=\frac{3}{1}=3$$
$$d=\frac{9}{3}=3$$

متسلسلة هندسية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

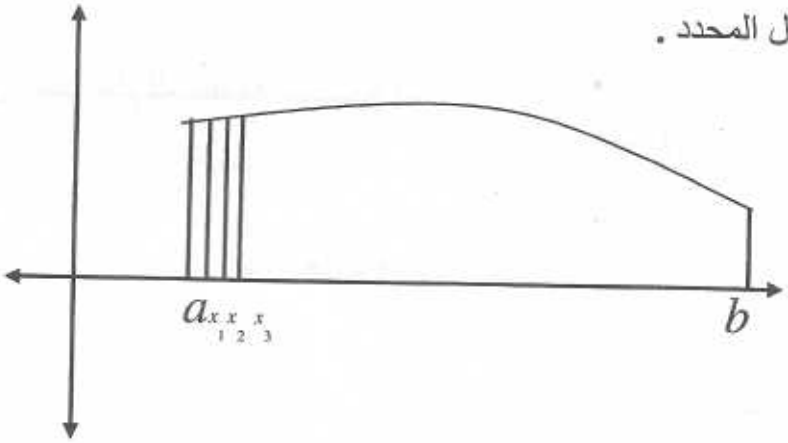
$$a_1=1\ ,\ d=3$$
$$a_i=3^{i-1}$$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 5 $\qquad k=5$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i=\sum_{i=1}^{5}(1)3^{i-1}=\sum_{i=1}^{5}3^{i-1}$$

حساب التكامل المحدد باستخدام مجموع ريمان :-

يكمن حساب قيمة التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ باستخدام مجموع ريمان وذلك بأن نقسم المساحة التي تحت منحنى الدالة $f(x)$ إلى مستطيلات ونقوم بإيجاد مجموع مساحة هذه المستطيلات فيكون هو قيمة التكامل المحدد .



(1) نعين عرض كل مستطيل وليكن Δx بحيث تكون المستطيلات متساوية في العرض أي أن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ حيث n عدد المستطيلات

(2) نعين x_i حيث :-

$$x_i = a + i\,\Delta x$$
$$i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots ,n$$

(3) نعين طول كل مستطيل وليكن $f(x_i)$ وذلك بأن نعوض بـ x_i التي تحصلنا عليها في $f(x)$

(4) نعين مجموع مساحات المستطيلات S_n وذلك بأن نعوض بـ $f(x_i)$ و Δx في القانون الآتي :-

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(5) نقوم بإخراج أي عدد وأي n خارج $\sum_{i=1}^{n}$ ونستخدم قوانين المجاميع الآتية للتبسيط :-

$$(1)\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$(3)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(4)\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

(6) نعين نهاية المجموع أي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

مـــثـــال:- باستخدام مجموع ريمان أوجد قيمة التكاملات الآتية :-

$$(1)\int_0^3 x\,dx$$

$$a=0, b=3, f(x)=x$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=0+i\frac{3}{n}=i\frac{3}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f(i\frac{3}{n})=i\frac{3}{n}$$

$$(D)\ \sum_i^n f(x_i)\,\Delta x=\sum_i^n i\frac{3}{n}\ \frac{3}{n}$$

$$(E)\ S_n=\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^n i=\frac{9}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2n}$$

$$(F)\int_0^3 x\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{2}+\frac{9}{2n})=\frac{9}{2}+0=\frac{9}{2}$$

$$(2)\int_2^3 (x+1)\,dx$$

$$a=2\ ,\ b=3\ ,\ f(x)=x+1$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=2+i\frac{1}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f(2+i\frac{1}{n})=2+i\frac{1}{n}+1=3+i\frac{1}{n}$$

$$(D)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x=\sum_i^n (3+i\frac{1}{n})\ \frac{1}{n}$$

$$(E)S_n=\sum_{i=1}^n (\frac{3}{n}+i\frac{1}{n^2})=\sum_{i=1}^n \frac{3}{n}+\sum_{i=1}^n i\frac{1}{n^2}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n 1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i$$

$$=\frac{3}{n}\,n\ +\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$(F)\int_2^3 (x+1)\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{7}{2}+\frac{1}{2n})=\frac{7}{2}+0=\frac{7}{2}$$

$$(3)\int_1^3 x^2\ dx$$

$$a=1\ ,\ b=3\ ,\ f(x)=x^2$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=1+i\frac{2}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f(1+i\frac{2}{n})=(1+i\frac{2}{n})^2=1+i\frac{4}{n}+i^2\frac{4}{n^2}$$

$$(D)\sum_{i}^{n} f(x_i)\ \Delta x = \sum_{i}^{n} (1 + i\frac{4}{n} + i^2 \frac{4}{n^2})\ \frac{2}{n}$$

$$(E)\sum_{i}^{n} f(x_i)\ \Delta x = \sum_{i}^{n} (\frac{2}{n} + i\frac{8}{n^2} + i^2 \frac{8}{n^3})$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{n}n + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 2 + \frac{4n+4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}$$

$$= 2 + 4 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$= 6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$(F)\int_{1}^{3} x^2\, dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2})$$

$$= 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{26}{3}$$

$$(4)\int_1^2 (x^2+x)\,dx$$

$$a=1,\ b=2,\ f(x)=x^2+x$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=1+i\frac{1}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f(1+i\frac{1}{n})=(1+i\frac{1}{n})^2+1+i\frac{1}{n}$$

$$=1+i\frac{2}{n}+i^2\frac{1}{n^2}+1+i\frac{1}{n}=2+i\frac{3}{n}+i^2\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_i^n 1+\frac{3}{n^2}\sum_i^n i+\frac{1}{n^3}\sum_i^n i^2$$

$$=\frac{2}{n}n+\frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=2+\frac{3n+3}{2n}+\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$=2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

$$(F)\int_1^2 (x^2+x)dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{7}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})$$

$$=\frac{7}{2}+0+\frac{1}{3}+0+0=\frac{23}{6}$$

$$(5)\int_0^3 x^3\,dx$$

$$a=0\,,\,b=3\,,\,f(x)=x^3$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=0+i\frac{3}{n}=i\frac{3}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f(i\frac{3}{n})=(i\frac{3}{n})^3=i^3\frac{27}{n^3}$$

$$(D)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x=\sum_i^n (i^3\frac{27}{n^3})\ \frac{3}{n}$$

$$(E)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x=\sum_i^n i^3\frac{81}{n^4}$$

$$=\frac{81}{n^4}\sum_i^n i^3=\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{81}{n^4}\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$$

$$=\frac{(81n^2+162n+81)}{4n^2}=\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}$$

$$(F)\int_0^3 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2})$$

$$=\frac{81}{4}+0+0=\frac{81}{4}$$

$$(6)\int_0^3 2\ dx$$

$$a = 0\ , b = 3\ , f(x) = 2$$

$$(A)\ \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$(B)\ x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{3}{n} = i\frac{3}{n}$$

$$(C)\ f(x_i) = f(i\frac{3}{n}) = 2$$

$$(D)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x = \sum_i^n 2\ \frac{3}{n}$$

$$(E)\ S_n = \frac{6}{n}\sum_i^n 1 = \frac{6}{n}n = 6$$

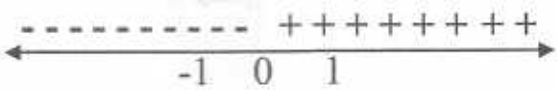
$$(F)\int_0^3 2\ dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(6) = 6$$

التـــكـــامـــل المحدد لدالـــة الـــقـــيـــمـــة الـــمـطـــلـقـة

عند إيجاد التكامل المحدد لدالة القيمة المطلقة يتم إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثر من قاعدة لمعرفة متى تكون سالبة ومتى تكون موجبة وبناء على ذلك نكامل القسم السالب من الدالة لوحده والقسم الموجب لوحده وكل هذا مشروط بحدود التكامل هل تقع في القسم الموجب فقط أو القسم السالب فقط أوتقع في كليهما

$$(1)\ \int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

$$F(x) = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$



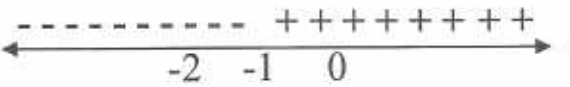
$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{1} = [-\frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2] + [\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(2) $\int_{-2}^{0} |x+1|\, dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{0} |x+1|\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x-1)\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx$$

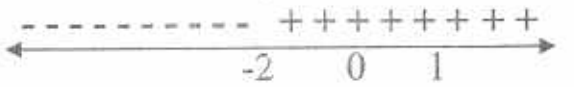
$$=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\left[-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)\right]-\left[-\frac{1}{2}(-2)^2+2\right]+\left[\frac{1}{2}(0)^2+(0)\right]-\left[\frac{1}{2}(-1)^2-\right.$$

$$=\left[-\frac{1}{2}+1\right]-[-2+2]-\left[\frac{1}{2}-1\right]=1$$

(3) $\int_{0}^{1} |x+2|\, dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+2 & , x \geq -2 \\ -(x+2) & , x < -2 \end{cases}$$

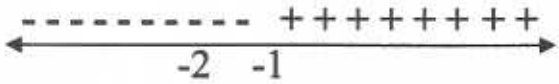


$$\int_0^1 |x+2|\,dx = \int_0^1 (x+2)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^1 = \left[\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right]-\left[\frac{1}{2}(0)^2+2(0)\right]=\frac{5}{2}$$

(4) $\int_{-2}^{-1} |x+1|\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & , x\geq -1 \\ -(x+1) & , x<-1 \end{cases}$$



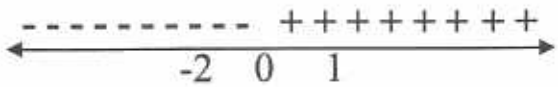
$$\int_{-2}^{-1} |x+1|\,dx = \int_{-2}^{-1} (-x-1)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-2}^{-1} = \left[-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)\right]-\left[-\frac{1}{2}(-2)^2+2\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2}+1\right]-[-2+2]=\frac{1}{2}$$

(5) $\int_{-2}^{1}(|x|+2)\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{1}(|x|+2)\,dx=\int_{-2}^{1}|x|dx+\int_{-2}^{1}2\,dx=\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{-2}^{1}2\,dx$$

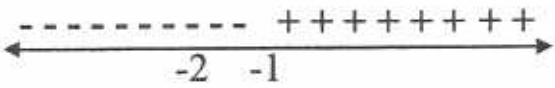
$$=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}+2x\Big|_{-2}^{1}$$

$$=[-\frac{1}{2}(0)^2+\frac{1}{2}(-2)^2]+[\frac{1}{2}(1)^2-\frac{1}{2}(0)^2]+[2(1)-2(-2)]$$

$$=2+\frac{1}{2}+6=\frac{17}{2}$$

(6) $\int_{-2}^{-1}(|x+1|+2x)\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & , x\geq -1 \\ -(x+1) & , x<-1 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{-1}(|x+1|+2x)\,dx=\int_{-2}^{-1}|x+1|\,dx+\int_{-2}^{-1}2x\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-2}^{-1}2x\,dx$$

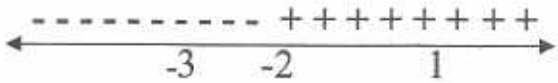
$$=(-\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_{-2}^{-1}+x^2\Big|_{-2}^{-1}$$

$$=[-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)]-[-\frac{1}{2}(-2)^2+2]+[(-1)^2-(-2)^2]$$

$$=[-\frac{1}{2}+1]-[-2+2]-3=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

(7) $\int_{-3}^{1}x|x+2|\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+2 & , x\geq -2 \\ -(x+2) & , x<-2 \end{cases}$$

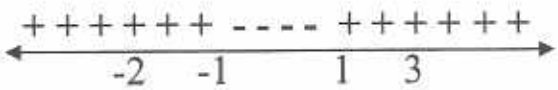


$$\int_{-3}^{1}x|x+2|\,dx=\int_{-3}^{-2}-x(x+2)\,dx+\int_{-2}^{1}x(x+2)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(-x^2-2x)\,dx+\int_{-2}^{1}(x^2+2x)\,dx=(-\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_{-3}^{-2}+(\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_{-2}^{1}=-\frac{4}{3}$$

(8) $\int_{-2}^{3}\left|x^2-1\right|dx$

$$F(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x\geq 1 \ or \ x<-1 \\ -(x^2-1) & , -1\leq x<1 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{1}-(x^2-1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{3}\approx 9.33$$

نتائج هامة

(1) $\frac{d}{dx}\int F'(x)\,dx = F'(x)$

$D_x \int F'(x)\,dx = F'(x)$

EX:

$(A)\ \frac{d}{dx}\int(3x+1)\,dx = 3x+1$

$(B)\ D_x \int(x^2+x)\,dx = x^2+x$

(2) $\int \frac{d}{dx} F'(x)\,dx = F'(x)+c$

$\int D_x F'(x)\,dx = F'(x)+c$

EX:

$(A)\ \int \frac{d}{dx}(3x+1)\,dx = 3x+1+c$

$(B)\ \int D_x(x^2+x)\,dx = x^2+x+c$

$$(3)\ \int_a^b \frac{d}{dx} F'(x)\,dx = F'(x)\Big|_a^b = F'(b) - F'(a)$$

$$\int_a^b D_x\, F'(x)\,dx = F'(x)\Big|_a^b = F'(b) - F'(a)$$

EX:

$$(A)\ \int_1^2 \frac{d}{dx}(x+1)\,dx = (x+1)\Big|_1^2 = (2+1)-(1+1) = 1$$

$$(B)\ \int_0^2 D_x(x^2+2)\,dx = (x^2+2)\Big|_0^2 = (4+2)-(0+2) = 4$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\int_{k(x)}^{h(x)} F(t)\,dt = F[h(x)]\,h'(x) - F[k(x)]\,k(x)$$

$$D_x \int_{k(x)}^{h(x)} F(t)\,dt = F[h(x)]\,h'(x) - F[k(x)]\,k(x)$$

EX:

$$(A)\ \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$F(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

$$k(x)=x^2 \quad , k'(x)=2x$$

$$h(x)=x^3 \quad , h'(x)=3x^2$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2+1}=F[x^3]\,3x^2-F[x^2]\,2x$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3x^2}{x^6+1}-\frac{2x}{x^4+1}$$

$$(B)\ \frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$k(x)=0 \quad , k'(x)=0$$

$$h(x)=x \quad , h'(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=F[x]\,(1)-F[0]\,(0)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نظرية القيمة المتوسطة

F(X) دالة مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] فإن هناك على

c في الفترة المفتوحة(a,b) بحيث يحقق هذا العدد :

$$F(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\,dx$$

مثال :- أوجد قيم c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المحدد:

$$(1)\ F(x)=x^2 \quad , x\in[1,2]$$
$$a=1\ ,\ b=2$$
$$F(c)=c^2$$
$$c^2=\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\ dx$$
$$c^2=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2$$
$$c^2=\frac{1}{3}(2)^3-\frac{1}{3}(1)^3$$
$$c^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\ \Rightarrow c^2=\frac{7}{3}$$
$$c=\sqrt{\frac{7}{3}}\in(1,2)$$
$$c=-\sqrt{\frac{7}{3}}\notin(1,2)$$

2) $F(x) = 2x - 3 \quad , x \in [1,4]$

$a = 1 \ , \ b = 4$

$F(c) = 2c - 3$

$2c - 3 = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (2x-3)\ dx$

$2c - 3 = (\frac{1}{3}x^2 - x)\Big|_1^4$

$2c - 3 = [\frac{1}{3}(4)^2 - 4] - [\frac{1}{3}(1)^2 - 1]$

$2c - 3 = 2 \ \therefore c = \frac{5}{2}$

$c = \frac{5}{2} \in (1,4)$

3) $F(x) = x(3-x) \quad , x \in [0,3]$

$a = 0 \ , \ b = 3$

$F(c) = c(3-c) = 3c - c^2$

$3c - c^2 = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (3x - x^2)\ dx$

$3c - c^2 = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^3$

$3c - c^2 = \frac{1}{3}[\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3] - \frac{1}{3}[\frac{3}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3]$

$3c - c^2 = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ 2c^2 - 6c + 3 = 0$

$a=2\ ,b=-6\ ,c=3$

$$c=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}$$

$$c=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\in[0,3]$$

$$c=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\in(0,3)$$

(4) $F(x)=\frac{1}{x}\quad ,x\in[1,e]$

$a=1\ ,\ b=e$

$F(c)=\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}(\ln|x|)\Big|_1^e$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}[\ln e-\ln 1]\Rightarrow\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}[1-0]$$

$\therefore\ c=e-1$

$c=e-1\in(1,e)$

قوانين تـكـامل الدوال المثلثية

(1) $\int \sin F(x) \quad F'(x)\,dx = -\cos F(x) + c$

(2) $\int \cos F(x) \quad F'(x)\,dx = \sin F(x) + c$

(3) $\int \tan F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln|\sec F(x)| + c$

(4) $\int \cot F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln|\sin F(x)| + c$

(5) $\int \sec F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln|\sec F(x) + \tan F(x)| + c$

(6) $\int \csc F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln|\csc F(x) - \cot F(x)| + c$

or $\quad = -\ln|\csc F(x) + \cot F(x)| + c$

(7) $\int \sec F(x) \tan F(x) \quad F'(x)\,dx = \sec F(x) + c$

(8) $\int \csc F(x) \cot F(x) \quad F'(x)\,dx = -\csc F(x) + c$

(9) $\int \csc^2 F(x) \quad F'(x)\,dx = -\cot F(x) + c$

(10) $\int \sec^2 F(x) \quad F'(x)\,dx = \tan F(x) + c$

قوانين حساب المثلثات(المتطابقات)

(1) $\sin^2 ax + \cos^2 ax = 1$

(2) $\sec^2 ax = 1 + \tan^2 ax$

(3) $\csc^2 ax = 1 + \cot^2 ax$

(4) $\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$

(5) $\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax)$

(6) $\sin 2ax = 2\sin ax \cos ax$

(7) $\cos 2ax = \cos^2 ax - \sin^2 ax$

(8) $\sin ax = \frac{1}{\csc ax}$

(9) $\cos ax = \frac{1}{\sec ax}$

(10) $\tan ax = \frac{1}{\cot ax}$

(11) $\cot ax = \frac{\cos ax}{\sin ax}$

(12) $\tan ax = \frac{\sin ax}{\cos ax}$

(13) $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx)]$

(14) $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(ax+bx) + \cos(ax-bx)]$

(15) $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(ax-bx) - \cos(ax+bx)]$

(16) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

(17) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

مسائل متنوعة على التكامل

1) $\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

2) $\int \cos\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x + c$

3) $\int \tan\frac{1}{3}x\, dx = 3\int \frac{1}{3}\tan\frac{1}{3}x\, dx = 3\ln\left|\sec\frac{1}{3}x\right| + c$

4) $\int x\tan x^2 \sec x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x\tan x^2 \sec x^2 dx = \frac{1}{2}\sec x^2 + c$

5) $\int 3^{2x}\cot 3^{2x}\csc 3^{2x}\, dx = \frac{1}{2\ln 3}\int 3^{2x}\, 2(\ln 3)\cot 3^{2x}\csc 3^{2x}\, dx$

$= -\frac{1}{2\ln 3}\csc 3^{2x} + c$

6) $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \sec(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\ln\left|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}\right| + c$

7) $\int e^{3x}\csc^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\csc^2 e^{3x}\, dx = -\frac{1}{3}\cot e^{3x} + c$

8) $\int e^x \sec^2 e^x\, dx = \tan e^x + c$

(9) $\int \frac{\sec 5x \tan 5x}{\sqrt{3+\sec 5x}}\, dx = \frac{1}{5}\int 5(\sec 5x \tan 5x)(3+\sec 5x)$

$= \frac{2}{5}(3+\sec 5x)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{3+\sec 5x} + c$

(10) $\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int 2(\cos 2x)(1+\sin 2x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= (1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+\sin 2x} + c$

(12) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

(13) $\int \sin 2x \cos^3 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int -2\sin 2x(\cos 2x)^3\, dx$

$= -\frac{1}{8}\cos^4 2x + c$

(14) $\int \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}}\, dt = -\int -\sin t\,(\cos t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = -2(\cos t)^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\sqrt{\cos t} + c$

15) $\int \sqrt{x}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}\cos x^{\frac{3}{2}} + c$

16) $\int \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\,dt = -\int -t^{-2}\sin t^{-1}\,dt = \cos t^{-1} + c$

17) $\int e^{\cos t}\sin t\,dt = -\int -e^{\cos t}\sin t\,dt = -e^{\cos t} + c$

18) $\int \cot 2x\csc^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int -2\cot 2x\csc^2 2x\,dx$

$= -\frac{1}{4}\cot^2 2x + c$

19) $\int \cot^4 3x\csc^2 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int -3\cot^4 3x\csc^2 3x\,dx$

$= -\frac{1}{15}\cot^5 3x + c$

20) $\int \tan 5x\sec^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\int 5\tan 5x\sec^2 5x\,dx$

$= \frac{1}{10}\tan^2 5x + c$

(21) $\int \tan^4 3x\sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3\tan^4 3x\sec^2 3x\,dx$

$= \frac{1}{15}\tan^5 3x + c$

(22) $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}\,dx = \int e^x \sec^2 e^x\,dx = \tan e^x + c$

(23) $\int \frac{x}{\sin^2 x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \csc^2 x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cot x^2 + c$

(24) $\int \frac{x\cos x + 2\cos x}{x+2}\,dx = \int \frac{\cos x\,(x+2)}{x+2}\,dx$

$= \int \cos x\,dx = \sin x + c$

(25) $\int \cos x \sec x\,dx = \int \cos x \frac{1}{\cos x}\,dx$

$= \int dx = x + c$

(26) $\int \sin x \sec x\,dx = \int \sin x \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c$

(27) $\int \frac{\cot x \csc x}{1+\csc x}\,dx = -\int \frac{-\cot x \csc x}{1+\csc x}\,dx = -\ln|1+\csc x| + c$

(28) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx = -\cos(\ln x) + c$

(29) $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{2+\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|2+\cos 2x| + c$

(30) $\int \sec^2 2x \tan^6 2x \, dx = \frac{1}{2}\int 2\sec^2 2x \tan^6 2x \, dx$

$= \frac{1}{14}\tan^7 2x + c$

(31) $\int (1+\cos 8x)^3 \sin 8x \, dx = -\frac{1}{8}\int -8(1+\cos 8x)^3 \sin 8x \, dx$

$= -\frac{1}{32}(1+\cos 8x)^4 + c$

(32) $\int \sqrt{1+\sin 2x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}} 2\cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{3}(1+\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + c$

(33) $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx = -\int \frac{-\tan x}{\ln(\cos x)} dx = -\ln\left|\ln(\cos x)\right| + c$

(34) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx = \ln\left|\ln(\sin x)\right| + c$

(35) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx =$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

(36) $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int -\cot x \csc^2 x \, dx$

$= -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

(37) $\int \frac{\sec x}{\tan x}\,dx = \int \sec x \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= \int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

(38) $\int \frac{\csc x}{\cot x}\,dx = \int \csc x \frac{1}{\cot x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(39) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 + c$

(40) $\int \frac{\cos^{-1} 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \cos^{-1} 3x \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

$= -\frac{1}{6}(\cos^{-1} 3x)^2 + c$

(41) $\int \frac{(\tan^{-1} 2x)^3}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (\tan^{-1} 2x)^3 \frac{2}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}(\tan^{-1} 2x)^4 + c$

(42) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^5 2x}\,dx = \int \sin 2x\,(\cos 2x)^{-5}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int -2\sin 2x\,(\cos 2x)^{-5}\,dx = \frac{1}{8}(\cos 2x)^{-4} + c$

$= \frac{1}{8\cos^4 2x} + c$

(43) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} e^{\sec x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} e^{\sec x} dx$

$= \int \tan x \sec x \, e^{\sec x} dx = e^{\sec x} + c$

(44) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} 2^{\csc x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} 2^{\csc x} dx$

$= -\int -\cot x \csc x \, 2^{\csc x} dx = -\frac{1}{\ln 2} 2^{\csc x} + c$

(45) $\int \sec^4 x \tan x \, dx = \int \sec^3 x \sec x \tan x \, dx$

$= \frac{1}{4} \sec^4 x + c$

(46) $\int \csc^5 x \cot x \, dx = -\int -\csc^4 x \csc x \cot x \, dx$

$= -\frac{1}{5} \csc^5 x + c$

(47) $\int \frac{2^{\tan^{-1} 2x}}{1+4x^2} dx = \int 2^{\tan^{-1} 2x} \frac{1}{1+4x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int 2^{\tan^{-1} 2x} \frac{2}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2 \ln 2} 2^{\tan^{-1} 2x} + c$

(48) $\int \sqrt[5]{\tan 2x}\ \sec^2 2x\ dx = \frac{1}{2}\int (\tan 2x)^{\frac{1}{5}}\, 2\sec^2 2x\ dx$

$= \frac{5}{12}(\tan 2x)^{\frac{6}{5}} + c$

(49) $\int \cot 8x \sqrt{\ln(\sin 8x)}\ dx = \frac{1}{8}\int 8\cot 8x(\ln(\sin 8x))^{\frac{1}{2}}\ dx$

$= \frac{1}{12}[\ln(\sin 8x)]^{\frac{3}{2}} + c$

(50) $\int \sec^2 4x \sin 4x\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 4x}\ \sin 4x\ dx$

$= -\frac{1}{4}\int -4(\cos 4x)^{-2} \sin 4x\ dx = \frac{1}{4}(\cos 4x)^{-1} + c$

$= \frac{1}{4\cos 4x} + c$

(51) $\int \tan 3x \sqrt[3]{\ln(\cos 3x)}\ dx = -\frac{1}{3}\int -3\tan 3x(\ln(\cos 3x))^{\frac{1}{3}}\ dx$

$= -\frac{1}{4}[\ln(\cos 3x)]^{\frac{4}{3}} + c$

(52) $\int \frac{5^{\cot 3x}}{\sin^2 3x}\ dx = \int 5^{\cot 3x} \csc^2 3x\ dx = -\frac{1}{3}\int 5^{\cot 3x}(-3\csc^2 3x)\ dx$

$= -\frac{5^{\cot 3x}}{3\ln 5}$

(52) $\int 3^{3\tan 2t}\sec^2 2t\,dt=\frac{1}{6}\int 3^{3\tan 2t}\,6\sec^2 2t\,dt=\frac{3^{3\tan 2t}}{6\ln 3}+c$

(53) $\int\frac{x^2}{\tan x^3}\,dx=\int x^2\cot x^3\,dx=\frac{1}{3}\int 3x^2\cot x^3\,dx=\frac{1}{3}\ln\left|\sin x^3\right|+c$

(54) $\int\frac{-dx}{(1+\frac{x^2}{4})(\cot^{-1}\frac{x}{2})}=2\int\frac{\frac{-1/2}{(1+\frac{x^2}{4})}}{(\cot^{-1}\frac{x}{2})}\,dx=2\ln(\cot^{-1}\frac{x}{2})+c$

(55) $\int\frac{dx}{(1+\frac{x^2}{16})(\tan^{-1}\frac{x}{4})}=4\int\frac{\frac{1/4}{(1+\frac{x^2}{16})}}{(\tan^{-1}\frac{x}{4})}\,dx=4\ln(\tan^{-1}\frac{x}{4})+c$

(56) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}(\sin^{-1}2x)}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{(\sin^{-1}2x)}\,dx=\frac{1}{2}\ln(\sin^{-1}2x)+c$

(57) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}(\cos^{-1}3x)} = -\frac{1}{3}\int \frac{\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}}{(\cos^{-1}3x)}\,dx$

$= -\frac{1}{3}\ln(\cos^{-1}3x)+c$

(58) $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 2x}dx + \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx$

$= \int \csc^2 2x\,dx + \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\sin 2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\csc^2 2x\,dx + \frac{1}{2}\int 2\cot 2x \csc 2x dx$

$= -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{2}\csc 2x + c$

(59) $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x}dx + \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx$

$= \int \sec^2 2x\,dx + \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\sec^2 2x\,dx + \frac{1}{2}\int 2\tan 2x \sec 2x dx$

$= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{2}\sec 2x + c$

60) $\int \frac{\cot 4x}{\sqrt{1+\ln\sin 4x}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4(\cot 4x)(1+\ln(\sin 4x))^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{4}(1+\ln(\sin 4x))^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}\sqrt{1+\ln(\sin 4x)} + c$

61) $\int \frac{\tan 2x}{\sqrt{1+\ln\cos 2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2(\tan 2x)(1+\ln(\cos 2x))^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= -(1+\ln(\cos 2x))^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1+\ln(\cos 2x)} + c$

62) $\int \frac{\sec x \sin x}{\cos x}\,dx = \int \sec x \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

63) $\int e^{\sin t} \sin t \cot t\,dt = \int e^{\sin t} \sin t \frac{\cos t}{\sin t}\,dt = \int e^{\sin t} \cos t\,dt$

$= e^{\sin t} + c$

(64) $\int e^{\csc x} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int e^{\csc x} \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}\,dx$

$= -\int -e^{\csc x} \cot x \csc x\,dx = -e^{\csc x} + c$

(65) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos x}dx$

$= \int \sec x\,dx - \int \cos x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$

(66) $\int \frac{e^x \sec^2 e^x}{\tan^2 e^x}\, dx = \int \frac{e^x(1+\tan^2 e^x)}{\tan^2 e^x}\, dx = \int \frac{e^x + e^x \tan^2 e^x}{\tan^2 e^x}\, dx$

$\int \frac{e^x}{\tan^2 e^x}\, dx + \int \frac{e^x \tan^2 e^x}{\tan^2 e^x}\, dx = \int e^x \cot^2 e^x\, dx + \int e^x\, dx$

$= \int (e^x \csc^2 e^x - e^x)\, dx + \int e^x\, dx = \int e^x \csc^2 e^x\, dx$

$= -\cot e^x + c$

(67) $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{(1+\sec 2x)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{2} \int 2(\sec 2x \tan 2x)(1+\sec 2x)^{-\frac{3}{2}}\, dx$

$= -(1+\sec 2x)^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-1}{\sqrt{1+\sec 2x}} + c$

(68) $\int \frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\sec x \csc x}\, dx = \int (1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sec x \csc x}$

$= \frac{1}{2} \int (1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}\, 2\cos x \sin x\, dx = \frac{1}{3}(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + c$

(69) $\int \sin \pi\, dx = x \sin \pi + c$

(70) $\int (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \int dx = x + c$

(71) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(72) $\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

(73) $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx$

$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2 dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

(74) $\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx$

$= \int (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x)^2 dx = \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx$

$= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx$

$= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

(75) $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})(\frac{1-\cos 2x}{2}) dx$

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x) dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{8} dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{8} dx - \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

(76) $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$

$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx = \int \sin x dx + \int -(\cos x)^2 \sin x \, dx$

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

(77) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \cos x \, dx$

$= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \cos x dx - \int (\sin x)^2 \cos x \, dx$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

(78) $\int \sin^3 3x dx = \int \sin^2 3x \sin 3x \, dx = \int (1-\cos^2 3x) \sin 3x \, dx$

$\int \sin 3x dx - \int \cos^2 3x \sin 3x \, dx$

$= \frac{1}{3}\int 3\sin 3x dx + \frac{1}{3}\int -3(\cos 3x)^2 \sin 3x \, dx$

$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\cos^3 3x + c$

(79) $\int \cos^3 2x dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1-\sin^2 2x) \cos 2x \, dx$

$\int \cos 2x dx - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx - \frac{1}{2}\int 2(\sin 2x)^2 \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + c$

