الأكاديمية العربية الدولية

الأكاديمية العربية الدولية

المقررات الجامعية

www.aiacademy.info | care@aiacademy.info

الفصل الثالث

المجموعات

Sets

(3-1) المجموعات (الفئات)

(3-2) المجموعة الشاملة

(3-3) إتحاد المجموعات

(3-4) تقاطع المجموعات

(3-5) الفرق بين مجموعتين

(3-6) الفرق التناظري بين مجموعتين

(3-7) حاصل الضرب الكارتيزي

تمارين

الفصل الثالث

المجموعات

(3-1) المجموعات (الفئات)

لا يوجد تعريف دقيق للمجموعة (الفئة) فمثلاً إذا قلنا أن المجموعة هي تجمع (تكتل) من الأشياء فسيكون السؤال ما هو المقصود بالتجمع أو التكتل ولهذا إتفق علماء الرياضيات على أن يكون مفهوم المجموعة (الفئة) هو مفهوم أولي نستخدمه ولا يمكن الإستغناء عنة في الرياضيات؛ فمثلاً نقول "مجموعة كل الأعداد الحقيقية" أو نقول "مجموعة كل طلاب الصف الأول في المدرسة" أو نقول "مجموعة الألوان" ... الخ

ولكننا سوف نعتبر التعريف التالي هو تعرف المجموعة (الفئة) لكي نستطيع إستخدامه بشكل رياضي عملي مبسط.

تعريف (3.1.1): المجموعة (الفئة) هي عبارة عن تجمع أشياء(عناصر) معرفة تعريفا كاملاً بحيث:

1. يمكن التمييز بين هذه الأشياء (العناصر) داخل المجموعة.
2. يمكن الحكم بوجود الشيء داخل المجموعة من عدمه.

ملاحظات:

1. نرمز عادة للمجموعات بحروف كبيرة مثل A, B, C, ..., X, Y, Z بينما نرمز لعناصر المجموعة بالرموز الصغيرة مثل a, b, c, ..., x, y, z .
2. إذا كانت S مجموعة تتكون من عناصر وكانت a أحد هذه العناصر فإن $a \in S$ أما إذا كان a ليس عنصر من عناصر المجموعة S فإن $a \notin S$.
3. المجموعة يجب أن تكون حسنة التعريف بمعنى إنه يجب أن يكون واضح جداً ما إذا كان أي عنصر x ينتمي إلى هذه المجموعة أو أنه لا ينتمي إلى هذه المجموعة .

4. عناصر المجموعة تكون متمايزة بمعنى أنه لا داعي لتكرار أي عنصر من عناصر المجموعة كما أن ترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أي تأثير عليها.
5. يمكن وصف المجموعة بطريقة الوصف (القاعدة) $S = \{x: p(x)\}$ ومثال لذلك $S = \{x \in \mathbb{Z}: 2 < x \leq 8\}$ أو بطريقة الجرد ويتم فيها كتابة جميع العناصر داخل قوسين وذلك إذا كانت المجموعة محدوده ومثال لذلك $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
6. المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد تسمى مجموعة أحادية (Singleton Set).
7. يوجد مجموعة واحده فقط لا يوجد فيها أي عنصر وتسمى المجموعة الخالية φ وهذه المجموعة تسمى مجموعة خالية (Empty Set) ويرمز لها عادة بالرمز φ وتقرأ "فاي" ويرمز لها أحيانا بالرمز $\{\ \}$.
8. من الممكن أن تكون عناصر المجموعة هي أيضا مجموعات فمثلا مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تتكون من مجموعة الأعداد الزوجية و مجموعة الأعداد الفردية وتكتب $\mathbb{Z}=\{\text{even numbers, odd numbers}\}$.
9. يقال لمجموعة ما إنها منتهية (finite) إذا كانت تحتوي على عدد محدود من العناصر أو إنها تكون المجموعة الخالية φ وغير ذلك تكون المجموعة غير محدودة (infinite).
10. إذا كانت S مجموعة منتهية فإننا نرمز لعدد عناصر المجموعة S بالرمز $|S|$ فمثلا المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ عدد عناصرها هو $|S| = 5$ بينما المجموعة الخالية يكون عددها يساوي صفر أي أن $|\varphi| = 0$.

مثال: العبارات الأتية تمثل مجموعات:

1. كليات جامعة صنعاء.
2. طلاب كلية العلوم.
3. مجموعة الأعداد الطبيعية $0, 1, 2, \ldots$
4. مجموعة الألوان : أحمر – أبيض – أسود – أزرق – أخضر – أصفر.
5. مجموعة الأعداد: $1, 7, 2, 9$

مثال: من أمثلة عناصر المجموعة:

1. العدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية.
2. كلية الهندسة هي أحد كليات الجامعة الوطنية.

3. العدد 2 هو أحد عناصر مجموعة الأعداد: 1, 7, 2, 9
4. اللون الأسود هو أحد عناصر مجموعة الألوان : أحمر – أبيض – أسود – أزرق – أخضر – أصفر.

مثال: من أمثلة الأشياء التي لا تمثل مجموعات:

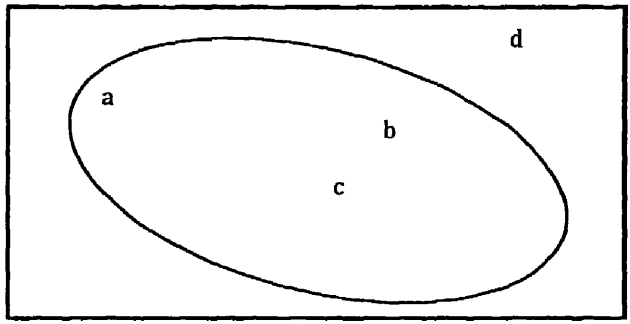
1. "الأعداد المهمة" لإننا لا نستطيع أن نميز مثلا العدد 5 هل هو مهم أو غير مهم.
2. "الأولاد الأذكياء" لأن الذكاء هو نسبي بمعنى قد يكون الولد ذكي جدا في الدراسة ولكنه ليس كذلك في رياضة كرة القدم.
3. "المدن الجميلة" لأن صفة الجمال نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد تكون أحد المدن القديمة جميلة جدا من وجهة نظر شخص ما ولكنها ليست كذلك من جهة شخص أخر.
4. "الطعام اللذيذ" لأن صفة لذة الطعام نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد يحب شخص مثلا أكل السمك وبالتالي يعتبره طعام لذيذ بينما شخص أخر لا يتقبل أكل السمك ولا رائحة السمك وبالتالي فهو يعتبره طعام ليس لذيذ.

مثال: المجموعات الأتية هي مجموعات خالية:

1. $\varphi = \{x: x \neq x\}$
2. $\varphi = \{x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}: 2|x\}$
3. $\varphi = \{x: |x| \leq -1\}$
4. $\varphi = \{x: \sin x \geq 2\}$
5. $\varphi = \{x \in \mathbb{Z}: x|2,\ x > 2\}$

ملاحظة: أشكال فن Venn diagrams وفيها تمثل المجموعة بنقاط في مستوى محاطة بخط مغلق كدائرة أو مربع أو مستطيل مما يساعد على تصور المجموعة ويسهل فهمها.

مثال: المجموعة $S=\{a, b, c\}$ وفيها $b \in S, d \notin S$ كما يلي:



حيث تمثل العناصر داخل المجموعة بنقاط داخل المخطط بينما العناصر التي لا تنتمي لهذه المجموعة فهي نقاط خارج المخطط .

ملاحظة: لا يمكن إعتبار أشكال فن برهان رياضي بل فقط يستفاد منها في توضيح المجموعة.

تعريف (3.1.2): يقال أن المجموعتان A و B إنهما متساويتان إذا وإذا فقط كانتا تحتويان على نفس العناصر بالظبط أو بعبارة أخرى إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A يكون موجود أيضا داخل المجموعة B وكذلك كل عنصر من عناصر المجموعة B يكون موجود أيضاً داخل المجموعة A وفي هذه الحالة نكتب

$[A=B] \equiv [\forall x \in A \leftrightarrow x \in B]$

بينما تكون المجموعتان A و B غير متساويتان إذا وجد عنصر واحد على الأقل من أحد المجموعتين لا ينتمي إلى المجموعة الأخرى وفي هذه الحالة نكتب $A \neq B$

مثال: لتكن

$$A = \{5, 5, 2, 1, 6\},\ B = \{1, 6, 2, 5, 2\}$$

إذن المجموعتان متساويتان ونكتب:

$$A = B = \{5, 2, 1, 6\}$$

مثال: لتكن

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: -1 \leq x < 4\},\ B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

إذن المجموعتان متساويتان ونكتب: $A = B$

مثال: لتكن

$A = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad B = \{1,2\}, C = \{1,2,2,1\}$

إذن المجموعات متساوية ونكتب: $A = B = C$

مثال: لتكن

$A = \{x \in \mathbb{Z}: -1 \leq x < 4\}, \quad B = \{-2,0,1,2,3\}$

إذن المجموعتان غير متساويتان لأن العنصر $-1 \in A, -1 \notin B$

كذلك العنصر $-2 \in B, -2 \notin A$ وفي هذه الحالة نكتب: $A \neq B$

تعريف (3.1.3): المجموعة A تكون مجموعة جزئيه من B إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B بمعنى إذا كان لكل $x \in A$ فإن $x \in B$ وفي هذه الحاله نكتب $A \subseteq B$ حيث

$A \subseteq B \equiv [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

مثال: لنفرض أن $A = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 < x \leq 11\}$

اذن $A \subset B$.

ملاحظه:

- نقول أن المجموعة A ليست مجموعة جزئية من B وتكتب $A \not\subset B$ إذا وجد على الأقل عنصر واحد x من A لا ينتمي إلى B ويمكن كتابتة ذلك ب

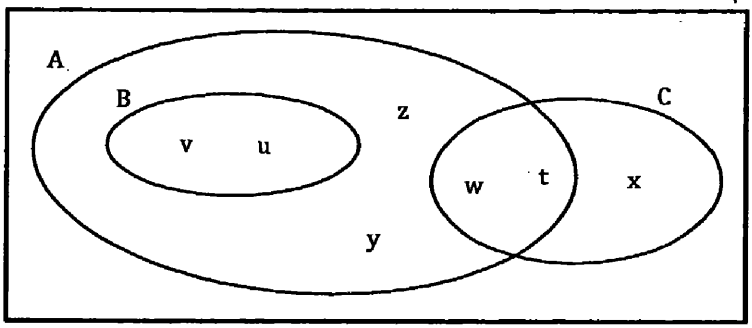
$A \not\subset B \equiv [\exists x \in A, x \notin B]$

- نقول أن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (proper subset) من B وتكتب $A \subset B$ إذا كانت A مجموعة جزئية من B و $A \neq B$ وفي هذه الحالة يوجد على الأقل عنصر واحد من المجموعة B لا ينتمي إلى المجموعة A .
- المجموعتان A, B يقال أنهما مجموعات قابلة للمقارنة (Comparable Sets) إذا كانت أحد المجموعتان مجموعة جزئية من الأخرى وهذا يحدث إذا كانت $A \subset B$ أو $B \subset A$ وغير ذلك تكون المجموعتان غير قابلتان للمقارنة .

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{u, v, w, t, y, z\}, \quad B = \{u, v\}, \quad C = \{w, t, x\}$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$B \subset A, \quad C \not\subset A$

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{0,1,2,3,5\}, \quad B = \{0,2,3,4\}, \quad C = \{0,1,3\}$

إذن:

$C \subset A, \quad B \not\subset A, \quad A \not\subset B$

إذن المجموعات A, C قابلة للمقارنة بينما المجموعات A, B غير قابلة للمقارنة.

نظرية (3.1.4): إذا كانت A و B و C فإن:

1. $A \subseteq A$.
2. إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.
3. $A = B$ إذا وإذا فقط كان $A \subseteq B, B \subseteq A$.

البرهان:

أولاً: لكل $x \in A$ فإن $x \in A$ إذن: $A \subseteq A$.

ثانياً: إذا كانت $x \in A$ و $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ وبما أن $B \subseteq C$ فإن $x \in C$ إذن $A \subseteq C$.

ثالثاً: $A = B$ إذا وإذا فقط كان:

$$[\forall x \in A \leftrightarrow x \in B] \equiv [\forall x \in A \rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \rightarrow x \in A]$$
$$\equiv [A \subseteq B] \wedge [B \subseteq A]$$

نظرية (3.1.5):

1. المجموعة الخالية φ تكون دائماً مجموعة جزئية من أي مجموعة أخرى.

2. المجموعة الخالية φ تكون دائما وحيدة.

البرهان:

أولاً: نفرض جدلا أن $\varphi \not\subset A$

إذن يوجد عنصر x بحيث $x \in \varphi$ ولكن $x \notin A$ وبالطبع هذا مستحيل أن يكون $x \in \varphi$

إذن $\varphi \subset A$

ثانياً: إذا إفترضنا أنه يوجد مجموعتين خاليتين φ_1 و φ_2 فمن الفقرة الأولى:

إذا كانت φ_1 مجموعة خالية فإن $\varphi_1 \subset \varphi_2$ .....(1)

وإذا كانت φ_2 مجموعة خالية فإن $\varphi_2 \subset \varphi_1$ .....(2)

إذن من (1) و (2) نجد أن $\varphi_1 = \varphi_2$

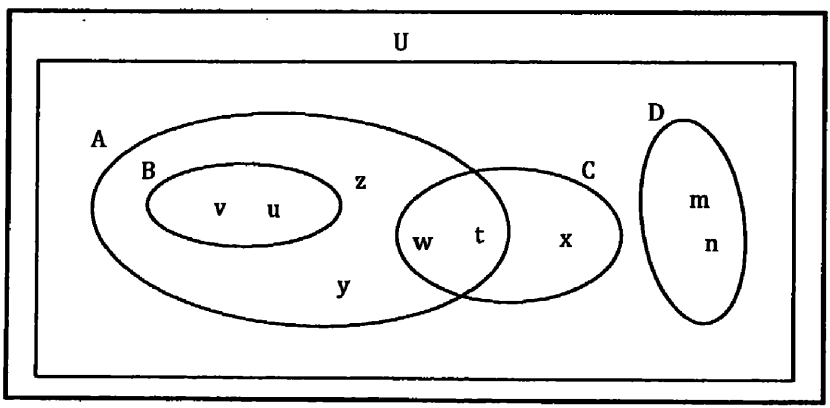
(3-2) المجموعة الشاملة Universal set

في أي مسألة من مسائل المجموعات لا بد من وجود مجموعة كاملة (شاملة) U بحيث تكون جميع المجموعات التي ندرسها تكون مجموعات جزئية من U أو بمعنى آخر يجب أن تكون جميع عناصر المجموعات الجزئية تنتمي جميعها إلى U وفي العادة عند إستخدام أشكال فن فإن المجموعة الشاملة تأخذ شكل المستطيل وبداخلها تقع المجموعات الجزئية.

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{u, v, w, t, y, z\}$, $B = \{u, v\}$, $C = \{w, t, x\}$, $D = \{m, n\}$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$A \subset U, \quad B \subset U, \quad C \subset U, \quad B \subset A$

$U = \{u, v, w, t, y, z, x, m, n\}$

مثال: إذا كان:

$A = \{1,3,5,7,9\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{0,1,2,11\}$

إذن من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_2 = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_3 = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{Z}$

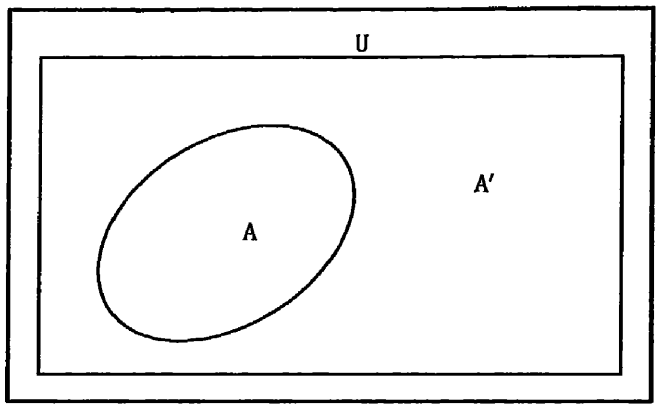
إذن المجموعة الشاملة على أرض الواقع من الممكن أن نختارها بأكثر من طريقة ولكن أتفق الرياضيون بأن تجاه أية مسألة من مسائل المجموعات لابد أولا من تحديد مجموعة U لا تتغير داخل المسألة بحيث كل المجموعات الجزئية تكون داخلها وهذه U هي المجموعة الشاملة وبالتالي فإن المجموعة الشاملة بهذا المفهوم تكون وحيدة .

تعريف (3.2.1): ليكن U تكون مجموعة شاملة و A مجموعة جزئية منها فإن المجموعة المتكونة من جميع عناصر U التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة (مكملة) A ونرمز لها بالرمز A' وبالتالي تكون:

$A' = \{x \in U, x \notin A\} = U - A = U \backslash A$

ملاحظات:

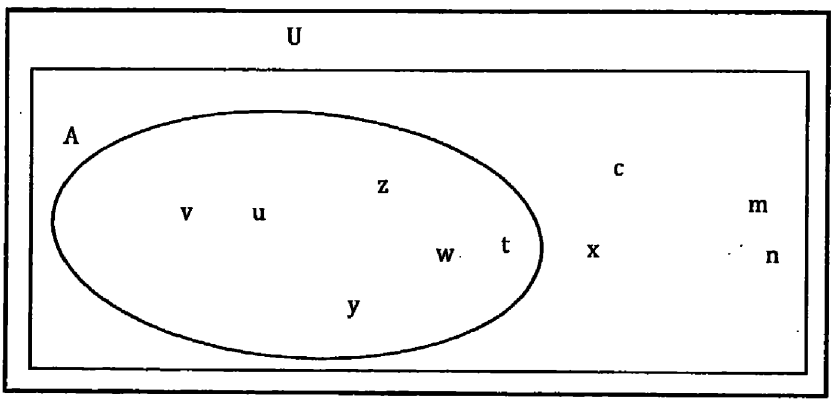
1. من الممكن أن نوصف المجموعة المتممة A' بإستخدام أشكال فن كما يلي:



2. دائما يكون $A \cup A' = U$
3. دائما يكون $A = U - A'$

مثال: إذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{u, v, y, z, w, t, x, c, m, n\}$

ولها المجموعة الجزئية $A = \{u, v, y, z, w, t\}$



فإن المجموعة المتممة للمجموعة A هي:

$A' = \{x, c, m, n\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq 0\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكـون المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: x < 0\}$

مثال: إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكـون المجموعة المتممة لA هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية أي أن:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: x \text{ is odd}\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \leq -3,\ x > 5\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكـون المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: -3 < x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال: إذا كانت $A = \{(x,y): x^2 + y^2 \geq 4\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{(x,y): x^2 + y^2 < 4\}$

نظرية (3.2.2): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

1. $(A')' = A$
2. $\varphi' = U$
3. $U' = \varphi$
4. $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$

5. $A = B \leftrightarrow B' = A'$

6. if $A \subseteq B$ then $A' \cap B = \varphi$

7. if $A \subseteq B$ then $A' \cup B = U$

البرهان:

أولاً: بما أن

$$x \in A \leftrightarrow x \notin A' \leftrightarrow x \in (A')'$$

إذن:

$$(A')' = A$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$(A')' = U - A' = A$$

ثانياً:

بما أن:

$$x \notin \varphi \leftrightarrow x \in \varphi' = U$$

إذن:

$$\varphi' = U$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$\varphi' = U - \varphi = U$$

ثالثاً:

بما أن:

$$x \in U \leftrightarrow x \notin U' = \varphi$$

إذن:

$$U' = \varphi$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$U' = U - U = \varphi$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$\varphi = (\varphi')' = (U)' = U'$$

رابعاً:

$$A \subseteq B \leftrightarrow [x \in A \rightarrow x \in B] \leftrightarrow [x \notin A' \rightarrow x \notin B'] \leftrightarrow A' \subseteq B'$$

خامساً:

$$A = B \leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \leftrightarrow [A' \subseteq B' \wedge B' \subseteq A'] \leftrightarrow A' = B'$$

سادساً:

$$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A' \rightarrow A \cap B' \subseteq A \cap A' \rightarrow A \cap B' \subseteq \varphi$$

ولكن: $Q \subseteq A \cap B'$

إذن: $A \cap B' = \varphi$

سابعاً:

$$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A' \rightarrow B \cup B' \subseteq B \cup A' \rightarrow U \subseteq B \cup A'$$

ولكن: $B \cup A' \subseteq U$

إذن: $B \cup A' = U$

تعريف (3.2.1): ليكن A مجموعة فإن P(A) هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من A وتسمى مجموعة قوى A (power set of A) ويمكن كتابتها ب:

$$P(A) = \{X: X \subseteq A\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$ فإن

$$P(A)=\{\varphi,\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

ملاحظات:

1. عناصر المجموعة P(A) هي فئة كل المجموعات الجزئية من A .
2. $A \notin P(A)$ ولكن $A \in P(A)$ بمعنى أنه إذا كانت $X \in P(A)$ فإن $X \subseteq A$.
3. دائما تكون المجموعات A و φ مجموعات جزئية من A لذا فإن مجموعة القوى P(A) هي مجموعة غير خالية.
4. إذا كانت $A=\varphi$ فإن $P(A)=\{\varphi\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^0 = 1$.

وإذا كانت $A=\{a\}$ فإن $P(A)=\{\varphi, A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^1 = 2$.

وإذا كانت $A=\{a, b\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\},A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^2 = 4$.

وإذا كانت $A=\{a, b, c\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^3 = 8$.

مبرهنة (3.2.4): إذا كانت A هي مجموعة عدد عناصرها يساوي n عنصر فإن $|P(A)| = 2^n$

البرهان:

إذا كانت A هي مجموعة عدد عناصرها يساوي n عنصر فإن P(A) تحتوي على:

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ مجموعة جزئية تتكون من 0 عنصر وهي بالفعل المجموعة الخالية φ .
2. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ مجموعة جزئية فردية.
3. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ مجموعة جزئية ثنائية.
4. $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ مجموعة جزئية ثلاثية.
5. ...
6. $\binom{n}{n} = 1$ مجموعة جزئية تتكون من n عنصر وهي بالفعل المجموعة A .

وبالتالي يكون عدد عناصر العدد الكلي لعناصر المجموعة P(A) هو:

$$|P(A)| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = (1+1)^n = 2^n$$

ملاحظة: لقد إستخدمنا في برهان المبرهنة السابقة مفكوك ذات الحدين:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

مبرهنة (3.2.5): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) \subseteq P(B)$.
2. $A = B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) = P(B)$.

البرهان:

(1):

أولا: نفرض أن $A \subseteq B, x \in P(A)$ فإن $x \in A$

وبما أن $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ وبالتالي $x \in P(B)$

إذن:

$P(A) \subseteq P(B)$

ثانيا: إذا كان $P(A) \subseteq P(B)$ **وبما أن** $A \in P(A)$ **فإن** $A \in P(B)$ **إذن:**

$A \subseteq B$

:(2)

$$A = B \leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \leftrightarrow [(P(A) \subseteq P(B)) \wedge (P(B) \subseteq P(A))] \leftrightarrow P(A) = P(B)$$

ملاحظة: فيما يلي سوف ندرس بالتفصيل العمليات الجبرية على المجموعات:

(3-3) إتحاد المجموعات

تعريف (3.3.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن الإتحاد $A \cup B$ هوالمجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين A أو B أي أن:

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

ملاحظات:

1. $A \cup B$ هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في A أو موجودة في B أو موجودة في كلا من A و B معا.
2. $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
3. $x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
4. من الممكن أن نعمم تعريف الإتحاد على n مجموعة كما يلي:

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x: x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

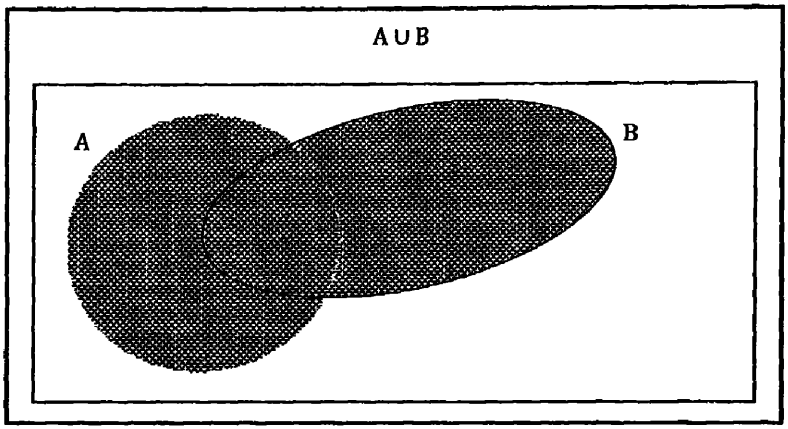
5. من الممكن أن نستخدم جدول الإنتماء لإتحاد A و B وهو يشابه جدول الصواب للتقرير OR فنرمز بالحرف T في الحالة التي يكون فيها $x \in A$ وبالحرف F عندما يكون $x \notin A$ وبالتالي يكون الجدول كما يلي:

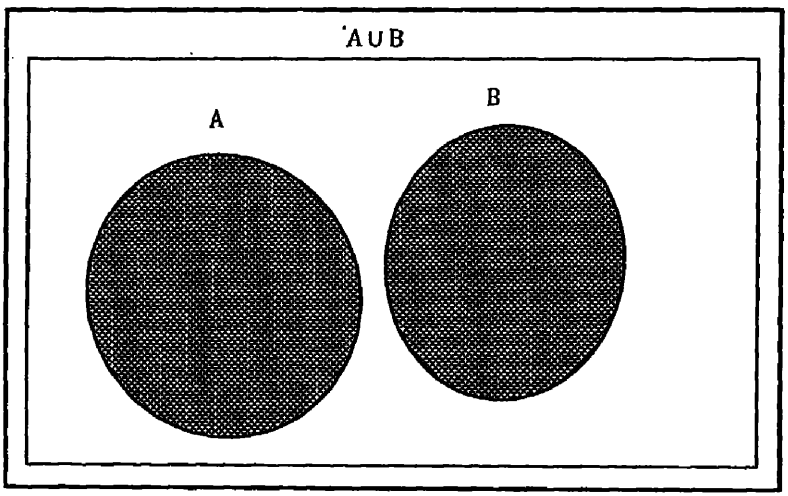
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

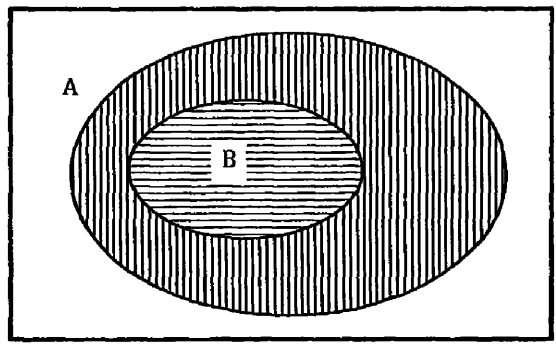
واضح من الجدول أن:

- $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- $x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

6. بإستخدام أشكال فن يمكن وصف إتحاد المجموعتين A و B كما يلي:







مثال: إذا كانت A مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية و B هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية فإن $A \cup B = \mathbb{Z}$.

مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{2,4,6,7,8,9\}$ فإن:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$$

نظرية (3.3.2): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cup A = A$
2. $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$
3. $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$
4. $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2 \rightarrow A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$
5. $A \cup \varphi = A$
6. $A \cup U = U$

البرهان:

أولاً: بما أن:

$$x \in A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A$$

إذن:

$$A \cup A = A$$

ثانياً: بما أن:

$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

إذن:

$A \subseteq A \cup B$

بالمثل يمكن إثبات أن $B \subseteq A \cup B$

ثالثاً: نفرض أولاً أن $A \cup B = B$, $x \in A$ وبالتالي نحصل على $x \in B$

إذن $A \subseteq B$

عكسياً: نفرض أن $A \subseteq B$, $x \in A \cup B$ فإن $x \in A \vee x \in B$ ولكن $A \subseteq B$

إذن $x \in B$ وبالتالي نحصل على $A \cup B \subseteq B$ .....(1)

ولكن في الأصل يكون $B \subseteq A \cup B$ .....(2)

إذن من (1) و (2) ينتج $B = A \cup B$

رابعاً: نفرض أن $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2$, $x \in A_1 \cup A_2$

وبالتالي يكون $x \in A_1 \vee x \in A_2$ وبما أن $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2$

إذن نحصل على $x \in B_1 \vee x \in B_2$ وبالتالي تكون $x \in B_1 \cup B_2$

إذن $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$

خامساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$ وبوضع $B = \varphi$ نحصل مباشرة على $A \cup \varphi = A$

سادساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$ وبوضع $B = U$ نحصل مباشرة على $A \cup U = U$

نظرية (3.3.3): إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

البرهان:

أولاً:

$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$

إذن: $A \cup B = B \cup A$

ثانياً:

$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$x \in A \vee x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

إذن: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3-4) تقاطع المجموعات

تعريف (3.4.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن التقاطع $A \cap B$ هوالمجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين A و B معا.

أي أن:

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

ملاحظات:

1. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
2. $x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$
3. من الممكن أن نعمم تعريف التقاطع على n مجموعة كما يلي:

$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x: x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$

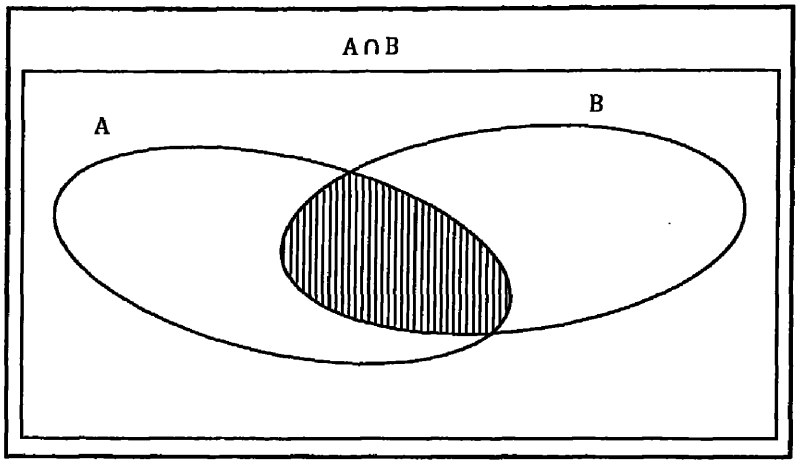
4. من الممكن أن نستخدم جدول الإنتماء لتقاطع A و B وهو يشابه جدول الصواب للتقرير AND فنرمز بالحرف T في الحالة التي يكون فيها $x \in A$ وبالحرف F عندما يكون $x \notin A$ وبالتالي يكون الجدول كما يلي:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

واضح من الجدول أن:

- $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- $x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

5. بإستخدام أشكال فن يمكن وصف إتحاد المجموعتين A و B كما يلي:



مثال: إذا كانت $A=\mathbb{Z},\ B=\left\{\frac{4}{n}, n\in\mathbb{Z}^*\right\}$ فإن $A\cap B=\{4,2,1,-1,-2,-4\}$

مثـــال: إذا كانـــت $A=\{x: x=3n, n\in\mathbb{Z}\},\ B=\{x: x=2n, n\in\mathbb{Z}\}$ فـــإن

$A\cap B=\{x: x=6n, n\in\mathbb{Z}\}$

مثال: إذا كانت $A=\{a,b,c\},\ B=\{b,c,d,e\},\ C=\{a,b,d\}$

فإن $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=\{b\}$

مثال: لنفرض أن $A=\{x\in\mathbb{Z}: 3\le x<9\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}: -1<x\le 6\}$ فان

1. إتحاد المجموعتان A و B هو $A\cup B=\{x\in\mathbb{Z}: 0\le x\le 8\}$
2. تقاطع المجموعتان A و B هو $A\cap B=\{x\in\mathbb{Z}: 3\le x\le 6\}$

نظرية (3.4.2): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A\cap A=A$
2. $A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B$
3. $A\cap B=A\leftrightarrow A\subseteq B$
4. $A_1\subseteq B_1, A_2\subseteq B_2\rightarrow A_1\cap A_2\subseteq B_1\cap B_2$
5. $A\cap\varphi=\varphi$
6. $A\cap U=A$

البرهان:

أولاً: بما أن:

$x \in A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

إذن:

$A \cap A = A$

ثانياً: بما أن

$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

إذن:

$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$

ثالثاً: نفرض أولاً أن $x \in A, A \cap B = A$ وبالتالي نحصل على $x \in A \cap B$

فإن $x \in A \wedge x \in B$ إذن $x \in B$ إذن $A \subseteq B$

عكسياً: نفرض أن $x \in A \subseteq B$ إذن $x \in B$

وبالتالي نحصل على $x \in A \wedge x \in B$

إذن $x \in A \cap B$ إذن $A \subseteq A \cap B$ .....(1)

ولكن في الأصل يكون $A \cap B \subseteq A$ .....(2)

إذن من (1) و (2) ينتج $A = A \cap B$

رابعاً: نفرض أن $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2, x \in A_1 \cap A_2$

وبالتالي يكون $x \in A_1 \wedge x \in A_2$ وبما أن $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2$

إذن نحصل على $x \in B_1 \wedge x \in B_2$ وبالتالي تكون $x \in B_1 \cap B_2$

إذن $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$

خامساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cap B = B \leftrightarrow B \subseteq A$ وبوضع $B = \varphi$ نحصل مباشرة على $A \cap \varphi = \varphi$

سادساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$ وبوضع $B = U$ نحصل مباشرة على $A \cap U = A$

نظرية (3.4.3): إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cap B = B \cap A$

2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

البرهان:

أولاً:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$$

إذن: $A \cap B = B \cap A$

ثانياً:

$$x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$$

$$x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

إذن: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ثالثاً:

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in B \cup C] \leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in B \vee x \in C]$$

$$\leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B] \vee [x \in A \wedge x \in C] \leftrightarrow [x \in A \cap B] \vee [x \in A \cap C]$$

إذن: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

رابعاً:

$$x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B \cap C] \leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B \wedge x \in C]$$

$$\leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge [x \in A \vee x \in C] \leftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge [x \in A \cup C]$$

إذن: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مبرهنة (3.4.4): إذا كانت $\{A_{i\in I}\}$ و $\{B_{j\in J}\}$ مجموعتان مفهرستان فإن:

1. $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

2. $(\cap_{i\in I} A_i) \cup (\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

البرهان:

سوف نبرهن الفقرة (1) ونترك الفقرة (2) كتمرين .

أولاً:

Let $y \in [(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)]$

$\Rightarrow \exists k \in I, y \in A_k \wedge \exists m \in J, y \in B_m$

$\Rightarrow \exists (k,m) \in I \times J : y \in (A_k \cap B_m)$

$\Rightarrow y \in \cup_{(i,j)} (A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) \subseteq \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$ .....(1)

ثانياً:

Let $y \in \cup_{(i,j)} (A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow \exists (k,m) \in I \times J : y \in (A_k \cap B_m)$

$\Rightarrow \exists (k \in I \wedge m \in J) : (y \in A_k \wedge y \in B_m)$

$\Rightarrow (\exists k \in I : y \in A_k) \wedge (\exists m \in J : y \in B_m)$

$\Rightarrow y \in \cup_{i\in I} A_i \wedge y \in \cup_{j\in J} B_j$

$y \in [(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)]$

$\Rightarrow \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \subseteq (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)$ .....(2)

من (1) و (2) ينتج:

$(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

مبرهنة (3.4.5): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

البرهان:

أولاً: بما أن $A \cap B \subseteq A$ فإن $P(A \cap B) \subseteq P(A)$ .....(1)

و بما أن $A \cap B \subseteq B$ فإن $P(A \cap B) \subseteq P(B)$ .....(2)

إذن من (1) و (2) ينتج أن $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ .....(3)

عكسياً: إذا كان $x \in P(A) \cap P(B)$ فإن $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$

وبالتالي يكون $x \subseteq A \wedge x \subseteq B$ إذن $x \subseteq A \cap B$

وبالتالي $x \in P(A \cap B)$ إذن $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$.....(4)

إذن من (3) و(4) نحصل على $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

ثانياً: بما أن $B \subseteq A \cup B, A \subseteq A \cup B$

فإن $P(B) \subseteq P(A \cup B),\ P(A) \subseteq P(A \cup B)$

إذن $P(B) \cup P(A) \subseteq P(A \cup B) \cup P(A \cup B) = P(A \cup B)$

ملاحظة: ليس ضروري أن يكون

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

كما سنوضح في المثال التالي:

نفرض أن $A = \{a, b\},\ B = \{a, c\}\ ,\ b \neq c$

إذن $P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},\ P(B) = \{\varphi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$

وبالتالي نحصل على:

$$P(A) \cup P(B) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولكن $A \cup B = \{a, b, c\}$ إذن:

$$P(A \cup B) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) ينتج لنا أن:

$$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$$

نظرية (2.4.6): نظرية دي مورجان

إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

البرهان:

أولاً:

$$x \in (A \cap B)' \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$$

إذن: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثانياً:

$$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

إذن: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

مبرهنة (3.4.7): إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

البرهان:

من قانون دي مرجان الأول:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$\Rightarrow U - (A \cap B) = (U - A) \cup (U - B)$$

فلو أخذنا U=A فإننا نحصل على:

$$A - (A \cap B) = (A - A) \cup (A - B)$$

$$\Rightarrow A - (A \cap B) = \varphi \cup (A - B)$$

$$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$$

مبرهنة (3.4.8): إذا كانت U المجموعة الشاملة و A مجموعة جزئية منها فإن:

$$A \cup A' = U$$

البرهان:

بما أن $A \cap A' = \varphi$

إذن $(A \cap A')' = \varphi'$

إذن $A \cup A' = U$

تعريف (3.4.1): نقول أن المجموعتين A و B مجموعتين منفصلتين إذا كان التقاطع $A \cap B = \varphi$ أي لا يوجد بينهما عنصر مشترك.

مبرهنة (3.4.10): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cap A' = \varphi$
2. $A \cap B = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A' \wedge A \subseteq B'$

البرهان:

أولاً:

$$x \in A \cap A' \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A' \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \leftrightarrow x \in \varphi \leftrightarrow A \cap A' = \varphi$$

ثانيا:

$x \in A \cap B = \varphi \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \notin B) \wedge (x \in B \rightarrow x \notin A)$

$\leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B') \wedge (x \in B \rightarrow x \in A')$

$\leftrightarrow A \subseteq B' \wedge A \subseteq B'$

نظرية (3.4.11): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

1. $A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \varphi$
2. $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = U$

البرهان:

أولا: نفرض جدلا أن $A \subset B,\ A \cap B' \neq \varphi$ معنى ذلك يوجد x بحيث:

$x \in A \cap B' \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B') \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.....(1)

ولكن $A \subset B$ و $x \in A$ تقتضي أن تكون $x \in B$ وهذا يتعارض بالطبع مع ما حصلنا عليه في (1) وبالتالي لفك هذا التعارض يجب أن يكون $A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \varphi$.

ثانيا: $A \subset B$ إذا وفقط إذا كان $B' \subset A'$ ولكن دائما يكون $B \subseteq B$

إذن $B \cup B' \subseteq A' \cup B$ ولكن $B \cup B' = U$

إذن $U \subseteq A' \cup B$.....(1)

ولكن دائما يكون $A' \cup B \subseteq U$ .....(2)

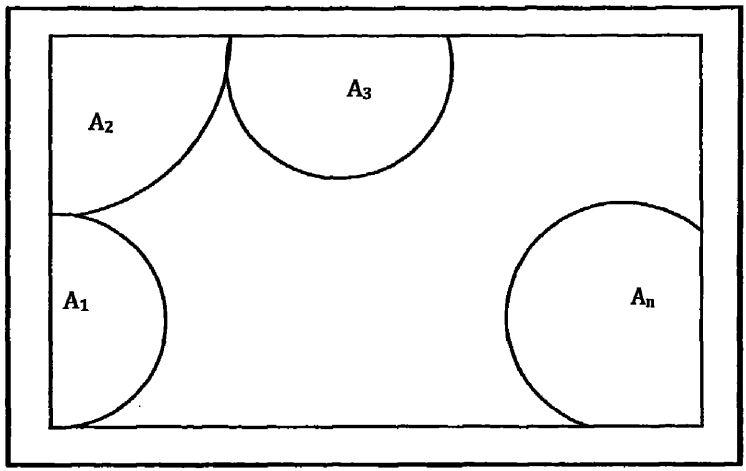
إذن من (1) و (2) نحصل على $A' \cup B = U$

إذن $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = U$

تعريف (3.4.12): ليكن U هي المجموعة الشاملة و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية منها فإننا نقول أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة (Partion) للمجوعة U إذا تحقق:

1. $U \neq \varphi$;
2. $A_i \cap A_j = \varphi \ \forall i \neq j$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$

وسوف نرمز للتجزئة $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بالرمز $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ ويمكن أن نقول أن $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ إنها تشكل تجزئة للمجموعة الغير خالية U إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة U ينتمي إلى مجموعة وحيدة من بين المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$.



ملاحظة: إذا كانت $A \subset U, A \neq \varphi$

فإن $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \varphi$

وبالتالي فإن $[A, A']$ تمثل تجزئة للمجموعة U .

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d, d\}$

فإن $[\{e\}, \{d\}, \{a, b, c\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

كذلك $[\{e\}, \{c, d\}, \{a, b\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فإن $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{5\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

بينما $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

$\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\} \neq \varphi$

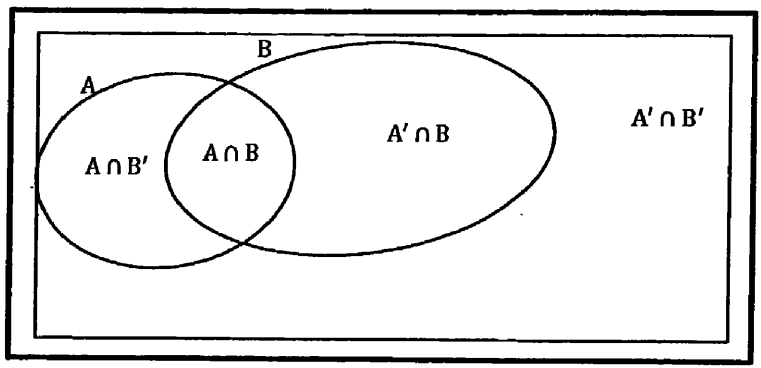
كذلك $[\{3, 6\}, \{1, 2\}, \{5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

$\{3, 6\} \cup \{1, 2\} \cup \{5\} \neq A$

نظرية (3.4.13): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:
$[A\cap B, A\cap B', A'\cap B, A'\cap B']$

تمثل تجزئة للمجموعة U.

البرهان:



أولاً: يمكن إثبات أن تقاطع أي إثنين يكون φ فمثلا:

$$(A\cap B)\cap(A\cap B') = A\cap(B\cap B') = A\cap\varphi = \varphi$$

ثانياً:

$$(A\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B)\cup(A'\cap B')$$

$$= [A\cap(B\cup B')]\cup[A'\cap(B\cup B')] = [A\cap U]\cup[A'\cap U] = A\cup A' = U$$

ملاحظة: بصورة عامة إذا كان $P_1 = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ وكان $P_2 = [B_1, B_2, \dots, B_n]$

فإن الضرب المباشر:

$$P_1 \otimes P_2 = [A_1\cap B_1, A_1\cap B_2, \dots, A_1\cap B_n, A_2\cap B_1, \dots, A_n\cap B_n]$$

يمثل تجزئة أيضاً للمجموعة U .

