الأكاديمية العربية الدولية
Arab International Academy

اسم المحاضرة :رياضيات تخصصية

اسم المحاضر: م. راما زهره

الأكاديمية العربية الدولية – منصة أعد

مخطط المادة العلمية

١- المحددات من الدرجة الثانية و الثالثة .

٢- طريقة سارس لحل المحددات.

٣- طريقة بيزو لحل المحددات.

٤- خواص المحددات .

٥- حساب المحددات من المراتب العليا .

٦- تطبيقات عملية .

DETERMINANTS المحددات

أولاً : المحددات من المرتبة الثانية و المرتبة الثالثة :

- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثانية ، حيث a, b, c, d مقادير عددية و نسمي المقدار $\Delta = ad - bc$ قيمة أو مفكوك أو منشور المحدد Δ
- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثالثة ، و هو مؤلف من ثلاثة أعمدة و ثلاثة أسطر ، ندعو العناصر a_{11}, a_{22}, a_{33} عناصر القطر الرئيسي ، بينما ندعو العناصر a_{13}, a_{22}, a_{31} عناصر القطر الثانوي .

المحددات DETERMINANTS

يمكن نشر هذا المحدد بعدة طرق نذكر منها :

❶ طريقة ساروس (*Sarrus*) :

هذه الطريقة لا تطبّق إلا لمحددات المرتبة الثالثة

خطوات تطبيق طريقة ساروس :

- نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد المراد نشره.
- نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له.

المحددات DETERMINANTS

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

الحل : نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له

$$\Delta = [(1)(-2)(2) + (2)(1)(1) + (-3)(-1)(1)] - [(-3)(-2)(1) + (1)(1)(1) + (2)(-1)(2)]$$

$$\Delta = [(-4) + (2) + (3)] - [(6) + (1) + (-4)] = -2$$

المحددات DETERMINANTS

❷ طريقة بيزو (*Bezout*) :

و هي الطريقة العامة في نشر المحدد وفق أحد أسطره أو أحد أعمدته

و لكن قبل البدء بشرح هذه الطريقة لابد من ذكر بعض التعاريف المهمة :

❷ ⊂ ❶ : **صغير العنصر Minor** : إن صغير العنصر a_{ij} في المحدد Δ هو المحدد الناتج من حذف سطر و عمود العنصر a_{ij} و نرمز له بالرمز $M(a_{ij})$.

تطبيق (★): في المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **أوجد صغير العنصر** a_{11} و a_{32}

$$M(a_{11}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ، \quad M(a_{32}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

المحددات DETERMINANTS

❷ ⊂ ❷ : المتمم الجبري *Cofactor* : إن المتمم الجبري للعنصر a_{ij} هو صغير العنصر a_{ij} مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$

و نرمزله بالرمز $A_{ij} = (-1)^{i+j} M(a_{ij})$.

تطبيق : في المحدد Δ في التطبيق (★) أوجد المتمم الجبري للعنصر a_{11} و a_{32}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M(a_{11}) = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M(a_{32}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

❷ ⊂ ❸ : منقول محدد *Transpose of determinant*: هو المحدد Δ^T الناتج من جعل أسطر المحدد Δ أعمدة و أعمدته أسطراً مع المحافظة على الترتيب ، إن قيمة المحدد تساوي قيمة منقوله أي $\Delta^T = \Delta$

مبرهنة بيزو : إن مفكوك محدد يساوي مجموع جداء عناصر أحد أسطره (أعمدته) في متمماتها الجبرية.

المحددات DETERMINANTS

تطبيق : يُنشر المحدد Δ في التطبيق ($\star$) وفق السطر الأول بالعلاقة :

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

ملاحظة مهمة جداً :

عند نشر محدد بطريقة بيزو ينصح دوماً بالنشر وفق السطر (العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار.

تمرين: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

ننشر وفق العمود الثاني (يحوي أكبر عدداً من الأصفار):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = \boxed{+2}$$

المحددات DETERMINANTS

ثانياً : خواص المحددات :

① تنعدم قيمة المحدد إذا حوى سطراً (عموداً) جميع عناصره أصفار . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 5 & 0 & 6\end{vmatrix}=0$

② تنعدم قيمة المحدد إذا تطابق فيه سطران (عمودان) . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\ 3 & 9 & 3\\ 5 & 0 & 5\end{vmatrix}=0$

③ تنعدم قيمة المحدد إذا تناسب فيه سطران (عمودان) . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 2 & 8\end{vmatrix}=0$

④ إن تبديل موقعي سطرين (عمودين) في محدد يغير فقط من إشارته.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 6\end{vmatrix}=\boxed{+2}\ ,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=\boxed{-2}$$

المحددات DETERMINANTS

⑤ لضرب محدد بعد ثابت غير معدوم نضرب جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة بهذا العدد ، و بالعكس عند إخراج عامل مشترك فإننا نخرجه من جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة .

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(2)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(2)(3)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

⑥ يمكن تجزئة جميع عناصر سطر ما أو عمود ما إلى مجموع عنصرين ثم نقوم بتجزئة المحدد المعطى إلى مجموع محددين يماثلان المحدد الأصلي و يختلفان معه فقط بالسطر أو العمود المجزء ، حيث يتم توزيع عناصر السطر المجزء على المحددين المذكورين.