(80) $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin^2 x\, dx$

$= \int (\frac{1+\cos 2x}{2})(\frac{1-\cos 2x}{2})(\frac{1-\cos 2x}{2}) dx$

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{1}{8}\cos 2x dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{1}{8}\cos 2x dx - \frac{1}{8}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{1}{8}\cos 2x dx - \int \frac{1}{16} dx + \int \frac{1}{16}\cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{16} dx - \frac{1}{16}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{16} dx - \frac{1}{16}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{16} dx - \frac{1}{16}\int \cos 2x dx + \int \frac{1}{8}\cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2 \cos 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{16} dx + \frac{1}{16}\int \cos 2x dx - \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2 \cos 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{16} dx + \frac{1}{32}\int 2\cos 2x dx - \frac{1}{16}\int 2(\sin 2x)^2 \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{48}(\sin 2x)^3 + c$

(81) $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$
$= \tan x - x + c$

(82) $\int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x\, dx$
$= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\sec x| + c$

(83) $\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan^2 x\, dx$
$= \int \sec^2 x \tan^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$
$= \int \sec^2 x\, (\tan x)^2\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$
$= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c$

(84) $\int \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\, dx = \int \csc^2 x dx - \int dx$
$= -\cot x - x + c$

(85) $\int \cot^3 x\, dx = \int \cot^2 x \cot x\, dx = \int (\csc^2 x - 1) \cot x\, dx$
$= -\int -\csc^2 x \cot x\, dx - \int \cot x\, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln|\sin x| + c$

(86) $\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1) \cot^2 x\, dx$

$= \int \csc^2 x \cot^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx$

$= \int \csc^2 x\, (\cot x)^2\, dx - \int (\csc^2 x - 1)\, dx$

$= -\int -\csc^2 x\, (\cot x)^2\, dx - \int \csc^2 x\, dx + \int dx$

$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$

(87) $\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx$

$= \int \sec^2 x \tan^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx$

$= \int \sec^2 x\, (\tan x)^2\, dx + \int \sec^2 x\, dx$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + c$

(88) $\int \csc^4 x\, dx = \int \csc^2 x \csc^2 x\, dx = \int (\cot^2 x + 1) \csc^2 x\, dx$

$= \int \csc^2 x \cot^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx$

$= \int \csc^2 x\, (\cot x)^2\, dx + \int \csc^2 x\, dx$

$= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + c$

(89) $\int \sin^6 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \ \sin^2 x\,dx$

$= \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 (\frac{1-\cos 2x}{2}) dx$

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{1}{4}\cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx$

$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{3}{8}\cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{3}{8}\cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$

$= \int \frac{1}{8} dx - \int \frac{3}{8}\cos 2x dx + \int \frac{3}{16} dx + \int \frac{3}{16}\cos 4x dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$

$= \int \frac{5}{16} dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \int \frac{3}{16}\cos 4x dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\,dx$

$= \int \frac{5}{16} dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \int \frac{3}{16}\cos 4x dx - \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$

$= \int \frac{5}{16} dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \int \frac{3}{16}\cos 4x dx - \int \frac{1}{8}\cos 2x dx$

$+ \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2 \cos 2x\,dx$

$= \int \frac{5}{16} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \int \frac{3}{16}\cos 4x dx + \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2 \cos 2x\,dx$

$= \int \frac{5}{16} dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{3}{64}\int 4\cos 4x dx + \frac{1}{16}\int 2(\sin 2x)^2 \cos 2x\,dx$

$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}(\sin 2x)^3 + c$

(90) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 1}\, dx = \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos x - 1}\, dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x - 1}\, dx$

$= -\int \frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\, dx = -\int \sin x(1+\cos x)\, dx$

$= -\int \sin x\, dx - \int \sin x \cos x\, dx = \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

(91) $\int \frac{\sin x}{\sin 2x}\, dx = \int \frac{\sin x}{2\cos x \sin x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

(92) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\, dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\, dx = 2\int \cos x\, dx - \int \frac{1}{\cos x}\, dx$

$= 2\int \cos x\, dx - \int \sec x\, dx = 2\sin x - \ln|\sec x + \tan x| + c$

(93) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int \cos x\, dx$

$= \sqrt{2}\sin x + c$

(94) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int \sin x\, dx$

$= -\sqrt{2}\cos x + c$

(95) $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\int \csc^2 x\, dx$

$= -\frac{1}{2}\cot x + c$

$$\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan x + c$$

$$\int \sin 2x \cos x\,dx = \int 2\sin x \cos x \cos x\,dx$$

$$= \int -2\sin x \cos^2 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + c$$

$$\int \frac{\tan^2 x \sec x}{\sec x - 1}\,dx = \int \frac{(\sec^2 x - 1)\sec x}{\sec x - 1}\,dx$$

$$= \int \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)\sec x}{\sec x - 1}\,dx = \int (\sec x + 1)\sec x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x)\,dx = \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int (2+\sin^2 x)^3 \sin 2x\,dx = \int (2+\sin^2 x)^3\, 2\sin x \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}(2+\sin^2 x)^4 + c$$

$$\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\,dx = \int \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}\,dx = \int \cot^2 x\,dx$$

$$= \int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + c$$

(101) $\int(\sin x+\cos x)^2\,dx=\int(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$

$\int(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx=\int(1+2\sin x\cos x)dx$

$=x+\sin^2 x+c$

(102) $\int\frac{\tan x-1}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{\tan x-1}{\cos^2 x}\,dx=\int(\tan x-1)\sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}(\tan x-1)^2+c$

(103) $\int\frac{\cot x-1}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cot x-1}{\sin^2 x}\,dx=\int(\cot x-1)\csc^2 x\,dx$

$=-\int-(\cot x-1)\csc^2 x\,dx=-\frac{1}{2}(\cot x-1)^2+c$

(104) $\int\csc 2x\,\ln(\tan x)\,dx=\frac{1}{2}\int 2\csc 2x\,\ln(\tan x)\,dx$

$=\frac{1}{4}(\ln(\tan x))^2+c$

(105) $\int\sec 2x\,\ln\cot x\,dx=-\frac{1}{2}\int-2\sec 2x\,\ln\cot x\,dx$

$=-\frac{1}{4}(\ln\cot x)^2+c$

(106) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\int(1-\cos x)dx=x-\sin x+c$

107) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \sin x} dx = \int \frac{\cos x}{-\sin x(1-\sin^2 x)} dx = \int \frac{-\cos x}{\sin x \cos^2 x} dx$

$= \int \frac{-1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{-2}{\sin 2x} dx = -\int 2\csc 2x \, dx$

$= -\ln|\csc 2x - \cot 2x| + c$

108) $\int (1-\sec x)(1+\sec x) \, dx = \int (1-\sec^2 x) \, dx$

$= x - \tan x + c$

109) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{4+\sin^2 x} dx = \ln|4+\sin^2 x| + c$

110) $\int \frac{1+\sec x}{\csc x} \cot x \, dx = \int (1+\sec x)\sin x \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$= \int (1+\sec x)\cos x \, dx = \int (\cos x + \cos x \sec x) dx$

$= \int (\cos x + 1) dx = \sin x + x + c$

111) $\int \sin(\sin x) \cos x dx = -\cos(\sin x) + c$

112) $\int (1+\frac{1}{\sin x})^2 dx = \int (1+\csc x)^2 dx = \int (1+2\csc x + \csc^2 x) dx$

$= x + 2\ln|\csc x - \cot x| - \cot x + c$

(113) $\int \sin 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int [\sin(4x+3x)+\sin(4x-3x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\int 7\sin 7x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$

$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + c$

(114) $\int \sin 4x \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int [\sin(4x+6x)+\sin(4x-6x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 10x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-2x)dx = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\int 10\sin 10x dx - \frac{1}{4}\int 2\sin 2x dx$

$= -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

(115) $\int \cos x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(x+5x)+\cos(x-5x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(-4x)\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\int 6\cos 6x\, dx + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int 4\cos 4x dx$

$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

(116) $\int \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3x-4x)-\cos(3x+4x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos(-x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos x\, dx - \frac{1}{2}\frac{1}{7}\int 7\cos 7x\, dx$

$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + c$

117) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \; dx$

$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}[\cos(x-2x) - \cos(x+2x)]$

$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos 3x] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x]$

$= \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x] \sin 3x \; dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos x \sin 3x dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x \; dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}[\sin(3x-x) + \sin(3x+x)]dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x \; dx$

$= \frac{1}{4}\int [\sin 2x + \sin 4x]dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x \; dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \sin 4x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x \; dx$

$= \frac{1}{8}\int 2\sin 2x \, dx + \frac{1}{16}\int 4\sin 4x \, dx - \frac{1}{6}\int 3\cos 3x \sin 3x \; dx$

$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{12}\sin^2 3x + c$

118) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

$= -\int -\cot x \csc^2 x \; dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

119) $\int \sin x \sec^2 x \, dx = \int \sin x \frac{1}{\cos^2 x} \; dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \; \sec x \, dx = \sec x + c$

(120) $\int \frac{\tan x - \sec x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\tan x}{\cos x}\, dx - \int \frac{\sec x}{\cos x}\, dx$

$= \int \tan x \sec x\, dx - \int \sec^2 x\, dx = \sec x - \tan x + c$

(121) $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx = \int \cos^3 x\, 2\sin x \cos x\, dx$

$= -2\int -\cos^4 x \sin x\, dx = -\frac{2}{5}\cos^5 x + c$

(122) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\, dx$

$= \int \sec^2 x\, (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2(1+\tan x)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{1+\tan x} + c$

(123) $\int \frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2}x\, \sin^2 \frac{1}{2}x}\, dx = \int \frac{\cos x}{(\cos \frac{1}{2}x\, \sin \frac{1}{2}x)^2}\, dx$

$\int \frac{\cos x}{\frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx = 4\int \frac{\cos x}{\sin x}\, \frac{1}{\sin x}\, dx = 4\int \cot x \csc x\, dx$

$= -4\csc x + c$

(124) $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)} = \int \sec^2(1+\ln x)\ \frac{1}{x}dx$

$= \tan(1+\ln x) + c$

(125) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx = \int \frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x} = \ln\left|1+\frac{1}{2}\sin 2x\right| + c$

(126) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\frac{1}{\cos x}dx = \int \tan^3 x\ \sec x\, dx$

$= \int \tan x(\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$

$= \int (\tan x \sec x \sec^2 x - \tan x\ \sec x)\, dx$

$= \int \tan x \sec x \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x\, dx$

$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + c$

(127) $\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}dx = \int \sec x\ \cot^2 x\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}dx = \int \cot x \csc x\, dx$

$= -\csc x + c$

$$(128)\ \int\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}x+\cos^2\frac{1}{2}x-2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$=\int\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}x-2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x+\cos^2\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$=\int\sqrt{(\sin\frac{1}{2}x-\cos\frac{1}{2}x)(\sin\frac{1}{2}x-\cos\frac{1}{2}x)}\,dx$$

$$=\int(\sin\frac{1}{2}x-\cos\frac{1}{2}x)\,dx=2\int\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x\,dx-2\int\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=-2\cos\frac{1}{2}x-2\sin\frac{1}{2}x+c$$

$$(129)\ \int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\,dx$$

$$=\int\sqrt{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x)}\,dx$$

$$=\int(\sin x+\cos x)\,dx=\int\sin x\,dx+\int\cos x\,dx$$

$$=-\cos x+\sin x+c$$

$$(130)\ \int\frac{dx}{1-\tan^2 x}=\int\frac{dx}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{dx}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos 2x}\,dx+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{4}\int 2\sec 2x\,dx+\int\frac{1}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|+\frac{1}{2}x+c$$

(131) $\int \frac{dx}{1-\cot^2 x} = \int \frac{dx}{1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}}$

$= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 2x}{\cos 2x} dx$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos 2x} dx + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{4}\int 2\sec 2x\, dx + \int \frac{1}{2} dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}x + c$

(132) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 2\, dx + \int \cos^2 x dx$

$= \int \sec^2 x dx - \int 2\, dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) dx$

$= \int \sec^2 x dx - \int 2\, dx + \int \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx$

$= \tan x - 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

$= \tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(133) $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)\,dx=\int(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$

$=\int(\sin^2 x-\cos^2 x)dx=-\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

$=-\int\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+c$

(134) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}dx$

$=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\ln|\cos x+\sin x|+c$

(135) $\int\frac{dx}{\csc^2 x-2}=\int\frac{dx}{\csc^2 x-1-1}=\int\frac{dx}{\cot^2 x-1}$

$=\int\frac{dx}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-1}=\int\frac{dx}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}}$

$=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos 2x}dx-\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}\int 2\sec 2x\,dx-\int\frac{1}{2}dx$

$=\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|-\frac{1}{2}x+c$

(136) $\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx=\frac{1}{4}[\ln(\tan x)]^2+c$

137) $\int e^{\sqrt{1+\cos 2t}} \sin t\, dt = \int e^{\sqrt{2\cos^2 t}} \sin t\, dt$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{\sqrt{2}\cos t} (-\sqrt{2}\sin t) dt$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}\cos t} + c$

138) $\int e^{\sqrt{1+\sin 2t}} \sqrt{1-\sin 2t}\ dt$

$= \int e^{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 2\sin x \cos x}} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin x \cos x}\ dt$

$= \int e^{\sqrt{\cos^2 t + 2\sin x \cos x + \sin^2 t}} \sqrt{\cos^2 t - 2\sin x \cos x + \sin^2 t}\ dt$

$= \int e^{\sqrt{(\cos + \sin x)(\cos + \sin x)}} \sqrt{(\cos t - \sin t)(\cos t - \sin t)}\ dt$

$= \int e^{(\cos + \sin x)} (\cos t - \sin t)\ dt = e^{(\cos + \sin x)} + c$

139) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = \ln\left|(\cos x)^{-1}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \ln|\sec x| + c$

(140) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c$

(141) $\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$

$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(142) $\int \csc x\, dx = \int \csc x \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}\, dx$

$\int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

or

$\int \csc x\, dx = \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}\, dx$

$-\int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

قوانين تكامل الدوال الزائدية

1) $\int \sinh F(x) \quad F'(x)\,dx = \cosh F(x) + c$

2) $\int \cosh F(x) \quad F'(x)\,dx = \sinh F(x) + c$

3) $\int \tanh F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln\left|\cosh F(x)\right| + c$

4) $\int \coth F(x) \quad F'(x)\,dx = \ln\left|\sinh F(x)\right| + c$

5) $\int \operatorname{sech} F(x) \tanh F(x) \quad F'(x)\,dx = -\operatorname{sech} F(x) + c$

6) $\int \operatorname{csch} F(x) \coth F(x) \quad F'(x)\,dx = -\operatorname{csch} F(x) + c$

7) $\int \operatorname{csch}^2 F(x) \quad F'(x)\,dx = -\coth F(x) + c$

8) $\int \operatorname{sech}^2 F(x) \quad F'(x)\,dx = \tanh F(x) + c$

متطابقات الدوال الزائدية

(1) $\cosh^2 ax - \sinh^2 ax = 1$

(2) $\sec h^2 ax = 1 - \tanh^2 ax$

(3) $\csc h^2 ax = \coth^2 ax - 1$

(4) $\sinh^2 ax = \frac{1}{2}(\cosh 2ax - 1)$

(5) $\cosh^2 ax = \frac{1}{2}(\cosh 2ax + 1)$

(6) $\sinh 2ax = 2\sinh ax \cosh ax$

(7) $\cosh 2ax = \cosh^2 ax + \sinh^2 ax$

(8) $\sinh ax = \frac{1}{\csc hax}$

(9) $\cosh ax = \frac{1}{\sec hax}$

(10) $\tanh ax = \frac{1}{\coth ax}$

(11) $\coth ax = \frac{\cosh ax}{\sinh ax}$

(12) $\tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax}$

(13) $\sinh ax \cosh bx = \frac{1}{2}[\sinh(ax+bx) + \sinh(ax-bx)]$

(14) $\cosh ax \cosh bx = \frac{1}{2}[\cosh(ax+bx) + \cosh(ax-bx)]$

(15) $\sinh ax \sinh bx = \frac{1}{2}[\cosh(ax+bx) - \cosh(ax-bx)]$

مسائل متنوعة على تكامل الدوال الزائدية

(1) $\int \sinh 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sinh 2x\, dx = \frac{1}{2}\cosh 2x + c$

(2) $\int \cosh\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\cosh\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\sinh\frac{2}{3}x + c$

(3) $\int \tanh\frac{1}{3}x\, dx = 3\int \frac{1}{3}\tanh\frac{1}{3}x\, dx = 3\ln\left|\cosh\frac{1}{3}x\right| + c$

(4) $\int \frac{\cosh 2x}{\sqrt{1+\sinh 2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int 2(\cosh 2x)(1+\sinh 2x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= (1+\sinh 2x)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+\sinh 2x} + c$

(5) $\int \frac{\cosh^{-1} 3x}{\sqrt{9x^2-1}}\, dx = \frac{1}{3}\int \cosh^{-1} 3x \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}\, dx$

$= \frac{1}{6}(\cosh^{-1} 3x)^2 + c$

(6) $\int \cosh^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cosh 4x)\, dx = \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{8}\int 4\cosh 4x\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sinh 4x + c$

(7) $\int \tanh^2 x\, dx = \int (1-\operatorname{sech}^2 x)\, dx = \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x\, dx$

$= x - \tanh x + c$

(8) $\int \coth^2 x\, dx = \int (\operatorname{csch}^2 x + 1)\, dx = \int \operatorname{csch}^2 x\, dx + \int dx$

$= -\coth x + x + c$

(9) $\int \frac{dx}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\coth x + c$

(10) $\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\tanh x + c$

(11) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x}{e^x e^x + e^x e^{-x}} dx$

$= \int \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2\tan^{-1}(e^x) + c$

(12) $\int \operatorname{csch} x\, dx = \int \operatorname{csch} x \frac{\operatorname{csch} x - \coth x}{\operatorname{csch} x - \coth x} dx$

$\int \frac{\csc^2 hx - \operatorname{csch} x \coth x}{\operatorname{csch} x - \coth x} dx = \ln|\operatorname{csch} hx - \coth x| + c$

(13) $\int \tanh x\, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln|\cosh x| + c$

(14) $\int \coth x\, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \ln|\sinh x| + c$

(15) $\int \sinh 2x \sinh 3x \, dx$

$= \int \frac{1}{2}[\cosh(2x+3x) - \cosh(2x-3x)] \, dx$

$= \int \frac{1}{2}[\cosh(5x) - \cosh(-x)] \, dx$

$= \frac{1}{10} \int 5\cosh(5x) \, dx - \frac{1}{2} \int \cosh(x) \, dx$

$= \frac{1}{10} \sinh 5x - \frac{1}{2} \sinh x + c$

(16) $\int \frac{(1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\sec hx \csc hx} \, dx = \int (1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sec hx \csc hx}$

$= \frac{1}{2} \int (1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}} 2\cosh x \sinh x \, dx = \frac{1}{3}(1+\sinh^2 x)^{\frac{3}{2}} + c$

(17) $\int \frac{1+\cosh 2x}{\sinh^2 2x} \, dx = \int \frac{1}{\sinh^2 2x} dx + \int \frac{\cosh 2x}{\sinh^2 2x} \, dx$

$= \int \csc h^2 2x \, dx + \int \frac{\cosh 2x}{\sinh 2x} \cdot \frac{1}{\sinh 2x} \, dx$

$= \frac{1}{2} \int 2\csc h^2 2x \, dx + \frac{1}{2} \int 2\coth 2x \csc h 2x dx$

$= -\frac{1}{2} \coth 2x - \frac{1}{2} \csc h 2x + c$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}(\cosh^{-1} 3x)} = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}}{(\cosh^{-1} 3x)} \, dx$

$= \frac{1}{3} \ln(\cosh^{-1} 3x) + c$

قوانين تكامل مشتقة الدوال المثلثية العكسية

$$(1)\ \int \frac{F'(x)}{\sqrt{1-[F(x)]^2}}dx = \sin^{-1}F(x)+c$$

$$(2)\ \int \frac{-F'(x)}{\sqrt{1-[F(x)]^2}}dx = \cos^{-1}F(x)+c$$

$$(3)\ \int \frac{F'(x)}{1+[F(x)]^2}dx = \tan^{-1}F(x)+c$$

$$(4)\ \int \frac{-F'(x)}{1+[F(x)]^2}dx = \cot^{-1}F(x)+c$$

$$(5)\ \int \frac{F'(x)}{F(x)\sqrt{[F(x)]^2-1}}dx = \sec^{-1}|F(x)|+c$$

$$(6)\ \int \frac{-F'(x)}{F(x)\sqrt{[F(x)]^2-1}}dx = \csc^{-1}|F(x)|+c$$

مسائل متنوعة على تكامل مشتقة الدوال العكسية

$$(1)\int\frac{dx}{x^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{16}+1}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{(\frac{x}{4})^2+1}=\frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{4}dx}{(\frac{x}{4})^2+1}$$

$$=\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{x}{4})+c$$

$$(2)\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{(\frac{x}{3})^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x}{3})+c$$

$$(3)\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{2}+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}})+c$$

$$(4)\int\frac{dx}{2x^2+9}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\frac{2x^2}{9}+1}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{(\frac{\sqrt{2}x}{3})^2+1}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}dx}{(\frac{\sqrt{2}x}{3})^2+1}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{3})+c$$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}$

$= \sin^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{5})^2}} = \int \frac{\frac{1}{5}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{5})^2}}$

$= \sin^{-1}(\frac{x}{5}) + c$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}$

$= \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2x^2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}) + c$

$$(13)\int\frac{-dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{1}{3}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}=\int\frac{-\frac{1}{3}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$$

$$=\cos^{-1}(\frac{x}{3})+c$$

$$(14)\int\frac{-dx}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{4})^2}}=\int\frac{-\frac{1}{4}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{4})^2}}$$

$$=\cos^{-1}(\frac{x}{4})+c$$

$$(15)\int\frac{-dx}{\sqrt{5-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{5}})^2}}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{5}})^2}}=\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}})+c$$

$$(16)\int\frac{-dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-\frac{2x^2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})+c$$

$$(17)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\frac{x}{2})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\frac{1}{2}x\sqrt{(\frac{x}{2})^2-1}}=\frac{1}{2}\sec^{-1}\left|\frac{x}{2}\right|+c$$

$$(18)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{25}-1}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{1}{5}dx}{\frac{1}{5}x\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}=\frac{1}{5}\sec^{-1}\left|\frac{x}{5}\right|+c$$

$$(19)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\frac{1}{\sqrt{3}}x\sqrt{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{3}}\right|+c$$

$$(20)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{2x^2}{3}-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dx}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\sqrt{(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right|+c$$

$$(21)\int\frac{-dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\int\frac{-dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{-dx}{x\sqrt{(\frac{x}{2})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{\frac{1}{2}x\sqrt{(\frac{x}{2})^2-1}}=\frac{1}{2}\csc^{-1}\left|\frac{x}{2}\right|+c$$

$$(22)\int\frac{-dx}{x\sqrt{x^2-25}}=\frac{1}{5}\int\frac{-dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{25}-1}}=\frac{1}{5}\int\frac{-dx}{x\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{-\frac{1}{5}dx}{\frac{1}{5}x\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}=\frac{1}{5}\csc^{-1}\left|\frac{x}{5}\right|+c$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^6}} = \frac{1}{5}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-\frac{x^6}{25}}} = \frac{1}{5}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(\frac{x^3}{5})^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{5}x^2dx}{\sqrt{1-(\frac{x^3}{5})^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}(\frac{x^3}{5})+c$$

$$\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{9-x^8}} = \frac{1}{3}\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{1-\frac{x^8}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{1-(\frac{x^4}{3})^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{-\frac{4}{3}x^3dx}{\sqrt{1-(\frac{x^4}{3})^2}} = \frac{1}{4}\cos^{-1}(\frac{x^4}{3})+c$$

$$\int \frac{xdx}{x^4+9} = \frac{1}{9}\int \frac{xdx}{\frac{x^4}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{xdx}{(\frac{x^2}{3})^2+1} = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{2}{3}x}{(\frac{x^2}{3})^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{x^2}{3})+c$$

$$(26)\int\frac{-x^3dx}{x^8+9}=\frac{1}{9}\int\frac{-x^3dx}{\frac{x^8}{9}+1}=\frac{1}{9}\int\frac{-x^3dx}{(\frac{x^4}{3})^2+1}$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{-\frac{4}{3}x^3}{(\frac{x^4}{3})^2+1}dx=\frac{1}{12}\cot^{-1}(\frac{x^4}{3})+c$$

$$(27)\int\frac{\sin x}{\cos^2 x+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\frac{\cos^2 x}{4}+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{(\frac{\cos x}{2})^2+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{2}\sin x}{(\frac{\cos x}{2})^2+1}dx=-\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{\cos x}{2})+c$$

$$(28)\int\frac{\cos x}{\sin^2 x+9}dx=\frac{1}{9}\int\frac{\cos x}{\frac{\sin^2 x}{9}+1}dx=\frac{1}{9}\int\frac{\cos x}{(\frac{\sin x}{3})^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}\cos x}{(\frac{\sin x}{3})^2+1}dx=\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{\sin x}{3})+c$$

$$(29)\int\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x+1}dx=\int\frac{\sec x\tan x}{(\sec x)^2+1}dx=\tan^{-1}(\sec x)+c$$

$$(30)\int\frac{\csc x\cot x}{\csc^2 x+1}dx=-\int\frac{-\csc x\cot x}{(\csc x)^2+1}dx=-\tan^{-1}(\csc x)+c$$

(31) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{9}}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-(\frac{\sin x}{3})^2}}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{3}\cos x}{\sqrt{1-(\frac{\sin x}{3})^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{\sin x}{3})+c$$

(32) $\int \frac{-\sec^2 x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{-\sec^2 x}{\sqrt{1-\frac{\tan^2 x}{4}}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{-\sec^2 x}{\sqrt{1-(\frac{\tan x}{2})^2}}dx$

$$=\int \frac{-\frac{1}{2}\sec^2 x}{\sqrt{1-(\frac{\tan x}{2})^2}}dx=\cos^{-1}(\frac{\tan x}{2})+c$$

(33) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3-\tan^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\frac{\tan^2 x}{3}}}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^2 x}{\sqrt{1-(\frac{\tan x}{\sqrt{3}})^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{\tan x}{\sqrt{3}})+c$$

$$(34)\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx = \tan^{-1} e^x + c$$

$$(35)\ \int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}}{\frac{e^{-4x}}{2}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}}{[\frac{e^{-2x}}{\sqrt{2}}]^2+1}dx$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\int \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-2x}}{[\frac{e^{-2x}}{\sqrt{2}}]^2+1}dx = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{e^{-2x}}{\sqrt{2}} + c$$

$$(36)\ \int \frac{-2^x}{2^{2x}+1}dx = \int \frac{-2^x}{(2^x)^2+1}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{-2^x \ln 2}{(2^x)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cot^{-1} 2^x + c$$

$$(37)\ \int \frac{3^x}{9^x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3^x}{\frac{3^{2x}}{2}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3^x}{(\frac{3^x}{\sqrt{2}})^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\ \ln 3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}3^x \ln 3}{(\frac{3^x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}\ \ln 3}\tan^{-1}\frac{3^x}{\sqrt{2}} + c$$

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ بضرب البسط والمقام في e^x

$$=\int \frac{e^x}{e^x\sqrt{(e^x)^2-1}}dx=\sec^{-1}\left|e^x\right|+c=\sec^{-1}e^x+c$$

(39) $\int \frac{-dx}{\sqrt{3^{2x}-1}}$ بضرب البسط والمقام في 3^x

$$=\frac{1}{\ln 3}\int \frac{-3^x\ln 3}{3^x\sqrt{(3^x)^2-1}}dx=\frac{1}{\ln 3}\csc^{-1}\left|3^x\right|+c=\frac{1}{\ln 3}\csc^{-1}(3^x)+c$$

(40) $\int \frac{dx}{x[1+(\ln x)^2]}=\int \frac{\frac{1}{x}dx}{1+(\ln x)^2}=\tan^{-1}(\ln x)+c$

(41) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx=\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{4+1-\sin^2 x}}=\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{5-\sin^2 x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{5}}}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-(\frac{\sin x}{\sqrt{5}})^2}}dx$$

$$=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x}{\sqrt{1-(\frac{\sin x}{\sqrt{5}})^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{\sin x}{\sqrt{5}})+c$$

$$(42)\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\sec^2 x}}dx=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-1-\tan^2 x}}dx=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\frac{\tan^2 x}{4}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-(\frac{\tan x}{2})^2}}dx$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2 x}{\sqrt{1-(\frac{\tan x}{2})^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{\tan x}{2})+c$$

$$(43)\int\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x[2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1]}=\int\frac{\sec^2 x dx}{2\tan^2 x+1}$$

$$=\int\frac{\sec^2 x}{(\sqrt{2}\tan x)^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\sec^2 x}{(\sqrt{2}\tan x)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x)+c$$

$$(44)\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+(\sin^2 x)^2}dx=\tan^{-1}(\sin^2 x)+c$$

$$(45)\int\frac{x+2}{x^2+1}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+2\tan^{-1}x+c$$

$$(46)\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\frac{1}{2}\int-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\sin^{-1}x-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$$

$$(47)\int\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx=\int\frac{\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x^3})^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x^3})^2}dx$$

$$=\frac{2}{3}\tan^{-1}\sqrt{x^3}+c$$

$$(48)\int\frac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}dx=\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}dx$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}dx=2\sec^{-1}|\sqrt{x}|+c=2\sec^{-1}\sqrt{x}+c$$

$$(49)\int\frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}}dx=\frac{1}{2}\sec^{-1}|x^2|+c$$

بضرب البسط والمقام في x

$$=\frac{1}{2}\sec^{-1}x^2+c$$

$$(50)\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\sin^4 x-1}}dx=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x\sqrt{\sin^4 x-1}}dx$$

ـ البسط والمقام في $\sin x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x\sqrt{(\sin^2 x)^2-1}}dx=\frac{1}{2}\sec^{-1}|\sin^2 x|+c=\frac{1}{2}\sec^{-1}(\sin^2 x)+c$$

$$(51)\int\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2+1}dx=2\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2+1}dx$$

$$=2\tan^{-1}\sqrt{x}+c$$

$$(52)\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$$

$$=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}dx=2\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}dx$$

$$=2\sin^{-1}\sqrt{x}+c$$

$$(53)\int\frac{1}{x(\ln x)^2+x}dx=\int\frac{1}{x[(\ln x)^2+1]}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2+1}dx$$

$$=\tan^{-1}(\ln x)+c$$

مسائل متنوعة على استخدام إكمال مربع قبل التكامل

(1) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{x^2-2x+1-1+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$

$= \tan^{-1}(x-1)+c$

(2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4-4+8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{(x-2)^2}{4}+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{[\frac{x-2}{2}]^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{[\frac{1}{2}x-1]^2+1}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dx}{[\frac{1}{2}x-1]^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{1}{2}x-1)+c$

(3) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-4+13}dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9}$

$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{[\frac{x+2}{3}]^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{[\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}]^2+1}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{[\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}]^2+1} = \frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})+c$

$$(4)\int\frac{-dx}{4x^2+4x+2}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}=\int\frac{-dx}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+1}=\int\frac{-dx}{[2x+1]^2+1}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{-2dx}{[2x+1]^2+1}=\frac{1}{2}\cot^{-1}(2x+1)+c$$

$$(5)\int\frac{-dx}{9x^2+6x+5}=\frac{1}{9}\int\frac{-dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}}=\frac{1}{9}\int\frac{-dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{-dx}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{\frac{4}{9}}+1}=\frac{1}{4}\int\frac{-dx}{[\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}]^2+1}$$

$$\frac{1}{6}\int\frac{-\frac{3}{2}dx}{[\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}]^2+1}=\frac{1}{6}\cot^{-1}(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2})+c$$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-2x-8]}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-2x+1-1-8]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-9]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{9}}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{3})^2}} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})^2}} = \sin^{-1}(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})+c$$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2+6x+8]}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2+6x+9-9+8]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+3)^2-1]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+3)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \sin^{-1}(x+3)+c$$

$$(8)\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{-[x^2+x-1]}}$$

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{-[x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1]}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{-[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}]}}$$

$$=\int\frac{-dx}{\sqrt{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{-dx}{\sqrt{1-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{5}{4}}}}$$

$$\int\frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}})^2}}=\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}})+c$$

$$(9)\int\frac{-dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{-[x^2-2x+1-1]}}$$

$$=\int\frac{-dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\cos^{-1}(x-1)+c$$