مثال: ليكن:

$$[a] = \{x\in\mathbb{Z}: x = a+kn, k\in\mathbb{Z}\}$$

فإذا كانت n=3 فإننا نحصل على:

$$[0] = \{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\}$$
$$[1] = \{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\}$$

$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

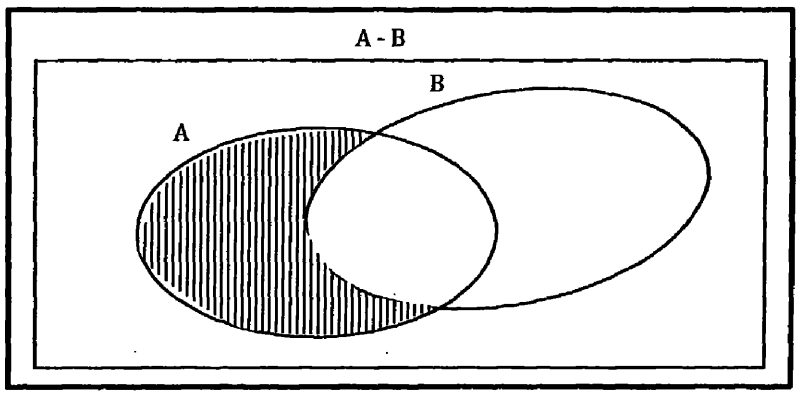
وبالتالي فإن $[[2], [1], [0]]$ تعتبر تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

(3-5) الفرق بين مجموعتين The Difference

تعريف (3.5.1): لتكن A و B مجموعتين فإن المجموعة التي تحتوي على العناصر التي تنتمي إلى A وغير منتمية إلى B تسمى فرق A عن B ويرمز لها بالرمز A-B أو A\B ويمكن وصفها ب:

$$A - B = \{x \in A: x \notin B\}$$

بإستخدام أشكال فن يمكن وصف الفرق A-B كما يلي:



أمثلة:

1. إذا كانت $A=\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و $B=\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الكسرية فإن A-B هي مجموعة الأعداد الغير كسرية.
2. إذا كانت المجموعات $A=\{a, b, c, d\}, B=\{a, c, e, f\}, C=\{b, e\}$

فإن $A-B=\{b, d\}, B-A=\{e, f\}$,

$B-C=\{a, c, f\}, (A-B)-C=\{d\}, A-(B-C)=\{b, d\}$

وبالتالي يجب أن نلاحظ أن:

أ. عملية الفرق غير إبدالية وذلك لأن $A-B \neq B-A$

ب. عملية الفرق غير تجميعية وذلك لأن $(A-B)-C \neq A-(B-C)$

3. إذا كان $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B=\{2, 3, 6\}$

فإن $A-B=\{1, 4, 5\}$ و $B-A=\varphi$

نظرية (3.5.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subseteq A$
3. $A - A = \varphi$
4. $A - \varphi = A$
5. $\varphi - A = \varphi$
6. $U - A = A'$
7. $A' - B' = B - A$
8. $B - A = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$
9. If $A \cap B = \varphi$ then $B - A = B,\ A - B = A$

البرهان:

أولاً:

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \leftrightarrow x \in A \cap B'$$

ثانياً:

$$A - B = A \cap B' \subseteq A$$

ثالثاً:

$$A - A = A \cap A' = \varphi$$

رابعاً:

$$A - \varphi = A \cap \varphi' = A \cap U = A$$

خامساً:

$$\varphi - A = \varphi \cap A' = \varphi$$

سادساً:

$U - A = U \cap A' = A'$

سابعاً:

$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

ثامناً:

$B - A = \varphi \leftrightarrow B \cap A' = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$

حيث من نظرية (2.4.9) يكون دائماً $B \cap A' = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$

تاسعاً:

دائماً:

$A - B = A \cap B' \subseteq A$ ..... (1)

إذا كان $A \cap B = \varphi$ وكان $a \in A$ فإن $a \notin B$

إذن $a \in B'$

إذن $a \in A \cap B'$

إذن $a \in A - B$

إذن $A \subseteq A - B$ ..... (2)

من (1) و (2) نحصل على $A - B = A$

بالمثل يمكن إثبات أنه إذا كان $A \cap B = \varphi$ فإن $B - A = B$

نظرية (3.5.3): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
3. $A \cup (B - C) = A \cup B - A' \cap C$
4. $A \cap (B - C) = A \cap B - C$
5. $(A \cap B) - C = (A \cap B) - (A \cap C)$
6. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

البرهان:

$$1.\ A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap(B'\cap C')$$
$$=(A\cap B')\cap(A\cap C')=(A-B)\cap(A-C)$$

$$2.\ A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$$
$$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$$

$$3.\ A\cup(B-C)=A\cup(B\cap C')=(A\cup B)\cap(A\cup C')$$
$$=(A\cup B)\cap(A'\cap C)'=A\cup B-A'\cap C$$

حيث

$$(A'\cap C)'=(A')'\cup C'=A\cup C'$$

$$4.\ A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=A\cap B-C$$

$$5.\ (A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$
$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$=\varphi\cup[(A\cap B)\cap C']=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$$

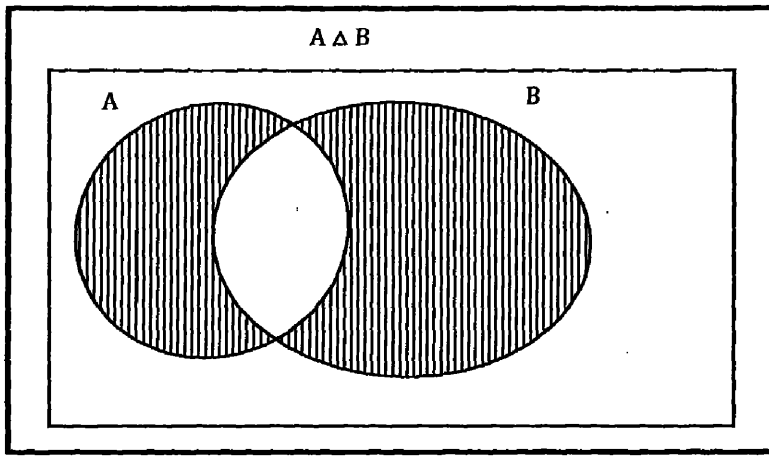
$$6.\ (A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'=(A\cap C')\cup(B\cap C')$$
$$=(A-C)\cup(B-C)$$

(3-6) الفرق التناظري بين مجموعتين The Symmetric Difference

تعريف (3.6.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن مجموعة الفرق التناظري للمجموعتين A و B هي مجموعة إتحاد المجموعتين A-B و B-A ويرمز لها بالرمز $A\Delta B$ ويمكن وصفها ب:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$

بإستخدام أشكال فن يمكن وصف الفرق A-B كما يلي:



ملاحظة: جدول الإنتماء لعملية الفرق التناظري كما يلي:

x∈A	x∈B	x∈AΔB
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وهذا الجدول يشابه جدول XOR

مثال: إذا كانت المجموعتين A={a, b, c, d}, B={a, c, e, f}

فإن A-B={b, d}, B-A={e, f} وبالتالي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{b, d\} \cup \{e, f\} = \{b, d, e, f\}$$

مثال: إذا كانت A={1, 2, 4, 6, 7, 8}, B={3, 4, 5, 7}

فإن A-B={1, 2, 6, 8}, B-A={3, 5} وبالتالي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6, 8\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}, B=\{1,4,5\}, U=\{1,2,3,4,5,6\}$

فإن $A \cap B = \{1\}$

و $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

و $A - B = \{2,3\}$

و $B - A = \{4,5\}$

و $A \Delta B = \{2,3,4,5\}$

و $A' = \{4,5,6\}$

و $B' = \{2,3,6\}$

نظرية (3.6.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

البرهان:

$$\begin{aligned}(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ &= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \\ &= [\varphi \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \varphi] = (B \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B\end{aligned}$$

ملاحظة: بخلاف عملية الفرق فإن عملية الفرق التناظري تكون تبديلية وتجميعية كما تشير النظرية التالية:

نظرية (3.6.3): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \Delta B = B \Delta A$
2. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

البرهان:

1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

2. لإثبات الفقرة الثانية سوف نستخدم جدول الإنتماء كما يلي:

A	B	C	AΔB	(AΔB)ΔC	BΔC	AΔ(BΔC)
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

نظرية (3.6.4): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A \Delta \varphi = A$
2. $A \Delta A = \varphi$
3. $A \Delta A' = U$
4. $A \Delta U = A'$
5. $A \Delta B = \varphi \leftrightarrow A = B$

البرهان:

1. $A \Delta \varphi = (A - \varphi) \cup (\varphi - A) = A \cup \varphi = A$
2. $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \varphi \cup \varphi = \varphi$
3. $A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = U$
4. $A \Delta U = (A - U) \cup (U - A) = \varphi \cup A' = A'$
5. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \varphi \leftrightarrow [A - B = \varphi] \wedge [B - A = \varphi] \leftrightarrow$
   $[A \subseteq B] \wedge [B \subseteq A] \leftrightarrow A = B$

نظرية (3.6.5): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
2. $(B \Delta C) - A = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

البرهان:

1. $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = [(A \cap B) \cap (A \cap C)'] \cup$

$[(A \cap C) \cap (A \cap B)'] = [(A \cap B) \cap (A' \cup C')] \cup [(A \cap C) \cap (A' \cup B')]$

$= [(A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C')] \cup [(A \cap C \cap A') \cup (A \cap C \cap B')]$

$= [\varphi \cup (A \cap B \cap C')] \cup [\varphi \cup (A \cap C \cap B')]$

$= (A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') = A \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]$

$= A \cap [B \Delta C]$

2. $(A \cup B)\Delta(A \cup C) = [(A \cup B) \cap (A \cup C)'] \cup [(A \cup C) \cap (A \cup B)']$

$= [(A \cup B) \cap (A' \cap C')] \cup [(A \cup C) \cap (A' \cap B')]$

$= [(A \cap A' \cap C) \cup (B \cap A' \cap C')] \cup [(A \cap A' \cap B') \cup (C \cap A' \cap B')]$

$= [\varphi \cup (B \cap A' \cap C')] \cup [\varphi \cup (C \cap A' \cap B')]$

$= (B \cap A' \cap C') \cup (C \cap A' \cap B') = [(B \cap C') \cup (C \cap B')] \cap A'$

$= (B \Delta C) \cap A' = (B \Delta C) - A$

(3-7) حاصل الضرب الكارتيزي The Cartesian product

تعريف (3.7.1): إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين فإننا نعرف الزوج المرتب (a, b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ والعنصر الأول a يسمى المركبة الأولى (المسقط الأول) والعنصر الثاني b يسمى المركبة الثانية (المسقط الثاني).

ملاحظات:

1. يتساوى زوجان مرتبان إذا تساوي عناصر الزوج الأول على الترتيب مع عناصر الزوج الثاني بمعنى:

$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d,$

$(a,b) \neq (c,d) \leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d$

2. الرمز (a, b) يعني زوج مرتب وعلى وجهه العموم يكون $(a,b) \neq (b,a)$ بينما الرمز {a, b} يرمز إلى المجموعة (الفئة) التي تحتوي على العنصرين a, b ولا يهم الترتيب بمعنى $\{a,b\} = \{b,a\}$.

تعريف (3.7.2): إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة A في المجموعة B هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B وتكتب $A \times B$ وتقرأ A في B وهي عبارة عن:

$$A \times B = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$$

ملحوظة: يرمز أحيانا للمجموعة $A \times A$ بالرمز A^2 وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد n من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i\}$$

وبالتالي إذا كانت المجموعات $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ فإن:

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n$$

مثال:- لنفرض أن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{x,y\}$ فإحسب $A \times B, B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$$

$$B \times A = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$$

مثال: إذا كانت A={a, b, c} و B={1, 2} مجموعتين فإكتب A×B, B×A, A×A, B×B

الحل:

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

$$A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

$$B \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{a, b\}$ فإكتب $A\times P(A)$

الحل:

$P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, A\}$

$A \times P(A) = \{(a, \varphi), (a, \{a\}), (a, \{b\}), (a, A), (b, \varphi), (b, \{a\}), (b, \{b\}), (b, A)\}$

مبرهنة (3.7.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A \times \varphi = \varphi \times A = \varphi$
2. If $A \neq B$, then $A \times B \neq B \times A$
3. $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$
4. If $A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2$, then $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$

البرهان:

أولا: إذا كان $A \times \varphi \neq \varphi$ فإنه يوجد $(a,b) \in A \times \varphi$ حيث $a \in A, b \in \varphi$ وهذا يناقض كون φ هي الفئة الخالية والتي لا تحتوي أي عنصر.

ثانيا: إذا كانت $A \neq B$ فإنه يوجد $a \in A$ ولكن $a \notin B$ وبالتالي $(a,b) \in A \times B$ ولكن $(a,b) \notin B \times A$ إذن $A \times B \neq B \times A$.

ثالثا:

$$A = B \leftrightarrow \forall a \in A, b \in B \leftrightarrow a \in B, b \in A \leftrightarrow (a,b) \in A \times B \leftrightarrow (a,b) \in B \times A \leftrightarrow A \times B = B \times A$$

رابعا: إذا كان $(a,b) \in A_1 \times B_1$ فإن $a \in A_1 \wedge b \in B_1$ ولكن $A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2$ إذن $a \in A_2 \wedge b \in B_2$ وبالتالي $(a,b) \in A_2 \times B_2$

ملحوظة: يمكن إثبات الفقرة الثالثة من المبرهنة السابقة كما يلي:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \leftrightarrow [A \times B \subseteq B \times A] \wedge [B \times A \subseteq A \times B] \leftrightarrow A \times B = B \times A$$

مبرهنة (3.7.3): إذا كان $|A| = n, |B| = m$ فإن $|A \times B| = |B \times A| = nm$

البرهان:

نفرض أن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ وبالتالي:

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m), (a_2, b_1),$

$(a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m), \dots, (a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots, (a_n, b_m)\}$

إذن:

$$|A \times B| = \overbrace{m + m + \cdots + m}^{n-times} = nm$$

مبرهنة (3.7.4): ليكن A, B, C, D أربع مجموعات فإن:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

البرهان:

أولاً:

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$$
$$\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \leftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \wedge [(x, y) \in A \times C]$$
$$\leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

ثانياً:

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C)$$
$$\leftrightarrow x \in A \wedge [y \in B \vee y \in C] \leftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in A \times C]$$
$$\leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

ثالثاً:

$$(x, y) \in A \times (B - C) \leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B - C)$$
$$\leftrightarrow x \in A \wedge [y \in B \wedge y \notin C] \leftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \wedge [(x, y) \notin A \times C]$$
$$\leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$$

رابعاً:

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (C \cap D)$$
$$\leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \wedge [x \in C \wedge y \in D] \leftrightarrow [x \in A \cap C] \wedge [y \in B \cap D]$$
$$\leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$$

تمارين

1. إكتب ما يلي على شكل مجموعة داخل قوسين:
   - مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 2- و 5 .
   - مجموعة الأعداد الكسرية السالبة.
   - مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة $x^2+2x-3=0$.
   - مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.
   - مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة الفردية.
   - مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من 2.
   - مجموعة كل الأعداد التي جذورها تساوي 2.
   - مجموعة كل الأعداد الصحيحة بين 2 و 20.
   - مجموعة كل المستطيلات التي لها الطول أقل من 12 و العرض أكبر من 2.
   - مجموعة كل المربعات والتي لها القطر يساوي 5 .
   - مجموعة كل المستطيلات والتي لها القطر يساوي 5 .
   - مجموعة كل الدوائر والتي لها نصف القطر يساوي 5 .
2. أوصف المجموعات الأتية بالكلمات وأعطي مثال لعنصر ينتمي للمجموعة ومثال أخر لعنصر لا ينتمي إلى المجموعة لكل مما يأتي:

- $\{x\in\mathbb{Z}: x<2\}$
- $\{2^n: n\in\mathbb{Z}, n\geq 2\}$
- $\{(x,y): x,y\in\mathbb{Z}, x\geq 2\}$
- $\{(x,y): x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z},\ x+2y=11\}$
- $\{x\in\mathbb{Z}: 201+x=467\}$
- $\{x\in\mathbb{Z}: x^2+2x-3=0\}$
- $\{x\in\mathbb{R}: x-6=0\}$
- $\{x\in\mathbb{R} x^2-x-6=0\}$

- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 8 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4x + 5 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 3x - 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x - 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 4x^2 + 28x + 49 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + x - 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 27 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x^2 + 4 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + x^2 + x + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x^2 + 4 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^4 - 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^4 + 3x^2 - 4 = 0\}$

3. حدد ما إذا كانت العبارات الأتية تمثل مجموعة حسنة التعريف أم لا:

- مجموعة مضاعفات العدد 5.
- { x عدد صحيح زوجي }
- { x عدد صحيح زوجي و x عدد صحيح فردي }
- { x قطر عربي جميل }
- مجموعة الطلاب الأذكياء.
- مجموعة الحيوانات الجميلة.

- مجموعة الأدوات المفضلة.
- مجموعة الألوان الحسنه.
- مجموعة الشباب الناجح.
- مجموعة الأكلات الشهية.
- مجموعة الرجال الأوفياء.
- مجموعة الأيام المباركة.
- مجموعة الأسلحة .
- مجموعة الأسلحة النارية.

4. السؤال الرابع:

- إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات وكانت $A \subseteq B, B \subseteq C$ فإثبت أن $A \subseteq C$.
- إذا كانت $A = \{1, 3, -4, 7, 8\}$ و $B = \{-5, 2, 1, 0, 7\}$ فإحسب $A \cup B, A \cap B$.
- إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: -5 < x < 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 \leq x \leq 11\}$ فإحسب $A \cup B, A \cap B$.
- إذا كانت $A = \{0, 6, -3, 1, 2, 5\}$ و $B = \{0, 1, -3, 2\}$ و $C = \{0,1\ 5, 3, -3\}$ فإحسب $A \cup B, A \cup C, A \cap B \cap C, A \cap B \cup C, A \cup B \cup C, A \cup B \cap C$.
- إذا كانت $A \subseteq B$ فاثبت أن $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.
- إثبت أن لأي مجموعتين A, B فإن $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$.
- إعطي مثال لمجموعة خاليه.
- إعطي مثال لمجموعة لا نهائية.
- إذا كانت $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فأوجد $A \times A$.

5. أكمل الجدول التالي إذا كانت * تعني العمليات : $\cap, \cup, -, \Delta$ حيث:

*	Φ	{1}	{1, 2}	{1, 2, 3}
φ				
{1,2}				
{2, 3}				
{1, 2, 3}				

6. إعتبر المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ والمجموعات الجزئية منها هي:

$A = \{1,3,5,7\}, B = \{2,4,5,6,9\}, C = \{1,2,4,5\}, D = \{1,3,5,10\}$

فإحسب كلا من:

$A \cup B$, $A - D$, $B \cap D$, $A', (C \cap D) - A, A \cap (B \cup C)$,

$[A \cap B']'$, $[(A - C) - D]' - B$, $[(A \cup D) \cap (B \cap C)]'$

7. إعتبر المجموعة الشاملة $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ والمجموعات الجزئية منها هي:

$A = \{a, c, d\}, B = \{e, g\}, C = \{b, f\}, D = \{a\}, F = \{f, g\}$

- هل [A, B, C] تشكل تجزئة للمجموعة U .
- هل [D, E, F] تشكل تجزئة للمجموعة U .
- هل [A∩D, B∩E, C∩F] تشكل تجزئة للمجموعة U .

8. إعتبر المجموعتين $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $B=\{2, 5, 6, 9, 16\}$

- إحسب $A \times B$.
- إحسب $H=\{(a, b) \in A \times B: b=a2\}$
- إحسب $K=\{(a, b) \in A \times B: ab=6\}$

9. برهن أن

- $A-(B-C)=(A-B) \cup (A \cap C)$
- $(A-B)-C=A-(B \cup C)$

10. برهن أن المجموعتين A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كان المجموعتين $A \times C, B \times C$ منفصلتين لأجل كل مجموعة غير خالية C

11. ليكن A, B, C, D أربع مجموعات غير خالية فبرهن أن:

- $A \times B \subseteq C \times D$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq C, B \subseteq D$
- $A \times B = C \times D$ إذا وفقط إذا كان $A = C, B = D$

12. إثبت أن $A \cap B = A \cup B$ إذا وفقط إذا كان A=B

13. بسط ما يلي

- $A \cap (B \cup B)$
- $A \cup (A \cap B)$

- $A \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B' \cup C)$
- $A \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B' \cap C)$
- $A \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C' \cup D)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap B')$
- $[A' \cap (A \cup B)]'$
- $[A' \cap (B \cup C')]'$
- $(A \cap B) \cap (A' \cap B')$

14. إثبت ما يلي:

- $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$
- $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$
- $(X - Y) \cap (Z - T) = (X \cap Z) - (Y \cup T)$
- $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$
- $A - B = A \triangle (A \cap B)$
- $A \cup B = (A' \cap B')'$
- $A \cap B = (A' \cup B')'$
- $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

15. إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات و $P_1 = [A, A']$ و $P_2 = [B, B']$ و $P_3 = [C, C']$ فإحسب $P_1 \times P_2 \times P_3$

16. إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{-2,-1,1,2\}$ و $C = \{-3,-1,4\}$ و $U = A \cup B \cup C$ فإحسب كلا مما يأتي:

- $A \cup B$

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap C$
- $A \cap B \cap C$
- $A \cap B \cup C$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup A'$
- $B \cap U$
- A'
- $B - C$
- $A \Delta B$

17. إذا كانت U مجموعة كل الناس وكانت

A={x: شخص عربي x} ,

B={x: شخص يجيد الإنجليزية x},

C={x: شخص يجيد الفرنسية x}

فعبر عن المجموعات الأتية:

- A'
- $A \cap B$
- $B' \cap C'$
- $B \cup C$
- $A \cap (B \cap C)$
- $A' \cup (B \cap C)$
- $C \cup C'$
- U'

- $B \cap C'$
- $(B \cap C)'$

18. إذا كانت $U=\{1,2,3\}, A=\{1,2\}, B=\{1,3\}, C=\{3\}$ فإحسب:

- $(A \times B) \cap (B \times C)$
- $(A \times B) \cup (B \times C)$
- $A \times B \times C$
- $(A \times U) \cap (U \times C)$

19. إذا كانت $A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,4\}, C=\{4,5,6\}$ فإحسب:

- $A \times B$
- $B \times A$
- $A \times C$
- $C \times A$
- $B \times C$
- $C \times B$
- $(A \times B) \cap (B \times A)$
- $(A \times B) \cap (B \times C)$
- $A \times (B \cup C)$
- $(A \cup B) \times (A \cap C)$
- $A \times B \times C$
- $|A \times B \times C|$
- $|(C \times B) \cap (C \times A)|$
- $|(A \times B) \cup (A \times C)|$

20. إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{-2,3\}$ و $C = \{-1,-2,4\}$ و $\mathbb{U} = A \cup B \cup C$ فإحسب كلا مما يأتي :

- $A \cap B \cap C$
- $A \cap B \cup C$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup A'$
- $B \times A$
- B'
- $A - C$
- $A \Delta B$
- $(A \Delta B) \Delta C$
- $A \Delta (B \Delta C)$

الفصل الرابع

العلاقات

Relations

(4-1) العلاقة الثنائية

(4-2) تمثيل العلاقات

(4-3) أنواع العلاقات

(4-3-1) علاقة التركيب

(4-3-2) العلاقة الانعكاسية

(4-3-3) العلاقة التناظرية

(4-3-4) العلاقة المتعدية

(4-3-5) العلاقة التخالفية

(4-3-6) علاقة التكافؤ

تمارين

الفصل الرابع
العلاقات

(4-1) العلاقة الثنائية (Binary Relation)

تعريف (4.1.1): إذا كانت A, B مجموعتين وكانت $R \subseteq A \times B$ فإن R تسمى علاقة ثنائية من A إلى B .

ملاحظات:

1. A تسمى منطلق العلاقة R و B تسمى المستقر.
2. إذا كانت A=B فإن R تسمى علاقة ثنائية على A .
3. إذا كانت (a, b) زوج مرتب من R فإننا نعبر عن ذلك ب aRb أو $(a, b) \in R$ ونقول أن العنصر a مرتبط بالعنصر b بواسطة العلاقة R .

مثال: إذا كانت A={1,2,3} , B={1,2,4,5} فأحسب ما يلي:

1. $A \times B$
2. $R_1 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y\}$
3. $R_2 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x < y\}$
4. $R_3 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x > y\}$
5. $R_4 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 1\}$
6. $R_5 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x|y\}$
7. $R_6 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 3\}$

الحل:

1. $A \times B =$

$\{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5)\}$

2. $R_1 = \{(1,1), (2,2)\}$
3. $R_2 = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$
4. $R_3 = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$
5. $R_4 = \{(2,1), (3,2)\}$
6. $R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4)\}$
7. $R_6 = \varphi$

مثال: لتكن $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}, R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, c)\}$

1. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل؟
2. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على A مع التعليل؟
3. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على B مع التعليل؟
4. إذا كانت $R = \{(x,y): (x,y) \in B \times B \wedge x = y\}$ فإكتب عناصر R.

الحل:

$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$

1. نعم العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B لأن $R_1 \subset A \times B$
2. بما أن

$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية على A وذلك لأن $R_1 \subset A \times A$

3. بما أن

$B \times B = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 لا تمثل علاقة ثنائية على B وذلك لأن $R_1 \not\subset B \times B$ حيث $(a, b) \notin B \times B$

4.

$R = \{(b, b), (c, c)\}$

ملاحظة: إذا كانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B فإن $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$ تمثل أيضا علاقات ثنائية من A إلى B حيث:

$R_1 \cup R_2 = \{(a, b): a \in A, b \in B, (a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2\}$

$R_1 - R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \notin R_2\}$

مثال: إذا كانت $A=\{2, 5\}$, $B=\{3, 4, 10, 12\}$ وكانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B بحيث: R_1 هي العلاقة الثنائية aR_2b إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b و $a \in A, b \in B$ بينما R_2 هي العلاقة الثنائية aR_2b إذا وفقط إذا كان a يقسم b و $a \in A, b \in B$.

فأحسب كلاً من $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$

الحل:

$R_1 = \{(2,3), (2,4), (2,10), (2,12), (5,10), (5,12)\}$

$R_2 = \{(2,4), (2,10), (2,12), (5,10)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(2,3), (2,4), (2,10), (2,12), (5,10), (5,12)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(2,4), (2,10), (2,12), (5,10)\}$

$R_1 - R_2 = \{(2,3), (5,12)\}$

تعريف (4.1.2): إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فإن العلاقة العكسية للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كما يلي:

$R^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in R\}$

ملاحظات:

إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

1. العلاقة R من A الى B هي مجموعة جزئيه من $A \times B$ وبالتالي تكون:

$R = \{(a,b), a \in A, b \in B, aRb\}$

2. نطاق (المجال) العلاقة R (Domain) هي مجموعة كل العناصر $a \in A$ حيث $aRb, b \in B$ ويكتب:

$Dom(R) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$

3. النطاق المصاحب (المدى) للعلاقة R (Range) هي مجموعة كل العناصر $b \in B$ حيث $aRb, a \in A$ ويكتب

$Ran(R) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$

4. معكوس العلاقة R هي العلاقة R^{-1} من B الى A ويكتب:

$R^{-1} = \{(b,a): a \in A, b \in B, aRb\}$

5. إذا كانت $R \subset A \times B$ فإن $R^{-1} \subset B \times A$

6. النطاق هو جزء من المنطلق A والمدى هو جزء من المستقر B .

مبرهنة (4.1.3): : لتكن R علاقة من A إلى B فإن:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $Dom(R) = Ran(R^{-1})$
3. $Ran(R) = Dom(R^{-1})$

البرهان:

أولاً:

$R = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

$R^{-1} = \{(b,a): a \in A \wedge b \in B\}$

$(R^{-1})^{-1} = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

ثانياً:

$Dom(R) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$.....(1)

$Ran(R) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$.....(2)

إذا بدلنا بين a و b لحصل على نطاق R^{-1} ومدى R^{-1} كما يلي:

$Dom(R^{-1}) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$.....(3)

$Ran(R^{-1}) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$ ..... (4)

إذن من (2) و (3) لحصل على:

$Ran(R) = Dom(R^{-1})$

ومن (1) و (4) نحصل على:

$\text{Dom}(R) = \text{Ran}(R^{-1})$

مثال: لنفرض أن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,3\}$ فإحسب كلاً من:

1. $A \times B$
2. $R = \{(a,b) : a > b\}$
3. R^{-1}

الحل:

$A \times B = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

$R = \{(2,1),(3,1)\}$

$R^{-1} = \{(1,2),(1,3)\}$

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,4\}, B=\{2,3,5\}$ وكانت $R \subset A \times B$ حيث:

$R = \{(1,2),(1,3),(2,2)\}$ فعين ما يلي:

1. R^{-1}
2. نطاق $R = \text{Dom}(R) = \{x : x \in A \wedge xRy\}$
3. مدى $R = \text{Ran}(R) = \{y : y \in B \wedge xRy\}$
4. $\{x : x \in A \wedge (x,y) \notin A \times B\}$

الحل:

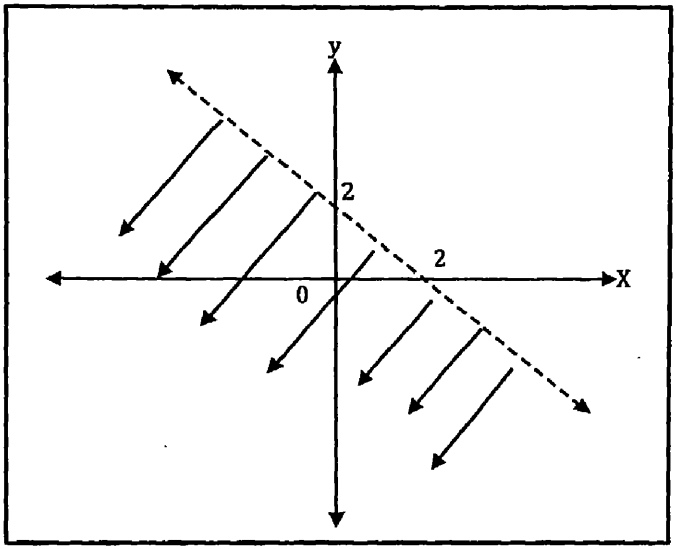
1. $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2)\}$
2. نطاق $R = \text{Dom}(R) = \{1,2\}$
3. مدى $R = \text{Ran}(R) = \{2,3\}$
4. $\{x : x \in A \wedge (x,y) \notin R\} = \{4\}$

مثال: إرسم الشكل الذي يمثل العلاقة R في المستوى $\mathbb{R}^2$ في الحالات الأتية:

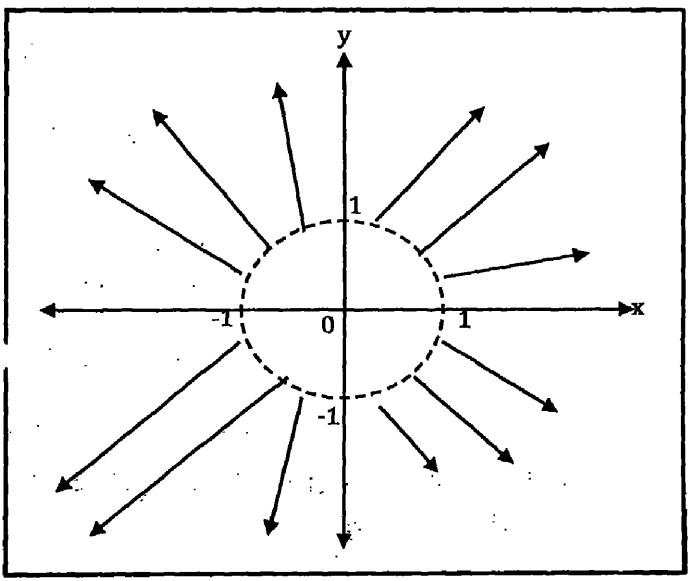
1. $R = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$
2. $R = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$

الحل:

أولاً: $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$



ثانياً: $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$



ملاحظة: هناك فرق كبير بين العلاقة الثنائية (Binary relation) وبين العملية الثنائية (Binary operation) حيث:

1. العملية الثنائية (Binary operation) على مجموعة غير خالية A هي قاعدة تربط أي زوج مرتب (a, b) من عناصر المجموعة A مع عنصر معين b∈A .
2. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تسمى عملية مغلقة (closed) أو حسنة التعريف (well defined) وإذا كان c هو العنصر الذي يرتبط مع الزوج المرتب a*b فإن $c \in A$ وهذا العنصر c يجب أن يكون وحيد.
3. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون إبدالية (Commutative) إذا كانت $\forall a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$
4. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون تجميعية (Associative) إذا كانت $\forall a, b, c \in A \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$
5. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون توزيعية (Distributive) إذا كانت $\forall a, b, c \in A \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية * بواسطة a*b يكون أصغر أو يساوي ما بين العددين a و b وبالتالي:

2*11=2, 15*10=10, 3*3=3

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية $*'$ بواسطة $a *' b = a$ وبالتالي:

$2 *' 11 = 2, \quad 15 *' 10 = 15, \quad 3 *' 3 = 3, \quad 11 *' 2 = 11$

إذن: العملية الثنائية $*'$ تكون غير إبدالية لأن $a *' b \neq b *' a$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية $*''$ بواسطة:

$a *'' b = (a * b) + 2$

حيث العملية الثنائية * تعرف بواسطة a*b هو العدد الذي يكون أصغر أو يساوي ما بين العددين a و b وبالتالي:

$2 *'' 5 = 4, \quad 4 *'' 9 = 6, \quad 5 *'' 9 = 7, \quad 5 *'' 2 = 4,$

$2 *'' (5 *'' 9) = 2 *'' 7 = 4$

$(2 *'' 5) *'' 9 = 4 *'' 9 = 6$

إذن: العملية الثنائية "* غير تجميعية لأن:

$a *'' (b *'' c) \neq (a *'' b) *'' c$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية * بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية غير حسنة التعريف لأن $2 * 3 = \frac{2}{3}$

ولكن $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ ونعرف عليها العملية الثنائية * بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية غير حسنة التعريف لأن $2 * 0 = \frac{2}{0}$

ولكن $\frac{2}{0} \notin \mathbb{Q}$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الكسرية التي لا تحتوي الصفر $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ونعرف عليها العملية الثنائية * بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية حسنة التعريف .

(4-2) تمثيل العلاقات

من الممكن أن نوصف العلاقة الثنائية بعدة طرق منها:

1. الطريقة الجرد

وفيه نسرد جميع عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة بين حاصرتين.

مثال: إذا كانت $A=\{2, 4, 5\}, B=\{1, 3, 5, 6, 10, 11, 12\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a يقسم b بحيث $a \in A, b \in B$.

فأكتب عناصر هذه العلاقة بطريقة الجرد.

الحل:

$R = \{(2,6), (2,10), (2,12), (4,12), (5,5), (5,10)\}$

2. الطريقة الوصف

وفيه نكتب عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة بين حاصرتين مع خاصية أو شرط يربط بين عناصر الزوج المرتب.

مثال: إذا كانت $A=\{2, 4, 5\}, B=\{1,2, 3, 5, 8\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b بحيث $a \in A, b \in B$.

فعبر عن هذه العلاقة

- بطريقة الوصف.

• بطريق الجرد.

الحل:

أولا: بطريق الوصف

$R = \{(a,b): b > a,\ \ a \in A \wedge b \in B\}$

ثانيا: بطريق الجرد

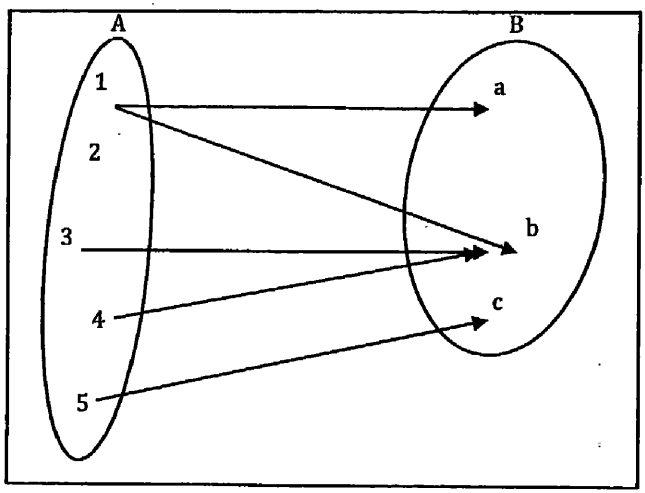
$R = \{(2,3), (2,5), (2,8), (4,5), (4,8), (5,8)\}$

3. المخطط السهمي

وفيه نمثل المنطلق A والمستقر B بدائرتين كما نرمز للإرتباط بين كل عنصر من A يرتبط بعنصر من B بسهم بدايته A ونهايته B .

مثال: إذا كانت A={1,2,3,4,5}, B={a,b,c} و R={(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)} فمثل العلاقة R بالتمثيل السهمي.

الحل:



4. التمثيل بالجدول

وفيه نكون جدول بحيث توضع عناصر المجموعة A في العمود الأيسر وعناصر المجموعة B في الصف العلوي ثم توضع عناصر العلاقة R في بقية خلايا الجدول.

مثال: إذا كانت A={1,2,3,4,5}, B={a,b,c} و R={(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)} فمثل العلاقة R بالتمثيل الجدولي.

الحل:

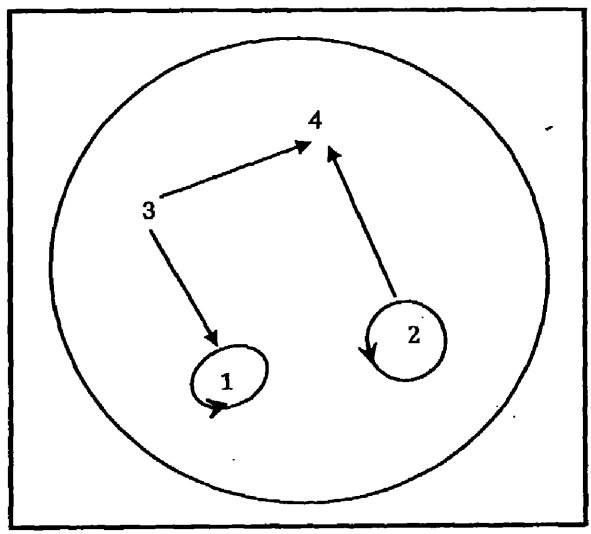
A \ B	a	b	c
1	(1,a)	(1,b)	
2			
3		(3,b)	
4		(4,b)	
5			(5,c)

ملاحظة: إذا كانت R علاقة على A أي أن R علاقة من A إلى A فإننا نرسم المخطط السهمي بسهم مغلق على دائرة مغلقة.

مثال: إذا كانت A={1,2,3,4} و R={(1,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,4)} فمثل العلاقة R بالمخطط السهمي ثم بالمخطط الجدولي.

الحل:

أولاً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثانياً: المخطط الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	1	2	3	4
1	(1,1)			
2		(2,2)		(2,4)
3	(3,1)			(3,4)
4				

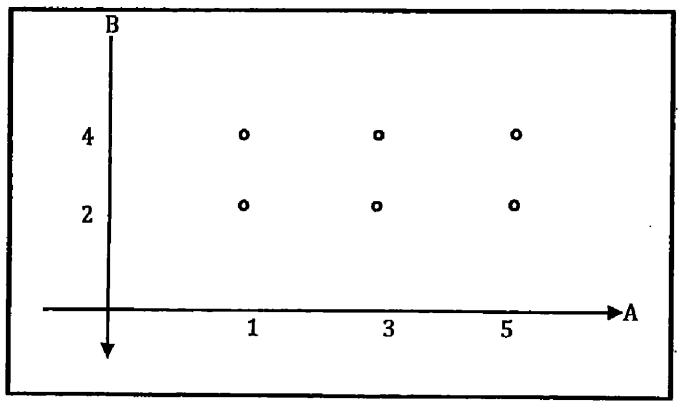
5. التمثيل البياني

ويستخدم عادة في المجموعات التي يمكن قياسها حيث يمكن وضع المجموعة A على المحور الأفقي والمجموعة B على المحور الرأسي وتمثل عناصر المجموعة R بنقاط التقاطع في مستوى XY .

مثال: إذا كانت $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4\}$ فمثل بيانيا $A\times B$

الحل:

$A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$



(4-3) أنواع العلاقات

(4-3-1) علاقة التركيب

تعريف: إذا كانت R_1 علاقة من A إلى B وكانت R_2 علاقة من B إلى C فإن

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,c): a \in A, c \in C, \exists b \in B: aR_1b \wedge bR_2c\}$$

تسمى علاقة التركيب R_1 و R_2 .

ملاحظة: لا يكون العنصر $a \in A$ مرتبط بالعنصر $c \in C$ بواسطة العلاقة $R_2 \circ R_1$ إلا إذا كان يوجد عنصر $b \in B$ بحيث يكون العنصر a مرتبط ب b بواسطة R_1 والعنصر c أيضا يكون مرتبط بالعنصر b بواسطة العلاقة R_2 .

مثال: إذا كانت

$$R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,4),(2,7),(3,5),(5,7)\}$$

فأوجد $R_2 \circ R_1$

الحل:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,4),(b,7),(c,5)\}$$

مثال: إذا كانت R_1 و R_2 العلاقتان

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = mx\}$$

فأوجد كلاً من R_1^{-1} و $R_2 \circ R_1$.

الحل:

أولاً:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\} = \{(x,nx): x \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_1^{-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = \frac{x}{n}\right\} = \{(nx,x): x \in \mathbb{Z}\}$$

ثانياً:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\} = \{(x,nx): x \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = mx\} = \{(x,mx): x \in \mathbb{Z}\}$$

$(x,z) \in R_1 \rightarrow z = nx$ .....(1)

$(z,y) \in R_2 \rightarrow y = mz$ .....(2)

من (1) و (2) نحصل على $y = mnx$ وبالتالي:

$R_2 \circ R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y = nmx\} = \{(x,nmx) : x \in \mathbb{Z}\}$

مبرهنه (4.3.1): ليكن R, S, T علاقات على المجموعة A و I_A هي العلاقة الذاتية على A فإن:

1. $I_A \circ R = R \circ I_A = R$
2. $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$
3. $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
4. $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$
5. If $R \subseteq S$ then $T \circ R \subseteq T \circ S$
6. $(T \circ R^{-1}) \cap S = \varphi \leftrightarrow (S \circ R) \cap T = \varphi$
7. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

البرهان:

سوف نثبت (1) و (2) و (6) والباقي تمارين.

إثبات (1):

أولا: نفرض أن $(x,y) \in I_A \circ R$ فإن

$\exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in I_A$

$\Rightarrow (z,y) \in I_A$

$\Rightarrow z = y$

$\Rightarrow (x,y) = (x,z) \in R$

$\forall (x,y) \in I_A \circ R \Rightarrow (x,y) \in R$

$I_A \circ R \subseteq R$.....(1)

ثانياً: نفرض أن $(x,y) \in R$ فإن:

$(x,y) \in R \wedge (y,y) \in I_A$

$\Rightarrow (x,y) \in I_A \circ R$

$\forall (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in I_A \circ R$

$\Rightarrow R \subseteq I_A \circ R$ .....(2)

من (1) و (2) نحصل على $R = I_A \circ R$ وبالمثل يمكن إثبات أن $R = R \circ I_A$

إثبات (2): أولاً: نفرض أن $(x,y) \in (T \circ S) \circ R$ فإن:

$\exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in (T \circ S)$

$\Rightarrow \exists h \in A: (x,z) \in R \wedge [(z,h) \in S \wedge (h,y) \in T]$

$\Rightarrow (x,z) \in R \wedge (z,h) \in S \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow [(x,z) \in R \wedge (z,h) \in S] \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow [(x,h) \in S \circ R] \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow (x,y) \in T \circ (S \circ R)$

$\Rightarrow (T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ .....(3)

ثانياً: نفرض أن $(x,y) \in T \circ (S \circ R)$ فإن:

$\exists z \in A: (x,z) \in (S \circ R) \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow \exists h \in A: [(x,h) \in R \wedge (h,z) \in S] \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge (h,z) \in S \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge [(h,z) \in S \wedge (z,y) \in T]$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge (h,y) \in (T \circ S)$

$\Rightarrow (x,y) \in (T \circ S) \circ R$

$\Rightarrow T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.....(4)

من (3) و (4) ينتج $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

إثبات (6):

أولاً: نفرض أن $(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ إذن

$\Rightarrow \exists (x,y) \in (S \circ R) \cap T$

$\Rightarrow (x,y) \in S \circ R \wedge (x,y) \in T$

$\Rightarrow (x,y) \in S \circ R$

$\Rightarrow \exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S$

$\Rightarrow (x,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (z,x) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in T$

$\Rightarrow (z,y) \in T \circ R^{-1}$

لكن $(z,y) \in S$إذن:

$(z,y) \in (T \circ R^{-1}) \cap S$

إذن إذا كانت $(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ فإن:

$(T \circ R^{-1}) \cap S \neq \varphi$.....(5)

ثانياً: بنفس الطريقة يمكن إثبات أنه إذا كانت $(T \circ R^{-1}) \cap S \neq \varphi$ فإن:

$(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ .....(6)

إذن من (5) و (6) ينتج أن:

$(S \circ R) \cap T = \varphi$ إذا وفقط إذا كان $(T \circ R^{-1}) \cap S = \varphi$

(4-3-2) العلاقة الإنعكاسية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة إنعكاسية (Reflexive) إذا كانت لكل عنصر x في A فإن xRx.