المحددات DETERMINANTS

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\11&15&12&5\\8&11&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\1+10&7+8&8+4&3+2\\8&11&2&0\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\1&7&8&3\\8&11&2&0\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تطابق}}+\underbrace{\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\10&8&4&2\\8&11&2&0\end{vmatrix}}_{R1,R3\ \text{تناسب}}=0+0=0$$

⑦ لا تتغير قيمة المحدد إذا جمعنا إلى عناصر أحد أسطره (أعمدته) العناصر المقابلة لها في سطر (عمود) آخر مضروبة بعدد ما غير معدوم.

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}}_{\substack{R2\to R2-R1\\R3\to R3-R1}}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\8&8&8&8\\13&14&15&16\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تناسب}}=0$$

تمارين

التمرين الأول : احسب قيمة المحدد Δ التالي :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & 3a & 7x \\ 1+2b & 2 & 3b & 7x \\ 1+2c & 3 & 3c & 7x \\ 1+2d & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}$$

الحل : بالاعتماد على خاصية تجزئة المحدد إلى محددين نجد :

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a & 7x \\ 1 & 2 & 3b & 7x \\ 1 & 3 & 3c & 7x \\ 1 & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}}_{C1,C4\ \text{تناسب}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 2a & 1 & 3a & 7x \\ 2b & 2 & 3b & 7x \\ 2c & 3 & 3c & 7x \\ 2d & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}}_{C1,C3\ \text{تناسب}}=0+0=0$$

تمارين

التمرين الثاني : احسب (λ) التي تجعل قيمة المحدد $\Delta = 30$. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد وفق العمود الرابع بعد أن نجري عليه التحويل $R_4 \to R_4 - R_1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

ننشر المحدد الثلاثي وفق السطر الأخير:

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(+5)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = (-5)(-3\lambda) = 15\lambda$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta = 30 \\ \Delta = 15\lambda \end{matrix}\right\} \to 30 = 15\lambda \to \boxed{\lambda = 2}$$

تمارين

التمرين الثالث : علل انعدام قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a+c & a+d & c+d \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل : نجري التحويلات السطرية التالية: $R_2 \to R_2 + R_4$ ، $R_1 \to R_1 + R_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) \\ 11 & 11 & 11 & 11 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 11(a+b+c+d)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{تطابق } R1,R2} = 0$$

تمارين

التمرين الرابع : علل انعدام قيمة المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل: $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha-sin^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta-sin^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma-sin^2\gamma \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos2\gamma \end{vmatrix}}_{\text{تطابق } C2,C3}=0$$

تمارين

التمرين الخامس : علل انعدام قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ x+7 & x+8 & x+9 \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل: $R_3 \to R_3 + R_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ 2x+8 & 2x+10 & 2x+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ 2(x+4) & 2(x+5) & 2(x+6) \end{vmatrix} = 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ x+4 & x+5 & x+6 \end{vmatrix}}_{\text{تطابق } R2,R3} = 0$$

حساب المحددات من المراتب العليا

ثالثاً : طرائق حساب المحددات من المراتب العليا :

① طريقة تخفيض مرتبة المحدد Δ_n :

فكرة الطريقة : نجعل جميع عناصر أحد الأسطر (أحد الأعمدة) أصفاراً عدا عنصر واحد فقط ثم ننشر المحدد Δ_n وفق هذا السطر (العمود) فنحصل على محدد من المرتبة Δ_{n-1} ثم نكرر هذه العملية على المحدد الناتج و نستمر بذلك حتى نحصل على محدد من المرتبة الثانية Δ_2.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ، $R_4 \to R_4 - 4R_1$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & -2 & -8 & -10\\ 0 & -7 & -10 & -13\end{vmatrix}$$

حساب المحددات من المراتب العليا

ننشر وفق العمود الأول :

$$\Delta = (+1)\begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\Delta = (+1)\begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = (+1)(-1)\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (+1)(-1)[(-4)(36) - (4)(4)] = -(-160) = \boxed{160}$$

حساب المحددات من المراتب العليا

② طريقة تحويل المحدد Δ_n إلى الشكل المثلثي:

فكرة الطريقة : تعتمد هذه الطريقة على تحويل المحدد إلى محدد مثلثي علوي أو سفلي و ذلك بجعل جميع العناصر الواقعة فوق قطره الرئيسي أو تحت قطره الرئيسي أصفاراً ، و بذلك تكون قيمة المحدد مساوية لجداء عناصر قطره الرئيسي.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

الحل : نجمع جميع الأعمدة إلى العمود الأول :

حساب المحددات من المراتب العليا

$$\Delta=\begin{vmatrix}8&1&1&5\\8&5&1&1\\8&1&5&1\\8&1&1&1\end{vmatrix}=(8)\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}R2\to R2-R1\\R3\to R3-R1\\R4\to R4-R1\end{matrix}$$

$$\Delta=(8)\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&4&0&-4\\0&0&4&-4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=(8)(1)(4)(4)(-4)=-512$$

تمرين: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&e^{x}+3&5&7\\1&3&e^{-x}+5&7\\1&3&5&8\end{vmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&e^{x}+3&5&7\\1&3&e^{-x}+5&7\\1&3&5&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{1}&3&5&7\\0&\boxed{e^{x}}&0&0\\0&0&\boxed{e^{-x}}&0\\0&0&0&\boxed{1}\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(1)(e^{x})(e^{-x})(1)=\boxed{1}$$

نهاية المحاضرة

آمل أن تكونوا قد حققتم الفائدة

شكرا لحضوركم .....