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-12x+36-36]}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-6)^2-36]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-6)^2}}$

$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(x-6)^2}{36}}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x-6}{6})^2}}$

$= \int \frac{\frac{1}{6}dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{6}x-1)^2}} = \sin^{-1}(\frac{1}{6}x-1)+c$

(11) $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2}}$

$= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{9}{4}}-1}}$

$= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})^2-1}} = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{2}{3}dx}{(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})\sqrt{(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})^2-1}}$

$= \frac{2}{3}\sec^{-1}\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right|+c$

$$(12)\int\frac{-dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+5}}=\int\frac{-dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+9-9+5}}$$

$$=\int\frac{-dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-4}}=\frac{1}{2}\int\frac{-dx}{(x+3)\sqrt{\frac{(x+3)^2}{4}-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-dx}{(x+3)\sqrt{(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})\sqrt{(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\csc^{-1}\left|\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right|+c$$

$$(13)\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+1-1}}$$

$$=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}}=\sec^{-1}|x+1|+c$$

$$(14)\int\frac{-dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{-dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+1-1}}$$

$$=\int\frac{-dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}=\csc^{-1}|x-1|+c$$

$$(15)\int\frac{2^x dx}{2^{2x}+2^x+1}=\int\frac{2^x dx}{2^{2x}+2^x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\int\frac{2^x dx}{(2^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{2^x dx}{\frac{(2^x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}=\frac{4}{3}\int\frac{2^x dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}2^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\int\frac{2^x\frac{2}{\sqrt{3}}\ln 2\,dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}2^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}2^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]+c$$

$$(16)\int\frac{-3^x dx}{9^x+3^x+2}=\int\frac{-3^x dx}{3^{2x}+3^x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=\int\frac{-3^x dx}{(3^x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{4}{7}\int\frac{-3^x dx}{\frac{(3^x+\frac{1}{2})^2}{\frac{7}{4}}+1}=\frac{4}{7}\int\frac{-3^x dx}{[\frac{2}{\sqrt{7}}3^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]^2+1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}\ln 3}\int\frac{-3^x\frac{2}{\sqrt{7}}\ln 3\,dx}{[\frac{2}{\sqrt{7}}3^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{7}\ln 3}\cot^{-1}[\frac{2}{\sqrt{7}}3^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]+c$$

$$(17)\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+e^x+1}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+e^x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\int\frac{e^x dx}{(e^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{e^x dx}{\frac{(e^x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}=\frac{4}{3}\int\frac{e^x dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}e^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{e^x\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}e^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}e^x+\frac{1}{\sqrt{3}}]+c$$

$$(18)\int\frac{-e^x dx}{e^{2x}+e^x+2}=\int\frac{-e^x dx}{e^{2x}+e^x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=\int\frac{-e^x dx}{(e^x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{4}{7}\int\frac{-e^x dx}{\frac{(e^x+\frac{1}{2})^2}{\frac{7}{4}}+1}=\frac{4}{7}\int\frac{-e^x dx}{[\frac{2}{\sqrt{7}}e^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]^2+1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}}\int\frac{-e^x\frac{2}{\sqrt{7}}dx}{[\frac{2}{\sqrt{7}}e^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{7}}\cot^{-1}[\frac{2}{\sqrt{7}}e^x+\frac{1}{\sqrt{7}}]+c$$

(19) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x+\cos x+1} = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x+\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{\sin x\, dx}{\frac{(\cos x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}$$

$$=\frac{4}{3}\int \frac{\sin x\, dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\, dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{3}}]+c$$

(20) $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan^2 x+2\tan x+2} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan^2 x+2\tan x+1-1+2}$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{(\tan x+1)^2+1} = \tan^{-1}[\tan x+1]+c$$

$$(21)\int\frac{x}{x^2+x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+5}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+5}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{2}{19}\int\frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{19}}x+\frac{1}{\sqrt{19}})^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{1}{\sqrt{19}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{19}}dx}{(\frac{2}{\sqrt{19}}x+\frac{1}{\sqrt{19}})^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{1}{\sqrt{19}}\tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{19}}x+\frac{1}{\sqrt{19}})+c$$

$$(22)\int\frac{2x}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+5}dx$$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-2\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-2\int\frac{dx}{x^2+2x+1-1+5}$$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2+1}$$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-\int\frac{\frac{1}{2}dx}{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2+1}$$

$$=\ln\left|x^2+2x+5\right|-\tan^{-1}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+c$$

$$(23)\int\frac{5x+1}{2x^2+4x+3}dx=\frac{5}{4}\int\frac{4x+\frac{4}{5}}{2x^2+4x+3}dx$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4-4+\frac{4}{5}}{2x^2+4x+3}dx=\frac{5}{4}\int\frac{4x+4-\frac{16}{5}}{2x^2+4x+3}dx$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-\frac{5}{4}\cdot\frac{16}{5}\int\frac{dx}{2x^2+4x+3}$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-\frac{4}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+\frac{3}{2}}$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-2\int\frac{dx}{x^2+2x+1-1+\frac{3}{2}}$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-4\int\frac{dx}{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+1}$$

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx-\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+1}$$

$$=\frac{5}{4}\ln\left|2x^2+4x+3\right|-\frac{4}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+\sqrt{2})+c$$

$$(24)\int\frac{4-5x}{x^2-2x+5}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{2x-\frac{8}{5}}{x^2-2x+5}dx$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2+2-\frac{8}{5}}{x^2-2x+5}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2+\frac{2}{5}}{x^2-2x+5}dx$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\int\frac{dx}{x^2-2x+1-1+5}$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})^2+1}$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dx}{(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})^2+1}$$

$$-\frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})+c$$

(25) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4-4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x+3]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x+4-4+3]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-2)^2-1]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$

$-\frac{1}{2}\int (-2x+4)(-x^2+4x-3)^{-\frac{1}{2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$

$-\sqrt{-x^2+4x-3} + 2\sin^{-1}(x-2) + c$

(26) $\int \frac{x}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{-8x}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx$

$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x-4+4}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx$

$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x-4}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-4[x^2+x-\frac{5}{2}]}}$

$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x-4}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}]}}$

$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x-4}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{11}{4}]}}$

$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x-4}{\sqrt{-4x^2-4x+10}}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{11}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}$

$-\frac{1}{8}\int(-8x-4)(-4x^2-4x+10)^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2\sqrt{11}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}})^2}}$

$-\frac{1}{8}\int(-8x-4)(-4x^2-4x+10)^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}})^2}}$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{-4x^2-4x+10} - \frac{1}{4}\sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}})+c$

(27) $\int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4-4+6}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{-[x^2-4x-5]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x+4-4-5]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-2)^2-9]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$

$-\frac{1}{2}\int (-2x+4)(-x^2+4x+5)^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})^2}}$

$-\frac{1}{2}\int (-2x+4)(-x^2+4x+5)^{-\frac{1}{2}}dx - \int \frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})^2}}$

$-\sqrt{-x^2+4x+5} - \sin^{-1}(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})+c$

(28) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+4x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4-4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x+4-4]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-2)^2-4]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

$-\frac{1}{2}\int (-2x+4)(-x^2+4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 2\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x-1)^2}}$

$-\sqrt{-x^2+4x} + 2\sin^{-1}(\frac{1}{2}x-1)+c$

(29) $\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4-4-2}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-4x+4-4]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-2)^2-4]}}$

$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

$-\frac{1}{2}\int (-2x+4)(-x^2+4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 3\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x-1)^2}}$

$-\sqrt{-x^2+4x} + 3\sin^{-1}(\frac{1}{2}x-1) + c$

$$(30)\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+\sin x+1}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+\sin x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$$

$$\int\frac{\cos x\,dx}{(\sin x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{\cos x\,dx}{\frac{(\sin x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{\cos x\,dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x\,dx}{[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}]+c$$

$$(31)\int\frac{\csc^2 x\,dx}{\cot^2 x+2\cot x+2}=\int\frac{\csc^2 x\,dx}{\cot^2 x+2\cot x+1-1+2}$$

$$=-\int\frac{-\csc^2 x\,dx}{(\cot x+1)^2+1}=-\tan^{-1}[\cot x+1]+c$$

$$(32)\int\frac{dx}{(\ln x^2)x+2x\ln x+2x}=\int\frac{dx}{x[(\ln x)^2+2\ln x+1-1+2]}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{x}dx}{(\ln x+1)^2+1}=-\tan^{-1}[\ln x+1]+c$$

قوانين تكامل مشتقة الدوال الزائدية العكسية

$$(1)\ \int \frac{F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2+1}}dx = \sinh^{-1} F(x) + c$$

$$(2)\ \int \frac{F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2-1}}dx = \cosh^{-1} F(x) + c$$

$$(3)\ \int \frac{F'(x)}{1-[F(x)]^2}dx = \tanh^{-1} F(x) + c \quad , |F(x)|<1$$

$$(4)\ \int \frac{F'(x)}{1-[F(x)]^2}dx = \coth^{-1} F(x) + c \quad , |F(x)|>1$$

$$(5)\ \int \frac{-F'(x)}{F(x)\sqrt{1-[F(x)]^2}}dx = \sec h^{-1}|F(x)| + c$$

$$(6)\ \int \frac{-F'(x)}{F(x)\sqrt{1+[F(x)]^2}}dx = \csc h^{-1}|F(x)| + c$$

مسائل متنوعة على تكامل مشتقة الدوال الزائدية

$$(1)\int\frac{dx}{16-x^2}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1-\frac{x^2}{16}}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1-(\frac{x}{4})^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{4}dx}{1-(\frac{x}{4})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\tanh^{-1}(\frac{x}{4})+c \quad ,\left|\frac{x}{4}\right|<1$$

$$=\frac{1}{4}\coth^{-1}(\frac{x}{4})+c \quad ,\left|\frac{x}{4}\right|>1$$

$$(2)\int\frac{dx}{2x^2-9}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\frac{2x^2}{9}-1}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{(\frac{\sqrt{2}x}{3})^2-1}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}dx}{1-(\frac{\sqrt{2}x}{3})^2}$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{3})+c \ ,\left|\frac{\sqrt{2}x}{3}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\coth^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{3})+c \ ,\left|\frac{\sqrt{2}x}{3}\right|>1$$

$$(3)\int\frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{x}{5})^2}}=\int\frac{\frac{1}{5}dx}{\sqrt{1+(\frac{x}{5})^2}}$$

$$=\sinh^{-1}(\frac{x}{5})+c$$

$$(4)\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^2}{3}-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}})+c$$

$$(5)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{25}+1}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\frac{x}{5})^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{-\frac{1}{5}dx}{\frac{1}{5}x\sqrt{(\frac{x}{5})^2+1}}=-\frac{1}{5}\csc h^{-1}\left|\frac{x}{5}\right|+c$$

$$(6)\int\frac{dx}{x\sqrt{3-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\frac{1}{\sqrt{3}}x\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sec h^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{3}}\right|+c$$

مسائل متنوعة على استخدام إكمال مربع قبل التكامل

$$(1)\int\frac{dx}{x^2-4x+2}=\int\frac{dx}{x^2-4x+4-4+2}dx=\int\frac{dx}{(x-2)^2-2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{(x-2)^2}{2}-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{[\frac{x-2}{\sqrt{2}}]^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{[\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}}]^2-1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{1-[\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}}]^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\coth^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|>1$$

$$(2)\int\frac{dx}{-x^2-4x+2}=\int\frac{dx}{-[x^2+4x+4-4-2]}=\int\frac{dx}{-(x+2)^2+6}$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-\frac{(x+2)^2}{6}}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-[\frac{x+2}{\sqrt{6}}]^2}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-[\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}]^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}dx}{1-[\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}]^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}\right|<1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\coth^{-1}(\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}\right|>1$$

$$(3)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1-1+5}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(x-1)^2}{4}+1}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})^2+1}}=\sinh^{-1}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})+c$$

$$(4)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1-1-3}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4}-1}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2-1}}=\cosh^{-1}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+c$$

$$(5)\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+1-1+2}}$$

$$=-\int\frac{-dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}}=-\operatorname{csch}^{-1}|x+1|+c$$

$$(6)\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-[x^2-2x-2]}}$$

$$=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-[x^2-2x+1-1-2]}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3-(x-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sech}^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|+c$$

$$(7)\int\frac{x}{x^2+x-5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x-5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x-5}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-5}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{21}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-5}dx-\frac{2}{21}\int\frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}})^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-5}dx+\frac{1}{\sqrt{21}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{21}}dx}{1-(\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-5\right|+\frac{1}{\sqrt{21}}\tanh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}})^2+c,\left|\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}}\right|<1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-5\right|+\frac{1}{\sqrt{21}}\coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}})^2+c,\left|\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}}\right|>1$$

$$(8)\int\frac{dx}{x^2+4x}=\int\frac{dx}{x^2+4x+4-4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2-4}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{4}-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{[\frac{x+2}{2}]^2-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{[\frac{1}{2}x+1]^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dx}{1-[\frac{1}{2}x+1]^2}=-\frac{1}{2}\tanh^{-1}(\frac{1}{2}x+1)+c,\left|\frac{1}{2}x+1\right|<1$$

$$=-\frac{1}{2}\coth^{-1}(\frac{1}{2}x+1)+c,\left|\frac{1}{2}x+1\right|>1$$

$$(9)\int\frac{dx}{-x^2+6x}=\int\frac{dx}{-[x^2-6x+9-9]}=\int\frac{dx}{-(x-3)^2+9}$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1-\frac{(x-3)^2}{9}}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1-[\frac{x-3}{3}]^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1-[\frac{1}{3}x-1]^2}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{1-[\frac{1}{3}x-1]^2}=\frac{1}{3}\tanh^{-1}(\frac{1}{3}x-1)+c,\left|\frac{1}{3}x-1\right|<1$$

$$=\frac{1}{3}\coth^{-1}(\frac{1}{3}x-1)+c,\left|\frac{1}{3}x-1\right|>1$$

طـرق الـتـكـامـل

طـريـقة الـتـكـامـل بالـتـعـويـض:-

عند استخدام طريقة التعويض لإيجاد تكامل دالة نتبع الآتي :-

(1) نفرض أن جزءاً من مسألة التكامل يساوي متغير وليكن u أي أن :-

u=مقدار

(2) نفاضل الفرضية السابقة بالنسبة لـــ x أي أن:-

du=تفاضل المقدار dx

(3) نعوض بالفرضية وتفاضلها **du, u** في مسألة التكامل

(4) نكامل المسألة بالنسبة لـ **u** ويجب أن تكون المسألة قبل تكاملها بدلالة **u**

(5) بعد اجراء عملية التكامل نعوض بقيمة **u**

ويعتمد نجاح الطالب في اجراء عملية التكامل على قدرته في تحديد جزء المسالة الذي يجب أن يفرضه **u** فإذا حدد **u** بمهارة فسيكون من السهل اجراء عملية التكامل

بـــعـــض الـــضوابـــط لاخـــتـــيـــار u :-

(1) إذا كانت مسألة التكامل على أحد صور القوانين السابقة ففي هذه الحالة نفرض أن :- الدالة = u

نفرض أن u=F(x) $\int [F(x)]^n F'(x)\,dx$

نفرض أن u=F(x) $\int e^{F(x)} F'(x)\,dx$

نفرض أن u=F(x) $\int a^{F(x)} F'(x)\,dx$

نفرض أن u=F(x) $\int \sin F(x)\, F'(x)\,dx$

وهكذا بقية تكامل الدوال المثلثية والزائدية

نفرض أن u=F(x) $\int \frac{F'(x)}{[F(x)]^2+1}\,dx$

وهكذا بقية تكامل مشتقة الدوال المثلثية والزائدية العكسية

(2) إذا كانت مسألة التكامل مرفوعة لأس n ففي هذه الحالة

نفرض أن :- ما بداخل القوس = u

نفرض أن u=F(x)

$$\int [F(x)]^n \, g(x) \, dx$$

(3) إذا كانت مسألة التكامل دالة قياسية ففي هذه الحالة

نفرض أن :- مقام الكسر = u

نفرض أن u=F(x)

$$\int \frac{g(x)}{F(x)} \, dx$$

مسائل متنوعة على طريقة التكامل بالتعويض

(1) $\int [x^2+1]^9 x \ dx = \frac{1}{2}\int [x^2+1]^9 2x \ dx$

(A) نفرض أن $u = x^2+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = 2x \ dx$

(C) نعوض بـ $u = x^2+1$, $du = 2x \ dx$ في مسألة التكامل

$\frac{1}{2}\int u^9 \ du = \frac{1}{20}u^{10} + c$

(D) نعوض بـ $u = x^2+1$ $= \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + c$

(2) $\int [\frac{1}{x}+1]^5 \frac{1}{x^2} \ dx = -\int [\frac{1}{x}+1]^5 \frac{-1}{x^2} \ dx$

(A) نفرض أن $u = \frac{1}{x}+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\frac{1}{x^2} \ dx$

(C) نعوض بـ $u = \frac{1}{x}+1$, $du = -\frac{1}{x^2} \ dx$ في مسألة التكامل

$-\int u^5 \ du = -\frac{1}{6}u^6 + c$

(D) نعوض بـ $u = \frac{1}{x}+1$ $= -\frac{1}{6}(\frac{1}{x}+1)^6 + c$

(3) $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$

(A) نفرض أن $u = x-1$ ومنها $x = u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = dx$

(C) نعوض بـ $dx = du$, $u = x-1$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{u+1}{u^2}\,du = \int (\frac{1}{u} + u^{-2})\,du$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{u} + c$$

(D) نعوض بـ $u = x-1$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

(4) $\int \frac{e^{4t}}{(1+e^{2t})^{\frac{2}{3}}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2t}e^{2t}}{(1+e^{2t})^{\frac{2}{3}}}\,dt$

(A) نفرض أن $u = 1+e^{2t}$ ومنها $e^{2t} = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ t $du = 2e^{2t}\,dt$

(C) نعوض بـ $u = 1+e^{2t}$, $du = 2e^{2t}\,dt$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^{\frac{2}{3}}}\,du \frac{1}{2}\int (u-1)u^{-\frac{2}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{\frac{1}{3}} - u^{-\frac{2}{3}})\,du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}u^{\frac{1}{3}} + c$$

(D) نعوض بـ $u = e^{2t}+1$

$$= \frac{3}{8}(e^{2t}+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}(e^{2t}+1)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$(5)\ \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x^2\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $u = 1 + x^2$ ومنها $x^2 = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = 2x\,dx$

(C) نعوض بـ $u = 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\int (u-1)u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - u^{-2}\right)du = \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + c$$

(D) نعوض بـ $u = x^2 + 1$ ، $= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2x^2+2} + c$

$$(6)\ \int x\,[x+2]^7\,dx$$

(A) نفرض أن $u = x + 2$ ومنها $x = u - 2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = dx$

(C) نعوض بـ $u = x + 2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^7(u-2)\,du = \int (u^8 - 2u^7)\,du$$

$$= \frac{1}{9}u^9 - \frac{1}{4}u^8 + c$$

(D) نعوض بـ $u = x + 2$ $= \frac{1}{9}(x+2)^9 - \frac{1}{4}(x+2)^8 + c$

$$(7)\ \int x^2\,[x+1]^7\ dx$$

(A) نفرض أن $u=x+1$ ومنها $x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u=x+1$, $dx=du$ في مسألة التكامل

$$\int u^7(u-1)^2\ du = \int u^7(u^2-2u+1)\,du$$

$$= \int (u^9-2u^8+u^7)\,du = \frac{1}{10}u^{10}-\frac{2}{9}u^9+\frac{1}{8}u^8+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x+1$

$$= \frac{1}{10}(x+1)^{10}-\frac{2}{9}(x+1)^9+\frac{1}{8}(x+1)^8+c$$

$$(8)\ \int [1-x^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{2}}\ dx$$

(A) نفرض أن $u=1-x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}}=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

لاحظ أن:- $dx = -3(x^{\frac{1}{3}})^2\ du \Leftarrow dx = -3x^{\frac{2}{3}}\ du$

$$dx = -3(1-u)^2\ du$$

(C) نعوض بـــ $u=1-x^{\frac{1}{3}}$, $dx=-3(1-u)^2\ du$ في مسألة التكامل

$$= -3\int u^{\frac{3}{2}}(1-u)^2\ du$$

$$= -3\int u^{\frac{3}{2}}(1-2u+u^2)\,du = -3\int (u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{7}{2}})\,du$$

$$= -\frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{12}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{9}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$

$$= -\frac{6}{5}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{5}{2}} + \frac{12}{7}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{2}} + c$$

(9) $\int \sqrt{x+2}\ dx$

(A) نفرض أن $u = x+2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+2$

$$= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

(10) $\int x^2\sqrt{x+1}\ dx$

(A) نفرض أن $u = x+1$ ومنها $x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^{\frac{1}{2}}(u-1)^2 du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}(u^2-2u+1)du = \int (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(11) \int x\sqrt{2x-3}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{2x-3}\ dx$$

(A) نفرض أن $u = 2x-3$ ومنها $x = \frac{u+3}{2}$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = 2dx$

(C) نعوض بـــ $u = 2x-3$, $du = 2dx$ في مسألة التكامل

$$\int (\frac{u+3}{2})u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{\frac{3}{2}}+3u^{\frac{1}{2}})du = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 2x-3$

$$= \frac{1}{10}(2x-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(12) \int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\ dx = \int e^x\sqrt{e^x+1}\ e^x dx$$

(A) نفرض أن $u = e^x+1$ ومنها $e^x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = e^x\,dx$

(D) نعوض بـــ $u = e^x + 1$, $du = e^x\,dx$ في مسألة التكامل

$$\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = e^x + 1$

$$= \frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(13) $\int x^3\sqrt{x+2}\;dx$

(A) نفرض أن $u = x + 2$ ومنها $x = u - 2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعين dx:- $dx = du$

(D) نعوض بـــ $u = x + 2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^{\frac{1}{2}}(u-2)^3\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}(u^3 - 6u^2 + 12u - 8)du = \int (u^{\frac{7}{2}} - 6u^{\frac{5}{2}} + 12u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{24}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(E) نعوض بـــ $u = x + 2$

$$= \frac{2}{9}(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}(x+2)^{\frac{7}{2}} + \frac{24}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(14)\ \int 3^{2x}\sqrt{3^x+1}\ dx=\frac{1}{\ln 3}\int 3^x\sqrt{3^x+1}\ 3^x(\ln 3)dx$$

(A) نفرض أن $u=3^x+1$ ومنها $3^x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=3^x\ \ln 3\ dx$

(C) نعوض بـــ $u=3^x+1$, $du=3^x\ \ln 3\ dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{\ln 3}\int(u-1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\int(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du=\frac{2}{5\ln 3}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3\ln 3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=3^x+1$

$$=\frac{2}{5\ln 3}(3^x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3\ln 3}(3^x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$(15)\ \int 2x^7\sqrt{x^4-1}\ dx=\frac{1}{2}\int 4x^3\sqrt{x^4-1}\ x^4dx$$

(A) نفرض أن $u=x^4-1$ ومنها $x^4=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=4x^3\ dx$

(C) نعوض بـــ $u=x^4-1$ $du=4x^3\ dx$, في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+1)du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x^4-1$

$$=\frac{1}{5}(x^4-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(x^4-1)^{\frac{3}{2}}+c$$

2 x^3

$$(16)\ \int e^{3x}\sqrt{e^x+1}\ dx=\int e^x\sqrt{e^x+1}\ e^{2x}dx$$

(A) نفرض أن $u=e^x+1$ ومنها $e^x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = e^x\ dx$

(C) نعوض بـــ $u=e^x+1$, $du = e^x\ dx$ في مسألة التكامل

$$=\int(u-1)^2\ u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\int(u^2-2u+1)u^{\frac{1}{2}}du=\int(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(E) نعوض بـــ $u=e^x+1$

$$=\frac{2}{7}(e^x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$(17)\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\ dx$$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$

لاحظ أنّ $dx=2\sqrt{x}\ du \Leftarrow dx=2(u-1)\ du$

(C) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)du$ في مسألة التكامل

$$\int 2u^{\frac{1}{2}}(u-1)\ du=2\int(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$

$$=\frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+c$$

(18) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(A) نفرض أن $u=1-x$ ومنها $x=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=-dx$

(C) نعوض بـــ $u=1-x$, $dx=-du$ في مسألة التكامل

$$-\int\frac{1+1-u}{u^{\frac{1}{2}}}\,du=-\int\frac{2-u}{u^{\frac{1}{2}}}\,du$$

$$=-\int(2-u)u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\int(2u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$=-4u^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-x$

$$=-4(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=-4\sqrt{1-x}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+c$$

(19) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

(A) نفرض أن $u=x+1$ ومنها $x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \int (u-1)u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + c$$

$$(20) \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^3}}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2x^3}{\sqrt{4-x^3}}\, dx$$

(A) نفرض أن $u = 4 - x^3$ ومنها $x^3 = 4 - u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $\boxed{du = -3x^2dx}$

(C) نعوض بـــ $u = 4 - x^3$, $du = -3x^2dx$ في مسألة التكامل

$$-\frac{1}{3}\int \frac{4-u}{u^{\frac{1}{2}}}\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4-u)u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\, du = -\frac{8}{3}u^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 4 - x^3$

$$= -\frac{8}{3}(4-x^3)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}(4-x^3)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{8}{3}\sqrt{4-x^3} + \frac{2}{9}\sqrt{(4-x^3)^3} + c$$

$$(21) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx = \int \frac{e^x e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx$$

(A) نفرض أن $u = 1 + e^x$ ومنها $e^x = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = e^x dx$

(C) نعوض بـــ $u = 1 + e^x$, $du = e^x dx$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{3}}}\, du$$

$$= \int (u-1)u^{-\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{2}{3}} - u^{-\frac{1}{3}})\, du = \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1 + e^x$

$$= \frac{3}{5}(1+e^x)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{(1+e^x)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+e^x)^2} + c$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

(A) نفرض أن $u = 1 + \sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x} = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لا أن:- $dx = 2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx = 2(u-1)\,du$

(C) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$, $dx = 2(u-1)\,du$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{2u-2}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = \int (2u-2)u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (2u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}})\,du = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$

$$= \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} - 4(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$$

$$(23)\ \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}} = \frac{5}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}}\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}dx$$

(A) نفرض أن $u = 1+x^{\frac{4}{5}}$ ومنها $x^{\frac{4}{5}} = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}\,dx$

(C) نعوض بـــ $u = 1+x^{\frac{4}{5}}$ ، $dx = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{5}}\,du$ في مسألة التكامل

$$= \frac{5}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{5}{2}u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1+x^{\frac{4}{5}}$

$$=\frac{5}{2}(1+x^{\frac{4}{5}})^{\frac{1}{2}}+c \;=\frac{5}{2}\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}\;+c$$

$$(24)\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(A) نفرض أن $u=1+x^2$ ومنها $x^2=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du\;=\;2x\;dx$

(C) نعوض بـــ $u=1+x^2$ $du\;=\;2x\;dx$,في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)^2}{u^{\frac{1}{2}}}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{u^2-2u+1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})\,du=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+x^2$

$$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+\sqrt{1+x^2}+c$$

$$(25)\int x^3\sqrt{x^2-1}\;\;dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2-1}\;\;2xdx$$

(A) نفرض أن $u=x^2-1$ ومنها $x^2=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du\;=2x\;dx$

(C) نعوض بـــ $u=x^2-1$, $du\;=2x\;dx$ في مسألة التكامل

$$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+1)du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x^2-1$

$$=\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+c$$

$$(26)\int x\sqrt{x-1}\ dx$$

(A) نفرض أن $u=x-1$ ومنها $x=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=dx$

(C) نعوض بـــ $u=x-1$, $dx=du$ في مسألة التكامل

$$=\int(u+1)u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$=\int(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x-1$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+c$$

$$(27)\int x\sqrt[5]{x-1}\ dx$$

(A) نفرض أن $u=x-1$ ومنها $x=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=dx$

(C) نعوض بـــ $u=x-1$, $dx=du$ في مسألة التكامل

$$= \int (u+1)u^{\frac{1}{5}}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{6}{5}} + u^{\frac{1}{5}})du = \frac{5}{11}u^{\frac{11}{5}} + \frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x-1$

$$= \frac{5}{11}(x-1)^{\frac{11}{5}} + \frac{5}{6}(x-1)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{11}\sqrt[5]{(x-1)^{11}} + \frac{5}{6}\sqrt[5]{(x-1)^{6}} + c$$

$$(28) \int \frac{x+2}{x+1}dx$$

(A) نفرض أن $u = x+1$ ومنها $x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{u-1+2}{u}\, du = \int \frac{u+1}{u}\, du$$

$$= \int (1+\frac{1}{u})\, du = u + \ln|u| + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= x+1+\ln|x+1| + c$$

$$(29) \int \frac{x}{x-1}dx$$

(A) نفرض أن $u = x-1$ ومنها $x = u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x-1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{u+1}{u}\, du = \int (1+\frac{1}{u})\, du = u + \ln|u| + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x-1$

$$= x - 1 + \ln|x-1| + c$$

(30) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

(A) نفرض أن $u = 1-e^x$ ومنها $e^x = 1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -e^x\, dx$

لا حظ أن :- $dx = -\frac{du}{e^x} \Leftarrow dx = -\frac{du}{1-u}$

(C) نعوض بـــ $u = 1-e^x$, $dx = -\frac{du}{1-u}$ في مسألة التكامل

$$= -\int \frac{1+1-u}{u(1-u)}\, du = -\int \frac{-(u-2)}{-(u^2-u)}\, du$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2u-4}{u^2-u}\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u}\, du + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u}\, du + \frac{3}{2}\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u}\, du - 3\int \frac{2du}{1-(2u-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u\right| - 3\tanh^{-1}(2u-1) + c\ ,\ |2u-1|<1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u\right| - 3\coth^{-1}(2u-1) + c\ ,\ |2u-1|>1$$

(D) نعوض بـــ $u = 1-e^x$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|(1-e^x)^2-1+e^x\right|-3\tanh^{-1}(1-2e^x)+c,|1-2e^x|<1$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|(1-e^x)^2-1+e^x\right|-3\coth^{-1}(1-2e^x)+c,|1-2e^x|>1$$

$$(31)\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx=2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx=2(u-1)\,du$

(C) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)\,du$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{2u-2}{u}\,du=\int(2-\frac{2}{u})\,du$$
$$=2u-2\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$

$$=2(1+\sqrt{x})-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

$$(32)\int\frac{e^{2x}}{1-e^x}dx=-\int\frac{e^x}{1-e^x}(-e^x)dx$$

(A) نفرض أن $u=1-e^x$ ومنها $e^x=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=-e^x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=1-e^x$, $du=-e^x\,dx$ في مسألة التكامل

$$=-\int\frac{1-u}{u}\,du$$

$$=-\int(\frac{1}{u}-1)\,du=-\ln|u|+u+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-e^{x}$

$$=-\ln\left|1-e^{x}\right|+1-e^{x}+c$$

$$(33)\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $x=(u-1)^2,\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لا حظ أن :- $dx=2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx=2(u-1)\,du$