ملاحظة: إذا كانت R علاقة إنعكاسية فإن كل عنصر من A مرتبط بنفسه فإذا عبرنا عن R بمخطط سهمي فسوف نجد حول كل عنصر من A سهم على شكل دائرة مغلقة أما إذا عبرنا عن R بالمخطط الجدولي فإن العلاقة الإنعكاسية R توصف بتواجد النقاط في خلايا القطر الرئيسي وبالتالي فإن هذه العلاقة تسمى بالعلاقة القطرية أو العلاقة المحايدة ويرمز لها بالرمز I_A ويمكن وصفها ب:

$I_A = \{(x,x): x \in A\}$

نظرية (4.3.2): ليكن R علاقة على المجموعة A فإن:

R تكون إنعكاسية إذا وفقط إذا كان $I_A \subseteq R$

البرهان:

العلاقة R تكون إنعكاسية إذا وفقط إذا كان لكل $x \in R$ فإن $(x,x) \in R$ إذا وفقط إذا كان $I_A \subseteq R$.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,6\}$ وكانت R_1 علاقة على A معرفة بـ:

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(6,6),(6,2)\}$$

وكانت R_2 علاقة على A معرفة بـ:

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(6,6),(6,2)\}$$

فهل العلاقات إنعكاسية؟

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة إنعكاسية لأن $(1,1),(2,2),(3,3),(6,6) \in R_1$

ثانياً: العلاقة R_2 هي علاقة إنعكاسية لأن $3 \in A$ لكن $(3,3) \notin R_2$.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,6\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$$R = \left\{(x,y): x,y \in A, \quad \frac{y}{x} \in \mathbb{N}\right\}$$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
3. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن كل عنصر من A يقسم نفسه:

$$\frac{1}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{3} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{6} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1R1, \quad 2R2, \quad 3R3, \quad 6R6$$

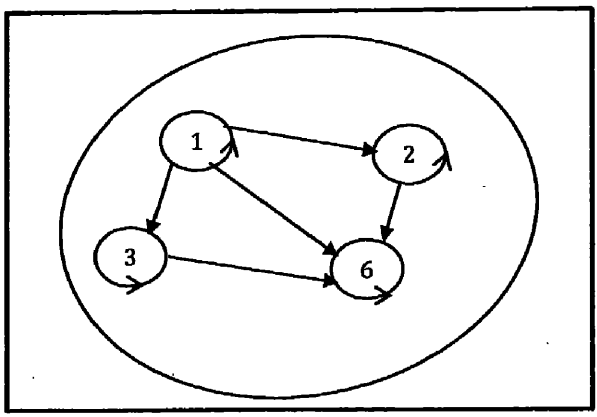
فإن كل عنصر من A مرتبط بنفسه وبالتالي تكون العلاقة R إنعكاسية.

كما أن:

$\frac{2}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{3} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 1R2, 1R3, 1R6, 2R6, 3R6

ثانياً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثالثاً: المخطط الجدولي:

A \ A	1	2	3	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,6)
2		(2,2)		(2,6)
3			(3,3)	(3,6)
6				(6,6)

(4-3-3) العلاقة التناظرية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة متناظرة (متماثلة) (Symmetric) إذا كانت لكل العناصر x, y في A بحيث xRy فإن yRx .

نظرية (3-3-4): العلاقة R على المجموعة A تكون متناظرة إذا وفقط إذا كان $R = R^{-1}$

البرهان:

نفرض أن العلاقة R متناظرة إذن:

أولاً: نأخذ $(x,y) \in R$ إذن:

$\Rightarrow (y,x) \in R$

ولكن $(y,x) \in R^{-1}$ إذن:

$R \subseteq R^{-1}$.....(1)

ثانياً: نأخذ $(y,x) \in R^{-1}$ إذن:

$\Rightarrow (x,y) \in R$

ولكن العلاقة R متناظرة إذن:

$(y,x) \in R$

$\Rightarrow R^{-1} \subseteq R$ .....(2)

من (1) و (2) نحصل على أنه إذا كانت العلاقة R متناظرة فإن $R = R^{-1}$

عكسياً: نفرض أن $R = R^{-1}$ إذن:

$\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$

ولكن $R = R^{-1}$ إذن $(y,x) \in R$

إذن العلاقة R متناظرة.

ملاحظة: في التمثيل السهمي فإن العلاقة R تكون تناظرية إذا كان كل الأسهم التي تربط أي عنصرين x, y تكون سهم ذو رأسين.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ وكانت R_1 علاقة على A معرفة بـ:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

وكانت R_2 علاقة على A معرفة بـ:

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

فهل العلاقات متناظرة:

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة متناظرة لأن $R_1^{-1} = R_1$

ثانياً: العلاقة R_2 هي علاقة ليست متناظرة لأن $R_2^{-1} \neq R_2$

حيث:

$R_2^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)\}$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$$R = \{(x,y): x,y \in A, \quad 0 \leq xy\}$$

1. فهل العلاقة R متناظرة ؟
2. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
3. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً:

$-2R-2, \quad -1R-1, \quad 0R0, \quad 1R1$

$-2R-1 \leftrightarrow -1R-2,$

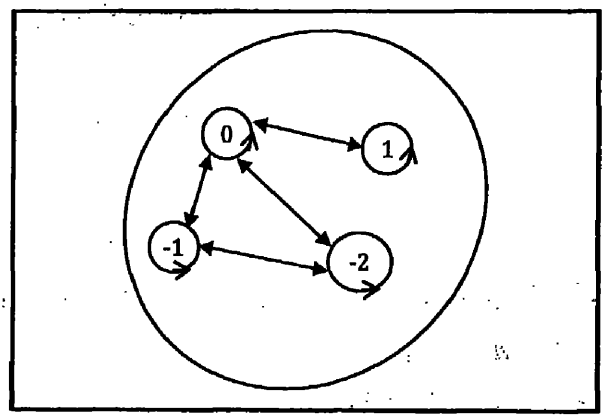
$-2R0 \leftrightarrow 0R-2,$

$-1R0 \leftrightarrow -1R0,$

$0R1 \leftrightarrow 1R0$

إذن العلاقة R تناظرية.

ثانياً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثالثاً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	0	1
-2	(-2,-2)	(-2,-1)	(-2, 0)	
-1	(-1, -2)	(-1,-1)	(-1,0)	
0	(0,-1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)
1			(1,0)	(1,1)

(4-3-4) العلاقة المتعدية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة متعدية (ناقلة) (Transitive) إذا كانت لكل العناصر x,y,z في A بحيث $xRy \wedge yRz$ تقتضي أن تكون xRz .

ملاحظة: في التمثيل السهمي للعلاقة R فإن العلاقة تكون متعدية إذا وجد سهم من x إلى y وسهم ثاني من y إلى z فإنه يجب وجود سهم ثالث من x إلى z .

نظرية (4.3.4): ليكن R علاقة على المجموعة A فإن:

R تكون متعدية إذا وفقط إذا كان $R \circ R \subseteq R$

البرهان:

أولاً: نفرض أن العلاقة R تكون متعدية

إذن

$$\forall (x,y) \in R \circ R \rightarrow \exists z \in A, (x,z) \in R \wedge (z,y) \in R \rightarrow (x,y) \in R$$

وبالتالي يكون $R \circ R \subseteq R$

عكسياً: إذا كانت العلاقة R تحقق $R \circ R \subseteq R$ فإن

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R \circ R \subseteq R$$
$$\rightarrow (x,z) \in R$$

إذن العلاقة R تكون متعدية.

مثال: لتكن R_1 و R_2 علاقتان معرفه على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < y\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + 2y = 14\}$$

فأدرس هل العلاقات متعدية أم لا مع ذكر السبب.

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 متعدية لأن إذا كانت $x,y,z \in A$ بحيث $x < y,\ y < z$ وبالتالي يكون $x < z$ وهذا يعني أنه إذا كانت $(x,y) \in R_1$ و $(y,z) \in R_1$ فإن $(x,z) \in R_1$.

ثانياً: العلاقة R_2 ليست متعدية لأن إذا كانت $x,y,z \in A$ بحيث $(x,y) \in R_2$ و $(y,z) \in R_2$ فإن:

$x + 2y = 14$ .....(1)

و $y + 2z = 14$ .....(2)

من (2) في (1) نحصل على $x + 2(2z - 14) = 14$

وبالتالي $x + 4z = 42$ هذه المعادلة لا تؤدي إلى $x + 2z = 14$ إذن $(x,z) \notin R_2$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$R = \{(x,y): x,y \in A, 0 \le xy\}$

فهل العلاقة R متعدية ؟

الحل:

لا لأن $-2R0, 0R1$ ولكن $(-2, 1) \notin R$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,1,3,5\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$R = \{(x,y): x,y \in A, 0 < xy\}$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. فهل العلاقة R متناظرة ؟
3. فهل العلاقة R متعدية ؟
4. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
5. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن:

$-2R-2, -1R-1, 1R1, 3R3, 5R5$

إذن العلاقة R إنعكاسية.

ثانياً: بما أن:

$-2R-1 \leftrightarrow -1R-2, \quad 1R3 \leftrightarrow 3R1, \quad 1R5 \leftrightarrow 5R1, \quad 3R5 \leftrightarrow 5R3$

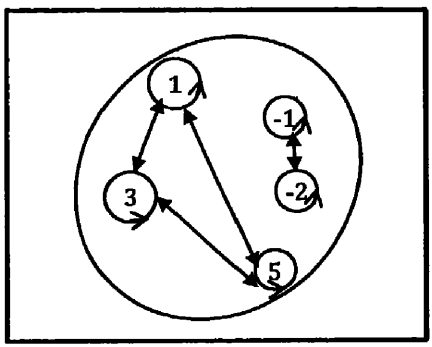
إذن العلاقة R تناظرية.

ثالثاً: بما أن:

$1R3 \wedge 3R5 \rightarrow 1R5$

إذن العلاقة R متعدية.

رابعاً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



خامساً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	1	3	5
-2	(-2,-2)	(-2,-1)			
-1	(-1,-2)	(-1,-1)			
1			(1,1)	(1,3)	(1,5)
3			(3,1)	(3,3)	(3,5)
5			(5,1)	(5,3)	(5,5)

(4-3-5) العلاقة التخالفية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة تخالفية (ضد التناظر) (Anti-Symmetric) إذا كانت لكل العناصر x,y في A بحيث $xRy \wedge yRx$ تقتضي أن تكون $x = y$.

ملاحظة:

1. نقول ان العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة تخالفية إذا كانت لكل العناصر x,y في A بحيث $x \neq y$ تقتضي أن تكون $(x,y) \notin R \vee (y,x) \notin R$.
2. في التمثيل السهمي نجد أن العلاقة R تكون علاقة تخالفية إذا كان كل سهم في المخطط السهمي ذو رأس واحد بمعنى أن كل سهم ينبعث من العنصر x إلى العنصر y لا يعود مره أخرى من العنصر y إلى العنصر x .

نظرية (4.3.5): لتكن R علاقة على المجموعة A فإن R علاقة تخالفية إذا وفقط إذا كان:

$$R \cap R^{-1} = I_A$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن R علاقة تخالفية و $(x,y) \in R \cap R^{-1}$ وبالتالي:

$$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$$

لكن R علاقة تخالفية إذن:

$$x = y$$

$$\Rightarrow (x,y) \in I_A$$

$$\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$$

ثانياً: نفرض أن $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ و $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$ إذن:

$$(x,y) \in R \wedge (x,y) \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in R \cap R^{-1}$$

لكن $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ إذن:

$$(x,y) \in I_A$$

إذن $x = y$

إذن العلاقة R هي علاقة تخالفية.

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2)\}$$

فهل العلاقة R تخالفية ؟

الحل:

العلاقة R ليست تخالفية لأن $2R3 \wedge 3R2$ ولكن $2 \neq 3$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(x,y): x,y \in A:\ 0 \leq xy\}$$

فهل العلاقة R تخالفية؟

الحل:

العلاقة R ليست تخالفية لأن $-2R0 \wedge 0R-2$ ولكن $-2 \neq 0$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,1,3,5\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(x,y): x,y \in A, \quad x < y\}$$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. فهل العلاقة R متناظرة ؟
3. فهل العلاقة R متعدية ؟
4. فهل العلاقة R تخالفية ؟
5. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
6. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن:

$$(-2,-2) \notin R$$

إذن العلاقة R ليست إنعكاسية.

ثانياً: بما أن:

$$(-2,-1) \in R \wedge (-1,-2) \notin R$$

إذن العلاقة R ليست تناظرية.

ثالثاً: بما أن:

$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz \; \forall x, y, z \in A$

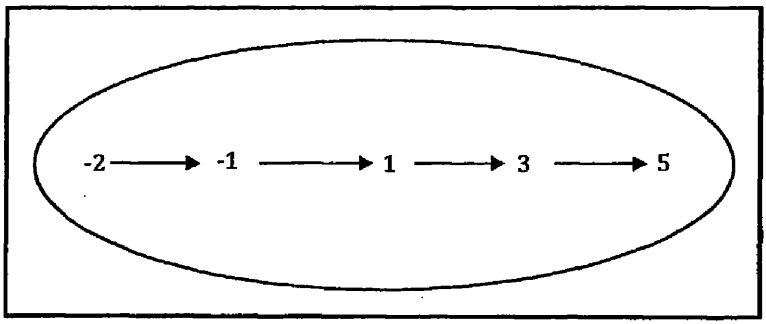
إذن العلاقة R متعدية.

رابعاً: بما أن:

$(-2,-1) \in R \wedge (-1,-2) \notin R, (-1,1) \in R \wedge (1,-1) \notin R, (1,5) \in R \wedge (5,1) \notin R, (3,5) \in R \wedge (5,3) \notin R$

إذن العلاقة R ليست تناظرية إذن فإن العلاقة R تكون تخالفية.

خامساً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



سادساً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	1	3	5
-2		(-2,-1)	(-2,1)	(-2,3)	(-2,5)
-1			(-1,1)	(-1,3)	(-1,5)
1				(1,3)	(1,5)
3					(3,5)
5					

(4-3-6) علاقة التكافؤ

تعريف: إذا كانت R علاقة ثنائية على مجموعة غير خالية A وكانت R علاقة إنعكاسية وتناظرية و متعدية فإن العلاقة R تسمى علاقة تكافؤ (Equivalence relation) على A.

ملاحظة: إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A و x, y عنصرين مرتبطين بواسطة العلاقة R فإننا نقول أن x, y متكافئان بالنسبة للعلاقة R وتكتب $x \equiv y(R)$ وفي هذه الحالة تكون المجموعة الجزئية التي تتكون من كل العناصر المكافئة للعنصر x تسمى صف (فصل) تكافؤ (Equivalence class) العنصر x ونرمز له بالرمز $\bar{x}$ أو $[x]$ ويمكن وصفه بـ:

$$[x] = \{y \in A: xRy\}$$

والعنصر x يعتبر ممثل لصف التكافؤ وإذا كان y يكافئ العنصر x بالنسبة للعلاقة R أي $x \equiv y(R)$ فإن $[x]=[y]$ وبالتالي يكون دائما:

$$xRy \leftrightarrow [x] = [y] \leftrightarrow x \in [y] \leftrightarrow y \in [x]$$

ومجموعة جميع فصول تكافؤ العلاقة R تسمى مجموعة القسمة (Quotient set) ونرمز لها بالرمز A/R .

مبرهنة (4.3.6): إذا كانت R_1, R_2 علاقات تكافؤ على المجموعة A فإن $R_1 \cap R_2$ تكون أيضا علاقة تكافؤ على A .

البرهان:

بما أن R_1, R_2 علاقات تكافؤ على المجموعة A فإن R_1, R_2 علاقات إنعكاسية ومتناظرة ومتعدية وبالتالي:

أولاً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة إنعكاسية؟

بما أن R_1, R_2 علاقات إنعكاسية فإن:

$$\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R_1 \wedge (x,x) \in R_2$$

$$\Rightarrow (x,x) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة إنعكاسية.

ثانياً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة متناظرة؟

بما أن R_1, R_2 علاقات متناظرة فإن

$$\forall (x,y) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_2$$

$$\Rightarrow (y,x) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_2$$

$$\Rightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة متناظرة.

ثالثاً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة متعدية؟

بما أن R_1, R_2 علاقات متناظرة فإن:

$$\forall (x,y),(y,z) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow [(x,y),(y,z) \in R_1] \wedge [(x,y),(y,z) \in R_2]$$
$$\Rightarrow (x,z) \in R_1 \wedge (x,z) \in R_2$$
$$\Rightarrow (x,z) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة متعدية.

مبرهنة (4.3.7): إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $R \circ R = R$

البرهان:

أولاً: نفرض أن:

$$(x,y) \in R \circ R, \quad x,y \in A$$
$$\Rightarrow \exists z \in A: (x,z),(z,y) \in R$$

ولكن العلاقة R متعدية إذن:

$$(x,y) \in R$$
$$\Rightarrow R \circ R \subseteq R \quad \ldots\ldots(1)$$

ثانياً: نفرض أن:

$$(x,y) \in R, \; x,y \in A$$

ولكن العلاقة R إنعكاسية إذن:

$$(x,x) \in R, \quad x \in A$$
$$\Rightarrow \exists y \in A: (x,x) \in R \wedge (x,y) \in R$$
$$\Rightarrow (x,y) \in R \circ R$$
$$\Rightarrow R \subseteq R \circ R \quad \ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على $R = R \circ R$

نظرية (4.3.8): إذا كانت A مجموعة غير خالية فإن كل علاقة تكافؤ معرفة على A ينتج عنها تجزئة للمجموعة A وبالعكس فإن كل تجزئة للمجموعة A ينتج عنها علاقة تكافؤ R معرفة على A.

البرهان:

أولاً: لنفرض أن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ونريد أن نبرهن أن مجموعة صفوف التكافؤ A/R تكون تجزئة للمجموعة A ؟

1. بما أن العلاقة R إنعكاسية فإن $x\in[x]$ إذن $[x]\neq\varphi$ وبالتالي يكون كل صف من صفوف التكافؤ يمثل مجموعة غير خالية.

2. بما أن كل عنصر $x\in A$ فإن x تكون تنتمي إلى حد فصول تكافؤ وبالتالي:

$A\subseteq\cup_{x\in A}[x]\subseteq A \rightarrow A=\cup_{x\in A}[x]$

3. إذا كان [x], [y] صفين مختلفين ($[x]\neq[y]$) من المجموعة A/R وكان $[x]\cap[y]\neq\varphi$ فإن:

$\rightarrow \exists z\in A: z\in[x]\cap[y]\rightarrow z\in[x]\wedge z\in[y]$

$\rightarrow [z]=[x]\wedge[z]=[y]\rightarrow[x]=[y]$

وهذا يناقض الفرض ($[x]\neq[y]$) إذن لحل هذا التناقض يجب أن يكون $[x]\cap[y]=\varphi$ وبالتالي تكون الفصول المتساوية منطبقة والفصول الغير متساوية تكون غير متقاطعة (منفصلة).

ثانياً: إذا كانت $P=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تمثل تجزئة للمجموعة A فإننا نعرف العلاقة R بـ:

$xRy \leftrightarrow (x,y)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n$

أي أن العنصرين x, y يقعان في نفس خلية التجزئة A_i ونريد الآن أن نثبت أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ على A ؟

أ. العلاقة R إنعكاسية على A لأن:

$\forall x\in A_i\rightarrow(x,x)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n\rightarrow xRx$

ب. العلاقة R تناظرية على A لأن:

$xRy\rightarrow(x,y)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n$

$\rightarrow(y,x)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n\rightarrow yRx$

ج. العلاقة R متعدية على A لأن:

$xRy\wedge yRz\rightarrow(x,y)\in A_i\times A_i, \ (y,z)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n$

$\rightarrow(x,z)\in A_i\times A_i, \quad 1\leq i\leq n\rightarrow xRz$

من (أ) و(ب) و(ت) فإن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ على A .

ملاحظة: اذا كانت R علاقة على A فإن:

1. العلاقة R تكون إنعكاسية (Reflexive) اذا وفقط إذا كان $aRa\ \forall a \in A$.
2. العلاقة R تكون متماثله (متناظرة) (Symmetric) إذا وفقط إذا كان aRb فإن bRa.
3. العلاقة R تكون ناقلة (متعدية) (Transitive) اذا وفقط إذا كان aRb و bRc فإن aRc .
4. العلاقة R تكون علاقة تكافؤ (Equivalence equation) اذا وفقط اذا كان R علاقة إنعكاسية و متماثلة وناقلة.
5. علاقة التكافؤ R تقسم المجموعة A إلى فصول تكافؤ حيث فصل تكافؤ العنصر a هو $[a] = \{x \in A: xRa\}$ وتكون مجموعة فصول التكافؤ هي A/R وهي تكون تجزئه للمجموعة A.

مثال: إذا كانت المجموعة $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ والتجزئة لها هي المجموعات:

$A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d, e\}, A_3 = \{f\}$

فكون علاقة التكافؤ واكتب فصول التكافؤ لها؟

الحل:

علاقة التكافؤ هي:

$$R = \begin{Bmatrix} (a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d), \\ (d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d),(f,f) \end{Bmatrix}$$

ومجموعة القسمة للـ A هي:

$$A/_R = \{A_1, A_2, A_3\}$$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: لنفرض ان $A = \{1, -2, 3, -4, 5\}$ والعلاقة:

$R = \{(x,y): xy > 0\}$

فأثبت ان العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ثم كون فصول التكافؤ لهذه العلاقة ومجموعة القسمة لها.

الحل:

1. العلاقة R إنعكاسية لأن:

$(1)(1) > 0 \rightarrow 1R1,$

$(-2)(-2) > 0 \rightarrow -2R-2,$

$(3)(3) > 0 \rightarrow 3R3,$

$(-4)(-4) > 0 \rightarrow -4R-4,$

$(5)(5) > 0 \rightarrow 5R5,$

2. العلاقة R متماثلة لأن:

$1R3 \rightarrow (1)(3) > 0 \rightarrow (3)(1) > 0 \rightarrow 3R1,$

$1R5 \rightarrow (1)(5) > 0 \rightarrow (5)(1) > 0 \rightarrow 5R1,$

$3R5 \rightarrow (3)(5) > 0 \rightarrow (5)(3) > 0 \rightarrow 5R3,$

$-2R-4 \rightarrow (-2)(-4) > 0 \rightarrow (-4)(-2) > 0 \rightarrow -4R-2$

3. العلاقة R متعدية لأن:

$1R3, 3R5 \rightarrow (1)(3) > 0 \wedge (3)(5) > 0 \rightarrow (1)(5) > 0 \rightarrow 1R5$

إذن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وبالتالي فإن فصول التكافؤ هما إثنان:

$[1] = \{1,3,5\},$

$[-2] = \{-2,-4\}$

ومجموعة القسمة لل A هي:

$A/R = \{[1],[-2]\}$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: لنفرض ان $A = \{1,2,3,4,5\}$ والعلاقة:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),$

$(3,4),(4,3),(2,5),(5,2)\}$

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وإذا كانت نعم فكون فصول التكافؤ هذه العلاقة.

الحل:

من الواضح أن العلاقة R إنعكاسية ومتناظرة ومتعدية وبالتالي فهي تمثل علاقة تكافؤ وبالتالي تكون فصول التكافؤ هي:

$$[1] = \{(1,1),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$$

$$[2] = \{(2,2),(5,5),(2,5),(5,2)\}$$

ومجموعة القسمة هي:

$$A/_R = \{[1],[2]\}$$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: ليكن $A = \mathbb{R}^2$ و R هي العلاقة المعرفة على المجموعة A بالصورة:

$$(x,y)R(x',y') \leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وإذا كانت الإجابة نعم فعين صفوف التكافؤ؟

الحل:

أولاً: العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما متحقق شرط التساوي:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \rightarrow (x,y)R(x,y)$$

ثانياً: العلاقة R علاقة تناظرية لأن :

$$(x,y)R(x',y') \leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\leftrightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow (x',y')R(x,y)$$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$$(x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x'',y'')$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \wedge x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$$

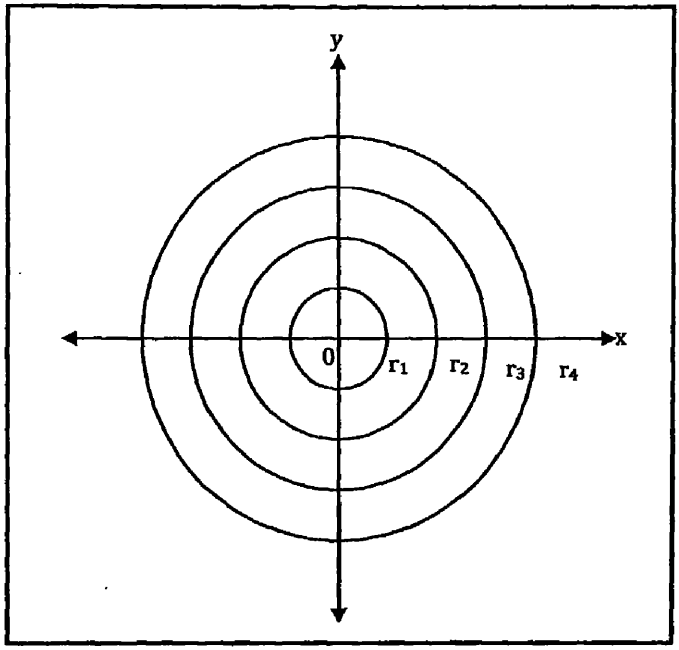
$$\rightarrow x^2 + y^2 = x''^2 + y''^2 \rightarrow (x,y)R(x'',y'')$$

رابعاً: العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي تكون مجموعة فصول التكافؤ A/R هي:

$$[(x,y)] = \{(x',y') : x'^2 + y'^2 = r^2\}$$

وهي تمثل مجموعة الدوائر المتحدة المركز ولها نفس نصف القطر.

ويمكن وصفها بالرسم التالي:



مثال: ليكن A=ℤ و n هو عدد طبيعي لا يساوي صفر ونعرف العلاقة R بأنها:

$$xRy \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = kn \leftrightarrow \frac{x-y}{n} = k$$

أي أن العدد x مرتبط بالعدد y إذا كان طرحهما من مضاعفات العدد n أو بعبارة أخرى إذا كان لهما نفس الباقي بعد القسمة على n .

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ،إذا كانت الإجابة نعم فعين صفوف التكافؤ؟

الحل:

أولاً: العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \rightarrow x - x = 0 = 0.n \rightarrow (x,x) \in R$$

ثانياً: العلاقة R علاقة تناظرية لأن:

$$(x,y) \in R \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = kn$$

$$\rightarrow y - x = (-k)n, -k \in \mathbb{Z} \rightarrow (y,x) \in R$$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}: \; x - y = k_1 n, \qquad y - z = k_2 n$$

وبالجمع نحصل على:

$$\rightarrow x - z = (k_1 + k_2)n, \qquad k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow (x,z) \in R$$

رابعاً: العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي تكون مجموعة فصول التكافؤ A/R هي

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[0],[1],[2],\dots,[n-1]\}$$

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}: xR0\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 0 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}: xR1\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots, 1 - 2n, 1 - n, 1, 1 + n, 1 + 2n, 1 + 3n, \dots\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z}: xR2\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 2 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn + 2, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots, 2 - 2n, 2 - n, 2, 2 + n, 2 + 2n, 2 + 3n, \dots\}$$

ملاحظات:

1. إذا كانت n=0 فإن العلاقة R السابقة تكون على الصورة $xRy \leftrightarrow x = y$
2. إذا كان n عدد صحيح موجب لا يساوي صفر فإن المجموعة $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ هي مجموعة البواقي لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ عند قسمتها على العدد n فمثلاً:

إذا كانت n=2 فإن

أ. الأعداد الزوجية تقبل القسمة على 2 والباقي يساوي 0 .

ب. الأعداد الفردية تقبل القسمة على 2 والباقي يساوي 1 .

وبالتالي تكون:

$$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$

وإذا كانت n=3 فإن:

- الأعداد $\{\dots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\dots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 0 .

- الأعداد $\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\ldots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 1.
- الأعداد $\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\ldots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 2.

وبالتالي تكون:

$$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$$

وهكذا تكون:

$$\mathbb{Z}_n/n\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$$

مثال: ناقش العلاقات الآتية من حيث كونها تمثل علاقة تكافؤ أم لا:

1. علاقة التوازي // بين المستقيمات.
2. علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات.
3. علاقة أصغر من $<$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
4. علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
5. علاقة القاسم | على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}^*$ التي لا تحتوي على الصفر.

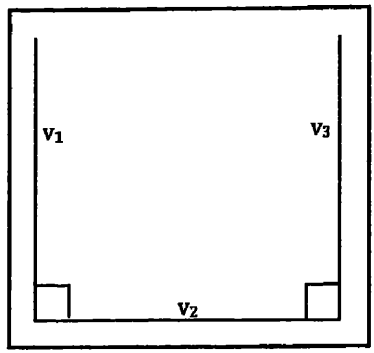
الحل:

أولاً: علاقة التوازي // بين المستقيمات:

1. إذا كان v مستقيم فإن $v//v$ وبالتالي فإن علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة إنعكاسية.
2. إذا كان $v_1//v_2$ فإن $v_2//v_1$ وبالتالي علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة تناظرية.
3. إذا كان $v_1//v_2$ و $v_2//v_3$ فإن $v_1//v_3$ وبالتالي علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة متعدية.

وبالتالي تكون علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة تكافؤ.

ثانياً: علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات علاقة غير إنعكاسية لأنه لا يوجد مستقيم يتعامد مع نفسه وبالتالي فإن علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات لا تمثل علاقة تكافؤ. وعلاقة التعامد تناظرية لأنه إذا كان $v_1 \perp v_2$ فإن $v_2 \perp v_1$ ولكن علاقة التعامد بين المستقيمات علاقة غير متعدية لأن إذا كان $v_1 \perp v_2$, $v_2 \perp v_3$ فإن ليس صحيح أن يكون $v_1 \perp v_3$ ويمكن توضيح ذلك هندسيا كما يلي:



ثالثاً: علاقة أصغر من $<$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ علاقة ليست إنعكاسية لأن $x \not< x$ وليست تناظرية لأنه إذا كان $x < y$ فإن $y \not< x$.

رابعاً: علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي علاقة إنعكاسية ومتعدية ولكنها غير تناظرية (علاقة تخالفية) وبالتالي فالعلاقة لا تمثل علاقة تكافؤ.

خامساً: علاقة القاسم | على مجموعة الأعداد الصيحيحة $\mathbb{Z}^*$ التي لا تحتوي على الصفر:

1. علاقة يقسم هي علاقة إنعكاسية لأن أي عدد صحيح يقبل القسمة على نفسه أي يكون دائما $x|x$.
2. علاقة يقسم هي علاقة غير تناظرية لأن العدد 2 يقسم العدد 6 ولكن العكس غير صحيح وبالتالي فالعلاقة لا تمثل علاقة تكافؤ.
3. علاقة يقسم هي علاقة متعدية لأن إذا كان العدد x يقسم العدد y وكان العدد y يقسم العدد z فإن العدد x يقسم العدد z .

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,\ldots,12\}$ وكانت العلاقة R تعطى بـ:

$$xRy \leftrightarrow x \equiv y(3) \leftrightarrow \frac{x-y}{3} = k \leftrightarrow x = y + 3k, k \in \mathbb{Z}$$

إكتب صفوف التكافؤ ومجموعة حاصل القسمة A/R .

الحل:

فصول التكافؤ هم:

$$[1] = \{1,4,7,10\}, \quad [2] = \{2,5,8,11\}, \quad [3] = \{3,6,9,12\}$$

وبالتالي فإن مجموعة حاصل القسمة هي:

$A/R = \{[1], [2], [3]\}$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: إذا عرفنا العلاقة R على مجموعة الأعداد الحقيقية التي لا تحتوي الصفر $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ على النحو التالي:

$xRy \leftrightarrow xy > 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}^*$

فإثبت أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ثم إكتب صفوف التكافؤ ومجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/R$

الحل:

أولاً: لإثبات أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ:

1. العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما يكون $x^2 > 0$ وبالتالي xRx
2. العلاقة R هي علاقة تناظرية لأنه إذا كان xRy فإن $xy > 0$ وبالتالي $yx > 0$ وبالتالي yRx
3. العلاقة R هي علاقة متعدية لأنه إذا كان xRy, yRz فإن $xy > 0, yz > 0$ فإن $xy^2z > 0,$ وبالتالي $xz > 0$ وبالتالي xRz.

ثانياً: لتعين صفوف التكافؤ:

$$[1] = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge xR1\} = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x.1 > 0\}$$
$$= \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

$$[-1] = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge xR-1\} = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x.-1 > 0\}$$
$$= \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x < 0\} = \mathbb{R}^-$$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

ثالثاً: مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/R$ هي:

$$\mathbb{R}^*/_R = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$$

حيث $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \varphi$

تمارين

1. بين ما هل العلاقات التالية تمثل علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$:

- $xRy \leftrightarrow x|y \wedge y|x$
- $xRy \leftrightarrow x+y<5$
- $xRy \leftrightarrow |x|=|y|$
- $xRy \leftrightarrow y=x+1$

2. في المجموعة $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ إعتبر العلاقة:

$$xRy \leftrightarrow 3|(x-y)$$

برهن أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وأكتب صفوف التكافؤ.

3. إثبت أن العلاقات التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ تمثل علاقات تكافؤ:

- $(a,b)R(c,d) \leftrightarrow a+b=c+d$
- $(a,b)R(c,d) \leftrightarrow b-a=d-c$

4. لتكن المجموعات:

$$A=\{2,3,4,5,6\}, \qquad B=\{2,3,5\}$$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه بـ:

$$R=\{(a,b): a\in A, b\in B, \qquad a<b\}$$

- إكتب عناصر R .
- فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إكتب عناصر R^{-1} .
- فإكتب مجموعة تعريف R^{-1} وكذلك مدى R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.

5. إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,5,7,8\}$ فأجب عما يلي:

- إكتب عناصر كلا من $A\times B, B\times A$.

- إذا كانت $R=\{(1,3), (1,5), (2,7), (2,8)\}$ فهل R تمثل علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل؟ وإذا كانت الإجابة نعم فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إذا كانت R كما وردت في الفقرة ب فإكتب عناصر R^{-1} وهل العلاقة R^{-1} علاقة ثنائية من B إلى A؟ ولماذا؟ وإذا كان الجواب نعم فأوجد كلاً من مجموعة تعريف ومدى العلاقة R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إذا كانت $R=\{(2,5), (3,4),(4,5)\}$ فهل العلاقة R تمثل علاقة ثنائية من A إلى B ؟ ولماذا؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية من B إلى A مع التعليل؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية على A ؟ ولماذا؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية على B مع التعليل؟
- إذا كانت $R=A\times B$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B ؟ وإذا كان الجواب نعم فعين كلاً من مجموعة تعريف R ومدها ثم إكتب عناصر R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني؟ وهل $R^{-1}=B\times A$ ؟
- إذا كانت $R\subseteq A\times B$ فإكتب عناصر كلاً من R, R^{-1} في الحالات الآتية:

- $xRy \leftrightarrow x = y - 5$
- $xRy \leftrightarrow x = y$
- $xRy \leftrightarrow x > y$
- $xRy \leftrightarrow x = y + 5$

- أكمل ما يلي:

- $R = \{(x,y): x = 2 \wedge y \in B\} = \{ \dots \}$
- $R = \{(x,y): x \in A \wedge y \geq x \wedge y \in B\} = \{\dots\}$
- $R = \{(x,y): x \in B \wedge y \in A \wedge x - 7y > 0\} = \{\dots\}$
- $R = \{(x,y): x \in B \wedge y \in A \wedge x + 2y = 0\} = \{\dots\}$

- كم عدد العلاقات الثنائية المختلفة التي يمكن تكوينها من A إلى B ؟ وكذلك من B إلى A؟

6. إذا كانت $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية فارسم الشكل الذي يمثلة العلاقة R في المستوى $\mathbb{R}^2$ في الحالات الآتية:

- $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 = x\}$
- $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$
- $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 < 4\}$
- $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 4\}$
- $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + 4y^2 = 4\}$

7. إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ فادرس كلاً من العلاقات الآتية في A من كونها إنعكاسية – متناظرية – متعدية – متخالفة – علاقة تكافؤ:

- $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $R_2 = R_1 - \{(5,5)\}$
- $R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
- $R_4 = R_3 \cup \{(2,2)\}$
- $R_5 = \{(2,6)\}$
- $R_6 = \{(1,5),(5,1)\}$
- $R_7 = \{(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
- $R_8 = A \times A$

8. إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ وعرفنا العلاقات الآتية على A كما يلي:

- $R_1 = \{(1,2),(2,2)\}$
- $R_2 = \{(3,3)\}$

- $R_3 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(2,1)\}$
- $R_4 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(2,1)\}$
- $R_4\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

- فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
- فهل العلاقة R متناظرة ؟
- فهل العلاقة R متعدية ؟
- مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
- مثل العلاقة R بالجدول؟

9. إذا كانت $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وعرفنا العلاقة R عليها بـ:

$$xRy \leftrightarrow x + 2y = 12, \qquad x,y \in \mathbb{Z}^+$$

فأوجد كلاً من المجموعات الأتية:

- R
- مجموعة تعريف R
- مدى R
- R^{-1}
- مثل R بالمخطط السهمي وبيانيا.
- مثل R^{-1} بالمخطط السهمي وبيانيا.

10. إذا كانت $A=\{0,1,2,3,\ldots,20\}$ وعرفنا على A العلاقة R على النحو التالي: aRb لكل $a,b\in A$ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة a على 6 يساوي باقي قسمة b على 6 فإثبت أن R تمثل علاقة تكافؤ على A ومن ثم أوجد صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة $\mathbb{R}$.

11. إذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة وكانت R علاقة معرفه فيها على النحو التالي:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}: \exists q \in \mathbb{Z}, xRy \leftrightarrow x - y = 5q$$

فإثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$ ومن ثم عين صفوف التكافؤ.

12. إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ وكانت R علاقة معرفة على A كما يلي:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),$$
$$(2,4),(4,2),(2,7),(7,2),(4,7),(7,4),(5,6),(6,5)\}$$

فإثبت أن R علاقة تكافؤ على A ومن ثم اوجد صفوف التكافؤ.

13. لتكن المجموعات

$B = \{a \in \mathbb{Z}: 1 < a \leq 12\}, \quad A = \{2, 3, 6, 8\}$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه ب

$R = \{(a, b): a \in A, b \in B, \quad a|b\}$

(الرمز | يعني يقسم)

- إكتب عناصر R .
- فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إكتب عناصر R^{-1} .
- فإكتب مجموعة تعريف R^{-1} وكذلك مدى R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.

14. لتكن لدينا المجموعة

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه بـ:

$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$

- إكتب عناصر R^{-1} .
- إكتب عناصر $R \circ R$
- إكتب عناصر $R^{-1} \circ R$

15. إذا كانت R_1, R_2 علاقتان من المجموعة A إلى المجموعة B فإثبت أن:

- $Dom(R_1 \cup R_2) = Dom\, R_1 \cup Dom\, R_2$
- $Ran(R_1 \cup R_2) = Ran\, R_1 \cup Ran\, R_2$
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

الفصل الخامس

الدوال
Functions

(5-1) الدوال

(5-2) الصورة والصورة العكسية

(5-3) العمليات الحسابية على الدوال

(5-4) تركيب الدوال

(5-5) أنواع الدوال

(5-5-1) الدالة المتباينة

(5-5-2) الدالة الشاملة

(5-5-3) الدالة المتقابلة

تمارين

الفصل الخامس

الدوال

(5-1) الدوال

لقد درسنا في الفصل الرابع مفهوم العلاقة الثنائية على إنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزي A×B وفي هذا الفصل سوف ندرس نوع خاص من العلاقة الثنائية يسمى الدالة (functions) أو التطبيق (mapping) وتعتبر الدوال من أهم البنى الرياضية والأكثر استخدما في جميع العلوم النظرية والتطبيقية.

تعريف (5.1.1): إذا كانت X, Y مجموعتين غير خاليتين و $A \subseteq X$ وكانت f علاقة ثنائية من A إلى Y تحقق الشرطين التالين:

1. $\forall x \in A \exists y \in Y: (x,y) \in f$
2. $(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$

فإن الثلاثي (f, A, Y) يسمى دالة من A إلى Y .

ملاحظات:

1. لتعين دالة يلزمنا ثلاث عناصر وهي:
   أ. مجموعة غير خالية X تسمى المنطلق .
   ب. مجموعة غير خالية Y تسمى المستقر (Codomain) .
   ج. قاعدة (قانون) نستطيع بها ربط كل عنصر من عناصر X بعنصر وحيد y من عناصر Y حيث $y = f(x)$ يسمى صورة x بواسطة f .
2. مجموعة تعريف العلاقة f هي:

$$Dom(f) = \{x \in A: \exists y \in Y \wedge (x,y) \in f\} = A$$

تسمى النطاق أو المجال (Domain) ودائماً يكون $Dom(f) = A \subseteq X$.

3. المجموعة الجزئية من Y المتكونة من جميع صور النطاق A تسمى المدى (Range) ونرمز لها بالرمز R(f) ودائماً يكون $R(f) \subseteq Y$.
4. الدالة أو الإقتران أو التطبيق أو الراسم (mapping) هي عبارات لها نفس المعنى وعادة نفضل إستخدام لفظ الدالة وأيضاً نستخدم الرمز $f: X \to Y$ بدلاً من (f, X, Y) ونكتب $y=f(x)$ بدلاً من $(x, y) \in f$ وفي هذه الحالة x تسمى المتغير المستقل و y تسمى المتغير التابع.
5. نقول عن الدالتان f, g إنهما متساويان ونكتب f=g إذا تحققت الشروط التالية:
   أ. مجموعة تعريف f = مجموعة تعريف g .
   ب. مستقر f = مستقر g .
   ج. لجميع العناصر $x \in A$ فإن $f(x) = g(x)$ حيث A هي مجموعة تعريف كلاً من f, g .
6. مجموعة الأزواج المرتبة $f = \{(x,y): x \in X, f(x) = y\}$ تسمى بيان الدالة.
7. إذا كانت X, Y مجموعتان فإننا نرمز إلى المجموعة التي عناصرها جميع الدوال من X إلى Y بالرمز Y^X.
8. العلاقة الثنائية قد تربط عنصر من المجموعة X بأكثر من عنصر من المجموعة Y وهذا الكلام لا يتحقق بالنسبة للدوال.
9. العلاقة الثنائية قد لا تربط عنصر ما من عناصر المجموعة X بأي عنصر من عناصر المجموعة Y وهذا الكلام لا يتحقق بالنسبة للدوال.
10. كل دالة تمثل علاقة ثنائية ولكن العكس ليس ضروري أن يتحقق.
11. لقد إستخدمنا المصطلحات الأتية: المنطلق و المستقر و النطاق والمدى ولبيان الفرق بينهما نعطي المثال التالي:

مثال: لتكن لدينا الدالة

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

والمعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$

فإحسب كلاً من المنطلق – المستقر – النطاق – المدى.

الحل:

فإن: المنطلق = $\mathbb{R}$

المستقر = $\mathbb{R}$

النطاق = $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 3\}$

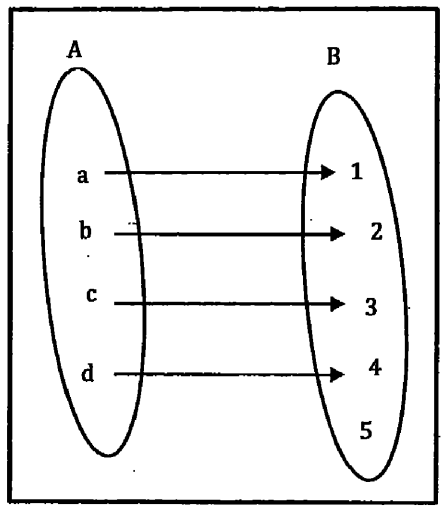
المدى = $R(f) = \mathbb{R}^+$

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ فحدد مدى الدالة $f: X \to Y$ في كل حالة مما يأتي ثم إرسم مخططا سهميا يمثل كل دالة على حده:

1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$
2. $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$
3. $f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

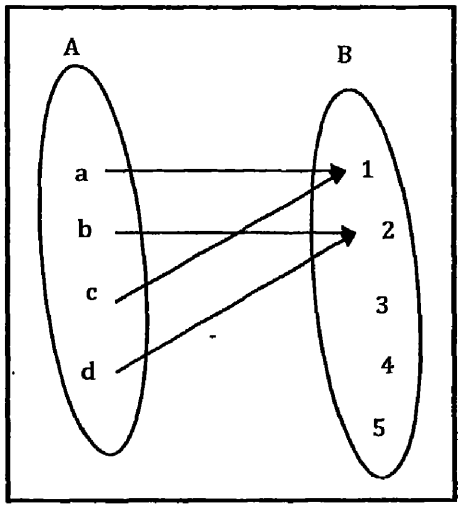
الحل:

أولاً:



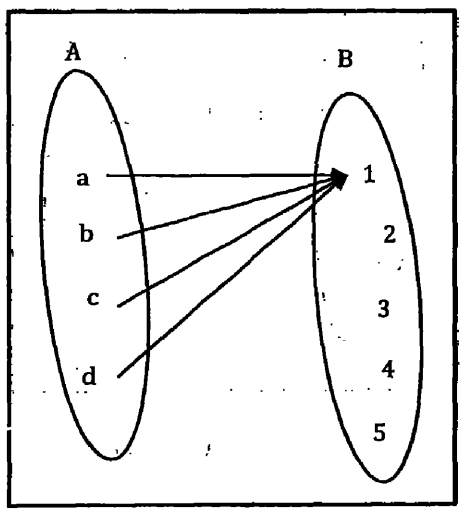
مدى الدالة f_1 هو $R(f_1) = \{1, 2, 3, 4\} \subset B$

ثانياً:



مدى الدالة f_2 هو $R(f_2) = \{1, 2\} \subset B$

ثالثاً:



مدى الدالة f_3 هو $R(f_3) = \{1\} \subset B$

مثال: إذا كانت $A = \{0,1,2,3\}$ و $B = \{0,2,3,4,5\}$ و $f: A \to B$

حيث $f(x) = x + 2$ فأوجد:

1. مدى الدالة f.
2. بيان الدالة f.