(C) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)\,du$ في مسألة التكامل

$$=2\int\frac{(u-1)^2(u-1)}{u}\,du$$

$$2\int\frac{(u-1)^3}{u}\,du=2\int(\frac{u^3-3u^2+3u-1}{u})\,du$$

$$2\int(u^2-3u+3-\frac{1}{u})\,du=\frac{2}{3}u^3-3u^2+6u-2\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$

$$=\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+6(1+\sqrt{x})-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

$$(34)\int\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$$

(A) نفرض أن $u=1-x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}}=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

لاحظ أن :- $dx = -3x^{\frac{2}{3}}du \Leftarrow dx = -3(x^{\frac{1}{3}})^2 du$

$\Leftarrow dx = -3(1-u)^2 du$

(C) نعوض بـــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$, $dx = -3(1-u)^2 du$ في مسألة التكامل

$$= -3\int \frac{(1-u)^2}{u} du$$

$$= -3\int \frac{1-2u+u^2}{u} du = -3\int (\frac{1}{u} - 2 + u) du$$

$$= -3\ln|u| + 6u - \frac{3}{2}u^2 + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$

$$= -3\ln\left|1 - x^{\frac{1}{3}}\right| + 6(1 - x^{\frac{1}{3}}) - \frac{3}{2}(1 - x^{\frac{1}{3}})^2 + c$$

(35) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$

(A) نفرض أن $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}} = 1 - u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$-3x^{\frac{2}{3}}$

لا حظ أن :- $dx = -3x^{\frac{2}{3}}du \Leftarrow dx = -3(x^{\frac{1}{3}})^2 du$

$\Leftarrow dx = -3(1-u)^2 du$

-3

(C) نعوض بـــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$, $dx = -3(1-u)^2 du$ في مسألة التكامل

$-u+1+1$

$$-\int \frac{-u+1+1}{u} 3(1-u)^2 du = -3\int \frac{(2-u)(1-u)^2}{u} du$$

$$= -3\int \left(\frac{-u^3+4u^2-5u+2}{u}\right) du$$

$$-3\int \left(-u^2+4u-5+\frac{2}{u}\right) du = u^3-6u^2+15u-6\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1-x^{\frac{1}{3}}$

$$= (1-x^{\frac{1}{3}})^3 - 6(1-x^{\frac{1}{3}})^2 + 15(1-x^{\frac{1}{3}}) - 6\ln\left|1-x^{\frac{1}{3}}\right| + c$$

(36) $\int \frac{x^2}{1-x} dx$

(A) نفرض أن $u = 1-x$ ومنها $x = 1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -dx$

(C) نعوض بـــ $u = 1-x$, $dx = -du$ في مسألة التكامل

$$-\int \frac{(1-u)^2}{u} du = -\int \frac{u^2-2u+1}{u} du$$

$$= -\int \left(u-2+\frac{1}{u}\right) du = -\frac{1}{2}u^2 + 2u - \ln|u| + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1-x$

$$= -\frac{1}{2}(1-x)^2 + 2(1-x) - \ln|1-x| + c$$

(37) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

(A) نفرض أن $u = \sqrt{x}$ ومنها $x = u^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx = 2u\ du \Leftarrow dx = 2\sqrt{x}\, du$

(C) نعوض بـــ $u = \sqrt{x}$, $dx = 2u\ du$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{2u}{u(u^2+1)}\, du$$

$$= 2\int \frac{1}{(u^2+1)}\, du = 2\tan^{-1} u + c$$

(D) نعوض بـــ $u = \sqrt{x}$

$$= 2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

$$(38) \int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$$

(A) نفرض أن $u = \sqrt[3]{x} + 1$ ومنها $x^{\frac{1}{3}} = u - 1$ ومنها $x = (u-1)^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\, dx$

لاحظ أن :- $dx = 3x^{\frac{2}{3}}\, du \Leftarrow dx = 3(x^{\frac{1}{3}})^2\, du$

$$\Leftarrow dx = 3(u-1)^2\, du$$

(C) نعوض بـــ $u = \sqrt[3]{x} + 1$, $dx = 3(u-1)^2\, du$ في مسألة التكامل

$$= 3\int \frac{(u-1)^2\, du}{u\,(u-1)^3}\, du = 3\int \frac{1}{u\,(u-1)}\, du$$

$$= 3\int \frac{du}{u^2 - u + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 3\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

$$=12\int\frac{du}{(2u-1)^2-1}=-6\int\frac{2du}{1-(2u-1)^2}$$

$$=-6\tanh^{-1}(2u-1)+c\,,|2u-1|<1$$

$$=-6\coth^{-1}(2u-1)+c\,,|2u-1|>1$$

(D) نعوض بـــ $u=\sqrt[3]{x}+1$

$$=-6\tanh^{-1}(2\sqrt[3]{x}+1)\ +\ c\ ,\ |2\sqrt[3]{x}+1|<1$$

$$=-6\coth^{-1}(2\sqrt[3]{x}+1)\ +\ c\ ,|2\sqrt[3]{x}+1|>1$$

(39) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

(A) نفرض أن $u=\sqrt{x}$ ومنها $x=u^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx=2u\ du \Leftarrow dx=2\sqrt{x}\,du$

(C) نعوض بـــ $u=\sqrt{x}$, $dx=2\sqrt{x}\,du$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{2u}{u(u+1)}\ du=\int\frac{2}{u+1}\ du=2\ln|u+1|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\sqrt{x}$

$$=2\ln|\sqrt{x}+1|+c$$

طريقة التعويض لتكامل الدوال المثلثية والزائدية

إذا كانت مسألة التكامل على أحد الصور الآتية :-

(1) $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$

(2) $\int \sec^n x \tan^m x \, dx$

(3) $\int \csc^n x \cot^m x \, dx$

ففي هذه الحالة نجعل مسألة التكامل على صورة

$\int$ (النسبة المثلثية) (تفاضل النسبة المثلثية) dx

وذلك باستخدام المتطابقات ثم نفرض أن النسبة المثلثية =u

ملاحظة :- إذا فرضنا أن u=secx أو u=cscx ففي هذه الحالة ليس من الضروري أن نوفر secx أو cscx في تفاضل كلاً منهما

وأيضاً إذا كانت مسألة التكامل على أحد الصور الآتية :-

(1) $\int \sinh^n x \cosh^m x \, dx$

(2) $\int \operatorname{sech}^n x \tanh^m x \, dx$

(3) $\int \operatorname{csch}^n x \coth^m x \, dx$

ففي هذه الحالة نجعل مسألة التكامل على صورة

$\int$ (النسبة الزائدية) (تفاضل النسبة الزائدية) dx

وذلك باستخدام المتطابقات ثم نفرض أن النسبة الزائدية =u

ملاحظة :- إذا فرضنا أن u=sechx أو u=cschx ففي هذه الحالة ليس من الضروري أن نوفر sechx أو cschx في تفاضل كلاً منهما

مسائل على طريقة التعويض لتكامل الدوال المثلثية والزائدية

(1) $\int \sin^3 x \cos^{\frac{1}{2}} x \, dx$

$$\int \sin^2 x \sin x \cos^{\frac{1}{2}} x \, dx = -\int -(1-\cos^2 x) \sin x \cos^{\frac{1}{2}} x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \cos x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\sin x \, dx$

(C) نعوض بـ $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$ في مسألة التكامل

$$-\int (1-u^2) u^{\frac{1}{2}} \, du = -\int (u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}) \, du$$

$$= -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + c$$

(D) نعوض بـ $u = \cos x$

$$= -\frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}}(x) + \frac{2}{7} \cos^{\frac{7}{2}}(x) + c$$

(2) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} \, dx$

$$\int \cos^2 x \cos x \sin^{\frac{1}{2}} x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \cos x \sin^{\frac{1}{2}} x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \sin x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = \cos x \, dx$

(D) نعوض بـ $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$ في مسألة التكامل

$$\int(1-u^2)\,u^{\frac{1}{2}}\,du=\int(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{5}{2}})\;du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}+c$$

(E) نعوض بـــ $u=\sin x$

$$=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x+c$$

(3) $\int\sinh^3 x\cosh^{\frac{1}{3}}x\,dx$

$$\int\sinh^2 x\,\sinh x\cosh^{\frac{1}{3}}x\,dx=\int(\cosh^2 x\;-1)\sinh x\cosh^{\frac{1}{3}}x\,dx$$

(A) نفرض أن $u=\cosh x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\sinh x\,dx$

(C) نعوض بـــ$u=\cosh x$, $du=\sinh x\,dx$ في مسألة التكامل

$$\int(u^2-1)\,u^{\frac{1}{3}}\,du=\int(u^{\frac{7}{3}}-u^{\frac{1}{3}})\;du$$

$$=\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}-\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\cosh x$

$$=\frac{3}{10}\cosh^{\frac{10}{3}}x-\frac{3}{4}\cosh^{\frac{4}{3}}x+c$$

(4) $\int\cosh^3 x\sqrt{\sinh x}\,dx$

$$\int\cosh^2 x\cosh x\,\sinh^{\frac{1}{2}}x\,dx=\int(1+\sinh^2 x)\cosh x\,\sinh^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

(A) نفرض أن $u=\sinh x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\cosh x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=\sinh x$, $du=\cosh x\,dx$ في مسألة التكامل

$$\int(1+u^2)\,u^{\frac{1}{2}}\,du=\int(u^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{5}{2}})\;du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\sinh x$

$$=\frac{2}{3}\sinh^{\frac{3}{2}}x+\frac{2}{7}\sinh^{\frac{7}{2}}x+c$$

(5) $\int \sin^3 x\,\cos^2 x\,dx$

$$\int\sin^2 x\sin x\,\cos^2 x\,dx=-\int-(1-\cos^2 x)\sin x\,\cos^2 x\,dx$$

(A) نفرض أن $u=\cos x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=-\sin x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=\cos x$ $du=-\sin x\,dx$, في مسألة التكامل

$$-\int(1-u^2)\,u^2\,du=-\int(u^2-u^4)\;du$$

$$=-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\cos x$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+c$$

(6) $\int \cos^5 x\sin^2 x\;dx$

$$\int\cos^2 x\cos^2 x\,\cos x\,\sin^2 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^2\,\cos x\,\sin^2 x\,dx$$

(A) نفرض أن $u=\sin x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\cos x dx$

(C) نعوض بـــ $u=\sin x$, $du=\cos x dx$ في مسألة التكامل

$$\int (1-u^2)^2 \; u^2 \, du$$

$$\int (1-2u^2+u^4)\, u^2 \, du = \int (u^2-2u^4+u^6) \; du$$

$$=\frac{1}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+c$$

(E) نعوض بـــ $u=\sin x$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+c$$

(7) $\int \tan^5 x \sec^4 x \; dx$

$$\int \tan^5 x \sec^2 x \sec^2 x \; dx = \int \tan^5 x \; (1+\tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

(A) نفرض أن $u=\tan x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\sec^2 x dx$

(C) نعوض بـــ $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx$ في مسألة التكامل

$$\int u^5(1+u^2)\, du$$

$$=\int (u^5+u^7) \; du$$

$$=\frac{1}{6}u^6+\frac{1}{8}u^8+c$$

(E) نعوض بـــ $u=\tan x$

$$=\frac{1}{6}\tan^6 x+\frac{1}{8}\tan^8 x+c$$

(8) $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

$$\int \tan x \tan^2 x \sec^5 x \, dx = \int \tan x \sec x (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \sec x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = \sec x \tan x \, dx$

(C) نعوض بـ $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x \, dx$ في مسألة التكامل

$$\int u^4 (u^2 - 1) \, du = \int (u^6 - u^4) \, du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{5} u^5 + c$$

(E) نعوض بـ $u = \sec x$

$$= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + c$$

(9) $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$

$$\int \tan x \tan^2 x \sec^3 x \, dx = \int \tan x \sec x (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \sec x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = \sec x \tan x \, dx$

(C) نعوض بـ $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x \, dx$ في مسألة التكامل

$$\int u^2 (u^2 - 1) \, du = \int (u^4 - u^2) \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + c$$

(D) نعوض بـ $u = \sec x$

$$= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + c$$

(10) $\int \cot^3 x \csc^5 x \, dx$

$$\int \cot x \cot^2 x \csc^5 x \, dx = -\int -\cot x \csc x \, (\csc^2 x - 1) \csc^4 x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \csc x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\csc x \cot x \, dx$

(C) نعوض بـ $u = \csc x$, $du = -\csc x \cot x \, dx$ في مسألة التكامل

$$-\int u^4 (u^2 - 1) \, du = \int (-u^4 + u^6) \, du = -\frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 + c$$

(D) نعوض بـ $u = \csc x$

$$= -\frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{7} \csc^7 x + c$$

(11) $\int \cot^5 x \csc^4 x \, dx$

$$\int \cot^5 x \csc^2 x \csc^2 x \, dx = -\int -\cot^5 x \, (1 + \cot^2 x) \csc^2 x \, dx$$

(A) نفرض أن $u = \cot x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\csc^2 x dx$

(C) نعوض بـ $u = \cot x$, $du = -\csc^2 x dx$ في مسألة التكامل

$$-\int u^5 (1 + u^2) \, du$$

$$= -\int (u^5 + u^7) \, du$$

$$= -\frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 + c$$

(D) نعوض بـ $u = \cot x$

$$= -\frac{1}{6} \cot^6 x - \frac{1}{8} \cot^8 x + c$$

$(12) \int \cos x \sin^2 2x \, dx$

$\int \cos x \, (2\cos x \, \sin x)^2 \, dx = 4 \int \cos^3 x \, \sin^2 x \, dx$

$4 \int \cos^2 x \, \cos x \, \sin^2 x \, dx = 4 \int (1-\sin^2 x) \, \cos x \, \sin^2 x \, dx$

(A) نفرض أن $u = \sin x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = \cos x dx$

(C) نعوض بـــ $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ في مسألة التكامل

$4 \int u^2 (1-u^2) \, du$

$4 \int (u^2 - u^4) \, du = \frac{4}{3} u^3 - \frac{4}{5} u^5 + c$

(D) نعوض بـــ $u = \sin x$

$= \frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + c$

$(13) \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x} \, dx$

$\int \frac{\sec^2 x \, \sec^2 x}{\tan^2 x} \, dx = \int \frac{(1+\tan^2 x) \, \sec^2 x}{\tan^2 x} \, dx$

(A) نفرض أن $u = \tan x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = \sec^2 x dx$

(C) نعوض بـــ $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx$ في مسألة التكامل

$\int \frac{(1+u^2)}{u^2} \, du$

$= \int (\frac{1}{u^2} + 1) \, du = -\frac{1}{u} + u + c$

(E) نعوض بـــ $u = \tan x$

$$= -\frac{1}{\tan x} + \tan x + c$$

(14) $\int \frac{\cot^3 x}{\csc^2 x} dx$

$$\int \frac{\cot x \cot^2 x}{\csc^2 x} dx = -\int \frac{-\cot x (\csc^2 x - 1)}{\csc^2 x} dx$$

(A) نفرض أن $u = \csc x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\csc x \cot x dx$

لاحظ أن:- $-\cot x dx = \frac{du}{u} \Leftarrow du = -u \cot x dx$

(C) نعوض بـ $u = \csc x$, $-\cot x dx = \frac{du}{u}$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{-(u^2 - 1)}{u^2} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= -\int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}) \ du = -\ln|u| - \frac{1}{2u^2} + c$$

(E) نعوض بـ $u = \csc x$

$$= -\ln|\csc x| - \frac{1}{2\csc^2 x} + c$$

(15) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

$$\int \frac{\sin x \ \sin^2 x}{\sqrt{\cos x}} dx = -\int \frac{-\sin x \ (1 - \cos^2 x)}{\sqrt{\cos x}} dx$$

(A) نفرض أن $u = \cos x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـ x $du = -\sin dx$

(C) نعوض بـــ $u=\cos x$, $du=-\sin dx$ في مسألة التكامل

$$=-\int \frac{(1-u^2)}{u^{\frac{1}{2}}}\ du$$

$$=-\int (u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}})\ du=-2u^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\cos x$

$$=-2\cos^{\frac{1}{2}}x+\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}x+c$$

(16) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\sin x\ \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=-\int \frac{-\sin x\ (1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$$

(A) نفرض أن $u=\cos x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=-\sin dx$

(C) نعوض بـــ $u=\cos x$, $du=-\sin dx$ في مسألة التكامل

$$=-\int \frac{(1-u^2)}{u^2}\ du$$

$$=-\int (u^{-2}-1)\ du=\frac{1}{u}+u+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\cos x$

$$=\frac{1}{\cos x}+\cos x+c$$

(17) $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos x}\,dx=-\int \frac{-2\sin x\ \cos x}{2+\cos x}\,dx$

(A) نفرض أن $u=2+\cos x$ ومنها $\cos x=u-2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=-\sin dx$

(C) نعوض بـــ $du=-\sin dx,\ u=2+\cos x$ في مسألة التكامل

$$=-2\int\frac{(u-2)}{u}\ du=\int-2\ du+\int\frac{4}{u}\,du$$

$$=-2u+4\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=2+\cos x$

$$=-4-2\cos x+4\ln|2+\cos x|+c$$

(18) $\int\frac{\sin x}{\tan x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}+\cos x}dx$

$$\int\frac{\sin x}{\frac{\sin x+\cos^2 x}{\cos x}}dx=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+1-\sin^2 x}dx=\int\frac{-\sin x\cos x}{\sin^2 x-\sin x-1}dx$$

(A) نفرض أن $u=\sin x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\cos x\,dx$

(C) نعوض بـــ $du=\cos x\,dx,\ u=\sin x$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{-u}{u^2-u-1}\ du=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1+1}{u^2-u-1}\ du$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u-1}\ du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-u-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u-1}\ du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u-1}\ du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u-1}\ du+\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}du}{1-(\frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{1}{\sqrt{5}})^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u-1\right|+\frac{1}{\sqrt{5}}\tanh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{1}{\sqrt{5}})+c,\left|\frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{1}{\sqrt{5}}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u-1\right|+\frac{1}{\sqrt{5}}\coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{1}{\sqrt{5}})+c,\left|\frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{1}{\sqrt{5}}\right|>1$$

(E) عوض بـــ $u=\sin x$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\sin^2 x-\sin x-1\right|+\frac{1}{\sqrt{5}}\tanh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{5}})+c,\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\sin-\frac{1}{\sqrt{5}}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\sin^2 x-\sin x-1\right|+\frac{1}{\sqrt{5}}\coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{5}})+c,\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right|>1$$

(19) $\int\cos^5 x\ dx$

$$\int\cos^2 x\cos^2 x\cos x\ dx=\int(1-\sin^2 x)^2\cos x\ dx$$

(A) نفرض أن $u=\sin x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\cos x dx$

(C) نعوض بـــ $u=\sin x$, $du=\cos x dx$ في مسألة التكامل

$$\int (1-u^2)^2\, du$$

$$\int (1-2u^2+u^4)\ du = u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\sin x$

$$=\sin\ x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

(20) $\int \sin^5 x\ dx$

$$\int \sin^2 x \sin^2 x \sin x\ dx = -\int -(1-\cos^2 x)^2 \sin x\ dx$$

(A) نفرض أن $u=\cos x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=-\sin x dx$

(C) نعوض بـــ $u=\cos x$, $du=-\sin x dx$ في مسألة التكامل

$$-\int (1-u^2)^2\, du$$

$$-\int (1-2u^2+u^4)\ du = -u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\cos x$

$$=-\cos\ x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$$

(21) $\int \sec^6 x\ dx$

$$\int \sec^2 x \sec^2 x \sec^2 x\ dx = \int (1+\tan^2 x)^2 \sec^2 x\, dx$$

(A) نفرض أن $u=\tan x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\sec^2 x dx$

(C) نعوض بـــ $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx$ في مسألة التكامل

$$\int (1+u^2)^2\, du$$

$$= \int (1+2u^2+u^4)\, du = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

(D) نعوض بـــ $u = \tan x$

$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$$

(22) $\int \csc^6 x\, dx$

$$\int \csc^2 x \csc^2 x \csc^2 x\, dx = -\int -(1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x\, dx$$

(A) نفرض أن $u = \cot x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = -\csc^2 x dx$

(C) نعوض بـــ $u = \cot x$, $du = -\csc^2 x dx$ في مسألة التكامل

$$-\int (1+u^2)^2\, du$$

$$= -\int (1+2u^2+u^4)\, du = -u - \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + c$$

(E) نعوض بـــ $u = \cot x$

$$= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + c$$

(23) $\int \tan^5 x\, dx$

$$\int \tan x \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int \tan x\, (\sec^2 x - 1)^2\, dx$$

(A) نفرض أن $u = \sec x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du = \sec x \tan x\, dx$

لاحظ أن :- $du = u \tan x\, dx \Leftarrow dx = \frac{du}{\tan x}$

(C) نعوض بـــ $u = \sec x$, $dx = \frac{du}{\tan x}$ في مسألة التكامل

$$\int (u^2-1)^2\, du = \int (u^4-2u^2+1)\ \frac{du}{u}$$

$$= \int (u^3-2u+\frac{1}{u})\ du = \frac{1}{4}u^4-u^2+\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\sec x$

$$= \frac{1}{4}\sec^4 x-\sec^2 x+\ln|\sec x|+c$$

(24) $\int \tan^6 x\ dx$

$$\int \tan^2 x\ \tan^4 x\ dx = \int(\sec^2 x-1)\tan^4 x\ dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int\tan^4 x\ dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int\tan^2 x\tan^2 x\ dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int(\sec^2 x-1)\tan^2 x\ dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int\sec^2 x\tan^2 x\ dx+\int\tan^2 x\, dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int\sec^2 x\tan^2 x\ dx+\int(\sec^2 x-1)\, dx$$

$$= \int\sec^2 x\tan^4 x\ dx-\int\sec^2 x\tan^2 x\ dx+\int\sec^2 x dx-\int x\, dx$$

(A) نفرض أن $u=\tan x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\sec^2 x\ dx$

(C) نعين dx:- $dx=\dfrac{du}{\sec^2 x}$

(D) نعوض بـــ $du=\sec^2 x\ dx$, $dx=\dfrac{du}{\sec^2 x}$ في مسألة التكامل

$$= \int \sec^2 x\, u^4 \frac{du}{\sec^2 x} - \int \sec^2 x\, u^2 \frac{du}{\sec^2 x} + \int \sec^2 x dx - \int x\, dx$$

$$= \int u^4 du - \int u^2 du + \int \sec^2 x dx - \int x\, dx$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + \tan x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

(E) نعوض بـ $u = \tan x$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

طـريـقـة الـتـجـزيء

هي عبارة عن تحويل التكامل المعطى والذي لا يمكن حسابه بالقوانين المباشرة ولا بطريقة التعويض إلى تكامل آخر يمكن حسابه

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

أي أننا نقوم بتقسيم مسألة التكامل إلى الجزأين :-

الجزء الثاني
نفرض أن
dv = □
ثم نقوم بإيجاد v
وذلك بأن نكامل dv
v = □

الجزء الأول
نفرض أن
u = □
ثم نقوم بإيجاد du
وذلك بأن نفاضل u
du = □

ثم نعوض بـــ u,du,v,dv في القانون السابق

مسائل على طريقة التجزيء

(1) $\int xe^x \, dx$

$u = x \quad , \quad dv = e^x dx$

$du = dx \quad , \quad v = e^x$

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

(2) $\int xe^{2x} \, dx$

$u = x \quad , \quad dv = e^{2x} dx$

$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\int xe^{2x} \, dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

(3) $\int x \, 2^x \, dx$

$u = x \quad , \quad dv = 2^x dx$

$du = dx \quad , \quad v = \frac{2^x}{\ln 2}$

$$\int x2^x \, dx = \frac{1}{\ln 2} x2^x - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x \, dx = \frac{1}{\ln 2} x2^x - \frac{1}{(\ln 2)^2} 2^x + c$$

(4) $\int x\sin x\ dx$

$u=x \quad , \quad dv=\sin x\,dx$
$du=dx \quad , \quad v=-\cos x$

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c$$

(5) $\int x\sec^2 x\ dx$

$u=x \quad , \quad dv=\sec^2 x\,dx$
$du=dx \quad , \quad v=\tan x$

$$\int x\sec^2 x\,dx=x\tan x-\int \tan x\,dx=x\tan x-\ln|\sec x|+c$$

(6) $\int x\ln x\ dx$

$u=\ln x \quad , \quad dv=xdx$
$du=\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$$

(7) $\int (x+1)e^{-x}\ dx$

$u=x+1 \quad , \quad dv=e^{-x}dx$
$du=dx \quad , \quad v=-e^{-x}$

$\int (x+1)e^{-x}\,dx=-(x+1)e^{-x}-\int -e^{-x}\,dx$
$=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}+c$

(8) $\int x^2 \ln x\ dx$

$u=\ln x \quad , \quad dv=x^2dx$
$du=\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=\frac{1}{3}x^3$

$\int x^2 \ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{1}{3}x^3dx$
$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$

(9) $\int \ln x\ dx$

$u=\ln x \quad , \quad dv=dx$
$du=\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=x$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + c$$

(10) $\int \ln(x+1)\ dx$

$$u = \ln(x+1) \quad , \quad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x+1}dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \ln(x+1)\, dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + c$$

(11) $\int \ln(x^2+1)\ dx$

$$u = \ln(x^2+1) \quad , \quad dv = dx$$
$$du = \frac{2x}{x^2+1}dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - \int 2dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1}x + c$$

$$\frac{x^2}{x^2+1}$$

(12) $\int \ln\sqrt{x-1}\ dx = \int \ln(x-1)^{\frac{1}{2}}\ dx = \int \frac{1}{2}\ln(x-1)\,dx$

$u = \ln(x-1)$, $dv = \frac{1}{2}dx$

$du = \frac{1}{x-1}dx$, $v = \frac{1}{2}x$

$$\int \frac{1}{2}\ln(x-1)\,dx = \frac{1}{2}x\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x-1+1}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x-1) - \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

$$(13)\ \int x\ln\sqrt{x+1}\ dx=\int x\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}\ dx=\int\frac{1}{2}x\ln(x+1)dx$$

$$u=\ln(x+1) \qquad , dv=\frac{1}{2}xdx$$

$$du=\frac{1}{x+1}dx \quad , \quad v=\frac{1}{4}x^2$$

$$\int\frac{1}{2}x\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{x^2-1}{x+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int(x-1)dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ln|x+1|+c$$

$$(14)\ \int x\ln\sqrt[3]{x+1}\ dx=\int x\ln(x+1)^{\frac{1}{3}}\ dx=\int\frac{1}{3}x\ln(x+1)dx$$

$$u=\ln(x+1) \qquad , dv=\frac{1}{3}xdx$$

$$du=\frac{1}{x+1}dx \quad , \quad v=\frac{1}{6}x^2$$

$$\int \frac{1}{3} x \ln(x+1)\, dx = \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 - 1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int (x-1) dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x - \frac{1}{6} \ln|x+1| + c$$

(15) $\int \ln(x^2+1)\ dx$

$u = \ln(x^2+1)$, $dv = dx$

$du = \dfrac{2x}{x^2+1} dx$, $v = x$

$$\int \ln(x^2+1)\, dx = x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \tan^{-1} x + c$$

(16) $\int \ln(2x^2+4)\ dx$

$u=\ln(2x^2+4)\quad ,\ dv=dx$

$du=\dfrac{4x}{2x^2+4}dx\quad ,\ v=x$

$$\int \ln(2x^2+4)\,dx = x\ln(2x^2+4)-\int\frac{4x^2}{2x^2+4}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-2\int\frac{2x^2+4-4}{2x^2+4}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-2\int\frac{2x^2+4}{2x^2+4}dx+\int\frac{8}{2x^2+4}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-\int 2dx+\frac{8}{4}\int\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-\int 2dx+2\int\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2+1}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-\int 2dx+2\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2+1}dx$$

$$=x\ln(2x^2+4)-2x+2\sqrt{2}\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+c$$

(17) $\int \ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,]\ dx$

$u=\ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,]\quad ,\ dv=dx$

$du=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\qquad ,\ v=x$

$$\int \ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,]\,dx = x\ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,] - \frac{1}{2}\int 2x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,] - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= x\ln[\,x+\sqrt{x^2+1}\,] - \sqrt{1+x^2} + c$$

(18) $\int \ln[\,x+\sqrt{x}\,]\;dx$

$u = \ln[\,x+\sqrt{x}\,] \qquad , \; dv = dx$

$du = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2x(\sqrt{x}+1)}\,dx \quad , \quad v = x$

$$\int \ln[\,x+\sqrt{x}\,]\,dx = x\ln[\,x+\sqrt{x}\,] - \int \frac{x(2\sqrt{x}+1)}{2x(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

$$= x\ln[\,x+\sqrt{x}\,] - \int \frac{(2\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $u = 1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x} = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

(C) نعين dx:- $dx = 2\sqrt{x}\,du$

(D) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$, $dx = 2\sqrt{x}\,du$ في مسألة التكامل

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - \int \frac{2u-2+1}{2u}(2u-2)\ du$$

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - \int \frac{(2u-1)(2u-2)}{2u}\ du$$

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - \int \frac{4u^2-6u+2}{2u}\ du$$

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - \int (2u\ -3+\frac{1}{u})\, du$$

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - u^2+3u-\ln|u|+c$$

(E) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$

$$= x\ln[\ x+\sqrt{x}\ ] - (1+\sqrt{x})^2+3+3\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|+c$$

(19) $\int x^2 e^x\ dx$

$u=x^2 \quad , \quad dv=e^x dx$
$du=2xdx \quad , \quad v=e^x$

$$\int x^2 e^x\ dx = x^2e^x - \int 2x\, e^x\, dx$$

$u=2x \quad , \quad dv=e^x dx$
$du=2dx \quad , \quad v=e^x$

$$\int x^2 e^x\ dx = x^2e^x - [2x\, e^x - \int 2\, e^x dx]$$

$$= x^2e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + c$$

(20) $\int (x^2+2x-5)e^{-x}\ dx$

$u=x^2+2x-5 \quad , \quad dv=e^{-x}dx$
$du=(2x+2)dx \quad , \quad v=-e^{-x}$

$$\int (x^2+2x-5)e^{-x}dx=-(x^2+2x-5)e^{-x}+\int (2x+2)\,e^{-x}dx$$

$u=2x+2 \quad , \quad dv=e^{-x}dx$
$du=2dx \quad , \quad v=-e^{-x}$

$$\int (x^2+2x-5)e^{-x}dx=-(x^2+2x-5)e^{-x}-(2x+2)\,e^{-x}-\int -2e^{-x}dx$$
$$=-(x^2+2x-5)e^{-x}-(2x+2)\,e^{-x}-2e^{-x}+c$$

(21) $\int (\ln x)^2\ dx$

$u=(\ln x)^2 \quad , \quad dv=dx$
$du=2(\ln x)\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=x$

$$\int (\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2\int \frac{\ln x}{x}\,x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx$$

$u=\ln x \quad , \quad dv=dx$
$du=\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=x$

$$\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int x\tfrac{1}{x}\, dx]$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int dx] = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$$

(22) $\int x^2 \sin x \; dx$

$u = x^2 \quad , \; dv = \sin x\, dx$
$du = 2x dx \quad , \quad v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx$$

$u = 2x \quad , \; dv = \cos x\, dx$
$du = 2dx \quad , \; v = \sin x$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

(23) $\int \tan^{-1} x \; dx$

$u = \tan^{-1} x \quad , \; dv = dx$
$du = \dfrac{dx}{1+x^2} \quad , \; v = x$

$$\int \tan^{-1}x\ dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$$

(24) $\int \cot^{-1}x\ dx$

$u = \cot^{-1}x \quad , \ dv = dx$

$du = \dfrac{-dx}{1+x^2} \quad , \ v = x$

$$\int \cot^{-1}x\ dx = x\cot^{-1}x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$$

(25) $\int \sin^{-1}x\ dx$

$u = \sin^{-1}x \quad , \ dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ v = x$

$$\int \sin^{-1}x\ dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$$

(26) $\int \sec^{-1} 2x \; dx$

$u = \sec^{-1} 2x \quad , \; dv = dx$

$du = \dfrac{2dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} \quad , \; v = x$

$$\int \sec^{-1} 2x \; dx = x\sec^{-1} 2x - \int \frac{2x}{2x\sqrt{4x^2-1}} dx$$

$$= x\sec^{-1} 2x - \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} dx = x\sec^{-1} 2x - \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2-1}} dx$$

$$= x\sec^{-1} 2x - \frac{1}{2}\cosh^{-1}(2x) + c$$

(27) $\int \csc^{-1} 2x \; dx$

$u = \csc^{-1} 2x \quad , \; dv = dx$

$du = \dfrac{-2dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} \quad , \; v = x$

$$\int \csc^{-1} 2x \; dx = x\csc^{-1} 2x + \int \frac{2x}{2x\sqrt{4x^2-1}} dx$$

$$= x\csc^{-1} 2x + \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} dx = x\csc^{-1} 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2-1}} dx$$

$$= x\csc^{-1} 2x + \frac{1}{2}\cosh^{-1}(2x) + c$$

(28) $\int x\tan^{-1}x\ dx$

$u=\tan^{-1}x \quad , dv=x\,dx$

$du=\dfrac{dx}{1+x^2} \quad , \quad v=\dfrac{1}{2}x^2$

$\int x\tan^{-1}x\ dx=\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2+1}{1+x^2}dx+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\int dx+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

(29) $\int x\sec^{-1}2x\ dx$

$u=\sec^{-1}2x \quad , dv=x\,dx$

$du=\dfrac{2dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} \quad , \quad v=\dfrac{1}{2}x^2$

$$\int x\sec^{-1}2x\ dx=\frac{1}{2}x^2\sec^{-1}2x-\int\frac{2x^2}{4x\sqrt{4x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sec^{-1}2x-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{4x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sec^{-1}2x-\frac{1}{16}\int 8x(4x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sec^{-1}2x-\frac{1}{8}(4x^2-1)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sec^{-1}2x-\frac{1}{8}\sqrt{4x^2-1}+c$$

(30) $\int x(\ln x)^2\ dx$

$u=(\ln x)^2 \quad , \quad dv=xdx$

$du=2(\ln x)\frac{1}{x}dx \ , \ v=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x(\ln x)^2\,dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int\frac{\ln x}{x}x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int x\ln x\,dx$$

$u=\ln x \quad , \quad dv=xdx$

$du=\frac{1}{x}dx \quad , \quad v=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - [\frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x}x^2 dx]$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + c$$

(31) $\int \sqrt{x}\ln x\ dx$

$u = \ln x \quad , \quad dv = x^{\frac{1}{2}}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad , \quad v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + c$$

(32) $\int x\sin x\cos x\ dx$

$u = x \quad , \quad dv = \sin x\cos x\,dx$

$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}\sin^2 x$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}x\sin^2 x - \frac{1}{2}\int \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sin^2 x - \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sin^2 x - \int \frac{1}{4}dx + \frac{1}{8}\int 2\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sin^2 x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + c$$

(33) $\int x \tan^2 x \, dx = \int x (\sec^2(x) - 1) \, dx$

$= \int (x \sec^2(x) - x) \, dx = \int x \sec^2 x dx - \int x \, dx$

$u = x \quad , \quad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = dx \quad , \quad v = \tan x$

$\int x \sec^2 x dx - \int x \, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx - \int x \, dx$

$= x \tan x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2} x^2 + c$

(34) $\int \sin x \ln \cos x \, dx$

$u = \ln \cos x \quad , \quad dv = \sin x \, dx$

$du = -\frac{\sin x}{\cos x} dx \quad , \quad v = -\cos x$

$\int \sin x \ln \cos x \, dx = -\cos x \ln \cos x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cos x \, dx$

$= -\cos x \ln \cos x - \int \sin x \, dx$

$= -\cos x \ln \cos x + \cos x + c$

(35) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

$u = \ln x \quad , \quad dv = \frac{1}{x^2} dx$

$du = \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

(36) $\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \int x^2 x e^{-x^2}\, dx$

$u = x^2 \quad , \quad dv = x e^{-x^2} dx$

$du = 2x dx \quad , \quad v = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

$$\int x^2 x e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int -2x e^{-x^2}\, dx$$
$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

(37) $\int \sec^{-1} \sqrt{x}\, dx$

$u = \sec^{-1} \sqrt{x} \quad , \quad dv = dx$

$du = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = \dfrac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \quad , \quad v = x$

$$\int \sec^{-1}\sqrt{x}\ dx = x\sec^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$= x\sec^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx = x\sec^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\sec^{-1}\sqrt{x} - (x-1)^{\frac{1}{2}} + c = x\sec^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-1} + c$$

(38) $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\ dx$

$$u = \tan^{-1}\sqrt{x} \qquad , \ dv = dx$$

$$du = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{1+x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \quad , \ v = x$$

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\ dx = x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)}\,dx$$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $u = \sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x} = u$ ، $x = u^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

(C) نعين dx:- $dx = 2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx = 2u\,du$

(D) نعوض بـــ $u = \sqrt{x}$, $dx = 2u\,du$ في مسألة التكامل

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\ dx = x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{u}{(1+u^2)} 2u\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2u^2}{(1+u^2)}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{u^2}{1+u^2}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{u^2+1}{1+u^2}\ du + \int \frac{1}{1+u^2}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int du + \int \frac{1}{1+u^2}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - u + \tan^{-1}u + c$$

(E) نعوض بـ $u = \sqrt{x}$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

(39) $\int \cos^{-1}\sqrt{x}\ dx$

$u = \cos^{-1}\sqrt{x}$, $dv = dx$

$du = \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}dx}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, $v = x$

$$\int \cos^{-1}\sqrt{x}\ dx = x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1-1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{-[x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}]}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int (x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x+1)\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$$= x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}(x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sin^{-1}(2x-1) + c$$

$$(40)\int x^2\tan^{-1}x\ dx$$

$$u=\tan^{-1}x \quad , \ dv=x^2\,dx$$

$$du=\frac{dx}{1+x^2} \quad , \ v=\frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2\tan^{-1}x\ dx=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\int x^2\tan^{-1}x\ dx=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\int\frac{2x\,x^2}{1+x^2}\,dx$$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $u=1+x^2$ ومنها ، $x^2=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=2x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=1+x^2$, $du=2x\,dx$ في مسألة التكامل

$$=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{u}\,du=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\int\frac{u-1}{u}\,du$$

$$=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\int(1-\frac{1}{u})\,du$$

$$=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}u+\frac{1}{6}\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+x^2$

$$=\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x-\frac{1}{6}(1+x^2)+\frac{1}{6}\ln\left|1+x^2\right|+c$$

$$(41)\ \int \tan^{-1}\sqrt{x+1}\ dx$$

$$u=\tan^{-1}\sqrt{x+1} \qquad , \ dv=dx$$

$$du=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx}{x+2}=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}\,(x+2)} \quad , \quad v=x$$

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x+1}\ dx=x\tan^{-1}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x+1}\,(x+2)}dx$$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $u=\sqrt{x+1}$ ومنها $x=u^2-1 \Leftarrow \sqrt{x+1}=u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}$

(C) نعين dx:- $dx=2u\,du \Leftarrow dx=2\sqrt{x+1}\,du$

(D) نعوض بـــ $u=\sqrt{x+1}$, $dx=2u\,du$ في مسألة التكامل

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x+1}\ dx=x\tan^{-1}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{u^2-1}{(u^2-1+2)u}\,2u\,du$$

$$=x\tan^{-1}\sqrt{x+1}-\int\frac{u^2-1}{(u^2+1)}\ du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x+1} - \int \frac{u^2+1-1-1}{u^2+1}\, du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x+1} - \int \frac{u^2+1}{u^2+1}\, du + 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x+1} - \int du + 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x+1} - u + 2\tan^{-1} u + c$$

(E) نعوض بـ $u = \sqrt{x+1}$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + 2\tan^{-1}\sqrt{x+1} + c$$

(42) $\int e^{-x}\tan^{-1} e^{x}\, dx$

$u = \tan^{-1} e^{x} \quad , \; dv = e^{-x}\, dx$

$du = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}\, dx \quad , \; v = -e^{-x}$

$$\int e^{-x}\tan^{-1} e^{x}\, dx = -e^{-x}\tan^{-1} e^{x} + \int \frac{e^{x}e^{-x}}{1+e^{2x}}\, dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1} e^{x} + \int \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1} e^{x} + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+e^{-2x}e^{2x}}\, dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1} e^{x} + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+e^{0}}\, dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1}e^{x} + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\,dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1}e^{x} - \frac{1}{2}\int \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\,dx$$

$$= -e^{-x}\tan^{-1}e^{x} - \frac{1}{2}\ln\left|e^{-2x}+1\right| + c$$

(43) $\int e^{2x}\sin e^{x}\ dx = \int e^{x}\, e^{x}\sin e^{x}\ dx$

$u = e^{x}$, $dv = e^{x}\sin e^{x}\ dx$

$du = e^{x}dx$, $v = -\cos e^{x}$

$$\int e^{2x}\sin e^{x}\ dx = -e^{x}\cos e^{x} + \int e^{x}\cos e^{x}\ dx$$

$$= -e^{x}\cos e^{x} + \sin e^{x} + c$$

(44) $\int (\frac{x-1}{x})e^{\frac{1}{x}}\ dx = \int e^{\frac{1}{x}}\,dx - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

$u = e^{\frac{1}{x}}$, $dv = dx$

$du = -\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}dx$, $v = x$

$$\int e^{\frac{1}{x}}\,dx - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx = xe^{\frac{1}{x}} + \int x\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}\,dx - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx + c$$

$$= xe^{\frac{1}{x}} + \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx + c = xe^{\frac{1}{x}} + c$$

(45) $\int \sinh^{-1} x \; dx$

$u = \sinh^{-1} x \quad , \; dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \; v = x$

$$\int \sinh^{-1} x \; dx = x\sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x\sinh^{-1} x - \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= x\sinh^{-1} x - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + c$$

(46) $\int \tanh^{-1} x \; dx$

$u = \tanh^{-1} x \quad , \; dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{1-x^2} \quad , \; v = x$

$$\int \tanh^{-1} x \; dx = x\tanh^{-1} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$= x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| + c$$

(47) $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \quad , \; dv = \cos x\, dx$
$du = e^x dx \quad , \; v = \sin x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$u = e^x \quad , \; dv = \sin x\, dx$
$du = e^x dx \quad , \; v = -\cos x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - [-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx] + k$$
$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx + k$$
$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + k$$
$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + k$$
$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + c \;, c = \frac{1}{2} k$$

(48) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int e^{-x} \sin x\, dx$

$u = e^{-x} \quad , \; dv = \sin x\, dx$
$du = -e^{-x} dx \quad , \; v = -\cos x$

$$\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x\, dx$$

$u=e^{-x}$, $dv=\cos x\ dx$
$du=-e^{-x}dx$, $v=\sin x$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-[e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\ dx]+k$$
$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\sin x\ dx+k$$
$$\int e^{-x}\sin x\ dx+\int e^{-x}\sin x\ dx=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x+k$$
$$2\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x+k$$
$$\int e^{-x}\sin x\ dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x-\frac{1}{2}e^{-x}\sin x+c\ ,c=\frac{1}{2}k$$

(49) $\int \sin(\ln x)\ dx$

$u=\sin(\ln x)$, $dv=dx$
$du=\frac{1}{x}\cos\ln x\,dx$, $v=x$

$$\int \sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,x\,dx$$
$$\int \sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\ dx$$

$u=\cos(\ln x)$, $dv=\ dx$
$du=-\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$, $v=x$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) + \int \frac{\sin(\ln x)}{x} x\,dx] + k$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx + k$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx + \int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + k$$

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + k$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + c \;, c = \frac{1}{2}k$$

(50) $\int \cos(\ln x)\,dx$

$u = \cos(\ln x) \quad , \; dv = dx$

$du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx \quad , \; v = x$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \frac{1}{x}\sin(\ln x)\,x\,dx$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

$u = \sin(\ln x) \quad , \; dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \quad , \; v = x$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + [x\sin(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} x\,dx + k$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx + k$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx + \int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + k$$

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + k$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x\sin(\ln x) + c, c = \frac{1}{2}k$$

(51) $\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \sec x\,dx$

$u = \sec x \quad , \quad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x \tan x\,dx \quad , \quad v = \tan x$

$$\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x - \int \sec x\,(\sec^2(x) - 1)\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x - \int (\sec^3 x - \sec x)\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x - \int \sec^3 x + \int \sec x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx + \int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x| + k$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x| + k$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c, c = \frac{1}{2}k$$

(52) $\int \csc^3 x\, dx = \int \csc^2 x\ \csc x\, dx$

$u = \csc x \qquad , \ dv = \csc^2 x dx$
$du = -\csc x \cot x\, dx \ , \ v = -\cot x$

$\int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x - \int \csc x \cot^2 x\, dx$
$\int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x - \int \csc x\, (\csc^2(x) - 1)\, dx$
$\int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x - \int (\csc^3 x - \csc x)\, dx$
$\int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x - \int \csc^3 x + \int \csc x\, dx$
$\int \csc^3 x\, dx + \int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x + \ln|\csc x - \cot x| + k$
$2\int \csc^3 x\, dx = -\cot x \csc x + \ln|\csc x - \cot x| + k$
$\int \csc^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + c, c = \frac{1}{2}k$

(53) $\int \sec^5 x\, dx = \int \sec^3 x\ \sec^2 x\, dx$

$u = \sec^3 x \qquad , \ dv = \sec^2 x dx$
$du = 3\sec^2 x \sec x \tan x\, dx \ , \ v = \tan x$
$du = 3\sec^3 x\ \tan x\, dx$

$$\int \sec^5 x\, dx = \tan x \sec^3 x - \int 3\sec^3 x \tan^2 x\, dx$$

$$\int \sec^5 x\, dx = \tan x \sec^3 x - \int 3\sec^3 x\,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^5 x\, dx = \tan x \sec^3 x - \int (3\sec^5 x - 3\sec^3 x)\, dx$$

$$\int \sec^5 x\, dx = \tan x \sec^3 x - 3\int \sec^5 x + \int 3\sec^3 x\, dx$$

$$4\int \sec^5 x\, dx = \tan x \sec^3 x + \frac{3}{2}\tan x \sec x + \frac{3}{2}\ln|\sec x + \tan x| + k$$

$$\int \sec^5 x\, dx = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x + \frac{3}{8}\tan x \sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$, c = \frac{1}{4}k$$

(54) $\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2(x) - 1)\sec x\, dx$

$$\int (\sec^3 x - \sec x)\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

تكامل $\int \sec^3 x\, dx$ انظر مسألة (51)

(55) $\int \cot^2 x \csc x\, dx = \int (\csc^2(x) - 1)\csc x\, dx$

$$\int (\csc^3 x - \csc x)\, dx = \int \csc^3 x\, dx - \int \csc x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| - \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cot x \csc x - \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + c$$

تكامل $\int \csc^3 x\, dx$ انظر مسألة (52)

(56) $\int \sin\sqrt{x}\ dx$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $w=\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=w$ ،

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $dw=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

(C) نعين dx:- $dx=2\sqrt{x}\,dw \Leftarrow dx=2w\,dw$

(D) نعوض بـــ $w=\sqrt{x}$, $dx=2wdw$ في مسألة التكامل

$$\int \sin\sqrt{x}\ dx=\int \sin w\ 2wdw$$

$$dv=\sin w\ dw \quad , \quad u=2w$$
$$v=-\cos w \quad , \quad du=2\,dw$$

$$\int \sin w\ 2wdw=-2w\cos w+2\int \cos w\ dw$$
$$\int \sin w\ 2wdw=-2w\cos w+2\sin w+c$$

(E) نعوض بـــ $w=\sqrt{x}$

$$\int \sin\sqrt{x}\ dx=-2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})+2\sin(\sqrt{x})+c$$

(57) $\int \cos\sqrt{x+1}\ dx$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $w=\sqrt{x+1}$ ومنها $\sqrt{x+1}=w$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $dw=\dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}$

(C) نعين dx:- $dx=2\sqrt{x+1}\,dw \Leftarrow dx=2w\,dw$

(D) نعوض بـــ $w=\sqrt{x+1}$, $dx=2w\,dw$ في مسألة التكامل

$$\int \cos\sqrt{x+1}\,dx=\int \cos w\;2w dw$$

$$dv=\cos w dw \quad , u=2w$$
$$v=\sin w \quad , du=2dw$$

$$\int \cos w\;2w dw=2w\sin w-2\int \sin w\,dw$$
$$\int \cos w\;2w dw=2w\sin w+2\cos w+c$$

(E) نعوض بـــ $w=\sqrt{x+1}$

$$\int \cos\sqrt{x+1}\,dx=2\sqrt{x+1}\,\sin\sqrt{x+1}+2\cos\sqrt{x+1}+c$$

(58) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $w=\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=w$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $dw=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

(C) نعين dx:- $dx=2\sqrt{x}\,dw \Leftarrow dx=2w\,dw$

(D) نعوض بـــ $w=\sqrt{x}$, $dx = 2w\,dw$ في مسألة التكامل

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx=\int e^{w}\,2\sqrt{x}\,dw=\int e^{w}\,2w\,dw$$

$$dv=e^{w}\,dw \quad , \quad u=2w$$
$$v=e^{w}\,dw \quad , \quad du=2dw$$

$$\int e^{w}\,2w\,dw=2we^{w}-2\int e^{w}\,dw$$
$$=2we^{w}-2e^{w}+c$$

(E) نعوض بـــ $w=\sqrt{x}$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+c$$

(59) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $w=\ln x$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $dw=\frac{dx}{x}$

(C) نعين dx:- $dx = x\,dw$

(D) نعوض بـــ $w=\ln x$, $dx = x\,dw$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{\ln w}{x}\,x dw=\int \ln w\,dw$$

$$u=\ln w \quad , \quad dv=dw$$
$$du=\frac{1}{w}dw \quad , \quad v=w$$

$$\int \ln w \, dw = w\ln w - \int \frac{1}{w} w \, dw$$
$$= w\ln w - \int dw = w\ln w - w + c$$

(E) نعوض بـ $w = \ln x$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \ \ln(\ln x) - \ln x + c$$

(60) $\int x \sin^2 x \ dx$

$$\int x \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \int \frac{1}{2} x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx$$

$u = x \quad , \quad dv = \cos 2x \, dx$

$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$= \int \frac{1}{2} x \, dx - \frac{1}{2}[\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx]$$
$$= \int \frac{1}{2} x \, dx - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \int 2 \sin 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + c$$

طريقة التعويضات المثلثية

من الممكن أحياناً تغيير المتغير المستقل في مسألة التكامل وتحويل الدالة المراد تكاملها إلى دالة أخرى مثلثية يمكن تكاملها ويسمى هذا التكامل بالتعويضات المثلثية ونستخدم لذلك التعويضات المثلثية المناسبة وتستخدم هذه الطريقة إذا كانت مسألة التكامل تحتوي على أحد الصور الآتية :-

$$[F(x)]^2 - a^2 \ , \ [F(x)]^2 + a^2, \ a^2 - [F(x)]^2$$

ولإيجاد تكامل المسائل التي تحتوي على هذه الصور نتبع الآتي :-

(1) نفرض أن الدالة F(x) تساوي أحد النسب المثلثية الآتية :-

الفرضية	صورة المسألة
$F(x) = a\tan\theta$	$[F(x)]^2 + a^2$
$F(x) = a\sec\theta$	$[F(x)]^2 - a^2$
$F(x) = a\sin\theta$	$a^2 - [F(x)]^2$

(2) من الفرضية نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة الزاوية θ

(3) من النسبة المثلثية نكوّن المثلث القائم الزاوية ونعين الضلع المجهول

(4) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ لنحصل على dx=□

(5) نعوض بالفرضية F(x)=□ وتفاضلها dx=□ في مسألة التكامل

(6) نقوم بإخراج a^2 عامل مشترك فنحصل على صورة أحد المتطابقات

$$(1)\ 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$
$$(2)\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$
$$(3)\ \csc^2\theta=1+\cot^2\theta$$

(7) نكامل المسألة بالنسبة لـــ θ

(8) نكتب المسألة بعد تكاملها بدلالة x وذلك بالاستفادة من الخطوة رقم (2)+(3)

مسائل على طريقة التعويضات المثلثية

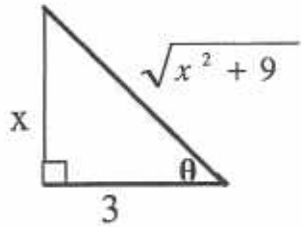
$$(1)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$$

(A) نفرض أن $x=3\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{x}{3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ

$$dx=3\sec^2\theta\, d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $x=3\tan\theta$ وتفاضلها $dx=3\sec^2\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta\,\sqrt{9\tan^2\theta+9}}=\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{3\tan^2\theta\,\sqrt{9[\tan^2\theta+1]}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta\,\sqrt{\sec^2\theta}}=\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta\sec\theta}=\int\frac{\sec\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{9}\int\cos\theta\,(\sin\theta)^{-2}\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{9}(\sin\theta)^{-1}+c=-\frac{1}{9\sin\theta}+c=-\frac{1}{9}\csc\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=-\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}+c$$

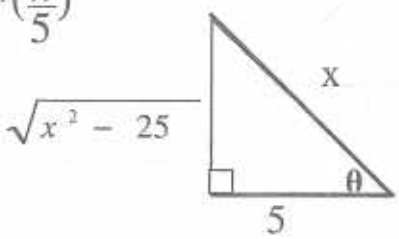
$$(2)\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$$

(A) نفرض أن $x=5\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta=\frac{x}{5}$$

$$\theta=\sec^{-1}(\frac{x}{5})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx=5\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=5\sec\theta$ وتفاضلها $dx=5\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{5\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{125\sec^3\theta\ \sqrt{25\sec^2\theta-25}}=\int\frac{\tan\theta\ d\theta}{125\sec^2\theta\ \sqrt{[\sec^2\theta-1]}}$$

$$=\int\frac{\tan\theta\ d\theta}{125\sec^2\theta\ \sqrt{\tan^2\theta}}=\int\frac{\tan\theta\ d\theta}{125\sec^2\theta\ \tan\theta}=\frac{1}{125}\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{125}\int\frac{1}{2}[1+\cos2\theta]\ d\theta=\int\frac{1}{250}\ d\theta+\frac{1}{250}\int\cos2\theta\ d\theta$$

$$= \int \frac{1}{250}\, d\theta + \frac{1}{500} \int 2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{250}\theta + \frac{1}{500}\sin 2\theta + c$$

$$= \frac{1}{250}\theta + \frac{1}{500} 2\sin\theta \cos\theta + c$$

$$= \frac{1}{250}\theta + \frac{1}{250}\sin\theta \cos\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{250}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{250}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,\frac{5}{x} + c$$

$$= \frac{1}{250}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{50}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} + c$$

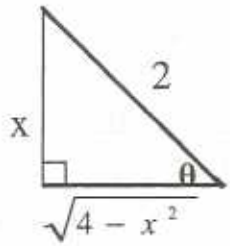
$$(3) \int \sqrt{4-x^2}\, dx$$

(A) نفرض أن $x=2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = 2\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=2\sin\theta$ وتفاضلها $dx = 2\cos\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\ 2\cos\theta\, d\theta = 2\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\ 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= 2\int\sqrt{\cos^2\theta}\ 2\cos\theta\, d\theta = 4\int\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= 4\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta = \int(2+2\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= 2\theta + \sin 2\theta + c = 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= 2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) + 2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$
$$= 2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

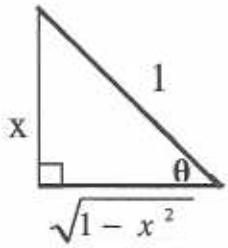
$$(4)\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

(A) نفرض أن $x=\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\sin\theta = x$

$\theta = \sin^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\sin\theta$ وتفاضلها $dx=\cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \int \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \int \cot^2\theta\, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \sin^{-1}(x) + c$$

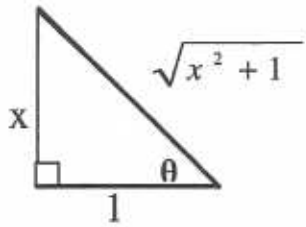
$$(5) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$$

(A) نفرض أن $x = \tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta = x$$

$$\theta = \tan^{-1}(x)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x = \tan\theta$ وتفاضلها $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^3\theta}{\tan^2\theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta\,\sin^2\theta} = \int \sec\theta\,\csc^2\theta d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,(\cot^2\theta+1)\, d\theta = \int (\sec\theta\cot^2\theta+\sec\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta + \int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \int \csc\theta\cot\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta = -\csc\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + c$$

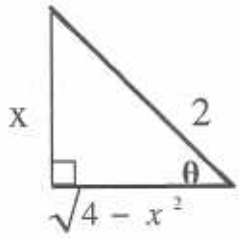
$$(6)\ \int x^3\sqrt{4-x^2}\, dx$$

(A) نفرض أن $x=2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=2\sin\theta$ وتفاضلها $dx = 2\cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int 8\sin^3\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}\; 2\cos\theta\, d\theta = 32\int \sin^3\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\;\cos\theta\, d\theta$$
$$= 32\int \sin^3\theta\sqrt{\cos^2\theta}\;\cos\theta\, d\theta = 32\int \sin^3\theta\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= 32\int \sin\theta\;\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 32\int \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta$$

(1) نفرض أن $u=\cos\theta$

(2) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــθ $du = -\sin\theta\, d\theta$

(3) نعين dθ:- $d\theta = \dfrac{-du}{\sin\theta}$

(4) نعوض بـــ $u=\cos\theta$, $d\theta = \dfrac{-du}{\sin\theta}$ في مسألة التكامل

$$= -32\int \sin\theta\,(1-u^2)\; u^2\,\frac{du}{\sin\theta}$$
$$= -32\int (1-u^2)\,u^2\, du = -32\int (u^2-u^4)\; du$$
$$= -\frac{32}{3}u^3 + \frac{32}{5}u^5 + c$$

(5) نعوض بـــ $u=\cos\theta$

$$= -\frac{32}{3}\cos^3\theta + \frac{32}{5}\cos^5\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= -\frac{32}{3}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]^3 + \frac{32}{5}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]^5 + c$$

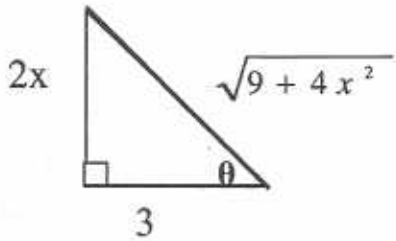
$$(7)\int x^3\sqrt{9+4x^2}\,dx = \int x^3\sqrt{9+(2x)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $2x=3\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{2x}{3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــθ

$$2dx=3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$dx=\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $2x=3\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

$x=\frac{3}{2}\tan\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{27}{8}\tan^3\theta\,\sqrt{9+9\tan^2\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{243}{16}\int\tan^3\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{243}{16}\int\tan^3\theta\sqrt{\sec^2\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta=\frac{243}{16}\int\tan^3\theta\,\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{243}{16}\int\tan\theta\,\tan^2\theta\,\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{243}{16}\int\tan\theta\,\sec\theta\,(\sec^2\theta-1)\sec^2\theta\,d\theta$$

(1) نفرض أن $u=\sec\theta$

(2) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $du=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

(3) نعوض بـــ $u=\sec\theta$, $du=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$=\frac{243}{16}\int u^2(u^2-1)\, du=\frac{243}{16}\int(u^4-u^2)\, du$$

$$=\frac{243}{80}u^5-\frac{243}{48}u^3+c$$

(5) نعوض بـــ $u=\sec\theta$

$$=\frac{243}{80}\sec^5\theta-\frac{243}{48}\sec^3\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{243}{80}\left[\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right]^5-\frac{243}{80}\left[\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right]^3+c$$

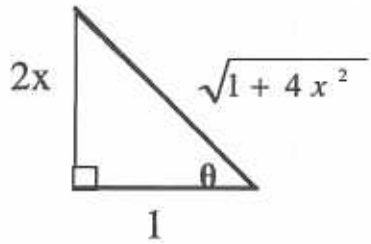
$$(8)\int\sqrt{1+4x^2}\, dx=\int\sqrt{1+(2x)^2}\, dx$$

(A) نفرض أن $2x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta=2x$

$\theta=\tan^{-1}(2x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $2dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $2x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2\theta}\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\tan\theta\sec\theta + \frac{1}{4}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta\sec\theta + \frac{1}{4}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{1+4x^2}+2x\right| + c$$

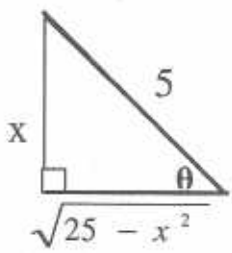
$$(9)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\, dx$$

(A) نفرض أن $x=5\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x}{5}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx=5\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=5\sin\theta$ وتفاضلها $dx=5\cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int\frac{25\sin^2\theta}{\sqrt{25-25\sin^2\theta}}5\cos\theta\, d\theta=\int\frac{25\sin^2\theta}{5\sqrt{1-\sin^2\theta}}5\cos\theta\, d\theta$$

$$=25\int\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta=25\int\sin^2\theta\, d\theta$$

$$=25\int\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)\, d\theta=\int\frac{25}{2}d\theta-\frac{25}{4}\int2\cos2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{25}{2}\theta-\frac{25}{4}\sin2\theta+c$$

$$=\frac{25}{2}\theta-\frac{25}{4}2\sin\theta\cos\theta+c$$

$$=\frac{25}{2}\theta-\frac{25}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{25}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{5})-\frac{25}{2}\frac{x}{5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}+c$$

$$=\frac{25}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{5})-\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+c$$

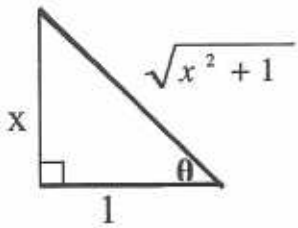
$$(10)\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

(A) نفرض أن $x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta = x$

$\theta = \tan^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x = \tan\theta$ وتفاضلها $dx = \sec^2\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int \frac{\tan^2\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} \sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} \sec^2\theta\, d\theta = \int \tan^2\theta\, \sec\theta\, d\theta$$

$$= \int (\sec^2\theta - 1)\, \sec\theta\, d\theta = \int (\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + c$$

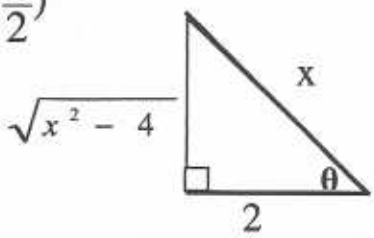
$$(11)\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$$

(A) نفرض أن $x=2\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta=\frac{x}{2}$$

$$\theta=\sec^{-1}(\frac{x}{2})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=2\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=2\sec\theta$ وتفاضلها $dx=2\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}{4\sec^2\theta}2\sec\theta\tan\theta d\theta=\int\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec^2\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\int\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta=\int\frac{\tan^2\theta\,d\theta}{\sec\theta}=\int\frac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}d\theta$$

$$=\int\sec\theta\ d\theta-\int\cos\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|-\sin\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ +c$$

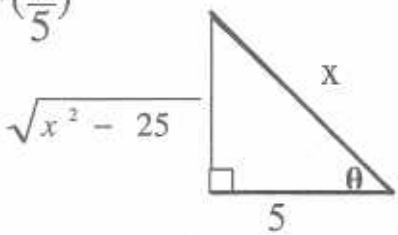
$$(12)\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$$