الحل:

$f(0)=2,\ f(1)=3,\quad f(2)=4,\quad f(3)=5$

المدى هو:

$R(f) = \{2,3,4,5\}$

وبيان الدالة هو:

$f = \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5)\}$

مثال: إذا كانت f دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى المجموعة {-1, 0, 1} المعرفة بالشكل:

$f(x) = (-1)^x$

فأوجد:

1. مدى الدالة f.
2. بيان الدالة f.

الحل:

إذا كانت x عدد زوجي فإن $f(x) = 1$ بينما إذا كانت x عدد فردي فإن $f(x) = -1$

وبالتالي يكون مدى الدالة f هو $R(f)=\{-1, 1\}$

وبيان الدالة هو:

$f = \{(x,1): x \text{ even}\} \cup \{(x,-1): x \text{ odd}\}$

مثال: إذا كانت f الدالة المعرفة على المجموعة $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ المعرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ if } x \text{ is even} \\ x^2 \text{ if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

فأوجد:

1. مدى الدالة f .
2. بيان الدالة f .

الحل:

إذا كانت x عدد زوجي فإن:

$$f(x) = x \Rightarrow f(0) = 0, f(2) = 2, f(4) = 4$$

بينما إذا كانت x عدد فردي فإن:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(1) = 1, f(3) = 9, f(5) = 25$$

وبالتالي يكون مدى الدالة f هو:

$$R(f) = \{0, 1, 2, 4, 9, 25\}$$

وبيان الدالة هو:

$$f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,9), (4,4), (5,25)\}$$

مثال: إعتبر العلاقة f من المجموعة $A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2)\}$ إلى المجموعة $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ المعرفه بالشكل:

$$f(x,y) = x + y$$

فحدد مدى الدالة f

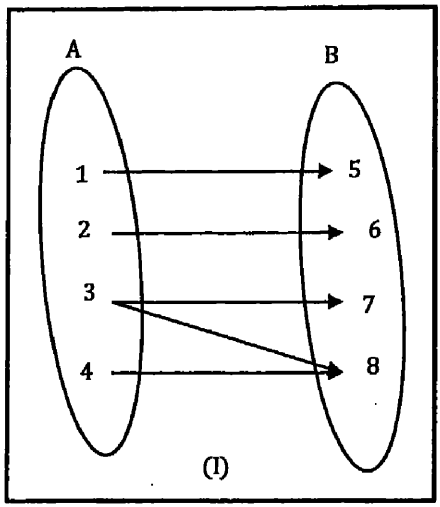
الحل:

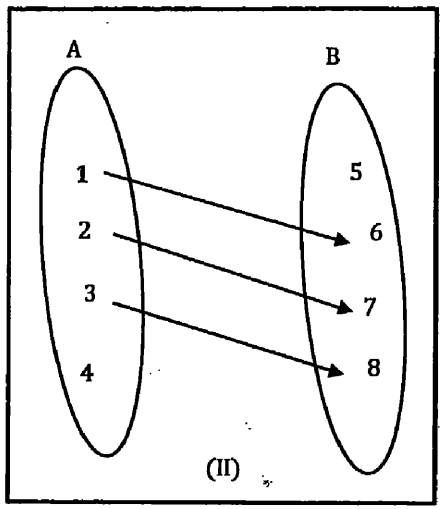
$$f(0, 1)=1, \quad f(0, 2)=2, \quad f(0, 3)=3, \quad f(1, 2)=3$$

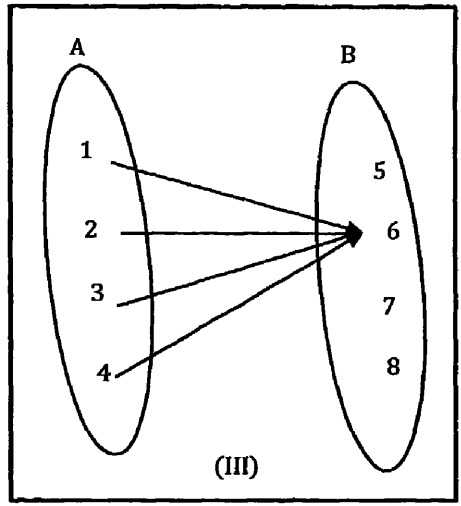
مدى الدالة هو:

$$R(f) = \{1, 2, 3\}$$

مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{5,6,7,8\}$ فأي من المخططات السهمية الأتية يمثل دالة وأيها لا يمثل مع التعليل؟







الحل:

الحالة الأولى: العلاقة الأولى لا تمثل دالة لأن $3 \in A$ مرتبط بعنصرين مختلفين من عناصر المجموعة B وهما 8 و 7 وهذا يخالف تعريف الدالة.

الحالة الثانية: العلاقة الثاني لا تمثل دالة لأن $4 \in A$ لم يرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة B وهذا يخالف تعريف الدالة.

الحالة الثالثة: تمثل دالة.

مثال: في المثال السابق إذا عكسنا إتجاة الأسهم في المخططات الثلاث فإن كلا منها لا يمثل دالة من B إلى A فما هو السبب؟

الحل:

الحالة الأولى: العنصر $8 \in B$ مرتبط بعنصرين مختلفين من A وهما 3 , 4.

الحالة الثانية: العنصر $5 \in B$ لم يرتبط بأي عنصر من A .

الحالة الثالثة: العنصر $6 \in B$ مرتبط بأكثر من عنصر من A وهما 1 , 2, 3, 4.

ملاحظة: هناك بعض الدوال تعتبر من الدوال الشهيرة ومنها:

أولاً: الدالة المحايدة $I_X: X \to X$ وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow I_X(x) = x$$

ثانياً: الدالة الثابتة $f: X \to Y$ وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x) = y_0 \quad , \quad y_0 \in Y$$

وفي هذه الحالة المدى هو $R(f) = \{y_0\}$

ثالثاً: الدالة المميزة:

$$\chi_A: X \to \{0,1\}$$

وتعرف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A' \end{cases}$$

رابعاً: دالة الإحتواء:

$$i: X \to Y, \qquad X \subseteq Y$$

وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow i(x) = x$$

خامساً: دالة الإسقاط في الموضع k :

$$\pi_k: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_k, \qquad 1 \leq k \leq n$$

وتعرف بـ:

$$\pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$$

سادساً: دالة مقصور f على A :

إذا كانت:

$$f: X \to Y, \qquad g = A \to B, \qquad A \subset X, \qquad B \subset Y$$

فإن:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x)$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة g مقصور f على A بينما الدالة f تسمى إمتداد g على X .

مبرهنه (5.1.2): إذا كانت X مجموعة تحتوي على m عنصر و كانت Y مجموعة تحتوي على n عنصر فإن مجموعة الدوال من X إلى Y والتي يرمز لها بالرمز Y^X تحتوي على n^m عنصر.

البرهان:

نفرض أن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

وبما أن عدد عناصر المجموعة Y هو n فإن كل عنصر من عناصر المجموعة X يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة Y بعدد m طريقة

إذن عدد الطرق التي يمكن أن نربط بها عناصر المجموعة X بعناصر المجموعة Y هو:

$$\underbrace{n.n.n \dots n.n}_{\text{m من المرات}} = n^m$$

مثال: لتكن X مجموعة تحتوي على 5 عناصر و Y مجموعة تحتوي على عنصرين فكم عدد الدوال الممكنة من X إلى Y .

الحل:

عدد الدوال الممكنة من X إلى Y يساوي n^m حيث m عدد عناصر المجموعة X و n هو عدد عناصر المجموعة Y وبوضع m=5 و n=2 وبالتالي نحصل على العدد 32 .

(5-2) الصورة والصورة العكسية

تعريف (5.2.1): لتكن $f: X \to Y$ دالة وكانت $A \subseteq X, B \subseteq Y$ فإن:

1. المجموعة التي تتكون من صور جميع عناصر A تشكل مجموعة جزئية من Y نسميها صورة A بواسطة f ونرمز لها بالرمز f(A) حيث

$$f(A) = \{y \in Y: y = f(x), x \in A\}$$

2. المجموعة التي تتكون من جميع عناصر X والتي تنتمي صورها إلى B تشكل مجموعة جزئية من X نسميها الصورة العكسية للمجموعة B بواسطة f ونرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ حيث

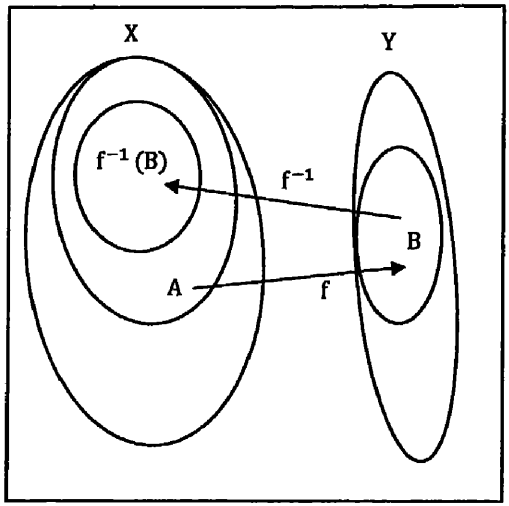
$$f^{-1}(B) = \{x \in X: y = f(x), y \in B\}$$

3. الصورة العكسية للعنصر y هي:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$$

ملاحظة:

يمكن توضيح الصورة والصورة العكسية بالرسم التوضيحي كما يلي:



مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,10\}$ وإذا كانت الدالة f معرفة بـ:

$f = \{(1,5),(2,10),(3,5)\}$

فإن العلاقة العكسية:

$f^{-1} = \{(5,1),(10,2),(5,3)\}$

لا تمثل دالة عكسية لأن العنصر 5 مرتبط بعنصرين 1و 3 .

مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,10,11\}$ وإذا كانت الدالة f معرفة بـ:

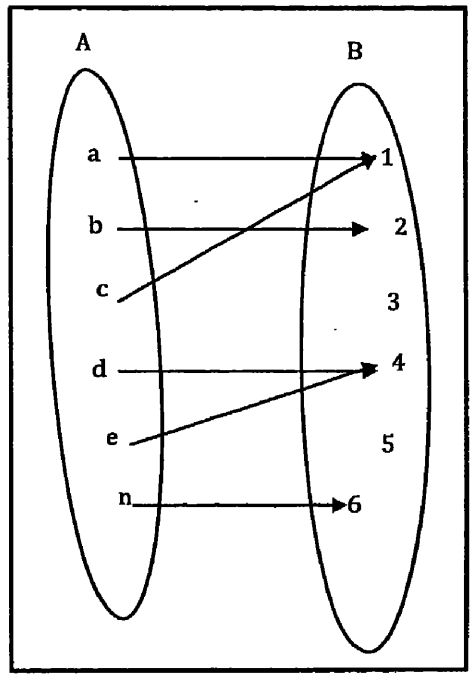
$f = \{(1,5),(2,10),(3,11)\}$

فإن العلاقة العكسية:

$f^{-1} = \{(5,1),(10,2),(11,3)\}$

تمثل دالة عكسية.

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e, n\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكانت $f: A \to B$ الدالة المعرف بالمخطط السهمي:



فإذا كانت $A_1, A_2 \subseteq A$ و $B_1, B_2 \subseteq B$ حيث:

$A_1 = \{a, b, d\}, A_2 = \{c, d, e\}, B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{2, 4, 5\}$

فإحسب ما يلي:

1. $f(d)$
2. $f^{-1}(1)$
3. $f^{-1}(5)$
4. $f^{-1}(B_1)$
5. $f(A_1)$
6. $f(A)$

7. $f(A_1 \cup A_2)$
8. $f(A_1) \cup f(A_2)$
9. $f(A_1 \cap A_2)$
10. $f(A_1) \cap f(A_2)$
11. $f(f^{-1}(B_1))$
12. $f^{-1}(f(A_1))$
13. $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
14. $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
15. $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
16. $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
17. $f^{-1}(B_1')$
18. $(f^{-1}(B_1))'$
19. $f'(A_1)$
20. $f(A_1')$

الحل:

1. $f(d) = \{4\}$
2. $f^{-1}(1) = \{a, c\}$
3. $f^{-1}(5) = \varphi$
4. $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{a, c, b\}$
5. $f(A_1) = f(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 4\}$
6. $f(A) = \{1, 2, 4, 6\}$
7. $f(A_1 \cup A_2) = f(\{a, b, d, c, e\}) = \{1, 2, 4\}$
8. $f(A_1) \cup f(A_2) = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$

9. $f(A_1 \cap A_2) = f(\{d\}) = \{4\}$

10. $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2,4\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$

11. $f\left(f^{-1}(B_1)\right) = f(\{a,c,b\}) = \{1,2\} \subset B_1$

12. $f^{-1}\left(f(A_1)\right) = f^{-1}(\{1,2,4\}) = \{a,c,b,d,e\} \supset A_1$

13. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) = \{a,b,c,d,e\}$

14. $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = \{a,c,b\} \cup \{b,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$

15. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\{2\}) = \{b\}$

16. $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \{a,c,b\} \cap \{b,d,e] = \{b\}$

17. $f^{-1}(B_1') = f^{-1}(\{4,5,6\}) = \{d,e,n\}$

18. $\left(f^{-1}(B_1)\right)' = \{a,c,b\}' = \{d,e,n\}$

19. $f'(A_1) = \{3,5,6\}$

20. $f(A_1') = \{1,4,6\}$

مثال: إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = nx$

فإحسب $f(\mathbb{Z})$ و $f^{-1}([a,b])$

الحل:

$f(\mathbb{Z}) = \{f(m): m \in \mathbb{Z}\} = \{nm: m \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$

$f^{-1}([a,b]) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in [a,b]\} = \{x \in \mathbb{R}: a \leq nx \leq b\}$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{a}{n} \leq x \leq \frac{b}{n}\right\} = \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$$

نظرية (5.2.2): لتكن $f:X \to Y$ دالة بحيث $A_1, A_2 \subseteq X$ و $B_1, B_2 \subseteq Y$ فإن:

1. $A_1 \subseteq A_2 \to f(A_1) \subseteq f(A_2)$

2. $B_1 \subseteq B_2 \to f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

5. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

7. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$

8. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$

9. $f^{-1}(B') = \big(f^{-1}(B)\big)'$

البرهان:

أولاً: بما أن $A_1 \subseteq A_2$ إذن:

$$f(A_1) = \{f(x): x \in A_1\} \subseteq \{f(x): x \in A_2\} = f(A_2)$$

ثانياً: بما أن $B_1 \subseteq B_2$ إذن:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in X: y = f(x) \wedge y \in B_1\} \subseteq \{x \in X: y = f(x) \wedge y \in B_2\} = f^{-1}(B_2)$$

ثالثاً: بما أن $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ و $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ فإن:

$$f(A_1) \subseteq f(A_1 \cup A_2), \qquad f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

إذن:

$$f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

ويتبقى إثبات أن:

$$f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)?$$

لذا نفرض أن $y \in f(A_1 \cup A_2)$ وبالتالي يوجد $x \in A_1 \cup A_2$ بحيث تكون:

$y = f(x)$ إذن:

$$x \in A_1 \vee x \in A_2$$
$$\rightarrow f(x) \in f(A_1) \vee f(x) \in f(A_2)$$
$$\rightarrow f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$\rightarrow f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

رابعاً: بما أن $B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$ و $B_2 \subseteq B_1 \cup B_2$ فإن:

$$f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2), \qquad f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2)$$

فإن:

$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

ويتبقى إثبات أن:

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$?

لذا نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ وبالتالي يوجد $y \in B_1 \cup B_2$ بحيث تكون:

$y = f(x)$ إذن:

$y \in B_1 \vee y \in B_2$

$\rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$\rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

خامسا: بما أن $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ و $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ فإن:

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$

فإن:

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

سادساً: بما أن $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ و $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ فإن:

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_2)$

فإن:

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

ويتبقى إثبات أن:

$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$?

لذا نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ وبالتالي:

$x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$

يوجد $y \in B_1, y \in B_2$ بحيث تكون $y = f(x)$ إذن:

$y \in B_1 \wedge y \in B_2 \Rightarrow y \in B_1 \cap B_2$

$\rightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$\rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

سابعاً: نريد إثبات أن $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ ؟

لذا نفرض أن $x \in A$ وبالتالي تكون $f(x) \in f(A)$ وبالتالي تكون $x \in f^{-1}(f(A))$

إذن $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ثامناً: نريد إثبات أن $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ؟

لذا نفرض أن $y \in f(f^{-1}(B))$ وبالتالي يوجد $x \in f^{-1}(B)$ بحيث تكون $y = f(x)$

إذن:

$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$

إذن:

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

تاسعاً: نريد إثبات أن $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$؟

أ. نريد إثبات أن $f^{-1}(B') \subseteq (f^{-1}(B))'$؟

نفرض أن $x \in f^{-1}(B')$ وبالتالي $f(x) \in B'$ إذن $f(x) \notin B$

إذن $x \notin f^{-1}(B)$

إذن $x \in (f^{-1}(B))'$

إذن $f^{-1}(B') \subseteq (f^{-1}(B))'$

ب. نريد إثبات أن $(f^{-1}(B))' \subseteq f^{-1}(B')$؟

نفرض أن $x \in (f^{-1}(B))'$ وبالتالي $x \notin f^{-1}(B)$ إذن $f(x) \notin B$

إذن $f(x) \in B'$

إذن $x \in f^{-1}(B')$

إذن $(f^{-1}(B))' \subseteq f^{-1}(B')$

ملاحظات:

1. من الممكن أن نعمم بعض الخصائص الواردة في النظرية السابقة كما يلي:

- $f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$
- $f(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f(A_i)$

- $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$
- $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$

2. لإثبات أنه قد يكون $f(A') \neq (f(A))'$ فإننا نعطي المثال التالي:

نفرض أن:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ by } f(n) = \begin{cases} n-1 \text{ if } n \neq 0 \\ 0 \text{ if } n = 0 \end{cases},$$

$$A = \{0\} \Rightarrow f(A) = \{0\} \Rightarrow (f(A))' = \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$$

لكن:

$$A' = \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^* \Rightarrow f(A') = \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(A') \neq (f(A))'$$

3. لقد أثبتنا أن $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي:

نفرض أن:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ by } f(x,y) = (x,0),$$

$$A_1 = \{(x,y): x \geq 0 \wedge y = 1\}, \qquad A_2 = \{(x,y): x \leq 0 \wedge y = 0\}$$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \varphi$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$f(A_1) = \mathbb{R}_+ \times \{0\}, \qquad f(A_2) = \mathbb{R}_- \times \{0\}$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

4. لقد أثبتنا أن $A \subset f^{-1}(f(A))$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي

نفرض أن:

$$f: \mathbb{R} \to [-1,1] \text{ by } f(x) = \sin x,$$

$$A = \{0, \pi\} \to f(A) = \{0\} \to f^{-1}(f(A)) = \pi\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$$

5. لقد أثبتنا أن $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي نفرض أن:

$f: \mathbb{N} \to \{0,1,2\}$ by $f(x) = 0$,
$B = \{0,1\} \to f^{-1}(B) = \mathbb{N} \to f(f^{-1}(B)) = \{0\}$
$\Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$

(5-3) العمليات الحسابية على الدوال

لتكن لدينا مجموعة غير خالية A ولتكن $f: A \to \mathbb{R}$ و $g: A \to \mathbb{R}$ دالتان معرفتان على A فإن:

1. حاصل ضرب الدالة f في عدد ثابت $k \in \mathbb{R}$ هو الدالة kf ويعرف بأنه لكل $x \in A$
فإن $(kf)(x) = kf(x)$
2. الدالتان f, g تكونا متساويتان إذا كان لكل $x \in A$ فإن $f(x) = g(x)$ وفي هذه الحالة نكتب f=g .
3. مجموع الدالتان هو $f+g$ يعرف بأنه لكل $x \in A$
فإن $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
4. فرق الدالتان هو $f-g$ يعرف بأنه لكل $x \in A$
فإن $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
5. حاصل ضرب الدالتان هو f.g يعرف بأنه لكل $x \in A$
فإن $(fg)(x) = f(x).g(x)$
6. حاصل قسمة الدالتان هو $\frac{f}{g}$ يعرف بأنه لكل $x \in A$
فإن $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $f(x) = 2x$ وكانت $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) = 3x + 2$

فإحسب:

1. حاصل ضرب الدالتان f, g في عدد ثابت $k = 7$
2. مجموع الدالتان $f+g$.

3. فرق الدالتان $f-g$

4. حاصل ضرب الدالتان $f.g$

5. حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$

هل الدالتان f, g تكونا متساويتان .

الحل:

أولاً: حاصل ضرب الدالتان f, g في عدد ثابت $k = 7$:

$$7f(x) = 7(2x) = 14x$$

$$7g(x) = 7(3x + 2) = 21x + 14$$

ثانياً: مجموع الدالتان $f+g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x) + (3x + 2) = 5x + 2$$

ثالثاً: فرق الدالتان $f-g$:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x) - (3x + 2) = -x - 2$$

رابعاً: حاصل ضرب الدالتان $f.g$:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x)(3x + 2) = 6x^2 + 4x$$

خامساً: حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{3x+2}, \quad 3x + 2 \neq 0$$

سادساً: الدالتان f, g ليستا متساويتان لأنه إذا أخذنا مثلا $x=1$ فإن:

$$f(1) = 2, \quad g(1) = 5$$

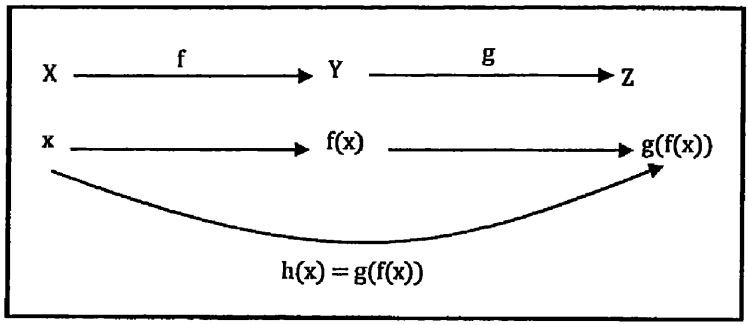
$$\Rightarrow f(1) \neq g(1)$$

$$\Rightarrow f \neq g$$

(5-4) تركيب الدوال Composition of Functions

تعريف (5.4.1): لتكن لدينا الدوال $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ فإن الدالة $h:X\to Z$ المعرف بالشكل $h(x)=g(f(x))$ يسمى تركيب f و g ونرمز له بالرمز $g\circ f$.

ملاحظة: يمكن توضيح عملية تركيب الدوال بالمخطط التالي:



مثـــال: إذا كانـــت $f_1:A\to B$ و $f_2:B\to C$ و $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6,7\}$ و $C=\{1,2,3,4\}$ بحيث:

$f_1(1)=4,\quad f_1(2)=5,\quad f_1(3)=6$

$f_2(4)=1,\quad f_2(5)=2,\quad f_2(6)=3,\quad f_2(7)=4$

فهل:

1. $f_2\circ f_1$ معرفه

2. $f_1\circ f_2$ معرفه.

الحل:

أولاً:

$f_2\circ f_1(1)=f_2(f_1(1))=f_2(4)=1$

$f_2\circ f_1(2)=f_2(f_1(2))=f_2(5)=2$

$f_2\circ f_1(3)=f_2(f_1(3))=f_2(6)=3$

إذن $f_2\circ f_1$ معرفه

ثانياً:

$f_1 \circ f_2(4) = f_1(f_2(4)) = f_1(1) = 4$

$f_1 \circ f_2(5) = f_1(f_2(5)) = f_1(5) = 5$

$f_1 \circ f_2(6) = f_1(f_2(6)) = f_1(3) = 6$

$f_1 \circ f_2(7) = f_1(f_2(7)) = f_1(4) =$ غيرمعرفه

إذن $f_1 \circ f_2$ غير معرفه.

مثـال: إذا كانـت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيـث $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 1$ فإحسب كلاً من:

أ. $g \circ f$

ب. $f \circ g$

ج. مستخدما الفقرة (أ) و (ب) تحقق أن $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$

د. أوجد كلا من f^2 و g^2 ومن ثم إحسب كلا من $f^2(-1)$ و $g^2(-1)$

الحل:

أولاً:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 1 = x^2$$

ثانياً:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

ثالثاً: واضح من الفقرتين السابقتين:

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 2 \neq (g \circ f)(x) = x^2$$

وبالتالي يكون:

$$(f \circ g)(2) = 2 \neq (g \circ f)(x) = 4$$

رابعاً:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$
$$\Rightarrow f^2(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 + 2 = 5$$

كذلك:

$$g^2(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x - 1)$$
$$= x - 1 - 1 = x - 2$$

$\Rightarrow g^2(-1) = -1 - 2 = -3$

نظرية (5.4.2): إذا كانت $f: X \to Y$ و $g: X \to Z$ و $h: Z \to D$ فإن:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

البرهان:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big(g \circ f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

وهذا متحقق لكل $x \in A$ إذن:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث تكون:

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 2x, \qquad h(x) = \sin x$$

فتحقق من كون:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

الحل:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = (h \circ g)(x+1)$$

$$= h\big(g(x+1)\big) = h\big(2(x+1)\big) = \sin 2(x+1) \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big(g \circ f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big(g(x+1)\big)$$

$$= h\big(2(x+1)\big) = \sin 2(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

مثال: إذا كانت $f: X \to Y$ فإثبت أن $f \circ I_x = I_y \circ f = f$

البرهان:

$$I_x: X \to X, \qquad I_y: Y \to Y, \qquad f(x) = y \; \forall x \in X$$

$$(f \circ I_x)(x) = f\big(I_x(x)\big) = f(x) = y \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\big(I_y \circ f\big)(x) = I_y\big(f(x)\big) = I_y(y) = y \quad \ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$(f \circ I_x)(x) = \big(I_y \circ f\big)(x)$$

وهذا صحيح لكل $x \in X$ وبالتالي:

$$f \circ I_x = I_y \circ f = f$$

مثال: إذا كان $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ بحيث تكون:

$$f(n) = n + 1, \qquad g(n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

فإحسب كلاً من $(g \circ f)(n)$ و $(f \circ g)(n)$ ثم علق على النتائج.

الحل:

$$(g \circ f)(n) = g\big(f(n)\big) = g(n + 1) = 0$$

$$(f \circ g)(n) = f\big(g(n)\big) = f(0) = 1$$

وبالتالي:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

(5-5) أنواع الدوال

(5-5-1) الدالة المتباينة

تعريف (5.5.1): نقول أن الدالة $f: X \rightarrow Y$ متباينة أو (أحادية) injective أو (1-1) أو one to one إذا كان كل عنصر من المستقر Y يكون صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق X.

وبمعنى أخرفإن هذا يعني أنه إذا كان $y \in Y$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(y)$ تحتوي على عنصر واحد فقط أو تكون المجموعة الخالية.

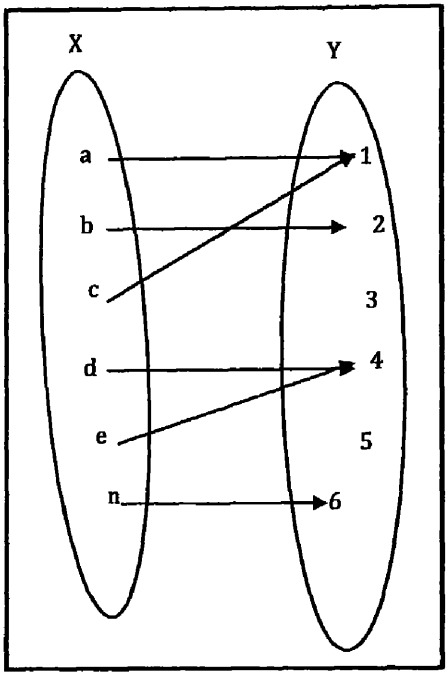
وهذا يعني بالرموز:

$$\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

أو بالعلاقة المكافئة:

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

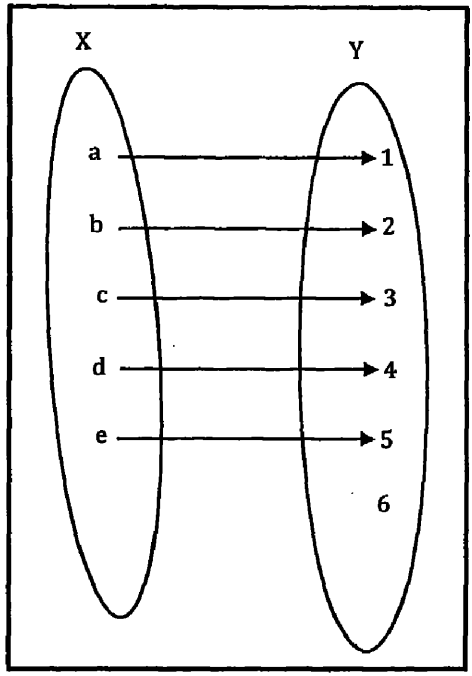
مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة غير متباينة لأن $f(a) = f(c) = 1$ ولكن $a \neq c$

كذلك $f(d) = f(e) = 4$ ولكن $d \neq e$

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة متباينة.

مثال: إذا كانت A, B مجموعتان ومعرف عليهما الدوال f_1, f_2 من A إلى B حيث:

$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$

$f_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}, \quad f_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$

فبين أي من الدوال متباينة وأيهما لا؟

الحل:

إذن الدالة f_1 غير متباينة لأن $f(1) = f(3) = 1$ ولكن $1 \neq 3$

والدالة f_2 متباينة

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة متباينه؟

الحل:

الدالة غير متباينة لأن $f(1) = f(-1) = 1$ ولكن $1 \neq -1$

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة متباينه؟

الحل:

نعم الدالة متباينة .

نظرية (5.5.1.1): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$.

البرهان:

أولا: لقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أن دائماً يكون $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

إذن متبقي لنا إثبات أن $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ ؟

لذا نفرض أن:

$x \in f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow \exists a \in A: f(x) = f(a)$

ولكن f متباينة إذن $x = a \in A$

إذن $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

ثانياً: نفرض أن $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن الدالة f متباينة؟

لذا نفرض أن:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 \in f^{-1}(f(x_2)) = \{x_2\}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

إذن الدالة f متباينة.

نظرية (5.5.1.2): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ وذلك لكل $A_1, A_2 \subseteq X$.

البرهان:

أولاً: نفرض أن f دالة متباينة ولقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أنه دائماً يكون:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

لذا متبقي إثبات أن $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$؟

لذا نفرض أن:

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 : y = f(x_1) \wedge y = f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

وبما أن الدالة f متباينة فإن:

$$x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$$

$$\Rightarrow y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A_1 \cap A_2)$$

ثانياً: نفرض أن:

$$A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\},\ x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow\ A_1 \neq A_2, \qquad A_1 \cap A_2 = \varphi$$

ولكن $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ إذن:

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \varphi$$

$$\Rightarrow f(A_1) \neq f(A_2)$$

إذن الدالة f متباينة.

نظرية (5.5.1.3): إذا كانت $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ دالتان بحيث تكون $g\circ f$ دالة متباينة فإن الدالة f تكون دالة متباينة.

البرهان:

نفرض أن:

$$x_1,x_2\in X: f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$$

ولكن الدالة $g\circ f$ دالة متباينة فإن $x_1=x_2$ وبالتالي فإن الدالة f هي دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.4): لتكن $f:X\to Y$ دالة فإن الخواص التالية تكون متكافئة:

1. f دالة متباينة.
2. توجد دالة $g:Y\to X$ بحيث يكون $g\circ f=I_x$.
3. إذا كانت $g:Y\to X$ و $h:Y\to X$ دالتان تحققان $f\circ g=f\circ h$ فإن $g=h$.

البرهان:

(i) →(ii)

نفرض أن f دالة متباينة.

إذن لكل عنصر y من f(x) هو صورة وحيدة لعنصر وحيد x من X وبالتالي يمكننا أن نعرف دالة $g:Y\to X$ على النحو التالي:

$$g(y)=\begin{cases} x \text{ if } y\in f(X) \\ x_0 \text{ if } y\in Y\backslash f(X)\end{cases}$$

$$\forall x\in X\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=x$$

$$\Rightarrow g\circ f=I_x$$

(ii)→(iii)

نفرض أن $g:Y\to X$ و $h:Y\to X$ دالتان بحيث:

$$f\circ g=f\circ h=I_y$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(y)=(f\circ h)(y)=y$$

$\Rightarrow f(g(y)) = f(h(y)) = y$

$\Rightarrow g(y) = h(y) \quad \forall y \in Y$

$\Rightarrow g = h$

(iii)$\rightarrow$(i)

Let $x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2)$

Let $g: Y \rightarrow X,\ h: Y \rightarrow X,\ g(y) = x_1,\ h(y) = x_2$

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_1) = f(x_2) = f(h(y)) = (f \circ h)(y)$

$\Rightarrow f \circ g = f \circ h$

(iii) $\Rightarrow g = h\ \forall y \in Y$

$\Rightarrow g(y) = h(y)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

إذن الدالة f دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.5): لتكن $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ دالتان فإن إذا كانت f و g دالتان متباينان فإن $g \circ f$ دالة متباينة.

البرهان:

بما أن f و g دالتان متباينان وبالتالي بإستخدام نظرية (5.5.1.4) فإنه توجد دالتان $f_1: Y \rightarrow X,\ g_1: Z \rightarrow Y$ بحيث: $f_1 \circ f = I_x,\ g_1 \circ g = I_y$ إذن:

$(f_1 \circ g_1)(g \circ f) = f_1 \circ (g_1 \circ g) \circ f = f_1 \circ I_y \circ f = f_1 \circ f = I_x$

إذن الدالة $g \circ f$ دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.6): لتكن $f: X \rightarrow Y$ دالة متباينة وكانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عدد n من المجموعات الغير خالية من X فإن $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة f(X) إذا وفقط إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تمثل تجزئة ل X .

البرهان:

أولاً: نفرض أن الدالة f دالة متباينة وأن $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة $f(X)$ إذن:

$$f(A_i) \cap f(A_j) = \varphi \quad \forall i \neq j$$

$$f^{-1}(f(A_i)) \cap f^{-1}(f(A_j)) = \varphi \quad \forall i \neq j \quad \dots\dots(1)$$

$$f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n) = f(X)$$

$$f^{-1}(f(A_1)) \cup f^{-1}(f(A_2)) \cup \dots \cup f^{-1}(f(A_n)) = f^{-1}(f(X)) \quad \dots\dots(2)$$

ولكن بما أن الدالة f متباينة فمن نظرية (5.5.1.1) فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$ وبالتالي فإن (1) تعطى:

$$A_i \cap A_j = \varphi \quad \forall i \neq j \quad \dots\dots(3)$$

كذلك (2) تعطى:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad \dots\dots(4)$$

إذن من (3) و (4) نحصل على أن $A_1, A_2, \dots, A_n$ تمثل تجزئة ل X .

ثانياً: نفرض أن الدالة f دالة متباينة وأن $A_1, A_2, \dots, A_n$ تمثل تجزئة ل X إذن:

$$A_i \cap A_j = \varphi \quad \forall i \neq j$$

وبالتالي:

$$f(A_i) \cap f(A_j) = \varphi \quad \forall i \neq j \quad \dots\dots(5)$$

كذلك

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$$

وبالتالي:

$$f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n) = f(X) \quad \dots\dots(6)$$

إذن من (5) و (6) نحصل على أن $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة $f(X)$.

(5-5-2) الدالة الشاملة

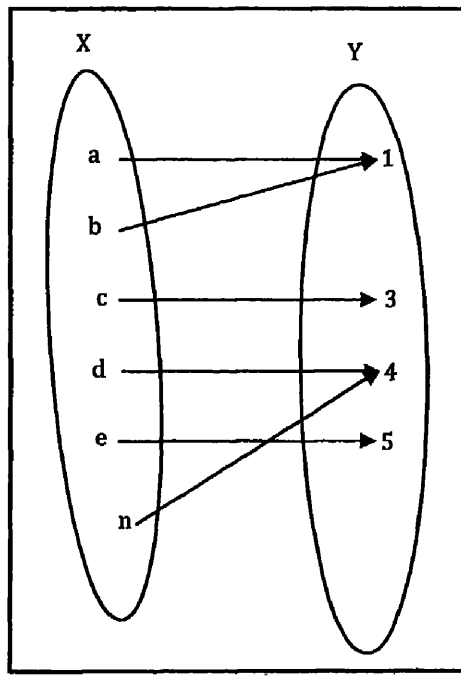
تعريف (5.5.2): نقول أن الدالة $f: X \to Y$ غامرة أو (شاملة) surjective أو onto إذا كان كل عنصر من المستقر Y يمثل صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق X وهذا يعني أن $f(X) = Y$ أي أن مدى f يساوي المستقر.

وهذا يعني أيضا أنه إذا كان $y \in Y$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(y)$ تكون مجموعة غير خالية.

وهذا يعني بالرموز:

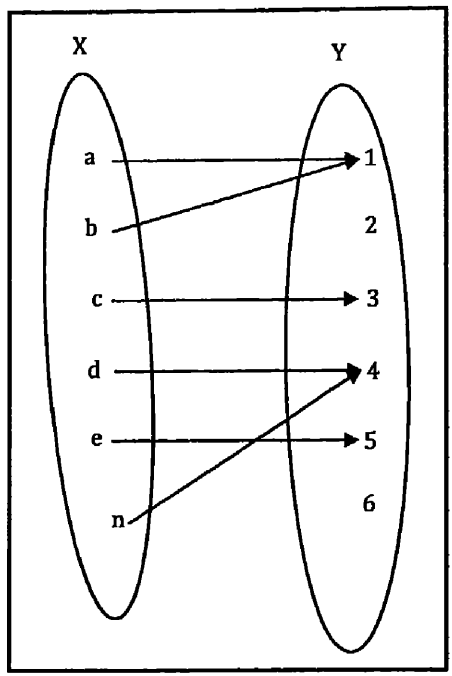
$\forall y \in Y \exists x \in X: y = f(x)$

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة شاملة.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة ليست شاملة لأن العنصر $2 \in Y$ ولا يوجد لها $x \in X$ يحقق $2 = f(x)$
كذلك العنصر $6 \in Y$ ولا يوجد لها $x \in X$ يحقق $6 = f(x)$.

مثال: إذا كانت A, B مجموعتان ومعرف عليهما الدوال f_1, f_2 من A إلى B حيث:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4\},$

$f_1 = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,4),(5,1),(6,3)\},$

$f_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,2),(6,1)\}$

فبين أي من الدوال شاملة وأيهما لا؟

الحل:

إذن الدالة f_1 غير شاملة لأن $2 \in B$ ولكن $f^{-1}(2) \notin A$

والدالة f_2 شاملة.

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

الدالة غير غير شاملة لأن $-1 \in B$ ولكن $f^{-1}(-1) \notin A$

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

نعم الدالة شاملة لأن إذا كانت $y = x^2$ فإن $x = \pm\sqrt{y}$ وبالتالي يكون لكل y في المستقر فإنه يوجد x في المنطلق يحقق y=f(x) .

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = 2x + 1$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

نعم الدالة شاملة لأن إذا كانت $y = 2x + 1$ فإن $x = \frac{y-1}{2}$ وبالتالي يكون لكل y في المستقر فإنه يوجد x في المنطلق يحقق y=f(x) .

نظرية (5.5.2.1): لتكن $f:X \to Y$ دالة فإن f تكون شاملة إذا وفقط إذا كان $f(f^{-1}(B)) = B$ وذلك لكل $B \subseteq Y$.

البرهان:

أولا: لقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أن دائما يكون $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

إذن متبقي لنا إثبات أن $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ ؟

لذا نفرض أن $y \in B$ ولكن f شاملة إذن يوجد $x \in X$ بحيث $y = f(x)$

إذن:

$$f(x) \in B \; x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$$

إذن $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

ثانيا: نفرض أن $f(f^{-1}(B)) = B$ وذلك لكل $B \subseteq Y$ ونريد إثبات أن الدالة f شاملة؟

لذا نفرض أن:

$$B = Y$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y$$

$$\Rightarrow X = f^{-1}(Y)$$

$$\Rightarrow f(X) = Y$$

إذن الدالة f شاملة.

ملاحظه: الدالة $f:X \to Y$ تكون شاملة إذا كان $Ran(f) = f(X) = Y$

نظرية (5.5.2.2): إذا كانت $f:X \to Y$ و $g:Y \to Z$ دالتان بحيث تكون $g \circ f$ دالة شاملة فإن الدالة g تكون دالة شاملة.

البرهان:

بما أن $g \circ f$ دالة شاملة فإن $g(f(X)) = Z$.

وهذا يعني أن $g(Y) = Z$ وبالتالي فإن g دالة شاملة.

نظرية (5.5.2.3): لتكن $f:X \to Y$ دالة فإن الخواص التالية تكون متكافئة:

1. f دالة شاملة.
2. توجد دالة $g:Y \to X$ بحيث تكون $f \circ g = I_Y$.

3. إذا كانت $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ دالتان تحققان $g \circ f = h \circ f$ فإن $g = h$.

البرهان:

(i)→(ii)

نفرض أن f دالة شاملة وبالتالي $\varphi \neq f^{-1}(y)$ لكل $y \in Y$

إذن لكل $y \in Y$ يوجد $x \in f^{-1}(y)$

إذن يمكننا أن نعرف دالة $g: Y \to X$ بحيث $g(y) = x \; \forall y \in Y$ وبالتالي:

$$\forall y \in Y \Rightarrow (f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y$$

$$\Rightarrow f \circ g = I_y$$

(ii)→(iii)

نفرض أن $g: Y \to X,\ h: Y \to X$ بحيث $g \circ f = h \circ f = I_x$ وبالتالي:

$$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g\big(f(x)\big) = h\big(f(x)\big) = x$$

$$\Rightarrow g = h$$

(iii)→(i)

سوف نستخدم البرهان العكسي ولذلك نفرض أن f دالة غير شاملة.

إذن $f(X) \subset Y$ إذن $Y \backslash f(X) \neq \varphi$

نفرض أن $x_0 \neq x_1$ عنصرين من X ونعرف دالة $g: Y \to X$

بحيث $g(y) = x_0$ لكل $y \in Y$

ونعرف دالة $h: Y \to X$

بحيث $h(y) = x_0$ لكل $y \in f(X)$

و $h(y) = x_1$ لكل $y \in Y \backslash f(X)$

إذن واضح أن $g \neq h$

ولكن:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x_0$$

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = x_0$$

إذن:

$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$

$\Rightarrow g \circ f = h \circ f$

إذن من الخاصية (iii) تكون $g = h$ ولكن هذا يعارض $g \neq h$ وبالتالي لفك هذا التعارض يجب أن تكون الدالة f شاملة.

نظرية (5.5.2.4): لتكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان فإنه إذا كانت f و g دالتان شاملتان فإن $g \circ f$ تكون دالة شاملة.

البرهان: بما أن f و g دالتان شاملتان وبالتالي بإستخدام نظرية (5.5.2.3) فإنه توجد دالتان $f_1: Y \to X$, $g_1: Z \to Y$ بحيث: $f \circ f_1 = I_y$, $g \circ g_1 = I_z$

إذن:

$(f \circ g)(f_1 \circ g_1) = g \circ (f \circ f) \circ g_1 = g \circ I_y \circ g_1 = g \circ g_1 = I_z$

إذن الدالة $g \circ f$ هي دالة شاملة.

نظرية (5.5.2.5): لتكن X و Y مجموعتين غير خاليتين فإن الخاصيتين التاليتين تكونا متكافئتين:

1. توجد دالة متباينة من X إلى Y .
2. توجد دالة شاملة من Y إلى X .

البرهان:

(i)→(ii)

إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ دالة متباينة فإنه من نظرية (5.5.1.4) توجد دالة $g: Y \to X$ بحيث تكون $g \circ f = I_x$

إذن الدالة g تكون شاملة.

(ii)→(iii)

إذا كانت الدالة $g: Y \to X$ شاملة فإنه من نظرية (5.5.2.3) توجد دالة $f: X \to Y$ بحيث تكون $g \circ f = I_x$

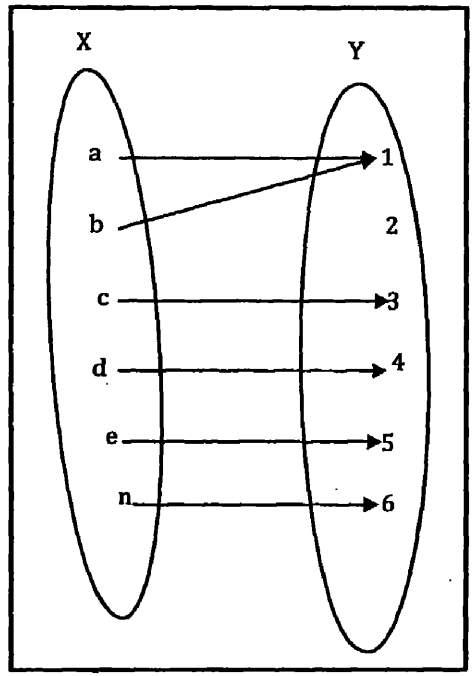
إذن الدالة f تكون متباينة.

(5-5-3) الدالة المتقابلة

تعريف (5.5.3): نقول أن الدالة $f: X \to Y$ دالة متقابلة Bijective إذا كان متباينة و شاملة في أن واحد.

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ دالة متقابلة فإن هذا يعني أن لكل عنصر y من المستقر Y توجد له صورة وحيدة $f^{-1}(y)$ من المنطلق X .