(A) نفرض أن $x=5\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta=\frac{x}{5}$$

$$\theta=\sec^{-1}(\frac{x}{5})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=5\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=5\sec\theta$ وتفاضلها $dx=5\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{\sqrt{25\sec^2\theta-25}}{5\sec\theta}5\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=5\int\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta=5\int\frac{\sqrt{\tan^2\theta}}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=5\int\frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\, d\theta=5\int\tan^2\theta\ d\theta$$

$$=5\int(\sec^2\theta-1)d\theta=5\tan\theta-5\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\sqrt{x^2-25}-5\sec^{-1}(\frac{x}{5})+c$$

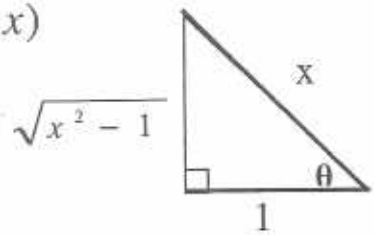
$$(13)\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$$

(A) نفرض أن $x=\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta = x$$

$$\theta = \sec^{-1}(x)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ

$$dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $x=\sec\theta$ وتفاضلها في مسألة التكامل

$$dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}\sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta}}{\sec\theta}\sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta \tan\theta \, d\theta = \int \tan^2\theta \, d\theta$$

$$= \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = \tan\theta - \theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}(x) + c$$

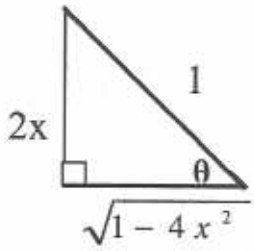
$$(14)\int\frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}dx$$

(A) نفرض أن $x=\frac{1}{2}\sin\theta\ ,2x=\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\sin\theta=2x$

$\theta=\sin^{-1}(2x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=\frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $2x=\sin\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$2\int\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta=\int\frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sin\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta=\int\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta=\int\csc\theta d\theta-\int\sin\theta\, d\theta$$

$$=\ln|\csc\theta-\cot\theta|+\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\ln\left|\frac{1}{2x}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right|+\sqrt{1-4x^2}+c$$

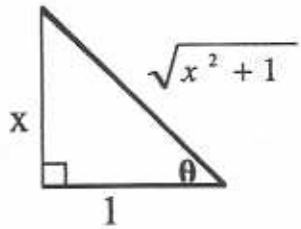
$$(15)\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(A) نفرض أن $x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta = x$

$\theta = \tan^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\sec^2\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{\sec^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{\sec\theta}\, d\theta = \int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \sin\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

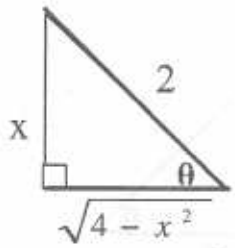
$$(16)\int\frac{dx}{(4-x^2)^2}$$

(A) نفرض أن $x=2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=\frac{x}{2}$$

$$\theta=\sin^{-1}(\frac{x}{2})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=2\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=2\sin\theta$ وتفاضلها $dx=2\cos\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{2\cos\theta}{(4-4\sin^2\theta)^2}\,d\theta=\int\frac{2\cos\theta}{16(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{16}\tan\theta\,\sec\theta+\frac{1}{16}\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{16}(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}})(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}})+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right|+c$$

$$=\frac{x}{32-8x^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\right|+c$$

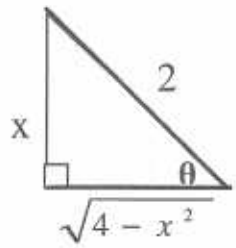
$$(17)\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(A) نفرض أن $x=2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=\frac{x}{2}$$

$$\theta=\sin^{-1}(\frac{x}{2})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=2\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=2\sin\theta$ وتفاضلها $dx=2\cos\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{2\cos\theta}{(4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta=\int \frac{2\cos\theta}{(4)^{\frac{3}{2}}(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta=\frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta=\frac{1}{4}\tan\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{4}(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}})+c$$

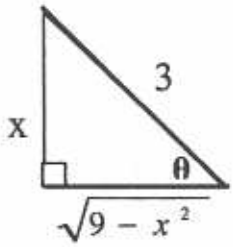
$$(18)\int \frac{x^2\,dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(A) نفرض أن $x=3\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=\frac{x}{3}$$

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=3\cos\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=3\sin\theta$ وتفاضلها $dx=3\cos\theta\,d\theta$

$$\int\frac{3\cos\theta\ 9\sin^2\theta}{(9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=\int\frac{3\cos\theta\ 9\sin^2\theta}{(9)^{\frac{3}{2}}(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta$$

$$=\int\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=\int\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

$$=\int\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int\tan^2\theta\,d\theta=\int(\sec^2\theta-1)d\theta=\tan\theta-\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}-\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

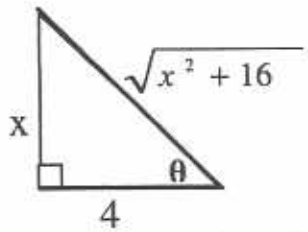
$$(19)\int \frac{x^2}{(16+x^2)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $x=4\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{x}{4}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=4\sec^2\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=4\tan\theta$ وتفاضلها $dx=4\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int\frac{4\sec^2\theta\;16\tan^2\theta}{(16\tan^2\theta+16)^2}\,d\theta=\int\frac{4\sec^2\theta\;16\tan^2\theta}{(16)^2\sec^4\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{(\sec^2\theta-1)}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$\frac{1}{4}\int d\theta-\frac{1}{4}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int d\theta-\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int d\theta-\int\frac{1}{8}\,d\theta-\frac{1}{16}\int 2\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{16}\sin2\theta+c$$

$$=\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{16}2\sin\theta\cos\theta+c$$

$$=\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{8}\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{8}\tan^{-1}(\frac{x}{4})-\frac{1}{8}\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}\frac{4}{\sqrt{16+x^2}}+c$$

$$=\frac{1}{8}\tan^{-1}(\frac{x}{4})-\frac{x}{32+2x^2}+c$$

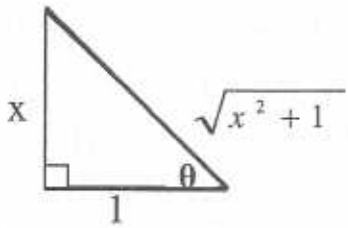
$$(20)\int\frac{x-1}{(1+x^2)^2}dx$$

(A) نفرض أن $x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta=x$

$\theta=\tan^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=\sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int\frac{\tan\theta-1}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\, d\theta=\int\frac{\sec^2\theta\,(\tan\theta-1)}{\sec^4\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{(\tan\theta-1)}{\sec^2\theta}d\theta=\int\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}d\theta-\int\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\, d\theta-\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \sin\theta \cos\theta \; d\theta - \int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\; d\theta$$

$$= \int \sin\theta \cos\theta \; d\theta - \int \frac{1}{2}\; d\theta - \frac{1}{4}\int 2\cos 2\theta \; d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}2\sin\theta\cos\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

$$= \frac{x^2}{2+2x^2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2+2x^2} + c$$

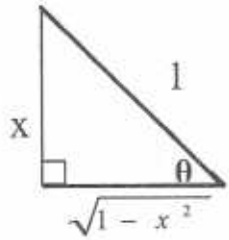
$$(21)\int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^4}$$

(A) نفرض أن $x = \sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = x$$

$$\theta = \sin^{-1}(x)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx=\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\sin\theta$ وتفاضلها $dx=\cos\theta\, d\theta$

$$\int\frac{\cos\theta\ \sin^3\theta}{(1-\sin^2\theta)^4}\,d\theta=\int\frac{\cos\theta\ \sin^3\theta}{(\cos^2\theta)^4}\,d\theta=\int\frac{\cos\theta\,\sin^3\theta}{\cos^8\theta}\,d\theta$$

$$=\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^7\theta}\,d\theta=\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\ \frac{1}{\cos^4\theta}\,d\theta=\int\tan^3\theta\sec^4\theta\,d\theta$$

$$=\int\tan\theta\ \tan^2\theta\sec^4\theta\,d\theta=\int\tan\theta\ (\sec^2\theta-1)\ \sec^4\theta\,d\theta$$

(1) نفرض أن $u=\sec\theta$

(2) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

(3) نعين dθ:- $d\theta=\dfrac{du}{\sec\theta\ \tan\theta}$

(4) نعوض بـــ $u=\sec\theta$, $d\theta=\dfrac{du}{\sec\theta\ \tan\theta}$ في مسألة التكامل

$$\int\tan\theta\ (u^2-1)u^4\ \ \frac{du}{\sec\theta\ \tan\theta}=\int u^4(u^2-1)\ \ \frac{du}{\sec\theta}$$

$$\int u^4(u^2-1)\ \ \frac{du}{u}=\int u^3(u^2-1)\,du\ =\int(u^5-u^3)\ du$$

$$=\frac{1}{6}u^6-\frac{1}{4}u^4+c$$

(5) نعوض بـــ $u=\sec\theta$

$$=\frac{1}{6}\sec^6\theta-\frac{1}{4}\sec^4\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{6}[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]^6-\frac{1}{4}[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]^4+c$$

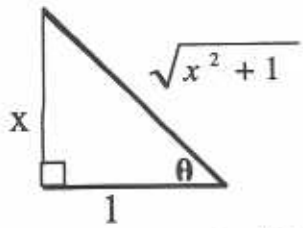
$$(22)\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

(A) نفرض أن $x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta = x$

$\theta = \tan^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{1}{\tan\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\sqrt{\sec^2\theta}}$$

$$= \int \frac{1}{\tan\theta\,\sec\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}\, d\theta = \int \csc\theta\, d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + c$$

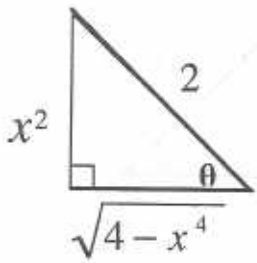
$$(23)\ \int x\sqrt{4-x^4}\,dx = \int x\sqrt{4-(x^2)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $x^2 = 2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x^2}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx = \frac{\cos\theta}{x}\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x^2 = 2\sin\theta$ وتفاضلها $dx = \frac{\cos\theta}{x}\,d\theta$

في مسألة التكامل

$$\int x\sqrt{4-4\sin^2\theta}\ \frac{\cos\theta}{x}\,d\theta = 2\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int\sqrt{\cos^2\theta}\ \cos\theta\,d\theta = 2\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \int(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + c = \theta + \sin\theta\cos\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

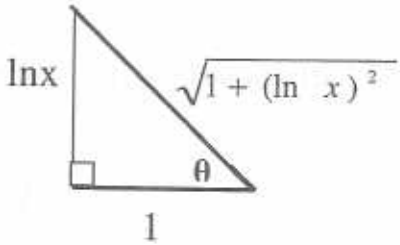
$$= \sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\,\frac{\sqrt{4-x^4}}{2} + c$$

$$(24)\int \frac{(\ln x)^2}{x}\sqrt{1+(\ln x)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $\ln x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\ln x$$
$$\theta=\tan^{-1}(\ln x)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــθ

$$\frac{1}{x}dx=\sec^2\theta\,d\theta$$
$$dx=x\sec^2\theta\,d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $\ln x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx=x\sec^2\theta\,d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{(\tan\theta)^2}{x}\sqrt{1+\tan^2\theta}\;x\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int\tan^2\theta\;\sec\theta\;\sec^2\theta\,d\theta=\int\tan^2\theta\;\sec^3\theta\,d\theta$$
$$=\int(\sec^2\theta-1)\sec^3\theta\,d\theta=\int\sec^5\theta\,d\theta-\int\sec^3\theta\,d\theta$$

التكامل بالتجزئ:-

$$= \int \sec^5\theta \, d\theta - \int \sec^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\tan x \sec^3\theta + \frac{3}{8}\tan\theta\sec\theta + \frac{3}{8}\ln|\sec\theta + \tan\theta|$$
$$- \frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta\sec^3\theta - \frac{1}{8}\tan\theta\sec\theta - \frac{1}{8}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{4}(\ln x)(\sqrt{1+(\ln x)^2})^3 - \frac{1}{8}(\ln x)\sqrt{1+(\ln x)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\sqrt{1+(\ln x)^2} + \ln x\right| + c$$

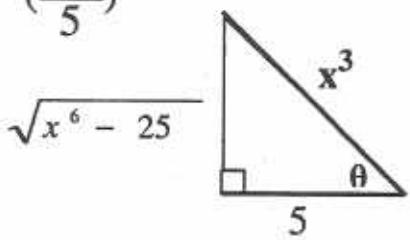
$$(25) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^6 - 25}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^3)^2 - 25}}$$

(A) نفرض أن $x^3 = 5\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta = \frac{x^3}{5}$$

$$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x^3}{5}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ

$$dx=\frac{5}{3x^2}\sec\theta\tan\theta\ d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $x^3=5\sec\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{5}{3x^2}\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

في مسألة التكامل

$$\int\frac{5\sec\theta\tan\theta}{x\sqrt{25\sec^2\theta-25}}\ \frac{1}{3x^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{5\sec\theta\tan\theta}{5\sqrt{\sec^2\theta-1}}\ \frac{1}{x^3}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}\ \frac{1}{5\sec\theta}d\theta=\frac{1}{15}\int d\theta$$

$$=\frac{1}{15}\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{15}\sec^{-1}(\frac{x^3}{3})\ +c$$

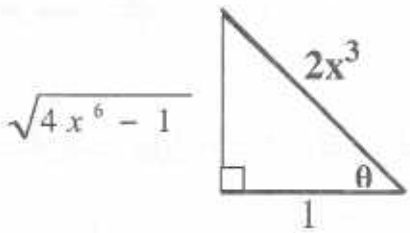
$$(26)\int x^8\sqrt{4x^6-1}\ dx=\int x^8\sqrt{(2x^3)^2-1}\ dx$$

(A) نفرض أن $2x^3=\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta=2x^3$$

$$\theta=\sec^{-1}(2x^3)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ

$$6x^2dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$dx=\frac{1}{6x^2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $2x^3=\sec\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{1}{6x^2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$\int x^8\sqrt{\sec^2\theta-1}\;\frac{\tan\theta\,\sec\theta}{6x^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{6}\int x^8\sqrt{\tan^2\theta}\;\frac{\tan\theta\,\sec\theta}{x^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{6}\int x^6\,\tan^2\theta\,\sec\theta\,d\theta=\frac{1}{6}\int\frac{\sec^2\theta}{4}\tan^2\theta\,\sec\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{24}\int\tan^2\theta\,\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{24}\int(\sec^2\theta-1)\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{24}\int(\sec^5\theta-\sec^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{24}\int\sec^5\theta\,d\theta-\frac{1}{24}\int\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{96}\tan\theta\sec^3\theta+\frac{1}{64}\tan\theta\sec\theta+\frac{1}{64}\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$
$$-\frac{1}{48}\tan\theta\sec\theta-\frac{1}{48}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$
$$=\frac{1}{96}\tan\theta\sec^3\theta-\frac{1}{192}\tan\theta\sec\theta-\frac{1}{192}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{96}8x^9\sqrt{4x^6-1}-\frac{1}{192}2x^3\sqrt{4x^6-1}-\frac{1}{192}\ln\left|2x^3+\sqrt{4x^6-1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{12}x^9\sqrt{4x^6-1}-\frac{1}{96}x^3\sqrt{4x^6-1}-\frac{1}{192}\ln\left|2x^3+\sqrt{4x^6-1}\right|+c$$

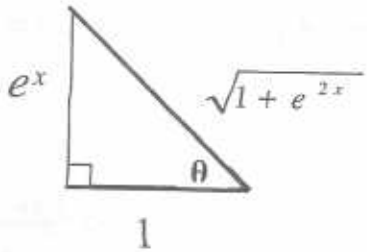
$$(27)\int e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

(A) نفرض أن $e^x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta=e^x$

$\theta=\tan^{-1}(e^x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـ θ

$$dx=\frac{1}{e^x}\sec^2\theta\,d\theta$$

(D) نعوض بالفرضية $e^x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{1}{e^x}\sec^2\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$=\int\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}\ \frac{1}{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\int\sec\theta\ \sec^2\theta\, d\theta=\int\sec^3\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{2}e^x\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+e^{2x}}+e^x\right|+c$$

$$(28)\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{(\tan^2 x+9)^3}}dx$$

التكامل بالتعويض :-

(1) نفرض أن $u=\tan x$

(2) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\sec^2 x dx$

(3) نعوض بـــ $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{du}{(u^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

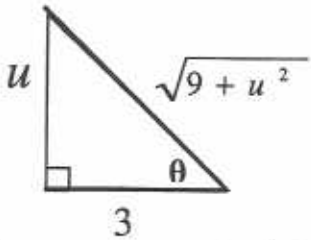
التكامل بالتعويضات المثلثية :-

(A) نفرض أن $u=3\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta = \frac{u}{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{u}{3})$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $du = 3\sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $u = 3\tan\theta$ وتفاضلها $du = 3\sec^2\theta\, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(9+9\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(9)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\sin\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة u

$$= \frac{1}{9}\frac{u}{\sqrt{9+u^2}} + c$$

(5) نعوض بـــ $u = \tan x$

$$= \frac{1}{9}\frac{\tan x}{\sqrt{9+\tan^2 x}} + c$$

$$(29)\int \cos x\sqrt{4-\sin^2 x}\,dx$$

التكامل بالتعويض :-

(1) نفرض أن $u=\sin x$

(2) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $du=\cos x\,dx$

(3) نعوض بـــ $u=\sin x$ $du=\cos x\,dx$, في مسألة التكامل

$$=\int\sqrt{4-u^2}\,du$$

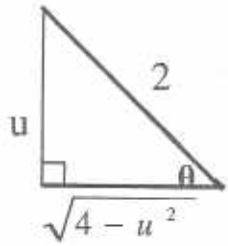
التكامل بالتعويضات المثلثية :-

(A) نفرض أن $u=2\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=\frac{u}{2}$$

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$$



(C) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $du=2\cos\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $u=2\sin\theta$ وتفاضلها $du=2\cos\theta\,d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\;2\cos\theta\,d\theta=2\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\;2\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int\sqrt{\cos^2\theta}\ 2\cos\theta\, d\theta=4\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=4\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta=\int(2+2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$=2\theta+\sin 2\theta+c=2\theta+2\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة u

$$=2\sin^{-1}(\frac{u}{2})+2\frac{u}{2}\frac{\sqrt{4-u^2}}{2}+c$$

$$=2\sin^{-1}(\frac{u}{2})+\frac{u\sqrt{4-u^2}}{2}+c$$

(5) نعوض بـــ $u=2\sin x$

$$=2\sin^{-1}(\frac{2\sin x}{2})+\frac{\sin x\sqrt{4-4\sin^2 x}}{2}+c$$

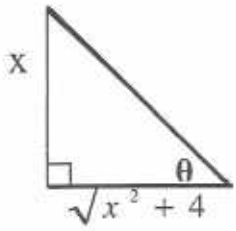
$$(30)\int\frac{3x+2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx$$

(A) نفرض أن $x=2\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{x}{2}$$

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{x}{2})$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x = 2\tan\theta$ وتفاضلها $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int \frac{6\tan\theta + 2}{(4\tan^2\theta + 4)^{\frac{3}{2}}}\, 2\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{2\sec^2\theta\,(6\tan\theta + 2)}{\sec^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{6\tan\theta + 2}{\sec\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{6}{4}\int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\, d\theta + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sec\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{-3}{\sqrt{4 + x^2}} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} + c$$

$$(31)\int (x-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$\int[-(x^2-x)]^{\frac{3}{2}}\,dx=\int[-(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})]^{\frac{3}{2}}\,dx$$

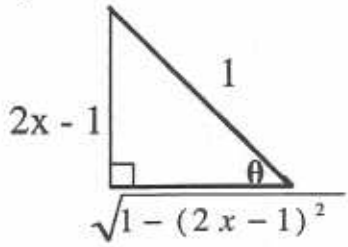
$$=\int[-(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})]^{\frac{3}{2}}\,dx=\int[\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}\,dx$$

(A) نفرض أن $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta, x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=2x-1$$

$$\theta=\sin^{-1}(2x-1)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ x $\quad dx=\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{16}\int(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{16}\int(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{16}\int\cos^4\theta\;\;d\theta=\frac{1}{16}\int(\cos^2\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{64}\int(1+\cos2\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{64}\int(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{64}\int d\theta+\frac{1}{64}\int 2\cos2\theta\,d\theta+\frac{1}{64}\int\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{64}\int d\theta+\frac{1}{64}\int 2\cos2\theta\,d\theta+\frac{1}{64}\frac{1}{2}\int(1+\cos4\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{64}\int d\theta+\frac{1}{64}\int 2\cos2\theta\,d\theta+\int\frac{1}{128}d\theta+\frac{1}{128}\int\cos4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{128}\int d\theta+\frac{1}{64}\int 2\cos2\theta\,d\theta+\frac{1}{512}\int 4\cos4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{128}\theta+\frac{1}{64}\sin2\theta+\frac{1}{512}\sin4\theta+c$$

$$=\frac{3}{128}\theta+\frac{2}{64}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{512}\sin4\theta+c$$

$$=\frac{3}{128}\theta+\frac{1}{32}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{512}\sin4\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{3}{128}\sin^{-1}(2x+1)+\frac{1}{32}(2x+1)\sqrt{1-(2x-1)^2}+\frac{1}{512}\sin[4\sin^{-1}(2x+1)]+c$$

$$(32)\int \frac{x+4}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$\int \frac{x+4}{[-(x^2-6x)]^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{x+4}{[-(x^2-6x+9-9)]^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

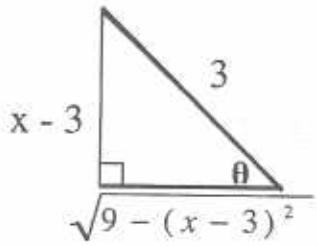
$$= \int \frac{x+4}{[-((x-3)^2-9)]^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{x+4}{[9-(x-3)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

(A) نفرض أن $x-3=3\sin\theta$, $x=3\sin\theta+3$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x-3}{3}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x-3=3\sin\theta$ وتفاضلها $dx = 3\cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int \frac{3\sin\theta+3+4}{(9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} 3\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{(9)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{3\sin\theta+7}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{3\sin\theta+7}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{3\sin\theta+7}{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{9} \int \frac{3\sin\theta+7}{\cos^3\theta} \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{3\sin\theta+7}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\frac{1}{9} \int \frac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta + \frac{1}{9} \int \frac{7}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta + \frac{7}{9} \int \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{3} \int \tan\theta \sec\theta\, d\theta + \frac{7}{9} \int \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\sec\theta + \frac{7}{9}\tan\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{9-(x-3)^2}} + \frac{7}{9} \frac{x-3}{\sqrt{9-(x-3)^2}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}} + \frac{7x-21}{9\sqrt{9-(x-3)^2}} + c$$

$$(33)\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$$

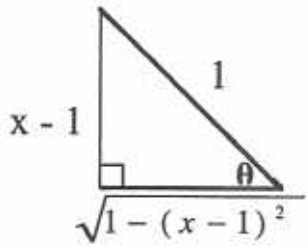
$$\int\sqrt{-(x^2-2x)}\,dx=\int\sqrt{-(x^2-2x+1-1)}\,dx$$

$$=\int\sqrt{-[(x-1)^2-1]}\,dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $x\text{-}1=\sin\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta=x-1$$
$$\theta=\sin^{-1}(x-1)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx=\cos\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x-1=\sin\theta$ وتفاضلها $dx=\cos\theta\,d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int\cos\theta\,\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos2\theta)\,d\theta$$
$$=\int\frac{1}{2}d\theta+\frac{1}{2}\int\cos2\theta\,d\theta$$
$$=\int\frac{1}{2}d\theta+\frac{1}{4}\int2\cos2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta+c$$
$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{2}{4}\sin\theta\cos\theta+c$$
$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+c$$

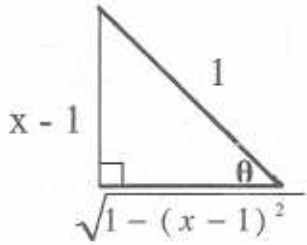
$$(34)\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$$
$$\int x\sqrt{-(x^2-2x)}\,dx=\int x\sqrt{-(x^2-2x+1-1)}\,dx$$
$$=\int x\sqrt{-[(x-1)^2-1]}\,dx=\int x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

(A) نفرض أن $x-1=\sin\theta$, $x=\sin\theta+1$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\sin\theta = x-1$

$\theta = \sin^{-1}(x-1)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx = \cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x-1=\sin\theta$ وتفاضلها $dx = \cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int(\sin\theta+1)\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int(\sin\theta+1)\cos^2\theta\, d\theta=\int(\sin\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$=\int(\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta+\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$=-\int-\sin\theta\,(\cos\theta)^2\, d\theta+\int\frac{1}{2}d\theta+\frac{1}{4}\int 2\cos 2\theta\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+c$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{2}{4}\sin\theta\cos\theta+c$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=-\frac{1}{3}[\sqrt{1-(x-1)^2}\,]^3+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+c$$

$$(35)\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{-(x^2-4x)}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{-(x^2-4x+4-4)}}\,dx$$

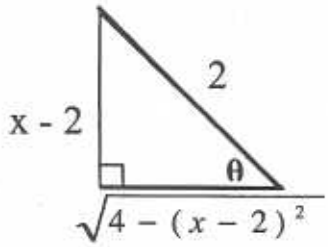
$$= \int \frac{x}{\sqrt{-[(x-2)^2-4]}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx$$

(A) نفرض أن $x-2=2\sin\theta$, $x=2\sin\theta+2$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sin\theta = \frac{x-2}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x-2=\sin\theta$ وتفاضلها $dx = 2\cos\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int \frac{(2\sin\theta+2)}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\ 2\cos\theta\, d\theta = \int \frac{(2\sin\theta+2)}{\cos\theta}\ \cos\theta\, d\theta$$

$$\int (2\sin\theta+2)\, d\theta = -2\cos\theta+2\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= -\sqrt{4-(x-2)^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

$$(36)\int \frac{3x-1}{[x^2+x+1]^2}dx$$

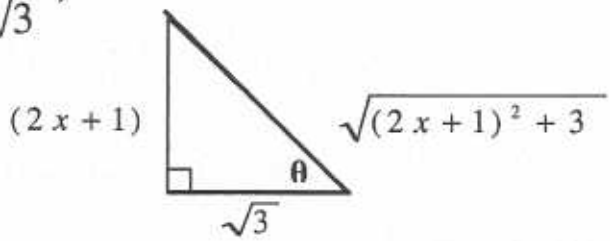
$$\int \frac{3x-1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1\right)^2}dx = \int \frac{3x-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

(A) نفرض أن $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ ، $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{1}{2}$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$\int\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{3}{2}-1}{[\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}]^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{16}{9}\int\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{5}{2}}{[\tan^2\theta+1]^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{16}{9}\int\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{5}{2}}{(\sec\theta)^4}\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{5}{2}}{(\sec\theta)^2}\, d\theta$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{3\sqrt{3}}{2}\int\frac{\tan\theta}{(\sec\theta)^2}\, d\theta-\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{5}{2}\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=4\int\tan\theta\cos^2\theta\, d\theta-\frac{20\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\, d\theta$$

$$=4\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\, d\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\int d\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\int\cos2\theta\, d\theta$$

$$=4\int\sin\theta\cos\theta\, d\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\int d\theta-\frac{5\sqrt{3}}{9}\int2\cos2\theta\, d\theta$$

$$=2\sin^2\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\theta-\frac{5\sqrt{3}}{9}\sin2\theta+c$$

$$=2\sin^2\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\theta-\frac{10\sqrt{3}}{9}\sin\theta\cos\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}\right)^2-\frac{10\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{10\sqrt{3}}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}+c$$

$$=\frac{2(2x+1)^2}{(2x+1)^2+3}-\frac{10\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{60x+30}{9(2x+1)^2+27}+c$$

$$(37)\int(x-2)\sqrt{9x^2+12x+8}\,dx$$

$$\int(x-2)\sqrt{9[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}]}\,dx$$

$$=3\int(x-2)\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}}\,dx$$

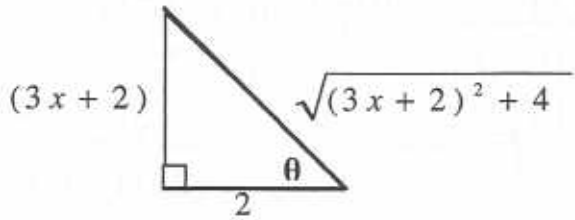
$$=3\int(x-2)\sqrt{(x+\frac{2}{3})^2+\frac{4}{9}}\,dx$$

(A) نفرض أن $x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\tan\theta$ ، $x=\frac{2}{3}\tan\theta-\frac{2}{3}$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\tan\theta=\frac{3x+2}{2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3x+2}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$

في مسألة التكامل

$$=3\int[\frac{2}{3}\tan\theta-\frac{2}{3}-2]\sqrt{\frac{4}{9}\tan^2\theta+\frac{4}{9}}\ \frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int[\frac{2}{3}\tan\theta-\frac{8}{3}]\sqrt{\tan^2\theta+1}\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int[\frac{2}{3}\tan\theta-\frac{8}{3}]\ \sec\theta\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int[\frac{2}{3}\tan\theta-\frac{8}{3}]\ \sec^3\theta\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{2}{3}\tan\theta\ \sec^3\theta\ d\theta-\frac{48}{33}\int\sec^3\theta\ d\theta$$

$$=\frac{8}{9}\int\tan\theta\ \sec^3\theta\ d\theta-\frac{32}{9}\int\sec^3\theta\ d\theta$$

$$=\frac{8}{9}\int \tan\theta \sec\theta \sec^2\theta \, d\theta-\frac{32}{9}\int \sec^3\theta \, d\theta$$

$$=\frac{8}{27}\sec^3\theta-\frac{16}{9}\tan\theta \sec\theta-\frac{16}{9}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{\sqrt{(3x+2)^2+4}}{2}\right)^3-\frac{16}{9}\left(\frac{3x+2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{(3x+2)^2+4}}{2}\right)$$

$$-\frac{16}{9}\ln\left|\frac{3x+2}{2}+\frac{\sqrt{(3x+2)^2+4}}{2}\right|+c$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{\sqrt{(3x+2)^2+4}}{2}\right)^3-\left(\frac{12x+8}{9}\right)\left(\sqrt{(3x+2)^2+4}\right)$$

$$-\frac{16}{9}\ln\left|\frac{3x+2}{2}+\frac{\sqrt{(3x+2)^2+4}}{2}\right|+c$$

$$(38)\int\frac{x+1}{[x^2+2x-3]^{\frac{2}{3}}}dx$$

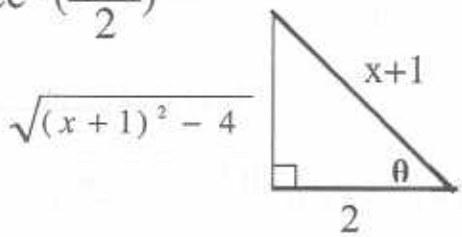
$$\int\frac{x+1}{(x^2+x+1-1-3)^{\frac{2}{3}}}dx=\int\frac{x+1}{[(x+1)^2-4]^{\frac{2}{3}}}dx$$