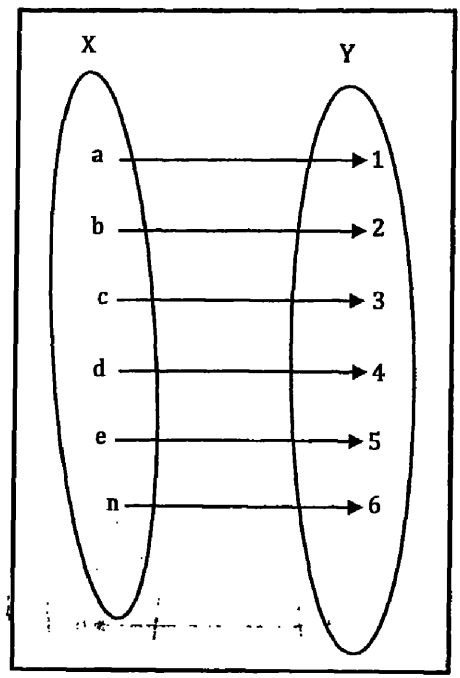
مثال: الدالة $f: X \to Y$



الدالة f هي دالة غير متباينة لأن $f(a) = f(c) = 1$ ولكن $a \neq c$

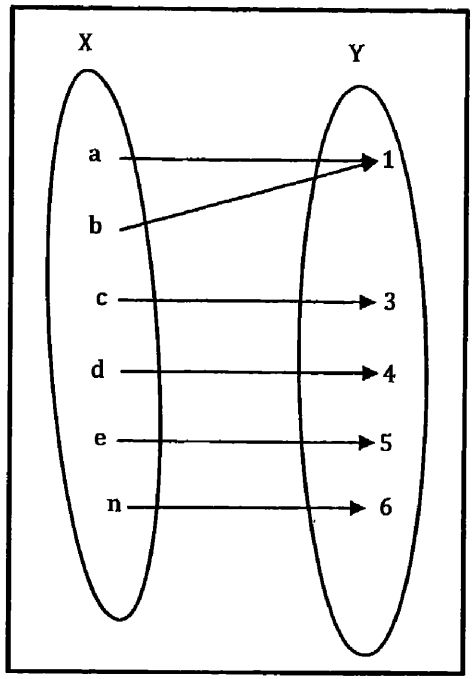
كذلك الدالة f هي دالة ليست شاملة لأن العنصر $2 \in Y$ ولا توجد لها $x \in X$ يحقق $f(x) = 2$ وبالتالي الدالة f لا تمثل تقابل.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



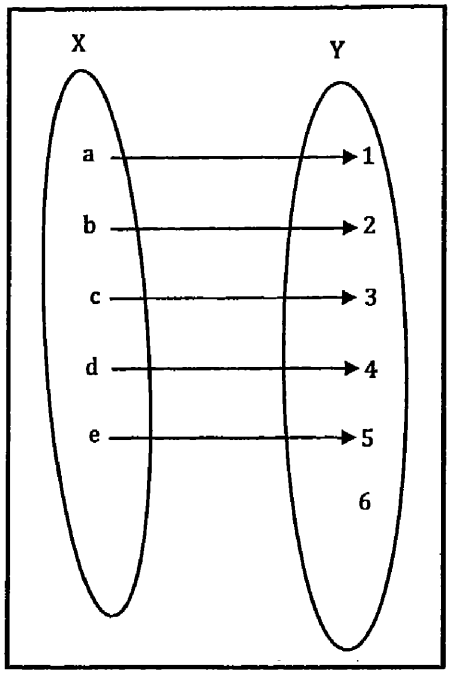
الدالة f هي دالة متباينة و شاملة وبالتالي فهي دالة تمثل تقابل.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



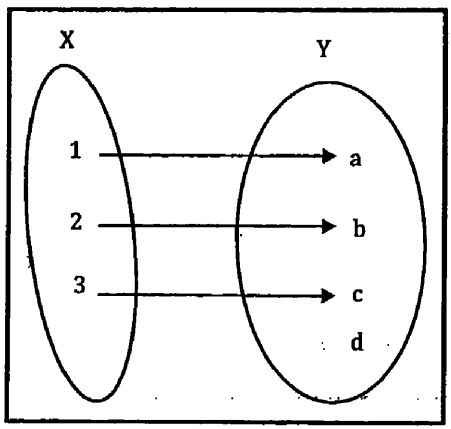
هي دالة شاملة لكنها دالة ليست متباينة لأن $f(a) = f(b) = 1$ ولكن $a \neq b$ وبالتالي فالدالة لا تمثل تطابق.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة متباينة لكنها ليست شاملة لأن العنصر $6 \in Y$ لا توجد له $x \in X$ يحقق $6 = f(x)$ وبالتالي فالدالة لا تمثل تقابل.

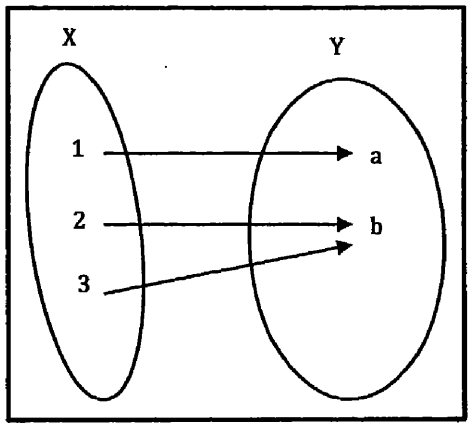
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة متباينة لكنها ليست شاملة لأن العنصر $d \in Y$ ولكن $f^{-1}(d)$ غير معرفه وبالتالي فالدالة f لا تمثل تقابل.

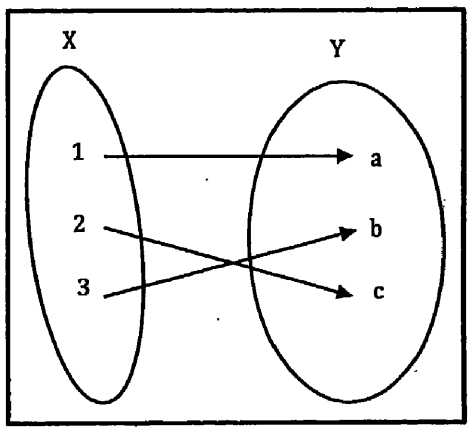
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة شاملة لكنها ليست متباينة لأن $f(2) = f(3) = b$ ولكن $2 \neq 3$ وبالتالي فالدالة f لا تمثل تقابل.

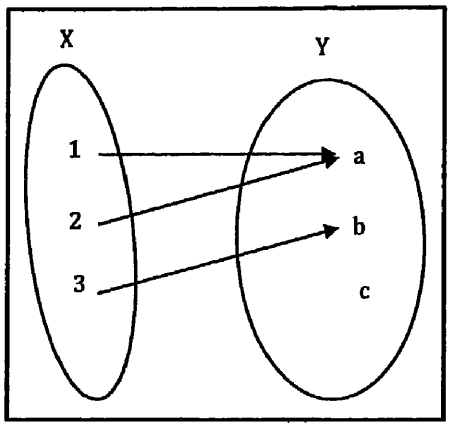
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة متباينة وشاملة وبالتالي فهي تمثل تقابل.

مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة ليست متباينة لأن $f(1) = f(2) = a$ لكن $1 \neq 2$.

وكذلك الدالة ليست شاملة لأن العنصر $c \in Y$ ولكن $f^{-1}(c)$ غير معرفه .

وبالتالي فالدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

الحل:

أولاً: لإختبار هل الدالة متباينة نفرض أن

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

إذن الدالة متباينة.

ثانيا: الدالة ليست شاملة لأن إذا كانت $f(x) = 1 \in \mathbb{N}$ فإن $2x = 1$

إذن $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

إذن $f^{-1}(1)$ غير معرف.

وبالتالي الدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ المعرفة بالشكل $f(x) = 2x + 1$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

الحل:

اولا: لإختبار هل الدالة متباينة نفرض أن

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

إذن الدالة متباينة.

ثانيا: الدالة ليست شاملة لأن إذا كانت $f(x) = 0 \in \mathbb{N}$ فإن $2x + 1 = 0$

إذن $x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

إذن $f^{-1}(0)$ غير معرف.

وبالتالي الدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ دالة معرف بالشكل $f(x) = x + 1$

1. إدرس هل الدالة متباينة – شاملة – تقابل؟
2. أوجد $f(5)$ و $f(\{-1, 3\})$ و $f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(\{1,7\})$.
3. إرسم مخططا سهما بحيث يبين فيه صور العناصر $-2 \leq x \leq 2$.
4. هل f^{-1} تمثل دالة من $\mathbb{Z}$ إلى نفسها ؟ إذا كان الجواب بنعم فإكتب تعريف f^{-1} .

الحل:

أولاً: لإختبار هل الدالة f متباينة؟ لذا نفرض أن:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

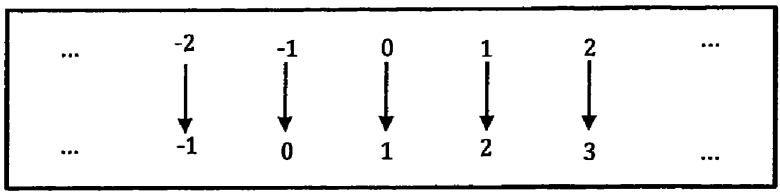
إذن الدالة f متباينة.

ومن الواضح أن الدالة f دالة شاملة وبالتالي فهي تمثل تقابل.

ثانياً:

$$f(5)=6, f(\{-1,3\})=\{0,4\}, f^{-1}(0)=\{-1\}, f^{-1}(\{1,7\})=\{0,6\}$$

ثالثاً:



رابعاً: طالما أن f دالة تمثل تقابل فإن الدالة العكسية f^{-1} تمثل أيضا تقابل ولتعينه نستخدم الدالة العكسية:

$$y=x+1 \Rightarrow x=y-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=y-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ المعرف ب $f(n,m)=n+1$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f هي دالة غير متباينة لأن

$$f(1,1)=f(1,2)=2$$

ولكن $(1,1) \neq (1,2)$

ثانياً: من الواضح أن الدالة f شاملة.

ثالثاً: الدالة f لا تمثل تقابل لإنها ليست متباينة.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف ب $f(x)=x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟ ثم حدد مدى الدالة؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة غير متباينة لأن

$$f(-1)=f(1)=1$$

ولكن $1 \neq -1$

ثانياً: الدالة f دالة ليست شاملة لأن جميع الأعداد السالبة في المستقر $\mathbb{R}$ ليست لها صورة في المنطلق فعلى سبيل المثال $f^{-1}(-2)$ غير معرف وبالتالي فالدالة ليست شاملة.

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

رابعاً: المدى يمكن وصفه كما يلي:

$$R(f) = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة غير متباينة لأن

$$f(-1) = f(1) = 1$$

ولكن $1 \neq -1$

ثانياً: الدالة f دالة شاملة

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة متباينة.

ثانياً: الدالة f دالة ليست شاملة لأن جميع الأعداد السالبة في المستقر $\mathbb{R}$ ليست لها صورة في المنطلق فعلى سبيل المثال $f^{-1}(-2)$ غير معرف وبالتالي فالدالة ليست شاملة.

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة متباينة.

ثانياً: الدالة f دالة شاملة

ثالثاً: الدالة f تمثل تقابل.

نظرية (5.5.3.1): لتكن $f:X \to Y$ دالة فإن f تكون تقابل إذا وفقط إذا كان $f(X\backslash A) = Y\backslash f(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$.

{أو بإسلوب أخر $f(A') = f'(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$ }.

البرهان:

أولاً: نفرض أن الدالة f تمثل تقابل و أن $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن $f(A') = f'(A)$ ؟

بما أن:

$$A \cap A' = \varphi, \qquad A \cup A' = X$$

وبما أن الدالة f تقابل فإنها متباينة و شاملة وبالتالي:

$$f(A) \cap f(A') = \varphi, \qquad f(A) \cup f(A') = f(X) = Y$$

إذن $f(A')$ لها مكملة $f(A)$ وهذا يعني أن:

$$f(A') = Y\backslash f(A) = f'(A)$$

عكسياً: نفرض أن $f(A') = f'(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن الدالة f تمثل تقابل أي إنها متباينة و شاملة؟

1. لإثبات أن الدالة متباينة؟ نفرض أن

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \notin \{x_2\} \Rightarrow x_1 \in \{x_2\}'$$

$$\Rightarrow f(x_1) \in f(\{x_2\}')$$

$$\Rightarrow f(x_1) \in f'(\{x_2\})$$

$$\Rightarrow f(x_1) \notin f(\{x_2\})$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(\{x_2\})$$

2. لإثبات أن الدالة f شاملة؟

بما أن:

$$X = A \cup A'$$

$$\Rightarrow f(X) = f(A) \cup f(A') = f(A) \cup f'(A) = Y$$

إذن الدالة شاملة.

نظرية (5.5.3.2): إذا كانت $f:X\to Y$ دالة و X و Y مجموعتين غير خاليتين فإن الخاصيتين التاليتين تكونا متكافئتين:

1. f دالة متقابلة .
2. توجد دالة g من Y إلى X بحيث تكون $g\circ f=I_x$ و $f\circ g=I_y$.

البرهان:

(i)→(ii)

بما أن الدالة $f:X\to Y$ دالة متباينة فإنها من نظرية (5.5.1.4) توجد دالة $g_1:Y\to X$ بحيث تكون $g_1\circ f=I_x$.

وبما أن الدالة $f:X\to Y$ شاملة فإنها من نظرية (5.5.2.3) توجد دالة $g_2:Y\to X$ بحيث تكون $f\circ g_2=I_y$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$g_2=I_x\circ g_2=(g\circ f)\circ g_2=g_1\circ(f\circ g_2)=g_1\circ I_y=g_1$$

إذن:. . .

$$f\circ g=I_y,\qquad g\circ f=I_x$$

(ii)→(iii)

نفرض أنه توجد دالة $g:Y\to X$ بحيث تكون $g\circ f=I_x$

إذن من نظرية (5.5.1.4) فإن الدالة f تكون متباينة.

كذلك إذا وجدت دالة $g:Y\to X$ بحيث تكون $f\circ g=I_y$

إذن من نظرية (5.5.2.3) فإن الدالة f تكون شاملة.

إذن الدالة f دالة متقابلة.

ملاحظة: كل دالة تمثل تقابل $f:X\to Y$ تكون مرتبطة بدالة وحيدة $g:Y\to X$ تمثل أيضا تقابل وتحقق $g\circ f=I_x$ و $f\circ g=I_y$ وفي هذه الحالة الدالة g تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها بالرمز f^{-1} وتحقق:

$$\forall x\in X,y\in Y:f(x)=y\leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

نظرية (5.5.3.3): لتكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان فإن:

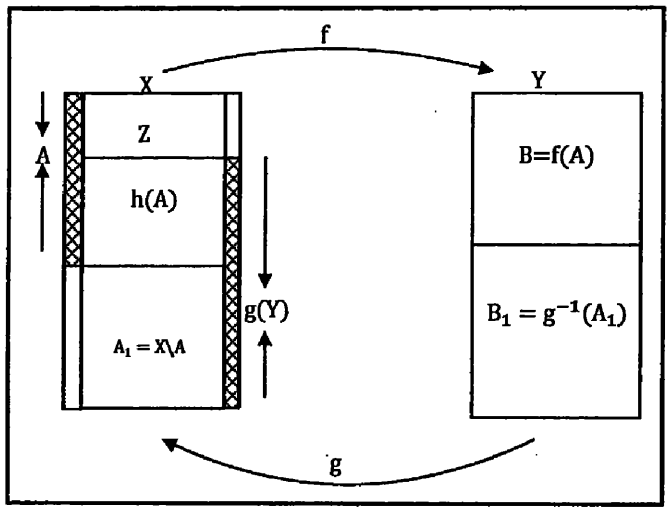
إذا كانت f و g دالتان متقابلتان فإن $g \circ f$ دالة متقابلة.

البرهان: إذا كانت كلا من f و g تمثل تقابل فإنهما متباينان وشاملتان وبالتالي من نظرية (5.5.1.5) ونظرية (5.5.2.4) تكون دالة التركيب $g \circ f$ أيضا تكون دالة متباينة وشاملة وبالتالي تمثل تقابل.

نظرية (5.5.3.4): Schroder Bernstein's Theorem : لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين فإذا وجدت دالة متباينة $f: X \to Y$ ودالة متباينة أخرى $g: Y \to X$ فإنه توجد دالة من X إلى Y تمثل تقابل.

البرهان:

الشكل التالي لتوضيح البرهان:



نفرض أن $Z = X \backslash g(Y)$ و $h = g \circ f$ و $J = \{M \in P(X): Z \cup h(M) \subseteq M\}$

بما أن $X \in J$ إذن $J \neq \varphi$ وبالتالي نضع $A = \cap_{M \in J} M$ ثم نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إثبات أن $A \in J$ ؟

بما أن f دالة متباينة

إذن $h(A) = h(\cap_{M \in J} M) = \cap_{M \in J} h(M)$

وبما أن $Z \cup h(M) \subseteq M \ \forall M \in J$

إذن: $Z \cup h(M) = \cap_{M \in J} Z \cup h(M) \subseteq \cap_{M \in J} M = A$

إذن: $A \in J$

الخطوة الثانية: إثبات أن $A = Z \cup h(A)$ ؟

بما أن $Z \cup h(A) \subseteq A$ وبما أن $A \in J$

إذن $Z \cup h(A) \in J$

إذن $h(Z \cup h(A)) \subseteq h(A)$

إذن $Z \cup h(Z \cup h(A)) \subseteq Z \cup h(A)$

وبما أن A هي تقاطع كل عناصر J فإن $A \subseteq Z \cup h(A) \subseteq A$

إذن $A = Z \cup h(A)$

الخطوة الثالثة: تكوين تجزئة للمجموعة Y ؟

نضع $A_1 = X \backslash A$ و $B = f(A)$ و $B_1 = g^{-1}(A_1)$

ونريد إثبات أن $[B, B_1]$ تشكل تجزئة للمجموعة Y ؟ لذا

أولاً: نثبت أن $[A_1, h(A)]$ تشكل تجزئة للمجموعة g(Y) ؟

بما أن $h(A) \subseteq A$

إذن:

$$A_1 \cap h(A) = (X \backslash A) \cap h(A) = \varphi \quad \text{.....(1)}$$

$$A_1 \cup h(A) = (X \backslash A) \cup h(A) = (X \backslash A) \cup (A \backslash Z) = X \backslash Z$$

$$= X(X \backslash g(Y)) = g(Y) \quad \text{.....(2)}$$

إذن من (1) و (2) نحصل على أن $[A_1, h(A)]$ تشكل تجزئة للمجموعة g(Y)

إذن $[g^{-1}(A_1), g^{-1}(h(A))]$ تشكل تجزئة للمجموعة $g^{-1}(g(Y)) = Y$

إذن $[B, B_1]$ تشكل تجزئة للمجموعة Y

وذلك لأن $g^{-1}(A_1) = B_1$ و $g^{-1}(h(A)) = f(A) = B$

الخطوة الرابعة:

بما أن دالة المقصور $f|_A : A \to B = f(A)$ تمثل تقابل.

كذلك دالة المقصور $g|_{B_1}: B_1 \to A_1 = g(B_1)$ تمثل تقابل.

كذلك دالة المقصور $g^{-1}|_{A_1}: A_1 \to B_1 = g^{-1}(A_1)$ تمثل تقابل.

وبالتالي نعرف دالة:

$$\psi: X = A \cup A_1 \to Y = B \cup B_1$$

بالشكل:

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \in A_1 \end{cases}$$

وهذا الدالة ψ حسنة التعريف لأن كلاً من f و g^{-1} دالة متباينة كما أن الدالة ψ تمثل تقابل لأن $\psi = f|_A + g^{-1}|_{A_1}$.

نظرية (5.5.3.5): لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين فإذا وجدت دالة شاملة $f: X \to Y$ ودالة شاملة أخر $g: Y \to X$ فإنها توجد دالة من X إلى Y تمثل تقابل.

البرهان: بإتباع نفس إسلوب برهان نظرية (5.5.3.4).

تمارين

1. لتكن $A = \{-4,-3,-1,0,1,2,3,4\}$ مجموعة ولتكن:

$f(x) = x^2 + x + 3,\ g(x) = 2x - 5$

فإحسب:

- المدى لكلاً من f, g
- بيان كلاً من f, g

2. لتكن $A = \{-3,-1,0,1,2\}, B = \{1,2,3,4\}$ مجموعة ولتكن:

فإحسب:

- كم عدد الدوال من A إلى B.
- إذا كانت $f(x) = x^2 - 3, g(x) = 2x^2 - 5$ فإحسب بيان ومدى كلاً من الدوال f, g.

3. لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{a,b,c,d,d,e\}$ بين أي من العلاقات الأتية تكون دالة وحدد مجموعة تعريفها وإذكر سبباً واحد على الأقل في حالة كون العلاقة ليست دالة:

- $R = \{(1,e),(2,d),(3,c),(4,b),(5,a)\}$
- $R = \{(1,c),(2,c,),(3,c),(4,b),(5,b)\}$
- $R = \{(2,c),(3,d),(4,d),(5,e)\}$
- $R = \{(1,d),(2,c),(3,e),(4,a),(2,b)\}$
- $R = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3),(e,3)\}$
- $R = \{(a,1),(c,3),(d,4),(e,3)\}$

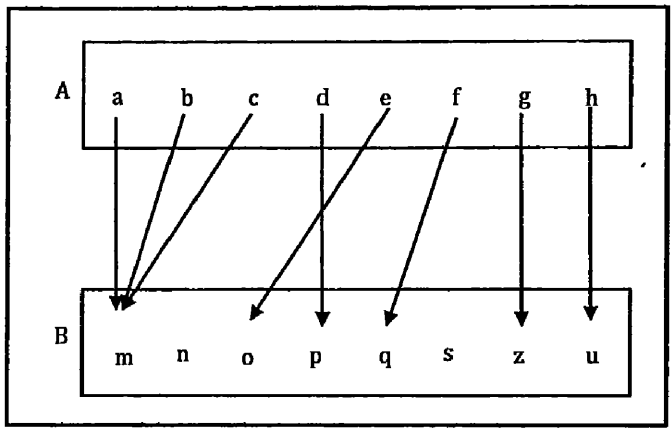
4. إرسم مخططا سهمياً لكل علاقة وردت في التمرين الأول.
5. إذا كانت $R \subseteq \mathbb{R}^2$ فبين ما إذا كانت R دالة أم لا مع التعليل في كلاً من الحالات الأتية:

- $R = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4\}$
- $R = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge 4x - y = 1\}$

- $R = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4 \wedge -2 \leq x \leq 2\}$

6. لتكن $f: A \to B$ دالة معرفة بالمخطط السهمي التالي حيث:

$A_1 = \{c, d\}, A_2 = \{a, d, f\}, B_1 = \{m, p, q\}, B_2 = \{n, o, q\}$



أوجد كلا من:

- $f(d)$ و $f^{-1}(n)$.
- $f(A_1 \cup A_2)$ و $f(A_1) \cup f(A_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f(A_1 \cap A_2)$ و $f(A_1) \cap f(A_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ و $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ و $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f(A_1)$ و $f^{-1}(f(A_1))$ وتحقق أن $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.
- $f^{-1}(B_2)$ و $f(f^{-1}(B_2))$ وتحقق أن $f(f^{-1}(B_2)) \subset B_2$.
- $f^{-1}(B_1')$ و $(f^{-1}(B_1))'$ ثم قارن بينهما.

7. لتكن $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ دالة معرفة على النحو التالي $f(x) = 2x - 5$

- مثل هذا الدالة بالمخطط السهمي في الفترة $4 \leq x \leq 10$.
- هل هذا الدالة متباينة ؟ ولماذا؟
- هل هذا الدالة شاملة؟ ولماذا؟

- هل هذا الدالة تمثل تقابل؟ ولماذا؟
- أوجد كلاً من $f(1)$ و $f^{-1}(-1)$ و $f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(-3)$.
- أوجد $f^{-1}(\{y \in \mathbb{Z}: y \leq -4\})$

8. لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 2, \qquad g(x) = 2x + 1$$

- عرف كلاً من الدالتين $h_1 = g \circ f$ و $h_2 = f \circ g$.
- أوجد كلاً من $h_1(4)$ و $h_2(4)$.

9. إدرس الدوال الأتية من حيث كون الدالة متباينة – شاملة – تقابل:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = x^2$
3. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
4. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^2$

10. لتكن $f: A \to B$ دالة معرف كما يلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}, \qquad A = \mathbb{R} - \{2\}, \qquad B = \mathbb{R} - \{1\}$$

إثبت أن f تمثل تقابل ومن ثم عرف الدالة f^{-1} من B إلى A .

11. لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ فأي من العلاقات يمثل دالة من X إلى X ولماذا؟

1. $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
2. $f = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$
3. $f = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1), (4, 4)\}$

12. لتكن $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $f: X \to \mathbb{R}^+$ و $g: X \to \mathbb{R}^+$

حيث $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = x + 2$ فأوجد مدى كلا من f و g .

13. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2 - 4$ فهل f متباينة – شاملة – تقابل؟

14. لتكن كلاً من f, g, h علاقة على $\mathbb{R}^+$ حيث

$$f(x) = \frac{x+2}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

فأي من هذه العلاقات تمثل دالة من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}^+$ ولماذا؟

15. هل من الممكن أن تكون الدالة الثابتة متباينة؟ شاملة؟ تقابل؟

16. لتكن $X=\mathbb{R}^+\backslash\{-\frac{3}{2}\}$ و $Y=\mathbb{R}^+\backslash\{\frac{1}{2}\}$ و $f:X\to Y$ حيث $f(x)=\frac{x-2}{2x+3}$ فبرهن أن الدالة f دالة عكسية وعينها؟

17. لتكن $f:\mathbb{R}\backslash\{5\}\to\mathbb{R}\backslash\{2\}$ حيث $f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$ برهن أن f دالة تقابلية ثم أوجد f^{-1} .

18. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x^2-2$ فإحسب كلاً من:

$$f(x+6),g(x+5),\quad f(f(x)),\quad g(g(x)),\quad g\circ f,\quad f\circ g$$

19. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2+3x+1$

فإحسب كلاً من:

$$g\circ f,\quad f\circ g,\quad f\circ f,\quad g\circ g$$

20. إذا كانت $f:\mathbb{R}\backslash\{2\}\to\mathbb{R}\backslash\{0\}$ و $g:\mathbb{R}\backslash\{-3\}\to\mathbb{R}\backslash\{1\}$ حيث $f(x)=\frac{4}{x-2}$ و $g(x)=\frac{x}{x+3}$

فإحسب كلاً من:

$$f+g,\quad f-g,\quad f\circ g,\quad g\circ f,\quad g\circ g$$

21. إذا كانت $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ المعرف بالشكل $f(x)=2x-3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

22. إذا كانت $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ المعرف بالشكل $f(x)=2x^2-3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

23. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=2x^3-3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

24. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=2x^2-3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

25. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=2x-3$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

26. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x^3$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

27. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x^2$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

28. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f(x)=5x+7$ وكانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $g(x)=x^2+3x+2$

فإحسب:

- حاصل ضرب الدالتان f,g في عدد ثابت $k=7$
- مجموع الدالتان $f+g$
- فرق الدالتان $f-g$
- حاصل ضرب الدالتان $f.g$
- حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$
- هل الدالتان f,g تكونا متساويتان .

29. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f(x)=x^3+1$ وكانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $g(x)=\frac{1}{x^3+1}$, $x\neq -1$

فإحسب:

- حاصل ضرب الدالتان f,g في عدد ثابت $k=7$
- مجموع الدالتان $f+g$
- فرق الدالتان $f-g$
- حاصل ضرب الدالتان $f.g$
- حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$
- هل الدالتان f,g تكونا متساويتان .

30. إذا كانت $A=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $B=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ و $f:A\to B$ تعرف بأنها لكل $x\in A$ فإن $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ فبرهن أن للدالة f يوجد لها دالة عكسية ثم عينها ثم إذا كانت $f:A\to\mathbb{R}$ فهل يوجد في هذه الحالة دالة عكسية ل f .

الفصل السادس

الجبر البولياني
Boolean Algebra

(6-1) علاقة الترتيب

(6-2) العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة

(6-3) الشبكة

(6-4) الجبر البولياني

(6-5) الدوال البولينية

(6-6) الدوائر المنطقية

(6-7) خرائط كارنوف

تمارين

الفصل السادس

الجبر البولياني

(6-1) علاقة الترتيب

تعتبر علاقة الترتيب من العلاقات المهمة في الرياضيات والتي تحتاج إليها كثيرا في الجبر والتحليل الرياضي وحديثا أصبحت هذه العلاقة مهمة في الحاسبات والمواضيع المتعلقة بها مثل الشبكات و نظرية البيانات والدوائر المنطقية وبالتالي سوف ندرس في هذا الفصل علاقة الترتيب وخواصها الجبرية المتنوعة ثم ندرس الشبكات كنوع خاص من علاقات الترتيب ثم ننتقل بعدها لدرسة الجبر البولياني كنوع خاص من الشبكات.

تعريف (6.1.1): ليكن R علاقة على المجموعة A فإننا تقول أن العلاقة R هي علاقة ترتيب (علاقة ترتيب جزئي) على A أو أن A مجموعة مرتبة بواسطة R إذا كانت R تحقق ثلاث شروط:

1. R تكون إنعكاسية Reflexive بمعنى:

$aRa \; \forall a \in A$

2. R تكون تخالفية Antisymmetric بمعنى:

$\text{if } aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

3. R تكون متعدية Transitive بمعنى:

$\text{if } aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

ملاحظات:

1. إذا كانت R علاقة ترتيب و x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R فإننا عادة نستخدم الرمز $\leq$ أو $\preccurlyeq$ أو $<$ أو $\prec$ للدالة على علاقة الترتيب .
2. إذا كانت R علاقة ترتيب و x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R وكانت $x < y$ فإن x تسمى العنصر السابق (precedes element) للعنصر y بينما y تسمى العنصر اللاحق (succeeds element) للعنصر x .

3. إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب على مجموعة غير خالية A فإن العلاقة العكسية $\geq$ تكون أيضا علاقة ترتيب على نفس المجموعة ونسمى هذه العلاقة (علاقة مذدوجة) Dual Order .

4. إذا كانت R علاقة ترتيب على مجموعة A وكانت x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R فإننا نقول أن x , y قابلين للمقارنه comparable .

5. في المجموعة المرتبة A إذا كان أي عنصرين فيها قابلين للمقارنه فإن علاقة الترتيب R تسمى علاقة ترتيب كلي أو علاقة ترتيب خطي Linearly ordered وفي هذه الحالة نسمى A بأنها سلسلة Chain بينما إذا كان يوجد بعض عناصر المجموعة المرتبة A قابلين للمقارنة والبعض الأخر غير قابل للمقارنة noncomparable فإن العلاقة R تسمى علاقة ترتيب جزئي.

6. مخطط هاس Hass Diagram : إذا كانت المجموعة المحدودة الغير خالية A معرفة تحت علاقة ترتيب ما فإننا نستطيع أن ننشأ المخطط السهمي بطريقة مبسطة تسمى مخطط هاس بحيث تكون فيه:

أ. نمثل الإنعكاس بنقطة.

ب. إذا كان $a,b \in A$ حيث $a \neq b$ و $a \leq b$ فإننا نضع b في مستوي أعلى من مستوي a ونصل بينها بخط مستقيم ونتجاهل الخطوط التي نحصل عليها تلقائيا من خاصة التعدي. فمثلاً إذا كان: $a \leq b , b \leq c$ فإننا نصل أولاً بين a , b ثم نصل بين b,c ولا نصل أبدا بين a, c وبالتالي فمخطط هاس يكون إتجاهة دائما من أسفل إلى أعلى.

7. غطاء العنصر cover : إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وكان $a,b \in A$ ، نقول عن b أنه غطاء للعنصر a إذا تحقق :

أ. $a \leq b$.

ب. إذا كان $x \in A$ وكان $a \leq x \leq b$ فإن $x = a$ أو $x = b$ أي إنه لا يوجد عنصر $c \in A$ بحيث يكون $a \leq c \leq b$.

8. إذا كانت لدينا مجموعتان A و B فإننا نستطيع أن ننشأ علاقة ترتيب للأزواج المرتبة معرفة في حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$ وذلك بأحد الطريقتين:

أ. الطريقة الأولى:

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ if $a_1 \leq a_2$ and $b_1 \leq b_2$

ب. الطريقة الثانية:

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ if $a_1 < a_2$ or if $a_1 = a_2$, $b_1 < b_2$

مثال: لتكن العلاقة

$R = \{(a,b): a, b \in \mathbb{Z} \wedge a|b\}$

فهل العلاقة R (علاقة تقسم على الأعداد الصحيحة) تمثل علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$ وإذا كانت الإجابة بنعم فحدد هل الترتيب كلي أم جزئي.

الحل:

أولاً: العلاقة R إنعكاسية لأن :

$a|a \forall a \in \mathbb{Z}$

ثانياً: العلاقة R تخالفية لأن:

$2|4$ but $4 \nmid 2$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

إذن علاقة تقسم على الأعداد الصحيحة تمثل علاقة ترتيب.

علاقة الترتيب على المجموعة $\mathbb{Z}$ علاقة ترتيب جزئي لأن$2|6$ و $3|6$ ولكن $3 \nmid 2$ و $2 \nmid 3$

مثال: لتكن العلاقة:

$R = \{(a,b): a, b \in A \wedge a|b\}$

حيث:

$A = \{2, 6, 12, 24, 48\}$

فهل العلاقة R (علاقة تقسم على أعداد المجموعة A) تمثل علاقة ترتيب على A وإذا كانت الإجابة بنعم فحدد هل الترتيب كلي أم جزئي.

الحل:

أولاً: العلاقة R إنعكاسية لأن :

$a|a \forall a \in A$

ثانياً: العلاقة R تخالفية لأن:

$2|6$ but $6 \nmid 2$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$\forall a, b, c \in A, \quad a|b \ \wedge \ b|c \Rightarrow a|c$

إذن علاقة علاقة تقسم على أعداد المجموعة A تمثل علاقة ترتيب.

علاقة الترتيب على المجموعة A علاقة ترتيب كلي لأن 2|6 و 6|12 و 12|24 و 24|48 وبالتالي يمكن أن نمثل هذه المجموعة على هيئة متسلسلة خطية:

$2 < 6 < 12 < 24 < 48$

مثال: لتكن $A = \{a, b, c\}$ وعرف عليها العلاقة:

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

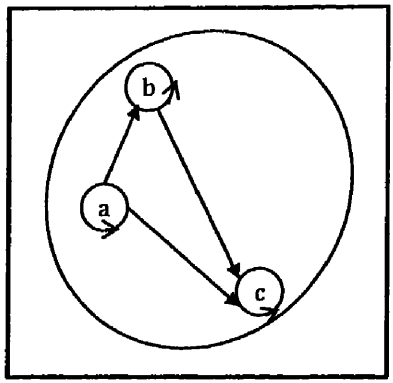
1. فهل العلاقة R تمثل علاقة ترتيب على A؟
2. وإذا كانت الإجابة نعم فحدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسم المخطط السهمي ومخطط هاس لها.
3. حدد العنصر السابق للعنصر b والعنصر اللاحق للعنصر b.

الحل:

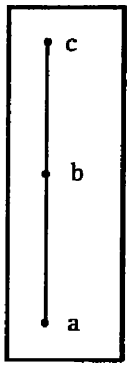
أولاً: واضح أن العلاقة R هي علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية وبالتالي فهي تمثل علاقة ترتيب.

ثانياً: حيث أن أي عنصرين في A قابلين للمقارنة تحت العلاقة R فإن علاقة الترتيب R هي علاقة ترتيب كلي.

المخطط السهمي هو:



مخطط هاس هو:



ثالثا: العنصر السابق للعنصر b هو العنصر a بينما العنصر اللاحق للعنصرb هو العنصرc.

مثال: لتكن $A = \{a, b, c, d, e\}$ وعرف عليها العلاقة:

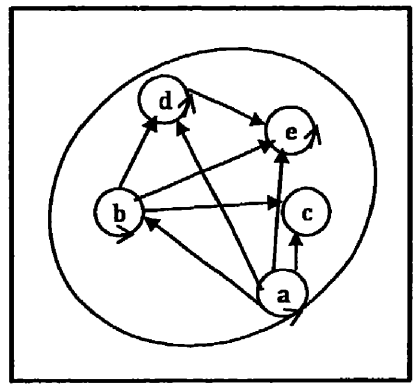
$$R = \begin{Bmatrix} (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (b,c), \\ (b,d), (d,e), (a,c), (b,e), (a,d), (a,e) \end{Bmatrix}$$

1. فهل العلاقة R تمثل علاقة ترتيب على A؟ وإذا كانت الإجابة نعم فحدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسم المخطط السهمي ومخطط هاس لها.
2. حدد العنصر السابق للعنصر b والعنصر اللاحق للعنصر b.

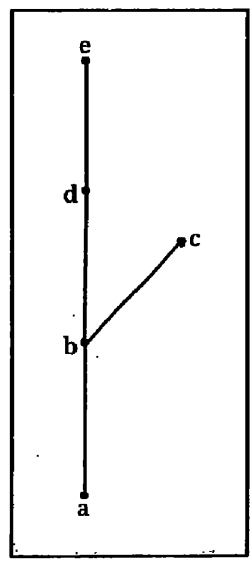
الحل:

أولاً: واضح أن العلاقة R هي علاقة انعكاسية وتخالفيه ومتعدية وبالتالي فهي تمثل علاقة ترتيب.

المخطط السهمي هو:



مخطط هاس هو:



ولكن العنصران d, c غير قابلين للمقارنة إذن فالعلاقة هي علاقة ترتيب جزئي.

ثانياً: العنصر السابق للعنصر b هو العنصر a بينما العنصر اللاحق للعنصر b هو العنصر c والعنصر d.

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c\}$, فإثبت أن $(P(A), \subseteq)$ تكون مجموعة مرتبة ثم حدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسم مخطط هاس؟

الحل:

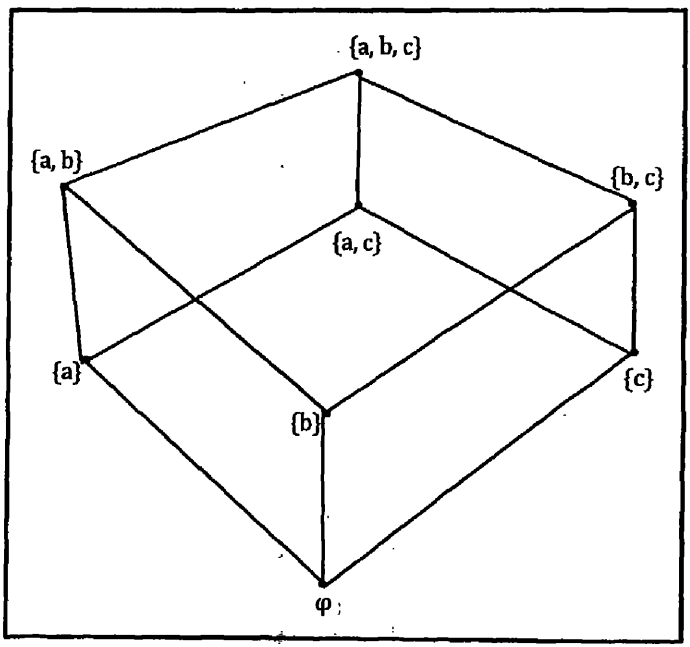
$A = \{a, b, c\}$

$P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

وحيث أن علاقة الإحتواء $\subseteq$ تكون:

1. علاقة الإحتواء تكون إنعكاسية لأن $\forall x \in A \; x \subseteq x$
2. علاقة الإحتواء تكون تخالفية لأن $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ ولكن $\{a, b\} \not\subseteq \{a\}$
3. علاقة الإحتواء تكون متعدية لأن إذا كان $x \subseteq y, y \subseteq z$ فإن $x \subseteq z$

إذن علاقة الإحتواء $\subseteq$ تكون علاقة ترتيب.



وحيث أن العنصرين $\{a\},\{b\}$ غير قابلين للمقارنة

إذن علاقة الإحتواء تمثل علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3,5,6,10,15\}$ ومعرف عليها علاقتان:

1. العلاقة R_1 هي علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$
2. العلاقة R_2 هي علاقة القاسم $|$

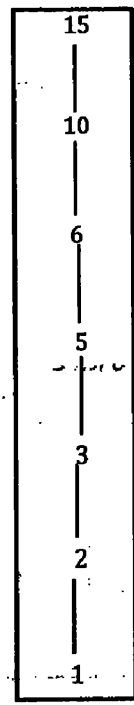
إثبت أن R_1, R_2 هما علاقتا ترتيب وإرسم مخطط هاس وحدد نوعيتة.

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$

1. العلاقة R_1 هي علاقة إنعكاسية لأن $x \leq x \; \forall x \in A$
2. العلاقة R_1 هي علاقة تخالفية لأن إذا كان $x \leq y,\ y \leq x$ فإن $x = y$
3. العلاقة R_1 هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x \leq y,\ y \leq z$ فإن $x \leq z$

إذن العلاقة R_1 هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:

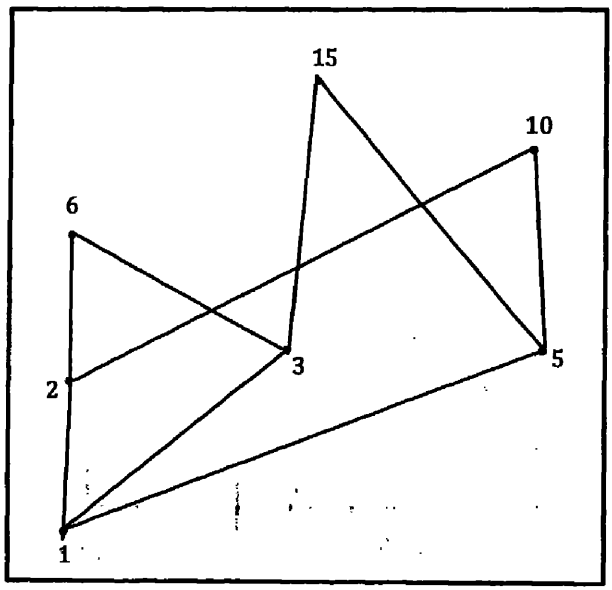


إذن العلاقة R_1 هي علاقة ترتيب كلي (ترتيب خطي).

ثانياً: العلاقة R_2 علاقة القاسم |

1. علاقة القاسمR_2 هي علاقة إنعكاسية لأن دائما $x|x$
2. علاقة القاسم R_2 هي علاقة تخالفية لأن $2|6, 6 \nmid 2$.
3. علاقة القاسمR_2 هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x|y, y|z$ فإن $x|z$

إذن علاقة القاسم R_2 هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:



وحيث أن العنصران 2, 3 غير قابلين للمقارنة لأن العدد 2 لا يقسم العدد 3 وكذلك العدد 3 لا يقسم العدد 2 وبالتالي تكون علاقة القاسم هي علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ ومعرف عليها العلاقة R هي علاقة القاسم | إثبت أن العلاقة R هي علاقة ترتيب ثم إرسم مخطط هاس لها وحدد نوعية علاقة الترتيب.

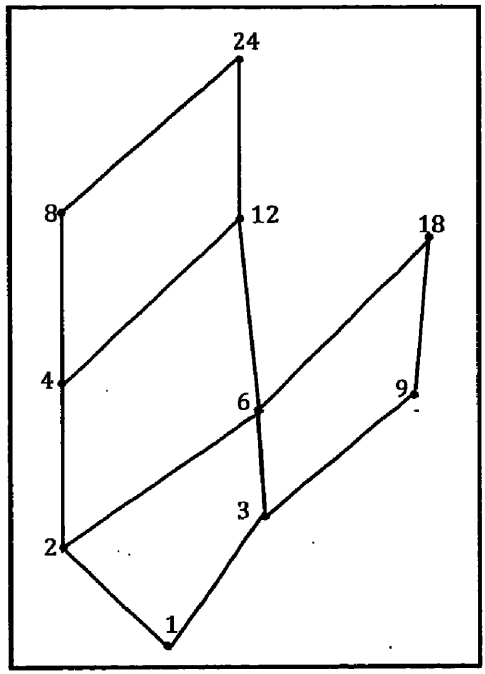
الحل:

1. علاقة القاسم R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما $x|x$

2. علاقة القاسم R هي علاقة تخالفية لأن $2 \nmid 6, 6 \nmid 2$.