(A) نفرض أن $x+1=2\sec\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$$\sec\theta=\frac{x+1}{2}$$

$$\theta=\sec^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\qquad dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x+1=2\sec\theta$ وتفاضلها $dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$
في مسألة التكامل

$$\int\frac{2\sec\theta}{[4\sec^2\theta-4]^{\frac{2}{3}}}2\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{(4)^{\frac{2}{3}}}\int\frac{\sec\theta}{[\sec^2\theta-1]^{\frac{2}{3}}}\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\int\frac{\sec^2\theta}{[\tan\theta]^{\frac{4}{3}}}\tan\theta d\theta=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\int\sec^2\theta\tan^{-\frac{1}{3}}\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\frac{3}{2}\tan^{\frac{2}{3}}\theta+c=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\tan^{\frac{2}{3}}\theta+c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{\sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$(39) \int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

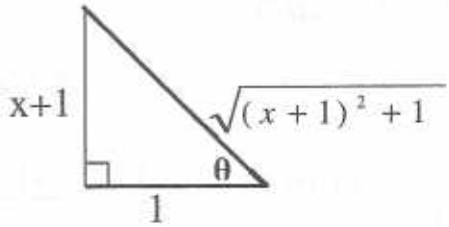
$$\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 1 - 1 + 2)^2} dx = \int \frac{x}{[(x+1)^2 + 1]^2} dx$$

(A) نفرض أن $x+1 = \tan\theta$, $x = \tan\theta - 1$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta = x+1$

$\theta = \tan^{-1}(x+1)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx = \sec^2\theta \, d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x = \tan\theta$ وتفاضلها $dx = \sec^2\theta \, d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{\tan\theta - 1}{(\tan^2\theta+1)^2} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta \, (\tan\theta - 1)}{\sec^4\theta} d\theta = \int \frac{\tan\theta - 1}{\sec^2\theta} d\theta$$

$$= \int (\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 1) \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int (\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \int \sin\theta\cos\theta \, d\theta - \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \int \sin\theta\cos\theta \, d\theta - \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{4}\int 2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + c$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1) + \frac{1}{2}\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + c$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2(x+1)^2+2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1) + \frac{x+1}{2(x+1)^2+2} + c$$

طـريـقـة تـكـامـل الـدوال الـقـيـاسـيـة

أولاً إذا كانت درجة المقام أكبر من درجة البسط (الكسور الجزئية):-

عند تجزئة أي كسر إلى كسور جزئية نتبع الآتي :-

(1) نحلل المقام بأحد طرق التحليل إن أمكن والمقادير التي لا تحلل هي :

(A) مجموع مربعين x^2+a^2 لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية نحو:-

$$Ex: \quad x^2+4 \ , \quad x^2+25 \ , \quad x^2+1$$

(B) المقدار الثلاثي ax^2+bx+c الذي مميزه أصغر من الصفر $b^2-4ac<0$ لا يمكن تحليله في نطاق الأعداد الحقيقية نحو:

$$EX: \quad x^2+x+2 \Rightarrow a=1, b=1, c=2$$

$$(1)^2-4(1)(2)=1-8=-7<0$$

(2) نقوم بتجزئة الكسر إلى كسور جزئية على النحو التالي :-

(A) إذا كان المقام عبارة عن عوامل خطية مختلفة ففي هذه الحالة نجزئ هذا المقام كما يلي :

$$\int \frac{F(x)}{(ax+b)(cx+d)\ldots\ldots\ldots\ldots} dx = \int \frac{A}{ax+b} dx + \int \frac{B}{cx+d} dx + \ldots\ldots$$

$Ex:-$

$$\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{A}{x+2}\,dx + \int \frac{B}{x+3}\,dx$$

(B) إذا كان المقام عبارة عن عوامل خطية مكررة(متساوية) ففي هذه الحالة نجزئ هذا المقام كما يلي :

$$\int \frac{F(x)}{(ax+b)^n}\,dx = \int \frac{A}{ax+b}\,dx + \int \frac{B}{(ax+b)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{H}{(ax+b)^n}\,dx$$

$EX:-$

$$\int \frac{x-2}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{A}{x+2}\,dx + \int \frac{B}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{C}{(x+2)^3}\,dx$$

(C) إذا كان المقام عبارة عن عوامل غير خطية مختلفة ففي هذه الحالة نجزئ هذا المقام كما يلي :

$$\int \frac{F(x)}{(ax^2+b)(cx^2+dx+h)\ldots}\,dx = \int \frac{Ax+B}{ax^2+b}\,dx + \int \frac{Cx+D}{cx^2+dx+h}\,dx + \ldots$$

$Ex:-$

$$\int \frac{3x-2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}\,dx$$

(D) إذا كان المقام عبارة عن عوامل غير خطية مكررة (متساوية) ففي هذه الحالة نجزئ هذا المقام كما يلي :

$$\int \frac{F(x)}{(ax^2+b)^n \ldots} dx = \int \frac{Ax+B}{ax^2+b} dx + \int \frac{Cx+D}{(ax^2+b)^2} dx + \ldots + \int \frac{Kx+H}{(ax^2+b)^n} dx$$

$Ex:-$

$$\int \frac{3x-2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+1} dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} dx$$

(E) إذا كان المقام عبارة عن خليط من العوامل الخطية والغير خطية المختلفة والمكررة ففي هذه الحالة نعامل كل عامل بطريقة تجزيئته الخاصة به التي أوضحناها سابقاً.

$Ex:-$

$$\int \frac{3x-2}{(x+2)(x^2+1)x^2} dx = \int \frac{A}{x+2} dx + \int \frac{Bx+c}{x^2+1} dx + \int \frac{D}{x} dx + \int \frac{K}{x^2} dx$$

(3) نقوم بتوحيد مقامات الطرف الأيمن على أن يكون المقام المشترك لهذه المقامات هو مقام الطرف الأيسر لأنه يقبل القسمة على كل المقامات

(4) نساوي بسط الطرف الأيسر ببسط الطرف الأيمن لإيجاد المجاهيل **A , B ، C .....**

فإذا كانت

$$x+2 = A(x+1) + B(x-2)$$

فيوجد ثلاثة طرق لإيجاد هذه المجاهيل :-

الطريقة الأولى :- نفرض قيم لـــ x تجعل بعض حدود الطرف الأيمن تساوي صفراً وذلك في كل فرضية لـــ x

$Ex :-$

$x+2 = A(x+1) + B(x-2)$

$-1+2 = A(-1+1) + B(-1-2) \quad , x=-1$

$\therefore B = -\frac{1}{3}$

$2+2 = A(2+1) + B(2-2) \quad , x=2$

$\therefore A = \frac{4}{3}$

الطريقة الثانية :- نفرض قيم عشوائية لـــ x ونكوّن معادلات لإيجاد المجاهيل وذلك بحل هذه المعادلات بطريقة الحذف او التعويض

$Ex :-$

$x+2 = A(x+1) + B(x-2)$

$0+2 = A(0+1) + B(0-2) \quad , x=0$

$A - 2B = 2 \longrightarrow (1)$

$1+2 = A(1+1) + B(1-2) \quad , x=1$

$2A - B = 3 \longrightarrow (2)$

نستخدم طريقة الحذف لحل المعادلتين وذلك بضرب المعادلة (1) في العدد 2 ثم طرح المعادلتين

$$\begin{array}{ll} 2A - 4B = 4 & (1) \\ \underline{2A - B = 3} & (2) \\ -3B = 1 & \therefore B = -\frac{1}{3} \end{array}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على $\therefore A = \frac{4}{3}$

الطريقة الثالثة :- وذلك بأن نساوي معاملات المتغيرات في الطرفين

$Ex :-$

$x + 2 = A(x+1) + B(x-2)$

بمساواة معاملات x في الطرفين $A + B = 1 \longrightarrow (1)$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين $A - 2B = 2 \longrightarrow (2)$

نستخدم طريقة الحذف لحل المعادلتين وذلك بطرح المعادلتين

$$\begin{array}{ll} A + B = 1 & \longrightarrow (1) \\ A - 2B = 2 & \longrightarrow (2) \\ \hline 3B = -1 & \therefore B = -\frac{1}{3} \end{array}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على $\therefore A = \frac{4}{3}$

(5) نعوض بالقيم التي تحصلنا عليها في الكسور المجزئة ونكامل هذه الكسور كل كسر على حدة بقوانين أو بطرق التكامل المناسبة

مسائل على الكسور الجزئية

$$(1)\int \frac{5x-12}{x^2+4x}\,dx$$

$$(A)\int \frac{5x-12}{x(x+4)}\,dx$$

$$(B)\int \frac{5x-12}{x(x+4)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+4}\,dx$$

$$(C)\ \frac{5x-12}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$$

$$(D)\ \frac{5x-12}{x(x+4)} = \frac{A(x+4)+Bx}{x(x+4)}$$

$$(E)\ 5x-12 = A(x+4)+Bx$$

$$(F)\ 5(0)-12 = A(0+4)+B(0) \qquad , x=0$$

$$\therefore A=-3$$

$$5(-4)-12 = A(-4+4)+B(-4) \qquad , x=-4$$

$$\therefore B=8$$

$$(g)\int \frac{5x-12}{x(x+4)}\,dx = -\int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{8}{x+4}\,dx$$

$$\int \frac{5x-12}{x(x+4)}\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx + 8\int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= -3\ln|x| + 8\ln|x+4| + c$$

$$(2)\int\frac{x+34}{x^2-4x-12}\,dx$$

$$(A)\int\frac{x+34}{(x-6)(x+2)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{x+34}{(x-6)(x+2)}\,dx=\int\frac{A}{x-6}\,dx+\int\frac{B}{x+2}\,dx$$

$$(C)\ \frac{x+34}{(x-6)(x+2)}=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+2}$$

$$(D)\ \frac{x+34}{(x-6)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-6)}{(x-6)(x+2)}$$

$$(E)\ x+34=A(x+2)+B(x-6)$$

$$(F)-2+34=A(-2+2)+B(-2-6)\qquad ,\ x=-2$$

$$\therefore B=-4$$

$$6+34=A(6+2)+B(6-6)\qquad ,\ x=6$$

$$\therefore A=5$$

$$(g)\int\frac{x+34}{(x-6)(x+2)}\,dx=\int\frac{5}{x-6}\,dx-\int\frac{4}{x+2}\,dx$$

$$\int\frac{x+34}{(x-6)(x+2)}\,dx=5\int\frac{1}{x-6}\,dx-4\int\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$=5\ln|x-6|-4\ln|x+2|+c$$

(3) $\int \frac{2x-4}{x^2-x}\,dx$

(A) $\int \frac{2x-4}{x(x-1)}\,dx$

(B) $\int \frac{2x-4}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx$

(C) $\frac{2x-4}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$

(D) $\frac{2x-4}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$

(E) $2x-4 = A(x-1)+Bx$

(F) $2(0)-4 = A(0-1)+B(0) \quad , x=0$

$\therefore A = 4$

$2(1)-4 = A(1-1)+B(1) \quad , x=1$

$\therefore B = -2$

(g) $\int \frac{2x-4}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx - \int \frac{2}{x-1}\,dx$

$$\int \frac{2x-4}{x(x-1)}\,dx = 4\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= 4\ln|x| - 2\ln|x-1| + c$$

$$(4)\int\frac{x+10}{2x^2+5x-3}\,dx$$

$$(A)\int\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}\,dx=\int\frac{A}{2x-1}\,dx+\int\frac{B}{x+3}\,dx$$

$$(C)\ \frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+3}$$

$$(D)\ \frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}$$

$$(E)\ x+10=A(x+3)+B(2x-1)$$

$$(F)\ \tfrac{1}{2}+10=A(\tfrac{1}{2}+3)+B(2(\tfrac{1}{2})-1)\qquad ,\ x=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore A=3$$

$$-3+10=A(-3+3)+B(2(-3)-1)\qquad ,\ x=-3$$

$$\therefore B=-1$$

$$(g)\int\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}\,dx=\int\frac{3}{2x-1}\,dx-\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$\int\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-1}\,dx-\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|2x-1|-\ln|x+3|+c$$

$$(5)\int\frac{x^2-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

$$(A)\int\frac{x^2-2}{x(x^2-x-2)}\,dx=\int\frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=\int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x-2}dx+\int\frac{c}{x+1}dx$$

$$(C)\ \frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{c}{x+1}$$

$$(D)\ \frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x+1)(x-2)+B(x+1)x+c(x-2)x}{x(x-2)(x+1)}$$

$$(E)\ x^2-2=A(x-2)(x+1)+B(x+1)x+c(x-2)x$$

$$(F)\ 1-2=A(-1-2)(-1+1)+B(-1+1)(-1)+c(-1-2)(-1)\ ,\ x=-1$$

$$\therefore C=-\frac{1}{3}$$

$$4-2=A(2-2)(2+1)+B(2+1)(2)+c(2-2)(2)\ ,\ x=2$$

$$\therefore B=\frac{1}{3}$$

$$0-2=A(0-2)(0+1)+B(0+1)(0)+c(0-2)(0)\ ,\ x=0$$

$$\therefore A=1$$

$$(g)\int\frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$\int\frac{x^2-2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+c$$

(6) $\int \frac{4x^3-7x}{x^4-5x^2+4}\,dx$

(A) $\int \frac{4x^3-7x}{(x^2-4)(x^2-1)}\,dx = \int \frac{4x^3-7x}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}\,dx$

(B) $\int \frac{4x^3-7x}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}\,dx$

$$= \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx + \int \frac{C}{x+1}\,dx + \int \frac{D}{x-1}\,dx$$

(C) $\frac{4x^3-7x}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$

(D) $\frac{4x^3-7x}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)} =$

$$\frac{A(x+1)(x+2)(x-1)+B(x+1)(x-2)(x-1)+c(x-2)(x+2)(x-1)+D(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}$$

(E) $4x^3-7x =$

$A(x+1)(x+2)(x-1)+B(x+1)(x-2)(x-1)+c(x-2)(x+2)(x-1)+D(x-2)(x+2)(x+1)$

$$(F)\ 4-7 = D(1-2)(1+2)(1+1) \quad , x=1$$

$$\therefore D = \frac{1}{2}$$

$$-4+7 = C(-1-2)(-1+2)(-1-1) \quad , x=-1$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

$$32-14 = A(2+1)(2+2)(2-1) \quad , x=2$$

$$\therefore A = \frac{3}{2}$$

$$-32+14 = B(-2+1)(-2-2)(-2-1) \quad , x=-2$$

$$\therefore B = \frac{3}{2}$$

$$(g) \int \frac{4x^3-7x}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

(7) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}\,dx$

(A) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x(x^2-4)}\,dx = \int \frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx$

(B) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{c}{x+2}dx$

(C) $\frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{c}{x+2}$

(D) $\frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)(x-2)+B(x+2)x+c(x-2)x}{x(x-2)(x+2)}$

(E) $5x^2-10x-8 = A(x+2)(x-2)+B(x+2)x+c(x-2)x$

(F) $-8 = A(0-2)(0+2)$, $x=0$

$\therefore A=2$

$-8 = B(2+2)(2)$, $x=2$

$\therefore B=-1$

$32 = c(-2-2)(-2)$, $x=-2$

$\therefore C=4$

(g) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-2}dx + 4\int \frac{1}{x+2}dx$

$\int \frac{5x^2-10x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx = 2\ln|x| - \ln|x-2| + 4\ln|x+2| + c$

$(8)\int\frac{x^2+x}{(x^2-4)(x+4)}dx$

$(A)\int\frac{x^2+x}{(x-2)(x+2)(x+4)}dx$

$(B)\int\frac{x^2+x}{(x-2)(x+2)(x+4)}dx=\int\frac{A}{x-2}dx+\int\frac{B}{x+2}dx+\int\frac{c}{x+4}dx$

$(C)\frac{x^2+x}{(x-2)(x+2)(x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{c}{x+4}$

$(D)\frac{x^2+x}{(x-2)(x+2)(x+4)}=\frac{A(x+2)(x+4)+B(x-2)(x+4)+c(x-2)(x+2)}{(x+4)(x-2)(x+2)}$

$(E)\,x^2+x=A(x+2)(x+4)+B(x-2)(x+4)+c(x-2)(x+2)$

$(F)\,6=A(2+2)(2+4)\quad,x=2$

$\therefore A=\frac{1}{4}$

$2=B(-2-2)(-2+4)\quad,x=-2$

$\therefore B=-\frac{1}{4}$

$12=c(-4-2)(-4+2)\qquad,x=-4$

$\therefore C=1$

$(g)\int\frac{x^2+x}{(x-2)(x+2)(x+4)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{1}{x+4}dx$

$\int\frac{x^2+x}{(x-2)(x-2)(x+4)}dx=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+\ln|x+4|+c$

(9) $\int \frac{2x-3}{(x^2-x-2)(x+2)}\,dx$

(A) $\int \frac{2x-3}{(x-2)(x+1)(x+2)}\,dx$

(B) $\int \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)(x+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx + \int \frac{c}{x+1}\,dx$

(C) $\frac{2x-3}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{c}{x+1}$

(D) $\frac{2x-3}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{A(x+2)(x+1)+B(x-2)(x+1)+c(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}$

(E) $2x-3 = A(x+2)(x+1)+B(x-2)(x+1)+c(x-2)(x+2)$

(F) $-5 = C(-1-2)(-1+2) \quad , x=-1$

$\therefore C = \frac{5}{3}$

$-7 = B(-2-2)(-2+1) \quad , x=-2$

$\therefore B = -\frac{7}{4}$

$1 = A(2+2)(2+1) \quad , x=2$

$\therefore A = \frac{1}{12}$

(g) $\int \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)(x+1)}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$

$\int \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)(x+1)}\,dx = \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + c$

(10) $\int \frac{2x^2-5x-1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

(A) $\int \frac{2x^2-5x-1}{x^2(x-2)-(x-2)}\,dx = \int \frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x^2-1)}\,dx$

$= \int \frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)}\,dx$

(B) $\int \frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{c}{x+1}\,dx$

(C) $\frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

(D) $\frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1)+B(x-2)(x+1)+c(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}$

(E) $2x^2-5x-1 = A(x-1)(x+1)+B(x-2)(x+1)+c(x-2)(x-1)$

(F) $6 = C(-1-2)(-1-1)$, $x=-1$

$\therefore C=1$

$-3 = A(2-1)(2+1)$, $x=2$

$\therefore A=-1$

$-4 = B(1-2)(1+1)$, $x=1$

$\therefore B=2$

(g) $\int \frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$\int \frac{2x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)}\,dx = -\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + c$

$$(11)\int\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$(A)\int\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$(B)\int\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx = \int\frac{A}{x-1}\,dx + \int\frac{B}{(x-1)^2}\,dx$$

$$(C)\ \frac{2x-4}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$(D)\ \frac{2x-4}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$(E)\ 2x-4 = A(x-1)+B$$

$$(F)\ 2-4 = B \therefore B = -2 \qquad ,x=1$$

بمساواة معاملات x في الطرفين لإيجاد A $\qquad \therefore A = 2$

$$(g)\int\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx = \int\frac{2}{x-1}\,dx - \int\frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx = 2\int\frac{1}{x-1}\,dx - 2\int(x-1)^{-2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + c$$

$$(12)\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$$

$$(A)\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$$

$$(B)\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{A}{x+2}\,dx + \int \frac{B}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{C}{(x+2)^3}\,dx$$

$$(C)\ \frac{x^2}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$(D)\ \frac{x^2}{(x+2)^3} = \frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3}$$

$$(E)\ x^2 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

$$(F)\ \therefore C = 4 \quad , x = -2$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين لإيجاد A $\quad \therefore A = 1$

بمساواة معاملات x في الطرفين لإيجاد B $\quad 0 = 4A + B \therefore B = -4$

$$(g)\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{4}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{4}{(x+2)^3}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - 4\int (x+2)^{-2}\,dx + 4\int (x+2)^{-3}\,dx$$

$$= \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + c$$

$$(13)\int\frac{2x+2}{(x+1)^3}\,dx$$

$$(A)\int\frac{2x+2}{(x+1)^3}\,dx$$

$$(B)\int\frac{2x+2}{(x+1)^3}\,dx=\int\frac{A}{x+1}\,dx+\int\frac{B}{(x+1)^2}\,dx+\int\frac{C}{(x+1)^3}\,dx$$

$$(C)\ \frac{2x+2}{(x+1)^3}\,dx=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

$$(D)\ \frac{2x+2}{(x+1)^3}\,dx=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}$$

$$(E)\ 2x+2=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

$$(F)\ \therefore C=0\quad ,\ x=-1$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين لإيجاد A

$$\therefore A=0$$

بمساواة معاملات x في الطرفين لإيجاد B

$$2=2A+B\quad \therefore B=2$$

$$(g)\int\frac{2x+2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int\frac{2x+2}{(x+1)^3}dx=2\int(x+1)^{-2}\,dx=-\frac{2}{x+1}+c$$

$(14)\int \frac{x-2}{4x^2+4x+1}\,dx$

$(A)\int \frac{x-2}{(2x+1)^2}\,dx$

$(B)\int \frac{x-2}{(2x+1)^2}\,dx = \int \frac{A}{2x+1}\,dx + \int \frac{B}{(2x+1)^2}\,dx$

$(C)\ \frac{x-2}{(2x+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}$

$(D)\ \frac{x-2}{(2x+1)^2} = \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}$

$(E)\ x-2 = A(2x+1)+B$

(F)

بمساواة معاملات x في الطرفين لإيجاد A

$1 = 2A \qquad \therefore A = \frac{1}{2}$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين لإيجاد B

$-2 = A + B \quad \therefore B = -\frac{5}{2}$

$(g)\int \frac{x-2}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

$$\int \frac{x-2}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{2x+1}\,dx - \frac{5}{4}\int 2(2x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x+1| + \frac{5}{8x+4} + c$$

(15) $\int \frac{2x^2+3}{x^4-2x^2+1}\,dx$

(A) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2-1)(x^2-1)}\,dx = \int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x+1)(x-1)}\,dx$

$= \int \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

(B) $\int \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

$= \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{C}{x+1}\,dx + \int \frac{D}{(x+1)^2}\,dx$

(C) $\frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$

(D) $\frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$

(E) $2x^2+3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + c(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$

$$(F)\ 5 = B(1+1)^2 \quad , \ x = 1$$

$$\therefore B = \frac{5}{4}$$

$$5 = D(-1-1)^2 \quad , \ x = -1$$

$$\therefore D = \frac{5}{4}$$

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$0 = A + C \longrightarrow (1)$$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$$3 = -A + \frac{5}{4} + C + \frac{5}{4} \ , \ x = 0$$

$$-A + C = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

وبجمع (1) مع (2)نحصل على $\therefore C = \frac{1}{4}$ وبالتعويض في (1) $\therefore A = -\frac{1}{4}$

$$(g) \int \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{4}\int (x-1)^{-2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{5}{4}\int (x+1)^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4x-4} + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4x+4} + c$$

$$(16)\int\frac{dx}{x^4+4x^2+3}$$

$$(A)\int\frac{1}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{1}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+3}\,dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$

$$(C)\ \frac{1}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(D)\ \frac{1}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)}{(x^2+3)(x^2+1)}$$

$$(E)\ 1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$A+C=0\longrightarrow(1)$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$B+D=0\longrightarrow(2)$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$A+3C=0\longrightarrow(3)$$

بمساواة معاملات الحدود المطلقة في الطرفين

$$B+3D=1\longrightarrow(4)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على $\therefore C=0$ وبالتعويض في (1) $\therefore A=0$

بطرح (2) من (4) نحصل على $\therefore D=\frac{1}{2}$ وبالتعويض في (2) $\therefore B=-\frac{1}{2}$

$$(g)\int\frac{1}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+3}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2}\tan^{-1}(x)+c$$

$$(17)\int\frac{dx}{x^4+5x^2+4}$$

$$(A)\int\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+4}\,dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$

$$(C)\ \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(D)\ \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$(E)\ 1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$A+C=0 \longrightarrow (1)$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$B+D=0 \longrightarrow (2)$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$A+4C=0 \longrightarrow (3)$$

بمساواة معاملات الحدود المطلقة في الطرفين

$$B+4D=1 \longrightarrow (4)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على $\therefore C=0$ وبالتعويض في (1) $\therefore A=0$

بطرح (2) من (4) نحصل على $\therefore D=\frac{1}{3}$ وبالتعويض في (2) $\therefore B=-\frac{1}{3}$

$$(g)\int\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{12}\int\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+\frac{1}{3}\tan^{-1}(x)+c$$

$$(18)\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$$

$$(A)\int\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\,dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$

$$(C)\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(D)\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$$

$$(E)\ 1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$A+C=0\longrightarrow(1)$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$B+C+D=0\longrightarrow(2)$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$A+C+D=0\longrightarrow(3)$$

بمساواة معاملات الحدود المطلقة في الطرفين

$$B+D=1\longrightarrow(4)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على $\therefore D=0$

بطرح (2) من (4) نحصل على $\therefore C=-1$

وبالتعويض بالقيم التي تحصلنا عليها في (2) ، (3) $\therefore A=1\,,\,B=1$

$$(g)\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$$

$$(19)\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

$$(A)\int\frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+2}=\int\frac{dx}{x^2(x^2+2x+2)+(x^2+2x+2)}$$

$$=\int\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}dx$$

$$(B)\int\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}dx$$

$$(C)\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(D)\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$$

$$(E)\ 1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+2)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$A+C=0\longrightarrow(1)$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$B+2C+D=0\longrightarrow(2)$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$A+2C+2D=0\longrightarrow(3)$$

بمساواة معاملات الحدود المطلقة في الطرفين

$$B+2D=1\longrightarrow(4)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على $C+2D=0 \longrightarrow (5)$

بطرح (2) من (4) نحصل على $D-2C=1 \longrightarrow (6)$

وبضرب المعادلة (5) في العدد2 وجمع المعادلتين (5) ،(6) نحصل على

$$\therefore C=-\frac{2}{5}\,,\ D=\frac{1}{5}$$

وبالتعويض بالقيم التي تحصلنا عليها في (1) ، (4) نحصل على

$$\therefore A=\frac{2}{5}\,,\ B=\frac{3}{5}$$

$$(g)\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}=\int\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{\frac{-2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx-\frac{1}{5}\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx-\frac{1}{5}\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+2x+1-1+2}dx-\frac{1}{5}\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{1}{5}\tan^{-1}(x+1)-\frac{1}{5}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{5}\tan^{-1}(x)+c$$

$$(20)\int\frac{x^3+2x+2}{x^4+2x^2+1}dx$$

$$(A)\int\frac{x^3+2x+2}{(x^2+1)^2}dx$$

$$(B)\int\frac{x^3+2x+2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+1}dx+\int\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}dx$$

$$(C)\frac{x^3+2x+2}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$(D)\frac{x^3+2x+2}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$(E)\ x^3+2x+2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$\therefore A=1$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$\therefore B=0$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$A+C=2\ \ \therefore C=1$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$B+D=2\quad \therefore D=2$

$$(g)\int\frac{x^3+2x+2}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx+\int\frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c_1$$

$$I_2=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx=\frac{-1}{2x^2+2}+c_2$$

$$I_3=\int\frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

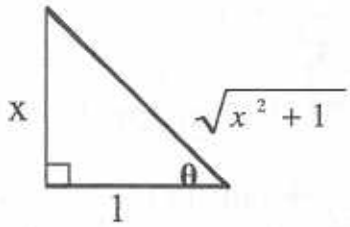
التعويضات المثلثية :-

(A) نفرض أن $x=\tan\theta$

(B) نعين قيمة النسبة المثلثية وقيمة θ من الفرضية السابقة

$\tan\theta=x$

$\theta=\tan^{-1}(x)$



(c) نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ $\quad dx=\sec^2\theta\,d\theta$

(D) نعوض بالفرضية $x=\tan\theta$ وتفاضلها $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{2}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\, d\theta = 2\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = 2\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \int d\theta + \frac{1}{2}\int 2\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + c_3$$

$$= \theta + \frac{1}{2}2\sin\theta\cos\theta + c_3$$

$$= \theta + \sin\theta\cos\theta + c_3$$

(E) نكتب المسألة بدلالة x

$$= \tan^{-1}(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c_3$$

$$= \tan^{-1}(x) + \frac{x}{1+x^2} + c_3$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c_1 - \frac{1}{2x^2+2} + c_2 + \tan^{-1}(x) + \frac{x}{1+x^2} + c_3$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{2x^2+2} + \tan^{-1}(x) + \frac{x}{1+x^2} + c \;, c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$(21)\int \frac{x^3+x}{x^4+4x^2+4}dx$$

$$(A)\int \frac{x^3+x}{(x^2+2)^2}dx$$

$$(B)\int \frac{x^3+x}{(x^2+2)^2}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+2}dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}dx$$

$$(C)\ \frac{x^3+x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

$$(D)\ \frac{x^3+x}{(x^2+2)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)}{(x^2+2)^2}$$

$$(E)\ x^3+x = (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)$$

(F)

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$\therefore A = 1$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$\therefore B = 0$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$2A + C = 1 \quad \therefore C = -1$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$2B + D = 0 \quad \therefore D = 0$

$$(g)\int\frac{x^3+x}{(x^2+2)^2}\,dx=\int\frac{x}{x^2+2}\,dx-\int\frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx-\frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)^{-2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{1}{2x^2+4}+c$$

$$(22)\int\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx$$

$$(A)\int\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx$$

$$(B)\int\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx$$

$$=\int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x-1}dx+\int\frac{C}{(x-1)^2}dx+\int\frac{D}{(x-1)^3}dx$$

$$(C)\ \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

$$(D)\ \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3}$$

$$(E)\ x^3-4x-1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$$

$$(F)\ -1 = A(0-1)^3 \quad , x=0$$
$$\therefore A = 1$$
$$1-4-1 = D \qquad , x=1$$
$$\therefore D = -4$$

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$1 = A + B \qquad \therefore B = 0$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$-4 = 3A + B - C + D$$
$$-4 = 3 + 0 - C - 4$$
$$\therefore C = 3$$

$$(g)\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx - \int \frac{4}{(x-1)^3}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + 3\int (x-1)^{-2}dx - 4\int (x-1)^{-3}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + c$$

$$(23)\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

$$(A)\int \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+1)}\,dx=\int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$(B)\int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}\,dx=\int \frac{A}{x}\,dx+\int \frac{B}{x+1}\,dx+\int \frac{c}{(x+1)^2}\,dx$$

$$(C)\ \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$(D)\ \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx}{x(x+1)^2}$$

$$(E)\ x^2+1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx$$

$$(F)\ 1=A(0+1)^3\ ,\ x=0$$

$$\therefore A=1$$

$$1+1=-C\ ,\ x=-1$$

$$\therefore C=-2$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$1=A+B \quad \therefore B=0$$

$$(g)\int\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{x}\,dx-2\int(x+1)^{-2}\,dx$$

$$=\ln|x|+\frac{2}{x+1}+c$$

$$(24)\int\frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$$

$$(A)\int\frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx=\int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x^2}\,dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$

$$(C)\,\frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(D)\,\frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$(E)3x^3-3x^2+2x-1=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2$$

$(F)\ -1 = B(0+1)\ \ ,\ x=0$

$\therefore B = -1$

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$3 = A + C \longrightarrow (1)$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$-3 = B + D \quad \therefore D = -2$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$\therefore A = 2$

وبالتعويض في (1) نحصل على $\therefore C = 1$

$$(g)\int \frac{3x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - 2\tan^{-1}(x) + c$$