3. علاقة القاسم R هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x|y, y|z$ فإن $x|z$

إذن علاقة القاسم R هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:



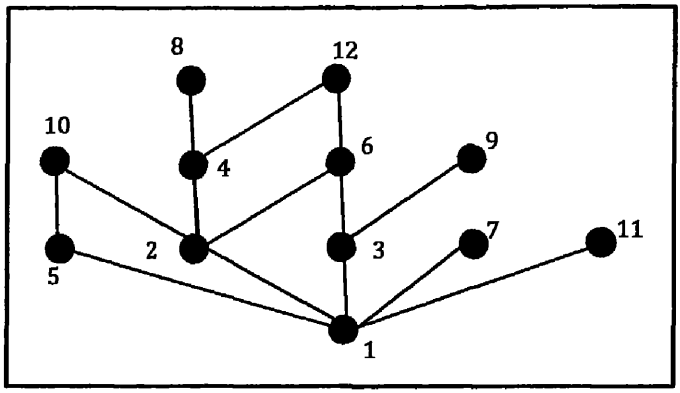
وحيث أن العنصران 2, 3 غير قابلين للمقارنة لأن العدد 2 لا يقسم العدد 3 وكذلك العدد 3 لا يقسم العدد 2 وبالتالي تكون علاقة القاسم هي علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إرسم مخطط هاس للمجموعة A تحت علاقة الترتيب x تقسم y حيث:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

ثم إحسب غطاء للعنصر 1 وغطاء للعنصر 2 وغطاء للعنصر 4

الحل:



وبالتالي فإنّ كلاً من العناصر 11 ,7,3,5, 2 هو غطاء للعنصر 1

و10 ,6 , 4 كلاً منهم يمثل غطاء للعنصر 2

و12 , 8 كلاً منهم هو غطاء للعنصر 4

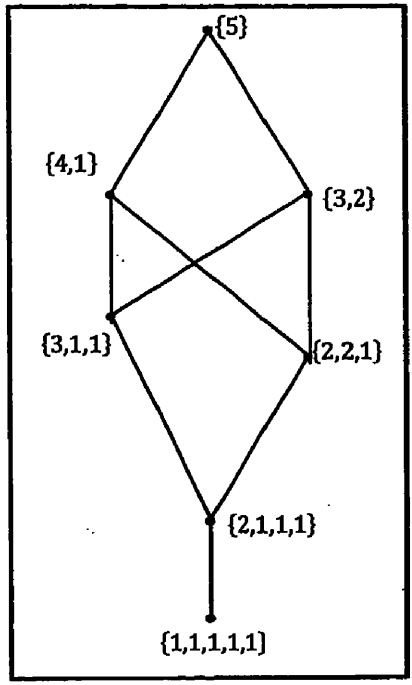
مثال: إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 5

الحل:

مجموعة تجزئة العدد 5 هي:

{[5], [4,1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1] }

إذن مخطط هاس هو:



ملاحظات:

1. إذا كانت المجموعة A مرتبة كلياً تحت علاقة الترتيب R بحيث تكون أي مجموعة غير خالية جزئية من A يكون لها عنصر أصغر فإن المجموعة A تحت علاقة الترتيب الكلي R تسمى علاقة حسنة الترتيب well-ordered set .
2. كل مجموعة محدودة ومرتبة كلياً تكون حسنة الترتيب.
3. كل مجموعة حسنة الترتيب تكون سلسلة (مرتبة خطياً).
4. كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون أيضاً حسنة الترتيب.
5. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت الترتيب الطبيعي (علاقة أصغر من أو يساوي) فهي تمثل علاقة ترتيب كلي ولكنها لا تكون حسنة الترتيب لعدم وجود العنصر الأصغر للمجموعة الجزئية المتمثلة في مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية أو مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية أو مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة وهكذا من الممكن أن نوجد مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ لا تحتوي عنصر أصغر.

6. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ تحت الترتيب الطبيعي (علاقة أصغر من) هي علاقة ترتيب كلي وهي تكون حسنة الترتيب وذلك لوجود العنصر الأصغر لأي مجموعة جزئية.

(6-2) العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة

تعريف (6.2.1): إذا كانت A مجموعة مرتبة فإننا نقول أن:

1. M هو عنصر أعظم (Maximum element) في A ونرمز له Max(A) إذا كان لا يوجد في A عنصر يكون أكبر تماما من M بمعنى أن:

$$\forall x \in A, M \leq x \rightarrow M = x$$

2. m هو عنصر أصغر (Minimum element) في A ونرمز له Min(A) إذا كان لا يوجد في A عنصر يكون أصغر تماما من m بمعنى أن:

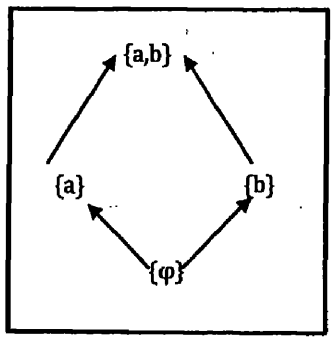
$$\forall x \in A, x \leq m \rightarrow m = x$$

ملاحظات:

1. دائما يتواجد العنصر الأعظم Max(A) في قمة المخطط بينما يتواجد العنصر الأصغر Min (A) في أسفل المخطط.
2. قد يتواجد أكثر من عنصر أعظم Max(A) وكذلك قد يتواجد أكثر من عنصر أصغر Min (A).

مثال: إذا كانت $A = \{a, b\}$ و $(P(A), \subseteq)$ تمثل علاقة ترتيب فحدد أعظم عنصر في A وحدد أصغر عنصر في A

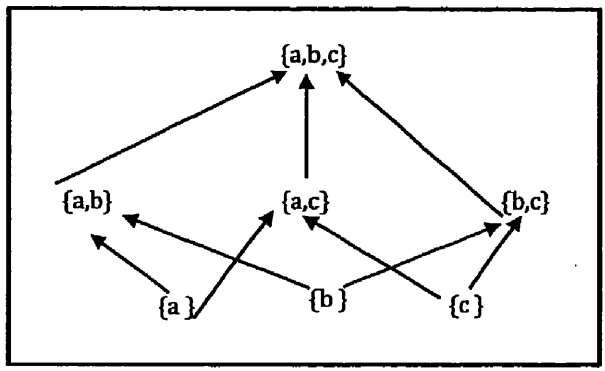
الحل:



إذن {a, b} هو العنصر الأعظم في المجموعة المرتبة $(P(A),\subseteq)$ بينما {φ} هو العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة $(P(A),\subseteq)$.

مثال: إذا كانت $B = \{a,b,c\}$ و المجموعة $A = P(B) - \{\varphi\}$ تحت علاقة الإحتواء $\subseteq$ تمثل علاقة ترتيب فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في A

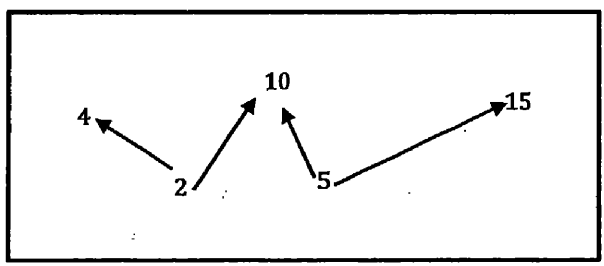
الحل:



إذن العنصر {a,b,c}هي العنصر الأعظم بينما العناصر {a}, {b}, {c} كلا منهم يمثل العنصر الأصغر .

مثال: في المجموعة المرتبة $(A, |)$ تحت علاقة القسمة حيث $A = \{2,4,5,10,15\}$ فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في المجموعة A

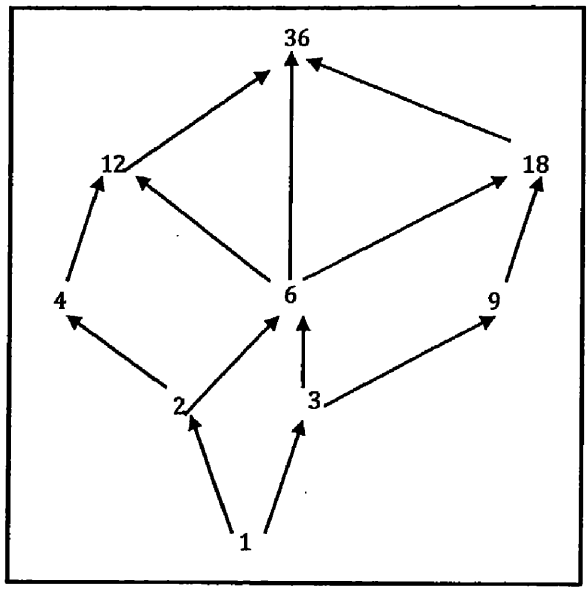
الحل:



العناصر 4 و 10و 15 كلاً منهم يمثل عنصر أعظم في المجموعة المرتبة A بينما العناصر 2 و 5 كلاً منهم يمثل عنصر أصغر في المجموعة المرتبة A .

مثال: في المجموعة المرتبة (A, l) تحت علاقة القسمة حيث $A=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ تمثل علاقة ترتيب فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في المجموعة A.

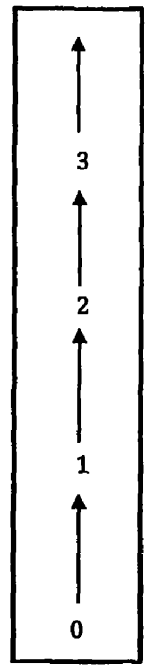
الحل:



العنصر 1 يمثل العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة (A, l) بينما العنصر 36 يمثل العنصر الأعظم في المجموعة المرتبة (A, l).

مثال: المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}, \leq)$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي فحدد العنصر الأعظم والعنصر الأصغر في المجموعة.

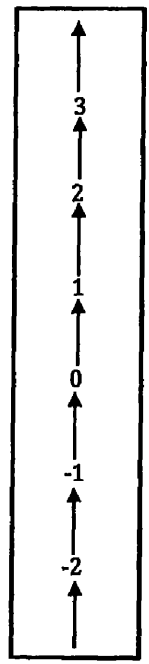
الحل:



العنصر 0 يمثل العنصر الأصغر بينما لا يوجد عنصر أعظم

مثال: المجموعة المرتبة $(\mathbb{Z}, \leq)$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي فحدد العنصر الأعظم والعنصر الأصغر في المجموعة.

الحل:



من الواضح أنه لا يوجد أي عنصر أعظم أو عنصر أصغر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي.

تعريف (6.2.2): إذا كانت A مجموعة مرتبة و B مجموعة جزئية من A فإننا نقول أن:

1. العنصر u من المجموعة A يسمى حد أعلى للمجموعة B إذا كان لا يوجد في B عنصر يكون أكبر تماما من u بمعنى أن:

$\forall x \in B \rightarrow x \leq u$

2. العنصر L من المجموعة A يسمى حد أدنى للمجموعة B إذا كان لا يوجد في B عنصر يكون أصغر تماما من L بمعنى أن:

$\forall x \in B \rightarrow L \leq x$

3. المجموعة B تكون محدودة من أعلى إذا وجد حد أعلى للمجموعة B .
4. المجموعة B تكون محدودة من أسفل إذا وجد حد أدنى للمجموعة B .
5. إذا كانت المجموعة المتكونة من جميع الحدود العليا تحتوي حد أصغر فإننا ندعوة أصغر حد أعلى (Supermum element) ونرمز له بالرمز Sup B .
6. إذا كانت المجموعة المتكونة من جميع الحدود الأدنى تحتوي حد أعلى فإننا ندعوة أكبر حد أدنى (Infimum element) ونرمز له بالرمز Inf B .

ملاحظة:

1. العناصر Sup B و Inf B ليس ضروري أن تكون ضمن عناصر المجموعة B وإذا حدث وكانت ضمن عناصر المجموعة B ففي هذه الحالة يكون:

$\text{Inf } B = \text{Min } B \quad , \quad \text{Sup } B = \text{Max } B$

2. العناصر Sup B و Inf B تكون عناصر وحيدة .

مثال: إذا كانت B هي الفترة المفتوحة B=(1, 5) فحدد Sup B و Inf B و Max B و Min B

الحل:

Sup B=5, Inf B=1 وهما ليستا ضمن عناصر المجموعة B بينما لا توجد Max B ولا توجد Min B .

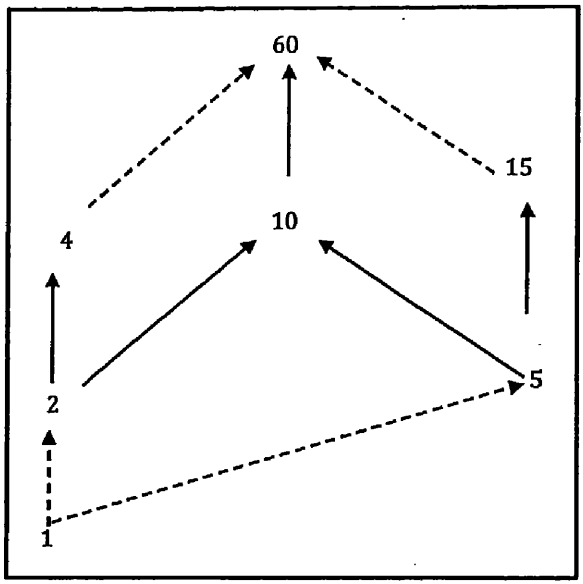
مثال: إذا كانت B هي الفترة المغلقة B=[1, 5] فحدد Sup B و Inf B و Max B وMin B

الحل:

$\text{Inf } B = \text{Min } B = 1 \quad , \quad \text{Sup } B = \text{Max } B = 5$

مثال: إذا كانت المجموعة المرتبة (A, |) تحت علاقة القاسم حيث A={2,4,5,10,15} فحدد Sup B و Inf B و Max B و Min B

الحل:



Min A=2, 5

Max A=4, 10, 15

Inf A=1 وهو يمثل القاسم المشترك الأعظم للعناصر {2, 5} بينما Sup A=60 وهو يمثل المضاعف المشترك الأصغر للعناصر {4, 10, 15}.

ملحوظة: في المجموعة المرتبة $(P(A), \subseteq)$ حيث $A = \{A_i\}_{i\in N}$ فإن:

$Sup\ B = \cup_i A_i$, $Inf\ B = \cap_i A_i$

(6-3) الشبكة

تعريف (6.3.1): ليكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا فإننا نقول أن المجموعة A تمثل شبكة إذا كانت كل مجموعة جزئية منها من النوع{x, y}لها أصغر حد أعلى Sup وأكبر حد أدنى Inf

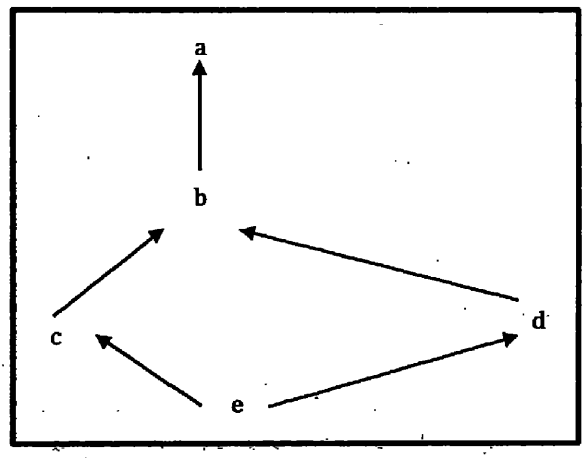
ملاحظات:

1. لقد جرت العادة بكتابة أصغر حد أعلى Sup للمجموعة {x, y} بالرمز $x \vee y$ بدلا عن Sup{x, y} وكتابة أكبر حد أدنى Inf للمجموعة {x, y} بالرمز $x \wedge y$ بدلا عن Inf{x, y}.
2. كل شبكة $(A, \leq)$ مرتبطة بعملتين $\wedge, \vee$ وبالتالي نرمز لها بالشكل $(A, \vee, \wedge)$.

أمثلة:

1. ليكن A مجموعة غير خالية فإن المجموعة المرتبة جزئيا $(P(A), \subseteq)$ تمثل شبكة حيث $x \wedge y = x \cap y,\ x \vee y = x \cup y$.
2. المجموعة $(\mathbb{N}, \leq)$ حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الطبيعي تمثل شبكة حيث $x \wedge y$ هي أصغر عدد بين العددين x, y بينما $x \vee y$ هي أكبر عدد بين العددين x, y .
3. المجموعة $(\mathbb{N}, |)$ حيث | هو ترتيب القسمة فإن المجموعة تمثل شبكة حيث $x \wedge y = gcd(x, y)$ هو القاسم المشترك الأعظم للعددين x, y بينما $x \vee y = lcm(x, y)$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين x, y.

مثال: إعتبر الشبكة $(A, \leq)$ حيث $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $\leq$ هي علاقة الترتيب الموضح في المخطط السهمي التالي:



إكتب النظام الجبري (A,∨,∧) التابع لهذه الشبكة.

الحل:

النظام الجبري (A,∨,∧) التابع لهذه الشبكة هو:

∨	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	c	b	c
d	a	b	b	d	d
e	a	b	c	d	e

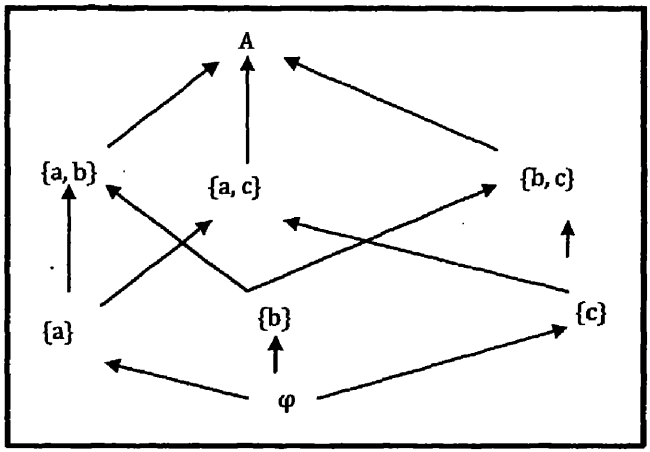
∧	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	c	d	e
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	d	e
e	e	e	e	e	e

مثال: إعتبر الشبكة $(P(A),\subseteq)$ حيث $A = \{a, b, c\}$

1. إكتب المخطط السهمي لهذه الشبكة.
2. إكتب النظام الجبري (A,∨,∧) التابع لهذه الشبكة.

الحل:

أولاً: المخطط السهمي للشبكة:



ثانياً: النظام الجبري (A,∨,∧) التابع للشبكة هو:

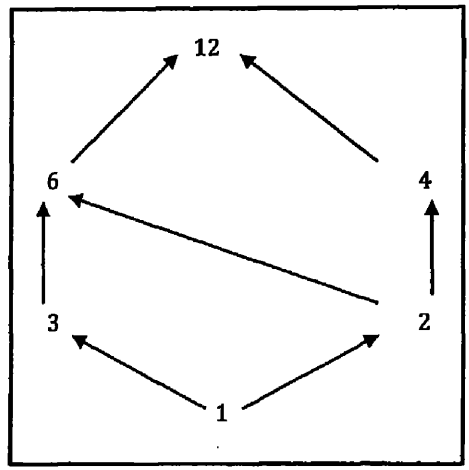
∪	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
Φ	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, c}	{a, b}	{a, c}	A	A
{b}	{b}	{a,b}	{b}	{b, c}	{a,b}	A	{b, c}	A
{c}	{c}	{a, c}	{b, c}	{c}	A	{a, c}	{b, c}	A
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	A	{a, b}	A	A	A
{a, c}	{a, c}	{a, c}	A	{a, c}	A	{a, c}	A	A
{b, c}	{b, c}	A	{b, c}	{b, c}	A	A	{b, c}	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A

∩	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
Φ	φ	φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	φ
{a}	φ	{a}	Φ	Φ	{a}	{a}	Φ	{a}
{b}	φ	φ	{b}	Φ	{b}	φ	{b}	{b}
{c}	φ	φ	Φ	{c}	φ	{c}	{c}	{c}
{a, b}	φ	{a}	{b}	Φ	{a, b}	{a}	{b}	{a, b}
{a, c}	φ	{a}	Φ	{c}	{a}	{a, c}	{c}	{a, c}
{b, c}	φ	φ	{b}	{c}	{b}	{c}	{b, c}	{b, c}
A	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A

مثال: إعتبر الشبكة $(A, |)$ حيث $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ و العملية $|$ هي ترتيب القسمة:

1. إرسم المخطط السهمي للشبكة.
2. إكتب النظام الجبري $(A,\wedge,\vee)$ التابع لهذه الشبكة.

الحل:



Sup هو أصغر مضاعف مشترك

$\vee$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

Inf هو أكبر قاسم مشترك

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4

6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

نظرية (6.3.2): إذا كانت المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ تمثل شبكة و a, b, c عناصر في A فإن:

1. $a \wedge b \leq a$
2. $a \leq a \vee b$
3. $a \wedge b = a$ if and only if $a \vee b = b$
4. If $a \leq b, c \leq d$, then $a \vee c \leq b \vee d$
5. If $a \leq b, c \leq d$, then $a \wedge c \leq b \wedge d$
6. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
7. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

البرهان:

أولاً: $a \wedge b$ هو حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي $a \wedge b \leq a$

ثانياً: $a \vee b$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي $a \leq a \vee b$

ثالثاً: إذا كانت $a \wedge b = a$ وبما أن $a \wedge b \leq b$ فإن $a \leq b$

ولكن $b \leq b$ إذن b هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

وبما أن $a \vee b$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن $a \vee b \leq b$

ولكن من (i) دائماً يكون $b \leq a \vee b$

إذن $a \vee b = b$

ولإثبات العكس: نفرض أن $a \vee b = b$ وبما أن $a \leq a \vee b$

إذن $a \leq b$ ولكن دائماً يكون $a \leq a$

إذن a يعتبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن $a \leq a \wedge b$ لأن $a \wedge b$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$

ولكن من (i) يكون دائماً $a \wedge b \leq a$

إذن $a \wedge b = a$

رابعاً: إذا كان $a \le b, c \le d$ فإن $a \le b \le b \vee d,\ c \le d \le b \vee d$

إذن $c \le b \vee d,\ a \le b \vee d$

إذن $b \vee d$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, c\}$

ولكن $a \vee c$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, c\}$

إذن $a \vee c \le b \vee d$

خامساً: وبنفس الطريقة يكون لدينا $a \wedge c \le a \le b,\ a \wedge c \le c \le d$

ومنها نجد أن $a \wedge c \le b,\ a \wedge c \le d$

إذن $a \wedge c$ هو حد أدنى للمجموعة $\{b, d\}$

ولكن $b \wedge d$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{b, d\}$

إذن $a \wedge c \le b \wedge d$

سادساً: بما أن $a \le a \vee b,\ a \le a \vee c$

إذن $a = a \wedge a \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

أيضاً $b \wedge c \le b \le a \vee b$ و $b \wedge c \le c \le a \vee c$

إذن: $b \wedge c \le a \vee b$ و $b \wedge c \le a \vee c$

إذن: $b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \wedge c) \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

إذن: العنصر $(a \vee c) \wedge (a \vee b)$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b \wedge c\}$

ولكن $a \vee (b \wedge c)$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b \wedge c\}$

إذن: $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

سابعاً: بما أن $a \wedge b \le a,\ a \wedge c \le a$

إذن: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \vee a = a$

ولكن $a \wedge b \le b \le b \vee c,\ a \wedge c \le c \le b \vee c$

إذن: $a \wedge b \le b \vee c,\ a \wedge c \le b \vee c$

إذن: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le (b \vee c) \vee (b \vee c) = (b \vee c)$

إذن: العنصر $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)$ هو حد أدنى للمجموعة $\{a, b \vee c\}$

ولكن $a \wedge (b \vee c)$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b \vee c\}$

إذن: $(a \wedge b)(a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

ملاحظة: (مبدأ الإزدواجية Duality Principal)

إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً فإن العلاقة $\geq$ تمثل العلاقة العكسية للعلاقة $\leq$ المعرفة بالشكل $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$ ومن الواضح أن العلاقة $\geq$ هي علاقة ترتيب أيضاً وإذا كانت المجموعة $(A, \leq)$ تمثل شبكة فإن $(A, \geq)$ تمثل شبكة وفيها يكون أكبر حد للمجموعة $(A, \geq)$ هو أصغر حد للمجموعة $(A, \leq)$ وأصغر حد للمجموعة $(A, \geq)$ هو أكبر حد للمجموعة $(A, \leq)$ وبالتالي فكل قانون صحيح في النظام الجبري $(A, \leq)$ يعطينا قانون جديد يكون صحيح أيضاً في النظام المعاكس $(A, \wedge, \vee)$ وذلك بإستبدال العلاقة $\leq$ بالعلاقة العكسية $\geq$ والعملية $\vee$ بالعملية $\wedge$ والعملية $\wedge$ بالعملية $\vee$ ويعرف هذا الإسلوب بمبدأ الإزدواجية Dual principal .

مثال: في الصيغة:

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee c) \wedge (a \vee b)$$

لكي نطبق مبدأ الإزدواجية فإننا نستبدل الرمز $\leq$ بالرمز $\geq$ والرمز $\vee$ بالرمز $\wedge$ والرمز $\wedge$ بالرمز $\vee$ وبالتالي نحصل على:

$$(a \wedge c) \vee (a \wedge b) \leq a \wedge (b \vee c)$$

نظرية (6.3.3): إذا كانت المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ تمثل شبكة و $(A, \vee, \wedge)$ النظام الجبري التابع لها فإن الخصائص التالية تكون متحققة لكل العناصر a, b, c من A:

1. $a \vee a = a$
2. $a \wedge a = a$
3. $a \vee b = b \vee a$
4. $a \wedge b = b \wedge a$
5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
6. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

7. $(a \vee b) \wedge a = a$

8. $(a \wedge b) \vee a = a$

البرهان:

أولاً: العنصر a في المجموعة $\{a, a\}$ يمثل حد أعلى وبالتالي $a \vee a \leq a$

ولكن دائماً يكون $a \leq a \vee a$

إذن $a \vee a = a$

ثانياً: العنصر a في المجموعة $\{a, a\}$ يمثل حد أدنى وبالتالي $a \leq a \wedge a$

ولكن دائماً يكون $a \wedge a \leq a$

إذن $a \wedge a = a$

ثالثاً: في المجموعة $\{a, b\}$ نجد أن كلاً من $a \vee b$ و $b \vee a$ يمثل أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي يكون $a \vee b \leq b \vee a$ و $b \vee a \leq a \vee b$

إذن $a \vee b = b \vee a$

رابعاً: في المجموعة $\{a, b\}$ نجد أن كلاً من $a \wedge b$ و $b \wedge a$ يمثل أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي يكون $a \wedge b \leq b \wedge a$ و $b \wedge a \leq a \wedge b$

إذن $a \wedge b = b \wedge a$

خامساً: نضع $g = a \vee (b \vee c)$ و $h = (a \vee b) \vee c$

بما أن $a \leq a \vee (b \vee c) = g$ و $b \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c) = g$

إذن: g هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

ولكن $a \vee b$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن: $a \vee b \leq g$

ولكن $c \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c) = g$

إذن: $h = (a \vee b) \vee c \leq g \vee g = g$

إذن: $h \leq g$ وبالمثل يمكن إثبات أن $g \leq h$ إذن: $h = g$

سادساً: من مبدأ الإزدواجية ومن العلاقة $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

فإننا نحصل على: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

سابعاً: لدينا $a \le a \vee (a \wedge b)$.....(1)

ولكن $a \le a,\ a \wedge b \le a$

إذن: $a \vee (a \wedge b) \le a \vee a = a$.....(2)

من (1) و (2) نحصل على $a \vee (a \wedge b) = a$

ثامناً: من مبدأ الإزدواجية وبإستخدام العلاقة $a \vee (a \wedge b) = a$

فإننا نحصل على $a \wedge (a \vee b) = a$

نظرية (6.3.4): إذا كان $(A,\vee,\wedge)$ نظام جبري ويحقق الشروط:

1. $a \vee b = b \vee a$
2. $a \wedge b = b \wedge a$
3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
4. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
5. $(a \vee b) \wedge a = a$
6. $(a \wedge b) \vee a = a$

فإن العلاقة $\le$ على A المعرفة بالشكل:

$$x \vee y = y \leftrightarrow x \le y, \forall x, y \in A$$

تكون علاقة ترتيب $(A,\le)$ وتمثل شبكة.

البرهان:

1. $x \vee x = x$ إذا وفقط إذا كان $x \le x$ إذن العلاقة $\le$ إنعكاسية.
2. $x \vee y = y$ إذا وفقط إذا كان $x \le y$

كذلك $y \vee x = x$ إذا وفقط إذا كان $y \le x$

وبما أن $y \vee x = x \vee y$ فإن $x = y$ وبالتالي فإن العلاقة $\le$ تكون تخالفية.

3. $x \vee y = y$ إذا وفقط إذا كان $x \le y$

كذلك $y \vee z = z$ إذا وفقط إذا كان $y \le z$

وبالتالي:

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

إذا وفقط إذا كان $x \le z$ وبالتالي تكون العلاقة $\le$ متعدية.

4. وبما أن $x \vee y = y$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{x, y\}$

وبما أن $x \wedge y = x$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{x, y\}$

إذن المجموعة $(A, \le)$ تمثل شبكة.

ملاحظة هامه: يوجد طريقتين لتعريف الشبكة على المجموعة A :

- **الطريقة الأولى:** الشبكة هي مجموعة مرتبة $(A, \le)$ بحيث كل مجموعة جزئية منها من النوع $\{x, y\}$ لها أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى.
- **الطريقة الثانية:** الشبكة هي نظام جبري $(A, \vee, \wedge)$ يحقق الشروط:

1. $a \vee b = b \vee a$

2. $a \wedge b = b \wedge a$

3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

4. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

5. $(a \vee b) \wedge a = a$

6. $(a \wedge b) \vee a = a$

ملاحظات:

1. الشبكة L يقال إنها تملك حد أدنى 0 إذا كان لكل $x \in L$ فإن:

$$0 \wedge x = 0, \quad 0 \vee x = x$$

علما بأن الحد الأدنى 0 ليس ضروري أن يكون من ضمن عناصر الشبكة.

2. الشبكة L يقال إنها تملك حد أعلى 1 إذا كان لكل $x \in L$ فإن:

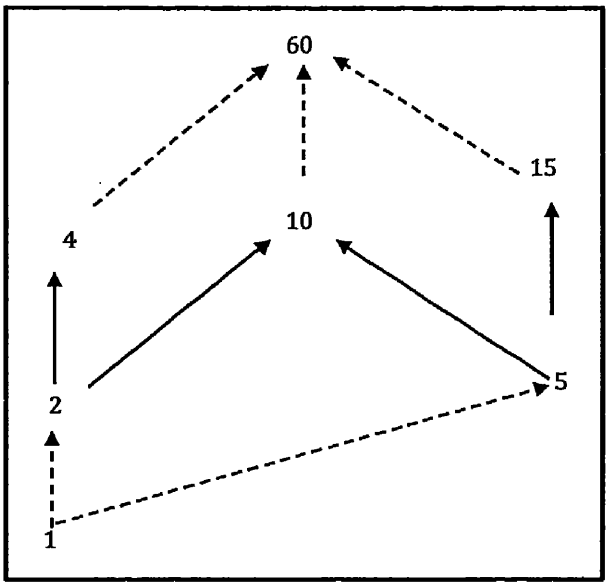
$$1 \wedge x = x, \quad 1 \vee x = 1$$

علما بأن الحد الأعلى 1 ليس ضروري أن يكون من ضمن عناصر الشبكة.

3. الشبكة L يقال إنها شبكة لها حدود (bounded lattice) إذا كانت تملك حد أدنى 0 وحد أعلى 1.

4. كل شبكة منتهية finite تكون شبكة لها حدود .

مثال: إذا كانت المجموعة المرتبة (A, I) تحت علاقة القاسم حيث A={2,4,5,10,15} فإن المخطط السهمي هو:



وبالتالي فالعنصر 1 يمثل الحد الأدنى للشبكة بينما الحد 60 يمثل الحد الأعلى للشبكة.

ملحوظات:

1. في المجموعة المرتبة $(P(A), \subseteq)$ حيث P(A) هي مجموعة القوى للمجموعة A فإن الحد الأدنى للشبكة هو المجموعة الخالية φ بينما الحد الأعلى هو المجموعة الكلية A وبالتالي فهذه الشبكة هي شبكة لها حدود.
2. في المجموعة المرتبة $\cdots > 3 > 2 > 1 > 0$ لها حد أدنى 0 وليس لها حد أعلى وبالتالي فهي تعتبر شبكة ليس لها حدود.

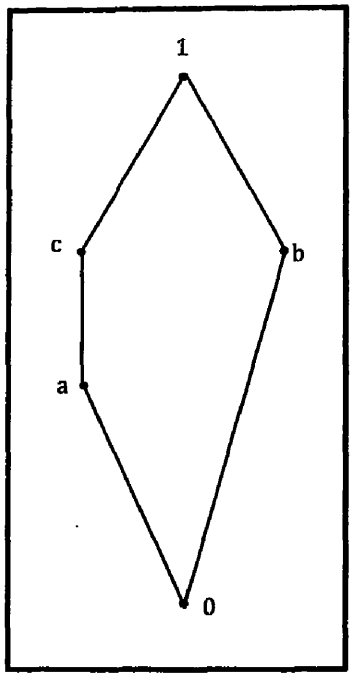
ملاحظة:

الشبكة L يقال لها إنها شبكة توزيعية (Distributive lattice) إذا كانت لكل $a, b, c \in L$ فإن:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

وغير ذلك تسمى شبكة غير توزيعية (Nondistributive lattice) .

مثال: المخطط الشبكي:



$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$..... (1)

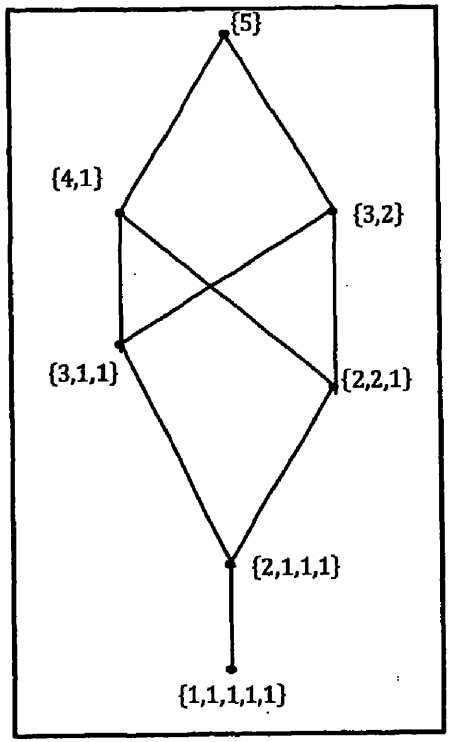
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge c = c$..... (2)

من (1) و (2) فإن:

$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

إذن الشبكة غير توزيعية.

مثال: المخطط الشبكي:



والذي يمثل تقسيم العدد 5 فإن:

$(3,1,1) \vee [(3,2) \wedge (4,1)] = (3,1,1) \vee (2,1,1,1) = (3,1,1)$.....(1)

$(3,1,1) \vee (3,2) = (3,2)$

$(3,1,1) \vee (4,1) = (4,1)$

$[(3,1,1) \vee (3,2)] \wedge [(3,1,1) \vee (4,1)] = (3,2) \wedge (4,1) = (2,1,1,1)$.....(2)

من (1) و (2) نحصل على:

$(3,1,1) \vee [(3,2) \wedge (4,1)] \neq [(3,1,1) \vee (3,2)] \wedge [(3,1,1) \vee (4,1)]$

إذن الشبكة غير توزيعية.

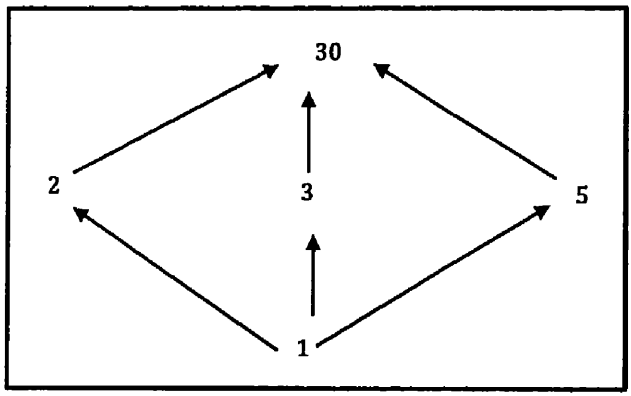
(6-4) الجبر البولياني

تعريف (6.4.1): نقول أن الشبكة $(A, \leq)$ توزيعية إذا كان لكل $a,b,c \in A$ تحقق الشرطين التالين:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

مثال: الشبكة $(P(A), \subseteq)$ حيث A مجموعة منتهية تعتبر شبكة توزيعية.

مثال: إذا كانت الشبكة $(A, |)$ حيث $A = \{1,2,3,5,30\}$ و العلاقة $|$ هي ترتيب القسمة



هذه الشبكة غير توزيعية لأن:

$$2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge (30) = 2$$
$$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = (1) \vee (1) = 1$$

وبالتالي:

$$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

ملاحظة: في الشبكة $(A, \leq)$ من المعروف أن العنصر الأكبر يكون وحيد وكذلك العنصر الأصغر يكون أيضاً وحيد وبالتالي فإننا يمكن أن نعطي الرمز 1 للعنصر الأكبر وأن نعطي الرمز 0 للعنصر الأصغر وبالتالي يكون دائماً:

$$a \vee 1 = 1, \quad a \vee 0 = a, \quad a \wedge 1 = a, \quad a \wedge 0 = 0$$

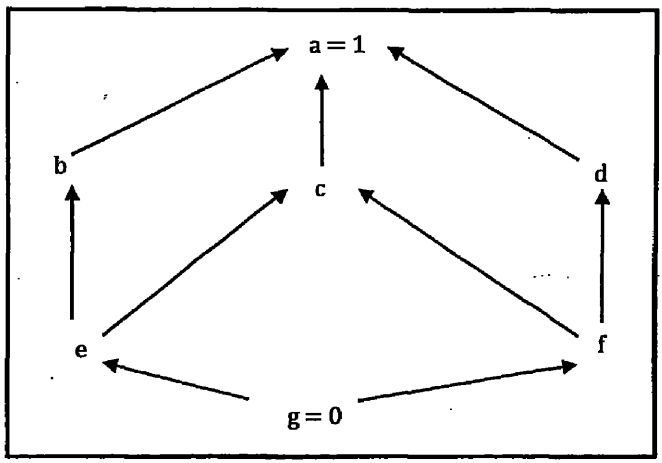
تعريف (6.4.2): في الشبكة $(A,\leq)$ والتي فيها العنصر الأكبر 1 والعنصر الأصغر 0 نقول أن b هو عنصر متمم للعنصر a إذا تحقق الشرطين:

1. $a \vee b = 1$
2. $a \wedge b = 0$

ملاحظات:

1. إذا كان b متمم a فإن a متمم ل b .
2. من الممكن أن يوجد للعنصر الواحد أكثر من متمم ومن الممكن الا يوجد له أي متمم.
3. العنصر 1 متمم للعنصر 0 .

مثال: إذا كانت الشبكة $(A,\leq)$ حيث $A = \{a = 1, b, c, d, e, f, g = 0\}$ و $\leq$ هو الترتيب الموضح بالمخطط السهمي التالي:



عرف متمم العناصر b, e, c, f, g .

الحل:

متمم العنصر b هو العنصر d أو f لأن $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

و $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

متمم العنصر e هو العنصر d لأن $e \vee d = 1,\ e \wedge d = 0$

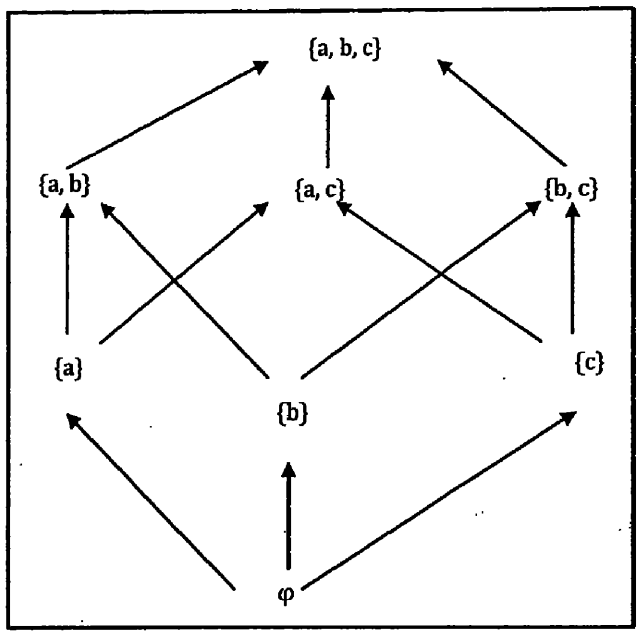
متمم العنصر c ليس له متمم لأنه غير مرتبط ب 0

متمم العنصر f هو b لأن $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

متمم العنصر g هو a لأن $g \vee a = 1, g \wedge a = 0$

مثال: إذا كانت الشبكة $(P(A), \subseteq)$حيث $A = \{a, b, c\}$ إحسب متمم كل عنصر في الشبكة:

الحل:



متمم العنصر $\{a, b, c\}$ هو العنصر φ

متمم العنصر $\{b, c\}$ هو العنصر $\{a\}$

متمم العنصر $\{a, c\}$ هو العنصر $\{b\}$

متمم العنصر $\{a, b\}$ هو العنصر $\{c\}$

نظرية (6.4.3): إذا كانت $(A, \leq)$شبكة توزيعية فإن متمم أي عنصر إن وجد يكون وحيد.

البرهان:

نفرض أن للعنصر a متممان هما b, c ونحاول إثبات أن c=b

وبما أن a متمم للعنصر b فإن:

$a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1$

وبما أن a متمم للعنصر c فإن:

$a \wedge c = 0,\ a \vee c = 1$

إذن:

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c)$$
$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$$

تعريف (6.4.4): إذا كانت الشبكة $(A, \leq)$ شبكة توزيعية ولها أكبر عنصر وأصغر عنصر فإن هذه الشبكة نسميها شبكة بولیانية إذا كان لكل عنصر فيها له عنصر متمم داخل الشبكة.

ملاحظات:

1. إذا كانت الشبكة $(A, \leq)$ شبكة بولیانية فإن لكل عنصر متمم وحيد فإذا كان العنصر هو a فإن المتمم نسمية a' .
2. كل شبكة بولیانية مرتبطة بنظام جبري $(A, \vee, \wedge, ')$ متكون من العمليات الثلاث $\vee, \wedge$ وعملية المتمم $'$ وهذا النظام يسمى بنظام جبر بولياني.

مثال: الشبكة $(P(A), \cup, \cap, ')$ تشكل نظام جبر بولياني للمجموعة المنتهية A .

مثال: $(\{T, F\}, \vee, \wedge, \sim)$ تشكل نظام جبر بولياني حيث $\vee$ أداة الفصل أو بينما $\wedge$ هي أداة الربط وبينما العلاقة $\sim$ تمثل أداة النفي و F هي False و T هي True.

نظرية (6.4.5): (دي مورجان):

إذا كان a, b عنصرين من نظام جبر بولياني $(A, \vee, \wedge, ')$ فإن:

i. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
2. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

البرهان:

أولاً: لبرهان (i) يجب إثبات أن $a' \wedge b'$ هو العنصر المتمم للعنصر $a \vee b$ أي أن:

1. $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1$
2. $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0$

لإثبات (1):

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = [(a \vee b) \vee a'] \wedge [(a \vee b) \vee b']$$
$$= [a \vee (b \vee a')] \wedge [a \vee (b \vee b')] = [(a \vee a') \vee b] \wedge [a \vee 1]$$
$$= [1 \vee b] \wedge [a \vee 1] = 1 \wedge 1 = 1$$

لإثبات (2):

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = [a \wedge (a' \wedge b')] \vee [b \wedge (a' \wedge b')]$$
$$= [(a \wedge a') \wedge b'] \vee [(b \wedge b') \wedge a'] = [0 \wedge b'] \vee [0 \wedge a']$$
$$= 0 \vee 0 = 0$$

ثانياً: لبرهان (ii) فإننا نستخدم مبدأ الإزدواجية وبالتالي يكون لدينا:

1. $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = 0$
2. $(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = 1$

إذن $a' \vee b'$ هو العنصر المتمم للعنصر $a \wedge b$

مثال: في النظام الجبر البولياني $(A,\vee,\wedge,')$ إختصر

$$(a \wedge b) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (b \wedge c)$$

الحل:

$$(a \wedge b) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (b \wedge c) = b \wedge [a \vee (a' \wedge c') \vee c]$$
$$= b \wedge [(a \vee c) \vee (a' \wedge c')] = b \wedge 1 = b$$

ملاحظة هامة: يوجد طريقتين لتعريف النظام الجبري البولياني على المجموعة A :

1. الطريقة الأولى: النظام الجبري البولياني على المجموعة A هو شبكة بولينية مرتبطة بنظام جبري $(A,\vee,\wedge,')$ متكون من العمليات الثلاث $\vee,\wedge$ وعملية المتمم $'$.
2. الطريقة الثانية: إذا كان لدينا النظام الجبري $(A,+,.,',0,1)$ على المجموعة A بحيث أن المجموعة A هي مجموعة تحتوي على الأقل على عنصرين وتكون مرتبطة بعمليتين ثنائيتين هما (+) و(.) و $'$ هي عملية المتمم على المجموعة A وأن العنصران 0 و 1 في المجموعة A يحققا $0 \neq 1$ وبالتالي فإن هذا النظام الجبري يسمى نظام جبر بولياني إذا تحققت الشروط:

أولاً: شروط التجميع:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. $(a.b).c=a.(b.c)$

ثانياً: شروط الإبدال:

1. $a+b=b+a$
2. $a.b=b.a$

ثالثاً: شروط التوزيع:

1. $c.(a+b)=c.a+c.b$
2. $c+(a.b)=(c+a).(c+b)$

رابعاً: شروط المحايد:

1. $a+0=a$
2. $a.1=a$

خامساً: شروط المتمم:

1. $a+a'=1$
2. $a.a'=0$

ملاحظات:

1. للتسهيل سنكتب xy بدلا عن x.y
2. العنصر a' يسمى المتمم للعنصر a إذا تحقق الشرطين :

1. $a+a'=1$
2. $a.a'=0$

3. دائماً يكون العنصر 0 هو متمم العنصر 1 في أي نظام جبر بولياني وذلك لأن $1.0=0,\ 1+0=1$
4. مبدأ الإزدواجية Duality Principal متحقق على نظام الجبر البولياني بمعنى أن أي مبرهنة تكون صحيحة على النظام الجبري البولياني $(A,+,.,\ ',0,1)$ فهي أيضاً تكون صحيحة في النظام الجبري المرافق وذلك بتحويل+إلى. والعكس وتحويل 0 إلى 1والعكس وبالتالي يكون في أي نظام جبر بولياني دائماً يكون $a+1=1 \Leftrightarrow a.0=0$
5. إذا كانت A مجموعة غير خالية فإن مجموعة القوى P(A) تشكل نظام جبري بولياني حيث :

$$a+b=a\cup b,\qquad ab=a\cap b,\qquad a'=a^c,\qquad 0=\varphi,\qquad 1=A$$

6. إذا كانت A هي مجموعة القضايا المنطقية فإن A تشكل نظام جبري بولياني حيث:

$p + q = p \vee q, \quad pq = p \wedge q, \quad p' = \sim p, \quad 0 = 0, \quad 1 = U$

مثال: بإستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$(x + y)(x + z) = x + yz$

الحل:

نكون جدول الصواب:

x	y	z	x + y	x+z	(x + y)(x + z)	yz	x + yz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

من العمود (6) و العمود (8) ينتج التساوي.

نظرية (6.4.6): إذا كان $(A, +, ., ', 0, 1)$ نظام جبري بولياني فإن:

1. $a + a = a$
2. $aa = a$
3. $a + 1 = 1$
4. $a0 = 0$
5. $a + ab = a$
6. $a(a + b) = a$
7. $(a')' = a$
8. $0' = 1$
9. $1' = 0$
10. $(a + b)' = a'b'$

11. $(ab)' = a' + b'$

البرهان:

أولاً: لإثبات أن $a + a = a$؟

$$a = a + 0 = a + aa' = (a + a)(a + a') = (a + a)1 = a + a$$

ثانياً: لإثبات أن $aa = a$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + a = a$ نحصل على $aa = a$

ثالثاً: لإثبات أن $a + 1 = 1$؟

$$a + 1 = (a + 1)1 = (a + 1)(a + a') = a + 1a' = a + a'1 = a + a' = 1$$

رابعاً: لإثبات أن $a0 = 0$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + 1 = 1$ نحصل على $a0 = 0$

خامساً: لإثبات أن $a + ab = a$؟

$$a + ab = a1 + ab = a(1 + b) = a(b + 1) = a1 = a$$

سادساً: لإثبات أن $a(a + b) = a$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + ab = a$ نحصل على $a(a + b) = a$

سابعاً: لإثبات أن $(a')' = a$؟

$$a + a' = 1, \qquad aa' = 0$$

إذن متمم a' هو a وتكتب $(a')' = a$

ثامناً و تاسعاً: لإثبات أن $0' = 1$ ؟

$$0 + 1 = 1, \qquad 01 = 0$$

إذن متمم 0 هو 1 وتكتب $(0)' = 1$

كذلك متمم 1 هو 0 وتكتب $(1)' = 0$

عاشراً: لإثبات أن $(a + b)' = a'b'$ ؟

نريد أن نثبت أن متمم $a + b$ هو $a'b'$ ؟

إثبات الشرط الأول من شروط المتمم:

$$(a + b)(a'b') = (a'b')(a + b) = a'b'a + a'b'b = a(a'b') + (a'b')b$$
$$= (aa')b' + a'(bb') = (0)b' + a'(0) = 0 + 0 = 0$$

إثبات الشرط الثاني من شروط المتمم:

$$(a+b)+(a'b') = \big((a+b)+a'\big)\big((a+b)+b'\big)$$

$$= \big((b+a)+a'\big)\big((b+a)+b'\big) = \big(b+(a+a')\big)\big(a+(b+b')\big)$$

$$= (b+1)+(a+1) = 1+1 = 1$$

إذن متمم $a+b$ هو $a'b'$ وتكتب $(a+b)' = a'b'$

الحادي عشر: لإثبات أن $(ab)' = a'+b'$ ؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $(a+b)' = a'b'$ نحصل على $(ab)' = a'+b'$.

مثال: إذا كان $(A,+,.,',0,1)$ نظام جبري بولياني وكانت $a,b,c \in A$ بحيث:

1. $a+c = b+c$
2. $ac = bc$

فإثبت أن $a = b$

الحل:

$$(a+b)(a+c) = a+bc = a+ac = a(1+c) = a1 = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(a+b)(a+c) = (b+a)(b+c) = b+ac = b+bc = b(1+c)$$

$$= b1 = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على: $a = b$

مثال: إذا كان $(A,+,.,',0,1)$ نظام جبري بولياني وكانت $a,b,c \in A$ بحيث:

1. $ab = ac$
2. $a'b = a'c$

فإثبت أن $a = b$

الحل:

$$b = 1b = (a+a')b = ab+a'b = ac+a'c = (a+a')c = 1c = c$$

(6-5) الدوال البوليانية Boolean functions

إذا كان $(A,+,.,\bar{},0,1)$ نظام جبري بولياني بحيث $A=\{0,1\}$ فإن:

a	b	a'	b'	$a+b$	ab
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0

فإذا كانت $A^n=\{(a_1,a_2,\dots,a_n): a_i\in A\}$ فإن الدالة $f: A^n \to A$ تسمى دالة بولبانية ولوصف هذه الدالة فيتم ذلك عن طريق جدول الصواب لهذه الدالة.

مثال: أوصف جدول الصواب للدالة البولبانية

$f(x,y)=x(\bar{x}+y)$

الحل:

$f(x,y)=x(\bar{x}+y)$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}+y$	$f=x(\bar{x}+y)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

ملاحظة: الدالتان البوليتان f_1, f_2 يكونا متساويتان وتكتب $f_1 = f_2$ وذلك إذا كان لهما نفس جدول الصواب أو إذا أمكن أن نستنتج أحد الدالتان من الأخرى وذلك بإستخدام خواص الجبر البولياني.

مثال: إذا كانت الدوال البولينية

$f_1(x,y) = x(\bar{x}+y),\ \ f_2(x,y) = xy$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}+y$	$x(\bar{x}+y)$	xy
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

من العمود (5) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$f_1(x,y) = x(\bar{x}+y) = x\bar{x} + xy = 0 + xy = xy = f_2(x,y)$

مثال: إذا كانت الدوال البولينية

$f_1(x,y) = (x+y)(\bar{x}+y),\ \ f_2(x,y) = y$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$x+y$	$\bar{x}+y$	$(x+y)(\bar{x}+y)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0

من العمود (2) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$$f_1(x,y) = (x+y)(\bar{x}+y) = y + x\bar{x} = y + 0 = y = f_2(x,y)$$

مثال: إذا كانت الدوال البولينية

$$f_1(x,y) = x + \bar{x}y,\ \ f_2(x,y) = x + y$$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$x+\bar{x}y$	$x+y$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

من العمود (5) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$$f_1(x,y) = x + \bar{x}y = (x+\bar{x})(x+y) = 1(x+y) = x + y = f_2(x,y)$$

نظرية (6.4.7): (دي مورجان في n متغير): إذا كان $(A, +, ., \bar{}, 0, 1)$ نظام جبري بولياني وكانت $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ فإن:

1. $\overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} = \bar{x_1}\,\bar{x_2} \dots \bar{x_n}$
2. $\overline{(x_1 x_2 \dots x_n)} = \bar{x_1} + \bar{x_2} + \cdots + \bar{x_n}$

البرهان:

أولاً: يكفي إثبات أن:

$$\overline{(x+y+z)} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

وذلك بإستخدام جدول الصواب:

x	y	z	$x+y+z$	$\overline{(x+y+z)}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

بمقارنة العمود (5) والعمود (9) لحصل على التساوي.

ثانياً: لإثبات أن:

$$\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

فإننا نطبق مبدا الإزدواجية على القانون الأول

$$\overline{(x+y+z)} = \overline{xyz}$$

ويتم ذلك بتبديل (+) ب (.) والعكس فنحصل على:

$$\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

تعريف (6.4.8): إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات بولينية فإن كل عنصر من عناصر المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\}$ يسمى حرف بولياني (Literal) وبالتالي فالحرف البولياني هو متغير بولياني أو المتمم له و كل مجموعة من الحروف المضروبة في بعضها تكون أحد حدود الدالة البولينية وبالتالي فالدالة البولينية التي تتكون من مجموعة من عناصر حواصل الضرب ويفصل بينها + تسمى دالة بولينية على شكل مجموع حاصل ضرب (Sum of product expression).

مثال: في الدالة البولينية

$$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}\bar{y}z + \overline{xyz} + xy\bar{z}$$

1. الحروف هي $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, \bar{z}$ وبالتالي فعدد الحروف هي 12 علما بأننا نعد الحروف بدون أخذ التكرار في الإعتبار.

2. حدود الدالة البولينية هي $xyz, \bar{x}yz, \bar{x}\bar{y}z, xy\bar{z}$ وعددهم هو 4.

تعريف (6.4.9): لتكن f, g دوال بولينية متكافئة مكتوبة على هيئة مجموع ضرب فإننا نقول أن الدالة f أبسط من الدالة g إذا كان أحد الشرطين متحقق:

1. عدد حروف f أقل من عدد حروف g وعدد حدود f أقل من أو يساوي عدد حدود g.
2. عدد حدود f أقل من عدد حدود g و عدد حروف f أقل من أو يساوي عدد حروف g.

مثال:

1. الدالة البولينية $f = x + \bar{y}z$ أبسط من الدالة البولينية $g = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$ علماً بأن $f = g$.
2. الدالة البولينية $f = \bar{x}z + \bar{y}z$ أبسط من الدالة البولينية $g = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$ علماً بأن $f = g$.

تعريف (6.4.10): لتكن f دالة بولينية فإننا نقول أن f على شكل مجموع ضرب أصغر (Minimal sum of product expression) وتكتب إختصارا ب MSP إذا تحقق شرطين:

1. f على شكل مجموع ضرب.
2. إذا كانت الدالة g دالة أخرى على شكل مجموع ضرب فإن الدالة f تكون أبسط من الدالة g .

ملاحظة: MSP هو أبسط شكل للدالة f يمكن تبسيطة بإستخدام قوانين الجبر البولياني للدالة البولينية f .

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$$

الحل:

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z = (y + \bar{y})xz = 1xz = xz$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x, y, z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$$

الحل:

$$f(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z} = x(z+\bar{z}) + \bar{y}z = x + \bar{y}z$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z) = \bar{x} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{y}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{y} \\ &= \bar{x}(1+\bar{y}z) + \bar{y}\bar{z}(\bar{x}+1) + \bar{y} = \bar{x}1 + \bar{y}\bar{z}1 + \bar{y} \\ &= \bar{x} + \bar{y}\bar{z} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{y}(\bar{z}+1) = \bar{x} + \bar{y}1 = \bar{x} + \bar{y} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{[(\bar{y}+\bar{z})(x+\bar{y}+z)]}}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \overline{\overline{(\bar{y}+\bar{z})}} + \overline{\overline{(x+\bar{y}+z)}} = (\bar{y}+\bar{z}) + (x+\bar{y}+z) \\ &= x + \bar{y} + \bar{y} + z + \bar{z} = x + \bar{y} + 1 = x + 1 = 1 \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w \\ &= x\bar{z}\bar{w}(y+\bar{y}) + x\bar{z}w(\bar{y}+y) = x\bar{z}\bar{w} + x\bar{z}w = x\bar{z}(\bar{w}+w) = x\bar{z} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \\ &= x\bar{y}z(w+\bar{w}) + x\bar{y}\bar{z}(w+\bar{w}) + (x+\bar{x})\bar{y}z\bar{w} = x\bar{y}(z+\bar{z}) + \bar{y}z\bar{w} \\ &= x\bar{y} + \bar{y}z\bar{w} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

الحل:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyzw + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$
$$= xyw(z+\bar{z}) + x\bar{y}w(z+\bar{z}) + xyz(w+\bar{w}) + \bar{x}yz(w+\bar{w})$$
$$= xyw + x\bar{y}w + xyz + \bar{x}yz = xw(y+\bar{y}) + (x+\bar{x})yz$$
$$= xw + yz$$

ملاحظة: إذا كان لدينا جدول صواب مكون من 2^n من الصفوف فإننا نستطيع أن نكون دالة بولیانية في n متغير بحيث يكون لها نفس جدول الصواب المعطى والنظرية التالية تثبت ذلك.

نظرية (6.4.8): إذا كان لدينا جدول صواب مكون من 2^n صف فإننا نستطيع أن نكون دالة بولیانية في n متغير بحيث يكون لها نفس جدول الصواب المعطى.

البرهان:

نفرض أن الدالة البولیانية هي $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وبالتالي يكون لدينا:

أولاً: إذا كانت جميع قيم الدالة في العمود الأخير في جدول الصواب المعطى هي 0 فإن:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n}$$

ثانياً: إذا كان هناك أحد قيم الدالة في العمود الأخير من جدول الصواب يساوي 1 فإننا نكون متغير جديد P_i يسمى "حد أصغرى" (Minterm) وهو عبارة عن حاصل الضرب:

$$P_i = y_1 y_2 \cdots y_n$$

حيث:

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{if } x_i = 1 \\ x_i' & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون الدالة:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k, \qquad 1 \le k \le n$$

وهذه الدالة تسمى صيغة مجموع ضرب تام Complete sum of products expression وتعطى إختصارا بـ CSP.

ملاحظة: أي دالة بولينية غير صفرية يمكن كتابتها بشكل وحيد على هيئة مجموع ضرب تام CSP وذلك بغض النظر عن ترتيب الحدود حيث طالما أن الدالة غير صفرية فإنه توجد قيمة واحدة على الأقل تساوي 1 وبالتالي نستطيع بإستخدام نظرية (6.4.8) تكوين الحد الأصغرى Minterm لهذا الصف وبالتالي نستطيع تكوين دالة بصيغة مجموع ضرب تام كما سبق وأثبتنا في النظرية المعطاة.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	$x\bar{z}$	$\bar{y}z$	$x\bar{z} + \bar{y}z$	Minterm
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	$\bar{x}yz$
0	0	0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$$

ثانياً: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z = x\bar{z}1 + \bar{y}z1 = x\bar{z}(y + \bar{y}) + \bar{y}z(x + \bar{x})$$
$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z) = x\bar{z} + y\bar{z}$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$x\bar{z} + y\bar{z}$	Minterm
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

ثانيا: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x, y, z) = x\bar{z} + y\bar{z} = x1\bar{z} + 1y\bar{z} = x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} =$$
$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z) = xy + \bar{z}$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	xy	$xy + \bar{z}$	Minterm
1	1	1	1	1	xyz
1	1	0	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

ثانياً: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x,y,z) = xy + \bar{z} = xy1 + 1\bar{z} = xy(z + \bar{z}) + (y + \bar{y})\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + y\bar{z} + \bar{y}\bar{z} = xyz + xy\bar{z} + 1y\bar{z} + 1\bar{y}\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} + (x + \bar{x})\bar{y}\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

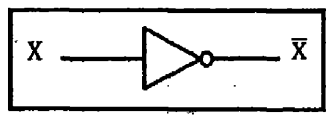
$$= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP .

(6-6) الدوائر المنطقية Logic Circuit

الدائرة الكهربائية لها بوبات Gates وهذه البوابات تعتبر دوال منطقية ويوجد عدة أنواع من البوابات المنطقية ومن أهمها:

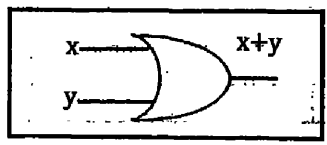
1. بوابة العاكس (النفي) Not gate ولها الشكل:



ولها الجدول

NOT GATE	
x	$\bar{x}$
1	0
0	1

2. بوابة الفصل OR gate ولها الشكل:



ولها الجدول:

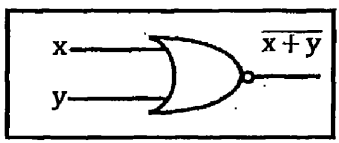
OR GATE		
x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. بوابة الربط (الوصل) AND gate ولها الشكل:

ولها الجدول:

AND GATE		
x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

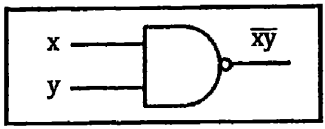
4. بوابة نفي الفصل NOR gate ولها الشكل:



ولها الجدول:

NOR GATE		
x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. بوابة نفي الربط (الوصل) NAND gate ولها الشكل:

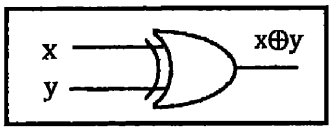


ولها الجدول:

NAND GATE		
x	y	$\overline{xy}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

6. بوابة أيهما وليس كلاهما XOR gate

وعدد المدخلات فيها هو 2 فقط ولها الشكل:



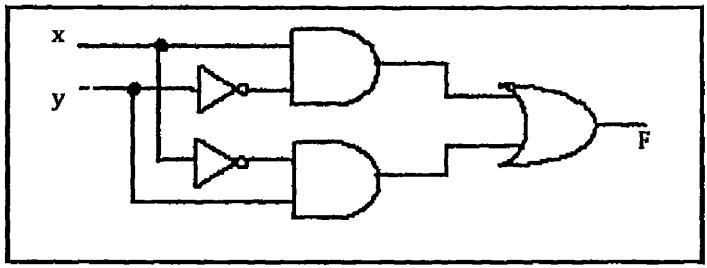
ولها الجدول:

XOR GATE		
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

علما بأن هذه البوابة يكون لها التعبير البولياني أيضا:

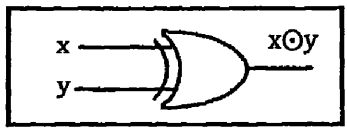
$x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$

ولها الشكل:



7. بوابة الفصل XNOR gate وهي نفي XOR gate

وعدد المدخلات فيها هو 2 فقط ولها الشكل:



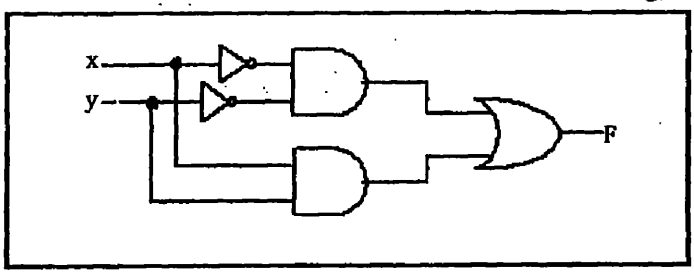
ولها الجدول:

XNOR GATE		
x	y	x⊙y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

علما بأن هذه البوابة يكون لها التعبير البولياني:

$x \odot y = xy + \overline{x}\overline{y}$

ولها الشكل:



ملاحظات:

1. الجدول التالي يوضح قيم الصواب والرموز المستخدمة للبوابات المنطقية:

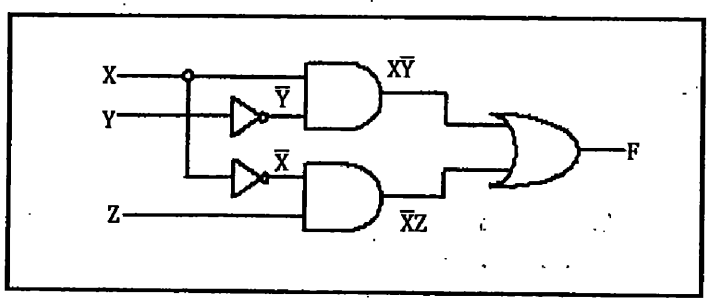
x	y	xy AND	$\overline{xy}$ NAND	x + y OR	$\overline{x+y}$ NOR	x⊕y XOR	x⊙y XNOR
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

2. في الدائرة الكهربائية يكون دائما التيار الكهربائي يتدفق من اليسار إلى اليمين حيث الخطوط التي تتصل مع البوابة المنطقية من جهة اليسار تسمى مدخل والتي تتصل من جهة اليمين تسمى مخرج.
3. في العادة نرمز لبوابة النفي بدائرة صغيرة تكون من جهة اليمين للبوابة المنطقية.
4. لأي بوابة منطقية إذا كان عدد المدخلات يساوي n فإن عدد الإحتمالات للمخرج هي 2^n.
5. كل دائرة منطقية يمكن التعبير عنها كدالة بولينية والعكس صحيح بمعنى كل دالة بولينية يمكن أن نعبر عنها كدائرة منطقية.

مثال: إرسم الدائرة المنطقية التي لها التعبير البولياني:

$f(x, y, z) = x\bar{y} + \bar{x}z$

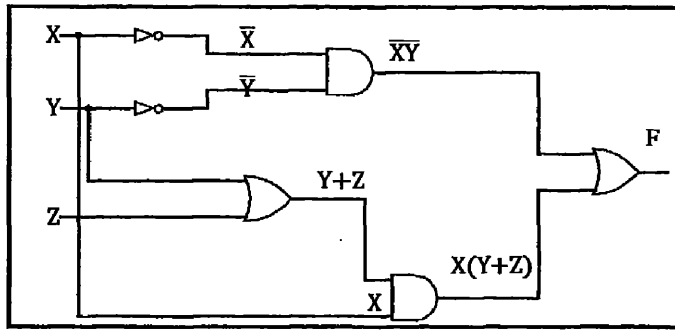
الحل:



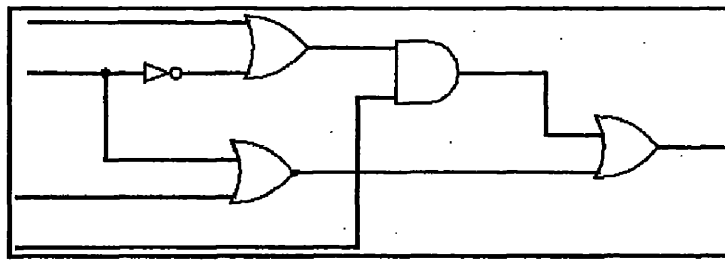
مثال: إرسم الدائرة المنطقية التي لها التعبير البولياني:

$$f(x, y, z) = \overline{xy} + x(y + z)$$

الحل:

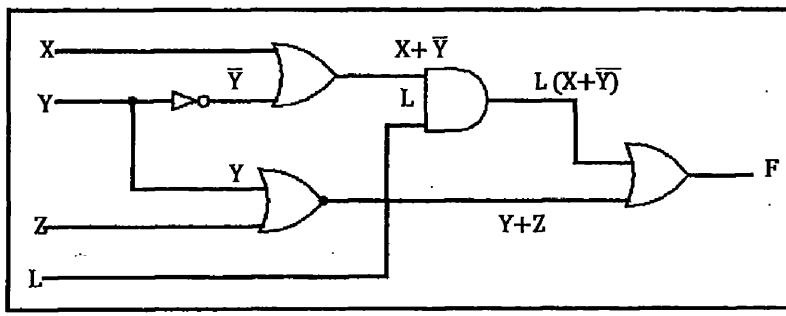


مثال: إكتب التعبير البولياني للدائرة المنطقية التالية:



الحل:

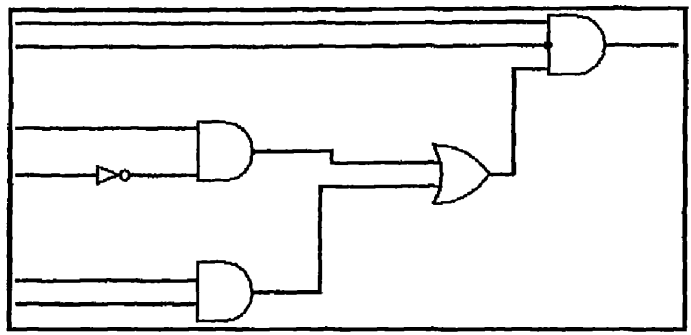
يمكن إعادة رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبالتالي هذه الدائرة المنطقية يمكن التعبير عنها بولينيا ب:

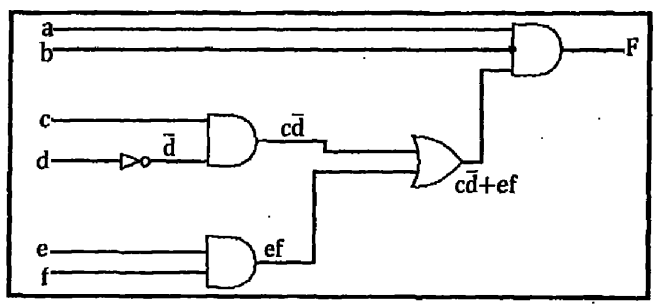
$$F(x, y, z, l) = l(x + \bar{y}) + (y + z)$$

مثال: إكتب التعبير البولياني للدائرة المنطقية التالية:



الحل:

يمكن إعادة رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبالتالي هذه الدائرة المنطقية يمكن التعبير عنها بولينيا بـ:

$$F(a, b, c, d, e, f) = ab(c\bar{d} + ef)$$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

الحل:

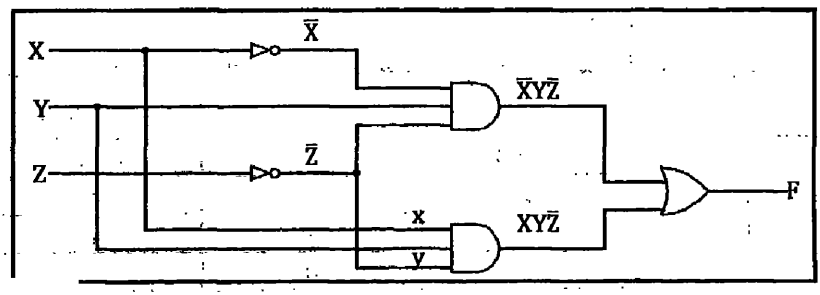
نكون جدول الصواب:

INPUT			OUTPUT	
x	y	z	F	Minterm
1	1	1	0	0
1	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:



مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

الحل:

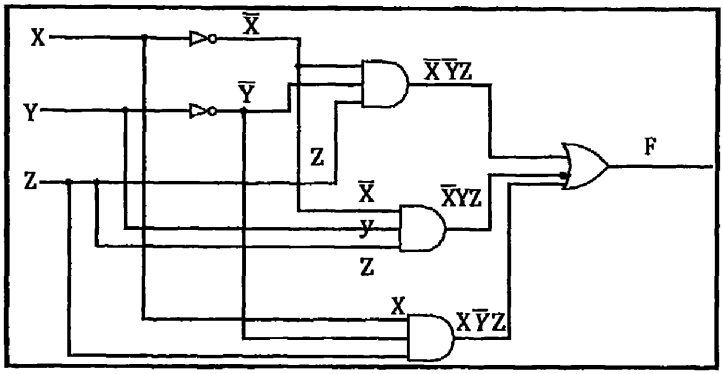
نكون جدول الصواب:

INPUT			OUTPUT	
x	y	z	F	Minterm
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	0	0
0	1	1	1	$\bar{x}yz$
0	1	0	0	0
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

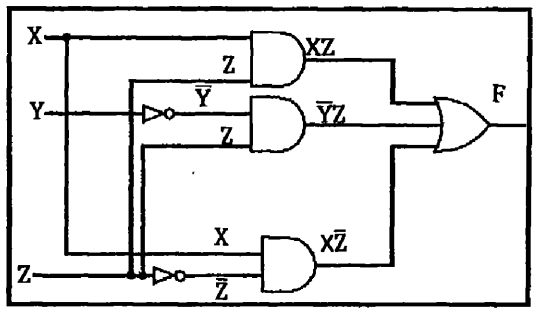


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$$

الحل:

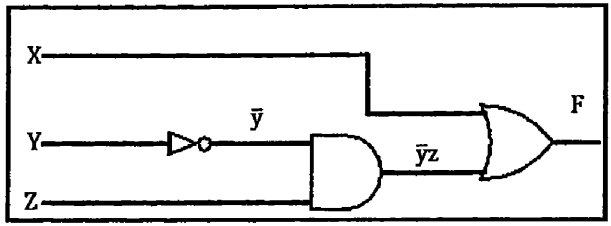
يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z} = xz + x\bar{z} + \bar{y}z = x(z + \bar{z}) + \bar{y}z$$
$$= x + \bar{y}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

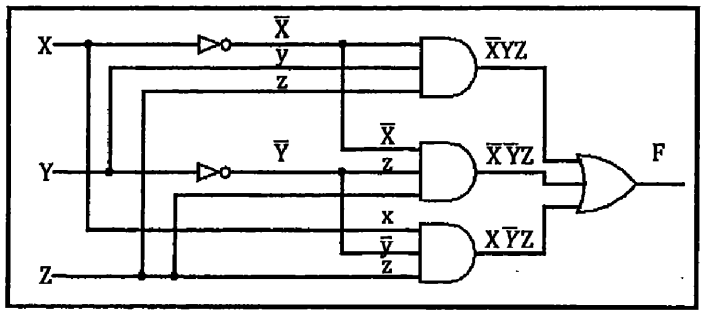


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$F(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

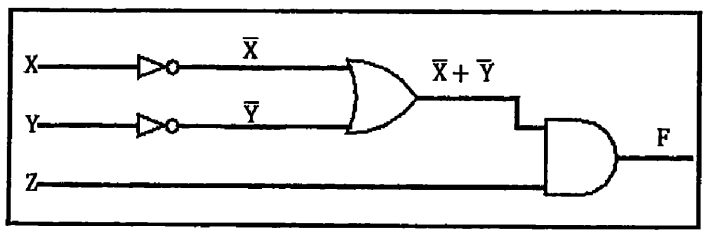


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

$$= \bar{x}(y+\bar{y})z + (x+\bar{x})\bar{y}z = \bar{x}z + \bar{y}z = (\bar{x}+\bar{y})z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

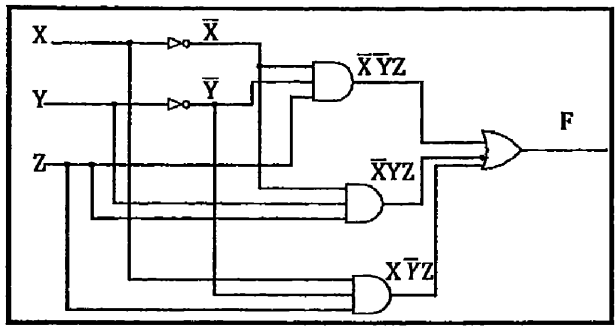


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة:

$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

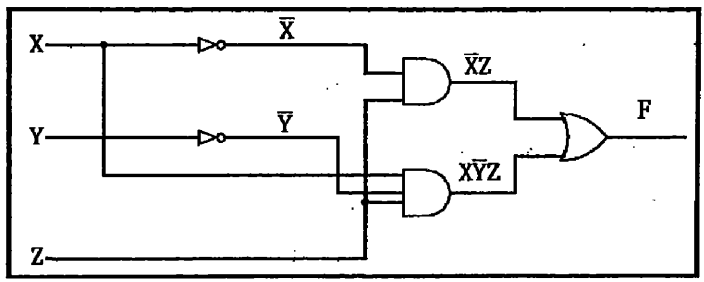


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z = (x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y})z$$

$$= (\, x\bar{y} + \bar{x}(y + \bar{y})\,)z = (\, x\bar{y} + \bar{x}(1)\,)z = (x\bar{y} + \bar{x})z = x\bar{y}z + \bar{x}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

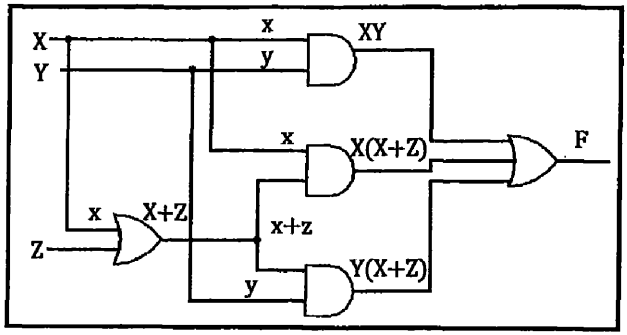


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = xy + x(x+z) + y(x+z)$$

الحل:

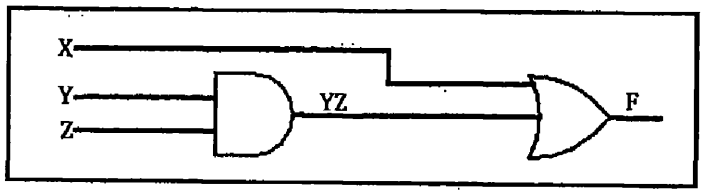
يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = xy + x(x+z) + y(x+z) = xy + xx + xz + yx + yz$$
$$= xy + x + xz + yz = x(y+1+z) + yz = x + yz$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

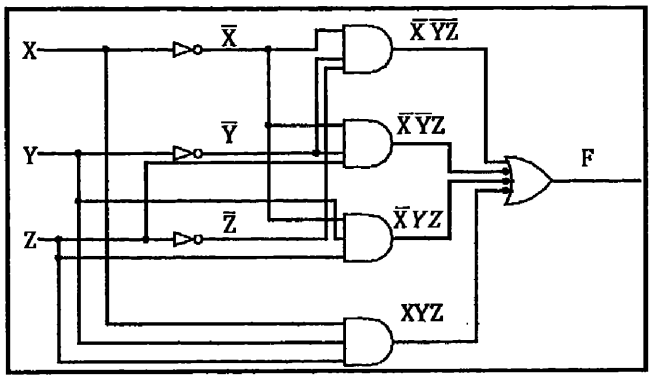


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

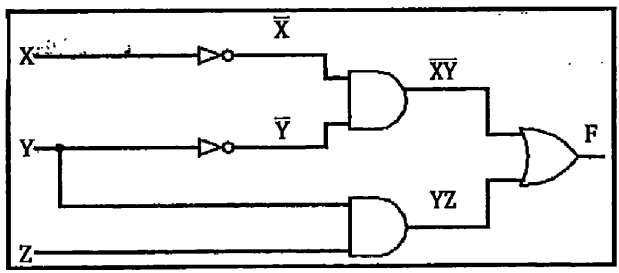


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz = (\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z) + (\bar{x}yz + xyz)$$

$$= \bar{x}\bar{y}(\bar{z} + z) + (\bar{x} + x)yz = \bar{x}\bar{y}1 + 1yz = \bar{x}\bar{y} + yz$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

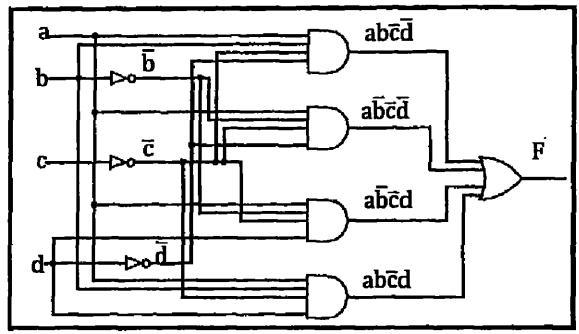


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(a,b,c,d) = ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

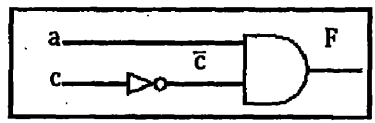


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(a,b,c,d) = ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + abc\bar{d}$$

$$= a\bar{c}\bar{d}(b+\bar{b}) + a\bar{c}d(\bar{b}+b) = a\bar{c}\bar{d} + a\bar{c}d = a\bar{c}(\bar{d}+d) = a\bar{c}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:



(6-7) خرائط كارنوف

تستخدم خرائط كارنوف لتبسيط شكل الدوال البوليانية في متغيرين أو ثلاث متغيرات أو أربع متغيرات حيث:

1. خريطة كارنوف في متغيرين هو مربع يحتوي على أربع خلايا مختلفة تعطى $2^2 = 4$ للإحتمالات المختلفة للدالة البوليانية في متغيرين ويأخذ الشكل:

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$		

2. خريطة كارنوف في ثلاث متغيرات هو مستطيل يحتوي على ثمان خلايا مختلفة تعطى $2^3 = 8$ للإحتمالات المختلفة للدالة البولينية في ثلاث متغيرات ويأخذ الشكل:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

3. خريطة كارنوف في أربع متغيرات هو مربع يحتوي على ستة عشر خلية مختلفة تعطى $2^4 = 16$ للإحتمالات المختلفة للدالة البولينية في اربع متغيرات ويأخذ الشكل:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

فإذا كان لدينا دالة بولينية f مكتوبة على هيئة مجموع حاصل ضرب تام CSP فإننا نكون خريطة كارنوف التي تناسب عدد متغيرات الدالة f ثم نضع 1 في خلية خريطة كارنوف التي تقابل كل حد من حدود الدالة f .

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$

الحل:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$			1	1

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x, y, z, w) = x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1		
$x\bar{y}$				1
$\bar{x}\bar{y}$			1	
$\bar{x}y$				1

تعريف (6.7.1): نقول أن خليتين من خلايا خريطة كارنوف إنهما يكونا متجاوتان إذا كان الحدان المقابلان لهما في الدالة البولينية يختلفان فقط في حرف واحد.

مثال: في خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x, y, z) = xyz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$			1	1

الحدان $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ و $\bar{x}\bar{y}z$ متجاوران لإنهما مشتركان في الحرفان $\bar{y}$ و $\bar{x}$ ويختلفان فقط في الحروف $\bar{z}$ و z.

ملاحظة:

إذا كانت px و $p\bar{x}$ خليتان متجاورتان فإن:

$$p\bar{x} + px = p(\bar{x} + x) = p$$

وفي هذه الحالة نستطيع عمل تبسيط لأي حدين متجاورين في الدالة البوليانية.

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z = x\bar{z}(y + \bar{y}) + \bar{y}z(x + \bar{x})$$

$$= x\bar{z}1 + \bar{y}z1 = x\bar{z} + \bar{y}z$$

ملاحظات:

1. في خريطة كارنوف في ثلاث متغيرات فإن خليتان من الجدول تكونا متجاورتان إذا كان أحد الحالتان التاليتان متحقق:
   أ. **الحالة الأولى:** الخليتان متلاصقتان.
   ب. **الحالة الثانية:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الصفوف.
2. في خريطة كارنوف في أربع متغيرات فإن خليتان من الجدول تكونا متجاورتان إذا كان أحد الحالات الثلاث التالية متحقق:
   أ. **الحالة الأولى:** الخليتان متلاصقتان.
   ب. **الحالة الثانية:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الصفوف.
   ج. **الحالة الثالثة:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الأعمدة.

تعريف (6.7.2): إذا كان لدينا خريطة كارنوف فإن الحالات التالية تسمى مستطيل أساسي:

1. خلية واحدة تحتوي على 1.
2. خليتان متجاورتان تحتوي كلا منها على 1.
3. أربع خلايا من النوع 1×4 أو 4×1 أو 2×2 وتحتوي كلا منها على 1 .
4. ثمان خلايا من النوع 2×4 أو 4×2 أو وتحتوي كلا منها على 1.

ملاحظات:

1. من الممكن أن يقع مستطيل أساسي داخل مستطيل أساسي أخر يكون أكبر منه وبالتالي نسمي المستطيل الأساسي مستطيل أعظم إذا لم يوجد أي مستطيل أساسي أخر يحتوي عليه.
2. إذا كان لدينا دالة بولياني على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP فإن أي مستطيل أعظم في خريطة كارنوف يقابل حد واحد للدالة البولياني ويسمى هذا الحد بأنه حد أولى للدالة البولياني.
3. إذا كان لدينا مستطيل أعظم في خريطة كارنوف فإن الحد الأولى الذي يقابل هذا المستطيل يساوي حاصل ضرب جميع الحروف البولياني التي تظهر كلا منها في جميع خلايا هذا المستطيل الأعظم .

خوارزمية (6.7.3): بإستخدام إسلوب خرائط كارنوف نستطيع تبسيط شكل الدالة البولياني وكتابتها على شكل مجموع ضرب أصغر MSP كما يلي:

1. إكتب الدالة f على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP .
2. كون خريطة كارنوف للدالة f .
3. نوجد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع حدود الدالة f وفي حالة وجود أكثر من مجموعة من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع حدود الدالة f فإننا نختار المجموعة التي تحتوي على أقل عدد من الحروف أي المجموعة التي تعطينا أبسط صورة للدالة f .
4. نوجد الحدود الأولية التي تقابل المستطيلات العظمى التي حصلنا عليها في الخطوة (3).
5. إكتب الدالة البولياني f على شكل مجموع الحدود الأولية التي حصلنا عليها في الخطوة (4).