(25) $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

(A) $\int \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx$

(B) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$

(C) $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

(D) $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

(E) $x^2 = A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$

(F) $1 = B(1+1)(-1-1)$, $x=-1$

$\therefore B = -\frac{1}{4}$

$1 = A(1+1)(1+1)$, $x=1$

$\therefore A = \frac{1}{4}$

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$0 = A + B + C \qquad \therefore C = 0$$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$$0 = A - B - D \qquad \therefore D = \frac{1}{2}$$

$$(g) \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + c$$

$$(26) \int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$(A) \int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$(B) \int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}\,dx$$

$$(C) \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$(D) \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$(E) \; x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$(F)\ -1 = A(1+1)\ \ ,\ x=-1$$

$$\therefore A = -\frac{1}{2}$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$0 = A + B \qquad \therefore B = \frac{1}{2}$$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$$1 = C + A \qquad \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$(g)\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + c$$

$$(27)\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2+x}\,dx$$

$$(A)\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}\,dx$$

$$(B)\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx$$

$$(C)\ \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$(D)\ \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+x+1)}$$

$$(E)\ x^2+1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$$

$$(F)\ A=1\ ,\ x=0$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$1 = A + B \qquad \therefore B = 0$$

بمساواة معاملات x في الطرفين

$$0 = A + C \qquad \therefore C = -1$$

$$(g)\int\frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{1}{x}dx-\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+c$$

(28) $\int\frac{x-1}{x^5-x^3}dx$

$$(A)\int\frac{x-1}{x^5-x^3}dx=\int\frac{x-1}{x^3(x^2-1)}dx=\int\frac{x-1}{x^3(x-1)(x+1)}dx$$

$$=\int\frac{1}{x^3(x+1)}dx$$

$$(B)\int\frac{1}{x^3(x+1)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x^2}dx+\int\frac{C}{x^3}dx+\int\frac{D}{x+1}dx$$

$$(C)\frac{1}{x^3(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}$$

$$(D)\ \frac{1}{x^3(x+1)}=\frac{A(x+1)x^2+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3}{x^3(x+1)}$$

$$(E)\ 1=A(x+1)x^2+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3$$

$$(F)\ 1=C(0+1) \quad , x=0$$

$$\therefore C=1$$

$$1=-D \quad , x=-1$$

$$\therefore D=-1$$

بمساواة معاملات x^3 في الطرفين

$$0=A+D \quad \therefore A=1$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$0=A+B \quad \therefore B=-1$$

$$(g)\int\frac{1}{x^3(x+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx-\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx+\int x^{-3}dx-\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\ln|x+1|+c$$

(29) $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x^2-3x+2)}\,dx$

(A) $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

(B) $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{C}{x-2}\,dx$

(C) $\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$

(D) $\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$

(E) $2x-3 = A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2$

(F) $-1 = B(1-2) \quad , x=1$

$\therefore B = 1$

$1 = C(2-1)^2 \quad , x=2$

$\therefore C = 1$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$0 = A + C \quad \therefore A = -1$

$$(g)\int\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)}\,dx=-\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$=-\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int(x-1)^{-2}\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$=-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x-2|+c$$

$$(30)\int\frac{dx}{x^3+8}$$

$$(A)\int\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,dx=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}dx$$

$$(C)\ \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$(D)\ \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$(E)\ 1=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$(F)\ 1=A(4+4+4)\ ,\ x=-2$$

$$\therefore A=\frac{1}{12}$$

بمساواة معاملات x^2 في الطرفين

$$0 = A + B \qquad \therefore B = -\frac{1}{12}$$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين

$$1 = 4A + 2C \qquad \therefore C = \frac{1}{3}$$

$$(g)\int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{12}\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{24}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{24}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{6}{24}\int \frac{1}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{24}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-2x+1+3}dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{24}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2+3}dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{24}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{\sqrt{3}}{12}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln|x^2-2x+4| + \frac{\sqrt{3}}{12}\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}) + c$$

$$(31)\int\frac{dx}{e^{2x}+2e^{x}+1}$$

التكامل بالتعويض :-

(A) نفرض أن $u=e^{x}$ ومنها

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــ

$du = u\ dx \Leftarrow du = e^{x}\ dx$ x

(C) نعوض بـــ $u=e^{x}$ $du=u\ dx$, في مسألة التكامل

$$=\int\frac{1}{u^{2}+2u+1}\ \frac{du}{u}$$

$$=\int\frac{du}{u(u^{2}+2u+1)}=\int\frac{du}{u(u+1)^{2}}$$

$$(1)\int\frac{du}{u(u+1)^{2}}$$

$$(2)\int\frac{du}{u(u+1)^{2}}=\int\frac{A}{u}\,du+\int\frac{B}{u+1}\,du+\int\frac{C}{(u+1)^{2}}\,du$$

$$(3)\ \frac{1}{u(u+1)^{2}}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^{2}}$$

$$(4)\ \frac{1}{u(u+1)^{2}}=\frac{A(u+1)^{2}+B(u+1)u+C\,u}{u(u+1)^{2}}$$

$$(5)\ 1=A(u+1)^{2}+B(u+1)u+C\,u$$

$$(6)\ 1 = A(0+1)^2 \quad ,u = 0$$

$$\therefore A = 1$$

$$1 = C(-1) \quad ,u = -1$$

$$\therefore C = -1$$

بمساواة معاملات u^2 في الطرفين لإيجاد B

$$0 = A + B \quad \therefore B = -1$$

$$(7)\int \frac{du}{u(u+1)^2} = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du - \int \frac{1}{(u+1)^2}\,du$$

$$\int \frac{du}{u(u+1)^2} = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du - \int (u+1)^{-2}\,du$$

$$= \ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + c$$

(E) نعوض بـــ $u = e^x$

$$= \ln\left|e^x\right| - \ln\left|e^x + 1\right| + \frac{1}{e^x + 1} + c$$

ثـــانـــيـــاً إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام :-

في هذه الحالة نقوم بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\int \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} dx$$

ناتج القسمة

المقام | **البسط**

باقي خارج القسمة

$$\int \left(\text{ناتج القسمة} + \frac{\text{باقي خارج القسمة}}{\text{المقام}} \right) dx$$

ثم نقوم بإيجاد التكامل باستخدام قوانين أو طرق التكامل المناسبة

مسائل على القسمة المطولة

(1) $\int \frac{x^4}{x-2}\,dx$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+2x^2+4x+8 \\
\hline
x-2 & x^4 \\
 & x^4-2x^3 \\
\hline
 & 2x^3 \\
 & 2x^3-4x^2 \\
\hline
 & 4x^2 \\
 & 4x^2-8x \\
\hline
 & 8x \\
 & 8x-16 \\
\hline
 & 16
\end{array}
$$

$$\int (x^3+2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2})\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x+16\ln|x-2|+c$$

(2) $\int \frac{2x^3}{x^2+1}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2+1 & 2x^3 \\ & 2x^3+2x \\ \hline & -2x \end{array}$$

$$\int (2x - \frac{2x}{x^2+1})\,dx$$

$$= x^2 - \ln\left|x^2+1\right| + c$$

(3) $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+4 & x^2 \\ & x^2+4 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$\int (1 - \frac{4}{x^2+4})\,dx = \int dx - \frac{4}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx$$

$$= \int dx - 2\int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx = x - 2\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + c$$

$$(4)\int\frac{x^4+3x^2-3x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^3-x^2-2x & x^4+3x^2-3x+2 \\ & x^4-x^3-2x^2 \\ \hline & x^3+5x^2-3x+2 \\ & x^3-x^2-2x \\ \hline & 6x^2-x+2 \end{array}$$

$$\int(x+1+\frac{6x^2-x+2}{x^3-x^2-2x})\,dx$$

$$\int(x+1)\,dx+\int(\frac{6x^2-x+2}{x^3-x^2-2x})\,dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+c_1$$

$$I_2=\int(\frac{6x^2-x+2}{x^3-x^2-2x})\,dx$$

الكسور الجزئية :-

$$(A)\int(\frac{6x^2-x+2}{x^3-x^2-2x})\,dx=\int\frac{6x^2-x+2}{x(x^2-x-2)}\,dx$$

$$=\int\frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}\,dx$$

$$(B)\int\frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=\int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x-2}dx+\int\frac{c}{x+1}dx$$

$$(C)\ \frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{c}{x+1}$$

$$(D)\ \frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x+1)(x-2)+B(x+1)x+c(x-2)x}{x(x-2)(x+1)}$$

$$(E)\ 6x^2-x+2=A(x+1)(x-2)+B(x+1)x+c(x-2)x$$

$(F)\ 2=A(0+1)(0-2)\ ,\ x=0$

$\therefore A=-1$

$24=B(2+1)(2)\qquad ,\ x=2$

$\therefore B=4$

$9=C(-1-2)(-1)\qquad ,\ x=-1$

$\therefore C=3$

$$(g)\int\frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=-\int\frac{1}{x}\,dx+4\int\frac{1}{x-2}dx+3\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$I_2=\int\frac{6x^2-x+2}{x(x-2)(x+1)}\,dx=-\ln|x|+4\ln|x-2|+3\ln|x+1|+c_2$$

$$I_1+I_2=\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x|+4\ln|x-2|+3\ln|x+1|+c\ ,\ c=c_1+c_2$$

(5) $\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-x-6}\,dx$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
\hline
x^2-x-6 & x^2+2x-4 \\
 & \underline{x^2-x-6} \\
 & \quad 3x+2
\end{array}
$$

$$\int\left(1+\frac{3x+2}{x^2-x-6}\right)dx=\int dx+\int\frac{3x+2}{x^2-x-6}\,dx$$

$$\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2-x-6}\,dx=\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x-1+1+\frac{4}{3}}{x^2-x-6}\,dx$$

$$=\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx+\frac{7}{2}\int\frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6}\,dx$$

$$=\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx+\frac{7}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}}\,dx$$

$$=\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx+\frac{14}{25}\int\frac{1}{(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5})^2-1}\,dx$$

$$=\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx-\frac{7}{5}\int\frac{\frac{2}{5}}{1-(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5})^2}\,dx$$

$$=x+\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x-6\right|-\frac{7}{5}\tanh^{-1}\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\right)+c\,,\ \left|\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\right|<1$$

$$=x+\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x-6\right|-\frac{7}{5}\coth^{-1}\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\right)+c\,,\ \left|\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\right|>1$$

(6) $\int \frac{x^2-x-6}{x^2+3x-4}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x^2+3x-4 & x^2-x-6 \\ & x^2+3x-4 \\ \hline & -4x-2 \end{array}$$

$$\int\left(1-\frac{4x+2}{x^2+3x-4}\right)dx=\int dx-\int\frac{4x+2}{x^2+3x-4}\,dx$$

$$\int dx-2\int\frac{2x+1}{x^2+3x-4}\,dx=\int dx-2\int\frac{2x+3-3+1}{x^2+3x-4}\,dx$$

$$=\int dx-2\int\frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx+4\int\frac{1}{x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4}\,dx$$

$$=\int dx-2\int\frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx+4\int\frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}}\,dx$$

$$=\int dx-2\int\frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx+\frac{16}{25}\int\frac{1}{(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5})^2-1}\,dx$$

$$=\int dx-2\int\frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx-\frac{8}{5}\int\frac{\frac{2}{5}}{1-(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5})^2}\,dx$$

$$=x-2\ln\left|x^2+3x-4\right|-\frac{8}{5}\tanh^{-1}(\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{5})+c,\left|\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{5}\right|<1$$

$$=x-2\ln\left|x^2+3x-4\right|-\frac{8}{5}\coth^{-1}(\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{5})+c,\left|\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{5}\right|>1$$

$$(7)\int\frac{x^3+2x}{(x-2)(x+1)}\,dx=\int\frac{x^3+2x}{x^2-x-2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-x-2 & x^3+2x \\ & x^3-x^2-2x \\ \hline & x^2+4x \\ & x^2-x-2 \\ \hline & 5x+2 \end{array}$$

$$\int(x+1+\frac{5x+2}{x^2-x-2})\,dx=\int(x+1)dx+\int\frac{5x+2}{x^2-x-2}\,dx$$

$$\int(x+1)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x+\frac{4}{5}}{x^2-x-2}\,dx=\int(x+1)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x-1+1+\frac{4}{5}}{x^2-x-2}\,dx$$

$$=\int(x+1)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}\,dx+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2}\,dx$$

$$=\int(x+1)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}\,dx+\frac{9}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}\,dx$$

$$=\int(x+1)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}\,dx-3\int\frac{\frac{2}{3}}{1-(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3})^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x-2\right|-3\tanh^{-1}(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3})+c,\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right|<1$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x-2\right|-3\coth^{-1}(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3})+c,\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right|>1$$

$$(8)\int \frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & e^{x}-1 \\ \hline e^{x}+1 & e^{2x}+1 \\ & e^{2x}+e^{x} \\ \hline & -e^{x}+1 \\ & -e^{x}-1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\int (e^{x}-1+\frac{2}{e^{x}+1})\,dx=\int (e^{x}-1)\,dx+\int \frac{2}{e^{x}+1}\,dx$$

بضرب البسط والمقام في e^{-x}

$$=\int (e^{x}-1)\,dx+\int \frac{2e^{-x}}{e^{x}e^{-x}+e^{-x}}\,dx$$

$$=\int (e^{x}-1)\,dx+2\int \frac{e^{-x}}{e^{0}+e^{-x}}\,dx$$

$$=\int (e^{x}-1)\,dx-2\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$=e^{x}-x-2\ln\left|1+e^{-x}\right|+c$$

تكامل متغيرات تحتوي على قوى كسرية

يمكن تبسيط التكاملات الحاوية على قوى كسرية للمتغيرات $\sqrt[n]{\text{متغير}}$

أو $(\text{متغير})^{\frac{m}{n}}$ وذلك كما يلي :-

(1) نفرض أن z^n = المتغير(دالة في x) ، حيث n أصغر عدد يقبل القسمة على أدلة جذور هذه المتغيرات

(2) نعين قيمة z وذلك برفع طرفي الفرضية السابقة لأس $\frac{1}{n}$

(3) نفاضل الفرضية بالنسبة لـ z لنحصل على $dx = \square \ dz$

(4) نعوض بالفرضية وتفاضلها في مسألة التكامل ونبسط ثم نكامل المسألة

(5) نكتب المسألة بدلالة x وذلك بالاستفادة من خطوة رقم (2)

مسائل على تكامل متغيرات تحتوي على قوى كسرية

$$(1)\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$$

$(A)\ \ x=z^3 \qquad ,n=3$

$(B)\, z=x^{\frac{1}{3}}$

$(C)\, dx=3z^2\, dz$

$$(D)\int \frac{3z^2\, dz}{\sqrt[3]{z^3}-z^3}=\int \frac{3z^2}{z-z^3}dz=\int \frac{3z^2}{z(1-z^2)}dz$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{-2z}{1-z^2}dz=-\frac{3}{2}\ln\left|1-z^2\right|+c$$

$$(E)\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}=-\frac{3}{2}\ln\left|1-(x^{\frac{1}{3}})^2\right|+c=-\frac{3}{2}\ln\left|1-x^{\frac{2}{3}}\right|+c$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|1-\sqrt[3]{x^2}\right|+c$$

$$(2)\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$$

$(A)\ \ x=z^4 \qquad ,n=4$

$(B)\, z=x^{\frac{1}{4}}$

$(C)\, dx=4z^3\, dz$

$$(D)\int\frac{\sqrt{z^4}}{1+\sqrt[4]{z^4}}4z^3\,dz=4\int\frac{z^2}{1+z}z^3\,dz=4\int\frac{z^5}{1+z}dz$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^4-z^3+z^2-z+1 \\ \hline
z+1 & z^5 \\
 & z^5+z^4 \\ \hline
 & \quad -z^4 \\
 & \quad -z^4-z^3 \\ \hline
 & \qquad z^3 \\
 & \qquad z^3+z^2 \\ \hline
 & \qquad\quad -z^2 \\
 & \qquad\quad -z^2-z \\ \hline
 & \qquad\qquad z \\
 & \qquad\qquad z+1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad -1
\end{array}$$

$$=4\int[z^4-z^3+z^2-z+1-\frac{1}{1+z}]dz$$

$$=\frac{4}{5}z^5-z^4+\frac{4}{3}z^3-2z^2+4z-4\ln|1+z|+c$$

$$(E)=\frac{4}{5}(x^{\frac{1}{4}})^5-(x^{\frac{1}{4}})^4+\frac{4}{3}(x^{\frac{1}{4}})^3-2(x^{\frac{1}{4}})^2+4x^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|1+x^{\frac{1}{4}}\right|+c$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|1+x^{\frac{1}{4}}\right|+c$$

$$(3)\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$$

$(A)\ \ x=z^6 \quad ,n=6$

$(B)\, z=x^{\frac{1}{6}}$

$(C)\, dx=6z^5\, dz$

$$(D)\int \frac{1}{\sqrt[3]{z^6}+\sqrt{z^6}}6z^5\, dz = 6\int \frac{z^5\ dz}{z^2+z^3}$$

$$=6\int \frac{z^5\ dz}{z^2(1+z)} = 6\int \frac{z^3}{1+z}dz$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2-z+1 \\ \hline
z+1 & z^3 \\
 & z^3+z^2 \\ \hline
 & -z^2 \\
 & -z^2-z \\ \hline
 & z \\
 & z+1 \\ \hline
 & -1
\end{array}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx = 6\int [z^2 - z + 1 - \frac{1}{1+z}]dz$$

$$= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6\ln|1+z| + c$$

$$(E) = 2(x^{\frac{1}{6}})^3 - 3(x^{\frac{1}{6}})^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|1+x^{\frac{1}{6}}\right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|1+x^{\frac{1}{6}}\right| + c$$

$$(4)\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$$

$(A)\ \ x-1 = z^4 \quad , n = 4$

$(B)\ z = (x-1)^{\frac{1}{4}}$

$(C)\ dx = 4z^3\ dz$

$$(D)\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{z^4}}4z^3\,dz = 4\int \frac{z^3\ dz}{1+z}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - z + 1 \\ \hline
z+1 & z^3 \\
 & z^3 + z^2 \\ \hline
 & -z^2 \\
 & -z^2 - z \\ \hline
 & z \\
 & z+1 \\ \hline
 & -1
\end{array}$$

$$=4\int[z^2-z+1-\frac{1}{1+z}]dz$$

$$=\frac{4}{3}z^3-2z^2+4z-4\ln|1+z|+c$$

$$(E)=\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{4}}-2(x-1)^{\frac{1}{2}}+4(x-1)^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|1+(x-1)^{\frac{1}{4}}\right|+c$$

$$(5)\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$$

$(A)\ \ x=z^4 \quad ,n=4$

$(B)\, z=x^{\frac{1}{4}}$

$(C)\, dx=4z^3\, dz$

$$(D)\int\frac{1-\sqrt{z^4}}{1+\sqrt[4]{z^4}}4z^3\,dz=4\int\frac{1-z^2}{1+z}z^3\,dz$$

$$4\int\frac{(1-z)(1+z)}{1+z}z^3\,dz=4\int(1-z)z^3\,dz$$

$$=\int(4z^3-4z^4)dz=z^4-\frac{4}{5}z^5+c$$

$$(E)\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx=(x^{\frac{1}{4}})^4-\frac{4}{5}(x^{\frac{1}{4}})^5+c$$

$$=x-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$$

$$(6)\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

$(A)\ \ x = z^6 \quad ,n = 6$

$(B)\, z = x^{\frac{1}{6}}$

$(C)\, dx = 6z^5\, dz$

$$(D)\int \frac{\sqrt{z^6}}{1+\sqrt[3]{z^6}}6z^5\, dz = \int \frac{z^3}{1+z^2}6z^5\, dz$$

$$= 6\int \frac{z^8}{1+z^2}dz$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^6 - z^4 + z^2 - 1 \\ \hline
z^2+1 & z^8 \\
 & z^8 + z^6 \\ \hline
 & -z^6 \\
 & -z^6 - z^4 \\ \hline
 & z^4 \\
 & z^4 + z^2 \\ \hline
 & -z^2 \\
 & -z^2 - 1 \\ \hline
 & 1
\end{array}$$

$$=6\int[z^6-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}]dz$$

$$=\frac{6}{7}z^7-\frac{6}{5}z^5+2z^3-6z+6\tan^{-1}(z)+c$$

$$(E)\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\tan^{-1}(x^{\frac{1}{6}})+c$$

$$(7)\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$(A)\ x=z^3 \quad ,n=3$

$(B)z=x^{\frac{1}{3}}$

$(C)dx=3z^2\,dz$

$$(D)\int\frac{3z^2\,dz}{1+\sqrt[3]{z^3}}=3\int\frac{z^2}{1+z}dz=3\int\frac{z^2-1+1}{1+z}dz$$

$$=3\int\frac{z^2-1}{1+z}dz+3\int\frac{dz}{1+z}$$

$$=3\int\frac{(z-1)(z+1)}{1+z}dz+3\int\frac{dz}{1+z}=3\int(z-1)dz+3\int\frac{dz}{1+z}$$

$$=\frac{3}{2}z^2-3z+3\ln|z+1|+c$$

$$(E)\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|x^{\frac{1}{3}}+1\right|+c$$

$$(8)\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$$

$(A)\ x = z^4 \quad ,n = 4$

$(B)\, z = x^{\frac{1}{4}}$

$(C)\, dx = 4z^3\, dz$

$$(D)\int \frac{1}{(z^4)^{\frac{1}{2}} - (z^4)^{\frac{1}{4}}} 4z^3\, dz = 4\int \frac{z^3}{z^2 - z} dz$$

$$= 4\int \frac{z^3}{z(z-1)} dz = 4\int \frac{z^2}{z-1} dz = 4\int \frac{z^2}{z-1} dz$$

$$= 4\int \frac{z^2 - 1 + 1}{z-1} dz$$

$$= 4\int \frac{z^2 - 1}{z-1} dz + 4\int \frac{dz}{z-1}$$

$$= 4\int \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} dz + 4\int \frac{dz}{z-1} = 4\int (z+1) dz + 4\int \frac{dz}{z-1}$$

$$= 2z^2 + 4z + 4\ln|z-1| + c$$

$$(E)\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + c$$

(9) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$

$(A)\ x+1=z^2 \quad ,n=2$

$(B)\ z=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$(C)\ dx=2z\ dz$

$(D)\ \int \frac{1}{1+\sqrt{z^2}} 2z\,dz = 2\int \frac{z\ dz}{1+z}$

$=2\int \frac{z+1-1}{1+z} dz = 2\int \frac{z+1}{1+z} dz - 2\int \frac{1}{1+z} dz$

$=2\int dz - 2\int \frac{1}{1+z} dz = 2z - 2\ln|1+z| + c$

$(E)\ \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx \quad = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 2\ln\left|1+(x+1)^{\frac{1}{2}}\right| + c$

(10) $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+1)}$

$(A)\ x=z^3 \quad ,n=3$

$(B)\ z=x^{\frac{1}{3}}$

$(C)\ dx=3z^2\ dz$

$$(D)\int \frac{1}{(z^3)^{\frac{2}{3}}[1+(z^3)^{\frac{2}{3}}]} 3z^2\,dz = 3\int \frac{z^2\,dz}{z^2(1+z^2)}$$

$$3\int \frac{dz}{1+z^2} = 3\tan^{-1}(z)+c$$

$$(E)\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+1)} = 3\tan^{-1}(x^{\frac{1}{3}})+c$$

$$(11)\int \frac{(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$(A)\ \ x = z^3 \quad , n = 3$

$(B)\ z = x^{\frac{1}{3}}$

$(C)\ dx = 3z^2\ dz$

$$(D)\int \frac{[1+(z^3)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{z^3}} 3z^2\,dz = 3\int \frac{(1+z^2)^{\frac{2}{3}}}{z} z^2\,dz$$

$$=3\int (1+z^2)^{\frac{2}{3}} z\,dz = \frac{3}{2}\int (1+z^2)^{\frac{2}{3}} 2z\,dz = \frac{9}{10}(1+z^2)^{\frac{5}{3}}+c$$

$$(E)\int \frac{(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{9}{10}(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{3}}+c$$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

(A) $x = z^3 \quad , n = 3$

(B) $z = x^{\frac{1}{3}}$

(C) $dx = 3z^2\, dz$

(D) $\int \frac{1}{1+(z^3)^{\frac{2}{3}}} 3z^2\, dz = 3\int \frac{z^2}{1+z^2}\, dz$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline z^2+1 & z^2 \\ & z^2+1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$3\int [1 - \frac{1}{1+z^2}]\, dz = 3z - 3\tan^{-1}(z) + c$

(E) $\int \frac{dx}{1+x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} - 3\tan^{-1}(x^{\frac{1}{3}}) + c$

(13) $\int \frac{1}{x(1-\sqrt[4]{x})} dx$

(A) $x = z^4 \quad , n = 4$

(B) $z = x^{\frac{1}{4}}$

(C) $dx = 4z^3\, dz$

$$(D)\int\frac{1}{z^4(1-\sqrt[4]{z^4})}4z^3dz=-4\int\frac{1}{z^2-z}dz$$

$$=-4\int\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}dz=-4\int\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}dz$$

$$=-16\int\frac{1}{(2z-1)^2-1}dz=8\int\frac{2}{1-(2z-1)^2}dz$$

$$=8\tanh^{-1}(2z-1)+c,|2z-1|<1$$

$$=8\coth^{-1}(2z-1)+c,|2z-1|>1$$

$$(E)\int\frac{1}{x(1-\sqrt[4]{x})}dx=8\tanh^{-1}(2x^{\frac{1}{4}}-1)+c,\left|2x^{\frac{1}{4}}-1\right|<1$$

$$=8\coth^{-1}(2x^{\frac{1}{4}}-1)+c,\left|2x^{\frac{1}{4}}-1\right|>1$$

تكامل دوال قياسية تحتوي على دالة الجيب وجيب التمام

إن التعويض $z=\tan(\frac{x}{2})$ يُمكننا من تحويل أي مسألة تكامل قياسية في $\sin x$, $\cos x$ إلى مسألة تكامل تحتوي على دالة قياسية في z كالتالي :-

(1) نعوض في مسألة التكامل بالتعويضات الآتية

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$$
$$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$
$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

(2) نبسط مسألة التكامل ثم نكامل الدالة باستخدام قوانين أو طرق التكامل

(3) نعوض بـــ $z=\tan(\frac{x}{2})$ بعد إيجاد تكامل المسألة

مسائل عى تكامل دوال قياسية تحتوي على دالة الجيب وجيب التمام

$$(1)\int \frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$(A)\int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}}\ \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(B)\int \frac{1}{\frac{z^2+2z+1}{1+z^2}}\ \frac{2dz}{1+z^2}=\int \frac{2dz}{z^2+2z+1}$$

$$=\int \frac{2dz}{(z+1)^2}=2\int (z+1)^{-2}\,dz=-\frac{2}{z+1}+c$$

$$(C)\int \frac{1}{1+\sin x}dx=-\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1}+c$$

$$(2)\int \frac{1}{1+\cos x}dx$$

$$(A)\int \frac{1}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\ \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(B)\int \frac{1}{\frac{z^2+1+1-z^2}{1+z^2}}\ \frac{2dz}{1+z^2}=\int \frac{2}{2}\,dz=\int dz=z+c$$

$$(C)\int \frac{1}{1+\cos x}dx=\tan(\frac{x}{2})+c$$

$$=\int\frac{-2dz}{z^2-2z-1}=\int\frac{-2dz}{z^2-2z+1-1-1}$$

$$=\int\frac{-2dz}{(z-1)^2-2}=\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dz}{1-(\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$=\sqrt{2}\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$$

$$=\sqrt{2}\coth^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|>1$$

$$(C)\int\frac{1}{\cos x+\sin x}dx=\sqrt{2}\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$$

$$=\sqrt{2}\coth^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}})+c,\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|>1$$

$$(8)\int\frac{1}{\cos x+\sin x+2}dx$$

$$(A)\int\frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}+\frac{2z}{1+z^2}+2}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(B)\int\frac{1}{\frac{-z^2+2z+1}{1+z^2}+2}\frac{2dz}{1+z^2}=\int\frac{1}{\frac{-z^2+2z+1+2+2z^2}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$=\int\frac{2dz}{z^2+2z+3}=\int\frac{2dz}{z^2+2z+1-1+3}$$

$$=\int\frac{2dz}{(z+1)^2+2}=\int\frac{dz}{(\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}=\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dz}{(\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}$$

$$=\sqrt{2}\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}})+c$$

$$(C)\int\frac{1}{\cos x+\sin x+2}dx=\sqrt{2}\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\frac{x}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}})+c$$

$$(9)\int\frac{1}{\cos x+\sin x-1}dx$$

$$(A)\int\frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}+\frac{2z}{1+z^2}-1}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(B)\int\frac{1}{\frac{-z^2+2z+1}{1+z^2}-1}\frac{2dz}{1+z^2}=\int\frac{1}{\frac{-z^2+2z+1-1-z^2}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$=\int\frac{2dz}{-2z^2+2z}=\int\frac{-dz}{z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$=\int\frac{-dz}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=2\int\frac{2dz}{1-(2z-1)^2}$$

$$=2\tanh^{-1}(2z-1)+c,|2z-1|<1$$

$$=2\coth^{-1}(2z-1)+c, |2z-1|>1$$

$$(C)\int\frac{1}{\cos x+\sin x-1}dx=2\tanh^{-1}(2\tan(\tfrac{x}{2})-1)+c, \left|2\tan(\tfrac{x}{2})-1\right|<1$$

$$=2\coth^{-1}(2\tan(\tfrac{x}{2})-1)+c, \left|2\tan(\tfrac{x}{2})-1\right|>1$$

$$(10)\int\frac{1}{-2\cos x+\sin x}dx$$

$$(A)\int\frac{1}{-2\frac{1-z^2}{1+z^2}+\frac{2z}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(B)\int\frac{1}{\frac{2z^2+2z-2}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2}=\int\frac{2dz}{2z^2+2z-2}$$

$$=\int\frac{dz}{z^2+z-1}=\int\frac{dz}{z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1}=\int\frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}=\frac{-4}{5}\int\frac{dz}{(\frac{2}{\sqrt{5}}z+\frac{1}{\sqrt{5}})^2-1}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}dz}{1-(\frac{2}{\sqrt{5}}z+\frac{1}{\sqrt{5}})^2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\tanh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}z+\frac{1}{\sqrt{5}})+c, \left|\tfrac{2}{\sqrt{5}}z+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right|<1$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{5}}\coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}z+\frac{1}{\sqrt{5}})+c, \left|\tfrac{2}{\sqrt{5}}z+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right|>1$$

$$(C)\int\frac{1}{2\cos x-\sin x}dx=-\frac{2}{\sqrt{5}}\tanh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}\tan(\tfrac{x}{2})+\frac{1}{\sqrt{5}})+c, \left|\tfrac{2}{\sqrt{5}}\tan(\tfrac{x}{2})+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right|<1$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{5}}\coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}\tan(\tfrac{x}{2})+\frac{1}{\sqrt{5}})+c, \left|\tfrac{2}{\sqrt{5}}\tan(\tfrac{x}{2})+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right|>1$$

محتويات الكتاب

- يحتوي على شرح مفصل لمقرر رياضة (2) لطلبة الجامعات والمعاهد العليا.
- يحتوي على مسائل محلولة بطريقة واضحة ومبسطة.
- يحتوي على حلول الامتحانات النصفية والنهائية للسنوات السابقة.
- يعرض أفكار متنوعة تساعد في تنمية القدرة على التفكير العلمي السليم.
- يعتبر مرجع علمي تفصيلي لكافة الطلاب والباحثين لإلمامه بتفاصيل علمية دقيقة.
- يعالج بطريقة جديدة ومبتكرة الأجزاء النظرية بأسلوب يتيح للقارئ الوصول للفهم بشكل سهل
- يأتي تلبية لحاجة الطلاب إلى كتاب يكون معيناً ومرشداً لتحقيق غايات المقرر الدراسي.
- يحتوي على تصنيفات علمية دقيقة لا تجدها في أي كتاب آخر.

تحذير..

designed by
(L.E.S Team)
فريق طلبة
الهندسة الليبين