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$		1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{y}$ وبالتالي:

$f(x,y) = \bar{y}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{x}$, $\bar{y}$ وبالتالي:

$f(x,y) = \bar{x} + \bar{y}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}yz$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$	1			

إذن الحدود الأولية هي: yz وبالتالي:

$f(x, y, z,) = yz$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			1
$\bar{x}$				

إذن الحدود الأولية هي: xz وبالتالي:

$f(x, y, z,) = xz$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{z}$ وبالتالي:

$f(x, y, z,) = \bar{z}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$				

إذن الحدود الأولية هي: x وبالتالي:

$f(x,y,z,) = x$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1	1	1	1

إذن الحدود الأولية هي: 1 وبالتالي:

$f(x,y,z,) = 1$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$			1	1

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}$ وبالتالي:

$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	1
$\bar{x}$				1

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}$, $\bar{y}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + +\bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}$, $\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}yz$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z) = x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y}$, $\bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \bar{y} + \bar{x}z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولیانية:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولیانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي: $x,\ \bar{y},\ z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x + \bar{y} + z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولیانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xyz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولیانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي xy وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xy$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x, y, z, w) = xyzw + xy\bar{z}w$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي xyw وبالتالي:

$f(x, y, z, w) = xyw$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$f(x, y, z, w) = xyzw + xy\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي yw وبالتالي:

$f(x, y, z, w) = yw$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي x وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = x$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy			1	1
$x\bar{y}$			1	1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي $x\bar{z}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{z}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x, y, z, w) = xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1		
$x\bar{y}$		1		
$\bar{x}\bar{y}$		1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	1

إذن الحدود الأولية هي $z\bar{w}, \bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x, y, z, w) = z\bar{w} + \bar{x}z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x, y, z, w) = x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + x\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$			1	1
$\bar{x}\bar{y}$			1	1
$\bar{x}y$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{z}, \bar{x}yw$ وبالتالي:

$$f(x, y, z, w) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + \bar{x}yw$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				1
$x\bar{y}$				1
$\bar{x}\bar{y}$			1	1
$\bar{x}y$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{z}, x\bar{w}, \bar{x}yw$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{z} + x\bar{w} + \bar{x}yw$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	
$x\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}y$	1	1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{w}$,$\bar{y}z$, ,$\bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}z + \bar{y}z + \bar{w}$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				1
$\bar{x}y$		1	1	1

إذن الحدود الأولية هي: $y\bar{w}$, $\bar{z}w$, $x\bar{y}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y} + \bar{z}w + y\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$			1	
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{y}$, $\bar{y}z\bar{w}$ وبالتالي

$$f(x, y, z, w) = x\bar{y} + \bar{y}z\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1	1		1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}y$, $\bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{x}z$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z, w) = xyzw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + x\bar{y}zw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			
$x\bar{y}$	1			
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}w$, zw وبالتالي:

$$f(x, y, z, w) = zw + \bar{x}w$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + xyzw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y}$, w وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{y} + w$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1		1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1	1		

إذن الحدود الأولية هي: xw, yz وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xw + yz$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w}$$
$$+xyzw + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1		1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}\bar{y}$, xw , $xy\bar{z}$, $\bar{x}y\bar{w}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y} + xw + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w}$$
$$+\bar{x}y\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$		1		1
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$	1	1	1	

إذن الحدود الأولية هي $xyw, \bar{y}\bar{z}w, \bar{x}zw, \bar{x}y\bar{w}, x\bar{y}z\bar{w}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xyw + \bar{y}\bar{z}w + \bar{x}zw + \bar{x}y\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

INPUT			OUTPUT
x	y	z	
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

الحل:

أولاً: نحول جدول الصواب إلى دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP:

x	y	z	Minterm
1	1	1	xyz
1	1	0	$xy\bar{z}$
1	0	1	0
1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0
0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

ثانياً: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	
$\bar{x}$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{z}$, xy وبالتالي:

$f(x,y,z) = \bar{z} + xy$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

INPUT				OUTPUT
X	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

الحل:

أولاً: نحول جدول الصواب إلى دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP:

x	y	z	w	Minterm
1	1	1	1	xyzw
1	1	1	0	$xyz\bar{w}$
1	1	0	1	$xy\bar{z}w$
1	0	1	1	$x\bar{y}zw$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}w$
1	0	0	0	0
0	1	1	1	$\bar{x}yzw$
0	1	1	0	$\bar{x}yz\bar{w}$
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x, y, z, w) = xyzw + xy\bar{z}w + xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

ثانياً: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1		1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1	1		

إذن الحدود الأولية هي: xw, yz وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xw + yz$$

ملاحظة: بإستخدام إسلوب متمم خرائط كارنوف نستطيع أيضاً تبسيط شكل الدالة البوليانية وكتابتها على شكل مجموع ضرب أصغر MSP كما يلي:

1. إكتب الدالة البوليانية على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP .
2. نكون خريطة كارنوف للدالة f .
3. نوجد متمم خريطة كارنوف التي حصلنا عليها في (2) بحيث نضع 0 في كل خلية لا تقابل 1 في الخريطة.
4. نوجد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع الخلايا التي تحتوي أصفار وفي حالة تعدد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع خلايا الدالة فإننا نختار المستطيلات التي تعطينا أصغر عدد من الحروف.
5. نوجد الحدود الأولية التي تقابل المستطيلات العظمى التي حصلنا عليها في (4).
6. نكتب الدالة $\bar{f}$ على شكل مجموع الحدود الأولية التي حصلنا عليها في (5).
7. نحسب متمم الدالة $\bar{f}$ التي حصلنا عليها في (6) وبالتالي تكون الدالة $f = \overline{(\bar{f})}$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xyzw$$
$$+x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	
$x\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}y$	1	1	1	

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	0			0
$x\bar{y}$				0
$\bar{x}\bar{y}$				0
$\bar{x}y$				0

إذن الحدود الأولية هي $\bar{z}w, xyw$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{z}w + xyw$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{z}w + xyw)} = (z + \bar{w})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{w})$$

$$= z(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{w}$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية كما يلي:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1	1		1

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية كما يلي:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	0	0	0	0
$\bar{x}$			0	

إذن الحدود الأولية هي: $x,\ \bar{y}\bar{z}$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z) = x + \bar{y}\bar{z}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \bar{\bar{f}} = \overline{(x + \bar{y}\bar{z})} = \bar{x}(y + z)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1		1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1	1		

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy			0	
$x\bar{y}$		0	0	
$\bar{x}\bar{y}$	0	0	0	0
$\bar{x}y$			0	0

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}\bar{y}, \bar{z}\bar{w}, \bar{y}\bar{w}, \bar{x}\bar{z}$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y} + \bar{z}\bar{w} + \bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{z}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{x}\bar{y} + \bar{z}\bar{w} + \bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{z})}$$
$$= (x + y)(z + w)(y + w)(x + z)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xyz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1			
$\bar{x}y$			1	

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$		0	0	
$\bar{x}\bar{y}$		0	0	0
$\bar{x}y$	0	0		0

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y}\bar{w}, \bar{x}yz, \bar{x}\bar{z}w$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{y}\bar{w} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{z}w$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{y}\bar{w} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{z}w)}$$

$$= (y+w)(x+\bar{y}+\bar{z})(x+z+\bar{w})$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$$
$$+xyzw + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1		1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		0		
$x\bar{y}$		0	0	
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	0			0

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}yw, x\bar{y}\bar{w}, xz\bar{w}$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{x}yw + x\bar{y}\bar{w} + xz\bar{w}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{x}yw + x\bar{y}\bar{w} + xz\bar{w})}$$

$$= (x + \bar{y} + \bar{w})(\bar{x} + y + w)(\bar{x} + \bar{z} + w)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

$$+x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				1
$\bar{x}y$		1	1	1

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البولينية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	0			
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$	0	0	0	
$\bar{x}y$	0			

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}\bar{y}w$, $\bar{x}\bar{y}z$,yzw وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z + yzw$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z + yzw)}$$

$$= (x + y + w)(x + y + \bar{z})(\bar{y} + \bar{z} + \bar{w})$$

تمارين

1. أرسم مخطط هاس للمجموعات الأتية المرتبة تحت علاقة الترتيب والتي هي علاقة x تقسم y ثم حدد هل علاقة الترتيب هي ترتيب كلي أم لا:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$.
2. $A = \{3, 5, 12, 30, 60\}$.
3. $A = \{1, 3, 6, 12, 24, 48\}$.
4. $A = \{24,2, 6\}$
5. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
6. $A = \{24\}$
7. $A = \{3, 5, 15\}$
8. $A = \{2, 8, 32, 4\}$
9. $A = \{15, 5, 30\}$

2. لتكن لدينا المجموعة التالية: $S=\{1,2,3\}$ ولتكن $P(S)$ مجموعة المجموعات الجزئية ل S ولنعرف على $P(S)$ العلاقة $\leq$ بالشكل التالي:

$$\forall A, B, C \in P(S) : A \leq B \iff A \subseteq B$$

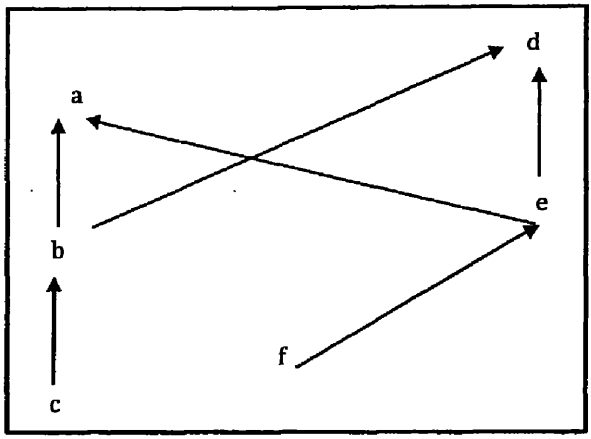
- إثبت أن المجموعة $(S, \leq)$ مرتبة جزئياً.
- إرسم مخطط هاس والبيان الموجّه للمجموعة(S,R).

3. إرسم مخطط هاس للمجموعة A تحت علاقة الترتيب x تقسم y حيث:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20\}$$

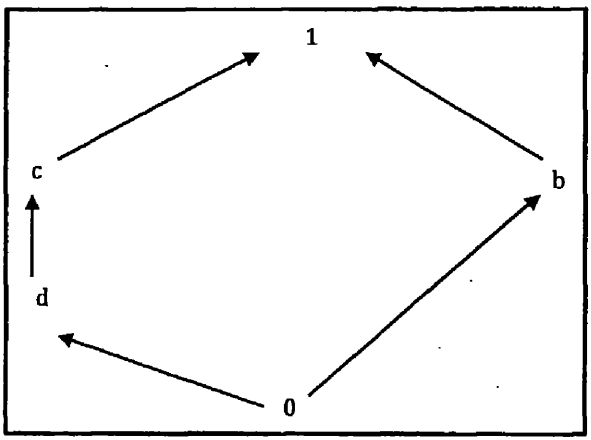
4. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 4
5. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 6
6. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 7

7. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ والمخطط السهمي هو:



فإذا كانت $B=\{b,c,e,f\}$ فحدد Max B, Min B, Sup B, Inf B

8. ليكن $(A,\leq)$ الشبكة الموضحة بالمخطط السهمي التالي:



- أعطي النظام الجبري $(A,\vee,\wedge)$ التابع للشبكة $(A,\leq)$
- هل هذه الشبكة توزيعية؟ علل إجابتك؟

9. في النظام الجبر البولياني $(A,\vee,\wedge)$ إختصر ما يلي:

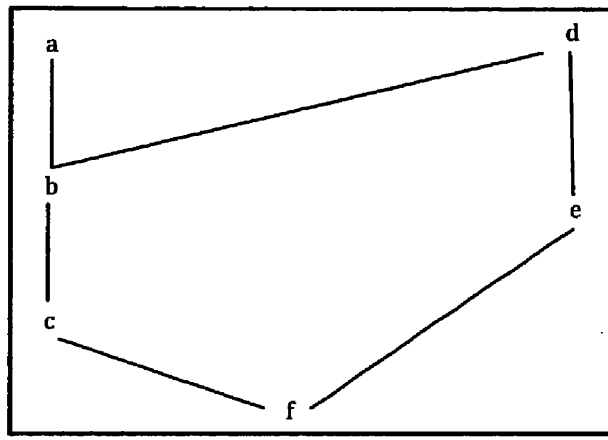
- $a \vee (a' \wedge b)$
- $a \wedge (a' \vee b)$

- $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$
- $(a \wedge b) \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (b \wedge c)$

10. إذا كانت $A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ المجموعة المرتبة $(A,/)$ حيث / هي عملية ترتيب القسمة:

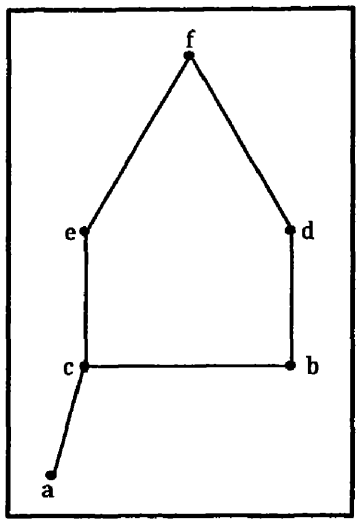
- إرسم المخطط السهمي التابع لها.
- إكتب النظام الجبري $(A,\wedge,\vee)$ التابع لهذه الشبكة.
- إحسب متمم العناصر1, 2, 4, 6, 18, 36.
- هل هذه الشبكة توزيعية؟ علل إجابتك؟

11. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ ومخطط هاس لها هو:



فإذا كانت $B=\{b,c,e,f\}$ فحدد Max B, Min B, Sup B, Inf B

12. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ ومخطط هاس لها هو:



فحدد Max A, Min A, Sup A, Inf A

13. لتكن $A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ بحيث:

- $a+b = l.c.m(a,b)$
- $ab = g.c.m(a,b)$
- $a' = \frac{30}{a}$

فإثبت أن $(A,+,.,\ ',1,30)$ تمثل نظام جبر بولياني.

14. لتكن $A = \{1,2,4,8,16,32\}$ بحيث:

- $a+b = l.c.m(a,b)$
- $ab = g.c.m(a,b)$
- $a' = \frac{32}{a}$

فإثبت أن $(A,+,.,\ ',1,32)$ لا تمثل نظام جبر بولياني.

15. إكتب الدالة $f(x,y,z)$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان:

- $f(x,y,z) = xy + (x+y)'z$

- $f(x,y,z) = xy(x' + z)'$
- $f(x,y,z) = (x + y + z)(xyz)$
- $f(x,y,z) = (x + y)'(x + z)$
- $f(x,y,z) = yz + xz$

16. إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

- $F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz + xy\bar{z}$
- $f(x,y) = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
- $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$
- $f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$
- $f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- $f(x,y,z,w) = xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$
- $f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = xyz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w$

17. إكتب الدالة $f(x,y,z,w) = x\bar{z} + \bar{y}w$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان.

18. إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

INPUT			OUTPUT
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

19. إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

20. بإستخدام خرائط كارنوف صمم دائرة منطقية لجدول الحقيقة التالي:

.1

INPUT			OUTPUT
X	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

INPUT			OUTPUT
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

.2

INPUT				OUTPUT
x	y	z	W	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	0

21. بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

- $f(x,y) = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
- $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$
- $f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$
- $f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- $f(x,y,z,w) = xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$
- $f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w}$

- $f(x, y, z, w) = x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w}$
- $f(x, y, z, w) = xyz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$
- $f(x, y, z, w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w$
- $f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$
- $f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$
- $f(x, y, z, w) = xyzw + xwz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$

22. اكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثـم بإستخدام خريطـة كارنوف بسط الدالة البولينية:

INPUT			OUTPUT
x	y	z	
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

23. اكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثـم بإستخدام خريطـة كارنوف بسط الدالة البولينية:

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

INPUT				OUTPUT
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

24. إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البولينية:

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

الفصل السابع

طرق العد
Counting Methods

(7-1) مبادئ العد

(7-2) التباديل

(7-3) التوافيق

(7-4) نظرية ذات الحدين

(7-5) مبدأ برج الحمام

تمارين

الفصل السابع

طرق العد

(7-1) مبادئ العد

في العادة نستخدم طرق العد لإيجاد عدد مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصر هذه المجموعة كما أن طرق العد تساعدنا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء عملية ما وبالتالي في هذا الجزء سوف نقدم قاعدتين أساسيتين للعد هما قاعدة الضرب و قاعدة الجمع وسوف نوضح كيف يمكن إستخدام هاتين القاعدتين في حل المسائل المختلفة.

(7-1-1) قاعدة الضرب The Product Rule

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونه من عدد k من العمليات الجزئية بحيث:

العملية الأولى يمكن أن تحدث بعدد يساوي n_1 طريقة مختلفة

والعملية الثانية يمكن أن تحدث بعدد n_2 طريقة مختلفة

والعملية الثالثة يمكن أن تحدث بعدد n_3 طريقة مختلفة

وهكذا حتى العملية الأخيرة k يمكن أن تحدث بعدد n_k طريقة مختلفة

فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء هذه العمليات معا هو حاصل الضرب:

$$n = n_1 . n_2 . n_3 \dots n_k$$

ملاحظة: يمكن كتابة قاعدة الضرب بإستخدام المجموعات كما يلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_m$ مجموعات منتهية فإن عدد عناصر الضرب الكرتيزي لهذه المجموعات هو حاصل ضرب عدد عناصر كل مجموعة بمعنى أن:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = |A_1| . |A_2| \dots |A_m|$$

مثال: مطعم يقدم 4 أصناف من اللحم و 3 أصناف من السلطة و 5 أصناف من الحلوى فكم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن تقدم في هذا المطعم بحيث تحتوي الوجبة على لحم وسلطة وحلوى.

الحل:

عدد طرق إختيار صنف لحم = 4

عدد طرق إختيار صنف سلطة = 3

عدد طرق إختيار صنف حلوى = 5

إذن عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن تقدم = 4×3×5 = 60 وجبة

مثال: أضاع شخص مسافر الرقم السري لفتح حقيبته والمؤلف من ثلاث أرقام فما هو عدد المحاولات الممكنة لفتح الحقيبة مع العلم أن كل رقم من الأرقام الثلاثة هو بين 0,1, ... ,10

الحل:

عدد طرق إختيار الرقم الأول = 10

عدد طرق إختيار الرقم الثاني = 10

عدد طرق إختيار الرقم الثالث = 10

إذن عدد المحاولات الممكنة لفتح الحقيبة = 10×10× 10= 1000 محاولة

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاث مقررات الأول في اللغات والثاني في الرياضيات والثالث في الحاسوب علماً بأنه يوجد 3 مقررات مختلفة في اللغات و 4 في الرياضيات و 2 في الحاسوب.

الحل:

أولاً : عدد طرق إختيار مقرر اللغات = 3

ثانياً : عدد طرق إختيار مقرر الرياضيات = 4

ثالثاً : عدد طرق إختيار مقرر الحاسوب = 2

وبالتالي عدد طرق إختيار ثلاث مقررات الأول في اللغات والثاني في الرياضيات والثالث في الحاسوب = (2)(4)(3) = 24

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين من بين الأرقام 3,4,5 بحيث:

1. يسمح بتكرار العدد
2. لا يسمح بتكرار العدد

الحل:

أولاً: في حالة السماح بتكرار العدد:

نعلم أن العدد الذي يتكون من عددين به منزلتين الأحاد والعشرات وبالتالي

عدد طرق إختيار المنزلة الأولى (الأحاد) = 3

عدد طرق إختيار المنزلة الثانية (العشرات) = 3

إذن عدد طرق إختيار العدد = 3×3= 9

ثانياً: في حالة عدم السماح بتكرار العدد:

عدد طرق إختيار المنزلة الأولى (الأحاد) = 3

عدد طرق إختيار المنزلة الثانية (العشرات) = 2

إذن عدد طرق إختيار العدد = 3×2= 6

(7-1-2) قاعدة الجمع The Sum Rule

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونه من عدد k من العمليات الجزئية المتنافية بحيث:

العملية الأولى يمكن أن تحدث بعدد يساوي n_1 طريقة مختلفة.

والعملية الثانية يمكن أن تحدث بعدد n_2 طريقة مختلفة.

والعملية الثالثة يمكن أن تحدث بعدد n_3 طريقة مختلفة.

وهكذا حتى العملية الأخيرة k يمكن أن تحدث بعدد n_k طريقة مختلفة.

فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات المتنافية يساوي:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_k$$

ملاحظات:

1. في قاعدة الجمع تكون العمليات متنافية أي أن إجراء إحدى العمليات ينفي (أو يمنع) إجراء العمليات الأخرى.
2. يمكن كتابة قاعدة الجمع بإستخدام المجموعات كما يلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مجموعات منتهية بحيث $A_i \cap A_j = \varphi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$

نظرية (7-1-3) : إذا كانت A, B مجموعتان منتهيتان فإن:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

البرهان:

بما أن $A \cup B = A \cup (B - A)$ و $A \cap (B - A) = \varphi$

فإن $|A \cup B| = |A| + |B - A|$ ..... (1)

وبما أن $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ و $(A \cap B) \cap (B - A) = \varphi$

فإن $|B| = |A \cap B| + |B - A|$ ..... (2)

من (1) و (2) نحصل على:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

نتيجة (7.1.4) : إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات منتهية فإن:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

البرهان:

من النظرية السابقة (7.1.3) فإن:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$
$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$
$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|)$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

مثال: كان لدينا في أحد الكليات 53 طالب بحيث يكون 33 طالب يدرسون مادة الحاسوب و 19 طالب يدرسون رياضيات و 27 طالب يدرسون إنجليزي بينما 10 طلاب يدرسون حاسوب ورياضيات بينما 9 طلاب يدرسون رياضيات وإنجليزي بينما 17 طالب يدرسون حاسوب وإنجليزي بينما 40 طالب يدرس كلا منهم على الأقل أحد المواد الثلاث الحاسوب أو الرياضيات أو الإنجليزي فاحسب:

1. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات والإنجليزي

2. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات فقط؟

3. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والإنجليزي فقط؟

4. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب فقط؟

الحل:

أولاً: عدد الطلاب الذين يدرسون حاسوب و رياضيات و إنجليزي:

$$|C \cup M \cup E| = |C| + |M| + |E| - |C \cap M| - |C \cap E| - |M \cap E| + |C \cap M \cap E|$$

إذن:

$$50 = 33 + 19 + 27 - 10 - 9 - 17 + |C \cap M \cap E|$$

إذن:

$$|C \cap M \cap E| = 3$$

ثانياً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات فقط:

10-3=7

ثالثاً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والإنجليزي فقط:

17-3=14

رابعاً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب فقط:

33-(3+7+14)=9

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرر واحد فقط من اللغات أو الرياضيات أو الحاسوب علما بأنه يوجد 3 مقررات مختلفة في اللغات و 4 في الرياضيات و 2 في الحاسوب.

الحل:

أولاً : عدد طرق إختيار مقرر اللغات = 3

ثانياً : عدد طرق إختيار مقرر الرياضيات = 4

ثالثاً: عدد طرق إختيار مقرر الحاسوب = 2

وبالتالي عدد طرق إختيار مقرر واحد فقط من اللغات أو الرياضيات أو الحاسوب =3+4+2= 9

(7-2) التباديل (Permutation)

إن تبديل عدد من الأشياء يعني تنظيم هذه الاشياء في ترتيب محدد وبالتالي فالتبديلية هي ترتيبه لعدة أشياء نأخذها كلها أو بعض منها مع مراعاة الترتيب فعدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصر مأخوذ منها عدد r يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n عنصر بحيث تحوي كل ترتيبه على r عنصر مع مراعاة الترتيب.

مثال: إذا كان لدينا الأرقام 3, 2, 1 فإنه يمكن تنظيم هذه الأعداد على هيئة:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

أي أن هناك 6 تباديل للأرقام 3, 2, 1 وهذا العدد من التباديل يمكن الحصول علية من قاعدة الضرب (7-1-1) كما يلي:

المكان الأول يمكن شغلة بعدد 3 طرق.

المكان الثاني يمكن شغلة بعدد 2 طريقة.

المكان الثالث يمكن شغلة بعدد 1 طريقة.

إذن عدد التباديل = 3×2×1 = 6

تعريف (7.2.1): عدد تباديل n عنصر مأخوذه كلها معاً هو n! ويسمى مضروب n حيث أن:

$$n! = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$$

والرمز ! يسمى مضروب factorial

ملاحظات:

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2.1$

$3! = 3.2.1 = 3.2!$

$n! = n\,(n-1)!$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب عشرة اشخاص

الحل:

عدد طرق الترتيب = $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب الأحرف الثلاثة a, b, c

الحل:

عدد طرق الترتيب = $3! = 1.2.3 = 6$

وهي:

(a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)

مثال: ما هو عدد الأعداد الممكن تشكيلها من الأرقام 1, 2, 3, 4 دون تكرار ثم اكتب هذه الأرقام

الحل:

عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها = $4! = 1.2.3.4 = 24$

وهي:

(1, 4, 3, 2), (1,4 ,2, 3), (1, 3, 4, 2), (1,3 ,2, 4), (1,2, 4, 3), (1, 2, 3, 4)

(2,4 ,3, 1), (2, 4,1, 3), (2,3, 4, 1), (2,3,1, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)

(3,4 ,2 ,1), (3,4 ,1 ,2), (3,2 ,4 ,1), (3,2 ,1 4,), (3,1 ,4,2), (3,1 ,2 ,4)

(4,3 ,2 ,1), (4;3 ,1 ,2), (4, 2,3 ,1), (4,2 ,1 ,3), (4,1 ,3,2), (4,1 ,2 ,3)

ملاحظة:

عندما يسمح بتكرار العناصر دون أي قيود على عدد التكرارات فإنه يمكن أن نختار العنصر الأول ب n طريقة.

ونختار العنصر الثاني ب n طريقة.

ونختار العنصر الثالث ب n طريقة.

وبالتالي يكون عدد الاختيارات (التباديل) هو:

$n^n = n.n.n \ldots . n$

مثال: ما هو عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها من الأرقام 1,2,3 مع التكرار ثم إكتب هذه الأرقام

الحل:

عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها = $3^3 = 27$

وهي:

(1, 1,1), (1,1 ,2), (1, 1, 3), (1,2 ,3), (1,3,2), (1,2 ,2), (1,3 ,3), (1,2 ,1), (1,3 ,1)

(2,2 ,2), (2, 2,1), (2,2 , 3), (2,1 ,3), (2,3,1), (2,1 ,1), (2,3 ,3), (2,1 ,2), (2,3 , 2)

(3, 3,3), (3,3 ,1), (3, 1,3), (3,1 ,2), (3,2,1), (3,2 ,3), (3,3 ,2), (3,1 ,1), (3,2 ,2)

تعريف (7.2.1): إذا أردنا ترتيب r عنصر مأخوذه كلها معا من بين n عنصر بحيث $r \leq n$ فإن عدد تباديل r عنصر من بين n عنصر مأخوذه كلها معا مع الأخذ في الاعتبار الترتيب هو:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاث كتب على رف مأخوذة من بين 7 كتب مختلفة.

الحل:

عدد طرق الترتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 7, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^7 = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = 7.6.5 = 210$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لوضع ستة أشخاص في أربع غرف متجاورة.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 6, r = 4$ نحصل على:

$$P_4^6 = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.1} = 6.5.4.3 = 360$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 5$ نحصل على:

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = \frac{5.4.3.2.1}{1} = 120$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ عنصرين من المجموعة a, b, c, d دون تكرار ثم اكتب هذه الإمكانيات.

الحل:

عدد التراتيب بدون تكرار = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

وهي:

(a, b), (b, a), (c, a), (d, a)

(a, c), (b, c), (c, b), (d, b)

(a, d), (b, d), (c, d), (d, c)

ملاحظة: السحب مع الإرجاع : إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n عنصر مختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بإرجاع (أي أن العنصر المسحوب يعاد مرة ثانية قبل سحب العنصر التالي) فإنه يمكن أن نختار العنصر الأول ب n طريقة و نختار العنصر الثاني ب n طريقة و نختار العنصر الثالث ب n طريقة وهكذا ....

فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب تساوي:

$$B_r^n = \underbrace{n.n...n}_{r-times} = n^r$$

مثال: بكم طريقة يمكن سحب كرتين من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة.

أولاً: بإرجاع.

ثانياً : بدون إرجاع.

الحل:

أولاً: السحب بإرجاع: n=15 و r=2 وبالتالي عدد طرق سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$B_r^n = \underbrace{n.n...n}_{r-times} = n^r = 15^2 = 225$$

ثانياً: السحب بدون إرجاع: n=15 و r=2 وبالتالي عدد طرق سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{15!}{13!} = (15)(14) = 210$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ عنصرين من المجموعة a, b, c, d مع التكرار ثم اكتب هذه الامكانيات.

الحل:

عدد التراتيب مع التكرار $= B_r^n = \underbrace{n.n...n}_{r-times} = n^r$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$B_2^4 = 4^2 = 16$$

وهي:

(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)

(a, b), (b, a), (c, a), (d, a)

(a, c), (b, c), (c, b), (d, b)

(a, d), (b, d), (c, d), (d, c)

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ 3 عناصر من المجموعة 0, 1, 2, ..., 9

1. دون تكرار.
2. مع التكرار.

الحل:

أولاً: عدد الترتيب بدون تكرار = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = 10.9.8 = 720$$

ثانياً: عدد التراتيب مع التكرار = $B_r^n = \underbrace{n.n...n}_{r-times} = n^r$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 3$ نحصل على:

$$B_3^{10} = 10^3 = 1000$$

(7-3) التوافيق (Combination)

إن قاعدة حساب عدد التباديل تمكننا من إيجاد عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب العناصر في صف مرتب أي حسب إختيارها أو ظهورها ولكن في بعض الأحيان قد تتطلب المسألة إختيار العناصر دون الأخذ في الإعتبار ترتيب الإختيار (الظهور) وذلك لأن تغيير الترتيب في هذه الحالات لا ينتج عنه ظهور عنصر جديد.

فمثلا إختيار لجنه مكونه من شخصين من بين ثلاثة أشخاص فإن عدد التباديل (عدد الاختيارات) هو $P_2^3 = \frac{3!}{1!} = \frac{3.2.1}{1} = 6$

فإذا رمزنا للعضو الأول بالرمز a ورمزنا للعضو الثاني بالرمز b ورمزنا للعضو الثالث بالرمز c فإن 6 تباديل السابقة هي:

(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)

ولكن اللجنة التي تحوي العضو الأول والثاني هي (a, b) = (b, a)

و اللجنة التي تحوي العضو الأول والثالث هي (a, c) = (c, a)

و اللجنة التي تحوي العضو الثالث والثاني هي (c, b) = (b, c)

إذن الحل الصحيح لعدد الإختيارات هو 3 وليس 6 وهذه الإختيارات تسمى توافيق.

تعريف (7.3.1): التوافيق هي إختيار العناصر بدون الأخذ في الإعتبار الترتيب الذي نختار به وبالتالي يكون عدد الطرق التي يمكن بها إختيار r عنصر من بين n عنصر بدون الأخذ في الإعتبار الترتيب هي عدد التوافيق ل n من العناصر مأخوذه r عنصر منها ويرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ أو C_r^n وتساوي

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال: ما هو عدد الطرق التي يمكن بها إختيار بعثة مكونة من 3 رجال وإمرتين من بين 6 رجال و5 نساء.

الحل:

عدد طرق إختيار الرجال في البعثة هو: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$

عدد طرق إختيار النساء في البعثة هو $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{6!}{2!\,3!} = 10$

إذن عدد طرق إختيار البعثة هو $20 \times 10 = 200$ طريقة.

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لوضع ستة أشخاص في أربع غرف متجاورة.

الحل:

عدد الطرق $= \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 6, r = 4$ نحصل على:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{(4.3.2.1)(2.1)} = 15$$

ملاحظة: إن عدد التوافيق ل n عنصر والتي يمكن أن نأخذ منها r عنصر مع إمكانية التكرار هي:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن إختيار لجنه من عنصرين من بين المجموعة {a, b, c, d} بحيث يكون

1. دون تكرار.
2. مع التكرار.

الحل:

أولاً: عدد التوافيق بدون تكرار = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4.3.2.1}{(2.1)(2.1)} = 6$$

وهي:

(a, b), (a, c), (a, d)

(b, c), (b, d), (c, d)

ثانياً: عدد التوافيق مع التكرار = $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\ 3!} = \frac{5.4.3.2.1}{(2.1)(3.2.1)} = 10$$

وهي:

(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)

(a, b), (a, c), (a, d)

(b, c), (b, d), (c, d)

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنه مؤلفه من ثلاث طلاب من بين 30 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 30, r = 3$ نحصل على:

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!\ 27!} = 4060$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنه مؤلفه من رئيس ونائب للرئيس وأمين السر من بين 30 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 30, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^{30} = \frac{30!}{27!} = 24360$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار 5 طلاب من بين 10 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 5$ نحصل على:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\ 5!} = 252$$

مثال: بكم طريقة يمكن إختيار 5 طلاب من بين 10 لترتيبهم على خمس مقاعد دراسية.

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 5$ نحصل على:

$$P_5^{10} = \frac{10!}{5!} = 30240$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار 3 أرقام من المجموعة {2, 3, 4, 5, 6} دون تكرار.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

مثال: ما هو عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات (أرقام) الممكن تكوينها من المجموعة {2, 3, 4, 5, 6} بدون تكرار .

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^5 = \frac{5!}{2!} = 20$$

ملاحظة: التباديل داخل أشياء متشابهة أو متساوية:

إذا كان لدينا n عنصر مكونة من r مجموعة بحيث تكون المجموعة الأولى تحتوي على n_1 عنصر متشابهة و المجموعة الثانية تحتوي على n_2 عنصر متشابهة وهكذا حتى المجموعة رقم r تحتوي على n_r عنصر متشابهة وبحيث يكون:

$$n_1 + n_2 + .. + n_r = n$$

فإن عدد التبديل المختلفة يساوي:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \dots\ n_r!}$$

كما يمكن النظر إلى العدد $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$ على إنه يساوي عدد طرق تقسيم مجموعة مكونه من n عنصر مختلف على r مجموعة بحيث تكون المجموعة الأولى تحتوي على n_1 عنصر متشابهة و المجموعة الثانية تحتوي على n_2 عنصر متشابهة وهكذا حتى المجموعة رقم r تحتوي على n_r عنصر متشابهة وبحيث يكون:

$$n_1 + n_2 + .. + n_r = n$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة PROBABILITY؟

الحل:

لدينا الحروف التالية: P-R-O-B-B-A-I-I-L-T-Y

إذن عدد طرق ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY يساوي:

$$\binom{11}{1,1,1,2,1,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!\ 2!} = 9979200$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة STATISTICS؟

الحل:

لدينا الحروف التالية: S-S-S-T-T-T-A-I-I-C

إذن عدد طرق ترتيب أحرف كلمة STATISTICS يساوي:

$$\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!} = 50400$$

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب بحيث يكون 4 طلاب رياضيات و 3 طلاب فيزياء وطالب واحد حاسوب.

الحل:

عدد الطرق لتوزيع الطلاب بحيث يكون 4 طلاب رياضيات و 3 طلاب فيزياء وطالب واحد حاسوب يساوي

$$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280$$

(7-4) نظرية ذات الحدين (Binomial theorem)

في هذا الجزء سوف ندرس نظرية ذات الحدين وبعض تطبيقاتها المهمة:

نظرية ذات الحدين (1-4-7): إذا كانت x, y متغيرين وكان $n \geq 1$ عددا صحيحا فإن:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

البرهان:

بإستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

نفرض أن p(n) هي العبارة:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

أولاً: p(1) صحيحة لأن:

$$L.H.S. = x + y$$

$$R.H.S. = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة p(n) صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n+1$ ولعمل ذلك نأخذ:

$$p(n+1) = (x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = (x+y)^n x + (x+y)^n y$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

ولكن:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k$$

وأيضاً:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

إذن:

$$p(n+1) = (x+y)^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

ولكن:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

إذن:

$$p(n+1) = (x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

إذن العبارة صحيحة في حالة $n+1$

مثال:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

مثال:

$$(1-x)^5 = 1 - \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 - \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 - x^5$$

$$= 1 - \frac{5!}{1!.4!}x + \frac{5!}{2!.3!}x^2 - \frac{5!}{3!.2!}x^3 + \frac{5!}{4!.1!}x^4 - x^5$$

$$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$$

مبرهنه (7.4.2) : إن مجموع معاملات مفكوك ذات الحدين يساوي 2^n

البرهان:

$$2^2 = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

مبرهنه (7.4.3) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

البرهان:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

مبرهنه (7.4.4) :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

البرهان:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n!} = \binom{n}{k}$$

مبرهنه (7.4.5) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

البرهان:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-k)\,(n-1)! + k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{[\,(n-k)+k\,](n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

مبرهنه (7.4.6) :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$

حيث $0 < k \le n$

البرهان:

من المبرهنة السابقة نجد أن:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1}$$

بالاستمرار بهذا الأسلوب فإن:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$$

ولكن:

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} = 1$$

إذن:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$$

ملاحظة:

العلاقة $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ تمكنا من معرفة معاملات ذات الحدين المرفوع إلى القوى n وذلك إذا علمت معاملات مفكوك ذات الحدين المرفوع إلى القوى $n-1$ ويتم ذلك من خلال جدول يسمى مثلث بسكال حيث نضع في كل سطر معاملات المفكوك إلى قوى معينه و نستنتج مفكوك ذات الحدين للقوى التالية وذلك كما يظهر في الجدول التالي حيث نحصل على كل معامل عن طريق جمع المعاملين السابقين في السطر السابق الذي فوقه مع المعامل الواقع على يساره كما يلي:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$
0	1							
1	1 →	1 ↓						
2	1	2	1					
3	1	3 →	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15→	20 ↓	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

مثال: بإستخدام ذات الحدين احسب قيمة 1.05^4 .

الحل:

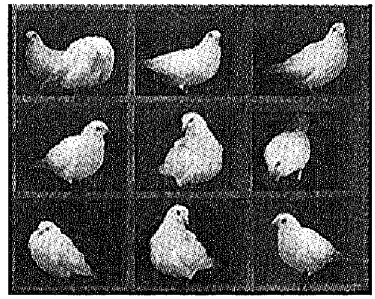
$$1.05^4 = (1+0.05)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k 0.05^{4-k}$$

$$= 1 + (4)(0.05) + (6)(0.05)^2 + (4)(0.05)^3 + (0.05)^4$$

$$= 1 + 0.2 + 0.015 + 0.0005 + 0.00000625 = 1.211550625$$

(7-5) مبدأ برج الحمام Pigeonhole Principle

إذا كان لدينا 10 حمامات ونريد وضعهم في برج حمام يتكون من 9 عيون فقط فمن الواضح أن عدد الحمام أكبر من عدد الأماكن المخصصة لوضع الحمام وبالتالي فمن المؤكد أن هناك عين واحدة على الأقل من عيون البرج سوف تحتوي على أكثر من حمامة وهذا المثال يشرح ببساطة مبدأ برج الحمام والذي سوف ندرسه بشكل عام في هذا الجزء مع بعض تطبيقاته.



نظرية (7.5.1) مبدأ برج الحمام

إذا وضعنا عدد m حمامة في برج حمام يتكون من n عين وكان $n<m$ فإنه يوجد عين واحدة على الأقل من عيون البرج تحتوي على أكثر من حمامة واحدة.

البرهان:

نفرض جدلاً أن كل عين في برج الحمام تحتوي على حمامة على الأكثر وبالتالي يجب أن يكون عدد الحمام على الأكثر هو n وهذا يناقض كون عدد الحمام m هو أكبر تماما من n.

ملاحظات:

1. مبدأ برج الحمام يسمى أيضاً مبدأ ديرشلت Dirichlet principle نسبة إلى العالم الألماني G. Lejeune Dirichlet
2. بعض الرياضيون يعرفون مبدأ برج الحمام كما يلي: إذا كان لدينا n+1 شيء ونريد وضعها في n موضع فإن أحد المواضع يحتوي على الأقل على شئين أو أكثر من الأشياء.

مبرهنة (7.5.2)

إذا كانت الدالة f من مجموعة X إلى مجموعة Y وكانت $|Y| < |X|$ فإن الدالة f ليست دالة أحادية.

البرهان:

نفرض أن:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},\quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\},\quad y = f(x),\quad m > n$$

بما أن $m > n$ فمن مبدأ برج الحمام يوجد أكثر من متغير x يكون لهم نفس المتغير التابع y ومعنى ذلك أن:

$$f(x_i) = f(x_j) = y, \qquad x_i \neq x_j$$

إذن الدالة f ليست دالة أحادية.

مثال: إذا كان لدينا 367 شخص وبما أن السنه تحتوي على 365 أو 366 يوم وبتطبيق مبدأ برج الحمام فإننا نجد أنه يوجد أكثر من شخص واحد على الأقل من بين 367 سوف يكون لهم نفس تاريخ الميلاد.

مثال: إذا كتبنا 27 كلمة إنجليزي وبما أن عدد حروف الهجاء الإنجليزي هي 26 حرف فبتطبيق مبدأ برج الحمام فإننا نجد أنه يوجد كلمتين على الأقل من بين 27 يكونا مشتركين في نفس حرف البداية.

مثال: إذا كان لدينا 101 طالب دخلو امتحان من 100 درجة فبتطبيق مبدأ برج الحمام فمن المؤكد وجود أكثر من طالب يكونا مشتركين في نفس المحصلة من الامتحان.

مثال: إذا كان لدينا صندوق فيه جوارب بلونين فبتطبيق مبدأ برج الحمام فإنه يكفي سحب 3 جوارب حتى نحصل على زوج من الجوارب بنفس اللون.

مثال: إذا كان لدينا كيس يحتوي على 6 كرات حمراء و 8 كرات زرقاء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة لكي نحصل على كرتين من نفس اللون فإذا فرضنا أن الألوان هي عيون البرج =2 والتالي تكون الكرات التي يجب سحبها بحث نحصل على كرتين من نفس اللون هي الحمام وتساوي ثلاث كرات على الأقل.

نظرية (7.5.3) تعميم مبدأ برج الحمام

إذا وزعنا m حمامة على برج حمام يتكون من n عين بحيث $m > kn$ حيث k عدد صحيح موجب فإن عينا واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على الأقل على k+1 حمامة.

البرهان:

نفرض جدلاً إن كل عين تحتوي على الأكثر على k حمامة وبالتالي يكون عدد الحمام أقل أو يساوي kn ومعنى ذلك أن $m \leq kn$ وهذا يناقض الفرض أن $m>kn$ وبالتالي لحل هذا التناقض فإن عيناً واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على الأقل على k+1 حمامة.

ملاحظة: بعض الرياضيون يعرفون مبدأ برج الحمام العام كما يلي" إذا كان لدينا kn+1 شيء ونريد وضعها في n موضع فإن أحد المواضع يحتوي على الأقل على k+1 أو أكثر من الأشياء.

مثال: إذا وزعنا 34 كرة على ثلاث صناديق فأثبت أن أحد الصناديق يحتوي على الأقل على 12 كرة.

الحل:

بما أن (3)(11)< 34 وبتطبيق نظرية (7.5.3) تعميم مبدأ برج الحمام فإنه يوجد صندوق واحد على الأقل يحتوي على الأقل على 12=1+11 كرة.

نظرية (7.5.4)

إذا وضعنا عدد N كرة في k صندوق فإنه يوجد صندوق واحد على الأقل يحتوي على $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ كرة.

البرهان:

نفرض جدلاً أنه لا يوجد أي من الصناديق يحتوي على أكثر من $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ كرة فإن عدد الكرات يكون على الأكثر هو

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{K} + 1\right) - 1\right) = N$$

وهذا يناقض كون عدد الكرات يساوي N وبالتالي لفك هذا التناقض فإن أحد الصناديق يجب أن يحتوي على الأقل على $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ كرة.

ملاحظة: في النظرية السابقة استخدمنا دالة الجزء الصحيح $[x]$ التي تعطي أصغر عدد طبيعي يكون أكبر أو يساوي x وهي تحقق $[x] < x + 1$.

مثال: من بين 100 شخص يوجد على الأقل $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = [8.33] = 9$ يكونو مولودون في نفس الشهر.

ملاحظة: لحساب أقل عدد N من الكرات التي تتوزع على K صندوق بحيث يكون على الأقل r كرة في أحد الصناديق؟

فمن نظرية (7.5.4) لكي يوجد على الأقل r كرة في صندوق واحد من k صندوق فإنه يجب أن يكون $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$ وبالتالي يكون أقل عدد N يحقق $\frac{N}{k} > r - 1$ هو $N = k(r-1) + 1$ وهذا هو أقل عدد يحقق $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$.

مثال: ما هو أقل عدد مطلوب من الطلاب لكي يكون من المؤكد أن 6 منهم سوف يحصلوا على نفس التقدير في امتحان الرياضيات علماً بأنه يوجد 5 تقديرات وهم A, B, C, D, F .

الحل:

نأخذ k=5 و r=6 وبالتالي أقل عدد من الطلاب بحيث يكون على الأقل 6 منهم يحصلوا نفس التقدير هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil \geq 6$

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 5(5)+1 = 26$

مثال: حقيبة بها كرات بيضاء وحمراء وسوداء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 9 كرات من نفس اللون.

الحل:

نأخذ k=3 و r=9 وبالتالي أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 9 كرات من نفس اللون هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil \geq 9$

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 3(8)+1 = 25$

مثال: كيس يحتوي على 6 أقلام زرقاء و 8 أقلام حمراء و 11 قلم أسود فما هو أقل عدد من الأقلام يجب سحبة حتى نحصل على 5 أقلام على الأقل من نفس اللون.

الحل:

نأخذ k=3 و r=5 وبالتالي أقل عدد من الأقلام يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 5 اقلام من نفس اللون هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil \geq 5$.

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 3(4)+1 = 13$

تمارين

1. شخص يرغب في أكل وجبة سريعة تحتوي على لحم وحلويات ومشروب غازي وفي المطعم وجد 10 أنواع من اللحوم و 6 أنواع من الحلويات و 7 أنواع من المشروبات الغازية فما هو عدد الاختيارات الممكنة لذلك.
2. ما هو عدد التباديل الممكنة للأحرف a, b, c, d, e بدون تكرار ثم مع التكرار وإكتبها في كل حالة.
3. ما هو عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث أرقام والممكن تشكيلها من الأرقام 1, 2, 3 في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار ثم إكتب هذه التراتيب.
4. احسب عدد الكلمات التي يمكن كتابتها من ثلاث أحرف من المجموعة {c, e, m, n, k} في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار ثم إكتب هذه الكلمات بغض النظر عن معانيها.
5. يحوي صف 18 طالب نصفهم ذكور والنصف الأخر إناث والمطلوب إيجاد:
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف.
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف بحيث تضم ثلاث ذكور.
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف بحيث تضم ثلاث ذكور على الأقل.
6. أوجد عدد التباديل الممكنة للعناصر a, a, a, b, b ثم أوجدها.
7. أوجد عدد التراتيب المؤلفة من ثلاث أرقام والمأخوذة من مجموعة الأرقام {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار.
8. ما هو عدد الطرق التي يمكن بها إختيار لجنه مؤلفة من خمس طلاب من بين 20 طالب.
9. يتألف مجلس من 9 أعضاء بينهم 3 إناث والمطلوب:
   - ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن يجتمع المجلس بالحد الادنى للنصاب القانوني والبالغ 5 أعضاء.
   - ما هو عدد الطرق التي يمكن أن يجتمع بها المجلس بالنصاب القانوني على الأقل بحيث تحضر أنثى واحدة على الاقل.
10. أوجد مفكوك $(x-3)^6$

11. أوجد معامل الحد x^3y^5 في المفكوك $(x+y)^8$
12. أوجد قيمة 0.95^5 وذلك بإستخدام ذات الحدين.
13. أوجد الحدين الخامس والسادس في المفكوك $(2x-3)^9$
14. أوجد الحد رقم 11 في مفكوك $(x+\frac{1}{x})^{14}$
15. كم عدد ممكن أن يتكون من 5 أرقام مختلفة أخذت من المجموعة $\{1,4,5,7,8,9\}$
16. بكم طريقة يمكن إختيار طبق يتكون من 5 تفاحات و 4 برتقالات و 3 رمانات مأخوذة من صندوق يتكون من 10 تفاحات و 9 برتقالات و 7 رمانات.
17. بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة "زمهرير".
18. بكم طريقة يمكن وضع 6 صحون متشابهة و 4 فناجين متشابهة و 12 ملعقة متشابهة على رف معين.
19. كم عدد الأوجه التي يمكن أن نحصل عليها لو قذفنا قطعة نقود معدنية 10 مرات
20. كم عدد متكون من 5 خانات أخذت أرقامه ضمن الأعداد $\{1,2,3,4\}$
21. تقدم 55 طالب لامتحان من 50 درجة فأثبت أنه يوجد على الأقل 5 طلاب يكون لهم نفس النتيجة.
22. ولد 97 طفل في أحد الأيام في أحد المدن فأثبت أن 5 من الأطفال على الأقل قد ولدو في نفس الساعة.
23. يحتوي صندوق على 40 كرة وكان هذا الصندوق يحتوي على كرات حمراء وزرقاء وبيضاء فأثبت أن الصندوق يحتوي على الأقل على 14 كرة من الكرات الحمراء.
24. كم أقل عدد يجب سحبة من مجموعة كرات مكونه من 3 كرات زرقاء و 5 بيضاء و 8 حمراء و 12 سوداء حتى نحصل على الأقل على 6 كرات من نفس اللون.
25. حقيبة بها كرات بيضاء وحمراء وسوداء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 8 كرات من نفس اللون.